



HAL
open science

Numération dynamique réelle, nombres de Parry et construction de nombres normaux

Renan Laureti

► **To cite this version:**

Renan Laureti. Numération dynamique réelle, nombres de Parry et construction de nombres normaux. Mathématiques [math]. Université de Lorraine, 2025. Français. ⟨NNT : 2025LORR0056⟩. ⟨tel-05183336⟩

HAL Id: tel-05183336

<https://hal.science/tel-05183336v1>

Submitted on 23 Jul 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Numération dynamique réelle, nombres de Parry et construction de nombres normaux

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 19 mai 2025

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine
(Mathématiques)

par

Renan Laureti

Composition du jury

<i>Président :</i>	Michel RIGO	Professeur, Université de Liège
<i>Rapporteurs :</i>	Verónica BECHER Wolfgang STEINER	Professora Titular, Universidad de Buenos Aires Chargé de Recherches, IRIF
<i>Examineur :</i>	Youness LAMZOURI	Professeur, Université de Lorraine
<i>Encadrants :</i>	Yann BUGEAUD Manfred MADRITSCH	Professeur, Université de Strasbourg Maître de conférences, Université de Lorraine

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

À l'heure de conclure cette thèse, qui aura occupé tout un pan de ma vie, il est temps pour moi d'exprimer les remerciements que je dois aux nombreuses personnes qui ont contribué, à leur manière, à son déroulement.

Tout d'abord, je tiens à remercier profondément mes directeurs de thèse, Manfred Madritsch et Yann Bugeaud, pour m'avoir guidé pendant tout ce temps avec patience et bienveillance, pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée et pour toutes les conversations enrichissantes que nous avons eues. Si c'était à refaire, je ne souhaiterais pas d'autres directeurs.

Je remercie l'Agence Nationale de la Recherche pour avoir financé mes trois années de contrat doctoral dans le cadre du projet ANR-18-CE40-0018.

Ensuite, je souhaite exprimer toute ma gratitude aux membres de mon jury de thèse pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'y figurer. Je remercie vivement Verónica Becher et Wolfgang Steiner pour avoir accepté de relire ma thèse et pour les rapports précis qu'ils ont rédigés à son sujet. J'aimerais remercier aussi Wolfgang pour ses nombreuses remarques qui ont permis d'améliorer ma thèse, notamment en ce qui concerne les questions d'ergodicité qui y sont abordées. Je remercie Michel Rigo pour avoir accepté de présider le jury, et pour la confiance qu'il m'a accordée en m'accueillant à Liège pour la dernière partie de ma thèse. Enfin, je remercie Youness Lamzouri pour avoir accepté d'être examinateur et pour l'aide qu'il m'a apporté dans les enseignements que nous avons encadrés ensemble.

Sur le plan mathématique, je souhaite remercier Shigeki Akiyama qui m'a aiguillé vers l'étude des nombres Parry cubiques quand j'examinais les différences entre nombres de Parry et nombres de Pisot, et je remercie également Julien Bernat pour m'avoir parlé des nombres de Delone.

Je remercie chaleureusement Cécile Dartyge et Thomas Stoll pour leur soutien et leurs encouragements, en tant que membres de mon comité de suivi comme en dehors. Je les remercie aussi pour le rôle qu'ils ont joué lorsque je recherchais une thèse.

De même, j'aimerais remercier Carlo Gasbari, Christine Huyghe, Adriano Marmora, Gianluca Pacienza, Matei Toma pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans ma recherche d'un contrat doctoral.

Pendant ces années de thèse, j'ai rencontré beaucoup de personnes, que je n'ai pas forcément vus souvent mais qui ont contribué à me faire sentir chez moi à l'université, et je tiens à les remercier. Je ne pourrai pas tous les citer, et je sais que je vais oublier de mentionner nombre de ceux qui le méritent. Je m'en excuse.

En premier lieu, je remercie tous les membres de l'équipe de Théorie des Nombres de Nancy, c'était un plaisir et un honneur de faire partie de cette équipe à vos côtés. Je remercie également les doctorants de Nancy, en particulier Youssef, Pierre, Paul, Pierre-Adrien, Hichem, Nathan et Séréna aux côtés de qui j'ai eu l'occasion de partir en conférence. Je remercie aussi les membres du département de mathématiques de l'université de Liège pour leur accueil chaleureux pour la dernière partie de cette thèse, avec une pensée particulière pour celles et ceux aux côtés de qui j'ai enseigné, à Nancy comme à Liège.

Je remercie également Paola, Élodie et tous les membres du personnel administratif de l'IECL, de l'école doctorale et de l'université de Lorraine à qui j'ai eu affaire pour leur aide dans mes démarches, leur bienveillance et leur patience à mon égard. Je ne leur ai bien souvent pas rendu la vie facile.

Mes remerciements à Yohann pour son amitié et son soutien sans faille dans les coups durs.

Pour conclure sur la partie mathématique, je tiens à remercier l'ensemble de celles et ceux qui m'ont enseigné les mathématiques, contribuant chacun de manière unique au parcours que j'ai suivi. J'aimerais citer en particulier Christian Janiaud, Hervé Devie, Gérard Debeaumarché et Henri Carayol qui ont tous eu un impact majeur sur mon apprentissage.

Enfin, les personnes ayant eu un impact sur cette thèse ne se cantonnent pas au domaine des mathématiques, et les distractions que j'ai été chercher dans un bout de plastique rebondissant sur du bois, dans du métal porté par les ondes sonores et au-delà, m'ont aidé à tenir le cap, surtout suite à l'isolement de la pandémie.

J'aimerais remercier à ce titre tous ceux que j'ai côtoyé au tennis de table, notamment mes camarades des différents clubs que j'ai fréquentés durant cette thèse. Je remercie aussi Aurélien, Raffaele, Frederic et toute la bande de Rethel, ainsi qu'Alexandre, Florent, Gerome et toute la bande de Strasbourg.

Mes remerciements sincères à Nolwenn, mon ami de toujours, en espérant te revoir bientôt.

Enfin, pour finir, je souhaite remercier de tout coeur ma famille à qui je dois tout : mes parents Michel et Sandrine, ma soeur Maylis, ma tante Tania, et mes grand-parents Yvon et Jocelyne. Leur soutien pendant toutes ces années a été incommensurable dans les hauts comme les bas, et cette thèse n'aurait eu aucune chance de voir le jour sans celui-ci.

À ma famille.

Table des figures

2.1	Graphe de l'application $\{T_{10}\}$	7
2.2	Graphe de l'application T_G tronqué à $x=0.05$	8
2.3	Graphe de T_L tronqué à $0,04$	9
2.4	Graphe de l'application T_{2ps}	11
2.5	Graphe de l'application T_{2ppn}	11
2.6	Graphe de l'application T_{2ppr}	12
2.7	Graphe de l'application T_{2ppm}	13
2.8	Graphe de T_{2r}	13
2.9	Graphe de T_{5r}	14
2.10	Graphe de l'application T_{Lns}	14
2.11	Graphe de T_{Sf}	15
2.12	Graphe de T_{Sfs}	16
2.13	Graphe de T_{Sfs}^2	16
2.14	Graphe de T_{x+x^2}	19
2.15	Graphe de $T_{3/2G}$ tronqué à $x = 0.05$	20
2.16	Graphe de $T_{G3/2}$ tronqué à $x = 0.03$	21
2.17	Graphe de $T_{G3/2}^2$	21
2.18	Graphe de T_{id}	22
2.19	$T_{id,0,02}$	23
2.20	Graphe de T_{mod}	23
2.21	Graphe de l'application T_{morc} , avec lignes de constructions et orbites des réels $3/4$ et $5/6$	24
2.22	Graphe de T_{rm} avec traits de construction et orbites de $1/10$ et $1/5$	25
2.23	Graphe de T_{si} tronqué à $x = 0.002$ avec l'orbite de $1/2$	26
2.24	Graphe de T_{dsi} tronqué à $x = 0,002$ faisant apparaître les composantes continues additionnelles	27
2.25	Graphe de \widetilde{T}_{2ml1} , comparé à celui de T_2	29
2.26	Graphe de \widetilde{T}_{2ml2} , comparé à celui de T_2	30
2.27	Graphe de la fonction $T_{2,1}$	32
2.28	Graphe de $T_{5,1}$	34
3.1	Graphe de $T_{5/2}$ avec les cylindres d'ordre 1 mis en évidence	40
3.2	Graphe de $T_{5/2}^2$ avec les cylindres d'ordre 1 de $T_{5/2}$ mis en évidence	40
3.3	Graphe de la fonction $\widetilde{T}_{5/2}$ avec les cylindres d'ordre 1 de $T_{5/2}$ mis en évidence	41
3.4	Graphe de l'application $T_{\alpha_{e4}}$	51
4.1	Graphe de l'application $T_{\alpha_{e4}}^3$. Les cylindres standards sont représentés en noir, ceux associés aux blocs se finissant par 1_1 en rouge, celui associé au bloc se finissant par 1_2 en vert et celui associé au bloc se finissant par 0_3 en jaune.	80

Table des matières

Table des figures	v
1 Introduction	1
1.1 Cas des bases entières, objectifs	1
1.1.1 Écriture en base entière	1
1.1.2 Notion de normalité	2
1.1.3 Algorithmes de constructions de nombres absolument normaux	3
1.2 Notion de système de numération	4
1.3 Plan et objectifs	4
2 Systèmes de numération dynamiques réels	5
2.1 Le point de vue dynamique sur les systèmes de numération	5
2.1.1 Fractions continues et bêta-numération : un premier aperçu	5
2.1.2 Définition dynamique des systèmes de numération	6
2.2 Systèmes de numération dynamiques réels abstraits	9
2.3 Mesures invariantes et normalité	28
2.3.1 Cas des fractions continues, mesures invariantes	28
2.3.2 Quelques exemples de mesures invariantes	29
2.3.3 Normalité et Ergodicité	34
2.4 Développements possibles	37
3 Bêta-numération et nombres de Parry	39
3.1 Nombres de Parry : définition et quelques résultats	39
3.1.1 Systèmes de bêta-numération	39
3.1.2 Les nombres de Parry	42
3.2 Construction d'une famille de nombres de Parry non simples cubiques qui ne sont pas des nombres de Pisot	48
3.3 Extension de la méthode de construction pour des périodes plus longues	53
3.3.1 Nombres de Parry cubiques de longueur 4	53
3.3.2 Nombres de Parry cubiques de longueur 5	58
3.4 Développements possibles	71

4 Construction de nombres normaux	73
4.1 Méthode et prérequis pour les algorithmes	73
4.2 Correction d'un résultat de majoration du nombre de blocs non (ϵ, k) -normaux en bases Pisot	76
4.3 L'algorithme	85
4.4 Contrôle de la propagation de retenues	90
4.5 Extension aux nombres de Delone	91
4.6 Complexité de l'algorithme	92
4.7 Commentaires sur l'algorithme	93
Bibliographie	95

Chapitre 1

Introduction

1.1 Cas des bases entières, objectifs

L'invention de l'écriture, au quatrième millénaire avant notre ère, marque pour les historiens la fin de la Préhistoire et le début de l'Histoire de l'humanité. Si cette délimitation évoque surtout l'écriture des mots dont les traces écrites donnent des bases d'étude pour ces périodes, l'écriture des nombres est tout aussi ancienne. Il est d'ailleurs sans doute plus naturel, et plus essentiel, de se baser sur des traces écrites pour manipuler les nombres qu'il ne l'est pour les mots, et en effet des découvertes archéologiques ont mis en évidence divers objets physiques servant à la manipulation de nombres qui sont bien plus anciens que l'invention de l'écriture. Les civilisations de Summer et d'Égypte, chez lesquelles on a retrouvé les traces d'écriture les plus anciennes, utilisaient déjà le principe prévalent aujourd'hui de bases entières, bien que de manière non positionnelle (c'est-à-dire que par exemple on associait un symbole à chaque puissance de 10 jusqu'à un certain point et on les répétait de 1 à 9 fois, plutôt que de déduire la puissance de 10 associée à un chiffre selon sa position dans une suite). Utilisées au début pour décrire les nombres entiers voire des fractions, leur usage s'est étendu bien plus tard aux écritures décimales, et enfin à celles des nombres réels, grâce notamment à l'invention du zéro par les Indiens et sa diffusion par les Arabes. Ou plus exactement, à l'approximation des nombres réels. En effet, la notion de normalité, au cœur de cette thèse, souligne le paradoxe suivant : nos systèmes d'écritures des nombres réels ne permettent pas d'écrire précisément des nombres réels génériques ! Nous allons tout d'abord introduire le principe de normalité dans le cadre où il a d'abord été créé : celui des bases entières.

1.1.1 Écriture en base entière

La manière la plus utilisée aujourd'hui pour représenter les nombres réels est la décomposition en base entière (notamment la base 10). Formellement, écrire un réel x en base b , avec b un entier au moins égal à 2 consiste en la donnée de la série suivante :

$$x = a_{-\ell}a_{-\ell+1} \dots a_0, a_1a_2a_3 \dots := \sum_{n \geq -\ell} a_n b^{-n},$$

où $\ell = \lfloor \log_b(x) \rfloor$ et les coefficients a_n sont appelés *chiffres*, et sont des entiers compris entre 0 et $b - 1$. Ce procédé permet d'associer à tout réel une écriture unique et distincte, à l'exception de l'identité

$$0, (b-1)(b-1)(b-1) \dots = 1, 000000 \dots$$

Remarque 1.1.1. Dans cette thèse, nous nous intéresserons surtout au développement infini à droite de la virgule, plutôt qu'au développement de la partie entière. Aussi, on notera par la suite les développements plutôt sous la forme $x = a_0, a_1a_2 \dots$ avec a_0 la partie entière de x et a_1, a_2, \dots les chiffres du développement de la partie fractionnaire de x , ou bien plus simplement on se limitera aux réels dans $[0, 1[$, dont les développements sont de la forme $0, a_1a_2a_3 \dots$.

Numération et langages

Nous avons évoqué dans l'introduction l'écriture des mots et celle des nombres de manière séparée, mais en réalité les deux suivent des schémas similaires. Plus formellement, la notion de systèmes de numération est intimement liée à la notion mathématique de langage : ce sont des procédés qui à tout réel associent un mot (infini à droite) sur l'alphabet constitué de l'ensemble des chiffres du système.

Notation. On utilisera les notations suivantes.

- Étant donné deux mots w et w_1 sur un alphabet \mathcal{A} , on appellera w_1 un *préfixe* de w s'il existe un mot w_2 sur \mathcal{A} tel que $w = w_1w_2$.
- On notera la longueur d'un mot w par $\|w\|$.
- On notera \mathcal{L}_n l'ensemble des mots de longueurs n dans un contexte prédéfini.
- Pour un mot w sur un alphabet donné, on notera $m^\infty = mmmm\dots$ le mot périodique infini à droite obtenu en concaténant des copies de w .
- Étant donné un intervalle I , on notera $|I| = \lambda(I)$ sa longueur (soit sa mesure de Lebesgue).
- Étant donné un ensemble fini E , on notera $|E| = \text{Card}(E)$ son cardinal.

1.1.2 Notion de normalité

La notion de normalité, introduite par Borel en 1909 [Bor09], concerne la répartition des chiffres dans les développements des réels en base entière.

Définition 1.1.2. Soient b un entier supérieur ou égal à 2, d un chiffre en base b , n un entier strictement positif et $D = d_1d_2\dots d_n$ un bloc de n chiffres en base b . On appelle *nombre d'apparitions* (ou nombre d'occurrences) du chiffre d dans le bloc D la quantité

$$A_b(d, D) = |\{i | d_i = d\}|,$$

et étant donné un réel x dans $[0, 1[$, on notera $A_b(d, x, n)$ le nombre d'apparitions du chiffre d dans les n premiers chiffres du développement en base b de x .

On appellera *fréquence d'apparition* du chiffre d dans l'écriture en base b de x la limite suivante, si elle existe :

$$F_b(d, x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{A_b(d, x, N)}{N}.$$

Munis de cette définition, nous pouvons maintenant donner celle de la normalité.

Définition 1.1.3. Un réel x est dit *simplement normal* en base b si tous les chiffres de 0 à b apparaissent dans le développement de x avec la même fréquence $1/b$. Un réel x est dit *normal* en base b si pour tout entier positif ℓ , tous les blocs de chiffres de longueur ℓ apparaissent dans le développement de x avec la même fréquence $1/b^\ell$.

Proposition 1.1.4 ([Bug12]). *De manière équivalente, un réel est normal en base b si, et seulement si, il est simplement normal en base b^k pour tout entier strictement positif k .*

En général, établir la normalité d'un nombre donné est une question difficile, et on sait par exemple peu de choses sur les questions de normalité de nombres comme e , $\sqrt{2}$ et π . Le cas des nombres rationnels est cependant facile à traiter.

Exemple 1.1.5. En base 2, le nombre

$$\frac{1}{3} = 0, (01)^\infty$$

est simplement normal. Tous les nombres rationnels ont une écriture ultimement périodique dans n'importe quelle base entière, et donc a fortiori ne sont jamais normaux.

Il est difficile en général d'établir la normalité ou non d'un réel donné dans une base entière, et on ne dispose pas de nombre usuel dont on peut assurer la normalité. Néanmoins, il existe des méthodes de construction de nombres normaux.

Exemple 1.1.6. [Cha33] En base 10, le nombre de Champernowne

$$x_c = 0,12345678910111213\dots$$

obtenu en concaténant les écritures des entiers successifs en base 10 est normal.

Cette construction fonctionne également dans les autres bases entières et peut être généralisée en d'autres constructions (voir [Bug12, Theorem 4.10]) de la forme $0, f(1)f(2)f(3)\dots$ où f est une fonction à valeurs dans l'ensemble des chiffres de la base considérée dont la croissance n'est pas trop rapide : $f(n) < n^{1+\varepsilon}$ pour tout ε strictement positif. Un exemple connu est la construction suivante, due à Erdős et Copeland [CE46].

Exemple 1.1.7. Le nombre

$$x_{ec} = 0,2357111317\dots$$

obtenu en concaténant les écritures des nombres premiers successifs en base 10 est normal en base 10.

Pour d'autres constructions de nombres normaux en base entière, on pourra se référer à [Bug12, Chapters 4, 5].

Définition 1.1.8. Un réel est dit absolument normal si ses écritures dans toutes les bases entières sont normales.

Remarque 1.1.9. D'après la proposition 1.1.4 il suffit qu'un réel soit simplement normal en toute base entière pour être absolument normal.

Le nom donné par Borel aux nombres normaux provient du résultat suivant.

Théorème 1.1.10 (Borel [Bor09]). *Presque tout réel, au sens de la mesure de Lebesgue, est absolument normal.*

Ce résultat a un côté paradoxal, vu la difficulté d'exhiber un nombre qui soit normal ne serait-ce qu'en une seule base. Le problème de la construction d'un nombre absolument normal est encore beaucoup plus complexe, vu que les constructions de la forme

$$0, f(1)f(2)f(3)\dots$$

avec f une fonction entière sont liées à une base unique et leurs propriétés entraînant la normalité ne résistent pas aux changements de bases. Ces méthodes ne peuvent donc servir à construire un nombre absolument normal. En revanche, il existe des algorithmes permettant de construire de tels nombres.

1.1.3 Algorithmes de constructions de nombres absolument normaux

La propriété de normalité étant liée à l'infinité du développement en base entière, ce que l'on entend par construction algorithmique d'un nombre absolument normal est une généralisation des méthodes fonctionnelles précédentes : on cherche à assurer que le réel ayant les écritures

$$0, w_b(1)w_b(2)w_b(3)\dots$$

dans les différentes bases entières b , où $w_b(i)$ est un mot en base b construit à l'étape i de l'algorithme, est absolument normal. De tels algorithmes existent depuis le début du 20-ième siècle, comme ceux de Turing [BFP07] et de Sierpinsky [Sie17]. Dans cette thèse, nous travaillerons sur des constructions inspirées de celle d'un article plus récent, de Becher, Heiber et Slaman [BHS13], qui renvoie un nombre absolument normal en temps polynomial. L'algorithme présenté dans cet article utilise la notion de discrèpançe, qui est en quelque sorte une version quantifiée de la normalité simple pour les mots finis.

Définition 1.1.11. Soient b un entier supérieur ou égal à 2, \mathcal{D} l'ensemble des chiffres en base b et D un bloc de n chiffres en base b avec n un entier strictement positif. On appelle *discrèpançe* de D en base b la quantité

$$\max_{d \in \mathcal{D}} \left(\frac{A_b(d, D)}{n} - \frac{1}{b} \right).$$

Le principe de fonctionnement de l'algorithme dont il est question, et sur lequel nous reviendrons plus en détail dans le chapitre 4, est d'utiliser des résultats qui assurent que le nombre de blocs dont la discrédance dépasse un réel strictement positif fixé décroît suffisamment vite en toute base entière donnée, et qu'on peut donc les éviter en toute base simultanément sans faire croître trop vite la taille des blocs que l'on ajoute à chaque étape.

1.2 Notion de système de numération

Dans tout le début de cette thèse, la notion de numération a été utilisée sans définition précise, et il n'est pas toujours facile de délimiter précisément ses contours. En effet, cette notion peut se retrouver dans un cadre assez large et présente des liens avec diverses autres branches des mathématiques (comme par exemple les fractales). Le principe fondateur des systèmes de numération est la description d'objets mathématiques grâce à des ensembles d'objets mieux connus. Une première limite naturelle, imposée d'ailleurs si on suit le point de vue des langages, est de se restreindre à des représentations par des suites (donc dénombrables) d'objets. Par exemple, la notion de fonctions réelles suit un peu le cheminement inverse de celle des systèmes de numération : pour gérer un ensemble indénombrable de réels, on les regroupe en un seul objet et on les étudie comme tel. On peut d'ailleurs ensuite utiliser sur ces objets des méthodes proches de celles des systèmes de numération, avec les développements en séries entières et développements limités, ou même les différentes méthodes d'interpolation... Le passage de l'ensemble dénombrable des rationnels à l'ensemble indénombrable des réels reste donc sous bien des aspects la difficulté majeure à laquelle les systèmes de numérations visent à répondre, et l'approximation diophantienne, soit l'approximation des nombres réels par des nombres rationnels, est un enjeu principal de leur étude, même si d'autres types de problèmes se posent lorsqu'on cherche à généraliser les approches de la numération utilisées pour les réels à des ensembles plus grands (comme celui de l'optimisation de l'extension de la notion de fraction continue aux nombres complexes).

Dans cette thèse, nous nous cantonnons pour l'étude des systèmes de numération à la représentation des nombres réels par des suites d'entiers.

1.3 Plan et objectifs

Les théorèmes originaux présentés dans cette thèse sont les théorèmes 2.3.9, 2.3.25, 3.2.3, 3.2.7, 3.3.1, 3.3.3, 4.2.19, 4.3.5 et 4.4.3. Les autres théorèmes qui apparaissent sont cités d'autres auteurs.

L'objectif principal de cette thèse est de réunir deux extensions de l'algorithme de Becher, Heiber et Slaman [BHS13] : la première, due à Becher et Yuhjtman [BY19], portant sur les fractions continues, et la seconde, due à Madritsch, Scheerer et Tichy [MST18] portant sur les bêta-développements. La construction de l'algorithme fusionnant ces extensions fait l'objet du chapitre 4, et du troisième groupe de résultats présentés dans cette thèse (4.2.19, 4.3.5, 4.4.3), dont le principal est le théorème 4.3.5 qui établit la validité de l'algorithme que l'on construit. Avant cela, d'autres notions doivent être introduites : d'abord, le point de vue dynamique sur les systèmes de numération, nécessaire à l'extension de la notion de normalité, constitue le thème du chapitre 2, qui est illustré de nombreux exemples et contient le premier groupe de résultats présentés dans cette thèse (2.3.9, 2.3.25) portant sur la construction d'une famille de systèmes de numération avec une mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue et sur l'établissement de certaines propriétés vérifiées par cette famille. Ensuite, dans le chapitre 3, je reviens plus précisément sur la bêta numération et les nombres de Parry, et je construis une famille de nombres de Parry cubiques qui ne sont pas des nombres de Pisot (3.2.3), ce qui constitue le résultat principal du second groupe de résultats de cette thèse (3.2.3, 3.2.7, 3.3.1, 3.3.3).

Chapitre 2

Systèmes de numération dynamiques réels

Dans le cadre des systèmes réels, on dispose d'un outil puissant, celui de la dynamique, qui nous permet de générer des systèmes de numérations à partir d'applications réelles T . C'est grâce à ce point de vue que nous allons généraliser la définition de normalité hors du cadre des bases entières. Nous introduirons donc ce point de vue dans une première partie 2.1. Dans une seconde partie (2.2), nous explorerons la liberté ainsi que les limites de ce point de vue au niveau des applications pouvant générer des systèmes de numération, en dérivant une condition d'existence (proposition 2.2.9) de résultats de points fixes classiques. Cette partie sera également illustrée de nombreux exemples. Enfin, dans la troisième partie de ce chapitre (2.3), nous nous intéresserons à l'extension de la notion de normalité à des systèmes de numérations généraux définis grâce au point de vue dynamique, qui repose sur les notions de mesures invariantes et d'ergodicité. Le résultat principal de ce chapitre consiste en la construction de systèmes de numérations abstraits à partir d'applications polynomiales admettant une mesure invariante absolument continue par rapport à celle de Lebesgue, ce qui fera l'objet du théorème 2.3.9. Ensuite, nous montrerons l'ergodicité de ces systèmes grâce à un résultat de Li et Yorke [LY78], ce qui, à l'aide du théorème précédent, nous assurera que l'on peut associer une notion de normalité à ces systèmes pour laquelle presque tout réel sera normal, comme en base entière. Le théorème 2.3.25 donnera ensuite des précisions sur les dépendances entre chiffres pour ces systèmes.

2.1 Le point de vue dynamique sur les systèmes de numération

2.1.1 Fractions continues et bêta-numération : un premier aperçu

Les deux systèmes de numération sur lesquels on veut travailler en particulier dans le but de réaliser des constructions de nombres normaux sont les développements en fraction continue et en base réelle $\beta > 1$. Avant d'introduire le point de vue dynamique, nous allons donner une première définition «naturelle» de ces systèmes.

Fractions continues

Intéressons-nous d'abord aux fractions continues. Soit x un nombre réel. On peut écrire x sous la forme

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

où a_0 est la partie entière de x et les chiffres a_i sont des entiers strictement positifs. De plus, chaque écriture infinie correspond à un nombre irrationnel distinct, tandis que les écritures finies correspondent

aux nombres rationnels, et coïncident par paires de la forme suivante :

$$[0, a_1, a_2, \dots, a_n] = [0, a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1],$$

pour tout n -uplet d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Remarque 2.1.1. Ici les écritures finies ne correspondent plus à des écritures qui se terminent par une infinité de 0, mais peuvent s'interpréter comme des écritures comportant l'infini (au chiffre suivant).

Les écritures finies en fraction continue correspondant à des nombres rationnels, la donnée d'un nombre fini n de chiffres de l'écriture en fraction continue d'un nombre réel x correspond à un nombre rationnel $\frac{p_n}{q_n}$. Ainsi, le développement en fraction continue, au même titre que celui en base entière, fournit une méthode d'approximation diophantienne, qui donne de meilleures approximations que les développements en base réelle (voir [Bug12, Appendix] par exemple).

Les développements en fraction continue ultimement périodiques correspondent exactement aux irrationnels quadratiques, et ainsi il y a un plus grand ensemble de nombres ayant une écriture simple (finie ou ultimement périodique) que pour les bases réelles.

Bêta-développements

Nous allons présenter le système de numération des β -développements plus succinctement pour l'instant, car nous y reviendrons en détail dans le chapitre 3.

Le β -développement, ou écriture en base β , pour β un réel strictement plus grand que 1, est une extension de l'écriture en base entière. Le but est en effet d'écrire les réels de l'intervalle $[0, 1[$ sous forme de sommes de puissances négatives du nombre β , donc à x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$ on associe une écriture de la forme

$$x = \sum_{n \geq 1} a_n \beta^{-n},$$

où les chiffres a_i sont des entiers positifs strictement inférieurs à β . Dans les cas où β n'est pas entier, on a donc autant de chiffres possibles que dans la base entière $\lceil \beta \rceil$, alors que les puissances négatives de β sont strictement plus grandes que celles de $\lceil \beta \rceil$. Ceci induit une redondance, qui se résout en interdisant certains enchaînements de chiffres.

2.1.2 Définition dynamique des systèmes de numération

Dans toute la suite de cette thèse, les systèmes de numération considérés seront étudiés en utilisant le point de vue dynamique, qui consiste à représenter chaque système de numération par une application. Nous allons d'abord appliquer ce point de vue à l'exemple des bases entières afin de mettre en lumière son fonctionnement. Ce point de vue a été introduit par Bissinger [Bis44], Everett [Eve46] et Rényi [Rén57], et on pourra également se référer à [DK02, Chapters 1-3] pour le point de vue dynamique sur les fractions continues et les β -développements, ainsi que les séries de Lüroth.

Le développement en base 10 du point de vue dynamique

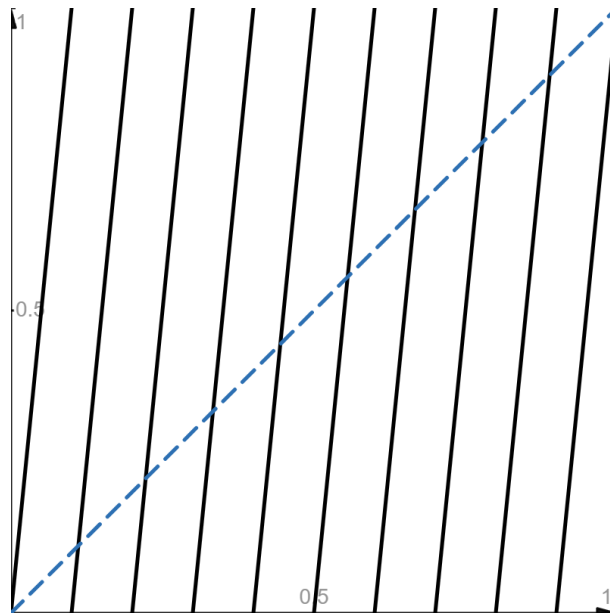
Soit x un réel dans $[0, 1[$ et soit $0, a_1 a_2 \dots$ son écriture en base 10. Considérons maintenant l'application $T_{10} : y \mapsto 10y$. L'action de T_{10} sur les réels induit l'action de l'opérateur de décalage (shift) à gauche sur leurs écritures en base 10. De plus, si on se restreint aux réels de $[0, 1[$, on a $T_{10}x = a_1, a_2 a_3 \dots$, et on a donc isolé le premier chiffre du développement en base 10 de x à gauche de la virgule. On peut alors extraire ce chiffre à l'aide de la fonction partie entière (inférieure) :

$$\lfloor T_{10}x \rfloor = a_1.$$

Ensuite, une fois ce chiffre extrait, on peut effacer sa contribution grâce à la fonction partie fractionnaire :

$$\{T_{10}x\} = 0, a_2 a_3 \dots$$

On obtient alors l'écriture d'un réel de l'intervalle $[0, 1[$, dont on peut à nouveau isoler le premier chiffre (a_2) en appliquant à nouveau T_{10} , que l'on peut ensuite extraire grâce à la fonction partie entière et

FIGURE 2.1 – Graphe de l'application $\{T_{10}\}$

ainsi de suite. Les itérations successives de ce procédé permettent donc d'obtenir chacun des chiffres de x dans l'ordre. On peut également obtenir le développement en base 10 d'un réel de l'intervalle $[0, 1[$ graphiquement. Pour ce faire, on trace le graphe de l'application $\{T_{10}\}$ 2.1, puis en plaçant x en abscisse, en appliquant la transformation et en réitérant grâce à la première diagonale, comme pour les suites récurrentes habituelles. En gardant trace du chiffre auquel correspond chaque composante connexe du graphe, on obtient finalement l'écriture en base 10 voulue. L'identité $0,9^\infty = 1$ peut s'interpréter dans ce contexte par la discontinuité de la fonction T_{10} , et le fait que l'on privilégie la seconde écriture vient du fait que la fonction partie fractionnaire est continue à gauche.

Définition 2.1.2. On appelle *système de numération dynamique réel* un système de numération associant à tout réel x de l'intervalle $[0, 1[$ une suite $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ de chiffres appartenant à un sous-ensemble de \mathbb{Z} tel qu'il existe une application T définie sur $[0, 1[$ vérifiant $\lfloor Tx \rfloor = a_1$, $\lfloor T\{Tx\} \rfloor = a_2$, et généralement, pour tout entier positif n :

$$\lfloor T(T(\dots(T(Tx - a_1) - a_2) - \dots) - a_{n-1}) \rfloor = a_n.$$

Nous appellerons toute application liée à un système de numération de cette manière *application de numération* dans toute la suite de cette thèse (notons cependant que ce n'est pas une appellation standard).

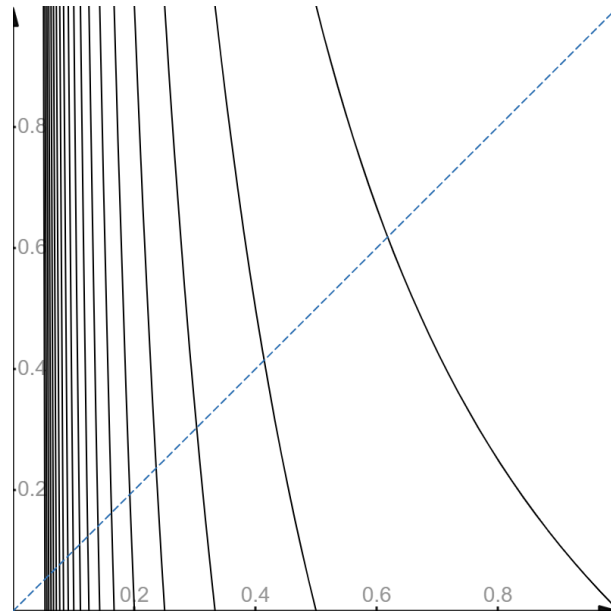
Notation. Dans la suite, pour simplifier les notations, on notera plutôt T la partie fractionnaire, que l'on use communément, et \tilde{T} la fonction de base. On imposera également des conditions pour qu'il y ait une correspondance entre les chiffres dans le système et les composantes continues de T , ce qui nous permettra de la relever à \tilde{T} à changements de chiffres près (dans une certaine limite, voir 2.1.8). On rappelle également qu'une *composante continue* d'une fonction est un intervalle rassemblant toutes les abscisses d'une composante connexe de son graphe.

En base entière b , l'application utilisée est donc $T_b : x \mapsto \{bx\}$. Pour les développements en fractions continues, l'application utilisée est l'application de Gauss $T_G : x \mapsto \{\frac{1}{x}\}$, prolongée en 0 par $T_G(0) = 0$. Son graphe est représenté dans la figure 2.2

En base réelle $\beta > 1$, l'application utilisée est $T_\beta : x \mapsto \{\beta x\}$.

Exemple 2.1.3 (Séries de Lüroth). Tout réel x de $[0, 1[$ admet une décomposition en somme finie ou non de terme général

$$\frac{1}{x_1(x_1 - 1) \dots x_{i-1}(x_{i-1} - 1)x_i},$$

FIGURE 2.2 – Graphe de l'application T_G tronqué à $x=0.05$

où les chiffres x_i sont des entiers au moins égaux à 2. L'application associée est

$$T_L : [0, 1[\longrightarrow [0, 1[\\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ n(n+1)x - n & \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

représentée dans le graphe 2.3 Cette construction peut être généralisée à des subdivisions de l'intervalle $[0, 1[$ autres que celle selon les inverses d'entiers.

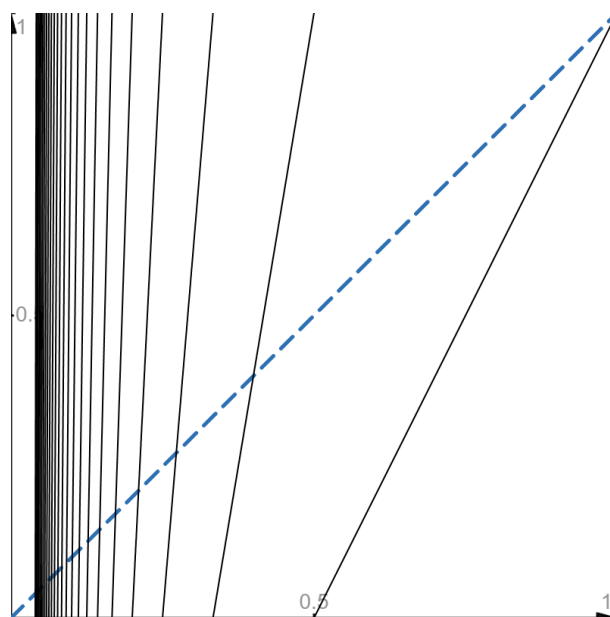
Définition 2.1.4. Soit D un bloc fini de chiffres dans une base donnée. On appelle *cylindre* associé à D et on notera $\text{cyl}(D)$ l'ensemble de tous les réels dont l'écriture dans la base considérée commence par le bloc D . De manière générale, on appellera *cylindre d'ordre n* (dans la base considérée) tout ensemble pouvant s'écrire $\text{cyl}(D')$ avec D' un bloc de chiffres de longueur n correspondant au développement d'un réel dans la base considérée.

Remarque 2.1.5. Si w_1 et w_2 et w_1w_2 sont des mots finis admissibles dans une même base donnée, alors $\text{cyl}(w_1w_2)$ est inclus dans $\text{cyl}(w_1)$ et si le système de numération est bien défini, alors la longueur des cylindres doit tendre vers 0 quand leur ordre tend vers l'infini, sinon une infinité de nombres partageraient la même écriture. Cela implique que les écritures partielles successives d'un réel dans un système de numération réel valide approchent de mieux en mieux le réel en question (mais ces écritures partielles ne sont pas nécessairement des développements de nombres rationnels).

Notation. Pour tout système de numération dynamique réel défini par une application \tilde{T} , on utilisera librement les notations et appellations de base \tilde{T} ou de base T , de T -développements (même lorsque T n'est pas une application de numération dans ce cas), de T -cylindres, ...

Définition 2.1.6. Pour un système de numération défini par une application \tilde{T} de partie fractionnaire T , on appelle *systèmes itérés* les systèmes définis par les applications T^k . Les chiffres dans ces systèmes correspondent à des blocs de chiffres de taille k dans le système de départ, et leurs composantes continues sont des cylindres d'ordre k dans le système de départ.

Exemple 2.1.7. En base entière $b \geq 2$, les systèmes itérés sont simplement les bases associées aux puissances strictement positives de b .

FIGURE 2.3 – Graphe de T_L tronqué à 0,04

Remarque 2.1.8. Notons qu'une fonction partie fractionnaire itérée T^k ne peut se relever en une fonction réelle \tilde{T}^k que si le système de départ admet un nombre fini de chiffres, c'est-à-dire si l'image de \tilde{T} est de longueur finie. On peut alors renuméroter les blocs de chiffres de longueur k associés à T dans l'ordre. Par exemple, en base 4, le chiffre 0 correspond au bloc 00 en base 2, le chiffre 1 au bloc 01, ... tandis qu'en fraction continue, on doit forcément donner les chiffres pour l'application itérée comme des couples d'entiers positifs, soit sous forme de blocs de longueur 2 en fraction continue.

2.2 Systèmes de numération dynamiques réels abstraits

Dans la partie précédente, on a présenté le point de vue dynamique sur les systèmes de numération en associant à un système de numération une application, sans plus de précision sur la nature de cette application. Dans cette partie, on va s'intéresser à définir des systèmes de numération avec des applications arbitraires, et discuter des conditions que l'on doit imposer sur celles-ci.

De par leur définition, il est immédiat que dans un système de numération dynamique réel, tout réel admet une unique écriture à partir du moment où l'application est bien définie sur $[0, 1[$. Afin que le système soit bien défini, il faut donc s'assurer que tous les réels aient des écritures distinctes, ce qui implique immédiatement que la fonction doit être injective. Nous allons tout d'abord fixer des conditions génériques sur les applications que nous allons étudier.

Définition 2.2.1. On dira qu'une fonction \tilde{T} définie sur $[0, 1[$ vérifie la condition \mathcal{C} :

1. \tilde{T} est C^1 par morceaux sur $]0, 1[$.
2. Si \tilde{T} n'est pas continue en 0, alors $f(0) \in \mathbb{Z}$.
3. \tilde{T} est injective.
4. \tilde{T} a la même monotonie sur toutes ses composantes continues.
5. \tilde{T} est continue du côté où elle décroît.
6. Si \tilde{T} n'est pas continue sur tout son intervalle de définition, alors pour tous x_1 et x_2 dans $[0, 1[$ sur des composantes continues différentes de \tilde{T} , on a

$$[\tilde{T}(x_1)] \neq [\tilde{T}(x_2)].$$

Remarque 2.2.2. — On pourrait aussi plutôt définir les fonctions sur $]0, 1]$ dans le cas décroissant.

- La condition 6 assure que chaque composante continue de la fonction $\{T\}$ correspond à un chiffre différent pour le système de numération associé. Cela assure également que les cylindres dans ce système sont des intervalles.
- La continuité n'est pas imposée notamment à cause de cas naturels comme les itérées des β -développements ou certaines de leurs généralisations (voir [DK10] par exemple).
- La condition C^1 n'est pas imposée partout où la fonction est continue car elle est perdue pour les applications itérées à cause des discontinuités générées par la partie fractionnaire, et de plus il nous sera pratique d'utiliser des fonctions affines par morceaux à titres d'exemples pour illustrer certains phénomènes.
- Les résultats de cette partie s'adaptent facilement aux fonctions ne vérifiant pas la condition 4. On l'impose cependant par commodité, car sans celle-ci il se pose des questions de points isolés qu'il faut examiner au cas par cas (notons que pour des applications de ce type sont forcément discontinues).
- Si \tilde{T} définit une base, cette base comportera des écritures finies si, et seulement si, $T(0) = 0$, et plus généralement des écritures périodiques si, et seulement si, il existe $x \in [0, 1[$ tel que $T(x) = x$.

On remarque aussi que la partie fractionnaire T d'une application vérifiant la condition \mathcal{C} n'est pas nécessairement surjective sur toutes ses composantes continues. Quand elle ne l'est effectivement pas, cela mène à des restrictions sur les enchaînements de chiffres qui apparaissent comme développements dans cette base en itérant (comme dans le dernier point de la remarque précédente). Par la suite, nous appellerons un bloc de chiffres *admissible* vis-à-vis d'une base s'il correspond au développement d'un réel dans cette base.

Quelques exemples

Les applications vérifiant la condition \mathcal{C} les plus naturelles sont les suivantes.

Exemple 2.2.3. Soit \tilde{T} une fonction C^1 monotone sur $[0, 1[$ telle que $\tilde{T}(0) \in \mathbb{Z}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \tilde{T}(x) \in \mathbb{Z}$. Alors \tilde{T} vérifie la condition \mathcal{C} .

Nous avons vu que manipuler les systèmes de numération du point de vue dynamique repose sur l'utilisation de la partie entière inférieure, nous allons dire un mot sur le passage à d'autres détermination de la partie entière.

Exemple 2.2.4. Considérons \tilde{T}_{2ps} l'application non continue et vérifiant la condition \mathcal{C} suivante :

$$\tilde{T}_{2ps} : [0, 1[\longrightarrow [0, 2[$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - 2x & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{sinon,} \end{cases}$$

voir la figure 2.4. Alors les \tilde{T}_{2ps} -écritures des réels de $[0, 1[$ correspondent à leurs développements en base 2 par les parties entières supérieures. Notons qu'en général, cette application est plutôt étudiée comme le développement en base -2 par les parties entières inférieures, qui découle d'une application continue (la partie fractionnaire supérieure de toute application T étant égale à la partie fractionnaire inférieure de l'application $-T$, seul l'ensemble des chiffres diffère).

Exemple 2.2.5. Nous allons maintenant examiner le développement en base 2 par les parties entières les plus proches de manière naïve. L'application correspondante est la suivante :

$$\tilde{T}_{2ppn} : [0, 1[\longrightarrow [0, 2[$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}[\\ 2 - 2x & \text{si } x \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[\\ 2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[\\ 3 - 2x & \text{sinon,} \end{cases}$$

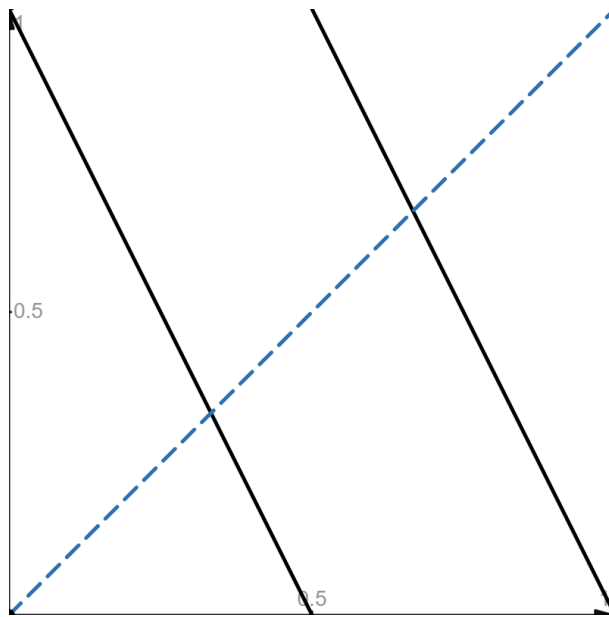


FIGURE 2.4 – Graphe de l'application T_{2ps}

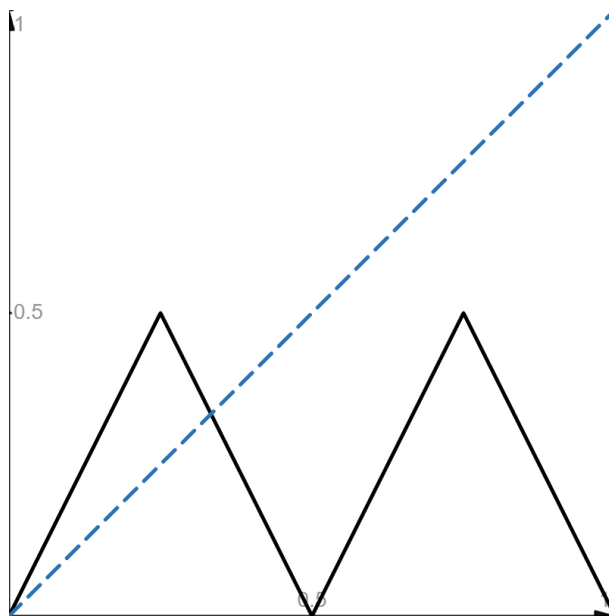
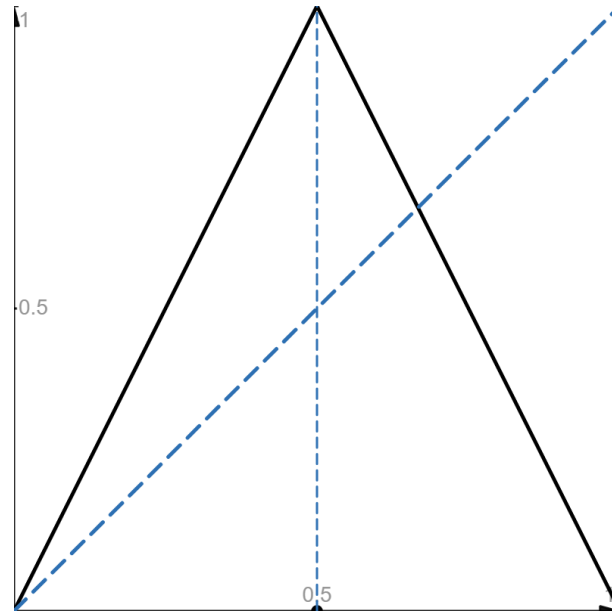


FIGURE 2.5 – Graphe de l'application T_{2ppn}

FIGURE 2.6 – Graphe de l'application T_{2ppr}

voir la figure 2.5. Cette application est non injective, ce qui pose un problème. Néanmoins, cela peut se régler en différenciant les éléments de $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ et de $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ d'une autre manière, par exemple en indiquant * pour les écritures des éléments dans le second intervalle. On remarque alors que, à cause de la non surjectivité de l'application T_{2ppn} , les images successives de tout réel de $[0, 1[$ par l'application T_{2ppn} restent dans $[0, \frac{1}{2}]$. Ainsi, mis à part pour le premier chiffre, étudier les \tilde{T}_{2ppn} -développements revient à étudier les écritures obtenues pour l'application

$$\tilde{T}_{2ppr} : [0, 1[\longrightarrow [0, 2[\\ x \longmapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 3 - 2x & \text{sinon,} \end{cases}$$

voir la figure 2.6. On remarque que la partie fractionnaire de cette fonction comporte un point isolé en $\frac{1}{2}$.

Une meilleure façon de définir le développement en base 2 par les parties entières les plus proches serait de définir plutôt la partie fractionnaire correspondante sans valeur absolue. On obtient alors une application de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ dans lui-même, représentée par le graphe 2.7. La première composante continue du graphe correspond au chiffre -1 , la seconde au chiffre 0 et la dernière au chiffre 1 . Les mots admissibles pour notre développement sont alors les mots sur l'alphabet $\{-1, 0, 1\}$ ne contenant pas les mots finis $(-1)0^n(-1)$ et 10^n1 , pour tout entier positif n .

Exemple 2.2.6. Considérons la fonction \tilde{T}_{2r} définie par $\tilde{T}_{2r}(x) = n + x - \frac{1}{2^{n+1}}$ sur tout intervalle de la forme $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}[$ avec n entier positif, et $\tilde{T}_{2r}(0) = 0$ (voir la figure 2.8). C'est une application de numération, et pour tout réel x dans $[0, 1[$, l'écriture de x en base \tilde{T}_{2r} est constituée des puissances négatives du développement de \tilde{T}_{2r} en base 2 dans l'ordre croissant.

Cette construction peut se généraliser pour les autres bases entières. Par exemple, en base 5, l'application T_{5r} est représentée par le graphe 2.9.

Exemple 2.2.7. Considérons la fonction \tilde{T}_{Lns} définie sur tout intervalle de la forme $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ avec n entier strictement positif, par $\tilde{T}_{Lns}(x) = n + nx - \frac{n}{n+1}$. L'application \tilde{T}_{Lns} vérifie la condition \mathcal{C} . Elle est représentée dans la figure 2.10.

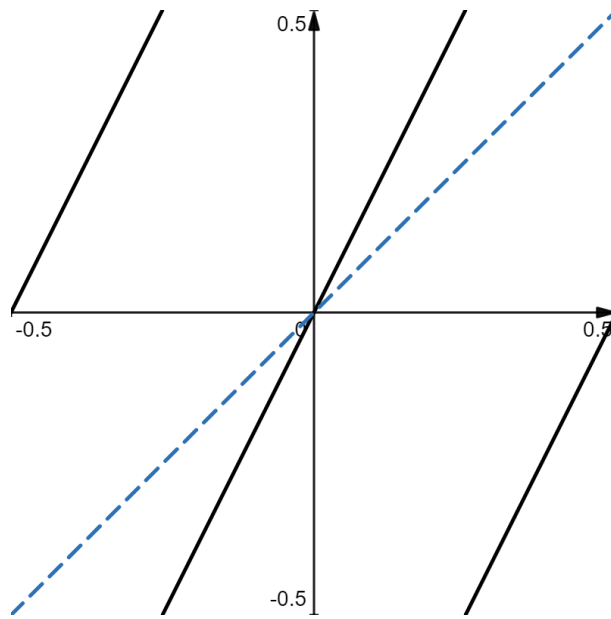


FIGURE 2.7 – Graphe de l'application T_{2ppm}

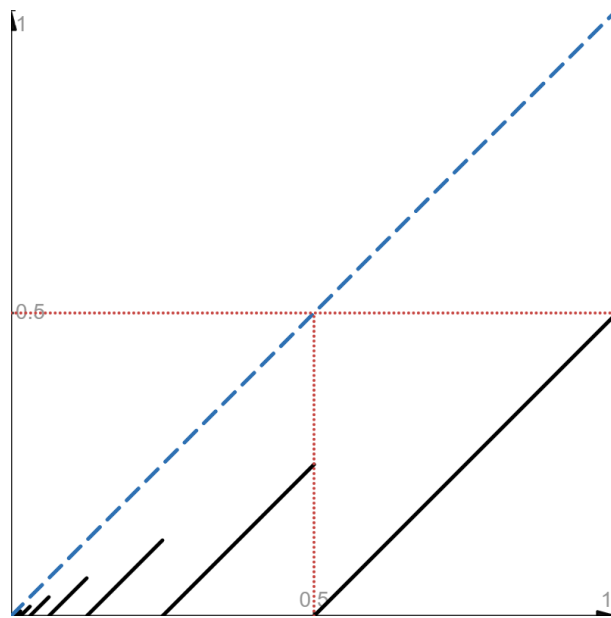
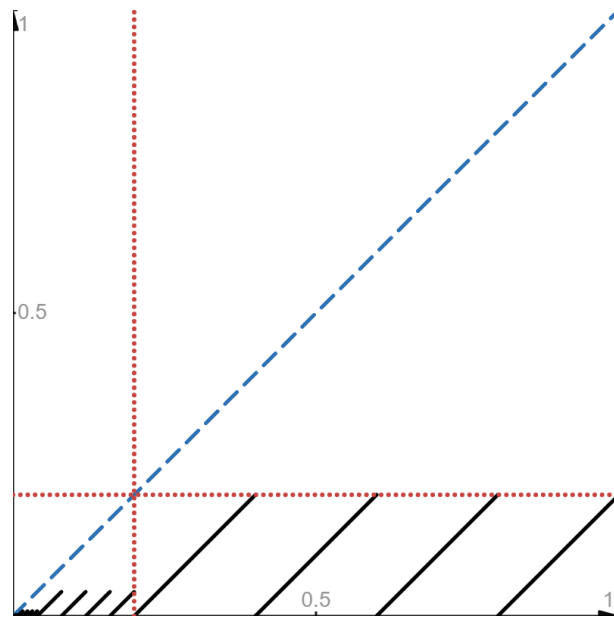
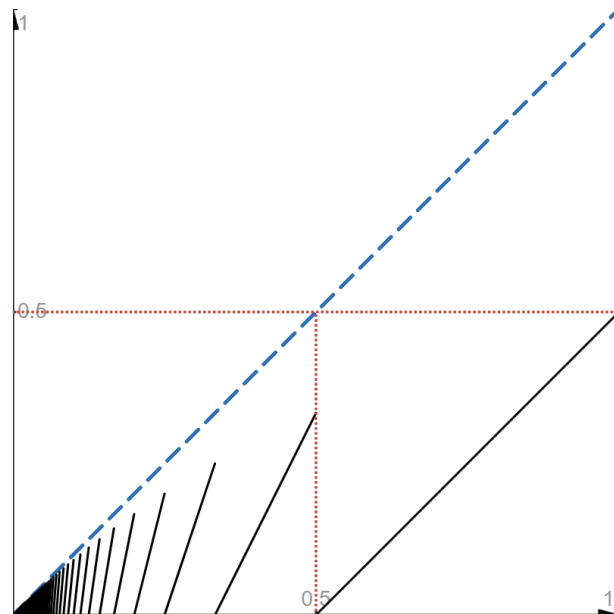
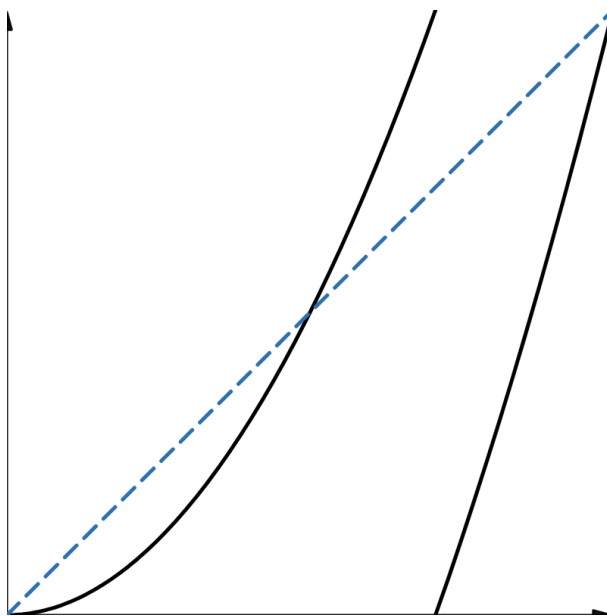


FIGURE 2.8 – Graphe de T_{2r}

FIGURE 2.9 – Graphe de T_{5r} FIGURE 2.10 – Graphe de l'application T_{Lns}

FIGURE 2.11 – Graphe de T_{Sf}

Conditions pour que des applications qui vérifient la condition \mathcal{C} soient des applications de numération

Nous allons tout d'abord voir un cas d'application vérifiant la condition \mathcal{C} sans être une application de numération.

Exemple 2.2.8. Considérons l'application

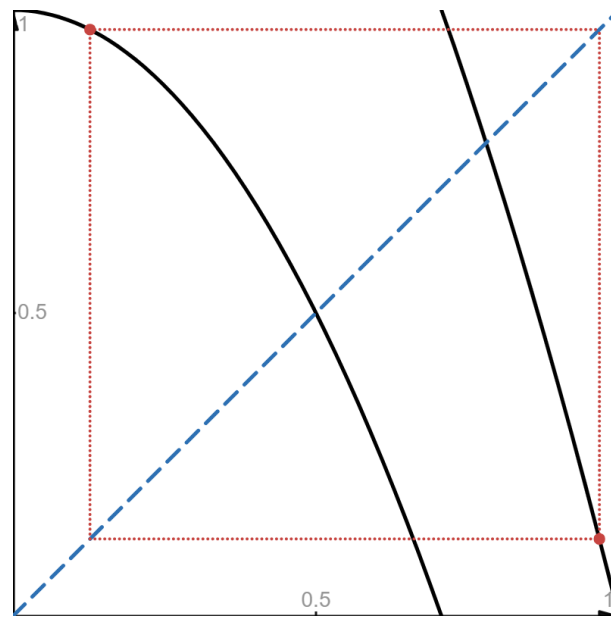
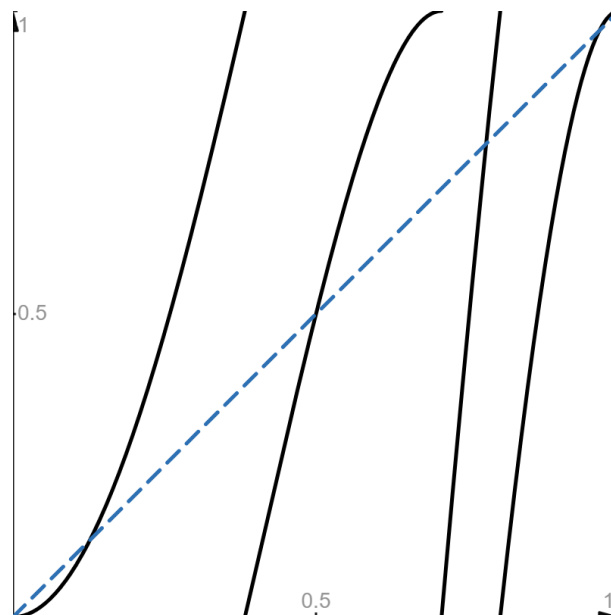
$$\begin{aligned} \tilde{T}_{Sf} : [0, 1[&\longrightarrow [0, 1[\\ x &\longmapsto 2x^2. \end{aligned}$$

Si \tilde{T}_{Sf} représentait un système de numération dynamique, alors le développement du réel $\frac{1}{2}$ dans ce système serait $0,00000\dots$. En effet, on a $\lfloor 2 \times (\frac{1}{2})^2 \rfloor = 0$ et $\{2 \times (\frac{1}{2})^2\} = \frac{1}{2}$, et il ne reste alors qu'à réitérer. Ainsi les réels $\frac{1}{2}$ et 0 (et tous ceux entre) auraient la même écriture dans le système de numération défini par T_{Sf} si celui-ci existait. Le problème apparaît clairement lorsque l'on trace le graphe de l'application T_{Sf} , qui intersecte la première diagonale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ (voir la figure 2.11).

La première diagonale fait apparaître une singularité similaire aux cas de points fixes dont on a l'habitude pour les suites récurrentes continues, mais en examinant le même système de numération par les parties entières supérieures, défini par l'application T_{Sfs} , on s'aperçoit qu'il demeure un problème qui n'apparaît plus directement sur son graphe 2.12. En effet, soit α la plus petite racine positive du polynôme $8X^2 - 8X + 1$. Alors $\alpha < \sqrt{2}/2$ et vérifie $2 - 2(1 - 2\alpha^2)^2 = \alpha$. Il en découle que tous les nombres dans $]0, \alpha[$ ont pour T_{Sfs} -développement $0, (12)^\infty$ et par conséquent, T_{Sfs} n'est pas une application de numération. Le problème apparaît de nouveau clairement quand on itère la fonction (voir figure 2.13).

De manière générale, si sur une composante continue d'une application T il existe un point fixe vers lequel il y a convergence selon les arguments habituels pour les suites récurrentes définies à partir de fonctions continues, il est clair que T ne définira pas de système de numération, mais ce ne sont pas les seuls cas défavorables. Dans la suite de cette partie, nous allons examiner plus en détail les cas qui peuvent poser problème ou non.

Proposition 2.2.9. *Soit \tilde{T} une application vérifiant la condition \mathcal{C} . S'il existe deux réels x et y ayant le même développement pour le système dynamique défini par T alors soit il existe un intervalle I de $[0, 1[$ tel que la longueur de l'intervalle $T^n(I)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, soit il existe un intervalle*

FIGURE 2.12 – Graphe de T_{Sfs} FIGURE 2.13 – Graphe de T_{Sfs}^2

J et un entier positif k tels que les T -développements des éléments de J ont les mêmes k premiers chiffres et $T^k(J) \subset J$.

Démonstration. Soit \tilde{T} une application vérifiant la condition \mathcal{C} . Supposons qu'il existe deux réels x et y dans $[0, 1[$ tels que pour tout entier naturel n , on ait $[\tilde{T}(T^n(x))] = [\tilde{T}(T^n(y))]$. Ceci implique que pour tout entier positif n , les points $T^n(x)$ et $T^n(y)$ sont sur la même composante continue de T , ainsi que tous les points de l'intervalle $[T^n(x), T^n(y)]$. En conséquence, tous les points de l'intervalle $[x, y]$ ont la même écriture dans le système défini par T , et toutes les fonctions T^n sont continues sur $[x, y]$. Nous allons distinguer deux cas.

Soit les intervalles $[T^n(x), T^n(y)]$ ne s'intersectent jamais quand n parcourt \mathbb{N} , et comme ces intervalles sont contenus dans $[0, 1[$, leur longueur doit tendre vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Soit il existe un entier naturel ℓ et un entier strictement positif k tels que

$$I := [T^\ell(x), T^\ell(y)] \cap [T^{\ell+k}(x), T^{\ell+k}(y)] \neq \emptyset.$$

Les écritures des réels de $[x, y]$ sont alors ultimement périodiques avec une pré-période de longueur $\ell + 1$ et une période de longueur k . En effet, soient m un entier supérieur ou égal à ℓ , et soient z et z' deux éléments de l'intervalle $[x, y]$ tels que $T^\ell(z) = T^{\ell+k}(z') \in I$. On a alors

$$[\tilde{T}(T^{m+k}(x))] = [\tilde{T}(T^{m-\ell} \circ T^{\ell+k}(x))] = [\tilde{T}(T^{m-\ell} \circ T^{\ell+k}(z'))],$$

car tous les éléments de $[x, y]$ ont le même T -développement, et de même on a

$$[\tilde{T}(T^{m+k}(x))] = [\tilde{T}(T^{m-\ell} \circ T^\ell(z))] = [\tilde{T}(T^m(x))],$$

ce qui induit la périodicité annoncée. Quitte à changer notre intervalle de départ, on peut supposer que le développement commun des réels de l'intervalle $[x, y]$ est purement périodique de période k . Notons

$$A = \cup_{n \geq 1} [T^n(x), T^n(y)].$$

Notons \hat{A} le plus petit intervalle contenant A . Comme tous les éléments de A ont la même écriture dans le système dynamique engendré par T , ils sont sur la même composante continue de T , et leurs images par les différentes itérations de l'application T sont à chaque fois sur la même composante continue de T . Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il en va de même pour les autres éléments de \hat{A} , et que $T^k(\hat{A}) \subset \hat{A}$. □

Remarque 2.2.10. Dans les deux cas, on peut prendre un intervalle fermé.

Démonstration. C'est clair au vu de la démonstration précédente dans le premier cas (si les images successives de l'intervalle ont une longueur qui tend vers 0). Dans le second cas, considérons à nouveau l'intervalle \hat{A} , union des images successives de l'intervalle $[x, y]$ des réels d'écritures identiques de période k par l'application T^k . La fonction T^k est continue et monotone sur \hat{A} , en tant que composée de fonctions continues et monotones car on a vu que les éléments de \hat{A} ont la même T -écriture, et leurs images successives sont à chaque fois dans la même composante continue. Quitte à passer de k à $2k$, on peut supposer qu'elle est croissante, ce qui implique que pour tout élément z de \hat{A} , la suite $(T^{nk}(z))_{n \geq 0}$ est monotone. Notons à présent $[a, b]$ l'adhérence de \hat{A} . Comme la fonction T^k est croissante, elle est continue à gauche de par nos conventions, ce qui implique que si a n'est pas dans \hat{A} , alors c'est un point fixe de la fonction T^k en tant que limite d'une suite décroissante de \hat{A} , et on peut prolonger \hat{A} à gauche. La continuité à droite n'étant pas assurée, supposons maintenant que b n'est pas dans \hat{A} . Par croissance de la fonction T^k et par définition de \hat{A} , c'est nécessairement la limite de la suite $(T^{nk}(y))_{n \geq 0}$. Comme cette suite est alors convergente, elle est de Cauchy et les intervalles de la suite $([T^{nk}(y), T^{(n+1)k}(y)])_{n \geq 0}$ ont une longueur qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et on retombe ainsi dans le premier cas. □

De manière générale, ce résultat n'est pas applicable de manière systématique pour déterminer si une application vérifiant la condition \mathcal{C} est de numération, mais il nous aidera à construire des exemples par la suite, et il en découle la condition nécessaire suivante, qui est aisée à vérifier (Everett [Eve46] proposait déjà la même condition suffisante sur les pentes, exprimée sur l'application inverse de celle que l'on utilise).

Corollaire 2.2.11. *Une application vérifiant la condition \mathcal{C} et dont la dérivée est plus grande que 1 en valeur absolue presque partout est une application de numération.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux réels distincts x et y dans l'intervalle $[0, 1[$ ayant le même développement pour une application \tilde{T} vérifiant la condition \mathcal{C} . Supposons d'abord que l'on soit dans le premier cas présenté par la proposition, c'est-à-dire, en supposant que T est croissante sur chaque composante continue, que la longueur des intervalles $[T^k(x), T^k(y)]$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Pour k un entier supérieur ou égal à 3, examinons la pente

$$\frac{T^k(y) - T^k(x)}{y - x} = \prod_{i=1}^k \frac{T^i(y) - T^i(x)}{T^{i-1}(y) - T^{i-1}(x)}.$$

Comme x et y sont distincts, cette pente tend vers 0, et donc certains éléments du produit précédent, de la forme $\frac{T(y') - T(x')}{y' - x'}$ avec x' et y' dans la même composante continue de T , sont inférieurs à 1 en valeur absolue. Comme T est C^1 et monotone sur ses composantes continues, il vient qu'il existe un intervalle $I \subset [0, 1[$ où la dérivée de T , qui coïncide avec celle de \tilde{T} sur ses composantes continues, est inférieure à 1 en valeur absolue.

Dans le second cas, il existe un intervalle $J \subset [0, 1[$ sur lequel T^k est continue et tel que $T^k(J) \subset J$. On a vu par la remarque 2.2.10 qu'on peut supposer que $J = [a, b]$ est fermé. On a alors $T^k(a) \geq a$ et $T^k(b) \leq b$. Comme T^k est continue, monotone et C^1 sur J , il vient que la dérivée de T^k est inférieure à 1 en valeur absolue sur un sous-intervalle J' de J . Or on a :

$$\forall x \in J', (T^k)'(x) = \prod_{i=1}^k T'(T^i(x)).$$

Ainsi, la fonction T étant continue sur chaque intervalle de la forme $T^i(J')$, il en découle qu'il existe un intervalle J'' inclus dans une composante continue de T sur lequel T' , et donc \tilde{T}' , sont inférieures à 1 en valeur absolue. \square

Remarque 2.2.12. Si une application vérifiant la condition \mathcal{C} n'est pas de numération parce qu'il existe un intervalle J et un entier positif k tels que les T -développements des éléments de J ont les mêmes k premiers chiffres et $T^k(J) \subset J$, on peut le détecter directement sur le graphe de l'itérée T^k comme dans l'exemple 2.2.8.

Exemple 2.2.13. Considérons l'application suivante, qui vérifie la condition \mathcal{C} .

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{x+x^2} : [0, 1[&\longrightarrow [0, 2[\\ x &\longmapsto x + x^2, \end{aligned}$$

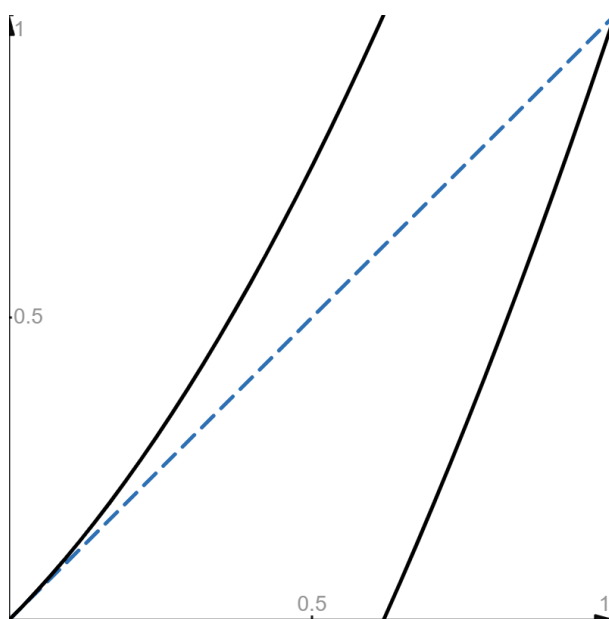
dont le graphe de la partie fractionnaire est représenté à la figure 2.14.

Comme sa dérivée est strictement supérieure à 1 sauf en 0, c'est une application de numération. Les écritures associées à ce système sont tous les mots finis à gauche sur l'alphabet $\{0, 1\}$. À partir d'une écriture dans ce système de numération $x = 0, x_1 x_2 \dots$, on peut retrouver le réel $x \in [0, 1[$ d'origine sous la forme :

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x_1 + 4 \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x_2 + \dots}}{2}}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{1}{4} + x_1 + \sqrt{-\frac{1}{4} + x_2 + \dots}},$$

cependant il faut faire attention à la seconde écriture, plus simple mais modifiée quand les écritures sont finies (la constante dans la dernière racine est alors $1/4$), sans quoi les racines ne sont plus toutes définies. On remarque aussi que comme pour les bases entières, on a l'identité $0, 1^\infty = 1$. En effet, un résultat de point fixe nous donne pour deux entiers positifs r et s la convergence du radical imbriqué

$$\sqrt{r + s \sqrt{r + s \sqrt{r + \dots}}}$$

FIGURE 2.14 – Graphe de T_{x+x^2}

vers

$$\frac{s + \sqrt{s^2 + 4r}}{2},$$

et en appliquant ce résultat pour $s = 1$ et $r = 3/4$, on obtient que si x a pour T_{x+x^2} -développement $0, 1^\infty$, alors

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1.$$

Les écritures régulières (ultimement périodiques) en base T_{x+x^2} sont racines d'équations algébriques de la forme

$$P(Q(X)) = Q(X),$$

où P et Q sont des composées des polynômes $P_0(X) = X^2 + X$ et $P_1(X) = X^2 + X - 1$. Les écritures purement périodiques sont telles que $Q(X) = X$, et les écritures finies sont telles que $P(X) = 0$ et que quand on décompose le polynôme Q selon les polynômes P_0 et P_1 , le polynôme P_1 apparaît en tant que composée extérieure. En particulier, les nombres ayant des écritures purement périodiques en base T sont des entiers algébriques. Par exemple, en notant φ le nombre d'or, son écriture en base T est $\varphi = 1, 1_{T_{x+x^2}}$.

Exemple 2.2.14. Pour $\beta > 1$, considérons la fonction

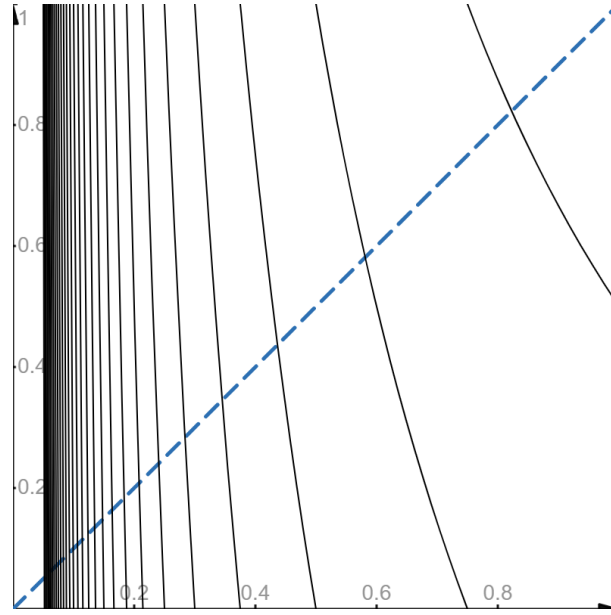
$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\beta G} :]0, 1[&\longrightarrow]\beta, +\infty[\\ x &\longmapsto \frac{\beta}{x}, \end{aligned}$$

et $\tilde{T}_{\beta G}(0) = 0$ (voir figure 2.15). Alors, comme $\tilde{T}_{\beta G}$ est C^1 et monotone sur $]0, 1[$, de dérivée toujours strictement inférieure à -1 , c'est une application de numération.

Remarque 2.2.15. Au vu de la démonstration du corollaire, pour établir si une fonction \tilde{T} est de numération, il suffit d'étudier les intervalles où la dérivée de T est inférieure ou égale à 1 en valeur absolue et leurs images successives.

Exemple 2.2.16. Pour $\beta > 1$, considérons la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{G\beta} :]0, 1[&\longrightarrow]\frac{1}{\beta}, +\infty[\\ x &\longmapsto \frac{1}{\beta x}, \end{aligned}$$

FIGURE 2.15 – Graphe de $T_{3/2G}$ tronqué à $x = 0.05$

et $\tilde{T}_{G\beta}(0) = 0$ (voir figure 2.16). La fonction $\tilde{T}_{G\beta}$ est C^1 et monotone, mais sa dérivée est supérieure ou égale à -1 sur $[1/\sqrt{\beta}, 1[$. Cet intervalle a pour image $]1/\beta, 1/\sqrt{\beta}[$, qui lui-même a pour image $]1/\sqrt{\beta}, 1[$. Ainsi, une infinité de réels ont pour écriture $0,0000\dots$ en base $\tilde{T}_{G\beta}$, ce qui implique que $\tilde{T}_{G\beta}$ n'est pas une application de numération (voir aussi le graphe de l'itérée 2.17).

Exemple 2.2.17. Considérons la fonction

$$\tilde{T}_{\text{id}} : [0, 1[\longrightarrow [0, 2[$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 3x - 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

voir la figure 2.18.

De manière évidente, cette fonction vérifie la condition \mathcal{C} mais n'est pas une application de numération, car tous les réels dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}[$ ont le même \tilde{T}_{id} -développement. Par contre, considérons maintenant pour tout réel positif $\varepsilon < \frac{1}{2}$ la fonction

$$\tilde{T}_{\text{id},\varepsilon} : [0, 1[\longrightarrow [0, 2[$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{si } x \in [0, \varepsilon[\\ x + \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } x \in [\varepsilon, \frac{1}{2}[\\ (3 - \varepsilon)x - 1 + \varepsilon & \text{sinon,} \end{cases}$$

voir la figure 2.19.

Supposons qu'il existe deux réels a et b ayant le même $T_{\text{id},\varepsilon}$ développement. Remarquons d'abord que pour tout réel positif k , $T_{\text{id},\varepsilon}^k(a)$ et $T_{\text{id},\varepsilon}^k(b)$ sont sur la même composante connexe de $T_{\text{id},\varepsilon}$ et donc

$$\frac{T_{\text{id},\varepsilon}^{k+1}(b) - T_{\text{id},\varepsilon}^{k+1}(a)}{T_{\text{id},\varepsilon}^k(b) - T_{\text{id},\varepsilon}^k(a)} \geq 1.$$

Supposons maintenant que $a \notin [\varepsilon, \frac{1}{2}[$ ou $b \notin [\varepsilon, \frac{1}{2}[$. On a alors

$$\frac{T_{\text{id},\varepsilon}(b) - T_{\text{id},\varepsilon}(a)}{b - a} > 1,$$

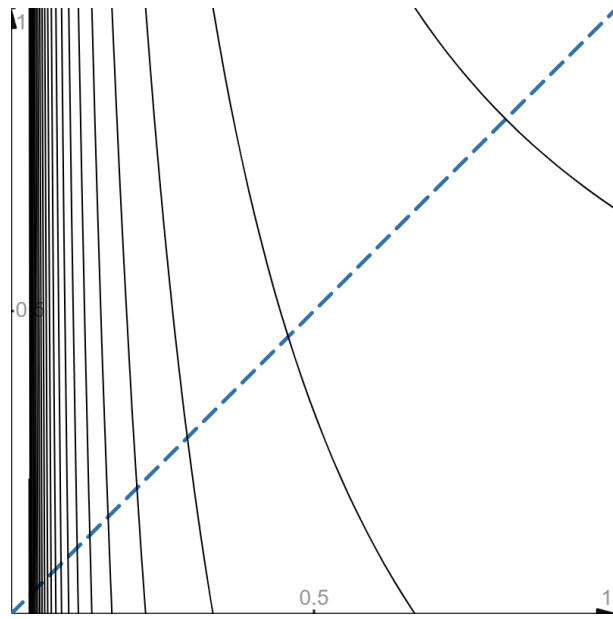


FIGURE 2.16 – Graphe de $T_{G3/2}$ tronqué à $x = 0.03$

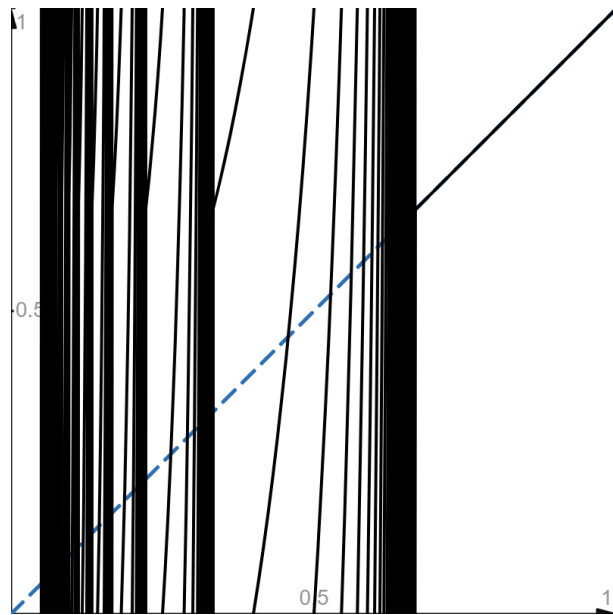
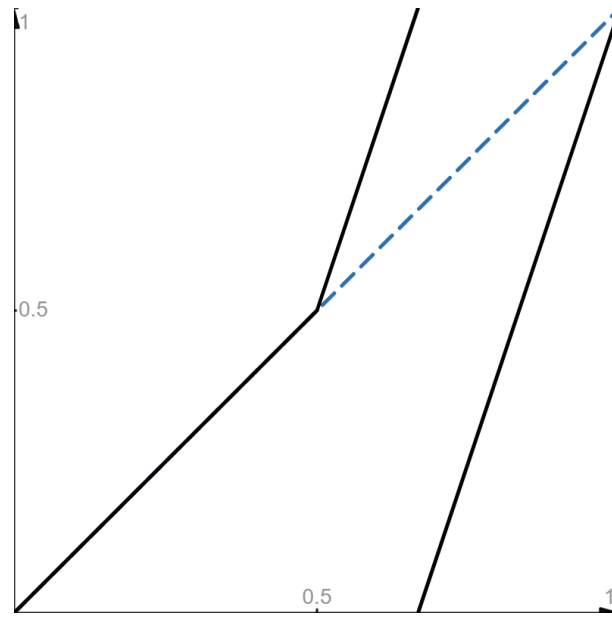


FIGURE 2.17 – Graphe de $T_{G3/2}^2$ tronqué à $x=0.05$

FIGURE 2.18 – Graphe de T_{id}

et donc d'après la remarque précédente, pour tout entier strictement positif k , on a

$$\frac{T_{\text{id},\varepsilon}^k(b) - T_{\text{id},\varepsilon}^k(a)}{b - a} > 1.$$

Supposons maintenant que $b \in [\varepsilon, \frac{1}{2}[$. Alors $T_{\text{id},\varepsilon}^{\lceil \frac{1-2b}{\varepsilon} \rceil}(b) > \frac{1}{2}$, et on aboutit à la même conclusion sur les pentes.

Exemple 2.2.18. Nous allons maintenant modifier l'application $T_{\text{Sf}} : x \mapsto \{2x^2\}$ en une application de numération. Nous allons partir de la version par les parties entières supérieures, et la modifier au voisinage de 1 pour compenser l'asymptote horizontale en 0, par exemple en s'arrangeant de sorte à ce que pour tout $x \in [7/8, 1[$, $T'(x) * T'(T(x)) > 1$.

$$\tilde{T}_{\text{mod}} : [0, 1[\longrightarrow [0, 2[$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - 2x^2 & \text{si } x \in]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[\\ 3 - 2x^2 & \text{si } x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{17}{20}[\\ (\frac{\sqrt{5} \log(20)}{2} - \frac{11}{20})x - \frac{17\sqrt{5} \log(20)}{40} + \frac{2509}{400} & \text{si } x \in [\frac{17}{20}, \frac{19}{20}[\\ 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-x} \log(1-x) & \text{sinon,} \end{cases}$$

voir la figure 2.20.

Construction de singularités d'une période quelconque

Pour construire des singularités d'une période quelconque, on procède comme suit. On commence par délimiter les composantes continues, en notant $i_0 = 0, i_1, \dots, i_k$ les réels correspondant à leurs bordures gauche. Pour simplifier, nous utiliserons les chiffres de 0 à k , de gauche à droite de sorte que pour j allant de 0 à k , i_j est la bordure gauche de la composante continue correspondant au chiffre j . On trace ensuite les droites verticales d'équation $y = i_j$ pour j allant de 0 à k , ainsi que leurs symétriques par rapport à la première diagonale. Ces rectangles ont la propriété suivante : si x est un réel de $[0, 1[$ qui a son image par une application vérifiant la condition \mathcal{C} donnée dans le rectangle délimité par les droites verticales

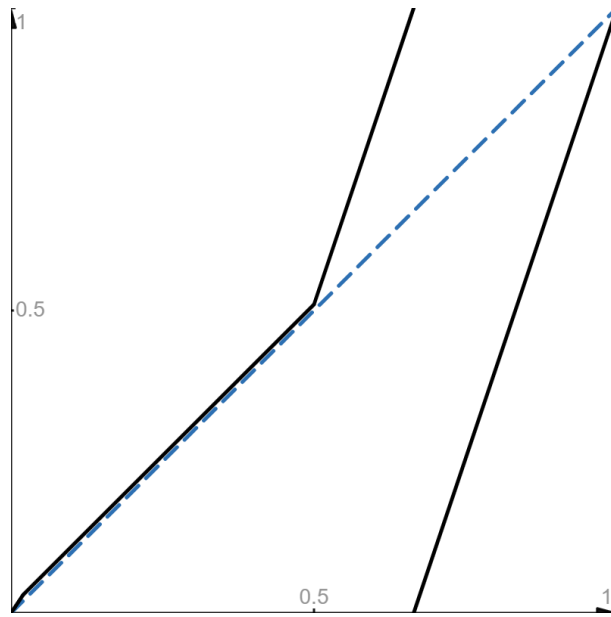


FIGURE 2.19 – $T_{id,0,02}$

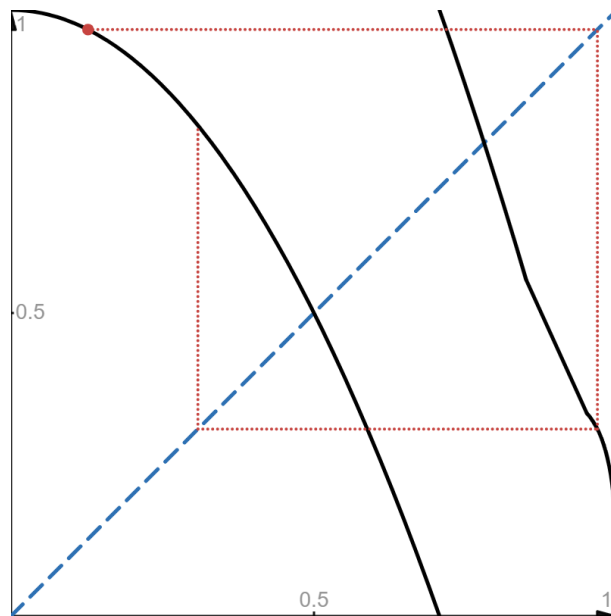
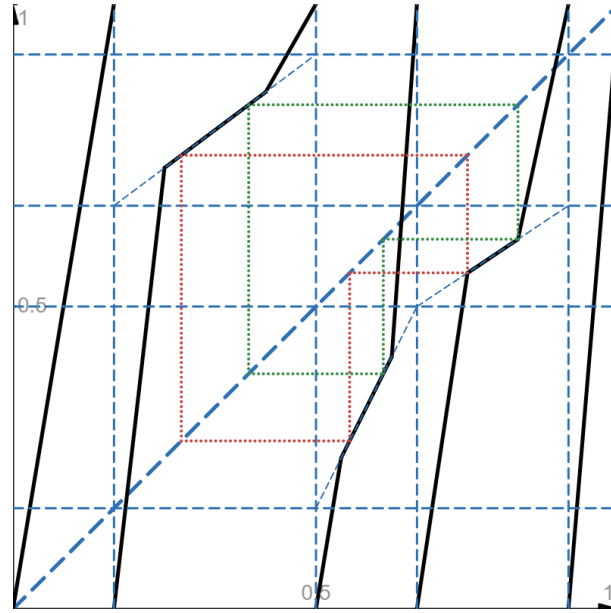


FIGURE 2.20 – Graphe de T_{mod}

FIGURE 2.21 – Graphe de l'application T_{morc} , avec lignes de constructions et orbites des réels $3/4$ et $5/6$

$(y = i_j)$ et $(y = i_{j+1})$ d'une part, et par les droites horizontales $(x = i_\ell)$ et $(x = i_{\ell+1})$ d'autre part, alors les deux premiers chiffres de son écriture associée à l'application correspondante sont j et ℓ . Ainsi, une fois qu'on se munit de la périodicité $a_0 a_1 \dots a_m$ que l'on souhaite imposer à la singularité, on considère le rectangle délimité par les droites $(y = i_{a_0})$, $(y = i_{a_0+1})$, $(x = i_{a_1})$ et $(x = i_{a_1+1})$ dont on trace la première diagonale. On place ensuite deux points sur cette diagonale, puis on place les images de ces points sur la première diagonale du rectangle délimité par les droites $(y = i_{a_1})$, $(y = i_{a_1+1})$, $(x = i_{a_2})$ et $(x = i_{a_2+1})$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on retombe sur les points que l'on a placés au départ. Toute application T vérifiant la condition \mathcal{C} et passant par les points que l'on a placés en respectant également les composantes continues imposées au début est telle que les réels correspondant aux abscisses des deux premiers points que l'on a placés (et tous ceux compris entre les deux) ont la même T écriture, suivant la périodicité demandée.

Exemple 2.2.19. Considérons l'application suivante, qui vérifie la condition \mathcal{C} .

$$\tilde{T}_{\text{morc}} : [0, 1[\longrightarrow [0, 5[$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 6x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{6}[\\ \frac{35}{4}x - \frac{11}{24} & \text{si } x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{4}[\\ \frac{3}{4}x + \frac{37}{24} & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{5}{12}[\\ \frac{7}{4}x + \frac{27}{24} & \text{si } x \in [\frac{5}{12}, \frac{1}{2}[\\ 6x - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{13}{24}[\\ 2x + \frac{7}{6} & \text{si } x \in [\frac{13}{24}, \frac{15}{24}[\\ 14x - \frac{19}{3} & \text{si } x \in [\frac{15}{24}, \frac{2}{3}[\\ \frac{20}{3}x - \frac{13}{9} & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}[\\ \frac{2}{3}x + \frac{55}{18} & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, \frac{5}{6}[\\ \frac{14}{3}x - \frac{5}{18} & \text{si } x \in [\frac{5}{6}, \frac{11}{12}[\\ 12x - 7 & \text{si } x \in [\frac{11}{12}, 1[. \end{cases}$$

voir la figure 2.21. Cette application n'est pas de numération, par exemple elle associe à tous les réels de l'intervalle $[3/4, 5/6]$ le développement $0, (423)^\infty$.

La méthode de construction que l'on vient de voir peut aussi s'appliquer à des périodes où le même

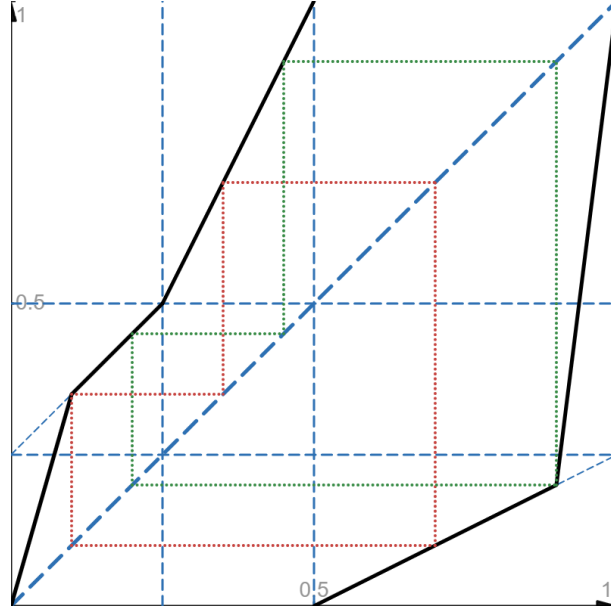


FIGURE 2.22 – Graphe de T_{rm} avec traits de construction et orbites de $1/10$ et $1/5$

chiffre apparaît plusieurs fois, en séparant la composante continue associée à ce chiffre en plusieurs zones.

Exemple 2.2.20. Considérons l'application suivante, qui vérifie la condition \mathcal{C} .

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{rm} : [0, 1[&\longrightarrow [0, 2[\\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{7}{2}x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{10}[\\ x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in [\frac{1}{10}, \frac{1}{4}[\\ 2x & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{9}{10}[\\ 8x - 6 & \text{si } x \in [\frac{9}{10}, 1[\end{cases} \end{aligned}$$

voir la figure 2.22.

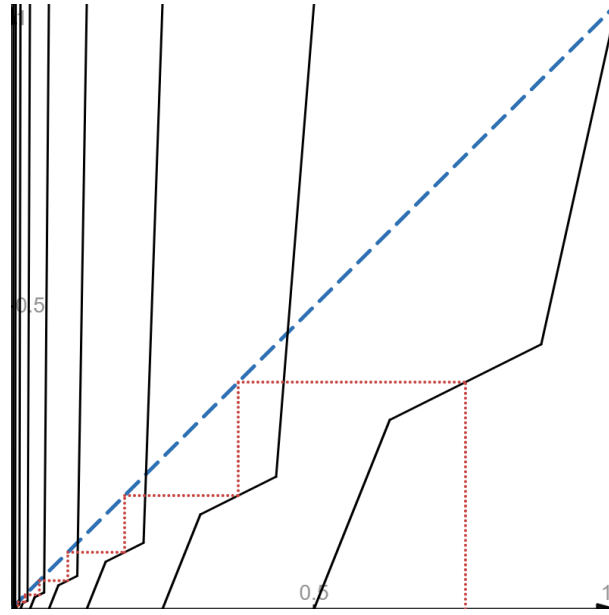
Cette application n'est pas de numération, par exemple elle associe à tous les réels de l'intervalle $[1/10, 1/5]$ le développement $0, (001)^\infty$.

Proposition 2.2.21 (Réciproque partielle de la proposition 2.2.9). *Soit \tilde{T} une application vérifiant la condition \mathcal{C} . Alors :*

- *s'il existe un intervalle J et un entier positif k tel que $T^k(J) \subset J$, alors T n'est pas de numération.*
- *si de plus il existe $0 \leq a < b < 1$ tels que l'intervalle $[a, b]$ est dans l'image de toutes les composantes connexes de T , alors s'il existe un intervalle I de $[0, 1[$ tel que la longueur de l'intervalle $T^n(I)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, T n'est pas une application de numération.*

Démonstration. Le premier point est clair. Pour le second point, il suffit de remarquer que l'image d'un intervalle à cheval sur deux composantes continues de T contiendra des éléments supérieurs ou égaux à b et des éléments inférieurs ou égaux à a , puisqu'on a imposé que les composantes continues de T aient la même monotonie. \square

Exemple 2.2.22. On considère la fonction T_{si} définie sur chaque intervalle de la forme $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[$ pour

FIGURE 2.23 – Graphe de T_{si} tronqué à $x = 0.002$ avec l'orbite de $1/2$.

tout n strictement positif, par

$$T_{\text{si}} : \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[\longrightarrow [n, n+1[\right.$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{5}{2}x - \frac{5}{2^{n+1}} + n & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{5}{2^{n+2}}[\\ \frac{1}{2}x + n & \text{si } x \in \left[\frac{5}{2^{n+2}}, \frac{7}{2^{n+2}}[\\ (2^{n+2} - \frac{7}{2})x + n - 7 + \frac{7}{2^n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tous les éléments de l'intervalle $[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}[$ ont alors la même écriture en base T_{si} , constituée de tous les entiers strictement positifs enchaînés dans l'ordre croissant. Cette singularité est aperiodique et découle du fait que la longueur des images successives de l'intervalle $[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$ tend vers 0, mais on peut s'arranger pour modifier l'application T_{si} pour que ce soit une application de numération en ajoutant des chiffres (et donc des composantes continues). Pour ce faire, on ajoute 1 aux images de tous les réels à gauche du point où l'on veut décaler, et on peut par exemple couper l'intervalle $[\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$ en son milieu, son image en son troisième quart, l'image suivante en son premier quart, ... et ainsi de suite pour s'assurer que deux réels distincts n'aient jamais la même écriture (les conditions pour la réciproque partielle de 2.2.9 ne sont alors pas vérifiées). On note T_{dsi} l'application ainsi obtenue, dont le graphe est représenté à la figure 2.24.

Comparaison avec les conditions de Rényi

Dans son article de 1957 [Rén57], Rényi décrit des systèmes de numération sous la forme

$$x = f(\varepsilon_1 + f(\varepsilon_2 + f(\dots))),$$

où les ε_i sont des chiffres, c'est-à-dire de manière inverse à celle que l'on a employée (en réalité, il utilise aussi l'application inverse ϕ de f , qui correspond à nos applications \tilde{T} , mais énonce les conditions d'existence à partir de f). Il donne les conditions suivantes dans le cas où f est décroissante :

- A1) $f(1) = 1$.
- A2) La fonction f est continue, strictement positive et strictement décroissante sur $[0, T]$, où $2 < T \leq +\infty$.
- A3) Pour tous t_1 et t_2 tels que $1 \leq t_1 < t_2$, on a $|f(t_1 - t_2)| \leq t_2 - t_1$ et il existe $0 < \lambda < 1$ tel que $|f(t_2) - f(t_1)| \leq \lambda(t_2 - t_1)$ quand $1 + f(2) < t_1 < t_2$.

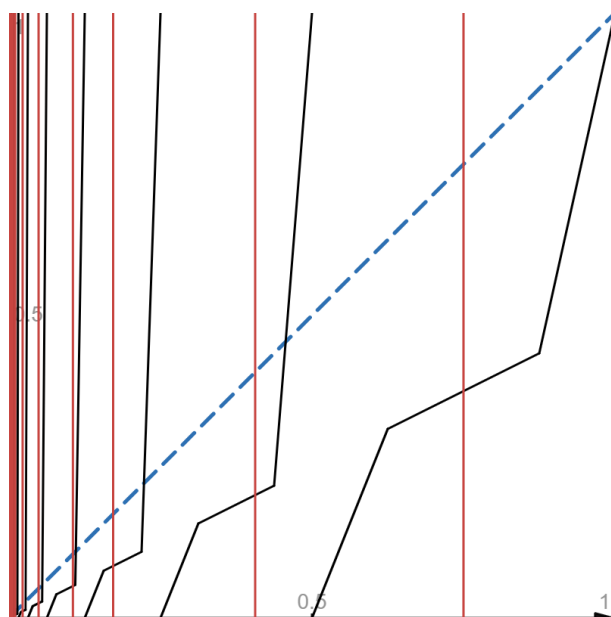


FIGURE 2.24 – Graphe de T_{dsi} tronqué à $x = 0,002$ faisant apparaître les composantes continues additionnelles

Il étend par là les conditions de Bissinger [Bis44], qui les donnait uniquement dans le cas où T est infini (adapté à l'étude des fractions continues, sur lesquelles portait son étude).

Pour les fonctions croissantes, il donne les conditions :

- B1) $f(0) = 0$.
- B2) f est continue et strictement croissante sur $[0, T]$, où $1 < T \leq +\infty$, et $f(t) = 1$ pour tout $t \geq T$.
- B3) $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} < 1$ pour $0 \leq t_1 < t_2$.

Il étend également des conditions antérieures, données par Everett [Eve46], en intégrant le cas où la borne T du support de f n'est plus entière, ce qui permet l'étude des β -développements (comme nous le verrons dans le chapitre 3).

Si l'on compare la condition \mathcal{C} donnée en 2.2.1 à ces conditions :

- Comme \tilde{T} est définie sur $[0, 1[$ entier, sa réciproque (qui existe, quitte à ajuster son ensemble de définition, car \tilde{T} est injective) doit être continue là où elle est définie, sauf éventuellement en certains entiers (quand elle est monotone, on peut éviter ces discontinuités quitte à renuméroter). Par contre, comme \tilde{T} n'est pas forcément continue partout, sa réciproque peut-être définie sur une union d'intervalles disjoints.
- Dans ce cas, le point 6 de la condition \mathcal{C} implique qu'il y a au moins un entier compris entre deux intervalles disjoints consécutifs de l'ensemble de définition de la réciproque de \tilde{T} .
- J'ai pris le parti d'imposer la condition \mathcal{C}^1 par morceaux par commodité, notamment car la condition sur la dérivée est plus aisée à vérifier pour des fonctions usuelles dans le corollaire 2.2.11 qu'une condition sur les pentes. Les conditions sont cependant de même nature, avec un changement de sens dans l'inégalité dû au passage à la réciproque. On peut également noter que le caractère Lipschitzien induit par les conditions de Rényi induit au moins la dérivabilité presque partout de la fonction f , et que par ailleurs, les conditions dans le cas décroissant sont un peu plus faibles vu qu'on autorise que la pente de f soit égale à 1 en partie. Cela est dû au fait que la démonstration par Rényi de la validité des systèmes sous ces conditions fait apparaître un produit de pentes dont on peut regrouper certains termes, et on pourrait ainsi compenser de même manière des pentes strictement plus petites que 1 en valeur absolue, ce qui est l'idée directrice utilisée dans l'exemple 2.2.18.
- Les conditions $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$ (A1 et B1) imposent l'existence de développements finis. Dans

la condition \mathcal{C} , 0 et 1 ne sont pas forcément dans l'ensemble de départ de la réciproque. Mis à part les différences liées à la continuité, la condition \mathcal{C} est proche des conditions de Rényi. L'utilisation des applications \tilde{T} plutôt que leur réciproque est cependant plus naturelle à mon sens pour étudier la validité des systèmes ne vérifiant pas les conditions génériques sur les pentes ou dérivées. En effet, là où on examine de potentiels défauts d'injectivité pour le processus défini à partir de la fonction \tilde{T} , il faudrait pour la réciproque étudier des défauts de surjectivité dans $[0, 1[$ pour le processus

$$x = f(\varepsilon_1 + f(\varepsilon_2 + f(\dots))).$$

Les singularités peuvent néanmoins apparaître assez rapidement dans ce point de vue. Par exemple, pour la fonction $\tilde{T}_{\text{SF}} : x \mapsto 2x^2$, le processus associé est :

$$x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{2} \dots}}}$$

où les chiffres ε_i prennent la valeur 1 ou 2, et il est aisé de voir que dès qu'au moins un des chiffres est non nul, on a $x > 1/2$.

2.3 Mesures invariantes et normalité

Maintenant que nous avons introduit le point de vue dynamique sur les systèmes de numération, nous allons voir comment il permet de généraliser la notion de normalité.

2.3.1 Cas des fractions continues, mesures invariantes

Examinons le cas des fractions continues. Comme l'ensemble des chiffres est de cardinal infini, il est immédiat que les définitions données pour la normalité dans le cadre des bases réelles ne s'étendent pas. Nous allons donner une nouvelle définition de la normalité, plus générale, faisant appel au point de vue dynamique (voir par exemple [Bug12, Chapter 9] ou [DK02, Chapter 3]). Reprenons tout d'abord le graphe de l'application T_G .

Une première idée d'extension, naïve, serait d'utiliser la longueur de chaque composante connexe. Ainsi, on attendrait pour chaque entier $n \geq 1$ une probabilité d'apparition en tant que chiffre dans les développements en fraction continue de $\frac{1}{n(n+1)}$. Cependant, en examinant le graphe 2.2 de plus près, on voit que dans chaque composante, l'application T_G est plus souvent inférieure à $1/2$ que supérieure à $1/2$, ce qui implique que la probabilité d'apparition du chiffre 1 selon la longueur des cylindres est de $1/2$ au premier chiffre, mais est strictement inférieure à $1/2$ au deuxième chiffre et pour les suivants. La notion de proportion que l'on utilise ne permet donc pas de définir une probabilité d'apparition des chiffres indépendamment du rang dans le développement considéré. Une notion de proportion plus adaptée à la situation va nous être donnée par ce que l'on appelle les mesures invariantes.

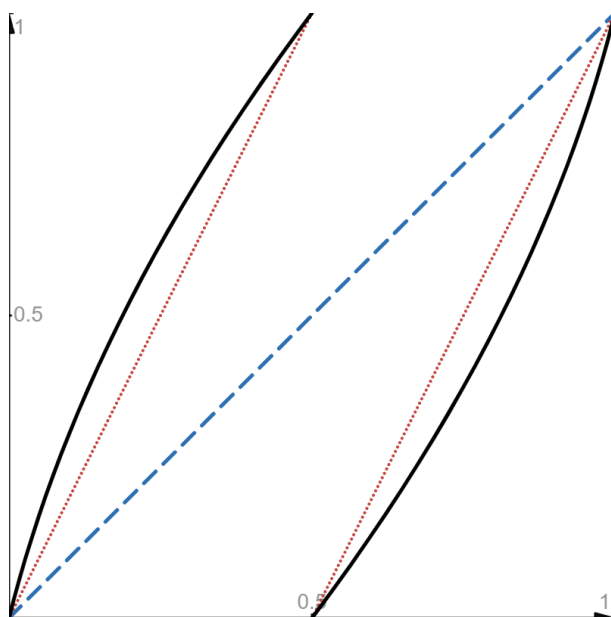
Remarque 2.3.1. Les notions et propriétés que l'on va évoquer dans ce chapitre sont valables pour des espaces mesurés généraux, mais on les énoncera dans le cas qui nous intéresse, celui de $[0, 1[$ muni de la tribu de Lebesgue.

Définition 2.3.2. Soit $T : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ une application. Une mesure μ est dite T -invariante si pour tous réels a et b tels que $0 \leq a < b < 1$ on a

$$\mu(T^{-1}([a, b])) = \mu([a, b]).$$

Si T est une application de numération, μ une mesure T -invariante et d un chiffre en base T , la probabilité $\mu(d) = \mu(d \dots) = \mu(\cdot d \dots) = \dots$ est bien définie, indépendamment du rang. Grâce à cette notion, on peut étendre la notion de normalité aux systèmes dynamiques.

Définition 2.3.3. Soit T une application de numération, et μ une mesure T -invariante. Un réel $x \in [0, 1[$ est dit μ -normal en base T si pour tout bloc B fini admissible en base T , la fréquence d'apparition de B dans le développement en base T de x est $\mu(B)$.

FIGURE 2.25 – Graphe de \tilde{T}_{2ml1} , comparé à celui de T_2 .

Remarque 2.3.4. Si on dispose de plusieurs mesures invariantes pour une même application T , on utilise un invariant de mesure appelé *entropie* : on considère en priorité l'unique mesure d'entropie maximale (sans informations sur l'entropie, ou si l'on veut considérer une mesure d'entropie non maximale, on parlera de normalité en précisant la mesure en question).

Remarque 2.3.5. Même si les mesures invariantes nous donnent des notions de proportions plus adaptées aux systèmes de numération associés, on n'a pas pour autant en général équirépartition ou indépendance des chiffres pour ces mesures.

2.3.2 Quelques exemples de mesures invariantes

Mesures invariantes pour les systèmes usuels

- En base entière, la mesure invariante utilisée est la mesure de Lebesgue, que l'on notera λ (ce qui fait coïncider les deux définitions de normalité). En effet la préimage d'un intervalle I inclus dans $[0, 1[$ par l'application $T_b : x \mapsto \{bx\}$, pour b un entier supérieur ou égal à 2 est une union de b intervalles distincts de longueur $|I|/b$, et donc la longueur (mesure de Lebesgue) totale reste inchangée.
- La mesure de Lebesgue est également invariante pour les séries de Lüroth, et dans les exemples suivants où les composantes continues ne sont pas affines, construits en déformant l'application T_2 .

Exemple 2.3.6. Considérons l'application

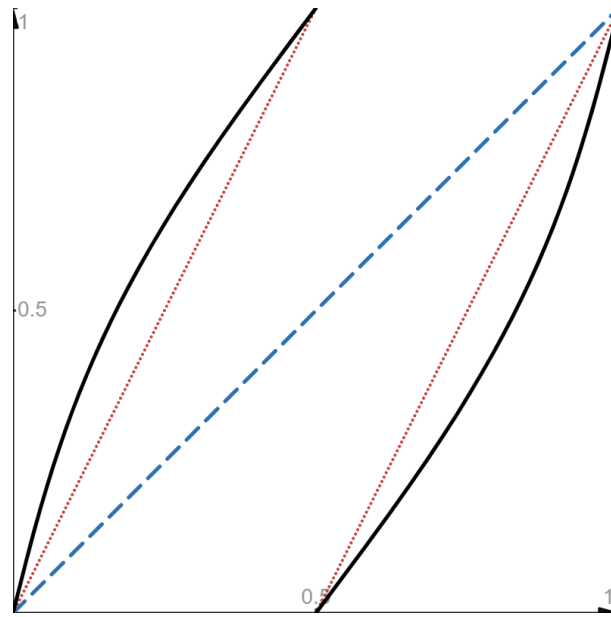
$$\tilde{T}_{2ml1} : [0, 1[\longrightarrow [0, 2[\\ x \longmapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+16x}}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17-16x}}{2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

voir la figure 2.25.

Cette application est de numération, et la mesure de Lebesgue est invariante vis-à-vis de cette application.

Exemple 2.3.7. Considérons l'application \tilde{T}_{2ml2} telle que

$$\tilde{T}_{2ml2}^{-1} : [0, 2[\longrightarrow [0, 1[\\ y \longmapsto \frac{y}{2} - \frac{1}{4\pi} \sin(\pi y),$$

FIGURE 2.26 – Graphe de \tilde{T}_{2ml2} , comparé à celui de T_2

voir la figure 2.26.

L'application \tilde{T}_{2ml2} est de numération, et la mesure de Lebesgue est invariante vis-à-vis de \tilde{T}_{2ml2} .

— Pour les fractions continues, la mesure invariante utilisée est la mesure de Gauss

$$\mu_G = \frac{1}{\log(2)} \int \frac{1}{1+x} d\lambda(x).$$

— Pour toute base β avec $\beta > 1$ réel, on utilise une mesure de Parry μ_β (nous détaillerons la définition des mesures de Parry dans le chapitre suivant).

Mesures invariantes pour des systèmes de numérations définis par des application polynomiales

En général, il est difficile de trouver des mesures invariantes intéressantes pour des applications quelconques. Nous allons dans cette partie construire des mesures invariantes pour certaines applications polynomiales. Tout d'abord, examinons le cas de l'application de numération présentée dans l'exemple 2.2.13 : $T_{x+x^2} : x \mapsto \{x + x^2\}$. Soit a un élément de $[0, 1[$, et notons $c < d$ ses deux préimages par T dans $[0, 1[$. La fonction $F(x) = \log(x + x^2)$ pourrait permettre de définir une mesure invariante pour T . En effet, on a $F(c) = \log(a)$, $F(d) = \log(a + 1)$ et $F(c) + F(d) = \log(a + a^2) = F(a)$. Cependant, la fonction F n'est pas définie en 0, et il n'est pas possible d'obtenir une mesure invariante convenable pour T à partir d'elle. Néanmoins, en ajoutant un degré de liberté sur les applications, on va pouvoir utiliser ce procédé pour construire des mesures invariantes. Voyons de quelle manière, d'abord sur un exemple proche.

Exemple 2.3.8. Nous allons construire une mesure invariante de base logarithmique pour une fonction de la forme $T : x \mapsto \{ax + bx^2\}$ avec $a \geq 1$, $b > 0$ et $a + b = 2$. Sous ces conditions, la fonction T est C^1 , strictement croissante et de dérivée strictement supérieure à 1 presque partout, et est donc une application de numération. Tout élément z de $[0, 1[$ a deux préimages $y < w$ dans $[0, 1[$ par la fonction T . Notre point de départ, en s'inspirant du cas de T_{x+x^2} , va être d'essayer de construire une mesure invariante à partir de la fonction $\log(1 + ax + bx^2)$. Nous allons donc chercher deux constantes γ et ι strictement positives telles que l'égalité suivante est vérifiée pour certaines valeurs de a et b :

$$\log(1 + \gamma(ay + by^2)) + \log(1 + \gamma(aw + bw^2)) = \log(\iota[1 + \gamma(az + bz^2)]).$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \log(1 + \gamma(ay + by^2)) + \log(1 + \gamma(aw + bw^2)) \\
&= \log(1 + \gamma(z)) + \log(1 + \gamma(z + 1)) \\
&= \log(1 + \gamma(2z + 1) + \gamma^2(z^2 + z)) \\
&= \log\left((1 + \gamma) + (1 + \gamma)\gamma\left(z^2 \frac{\gamma}{\gamma + 1} + z \frac{\gamma + 2}{\gamma + 1}\right)\right).
\end{aligned}$$

En posant $\gamma > 0$ quelconque, $\iota = \gamma + 1$, $a = \frac{\gamma+2}{\gamma+1}$ et $b = \frac{\gamma}{\gamma+1}$, l'égalité est vérifiée, et de plus on a bien $a > 1$, $b > 0$ et $a + b = 2$. On peut donc construire des mesures invariantes pour les fonctions de la forme suivante.

Pour $\gamma > 0$, on définit l'application $\tilde{T}_{2,\gamma} : x \mapsto \frac{\gamma+2}{\gamma+1}x + \frac{\gamma}{\gamma+1}x^2$. L'application $T_{2,\gamma}$ admet $\mu_{2,\gamma}$ comme mesure invariante, définie comme suit :

$$\mu_{2,\gamma} = \frac{1}{C} \int \frac{\gamma^2 + 2\gamma + 2\gamma^2 x}{\gamma + 1 + (\gamma^2 + 2\gamma)x + \gamma^2 x^2} d\lambda,$$

où C est l'unique constante telle que $\mu_{2,\gamma}([0, 1]) = 1$.

Cette construction peut être étendue à des polynômes de plus grand degré.

Théorème 2.3.9. Soient $n \geq 2$ un entier, $\gamma > 0$ un réel. L'application

$$\tilde{T}_{n,\gamma} : x \mapsto \frac{P_\gamma(x) - P_\gamma(0)}{\gamma P_\gamma(0)},$$

avec

$$P_\gamma(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \gamma(i + x))$$

est une application de numération et $T_{n,\gamma}$ admet pour mesure invariante la mesure $\mu_{n,\gamma}$ définie par

$$\mu_{n,\gamma} = \frac{1}{C} \int \frac{P'_\gamma(x)}{P_\gamma(x)} d\lambda,$$

où C est l'unique constante telle que $\mu_{n,\gamma}([0, 1]) = 1$.

Démonstration. On va suivre le même procédé que l'exemple précédent mais cette fois en partant de la fonction $a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, avec $a_1 > 1$, $a_i > 0$ pour i entre 2 et n et $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. L'image réciproque d'un point z de $[0, 1]$ par la partie fractionnaire de cette fonction est constituée de n points $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. On cherche alors deux constantes strictement positives γ et ι telles que

$$\sum_{i=1}^n \log(1 + \gamma(a_1y_i + a_2y_i^2 + \dots + a_ny_i^n)) = \log(\iota(1 + \gamma(a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n))).$$

En développant, on obtient

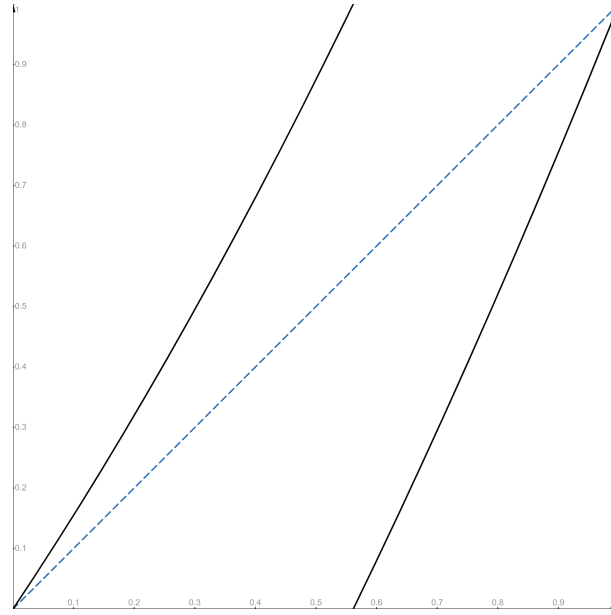
$$\log(1 + \gamma z) + \dots + \log(1 + \gamma(z + n - 1)) = \log(P_\gamma(z)),$$

avec

$$P_\gamma(z) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \gamma(z + i))$$

On pose donc $\iota = P_\gamma(0)$ et

$$1 + \gamma(a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n) = \frac{P_\gamma(z)}{P_\gamma(0)}.$$

FIGURE 2.27 – Graphe de la fonction $T_{2,1}$

Quand γ est strictement positif, il est clair que les coefficients du polynôme P_γ sont strictement positifs. De plus, le coefficient du monôme x de $P_\alpha(x)$ est

$$\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ j \neq i}} (1 + j\gamma) = P_\gamma(0) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \gamma i} > P_\gamma(0),$$

ce qui garantit que la dérivée de $P_\gamma(x)/P_\gamma(0)$ est toujours strictement plus grande que 1, et que l'application que l'on considère est bien une application de numération. Enfin, on remarque que la somme des a_i vaut

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_\gamma(1)}{P_\gamma(0)} - 1 \right) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \gamma(1+i))}{\gamma \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \gamma i)} - \frac{1}{\gamma} = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + \gamma i)}{\gamma \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \gamma i)} - \frac{1}{\gamma} = \frac{1 + \gamma n - 1}{\gamma} = n.$$

Le résultat en découle, en notant que

$$\frac{d}{dx} \log\left(\frac{P_\gamma(x)}{P_\gamma(0)}\right) = \frac{P'_\gamma(x)}{P_\gamma(x)}.$$

□

Remarque 2.3.10. Les mesures $\mu_{n,\gamma}$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exemple 2.3.11. La fonction $T_{2,1} : x \mapsto \{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2\}$ admet pour mesure invariante

$$\mu_{2,1} = \frac{1}{\log(3)} \int \frac{3 + 2x}{2 + 3x + x^2} d\lambda.$$

Le graphe de cette fonction est représenté dans la figure 2.27.

Exemple 2.3.12. Soit $a \in]1, 2[$ un réel. La fonction

$$T_{2, \frac{2-a}{a-1}} : x \mapsto \{ax + (2-a)x^2\}$$

admet pour mesure invariante

$$\mu_{2, \frac{2-a}{a-1}} = \frac{1}{\log\left(\frac{3-a}{a-1}\right)} \int \frac{(a-1)(a+(4-2a)x)}{2-a+(a-1)(ax+(2-a)x^2)} d\lambda.$$

Exemple 2.3.13. Si par contre n est plus grand que 2, étant donné que les coefficients a_i s'expriment comme rapport de deux polynômes de degré $n-1$ en γ , il ne peut y avoir qu'un nombre fini de valeurs de γ quand on fixe la valeur d'un des coefficients. Par conséquent, les combinaisons de réels a_i strictement positifs telles que $a_1 > 1$ et que la somme des a_i est égale à n ne sont pas toutes possibles.

Exemple 2.3.14. Par exemple, cherchons les applications $\tilde{T}_{3,\gamma}$ avec γ strictement positif qui sont de la forme

$$\frac{3}{2}x + bx^2 + \left(\frac{3}{2} - b\right)x^3.$$

On doit alors avoir

$$\frac{\sigma_2^\gamma}{\sigma_3^\gamma} = 1 + \frac{1}{1+\gamma} + \frac{1}{1+2\gamma} = \frac{3}{2},$$

c'est-à-dire que γ est solution de l'équation

$$\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma - \frac{3}{2} = 0,$$

dont l'unique solution strictement positive est $3/4 + \sqrt{33}/4$. On a donc

$$T_{3, \frac{3+\sqrt{33}}{4}}(x) = \frac{3}{2}x + \left(\frac{27}{8} - \frac{3\sqrt{33}}{8}\right)x^2 + \left(-\frac{15}{8} + \frac{3\sqrt{33}}{8}\right)x^3,$$

et

$$\mu_{3, \frac{3+\sqrt{33}}{4}}(x) = \frac{1}{C} \int \frac{450 + 78\sqrt{33} + (738 + 126\sqrt{33})x + (243 + 45\sqrt{33})x^2}{136 + 48\sqrt{33} + (450 + 78\sqrt{33})x + (369 + 63\sqrt{33})x^2 + (81 + 15\sqrt{33})x^3} d\lambda,$$

où C est l'unique constante telle que $\mu_{3, \frac{3+\sqrt{33}}{4}}([0, 1]) = 1$.

Exemple 2.3.15. On a

$$\tilde{T}_{5,1}(x) = \frac{137}{60}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{17}{24}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{120}x^5,$$

et

$$\mu_{5,1} = \frac{1}{C} \int \frac{274 + 410x + 275x^2 + 60x^3 + 5x^4}{120 + 274x + 205x^2 + 85x^3 + 15x^4 + x^5},$$

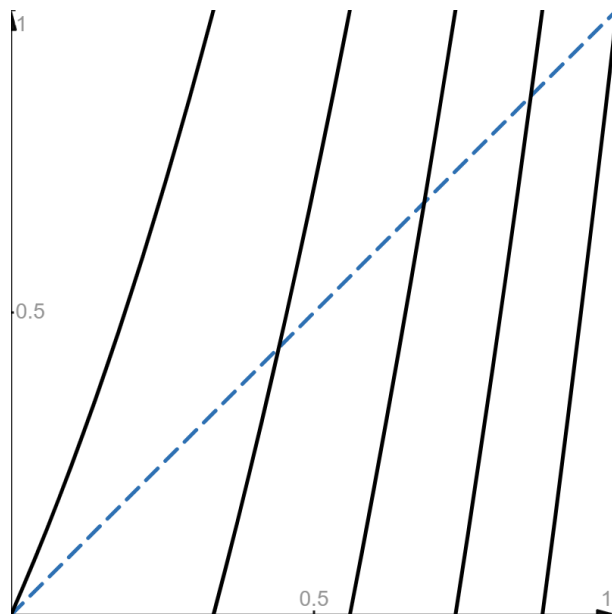
où C est l'unique constante telle que $\mu_{5,1}([0, 1]) = 1$. Le graphe de $T_{5,1}$ est représenté à la figure 2.28.

De manière générale, Lasota et Yorke ont établi l'existence de mesures équivalentes à Lebesgue pour une classe de fonctions vérifiant la condition \mathcal{C} , en utilisant l'opérateur de Perron-Frobenius. Une reformulation du théorème 3 de cet article nous donne par exemple le résultat suivant.

Proposition 2.3.16 (Corollaire de [LY73], Theorem 3). *Soit $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction C^2 par morceaux avec un nombre fini de discontinuités telle qu'il existe un entier η_0 pour lequel $\inf |(T^{\eta_0})'(x)| > 1$. Alors T admet une mesure invariante absolument continue sur $[0, 1]$.*

Par la suite, Li et Yorke ont établi des résultats supplémentaires sur la forme des mesures invariantes possibles qui sont des combinaisons linéaires de certaines mesures élémentaires.

Théorème 2.3.17 ([LY78], Theorem 1). *Soit T une fonction C^2 par morceaux sur $[0, 1]$ telle que $\inf |T'(x)| > 1$. Alors il existe une famille finie d'ensembles L_1, \dots, L_n et une famille finie de fonctions f_1, f_2, \dots, f_n pour lesquelles les mesures $\int f_i d\lambda$ sont T -invariantes telles que*

FIGURE 2.28 – Graphe de $T_{5,1}$

1. Pour $1 \leq i \leq n$, L_i est une union d'intervalles fermés.
2. L'ensemble $L_i \cup L_j$ est au plus fini lorsque $i \neq j$.
3. On a $T(L_i) \subset L_i$.
4. Il y a au moins un point où T n'est pas C^2 dans l'intérieur de chaque ensemble L_i .
5. f_i est strictement positive en presque tout point de L_i et nulle partout ailleurs.
6. Toute fonction vérifiant les deux assertions précédentes pour un certain i est presque partout égale à f_i .
7. Toute fonction f telle que la mesure $\int f d\lambda$ est T -invariante peut s'écrire sous la forme $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$ où les a_i sont des constantes.

Une conséquence de ce théorème, donnée dans [LY78], est que pour une fonction T vérifiant ces conditions qui est C^2 partout sauf en un seul point, il n'y a qu'un seul ensemble L_1 et la mesure T -invariante absolument continue vis-à-vis de la mesure de Lebesgue dont l'existence a été montrée dans [LY73] est unique à constante multiplicative près. Ce résultat d'unicité peut s'étendre à d'autres types de fonctions, comme cela a été fait par exemple dans [DK10], en imposant que la fonction T s'annule en tout point où elle n'est pas C^2 . Les conditions 1, 4 et 5 du théorème 2.3.17 imposent alors que tous les ensembles L_i , inclus dans $[0, 1]$, doivent contenir un intervalle contenant 0, d'où l'unicité par la condition 2.

Corollaire 2.3.18. *Pour tout n entier supérieur ou égal à 2 et tout réel strictement positif γ , la mesure $\mu_{n,\gamma}$ invariante par l'application*

$$T_{n,\gamma} : x \mapsto \left\{ \frac{P_\gamma(x) - P_\gamma(0)}{\gamma P_\gamma(0)} \right\},$$

que l'on a définie dans le théorème 2.3.9 est l'unique mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue invariante par $T_{n,\gamma}$ pour laquelle l'image de $[0, 1[$ est 1.

2.3.3 Normalité et Ergodicité

Nous allons revenir plus en détail sur la notion de normalité pour les systèmes de numération dynamiques que l'on a définie plus haut. Nous allons en particulier nous intéresser à la notion d'ergodicité pour

les mesures invariantes. On peut se référer à [DK02, Chapter 3] pour les résultats de théorie ergodique qui vont être énoncés.

Définition 2.3.19. Soit T une application de $[0, 1[$ dans lui-même, et μ une mesure T -invariante sur $[0, 1[$ muni de sa tribu de Lebesgue. L'application T est dite μ -ergodique si pour tout ensemble B tel que $T(B) = B$, la mesure $\mu(B)$ est soit nulle, soit pleine.

Si on considère une application de numération T qui admet une mesure invariante ergodique, le théorème ergodique de Birkhoff, que l'on va énoncer maintenant, permet de montrer que presque tout réel est normal pour le système de numération défini par T , muni de cette mesure invariante.

Théorème 2.3.20 (Théorème ergodique de Birkhoff). *Soit T une application de $[0, 1[$ dans lui-même, et μ une mesure T -invariante sur $[0, 1[$ muni de sa tribu de Lebesgue. Si de plus T est μ -ergodique alors, pour tout élément B de la tribu de Lebesgue de $[0, 1[$ et μ -presque tout x appartenant à $[0, 1[$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card}\{k = 1 \dots n \mid T^k(x) \in B\} = \mu(B).$$

Corollaire 2.3.21 (Extension du théorème de Borel). *Si \tilde{T} est une application de numération et si T admet une mesure T -invariante μ vis-à-vis de laquelle elle est ergodique, alors μ presque tout réel de $[0, 1[$ est μ -normal en base T .*

Notons que la condition «pour presque tout réel» dépend de la mesure invariante μ , et donc pour se retrouver dans les conditions exactes du théorème de Borel tel qu'on l'a énoncé, il faut que μ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

La propriété classique suivante nous sera utile pour déduire l'ergodicité des applications que l'on a définies dans la partie précédente à partir des conséquences des résultats de Lasota, Li et Yorke ([LY73], [LY78]) que l'on a énoncées.

Proposition 2.3.22. *Les mesures invariantes par une application donnée forment un convexe dont l'enveloppe est formée de celles qui sont ergodiques. En particulier, une mesure invariante est ergodique si et seulement si elle ne peut pas s'écrire sous la forme $t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 des mesures invariantes qui ne sont pas égales à constante multiplicative près, et $t \in]0, 1[$.*

Corollaire 2.3.23. *Si une application T admet une seule mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (à constante multiplicative près), alors celle-ci est ergodique.*

Démonstration. Soit μ une mesure T -invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue qui s'écrit sous la forme $t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 deux mesures distinctes à constante multiplicative près et $t \in]0, 1[$. Alors pour t' dans $]0, 1[$ différent de t , la mesure $\mu' = t'\mu_1 + (1-t')\mu_2$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, T -invariante et n'est pas un multiple de μ . \square

On déduit de ce corollaire et du corollaire 2.3.18 le résultat suivant.

Proposition 2.3.24. *Pour tout n entier supérieur ou égal à 2 et tout réel strictement positif γ , la mesure*

$$\mu_{n,\gamma} = \frac{1}{C} \int \frac{P'_\gamma(x)}{P_\gamma(x)} d\lambda,$$

avec C une constante normalisatrice, que l'on a définie dans le théorème 2.3.9 est ergodique vis-à-vis de l'application

$$T_{n,\gamma} : x \mapsto \left\{ \frac{P_\gamma(x) - P_\gamma(0)}{\gamma P_\gamma(0)} \right\}.$$

Théorème 2.3.25. *Il n'existe aucun réel strictement positif γ pour lequel les variables aléatoires représentant les chiffres dans les développements des réels de $[0, 1[$ en base $T_{2,\gamma}$ sont indépendantes.*

Démonstration. Soit $\gamma > 1$ un réel. Rappelons que la mesure $\mu_{2,\gamma}$ a été construite à partir de la fonction $\log(1 + \gamma \tilde{T}_{2,\gamma}(x))$. On a

$$\mu_{2,\gamma}(0) = \frac{\log(1 + \gamma)}{\log(1 + 2\gamma)},$$

et

$$\begin{aligned} \mu_{2,\gamma}(00) &= \frac{\log\left(1 + \gamma\left(-\frac{\gamma+2}{2\gamma} + \frac{\sqrt{(\gamma+2)^2 + 4\gamma(\gamma+1)}}{2\gamma}\right)\right)}{\log(1 + 2\gamma)} \\ &= \frac{\log\left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}\gamma^2 + 2\gamma + 1}\right)}{\log(1 + 2\gamma)}, \end{aligned}$$

où $\mu_{2,\gamma}(D)$ représente la mesure du cylindre associé au bloc de chiffres D pour $D = 0$ ou $D = 00$. Il en découle que

$$(\mu_{2,\gamma}(00) = \mu_{2,\gamma}(0)^2) \Leftrightarrow \left(\log\left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}\gamma^2 + 2\gamma + 1}\right) = \frac{\log(1 + \gamma)^2}{\log(1 + 2\gamma)}\right).$$

Posons pour tout x positif

$$f(x) = \log\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}x^2 + 2x + 1}\right) \log(1 + 2x) - \log(1 + x)^2.$$

On a $f(0) = 0$, et de plus

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, +\infty[, f'(x) &= \frac{2 \log\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}x^2 + 2x + 1}\right)}{1 + 2x} + \\ &\quad \frac{2\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}x^2 + 2x + 1}\right) \log(1 + 2x)}{-1 + \frac{\frac{5}{2}x + 2}{\sqrt{\frac{5}{4}x^2 + 2x + 1}}} - \frac{2 \log(1 + x)}{1 + x}. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités

$$\frac{\frac{5}{2}x + 2}{\sqrt{\frac{5}{4}x^2 + 2x + 1}} = \sqrt{\frac{\frac{25}{4}x^2 + 10x + 4}{\frac{5}{4}x^2 + 2x + 1}} < \sqrt{5} < \frac{7}{4},$$

$$1 + 2x < 2(1 + x)$$

et

$$\begin{aligned} 2 \log\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}x^2 + 2x + 1}\right) &= \log\left(\frac{6}{4}x^2 + 2x + 1 - x\sqrt{\frac{5}{4}x^2 + 2x + 1}\right) \\ &> \log\left(\frac{6}{4}x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{4}x^2 - x(x + 1)\right) \\ &> \log(x + 1), \end{aligned}$$

on obtient

$$\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) > \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{5} - 2\right) \log(x + 1) > 0,$$

et ainsi

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) \neq 0.$$

Ceci implique qu'il ne peut y avoir indépendance entre les chiffres en base $T_{2,\gamma}$ pour aucune valeur strictement positive de γ . \square

2.4 Développements possibles

La définition dynamique des systèmes de numération laisse beaucoup de liberté dans les systèmes que l'on considère. Cependant, il est rarement intéressant d'étudier des systèmes complètement abstraits : on va surtout essayer d'en trouver qui ont de bonnes propriétés (voir par exemple [Aki09]). Outre les propriétés liées à la normalité, comme le fait d'admettre une mesure invariante ergodique équivalente à la mesure de Lebesgue, on peut s'intéresser aux écritures simples (finies et ultimement périodiques) dans les systèmes étudiés. Par exemple, on a vu qu'en fraction continue, il y a un plus grand ensemble de nombres admettant des écritures simples qu'en base entière, et nous verrons que c'est le cas aussi en base Pisot 3.1.22. Par contre, pour qu'un système soit adéquat vis-à-vis de l'approximation diophantienne, il faut que les écritures finies dans ce système soient des nombres rationnels, ou au moins que l'on puisse associer de manière systématique à chaque cylindre un nombre rationnel compris dans ce cylindre. En ce qui concerne les systèmes que l'on a définis à partir des applications $T_{n,\gamma}$, on ne peut pas dire grand-chose sur les écritures simples en général outre le fait que si γ est algébrique, il en va de même pour tous les réels ayant des écritures finies ou ultimement périodiques en base $T_{n,\gamma}$.

Voici quelques pistes qu'il pourrait être intéressant d'étudier à partir des résultats de ce chapitre.

Question 2.4.1. Faute d'avoir l'indépendance entre les chiffres en base $T_{2,\gamma}$ vis-à-vis de la mesure $\mu_{2,\gamma}$, est-il possible de trouver de "bonnes" conditions sur leur répartition ?

Les résultats du chapitre 4 clarifieront ce que l'on entend par "bonne" condition ici.

Question 2.4.2. Existe-t-il des réels β strictement plus grands que 1 tels que tous les éléments de $\mathbb{Q}(\beta)$ ont des écritures finies en base $\tilde{T}_{\beta G} : x \mapsto \beta/x$ (que l'on a définie dans l'exemple 2.2.14) ? Tels que tous les nombres quadratiques sur $\mathbb{Q}(\beta)$ ont des écritures ultimement périodiques dans cette même base ?

Notons que ces transformations ont déjà été étudiées assez extensivement dans le cas où β est un entier (on parle alors souvent de N -continued fractions) [Bur+08], et [KL17] pour une forme plus générale), mais on s'intéresse surtout au cas irrationnel où on obtiendrait dans l'affirmative plus de nombres avec des écritures périodiques que pour les fractions continues classiques. Certaines propriétés du cas où β est réel ont été étudiées dans [Meh20], et nous reviendrons sur cette question à la fin du prochain chapitre.

Question 2.4.3. Peut-on trouver une mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue pour la fonction T_{x+x^2} ? Pour les applications

$$\tilde{T} : x \mapsto x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n ?$$

Si oui, que se passe-t-il quand on fait tendre n vers l'infini ?

Chapitre 3

Bêta-numération et nombres de Parry

Dans tout ce chapitre, nous allons étudier les bases β , où $\beta > 1$ est un réel, en s'intéressant plutôt au cas non entier. Ces systèmes de numération, appelés *bêta-développements* («beta-expansions» en anglais), ont été introduits par Rényi [Rén57]. On pourra se référer à [Par60] à [Lot02, Chapter 7], ainsi qu'à [DK02, Chapter 2] pour l'aspect de la numération et à [Aki09]) pour ce qui concerne les nombres de Parry. Nous définirons les nombres de Parry, qui sont des réels ayant de «bonnes» propriétés en tant que bases. Parmi eux, les mieux connus sont les nombres de Pisot, c'est-à-dire les entiers algébriques strictement plus grands que 1 dont les conjugués au sens de Galois ont tous un module strictement plus petit que 1. Il a de plus été démontré que tous les nombres de Parry quadratiques sont des nombres de Pisot, et que tous les nombres de Parry cubiques vérifiant une condition supplémentaire, la condition de Parry simple, sont également des nombres de Pisot. Le résultat principal qui sera démontré dans ce chapitre concerne la construction d'une famille particulière d'entiers algébriques de degré 3 constituée de nombres de Parry qui ne sont pas des nombres de Pisot. Ce résultat fera l'objet du théorème 3.2.3, qui sera complété d'une part par le théorème 3.2.7 qui traite de propriétés de densités pour cette famille, et d'autre part par les théorèmes 3.3.1 et 3.3.3 qui présentent des extensions de la méthode de construction employée à l'étude de cas plus complexes.

3.1 Nombres de Parry : définition et quelques résultats

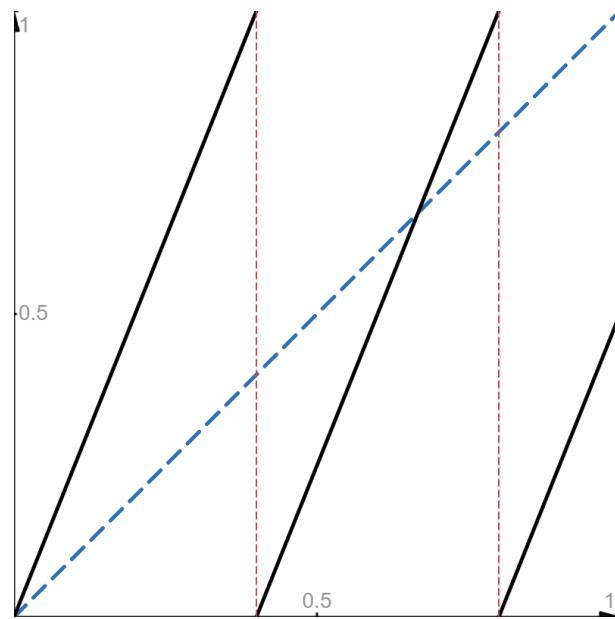
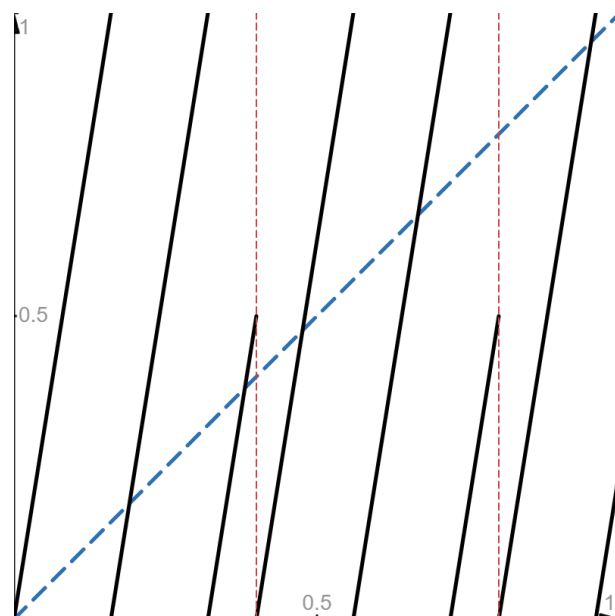
3.1.1 Systèmes de bêta-numération

Comme en base entière, on peut représenter tout réel de $[0, 1[$ par une somme

$$x = \sum_{n>0} x_n \beta^{-n}$$

où les chiffres x_i sont des entiers appartenant à $[0, \beta[$. Cette définition laisse cependant place à de la redondance car les mêmes chiffres sont utilisés pour les bases β et $\lceil \beta \rceil$, et si β n'est pas entier, ses puissances négatives sont plus grandes que celles de $\lceil \beta \rceil$, et on va donc devoir imposer des restrictions sur les mots que l'on utilise pour représenter les nombres en base β . Une solution est d'utiliser le point de vue dynamique, qui à tout réel dans $[0, 1[$ associe une écriture unique, avec la transformation $\bar{T}_\beta : x \mapsto \beta x$. Par exemple, pour $\beta = 5/2$, le graphe obtenu est celui représenté à la figure 3.1.

Ainsi, parmi les cylindres d'ordre 1, il y a des cylindres *standards* de longueur $1/\beta$ et un cylindre court de longueur $T_\beta(1)/\beta$. Les changements par rapport au cas entier peuvent sembler légers à première vue, mais lorsque l'on itère, le cylindre court génère un autre cylindre court de longueur $T_\beta^2(1)/\beta^2$, et ainsi de suite. On voit également sur cet exemple comment les cylindres courts mènent à des restrictions sur les suites de chiffres admissibles en base β , l'enchaînement 22 étant exclu ici. Notons $d_\beta(1)$ le développement (limite) de 1 en base β , l'enchaînement 22 étant exclu ici. Notons $d_\beta(1)$ le développement (limite) de 1 en base β . Les écritures w admissibles en base β sont celles telles que pour tout entier strictement positif n , le mot $T_\beta^n(w)$ est strictement inférieur à $d_\beta(1)^*$ pour l'ordre lexicographique, où $d_\beta(1)^* = d_\beta(1)$ est le développement de 1 en base β s'il est infini, ou $d_\beta(1)^* = (d_\beta(1) - 1)^\infty$ quand

FIGURE 3.1 – Graphe de $T_{5/2}$ avec les cylindres d'ordre 1 mis en évidenceFIGURE 3.2 – Graphe de $T_{5/2}^2$ avec les cylindres d'ordre 1 de $T_{5/2}$ mis en évidence

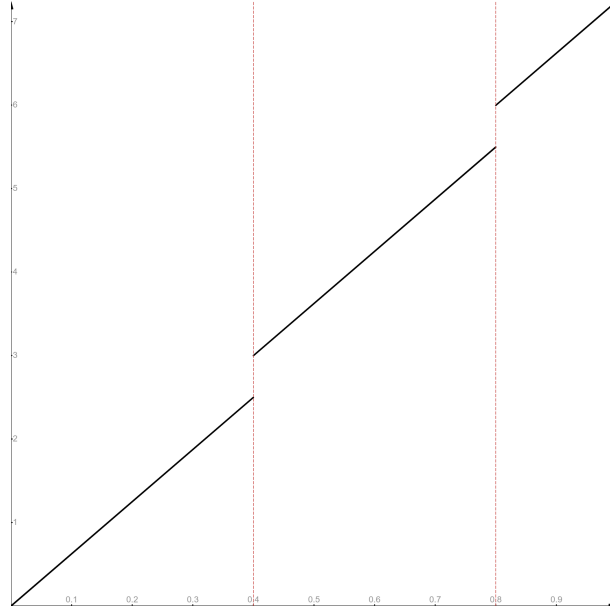


FIGURE 3.3 – Graphe de la fonction $\widetilde{T}_{5/2}^2$ avec les cylindres d'ordre 1 de $T_{5/2}$ mis en évidence

$d_\beta(1)$ est fini, $d_\beta(1) - 1$ désignant alors le mot de même longueur directement inférieur à $d_\beta(1)$ dans l'ordre lexicographique (c'est la condition de Parry [Par60]). Dans ce dernier cas, l'inégalité stricte est une condition similaire à celle pour les bases entières, héritée de la discontinuité à droite de la fonction partie fractionnaire.

Remarque 3.1.1. Les systèmes itérés en base β ne suivent plus la même condition vis-à-vis de l'ordre lexicographique, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.1.2. Considérons l'itérée d'ordre 2 pour la base $5/2$, définie par

$$T_{\frac{5}{2}}^2 : [0, 1[\longrightarrow [0, 1[$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \{\beta^2 x\} & \text{si } x \in [0, \frac{2}{5}[\\ \{\beta^2 x - \beta\} & \text{si } x \in [\frac{2}{5}, \frac{4}{5}[\\ \{\beta^2 x - 2\beta\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette application admet 8 composantes continues différentes, donc les chiffres dans le système itéré sont les entiers de 0 à 7. En examinant le graphe de cette application (3.2), on remarque que l'enchaînement de chiffres 67 est autorisé, mais pas l'enchaînement 24. Ceci est dû au fait qu'à l'ordre 1, il y a des cylindres courts placés ailleurs qu'à la fin : si on développe en blocs de chiffres en base $5/2$, le premier enchaînement s'écrit sous la forme 2021 et le second sous la forme 0220. La différence par rapport aux bases réelles «directes» se traduit aussi par le fait que l'application partie fractionnaire $T_{5/2}^2$ se relève en une application discontinue $\widetilde{T}_{5/2}^2$ (3.3).

Notation. Dans toute la suite de ce chapitre, on notera $d_\beta(1) = 0, g_1 g_2 g_3 \dots$ où

$$\forall i \geq 1, g_i = [\widetilde{T}_\beta(T_\beta^{i-1}(1))].$$

De même on notera $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite des parties fractionnaires itérées, définie par

$$\forall i \geq 0, f_i = T_\beta^i(1).$$

On posera par commodité $f_{-n} = 0$ pour tout n strictement positif. On remarque également que les suites $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(g_n)_{n \geq 1}$ vérifient la relation fondamentale

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta f_n = f_{n+1} + g_{n+1}.$$

Pour ce qui est des suites finies de longueur m , nous ne les considérerons pas comme des suites de pré-période $m - 1$ et de période 1, mais à part (elles s'interprètent plutôt comme des suites purement périodiques de longueur m).

Exemple 3.1.3. Prenons par exemple $\beta = 3/2$ et calculons les premiers termes des suites $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(g_n)_{n \geq 1}$ associées. Pour commencer, on a $f_1 = \{3/2\} = 1/2$ et $g_1 = \lfloor 3/2 \rfloor = 1$. Ensuite,

$$\widetilde{T}_{\frac{3}{2}}(T_{\frac{3}{2}}(1)) = \frac{3}{2}f_1 = \frac{3}{4},$$

d'où $g_2 = \lfloor 3/4 \rfloor = 0$ et $f_2 = \{3/4\} = 3/4$, puis

$$\widetilde{T}_{\frac{3}{2}}(T_{\frac{3}{2}}^2(1)) = \frac{3}{2}f_2 = \frac{9}{8},$$

d'où $g_3 = \lfloor 9/8 \rfloor = 1$ et $f_3 = \{9/8\} = 1/8$, et ainsi de suite.

Mesures de Parry

Soit $\beta > 1$ un réel. L'application $T_\beta(x) = \{\beta x\}$ admet une unique mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue, dont Rényi a montré l'existence [Rén57], et dont la densité a été calculée indépendamment par Gelfond [Gel59] et Parry [Par60]. Elle est appelée *mesure de Parry* associée à β , notée μ_β et définie par

$$\mu_\beta = \frac{1}{F(\beta)} \int \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{[0, T_\beta^n(1)]} \beta^{-n} d\lambda, \quad (3.1)$$

où

$$F(\beta) = \int_0^1 \sum_{x < T_\beta^n(1)} \beta^{-n} dx$$

est la constante normalisatrice. En plus de la dépendance de cette mesure vis-à-vis des différentes longueurs de cylindres, $[0, 1[$ est séparé en zones associées à différents poids constants. Ce poids est plus élevé pour des blocs de chiffres correspondant aux sous-cylindres des cylindres courts, selon la fréquence d'apparition des cylindres courts en question (ce qui dépend de l'itération de T_β à laquelle ils apparaissent). Finalement, c'est la mesure de Lebesgue à laquelle on associe différentes zones de poids constants, délimitées par les éléments de la suite (f_n) . On a de plus

$$\frac{\beta - 1}{\beta} \lambda \leq \mu_\beta \leq \frac{\beta}{\beta - 1} \lambda.$$

3.1.2 Les nombres de Parry

Définition 3.1.4. Un nombre réel $\beta > 1$ est appelé *nombre de Parry* si les longueurs des cylindres en base β ne prennent qu'un nombre fini de valeurs relativement à leur ordre, ou de manière équivalente si la suite $d_\beta(1)$ est ultimement périodique. Si la suite $d_\beta(1)$ est finie (ne comporte que des 0 à partir d'un certain rang), alors on appelle β *nombre de Parry simple*.

Exemple 3.1.5. Le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un nombre de Parry simple. En effet, on a $\{\phi\{\phi\}\} = \{\phi(\phi - 1)\} = 0$. Les écritures admissibles en base ϕ sont celles qui ne contiennent pas le mot 11.

Notation. Pour tout entier k , on dira d'une suite $(a_n)_{n \geq k}$ ultimement périodique qu'elle est de *type* (ℓ, m) si ℓ et $m > 0$ sont les plus petits entiers possibles tels que

$$\forall p \geq \ell, a_{k+p+m} = a_{k+p}.$$

Par extension, on dira qu'un nombre Parry β est de *type* (ℓ, m) si la suite $d_\beta(1)$ est de *type* (ℓ, m) .

Lemme 3.1.6. Soit $\beta > 1$ un réel et soient $\ell \geq 0$ et $m > 0$ deux entiers. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. La suite $(g_n)_{n \geq 1}$ est de type (ℓ, m) .
2. La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est de type (ℓ, m) .
3. $f_\ell = f_{\ell+m}$.

Démonstration. Soit $\beta > 1$ et soient $\ell \geq 0$ et $m > 0$ deux entiers. L'équivalence entre les assertions 2 et 3 et l'implication de l'assertion 2 vers l'assertion 1 sont directes en utilisant la relation $\beta f_n = f_{n+1} + g_{n+1}$. Supposons maintenant que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ est de type (ℓ, m) . Comme $f_{\ell+m} = T^{\ell+m}(1)$, son écriture en base β est

$$\begin{aligned} f_{\ell+m} &= 0, g_{\ell+m+1} g_{\ell+m+2} \dots \\ &= 0, g_{\ell+1} g_{\ell+2} \dots \\ &= f_\ell. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété 3 est vérifiée, ce qui complète les équivalences. \square

Remarque 3.1.7. En particulier, cela implique qu'il ne peut pas y avoir de pure périodicité pour le développement de 1. En effet, la valeur $f_0 = 1$ n'est pas atteignable par les parties fractionnaires (on retombe alors sur le cas fini).

Remarque 3.1.8. Le cas fini de longueur m est caractérisé par la relation $f_m = 0$ avec m minimal. Il est alors clair que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ est de longueur au plus m . De plus, si on suppose que $g_{m-1} = 0$, on aurait $f_m = \beta f_{m-1} \neq 0$, donc les deux suites sont encore de même longueur.

Définition 3.1.9. Pour $\beta > 1$ un nombre de Parry de type (ℓ, m) on notera $N_\beta = \ell + m$, et on appellera cette quantité la *longueur* de β . Cette longueur correspond également aux nombres de valeurs non nulles différentes prises par la suite $(f_n)_{n \geq 0}$, soit les longueurs relatives possibles des β -cylindres par rapport à leur ordre en incluant la valeur $f_0 = 1$ pour les cylindres standards. On notera également M_β la longueur de la plus grande suite de 0 successifs contenue dans $d_\beta(1)$, plus 1 (notons que dans l'article [MST18], on note M_β simplement la longueur de la plus longue suite de 0, d'où un décalage de 1 dans les deux définitions).

Lemme 3.1.10. Soit β un nombre de Parry, $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite des parties fractionnaires itérées associée et I un cylindre d'ordre n en base β . Alors on a

$$\beta^{-N_\beta} \beta^{-n} \leq \beta^{-M_\beta} \beta^{-n} \leq |I| \leq \beta^{-n}.$$

Démonstration. Soit $\beta > 1$ un nombre de Parry. La première inégalité est immédiate dans le cas où $d_\beta(1)$ est finie, et dans le cas ultimement périodique, comme la période doit contenir au moins un chiffre non nul, la plus longue suite de 0 est majorée par la longueur de la pré-période plus la longueur de la période, moins un (si on commence dans la partie périodique, on ne pourra pas enchaîner un nombre de zéros dépassant la période moins 1). La dernière inégalité est également immédiate. Maintenant soit I un cylindre d'ordre n en base β , avec n un entier strictement positif. Alors il existe un entier positif i inférieur ou égal à $N_\beta - 1$ tel que

$$f_i = \beta^n |I|.$$

Or

$$d_\beta(f_i) = T^i(d_\beta(1)) = g_i g_{i+1} \dots$$

Et on a alors

$$\beta^{M_\beta} f_i = \beta^{M_\beta-1} g_i + \beta^{M_\beta-2} g_{i+1} + \dots + g_{i+M_\beta},$$

et comme au moins l'un des entiers $g_i, g_{i+1}, \dots, g_{i+M_\beta}$ est strictement positif par définition de M_β , il vient que

$$f_i \geq \beta^{-M_\beta}.$$

De plus, cette constante est optimale. En effet, si on se place au début d'une suite de 0 de longueur maximale, soit $M_\beta - 1$, l'identité précédente devient

$$\beta^{M_\beta} f_i = g_{i+M_\beta} < \beta.$$

\square

Ce résultat peut s'étendre à la minoration des différences de la forme $|f_j - f_i|$, dans ce cas la constante M_β est remplacée par la longueur de la plus grande suite de zéros dans le mot $d_\beta(f_j) - d_\beta(f_i)$ plus 1 (en supposant que $f_j > f_i$), dont on peut montrer qu'elle est majorée également par N_β .

Le résultat suivant figure dans [MST18]

Lemme 3.1.11. *Soit \mathcal{L}_n l'ensemble des mots d'ordre n admissibles en base β . Alors*

$$\beta^n \leq |\mathcal{L}_n| \leq \frac{\beta}{\beta - 1} \beta^n.$$

Soit $\beta > 1$. Examinons la suite des parties fractionnaires (f_i) . On a $f_1 = \beta - \lfloor \beta \rfloor$, puis ensuite $f_2 = \beta^2 - \lfloor \beta \rfloor \beta - \lfloor \beta - \lfloor \beta \rfloor \rfloor$, et en général, pour tout n , on a $f_n = P_n(\beta)$ où P_n est un polynôme unitaire en β . Or, si β est un nombre de Parry, soit il existe un entier strictement positif n tel que $f_n = P_n(\beta) = 0$, soit il existe deux entiers strictement positifs $k < n$ tels que $f_n = f_k$ et donc que le polynôme de degré n donné par $P_n - P_k$ s'annule en β . Dans tous les cas, β doit donc être un entier algébrique, mais cette condition n'est pas suffisante comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.

Exemple 3.1.12. Soient n et r deux entiers supérieurs ou égaux à 2 telle que la racine n -ième $\alpha = \sqrt[r]{r}$ est primitive. Alors α n'est pas un nombre de Parry. En effet on a

$$f_1 = a_{0,0}\alpha - a_{1,0}$$

avec $a_{0,0} = 1 > 0$ et $a_{1,0} = \lfloor \alpha \rfloor > 0$. De même, en itérant pour $2 \leq i \leq n-1$ on a

$$f_i = a_{0,0}\alpha^i - a_{1,0}\alpha^{i-1} - \dots - a_{i,0}$$

avec $a_{i,0} = \lfloor \alpha f_{i-1} \rfloor \geq 0$. En itérant à nouveau on obtient

$$f_n = -a_{1,0}\alpha^{n-1} - \dots - a_{n-1,0}\alpha + a_{0,1} \geq 0$$

car f_n est une partie fractionnaire. On a donc $a_{0,1} > 0$ à cause des signes des autres coefficients. En itérant à nouveau, on obtient

$$f_{n+1} = -a_{2,0}\alpha^{n-1} - \dots - a_{n-1,0}\alpha^2 + a_{0,1}\alpha - a_{1,1}$$

avec $a_{1,1} = k a_{1,0} + \lfloor \alpha f_n \rfloor > a_{1,0} > 0$ car $k > 1$ et $\alpha f_n \geq 0$. Et de même, en continuant à itérer, il vient que les autres coefficients $a_{i,1}$ gardent le même signe que $a_{i,0}$, et comme on a seulement utilisé les signes des coefficients et la positivité de la fonction partie fractionnaire pour établir la conservation de signe entre $a_{j,0}$ et $a_{j,1}$ pour $j = 0 \dots n-1$, on peut reproduire ce raisonnement à l'infini pour établir que les suites $(a_{j,\ell})_{\ell \geq 0}$ gardent toujours le même signe strict, et que la suite $(a_{1,\ell})_{\ell \geq 0}$ est strictement croissante. Supposons maintenant par l'absurde que α est un nombre de Parry. Il existe alors deux entiers strictement positifs m et ℓ tels que soit $f_m = 0$, soit $f_{m+p} = f_m$. Comme α est primitive, cela implique dans le premier cas que les suites $(a_{j,\ell})_{\ell \geq 0}$ sont toutes nulles à partir d'un certain rang, ce qui est absurde car on a établi que la suite $(a_{1,\ell})$ est toujours strictement positive, et dans le deuxième cas que p est un multiple de n car le seul coefficient strictement positif dans les représentations de f_m et f_{m+p} selon les puissances de 0 à $n-1$ d' α doit être devant la même puissance pour que l'on puisse avoir égalité. Il en va alors de même pour chaque coefficient ayant un premier indice identique, et donc les suites $(a_{j,\ell})_{\ell \geq 0}$ doivent également être ultimement périodiques, ce qui est absurde car on a établi que la suite $(a_{1,\ell})$ est strictement croissante.

De manière plus générale, on a le résultat suivant, qui contient le cas des racines d'entiers (voir [Lot02, p. 7.2.13, 7.2.21]).

Proposition 3.1.13. *Tout nombre de Parry est un nombre de Perron, c'est-à-dire un entier algébrique réel strictement plus grand que 1 strictement plus grand que tous ses conjugués en module.*

Nombres de Pisot et nombres de Parry

La condition la plus générique assurant qu'un nombre est de Parry est celle de Pisot, définie comme suit.

Définition 3.1.14. Un entier algébrique réel est un *nombre de Pisot* s'il est strictement plus grand que 1 et tous ses conjugués au sens de Galois sont de modules strictement plus petits que 1.

Remarque 3.1.15. Les entiers au moins égaux à 2 sont des nombres de Pisot.

Une borne sur M_β en fonction du degré d'un nombre de Pisot β a été établie dans [MST18].

Exemple 3.1.16. Il a été démontré par Siegel [Sie44] que l'ensemble des nombres de Pisot admet un élément minimal. Il s'agit du nombre plastique, soit la racine dominante du polynôme $X^3 - X - 1$, que l'on notera α_p . On a $\alpha_p \approx 1,324717957\dots$ et $d_{\alpha_p}(1) = 10001$.

Exemple 3.1.17. Le nombre d'or est un nombre de Pisot.

Exemple 3.1.18. La racine dominante α_{e1} du polynôme $X^5 - 4X^4 - 3X^3 - 2X^2 - X - 1$ est un nombre de Pisot, et on a $d_{\alpha_{e1}}(1) = 43211$. Ce nombre fait partie d'une famille de nombres de Pisot pour laquelle les développements de 1 se comportent de la même manière, que l'on introduira en 4.3.2.

Définition 3.1.19. Un entier algébrique réel est un *nombre de Salem* s'il est strictement plus grand que 1 et tous ses conjugués au sens de Galois sont de modules inférieurs ou égaux à 1, avec égalité pour au moins l'un d'entre eux.

Il a été établi que tous les nombres de Salem de degré 4 sont des nombres de Parry [Boy11], avec de plus une caractérisation des développements de 1 dans les bases associées à ces nombres. On s'attend cependant à ce que certains nombres de Salem de degré supérieur ne le soient pas [Boy96b].

Exemple 3.1.20. En utilisant la caractérisation donnée par Boyd [Boy11], on trouve que le nombre de Salem α_{e2} donné par le polynôme $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$ a pour développement $d_\alpha(1) = 1(100)^\infty$.

En renforçant les conditions de Parry, les liens avec les nombres de Pisot et de Salem se resserrent.

Théorème 3.1.21 ([Sch80]). *Soit $\beta > 1$. Si tous les nombres de $\mathbb{Q}[\beta]$ ont des écritures ultimement périodiques en base β , alors β est un nombre de Pisot ou de Salem.*

Théorème 3.1.22 ([Sch80]). *Si β est un nombre de Pisot, alors tous les nombres de $\mathbb{Q}[\beta]$ ont des écritures ultimement périodiques en base β .*

Cependant, il existe des nombres de Parry qui ne sont ni des nombres de Pisot, ni des nombres de Salem, comme dans l'exemple suivant.

Exemple 3.1.23 ([Bas02]). La racine dominante α_{e3} du polynôme

$$X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 3$$

est un nombre de Parry simple de degré 4 qui n'est ni de Pisot, ni de Salem.

En degré 2, il est assez aisé de montrer que tout nombre de Parry est un nombre de Pisot. Nous allons en proposer une démonstration.

Lemme 3.1.24. *Tout nombre de Parry de degré 2 est un nombre de Pisot.*

Démonstration. Soit $\alpha > 1$ un entier algébrique réel de degré 2, et α' son conjugué au sens de Galois (qui est nécessairement réel et non entier), de sorte que son polynôme minimal est

$$X^2 - (\alpha + \alpha')X + \alpha\alpha'.$$

Pour tout entier n strictement positif, on peut écrire f_n de manière unique sous la forme

$$f_n = a_{1,n}\alpha + a_{0,n}.$$

On a alors $a_{1,1} = 1 > 0$ et $a_{0,1} = -\lfloor \alpha \rfloor < 0$. De plus, au rang suivant,

$$f_{n+1} = a_{1,n+1}\alpha + a_{0,n+1}$$

avec $a_{1,n+1} = (\alpha + \alpha')a_{1,n} + a_{0,n}$.

— Supposons que $\alpha' > 1$ et $a_{1,n} \neq 0$. On a alors

$$a_{1,n+1} = (\alpha + \alpha')a_{1,n} + a_{0,n} = f_n + \alpha'a_{1,n} > a_{1,n}$$

par positivité de la fonction partie entière. Comme $a_{1,1} > 0$, la suite $(a_{1,i})_{i>0}$ est strictement croissante et ne peut donc pas être ultimement périodique, et par unicité de l'écriture la suite $(f_i)_{i>0}$ non plus.

— Supposons maintenant que $\alpha' < -1$ et $a_{1,n} > 0$. On a alors

$$a_{1,n+1} = (\alpha + \alpha')a_{1,n} + a_{0,n} = f_n + \alpha'a_{1,n} < -a_{1,n} + 1$$

car la fonction partie fractionnaire est majorée strictement par 1. En tenant compte du fait que $a_{1,n}$ et $a_{1,n+1}$ sont entiers, on obtient finalement que

$$a_{1,n+1} \leq -a_{1,n}.$$

En itérant à nouveau, on obtient

$$a_{1,n+2} = (\alpha + \alpha')a_{1,n+1} + a_{0,n+1} = f_{n+1} + \alpha'a_{1,n+1} > a_{1,n},$$

et comme $a_{1,1} > 0$, on en déduit par récurrence immédiate que la suite $(a_{1,2k+1})_{k \geq 0}$ est strictement croissante, et ne peut donc pas être ultimement périodique, ce qui implique à nouveau que la suite $(f_i)_{i>0}$ ne peut pas être ultimement périodique.

Nous avons ainsi démontré que si α est un nombre de Parry, alors $-1 < \alpha' < 1$ et α est un nombre de Pisot. \square

Bassino a entièrement caractérisé les développements de 1 pour tous les nombres de Pisot cubiques, et montré que tous les nombres de Parry simples cubiques étaient des nombres de Pisot [Bas02]. Un élément nécessaire à cette classification est le résultat suivant, dû à Akiyama, qui caractérise les polynômes minimaux des nombres de Pisot cubiques.

Théorème 3.1.25 ([Aki00], Lemma 1). *Soit $\beta > 1$ un nombre cubique, de polynôme minimal*

$$P(X) = X^3 - aX^2 - bX - c.$$

Alors β est un nombre de Pisot si, et seulement si, les inégalités

$$|b - 1| < a + c$$

et

$$c^2 - b < \operatorname{sgn}(c)(1 + ac)$$

sont réalisées.

Une fois munis de ce lien entre les nombres de Pisots cubiques et les coefficients de leurs polynômes minimaux respectifs, le théorème suivant donne donc les développements de 1 en bases Pisot selon des conditions supplémentaires sur leurs coefficients.

Théorème 3.1.26 ([Bas02], Theorem 2). *Soit β un nombre de Pisot cubique de polynôme minimal*

$$P_\beta(X) = X^3 - aX^2 - bX - c.$$

Le développement en base β de 1 est alors le suivant.

— *Cas 1 : Lorsque $b > a$, on a $d_\beta(1) = (a + 1)(b - 1 - a)(a + c - b)(b - c)c$.*

— Cas 2 : Lorsque $0 \leq b \leq a$, si $c > 0$ on a $d_\beta(1) = abc$, et sinon

$$d_\beta(1) = a[(b-1)(c+a)]^\infty.$$

— Cas 3 : Lorsque $-a < b < 0$, si $b+c \geq 0$ on a $d_\beta(1) = (a-1)(a+b)(b+c)c$, sinon $d_\beta(1) = (a-1)(a+b-1)(a+b+c-1)^\infty$.

— Cas 4 : Lorsque $b \leq -a$, considérons k l'entier compris entre 2 et $a-2$ tel que, en notant $e_k = 1 - a + (a-2)/k$, on a $e_k \leq b+c < e_{k-1}$.

— Si $b(k-1) + c(k-2) \leq k-2 - (k-1)a$, alors $d_\beta(1) = d_1 \dots d_{2k+2}$ avec

$$d_1 = a-2,$$

pour $3 \leq i \leq k$

$$d_{k+2-i} = -(k+3-i) + a(k+2-i) + c(k-i),$$

$$d_k = -k + ak + b(k-1) + c(k-2),$$

$$d_{k+1} = -(k-1) + ak + bk + c(k-1),$$

$$d_{k+2} = -(k-2) + a(k-1) + bk + ck,$$

pour $k \geq 3$ et $2 \leq i \leq k-1$

$$d_{2k+2-i} = -(i-2) + a(i-1) + bi + c(i+1),$$

$$d_{2k+1} = b+2c,$$

et

$$d_{2k+2} = c.$$

— Si $b(k-1) + c(k-2) > k-2 - (k-1)a$, soit m l'entier défini par $m = \min\{i \in \mathbb{N} \mid (i+1)b + ic > i - (i+1)a\}$. Alors :

Si $m = 1$, on a $d_\beta(1) = (a-2)(2a+b-2)(2a+2b+c-2)(2a+2b+2c-2)^\infty$.

Si $m > 1$, on a $d_\beta(1) = d_1 d_2 \dots d_{m+2} d_{m+3}^\infty$, avec

$$d_1 = a-2,$$

$$d_2 = 2a+b-3,$$

pour $m \geq 3$ et $3 \leq i \leq m$,

$$d_{m+3-i} = 2a+b-3 + (m+1-i)(a+b+c-1),$$

$$d_{m+1} = 2a+b-2 + (m-1)(a+b+c-1),$$

$$d_{m+2} = a+b-1 + m(a+b+c-1)$$

et

$$d_{m+3} = (m+1)(a+b+c-1).$$

Avant de passer à la suite, énonçons un résultat classique sur la majoration des modules des racines de polynômes par rapport à leurs coefficients.

Lemme 3.1.27. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ un polynôme unitaire à coefficients complexes. Alors toutes les racines de P se trouvent dans le disque ouvert centré en l'origine de rayon $1 + \max_{1 \leq i \leq n} (|a_i|)$.

Démonstration. Soit donc P un polynôme unitaire à coefficients entiers de degré n et h la plus grande valeur absolue de ses coefficients. Notons α sa racine de module maximal. Déjà, si $|\alpha| < 1$ l'inégalité devient triviale, et si $|\alpha| = 1$ il est clair que $h > 0$. Supposons donc $|\alpha| > 1$. Par inégalité triangulaire, il vient que

$$|\alpha|^n \leq h \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha|^i \leq h \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1},$$

d'où

$$|\alpha| \leq h \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha|^n} + 1 < h + 1.$$

□

3.2 Construction d'une famille de nombres de Parry non simples cubiques qui ne sont pas des nombres de Pisot

Au vu des derniers résultats présentés, on peut se demander pourquoi la méthode utilisée dans la démonstration du lemme 3.1.24, qui vise à isoler les conjugués de l'entier algébrique considéré pour faire apparaître les conditions de Pisot/Salem ne se généralise pas en degré supérieur. Je vais revenir sur cette piste, que j'ai suivie pendant un bon moment de ma thèse sans me rendre compte qu'elle était condamnée, mais qui m'a finalement permis d'établir d'autres résultats. Soit $\alpha > 1$ un nombre de Parry de type (ℓ, m) . Par définition, la suite (f_n) vérifie $f_\ell = f_{\ell+m}$ (et ces constantes sont minimales). On a

$$f_{\ell+m} = \alpha^{\ell+m} - g_1 \alpha^{\ell+m-1} - g_2 \alpha^{\ell+m-2} - \dots - g_{\ell+m}$$

et

$$f_\ell = \alpha^\ell - g_1 \alpha^{\ell-1} - g_2 \alpha^{\ell-2} - \dots - g_\ell$$

et ainsi α est racine du polynôme unitaire à coefficients entiers

$$Q(X) = X^{\ell+m} - \tilde{g}_1 X^{\ell+m-1} - \tilde{g}_2 X^{\ell+m-2} - \dots - \tilde{g}_{\ell+m}$$

où

$$\tilde{g}_i = g_i \text{ si } i < m,$$

$$\tilde{g}_m = g_m + 1,$$

$$\tilde{g}_i = g_i - g_{i-m} \text{ sinon.}$$

Remarque 3.2.1. Dans le cas d'un nombre de Parry simple α , la relation vérifiée par la suite des parties fractionnaires itérées est de la forme $f_m = 0$ où m est le nombre d'éléments non nuls dans $d_\alpha(1)$, et il en découle que α est racine du polynôme

$$Q(X) = X^m - g_1 X^{m-1} - g_2 X^{m-2} - \dots - g_m.$$

Le polynôme minimal de α , $P(x)$, divise donc nécessairement $Q(X)$. Parry [Par60, Corollary 1] a montré que réciproquement, si on définit un polynôme à partir d'un mot fini ou ultimement périodique d'entiers positifs w , tels que pour tout entier n strictement positifs et T l'opérateur de décalage à gauche, on a $T^n(w) <_{\text{lex}} w$, il existe un unique réel β strictement plus grand que 1 tel que $w = d_\beta(1)$. Ce résultat reste vrai en considérant des mots quelconques, représentés alors par des séries, vérifiant la même propriété pour l'ordre lexicographique.

En essayant d'appliquer la méthode du lemme pour des entiers algébriques α de degré n supérieur ou égal à 3, on obtient que le coefficient $a_{i,k}$ de α^{n-1} dans la décomposition des éléments de la suite des parties fractionnaires (f_k) suit une récurrence linéaire de polynôme caractéristique $P_f(X) = P(X)/(X - \alpha)$ (qui peut s'exprimer avec les sommes de produits de degré fixé avec répétitions de α et de ses conjugués) où $P(X)$ est le polynôme minimal de α , et si on suppose qu' α est un nombre de Parry, les conditions liées au type d' α sur les f_k vont imposer sur les coefficients $a_{i,k}$ une récurrence linéaire dont le polynôme caractéristique est

$$Q_f(X) = Q(X)/(X - \alpha) = X^{k-1} + \tilde{f}_1 X^{k-2} + \dots + \tilde{f}_{k-1},$$

avec $\tilde{f}_i = f_i - f_{i-m}$ pour tout i et où $Q(X)$ est le polynôme associé au type de α (dans le cas des nombres de Parry simples, les coefficients sont directement les éléments de la suite (f_i) , c'est à dire que $\tilde{f}_i = f_i$ pour tout i). Ainsi, en ayant fait disparaître α , on retombe en fait sur la condition polynomiale que l'on vient de présenter, mais en passant de chaque côté au quotient par $X - \alpha$. Même si cela revient au même en soi, l'idée de diviser par $X - \alpha$ dans la condition a certains mérites. En effet, même si les polynômes qui apparaissent ne sont plus à coefficients entiers, leurs coefficients sont bornés (ils appartiennent tous à $] -1, 1[$), ce qui permet directement par le lemme 3.1.27 de majorer les modules des conjugués de α par 2. Ce résultat est loin d'être nouveau, Parry [Par60] l'ayant établi en suivant cette méthode. De plus, Solomyak a amélioré cette borne jusqu'au nombre d'or $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, et en a démontré l'optimalité [Sol94]. Un autre avantage présenté par le fait de passer au quotient est celui de faire tomber le degré des

polynômes considérés de 1, ce qui va nous être particulièrement utile pour l'étude des nombres de Parry cubiques ayant une longueur $\ell + m = 3$ minimale (ce qui va imposer que $P(X) = Q(X)$), et pour lesquels on va ainsi pouvoir se ramener à des polynômes du second degré à coefficients bornés, ce que l'on pourra exploiter grâce à la formule quadratique.

Examinons les possibilités d'obtenir un nombre de Parry qui n'est pas un nombre de Pisot pour les 3 types envisageables :

- Le cas fini, où la suite des parties fractionnaires de α est $1f_1f_20^\infty$. Le polynôme associé est

$$P_f(x) = X^2 + f_1X + f_2,$$

de discriminant $\Delta = f_1^2 - 4f_2$. Ses racines sont

$$\alpha_\pm = \frac{-f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}$$

si $\Delta \geq 0$, ou

$$\alpha_\pm = \frac{-f_1 \pm i\sqrt{-f_1^2 + 4f_2}}{2}$$

sinon. Comme f_1 et f_2 sont dans $]0, 1[$, on a

$$|\alpha_+| \leq |\alpha_-| < \frac{2f_1}{2} < 1$$

dans le cas $\Delta > 0$, et

$$|\alpha_\pm| = \frac{4f_2}{4} < 1$$

dans le cas $\Delta < 0$. Dans chaque cas, α doit donc être un nombre de Pisot, comme établi par Bassino [Bas02].

- Le cas $1f_1f_2^\infty$ où le polynôme associé est

$$P_f(X) = X^2 + (f_1 - 1)X + (f_2 - f_1)$$

de discriminant $\Delta = (f_1 - 1)^2 - 4(f_2 - f_1) = (f_1 + 1)^2 - 4f_2$. Les racines de P_f sont alors

$$\alpha_\pm = \frac{(1 - f_1) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

si $\Delta \geq 0$, et en utilisant encore le fait que f_1 et f_2 sont dans $]0, 1[$, on obtient

$$-1 < -f_1 \leq \frac{1 - f_1 - (1 + f_1)}{2} < \alpha_- \leq \alpha_+ < \frac{1 - f_1 + (1 + f_1)}{2},$$

ou bien

$$|\alpha_\pm| = \frac{(1 - f_1)^2 - \Delta}{4}$$

si $\Delta < 0$, et alors

$$|\alpha_\pm| < f_2 - f_1 < 1.$$

Ainsi α ne peut à nouveau qu'être un nombre de Pisot.

- Le dernier cas est celui de la suite $1(f_1f_2)^\infty$ associée au polynôme

$$P_f(X) = X^2 + f_1X + (f_2 - 1)$$

qui a pour discriminant $\Delta = f_1^2 + 4 - 4f_2 > 0$. Les racines de P_f sont donc

$$\alpha_\pm = \frac{-f_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

en on a

$$-\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \alpha_- \leq \alpha_+ < \frac{-f_1 + (f_1 + 2)}{2}.$$

Ici, on ne peut pas assurer qu' α soit un nombre de Pisot (on ne peut majorer les modules de ses conjugués que par la borne de Solomyak [Sol94], valable en toute généralité pour les nombres de Parry). On peut cependant utiliser de nouveau la formule quadratique pour obtenir la caractérisation suivante pour que α ne soit pas un nombre de Pisot.

$$\frac{-f_1 - \sqrt{f_1^2 + 4 - 4f_2}}{2} < -1 \Leftrightarrow (2 - f_1)^2 < f_1^2 + 4 - 4f_2 \quad (3.2)$$

$$\Leftrightarrow f_2 < f_1. \quad (3.3)$$

Analyse : Recherche de polynômes correspondant à des nombres de Parry cubiques non Pisots potentiels

On recherche donc des polynômes de la forme

$$P(X) = X^3 - g_1X^2 - (g_2 + 1)X - (g_3 - g_1),$$

tels que les coefficients entiers g_i vérifient les conditions suivantes.

- La valeur maximale des coefficients g_i est $g_1 = \lfloor \alpha \rfloor \geq 1$, leur valeur minimale est 0.
- Comme $g_2 = \lfloor \alpha f_1 \rfloor$ et $g_3 = \lfloor \alpha f_2 \rfloor$, la condition $f_2 < f_1$ donnée en 3.3 implique que $g_3 \leq g_2$.
- De plus, le type de suite considéré impose que $f_1 = f_3$, et donc si l'on avait égalité entre g_2 et g_3 , il suivrait que

$$\alpha f_1 = g_2 + f_2$$

et

$$\alpha f_2 = g_2 + f_1,$$

soit

$$\alpha(f_2 - f_1) = f_1 - f_2$$

ce qui n'est pas possible car $f_1 \neq f_2$. Ainsi $g_3 < g_2$.

Remarque 3.2.2. Réciproquement, si $g_3 < g_2$, alors $f_2 < f_1$.

En résumant les conditions obtenues, on dispose des inégalités :

$$g_1 \geq 1,$$

$$1 \leq g_2 \leq g_1$$

et

$$0 \leq g_3 \leq g_2 - 1.$$

Ainsi, si α est un nombre de Parry cubique de longueur minimale, les coefficients de son polynôme minimal

$$X^3 - aX^2 - bX + c$$

doivent vérifier

$$a \geq 1,$$

$$2 \leq b \leq a + 1$$

et

$$a - b + 2 \leq c \leq a.$$

Nous allons montrer que les entiers algébriques ayant de tels polynômes minimaux sont bien des nombres de Parry.

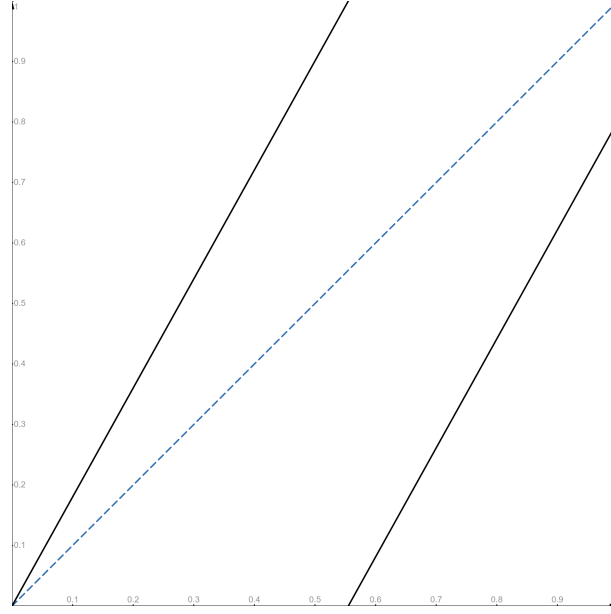


FIGURE 3.4 – Graphe de l'application $T_{\alpha_{e4}}$

Théorème 3.2.3. Soit α la plus grande racine réelle d'un polynôme à coefficients entiers donné par $X^3 - aX^2 - bX + c$ avec

$$\begin{aligned} a &\geq 1, \\ 2 \leq b &\leq a + 1 \end{aligned}$$

et

$$a - b + 2 \leq c \leq a.$$

Alors α est un nombre de Parry cubique qui n'est pas un nombre de Pisot, tel que $d_\alpha(1) = a[(b-1)(a-c)]^\infty$. De plus, les polynômes vérifiant ces conditions sont les seuls polynômes minimaux possibles pour des nombres de Parry cubiques de longueur minimale qui ne sont pas des nombres de Pisot.

Démonstration. En utilisant le résultat de Parry [Par60, Corollary 1] que l'on a cité précédemment, il vient directement que le polynôme $P(X) = X^3 - aX^2 - bX + c$ avec les conditions données admet un unique racine $\alpha > 1$ et que cette racine est bien un nombre de Parry vérifiant $d_\alpha(1) = a[(b-1)(a-c)]^\infty$. Au vu du travail effectué dans l'analyse, il nous reste seulement à montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Si on suppose que ce n'est pas le cas, au moins une de ses racines est entière. Nous avons vu que cela ne peut pas être α . Notons donc α_- et α_+ les conjugués de α . On a $\alpha_- + \alpha_+ = -f_1 < 1$ et $|\alpha_- \alpha_+ \alpha| = c < \alpha$, donc si l'un des deux est entier c'est celui de plus grande valeur absolue, et il vaut alors -1 . On aurait dans ce cas $P(-1) = 0$, or

$$P(-1) = -1 - a + b + c,$$

ce qui imposerait donc que $b + c = a + 1$, et contredirait la condition $c \geq a - b + 2$. \square

Exemple 3.2.4. La racine dominante α_{e4} du polynôme $X^3 - X^2 - 2X + 1$ est un nombre de Parry mais pas un nombre de Pisot, et le développement de 1 en base α_{e4} est

$$d_{\alpha_{e4}}(1) = 1(10)^\infty.$$

Le graphe de l'application $T_{\alpha_{e4}}$ est représenté en figure 3.4.

Exemple 3.2.5. La racine dominante α_{e5} du polynôme $X^3 - 4X^2 - 2X + 4$ est un nombre de Parry mais pas un nombre de Pisot, et le développement de 1 en base α_{e5} est

$$d_{\alpha_{e5}}(1) = 4(10)^\infty.$$

Exemple 3.2.6. La racine dominante α_{e6} du polynôme $X^3 - 5X^2 - 4X + 3$ est un nombre de Parry mais pas un nombre de Pisot, et le développement de 1 en base α_{e6} est

$$d_{\alpha_{e6}}(1) = 5(32)^\infty.$$

On peut également montrer que les conjugués des nombres que l'on vient de construire se rapprochent autant que l'on veut de la borne de Solomyak.

Théorème 3.2.7. *L'ensemble des racines de second plus grand module de la famille de polynômes du théorème 3.2.3 est dense dans $\left] -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1 \right[$.*

Démonstration. Nous avons vu dans notre analyse que les racines de second plus grand module des polynômes de la famille construite au théorème 3.2.3 sont données par la formule

$$\alpha_- = \frac{-f_1 - \sqrt{f_1^2 + 4 - 4f_2}}{2}.$$

Or, pour tout $a \geq 1$, la racine dominante α du polynôme $X^3 - aX^2 - aX + a$ est telle que

$$f_1 > \frac{|\alpha| - 1}{\alpha} > 1 - \frac{2}{\alpha},$$

car $g_2 = a - 1 = \alpha f_1 - f_2$, et

$$f_2 < \frac{1}{\alpha},$$

car $g_3 = 0$. Il en découle que

$$\alpha_- < \frac{-1 + \frac{2}{a} - \sqrt{1 - \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} + 4 - \frac{4}{a}}}{2},$$

et comme

$$\sqrt{5} - \sqrt{5 - \frac{8}{a} + \frac{4}{a^2}} = \frac{\frac{8}{a} - \frac{4}{a^2}}{\sqrt{5} + \sqrt{5 - \frac{8}{a} + \frac{4}{a^2}}} < \frac{8}{a},$$

il vient que

$$\alpha_- < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{9}{2a}. \quad (3.4)$$

De la même manière, si on considère le polynôme $X^3 - aX^2 - aX + 2$, il s'ensuit que

$$f_2 > \frac{a-2}{\alpha} > \frac{a-2}{a+1} > 1 - \frac{3}{a},$$

et

$$\alpha_- > -\frac{1 + \sqrt{5 - 4 + \frac{12}{a}}}{2}.$$

Comme

$$\sqrt{1 + \frac{12}{a}} - 1 = \frac{\frac{12}{a}}{1 + \sqrt{1 + \frac{12}{a}}} < \frac{12}{a},$$

on obtient que

$$\alpha_- > -1 - \frac{12}{a} \quad (3.5)$$

Finalement, soit b un entier tel que $2 \leq b \leq a - 1$, et soit α_- la racine de second plus grand module du polynôme $X^3 - aX^2 - aX + b$, et α'_- celle du polynôme $X^3 - aX^2 - aX + b + 1$. Les parties fractionnaires associées vérifient

$$1 - \frac{2}{a} < f_1 < 1,$$

$$1 - \frac{2}{a} < f'_1 < 1,$$

$$1 - \frac{b+1}{a} < f_2 < 1 - \frac{b-1}{a}$$

et

$$1 - \frac{b+2}{a} < f'_2 < 1 - \frac{b}{a}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} |\alpha_- - \alpha'_-| &= \frac{-1 + \frac{1}{a} - \sqrt{(1 - \frac{1}{a})^2 + 4 - 4 + \frac{4(b-1)}{a}} + 1 + \sqrt{1 + 4 - 4 + \frac{4(b+2)}{a}}}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{a} - \sqrt{1 - \frac{6}{a} + \frac{4b}{a} + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{1 + \frac{8}{a} + \frac{4b}{a}}}{2} \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{\frac{14}{a} - \frac{1}{a^2}}{2 \left(\sqrt{1 - \frac{6}{a} + \frac{4b}{a} + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{1 + \frac{8}{a} + \frac{4b}{a}} \right)}, \end{aligned}$$

et comme les deux racines sont plus grandes que 1, on obtient finalement que

$$|\alpha_- - \alpha'_-| < \frac{4}{a}. \quad (3.6)$$

La densité en découle lorsqu'on fait tendre a vers l'infini dans les inégalités 3.4, 3.5 and 3.6. \square

Remarque 3.2.8. On retrouve donc en particulier que la borne de Solomyak est optimale.

3.3 Extension de la méthode de construction pour des périodes plus longues

Notre méthode se basant sur l'utilisation de la formule quadratique, elle est insuffisante pour obtenir une caractérisation comme celle de Bassino, qui est donnée uniquement en fonction de polynômes minimaux et pour des périodes quelconques. Nous allons montrer qu'elle peut cependant s'appliquer pour étudier des cas associés à des nombres de Parry de longueurs non minimales données.

3.3.1 Nombres de Parry cubiques de longueur 4

Nous allons étudier les possibilités pour qu'un nombre de Parry cubique soit de type (ℓ, m) avec $\ell + m = 4$. Dans ce cas, le polynôme $Q(X)$ associé au développement de 1 est de degré 4. Il est donc de la forme $Q(X) = P(X)(X + a)$ avec P le polynôme minimal du nombre de Parry associé et a un entier.

Nombres de Parry de type $(3, 1)$

pour ce type de nombres de Parry, la suite des parties fractionnaires itérées est de la forme $1f_1f_2f_3^\infty$, et le polynôme associé est

$$Q_f(X) = X^3 + (f_1 - 1)X^2 + (f_2 - f_1)X + (f_3 - f_2).$$

Supposons qu'un nombre de Parry cubique $\alpha > 1$ soit de ce type. En notant

$$P_f(X) := X^2 + \lambda X + \mu = \frac{P(X)}{X - \alpha},$$

il existe un entier a non nul tel que

$$(X^2 + \lambda X + \mu)(X + a) = Q_f(X),$$

ce qui nous donne le système suivant.

$$\begin{cases} \lambda + a = f_1 - 1 & \in]-1, 0[\\ \lambda a + \mu = f_2 - f_1 & \in]-1, 1[\\ \mu a = f_3 - f_2 & \in]-1, 1[. \end{cases}$$

Nous allons maintenant raisonner selon le signe de a .

— Si $a > 0$, alors le système donne

$$\begin{cases} \lambda \in]-1 - a, -a[\\ \mu \in]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\\ \lambda a + \mu \in]-a - a^2 - \frac{1}{a}, -a^2 + \frac{1}{a}[\cap]-1, 1[\end{cases}$$

Or pour que l'intersection de la dernière ligne soit non vide, il est nécessaire que $-a^2 + \frac{1}{a} > -1$, ce qui est vrai si, et seulement si $a = 1$ et dans ce cas on a

$$\begin{cases} \lambda = f_1 - 2 \\ \lambda + \mu = f_2 - f_1 \\ \mu = f_3 - f_2. \end{cases}$$

Cela implique que

$$f_3 = 2 + 2f_2 - 2f_1. \quad (3.7)$$

— Si $a < 0$, alors le système donne

$$\begin{cases} \lambda \in]-1 - a, -a[\\ \mu \in]\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}[\\ \lambda a + \mu \in]-a^2 + \frac{1}{a}, -a^2 - a - \frac{1}{a}[\cap]-1, 1[. \end{cases}$$

Or pour que l'intersection soit non vide, il est nécessaire que $-a^2 - a - \frac{1}{a} > -1$, ce qui est vrai si, et seulement si $a = -1$, et dans ce cas on a

$$\begin{cases} \lambda = f_1 \\ -\lambda + \mu = f_2 - f_1 \\ \mu = f_2 - f_3. \end{cases}$$

Cela implique que $f_2 - f_3 - f_1 = f_2 - f_1$, ce qui est impossible car f_3 est non nul.

Nombres de Parry de type (2, 2)

Dans ce cas, la suite des parties fractionnaires itérées est de la forme $1f_1(f_2f_3)^\infty$, et le polynôme associé est

$$Q_f(X) = X^3 + f_1X^2 + (f_2 - 1)X + (f_3 - f_1).$$

Supposons qu'un nombre de Parry cubique $\alpha > 1$ soit de ce type. En notant

$$P_f(X) := X^2 + \lambda X + \mu = \frac{P(X)}{X - \alpha},$$

il existe un entier a non nul tel que

$$(X^2 + \lambda X + \mu)(X + a) = Q_f(X),$$

ce qui nous donne le système suivant.

$$\begin{cases} \lambda + a = f_1 & \in]0, 1[\\ \lambda a + \mu = f_2 - 1 & \in]-1, 0[\\ \mu a = f_3 - f_2 & \in]-1, 1[\end{cases}$$

Nous allons maintenant raisonner selon le signe de a .

— Si $a > 0$, alors le système donne

$$\begin{cases} \lambda \in]-a, 1-a[\\ \mu \in]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}[\\ \lambda a + \mu \in]-a^2 - \frac{1}{a}, a - a^2 + \frac{1}{a}[\cap] - 1, 1[\end{cases}$$

Pour que l'intersection soit non vide il est nécessaire que $a - a^2 + \frac{1}{a} > -1$ ce qui est vrai si, et seulement si $a = 1$, et dans ce cas on a

$$\begin{cases} \lambda = f_1 - 1 \\ \lambda + \mu = f_2 - 1 \\ \mu = f_3 - f_1. \end{cases}$$

Cela implique que $f_3 - 1 = f_2 - 1$, ce qui est impossible par minimalité des constantes associées au type de α .

— Si $a < 0$, alors le système donne

$$\begin{cases} \lambda \in]-a, 1-a[\\ \mu \in]\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}[\\ \lambda a + \mu \in]a - a^2 + \frac{1}{a}, -a^2 - \frac{1}{a}[\cap] - 1, 1[. \end{cases}$$

Pour que l'intersection soit non vide, il est nécessaire que $-a^2 - \frac{1}{a} > -1$, ce qui est vrai si, et seulement si $a = -1$, et dans ce cas on a

$$\begin{cases} \lambda = f_1 + 1 \\ -\lambda + \mu = f_2 - 1 \\ \mu = f_1 - f_3. \end{cases}$$

Cela implique que $-f_3 - 1 = f_2 - 1$, ce qui est impossible par positivité des parties fractionnaires et minimalité des constantes liées au type de α .

Nombres de Parry de type (1, 3)

Dans ce cas, la suite des parties fractionnaires itérées est de la forme $1(f_1 f_2 f_3)^\infty$, et le polynôme associé est

$$Q_f(X) = X^3 + f_1 X^2 + f_2 X + (f_3 - 1).$$

Supposons qu'un nombre de Parry cubique $\alpha > 1$ soit de ce type. En notant

$$P_f(X) := X^2 + \lambda X + \mu = \frac{P(X)}{X - \alpha}$$

, il existe un entier a non nul tel que

$$(X^2 + \lambda X + \mu)(X + a) = Q_f(X),$$

ce qui nous donne le système suivant.

$$\begin{cases} \lambda + a = f_1 \in]0, 1[\\ \lambda a + \mu = f_2 \in]0, 1[\\ \mu a = f_3 - 1 \in]-1, 0[\end{cases}$$

Nous allons maintenant raisonner selon le signe de a .

— Si $a > 0$, alors le système donne

$$\begin{cases} \lambda \in]-a, 1-a[\\ \mu \in]-\frac{1}{a}, 0[\\ \lambda a + \mu \in]-a^2 - \frac{1}{a}, a - a^2[\cap] - 1, 1[\end{cases}$$

Pour que l'intersection soit non vide il est nécessaire que $a - a^2 > -1$ ce qui est vrai si, et seulement si $a = 1$, et dans ce cas on a

$$\begin{cases} \lambda = f_1 - 1 \\ \lambda + \mu = f_2 \\ \mu = f_3 - 1. \end{cases}$$

Cela implique que $f_3 + f_1 - 2 = f_2$, ce qui est impossible car $f_2 > 0$.

— Si $a < 0$, alors le système donne

$$\begin{cases} \lambda \in]-a, 1 - a[\\ \mu \in]0, -\frac{1}{a}[\\ \lambda a + \mu \in]a - a^2, -a^2 - \frac{1}{a}[\cap]-1, 1[. \end{cases}$$

Pour que l'intersection soit non vide, il est nécessaire que $-a^2 - \frac{1}{a} > -1$, ce qui est vrai si, et seulement si $a = -1$, et dans ce cas on a

$$\begin{cases} \lambda = f_1 + 1 \\ -\lambda + \mu = f_2 \\ \mu = 1 - f_3. \end{cases}$$

Cela implique que $-f_1 - f_3 = f_2$, ce qui est impossible par positivité des parties fractionnaires et minimalité des constantes liées au type de α .

Bilan

Théorème 3.3.1. *Tout nombre de Parry cubique α de longueur 4 est de type (3, 1). De plus, α est nécessairement un nombre de Pisot, et en notant $d_\alpha(1) = g_1 g_2 g_3 g_4^\infty$, le polynôme minimal de α est de la forme*

$$X^3 - aX^2 + bX - c = \frac{X^4 - (g_1 + 1)X^3 - (g_2 - g_1)X^2 - (g_3 - g_2)X - (g_4 - g_3)}{X + 1},$$

avec

$$a \geq 3,$$

$$a \leq b \leq 2a - 2$$

et

$$2b - 2a + 2 \leq c < b - \frac{a}{2}.$$

Réciproquement, si α est la plus grande racine réelle d'un polynôme $X^3 - aX^2 + bX - c$ dont les coefficients vérifient les conditions ci-dessus, alors

$$d_\alpha(1) = (a - 2)(2a - b - 2)(2a - 2b + c - 2)(2a - 2b + 2c - 2)^\infty.$$

Démonstration. Montrons d'abord qu'un nombre de Parry cubique du type souhaité est bien de Pisot. D'après ce que l'on a établi dans l'analyse (en 3.3.1.0 et dans le système précédent), le polynôme de degré 2 ayant les conjugués de α pour racines, donné par $X^2 + \lambda X + \mu$, a pour coefficients

$$\lambda = f_1 - 2$$

et

$$\mu = f_3 - f_2 = 2 + f_2 - 2f_1.$$

Son discriminant est donc

$$\Delta = (f_1 - 2)^2 - 4(f_3 - f_2) = f_1^2 + 4(f_1 - f_2 - 1).$$

Si $\Delta > 0$, on a $\sqrt{\Delta} < f_1$ et

$$1 - f_1 < 1 - \frac{f_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} < 1.$$

Si $\Delta < 0$, alors

$$\left| \frac{(2 - f_1) \pm i\sqrt{4(f_3 - f_2) - (2 - f_1)^2}}{2} \right| \leq \frac{4(f_3 - f_2)}{4} < 1.$$

Dans tous les cas, α est un nombre de Pisot.

Il a de plus été établi durant l'analyse que dans le seul cas envisageable, la relation $f_3 = 2 + 2f_2 - 2f_1$ doit être vérifiée (3.3.1.0). En multipliant par α de chaque côté de l'identité, on obtient :

$$g_4 + f_4 = 2g_1 + 2f_1 + 2g_3 + 2f_3 - 2g_2 - 2f_2,$$

et comme $f_4 = f_3$ de par le type de α , on a

$$g_4 = 2g_1 + 2g_3 - 2g_2 + (f_3 - 2f_2 + 2f_1) = 2g_1 + 2g_3 - 2g_2 + 2.$$

Par ailleurs, g_4 est nécessairement strictement inférieur à g_1 par minimalité des constantes associées au type de α (sinon on aurait $T_\alpha^3(d_\alpha(1)) >_{\text{lex}} d_\alpha(1)$ ce qui n'est pas possible). Il en découle que

$$g_3 < g_2 - 1 - \frac{g_1}{2}.$$

Par ailleurs, posons $P(X) = X^3 - aX^2 + bX - c$ le polynôme minimal de α dans $\mathbb{Z}[X]$. On a alors

$$\begin{aligned} (X^3 - aX^2 + bX - c)(X + 1) &= X^4 - (g_1 + 1)X^3 - (g_2 - g_1)X^2 - (g_3 - g_2)X - (g_4 - g_3) \\ &= X^4 - (a - 1)X^3 + (b - a)X^2 + (b - c)X - c, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$a = g_1 + 2,$$

$$b = g_1 - g_2 + a = 2g_1 - g_2 + 2$$

et

$$c = b + g_3 - g_2 = 2g_1 - 2g_2 + 2 + g_3.$$

Or, on a les conditions suivantes sur les entiers g_1 , g_2 et g_3 :

$$g_1 \geq 1,$$

$$1 + \frac{g_1}{2} < g_2 \leq g_1$$

et

$$0 \leq g_3 < g_2 - 1 - \frac{g_1}{2}.$$

Notons que pour des valeurs de g_2 trop basses, il n'y aura pas de valeurs possibles pour g_3 (on retrouvera en appliquant la caractérisation de Bassino dans la suite que la condition en tant que telle porte sur $g_3 - g_2$). Finalement, on obtient les conditions suivantes sur les coefficients du polynôme minimal de α .

$$a \geq 3,$$

$$a \leq b < \frac{3}{2}a - 2$$

et

$$2b - 2a + 2 \leq c < b - \frac{a}{2}.$$

On peut de plus retrouver $d_\alpha(1)$ à partir du polynôme minimal de α avec les relations

$$g_1 = a - 2,$$

$$g_2 = 2a - b - 2,$$

$$g_3 = 2a - 2b + c - 2$$

et

$$g_4 = 2a - 2b + 2c - 2.$$

Réciproquement, soit α la plus grande racine réelle du polynôme $P(X) = X^3 - aX^2 + bX - c$ où les entiers a, b et c vérifient les conditions ci-dessus (notons que pour garder des coefficients positifs, notre b a un signe opposé à celui des théorèmes 3.1.25 et 3.1.26 tels qu'on les a énoncés). Déjà, on a

$$0 < b - 1 < b + b - a < a + c,$$

et la quantité

$$ac - c^2 = (a - c)c$$

est minimale en la valeur extrême de c la plus éloignée de $a/2$. Or si $c = 2b - 2a + 2$, on a

$$c^2 + b = 2bc - 2ac + 2c + b = ac + 2(b - \frac{3}{2}a + 2)c + b = ac + (b - \frac{3}{2}a + 2)(2c - 3) - \frac{a}{2} + 2 < ac + 1,$$

car $c > 3/2$, $b - \frac{3}{2}a + 2 < 0$ et $a \geq 3$. Par ailleurs, si $c = b - a/2$, on a

$$c^2 + b = bc - \frac{a}{2}c + b = ac + (b - \frac{3}{2}a + 2)c + b - 2c = ac + (b - \frac{3}{2}a + 2)(c - 1) - \frac{a}{2} + 2 < ac + 1,$$

car $c > 1$, $b - \frac{3}{2}a + 2 < 0$ et $a \geq 3$. Ainsi, d'après la caractérisation d'Akiyama 3.1.25, α est un nombre de Pisot.

Nous allons maintenant utiliser la caractérisation de Bassino 3.1.26 pour montrer que $d_\alpha(1)$ a bien la forme attendue. Déjà, comme on a $b \geq a$, on se place dans le cas numéro 4 de la caractérisation. Notons maintenant $c_i = 1 - a + (a - 2)/i$ pour tout entier i strictement positif, et k le plus petit entier compris entre 2 et $a - 2$ tel que $c_k \leq c - b < c_{k-1}$. Comme $c - b < -a/2$, il vient que $k > 2$. Par ailleurs, comme $c \geq 2b - 2a + 2$, il vient que

$$\begin{aligned} (k-2)c - (k-1)b &\geq [2(k-2) - (k-1)]b - 2(k-2)a + 2(k-2) \\ &\geq -(k-1)a + (k-3)(b-a) + 2(k-2) \\ &> k-2 - (k-1)a. \end{aligned}$$

Notons maintenant $m = \min\{i \in \mathbb{N} \mid ic - (i+1)b > i - (i+1)a\}$. Comme $b \geq a$ et

$$c - 2b \geq -2a + 2 > -2a + 1,$$

il vient que $m = 1$. Le théorème 3.1.26 nous assure alors que

$$d_\alpha(1) = (a-2)(2a-b-2)(2a-2b+c-2)(2a-2b+2c-2)^\infty.$$

□

Exemple 3.3.2. La racine dominante α_{e7} du polynôme $X^3 - 5X^2 + 5X - 2$ est un nombre de Parry, et le développement de 1 en base α_{e7} est

$$d_{\alpha_{e7}}(1) = 3302^\infty.$$

C'est en outre le plus petit nombre de Parry de type $(3, 1)$.

3.3.2 Nombres de Parry cubiques de longueur 5

Nous allons maintenant étudier les possibilités pour qu'un nombre de Parry cubique soit de type (ℓ, m) avec $\ell + m = 5$. Le polynôme $Q(X)$ associé au développement de 1 est de degré 5. Il est donc de la forme $Q(X) = P(X)(X^2 + aX + b)$, où P le polynôme minimal du nombre de Parry associé et a et b sont des entiers.

Nombres de Parry de type (1, 4)

Dans ce cas, la suite des parties fractionnaires itérées est de la forme $1(f_1 f_2 f_3 f_4)^\infty$ et le polynôme associé est

$$Q_f(X) = X^4 + f_1 X^3 + f_2 X^2 + f_3 X + (f_4 - 1).$$

Supposons qu'un nombre de Parry cubique $\alpha > 1$ soit de ce type. En notant

$$P_f(X) := X^2 + \lambda X + \mu = \frac{P(X)}{X - \alpha},$$

il existe deux entiers a et b avec b non nul tels que

$$(X^2 + \lambda X + \mu)(X^2 + aX + b) = Q_f(X),$$

ce qui nous donne le système suivant.

$$\begin{cases} \lambda + a = f_1 & \in]0, 1[\\ \lambda a + \mu + b = f_2 & \in]0, 1[\\ \lambda b + \mu a = f_3 & \in]0, 1[\\ \mu b = f_4 - 1 & \in]-1, 0[. \end{cases}$$

Nous allons maintenant raisonner selon les signes de a et b .

— Si $a \geq 0$ et $b > 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda \in]-a, 1-a[\\ \lambda a + \mu + b \in]0, 1[\cap]-a^2 - \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b[\\ \lambda b + \mu a \in]0, 1[\cap]-ab - \frac{a}{b}, b - ab[\\ \mu \in]-\frac{1}{b}, 0[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$]0, 1[\cap]-ab - \frac{a}{b}, b - ab[\neq \emptyset \Leftrightarrow b - ab > 0 \Leftrightarrow a = 0,$$

et dans ce cas

$$]0, 1[\cap]-a^2 - \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b[\neq \emptyset \Leftrightarrow b - \frac{1}{b} < 1 \Leftrightarrow b = 1.$$

Les coefficients doivent alors vérifier

$$\begin{cases} \lambda = f_1 \\ \mu = f_2 - 1 \\ \lambda = f_3 \\ \mu = f_4 - 1, \end{cases}$$

ce qui est impossible car $f_1 \neq f_3$ par minimalité des constantes associées au type de α .

— Si $a < 0$ et $b > 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda \in]-a, 1-a[\\ \lambda a + \mu + b \in]0, 1[\cap]a - a^2 - \frac{1}{b} + b, -a^2 + b[\\ \lambda b + \mu a \in]0, 1[\cap]-ab, b - ab - \frac{a}{b}[\\ \mu \in]-\frac{1}{b}, 0[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$]0, 1[\cap]-ab, -\frac{a}{b} + b - ab[\neq \emptyset \Leftrightarrow -ab < 1,$$

ce qui est impossible.

— Si $a \geq 0$ et $b < 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda & \in]-a, 1-a[\\ \lambda a + \mu + b & \in]0, 1[\cap]-a^2 + b, a - a^2 - \frac{1}{b} + b[\\ \lambda b + \mu a & \in]0, 1[\cap]b - ab, -ab - \frac{a}{b}[\\ \mu & \in]0, -\frac{1}{b}[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$]0, 1[\cap]b - ab, -\frac{a}{b} - ab[\neq \emptyset \Leftrightarrow b - ab < 1 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1.$$

De plus, si $a = 0$, ou $a = 1$,

$$]0, 1[\cap]-a^2 + b, a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset \Leftrightarrow b - \frac{1}{b} > 0,$$

ce qui est impossible.

— Si $a < 0$ et $b < 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda & \in]-a, 1-a[\\ \lambda a + \mu + b & \in]0, 1[\cap]a - a^2 + b, -a^2 + b - \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a & \in]0, 1[\cap]b - ab - \frac{a}{b}, -ab[\\ \mu & \in]0, -\frac{1}{b}[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$]0, 1[\cap]b - ab - \frac{a}{b}, -ab[\neq \emptyset \Leftrightarrow -ab > 0,$$

ce qui est impossible.

Il n'y a donc aucune valeur pour le couple (a, b) qui convienne.

Nombres de Parry de type $(2, 3)$

Dans ce cas, la suite des parties fractionnaires itérées est de la forme $1f_1(f_2f_3f_4)^\infty$, et le polynôme associé est

$$Q_f(X) = X^4 + f_1X^3 + f_2X^2 + (f_3 - 1)X + (f_4 - f_1).$$

Supposons qu'un nombre de Parry cubique $\alpha > 1$ soit de ce type. En notant

$$P_f(X) := X^2 + \lambda X + \mu = \frac{P(X)}{X - \alpha},$$

il existe deux entiers a et b avec b non nul tels que

$$(X^2 + \lambda X + \mu)(X^2 + aX + b) = Q_f(X),$$

ce qui nous donne le système suivant.

$$\begin{cases} \lambda + a & = f_1 & \in]0, 1[\\ \lambda a + \mu + b & = f_2 & \in]0, 1[\\ \lambda b + \mu a & = f_3 - 1 & \in]-1, 0[\\ \mu b & = f_4 - f_1 & \in]-1, 1[. \end{cases}$$

Nous allons maintenant raisonner selon les signes de a et b .

— Si $a \geq 0$ et $b > 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda & \in]-a, 1-a[\\ \lambda a + \mu + b & \in]0, 1[\cap]-a^2 - \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b + \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a & \in]-1, 0[\cap]-ab - \frac{a}{b}, b - ab + \frac{a}{b}[\\ \mu & \in]-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$\begin{aligned}]-1, 0[\cap] - ab - \frac{a}{b}, b - ab + \frac{a}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - ab + \frac{a}{b} > -1 \text{ et } a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (a = 1) \text{ ou } ((b = 1) \text{ et } (a \neq 0)). \end{aligned}$$

Si $a = 1$, on a

$$\begin{aligned}]0, 1[\cap] - a^2 - \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b + \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - \frac{1}{b} < 2 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \text{ ou } b = 2. \end{aligned}$$

Enfin, si $b = 1$, on a

$$\begin{aligned}]0, 1[\cap] - a^2 - \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b + \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow a - a^2 > -2 \\ &\Leftrightarrow (a = 0) \text{ ou } (a = 1). \end{aligned}$$

Il y a donc deux couples possibles : $(1, 1)$ et $(1, 2)$.

— Si $a < 0$ et $b > 0$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in]-a, 1-a[\\ \lambda a + \mu + b \in]0, 1[\cap] a - a^2 - \frac{1}{b} + b, -a^2 + b + \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a \in]-1, 0[\cap] -ab + \frac{a}{b}, b - ab - \frac{a}{b}[\\ \mu \in]-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}[. \end{array} \right.$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$]-1, 0[\cap] -ab + \frac{a}{b}, b - ab - \frac{a}{b}[\neq \emptyset \Leftrightarrow -ab + \frac{a}{b} < 0,$$

ce qui est impossible.

— Si $a \geq 0$ et $b < 0$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in]-a, 1-a[\\ \lambda a + \mu + b \in]0, 1[\cap] -a^2 + \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a \in]-1, 0[\cap] b - ab + \frac{a}{b}, -ab - \frac{a}{b}[\\ \mu \in]\frac{1}{b}, -\frac{1}{b}[. \end{array} \right.$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$\begin{aligned}]-1, 0[\cap] b - ab + \frac{a}{b}, -ab - \frac{a}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - ab + \frac{a}{b} < 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1 \text{ ou } b = -1. \end{aligned}$$

Dans le cas $a = 0$,

$$]0, 1[\cap] -a^2 + \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset \Leftrightarrow b - \frac{1}{b} > 0,$$

ce qui est impossible. Dans le cas $a = 1$,

$$]0, 1[\cap] -a^2 + \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset \Leftrightarrow b - \frac{1}{b} > 0,$$

ce qui est impossible. Dans le cas $b = -1$,

$$]0, 1[\cap] -a^2 + \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset \Leftrightarrow a - a^2 > 0,$$

ce qui est impossible.

— Si $a < 0$ et $b < 0$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in]-a, 1-a[\\ \lambda a + \mu + b \in]0, 1[\cap]a - a^2 + \frac{1}{b} + b, -a^2 + b - \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a \in]-1, 0[\cap]b - ab - \frac{a}{b}, -ab + \frac{a}{b}[\\ \mu \in]\frac{1}{b}, -\frac{1}{b}[. \end{array} \right.$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$\begin{aligned}]-1, 0[\cap]b - ab - \frac{a}{b}, -ab + \frac{a}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -ab + \frac{a}{b} > -1 \\ &\Leftrightarrow b = -1. \end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$]0, 1[\cap]a - a^2 + \frac{1}{b} + b, -a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset \Leftrightarrow -a^2 > 0,$$

ce qui est impossible.

Ainsi les deux seuls couples de valeurs possibles pour a et b sont $(1, 1)$ et $(1, 2)$. En réinjectant, on trouve les conditions suivantes pour les coefficients λ et μ . Supposons d'abord que $(a, b) = (1, 1)$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = f_1 - 1 \\ \lambda + \mu = f_2 - 1 \\ \lambda + \mu = f_3 - 1 \\ \mu = f_4 - f_1, \end{array} \right.$$

On a alors $f_2 = f_3$ ce qui n'est pas possible par minimalité des constantes associées au type de α . Supposons maintenant que $(a, b) = (1, 2)$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = f_1 - 1 \\ \lambda + \mu = f_2 - 2 \\ 2\lambda + \mu = f_3 - 1 \\ \mu = f_4 - f_1, \end{array} \right.$$

On obtient alors

$$\lambda + \mu = f_4 - f_1 + f_1 - 1 = f_2 - 2,$$

ce qui n'est pas possible car f_2 et f_4 sont des parties fractionnaires, donc $f_4 \neq f_2 - 1$.

Nombres de Parry de type $(3, 2)$

Dans ce cas, la suite des parties fractionnaires itérées est $1f_1f_2(f_3f_4)^\infty$ et le polynôme associé est

$$Q_f(X) = X^4 + f_1X^3 + (f_2 - 1)X^2 + (f_3 - f_1)X + (f_4 - f_2).$$

Supposons qu'un nombre de Parry cubique $\alpha > 1$ soit de ce type. En notant

$$P_f(X) := X^2 + \lambda X + \mu = \frac{P(X)}{X - \alpha},$$

il existe deux entiers a et b avec b non nul tels que

$$(X^2 + \lambda X + \mu)(X^2 + aX + b) = Q_f(X),$$

ce qui nous donne le système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + a = f_1 \in]0, 1[\\ \lambda a + \mu + b = f_2 - 1 \in]-1, 0[\\ \lambda b + \mu a = f_3 - f_1 \in]-1, 1[\\ \mu b = f_4 - f_2 \in]-1, 1[. \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant raisonner selon les signes de a et b .

— Si $a \geq 0$ et $b > 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda & \in] - a, 1 - a[\\ \lambda a + \mu + b & \in] - 1, 0[\cap] - a^2 - \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b + \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a & \in] - 1, 1[\cap] - ab - \frac{a}{b}, b - ab + \frac{a}{b}[\\ \mu & \in] - \frac{1}{b}, \frac{1}{b}[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$\begin{aligned}] - 1, 1[\cap] - ab - \frac{a}{b}, b - ab + \frac{a}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - ab + \frac{a}{b} > -1 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1 \text{ ou } b = 1. \end{aligned}$$

Si $a = 0$, on a

$$]0, 1[\cap] - a^2 - \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b + \frac{1}{b}[\neq \emptyset \Leftrightarrow b - \frac{1}{b} < 1,$$

ce qui est possible seulement si $b = 1$. Si $a = 1$, on a

$$\begin{aligned}] - 1, 0[\cap] - a^2 - \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b + \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - \frac{1}{b} < 1 \\ &\Leftrightarrow b = 1. \end{aligned}$$

Enfin, si $b = 1$, on a

$$\begin{aligned}] - 1, 0[\cap] - a^2 - \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b + \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow a - a^2 > -3 \\ &\Leftrightarrow a = 0, 1 \text{ ou } 2. \end{aligned}$$

Il y a donc trois couples possibles : $(0, 1)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$.

— Si $a < 0$ et $b > 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda & \in] - a, 1 - a[\\ \lambda a + \mu + b & \in] - 1, 0[\cap] a - a^2 - \frac{1}{b} + b, -a^2 + b + \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a & \in] - 1, 1[\cap] - ab + \frac{a}{b}, b - ab - \frac{a}{b}[\\ \mu & \in] - \frac{1}{b}, \frac{1}{b}[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$\begin{aligned}] - 1, 1[\cap] - ab + \frac{a}{b}, b - ab - \frac{a}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -ab + \frac{a}{b} < 1 \\ &\Leftrightarrow b = 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}] - 1, 0[\cap] a - a^2 - \frac{1}{b} + b, -a^2 + b + \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -a^2 > -3 \\ &\Leftrightarrow a = -1. \end{aligned}$$

Le couple $(-1, 1)$ est donc également possible.

— Si $a \geq 0$ et $b < 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda & \in] - a, 1 - a[\\ \lambda a + \mu + b & \in] - 1, 0[\cap] - a^2 + \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a & \in] - 1, 1[\cap] b - ab + \frac{a}{b}, -ab - \frac{a}{b}[\\ \mu & \in] \frac{1}{b}, -\frac{1}{b}[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$\begin{aligned}] - 1, 1[\cap] b - ab + \frac{a}{b}, -ab - \frac{a}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - ab + \frac{a}{b} < 1 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1 \text{ ou } b = -1. \end{aligned}$$

Dans le cas $a = 0$,

$$\begin{aligned}] - 1, 0[\cap] - a^2 + \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - \frac{1}{b} > -1 \\ &\Leftrightarrow b = -1. \end{aligned}$$

Dans le cas $a = 1$,

$$\begin{aligned}] - 1, 0[\cap] - a^2 + \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - \frac{1}{b} > -1 \\ &\Leftrightarrow b = -1. \end{aligned}$$

Dans le cas $b = -1$,

$$\begin{aligned}] - 1, 0[\cap] - a^2 + \frac{1}{b} + b, a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow a - a^2 > -1 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1. \end{aligned}$$

On peut donc ajouter $(0, -1)$ et $(1, -1)$ aux couples possibles.

— Si $a < 0$ et $b < 0$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in] - a, 1 - a[\\ \lambda a + \mu + b \in] - 1, 0[\cap] a - a^2 + \frac{1}{b} + b, -a^2 + b - \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a \in] - 1, 1[\cap] b - ab - \frac{a}{b}, -ab + \frac{a}{b}[\\ \mu \in] \frac{1}{b}, -\frac{1}{b}[. \end{array} \right.$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$\begin{aligned}] - 1, 1[\cap] b - ab - \frac{a}{b}, -ab + \frac{a}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -ab + \frac{a}{b} > -1 \\ &\Leftrightarrow b = -1. \end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}] - 1, 0[\cap] a - a^2 + \frac{1}{b} + b, -a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -a^2 > -1 \\ &\Leftrightarrow a = -1. \end{aligned}$$

On peut donc ajouter le couple $(-1, -1)$ à la liste des couples possibles.

Ainsi il y a sept couples de valeurs possibles pour a et b :

$$(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (-1, -1), (0, -1), (1, -1).$$

En réinjectant, on trouve les conditions suivantes pour les coefficients λ et μ . Posons d'abord $b = 1$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = f_1 - a \\ \lambda a + \mu = f_2 - 2 \\ \lambda + \mu a = f_3 - f_1 \\ \mu = f_4 - f_2, \end{array} \right.$$

Si $a = -1$, on obtient $2 - f_2 = f_3 - f_1 < 1$ ce qui est contradictoire. Si $a = 0$, on obtient $f_2 - 2 = f_4 - f_2 > -1$ ce qui est contradictoire. Si $a = 1$, on obtient $f_2 - 2 = f_3 - f_1 > -1$ ce qui est contradictoire. Si $a = 2$, on obtient d'une part

$$f_3 = f_1 + 2(f_2 - 2) - 3(f_1 - 2) = 2(f_2 - f_1) + 2,$$

et d'autre part

$$f_4 = f_2 + (f_2 - 2) - 2(f_1 - 2) = 2(f_2 - f_1) + 2 = f_3,$$

et on retrouve le cas des suites de parties fractionnaires itérées de la forme $1f_1f_2f_3^\infty$, qui fait apparaître le polynôme $X + 1$. Posons maintenant $b = -1$. Alors

$$\begin{cases} \lambda = f_1 - a \\ \lambda a + \mu = f_2 \\ -\lambda + \mu a = f_3 - f_1 \\ \mu = f_2 - f_4, \end{cases}$$

Si $a = -1$, on a

$$\mu - \lambda = f_2 = f_2 - f_4 - f_1 - 1,$$

ce qui est impossible car $1 + f_1 + f_4 > 0$. Si $a = 0$, alors on obtient $f_1 = f_1 - f_3$ ce qui est impossible par minimalité des constantes associées au type de α . Si $a = 1$, alors

$$\lambda + \mu = f_2 = f_2 - f_4 + f_1 - 1,$$

ce qui est impossible car $f_1 \neq f_4 + 1$.

Nombres de Parry de type (4, 1)

Dans ce cas, la suite des parties fractionnaires itérées est $1f_1f_2f_3f_4^\infty$, et le polynôme associé est

$$Q_f(X) = X^4 + (f_1 - 1)X^3 + (f_2 - f_1)X^2 + (f_3 - f_2)X + (f_4 - f_3).$$

Supposons qu'un nombre de Parry cubique $\alpha > 1$ soit de ce type. En notant $P_f(X) := X^2 + \lambda X + \mu = P(X)/(X - \alpha)$, il existe deux entiers a et b avec b non nul tels que

$$(X^2 + \lambda X + \mu)(X^2 + aX + b) = Q_f(X),$$

ce qui nous donne le système suivant.

$$\begin{cases} \lambda + a = f_1 - 1 \in]-1, 0[\\ \lambda a + \mu + b = f_2 - f_1 \in]-1, 1[\\ \lambda b + \mu a = f_3 - f_2 \in]-1, 1[\\ \mu b = f_4 - f_3 \in]-1, 1[. \end{cases}$$

Nous allons maintenant raisonner selon les signes de a et b .

— Si $a \geq 0$ et $b > 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda \in]-1 - a, -a[\\ \lambda a + \mu + b \in]-1, 1[\cap]-a - a^2 - \frac{1}{b} + b, -a^2 + b + \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a \in]-1, 1[\cap]-b - ab - \frac{a}{b}, -ab + \frac{a}{b}[\\ \mu \in]-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$]-1, 1[\cap]-b - ab - \frac{a}{b}, -ab + \frac{a}{b}[\neq \emptyset \Leftrightarrow -ab + \frac{a}{b} > -1 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 1.$$

Si $a = 0$, on a

$$\begin{aligned}]-1, 1[\cap]-a - a^2 - \frac{1}{b} + b, -a^2 + b + \frac{1}{b}[&\neq \emptyset \Leftrightarrow b - \frac{1}{b} < 1 \\ &\Leftrightarrow b = 1. \end{aligned}$$

Si $b = 1$, on a

$$\begin{aligned}]-1, 1[\cap]-a - a^2 - \frac{1}{b} + b, -a^2 + b + \frac{1}{b}[&\neq \emptyset \Leftrightarrow -a^2 > -3 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1. \end{aligned}$$

Il y a donc deux couples possibles : $(0, 1)$ et $(1, 1)$.

— Si $a < 0$ et $b > 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda \in]-1-a, -a[\\ \lambda a + \mu + b \in]-1, 1[\cap]-a^2 - \frac{1}{b} + b, -a - a^2 + b + \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a \in]-1, 1[\cap]-b - ab + \frac{a}{b}, -ab - \frac{a}{b}[\\ \mu \in]-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$\begin{aligned}]-1, 1[\cap]-b - ab + \frac{a}{b}, -ab - \frac{a}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -b - ab + \frac{a}{b} < 1 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \text{ ou } a = -1. \end{aligned}$$

Dans le cas $b = 1$, on a

$$\begin{aligned}]-1, 1[\cap]-a^2 - \frac{1}{b} + b, -a - a^2 + b + \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -a - a^2 > -3 \\ &\Leftrightarrow a = -1 \text{ ou } a = -2. \end{aligned}$$

Dans le cas $a = -1$, on a

$$\begin{aligned}]-1, 1[\cap]-a^2 - \frac{1}{b} + b, -a - a^2 + b + \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - \frac{1}{b} < 2 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \text{ ou } b = 2. \end{aligned}$$

Les couples $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ et $(-2, 1)$ sont donc également possibles.

— Si $a \geq 0$ et $b < 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda \in]-1-a, -a[\\ \lambda a + \mu + b \in]-1, 1[\cap]-a - a^2 + \frac{1}{b} + b, -a^2 + b - \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a \in]-1, 1[\cap]-ab + \frac{a}{b}, -b - ab - \frac{a}{b}[\\ \mu \in]\frac{1}{b}, -\frac{1}{b}[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$\begin{aligned}]-1, 1[\cap]-ab + \frac{a}{b}, -b - ab - \frac{a}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -ab + \frac{a}{b} < 1 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = -1. \end{aligned}$$

Dans le cas $a = 0$,

$$\begin{aligned}]-1, 1[\cap]-a - a^2 + \frac{1}{b} + b, -a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - \frac{1}{b} > -1 \\ &\Leftrightarrow b = -1. \end{aligned}$$

Dans le cas $b = -1$,

$$\begin{aligned}]-1, 1[\cap]-a - a^2 + \frac{1}{b} + b, -a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -a^2 > -1 \\ &\Leftrightarrow a = 0. \end{aligned}$$

On peut donc ajouter $(0, -1)$ aux couples possibles.

— Si $a < 0$ et $b < 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda \in]-1-a, -a[\\ \lambda a + \mu + b \in]-1, 1[\cap]-a^2 + \frac{1}{b} + b, -a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\\ \lambda b + \mu a \in]-1, 1[\cap]-ab - \frac{a}{b}, b - ab + \frac{a}{b}[\\ \mu \in]\frac{1}{b}, -\frac{1}{b}[. \end{cases}$$

Au vu des signes de a et b , on a

$$\begin{aligned}] - 1, 1[\cap] - ab - \frac{a}{b}, -b - ab + \frac{a}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -b - ab + \frac{a}{b} > -1 \\ &\Leftrightarrow b = -1 \text{ ou } a = -1. \end{aligned}$$

Dans le cas $b = -1$,

$$\begin{aligned}] - 1, 1[\cap] - a^2 + \frac{1}{b} + b, -a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow -a - a^2 > -1 \\ &\Leftrightarrow a = -1. \end{aligned}$$

Dans le cas $a = -1$,

$$\begin{aligned}] - 1, 1[\cap] - a^2 + \frac{1}{b} + b, -a - a^2 + b - \frac{1}{b}[\neq \emptyset &\Leftrightarrow b - \frac{1}{b} > -1 \\ &\Leftrightarrow b = -1. \end{aligned}$$

On peut donc ajouter le couple $(-1, -1)$ à la liste des couples possibles. Ainsi il y a sept couples de valeurs possibles pour a et b :

$$(-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (-1, 2), (-1, -1), (0, -1).$$

En réinjectant, on trouve les conditions suivantes pour les coefficients λ et μ . Posons d'abord $b = 1$. Alors

$$\begin{cases} \lambda = f_1 - a - 1 \\ \lambda a + \mu = f_2 - f_1 - 1 \\ \lambda + \mu a = f_3 - f_2 \\ \mu, = f_4 - f_3. \end{cases}$$

Si $a = -2$, on obtient

$$-2\lambda + \mu = f_2 - f_1 - 1 = -2f_1 - 2 + f_4 - f_3$$

ce qui est contradictoire car sinon $f_4 = f_1 + f_2 + f_3 + 1$. Si $a = -1$, on obtient $f_3 - f_2 + f_2 - f_1 - 1 = 0$ ce qui est contradictoire car sinon $f_3 = f_1 + 1$. Si $a = 0$, on obtient

$$f_4 - f_3 = f_2 - f_1 - 1$$

et

$$f_1 - 1 = f_3 - f_2,$$

ce qui nous donne la contradiction $f_4 = 2f_2 - 2 < 0$. Finalement, si $a = 1$, on n'obtient pas de contradiction.

Posons maintenant $b = -1$. Alors

$$\begin{cases} \lambda = f_1 - a - 1 \\ \lambda a + \mu = f_2 - f_1 + 1 \\ -\lambda + \mu a = f_3 - f_2 \\ \mu, = f_3 - f_4, \end{cases}$$

Si $a = -1$, on a

$$-2\lambda = -2f_1 = f_3 - f_1 + 1 > 0,$$

ce qui est impossible. Si $a = 0$, alors on obtient

$$f_1 - 1 = f_2 - f_3$$

d'une part et

$$f_2 - f_1 + 1 = f_3 - f_4$$

d'autre part, ce qui nous donne la contradiction $f_3 = f_3 - f_4$.

Examinons maintenant le dernier couple, $(-1, 2)$. On a alors

$$\begin{cases} \lambda &= f_1 \\ -\lambda + \mu &= f_2 - f_1 - 2 \\ 2\lambda - \mu &= f_3 - f_2 \\ \mu, &= 2f_4 - 2f_3, \end{cases}$$

Il vient directement que $f_1 = f_3 - f_1 - 2 < -1$, ce qui est contradictoire.

Finalement, il reste un seul couple possible : $(1, 1)$.

Bilan

Théorème 3.3.3. *Tout nombre de Parry cubique α de longueur 4 est de type $(4, 1)$. De plus, α est nécessairement un nombre de Pisot, et en notant $d_\alpha(1) = g_1 g_2 g_3 g_4 g_5^\infty$, le polynôme minimal de α est de la forme*

$$X^3 - aX^2 + bX - c = \frac{X^5 - (g_1 + 1)X^4 - (g_2 - g_1)X^3 - (g_3 - g_2)X^2 - (g_4 - g_3)X - (g_5 - g_4)}{X^2 + X + 1},$$

avec

$$a \geq 3,$$

$$a + 1 \leq b < \frac{5a}{3} - \frac{7}{3},$$

$$\frac{3b}{2} - \frac{3a}{2} + \frac{3}{2} \leq c < b - \frac{2a}{3} + \frac{1}{3},$$

et

$$c - 2b \leq 1 - 2a.$$

Réciproquement, si α est la plus grande racine réelle d'un polynôme $X^3 - aX^2 + bX - c$ dont les coefficients vérifient les conditions ci-dessus, alors

$$d_\alpha(1) = (a - 2)(2a - b - 3)(3a - 2b + c - 3)(3a - 3b + 2c - 3)(3a - 3b + 3c - 3)^\infty.$$

Démonstration. Commençons par montrer qu'un nombre de Parry cubique du type souhaité est bien de Pisot. D'après ce que l'on a établi dans l'analyse, le polynôme de degré 2 ayant les conjugués de α pour racines donné par $X^2 + \lambda X + \mu$ a pour coefficients

$$\lambda = f_1 - 2$$

et

$$\mu = f_4 - f_3 = 2 + f_3 - f_2 - f_1 = f_2 - 2f_1 + 1.$$

Son discriminant est donc

$$\Delta = (f_1 - 2)^2 - 4(f_2 - 2f_1 + 1) = f_1^2 + 4(f_1 - f_2 - 1).$$

Si $\Delta > 0$, on a $\sqrt{\Delta} < f_1$ et

$$1 - f_1 < 1 - \frac{f_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} < 1.$$

Si $\Delta < 0$, alors

$$\left| \frac{(2 - f_1) \pm i\sqrt{4(f_4 - f_3) - (2 - f_1)^2}}{2} \right|^2 \leq \frac{4(f_4 - f_3)}{4} < 1.$$

Dans tous les cas, α est un nombre de Pisot.

On a vu de plus que dans le seul cas envisageable, les relations $f_3 = 2f_2 - f_1 - 1$ et $f_4 = 3f_2 - 3f_1$ doivent être vérifiées. En multipliant par α de chaque côté de ces identités, on obtient d'une part

$$g_4 + f_4 = 2g_3 + 2f_3 - g_2 - f_2 - g_1 - f_1,$$

d'où

$$g_4 = 2g_3 + 2f_3 - g_2 - 4f_2 - g_1 + 2f_1 = 2g_3 - g_2 - g_1 - 2,$$

et d'autre part

$$g_5 + f_5 = 3g_3 + 3f_3 - 3g_2 - 3f_2.$$

Comme $f_5 = f_4$ de par le type de α , on a

$$g_5 = 3g_3 - 3g_2 + 3f_3 - 6f_2 + 3f_1 = 3g_3 - 3g_2 - 3.$$

Par ailleurs, g_5 est nécessairement strictement positif et strictement inférieur à g_1 par minimalité des constantes associées au type de α (sinon on aurait $T_\alpha^3(d_\alpha(1)) >_{\text{lex}} d_\alpha(1)$, ce qui n'est pas possible), et g_4 est nécessairement inférieur ou égal à g_1 . Il en découle que

$$1 < g_3 - g_2 < \frac{g_1}{3} + 1$$

et

$$2 \leq 2g_3 - g_2 - g_1 \leq g_1 + 2.$$

En particulier

$$\frac{g_1}{3} < g_2 < g_3 - 1 \leq g_1 - 1,$$

et

$$1 + \frac{g_1}{2} + \frac{g_2}{2} \leq g_3 \leq g_1.$$

Par ailleurs, posons $P(X) = X^3 - aX^2 + bX - c$ le polynôme minimal de α dans $\mathbb{Z}[X]$. On a alors

$$\begin{aligned} (X^3 - aX^2 + bX - c)(X^2 + X + 1) &= X^5 - (g_1 + 1)X^4 - (g_2 - g_1)X^3 - (g_3 - g_2)X^2 - (g_4 - g_3)X - g_5 + g_4 \\ &= X^5 - (a - 1)X^4 + (b - a + 1)X^3 + (b - a - c)X^2 + (b - c)X - c, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$a = g_1 + 2,$$

$$b = g_1 - g_2 + a - 1 = 2g_1 - g_2 + 1$$

et

$$c = b - a + g_3 - g_2 = g_1 - 2g_2 + g_3 - 1,$$

ce qui implique aussi que

$$c - 2b = -2a + 1 + g_3 - g_1$$

Or, on a les conditions suivantes sur les entiers g_1 , g_2 et g_3 :

$$g_1 \geq 1,$$

$$\frac{g_1}{3} < g_2 < g_1 - 1,$$

$$1 + \frac{g_1}{2} + \frac{g_2}{2} \leq g_3 \leq g_1$$

et

$$1 < g_3 - g_2 < \frac{g_1}{3} + 1.$$

Notons que l'on aurait pu donner un encadrement plus précis pour g_2 encore, mais comme précédemment les valeurs que l'on écarte pas directement pour g_2 ne donneront pas lieu à un encadrement valable

pour g_3 , et c'est cet encadrement qui sera important pour la suite. Finalement, on obtient les conditions suivantes sur les coefficients du polynôme minimal de α .

$$a \geq 3,$$

$$a + 1 \leq b < \frac{5a}{3} - \frac{7}{3}$$

et

$$\frac{3b}{2} - \frac{3a}{2} + \frac{3}{2} \leq c < b - \frac{2a}{3} + \frac{1}{3},$$

ainsi que

$$c - 2b \leq 1 - 2a.$$

On peut de plus retrouver $d_\alpha(1)$ à partir du polynôme minimal de α avec les relations

$$g_1 = a - 2,$$

$$g_2 = 2a - b - 3,$$

$$g_3 = 3a - 2b + c - 3,$$

$$g_4 = 3a - 3b + 2c - 3$$

et

$$g_5 = 3a - 3b + 3c - 3.$$

Réciproquement, soit α la plus grande racine réelle du polynôme $P(X) = X^3 - aX^2 + bX - c$ où les entiers a , b et c vérifient les conditions ci-dessus (notons que pour garder des coefficients positifs, notre b a un signe opposé à celui des théorèmes 3.1.25 et 3.1.26 tels qu'on les a énoncés). Déjà, on a

$$0 < b - 1 < (b - c) + c < \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{3}{2} + c < a + c,$$

et la quantité

$$ac - c^2 = (a - c)c$$

est minimale en la valeur extrême de c la plus éloignée de $a/2$. Or si $c = 3b/2 - 3a/2 + 3/2$, on a

$$c^2 + b = \frac{3}{2}bc - \frac{3}{2}ac + \frac{3}{2}c + b = ac + \frac{3}{2}(b - \frac{5}{3}a + \frac{7}{3})c + b - 2c = ac + (b - \frac{5}{3}a + \frac{7}{3})(\frac{3}{2}c - 2) - \frac{a}{3} + \frac{5}{3} < ac + 1,$$

car $c > 4/3$, $b - 5a/3 + 7/3 < 0$ et $a \geq 3$. Par ailleurs, si $c = b - 2a/3 + 1/2$, on a

$$c^2 + b = bc - \frac{2}{3}ac + \frac{1}{2}c + b = ac + (b - \frac{5}{3}a + \frac{7}{3})c + b - \frac{11}{6}c = ac + (b - \frac{5}{3}a + \frac{7}{3})(c - \frac{5}{6}) - \frac{a}{6} + \frac{37}{36} < ac + 1,$$

car $c > 5/6$, $b - 5a/3 + 7/3 < 0$ et $a > 1$. Ainsi, d'après la caractérisation d'Akiyama 3.1.25, α est un nombre de Pisot.

Nous allons maintenant utiliser la caractérisation de Bassino 3.1.26 pour montrer que $d_\alpha(1)$ a bien la forme attendue. Déjà, comme on a $b \geq a$, on se place dans le cas numéro 4 de la caractérisation. Notons maintenant $c_i = 1 - a + (a - 2)/i$ pour tout entier i strictement positif, et k le plus petit entier compris entre 2 et $a - 2$ tel que $c_k \leq c - b < c_{k-1}$. Comme $c - b < (1 - 2a)/3$, il vient que $k > 3$. Par ailleurs, comme $c \geq 3b/2 - 3a/2 + 3/2$, il vient que

$$\begin{aligned} (k - 2)c - (k - 1)b &\geq -(k - 1)a + \frac{k - 4}{2}(b - a) + \frac{3}{2}(k - 2) \\ &\geq -(k - 1)a + 2k - 5 \\ &> k - 2 - (k - 1)a. \end{aligned}$$

Notons maintenant $m = \min\{i \in \mathbb{N} \mid ic - (i+1)b > i - (i+1)a\}$. On a imposé d'une part que $c - 2b \leq 1 - 2a$ et d'autre part on a

$$2c - 3b \geq -3a + 3 > -3a + 2,$$

donc il vient que $m = 2$. Le théorème 3.1.26 nous assure alors que

$$d_\alpha(1) = (a - 2)(2a - b - 3)(3a - 2b + c - 3)(3a - 3b + 2c - 3)(3a - 3b + 3c - 3)^\infty.$$

□

Exemple 3.3.4. La racine dominante α_{e8} du polynôme $X^3 - 6X^2 + 7X - 3$ est un nombre de Parry, et le développement de 1 en base α_{e8} est

$$d_{\alpha(1)_{e8}} = 42403^\infty.$$

C'est en outre le plus petit nombre de Parry de type $(4, 1)$.

Au vu des résultats que nous venons d'établir sur les nombres de Parry cubiques en longueur 4 et 5, il devrait être possible pour n'importe quelle longueur donnée d'établir s'il existe des nombres de Parry cubiques non Pisots, à condition d'y passer le temps nécessaire.

3.4 Développements possibles

Sur les nombres de Parry non Pisot

Le problème qui se pose naturellement au vu de la classification de Bassino 3.1.26 et de la famille que l'on a construite en 3.2.3 est celui de finir la caractérisation de tous les nombres de Parry cubiques. Pour ce faire, il y a déjà quelques questions intermédiaires intéressantes auxquelles on peut s'intéresser d'abord. Par exemple, la question suivante reste ouverte suite aux travaux effectués dans cette partie.

Question 3.4.1. Existe-t-il des nombres de Parry cubiques qui ne sont pas des nombres de Pisot en dehors de ceux de la famille que l'on a construite en 3.2.3 ?

La réponse à cette question semble plutôt négative. En effet, au vu de la caractérisation de Bassino 3.1.26, il existe des nombres de Pisot qui sont de type $(1, 2)$ comme la famille que l'on a construite (ce que l'on a constaté également en faisant notre analyse, vu que l'on a imposé des conditions supplémentaires sur la suite des parties fractionnaires itérées pour se restreindre à l'étude de nombres n'étant pas de Pisot). Par ailleurs, les seuls nombres de Pisot pouvant être de grande longueur sont forcément de type $(n, 1)$ avec n entier supérieur ou égal à 2, et dans ce cas le polynôme complémentaire (quotient du polynôme caractéristique de la périodicité par le polynôme minimal) est $1 + X + \dots + X^{n-3}$. Or il est assez facile en passant par les parties fractionnaires de montrer que tout nombre de Parry de type $(1, n)$ avec n supérieur ou égal à 2 dont le polynôme complémentaire est de la forme $1 + X + \dots + X^{n-3}$ est un nombre de Pisot.

Ainsi, s'il existe d'autres nombres de Parry cubiques qui ne sont pas Pisot, ils se comportent de manière singulière par rapport à tous les nombres de Parry cubiques connus pour l'instant. La difficulté pour conclure dans ce cadre tient dans le fait que pour caractériser les développements de 1 pour des nombres de Pisot, comme dans l'article de Bassino [Bas02] ou dans [Boy96a], on trouve un polynôme complémentaire qui fonctionne (on est assuré qu'il y en existe 1 dans le cas Pisot) pour toute cette famille. Par contre, prouver qu'un nombre de Perron donné dont les conjugués sont plus petits que le nombre d'or en module n'est pas un nombre de Parry est souvent difficile, même sur des exemples précis (la question des nombres de Perron qui ne sont pas des nombres de Parry a été étudiée par exemple par [Ver08] et [HS24]). Bassino y parvient dans le cas des nombres de Parry simples, pour lesquels la propriété sur l'ordre lexicographique des chiffres du développement de 1 se retranscrit directement sur le polynôme caractéristique, et on peut éliminer la plupart des possibilités pour les nombres de Parry qui ne sont pas Pisot d'emblée. Cependant, il n'est a priori pas possible d'adapter la démonstration au cas des nombres de Parry non simples. Un aspect compliqué du problème par exemple, est le fait que tous les développements trouvés par Bassino font intervenir des polynômes complémentaires cyclotomiques. Or on sait que ce n'est pas le cas en général, l'article de Boyd [Boy96a] parle extensivement des différentes

possibilités. Comme il n'est pas possible a priori de restreindre les polynômes complémentaires possibles pour les nombres de Parry cubiques en général, on ne peut pas assurer que leurs développements sont tenus de suivre le même schéma que les nombres de Pisot cubiques. Pour finir sur ce sujet, voici quelques exemples de nombres pour lesquels la borne de Solomyak est vérifiée et à la limite des conditions de Pisot dans différentes zones de la caractérisation de Bassino. Aucun ne semble être de Parry.

Exemple 3.4.2. Les polynômes suivants ont une unique racine réelle strictement plus grande que 1, aucune racine de module supérieur ou égal à $(1 + \sqrt{5})/2$ et au moins une racine de module strictement plus grand que 1.

- $X^3 - X^2 - 3X + 1$.
- $X^3 - X^2 - 2$.
- $X^3 - 2X^2 + X - 3$.
- $X^3 - 2X^2 + 2X - 2$.

On pourrait également essayer d'employer la méthode que l'on a utilisée pour construire notre famille de nombres de Parry pour étudier les nombres de Parry non Pisot en degré 4, mais il semble compliqué d'exploiter des informations basées sur des inégalités sur les coefficients d'un polynôme de degré 3 en utilisant la formule cubique, qui est bien plus complexe que la formule quadratique. Néanmoins, peut-être qu'en se limitant à certains cas particuliers, il est possible d'obtenir des informations via cette méthode. Notons qu'Akiyama et Gjini [AG05] ont déterminé les développements de 1 pour certaines classes de nombres de Pisot de degré 4.

Retour sur une question du chapitre précédent

Pour revenir à la question 2.4.2, Mehmetaj a établi dans [Meh20] des conditions similaires à celles de Parry sur les écritures admissibles pour les transformations β/x avec $\beta > 1$ non entier, ainsi que l'existence d'une mesure invariante équivalente à la mesure de Lebesgue (notons que si on considère à la place la transformation $\beta/x - \beta$, il n'y a pas de restrictions sur les mots admissibles). La question est de savoir s'il existe des nombres qui vérifient la même propriété que celle établie par Schmidt [Sch80] sur les β -développements en base Pisot. Il est clair que ce n'est pas vrai pour β quelconque (car l'ordre usuel sur les éléments positifs de $\mathbb{Z}[\beta]$ n'est pas bien fondé quand β est irrationnel).

Chapitre 4

Construction de nombres normaux

Présentons d'abord l'objectif de cette partie. Becher, Heiber et Slaman ont réalisé dans leur article *A polynomial time algorithm for computing absolutely normal numbers* [BHS13] un algorithme, que nous noterons $\mathcal{A}_{\text{base}}$, qui construit un nombre absolument normal en temps polynomial. Cet algorithme a ensuite été étendu, en utilisant le même principe, dans deux directions : Madritsch, Scheerer et Tichy ont réalisé un algorithme \mathcal{A}_β étendant la construction à un nombre normal dans toute base Pisot [MST18], et Becher et Yuhjtman un algorithme \mathcal{A}_{fc} qui étend la construction en ajoutant aux bases entières le développement en fraction continue [BY19]. Dans ce chapitre, notre but est de fusionner ces deux algorithmes en un algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$ qui construit un nombre à la fois normal en toute base Pisot (voire un peu plus) et du point de vue des fractions continues.

4.1 Méthode et prérequis pour les algorithmes

La notion centrale pour le fonctionnement des différents algorithmes est celle d' (ε, k) normalité, introduite par Besicovitch [Bes35] et définie comme suit.

Définition 4.1.1. Soit $D = a_1 a_2 \dots a_n$ un bloc de chiffres de longueur n dans une base donnée, associée à une mesure invariante μ , et soient k un entier strictement positif et ε un réel strictement positif. Alors D est dit (ε, k) -normal vis-à-vis de la base et de la mesure considérées si, pour tout bloc $d = d_1 d_2 \dots d_k$ de longueur k admissible dans la base, on a

$$(1 - \varepsilon)\mu(d)n \leq \text{Card}\{1 \leq i \leq n - k + 1 \mid a_i = d_1, \dots, a_{i+k} = d_k\} \leq (1 + \varepsilon)\mu(d)n.$$

Remarque 4.1.2. Pour des réels strictement positifs quelconques $\varepsilon' < \varepsilon$ et un entier strictement positif quelconque k , si un bloc D de longueur n dans une base donnée associée à une mesure invariante μ est $(\varepsilon', k+1)$ -normal. Alors D est $(\varepsilon, k+1)$ -normal de manière évidente, et il est également $(\varepsilon' + 1/(\mu(D)n), k)$ -normal, en utilisant le fait que le cylindre associé à un mot de longueur k est l'union de ceux associés à tous les mots de longueur $k+1$ dont il est le préfixe. Le terme d'erreur correspond à la possibilité d'apparition de notre mot de longueur k à partir de la $n - k + 1$ -ième position dans D , où on n'a pas pu tester de mots de longueur $k+1$.

Il en découle que si on dispose d'une suite (w_n) de mots (ε_n, k_n) -normaux avec ε_n décroissant vers 0, k_n croissant vers l'infini et la longueur de w_n tendant vers l'infini, alors pour ε et k fixés, il existe un rang passé lequel tous les mots de la suite sont (ε, k) -normaux (mais ce n'est pas nécessairement le premier indice où les conditions d' (ε, k) -normalité sont vérifiées).

L'intérêt de cette notion, dont le lien à la normalité est apparent, est son aspect effectif. En effet, on peut la tester pour n'importe quel bloc fini donné, et d'autre part on dispose de résultats probabilistes ou combinatoires (pour les bases entières) permettant de borner la proportion des mots ne vérifiant pas des conditions d' (ε, k) -normalité données en fonction de leur longueur. Selon le type de base considérée, on utilise différentes versions de l' (ε, k) -normalité : en base entière, la discrédance simple (que l'on a défini en 1.1.11) suffit, car il suffit d'avoir la normalité simple dans chacune des bases, et en fraction continue,

on doit limiter l' (ε, k) -normalité à un nombre fini de blocs différents de longueur k pour pouvoir la tester, et ainsi on définit la discrédance en fraction continue d'un réel x à l'ordre n par rapport à un bloc v de taille k en fraction continue par

$$\mathcal{D}_{v,n}^G(x) = \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\text{cyl}(v)}(T^j(x)) - \mu_G(\text{cyl}(v)) \right|.$$

Ainsi pour arriver à la normalité, il faut vérifier cette discrédance pour un nombre de mots v de plus en plus grand, ne dépendant pas que de leur taille (les différences dans les conditions aux bords viennent du fait qu'on s'intéresse à une partie d'un mot plus grand).

Méthode commune aux algorithmes

Les trois algorithmes reposent sur la majoration du nombre de blocs non (ε, k) -normaux d'une longueur n donnée par une borne décroissant exponentiellement quand n croît. Pour les bases entières on a le résultat combinatoire suivant.

Lemme 4.1.3 ([Bug12], Lemma 4.13). *Soient $b \geq 2$ et $k \geq 1$ des entiers et $\varepsilon < 1/2$ un réel strictement positif. Il existe un réel strictement positif $\delta = \delta(b, k)$ dépendant uniquement de b et de k tel que le nombre d'entiers jusque N (représentés par un bloc en base b) qui ne sont pas (ε, k) -normaux est majoré par $N^{1-\delta\varepsilon^2}$ pour N assez grand.*

En bases fractions continues, on dispose d'un résultat similaire, basé sur un résultat de répartition limite.

Lemme 4.1.4 ([BY19], Lemme 6). *Soient v un mot de longueur r en fraction continue et B un mot de longueur k en fraction continue. Alors pour tout réel strictement positif δ et tout entier strictement positif n ,*

$$\left| \left\{ x \in \text{cyl}(v) : \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\text{cyl}(B)}(T^{r+i}(x)) - \mu(\text{cyl}(B)) \right| > \delta \right\} \right| \leq 6M_G e^{-\frac{\delta^2 n}{2M_G}} |\text{cyl}(v)|,$$

où $M_G = M_G(\delta, k) = \lceil k - \log(\delta^2/2 \log(2)) \rceil$ ou n'importe quel nombre plus grand.

Nous parlerons en détail de l'équivalent pour la β -numération de ce résultat dans la partie suivante (4.2).

L'autre composant essentiel de chacun des trois algorithmes est un résultat de concaténation. Par exemple, celui qui suit est valable dans un cadre général.

Lemme 4.1.5 ([MST18], Lemme 3.2). *Soit a_1, a_2, \dots une suite de mots dans une base donnée associée à une mesure invariante μ telle que le mot infini concaténé $a = a_1 a_2 \dots$ est admissible dans cette base. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $k > 0$ il existe un entier $n_0(\varepsilon, k)$ tel que tous les mots a_n avec $n \geq n_0$ sont (ε, k) -normaux. Alors, si*

$$\|a_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \|a_{n+1}\| = o(\|a_1 a_2 \dots a_n\|),$$

le mot a est μ -normal.

Les deux conditions sont dues au fait que les conditions imposées gardent la structure des mots, et donc on a une incertitude au niveau des points de jonction d'une part, d'où la première condition, et à l'intérieur de chaque mot que l'on concatène d'autre part, d'où la seconde condition. Notons que la remarque 4.1.2 implique alors que si on construit une suite de mots (ε, k) -normaux dont la longueur croît vers l'infini et avec ε décroissant vers 0 et k croissant vers l'infini, leur concaténation est l'écriture d'un nombre normal dans la base considérée.

Dans l'algorithme \mathcal{A}_{fc} , on utilise des résultats de concaténation différents ([BY19] Lemmas 7 et 9), que nous ne détaillerons pas ici car ce qui concerne les fractions continues fonctionnera exactement de la même manière dans le nôtre. Nous nous contenterons donc d'exposer ici le résultat qui nous servira, issu de la démonstration de la correction de l'algorithme \mathcal{A}_{fc} dans [BY19].

Proposition 4.1.6. *Soit u_1, u_2, \dots une suite de mots en fraction continue tels que pour tout $s > 0$ entier, u_s est $(\varepsilon(s), k(s))$ -normal et de longueur $n(s)$ avec $k(s) = \max\left(2, \sqrt[5]{\log(s)}\right)$, $\varepsilon(s) = 1/k(s)$ et $n(s) = n_{start} + \lfloor \log(s) \rfloor$ pour une certaine constante positive n_{start} . Alors le mot concaténé $u = u_1 u_2 \dots$ est normal en fraction continue.*

Le principe de fonctionnement des algorithmes \mathcal{A}_{base} , \mathcal{A}_β et \mathcal{A}_{cf} est donc le suivant.

- À chaque étape, on utilise les résultats limitant le nombre de blocs non (ε, k) -normaux dans chaque base considérée pour trouver un ordre relatif pour le prochain bloc à concaténer pour lequel on est sûr de pouvoir éviter les «mauvaises zones» d' (ε, k) -normalité simultanément dans toutes les bases.
- On teste ensuite chaque candidat possible pour le mot à concaténer, jusqu'à en trouver un qui convienne.
- On fait croître k vers l'infini, décroître ε vers 0 et croître le nombre de bases vers l'infini avec le nombre d'étapes.
- Les résultats de concaténation nous assurent que le nombre construit à la fin est bien normal dans toutes les bases voulues.

Spécificités de l'algorithme \mathcal{A}_{fc}

Dans les algorithmes \mathcal{A}_{base} et \mathcal{A}_β , on construit à chaque étape une suite de cylindres imbriqués l'un dans les autres pour chaque base considérée (pour chaque nouvelle base on se place à l'intérieur du cylindre construit à l'étape précédente, puis on repart à l'intérieur du dernier cylindre construit à l'étape suivante). Cette approche a l'avantage de donner de manière cohérente le nombre dans chaque base considérée directement (il correspond au point à gauche de chaque intervalle construit à la dernière étape), mais exige un certain contrôle sur la taille des cylindres.

En base continue, il y a une infinité de tailles de cylindres d'un ordre donné, tendant vers une longueur nulle pour les plus petits. On utilise donc le résultat de contrôle suivant.

Lemme 4.1.7. *Il existe des constantes positives K, c et un entier strictement positif n_1 tels que pour tout cylindre en fraction continue I et tout $n \geq n_1$, la mesure de Lebesgue de l'union des sous-cylindres J de I d'ordre relatif n est telle que*

$$\frac{|I|}{4} e^{-2nL-2c} \leq |J| \leq 2|I| e^{-2nL+2c}$$

est plus grande que KI/\sqrt{n} , où $L = \pi^2/(12 \log(2))$ est la constante de Levy.

On va se cantonner à ces cylindres de longueurs moyennes pour notre recherche, ce qui est possible car leur proportion décroît moins vite que celle des nombres non (ε, k) -normaux. La taille plus difficilement contrôlable de ces cylindres a aussi pour conséquence de procéder d'une autre manière que l'imbrication des cylindres : on utilisera des recouvrements de l'intervalle en fraction continue.

Définition 4.1.8 ([BY19], Definition 10). Pour tout entier $t \geq 2$, on appelle t -brique un t -uplet de la forme $(\sigma_G, \sigma_2, \dots, \sigma_t)$ défini comme suit :

- l'intervalle σ_G est un cylindre en fraction continue.
- pour $d = 2, \dots, t$, σ_d est un cylindre en base d ou l'union de deux cylindres consécutifs en base d , du même ordre.
- pour $d = 2, \dots, t$, $\sigma_G \subset \sigma_d$ et $|\sigma_G|/|\sigma_d| \geq 1/(16e^{4c}d)$.

Définition 4.1.9 ([BY19], Definition 11). Si l'on dispose d'une t -brique $\vec{\sigma} = (\sigma_G, \sigma_2, \dots, \sigma_t)$ et d'une t' -brique $\vec{\tau} = (\tau_G, \tau_2, \dots, \tau_{t'})$, on dit que $\vec{\tau}$ est un raffinement de $\vec{\sigma}$ si $t' \geq t$, $\tau_G \subset \sigma_G$ et $\tau_d \subset \sigma_d$ pour $d = 2, \dots, t$. On dit de plus que ce raffinement est de discrédance inférieure à ε si

- pour $d = 2, \dots, t$ la discrédance simple du bloc correspondant à l'inclusion $\tau_d \subset \sigma_d$ est inférieure à ε .
- la discrédance en fraction continue par rapport de tout bloc de t chiffres inférieurs ou égaux à t du bloc w correspondant à l'inclusion $\tau_G \subset \sigma_G$ est inférieure à $\varepsilon + (t-1)/|w|$.

Vers la fusion des algorithmes

Pour ce qui concerne notre algorithme, on va suivre la même démarche que dans l'algorithme \mathcal{A}_{cf} et considérer des t -briques avec des recouvrements par des cylindres en base réelle β_i . La dernière condition de 4.1.8 devient alors

$$\frac{|\sigma_G|}{|\sigma_d|} \leq 24e^{4c}\beta_d,$$

pour tout recouvrement σ_d en base β_d et on parlera de raffinements (ε, k) -normaux en remplaçant la condition de discrétion simple sur les bases entières par une condition d' (ε, k) -normalité en bases β_i . Les recouvrements seront potentiellement plus complexes que ceux en bases entières, mais on peut les contrôler de la manière suivante (c'est le pendant de la proposition 12 de [BY19]).

Lemme 4.1.10. *Soient $\beta > 1$ et $m \in \mathbb{N}$. Tout intervalle I de longueur inférieure à β^{-m} peut être recouvert par une union finie de β -cylindres d'ordre m de longueur totale inférieure à $3\beta^{-m}$.*

À cause des restrictions sur les mots en bases β , les concaténer n'est pas toujours possible. Cependant, en base Pisot β , on sait que tout cylindre contient un sous-cylindre standard d'ordre relatif au plus M_β (où M_β est la constante définie en 3.1.9, que l'on utilisera dans tout ce chapitre), à partir duquel on peut concaténer tous les mots admissibles en base β , d'où le résultat suivant.

Lemme 4.1.11. *Soit β un nombre de Pisot, a un mot d'ordre ℓ en base β et $\mathcal{L}_{a,n}$ l'ensemble des mots d'ordre $n + \ell$ en base β qui ont a pour préfixe. Alors, on a*

$$|\mathcal{L}_{a,n}| \geq |\mathcal{L}_{n-M}|.$$

On utilisera également le lemme 4.1.5 pour la concaténation des mots construits à chaque étape. Ce qu'il nous manque encore, c'est un résultat de majoration du nombre de blocs non (ε, k) -normaux en bases Pisot. Pour cela, nous allons apporter une correction à celui qui a été proposé dans [MST18].

4.2 Correction d'un résultat de majoration du nombre de blocs non (ε, k) -normaux en bases Pisot

Notons d'abord qu'il existe un résultat de Bertrand-Mathis et Volkmann montrant la décroissance par rapport à leur longueur du nombre de mots non (ε, k) -normaux en base réelle.

Proposition 4.2.1 ([BV89], Lemma 3). *Soit $\beta > 1$ un nombre de Parry. Étant donné un réel ε et un entier k strictement positifs, il existe des constantes réelles $C = C(\varepsilon, k)$ et $\eta = \eta(\varepsilon, k)$ avec $0 < \eta < 1$ ainsi qu'un entier positif $n_1(\varepsilon, k)$ tels que l'ensemble $E_n^c(\varepsilon, k)$ des mots non (ε, k) -normaux en base β vérifie*

$$\forall n \geq n_1(\varepsilon, k), |E_n^c(\varepsilon, k)| < C|\mathcal{L}_n|^\eta.$$

Cependant, les constantes de ce résultat sont non effectives, ce qui nous empêche de l'utiliser directement dans la construction de notre algorithme. Un résultat qui se prête naturellement à l'étude de questions du même type que la majoration du nombre de blocs non (ε, k) -normaux dans une base donnée est l'inégalité de Hoeffding.

Théorème 4.2.2 (Inégalité de Hoeffding). *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Soient $(a_n)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_n)_{1 \leq k \leq n}$ deux suites de réels tels que pour tout k on ait $a_k < b_k$ et $\mathbb{P}(a_k \leq X_k \leq b_k) = 1$. Posons $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Alors pour tout $t > 0$,*

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{1 \leq i \leq n} (b_i - a_i)^2}\right).$$

Cependant, la condition d'indépendance nous empêche d'utiliser cette inégalité telle quelle. En effet, les restrictions sur les mots en bases non entières impliquent directement la non-indépendance des chiffres.

L'idée proposée dans [MST18] était d'utiliser une version de l'inégalité d'Hoeffding généralisée dans le cas de variables aléatoires dépendantes entre elles, mais indépendantes de celles avec un écart de rang dépassant une certaine constante. Cependant, pour l'appliquer, une indépendance des chiffres en bases Pisot β écartés d'au moins M_β était utilisée, ce qui, après un essai sur la base d'or, s'est révélé incorrect. Nous allons détailler la dépendance des chiffres dans ce cas.

Dépendances des chiffres en base d'or

On se place donc en base ϕ où $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or. Cette base comporte deux types de cylindres : les standards de longueur ϕ^{-n} à l'ordre n , et les intervalles courts de longueur $\phi^{-(n+1)}$ à l'ordre n , les cylindres standards étant exactement ceux associés aux mots finis se finissant par 0. De plus, un cylindre standard admettant pour sous-cylindres d'ordre relatif 1 un cylindre standard et un cylindre court, et un cylindre court admettant pour seul sous-cylindre d'ordre 1 un cylindre standard, il en découle, en notant (F_n) la suite de Fibonacci initialisée à $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ que pour tous entiers strictement positifs n et k :

- il y a F_n cylindres standards d'ordre n .
- il y a F_{n-1} cylindres courts d'ordre n .
- un cylindre standard admet F_{n+1} sous-cylindres standards d'ordre relatif n , et F_n sous-cylindres courts d'ordre relatif n .
- un cylindre court admet F_n sous-cylindres standards d'ordre relatif n , et F_{n-1} sous-cylindres courts d'ordre relatif n .

De plus, si on considère maintenant la mesure de Parry μ_ϕ (voir 3.1), sa constante normalisatrice $F(\phi)$ vaut $F(\phi) = 3 - \phi$, et elle est séparée en deux zones de part et d'autre du point $x = \phi - 1$. Celle à gauche est de poids $\phi/(3 - \phi)$ et celle à droite est de poids $1/(3 - \phi)$. De plus, fixer le premier chiffre suffit à se placer entièrement dans une zone. Après calcul, on obtient pour tout entier n strictement positif

$$\mu_\phi(0 \cdot^n 0) = \frac{\phi}{3 - \phi} F_{n+2} \phi^{-(n+2)}.$$

Or la suite $(F_{n+2} \sqrt{5} \phi^{-(n+2)})_{n \geq 0}$ converge vers 1. De plus, pour tout entier strictement positif i ,

$$\frac{\phi^i}{\sqrt{5}} = \frac{5F_i + \sqrt{5}(F_i + 2F_{i-1})}{10} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

et ainsi la suite $(F_{n+2} \sqrt{5} \phi^{-(n+2)})_{n \geq 0}$ ne peut pas être stationnaire (ni ultimement périodique). En notant que

$$\phi(3 - \phi) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5},$$

il en découle que la suite $(\mu_\phi(0 \cdot^n 0))_{n \geq 0}$ converge vers

$$(3 - \phi)^{-2} = \mu_\phi(0)^2$$

sans jamais atteindre sa limite, et donc qu'il n'y a jamais d'indépendance entre les chiffres en base ϕ , même passé n'importe quel écart fini.

Par contre, pour la mesure de Lebesgue, les longueurs relatives des sous-cylindres d'ordre relatif n des cylindres standards sont les mêmes que les longueurs des cylindres d'ordre n définis par les mêmes mots, et des propriétés proches de l'indépendance peuvent être vérifiées selon les bases, sans toutefois qu'il n'y ait vraiment d'indépendance après un temps fixé. Prenons l'exemple de la base d'or à nouveau, en notant $\lambda_{k,\phi}(D)$ la longueur totale des cylindres associés à tout bloc de chiffres D commençant à la position k en base ϕ . On a alors pour tout entier strictement positif n

$$\lambda_{1,\phi}(0 \cdot^n 0) = \lambda_{1,\phi}(0) \lambda_{n+1,\phi}(0),$$

et

$$\lambda_{1,\phi}(1 \cdot^n 0) = \lambda_{1,\phi}(1)\lambda_{n,\phi}(0).$$

Si la première relation se généralise sans problème aux autres nombres de Parry (et même aux autres bases réelles $\beta > 1$), la seconde est liée à la configuration particulière de la base d'or. En effet, si on considère $\alpha = \alpha_{e_4}$ le nombre de Parry défini dans l'exemple 3.2.4, tel que $d_\alpha(1) = 1(10)^\infty$, la relation obtenue lorsqu'on examine l'indépendance vis-à-vis d'un chiffre autre que 0 est la suivante, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,\alpha}(1 \cdot^n 0) &= \lambda_{1,\alpha}(10)\lambda_{n,\alpha}(0) + \lambda_{1,\alpha}(110)\lambda_{n-1,\alpha}(0) + \lambda_{1,\alpha}(11010)\lambda_{n-3,\alpha}(0) + \lambda_{1,\alpha}(110110)\lambda_{n-4,\alpha}(0) + \dots \\ &= \lambda_{1,\alpha}(10)(\lambda_{n,\alpha}(0) + \alpha^{-3}\lambda_{n-3,\alpha}(0) + \dots) + \lambda_{1,\alpha}(110)(\lambda_{n-1,\alpha}(0) + \alpha^{-3}\lambda_{n-4,\alpha}(0) + \dots). \end{aligned}$$

La forme obtenue ressemble à la définition de la densité de la mesure de Parry μ_α définie en 3.1. Pour contourner le problème, nous allons utiliser la théorie des chaînes de Markov. Celle-ci a déjà été utilisée pour des problèmes assez proches comme dans [DT97] et [DS02], mais pour obtenir des constantes effectives nous avons besoin d'un résultat faisant intervenir la mesure de Parry, et non une moyenne finie de probabilités dépendant de la position des chiffres.

Chaînes de Markov

Les chaînes de Markov sont un concept classique et bien connu de la théorie des probabilités (on peut se référer par exemple à [Dur10] ou à [Fra13]).

Définition 4.2.3. Une suite de variables aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans un espace d'états E est appelée chaîne de Markov (à temps discret) si pour tout entier positif n et tout $n + 2$ -uplet d'états $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j) \in E^{n+2}$ tels que

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0,$$

on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Définition 4.2.4. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov à valeur dans un espace d'états E , et i et j deux états de E . Le nombre $\mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$ est appelé probabilité de transition (en un pas) de l'état i vers l'état j et noté $p_{i,j}$.

La famille de nombres $(p_{i,j})_{(i,j) \in E^2}$ est appelée *matrice de transition* dans le cas fini ou *fonction de transition* dans le cas général.

Définition 4.2.5. On appelle *distribution stationnaire* d'une chaîne de Markov toute distribution invariante par l'action de la matrice de transition de cette chaîne de Markov.

Si on se place dans une distribution stationnaire à l'origine, alors la chaîne de Markov est stationnaire et garde toujours la même distribution.

Définition 4.2.6. Une chaîne de Markov d'ensemble d'états E est dite *irréductible* si pour tout couple d'états $(i, j) \in E^2$, il existe un entier n positif tel que $\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) > 0$.

Cas des bêta-développements

Examinons la mesure de Lebesgue des cylindres. Il est clair qu'en général pour un nombre de Parry $\beta > 1$, la donnée d'un seul chiffre d'une écriture en base β ne permet pas de connaître les longueurs potentielles des cylindres directement après ce chiffre. Par contre, si pour tout chiffre d compris entre 0 et $\lfloor \beta \rfloor$ on sépare en plusieurs états selon le type de cylindre associé au chiffre, c'est-à-dire en considérant pour i compris entre 0 et $M - 1$ les états d_i représentant les cylindres de longueur f_i relativement à leur ordre associés au chiffre d s'ils existent, alors on peut définir une chaîne de Markov (comme précédemment, $(f_i)_{i \geq 0}$ désigne la suite des parties fractionnaires itérées associée à β). La probabilité de transition d'un état d_i à un état d'_i , correspond à la longueur relative de d'_i en tant que sous-intervalle de d_i (par exemple $1/\beta$ entre deux cylindres standards). La chaîne de Markov ainsi définie a un ensemble d'états fini (de

4.2. Correction d'un résultat de majoration du nombre de blocs non (ϵ, k) -normaux en bases Pisot 79

cardinal $\lfloor \beta \rfloor - 1 + M$) et est irréductible, puisque le temps de retour à un cylindre standard est d'au plus M , puis on peut accéder à n'importe quel type de cylindre depuis un cylindre standard en au plus M étapes.

On peut étendre cette construction pour des blocs de longueur k quelconque en remarquant que pour tout cylindre σ et chiffre d en base Parry $\beta > 1$, il existe un seul sous-cylindre d'ordre relatif 1 associé au chiffre d . Par conséquent, avec la même décomposition qu'auparavant, fixer l'indice du premier chiffre d'un bloc suffit à fixer ceux de tous les autres chiffres du bloc. Ainsi, étant donné un bloc avec indices m_i de longueur quelconque, la donnée du dernier chiffre avec indice suffit à donner les probabilités transitoires avec les blocs $m_i d_j$ avec d et j quelconques (elles sont nulles sauf pour au plus un indice).

Exemple 4.2.7. Considérons $\alpha = \alpha_{e5}$ le nombre décrit dans l'exemple 3.2.5, tel que $d_\alpha(1) = 4(10)^\infty$. La chaîne de Markov associée par le processus que l'on vient de décrire admet l'ensemble d'états suivant.

$$E = \{0_0, 1_0, 2_0, 3_0, 4_1, 1_2, 0_3\}.$$

Dans cet ordre, la matrice de transition associée est

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_1}{f_2} \\ \frac{1}{f_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2.8. Considérons $\alpha = \alpha_{e6}$ le nombre décrit dans l'exemple 3.2.6, tel que $d_\alpha(1) = 5(32)^\infty$. La chaîne de Markov associée par le processus décrit plus haut admet l'ensemble d'états suivant :

$$E = \{0_0, 1_0, 2_0, 3_0, 4_0, 5_1, 3_2, 2_3\}.$$

En plaçant les états dans cet ordre, la matrice de transition associée est

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 \\ \frac{1}{f_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_1}{f_2} \\ \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2.9. Considérons $\alpha = \alpha_{e4}$ le nombre décrit dans l'exemple 3.2.4, tel que $d_\alpha(1) = 1(10)^\infty$. La chaîne de Markov associée par le processus décrit plus haut admet l'ensemble d'états suivant :

$$E = \{0_0, 1_1, 1_2, 0_3\}.$$

En plaçant les états dans cet ordre, la matrice de transition associée est

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & f_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f_1}{f_2} \\ \frac{1}{f_1} & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant la chaîne de Markov associée aux blocs de longueur 3 en base α . L'ensemble d'états correspondant est

$$E = \{0_00_00_0, 0_00_01_1, 0_01_10_0, 0_01_11_2, 1_10_00_0, 1_10_01_1, 1_11_20_3, 1_20_30_0, 1_20_31_2, 0_30_00_0, 0_30_01_1, 0_31_20_3\}.$$

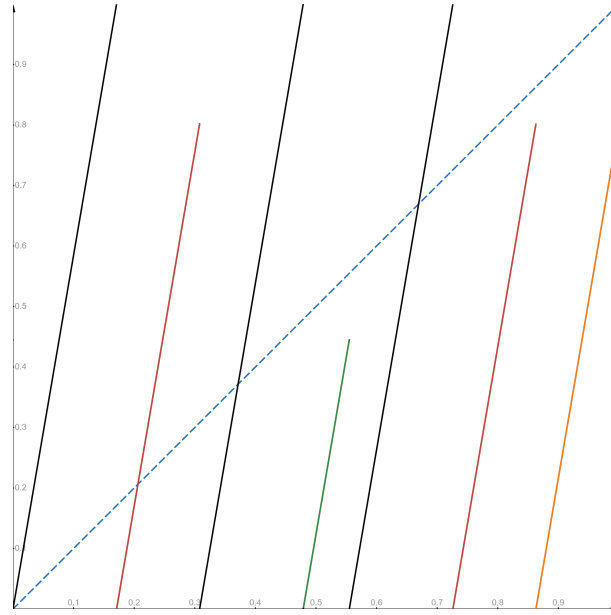


FIGURE 4.1 – Graphe de l'application $T_{\alpha_{e4}}^3$. Les cylindres standards sont représentés en noir, ceux associés aux blocs se finissant par 1_1 en rouge, celui associé au bloc se finissant par 1_2 en vert et celui associé au bloc se finissant par 0_3 en jaune.

En plaçant les états dans cet ordre, la matrice de transition associée est la suivante.

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_1} & \frac{f_2}{f_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_1}{f_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_1} & \frac{f_2}{f_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f_1} & \frac{f_2}{f_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_1}{f_2} \\ 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_1} & \frac{f_2}{f_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La figure 4.1 représente l'application $T_{\alpha_{e4}}^3$, en faisant ressortir les cylindres associés aux blocs finissant par chacun des états 0_0 , 1_1 , 1_2 et 0_3 .

Exemple 4.2.10. Considérons $\alpha = \alpha_{e1}$ le nombre de Pisot décrit dans l'exemple 3.1.18. Le développement de 1 associé est $d_\alpha(1) = 43211$. La chaîne de Markov associée par le processus que l'on vient de décrire admet l'ensemble d'états suivant.

$$E = \{0_0, 1_0, 2_0, 3_0, 4_1, 3_2, 2_3, 1_4\}.$$

On remarque qu'il n'y a pas d'état lié au dernier «1» de $d_\alpha(1)$. Cela vient du fait que le mot fini ne peut pas être facteur d'un mot admissible en base α (ce qui est également la raison pour laquelle, dans le cas d'un nombre de Parry simple, on a $d_\alpha^*(1) \neq d_\alpha(1)$).

En plaçant les états dans cet ordre, la matrice de transition associée est

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_1} & 0 & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_2} & \frac{1}{f_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_3}{f_2} & 0 \\ \frac{1}{f_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_4}{f_3} \\ \frac{1}{f_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2.11. Considérons $\alpha = \alpha_{e1}$ le nombre de Salem décrit dans l'exemple 3.1.20, pour lequel le développement de 1 est $d_\alpha(1) = 1(100)^\infty$. La chaîne de Markov associée par le processus que l'on vient de décrire admet l'ensemble d'états suivant.

$$E = \{0_0, 1_1, 1_2, 0_3, 0_4\}.$$

En plaçant les états dans cet ordre, la matrice de transition associée est

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f_3}{f_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_4}{f_3} \\ \frac{1}{f_4} & \frac{f_1}{f_4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant la chaîne de Markov associée aux blocs de longueur 2 en base α . L'ensemble d'états correspondant est

$$E = \{0_00_0, 0_01_1, 1_10_0, 1_11_2, 1_20_3, 0_30_4, 0_40_0, 0_41_2\}.$$

En plaçant les états dans cet ordre, la matrice de transition associée est la suivante.

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_1} & \frac{f_2}{f_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_3}{f_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_4}{f_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f_4} & \frac{f_1}{f_4} \\ 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_3}{f_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2.12. Soit $\alpha = \alpha_{e3}$ le nombre de Parry décrit dans l'exemple 3.1.20, tel que $d_\alpha(1) = 3203$. La chaîne de Markov associée par le processus que l'on vient de décrire admet l'ensemble d'états suivant :

$$E = \{0_0, 1_0, 2_0, 3_1, 2_2, 0_3\}.$$

En plaçant les états dans cet ordre, la matrice de transition associée est

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_1} & 0 & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_3}{f_2} \\ \frac{1}{f_3} & \frac{1}{f_3} & \frac{1}{f_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2.13. Soit $\alpha = \alpha_{e7}$ le nombre de Parry décrit dans l'exemple 3.3.2, tel que $d_\alpha(1) = 3302^\infty$. La chaîne de Markov associée par le processus que l'on vient de décrire admet l'ensemble d'états suivant :

$$E = \{0_0, 1_0, 2_0, 3_1, 3_2, 0_3, 2_4\}.$$

En plaçant les états dans cet ordre, la matrice de transition associée est

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_1} & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_3}{f_2} & 0 \\ \frac{1}{f_3} & \frac{1}{f_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_4}{f_3} \\ \frac{1}{f_4} & \frac{1}{f_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2.14. Soit $\alpha = \alpha_{e8}$ le nombre de Parry décrit dans l'exemple 3.3.4, tel que $d_\alpha(1) = 42403^\infty$. La chaîne de Markov associée par le processus que l'on vient de décrire admet l'ensemble d'états suivant :

$$E = \{0_0, 1_0, 2_0, 3_0, 4_1, 2_2, 4_3, 0_4, 3_5\}.$$

En plaçant les états dans cet ordre, la matrice de transition associée est

$$\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & \frac{1}{f_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{f_2}{f_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{f_2} & \frac{1}{f_2} & \frac{1}{f_2} & \frac{1}{f_2} & 0 & 0 & \frac{f_3}{f_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_4}{f_3} & 0 \\ \frac{1}{f_4} & \frac{1}{f_4} & \frac{1}{f_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f_5}{f_4} \\ \frac{1}{f_5} & \frac{1}{f_5} & \frac{1}{f_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2.15. Soit ϕ le nombre d'or. On a $d_\phi(1) = 11$, et les états de la chaîne de Markov associée sont 0_0 et 1_1 , ce qui nous donne la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} \phi - 1 & 2 - \phi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on considère maintenant les blocs de longueur 5 admissibles en base ϕ , l'ensemble d'états de la chaîne de Markov associée est :

$$E = \{0_00_00_00_00_0, 0_00_00_00_01_1, 0_00_00_01_10_0, 0_00_01_10_00_0, 0_00_01_10_01_1, 0_01_10_00_00_0, 0_01_10_00_01_1, 0_01_10_01_10_0, 1_10_00_00_00_0, 1_10_00_00_01_1, 1_10_00_01_10_0, 1_10_01_10_00_0, 1_10_01_10_01_1\}.$$

En plaçant les états dans cet ordre, la matrice de transition est la suivante :

$$(\phi - 1) \begin{pmatrix} 1 & \phi - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \phi - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \phi - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \phi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \phi - 1 \\ 1 & \phi - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \phi - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \phi - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.2.16. Dans tous ces exemples, on peut vérifier que la somme de tous les éléments d'une même ligne vaut bien 1 en utilisant les relations $\alpha f_i = f_{i+1} + g_{i+1}$ pour tout entier i positif.

Remplacement du résultat de majoration

Divers résultats existent pour étendre l'inégalité de Hoeffding au contexte des chaînes de Markov, mais peu conviennent à notre cas car les conditions exigées pour la convergence à la distribution stationnaire sont trop fortes. Nous allons utiliser le résultat suivant, dû à Glynn et Ormoneit [GO02], qui s'applique dans le cadre suivant.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace d'état S , pour laquelle on impose la condition suivante.

Il existe une mesure de probabilité ϕ sur S , $\gamma > 0$ et un entier $m \geq 1$ tels que

$$\forall x \in S, \mathbb{P}_x(X_m \in \cdot) \geq \gamma \phi(\cdot),$$

où \mathbb{P}_x désigne la probabilité vis-à-vis de la distribution initiale $X_0 = x$. Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Posons $Y_i = f(X_i)$, $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i$ et notons $\|f\|$ la valeur maximale de $|f|$ sur S . Alors on a le résultat suivant.

Théorème 4.2.17 ([GO02], Theorem 2). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov vérifiant la condition précédente et f telle que $\|f\| < \infty$. Alors*

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}_x(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq n\epsilon) \leq \exp\left(-\frac{\gamma^2(n\epsilon - 2\|f\|m/\gamma)^2}{2n\|f\|^2m^2}\right)$$

pour $n > 2\|f\|m/(\gamma\epsilon)$.

Dans le théorème, \mathbb{E} désigne l'espérance selon une distribution stationnaire de la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ (l'existence de cette distribution est assurée dès que la chaîne vérifie la condition d'application du théorème, voir [GO02]).

Le lemme suivant va nous aider à montrer que la chaîne de Markov que l'on a définie vérifie la condition imposée.

Lemme 4.2.18. *Soit $\beta > 1$ un nombre de Parry.*

1. *Pour tout cylindre σ en base β , il existe un sous-cylindre standard de σ d'ordre M_β associé au chiffre 0.*
2. *Pour tout cylindre σ en base β , il existe un sous-cylindre de σ de n'importe quel type et associé à n'importe quel chiffre d'ordre relatif $2M_\beta$ et de longueur relative β^{-3M_β} .*
3. *Pour tout cylindre σ en base β et tout entier strictement positif k , il existe un sous-cylindre de σ de n'importe quel type et associé à n'importe quel chiffre d'ordre relatif $2M_\beta + k - 1$ et de longueur relative $\beta^{-(3M_\beta + k - 1)}$.*

Démonstration. Soient $\beta > 1$ et σ un β -cylindre. Remarquons déjà que si σ admet au moins un sous-cylindre standard d'un ordre m fixé, alors il en admet un associé au chiffre 0. Comme σ admet au moins un sous-cylindre standard d'ordre relatif au plus M_β , le premier point du lemme en découle. La longueur relative de ce sous-cylindre standard est d'au moins β^{-M_β} . Pour le deuxième point, on peut arriver à n'importe quel type de cylindre en au plus M_β étapes depuis un cylindre standard, et quitte à «temporiser» en passant par d'autres cylindres standards, on peut atteindre n'importe quel cylindre en exactement M_β étapes. Ainsi, d'après le premier point, tout cylindre σ admet un sous-cylindre de n'importe quel type d'ordre relatif $2M_\beta$ et de longueur relative au moins $\beta^{-M_\beta} \beta^{-2M_\beta}$. Le résultat en découle en prenant à ce moment-là le début de n'importe quel bloc d'ordre k . \square

Le second point implique que l'on peut vérifier la condition du théorème précédent pour n'importe quelle probabilité sur notre ensemble d'états. Pour les chiffres simples, un choix possible serait celui de la mesure de probabilité valant 1 sur l'état 0_0 et 0 partout ailleurs. Les constantes associées sont alors β^{-M_β} et M_β . Pour les blocs de chiffres, nous allons considérer la mesure de probabilité qui vaut 1 sur l'ensemble des blocs de longueur k , en restant proportionnelle à la longueur relative de chacun. On a

alors $\gamma = \beta^{-M_\beta}$ et $m = M_\beta + k - 1$. Pour majorer le nombre de blocs non (ε, k) -normaux en base β , on va utiliser ce résultat pour tout bloc de longueur k admissible avec f une fonction de comptage telle que $f(X_k)$ vaut 1 si elle prend pour valeur un état correspondant au bloc considéré avec n'importe quel jeu d'indices et 0 sinon. Dans ce cas, on a $\|f\| = 1$, et il faut noter que si on recherche des mots de longueur n , il faut considérer la somme S_{n-k+1} à cause du décalage dû à la longueur des mots dans la définition d' (ε, k) -normalité. En outre, le ε du théorème prendra la valeur $\varepsilon\mu(D)$ pour chaque bloc D testé. De plus, si on note \mathbb{E} l'espérance par rapport à une distribution stationnaire, le résultat de majoration non effectif 4.2.1 implique que pour tout bloc D en base β de longueur k et $\mathcal{I}(D)$ l'ensemble des k -uplets d'indices possibles pour le mot D , alors $\sum_{\vec{i} \in \mathcal{I}(D)} \mathbb{E}(D_{\vec{i}}) = \mu_\beta(D)$. On a donc assez d'informations pour obtenir le résultat suivant.

Théorème 4.2.19. *Soient $\beta > 1$ un nombre de Parry, $0 < \varepsilon \leq 1$ un réel et $k > 0$ un entier. En notant $M = M_\beta$ et $E_{a,n}^c(\varepsilon, k)$ l'ensemble de mots de longueur n suivant un préfixe a qui ne sont pas (ε, k) -normaux, on a*

$$\frac{\lambda(E_{a,n}^c(\varepsilon, k))}{|\text{cyl}(a)|} \leq C(\varepsilon, k)e^{-\eta(\varepsilon, k)n}$$

pour $n > 2(M + k - 1)e^M / \varepsilon(\beta - 1)$, avec

$$C(\varepsilon, k) = 2e\beta^k \exp\left(\frac{\varepsilon^2\beta^{-2M-2k+2}}{2(\beta-1)^2(M+k-1)^2}(k-1)\right)$$

et

$$\eta(\varepsilon, k) = \frac{(\beta-1)^2\beta^{-4M-2k-2}\varepsilon^2}{2(M+k-1)^2}.$$

Démonstration. Soit $\beta > 1$ un nombre de Parry, $\varepsilon > 0$ et $k > 0$, $M = M_\beta$ et $\mu = \mu_\beta$. Remarquons déjà que la donnée d'un préfixe entier a induit celle d'un état de la chaîne de Markov. Ainsi dans le cas de la concaténation de blocs non (ε, k) -normaux suite à un mot a , la probabilité \mathbb{P}_x désigne la longueur relative par rapport à $\text{cyl}(a)$. Pour D un bloc β -admissible de taille k , notons $B_+(D, \varepsilon)$ l'ensemble des mots de $\mathcal{L}_{a,n}$ dans lesquels le bloc D apparaît plus de $n\mu(D)(1 + \varepsilon)$ fois. En appliquant le théorème 4.2.17 avec la fonction f de comptage de D (indépendamment des indices), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda(B_+(D, \varepsilon))}{|\text{cyl}(a)|} \\ & \leq \exp\left(-\frac{\beta^{-2M}((n-k+1)\varepsilon\mu(D) - 2(M+k-1)/\beta^{-M})^2}{2(n-k+1)(M+k-1)^2}\right) \\ & \leq \exp\left(-\frac{\beta^{-2M}\varepsilon^2\mu(D)^2}{2(M+k-1)^2}n\right) \exp\left(\frac{\beta^{-2M}\varepsilon^2\mu(D)^2}{2(M+k-1)^2}(k-1) + \frac{2\varepsilon\mu(D)\beta^{-M}}{M+k-1}\right). \end{aligned}$$

pour $n > 2(M+k-1)/(e^{-M}\varepsilon\mu(D))$. Notons que $(\beta-1)\beta^{-(M+k+1)} \leq \mu(D) \leq \beta^{-k+1}/(\beta-1)$. En appliquant l'inégalité que l'on vient d'obtenir pour tout cylindre $D \in \mathcal{L}_k$ et en utilisant la symétrie pour les mots où un bloc de longueur k donnée est représenté moins de $n\mu(D)(1 - \varepsilon)$ fois, on obtient le résultat suivant.

Pour $n > 2(M+k-1)e^{2M+k+1}/\varepsilon(\beta-1)$,

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda(E_{a,n}^c(\varepsilon, k))}{|\text{cyl}(a)|} \\ & \leq 2|\mathcal{L}_k| \exp\left(-\frac{(\beta-1)^2\beta^{-4M-2k-2}\varepsilon^2}{2(M+k-1)^2}n\right) \exp\left(\frac{\varepsilon^2\beta^{-2M-2k+2}}{2(\beta-1)^2(M+k-1)^2}(k-1) + 1\right) \\ & \leq 2e\beta^k \exp\left(-\frac{(\beta-1)^2\beta^{-4M-2k-2}\varepsilon^2}{2(M+k-1)^2}n\right) \exp\left(\frac{\varepsilon^2\beta^{-2M-2k+2}}{2(\beta-1)^2(M+k-1)^2}(k-1)\right). \end{aligned}$$

□

4.3 L'algorithme

On dispose maintenant de tous les éléments nécessaires pour faire fonctionner notre algorithme. On va établir d'abord un lemme fondamental, permettant le passage d'une étape à l'autre de l'algorithme, sur le modèle du Lemme 13 de [BY19] dont nous suivrons la démonstration en l'adaptant.

Lemme 4.3.1. *Soit t un entier supérieur ou égal à 2, ε un réel inférieur ou égal à $1/t$, k un entier compris entre 1 et $\sqrt{\log(t)}$ (1 si $t = 2$) et soit $t' = t$ ou $t + 1$. Alors on peut raffiner toute t -brique $\vec{\sigma} = (\sigma_G, \sigma_2, \dots, \sigma_t)$ (σ_i étant associé à une base Pisot β_i) en une t' -brique $\vec{\tau} = (\tau_G, \tau_2, \dots, \tau_{t'})$ (ε, k) -normale telle que l'ordre relatif de τ_G ne dépasse pas un certain entier $n_0(t, \varepsilon, k)$.*

Démonstration. Supposons déjà que $t = t'$.

Comparaison des ordres et des longueurs des cylindres Pour tout n notons $\mathcal{I}_n(\sigma_G)$ l'ensemble des sous-cylindres en fraction continue de σ_G . Soient K , c et n_1 les constantes données par le lemme 4.1.7. On note alors $\mathcal{J}_n(\sigma_G) \subset \mathcal{I}_n(\sigma_G)$ l'ensemble des cylindres J tels que

$$\frac{e^{-2Ln-2c}}{4} \leq \frac{|J|}{|\sigma_G|} \leq 2e^{-2Ln+2c}.$$

Si $n \geq n_1$, le lemme 4.1.7 indique que

$$\frac{|\cup_{J \in \mathcal{J}_n(\sigma_G)} J|}{|\sigma_G|} \geq \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

À la fin de la démonstration, nous déterminerons une valeur possible pour n et nous choisirons τ_G parmi ces intervalles J .

Pour ce qui est des cylindres en bases Pisot, on appelle pour tout entier n et pour $d = 2, \dots, t$, on appelle m_d l'ordre de τ_d en tant que β_d -cylindre. Choisissons pour m_d le plus grand entier pour lequel $2e^{-2nL+2c}|\sigma_G| \leq \beta_d^{-m_d}$. Ce choix garantit que $|J| \leq \beta_d^{m_d}$ pour tout $J \in \mathcal{J}_n$ et de plus

$$\beta_d^{-m_d-1} \leq 2e^{-2nL+2c}|\sigma_G| \leq 8e^{4c} \frac{1}{4} e^{-2nL-2c} |\sigma_G| \leq 8e^{4c} |J|.$$

Pour tout $J \in \mathcal{J}_n$ on pose τ_d^J le plus petit recouvrement de J par des β_d -cylindres, de longueur totale inférieure à $3\beta_d^{-m_d}$ (4.1.10). Il suit donc de l'inégalité précédente que

$$\frac{|J|}{|\tau_d^J|} \leq \frac{1}{24e^{4c}\beta_d}.$$

Ce choix de m_d impose des bornes sur n_d l'ordre relatif des cylindres de τ_d dans ceux de σ_d qui dépendent de n et β_d comme suit.

— Comme $|\sigma_G| \leq |\sigma_d| \leq |\sigma_G| 24e^{4c}\beta_d$, on a

$$\log_{\beta_d}(|\sigma_G|/3) \leq n_d - m_d \leq \log_{\beta_d}(|\sigma_G| 24e^{4c}\beta_d),$$

où $m_d - n_d$ est l'ordre de σ_d , compris entre $\log_{\beta_d}(|\sigma_d|/3)$ et $\log_{\beta_d}(|\sigma_d|)$.

— De plus, $2e^{-2nL+2c}|\sigma_G| \leq \beta_d^{-m_d} \leq 2\beta_d e^{-2nL+2c}|\sigma_G|$, et donc

$$\log_{\beta_d}(2e^{-2nL+2c}|\sigma_G|) \leq -m_d \leq \log_{\beta_d}(2\beta_d e^{-2nL+2c}|\sigma_G|).$$

En combinant les deux, on obtient

$$2nL \log_{\beta_d}(e) - \log_{\beta_d}(6\beta_d e^{2c}) \leq n_d - m_d + m_d \leq 2nL \log_{\beta_d}(e) + \log_{\beta_d}(12e^{2c})\beta_d$$

et finalement

$$2n \frac{L}{\log(\beta_d)} - \frac{2c}{\log(\beta_d)} - 8 \leq n_d \leq 2n \frac{L}{\log(\beta_d)} + \frac{2c}{\log(\beta_d)} + 10$$

(en utilisant l'approximation $\beta \approx 1,32471$ pour le plus petit nombre de Pisot, voir 3.1.16).

Les ordres relatifs pour les bases Pisot évoluent donc de manière linéaire avec celui en fraction continue.

Mauvaises zones On va s'intéresser maintenant à éviter les zones où les conditions d'\$(\varepsilon, k)\$-normalité imposées ne sont pas vérifiées. Il faut s'assurer de pouvoir choisir un intervalle \$J\$ d'ordre \$n\$ dans la longueur totale \$K/\sqrt{n}\$ disponible sans qu'il soit de discrédance trop haute et les cylindres qui le recouvrent ne soient pas \$(\varepsilon, k)\$-normaux dans leurs bases respectives.

Pour tout \$n\$ on note

$$B_{d,\sigma_d,n_d,\varepsilon,k}^0 = E_{\sigma_d,n_d}^c(\varepsilon, k)$$

l'ensemble des nombres non \$(\varepsilon, k)\$-normaux en base \$\beta_d\$ de longueur \$n_d\$ relativement à leur préfixe \$\sigma_d\$, et

$$B_{d,\sigma_d,n_d,\varepsilon,k}$$

l'ensemble des recouvrements éventuels dont ils peuvent faire partie. Notons \$M_d = M_{\beta_d}\$. Si

$$n > \frac{2(M_d + k - 1)e^{M_d}}{\varepsilon(\beta_d - 1)},$$

le théorème 4.2.19 affirme que

$$\frac{|B_{d,\sigma_d,n_d,\varepsilon,k}^0|}{|\sigma_d|} \leq C_{\beta_d}(\varepsilon, k)e^{-\eta_{\beta_d}(\varepsilon,k)}.$$

Par la suite on notera \$C_d = C_{\beta_d}\$ et \$\eta_d = \eta_{\beta_d}\$. Chacun de ses intervalles pouvant intervenir dans des recouvrements de deux ou trois cylindres cibles en fraction continue à la fois. Pour finir un recouvrement dont il est la partie la plus à gauche (respectivement à droite), il faut ajouter une longueur d'au plus \$2\beta_d^{-m_d}\$ de \$\beta_d\$-cylindres de même ordre. On a donc

$$|B_{d,\sigma_d,n_d,\varepsilon,k}| \leq (4\beta_d^{M_d} + 1)|B_{d,\sigma_d,n_d,\varepsilon,k}^0|.$$

Comme de plus \$2n \frac{L}{\log(\beta_d)} - \frac{2c}{\log(\beta_d)} - 8 \leq n_d\$ et \$|\sigma_d| \leq 24e^{4c}\beta_d|\sigma_G|\$, on a

$$\begin{aligned} \frac{|B_{d,\sigma_d,n_d,\varepsilon,k}|}{|\sigma_G|} &\leq 120e^{4c}\beta_d^{M_d+1} \frac{|B_{d,\sigma_d,n_d,\varepsilon,k}^0|}{|\sigma_d|} \\ &\leq 120e^{4c}\beta_d^{M_d+1} C_d(\varepsilon, k)e^{-\eta_d(\varepsilon,k)n_d} \\ &\leq A(d)C_d(\varepsilon, k)E(d) \exp\left(-\eta_d(\varepsilon, k) \frac{2nL}{\log(\beta_d)}\right), \end{aligned}$$

où \$A(d) = 120e^{4c}\beta_d^{M_d+1}\$ et \$E(d) = \exp\left(\left(\frac{2c}{\log(\beta_d)} + 8\right)\eta_d(\varepsilon, k)\right)\$.

Nous ne reviendrons pas sur la majoration de la longueur des mauvaises zones en fraction continue, qui impose une condition en \$O(t^4 \log(t))\$ sur \$n_0(t, \varepsilon, k)\$ avec les paramètres de utilisés dans [BY19], que nous utiliserons aussi. Pour conclure, il suffit de trouver \$n_0(t, \varepsilon, k)\$ tel que pour tout \$n \geq n_0\$ et tout \$d = 1 \dots t - 1\$,

$$tA(d)E(d)C_d \exp\left(-\eta_d(\varepsilon, k) \frac{2nL}{\log(\beta_d)}\right) \leq \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

Pour ce faire, on utilise le même résultat technique que dans [BY19], qui indique que si \$r\$ et \$\gamma\$ sont des réels strictement positifs tels que

$$n \geq -\frac{2}{r} \log(\gamma r),$$

alors

$$\gamma \geq \sqrt{ne^{-rn}}.$$

Il nous suffit donc de majorer \$-\frac{2}{r_d} \log(\gamma_d r_d)\$ pour tout \$d\$, avec

$$\gamma_d = \frac{K}{tA(d)E(d)C_d(\varepsilon, k)}$$

et

$$r_d = \eta_d(\varepsilon, k) \frac{2L}{\log(\beta_d)}.$$

Dans le pire des cas, on a $k = \sqrt{\log(t)}$ et $\varepsilon = 1/t$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{2}{r_d} &\leq \frac{\log(\beta_d)}{L} 2(\beta_d - 1)^2 \beta_d^{2M_d - 2} (M_d - 1 + \sqrt{\log(t)})^2 (\sqrt{\log(t)} - 1) t^2 \beta_d^{\sqrt{\log(t)}} \\ &\leq 2\beta_d^{2M_d + \sqrt{\log(t)}} \log(\beta_d) (\log(t) + M_d \sqrt{\log(t)})^2 t^2, \end{aligned}$$

Par ailleurs, notons que comme les inégalités $\beta_d > 1, 32$ et donc $\beta - 1 \geq \sqrt{1/10}$, $\varepsilon \leq 1/2$, $M_d \geq 1$ et $k \geq 1$ sont toujours vraies, on a

$$E(d) = \exp\left(\left(\frac{2c}{\log(\beta_d)} + 8\right)\eta_d(\varepsilon, k)\right) \leq e^c,$$

et

$$C_d \leq 2e^2 \beta_d^k.$$

On a donc finalement

$$\log\left(\frac{tA(d)E(d)C_d\beta_d}{2L\eta_d}\right) \leq \log\left(\Lambda\beta_d^{3M_d+2\sqrt{\log(t)}} \log(\beta_d) (\log(t) + M_d \sqrt{\log(t)})^2 t^2\right),$$

où $\Lambda = 240e^{5c+2}$ ne dépend pas de d . En notant

$$\Psi(t, d) = \beta_d^{2M_d + \sqrt{\log(t)}} \log(\beta_d) (\log(t) + M_d \sqrt{\log(t)})^2 t^2,$$

et en tenant compte également de la condition sur n pour l'application du théorème 4.2.19, il suffit donc de choisir pour n_0 la valeur

$$n_0(t, \varepsilon, k) = \max_d \left\{ \left\lceil 2\Psi(t, d) \log\left(\Lambda\beta_d^{M_d + \sqrt{\log(t)}} \Psi(t, d)\right) \right\rceil, \left\lceil 8t(M_d + \sqrt{\log(t)})e^{M_d} \right\rceil \right\}.$$

Notons que les valeurs prises par β_d dépendent de la valeur t du nombre de bases considérées, et de la manière dont on ajoute des bases à chaque fois que t augmente.

Si $t' = t + 1$, nous devons en plus ajouter un recouvrement en base β_{t+1} , sans conditions particulières d' (ε, k) -normalité, mais qui ne doit pas être trop grand. On peut par exemple recouvrir τ_G par des β_{t+1} -cylindres d'ordre m_{t+1} tel que m_{t+1} est le plus grand entier vérifiant

$$|\tau_G| \leq \beta_{t+1}^{-m_{t+1}+1},$$

et on a alors

$$\frac{|\tau_G|}{|\tau_{t+1}|} \geq \frac{1}{3\beta_{t+1}},$$

ce qui suffit pour que la borne imposée soit vérifiée. \square

Conditions sur la suite de bases utilisée

Avant de passer à l'algorithme en lui-même, notons que ce qui a été établi jusqu'ici dépendait de la condition Parry plutôt que de la condition Pisot. Étant donné que fonctionner par recouvrement est moins exigeant que de construire des cylindres imbriqués, nous avons plus de liberté que dans [MST18], et nous pouvons considérer pour notre suite de base une suite contenant jusqu'à tous les Pisots et des nombres de Parry dont on connaît la constante M_β et qui sont minorés par le nombre de Pisot minimal 3.1.16 (ou simplement par une constante strictement positive, ce qui entraînera quelques changements dans les constantes calculées précédemment, mais sans changer le fond du résultat). Cependant, nous utilisons une version de l' (ε, k) -normalité qui impose des conditions dépendant fortement des valeurs de β_d . Pour limiter l'impact de ces conditions sur les paramètres, on va s'assurer que la valeur de β_d ne croît pas trop rapidement avec t .

Lemme 4.3.2. *Soit $n \geq 2$, et soit $P(X) = X^n - a_1X^{n-1} - \dots - a_n$ un polynôme à coefficients entiers tel que $1 \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_1$. Alors la plus grande racine réelle positive α de P est un nombre de Parry simple, tel que $d_\alpha(1) = a_1a_2 \dots a_n$.*

Ce résultat a été démontré par Frougny et Solomyak [FS92], et il avait déjà été établi par Brauer [Bra50] que de tels nombres sont des nombres de Pisot. On notera par la suite \mathcal{F} la famille formée par ces nombres.

Lemme 4.3.3. *Soit $n \geq 2$ un entier. Notons $c_{n,n-1}$ le cardinal de la famille $\mathcal{F}_{n,n-1}$ formée des n -uplets (a_1, a_2, \dots, a_n) avec $1 \leq a_n \leq \dots \leq a_1 \leq n-1$. Alors $c_{n,n-1} \geq 3^{n-2}$.*

Démonstration. Nous allons montrer ce résultat par récurrence sur n .

- Si $n = 2$, alors le seul élément de \mathcal{F}_2 est le nombre d'or ϕ .
- Pour $n \geq 3$, on peut construire les sous-familles suivantes de $\mathcal{F}_{n,n-1}$ à partir de la famille $\mathcal{F}_{n-1,n-2}$. Pour tout $n-1$ -uplet $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, considérons les n -uplets

$$\vec{a}_1 = (a_1, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}),$$

$$\vec{a}_2 = (n-1, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

et

$$\vec{a}_3 = \begin{cases} (n-1, n-1, a_2, \dots, a_{n-1}) & \text{si } a_1 = n-2 \\ (a_1+1, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces n -uplets sont dans $\mathcal{F}_{n,n-1}$, et en utilisant le fait que $a_1 < n-1$ et que deux n -uplets différents avec le même premier coefficient ont au moins un autre coefficient qui diffère, on voit que pour tous i et j entre 1 et 3 et tous \vec{a} et \vec{b} dans $\mathcal{F}_{n-1,n-2}$, on a $\vec{a}_i = \vec{b}_j$ si, et seulement si $i = j$ et $\vec{a} = \vec{b}$. Il en découle que $c_{n,n-1} \geq 3c_{n-1,n-2}$. □

Il est en outre aisé de voir que \mathcal{F} est en bijection avec $\cup_{p \geq 2, q \geq 1} \mathcal{F}_{p,q}$, et donc contient toutes les familles de la forme $\mathcal{F}_{n,n-1}$ avec n entier et supérieur ou égal à 2. De plus, tout élément $\beta \in \mathcal{F}$ vérifie $M_\beta = 1$, et tout nombre de Parry β correspondant à un élément de $\mathcal{F}_{p,q}$ avec p un entier supérieur ou égal à 2 et q un entier strictement positif est tel que $q < \beta < q+1$ et $N\beta = p$.

On impose les conditions suivantes sur notre suite de bases : qu'elle contienne au moins les nombres entiers supérieurs ou égaux à 2 et la famille \mathcal{F} , dans l'ordre suivant.

- On commence avec la base $\beta_2 = 2$.
- Ensuite on ajoute tous les éléments β de la suite tels que $\beta < 2$, $N_\beta \leq 2$ et $M_\beta \leq \lfloor \sqrt{2} \rfloor$ dans l'ordre croissant (il ne peut y en avoir qu'un nombre fini, car la suite $d_\beta(1)$ est déterminée par la donnée de N_β chiffres majorés par β et pouvant être répartis d'au plus N_β manières entre pré-période et période).
- On ajoute ensuite 3, puis tous les éléments de β de la suite vérifiant $\beta < 3$, $N_\beta \leq 3$ et $M_\beta \leq \lfloor \sqrt{3} \rfloor$ que l'on a pas ajoutés à l'étape précédente.
- On réitère ensuite avec tous les entiers $n \geq 4$ successifs, avec les conditions pour les bases β que l'on ajoute entre les entiers k et $k+1$:

$$\beta < k,$$

$$N_\beta \leq k$$

et

$$M_\beta \leq \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

Ainsi tout nombre de Parry β est ajouté au plus tard après l'entier N_β^2 , et comme après chaque entier on ajoute un nombre seulement fini de bases, on est assurés d'intégrer n'importe quelle base de notre suite en un temps fini.

Lemme 4.3.4. *Soit β une base dans une suite vérifiant les conditions ci-dessus, de telle manière que le rang de β dans cette suite est égal à $t-1$. Alors $\beta \leq \log(t) + 3$.*

Démonstration. Comme, par construction, tout élément de la suite est inférieur ou égal à un entier de rang plus petit ou égal, il suffit d'établir le résultat pour les entiers. Soit donc n un entier strictement supérieur à 2 (pour $n = 2$ il est immédiat que la borne est valide). Il est précédé dans la suite pour tous les entiers compris entre 1 et n , et également au minimum par tous les éléments β de la famille \mathcal{F} tels que $\beta < n - 1$ et $N_\beta < n - 1$. En notant $t - 1$ le rang de n dans la suite, et $c_{k,k-1}$ les constantes définies dans le lemme 4.3.3, on a donc :

$$t - 1 \geq n - 2 + c_{2,1} + \cdots + c_{n-1,n-2},$$

ce qui nous donne d'après le lemme 4.3.3

$$t \geq n - 1 + 1 + \cdots + 3^{n-3},$$

d'où la majoration grossière $t > e^{n-3}$ qui impose finalement que $n \leq \log(t) + 3$. \square

L'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$

- *Initialisation* On commence par la base $\beta_1 = 2$ et le développement en fraction continue, avec le cylindre d'ordre 0, c'est à dire $[0, 1[$, dans chaque base.
- *Itération* On fixe

$$\begin{aligned} t(s) &= \max(2, \lceil \log^{1/5}(s) \rceil), \\ \varepsilon(s) &= 1/t(s) \end{aligned}$$

et

$$k(s) = \max(\lceil \sqrt{\log(t)} \rceil, 1).$$

À chaque étape s , on utilise le lemme précédent pour raffiner la $t(s-1)$ -brique de l'étape précédente à une $t(s)$ -brique (ε, k) -normale d'ordre relatif $n_{\text{start}} + \lceil \log(s) \rceil$ avec n_{start} indépendant de s . On choisit le raffinement le plus à gauche.

Théorème 4.3.5. *L'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$ construit un nombre normal dans toutes les bases considérées en temps polynomial.*

Démonstration. En adaptant la valeur que l'on a fixé pour n_0 avec le résultat du lemme 4.3.3, on obtient

$$n_0(t) \leq \max \left\{ \left\lceil 2\Psi(t) \log \left(\Lambda(\log(t) + 3)^{2\sqrt{\log(t)+3}} \Psi(t) \right) \right\rceil, \left\lceil 16t\sqrt{\log(t) + 3}e^{\sqrt{\log(t)+3}} \right\rceil \right\},$$

avec

$$\Psi(t) = (\log(t) + 3)^{3\sqrt{\log(t)+3}} \log(\log(t) + 3)(2 \log(t))^2 t^2.$$

On a donc une condition sur n_0 en

$$O(\log(t)^{3\sqrt{\log(t)+3}+3} t^2) = o(t^5).$$

Comme la condition pour les fractions continues est également en $o(t^5)$, on peut choisir

$$n(s) = n_{\text{start}} + \lceil \log(s) \rceil,$$

où n_{start} est une constante, pour le nombre de chiffres ajoutés à chaque étape pour éviter toutes les mauvaises zones avec les conditions $t(s) = \max(2, \lceil \log^{1/5}(s) \rceil)$, $\varepsilon(s) = 1/t(s)$ et $k(s) = \max(1, \lceil \sqrt{\log(t(s))} \rceil)$. Comme $\log(s)$ croît vers l'infini et $\sum_{s=1}^n \log(s) = O(n \log(n))$, et comme de plus pour tout entier d entre 2 et t on a

$$An - B \leq n_d \leq An + B + 2,$$

Avec $A = 2L/\log(\beta_d)$ et $B = 2c/\log(\beta_d) + 8$, on a également $\sum_{s=1}^{n_d} \log(s) = O(n_d \log(n_d))$. Les conditions du lemme 4.1.5 sont vérifiées, ce qui nous assure que le mot infini construit par l'algorithme est normal dans toutes les bases Parry considérées. De plus, la proposition 4.1.6, issue du résultat de construction de l'algorithme \mathcal{A}_{fc} dans [BY19], nous assure également que le mot infini construit par l'algorithme est normal au sens des fractions continues. Ainsi, on a établi que le mot final est bien normal dans toutes les bases souhaitées, d'où la validité de l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$. \square

4.4 Contrôle de la propagation de retenues

L'approche par recouvrement dispose d'une plus grande flexibilité mais a aussi un prix. En effet, si à une étape donnée les cylindres consécutifs des recouvrements dans chaque base Parry vérifient tous les mêmes conditions d' (ε, k) -normalité, comment en choisir un plutôt qu'un autre? Comme la construction de l'étape suivante peut nous restreindre dans le recouvrement (en réalité, on va voir que l'on se place systématiquement dans un seul cylindre de ce recouvrement), selon le choix que l'on fait, on peut être amenés à changer un certain nombre de chiffres à cause du phénomène de propagation de retenue. Par exemple, cette question se pose déjà dans l'algorithme \mathcal{A}_{fc} : si en base 2, un recouvrement est constitué de deux intervalles dont le premier se finit par une suite de 1 et le second commence par une suite de 0, combien de chiffres peuvent être amenés à changer si on passe de l'un à l'autre?

Les conditions sur la discrétion simple en base entière imposées dans l'algorithme \mathcal{A}_{fc} permettent de majorer le nombre de chiffres susceptibles de changer.

Lemme 4.4.1. *Soient $b \geq 2$ et $n > 0$ des entiers, $\varepsilon > 0$ un réel, et soient D et D' deux blocs de chiffres de longueur n consécutifs en base b . Si D et D' ont une discrétion inférieure ou égale à ε , alors D et D' ont au plus leurs $\lfloor (1/b + \varepsilon)n \rfloor + 1$ derniers chiffres qui diffèrent.*

Démonstration. Comme D et D' ont une discrétion simple inférieure ou égale à ε , ils peuvent contenir au plus $(1/b + \varepsilon)n$ fois un chiffre donné. En particulier, si le plus grand des deux blocs dans l'ordre lexicographique se finit par une suite de zéros, la longueur de celle-ci ne peut excéder $(1/b + \varepsilon)n$. \square

En base Parry, les recouvrements et la propagation des retenues peuvent être un peu plus compliqués, mais on va obtenir un résultat similaire. Commençons par nous ramener à des recouvrements plus simples avec le résultat suivant.

Lemme 4.4.2. *Soient $\beta > 1$ un nombre de Parry, $n > 0$ un entier et $I \subset [0, 1[$ un intervalle tel que $|I| < \beta^{-n}$. Alors :*

- *Il existe un recouvrement de I par un ou deux cylindres consécutifs en base β d'ordre au moins $n - M_\beta$.*
- *Il existe un recouvrement de I par au plus $M_\beta + 1$ cylindres consécutifs en base β d'ordre n .*

Démonstration. Montrons déjà la première assertion. Si $n \leq M_\beta$, il suffit de prendre pour recouvrement $[0, 1[$. Sinon, supposons que I n'est contenu dans aucun β -cylindre d'ordre $n - M_\beta$. Cela signifie que I contient un point a dont l'écriture en base β est de longueur au plus $n - M_\beta$. Or on sait que les autres points admettant des écritures en base β de longueur au plus $n - M_\beta$ sont espacés de a d'au moins $\beta^{-M_\beta} \beta^{-n+M_\beta}$, soit d'une distance supérieure à la longueur de I , et a est le seul point contenu dans I dont l'écriture est de longueur au plus $n - M_\beta$. Ainsi, I est recouvert par les β -cylindres d'ordre $n - M_\beta$ délimités respectivement à gauche et à droite par le point a .

Pour la seconde assertion, on remarque que tout cylindre en base β admet au plus un sous-cylindre court d'ordre relatif 1 (celui le plus à droite), et que le sous-cylindre le plus à gauche d'un cylindre standard est standard à tout ordre. Ainsi, en admettant qu'à un ordre n , la plus longue (en termes de cardinal) suite de cylindres courts consécutifs en base β comporte C éléments, alors celle à l'ordre $n + 1$ en comporte au plus $C + 1$ et est constituée des mêmes cylindres, dont la longueur relative a été multipliée par β , plus un autre (apparaissant tout à gauche). Comme à l'ordre 1 il y a un seul cylindre court, et que la longueur des cylindres en base β est minorée par β^{-M_β} , il vient qu'à tout ordre, il ne peut y avoir plus de $M_\beta - 1$ cylindres courts consécutifs. \square

Ce lemme nous permet donc de nous ramener à des recouvrements par seulement deux cylindres consécutifs à un ordre un peu inférieur.

Théorème 4.4.3. *Soient β un nombre de Parry et s un entier strictement positif, tels qu'un recouvrement σ constitué de β -cylindres consécutifs d'ordre $n_\beta(s)$ a été construit à l'étape s de l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$, et soient D et D' des mots de longueur $n_\beta(s)$ (pas nécessairement distincts) quelconques dans ce recouvrement. Alors le nombre de chiffres différents entre D et D' est majoré par*

$$\frac{N_\beta \beta^{-k(s)+1}}{(\beta - 1)} (1 + \varepsilon(s)) n_\beta(s) + k(s) - 1 + M_\beta.$$

Démonstration. Déjà, grâce au lemme 4.4.2, on se ramène à étudier la propagation de retenues entre deux cylindres consécutifs d'ordre $n_\beta(s) - M_\beta$. Celle-ci fonctionne différemment du cas des bases entières à cause des restrictions sur les chiffres : pour tout entier strictement positif m , le mot maximal de longueur m en base β n'est plus le mot $[\beta]^k$ mais le préfixe de longueur m de $d_\beta^*(1)$, où $d_\beta^*(1)$ est égal à $d_\beta(1)$ si β est un nombre de Parry non simple, ou à $(d_\beta(1) - 1)^\infty$ si $d_\beta(1)$ est fini, $(d_\beta(1) - 1)$ désignant alors le mot de même longueur que $d_\beta(1)$ directement inférieur dans l'ordre lexicographique. Ainsi, si un bloc w_1 de longueur $k(s)$ est tel que pour un certain mot w pour lequel ww_1 est admissible en base β , le préfixe du mot directement supérieur à ww_1 n'est pas w (c'est-à-dire si changer le dernier chiffre de w_1 en lui ajoutant 1 engendre une propagation de retenues sur plus de $k(s)$ chiffres), alors w_1 est nécessairement un facteur de longueur $k(s)$ du mot $d_\beta^*(1)$, la réciproque n'étant pas toujours vraie. De plus, comme $d_\beta^*(1)$ est ultimement périodique, il n'admet qu'au plus N_β facteurs de longueur $k(s)$ différents. De par les conditions d' (ε, k) -normalité imposées dans la construction de notre algorithme, et comme la mesure de Parry de tout β -cylindre d'ordre $k(s)$ est majorée par $\beta^{-k(s)+1}/(\beta - 1)$, il vient que le nombre de chiffres pouvant différer entre D et D' est majoré par

$$\frac{N_\beta \beta^{-k(s)+1}}{(\beta - 1)} (1 + \varepsilon(s)) n_\beta(s) + k(s) - 1 + M_\beta,$$

en remarquant que si un bloc de longueur k correspond à un cylindre d'ordre $n_\beta(s) - M_\beta$, alors son premier chiffre est à la position $n_\beta(s) - M_\beta - k(s) + 1$. \square

En particulier, si s est assez grand, strictement moins de $n_\beta(s)$ chiffres peuvent changer entre différents cylindres du recouvrement associé à β obtenu à l'étape s de l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$. Ainsi, quand on réalise une nouvelle étape $s + 1$ de l'algorithme, seule une partie des chiffres construits à l'étape précédente (s) peut changer, ce qui implique aussi que dès l'étape s , on se place à l'intérieur d'un seul cylindre obtenu pour le recouvrement en base β de l'étape $s - 1$.

Remarque 4.4.4. Ici on s'est intéressé à la propagation de retenue dans le pire des cas, que l'on a pu contrôler grâce aux propriétés d' (ε, k) -normalité des mots que l'on construit. Il existe aussi des résultats pour la propagation de retenues moyenne à partir d'un mot quelconque, dus à Berthé, Frougny, Rigo et Sakarovitch [Ber+20].

4.5 Extension aux nombres de Delone

Dans les deux chapitres précédents, on a utilisé les nombres de Parry pour tout ce qui concernait les β -développements, notamment parce que ce sont des nombres pour lesquels les restrictions de chiffres sont assez faciles à manipuler. Pour ce qui concerne l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$, la propriété des nombres de Parry qui nous a été utile a surtout été celle de sélection, qui nous assure de pouvoir toujours concaténer deux mots quitte à ajouter un nombre borné de zéros ($M_\beta - 1$), qui peut également se réexprimer par les lemmes 4.1.11 et 3.1.10. Cette propriété est en effet essentielle pour mettre en place l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$, ou tout algorithme basé sur la concaténation (si elle n'est pas vérifiée, on ne peut par exemple jamais assurer que $|\mathcal{L}_{a,n}|$ pour un préfixe a et un entier strictement positif n quelconques soit strictement plus grand que 1). Cependant, il existe des réels autres que les nombres de Parry pour lesquels la propriété de sélection est vérifiée : on les appelle *nombres de Delone*, et ils sont tels que la suite (f_i) des parties fractionnaires itérées qui est associée à chacun d'eux est de cardinal infini, mais n'admet pas 0 comme point d'accumulation. En reprenant les notations que l'on a utilisées pour les nombres de Parry, tout nombre de Delone admet une borne finie M_β sur son temps de retour à un cylindre standard (soit le nombre maximum de zéros consécutifs dans $d_\beta(1)$ plus un), mais ses cylindres peuvent avoir un nombre infini de longueurs différentes, relativement à leur ordre (c'est-à-dire que N_β est infinie pour les nombres de Delone). Comme dans toute la partie précédente, on a utilisé toujours M_β et jamais N_β , sauf dans la construction de la suite des bases que l'on utilise dans l'algorithme, on peut généraliser tout ce qu'on a fait aux nombres de Delone, en leur associant une chaîne de Markov (avec un ensemble d'états infini). La première assertion du lemme 4.2.18 reste valide, et on peut appliquer le théorème 4.2.19 avec les mêmes constantes. On peut donc ajouter encore des nombres de Delone à la liste de bases utilisées dans l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$, tant qu'on connaît la constante M_β associée, et que pour toute constante strictement

positive C , on ajoute au plus un nombre fini de nombres de Delone β tels que β et M_β sont majorés par C (on supprime alors la condition sur N_β pour ajouter les nombres de Delone dans la suite). En revanche, le théorème 4.4.3 ne s'adapte pas directement, et on va avoir besoin d'un résultat plus précis sur la propagation de retenues dans ce cadre.

Lemme 4.5.1. *Soient β un nombre de Parry ou de Delone et s un entier strictement positif, tels qu'un recouvrement σ constitué de β -cylindres consécutifs d'ordre $n_\beta(s)$ a été construit à l'étape s de l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$, et soient D et D' des mots de longueur $n_\beta(s)$ (pas nécessairement distincts) quelconques dans ce recouvrement. Alors le nombre de chiffres communs à D et D' est minoré par*

$$(\beta - 1)\beta^{-k(s)-1}(1 - \varepsilon(s))n_\beta(s) + k(s) - 1.$$

Démonstration. Considérons le bloc $0^{k(s)}$. Comme par construction, on a toujours $k(s) \geq M_\beta$, il vient par définition de M_β que $0^{k(s)}$ n'est pas facteur de $d_\beta^*(1)$. En particulier, le mot en base β directement supérieur dans l'ordre lexicographique est $0^{k(s)-1}$. Ainsi, si un mot w de longueur $n_\beta(s)$ en base β contient m fois le mot $0^{k(s)}$, la dernière position où il peut avoir un chiffre différent du mot directement supérieur dans l'ordre lexicographique est la dernière position de la dernière apparition du mot $0^{k(s)}$, c'est-à-dire dans le pire des cas (s'ils font tous partie d'un plus grand bloc de 0 au début de w) à la position $m + k(s) - 1$. Les conditions d' (ε, k) -normalité dans la construction de l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$ minorent en outre le nombre d'apparitions du cylindre standard associé au bloc $0^{k(s)}$ par

$$(\beta - 1)\beta^{-k(s)}(1 - \varepsilon(s))n_\beta,$$

D'où le résultat. □

Ainsi, strictement moins de $n_\beta(s)$ chiffres peuvent changer entre différents cylindres du recouvrement associé à β obtenu à l'étape s de l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$.

4.6 Complexité de l'algorithme

L'étude de la complexité de l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$ se déroule pour l'essentiel comme celle de la complexité de l'algorithme \mathcal{A}_{fc} proposée dans [BY19].

Plaçons-nous au début de l'étape s de l'algorithme, et notons $N(s-1) = n(1) + n(2) + \dots + n(s-1)$. On a construit une $t(s-1)$ -brique $(\sigma_G, \sigma_2, \dots, \sigma_{t(s-1)})$, et on suppose que l'algorithme a directement accès à la valeur du rationnel donné par l'intégralité du développement en fraction continue obtenu dans les $s-1$ premières étapes, ce qui nous donne également la valeur de z_G , le point délimitant σ_G à gauche, ainsi qu'à la longueur $|\sigma_G|$ et aux valeurs $z_d^i - z_G$, où les z_d^i sont les points délimitant chaque cylindre du recouvrement en base β_d pour d compris entre 2 et $t(s-1)$. L'idée est de découper σ_G en

$$\lfloor 4e^{2n(s)L+2c} \rfloor + 1$$

intervalles de même longueur. Tout sous-intervalle de longueur au moins

$$\frac{1}{4}e^{-2n(s)L-2c}|\sigma_G|$$

(comme les cylindres que l'on examine) contient alors au moins un des points qui délimite ces intervalles. On notera ces points e_i pour i allant de 0 jusqu'à une constante $T-1$. L'article [BY19] établit que le nombre T de ces points est en $O(s^{2L})$, puis qu'il faut $O(n)$ opérations pour calculer le développement en fractions continues associé à chacun de ces points, puis $O(n(s))$ opérations pour déterminer si ce développement a une longueur relative à σ_G dans l'intervalle que l'on a imposé, puis encore $n(s)$ opérations pour déterminer si la discrétion en fractions continues de ce développement vérifie bien les conditions imposées à l'étape s . Intéressons-nous maintenant à la partie qui relève des recouvrements dans les différentes bases β_d considérées à l'étape s . Pour tout cylindre en fraction continue candidat que l'on a construit, notons x le point qui le délimite à gauche et z_d le point z_d^i défini précédemment tel que la différence $x - z_d^i = x - z_G + z_G - z_d^i$ est positive et minimale, et de même notons x' le point qui le délimite

à droite et z'_d le point z_d^i tel que $x' - z_d^i$ est positive est minimale. Afin de construire seulement le bloc de chiffres que l'on ajoute à l'étape s , il faut déterminer les développements en base β_d de $\{(x - z_d)\beta_d^{N(s-1)}\}$ et de $\{(x' - z'_d)\beta_d^{N(s-1)}\}$, ce qui est linéaire en $n_d(s)$, et donc en $O(n(s))$. Il faut ensuite déterminer tous les blocs de longueur $n_d(s)$ compris entre ces deux développements dans l'ordre lexicographique. D'après la deuxième assertion du lemme 4.4.2, cela peut être effectué en partant du développement du point de gauche puis en déterminant le bloc de même longueur immédiatement supérieur dans l'ordre lexicographique, puis de recommencer l'opération au plus $M_{\beta_d} - 1$ fois en tout jusqu'à retomber sur le développement du point à droite. Le lemme 4.5.1 nous assurant que la propagation des retenues ne dépassera pas les $n_d(s)$ chiffres du bloc, et on peut déterminer le bloc de longueur $n_d(s)$ immédiatement supérieur dans l'ordre lexicographique en base β_d en au plus $O(n(s)^2)$ opérations. En effet, il suffit d'ajouter 1 au dernier chiffre du développement obtenu, puis de comparer la somme au premier chiffre de $d_{\beta_d}(1)$: si la somme est strictement supérieure, on remplace le dernier chiffre par 0 et on retient 1 pour l'avant dernier chiffre, sinon on ne change rien. Ensuite on réitère l'opération en comparant le bloc des deux derniers chiffres (éventuellement modifié par la retenue) au préfixe de longueur 2 de $d_{\beta_d}(1)$, et ainsi de suite ... On doit itérer au plus $n_d(s)$ fois et comparer pour l'ordre lexicographique des blocs de longueur au plus $n_d(s)$. Finalement, il faut pour chacun de ces blocs tester l' $(\varepsilon(s), k(s))$ -normalité, ce qui pour chacun des au plus $\beta^{k(s)}$ blocs possibles est linéaire en $n_d(s)$, ce qui donne donc lieu à au plus $O(M_{\beta_d}\beta_d^{k(s)}n(s))$ opérations.

Finalement, on obtient une complexité en

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(s) &= O\left(s^{2L}\left(n(s) + t(s) \max_{2 \leq d \leq t(s)} \left\{M_{\beta_d}\left(n^2(s) + \beta_d^{k(s)}n(s)\right)\right\}\right)\right) \\ &= O\left(s^{2L}\left(\log(s) + \log^{\frac{1}{5}}(s)\sqrt{\log(t(s))}\left(\log(t(s))\sqrt{\log(t(s))}\log(s) + \log^2(s)\right)\right)\right) \\ &= O\left(s^{2L}\log^{\frac{11}{5}}(s)(\log\log(s))^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= o(s^4) \end{aligned}$$

au pire pour le nombre d'opérations effectuées à l'étape s de l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$. Comme à chaque étape, le nombre de chiffres que l'on ajoute est en

$$O(\log(s)),$$

cette complexité est exponentielle en termes d'opérations par chiffre ajouté (ce qui est inévitable à cause du nombre de blocs d'une longueur fixée dans chaque base considérée). Par contre, la longueur totale des blocs construits dans les différentes bases lors de s premières étapes de l'algorithme étant en $O(s \log(s))$ tandis que le nombre d'opérations nécessaires pour effectuer ces étapes est en $o(s^4)$, il vient qu'obtenir les n premiers chiffres du mot en fraction continue construit par l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$ exige dans le pire des cas $o(n^4)$ opérations (en notant que si s est la première étape où l'algorithme a construit en tout au moins n chiffres, alors $n = O((s-1)\log(s)) = O(s \log(s))$).

4.7 Commentaires sur l'algorithme

Déjà, remarquons que plutôt que $k(s) = \sqrt{t(s)}$, on peut prendre quand s devient grand

$$k(s) = \frac{\log(t(s))}{C \log\log(t(s))}$$

avec une constante C suffisamment grande, et de même pour la valeur maximale de M_{β_d} autorisée pour $d \leq t(s)$.

Par ailleurs, on peut faire la remarque suivante, également à propos du paramètre k et de la lenteur de son évolution, et de la taille de la famille de bases que l'on doit imposer. Si à la place de l' (ε, k) -normalité, on teste avec un écart ε plutôt que $\varepsilon\mu(D)$ pour tout cylindre D dans le théorème 4.2.17, ce qui nous donne encore toutes les conditions d' (ε, k) -normalité souhaitées lorsque ε devient suffisamment

petit, cela réduira drastiquement les contraintes sur la valeur de $k(s)$ ainsi que sur la famille de bases. Cependant, comme d'une part l'objectif de l'algorithme est au départ de pouvoir construire un nombre normal simultanément en toute base Pisot, et que les conditions que l'on a imposées sur la famille de bases minimale que l'on considère portent uniquement sur l'intégration de nombres de Pisot, et comme d'autre part dans l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{base}}$ de l'article [BHS13] qui construit un nombre absolument normal on vérifie à chaque étape des conditions de normalité simple, et donc dans ce cas le contrôle sur les blocs de k chiffres en bases b pour k et b des entiers supérieurs ou égaux à 2 apparaît quand on intègre la base b^k ce qui donnerait une progression en $\log_b(t)$ pour k dans chaque base, les conditions présentes sur k et sur la famille de bases utilisées dans l'algorithme $\mathcal{A}_{\text{fusion}}$ restent cohérentes avec ses contraintes et ses objectifs.

Pour ce qui est des extensions possibles de l'algorithme, comme on l'a évoqué dans la partie 4.5, il n'y a pas de possibilités de construire un algorithme sur ce modèle (faisant appel à la concaténation) pour des nombres qui ne sont pas au moins de Delone. On peut par contre remarquer que grâce à la souplesse que procure l'utilisation de recouvrements plutôt que d'intervalles imbriqués, il est possible d'ajouter des conditions de normalité dans d'autres systèmes de numérations quelconques, si tant est que pour ceux-ci on dispose d'un contrôle sur la taille des cylindres à ordre fixé, un résultat de décroissance exponentielle effectif sur les blocs non (ε, k) -normaux en fonction de leur longueur, ainsi qu'un sur la concaténation des mots et sur la propagation de retenues (ces deux dernières conditions étant liées à la taille des cylindres également).

Bibliographie

- [Aki00] Shigeki AKIYAMA. « Cubic Pisot units with finite beta expansions ». In : *Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis, Proceedings of the International Conference held in Graz, Austria, August 30 to September 5, 1998*. Sous la dir. de F. HALTER-KOCH et Robert F. TICHY. Berlin, New York : De Gruyter, 2000, p. 11-26. ISBN : 9783110801958. DOI : doi : 10.1515/9783110801958.11. URL : <https://doi.org/10.1515/9783110801958.11>.
- [Aki09] Shigeki AKIYAMA. « Finiteness and periodicity of beta expansions – number theoretical and dynamical open problems ». In : *Actes des rencontres du CIRM 1.1 (2009)*, p. 3-9. DOI : 10.5802/acirm.2. URL : <https://acirm.centre-mersenne.org/articles/10.5802/acirm.2/>.
- [AG05] Shigeki AKIYAMA et Nertila GJINI. « Connectedness of number theoretical tilings ». In : *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Vol. 7 (jan. 2005)*, p. 269-312. DOI : 10.46298/dmtcs.353. URL : <https://inria.hal.science/hal-00959042>.
- [Bas02] Frédérique BASSINO. « Beta-Expansions for Cubic Pisot Numbers ». In : *LATIN 2002 : Theoretical Informatics : 5th Latin American Symposium Cancun, Mexico, April 3-6, 2002 Proceedings 5*. 2002, p. 141-152. ISBN : 978-3-540-43400-9. DOI : 10.1007/3-540-45995-2_17.
- [BFP07] Verónica BECHER, Santiago FIGUEIRA et Rafael PICCHI. « Turing’s unpublished algorithm for normal numbers ». In : *Theoretical Computer Science 377 (2007)*, p. 126-138. DOI : 10.1016/j.tcs.2007.02.022.
- [BHS13] Verónica BECHER, Pablo Ariel HEIBER et Theodore A. SLAMAN. « A polynomial-time algorithm for computing absolutely normal numbers ». In : *Information and Computation 232 (2013)*, p. 1-9. ISSN : 0890-5401. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ic.2013.08.013>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0890540113000904>.
- [BY19] Verónica BECHER et Sergio A. YUHJTMAN. « On absolutely normal and continued fraction normal numbers ». In : *Int. Math. Res. Not. IMRN 19 (2019)*, p. 6136-6161. ISSN : 1073-7928. DOI : 10.1093/imrn/rnx297. URL : <https://doi.org/10.1093/imrn/rnx297>.
- [Ber+20] Valérie BERTHÉ et al. « The carry propagation of the successor function ». In : *Adv. Appl. Math.* 120 (2020), p. 102062. DOI : 10.1016/J.AAM.2020.102062. URL : <https://doi.org/10.1016/j.aam.2020.102062>.
- [BV89] Anne BERTRAND-MATHIS et Bodo VOLKMANN. « On (ϵ, k) -normal words in connecting dynamical systems ». In : *Monatshefte Fur Mathematik - MONATSH MATH 107 (1989)*, p. 267-279. DOI : 10.1007/BF01517354.
- [Bes35] A. S. BESICOVITCH. « The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of the natural numbers ». In : *Mathematische Zeitschrift 39 (1935)*, p. 146-156. DOI : 10.1007/BF01201350. URL : <https://doi.org/10.1007/BF01201350>.
- [Bis44] B. H. BISSINGER. « A generalization of continued fractions ». en. In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 50.12 (1944), p. 868-876. URL : <http://dml.mathdoc.fr/item/1183506620>.
- [Bor09] Émile BOREL. « Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques ». In : *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940) 27 (1909)*, p. 247-271.

- [Boy96a] David BOYD. « On beta expansions for Pisot numbers ». In : *Math. Comput.* 65 (avr. 1996), p. 841-860. DOI : 10.1090/S0025-5718-96-00693-X.
- [Boy96b] David BOYD. « On the beta expansion for Salem numbers of degree 6 ». In : *Math. Comput.* 65 (avr. 1996), p. 861-875. DOI : 10.1090/S0025-5718-96-00700-4.
- [Boy11] David W. BOYD. *Salem numbers of degree four have periodic expansions*. Sous la dir. de Jean M. de KONINCK et Claude LEVESQUE. Berlin, New York : De Gruyter, 2011, p. 57-64. ISBN : 9783110852790. DOI : doi:10.1515/9783110852790.57. URL : <https://doi.org/10.1515/9783110852790.57>.
- [Bra50] Alfred BRAUER. « On algebraic equations with all but one root in the interior of the unit circle. To my teacher and former colleague Erhard Schmidt on his 75th birthday ». In : *Mathematische Nachrichten* 4.1-6 (1950), p. 250-257. DOI : <https://doi.org/10.1002/mana.3210040123>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/mana.3210040123>. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mana.3210040123>.
- [Bug12] Yann BUGEAUD. *Distribution Modulo One and Diophantine Approximation*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2012. DOI : 10.1017/CB09781139017732.
- [Bur+08] Edward B. BURGER et al. « Shrinking the period lengths of continued fractions while still capturing convergents ». In : *Journal of Number Theory* 128.1 (2008), p. 144-153. ISSN : 0022-314X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2007.03.001>.
- [Cha33] D. G. CHAMPERNOWNE. « The Construction of Decimals Normal in the Scale of Ten ». In : *Journal of the London Mathematical Society* s1-8.4 (1933), p. 254-260. DOI : <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-8.4.254>. eprint : <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/s1-8.4.254>. URL : <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/s1-8.4.254>.
- [CE46] Arthur H. COPELAND et Paul ERDÖS. « Note on normal numbers ». In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 52 (1946), p. 857-860.
- [DK10] Karma DAJANI et Charlene KALLE. « A Note on the Greedy β -Transformation with Arbitrary Digits ». In : *École de théorie ergodique*. Sous la dir. d'Yves LACROIX, Pierre LIARDET et Jean-Paul THOUVENOT. Société Mathématique de France, 2010, p. 83-104. ISBN : 978-2-85629-312-6. URL : <https://smf.emath.fr/publications/ecole-de-theorie-ergodique>.
- [DK02] Karma DAJANI et Cor KRAAIKAMP. *Ergodic theory of numbers*. T. 29. Carus Mathematical Monographs. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002, p. x+190. ISBN : 0-88385-034-6.
- [DS02] Michael DRMOTA et Wolfgang STEINER. « The Zeckendorf expansion of polynomial sequences ». en. In : *Journal de théorie des nombres de Bordeaux* 14.2 (2002), p. 439-475. URL : http://www.numdam.org/item/JTNB_2002__14_2_439_0/.
- [DT97] Jean Marie DUMONT et Alain THOMAS. « Gaussian Asymptotic Properties of the Sum-of-Digits Function ». In : *Journal of Number Theory* 62.1 (1997), p. 19-38. ISSN : 0022-314X. DOI : <https://doi.org/10.1006/jnth.1997.2044>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X97920448>.
- [Dur10] Rick DURRETT. *Probability : Theory and Examples*. 4th. USA : Cambridge University Press, 2010. ISBN : 0521765390.
- [Eve46] C. J. EVERETT. « Representations for real numbers ». In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 52 (1946), p. 861-869.
- [Fra13] Jacques FRANCHI. *Processus aléatoires à temps discret : Cours, exercices et problèmes corrigés*. fr. Ellipses Marketing, fév. 2013. ISBN : 9782729877521.
- [FS92] Christiane FROUGNY et Boris SOLOMYAK. « Finite beta-expansions ». In : *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 12 (déc. 1992), p. 713-723. DOI : 10.1017/S0143385700007057.
- [Gel59] A. O. GELFOND. « Über eine allgemeine Eigenschaft von Zahlensystemen ». Russian. In : *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 23 (1959), p. 809-814. ISSN : 0373-2436.

- [GO02] Peter W. GLYNN et Dirk ORMONEIT. « Hoeffding's inequality for uniformly ergodic Markov chains ». In : *Statistics and Probability Letters* 56.2 (2002), p. 143-146. ISSN : 0167-7152. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0167-7152\(01\)00158-4](https://doi.org/10.1016/S0167-7152(01)00158-4). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167715201001584>.
- [HS24] H. HICHRI et C. SMYTH. « The distribution of non-Parry Perron numbers and their conjugates ». In : *Research in Number Theory* 10 (2024). DOI : <https://doi.org/10.1007/s40993-024-00578-7>.
- [KL17] Cor KRAAIKAMP et Niels LANGEVELD. « Invariant measures for continued fraction algorithms with finitely many digits ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 454.1 (2017), p. 106-126. ISSN : 0022-247X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.04.067>.
- [LY73] A. LASOTA et James A. YORKE. « On the Existence of Invariant Measures for Piecewise Monotonic Transformations ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 186 (1973), p. 411-418. DOI : <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1978-0457679-0>.
- [LY78] Tien Yien LI et James A. YORKE. « Ergodic transformations from an interval into itself ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 235 (1978), p. 183-192. DOI : <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1978-0457679-0>.
- [Lot02] M. LOTHAIRE. *Algebraic Combinatorics on Words*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2002.
- [MST18] Manfred G. MADRITSCH, Adrian-Maria SCHEERER et Robert F. TICHY. « Computable absolutely Pisot normal numbers ». In : *Acta Arith.* 184.1 (2018), p. 7-29. ISSN : 0065-1036. DOI : <https://doi.org/10.4064/aa8661-8-2017>. URL : <https://doi.org/10.4064/aa8661-8-2017>.
- [Meh20] Erblin MEHMETAJ. « On the r-continued fraction expansions of reals ». In : *Journal of Number Theory* 207 (2020), p. 294-314. ISSN : 0022-314X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2019.07.012>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X19302653>.
- [Par60] W. PARRY. « On the β -expansions of real numbers ». In : *Acta Mathematica Hungarica* 11.3-4 (1960), p. 401-416. DOI : [10.1007/bf02020954](https://doi.org/10.1007/bf02020954). URL : <https://akjournals.com/view/journals/10473/11/3-4/article-p401.xml>.
- [Rén57] Alfréd RÉNYI. « Representations for real numbers and their ergodic properties ». In : *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica* 8 (1957), p. 477-493. DOI : <https://doi.org/10.1007/BF02020331>.
- [Sch80] Klaus SCHMIDT. « On Periodic Expansions of Pisot Numbers and Salem Numbers ». In : *Bulletin of the London Mathematical Society* 12.4 (1980), p. 269-278. DOI : <https://doi.org/10.1112/blms/12.4.269>. eprint : <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/blms/12.4.269>. URL : <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/blms/12.4.269>.
- [Sie44] Carl Ludwig SIEGEL. « Algebraic integers whose conjugates lie in the unit circle ». In : *Duke Mathematical Journal* 11.3 (1944), p. 597-602. DOI : [10.1215/S0012-7094-44-01152-X](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-44-01152-X). URL : <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-44-01152-X>.
- [Sie17] W. SIERPINSKI. « Démonstration élémentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'une tel nombre ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 45 (1917), p. 125-132. DOI : [10.24033/bsmf.977](https://doi.org/10.24033/bsmf.977). URL : <http://www.numdam.org/articles/10.24033/bsmf.977/>.
- [Sol94] Boris SOLOMYAK. « Conjugates of Beta-Numbers and the Zero-Free Domain for a Class of Analytic Functions ». In : *Proceedings of The London Mathematical Society* (1994), p. 477-498. DOI : <https://doi.org/10.1112/plms/s3-68.3.477>.
- [Ver08] Jean-Louis VERGER-GAUGRY. « On the dichotomy of Perron numbers and beta-conjugates ». In : *Monatshefte für Mathematik* 155 (jan. 2008), p. 277-299. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00605-008-0002-1>.