



**HAL**  
open science

## Dans l'ombre de la géométrie algébrique : études d'articulations disciplinaires au XIXe siècle

François Lê

► **To cite this version:**

François Lê. Dans l'ombre de la géométrie algébrique : études d'articulations disciplinaires au XIXe siècle. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Claude Bernard Lyon 1, 2025. <tel-05155211>

**HAL Id: tel-05155211**

**<https://hal.science/tel-05155211v1>**

Submitted on 9 Jul 2025

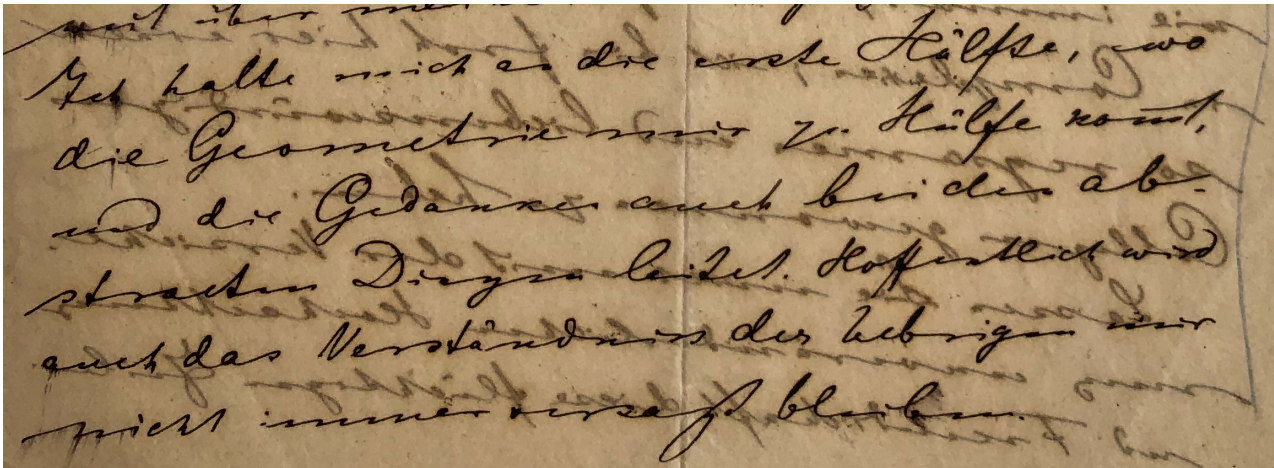
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

## Dans l'ombre de la géométrie algébrique : études d'articulations disciplinaires au XIX<sup>e</sup> siècle



**François LÊ**

Habilitation à diriger des recherches



**Université Claude Bernard Lyon 1**

**École doctorale InfoMaths**

**Spécialité : Mathématiques**

# **HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

présentée par

**François LÊ**

---

**Dans l'ombre de la géométrie algébrique :  
études d'articulations disciplinaires au XIX<sup>e</sup> siècle**

---

Soutenue le 27 juin 2025 devant le jury composé de :

M <sup>me</sup> Caroline EHRHARDT	Université Paris 8 Vincennes Saint-Denis	rapportrice
M <sup>me</sup> Catherine GOLDSTEIN	Institut de mathématiques de Jussieu-PRG	examinatrice
M <sup>me</sup> Karen Hunger PARSHALL	University of Virginia	examinatrice
M. Julien ROQUES	Université Claude Bernard Lyon 1	examineur
M. Norbert SCHAPPACHER	Université de Strasbourg	rapporteur
M. Ivahn SMADJA	Nantes Université	rapporteur



# Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Caroline Ehrhardt, Catherine Goldstein, Karen Parshall, Julien Roques, Norbert Schappacher et Ivahn Smadja d'avoir accepté avec enthousiasme de faire partie de mon jury d'habilitation, voire d'écrire un rapport sur le présent mémoire de synthèse. C'est un honneur et un plaisir que mes travaux soient évalués par ces six collègues.

Même après ma thèse, Catherine a continué à m'encourager à suivre des intuitions et des pistes de recherche et à commenter avec sagacité mes prépublications. Qu'elle en soit ici très vivement remerciée.

Je suis aussi reconnaissant envers Sébastien Gauthier pour nos nombreuses discussions relatives à l'histoire des mathématiques, dont plusieurs m'ont permis de débloquer ou clarifier des points concrets de recherche.

De manière générale, je remercie toutes les personnes qui, depuis mon arrivée dans le monde académique, ont participé à ma construction en tant que chercheur à travers des interactions de toutes sortes : échanges informels, écriture d'un article ou direction d'un ouvrage à quatre mains, relecture (anonyme ou non) d'un écrit, invitation ou participation à un séminaire, un colloque ou un groupe de travail, organisation d'un événement scientifique, co-encadrement d'un mémoire ou d'une thèse, etc.

L'Institut Camille Jordan et le Département de mathématiques constituent un environnement de travail quotidien de qualité. Mes remerciements vont d'abord à leurs directions et aux membres de leurs équipes administratives et de documentation. Ils s'adressent aussi aux chercheurs et chercheuses, enseignants et enseignantes, enseignants-chercheurs et enseignantes-chercheuses que je côtoie dans la bonne humeur, et notamment celles et ceux avec qui j'ai eu la chance d'avoir tissé des liens d'amitié autour d'un café, d'une brioche, d'une bière.



# Table des matières

<b>Travaux présentés</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
1.1 Questions de méthodes	10
1.1.1 Le local : les mots et la technique	10
1.1.2 Le global : la systématique comme garde-fou	11
1.2 Ombres kleiniennes	13
1.2.1 Programme d'Erlangen, icosaèdre, genre des surfaces	13
1.2.2 Géométrie algébrique	14
1.3 Organisation du mémoire	16
<b>2 Groupes, équations et géométrie</b>	<b>17</b>
2.1 De Jordan à Geiser	18
2.2 Les équations de la géométrie	21
2.2.1 Rencontres entre groupes, équations et géométrie	22
2.2.2 Un système culturel	25
<b>3 Fonctions abéliennes et géométrie</b>	<b>29</b>
3.1 La paramétrisation elliptique des cubiques	29
3.2 Les théorèmes de clôture	34
3.3 Études de genres	36
3.3.1 Clebsch vs. Riemann	37
3.3.2 Classifications	41
3.3.3 Big pictures	46
<b>4 Invariants, équations et géométrie</b>	<b>53</b>
4.1 Clebsch et la théorie des invariants	53
4.1.1 Trois situations techniques et la question de l'explicitation	54
4.1.2 Un programme interrompu	58

4.2	Invariants et surfaces algébriques par la textométrie . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Textométrie</b>	<b>63</b>
5.1	Surfaces algébriques . . . . .	64
5.2	Le style de Charles Hermite . . . . .	66
5.3	Perspectives . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Georges Humbert</b>	<b>73</b>
6.1	Fonctions fuchsiennes et courbes algébriques . . . . .	74
6.2	Formes quadratiques, fonctions abéliennes singulières, surface de Humbert . . .	76
	<b>Bibliographie</b>	<b>79</b>

# Travaux présentés

- LÊ François (2013), « Entre géométrie et théorie des substitutions : une étude de cas autour des vingt-sept droites d'une surface cubique », *Confluentes Mathematici*, **5** (1), 23-71.
- (2015a), « Around the History of the 27 Lines upon Cubic Surfaces: Uses and Non-Uses of Models », *Oberwolfach Reports*, **12** (4), 2794-2798.
  - (2015b), « “Geometrical Equations”: Forgotten Premises of Felix Klein’s *Erlanger Programm* », *Historia Mathematica*, **42** (3), 315-342.
  - (2015c), *Vingt-sept droites sur une surface cubique : rencontres entre groupes, équations et géométrie dans la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
  - (2016), « Reflections on the Notion of Culture in the History of Mathematics: The Example of “Geometrical Equations” », *Science in Context*, **29** (3), 273-304.
- LÊ François et PAUMIER Anne-Sandrine (2016a), « De la science comme classification à la classification comme pratique scientifique : quelques réflexions à partir de deux cas mathématiques », *Cahiers François Viète*, 3<sup>e</sup> sér., **1**, 9-33.
- (éds.) (2016b), « La classification comme pratique scientifique », *Cahiers François Viète*, 3<sup>e</sup> sér., **1**.
- LÊ François (2017), « Alfred Clebsch’s “Geometrical Clothing” of the Theory of the Quintic Equation », *Archive for History of Exact Sciences*, **71** (1), 39-71.
- (2018a), « Le paramétrage elliptique des courbes cubiques par Alfred Clebsch », *Revue d’histoire des mathématiques*, **24**, 1-39.
  - (2018b), « The Recognition and the Constitution of the Theorems of Closure », *Historia Mathematica*, **45** (3), 237-276.
- GAUTHIER Sébastien et LÊ François (2019), « On the Youthful Writings of Louis J. Mordell on the Diophantine Equation  $y^2 - k = x^3$  », *Archive for History of Exact Sciences*, **73** (5), 427-468.
- LÊ François (2020), « “Are the *genre* and the *Geschlecht* one and the same number?” An Inquiry into Alfred Clebsch’s *Geschlecht* », *Historia Mathematica*, **53**, 71-107.
- (2022), « La théorie des surfaces algébriques dans les *Mathematische Annalen* à l’épreuve de la textométrie (1869-1898) », *Revue d’histoire des mathématiques*, **28** (1), 1-45.
  - (2023a), « Alfred Clebsch [1863–1865] », traduction anglaise de [BRILL et NOETHER 1894, p. 318-330], à paraître.

- LÊ François (2023b), « Des taxons et des nombres : quelques remarques sur les ordres, classes et genres des courbes algébriques », *Revue d'histoire des sciences*, **76** (1), 85-134.
- (2024), « On Charles Hermite's Style », *Revue d'histoire des mathématiques*, **30**, 197-231.
  - (2025a), « On the Past of a Mathematical Object », in François LÊ et Jemma LORENAT (éds.), *Beyond Case-Studies: Drawing Bigger Pictures in the History of Mathematics*, Birkhäuser, à paraître.
  - (2025b), « Theory and Applications of Invariants in Clebsch's Papers », in Frédéric JAËCK (éd.), *Towards a Philosophy of Mathematical Invariants*, Spartacus-IDH, à paraître.
- LÊ François et LORENAT Jemma (éds.) (2025), *Beyond Case-Studies: Drawing Bigger Pictures in the History of Mathematics*, Birkhäuser, à paraître.

# Chapitre 1

## Introduction

Ce mémoire est une synthèse des recherches que j’ai effectuées depuis le début de ma thèse en septembre 2011. En décrivant trois de leurs caractéristiques communes, les paragraphes introductifs qui suivent offrent un panorama d’ensemble sur ces recherches : pour imiter la formule galoisienne, ici on fait la synthèse de la synthèse.

La première de ces caractéristiques commune est thématique. Presque toutes mes recherches, en effet, sont dévolues à – ou ont pris leur point de départ dans – l’étude d’articulations entre des parties de la géométrie, de l’analyse et de l’algèbre au XIX<sup>e</sup> siècle : théorie des courbes et des surfaces algébriques pour la géométrie ; théorie des fonctions abéliennes pour l’analyse ; théories des équations algébriques, des substitutions et des invariants pour l’algèbre. De ce point de vue, ces recherches participent à une meilleure compréhension historique des enjeux et des conséquences de la mise en place d’interfaces disciplinaires dans le développement des mathématiques du XIX<sup>e</sup> siècle, et rejoignent ainsi celles qui, par exemple, ont étudié les liens entre théorie des groupes, cristallographie et géométrie [SCHOLZ 1989], entre équations différentielles, groupes et géométrie [GRAY 2000] ou encore entre théorie des nombres, fonctions elliptiques, séries infinies et équations algébriques, avec ce que Catherine Goldstein et Norbert Schappacher ont appelé « analyse algébrique arithmétique » [GOLDSTEIN et SCHAPPACHER 2007]<sup>1</sup>.

Les interfaces disciplinaires que j’ai étudiées jusqu’à présent ont notamment été portées par Alfred Clebsch (1833-1872), dont l’importance est communément reconnue dans l’historiographie, que ce soit pour ses contributions mathématiques propres, son rôle de figure tutélaire à Giessen puis Göttingen, ou sa fondation, avec Carl Neumann, des *Mathematische Annalen* [GRAY 1989 ; PARSHALL 1989 ; ROWE 1989a ; HOUZEL 2002 ; BOTTAZZINI et GRAY 2013 ; TOBIES 2019]. Mes travaux, qui, au contraire de ces derniers, prennent souvent Clebsch comme objet d’étude à part entière,

---

1. Ces trois exemples renvoient à des situations qui concernent deux des domaines mathématiques impliqués dans les interfaces qui m’intéressent. Parmi les nombreuses études de rencontres disciplinaires au XIX<sup>e</sup> siècle, voir [HOUZEL 2007 ; SCHWERMER 2007 ; GAUTHIER 2009 ; ARCHIBALD 2011 ; BOUCARD 2011 ; BRECHENMACHER 2011a ; GOLDSTEIN 2011 ; SMADJA 2013 ; EHRHARDT 2015 ; PARSHALL 2024].

complètent cette image en abordant des textes peu connus de lui et en analysant le fonctionnement de sa pratique mathématique dans ses dimensions les plus techniques.

Plus généralement, examiner les textes mathématiques de façon très resserrée est une composante d'un autre point commun de mes recherches, de nature méthodologique, consistant à réaliser de telles analyses locales et à chercher à les connecter avec des vues plus globales sur les situations étudiées.

## 1.1 Questions de méthodes

Cette volonté d'articuler le local et le global m'inscrit d'une certaine manière dans une démarche micro-historienne. Je reconnais en effet pleinement que « le choix d'une échelle particulière d'observation produit des effets de connaissance et qu'il peut être mis au service de stratégies de connaissances », et qu'« [i]l n'existe pas d'hiatus, moins encore d'opposition entre histoire locale et histoire globale. Ce que l'expérience d'un individu, d'un groupe, d'un espace permet de saisir, c'est une modulation particulière de l'histoire globale. » [REVEL 1996, p. 19, 26]. Plus encore, porter son attention aux détails les plus fins pour saisir de telles modulations, comme préconisé dans le paradigme indiciaire de Carlo Ginzburg [1980, 1989], est une forme d'enquête à laquelle je souscris entièrement.

Cependant, dans la mesure où j'essaie en général d'éviter d'utiliser trop légèrement des concepts méthodologiques forts, je dois souligner ici que je ne me suis jamais réellement emparé du principe de variation des échelles en tant que tel, qui affirme que la production de sens historique est intrinsèquement liée à la multiplicité des différentes échelles d'observation<sup>2</sup>. Les mouvements entre le local et le global qui se manifestent sous diverses formes dans mes travaux, que ces derniers soient pris isolément ou en conjonction partielle, doivent ainsi moins être vus comme les traces d'une approche de l'histoire des mathématiques *a priori* que comme les conséquences d'un traitement concret de questions historiques données.

### 1.1.1 Le local : les mots et la technique

Le tropisme pour les détails techniques que montrent mes travaux s'explique avant tout par ma curiosité et mon plaisir de comprendre les mathématiques en profondeur, ce qui a d'ailleurs alimenté en grande partie les directions de recherches dans lesquelles je me suis engagé jusqu'à présent.

D'autres raisons, moins égoïstes peut-être, soutiennent bien entendu cet aspect de mes investigations historiques, qui, du reste, est loin de m'être propre. Inspecter les textes mathématiques dans leurs aspects techniques est notamment indispensable pour mettre au jour des phénomènes

---

2. En histoire des mathématiques, ce principe a notamment été mis en œuvre dans [GAUTHIER 2007 ; LELOUP 2009].

qu'une lecture trop surplombante pourrait manquer ou déformer. Pour les questions qui m'intéressent spécifiquement, les modalités de rencontres d'objets et de théorèmes issus de domaines mathématiques distincts, les résistances que peuvent parfois présenter ces objets et théorèmes à de telles rencontres et leurs connexions avec les discours plus généraux des praticiens doivent être évaluées à l'aune des mathématiques au ras du sol [LÊ 2013, 2017, 2018a, 2025b ; GAUTHIER et LÊ 2019].

Prendre très au sérieux l'utilisation de mots du langage naturel est également crucial – et même, à mon sens, indissociable de toute étude approfondie de la technique mathématique – puisque cela permet de fixer le sens que les mathématiciens observés donnent aux objets et théorèmes qu'ils étudient. Les noms de ces derniers permettent par exemple de suivre des phénomènes mathématiques eux-mêmes liés à des conceptions disciplinaires ou des traditions nationales : ainsi le simple emploi différencié des termes « genre » ou « connectivité », qui reflète une délimitation entre géométrie des courbes algébriques, d'une part, et analyse et topologie, d'autre part [LÊ 2020], ou la particularité des mathématiciens britanniques de parler de *porisms* ou de *deficiency* au lieu des « théorèmes de clôture » et du « genre » des continentaux [LÊ 2018b]. En outre, dans certains cas, scruter des particularités de formulations dévoile des informations intéressantes sur la conceptualisation même de certains objets, à l'image d'adjectifs numériques ordinaux qui témoignent du fait qu'ordres, classes, genres et degrés de courbes et d'équations ont longtemps été vus comme des ensembles avant de devenir des nombres [LÊ 2023b].

Si l'examen des détails mathématiques et linguistiques est donc de grande importance, la question de restituer ces détails dans les formes publiées de la recherche est loin d'être triviale en raison des contraintes de place, de lignes éditoriales ou de diversité des attentes, prérequis et pratiques du lectorat. Dans mes publications, qui peuvent parfois être vues comme très (voire trop) proches de la technique, j'essaie toujours de faire en sorte d'entrer suffisamment dans les détails pour mener à bien mes démonstrations historiques. J'aimerais cependant ajouter que de mon point de vue, donner des explications mathématiques suffisamment riches et précises possède aussi une vertu de transmission, pouvant permettre à des lecteurs et lectrices d'appivoiser un sujet technique dans l'optique de recherches futures.

### 1.1.2 Le global : la systématique comme garde-fou

Aussi importante que puisse être l'étude resserrée de textes ou de parties de textes mathématiques, le problème d'inscrire, d'une manière ou d'une autre, les résultats correspondants dans un cadre plus large se pose rapidement. S'agissant donc de repérer et d'analyser des phénomènes relatifs à des ensembles de textes écrits par une multiplicité d'auteurs et sur une période éventuellement longue, les énoncés historiques visés sont de nature quelque peu différente, étant nécessairement plus synthétiques. Comme toujours, de tels résultats doivent être démontrés, leur zone d'action bien circonscrite et leur portée explicitée : dans cette perspective, les approches

quantitatives et systématiques me semblent être d’utiles garde-fous<sup>3</sup>.

La constitution systématique de corpus est ainsi la première étape de l’investigation à moyenne ou grande échelle, qu’elle se base sur des outils de recension mathématique du XIX<sup>e</sup> siècle [LÊ 2015b, 2018b, 2022, 2024, 2025a] ou un dépouillement de revues données à l’aide d’une recherche de mots clés [LÊ 2020, 2025b].

J’ai souvent analysé ces corpus par le biais de leurs citations intertextuelles [GOLDSTEIN 1994, 1999], permettant de mettre au jour des réseaux de citations dont il s’agit ensuite de comprendre la nature par le croisement avec d’autres points de vue méthodologiques [LÊ 2015b, 2020, 2022, 2025a]. Pour cela, la base de données collective Thamous, que gère Alain Herreman, est un outil de grande valeur. Depuis mes débuts en thèse, j’ai participé à l’alimenter à de nombreuses reprises, que ce soit en rattachement direct avec des recherches publiées ou non. Outre des contributions ponctuelles, j’ai ainsi créé ou complété les données correspondant aux corpus qui suivent – ceux écrits en italique sont ceux dont les bibliographies ont été (presque) intégralement saisies : *le corpus des vingt-sept droites* (41 textes); *le corpus des équations de la géométrie* (17 textes); *les publications de Clebsch* (120 textes); *la géométrie dans le journal de Crelle de 1826 à 1856* (351 textes); *la géométrie dans les CRAS de 1868 à 1914* (1070 textes); *les problèmes de clôture* (130 textes); *le corpus du genre et de la connectivité* (243 textes); *les surfaces algébriques dans les Mathematische Annalen de 1868 à 1898* (91 textes); *les surfaces algébriques dans le Catalogue of scientific papers* (948 textes).

Les travaux que j’ai engagés en appliquant les méthodes de la textométrie sont eux aussi de nature systématique et quantitative, dans la mesure où ils s’appuient sur des calculs statistiques qui impliquent l’ensemble (en général de grande taille, pour que ces calculs aient du sens) de tous les mots de corpus donnés et permettent de mettre en évidence des phénomènes difficilement détectables à l’œil nu ou difficilement quantifiables sans outil adapté [LÊ 2022, 2024].

Je souligne enfin que plusieurs situations rencontrées ont entraîné le besoin de trouver des descriptifs adéquats pour rendre compte de caractéristiques globales des corpus étudiés, qu’il s’agisse d’une forme d’organisation collective du savoir [LÊ 2016], d’un processus de catégorisation de problèmes et de théorèmes sur un temps long [LÊ 2018b] ou d’impressions stylistiques liées à la lecture des écrits d’un mathématicien [LÊ 2024]. Enfin, je suis revenu plus récemment sur la question de l’écriture du passé d’un objet mathématique, en examinant les problèmes globaux que posent à la fois le temps long et l’existence de multiples généalogies d’un tel objet [LÊ 2025a].

---

3. Pour ne donner qu’un échantillon de recherches adoptant de telles démarches, voir [FOLTA et NOVÝ 1965; GOLDSTEIN 1999; BRECHENMACHER 2011b; CHORLAY 2011; NABONNAND et ROLLET 2012; GISPERT 2015; BOUCARD et ECKES 2023].

## 1.2 Ombres kleinienne

La dernière caractéristique commune de mes recherches que je souhaite détailler ici est qu'elles concernent des sujets qui ont été marqués mathématiquement et historiquement par l'empreinte postérieure de Felix Klein.

Parce que, en tant qu'étudiant de mathématiques, j'associais spontanément le nom de Klein à des thématiques qui me plaisaient (notamment celles faisant la part belle aux mélanges disciplinaires), prendre ce mathématicien comme objet de recherches était une des pistes que j'avais proposées à Catherine Goldstein au moment de définir un sujet de thèse. Je n'ai aujourd'hui aucun regret que cette piste ait été immédiatement écartée, bien au contraire. Et ce n'est pas sans malice que je constate que les travaux que j'ai menés depuis participent à mettre en lumière d'autres auteurs, comme Clebsch, dont les travaux et la pratique ont longtemps été écrasés tant mathématiquement qu'historiographiquement par les puissantes ombres kleinienne.

### 1.2.1 Programme d'Erlangen, icosaèdre, genre des surfaces

Le *Programme d'Erlangen* (1872) est le premier monument kleinien que j'ai été amené à discuter [ROWE 1983; HAWKINS 1984; GRAY 2005]. L'étude de cas sur l'échange entre Camille Jordan et Carl Friedrich Geiser, d'une part, et l'analyse des équations de la géométrie, d'autre part, ont d'abord simplement montré l'existence d'activités mathématiques mettant en place des interfaces entre théorie des groupes et géométrie avant l'écriture du *Programme* [LÊ 2013, 2015b]. Ces interfaces concernent plutôt des groupes de substitutions et des configurations de points et de droites associées à des courbes et des surfaces de petit degré, alors que le *Programme* connecte les groupes de transformations (et leurs invariants) avec la géométrie en général. Mais Klein mentionne explicitement la théorie des équations comme une de ses sources d'inspirations : j'ai montré qu'il visait par là surtout les équations de la géométrie, qu'il avait lui-même étudiées, ce qui a permis de donner corps et de mieux comprendre ces sortes de prémices du *Programme*. Plus récemment, dans mon article sur la théorie des invariants dans l'œuvre de Clebsch, j'ai aussi mis en lumière des éléments que j'ai interprétés comme des bribes d'un programme de recherche que ce mathématicien a cherché à initier dans les derniers mois de sa vie, entre 1871 et 1872 [LÊ 2025b]. Ce programme vise entre autres à unifier des parties de l'algèbre et de la géométrie par le biais de la théorie des formes et des invariants, et son existence même montre que des propositions avaient été faites pour rapprocher à nouveaux frais algèbre et géométrie au début des années 1870. Si l'absence de la théorie des groupes du programme de Clebsch est bien sûr une différence majeure avec le *Programme d'Erlangen*, il n'en demeure pas moins que d'autres éléments de Clebsch, dont l'idée centrale d'invariance, se retrouvent chez Klein, dans un agencement différent.

Les recherches de Clebsch de 1871 sur l'équation du cinquième degré sont quant à elles en lien avec les célèbres *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften*

*Grade* de Klein (1884) [GRAY 2000]. Les deux partagent l'objectif d'introduire un point de vue géométrique sur la théorie de l'équation du cinquième degré, en utilisant des résultats de théorie des invariants et en se basant sur les travaux de certains prédécesseurs sur le sujet, comme Charles Hermite et Leopold Kronecker. Là encore, en analysant l'article correspondant de Clebsch, j'ai déterré une autre géométrisation de la théorie de la quintique, qui était presque totalement ignorée par l'historiographie [LÊ 2017]. Mais j'ai aussi montré comment plusieurs éléments techniques de l'approche de Clebsch avaient été repris et réarrangés par Klein, subissant ainsi le même destin que les travaux d'Hermite et de Kronecker [PETRI et SCHAPPACHER 2004; GOLDSTEIN 2011].

Un autre héritage de Klein est notre utilisation actuelle du mot « genre » pour désigner le nombre de trous d'une surface usuelle de  $\mathbb{R}^3$ . Dans mes travaux sur la circulation de la notion de genre, j'ai en effet mis en évidence que ce sont Klein et ses étudiants qui, vers 1880, ont commencé à décrire les surfaces à l'aide de ce terme, alors qu'elles étaient auparavant toujours caractérisées par leur ordre de connectivité, le genre étant réservé aux courbes algébriques [LÊ 2020]. J'ai aussi suggéré que cette substitution terminologique avait eu (et a encore) des effets historiographiques, dans la mesure où décrire les recherches d'un auteur comme Bernhard Riemann avec le mot « genre » tend à lui inscrire des cadres disciplinaires – en l'occurrence, ceux de la théorie des courbes algébriques – qui n'étaient pas les siens.

### 1.2.2 Géométrie algébrique

Une dernière facette de l'influence de Klein, plus diffuse, semble également agir sur la représentation historique des sujets qui m'intéressent. Il s'agit de l'utilisation de l'expression « géométrie algébrique » pour désigner un domaine de recherche qui engloberait les travaux des mathématiciens que j'ai étudiés jusqu'à présent<sup>4</sup>.

Tout au long du XIX<sup>e</sup> siècle, cette expression se rencontre seulement de manière très ponctuelle, utilisée comme synonyme de « géométrie analytique » et renvoyant donc à l'utilisation de coordonnées pour étudier les figures géométriques du plan et de l'espace [LARDNER 1831; CAYLEY 1849, p. 75; PUCKLE 1854]<sup>5</sup>. Cette absence relative se manifeste aussi dans la plupart des classifications disciplinaires du tournant du siècle : la « géométrie algébrique » n'existe ni dans le *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* (1889) ni dans le *Catalogue of scientific papers* (1908); et elle n'apparaît dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* qu'à partir de 1925.

Il s'agit en revanche d'une catégorie bien identifiée dans le registre thématique des *Mathematische Annalen*, édité en 1898 à l'occasion des 30 ans et du 50<sup>e</sup> volume de la revue. La géométrie

---

4. Les lignes qui suivent proviennent de recherches que j'ai effectuées pour faire suite à une invitation de la part des porteurs du projet ANR Patrimaths à donner un exposé sur l'*Encyklopädie* de Klein en janvier 2025.

5. Ces utilisations sporadiques de « géométrie algébrique » ont été relevées au cours de mes diverses lectures, sans qu'une recherche systématique n'ait été menée pour le moment. Par ailleurs, je ne sais pas s'il est significatif que celles que j'ai trouvées émanent toutes d'auteurs britanniques.

algébrique est en effet la deuxième division de la section sur la géométrie, la première étant relative aux « disciplines purement géométriques » et la troisième à la « géométrie différentielle ». Le coordinateur du registre, Arnold Sommerfeld [1898], explique qu'« à la demande de la Rédaction des Annales », la classification disciplinaire qu'il a adoptée est celle qui a été créée pour l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*. L'encyclopédie de Klein était alors en pleine rédaction [TOBIES 1994; GISPERT 1999], et les premiers fascicules du volume de géométrie algébrique sont publiés dans la première décennie du xx<sup>e</sup> siècle, à partir de 1903. Or c'est précisément en 1905 que le *Jahrbuch* commence à recenser des travaux dont le titre contient l'expression « géométrie algébrique » – de tels travaux paraissent ensuite de manière continue jusqu'à la Première Guerre mondiale puis pendant l'entre-deux-guerres. Ces indices suggèrent ainsi que la grande visibilité et de l'utilisation répandue de cette expression sont au moins en partie ancrés dans les entreprises kleinienne.

Klein lui-même, dans ses leçons sur le développement historique des mathématiques au xix<sup>e</sup> siècle, datées de 1911 environ, définit la géométrie algébrique comme la théorie des figures algébriques (c'est-à-dire des courbes, surfaces, etc., pouvant être définies polynomialement), en opposition avec la géométrie infinitésimale [KLEIN 1926, p. 131]. Ces leçons rangent presque tous les sujets que j'ai étudiés historiquement soit directement en géométrie algébrique (c'est le cas des travaux de Clebsch sur l'utilisation des fonctions abéliennes à la géométrie, alors que ces fonctions sont rangées en analyse dans le *Catalogue*, par exemple), soit dans des domaines qui sont présentés par Klein comme directement connexes (comme la théorie des invariants et l'étude des équations de la géométrie, qui relèvent de l'algèbre pour le *Catalogue*). Ces sujets se trouvent donc être mis sous un chapeau commun, dont l'existence même renvoie sinon à une discipline constituée, du moins à un domaine mathématique reconnu comme tel : il pourrait donc être tentant de l'utiliser pour décrire les activités correspondantes de Clebsch et ses contemporains, et donc de leur attribuer de fait une certaine conceptualisation de ces activités.

Mais je voudrais rester prudent sur ce point. Il serait bien sûr ridicule d'affirmer que Clebsch n'était pas extrêmement au fait de l'existence et des modalités de multiples interfaces disciplinaires impliquant les courbes et les surfaces algébriques – c'est même ce que mes recherches mettent en évidence. Néanmoins, la question de savoir si Clebsch voyait ses recherches alliant courbes et surfaces algébriques, fonctions abéliennes et invariants comme englobées dans un domaine bien distinct est encore ouverte pour moi, tant du point de vue de la délimitation intellectuelle de ce domaine que de celui de sa dynamique : pour Clebsch, une « géométrie algébrique » était-elle déjà constituée, en cours de constitution ou à constituer ?

### 1.3 Organisation du mémoire

Ce mémoire est principalement organisé par thèmes. La division des chapitres 2 à 4 incarne les trois principaux types d'articulations disciplinaires que j'ai étudiées : groupes, équations et géométrie (chapitre 2); fonctions abéliennes et géométrie (chapitre 3); invariants, équations et géométrie (chapitre 4). Cette division, dont la progression ne suit que partiellement la chronologie de mes recherches, m'a semblé un bon moyen de synthétiser ces dernières mais elle ne doit pas masquer la porosité de ses parties – par exemple, la paramétrisation elliptique des cubiques par Clebsch, que je décris dans le chapitre 3, fait aussi intervenir la théorie des invariants. Les chapitres 3 et 4 incluent aussi la description de travaux qui ne relèvent pas directement de l'étude de telles interfaces, mais qui s'y sont greffées au gré des extensions de problématiques et des opportunités. Du reste, les différentes sections du mémoire donnent en général des indications sur les événements qui m'ont mis sur certaines pistes. Le chapitre 5 détaille les résultats que j'ai obtenus en suivant la voie de la textométrie, bien que les résultats comparant la théorie des surfaces algébriques à celle des invariants de ce point de vue sont déjà présentés dans le chapitre 4. Enfin, le chapitre 6 est relatif à des travaux en cours et à venir portant sur le mathématicien Georges Humbert (1859-1921).

J'aurai souvent besoin de revenir à une description technique de divers travaux du XIX<sup>e</sup> siècle afin de donner corps aux descriptions des interfaces disciplinaires en jeu mais, par souci de concision, certains objets et concepts ne seront pas redéfinis : je renvoie à mes publications dans ces cas-là. Enfin, à l'image de cette introduction, j'utiliserai de façon interchangeable des mots comme « articulation », « interface » ou « configuration » ; ces mots ne seront par ailleurs pas pris comme des catégories analytiques fines de description mais plutôt comme des termes renvoyant simplement à des situations de mise en contact d'objets ou de théorèmes issus de domaines mathématiques *a priori* distincts.

## Chapitre 2

# Groupes, équations et géométrie

Ma thèse, préparée entre septembre 2011 et juin 2015, avait pour but initial de tracer l’histoire d’un théorème, celui des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques. Démontré en 1849 par Arthur Cayley et Georges Salmon, ce théorème énonce que toute surface cubique, c’est-à-dire toute surface pouvant être définie par une équation polynomiale de degré 3, contient exactement vingt-sept droites, pourvu qu’elle soit non singulière et que l’on se place dans un cadre de géométrie projective complexe. J’avais retenu de mes lectures de travaux ayant thématiqué la question de l’histoire d’un théorème l’importance à accorder aux variations pouvant être détectées dans ses énoncés et preuves successives [GILAIN 1991; SINACEUR 1991; GOLDSTEIN 1995; BRECHENMACHER 2010; EHRHARDT 2012]. Le théorème des vingt-sept droites semblait toutefois résister à cette approche, son énoncé étant très stable et ses démonstrations peu abondantes tout au long de la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. Parallèlement à ces réflexions, l’exploration du *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Camille Jordan [1870] m’intriguait car, comme je l’avais constaté lors de mon mémoire de Master, il était présenté par l’histoire usuelle du sujet comme le lieu d’une rencontre entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques réalisée par l’intermédiaire de la théorie des groupes [HENDERSON 1915].

Les investigations menées à partir de ce moment m’ont conduit à minorer le rôle des fonctions hyperelliptiques dans ces affaires tout en mettant en lumière une famille d’équations algébriques que Jordan appelle les « équations de la géométrie ». Leur étude a constitué une part majeure de ma thèse [LÊ 2015c], où je me suis efforcé d’en montrer l’importance dans les processus de rapprochements entre théorie des groupes (de substitutions), théorie des équations et géométrie autour de 1870. Ces investigations ont ainsi permis à la fois de compléter les recherches alors récentes sur les lectures et la circulation des travaux de Galois au XIX<sup>e</sup> siècle<sup>1</sup> et de discuter des équations de la géométrie en tant que prémices du *Programme d’Erlangen* de Felix Klein [1872]. D’autres résultats ont découlé de ma thèse, dont la mise en valeur et l’analyse de travaux d’Alfred

---

1. Les références principales à ce sujet sont [EHRHARDT 2012] ainsi que les contributions au volume spécial de la *Revue d’histoire des mathématiques* de 2011, dont [ARCHIBALD 2011; BRECHENMACHER 2011b; GOLDSTEIN 2011].

Clebsch, ainsi qu'une étude de cas problématisant les rapports entre groupes et géométrie à partir de recherches de Jordan et de Carl Friedrich Geiser.

## 2.1 De Jordan à Geiser

Le point de départ était donc la section du *Traité des substitutions* consacré aux équations de la géométrie et, en particulier, le paragraphe dévolu à « l'équation aux vingt-sept droites » : bien que cette dernière ne soit pas définie par Jordan, ma lecture des énoncés et démonstrations qui la concernent m'avait permis de comprendre qu'il s'agit d'une équation algébrique de degré 27 dont les racines correspondent une à une aux vingt-sept droites et sont liées entre elles par des relations algébriques qui reflètent les relations d'incidence existant entre ces droites. Examiner les travaux de Jordan sur cette équation a donné lieu à l'article [LÊ 2013]. Au-delà de la problématique liée aux rapports disciplinaires déjà évoqués, l'intérêt que je voyais était de participer à une meilleure compréhension technique des travaux de Jordan en tant que contributeur à l'édification des idées de Galois, les équations de la géométrie ayant déjà été remarquées comme importantes pour la diffusion du *Traité* mais finalement peu examinées de près [KIERNAN 1971; WUSSING 1969; BRECHENMACHER 2011b].

Pour étudier les équations de la géométrie, Jordan introduit des fonctions de leurs racines reflétant des relations entre les objets géométriques associés, relations déjà mises en évidence par certains de ses prédécesseurs. Par exemple, Jordan rappelle que Cayley et Salmon, mais aussi Jacob Steiner, avaient montré que les vingt-sept droites  $a, b, c, \dots, s', t', u'$  sont coplanaires trois à trois, formant ainsi quarante-cinq triangles  $abc, ade, \dots, lps'$ . Désignant par les mêmes symboles droites et racines, il définit alors la fonction

$$\varphi = abc + ade + \dots + lps'.$$

L'intérêt premier de cette fonction est de ramener l'étude du groupe de Galois de l'équation aux vingt-sept droites au groupe de  $\varphi$ , c'est-à-dire celui formé par les substitutions des racines  $a, b, \dots, u'$  laissant  $\varphi$  invariante. Or, si Jordan démontre proprement que le premier de ces groupes est inclus dans le deuxième, l'inclusion inverse est plus problématique :

Réciproquement, si l'on admet que toutes les relations géométriques existant entre les vingt-sept droites peuvent se déduire de celles qui précèdent, ce qui est au moins fort probable, [le groupe de l'équation aux vingt-sept droites] contiendra toutes les substitutions qui n'altèrent pas  $\varphi$ . [JORDAN 1869a, p. 148]

Cette lacune avait déjà été relevée dans l'historiographie [VAN DER WAERDEN 1985, p. 128] mais il m'a semblé intéressant de souligner que la connaissance algébrique (du groupe d'une équation) est ici, dès le début de l'investigation, tributaire de la connaissance géométrique associée. Une fois passée cette étape, en revanche, le groupe de  $\varphi$  est étudié par des techniques issues de la théorie

des substitutions seulement.

Notons au passage que délimiter avec précision les objets et techniques relevant pour Jordan de la théorie des substitutions ou de la géométrie était un enjeu en soi, dans la mesure où la question était justement d'examiner les interfaces entre ces deux domaines. Dans le cas présent, j'ai soutenu cette délimitation par l'analyse textuelle de paragraphes où Jordan utilise explicitement, et en une relative généralité, les termes « géométrie » et « théorie des substitutions » avant de particulariser son discours aux situations comme les vingt-sept droites, permettant ainsi de ranger avec certitude droites et triangles du côté de la géométrie, mais racines et groupes du côté de la théorie des substitutions [LÊ 2015c, p. 92-95].

Les travaux de Jordan sur les équations de la géométrie visent surtout à trouver les propriétés de résolubilité de ces dernières – ce qui inclut la recherche de réduites –, notamment à l'aide des méthodes de Galois. Dans le cas de l'équation aux vingt-sept droites, trois réduites sont cependant déterminées à l'aide d'arguments purement géométriques, consistant simplement en la mise évidence de ce que j'ai appelé par la suite des « objets dérivés » de la configuration des vingt-sept droites. Ainsi, pour la première :

L'équation aux vingt-sept droites a plusieurs réduites remarquables, signalées par divers géomètres.

1° Prenons, par exemple, pour inconnue de la question le plan du triangle formé par trois droites qui se coupent ; ces triangles étant au nombre de quarante-cinq, on aura une équation du quarante-cinquième degré, équivalente à la proposée. [JORDAN 1870, p. 319]

Comprenant la logique de tels énoncés mais restant toutefois intrigué par le fait qu'il s'agisse des seules propositions de Jordan dont la démonstration n'est pas appuyée par des arguments de théorie des groupes, je laissais temporairement de côté les questions historiques que ces propositions posaient. En tout cas, si la géométrie permet d'obtenir ainsi quelques résultats algébriques, elle en fait supposer d'autres à Jordan :

Aucune réduite d'un degré inférieur au vingt-septième n'ayant été rencontrée jusqu'ici, on était fondé à penser qu'il est impossible de ramener la résolution de l'équation aux vingt-sept droites à celles d'une équation d'un degré inférieur. Nous allons en effet prouver cette proposition. [JORDAN 1870, p. 319]

L'inexistence d'une réduite de degré inférieur à 27 est ainsi devinée à partir du fait qu'aucune configuration formée de moins de vingt-sept objets créés à partir des vingt-sept droites ne soit connue, mais la démonstration correspondante passe par l'étude du groupe de l'équation. Des contemporains de Jordan, comme Jules Hoüel, avaient déjà souligné ces aspects :

Nous ferons [remarquer] qu'aucune des propositions purement négatives, telles que l'impossibilité d'abaisser l'équation aux 27 droites [...], n'a été retrouvée jusqu'à présent. Cela ne doit pas surprendre ; car on ne voit guère comment on pourrait arriver à des résultats de cette nature sans recourir à la théorie des substitutions. [HOÜEL 1871, p. 165]

Tous ces énoncés, preuves et commentaires montrent ainsi une distribution des rôles intéressante entre géométrie et théorie des substitutions. En particulier, l'impossibilité pour la géométrie de démontrer des résultats négatifs et la lacune relevée plus haut (sur l'égalité du groupe de l'équation aux vingt-sept droites et de celui de  $\varphi$ ) sont deux manifestations de l'impossibilité de la connaissance exhaustive d'une configuration géométrique – au contraire de celle des sous-groupes d'un groupe donné, par exemple.

Mais ces rapports disciplinaires s'avèrent un peu plus complexes encore, comme le montre un passage situé quelques pages plus loin dans le *Traité*. Ayant en effet mené ses investigations sur l'équation aux vingt-huit tangentes doubles des courbes quartiques, Jordan prouve que l'adjonction d'une racine de cette équation donne une équation de degré 27 dont le groupe est isomorphe à celui de l'équation aux vingt-sept droites, puis qu'une nouvelle adjonction réduit cette équation de degré 27 à une équation de degré 26 qui se décompose en un facteur de degré 10 et un facteur de degré 16, le groupe de ce dernier étant identique au groupe de l'équation aux seize droites des surfaces quartiques à conique double. C'est suite à ce résultat que sont cités des travaux de Geiser :

La théorie des substitutions aurait donc permis de prévoir l'existence des liaisons géométriques qui existent entre les problèmes des vingt-huit tangentes doubles, des vingt-sept droites et des seize droites (voir un Mémoire de M. Geiser (*Mathematische Annalen*, t. I)). [JORDAN 1869b, p. 659]

Dans le mémoire en question, Geiser avait montré que toute courbe quartique plane peut être obtenue comme projection d'une surface cubique à partir d'un point de celle-ci, les vingt-huit tangentes doubles étant les projections des vingt-sept droites de la surface, d'une part, et du plan tangent à cette surface au point de projection, d'autre part.

Le lien avec les seize droites est abordé dans un autre article de Geiser, où celui-ci revient sur la chronologie des événements :

La relation vue dans le mémoire « Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades » entre les droites des surfaces du troisième degré et les tangentes doubles des courbes planes du quatrième degré a incité Monsieur Camille Jordan à effectuer des recherches algébriques (ces recherches ont depuis été publiées [...]), lesquelles, comme ce dernier l'a brièvement partagé avec l'auteur, font voir un rapport entre les droites d'une surface générale du troisième degré et les droites d'une surface du quatrième degré avec courbe plane double du second degré. Les considérations géométriques suivantes confirment en effet la conjecture annoncée par Monsieur Jordan<sup>2</sup>. [GEISER 1869, p. 249]

---

2. « Die in dem Aufsätze: „Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades“ (*Mathematische Annalen* Bd. 1, pag. 128 etc.) nachgewiesene Beziehung zwischen den Geraden der Fläche dritten Grades und die Doppeltangenten der Curve vierten Grades haben Herrn Camille Jordan zu algebraischen Untersuchungen veranlasst ([d]ie erwähnten Untersuchungen sind unterdessen [...] bekannt gemacht worden), die, wie er dem Verfasser brieflich mittheilte, einen Zusammenhang erkennen lassen zwischen den Geraden einer allgemeiner Fläche dritten Grades und den Geraden einer Fläche vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades hat. In der That bestätigen die nachfolgenden geometrischen Betrachtungen die von Herrn Jordan ausgesprochene Vermuthung. »

La théorie des substitutions apparaît donc comme permettant de formuler une conjecture, qu'il est nécessaire de confirmer par une démonstration géométrique. La lecture des écrits de Jordan et de Geiser (appuyée par une reconstruction de certains de leurs arguments) sur ces liens entre les différentes configurations m'a alors permis de comprendre précisément comment chacun d'eux aborde la question, et donc de donner corps à l'interface présente entre théorie des substitutions et géométrie. Par exemple, démontrant le lien entre les vingt-sept droites d'une cubique et les seize droites d'une quartique à conique double au moyen de transformations rationnelles de ces surfaces, Geiser ne cherche pas à interpréter dans le langage de la géométrie l'adjonction d'une racine de l'équation aux vingt-sept droites et la factorisation de cette dernière.

J'en suis finalement venu à décrire la situation comme un hiatus entre théorie des substitutions et géométrie : un va-et-vient entre les travaux de Jordan et de Geiser existe bien, alimenté par des relations d'inspiration, de prévision et de confirmation, mais aucun transfert technique effectif n'apparaît dans les démonstrations. De même, aucune recherche d'énoncé commun qui traduirait une volonté d'unification des deux domaines ne peut être détectée dans les textes.

## 2.2 Les équations de la géométrie

Comme expliqué précédemment, les trois propositions de Jordan consistant à énoncer l'existence de réduites de l'équation aux vingt-sept droites à partir de l'existence même de configurations géométriques issues de celle des vingt-sept droites me posaient problème, notamment parce qu'elles ne cadraient pas avec le reste du *Traité*.

Chercher à comprendre plus profondément le statut de ces propositions m'a incité à élargir le corpus d'investigation pour tenter de trouver sinon des commentaires à leur égard, du moins des démonstrations plus complètes. Pour cela, je me suis basé sur deux références datant de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle : la section « *Geometrische Gleichungen* » du chapitre sur la théorie de Galois et ses applications, écrit par Otto Hölder pour l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, d'une part ; et le paragraphe de la section sur la théorie de Galois du *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* renvoyant aux « Applications de la théorie à des équations particulières : équations des points d'inflexion d'une cubique, des 27 droites d'une surface du troisième ordre ; équations modulaires, etc. », d'autre part. Après un premier filtrage, les publications listées dans ces deux références ont formé la base de mon corpus d'étude, complété en tenant compte des publications qui y sont citées.

Ce corpus est de petite taille, formé de 19 textes écrits par 10 mathématiciens : Otto Hesse, Ernst Eduard Kummer, Alfred Clebsch, Camille Jordan, Felix Klein, Sophus Lie, Max Noether, Eugen Netto, Heinrich Maschke et Heinrich Weber. En outre, s'il s'étend temporellement de 1847 à 1896, la majorité de ses textes ont été publiés entre 1868 et 1872, ce qui correspond aux contributions de Clebsch, Jordan, Klein et Lie, bien que celle de ce dernier soit plus anecdotique.

L'analyse des activités dont le corpus porte les traces s'est divisée en deux parties non indépendantes. La première s'est attachée à décrire la technique mathématique en jeu et à discuter du rôle des équations de la géométrie dans l'élaboration du *Programme d'Erlangen* de Klein, au moins pour les textes d'avant 1872 [LÊ 2015b]. Se basant sur cette étude, la deuxième a consisté à décrire l'organisation des activités collectives sur les équations de la géométrie à l'aide de la notion de culture [LÊ 2016]<sup>3</sup>.

### 2.2.1 Rencontres entre groupes, équations et géométrie

Plusieurs caractéristiques des équations de la géométrie permettent de bien saisir comment groupes, équations et géométrie s'articulent autour de ces objets.

Il est d'abord intéressant de regarder les statuts des équations de la géométrie au sein des différents constituants du corpus. Certaines de ces équations sont l'objet d'étude d'un texte qui leur est entièrement dévolu ou dont elles sont la motivation première [HESSE 1847]. D'autres sont étudiées dans des textes qui ne leur sont pas consacrés et qui portent souvent principalement sur des questions de géométrie, les résultats concernant les équations de la géométrie pouvant servir à d'autres propos dans ces mêmes textes, ou non [KUMMER 1863 ; CLEBSCH 1868]. Des équations de la géométrie apparaissent aussi en tant que résolvantes des équations issues de ces premières catégories [KLEIN 1871]. Enfin, une dernière classe renvoie à des équations qui sont seulement évoquées dans des commentaires généraux et ne font donc pas l'objet d'un travail technique à proprement parler [LIE 1872].

Une particularité des équations de la géométrie est que presque aucune d'elles n'est définie de manière explicite dans le corpus<sup>4</sup>, des noms comme « l'équation aux vingt-sept droites » ou « l'équation qui donne les vingt-huit tangentes doubles » semblant suffire aux auteurs considérés pour comprendre exactement de quoi il s'agit. En fait, ces désignations encodent à leur manière à la fois la donnée du degré des équations en question et les relations algébriques qui existent entre leurs racines par le biais des configurations géométriques associées. Autrement dit, la connaissance de ces dernières suffit à appréhender les équations de la géométrie du point de vue de leur existence même. Certaines formulations, comme « la réduite du quarantième degré qui a pour racines nos ennéaèdres », montrent même très clairement que la question de la nature des racines (et celle de la paramétrisation des objets géométriques associés) n'est pas vue comme pertinente.

Les quelques cas d'identification d'équations vont dans le même sens. Par exemple, que

---

3. Les paragraphes qui suivent reprennent plutôt la présentation qui a été faite dans [LÊ 2015c].

4. Quelques commentaires montrent d'une part que les mathématiciens en question assument de ne pas former ces équations explicitement, et que les cas où cela est fait dépendent généralement d'un autre domaine, la théorie des invariants. Je suis revenu un peu plus en détail sur cette question plus récemment, comme je le montrerai au chapitre 4. Ce chapitre contient aussi la description de mes travaux qui se sont focalisés sur l'article de Clebsch sur l'équation du cinquième degré, qui appartient au corpus des équations de la géométrie et fait intervenir de façon cruciale la théorie des invariants.

Jordan [1869c, 1870] identifie l'équation aux seize points singuliers de la surface de Kummer et l'équation aux seize plans singuliers de cette même surface est faite (de manière implicite) sur la base de l'identité du nombre des objets en jeu et de celle des relations d'incidence qui existent entre eux : tout comme les seize point singuliers sont coplanaires six à six et forment ainsi seize plans singuliers, ces derniers s'intersectent six à six en chacun des seize points singuliers.

C'est enfin le même type de connaissance qui sert à étudier les propriétés de résolubilité des équations de la géométrie, soit en constituant la base du travail algébrique, soit en s'y substituant entièrement. Ce dernier cas englobe les réduites géométriques que l'on trouve dans le *Traité* de Jordan et que j'ai évoquées plus haut ; mais de nombreuses occurrences similaires surviennent dans le corpus des équations de la géométrie, conférant à ce procédé de résolution un statut de normalité. De manière générale, si les façons de résoudre les équations de la géométrie se déclinent un peu différemment selon les textes et les auteurs, il est remarquable qu'elles soient récurrentes et partagées collectivement.

Le cas de l'utilisation de tableaux est instructif à cet égard. Par exemple, dans ses travaux sur l'équation aux neuf points d'inflexion, Hesse commence par étudier une équation de degré 9 (au départ non géométrique) dont les racines sont liées trois par trois par des relations qui correspondent à l'alignement trois à trois des neuf points, et l'ensemble des triplets obtenus est représenté sous forme tabulaire :

$$\begin{array}{ccc}
 x_1x_2x_3 & x_4x_5x_6 & x_7x_8x_9 \\
 x_2x_4x_7 & x_3x_5x_8 & x_1x_6x_9 \\
 x_5x_7x_1 & x_6x_8x_2 & x_4x_9x_3 \\
 x_8x_1x_4 & x_9x_2x_5 & x_7x_3x_6.
 \end{array}$$

Cette représentation est suivie de la définition de fonctions  $y_{ijk} = (\alpha - x_i)(\alpha - x_j)(\alpha - x_k)$ , où  $\alpha$  est une nouvelle inconnue et  $x_i, x_j, x_k$  correspondent à un triplet du tableau. Sont ensuite introduites les fonctions  $z_l = (\beta - y_{ijk})(\beta - y_{i'j'k'}) (\beta - y_{i''j''k''})$ , où  $\beta$  est encore une nouvelle inconnue et où le produit est fait sur les  $y$  situés sur la  $l$ -ième ligne du tableau. Ces quatre fonctions  $z_l$  servent alors à Hesse à définir une équation du degré 4 dont il montre qu'elle est une résolvante de l'équation de départ. C'est seulement dans un deuxième temps que Hesse montre que l'équation aux neuf points est du type de celle qu'il a étudiée précédemment.

Un autre exemple d'usage de tableau, où la géométrie intervient de manière plus directe, est donné par Clebsch dans le cas de l'équation aux seize droites des surfaces quartiques à conique double [CLEBSCH 1868]. Ces droites étant notées 1, 2, ..., 16, Clebsch écrit plusieurs tableaux successifs encodant des règles d'incidence de ces droites. Le dernier est le suivant, où les entrées

sont des couples de droites vérifiant certaines propriétés d'intersection :

2, 6;	3, 7;	4, 8;	5, 9.	1, 16;	10, 15;	11, 14;	12, 13.
1, 6;	3, 10;	4, 11;	5, 12.	2, 16;	7, 15;	8, 14;	9, 13.
1, 7;	2, 10;	4, 13;	5, 14.	3, 16;	6, 15;	8, 12;	9, 11.
1, 8;	2, 11;	3, 13;	5, 15.	4, 16;	6, 14;	7, 12;	9, 10.
1, 9;	2, 12;	3, 14;	4, 15.	5, 16;	6, 13;	7, 11;	8, 10.

Directement après cela, Clebsch énonce des propriétés de résolution de l'équation aux seize droites : « Ce tableau est important surtout parce qu'il enseigne que *l'équation du seizième degré dont dépendent les seize droites de la surface se résout à l'aide d'une équation du cinquième degré*<sup>5</sup>. » Le résultat d'existence de la réduite est ici déduit immédiatement du tableau, qui n'est donc pas conçu comme un outil permettant former un quelconque objet algébrique.

Une autre variation de l'utilisation des tableaux se trouve chez Jordan. Par exemple, notant  $a, b, \dots, r$  les seize plans singuliers de la surface de Kummer, il les représente en tableau carré :

$a$	$b$	$c$	$d$
$e$	$f$	$g$	$h$
$i$	$k$	$l$	$m$
$n$	$p$	$q$	$r$

puis explique la règle de lecture donnant la liste des seize sextuplets de plans concourants afin d'introduire la fonction  $\varphi = bcdein + \dots + npqdhm$  correspondante. Le tableau n'est donc pas utilisé directement par Jordan, qui le met plutôt à profit pour représenter de manière efficace des relations d'incidence qu'il s'agit de transférer dans la fonction  $\varphi$ . C'est ensuite cette dernière qui est à la base des démonstrations qui suivent.

Quelle que soit la forme qu'ils prennent, ces arguments pour la résolution des équations de la géométrie montrent comment la connaissance de configurations géométriques associées à des courbes et surfaces algébriques de petit degré a permis à plusieurs mathématiciens autour Clebsch d'avancer dans la compréhension de la théorie des équations et des substitutions<sup>6</sup>. Cela était d'ailleurs explicitement reconnu par ces mathématiciens :

Le grand avantage de ces exemples est qu'ils présentent de façon intuitive les idées abstraites en elles-mêmes si particulières de la théorie des substitutions. Il se rapportent la plupart

---

5. « Diese Tafel ist vorzugsweise von Wichtigkeit, weil sie lehrt, dass die Gleichung sechzehnten Grades, von welcher die sechzehn Geraden der Oberfläche abhängen, mit Hilfe einer Gleichung fünften Grades gelöst wird. » [Clebsch 1868, p. 145]. Dans [Lê 2015b], j'ai brièvement comparé ce type de présentation avec celle de Galois lui-même pour la résolution de l'équation du quatrième degré.

6. À part Jordan (et les plus tardifs Netto et Weber), les mathématiciens du corpus sont surtout reconnus comme des géomètres plutôt que des algébristes, qui sont donc familiers avec les résultats géométriques qu'ils utilisent. La présence chez Jordan de réduites géométriques s'interprète donc moins comme une trace de sa volonté de comprendre la théorie des substitutions que comme celle de son implication collective sur ces sujets.

du temps à des équations de caractère très particulier, entre les racines desquelles ont lieu des groupements particuliers, laissant ainsi voir comment de telles équations peuvent se comporter<sup>7</sup>. [KLEIN 1871, p. 346]

C'est dans cette perspective que j'ai présenté mes travaux sur ce sujet comme complément à notre compréhension de la diffusion des idées et méthodes de Galois au XIX<sup>e</sup> siècle.

Les dates et les auteurs dont il est question, ainsi que la thématique même des rapprochements entre théorie des groupes et géométrie m'ont aussi amené à discuter du lien des équations de la géométrie avec le *Programme d'Erlangen* de Klein, permettant là aussi d'en préciser et compléter les descriptions historiques [WUSSING 1969; HAWKINS 1984; ROWE 1989b, 1992; GRAY 2005]. Il s'agissait déjà simplement de montrer l'existence d'interactions entre théorie des groupes et géométrie avant 1872, interactions impliquant certes des groupes de substitutions et pas des groupes de transformations comme dans le *Programme*. Mais la théorie des équations et des substitutions est explicitement mentionnée par Klein comme faisant partie des idées l'ayant mené à l'élaboration du *Programme*, et certains éléments techniques de ce dernier, comme la notion d'adjonction, y font effectivement référence. C'est dans cette perspective que j'ai proposé de voir les équations de la géométrie comme des prémices du *Programme d'Erlangen*.

## 2.2.2 Un système culturel

La question s'est ensuite posée de trouver une catégorie historiographique adéquate pour décrire les activités collectives menées sur les équations de la géométrie, celles-ci semblant être davantage que de simples pratiques tout en n'étant jamais systématisées à grande échelle [LÊ 2016].

Parmi les catégories discutées par les historiennes et historiens des mathématiques, celle d'école de recherche mathématique, par exemple, ne s'applique pas dans ce cas [ROWE 2003; PARSHALL 2004]. La nature des relations professionnelles entre Clebsch et Jordan, ou Clebsch et Kummer, montre en effet directement que la situation des équations de la géométrie n'est pas celle d'un système pyramidal organisé selon des liens entre un leader bien identifié et ses étudiants. L'échelle finalement assez réduite des activités sur les équations de la géométrie, ainsi que leur absence de systématisation vont dans le même sens d'inadéquation de la notion d'école de recherche<sup>8</sup>.

Cette absence de systématisation disqualifie aussi le descriptif de discipline de recherche au

---

7. « Der hohe Nutzen dieser Beispiele liegt darin, daß sie die an und für sich so eigenartig abstrakten Vorstellungen der Substitutionstheorie in anschaulicher Weise dem Auge vorführen. Sie beziehen sich zumeist auf Gleichungen von sehr partikulärem Character, zwischen deren Wurzeln besondere Gruppierungen statthaben, und lassen also übersehen, wieso derartige besondere Gleichungen auftreten können. »

8. Je remarque en passant que l'expression « école de Clebsch » est employée de temps à autre dans l'historiographie [ROWE 1989a; TOBIES 2019]. L'état actuel de nos connaissances sur les étudiants de Clebsch me semble cependant trop peu avancé pour saisir avec finesse l'influence effective que ce dernier a pu avoir sur leurs travaux et donc évaluer précisément s'il y a école ou non.

sens de Martin Guntau et Hubert Laitko, repris par Ralf Haubrich puis [GOLDSTEIN et SCHAPPACHER 2007], même si l'on a affaire à un ensemble d'activités centrées sur des objets, avec des concepts, des systèmes de preuves et des valeurs préconisées. D'autres acceptions de la notion de discipline sont également inadaptées aux équations de la géométrie : celle de discipline académique [GAUTHIER 2007 ; GOLDSTEIN et SCHAPPACHER 2007], puisque aucun manuel n'a été entièrement consacré au sujet, de même qu'aucun des cours de Clebsch et de Klein dont j'ai pu consulter les manuscrits aux archives de l'Université de Göttingen<sup>9</sup> ; ou encore celle proposée par Nicholas Mullins [1972], dans la mesure où les mathématiciens impliqués n'ont jamais créé de frontière entre eux et les autres sur la base du sujet même des équations de la géométrie.

En revanche, les propositions autour de la notion de culture me semblaient plus prometteuses, notamment parce qu'elles se référaient à des collectifs (y compris de textes) et impliquaient l'idée que pratiques et valeurs forment des complexes de significations, c'est-à-dire qu'elles prennent tout leur sens pour l'observateur seulement lorsqu'elles sont mises en conjonction les unes avec les autres [CHEMLA 2009 ; BRECHENMACHER 2015]. C'est donc la piste que j'ai suivie, en commençant par faire un bilan des définitions de cette notion en sociologie et en anthropologie. J'ai alors choisi de confronter le cas des équations de la géométrie à une définition sociologique, ne provenant pas de recherches en histoire des sciences et ne revendiquant aucune grande originalité, mais qui me semblait décrite de telle manière à me permettre une confrontation très opératoire avec le cas des équations de la géométrie : « La culture est un ensemble lié de manières de penser et d'agir, plus ou moins formalisées qui, étant apprises et partagées par une pluralité de personnes, servent, d'une manière à la fois objective et symbolique, à constituer ces personnes en une collectivité particulière et distincte » [ROCHER 1968].

Il s'est d'abord agi de revenir sur les liens sociaux entre les auteurs engagés autour des équations de la géométrie : un groupe de mathématiciens qui se connaissent bien pour la plupart, liés par des relations professionnelles assez resserrées, parfois amicales et parfois de générations mathématiques. À l'égard du sujet des équations de la géométrie, il était important de noter deux points. D'une part, le sujet lui-même ne semble pas être le vecteur de sociabilisation, la plupart des mathématiciens en question se connaissant avant d'aborder les équations de la géométrie. D'autre part, comme je l'ai rappelé plus haut, ces mêmes auteurs n'ont jamais créé d'identité objective de leur groupe à partir de ce sujet, par exemple en se donnant un nom spécifique. Cette caractéristique étant justement l'un des critères de Rocher pour décrire une culture, il s'en est suivi que cette catégorie d'analyse n'est pas adéquate pour caractériser la situation en jeu.

Le reste des critères a néanmoins pu être vérifié plus positivement en disséquant les pratiques et valeurs mathématiques liées aux équations de la géométrie, que j'ai interprétées comme autant de traits culturels. Ces pratiques sont celles qui ont été vues plus haut : désignations des

---

9. À l'image de ce que j'ai observé dans les textes publiés, des équations de la géométrie sont toutefois disséminées dans ces cours. Pour le cas de Klein, voir [HELLER 2023].

équations, nature de leurs racines, (non-)formations des équations, processus d'identifications d'équations entre elles, types de résolution des équations. Pour les mathématiciens des équations de la géométrie, ces manières de faire sont soutenues par la valorisation de ces équations en tant que support de l'intuition géométrique, nécessaire en raison de la nature difficile et abstraite de la théorie des substitutions. Par exemple, remerciant Jordan de lui avoir envoyé une partie du *Traité*, Clebsch avoue ne comprendre les mathématiques en jeu que lorsque la géométrie peut être mise à profit :

Ce n'est que maintenant que je peux vous adresser mes remerciements pour l'aimable envoi de la seconde partie de votre livre. J'aurais seulement aimé que vous m'envoyiez en même temps la compréhension nécessaire, car je dois malheureusement avouer que ces profondes et importantes recherches vont pour le moment bien au-delà de mes compétences. Je m'tiens à la première moitié, où la géométrie vient à mon aide et guide les idées dans les choses abstraites. J'espère que la compréhension du reste ne me restera pas à jamais en défaut<sup>10</sup>.

Plus encore, la mise en évidence d'objets dérivés est non seulement un type de résolution d'équations de la géométrie, comme vu plus haut, mais aussi la bonne manière d'accéder à la nature même des équations :

Par les recherches sur les points d'inflexion des courbes du troisième ordre, pour lesquels seules les douze droites qui les contiennent trois à trois n'étaient alors connues, l'existence des quatre triangles en lesquels les droites se groupent a donné un aperçu sur la nature particulière de l'équation du neuvième degré qui détermine les neuf points. [...] Une image géométrique pour tous les rapports concernant des groupements de racines a été acquise. De tels exemples particuliers et intuitifs ont vraiment participé à une conception plus aisée ainsi qu'au développement de la théorie des substitutions, en elle-même si abstruse, et dont les bases élaborées par Galois après les recherches d'Abel ont été publiées peu après ces travaux de Hesse<sup>11</sup>. [NOETHER 1875, p. 86]

Ce système de valorisation peut enfin se voir dans un échange scientifique entre Jordan et Luigi Cremona (qui ne fait pas partie du corpus des équations de la géométrie). Jordan démontre en effet dans le *Traité* un isomorphisme entre le groupe de l'équation aux vingt-sept droites et

---

10. « Erst jetzt also kann ich Ihnen meinen Dank aussprechen für die freundliche Uebersendung der zweiten Abtheilung Ihres Buches. Ich wollte nur, Sie hätten mir auch zugleich das nöthige Verständnis mitschicken können, denn leider, ich muss es gestehen, gehen diese tiefen und wichtigen Untersuchungen bis jetzt weit über meine Fassungs-gabe hinaus. Ich halte mich an die erste Hälfte, wo die Geometrie mir zu Hülfe kommt, und die Gedanken auch bei den abstracten Dingen leitet. Hoffentlich wird auch das Verständnis des Übrigen mir nicht immer versagt bleiben. » Extrait d'une lettre de Clebsch à Jordan datée du 5 mars 1871, conservée aux Archives de l'École polytechnique (réf. VI2A2(1855) 15).

11. « Bei der Untersuchung der Wendepunkte der Curve dritter Ordnung aber, für welche vorher nur die zwölf Geraden, welche dieselben zu je drei enthalten bekannt waren, ergab sich durch den Nachweis der vier Dreiseite, in die sich die Geraden gruppieren, ein Einblick in die besondere Natur der Gleichung neunten Grades, welche die neun Punkte bestimmt. [...] [Es] war auch ein geometrisches Bild für alle auf die Gruppierungen der Wurzeln bezüglichen Verhältnisse gewonnen. Solche anschauliche speciellere Beispiele haben wesentlich auf die leichtere Auffassung und auch auf die Ausbildung der an sich so abstrusen Substitutionstheorie gewirkt, deren von Galois schon bald nach den Abel'schen Untersuchungen geschaffene Grundlagen auch erst nach dieser Arbeit Hesse's veröffentlicht worden sind. »

celui de l'équation (de degré 40) de trisection des périodes des fonctions hyperelliptiques à deux variables, réduit par adjonction d'une racine carrée. Intrigué par le lien ainsi mis en lumière entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques, Cremona écrit à Jordan : « Surtout du point de vue géométrique, il y a là une véritable énigme à expliquer<sup>12</sup>. » La suite de l'échange épistolaire montre que la réponse cherchée consiste en l'explicitation d'une configuration de 40 ennéaèdres formés à partir des vingt-sept droites. Autrement dit, ce que Jordan appelle la « démonstration définitive » du lien en question s'incarne en la recherche d'une réduite de l'équation aux vingt-sept droites associée à des objets dérivés à partir de ces dernières.

C'est donc notamment grâce aux valeurs épistémiques que des pratiques, qui paraissaient difficilement compréhensibles pour l'observateur extérieur, prennent tout leur sens. Pour souligner l'intrication de tous ces aspects tout en rappelant qu'il n'y a pas de constitution d'un groupe social objectivé autour des équations de la géométrie, j'ai finalement proposé de caractériser les activités en question comme des traces d'un système culturel.

J'ai enfin essayé de suggérer que ce système culturel pouvait être interprété comme le résultat transitoire d'un processus d'acculturation entre théorie des équations et des substitutions d'une part, et géométrie des configurations d'autre part [Lê 2015c, p. 212-222]. La grande difficulté à laquelle je me suis heurté dans cette entreprise était de montrer qu'il y a bien deux cultures mises en contact. Or, me situant justement dans une perspective de rendre opératoire la notion de culture et de chercher à démontrer solidement son adéquation ou inadéquation dans diverses situations historiques, je n'ai pu donner que quelques indices allant dans le sens de l'existence, d'une part, d'une culture de la théorie des équations en lien avec les travaux de Galois, et, d'autre part, d'une culture des configurations géométriques associées à des courbes et surfaces de petit degré, peut-être en lien avec la « tactique » de Cayley et ses collègues britanniques [TAHTA 2006 ; EHRHARDT 2015].

---

12. Extrait d'une lettre de Cremona à Jordan datée du 19 décembre 1869, conservée aux Archives de l'École polytechnique (réf. VI2A2(1855) 9).

## Chapitre 3

# Fonctions abéliennes et géométrie

L'étude des interfaces entre fonctions abéliennes et géométrie, en particulier dans les travaux de Clebsch, a occupé une grande partie des recherches que j'ai effectuées après ma thèse et a donné lieu aux publications décrites dans ce chapitre. La familiarité technique et historique que j'ai acquise sur ce sujet m'a aussi permis de contribuer efficacement au projet de traduction en anglais du célèbre rapport d'Alexander Brill et Max Noether sur le développement historique de la théorie des fonctions algébriques [BRILL et NOETHER 1894], projet coordonné par Karine Chemla, Nicolas Michel et Paul-Emmanuel Timotei. J'ai moi-même été chargé de la traduction du chapitre consacré à Clebsch [LÊ 2023a].

### 3.1 La paramétrisation elliptique des cubiques

Afin de continuer à étudier les activités mathématiques de Clebsch, j'ai choisi, après ma thèse, de m'intéresser à un résultat aujourd'hui bien connu en géométrie algébrique et en théorie des nombres, et dont la paternité est unanimement attribuée à Clebsch : la paramétrisation des courbes cubiques complexes non singulières par les fonctions elliptiques [HOUZEL 1978 ; SCHAPPACHER 1991]. L'énoncé même de ce théorème promettait d'offrir un éclairage supplémentaire sur l'articulation entre théorie des fonctions elliptiques et géométrie au XIX<sup>e</sup> siècle, à laquelle d'autres travaux historiques avaient été dévolus [BARBIN et GUITART 2001 ; SMADJA 2011, 2013]. M'adonnant à une de mes approches préférées, je suis parti du bas, en commençant par scruter la technique mathématique.

La paramétrisation des cubiques est établie par Clebsch dans un article publié en 1864, dans le but premier de démontrer un théorème énoncé par Jacob Steiner une vingtaine d'années auparavant, en 1846 [STEINER 1846 ; CLEBSCH 1864a]. Plus précisément, sur une courbe cubique sans point singulier, on choisit deux points  $P$  et  $Q$ . Partant d'un autre point  $M_1$  de la courbe, on effectue la construction suivante : on considère le point  $M_2$ , troisième point d'intersection de la droite  $PM_1$  avec la courbe, puis le point  $M_3$ , troisième point d'intersection de  $QM_2$  avec la courbe,

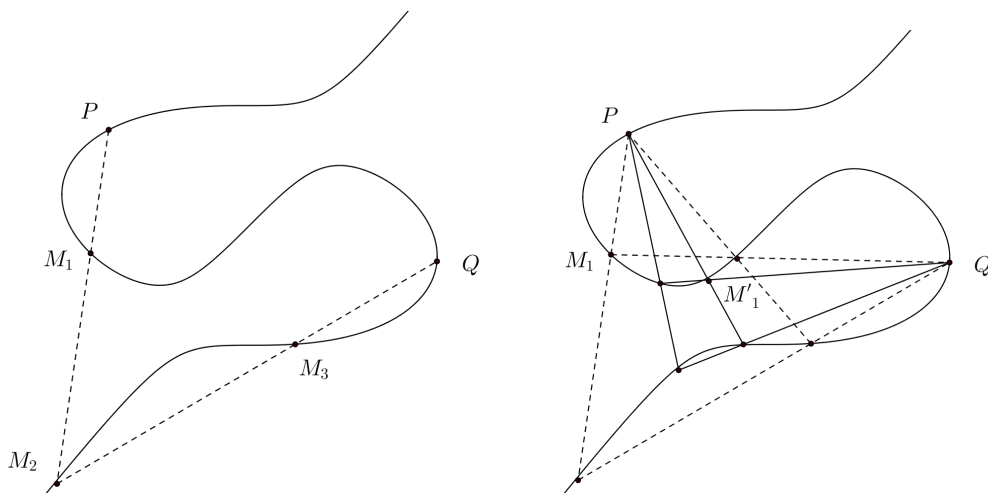


FIGURE 3.1 – Le théorème de Steiner : si la construction se ferme sur elle-même (ici en quatre étapes) pour un point de départ  $M_1$ , il en est de même pour tout point de départ  $M'_1$ .

puis le point  $M_4$ , troisième point d'intersection de  $PM_3$  avec la courbe, etc. Le théorème de Steiner affirme que si cette construction se referme sur elle-même pour un point de départ  $M_1$  et après  $2n$  étapes, elle se referme sur elle-même quel que soit le point de départ choisi, et toujours en  $2n$  étapes<sup>1</sup> (voir la figure 3.1).

Deux références principales sont mobilisées par Clebsch pour attaquer la démonstration de ce théorème. Évoquant de manière allusive la « nature » de ce dernier, Clebsch renvoie implicitement à des travaux de Carl Gustav Jacob Jacobi [1828] où celui-ci utilise la théorie des fonctions elliptiques pour démontrer le théorème de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits à deux cercles. Cette référence se situe plutôt du côté de l'heuristique générale d'employer les fonctions elliptiques pour trouver une preuve du théorème de Steiner. Au contraire, la référence à un article de Siegmund Aronhold, bien plus récent que celui de Jacobi, est d'une autre nature, Clebsch y puisant des résultats techniques très précis [ARONHOLD 1862].

Dans l'article correspondant à mes recherches sur ce sujet [LÊ 2018a], j'ai commencé par examiner ces travaux de Jacobi et d'Aronhold, afin de mettre en évidence la manière dont Clebsch s'en empare et s'en démarque. Cela a notamment mis en évidence que ces trois auteurs déclinent les rapports entre fonctions elliptiques et géométrie selon trois modes différents.

Chez Jacobi, le rapprochement s'opère en effet par le biais d'une formule, démontrée par des

1. D'un point de vue actuel, la loi de groupe  $\oplus$  sur la cubique étant décrite par le processus des sécantes et tangentes en choisissant  $Q$  comme élément neutre, les points  $P$  donnant une construction se fermant en  $2n$  étapes sont les points d'ordre  $n$  de la courbe. On a en effet  $M_3 = P \oplus M_1$  et, de manière générale,  $M_{2k+1} = kP \oplus M_1$  pour tout entier  $k$ . Dire qu'il existe  $n$  tel que  $M_{2n+1} = M_1$  revient donc à dire qu'il existe  $n$  tel que  $nP = Q$ . Cette condition signifie bien que  $P$  est d'ordre (divisant)  $n$ , et on voit qu'elle est indépendante du point de départ  $M_1$ .

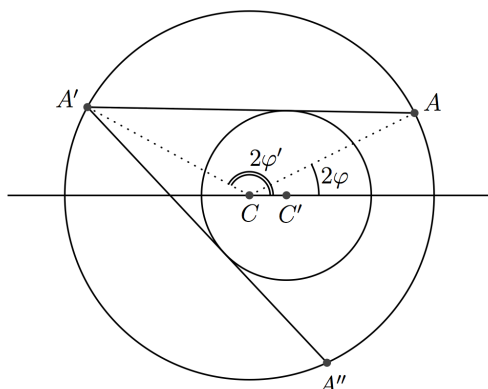


FIGURE 3.2 – Début de construction, par Jacobi, d'un polygone de Poncelet  $AA'A''\dots$  dans le cas de deux cercles de centres et rayons respectifs  $(C, R)$  et  $(C', R')$ , le deuxième étant contenu dans le premier. L'angle  $2\varphi^{(k)}$  est celui entre  $CC'$  et  $CA^{(k)}$ , et la distance entre  $C$  et  $C'$  est notée  $a$ .

considérations trigonométriques élémentaires :

$$\tan\left(\frac{\varphi^{(m+2)} + \varphi^{(m)}}{2}\right) = \frac{R - a}{R + a} \tan \varphi^{(m+1)},$$

les différentes quantités  $R$ ,  $a$  et  $\varphi^{(k)}$  étant des distances et angles associés à la construction des polygones de Poncelet (voir figure 3.2). Jacobi remarque que « sous cette forme, il saute aux yeux que [cette équation coïncide] avec celle qu'on donne pour la multiplication des transcendentes elliptiques<sup>2</sup> », faisant allusion à la formule

$$\tan\left(\frac{\theta'' + \theta}{2}\right) = \Delta \operatorname{am}(v) \cdot \tan \theta',$$

où  $\operatorname{am}$  désigne une fonction amplitude de module quelconque<sup>3</sup>, et où  $\theta = \operatorname{am} u$ ,  $\theta' = \operatorname{am}(u + v)$  et  $\theta'' = \operatorname{am}(u + 2v)$ . La suite de l'argumentation de Jacobi consiste à montrer qu'on peut définir une fonction amplitude  $\operatorname{am}$  ainsi que deux nombres  $u$  et  $c$  tels que  $\varphi^{(m)} = \operatorname{am}(u + mc)$  pour tout entier  $m$ , les propriétés connues de la fonction  $\operatorname{am}$  permettant alors de démontrer le théorème de Poncelet.

Comme indiqué précédemment, dans son article de 1864, Clebsch reprend de Jacobi surtout

2. « In dieser Form der Gleichungen springt es sogleich in die Augen, dass sie mit diejenigen übereinkommen, welche zur Vervielfachung der elliptischen Transcendenten aufgestellt werden. » [Jacobi 1828, p. 381].

3. La fonction amplitude associée au module  $k$  est définie comme la fonction réciproque de l'intégrale elliptique

$$\theta \mapsto \int_0^\theta \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}.$$

Les fonctions elliptiques de Jacobi sont les fonctions  $\sin \operatorname{am}$ ,  $\cos \operatorname{am}$  et  $\Delta \operatorname{am} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}}$ .

l'idée générale d'utiliser la théorie des fonctions elliptiques pour aborder le problème de Steiner, aucun lien technique direct n'étant établi. Comme j'ai pu l'expliquer lors d'un exposé donné en 2023 dans le cadre des rencontres sur la traduction du rapport de Brill et Noether, il est intéressant de noter que Clebsch avait déjà rapproché fonctions elliptiques et géométrie dans un article publié quelques années plus tôt [CLEBSCH 1857]. Si l'article de Jacobi sur les polygones de Poncelet n'y est pas cité, le rapprochement disciplinaire s'avère être tout à fait analogue, effectué en observant et en ajustant des formules et des équations issues de la théorie des fonctions elliptiques, d'une part, et de la situation géométrique traitée, d'autre part : « ces équations rappellent, sans qu'on puisse rien y faire, la forme du théorème d'addition que l'on trouve entre autres chez Jacobi<sup>4</sup> », explique ainsi Clebsch<sup>5</sup>.

Les résultats d'Aronhold utilisés par Clebsch pour la paramétrisation de la cubique sont quant à eux issus d'un article dont la thématique principale relève uniquement des fonctions abéliennes [ARONHOLD 1862]. Il s'agit en effet de répondre à une question de Karl Weierstrass sur la possibilité de réduire à une intégrale elliptique une intégrale abélienne

$$\int F(x, y) dx,$$

où  $F$  est une fraction rationnelle, et  $x$  et  $y$  sont liés par une équation polynomiale  $f_0(x, y) = 0$ . Aronhold montre que cette réduction est possible lorsque  $f_0$  est de degré 3 et sans point singulier. La première étape est de rappeler un résultat de Weierstrass selon lequel il suffit de traiter l'intégrale abélienne

$$\int \frac{dx}{\frac{\partial f_0}{\partial y}(x, y)}.$$

Ensuite, Aronhold introduit un point de vue qu'il qualifie lui-même de géométrique et qui consiste à voir l'équation  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ , obtenue en homogénéisant  $f_0(x, y) = 0$ , comme celle d'une courbe cubique lisse. Ce changement de perspective lui permet alors de mobiliser tant des résultats connus sur les cubiques que des techniques sur les formes et les invariants qu'il a lui-même développées auparavant en lien avec les travaux géométriques de Otto Hesse [PARSHALL 1989]. Il obtient finalement un changement de variable permettant la réduction à une intégrale elliptique désirée :

$$\int \frac{dx}{\frac{\partial f_0}{\partial y}(x, y)} = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{2T + 3S\lambda - \lambda^3}},$$

les quantités  $S$  et  $T$  étant les invariants fondamentaux de la forme cubique  $f$ . En prime, Aronhold

4. « Die ersten drei dieser Gleichungen nun erinnern unwillkürlich an die Form des Additionstheorems der elliptischen Functionen, welche unter Anderm sich bei Jacobi [...] findet ». [Clebsch 1857, p. 301].

5. L'importance de l'observation des formules et le nom de Jacobi nous rappellent à leur tour les pratiques des mathématiciens engagés dans le champ de l'analyse algébrique arithmétique [GOLDSTEIN et SCHAPPACHER 2007].

montre que le changement de variable réciproque (en version homogène) est donné par

$$\begin{cases} Mx_1 = P_1(\lambda) + \alpha_1 \sqrt{\frac{1}{6}(2T + 3S\lambda - \lambda^3)} \\ Mx_2 = P_2(\lambda) + \alpha_2 \sqrt{\frac{1}{6}(2T + 3S\lambda - \lambda^3)} \\ Mx_3 = P_3(\lambda) + \alpha_3 \sqrt{\frac{1}{6}(2T + 3S\lambda - \lambda^3)}, \end{cases}$$

où les  $P_i$  sont des polynômes quadratiques,  $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$  est un point de la cubique et  $M$  est une constante arbitraire.

Si Aronhold utilise donc objets et résultats issus de la géométrie, il précise aussi que sa démonstration aurait pu être présentée sans aucun recours à de tels éléments. La géométrie apparaît ainsi dotée d'un statut transitoire, permettant de simplifier la présentation d'une preuve d'un théorème d'analyse, en offrant une certaine heuristique mais pouvant aussi être complètement contournée.

Clebsch, au contraire, a un objectif géométrique : démontrer le théorème sur les polygones de Steiner. Les formules d'Aronhold sont reprises, présentées explicitement comme une paramétrisation de la cubique  $f = 0$  et transformées par l'introduction de fonctions elliptiques. Les racines de  $\lambda^3 - 3S\lambda - 2T = 0$  étant notées  $g, g', g''$ , Clebsch définit en effet le module (au carré)

$$k^2 = \frac{g'' - g'}{g'' - g},$$

ce qui permet de définir une fonction elliptique  $\sin \operatorname{am}$  puis d'aboutir aux expressions

$$Mx_i = \varphi_i(\sin^2 \operatorname{am} u) + m\alpha_i \frac{d \sin^2 \operatorname{am} u}{du},$$

les  $\varphi_i$  étant des polynômes,  $m$  une constante ne dépendant que de  $g, g'$  et  $g''$ , et  $u$  le paramètre du point de coordonnées  $(x_1 : x_2 : x_3)$ . Ce sont là les formules de paramétrisation elliptique de la courbe cubique.

Mais le résultat central de l'article de Clebsch, que ce dernier présente comme une version du théorème d'addition d'Abel et démontre à l'aide d'objets et de techniques issus de la théorie des invariants, est que trois points d'une cubique de paramètres respectifs  $u_1, u_2, u_3$  sont alignés si et seulement si  $u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0$  modulo les périodes de  $\sin \operatorname{am}$ . Cette condition nécessaire et suffisante est utilisée en premier lieu pour démontrer le théorème des polygones de Steiner. Elle est aussi employée pour mettre en lumière toute une gamme de résultats relatifs aux couples de points  $(P, Q)$  correspondant à un polygone fermé, en particulier avec l'étude de groupements variés de ces couples, obtenus soit par des calculs directs sur les arguments elliptiques, soit en calquant des formules et résultats liés à la transformation et la division des fonctions elliptiques (dont le cas  $n = 3$ , qui mène à l'étude des points d'inflexion de la cubique) : la théorie des fonctions

elliptiques nourrit ainsi directement la géométrie des courbes algébriques.

## 3.2 Les théorèmes de clôture

Comme au cours de ma thèse, c'est en cherchant à mieux comprendre un point allusif et intrigant que j'ai été amené à considérer un corpus plus large. Ce point est l'évocation par Clebsch que le théorème de Steiner, par sa « nature », fait partie d'une classe de théorèmes à laquelle appartient aussi le théorème de Poncelet et avec laquelle la théorie des fonctions elliptiques aurait un rapport privilégié. La situation était toutefois un peu différente de celle des équations de la géométrie car mes lectures mathématiques et historiques m'informaient d'emblée que cette classe de théorèmes est ce qui a été appelé à partir d'un moment « les théorèmes de clôture » et qui comprend, outre les théorèmes cités à l'instant, celui relatif aux chaînes de cercles de Steiner tangents à deux cercles donnés, par exemple [BOS et al. 1987 ; DEL CENTINA 2016]. Ce qui m'a intéressé était de comprendre le processus de reconnaissance et de constitution de cette catégorie de théorèmes au cours du XIX<sup>e</sup> siècle [LÊ 2018b].

Pour constituer un corpus d'investigation, j'ai là encore utilisé l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* car plusieurs paragraphes, dispersés dans les chapitres sur les cercles, les coniques, les cubiques et les quartiques, ont des intitulés impliquant les expressions « théorèmes de clôture » ou « problèmes de clôture » – la différence entre théorèmes et problèmes ne jouant *in fine* aucun rôle effectif dans les mathématiques que j'ai observées sur ce sujet. Le corpus obtenu en relevant les références données dans ces paragraphes est formé de 130 textes pour 87 auteurs, publiés entre 1749 et 1907.

Quatre intervalles temporels se dégagent de l'analyse de ce corpus, correspondant à autant de phases dans la catégorisation des théorèmes de clôture.

La première période, allant de 1749 à 1864, englobe toute une série de travaux sur différents théorèmes qui, bien que donnant parfois lieu isolément à d'autres théorèmes par analogie ou extension, ne sont pas considérés explicitement comme des éléments d'un tout. Par exemple, Steiner énonce et démontre en 1826 le théorème relatif aux chaînes de cercles tangents à deux cercles donnés et indique que des théorèmes « analogues » ont lieu pour des chaînes de sphères ou des chaînes de cercles sphériques, l'analogie étant renforcée (pour l'observateur) par la ressemblance des formules exprimant les conditions de clôture dans chacun des cas. De même, dans l'article de 1846 où il énonce le théorème sur les polygones attachés aux courbes cubiques, Steiner donne un théorème jumeau pour les courbes quartiques binodales : l'analogie entre les deux est soulignée par la disposition textuelle des deux théorèmes, placés directement l'un à la suite de l'autre, mais aussi par la ressemblance des énoncés eux-mêmes et l'emploi du vocabulaire de la similitude (« de même », « la même loi », « etc. »...). Notons aussi que c'est au cours de cette période que Cayley publie la plupart de ses articles sur le théorème des polygones de Poncelet, utilisant le mot

*porism* pour s’y référer, comme le feront de nombreux autres auteurs britanniques dans les années suivantes : s’il s’agit là d’une étiquette globalisante, elle n’est pas créée spécifiquement pour l’occasion et renvoie à un type de propositions liées à une tradition de commentaires d’Euclide [MICHEL et SMADJA 2022].

La deuxième période s’ouvre avec l’article de 1864 où Clebsch démontre le théorème des polygones de Steiner à l’aide des fonctions elliptiques et évoque l’existence d’une certaine classe de théorèmes dont font partie ce dernier et, implicitement, celui sur les polygones de Poncelet. D’autres travaux de cette période mentionnent de manière tout aussi allusive un certain type de problèmes et de théorèmes tandis qu’ils étudient en fait seulement l’un d’eux. Enfin, en 1870, l’expression *Schliessungsprobleme* apparaît dans un article d’Eduard Weyr : si elle n’est pas définie en tant que telle, elle inclut explicitement les théorèmes de Steiner sur les courbes cubiques et sur les quartiques binodales – l’enjeu pour Weyr est de démontrer ces deux théorèmes sans recourir aux fonctions elliptiques. Les expressions « théorèmes de clôture » et « problèmes de clôture » apparaissent régulièrement dans divers travaux après 1870 mais, à l’image de leur première occurrence, aucune définition n’en est jamais proposée.

La troisième période est courte, s’étalant de 1876 à 1879, mais remarquable dans la mesure où elle contient trois contributions de trois mathématiciens ayant proposé des cadres unificateurs pour les théorèmes de clôture, associés à trois domaines mathématiques différents. Ainsi, après avoir rappelé plusieurs des théorèmes de clôture, Friedrich August [1876] indique que « la grande cohérence de ces théorèmes laisse supposer qu’ils peuvent être expliqués d’un point de vue commun<sup>6</sup> ». Reconnaisant que la théorie des fonctions elliptiques fournit un tel point de vue, August a cependant pour objectif de trouver une alternative « géométrique », ce qui s’incarne dans les faits par ce qu’il appelle des polygones de Steiner généralisés. Les fonctions elliptiques, en revanche, sont au cœur de l’approche de Max Simon [1876], qui explique d’emblée que « tout comme la *multiplication* entière des fonctions cycliques est liée au problème de la cyclotomie, celle des *fonctions elliptiques* est liée à celui de la clôture<sup>7</sup>. » La réalisation technique du lien est toutefois plus vague : Simon considère une suite d’objets géométriques paramétrés par des quantités  $t_1, t_2, \dots$  pour lesquels il existe un polynôme quadratique symétrique  $f(X, Y)$  tel que  $f(t_k, t_{k+1}) = 0$  pour tout  $k$ . Il affirme alors qu’il existe une fonction elliptique  $\chi$  et deux nombres complexes  $\alpha, u$  tels que  $t_k = \chi(u + k\alpha)$  pour tout  $k$ . La condition de clôture de la suite en  $n$  étapes s’exprime alors par  $\chi(u + n\alpha) = \chi(u)$ , ce qui établit le lien avec le problème de la multiplication des fonctions elliptiques. Le troisième point de vue unificateur est quant à lui associé à l’algèbre par Adolf Hurwitz [1879]. Plus précisément, celui-ci renvoie à ce qu’il appelle le « théorème fondamental de l’algèbre », à savoir que toute équation ayant un nombre de racines supérieur

6. « Die grosse Uebereinstimmung in diesen Sätzen lasst vermuten, dass sich dieselben von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus werden begründen lassen » [August 1876, p. 2].

7. « Wie die ganzzahlige *Multiplikation der cyklischen Functionen* mit dem Problem der Kreistheilung zusammenhängt, so die der *elliptischen* mit dem der *Schliessung* » [Simon 1876, p. 301].

à son degré possède une infinité de racines : de manière analogue, les théorèmes de clôture énoncent qu'une certaine situation survient une infinité de fois dès lors qu'elle survient une ou un nombre fini de fois. Cette analogie est ensuite réalisée concrètement par Hurwitz par le biais de correspondances  $(m, n)$  dont le principe relatif à leurs coïncidences est effectivement lié de près au « théorème fondamental de l'algèbre » et permet de redémontrer plusieurs théorèmes de clôture connus.

La quatrième et dernière période considérée (1880-1907) est marquée par l'emploi fréquent de l'étiquette « théorème de clôture » et d'expressions dérivées, comme « conditions de clôture », « nombres de clôture », etc., ce qui indique une certaine banalisation du vocabulaire. Une partie des travaux publiés reviennent sur des théorèmes connus, repris sous des points de vue originaux ou avec des méthodes nouvelles, comme celles issues de la géométrie descriptive. D'autres travaux cherchent à trouver de nouveaux théorèmes de clôture (sur des polygones à la fois inscrits et circonscrits à une même cubique, par exemple) ou à mettre en évidence des liens techniques entre plusieurs situations connues.

Pour aller au-delà de la description linéaire et chronologique des textes du corpus, j'ai ensuite voulu trouver un cadre analytique permettant de rendre compte du processus de constitution des théorèmes de clôture en tant que famille. Trouver des solutions opératoires dans des recherches de sciences cognitives sur la notion de catégorisation s'est avérée trop difficile [COHEN et LEFEBVRE 2017], tant et si bien que je me suis rabattu sur une discussion plus raisonnable basée sur les deux conceptions usuelles de catégorisation [JACOB 2004]. La première, dont j'ai surtout montré les limites dans le cas des théorèmes de clôture, est celle des classifications au sens aristotélicien, où les catégories de toute sorte sont définies clairement par des conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance. Ce cadre est en effet inadéquat pour les théorèmes de clôture puisqu'aucun des mathématiciens rencontrés dans le corpus ne propose de définition ou de descriptif (même non mathématisés) de ce à quoi réfère l'étiquette « théorèmes de clôture ». En revanche, la notion de catégorisation basée sur les airs de famille de Ludwig Wittgenstein est plus adaptée, puisque le regroupement des théorèmes de clôture au sein d'une même catégorie est soutenu implicitement par des similarités de leurs énoncés, de la mise en place des analogies et autres procédés d'extension : imitant Wittgenstein pour la catégorie des jeux, on pourrait imaginer un mathématicien de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle commencer par expliquer ce que sont le théorème de Poncelet et ceux de Steiner, puis déclarer : « Nous nommons “théorèmes de clôture” ces choses-là et d'autres qui leur ressemblent. » [WITTGENSTEIN 1953/2004, § 69].

### 3.3 Études de genres

L'article de Clebsch sur la paramétrisation des cubiques pouvait ainsi s'inscrire dans la trame des théorèmes de clôture par sa thématique même et par l'allusion à une certaine classe de

théorèmes. Un autre aspect semblait le connecter à un narratif différent : l'annonce par Clebsch que sa version du théorème d'addition d'Abel pour les courbes cubiques est un résultat dont la généralisation se trouve dans un mémoire de lui-même inséré quelques pages plus loin dans le même volume du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Il s'agit du célèbre mémoire sur l'application des fonctions abéliennes à la géométrie [CLEBSCH 1864b], où Clebsch reprend les travaux de Bernhard Riemann sur les fonctions abéliennes et met en évidence des éléments techniques qui lui serviront peu après pour définir la notion de genre des courbes algébriques.

Les recherches que j'ai effectuées en suivant ce fil ont donné lieu à plusieurs publications, parmi lesquelles l'article [LÊ 2020] m'a valu en 2021 le Prix Montucla de la Commission internationale d'histoire des mathématiques.

### 3.3.1 Clebsch vs. Riemann

De nos jours, la notion de genre renvoie (entre autres) à un nombre  $p$  associé à trois types d'objets : les courbes algébriques (projectives et complexes), les surfaces de Riemann (compactes) et les surfaces (compactes, connexes, orientables et sans bord) de  $\mathbb{R}^3$ . À ces trois objets répondent trois possibilités pour définir  $p$  : comme fonction du degré d'une courbe algébrique ainsi que du nombre et de la nature de ses points singuliers ; comme dimension de l'espace des 1-formes différentielles holomorphes sur une surface de Riemann ; comme nombre de trous dans une surface de  $\mathbb{R}^3$ . En outre, les identifications adéquates étant faites entre courbes algébriques, surfaces de Riemann et surfaces de  $\mathbb{R}^3$ , ces trois nombres-genres sont identiques.

Il me semble que cette multiplicité de points de vue sur un même nombre explique au moins en partie la manière dont l'épisode de la définition du genre est traité en général dans l'historiographie. Il est en effet commun d'attribuer à Bernhard Riemann la paternité du concept de genre lui-même et à Clebsch le mérite de lui avoir donné son nom. En même temps, la plupart des études historiques décrivent les travaux de Riemann en utilisant le mot « genre », insistent sur les racines analytiques et topologiques de la notion chez ce mathématicien mais en parlent avec le vocabulaire des courbes algébriques... tout en signalant parfois que ces courbes sont en fait absentes de chez Riemann [DIEUDONNÉ 1974 ; SCHOLZ 1980 ; LAUGWITZ 1999 ; HOUZEL 2002 ; BOTTAZZINI et GRAY 2013 ; POPESCU-PAMPU 2016].

Cette sorte d'incertitude historiographique, couplée à une première relecture des publications de Clebsch et de Riemann, m'a poussé à revenir sur l'épisode de la définition de la notion de genre, en particulier pour mieux comprendre les contributions de Clebsch et les enjeux disciplinaires associés.

J'ai donc commencé par examiner à la loupe les mathématiques de Riemann dans son mémoire sur les fonctions abéliennes [RIEMANN 1857], et notamment celles qui sont ensuite reprises par Clebsch. Fidèle à mes démarches précédentes et méfiant envers l'historiographie, je me suis en particulier attaché aux mots du langage naturel employés par Riemann pour faire référence aux objets

et résultats qu'il manipule. Par exemple, lorsqu'il considère une intégrale abélienne  $\int f(s, z) dz$ , où  $f$  est une fraction rationnelle et  $s$  est une fonction algébrique de  $z$  définie implicitement par une équation polynomiale  $F(s, z) = 0$ , Riemann ne désigne jamais cette dernière équation comme celle d'une courbe algébrique. Son mémoire ne comporte par ailleurs aucun terme issu du vocabulaire relatif aux courbes algébriques, comme « tangente », « point de rebroussement », etc., à l'image d'ailleurs de toutes les références citées par Riemann.

Les surfaces qui seraient bientôt appelées « surfaces de Riemann » et, dans une moindre mesure, les surfaces usuelles de l'espace font en revanche partie intégrante de l'approche de Riemann. Leur ordre de connectivité est d'importance capitale, une surface  $m$  fois connexe étant caractérisée par le fait qu'elle peut être séparée en deux morceaux par l'effet de  $m$  sections transverses. Riemann montre en particulier qu'une surface de Riemann associée à  $F(s, z) = 0$  a un ordre de connectivité de la forme  $2p + 1$ , et il démontre plusieurs formules permettant de calculer  $p$  en fonction de nombres associés à  $F$ , toujours sans faire appel à quelque notion que ce soit attachée aux courbes algébriques. Par exemple, lorsqu'il prouve que

$$p = \frac{w}{2} - n + 1,$$

où  $n = \deg_s(F)$  et  $w$  est le nombre de points de ramification de la surface, aucune technique provenant de la géométrie projective n'est impliquée ; et l'hypothèse que Riemann suppose pour démontrer cette formule, à savoir qu'aucun couple  $(s, z)$  n'annule  $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$  s'il annule simultanément  $F$ ,  $\frac{\partial F}{\partial s}$  et  $\frac{\partial F}{\partial z}$ , n'est pas non plus formulée en termes de points singuliers d'une courbe algébrique.

Le cadre est tout différent lorsque Clebsch reprend les résultats de Riemann. S'il est adapté à des objectifs distincts, consistant à démontrer des théorèmes portant sur des courbes algébriques, il s'inscrit aussi dans un processus d'assimilation des travaux de Riemann, qui étaient vus comme difficiles par Clebsch. Ainsi, lorsque ce dernier et Paul Gordan présentent quelque temps après leur livre sur les fonctions abéliennes, où l'approche de base de Clebsch est celle qui est choisie, ils indiquent :

La théorie des fonctions abéliennes, dont [...] le développement complet [a été donné] en 1857 par M. Riemann, est néanmoins susceptible d'une grande simplification en ce qui concerne les principes fondamentaux sur lesquels elle est basée. Nous sommes parvenus à mettre, au lieu des principes transcendants et profonds de M. Riemann, quelques considérations simples et élémentaires. [...] Nous nous servons d'une double représentation géométrique. [CLEBSCH et GORDAN 1866, p. 183-184]

Cette double représentation vise l'introduction de courbes algébriques et (probablement) le retour à une conception d'intégrales qui évite tout recours aux surfaces de Riemann. Il est en tout cas intéressant de souligner que la géométrisation à l'œuvre ici est, tout comme dans le cas des équations de la géométrie, liée à des difficultés de compréhension d'une théorie, et à l'adaptation

que fait Clebsch de cette dernière.

Dans le mémoire de 1864, Clebsch part d'une équation homogène  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  d'une courbe algébrique de degré  $n$ . Il montre d'abord que celle-ci peut être décrite comme le lieu des points d'intersection de deux faisceaux de droites dont les paramètres  $s, z$  sont liés par une équation algébrique  $F(s, z) = 0$  avec  $\deg_s(F) = n$ . Ce point de vue – qui ne consiste donc pas à interpréter l'équation  $F(s, z) = 0$  comme définissant une courbe algébrique –, permet à Clebsch de travailler la formule  $p = \frac{w}{2} - n + 1$ , notamment en montrant que  $w$  est égal à la classe de la courbe  $f = 0$ , c'est-à-dire au nombre de tangentes qu'on peut lui mener depuis un point (générique) du plan. L'hypothèse de Riemann sur les dérivées partielles de  $F$  revenant par ailleurs au fait que la courbe  $f = 0$  ne contient pas d'autres singularités que des points doubles, Clebsch utilise la formule connue  $w = n(n - 1) - 2d$ , où  $d$  est le nombre de points doubles – il s'agit d'un cas particulier d'une formule de Plücker. Il en déduit alors que

$$p = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - d,$$

ce qui est la formule usuelle donnant le genre d'une courbe algébrique de degré  $n$  avec  $d$  points doubles. Le nombre  $p$  est au centre des investigations de la suite du mémoire de Clebsch. Il est notamment central dans l'écriture (homogène) des intégrales abéliennes de première espèce et dans la version du théorème d'addition d'Abel qu'il démontre puis applique pour trouver de nombreux résultats sur les intersections de courbes algébriques.

C'est aussi sur la base de ce nombre  $p$  et de la formule précédente que Clebsch définit quelques mois plus tard les genres des courbes [CLEBSCH 1865a,b] :

Au lieu de distribuer les courbes algébriques en ordres et d'y faire des sous-divisions d'après le nombre de points doubles et de rebroussement, on peut les classifier en genres d'après le nombre  $p$  ; ainsi, dans le premier genre se trouvent les courbes pour lesquelles  $p = 0$ , dans le deuxième celles pour lesquelles  $p = 1$ , etc. Les différents ordres apparaissent alors réciproquement comme des sous-divisions des genres ; et chaque ordre apparaît réciproquement dans les genres jusqu'à  $p = \frac{n-1 \cdot n-2}{2}$ , où se trouve la courbe du  $n$ -ième ordre la plus générale, c'est-à-dire sans point double et sans point de rebroussement<sup>8</sup>.

Alors que les genres sont donc dans cette définition des catégories classificatoires de courbes numérotées par  $p$ , Clebsch lui-même désignera par « genre » le nombre  $p$  peu de temps après.

Ayant mis en évidence les différences disciplinaires et d'approches dans les travaux de Riemann et de Clebsch, j'ai ensuite cherché à suivre la manière dont les notions de connectivité et de genre avaient circulé à partir de 1857, notamment pour comprendre le processus par lequel le mot

8. « Statt die algebraischen Curven nach Ordnungen einzutheilen, und in diesen Unterabtheilungen zu machen nach der Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte, welche dieselben aufweisen, kann man dieselben in Geschlechter eintheilen nach der Zahl  $p$ ; zu dem ersten Geschlecht also alle diejenigen für welche  $p = 0$ , zum zweiten diejenigen, für welche  $p = 1$ , u.s.w. Dann erscheinen umgekehrt die verschiedenen Ordnungen als Unterabtheilungen in den Geschlechtern; und zwar kommt jede Ordnung in allen Geschlechtern vor bis zu  $p = \frac{n-1 \cdot n-2}{2}$ , wo dann die allgemeinste, d.h. von Doppel- und Rückkehrpunkten völlig freie Curve  $n$ ter Ordnung ihre Stelle findet. » [Clebsch 1865a, p. 43].

« genre » en est venu à caractériser les surfaces (de Riemann), en plus des courbes algébriques. Dans un corpus de 243 articles publiés entre 1857 et 1882, repérés par mots-clés dans une sélection de revues, j'ai ainsi étudié comment genre et connectivité étaient impliqués dans les recherches de l'époque, en relevant notamment à quels types d'objets mais aussi à quels noms propres ces notions étaient associées. Cette analyse s'est doublée d'une étude du corpus en termes de réseaux de citations [GOLDSTEIN 1994, 1999].

Quatre réseaux principaux se dégagent. Il est notable que leur délimitation se retrouve en considérant conjointement les divisions disciplinaires du *Jahrbuch* auxquelles appartiennent leurs textes, d'une part, et la manière dont les objets et notions qui nous intéressent y sont mobilisés, d'autre part. Le premier réseau, qui cite beaucoup les travaux de Clebsch et qui représente à lui seul la moitié du corpus, concerne la géométrie des courbes et des surfaces algébriques ; il fait intervenir seulement le genre des courbes algébriques, à l'exception des articles sur la topologie des surfaces algébriques réelles, qui utilisent aussi la connectivité des surfaces. Le deuxième réseau est formé d'articles tous classés en théorie des fonctions d'après le *Jahrbuch* et citant pour la plupart directement le mémoire de Riemann sur les fonctions abéliennes. C'est ici la connectivité des surfaces de Riemann qui apparaît exclusivement. Le troisième réseau est formé principalement d'articles de Klein et de certains de ses élèves comme Hurwitz ou Walther Dyck. Ces articles sont également pour la plupart classés en théorie des fonctions mais abordent le sujet spécifique du lien entre résolution des équations algébriques et transformation des fonctions elliptiques. La situation vis-à-vis du genre des courbes algébriques et de la connectivité des surfaces (de Riemann) est mixte, les deux notions intervenant simultanément – c'est d'ailleurs au sein de ce réseau qu'apparaissent (à une exception près) les rares références où des surfaces sont caractérisées par la notion de genre. Enfin, le quatrième réseau consiste en des notes de mathématiciens français comme Paul Appell, Émile Picard et Henri Poincaré, qui traitent de la théorie des équations différentielles linéaires et d'autres questions liées aux fonctions abéliennes. Le *Jahrbuch* les situe en partie en théorie des fonctions, en partie en calcul différentiel et intégral, et seule la notion de genre des courbes algébriques (ou parfois des équations algébriques) est présente ici.

Cette distribution montre donc que genre et connectivité sont des marqueurs disciplinaires qui épousent certaines dynamiques de recherches. Il est de plus remarquable que même dans les articles où les deux notions interviennent simultanément, l'association de la première aux courbes algébriques et de la deuxième aux surfaces (de Riemann) est de règle. Par exemple, dans un article de 1882, Ferdinand Lindemann considère une certaine fonction  $\zeta$  d'une variable complexe  $z$  et explique qu'il est possible de penser aux valeurs prises par  $\zeta$  comme étant étalées au-dessus du plan des  $z$  en une surface de Riemann à quatre feuillets. Ayant ensuite calculé une équation algébrique liant  $\zeta$  et  $z$ , il explique :

Ceci est l'équation (en les inconnues  $\zeta, z$ ) d'une courbe du quatrième ordre avec un point d'auto-contact [...] situé à l'infini sur l'axe  $\zeta = 0$ . Son genre est égal à  $\frac{1}{2}3 \cdot 2 - 2 = 1$ , de sorte

que la connectivité de la surface à quatre feuillet est égale à 3.<sup>9</sup> [LINDEMANN 1882, p. 329]

Les exceptions où la notion de genre est employée pour caractériser des surfaces de Riemann ou des surfaces usuelles de l'espace sont datées de la toute fin des années 1870. Comme indiqué plus haut, elles surviennent principalement dans des articles du troisième réseau, écrits par Klein et certains de ses proches – c'est d'ailleurs la lecture d'un de ces articles qui incitera Poincaré à demander à Klein dans une lettre de 1881 ce qu'est « le *Geschlecht im Sinne der Analysis situs* », question que j'ai prise comme témoin de la rareté d'employer alors le mot « genre » en topologie.

En revanche, l'attribution à Riemann de résultats sur les courbes algébriques (et donc aussi sur le genre) est bien plus fréquent dans le corpus et se manifeste à travers toute une gamme de situations. Pour ne prendre qu'un exemple, l'assertion de Hieronymus Zeuthen [1871] selon laquelle « les courbes [transformables l'une en l'autre par transformation birationnelle sont] du même genre (Théorème de Riemann) » montre que de telles attributions sont apparues assez rapidement après les publications de Clebsch.

L'étude de cet épisode a continué à forger ma conviction de l'importance du choix des mots que l'on utilise pour décrire les mathématiques du passé, notamment parce que ces mots, ayant eux-même une histoire, sont susceptibles d'activer chez la personne qui les lit des réseaux de significations qui ne sont pas ceux du passé. Ainsi, dans le cas de Riemann, employer le terme de « courbe algébrique » pour parler de  $F(s, z) = 0$  induit clairement une représentation disciplinaire erronée ; employer celui de « genre », même pour caractériser une surface de Riemann (et pas une courbe), va dans le même sens, mais les mécanismes qui sous-tendent la distorsion historique qui en résulte ne sont pas tout à fait les mêmes en raison des phénomènes décrits précédemment.

### 3.3.2 Classifications

Le cadre classificatoire dans lequel Clebsch introduit initialement les genres de courbes algébriques me ramenait aussi au projet qu'Anne-Sandrine Paumier et moi-même avons porté en 2014 en organisant, lors du Congrès de la Société française d'histoire des sciences et des techniques, une session thématique intitulée « La classification comme pratique scientifique ». La question était notamment d'examiner les pratiques classificatoires et leurs liens avec les discours des scientifiques, et de comparer des cas mathématiques à des cas issus de la biologie, de la chimie et d'autres sciences. Le hasard des disponibilités et des engagements personnels a fait que le volume spécial des *Cahiers François Viète* issu de cet événement a finalement rassemblé pour l'essentiel des contributions impliquant de manière plus ou moins centrale les mathématiques [LÊ et PAUMIER 2016b].

L'article introductif que nous avons écrit avait pour vocation de poser quelques questions

---

9. « [D]ies ist (in Veränderlichen  $\zeta, z$ ) die Gleichung einer Curve 4. Ordnung mit einem Selbst-berührungspunkte [...] im unendlich fernen Punkte der Axe  $\zeta = 0$ . Ihr Geschlecht ist gleich  $\frac{1}{2}3 \cdot 2 - 2 = 1$ , und daher der Zusammenhang der vierblättrigen Fläche  $Z$  ist gleich 3. »

générales et de montrer certains traits caractéristiques des classifications mathématiques autour de deux cas [LÊ et PAUMIER 2016a]. Le premier était centré sur les discours de membres de Bourbaki présentant leur projet mathématique comme l'analogie de l'entreprise de classification des êtres vivants de Linné, et insistant à la fois sur les enjeux de dénomination et sur l'importance des structures pour classer objets et domaines mathématiques. Le deuxième cas était celui des classifications des surfaces cubiques aux XIX<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècles. Il mettait en particulier en évidence le caractère instable des classifications d'objets mathématiques, que ce soit pour des raisons de complétude ou des changements de critères de classement, et que cette instabilité pouvait être liée tant aux démonstrations des classifications qu'aux évolutions temporelles des disciplines et des exigences de rigueur.

D'autres contributions au volume thématique montraient diverses interfaces entre mathématiques et sciences naturelles autour de questions classificatoires. Par exemple, Maarten Bullynck étudiait la manière dont une classification de végétaux avait été établie au début du XIX<sup>e</sup> siècle par une collaboration entre un botaniste, un chimiste et un mathématicien, l'analyse combinatoire de ce dernier informant la pratique des deux premiers [BULLYNCK 2016]. Dans une sorte de mouvement inverse, rappelant les déclarations d'Hermite rapprochant mathématiques et histoire naturelle notamment par le biais des pratiques communes d'observation et de classement, Catherine Goldstein examinait les classifications des formes quadratiques par Carl Friedrich Gauss et Charles Hermite. En examinant la technique mathématique de près, elle montrait comment la pratique classificatoire d'Hermite (dont une caractéristique est l'accent mis sur les transformations d'objets) avait mené ce dernier à la mise en évidence des formes hermitiennes, mais elle soulignait aussi les spécificités des classifications mathématiques par rapport aux classifications naturalistes [GOLDSTEIN 2016].

C'est avec ce cadre général, ces questions et ces résultats historiques en tête que j'ai voulu revenir sur l'épisode de la définition des genres par Clebsch, en abandonnant donc le prisme des interfaces entre fonctions abéliennes et géométrie [LÊ 2023b].

Mon idée au départ était d'écrire un simple article de synthèse sur l'histoire des classifications des courbes algébriques par les trois notions d'ordre, de classe et de genre. Les épisodes de leurs définitions respectives par Newton (1704), Gergonne (1828) et Clebsch (1865) avaient déjà été décrits dans l'historiographie, mais séparément et sans insistance sur le contexte classificatoire : je voulais enrichir le questionnaire, en scrutant en particulier la tension entre les taxons de courbes et les nombres qui les caractérisent, et en proposant une comparaison avec le cas des classifications des formes quadratiques et des êtres vivants. En même temps, rapprocher en un texte trois épisodes par ailleurs relativement indépendants ne me satisfaisait pas, le risque étant d'aboutir à un récit trop discontinu. Cherchant ainsi à suivre l'adoption et la circulation collectives des notions d'ordre, de classe et de genre, j'ai à nouveau opté pour une étude systématique d'un corpus large, ce qui m'a amené à prendre en compte d'autres définitions de ces notions, proposées

par d'autres mathématiciens.

Parce que l'introduction de l'algèbre en géométrie telle que proposée dans la *Géométrie* de René Descartes et l'*Ad locos planos et solidos isagoge* de Pierre Fermat change substantiellement la manière dont les mathématiciens ont travaillé sur les courbes algébriques (y compris pour leurs classifications), le point de départ choisi pour l'enquête est 1637, année de publication du premier ouvrage et (approximativement) de composition du second<sup>10</sup>.

Comme cela est bien connu [Bos 2001 ; RASHED 2005], Descartes distribue les lignes courbes en genres en fonction du degré des équations qui les définissent : excluant les lignes droites des objets à considérer, le premier genre est formé des courbes définies par une équation du deuxième degré, tandis que le  $n$ -ième genre, pour  $n \geq 2$ , rassemble les lignes courbes ayant une équation du  $(2n - 1)$ -ième ou du  $2n$ -ième degré. Cette classification est adoptée par certains des lecteurs de Descartes du XVII<sup>e</sup> siècle comme Florimond de Beaune (1661) ou Jacques Ozanam (1687), mais d'autres lui préfèrent une distribution groupant en un taxon les courbes ayant des équations de même degré, à l'instar de Fermat (vers 1640) ou de Nicolas Guisnée : « lorsque l'une ou toutes les deux [inconnues], ou leur produit, a trois dimensions : comme  $x^3 + axy = a^3$  [...], l'équation est du *troisième degré*, & la courbe dont elle exprime la nature, est du *second genre*, & ainsi de suite », explique-t-il, le  $n$ -ième genre étant constitué des courbes définies par une équation du  $(n + 1)$ -ième degré [GUISNÉE 1705, p. 19].

Cette classification de Guisnée coïncide donc, tant dans ses principes que dans sa terminologie, avec l'une des deux que Newton définit dans le célèbre *Enumeratio linearum tertii ordinis* [NEWTON 1704 ; GUICCIARDINI 2009]. Newton ouvre en effet ce texte en définissant les ordres des lignes, le  $n$ -ième ordre rassemblant les lignes données par une équation du  $n$ -ième degré. Prenant soin de distinguer lignes et courbes, il propose aussi de distribuer les courbes en genres, le  $n$ -ième genre étant constitué des courbes données par une équation du  $(n + 1)$ -ième degré. En fait, alors que le vocabulaire des lignes et des ordres est mis en lumière par sa place dans le titre et l'introduction du texte de Newton, le corps de ce texte emploie presque systématiquement celui des courbes du second genre, qui se trouvent être divisées en 72 espèces. En la croisant avec un examen des manuscrits de Newton et de dictionnaires de l'époque, j'ai interprété cette observation comme la manifestation qu'au début du XVIII<sup>e</sup> siècle, la notion d'ordre n'était pas perçue comme une catégorie classificatrice usuelle, au contraire des genres et des espèces (dans leur sens aristotélicien de catégories relatives). En particulier, les ordres n'apparaissent dans les classifications naturalistes qu'à partir des travaux de Linné lui-même [MORTON 1981], donc postérieurement à l'écriture de l'*Enumeratio*.

La première moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle voit paraître des travaux où la double classification de Newton est reprise, les courbes et les genres perdant tout de même du terrain face aux lignes

---

10. Roshdi Rashed, au contraire, a étudié la question de la classification des courbes depuis l'Antiquité jusqu'au début du XVII<sup>e</sup> siècle [RASHED 2005].

et aux ordres. La distinction entre les lignes et les courbes est cependant abolie explicitement dans deux ouvrages majeurs du milieu du siècle : l'*Introductio in analysin infinitorum* de Leonhard Euler (1748) et l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Gabriel Cramer (1750). Si les ordres au sens de Newton sortent gagnants de cet émondage, des genres de courbes sont encore employés par les deux mathématiciens. Chez Cramer, par exemple, des genres divisent les ordres en fonction des branches infinies des courbes considérées, et sont eux-mêmes sous-divisés en espèces selon la nature et le nombre de points singuliers des courbes. Des classes sont aussi définies, mais dans des cas particuliers, servant à trouver une catégorie adéquate lorsque les genres d'un ordre donné sont trop nombreux pour être énumérés.

Entre le milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle et les années 1820, aucune classification nouvelle des courbes algébriques ne semble émerger. Cette période de stabilité voit cependant le mot « degré » être parfois substitué à « ordre » alors qu'il était jusqu'alors réservé aux équations, ce qui est probablement un signe de la banalisation de l'assimilation d'une courbe avec ses équations de définition. En revanche, comme en témoignent de nombreux indices du langage naturel (dont les adjectifs numéraux ordinaux et le vocabulaire de l'appartenance), ordres, degrés, classes, genres et espèces sont toujours perçus à cette époque comme des catégories et pas comme des nombres.

La notion de classe des courbes algébriques telle qu'elle sera unanimement comprise jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle au moins est définie en 1828, au cours de la polémique sur la dualité [LORENAT 2015; ETWEIN, VOELKE et VOLKERT 2019]. Gergonne devait en effet corriger sa première version du principe de dualité, dans laquelle il affirmait qu'une courbe du  $n$ -ième ordre correspond dualement à une courbe du même ordre : la version rectifiée est que la duale d'une courbe du  $n$ -ième ordre est une courbe de  $n$ -ième classe, c'est-à-dire une courbe à laquelle il est possible de tirer  $n$  tangentes depuis un point du plan. La réaction de Poncelet, qui accuse Gergonne de « torturer le sens des mots, en admettant simultanément deux classifications essentiellement distinctes pour ces courbes [...], chose jusqu'alors inusitée en mathématiques, et qu'on ne saurait justifier sous aucun prétexte » [PONCELET 1828, p. 302], montre que le fait d'avoir ainsi proposé deux classifications opérant au même niveau général de l'ensemble des courbes était loin d'aller de soi.

Les classes de Gergonne sont néanmoins rapidement adoptées par les mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle, notamment par Julius Plücker. Celui-ci élucide, pour une courbe du  $n$ -ième ordre et de la  $m$ -ième classe, le lien entre  $n$ ,  $m$  et les singularités de la courbe, donnant ainsi lieu à ce qui sera appelé les formules de Plücker. C'est d'ailleurs exactement dans ces questions, où il s'agit d'effectuer des calculs sur les nombres qui caractérisent les ordres et les classes, que l'on commence à voir ces nombres être appelés « ordre » (ou « degré ») et « classe » : « Une courbe quelconque étant proposée, je désignerai [par]  $n$  son degré, ou le nombre de ses points d'intersection avec une ligne droite », écrit ainsi Plücker dans l'article où les quatre formules qui portent son nom sont rassemblées [PLÜCKER 1837].

Si les classes intègrent donc rapidement les travaux de mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle, et sont

parfois présentées explicitement comme ayant la même légitimité que les ordres (pour des raisons de dualité), ce sont en fait ces derniers qui restent les divisions premières dans les travaux de mathématiciens, que ce soit en tant que principe de structuration du savoir ou de classification effective des courbes.

Le début du XIX<sup>e</sup> siècle ne voit par ailleurs aucune utilisation répandue d'une quelconque notion de genre pour les courbes algébriques. De ce fait, le mot se présente comme étant disponible à être affecté d'une signification technique nouvelle lorsque Clebsch introduit les genres de courbes algébriques en 1865. Il faut noter que, au contraire des classes de Gergonne, les genres sont présentés par Clebsch d'emblée comme les catégories à considérer en premier lieu dans la conception générale des courbes, les ordres apparaissant comme des sous-divisions. Là encore, la notion est très rapidement adoptée et présentée comme importante par les contemporains de Clebsch, en particulier par ceux intéressés par les transformations birationnelles des courbes, pour lesquelles le nombre-genre est invariant<sup>11</sup>. Par exemple, pour Cremona :

La division des courbes planes [...] en genres, proposée par le Pr Clebsch, est de la plus haute importance. Elle permet de rassembler et de lier les propriétés de formes géométriques très différentes en apparence. Ce qui donne la mesure des difficultés que peut présenter l'étude d'une [courbe] n'est ni l'ordre, ni la classe, mais bien le genre<sup>12</sup>. [CREMONA 1866, p. 45]

Malgré cela, il faut souligner que les livres de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle portant sur la théorie des courbes algébriques continuent à être structurés d'abord selon l'ordre des courbes, avec des chapitres dévolus aux courbes du troisième ordre ou du quatrième ordre, par exemple. Le genre, s'il est effectivement intégré à ces livres, reste donc souvent vu comme un caractère de rang secondaire dans ces présentations.

Ces descriptions m'ont ensuite servi de base pour une rapide comparaison avec les classifications naturalistes et celle des formes quadratiques au XIX<sup>e</sup> siècle – je ne reprends ici que des éléments de cette deuxième comparaison. La classification des courbes en ordres, classes et genres n'a ainsi pas été proposée d'un coup, comme Gauss avait rangé dans les *Disquisitiones arithmeticae* les formes quadratiques en classes, elles-mêmes rassemblées successivement dans des genres puis des ordres. De plus, la définition même de ces dernières catégories fixe une fois pour toutes leur hiérarchie et interdit donc la possibilité de considérer comme la division première des formes quadratiques tantôt l'une, tantôt l'autre, comme c'est le cas pour les courbes algébriques. Enfin, si les taxons d'ordre, de classe et de genre des courbes se dissipent peu à peu pour laisser place aux nombres qui les caractérisent et les numérotent, le corpus considéré ne montre aucun phénomène d'ontologisation analogue à celui des classes de formes quadratiques qui, étant dotées d'une loi de composition, « apparaissent chez Gauss comme des objets (de second

---

11. L'importance de la stabilité des taxons (ou nombres-taxons) par certains types de transformations se voit aussi parfois dans des situations où une classification est rejetée sur de tels critères [SALMON 1852, p. 131 ; LÊ 2023b, p. 118].

12. « La division delle curve piane [...] in generi, proposta dal prof. Clebsch, è della massima importanza. Per essa si ravvicinano e si connettono le proprietà di forme geometriche in apparenza differentissime. Ciò che dà la misura delle difficoltà che può offrire lo studio di una [curva] non è l'ordine o la classe, ma bensì il genere. »

niveau) à part entière » [GOLDSTEIN 2016, p. 131]. C'est sans doute au cours du xx<sup>e</sup> siècle, avec la considération d'espaces de modules, que des classes de courbes se verront dotées d'un tel statut d'objets individualisés.

### 3.3.3 Big pictures

La question s'est ensuite posée de la nature même du récit historique que j'avais ainsi écrit sur les classifications de courbes, s'étendant du milieu du xvii<sup>e</sup> siècle jusqu'à la fin du xix<sup>e</sup> et portant sur des concepts dont l'identité sémantique semblait autoriser une forme d'identification sur le temps long. Une session thématique organisée par Catherine Goldstein et Jemma Lorenat au Congrès joint SMF-EMS-AMS initialement prévu en 2021 puis reporté en 2022, et intitulée « History of Mathematics Beyond Case-Studies », a été l'occasion pour moi de revenir sur ce point. Plus encore, la direction, avec J. Lorenat, d'un ouvrage collectif *Beyond Case-Studies: Drawing Bigger Pictures in the History of Mathematics* issu des interventions à cette session, ainsi que l'écriture d'un article pour cet ouvrage, m'ont incité à pousser encore cette question [LÊ et LORENAT 2025; LÊ 2025a].

Les organisatrices de la session thématique avaient proposé aux participants de réfléchir à la problématique du passage entre le local et le global en histoire des mathématiques, que ce soit dans un sens ou dans l'autre, et que ces catégories fassent référence à des aspects temporels, géographiques ou historiographiques.

J'ai moi-même choisi de décliner la question en abordant à nouveaux frais le problème de l'écriture du passé d'un objet mathématique, l'exemple choisi étant celui du genre des courbes algébriques. Ce problème n'est pas neuf en mathématique, et emprunte beaucoup à ce qui a été écrit sur « l'histoire d'un théorème » [GILAIN 1991; SINACEUR 1991; GOLDSTEIN 1995; BRECHENMACHER 2010; EHRHARDT 2012]. Mon objectif était d'insister sur les difficultés qui se posent spécifiquement lorsque, une définition d'un objet ayant été localisée dans le temps et qualifiée raisonnablement de première, on cherche à établir une généalogie de cet objet. La formulation de cet objectif incite d'emblée à la méfiance : parce qu'il s'agit de retrouver des traces d'un objet qui n'existe pas encore au sens strict du terme, le danger d'anachronisme est partout, de la reconnaissance de ces traces jusqu'à l'écriture du récit qui en résulte. Mais l'entreprise en elle-même n'est pas vaine et j'ai voulu montrer de manière très pragmatique, en explicitant au maximum les opérations historiennes nécessaires, comment un récit pouvait être ainsi construit sur une période de temps relativement longue.

L'origine des temps choisie étant la définition proposée de la notion de genre proposée en 1865 par Clebsch [1865a,b], j'ai montré que suivre la piste du nombre  $p$ , d'une part, et la piste du nom « genre », d'autre part, était associé à des processus essentiellement disjoints, tant au niveau du contenu historique des deux versants qu'à celui de la formation de corpus pertinents.

En effet, si le procédé consistant à remonter les citations successives de textes mathématiques

en partant des articles de Clebsch permet de reconstituer un certain parcours du nombre  $p$ , il s'avère inefficace pour repérer de quelconques objets appelés « genre » et liés aux courbes algébriques. Pour ces derniers aspects, je suis donc reparti d'un corpus large sur les courbes algébriques et j'y ai cherché des occurrences de genres : à quelques modifications près, je suis ainsi retombé sur les textes que j'avais étudiés dans mon article sur les classifications et j'ai ainsi repris la trame générale du récit que j'avais proposé. Si j'insiste sur les notions de genre, je souligne aussi qu'il est important de tenir compte des ordres et des classes pour assurer la continuité du récit.

Pour ce qui est de la piste du nombre  $p$ , le procédé des citations itérées permet de retrouver ce nombre dans le mémoire de Clebsch sur l'application des fonctions abéliennes à la géométrie [1864b] et celui de Riemann sur les fonctions abéliennes [1857]. Les articles antérieurs, en revanche, comportent des nombres que seule une lecture mathématicienne permet de reconnaître comme des versions antérieures de  $p$ . Les limitations de ce procédé tiennent alors au fait qu'il est aussi possible de détecter dans le passé des textes comportant des valeurs numériques particulières de ces nombres, comme 0, 1 ou 2 : mais alors que certains auteurs montrent assez clairement qu'ils donnent à ces valeurs particulières un rôle précis dans certaines questions liées aux fonctions abéliennes, la prise en compte dans un récit de textes où l'historien seul interprète le nombre 1, par exemple, comme pertinent, pose évidemment problème. En outre, même après avoir circonscrit un corpus en gardant ces phénomènes à l'esprit, de nombreuses difficultés subsistent.

D'abord, comme le suggère immédiatement le graphe des citations explicites du corpus (figure 3.3), la situation est très intriquée : écrire une histoire du nombre  $p$  imposerait *a priori* de tenir compte de toutes les manières dont il apparaît dans les textes et circule via les actes de citation. En particulier, les textes du corpus font intervenir les différentes versions de  $p$  de diverses manières techniques – forme générale des intégrales de première espèce, théorème d'addition des intégrales abéliennes, problème d'inversion, utilisation de fonctions thêta à  $p$  variables, etc. –, cette diversité se superposant mal tant aux chronologies qu'aux citations. Pour illustrer ces phénomènes, je me suis restreint à la description d'une sélection de textes formant une chaîne de citations sans trop de ramifications, permettant de limiter ces effets de dispersion.

Outre les textes de Clebsch et de Riemann évoqués plus haut, ce sous-corpus est constitué d'articles de Karl Weierstrass [1854, 1856], Johann Georg Rosenhain [1851], Carl Gustav Jacob Jacobi [1832] et Niels Henrik Abel [1826/1841, 1828]. Tous ces écrits antérieurs au mémoire de Riemann portent sur les intégrales hyperelliptiques, sauf celui d'Abel daté de 1826 (et publié en 1841), qui porte sur les fonctions abéliennes générales.

Dans ce mémoire, ce qui deviendra le nombre  $p$  apparaît dans le théorème d'addition des fonctions abéliennes : si  $\psi(x_1), \dots, \psi(x_\alpha)$  sont des valeurs d'une même fonction abélienne  $\psi$ , il existe un entier  $\mu$ , des fonctions algébriques  $x_{\alpha+1}, \dots, x_\mu$  et une fonction algébrico-logarithmique  $v$

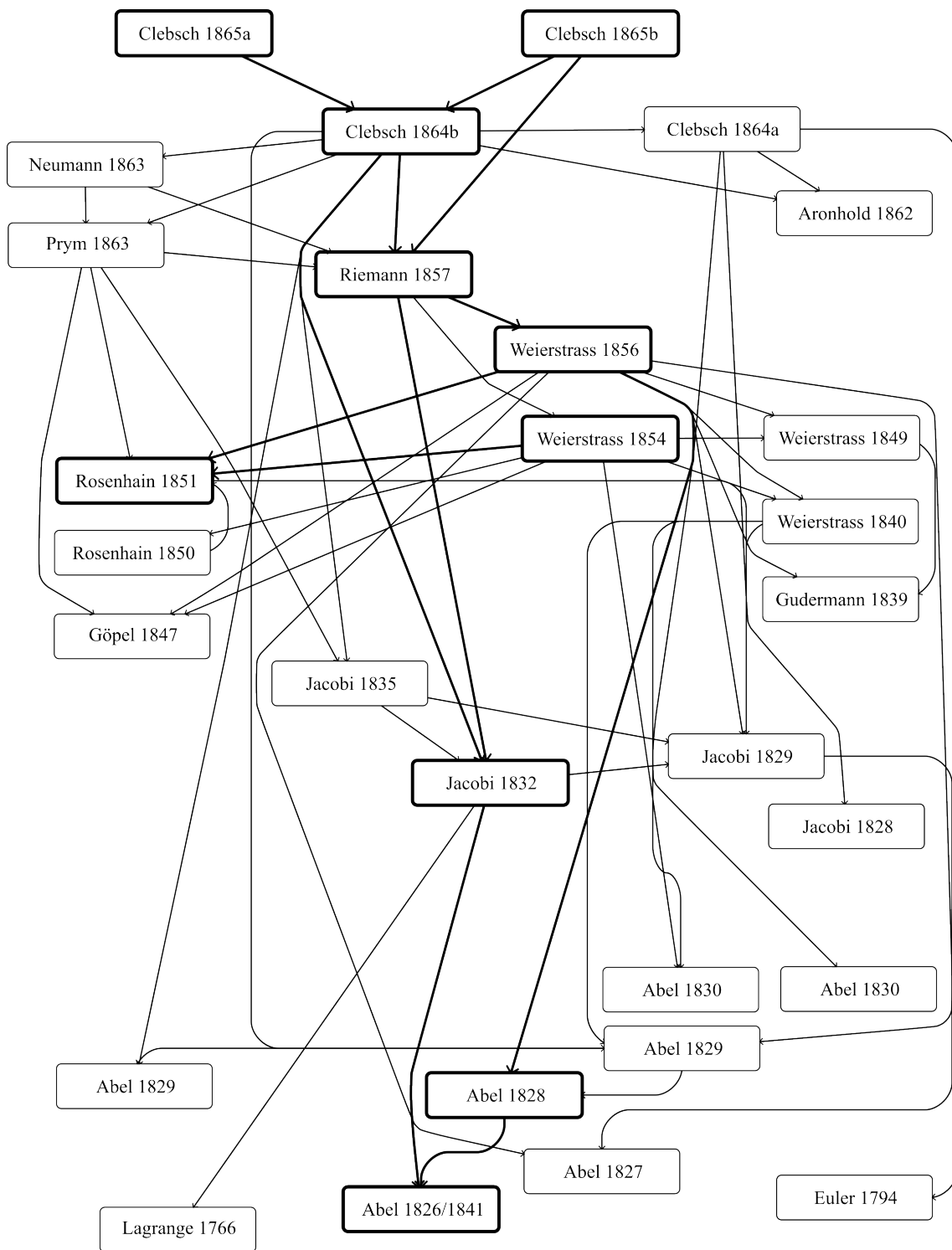


FIGURE 3.3 – Graphe des citations explicites entre les textes du corpus portant sur le nombre  $p$ . Les éléments en gras correspondent au sous-corpus choisi.

de  $x_1, \dots, x_\alpha$ , telles que

$$\psi(x_1) + \dots + \psi(x_\alpha) = v - (\psi(x_{\alpha+1}) + \dots + \psi(x_\mu)).$$

C'est le nombre  $\mu - \alpha$  qui correspond à  $p$ , au moins sous certaines hypothèses techniques, et Abel montre qu'il est égal à 0, 1 et 2 pour les intégrales rationnelles, elliptiques et certains cas hyperelliptiques, respectivement.

L'autre article d'Abel vise à expliquer le précédent à travers le cas des intégrales hyperelliptiques générales

$$\psi(x) = \int \frac{r(x)}{\sqrt{R(x)}} dx,$$

où  $r$  est une fraction rationnelle et  $R$  un polynôme. Cette fois, le futur nombre  $p$  apparaît à la fois dans le théorème d'addition et dans l'écriture des intégrales de première espèce<sup>13</sup> qu'Abel met en évidence pour sa démonstration de ce théorème. Ces intégrales sont en effet de la forme

$$\int \frac{\delta_0 + \delta_1 x + \dots + \delta_{m-2} x^{m-2}}{\sqrt{R(x)}} dx,$$

lorsque  $R$  est de degré  $2m - 1$  ou  $2m$ , et le théorème d'addition est que pour toutes quantités  $x_1, \dots, x_{\mu_1}, x'_1, \dots, x'_{\mu_2}$ , il existe des fonctions algébriques  $y_1, \dots, y_{m-1}$  et une fonction algébraico-logarithmique  $v$  de ces quantités, ainsi que des  $\varepsilon_i = \pm 1$  tels que

$$\psi(x_1) + \dots + \psi(x_{\mu_1}) - \psi(x'_1) - \dots - \psi(x'_{\mu_2}) = v + \varepsilon_1 \psi(y_1) + \dots + \varepsilon_{m-1} \psi(y_{m-1}).$$

L'identification avec la situation des intégrales abéliennes générales – qui n'est pas faite par Abel – montre que le nombre  $\mu - \alpha$  est ici  $m - 1$ , celui-ci étant maintenant lisible directement sur les données initiales, via le degré du polynôme  $P$ .

La même notation faisant usage de la lettre  $m$  se retrouve dans l'article de Jacobi, où l'importance du nombre  $m - 1$  se voit, tout comme chez Abel, à la fois dans l'écriture même des intégrales hyperelliptiques et dans l'énoncé du théorème d'addition. Mais le rôle de  $m - 1$  s'étoffe encore, puisqu'il se retrouve au cœur de l'indication de la solution proposée par Jacobi au problème d'inversion, solution consistant à inverser un système de  $m - 1$  équations à  $m - 1$  inconnues.

Le mémoire de Rosenhein qui fait partie du sous-corpus est celui où il résout complètement le problème d'inversion dans le cas des intégrales hyperelliptiques qui correspondent à  $m = 3$ , dans les notations d'Abel et de Jacobi. Ce dernier, cependant, n'est cité que pour les *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. En particulier, Rosenhain ne mentionne jamais le cas des fonctions hyperelliptiques général : voir que le nombre 2 joue un rôle spécial – dans l'inversion

13. Les intégrales de première espèce sont celles qui prennent uniquement des valeurs finies. En termes actuels, elles correspondent aux 1-formes holomorphes sur la surface de Riemann associée.

d'un système à deux équations et deux inconnues, mais aussi dans l'utilisation de fonctions  $\theta$  à deux variables – vis-à-vis de la généalogie de  $p$  est ici soutenu par une lecture mathématicienne de la situation et contrôlé par l'insertion de cet article dans un corpus spécifique.

Les articles de Weierstrass considérés ici visent à résoudre le problème d'inversion pour les intégrales hyperelliptiques générales. Si les travaux de Rosenhain sont cités, Weierstrass revendique un point de vue nouveau sur la question, les fonctions  $\theta$  étant en particulier évitées. Les notations changent également par rapport à celles d'Abel et de Jacobi, puisque le polynôme qui définit les intégrales hyperelliptiques est noté  $R(x) = A_0(x - a_1) \cdots (x - a_{2\rho+1})$ . En particulier, ce qui était auparavant  $m - 1$  est maintenant simplement  $\rho$ , donnant ainsi une nouvelle forme d'existence à une version antérieure de  $p$ .

Enfin, lorsque Riemann reprend le sujet des intégrales abéliennes générales, un nouveau changement radical de cadre s'impose, notamment par l'introduction des surfaces de Riemann et des techniques associées. Le nombre  $p$ , d'abord introduit par des considérations topologiques, comme on l'a vu plus haut, apparaît dans un deuxième temps comme nombre de coefficients indépendants dans l'écriture des intégrales de première espèce ou encore dans le problème d'inversion, résolu à l'aide de fonctions  $\theta$  à  $p$  variables. Mais l'identification entre ce nombre  $p$  et les occurrences précédentes de  $\mu - \alpha$ ,  $m - 1$  ou  $\rho$  reste à la charge de l'observatrice, aucun rapprochement explicite n'étant fait par Riemann.

En revanche, la possibilité de voir le même nombre  $p$  chez Clebsch et Riemann est bien plus directe, soutenue par l'utilisation des mêmes notations tant pour ce nombre que pour les objets associés, et par le fait que les deux mathématiciens se placent à un même niveau de généralité pour les fonctions abéliennes considérées.

Ce qui m'intéressait dans cette suite d'événements était la nature des continuités et discontinuités historiques qui lui donnent une unité. Le narratif allant d'Abel à Clebsch n'est pas un simple récit linéaire reflétant une montée progressive en généralité ou en rigueur, par exemple ; il est ponctué de multiples changements tant sur les cadres conceptuels que sur les questions traitées, et cette multiplicité engendre la complexité du processus de circulation de  $p$  et ses versions antérieures. Surtout, comme je l'ai indiqué à l'instant, les mathématiciens observés ne commentent jamais l'identité des nombres  $\mu - \alpha$ ,  $m - 1$ ,  $\rho$  et  $p$ . Les voir comme des manifestations diverses d'un même nombre se fait par une reconnaissance mathématique de l'historien, reconnaissance plus ou moins immédiate selon les situations, mais est en tout cas contrôlée par le cadre qu'offre la prise en compte des citations entre les articles du corpus.

Revenant à la problématique des *big pictures*, la question a été de réfléchir à l'articulation des deux récits généalogiques de la notion de genre obtenus. J'ai d'abord insisté sur le fait que les deux sont presque entièrement étanches, ce qui reflète la relative indépendance de la théorie des courbes algébriques et de celle des fonctions abéliennes avant les travaux de Clebsch – en fait, les rares points de rencontre non clebschiens sont les textes de Jacobi et d'Aronhold que j'ai discutés

autour de la paramétrisation elliptique des cubiques. Les deux récits, néanmoins, sont pertinents ; ils possèdent leur propre cohérence et leur propre rythme historique, et incarnent deux types de rattachement d'un objet à son passé. Si oblitérer l'un des deux n'est bien sûr pas recevable, il ne serait pas non plus pertinent, à mon sens, de chercher à les fondre en un seul narratif bien ordonné chronologiquement : la globalité est atteinte ici par la mise au jour de composantes essentiellement disjointes.



## Chapitre 4

# Invariants, équations et géométrie

Depuis mes débuts en recherche, j'avais été frappé de voir la théorie des invariants intervenir dans plusieurs travaux ne s'y rapportant pas *a priori*, nichée dans les démonstrations de divers résultats : la partie des équations de la géométrie en lien avec la question de leur formation explicite et celle relative aux travaux de Clebsch sur l'équation du cinquième degré ; la paramétrisation des courbes cubiques par Clebsch et Aronhold ; les travaux de Louis J. Mordell sur l'équation diophantienne  $y^2 - k = x^3$ , où la syzygie de la forme cubique binaire est au cœur de l'approche de cette équation par la théorie des formes<sup>1</sup>.

L'invitation en 2022 par Frédéric Jaëck à donner un exposé dans le séminaire qu'il organisait sur les invariants en mathématiques puis à participer à un ouvrage collectif sur ce thème m'a fait revenir sur le sujet et aborder de front la manière dont la théorie des invariants intervient dans l'ensemble de la production publiée de Clebsch [LÊ 2025b]. Un peu auparavant, j'avais choisi de confronter la théorie des surfaces algébriques à celle des invariants dans mes premières recherches de nature textométrique [LÊ 2022]. Ce choix traduisait une volonté de continuer à me familiariser avec la théorie des invariants au XIX<sup>e</sup> siècle, au sujet de laquelle beaucoup reste à écrire.

### 4.1 Clebsch et la théorie des invariants

L'histoire usuelle du sujet a en effet été structurée en grande partie autour du théorème de finitude de Gordan (1868), selon lequel tous les invariants et covariants d'une forme binaire s'expriment algébriquement en fonction d'un nombre fini d'eux-mêmes [FISHER 1966 ; CRILLY 1986, 1988 ; PARSHALL 1989 ; BONIFACE 2004]. Dans cette histoire, Clebsch tient un rôle essentiel mais secondaire : c'est lui qui, à partir de travaux d'Aronhold, généralise et systématise la fameuse

---

1. Ces travaux de Mordell ont été étudiés dans [GAUTHIER et LÊ 2019]. Ils abordent l'équation  $y^2 - k = x^3$  selon trois points de vue indépendants : des considérations plutôt élémentaires impliquant congruences et loi de réciprocité quadratique ; d'autres qui se rapportent davantage à la théorie algébrique des nombres avec l'introduction de nombres idéaux ; enfin, l'utilisation évoquée de la théorie arithmétique des formes. Du fait de la nature résolument différente des domaines disciplinaires en jeu, je ne décrirai pas davantage ces recherches sur Mordell dans ce mémoire.

notation symbolique des formes et des invariants utilisée par Gordan pour démontrer le théorème de finitude. Des recherches historiques plus récentes ont permis d'enrichir l'histoire de la théorie des formes et des invariants, en étudiant plus finement les circonstances de sa mise en place ou en montrant certaines de ses applications à l'algèbre ou la théorie des nombres [WOLFSON 2008; BRECHENMACHER 2011a; GOLDSTEIN 2023; PARSHALL 2024]. Avec l'article [LÊ 2025b], j'ai voulu atteindre le double objectif de mieux comprendre les divers degrés d'engagement de Clebsch en théorie des invariants et d'insister sur les applications qu'il en propose.

Pour cela, j'ai commencé par montrer que parmi la centaine d'articles publiés de Clebsch, environ 20 relèvent de la théorie des formes et des invariants lorsque l'on adopte le point de vue du *Catalogue of scientific papers*, les trois premiers articles de 1861 étant isolées des autres, parus à partir de 1867. En revanche, sélectionner les articles où apparaissent les mots « invariant(s) » et « covariant(s) » fournit un ensemble de 45 articles, ce qui représente donc près de la moitié de la production totale de Clebsch. Cette perspective offre une vision de l'intervention des invariants dans l'œuvre de Clebsch à la fois plus continue, dans la mesure où le vide entre 1861 et 1867 se trouve comblé, et plus riche, en suggérant de potentielles nombreuses applications des invariants à d'autres domaines mathématiques, au moins au sens du *Catalogue*.

Trois situations ont ensuite été analysées au plus près de la technique, montrant trois types d'articulations disciplinaires entre théorie des invariants, théorie des équations et géométrie. L'étude systématique du corpus a aussi permis de présenter une caractéristique plus discrète de l'utilisation par Clebsch de la théorie des invariants, consistant à associer cette dernière à la formation explicite d'équations dont l'existence est connue *a priori*. Enfin, l'ébauche d'un programme que Clebsch semble avoir mis en place à la toute fin de sa vie, et visant à unifier l'algèbre et la géométrie par le biais des formes algébriques et leurs invariants, a été mis au jour et discuté à l'aune du *Programme d'Erlangen* de Klein.

#### 4.1.1 Trois situations techniques et la question de l'explicitation

La première situation que j'ai choisi d'étudier est relative à un texte bien connu dans l'histoire de la théorie des invariants, puisqu'il s'agit de l'article dans lequel Clebsch reprend et systématise la notation symbolique d'Arionhold [CLEBSCH 1861]. Cette notation consiste à faire comme si toute forme algébrique à  $r$  variables et de degré  $n$

$$f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{i_1 + \dots + i_r = n} \binom{n}{i_1, \dots, i_r} A_{i_1, \dots, i_r} x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r}$$

est la puissance  $n$ -ième d'une forme linéaire :  $f = (a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r)^n$ . Les coefficients  $a_i$  n'ont pas de sens en eux-mêmes, seuls les groupements qui résultent du développement de la puissance  $n$ -ième pouvant être remplacés par les coefficients actuels de  $f$ . On a ainsi  $a_1^n = A_{n,0,\dots,0}$ ,  $a_1^{n-1} a_2 = A_{n-1,1,0,\dots,0}$ , etc. Il est de plus possible d'utiliser plusieurs jeux de coefficients symboliques

en écrivant  $f = (b_1x_1 + \dots + b_r x_r)^n$  et en soumettant les  $b_i$  aux mêmes règles de substitution que les  $a_i$ . La notation et la génération symboliques des invariants (et des covariants) utilise celle des formes : Clebsch montre en effet que tout invariant d'une forme  $f$  écrite comme précédemment est une combinaison

$$\sum \lambda \prod (ab \dots s),$$

où les  $\lambda$  sont des constantes numériques et où  $(ab \dots s)$  désigne le déterminant de taille  $r$  dont chaque ligne est formée d'une série de coefficients symboliques de  $f$ .

Ces principes généraux sont bien mis en valeur par Clebsch, qui affirme en particulier qu'ils devraient être pris comme définition même des formes et des invariants pour les recherches futures [CLEBSCH 1861, p. 1]. Mais l'article de Clebsch est loin de se réduire à la mise en place et la démonstration de ces principes : sur les 62 pages qu'il comporte, près de 50 sont consacrées aux applications, qui concernent la théorie de l'élimination et, de façon non indépendante, la géométrie des courbes et des surfaces algébriques.

Ainsi, une application importante consiste en la détermination des invariants d'une forme dont les variables sont liées entre elles par une relation linéaire. Comme Clebsch le souligne, il s'agit « d'une question de la plus haute importance pour la géométrie, dans la mesure où elle concerne les points d'intersection d'une courbe avec une droite, ou les propriétés d'une intersection plane d'une surface algébrique<sup>2</sup>. » Le cas de l'intersection d'une courbe algébrique  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  avec une droite  $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$  correspond à l'étude des propriétés de la forme binaire obtenue en éliminant une inconnue dans le système

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \end{cases}$$

La forme ternaire  $f$  étant notée symboliquement  $f = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^n = (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^n$ , le théorème démontré par Clebsch est que chaque invariant de la forme obtenue par élimination est donné par

$$\sum \lambda \prod (abu),$$

où  $\sum \lambda \prod (ab)$  est l'expression symbolique d'un invariant de la forme  $\tilde{f} = (a_1x_1 + a_2x_2)^n = (b_1x_1 + b_2x_2)^n$ .

Une utilisation que propose Clebsch de ce théorème est la recherche de l'équation tangentielle d'une courbe donnée, c'est-à-dire d'une équation  $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$  dont les solutions  $(u_1 : u_2 : u_3)$  correspondent aux droites  $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$  tangentes à la courbe. Cette question revient en effet à déterminer les  $u_1, u_2, u_3$  tels que la forme obtenue par élimination entre  $f = 0$  et

2. « Diese Frage ist für die Geometrie von höchster Bedeutung, insofern es sich um die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve handelt, oder um die Eigenschaften eines ebenen Schnitts einer algebraischen Fläche. » [Clebsch 1861, p. 26].

$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$  possède une racine double, c'est-à-dire que son discriminant doit s'annuler : l'expression symbolique de ce discriminant étant connue, l'équation cherchée s'en déduit immédiatement. Pour une courbe quartique, par exemple, l'expression connue  $i^3 - 27j^2$  du discriminant d'une forme quartique binaire, avec  $i = \frac{1}{2}(ab)^4$  et  $j = \frac{1}{6}(ab)^2(bc)^2(ca)^2$ , donne immédiatement l'équation tangentielle  $P^3 - 27Q^2 = 0$ , avec  $P = \frac{1}{2}(abu)^4$  et  $Q = \frac{1}{6}(abu)^2(bcu)^2(cau)^2$ . Ce procédé de « formation ternaire » d'invariants sera abondamment utilisé par Clebsch dans ses futures recherches.

L'exemple décrit à l'instant est un des cas où la théorie des invariants permet à Clebsch d'explicitier l'écriture d'équations d'objets dont l'existence est connue par avance – ici, c'est le principe de dualité de la géométrie projective qui assure qu'une courbe peut toujours être décrite comme une enveloppe de droites, et donc par une équation tangentielle. Si j'ai rencontré d'autres situations analogues dans le corpus des articles publiés de Clebsch, je n'ai en revanche trouvé aucun commentaire de ce dernier sur les raisons pour lesquelles la théorie des invariants serait particulièrement à même d'explicitier des équations. La récurrence de ce thème me semble toutefois significative et met en lumière un aspect intéressant de la pratique des invariants de Clebsch.

En termes disciplinaires, cette première situation montre une configuration où des résultats sur la théorie des invariants sont d'abord développés pour eux-mêmes puis appliqués à une question de géométrie. Celle-ci est traduite en termes de recherche de propriétés d'une certaine équation algébrique et la théorie des invariants intervient alors pour exprimer ces propriétés et les changer en formations ternaires qui sont interprétées directement comme des équations (tangentes) de courbes.

La deuxième situation que j'ai étudiée concerne ce que Clebsch appelle le problème des normales. Sans entrer dans les détails ici, notons simplement que la configuration disciplinaire à l'œuvre est un peu différente car, si un problème géométrique est initialement traduit en termes d'équations algébriques et d'annulations d'invariants, les techniques relatives à ces derniers ne produisent pas des équations qui sont directement interprétées géométriquement ; elles servent plutôt à transformer (et, dans un certain cas, à identifier) les équations en jeu qui sont, dans un deuxième temps, vues comme définissant des lieux géométriques.

Le troisième cas technique analysé est celui de la recherche d'une interprétation géométrique de résultats relevant de la théorie des équations, les invariants permettant de réaliser concrètement cette interprétation. Il s'agit de l'approche par Clebsch de l'équation du cinquième degré, que j'avais déjà analysée en partie dans [LÊ 2017]. Ces travaux de Clebsch [1871] prennent notamment pour acquis les résultats d'Hermite et de Kronecker de la fin des années 1850 sur le sujet [PETRI et SCHAPPACHER 2004 ; GOLDSTEIN 2011]. Aussi Clebsch considère-t-il l'équation du cinquième degré comme résolue (par les fonctions elliptiques) dès lors qu'elle est ramenée ou bien à la forme de Jerrard  $x^5 - x - a = 0$ , celle-ci permettant de faire le lien avec la réduite de degré 5 de l'équation modulaire de degré 6, ou bien à la forme correspondant à l'équation du multiplicateur pour la

transformation des fonctions elliptiques.

Deux interprétations géométriques sont en fait proposées par Clebsch. La première est basée sur l'idée de transformer l'équation quintique générale en une équation du même degré dont certains invariants s'annulent, de telles annulations correspondant à des propriétés particulières de l'équation – cette approche avait été exploitée par Hermite et Gordan dans le cas de l'équation du quatrième degré quelques années auparavant. Clebsch montre ainsi que si un certain invariant  $C$  d'une forme binaire quintique est égal à 0, cette forme peut se ramener à une forme de Jerrard (homogène) par simple changement linéaire des variables. Pour cette démonstration, qui ne fait pas intervenir de géométrie, Clebsch se base sur plusieurs résultats de lui-même ou de ses contemporains sur les formes quintiques, dont des théorèmes sur la « représentation typique » de ces formes et leurs covariants.

La question, pour Clebsch, revient donc à la possibilité de ramener toute équation du cinquième degré  $f(\lambda) = 0$  (ou sa forme homogénéisée) à une forme pour laquelle l'invariant  $C$  s'annule. Par définition des invariants, la transformation sous-jacente ne peut être linéaire, de sorte que Clebsch s'intéresse aux transformations quadratiques

$$\xi = \frac{x_1 + x_2\lambda + x_3\lambda^2}{y_1 + y_2\lambda + y_3\lambda^2},$$

dont il interprète les coefficients comme les coordonnées homogènes  $(x_1 : x_2 : x_3)$ ,  $(y_1 : y_2 : y_3)$  de deux points du plan. Un point clé de la démonstration de Clebsch est qu'une telle transformation a pour effet de faire disparaître un invariant donné  $I$  si et seulement si la droite joignant ces deux points est tangente à la courbe définie par l'équation tangentielle  $\mathcal{S} = 0$ , où  $\mathcal{S}$  désigne la formation ternaire construite à partir de  $I$  en suivant le procédé symbolique démontré en 1861.

Tout se ramène donc à la possibilité de trouver une tangente à la courbe  $\mathcal{E} = 0$  associée à l'invariant  $C$ . Alors que cela est bien entendu possible de manière générale, il s'agit en fait de pouvoir déterminer une tangente à  $\mathcal{E} = 0$  ayant une équation avec des coefficients adéquats, le problème étant de ne pas introduire d'irrationalité que n'autoriserait pas la résolution de l'équation du cinquième degré. Pour cela, tout un travail géométrique est mis en œuvre, consistant à transformer birationnellement  $\mathcal{E} = 0$  en une courbe pour laquelle l'existence d'une telle tangente est assurée, l'argument final étant d'ailleurs fourni par une équation de la géométrie.

La deuxième interprétation géométrique de la théorie de la quintique ne fait pas intervenir la théorie des invariants. Elle consiste à considérer un autre type de transformation non linéaire, à savoir une transformation de Tschirnhaus  $\xi = a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3 + e\lambda^4$ , en cherchant à déterminer des coefficients  $a, \dots, e$  tels que les coefficients des puissances  $\xi^2$ ,  $\xi^3$  et  $\xi^4$  de l'équation transformée s'annulent. Compte tenu des relations entre les coefficients d'une équation et ses racines, si

$\xi_1, \dots, \xi_5$  sont les racines de l'équation transformée, les conditions demandées sont donc

$$\sum_{i=1}^5 \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^5 \xi_i^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^5 \xi_i^3 = 0,$$

ce qui s'exprime aussi en fonction des coefficients  $a, \dots, e$  par des équations de la forme

$$\Phi(a, \dots, e) = 0, \quad \Psi(a, \dots, e) = 0, \quad X(a, \dots, e) = 0,$$

où  $\Phi, \Psi, X$  sont des formes homogènes de degrés 1, 2 et 3, respectivement. Géométriquement, la première de ces équations permet de voir  $a, \dots, e$  comme des coordonnées pentaédriques de l'espace, c'est-à-dire que l'une d'elles peut être considérée comme fonction linéaire des autres, qui sont alors interprétées comme quatre coordonnées homogènes de l'espace. De ce point de vue, les deux autres équations définissent alors respectivement une surface quadrique et une surface cubique, et la détermination d'une transformation adéquate de Tschirnhaus revient donc à la détermination d'un point sur la courbe du sixième ordre qui est l'intersection de ces deux surfaces. Là encore, le problème (implicite) pour Clebsch est de montrer qu'il existe au moins un point de cette courbe dont les coordonnées puissent s'exprimer avec des irrationnelles adéquates.

Notons enfin que Clebsch étudie aussi de manière approfondie la surface cubique définie par les équations

$$\sum_{i=1}^5 \xi_i = \sum_{i=1}^5 \xi_i^3 = 0,$$

bien que les résultats trouvés ne soient pas utilisés pour son interprétation de la théorie de l'équation du cinquième degré. Il s'agit de la surface qualifiée de « diagonale » par Clebsch et qui sera modélisée en plâtre peu de temps après [ROWE 2013; LABS 2015; LÊ 2015a].

#### 4.1.2 Un programme interrompu

Plusieurs publications datant des derniers mois de la vie de Clebsch montrent que celui-ci, avant d'être subitement emporté par la diphtérie, avait commencé à établir un certain programme de recherche sur les formes et les invariants, visant entre autres à unifier des parties de l'algèbre et de la géométrie par le biais de ces objets. Par exemple, s'appuyant sur les résultats d'un article définissant une « tâche fondamentale de la théorie des invariants » [CLEBSCH 1872c], Clebsch introduit des « connexes », objets géométriques dont l'étude doit « inclure en elle-même toute la géométrie analytique du plan<sup>3</sup> » [CLEBSCH 1873, p. 203]. D'autres écrits ont par ailleurs pour objectif de faire des synthèses de la théorie des formes cubiques ternaires [CLEBSCH et GORDAN 1873], une motivation dans ce cas étant les applications à la géométrie, ou de la théorie des formes

3. « Dieses Gebilde, dessen Untersuchung so zu sagen die ganze analytische Geometrie der Ebene in sich schliesst [...] »

binaires de degré quelconque [CLEBSCH 1872b].

Dans l'article faisant la présentation de cette dernière référence, Clebsch explique notamment que l'algèbre est historiquement ancrée dans la théorie des équations et dans la géométrie et que, bien que ces deux domaines étaient en apparence déconnectés l'un de l'autre, les mathématiciens du passé ont reconnu que « c'est l'étude de ce qui reste fixe par de multiples réorganisations qui apparaît comme le plus important et le plus utile<sup>4</sup> ». Visant ici la recherche de résolvantes d'équations algébriques, d'une part, et de propriétés de courbes et surfaces algébriques invariantes par projection, d'autre part, Clebsch explique que c'est la notion de forme algébrique qui offre un point de vue commun et que « la tâche de l'algèbre, de la manière la plus générale possible, est de trouver les propriétés des fonctions homogènes qui restent inchangées par transformations algébriques univoques<sup>5</sup> », en admettant toutefois que, au moment où il écrit, seul le cas des transformations linéaires (et donc de la théorie des invariants et des covariants) a vraiment été étudié.

Ces éléments qui visent à unifier des parties de l'algèbre et de la géométrie en insistant sur le rôle des transformations et des invariants rappellent bien sûr, avec l'année 1872, le *Programme d'Erlangen* de Klein, bien que les associations disciplinaires et les accents mis sur tel ou tel aspect ne soient pas tout à fait les mêmes – la notion de groupe, en particulier, est complètement absente de chez Clebsch. J'ai donc proposé de voir dans les travaux de Clebsch sur les invariants une autre source possible d'inspiration (indirecte) de Klein, mais aussi la simple existence d'une autre proposition visant à rapprocher algèbre et géométrie au début des années 1870.

La mise en place d'un programme de recherche impliquant en son cœur formes, invariants et géométrie est en tout cas une des trois facettes des activités de Clebsch en théorie des invariants, les deux autres étant, d'une part, sa participation à la disciplinarisation de la théorie, avec l'écriture d'ouvrages de synthèse et le développement de résultats clés portant sur la théorie elle-même et, d'autre part, la prolifération des applications de la théorie des invariants à diverses situations, notamment géométriques.

## 4.2 Invariants et surfaces algébriques par la textométrie

Comme expliqué précédemment, j'ai aussi abordé la théorie des invariants dans mes travaux sur la textométrie. Le prochain chapitre est dévolu à ces travaux et j'y présenterai le contexte et le cadre général qui m'ont amenés à m'intéresser à cette approche des textes mathématiques. Disons simplement ici que l'idée m'est venue initialement de recourir à la textométrie pour voir dans quelle mesure il était possible de catégoriser des textes en domaines disciplinaires en inspectant

---

4. « Es war das Studium des Festen im Wechsel mannigfacher Umgestaltung, was [...] bald als das Wichtigste und Förderlichste erschien. » [Clebsch 1872a].

5. « Man darf wohl als die Aufgabe der Algebra in allgemeiner Weise das Problem hinstellen, die Eigenschaften der homogenen Functionen zu suchen, welche bei beliebigen eindeutigen algebraischen Umformungen derselben erhalten bleiben. » [CLEBSCH 1872a, p. 323].

de manière complète leur vocabulaire et leur grammaire, tout comme les textes littéraires peuvent être classifiés en genres ou en mouvements littéraires à l'aide de tels indicateurs. Dans l'article [Lê 2022], j'ai cherché à faire un premier pas dans cette direction en explorant les différences entre des textes techniques relevant de la géométrie et de l'algèbre. Plus précisément, j'ai proposé une étude comparative de deux corpus (collectifs) formés d'articles écrits en allemand et publiés dans les *Mathematische Annalen* entre 1869 et 1898 : la théorie des surfaces algébriques (75 articles) et la théorie des invariants (105 articles).

La première partie de cette étude contrastive s'appuie sur la notion de cooccurrent d'un terme, ce qui désigne un mot qui, du point de vue statistique, apparaît de manière anormalement élevée dans les voisinages du terme en question. J'ai choisi d'examiner les cooccurrents de *Gleichung* (« équation »), terme employé de façon tout à fait commune dans l'un et l'autre des corpus. Tandis que certains mots apparaissent en tant que cooccurrents de *Gleichung* dans chacun des deux corpus, d'autres leur sont propres, et j'ai axé mon étude sur ceux-là.

Parmi ces cooccurrents, certains indiquent des thématiques claires : *homogen* et *Koordinate* n'apparaissent que du côté de la théorie des surfaces et rappellent que la plupart des équations intervenant dans ce corpus sont des équations définissant des objets géométriques dans un plan ou un espace projectif – comme je le soulignerai à nouveau dans le chapitre suivant, toutes les interprétations des indicateurs statistiques s'appuient sur un retour constant aux textes, éventuellement via des concordanciers. Du côté de la théorie des invariants, les cooccurrents *Lösung*, *Auflösung* et *fünfft* sont les traces d'une série d'articles qui prennent comme objet d'étude la résolution des équations algébriques (et notamment celle du cinquième degré) à l'aide de la théorie des invariants.

D'autres termes, qui apparaissent dans la liste des cooccurrents de *Gleichung* uniquement du côté de la théorie des invariants, renvoient à d'autres facettes du travail mathématique. Ainsi, *Seite* (qui renvoie dans l'immense majorité des cas à un « côté » ou « membre » d'une équation), *rechts* et *links* (« de droite » et « de gauche ») activent le champ lexical des manipulations et des observations d'équations. La recherche de la bonne interprétation à donner à cette caractéristique m'a conduit à indiquer que les transformations successives d'équations sont bien plus nombreuses dans le corpus des invariants, mais aussi que, contrairement au cas des surfaces algébriques, un des deux membres de ces équations n'est pas systématiquement égal à 0 (ce qui est la forme typique des équations définissant les objets géométriques algébriques), entraînant l'utilisation d'adverbes dont la fonction est de préciser de quel membre il s'agit.

L'examen des verbes pleins les plus employés de part et d'autre, ou les plus spécifiques à l'une des parties, conforte cette interprétation. En particulier, il existe une série de verbes que j'ai appelés « verbes d'action géométrique », tels que « couper », « toucher » ou « rencontrer », qui n'existent presque que dans le corpus des surfaces algébriques et qui ont la particularité de n'avoir comme sujets que des noms (ou pronoms) renvoyant à des objets comme des points ou des droites.

Au contraire, les verbes spécifiques de la théorie des invariants (« remplacer », « disparaître », « exprimer », « multiplier »...) ont plus souvent comme sujets une personne (réelle ou non) chargée de réaliser les actions décrites, souvent sur les équations.

D'autres différences entre les deux corpus permettant de compléter cette image m'ont paru remarquables. Il s'agit cette fois de déséquilibres dans la distribution des catégories grammaticales. En particulier, la surabondance, du côté des surfaces algébriques, de noms communs, d'articles, ainsi que de pronoms relatifs attributifs ou substitutifs, est une autre manifestation de cette forme d'écriture où les objets peuvent aussi bien être les compléments que les sujets des phrases mathématiques. Dans les articles sur les surfaces algébriques, les phrases sont ainsi plus amples, riches en propositions relatives, faisant intervenir des noms d'objets en toutes lettres et des verbes pleins très spécifiques, tandis que dans ceux relevant de la théorie des invariants, les phrases sont plus courtes et tournées vers le travail sur les formules centrées et leurs manipulations.

Toutes ces différences montrent donc bien que deux corpus associés à des domaines différents possèdent des spécificités lexicales liées tant aux objets mathématiques qu'à un certain type de pratique, et que des spécificités grammaticales se superposent à cela. Il serait bien sûr intéressant de voir dans quelle mesure ces caractéristiques évoluent dans le temps : par exemple, une hypothèse est que la sur-représentativité des catégories nominales et des verbes d'action géométrique que l'on observe pour les surfaces algébriques s'atténue au fur et à mesure des réécritures de la géométrie algébrique au  $xx^e$  siècle, qui impliqueraient moins de désignations du langage naturel et plus de symboles et d'équations pour exprimer des propriétés d'intersection, d'alignement ou d'inclusion.



## Chapitre 5

# Textométrie

En 2017, j'ai été intrigué par un article de diffusion des mathématiques de François Husson écrit à l'occasion du Forum Mathématiques vivantes, dont le thème cette année-là était « Mathématiques et langage » [HUSSON 2017]. Les quelques paragraphes de cet article montraient comment un traitement statistique de l'ensemble des mots utilisés par des auteurs littéraires permet de regrouper ces derniers par mouvements littéraires et de mettre en évidence des termes qui leur sont caractéristiques. L'idée m'est ainsi venue de voir dans quelle mesure ce type d'approche pouvait discriminer des textes ou des passages de textes relevant de l'algèbre, de la géométrie ou d'un autre domaine mathématique, sans autre référence que les mots qui les composent. En me lançant dans cette voie, j'espérais en outre pouvoir mettre au jour non seulement des marqueurs lexicaux de groupements de textes mais aussi des marqueurs grammaticaux.

Après une période d'acclimatation générale avec le sujet, j'ai commencé par jauger les possibilités de la lexicométrie en m'appuyant sur les travaux d'Étienne Brunet [1978, 2016]. Ces travaux utilisent le logiciel Hyperbase ; mais la version que j'avais alors à disposition était datée et peu adaptée à mon propre ordinateur, de sorte que je n'ai jamais réussi à en tirer pleinement parti. En parallèle, la poursuite de mes lectures m'a fait bifurquer vers la textométrie, variante de la lexicométrie dont les partisans insistent sur la nécessité d'allier le traitement statistique avec un constant retour aux textes [PINCEMIN et HEIDEN 2008 ; PINCEMIN 2020]. Profitant enfin de la proximité géographique de Serge Heiden et Bénédicte Pincemin (IHRIM, ENS Lyon) pour leur poser de vive voix une première rafale de questions, je me suis ainsi engagé sur la voie qu'ils avaient ouverte en sciences sociales à l'aide du logiciel libre TXM.

La question des corpus s'est ensuite posée. Je voulais me focaliser sur des textes mathématiques techniques, mais il s'agissait d'en trouver dont je puisse maîtriser suffisamment le contenu pour interpréter et contrôler les calculs statistiques tout en permettant d'obtenir des résultats historiques nouveaux, l'exploration pure de la méthodologie me semblant insuffisante pour convaincre mes lecteurs et lectrices de l'intérêt de l'approche. Cette question s'est doublée d'une autre, plus propre à la nature des textes : fallait-il privilégier un auteur, une revue, un domaine mathématique,

une tranche chronologique ? Si mon choix initial s'est naturellement porté sur le corpus des articles publiés de Clebsch, les premiers résultats obtenus m'ont paru soit trop évidents, soit trop dépendants de facteurs que je ne pouvais pas encore maîtriser, comme ceux des domaines mathématiques et du poids de l'individualité. J'ai finalement opté pour un corpus collectif et thématique, formé des articles portant sur le sujet des surfaces algébriques, écrits en langue allemande et publiés dans les *Mathematische Annalen* entre 1869 et 1898 : cela représente 75 articles, écrits par 26 auteurs.

## 5.1 Surfaces algébriques

Une difficulté à laquelle j'ai été confronté dès mes tout premiers essais est celle de la gestion des formules mathématiques dans le traitement textométrique. Même en supposant que je dispose de fichiers-textes où les formules seraient codées de manière complètement standardisée, la question de savoir ce qui compte comme un mot au sein d'une formule – la détection de mots étant à la base même de la textométrie – me semblait impossible à résoudre de façon satisfaisante. Considérons par exemple la simple formule  $f_0(x) = 0$  : faut-il compter chaque caractère, comme  $f$ , comme un mot ? Faut-il sinon considérer que  $f_0$  est un mot, que  $f_0(x)$  est un mot, que  $f_0(x) = 0$  est un mot ? Toutes ces possibilités sont défendables du point de vue sémantique, mais elles conduisent à des comptages statistiques très différents à l'échelle d'un corpus entier, allant de la répétition extrême de certains caractères à la prolifération d'hapax, c'est-à-dire de mots survenant une seule fois.

Devant ces problèmes méthodologiques, j'ai opté pour la solution radicale consistant à dénombrer les formules mathématiques tout en effaçant leur contenu : le formatage informatique choisi est de remplacer toutes les formules situées dans les paragraphes de texte par des symboles \* et toutes les formules centrées hors paragraphe par des symboles #, en prenant garde de toujours respecter la syntaxe des phrases originales.

Avec ces conventions, le corpus des surfaces algébriques compte 632 926 mots. Dans l'article [LÊ 2022], un premier aperçu sur les statistiques de ces mots est d'abord proposé, notamment avec la présentation de ceux qui sont les plus fréquents. Le dynamisme du vocabulaire est aussi mis en évidence : même sur un intervalle relativement court de 30 ans et sur un sujet apparemment bien délimité, ce vocabulaire, loin d'être figé, est constamment alimenté par de nouveaux termes qui peuvent refléter l'apparition de nouvelles thématiques ou l'utilisation de méthodes particulières.

La recherche des cooccurrents permet aussi de mettre en évidence quelques phénomènes intéressants, relatifs à la coloration sémantique des lemmes<sup>1</sup> *geometrisch* et *algebraisch* (« géométrique », « géométriquement », « algébrique », « algébriquement ») au sein du corpus. Ainsi, *geometrisch*, en association avec *rein* (« pur », « purement »), renvoie souvent à des cheminements

---

1. Le lemme associé à un mot donné est essentiellement l'entrée qui lui correspondrait dans un dictionnaire.

de pensée, des démonstrations ou des outils techniques, qui sont alors aussi régulièrement qualifiés de « simples ». D'autres cooccurrents, comme *Interpretation* ou *Bedeutung* (« signification ») apparaissent en lien avec les équations et autres formules qu'il s'agit d'interpréter géométriquement. Au contraire, ce type d'association sémantique n'existe pas pour *algebraisch*, qui est en fait principalement utilisé par Sophus Lie pour caractériser des objets issus *a priori* de la géométrie différentielle. L'étude des cooccurrents dévoile ainsi quelques différences notables sur le rôle de la géométrie et de l'algèbre dans les textes considérés.

J'ai décrit dans le chapitre précédent l'étude contrastive exogène que j'ai effectuée à l'aide du corpus sur la théorie des invariants.

La dernière partie de l'analyse textométrique du corpus des surfaces algébriques est basée sur une classification ascendante hiérarchique de ses textes. De façon générale, le principe d'une telle classification est de partir d'une liste de mots issus d'une requête quelconque et, une notion de distance lexicale étant définie sur l'ensemble des textes du corpus, d'apparier deux à deux successivement les textes (ou les groupements obtenus à une étape antérieure) les plus proches. Ces appariements permettent ensuite d'obtenir une division du corpus en plusieurs classes lexicales : le nombre de ces classes est *a priori* arbitraire mais des indicateurs numériques calculés au cours de l'algorithme permettent d'en estimer une valeur optimale [LEBART, PINCEMIN et POU DAT 2019, ch. 7].

Dans le cas des surfaces algébriques, la classification a été lancée sur la base des mots correspondant à des noms communs, noms propres, adjectifs, adverbes, verbes pleins (c'est-à-dire ni auxiliaires ni modaux) et symboles \*, # représentant les formules mathématiques. Six classes lexicales ont été ainsi distinguées et j'ai choisi de les étudier en croisant plusieurs points de vue, dont celui des classifications disciplinaires proposées par le *Jahrbuch* (et, dans une moindre mesure, par les *Mathematische Annalen*) et celui des réseaux de citations.

Un résultat important est que les classes lexicales coïncident en grande partie avec autant de réseaux de citations, tout en incluant dans les classes les quelques textes isolés en termes de références [GOLDSTEIN 1999, p. 205]. En revanche, la classification obtenue ne reflète que partiellement les divisions disciplinaires du *Jahrbuch* : la quatrième classe, par exemple, englobe tous les textes que le *Jahrbuch* situe dans sa section de géométrie énumérative, ainsi que quelques articles qui n'y sont pas – alors qu'ils abordent bien des questions énumératives. D'autres classes lexicales ont des provenances dans le *Jahrbuch* plus variées : c'est le cas de la deuxième classe, relative aux complexes et congruences de droites et leurs liens avec la surface de Kummer, et dont les articles sont éparpillés dans diverses sections de géométrie ou d'analyse du *Jahrbuch*. Il est également intéressant de noter que certains auteurs, à l'image de Rudolf Sturm, interviennent dans plusieurs classes lexicales, et que la classification lexicale ne coïncide pas avec les réseaux de personnes : par exemple, Clebsch et son élève Klein sont deux participants prolifiques au corpus, mais apparaissent dans des classes distinctes. Encore une fois, cette constatation entre en écho

avec ce qui a déjà été décrit pour les réseaux de textes [GOLDSTEIN 1999].

Certaines classes, enfin, sont dotées de spécificités grammaticales remarquables – je rappelle qu’un mot (ou une liste de mots, ou une catégorie grammaticale, etc.) est dit spécifique à un corpus s’il y apparaît de manière anormalement élevée dans un sens statistique précis [LAFON 1980]. Ainsi, la cinquième classe, relative à la « nouvelle géométrie synthétique », est caractérisée par une énorme sur-représentativité des symboles \* et une relative sous-représentativité des noms communs et des formules centrées symbolisées par #. Cela renvoie à une manière d’écrire les mathématiques propre à cette géométrie synthétique, où des phrases et paragraphes interminables ne comportent aucune formule centrée mais utilisent des symboles mathématiques pour désigner les nombreux objets géométriques en jeu, le nom dans le langage naturel de ces derniers étant même très souvent complètement effacé au profit des symboles seuls (voir la figure 5.1). Au contraire, la sixième classe lexicale est caractérisée par une part anormalement élevée des catégories nominales que sont les noms communs, les articles et les pronoms relatifs, impliqués dans des phrases longues où moins de formules mathématiques apparaissent (voir la figure 5.2).

Autrement dit, des différences grammaticales analogues à celles observées entre le corpus des surfaces algébriques et celui de la théorie des invariants se retrouvent à un niveau plus fin de division disciplinaire : c’est ce type de résultats de discrimination de textes qui m’intéressait en me lançant dans la textométrie.

## 5.2 Le style de Charles Hermite

Le bicentenaire de naissance de Charles Hermite, en 2022, a donné lieu à un colloque organisé par Frédéric Brechenmacher et Catherine Goldstein, qui m’ont invité à y donner un exposé. Cela a été l’occasion pour moi d’appliquer les méthodes textométriques à une nouvelle situation, en abordant d’autres questions. Cherchant en effet à rendre compte de manière analytique des impressions de lecture que me laissaient les écrits d’Hermite, j’ai utilisé la textométrie pour caractériser son style, cette notion faisant davantage référence aux travaux issus de la stylistique littéraire [HERSCHBERG PIERROT 2005; HIMY-PIÉRI, CASTILLE et BOUGAULT 2014; GALLARD 2019] qu’à ceux d’histoire et philosophie des sciences et des mathématiques [CHEVALLEY 1935; GAYON 1996; MANCOSU 2009/2021; ROWE et al. 2010; RABOUIN 2017]. L’objectif n’était en effet pas d’examiner la manière dont certains domaines mathématiques s’articulent dans les travaux d’Hermite, ni d’y évaluer le rôle de valeurs telles que l’intuition ou de la rigueur, par exemple. Il s’agissait plutôt de trouver un moyen adéquat de décrire ce que je percevais comme étant particulier dans sa manière de narrer les mathématiques<sup>2</sup>.

---

2. L’idée de rendre compte des impressions de lecture d’un texte, liées cette fois au contenu mathématique propre, est abordée dans [GAUTHIER et LÊ 2019], où Sébastien Gauthier et moi-même avons cherché à discuter des aspérités de l’article de Mordell sur l’équation  $y^2 - k = x^3$ .

Haben wir nun umgekehrt auf einer  $G^2$  drei Gerade  $g_1, g_2, g_3$  und auf einer  $C^2$  drei Gerade  $c_1, c_2, c_3$  so, dass  $g_1$  die  $c_2$  und  $c_3$ ,  $g_2$  die  $c_3$  und  $c_1$ ,  $g_3$  die  $c_1$  und  $c_2$  schneidet, so giebt es eine Fläche 2. Grades  $F^2$ , in Bezug auf welche  $g_1$  und  $c_1, g_2$  und  $c_2, g_3$  und  $c_3$  reciproke Polaren sind. Ordnen wir nämlich den Punkten  $(g_1, c_2), (g_1, c_3)$  die Ebenen  $[c_1, g_2], [c_1, g_3]$  und den Punkten  $(c_1, g_2), (c_1, g_3)$  die Ebenen  $[g_1, c_2], [g_1, c_3]$  als Polaren zu, so bilden alle dadurch bestimmten Flächen 2. Grades ein Büschel (oder eine Schaar) durch ein windschiefes Vierseit, dessen Ecken und Seitenflächen die Doppellelemente der durch jene Zuordnung auf  $g_1$  und  $c_1$  bestimmten Involutionsen sind. Dem Punkte  $(g_2, c_3)$  entsprechen daher in Bezug auf

FIGURE 5.1 – Extrait d'un article de Friedrich Schur [1881], de la cinquième classe lexicale.

Verbindet man je zwei aus demselben Punkte der Doppelcurve entspringende Punkte ihrer Abbildung durch eine Gerade, so umhüllen diese eine Curve, deren Tangenten den Punkten der Doppelcurve eindeutig entsprechen, und deren Geschlecht daher dem der Doppelcurve selbst gleich ist.

Man sieht daraus, dass die Abbildung der Doppelcurve ausser den oben angeführten Doppelpunkten noch gewisse Specialitäten besitzt, welche sie von anderen Curven mit gleichem Grade und Geschlecht unterscheiden. Sind nämlich die Coordinaten eines Punktes der Doppelcurve durch Ausdrücke der Form

$$\varrho x_i = \varphi_i(\lambda, \mu)$$

gegeben, wo zwischen den Parametern  $\lambda, \mu$  eine algebraische Gleichung

$$\psi(\lambda, \mu) = 0$$

stattfindet, so müssen die Coordinaten einer Geraden in der Abbildung, welche die beiden einem Punkte der Doppelcurve entsprechenden Punkte verbindet, sich ähnlich darstellen; die Coordinaten eines Punktes der Abbildung der Doppelcurve müssen also die Form annehmen:

$$\varrho \xi_i = \chi_i(\lambda, \mu) + \vartheta_i(\lambda, \mu) \sqrt{\Omega(\lambda, \mu)},$$

wo  $\chi_i, \vartheta_i, \Omega$  rationale Functionen ihrer Argumente sind. Ist also

FIGURE 5.2 – Extrait d'un article de Clebsch [1869], de la sixième classe lexicale.

Des commentaires allant dans cette direction avaient déjà été proposés. Ainsi, dans ses travaux sur les questions d'irrationalité et de transcendance, Michel Serfati écrivait :

Au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle (1761), Lambert, ce compromis entre le prolétaire et l'orgueilleux autodidacte, affiche la couleur et le but poursuivi, dès le début de l'article. Il expose ensuite clairement ses intuitions mathématiques [...] et recourt assez fréquemment à ce qu'on pourrait appeler des métaphores légères, et aussi à des formes verbales actives, conséquences grammaticales d'un « je » explicite dans tout l'article. Tout ceci est caractéristique d'un style où le sujet est bien présent dans son texte. « *Car s'il y fallait une fraction fort composée, pourquoi telle plutôt que telle autre ?* », « *Mais il faudra que je m'en serve...* » [...]

Trente ans plus tard, Legendre (1795) fait prédominer les formes verbales passives, caractéristiques du style contemporain [...]. Chez Wantzel, (1837), le style est plat, sans métaphore, ni verbe d'action, et les tournures verbales sont presque entièrement passives. [...]

Chez Hermite, un homme à la personnalité modeste, c'est presque le style moderne, synthétique, neutre dans la forme et le fond, caractéristique de la moderne exclusion de l'auteur dans le texte mathématique. [... P]our ce qui est de la forme, c'est un envahissement des tournures passives comme dans ces deux exemples qu'on comparera utilement aux citations données de Lambert : « *Voici à cet égard un premier résultat qui s'offre immédiatement* » et « *C'est cette considération qui a servi de point de départ...* ». [SERFATI 1992, p. 18-19]

En revanche, une tout autre description du style d'Hermite était donnée par C. Goldstein au cours d'une discussion sur les probables sources de jeunesse d'Hermite :

Plus difficile à cerner, mais assez caractéristique, la saveur de la prose mathématique d'Hermite elle-même rappelle fortement au lecteur ces auteurs français [Lagrange, Legendre, Cauchy, Fourier]. Le style est discursif et orienté vers la description des processus<sup>3</sup>. [GOLDSTEIN 2007, p. 398]

Les deux tableaux ainsi brossés semblent contradictoires, mais il faut garder à l'esprit qu'ils ne se rapportent pas aux mêmes écrits d'Hermite, celui de M. Serfati s'intéressant exclusivement au texte de 1873 sur la transcendance de  $e$ .

Quoi qu'il en soit, ces deux citations rappellent aussi le style est avant tout une notion relative : toute appréciation de l'écriture d'un auteur se réalise (même implicitement) vis-à-vis d'un ou plusieurs autres auteurs, ou vis-à-vis de ce qui est vu comme les normes d'une époque. Dans le cas d'Hermite, j'ai choisi Camille Jordan comme point de comparaison, leurs corpus étant de taille à peu près équivalente et leurs sujets de recherche proches sans être identiques. De plus, ma propre connaissance de Jordan et de la littérature historique associée me semblait intéressante dans l'optique d'interpréter les résultats issus des calculs statistiques.

Mon étude stylistique (ou stylométrique, dans la mesure où elle se base sur un traitement statistique) s'est concentrée sur les écrits techniques d'Hermite et de Jordan, tels que publiés dans

---

3. « More difficult to pinpoint, but quite characteristic, the flavour of Hermite's mathematical prose itself reminds the reader strongly of these French authors [Lagrange, Legendre, Cauchy, Fourier]. The style is discursive and oriented towards the description of processes. »

leurs Œuvres complètes respectives, ce qui représente 186 textes et 364 412 mots pour le premier, 122 textes et 591 732 mots pour le deuxième. Divisée en deux parties, elle s'intéresse à la richesse lexicale des deux mathématiciens, d'une part, et à leurs spécificités lexicales et grammaticales, d'autre part [LÊ 2024].

La question de richesse lexicale est abordée en suivant deux axes classiques [MULLER 1977], un troisième, relatif de la notion de sophistication lexicale, n'ayant pas donné de conclusions satisfaisantes [LÊ 2024, p. 212-214].

Le premier axe est celui de la diversité lexicale, ce qui renvoie à l'étude de l'étendue des vocabulaires de Hermite et de Jordan, c'est-à-dire de l'ensemble des mots que chacun utilise, comptés sans multiplicité. La comparaison n'est pas si directe que l'on pourrait penser, notamment parce que la différence des tailles des corpus (en termes de nombres de mots) ne peut pas être traitée de manière linéaire [MULLER 1977; LEBART, PINCEMIN et POUDAT 2019, p. 50]. Recourant ainsi à un procédé de réduction de corpus déjà proposé en études littéraires [LABBÉ et HUBERT 1997], la plus grande diversité lexicale de Hermite apparaît assez nettement, la différence relative entre son vocabulaire et celui de Jordan étant d'environ 8 % en sa faveur. Par ailleurs, cette même étude permet de souligner l'importance de considérer la particularité du corpus hermitien de contenir plus d'un tiers (en termes de nombre de publications) de lettres ou d'extraits de lettres publiées, ce qui représente un peu plus du quart du nombre total de mots. À l'inverse, Jordan ne publie qu'un seul extrait de lettre, par ailleurs très court. Les calculs montrent alors que les articles d'Hermite qui ne sont pas des lettres sont encore dotés d'un vocabulaire plus étendu que chez Jordan, mais dans une moindre mesure puisque la différence relative est cette fois de 6 %. Quant à la comparaison des lettres de Hermite avec le corpus de Jordan, ce taux atteint les 10 %, ce qui montre aussi que les lettres ont une diversité lexicale plus élevée que les autres publications d'Hermite.

Le deuxième axe concernant la richesse lexicale concerne les hapax, c'est-à-dire les mots utilisés une seule fois dans les corpus. D'abord, les hapax sont bien plus nombreux chez Hermite que chez Jordan (toujours en tenant compte de la différence de taille des corpus), que ce soit en regardant l'ensemble de tous les hapax ou en écartant ceux qui relèvent de catégories grammaticales spécifiques comme les nombres et les mots étrangers, souvent utilisés par Hermite pour citer des titres de références. Ensuite, l'examen du contenu sémantique des hapax révèle des phénomènes notables. Une partie d'entre eux, en effet, est associée au format épistolaire, renvoyant aux thèmes du retard des réponses et des excuses associées. Mais, que ce soit dans les lettres ou non, de nombreux hapax hermitiens comme « mystère », « inattendu » et « stérile » sont aussi liés à l'expression des points de vue mathématiques d'Hermite sur les objets, les théorèmes, les travaux de ses confrères, etc. Cette thématique n'apparaît presque pas chez Jordan, chez qui la seule situation comparable, révélée par des hapax comme « contradicteur », « jugé », « complaisance », est la controverse de 1874 avec Kronecker [BRECHENMACHER 2007].

Les spécificités lexicales et grammaticales d'Hermite et de Jordan, quant à elles, ont été analysées par groupes de catégories grammaticales, que celles-ci soient spécifiques à l'un des deux auteurs ou non.

Les noms communs, adjectifs et adverbes s'avèrent être des catégories grammaticales relativement banales, c'est-à-dire qu'elles ne sont dotées d'une spécificité forte ni chez Hermite ni chez Jordan. Par contre, l'étude des mots les plus spécifiques dans chacune de ces catégories permet de retrouver le réseau sémantique de l'expression des points de vue personnels d'Hermite sur les mathématiques (avec « méthode », « beau », « facile », par exemple) ; elle donne aussi un premier indicateur sur le fait que le raisonnement par l'absurde est singulièrement absent de chez Hermite, le vocabulaire associé étant très spécifique (et même quasiment propre, au sens absolu) à Jordan. L'absence du raisonnement par l'absurde chez Hermite se voit aussi dans les déséquilibres des marqueurs de la négation, d'une part, et des temps et modes verbaux employés, d'autre part, dans la mesure où le conditionnel, le subjonctif et l'imparfait de l'indicatif, utilisés pour exprimer les hypothèses, sont sous-représentés dans son corpus. La sémantique des verbes et leurs sujets employés par nos mathématiciens est également riche d'enseignements. Une grande partie des verbes spécifiques à Hermite renvoie en effet à des actions qui sont portées par le mathématicien, rendu très visible par la prolifération de la première personne du singulier et du pronom impersonnel « on », ce qui renvoie à la description de processus mathématiques en train de se faire : « on en tire », « j'observe », « je vais », etc. Au contraire, les formulations de Jordan impliquent davantage des verbes dont les sujets sont des objets mathématiques, donnant lieu à des formulations où la personne de Jordan s'efface derrière ces objets : « Ce système contiendra », « une partie d'une ligne géodésique sera elle-même géodésique », etc.

Presque toutes les autres catégories grammaticales examinées (verbes au futur, conjonctions de coordination et de subordination, démonstratifs...) font ressortir la vitalité de la prose hermitienne, où l'auteur intervient directement, s'exprime régulièrement sur les objets et les résultats, et commente les mathématiques en train de se faire. Enfin, le cas des pronoms et quantificateurs indéfinis, qui sont très spécifiques à Jordan, montre que l'examen de certains mots-outils est aussi susceptible d'informer sur le contenu mathématique lui-même : la sur-représentation de cette catégorie chez Jordan s'explique par une utilisation massive de mots comme « toutes », « une », « chacun », etc., qui font référence à des ensembles en se rapportant à leurs éléments (que ceux-ci soient individualisés ou non). L'association de ces mots au vocabulaire de la théorie des groupes met donc en évidence certaines prédilections thématiques de Jordan.

Pour résumer la plupart des résultats obtenus dans cette étude stylométrique, j'ai enfin rapidement discuté de la possibilité de décrire Hermite comme un mathématicien-narrateur homodiégétique, au sens classique de Gérard Genette [GENETTE 1972 ; VINCIGUERRA 2019]. Mes conclusions confortent donc plutôt la description du style d'Hermite proposée par C. Goldstein, citée plus haut. Mais j'ai aussi voulu insister sur les apports méthodologiques de mon étude,

l'approche stylométrique permettant de quantifier des impressions de lecture et d'accéder ainsi à une forme d'objectivation de ces dernières – objectivation bien sûr toute relative puisque, comme j'ai pu le souligner à de nombreuses reprises, les méthodes textométriques sont toujours imprégnées des choix de leur utilisateur.

### 5.3 Perspectives

Les deux études présentées dans ce chapitre ont ouvert de nombreuses pistes visant à prolonger et à compléter les résultats obtenus pour le moment. J'aimerais en particulier interroger des corpus plus larges, formés de textes relevant d'autres domaines mathématiques, d'autres époques et d'autres auteurs.

J'ai déjà mentionné qu'il serait intéressant de voir comment les évolutions de la géométrie algébrique au  $xx^e$  siècle s'accompagnent de modifications dans son écriture technique, et si ces modifications tendraient à la rapprocher de l'algèbre, par exemple, du point de vue des distributions grammaticales. De manière plus synchronique, la comparaison (tant lexicale que grammaticale) que j'ai faite entre surfaces algébriques et théorie des invariants pourrait être enrichie en prenant en compte des corpus d'analyse, de théorie des nombres ou de probabilités.

Du côté stylistique se pose naturellement la question de savoir si les différences observées entre Hermite et Jordan sont propres à ces deux auteurs ou si elles reflètent des changements générationnels dans la manière de rédiger des mathématiques. De même, certains indicateurs numériques sur ces deux mathématiciens, comme les différences relatives de l'étendue de leurs vocabulaires, pourraient prendre un sens plus général en les comparant à ceux associés à d'autres auteurs. De ce point de vue, le cas de Georges Humbert, que j'ai commencé à étudier mathématiquement (voir le chapitre suivant), est une piste pour aller dans ce sens puisqu'il se situe dans une certaine continuité mathématicienne d'Hermite et de Jordan tout en ayant son identité propre, que ce soit en termes générationnels ou de sujets de recherche. À l'heure actuelle, les articles publiés de Humbert ont déjà été formatés et sont prêts à être soumis au logiciel TXM.

En fait, la phase de création et de formatage de fichiers informatiques correspondant à des écrits mathématiques du passé est un des obstacles les plus importants pour la double raison du temps très important qu'il faut y consacrer et de la rébarbativité de la tâche. Cependant, des discussions au mois de février 2025 avec Roland Denis (ICJ, CNRS) m'ont permis d'envisager une procédure technique de formatage de textes rapide et applicable à grande échelle, basée sur un algorithme existant de reconnaissance optique de caractères spécialement développé pour transcrire les formules mathématiques dans un format ressemblant à du code  $\text{\LaTeX}$ . Les fichiers produits par cet algorithme présentent en particulier l'immense avantage, par rapport aux fichiers textes issus d'archives en ligne, d'inclure une délimitation claire des formules mathématiques : cela suggère qu'il devrait être très facile de procéder à leur remplacement par les symboles \*

et #, alors que cette opération a été faite de manière (semi-)manuelle jusqu'à présent. Mais le fait qu'un code analogue à  $\LaTeX$  soit disponible pourrait aussi permettre de disposer de corpus suffisamment larges pour lancer des tests incluant le contenu des formules mathématiques, ce qui me permettrait peut-être d'avancer sur les questions théoriques que j'ai exposées plus haut sur la délimitation et le comptage des formules en tant que mots.

## Chapitre 6

# Georges Humbert

Ce dernier chapitre présente deux axes de recherches impliquant au premier chef Georges Humbert (1859-1921). Ce mathématicien, qui a été au cœur des institutions mathématiques françaises au tournant du  $xx^e$  siècle, a déjà été étudié, de façon plus ou moins directe, dans quelques recherches historiques : pour ses travaux sur les surfaces hyperelliptiques, dont certaines méthodes et autres théorèmes ont été intégrés par les géomètres italiens dans leur classification des surfaces algébriques [HOUZEL 2002 ; BRIGAGLIA 2016] ; pour son rôle majeur dans la théorie des nombres française de l'époque, dans la lignée hermitienne [GOLDSTEIN 2009 ; LELOUP 2009] ; pour ses liens institutionnels avec Camille Jordan autour du *Journal de mathématiques pures et appliquées* [BRECHENMACHER 2024].

Les deux axes décrits ci-dessous se situent dans la problématique de l'étude d'interfaces disciplinaires à la fin du  $xix^e$  et au début du  $xx^e$  siècle. Le premier aborde la question des paramétrisations globales des courbes algébriques, notamment par les fonctions fuchsziennes, permettant de suivre dans les travaux d'Humbert tant l'héritage d'Alfred Clebsch que ceux de Charles Hermite et Henri Poincaré. Le deuxième axe vise quant à lui à étudier certaines interactions entre théorie des nombres et géométrie des courbes et surfaces algébriques en examinant les recherches de Humbert où celui-ci, pour étudier l'arithmétique des formes quadratiques et leurs liens avec les fonctions abéliennes dites singulières, introduit ce qui a été appelé plus tard la « surface de Humbert ».

Au-delà de la question des articulations disciplinaires, ces recherches sur Humbert me permettront de revenir sur deux thèmes que j'ai déjà rencontrés chez Clebsch et que j'aimerais examiner plus en profondeur. Le premier est le thème de l'explicitation d'écritures d'équations ou de paramétrisations, dont je souhaiterais mieux comprendre les tenants et les aboutissants aux  $xix^e$  et  $xx^e$  siècles. Le deuxième est celui des applications : pas au sens d'applications de résultats mathématiques à un autre champ disciplinaire, mais plutôt au sens de propositions diverses démontrées en tant que conséquences de théorèmes fondamentaux. Me semblant souvent délaissées par l'historiographie au profit de ces derniers, il s'agirait de mieux comprendre le statut,

le rôle et la place de telles applications dans l'organisation des mathématiques de l'époque.

## 6.1 Fonctions fuchsiennes et courbes algébriques

Le thème des fonctions fuchsiennes a déjà fait l'objet de plusieurs recherches, qui se sont surtout intéressées à leur création par Poincaré au début des années 1880 dans le contexte de la théorie des équations différentielles linéaires [DIEUDONNÉ 1982 ; GRAY 2000] ou à la démonstration du théorème d'uniformisation [SAINT-GERVAIS 2016], ce qui inclut l'examen des recherches de Felix Klein sur ces thèmes. Alors que ces travaux touchent ainsi plutôt aux fondements du sujet, il n'existe que très peu d'études consacrées aux applications des fonctions fuchsiennes qui ont été proposées à l'époque de Poincaré – voir toutefois [BERGERON 2018 ; GOLDSTEIN 2023] pour les liens entre ces fonctions et la théorie des nombres vus par Poincaré lui-même. Étudier plus en profondeur la réception des fonctions fuchsiennes est un des enjeux de ce premier axe de recherche. En octobre 2024, il a donné lieu à un exposé lors d'une séance du Séminaire d'histoire des mathématiques de l'IHP que j'ai organisée sur le thème de la géométrie algébrique en France dans la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle.

Un cas particulier du théorème d'uniformisation des courbes algébriques est la paramétrisation des courbes cubiques (de genre 1) par les fonctions elliptiques. Alors que cette paramétrisation par Clebsch était bien connue des mathématiciens dès la fin des années 1860, le sujet semble s'être développé de plusieurs manières. D'une part, il s'agissait de trouver de nouvelles formes de paramétrisations des courbes de genre 1, plus simples ou mieux adaptées aux applications, comme l'illustrent des travaux d'Hermite [1878], de Robert d'Esclaibes [1880] ou même de Humbert lui-même, avec sa thèse intitulée « Sur les courbes de genre un » [HUMBERT 1885]. D'autre part, plusieurs mathématiciens tentaient de trouver des paramétrisations globales pour des courbes de genre  $> 1$ , à l'image de Ferdinand Lindemann [1878], Hermann Amandus Schwarz [1880] ou Émile Picard [1881], avant que Poincaré ne s'empare du sujet au début des années 1880.

Rappelons que Poincaré considère un groupe fuchsien  $G$ , c'est-à-dire un groupe discret de transformations homographiques  $\gamma : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , de déterminant 1 et agissant sur le disque unité  $D$ . Une fonction fuchsienne  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction méromorphe invariante sous l'action de  $G$  sur  $D$ . Pour montrer l'existence de telles fonctions, Poincaré passe par celle des fonctions thêtafuchsiennes de degré  $m$ , qui sont des fonctions méromorphes  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  telles que

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2m} f(z)$$

pour tout  $z \in D$  et toute transformation  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  de  $G$ ; les fonctions fuchsiennes sont en effet des quotients de deux fonctions thêtafuchsiennes de même degré. Poincaré montre aussi qu'entre deux fonctions fuchsiennes quelconques  $f, g$  existe une relation algébrique irréductible  $F(f, g) = 0$

dont le genre  $p$  ne dépend que de  $G$ . Par ailleurs, à un groupe fuchsien  $G$  correspond un pavage de  $D$  en polygones hyperboliques, tous obtenus à partir d'un polygone fondamental  $R_0$  par les transformations de  $G$ .

Le théorème d'uniformisation est que toute courbe algébrique  $C$  de genre  $p$  peut être paramétrée globalement par des fonctions fuchsienues. Dans la version projective utilisée par Humbert, cela signifie qu'il existe un groupe fuchsien  $G$  de genre  $p$  et trois fonctions thêtafuchsienues  $f_1, f_2, f_3$  de même degré telles que  $C$  est décrite par  $z \mapsto (f_1(z) : f_2(z) : f_3(z))$ .

C'est dans un article de 1886 que Humbert développe ses applications des fonctions fuchsienues à la géométrie des courbes algébriques [HUMBERT 1886]. Humbert y explique que les résultats de Poincaré lui ont permis d'aborder pour les courbes de genre  $> 1$  la plupart des questions qu'il a résolues dans sa thèse dans le cas des courbes elliptiques. Parmi ces questions se trouve le problème des courbes de contact : on se donne une courbe  $C$  de degré  $n$ , dont on suppose que les seules singularités éventuelles sont des points doubles, et sur laquelle on fixe  $k_1$  points doubles et  $k_2$  points simples. On fixe également des entiers  $m \geq n - 3$  et  $r, l$  tels que  $mn = 2k_1 + k_2 + rl$ . Il s'agit alors de déterminer et d'étudier les courbes de degré  $m$  passant par les  $k_1 + k_2$  points fixés, et dont tous les autres points de rencontre avec  $C$  se réduisent à  $l$  points de contact d'ordre  $r$ .

Comme Humbert le souligne, Clebsch [1864b] avait traité ce problème seulement dans le cas où  $C$  est non singulière, ou dans celui où  $C$  possède des points doubles mais où les courbes cherchées sont des adjointes de  $C$ , c'est-à-dire qu'elles sont assujetties à passer par tous ses points doubles. En revanche, un problème nouveau posé et résolu par Humbert est l'explicitation de la forme des équations définissant les courbes de contact cherchées.

Pour démontrer tout cela, Humbert reprend un certain nombre de propositions de Poincaré sur les fonctions fuchsienues; mais il en profite pour les réorganiser, les réécrire et parfois les compléter. Par exemple, il démontre un théorème d'addition (présenté comme l'analogue du théorème de Clebsch pour les intégrales abéliennes) : soient  $\theta_1, \dots, \theta_p$  une base de l'espace des fonctions thêtafuchsienues holomorphes de degré 1;  $\omega_k^{(1)}, \dots, \omega_k^{(2p)}$  les périodes auxquelles chaque  $\theta_k$  donne lieu<sup>1</sup>; et  $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu; \beta_1, \dots, \beta_\mu$  les zéros (dans le polygone fondamental  $R_0$ ) de deux fonctions thêtafuchsienues holomorphes de même degré. Il existe alors des entiers  $h^{(1)}, \dots, h^{(2p)}$  tels que pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \theta_k + \dots + \int_{\alpha_\mu}^{\beta_\mu} \theta_k = h^{(1)} \omega_k^{(1)} + \dots + h^{(2p)} \omega_k^{(2p)}.$$

Ce résultat est l'un des deux piliers permettant d'aborder le problème des courbes de contact. Le deuxième fait le lien entre existence de courbes et de fonctions fuchsienues : soit  $C$  une courbe de genre  $p$  et de degré  $n$ , paramétrée par trois fonctions thêtafuchsienues  $f_1, f_2, f_3$  de degré  $m > 1$  et

1. Le groupe fuchsien étant engendré par  $S_1, \dots, S_{2p}$ , la période  $\omega_k^{(i)}$  est définie par  $\omega_k^{(i)} = \int_z^{S_i(z)} \theta_k$ , la valeur de cette intégrale étant indépendante de  $z$ .

ayant  $k$  zéros communs  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Si  $C'$  est une adjointe d'ordre  $n + q - 3$ , il existe une fonction thêtafuchsienne holomorphe  $\Theta$  de degré  $mq + 1$  dont les  $\alpha_i$  sont des zéros  $q$ -uples et dont les autres zéros sont précisément les arguments des points d'intersection de  $C$  et  $C'$  qui ne sont pas des points doubles de  $C$ . Réciproquement, si  $\Theta$  est de degré  $mq + 1$  et a les  $\alpha_i$  comme zéros  $q$ -uples, il existe une adjointe  $C'$  d'ordre  $n + q - 3$  telle que les zéros restants de  $\Theta$  sont les arguments des points d'intersection de  $C$  et  $C'$  non singuliers pour  $C$ .

Ces deux théorèmes principaux servent entre autres à aborder la théorie des groupes de points – en termes actuels, des diviseurs sur une courbe –, qui culmine avec une démonstration du théorème de Riemann-Roch, lui-même appliqué au problème des courbes de contact.

Notons aussi que ce problème inclut, tout comme chez Clebsch, une étude approfondie des configurations géométriques associées, notamment dans le cas de courbes de petit degré. Par exemple, pour les courbes quintiques à un point double (donc de genre 5), Humbert montre qu'il existe 1023 coniques touchant la quintique en cinq points ; dans le cas des quintiques à quatre points doubles (donc de genre 2), les coniques de contact se répartissent en 16 systèmes, dont 15 sont formés de 8 coniques et 1 est formé d'une unique conique propre : par les cinq points de contact de cette dernière et les quatre points doubles de la quintique, on peut faire passer un faisceau de cubiques, etc. Humbert donne ainsi toute une série de résultats énumératifs, dont il serait intéressant de comprendre les liens avec les théorèmes développés à peu près à la même époque par Hermann Schubert à l'aide de son calcul énumératif [MICHEL 2020].

## 6.2 Formes quadratiques, fonctions abéliennes singulières, surface de Humbert

Les interfaces entre géométrie et arithmétique au tournant du  $xx^e$  siècle ont déjà fait l'objet de recherches historiques dans d'autres situations : mise en place de la géométrie diophantienne [SCHAPPACHER 1991 ; GOLDSTEIN 1993 ; SCHAPPACHER et SCHOOF 1996], développement de la géométrie des nombres par Hermann Minkowski [SCHWERMER 2007 ; GAUTHIER 2009], utilisation de réseaux et d'éléments de géométrie hyperbolique dans l'étude des formes par Poincaré [GOLDSTEIN 2023]. Les liens entre géométrie et arithmétique instaurés par Humbert dans ses travaux associant fonctions abéliennes, courbes et surfaces algébriques pour étudier l'arithmétique des formes quadratiques étant d'une autre nature, leur étude complétera notre vision du sujet et appellera à une comparaison de ces différents types de géométrisations.

Un des points clés de ces liens est l'introduction de ce qui est appelé maintenant la surface de Humbert, qui est une surface dans l'espace des modules de certaines surfaces abéliennes<sup>2</sup>. En d'autres termes, les coordonnées des points qui composent la surface de Humbert peuvent être

2. Une surface abélienne est une surface munie d'un loi de groupe. Celles dont il s'agit ici sont dites « principalement polarisées », ce qui signifie qu'elles sont isomorphes à leur surface duale.

vus comme les paramètres de ces surfaces abéliennes. De ce point de vue, cet axe de recherche a pour but de contribuer à l'histoire (encore très mal comprise) des espaces de modules – un colloque mathématique sur ce thème, organisé par Gavril Farkas, Daniel Huybrechts et Rahul Pandharipande est prévu à Berlin en 2026, et j'ai été invité à donner un exposé lors de la journée consacrée à l'histoire du sujet. Une des questions centrales est justement de comprendre quand et comment les modules, qui sont *a priori* des nombres paramétrant divers objets de la géométrie algébrique, ont été eux-mêmes géométrisés.

La base des travaux de Humbert sur le sujet traité ici est formé des recherches de 1855 de Hermite sur la transformation des fonctions abéliennes [HERMITE 1855] – chez Hermite comme chez Humbert, il s'agit de fonctions hyperelliptiques associées à une courbe hyperelliptique de genre 2. Hermite considère un polynôme  $P(x)$  de degré 5 ou 6 sans racine multiple, et des constantes  $x_0, x_1$ . Le problème d'inversion (tel que posé par Jacobi et traité par Göpel et Rosenhain) consiste à considérer le système

$$\begin{aligned} u &= \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{P(\xi)}} + \int_{y_0}^y \frac{d\xi}{\sqrt{P(\xi)}} \\ v &= \int_{x_0}^x \frac{\xi d\xi}{\sqrt{P(\xi)}} + \int_{y_0}^y \frac{\xi d\xi}{\sqrt{P(\xi)}} \end{aligned}$$

afin d'exprimer  $x$  et  $y$  comme des fonctions des variables complexes  $u$  et  $v$ , ces fonctions possédant alors quatre paires de périodes. Il existe en fait 16 fonctions thêta de deux variables associées à ce problème d'inversion, ayant la propriété que leurs produits et quotients permettent d'exprimer les fonctions à quatre paires de périodes : Hermite note  $f_1, \dots, f_{15}$  les quotients de quinze de ces fonctions thêta par la seizième.

On considère maintenant les fonctions  $F_1, \dots, F_{15}$  correspondant à l'inversion de

$$\begin{aligned} u &= \int_{x_0}^x \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{Q(\xi)}} d\xi + \int_{y_0}^y \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{Q(\xi)}} d\xi \\ v &= \int_{x_0}^x \frac{\gamma\xi + \delta}{\sqrt{Q(\xi)}} d\xi + \int_{y_0}^y \frac{\gamma\xi + \delta}{\sqrt{Q(\xi)}} d\xi. \end{aligned}$$

Le problème de la transformation consiste à déterminer l'existence de constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et d'un polynôme  $Q$  tels que les fonctions  $F_i$  s'expriment rationnellement en fonction des  $f_i$ .

Hermite montre que cette question revient à la détermination de conditions sur les périodes des fonctions abéliennes : d'un point de vue actuel, si  $\omega, v$  sont les matrices colonnes des périodes des fonctions  $f$  et  $\Omega, \Upsilon$  celles des fonctions  $F$ , la transformation est possible si et seulement s'il existe un entier non nul  $k$  et une matrice  $M \in E_k(\mathbf{Z})$  tels que  $\Omega = M\omega$  et  $\Upsilon = Mv$ , où  $E_k(\mathbf{Z}) = \{M \in M_4(\mathbf{Z}) \mid {}^tMJM = kJ\}$  et  $J = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ -I_2 & 0_2 \end{pmatrix}$ . La transformation est alors dite « d'ordre  $k$  ».

Notons que Hermite traite la question en se ramenant au cas où les matrices des périodes sont de la forme  $\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & g & h \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h & g' \end{pmatrix}$ , où  $g, h, g'$  sont des nombres complexes dont les parties imaginaires  $\gamma, \eta, \gamma'$  sont telles que la forme quadratique  $\gamma x^2 + 2\eta xy + \gamma' y^2$  est définie positive.

En 1899, Humbert entreprend l'étude de ce qu'il appelle les fonctions abéliennes simplement singulières [HUMBERT 1899]. Il s'agit de fonctions abéliennes dont les périodes, supposées être données par des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & g & h \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & h & g' \end{pmatrix}$ , vérifient une identité

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

pour certains entiers  $A, \dots, E$  premiers entre eux. Humbert remarque que la quantité  $\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$  est invariante sous l'action d'une transformation d'ordre 1 des fonctions abéliennes, c'est-à-dire que si les périodes transformées sont données par  $G, H, G'$ , ces dernières vérifient aussi une identité  $A'G + B'H + \dots + E' = 0$ , et on a alors  $B'^2 - 4A'C' - 4D'E' = B^2 - 4AC - 4DE$ .

L'article qui est l'objet principal de mon axe de recherche a été publié quelques années plus tard [HUMBERT 1903]. Outre les fonctions simplement singulières, Humbert considère les fonctions abéliennes doublement singulières, dont les périodes vérifient deux identités

$$\begin{aligned} Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E &= 0 \\ A_1g + B_1h + C_1g' + D_1(h^2 - gg') + E_1 &= 0, \end{aligned}$$

les déterminants du type  $AB_1 - BA_1$  étant deux à deux premiers entre eux. Un tel système d'identités est appelé « système propre » par Humbert, qui y associe par ailleurs la forme quadratique  $f = \Delta x^2 + 2\delta xy + \Delta_1 y^2$ , où  $\Delta_1$  est défini de manière analogue à  $\Delta$  et où  $\delta = BB_1 - 2AC_1 - 2CA_1 - 2DE_1 - 2ED_1$ .

Une correspondance entre différents types d'objets est alors mise en place. Humbert commence par montrer que tout système propre correspondant à des périodes transformées de  $g, h, g'$  par une transformation d'ordre 1 est associé à une forme quadratique équivalente à  $f$  (sous l'action de  $GL_2(\mathbf{Z})$  sur les variables  $x, y$ ). Autrement dit, à une classe de systèmes propres correspond une classe de formes quadratiques. Réciproquement, Humbert cherche à déterminer si des systèmes propres donnant lieu à des formes quadratiques  $f$  équivalentes sont équivalents entre eux. Il montre que c'est le cas si les  $f$  en question sont de la forme  $4\varphi(x, y) = 4(ax^2 + 2bxy + cy^2)$  avec  $ac - b^2$  impair et  $a, b, c$  premiers entre eux<sup>3</sup>.

Cette correspondance est ensuite enrichie par l'introduction d'objets géométriques. Pour cela, Humbert rappelle qu'une forme binaire  $\Phi(x, y)$  de degré 6 et à coefficients complexes possède trois invariants absolus, c'est-à-dire que deux telles formes sont équivalentes si et seulement si leurs

3. Humbert montre que sous d'autres hypothèses, il existe plusieurs classes de systèmes propres associés à une même classe de formes quadratiques. Dans ce qui suit, je me restreins aux premières hypothèses.

trois invariants absolus sont égaux. Humbert considère alors ces invariants comme les « modules » des fonctions abéliennes liées à  $\sqrt{P(x)} = \sqrt{\Phi(x, 1)}$  et définit les « points modulaires » comme les points de l'espace usuel dont les trois coordonnées sont ces invariants : vu ce qui précède, tout point modulaire est invariant lorsqu'on opère une transformation d'ordre 1 sur les périodes. Humbert souligne ensuite que les points modulaires associés à des fonctions abéliennes simplement singulières d'invariant  $\Delta$  décrivent une surface « hyperabélienne » qui ne dépend que de  $\Delta$  ; c'est cette surface qui sera appelée plus tard « surface de Humbert ». De même, les points associés à des fonctions abéliennes doublement singulières décrivent des « courbes hyperabéliennes » de l'espace.

Reprenant la correspondance précédente, Humbert montre qu'à la classe d'une forme  $4\varphi$  correspond une et une seule courbe hyperabélienne. Il en découle qu'une forme  $4\varphi$  représente un entier  $\Delta$  si et seulement si la courbe hyperabélienne associée est incluse dans la surface hyperabélienne d'invariant  $\Delta$ . Ce résultat fait partie de ceux qui sont mis en valeur par Humbert et grâce auxquels il obtient quelques corollaires arithmétiques de manière géométrique, alors que « leur démonstration directe demanderait peut-être quelques développements » [HUMBERT 1903, p. 97]. Par exemple, il en déduit que le nombre de classes de formes quadratiques binaires positives et primitives pouvant représenter deux nombres donnés est fini.

Mentionnons encore que Humbert affine le lien entre formes quadratiques et courbes hyperabéliennes, en montrant que si  $\varphi_1, \varphi_2$  sont deux formes appartenant au même genre (au sens défini par Gauss dans les *Disquisitiones arithmeticae*), les courbes associées à  $4\varphi_1, 4\varphi_2$  sont birationnellement équivalentes, et donc de même genre, fournissant ainsi « une liaison bien inattendue entre les deux notions si dissemblables de genre, en Arithmétique et en Géométrie » [HUMBERT 1903, p. 44]. La démonstration de cette équivalence birationnelle est d'ailleurs basée sur la détermination explicite de leurs groupes fuchsien.

En outre, dans ces articles d'Humbert, des résultats arithmétiques différents de ceux décrits précédemment sont obtenus et des alternatives à la manière dont la géométrie intervient sont développées. Je me contenterai d'illustrer cela en signalant que Humbert considère aussi les périodes  $(g, h, g')$  elles-mêmes comme des coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, donnant lieu à un autre type de géométrisation et à d'autres corollaires arithmétiques, et incarnant ainsi une nouvelle facette de « cette Géométrie des nombres et des formes » [HUMBERT 1903, p. 44].



# Bibliographie

- ABEL Niels Henrik (1828), « Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendentes », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **3**, 313-323.
- (1826/1841), « Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes », *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences*, **7**, 176-264.
- ARCHIBALD Tom (2011), « Differential Equations and Algebraic Transcendents: French Efforts at the Creation of a Galois Theory of Differential Equations 1880–1910 », *Revue d'histoire des mathématiques*, **17**, 373-401.
- ARONHOLD Siegfried (1862), « Algebraische Reduction des Integrals  $\int F(x, y) dx$  wo  $F(x, y)$  eine beliebige rationale Function von  $x, y$  bedeutet, und zwischen diesen Grössen eine Gleichung dritten Grades von der allgemeinsten Form besteht, auf die Grundform der elliptischen Transcendenten », *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, **aus dem Jahre 1861**, 462-468.
- AUGUST Friedrich (1876), « Ueber die Zusammenhang gewisser Sätze, welche sich auf geschlossene Reihen geometrischer Gebilde beziehen », *Archiv der Mathematik und Physik*, **59**, 1-17.
- BARBIN Évelyne et GUITART René (2001), « Algèbre des fonctions elliptiques et géométrie des ovales cartésiennes », *Revue d'histoire des mathématiques*, **7** (2), 161-205.
- BERGERON Nicolas (2018), « Les “invariants arithmétiques” de Poincaré », *Graduate Journal of Mathematics*, **3**, 1-14.
- BONIFACE Jacqueline (2004), *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*, Paris : Vrin.
- BOS Henk J. M. (2001), *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, New York : Springer.
- BOS Henk J. M., KERS Cees, OORT Frans et RAVEN Diederick (1987), « Poncelet's Closure Theorem », *Expositiones Mathematicae*, **5**, 289-364.
- BOTTAZZINI Umberto et GRAY Jeremy (2013), *Hidden Harmony—Geometric Fantasies: The Rise of Complex Functions*, New York : Springer.
- BOUCARD Jenny (2011), « Louis Poinsoet et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? », *Revue d'histoire des mathématiques*, **17**, 41-138.

- BOUCARD Jenny et ECKES Christophe (2023), « Introduction générale », in Jenny BOUCARD et Christophe ECKES (éds.), *Arranger, disposer, combiner : théories de l'ordre dans les sciences, les arts d'ornement et la philosophie (1770-1910)*, Paris : Hermann, 5-61.
- BRECHENMACHER Frédéric (2007), « La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker », *Revue d'histoire des mathématiques*, **13** (2), 187-257.
- (2010), « Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques », *Revue de synthèse*, **131** (4), 569-603.
- (2011a), « Autour de pratiques algébriques de Poincaré ». Prépublication, <https://hal.science/hal-00630959v3> (visité le 07/04/2025).
- (2011b), « Self-portraits with Évariste Galois (and the Shadow of Camille Jordan) », *Revue d'histoire des mathématiques*, **17**, 271-369.
- (2015), « L'équation séculaire : témoin des évolutions des sciences mathématiques de 1750 à 1850 », in Christian GILAIN et Alexandre GUILBAUD (éds.), *Sciences mathématiques 1750-1850. Continuités et ruptures*, Paris : CNRS Éditions, 263-287.
- (2024), « Un journal de "rang élevé" : le *Journal de mathématiques pures et appliquées* sous la direction de Camille Jordan », in Hélène GISPERT, Philippe NABONNAND et Jeanne PEIFFER (éds.), *Circulation des mathématiques dans et par les journaux*, à paraître.
- BRIGAGLIA Aldo (2016), « Picard and the Italian Mathematicians: The History of Three *Prix Bordin* », in Frédéric BRECHENMACHER, Guillaume JOUVE, Laurent MAZLIAK et Rossana TAZZIOLI (éds.), *Images of Italian Mathematics in France: The Latin Sisters, from Risorgimento to Fascism*, Birkhäuser, 93-126.
- BRILL Alexander et NOETHER Max (1894), « Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **3**, 107-566.
- BRUNET Étienne (1978), *Le vocabulaire de Jean Giraudoux, structure et évolution*, Genève : Slatkine.
- (2016), *Tous comptes faits. Questions linguistiques*, Bénédicte PINCEMIN (éd.), avec une préface de François RASTIER, Paris : Champion.
- BULLYNCK Maarten (2016), « Classifications en transformation. Classifier les substances organiques en 1819 : tables, fiches, calculs et structures », *Cahiers François Viète*, 3<sup>e</sup> sér., **1**, 83-102.
- CAYLEY Arthur (1849), « On the Theory of Determinants », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **8**, 75-88.
- CHEMLA Karine (2009), « Mathématiques et culture. Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes », in *La mathématique*, t. 1 : Les lieux et les temps, Paris : Éditions du CNRS, 103-152.
- CHEVALLEY Claude (1935), « Variations du style mathématique », *Revue de métaphysique et de morale*, **42** (3), 375-384.

- CHORLAY Renaud (2011), « “Local–Global”: The First Twenty Years », *Archive for History of Exact Sciences*, **65** (1), 1-66.
- CLEBSCH Alfred (1857), « Anwendung der elliptischen Functionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **53**, 292-308.
- (1861), « Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **59**, 1-62.
  - (1864a), « Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **63**, 94-121.
  - (1864b), « Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **63**, 189-243.
  - (1865a), « Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **64**, 43-65.
  - (1865b), « Ueber die Singularitäten algebraischer Curven », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **64**, 98-100.
  - (1868), « Sur les surfaces algébriques », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, **67**, 1238-1239.
  - (1869), « Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung », *Mathematische Annalen*, **1**, 253-316.
  - (1871), « Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5<sup>ten</sup> Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfecks », *Mathematische Annalen*, **4**, 284-345.
  - (1872a), « Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* », *Göttingische gelehrte Anzeigen*, **1872** (1), 321-334.
  - (1872b), *Theorie der binären algebraischen Formen*, Leipzig : Teubner.
  - (1872c), « Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie », *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, **17**, 3-62.
  - (1873), « Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene », *Mathematische Annalen*, **6**, 203-215.
- CLEBSCH Alfred et GORDAN Paul (1866), « Sur la théorie des fonctions abéliennes », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, **62**, 183-187, 227-230.
- (1873), « Ueber cubische ternäre Formen », *Mathematische Annalen*, **6**, 436-512.
- COHEN Henri et LEFEBVRE Claire (éds.) (2017), *Handbook of Categorization in Cognitive Science*, 2<sup>e</sup> éd., Amsterdam, Oxford, Cambridge : Elsevier.
- CREMONA Luigi (1866), *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, Bologna : Tipi Gamberini e Parmeggiani.
- CRILLY Tony (1986), « The Rise of Cayley's Invariant Theory (1841–1862) », *Historia Mathematica*, **13** (3), 241-254.

- CRILLY Tony (1988), « The Decline of Cayley's Invariant Theory (1863–1895) », *Historia Mathematica*, **15** (4), 332-347.
- D'ESCLAIBES Robert (1880), *Sur les applications des fonctions elliptiques aux courbes du premier genre*, Paris : Gauthier-Villars.
- DEL CENTINA Andrea (2016), « Poncelet's Porism: A Long Story of Renewed Discoveries », *Archive for History of Exact Sciences*, **70**, 1-122, 123-176.
- DIEUDONNÉ Jean (1974), *Cours de géométrie algébrique*, t. 1. Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique, Vendôme : Presses Universitaires de France.
- (1982), « La découverte des fonctions fuchsiennes », in *Actes du sixième congrès des mathématiciens d'expression latine*, Paris : Gauthier-Villars, 3-23.
- EHRHARDT Caroline (2012), *Itinéraires d'un texte mathématique : les réélaborations des écrits d'Évariste Galois au XIX<sup>e</sup> siècle*, Paris : Hermann.
- (2015), « Tactics: In Search of a Long-term Mathematical Project (1844–1896) », *Historia Mathematica*, **42** (4), 436-467.
- ETWEIN Frank, VOELKE Jean-Daniel et VOLKERT Klaus (2019), *Dualität als Archetypus mathematischen Denkens – Klassische Geometrie und Polyedertheorie*, Göttingen : Cuvillier Verlag. Avec des contributions de Jean-Pierre FRIEDELMEYER et Erhard Scholz.
- FISHER Charles S. (1966), « The Death of a Mathematical Theory: A Study in the Sociology of Knowledge », *Archive for History of Exact Sciences*, **3** (2), 137-159.
- FOLTA Jaroslav et NOVÝ Luboš (1965), « Sur la question des méthodes quantitatives dans l'histoire des mathématiques », *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, **1**, 3-35.
- GALLARD Pierre-Yves (2019), *Paradoxes et style paradoxal : l'âge des moralistes*, Paris : Classiques Garnier.
- GAUTHIER Sébastien (2007), *La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945)*, thèse de doctorat, Paris : Université Pierre et Marie Curie.
- (2009), « La géométrie dans la géométrie des nombres : histoire de discipline ou histoire de pratiques à partir des exemples de Minkowski, Mordell et Davenport », *Revue d'histoire des mathématiques*, **15**, 183-230.
- GAUTHIER Sébastien et LÊ François (2019), « On the Youthful Writings of Louis J. Mordell on the Diophantine Equation  $y^2 - k = x^3$  », *Archive for History of Exact Sciences*, **73** (5), 427-468.
- GAYON Jean (1996), « De la catégorie de style en histoire des sciences », *Alliage*, **26**, 13-25.
- GEISER Carl Friedrich (1869), « Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **70**, 249-257.
- GENETTE Gérard (1972), *Figures III*, Paris : Éditions du Seuil.
- GILAIN Christian (1991), « Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral », *Archive for History of Exact Sciences*, **42** (2), 91-136.

- GINZBURG Carlo (1980), « Signes, traces, pistes. Racines d'un paradigme de l'indice », *Le Débat*, **6**, 3-44.
- (1989), *Mythes, emblèmes, traces : Morphologie et histoire*, Paris : Flammarion.
- GISPERT Hélène (1999), « Les débuts de l'histoire des mathématiques sur les scènes internationales et le cas de l'entreprise encyclopédique de Felix Klein et Jules Molk », *Historia Mathematica*, **26**, 344-360.
- (2015), *La France mathématique de la III<sup>e</sup> République avant la Grande Guerre*, 2<sup>e</sup> éd., Paris : Société mathématique de France.
- GOLDSTEIN Catherine (1993), « Descente infinie et analyse diophantienne : programmes de travail et mise en œuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil », *Cahiers du Séminaire d'histoire et de philosophie des mathématiques*, 2<sup>e</sup> sér., **3**, 25-49.
- (1994), « La théorie des nombres dans les Notes aux comptes rendus de l'Académie des sciences (1870-1914) : un premier examen », *Rivista di Storia della scienza*, 2<sup>e</sup> sér., **2** (2), 137-160.
- (1995), *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis : Presses Universitaires de Vincennes.
- (1999), « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) », *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, **3**, 187-214.
- (2007), « The Hermitian Form of Reading the *Disquisitiones* », in Catherine GOLDSTEIN, Norbert SCHAPPACHER et Joachim SCHWERMER (éds.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 377-410.
- (2009), « La théorie des nombres en France dans l'entre-deux-guerres : de quelques effets de la première guerre mondiale », *Revue d'histoire des sciences*, **62**, 143-175.
- (2011), « Charles Hermite's Stroll through the Galois Field », *Revue d'histoire des mathématiques*, **17**, 211-270.
- (2016), « “Découvrir des principes en classant” : la classification des formes quadratiques selon Charles Hermite », *Cahiers François Viète*, 3<sup>e</sup> sér., **1**, 103-135.
- (2023), « Poincaré and Arithmetic Revisited », in Karine CHEMLA, José FERREIRÓS, Lizhen JI, Erhard SCHOLZ et Chang WANG (éds.), *The Richness of the History of Mathematics*, Springer, 189-226.
- GOLDSTEIN Catherine et SCHAPPACHER Norbert (2007), « A Book in Search of a Discipline », in Catherine GOLDSTEIN, Norbert SCHAPPACHER et Joachim SCHWERMER (éds.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 3-65.
- GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (éds.) (2007), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer.
- GRAY Jeremy (1989), « Algebraic Geometry in the Late Nineteenth Century », in John McCLEARY et David E. ROWE (éds.), *The History of Modern Mathematics*, t. 1 : Ideas and their Reception, Boston, San Diego, New York : Academic Press, 361-385.

- GRAY Jeremy (2000), *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, 2<sup>e</sup> éd., Boston : Birkhäuser.
- (2005), « Felix Klein’s Erlangen Program, “Comparative Considerations of Recent Geometrical Researches” (1872) », in IVOR GRATTAN-GUINNESS (éd.), *Landmark Writings in Western Mathematics, 1640–1940*, Amsterdam : Elsevier Press, 544-552.
- GUICCIARDINI Niccolò (2009), *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, Cambridge, Massachusetts & London, England : The MIT Press.
- GUINÉE Nicolas (1705), *Application de l’algèbre à la géométrie*, Paris : Boudot et Quillau.
- HAWKINS Thomas (1984), « The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflexions on Its Place in the History of Mathematics », *Historia Mathematica*, **11** (4), 442-470.
- HELLER Henning (2023), « Felix Klein’s Teaching of Galois Theory », *Historia Mathematica*, **63**, 21-46.
- HENDERSON Archibald (1915), *The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface*, thèse de doctorat, University of Chicago.
- HERMITE Charles (1855), « Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes », *Comptes rendus des séances de l’Académie des sciences*, **40**, 249-254, 304-309, 365-369, 427-431, 485, 489, 536-541, 704-707, 784-787.
- (1878), « Extrait d’une lettre à M. Lindemann : observations algébriques sur les courbes planes », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **84**, 298-299.
- HERSCHBERG PIERROT Anne (2005), *Le style en mouvement. Littérature et art*, Paris : Belin.
- HESSE Otto (1847), « Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9<sup>ten</sup> Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dass eine gegebene rationale und symmetrische Function  $\theta(x_\lambda, x_\mu)$  je zweier Wurzeln  $x_\lambda, x_\mu$  eine dritte Wurzel  $x_\kappa$  giebt, so dass gleichzeitig:  $x_\kappa = \theta(x_\lambda, x_\mu)$ ,  $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\kappa)$ ,  $x_\mu = \theta(x_\kappa, x_\lambda)$  », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **34**, 193-208.
- HIMY-PIÉRI Laure, CASTILLE Jean-François et BOUGAULT Laurence (éds.) (2014), *Le style, découpeur de réel : faits de langue, effets de style*, Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- HOÛEL Jules (1871), « Revue bibliographique : Jordan (C.) — Traité des substitutions et des équations algébriques », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, **2**, 161-169.
- HOUZEL Christian (1978), « Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes », in Jean DIEUDONNÉ (éd.), *Abrégé d’histoire des mathématiques 1700-1900*, t. 2, Paris : Hermann, 1-113.
- (2002), *La géométrie algébrique : recherches historiques*, Paris : Albert Blanchard.
- (2007), « Elliptic Functions and Arithmetic », in Catherine GOLDSTEIN, Norbert SCHAPPACHER et Joachim SCHWERMER (éds.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss’s Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 291-312.
- HUMBERT Georges (1885), *Sur les courbes de genre un*, Paris : Gauthier-Villars.

- HUMBERT Georges (1886), « Application de la théorie des fonctions fuchsienues à l'étude des courbes algébriques », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> sér., **2**, 239-329.
- (1899), « Sur les fonctions abéliennes singulières (premier mémoire) », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5<sup>e</sup> sér., **5**, 233-350.
  - (1903), « Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5<sup>e</sup> sér., **9**, 43-137.
- HURWITZ Adolf (1879), « Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schliessungsprobleme », *Mathematische Annalen*, **15**, 8-15.
- HUSSON François (2017), « Analyse textuelle », <https://images.math.cnrs.fr/billets/analyse-textuelle/> (visité le 07/04/2025).
- JACOB Elin K. (2004), « Classification and Categorization: A Difference that Makes a Difference », *Library Trends*, **52** (3), 515-540.
- JACOBI Carl Gustav Jacob (1828), « Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie: "Die Relation zwischen der Distanz der Mittelpunkte und der Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmässigen Polygon eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist" », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **3**, 376-389.
- (1832), « Considerationes generales de transcendentibus Abelianis », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **9**, 394-403.
- JORDAN Camille (1869a), « Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **14** (2), 147-166.
- (1869b), « Sur les équations de la géométrie », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, **68**, 656-659.
  - (1869c), « Sur une équation du 16<sup>e</sup> degré », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **70**, 182-184.
  - (1870), *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris : Gauthier-Villars.
- KIERNAN B. Melvin (1971), « The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin », *Archive for History of Exact Sciences*, **8**, 40-154.
- KLEIN Felix (1871), « Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen », *Mathematische Annalen*, **4**, 346-358.
- (1872), *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen : Andreas Deichert.
  - (1926), *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, t. 1, Berlin : Springer.
- KUMMER Ernst Eduard (1863), « Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen », *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 324-336.

- LABBÉ Dominique et HUBERT Pierre (1997), « Vocabulary Richness », *Lexicometrica*, **0**, <https://shs.hal.science/halshs-02216951/document> (visité le 07/04/2025).
- LABS Oliver (2015), « On Alfred Clebsch and Cubic Surfaces », *Oberwolfach Reports*, **12** (4), 2798-2801.
- LAFON Pierre (1980), « Sur la variabilité de la fréquence des formes dans un corpus », *Mots*, **1**, 127-165.
- LARDNER Dionysus (1831), *A Treatise on Algebraic Geometry*, London : Whittaker, Treacher, and Arnot.
- LAUGWITZ Detlef (1999), *Bernhard Riemann 1826–1866: Turning Points in the Conception of Mathematics*, traduit de l'allemand par Abe SHENITZER, Boston, Basel, Berlin : Birkhäuser.
- LÊ François (2013), « Entre géométrie et théorie des substitutions : une étude de cas autour des vingt-sept droites d'une surface cubique », *Confluentes Mathematici*, **5** (1), 23-71.
- (2015a), « Around the History of the 27 Lines upon Cubic Surfaces: Uses and Non-Uses of Models », *Oberwolfach Reports*, **12** (4), 2794-2798.
  - (2015b), « “Geometrical Equations”: Forgotten Premises of Felix Klein’s *Erlanger Programm* », *Historia Mathematica*, **42** (3), 315-342.
  - (2015c), *Vingt-sept droites sur une surface cubique : rencontres entre groupes, équations et géométrie dans la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
  - (2016), « Reflections on the Notion of Culture in the History of Mathematics: The Example of “Geometrical Equations” », *Science in Context*, **29** (3), 273-304.
  - (2017), « Alfred Clebsch’s “Geometrical Clothing” of the Theory of the Quintic Equation », *Archive for History of Exact Sciences*, **71** (1), 39-71.
  - (2018a), « Le paramétrage elliptique des courbes cubiques par Alfred Clebsch », *Revue d'histoire des mathématiques*, **24**, 1-39.
  - (2018b), « The Recognition and the Constitution of the Theorems of Closure », *Historia Mathematica*, **45** (3), 237-276.
  - (2020), « “Are the *genre* and the *Geschlecht* one and the same number?” An Inquiry into Alfred Clebsch’s *Geschlecht* », *Historia Mathematica*, **53**, 71-107.
  - (2022), « La théorie des surfaces algébriques dans les *Mathematische Annalen* à l'épreuve de la textométrie (1869-1898) », *Revue d'histoire des mathématiques*, **28** (1), 1-45.
  - (2023a), « Alfred Clebsch [1863–1865] », traduction anglaise de [BRILL et NOETHER 1894, p. 318-330], à paraître.
  - (2023b), « Des taxons et des nombres : quelques remarques sur les ordres, classes et genres des courbes algébriques », *Revue d'histoire des sciences*, **76** (1), 85-134.
  - (2024), « On Charles Hermite’s Style », *Revue d'histoire des mathématiques*, **30**, 197-231.

- LÊ François (2025a), « On the Past of a Mathematical Object », in François LÊ et Jemma LORENAT (éds.), *Beyond Case-Studies: Drawing Bigger Pictures in the History of Mathematics*, Birkhäuser, à paraître.
- (2025b), « Theory and Applications of Invariants in Clebsch’s Papers », in Frédéric JAËCK (éd.), *Towards a Philosophy of Mathematical Invariants*, Spartacus-IDH, à paraître.
- LÊ François et LORENAT Jemma (éds.) (2025), *Beyond Case-Studies: Drawing Bigger Pictures in the History of Mathematics*, Birkhäuser, à paraître.
- LÊ François et PAUMIER Anne-Sandrine (2016a), « De la science comme classification à la classification comme pratique scientifique : quelques réflexions à partir de deux cas mathématiques », *Cahiers François Viète*, 3<sup>e</sup> sér., **1**, 9-33.
- (éds.) (2016b), « La classification comme pratique scientifique », *Cahiers François Viète*, 3<sup>e</sup> sér., **1**.
- LEBART Ludovic, PINCEMIN Bénédicte et POU DAT Céline (2019), *Analyse des données textuelles*, Presses de l’Université du Québec.
- LELOUP Juliette (2009), *L’entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France*, thèse de doctorat, Paris : Université Pierre et Marie Curie.
- LIE Sophus (1872), « Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen », *Mathematische Annalen*, **5**, 145-256.
- LINDEMANN Ferdinand (1878), « Extrait de lettre, concernant l’application des intégrales abéliennes à la géométrie des courbes planes, adressée à M. Hermite », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **84**, 294-297, 300-304.
- (1882), « Entwicklung der Functionen einer complexen Variabeln nach Lamé’schen Functionen und nach Zugeordneten der Kugelfunctionen », *Mathematische Annalen*, **19**, 323-386.
- LORENAT Jemma (2015), « Polemics in Public: Poncelet, Gergonne, Plücker, and the Duality Controversy », *Science in Context*, **28** (4), 545-585.
- MANCOSU Paolo (2009/2021), « Mathematical Style », in Edward N. ZALTA (éd.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2021 Edition, <https://plato.stanford.edu/entries/mathematical-style/> (visité le 07/04/2025).
- MCCLEARY John et ROWE David E. (éds.) (1989), *The History of Modern Mathematics*, t. 1 : Ideas and their Reception, Boston, San Diego, New York : Academic Press.
- MICHEL Nicolas (2020), *Of Words and Numbers: The Writing of Generality in the Emergence of Enumerative Geometry (1852–1893)*, thèse de doctorat, Université de Paris.
- MICHEL Nicolas et SMADJA Ivahn (2022), « The Ancients and the Moderns: Chasles on Euclid’s Lost Porisms and the Pursuit of Geometry », *Science in Context*, **35** (3), 199-251.
- MORTON Alan G. (1981), *History of Botanical Sciences*, London, New York : Academic Press.
- MULLER Charles (1977), *Principes et méthodes de statistique lexicale*, Paris : Hachette.
- MULLINS Nicholas C. (1972), « The Development of a Scientific Specialty: The Phage Group and the Origins of Molecular Biology », *Minerva*, **10** (1), 51-82.

- NABONNAND Philippe et ROLLET Laurent (éds.) (2012), *Les uns et les autres... Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, Nancy : Presses Universitaires de Nancy.
- NEWTON Isaac (1704), « Enumeratio linearum tertii ordinis », in *Opticks: or, a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*, London : Smith and Walford, 139-211.
- NOETHER Max (1875), « Otto Hesse », *Zeitschrift für Mathematik und Physik: Historisch-literarische Abtheilung*, **20**, 77-88.
- PARSHALL Karen Hunger (1989), « Toward a History of Nineteenth-Century Invariant Theory », in John McCLEARY et David E. ROWE (éds.), *The History of Modern Mathematics*, t. 1 : Ideas and their Reception, Boston, San Diego, New York : Academic Press, 157-206.
- (2004), « Defining a Mathematical Research School: The Case of Algebra at the University of Chicago, 1892–1945 », *Historia Mathematica*, **31** (3), 263-278.
- (2024), « A Convergence of Paths: Arthur Cayley, Charles Hermite, James Joseph Sylvester, and the Early Development of a Theory of Invariants », *Revue d'histoire des mathématiques*, **30**, 233-260.
- PETRI Birgit et SCHAPPACHER Norbert (2004), « From Abel to Kronecker. Episodes from 19th Century Algebra », in Olav Arnfinn LAUDAL et Ragni PIENE (éds.), *The Legacy of Niels Henrik Abel*, Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 227-266.
- PICARD Émile (1881), « Sur les expressions des coordonnées d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsienues d'un paramètre », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, **92**, 1332-1334.
- PINCEMIN Bénédicte (2020), « La textométrie en question », *Le Français moderne. Revue de linguistique française*, **88** (1), 26-43.
- PINCEMIN Bénédicte et HEIDEN Serge (2008), *Qu'est-ce que la textométrie ? Présentation*, <https://pages.textometrie.org/textometrie/Introduction> (visité le 07/04/2025).
- PLÜCKER Julius (1837), « Note sur les points singuliers des courbes », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **2**, 11-15.
- PONCELET Jean-Victor (1828), « Sur la dualité de situation et sur la théorie des polaires réciproques, 2<sup>e</sup> article en réponse aux observations de M. Gergonne, mentionnées pag. 23, cahier de janvier du présent *Bulletin des Sciences*, et insérées dans le tome XVIII des *Annales de Mathématiques*, p. 125 et suiv. », *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, **9**, 292-302.
- POPESCU-PAMPU Patrick (2016), *What is the Genus?*, Springer.
- PUCKLE George Hale (1854), *An Elementary Treatise on Conic Sections, and Algebraic Geometry*, Cambridge : Macmillan and co.
- RABOUIN David (2017), « Styles in Mathematical Practice », in Karine CHEMLA et Evelyn Fox KELLER (éds.), *Cultures without Culturalism: The Making of Scientific Knowledge*, Durham, London : Duke University Press, 262-306.

- RASHED Roshdi (2005), « Les premières classifications des courbes », *Physis*, **42** (1), 1-64.
- REVEL Jacques (1996), « Micro-analyse et construction du social », in Jacques REVEL (éd.), *Jeux d'échelles. La micro-analyse à l'expérience*, Paris : Gallimard-Le Seuil, 15-36.
- RIEMANN Bernhard (1857), « Theorie der Abel'schen Functionen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **54**, 115-155.
- ROCHER Guy (1968), *Introduction à la sociologie générale*, t. 1. L'action sociale, Montréal : HMH.
- ROSENHAIN Johann Georg (1851), « Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe », *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, **11**, 361-468.
- ROWE David E. (1983), « A Forgotten Chapter in the History of Felix Klein's Erlanger Programm », *Historia Mathematica*, **10** (4), 448-457.
- (1989a), « Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition », *Osiris*, **5** (2), 186-213.
- (1989b), « The Early Geometrical Works of Sophus Lie and Felix Klein », in John McCLEARY et David E. ROWE (éds.), *The History of Modern Mathematics*, t. 1 : Ideas and their Reception, Boston, San Diego, New York : Academic Press, 209-273.
- (1992), « Klein, Lie, and the "Erlanger Programm" », in Luciano BOI, Dominique FLAMENT et Jean-Michel SALANSKIS (éds.), *1830-1930: A Century of Geometry*, Berlin, Heidelberg : Springer, 45-54.
- (2003), « Mathematical Schools, Communities, and Networks », in Mary Jo NYE (éd.), *The Cambridge History of Science: The Modern Physical and Mathematical Sciences*, t. 5, Cambridge, New York, Melbourne : Cambridge University Press, 113-132.
- (2013), « Mathematical Models as Artefacts for Research: Felix Klein and the Case of Kummer Surfaces », *Mathematische Semesterberichte*, **60**, 1-24.
- ROWE David E., VOLKERT Klaus, NABONNAND Philippe et REMMERT Volker (éds.) (2010), « Disciplines and Styles in Pure Mathematics, 1800–2000 », *Oberwolfach Reports*, **7**, 581-665.
- SAINT-GERVAIS Henri Paul de (2016), *Uniformization of Riemann Surfaces: Revisiting a Hundred-year-old Theorem*, European Mathematical Society.
- SALMON George (1852), *A Treatise on the Higher Plane Curves*, Dublin : Hodges et Smith.
- SCHAPPACHER Norbert (1991), « Développement de la loi de groupe sur une cubique », in *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988/89*, Catherine GOLDSTEIN (éd.), t. 91, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 159-184.
- SCHAPPACHER Norbert et SCHOOF René (1996), « Beppo Levi and the Arithmetic of Elliptic Curves », *The Mathematical Intelligencer*, **18** (1), 57-69.
- SCHOLZ Erhard (1980), *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Boston : Birkhäuser.

- SCHOLZ Erhard (1989), *Symmetrie, Gruppe, Dualität: Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts*, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser.
- SCHUR Friedrich (1881), « Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen », *Mathematische Annalen*, **18**, 1-32.
- SCHWARZ Hermann Amandus (1880), « Essai d'une démonstration d'un théorème de Géométrie, rédigé sur l'invitation de M. Charles Hermite », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3<sup>e</sup> sér., **6**, 111-114.
- SCHWERMER Joachim (2007), « Reduction Theory of Quadratic Forms: Towards *Räumliche Anschauung* in Minkowski's Early Work », in Catherine GOLDSTEIN, Norbert SCHAPPACHER et Joachim SCHWERMER (éds.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 483-504.
- SERFATI Michel (1992), *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes : sur l'histoire des nombres irrationnels et transcendants aux XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles*, Brochure A.P.M.E.P.
- SIMON Max (1876), « Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **81**, 301-323.
- SINACEUR Hourya (1991), *Corps et modèles*, Paris : Vrin.
- SMADJA Ivahn (2011), « Des méthodes d'intégration par arcs de sections coniques aux échelles de modules. Legendre lecteur de Landen », *Archive for History of Exact Sciences*, **65** (4), 343-395.
- (2013), « De la lemniscate au damier analytique. Legendre et le primat de l'analyse », in Roshdi RASHED et Pascal CROZET (éds.), *Les Courbes. Études sur l'histoire d'un concept*, Paris : Albert Blanchard, 143-193.
- SOMMERFELD Arnold (1898), « Vorbemerkungen », *Mathematische Annalen: Generalregister zu den Bänden 1–50*, v-vii.
- STEINER Jacob (1846), « Geometrische Lehrsätze », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **32**, 182-184.
- TAHTA Dick (2006), *The Fifteen Schoolgirls*, Black Apollo Press.
- TOBIES Renate (1994), « Mathematik als Bestandteil der Kultur: Zur Geschichte des Unternehmens *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* », *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte*, **14**, 1-90.
- (2019), *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*, Berlin, Heidelberg : Springer.
- VAN DER WAERDEN Bartel Leendert (1985), *A History of Algebra*, Berlin, Heidelberg : Springer.
- VINCIGUERRA Lucien (2019), *Celui qui parle. Science et roman*, Paris : Hermann.
- WEIERSTRASS Karl (1854), « Zur Theorie der Abelschen Functionen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **47**, 289-306.

- WEIERSTRASS Karl (1856), « Theorie der Abel'schen Functionen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **52**, 285-379.
- WITTGENSTEIN Ludwig (1953/2004), *Recherches philosophiques*, traduit de l'allemand par Françoise DASTUR, Maurice ÉLIE, Jean-Luc GAUTERO, Dominique JANICAUD et Élisabeth RIGAL, avant-propos et appareil critique par Élisabeth RIGAL, Domont : Gallimard.
- WOLFSON Paul R. (2008), « George Boole and the Origins of Invariant Theory », *Historia Mathematica*, **35**, 37-46.
- WUSSING Hans (1969), *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- ZEUTHEN Hieronymus (1871), « Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes », *Mathematische Annalen*, **3**, 150-156.



# Dans l'ombre de la géométrie algébrique : études d'articulations disciplinaires au XIX<sup>e</sup> siècle

**Résumé :** Ce mémoire consiste en une synthèse des recherches que j'ai menées depuis le début de ma thèse et qui portent principalement sur les enjeux et les modalités de la mise en place d'interfaces entre géométrie des courbes et des surfaces algébriques, théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, théorie des invariants, théorie des équations algébriques et théorie des substitutions dans la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. Ces articulations disciplinaires, qui préfigurent d'une certaine façon la constitution de la géométrie algébrique, ont notamment été portées par le mathématicien allemand Alfred Clebsch (1833-1872), dont j'ai examiné plusieurs textes clés.

L'introduction du mémoire est une synthèse de la synthèse. Elle présente mes choix méthodologiques transversaux, consistant à articuler des analyses locales de textes, exécutées au plus près de la technique mathématique, avec des études visant à saisir des phénomènes de circulation et d'évolution du savoir à plus grande échelle. Elle rappelle aussi que la plupart des situations historiques abordées ont été marquées *a posteriori* par Felix Klein, et en expose quelques conséquences historiographiques. Les trois chapitres suivants reprennent les résultats que j'ai obtenus relativement à trois types de configurations disciplinaires : groupes, équations et géométrie ; fonctions abéliennes et géométrie ; théorie des invariants et géométrie. Un autre chapitre est dévolu à mes travaux utilisant les outils issus de la textométrie, grâce auxquels j'ai étudié, d'une part, un corpus de textes relevant de la théorie des surfaces algébriques et, d'autre part, le style d'écriture mathématique de Charles Hermite. Enfin, le dernier chapitre décrit des travaux en cours et à venir sur certaines recherches de Georges Humbert (1859-1921), à l'interface entre géométrie, analyse et théorie des nombres.

**Mots clés :** Histoire des mathématiques ; géométrie algébrique ; fonctions abéliennes ; théorie des invariants ; théorie des équations ; Alfred Clebsch ; textométrie.

**Image de couverture :** Extrait d'une lettre d'Alfred Clebsch à Camille Jordan, datée du 5 mars 1871. Archives de l'École polytechnique (réf. VI2A2(1855) 15).

