



HAL
open science

Contributions à l'étude des lois de temps d'atteinte. Applications.

Diana Dorobantu

► **To cite this version:**

Diana Dorobantu. Contributions à l'étude des lois de temps d'atteinte. Applications.. Mathématiques [math].
Université Lyon 1 - Claude Bernard, 2024. <tel-04972424>

HAL Id: tel-04972424

<https://hal.science/tel-04972424v1>

Submitted on 1 Mar 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Mémoire

en vue de l'obtention de

l'Habilitation à Diriger des Recherches

présenté et soutenu par

Diana Dorobantu

Le 21 juin 2024

Contributions à l'étude des lois de temps d'atteinte. Applications.

Devant le jury composé de :

Laure Coutin	Université Paul Sabatier, Toulouse	Examinatrice
Emmanuel Gobet	École Polytechnique	Rapporteur
Caroline Hillairet	ENSAE	Examinatrice
Ying Jiao	Université Lyon 1, ISFA	Examinatrice
Marie Kratz	ESSEC Business School	Rapporteuse
Pierre Patie	Cornell University	Rapporteur
Monique Pontier	Université Paul Sabatier, Toulouse	Invitée
Anthony Reveillac	INSA Toulouse	Examineur
Christian Robert	Université Lyon 1, ISFA	Examineur

Table des matières

1	Loi du premier temps d'atteinte et d'autres lois associées	11
1.1	Processus de renouvellement perturbé par une diffusion	14
1.1.1	Notations et hypothèses	14
1.1.2	Loi du premier temps d'atteinte	15
1.2	Mouvement brownien tri-dimensionnel	17
1.2.1	Notations et hypothèses	17
1.2.2	Loi jointe du premier temps de passage et du processus. Cas particuliers .	18
1.3	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck	20
1.3.1	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants	20
1.3.2	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec drift "brisé"	23
1.4	Perspectives de recherche	26
2	Estimation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à partir des observations de suprema	29
2.1	Modèle	31
2.2	Estimateur des moindres carrés	32
2.2.1	Fonction de répartition du supremum	32
2.2.2	Problème d'estimation. Propriétés de l'estimateur	33
2.3	Estimateur de pseudo-vraisemblance	34
2.3.1	Densité du supremum	34
2.3.2	Problème d'estimation. Propriétés de l'estimateur	34
2.4	Résultats numériques	36
2.5	Propriétés des ν -zéros des fonctions paraboliques cylindriques	37
2.6	Perspectives de recherche	40

3	Différentes modélisations du risque en finance et assurance	41
3.1	Contagion	42
3.1.1	Modèle de contagion de défauts	44
3.1.2	Loi du nombre total de défauts	44
3.2	Risque de longévité	46
3.2.1	Cadre général. Notations.	47
3.2.2	Le prix d'indifférence	48
3.2.3	Construction des contrats représentatifs par l'approche Model Point	50
3.3	Dépréciation durable	52
3.3.1	Modèle	53
3.3.2	Loi jointe de la valeur de marché et de la dépréciation d'un portefeuille	54

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier Monique Pontier et Laure Coutin qui m'ont donné le gout de la recherche.

Cette Habilitation à Diriger des Recherches représente à peu de choses près quinze ans de ma carrière universitaire et, plus globalement, de ma vie. Des années bien remplies, mais aussi parfois difficiles, des années avec des nuits où j'étais souvent accompagnée des fonctions paraboliques cylindriques, des processus d'Ornstein-Uhlenbeck, des temps d'atteinte ou des trois à la fois... Quinze années où j'ai eu l'occasion de rencontrer et de côtoyer des collègues et des amis que je tiens à remercier aujourd'hui.

Je remercie Marie Kratz, Emmanuel Gobet et Pierre Patie d'avoir pris du temps, sur un emploi du temps que j'imagine chargé, pour lire mon manuscrit et rédiger un rapport. Je voudrais exprimer ma reconnaissance à Monique Pontier, Laure Coutin, Caroline Hillairet, Ying Jiao, Anthony Revillac, Christian Robert qui ont accepté de faire partie du jury de cette habilitation. C'est un grand honneur pour moi que vous ayez accepté d'être rapporteurs et/ou de faire partie de mon jury d'HDR.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés en collaboration avec d'autres collègues. Les résultats obtenus n'auraient pas été possibles sans eux et je souhaite donc les remercier, en espérant n'avoir oublié personne : Didier Rullière qui est le premier à m'avoir proposé une collaboration à mon arrivée à l'ISFA (je pense fort à toi, bon rétablissement !), Areski Cousin qui a réussi à appliquer notre modèle de contagion sur des données réelles, Yahia Salhi et Pierre Théron de m'avoir initiée aux applications à l'actuariat. Merci à Yahia d'avoir répondu à toutes mes questions naïves sur le monde de l'actuariat. Merci à Véronique Maume-Dechamps et à Pierre Ribereau, grâce à qui, j'ai commencé à travailler sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Depuis, je ne l'ai plus quitté ! Merci à Stefan Ankirchner. Je n'oublierai pas toutes nos réunions de travail en visio pendant la période Covid. J'adresse un grand merci à Christophette Blanchet-Scalliet, avec qui, il est si agréable de travailler, pour ces mille et une occasions où elle m'a soutenue et accompagnée en de très nombreux moments. A ses côtés, j'ai tant appris... Merci de m'avoir fait confiance et de m'avoir donné l'occasion de co-encadrer Laura et Benoit. Merci à eux de m'avoir supportée. J'ai par ailleurs beaucoup appris d'eux.

Merci à mes collègues et amis de l'ISFA, Caroline B. (Félicitations pour ton HDR ! Je n'ai toujours rien compris à ton domaine de recherche), Caroline C. (pour les heures passées au téléphone), Denis (d'avoir toujours été là quand j'avais une question ou un problème d'ordre informatique et pas que), Samy (pour son aide dans toute la partie administrative de la formation au Vietnam), Anne (de m'avoir recommandé des médecins, des cuisinistes etc., d'avoir toujours répondu à mes questions sur Claroline, ADE, Gasel...), Jean-Louis (pour sa phrase « Quand

est-ce que tu passes ton HDR? »), Alexis (grâce à qui j'ai réussi à avoir des rdv rapides Doctolib, entre autres), Nicolas (pour nos échanges et pour les cours faits en IRF), Christian (pour son retour inespéré à l'ISFA et son aide pour l'organisation de la soutenance HDR), Ying (pour son soutien et ses conseils), Pierre (pour ses réponses à mes questions de stat, pour toutes les fois où tu me fais rire). Je remercie tout particulièrement Esterina, mon ancienne collègue de bureau et amie, pour toutes les galères administratives traversées ensemble. Les restos et les repas (pas si nombreux dernièrement malheureusement) me manquent terriblement. Grâce à toi et à Pierre, la vie au deuxième étage est plus joyeuse. Merci aux deux petits « jeunes » Naomie et Stanislas (pas si jeune en vrai). Vous apportez de la fraîcheur et de la bonne humeur à notre étage. Merci aussi à mes anciens collègues Stéphane, Nabil...

Un grand merci, et certainement le plus grand, à Nicolas, mon conjoint, qui sait faire preuve de patience (beaucoup de patience) quand je me plonge trop dans le travail, qui est d'un soutien sans faille et qui croit en moi quoi qu'il arrive, ainsi qu'à mes enfants, Lisa et Théo, qui me donnent tellement de joie et me font rire quand ils essayent d'utiliser dans leurs discussions les mots « processus », « calcul sto » ou encore « gestion de portefeuille ». Ils me permettent de relativiser ce que l'on vit au quotidien à l'Université.

Introduction

Ce manuscrit présente une synthèse de mes travaux de recherche en probabilités et statistique, travaux qui ont été effectués après la thèse, depuis mon arrivée à l'ISFA en septembre 2008. Le document comporte également quelques problématiques de mathématiques appliquées à la finance et à l'actuariat.

Durant mes années de thèse, une partie de mes travaux a été consacrée à l'étude de la loi du temps d'atteinte d'un seuil donné par une classe de processus de Lévy s'écrivant sous la forme d'une somme entre un mouvement brownien avec drift et un processus de Poisson composé. Le premier chapitre prolonge ces travaux en considérant d'autres processus que ceux étudiés dans ma thèse. L'étude des temps d'atteinte et d'autres lois associées (loi du supremum du processus, loi jointe processus et supremum...) est devenu le thème principal de mon activité de recherche. Dans un premier temps, je me suis naturellement intéressée à étendre le résultat de ma thèse [Coutin et Dorobantu (2011)] à un processus de renouvellement. Nous montrons que la fonction de répartition du premier temps d'atteinte d'un processus de renouvellement perturbé par un mouvement brownien est dérivable sur \mathbb{R}_+ et nous donnons une expression de la densité. Les sauts du processus de renouvellement peuvent être soit positifs, soit négatifs. Nous proposons une méthode de simulation de la densité basée uniquement sur l'observation du processus aux instants de sauts. Une telle étude ayant des applications dans le domaine de l'assurance dommages, l'avantage principal de cette méthode est d'obtenir la probabilité de ruine à partir de moins de simulations que la distribution empirique du temps de ruine. Dans un deuxième temps, nous avons étudié la loi du temps de sortie d'un mouvement brownien tri-dimensionnel d'un trièdre. Nous avons cherché à généraliser la méthode des images appliquée par Iyengar [Iyengar (1985)] en dimension deux. Nous montrons que, en dimension trois, cette méthode permet d'obtenir une expression analytique pour la loi des temps d'atteinte uniquement dans quelques cas particuliers. Ensuite, nous nous sommes intéressés à la fonction de répartition / densité jointe du point final d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son supremum. Nous avons obtenu cette loi comme solution de l'équation de Fokker-Planck. En utilisant une méthode spectrale pour résoudre cette équation, nous avons obtenu une expression explicite de la loi jointe (processus, supremum). Même si l'expression obtenue est une série de fonctions spéciales, elle est facilement évaluable numériquement et plus rapide qu'une méthode de Monte Carlo comme le montrent des simulations. Enfin, nous avons généralisé ce dernier résultat en considérant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec un drift qui est une fonction linéaire avec des coefficients différents en-dessous et au dessus de 0. Nous donnons une expression explicite de la loi jointe (processus, supremum) et en déduisons l'expression de la densité du temps d'atteinte d'un niveau donné par ce type de processus.

Le second chapitre s'inscrit dans l'étude de la statistique des processus et est motivé par

l'estimation des mesures de risques climatiques, prévoir et estimer les mesures de risque liées aux canicules par exemple étant un enjeu important. Il serait possible d'estimer ces mesures en connaissant le processus de température. Nous souhaitons reconstruire le processus sous-jacent des températures en nous basant sur les données disponibles dans les stations météo (un échantillon des extrema, et par exemple des maxima). Nous avons suivi la modélisation de la température introduite par [Dischel (Mars 1998), Dischel (Octobre 1998)] : comme la température ne dévie pas trop de sa moyenne, un processus avec retour à la moyenne comme le processus d'Ornstein-Uhlenbeck peut être utilisé pour modéliser le processus des températures. Nous proposons deux méthodes d'estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à partir des observations de son supremum sur des fenêtres de temps disjointes. Nous exprimons la loi du supremum : l'expression de la fonction de répartition est donnée en fonction des ponts de Bessel et la densité est exprimée comme série faisant apparaître des fonctions paraboliques cylindriques. La première méthode est une méthode de type moindres carrés, mais contrairement à l'approche classique, nous utilisons dans notre estimation directement la fonction de répartition et non pas l'inverse comme on a l'habitude dans l'estimation par quantiles. La deuxième méthode est une méthode de pseudo-vraisemblance. Elle est basée sur la densité du supremum et consiste à remplacer la vraisemblance par une vraisemblance "approchée". Les estimateurs obtenus sont consistants et nous avons montré la normalité asymptotique des estimateurs obtenus avec la deuxième méthode. Ce chapitre est étroitement associé au premier. Parmi les points communs de ces deux chapitres, on retrouve la loi du supremum sur laquelle est basée l'estimation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Cette loi est reliée à celle des temps d'atteinte d'un niveau donné.

Le troisième chapitre est consacré à trois applications dans le domaine de la finance et de l'actuariat. Le premier modèle est une extension du modèle uni-périodique de contagion de défauts de Davis et Lo [Davis et Lo (2001)]. Davis et Lo considèrent une économie constituée de n émetteurs de dette dans laquelle chaque entité peut faire défaut directement ou par contagion par une autre entité ayant déjà fait défaut directement. Notre principal résultat a consisté à exprimer de manière récursive la distribution du nombre total de défauts dans un cadre multi-périodique. Ce nouveau modèle de contagion permet, contrairement au modèle original de Davis et Lo, d'évaluer des tranches de CDO standardisées. Après avoir calibré les paramètres du modèle sur des tranches standardisées de CDO, nous avons montré que les cotations de marché en période de crise reflétaient un niveau significatif du risque de contagion de défaut. Dans le second modèle, nous nous sommes intéressés au prix d'indifférence du rachat d'un portefeuille d'assurance-vie contenant m contrats par un assureur détenant déjà un portefeuille à plusieurs contrats. Ces deux portefeuilles sont composés d'individus dont les durées de vie sont potentiellement dépendantes. Le prix d'indifférence est caractérisé comme solution d'une équation différentielle stochastique retrograde (EDSR) qui peut-être décomposée en plusieurs EDSR auxiliaires. Les instants de décès des assurés n'étant par ordonnés, le nombre d'équations différentielles stochastiques rétrogrades à résoudre augmente de manière exponentielle avec la taille du portefeuille. Pour contourner cette difficulté, nous avons proposé une approche *Model Point*, i.e. basée sur la construction d'un contrat représentatif pour chaque portefeuille. Enfin, le troisième modèle constitue une application dans le domaine de la comptabilité des assurances. La spécificité de l'activité d'une compagnie d'assurance repose sur l'inversion de son cycle de production : les primes sont encaissées avant que les sinistres ne soient connus. Tout d'abord l'assureur doit constituer des provisions, ensuite, il doit détenir suffisamment de fonds propres pour rester solvable même

après une éventuelle perte. Enfin, il place les fonds (primes encaissées) dont il dispose sur les marchés financiers. Le risque de voir un placement perdre de sa valeur est réel et les assureurs sont tenus à l'obligation de constituer des provisions si la dépréciation est durable. Nous nous sommes intéressés à la dépréciation durable d'un portefeuille constitué de n actifs. Ainsi, nous avons calculé la probabilité de l'existence d'une telle dépréciation, ainsi qu'à la loi jointe (dépréciation durable d'un portefeuille, valeur de marché du portefeuille). Deux cas différents ont été étudiés : dans un premier temps, les actifs du portefeuille ont été supposés avoir la même dynamique et dans un deuxième temps les actifs sont supposés être corrélés. La loi jointe de la dépréciation durable et la valeur du portefeuille a été obtenue pour $n = 2$ et pour $n > 2$ uniquement dans quelques cas particuliers.

*
* *

Ce mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches se base sur les publications et prépublications suivantes :

Publications après la thèse :

- [D1] Cousin A., Dorobantu D., Rullière D., *Valuation of portfolio loss derivatives in an infectious model*, Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance, Springer, 2012, 139-147.
- [D2] Blanchet-Scalliet C., Dorobantu D., Rullière D., *The density of a passage time for a renewal-reward process perturbed by a diffusion*, Applied Mathematics Letters 26 (1), 2013, 108-112.
- [D3] Cousin A., Dorobantu D., Rullière D., *An extension of Davis and Lo's contagion model*, Quantitative Finance 13 (3), 2013, 407-420.
- [D4] Blanchet-Scalliet C., Dorobantu D., Gay L., Maume-Deschamps V., Ribereau P., *Risk assessment using suprema data*, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment 32 (10), 2018, 2839-2848.
- [D5] Blanchet-Scalliet C., Dorobantu D., Salhi Y., *A Model-Point Approach to Indifference Pricing of Life Insurance Portfolios with Dependent Lives*, Methodology and Computing in Applied Probability 21 (2), 2019, 423-448.
- [D6] Dorobantu D., Thérond P.-E., Salhi Y., *Modelling net carrying amount of shares for market consistent valuation of life insurance liabilities*, Methodology and Computing in Applied Probability, 22 (2), 2020, 711-745.
- [D7] Blanchet-Scalliet C., Dorobantu D., Gay L., *Joint Law of an Ornstein-Uhlenbeck Process and its Supremum*, Journal of Applied Probability 57 (2), 2020, 541-558.
- [D8] Ankirchner S., Blanchet-Scalliet C., Dorobantu D., Gay L., *First passage time density of an Ornstein-Uhlenbeck process with broken drift*, Stochastic Models 38, 2022, 308-329.
- [D9] Blanchet-Scalliet C., Dorobantu D., Nieto B., *Some properties for ν -zeros of Parabolic Cylinder functions*, Le Matematiche 78 (2), 2023, 277-287.
- [D10] Blanchet-Scalliet C., Dorobantu D., Nieto B., *A pseudo-likelihood estimator of the Ornstein-Uhlenbeck parameters from suprema observations*, Statistical Inference for Stochastic Processes 27, 2024, 407-425.

Prépublications :

- [D11] Cousin A., Dorobantu D., Rullière D., *A note on the computation of an actuarial Waring formula in the finite-exchangeable case*, preprint 2011.
- [D12] Blanchet-Scalliet C., Cousin A., Dorobantu D., *Hitting times for a correlated three dimensional Brownian motion*, preprint 2013.

Dans tout ce document, ces publications seront toutes citées par la lettre [D...].

*
* *

Expériences d'encadrement doctoral

Une partie de mes travaux présentés dans ce document a été réalisée dans le cadre de co-encadrements de thèse.

Laura Gay (avec Christophette Blanchet-Scalliet, 2016-2019), thèse soutenue le 23 septembre 2019 "*Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et son supremum : quelques résultats théoriques et application au risque climatique*". Laura est actuellement enseignante en Classes préparatoires au Lycée Saint-Marie Lyon.

En 2016, Pierre Ribereau nous a proposé à Christophette et à moi de travailler sur l'estimation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à partir des observations des suprema. Cela permettait de répondre à une problématique concrète. En effet, nous avons à notre disposition les températures maximales et minimales journalières et l'idée de départ était de trouver la dynamique des températures modélisée par l'intermédiaire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous avons donc proposé à Laura un sujet de thèse sur cette étude. Après avoir travaillé sur l'estimation des paramètres [D4], nous nous sommes rendues compte que, pour calculer certaines mesures de risque climatique liées aux canicules par exemple, il pouvait être utile d'avoir la loi jointe du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son supremum [D7].

Benoit Nieto (avec Christophette Blanchet-Scalliet, 2021- présent). Benoit s'intéresse à des diffusions avec coefficients constants par morceaux. Sa soutenance est prévue en septembre 2024, "*Modeling and Estimation of Multi-Mean Reverting Processes : Analytical and Statistical Approaches*".

Les travaux de Benoit s'inscrivent dans la continuité de ceux de Laura. Tout d'abord, nous avons souhaité améliorer les estimateurs obtenus par Laura en proposant une autre méthode d'estimation qui nous permettait d'avoir des meilleures propriétés pour les estimateurs [D10], comme la normalité asymptotique que nous n'avons pas réussi à obtenir avec Laura. Ensuite, nous avons souhaité étudier des processus avec des coefficients constants par morceaux. L'étude de ce type des processus est motivée par les applications dans plusieurs domaines comme par exemple dans la dynamique des populations [Cantrell et Cosner (1999)] ou la finance [Decamps et al. (2006)].

Chapitre 1

Loi du premier temps d'atteinte et d'autres lois associées

Ce chapitre est basé sur les travaux [D2, D7, D8, D12]. Les co-auteurs de ces différents articles sont Christophette Blanchet-Scalliet, Laura Gay, Didier Rullière, Areski Cousin et Stefan Ankirchner.

Sommaire

1.1	Processus de renouvellement perturbé par une diffusion	14
1.1.1	Notations et hypothèses	14
1.1.2	Loi du premier temps d'atteinte	15
1.2	Mouvement brownien tri-dimensionnel	17
1.2.1	Notations et hypothèses	17
1.2.2	Loi jointe du premier temps de passage et du processus. Cas particuliers	18
1.3	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck	20
1.3.1	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants	20
1.3.2	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec drift "brisé"	23
1.4	Perspectives de recherche	26

Introduction

L'étude des temps d'atteinte étant le thème principal de ma recherche, il est naturel de commencer par une description. Si j'écrivais un chapitre sur les temps d'atteinte, celui-ci sera bien évidemment beaucoup plus long. Néanmoins, il me semble important de donner un rapide aperçu de cette notion, quelques exemples d'applications et un historique sur les études réalisées à ce sujet.

Considérons $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique partant de $X_0 = x_0$. Le premier temps d'atteinte du seuil a (avec $a > x_0$) par le processus $(X_t)_{t \geq 0}$, noté T_a , est défini comme suit : $T_a = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}$ (ou $\inf\{t \geq 0 : X_t \leq a\}$ si $a < x_0$). Si le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est continu, alors T_a est le premier instant où le processus touche la barrière a , $T_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$,

ce qui n'est pas forcément le cas pour un processus à sauts puisque le dépassement du seuil a pourrait se faire lors d'un saut du processus.

La loi du temps d'atteinte est reliée à celle du supremum ou de l'infimum du processus. Le graphique ci-dessous facilitera la compréhension de ce lien. Dans l'exemple considéré, le processus continu $(X_t)_{t \geq 0}$ touche la barrière $a > X_0 = 0$ quand son supremum (en rouge) touche ce seuil. Intuitivement cela signifie que le temps d'atteinte T_a survient après un instant t si et seulement si le supremum du processus n'a pas encore touché le seuil a avant la date t , donc s'il est inférieur à a : $\mathbb{P}(T_a > t) = \mathbb{P}(\sup_{s \leq t} X_s < a)$. La relation qui existe entre le temps d'atteinte et le supremum d'un processus sera utilisée dans plusieurs de mes travaux.

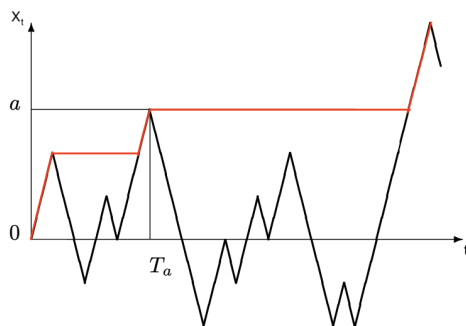


FIGURE 1.1 – Premier temps d'atteinte du niveau a par un processus continu. En noir le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et en rouge le supremum $(\sup_{s \leq t} X_s)_{t \geq 0}$.

De manière similaire on peut définir le temps de sortie d'un intervalle $A = [a, b]$: $T_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin A\}$ quand $x_0 \in A$. Dans ce cas la loi du temps d'atteinte sera liée à la jointe du supremum et de l'infimum (le processus n'est pas sorti de l'intervalle $[a, b]$ si son infimum est supérieur au seuil a et le supremum est inférieur au seuil b).

La notion de temps d'atteinte est importante dans le domaine des probabilités appliquées et elle a fait l'objet de nombreuses études, essentiellement grâce aux applications dans différents domaines (risque de crédit, actuariat, climat...). Dans la **théorie de la ruine**, la loi du temps d'atteinte est liée à la probabilité de ruine. Sa nature même d'espérance d'une indicatrice portant sur un temps d'atteinte est une notion classique en science actuarielle [Picard et Lefèvre (1997)]. Le concept de ruine doit se comprendre comme la survenance d'un scénario défavorable, pouvant conduire à l'impossibilité, pour la compagnie, de faire face à certains de ses engagements, aussi bien envers ses assurés que ses actionnaires, voire à devoir cesser son activité pour cause d'insolvabilité. Le but premier de la théorie de la ruine a été de modéliser l'évolution de la richesse d'une compagnie par un processus stochastique et d'évaluer la probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que le scénario traduisant un échec se réalise. La probabilité de ruine avant un instant t se traduit donc par le calcul de la probabilité que le temps d'atteinte d'un niveau assez petit par le processus de richesse est arrivé avant t . La théorie de la ruine se rapproche de celle du **risque défaut**. Une des approches dans la littérature financière pour la modélisation d'un événement de défaut est l'approche structurelle. Dans cette approche (cf. [Merton (1974)]), le défaut survient lorsqu'un processus (par exemple la valeur de la firme) passe en dessous d'un certain niveau L , en général constant ou déterministe et fixé par les managers de la firme. Etu-

dier le défaut d'une entreprise revient donc à étudier le temps d'atteinte du niveau L par le processus décrivant la valeur de la firme. Un autre exemple d'application dans le domaine financier, est lors de l'évaluation des options américaines, des options à barrière ou des options lookback par exemple quand il est crucial d'étudier les premiers temps d'atteinte d'un niveau donné par le processus décrivant la dynamique du sous-jacent [Kou et Wang (2004)]. Les temps d'atteinte peuvent s'appliquer également en **dynamique des populations** qui est une branche de l'écologie s'intéressant à la variation du nombre d'individus d'une population au cours du temps [Adam (2016), Lambert (2002)]. Si l'on s'intéresse à la persistance ou à l'extinction d'une population lorsque la taille de celle-ci est décrite par l'intermédiaire d'un processus stochastique, alors l'étude des temps d'atteinte est nécessaire. En effet, le temps d'extinction est le temps d'atteinte du niveau 0 par le processus décrivant la taille de la population et la probabilité de la persistance de l'espèce est la probabilité que le processus en question reste au dessus d'un certain seuil. Un autre exemple de domaine d'application des temps d'atteinte est **le climat** [Wolkovich et al. (2021)]. Lorsque la dynamique des températures est modélisée par un processus stochastique, calculer la probabilité que la température ne dépasse pas un niveau donné pendant une certaine période par exemple, revient à calculer la probabilité que le temps d'atteinte du niveau donné ne survient pas pendant la période considérée. Lors de l'analyse des ouragans, les spécialistes s'intéressent à la probabilité d'une intensification rapide de ceux-ci. L'intensification rapide est définie comme le temps d'atteinte d'un niveau élevé par le processus décrivant la dynamique de l'ouragan [Fan et al. (2021)]. Je n'ai donné ici que quelques exemples d'applications de cette notion, mon but étant de montrer l'intérêt de l'étude des temps d'atteinte.

Historiquement, des nombreux auteurs se sont intéressés aux lois des temps d'atteinte pour différents processus. La liste qui suit n'est bien entendu pas exhaustive. Le cas d'un mouvement brownien avec drift est connu depuis longtemps [Lévy (1948)]. [Borodin et Salminen (1996)] s'intéressent au cas d'un processus de Bessel. Plus tard, [Linetsky (2004)] a étudié le cas d'un processus CIR, [Aili et al. (2005), Lipton et Kaushansky (2018)] celui d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et [Wang et al. (2015)] d'un processus Skew Ornstein-Uhlenbeck. Dans le cas d'un processus à sauts, les premiers résultats ont été obtenus par [Zolotarev (1964)] et [Borokov (1964)] pour un processus de Lévy à sauts négatifs. D'autres classes particulières de processus de Lévy ont fait l'objet de plusieurs études : [Peskir (2007)] et [Bernyk et al. (2008)] obtiennent une formule explicite pour la loi du temps d'atteinte d'un seuil donné par un processus de Lévy α -stable à sauts positifs, [Kuznetsov et al. (2014)] pour les processus α -stables avec des sauts positifs et négatifs quand $\alpha \in (1, 2)$, [Kou et Wang (2003)] étudient le cas d'un processus de Lévy lorsque les sauts suivent une loi double exponentielle, [Lefèvre et Loisel (2008), Picard et Lefèvre (1997), Picard et Lefèvre (1998)] obtiennent la loi du temps d'atteinte dans le cas d'un Lévy sans partie gaussienne. Je me suis intéressée à mon tour, pendant ma thèse à ce sujet en étudiant le temps d'atteinte pour les processus de Lévy caractérisés par la somme d'un mouvement brownien avec drift et d'un processus de Poisson composé sans considérer une loi particulière pour les sauts. Récemment [D'Onofrio et Lanteri (2023)] se sont intéressés à la densité du temps d'atteinte pour un processus de Jacobi à sauts.

*

* *

Dans ce chapitre j'étudie les lois des temps d'atteinte. Dans un premier temps, mes co-auteurs

et moi généralisons les travaux que j'ai développés pendant ma thèse. Nous remplaçons le processus de Poisson apparaissant dans la dynamique du processus de Lévy [Coutin et Dorobantu (2011)] par un processus de comptage. Nous nous intéressons ainsi à la loi du temps d'atteinte d'un niveau donné par un processus de renouvellement perturbé par un mouvement brownien. Les sauts du processus de renouvellement peuvent être positifs et négatifs. Nous proposons une méthode de simulation de la densité basée uniquement sur l'observation du processus aux instants de sauts. Ce modèle avec sauts négatifs a été introduit pour modéliser les réserves d'une compagnie d'assurance [Furrer et Schmidli (1994), Schmidli (1995)]. Dans un second temps, nous considérons le premier temps de sortie d'un mouvement brownien tri-dimensionnel d'un trièdre. Nous avons souhaité généraliser la méthode des images utilisée par [Iyengar (1985)] en dimension trois, mais nous avons obtenu des expressions analytiques uniquement dans quelques cas particuliers.

Comme la loi du premier temps d'atteinte d'un processus stochastique est étroitement liée à celle du supremum du processus en question, nous nous sommes intéressés au cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et nous avons calculé la fonction de répartition / densité jointe du point final du processus et de son supremum. La dynamique des températures étant souvent modélisée par l'intermédiaire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, la connaissance de la loi jointe (supremum, point final du processus) nous permettrait de calculer des mesures de risque climatique liées aux canicules par exemple. Enfin, nous avons généralisé ce résultat au cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont le drift est une fonction continue linéaire par morceaux. A partir de ce résultat, nous avons ensuite obtenu la densité du premier temps d'atteinte d'un niveau donné par un tel processus, résultat qui généralise ceux obtenus par [Alili et al. (2005)].

1.1 Processus de renouvellement perturbé par une diffusion

Dans [D2], nous généralisons le résultat de [Coutin et Dorobantu (2011)] appliqué pour un processus de Lévy, somme d'un mouvement brownien avec drift et d'un processus de Poisson composé. Nous montrons que la fonction de répartition du premier temps d'atteinte d'un seuil donné par un processus de renouvellement perturbé par un mouvement brownien est dérivable sur \mathbb{R}_+ . Nous donnons également une expression de la densité.

1.1.1 Notations et hypothèses

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel seront définis tous les processus. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus défini par

$$X_t = mt + W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0,$$

où $m \in \mathbb{R}$, $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard, $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de renouvellement et $(Y_i, i \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de répartition F_Y . On suppose que $(W_t)_{t \geq 0}$, $(N_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_i, i \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendants.

Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t) \vee \sigma(N_s, s \leq t, Y_1, \dots, Y_{N_t})$.

Les instants de sauts du processus $(N_t)_{t \geq 0}$ sont notés $T_i, i \in \mathbb{N}^*$ (avec la convention $T_0 = 0$) et les durées inter-sauts sont notées $S_i = T_i - T_{i-1}, i \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la suite $(S_i, i \in \mathbb{N}^*)$ vérifie l'hypothèse suivante :

Hypotèse 1.1.1 Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, S_i est une variable aléatoire absolument continue positive de fonction de répartition F_S et de densité continue, bornée f_S .

1.1.2 Loi du premier temps d'atteinte

Soit τ_x le premier temps d'atteinte du niveau $x < 0$ par le processus $(X_t)_{t \geq 0}$:

$$\tau_x = \inf\{u \geq 0 : X_u \leq x\}.$$

Le théorème suivant permet de montrer l'existence d'une densité pour τ_x et de donner une expression pour cette densité.

Théorème 1.1.1 La fonction de répartition (fdr) de τ_x admet une dérivée à droite en 0 et est dérivable en tout point de $]0, \infty[$. Sa dérivée, notée $f(\cdot, x)$ satisfait

$$f(0, x) = f_S(0) \frac{3F_Y(x) + F_Y(x^-)}{4}$$

et pour tout $t > 0$

$$f(t, x) = \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\tau_x > T_{N_t}} \tilde{f}(t - T_{N_t}, x - X_{T_{N_t}}) \right) + \sum_{i \geq 0} \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{T_i < t \wedge \tau_x} f_S(t - T_i) \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\tilde{\tau}_x - X_{T_i} > t - T_i} F_Y(x - X_{T_i} - W_{t - T_i} - m(t - T_i)) \mid \mathcal{F}_{T_i} \right) \right),$$

où $\tilde{\tau}_z = \inf\{u \geq 0 : mu + W_u \leq z\}$, $z < 0$ et $\tilde{f}(u, z) = \frac{|z|}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-\frac{(z - mu)^2}{2u}} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(u)$ sa densité. De plus, si S_1 et Y_1 sont intégrables, alors $\mathbb{P}(\tau_x = \infty) = 0$ si et seulement si $m\mathbb{E}(S_1) + \mathbb{E}(Y_1) \leq 0$.

Si S_i , $i \in \mathbb{N}^*$ suit une loi exponentielle, alors $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson et nous retrouvons le résultat que j'ai obtenu pendant ma thèse.

Proposer une expression qui puisse être évaluée facilement théoriquement ou numériquement est un enjeu important dans le domaine de l'assurance (cf. [Chi et Lin (2011)] et les références se trouvant dedans), car cela permet d'avoir une idée plus précise des périodes qui peuvent se révéler dangereuses et revêt donc une grande importance pour la gestion actif-passif (*asset-liability management*). Une des difficultés de la formule précédente vient du fait que l'expression de la densité est donnée comme une espérance dépendant d'un temps passage, qui nécessite donc le calcul de sa densité. Le théorème suivant permet d'écrire la densité de τ_x sous une autre forme, à partir seulement de la taille des sauts, des instants de sauts et du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ aux instants de sauts, i.e. (X_{T_i}, T_i, Y_i) pour $i \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 1.1.2 Pour $t > 0$, la densité de τ_x peut s'écrire sous la forme :

$$f(t, x) = \mathbb{E} \left[\tilde{f}(t - T_{N_t}, X_{T_{N_t}} - x) \gamma_{N_t} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N_t} f_S(t - T_i) g(t - T_i, X_{T_i} - x) \gamma_i \right],$$

où $g(\cdot)$, $\tilde{f}(\cdot)$ et $\{\gamma_i\}_{i \geq 0}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(u, z) &= \frac{|z|}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-\frac{(z-mu)^2}{2u}} \mathbf{1}_{u>0, z<0}, \\ \beta(a, b, d) &= \left(1 - e^{-\frac{2ab}{d}}\right) \mathbf{1}_{a>0, b>0}, \\ \gamma_i &= \prod_{j=1}^i \beta(X_{T_{j-1}} - x, X_{T_j} - Y_j - x, T_j - T_{j-1}) \mathbf{1}_{X_{T_j} - x > 0}, \\ g(t, \alpha) &= \int_{-\alpha}^0 \int_a^{+\infty} f_{m,t}(a, u) F_Y(-\alpha - u) du da, \\ f_{m,t}(a, u) &= \frac{\sqrt{2}(u - 2a)}{\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(u - 2a)^2}{2t} - \frac{m^2 t}{2} - mu\right).\end{aligned}$$

Cette formule présente un réel avantage d'un point de vue numérique. La densité peut être estimée à l'aide de simulations du processus uniquement aux instants des sauts. La simulation peut s'écrire comme celle d'une chaîne de Markov de dimension trois (X_{T_i}, T_i, Y_i) , $i \in \mathbb{N}^*$. Cette nouvelle expression de la densité évite en particulier les problèmes de discrétisation en temps et donc de temps de calcul : seul un ensemble fini d'accroissements gaussiens est nécessaire.

Les simulations numériques suivantes dans le cas markovien (inter-sauts de loi exponentielle, Figure 1.4) et dans le cas non-markovien (Figure 1.3) ont été réalisées en utilisant l'expression de la densité du Théorème 1.1.2.

Exemple d'un cas markovien Si $S_i, i \in \mathbb{N}^*$ suivent une loi exponentielle et $-Y_i, i \in \mathbb{N}^*$ sont des v.a.i.i.d de loi exponentielle, alors le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est markovien.

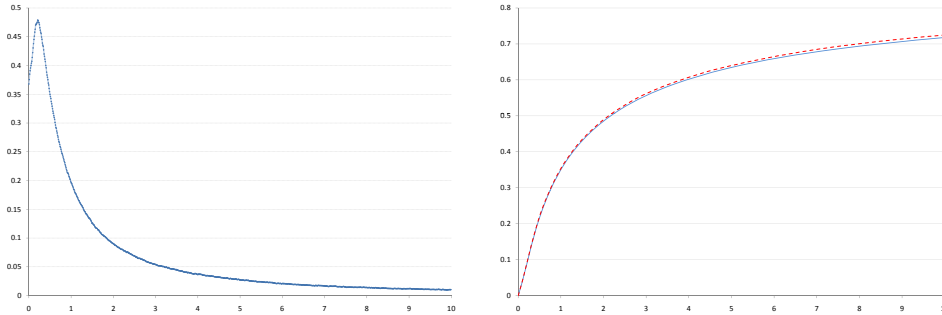


FIGURE 1.2 – Gauche : La densité de τ_x dans le cas où $-Y_i \sim \mathcal{E}(1)$, $S_i \sim \mathcal{E}(1)$ et $m = 1.1$. Droite : La fdr obtenue en intégrant la densité (bleu) la fdr empirique (rouge).

Exemple d'un cas non markovien Si $S_i, i \in \mathbb{N}^*$ sont des v.a.i.i.d. de loi log-normale t.q. $\mathbb{E}(S_i) = 1$ et $\text{Var}(S_i) = 1$ et les sauts suivent une loi double exponentielle, i.e. la densité $f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{y>0} + (1-p)\eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{y<0}$, $1 > p > 0$, $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$, alors $(X_t)_{t \geq 0}$ n'est pas un processus markovien.

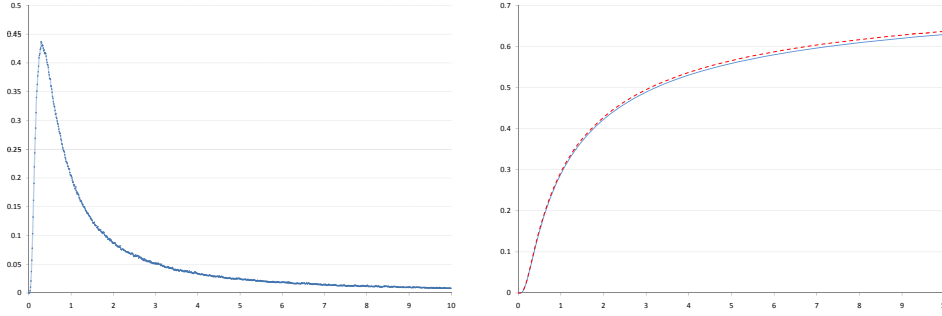


FIGURE 1.3 – Gauche : La densité de τ_x dans le cas où $\eta_1 = \eta_2 = 1$, $p = 0.1$. Droite : La fdr obtenue en intégrant la densité (bleu) la fdr empirique (rouge).

1.2 Mouvement brownien tri-dimensionnel

Dans [D12], j’ai essayé avec C. Blanchet-Scalliet et A. Cousin de généraliser le résultat d’Iyengar [Iyengar (1985)] en dimension trois. Plus précisément, nous nous sommes intéressés à la loi jointe de (τ, X) où X est un mouvement brownien tri-dimensionnel (avec les composantes pas forcément indépendantes) et τ est le premier temps de sortie de X d’un trièdre. L’extension à des dimensions supérieures ou égales à trois de la loi du premier temps de passage en utilisant la méthode des images n’est possible que pour des domaines polyédraux bien particuliers. En effet, en dimension trois cette méthode est équivalente à trouver un moyen de recouvrir l’espace par le même trièdre en utilisant uniquement des symétries planes. Or il n’existe que peu de solutions pour réaliser ceci. Dans ce travail, nous montrons que la méthode des images en dimension trois ne donne des expressions analytiques pour la loi des temps d’atteinte que dans quelques cas particuliers. Ce résultat a été obtenu de manière concomitante par Escobar, Ferrando et Wen [Escobar et al. (2013)], notre papier n’a donc pas pu être publié malgré un très bon rapport.

1.2.1 Notations et hypothèses

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien tri-dimensionnel avec les composantes corrélées, partant de $(0, 0, 0)$ avec $\mathbb{E}(X_t) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $\text{Var}(X_t) = t\Sigma$ où la matrice de corrélation est donnée par $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix}$. Soient les temps d’arrêt suivants $\tau_i = \inf\{t \geq 0 : X_t^i = a_i\}$, $a_i > 0$, où X_t^i est la i -ème composante du vecteur X_t , $i = 1, 2, 3$. Soit $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3$.

Pour obtenir une expression de la loi jointe de τ et de X , nous procédons d’abord à une transformation de X afin de décorréler les composantes du processus.

Comme Σ est une matrice symétrique, elle est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de Σ et A la matrice des vecteurs propres $A = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{pmatrix}$. La matrice A étant

réelle, orthogonale, alors $A^{-1} = A'$ (où A' est la transposée de A). On introduit la matrice D telle que $D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix}$.

Dans la suite nous distinguons les deux cas suivants : Σ inversible et Σ non inversible.

• **Cas** $\det(\Sigma) \neq 0$

Soit $(Z_t = (Z_t^1, Z_t^2, Z_t^3))_{t \geq 0}$ le processus obtenu par la transformation $Z_t = D^{-1/2} A'(a - X_t)$. $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien tri-dimensionnel avec les composantes non-corrélées, partant de $\hat{a} = D^{-1/2} A'a$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, τ_i est le premier temps d'atteinte de \mathcal{P}_i par le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ où

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \{(x, y, z) : v_1^1 \sqrt{\lambda_1} x + v_1^2 \sqrt{\lambda_2} y + v_1^3 \sqrt{\lambda_3} z = 0\}, \\ \mathcal{P}_2 &= \{(x, y, z) : v_2^1 \sqrt{\lambda_1} x + v_2^2 \sqrt{\lambda_2} y + v_2^3 \sqrt{\lambda_3} z = 0\}, \\ \mathcal{P}_3 &= \{(x, y, z) : v_3^1 \sqrt{\lambda_1} x + v_3^2 \sqrt{\lambda_2} y + v_3^3 \sqrt{\lambda_3} z = 0\}. \end{aligned}$$

Soit W le domaine délimité par $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ and \mathcal{P}_3 tel que $\hat{a} = (x_0, y_0, z_0) \in W$:

$$W = \{(x, y, z) \text{ t.q. } \text{sgn}(\mathcal{P}_i(x_0, y_0, z_0)) = \text{sgn}(\mathcal{P}_i(x, y, z)), \quad i = 1, 2, 3\}.$$

W est un trièdre et τ est le premier temps d'atteinte de ∂W (la frontière de W) par le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$.

• **Cas** $\det(\Sigma) = 0$

Si une seule valeur propre de Σ est nulle, alors W n'est plus un trièdre, mais un domaine délimité par deux parmi les trois plans (les deux plans sont choisis en fonction de la position du point de départ). Si deux valeurs propres sont nulles, alors W est un demi-espace.

1.2.2 Loi jointe du premier temps de passage et du processus. Cas particuliers

Si f est une fonction bornée positive définie sur W et qui s'annule sur ∂W , alors la fonction $u(t, \mathbf{x}) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}(f(Z_{t \wedge \tau})) = \int_W f(y) \mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\tau > t, Z_t \in dy)$, avec $\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid Z_0 = \mathbf{x})$ (resp. $\mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot \mid Z_0 = \mathbf{x})$), vérifie l'EDP suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u \text{ in } W, \quad u(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in W, \quad u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial W. \quad (1.1)$$

Si le pavage de l'espace euclidien tri-dimensionnel en utilisant notre domaine W uniquement par symétrie plane est possible, alors la méthode des images pourrait être appliquée comme dans [Iyengar (1985)] en dimension 2. Si l'on note S_k , $k = 0, \dots, K$ la suite des symétries nécessaires pour paver l'espace et $T_0 = I_3$, $T_k = S_k \circ T_{k-1}$, nous obtenons dans [D12] que

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\tau > t, Z_t \in dy) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \sum_{k=0}^K (-1)^k \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - T_k(\mathbf{y}))(\mathbf{x} - T_k(\mathbf{y}))'}{2t}\right) dy. \quad (1.2)$$

Muirhead [Muirhead (2011)] obtient une expression similaire en dimension n . Même si ce résultat semble très général, il est difficilement utilisable dans la pratique. En effet, pour obtenir une solution explicite, il faut identifier la séquence des symétries et tous les domaines symétriques (Muirhead donne un seul exemple en dimension trois).

Dans quelques cas simples, on a une formule explicite pour (1.2).

- **Cas particulier de coefficients de corrélation** $(\rho, 0, 0)$

$$\mathbb{P}_{(x_0, y_0, z_0)}(\tau > t, Z_t \in (dx, dy, dz)) = \frac{2x}{\sqrt{2\pi\alpha t^{3/2}}} \left(e^{-\frac{(z_0-z)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z_0+z)^2}{2t}} \right) e^{-\frac{x_0^2+x^2}{2t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{n\pi y}{\alpha} \sin \frac{n\pi y_0}{\alpha} I_{n\pi/\alpha} \left(\frac{xx_0}{t} \right) dx dy dz,$$

où I_γ est la fonction modifiée de Bessel d'indice γ et $\cos(\alpha) = |\rho|$.

- **Cas particulier de valeurs propres nulles**

Si une seule valeur propre est nulle (par exemple $\lambda_3 = 0$), alors

$$\mathbb{P}_{(x_0, y_0, z_0)}(\tau > t, Z_t \in (dx, dy, dz)) = \frac{2x}{\sqrt{2\pi\alpha t^{3/2}}} e^{-\frac{(z_0-z)^2}{2t}} e^{-\frac{x_0^2+x^2}{2t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{n\pi y}{\alpha} \sin \frac{n\pi y_0}{\alpha} I_{n\pi/\alpha} \left(\frac{xx_0}{t} \right) dx dy dz.$$

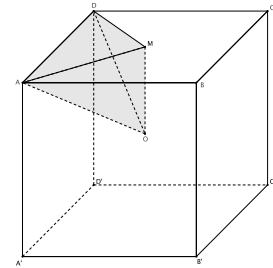
Si deux valeurs propres sont nulles (par exemple $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), alors

$$\mathbb{P}_{(x_0, y_0, z_0)}(\tau > t, Z_t \in (dx, dy, dz)) = \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}{2t}} \left(e^{-\frac{(z_0-z)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z_0+z)^2}{2t}} \right) dx dy dz.$$

Imaginons que l'espace euclidien tridimensionnel soit réduit à un cube, alors le domaine W (trièdre) est réduit à un tétraèdre. Le problème est maintenant de trouver toutes les symétries qui permettent à notre tétraèdre de remplir tout le cube. Tous les tétraèdres symétriques doivent avoir un point commun et $S_0 \circ S_1 \circ \dots \circ S_K = I_3$. Puisqu'il n'existe que quelques tétraèdres qui peuvent remplir le cube, nous n'avons que quelques cas particuliers où nous pouvons identifier les symétries et calculer la forme explicite de (1.2) :

Exemple de cas où les symétries sont identifiées : cas particulier de coefficients de corrélation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ ou $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.

On considère le point de départ \hat{a} dans $OADM$ où $M = \frac{1}{2}[BD]$. Si S_1 est la symétrie par rapport au plan (ODB) , S_2 la symétrie par rapport à (OAC) , S_3 la symétrie par rapport à (OAD) and S_4 la symétrie par rapport à (OCD) , S_5 la symétrie par rapport à (OAB) et S_6 la symétrie par rapport à (OCB) . La suite suivante de symétries permet à $OADM$ de couvrir tout le cube et retourner en position initiale : $S_1, S_2, S_6, S_5, S_4, S_5, S_2, S_6, S_3, S_6, S_5, S_2, S_1, S_2, S_6, S_5, S_4, S_5, S_2, S_6, S_3, S_6, S_5, S_2$. Par conséquent, $\frac{(2\pi t)^{3/2}}{dx dy dz} \mathbb{P}_{(x_0, y_0, z_0)}(\tau' > t, Z_t \in (dx, dy, dz))$ s'exprime comme une somme de 24 exponentielles.



D'autres exemples où les calculs sont explicites se trouvent dans [D12].

1.3 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Dans cette section, nous étudions le cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants et également le cas d'un processus Ornstein-Uhlenbeck à drift "brisé", c'est-à-dire que le drift est une fonction continue, linéaire par morceaux avec un point de rupture en 0. Nous nous intéressons à la loi jointe d'un tel processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son supremum. L'intérêt pour ce type de loi est apparu dès la fin du dix-neuvième siècle (voir [Sommerfeld (1894)]). Pour un mouvement brownien, le résultat est connu depuis longtemps (voir par exemple [Karatzas et Shreve (1991)]). Plus récemment, les articles [Coutin et al. (2018)] et [Ngom (2016)] traitent le cas d'un processus de Lévy, somme d'un mouvement brownien drifté et d'un processus de Poisson composé. La loi jointe d'un processus de diffusion n-dimensionnel et du supremum courant de sa première composante est étudiée dans [Coutin et Pontier (2019)]. [Doney et Kyprianou (2006)] aborde le cas d'un processus de Lévy avec sauts.

1.3.1 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants

Dans [D7], nous regardons la fonction de répartition / densité jointe du point final d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son supremum. Ce type de loi a par exemple été étudié dans [Escobar et Hernandez (2014)] où les auteurs donnent une méthode permettant de trouver la densité / fonction de distribution jointe pour le minimum et les points finaux d'un mouvement brownien n-dimensionnel drifté. Dans [He et al. (1998)], la solution explicite du cas brownien bi-dimensionnel est donnée. Pour une dimension supérieure à 2, la méthode de [Escobar et Hernandez (2014)] n'est pas toujours applicable. Dans le cas d'un processus Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t \geq 0}$, cette fonction de répartition / densité jointe est connue uniquement dans certains cas particuliers : $\mathbb{P}(X_t \in dx, \sup_{0 \leq u \leq t} X_u \leq 0)$ et $\mathbb{P}(X_\tau \in dx, \sup_{0 \leq u \leq \tau} X_u \leq m)$ lorsque τ est une variable aléatoire de loi exponentielle indépendante du processus d'Ornstein-Uhlenbeck sont traités dans [Borodin et Salminen (1996)].

Nous montrons que cette probabilité admet une densité et que cette densité est solution de l'équation de Fokker-Planck. En utilisant une méthode spectrale, nous donnons une expression explicite de cette densité faisant intervenir les fonctions spéciales paraboliques cylindriques.

Notations et hypothèses

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU) solution de l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t &= -kX_t dt + dB_t, & t \geq 0 \\ X_0 &\sim \mu, \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}_+^*$ et μ une mesure de probabilité. On suppose X_0 et $(B_t)_{t \geq 0}$ indépendants.

Soit \mathbb{P}_{x_0} la loi du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ quand $\mu \sim \delta_{x_0}$, la mesure de Dirac en x_0 .

Loi jointe du point final du processus et de son supremum

Avec Christophe Blanchet-Scalliet et Laura Gay, nous nous sommes intéressées à la loi $\mathbb{P}(X_t \in dx, \sup_{0 \leq u \leq t} X_u \leq m)$ avec $t \geq 0, (m, x) \in \mathbb{R}^2, x \leq m$.

Grâce à un résultat de [Delarue et al. (2013)], le Théorème 1.3.1 permet de montrer que cette probabilité admet une densité. Cette densité est solution de l'équation de Fokker-Planck (cf. [Jeanblanc et al. (2009)]). Comme l'opérateur de Fokker-Planck n'est pas hermitien, nous introduisons un autre opérateur auto-adjoint compact qui lui est lié spectralement. Avec les résultats sur ce type d'opérateurs (voir [Brézis (1983)]), on obtient une base hilbertienne de $L^2(]-\infty, m])$ faisant intervenir les fonctions spéciales paraboliques cylindriques. En décomposant sur cette base, nous obtenons ensuite une expression explicite de la densité. Ce type de méthode spectrale a été par exemple utilisée pour la résolution de l'équation de Fokker-Planck dans [Boyce et Diprima (2008), Gardiner (2004), Risken et Haken (1989)] mais sans condition au bord.

Comme les résultats obtenus font intervenir les fonctions spéciales paraboliques cylindriques, nous rappelons d'abord que la fonction parabolique cylindrique $D_\nu(z)$ est la solution réelle de l'équation différentielle suivante

$$y''(z) + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2 \right) y(z) = 0, z \in \mathbb{R},$$

vérifiant $y(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} z^\nu e^{-z^2/4}$.

Théorème 1.3.1 Soient μ une mesure de probabilité sur $]-\infty, m]$, $m \in \mathbb{R}$ et p_0 tel que $\mu(dx) = p_0(x)dx$.

1. Pour tous $m \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}(X_t \in dx, \sup_{0 \leq u \leq t} X_u \leq m)$ admet une densité p à support dans $]-\infty, m]$:

$$\mathbb{P}\left(X_t \in dx, \sup_{0 \leq u \leq t} X_u \leq m\right) = p(m, x, t)dx.$$

2. La densité p est solution de l'équation de Fokker-Planck suivante :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \begin{cases} \partial_t p(m, x, t) &= k\partial_x(xp(m, x, t)) + \frac{1}{2}\partial_x^2 p(m, x, t), & (x, t) \in]-\infty, m] \times \mathbb{R}_+^*, \\ p(m, m, t) &= 0, & t \in \mathbb{R}_+^*, \\ p(m, x, 0) &= p_0(x), & x \in]-\infty, m]. \end{cases} \quad (1.3)$$

3. Pour $(m, x) \in \{(z, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z \geq y\}, t \in \mathbb{R}_+^*$, la densité p est donnée par :

$$p(m, x, t) = -\sqrt{2k}e^{-\frac{kx^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\nu_n t} \frac{D_{\nu_n, m}(-x\sqrt{2k}) \int_{-\infty}^m e^{\frac{kz^2}{2}} p_0(z) D_{\nu_n, m}(-z\sqrt{2k}) dz}{\nu_n D_{\nu_n, m-1}(-m\sqrt{2k}) \partial_\nu D_{\nu_n, m}(-m\sqrt{2k})}, \quad (1.4)$$

où D_ν est la fonction parabolique cylindrique et $(\nu_{j,m})_{j \geq 1}$ est la suite des zéros positifs ordonnés de la fonction $\nu \mapsto D_\nu(-m\sqrt{2k})$.

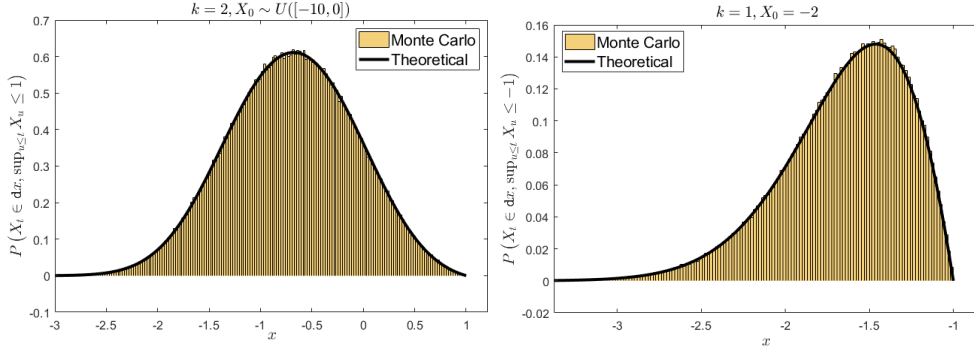


FIGURE 1.4 – Gauche : Comparaison de (1.4) avec la méthode de Monte Carlo pour $m = 1$, $X_0 \sim \mathcal{U}([-10, 0])$ et $k = 2$. Droite : Comparaison de (1.5) avec la méthode de Monte Carlo pour $m = -1$, $X_0 = -2$ et $k = 1$.

L'expression (1.4) s'avère être facilement évaluée numériquement car la série converge rapidement.

Dans le cas particulier où $\mu \sim \delta_{x_0}$, l'expression (1.4) s'écrit sous une forme simplifiée.

Remarque 1.3.1 1. Pour tous $(m, x) \in \{(z, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z \geq y\}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$, si $\mu \sim \delta_{x_0}$ et $x_0 \leq m$ on a

$$p(m, x, t) = -\sqrt{2k}e^{\frac{k(x_0^2 - x^2)}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\nu_{n,m}t} \frac{D_{\nu_{n,m}}(-x_0\sqrt{2k}) D_{\nu_{n,m}}(-x\sqrt{2k})}{\nu_{n,m} D_{\nu_{n,m}-1}(-m\sqrt{2k}) \partial_\nu D_{\nu_{n,m}}(-m\sqrt{2k})}. \quad (1.5)$$

A partir de cette expression, nous obtenons la fdr du supremum en intégrant (1.5) par rapport à la loi de X_t . En utilisant le lien entre le premier temps de passage d'un niveau donné par un processus et son supremum, nous vérifions facilement la cohérence entre notre résultat et celui de [Alili et al. (2005)] qui donne plusieurs expressions pour la densité de $\tau_m = \inf\{t > 0, X_t = m\}$.

2. Dans le cas particulier où $m = 0$, l'expression (1.5) peut être encore simplifiée. En effet, les zéros $(\nu_{n,0})_{n \geq 0}$ de la fonction $\nu \mapsto D_\nu(0)$ sont les nombres impairs positifs. Si $\mu \sim \delta_{x_0}$ et $x_0 \in \mathbb{R}_-$, alors pour tous $x \in \mathbb{R}_-$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\mathbb{P}_{x_0} \left(X_t \in dx, \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \leq 0 \right) = \sqrt{\frac{k}{\pi(1 - e^{-2kt})}} \left[e^{-k \frac{(x-x_0 e^{-kt})^2}{1 - e^{-2kt}}} - e^{-k \frac{(x+x_0 e^{-kt})^2}{1 - e^{-2kt}}} \right] dx.$$

Nous retrouvons ainsi le résultat de [Borodin et Salminen (1996)] qui calcule $\mathbb{P}(X_t \in dx, \sup_{0 \leq u \leq t} X_u \leq m)$ uniquement dans le cas $m = 0$.

L'expression de la loi jointe (densité/fonction de répartition) peut facilement être généralisée au cas d'un processus OU à trois paramètres.

Corollaire 1.3.1 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus OU vérifiant l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t &= (\phi - kX_t) dt + \sqrt{\beta} dB_t, & t \geq 0 \\ X_0 &\sim \mu, \end{cases}$$

avec $\beta, k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\phi \in \mathbb{R}$. Pour $(m, x) \in \{(z, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z \geq y\}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$, la densité p peut s'écrire sous la forme :

$$p(m, x, t) = -\sqrt{\frac{2k}{\beta}} e^{-\frac{k(x-\frac{\phi}{k})^2}{2\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{m-\frac{\phi}{k}} e^{\frac{kz^2}{2\beta}} p_0(z) D_{\nu_{n, m-\frac{\phi}{k}}} \left(-z \sqrt{\frac{2k}{\beta}} \right) dz \right) e^{-k\nu_{n, m-\frac{\phi}{k}} t} \\ \times \frac{D_{\nu_{n, m-\frac{\phi}{k}}} \left(-\left(x - \frac{\phi}{k}\right) \sqrt{\frac{2k}{\beta}} \right)}{\nu_{n, m-\frac{\phi}{k}} D_{\nu_{n, m-\frac{\phi}{k}}-1} \left(-\left(m - \frac{\phi}{k}\right) \sqrt{\frac{2k}{\beta}} \right) \partial_{\nu} D_{\nu_{n, m-\frac{\phi}{k}}} \left(-\left(m - \frac{\phi}{k}\right) \sqrt{\frac{2k}{\beta}} \right)},$$

où D_{ν} est la fonction parabolique cylindrique et $(\nu_{j, m-\frac{\phi}{k}})_{j \geq 1}$ est la suite des zéros positifs ordonnés de la fonction $\nu \mapsto D_{\nu} \left(-\left(m - \frac{\phi}{k}\right) \sqrt{\frac{2k}{\beta}} \right)$.

A partir de l'expression (1.5), nous avons vérifié dans [D7] que la densité jointe $q = \partial_m p$ du processus OU et de son supremum vérifie le système d'EDP de [Coutin et Pontier (2019)], même si notre processus ne satisfait pas leur hypothèse que le drift de la diffusion est une fonction bornée et de classe \mathcal{C}^1 . Cela nous fait penser que l'hypothèse de [Coutin et Pontier (2019)] pourrait être relaxée. Dans la proposition suivante, on considère $k = 1$ pour simplifier l'écriture du système.

Proposition 1.3.1 Dans le cas où $\mu \sim \delta_{x_0}$, la densité jointe q vérifie les EDP suivantes : $\forall m \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} -\partial_t q(m, x, t) - \partial_x(xq(m, x, t)) + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 q(m, x, t) &= 0, \quad x < m, \\ -mq(m, m, t) - \frac{1}{2} \partial_m q(m, m, t) - \partial_x q(m, m, t) &= 0, \\ -mq(m, m, t) + \partial_t \partial_m \mathbb{P}_{x_0} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s \leq m \right) - \frac{1}{2} \partial_x q(m, m, t) &= 0. \end{aligned}$$

La preuve de cette proposition nécessite des calculs assez longs et repose sur certaines propriétés des fonctions spéciales démontrées dans [D7].

1.3.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec drift "brisé"

Dans [D8], nous généralisons les résultats précédents et nous considérons le cas d'un processus OU $(X_t)_{t \geq 0}$ avec des drifts qui sont des fonctions linéaires, mais avec des coefficients différents au dessus et en-dessous de zéro. Nous nous intéressons à loi jointe de ce type de processus et de son supremum. Le drift étant toujours une fonction continue, Lipschitz, le résultat de [Delarue et al. (2013)] utilisé précédemment s'applique encore dans ce cas particulier et assure l'existence d'une densité $p(m, x, t)$ pour la probabilité $\mathbb{P}(X_t \in dx, \sup_{0 \leq u \leq t} X_u \leq m)$. La loi du premier temps d'atteinte τ_m d'un seuil donné m par le processus est liée à la loi jointe du processus considéré et de son supremum. Ainsi, nous obtenons également une expression analytique pour la densité p_{τ} du temps d'atteinte en utilisant la relation $p_{\tau}(t) = -\frac{1}{2} \partial_x p(m, x, t) |_{x=m}$.

Notations et hypothèses

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère $k_-, k_+ \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie par :

$$k(x) = \begin{cases} k_-, & \text{if } x \leq 0, \\ k_+, & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus OU, solution de l'EDS suivante :

$$dX_t = -k(X_t)X_t dt + dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Le drift de X est donc une fonction continue linéaire par morceaux.

Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. On introduit le premier temps de passage du niveau m par le processus X :

$$\tau_m = \inf\{t > 0, X_t = m\}.$$

Si $x_0 < m \leq 0$ ou $x_0 > m \geq 0$, alors τ_m est le premier temps de passage d'un processus OU "classique" avec un drift $x \mapsto k_-x$ ou $x \mapsto k_+x$. Les seuls cas nécessitant de nouveaux calculs sont $(x_0 < m, m > 0)$ et $(x_0 > m, m < 0)$. La symétrie permet de réduire le second cas au premier. Par conséquent, uniquement le cas $(x_0 < m, m > 0)$ est traité dans [D8].

Densité du premier temps de passage

Nous nous intéressons dans [D8] à la loi de τ_m . Nous montrons que la fdr de τ_m admet une densité p_τ et nous donnons une expression de cette densité. Nous introduisons les notations suivantes : pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, soit D_μ la fonction parabolique cylindrique de paramètre μ et

$$\alpha_\mu = \frac{1}{2} \left[\frac{D_{\frac{\mu}{k_-}}(0)}{D_{\frac{\mu}{k_+}}(0)} + \sqrt{\frac{k_+}{k_-}} \frac{D_{\frac{\mu}{k_-}-1}(0)}{D_{\frac{\mu}{k_+}-1}(0)} \right], \quad \beta_\mu = \frac{1}{2} \left[\frac{D_{\frac{\mu}{k_-}}(0)}{D_{\frac{\mu}{k_+}}(0)} - \sqrt{\frac{k_+}{k_-}} \frac{D_{\frac{\mu}{k_-}-1}(0)}{D_{\frac{\mu}{k_+}-1}(0)} \right].$$

Théorème 1.3.2 *Soient $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_0 \in]-\infty, m[$. Alors*

1. *La probabilité $\mathbb{P}(\tau_m \in dt)$ admet une densité p_τ ,*
2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la densité p_τ s'écrit sous la forme*

$$p_\tau(t) = \begin{cases} -e^{\frac{k_-}{2}x_0^2 - \frac{k_+}{2}m^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \frac{D_{\frac{\mu_n}{k_-}}(-x_0\sqrt{2k_-})}{\partial_\mu \left[\alpha_\mu D_{\frac{\mu}{k_+}}(-m\sqrt{2k_+}) + \beta_\mu D_{\frac{\mu}{k_+}}(m\sqrt{2k_+}) \right]_{\mu=\mu_n}} & \text{si } x_0 \in \mathbb{R}_-, \\ -e^{\frac{k_+}{2}(x_0^2 - m^2)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \frac{\alpha_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(-x_0\sqrt{2k_+}) + \beta_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(x_0\sqrt{2k_+})}{\partial_\mu \left[\alpha_\mu D_{\frac{\mu}{k_+}}(-m\sqrt{2k_+}) + \beta_\mu D_{\frac{\mu}{k_+}}(m\sqrt{2k_+}) \right]_{\mu=\mu_n}} & \text{si } x_0 \in]0, m], \end{cases} \quad (1.6)$$

où $\alpha_n = \alpha_{\mu_n}$, $\beta_n = \beta_{\mu_n}$ et $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est la suite des zéros positifs ordonnés de la fonction $\mu \mapsto \alpha_\mu D_{\frac{\mu}{k_+}}(-m\sqrt{2k_+}) + \beta_\mu D_{\frac{\mu}{k_+}}(m\sqrt{2k_+})$.

Le point clé dans la preuve du Théorème 1.3.2 est l'utilisation de la loi jointe (fonction de répartition/densité) du processus et de son supremum, plus précisément de

$$\mathbb{P}(X_t \in dx, \tau_m > t) = \mathbb{P}\left(X_t \in dx, \sup_{u \leq t} X_u < m\right). \quad (1.7)$$

Une formule analytique de cette loi est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 Soient $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_0 \in]-\infty, m[$. Alors

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ la probabilité (1.7) admet une densité p à support dans $] -\infty, m[$:

$$\mathbb{P}\left(X_t \in dx, \sup_{0 \leq u \leq t} X_u \leq m\right) = p(m, x, t)dx.$$

2. La densité p est solution de l'équation de Fokker-Planck suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t p(m, x, t) &= k_- \partial_x (xp(m, x, t)) + \frac{1}{2} \partial_x^2 p(m, x, t), & (x, t) \in]-\infty, 0[\times \mathbb{R}_+^*, \\ \partial_t p(m, x, t) &= k_+ \partial_x (xp(m, x, t)) + \frac{1}{2} \partial_x^2 p(m, x, t), & (x, t) \in]0, m[\times \mathbb{R}_+^*, \\ p(m, 0^-, t) &= p(m, 0^+, t), & t \in \mathbb{R}_+^*, \\ \partial_x p(m, 0^-, t) &= \partial_x p(m, 0^+, t), & t \in \mathbb{R}_+^*, \\ p(m, m, t) &= 0, & t \in \mathbb{R}_+^*, \\ \lim_{t \downarrow 0} p(m, x, t) dx &= \delta_{x_0}(dx), \end{array} \right. \quad (1.8)$$

où δ_{x_0} est la mesure de Dirac en x_0 .

3. Avec les notations du Théorème 1.3.2, pour tous $(m, x) \in \{(z, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid z \geq y\}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$, la densité p s'écrit comme suit :

- Si $x_0 \in \mathbb{R}_-$, alors $p(m, x, t) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} e^{\frac{k_-}{2}(x_0^2 - x^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n t}}{N(\mu_n)} D_{\frac{\mu_n}{k_-}}(-x\sqrt{2k_-}) D_{\frac{\mu_n}{k_-}}(-x_0\sqrt{2k_-}) & , x \leq 0, \\ e^{\frac{k_-}{2}x_0^2 - \frac{k_+}{2}x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n t}}{N(\mu_n)} D_{\frac{\mu_n}{k_-}}(-x_0\sqrt{2k_-}) \left[\alpha_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(-x\sqrt{2k_+}) + \beta_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(x\sqrt{2k_+}) \right] & , 0 < x \leq m. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

- Si $x_0 \in]0, m[$, alors $p(m, x, t) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} e^{\frac{k_+}{2}x_0^2 - \frac{k_-}{2}x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n t}}{N(\mu_n)} D_{\frac{\mu_n}{k_-}}(-x\sqrt{2k_-}) \left[\alpha_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(-x_0\sqrt{2k_+}) + \beta_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(x_0\sqrt{2k_+}) \right] & , x \leq 0, \\ e^{\frac{k_+}{2}(x_0^2 - x^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n t}}{N(\mu_n)} \left[\alpha_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(-x\sqrt{2k_+}) + \beta_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(x\sqrt{2k_+}) \right] \times \\ \left[\alpha_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(-x_0\sqrt{2k_+}) + \beta_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(x_0\sqrt{2k_+}) \right] & , 0 < x \leq m, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

où

$$\begin{aligned} N(\mu_n) &= \frac{1}{2} \partial_x \left[\alpha_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(-x\sqrt{2k_+}) + \beta_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(x\sqrt{2k_+}) \right]_{x=m} \\ &\quad \times \partial_\mu \left[\alpha_\mu D_{\frac{\mu}{k_+}}(-m\sqrt{2k_+}) + \beta_\mu D_{\frac{\mu}{k_+}}(m\sqrt{2k_+}) \right]_{\mu=\mu_n}. \end{aligned}$$

Contrairement à l'étude menée pour le processus OU à coefficients constants, pour la preuve de ce théorème nous nous sommes placés sur l'espace à poids $L^2\left(]-\infty, m], e^{k(\cdot)^2/2}\right)$ sur lequel l'opérateur de Fokker-Planck est hermitien. De plus, nous n'avons pas utilisé le Théorème de Lax-Milgram comme dans la preuve du Théorème 1.3.1, mais des résultats classiques sur les opérateurs intégraux à noyaux de carré intégrable.

En utilisant le Théorème 1.3.3, nous retrouvons facilement la loi du supremum en intégrant par rapport à la loi de X_t .

Corollaire 1.3.2 Soient $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_0 \in]-\infty, m[$. Alors $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq u \leq t} X_u \leq m) =$

$$\begin{cases} -e^{\frac{k_-}{2}x_0^2 - \frac{k_+}{2}m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n t}}{\mu_n} \frac{D_{\frac{\mu_n}{k_-}}(-x_0\sqrt{2k_-})}{\partial_{\mu} \left[\alpha_{\mu} D_{\frac{\mu}{k_+}}(-m\sqrt{2k_+}) + \beta_{\mu} D_{\frac{\mu}{k_+}}(m\sqrt{2k_+}) \right]_{\mu=\mu_n}} & \text{si } x_0 \in \mathbb{R}_-, \\ -e^{\frac{k_+}{2}(x_0^2 - m^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n t}}{\mu_n} \frac{\alpha_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(-x_0\sqrt{2k_+}) + \beta_n D_{\frac{\mu_n}{k_+}}(x_0\sqrt{2k_+})}{\partial_{\mu} \left[\alpha_{\mu} D_{\frac{\mu}{k_+}}(-m\sqrt{2k_+}) + \beta_{\mu} D_{\frac{\mu}{k_+}}(m\sqrt{2k_+}) \right]_{\mu=\mu_n}} & \text{si } x_0 \in]0, m[. \end{cases}$$

Même si les Formules (1.6), (1.9) ou (1.10) sont des sommes infinies des fonctions spéciales, elles sont facilement évaluées numériquement car les séries convergent rapidement. Les vingt premiers termes ont suffi pour tracer les graphiques suivants. Les simulations ont été faites avec Python et pour la méthode de Monte Carlo, nous avons utilisé 1×10^6 simulations et $\Delta t = 10^{-6}$ (sur $[0, 1]$) dans le schéma d'Euler. Nos formules sont beaucoup plus rapides que la méthode de Monte Carlo. En effet, pour la densité représentée dans la Figure 1.5, l'évaluation avec notre formule ne dure que 4,09 secondes (y compris le temps de calcul des racines μ_n), alors que la méthode de Monte-Carlo nécessite plus de 16 heures, en utilisant un processeur 3,6 GHz avec 4 coeurs.

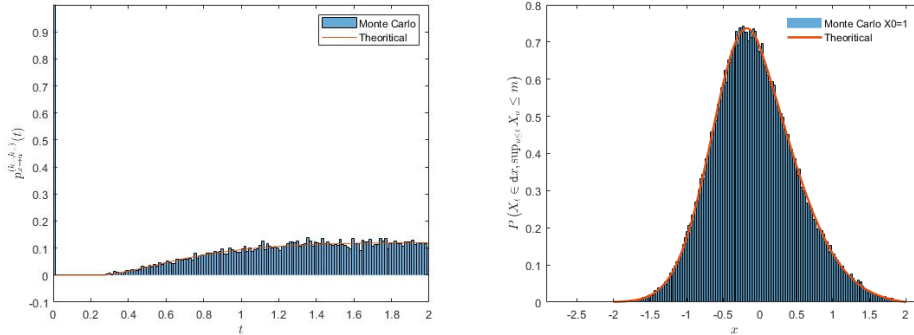


FIGURE 1.5 – Gauche : Comparaison entre l'expression (1.6) et la méthode de Monte Carlo avec $m = 1$, $X_0 = -1$ et $k_+ = 2, k_- = 1$. Droite : Comparaison entre l'expression (1.9) et la méthode de Monte Carlo avec $m = 2$, $X_0 = -1$ et $k_+ = 0.5, k_- = 2$.

1.4 Perspectives de recherche

Une extension naturelle nous a paru être le calcul de la loi du premier temps d'atteinte d'un niveau donné m par un processus OU $(X_t)_{t \geq 0}$ pour lequel les trois coefficients sont des fonctions

constantes par morceaux avec plusieurs seuils :

$$dX_t = (a(X_t) - k(X_t)X_t) dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0,$$

avec $-\infty < r_1 < \dots < r_n < \infty$, $a_i \in \mathbb{R}$, $k_i, \sigma_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n + 1$,

$$\begin{aligned} a(x) &= a_1 \mathbf{1}_{]-\infty, r_1]} + a_2 \mathbf{1}_{]r_1, r_2]} + \dots + a_{n+1} \mathbf{1}_{]r_n, \infty[}, \\ k(x) &= k_1 \mathbf{1}_{]-\infty, r_1]} + k_2 \mathbf{1}_{]r_1, r_2]} + \dots + k_{n+1} \mathbf{1}_{]r_n, \infty[}, \\ \sigma(x) &= \sigma_1 \mathbf{1}_{]-\infty, r_1]} + \sigma_2 \mathbf{1}_{]r_1, r_2]} + \dots + \sigma_{n+1} \mathbf{1}_{]r_n, \infty[}. \end{aligned}$$

Ce type de processus trouve des applications dans le domaine financier par exemple pour la modélisation des taux [Mazzonetto et Pigato (2020), Su et Chan (2017)].

La Figure 1.6 montre un exemple d'un processus OU à deux seuils.

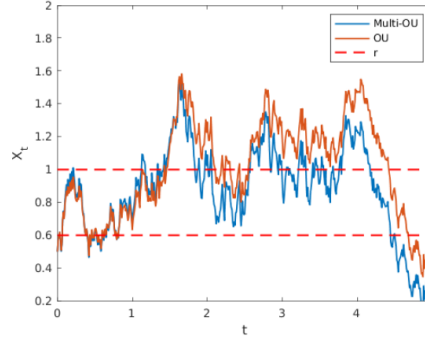


FIGURE 1.6 – En orange : OU de paramètres $a = k = 1$, $\sigma = 0.5$. En bleu : OU à deux seuils (en rouge) $r_1 = 0.6$, $r_2 = 1$ de paramètres $a_1 = k_1 = 1$, $\sigma_1 = 0.5$, $a_2 = k_2 = 2$, $\sigma_2 = 0.6$ et $a_3 = 1.5$, $k_3 = 2.1$, $\sigma_3 = 0.55$.

Dans ce cas, le drift et la volatilité ne seront plus des fonctions continues et les résultats de [Delarue et al. (2013)] que nous avons utilisés dans nos preuves, ne s'appliquent plus pour assurer l'existence de la densité p pour la fonction de répartition / densité jointe du processus et de son supremum pour ensuite obtenir la densité du temps d'atteinte. En utilisant le Théorème de Girsanov, nous pouvons nous ramener à un mouvement brownien oscillant pour lequel les résultats de [Strook et Varadhan (1997)] s'appliquent et donnent l'existence de p . Une fois l'existence de la densité p prouvée, en utilisant les mêmes techniques que celles exposées précédemment, nous pouvons obtenir la loi jointe (processus, supremum), voire (processus, supremum, infimum), comme une série faisant intervenir encore une fois les fonctions paraboliques cylindriques. Afin de calculer la densité du premier temps d'atteinte d'un seuil donné (ou de sortie d'un intervalle $[m_1, m_2]$), nous devons prouver la convergence uniforme de la série précédente. Pour cela, il est essentiel d'étudier le comportement asymptotique des zéros d'une somme pondérée de deux fonctions paraboliques cylindriques. Les coefficients de pondération dépendent des différentes valeurs des paramètres, mais aussi des valeurs des seuils. Rappelons que l'unique seuil était égal à 0 dans [D8] et que uniquement le drift était constant par morceaux. L'étude de ces zéros est complexe comme le souligne également [Wang al. (2015)] qui n'ont pas réussi à

résoudre ce point. Avec Christophette Blanchet-Scalliet et Benoit Nieto, nous sommes en train de lever ce verrou.

Dans une perspective proche, je souhaite également étudier la loi du premier temps d'atteinte pour un processus OU à plusieurs régimes, c'est à dire lorsque les coefficients du processus sont aléatoires, fonctions d'une chaîne de Markov "exogène" à plusieurs états. Ce processus pourrait être utilisé par exemple dans le domaine de la finance ou de l'assurance. L'idée m'est venue en lisant le papier de Hardy qui montre l'adéquation du modèle à changement de régime sur des données mensuelles des indices Standard and Poor's 500 et Toronto Stock Exchange 300 entre 1956 et 1999 [Hardy (2001)]. Le processus considéré pour modéliser les rendements des actifs était le modèle log-normal à deux changements de régime. Hardy utilise ensuite ce type de processus pour modéliser la dynamique des sous-jacents et évaluer des options européennes. Quelques années plus tard, s'appuyant sur un historique de données mensuelles entre mai 1987 et décembre 2020 pour Euro Stoxx 50 Index, l'étude menée par Milliman montre que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est plus approprié pour modéliser le log-rendement des actifs [Andrès et al. (2021)]. Le processus OU à changement de régime peut donc trouver ses applications dans la finance où les log-rendements ou les taux d'intérêt peuvent être modélisés par ce type de processus.

Nous pouvons envisager des applications de ce processus dans le domaine climatique. El Niño – Oscillation australe (ENSO) est un phénomène climatique cyclique dans lequel il est possible d'identifier deux régimes au fil du temps (La Niña et El Niño). Ce sont des anomalies thermiques des eaux des océans : La Niña est caractérisée par une température anormalement basse des eaux et El Niño par une température anormalement élevée des eaux. En Australie, par exemple, ces deux phénomènes impliquent des fluctuations des températures : plus chaudes pendant l'épisode El Niño et plus froides pendant La Niña. La durée et le changement entre les régimes sont variables dans le temps. Le passage d'un régime à un autre peut être modélisé par une chaîne de Markov [Cardenas et al. (2015)]. Dans ce contexte, la température en Australie pourrait être modélisée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec deux changements de régime, le premier correspondant à l'épisode El Niño et le deuxième à l'épisode La Niña. Dans ce cas, étudier la loi jointe du processus et de son supremum, ou éventuellement de son infimum, s'avère utile pour calculer des mesures de risque climatique.

Chapitre 2

Estimation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à partir des observations de suprema

Ce chapitre est basé sur les travaux [D4, D9, D10]. Les co-auteurs de ces différents articles sont Laura Gay, Christophette Blanchet-Scalliet, Véronique Maume-Deschamps, Pierre Ribereau et Benoit Nieto.

Sommaire

2.1	Modèle	31
2.2	Estimateur des moindres carrés	32
2.2.1	Fonction de répartition du supremum	32
2.2.2	Problème d'estimation. Propriétés de l'estimateur	33
2.3	Estimateur de pseudo-vraisemblance	34
2.3.1	Densité du supremum	34
2.3.2	Problème d'estimation. Propriétés de l'estimateur	34
2.4	Résultats numériques	36
2.5	Propriétés des ν-zéros des fonctions paraboliques cylindriques	37
2.6	Perspectives de recherche	40

Introduction

Prévoir et estimer les mesures de risque climatique est un enjeu important. Il serait possible d'estimer ces mesures en connaissant la température en temps continu ou des observations discrètes du processus, comme proposé dans [Franco (2003)]. Cependant, les données disponibles dépendent des stations météorologiques et certaines ne disposent pas des données citées précédemment. Par exemple, le papier [Siliverstovs et al. (2010)] propose d'évaluer la probabilité d'apparition de la canicule de 2003 grâce aux moyennes de températures mensuelles. Nous nous intéressons au cas de certaines stations qui ne disposent que des extrema journaliers. Ci-dessous un exemple de données que nous pouvons trouver facilement. Le graphique suivant (gauche) a été

récupéré sur le site Meteo France et indique les températures journalières maximales et minimales pour le mois de juin 2023 à Paris. Nous nous intéressons uniquement aux maxima journaliers de température et souhaitons reconstruire le processus sous-jacent des températures. Une fois l'estimation des paramètres faite, nous pouvons établir, via une méthode de Monte Carlo, des mesures de risque climatique. Le risque de canicule est celui qui nous intéresse.

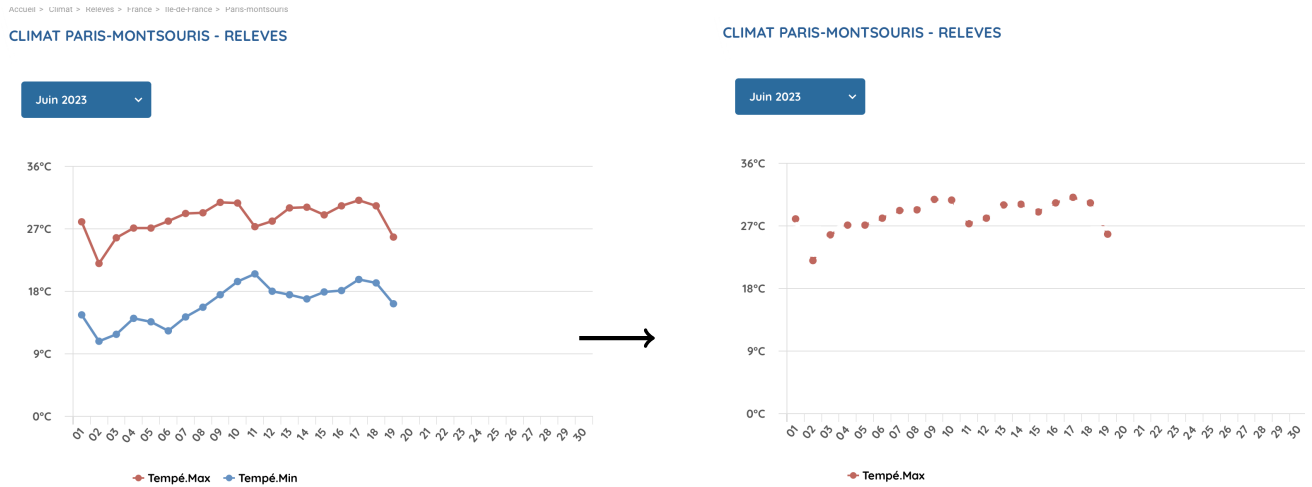


FIGURE 2.1 – Températures maximales et minimales à Paris pendant le mois de juin 2023 (gauche). Températures maximales journalières à Paris en juin 2023 (droite)

La modélisation de la dynamique des températures en un lieu donné par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck ([Alaton et al. (2002), Brody et al. (2002), Dischel (Mars 1998)]) a motivé l'étude de ce problème. Afin d'avoir notamment des moments constants et indépendants du temps, il est nécessaire de supposer que le processus de température est stationnaire. Pour que cette hypothèse soit raisonnable, nous considérons donc des courtes périodes de temps annuelles (par exemple l'été). Nous proposons deux méthodes d'estimation des paramètres du modèle d'origine en nous basant sur les données disponibles (un échantillon des extrema, et par exemple des maxima) : une méthode de moindres carrées et une méthode d'estimation de pseudo-vraisemblance. L'intérêt de la méthode de pseudo-vraisemblance est d'éviter le recours à la loi jointe des maxima, mais également les complexités calculatoires. Cette méthode consiste à remplacer la vraisemblance par une vraisemblance "approchée". Une fois les paramètres du processus estimés, il sera possible de procéder à des simulations, des estimations, des prévisions.

L'estimation des paramètres pour un processus d'Ornstein-Uhlenbeck a déjà fait objet de plusieurs études : estimation à partir des observations discrètes du processus [Aït-Sahalia (2002)] ou en utilisant des temps d'atteinte [Mullowney et Iyengar (2008)] par exemple. Nos résultats complètent les études existantes en proposant des estimations à partir des observations de suprema sur des fenêtres de temps disjointes.

2.1 Modèle

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Considérons que le processus de températures $(X_t)_{t \geq 0}$ pendant la saison d'été est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire, de paramètre $\theta = (\mu, \lambda, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, solution de l'EDS suivante¹

$$\begin{cases} dX_t = (\mu - \lambda X_t)dt + \sqrt{\beta}dB_t, \\ X_0 \sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\beta}{2\lambda}\right), \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ indépendant de X_0 . Pour l'estimation des paramètres, nous faisons l'hypothèse que X_0 a pour loi la densité invariante, de sorte que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ de paramètre $\theta = (\mu, \lambda, \beta)$ est stationnaire. Cette modélisation semble raisonnable puisque dans les applications on considère les observations uniquement sur une sous-période de l'année (l'été dans notre cas). Le paramètre $\frac{\mu}{\lambda}$ représente la moyenne (température moyenne) du processus stationnaire, $\sqrt{\beta}$ qui est la volatilité du processus indique le degré de variabilité (il révèle une tendance à changer rapidement et de manière imprévisible) et λ indique la vitesse de retour à la moyenne du processus. La figure suivante présente l'influence de ces paramètres sur les trajectoires d'un processus OU.

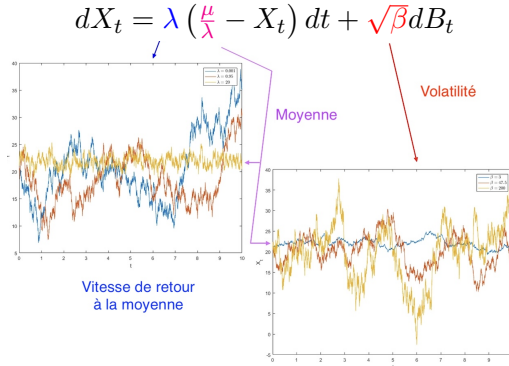


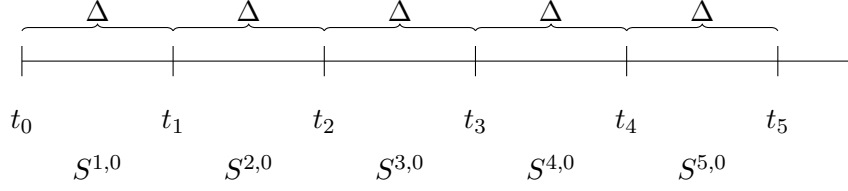
FIGURE 2.2 – Influence des paramètres sur les trajectoires d'un processus OU. Quand ce n'est pas indiqué, les paramètres considérés sont $\frac{\mu}{\lambda} = 22$, $\frac{\lambda}{\beta} = 0.02$, $\beta = 47.5$ et $X_0 = \frac{\mu}{\lambda}$.

Soit $(t_i)_{i \geq 0}$ une suite de temps tels que $t_0 = 0$ et pour $i \geq 1$, $t_i - t_{i-1} = \Delta$, où $\Delta > 0$ est fixé. On note $(S^{i,0})_{i \geq 1}$ la suite de suprema observés sur des fenêtres de taille Δ :

$$S^{i,0} = \sup_{s \in [t_{i-1}, t_i]} X_s.$$

On note que les observations journalières correspondraient à un pas $\Delta = 1$ si la suite de temps est exprimée en jours. Remarquons que les suprema $(S^{i,0})_{i \geq 1}$ sont des observations sur des fenêtres de temps consécutives de taille Δ , l'indice 0 indiquant la distance entre deux fenêtres d'observation :

1. Dans [D4], nous avons utilisé une autre paramétrisation, mais nous avons fait le choix dans ce manuscrit d'harmoniser les notations entre [D4] et [D9].



Les suprema pris sur des fenêtres de temps disjointes ne sont pas indépendants. Afin d'obtenir des propriétés statistiques des estimateurs telles que la consistance et la normalité asymptotique, on peut remplacer l'indépendance des observations par certaines propriétés de mélange. La propriété de mélange est utilisée à la place de l'indépendance et des résultats tels que la Loi des Grands Nombres ou le Théorème Central Limite peuvent toujours s'appliquer. Il existe une très grande littérature sur ce sujet et nous nous référons à [Billingsley (1965), Doukhan (2012), Rio (1993)] et aux références qui s'y trouvent pour les définitions et les principaux résultats. Le résultat suivant donne les propriétés de la suite $(S^{i,0})_{i \geq 1}$ et la preuve s'inspire de [Bradley (2005), Gobet et Matulewicz (2016)].

Proposition 2.1.1 *La suite $(S^{i,0})_{i \geq 1}$ est stationnaire, ergodique et ρ -mixing.*

2.2 Estimateur des moindres carrés

La première méthode proposée est basée sur la fonction de répartition (fdr) du supremum. Premièrement, nous nous intéressons à cette fdr. L'expression obtenue est complexe et fait intervenir les ponts de Bessel, mais nous permet ensuite de trouver les-dits paramètres via un estimateur de type moindres carrés. Il s'agit d'une approche utilisant directement la fonction de répartition du supremum du processus et non son inverse comme classiquement en estimation par quantiles [Castillo et al. (2015), Pekasiewicz (2014)]. L'estimateur ainsi obtenu est consistant. Nous avons appliqué notre méthode sur des données simulées et réelles.

2.2.1 Fonction de répartition du supremum

La proposition suivante donne la fdr du supremum $S^{1,0} = \sup_{s \in [0, \Delta]} X_s$.

Proposition 2.2.1 (Fdr du supremum) *Pour $\Delta > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, la fdr F^* du supremum d'un processus OU stationnaire $(X_t)_{t \geq 0}$ de paramètre $\theta = (\mu, \lambda, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est donnée par*

$$F^*(a, \theta, \Delta) = \mathbb{P}(S^{1,0} \leq a) = \Phi \left(\left(a - \frac{\mu}{\lambda} \right) \sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}} \right) - \int_{-\infty}^a \int_0^{\Delta\beta} e^{-\frac{\lambda}{2\beta} \left[\left(a - \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 + \left(x - \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 - u \right]} \frac{a - x}{\pi \sqrt{\frac{2\beta u^3}{\lambda}}} e^{-\frac{(a-x)^2}{2u}} \mathbb{E} \left[e^{-\frac{\lambda^2}{2\beta^2} \int_0^u \left(r_s - a + \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 ds} \right] dudx$$

où r est un pont de Bessel tri-dimensionnel sur l'intervalle $[0, u]$ entre 0 et $a - x$ et Φ est la fdr d'une v.a. gaussienne centrée réduite.

La preuve de ce résultat repose sur le lien entre la fdr du supremum d'un processus et celle du temps d'atteinte d'un niveau donné par ce processus. Dans le cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, plusieurs formes de la densité du temps d'atteinte sont données dans [Alili et al. (2005)].

2.2.2 Problème d'estimation. Propriétés de l'estimateur

Trois formes différentes pour la loi du temps d'atteinte d'un processus OU sont données dans [Alili et al. (2005)] : une première faisant intervenir les fonctions paraboliques cylindriques, une seconde basée sur les ponts de Bessel et la dernière utilisant la transformée de Laplace et la transformation en cosinus. Dans ce travail, nous avons fait le choix d'utiliser l'expression avec les ponts de Bessel pour calculer ensuite la fdr du supremum. En revanche, avec cette formulation, la densité du supremum ne peut être obtenue que par approximation numérique et cette approximation est très coûteuse en temps de calcul. Les méthodes classiques, comme celle du maximum de vraisemblance, ne nous ont pas semblé adaptées dans ce cas.

Nous procédons dans [D4] à une estimation des moindres carrés en minimisant la somme des carrés des différences entre la fonction de répartition théorique (Proposition 2.2.1) et celle empirique.

Soit $N_q \in \mathbb{N}^*$ et $s_j, j = 1, \dots, N_q$ des réels. On note F_N^* la fonction de répartition empirique basée sur l'échantillon de suprema $S^{i,0}, i = 1, \dots, N : F_N^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{S^{i,0} \leq t}$ pour tout $t \geq 0$.

Une façon d'estimer les paramètres du processus OU est d'utiliser une méthode des moindres carrés en minimisant la fonction Q_N définie par :

$$Q_N(\theta) = \sum_{j=1}^{N_q} [F^*(s_j, \theta, \Delta) - F_N^*(s_j)]^2$$

où θ est le vecteur de paramètres du processus d'OU, F^* est la fdr théorique du supremum donnée dans la Proposition 2.2.1 et s_1, \dots, s_{N_q} sont des nombres réels à choisir.

Si l'on considère un processus OU stationnaire de paramètre $\theta_0 = (\mu_0, \lambda_0, \beta_0)$ avec $\theta_0 \in \Theta$, un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, alors l'estimateur de θ_0 est donné par

$$\hat{\theta}_N = \left(\hat{\mu}_N, \hat{\lambda}_N, \hat{\beta}_N \right) = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmin}} Q_N(\theta). \quad (2.2)$$

L'estimateur ainsi défini est consistant et ce résultat est obtenu grâce à la propriété de mélange du supremum du processus OU et au théorème ergodique pour ce type de processus [Antoniadis et al. (1992), Billingsley (1965)].

La démarche présentée dans [D4] pour les suprema, peut être reprise par un raisonnement similaire pour des infima (ou conjointement suprema et infima).

Pour les simulations numériques, l'évaluation de la fdr obtenue dans la Proposition 2.2.1. nécessite une méthode Monte Carlo très coûteuse en temps. La procédure d'estimation prend plusieurs jours pour le calcul de l'estimateur. C'est la raison pour laquelle, nous avons recherché une autre expression pour la fdr du supremum permettant en plus d'obtenir facilement la densité du supremum et donc d'aller vers des méthodes d'estimation de type maximum de vraisemblance.

2.3 Estimateur de pseudo-vraisemblance

L'expression de la fdr du supremum obtenue précédemment était difficilement dérivable, nous avons donc cherché une autre expression nous permettant d'obtenir par la suite la densité du supremum. C'était la motivation principale du papier [D7] présenté dans le Chapitre 1. Cette étude a été l'occasion pour nous d'apprendre plus de choses sur les fonctions paraboliques cylindriques, ce qui nous a permis quelques années plus tard de proposer dans [D9] une nouvelle méthode d'estimation basée sur la densité du supremum qui fait intervenir ces fonctions spéciales. La deuxième méthode d'estimation proposée est une méthode de type maximum de vraisemblance. Le but est donc de proposer un nouvel estimateur avec de bonnes propriétés et moins coûteux en temps de calcul que le précédent.

2.3.1 Densité du supremum

A partir de la fdr du supremum d'un processus OU non-stationnaire de paramètre $\theta = (0, \lambda, 1)$ calculée dans [D7], nous avons facilement obtenu la fdr du supremum $S^{1,0} = \sup_{s \in [0, \Delta]} X_s$ d'un processus OU stationnaire de paramètre $\theta = (\mu, \lambda, \beta)$. La nouvelle expression obtenue est donnée en terme de fonctions paraboliques cylindriques et permet de calculer la densité du supremum.

Proposition 2.3.1 (Densité du supremum) *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'OU de paramètre $\theta = (\mu, \lambda, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, solution de (2.1). Pour $\Delta > 0$ et $m \in \mathbb{R}$, la densité du supremum $S^{1,0}$ est donnée par*

$$f_{\Delta}(m, \theta) = -\sqrt{\frac{\lambda}{\beta\pi}} e^{-\frac{\lambda}{\beta}(m-\frac{\mu}{\beta})^2} \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda\nu_{n,m,\theta}\Delta} \left[-\Delta\lambda \frac{D_{\nu_{n,m,\theta}-1}^2 \left(-(m-\frac{\mu}{\lambda})\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}} \right)}{\partial_{\nu} D_{\nu_{n,m,\theta}} \left(-(m-\frac{\mu}{\lambda})\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}} \right)^2} \right. \\ + 2 \frac{D_{\nu_{n,m,\theta}-1} \left(-(m-\frac{\mu}{\lambda})\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}} \right) \partial_{\nu} D_{\nu_{n,m,\theta}-1} \left(-(m-\frac{\mu}{\lambda})\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}} \right)}{\partial_{\nu} D_{\nu_{n,m,\theta}} \left(-(m-\frac{\mu}{\lambda})\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}} \right)^2} \\ \left. - \frac{D_{\nu_{n,m,\theta}-1}^2 \left(-(m-\frac{\mu}{\lambda})\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}} \right) \partial_{\nu}^2 D_{\nu_{n,m,\theta}} \left(-(m-\frac{\mu}{\lambda})\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}} \right)}{\partial_{\nu} D_{\nu_{n,m,\theta}} \left(-(m-\frac{\mu}{\lambda})\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}} \right)^3} \right], \quad (2.3)$$

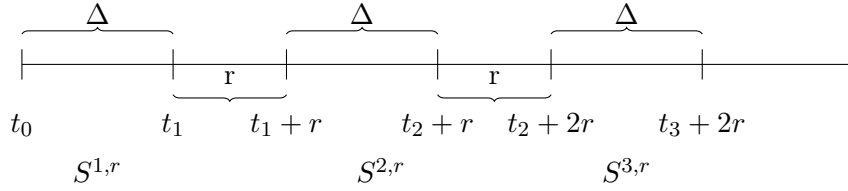
où $\nu_{n,m,\theta}$ sont les zéros positifs (ordonnés) de la fonction $\nu \mapsto D_{\nu} \left(-(m-\frac{\mu}{\lambda})\sqrt{\frac{2\lambda}{\beta}} \right)$ et $D_{\nu}(\cdot)$ est la fonction parabolique cylindrique.

2.3.2 Problème d'estimation. Propriétés de l'estimateur

Ayant calculé la densité, nous nous sommes intéressés à la méthode de maximum de vraisemblance. Comme les observations du supremum sont dépendantes et que la loi jointe des suprema est difficilement calculable, l'idée est d'approcher la vraisemblance par une pseudo-vraisemblance (produit des lois marginales) grâce à la propriété de ρ -mélange.

Rappelons que les suprema $(S^{i,0})_{i \geq 1}$ sont des observations sur des fenêtres de temps consécutives de taille Δ . Imaginons que dans l'ensemble initial d'observations, nous ne gardons qu'une observations sur k . La propriété de ρ -mélange, indique que dans ce nouvel ensemble les observations sont "moins dépendantes". Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $r = (k-1)\Delta$ (la distance entre deux fenêtres d'observation), alors le sous-ensemble d'observations utilisé dans la procédure d'estimation est donné par

$$S^{i,r} = \sup_{s \in [t_{i-1} + (i-1)r, t_i + (i-1)r]} X_s.$$



Le choix $k = 1$ ($\iff r = 0$) correspond à l'ensemble initial d'observations $(S^{i,0})_{i \geq 1}$.

La suite $(S^{i,r})_{i \geq 1}$ a les mêmes propriétés que la suite $(S^{i,0})_{i \geq 1}$.

Une façon d'estimer le vecteur de paramètres d'un processus OU est d'utiliser la fonction de pseudo-vraisemblance \mathcal{L}_N^r associée à la sous-suite $(S^{i,r})_{1 \leq i \leq N}$ et définie par

$$\mathcal{L}_N^r(\theta) = \prod_{i=1}^N f_{\Delta}(S^{i,r}, \theta). \quad (2.4)$$

Si l'on considère un processus OU stationnaire de paramètre $\theta_0 = (\mu_0, \lambda_0, \beta_0)$ avec $\theta_0 \in \Theta$, un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, alors l'estimateur de θ_0 est donné par

$$\tilde{\theta}_N = (\tilde{\mu}_N, \tilde{\lambda}_N, \tilde{\beta}_N) = \underset{\theta \in \Theta}{\text{Argmax}} \mathcal{L}_N^r(\theta). \quad (2.5)$$

Contrairement à la méthode précédente où l'identifiabilité du modèle a été testée uniquement numériquement, nous avons montré dans [D9] que dans ce cas le modèle est identifiable. L'estimateur ainsi défini est consistant. En utilisant la propriété de ρ -mélange, nous avons également prouvé la normalité asymptotique de l'estimateur.

Théorème 2.3.1 *Soit un processus OU, solution de (2.1), de paramètre $\theta_0 = (\mu_0, \lambda_0, \beta_0)$ et soit $\tilde{\theta}_N$ l'estimateur défini par (2.5). Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $r > \frac{\ln(\frac{5}{3})}{\lambda_0}$, la convergence suivante est satisfaite :*

$$\sqrt{N}(\tilde{\theta}_N - \theta_0) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}_3(0, I_{\theta_0}^{-1}), \quad (2.6)$$

où I_{θ_0} est la matrice d'information de Fisher donnée par

$$I_{\theta_0} = \mathbb{E}_{\theta_0} \left[(\nabla_{\theta} \log f_{\Delta}(\cdot, \theta)|_{\theta=\theta_0}) (\nabla_{\theta} \log f_{\Delta}(\cdot, \theta)|_{\theta=\theta_0})^T \right].$$

La condition $r > \frac{\ln(\frac{5}{3})}{\lambda_0}$ apparait lorsqu'on vérifie les hypothèses du TCL [Doukhan (2012)] appliqué à la suite $(S^{i,r})_{i \geq 1}$. Il s'agit d'une condition suffisante. La preuve de la normalité asymptotique a nécessité également la vérification de plusieurs conditions d'intégrabilité. Pour vérifier ces conditions nous avons été amenés à étudier le comportement asymptotique de la densité du supremum quand $|m| \rightarrow \infty$. A cette fin, une étude préliminaire du comportement asymptotique des ν -zéros de la fonction parabolique cylindrique a été indispensable [D10].

Lorsqu'on détient un certain nombre d'observations du supremum pour appliquer la méthode d'estimation, il est évident qu'un arbitrage doit être fait entre "espacer les observations pour qu'elles soient moins dépendantes" et "garder un nombre suffisant d'observations pour l'estimation". Nous nous sommes donc intéressés à la question de l'existence d'une distance optimale r entre deux fenêtres d'observations du supremum. Les détails de l'étude peuvent être trouvés dans [D9].

2.4 Résultats numériques

Les méthodes proposées dans [D4] et [D9] ont été d'abord appliquées sur des données simulées et ensuite sur des données réelles.

Dans [Klein et al. (2002)], on dispose d'un jeu de données de température à Paris grâce au projet ECA&D (données disponibles à l'adresse <http://www.ecad.eu>). Ce jeu de données est l'un des plus longs pour les mesures de températures puisqu'il commence en 1900 mais il n'enregistre que les maxima, minima et moyenne journaliers. Dans notre cas, comme nous nous intéressons aux températures en été, nous sélectionnons les températures entre le 15 juin et le 14 août (soit 61 observations) chaque année entre 1950 et 1984 (soit 35 années d'observations), pour un total de 2135 observations. Nous avons choisi ces observations pour éviter l'impact du changement climatique et nous pouvons ainsi considérer que les observations sont des maxima d'un processus stationnaire.

Dans les applications sur les données réelles, nous avons choisi pour la première méthode s_1, s_2, s_3, s_4 les quantiles empiriques sur l'échantillon d'ordre 0.2, 0.4, 0.6 et 0.8. En appliquant la procédure d'estimation, nous obtenons $\hat{\theta}_0 = (17.22, 0.9044, 34.35)$. Avec la deuxième méthode d'estimation, nous obtenons $\tilde{\theta}_0 = (18.0866, 0.9510, 36.0201)$. Afin de valider les estimations, nous avons utilisé deux critères de validation, l'un basé sur la comparaison de quantiles et l'autre sur la prédiction. Les deux semblent montrer une bonne adéquation du modèle. Pourtant les résultats sont légèrement meilleurs avec la deuxième méthode que ceux obtenus avec la première méthode pour le graphique QQ et la méthode de prédiction. Cette dernière méthode est plus efficace en termes de temps de calcul et de précision. Avec la première méthode proposée, l'évaluation de la fonction de répartition du supremum a nécessité une méthode Monte Carlo très coûteuse. La procédure d'estimation prenait une semaine pour le calcul de l'estimateur, alors que la deuxième méthode ne prend que quelques minutes sur la même machine.

L'objectif de départ était de pouvoir évaluer des risques liés aux canicules une fois les paramètres du processus estimés. La canicule est définie [Laaidi et al. (2004)] comme une suite de n jours consécutifs pour lesquels la température maximale est supérieure à un seuil élevé a_{max} et la température minimale est supérieure à un seuil a_{min} . Ces seuils pour les températures minimales et maximales dépendent de la zone géographique que l'on considère. Pour Paris, ces valeurs

sont $n = 3$, $a_{min} = 21^\circ$ et $a_{max} = 31^\circ$. Nous pouvons choisir plusieurs type de mesures de risque (qui sont détaillés dans l'article [D4]) mais nous nous intéressons ici uniquement à la probabilité d'un évènement caniculaire et à sa durée. Comme nous nous intéressons aux mesures effectuées en été, $n = 61$ (nombre de jours entre 15 juin et le 14 août). Pour la probabilité d'avoir un épisode caniculaire, nous effectuons une simulation de Monte-Carlo sur 10^8 années de 61 jours. Nous obtenons que la probabilité d'avoir une canicule est de 2.57×10^{-2} pour un été. Il y a eu deux canicules entre 1985 et 2011 soit une proportion de 7.41×10^{-2} . Ceci souligne l'impact du changement climatique sur les dernières décennies. Avec 10^6 simulations de Monte-Carlo, nous avons obtenu une durée moyenne des canicules de 3.2 jours alors que les 2 dernières ont duré respectivement 3 et 10 jours.

2.5 Propriétés des ν -zéros des fonctions paraboliques cylindriques

Pour obtenir la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur (2.5), nous avons eu besoin de connaître le comportement asymptotique de la densité. Pour cela, une étude sur les propriétés des ν -zéros des fonctions paraboliques cylindriques a été nécessaire. Rappelons que la fonction parabolique cylindrique, notée $D_\nu(z)$, est solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} y''(z) + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2\right) y(z) = 0, \\ y(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} z^\nu e^{-z^2/4}. \end{cases}$$

Elle sera considérée dans la suite comme fonction de ν . Nous nous sommes intéressés aux ν -zéros de cette fonction, donc aux zéros de la fonction $\nu \mapsto D_\nu(z)$.

Plusieurs auteurs ont étudié les zéros d'une fonction spéciale d'ordre ν et d'argument z . En revanche, moins d'études ont été publiées sur les ν -zéros (voir par exemple [Magnus et Kotin (1960)], [Keller et al. (1963)], [Cochran (1965)] pour le comportement des ν -zéros de la fonction de Hankel de première espèce ou [Conde et Kalla (1979)] pour les ν -zéros de la fonction de Bessel). Par ailleurs, on sait peu de choses sur les ν -zéros de la fonction parabolique cylindrique. Cependant, ces zéros apparaissent dans la loi du premier temps de passage d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et dans d'autres lois associées ([Alili et al. (2005)], [D7], [Linetsky (2004)]...). Slater [Slater (1960)] donne une formule asymptotique pour les grands ν -zéros lorsque z est fixé. Son résultat n'est pas valable lorsque $|z|$ tend vers infini et c'est essentiellement ce cas qui nous intéresse.

Variation des zéros

Dans cette section, nous présentons quelques propriétés des ν -zéros de la fonction parabolique cylindrique $D_\nu(z)$, vus comme fonctions de z . Comme la fonction parabolique cylindrique est holomorphe en z et ν dans le plan complexe [Lebedev (1965)], l'ensemble des ν -zéros n'a pas de points d'accumulation et il existe un nombre infini de zéros. De plus, dans le cas réel, ils sont strictement positifs [D7]. Dans la suite, nous changeons légèrement la notation pour appuyer le fait que les zéros sont étudiés comme fonctions de z et désignons par $(\nu_n(z))_{n \geq 1}$ la suite ordonnée des zéros de la fonction $\nu \mapsto D_\nu(z)$.

La proposition suivante donne la monotonie de ν -zéros.

Proposition 2.5.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

1. *La dérivée du n -ème ν -zéro est donnée par :*

$$\partial_z \nu_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-(2\nu_n(z)+1)u + \frac{z^2}{2} \tanh(u)} \operatorname{erfc}\left(z \sqrt{\frac{\tanh(u)}{2}}\right) \frac{du}{\sqrt{\sinh(u) \cosh(u)}}} \quad (2.7)$$

2. *La fonction $z \mapsto \nu_n(z)$ est strictement croissante et convexe.*

Dans le cas particulier où $z = 0$, les zéros $(\nu_n(0))_{n \geq 1}$ de $\nu \mapsto D_\nu(0)$ sont les nombres entiers impairs positifs : $\nu_n(0) = 2n - 1$. Dans ce cas, l'expression (2.7) peut être simplifiée :

$$\partial_z \nu_n(z) |_{z=0} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} & \text{if } n = 1, \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}(n-1)B(n-1, \frac{3}{2})} & \text{if } n \geq 2, \end{cases}$$

où B est fonction bêta.

Comportement asymptotique des ν -zéros pour de grandes valeurs positives de z

La proposition suivante donne le comportement de $\nu_n(z)$ quand $z \rightarrow \infty$. Les ν_n sont reliés aux zéros a_n , $n = 1, 2, \dots$, de la fonction d'Airy ($Ai(a_n) = 0$) étudiés par Olver [Olver (1954)]. Il montre que les a_n , sont tous des réels négatifs et ils vérifient

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - \left(\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Proposition 2.5.2 *Pour de grandes valeurs positives de z , nous avons :*

$$\nu_n(z) = \frac{z^2}{4} - \frac{1}{2} - z^{\frac{2}{3}} 2^{-\frac{2}{3}} a_n + O\left(z^{-\frac{2}{3}}\right), \quad (2.8)$$

où a_n , $n = 1, 2, \dots$ sont les zéros de la fonction d'Airy de première espèce.

La preuve de cette proposition repose sur le comportement asymptotique de D_ν lorsque z est grand. Rappelons que $D_\nu(z)$ est solution de l'équation : $y''(z) + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2\right)y(z) = 0$, $z \in \mathbb{R}$. Cette équation a deux points tournants $\sqrt{4\nu + 2}$ et $-\sqrt{4\nu + 2}$. Lebedev [Lebedev (1965)], donne le comportement asymptotique de D_ν pour des grandes valeurs positives de z et $z \gg |\nu|$: $D_\nu(z) = e^{-\frac{z^2}{4}} z^\nu [1 + O(z^{-2})]$. Mais ce comportement change de manière significative en fonction de la position de z par rapport aux points tournants, il n'est pas toujours valide si z appartient à un intervalle contenant l'un des points tournants. Dans ce cas, un développement nécessitant des fonctions de type Airy est indispensable pour étudier le comportement d'une fonction parabolique cylindrique ([Olver (1959)], [Temme (2000)]).

Les valeurs de la fonction $\nu \mapsto D_\nu(z)$ pour z grand, dépassent les capacités de l'ordinateur, les zéros ne sont plus observables et calculables. Pour vérifier la qualité de nos résultats, nous

comparons les ν -zéros donnés par la méthode de dichotomie avec ceux obtenus avec (2.8) pour des valeurs modérées de z . Les calculs sont effectués en Python.

n	1	2	3	4	5
Dichotomie	143.8036	153.0062	160.6533	167.4948	173.8159
Comportement asymptotique	143.6623	152.5775	159.8764	166.3272	172.2242
Erreur relative	0.0009	0.0028	0.0048	0.0069	0.0091

TABLE 2.1 – Comparaison des cinq premiers ν -zéros de $\nu \mapsto D_\nu(23)$ obtenus par dichotomie et avec la formule (2.8).

Dans le tableau précédent, nous observons que, bien que la formule (2.8) concerne les grandes valeurs de z , pour $z = 23$, nous obtenons déjà des estimations acceptables par rapport à la méthode de dichotomie. Cet exemple montre que notre formule permet d'évaluer les premiers ν -zéros même pour des valeurs modérées de z . Nous remarquons toutefois une perte de précision des ν -zéros estimés avec (2.8) quand n augmente. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que, comme les simulations ne peuvent pas être effectuées pour des z très grands, lorsque n augmente, les zéros de la fonction d'Airy deviennent dominants dans (2.8).

Comportement asymptotique de la densité (2.3) du supremum

Pour vérifier les conditions d'intégrabilité demandées par le Théorème Ergodique, nous avons eu besoin d'étudier le comportement asymptotique de la densité (2.3) quand $|m| \rightarrow \infty$. Le résultat précédent (2.8), nous a permis de décrire le comportement de f_Δ pour de grandes valeurs de $|m|$.

Nous donnerons ici les résultats uniquement dans le cas $\theta = (0, \lambda, 1)$, sachant que pour le cas de trois paramètres, il suffit de remplacer m, Δ, λ par $m - \frac{\mu}{\lambda}, \beta\Delta$ et $\frac{\lambda}{\beta}$.

Cas $m \rightarrow \infty$:

Rappelons que, lorsque $m \rightarrow \infty$, les zéros de la fonction $\nu \mapsto D_\nu(-m\sqrt{2})$ tendent vers les entiers positifs. Dans ce cas le comportement asymptotique de la densité (2.3) est donné par la proposition suivante.

Proposition 2.5.3 *Pour de grandes valeurs positives de m*

1. *Le comportement asymptotique de la densité (2.3) est donné par :*

$$f_\Delta(m, \lambda) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda m^2} \left(1 + m e^{-\lambda m^2 \frac{1-e^{-\lambda\Delta}}{1+e^{-\lambda\Delta}}} O(1) \right),$$

$$\text{avec } |O(1)| \leq \frac{4\sqrt{\lambda}e^{-\lambda\Delta}}{\sqrt{\pi(1-e^{-2\lambda\Delta})}}.$$

2. *De plus, on a*

$$(a) \partial_\lambda \log(f_\Delta(m, \lambda)) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} -m^2 + \frac{1}{2\lambda} + m^3 e^{-m^2 \lambda \frac{1-e^{-\lambda\Delta}}{1+e^{-\lambda\Delta}}} O(1).$$

$$(b) \partial_\lambda^2 \log(f_\Delta(m, \lambda)) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2\lambda^2} + m^5 e^{-m^2 \lambda \frac{1-e^{-\lambda\Delta}}{1+e^{-\lambda\Delta}}} O(1).$$

$$(c) \partial_\lambda^3 \log(f_\Delta(m, \lambda)) \underset{m \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\lambda^3} + m^7 e^{-m^2 \lambda \frac{1-e^{-\lambda\Delta}}{1+e^{-\lambda\Delta}}} O(1).$$

Cas $m \rightarrow -\infty$:

En utilisant la Proposition 2.5.2, quand $m \rightarrow -\infty$, alors les zéros de la fonction $\nu \mapsto D_\nu(-m\sqrt{2})$ sont égaux à $\frac{m^2}{2} - \frac{1}{2} - |m|^{\frac{2}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} a_n + O(|m|^{-\frac{2}{3}})$ et le comportement asymptotique de la densité (2.3) est donné par :

Proposition 2.5.4 *Pour de grandes valeurs négatives de m ,*

1. *Le comportement asymptotique de la densité (2.3) est donné par :*

$$f_\Delta(m, \lambda) = 2|m|^{-2} \frac{e^{-\lambda m^2 - \left(\frac{m^2 \lambda - \frac{1}{2}}{2}\right) \lambda \Delta + |m|^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{4}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} a_1 \Delta}}{\sqrt{\pi}} (2 + \Delta \lambda) (1 + O(|m|^{-\frac{2}{3}})).$$

2. *De plus, on a :*

$$(a) \partial_\lambda \log(f_\Delta(m, \lambda)) = -m^2 - \Delta \left(m^2 \lambda - \frac{1}{2} - |m|^{\frac{2}{3}} \frac{2^{\frac{2}{3}} \lambda^{-\frac{2}{3}}}{3} a_1 \right) + \frac{\Delta}{2 + \Delta \lambda} + |m|^{-\frac{2}{3}} O(1).$$

$$(b) \partial_\lambda^2 \log(f_\Delta(m, \lambda)) = -\Delta \left(m^2 + |m|^{\frac{2}{3}} \frac{2^{\frac{5}{3}} \lambda^{-\frac{5}{3}}}{9} a_1 \right) - \frac{\Delta^2}{(2 + \Delta \lambda)^2} + |m|^{-\frac{2}{3}} O(1).$$

$$(c) \partial_\lambda^3 \log(f_\Delta(m, \lambda)) = \Delta |m|^{\frac{2}{3}} \frac{5}{27} 2^{\frac{5}{3}} \lambda^{-\frac{8}{3}} a_1 + \frac{2\Delta^3}{(2 + \Delta \lambda)^3} + |m|^{-\frac{2}{3}} O(1).$$

2.6 Perspectives de recherche

Des extensions naturelles à ce modèle sont envisageables. Une des critiques que l'on peut faire aux modélisations précédentes est que, de nos jours, la température ne peut pas être modélisée par un processus OU stationnaire à cause de l'impact du changement climatique. Dans une perspective proche, je vais m'intéresser à des processus OU non stationnaires, par exemple le paramètre μ pourrait être constant par morceaux, typiquement constant chaque été et croissant d'un été à l'autre pour traduire le changement climatique ou les paramètres pourraient être des fonctions du temps, périodiques pour traduire les saisons. Comme indiqué dans les perspectives du chapitre précédent, je compte utiliser le processus OU à changement de régime pour modéliser la température en Australie par exemple, en prenant en compte les régimes La Niña et El Niño.

Une autre possibilité est d'estimer les paramètres en utilisant d'autres observations, un échantillon de suprema et infima par exemple. Le point de départ de cette étude est le calcul de la loi jointe du supremum et de l'infimum d'un processus OU, loi (fdr) que nous avons déjà obtenue. Cette loi fait intervenir les fonctions paraboliques cylindriques et les ν -zéros d'une combinaison de plusieurs fonctions de ce type. Nos compétences acquises les dernières années sur ces fonctions devraient nous permettre de calculer la densité jointe du supremum et de l'infimum, ainsi que son comportement asymptotique. Ces deux points sont essentiels pour l'estimation des paramètres et pour obtenir les propriétés des estimateurs.

Chapitre 3

Différentes modélisations du risque en finance et assurance

Ce chapitre est basé sur les travaux [D1, D3, D5, D6, D11]. Les co-auteurs de ces différents articles sont Christophe Blanchet-Scalliet, Didier Rullière, Areski Cousin, Yahia Salhi et Pierre Therond.

Sommaire

3.1 Contagion	42
3.1.1 Modèle de contagion de défauts	44
3.1.2 Loi du nombre total de défauts	44
3.2 Risque de longévité	46
3.2.1 Cadre général. Notations.	47
3.2.2 Le prix d'indifférence	48
3.2.3 Construction des contrats représentatifs par l'approche Model Point	50
3.3 Dépréciation durable	52
3.3.1 Modèle	53
3.3.2 Loi jointe de la valeur de marché et de la dépréciation d'un portefeuille	54

Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons de présenter trois contributions concernant la gestion des risques dans le domaine de la finance et de l'actuariat.

Des travaux tels que [Boissay (2006), Das et al. (2007), Jorion et Zhang (2007), Jorion et Zhang (2010)] ont mis en évidence l'existence d'un phénomène de contagion dans l'arrivée des défauts. Ces études soulignent que ce phénomène constitue une source de dépendance expliquant la concentration des défauts et la survenance de défauts en chaîne. Motivés par la crise financière de 2008 et ayant comme point de départ le modèle de Davis et Lo [Davis et Lo (2001)], nous avons cherché à modéliser dans [D3] ce phénomène de contagion en intégrant des dépendances entre

différentes variables aléatoires pouvant engendrer des effets dominos et avoir ainsi des conséquences particulièrement importantes sur le marché financier. Les paramètres du modèle ont été calibrés à partir des cotations des tranches de l'indice iTraxx Europe.

Le deuxième modèle [D5] a été réalisé dans le cadre de l'ANR "Lolita" et de la chaire BNP Paribas Cardiff "Data Analytics and Models in Insurance". Les risques liés à l'assurance-vie, en particulier la mortalité et la longévité, ont gagné en importance non seulement parmi les praticiens, mais aussi d'un point de vue académique. De nombreuses compagnies d'assurance sont exposées à ces risques et sont continuellement invitées par les régulateurs à les gérer avec précision. Outre le problème de la couverture de ces risques, la tarification est également d'une importance capitale sur le marché de l'assurance qui est un marché incomplet. Nous plaçons notre étude dans le même contexte que Ludkovski [Ludkovski et Young (2008)] et considérons la tarification par indifférence lorsque l'utilité de l'assureur est exponentielle. Contrairement à Ludkovski, nous considérons un assureur initialement exposé au risque de mortalité et détenant un portefeuille de n contrats. Ce dernier a l'intention d'acquérir un nouveau portefeuille de m contrats. Ces deux portefeuilles sont composés d'individus dont les durées de vie sont potentiellement dépendantes. Nous nous intéressons au prix d'indifférence de ce nouveau portefeuille et proposons de le calculer à partir de deux contrats représentatifs, chacun aussi proche que possible du profil de risque des portefeuilles initiaux. Rappelons que le prix d'indifférence est le prix auquel l'assureur est indifférent entre détenir ou non le nouveau portefeuille.

Enfin, le troisième modèle [D6] est une application dans le domaine de la comptabilité des assurances. Les assureurs investissent les primes collectées auprès des assurés afin de recevoir un rendement. L'un des scénarios possibles est que les actifs achetés par les assureurs se déprécient de manière durable sur une période de plusieurs mois consécutifs. La réglementation impose la constitution d'une provision pour dépréciation afin de faire face à ce type de situation. Nous nous sommes intéressés à la dépréciation durable d'un portefeuille constitué de plusieurs actifs et également à la loi jointe de cette dépréciation et de la valeur de marché du portefeuille. Notre étude est menée dans le cadre de la norme comptable IFRS (International Financial Reporting Standards).

3.1 Contagion

Les crises financières ont amené le régulateur, les autorités de supervision et le monde académique à s'interroger sur le risque systémique et en particulier sur la propagation des risques au sein du système financier. La contagion dans l'arrivée des défauts est le phénomène constituant une source d'interdépendance additionnelle permettant d'expliquer la concentration des défauts, l'effet domino ou la survenance de défauts en chaîne.

Le modèle présenté ici a permis d'étendre à un cadre multi-périodique le modèle de Davis et Lo [Davis et Lo (2001)] qui constitue l'un des premiers modèles de contagion de défauts introduit dans la littérature financière. L'idée originale, appliquée à des obligations de type « CBO » (Collateralized Bond Obligation), est de postuler que chaque titre subit un risque de défaut sur une période donnée, le défaut pouvant arriver de deux manières alternatives. La première correspond à un événement de défaut direct ou spontané. La seconde correspond à un défaut par contagion : si le titre n'a pas subi de défaut direct sur la période, il peut également faire défaut de manière indirecte, en étant contaminé par un autre titre ayant déjà subi un défaut direct. Davis

et Lo modélisent les défauts directs par l'intermédiaire des variables aléatoires $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ i.i.d. de loi Bernoulli indépendantes des contaminations modélisées au moyen de variables aléatoires $\{Y_{ij}, i, j \in \mathbb{N}\}$ i.i.d. de loi Bernoulli.

Nous avons étendu ce modèle dans trois directions. La première a été de considérer un cadre multi-périodique, de sorte que des contaminations successives puissent être possibles et que le phénomène "effet domino" puisse être pris en compte. La Figure 3.1 illustre un scénario possible de défaut en cascade dans ce modèle pour un portefeuille composé de 5 titres. Au début de la première période (premier ensemble de gauche), un défaut direct est observé (indiqué par un S pour "spontané"). Durant la première période, le défaut de ce titre entraîne le défaut d'un second titre par contagion (flèche), de sorte qu'en début de deuxième période (ensemble du milieu) un second titre est déclaré en défaut (titre désigné par un C pour "contagion") en plus du titre déjà en défaut spontané en début de la première période. Pendant la seconde période, deux nouveaux événements de défaut se produisent, l'un correspondant à un défaut spontané, l'autre étant la conséquence d'un effet de contagion.

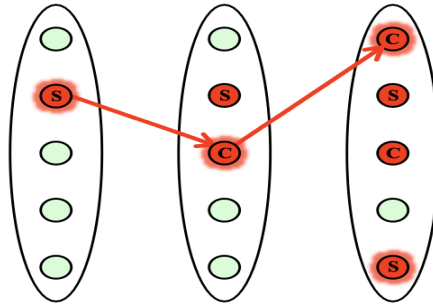


FIGURE 3.1 – Arrivée des défauts pour 5 titres et 2 périodes

La seconde direction a consisté à relâcher les hypothèses d'indépendance entre les événements de défaut direct et entre les liens de contamination. Cela permettra d'une part d'insérer d'éventuelles dépendances supplémentaires, d'autre part de tenir compte de la diversité des titres du portefeuille original ou des variables aléatoires considérées d'une façon générale. Il devient possible, par exemple, d'envisager des probabilités différentes de défaut direct.

La troisième direction a consisté à généraliser les modalités de contamination. Dans le modèle de Davis et Lo, l'activation d'un seul lien de contamination peut être suffisant pour déclencher le défaut d'un titre de manière indirecte, les titres étant susceptibles d'infecter les autres étant donc ceux ayant fait défaut directement. Dans notre étude tous les titres peuvent potentiellement engendrer des défauts par contagion. Dans l'exemple précédent, Figure 3.1, un titre contaminé a pu infecter à son tour un autre titre. Nous avons également défini des modalités de contamination plus générales, en imposant par exemple, un nombre minimum de liens de contamination activés pour générer un défaut par contagion et en considérant des ensembles plus restreints de titres potentiellement infectieux.

Notons que des généralisations du modèle de Davis et Lo ont également été proposées et elles introduisent d'autres voies pour assouplir le mode de contamination, de façon à mieux représenter les phénomènes réellement observés [Sakata et al. (2007)].

3.1.1 Modèle de contagion de défauts

Considérons un marché à $n \in \mathbb{N}^*$ titres. Soit $\Omega = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des indices possibles de ces titres. Les titres sont observés sur T périodes, la période t se référant à un intervalle de temps $(t-1, t]$, $t \in \{1, \dots, T\}$. Si pour chaque titre $i \in \Omega$, le défaut peut survenir directement pendant la période t , alors la variable aléatoire X_t^i est égale à 1 et $X_t^i = 0$ sinon. Dans le cas où $X_t^i = 0$, le titre i pourrait faire défaut pendant la période t par contagion : il est infecté par un autre titre. La variable binaire \mathbb{C}_t^i indiquera si le titre i a été infecté par un autre titre : cette variable est égale à 1 si le titre i ne fait pas défaut directement pendant la période t , mais par contagion et $\mathbb{C}_t^i = 0$ sinon. Enfin, on note $\{Z_t^i, i \in \Omega\}$ la suite de variables aléatoires discrètes prenant des valeurs dans $\{0, 1\}$. Pour tout $i \in \Omega$, $Z_t^i = 1$ si le titre i est en défaut (directement ou par contagion) à la fin de la période t et $Z_t^i = 0$ sinon. Dans le modèle multipériodique considéré dans [D3], les variables $\{Z_t^i, t = 1, \dots, T\}$ sont obtenues grâce à la relation de récurrence suivante :

$$Z_t^i = Z_{t-1}^i + (1 - Z_{t-1}^i)[X_t^i + (1 - X_t^i)\mathbb{C}_t^i], \quad 2 \leq t \leq T, \quad i \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$Z_1^i = X_1^i + (1 - X_1^i)\mathbb{C}_1^i. \quad (3.2)$$

Ainsi $Z_t^i = 1$ si le titre i est déjà en défaut à la fin de la période $t-1$ ($Z_{t-1}^i = 1$) ou s'il a fait défaut directement ($X_t^i = 1$) ou par contagion ($\mathbb{C}_t^i = 1$) pendant la période t .

Pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$, la variable aléatoire Y_t^{ji} avec $(j, i) \in \Omega^2$ et prenant des valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$ représente l'indicatrice de contagion du titre i par le titre j pendant la période t . Dans le modèle considéré, les vecteurs $\mathbf{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ et les vecteurs $\mathbf{Y}_t = (Y_t^{11}, Y_t^{12}, \dots, Y_t^{nn})$ sont mutuellement indépendants. On considère donc une indépendance temporelle des facteurs de défaut. En revanche, notre modèle apporte deux extensions importantes par rapport au modèle initial de David et Lo [Davis et Lo (2001)] : les composantes de ces vecteurs pourraient être dépendantes et la contagion pourrait se faire selon un mécanisme assez flexible :

$$\mathbb{C}_t^i = f \left(\sum_{j \in F_t} Y_t^{ji} \right),$$

où $f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ est une fonction supposée connue et F_t représente l'ensemble des titres susceptibles d'infecter le titre i . Ainsi il pourrait être, par exemple, N_{t-1} , l'ensemble des titres ayant fait défaut pendant la période $t-1$ (directement ou par contagion) ou uniquement N_t^D , l'ensemble des titres ayant fait défaut directement pendant la période t etc. et $f(i) = \mathbf{1}_{i \geq 2}$ (i.e. au moins deux infections sont requises pour causer un nouveau défaut). Dans notre modèle, $\text{card}(F_t)$ est supposé être une fonction du nombre des titres en défaut à la période précédente et des titres ayant fait défaut directement pendant la période t :

$$\text{card}(F_t) = g(N_{t-1}, N_t^D).$$

3.1.2 Loi du nombre total de défauts

Le résultat principal a consisté à exprimer de manière récursive la distribution du nombre total de défauts à chaque fin de période t sous les hypothèses ci-dessous.

Hypothèse 3.1.1 (Indépendance temporelle des défauts directs)

Les vecteurs aléatoires $\mathbf{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$, $t \in \{1, \dots, T\}$ sont mutuellement indépendants, mais une dépendance existe entre les composantes de chaque vecteur.

Hypothèse 3.1.2 (Indépendance temporelle des infections échangeables)

Les vecteurs aléatoires $\mathbf{Y}_t = (Y_t^{11}, Y_t^{12}, \dots, Y_t^{nn})$, $t \in \{1, \dots, T\}$ sont mutuellement indépendants et pour tout t , les variables aléatoires $\{Y_t^{ji}, (j, i) \in \Omega^2\}$ sont échangeables et indépendantes de $\{X_t^i, t = 1, \dots, T, i \in \Omega\}$.

Nous rappelons que la propriété d'échangeabilité est une généralisation de la propriété d'indépendance et de même loi (iid). Les variables aléatoires $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ sont échangeables si la loi du n-uplet (X_1, \dots, X_n) et la même que la loi de $(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ pour toute permutation σ .

Théorème 3.1.1 *Sous les Hypothèses 3.1.1 et 3.1.2, la loi du nombre total de défauts est donnée par*

$$\mathbb{P}(N_t = r) = \sum_{\substack{\theta_t \subset \Omega \\ \text{card}(\theta_t) = r}} \mathbb{P}(\Theta_t = \theta_t),$$

où $\Theta_t = \{i \in \Omega, Z_t^i = 1\}$ est l'ensemble des titres en défaut à la fin de la période t et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Theta_t = \theta_t) &= \sum_{u=0}^r \sum_{\substack{\theta_{t-1} \subset \theta_t \\ \text{card}(\theta_{t-1}) = u}} \mathbb{P}(\Theta_t = \theta_t \mid \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}) \mathbb{P}(\Theta_{t-1} = \theta_{t-1}), \\ \mathbb{P}(\Theta_t = \theta_t \mid \Theta_{t-1} = \theta_{t-1}) &= \sum_{m=0}^{r-u} \sum_{\substack{M_t \subset \theta_t - \theta_{t-1} \\ \text{card}(M_t) = m}} \rho(M_t, \Omega - \theta_{t-1} - M_t) \sum_{j=0}^{n-r} C_{n-r}^j (-1)^j \xi_{j+r-u-m,t}(g(u, m)), \\ \rho(A, B) &= \mathbb{P}(\forall i \in A \ X_t^i = 1 \text{ et } \forall i \in B \ X_t^i = 0) \quad \forall A, B \subset \Omega - \Theta_{t-1}, \\ \xi_{k,t}(g(u, l)) &= \mathbb{P}\left(\mathbb{C}_t^1 = 1 \cap \dots \cap \mathbb{C}_t^k = 1 \mid N_{t-1} = u, N_t^D = l\right) \end{aligned}$$

avec $\text{card}(\theta_t) = r$ et $\text{card}(\theta_{t-1}) = u$, $u \leq r$.

Le premier terme $\mathbb{P}(\Theta_1 = \theta_1)$ peut facilement être calculé en utilisant la formule de récurrence pour $\mathbb{P}(\Theta_1 = \theta_1 \mid \Theta_0 = \emptyset)$. La preuve de ce théorème est essentiellement combinatoire et repose sur l'application successive de la formule de Waring utilisée à l'origine en assurance vie. Cependant cette distribution est numériquement trop lourde à établir dans le cas où le nombre de titres est important. Le problème peut être simplifié en introduisant des hypothèses d'échangeabilité : les événements de défaut direct sont échangeables et il en est de même pour les liens de contamination.

Hypothèse 3.1.3 (Indépendance temporelle des défauts directs échangeables)

Les vecteurs aléatoires $\mathbf{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$, $t \in \{1, \dots, T\}$ sont mutuellement indépendants, mais les composantes de chaque vecteur sont échangeables.

Le théorème suivant est un cas particulier du Théorème 3.1.1. Sous les hypothèses d'échangeabilité, la formule de Waring peut être utilisée de manière imbriquée pour calculer la distribution du nombre de défauts.

Théorème 3.1.2 *Sous les Hypothèses 3.1.2 et 3.1.3, la loi du nombre total de défauts est donnée par*

$$\mathbb{P}(N_t = r) = \sum_{k=0}^r \mathbb{P}(N_{t-1} = k) C_{n-k}^{r-k} \sum_{\gamma=0}^{r-k} C_{r-k}^{\gamma} \sum_{\alpha=0}^{n-k-\gamma} C_{n-k-\gamma}^{\alpha} \mu_{\gamma+\alpha,t} \sum_{j=0}^{n-r} C_{n-r}^j (-1)^{j+\alpha} \xi_{j+r-k-\gamma,t}(g(k, \gamma)),$$

où $\mu_{k,t} = \mathbb{P}(X_t^1 = 1 \cap \dots \cap X_t^k = 1)$.

Dans ce cadre d'échangeabilité, la note [D11] présente une formule récursive pour le calcul de la formule de Waring qui s'avère être efficace numériquement même pour des grandes valeurs de n . Ces résultats nous ont permis de mettre en œuvre le modèle pour l'évaluation de tranches de CDO synthétique, dont le portefeuille de crédit sous-jacent peut contenir un nombre important d'entités. Dans [D3], nous avons présenté un exercice de calibration du modèle sur des cotations de tranches de l'indice iTraxx Europe à deux dates, à savoir 1er mars 2007 (avant la crise) et le 31 janvier 2008 (pendant la crise du crédit). Rappelons que l'indice iTraxx Europe comporte 125 références, donc $n = 125$. Un exercice analogue de calibration a également été mené dans [D1] à partir des spreads des tranches de l'indice CDX North America Investment grade au 31 mars 2008. Sans surprise, tous les résultats apportent le même type de conclusion : le niveau de contagion induit sur le modèle par les cotations de marché semble être plus important pendant les périodes de crise.

Le cadre multi-périodique que nous avons introduit a permis de décrire de manière explicite différentes formes de dynamique de contagion de défauts : contagion inter-périodique, contagion intra-périodique. Contrairement au modèle de Davis et Lo, notre approche permet de capturer des phénomènes de défauts en cascade. Notre modèle permet également d'intégrer la présence d'un facteur de risque systématique constituant une forme alternative d'inter-dépendance entre événements de défaut. Nous avons démontré qu'une version homogène du modèle pouvait être mise en œuvre et calibrée efficacement sur des cotations de tranches standardisées de CDO.

3.2 Risque de longévité

Dans cette section, nous étudions la tarification des portefeuilles d'assurance-vie en présence de personnes dépendantes. Nous supposons qu'un assureur ayant une exposition initiale à n contrats soumis au risque de mortalité, souhaite acquérir un second portefeuille constitué de m contrats. Ces deux portefeuilles sont composés d'individus dont les durées de vie sont potentiellement dépendantes. La dépendance entre les durées de vie des individus et donc entre les portefeuilles est due, par exemple, à des avancées médicales ou à des facteurs environnementaux qui affectent l'ensemble d'une population. Dans ce modèle, les durées de vie des assurés dans ces portefeuilles sont corrélées, la corrélation étant modélisée par l'intermédiaire d'une copule Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM). Cette famille de copules FGM est souvent utilisée dans le domaine de l'actuariat (voir par exemple [Barges et al. (2011), Cossette et al. (2008),

Cossette et al. (2013), Woo et Cheung (2013)]. Dans ce cadre, nous calculons le prix d'indifférence de ce nouveau portefeuille dans le cas où l'assureur est doté d'une utilité exponentielle. Cette méthodologie, introduite par Hodges et Neuberger [Hodges et Neuberger (1989)], est adaptée aux marchés non complets, comme c'est typiquement le cas ici. Nous avons utilisé l'approche développée dans [Rouge et El Karoui (2000)] introduisant deux problèmes d'optimisation stochastique pour déterminer le prix d'indifférence d'un portefeuille. Ce prix est caractérisé comme solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR), qui peut être décomposée en $(n - 1)n!$ EDSR auxiliaires (et donc non traitable numériquement). Le cas $n = 1$ est déjà étudié dans la littérature, nous en donnons ici une généralisation en suivant le même raisonnement que celui utilisé dans [Kharroubi et Lim (2014)]. Dans ce cas général, la dérivation du prix d'indifférence est difficile à calculer. Par conséquent, nous développons une approche Model Point afin de faciliter le calcul de ce prix (voir par exemple [Bennemann et Henning (2010), Goffard et Guerrault (2015)] pour ce type de modèle). Cette approche consiste à remplacer chaque portefeuille par un seul contrat représentatif qui est aussi proche que possible du profil de risque du portefeuille initial et qui reproduit certaines mesures de risque du portefeuille initial. En outre, les deux contrats représentatifs doivent reproduire de manière adéquate la dépendance observée entre les portefeuilles initiaux. Nous mettons en œuvre la procédure Model Point proposée et comparons les prix ainsi obtenus, à l'approche d'évaluation classique.

3.2.1 Cadre général. Notations.

Soit $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel est défini un mouvement brownien $W = (W_t)_{t \geq 0}$. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration engendrée par W .

Considérons un marché financier sur un intervalle de temps $[0, T]$ où $T > 0$ correspond à l'échéance des contrats d'assurance. Le marché financier se compose d'un actif sans risque de taux constant r et d'un portefeuille d'actifs risqués. Les processus de prix $\hat{S}^0 = (\hat{S}_t^0)_{t \in [0, T]}$ de l'actif sans risque et $\hat{S} = (\hat{S}_t)_{t \in [0, T]}$ des actifs risqué sont solutions des équations suivantes :

$$\begin{aligned} d\hat{S}_t^0 &= r\hat{S}_t^0 dt, & \hat{S}_0^0 &= 1, \\ d\hat{S}_t &= \hat{S}_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t), & \hat{S}_0 &= s_0 \geq 0, \end{aligned}$$

pour $t \in [0, T]$, où μ et σ sont des processus \mathcal{F} -prévisibles vérifiant les hypothèses classiques afin d'éviter les opportunités d'arbitrage.

Hypothèse 3.2.1 *Les processus μ et σ sont bornés. De plus σ est strictement positif.*

Considérons des contrats d'assurance-vie temporaires qui fournissent une couverture aux assurés pour une période de temps limitée T . Quelques exemples de tels contrats sont les contrats d'assurance capital différé qui payent un montant c à l'instant T si l'assuré est en vie à cet instant, ou les rentes viagères qui permettent de recevoir un montant régulier c pendant une durée déterminée (donc avant T) tant que l'individu est en vie ou encore des assurances décès pour lesquels l'assureur s'engage à verser un capital c à un bénéficiaire si l'assuré décède avant T . Supposons qu'une compagnie d'assurance a émis n contrats avec différents montants garantis c_i , $i \in \{1, \dots, n\}$: chaque individu i paie un prix initial et a un montant garanti c_i . Tous les

contrats sont supposés avoir la même échéance T . Ce type d'exposition est subordonné au décès des individus. Considérons donc une famille de temps aléatoires (τ_1, \dots, τ_n) prenant des valeurs dans \mathbb{R}_+^n pour représenter les temps de décès des individus. Dans le cas d'une assurance-vie temporaire, le montant garanti pour chaque individu i est $F_{\tau_i \wedge T}^i = c_i \mathbf{1}_{\tau_i < T}$.

Le vecteur (τ_1, \dots, τ_n) est supposé être indépendant de \mathcal{F} , les décès des individus n'ont donc pas d'impact sur le marché financier. Cependant, les stratégies d'investissement de l'assureur peuvent dépendre à la fois de l'évolution du marché et de la durée de vie restante des assurés. Nous introduisons donc les filtrations suivantes $\mathcal{G}^i = (\mathcal{G}_t^i)_{t \geq 0}$, $i \leq n$ définies par

$$\mathcal{G}^i = \mathcal{F} \vee \mathbb{D}^1 \vee \dots \vee \mathbb{D}^i,$$

où $\mathbb{D}^k = (\mathcal{D}_t^k)_{t \geq 0}$, $\mathcal{D}_t^k = \bigcap_{s > t} \sigma(\mathbf{1}_{\tau_k \leq u}, u \in [0, s])$.

Une stratégie d'investissement est un processus \mathcal{G}^n -prévisible $\pi = (\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que $\int_0^\infty \pi_t dS_t / S_t$ est bien défini avec $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$ le processus de prix actualisé de l'actif risqué $S_t = e^{-rt} \hat{S}_t$, $t \in [0, T]$. Le processus π représente le montant actualisé investi dans le portefeuille d'actifs risqués. Supposant que la stratégie d'investissement est auto-finançante, on note $X^\pi = (X_t^\pi)_{t \in [0, T]}$ la valeur actualisée du portefeuille détenu par l'assuré avec un capital initial 0 et suivant la stratégie π :

$$X_t^\pi = \int_0^t \pi_s (\mu_s - r) ds + \int_0^t \pi_s \sigma_s dW_s.$$

L'ensemble des stratégies d'investissement admissibles est défini comme suit.

Définition 3.2.1 Soient w et v deux \mathcal{G}^n -temps d'arrêt tels que $0 \leq w \leq v \leq T$. Un processus \mathcal{G}^n -prévisible $\pi = (\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une stratégie d'investissement admissible si elle est auto-financée, si $\mathbb{E} \left[\int_w^v |\pi_t|^2 dt \right] < \infty$ et si $\{\exp(-\alpha X_{\vartheta}^\pi), \vartheta \text{ est un } \mathcal{G}^n\text{-temps d'arrêt à valeurs dans } [w, v]\}$ est uniformément intégrable. On note $\mathcal{A}_{\mathcal{G}^n}[w, v]$ l'ensemble des stratégies d'investissement admissibles sur $[w, v]$.

Soit $p_{u_i} = \mathbb{P}(\tau_i < u_i)$ la loi marginale de la variable aléatoire τ_i . Dans ce modèle les variables τ_i sont corrélées, la dépendance étant modélisée à l'aide d'une copule Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) définie comme suit :

$$C_\theta(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i \left[1 + \sum_{k=2}^n \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n} \theta_{j_1 \dots j_k} (1 - u_{j_1}) \dots (1 - u_{j_k}) \right], \quad (3.3)$$

avec $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ et $-1 \leq \theta_{j_1 \dots j_k} \leq 1$ pour tous j_1, \dots, j_k , ([Jaworski et al. (2010)]). On a donc

$$\mathbb{P}(\tau_1 < u_1, \dots, \tau_n < u_n) = C_\theta(p_{u_1}, \dots, p_{u_n}), \quad (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

3.2.2 Le prix d'indifférence

Dans ce modèle, les préférences de l'assuré sont décrites par U , la fonction d'utilité exponentielle de paramètre α ($\forall y \in \mathbb{R}, U(y) = -e^{-\alpha y}$). L'assureur, détenant déjà un portefeuille de

n contrats, souhaite acquérir un nouveau portefeuille composé de m contrats. Nous nous intéressons au prix d'indifférence de ce nouveau portefeuille, l'objectif étant de caractériser le prix optimal p^* qui rend l'assureur indifférent entre détenir ce nouveau portefeuille de m contrats ou non. Soient τ_{n+i} , avec $i = 1, \dots, m$, l'instant de décès d'un individu du nouveau portefeuille et $V(x)$ (respectivement $\tilde{V}(x)$) l'utilité maximale espérée obtenue avec le portefeuille de n contrats (respectivement avec les deux portefeuilles)

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}^n}[0, T \wedge (\tau_1 \vee \dots \vee \tau_n)]} \mathbb{E} \left[U \left(x + X_{T \wedge (\tau_1 \vee \dots \vee \tau_n)}^\pi - \sum_{j=1}^n F_{T \wedge \tau_j}^j \right) \right], \quad (3.5)$$

et

$$\tilde{V}(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}^{n+m}}[0, T \wedge (\tau_1 \vee \dots \vee \tau_{n+m})]} \mathbb{E} \left[U \left(x + X_{T \wedge (\tau_1 \vee \dots \vee \tau_{n+m})}^\pi - \sum_{j=1}^{n+m} F_{T \wedge \tau_j}^j \right) \right], \quad (3.6)$$

où $x \geq 0$ et $F_{T \wedge \tau_j}^j = c_j \mathbf{1}_{\tau_j < T}$.

Le prix d'indifférence est défini par

$$p^* = \inf \left\{ p > 0, V(x) \leq \tilde{V}(x + p) \right\}. \quad (3.7)$$

Comme la fonction d'utilité est exponentielle, le résultat ne dépendra pas de la richesse initiale x . C'est pourquoi, nous considérons $x = 0$ dans ce qui suit. Pour simplifier l'écriture, notons V (resp. \tilde{V}), au lieu de $V(0)$ (resp. $\tilde{V}(0)$). Afin de caractériser p^* , il faut d'abord résoudre les problèmes (3.5) et (3.6) qui sont similaires (il suffit de remplacer n par $n + m$ dans le premier problème pour obtenir le second). La difficulté principale de ces problèmes réside dans le fait que les instants de décès ne sont pas ordonnés. Les fonctions valeur V et \tilde{V} peuvent être caractérisées à l'aide des valeurs initiales des certaines EDSR.

Proposition 3.2.1 *La fonction V est donnée par $V(x) = -\exp(\alpha Y_0)$, où Y_0 est la valeur initiale de l'unique solution (Y, Z, U) de l'EDSR suivante :*

$$Y_t = B + \int_{t \wedge \bar{\tau}^{1n}}^{T \wedge \bar{\tau}^{1n}} f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds - \int_{t \wedge \bar{\tau}^{1n}}^{T \wedge \bar{\tau}^{1n}} Z_s dW_s - \int_{t \wedge \bar{\tau}^{1n}}^{T \wedge \bar{\tau}^{1n}} \sum_{i=1}^n U_s^i dH_s^i, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.8)$$

avec $\bar{\tau}^{1n} = \tau_1 \vee \dots \vee \tau_n$, $f(t, z, u) = \sum_{i=1}^n (1 - H_t^i) \frac{e^{\alpha U_t^i} - 1}{\alpha} \lambda_t^i - \frac{z(\mu_t - r)}{\sigma_t} - \frac{1}{2\alpha} \frac{(\mu_t - r)^2}{\sigma_t^2}$ et λ_t^i est la \mathcal{G} -intensité de $H_t^i = \mathbf{1}_{\tau_i \leq t}$. De plus, il existe une stratégie optimale $\hat{\pi}$ donnée par

$$\hat{\pi}_t = \frac{1}{\sigma_t} \left(Z_t + \frac{\mu_t - r}{\alpha \sigma_t} \right).$$

La fonction valeur \tilde{V} est obtenue de manière similaire. La solution optimale du problème (3.7) s'écrit alors en fonction des solutions des deux EDSR correspondantes à V et \tilde{V} .

Proposition 3.2.2 *Si $(\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U})$ est l'unique solution de l'EDSR caractérisant la fonction valeur \tilde{V} , alors le prix d'indifférence optimal est donné par*

$$p^* = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\tilde{V}}{V} \right) = \tilde{Y}_0 - Y_0.$$

3.2.3 Construction des contrats représentatifs par l'approche Model Point

Les instants de décès n'étant pas ordonnés, la résolution de l'EDSR (3.8) pour obtenir Y_0 (et donc V) nécessite la résolution de $(n-1)n!$ EDSR. En effet, il faut prendre en compte toutes les permutations possibles de temps de décès et décomposer ensuite (3.8) selon les indicateurs de décès. En l'état, l'obtention du prix d'indifférence numériquement nécessite donc beaucoup de temps de calcul. Par conséquent, nous avons proposé de réduire la dimension du problème en remplaçant chaque portefeuille par un *contrat représentatif*. Dans la pratique actuarielle, ce type d'approche est connue sous le nom de *Model Point*. Dans ce modèle, chaque portefeuille est composé non seulement de contrats de garanties différentes, mais aussi d'individus d'âges différents et donc de profils de mortalité différents. Par conséquent, les contrats représentatifs sont caractérisés par une date de décès et un montant garanti. Pour trouver les contrats représentatifs des deux portefeuilles, on considère un *monde virtuel* sur lequel on définit deux temps aléatoires τ et $\tilde{\tau}$ (les temps de décès des agents représentatifs) satisfaisant les conditions suivantes :

- τ et $\tilde{\tau}$ sont des variables aléatoires de lois exponentielles de paramètres λ et $\tilde{\lambda}$,
- τ est indépendant de $\{\tau_i, i = 1 \dots, n\}$,
- $\tilde{\tau}$ est indépendant de $\{\tau_i, i = n+1, \dots, n+m\}$,
- Soit c (resp. \tilde{c}) le montant garanti pour le premier (resp. second) portefeuille, défini par :

$$c = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n c_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\tau_i < T} \right] = c_1 g(\lambda_1) + \dots + c_n g(\lambda_n),$$

(resp. $\tilde{c} = c_{n+1} g(\lambda_{n+1}) + \dots + c_{n+m} g(\lambda_{n+m})$) avec $g(x) = \frac{x}{x+r} (1 - e^{-(x+r)T})$,

- τ et $\tilde{\tau}$ sont corrélés par l'intermédiaire d'une copule FGM.

Pour caractériser les contrats représentatifs, nous devons déterminer leurs profils de mortalité. Ainsi, nous recherchons les intensités qui conduisent à avoir le même risque (du contrat représentatif et du portefeuille) et une espérance de cash-flows aussi proche que possible du portefeuille initial. Sachant qu'un raisonnement similaire pourrait être appliqué pour obtenir $\tilde{\lambda}$, nous présentons ici uniquement les étapes à suivre pour le calcul de λ .

- Le contrat représentatif et le portefeuille initial ont le même risque, nous cherchons donc λ solution de

$$f(\lambda) = \frac{1}{c^2} \text{Var} \left[\sum_{i=1}^n c_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\tau_i < T} \right], \quad (3.9)$$

où $f(\lambda) = \text{Var}[e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\tau < T}] = \frac{\lambda}{\lambda+2r} (1 - e^{-(\lambda+2r)T}) - \left(\frac{\lambda}{\lambda+r} \right)^2 (1 - e^{-(\lambda+r)T})^2$.

- L'équation (3.9) a deux solutions, nous choisissons celle qui minimise la valeur actuelle attendue des montants garantis du portefeuille, i.e. $|\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n c_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\tau_i < T}] - \mathbb{E}[c e^{-r\tau} \mathbf{1}_{\tau < T}]|$.

- Une fois λ obtenu, on définit τ par

$$\tau = \inf\{t > 0 : \lambda t \geq X\},$$

où X est une variable exponentielle de paramètre 1.

Nous nous intéressons maintenant à la dépendance entre τ et $\tilde{\tau}$. Ces deux temps aléatoires sont corrélés par l'intermédiaire d'une copule FGM donnée par

$$c(u, v) = uv[1 + \theta(1 - u)(1 - v)], \quad \theta \in [-1, 1], \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Par conséquent, θ est choisi de manière à ce que la variance du portefeuille initial auquel on rajoute les m assurés supplémentaires, soit reproduite au mieux par l'ensemble des deux contrats représentatifs. Formellement, le coefficient θ est défini comme la solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\theta \in [-1, 1]} \left| \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{n+m} c_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\tau_i < T} \right) - \text{Var} (ce^{-r\tau} \mathbf{1}_{\tau < T} + \tilde{c}e^{-r\tilde{\tau}} \mathbf{1}_{\tilde{\tau} < T}) \right|.$$

Avec le choix de λ et $\tilde{\lambda}$, ce problème est équivalent au

$$\min_{\theta \in [-1, 1]} \left| \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n c_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\tau_i < T}, \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i e^{-r\tau_i} \mathbf{1}_{\tau_i < T} \right) - \text{Cov} (ce^{-r\tau} \mathbf{1}_{\tau < T}, \tilde{c}e^{-r\tilde{\tau}} \mathbf{1}_{\tilde{\tau} < T}) \right|.$$

En d'autres termes, le coefficient optimal θ est celui qui permet de reproduire au mieux la corrélation initiale entre les deux portefeuilles.

Résolution numérique

Les résultats précédents permettent de mettre en place une méthode numérique pour construire les contrats représentatifs et calculer le prix d'indifférence.

Nous avons considéré deux portefeuilles réels (les données proviennent de portefeuilles d'assureurs collectés dans le cadre du groupe de travail de l'Institut des Actuariers). Le premier portefeuille est composé d'individus relativement jeunes, avec un âge moyen de 44,7 ans et le second est principalement composé d'individus plus âgés, l'âge moyen des assurés étant de 64,1 ans. Pour ces portefeuilles, presque tous les individus sont âgés de plus de 20 ans. En suivant la démarche présentée précédemment, nous avons construit les contrats représentatifs $P1$ et $P2$ pour des portefeuilles dont les contrats sont répartis par âge comme dans les deux portefeuilles réels. Ces deux portefeuilles sont corrélés avec une copule du type

$$C_\theta(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i \left(1 + \theta \prod_{j=1}^n (1 - u_j) \right), \quad \theta \in [-1, 1], \quad (3.10)$$

qui est une forme particulière de la copule FGM [Genest et al. (2011)]. Différentes tailles pour les portefeuilles initiaux et différentes corrélations (positive, négative, nulle) sont considérés. Pour chaque cas, nous avons donné dans [D5] les caractéristiques initiales des portefeuilles ainsi que celles des contrats représentatifs. En général, les contrats représentatifs parviennent à représenter 90 à 95 % des profils de risque des portefeuilles initiaux (variance et cash-flows attendus) ainsi que la corrélation entre ces portefeuilles.

Nous nous sommes également intéressé au prix d'indifférence. Dans [D5], nous avons mis en œuvre la procédure précédente pour évaluer l'impact de différents paramètres sur ce prix. La

corrélation entre les portefeuilles a une grande importance dans la tarification de l'indifférence. Plusieurs valeurs de la corrélation ont été considérées : une corrélation positive, une négative et le cas de l'indépendance. Les résultats obtenus montrent que le prix p^* augmente avec l'échéance T et avec l'intensité λ (dans les applications numériques, nous avons considéré $\tilde{\lambda} = \lambda$). D'autres simulations montrent également que le prix est sous-additif dans le cas de l'acquisition d'un contrat corrélé négativement avec le portefeuille initial produisant des avantages en termes de diversification. Cet impact n'est toutefois pas observé pour les engagements à corrélation positive. Lorsque la corrélation est nulle, l'inclusion de contrats supplémentaires fait baisser le prix puisqu'elle permet de bénéficier de l'effet de mutualisation. Comme indiqué précédemment, ce n'est toutefois pas le cas lorsque les engagements sont positivement corrélés. En effet, l'assureur qui est déjà exposé au risque de mortalité, s'il doit conserver son risque, il préférera un risque comparable qui n'augmentera pas son exposition réelle.

Dans [D5], nous avons proposée une tarification par indifférence pour un assureur étant déjà exposé initialement au risque de mortalité et souhaitant acheter un nouveau portefeuille. Nous nous sommes concentrés sur le cas où les durées de vie des individus sont corrélées et la corrélation est modélisée par l'intermédiaire d'une copule FGM. La méthodologie du prix d'indifférence repose sur les solutions de EDSR avec sauts. Ces dernières sont généralement difficiles à simuler numériquement car elles impliquent la résolution de plusieurs EDSR. L'approche Model Point que nous avons proposée pour la tarification par indifférence des contrats d'assurance-vie a permis d'éviter les calculs longs de la résolutions de ces EDSR, parfois même non traitables numériquement à cause de leur nombre important.

3.3 Dépréciation durable

En comptabilité des assurances, les actifs sont enregistrés à leur valeur d'achat à la date d'acquisition. Aucune disposition n'est prévue pour constater une éventuelle plus-value latente de ces titres en date d'arrêté des comptes. En revanche, lorsque ces titres sont durablement en moins-values latentes "significatives", une provision pour dépréciation à caractère durable (PDD) doit être comptabilisée. Lorsqu'un assureur investit les primes collectées auprès des assurés afin de recevoir un rendement, il est possible que les actifs achetés par l'assureur se déprécient de manière durable. Une dépréciation est considérée comme durable lorsque, sur une période consécutive des 6 mois, sa valeur de marché a été inférieure à 80% de son prix d'acquisition. La réglementation impose la constitution d'une provision pour dépréciation afin de faire face à ce type de scénario. Le calcul de la dépréciation dépend de la norme considérée et l'étude menée dans notre article est faite dans le cadre de la norme comptable International Financial Reporting Standards (IFRS).

Afin de mieux comprendre la notion de dépréciation durable, considérons l'exemple d'un assureur qui achète un actif d'une valeur de 100 euros en $t = 0$. Ce dernier est soumis à une règle dite de dépréciation qui consiste à évaluer sa valeur liquidative et constater une éventuelle perte de valeur. Par exemple, si à la date $t = 1$ (à la fin du premier exercice comptable) sa valeur chute à 76 euros l'assureur doit constituer une provision dès lors que la perte est durable. Si la valeur de marché maximale de cet actif au cours des six derniers mois est supérieure à 80, il n'y a pas de provision pour dépréciation à comptabiliser. En revanche si la valeur de marché maximale de cet actif est inférieure à 80, alors une provision pour dépréciation durable égale à $100-76=24$ euros est comptabilisée.

Ce mécanisme de dépréciation et constitution de provision s'applique sur les différents actifs, ligne par ligne. Si l'assureur en détient plusieurs, cela peut nécessiter des calculs intenses et chronophages.

Dans [D6] je me suis intéressée avec mes co-auteurs à la dépréciation durable d'un portefeuille composé n actifs. D'autres auteurs se sont intéressés à la dépréciation des titres. Dans [Azzaz et al. (2015)] les auteurs ont étudié un cas similaire au nôtre, mais avec une règle de dépréciation différente et selon une norme différente que celle que nous avons considérée dans notre étude. De plus, ils n'ont considéré que le cas d'un seul titre. Dans un autre article [Batens (2007)], l'auteur donne une approximation numérique de la dépréciation d'un portefeuille de titres, selon une norme différente de l'article [Azzaz et al. (2015)] et de la nôtre.

3.3.1 Modèle

Considérons un portefeuille de $n \in \mathbb{N}^*$ actifs, notés S^i avec $i = 1, \dots, n$. Chaque actif est caractérisé par sa date d'acquisition t_i , sa valeur d'acquisition a_i et par la dynamique de sa valeur de marché qui est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$S_t^i = S_t^i(rdt + \sigma_i dW_t^i),$$

où r et σ_i , $i = 1, \dots, n$ sont des paramètres constants et $W^i = (W_t^i)_{t \geq 0}$ sont n mouvements browniens corrélés.

Etant au début d'une période donnée, nous cherchons à quantifier la dépréciation durable d'un actif d'abord et du portefeuille entier après, de la prochaine période. À l'instant t , un actif i est déprécié chaque fois que sa valeur de marché S_t^i est inférieure à la valeur d'acquisition a_i . L'ensemble de ces éléments induit la reconnaissance d'une perte en t égale à $a_i - S_t^i$. Cette règle doit être considérée conjointement avec la contrainte sur l'effet prolongé de la baisse. Ainsi, la dépréciation dite durable est déclenchée lorsque la valeur de marché observée au cours du dernier semestre, donc sur une période de type $[t-1/2, t]$, est restée inférieure à un niveau donné $\alpha \in]0, 1[$ de la valeur d'acquisition. Formellement, la dépréciation durable à l'instant t de l'actif i acquis à l'instant t_i au prix a_i , avec $t - \frac{1}{2} > t_i$, notée PDD_t^i est donnée par

$$PDD_t^i = (a_i - S_t^i)^+ \mathbf{1}_{\tilde{S}_t^i \leq \alpha a_i},$$

où $\tilde{S}_t^i = \sup_{u \in [t-1/2, t]} S_u^i$.

L'article [D6] fournit la fonction de répartition de PDD_t^i compte tenu des informations disponibles à un instant donné s avec $t_i \leq s < t - \frac{1}{2}$. L'outil principal utilisé dans la preuve est la loi jointe d'un mouvement brownien et de son supremum. Si ce premier résultat permet de simuler les pertes de valeurs futures, d'un point de vue opérationnel, nous devons encore traiter deux points :

- (i) l'évolution jointe de la valeur de marché et de la dépréciation durable doit être prise en compte pour appliquer les règles de gestion dans les modèles de projection.
- (ii) les modèles internes des assureurs ne prennent pas en compte les titres individuellement.

Dans ce qui suit, nous traitons ces deux questions avec l'objectif d'obtenir des résultats mathématiques qui peuvent permettre une mise en œuvre opérationnelle.

3.3.2 Loi jointe de la valeur de marché et de la dépréciation d'un portefeuille

Notre étude commence avec le cas particulier dans lequel les actifs ont tous la même source d'incertitude. Il s'agit de tenir compte d'une pratique courante dans les applications réelles où le même mouvement brownien est utilisé pour générer la dynamique des actions et calculer ainsi les valeurs dépréciées sous-jacentes. Ce modèle est également intéressant lorsque la compagnie d'assurance détient plusieurs actions de la même société qui ont été achetées à des dates différentes. Conformément aux règles comptables, ces actions doivent être réparties en différentes lignes en fonction de la date d'acquisition. Dans un deuxième temps, nous considérons un cadre plus général dans lequel les actions ne sont pas parfaitement corrélées.

Pour un portefeuille composé de n actifs, $\Gamma_t = PDD_t^1 + \dots + PDD_t^n$ désigne la dépréciation durable du portefeuille en t et $\Sigma_t = S_t^1 + \dots + S_t^n$ sa valeur de marché à l'instant t . Notre principal objectif est de pouvoir simuler en $t + 1$ certaines réalisations de $(\Gamma_{t+1}, \Sigma_{t+1})$ sachant l'information disponible à l'instant t .

Actifs ayant la même dynamique

Considérons un portefeuille composé de n actions d'une même société, acquises à des moments différents, t_i et à des coûts différents $a_i, i = 1, \dots, n$. Nous pouvons ainsi avoir, des niveaux de réserves de dépréciation différents pour ces actions. Supposons que la dynamique de la valeur de marché des n actifs du portefeuille sous la probabilité risque-neutre est donnée par

$$S_t = S_t(rdt + \sigma dW_t),$$

où $r, \sigma > 0$ et $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration engendrée par le processus W .

Dans ce cadre, l'article [D6] fournit la probabilité d'avoir une future dépréciation durable du portefeuille $\mathbb{P}(\Gamma_t > 0 \mid \mathcal{F}_s)$ et la dépréciation future attendue $\mathbb{E}(\Gamma_t \mid \mathcal{F}_s)$ pour $\max(t_1 \dots t_n) \leq s < t - \frac{1}{2}$. Ces résultats, importants lors de l'étude de la dépréciation d'un portefeuille, peuvent être intégrés dans l'évaluation périodique de l'impact de la dépréciation sur le mécanisme de participation aux bénéfices. Cela pourrait, par exemple, être utile dans une approche basée sur des scénarios. Toutefois, du point de vue de la gestion des risques, il est important de mesurer le risque d'une fluctuation des bénéfices ou d'une éventuelle perte suite à une dépréciation durable du portefeuille. Par conséquent, nous avons calculé dans le Théorème 4.1 de [D6] la loi jointe de (Γ_t, Σ_t) la dépréciation durable et la valeur de marché du portefeuille. D'un point de vue opérationnel, ce résultat permettrait de traiter plusieurs lignes d'un même titre qui ont été acquises à des moments différents. En outre, il s'agit déjà d'une amélioration de l'approche la plus utilisée dans les modèles de projection des flux de trésorerie, qui consiste à agréger un portefeuille de titres (en faisant la moyenne des valeurs de marché et des coûts d'acquisition) et à le considérer comme s'il s'agissait d'un seul titre de participation. Bien entendu, cette approche conduit à une représentation erronée de la dynamique des pertes de valeur.

Actifs corrélés

Après avoir étudié le cas des actifs ayant la même dynamique, nous avons imaginé le cas des actifs corrélés dont les dynamiques sous la probabilité risque-neutre sont données par :

$$dS_t^i = S_t^i(rdt + \sigma_i dW_t^i), \quad (3.11)$$

où $r, \sigma_i > 0$ et $W^i = (W_t^i)_{t \geq 0}, i = 1, \dots, n$ sont n mouvements browniens corrélés, $\text{cov}(W_t^i, W_t^j) = \rho_{ij}t$ avec $\rho_{ij} \in]-1, 1[$. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration engendrée par les n mouvements browniens.

Nous nous sommes intéressés aux mêmes quantités que précédemment. Supposons que ces actifs ont été acquis à des moments différents t_i et à des coûts différents $a_i, i = 1, \dots, n$. Contrairement au calcul de la dépréciation attendue $\mathbb{E}(\Gamma_t | \mathcal{F}_s)$ (avec $\max(t_1 \dots t_n) \leq s < t - \frac{1}{2}$), le calcul de la loi jointe de (Γ_t, Σ_t) ou de $\mathbb{P}(\Gamma_t > 0 | \mathcal{F}_s)$ nécessitent de longs calculs et la connaissance de la loi jointe (X, \tilde{X}) avec $X = (X^1, \dots, X^n)$ mouvement brownien drifté de dimension n et $\tilde{X} = (\tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^n)$ avec $\tilde{X}_t^i = \sup_{s \leq t} X_s^i$. Dès lors que cette loi est connue, nous pouvons calculer les quantités qui nous intéressent. A notre connaissance, pour $n > 2$ cette loi est connue uniquement dans quelques cas particuliers (voir [D6] pour la liste des cas). Nous avons calculé ces quantités uniquement dans le cas de deux actifs corrélés (i.e. $n = 2$) et où le coefficient de corrélation entre les deux mouvements browniens est $\rho \in]-1, 1[$. La preuve de nos résultats repose sur les résultats de [He et al. (1998)] qui donne la loi de deux mouvements browniens driftés, corrélés et de leurs suprema.

L'article [D6] présente également des simulations numériques, des détails sur le temps de calcul ainsi que des comparaisons entre les résultats obtenus avec les formules que nous proposons et ceux obtenus avec la méthode de Monte Carlo.

Dans cet article, nous avons donc examiné les règles françaises de dépréciation des titres détenus par un assureur. Notre objectif était d'aller au-delà de la pratique courante qui consiste à considérer un portefeuille d'actions comme une seule action agrégée, puisque le mécanisme de dépréciation est complexe et doit être considéré sur une base individuelle. En raison des contraintes liées aux temps de calcul, aux coûts de mise en œuvre et à la complexité d'une approche ligne par ligne, les assureurs s'appuient généralement sur un Model Point [Bennemann et Henning (2010)]. Cela conduit à calculer la dépréciation d'un actif représentatif pour le portefeuille entier au lieu de les appliquer individuellement à chaque titre. Les résultats obtenus dans [Azzaz et al. (2015)] (avec un critère de dépréciation légèrement différent et sous une norme comptable différente de la nôtre) ont montré l'inadéquation de la réplcation des dépréciations en utilisant uniquement le critère de perte significative. Par conséquent, l'utilisation de la fdr jointe (dépréciation, valeur de marché) dans la construction de l'actif représentatif devrait améliorer les résultats. Dans le cadre du modèle Black et Scholes [Black et Scholes (1973)] (dynamique de mouvement brownien géométrique pour les actions), nous avons dérivé des expressions pour la loi jointe de la dépréciation durable d'un portefeuille et de sa valeur de marché. Formellement, les résultats présentent des formules analytiques pour les actions ayant la même dynamique et des formes semi-analytiques dans le cas des actions ayant des dynamiques différentes, mais corrélées. Ces dernières peuvent être améliorées afin d'obtenir des formules plus faciles à mettre en œuvre pour des formes particulières de la corrélation. Ces résultats permettent d'améliorer les modèles de projection des flux de trésorerie qui sont d'une utilisation massive à des fins prudentielles et d'information financière.

Bibliographie

- [Adam (2016)] Adam E., *Persistence et vitesse d'extinction pour des modèles de populations stochastiques multitypes en temps discret*, thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 2016.
- [Aït-Sahalia (2002)] Aït-Sahalia Y., *Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions : a closed-form approximation approach*, *Econometrica* 70(1), (2002), 223-262.
- [Alaton et al. (2002)] Alaton P., Djehiche B., Stillberger D., *On modelling and pricing weather derivatives*, *Applied Mathematics in Finance*, (9), (2002), 1-20.
- [Alili et al. (2005)] Alili L., Patie P., Pedersen J. L., *Representations of first hitting time density of an Ornstein-Uhlenbeck process*, *Stochastic Models*, 21(4), (2005), 967-980.
- [Andrès et al. (2021)] Andrès H., Arrouy P.-E., Boumezoued A., Serant E., *A review of the Solvency II equity Shock*, Milliman White Paper, (2021).
- [Antoniadis et al. (1992)] Antoniadis A., Berruyer J., Carmona R., *Régression non linéaire et applications*, Collection "Economie et statistiques avancées." : Série Ecole nationale de la statistique et de l'administration économique et Centre d'études des programmes économiques, *Economica*, (1992).
- [Azzaz et al. (2015)] Azzaz J., Loisel S., Thérond P.-E., *Some characteristics of an equity security next-year impairment*, *Rev Quant Finan Acc* 45(1), (2015), 111-135.
- [Barges et al. (2011)] Barges M., Cossette H., Loisel S., Marceau E., *On the moments of the aggregate discounted claims with dependence introduced by a FGM copula*, *Astin Bulletin*, 41(1), (2011), 215-238.
- [Batens (2007)] Batens N., *Modeling equity impairments*, *Belgian Actuarial Bulletin*, 7(1), (2007), 24-33.
- [Bennemann et Henning (2010)] Bennemann C., Hennig C., *Impairment estimates of equity portfolios represented by model points*, *Belgian Act Bullet* 9(1), (2010), 43-49.
- [Bernyk et al. (2008)] Bernyk V., Dalang R.C., Peskir, G., *The law of the supremum of stable Lévy processes with no negative jumps*, *Ann. Probab.* 36, (2008), 1777-1789.
- [Billingsley (1965)] Billingsley P., *Ergodic Theory and Information*, Wiley series in probability and mathematical statistics, Wiley, (1965).
- [Boissay (2006)] Boissay, F., *Credit chains and the propagation of financial distress*, working paper (2006).
- [Black et Scholes (1973)] Black F., Scholes M., *The pricing of options and corporate liabilities*, *J Polit Econ* 81(3), (1973), 637-654.
- [Borodin et Salminen (1996)] Borodin A.N., Salminen P., *Handbook of Brownian motion : facts and formulae*, Probability and its applications. Birkhäuser Verlag, (1996).

- [Bradley (2005)] Bradley R., *Basic properties of strong mixing conditions. a survey and some open questions*, Probability Surveys, 2, (2005), 107-144.
- [Brézis (1983)] Brézis H., *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, (1983).
- [Borokov (1964)] Borokov A., *On the first passage time for one class of processes with independent increments*, Theor. Probab. Appl. 10, (1964), 331-334.
- [Boyce et Diprima (2008)] Boyce W., Diprima R., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley, (2008).
- [Brody et al. (2002)] Brody D., Syroka J., Zervos M., *Dynamical pricing of weather derivatives*, Quantitative Finance, 2(3), (2002), 189-198.
- [Cantrell et Cosner (1999)] Cantrell R.-S., Cosner C., *Diffusion models for population dynamics incorporating individual behavior at boundaries : applications to refuge design*, Theoretical Population Biology, 55(2), (1999), 189-207.
- [Cardenas et al. (2015)] Cardenas-Gallo I., Akhavan-Tabatabaei R., Sanchez-Silva M., Bastidas-Arteaga E., *A Markov regime-switching framework to forecast El Nino Southern Oscillation patterns*, Natural Hazards 81, (2015), 829-843.
- [Castillo et al. (2015)] Castillo E., Hadi A., Balakrishnan N., Sarabia J., *Extreme Value and Related Models With Applications in Engineering and Science*, Wiley Hoboken, NJ, (2005).
- [Chi et Lin (2011)] Chi Y., Lin X.S., *On the threshold dividend strategy for a generalized jump-diffusion risk model*, Insurance : Mathematics and Economics, 48(3), (2011), 326-337.
- [Cochran (1965)] Cochran J.A., *The zeros of Hankel functions as functions of their order*, Numerische Mathematik, 7(3), (1965), 238-250.
- [Conde et Kalla (1979)] Conde S., Kalla S.L., *The ν -zeros of $J_{-\nu}(x)$* , Mathematics of Computation 33, (145), (1979), 423-462.
- [Coutin et Dorobantu (2011)] Coutin L., Dorobantu D., *First passage time law for some Lévy processes with compound Poisson : existence of a density*, Bernoulli 17(4), (2011), 1127-1135.
- [Cossette et al. (2008)] Cossette H., Marceau E., Marri F., *On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern copula*, Insurance : Mathematics and Economics, 43(3), (2008), 444-455.
- [Cossette et al. (2013)] Cossette H., Côté M.-P., Marceau E., Moutanabbir, K., *Multivariate distribution defined with Farlie-Gumbel-Morgenstern copula and mixed Erlang marginals : Aggregation and capital allocation*, Insurance : Mathematics and Economics, 52(3), (2013), 560-572.
- [Coutin et Pontier (2019)] Coutin L., Pontier M., *Existence and regularity of law density of a pair (diffusion, first component running maximum)*, Statist. Prob. Lett. 153, (2019), 130-138.
- [Coutin et al. (2018)] Coutin L., Pontier M., Ngom W., *Joint distribution of a Lévy process and its running supremum*, Journal Applied Probability 55(2), (2018), 488-512.
- [Das et al. (2007)] Das S., Duffie D., Kapadia N., Saita L., *Common failings : how corporate defaults are correlated*, Journal of Finance 62 (1), (2007), 93-117.
- [Davis et Lo (2001)] Davis M., Lo V., *Infectious Defaults*, Quantitative Finance 1, (2001), 382-387.
- [Decamps et al. (2006)] Decamps M., Goovaerts M., Schoutens W., *Self exciting threshold interest rates models*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 9(7), (2006), 1093-1122.

- [Delarue et al. (2013)] Delarue F., Inglis J., Rubenthaler S., Tanré E., *First hitting times for general non-homogeneous 1d diffusion processes : density estimates in small time*, working-paper 2013.
- [Dischel (Mars 1998)] Dischel B., *At least : a model for weather risk*, weather risk special report, Energy and Power Risk Management, (March 1998), 30-32.
- [Dischel (Octobre 1998)] Dischel B., *Black-Scholes won't do it*, weather risk special report, Energy and Power Risk Management, (October 1998), 8-9.
- [Doney et Kyprianou (2006)] Doney R., Kyprianou A., *Overshoots and undershoots of Lévy processes*, The Annals of Applied Probability, (2006), 91-106.
- [D'Onofrio et Lanteri (2023)] D'Onofrio G., Lanteri A., *Approximating the First Passage Time Density of Diffusion Processes with State-Dependent Jumps*, Fractal and Fractional 7(30), (2023),
- [Doukhan (2012)] Doukhan P., *Mixing : properties and examples*, Springer, Berlin, vol. 85, (2012).
- [Escobar et al. (2013)] Escobar M., Ferrando S., Wen X., *Three dimensional distribution of Brownian motion extrema*, Stochastics, 85(5), (2013), 807-832.
- [Escobar et Hernandez (2014)] Escobar M., Hernandez J., *A note on the distribution of multivariate Brownian extrema*, International Journal of Stochastic Analysis, (2014).
- [Fan al. (2021)] Fan W.-T., Kieu C., Sakellariou D., Patra M., *Hitting Time of Rapid Intensification Onset in Hurricane-like Vortices*, Physics of Fluids, 33, 096603, (2021).
- [Franco (2003)] Franco J. C. G., *Maximum likelihood estimation of mean reverting processes*, Real Options Practice (2003).
- [Furrer et Schmidli (1994)] Furrer H.J., Schmidli H., *Exponential inequalities for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion*, Insurance : Mathematics and Economics, 15(1), (1994), 23-36.
- [Gardiner (2004)] Gardiner C.W., *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*, third éd., Springer Series in Synergetics, vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, (2004).
- [Genest et al. (2011)] Genest C., Neslehova J., Ben Ghorbal N., *Estimators based on kendall's tau in multivariate copula models*, Australian New Zealand Journal of Statistics, 53(2), (2011), 157-177.
- [Gobet et Matulewicz (2016)] Gobet E., Matulewicz G., *Parameter estimation of Ornstein-Uhlenbeck process generating a stochastic graph*, Statistical Inference for Stochastic Processes (2016), 1-25.
- [Goffard et Guerrault (2015)] Goffard P.-O., Guerrault X., *Is it optimal to group policyholders by age, gender, and seniority for bel computations based on model points ?*, European Actuarial Journal, (2015), 1-16.
- [Hardy (2001)] Hardy M., *A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns*, North American Actuarial Journal, 5(2) (2001), 41-53.
- [He et al. (1998)] He H., Keirstead W., Rebholz J., *Double lookbacks*. Mathematicla Finance 8(3), (1998), 201-228.
- [Hodges et Neuberger (1989)] Hodges S.D., Neuberger A., *Optimal replication of contingent claims under transaction costs*, Review of futures markets, 8(2), (1989), 222-239.

- [Iyengar (1985)] Iyengar S., *Hitting lines with two-dimensionnal Brownian motion*, Siam J. Appl. Math 45(6), (1985), 983-989.
- [Jaworski et al. (2010)] Jaworski P., Durante E., Hardle W.K., Rychlik T., *Copula theory and its applications*, (2010), Springer.
- [Jeanblanc et al. (2009)] Jeanblanc M., Yor M., Chesney M., *Mathematical Methods for Financial Markets*, Springer Finance, Springer London, (2009).
- [Jorion et Zhang (2007)] Jorion P., Zhang G., *Good and bad credit contagion : Evidence from credit default swaps*, Journal of Financial Economics 84 (3), (2007) , 860-883.
- [Jorion et Zhang (2010)] Jorion P., Zhang G., *Information transfer effects of bond rating downgrades*, Financial Review 45 (3), (2010), 683-706.
- [Karatzas et Shreve (1991)] Karatzas I., Shreve S., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, (1991).
- [Kharroubi et Lim (2014)] Kharroubi I., Lim T., *Progressive enlargement of filtrations and backward stochastic differential equations with jumps*, Journal of Theoretical Probability, 27(3), (2014), 683-724.
- [Keller et al. (1963)] Keller J.B., Rubinow S.I., Goldstein M., *Zeros of Hankel functions and poles of scattering amplitudes.*, Journal of Mathematical Physics, 4(6), (1963), 829-832.
- [Klein et al. (2002)] Klein Tank A.M.G., Wijngaard J.B. , Können G.P., Böhm R., Demarée G., Gocheva A., Mileta M., Pashiardis S. , Hejkrlik L. , Kern-Hansen C. , et al., *Daily dataset of 20th-century surface air temperature and precipitation series for the european climate assessment*, International Journal of Climatology : A Journal of the Royal Meteorological Society, 22(12), (2002), 1441–1453.
- [Kou et Wang (2003)] Kou S.G., Wang H., *First passage times of a jump diffusion process*, Adv. in Appl. Probab. 35, (2003), 504-531.
- [Kou et Wang (2004)] Kou S.G., Wang H., *Option Pricing Under a Double Exponential Diffusion Model*, Management Science, 50(9), (2004), 1178-1192.
- [Kuznetsov et al. (2014)] Kuznetsov A., Kyprianou A.E., Pardo J.C., Watson A.R., *The hitting time of zero for a stable process*, Electron. J. Probab. 19, 30, (2014), 1-26.
- [Laaidi et al. (2004)] Laaidi K., Pascal M., Ledrans M., Le Tertre A., Medina S., Casério C. , Cohen J.-C., Manach J. , Beaudeau P., Empereur Bissonnet P., *Le système français d'alerte canicule et santé 2004 (sacs 2004) un dispositif intégré au plan national canicule*, Bulletin épidémiologique hebdomadaire, 30- 31, (2004), 134-136.
- [Lambert (2002)] Lambert A., *The genealogy of continuous-state branching processes with immigration*, Probab. Theory Relat. Fields 122, (2002), 42-70.
- [Lebedev (1965)] Lebedev N., *Special functions and their applications*, Physics Today, 18(12) : 70, (1965).
- [Lefèvre et Loisel (2008)] Lefèvre C., Loisel S., *On finite-time ruin probabilities for classical risk models*, Scand. Actuar. J. 1, (2008), 41-60.
- [Lévy (1948)] Lévy P., *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Paris : Gauthier-Villars, (1948).
- [Linetsky (2004)] Linetsky V., *Computing hitting time densities for CIR and OU diffusions : applications to mean-reverting models*, Journal of Computational Finance, 7, (2004), 1-22.
- [Lipton et Kaushansky (2018)] Lipton A., Kaushansky V., *On the first hitting time density of an Ornstein–Uhlenbeck process*, arXiv :1810.02390, (2018).

- [Ludkovski et Young (2008)] Ludkovski M., Young V.R., *Indifference pricing of pure endowments and life annuities under stochastic hazard and interest rates*, Insurance : Mathematics and Economics, 42(1), (2008), 14-30.
- [Magnus et Kotin (1960)] Magnus W., Kotin L., *The zeros of the Hankel function as a function of its order*. Numerische Mathematik, 2(1), (1960), 228-244.
- [Mazonetto et Pigato (2020)] Mazonetto S., Pigato P., *Drift estimation of the Threshold Ornstein-Uhlenbeck process from continuous and discrete observations*, arXiv preprint arXiv :2008.12653, (2020).
- [Merton (1974)] Merton R., *On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates*, Journal of Finance 29, (1974), 449-470.
- [Muirhead (2011)] Muirhead S., *Financial Geometry : Pricing multi-asset barrier options using the generalized reflexion principle*, Ph.D. Thesis, (2011), University of Melbourne.
- [Mullowney et Iyengar (2008)] Mullowney P., Iyengar S., *Parameter estimation for a leaky integrate-and-fire neuronal model from ISI data*, Journal of Computational Neuroscience 24(2), (2008), 179-194.
- [Ngom (2016)] Ngom W., *Contributions to the study of default time of a Lévy process in complete observation and in incomplete Observation*, Thesis tel-01466200, Université Paul Sabatier Toulouse III, (2016).
- [Olver (1954)] Olver F.W.J., *The asymptotic expansion of Bessel functions of large order*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 247(930), (1954), 328-368.
- [Olver (1959)] Olver F.W.J., *Uniform asymptotic expansions for Weber Parabolic Cylinder functions of large orders*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, 63(2), (1959), 131-169.
- [Pekasiewicz (2014)] Pekasiewicz D., *Application of quantile methods to estimation of Cauchy distribution parameters*, Statistics in Transition 15, no. 1, (2014), 133-144.
- [Peskir (2007)] Peskir G., *The law of the passage times to points by a stable Lévy process with no-negative jumps*, Research Report No. 15, Probability and Statistics Group School of Mathematics, The Univ. Manchester, (2007).
- [Picard et Lefèvre (1997)] Picard,P., Lefèvre C., *The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution*, Scand. Actuar. J. 1, (1997), 58-69.
- [Picard et Lefèvre (1998)] Picard,P., Lefèvre C., *The moments of ruin time in the classical risk model with discrete claim size distribution*, Insurance Math. Econom. 23, (1998), 157-172.
- [Risken et Haken (1989)] Risken H., Haken H., *The Fokker-Planck Equation : Methods of Solution and Applications Second Edition*, Springer, (1989).
- [Rio (1993)] Rio E., *Covariance inequalities for strongly mixing processes*, Annales de l'IHP 29, no. 4, (1993), 587-597.
- [Rouge et El Karoui (2000)] Rouge R., El Karoui N., *Pricing via utility maximization and entropy*, Mathematical Finance, 10(2), (2000), 259-276.
- [Sakata et al. (2007)] Sakata A., Hisakado M., Mori, S., *Infectious default model with recovery and continuous limits*, Journal of the Physical Society of Japan, 76(5), (2007), 054801.
- [Schmidli (1995)] Schmidli H., *Cramer-Lundberg approximations for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion*, Insurance : Mathematics and Economics, 16(2), (1995), 135-149.

- [Siliverstovs et al. (2010)] Siliverstovs B., Otsch R., Kemfert C., Jaeger C., Haas A., Kremers H., *Climate change and modelling of extreme temperatures in Switzerland*, Stochastic environmental research and risk assessment 24(2), (2010), 311-326.
- [Slater (1960)] Slater L.J., *Confluent hypergeometric functions*, (1960).
- [Sommerfeld (1894)] Sommerfeld A., *Sur la théorie analytique de la conduction thermique*, Annales mathématiques 45(2), (1894), 263-277.
- [Strook et Varadhan (1997)] Stroock D. W., Varadhan S., *Multidimensional diffusion processes*, vol. 233. Springer Science & Business Media, (1997).
- [Su et Chan (2017)] Su F., Chan K.-S., *Testing for threshold diffusion*, Journal of Business and Economic Statistics, 35(2), (2017), 218-227.
- [Temme (2000)] Temme N., *Numerical and asymptotic aspects of Parabolic Cylinder functions*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 121(1-2), (2000), 221-246.
- [Wang al. (2015)] Wang S., Song S., Wang Y., *Skew Ornstein–Uhlenbeck processes and their financial applications*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 273, (2015), 363-382.
- [Wolkovich et al. (2021)] Wolkovich E.M., Auerbach J., Chamberlain C.J., Buonanaiuto D.M., Etinger A.K., Morales-Castilla I., Gelman A., *A simple explanation for declining temperature sensitivity with warming*, Global Change Biology, Wiley, 27(20), (2021), 4947-4949.
- [Woo et Cheung (2013)] Woo J.-K., Cheung E. C., *A note on discounted compound renewal sums under dependency*, Insurance : Mathematics and Economics, 52(2), (2013), 170-179.
- [Zolotarev (1964)] Zolotarev V.M., *The first passage time of a level and the behavior at infinity for a class of processes with independent increments*, Theor. Probab. Appl. 9, (1964) 653-664.