



HAL
open science

Coupling strategies of Compatible Discrete Operators schemes applied to Maxwell equations in time domain

Valentin Ritzenthaler

► **To cite this version:**

Valentin Ritzenthaler. Coupling strategies of Compatible Discrete Operators schemes applied to Maxwell equations in time domain. Engineering Sciences [physics]. Toulouse, ISAE, 2024. English. NNT : 2024ESAE0060 . tel-04955205

HAL Id: tel-04955205

<https://hal.science/tel-04955205v1>

Submitted on 18 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Doctorat de l'Université de Toulouse

délivré par l'ISAE-SUPAERO

Stratégies de couplage des méthodes Compatible Discrete
Operators appliquées aux équations de Maxwell dans le
domaine temporel

Thèse présentée et soutenue, le 10 décembre 2024 par

Valentin RITZENTHALER

École doctorale

EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et Télécommunications de Toulouse

Spécialité

Mathématiques et Applications

Unité de recherche

ISAE-ONERA SCANR Signal communication Antennes Navigation Radar

Thèse dirigée par

Xavier FERRIERES et Pierre CANTIN

Composition du jury

M. Philippe HELLUY, Président, Université de Strasbourg

Mme Hélène BARUCQ, Rapporteure, INRIA Pau

M. Jérôme BONELLE, Examineur, EDF R&D

M. Stéphane LANTERI, Examineur, INRIA Sophia Antipolis

M. Xavier FERRIERES, Directeur de thèse, ONERA

M. Pierre CANTIN, Co-directeur de thèse, INSA Toulouse

Membres invités

M. Sébastien PERNET, ONERA Toulouse

M. Guillaume PUIGT, ONERA Toulouse

À mes parents, à ma sœur,

Remerciements

Ces trois années de thèse ont été une aventure scientifique intense, mais aussi (et surtout) une aventure humaine extrêmement enrichissante. Je tiens donc à formuler quelques remerciements.

Les premiers s'adressent à mes directeurs de thèse, Xavier Ferrières et Pierre Cantin. Je vous remercie de m'avoir offert l'opportunité de réaliser cette thèse et de m'avoir accompagné jusqu'à son aboutissement, que ce soit par vos conseils, votre disponibilité ou vos compétences scientifiques. Plus spécifiquement, je tiens à te remercier, Xavier, d'avoir veillé sur moi durant ces trois années et de ne pas avoir compté ton temps lorsqu'il s'agissait d'assurer le bon déroulement de la thèse. Toutes ces heures passées à discuter avec toi m'ont été précieuses, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. Pierre, je tiens à te remercier de m'avoir transmis ta vision scientifique à travers des discussions enrichissantes et pour avoir été à l'écoute dans les moments difficiles.

Je remercie ensuite Sébastien Pernet et Guillaume Puigt pour s'être rendus disponibles malgré leurs emplois du temps chargés. Nos discussions ont été une source d'inspiration pour moi ; avoir pu travailler avec vous a été une chance énorme.

Mes remerciements vont ensuite à l'ONERA et, plus particulièrement, à l'équipe CME, qui m'a permis de mener ces travaux de thèse dans les meilleures conditions.

Je remercie Hélène Barucq et Philippe Helluy de m'avoir fait l'honneur de rapporter ma thèse.

Je remercie également Jérôme Bonelle et Stéphane Lanteri d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je remercie à double titre Jérôme pour nos échanges, qui, je l'espère, se poursuivront.

Je souhaite aussi remercier mes collègues de l'ONERA à Toulouse, qui ont chaque jour contribué à une ambiance paisible et facile à vivre au laboratoire. J'adresse un remerciement tout particulier à Yeliz pour tous ces repas, ces pauses et ces discussions que l'on a partagé. Ces moments ont été de vrais bols d'air frais pendant ces trois années. Je tiens également à saluer la troupe de l'atelier "midi trente" : Léopold, Jean-Charles, Marion, Charles, Nour, Alex et Quentin. Votre bienveillance et votre ouverture d'esprit m'ont permis de vivre, au cours de ces deux années de théâtre, des moments que je n'oublierai jamais. Je remercie doublement Léopold pour sa pédagogie et tout ce qu'il m'a transmis, notamment à travers nos échanges sur « le vivant ».

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les personnes qui m'ont donné le goût de la mathématique et de la physique durant mon parcours d'étudiant : Jean Wolff, Luis Alejandro Perez Perez, Christophe Prud'homme, Yannick Privat et Philippe Helluy ; ainsi qu'envers ceux qui ont su m'émerveiller à travers leurs communications : Cédric Villani, Carlo Rovelli, Étienne Klein, Richard Taillet et Alain Conne.

Mes remerciements vont ensuite à ma famille : Robert, Élisabeth, Philippe, Patrick, Aurélie et Sylvain. Merci de vous être toujours montrés intéressés par mes travaux, et pour ceux qui sont venus, d'avoir fait le déplacement pour me rendre visite à Toulouse. Je tiens particulièrement à remercier mes grands-parents et mes tontons d'avoir assisté à ma soutenance. Vous avez rendu cette journée inoubliable. J'adresse également un remerciement chaleureux à ma sœur jumelle, Marie-Lucie, qui, bien que nos chemins se soient séparés depuis un certain temps, reste présente et à l'écoute. Enfin, je souhaite formuler un remerciement très spécial à mes parents, Laurence et Jean-Marie. Votre amour et votre soutien ont toujours été un moteur pour moi. Vous n'avez jamais compté vos efforts lorsqu'il s'agissait de notre réussite ou de notre bien-être. Le fait de vous avoir eus près de moi, avec Marie, en ce jour si spécial, m'a rempli de bonheur.

Pour conclure ces remerciements, j'aimerais adresser un remerciement particulier à ma chère et tendre Laryssa. Merci de me soutenir dans tous mes projets et dans les moments les plus difficiles. Tu as toujours fait preuve d'une présence et d'un soutien sincère ; ton amour m'est infiniment précieux.

Table des matières

Introduction	1
1 État de l'art	5
1.1 Cadre général	5
1.2 Discrétisations compatibles	6
1.3 Couplage de méthodes numériques	8
1.4 Méthodes numériques d'ordre élevé	9
2 Cadre discret pour les méthodes numériques compatibles	11
2.1 La géométrie des lois de l'électromagnétisme	11
2.2 Milieu discret	15
2.3 Régularité de maillage en espace	22
3 Discrétisation des relations topologiques	25
3.1 Positionnement des variables	25
3.2 Degrés de liberté	26
3.3 Applications de réduction	29
3.4 Opérateurs différentiels discrets	32
3.5 Discrétisation des relations topologiques	36
4 Discrétisation des relations constitutives	41
4.1 Relations constitutives	41
4.2 Opérateurs de Hodge discrets	44
4.3 Discrétisation des relations constitutives	52
5 Analyse mathématique du schéma CDO	59
5.1 Position du problème continu	59
5.2 Formulation discrète	61
5.3 Analyse de stabilité	62
5.4 Consistance	68
6 Comparaisons numériques	87
6.1 Pas de temps pour des métriques hybrides	87
6.2 Résolution sur maillage hybride	91
6.3 Étude sur des problèmes de diffraction	95
7 Couplage de méthodes CDO dans le cas statique	109
7.1 Modèle continu	109
7.2 Cadre discret avec deux sous-domaines	110
7.3 Couplage de schémas CDO pour le problème div-grad	116
7.4 Applications	120
8 Vers des schémas CDO d'ordre élevé	131
8.1 Modèles continus 3D et 1D	131

8.2	Principes de construction	132
8.3	Etude en 1D	136
8.4	Perspectives	137
9	Conclusion et perspectives	143
A	Couplage FDTD structurée et CDO non-structuré	145
B	Différences Spectrales	149

Introduction

Dans le domaine de la simulation numérique des équations de Maxwell, l'un des principaux objectifs consiste à rendre compte de la réalité physique des champs électromagnétiques avec une haute précision et un faible coût de calcul. Il existe aujourd'hui de nombreuses méthodes permettant de résoudre les équations de Maxwell en régime transitoire, présentant chacune, en fonction des situations, des avantages et des inconvénients. La définition générale d'une stratégie de couplage de méthodes reste un problème de recherche actuel en terme d'analyse numérique.

Dans ce domaine de recherche Edelvik & Ledfelt (2000), et Ferrieres *et al.* (2004) ont chacun proposé une stratégie pour coupler les schémas Volumes Finis et Différences Finies. La première stratégie consiste à établir le couplage à partir d'une couche de transition, permettant le transfert des champs d'un schéma à l'autre en limitant la réflexion à l'interface. La seconde consiste à coupler les schémas à partir d'interpolation au niveau de l'interface de couplage, ce qui donne un schéma global numériquement instable en temps long. Ces deux approches permettent de tirer un maximum du schéma Différences Finies dans les zones sans objets. Elles permettent aussi de limiter les pertes d'information liées au maillage en marche d'escalier au niveau de l'objet courbe par l'utilisation d'un maillage tétraédrique local. Cependant ces schémas sont d'ordre bas et sujets aux erreurs de dispersion.

Afin d'augmenter l'ordre de ces schémas numériques, Ventribout & Breuilh (2008) ainsi que Garcia *et al.* (2008) ont développé des stratégies pour coupler numériquement le schéma Galerkin Discontinu d'ordre élevé avec le schéma Différences Finies. Ces travaux ont permis de mettre en lumière les difficultés numériques liées au passage de l'information par interpolation, notamment concernant la stabilité en temps long du schéma.

La stabilité dans les schémas numériques appliqués aux équations de Maxwell, repose sur le caractère adjoint des opérateurs rotationnels discrets. C'est pour cela que Tonti (2002), Bossavit (1999-2000) puis Codecasa & Trevisan (2010a) ont proposé un point de vue géométrique sur la discrétisation des équations de Maxwell. Cela a permis, d'une part, de généraliser la méthode des Différences Finies à des maillages tétraédriques et polyédriques, d'autre part, de mettre en lumière l'importance de préserver le caractère dual des champs électromagnétiques au niveau discret dans la formulation de schémas stables. C'est ce qui a conduit Bonelle & Ern (2014a) à synthétiser cette méthode de discrétisation, *Compatible Discrete Operators* (CDO), dans un formalisme prenant en compte des métriques adaptées aux maillages polyédriques. Cette étude a permis d'établir un cadre pour l'analyse numérique de ce type de discrétisation et ainsi que de l'appliquer aux équations de Poisson et de Stokes. Dans ces travaux, la prise en compte de conditions au bord générales, nécessaires au couplage de méthodes, n'était pas encore établie dans ce formalisme.

Cette thèse propose d'étudier deux stratégies de couplage des méthodes *Compatible Discrete Operators* (CDO) appliquées aux équations de Maxwell en domaine temporel : l'une, par la

définition de la métrique, l'autre, par la définition d'opérateurs d'interface.

L'objectif du Chapitre 1, est de situer cette thèse dans le contexte scientifique existant. Pour cela, il retrace de manière non-exhaustive les recherches sur les méthodes numériques appliquées aux équations de Maxwell ainsi que les travaux à l'origine du cadre mimétique moderne. Ensuite, sont présentées les recherches effectuées dans le cadre CDO appliqué aux équations de Maxwell, ainsi que les études portant sur le couplage de schémas numériques. Enfin quelques travaux sur la possibilité de monter en ordre dans les schémas CDO ainsi que d'autres alternatives, sont discutées.

L'objectif du Chapitre 2 est de définir le cadre discret, utile à la discrétisation des équations de Maxwell en régime transitoire dans le cadre CDO. A cette fin, dans l'idée de Tonti (2002), les lois de l'électromagnétisme sont formulées dans leur forme verbale et vectorielle, afin d'identifier les variables qui les constituent ainsi que les entités géométriques auxquelles elles sont associées. Ces lois sont alors étudiées en deux parties : les équations topologiques qui ne dépendent que des circulations, et les relations constitutives qui dépendent des paramètres matériels. Enfin sont définis les maillages spatiaux, volumiques et surfaciques, ainsi que les maillages temporels. Ils contiennent les entités géométriques utiles à la discrétisation du problème continu et à l'association des variables discrètes. Avec la définition des maillages spatiaux, sont précisés les critères de régularité de maillage suffisants à la bonne définition du cadre CDO.

L'objectif du Chapitre 3 est de discrétiser, dans le cadre CDO, les relations topologiques des équations de Maxwell continues. Pour cela, en se basant sur la classification des variables de Tonti (2013), le positionnement des variables de l'électromagnétisme est choisi sur le maillage primal ou sur le maillage dual. Sont ensuite introduits, les espaces de degrés de liberté associés aux entités géométriques des maillages primaux et duaux, puis les opérateurs de *réduction* permettant de discrétiser les champs vectoriels des équations de Maxwell continues. À partir de ces espaces, les opérateurs différentiels discrets GRAD, ROT et DIV, correspondant aux opérateurs vectoriels discrétisés ∇ , $\nabla \times$ et $\nabla \cdot$, sont définis. Ils sont au cœur de la discrétisation des relations topologiques. Pour finir, au moyen des applications de réduction précédemment définies, le processus de discrétisation en espace et en temps du système topologique vectoriel de Maxwell est détaillé.

L'objectif du Chapitre 4 est de discrétiser, dans le cadre CDO, les relations constitutives des équations de Maxwell. Pour cela, le caractère particulier des relations constitutives est mis en évidence par une analyse dimensionnelle sur les variables vectorielles du système de Maxwell. Ensuite, la construction de l'opérateur de Hodge discret sur maillage Cartésien est motivée en utilisant la dimension des variables discrètes. De cela, les opérateurs de Hodge discrets (volumiques et surfaciques) sont définis de manière formelle à partir d'opérateur définis localement. Enfin, l'erreur de *commutation* est introduite. Elle intervient dans le processus de discrétisation en espace et en temps des relations constitutives du système de Maxwell, et définit l'erreur de consistance du schéma complètement discret. Le processus de discrétisation des relations constitutives est détaillé, de sorte à mettre en évidence où intervient l'erreur afin d'en donner une estimation.

L'objectif du Chapitre 5 est d'établir une estimation de l'erreur du schéma CDO appliqué aux équations de Maxwell. Pour cela, le modèle continu considéré est formulé : un problème de diffraction sur un domaine supposé polyédrique, avec des conditions au bord de type Dirichlet tangentielle et de type Silver-Müller. De cela, le schéma CDO complètement discret est formulé en utilisant les relations topologiques discrètes établies au Chapitre 3 et les relations constitutives discrètes établies au Chapitre 4. Le schéma est ensuite analysé en terme de stabilité et de consistance afin d'établir une estimation sur l'erreur.

L'objectif du Chapitre 6 est de quantifier le gain en coût de calcul sur le choix de construction des opérateurs de Hodge locaux. Pour cela on commence par définir une stratégie de calcul du pas de temps selon la condition CFL établie au Chapitre 5 et on étudie l'influence du choix de la métrique sur les valeurs de celui-ci. De cela, on compare les coûts calcul du schéma CDO, avec une métrique hybride, avec ceux du schéma de Yee sur deux problèmes de diffraction utilisant des couches *Perfectly Matched Layers* (PML) : un calcul de Surface Équivalente Radar d'une sphère parfaitement métallique et un calcul de champ proche d'un avion.

L'objectif du Chapitre 7 est d'étudier mathématiquement une stratégie de couplage de méthodes CDO avec des opérateurs d'interface. De sorte à se focaliser uniquement sur le caractère spatial du couplage on considère un modèle stationnaire sur un domaine partitionné. De sorte à poser le problème discret, on introduit les notations associées au couplage et on rappelle quelques éléments du cadre CDO : les maillages de chaque partition, les applications de réduction, les opérateurs différentiels discrets et les opérateurs de Hodge discrets. On introduit ensuite les opérateurs d'interface utiles à la discrétisation des conditions de transmission. Le problème couplé discrets est ensuite formulé puis analysé en terme de stabilité et de consistance. Enfin une application numérique est proposée.

L'objectif du Chapitre 8 est de donner des éléments de perspectives sur la construction d'une métrique d'ordre élevé dans le schéma CDO appliqué aux équations de Maxwell. Pour cela, on commence par formuler les problèmes continus 1D et 3D considérés. Ensuite on propose de formaliser la montée en ordre sur maillage Cartésien pour le schéma CDO en s'inspirant des idées de Gerritsma (2012). Pour cela, on précise les maillages, les opérateurs topologiques et les opérateurs de Hodge utilisés. On propose ensuite un schéma CDO sur le problème 1D, puis on compare de manière qualitative les solutions numériques obtenues avec celles des schémas *Discontinuous Galerkin* (DG) et *Spectral Difference* (SD). Enfin on ouvre une discussion sur les fonctions de forme utilisées ainsi sur la possibilité d'éviter l'inversion de matrice dans le schéma.

Les travaux réalisés dans cette thèse ont fait l'objet d'une publication :

Ritzenthaler, V., Cantin, P. & Ferrieres, X. Robust Scheme on 3D Hybrid Meshes with Non-conformity for Maxwell's Equations in Time Domain. *J Sci Comput* 99, 73 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10915-024-02533-1>

Ils ont également fait l'objet de participations à des congrès nationaux et internationaux :

Compatible Discrete Operators scheme to improve Yee's scheme for solving time domain Maxwell's equations, V. Ritzenthaler, P. Cantin, X. Ferrières, Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (NUMELEC 2024), Toulouse, France, Juillet 3-7, 2024.

Meshes and schemes coupling with Compatible Discretization for Maxwell's equations : toward high performance solutions compatible with physics, V. Ritzenthaler, P. Cantin, X. Ferrières, European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering (ECCOMAS 2024), Lisbonne, Portugal, Juin 3-7, 2024.

Poster : Opérateurs Compatibles Discrets pour les équations de Maxwell instationnaires, V. Ritzenthaler, P. Cantin, X. Ferrières, Journées des Ondes du Sud-Ouest (JOSO 2023), Toulouse, France, Mars 14-16, 2023

Compatible discrete operators applied to Maxwell's equation in time domain and its link with FDTD, V. Ritzenthaler, P. Cantin, X. Ferrières, S. Pernet, G. Puigt, Applied Computational

Electromagnetics Society 2023 conference (ACES 2023 Conference), Monterey, California, Mars 26-30, 2023.

Spectral Difference method On Structured-Grids for Maxwell's Equations in Time Domain, V. Ritzenthaler, P. Cantin, X. Ferrières, S. Pernet, G. Puigt, International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (WAVES 2022), Juillet 25-29, Palaiseau, France, 2022.

Opérateurs Compatibles Discrets pour les équations de Maxwell dans le domaine temporel, V. Ritzenthaler, P. Cantin, X. Ferrières, S. Pernet, G. Puigt, Congrès National d'Analyse Numérique (CANUM 2020), Juin 13-17, Evian-les-Bains, France, 2022.

État de l'art

Sommaire

1.1	Cadre général	5
1.1.1	Méthodes numériques d'approximation des équations de Maxwell . .	5
1.1.2	Vision géométrique et analyse numérique	6
1.2	Discretisations compatibles	6
1.2.1	Présentation générale	7
1.2.2	Méthodes compatibles dans le cadre de Maxwell	8
1.3	Couplage de méthodes numériques	8
1.4	Méthodes numériques d'ordre élevé	9

L'objectif de ce chapitre est de situer cette thèse dans le contexte scientifique existant. Pour cela, il retrace de manière non-exhaustive les recherches sur les méthodes numériques appliquées aux équations de Maxwell ainsi que les travaux qui sont à l'origine du cadre mimétique moderne. Ensuite, sont présentées les recherches effectuées dans le cadre *mimétique* appliqué aux équations de Maxwell, ainsi que les études portant sur le couplage de schémas numériques. Enfin quelques travaux sur la possibilité de monter en ordre dans les schémas *mimétiques* ainsi que d'autres alternatives, sont discutés.

1.1 Cadre général

L'objectif de cette section est de présenter de manière non-exhaustive des travaux portant sur l'approximations des équations de Maxwell en domaine temporel, plus particulièrement autour des schémas *Finite Difference* (FD), *Finite Volume* (FV), *Finite Element* (FE) et *Discontinuous Galerkin* (DG). Ensuite, on présente, toujours de manière non-exhaustive, les outils qui ont permis d'arriver à une vision géométrique des équations de Maxwell à travers le prisme de leur approximation numérique.

1.1.1 Méthodes numériques d'approximation des équations de Maxwell

Historiquement, la résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel a été commencée avec l'approche *Finite Difference in Time Domain* (FDTD) proposée par Yee (1966). Depuis, cette méthode a reçu de nombreux développements notamment de part sa facilité d'implémentation et de son utilisation industrielle (voir Taflove & Hagness (2005) pour plus de détails). L'approche FDTD nécessitant l'utilisation de maillages cartésiens, la communauté scientifique a alors cherché à développer d'autres schémas numériques permettant d'utiliser des maillages plus généraux. Dans le cas des équations de Maxwell, cela a commencé avec l'étude des schémas type *Finite Volume Time-Domain* (FVTD) dont une version a été donnée par Madsen & Ziolkowski (1990) puis une seconde se basant sur une formulation conservative des équations

de Maxwell par Shankar *et al.* (1990). L'étude de ce type de schéma a été poursuivie dans les applications à des problèmes de diffraction notamment par Bonnet *et al.* (1997), puis d'un point de vue de l'analyse numérique par Remaki (2000), puis par Piperno *et al.* (2002).

Toujours dans l'optique de travailler avec des maillages non-structurés permettant de capturer des géométries complexes de manière conforme, la très répandue *Finite Element Method* (FEM) utilisant des éléments nodaux a aussi été formulée et étudiée par Cangellaris *et al.* (1987) dans le cadre des équations de Maxwell. C'est avec l'introduction des "éléments de faces" (Raviart & Thomas (1977)) qu'une première analyse est proposée par Adam *et al.* (1980), et avec l'introduction des "éléments d'arêtes" (Nédélec (1980)) que les formulations mixtes des éléments finis apparaissent dans le cadre des équations de Maxwell. L'analyse de ce type de formulation a été initiée par Monk (1991, 1992), puis suivi de Ciarlet & Zou (1999).

Par ailleurs, des travaux ont aussi été menés par Hesthaven & Warburton (2002) sur les méthodes *Discontinuous Galerkin* (DG) d'ordre élevé appliquées aux équations de Maxwell à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Dans ce contexte, on mentionne les travaux de Fezoui *et al.* (2005) sur la méthode DG en domaine temporel sur tétraèdres, et ceux de Cohen *et al.* (2006) sur hexaèdres non-structurés avec des applications à des problèmes de diffraction. Dans la continuité de ces travaux, on note aussi l'analyse dans les milieux dispersifs de la méthode DG par Lanteri & Scheid (2012) pour des problématiques liées à la modélisation du corps humain, puis des applications de Durochat *et al.* (2013) sur le même type de configurations.

1.1.2 Vision géométrique et analyse numérique

Le cadre CDO se base sur une vision géométrique des lois de l'électromagnétisme formulées par Maxwell (1873). Les outils de géométrie différentielle moderne utiles à la formulation géométrique de ces équations ont été développés par Cartan (1899) et leur application au système de Maxwell peut être trouvée dans les travaux de Misner & Wheeler (1957). En parallèle, l'approximation numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) se voit marquée par les travaux de Courant *et al.* (1928). Ce sont ensuite, à la fin des années 1960, les livres de Lions & Magenes (1968) ainsi que de Ciarlet (1978) qui marquent respectivement, le début de l'analyse moderne des EDP et l'étude mathématique de la méthode des éléments finis. Cette dernière était initialement formulée avec des polynômes de Lagrange associés aux sommets des éléments, ce sont alors Nédélec (1980) puis Raviart & Thomas (1977) qui introduisirent les éléments d'arêtes et les éléments de face permettant d'interpoler localement des fonctions à valeurs vectorielles. L'application des concepts géométriques dans l'approximation des EDP peut être trouvée dans les travaux de Kron (1945, 1953), Branin (1966), Dodziuk (1976) et Kotiuga (1984). Toutefois le lien de ces concepts avec l'approximation des EDP est particulièrement marqué par l'article de Bossavit (1988b) qui établit le lien des formes différentielles de Whitney (1957) avec les fonctions de formes introduites par Nédélec (1980) et Raviart & Thomas (1977). Dans la même année, le cadre *mimétique* pour l'approximation numérique des EDP voyait le jour dans l'article de Hyman & Scovel (1988) dans lequel ils introduisent des notions de topologie algébrique pour définir des opérateurs différentiels discrets. Enfin, on mentionne aussi l'article de Mattiussi (1997) dans lequel il propose une interprétation des méthodes numériques classiques (FD), (FV) et (FEM), du point de vue de la topologie algébrique.

1.2 Discrétisations compatibles

L'objectif de cette section est de présenter le point de vue *Compatible Discrete Operator* (CDO) utilisé dans cette thèse. Dans ce cadre, les équations d'un problème physique sont étudiées en deux parties, à savoir, les équations topologiques et les équations constitutives.

1.2.1 Présentation générale

De manière générale, la description des équations de la physique sous forme de relations constitutives et de relations topologiques remonte au livre de Tonti (1975) dans lequel il décrit les lois de la physique par des diagrammes (voir Figure 1.1). Il y définit également des opérateurs différentiels discrets (ne dépendant que de l'orientation du maillage) pour formuler les équations topologiques des lois physiques comme par exemple les lois de conservation ou de circulation dans le cas des équations de Maxwell. Du point de vue de l'analyse numérique, les méthodes dites *mimétiques* ou *compatibles* utilisent cette distinction dans la discrétisation des équations, en particulier le cadre CDO. Tel qu'il est étudié dans cette thèse, ce dernier se base aussi sur la notion d'opérateur de Hodge discret, introduit par Hiptmair (1999) et Tarhassaari *et al.* (1999), dans la discrétisation des relations constitutives. Ces opérateurs dépendent des paramètres du milieu et définissent la métrique du schéma.

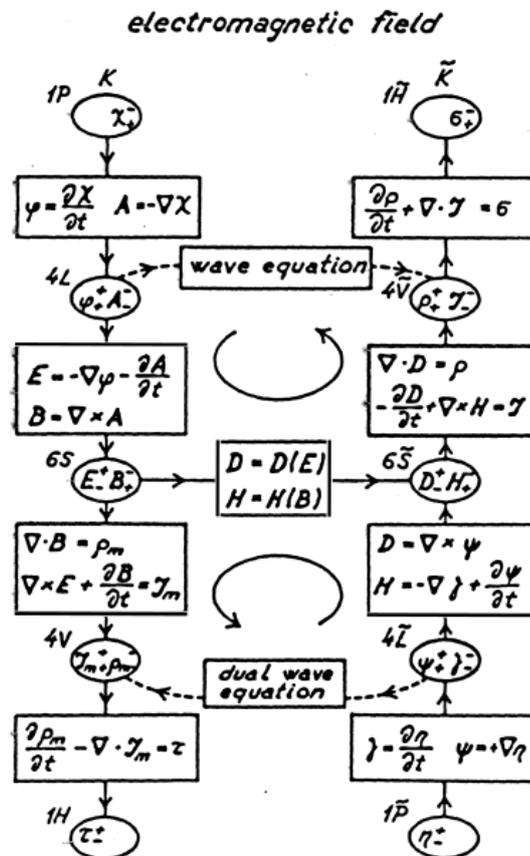


FIGURE 1.1 – Représentation du diagramme dit "de Tonti" (voir Tonti (1975)) associé aux lois de l'électromagnétisme.

Il semble que les méthodes que l'on qualifie ici de compatibles n'ont reçu des développements que séparément, comme par exemple avec les schémas *Mimetic Finite Difference* introduits dans Lipnikov *et al.* (2014). La première unification de ces méthodes dans le point de vue que l'on considère dans ce travail est proposée par Bochev & Hyman (2007). Ils décrivent le processus d'approximation mimétique comme la composition de deux opérateurs, un de réduction, qui discrétise les champs continus et les opérateurs vectoriels au moyen du théorème de Stokes, un d'interpolation, qui, à partir des variables discrètes, reconstruit les champs au moyen d'une approximation polynomiale. C'est cette philosophie que suivent les schémas *Compatible Discrete Operators* (CDO) introduits par Bonelle & Ern (2014a,b) dans le cadre des équations elliptiques et du problème de Stokes, puis continuée dans le cadre du problème d'advection diffusion et

dans le cadre du problème d'advection réaction vectoriel par Cantin & Ern (2016, 2017). A ce titre, on mentionne également les travaux de Lemoine *et al.* (2015) sur la décomposition de Helmholtz-Hodge discrète dans le formalisme CDO.

1.2.2 Méthodes compatibles dans le cadre de Maxwell

Les méthodes numériques dites mimétiques appliquées aux équations de Maxwell ont gagné en intérêt depuis les travaux de Bossavit (1988b) et Hyman & Scovel (1988). Bien que les schémas FDTD et FVTD soient aujourd'hui considérés comme des schémas mimétiques, ce sont Hyman & Shashkov (1999) qui semblent publier la première fois un article où l'adjectif "mimétique" est utilisé dans une discrétisation des équations de Maxwell. Dans le but de généraliser le schéma de Yee tout en conservant les propriétés mimétiques de celui-ci, Nicolaidis & Wang (1998) introduisent le schéma "covolume" sur maillages tétraédriques de type Delaunay-Voronoi, puis Tonti (2001) introduit la "méthode des cellules". Pour traiter des maillages tétraédriques plus généraux, Bossavit (2001) introduit le schéma "Différences Finies généralisées" dans lequel la métrique est construite avec des éléments d'arêtes et des éléments de face ; ce travail a ensuite été repris par He & Teixeira (2005). En parallèle, sur des maillages hexaédriques, Clemens & Weiland (2001) ont proposé la "Finite Integration Technique" dont l'étude a été poursuivie dans la thèse de Euler (2007) dans laquelle il construit des éléments de face et d'arête sur maillages polyédriques par la résolution de problèmes locaux. Enfin sur des maillages polyédriques Codecasa *et al.* (2010b); Codecasa & Trevisan (2007) ont introduit la *Discrete Geometric Approach* où la métrique est construite à partir de fonctions de forme ayant une formule explicite (voir Codecasa *et al.* (2010b)). On mentionne également l'approche *Mimetic Finite Difference* (MFD), introduite dans le cadre de l'électromagnétisme par Brezzi & Buffa (2010), ainsi que les schémas *Discrete Duality Finite Volume* (DDFV) introduits par Hermeline (2000) puis appliqués au problème de Maxwell dans l'article Hermeline *et al.* (2008). Tous les schémas mentionnés ci-dessus rentrent dans le cadre CDO.

1.3 Couplage de méthodes numériques

L'objectif de cette section est de donner un aperçu des stratégies de couplage de méthodes numériques et de l'utilisation de maillages hybrides dans la résolution des équations de Maxwell.

Avec le développement de nombreux solveurs pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel, les praticiens ont proposé de coupler le schéma numérique FDTD avec d'autres schémas numériques pour contourner l'approximation en marches d'escalier au voisinage d'objets courbes. Un des premiers couplages à apparaître est celui avec le schéma FVTD par Yee & Chen (1994). Dans ces recherches, d'autres couplages FDTD/FVTD ont été proposés dans les applications notamment par Ferrieres *et al.* (2004) puis Edelvik & Ledfelt (2000); Abenius *et al.* (2002) en 2D et en 3D, en proposant d'introduire une couche de transition entre la zone cartésienne et la zone non-structurée en faisant une moyenne à l'interface entre les deux schémas. Ce type de couplage a été développé dans différents cadres applicatifs, notamment dans le domaine des micro-ondes (voir Yang *et al.* (2000)) et dans le domaine de la CEM (voir Yang *et al.* (2000)). D'autres couplages ont ensuite été proposés par Rylander & Bondeson (2000), Zhu *et al.* (2011) et Wu & Itoh (1995) entre les schémas FDTD et FE, et Beilina (2010), Garcia *et al.* (2008) entre les schémas FDTD et DG. Dans cette dernière approche, on mentionne la thèse de Léger (2011) pour des applications à l'aéroacoustique.

Dans cet esprit de couplage, on mentionne également la thèse de Durochat (2013) dans laquelle le schéma Galerkin discontinu est étudié dans le cas de maillages hybrides présentant une métrique hybride. On mentionne également les travaux de Davies *et al.* (2009) dans le cadre des éléments finis.

1.4 Méthodes numériques d'ordre élevé

L'objectif de cette section est de donner quelques références sur des méthodes d'ordre élevé qui ont un lien avec les méthodes CDO.

Mimetic Spectral Element (MSE). La construction du schéma MSE suit la même philosophie que celle des schémas CDO (voir Kreeft *et al.* (2011) et Gerritsma (2012) pour une introduction). Les relations topologiques sont discrétisées au moyen d'opérateurs différentiels discrets, tandis que les relations constitutives sont formulées avec des opérateurs de Hodge discrets construits avec des fonctions de base d'ordre élevé définies comme le produit tensoriel de polynômes sur maillages hexaédriques. Pour cela, chacune des cellules est sous-maillée de sorte à définir plus de degrés de liberté locaux. Dans le cadre de cette approche, on mentionne les travaux de Barham *et al.* (2021) qui l'utilisent pour une formulation Hamiltonienne des équations de Maxwell en terme de formes différentielles. Dans le même esprit que les MSE on peut citer les travaux de Rufat *et al.* (2014) qui considèrent d'autres fonctions polynomiales dans la construction des opérateurs de Hodge discrets. Plus précisément, dans le schéma MSE, la construction de ces derniers nécessite des fonctions de forme d'ordre élevé définies sur les arêtes et les faces du sous-maillage de chaque cellule. Dans le cas de cellules hexaédriques des fonctions de forme sommets, arêtes, faces et cellules ont été proposées par Gerritsma (2011). Sur maillages tétraédriques, ces fonctions de forme ont été introduites sous le nom de *formes de Whitney d'ordre élevé* par Hiptmair (2001b). On peut se référer aux travaux de Rapetti & Bossavit (2009) qui en donnent une définition pratique et à ceux de Lohi & Kettunen (2021); Lohi (2022) du point de vue de l'implémentation numérique. On mentionne également une revue récente de Lohi (2022) concernant la définition des formes de Whitney en fonction de la géométrie des éléments et Dodziuk (2023) pour une caractérisation de ces formes.

Mimetic Finite Difference (MFD). Les schémas MFD d'ordre élevé ont été introduits par Beirão da Veiga & Manzini (2008); Beirão da Veiga *et al.* (2009) pour le problème de la diffusion à l'ordre 2. Pour des ordres arbitraires, ce sont Lipnikov & Manzini (2014) qui en ont proposé une formulation pour le problème en formulation primale puis Gyrya *et al.* (2016) pour le problème de la diffusion en formulation mixte. Dans le cadre des équations de Maxwell dans le domaine temporel, on mentionne les travaux de Manzini *et al.* (2023) qui considère une approche *train de tenseur* des MFD d'ordre 2, et dans le cadre plus général des ondes, une étude sur l'erreur de dispersion d'un schéma MFD d'ordre 4 de Rojas *et al.* (2023).

Virtual Element Method (VEM). L'approche VEM introduite par Brezzi *et al.* (2014) est une méthode d'ordre élevé qui peut être vue comme une extension des schémas MFD et à l'ordre 1, elle est équivalente au schéma CDO. Dans ce schéma, les fonctions de forme ne sont pas explicitement données et sont calculées comme solutions de problèmes locaux. Cette méthode a reçu de nombreux développements ces dernières années. En particulier on peut citer les travaux De Dios *et al.* (2016) sur la définition d'espaces de fonction VEM curl-conforme dans l'objectif d'obtenir une structure de *de Rham* discrète ainsi que ceux de Beirão da Veiga *et al.* (2022) pour une application des VEM à l'ordre 1 au problème de Maxwell.

Hybrid High Order (HHO). Dans le contexte des schémas d'ordre élevé, les méthodes HHO introduites par Di Pietro *et al.* (2014) pour le problème de Poisson, ont gagné en popularité ces dernières années. Ces méthodes se basent sur des reconstructions locales d'ordre k des gradients ou des potentiels en utilisant les degrés de liberté locaux sur chaque élément (voir par exemple Di Pietro & Tittarelli (2018) pour une introduction). Elles reposent également sur un terme de stabilisation local qui impose faiblement le couplage entre les inconnues cellules et faces. On mentionne les travaux récents de Cicuttin & Geuzaine (2024) sur ces méthodes appliquées aux équations de Maxwell en régime harmonique, et les travaux de Ern & Steins

(2024) dans le cadre plus général de l'équation des ondes avec une intégration en temps de type *leap-frog*.

Discrete de Rham method (DDR). Plus récemment, Bonaldi *et al.* (2023) ont introduit les méthodes DDR en partant du constat que la notion de complexe de *de Rham* discret est un ingrédient clef pour la stabilité des méthodes numériques. Ce sont des schémas qui se basent sur la définition d'espaces polynomiaux mimant les espaces fonctionnels H^1 , $H(\text{curl})$ et $H(\text{div})$, ainsi que sur la définition polynomiale d'opérateurs différentiels (voir par exemple Di Pietro *et al.* (2020)). On mentionne une application récente au problème de la magnéto-statique de Di Pietro & Droniou (2021).

Cadre discret pour les méthodes numériques compatibles

Sommaire

2.1	La géométrie des lois de l'électromagnétisme	11
2.1.1	Structure physique	11
2.1.2	Formulation vectorielle	13
2.2	Milieu discret	15
2.2.1	Maillages volumiques	15
2.2.2	Maillage de bord	18
2.2.3	Maillage temporel	21
2.3	Régularité de maillage en espace	22

Ce chapitre définit le cadre discret, utile à la discrétisation des équations de Maxwell en régime transitoire dans le formalisme *Compatible Discrete Operator* (CDO). À cette fin, la Section 2.1 formule les lois de l'électromagnétisme dans leur forme verbale et vectorielle. Cela permet d'identifier les variables, discrètes et continues, qui les composent ainsi que les entités géométriques auxquelles elles sont associées. Ensuite, dans la Section 2.2, les maillages spatiaux, volumiques et surfaciques, ainsi que les maillages temporels sont définis. Ils contiennent les entités géométriques utiles à la discrétisation du problème continu vectoriel et à l'association géométrique des variables discrètes. Enfin, les critères de régularité des maillages spatiaux sont précisés dans la Section 2.3, garantissant la bonne définition du cadre CDO.

2.1 La géométrie des lois de l'électromagnétisme

L'objectif de cette section est d'identifier la structure des lois de l'électromagnétisme. Pour cela, ces lois sont d'abord données dans leur forme verbale, permettant ainsi de mettre en lumière les variables discrètes qui les composent. Ces lois sont ensuite données sous forme vectorielle continue, permettant d'établir un lien entre les variables discrètes et continues.

2.1.1 Structure physique

L'électromagnétisme est constitué de quatre lois fondamentales, qui établissent un lien entre six variables discrètes : le flux électrique D , le flux magnétique B , la force électromotrice E , la force magnétomotrice H , la densité de charge volumique ρ , et la densité de courant surfacique J_s . Ces lois sont formulées dans les Lois 2.1.1–2.1.4, et illustrées dans les Figures 2.1 et 2.2.

Loi 2.1.1 (Maxwell-Faraday). Étant donné une surface S dont le bord ∂S est fermé, et un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, la somme de la variation du *flux magnétique* B à travers S entre t_1 et t_2 et de la *force électromotrice* E le long de ∂S dans $[t_1, t_2]$, est égale à zéro.

Loi 2.1.2 (Maxwell-Ampère). Étant donné une surface S dont le bord ∂S est fermé, et un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, la différence entre la variation temporelle du *flux électrique* D à travers S entre t_1 et t_2 et de la *force magnétomotrice* H le long de ∂S dans $[t_1, t_2]$, est égale à la quantité de *charge électrique surfacique* qui a traversé S dans $[t_1, t_2]$.

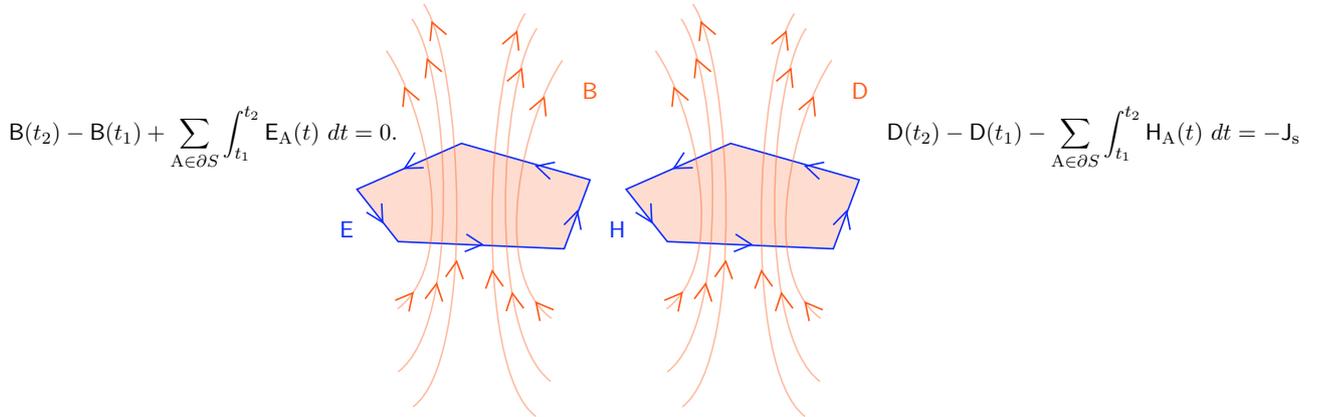


FIGURE 2.1 – Illustrations des lois de Maxwell-Faraday (à gauche) et de Maxwell-Ampère (à droite), sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ et sur une surface de bord fermé S .

Loi 2.1.3 (Maxwell-Gauss). A chaque instant, le *flux électrique* D sur la surface d'un volume fermé est égal à la *densité de charge électrique* ρ totale contenue dans le volume.

Loi 2.1.4 (Maxwell-Thompson). A chaque instant le *flux magnétique* B sur la surface d'un volume fermé est nul.

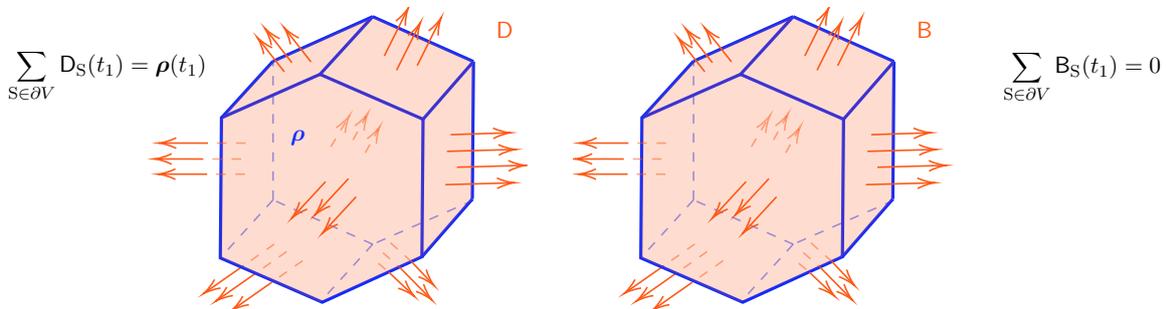


FIGURE 2.2 – Illustrations des lois de Maxwell-Gauss (à gauche) et de Maxwell-Thompson (à droite), en un instant t_1 et sur un volume fermé V .

Déjà remarqué par Tonti (2001) puis par Bossavit (1999-2000), les variables des Lois 2.1.1–2.1.4 sont associées à des entités géométriques spatiales définies par des surfaces et des volumes, ainsi que leurs bords, mais aussi à des entités géométriques temporelles qui sont des intervalles et des instants. Ces associations sont reportées dans la Figure 2.3. De manière plus générale, en dimension $d = 3$, les variables des lois physique peuvent être associées à des entités géométriques spatiales de dimension $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (voir Tonti (2013)). Les variables associées aux sommets ($k = 0$) sont appelées *potentiels*, celles associées aux arêtes ($k = 1$) sont appelées *circulations*, celles associées aux faces ($k = 2$) sont appelées *flux*, enfin celles associées aux volumes ($k = 3$) sont appelées *densités*.

Les lois de l'électromagnétisme se structurent en deux parties, les relations dites *topologiques*, d'une part, décrites par les Lois 2.1.1–2.1.4, qui ne dépendent que de l'orientation géométrique associée au milieu ; d'autre part, les relations dites *constitutives* décrites par la composition matériel du milieu, dépendent de la mesure physique, et mathématiquement de la métrique.

Dans le diagramme de Tonti de la Figure 2.3, les liens *topologiques* sont représentés par des flèches en traits pleins, tandis que les liens *constitutifs* sont représentés par des flèches en traits pointillés. Ces derniers ont un caractère particulier car ils établissent un lien de *dualité* entre des variables avec des associations géométriques, spatiales et temporelles, différentes. Une attention particulière est accordée aux liens topologiques dans le Chapitre 3, et aux liens constitutifs dans le Chapitre 4.

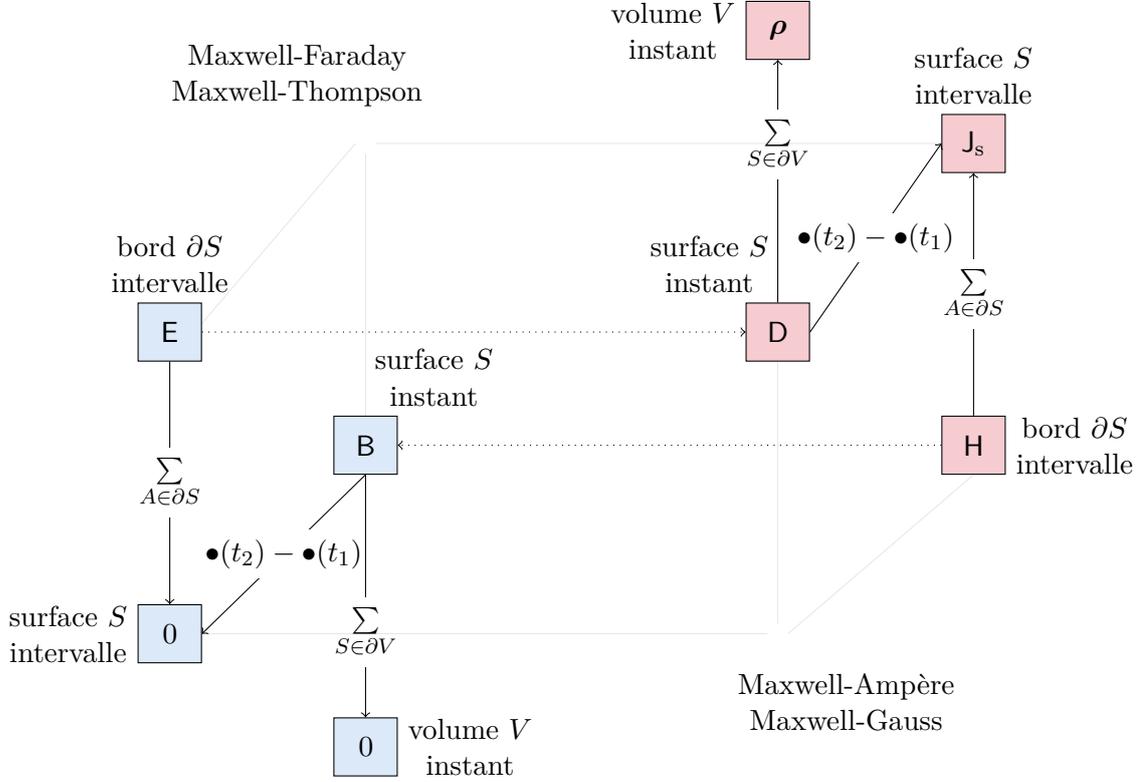


FIGURE 2.3 – Diagramme de Tonti associé aux lois de l'électromagnétisme. A gauche : les lois topologiques de Maxwell-Faraday et Maxwell-Thompson. A droite : les lois topologiques de Maxwell-Ampère et Maxwell-Gauss. Les variables sont associées aux entités géométriques spatiales suivantes : surface S et son bord ∂S , volume V et son bord ∂V , et aux entités temporelles : intervalle de temps et instant. Les variables à gauche du diagramme, E et B , sont reliées aux variables à droite, D et H , par des liens dits *constitutifs*.

2.1.2 Formulation vectorielle

On considère Ω un domaine polyédrique de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$, dont la normale sortante est notée \mathbf{n} . Soit $t_F > 0$ un temps fini et soient $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D} : \Omega \times [0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}^3$, respectivement, l'induction magnétique, le champ électrique, le champ magnétique et le déplacement électrique. Ces champs sont reliés par les équations *vectorielles* suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}_s, \quad (2.1b)$$

dans $\Omega \times [0, t_F]$, avec $\mathbf{J}_s : \Omega \times [0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la densité de courant surfacique. En plus des équations (2.1a) et (2.1b), les champs \mathbf{D} et \mathbf{B} vérifient les équations en divergence :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

avec $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la densité de charge volumique dans Ω . La Figure 2.4 représente le diagramme de Tonti du système (2.1) avec les équations (2.2). Comme pour la Figure 2.3, les liens topologiques sont représentés par des flèches en traits pleins, tandis que les liens constitutifs sont représentés par des flèches en traits pointillés. La structure des diagrammes de la Figure 2.3 et de la Figure 2.4

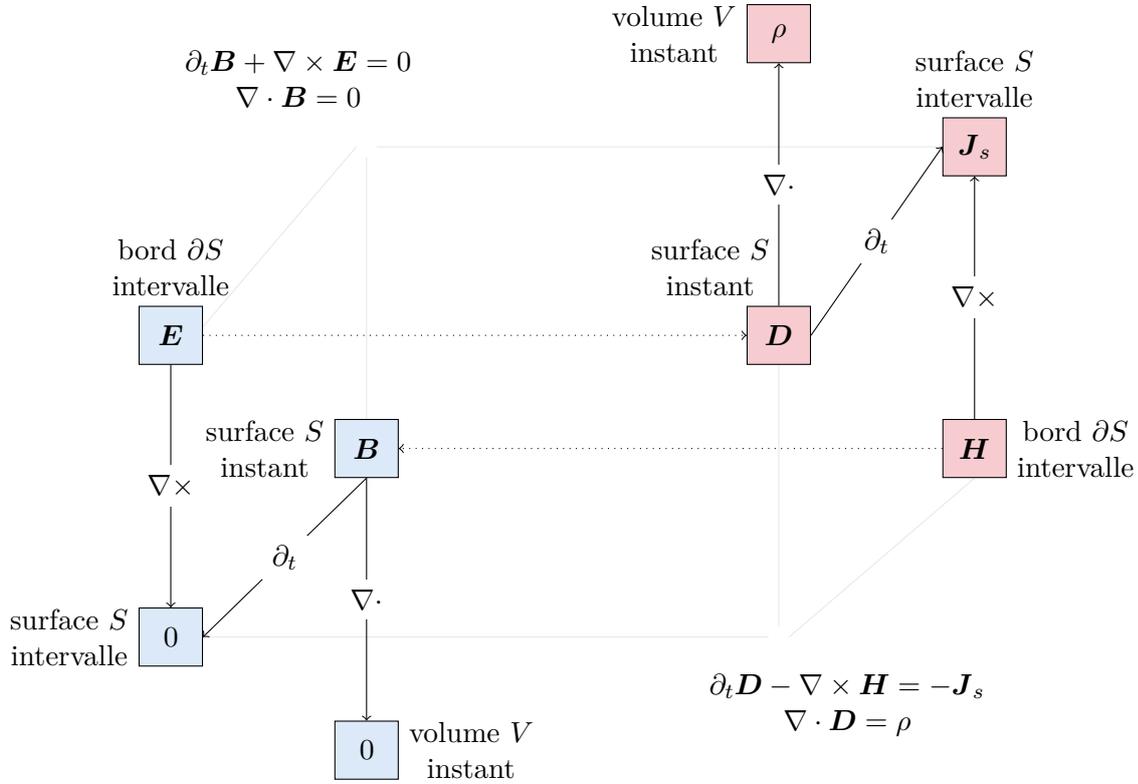


FIGURE 2.4 – Diagramme de Tonti vectoriel associé au système (2.1). Les liens topologiques sont établis par les opérateurs $\nabla \times$, $\nabla \cdot$ et ∂_t .

est la même, ainsi l'association aux entités géométriques des champs continus \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} et \mathbf{D} , est obtenue par correspondance avec celle des variables discrètes B , E , H et D . Le lien entre les variables continues et les variables discrètes s'obtient de la manière suivante : soient $t_1, t_2 \in [0, t_F]$, et soit S une surface dans Ω dont la frontière ∂S est fermée, alors

$$B(t_1) = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{x}, t_1) \cdot d\mathbf{S}, \quad D(t_1) = \int_S \mathbf{D}(\mathbf{x}, t_1) \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.3)$$

et

$$\mathbf{E} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{l} dt, \quad \mathbf{H} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial S} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{l} dt, \quad \text{et } J_s = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial S} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.4)$$

Aussi, pour un volume fermé $V \subset \Omega$, on a

$$\rho(t_1) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t_1) \cdot dV. \quad (2.5)$$

Les liens formulés dans les équations (2.3) et (2.4) sont au cœur du processus de discrétisation du système (2.1) dans le cadre CDO. C'est l'objet du Chapitre 3.

La section suivante s'attache à définir le milieu discret sur lequel sont discrétisées les équations vectorielles (2.1) et (2.2).

2.2 Milieu discret

La Section 2.1 a mis en évidence le fait que les variables des lois de l'EM sont associées à des entités géométriques spatiales et temporelles. D'un point de vue de la discrétisation du système (2.1), cela se traduit par la définition de maillages de différentes natures. D'une part, un maillage *spatial* discrétisant le domaine Ω et sa frontière $\partial\Omega$. D'autre part, un maillage *temporel*, discrétisant l'intervalle de temps $[0, t_F]$. La Section 2.1 a aussi mis en évidence que les variables E et D , et les variables B et H sont reliées par des liens *constitutifs* (voir Figure 2.3). D'un point de vue de la discrétisation du système (2.1) cela se traduit géométriquement par la définition de maillages dits *duaux*. On commence par la définition des maillages volumiques.

2.2.1 Maillages volumiques

Le domaine Ω est approché par un maillage polyédrique M que l'on appelle *maillage primal*. Celui-ci représente le maillage volumique *physique* généré par un logiciel de maillage. Bien que la discrétisation du système vectoriel (2.1) repose sur la définition de deux types de maillages : primal et dual, seul le maillage primal est vu par l'utilisateur et le maillage dual est entièrement construit à partir du maillage primal.

Maillage primal. Soient V , E , F et C les ensembles qui collectent, respectivement, les sommets, les arêtes, les faces et les cellules du maillage. Le maillage primal est alors défini comme la collection de ces entités $M := \{V, E, F, C\}$. Le maillage M constitue le domaine de calcul discret, c'est lui qui portera les inconnues physiques du problème discret. Afin d'isoler localement les entités au sein d'un volume donné, on définit pour $c \in C$ les ensembles qui contiennent, respectivement, les sommets, les arêtes et les faces appartenant à c :

$$V_c := \{v \in V \mid v \subset c\}, \quad E_c := \{e \in E \mid e \subset c\} \quad \text{et} \quad F_c := \{f \in F \mid f \subset c\}.$$

De la même manière, pour toute arête $e \in E$ et face $f \in F$, on définit les ensembles

$$C_e := \{c \in C \mid e \subset c\}, \quad F_e := \{f \in F \mid e \subset f\} \quad \text{et} \quad C_f := \{c \in C \mid f \subset c\},$$

qui représentent respectivement les cellules contenant e , les faces contenant e et les cellules contenant f .

Orientation. Chaque arête $e \in E$ est orientée par son vecteur directeur unitaire $\boldsymbol{\tau}_e$, et chaque face $f \in F$ est orientée par son vecteur normal unitaire \boldsymbol{n}_f (défini par l'utilisateur). Chaque entité orientée de dimension $k - 1$ appartient au bord d'une entité orientée de dimension k (voir Section 2.3). Par conséquent, chaque entité de dimension $k - 1$ est *relativement orientée* par rapport à l'entité de dimension k à laquelle elle appartient, c'est ce qu'illustre la Figure 2.5. Les sommets sont orientés comme des *puits*, c'est-à-dire que pour un sommet v appartenant à une arête e , si le sens de $\boldsymbol{\tau}_e$ est *vers* v alors l'orientation relative de v sur e est comptée positivement, dans le cas inverse elle est comptée négativement. Cela se résume dans la définition du nombre d'incidence $\iota_{v,e}$ défini pour tout $e \in E$ et $v \in V$ par

$$\iota_{v,e} := \begin{cases} +1 & \text{si } \boldsymbol{\tau}_e \text{ pointe vers } v, \\ -1 & \text{si } \boldsymbol{\tau}_e \text{ pointe à l'opposé de } v, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Les cellules sont orientées comme des *sources*, c'est-à-dire telles que leurs vecteurs normaux au bord soient sortants. Ainsi l'orientation relative d'une face f sur le bord d'une cellule c est comptée positivement si le sens de sa normale est vers l'extérieur de c , et négativement s'il est

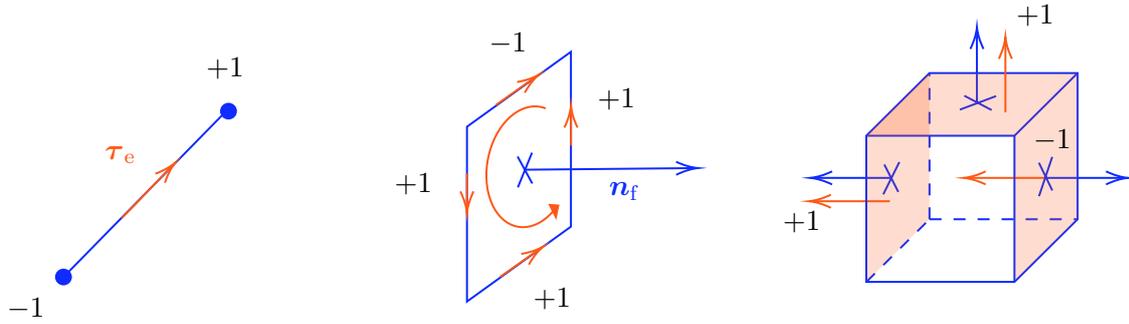


FIGURE 2.5 – De gauche à droite les orientation relatives : de deux sommets sur une arête e , de quatre arêtes sur une face f , et de trois faces sur une cellule. Les sommets sont orientés comme des puits, les arêtes selon leur la face est orientée selon la règle de la main droite et la cellule comme

vers l'intérieur de c . Cela se résume dans la définition du nombre d'incidence $\iota_{f,c}$ défini, pour tout $c \in C$ et tout $f \in F$, par

$$\iota_{f,c} := \begin{cases} +1 & \text{si } \mathbf{n}_f \text{ pointe vers l'extérieur de } c, \\ -1 & \text{si } \mathbf{n}_f \text{ pointe vers l'intérieur de } c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Enfin, les arêtes sont quant à elles relativement orientées par la règle de la main droite. Ainsi pour tout $f \in F$ et $e \in E$

$$\iota_{e,f} := \begin{cases} +1 & \text{si } \boldsymbol{\tau}_e \text{ est orienté positivement selon la règle de la main droite,} \\ -1 & \text{si } \boldsymbol{\tau}_e \text{ est orienté négativement selon la règle de la main droite,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Définition 2.2.1 (Barycentre). Les barycentres d'une arête $e \in E$, d'une face $f \in F$, et d'une cellule $c \in C$ sont définis comme suit :

$$\mathbf{x}_e := \frac{1}{|e|} \int_e \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_f := \frac{1}{|f|} \int_f \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_c := \frac{1}{|c|} \int_c \mathbf{x}.$$

Maillage dual. A la différence du maillage primal, le maillage dual n'est pas généré par l'utilisateur et est complètement construit à partir du maillage primal. Différentes constructions de maillage dual sont possibles (voir la Remarque 2.2.1). A des fins pratiques, le maillage dual considéré dans la suite est supposé *barycentrique*, c'est-à-dire construit à partir des barycentres des entités du maillage primal. Notamment, les sommets duaux sont définis comme les barycentres des cellules primales. Pour que cela soit toujours possible, le maillage primal est supposé être étoilé (voir Définition 2.3.3). Soient alors \tilde{V} , \tilde{E} , \tilde{F} et \tilde{C} les ensembles qui collectent,

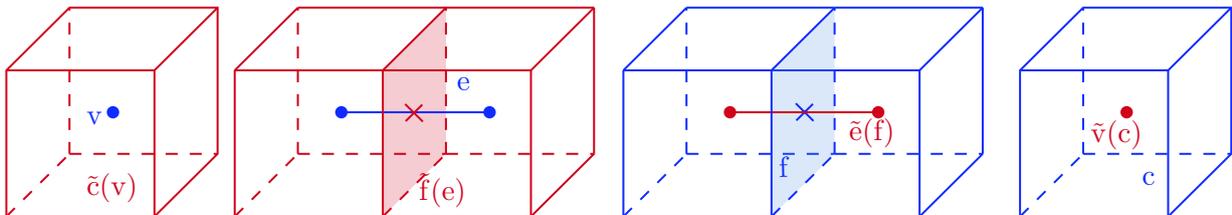


FIGURE 2.6 – Association bijective entre les entités de dimension $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ du maillage primal (en bleu) et les entités de dimension $3 - k$ du maillage dual (en rouge).

respectivement, les sommets duaux, les arêtes duales, les faces duales et les cellules duales. Le

maillage dual associé à M est alors défini par $\widetilde{M} := \{\widetilde{V}, \widetilde{E}, \widetilde{F}, \widetilde{C}\}$. Par construction, les entités géométriques duales sont associées de manière bijective aux entités du maillage primal : chaque entité primale de dimension $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ est associée à une entité duale de dimension $3 - k$ (voir Figure 2.6). Par exemple, les arêtes primales (entités de dimension $k = 1$) sont associées aux faces duales (entités de dimension $3 - k = 2$), tandis que les faces primales sont associées aux arêtes duales. Pour souligner la dépendance des entités duales par rapport aux entités primales, on note $\tilde{c}(v)$, $\tilde{f}(e)$, $\tilde{e}(f)$ et $\tilde{v}(c)$ la cellule duale, la face duale, l'arête duale et le sommet dual, associés respectivement au sommet v , à l'arête e , à la face f et à la cellule $c \in C$. Les arêtes et les faces duales globales peuvent être des entités brisées (voir par exemple Figure 2.7), et sont donc définies par morceaux.

Remarque 2.2.1 (Autres types de maillage dual). Pour un maillage primal donné, il existe d'autres manières de définir un maillage dual associé, par exemple de type Delaunay-Voronoi, construit à partir des orthocentres des cellules (voir par exemple Hu & Nicolaidis (1992)). L'avantage du maillage dual barycentrique choisi dans cette thèse est qu'il peut être défini pour une classe de maillages primaux assez large (voir la Section 2.3).

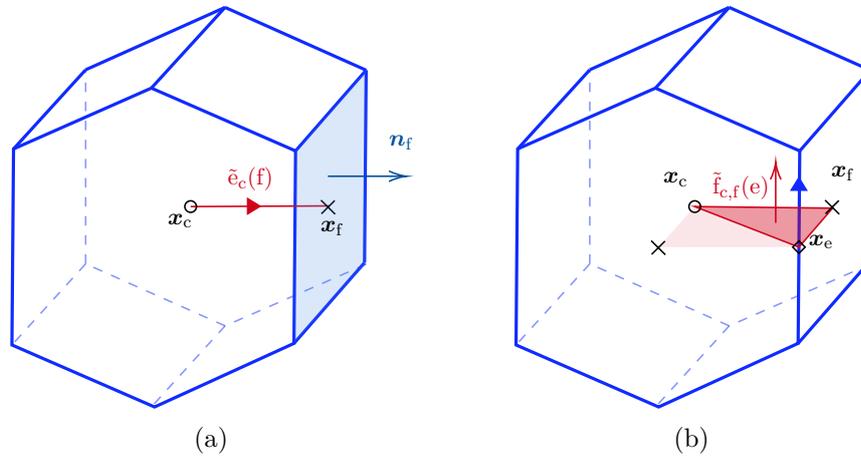


FIGURE 2.7 – (a) Un morceau d'arête duale locale $\tilde{e}_c(f)$. (b) Deux morceaux triangulaires de face duale formant une face duale locale $\tilde{f}_c(e)$.

Arête duale. Pour une face $f \in F$, l'arête duale $\tilde{e}(f)$ associée est construite cellule par cellule. Pour une cellule donnée $c \in C_f$, on note $\tilde{e}_c(f)$ la partie d'arête duale associée à f de direction $\pm(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_c)$ (voir Figure 2.7a). Le signe est choisi tel que son vecteur directeur unitaire satisfait le transfert d'orientation :

$$\boldsymbol{\tau}_{\tilde{e}_c(f)} \cdot \mathbf{n}_f > 0. \quad (2.9)$$

L'arête duale $\tilde{e}(f)$ est alors définie par

$$\tilde{e}(f) := \bigcup_{c \in C_f} \tilde{e}_c(f),$$

dont le vecteur directeur $\boldsymbol{\tau}_{\tilde{e}(f)}$ est défini par morceaux.

Face duale. Pour une arête $e \in E$, la face duale associée $\tilde{f}(e)$ est construite cellule par cellule à partir de morceaux triangulaires adjacents à l'arête e (voir Figure 2.7b). Pour une cellule $c \in C_e$ et une face $f \in F_e$, telle que $f \subset \partial c$, la partie triangulaire de $\tilde{f}(e)$ associée à la face f et contenue dans la cellule c est notée $\tilde{f}_{c,f}(e)$. Sa normale est de direction $\pm(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_c) \times (\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_c)$, où le signe est choisi de sorte que sa normale unitaire $\mathbf{n}_{\tilde{f}_{c,f}(e)}$ satisfait le transfert d'orientation :

$$\mathbf{n}_{\tilde{f}_{c,f}(e)} \cdot \boldsymbol{\tau}_e > 0. \quad (2.10)$$

La face duale $\tilde{f}(e)$ est alors définie par

$$\tilde{f}(e) := \bigcup_{c \in C_e} \bigcup_{f \in F_e} \tilde{f}_{c,f}(e),$$

dont la normale $\mathbf{n}_{\tilde{f}(e)}$ est définie par morceaux.

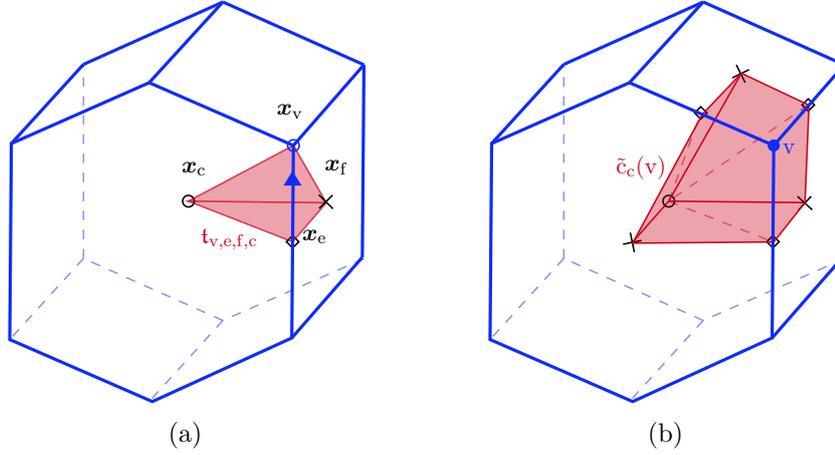


FIGURE 2.8 – (a) Tétrahèdre local $\mathbf{t}_{v,e,f,c}$ dans une cellule c . (b) Cellule duale locale $\tilde{c}_c(v)$ dans une cellule c . Elle est obtenue par l'union de sous-tétrahèdres de c adjacents au sommet v .

Cellule duale. Pour un sommet $v \in V$, la cellule duale associée $\tilde{c}(v)$ est construite cellule par cellule à partir de sous-tétrahèdres adjacents au sommet v (voir Figure 2.8a). Pour une arête $e \in E_v$, une face F_e , et une cellule $c \in C_f$, le sous-tétrahèdre adjacent à v et associé à ces entités est noté $\mathbf{t}_{v,e,f,c}$. Ainsi, dans une cellule $c \in C_v$, la cellule duale locale (voir Figure 2.8b) est définie comme

$$\tilde{c}_c(v) := \bigcup_{e \in E_v \cap E_c} \bigcup_{f \in F_e \cap F_c} \mathbf{t}_{v,e,f,c},$$

et la cellule duale globale par

$$\tilde{c}(v) := \bigcup_{c \in C_v} \tilde{c}_c(v).$$

Orientation. L'orientation des entités du maillage dual est induite par l'orientation des entités du maillage primal. Aussi, les cellules duales sont orientées comme des sources et les sommets duaux comme des puits. Ce transfert d'orientation impose la définition des nombres d'incidences sur le maillage dual comme suit :

$$l_{\tilde{v}(c),\tilde{e}(f)} := -l_{f,c}, \quad l_{\tilde{e}(f),\tilde{f}(e)} := l_{e,f} \quad \text{et} \quad l_{\tilde{f}(e),\tilde{c}(v)} := -l_{v,e}. \quad (2.11)$$

2.2.2 Maillage de bord

Dans le cadre CDO, la prise en compte de conditions au bord non-homogènes nécessite la définition explicite d'un maillage dual de bord (voir par exemple Cantin & Ern (2016)). La construction cellule par cellule des arêtes, des faces et des cellules duales, implique que les extrémités des entités duales touchant le bord ne sont pas définies comme des entités des ensembles \tilde{V} , \tilde{E} et \tilde{F} (voir Figure 2.9). Pour définir le maillage dual de bord, on commence par définir le maillage primal de bord qui est un sous-maillage du maillage volumique M .

Maillage primal de bord. Soient V^∂ , E^∂ et F^∂ les ensembles qui collectent, respectivement, les sommets primaux, les arêtes primales et les faces primales sur le bord. Le maillage primal de bord est défini par $M^\partial := \{V^\partial, E^\partial, F^\partial\}$. Par définition

$$V^\partial \subset V, \quad E^\partial \subset E \quad \text{et} \quad F^\partial \subset F.$$

Ainsi, les éléments de M^∂ héritent des propriétés définies plus haut : vecteur directeur, vecteur normal, orientation... Les normales des faces appartenant au bord $\partial\Omega$ sont supposées orientées vers l'extérieur du domaine :

$$\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{n} > 0, \quad \forall f \in F^\partial, \quad (2.12)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au domaine Ω .

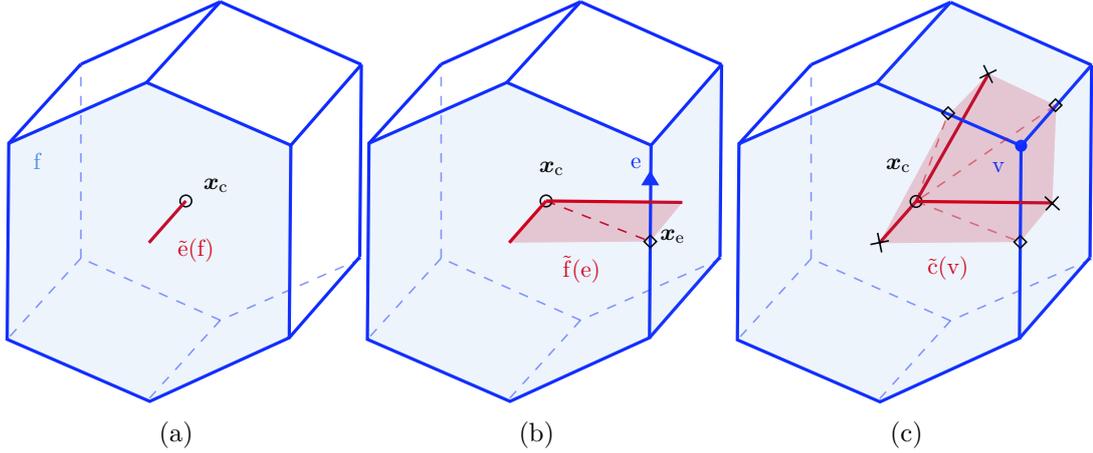


FIGURE 2.9 – De gauche à droite : une arête duale $\tilde{e}(f)$ associée à une face primale f sur le bord, une face duale $\tilde{f}(e)$ associée à une arête primale e sur le bord, une cellule duale $\tilde{c}(v)$ associée à un sommet v sur le bord. Ces entités ne contiennent pas d'extrémité au niveau du bord dans le maillage dual volumique du fait qu'elles appartiennent à une seule cellule.

Maillage dual de bord. De la même manière que pour le maillage dual volumique, le maillage dual de bord est construit par dualité géométrique avec M^∂ mais dans un espace de dimension 2. Ainsi les entités duales de bord sont associées de manière bijective avec les entités primales de bord (voir Figure 2.9). Par exemple, un sommet de bord, entité de dimension $k = 0$, est associé à une face duale de bord, entité de dimension $2 - k = 2$ (voir Figure 2.10c), tandis qu'une arête primale de bord, entité de dimension $k = 1$, est associée à une arête duale de bord, entité de dimension $2 - k = 1$ (voir Figure 2.10b). Soient \tilde{V}^∂ , \tilde{E}^∂ et \tilde{F}^∂ les ensembles qui collectent, respectivement, les sommets duaux, les arêtes duales, et les faces duales sur le bord. Par définition, les entités duales de bord ne coïncident pas avec les entités duales volumiques :

$$\tilde{V}^\partial \not\subset \tilde{V}, \quad \tilde{E}^\partial \not\subset \tilde{E} \quad \text{et} \quad \tilde{F}^\partial \not\subset \tilde{F}.$$

Le maillage dual de bord associé à M^∂ est ainsi défini par $\tilde{M}^\partial := \{\tilde{V}^\partial, \tilde{E}^\partial, \tilde{F}^\partial\}$. Comme en dimension 3, les entités duales de bord peuvent être brisées et sont donc construites par morceaux.

Arête duale de bord. Pour une arête $e \in E^\partial$, l'arête duale de bord associée, notée $\tilde{e}^\partial(e)$, est construite face par face. On note f_1 et f_2 les deux faces de bord contenant e (voir Figure 2.10b). Le morceau d'arête duale sur f_1 , de direction $\pm(\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_{f_1})$, est noté $\tilde{e}_f^\partial(e)_1$, et le morceau d'arête duale sur f_2 , de direction $\pm(\mathbf{x}_{f_2} - \mathbf{x}_e)$, est noté $\tilde{e}_f^\partial(e)_2$. L'arête duale $\tilde{e}^\partial(e)$ associée à e est définie par

$$\tilde{e}^\partial(e) := \tilde{e}_f^\partial(e)_1 \cup \tilde{e}_f^\partial(e)_2,$$

et son vecteur directeur $\boldsymbol{\tau}_{\tilde{e}^\partial(e)}$ est défini par morceaux.

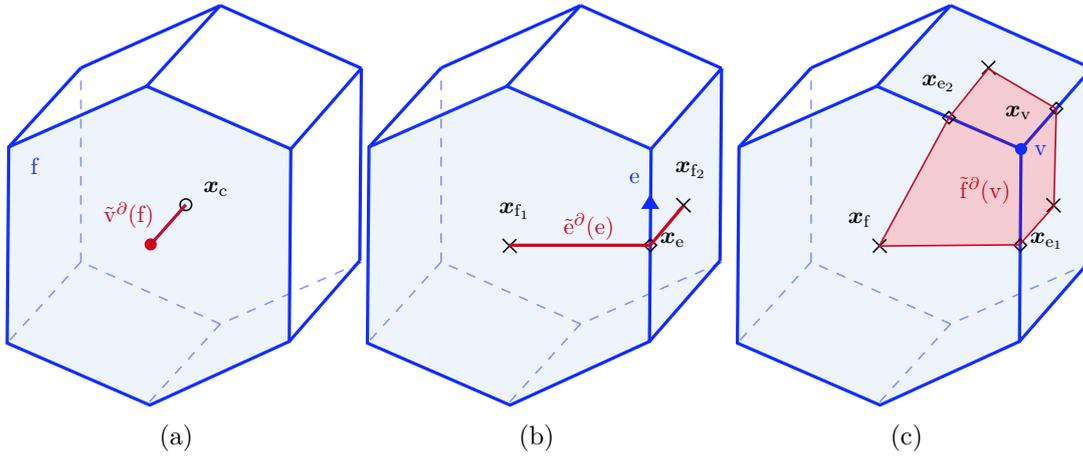


FIGURE 2.10 – De gauche à droite : un sommet dual de bord $\tilde{v}^\partial(f)$ associé à une face f sur le bord, une arête duale de bord associée à une arête e sur le bord, une face duale de bord associée à un sommet v sur le bord.

Face duale de bord Pour un sommet $v \in V^\partial$, en notant e_1 et e_2 les deux arêtes contenant v sur la face $f \in F^\partial$, le morceau planaire de face duale $\tilde{f}_f^\partial(v)$ est défini par le quadrangle de sommets $(x_f, x_{e_1}, x_v, x_{e_2})$ (voir Figure 2.10c). La face duale de bord associée à v est alors définie par

$$\tilde{f}^\partial(v) := \bigcup_{f \in F_v^\partial} \tilde{f}_f^\partial(v),$$

avec $F_v^\partial := \{f \in F^\partial \mid v \subset f\}$, et son vecteur normal $\mathbf{n}_{\tilde{f}^\partial(v)}$ est défini par morceaux.

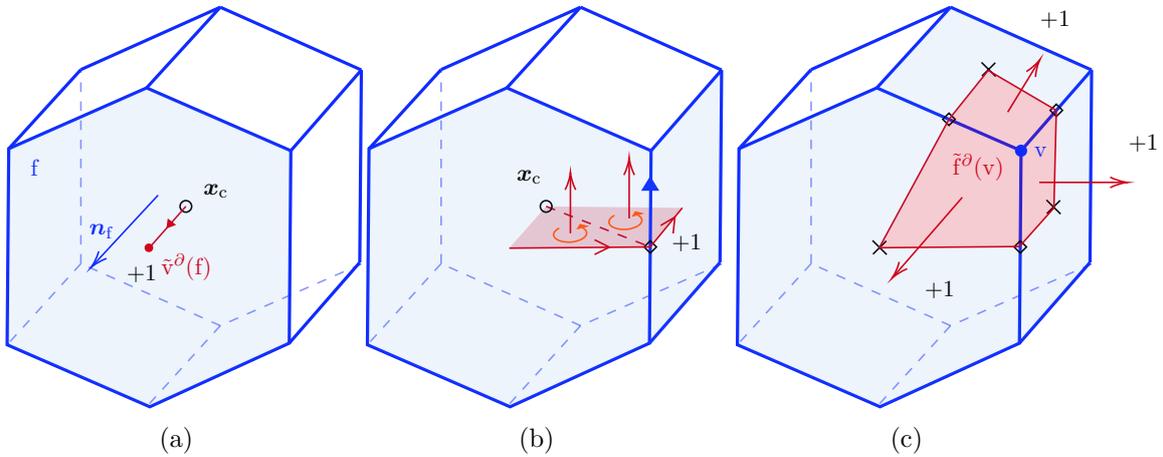


FIGURE 2.11 – (a) Orientation vers l'extérieur d'une arête duale touchant le bord. Le nombre d'incidence du sommet dual sur le bord est $+1$. (b) Orientation d'une arête duale de bord. (c) Orientation vers l'extérieur d'une face duale de bord. Le nombre d'incidence de cette face relativement à la cellule duale à laquelle elle appartient est $+1$.

Orientation. Les faces duales de bord sont supposées toujours orientées vers l'extérieur de la cellule duale à laquelle elles appartiennent (voir Figure 2.11c). Cela veut dire que pour tout $v \in V^\partial$ le nombre d'incidence de $\tilde{f}^\partial(v)$ relativement à $\tilde{c}(v)$ est donné par

$$l_{\tilde{f}^\partial(v), \tilde{c}(v)} := +1.$$

En ce qui concerne les arêtes duales de bord, pour tout $e \in E^\partial$ et tout $f \in F_e^\partial$, on fait le choix que $\{\boldsymbol{\tau}_e, \mathbf{n}_f, \boldsymbol{\tau}_{\tilde{e}^\partial(e)}\}$ forme toujours un trièdre direct. De cela, on suppose alors que les arêtes

duales de bord sont orientées positivement par rapport aux faces duales *volumiques* auxquelles elles appartiennent (voir Figure 2.11b). Par conséquent, pour tout $e \in E^\partial$, le nombre d'incidence de $\tilde{e}^\partial(e)$ relativement à $\tilde{f}(e)$ est défini par

$$\iota_{\tilde{e}^\partial(e), \tilde{f}(e)} := +1.$$

Enfin, pour une face $f \in F^\partial$, le nombre d'incidence de $\tilde{v}^\partial(f)$ relativement à l'arête duale *volumique* à laquelle il appartient est défini par

$$\iota_{\tilde{v}^\partial(f), \tilde{e}(f)} := +1,$$

du fait de (2.12) et du transfert d'orientation (2.9) (voir Figure 2.11a).

2.2.3 Maillage temporel

Dans le but de formuler une discrétisation *explicite* en temps du système topologique de Maxwell (2.1), on définit la notion de maillage temporel. Ce dernier est formé de deux types d'entités : les intervalles de temps (ou période) et les instants. Il complète le cadre géométrique discret utile à l'association des variables de l'électromagnétisme (voir Figure 2.3 ou Figure 2.4). Comme pour les maillages en espace, on définit deux maillages temporels orientés : un maillage primal et un maillage dual.

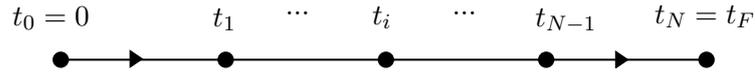


FIGURE 2.12 – Maillage temporel primal orienté composé de $N + 1$ instants et N intervalles. L'orientation des intervalles est l'orientation canonique sur \mathbb{R} , c'est-à-dire de la plus petite à la plus grande valeur.

Maillage primal. De la même manière que le maillage primal volumique M approche le domaine Ω , le maillage temporel primal approche l'intervalle de temps $[0, t_F]$. Le maillage primal temporel est unidimensionnel et est composé de $N + 1$ instants et de N intervalles de temps (ou période), $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $t_0, \dots, t_N \in \mathbb{R}^+$ les instants tels que

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = t_F.$$

On définit alors le maillage temporel primal comme la collection regroupant l'ensemble des instants et l'ensemble des intervalles de temps. En notant $p_n =]t_n, t_{n+1}[$, il est défini par

$$T := \{\{t_n\}_{0 \leq n \leq N}, \{p_n\}_{0 \leq n \leq N-1}\}.$$

Orientation. L'orientation sur le maillage temporel primal est l'orientation canonique de la droite réelle \mathbb{R} (voir Figure 2.12).

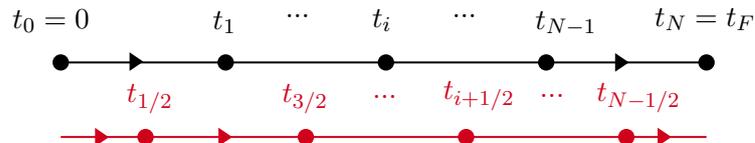


FIGURE 2.13 – Maillage dual barycentrique (en rouge) associé au maillage primal temporel (en noir).

Maillage dual. Le maillage temporel T étant unidimensionnel, la dualité temporelle est donc aussi unidimensionnelle. A toute entité primale de dimension $k \in \{0, 1\}$ est associée une entité duale de dimension $1 - k$. Il y a donc deux associations. D'une part, à tout intervalle de temps primal $p_n =]t_n, t_{n+1}[$, $0 \leq n \leq N - 1$, est associé un instant dual $t_{n+\frac{1}{2}}$ défini par son barycentre :

$$t_{n+\frac{1}{2}} := \frac{t_n + t_{n+1}}{2}.$$

D'autre part, à tout instant primal t_n , $0 \leq n \leq N$, est associé un intervalle dual $\tilde{p}_n =]t_{n-\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}[$ défini comme le segment formé par les deux instants duaux associés aux intervalles de temps primaux adjacents à t_n (voir Figure 2.13). Le maillage dual associé à T est alors défini par

$$\tilde{T} := \left\{ \{t_{n+\frac{1}{2}}\}_{0 \leq n \leq N-1}, \{\tilde{p}_n\}_{0 \leq n \leq N} \right\}.$$

Les deux intervalles touchant le bord, $]t_1, t_{\frac{1}{2}}[$ et $]t_{N+\frac{1}{2}}, t_{N+1}[$, ne sont pas fermés par des instants duaux du fait que les instants initial et final n'appartiennent qu'à un intervalle. En ajoutant l'instant final et l'instant initial à l'ensemble des instants, ils peuvent être fermés (voir Figure 2.14), de sorte que $\tilde{p}_0 =]t_0, t_{\frac{1}{2}}[$ et que $\tilde{p}_N =]t_{N-\frac{1}{2}}, t_N[$. Ainsi, en reprenant la notation déjà utilisée, on définit le maillage dual *complété* par :

$$\tilde{T} := \left\{ \{t_0, t_N\} \cup \{t_{n+\frac{1}{2}}\}_{0 \leq n \leq N-1}, \{\tilde{p}_n\}_{0 \leq n \leq N} \right\}.$$

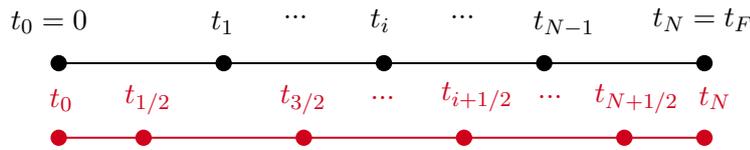


FIGURE 2.14 – Maillage dual barycentrique (en rouge), fermé par les instants initial et final, associé au maillage primal (en noir).

Orientation. L'orientation sur le maillage temporel dual est donnée par l'orientation canonique utilisée sur \mathbb{R} , c'est-à-dire de la plus petite valeur vers la plus grande (voir par exemple Figure 2.13).

Les maillages spatiaux et temporels maintenant définis, la section suivante s'attache à préciser les hypothèses de régularité sur le maillage spatial primal volumique. Ces hypothèses permettent de garantir la bonne définition du cadre CDO.

2.3 Régularité de maillage en espace

Dans cette section, on définit les notions de régularité sur le maillage primal pour que le cadre CDO ait un sens. La première notion de régularité est celle de complexe cellulaire planaire (voir Christiansen (2008)), ensuite celle de maillage étoilé, qui assure la possibilité de partitionner les cellules en tétraèdres, enfin la notion de maillage de forme régulière assure que les cellules, les faces et les arêtes ne sont pas dégénérées.

Définition 2.3.1 (Complexe cellulaire). Le maillage M définit un complexe cellulaire de $\bar{\Omega}$ si :

- (Ca) l'union de tous les éléments de M engendre $\bar{\Omega}$,
- (Cb) le bord de tout élément de M de dimension $k \geq 1$ est composé d'un nombre fini d'entités de dimension $k - 1$,

(Cc) l'intersection de deux éléments distincts est vide.

Définition 2.3.2 (Complexe cellulaire planaire). Le maillage M définit un complexe cellulaire *planaire* de Ω s'il définit un complexe cellulaire au sens de la Définition 2.3.1 et si :

(Cd) les arêtes et les faces de M sont planaires.

Par définition $\tilde{M} := \{\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{C}\}$ ne définit pas un complexe cellulaire puisque l'hypothèse (Ca) n'est pas vérifiée (voir Section 2.2), cependant l'union $\tilde{M} \cup \tilde{M}^\partial$ en est un. En effet, ce dernier est un complexe cellulaire du fait que les entités de bord duales ferment les entités duales volumiques (voir Section 2.2). Toutefois cette union ne définit pas un complexe cellulaire planaire puisque par construction les arêtes et les faces duales, de bord et volumiques, peuvent être brisées.

Définition 2.3.3 (Maillage étoilé). Un maillage M est dit *étoilé* si :

(St) les faces et les cellules de M sont étoilées par rapport à leur barycentre.

Définition 2.3.4 (Diamètre). Pour tout $c \in C$, tout $f \in F$ et tout $e \in E$, on note respectivement, h_c le diamètre de c , h_f le diamètre de f et h_e le diamètre de e définis par

$$h_c = \max_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in c} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_{\ell_2}, \quad h_f = \max_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in f} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_{\ell_2} \quad \text{et} \quad h_e = |e|,$$

où $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_{\ell_2}$ est la distance Euclidienne entre \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . Le diamètre du maillage est alors défini par $h := \max_{c \in C} h_c$.

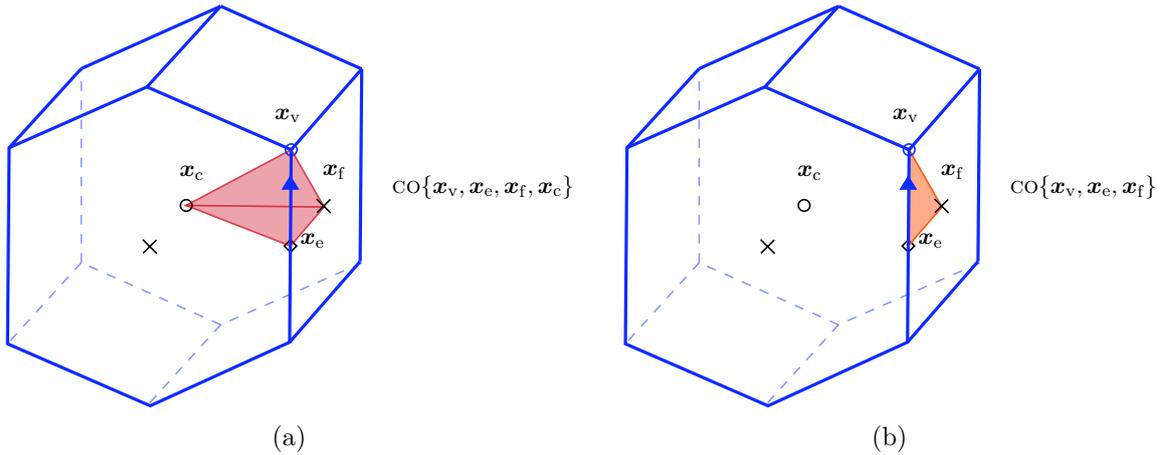


FIGURE 2.15 – (a) Enveloppe convexe $\text{CO}\{x_v, x_e, x_f, x_c\}$ formée par le sommet v et les barycentres de l'arête e , de la face f et de la cellule c . (b) Enveloppe convexe $\text{CO}\{x_v, x_e, x_f\}$ formée par le sommet v , et les barycentres de l'arête e et de la face f .

Définition 2.3.5 (Maillage de forme régulière). Le maillage M est dit *de forme régulière* si :

(Ra) Il existe une constante $C_M > 0$ uniforme par rapport au raffinement du maillage et telle que

$$C_M \leq |e|, \quad \forall e \in E, \quad C_M^2 h_f^2 \leq |f|, \quad \forall f \in F, \quad C_M^3 h_c^3 \leq |c|, \quad \forall c \in C.$$

(Rb) Pour tout $c \in C$, pour tout $f \in F_c$, pour tout $e \in E_f$ et pour tout $v \in V_e$, il existe deux constantes $C_3, C_2 > 0$ telles que

$$C_3 h_c^3 \leq |\text{CO}\{x_v, x_e, x_f, x_c\}| \quad \text{et} \quad C_2 h_f^2 \leq |\text{CO}\{x_v, x_e, x_f\}|,$$

avec $\text{CO}\{\bullet\}$ définissant l'enveloppe convexe (voir Figure 2.15).

Définition 2.3.6 (Maillage régulier). Un maillage M est dit *régulier* s'il définit un complexe cellulaire planaire au sens de la Définition 2.3.2, s'il est étoilé au sens de la Définition 2.3.3 et s'il est de forme régulière au sens de la Définition 2.3.5.

Conclusion partielle

Dans ce chapitre, on a défini le cadre de discrétisation des équations de Maxwell en régime transitoire dans le formalisme *Compatible Discrete Operator* (CDO). A cette fin, les lois de l'électromagnétisme ont été données sous deux formes : verbale et vectorielle. Cela a permis d'identifier les variables discrètes et continues qui les composent, ainsi que les entités géométriques auxquelles elles sont associées. Ensuite, les maillages spatiaux, volumiques et surfaciques, ainsi que les maillages temporels ont été définis. Puis, les critères de régularité des maillages spatiaux, garantissant la bonne définition du cadre CDO, ont été précisés.

Les entités géométriques sur lesquelles discrétiser le problème continu de Maxwell en domaine temporel maintenant définies, les Chapitres 3 et 4 s'attachent respectivement à discrétiser les équations topologiques et constitutives du système de Maxwell continues.

Discrétisation des relations topologiques

Sommaire

3.1	Positionnement des variables	25
3.2	Degrés de liberté	26
3.2.1	Volumiques	27
3.2.2	Surfaciques	28
3.3	Applications de réduction	29
3.4	Opérateurs différentiels discrets	32
3.4.1	Opérateurs différentiels primaux	32
3.4.2	Opérateurs différentiels duaux	33
3.5	Discrétisation des relations topologiques	36

L'objectif de ce chapitre est de discrétiser, dans le cadre CDO, les relations topologiques des équations de Maxwell en domaine temporel. Pour commencer, la Section 3.1 précise le positionnement des variables de l'électromagnétisme. Ensuite, la Section 3.2 introduit les espaces de degrés de liberté associés aux entités géométriques des maillages, primaux et duaux. A partir de cela, la Section 3.3 définit les opérateurs de *réduction* et la Section 3.4 définit les opérateurs différentiels discrets. Enfin, la Section 3.5 décrit le processus de discrétisation des équations en rotationnel et en divergence issues du système de Maxwell vectoriel.

3.1 Positionnement des variables

L'objectif de cette section est de choisir un positionnement, sur le maillage primal ou sur le maillage dual, pour les variables discrètes B , E , H et D .

Comme présentées au Chapitre 2, les variables de l'EM sont associées à des entités géométriques. Notamment, B et D sont associées aux faces tandis que E et H sont associées aux arêtes. Les lois de Maxwell semblent laisser le choix dans l'association aux maillages (primal ou dual). Toutefois, si le flux électrique D est positionné sur les faces duales, alors la Loi 2.1.2 de Maxwell-Ampère impose à la force magnétomotrice H d'être sur les arêtes duales, qui par définition, forment le bord des faces duales. Inversement, si le flux électrique D est positionné sur les faces primales, alors la Loi 2.1.2 de Maxwell-Ampère impose à la force magnétomotrice H d'être sur les arêtes primales, qui par définition, forment le bord des faces primales. Le même raisonnement peut être fait sur la paire (E, B) en utilisant la Loi 2.1.1 de Maxwell-Faraday. Quatre choix sont donc possibles pour le positionnement des couples (E, B) et (H, D) . Ces différentes possibilités sont reportées dans la Table 3.1.

D'après la classification des variables des lois de la physique par Tonti (2013), certaines variables sont associées à des entités géométriques dont l'orientation est interne, et d'autres à des entités géométriques dont l'orientation est externe. Les premières sont alors associées au maillage

	placement de (E, B)	
placement de (H, D)	Primal/Primal	Primal/Dual
	Dual/Primal	Dual/Dual

TABLE 3.1 – Différentes possibilités de placement des couples (E, B) et (H, D) : sur le maillage primal ou sur le maillage dual. Cela engendre quatre possibilités : les deux sur le maillage primal ou sur le maillage dual, ou l’un sur le maillage primal et l’autre sur le maillage dual.

primal et les secondes au maillage dual (voir par exemple Tonti (2014)). Mathématiquement, il est possible d’inverser les placements ce qui correspond alors à deux schémas différents (voir par exemple Bonelle & Ern (2014a) dans le cas du problème div-grad). Dans le cadre de cette thèse, on considère le placement proposé par Tonti (2001) : E et B sont attachés au maillage primal en espace et dual en temps, tandis que D et H sont attachés au maillage dual en espace et primal en temps (voir Figure 3.1). Ainsi, comme déjà mentionné dans le Chapitre 2, les liens constitutifs ont un caractère géométrique spécial puisqu’ils relient des variables placées sur le maillage primal en espace et dual en temps avec des variables placées sur le maillage dual en espace et primal en temps (voir Figure 3.1). Ces liens sont étudiés au Chapitre 4.

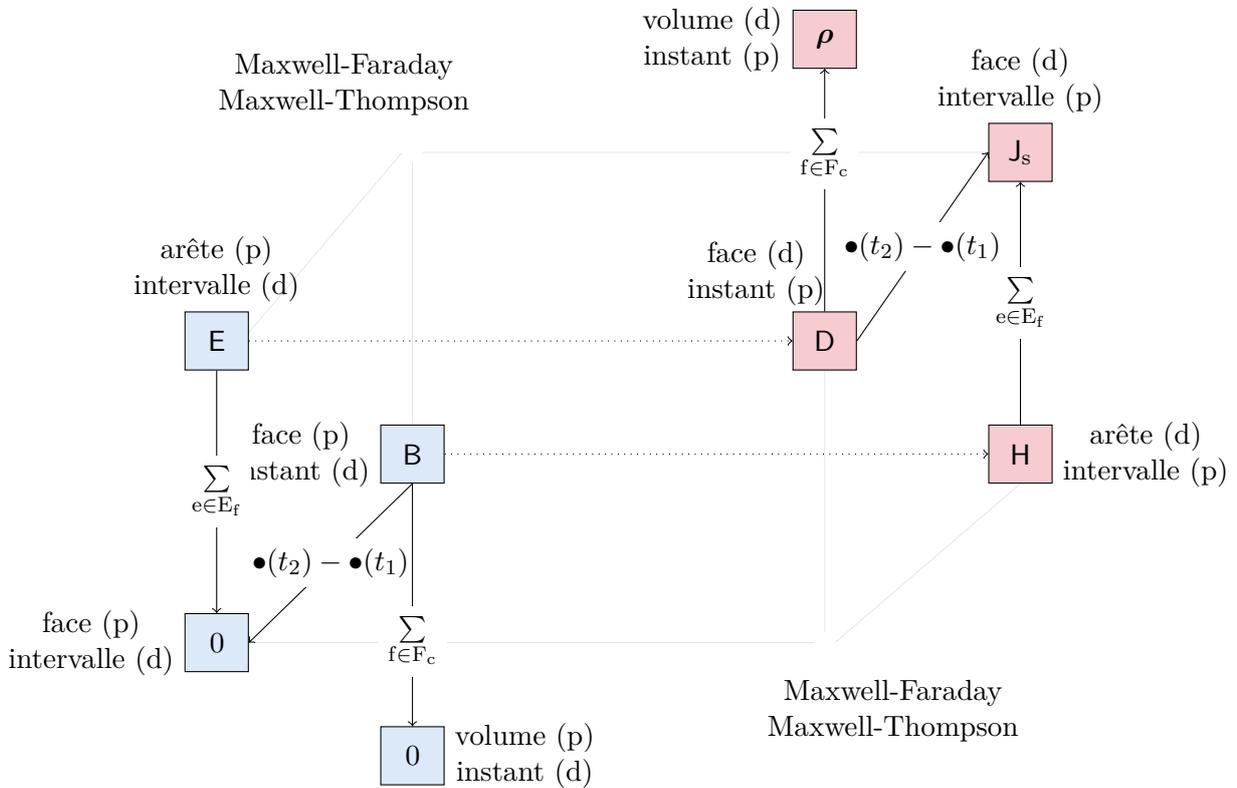


FIGURE 3.1 – Diagramme de Tonti associé aux Lois 2.1.1–2.1.4 et où l’association aux entités géométriques est précisée : (p) pour primal et (d) pour dual.

Le positionnement des variables maintenant défini, la section suivante introduit les espaces auxquels ces variables appartiennent ainsi que les applications de réduction permettant de faire le lien entre les variables discrètes et continues.

3.2 Degrés de liberté

L’objectif de cette section est de définir les espaces de degrés de liberté (ddl). Ce sont les espaces discrets auxquels les variables discrètes : D, B, E et H, appartiennent.

3.2.1 Volumiques

Le maillage volumique primal étant formé de sommets, d'arêtes, de faces et de volumes, les espaces qui contiennent les ddl associés aux sommets, aux arêtes, aux faces et aux volumes primaux, sont respectivement notés \mathcal{V} , \mathcal{E} , \mathcal{F} et \mathcal{C} . De la même manière, les espaces qui contiennent les ddl associés aux sommets, aux arêtes, aux faces et aux volumes duaux, sont respectivement notés $\tilde{\mathcal{V}}$, $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$. Les éléments de \mathcal{V} et $\tilde{\mathcal{V}}$ sont appelés *potentiels*. Pour $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$ et $\mathbf{q} \in \tilde{\mathcal{V}}$, $p_v \in \mathbb{R}$ et $q_{\tilde{v}(c)} \in \mathbb{R}$ sont les composantes de \mathbf{p} et \mathbf{q} correspondant respectivement au sommet v et au sommet dual $\tilde{v}(c)$. Les éléments de \mathcal{E} et $\tilde{\mathcal{E}}$ sont appelés *circulations*. Pour $\mathbf{g} \in \mathcal{E}$ et $\mathbf{h} \in \tilde{\mathcal{E}}$, $g_e \in \mathbb{R}$ et $h_{\tilde{e}(f)} \in \mathbb{R}$ sont les composantes de \mathbf{g} et \mathbf{h} correspondant respectivement à l'arête e et à l'arête duale $\tilde{e}(f)$. Les éléments de \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}$ sont appelés *flux*. Pour $\phi \in \mathcal{F}$ et $\psi \in \tilde{\mathcal{F}}$, ϕ_f et $\psi_{\tilde{f}(e)}$ sont les composantes de ϕ et ψ correspondant respectivement à la face f et à la face duale $\tilde{f}(e)$. Les éléments de \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ sont appelés *densités*. Pour $\mathbf{w} \in \mathcal{C}$ et $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{C}}$, w_c et $u_{\tilde{c}(v)}$ sont les composantes de \mathbf{w} et \mathbf{u} correspondant respectivement à la cellule c et à la cellule duale $\tilde{c}(v)$.

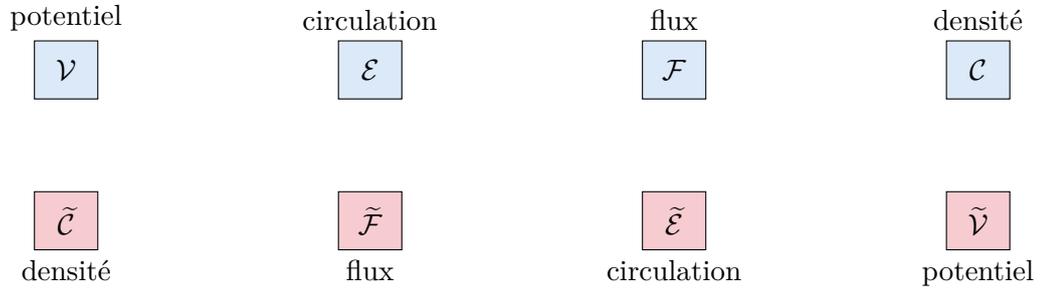


FIGURE 3.2 – Association bijective entre les ddl primaux et duaux : à tout potentiel primal correspond une densité duale, à toute circulation primale correspond un flux dual, à tout flux primal correspond une circulation duale, à toute densité primale correspond un potentiel dual.

Remarque 3.2.1 (Nomenclature mimétique). Dans la littérature mimétique (voir par exemple Bochev & Hyman (2007) et Gerritsma (2012)), les éléments des espaces de degrés de liberté sont généralement nommés *cochaînes*. Cela est dû au fait qu'ils définissent des formes linéaires sur les entités géométriques, qui sont généralement nommées *chaînes*. Par exemple, si $\phi \in \mathcal{F}$, alors ce flux définit une 2-cochaîne du fait qu'à chaque 2-chaîne $f \in \mathcal{F}$ il associe un réel ϕ_f , ainsi $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$.

Comme présentées dans la Section 2.1, les variables de l'électromagnétisme présentent deux circulations \mathbf{E} et \mathbf{H} , trois flux \mathbf{D} , \mathbf{B} et \mathbf{J} , et une densité ρ . Ces associations sont données dans la Table 3.2.

De l'association bijective entre les entités géométriques primales et duales, à chaque ddl primal

variable	circulation	flux	densité
discrète	\mathbf{E}, \mathbf{H}	$\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{J}$	ρ

TABLE 3.2 – Classification des variables de l'électromagnétisme selon leur association géométrique : circulation, flux, densité.

correspond un ddl dual, par exemple à toute circulation primale correspond un flux dual. Ces correspondances sont reportées sur la Figure 3.2. Elles permettent aussi de définir les produits

de dualité suivants :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho} \rrbracket_{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}}} &:= \sum_{v \in \mathcal{V}} \mathbf{u}_v \boldsymbol{\rho}_{\tilde{\mathcal{C}}(v)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in \tilde{\mathcal{C}}, & \llbracket \mathbf{g}, \boldsymbol{\phi} \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} &:= \sum_{e \in \mathcal{E}} \mathbf{g}_e \boldsymbol{\phi}_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \tilde{\mathcal{F}}, \\ \llbracket \boldsymbol{\phi}, \mathbf{g} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} &:= \sum_{f \in \mathcal{F}} \boldsymbol{\phi}_f \mathbf{g}_{\tilde{\mathcal{E}}(f)}, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{F}, \quad \forall \mathbf{g} \in \tilde{\mathcal{E}}, & \llbracket \boldsymbol{\rho}, \mathbf{u} \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} &:= \sum_{c \in \mathcal{C}} \boldsymbol{\rho}_c \mathbf{u}_{\tilde{\mathcal{V}}(c)}, \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in \mathcal{C}, \quad \forall \mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Ces produits sont la combinaison de deux choses : d'une part, d'un produit entre composantes, par exemple $\mathbf{g}_e \boldsymbol{\phi}_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}$, avec $\mathbf{g} \in \mathcal{E}$ et $\boldsymbol{\phi} \in \tilde{\mathcal{F}}$, qui correspond au produit extérieur de dualité discret (voir Desbrun *et al.* (2005), Définition 12.1) ; d'autre part, de la somme globale sur les entités géométriques, ce qui correspond au pendant discret de l'intégration sur tout le domaine Ω en géométrie différentielle (voir par exemple Frankel (2011)). Ce lien avec l'intégration est exacerbé par la définition des opérateurs différentiels *complétés* dans la Section 3.4.2.

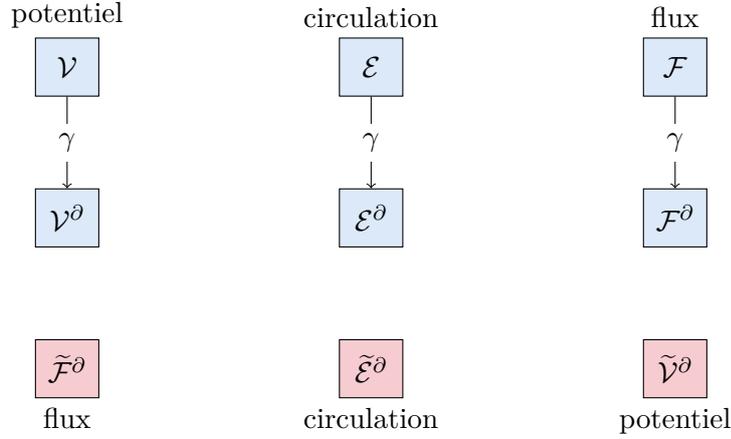


FIGURE 3.3 – Association bijective entre les ddl primaux et duaux de bord : à tout potentiel primal au bord correspond un flux dual de bord, à toute circulation primale au bord correspond une circulation duale de bord, à tout flux primal au bord correspond un potentiel dual de bord. Les espaces de ddl primaux au bord sont liés aux espaces de ddl primaux volumiques par les applications de trace discrètes.

3.2.2 Surfaiques

Les espaces de ddl associés au maillage primal de bord sont notés \mathcal{V}^∂ , \mathcal{E}^∂ et \mathcal{F}^∂ . Les entités de bord primales sont définies comme les entités primales volumiques appartenant au bord (voir Section 2.2.1). Ainsi :

$$\mathcal{V}^\partial \subset \mathcal{V}, \quad \mathcal{E}^\partial \subset \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^\partial \subset \mathcal{F},$$

d'où

$$\mathcal{V}^\partial \subset \mathcal{V}, \quad \mathcal{E}^\partial \subset \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^\partial \subset \mathcal{F}.$$

Pour isoler les ddl primaux sur le bord, on introduit les applications de trace discrètes

$$\gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^\partial \quad \text{avec} \quad \mathcal{X} \in \{\mathcal{V}^\partial, \mathcal{E}^\partial, \mathcal{F}^\partial\}. \quad (3.1)$$

Par exemple, si $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$ alors $\gamma(\mathbf{p}) \in \mathcal{V}^\partial$. Les espaces de ddl associés au maillage dual de bord sont notés $\tilde{\mathcal{V}}^\partial$, $\tilde{\mathcal{E}}^\partial$ et $\tilde{\mathcal{F}}^\partial$. Les entités duales de bord étant définies par dualité 2D avec les entités primales de bord (voir Section 2.2.2), elles permettent de compléter les entités duales volumiques touchant le bord, et on a

$$\tilde{\mathcal{V}}^\partial \not\subset \tilde{\mathcal{V}}, \quad \tilde{\mathcal{E}}^\partial \not\subset \tilde{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}^\partial \not\subset \tilde{\mathcal{F}}.$$

d'où

$$\tilde{\mathcal{V}}^\partial \not\subset \tilde{\mathcal{V}}, \quad \tilde{\mathcal{E}}^\partial \not\subset \tilde{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}^\partial \not\subset \tilde{\mathcal{F}}.$$

Les ddl duaux de bord sont notés avec un exposant : $\mathbf{p}^\partial \in \tilde{\mathcal{V}}^\partial$, $\mathbf{g}^\partial \in \tilde{\mathcal{E}}^\partial$ et $\phi^\partial \in \tilde{\mathcal{F}}^\partial$. De l'association bijective entre les entités géométriques primales et duales au bord, à chaque ddl primal au bord correspond un ddl dual de bord, par exemple à tout flux primal au bord correspond un potentiel dual de bord. Ces correspondances sont reportées sur la Figure 3.3. Cette association bijective permet aussi de définir les produits de dualité suivants :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u}, \phi^\partial \rrbracket_{(\mathcal{V}\tilde{\mathcal{F}})^\partial} &:= \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}^\partial} \mathbf{u}_{\mathbf{v}} \phi_{\tilde{\mathcal{F}}^\partial(\mathbf{v})}^\partial, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}^\partial, \quad \forall \phi^\partial \in \tilde{\mathcal{F}}^\partial, \\ \llbracket \mathbf{g}, \psi^\partial \rrbracket_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} &:= \sum_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}^\partial} \mathbf{g}_{\mathbf{e}} \psi_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial(\mathbf{e})}^\partial, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}^\partial, \quad \forall \psi^\partial \in \tilde{\mathcal{E}}^\partial, \\ \llbracket \phi, \mathbf{u}^\partial \rrbracket_{(\mathcal{F}\tilde{\mathcal{V}})^\partial} &:= \sum_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}^\partial} \phi_{\mathbf{f}} \mathbf{u}_{\tilde{\mathcal{V}}^\partial(\mathbf{f})}^\partial, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}^\partial, \quad \forall \mathbf{u}^\partial \in \tilde{\mathcal{V}}^\partial. \end{aligned}$$

Ces produits définissent le pendant discret de la notion d'intégration sur le bord en géométrie différentielle. Ce lien avec l'intégration est exacerbé par la définition des opérateurs différentiels *complétés* dans la Section 3.4.2.

Les espaces de degrés de liberté maintenant définis, la section suivante se concentre sur la définition des applications de réduction.

3.3 Applications de réduction

Le passage du continu au discret se fait par l'intermédiaire des applications de *réduction* ou de *de Rham* (voir par exemple Bochev & Hyman (2007) ou Gerritsma (2012)). Elles relient les champs continus, \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} et \mathbf{D} , aux variables discrètes B, E, H et D. L'objectif de cette section est de définir ces applications. Dans la continuité de Cantin & Ern (2016), les applications de réduction sur les entités géométriques spatiales de bord sont définies. Un apport par rapport au cadre mimétique classique, est la définition explicite d'application de réduction sur les entités géométriques temporelles. On commence par préciser leurs domaines de définition.

Domaine de définition. Dans la suite, pour \mathcal{X} un espace de ddl quelconque défini dans la section précédente, $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(\Omega)$ est un espace de fonctions suffisamment régulières et on définit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{V}}^g(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}(\Omega) \quad : \quad \nabla u \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\Omega)\}, \\ \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^c(\Omega) &:= \{\psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\Omega) \quad : \quad \nabla \times \psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega)\}, \\ \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^d(\Omega) &:= \{\varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega) \quad : \quad \nabla \cdot \varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Les espaces $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}^g(\Omega)$, $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^c(\Omega)$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}^d(\Omega)$ associés aux ddl duaux sont définis de manière analogue.

Réduction sur le maillage primal. Les applications de réduction sur le maillage primal $R_{\mathcal{V}} : \mathcal{S}_{\mathcal{V}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}$, $R_{\mathcal{E}} : \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}$, $R_{\mathcal{F}} : \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}$ et $R_{\mathcal{C}} : \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}$ font le lien entre les espaces de fonctions continues et les espaces discrets associés au maillage primal (voir Figure 3.4). Elles sont définies par

$$\forall p \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}(\Omega), \quad R_{\mathcal{V}}(p)|_{\mathbf{v}} := p(\mathbf{x}_{\mathbf{v}}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.3a)$$

$$\forall \psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\Omega), \quad R_{\mathcal{E}}(\psi)|_{\mathbf{e}} := \int_{\mathbf{e}} \psi \cdot \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{e}}, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathcal{E}, \quad (3.3b)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega), \quad R_{\mathcal{F}}(\varphi)|_{\mathbf{f}} := \int_{\mathbf{f}} \varphi \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{f}}, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \quad (3.3c)$$

$$\forall w \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Omega), \quad R_{\mathcal{C}}(w)|_{\mathbf{c}} := \int_{\mathbf{c}} w, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}. \quad (3.3d)$$

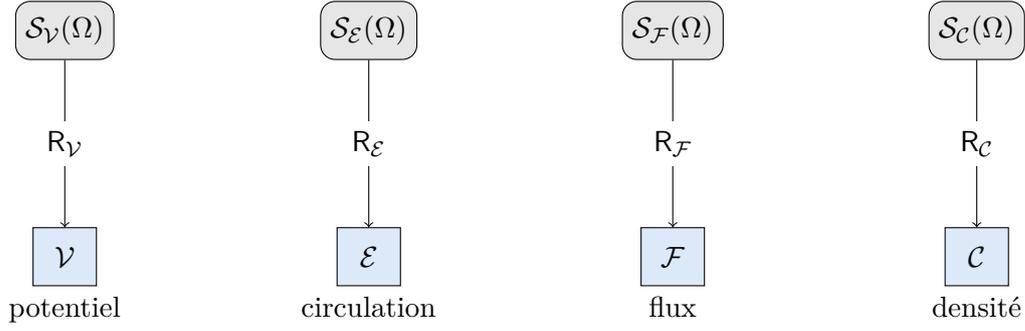


FIGURE 3.4 – Les applications de réduction sur le maillage primal font le lien entre les espaces de fonctions continues et les espaces discrets associés au maillage primal.

Réduction sur le maillage dual. Les applications de réduction sur le maillage dual $R_{\tilde{V}} : \mathcal{S}_{\tilde{V}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$, $R_{\tilde{E}} : \mathcal{S}_{\tilde{E}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$, $R_{\tilde{F}} : \mathcal{S}_{\tilde{F}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ et $R_{\tilde{C}} : \mathcal{S}_{\tilde{C}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ font le lien entre les espaces de fonctions continues et les espaces discrets associés au maillage dual (voir Figure 3.5). Elles sont définies par

$$\forall p \in \mathcal{S}_{\tilde{V}}(\Omega), \quad R_{\tilde{V}}(p)|_{\tilde{v}(c)} := p(\mathbf{x}_{\tilde{v}(c)}) \quad \forall c \in \mathcal{C}, \quad (3.4a)$$

$$\forall \psi \in \mathcal{S}_{\tilde{E}}(\Omega), \quad R_{\tilde{E}}(\psi)|_{\tilde{e}(f)} := \sum_{c \in \mathcal{C}_f} \int_{\tilde{e}_c(f)} \psi \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{e}_c(f)} \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad (3.4b)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}_{\tilde{F}}(\Omega), \quad R_{\tilde{F}}(\varphi)|_{\tilde{f}(e)} := \sum_{c \in \mathcal{C}_e} \sum_{f \in \mathcal{F}_e} \int_{\tilde{f}_{c,f}(e)} \varphi \cdot \mathbf{n}_{\tilde{f}_{c,f}(e)} \quad \forall e \in \mathcal{E}, \quad (3.4c)$$

$$\forall w \in \mathcal{S}_{\tilde{C}}(\Omega), \quad R_{\tilde{C}}(w)|_{\tilde{c}(v)} := \int_{\tilde{c}(v)} w \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (3.4d)$$

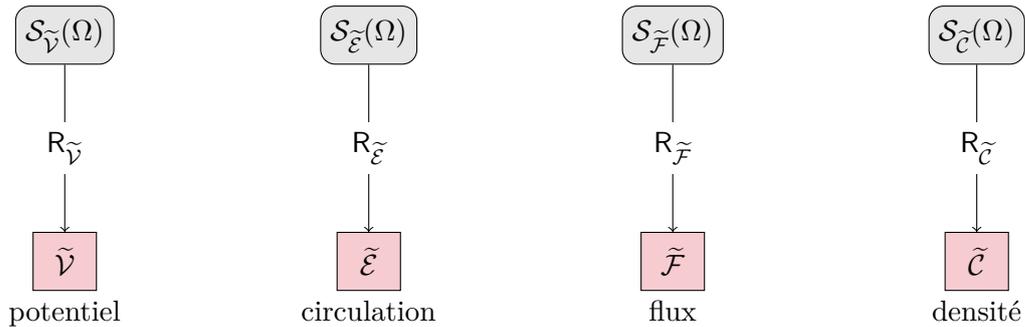


FIGURE 3.5 – Les applications de réduction sur le maillage dual font le lien entre les espaces de fonctions continues et les espaces discrets associés au maillage dual.

Au bord. Les applications de réduction sur les maillages de bord font le lien entre les espaces de fonctions continues et les espaces discrets associés aux maillages primal et dual de bord (voir Figure 3.6). Les premières sont définies par

$$R_{\mathcal{V}\partial} := \gamma \circ R_{\mathcal{V}}, \quad R_{\mathcal{E}\partial} := \gamma \circ R_{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad R_{\mathcal{F}\partial} := \gamma \circ R_{\mathcal{F}},$$

où les applications γ sont définies par (3.1), tandis que celles sur le maillage dual de bord $R_{\tilde{\mathcal{V}}^\partial} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}^\partial$, $R_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^\partial$ et $R_{\tilde{\mathcal{F}}^\partial} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^\partial$ sont définies par

$$\forall p \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\Omega), \quad R_{\tilde{\mathcal{V}}^\partial}(p)|_{\tilde{v}^\partial(f)} := p(\mathbf{x}_{\tilde{v}^\partial(f)}) \quad \forall f \in \mathbb{F}^\partial, \quad (3.5a)$$

$$\forall \psi \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\Omega), \quad R_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\psi)|_{\tilde{e}^\partial(e)} \sum_{f \in \mathbb{F}_e^\partial} \int_{\tilde{e}_f^\partial(e)} \psi \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{e}_f^\partial(e)} \quad \forall e \in \mathbb{E}^\partial, \quad (3.5b)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\Omega), \quad R_{\tilde{\mathcal{F}}^\partial}(\varphi)|_{\tilde{f}^\partial(v)} := \sum_{f \in \mathbb{F}_v^\partial} \int_{\tilde{f}_f^\partial(v)} \varphi \cdot \mathbf{n}_{\tilde{f}_f^\partial(v)} \quad \forall v \in \mathbb{V}^\partial. \quad (3.5c)$$

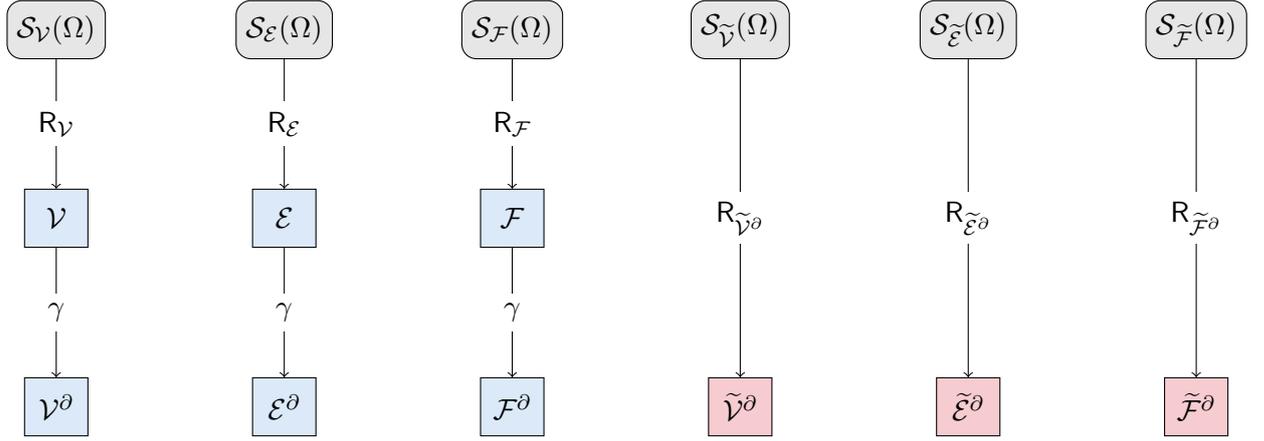


FIGURE 3.6 – Les applications de réduction sur les maillages de bord font le lien entre les espaces de fonctions continues et les espaces discrets associés aux maillages primal et dual de bord. Les applications de réduction sur le maillage de bord sont définies comme la composition des applications de réduction sur la maillage et les opérateurs de trace discrète.

Remarque 3.3.1 (Choix des espaces fonctionnels $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(\Omega)$). Ces espaces peuvent par exemple être choisis comme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{V}}(\Omega) &= \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\Omega) = \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}^\partial}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega) \quad \text{avec } sp > 3, \\ \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\Omega) &= \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\Omega) = \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\Omega) = \mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \quad \text{avec } sp > 2, \\ \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega) &= \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\Omega) = \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}^\partial}(\Omega) = \mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \quad \text{avec } sp > 1, \\ \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Omega) &= \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\Omega) = L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Cela est possible par le théorème d'existence de trace sur les espaces de dimension inférieure (voir par exemple Ern & Guermond (2021), Chapitre 2, Théorème 3.15).

Réduction sur le maillage temporel. On rappelle que le maillage primal temporel définit une discrétisation de l'intervalle $[0, t_F]$ en $N + 1$ instants $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = t_F$, $N \in \mathbb{N}^*$ (voir Chapitre 2, Section 2.2.3). Pour $k \geq 0$ un entier, on note $\mathcal{C}^k([0, t_F])$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur $[0, t_F]$. Les applications de réduction sur les instants primaux et duaux, sont respectivement définies par

$$\mathcal{C}^k([0, t_F]) \ni \psi \mapsto \psi(t_n), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^k([0, t_F]) \ni \psi \mapsto \begin{cases} \psi(t_0) & \text{si } n = 0, \\ \psi(t_N) & \text{si } n = N + 1, \\ \psi(t_{n+\frac{1}{2}}) & \text{si } n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket. \end{cases}$$

Les applications de réduction sur les intervalles primaux et intervalles duaux intérieurs, sont respectivement définies par

$$\mathcal{C}^k([0, t_F]) \ni \psi \mapsto \int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^k([0, t_F]) \ni \psi \mapsto \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \psi, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket,$$

et sur les intervalles duaux aux extrémités par

$$\mathcal{C}^k([0, t_F]) \ni \psi \mapsto \int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} \psi \text{ si } n = 0, \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^k([0, t_F]) \ni \psi \mapsto \int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_N} \psi \text{ si } n = N.$$

Les applications de réduction, en espace et en temps, maintenant définies, la section suivante définit les opérateurs différentiels discrets.

3.4 Opérateurs différentiels discrets

L'objectif de cette section est de définir les opérateurs différentiels discrets qui sont la version discrète des opérateurs vectoriels ∇ , $\nabla \times$ et $\nabla \cdot$. Ceux-ci sont au cœur de la discrétisation du système topologique de Maxwell (2.1).

3.4.1 Opérateurs différentiels primaux

Les opérateurs différentiels discrets sur le maillage primal $\text{GRAD} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}$, $\text{ROT} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ et $\text{DIV} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ sont définis tels que

$$\forall p \in \mathcal{V}, \quad \text{GRAD}(p) := \sum_{v \in \mathbb{V}_e} \iota_{v,e} p_v \quad \forall e \in \mathbb{E}, \quad (3.7a)$$

$$\forall \psi \in \mathcal{E}, \quad \text{ROT}(\psi)_f := \sum_{e \in \mathbb{E}_f} \iota_{e,f} \psi_e \quad \forall f \in \mathbb{F}, \quad (3.7b)$$

$$\forall \phi \in \mathcal{F}, \quad \text{DIV}(\phi)_c := \sum_{f \in \mathbb{F}_c} \iota_{f,c} \phi_f \quad \forall c \in \mathbb{C}, \quad (3.7c)$$

avec $\iota_{v,e}$, $\iota_{e,f}$ et $\iota_{f,c}$ les nombres d'incidences définis au Chapitre 2 par (2.6)–(2.8). Ces opérateurs ne dépendent que de l'orientation du maillage (voir Figure 2.5) et sont représentés algébriquement par des matrices creuses dont les entrées sont soit $+1$, soit -1 , soit 0 . Enfin, ces opérateurs définissent la suite illustrée dans la Figure 3.7 et commutent avec les applications de réduction rendant les diagrammes de la Figure 3.8 commutatifs.



FIGURE 3.7 – Suite définie par les opérateurs différentiels discrets sur le maillage primal.

Proposition 3.4.1.

$$\text{ROT GRAD} = 0_{\mathcal{F}}, \quad \text{DIV ROT} = 0_{\mathcal{C}}.$$

Preuve. C'est une conséquence du fait que le bord du bord d'une k -chaîne est vide (voir par exemple Hatcher (2002)). \square

Proposition 3.4.2 (Commutation primale). Pour des champs suffisamment réguliers $p \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}^g(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^g(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^g(\Omega)$, tels que $\nabla p \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\Omega)$, $\nabla \times \psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega)$ et $\nabla \cdot \varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Omega)$, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(\nabla p) = \text{GRAD}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}}(p)), \quad \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\nabla \times \psi) = \text{ROT}(\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(\psi)) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(\nabla \cdot \varphi) = \text{DIV}(\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\varphi)).$$

Preuve. Ces relations sont une conséquence directe du Théorème de Stokes généralisé et de la définition des nombres d'incidences (2.6)–(2.8). \square

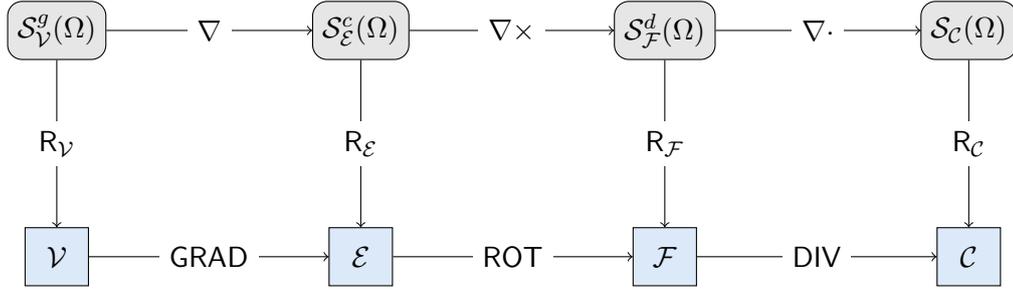


FIGURE 3.8 – Trois diagrammes commutatifs associés aux opérateurs différentiels discrets définis sur le maillage primal. Les applications de de Rham font le lien entre la suite définie par les opérateurs continus (en haut) et la suite définie par les opérateurs discrets (en bas).

3.4.2 Opérateurs différentiels duaux

Les opérateurs différentiels discrets sur le maillage dual sont définis par dualité avec les opérateurs donnés sur le maillage primal. Ainsi les opérateurs $\widetilde{\text{GRAD}} : \widetilde{\mathcal{V}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}$, $\widetilde{\text{ROT}} : \widetilde{\mathcal{E}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$ et $\widetilde{\text{DIV}} : \widetilde{\mathcal{F}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}$ sont définis par

$$\llbracket \mathbf{p}, \widetilde{\text{DIV}}(\mathbf{u}) \rrbracket_{\mathcal{V}\widetilde{\mathcal{C}}} := -\llbracket \text{GRAD}(\mathbf{p}), \mathbf{u} \rrbracket_{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}}, \quad \forall (\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in \mathcal{V} \times \widetilde{\mathcal{F}}, \quad (3.8a)$$

$$\llbracket \mathbf{g}, \widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{v}) \rrbracket_{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}} := +\llbracket \text{ROT}(\mathbf{g}), \mathbf{v} \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}}, \quad \forall (\mathbf{g}, \mathbf{v}) \in \mathcal{E} \times \widetilde{\mathcal{E}}, \quad (3.8b)$$

$$\llbracket \mathbf{u}, \widetilde{\text{GRAD}}(\mathbf{p}) \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} := -\llbracket \text{DIV}(\mathbf{u}), \mathbf{p} \rrbracket_{\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{V}}}, \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in \mathcal{F} \times \widetilde{\mathcal{V}}. \quad (3.8c)$$

Ces opérateurs ne dépendent que de l'orientation du maillage dual et sont représentés algébriquement par des matrices creuses dont les entrées sont soit $+1$, -1 , 0 . De cette définition, les matrices sont les transposées de celles associées aux opérateurs définis sur le maillage primal. Enfin, ces opérateurs définissent la suite d'opérateurs illustrée par la Figure 3.9 et ne commutent avec les applications de réduction que sur les entités duales ne touchant pas le bord. Pour obtenir une relation de commutation sur toutes les entités duales, les opérateurs doivent être complétés au bord.

Proposition 3.4.3.

$$\widetilde{\text{ROT}} \widetilde{\text{GRAD}} = 0_{\widetilde{\mathcal{F}}}, \quad \widetilde{\text{DIV}} \widetilde{\text{ROT}} = 0_{\widetilde{\mathcal{C}}}.$$

Preuve. C'est une conséquence de la définition des opérateurs (3.8) et de la Proposition 3.4.1. \square



FIGURE 3.9 – Suite définie par les opérateurs différentiels discrets sur le maillage dual.

Par définition, les opérateurs ne satisfont que la relation de commutation partielle de la Proposition 3.4.4

Proposition 3.4.4 (Commutation partielle). Pour des champs suffisamment réguliers $p \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}^g(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^c(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^d(\Omega)$ les relations suivantes ne sont vraies que pour des entités duales intérieures :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\nabla p)|_{\widetilde{\mathcal{E}}(f)} &= \widetilde{\text{GRAD}}(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{V}}}(p))|_{\widetilde{\mathcal{E}}(f)}, \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^\partial, \\ \mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\nabla \times \psi)|_{\widetilde{\mathcal{F}}(e)} &= \widetilde{\text{ROT}}(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\psi))|_{\widetilde{\mathcal{F}}(e)}, \quad \forall e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^\partial, \\ \mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\nabla \cdot \phi)|_{\widetilde{\mathcal{C}}(v)} &= \widetilde{\text{DIV}}(\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\phi))|_{\widetilde{\mathcal{C}}(v)}, \quad \forall v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}^\partial. \end{aligned}$$

Définition 3.4.1 (Opérateurs différentiels complétés). Les opérateurs différentiels discrets complétés au bord (ou complétés)

$$\widetilde{\text{GRAD}}^\sharp : \tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{V}}^\partial \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}, \quad \widetilde{\text{ROT}}^\sharp : \tilde{\mathcal{E}} \times \tilde{\mathcal{E}}^\partial \rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{DIV}}^\sharp : \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}}^\partial \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$$

sont définis tels que

$$\llbracket \mathbf{p}, \widetilde{\text{DIV}}^\sharp(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}^\partial) \rrbracket_{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}}} = -\llbracket \text{GRAD}(\mathbf{p}), \boldsymbol{\phi} \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} + \llbracket \gamma(\mathbf{p}), \boldsymbol{\phi}^\partial \rrbracket_{(\mathcal{V}\tilde{\mathcal{F}})^\partial}, \quad \forall (\mathbf{p}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}^\partial) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}}^\partial, \quad (3.10)$$

$$\llbracket \mathbf{g}, \widetilde{\text{ROT}}^\sharp(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}^\partial) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} = +\llbracket \text{ROT}(\mathbf{g}), \boldsymbol{\psi} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + \llbracket \gamma(\mathbf{g}), \boldsymbol{\psi}^\partial \rrbracket_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial}, \quad \forall (\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}^\partial) \in \mathcal{E} \times \tilde{\mathcal{E}} \times \tilde{\mathcal{E}}^\partial, \quad (3.11)$$

$$\llbracket \boldsymbol{\phi}, \widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{p}, \mathbf{p}^\partial) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} = -\llbracket \text{DIV}(\boldsymbol{\phi}), \mathbf{p} \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} + \llbracket \gamma(\boldsymbol{\phi}), \mathbf{p}^\partial \rrbracket_{(\mathcal{F}\tilde{\mathcal{V}})^\partial}, \quad \forall (\mathbf{p}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{p}^\partial) \in \mathcal{F} \times \tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{V}}^\partial. \quad (3.12)$$

Proposition 3.4.5.

$$\widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\cdot, 0) = \widetilde{\text{GRAD}}(\cdot), \quad \widetilde{\text{ROT}}^\sharp(\cdot, 0) = \widetilde{\text{ROT}}(\cdot), \quad \widetilde{\text{DIV}}^\sharp(\cdot, 0) = \widetilde{\text{DIV}}(\cdot).$$

Les opérateurs complétés sont liés aux opérateurs $\widetilde{\text{GRAD}}$, $\widetilde{\text{ROT}}$ et $\widetilde{\text{DIV}}$ par la Proposition 3.4.5. De plus, les opérateurs *complétés* commutent avec les applications de réduction sur le maillage dual (c'est l'objet de la Proposition 3.4.6), rendant les diagrammes de la Figure 3.10 commutatifs. Les signes "+" devant les produits de dualité au bord sont une conséquence de l'orientation choisie des entités duales de bord dans la Section 2.2.2. Notamment que

$$\begin{aligned} l_{\tilde{\mathcal{F}}^\partial(\mathbf{v}), \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})} &= +1, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^\partial, \\ l_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial(\mathbf{e}), \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{e})} &= +1, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathcal{E}^\partial, \\ l_{\tilde{\mathcal{V}}^\partial(\mathbf{f}), \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{f})} &= +1, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}^\partial. \end{aligned}$$

Enfin, les relations de la Définition 3.4.1 sont à comparer avec les formules d'intégration par parties vectorielles suivantes :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) q = - \int_{\Omega} (\nabla q) \cdot \boldsymbol{\varphi} + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}) q, \quad (3.13)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \mathbf{g} = \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \mathbf{g}, \quad (3.14)$$

où $\boldsymbol{\varphi}$, q , $\boldsymbol{\psi}$ et \mathbf{g} sont des champs suffisamment réguliers pour que ces intégrales existent. Dans le formalisme vectoriel, la formule (3.13) correspond aux formules (3.10) et (3.12) de la Définition 3.4.1. Cela est dû au fait que, dans le formalisme vectoriel, il n'y a pas de différence entre l'opérateur gradient primal et l'opérateur gradient dual.

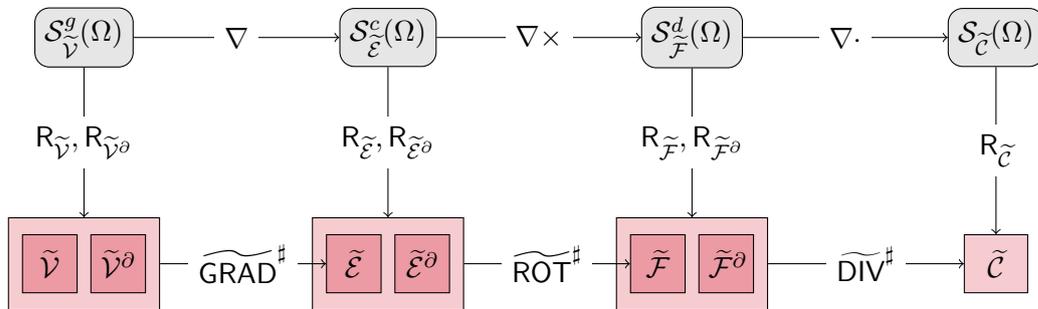


FIGURE 3.10 – Trois diagrammes commutatifs associés aux opérateurs différentiels discrets complétés définis sur le maillage dual. Les applications de de Rham font le lien entre la suite définie par les opérateurs continus (en haut) et la suite définie par les opérateurs discrets (en bas).

Proposition 3.4.6 (Commutation duale). Pour des champs suffisamment réguliers $p \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}^g(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^c(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^d(\Omega)$ les relations suivantes sont vérifiées :

$$R_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\nabla p) = \widetilde{\text{GRAD}}^\#(R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(p), R_{\widetilde{\mathcal{V}}^\partial}(p)), \quad R_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\nabla \times \psi) = \widetilde{\text{ROT}}^\#(R_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\psi), R_{\widetilde{\mathcal{E}}^\partial}(\psi)),$$

$$R_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\nabla \cdot \phi) = \widetilde{\text{DIV}}^\#(R_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\phi), R_{\widetilde{\mathcal{F}}^\partial}(\phi)).$$

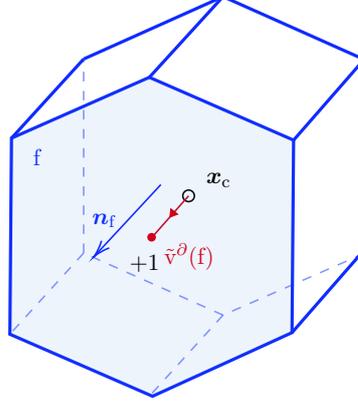


FIGURE 3.11

Preuve. La preuve est donnée pour la première relation. Soit $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}^g(\Omega)$ et soit $\phi \in \mathcal{F}$. De la définition (3.12) combinée avec la définition (3.8) de $\widetilde{\text{GRAD}}$, il vient

$$\llbracket \phi, \widetilde{\text{GRAD}}^\#(R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u), R_{\widetilde{\mathcal{V}}^\partial}(u)) \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} = \llbracket u, \widetilde{\text{GRAD}}(R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u)) \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} + \llbracket \gamma(\phi), R_{\widetilde{\mathcal{V}}^\partial}(u) \rrbracket_{(\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{V}})^\partial}.$$

Par définition du crochet de dualité, on a

$$\begin{aligned} \llbracket u, \widetilde{\text{GRAD}}(R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u)) \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} &= \sum_{f \in \mathcal{F}} \phi_f \widetilde{\text{GRAD}}(R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u))|_{\bar{e}(f)} \\ &= \sum_{f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^\partial} \phi_f \widetilde{\text{GRAD}}(R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u))|_{\bar{e}(f)} + \sum_{f \in \mathcal{F}^\partial} \phi_f \widetilde{\text{GRAD}}(R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u))|_{\bar{e}(f)}. \end{aligned}$$

Ainsi, de la première relation de commutation de la Proposition 3.4.4 et de la définition (3.8) de $\widetilde{\text{GRAD}}$, on déduit

$$\llbracket u, \widetilde{\text{GRAD}}(R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u)) \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} = \sum_{f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^\partial} \phi_f R_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\nabla u)|_{\bar{e}(f)} + \sum_{f \in \mathcal{F}^\partial} \phi_f \sum_{c \in \mathcal{C}_f} \iota_{\bar{v}(c), \bar{e}(f)} R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u)|_{\bar{c}(v)},$$

d'où

$$\begin{aligned} \llbracket \phi, \widetilde{\text{GRAD}}^\#(R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u), R_{\widetilde{\mathcal{V}}^\partial}(u)) \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} &= \sum_{f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^\partial} \phi_f R_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\nabla u)|_{\bar{e}(f)} \\ &\quad + \sum_{f \in \mathcal{F}^\partial} \phi_f \left(\sum_{c \in \mathcal{C}_f} \iota_{\bar{v}(c), \bar{e}(f)} R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u)|_{\bar{c}(v)} + R_{\widetilde{\mathcal{V}}^\partial}(u)|_{\bar{v}^\partial(f)} \right). \end{aligned}$$

Or, par définition $\iota_{\bar{v}^\partial(f), \bar{e}(f)} = +1$, pour tout $f \in \mathcal{F}^\partial$, et $\#\mathcal{C}_f = 1$, donc par le Théorème de Stokes,

$$\sum_{c \in \mathcal{C}_f} \iota_{\bar{v}(c), \bar{e}(f)} R_{\widetilde{\mathcal{V}}}(u)|_{\bar{c}(v)} + R_{\widetilde{\mathcal{V}}^\partial}(u)|_{\bar{v}^\partial(f)} = R_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\nabla u)|_{\bar{e}(f)}.$$

Finalement, en combinant les sommes

$$\begin{aligned} \llbracket \phi, \widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}}(u), \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}\partial}(u)) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} &= \sum_{f \in \mathbb{F}} \phi_f \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\nabla u)|_{\tilde{e}(f)} \\ &= \llbracket \phi, \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\nabla u) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\phi \in \mathcal{F}$, ceci montre que

$$\widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}}(u), \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}\partial}(u)) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\nabla u).$$

□

Remarque 3.4.1 (Opérateurs différentiels discrets temporels). Les opérateurs différentiels discrets temporels ne sont pas ici définis explicitement, car dans la discrétisation temporelle du système, seules les relations de commutations suivantes sont utilisées :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_t \psi = \psi(t_{n+1}) - \psi(t_n), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad \text{et} \quad \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \partial_t \psi = \psi(t_{n+\frac{1}{2}}) - \psi(t_{n-\frac{1}{2}}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket,$$

avec les notations $t_{-\frac{1}{2}} = t_0$ et $t_{N+\frac{1}{2}} = t_N$.

Les opérateurs différentiels discrets et leurs relations de commutation avec les applications de réduction maintenant définis, la section suivante s'attache à discrétiser les relations topologiques du système de Maxwell.

3.5 Discrétisation des relations topologiques

L'objectif de cette section est de décrire le processus de discrétisation, dans le cadre CDO, du système topologique de Maxwell défini dans $\Omega \times [0, t_F]$ par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}_s, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Les champs vectoriels peuvent être associés aux entités géométriques des maillages de la même façon que les variables discrètes (voir Section 2.1.2). Cette association est rappelée dans la Figure 3.12. A la lumière de cette association, les équations sont ainsi discrétisées au moyen des applications de de Rham correspondantes, définies dans la Section 3.3.

Semi-discrétisation en espace. Pour des champs suffisamment réguliers, l'équation aux dérivées partielles de Maxwell-Faraday (2.1a) est discrétisée sur les faces primales :

$$\mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (3.16)$$

Il est supposé que $\mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\partial_t \mathbf{B}) = \partial_t \mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\mathbf{B})$ (i.e., le maillage ne dépend pas du temps et \mathbf{B} est suffisamment régulier). Ainsi, de la propriété de commutation de la Proposition 3.4.2 entre $\mathbf{R}_{\mathcal{F}}$ et $\nabla \times$, il vient

$$\partial_t \mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) - \text{ROT } \mathbf{R}_{\mathcal{E}}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (3.17)$$

Pour tout $t \in [0, t_F]$, en notant $\mathbf{B}(t)$ l'approximation de $\mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t))$ et $\mathbf{E}(t)$ l'approximation de $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t))$, l'équation semi-discrète associée à (3.16) est alors donnée par :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B}(t) - \text{ROT } \mathbf{E}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_F]. \quad (3.18)$$

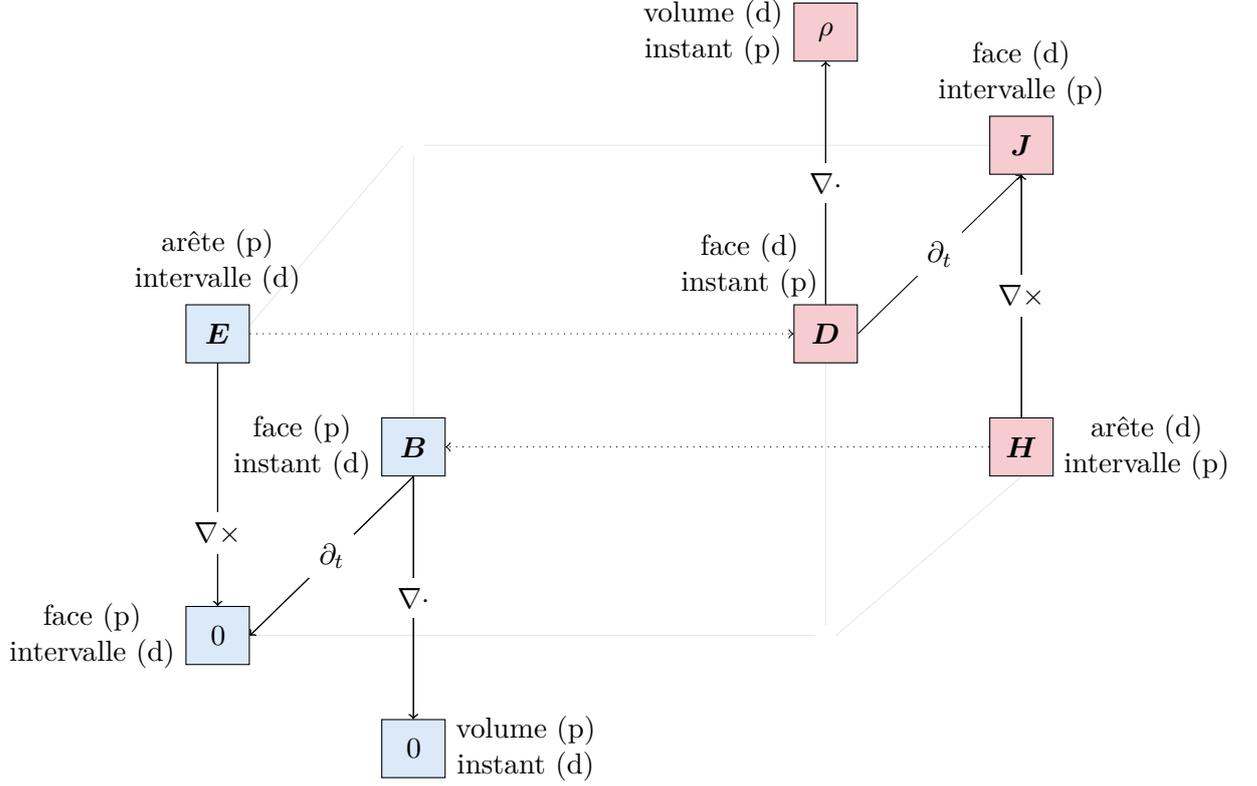


FIGURE 3.12 – Diagramme de Tonti associé au système de Maxwell vectoriel dans lequel sont précisées les associations géométriques des champs : sur le maillage primal (p) ou sur le maillage dual (d).

De la même manière, pour des champs suffisamment réguliers, l'équation aux dérivées partielles de Maxwell-Ampère (2.1b) est réduite sur les faces duales par l'application de $R_{\tilde{\mathcal{F}}}$:

$$R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) - R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) = -R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{J}_s). \quad (3.19)$$

Il est supposé $R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\partial_t \mathbf{D}) = \partial_t R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D})$ (i.e., le maillage ne dépend pas du temps et \mathbf{D} est suffisamment régulier). Ainsi, de la propriété de commutation donnée par la Proposition 3.4.6 entre $R_{\tilde{\mathcal{F}}}$ et $\nabla \times$, il vient

$$\partial_t R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) - \widetilde{\text{ROT}}^\sharp(R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)), R_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t))) = -R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{J}_s). \quad (3.20)$$

Pour tout $t \in [0, t_F]$, en notant $\mathbf{D}(t)$ l'approximation de $R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t))$, $\mathbf{H}(t)$ l'approximation de $R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t))$ et \mathbf{H}^∂ l'approximation de $R_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t))$, l'équation semi-discrète en espace associée à (3.19) est alors donnée par :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{D}(t) - \widetilde{\text{ROT}}^\sharp(\mathbf{H}(t), \mathbf{H}^\partial) = -R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{J}_s), \quad \forall t \in [0, t_F]. \quad (3.21)$$

Enfin en suivant le même raisonnement on peut montrer que les équations en divergence semi-discrètes sont données par :

$$\text{DIV } \mathbf{B}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{DIV}}^\sharp(\mathbf{D}(t), \mathbf{D}^\partial(t)) = 0, \quad (3.22)$$

pour tout $t \in [0, t_F]$.

Discrétisation en temps. De l'association du champ \mathbf{E} avec les intervalles de temps duaux (voir Figure 3.12), l'équation semi-discrète de Maxwell-Faraday (3.18) est intégrée sur un

intervalle de temps dual. Avec les notations $t_{-\frac{1}{2}} = t_0$ et $t_{N+\frac{1}{2}} = t_N$, l'intégration de (3.18) sur $[t_{n-\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}]$ donne pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$:

$$\mathbf{B}(t_{n+\frac{1}{2}}) - \mathbf{B}(t_{n-\frac{1}{2}}) = -\text{ROT} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{E}(t) dt. \quad (3.23)$$

Avec les notations $\mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{B}^0$ et $\mathbf{B}^{N+\frac{1}{2}} = \mathbf{B}^N$, et en notant par $\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}$, \mathbf{B}^0 , \mathbf{B}^N et \mathbf{E}^n les approximations respectives de $\mathbf{B}(t_{n+\frac{1}{2}})$, $\mathbf{B}(t_0)$, $\mathbf{B}(t_N)$ et $\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{E}(t) dt$, l'équation complètement discrète correspondant à (3.23) est alors donnée par :

$$\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}} = -\text{ROT} \mathbf{E}^n \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (3.24)$$

De la même manière, de l'association de \mathbf{H} aux intervalles de temps primaux (voir Figure 3.12), l'intégration de (3.25) sur l'intervalle de temps primal $[t_n, t_{n+1}]$ donne pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$

$$\mathbf{D}(t_{n+1}) - \mathbf{D}(t_n) - \widetilde{\text{ROT}}^\# \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{H}(t) dt, \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{H}^\partial \right) = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{J}_s). \quad (3.25)$$

De sorte à alléger les notations, l'approximation de $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{H}^\partial$ est notée $\mathbf{H}^{\text{partial}, n+\frac{1}{2}}$. Ainsi, en notant \mathbf{D}^n l'approximation de $\mathbf{D}(t_n)$ et $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$ l'approximation de $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{H}(t) dt$, l'équation complètement discrète correspondant à l'équation (3.21) est alors donnée par :

$$\mathbf{D}^{n+1} - \mathbf{D}^n - \widetilde{\text{ROT}}^\# (\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}) = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{J}_s), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket. \quad (3.26)$$

En suivant le même raisonnement, les équations complètement discrètes en divergence sont données pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ par :

$$\text{DIV}(\mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}) = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{DIV}}^\# (\mathbf{D}^n, \mathbf{D}^{\partial, n}) = \mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\rho(t_n)). \quad (3.27)$$

Le système topologique de Maxwell complètement discret donné par les équations (3.24), (3.26) et (3.27) peut être résumé en un diagramme de Tonti discret représenté sur la Figure 3.13 et peut être comparé avec le diagramme Tonti continu de la Figure 3.12.

Conclusion partielle

Dans ce chapitre on a discrétisé, dans le cadre CDO, les relations topologiques des équations de Maxwell en domaine temporel. Pour cela, on a discuté des possibles choix de positionnement pour les variables de l'électromagnétisme et on a déterminé celui qui sera utilisée tout au long de cette thèse. Ensuite, les espaces de degrés de liberté associés aux entités géométriques des maillages, primaux et duaux, ont été introduits. De cela, les opérateurs de réduction et les opérateurs différentiels discrets ont été définis. Enfin, au moyen des applications de réduction, le système topologique de Maxwell a été discrétisé en espace et en temps dans le cadre CDO.

Les relations topologiques maintenant formulées de manière complètement discrètes, le chapitre suivant s'attache à discrétiser les relations constitutives.

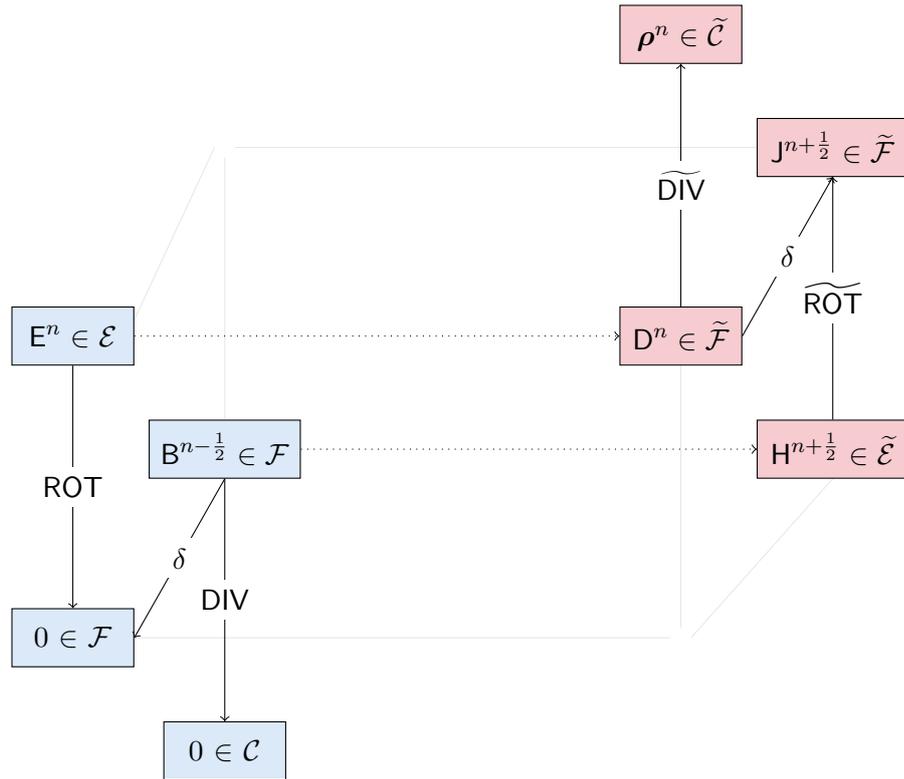


FIGURE 3.13 – Diagramme de Tonti complètement discret correspondant aux équations topologiques du système de Maxwell. Les opérateurs de rotationnel et de divergence sur le maillage dual sont ici seulement représentés à l'intérieur. Les opérateurs de différenciation en temps discrets sont représentés par les opérateurs $\delta(B^{n-\frac{1}{2}}) := B^{n+\frac{1}{2}} - B^{n-\frac{1}{2}}$ et $\delta(D^n) = D^{n+1} - D^n$.

Discrétisation des relations constitutives

Sommaire

4.1	Relations constitutives	41
4.1.1	Dans les équations de Maxwell	41
4.1.2	Description géométrique des relations constitutives	43
4.2	Opérateurs de Hodge discrets	44
4.2.1	Opérateurs de Hodge discrets sur maillage Cartésien	44
4.2.2	Définition formelle des opérateurs de Hodges discrets sur maillage quelconque	45
4.2.3	Construction pratique des opérateurs de Hodge discrets volumiques .	49
4.3	Discrétisation des relations constitutives	52
4.3.1	Erreur de consistance en espace	53
4.3.2	Erreur de consistance en temps	53

L'objectif de ce chapitre est de discrétiser dans le cadre CDO, les relations constitutives des équations de Maxwell. Pour cela, dans la Section 4.1, ces relations sont définies et le caractère géométrique de celles-ci est mis en évidence, notamment à travers des opérateurs de Hodge continus. Ensuite, la Section 4.2 motive la construction discrète de ces opérateurs sur maillage Cartésien, puis on définit de manière formelle ceux-ci sur maillage quelconque et on donne une construction pratique de ceux-ci à partir d'opérateurs définis localement. Enfin, la Section 4.3 décrit le processus de discrétisation des relations constitutives au moyen des applications de réduction introduites au Chapitre 3.

4.1 Relations constitutives

L'objectif de cette section est de mettre en évidence le caractère particulier des relations constitutives dans le système de Maxwell. Pour cela, on introduit les relations constitutives qui permettent de compléter le système topologique de Maxwell.

4.1.1 Dans les équations de Maxwell

Les relations constitutives dans les équations de Maxwell dépendent des paramètres matériels qui relient les inductions \mathbf{D} et \mathbf{B} aux champs \mathbf{E} et \mathbf{H} . Soient ε_0 et $\varepsilon_r > 0$, respectivement, la permittivité diélectrique du vide et la permittivité diélectrique relative du milieu considéré. Soient aussi μ_0 et $\mu_r > 0$, respectivement, la perméabilité magnétique du vide et la perméabilité magnétique relative du milieu considéré. Les paramètres ε_0 et μ_0 sont des constantes fondamentales de la physique données par :

$$\varepsilon_0 = 8,85418782.10^{-12} F/m \text{ et } \mu_0 = 4\pi.10^{-7} H/m. \tag{4.1}$$

Ainsi dans le cas d'un milieu linéaire, en notant $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ et $\mu = \mu_0 \mu_r$, les termes \mathbf{E} et \mathbf{D} , et \mathbf{H} et \mathbf{B} , sont reliés par les relations :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{4.2a}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \tag{4.2b}$$

Par linéarité des équations de Maxwell, la densité surfacique de courant $\mathbf{J}_s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme la somme de deux termes :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d,$$

avec $\mathbf{J}_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une densité surfacique donnée et $\mathbf{J} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ une densité vérifiant la loi d'Ohm

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \tag{4.3}$$

où $\sigma > 0$ est la conductivité électrique du milieu. Enfin, au bord du domaine, les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} peuvent être reliés par la condition absorbante :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H} = -Z \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \tag{4.4}$$

avec $Z > 0$ un paramètre d'impédance surfacique. Les quatre liens constitutifs (4.2)– (4.4) sont mis en évidence sur le diagramme de la Figure 4.1.

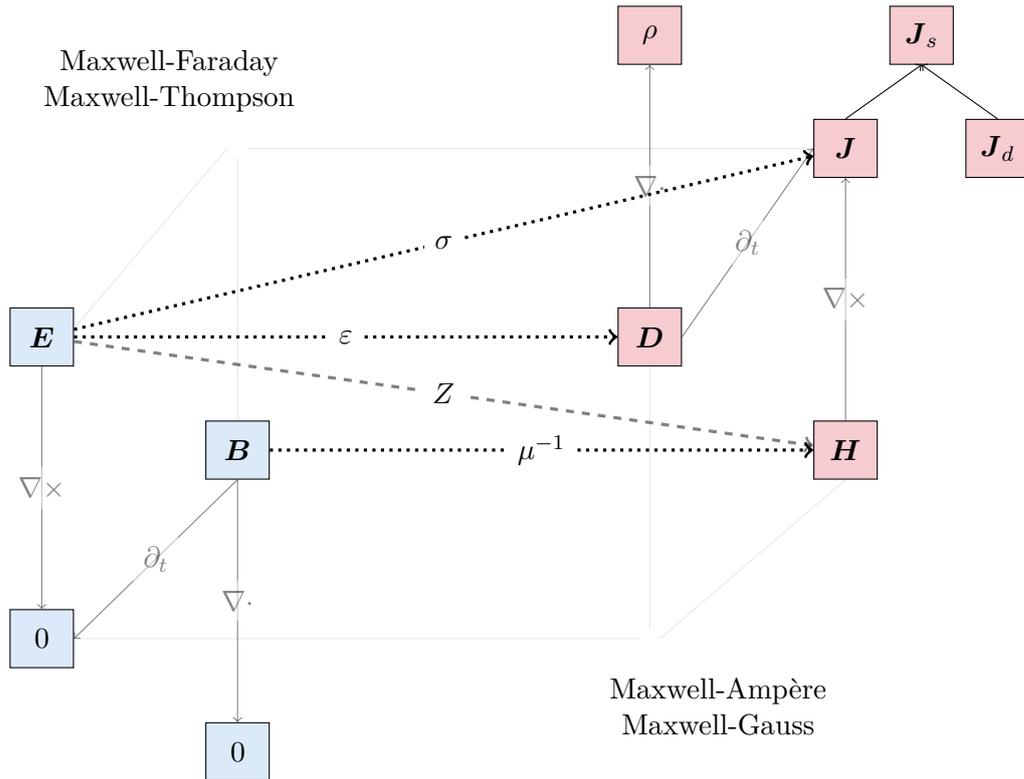


FIGURE 4.1 – Diagramme de Tonti, pour les équations de Maxwell vectorielles, mettant en évidence les liens dépendant des paramètres matériels. Ils relient les variables des lois topologiques de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thompson avec celles de Maxwell-Faraday et Maxwell-Gauss. Le lien matériel défini par le paramètre surfacique Z est indiqué par une flèche en traits hachurés, tandis que les liens définis par les paramètres volumiques ε, μ, σ sont représentés par des flèches en pointillés.

4.1.2 Description géométrique des relations constitutives

Le placement des variables établi au Chapitre 3 montre que les relations constitutives établissent un lien de dualité entre celles-ci. Par exemple, le champ électrique \mathbf{E} , associé aux arêtes primales et aux intervalles de temps duaux, est relié par ε au déplacement électrique \mathbf{D} , associé aux faces duales et aux instants primaux (voir Figure 4.2). Dans le formalisme

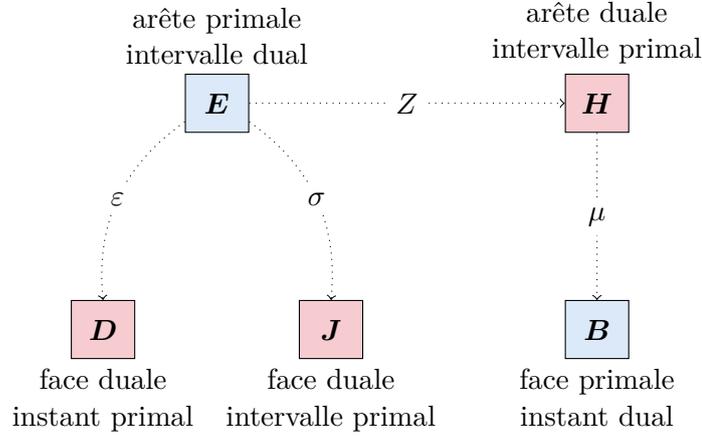


FIGURE 4.2 – Les paramètres matériels établissent des liens de dualité entre les variables. Le paramètre ε établit un lien entre le champ \mathbf{E} , associé aux arêtes primales et aux intervalles de temps duaux, et le champ \mathbf{D} , associé aux faces duales et aux instants temporels primaux. De même pour le paramètre μ et les champs \mathbf{B} et \mathbf{H} . Le paramètre σ a la particularité d'établir un lien de dualité temporelle entre deux champs placés sur des intervalles de temps. Le paramètre Z fait le lien entre \mathbf{E} et \mathbf{H} au bord.

vectorel, ces liens se traduisent par la multiplication de champs de vecteurs par des scalaires (comme par exemple dans (4.2)), et ce sont les dimensions des variables qui encodent l'opération de dualité géométrique. En effet, l'analyse dimensionnelle révèle que la multiplication par ε et par μ transforme des variables homogènes à des densités linéiques (dont l'intégrale donne une *circulation*, voir Chapitre 3) en des variables homogènes à des densités surfaciques (dont l'intégrale donne un *flux*, voir Chapitre 3).

Remarque 4.1.1 (Relations constitutives en géométrie différentielle). Cela peut être mis en évidence dans le formalisme de la géométrie différentielle (voir par exemple Bossavit (1999-2000) et Hiptmair (2001a)). Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note $\Lambda^k \equiv \Lambda^k(\Omega)$ l'espace des k -formes sur Ω . Si $E^{(1)} \in \Lambda^1$ et $H^{(1)} \in \Lambda^1$ sont les 1-formes de champs électrique et magnétique, et si $D^{(2)} \in \Lambda^2$ et $B^{(2)} \in \Lambda^2$ sont les 2-formes de flux électrique et magnétique, alors les relations (4.2) et (4.3) s'écrivent

$$D^{(2)} = \star_\varepsilon E^{(1)}, \quad B^{(2)} = \star_\mu H^{(1)} \quad \text{et} \quad J^{(2)} = \star_\sigma E^{(1)}, \quad (4.5)$$

avec $\star_\alpha : \Lambda^k(\Omega) \rightarrow \Lambda^{3-k}(\Omega)$ l'opérateur de Hodge dépendant de la métrique et du paramètre matériel $\alpha \in \{\varepsilon, \mu, \sigma\}$ (voir par exemple Frankel (2011)). De plus, en notant $\text{Tr} : \Lambda^k(\Omega) \rightarrow \Lambda^k(\partial\Omega)$ les opérateurs de traces, qui transforment des k -formes volumiques en des k -formes surfaciques, la condition (4.4) peut aussi s'écrire

$$\text{Tr}(H^{(1)}) = \star_Z \text{Tr}(E^{(1)}),$$

avec $\star_Z : \Lambda^1(\partial\Omega) \rightarrow \Lambda^1(\partial\Omega)$, l'opérateur de Hodge sur le bord dépendant de la métrique sur le bord et du paramètre matériel Z .

4.2 Opérateurs de Hodge discrets

L'objectif de cette section est de définir les opérateurs de Hodge discrets. Ce sont des opérateurs métriques qui font le lien entre les variables positionnées sur le maillage primal et celles positionnées sur le maillage dual. Afin de donner une définition formelle des opérateurs de Hodge volumiques et surfaciques, la construction des opérateurs de Hodge discrets associés aux relations (4.2) est d'abord motivée sur maillage Cartésien, puis formalisée sur maillage quelconque.

4.2.1 Opérateurs de Hodge discrets sur maillage Cartésien

L'objectif est de construire deux opérateurs discrets, qui à partir des paramètres ε et μ (supposés ici constants sur le domaine), et des données métriques du maillage relient les variables discrètes $\mathbf{E} \in \mathcal{E}$ et $\mathbf{D} \in \tilde{\mathcal{F}}$, ainsi que $\mathbf{H} \in \tilde{\mathcal{E}}$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{F}$. Ces opérateurs sont nommés *opérateurs de Hodge discrets* en référence aux opérateurs de Hodge continus. Pour cette construction, on considère deux configurations géométriques : une arête primale e qui traverse une face duale $\tilde{f}(e)$ (voir Figure 4.3a), et une arête duale $\tilde{e}(f)$ qui traverse une face primale f (voir Figure 4.3b). Comme le maillage est supposé Cartésien, les faces et les arêtes duales ne sont pas brisées et sont orthogonales à leurs entités primales associées (voir Figure 4.3). Dans la première configuration, $\mathbf{D}_{\tilde{f}(e)}^n$ définit le flux électrique sur la face duale $\tilde{f}(e)$ en un instant primal t_n , et \mathbf{E}_e^n définit la force électromotrice sur l'arête primale e sur l'intervalle de temps dual $[t_{n-\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}]$ (voir Figure 4.3a). Dans la seconde configuration, $\mathbf{B}_f^{n+\frac{1}{2}}$ définit le flux magnétique sur la face f en un instant dual $t_{n+\frac{1}{2}}$, et $\mathbf{H}_{\tilde{e}(f)}^{n+\frac{1}{2}}$ définit la force magnétomotrice sur l'arête duale $\tilde{e}(f)$ sur l'intervalle de temps primal $[t_n, t_{n+1}]$ (voir Figure 4.3a).

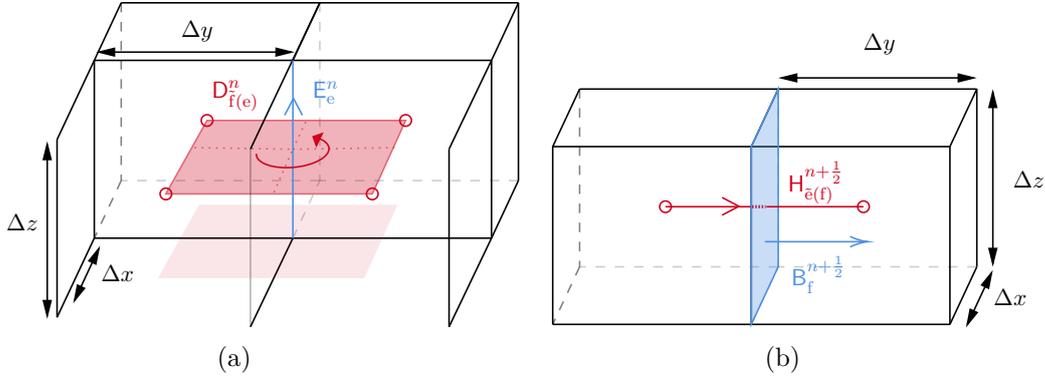


FIGURE 4.3 – Deux configurations. (a) Une arête primale, à laquelle est attaché \mathbf{E} , traversant sa face duale associée, à laquelle est attaché \mathbf{D} . (b) Une face primale, à laquelle est attaché \mathbf{B} , traversée par son arête duale associée, à laquelle est attaché \mathbf{H} .

Le flux électrique $\mathbf{D}_{\tilde{f}(e)}^n$ traversant la face duale $\tilde{f}(e)$ se mesure en Ampère seconde par mètre ($A.s/m$), la force électromotrice \mathbf{E}_e^n circulant sur l'arête e se mesure en Volt seconde ($V.s$) et le paramètre de milieu ε se mesure en Ampère seconde par Volt par mètre ($A.s/(V.m)$). Comme $\mathbf{D}_{\tilde{f}(e)}^n$ est la valeur de flux traversant la face duale $\tilde{f}(e)$, il est naturel qu'elle soit proportionnelle à l'aire de la face duale : $\Delta x \Delta y$. Pour calculer la quantité de champ électrique se déplaçant sur l'arête e dans l'intervalle de temps dual $[t_{n-\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}]$, la valeur \mathbf{E}_e^n est divisée par la longueur de l'arête Δz et la longueur de l'intervalle de temps Δt . L'équation suivante est donc homogène et relie \mathbf{D} et \mathbf{E} dans la configuration géométrique de la Figure 4.3a :

$$\mathbf{D}_{\tilde{f}(e)}^n = \varepsilon \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z \Delta t} \mathbf{E}_e^n.$$

Le même raisonnement peut être fait sur $B_f^{n+\frac{1}{2}}$, qui se mesure en Volt seconde ($V.s$), $H_{\tilde{e}(f)}^{n+\frac{1}{2}}$, qui se mesure en Ampère (A), et le paramètre de milieu μ , qui se mesure en Henry par mètre (H/m) ou de manière équivalent en Volt seconde par Ampère par mètre ($V.s/(A.m)$). La relation qui relie B et H dans la configuration géométrique de la Figure 4.3b est alors

$$H_{\tilde{e}(f)}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x \Delta z} B_f^{n+\frac{1}{2}}.$$

On définit alors les opérateurs de Hodge discrets $H_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ et $H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ tels que

$$(H_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})_{e,\tilde{f}(e)} = \varepsilon \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x}, \quad \forall e \in E \quad \text{et} \quad (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})_{f,\tilde{e}(f)} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta y}{\Delta x \Delta z}, \quad \forall f \in F, \quad (4.6)$$

et les relations constitutives discrètes peuvent alors s'écrire

$$D^n = \frac{1}{\Delta t} H_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} E^n \quad \text{et} \quad H^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} B^{n+\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

Remarque 4.2.1 (Dimension). De la même manière que les opérateurs de Hodge continus de (4.5), les opérateurs de Hodge discrets dans (4.6) encodent seulement la dualité spatiale 3D. Par contre, à la différence des équations continues (4.5), les équations (4.7) font aussi intervenir la métrique en temps. Ceci est dû au fait que dans les équations topologiques continues, la métrique en temps est implicitement contenue dans l'opérateur de dérivation ∂_t :

$$\partial_t B^{(2)} + dE^{(1)} = 0, \quad \partial_t D^{(2)} + dH^{(1)} = -J^{(2)},$$

avec $d : \Lambda^1 \rightarrow \Lambda^2$ la dérivée extérieure.

Remarque 4.2.2 (Orthogonalité). Du fait de l'orthogonalité de la configuration, les opérateurs de Hodge discrets construits sont diagonaux. Ils peuvent donc aussi être définis comme des opérateurs transformant les degrés de liberté (ddl) duaux en ddl primaux :

$$H_{\varepsilon^{-1}}^{\tilde{\mathcal{F}}\mathcal{E}} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{E} \quad \text{et} \quad H_\mu^{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{F}} : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{F},$$

et on aurait

$$H_{\varepsilon^{-1}}^{\tilde{\mathcal{F}}\mathcal{E}} = (H_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \quad \text{et} \quad H_\mu^{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{F}} = (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1}.$$

4.2.2 Définition formelle des opérateurs de Hodges discrets sur maillage quelconque

Comme cela a été discuté, les opérateurs de Hodge discrets établissent un lien entre les variables positionnées sur le maillage primal et celles positionnées sur le maillage dual. Ce lien peut être établi des variables primales vers les variables duales, ou des variables duales vers les variables primales. Étant donné un paramètre matériel α , cela donne huit opérateurs de Hodge discrets volumiques qui complètent la structure discrète introduite au Chapitre 3 (voir Figure 4.4) :

$$\begin{aligned} H_\alpha^{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}}} : \mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}, \quad H_\alpha^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}, \quad H_\alpha^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}, \quad H_\alpha^{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} : \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}, \\ H_\alpha^{\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{V}} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{V}, \quad H_\alpha^{\tilde{\mathcal{F}}\mathcal{E}} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{E}, \quad H_\alpha^{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{F}} : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{F}, \quad H_\alpha^{\tilde{\mathcal{V}}\mathcal{C}} : \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{C}. \end{aligned}$$

De manière générale, on n'a pas les égalités

$$H_\alpha^{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}}} = (H_\alpha^{\tilde{\mathcal{V}}\mathcal{C}})^{-1}, \quad H_\alpha^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} = (H_\alpha^{\tilde{\mathcal{F}}\mathcal{E}})^{-1}, \quad H_\alpha^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} = (H_\alpha^{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{F}})^{-1} \quad \text{et} \quad H_\alpha^{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} = (H_\alpha^{\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{V}})^{-1},$$

sauf quand le maillage présente une orthogonalité. A des fins pratiques (voir section suivante), les opérateurs considérés dans la suite établissent le lien du maillage primal vers le maillage dual.

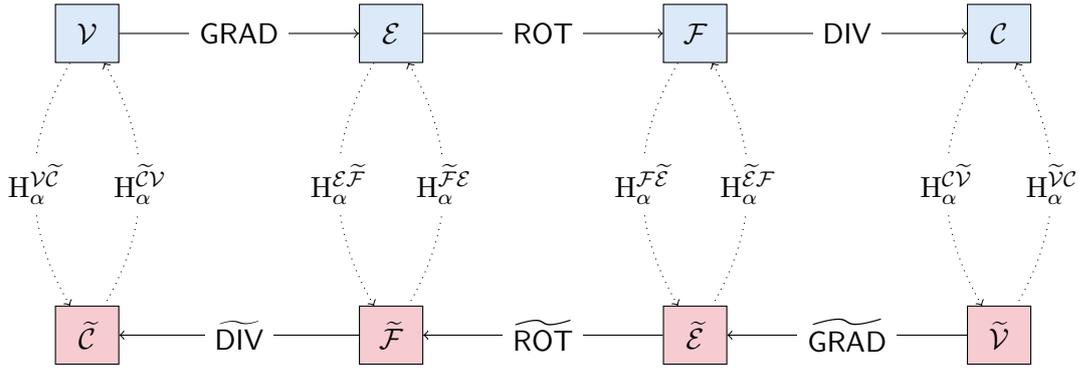


FIGURE 4.4 – Les opérateurs de Hodge discrets volumiques peuvent être définis comme transformant des ddl primaux en ddl duaux, ou inversement. Ces opérateurs complètent la structure de *de Rham* discrète introduite au Chapitre 3.

Dans le cadre des équations de Maxwell, trois opérateurs de Hodge volumiques sont considérés pour discrétiser les relations (4.2) et (4.3) :

$$H_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}, \quad H_{\sigma}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}, \quad H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}.$$

A la différence des opérateurs différentiels discrets introduits au Chapitre 3, les opérateurs de Hodge discrets ne commutent pas avec les applications de réduction, rendant ainsi les diagrammes de la Figure 4.5 non-commutatifs.

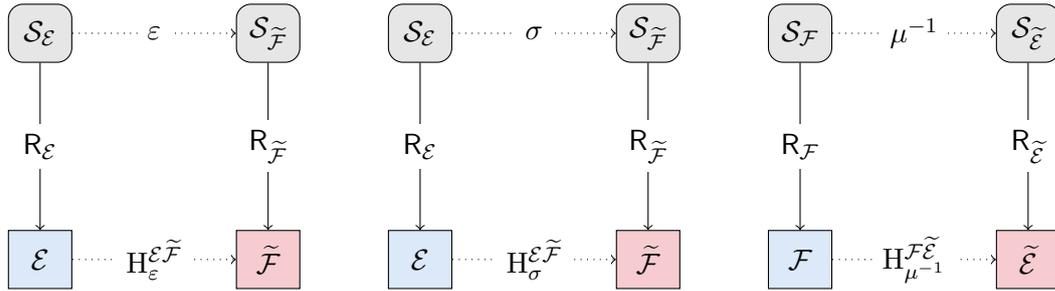


FIGURE 4.5 – Trois diagrammes non-commutatifs associés aux opérateurs de Hodge discrets $H_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$, $H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ et $H_{\sigma}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$.

Opérateurs de Hodge locaux. Les opérateurs de Hodge discrets sont définis à partir d'opérateurs de Hodge locaux. On commence alors par définir les degrés de liberté (ddl) locaux ainsi que les applications de réduction associées. Pour une cellule c , les espaces de degrés de liberté locaux sont notés \mathcal{E}_c , \mathcal{F}_c , $\tilde{\mathcal{E}}_c$ et $\tilde{\mathcal{F}}_c$, et ils contiennent les ddl associés aux entités géométriques primales et duales dans la cellule. Les opérateurs de réduction locaux sur le maillage primal coïncident avec les opérateurs de réduction globaux et sont définis par

$$R_{\mathcal{E}_c}(\cdot)|_e := R_{\mathcal{E}}(\cdot)|_e, \quad \forall e \in E_c, \quad \text{et} \quad R_{\mathcal{F}_c}(\cdot)|_f := R_{\mathcal{F}}(\cdot)|_f, \quad \forall f \in F_c.$$

Les opérateurs de réduction locaux sur le maillage dual sont, quant à eux, définis sur les morceaux d'entités duales locales :

$$R_{\tilde{\mathcal{E}}_c}(\boldsymbol{\psi})|_{\tilde{e}_c(f)} := \int_{\tilde{e}_c(f)} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{e}_c(f)}, \quad \forall f \in F_c, \quad \text{et} \quad R_{\tilde{\mathcal{F}}_c}(\boldsymbol{\psi})|_{\tilde{f}_c(e)} := \int_{\tilde{f}_c(e)} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n}_{\tilde{f}_c(e)}, \quad \forall e \in E_c.$$

Avec $\alpha \in \{\varepsilon, \sigma\}$, les opérateurs de Hodge discrets locaux

$$H_{\alpha}^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c} : \mathcal{E}_c \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_c \quad \text{et} \quad H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c} : \mathcal{F}_c \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_c,$$

sont des opérateurs de Hodge discrets s'ils vérifient les propriétés suivantes :

(H0c) $H_\alpha^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c}$ et $H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c}$ sont symétriques,

(H1c) définis positifs,

(H2c) \mathbb{P}_0 -consistants : les diagrammes de la Figure 4.6 sont commutatifs et donc pour tout champ localement constant $\mathbf{K} \in [\mathbb{P}_0(c)]^3$, les relations suivantes sont vérifiées :

$$H_\alpha^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c} R_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{K}) - R_{\tilde{\mathcal{F}}_c}(\alpha \mathbf{K}) = 0, \quad (4.8)$$

$$H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c} R_{\mathcal{F}_c}(\mathbf{K}) - R_{\tilde{\mathcal{E}}_c}(\mu^{-1} \mathbf{K}) = 0. \quad (4.9)$$

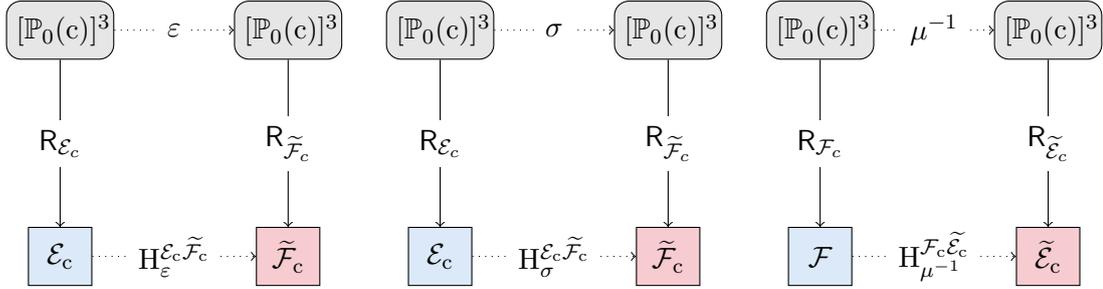


FIGURE 4.6 – Trois diagrammes commutatifs associés aux opérateurs de Hodge discrets locaux vérifiant la propriété (H2c).

Remarque 4.2.3 (Ordre élevé). En suivant une construction locale, les opérateurs locaux $H_\alpha^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c} : \mathcal{E}_c \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_c$ et $H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c} : \mathcal{F}_c \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_c$ n'imposent aucune cardinalité aux espaces de départ et d'arrivée. Il est alors possible de sous-mailler les cellules c de sorte à considérer plus d'arêtes et de faces locales, et donc de ddl locaux sur chaque cellule, et ainsi définir des opérateurs de Hodge d'ordre élevé à la manière de Gerritsma (2012). C'est l'objet du Chapitre 8.

Opérateurs de Hodge globaux. Pour $\alpha \in \{\varepsilon, \sigma\}$, les opérateurs de Hodge discrets globaux sont définis à partir des opérateurs de Hodge locaux par :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{g}, H_\alpha^{\mathcal{E} \tilde{\mathcal{F}}} \psi \rrbracket_{\mathcal{E} \tilde{\mathcal{F}}} &:= \sum_{c \in \mathcal{C}} \llbracket \mathbf{g}, H_\alpha^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c} \psi \rrbracket_{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c}, \quad \forall \mathbf{g}, \psi \in \mathcal{E}, \\ \llbracket \phi, H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F} \tilde{\mathcal{E}}} \psi \rrbracket_{\mathcal{F} \tilde{\mathcal{E}}} &:= \sum_{c \in \mathcal{C}} \llbracket \phi, H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c} \psi \rrbracket_{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c}, \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

avec les crochets de dualité sur les espaces de ddl locaux, donnés par :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{g}, \psi \rrbracket_{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c} &:= \sum_{e \in \mathbf{E}_c} \mathbf{g}_e \psi_{\tilde{f}_c(e)}, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}_c, \quad \forall \psi \in \tilde{\mathcal{F}}_c, \\ \llbracket \phi, \mathbf{h} \rrbracket_{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c} &:= \sum_{f \in \mathbf{F}_c} \phi_f \mathbf{h}_{\tilde{e}_c(f)}, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}_c, \quad \forall \mathbf{h} \in \tilde{\mathcal{E}}_c. \end{aligned}$$

Remarque 4.2.4 (Notations). A proprement parler, pour chaque cellule c , on devrait considérer les applications de rang plein $\mathbf{P}_{\mathcal{E}_c} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_c$ et $\mathbf{P}_{\mathcal{F}_c} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_c$ qui transfèrent les ddl globaux vers les ddl locaux. Cependant, de sorte à alléger les notations, l'action de ces applications est supposée implicite. Le caractère local est souligné par l'indice c associé aux espaces de ddl dans les crochets de dualité et les opérateurs de Hodge.

De part les propriétés sur les opérateurs locaux (H0c)–(H2c), les opérateurs globaux présentent les propriétés suivantes :

(H0) Symétriques,

(H1) Définis positifs,

(H2) \mathbb{P}_0 -consistants.

De la propriété (H2), les diagrammes de la Figure 4.5 sont alors commutatifs pour

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = [\mathbb{P}_0]^3, \quad \mathcal{S}_{\mathcal{F}} = [\mathbb{P}_0]^3, \quad \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}} = [\mathbb{P}_0]^3 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}} = [\mathbb{P}_0]^3.$$

Remarque 4.2.5 (Calcul extérieur discret). Du point de vue du calcul extérieur discret, les opérateurs de Hodge globaux peuvent être directement définis comme vérifiant les propriétés (H0) et (H1). Ils forment alors, avec les opérateurs différentiels discrets, une structure complètement discrète utilisable en physique théorique (voir par exemple Caltagirone (2014) et Rovelli & Zatloukal (2019)). La construction locale combinée avec la propriété (H2c), est utile du point de vue de l'analyse numérique car elle permet la construction de schémas CDO consistants (voir par exemple Bonelle & Ern (2014a)).

Opérateurs de Hodge sur le bord. Les opérateurs de Hodge discrets surfaciques établissent les liens de dualité sur le maillage de bord (voir par exemple Cantin & Ern (2016)). Ainsi la condition au bord (4.4) est discrétisée au moyen de l'opérateur de Hodge surfacique $H_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} : \mathcal{E}^\partial \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^\partial$. De même que pour les opérateurs volumiques, on donne une définition locale en dimension 2 de cet opérateur. On note alors \mathcal{E}_f^∂ et $\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial$ les espaces collectant les ddl de bord sur la face $f \subset \partial\Omega$. L'opérateur local de bord $H_Z^{(\mathcal{E}_f\tilde{\mathcal{E}}_f)^\partial} : \mathcal{E}_f^\partial \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_f^\partial$ est un opérateur de Hodge

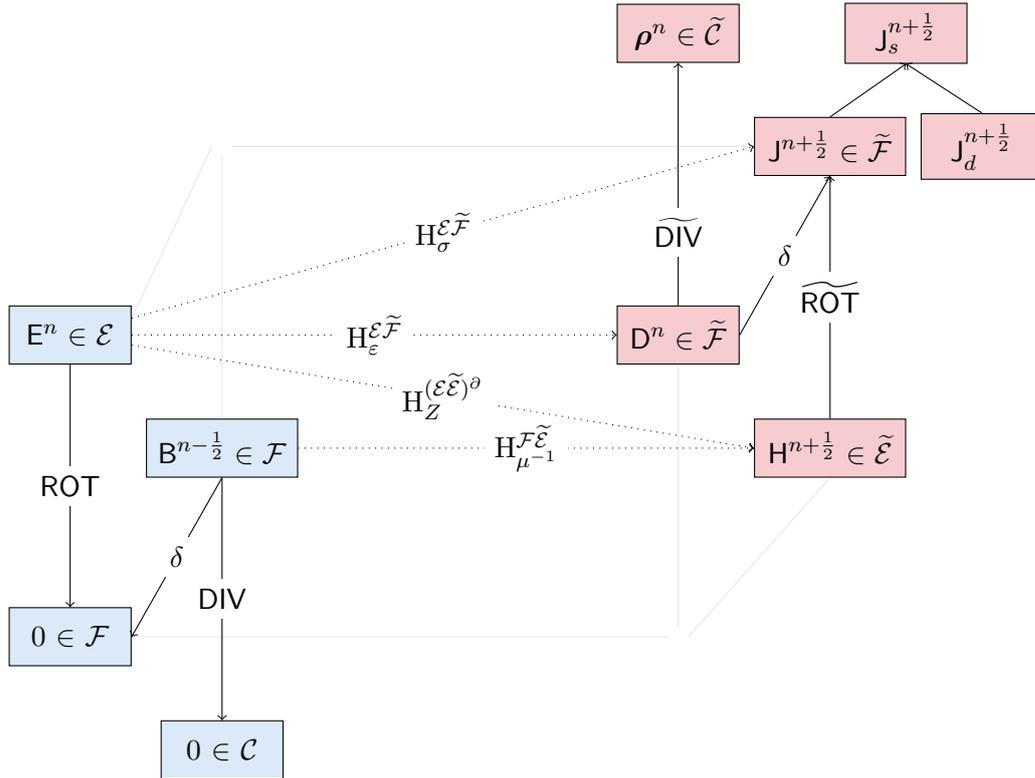


FIGURE 4.7 – Diagramme de Tonti complètement discret associé aux équations de Maxwell. Les liens topologiques sont définis par les opérateurs différentiels discrets et les relations de fermeture par les opérateurs de Hodge discrets. Les opérateurs de rotationnel et de divergence sur le maillage dual sont ici seulement représentés à l'intérieur. Les opérateurs de différenciation en temps discrets sont représentés par les opérateurs $\delta(B^{n-\frac{1}{2}}) := B^{n+\frac{1}{2}} - B^{n-\frac{1}{2}}$ et $\delta(D^n) = D^{n+1} - D^n$.

surfacique si il vérifie les propriétés suivantes :

(Hb0f) $H_Z^{(\mathcal{E}_f\tilde{\mathcal{E}}_f)^\partial}$ est symétrique,

(Hb1f) Défini positif,

(Hb2f) \mathbb{P}_0 -consistant, c'est-à-dire que dans toute cellule $c(f)$ telle que $f \subset \partial \bar{c}(f) \cap \partial \Omega$, ils vérifient :

$$\mathbb{H}_Z^{(\mathcal{E}_f \tilde{\mathcal{E}}_f)^\partial} \mathbb{R}_{\mathcal{E}_f^\partial}(\mathbf{n} \times \mathbf{K}) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(Z\mathbf{n} \times \mathbf{K}) = 0, \quad \forall \mathbf{K} \in \mathbb{P}_0(c(f)),$$

avec les opérateurs de réduction locaux surfaciques définis par

$$\mathbb{R}_{\mathcal{E}_f^\partial}(\cdot)|_e := \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\cdot)|_e, \quad \forall e \in E_f, \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(\boldsymbol{\psi})|_{\tilde{e}_f^\partial(e)} := \int_{\tilde{e}_f^\partial(e)} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{e}_f^\partial(e)}, \quad \forall e \in E_f.$$

Proposition 4.2.1. Pour tous champs \mathbf{E} et \mathbf{H} suffisamment réguliers, et tout $f \in F^\partial$, si

$$\mathbf{n}_f \times [\mathbf{n}_f \times \mathbf{H} + Z\mathbf{E}] = 0, \quad \text{alors} \quad \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(\mathbf{n}_f \times \mathbf{H} + Z\mathbf{E}) = 0.$$

Preuve. Reportée dans l'Annexe à la fin du chapitre. □

D'après la Proposition 4.2.1, la propriété (Hb2f) peut se reformuler de la manière suivante :

(Hb2f*) Pour tout $f \in F^\partial$, et toute cellule $c(f)$ telle que $f \subset \partial c$:

$$\mathbb{H}_Z^{(\mathcal{E}_f \tilde{\mathcal{E}}_f)^\partial} \mathbb{R}_{\mathcal{E}_f^\partial}(\mathbf{K}) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(Z\mathbf{K}) = 0, \quad \forall \mathbf{K} \in \mathbb{P}_0(c(f)). \quad (4.10)$$

L'opérateur de Hodge global surfacique est alors défini par

$$\llbracket \mathbf{g}, \mathbb{H}_Z^{(\mathcal{E} \tilde{\mathcal{E}})^\partial} \mathbf{h}^\partial \rrbracket_{(\mathcal{E} \tilde{\mathcal{E}})^\partial} := \sum_{f \in F^\partial} \llbracket \mathbf{g}, \mathbb{H}_Z^{(\mathcal{E}_f \tilde{\mathcal{E}}_f)^\partial} \mathbf{h}^\partial \rrbracket_{(\mathcal{E}_f \tilde{\mathcal{E}}_f)^\partial}, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}^\partial, \quad \forall \mathbf{h}^\partial \in \tilde{\mathcal{E}}^\partial.$$

De la même manière que pour les opérateurs volumiques, l'action des applications de restrictions reliant les ddl globaux et les ddl locaux surfaciques est supposée implicite (voir Remarque 4.2.4). Avec les opérateurs de Hodge volumiques, l'opérateur de Hodge surfacique permet de compléter le diagramme de Tonti discret appliqué aux équations de Maxwell. Celui-ci est représenté sur la Figure 4.7. D'après les propriétés locales surfaciques (Hb0f)–(H2f*), l'opérateur $\mathbb{H}_Z^{(\mathcal{E} \tilde{\mathcal{E}})^\partial}$ est :

(Hb0) symétrique,

(Hb1) défini positif,

(Hb2) \mathbb{P}_0 -consistant.

La section suivante s'attache à donner une construction pratique des opérateurs de Hodge volumiques qui seront considérés dans les applications.

4.2.3 Construction pratique des opérateurs de Hodge discrets volumiques

Dans la pratique, les opérateurs de Hodge discrets peuvent être construits de différentes manières. Soit en définissant les entrées de la matrice directement, soit, dans l'esprit de la méthode des éléments finis, ils peuvent être construits comme des matrices de masse (voir "Galerkin mass matrices" Bossavit (1988a)). C'est cette deuxième approche que l'on considère : les opérateurs de Hodge locaux $\mathbb{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c}$ et $\mathbb{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c}$ sont construits comme des matrices de masse dépendant des paramètres matériels, c'est-à-dire

$$(\mathbb{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c})_{e_1, e_2} := \int_c \boldsymbol{\ell}_{e_1, c}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon \boldsymbol{\ell}_{e_2, c}(\mathbf{x}), \quad \forall e_1, e_2 \in E_c \quad (4.11a)$$

$$(\mathbb{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c})_{f_1, f_2} := \int_c \boldsymbol{\ell}_{f_1, c}(\mathbf{x}) \cdot \mu^{-1} \boldsymbol{\ell}_{f_2, c}(\mathbf{x}), \quad \forall f_1, f_2 \in F_c, \quad (4.11b)$$

avec $\{\boldsymbol{\ell}_{f, c}\}_{f \in F_c}$ et $\{\boldsymbol{\ell}_{e, c}\}_{e \in E_c}$ deux ensembles de fonctions de forme locales vérifiant les propriétés suivantes :

(R1) [*Unisolvanace*] Pour toute cellule $c \in \mathbf{C}$

$$\int_{e'} \boldsymbol{\ell}_e = \delta_{e,e'}, \quad \forall e, e' \in \mathbf{E}_c \quad \text{et} \quad \int_{f'} \boldsymbol{\ell}_f = \delta_{f,f'}, \quad \forall f, f' \in \mathbf{F}_c. \quad (4.12a)$$

(R2) [*Stabilité*] Pour chaque cellule c , il existe deux constantes $\eta_{\mathcal{E}_c}, \eta_{\mathcal{F}_c} > 0$ telles que les opérateurs de reconstructions locaux $\mathbf{L}_{\mathcal{E}_c} : \mathcal{E}_c \rightarrow [\mathbb{P}_0(c)]^3$ et $\mathbf{L}_{\mathcal{F}_c} : \mathcal{F}_c \rightarrow [\mathbb{P}_0(c)]^3$ définis par

$$\mathbf{L}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{g})(\mathbf{x}) := \sum_{e \in \mathbf{E}_c} \mathbf{g}_e \boldsymbol{\ell}_e(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{\mathcal{F}_c}(\boldsymbol{\phi})(\mathbf{x}) := \sum_{f \in \mathbf{F}_c} \boldsymbol{\phi}_f \boldsymbol{\ell}_f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in c,$$

vérifient

$$\eta_{\mathcal{E}_c} \|\mathbf{g}\|_{2,\mathcal{E}_c}^2 \leq \|\mathbf{L}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{g})\|_{L^2(c)}^2 \leq \eta_{\mathcal{E}_c}^{-1} \|\mathbf{g}\|_{2,\mathcal{E}_c}^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}_c, \quad (4.13a)$$

$$\eta_{\mathcal{F}_c} \|\boldsymbol{\phi}\|_{2,\mathcal{F}_c}^2 \leq \|\mathbf{L}_{\mathcal{F}_c}(\boldsymbol{\phi})\|_{L^2(c)}^2 \leq \eta_{\mathcal{F}_c}^{-1} \|\boldsymbol{\phi}\|_{2,\mathcal{F}_c}^2, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{F}_c, \quad (4.13b)$$

avec les normes sur les espaces de ddl

$$\|\mathbf{g}\|_{2,\mathcal{E}_c}^2 = \sum_{e \in \mathbf{E}_c} h_c \mathbf{g}_e^2 \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{\phi}\|_{2,\mathcal{F}_c}^2 = \sum_{f \in \mathbf{F}_c} h_c^{-1} \boldsymbol{\phi}_f^2.$$

(R3) [*Partition de l'unité*] Pour toute cellule $c \in \mathbf{C}$

$$\sum_{e \in \mathbf{E}_c} \boldsymbol{\ell}_e(\mathbf{x}) \otimes e = \underline{\mathbf{Id}} \quad \text{et} \quad \sum_{f \in \mathbf{F}_c} \boldsymbol{\ell}_f(\mathbf{x}) \otimes f = \underline{\mathbf{Id}}, \quad \forall \mathbf{x} \in c. \quad (4.14a)$$

(R4) [*Consistance géométrique*]

$$\int_c \boldsymbol{\ell}_e = \tilde{f}_c(e), \quad \forall e \in \mathbf{E}_c \quad \text{et} \quad \int_c \boldsymbol{\ell}_f = \tilde{e}_c(f), \quad \forall f \in \mathbf{F}_c. \quad (4.15a)$$

Comme montré dans Codocasa & Trevisan (2010a), la propriété **(R1)** est équivalente à : pour toute cellule $c \in \mathbf{C}$

$$\mathbf{R}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{L}_{\mathcal{E}_c}) = id \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{\mathcal{F}_c}(\mathbf{L}_{\mathcal{F}_c}) = id, \quad (4.16)$$

et la propriété **(R3)** est équivalente à : pour tout champ constant $\mathbf{K} \in [\mathbb{P}_0(c)]^3$

$$\mathbf{L}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{R}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{K})) = \mathbf{K} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{\mathcal{F}_c}(\mathbf{R}_{\mathcal{F}_c}(\mathbf{K})) = \mathbf{K}. \quad (4.17)$$

La proposition suivante relie les propriétés **(R2)**–**(R4)** aux propriétés **(H0)**–**(H2)**

Proposition 4.2.2. Soient $\mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}$ et $\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}$ deux opérateurs de Hodge discrets définis à partir des opérateurs de Hodge locaux $\mathbf{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E}_c\tilde{\mathcal{F}}_c}$ et $\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c\tilde{\mathcal{E}}_c}$ définis par (4.11). Si les propriétés **(R2)**, **(R3)** **(R4)** sont vérifiées alors **(H0)**, **(H1)** et **(H2)** le sont aussi.

Preuve. Les arguments étant les mêmes pour les deux opérateurs, on donne les détails du raisonnement dans le cas de l'opérateur $\mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}$. **(H0)** est vérifiée par définition. L'hypothèse **(H1)** est vérifiée du fait de **(R2)** et que pour tout $\mathbf{g} \in \mathcal{E}_c$

$$\llbracket \mathbf{g}, \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{g} \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} = \sum_{c \in \mathbf{C}} \llbracket \mathbf{g}, \mathbf{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E}_c\tilde{\mathcal{F}}_c} \mathbf{g} \rrbracket_{\mathcal{E}_c\tilde{\mathcal{F}}_c} \quad (\text{définition de } \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}) \quad (4.18)$$

$$= \sum_{c \in \mathbf{C}} \int_c \mathbf{L}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{g}) \cdot \varepsilon \mathbf{L}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{g}) \quad (\text{définition de } \mathbf{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E}_c\tilde{\mathcal{F}}_c}) \quad (4.19)$$

$$= \|\varepsilon \mathbf{L}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{g})\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.20)$$

Enfin si **(R3)** et **(R4)** sont vérifiées, alors pour $\mathbf{K} \in [\mathbb{P}_0(c)]^3$ un champ constant et pour $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{E}_c$, il vient

$$\llbracket \boldsymbol{\psi}, H_{\varepsilon}^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c} R_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{K}) \rrbracket_{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c} = \int_c L_{\mathcal{E}_c}(\boldsymbol{\psi}) \cdot \varepsilon L_{\mathcal{E}_c}(R_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{K})) \quad (\text{définition de } H_{\varepsilon}^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c}) \quad (4.21)$$

$$= \int_c L_{\mathcal{E}_c}(\boldsymbol{\psi}) \cdot \varepsilon \mathbf{K} \quad (\mathbf{R3}) \text{ dans la version (4.17)} \quad (4.22)$$

$$= \left(\sum_{e \in E_c} \boldsymbol{\psi}_e \int_c \ell_e \right) \cdot \varepsilon \mathbf{K} \quad \text{linéarité et bilinéarité} \quad (4.23)$$

$$= \left(\sum_{e \in E_c} \boldsymbol{\psi}_e \tilde{f}_c(e) \right) \cdot \varepsilon \mathbf{K} \quad (\mathbf{R4}) \quad (4.24)$$

$$= \llbracket \boldsymbol{\psi}, R_{\tilde{\mathcal{F}}_c}(\varepsilon \mathbf{K}) \rrbracket_{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c}. \quad (\text{définition de } R_{\tilde{\mathcal{F}}_c} \text{ et de } \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c}) \quad (4.25)$$

La somme sur les cellules donne **(H2)**. □

L'objectif étant de considérer des maillages hybrides dans les applications, les opérateurs de Hodge locaux seront donc construits en fonction de la géométrie de la cellule considérée. Pour cela, pour chaque type de cellule, on définit des fonctions de forme vérifiant les propriétés **(R1)** – **(R4)**.

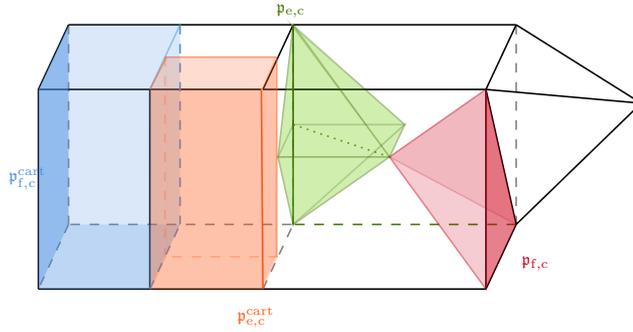


FIGURE 4.8 – Exemple de subdivisions locales : $\mathbf{p}_{f,c}^{\text{cart}}$ (bleu), $\mathbf{p}_{e,c}^{\text{cart}}$ (orange), $\mathbf{p}_{f,c}$ (rouge) et $\mathbf{p}_{e,c}$ (vert).

Cellules cartésiennes. Pour une cellule cartésienne $c \in \mathcal{C}$, les fonctions de forme peuvent être choisies telles que

$$\ell_{e,c}^{\text{cart}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} |e|^{-1} \boldsymbol{\tau}_e & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbf{p}_{e,c}^{\text{cart}}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{and} \quad \ell_{f,c}^{\text{cart}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} |f|^{-1} \mathbf{n}_f & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbf{p}_{f,c}^{\text{cart}}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.26)$$

avec $\mathbf{p}_{e,c}^{\text{cart}} \subset c$ et $\mathbf{p}_{f,c}^{\text{cart}} \subset c$ les pavés respectivement engendrés par e et $\tilde{f}_c(e)$, et f et $\tilde{e}_c(f)$ (voir Figure 4.8). Le choix de ces fonctions de forme définit des opérateurs de Hodge diagonaux :

$$(H_{\varepsilon}^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c})_{e,e} = \frac{\varepsilon |\mathbf{p}_{e,c}^{\text{cart}}|}{|e|^2}, \quad \forall e \in E_c \quad \text{et} \quad (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c})_{f,f} = \frac{|\mathbf{p}_{f,c}^{\text{cart}}|}{\mu |f|^2}, \quad \forall f \in F_c,$$

avec

$$|\mathbf{p}_{e,c}^{\text{cart}}| := |e| |\tilde{f}_c(e)| \quad \text{et} \quad |\mathbf{p}_{f,c}^{\text{cart}}| := |f| |\tilde{e}_c(f)|.$$

Cellules polyédriques. Si la cellule c est polyédrique, on note $\mathbf{p}_{e,c}$ et $\mathbf{p}_{f,c}$ respectivement les "diamants" et les "pyramides" définis par

$$\mathbf{p}_{e,c} := \bigcup_{v \in V_e} \bigcup_{f \in F_e} \mathbf{t}_{v,e,f,c} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_{f,c} := \bigcup_{v \in V_f} \bigcup_{e \in E_f} \mathbf{t}_{v,e,f,c},$$

avec $\mathbf{t}_{v,e,f,c} = \text{CO}\{\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_e, \mathbf{x}_f, \mathbf{x}_c\}$. Leurs volumes sont alors donnés par les formules :

$$|\mathbf{p}_{e,c}| := \frac{1}{3}|e| \cdot |\tilde{\mathbf{f}}_c(e)|(\mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{f}}_c(e)} \cdot \mathbf{t}_e) \quad \text{et} \quad |\mathbf{p}_{f,c}| = \frac{1}{3}|f| \cdot |\tilde{\mathbf{e}}_c(f)|(\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_c(f)} \cdot \mathbf{n}_f).$$

Pour une cellule polyédrique $c \in \mathbf{C}$, les fonctions de reconstruction peuvent être choisies telles que :

$$\begin{aligned} \ell_{f,c}|_{\mathbf{p}_{f',c}} &:= \frac{\beta}{|\mathbf{p}_{f',c}|} \tilde{\mathbf{e}}_c(f) \delta_{f,f'} + \left(\underline{\text{Id}} - \beta \frac{\tilde{\mathbf{e}}_c(f') \otimes \mathbf{f}'}{|\mathbf{p}_{f',c}|} \right) \frac{\tilde{\mathbf{e}}_c(f)}{|c|} \quad \forall f, f' \in \mathbf{F}_c, \\ \ell_{e,c}|_{\mathbf{p}_{e',c}} &:= \frac{\beta}{|\mathbf{p}_{e',c}|} \tilde{\mathbf{f}}_c(e) \delta_{e,e'} + \left(\underline{\text{Id}} - \beta \frac{\tilde{\mathbf{f}}_c(e') \otimes \mathbf{e}'}{|\mathbf{p}_{e',c}|} \right) \frac{\tilde{\mathbf{f}}_c(e)}{|c|} \quad \forall e, e' \in \mathbf{E}_c, \end{aligned} \quad (4.27)$$

avec $\beta > 0$ un paramètre de stabilisation, $\delta_{f,f'}$ et $\delta_{e,e'}$ les symboles de Kronecker, et les vecteurs géométriques

$$\tilde{\mathbf{e}}_c(f) = |\tilde{\mathbf{e}}_c(f)| \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_c(f)}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_c(e) = |\tilde{\mathbf{f}}_c(e)| \mathbf{n}_{\tilde{\mathbf{f}}_c(e)}, \quad \mathbf{e} = |e| \boldsymbol{\tau}_e \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = |f| \mathbf{n}_f.$$

Ces fonctions sont définies sur tout polyèdre vérifiant les hypothèses de régularité énoncées au Chapitre 2. Elles donnent des opérateurs de Hodge locaux non-diagonaux, même sur des cellules cartésiennes. Si d représente la dimension de l'espace, le choix $\beta = \frac{1}{\sqrt{d}}$ (voir Bonelle *et al.* (2015) pour une étude de l'influence de ce paramètre sur le coût calcul) donne les fonctions de reconstruction SUSHI considérées par Eymard *et al.* (2009), tandis que le choix $\beta = \frac{1}{d}$ donne les fonctions de forme DGA introduites par Codecasa *et al.* (2010b). Dans la pratique, ce sont les fonctions DGA que l'on utilisera.

Cellules tétraédriques. Pour une cellule tétraédrique $c \in \mathbf{C}$, les fonctions de forme peuvent être choisies telles que :

$$\ell_{e,c} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{e(e)}) \times \boldsymbol{\tau}_{e(e)}}{e \cdot \left((\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_{e(e)}) \times \boldsymbol{\tau}_{e(e)} \right)} \quad \text{et} \quad \ell_{f,c}(\mathbf{x}) = \iota_{f,c} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{v(f)}}{d|c|}. \quad (4.28)$$

Le choix de ces fonctions donne des opérateurs de Hodge locaux denses. Ce sont les formes de Whitney (1957) qui correspondent respectivement aux éléments d'arêtes introduits par Nédélec (1980) et aux éléments de face introduits par Raviart & Thomas (1977). Ce choix correspond aux "Différences Finies Généralisées" introduites par Bossavit (2001).

Remarque 4.2.6 (Formes de Whitney). En ce qui concerne les éléments d'arêtes et de face, Auchmann & Kurz (2006) ont établi un lien entre la géométrie des tétraèdres et des fonctions de forme elles-mêmes.

Remarque 4.2.7 (Autres opérateurs de Hodge discrets). D'autres choix sont possibles pour construire les opérateurs de Hodge discrets. On peut par exemple se référer à Clemens & Weiland (2001), Tonti (2001), Nicolaidis & Wang (1998), Euler (2007) et Back & Sonnendrücker (2014).

Maintenant que les opérateurs de Hodge discrets sont définis, la section suivante s'attache à discrétiser les relations constitutives définies dans la Section 4.1.2.

4.3 Discrétisation des relations constitutives

Dans le cadre CDO appliqué aux équations de Maxwell, la discrétisation des relations constitutives engendre une erreur de consistance qui se traduit par la non-commutativité des diagrammes de la Figure 4.5 (à l'inverse du fait que les applications de réduction commutent avec les opérateurs différentiels, voir Proposition 3.4.2 et Proposition 3.4.6). C'est le point de vue adopté, dans le cadre des équations de Maxwell, par Bossavit (1988a), Hiptmair (2001a), et Codecasa & Trevisan (2010a), et de manière générale par Bonelle & Ern (2014a) et Cantin &

Ern (2016). Cette erreur de consistance a deux composantes : une en espace et une en temps. La section Section 4.3.1 définit la première, puis la Section 4.3.2 définit la seconde, avant de donner une formulation complètement discrète des relations constitutives.

Dans la suite, tous les champs de vecteurs considérés sont supposés suffisamment réguliers de sorte à ce que toutes les opérations aient un sens. De plus, comme l'erreur sur la discrétisation de la loi d'Ohm (4.3) n'est pas considérée dans l'analyse du schéma (voir Chapitre 5), on donne seulement la formulation discrète en espace et en temps de celle-ci sans décrire tout le processus de discrétisation.

4.3.1 Erreur de consistance en espace

La réduction des relations constitutives (4.2) et (4.3), relativement au placement des variables, donne pour tout $t \in [0, t_F]$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) &= \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)), & \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) &= \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mu^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)), \\ \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) &= -\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{Z} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)), \end{aligned} \quad (4.29)$$

où la version globale de la Proposition 4.2.1 a été utilisée pour la réduction de la condition au bord (4.4). La non-commutativité en espace dans les relations constitutives est mesurée à partir des quantités suivantes. Pour tout $t \in [0, t_F]$

$$\begin{aligned} [\varepsilon, \tilde{\varepsilon}] (\mathbf{E})(t) &:= \mathbf{H}_\varepsilon^{\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\varepsilon(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)), \\ [\mu^{-1}, \tilde{\mu}^{-1}] (\mathbf{B})(t) &:= \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{R}_{\mu^{-1}}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mu^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)), \\ [\mathbf{Z}, (\tilde{\varepsilon})^\partial] (\mathbf{E}) &= -\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{(\tilde{\mathcal{E}})^\partial} \mathbf{R}_{\varepsilon^\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{Z} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)). \end{aligned}$$

Ainsi les relations constitutives réduites (4.29) peuvent s'écrire

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{H}_\varepsilon^{\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\varepsilon(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) - [\varepsilon, \tilde{\varepsilon}] (\mathbf{E})(t), \quad (4.30)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{R}_{\mu^{-1}}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) - [\mu^{-1}, \tilde{\mu}^{-1}] (\mathbf{B})(t), \quad (4.31)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) = -\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}^{(\tilde{\mathcal{E}})^\partial} \mathbf{R}_{\varepsilon^\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) + [\mathbf{Z}, (\tilde{\varepsilon})^\partial] (\mathbf{E}). \quad (4.32)$$

Dans la suite, l'équation (4.31) est utilisée sous la forme

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mu \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) = (\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) - [\mu, \tilde{\mu}] (\mathbf{B}), \quad (4.33)$$

pour tout $t \in [0, t_F]$, avec

$$[\mu, \tilde{\mu}] (\mathbf{B}) := (\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}) - \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mu \mathbf{B}), \quad \text{tel que} \quad [\mu^{-1}, \tilde{\mu}^{-1}] (\mathbf{B}) = -\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\tilde{\mathcal{E}}} [\mu, \tilde{\mu}] (\mathbf{B}).$$

Remarque 4.3.1 (Réduction de la loi d'Ohm). En suivant le même raisonnement, la loi d'Ohm réduite s'écrit

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{H}_\sigma^{\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\sigma(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) - [\sigma, \tilde{\sigma}] (\mathbf{E})(t),$$

pour tout $t \in [0, t_F]$, avec

$$[\sigma, \tilde{\sigma}] (\mathbf{E})(t) = \mathbf{H}_\sigma^{\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\sigma(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)).$$

4.3.2 Erreur de consistance en temps

De la même manière que les erreurs de consistance en espace, les erreurs de consistance en temps résultent de la non-commutativité des opérateurs de réduction sur le maillage temporel.

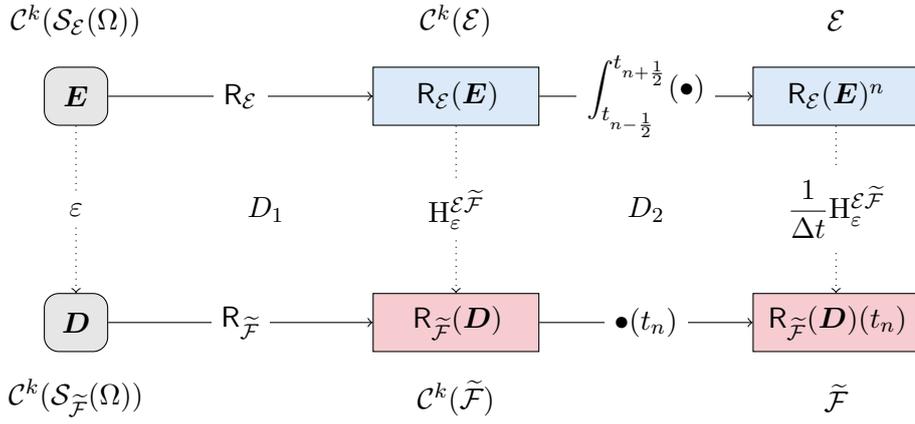


FIGURE 4.9 – Diagrammes non-commutatifs en espace (D_1) et en temps (D_2), associés à la relation constitutive $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. L'intégrale en temps $\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E})$ est notée $\mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E})^n$.

Réduction temporelle de $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. Pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, l'équation (4.30) prise à l'instant primal t_n , donne

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t_n)) = \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_n)) - [\varepsilon, \varepsilon\tilde{\mathcal{F}}](\mathbf{E})(t_n). \quad (4.34)$$

Comme \mathbf{E} est associé aux intervalles de temps duaux, l'équation (4.34) est inconsistante par rapport à cette association puisqu'il est évalué à l'instant primal t_n . Cette erreur en temps est mesurée par les quantités

$$[\Delta t, t_n](\mathbf{E}) := \frac{1}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt - \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_n)), \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket,$$

et pour $n = 0$ et $n = N$ par les quantités

$$\begin{aligned} [\Delta t, t_0](\mathbf{E}) &:= \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt - \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_0)), \\ [\Delta t, t_N](\mathbf{E}) &:= \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_N} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt - \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_N)). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ l'équation (4.34) devient

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t_n)) = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt - [\Delta t, t_n](\mathbf{E}) - [\varepsilon, \varepsilon\tilde{\mathcal{F}}](\mathbf{E})(t_n),$$

et pour $n = 0$ et $n = N$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t_0)) &= \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt - [\Delta t, t_0](\mathbf{E}) - [\varepsilon, \varepsilon\tilde{\mathcal{F}}](\mathbf{E})(t_0), \\ \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t_N)) &= \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_N} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt - [\Delta t, t_N](\mathbf{E}) - [\varepsilon, \varepsilon\tilde{\mathcal{F}}](\mathbf{E})(t_N). \end{aligned}$$

On définit alors l'erreur globale comme la somme de l'erreur en espace et de l'erreur en temps :

$$[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^n := [\Delta t, t_n](\mathbf{E}) + [\varepsilon, \varepsilon\tilde{\mathcal{F}}](\mathbf{E})(t_n), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

En reprenant les notations du Chapitre 3, les équations complètement discrètes sont données par

$$\mathbf{D}^n = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{E}^n, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad (4.35)$$

et

$$\mathbf{D}^0 = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{E}^0, \quad \mathbf{D}^N = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{E}^N. \quad (4.36)$$

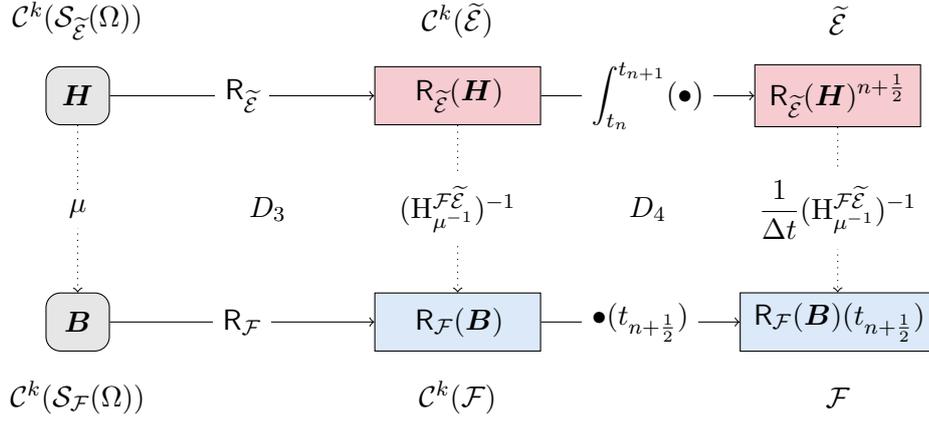


FIGURE 4.10 – Diagrammes non-commutatifs en espace (D_3) et en temps (D_4), associés à la relation constitutive $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. L'intégrale en temps $\int_{t_n}^{t_{n+1}} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H})$ est notée $R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H})^{n+\frac{1}{2}}$.

Réduction temporelle de $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Pour tout $n \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$, avec les notations $t_{-\frac{1}{2}} = t_0$ et $t_{N+\frac{1}{2}} = t_N$, l'équation (4.33) prise au temps dual $t_{n-\frac{1}{2}}$ donne

$$R_{\mathcal{F}}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_{n-\frac{1}{2}})) = (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t_{n-\frac{1}{2}})) - [\mu, \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{F}}](\mathbf{H})(t_{n-\frac{1}{2}}). \quad (4.37)$$

Comme \mathbf{H} est associé aux intervalles de temps primaux, l'équation (4.37) est inconsistante par rapport à cette association puisqu'il est évalué à l'instant dual $t_{n-\frac{1}{2}}$. Cette erreur en temps est mesurée par les quantités

$$\begin{aligned} [\Delta t, t_{n+\frac{1}{2}}](\mathbf{H}) &:= \frac{1}{\Delta t} (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) dt - (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t_{n+\frac{1}{2}})), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \\ [\Delta t, t_0](\mathbf{H}) &:= \frac{2}{\Delta t} (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) dt - (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t_0)), \\ [\Delta t, t_N](\mathbf{H}) &:= \frac{2}{\Delta t} (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_N} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) dt - (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t_N)). \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, l'équation (4.37) peut alors se réécrire

$$R_{\mathcal{F}}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_{n+\frac{1}{2}})) = \frac{1}{\Delta t} (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) dt - [\Delta t, t_{n+\frac{1}{2}}](\mathbf{H}) - [\mu, \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{F}}](\mathbf{H})(t_{n+\frac{1}{2}}),$$

et pour $n = 0$ et $n = N$,

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{F}}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_0)) &= \frac{2}{\Delta t} (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) dt - [\Delta t, t_0](\mathbf{H}) - [\mu, \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{F}}](\mathbf{H})(t_0), \\ R_{\mathcal{F}}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t_N)) &= \frac{2}{\Delta t} (H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_N} R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) dt - [\Delta t, t_N](\mathbf{H}) - [\mu, \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{F}}](\mathbf{H})(t_N). \end{aligned}$$

On définit alors l'erreur de commutation globale, comme la somme de l'erreur en espace et de l'erreur en temps :

$$[\mu, \Delta t](\mathbf{H})^{n-\frac{1}{2}} := [\Delta t, t_{n-\frac{1}{2}}](\mathbf{H}) + [\mu, \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{F}}](\mathbf{H})(t_{n-\frac{1}{2}}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket,$$

avec les notations $t_{-\frac{1}{2}} = t_0$, $t_{N+\frac{1}{2}} = t_N$, et

$$[\mu, \Delta t](\mathbf{H})^{-\frac{1}{2}} = [\mu, \Delta t](\mathbf{H})^0 \quad \text{et} \quad [\mu, \Delta t](\mathbf{H})^{N+\frac{1}{2}} = [\mu, \Delta t](\mathbf{H})^N.$$

En reprenant les notations du Chapitre 3, les équations complètement discrètes sont alors données par

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (4.38)$$

et

$$\frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}^0 = \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{B}^0, \quad \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}^N = \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{B}^N. \quad (4.39)$$

Réduction temporelle de la condition au bord. L'équation (4.32) intégrée sur l'intervalle de temps primal $[t_n, t_{n+1}]$, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, donne

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}\partial}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) dt = -\mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [Z, (\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial](\mathbf{E})(t) dt. \quad (4.40)$$

La particularité de la condition au bord (4.4) est qu'elle relie deux variables associées aux intervalles de temps (voir Figure 4.2). Comme \mathbf{E} est associé aux intervalles de temps duaux, l'intégrale sur $[t_n, t_{n+1}]$ de $\mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E})$ est approchée par la moyenne des intégrales de $\mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E})$ sur les intervalles de temps duaux adjacents. Pour tout $n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket$, cette approximation est mesurée par la quantité :

$$\begin{aligned} [\Delta t, [t_n, t_{n+1}]](\mathbf{E}) := & \frac{1}{2} \mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial} \left(\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{3}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt \right) \\ & - \mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}\partial}(Z\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt, \end{aligned}$$

et pour $n = 0$ et $n = N-1$ par les quantités :

$$\begin{aligned} [\Delta t, [t_0, t_1]](\mathbf{E}) := & \mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial} \left(\int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{\frac{1}{2}}}^{t_{\frac{3}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt \right) \\ & - \mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\Delta t, [t_{N-1}, t_N]](\mathbf{E}) := & \mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial} \left(\int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_N} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{N-\frac{3}{2}}}^{t_{N-\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt \right) \\ & - \mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt. \end{aligned}$$

L'équation (4.40) peut alors se réécrire pour tout $n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}\partial}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) dt = & -\frac{1}{2} \mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial} \left(\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{3}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt \right) \\ & + [\Delta t, [t_n, t_{n+1}]](\mathbf{E}) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [Z, (\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial](\mathbf{E})(t) dt, \end{aligned}$$

et pour les instants initial et final :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}\partial}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) dt := & -\mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial} \left(\int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{\frac{1}{2}}}^{t_{\frac{3}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt \right) \\ & + [\Delta t, [t_0, t_1]](\mathbf{E}) + \int_{t_0}^{t_1} [Z, (\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})\partial](\mathbf{E})(t) dt, \end{aligned}$$

$$\int_{t_{N-1}}^{t_N} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)) dt := -\mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} \left(\int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_N} \mathbf{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt + \frac{1}{2} \int_{t_{N-\frac{3}{2}}}^{t_{N-\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt \right) + [\Delta t, [t_{N-1}, t_N]](\mathbf{E}) + \int_{t_{N-1}}^{t_N} [Z, (\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial](\mathbf{E})(t) dt.$$

L'erreur de commutation globale sur le bord est alors donnée par

$$[Z, \Delta t](\mathbf{E})^n := [\Delta t, [t_n, t_{n+1}]](\mathbf{E}) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [Z, (\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial](\mathbf{E})(t) dt, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket.$$

En reprenant les notations du Chapitre 3 et en notant

$$\{\mathbf{E}^n\} := \frac{\mathbf{E}^n + \mathbf{E}^{n+1}}{2}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket, \quad \text{et} \quad \{\mathbf{E}^0\} = \frac{1}{2}\mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^0, \quad \{\mathbf{E}^{N-1}\} = \frac{1}{2}\mathbf{E}^{N-1} + \mathbf{E}^N,$$

on obtient la condition au bord complètement discrète

$$\mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}} = -\mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} \{\gamma(\mathbf{E}^n)\}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket.$$

La loi d'Ohm se discrétise en temps de la même manière, ainsi l'équation complètement discrète obtenue est :

$$\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_\sigma^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \{\mathbf{E}^n\}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket.$$

Conclusion partielle

Dans ce chapitre, on a discrétisé, dans le cadre CDO, les relations constitutives des équations de Maxwell. Pour cela, dans la Section 4.1, on a défini les relations constitutives considérées dans la suite. On a également discuté du caractère géométrique particulier de ces relations, notamment à travers les opérateurs de Hodge continus. Ensuite, dans la Section 4.2, on a construit des opérateurs de Hodge discrets sur maillage cartésien, puis on les a définis de manière formelle sur maillage quelconque et on a donné une construction pratique de ceux-ci à partir d'opérateurs définis localement. Enfin, dans la Section 4.3, on a décrit le processus de discrétisation des relations constitutives, et définit les erreurs de consistance en espace et en temps.

Le chapitre suivant se concentre sur l'analyse numérique du schéma CDO, notamment en ce qui concerne l'estimation des erreurs de consistance.

Annexe du Chapitre 4

Preuve de la Proposition 4.2.1. Soient \mathbf{E} et \mathbf{H} deux champs suffisamment réguliers et soit $f \in \mathbf{F}^\partial$. En posant

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}_f \times \mathbf{H} + Z\mathbf{E} \text{ sur } f,$$

la condition (4.4) peut se réécrire

$$\mathbf{n}_f \times \mathbf{u} = 0. \tag{4.41}$$

La décomposition de \mathbf{u} dans la base $\{\mathbf{n}_f, \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}, \mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}\}$ (voir Figure 4.11) est

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f)\mathbf{n}_f + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)})\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)} + (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}))\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}.$$

Ainsi le produit vectoriel de \mathbf{u} par \mathbf{n}_f est

$$\mathbf{n}_f \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_f)(\mathbf{n}_f \times \mathbf{n}_f) + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)})(\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}) + (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}))(\mathbf{n}_f \times (\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)})).$$

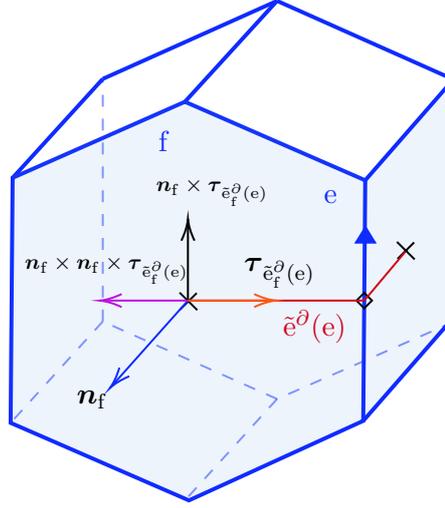


FIGURE 4.11

Comme $\mathbf{n}_f \times \mathbf{n}_f = 0$, la condition (4.41) peut alors s'écrire

$$(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)})(\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}) + (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}))(\mathbf{n}_f \times (\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)})) = 0.$$

Or, par la règle de la main droite (voir Figure 4.11), on a

$$\mathbf{n}_f \times (\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}) = -\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)},$$

d'où

$$(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)})(\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}) - (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}))\boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)} = 0.$$

Comme $\{\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}, \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}\}$ est une famille libre de 2 vecteurs en dimension trois, cette dernière équation implique que

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{n}_f \times \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}) = 0.$$

Par conséquent, si (4.41) est vérifiée, alors

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(\mathbf{u})|_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)} = \int_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)} = 0,$$

ou encore, par linéarité de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}$:

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(\mathbf{n}_f \times \mathbf{H})|_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)} = -\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(\mathbf{Z}\mathbf{E})|_{\tilde{\mathbf{e}}_f^\partial(e)}.$$

Ce qui conclut la preuve. □

Analyse mathématique du schéma CDO

Sommaire

5.1	Position du problème continu	59
5.2	Formulation discrète	61
5.3	Analyse de stabilité	62
5.3.1	Estimation sur la pseudo-énergie discrète	63
5.3.2	Condition suffisante de stabilité	65
5.4	Consistance	68
5.4.1	Equation sur l'erreur	68
5.4.2	Inégalité sur l'erreur de consistance	70
5.4.3	Estimation a priori sur l'erreur	74

L'objectif de ce chapitre est d'établir une estimation d'erreur du schéma CDO appliqué aux équations de Maxwell dans le domaine temporel. Pour cela la Section 5.1 formule le modèle continu étudié : un problème de diffraction sur un domaine supposé polyédrique. La Section 5.2 donne la formulation discrète en espace et en temps du schéma CDO en utilisant les discrétisations des relations topologiques introduites au Chapitre 3 et des relations constitutives introduites au Chapitre 4. Enfin, les Sections 5.3 et 5.4 analysent le schéma CDO en terme de stabilité et de consistance afin d'établir une estimation de l'erreur.

5.1 Position du problème continu

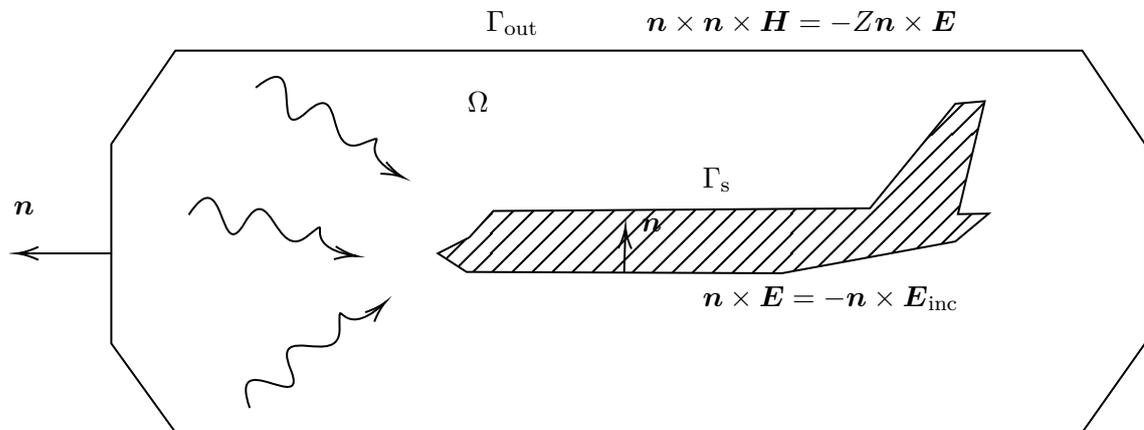


FIGURE 5.1 – Domaine polyédrique dont la frontière est composée de deux parties : la surface Γ_s d'un objet diffractant et une surface extérieure absorbante Γ_{out} pour simuler un domaine non-borné.

On considère Ω un domaine polyédrique de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$ dont la normale sortante est notée \mathbf{n} (voir Figure 5.1). Soit $t_F > 0$ un temps fini et soient $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D} : \Omega \times [0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}^3$, respectivement, l'induction magnétique, le champ électrique, le champ magnétique et le déplacement électrique. Soient $\varepsilon, \mu > 0$, respectivement, la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu, supposées constantes sur tout Ω . Le problème considéré est de trouver $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D} : \Omega \times [0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}_d, \quad (5.1b)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (5.1c)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5.1d)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (5.1e)$$

dans $\Omega \times [0, t_F]$. Le champ $\mathbf{J}_d : \Omega \times [0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une densité de courant surfacique donnée et $\sigma > 0$ représente la conductivité électrique du milieu. Les champs \mathbf{D} et \mathbf{B} vérifient aussi les équations suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.2)$$

avec $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la densité de charge volumique dans Ω . Avec le système (5.1), on considère les conditions initiales :

$$\mathbf{E}(\cdot, t = 0) = \mathbf{E}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\cdot, t = 0) = \mathbf{H}_0,$$

avec $\mathbf{E}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux champs donnés. Le bord $\partial\Omega$ est divisé en deux parties : Γ_s et Γ_{out} , telles que $\partial\Omega = \Gamma_s \cup \Gamma_{\text{out}}$ et $\Gamma_s \cap \Gamma_{\text{out}} = \emptyset$. Sur Γ_s , on impose la condition de Dirichlet tangentielle suivante :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{inc}} \quad \text{sur} \quad \Gamma_s \times [0, t_F], \quad (5.3)$$

avec $\mathbf{E}_{\text{inc}} : \Omega \times [0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ incident donné. Sur Γ_{out} , on impose une condition absorbante de type Silver-Müller :

$$Z(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\text{out}} \times [0, t_F], \quad (5.4)$$

avec $Z > 0$ un paramètre d'impédance constant sur Ω .

L'énergie $\mathcal{W} : [0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}$ associé au système continu (5.1) est définie pour tout $t \in [0, t_F]$ par

$$\mathcal{W}(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2. \quad (5.5)$$

On montre qu'elle vérifie l'identité suivante :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{W}(t) = - \left(\int_{\Gamma_{\text{SM}}} Z |\mathbf{n} \times \mathbf{H}|^2 + \int_{\Gamma_d} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{H} + \int_{\Omega} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \cdot \mathbf{E} \right).$$

De la positivité de σ , il vient par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young

$$- \int_{\Omega} \mathbf{J}_d \cdot \mathbf{E} \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{J}_d \cdot \mathbf{J}_d.$$

Ainsi, de la positivité des paramètres Z , l'énergie vérifie

$$\frac{d}{dt} \mathcal{W}(t) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{J}_d \cdot \mathbf{J}_d - \int_{\Gamma_d} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{H}.$$

Après intégration sur $[0, t]$, avec $t \in [0, t_F]$, on obtient

$$\mathcal{W}(t) \leq \mathcal{W}(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \sigma^{-1} \mathbf{J}_d \cdot \mathbf{J}_d - \int_0^t \int_{\Gamma_d} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{H}. \quad (5.6)$$

En conclusion, cette dernière inégalité montre que l'énergie à tout instant est bornée par l'énergie à l'instant initial combinée avec la puissance générée par les termes sources.

5.2 Formulation discrète

Cette section formule le schéma CDO complètement discret associé au problème continu (5.1) ainsi que deux propriétés de conservation discrètes. Pour cela, on donne quelques conventions et notations utilisées tout au long de ce chapitre.

Conventions et notations. De sorte à garder la présentation concise, tout au long de ce chapitre, on utilise les notations suivantes :

$$t_{-\frac{1}{2}} = t_0, \quad \mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{B}^0, \quad \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^0,$$

et

$$t_{N+\frac{1}{2}} = t_N, \quad \mathbf{B}^{N+\frac{1}{2}} = \mathbf{B}^N, \quad \mathbf{H}^{N+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^N.$$

De plus, on rappelle que l'application $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^\partial$ permet d'isoler les éléments de \mathcal{E} sur le bord, et que l'opérateur $\{\cdot\}$ est défini par

$$\{\mathbf{X}\} := \frac{\mathbf{X}^n + \mathbf{X}^{n+1}}{2}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket, \quad \text{et} \quad \{\mathbf{X}^0\} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^1 + \mathbf{X}^0, \quad \{\mathbf{X}^{N-1}\} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^{N-1} + \mathbf{X}^N,$$

avec \mathbf{X} un vecteur de ddl quelconque.

Condition tangentielle discrète. La condition au bord (5.3) est discrétisée en utilisant le fait que pour tout $\mathbf{f} \in \mathbf{F}^\partial$

$$\mathbf{n}_f \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{inc}}) = 0,$$

se traduit par

$$\mathbf{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E})|_e = -\mathbf{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}_{\text{inc}})|_e, \quad \forall e \in \mathbf{E}_f^\partial.$$

Problème discret. Le problème discret associé au problème (5.1) est : étant donné $(\mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0)$, initialiser

$$\mathbf{E}^0 = \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \mathbf{D}^0, \quad (5.7)$$

puis calculer

$$\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}} + \text{ROT}(\mathbf{E}^n) = 0, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (5.8a)$$

$$\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t \mathbf{H}_{\mu-1}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (5.8b)$$

$$\mathbf{D}^{n+1} - \mathbf{D}^n + \mathbf{H}_\sigma^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \{\mathbf{E}^n\} - \widetilde{\text{ROT}}^\sharp(\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}) = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{J}_d), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (5.8c)$$

$$\mathbf{E}^{n+1} = \Delta t (\mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \mathbf{D}^{n+1}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket. \quad (5.8d)$$

Enfin \mathbf{E}^N , \mathbf{B}^N et \mathbf{H}^N sont obtenus par :

$$\mathbf{E}^N = \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \mathbf{D}^N, \quad \mathbf{B}^N = \mathbf{B}^{N-\frac{1}{2}} - \text{ROT}(\mathbf{E}^N), \quad \mathbf{H}^N = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_{\mu-1}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{B}^N. \quad (5.9)$$

La condition absorbante discrète est : pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$

$$\mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}|_{\tilde{\mathbf{e}}^\partial(e)} = -\mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} \{\gamma(\mathbf{E}^n)\}, \quad \forall e \in \mathbf{E}_{\text{out}}, \quad (5.10)$$

avec \mathbf{E}_{out} l'ensemble des arêtes sur Γ_{out} , et la condition au bord tangentielle discrète, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, est

$$\mathbf{E}_e^n = - \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}_{\text{inc}})_e, \quad \forall e \in \mathbf{E}_s, \quad (5.11)$$

avec \mathbf{E}_s l'ensemble des arêtes sur Γ_s .

Remarque 5.2.1 (Lien avec d'autres schémas). La formulation complètement discrète (5.8) est une généralisation des schémas de Bossavit (2001), Hiptmair (2001a), Clemens & Weiland (2001), Tonti (2002), He & Teixeira (2005) et Codecasa & Trevisan (2010a).

Proposition 5.2.1 (Conservation de la divergence). Si $\text{DIV}(\mathbf{B}^0) = 0$ alors

$$\text{DIV}(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}) = 0, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Preuve. L'application de l'opérateur DIV à l'équation (5.8a) donne

$$\text{DIV}(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}) - \text{DIV}(\mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}) + \text{DIV ROT}(\mathbf{E}^n) = 0,$$

pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$. De la relation $\text{DIV ROT} = 0$ il vient

$$\text{DIV}(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}) = \text{DIV}(\mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

On en déduit que pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$\text{DIV}(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}) = \text{DIV}(\mathbf{B}^{-\frac{1}{2}}).$$

Enfin, d'après les notations introduites, $\mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{B}^0$, donc $\text{DIV}(\mathbf{B}^{-\frac{1}{2}}) = 0$, d'où le résultat. \square

Proposition 5.2.2 (Conservation de la charge). Pour tout sommet intérieur $\mathbf{v} \in V \setminus V^\partial$, la relation de conservation de la charge suivante est vérifiée :

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\rho(t_{n+1}))|_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})} - \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\rho(t_n))|_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})} + \widetilde{\text{DIV}}(\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}})_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})} = 0, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket,$$

avec

$$\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_\sigma^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}\{\mathbf{E}^n\} + \mathbf{J}_d^{n+\frac{1}{2}}.$$

Preuve. Pour toute arête $\mathbf{e} \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}^\partial$ ne touchant pas le bord, l'équation (5.8c) se réécrit

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{e})}^{n+1} - \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{e})}^n + \mathbf{J}_{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{e})}^{n+\frac{1}{2}} = \widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})_{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{e})}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket.$$

Pour tout sommet intérieur $\mathbf{v} \in V \setminus V^\partial$, l'application de $\widetilde{\text{DIV}}$ à cette dernière équation donne

$$\widetilde{\text{DIV}}(\mathbf{D}^{n+1})_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})} - \widetilde{\text{DIV}}(\mathbf{D}^n)_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})} + \widetilde{\text{DIV}}(\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}})_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})} = \widetilde{\text{DIV}} \widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket.$$

Or pour tout sommet intérieur $\mathbf{v} \in V \setminus V^\partial$ on a

$$\widetilde{\text{DIV}}^\#(\mathbf{D}^n)_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\rho(t_n))|_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket,$$

d'où, d'après la relation $\widetilde{\text{DIV}} \widetilde{\text{ROT}} = 0$,

$$\boldsymbol{\rho}_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})}^{n+1} - \boldsymbol{\rho}_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})}^n + \widetilde{\text{DIV}}(\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}})_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{v})} = 0, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket.$$

Ce qui conclut la preuve. \square

5.3 Analyse de stabilité

L'objectif de cette section est de démontrer que le schéma (5.8) est stable. Pour cela, on commence par montrer qu'une certaine quantité, appelée pseudo-énergie, est bornée. On montre que celle-ci permet de contrôler la norme des champs électromagnétiques discrets sous une condition sur le pas de temps Δt .

Dans la suite, on utilise la notation $A \lesssim B$ pour désigner l'inégalité $A \leq cB$ avec c une constante positive dont les valeurs peuvent changer d'une occurrence à une autre et est indépendante de la taille du maillage h .

5.3.1 Estimation sur la pseudo-énergie discrète

Afin de démontrer la stabilité en terme d'énergie, on définit les normes associées aux opérateurs de Hodge discrets. Avec $\alpha \in \{\varepsilon, \sigma\}$, des hypothèses **(H0c)** et **(H1c)** (voir Chapitre 4), les opérateurs de Hodge locaux définissent les normes d'énergies locales et globales :

$$\|\mathbf{g}\|_{\alpha}^2 := \sum_{c \in \mathcal{C}} \|\mathbf{g}\|_{\alpha,c}^2 \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{g}\|_{\alpha,c}^2 := \llbracket \mathbf{g}, \mathbf{H}_{\alpha}^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c} \mathbf{g} \rrbracket_{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c}, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}, \quad (5.12)$$

$$\|\phi\|_{\mu^{-1}}^2 := \sum_{c \in \mathcal{C}} \|\phi\|_{\mu^{-1},c}^2 \quad \text{avec} \quad \|\phi\|_{\mu^{-1},c}^2 := \llbracket \phi, \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c} \phi \rrbracket_{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c}, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}, \quad (5.13)$$

$$\|\mathbf{h}\|_Z^2 := \sum_{f \in \mathcal{F}_{\text{out}}^{\partial}} \|\mathbf{h}\|_{Z,f}^2 \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{h}\|_{Z,f}^2 := \llbracket \mathbf{h}, \mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}_f \tilde{\mathcal{E}}_f)^{\partial}} \mathbf{h} \rrbracket_{(\mathcal{E}_f \tilde{\mathcal{E}}_f)^{\partial}}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{E}_{\text{out}}^{\partial}. \quad (5.14)$$

On définit aussi les normes d'énergie sur les espaces duaux, $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{E}}^{\partial}$, suivantes

$$\|\phi\|_{\alpha^{-1}}^2 := \sum_{c \in \mathcal{C}} \|\phi\|_{\alpha^{-1},c}^2 \quad \text{avec} \quad \|\phi\|_{\alpha^{-1},c}^2 := \llbracket (\mathbf{H}_{\alpha}^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c})^{-1} \phi, \phi \rrbracket_{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c}, \quad \forall \phi \in \tilde{\mathcal{F}}, \quad (5.15)$$

$$\|\mathbf{g}\|_{\mu}^2 := \sum_{c \in \mathcal{C}} \|\mathbf{g}\|_{\mu,c}^2 \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{g}\|_{\mu,c}^2 := \llbracket (\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c})^{-1} \mathbf{g}, \mathbf{g} \rrbracket_{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c}, \quad \forall \mathbf{g} \in \tilde{\mathcal{E}}, \quad (5.16)$$

$$\|\mathbf{h}\|_{Z^{-1}}^2 := \sum_{f \in \mathcal{F}_{\text{out}}} \|\mathbf{h}\|_{Z^{-1},f}^2 \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{h}\|_{Z^{-1},f}^2 := \llbracket (\mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}_f \tilde{\mathcal{E}}_f)^{\partial}})^{-1} \mathbf{h}, \mathbf{h} \rrbracket_{(\mathcal{E}_f \tilde{\mathcal{E}}_f)^{\partial}}, \quad \forall \mathbf{h} \in \tilde{\mathcal{E}}_{\text{out}}^{\partial}. \quad (5.17)$$

Enfin pour tout $(\mathbf{g}, \psi) \in \mathcal{E} \times \tilde{\mathcal{E}}$, on définit la norme d'énergie :

$$\|(\mathbf{g}, \psi)\|_{\varepsilon, \mu}^2 := \|\mathbf{g}\|_{\varepsilon}^2 + \|\psi\|_{\mu}^2. \quad (5.18)$$

Les inégalités de Cauchy-Schwarz associées aux normes sont

$$\begin{aligned} \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{\mathcal{E} \tilde{\mathcal{F}}} &\leq \|\cdot\|_{\varepsilon} \|\cdot\|_{\varepsilon^{-1}}, & \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{\mathcal{E} \tilde{\mathcal{F}}} &\leq \|\cdot\|_{\sigma} \|\cdot\|_{\sigma^{-1}}, & \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{\mathcal{F} \tilde{\mathcal{E}}} &\leq \|\cdot\|_{\mu^{-1}} \|\cdot\|_{\mu}, \\ \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{(\mathcal{E} \tilde{\mathcal{E}})^{\partial}} &\leq \|\cdot\|_Z \|\cdot\|_{Z^{-1}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Dans la suite, les notations suivantes sont utilisées :

$$\llbracket \cdot, \mathbf{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E} \tilde{\mathcal{F}}} \cdot \rrbracket_{\mathcal{E} \tilde{\mathcal{F}}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \llbracket (\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F} \tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \cdot, \cdot \rrbracket_{\mathcal{F} \tilde{\mathcal{E}}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mu}. \quad (5.20)$$

La pseudo-énergie discrète associée au système (5.8) est alors définie par

$$\begin{aligned} W^n(\mathbf{E}, \mathbf{H}) &:= \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{E}^n\|_{\varepsilon}^2 + \langle \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rangle_{\mu^{-1}} \right), \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \\ W^0(\mathbf{E}, \mathbf{H}) &:= \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{2E}^0\|_{\varepsilon}^2 + 2\langle \mathbf{H}^0, \mathbf{H}^{\frac{1}{2}} \rangle_{\mu} + \Delta t \llbracket \text{ROT } \mathbf{E}^0, \mathbf{H}^{\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F} \tilde{\mathcal{E}}} \right), \\ W^N(\mathbf{E}, \mathbf{H}) &:= \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{2E}^N\|_{\varepsilon}^2 + 2\langle \mathbf{H}^N, \mathbf{H}^{N-\frac{1}{2}} \rangle_{\mu} - \Delta t \llbracket \text{ROT } \mathbf{E}^N, \mathbf{H}^{N-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F} \tilde{\mathcal{E}}} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

L'objectif est de montrer qu'elle est bornée. Pour cela, la Proposition 5.3.1 donne une estimation de celle-ci correspondant à la version discrète de l'estimation continue (5.6). De sorte à alléger les notations cette dernière est notée W^n .

Proposition 5.3.1 (Estimation sur la pseudo-énergie). La pseudo-énergie définie en (5.21) vérifie pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$W^m \leq W^0 + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \|\mathbf{J}_d^{k+1/2}\|_{\sigma^{-1}}^2 - \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \llbracket \{\mathbf{E}_{\text{inc}}^n\}, \mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{(\mathcal{E} \tilde{\mathcal{E}})^{\partial}},$$

avec pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$

$$\mathbf{J}_d^{k+1/2}|_{\tilde{\mathcal{F}}(e)} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{J}_d)|_{\tilde{\mathcal{F}}(e)}, \quad \forall e \in \mathbf{E}, \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_{\text{inc}}^k|_e = \int_{t_{k-\frac{1}{2}}}^{t_{k+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}^{\partial}}(\mathbf{E}_{\text{inc}})_e, \quad \forall e \in \mathbf{E}_s.$$

Preuve. Du fait de la définition de la pseudo-énergie (5.21), la preuve se fait en trois temps : (i) pour $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, (ii) pour $n = 0$ puis (iii) pour $n = N$. Comme les raisonnements sont les mêmes pour (ii) et (iii), on donne les détails pour le (i) et les détails pour (ii)–(iii) sont donnés dans l'annexe à la fin du chapitre.

(i) Pour commencer, le système (5.8) peut se réécrire

$$(\mathbb{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \frac{\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \text{ROT}(\mathbb{E}^n) = 0, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (5.22a)$$

$$\mathbb{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \frac{\mathbb{E}^{n+1} - \mathbb{E}^n}{\Delta t} + \mathbb{H}_{\sigma}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \{\mathbb{E}^n\} - \widetilde{\text{ROT}}^{\sharp}(\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}) = -\mathbb{J}_d^{n+\frac{1}{2}} \quad \forall n \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket. \quad (5.22b)$$

Les produits scalaires avec $\frac{1}{2}\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}$ de (5.22a) à l'instant n puis à l'instant $n+1$ donnent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} \left(\langle \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rangle_{\mu} - \langle \mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rangle_{\mu} \right) &= -\llbracket \text{ROT} \frac{\mathbb{E}^n}{2}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \\ \frac{1}{2\Delta t} \left(\langle \mathbb{H}^{n+\frac{3}{2}}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rangle_{\mu} - \langle \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rangle_{\mu} \right) &= -\llbracket \text{ROT} \frac{\mathbb{E}^{n+1}}{2}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket. \end{aligned}$$

En prenant la somme de ces équations, on obtient

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(\langle \mathbb{H}^{n+\frac{3}{2}}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rangle_{\mu} - \langle \mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rangle_{\mu} \right) = -\llbracket \text{ROT} \{\mathbb{E}^n\}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket. \quad (5.23)$$

De la même manière, le produit scalaire de l'équation (5.22b) avec la moyenne $\{\mathbb{E}^n\}$, donne pour tout $n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} \langle \mathbb{E}^{n+1} + \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^{n+1} - \mathbb{E}^n \rangle_{\varepsilon} &= \llbracket \{\mathbb{E}^n\}, \widetilde{\text{ROT}}^{\sharp}(\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \\ &\quad - \|\{\mathbb{E}^n\}\|_{\sigma}^2 - \llbracket \{\mathbb{E}^n\}, \mathbb{J}_d^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

La somme des équations (5.23) et (5.24) donne

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{W}^{n+1} - \mathbb{W}^n}{\Delta t} &= \llbracket \{\mathbb{E}^n\}, \widetilde{\text{ROT}}^{\sharp}(\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} - \llbracket \text{ROT} \{\mathbb{E}^n\}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \\ &\quad - \|\{\mathbb{E}^n\}\|_{\sigma}^2 - \llbracket \{\mathbb{E}^n\}, \mathbb{J}_d^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

D'une part, en utilisant la formule d'intégration par partie sur le rotationnel discret (3.11), on obtient

$$\llbracket \{\mathbb{E}^n\}, \widetilde{\text{ROT}}^{\sharp}(\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} - \llbracket \text{ROT} \{\mathbb{E}^n\}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} = \llbracket \gamma(\{\mathbb{E}^n\}), \mathbb{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^{\partial}}.$$

D'après les conditions au bord (5.10) et (5.11), on a

$$\begin{aligned} \llbracket \{\mathbb{E}^n\}, \widetilde{\text{ROT}}^{\sharp}(\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} - \llbracket \text{ROT} \{\mathbb{E}^n\}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} &= -\llbracket \gamma(\{\mathbb{E}^n\}), \mathbb{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^{\partial}} \gamma(\{\mathbb{E}^n\}) \rrbracket_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^{\partial}} \\ &\quad - \llbracket \{\mathbb{E}_{\text{inc}}^n\}, \mathbb{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^{\partial}}, \end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire

$$\llbracket \{\mathbb{E}^n\}, \widetilde{\text{ROT}}^{\sharp}(\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbb{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} - \llbracket \text{ROT} \{\mathbb{E}^n\}, \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} = -\|\{\gamma(\mathbb{E}^n)\}\|_Z^2 - \llbracket \{\mathbb{E}_{\text{inc}}^n\}, \mathbb{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^{\partial}}.$$

D'autre part, l'application successive des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, donne

$$-\llbracket \{\mathbb{E}^n\}, \mathbb{J}_d^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \leq \|\{\mathbb{E}^n\}\|_{\sigma} \|\mathbb{J}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_{\sigma^{-1}} \leq \frac{1}{2} \|\{\mathbb{E}^n\}\|_{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbb{J}_d^{n+\frac{1}{2}}\|_{\sigma^{-1}}^2.$$

Ainsi, l'identité (5.25) devient

$$\frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t} \leq -\|\{\gamma(E^n)\}\|_Z^2 - \frac{1}{2}\|\{E^n\}\|_\sigma^2 + \frac{1}{2}\|J_d^{n+\frac{1}{2}}\|_{\sigma^{-1}}^2 - [\{\mathbf{E}_{\text{inc}}^n\}, \mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}]_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial}.$$

De cette dernière inégalité, il vient

$$W^{n+1} \leq W^n + \frac{\Delta t}{2}\|J_d^{n+\frac{1}{2}}\|_{\sigma^{-1}}^2 - \Delta t[\{\mathbf{E}_{\text{inc}}^n\}, \mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}]_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket.$$

Enfin, la somme de $n = 1$ à $n = m - 1$, avec $m \in \{2, \dots, N - 1\}$ donne

$$W^m \leq W^1 + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \|J_d^{k+1/2}\|_{\sigma^{-1}}^2 - \Delta t \sum_{k=1}^{m-1} [\{\mathbf{E}_{\text{inc}}^k\}, \mathbf{H}^{\partial, k+1/2}]_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial}. \quad (5.26)$$

De la même manière (voir annexe à la fin du chapitre), on montre que

$$W^1 \leq W^0 - \Delta t[\{\mathbf{E}_{\text{inc}}^0\}, \mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}]_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} + \frac{\Delta t}{2}\|J_d^{\frac{1}{2}}\|_{\sigma^{-1}}^2, \quad (5.27)$$

et que

$$W^N \leq W^{N-1} - \Delta t[\{\mathbf{E}_{\text{inc}}^{N-1}\}, \mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}]_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} + \frac{\Delta t}{2}\|J_d^{N-\frac{1}{2}}\|_{\sigma^{-1}}^2. \quad (5.28)$$

La somme des équations (5.26), (5.27) et (5.28) donne l'estimation cherchée. \square

5.3.2 Condition suffisante de stabilité

Pour que l'estimation de la Proposition 5.3.1 soit une estimation de stabilité, il faut que la pseudo-énergie définie par (5.21) contrôle \mathbf{E} et \mathbf{H} dans la norme d'énergie (5.18). On commence par définir les normes discrètes sur les espaces de degrés de liberté (ddl).

Normes sur les espaces de ddl. Les normes volumiques sur les espaces de ddl sont :

$$\|\mathbf{g}\|_{2,\mathcal{E}}^2 := \sum_{c \in \mathcal{C}} \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E},c}^2 \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E},c}^2 := \sum_{e \in \mathcal{E}_c} h_c \mathbf{g}_e^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}, \quad (5.29)$$

$$\|\phi\|_{2,\mathcal{F}}^2 := \sum_{c \in \mathcal{C}} \|\phi\|_{\mathcal{F},c}^2 \quad \text{avec} \quad \|\phi\|_{\mathcal{F},c}^2 := \sum_{f \in \mathcal{F}_c} h_c^{-1} \phi_f^2, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}, \quad (5.30)$$

$$\|\mathbf{g}\|_{2,\mathcal{E}^\partial}^2 := \sum_{f \in \mathcal{F}^\partial} \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E}^\partial,f}^2 \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E}^\partial,f}^2 := \sum_{e \in \mathcal{E}_f} h_f^0 \mathbf{g}_e^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}^\partial. \quad (5.31)$$

Stabilité des opérateurs de Hodge. Pour l'analyse, l'hypothèse **(H2c)** est remplacée par l'hypothèse

(H2c*) Il existe trois constantes $\eta_{\varepsilon,c}, \eta_{\mu^{-1},c}, \eta_{Z,c} > 0$, uniformes par rapport au raffinement du maillage et telles que

$$\eta_{\varepsilon,c}^{-1} \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E},c}^2 \leq [\mathbf{g}, \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c} \mathbf{g}]_{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c} \leq \eta_{\varepsilon,c} \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E},c}^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}_c, \quad (5.32a)$$

$$\eta_{\mu^{-1},c}^{-1} \mu^{-1} \|\phi\|_{\mathcal{F},c}^2 \leq [\phi, \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c} \phi]_{\mathcal{F}_c \tilde{\mathcal{E}}_c} \leq \eta_{\mu^{-1},c} \mu^{-1} \|\phi\|_{\mathcal{F},c}^2, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}_c, \quad (5.32b)$$

$$\eta_{Z,f}^{-1} Z \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E}^\partial,f}^2 \leq [\mathbf{g}, \mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}_f \tilde{\mathcal{E}}_f)^\partial} \mathbf{g}]_{(\mathcal{E}_f \tilde{\mathcal{E}}_f)^\partial} \leq \eta_{Z,f} Z \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E}^\partial,f}^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}_f. \quad (5.32c)$$

Ainsi, la propriété locale **(H2c*)** implique la propriété globale sur les opérateurs de Hodge discrets suivante :

(H2*) Il existe trois constantes $\eta_\varepsilon, \eta_{\mu^{-1}}, \eta_Z > 0$, uniformes par rapport au raffinement du maillage et telles que

$$\eta_\varepsilon^{-1} \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E}}^2 \leq \llbracket \mathbf{g}, \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{g} \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \leq \eta_\varepsilon \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E}}^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}, \quad (5.33a)$$

$$\eta_{\mu^{-1}}^{-1} \mu^{-1} \|\phi\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \llbracket \phi, \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \phi \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \leq \eta_{\mu^{-1}} \mu^{-1} \|\phi\|_{\mathcal{F}}^2, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}, \quad (5.33b)$$

$$\eta_Z^{-1} Z \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E}^\partial}^2 \leq \llbracket \mathbf{g}, \mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} \mathbf{g} \rrbracket_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} \leq \eta_Z Z \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E}^\partial}^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}^\partial. \quad (5.33c)$$

Proposition 5.3.2 (Inégalité inverse). Pour tout $\mathbf{g} \in \mathcal{E}$, il existe une constante $\mathbf{C}_{\text{inv}} > 0$ telle que

$$\|\text{ROT}(\mathbf{g})\|_{2,\mathcal{F}} \leq \mathbf{C}_{\text{inv}} h^{-1} \|\mathbf{g}\|_{2,\mathcal{E}}. \quad (5.34)$$

Preuve. Par définition

$$\|\text{ROT}(\mathbf{g})\|_{2,\mathcal{F}}^2 = \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{f \in \mathcal{F}_c} h_c^{-1} (\text{ROT } \mathbf{g})_f^2.$$

Or

$$(\text{ROT } \mathbf{g})_f^2 = \left(\sum_{e \in \mathbf{E}_f} \iota_{e,f} \mathbf{g}_e \right)^2 \leq \left(\sum_{e \in \mathbf{E}_f} \iota_{e,f}^2 \right) \left(\sum_{e \in \mathbf{E}_f} \mathbf{g}_e^2 \right),$$

d'où

$$\|\text{ROT}(\mathbf{g})\|_{2,\mathcal{F}}^2 \leq \mathbf{C}_1 \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{f \in \mathcal{F}_c} h_c^{-1} \sum_{e \in \mathbf{E}_f} \mathbf{g}_e^2, \quad \text{avec } \mathbf{C}_1 = \max_{f \in \mathcal{F}} (\#\mathbf{E}_f).$$

Ensuite, comme

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_c} \sum_{e \in \mathbf{E}_f} \mathbf{g}_e^2 = \sum_{e \in \mathbf{E}_c} \sum_{f \in \mathbf{E}_c} \mathbf{g}_e^2,$$

il vient

$$\|\text{ROT}(\mathbf{g})\|_{2,\mathcal{F}}^2 \leq \mathbf{C}_1 \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{e \in \mathbf{E}_c} h_c^{-1} \#\mathbf{F}_e \mathbf{g}_e^2.$$

Enfin

$$\|\text{ROT}(\mathbf{g})\|_{2,\mathcal{F}}^2 \leq \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 h_c^{-2} \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{e \in \mathbf{E}_c} h_c \mathbf{g}_e^2, \quad \text{avec } \mathbf{C}_2 = \max_{e \in \mathbf{E}} (\#\mathbf{F}_e).$$

L'estimation (5.34) est alors obtenue par passage à la racine et $\mathbf{C}_{\text{inv}} = (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2)^{\frac{1}{2}}$. \square

Proposition 5.3.3 (Condition CFL). Soit $\alpha \in]0, 1[$ un paramètre. Sous la condition

$$\Delta t \leq 2C_{\text{stab}} \frac{h}{c_0} (1 - \alpha), \quad (5.35)$$

avec $C_{\text{stab}} = (\eta_\varepsilon \eta_{\mu^{-1}})^{-1/2} \mathbf{C}_{\text{inv}}^{-1}$ et $c_0 := (\varepsilon \mu)^{-1/2}$, la pseudo-énergie $W^n(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ définie en (5.21) vérifie

$$W^n \geq \frac{\alpha}{2} \|\langle \mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rangle\|_{\varepsilon, \mu}^2, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (5.36)$$

Preuve. Au vu de la définition de la pseudo-énergie (5.21), la preuve se fait en trois temps.

(i) Pour tout $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, la pseudo-énergie est donnée par

$$W^n = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{E}^n\|_\varepsilon^2 + \langle \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rangle_\mu \right).$$

En utilisant (5.8a) et (5.8b), elle peut se réécrire sous la forme

$$W^n = \frac{1}{2} \|\langle \mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rangle\|_{\varepsilon, \mu}^2 - \frac{\Delta t}{2} \langle \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \text{ROT } \mathbf{E}^n \rangle_\mu,$$

pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$. De la définition du produit scalaire (5.20) $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mu^{-1}}$, on a l'identité

$$\langle\langle \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \text{ROT } \mathbf{E}^n \rangle\rangle_{\mu} = \llbracket \text{ROT}(\mathbf{E}^n), \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}},$$

d'où

$$\mathbf{W}^n = \frac{1}{2} \|\langle\langle \mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rangle\rangle_{\varepsilon, \mu}\|_{\varepsilon, \mu}^2 - \frac{\Delta t}{2} \llbracket \text{ROT}(\mathbf{E}^n), \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}. \quad (5.37)$$

Il vient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\llbracket \text{ROT}(\mathbf{E}^n), \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \leq \|\text{ROT}(\mathbf{E}^n)\|_{\mu^{-1}} \|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}\|_{\mu}.$$

D'autre part, la stabilité de l'opérateur de Hodge discret (5.33b) donne

$$\|\text{ROT}(\mathbf{E}^n)\|_{\mu^{-1}} \leq \eta_{\mu^{-1}}^{1/2} \mu^{-1/2} \|\text{ROT}(\mathbf{E}^n)\|_{2, \mathcal{F}}.$$

Par l'inégalité inverse (5.34) et l'estimation de stabilité (5.33a), cette dernière inégalité devient

$$\llbracket \text{ROT}(\mathbf{E}^n), \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \leq (\eta_{\varepsilon} \eta_{\mu^{-1}})^{1/2} C_{\text{inv}}(\varepsilon \mu)^{-1/2} h^{-1} \|\mathbf{E}^n\|_{\varepsilon} \|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}\|_{\mu}.$$

En utilisant la condition CFL (5.35) et l'inégalité de Young, il vient

$$\Delta t \llbracket \text{ROT}(\mathbf{E}^n), \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \leq (1 - \alpha) \|\langle\langle \mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} \rangle\rangle_{\varepsilon, \mu}\|_{\varepsilon, \mu}^2.$$

Enfin, en remplaçant cette dernière estimation dans la relation (5.37), on obtient (5.44) pour tout $n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$. \square

L'accès à la constante C_{stab} dans la condition CFL (5.35) n'étant pas toujours garanti, on établit aussi une condition CFL permettant de définir numériquement le pas de temps optimal (c'est-à-dire le plus grand possible). Cette condition repose sur le spectre de l'opérateur LAP : $\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{F}$ défini par

$$\text{LAP} := \text{ROT}(\mathbf{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \widetilde{\text{ROT}}.$$

Soit la norme d'opérateur

$$\|\text{LAP}\| := \sup_{\|\mathbf{H}\|_{\mu} \neq 0} \frac{\|\text{LAP}(\mathbf{H})\|_{\mu^{-1}}}{\|\mathbf{H}\|_{\mu}}. \quad (5.38)$$

Proposition 5.3.4. On a

$$\|\text{LAP}(\mathbf{H})\|_{\mu^{-1}} \leq \lambda_{\#} \|\mathbf{H}\|_{\mu}, \quad (5.39)$$

avec $\lambda_{\#}$ la plus grande valeur propre solution du problème aux valeurs propres généralisé : trouver $\mathbf{H} \in \tilde{\mathcal{E}}$ tel que

$$\text{LAP } \mathbf{H} = \lambda (\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \mathbf{H}. \quad (5.40)$$

Preuve. Par définition, pour tout $\mathbf{H} \in \tilde{\mathcal{E}}$ non-nul, on a

$$\|\text{LAP}(\mathbf{H})\|_{\mu^{-1}} \leq \|\text{LAP}\| \|\mathbf{H}\|_{\mu}.$$

Du fait que $\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}$ soit Symétrique Définie Positif, l'inégalité (5.39) est une conséquence de la maximisation du quotient de Rayleigh généralisé défini par la norme (5.38). \square

Lemme 5.3.1. Pour tout $\mathbf{E} \in \mathcal{E}$ et tout $\mathbf{H} \in \tilde{\mathcal{E}}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\llbracket \text{ROT}(\mathbf{E}), \mathbf{H} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \leq \lambda_{\#}^{1/2} \|\mathbf{E}\|_{\varepsilon} \|\mathbf{H}\|_{\mu}. \quad (5.41)$$

Preuve. On commence par remarquer que

$$\begin{aligned} \llbracket \text{ROT}(\mathbf{E}), \mathbf{H} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} &= \llbracket \mathbf{E}, \widetilde{\text{ROT}}\mathbf{H} \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} && \text{adjonction \textbf{ref}} \\ &\leq \|\mathbf{E}\|_{\varepsilon} \|\widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H})\|_{\varepsilon^{-1}} && \text{Cauchy-Schwarz \textbf{ref}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

La propriété d'adjonction entre ROT et $\widetilde{\text{ROT}}$ donne

$$\llbracket \text{LAP}(\mathbf{H}), \mathbf{H} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} = \llbracket \text{ROT}(\mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H}), \mathbf{H} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} = \llbracket (\mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H}), \widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H}) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} = \|\widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H})\|_{\varepsilon^{-1}}^2.$$

De plus

$$\llbracket \text{LAP}(\mathbf{H}), \mathbf{H} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \leq \|\text{LAP}(\mathbf{H})\|_{\mu^{-1}} \|\mathbf{H}\|_{\mu},$$

d'où

$$\|\widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H})\|_{\varepsilon^{-1}}^2 \leq \|\text{LAP}(\mathbf{H})\|_{\mu^{-1}} \|\mathbf{H}\|_{\mu}.$$

Cette dernière inégalité combinée avec (5.42) et (5.39), permet alors de trouver (5.41) \square

Proposition 5.3.5 (Condition optimale). Sous la condition

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\sharp}}}, \quad (5.43)$$

avec la plus grande valeur propre solution du problème (5.40), la pseudo-énergie $W^n(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ définie en (5.21) vérifie

$$W^n \geq 0, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (5.44)$$

Preuve. Le raisonnement est le même que celui de la Proposition 5.3.3 combiné avec le Lemme 5.3.1. \square

Remarque 5.3.1. Cette valeur propre peut être calculée dans une étape de pre-processing avec un algorithme comme celui des puissances itérées. Différents pas de temps calculés avec cet algorithme seront comparés dans le chapitre suivant.

5.4 Consistance

L'objectif de cette section est d'estimer l'erreur de consistance associée au schéma CDO (5.8). De sorte à garder la présentation concise, la conductivité électrique est supposée nulle $\sigma = 0$. Pour commencer, on formule l'équation sur l'erreur qui est définie comme la différence de la solution continue réduite et celle du schéma discret. On établit ensuite la Proposition 5.4.2 qui montre que l'erreur est bornée à tout instant par la norme des erreurs de consistance définies au Chapitre 4.

5.4.1 Equation sur l'erreur

Erreurs globales. Pour des champs suffisamment réguliers \mathbf{E} et \mathbf{D} , les erreurs globales sont définies pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ par

$$\delta_E^n := \mathbf{E}^n - \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}}(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad \delta_D^n := \mathbf{D}^n - \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D})(t_n).$$

Aussi, pour des champs suffisamment réguliers \mathbf{H} et \mathbf{B} , les erreurs globales sont définies pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ par

$$\begin{aligned} \delta_H^{n+\frac{1}{2}} &:= \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}), & \delta_B^{n+\frac{1}{2}} &:= \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\mathbf{B})(t_{n+\frac{1}{2}}), \\ \delta_{H^\partial}^{n+\frac{1}{2}} &:= \mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{H}) \end{aligned}$$

Les erreurs initiales et finales sont

$$\begin{aligned}\delta_H^0 &:= \mathbf{H}^0 - \int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}), & \delta_H^N &:= \mathbf{H}^N - \int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_N} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}), \\ \delta_{H^\partial}^0 &:= \mathbf{H}^{\partial,0} - \int_{t_0}^{t_{\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{H}), & \delta_{H^\partial}^N &:= \mathbf{H}^{\partial,N} - \int_{t_{N-\frac{1}{2}}}^{t_N} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{H}).\end{aligned}$$

Equations topologiques. On rappelle que les équations topologiques (5.1a) et (5.1b) réduites (voir Chapitre 3, Section 3.5) sont : pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$\mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\mathbf{B})(t_{n+\frac{1}{2}}) - \mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\mathbf{B})(t_{n-\frac{1}{2}}) = -\text{ROT} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}}(\mathbf{E}), \quad (5.46)$$

et pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D})(t_{n+1}) - \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D})(t_n) = \widetilde{\text{ROT}}^\# \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}), \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(\mathbf{H}) \right) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{J}). \quad (5.47)$$

Ainsi, les équations discrètes (5.8a) et (5.8c) auxquelles sont soustraites les équations (5.46) et (5.47) donnent

$$\delta_B^{n+\frac{1}{2}} - \delta_B^{n-\frac{1}{2}} = -\text{ROT} \delta_E^n, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (5.48)$$

$$\delta_D^{n+1} - \delta_D^n = \widetilde{\text{ROT}}^\# (\delta_H^{n+\frac{1}{2}}, \delta_{H^\partial}^{n+\frac{1}{2}}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket. \quad (5.49)$$

Equations constitutives. On rappelle que les relations constitutives (5.1d) et (5.1c) réduites (voir Chapitre 4, Section 4.3) sont :

$$\mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\mathbf{B})(t_{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{H}) - [\mu, \Delta t](\mathbf{H})^{n+\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket,$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{D})(t_n) = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{H}_{\varepsilon}^{\tilde{\mathcal{F}}} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_n} \mathbf{R}_{\mathcal{E}}(\mathbf{E}) - [\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^n, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket.$$

Ainsi, ces deux équations combinées avec les équations (5.8b) et (5.8c) du système discret donnent

$$\delta_B^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{H}_{\mu}^{\tilde{\mathcal{F}}} \delta_H^{n-\frac{1}{2}} - [\mu, \Delta t](\mathbf{H})^{n-\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad (5.51)$$

$$\delta_D^n = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{H}_{\varepsilon}^{\tilde{\mathcal{F}}} \delta_E^n - [\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^n, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket. \quad (5.52)$$

Les relations de fermeture sur l'erreur, à l'instant initial et final, sont obtenues des équations réduites (4.36) et (4.39) auxquelles on soustrait les équations de fermeture discrètes (5.7) et (5.9). Cela donne à l'instant initial

$$\delta_D^0 = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_{\varepsilon}^{\tilde{\mathcal{F}}} \delta_E^0 - [\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^0, \quad \delta_B^0 = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \delta_H^0 - [\mu, \Delta t](\mathbf{H})^0,$$

et à l'instant final

$$\delta_D^N = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_{\varepsilon}^{\tilde{\mathcal{F}}} \delta_E^N - [\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^N, \quad \delta_B^N = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \delta_H^N - [\mu, \Delta t](\mathbf{H})^N.$$

Equation sur l'erreur. Le problème discret sur l'erreur est : étant donné $(\delta_D^0, \delta_B^0) = (0, 0)$, initialiser

$$\delta_E^0 = \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} (\delta_D^0 + \lfloor \varepsilon, \Delta t \rfloor (\mathbf{E})^0), \quad (5.53)$$

puis calculer

$$\delta_B^{n+\frac{1}{2}} - \delta_B^{n-\frac{1}{2}} + \text{ROT}(\delta_E^n) = 0, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (5.54a)$$

$$\delta_B^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \delta_H^{n+\frac{1}{2}} - \lfloor \mu, \Delta t \rfloor (\mathbf{H})^{n+\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (5.54b)$$

$$\delta_D^{n+1} - \delta_D^n - \widetilde{\text{ROT}}^\sharp(\delta_H^{n+\frac{1}{2}}, \delta_{H^\partial}^{n+\frac{1}{2}}) = 0, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (5.54c)$$

$$\delta_D^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{F}}} \delta_E^{n+1} - \lfloor \varepsilon, \Delta t \rfloor (\mathbf{E})^n, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket. \quad (5.54d)$$

Enfin déterminer δ_E^N , δ_B^N et δ_H^N par :

$$\begin{aligned} \delta_D^N &= \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{F}}} \delta_E^N - \lfloor \varepsilon, \Delta t \rfloor (\mathbf{E})^N, & \delta_B^N &= \delta_B^{N-\frac{1}{2}} - \text{ROT}(\delta_E^N), \\ \delta_H^N &= \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \delta_H^N - \lfloor \mu, \Delta t \rfloor (\mathbf{H})^N. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Les conditions au bord sur l'erreur sont : d'une part, pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$

$$\delta_{H^\partial}^{n+\frac{1}{2}}|_{\tilde{\mathbf{e}}^\partial(\mathbf{e})} = -\mathbf{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} \{\delta_E^n\} + \lfloor Z, (\varepsilon\tilde{\varepsilon})^\partial \rfloor (\mathbf{E})^n, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathbf{E}_{\text{out}}, \quad (5.56)$$

et d'autre part, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$\delta_E|_{\mathbf{e}}^n = 0, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathbf{E}_s. \quad (5.57)$$

5.4.2 Inégalité sur l'erreur de consistance

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on introduit les quantités :

$$\mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}} := \lfloor \mu, \Delta t \rfloor (\mathbf{H})^{k+\frac{1}{2}} - \lfloor \mu, \Delta t \rfloor (\mathbf{H})^{k-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \{\!\{ \mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}} \}\!\} := \frac{\mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}} + \mathcal{Q}_H^{k+\frac{1}{2}}}{2}, \quad (5.58)$$

avec les notations :

$$\mathcal{Q}_H^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{Q}_H^0, \quad \mathcal{Q}_H^{N+\frac{1}{2}} = \mathcal{Q}_H^N, \quad \lfloor \mu, \Delta t \rfloor (\mathbf{H})^{-\frac{1}{2}} = \lfloor \mu, \Delta t \rfloor (\mathbf{H})^0.$$

On introduit aussi pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ les quantités :

$$\mathcal{Z}_E^k := \lfloor \varepsilon, \Delta t \rfloor (\mathbf{E})^{k+1} - \lfloor \varepsilon, \Delta t \rfloor (\mathbf{E})^k \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_E^k := \lfloor Z, \Delta t \rfloor (\mathbf{E})^k. \quad (5.59)$$

On commence par montrer la Proposition 5.4.1 qui énonce une inégalité de stabilité sur la pseudo-énergie associée au système sur l'erreur (5.54), puis la Proposition 5.4.2 établit que l'erreur est majorée à tout instant par les erreurs de consistance.

Proposition 5.4.1. La pseudo-énergie sur l'erreur vérifie, pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$, l'estimation

$$\begin{aligned} W^m(\delta_E, \delta_H) &\leq W^0(\delta_E, \delta_H) + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} [\{\delta_E^k\}, \mathcal{Q}_E^k]_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} [\{\!\{ \mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}} \}\!\}, \delta_H^{k+\frac{1}{2}}]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|\mathcal{Z}_E^k\|_{Z^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Preuve. La preuve suit ensuite le même raisonnement que celui de la preuve de la Proposition 5.3.1. Les seules différences sont dans le traitement des seconds membres, faisant intervenir les erreurs, et des conditions au bord. On donne les grandes lignes pour $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. Les raisonnements pour $n = 0$ et $n = N$ sont les mêmes. Le système (5.54) peut se mettre sous la forme :

$$(\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \left(\frac{\delta_H^{n+\frac{1}{2}} - \delta_H^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right) + \text{ROT}(\delta_E^n) = \mathcal{Q}_H^{n-\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad (5.60a)$$

$$\mathbf{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \left(\frac{\delta_E^{n+1} - \delta_E^n}{\Delta t} \right) - \widetilde{\text{ROT}}^\#(\delta_H^{n+\frac{1}{2}}, \delta_{H^\partial}^{n+\frac{1}{2}}) = \mathcal{Q}_E^n, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket, \quad (5.60b)$$

L'équation (5.60a) est testée avec $\frac{1}{2}\delta_H^{n+\frac{1}{2}}$ à l'instant n et à l'instant suivant $n+1$. L'équation (5.60b) est, quant à elle, testée avec $\{\delta_E^n\}$. La somme de ces testes donne

$$\begin{aligned} \frac{W^{n+1}(\delta_E, \delta_H) - W^n(\delta_E, \delta_H)}{\Delta t} &= \llbracket \text{ROT}\{\delta_E^n\}, \delta_H^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + \llbracket \{\delta_E^n\}, \widetilde{\text{ROT}}^\#(\delta_H^{n+\frac{1}{2}}, \delta_{H^\partial}^{n+\frac{1}{2}}) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \\ &\quad + \llbracket \{\mathcal{Q}_H^{n+\frac{1}{2}}\}, \delta_H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + \llbracket \{\delta_E^n\}, \mathcal{Q}_E^n \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

De la formule d'intégration par partie discrète (3.11) et des conditions au bord (5.56) et (5.57), il vient

$$\llbracket \text{ROT}\{\delta_E^n\}, \delta_H^{n-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + \llbracket \{\delta_E^n\}, \widetilde{\text{ROT}}^\#(\delta_H^{n+\frac{1}{2}}, \delta_{H^\partial}^{n+\frac{1}{2}}) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} = -\|\{\gamma(\delta_E^n)\}\|_Z^2 + \llbracket \{\gamma(\delta_E^n)\}, \mathcal{Z}_E^n \rrbracket_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial}.$$

En combinant cette dernière identité avec l'identité (5.61), on obtient

$$\frac{W^{n+1}(\delta_E, \delta_H) - W^n(\delta_E, \delta_H)}{\Delta t} \leq \llbracket \{\mathcal{Q}_H^{n-\frac{1}{2}}\}, \delta_H^{n+\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + \llbracket \{\delta_E^n\}, \mathcal{Q}_E^n \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} + \frac{1}{2} \|\mathcal{Z}_E^n\|_Z^2.$$

□

Lemme 5.4.1 (Inégalité discrète). Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x(m))_{0 \leq m \leq N}$ et $(\Psi(m))_{0 \leq m \leq N}$ des suites positives et $\zeta \geq 0$ une constante, telles que

$$x(m)^2 \leq x_0^2 + \zeta^2 + \sum_{k=0}^{m-1} \Psi(k) (x(k+1) + x(k)), \quad \forall m \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (5.62)$$

alors

$$x(m) \leq x_0 + \zeta + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \Psi(k), \quad \forall m \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Preuve. Cf. Annexe du Chapitre 5. □

Proposition 5.4.2. Pour des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} suffisamment réguliers, sous la condition CFL (5.35), l'estimation suivante est satisfaite pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \|\!(\delta_E^m, \delta_H^{m-\frac{1}{2}})\!\|_{\varepsilon, \mu} &\lesssim \Delta t \left(\|\![\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^0\!\|_{\varepsilon^{-1}} + \|\![\mu, \Delta t](\mathbf{H})^0\!\|_{\mu^{-1}} \right) \\ &\quad + \Delta t \left(\|\![\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^N\!\|_{\varepsilon^{-1}} + \|\![\mu, \Delta t](\mathbf{H})^N\!\|_{\mu^{-1}} \right) \\ &\quad + \Delta t^{\frac{1}{2}} \left(\|\![Z, \Delta t](\mathbf{E})^0\!\|_{Z^{-1}} + \|\![Z, \Delta t](\mathbf{E})^{N-1}\!\|_{Z^{-1}} \right) \\ &\quad + t_F \left(\max_{1 \leq k \leq N-1} \|\![\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^k\!\|_{\varepsilon^{-1}} + \max_{0 \leq k \leq N-1} \|\![\mu, \Delta t](\mathbf{H})^{k+\frac{1}{2}}\!\|_{\mu^{-1}} \right) \\ &\quad + t_F^{\frac{1}{2}} \max_{1 \leq k \leq N-2} \|\![Z, \Delta t](\mathbf{E})^k\!\|_{Z^{-1}}. \end{aligned}$$

Preuve. Premièrement, sous la condition CFL (5.35) la pseudo-énergie sur l'erreur vérifie :

$$W^m(\delta_E, \delta_H) \geq \frac{\alpha}{2} \|(\delta_E^m, \delta_H^{m-\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu}^2, \quad \forall m \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Deuxièmement, en utilisant la définition de B^0 dans (5.7) combinée avec (5.8a) et (5.8b), on a

$$H^{\frac{1}{2}} = 2H^0 - \Delta t H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \text{ROT}(E^0).$$

Ainsi, la pseudo-énergie sur l'erreur à l'instant initial peut se réécrire

$$W^0(\delta_E, \delta_H) = \frac{1}{2} \left(\|2\delta_E^0\|_{\varepsilon}^2 + \|2\delta_H^0\|_{\mu^{-1}}^2 - \Delta t^2 \|\text{ROT}(\delta_E^0)\|_{\mu^{-1}}^2 \right),$$

et vérifie donc

$$W^0(\delta_E, \delta_H) \leq 2 \|(\delta_E^0, \delta_H^0)\|_{\varepsilon, \mu}^2.$$

De l'estimation de la Proposition 5.4.1, il vient pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \|(\delta_E^m, \delta_H^{m-\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu}^2 &\leq 2 \|(\delta_E^0, \delta_H^0)\|_{\varepsilon, \mu}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} [\{\delta_E^k\}, \mathcal{Q}_E^k]_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \\ &\quad + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} [\{\mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}}\}, \delta_H^{k+\frac{1}{2}}]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|\mathcal{Z}_E^k\|_{Z^{-1}}^2. \end{aligned} \quad (5.63)$$

D'une part, les inégalités de Cauchy-Schwarz (5.19) donnent pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} [\{\delta_E^k\}, \mathcal{Q}_E^k]_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \|\{\delta_E^k\}\|_{\varepsilon} \|\mathcal{Q}_E^k\|_{\varepsilon^{-1}}, \\ \sum_{k=0}^{m-1} [\{\mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}}\}, \delta_H^{k+\frac{1}{2}}]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \|\{\mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}}\}\|_{\mu^{-1}} \|\delta_H^{k+\frac{1}{2}}\|_{\mu}. \end{aligned}$$

D'autre part, on observe que pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\mathcal{Z}_E^k\|_{Z^{-1}}^2 \leq \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathcal{Z}_E^k\|_{Z^{-1}}^2.$$

Ainsi, en utilisant ces estimations avec l'inégalité triangulaire, l'estimation (5.63) devient pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{aligned} \|(\delta_E^m, \delta_H^{m-\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu}^2 &\leq 4\alpha^{-1} \|(\delta_E^0, \delta_H^0)\|_{\varepsilon, \mu}^2 \\ &\quad + 2\alpha^{-1} \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \left(\|(\delta_E^k, \delta_H^{k-\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu} + \|(\delta_E^{k+1}, \delta_H^{k+\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu} \right) \left(\|\mathcal{Q}_E^k\|_{\varepsilon^{-1}} + \|\{\mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}}\}\|_{\mu^{-1}} \right) \\ &\quad + \alpha^{-1} \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathcal{Z}_E^k\|_{Z^{-1}}^2, \end{aligned} \quad (5.64)$$

où l'on a utilisé le fait que

$$\|\delta_E^k\|_{\varepsilon} \leq \|(\delta_E^k, \delta_H^{k-\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu}, \quad \|\delta_E^{k+1}\|_{\varepsilon} \leq \|(\delta_E^{k+1}, \delta_H^{k+\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu} \quad \text{et} \quad \|\delta_H^{k+\frac{1}{2}}\|_{\mu} \leq \|(\delta_E^{k+1}, \delta_H^{k+\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu}.$$

Le Lemme 5.4.1 avec $x_0^2 = 4\alpha^{-1} \|(\delta_E^0, \delta_H^0)\|_{\varepsilon, \mu}^2$ et

$$x(m) = \|(\delta_E^m, \delta_H^{m-\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu}^2, \quad \Psi(k) = 2\alpha^{-1} \Delta t \left(\|\mathcal{Q}_E^k\|_{\varepsilon^{-1}} + \|\{\mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}}\}\|_{\mu^{-1}} \right), \quad \zeta^2 = \alpha^{-1} \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathcal{Z}_E^k\|_{Z^{-1}}^2,$$

donne pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{aligned} \|(\delta_E^m, \delta_H^{m-\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu} &\leq 2\alpha^{-\frac{1}{2}} \|(\delta_E^0, \delta_H^0)\|_{\varepsilon, \mu} + 4\alpha^{-1} \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \left(\|\mathcal{Q}_E^k\|_{\varepsilon^{-1}} + \|\{\mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}}\}\|_{\mu^{-1}} \right) \\ &\quad + (\alpha^{-1} \Delta t)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \|\mathcal{Z}_E^k\|_{Z^{-1}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par définition de \mathcal{Q}_E (5.59) on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_E^0\|_{\varepsilon^{-1}} &\leq \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^1\|_{\varepsilon^{-1}} + \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^0\|_{\varepsilon^{-1}} \\ &\leq \max_{1 \leq n \leq N-1} \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^n\|_{\varepsilon^{-1}} + \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^0\|_{\varepsilon^{-1}}, \\ \|\mathcal{Q}_E^{N-1}\|_{\varepsilon^{-1}} &\leq \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^N\|_{\varepsilon^{-1}} + \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^{N-1}\|_{\varepsilon^{-1}} \\ &\leq \max_{1 \leq n \leq N-1} \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^n\|_{\varepsilon^{-1}} + \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^N\|_{\varepsilon^{-1}}, \end{aligned}$$

et pour tout $k \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket$

$$\|\mathcal{Q}_E^k\|_{\varepsilon^{-1}} \leq 2 \max_{1 \leq n \leq N-1} \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^n\|_{\varepsilon^{-1}}.$$

En utilisant ces estimations et le fait que $m \leq N$, on établit que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\mathcal{Q}_E^k\|_{\varepsilon^{-1}} \leq 2(N-1) \max_{1 \leq n \leq N-1} \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^n\|_{\varepsilon^{-1}} + \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^0\|_{\varepsilon^{-1}} + \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^N\|_{\varepsilon^{-1}}.$$

De la même manière, en utilisant la définition de \mathcal{Q}_H (5.58) et de \mathcal{Z}_E (5.59), on obtient

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\{\mathcal{Q}_H^{k-\frac{1}{2}}\}\|_{\mu^{-1}} \leq 2(N+1) \max_{0 \leq n \leq N-1} \|[\mu, \Delta t](\mathbf{H})^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu^{-1}} + \|[\mu, \Delta t](\mathbf{H})^0\|_{\mu^{-1}} + \|[\mu, \Delta t](\mathbf{H})^N\|_{\mu^{-1}}$$

et

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \|\mathcal{Z}_E^k\|_{Z^{-1}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (N-2) \max_{1 \leq n \leq N-2} \|[\mathcal{Z}, \Delta t](\mathbf{E})^n\|_{Z^{-1}} + \|[\mathcal{Z}, \Delta t](\mathbf{E})^0\|_{Z^{-1}} + \|[\mathcal{Z}, \Delta t](\mathbf{E})^{N-1}\|_{Z^{-1}}.$$

Les champs initiaux \mathbf{E}_0 et \mathbf{H}_0 étant donnés, on a alors $\delta_D^0 = 0$ et $\delta_B^0 = 0$. Ainsi, d'après les équations constitutives à $n = 0$,

$$2\alpha^{-\frac{1}{2}} \|(\delta_E^0, \delta_H^0)\|_{\varepsilon, \mu} \leq \alpha^{-\frac{1}{2}} \Delta t \left(\|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^0\|_{\varepsilon^{-1}} + \|[\mu, \Delta t](\mathbf{H})^0\|_{\mu^{-1}} \right).$$

Enfin, pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{aligned} \|(\delta_E^m, \delta_H^{m-\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu} &\lesssim \Delta t \left(\|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^0\|_{\varepsilon^{-1}} + \|[\mu, \Delta t](\mathbf{H})^0\|_{\mu^{-1}} \right) \\ &\quad + \Delta t \left(\|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^N\|_{\varepsilon^{-1}} + \|[\mu, \Delta t](\mathbf{H})^N\|_{\mu^{-1}} \right) \\ &\quad + \Delta t^{\frac{1}{2}} \left(\|[\mathcal{Z}, \Delta t](\mathbf{E})^0\|_{Z^{-1}} + \|[\mathcal{Z}, \Delta t](\mathbf{E})^{N-1}\|_{Z^{-1}} \right) \\ &\quad + t_F \left(\max_{1 \leq k \leq N-1} \|[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^k\|_{\varepsilon^{-1}} + \max_{0 \leq k \leq N-1} \|[\mu, \Delta t](\mathbf{H})^{k+\frac{1}{2}}\|_{\mu^{-1}} \right) \\ &\quad + t_F^{\frac{1}{2}} \max_{1 \leq k \leq N-2} \|[\mathcal{Z}, \Delta t](\mathbf{E})^k\|_{Z^{-1}}. \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $(m-1)\Delta t \leq (N-1)\Delta t \leq t_F$. \square

Maintenant que l'on a montré que l'erreur est majorée à tout instant par les erreurs de consistances, la section suivante se concentre sur l'estimation des erreurs de consistance en fonction de la taille du maillage h .

5.4.3 Estimation a priori sur l'erreur

L'objectif de cette section est d'estimer, en fonction de la taille du maillage h et du pas de temps Δt , les normes des erreurs de consistance dans l'inégalité donnée par la Proposition 5.4.2. De ces estimations, on déduit le Théorème 5.4.2 qui affirme que, sous la condition CFL (5.35), l'erreur associée au schéma CDO (5.8) décroît en $\mathcal{O}(h)$ lorsque $h \rightarrow 0$. On commence par formuler ce résultat.

Théorème 5.4.2 (Estimation *a priori* pour le problème discret). Soit h le diamètre du maillage dans Ω . Soit (\mathbf{E}, \mathbf{H}) une solution du problème (5.1) telle que $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{H}^s(C))$, avec $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, et tels que $\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{H} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{L}^4(C))$. Dans ces hypothèses

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{H}^s(C)), \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{H}^s(C)) \quad \text{et} \quad Z\mathbf{E} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{H}^s(C)).$$

Sous la condition CFL (5.35) donnée par

$$\Delta t \leq 2C_{\text{stab}} \frac{h}{c_0} (1 - \alpha),$$

avec $C_{\text{stab}} = (\eta_\varepsilon \eta_{\mu^{-1}})^{-1/2} \mathbf{C}_{\text{inv}}^{-1}$, $c_0 := (\varepsilon \mu)^{-1/2}$ et $\alpha \in]0, 1[$ un paramètre, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} \|(\delta_E^m, \delta_H^{m-\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu} &\lesssim ht_F \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{4}} \sup_{[0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(C)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sup_{[0, t_F]} |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(C)} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sup_{[0, t_F]} |\mathbf{D}|_{\mathbf{H}^s(C)} \right) \\ &+ ht_F \left(\mu^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{4}} \sup_{[0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{H}\|_{\mathbf{L}^4(C)} + \mu^{-\frac{1}{2}} \sup_{[0, t_F]} |\mathbf{H}|_{\mathbf{H}^s(C)} + \mu^{\frac{1}{2}} \sup_{[0, t_F]} |\mathbf{B}|_{\mathbf{H}^s(C)} \right) \\ &+ h^{\frac{3}{2}} t_F^{\frac{1}{2}} c_0^{-1} Z^{\frac{1}{2}} \left(\sup_{[0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(C)} + \sup_{[0, t_F]} |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(C)} \right) \\ &+ h^3 t_F c_0^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_{tt} \nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right) \\ &+ h^3 t_F c_0^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}} \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{H}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_{tt} \nabla \times \mathbf{H}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right) \\ &+ h^3 c_0^{-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_t \mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_t \nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right) \\ &+ h^3 c_0^{-1} \mu^{-\frac{1}{2}} \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_t \mathbf{H}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_t \nabla \times \mathbf{H}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right) \\ &+ h^2 c_0^{-1} Z^{\frac{1}{2}} \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right). \end{aligned}$$

Preuve. C'est une conséquence de l'estimation donnée par la Proposition 5.4.2 combinées avec les majorations des Propositions 5.4.3–5.4.5, les estimations des erreurs en espace des Propositions 5.4.6–5.4.8 et les estimations des erreurs en temps des Propositions 5.4.9–5.4.14. \square

On rappelle les erreurs définies au Chapitre 4 :

$$[\varepsilon, \Delta t](\mathbf{E})^n := [\Delta t, t_n](\mathbf{E}) + [\varepsilon, \varepsilon \tilde{\mathcal{F}}](\mathbf{E})(t_n), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (5.65)$$

$$[\mu, \Delta t](\mathbf{H})^{n-\frac{1}{2}} := [\Delta t, t_{n-\frac{1}{2}}](\mathbf{H}) + [\mu, \tilde{\varepsilon} \tilde{\mathcal{F}}](\mathbf{H})(t_{n-\frac{1}{2}}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket, \quad (5.66)$$

$$[Z, \Delta t](\mathbf{E})^n := [\Delta t, [t_n, t_{n+1}]](\mathbf{E}) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [Z, (\varepsilon \tilde{\varepsilon})^\rho](\mathbf{E})(t) dt, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket. \quad (5.67)$$

Les Propositions 5.4.3–5.4.5 montrent que pour estimer les normes sur les erreurs de commutation (ou consistance), il faut estimer une erreur spatiale et une erreur temporelle.

Proposition 5.4.3. Pour $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$, avec $s > 1$, et $\varepsilon \mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$, les estimations suivantes sont alors vérifiées :

$$\max_{1 \leq n \leq N-1} \|\llbracket \varepsilon, \Delta t \rrbracket(\mathbf{E})^n\|_{\varepsilon^{-1}} \leq \max_{1 \leq n \leq N-1} \|\llbracket \Delta t, t_n \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} + \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket \varepsilon, \varepsilon \tilde{\mathcal{F}} \rrbracket(\mathbf{E})(t)\|_{\varepsilon^{-1}}, \quad (5.68a)$$

$$\llbracket \varepsilon, \Delta t \rrbracket(\mathbf{E})^0 \leq \|\llbracket \Delta t, t_0 \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} + \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket \varepsilon, \varepsilon \tilde{\mathcal{F}} \rrbracket(\mathbf{E})(t)\|_{\varepsilon^{-1}}, \quad (5.68b)$$

$$\llbracket \varepsilon, \Delta t \rrbracket(\mathbf{E})^N \leq \|\llbracket \Delta t, t_N \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} + \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket \varepsilon, \varepsilon \tilde{\mathcal{F}} \rrbracket(\mathbf{E})(t)\|_{\varepsilon^{-1}}. \quad (5.68c)$$

Preuve. De la définition de l'erreur globale (5.65) et de l'inégalité triangulaire, il vient pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$\|\llbracket \varepsilon, \Delta t \rrbracket(\mathbf{E})^n\|_{\varepsilon^{-1}} \leq \|\llbracket \Delta t, t_n \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} + \|\llbracket \varepsilon, \varepsilon \tilde{\mathcal{F}} \rrbracket(\mathbf{E})(t_n)\|_{\varepsilon^{-1}}.$$

De la régularité en temps, on obtient pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$\|\llbracket \varepsilon, \Delta t \rrbracket(\mathbf{E})^n\|_{\varepsilon^{-1}} \leq \|\llbracket \Delta t, t_n \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} + \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket \varepsilon, \varepsilon \tilde{\mathcal{F}} \rrbracket(\mathbf{E})(t)\|_{\varepsilon^{-1}}. \quad (5.69)$$

L'estimation (5.68a) s'obtient par passage au $\max_{1 \leq n \leq N-1}$ et les estimations (5.68b) et (5.68c) correspondent à (5.69) pour $n = 0$ et $n = N$. \square

Proposition 5.4.4. Pour $\mathbf{H} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$, avec $s > 1$, tel que $\mu \mathbf{H} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$, les estimations suivantes sont alors vérifiées :

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \|\llbracket \mu, \Delta t \rrbracket(\mathbf{H})^{n+\frac{1}{2}}\|_{\mu^{-1}} \leq \max_{0 \leq n \leq N-1} \|\llbracket \Delta t, t_{n+\frac{1}{2}} \rrbracket(\mathbf{H})\|_{\mu^{-1}} + \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket \mu, \tilde{\varepsilon} \mathcal{F} \rrbracket(\mathbf{H})(t)\|_{\mu^{-1}}, \quad (5.70a)$$

$$\llbracket \mu, \Delta t \rrbracket(\mathbf{H})^0 \leq \|\llbracket \Delta t, t_0 \rrbracket(\mathbf{H})\|_{\mu^{-1}} + \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket \mu, \tilde{\varepsilon} \mathcal{F} \rrbracket(\mathbf{H})(t)\|_{\mu^{-1}}, \quad (5.70b)$$

$$\llbracket \mu, \Delta t \rrbracket(\mathbf{H})^N \leq \|\llbracket \Delta t, t_N \rrbracket(\mathbf{H})\|_{\mu^{-1}} + \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket \mu, \tilde{\varepsilon} \mathcal{F} \rrbracket(\mathbf{H})(t)\|_{\mu^{-1}}. \quad (5.70c)$$

Preuve. La preuve suit le même raisonnement que celui de la proposition Proposition 5.4.3. \square

Proposition 5.4.5. Pour $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$, avec $s > 1$, tel que $Z\mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$, les estimations suivantes sont alors vérifiées :

$$\max_{1 \leq n \leq N-2} \|\llbracket Z, \Delta t \rrbracket(\mathbf{E})^n\|_{Z^{-1}} \leq \max_{1 \leq n \leq N-2} \|\llbracket \Delta t, [t_n, t_{n+1}] \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} + \Delta t \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket Z, (\varepsilon \tilde{\varepsilon})^\partial \rrbracket(\mathbf{E})(t)\|_{Z^{-1}}, \quad (5.71a)$$

$$\llbracket Z, \Delta t \rrbracket(\mathbf{E})^0 \leq \|\llbracket \Delta t, [t_0, t_1] \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} + \Delta t \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket Z, (\varepsilon \tilde{\varepsilon})^\partial \rrbracket(\mathbf{E})(t)\|_{Z^{-1}}, \quad (5.71b)$$

$$\llbracket Z, \Delta t \rrbracket(\mathbf{E})^N \leq \|\llbracket \Delta t, [t_{N-1}, t_N] \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} + \Delta t \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket Z, (\varepsilon \tilde{\varepsilon})^\partial \rrbracket(\mathbf{E})(t)\|_{Z^{-1}}. \quad (5.71c)$$

Preuve. La preuve suit le même raisonnement que celui de la proposition Proposition 5.4.3. La seule différence réside dans l'intégrale en temps dans (5.67). Pour cela, on utilise l'inégalité triangulaire pour les intégrales ainsi que la régularité en temps. On obtient alors pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

$$\|\int_{t_n}^{t_{n+1}} \llbracket Z, (\varepsilon \tilde{\varepsilon})^\partial \rrbracket(\mathbf{E})(t) dt\|_{Z^{-1}} \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\llbracket Z, (\varepsilon \tilde{\varepsilon})^\partial \rrbracket(\mathbf{E})(t)\|_{Z^{-1}} dt \leq \Delta t \sup_{t \in [0, t_F]} \|\llbracket Z, (\varepsilon \tilde{\varepsilon})^\partial \rrbracket(\mathbf{E})(t)\|_{Z^{-1}}.$$

\square

Lemme 5.4.3. Soit $c \in \mathbb{C}$. Pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(c)$, avec $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, tel que $\nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}^4(c)$, il existe deux constantes $\mathcal{C}_\varepsilon, \mathcal{C}_{\tilde{\varepsilon}} > 0$ telles que les estimations suivantes sont vérifiées

$$|\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(\mathbf{u})_e| \leq \mathcal{C}_\varepsilon h_c^{\frac{1}{2}} \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h_c^{\frac{3}{4}} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right), \quad \forall e \in \mathbb{E}_c, \quad (5.72)$$

$$|\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{u})_{\tilde{e}_c(f)}| \leq \mathcal{C}_{\tilde{\varepsilon}} h_c^{\frac{1}{2}} \left(|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h_c^{\frac{3}{4}} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right), \quad \forall f \in \mathbb{F}_c. \quad (5.73)$$

Preuve. C.f. annexe à la fin du chapitre. \square

Estimation de l'erreur spatiale

Afin d'établir une estimation de l'erreur spatiale, on définit les normes sur les espaces de ddl duaux :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}\|_{2, \tilde{\mathcal{E}}}^2 &:= \sum_{c \in \mathbb{C}} \sum_{f \in \mathbb{F}_c} h_c \mathbf{g}_{\tilde{e}_c(f)}^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \tilde{\mathcal{E}}, \quad \|\phi\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}}^2 := \sum_{c \in \mathbb{C}} \sum_{e \in \mathbb{E}_c} h_c^{-1} \phi_{\tilde{f}_c(e)}^2, \quad \forall \phi \in \tilde{\mathcal{E}}, \\ \|\mathbf{g}\|_{2, \tilde{\mathcal{E}}^\partial}^2 &:= \sum_{f \in \mathbb{F}^\partial} \sum_{e \in \mathbb{E}_f} h_f^0 \mathbf{g}_{\tilde{e}_f^\partial(e)}^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \tilde{\mathcal{E}}^\partial. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Proposition 5.4.6. Soient $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$, avec $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, tel que $\nabla \times \mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{L}^4(\mathbb{C}))$ et $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$. L'estimation suivante est alors vérifiée :

$$\sup_{[0, t_F]} \|\llbracket \varepsilon, \varepsilon \tilde{\mathcal{F}} \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} \lesssim h \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{4}} \sup_{[0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(\mathbb{C})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sup_{[0, t_F]} |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(\mathbb{C})} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sup_{[0, t_F]} |\mathbf{D}|_{\mathbf{H}^s(\mathbb{C})} \right).$$

Preuve. Par définition,

$$\|\llbracket \varepsilon, \varepsilon \tilde{\mathcal{F}} \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}}^2 = \sum_{c \in \mathbb{C}} \|\llbracket \varepsilon, \varepsilon_c \tilde{\mathcal{F}}_c \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2. \quad (5.75)$$

Soit $\pi_0(\mathbf{E})$ la projection L^2 orthogonale de \mathbf{E} sur $\mathbb{P}_0(c)$ et $\pi_0(\mathbf{D}) = \varepsilon \pi_0(\mathbf{E})$ celle de \mathbf{D} (du fait que ε est constant). De la propriété de consistance (4.8) on a $\|\llbracket \varepsilon, \varepsilon_c \tilde{\mathcal{F}}_c \rrbracket(\pi_0(\mathbf{E}))\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2 = 0$, d'où

$$\|\llbracket \varepsilon, \varepsilon_c \tilde{\mathcal{F}}_c \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2 = \|\llbracket \varepsilon, \varepsilon_c \tilde{\mathcal{F}}_c \rrbracket(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2.$$

En développant le membre de droite on obtient

$$\begin{aligned} \|\llbracket \varepsilon, \varepsilon_c \tilde{\mathcal{F}}_c \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2 &= \|\mathcal{R}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))\|_{\varepsilon, c}^2 \\ &\quad + \|\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_c}(\mathbf{D} - \pi_0(\mathbf{D}))\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2 - 2\|\mathcal{R}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E})), \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_c}(\mathbf{D} - \pi_0(\mathbf{D}))\|_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (5.19) et l'inégalité de Young donnent

$$\|\llbracket \varepsilon, \varepsilon_c \tilde{\mathcal{F}}_c \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2 \leq 2 \left(\|\mathcal{R}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))\|_{\varepsilon, c}^2 + \|\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_c}(\mathbf{D} - \pi_0(\mathbf{D}))\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2 \right).$$

Cette dernière inégalité peut se réécrire

$$\|\llbracket \varepsilon, \varepsilon_c \tilde{\mathcal{F}}_c \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2 \leq 2 \left(\|\mathcal{R}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))\|_{\varepsilon, c}^2 + \|\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_c}(\mathbf{D} - \pi_0(\mathbf{D}))\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2 \right).$$

De la définition des normes discrètes (5.29) et (5.74), et des inégalités de stabilité (5.33a), on obtient

$$\|\llbracket \varepsilon, \varepsilon_c \tilde{\mathcal{F}}_c \rrbracket(\mathbf{E}_c)\|_{\varepsilon^{-1}, c}^2 \lesssim h_c \varepsilon \sum_{e \in \mathbb{E}_c} \mathcal{R}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))_e^2 + h_c^{-1} \varepsilon^{-1} \sum_{e \in \mathbb{E}_c} \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_c}(\mathbf{D} - \pi_0(\mathbf{D}))_{\tilde{f}_c(e)}^2. \quad (5.76)$$

En observant que $\nabla \times \pi_0(\mathbf{E}) = 0$ et que $|\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E})|_{\mathbf{H}^s(c)} = |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)}$, du Lemme 5.4.3, il vient :

$$|\mathcal{R}_{\mathcal{E}_c}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))_e| \leq \mathcal{C}_\varepsilon h_c^{\frac{1}{2}} \left(|\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h_c^{\frac{3}{4}} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right). \quad (5.77)$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\tilde{\Gamma}_c(e))$, de la régularité du maillage et du fait que $\|(\mathbf{D} - \pi_0(\mathbf{D}))\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_c(e))} \lesssim h_c^{\frac{1}{2}} |\mathbf{D}|_{\mathbf{H}^s(c)}$, on a

$$|\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_c}(\mathbf{D} - \pi_0(\mathbf{D}))_{\tilde{\Gamma}_c(e)}| \lesssim h_c^{\frac{3}{2}} |\mathbf{D}|_{\mathbf{H}^s(c)}. \quad (5.78)$$

En combinant les estimations (5.77) et (5.78) avec (5.76) puis (5.75), le passage au $\sup_{t \in [0, t_F]}$ permet d'obtenir l'estimation cherchée. \square

Proposition 5.4.7. Soient $\mathbf{H} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(C))$, avec $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, tel que $\nabla \times \mathbf{H} \in \mathcal{C}^0(L^4(C))$ et $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(C))$. L'estimation suivante est vérifiée :

$$\sup_{[0, t_F]} \|\llbracket \mu, \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{F}} \rrbracket(\mathbf{H})\|_{\mu^{-1}} \lesssim h \left(\mu^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{4}} \sup_{[0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{H}\|_{L^4(C)} + \mu^{-\frac{1}{2}} \sup_{[0, t_F]} |\mathbf{H}|_{\mathbf{H}^s(C)} + \mu^{\frac{1}{2}} \sup_{[0, t_F]} |\mathbf{B}|_{\mathbf{H}^s(C)} \right).$$

Preuve. La preuve suit le même raisonnement que celui de la Proposition 5.4.6. \square

Proposition 5.4.8. Soit $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(C))$, avec $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, tel que $Z\mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(C))$ et $\nabla \times \mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(L^4(C))$. L'estimation suivante est vérifiée

$$\sup_{[0, t_F]} \|\llbracket Z, (\varepsilon \tilde{\varepsilon})^\partial \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} \lesssim h^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{1}{2}} \left(h^{\frac{3}{4}} \sup_{[0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{L^4(C)} + \sup_{[0, t_F]} |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(C)} \right).$$

Preuve. Par définition

$$\|\llbracket Z, (\varepsilon \tilde{\varepsilon})^\partial \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} = \sum_{f \in \mathbb{F}_{\text{out}}^\partial} \|\llbracket Z, (\varepsilon_f \tilde{\varepsilon}_f)^\partial \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}, f}. \quad (5.79)$$

Soit $c(f)$ une cellule telle que $f \subset \partial c \cap \Gamma_{\text{out}}$. On note $\pi_0(\mathbf{E})$ la projection L^2 orthogonale de \mathbf{E} sur $\mathbb{P}_0(c(f))$. De la propriété de consistance sur le bord (4.10), on a

$$\|\llbracket Z, (\varepsilon_f \tilde{\varepsilon}_f)^\partial \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}, f}^2 = \|\llbracket Z, (\varepsilon_f \tilde{\varepsilon}_f)^\partial \rrbracket(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))\|_{Z^{-1}, f}^2.$$

Du fait que Z est constant, on a $\pi_0(Z\mathbf{E}) = Z\pi_0(\mathbf{E})$. Ainsi en développant le membre de droite, il vient

$$\begin{aligned} \|\llbracket Z, (\varepsilon_f \tilde{\varepsilon}_f)^\partial \rrbracket(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))\|_{Z^{-1}, f}^2 &= \|\mathbb{R}_{\mathcal{E}_f^\partial}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))\|_{Z, f}^2 \\ &+ \|\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(Z\mathbf{E} - \pi_0(Z\mathbf{E}))\|_{Z^{-1}, f}^2 - 2\|\mathbb{R}_{\mathcal{E}_f^\partial}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E})), \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(Z\mathbf{E} - \pi_0(Z\mathbf{E}))\|_{\mathcal{E}_{\tilde{\mathcal{F}}}}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la norme d'énergie sur le bord (5.19) et l'inégalité de Young, on obtient

$$\|\llbracket Z, (\varepsilon_f \tilde{\varepsilon}_f)^\partial \rrbracket(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))\|_{Z^{-1}, f}^2 \leq 2 \left(\|\mathbb{R}_{\mathcal{E}_f^\partial}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))\|_{Z, f}^2 + \|\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(Z\mathbf{E} - \pi_0(Z\mathbf{E}))\|_{Z^{-1}, f}^2 \right).$$

De la définition des normes discrètes sur le bord (5.31) et (5.74), de la stabilité de l'opérateur de Hodge discret sur le bord (5.33c) et du fait que Z est constant, il vient

$$\|\llbracket Z, (\varepsilon_f \tilde{\varepsilon}_f)^\partial \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}, f}^2 \lesssim Z \sum_{e \in \mathbb{E}_f^\partial} \mathbb{R}_{\mathcal{E}_f^\partial}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))_e^2 + Z \sum_{e \in \mathbb{E}_f^\partial} \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))_{\tilde{e}_f^\partial(e)}^2. \quad (5.80)$$

En observant que toute face f sur le bord n'appartient qu'à une seule cellule $c(f)$, le Lemme 5.4.3 donne

$$|\mathbb{R}_{\mathcal{E}_f^\partial}(\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E}))_e| \leq C_{\mathcal{E}} h_{c(f)}^{\frac{1}{2}} \left(|\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c(f))} + h_{c(f)}^{\frac{3}{4}} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{L^4(c(f))} \right). \quad (5.81)$$

où l'on a utilisé le fait que $\nabla \times \pi_0(\mathbf{E}) = 0$ et que $|\mathbf{E} - \pi_0(\mathbf{E})|_{\mathbf{H}^s(c(f))} = |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c(f))}$. De même,

$$|\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}_f^\partial}(\mathbf{E} - \pi_0(Z\mathbf{E}))_{\tilde{e}_f^\partial(e)}| \leq C_{\tilde{\mathcal{E}}} h_{c(f)}^{\frac{1}{2}} \left(|\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c(f))} + h_{c(f)}^{\frac{3}{4}} \|\nabla \times (\mathbf{E})\|_{L^4(c(f))} \right). \quad (5.82)$$

En combinant les estimations (5.81) et (5.82) avec (5.80), puis avec (5.79), la majoration par la somme sur toutes les cellules et le passage au $\sup_{t \in [0, t_F]}$ permet d'obtenir l'inégalité cherchée. \square

Estimation de l'erreur temporelle

On commence par estimer les erreurs à tout instant.

Proposition 5.4.9. Pour tout $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{H}^s(C))$, avec $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, tel que $\nabla \times \mathbf{E} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{L}^4(C))$, on a

$$\max_{1 \leq n \leq N-1} \|\llbracket \Delta t, t_n \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} h \Delta t^2 \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_{tt} \nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right). \quad (5.83)$$

Preuve. On rappelle la définition de $\|\llbracket \Delta t, t_n \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}}$ (voir Chapitre 4) de l'erreur de commutation en temps

$$\llbracket \Delta t, t_n \rrbracket(\mathbf{E}) := \frac{1}{\Delta t} \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt - \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_n)), \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket.$$

De cette définition et de l'identité $\|\mathbb{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}(\mathbf{g})\|_{\varepsilon^{-1}} = \|\mathbf{g}\|_\varepsilon$, il vient pour tout $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$

$$\|\llbracket \Delta t, t_n \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} = \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}) - \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t_n)) \right\|_\varepsilon.$$

Par stabilité globale de l'opérateur de Hodge discret (5.33a) et de la définition de la norme $\|\cdot\|_\mathcal{E}$ (5.29), il vient

$$\|\llbracket \Delta t, t_n \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}}^2 \lesssim \varepsilon h \sum_{c \in C} \sum_{e \in \mathbb{E}_c} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}) - \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t_n)) \right)_e^2.$$

Ensuite, comme $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{H}^s(C))$,

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E})_e - \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t_n))_e \right| \lesssim \Delta t^2 \sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t))_e|, \quad \forall e \in \mathbb{E}.$$

En utilisant le fait que

$$\left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t))_e| \right)^2 \leq \sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t))_e|^2,$$

il vient pour tout $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$

$$\|\llbracket \Delta t, t_n \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta t^2}{6} \left(\sum_{c \in C} \sum_{e \in \mathbb{E}_c} \sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t))_e|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.84)$$

Le Lemme 5.4.3 appliqué à $d_{tt} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t))_e$, pour tout $e \in \mathbb{E}_c$, donne

$$|d_{tt} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t))_e| \leq \mathbf{C}_\varepsilon h_c^{\frac{1}{2}} \left(|d_{tt} \mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \|d_{tt} \nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right),$$

d'où

$$\sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t))_e|^2 \leq \mathbf{C}_\varepsilon^2 h \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_{tt} \nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right)^2,$$

où l'on a utilisé le fait que $\sup f^2 \leq (\sup f)^2$, pour toute fonction f continue sur $[0, t_F]$. En remplaçant dans (5.84), il vient

$$\|\llbracket \Delta t, t_n \rrbracket(\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} h \Delta t^2 \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_{tt} \nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right),$$

ce qui est l'estimation cherchée □

Proposition 5.4.10. Pour tout $\mathbf{H} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$, avec $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, tel que $\nabla \times \mathbf{H} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{L}^4(\mathbb{C}))$, on a

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \|\llbracket \Delta t, t_{n+\frac{1}{2}} \rrbracket(\mathbf{H})\|_{\mu^{-1}} \lesssim \mu^{-1} h \Delta t^2 \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{C}} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_{tt} \mathbf{H}|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{c})} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_{tt} \nabla \times \mathbf{H}\|_{\mathbf{L}^4(\mathbf{c})} \right). \quad (5.85)$$

Preuve. La preuve suit le même raisonnement que celui de la Proposition 5.4.9. \square

Proposition 5.4.11. Pour tout $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$ tel que $\nabla \times \mathbf{E} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{L}^4(\mathbb{C}))$, on a

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|\llbracket \Delta t, [t_n, t_{n+1}] \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} \lesssim Z^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \Delta t \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{C}} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{c})} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(\mathbf{c})} \right), \quad (5.86)$$

Preuve. Pour tout $n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket$, on a par définition

$$\begin{aligned} \llbracket \Delta t, [t_n, t_{n+1}] \rrbracket(\mathbf{E}) &:= \frac{1}{2} \mathbb{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} \left(\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{3}{2}}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt \right) \\ &\quad - \mathbb{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}^\partial}(Z\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt, \end{aligned}$$

De la définition de $\|\llbracket \Delta t, [t_n, t_{n+1}] \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}}$ et de l'identité $\|\mathbb{H}_Z^{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial}(\mathbf{g})\|_{Z^{-1}} = \|\mathbf{g}\|_Z$, il vient pour tout $n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket$

$$\|\llbracket \Delta t, [t_n, t_{n+1}] \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} = \left\| \frac{1}{2} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}) + \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{3}{2}}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}) \right\|_Z.$$

La stabilité globale de l'opérateur de Hodge discret surfacique (5.33c) et la définition de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^\partial}$ (5.31) entraînent :

$$\|\llbracket \Delta t, [t_n, t_{n+1}] \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}}^2 \lesssim Z \sum_{\mathbf{f} \in \mathbb{F}_{\text{out}}^\partial} \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{E}_{\mathbf{f}}} \left(\frac{1}{2} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E})_{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{3}{2}}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E})_{\mathbf{e}} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E})_{\mathbf{e}} \right)^2.$$

Ensuite, comme $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathbb{C}))$, pour tout $\mathbf{e} \in \mathbb{E}_{\mathbf{f}}$

$$\left| \frac{1}{2} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E})_{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{3}{2}}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E})_{\mathbf{e}} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E})_{\mathbf{e}} \right| \leq 2\Delta t \sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E})_{\mathbf{e}}|.$$

En utilisant le fait que

$$\left(\sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}(t))_{\mathbf{e}}| \right)^2 \leq \sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}(t))_{\mathbf{e}}|^2,$$

il vient pour tout $n \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket$

$$\|\llbracket \Delta t, [t_n, t_{n+1}] \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} \lesssim Z^{\frac{1}{2}} \Delta t \left(\sum_{\mathbf{f} \in \mathbb{F}_{\text{out}}^\partial} \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{E}_{\mathbf{f}}} \sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}(t))_{\mathbf{e}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.87)$$

En remarquant que toute face de bord \mathbf{f} n'appartient qu'à une seule cellule $\mathbf{c}(\mathbf{f})$, du Lemme 5.4.3 il vient

$$|\mathbb{R}_{\mathcal{E}^\partial}(\mathbf{E}(t))_{\mathbf{e}}| \leq \mathbf{C}_\varepsilon h_{\mathbf{c}(\mathbf{f})}^{\frac{1}{2}} \left(|\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{c}(\mathbf{f}))} + h^{\frac{3}{4}} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(\mathbf{c}(\mathbf{f}))} \right),$$

d'où

$$\sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbf{R}_{\mathcal{E}\partial}(\mathbf{E}(t))_e|^2 \leq \mathbf{C}_\varepsilon^2 h \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c(f))} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(c(f))} \right)^2,$$

où l'on a utilisé le fait que $\sup f^2 \leq (\sup f)^2$, pour toute fonction continue sur $[0, t_F]$. On remplace alors dans (5.87) de sorte que

$$\|[\Delta t, [t_n, t_{n+1}]](\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} \lesssim Z^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \Delta t \sum_{f \in \mathbf{F}_{\text{out}}^\partial} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c(f))} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(c(f))} \right).$$

L'estimation cherchée s'obtient en majorant par la somme sur toutes les cellules. \square

Proposition 5.4.12. Pour tout $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{H}^s(C))$, avec $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, tel que $\nabla \times \mathbf{E} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{L}^4(C))$, on a les estimations

$$\begin{aligned} \|[\Delta t, t_0](\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} &\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} h \Delta t \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_t \mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} |d_t \nabla \times \mathbf{E}|_{\mathbf{L}^4(c)} \right), \\ \|[\Delta t, t_N](\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} &\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} h \Delta t \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_t \mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} |d_t \nabla \times \mathbf{E}|_{\mathbf{L}^4(c)} \right). \end{aligned}$$

Preuve. On rappelle que

$$\begin{aligned} [\Delta t, t_0](\mathbf{E}) &:= \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{2}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt - \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_0)), \\ [\Delta t, t_N](\mathbf{E}) &:= \frac{2}{\Delta t} \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \int_{t_N - \frac{1}{2}}^{t_N} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) dt - \mathbf{H}_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t_N)). \end{aligned}$$

Par stabilité globale de l'opérateur de Hodge (5.33a), on a

$$\|[\Delta t, t_0](\mathbf{E})\|_\varepsilon^2 \lesssim \varepsilon h \sum_{c \in C} \sum_{e \in E_c} \left(\frac{2}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{2}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}) - \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t_0)) \right)^2.$$

Ainsi, en suivant le même raisonnement que celui de la Proposition 5.4.9, on obtient

$$\|[\Delta t, t_0](\mathbf{E})\|_{\varepsilon^{-1}} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}} h \Delta t \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_t \mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(C)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_t \nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(C)} \right), \quad (5.88)$$

où l'on a utilisé le fait que pour tout $e \in E_c$

$$\left| \frac{2}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{2}} \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E})_e - \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t_0))_e \right| \leq \Delta t \sup_{t \in [0, t_F]} |d_t \mathbf{R}_\mathcal{E}(\mathbf{E}(t))_e|.$$

La deuxième estimation s'obtient en suivant un raisonnement analogue. \square

Proposition 5.4.13. Pour tout $\mathbf{H} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{H}^s(C))$, avec $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, tel que $\nabla \times \mathbf{H} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{L}^4(C))$, on a les estimations

$$\begin{aligned} \|[\Delta t, t_0](\mathbf{H})\|_{\varepsilon^{-1}} &\lesssim \mu^{-\frac{1}{2}} h \Delta t \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_t \mathbf{H}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_t \nabla \times \mathbf{H}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right), \\ \|[\Delta t, t_N](\mathbf{H})\|_{\varepsilon^{-1}} &\lesssim \mu^{-\frac{1}{2}} h \Delta t \sum_{c \in C} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |d_t \mathbf{H}|_{\mathbf{H}^s(c)} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|d_t \nabla \times \mathbf{H}\|_{\mathbf{L}^4(c)} \right). \end{aligned}$$

Preuve. La preuve suit le même raisonnement que celui de la Proposition 5.4.12. \square

Proposition 5.4.14. Pour tout $\mathbf{E} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{H}^s(\mathcal{C}))$ tel que $\nabla \times \mathbf{E} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{L}^4(\mathcal{C}))$, on a les estimations

$$\begin{aligned} \|\llbracket \Delta t, [t_0, t_1] \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} &\lesssim Z^{\frac{1}{2}} h \Delta t \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(\mathcal{C})} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(\mathcal{C})} \right), \\ \|\llbracket \Delta t, [t_{N-1}, t_N] \rrbracket(\mathbf{E})\|_{Z^{-1}} &\lesssim Z^{\frac{1}{2}} h \Delta t \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} \left(\sup_{t \in [0, t_F]} |\mathbf{E}|_{\mathbf{H}^s(\mathcal{C})} + h^{\frac{3}{4}} \sup_{t \in [0, t_F]} \|\nabla \times \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^4(\mathcal{C})} \right). \end{aligned}$$

Preuve. La preuve suit le même raisonnement que celui de la Proposition 5.4.11. \square

Conclusion partielle

Dans ce , on a établi une estimation de l'erreur du schéma CDO appliqué aux équations de Maxwell. Pour cela, dans la Section 5.1, on a formulé le modèle continu étudié, puis dans la Section 5.2, on a donné la formulation complètement discrète du schéma CDO en utilisant les discrétisations obtenues aux Chapitres 3 et 4. Enfin, dans les Sections 5.3 et 5.4 on a mené l'analyse du schéma CDO en terme de stabilité et de consistance.

Le chapitre suivant se concentre sur les aspects pratiques liés au schéma CDO, notamment la construction des opérateurs de Hodge discrets ainsi que la stratégie de résolution du problème discret sur maillages hybrides.

Annexe du Chapitre 5

Complément de preuve pour la Proposition 5.3.1. (ii) Le raisonnement étant le même, seules les grandes lignes sont données. De la définition (5.7) de \mathbf{D}^0 et \mathbf{B}^0 , le système (5.8) à l'instant initial peut se réécrire

$$(\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \frac{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}} - 2\mathbf{H}^0}{\Delta t} + \text{ROT}(\mathbf{E}^0) = 0, \quad (5.89a)$$

$$\mathbf{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \frac{\mathbf{E}^1 - 2\mathbf{E}^0}{\Delta t} + \mathbf{H}_{\sigma}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^0 \right) - \widetilde{\text{ROT}}^{\sharp}(\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}, \mathbf{H}^{\partial, \frac{1}{2}}) = -\mathbf{J}_d^{\frac{1}{2}}. \quad (5.89b)$$

Le produit scalaire de l'équation (5.89a) est pris avec $\frac{1}{2}\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}$ à l'instant initial $n = 0$ et à l'instant suivant $n = 1$, puis l'équation (5.89b) est prise en produit scalaire avec $\frac{1}{2}\mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^0$. Ainsi, la somme de ces tests, combinée avec le même traitement du membre de droite qu'au (i), donne

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\mathbf{W}^1 - \frac{\|\mathbf{2E}^0\|_{\varepsilon}^2 + \langle \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}, \mathbf{2H}^0 \rangle_{\mu}}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{J}_d^{\frac{1}{2}}\|_{\sigma^{-1}}^2 - \llbracket \{\mathbf{E}_{\text{inc}}^0\}, \mathbf{H}^{\partial, \frac{1}{2}} \rrbracket_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^{\partial}} + \llbracket \text{ROT} \frac{\mathbf{E}^0}{2}, \mathbf{H}^{\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}.$$

En intégrant le dernier terme du membre de droite dans le membre de gauche, et en utilisant définition de la pseudo-énergie à l'instant initial (5.21), on obtient (5.27).

(iii) De la même manière que pour le (ii), de la définition (5.9) de \mathbf{E}^N et \mathbf{B}^N , le système (5.8) peut se réécrire

$$(\mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \frac{2\mathbf{H}^N - \mathbf{H}^{N-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \text{ROT}(\mathbf{E}^N) = 0, \quad (5.90a)$$

$$\mathbf{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \left(\frac{2\mathbf{E}^N - \mathbf{E}^{N-1}}{\Delta t} \right) + \mathbf{H}_{\sigma}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^N + \mathbf{E}^{N-1} \right) - \widetilde{\text{ROT}}^{\sharp}(\mathbf{H}^{N-\frac{1}{2}}, \mathbf{H}^{\partial, N-\frac{1}{2}}) = -\mathbf{J}_d^{N-\frac{1}{2}}. \quad (5.90b)$$

Le produit scalaire de l'équation (5.90a) est pris avec $\frac{1}{2}\mathbf{H}^{N-\frac{1}{2}}$ à l'instant final $n = N$ et à l'instant d'avant $n = N - 1$, puis l'équation (5.90b) est prise en produit scalaire avec $\frac{1}{2}\mathbf{E}^{N-1} + \mathbf{E}^N$. La

somme de ces testes, combinée avec les mêmes traitements du membre de droite que pour le (i), donne

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\|2E^N\|_\varepsilon^2 + \langle\langle 2H^N, H^{N-\frac{1}{2}} \rangle\rangle_\mu}{2} - W^{N-1} \right) \leq \frac{1}{2} \|J_d^{N-\frac{1}{2}}\|_{\sigma^{-1}}^2 - \llbracket \{E_{\text{inc}}^{N-1}\}, H^{\partial, N-\frac{1}{2}} \rrbracket_{(\mathcal{E}\tilde{\mathcal{E}})^\partial} + \llbracket \text{ROT} \frac{E^N}{2}, H^{N-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}.$$

En intégrant le dernier terme du membre de droite dans le membre de gauche, et en utilisant la définition de la pseudo-énergie à l'instant final (5.21), on obtient (5.28). \square

Complément de preuve pour la Proposition 5.3.3. (ii) Pour $n = 0$, la pseudo-énergie est donnée par

$$W^0 = \frac{1}{2} \left(\|2E^0\|_\varepsilon^2 + 2\langle\langle H^0, H^{\frac{1}{2}} \rangle\rangle_\mu - \Delta t \llbracket \text{ROT} E^0, H^{\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \right).$$

Or, la définition de B^0 dans (5.7) combinée avec (5.8a) et (5.8b) donne

$$H^{\frac{1}{2}} = 2H^0 - \Delta t H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \text{ROT}(E^0).$$

Ainsi la pseudo-énergie à l'instant initial peut se réécrire

$$W^0 = \frac{1}{2} \left(\|2E^0\|_\varepsilon^2 + \|2H^0\|_{\mu^{-1}}^2 - \Delta t^2 \|\text{ROT}(E^0)\|_{\mu^{-1}}^2 \right),$$

où l'on a utilisé l'identité

$$\langle\langle H^0, H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \text{ROT} E^0 \rangle\rangle_\mu = \llbracket \text{ROT}(E^0), H^0 \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}.$$

En suivant le raisonnement du (i), il vient

$$\|\text{ROT}(E^0)\|_{\mu^{-1}} \leq (\eta_\varepsilon \eta_{\mu^{-1}})^{1/2} C_{\text{inv}}(\mu_b \varepsilon)^{-1/2} h^{-1} \|E^0\|_\varepsilon,$$

puis par la condition CFL (5.35) et par passage au carré :

$$\Delta t^2 \|\text{ROT}(E^0)\|_{\mu^{-1}}^2 \leq 4(1-\alpha)^2 \|E^0\|_\varepsilon^2.$$

Comme $(1-\alpha)^2 \leq (1-\alpha)$ et $\|E^0\|_\varepsilon^2 \leq \|(E^0, H^0)\|_{\varepsilon, \mu}^2$, l'inégalité précédente peut aussi s'écrire :

$$\Delta t^2 \|\text{ROT}(E^0)\|_{\mu^{-1}}^2 \leq 4(1-\alpha) \|(E^0, H^0)\|_{\varepsilon, \mu}^2.$$

Ainsi

$$W^0 \geq 2\alpha \|(E^0, H^0)\|_{\varepsilon, \mu} \geq \frac{\alpha}{2} \|(E^0, H^0)\|_{\varepsilon, \mu},$$

ce qui donne (5.44) pour $n = 0$.

(iii) Pour $n = N$ la pseudo-énergie est donnée par

$$W^N = \frac{1}{2} \left(\|2E^N\|_\varepsilon^2 + 2\langle\langle H^N, H^{N-\frac{1}{2}} \rangle\rangle_\mu - \Delta t \llbracket \text{ROT} E^N, H^{N-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \right).$$

La définition de B^N dans (5.9) combinée avec (5.8a) et (5.8b) donne

$$2H^N = H^{N-\frac{1}{2}} - \Delta t H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \text{ROT}(E^N),$$

d'où la pseudo-énergie peut se réécrire

$$W^N = \frac{1}{2} \left(\|2E^N\|_\varepsilon^2 + \|H^{N-\frac{1}{2}}\|_\mu - 2\Delta t \llbracket \text{ROT} E^N, H^{N-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \right). \quad (5.91)$$

Des mêmes raisonnements qu'au (i) et (ii), on a

$$2\Delta t \llbracket \text{ROT} E^N, H^{N-\frac{1}{2}} \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \leq 4(1-\alpha) \|E^N\|_\varepsilon \|H^{N-\frac{1}{2}}\|_\mu.$$

Par l'inégalité $2ab \leq (\beta a)^2 + (\frac{b}{\beta})^2$, avec $\beta = 2$, il vient

$$2\Delta t [\text{ROT } \mathbf{E}^N, \mathbf{H}^{N-\frac{1}{2}}]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \leq 4(1-\alpha) \|\mathbf{E}^N\|_{\varepsilon}^2 + (1-\alpha) \|\mathbf{H}^{N-\frac{1}{2}}\|_{\mu}^2.$$

Ainsi en remplaçant dans (5.91) on obtient

$$\mathbf{W}^N \geq \frac{1}{2} \left(4\alpha \|\mathbf{E}^N\|_{\varepsilon}^2 + \alpha \|\mathbf{H}^{N-\frac{1}{2}}\|_{\mu}^2 \right) \geq \frac{\alpha}{2} \|(\mathbf{E}^N, \mathbf{H}^{N-\frac{1}{2}})\|_{\varepsilon, \mu},$$

ce qui donne (5.44) pour $n = N$. □

Preuve du Lemme 5.4.1. Soit $\varepsilon > 0$. On pose pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$y_{\varepsilon}(m) = \frac{x_0^2 + \zeta^2 + \varepsilon^2}{2} + \sum_{k=0}^{m-1} \Psi(k) (x(m) + x(m+1)).$$

De (5.62) on a directement que

$$x(m)^2 \leq 2y_{\varepsilon}(m). \quad (5.92)$$

D'autre part, on a

$$y_{\varepsilon}(k+1) - y_{\varepsilon}(k) = \Psi(k) (x(k) + x(k+1)), \quad \forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket.$$

D'après (5.92) on a aussi

$$y_{\varepsilon}(k+1) - y_{\varepsilon}(k) \leq \Psi(k) \left(\sqrt{2y_{\varepsilon}(k+1)} + \sqrt{2y_{\varepsilon}(k)} \right), \quad \forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket.$$

Par croissance de la suite $(y_{\varepsilon}(k))$

$$y_{\varepsilon}(k+1) - y_{\varepsilon}(k) \leq 2\Psi(k) \sqrt{2y_{\varepsilon}(k+1)}, \quad \forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket.$$

Comme $y_{\varepsilon} > 0$, il vient

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{y_{\varepsilon}(k+1)} - \frac{y_{\varepsilon}(k)}{\sqrt{y_{\varepsilon}(k+1)}} \right) \leq \Psi(k), \quad \forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket.$$

A nouveau par croissance de la suite $(y_{\varepsilon}(k))$, on a l'inégalité

$$\frac{-1}{\sqrt{y_{\varepsilon}(k+1)}} \geq \frac{-1}{\sqrt{y_{\varepsilon}(k)}}, \quad \forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{2y_{\varepsilon}(k+1)} - \sqrt{2y_{\varepsilon}(k)} \right) \leq \Psi(k), \quad \forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket.$$

La somme de $k = 1$ à $k = m-1$, avec $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$, donne

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{2y_{\varepsilon}(m)} - \sqrt{2y_{\varepsilon}(1)} \right) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \Psi(k).$$

Du fait que $2y_{\varepsilon}(1) = x_0^2 + \zeta^2 + \varepsilon^2$, et de l'estimation (5.92) on obtient

$$\frac{1}{2} x(m) \leq \frac{1}{2} \sqrt{x_0^2 + \zeta^2 + \varepsilon^2} + \sum_{k=0}^{m-1} \Psi(k), \quad \forall m \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Enfin

$$x(m) \leq x_0 + \zeta + \varepsilon + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \Psi(k), \quad \forall m \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (5.93)$$

où l'on a utilisé le fait que $\sqrt{x_0^2 + \zeta^2 + \varepsilon^2} \leq x_0 + \zeta + \varepsilon$. On conclut la preuve en utilisant le fait que $\varepsilon > 0$ peut être pris arbitrairement petit. □

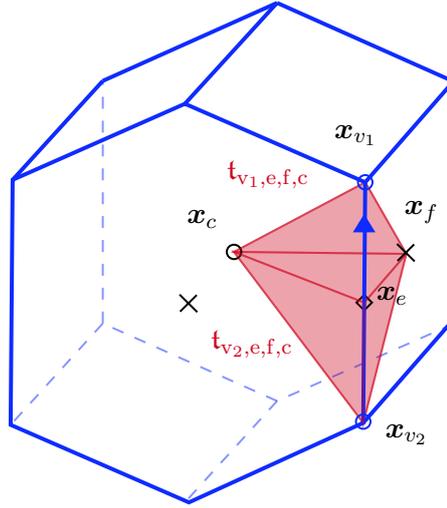


FIGURE 5.2

Preuve du Lemme 5.4.3. Soit $e \in E_c$ une arête et soit $f \in F_e \cap F_c$ une face contenant cette arête. On note $v_1, v_2 \in V_e$ les sommets de e . On se place sur le tétraèdre $t_{e,f} \subset c$ défini comme $t_{e,f} = t_{v_1, e, f, c} \cup t_{v_2, e, f, c}$, et on note $f \subset \partial t$ la face triangulaire de $t_{e,f}$ contenue dans f (voir Figure 5.2).

Soit $\varphi_{e, \partial f}$ la fonction caractéristique de e . Dans l'esprit de Amrouche *et al.* (1998), l'extension par zéro de $\varphi_{e, \partial f}$ sur ∂f satisfait (avec les mêmes notations) $\varphi_{e, \partial f} \in W^{\frac{1}{4}, \frac{4}{3}}(\partial f)$. On note $\varphi_{e, f} \in W^{1, \frac{4}{3}}(f)$ le relèvement de $\varphi_{e, \partial f}$ sur la face f . Le passage à l'élément de référence (voir par exemple Ern & Guermond (2021), Lemme 11.7) et la régularité du maillage donnent

$$|\varphi_{e, f}|_{W^{1, \frac{4}{3}}(f)} \lesssim h_c^{\frac{1}{2}}. \quad (5.94)$$

De même, l'extension par zéro de $\varphi_{e, f}$ sur ∂t satisfait (avec les mêmes notations) $\varphi_{e, \partial f} \in W^{\frac{1}{4}, \frac{4}{3}}(\partial t)$. On note $\varphi_{e, t} \in W^{1, \frac{4}{3}}(t)$ le relèvement de $\varphi_{e, f}$ sur le tétraèdre t . De la surjectivité de la trace (voir par exemple Ern & Guermond (2021), Théorème 3.10) on a $|\varphi_{e, t}|_{W^{1, \frac{4}{3}}(t)} \lesssim h_c^{\frac{3}{4}} |\varphi_{e, f}|_{W^{1, \frac{4}{3}}(f)}$, et en combinant avec (5.94) on obtient

$$|\varphi_{e, t}|_{W^{1, \frac{4}{3}}(t)} \lesssim h_c^{\frac{3}{4}} h_c^{\frac{1}{2}}. \quad (5.95)$$

Ensuite on peut écrire que

$$\begin{aligned} \int_e \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_e &= \int_{\partial f} (\mathbf{u} \varphi_{e, \partial f}) \cdot \boldsymbol{\tau}_e && \text{(Définition de } \varphi_{e, \partial f} \text{)} \\ &= \int_f \nabla \times (\mathbf{u} \varphi_{e, f}) \cdot \mathbf{n}_f && \text{(Théorème de Stokes)} \\ &= \int_f \nabla \times ((\mathbf{u}) \varphi_{e, f}) \cdot \mathbf{n}_f + \int_f (\nabla_f \varphi_{e, f} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_f && \text{(rot 2D d'un produit)} \\ &= \int_{\partial t} \nabla \times ((\mathbf{u}) \varphi_{e, f}) \cdot \mathbf{n}_f + \int_f (\mathbf{u} \times \mathbf{n}_f) \cdot \nabla \varphi_{e, f}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Stokes

$$\int_{\partial t} \nabla \times ((\mathbf{u}) \varphi_{e, f}) \cdot \mathbf{n}_f = \int_t \nabla \cdot (\varphi_{e, t} \nabla \times \mathbf{u}).$$

On rappelle l'identité

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \psi \cdot \mathbf{A},$$

pour tout champ vectoriel \mathbf{A} et champ scalaire ψ suffisamment réguliers. En prenant $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{u}$ et $\psi = \varphi_{e,t}$ on obtient

$$\nabla \cdot (\varphi_{e,f} \nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \varphi_{e,t} \cdot \nabla \times \mathbf{u}.$$

D'après cette identité et le théorème de la divergence

$$\int_{\partial t} \nabla \times (\mathbf{u} \varphi_{e,f}) \cdot \mathbf{n}_f = \int_t \nabla \varphi_{e,t} \cdot \nabla \times \mathbf{u}.$$

On a donc

$$\int_e \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_e = \int_t \nabla \varphi_{e,t} \cdot \nabla \times \mathbf{u} + \int_f (\mathbf{u} \times \mathbf{n}_f) \cdot \nabla \varphi_{e,f}.$$

D'après l'inégalité de Hölder il vient

$$\left| \int_e \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_e \right| \leq \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(t)} |\varphi_{e,t}|_{W^{1, \frac{4}{3}}(t)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(f)} |\varphi_{e,f}|_{W^{1, \frac{4}{3}}(f)}.$$

Enfin, en combinant cette dernière estimation avec (5.94), (5.95) et l'injection continue $\mathbf{H}^s(\mathbf{t}) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\mathbf{f})$ avec $s \in]1, \frac{3}{2}[$ (voir [Adams & Fournier (2003), Théorème 5.36]) on obtient (5.72). L'estimation (5.73) s'obtient de la même manière. \square

Comparaisons numériques

Sommaire

6.1	Pas de temps pour des métriques hybrides	87
6.1.1	Maillages	88
6.1.2	Données et quantités calculées	88
6.1.3	Comparaisons avec différentes métriques	90
6.2	Résolution sur maillage hybride	91
6.2.1	Stratégies de génération de maillages hybrides	91
6.2.2	Stratégies de résolution sur maillage hybride	93
6.3	Étude sur des problèmes de diffraction	95
6.3.1	Formulation du schéma CDO avec PML	95
6.3.2	Calcul de la SER d'une sphère	96
6.3.3	Calcul de champ diffracté proche d'une structure	100

L'objectif de ce chapitre est de quantifier le gain en coût calcul de l'utilisation de maillage hybride : une zone cartésienne dans le vide et une zone composée de tétraèdres proche de l'objet étudié. Pour cela, la Section 6.1 s'attache à comparer, en fonction de la métrique, les coûts calcul et les pas de temps calculés avec la condition CFL (5.43). Ensuite, la Section 6.2 décrit les différentes méthodes de génération de maillages hybrides utilisées, ainsi que les stratégies pour résoudre le système CDO sur ce type de maillages. La Section 6.3 étudie l'influence de la capture de la géométrie, avec maillages hybrides, sur la qualité de la solution. Pour cela, on considère deux configurations :

1. le calcul de la Surface Équivalente Radar (SER) d'une sphère,
2. le calcul au voisinage d'un avion,

Les comparaisons des solutions CDO sont effectuées avec les solveurs FVTD et FDTD du logiciel *Maxwell-TD* de l'ONERA.

6.1 Pas de temps pour des métriques hybrides

Cette section étudie l'influence de la métrique (choix des fonctions de forme) sur le pas de temps du schéma CDO calculé avec la condition CFL (5.43) ainsi que sur le temps de calcul global. Pour cela, on considère un problème de cavité cubique pour laquelle on considère plusieurs types de maillages. Sur chaque maillage, les opérateurs de Hodge discrets sont construits avec différentes fonctions de forme de sorte à considérer des métriques homogènes et hybrides. On commence par décrire les différents types de maillages utilisés.

6.1.1 Maillages

Les calculs sont effectués sur le cube unité $[0, 1]^3$ pour lequel on considère les maillages tri-dimensionnels suivants :

- cartésien noté **Hex**,
- Tétraédrique noté **Tet**,
- Hybride mélangeant des tétraèdres, des prismes et des cubes uniformes noté **Mix**,
- Hybride avec deux zones : tétraédrique et cartésienne, noté **HexTet**,
- cartésien avec raffinement noté **Ref**.

Ces maillages sont générés avec l'outil *pre-Maxwell-TD* de l'ONERA et sont représentés sur la Figure 6.1. Les maillages **Hex**, **Tet** et **Mix** sont des exemples de maillages conformes classiques, tandis que les maillages **HexTet** et **Ref** contiennent des polyèdres aux interfaces entre les tétraèdres et les cubes, et entre les zones raffinées (voir Figure 6.1). Dans chaque famille de maillages, on identifie un raffinement donné par la notation **LabelN**, avec **Label** \in {**Hex**, **Tet**, **Mix**, **HexTet**, **Ref**} un type de maillage et **N** \in {4, 8, 16, 32}, un niveau de découpage. Ainsi les maillages initiaux sont notés **Hex4**, **Tet4**, **Mix4**, **HexTet4** et **Ref4**. Les tables dans l'Annexe du Chapitre 6, à la fin du chapitre, regroupent les données relatives au nombre d'entités géométriques contenues dans chacun des raffinements. Les maillages de la séquence **Mix** et **HexTet** étant composés de trois différents types d'éléments, la répartition entre ces trois types est également donnée.

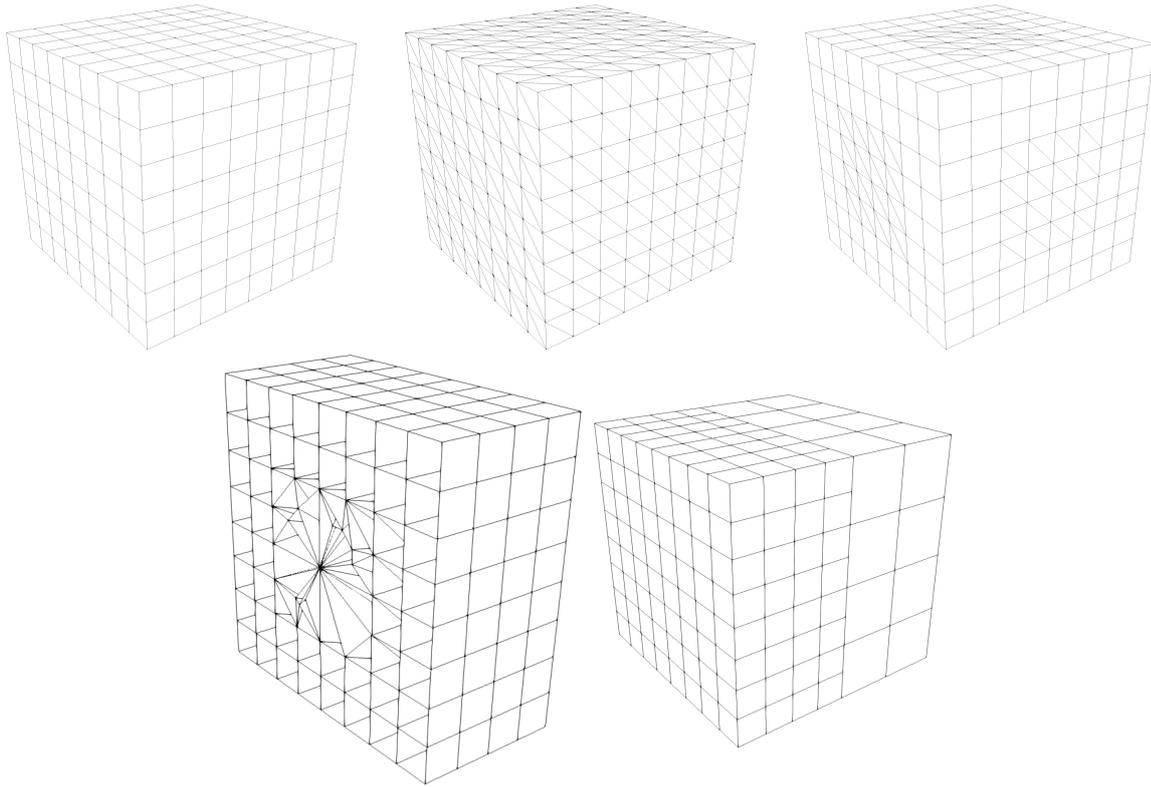


FIGURE 6.1 – Différents maillages utilisés dans la comparaison des pas de temps. De droite à gauche, et de haut en bas : **Hex8**, **Tet8**, **Mix8**, **HexTet8**, **Ref8**.

6.1.2 Données et quantités calculées

Source et condition au bord. Soient

$$\varepsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} F/m \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m,$$

la permittivité diélectrique du vide et la perméabilité magnétique du vide. Sur la frontière de la cavité, on impose la condition

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0.$$

On choisit $t_F = 5.10^{-9}$, et pour tout $(\mathbf{x}, t) \in [0, 1]^3 \times [0, t_F]$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, t = 0) = 0,$$

avec la pulsation $\omega = \pi c_0 \sqrt{2}$ et $c_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Dans ces conditions la solution exacte est donnée par

$$\mathbf{E}_{\text{exact}}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{\text{exact}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\pi}{\mu \omega} \begin{pmatrix} -\sin(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\omega t) \\ \cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Construction des matrices de Hodge. On considère différentes métriques, correspondant chacune à un choix de fonctions de forme définies au Chapitre 4 :

- *Finite Difference*, notée **FD**, qui correspond au choix (4.26),
- *Discrete Geometric Approach*, notée **DGA**, qui correspond au choix (4.2.3),
- *Finite Element*, notée **FE**, qui correspond au choix (4.28).

Dans le maillage **Hex**, on considère trois types de métriques :

1. **FD**,
2. **DGA**,
3. et hybride **FD/DGA** dans laquelle on fait le choix **FD** dans une cellule sur deux, et le choix **DGA** dans les autres.

Dans le maillage **Tet**, on considère trois types de métriques :

1. **FE**,
2. **DGA**,
3. et hybride **FE/DGA** dans laquelle une cellule sur deux est soit **FE** soit **DGA**.

Dans les maillages **Mix**, on considère les métriques :

1. **DGA**,
2. hybride **FE/DGA**, dans laquelle la métrique est **FE** dans les cellules tétraédriques et **DGA** dans les autres,
3. hybride **FD/FE/DGA**, dans laquelle la métrique est **FD** sur les cellules cubiques, **FE** sur les cellules tétraédriques et **DGA** sur les prismes.

Dans les maillages **HexTet**, on considère quatre métriques différentes :

1. **DGA**,
2. hybride **FD/DGA**, dans laquelle la métrique est **FD** sur les cellules cubiques et **DGA** sur les autres,
3. hybride **FE/DGA**, dans laquelle la métrique est **FE** sur les cellules tétraédriques et **DGA** sur les autres,
4. **FD/FE/DGA**, laquelle la métrique est **FD** sur les cellules cubiques, **FE** sur les cellules tétraédriques et **DGA** sur les polyèdres joignant la zone tétraédrique et la zone cartésienne.

Enfin pour les maillages Ref, on considère deux métriques :

1. DGA,
2. hybride FD/DGA, dans laquelle la métrique est FD sur les cellules cubiques et DGA sur les polyèdres à l'interface entre les deux zones.

Stratégie de calcul du pas temps. On rappelle que le pas de temps (voir Chapitre 5, condition CFL (5.43)) est donnée par la plus grande valeur propre de l'opérateur

$$H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}\text{ROT}(H_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1}\widetilde{\text{ROT}} : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}.$$

On fait le choix de l'évaluer numériquement par l'algorithme des puissances itérées. Cet algorithme étant itératif, on propose deux critères d'arrêts des itérations. Le premier consiste à calculer la valeur propre le plus précisément possible. Dans ce cas, le critère d'arrêt choisi est

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \eta_1, \quad (6.1)$$

avec $\eta_1 > 0$ un paramètre de tolérance. Le deuxième critère consiste à calculer la variation relative du pas de temps entre deux itérations :

$$\frac{|\Delta t_{n+1} - \Delta t_n|}{\Delta t_n} < \eta_2, \quad (6.2)$$

avec $\eta_2 > 0$ un paramètre. Dans la suite on prend $\eta_1 = \eta_2 = 10^{-6}$.

6.1.3 Comparaisons avec différentes métriques

Comparaison des critères d'arrêts. La Table 6.1 rassemble les données relatives aux deux stratégies de calcul du pas de temps optimal sur les maillages les plus fins de chaque séquence : Hex32, Tet32, Mix32, HexTet32 et Ref32. D'une part, elle donne les temps CPU, en secondes, du calcul du pas de temps avec les deux critères d'arrêts (6.1) et (6.2). D'autre part, elle donne les temps CPU, en secondes, des itérations du schéma en temps avec le pas de temps calculé pour chacune des stratégies. La première chose que l'on note est que le critère d'arrêt (6.2) donne des temps CPU plus bas par rapport au critère d'arrêt (6.1). Notamment pour le maillage Mix32 et les métriques FE/DGA et FD/FE/DGA dont les temps CPU passent, respectivement, de 9624.28s à 23.51s et de 5472.85s à 11.25s. Les expériences numériques ont aussi montré que pour le critère d'arrêt (6.1), l'algorithme des puissances itérées sur le maillage Hex8 avec les métriques DGA et FD/DGA n'arrive pas à converger en un nombre d'itérations raisonnable (plus d'un million d'itérations n'ont pas suffi). Le critère (6.2) ne tombe pas dans cet écueil. Enfin la Table 6.1 montre que les temps CPU pour les itérations du schéma avec un pas de temps obtenu avec l'un ou l'autre critère d'arrêt ne varient pas significativement. Ainsi, c'est le critère (6.2) que l'on retient pour le calcul du pas de temps dans la suite.

Comparaison des pas de temps. La Table 6.2 donne pour les différentes configurations les valeurs des pas de temps calculés avec le critère d'arrêt (6.2). Premièrement, on observe que, quel que soit le maillage, la métrique DGA est toujours celle qui donne le pas de temps le plus élevé. Deuxièmement, on observe qu'ajouter une métrique FD sur les cellules cartésienne n'influe pas significativement sur la valeur du pas de temps. C'est un résultat auquel on pouvait s'attendre puisque dans les séquences de maillages utilisées, les cellules cartésiennes sont les plus régulières, on observe donc que le pas de temps dépend seulement de la métrique sur les éléments déformés. Troisièmement, on remarque que le pas de temps augmente toujours lorsque l'on remplace, sur les tétraèdres, les métriques DGA par des métriques FE. Par exemple, sur les maillages de la séquence HexTet, le pas de temps augmente presque d'un facteur 2 pour chacun des raffinements.

TABLE 6.1 – Temps CPU en secondes (s) du calcul du pas de temps avec les critères (6.1) et (6.2), et du calcul des itérations du schéma avec ce pas de temps.

Hex32	FD	FD/ DGA	DGA	Tet32	FE	FE/ DGA	DGA
Stratégie 1	185.52s	109.79s	216.40s	Stratégie 1	76.92s	7.38s	11.29s
Iterations	3.51s	3.74s	17.88s	Iterations	17.39s	32.30s	27.80s
Stratégie 2	18.56s	5.86s	46.62s	Stratégie 2	16.88s	1.83s	4.82s
Iterations	2.14s	2.39s	17.45s	Iterations	12.72s	23.74s	38.54s

Mix32	DGA	FE/ DGA	FD/ FE/ DGA
Stratégie 1	16.57s	9624.28s	5472.85s
Iterations	50.20s	21.13s	14.65s
Stratégie 2	6.79s	23.51s	11.25s
Iterations	52.05s	21.56s	10.36s

HexTet32	DGA	FD/DGA	FE/ DGA	FD/ FE/ DGA	Ref32	DGA	FD/ DGA
Stratégie 1	20.81s	6.01s	181.40s	38.08s	Stratégie 1	194.57s	41.09s
Iterations	49.18s	16.35s	24.95s	7.99s	Iterations	8.31s	2.09s
Stratégie 2	3.84s	0.93s	9.543s	2.12s	Stratégie 2	37.63s	4.69s
Iterations	40.91s	10.29s	19.96s	5.07s	Iterations	8.49s	1.17s

Comparaison des temps CPU. La Table 6.3 donne les temps CPU de la factorisation LU pour calculer l'inverse de la matrice $H_e^{\mathcal{F}}$, des itérations du schémas CDO avec un pas de temps calculé avec le critère d'arrêt (6.2), ainsi que le cumul des deux. On remarque que les temps CPU sont toujours améliorés dès lors que l'on ajoute une métrique FD sur les cellules cartésiennes. C'est un résultat auquel on pouvait s'attendre du fait de la structure diagonale de la métrique FD. Ensuite, on remarque que lorsque l'on remplace, sur les tétraèdres, les métriques DGA par des métriques FE, le temps CPU associé aux itérations du schéma est toujours amélioré. Cela est en adéquation avec les pas de temps plus élevés pour les métriques FE/DGA que pour les métriques DGA de la Table 6.2. On note aussi que le temps CPU de la factorisation de la matrice de masse globale est amélioré.

6.2 Résolution sur maillage hybride

L'objectif de cette section est de décrire deux méthodes possibles pour la génération de maillages hybrides avec *pre-Maxwell-TD* et de définir la stratégie de résolution du système linéaire dans le schéma CDO.

6.2.1 Stratégies de génération de maillages hybrides

On commence par décrire les deux stratégies disponibles dans le logiciel *pre-Maxwell-TD* de l'ONERA pour construire des maillages hybrides avec une zone cartésienne et une zone tétraédrique.

Stratégie 1. La première stratégie consiste en trois étapes décrites dans la Figure 6.14 de l'Annexe à la fin du chapitre. Étant donné un maillage de surface de l'objet considéré (ici un maillage triangulaire d'une sphère) :

1. Définir un maillage cartésien auquel on supprime un bloc parallélépipédique de cellules cartésiennes de sorte à définir un espace entre la zone cartésienne et l'objet (voir Figure 6.14a, Annexe du Chapitre 6),

TABLE 6.2 – Valeurs des pas de temps pour les différentes séquences de maillages et leurs raffinements, pour des métriques variables. Les pas de temps sont calculés avec le critère d'arrêt (6.2)

Métrique	FD	FD/ DGA	DGA
Hex4	$5.19 \cdot 10^{-10}$	$4.82 \cdot 10^{-10}$	$4.24 \cdot 10^{-10}$
Hex8	$1.80 \cdot 10^{-10}$	$1.80 \cdot 10^{-10}$	$1.80 \cdot 10^{-10}$
Hex16	$1.20 \cdot 10^{-10}$	$1.05 \cdot 10^{-10}$	$8.64 \cdot 10^{-11}$
Hex32	$6.02 \cdot 10^{-11}$	$5.22 \cdot 10^{-11}$	$4.27 \cdot 10^{-11}$

Métrique	FE	FE/ DGA	DGA
Tet4	$2.95 \cdot 10^{-10}$	$2.12 \cdot 10^{-10}$	$1.75 \cdot 10^{-10}$
Tet8	$1.44 \cdot 10^{-10}$	$9.82 \cdot 10^{-11}$	$7.58 \cdot 10^{-11}$
Tet16	$6.00 \cdot 10^{-11}$	$3.80 \cdot 10^{-11}$	$3.06 \cdot 10^{-11}$
Tet32	$3.08 \cdot 10^{-11}$	$1.65 \cdot 10^{-11}$	$1.43 \cdot 10^{-11}$

Métrique	DGA	FE/ DGA	FD/ FE/ DGA
Mix4	$1.63 \cdot 10^{-10}$	$3.13 \cdot 10^{-10}$	$3.12 \cdot 10^{-10}$
Mix8	$8.24 \cdot 10^{-11}$	$1.36 \cdot 10^{-10}$	$1.35 \cdot 10^{-10}$
Mix16	$3.64 \cdot 10^{-11}$	$6.02 \cdot 10^{-11}$	$6.01 \cdot 10^{-11}$
Mix32	$1.52 \cdot 10^{-11}$	$2.88 \cdot 10^{-11}$	$2.88 \cdot 10^{-11}$

Métrique	DGA	FD/ DGA	FE/ DGA	FD/ FE/ DGA
HexTet4	$1.58 \cdot 10^{-10}$	$1.60 \cdot 10^{-10}$	$2.72 \cdot 10^{-10}$	$2.74 \cdot 10^{-10}$
HexTet8	$8.09 \cdot 10^{-11}$	$8.19 \cdot 10^{-11}$	$1.37 \cdot 10^{-10}$	$1.39 \cdot 10^{-10}$
HexTet16	$3.61 \cdot 10^{-11}$	$3.62 \cdot 10^{-11}$	$6.21 \cdot 10^{-11}$	$6.22 \cdot 10^{-11}$
HexTet32	$1.51 \cdot 10^{-11}$	$1.51 \cdot 10^{-11}$	$3.06 \cdot 10^{-11}$	$3.06 \cdot 10^{-11}$

Métrique	DGA	FD/ DGA
Ref4	$4.35 \cdot 10^{-10}$	$5.20 \cdot 10^{-10}$
Ref8	$1.84 \cdot 10^{-10}$	$2.46 \cdot 10^{-10}$
Ref16	$8.70 \cdot 10^{-11}$	$1.21 \cdot 10^{-10}$
Ref32	$4.27 \cdot 10^{-11}$	$6.02 \cdot 10^{-11}$

TABLE 6.3 – Temps CPU en secondes (s) de la factorisation de la matrice $H_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}$, des itérations du schémas CDO et les deux cumulés. Le pas de temps est calculé avec le critère (6.2).

Hex32	FD	FD/ DGA	DGA	Tet32	FE	FE/ DGA	DGA
Facto	0.06	0.28	40.28	Facto	15.90	17.69	30.90
Iter	2.14	2.39	17.45	Iter	12.72	23.74	38.54
Total	2.20	2.67	47.73	Total	28.62	41.43	69.44

Mix32	DGA	FE/ DGA	FD/ FE/ DGA
Facto	104.90	40.85	5.94
Iter	52.05	21.56	10.36
Total	156.95	62.40	16.30

HexTet32	DGA	FD/ DGA	FE/ DGA	FD/ FE/ DGA	Ref32	DGA	FD/ DGA
Facto	167.62	0.86	51.88	0.88	Facto	60.51	0.04
Iter	40.91	10.30	19.97	5.07	Iter	8.49	1.17
Total	208.53	11.16	71.85	5.95	Total	69.00	1.21

2. Définir une surface, englobant l'objet, qui coïncide avec la surface de la zone supprimée dans l'étape précédente, puis construire un maillage tétraédrique entre l'objet et cette surface (voir Figure 6.14b, Annexe du Chapitre 6),
3. Recoller les deux maillages (voir Figure 6.14c, Annexe du Chapitre 6).

Stratégie 2. La seconde stratégie consiste en trois étapes décrites dans la Figure 6.15 de l'Annexe à la fin du chapitre. Étant donné un maillage de surface de l'objet considéré (ici un maillage triangulaire d'une sphère pour l'illustration) :

1. L'objet est plongé dans un maillage cartésien (voir Figure 6.15a, Annexe du Chapitre 6),
2. Des couches de cellules cubiques sont supprimées (ici 2 couches) autour de l'objet laissant un espace entre l'objet et la zone cartésienne obtenue par la suppression (voir Figure 6.15b, Annexe du Chapitre 6),
3. L'espace entre l'objet et la zone cartésienne est ensuite rempli de tétraèdres (voir Figure 6.15c, Annexe du Chapitre 6).

Comparaison. Dans les deux stratégies, l'homogénéité globale du maillage est préservée en définissant un maillage triangulaire de l'objet dans lequel les triangles sont de taille en moyenne égales à Δx . A la différence des maillages hybrides obtenus avec la stratégie 1, ceux générés avec la stratégie 2 ont la particularité de présenter une zone tétraédrique qui suit l'objet (voir par exemple Figure 6.2). Ceci est dû au fait que l'objet est d'abord plongé dans le maillage cartésien avant de supprimer des cellules cartésiennes pour l'espace. Les maillages obtenus avec ces deux stratégies appliquées sur un objet complexe, ici un avion, sont illustrés dans la Figure 6.2. Dans la Table 6.4, on compare le nombre de ddl dans la partie cartésienne en fonction de la stratégie utilisée. On note que la stratégie 2 donne une augmentation de 30% des degrés de liberté dans la zone cartésienne par rapport à la stratégie 1. On gardera la seconde dans la suite car elle optimise la zone cartésienne.

TABLE 6.4 – Comparaison du nombre d'arêtes et de faces cartésiennes dans les maillages hybrides du mirage F1 de la Figure 6.2.

Maillage	$\#E_{\text{cart}}$	$\#F_{\text{cart}}$	$\#E_{\text{cart}} + \#F_{\text{cart}}$
Stratégie 1	2097816	2051076	4148892
Stratégie 2	2704688	2662977	5367665

6.2.2 Stratégies de résolution sur maillage hybride

L'objectif de cette partie est de décrire deux stratégies de résolution du système (6.3) sur maillages hybrides présentant trois zones : une zone cartésienne dans le vide, une zone tétraédrique autour d'un objet courbe, et une zone polyédrique à l'interface joignant les deux. Un exemple de maillage hybride, dont l'objet maillé est un avion, est donné sur la Figure 6.2. Les deux stratégies reposent sur le fait que la formulation (5.8) est une généralisation d'autres schémas existants, notamment le schéma de Yee (1966). Ainsi, la construction des opérateurs de Hodge discrets avec des fonctions de forme choisies selon la géométrie de la cellule considérée, permet un couplage entre différents schémas.

La première stratégie consiste à dissocier les deux zones dans le schéma CDO (6.3) de sorte à traiter la zone cartésienne en structuré (ST), et donc avec le schéma Différences Finies, et la zone tétraédrique avec le maillage polyédrique joignant les deux, en non-structuré (NST). Les mécanismes de couplage entre les deux schémas qui entrent en jeu à l'interface, comme la compatibilité des orientations entre les deux zones, sont décrits dans l'Annexe A.

La deuxième stratégie consiste à traiter le maillage de manière complètement non-structurée, tout en exploitant la structure des matrices de masse globale. Dès lors que l'on a une cellule

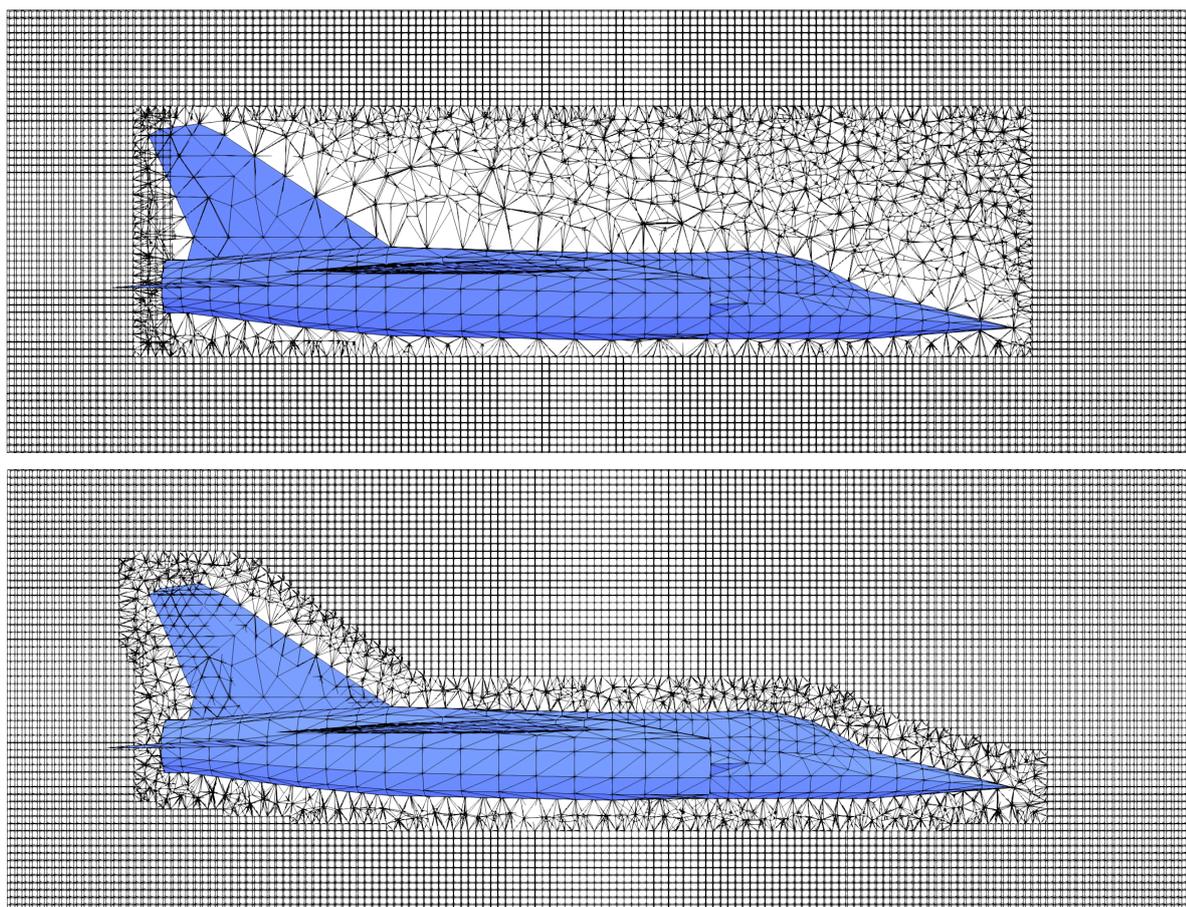


FIGURE 6.2 – Deux maillages hybrides d’un mirage F1 obtenus avec la stratégie 1 (en haut) et la stratégie 2 (en bas). La stratégie 2 optimise la zone cartésienne autour de l’objet.

$$\begin{pmatrix} * & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

FIGURE 6.3 – Structure des matrices de masse $H_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}$ et $H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}_1}$ dans le cas de la renumérotation des inconnues avec celles dans la zone cartésienne en premières : un bloc diagonal et un bloc semi-défini positif.

cartésienne, la matrice de masse locale est alors diagonale, pour les autres types de cellules, les matrices de masses locales sont denses. Avec une renumérotation des cellules, par exemple les cellules cartésiennes en premier, ensuite les autres, la structure de la matrice de masse globale est donnée dans la Figure 6.3 : un bloc diagonal, et un bloc creux symétrique défini positif. Dans les applications, le système (5.8d) est résolu avec le solveur LU de la librairie MUMPS (voir Amestoy *et al.* (1998)) combinée avec la librairie Metis (voir Karypis & Kumar (1998)) pour la renumérotation. Pour ne pas passer la matrice diagonale dans MUMPS, la métrique est séparée en deux tableaux. En procédant ainsi, la métrique doit être complétée pour prendre en compte les contributions diagonales associées aux cellules cartésiennes adjacentes au domaine non-Cartésien. L'avantage de cette stratégie est que la numérotation des inconnues est traitée d'une seule manière : comme étant non-structuré. Par conséquent, cela simplifie, par rapport à la première stratégie, la prise en compte de l'interface dans les circulations (voir Annexe A). C'est cette stratégie que l'on utilise dans les Sections 6.3 et 6.3.3 pour les simulations.

6.3 Étude sur des problèmes de diffraction

L'objectif de cette section est d'étudier les performances du schéma CDO par rapport au schéma FDTD en terme de temps CPU et de qualité de solution. Pour cela, on propose deux configurations : le calcul de la SER d'une sphère parfaitement métallique et le calcul en champ proche autour d'un avion de chasse. La formulation discrète considérée dans ces comparaisons utilise des *Perfectly Matched Layers* (PML) pour simuler un domaine non-borné (voir Berenger (1994, 1996), Gedney (1996) et Buksas (2001)). On commence par donner la formulation du schéma CDO avec ce type de couche.

6.3.1 Formulation du schéma CDO avec PML

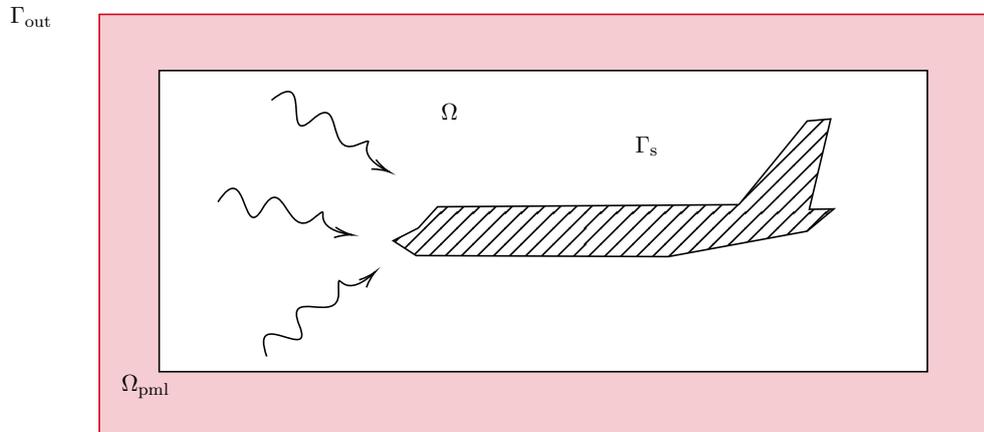


FIGURE 6.4 – Domaine de calcul $\hat{\Omega} = \Omega \cup \Omega_{\text{pml}}$ dont le bord est composé de deux parties : un objet diffractant Γ_s et une surface extérieure absorbante Γ_{out} .

Dans la suite, on considère le problème de Maxwell sans source et sans conductivité, c'est-à-dire $\mathbf{J}_s = 0$ et $\sigma = 0$. Le domaine de calcul $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ est composé du domaine d'intérêt Ω et du domaine PML Ω_{pml} (voir Figure 6.4). La frontière de $\hat{\Omega}$ est composée de deux parties : Γ_{out} et Γ_s , telles que $\partial\hat{\Omega} = \Gamma_{\text{out}} \cup \Gamma_s$ et $\Gamma_{\text{out}} \cap \Gamma_s = \emptyset$. Sur Γ_{out} on impose une condition de type métal parfait $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ et sur Γ_s on impose le champ incident $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{inc}}$.

Soit $M = \{V, E, F, C\}$ le maillage approchant le domaine Ω . Dans la suite, le maillage dans la zone PML est choisi cartésien et la métrique du schéma CDO dans cette zone est prise diagonale. Ainsi, dans la zone PML, le schéma considéré est équivalent à un schéma Différences

Finies classique. Soient les tenseurs

$$\boldsymbol{\sigma}_{123} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{231} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_{312} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$

associés aux coefficients d'absorption σ_k pris nuls dans Ω et polynomiaux dans la zone PML. Par construction, ces tenseurs matériels s'annulent donc dans Ω . De sorte à formuler le schéma CDO avec des couches PML, pour $i \in \{(123), (231), (312)\}$, on introduit les opérateurs sur le maillage primal $\mathbf{A}_{\sigma_i}^{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ et $\mathbf{A}_{\sigma_i}^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Ces opérateurs sont diagonaux et sont définis par

$$\mathbf{A}_{\sigma_i}^{\mathcal{E}}|_{e,e} := \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\tau}_e \cdot \boldsymbol{\tau}_e, \quad \forall e \in \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_{\sigma_i}^{\mathcal{F}}|_{f,f} := \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{n}_f, \quad \forall f \in \mathbf{F}.$$

De même, sur le maillage dual, pour $i \in \{(123), (231), (312)\}$, les opérateurs diagonaux $\mathbf{A}_{\sigma_i}^{\tilde{\mathcal{E}}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ et $\mathbf{A}_{\sigma_i}^{\tilde{\mathcal{F}}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ sont définis par

$$\mathbf{A}_{\sigma_i}^{\tilde{\mathcal{E}}}|_{\tilde{e}(f),\tilde{e}(f)} := \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\tau}_{\tilde{e}(f)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{e}(f)}, \quad \forall f \in \mathbf{F} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_{\sigma_i}^{\tilde{\mathcal{F}}}|_{\tilde{f}(e),\tilde{f}(e)} := \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n}_{\tilde{f}(e)} \cdot \mathbf{n}_{\tilde{f}(e)}, \quad \forall e \in \hat{\mathbf{E}}.$$

Dans toute la suite, les champs initiaux sont considérés nuls. Le schéma CDO avec couches PML consiste à : calculer $\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\hat{\mathbf{B}}^{n+\frac{1}{2}}, \hat{\mathbf{D}}^n$, tels que

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathbf{B}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{B}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \mathbf{A}_{\sigma_{231}}^{\mathcal{F}} \hat{\mathbf{B}}^{n+\frac{1}{2}} + \text{ROT} \mathbf{E}^n &= 0, & \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \\ \frac{\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \mathbf{A}_{\sigma_{312}}^{\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{H}_{\mu}^{\tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{E}}} \left(\frac{\hat{\mathbf{B}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{B}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \mathbf{A}_{\sigma_{123}}^{\mathcal{F}} \hat{\mathbf{B}}^{n+\frac{1}{2}} \right), & \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \\ \frac{\hat{\mathbf{D}}^{n+1} - \hat{\mathbf{D}}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}_{\sigma_{231}}^{\tilde{\mathcal{F}}} \hat{\mathbf{D}}^n - \widetilde{\text{ROT}}^{\sharp}(\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}^{\partial, n+\frac{1}{2}}) &= 0, & \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \\ \frac{\hat{\mathbf{D}}^{n+1} - \hat{\mathbf{D}}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}_{\sigma_{123}}^{\tilde{\mathcal{F}}} \hat{\mathbf{D}}^n &= \mathbf{H}_{\varepsilon}^{\tilde{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{F}}} \left(\frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} + \mathbf{A}_{\sigma_{312}}^{\mathcal{E}} \mathbf{E}^n \right), & \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \end{aligned}$$

avec les notations $\hat{\mathbf{B}}^{-\frac{1}{2}} = \hat{\mathbf{B}}^0$ et $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^0$. En notant, \mathbf{E}_s^{∂} l'ensemble des arêtes sur Γ_s et $\mathbf{E}_{\text{out}}^{\partial}$ l'ensemble des arêtes sur Γ_{out} , les conditions au bord discrètes sont pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$:

$$\mathbf{E}_e^n = 0, \quad \forall e \in \mathbf{E}_{\text{out}}^{\partial} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_e^n = \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n+\frac{1}{2}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}^{\partial}}(\mathbf{E}_{\text{inc}})_e, \quad \forall e \in \mathbf{E}_s^{\partial}, \quad (6.4)$$

avec les notations $t_{-\frac{1}{2}} = t_0$ et $t_{N+\frac{1}{2}} = t_N$. Le champ incident $\mathbf{E}_{\text{inc}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ est choisi comme une onde plane Gaussienne :

$$\mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathbf{E}_s \cdot e^{-\gamma^2},$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{\sigma} (t - t_0 - \sqrt{\varepsilon \mu} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_s \times [0, t_F].$$

Les paramètres dépendant de l'utilisateur sont : l'amplitude du champ électrique incident, $\mathbf{E}_s \in \mathbb{R}^3$, l'instant initial de l'onde, $t_0 > 0$, le vecteur d'onde, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, la position de la source, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, et l'écart-type de la Gaussienne, $\sigma > 0$.

6.3.2 Calcul de la SER d'une sphère

Dans cette section, on étudie l'influence de la capture de la géométrie avec maillage hybride sur la qualité de la solution du schéma CDO. Pour cela on se place dans un cas de calcul de Surface Équivalente Radar (SER) sur une sphère parfaitement métallique où l'on connaît la solution analytique.

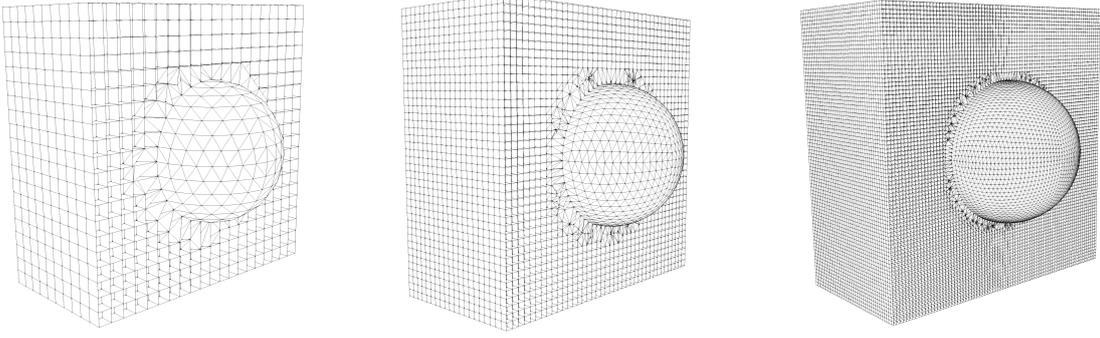


FIGURE 6.5 – Différents raffinements de maillages hybrides d'une sphère de rayon $1m$. De gauche à droite : $\lambda/6$, $\lambda/10$, $\lambda/20$.

Source et conditions au bord. La sphère considérée est centrée en $(0, 0, 0)$ et de rayon $1m$ dans le cube $[-2, 2]^3$. Les paramètres de l'onde incidente sont fixés tels que :

$$\mathbf{E}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = 3 \cdot 10^{-9}, \quad t_0 = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Dans ces conditions, la fréquence de l'onde est d'environ $200MHz$, soit une longueur d'onde λ d'environ $1.5m$. De sorte à réutiliser des modules du logiciel *Maxwell-TD*, la surface fictive utilisée dans le calcul du champ lointain, notée S , est définie dans la zone cartésienne du maillage. Pour chaque face $f \in F$ sur cette surface, on calcule les courants électrique et magnétique

$$\mathbf{J}_{el} = \mathbf{n}_f \times \mathbf{H} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = -\mathbf{n}_f \times \mathbf{E}.$$

Le point de calcul est $r_0 = (0, 0, 100)$, en notant $\tau = \frac{r_0 - r}{c_0}$, la SER est évaluée à partir des champs lointains obtenus à partir de formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r_0, t) = & -\frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{r_0 - r}{\|r_0 - r\|} \times \left(\partial_t \mathbf{J}_{el}(r, t - \tau) \times \frac{r_0 - r}{\|r_0 - r\|} \right) ds \\ & - \frac{1}{4\pi c} \int_S \partial_t \mathbf{M}(r, t - \tau) \times \frac{r_0 - r}{\|r_0 - r\|} ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(r_0, t) = & \frac{1}{4\pi c_0} \int_S \frac{1}{\|r_0 - r\|} \left(\partial_t \mathbf{J}_{el}(r, t - \tau) \times \frac{r_0 - r}{\|r_0 - r\|} \right) ds \\ & - \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S \frac{1}{\|r_0 - r\|} \times \left(\partial_t \mathbf{M}(r, t - \tau) \times \frac{r_0 - r}{\|r_0 - r\|} \right) ds. \end{aligned}$$

Solveurs et maillages. Dans les simulations, deux types de maillages sont utilisés. D'une part, des maillages Cartésiens maillés à $\lambda/6$, $\lambda/10$, $\lambda/20$. D'autre part, des maillages hybrides Cartésien/Tétraédrique générés avec la stratégie 2 décrite dans la Section 6.2.1, et maillés à $\lambda/6$, $\lambda/10$, $\lambda/20$ à partir des mêmes maillages Cartésiens (voir Figure 6.5). Ainsi, pour un raffinement donné, par exemple $\lambda/6$, le maillage hybride présente une zone cartésienne dont les cellules sont de la même taille que le maillage cartésien correspondant à ce raffinement, seule la zone autour de l'objet change. Dans la simulation avec le schéma CDO, on utilise les métriques FD/DGA et FD/FE/DGA (voir Section 6.1). Le solveur FDTD considéré est celui de *Maxwell-TD* et traite les maillages Cartésiens de manière structuré. L'objectif est de comparer qualitativement, si les solutions CDO obtenues avec la stratégie de maillage hybride/métrique hybride, peut concurrencer un solveur structuré en terme de temps calcul et de précision.

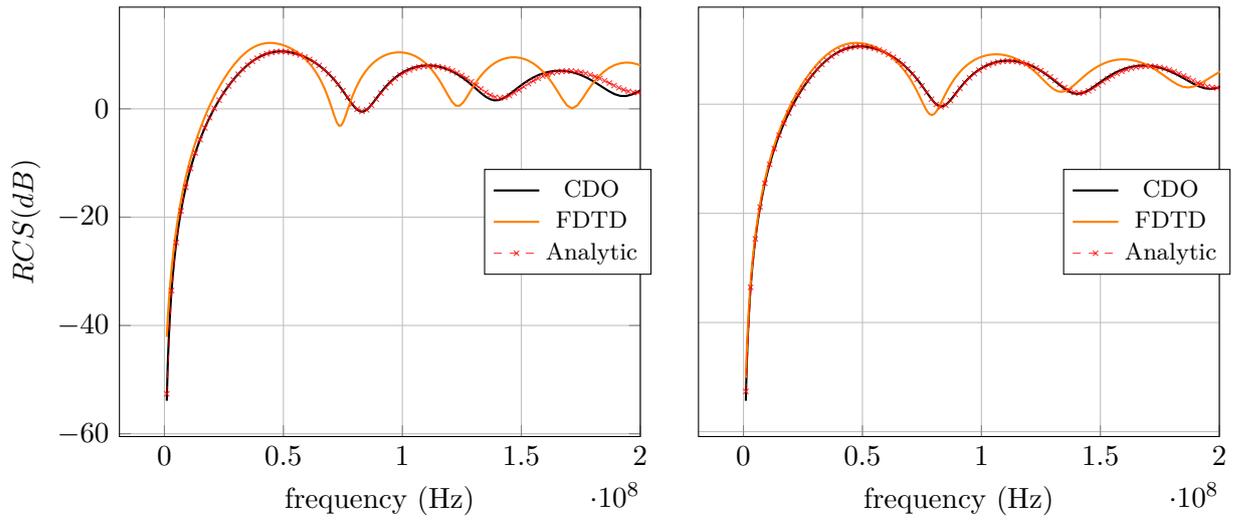
Comparaison 1. Dans un premier temps, on évalue, à zone cartésienne équivalente, l'influence de la zone tétraédrique sur la qualité de la solution. Pour cela, on compare pour des raffinements $\lambda/10$ et $\lambda/20$, la qualité des solutions FDTD et CDO. La Figure 6.6, donne les solutions FDTD, CDO (FD/DGA) et analytique. On observe que la capture de la sphère avec les tétraèdres permet d'améliorer la qualité de la solution. Cependant, la solution FDTD présente un temps calcul de 20s pour le premier maillage et de 156s pour le second, alors que les solutions CDO (FD/DGA et FD/FE/DGA) présentent des temps calcul respectifs de 98s (FD/DGA) et 61s (FD/FE/DGA) pour le premier maillage, et de 1077s (FD/DGA) et 728s (FD/FE/DGA) pour le second. Dans la comparaison suivante, on étudie la qualité des solutions FDTD et leur temps CPU, en fonction du raffinement du maillage.

Comparaison 2. La Figure 6.7 compare la solution CDO (FD/DGA) avec un maillage de l'ordre de $\lambda/20$ avec des solutions FDTD pour différents raffinements de maillage. On observe que pour obtenir une solution similaire à la solution CDO, un maillage à $\lambda/40$ en FDTD ne suffit pas pour capturer toute l'information pour les fréquences allant de $10^8 Hz$ à $2 \cdot 10^8 Hz$ (voir Figure 6.7a). Un maillage à $\lambda/60$ semble corriger ces derniers défauts (voir Figure 6.7b). Toutefois, dans le cas d'une étude industrielle, la qualité de la solution FDTD pour un maillage à $\lambda/40$ peut être suffisante. Le temps calcul du schéma FDTD avec un maillage $\lambda/40$ est de 1209s soit 2 fois plus que le schéma CDO avec une métrique FD/FE/DGA, et avec un maillage à $\lambda/60$ est de 4342s soit 6 fois plus que pour le schéma CDO FD/FE/DGA et 4 fois plus que pour une solution CDO FD/DGA.

Comparaison 3. La Figure 6.8a compare la qualité des solutions CDO avec une zone cartésienne fixée à $\lambda/5$. L'objectif est d'étudier l'influence du raffinement de la zone tétraédrique autour de l'objet sur les solutions numériques. On compare donc la solution CDO sur le maillage sans raffinement de la zone tétraédrique, avec les solutions CDO sur des maillages avec raffinements de la zone tétraédrique de l'ordre de $\lambda/10$ et $\lambda/20$. On observe que le raffinement de la zone tétraédrique permet d'améliorer la solution sans la rendre aussi précise qu'une solution obtenue avec un maillage plus fin partout (voir Comparaison 1). Avec un maillage de l'ordre de $\lambda/5$, le temps CPU est de 14s pour le schéma CDO FD/DGA et de 5.8s pour le schéma CDO FD/FE/DGA. Pour le raffinement de $\lambda/20$ les temps CPU sont de 59s pour DGA et 34.2s pour FE/DGA. Les expériences montrent que pour des raffinements de la zone tétraédrique au-delà de $\lambda/20$ le gain en terme de qualité n'est pas significatif. Ainsi, le raffinement de la zone tétraédrique sans raffinement de la zone cartésienne ne semble par apporté de gain particulier.

Comparaison 4. Inversement à la Comparaison 3., la Figure 6.8b compare la qualité des solutions CDO avec une zone cartésienne fixée à $\lambda/20$, avec différents raffinements de la zone tétraédrique. L'objectif est d'étudier l'influence du dé-raffinement de la zone tétraédrique autour de l'objet sur les solutions numériques. La sphère est alors maillé à $\lambda/20$, $\lambda/10$ puis $\lambda/5$. On observe que diminuer le nombre de triangles sur la sphère ne diminue pas la qualité globale de la solution. Par ailleurs, les mesures montrent que les temps de calcul ne sont pas forcément à l'avantage du maillage de la sphère le plus grossier. Cela peut être dû aux irrégularités provoquées par le changement d'échelle.

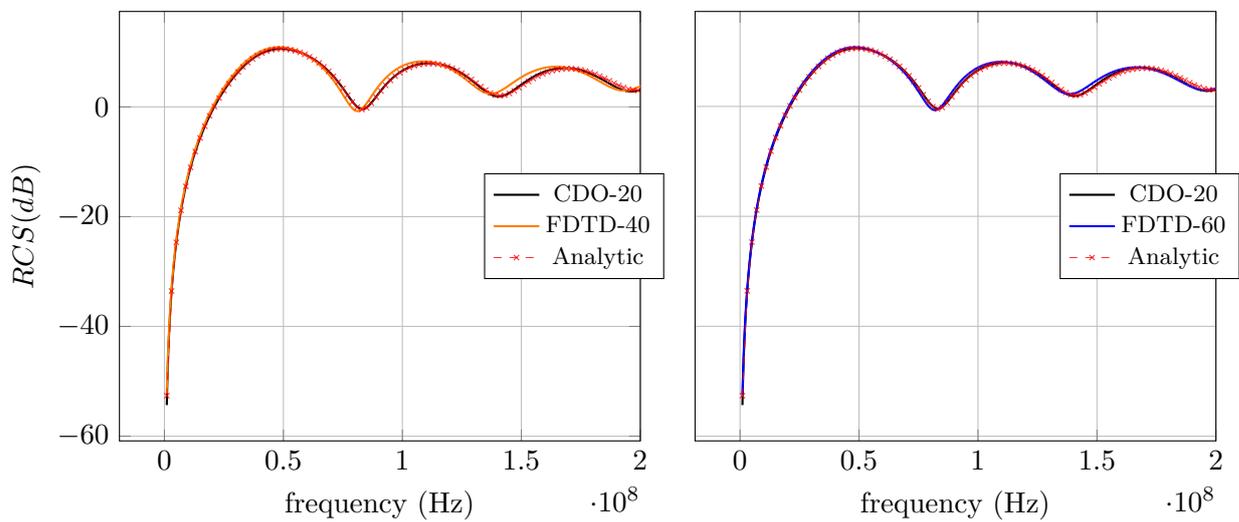
Conclusion. Il semble que la métrique FD/FE/DGA soit la plus avantageuse en terme de coût de calcul, ce qui corrobore les mesures déjà obtenues dans la Table 6.3. De plus, il semble que l'utilisation d'un maillage tétraédrique local permet, dans le calcul de la SER, d'améliorer les solutions en maintenant le coût calcul suffisamment bas. Ainsi, même en maillant plus fin avec un maillage cartésien traité de manière structuré, les coût calculs restent à l'avantage du schéma CDO par rapport au schéma FDTD structuré. Dans la section suivante, on s'attache à poursuivre ces comparaisons, cette fois sur une scène de calcul plus grande : avion de chasse.



(a) Comparaison des solutions numériques FDTD et CDO pour une zone cartésienne maillée à $\lambda/10$.

(b) Comparaison des solutions numériques FDTD et CDO pour une zone cartésienne maillée à $\lambda/20$.

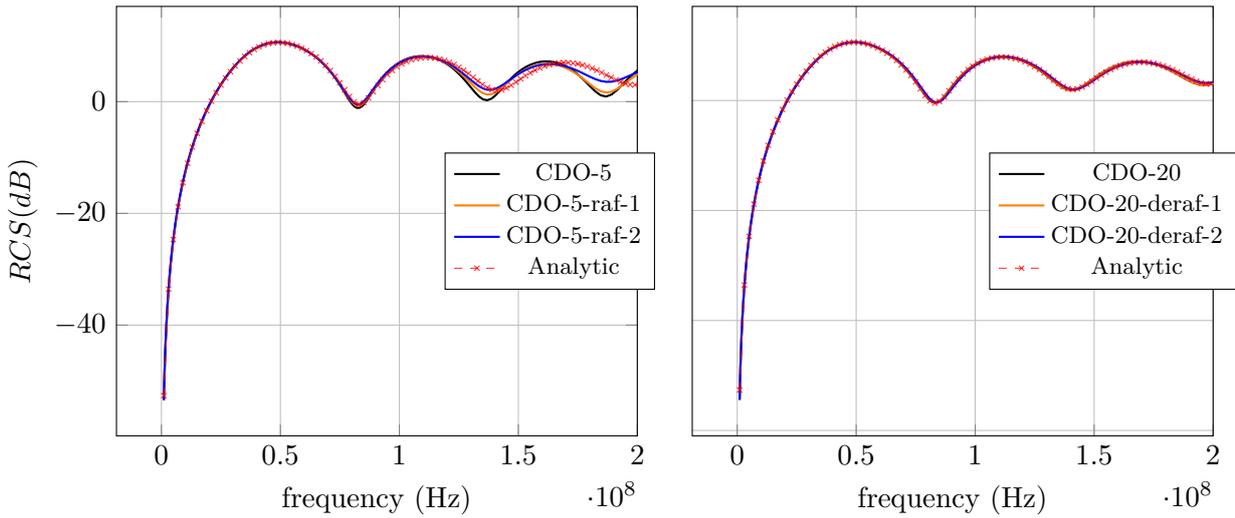
FIGURE 6.6



(a) Comparaison entre les solutions numériques FDTD et CDO. Le maillage cartésien utilisé pour le schéma CDO est de l'ordre de $\lambda/20$ tandis que pour le schéma FDTD il est de l'ordre de $\lambda/40$.

(b) Comparaison entre les solutions numériques FDTD et CDO. Le maillage cartésien utilisé pour le schéma CDO est de l'ordre de $\lambda/20$ tandis que pour le schéma FDTD il est de l'ordre de $\lambda/60$.

FIGURE 6.7



(a) Comparaison des solutions CDO pour un maillage cartésien à $\lambda/5$ avec plusieurs raffinements de la partie tétraédrique : aucun, $\lambda/10$ et $\lambda/20$.

(b) Comparaison des solutions CDO pour un maillage cartésien à $\lambda/20$ avec plusieurs grossissements de la partie tétraédrique : aucun, $\lambda/10$ et $\lambda/5$.

FIGURE 6.8

6.3.3 Calcul de champ diffracté proche d'une structure

L'objectif de cette section est de comparer les méthodes numériques CDO et FDTD sur un calcul de champ autour d'un avion de chasse : un mirage F1 (voir Figure 6.9) illuminé par une onde plane. Pour cela, on commence par rappeler les données utilisées dans les simulations : les maillages, les conditions au bord et la source.

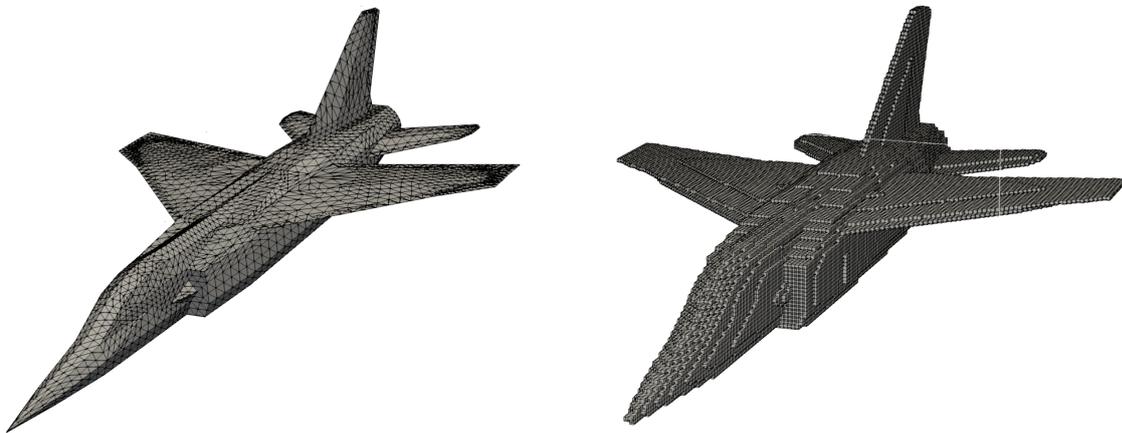


FIGURE 6.9 – Comparaison des maillages de surface du mirage F1 : à gauche, la surface est maillée en triangle, à droite, la surface est approchée par des marches d'escalier.

TABLE 6.5 – Nombre de degrés de liberté dans la maillage hybride de la Figure 6.10.

#E	#F	#E + #F	#E _{cart} + #F _{cart}
3931986	3982585	7914571	7421321

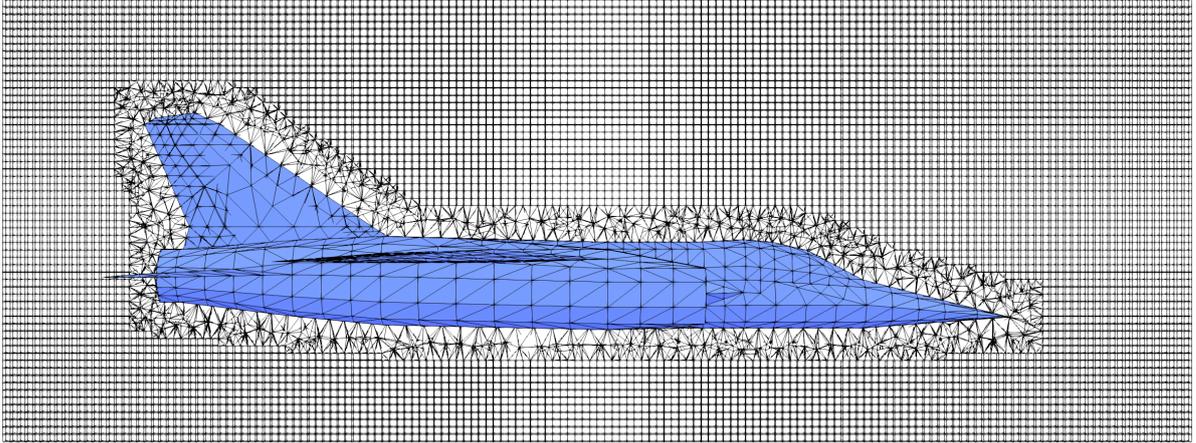


FIGURE 6.10 – Maillage hybride du mirage F1 : une zone tétraédrique pour capturer la géométrie de l’objet d’intérêt, une zone cartésienne dans la partie vide, loin de l’objet.

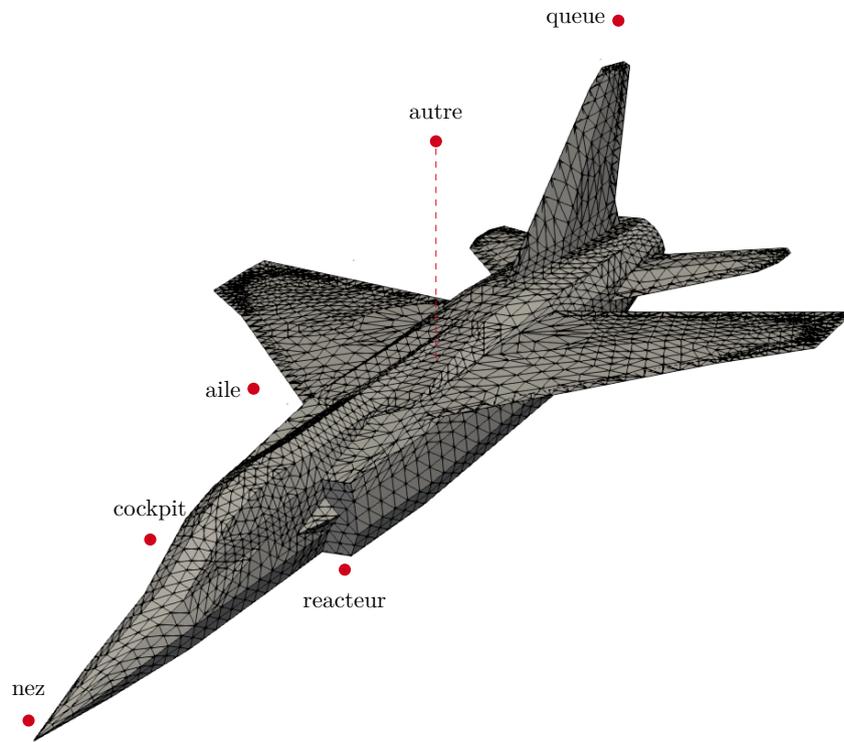


FIGURE 6.11 – Vue des différents points d’intérêts utilisé dans les comparaisons.

Source et conditions au bord. Les paramètres de l’onde incidente sont choisis tels que :

$$\mathbf{E}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = 3 \cdot 10^{-9}, \quad t_0 = 1 \cdot 10^{-8}.$$

Dans ces conditions, la fréquence de l’onde est d’environ $200MHz$ soit une longueur d’onde λ d’environ $1.5m$.

Maillages. Dans la simulation avec le schéma CDO, un maillage hybride composé d’une zone tétraédrique autour de l’avion et une zone cartésienne loin de la structure est utilisé (voir Figure 6.10). Le nombre de degrés de liberté total associé au maillage hybride est donné

dans la Table 6.5. On note que ce nombre dans la partie cartésienne représente 94% du nombre total de degrés de liberté. D'autre part, le maillage cartésien utilisé est de l'ordre d'un dixième de la longueur d'onde $\lambda/10 \approx 0.1$. En ce qui concerne le schéma Différences Finies, le maillage cartésien utilisé est le même que celui considéré dans le maillage hybride pour la partie cartésienne. Ensuite, dans les autres configurations FDTD, la taille des cellules est divisée par 2 successivement pour obtenir une solution plus précise.

Remarque 6.3.1 (Hardware). Toutes les simulations sont réalisées en local, sur des ordinateurs équipés de 16Go de RAM et de processeurs commerciaux Intel Core i7.

Points de comparaisons. Les comparaisons sont effectuées sur différents points autour de l'avion. Précisément, un point éloigné au-dessus de la structure, référencé comme *autre* sur la Figure 6.11, et des points pris proches des zones suivantes :

- nez,
- aile,
- réacteur,
- cockpit,
- queue.

Tous ces points sont référencés sur la Figure 6.11.

Précision. Sur les résultats obtenus, il est à noter que les solveurs CDO et FVTD donnent qualitativement les mêmes solutions pour tous les points. Ensuite, en ce qui concerne les points "autre" et "queue", les trois solveurs donnent qualitativement tous les mêmes solutions (voir Figure 6.12). Cela est dû au fait que ces points sont suffisamment éloignés de la structure. Ensuite, dès lors que l'on évalue les champs en des points proches de zones présentant des détails géométriques, comme le nez et le cockpit (voir Figure 6.11), alors la solution FDTD avec un maillage à $\lambda/10$ ne capture que partiellement le champ (voir Figure 6.12). Enfin, pour les points proche de l'aile et du réacteur, le solveur FDTD arrive capturer la forme de la solution sans représenter précisément les valeurs de champ. La seule différence entre les configurations étant la présence de la zone tétraédrique pour capturer la géométrie, il est clair que toutes les erreurs liées à l'approche FDTD sont dues à l'approximation en marches d'escaliers et donc la zone tétraédrique permet, à zones cartésiennes égales, d'améliorer la solution. Pour que les solutions FDTD s'approchent des solveurs CDO et FVTD, il faut alors passer à un maillage à $\lambda/20$ au niveau du réacteur (voir Figure 6.13). Au niveau de l'aile, il semble que les marches d'escaliers n'améliorent pas particulièrement la solution en passant de $\lambda/20$ à $\lambda/40$, et pour le nez, elle s'améliore mais ne correspond pas à celles des solveurs utilisant des maillages triangulaires sur l'avion.

Coût de calcul. Tout d'abord, on ne relève pas le temps CPU du solveur FVTD car il est ici utilisé comme point de comparaison. Ensuite, en terme de temps CPU, le solveur FDTD structuré ne met que 1m30s à donner une solution. Les solveurs CDO quant à eux, donnent 34m16s pour la métrique FD/DGA et 19m38s pour la métrique FD/FE/DGA. Cela est à nouveau dû à un meilleur pas de temps pour la métrique FD/FE/DGA : $8.96 \cdot 10^{-11}$ contre $4.90 \cdot 10^{-11}$ pour la métrique FD/DGA. En terme de factorisation les deux métriques donnent un temps équivalent : environ 12s. Au vu de la proportion de degrés de liberté, il apparaît que le coût de calcul est entièrement concentré dans la zone cartésienne. En terme de temps calcul, les temps CPU associés aux solutions FDTD avec des maillages à $\lambda/20$ et $\lambda/40$ sont respectivement 9m41s et 2h50m13s. En conclusion, sur cette configuration, à précision identique voire meilleure, l'approche CDO est plus performante que l'approche FDTD.

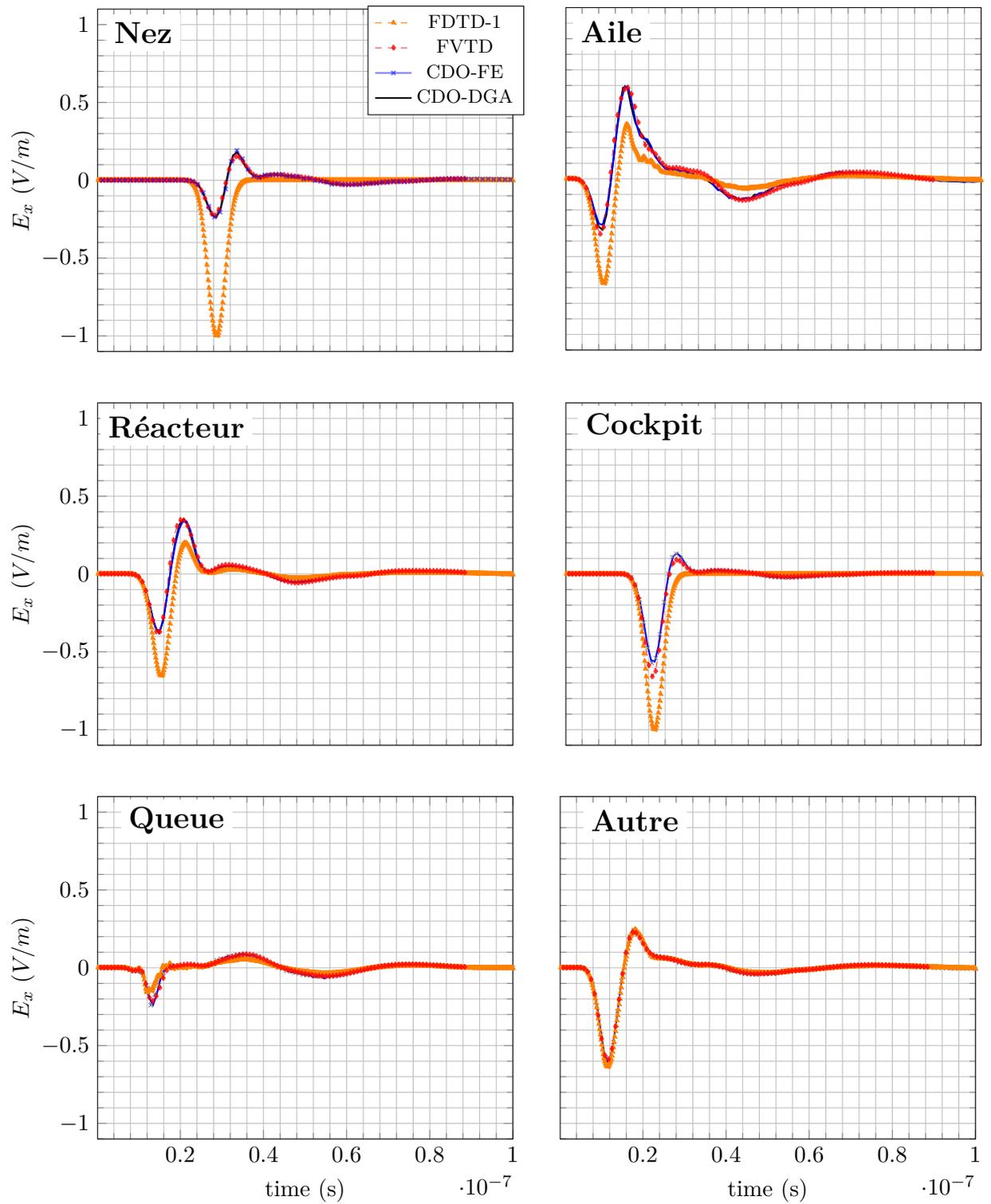


FIGURE 6.12

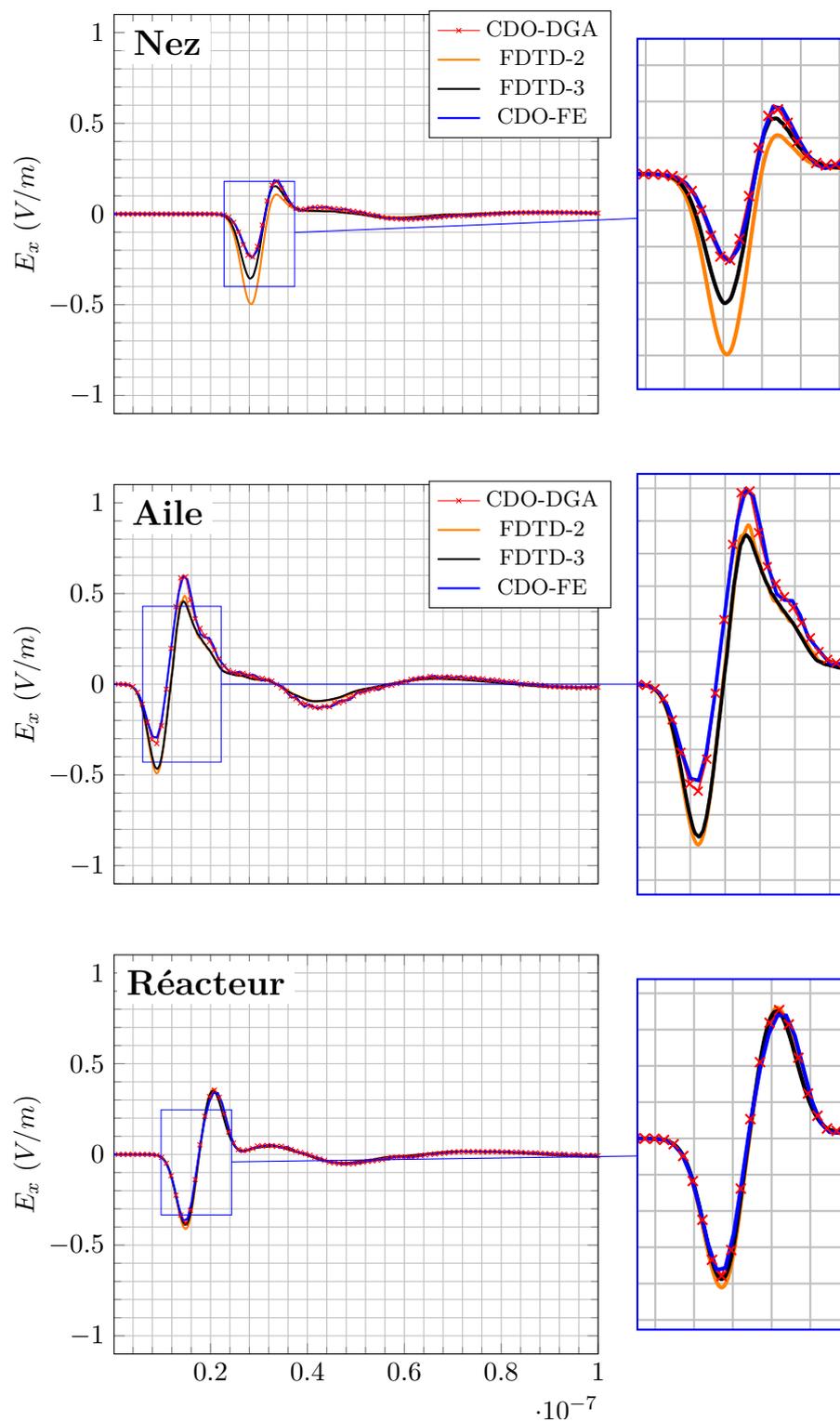
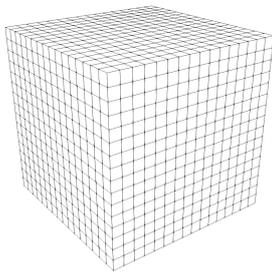


FIGURE 6.13

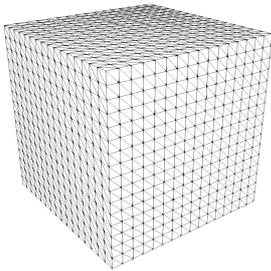
Conclusion partielle

Dans ce chapitre, on a quantifié le gain en coût calcul de l'utilisation de maillages hybrides ayant une zone cartésienne dans le vide et des tétraèdres proche de l'objet étudié, pour l'approche CDO. Pour cela, dans la Section 6.1, on a comparé, en fonction de la métrique, les coûts de calcul et les pas de temps calculés avec la condition CFL (5.43). Ensuite, dans la Section 6.2, on a décrit les différentes méthodes de génération de maillages hybrides utilisées, ainsi que les stratégies pour résoudre le système CDO sur ce type de maillages. Enfin, dans la Section 6.3, on a étudié l'influence de la capture de la géométrie sur la qualité de la solution CDO. Pour cela, on a considéré deux configurations : le calcul de la SER d'une sphère, et le calcul du champ diffracté proche d'un avion de chasse. Les comparaisons ont été effectuées avec les solveurs FVTD et FDTD du logiciel *Maxwell-TD* de l'ONERA.

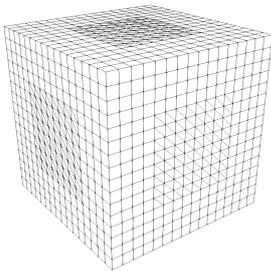
Annexe du Chapitre 6



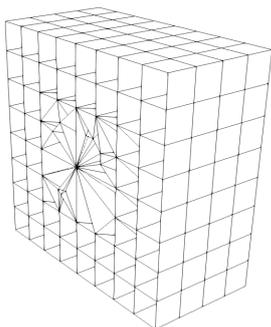
Maillage	#V	#E	#F	#C
Hex4	125	300	240	64
Hex8	729	1944	1728	512
Hex16	4913	13872	13056	4096
Hex32	35937	104544	101376	32768



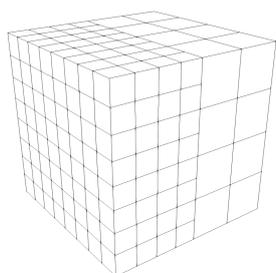
Maillage	#V	#E	#F	#C
Tet4	107	473	638	271
Tet8	493	2549	3730	1673
Tet16	2583	15037	23374	10919
Tet32	15274	96912	157134	75495



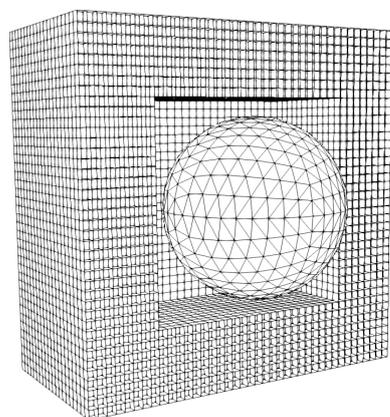
Maillage	#V	#E	#F	#C	Cube	Tetra	Prismes
Mix4	126	375	384	134	32	54	48
Mix8	711	2309	2510	911	256	271	384
Mix16	4677	16013	18130	6793	2048	1673	3072
Mix32	33607	117997	136270	51879	16384	10919	24576



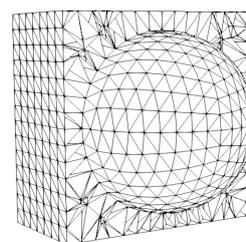
Maillage	#V	#E	#F	#C	Cube	Tetra	Poly
HexTet4	126	351	336	110	32	54	24
HexTet8	711	2117	2126	719	352	271	96
HexTet16	4677	14477	15058	5257	3200	1673	384
HexTet32	36607	105709	111697	39591	27136	10919	1536



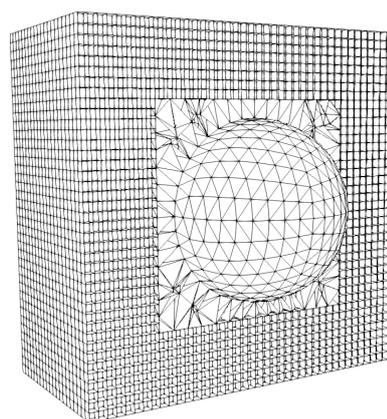
Maillage	#V	#E	#F	#C	Cube	Poly
Ref4	84	191	144	36	32	4
Ref8	455	1174	1008	288	727	16
Ref16	2925	8108	7488	2304	2240	64
Ref32	20825	59992	57600	18432	18176	256



(a)



(b)



(c)

FIGURE 6.14 – Illustration des étapes pour la stratégie de maillage n°1 : (a) Définir un maillage cartésien auquel est supprimée une zone du maillage de sorte à définir un espace entre la zone cartésienne et l’objet, (b) Définir une surface, englobant l’objet, qui coïncide avec la surface de la zone supprimée dans l’étape précédente, puis construire un maillage tétraédrique entre l’objet et cette surface, (c) Recoller les deux maillages

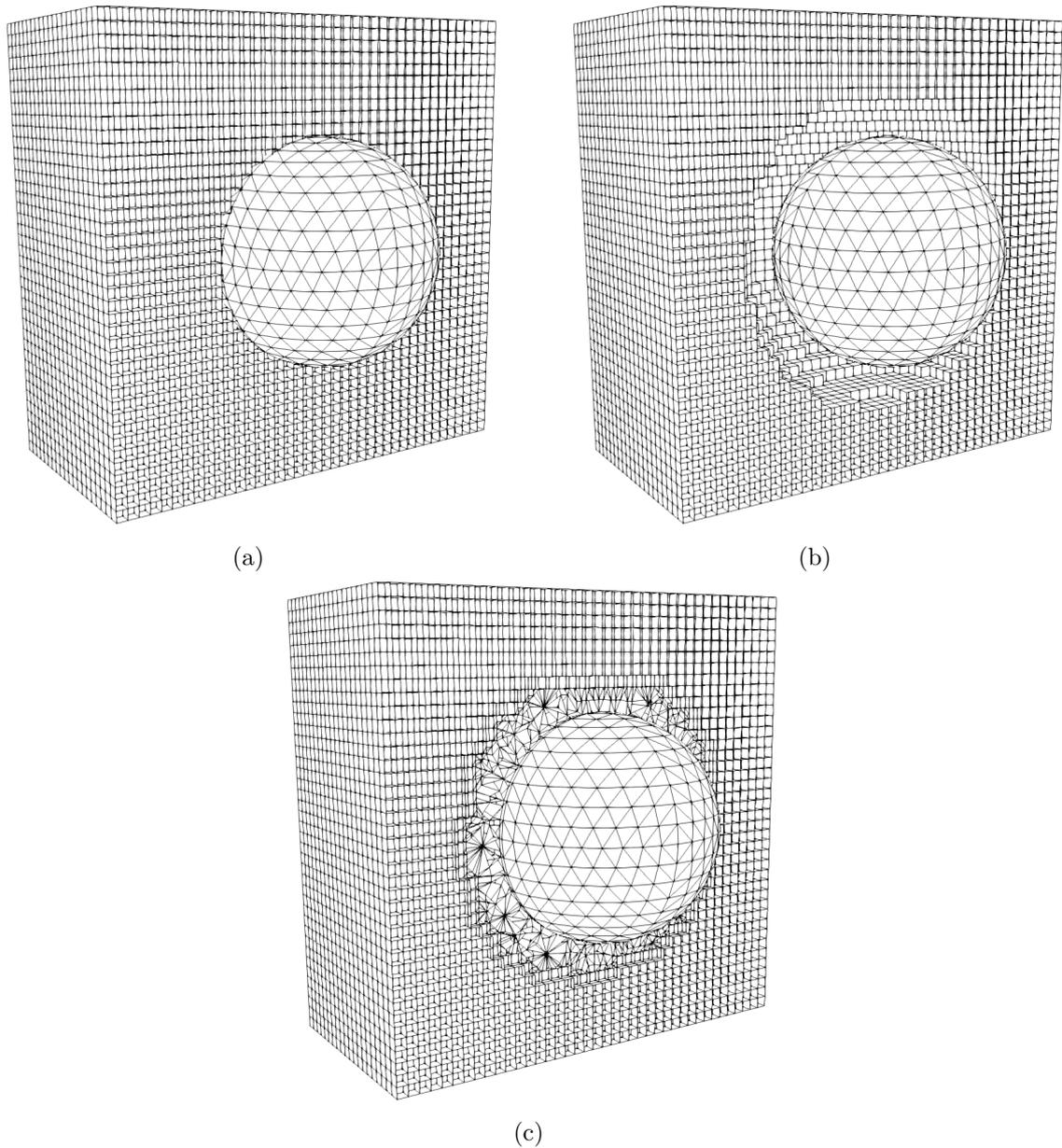


FIGURE 6.15 – Illustration des étapes pour la stratégie 2 : (a) Le maillage triangulaire surfacique de la sphère est plongé dans un maillage Cartésien, (b) Des couches de cellules cubiques sont supprimées (ici 2 couches) autour de l'objet laissant un espace entre l'objet et la zone cartésienne obtenue par la suppression, (c) L'espace entre l'objet et la zone cartésienne est rempli de tétraèdres.

Couplage de méthodes CDO dans le cas statique

Sommaire

7.1	Modèle continu	109
7.2	Cadre discret avec deux sous-domaines	110
7.2.1	Maillages	110
7.2.2	Degrés de liberté	112
7.2.3	Applications de réduction	112
7.2.4	Opérateurs différentiels discrets	114
7.2.5	Opérateurs de Hodge discrets	115
7.3	Couplage de schémas CDO pour le problème div-grad	116
7.3.1	Formulation du schéma avec couplage	116
7.3.2	Analyse	117
7.4	Applications	120
7.4.1	Exemple d'opérateur de transmission discret	120
7.4.2	Test numérique	122

L'objectif de ce chapitre est d'étudier un couplage de schémas numériques définis sur des sous-domaines au moyen d'opérateurs définis sur l'interface. Afin de se focaliser uniquement sur le caractère spatial de celui-ci, on considère un modèle purement stationnaire. Ce modèle est formulé dans la Section 7.1, puis la Section 7.2, on commence par introduire les notations utilisées et les opérateurs du cadre CDO utiles à la formulation. Dans la Section 7.3 le problème discret avec couplage est formulé, puis analysé en terme de stabilité et de consistance. Enfin la Section 7.4 propose une application numérique du schéma couplé et l'Annexe à la fin du chapitre rassemble les preuves associées aux propositions de la Section 7.3.

7.1 Modèle continu

Problème. On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine polyédrique de frontière $\partial\Omega$, dont la normale unitaire sortante est notée \mathbf{n} . Le problème considéré est : trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$-\nabla \cdot (\underline{\lambda} \nabla u) = s \text{ dans } \Omega, \tag{7.1a}$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{7.1b}$$

avec $s \in L^2(\Omega)$ une fonction source et $\underline{\lambda} : \Omega \rightarrow [L^\infty(\Omega)]^{3 \times 3}$ un tenseur matériel.

Partition en sous-domaines. Dans la suite, le domaine Ω est divisé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 (voir Figure 7.3), de sorte que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. On note $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$

l'interface entre les sous-domaines, $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \Gamma$ le bord de Ω_1 sans l'interface et $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \Gamma$ le bord de Ω_2 sans l'interface. La normale à Γ , notée \mathbf{n}_{12} , est orientée vers l'extérieur de Ω_1 (voir Figure 7.3). Dans la suite, $u_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ représente la restriction de u sur Ω_1 et $u_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ la restriction de u sur Ω_2 . Les mêmes notations sont utilisées pour le terme source $s : s_1$ sur Ω_1 et s_2 sur Ω_2 , et pour $\underline{\lambda}$ le tenseur matériel $\underline{\lambda} : \underline{\lambda}_1 = \underline{\lambda}|_{\Omega_1}$ et $\underline{\lambda}_2 = \underline{\lambda}|_{\Omega_2}$.

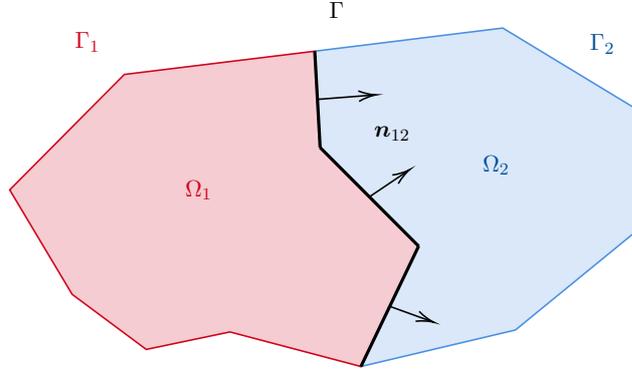


FIGURE 7.1 – Partition du domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. La normale \mathbf{n}_{12} à l'interface $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ est orientée de Ω_1 vers Ω_2 .

Problème partitionné. L'objectif de ce chapitre est de coupler deux schémas *Compatible Discrete Operators* (CDO) : un schéma CDO dit *Vertex-based* (Vb) sur Ω_1 , dans lequel les inconnues associées à u_1 sont attachés aux sommets, et un schéma CDO dit *Cell-based* (Cb) sur Ω_2 (voir Bonelle & Ern (2014a)), dans lequel les inconnues à u_2 sont attachées aux sommets duaux définis par les barycentres des cellules. La discrétisation (Cb) dans Ω_2 est faite en formulation mixte, on donne alors la reformulation du problème (7.1) en utilisant les restrictions : trouver $u_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $u_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que

$$-\nabla \cdot (\underline{\lambda}_1 \nabla u_1) = s_1 \text{ dans } \Omega_1, \quad (7.2a)$$

$$\nabla \cdot \varphi_2 = s_2 \text{ dans } \Omega_2, \quad (7.2b)$$

$$\underline{\lambda}_2^{-1} \varphi_2 + \nabla u_2 = 0 \text{ dans } \Omega_2, \quad (7.2c)$$

$$u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad (7.2d)$$

$$u_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \quad (7.2e)$$

avec les conditions à l'interface

$$(\underline{\lambda}_1 \nabla u_1) \cdot \mathbf{n}_{12} + \varphi_2 \cdot \mathbf{n}_{12} = 0 \text{ et } u_2 - u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (7.3)$$

7.2 Cadre discret avec deux sous-domaines

L'objectif de cette section est de rappeler des éléments du cadre discret des Chapitres 2 et 3 utiles à la discrétisation du problème (7.2). Pour cela, on commence par définir les maillages dans chacun des sous-domaines.

7.2.1 Maillages

Volumiques. On note $M_1 := \{V_1, E_1, F_1, C_1\}$ un maillage polyédrique approchant Ω_1 , avec V_1, E_1, F_1, C_1 les ensembles collectant, respectivement, les sommets, les arêtes, les faces et les cellules. En utilisant les mêmes notations, on considère $M_2 := \{V_2, E_2, F_2, C_2\}$ un maillage polyédrique approchant Ω_2 . Les deux maillages M_1 et M_2 sont supposés coïncider sur l'interface Γ . Les maillages duaux barycentrique associés à M_1 et M_2 sont respectivement notés $\tilde{M}_1 := \{\tilde{V}_1, \tilde{E}_1, \tilde{F}_1, \tilde{C}_1\}$ et $\tilde{M}_2 := \{\tilde{V}_2, \tilde{E}_2, \tilde{F}_2, \tilde{C}_2\}$.

Surfaciques. On note $M_1^\partial := \{V_1^\partial, E_1^\partial, F_1^\partial\}$ et $M_2^\partial := \{V_2^\partial, E_2^\partial, F_2^\partial\}$ les maillages de surface rassemblant les entités primales de M_1 et M_2 localisées sur les bords respectifs de Ω_1 et Ω_2 . Le maillage d'interface $M_\Gamma := \{V_\Gamma, E_\Gamma, F_\Gamma\}$ est défini par l'intersection de ces deux maillages :

$$M_\Gamma := M_1 \cap M_2.$$

Ainsi $V_\Gamma := V_1^\partial \cap V_2^\partial$ et $F_\Gamma := F_1^\partial \cap F_2^\partial$ sont les ensembles collectant les sommets et les faces dans le maillage d'interface. Les maillages duaux de bord associés à M_1^∂ et M_2^∂ sont respectivement notés $\widetilde{M}_1^\partial := \{\widetilde{V}_1^\partial, \widetilde{E}_1^\partial, \widetilde{F}_1^\partial\}$ et $\widetilde{M}_2^\partial := \{\widetilde{V}_2^\partial, \widetilde{E}_2^\partial, \widetilde{F}_2^\partial\}$, et le maillage dual sur l'interface M_Γ est défini par

$$\widetilde{M}_\Gamma := \widetilde{M}_1^\partial \cap \widetilde{M}_2^\partial.$$

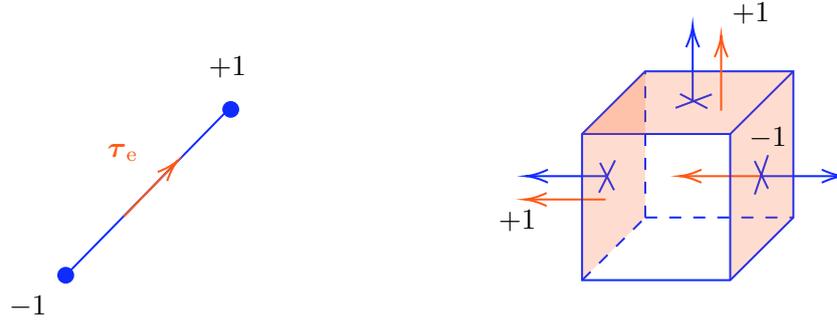


FIGURE 7.2 – Orientations relatives de deux sommets sur une arête e et de trois faces sur une cellule.

Orientation. Les arêtes sont orientées par leur vecteur directeur, et les faces sont orientées par leur vecteur normal. Les nombres d'incidences définissant l'orientation relative d'un sommet v sur une arête e , et d'une face f sur le bord d'une cellule c (voir Figure 7.2) sont respectivement définis par

$$\iota_{v,e} := \begin{cases} +1 & \text{si } \tau_e \text{ pointe vers } v, \\ -1 & \text{si } \tau_e \text{ pointe à l'opposé de } v, \\ 0 & \text{si } v \text{ n'appartient pas à } \partial e. \end{cases} \quad \text{et} \quad \iota_{f,c} := \begin{cases} +1 & \text{si } \mathbf{n}_f \text{ pointe vers l'extérieur de } c, \\ -1 & \text{si } \mathbf{n}_f \text{ pointe vers l'intérieur de } c, \\ 0 & \text{si } f \text{ n'appartient pas à } \partial c. \end{cases}$$

L'orientation des entités des maillages duaux est obtenue par un transfert d'orientation de sorte à ce que les relations

$$\mathbf{n}_{\widetilde{f}(e)} \cdot \mathbf{t}_e > 0 \quad \text{et} \quad \tau_{\widetilde{e}(f)} \cdot \mathbf{n}_f > 0,$$

soient vérifiées, respectivement, pour tout $e \in E_1 \cup E_2$ et tout $f \in F_1 \cup F_2$. Ce transfert d'orientation donne les égalités suivantes :

$$\iota_{\widetilde{f}(e), \widetilde{c}(v)} = -\iota_{v,e} \quad \text{et} \quad \iota_{\widetilde{v}(c), \widetilde{e}(f)} = -\iota_{f,c}. \quad (7.4)$$

Orientation à l'interface. Les faces primales sur l'interface sont supposées orientées vers l'extérieur de Ω_1 et donc vers l'extérieur des cellules dans C_1 auxquelles elles appartiennent. On a donc pour tout $f \in F_\Gamma$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{n}_f > 0. \quad (7.5)$$

A l'inverse, ces faces sont orientées vers l'intérieur de Ω_2 et donc vers l'intérieur des cellules dans C_2 : pour tout $f \in F_\Gamma$

$$\iota_{f,c} = -1, \quad \forall c \in C_{2,f}. \quad (7.6)$$

7.2.2 Degrés de liberté

Dans les sous-domaines. Les degrés de libertés (ddl) volumiques correspondant au maillage primal dans Ω_1 sont rassemblés dans les espaces \mathcal{V}_1 , \mathcal{E}_1 , \mathcal{F}_1 et \mathcal{C}_1 , tandis que les ddl correspondant au maillage primal dans Ω_2 sont rassemblés dans les espaces \mathcal{V}_2 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{F}_2 et \mathcal{C}_2 . En suivant les mêmes notations, les ddl attachés au maillage dual $\tilde{\mathcal{M}}_1$ sont rassemblés dans les espaces $\tilde{\mathcal{V}}_1$, $\tilde{\mathcal{E}}_1$, $\tilde{\mathcal{F}}_1$ et $\tilde{\mathcal{C}}_1$, et les ddl associés au maillage dual $\tilde{\mathcal{M}}_2$ sont rassemblés dans les espaces $\tilde{\mathcal{V}}_2$, $\tilde{\mathcal{E}}_2$, $\tilde{\mathcal{F}}_2$ et $\tilde{\mathcal{C}}_2$. Les espaces de ddl sont équipés avec les normes discrètes suivantes :

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\mathcal{V}}^2 := \sum_{c \in \mathcal{C}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V},c}^2 \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V},c}^2 := \sum_{v \in \mathcal{V}_c} h_c^3 u_v^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2, \quad (7.7)$$

$$\|\mathbf{g}\|_{2,\mathcal{E}}^2 := \sum_{c \in \mathcal{C}} \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E},c}^2 \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{E},c}^2 := \sum_{e \in \mathcal{E}_c} h_c \mathbf{g}_e^2, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2, \quad (7.8)$$

$$\|\phi\|_{2,\mathcal{F}}^2 := \sum_{c \in \mathcal{C}} \|\phi\|_{\mathcal{F},c}^2 \quad \text{avec} \quad \|\phi\|_{\mathcal{F},c}^2 := \sum_{f \in \mathcal{F}_c} h_c^{-1} \phi_f^2, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2. \quad (7.9)$$

Sur l'interface. Les espaces des degrés de liberté associés aux arêtes primales sur l'interface n'étant pas considérées, on ne définit que $\mathcal{V}_\Gamma := \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ et $\mathcal{F}_\Gamma := \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ les espaces collectant les inconnues sur \mathcal{M}_Γ . Les espaces contenant les ddl associés aux bords des sous-domaines sont notés $\tilde{\mathcal{V}}_1^\partial$, $\tilde{\mathcal{V}}_2^\partial$, $\tilde{\mathcal{F}}_1^\partial$ et $\tilde{\mathcal{F}}_2^\partial$, et $\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma$ et $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ sont ceux associés au ddl sur l'interface. Ces derniers sont définis par les intersections :

$$\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma = \tilde{\mathcal{V}}_1^\partial \cap \tilde{\mathcal{V}}_2^\partial \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma = \tilde{\mathcal{F}}_1^\partial \cap \tilde{\mathcal{F}}_2^\partial.$$

A la différence des espaces de ddl primaux associés au bord, on a

$$\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma \cap \tilde{\mathcal{V}}_1 = \emptyset, \quad \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma \cap \tilde{\mathcal{V}}_2 = \emptyset, \quad \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma \cap \tilde{\mathcal{F}}_1 = \emptyset \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma \cap \tilde{\mathcal{F}}_2 = \emptyset.$$

Ainsi, pour différencier les éléments sur l'interface des éléments associés aux volumes, on note \mathbf{p}^∂ les éléments de $\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma$ et ϕ^∂ les éléments de $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$. Les espaces de ddl primaux sur l'interface sont équipés avec les normes suivantes :

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\mathcal{V}_\Gamma}^2 := \sum_{v \in \mathcal{V}_\Gamma} |\tilde{f}^\partial(v)| u_v^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}_\Gamma, \quad \|\phi\|_{2,\mathcal{F}_\Gamma}^2 := \sum_{f \in \mathcal{F}_\Gamma} \frac{\phi_f^2}{|f|}, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}_\Gamma. \quad (7.10)$$

Les espaces de ddl duaux sur l'interface sont équipés avec les normes suivantes :

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}^2 := \sum_{f \in \mathcal{F}_\Gamma} |f| u_{\tilde{v}^\partial(f)}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma, \quad \|\phi\|_{2,\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^2 := \sum_{v \in \mathcal{V}_\Gamma} \frac{\phi_{\tilde{f}^\partial(v)}^2}{|\tilde{f}^\partial(v)|}, \quad \forall \phi \in \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma.$$

Trace discrète. Comme on ne considère que des conditions de Dirichlet homogènes sur Γ_1 et Γ_2 , les inconnues associées à des sommets primaux ou duaux sur Γ_1 ou Γ_2 seront nulles. Ainsi, à la différence du Chapitre 3, les applications de trace discrètes sont définies comme n'isolant que les ddl sur l'interface :

$$\gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_\Gamma, \quad \text{avec} \quad \mathcal{X} \in \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}.$$

Aucun indice n'est ajouté aux applications γ car elles peuvent être identifiées par l'indice de l'élément auquel elles s'appliquent. Par exemple, si γ est appliquée à l'élément $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{V}_1$, alors l'application considérée implicitement est $\gamma : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_\Gamma$.

7.2.3 Applications de réduction

Domaine des réductions. Dans toute la suite, les espaces $\mathcal{S}_\mathcal{X}(\Omega)$, avec \mathcal{X} n'importe quel espace de ddl défini précédemment, sont des espaces de fonctions suffisamment régulières pour que les applications de réduction $\mathbf{R}_\mathcal{X} : \mathcal{S}_\mathcal{X}(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}$ associées, soient bien définies.

Réduction primale. Les degrés de liberté associés au maillage primal global $M = M_1 \cup M_2$ sont définis par les applications

$$R_{\mathcal{V}} : \mathcal{S}_{\mathcal{V}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}, \quad R_{\mathcal{E}} : \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}, \quad R_{\mathcal{F}} : \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F} \quad \text{et} \quad R_{\mathcal{C}} : \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}.$$

Ces applications sont définies par

$$\forall p \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}}(\Omega), \quad R_{\mathcal{V}}(p)|_{\mathcal{V}} := p(\mathbf{x}_{\mathcal{V}}) \quad \forall \mathcal{V} \in \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2, \quad (7.11a)$$

$$\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(\Omega), \quad R_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{\psi})|_{\mathcal{E}} := \int_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{E}} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2, \quad (7.11b)$$

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega), \quad R_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\varphi})|_{\mathcal{F}} := \int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{F}} \quad \forall \mathcal{F} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \quad (7.11c)$$

$$\forall w \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\Omega), \quad R_{\mathcal{C}}(w)|_{\mathcal{C}} := \int_{\mathcal{C}} w \quad \forall \mathcal{C} \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2. \quad (7.11d)$$

Réduction duale. Les degrés de liberté associés au maillage dual sont définis par les applications

$$R_{\tilde{\mathcal{V}}} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}, \quad R_{\tilde{\mathcal{E}}} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}, \quad R_{\tilde{\mathcal{F}}} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad R_{\tilde{\mathcal{C}}} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}.$$

Ces applications sont définies par

$$\forall p \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\Omega), \quad R_{\tilde{\mathcal{V}}}(p)|_{\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{C})} := p(\mathbf{x}_{\tilde{\mathcal{V}}(\mathcal{C})}) \quad \forall \mathcal{C} \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2, \quad (7.12a)$$

$$\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\Omega), \quad R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{\psi})|_{\tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{F})} := \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \int_{\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})} \quad \forall \mathcal{F} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \quad (7.12b)$$

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\Omega), \quad R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\boldsymbol{\varphi})|_{\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{E})} := \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}_{\mathcal{E}}} \sum_{\mathcal{f} \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}} \int_{\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{C},\mathcal{f}}(\mathcal{E})} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}_{\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{C},\mathcal{f}}(\mathcal{E})} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2, \quad (7.12c)$$

$$\forall w \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{C}}}(\Omega), \quad R_{\tilde{\mathcal{C}}}(w)|_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{V})} := \int_{\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{V})} w \quad \forall \mathcal{V} \in \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2. \quad (7.12d)$$

Réduction sur l'interface. Puisque par définition $\mathcal{V}_{\Gamma} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ et $\mathcal{F}_{\Gamma} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, les applications de réduction sur les entités primales d'interface $R_{\mathcal{V}_{\Gamma}} : \mathcal{S}_{\mathcal{V}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_{\Gamma}$ et $R_{\mathcal{F}_{\Gamma}} : \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}_{\Gamma}$ sont définies par

$$R_{\mathcal{V}_{\Gamma}} := \gamma \circ R_{\mathcal{V}} \quad \text{et} \quad R_{\mathcal{F}_{\Gamma}} := \gamma \circ R_{\mathcal{F}}.$$

On définit aussi l'application $R_{\mathcal{F}_{\Gamma}}^{\partial} : \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}_{\Gamma}$ pour tout $w \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega)$ par

$$R_{\mathcal{F}_{\Gamma}}^{\partial}(w)|_{\mathcal{F}} := \int_{\mathcal{F}} w, \quad \forall \mathcal{F} \in \mathcal{F}_{\Gamma},$$

vérifiant l'identité

$$R_{\mathcal{F}_{\Gamma}}(\boldsymbol{\varphi}) = R_{\mathcal{F}_{\Gamma}}^{\partial}(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}_{12}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(\Omega). \quad (7.13)$$

Les applications de réduction sur les entités duales d'interface $R_{\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}$ et $R_{\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}$, sont quant à elles, définies par

$$\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\Omega), \quad R_{\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}}(\boldsymbol{\psi})|_{\tilde{\mathcal{F}}^{\partial}(\mathcal{V})} := \sum_{\mathcal{f} \in \mathcal{F}_{\mathcal{V}}} \int_{\mathcal{f} \cap \tilde{\mathcal{F}}^{\partial}(\mathcal{V})} \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n}_{\tilde{\mathcal{F}}^{\partial}(\mathcal{V})}, \quad \forall \mathcal{V} \in \mathcal{V}_{\Gamma}, \quad (7.14a)$$

$$\forall p \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\Omega), \quad R_{\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}(p)|_{\tilde{\mathcal{V}}^{\partial}(\mathcal{F})} := p(\mathbf{x}_{\tilde{\mathcal{V}}^{\partial}(\mathcal{F})}), \quad \forall \mathcal{F} \in \mathcal{F}_{\Gamma}. \quad (7.14b)$$

On définit aussi l'application $R_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^\partial : L^1(\partial\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ pour tout $w \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\Omega)$ par

$$R_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^\partial(w)|_{\tilde{f}\partial(v)} := \int_{\tilde{f}\partial(v)} w, \quad \forall v \in V_\Gamma,$$

vérifiant l'identité

$$R_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi) = R_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^\partial(\varphi \cdot \mathbf{n}_{12}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\Omega). \quad (7.15)$$

Notation. Dans la suite, on utilise la règle de notations suivante : dès lors qu'un espace de ddl est utilisé en indice, alors il n'est pas indicé selon le sous-domaine auquel il fait référence. La seule exception à cette règle est lorsqu'on travaille sur l'interface, alors les espaces de ddl sont indicés avec la lettre Γ . Ainsi, en suivant cette règle, les applications de réduction ne sont pas indicées selon le sous-domaine sur lequel elles agissent et le sous-domaine est identifié par l'indice sur la variable sur laquelle elles s'appliquent. Par exemple, si $p_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière sur Ω_1 alors $R_V(p_1) \in \mathcal{V}_1$, et si $\psi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ régulier sur Ω_2 , alors $R_{\mathcal{F}}(\psi_2) \in \mathcal{F}_2$.

Dans la suite, on utilise la notation $A \lesssim B$ pour désigner l'inégalité $A \leq cB$ avec c une constante positive dont les valeurs peuvent changer d'une occurrence à une autre et est indépendante de la taille du maillage h .

7.2.4 Opérateurs différentiels discrets

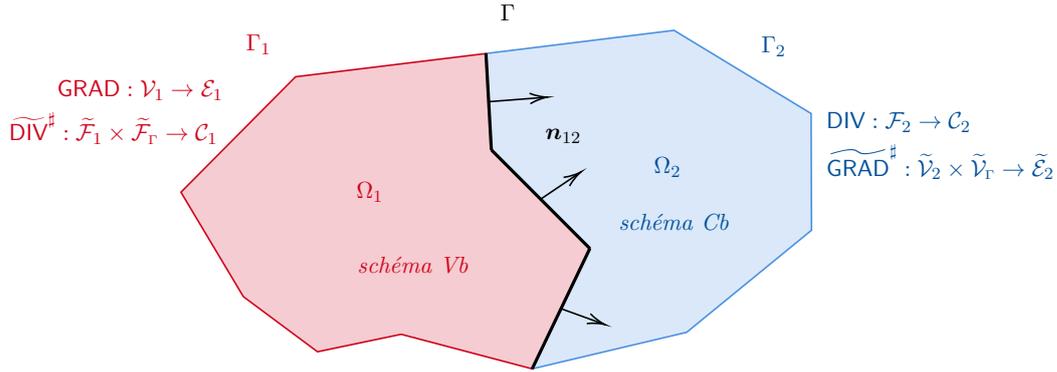


FIGURE 7.3

Maillage primal. Les opérateurs différentiels discrets sur le maillage primal intervenant dans le schéma couplé sont $\text{GRAD} : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1$, pour la partie *Vertex-based* (Vb), et $\text{DIV} : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{C}_2$, pour la partie *Cell-based* (Cb). On rappelle qu'ils sont définis pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_1$ et pour tout $\phi \in \mathcal{F}_2$, respectivement, par

$$\text{GRAD}(\mathbf{p})|_e := \sum_{v \in V_e} \iota_{v,e} \mathbf{p}_v, \quad \forall e \in E_1 \quad \text{et} \quad \text{DIV}(\phi)|_f := \sum_{f \in F_c} \iota_{f,c} \phi_f, \quad \forall f \in F_2.$$

Ces deux opérateurs vérifient les relations de commutativité de la Proposition 3.4.2 :

$$R_{\mathcal{E}}(\nabla p_1) = \text{GRAD} R_V(p_1), \quad R_{\mathcal{C}}(\nabla \cdot \varphi_2) = \text{DIV} R_{\mathcal{F}}(\varphi_2), \quad (7.16)$$

Maillage dual. Les opérateurs différentiels sur le maillage dual intervenant dans le schéma couplé sont $\widetilde{\text{GRAD}} : \tilde{\mathcal{V}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_1$, pour la partie *Cell-based* (Cb), et $\widetilde{\text{DIV}} : \tilde{\mathcal{F}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_2$, pour la partie *Cell-based* (Cb). Ces opérateurs sont définis par dualité (voir Chapitre 3, équation (3.8)) :

$$\llbracket \text{GRAD}(\mathbf{p}_1), \phi_1 \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} := -\llbracket \mathbf{p}_1, \widetilde{\text{DIV}}(\phi_1) \rrbracket_{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}}}, \quad \forall (\mathbf{p}_1, \phi_1) \in \mathcal{V}_1 \times \tilde{\mathcal{F}}_1, \quad (7.17a)$$

$$\llbracket \text{DIV}(\phi_2), \mathbf{p}_2 \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} := -\llbracket \phi_2, \widetilde{\text{GRAD}}(\mathbf{p}_2) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}, \quad \forall (\phi_2, \mathbf{p}_2) \in \mathcal{F}_2 \times \tilde{\mathcal{V}}_2. \quad (7.17b)$$

Les opérateurs *complétés au bord* $\widetilde{\text{DIV}}^\sharp : \widetilde{\mathcal{F}}_1 \times \widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}_1$ et $\widetilde{\text{GRAD}}^\sharp : \widetilde{\mathcal{V}}_2 \times \widetilde{\mathcal{V}}_\Gamma \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_2$ sont définis par :

$$\llbracket \mathbf{p}, \widetilde{\text{DIV}}^\sharp(\phi, \phi^\partial) \rrbracket_{\mathcal{V}\widetilde{\mathcal{C}}} := -\llbracket \text{GRAD}(\mathbf{p}), \phi \rrbracket_{\mathcal{V}\widetilde{\mathcal{C}}} + \llbracket \gamma(\mathbf{p}), \phi^\partial \rrbracket_{\mathcal{V}_\Gamma \widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma}, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{V}_1, \phi \in \widetilde{\mathcal{F}}_1, \phi^\partial \in \widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma, \quad (7.18a)$$

$$\llbracket \phi, \widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{p}, \mathbf{p}^\partial) \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} := -\llbracket \text{DIV}(\phi), \mathbf{p} \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} - \llbracket \gamma(\phi), \mathbf{p}^\partial \rrbracket_{\mathcal{F}_\Gamma \widetilde{\mathcal{V}}_\Gamma}, \quad \forall \phi \in \mathcal{F}_2, \mathbf{p} \in \widetilde{\mathcal{V}}_2, \mathbf{p}^\partial \in \widetilde{\mathcal{V}}_\Gamma. \quad (7.18b)$$

Du fait que l'on considère uniquement des conditions de Dirichlet homogènes, les crochets au bord ne sont pris que sur l'interface. De plus, dans la définition (7.18b) le signe au bord est pris négativement relativement aux cellules de \mathcal{C}_2 . Ces opérateurs complétés vérifient les relations de commutation de la Proposition 3.4.6 :

$$\mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\nabla \cdot \varphi_1) = \widetilde{\text{DIV}}^\sharp(\mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\varphi_1), \mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi_1)), \quad \mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\nabla p_2) = \widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{V}}}(p_2), \mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(p_2)). \quad (7.19)$$

7.2.5 Opérateurs de Hodge discrets

Les opérateurs métriques discrets intervenant dans le schéma (Vb) et le schéma (Cb), sont respectivement

$$\mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} : \mathcal{F}_2 \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_2.$$

On note $\lambda_{1,b}$ (respectivement $\lambda_{2,b}$) et $\lambda_{1,\sharp}$ (respectivement $\lambda_{2,\sharp}$) la plus petite et la plus grande valeur propre de $\underline{\lambda}_1$ (resp. $\underline{\lambda}_2$). On suppose aussi que $\lambda_{1,b}, \lambda_{2,b} > 0$. Ces opérateurs vérifient les propriétés suivantes :

(H1) $\mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}}$ et $\mathbf{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}}$ sont symétriques.

(H2) Pour tout $\mathbf{g}_1 \in \mathcal{E}_1$ et $\phi_2 \in \mathcal{F}_2$

$$\lambda_{1,b} \|\mathbf{g}_1\|_{2,\mathcal{E}}^2 \lesssim \llbracket \mathbf{g}_1, \mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}} \mathbf{g}_1 \rrbracket_{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}} \lesssim \lambda_{1,\sharp} \|\mathbf{g}_1\|_{2,\mathcal{E}}^2, \quad (7.20a)$$

$$\lambda_{2,\sharp}^{-1} \|\phi_2\|_{2,\mathcal{F}}^2 \lesssim \llbracket \phi_2, \mathbf{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} \lesssim \lambda_{2,b}^{-1} \|\phi_2\|_{2,\mathcal{F}}^2. \quad (7.20b)$$

(H3) Pour tout $\mathbf{K}_1 \in [\mathbb{P}_0(\mathcal{C}_1)]^3$ et pour tout $\mathbf{K}_2 \in [\mathbb{P}_0(\mathcal{C}_2)]^3$

$$\mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}}(\mathbf{K}_1) - \mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\underline{\lambda}_1 \mathbf{K}_1) = 0, \quad (7.21a)$$

$$\mathbf{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} \mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\mathbf{K}_2) - \mathbf{R}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\underline{\lambda}_2^{-1} \mathbf{K}_2) = 0. \quad (7.21b)$$

Les propriétés **(H1)** et **(H2)** impliquent que $\mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}}$ et $\mathbf{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}}$ sont symétriques définis positifs. Ainsi, les normes d'énergie associées à l'opérateur de Hodge discret sur \mathcal{M}_1 sont

$$\|\mathbf{g}_1\|_{\lambda_1}^2 := \llbracket \mathbf{g}_1, \mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}} \mathbf{g}_1 \rrbracket_{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}}, \quad \forall \mathbf{g}_1 \in \mathcal{E}_1, \quad \text{et} \quad \|\phi_1\|_{\lambda_1^{-1}}^2 := \llbracket (\mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}})^{-1} \phi_1, \phi_1 \rrbracket_{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}}, \quad \forall \phi_1 \in \widetilde{\mathcal{F}}_1. \quad (7.22)$$

Les normes d'énergie associées à l'opérateur de Hodge discret sur \mathcal{M}_2 sont

$$\|\phi_2\|_{\lambda_2^{-1}}^2 := \llbracket \phi_2, \mathbf{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} \phi_2 \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}}, \quad \forall \phi_2 \in \mathcal{F}_2, \quad \text{et} \quad \|\mathbf{g}_2\|_{\lambda_2}^2 := \llbracket (\mathbf{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}})^{-1} \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2 \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}}, \quad \forall \mathbf{g}_2 \in \widetilde{\mathcal{E}}_2. \quad (7.23)$$

Ces normes vérifient les inégalités de Cauchy-Schwarz suivantes :

$$\llbracket \mathbf{g}_1, \phi_1 \rrbracket_{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}} \leq \|\phi_1\|_{\lambda_1^{-1}} \|\mathbf{g}_1\|_{\lambda_1}, \quad \forall \mathbf{g}_1 \in \mathcal{E}_1, \phi_1 \in \widetilde{\mathcal{F}}_1, \quad (7.24a)$$

$$\llbracket \phi_2, \mathbf{g}_2 \rrbracket_{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}} \leq \|\phi_2\|_{\lambda_2^{-1}} \|\mathbf{g}_2\|_{\lambda_2}, \quad \forall \phi_2 \in \mathcal{F}_2, \mathbf{g}_2 \in \widetilde{\mathcal{E}}_2. \quad (7.24b)$$

Les opérateurs $\mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\widetilde{\mathcal{F}}}$ et $\mathbf{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\widetilde{\mathcal{E}}}$ peuvent être construits selon la stratégie décrite dans le Chapitre 4. Du point de vue de l'analyse numérique, ces propriétés sont suffisantes pour formuler le schéma couplé et construire une estimation *a priori* sur l'erreur.

7.3 Couplage de schémas CDO pour le problème div-grad

L'objectif de cette section est de formuler le problème discret associé au problème (7.2), puis de mener l'analyse numérique en terme de stabilité et de consistance. On commence par définir les opérateurs de transmission discrets.

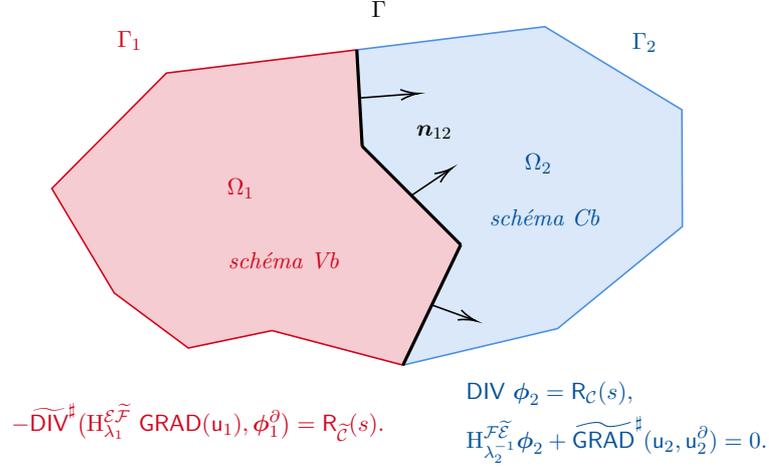


FIGURE 7.4

7.3.1 Formulation du schéma avec couplage

Opérateurs de transmission. Les opérateurs qui assurent la transmission des flux et des potentiels au niveau discret sont les opérateurs $\mathbf{N} : \mathcal{F}_\Gamma \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ et $\mathbf{N}^* : \mathcal{V}_\Gamma \rightarrow \widetilde{\mathcal{V}}_\Gamma$. Ils sont supposés vérifier les propriétés suivantes :

(N1) Les opérateurs \mathbf{N} et \mathbf{N}^* sont continus : il existe deux constantes $\mathbf{C}_N, \mathbf{C}_{N^*} > 0$ indépendantes du raffinement du maillage telles que

$$\|\mathbf{N}(\phi_2)\|_{2, \widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma} \leq \mathbf{C}_N \|\phi_2\|_{2, \mathcal{F}_\Gamma}, \quad \forall \phi_2 \in \mathcal{F}_\Gamma, \quad (7.25a)$$

$$\|\mathbf{N}(u_1)\|_{2, \widetilde{\mathcal{V}}_\Gamma} \leq \mathbf{C}_{N^*} \|u_1\|_{2, \mathcal{V}_\Gamma}, \quad \forall u_1 \in \mathcal{V}_\Gamma. \quad (7.25b)$$

(N2) Les opérateurs \mathbf{N} et \mathbf{N}^* sont adjoints :

$$\llbracket \psi, \mathbf{N}^*(p) \rrbracket_{\mathcal{F}_\Gamma, \widetilde{\mathcal{V}}_\Gamma} = \llbracket p, \mathbf{N}(\psi) \rrbracket_{\mathcal{V}_\Gamma, \widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma}, \quad \forall (\psi, p) \in \mathcal{F}_\Gamma \times \mathcal{V}_\Gamma. \quad (7.26)$$

(N3) Les opérateurs sont \mathbb{P}_0 -consistants, c'est-à-dire : pour tout $K_1 \in \mathbb{P}_0(C_1)$ et pour tout $\mathbf{K}_2 \in [\mathbb{P}_0(C_2)]^3$

$$R_{\widetilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(K_1) - \mathbf{N}^*(R_{\mathcal{V}_\Gamma}(K_1)) = 0, \quad (7.27a)$$

$$R_{\mathcal{F}_\Gamma}^\partial(\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{n}_{12}) - \mathbf{N}(R_{\widetilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^\partial(\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{n}_{12})) = 0. \quad (7.27b)$$

Problème fort. Dans le schéma (Vb), les inconnues associées au potentiel $u_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ sont attachées aux sommets primaux du maillage M_1 , tandis que dans le schéma (Cb), les inconnues associées au potentiel $u_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont attachées aux sommets duaux (barycentres des cellules). Le flux $\varphi_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, dans le schéma (Cb), est, quant à lui discrétisé, sur les faces primales du maillage M_2 . Le problème couplé (voir Figure 7.4) est : trouver $(u_1, u_2, \phi_2) \in \mathcal{V}_1 \times \widetilde{\mathcal{V}}_2 \times \mathcal{F}_2$ tels

que

$$- \widetilde{\text{DIV}}^\# (\text{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \text{GRAD}(u_1), \phi_1^\partial) = \text{R}_{\tilde{\mathcal{C}}}(s), \quad (7.28a)$$

$$\text{DIV } \phi_2 = \text{R}_{\mathcal{C}}(s), \quad (7.28b)$$

$$\text{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \phi_2 + \widetilde{\text{GRAD}}^\#(u_2, u_2^\partial) = 0, \quad (7.28c)$$

$$u_1|_v = 0, \quad \forall v \in V_1^\partial \setminus V_\Gamma, \quad (7.28d)$$

$$u_2^\partial|_{\tilde{v}^\partial(f)} = 0, \quad \forall f \in F_2^\partial \setminus F_\Gamma, \quad (7.28e)$$

avec les conditions de transmission discrètes pour chaque face $f \in F_\Gamma$ données par

$$\phi_1^\partial|_f + \mathbf{N}(\gamma(\phi_2))|_f = 0 \quad \text{et} \quad u_2^\partial|_{\tilde{v}^\partial(f)} - \mathbf{N}^*(\gamma(u_1))|_{\tilde{v}^\partial(f)} = 0. \quad (7.29)$$

Problème faible. On donne maintenant une version faible du problème discret (7.28). Pour cela, on définit trois formes bilinéaires : $\mathbb{A}_{\text{vb}} : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, associée au schéma (Vb) sur M_1 , $\mathbb{A}_{\text{cb}} : [\tilde{\mathcal{V}}_2 \times \mathcal{F}_2] \times [\tilde{\mathcal{V}}_2 \times \mathcal{F}_2] \rightarrow \mathbb{R}$, associée au schéma (Cb) sur M_2 , et $\mathbb{A}_\Gamma : [\mathcal{V}_1 \times \mathcal{F}_2] \times [\mathcal{V}_1 \times \mathcal{F}_2] \rightarrow \mathbb{R}$, tenant compte du couplage entre les deux schémas sur M_Γ . Ces formes bilinéaires sont définies par

$$\mathbb{A}_{\text{vb}}[u_1, v_1] := \llbracket \text{GRAD}(v_1), \text{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \text{GRAD}(u_1) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}, \quad (7.30)$$

$$\mathbb{A}_{\text{cb}}[(u_2, \phi_2), (v_2, \psi_2)] := \llbracket \text{DIV} \phi_2, v_2 \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} + \llbracket \psi_2, \text{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}(u_2) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + \llbracket \psi_2, \widetilde{\text{GRAD}}(u_2) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}, \quad (7.31)$$

$$\mathbb{A}_\Gamma[(u_1, \phi_2), (v_1, \psi_2)] := \llbracket \gamma(v_1), \mathbf{N}(\gamma(\phi_2)) \rrbracket_{\mathcal{V}_\Gamma \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} - \llbracket \gamma(\psi_2), \mathbf{N}^*(\gamma(u_1)) \rrbracket_{\mathcal{F}_\Gamma \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}. \quad (7.32)$$

La forme bilinéaire $\mathbb{A} : [\mathcal{V}_1 \times \tilde{\mathcal{V}}_2 \times \mathcal{F}_2] \times [\mathcal{V}_1 \times \tilde{\mathcal{V}}_2 \times \mathcal{F}_2] \rightarrow \mathbb{R}$ associée au problème couplé est définie comme la somme de ces trois formes bilinéaires :

$$\mathbb{A}[(u_1, u_2, \phi_2), (v_1, v_2, \psi_2)] := \mathbb{A}_{\text{vb}}[u_1, v_1] + \mathbb{A}_{\text{cb}}[(u_2, \phi_2), (v_2, \psi_2)] + \mathbb{A}_\Gamma[(u_1, \phi_2), (v_1, \psi_2)]. \quad (7.33)$$

Le problème faible correspondant au problème (7.28) est de trouver $(u_1, u_2, \phi_2) \in [\mathcal{V}_1 \times \tilde{\mathcal{V}}_2 \times \mathcal{F}_2]$ tel que pour tout $(v_1, v_2, \psi_2) \in [\mathcal{V}_1 \times \tilde{\mathcal{V}}_2 \times \mathcal{F}_2]$

$$\mathbb{A}[(u_1, u_2, \phi_2), (v_1, v_2, \psi_2)] = \llbracket v_1, \text{R}_{\tilde{\mathcal{C}}}(s_1) \rrbracket_{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}}} + \llbracket \text{R}_{\mathcal{C}}(s_2), v_2 \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}}. \quad (7.34)$$

7.3.2 Analyse

L'analyse du problème faible (7.34) est faite en trois temps : tout d'abord on dérive une inégalité de stabilité, c'est la Proposition 7.3.1, ensuite on construit une borne supérieure sur l'erreur de consistance, c'est la Proposition 7.3.4, enfin, on estime l'erreur de consistance en fonction de la taille du maillage, c'est le Théorème 7.3.1. Afin de garder la présentation concise, les preuves sont reportées dans l'Annexe à la fin du chapitre.

Proposition 7.3.1 (Stabilité inf-sup). Pour tout $(u_1, u_2, \phi_2) \in \mathcal{V}_1 \times \tilde{\mathcal{V}}_2 \times \mathcal{F}_2$ l'inégalité de stabilité suivante est vérifiée :

$$\sup_{\|(v_1, v_2, \psi_2)\|=1} \mathbb{A}[(u_1, u_2, \phi_2), (v_1, v_2, \psi_2)] \gtrsim \|(u_1, u_2, \phi_2)\|,$$

avec la norme :

$$\|(v_1, v_2, \psi_2)\|^2 := \|\text{GRAD}(v_1)\|_{\lambda_1}^2 + \|\widetilde{\text{GRAD}}^\#(v_2, v_2^\partial)\|_{\lambda_2}^2 + \|\psi_2\|_{\lambda_2^{-1}}^2, \quad \text{où } v_2^\partial = \mathbf{N}^*(\gamma(v_1)).$$

L'objectif est maintenant de construire une borne sur l'erreur de consistance pour le problème couplé. Pour des solutions suffisamment régulières de (7.2), l'erreur de consistance est définie pour tout $(v_1, v_2, \psi_2) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{F}_2$ par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(u_1, u_2, \varphi_2), (v_1, v_2, \psi_2)] &:= \mathbb{A}[(R_{\mathcal{V}}(u_1), R_{\tilde{\mathcal{V}}}(\underline{\lambda}_1 u_2), R_{\mathcal{F}}(\varphi_2)), (v_1, v_2, \psi_2)] \\ &\quad - \llbracket v_1, R_{\tilde{\mathcal{C}}}(s_1) \rrbracket_{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}}} - \llbracket R_{\mathcal{C}}(s_2), v_2 \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

On va montrer que l'erreur peut se décomposer en la somme de trois erreurs. La première est celle associée au schéma (Vb) qui est définie par

$$\mathbb{E}_{\text{vb}}[u_1, v_1] := \mathbb{A}_{\text{vb}}[R_{\mathcal{V}}(u_1), v_1] - \llbracket \text{GRAD}(v_1), R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\underline{\lambda}_1 \nabla u_1) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}.$$

La seconde est celle associée au schéma (Cb) qui est définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\text{cb}}[(u_2, \varphi_2), (v_2, \psi_2)] &:= \mathbb{A}_{\text{cb}}([R_{\tilde{\mathcal{V}}}(u_2), R_{\mathcal{F}}(\varphi_2)], [v_2, \psi_2]) - \llbracket \text{DIV}(R_{\mathcal{F}}(\varphi_2)), v_2 \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} \\ &\quad - \llbracket \psi_2, \widetilde{\text{GRAD}}(R_{\tilde{\mathcal{V}}}(u_2)) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} - \llbracket \psi_2, R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\underline{\lambda}_2^{-1} \varphi_2) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}. \end{aligned}$$

Le troisième terme correspond à l'erreur de consistance associée à l'interface de couplage qui est définie par

$$\mathbb{E}_{\Gamma}[(u_1, \varphi_2), (v_1, \psi_2)] := \mathbb{A}_{\Gamma}[(R_{\mathcal{V}}(u_1), R_{\mathcal{F}}(\varphi_2)), (v_1, \psi_2)] + \llbracket \gamma(\psi_2), R_{\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}(u_1) \rrbracket_{\mathcal{F}_{\Gamma}\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}} - \llbracket \gamma(v_1), R_{\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}}(\varphi_2) \rrbracket_{\mathcal{V}_{\Gamma}\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}}.$$

Proposition 7.3.2 (Décomposition de \mathbb{E}). L'erreur de consistance \mathbb{E} définie par (7.35) peut se décomposer en trois termes d'erreurs :

$$\mathbb{E}[(u_1, u_2, \varphi_2), (v_1, v_2, \psi_2)] = \mathbb{E}_{\text{vb}}[u_1, v_1] + \mathbb{E}_{\text{cb}}[(u_2, \varphi_2), (v_2, \psi_2)] + \mathbb{E}_{\Gamma}[(u_1, \varphi_2), (v_1, \psi_2)].$$

Proposition 7.3.3 (Inégalité sur le maillage primal). Il existe une constante $\mathbf{C}_P > 0$, telle que

$$\|\mathbf{p}\|_{2,\mathcal{V}} \leq \mathbf{C}_P \|\text{GRAD}(\mathbf{p})\|_{2,\mathcal{E}},$$

pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$ tel que $\mathbf{p}|_v = 0$ pour tout $v \in V_1^{\partial}$ avec V_1^{∂} un sous-ensemble non-vidé de V^{∂} .

Preuve. Comme pour l'inégalité de Poincaré continue, la preuve se fait par contradiction. Pour tout $n > 0$, il existe $\mathbf{p}_n \in \mathcal{V}$ avec $\mathbf{p}_n|_v = 0$ pour tout $v \in V_1^{\partial}$ et $\|\mathbf{p}_n\|_{2,\mathcal{V}} = 1$ tel que

$$\frac{1}{n} > \|\text{GRAD}(\mathbf{p}_n)\|_{2,\mathcal{E}}.$$

A une sous-suite près, il existe $p \in \mathcal{V}$ de composantes nulles sur V_1 tel que $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_n\|_{2,\mathcal{V}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Ainsi, il vient $\|\text{GRAD}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_n)\|_{2,\mathcal{E}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et on en déduit que $\|\text{GRAD}(\mathbf{p})\|_{2,\mathcal{E}} = 0$. Finalement, les composantes de \mathbf{p} sont toutes égales à 0 du fait que $\mathbf{p}|_v = 0$ pour tout $v \in V_1^{\partial}$, ce qui contredit le fait que $\|\mathbf{p}_n\|_{2,\mathcal{V}} = 1$. \square

Proposition 7.3.4 (Borne sur \mathbb{E}). Soit (u_1, u_2, φ_2) une solution suffisamment régulière du problème (7.2), alors

$$\begin{aligned} \sup_{\|(v_1, v_2, \psi_2)\|=1} |\mathbb{E}[(u_1, u_2, \varphi_2), (v_1, v_2, \psi_2)]| &\leq \|\mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} R_{\mathcal{E}}(\nabla u_1) - R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\underline{\lambda}_1 \nabla u_1)\|_{\lambda_1^{-1}} \\ &\quad + \|\mathbf{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} R_{\mathcal{F}}(\varphi_2) - R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\underline{\lambda}_2^{-1} \varphi_2)\|_{\lambda_2} + h^{-\frac{1}{2}} \lambda_{1,b}^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{N}(R_{\mathcal{F}_{\Gamma}}(\varphi_2)) - R_{\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}}(\varphi_2)\|_{2,\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}} \\ &\quad + h^{-\frac{1}{2}} \lambda_{2,\#}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{N}^*(R_{\mathcal{V}_{\Gamma}}(u_1)) - R_{\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}(u_1)\|_{2,\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}. \end{aligned}$$

Proposition 7.3.5. Soit h_1 le diamètre du maillage dans Ω_1 . Soit $u_1 \in \mathcal{V}_1$ le potentiel solution du problème discret (7.28) et soit u_1 la solution exacte du problème (7.2). On suppose que $\nabla u_1 \in \mathbf{H}^1(C_1)$ et que $\varphi_1 = \underline{\lambda}_1 \nabla u_1 \in \mathbf{H}^1(C_1)$. Alors,

$$\|H_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} R_{\mathcal{E}}(\nabla u_1) - R_{\tilde{\mathcal{F}}}(\underline{\lambda}_1 \nabla u_1)\|_{\lambda_1^{-1}} \lesssim h_1 \left(\lambda_{1,\sharp}^{\frac{1}{2}} |\nabla u_1|_{\mathbf{H}^1(C_1)} + \lambda_{1,b}^{-\frac{1}{2}} |\varphi_1|_{\mathbf{H}^1(C_1)} \right).$$

Preuve. Voir [Bonelle & Ern (2014a), Théorème 3.7]. \square

Proposition 7.3.6. Soit h_2 le diamètre du maillage dans Ω_2 . Soit (u_2, ϕ_2) la solution du problème discret (7.28) dans Ω_2 et soit (u_2, φ_2) la solution exacte du problème (7.2) dans Ω_2 . On suppose que $\nabla u_2, \varphi_2 \in \mathbf{H}^1(C_2)$. Alors,

$$\|H_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} R_{\mathcal{F}}(\varphi_2) - R_{\tilde{\mathcal{E}}}(\underline{\lambda}_2^{-1} \varphi_2)\|_{\lambda_2} \lesssim h_2 \left(\lambda_{2,\sharp}^{\frac{1}{2}} |\nabla u_2|_{\mathbf{H}^1(C_2)} + \lambda_{2,b}^{-\frac{1}{2}} |\varphi_2|_{\mathbf{H}^1(C_2)} \right).$$

Preuve. Voir [Bonelle & Ern (2014a), Théorème 5.2]. \square

Proposition 7.3.7. Soit h_1 le diamètre du maillage dans Ω_1 . Soit $u_1 \in \mathcal{V}_1$ le potentiel solution du problème discret (7.28) et soit u_1 la solution exacte du problème (7.2). On suppose que $u_1 \in H^1(C_1)$. Alors,

$$\|N^*(R_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1)) - R_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(u_1)\| \lesssim h_1^{\frac{1}{2}} \left(|u_1|_{H^1(C_1)}^2 + h_1^2 |u_1|_{H^2(C_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.36)$$

Proposition 7.3.8. Soit h_2 le diamètre du maillage dans Ω_2 . Soient $\phi_2 \in \mathcal{F}_2$ le flux solution du problème discret (7.28) et soit φ_2 le flux exacte, solution du problème continu (7.2). On suppose que $\varphi_2 \in \mathbf{H}^1(C_2)$. Alors

$$\|N(R_{\mathcal{F}_\Gamma}(\varphi_2)) - R_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\phi_2)\|_{2,\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} \lesssim h_2^{\frac{1}{2}} |\varphi_2|_{\mathbf{H}^1(C_2)}. \quad (7.37)$$

Théorème 7.3.1 (Estimation *a priori* pour le problème couplé). Soit h le diamètre du maillage dans Ω . Soit $(u_1, \phi_2, u_2) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \tilde{\mathcal{V}}_2$ la solution de (7.28) et soit (u, φ) la solution exacte du problème (7.2), avec $\varphi|_{\Omega_1} = \underline{\lambda}_1 \nabla u_1$. En notant, $C = C_1 \cup C_2$, on suppose que $\nabla u \in \mathbf{H}^1(C)$ et que $\varphi \in \mathbf{H}^1(C)$. Alors,

$$\begin{aligned} & \left(\|\text{GRAD}(u_1 - R_{\mathcal{V}}(u_1))\|_{\lambda_1}^2 + \|\phi_2 - R_{\mathcal{F}}(\varphi_2)\|_{\lambda_2^{-1}}^2 + \|\widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(u_2 - R_{\tilde{\mathcal{V}}}(u_2), N^*(\gamma(u_1) - R_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1)))\|_{\lambda_2}^2 \right)^{1/2} \\ & \lesssim h \left(\max(\lambda_{1,\sharp}^{\frac{1}{2}}, \lambda_{2,\sharp}^{\frac{1}{2}}) |\nabla u|_{\mathbf{H}^1(C)} + \max(\lambda_{1,b}^{-\frac{1}{2}}, \lambda_{2,b}^{-\frac{1}{2}}) |\varphi|_{\mathbf{H}^1(C)} \right) + \lambda_{1,b}^{-\frac{1}{2}} |\varphi|_{\mathbf{H}^1(C)} + \lambda_{2,\sharp}^{\frac{1}{2}} |u|_{H^1(C)}. \end{aligned}$$

Preuve. C'est une conséquence des Propositions 7.3.1 et 7.3.4–7.3.8. \square

Conclusion de l'analyse. Le Théorème 7.3.1 donne une estimation sur l'erreur qui ne permet pas de conclure quant à la convergence ou la non-convergence du schéma couplé. Une possibilité pour obtenir une estimation de convergence serait de restreindre les opérateurs de transmission discret en remplaçant la propriété **(N3)** par la condition :

(N3*) Pour tout $Q_1 \in \mathbb{P}_1(C_1)$ et tout $Q_2 \in [\mathbb{P}_1(C_2)]^2$

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(Q_1) - N^*(R_{\mathcal{V}_\Gamma}(Q_1)) &= 0, \\ R_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(Q_2) - N(R_{\mathcal{F}_\Gamma}(Q_2)) &= 0. \end{aligned}$$

Cette propriété permettrait de gagner un ordre convergence sur l'interface en h (le diamètre du maillage) dans les Propositions 7.3.7 et 7.3.8. Cependant l'accès à ce type d'opérateurs n'est pas garanti dans la pratique.

Une autre possibilité serait d'adapter la technique des *éléments de mortar* introduite par Bernardi *et al.* (1989) utilisant une pénalisation des sauts à l'interface. Comme proposé par Heinrich & Nicaise (2003) pour le problème div-grad, on pourrait envisager une pénalisation à la *Nitsche* qui permet une formulation des *éléments de mortar* sans multiplicateur de Lagrange.

La section suivante propose une application numérique avec des opérateurs d'interface vérifiant (N1), (N2) et (N3).

7.4 Applications

L'objectif de cette section est de tester le schéma (7.28) avec des opérateurs de transmission vérifiant (N1), (N2) et (N3). On commence par expliciter ces opérateurs puis on propose un test numérique du schéma couplé (7.28) avec ces opérateurs.

7.4.1 Exemple d'opérateur de transmission discret

Un exemple d'opérateur $\mathbf{N} : \mathcal{F}_\Gamma \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ est

$$\mathbf{N} := \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} \circ \mathbf{L}_{\mathcal{F}_\Gamma}$$

avec $\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ l'application de réduction définie dans la Section 7.2, et $\mathbf{L}_{\mathcal{F}_\Gamma} : \mathcal{F}_\Gamma \rightarrow [\mathbb{P}_0(\mathbb{F}_\Gamma)]^3$ l'opérateur d'interpolation défini pour tout $\phi \in \mathcal{F}_\Gamma$ par

$$\mathbf{L}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\psi)|_f := \frac{\psi_f}{|f|} \mathbf{n}_f, \quad \forall f \in \mathbb{F}_\Gamma.$$

En utilisant cette définition de \mathbf{N} , on peut identifier que son adjoint $\mathbf{N}^* : \mathcal{V}_\Gamma \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma$ est défini par

$$\mathbf{N}^* := \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma} \circ \mathbf{L}_{\mathcal{V}_\Gamma},$$

avec $\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma$ l'application de réduction définie dans la Section 7.2, et $\mathbf{L}_{\mathcal{V}_\Gamma} : \mathcal{V}_\Gamma \rightarrow \mathbb{P}_0(\mathbb{F}_\Gamma)$ l'opérateur d'interpolation défini pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_\Gamma$ par

$$\mathbf{L}_{\mathcal{V}_\Gamma}(\mathbf{p})|_f := \sum_{v \in \mathbb{V}_f} \frac{|f \cap \tilde{f}^\partial(v)|}{|f|} \mathbf{p}_v, \quad \forall f \in \mathbb{F}_\Gamma.$$

De sorte à montrer la continuité de \mathbf{N}^* , on définit la norme duale sur $\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma$ par

$$\|\mathbf{N}^*(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma} := \sup_{\|\phi\|_{2,\mathcal{F}_\Gamma}=1} \left| \llbracket \mathbf{u}, \mathbf{N}(\phi) \rrbracket_{(\mathcal{V}\tilde{\mathcal{F}})^\partial} \right|, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}_\Gamma. \quad (7.38)$$

Proposition 7.4.1 (Continuité de \mathbf{N}). Il existe $\mathbf{C}_\mathbf{N} > 0$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{F}_\Gamma$

$$\|\mathbf{N}(\phi)\|_{2,\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} \leq \mathbf{C}_\mathbf{N} \|\phi\|_{2,\mathcal{F}_\Gamma}.$$

Preuve. Le fait que $\|\mathbf{L}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\phi)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} = \|\phi\|_{2,\mathcal{F}_\Gamma}$ est une conséquence directe de la définition de l'opérateur $\mathbf{L}_{\mathcal{F}_\Gamma} : \mathcal{F}_\Gamma \rightarrow \mathbb{P}_0(\mathbb{F}_\Gamma)$. En utilisant la définition de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\Gamma) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ on déduit

$$\|\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi)\|_{2,\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^2 := \sum_{v \in \mathbb{V}_\Gamma} \frac{1}{|\tilde{f}^\partial(v)|} \left(\sum_{f \in \mathbb{F}_{v,\Gamma}} \int_{f \cap \tilde{f}^\partial(v)} \varphi \cdot \mathbf{n}_{\tilde{f}^\partial(v)} \right)^2$$

En utilisant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left(\sum_{f \in F_{v,\Gamma}} \int_{f \cap \tilde{f}^\partial(v)} \varphi \cdot \mathbf{n}_{\tilde{f}^\partial(v)} \right)^2 \leq \left(\sum_{f \in F_{v,\Gamma}} |f \cap \tilde{f}^\partial(v)| \right) \left(\sum_{f \in F_{v,\Gamma}} \|\varphi\|_{L^2(f \cap \tilde{f}^\partial(v))}^2 \right).$$

Enfin,

$$\|\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi)\|_{2,\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^2 \leq \sum_{v \in V_\Gamma} \sum_{f \in F_{v,\Gamma}} \|\varphi\|_{L^2(f \cap \tilde{f}^\partial(v))}^2 = \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

□

Proposition 7.4.2 (Continuité de \mathbf{N}^*). Il existe $\mathbf{C}_{\mathbf{N}^*} > 0$ telle que pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\Gamma$

$$\|\mathbf{N}^*(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma} \leq \mathbf{C}_{\mathbf{N}^*} \|\mathbf{u}\|_{2,\mathcal{V}_\Gamma}.$$

Preuve. La continuité de \mathbf{N}^* est obtenue avec $\mathbf{C}_{\mathbf{N}^*} = \mathbf{C}_{\mathbf{N}}$ en utilisant la propriété de continuité de \mathbf{N} combinée la définition de la norme (7.38). □

Proposition 7.4.3 (\mathbb{P}_0 -consistance of \mathbf{N}). Pour tout $\mathbf{K}_2 \in [\mathbb{P}_0(C_2)]^3$, on a

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^\partial(\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{n}_{12}) - \mathbf{N}(\mathbf{R}_{\mathcal{F}_\Gamma}^\partial(\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{n}_{12})) = 0. \quad (7.39)$$

Preuve. Soit $\mathbf{K}_2 \in [\mathbb{P}_0(C_2)]^3$ un champ de vecteur constant. D'après les relations (7.13) et (7.15), montrer (7.39) est équivalent à montrer que

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\mathbf{K}_2) - \mathbf{N}(\mathbf{R}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\mathbf{K}_2)) = 0.$$

En utilisant la définition de \mathbf{N} et le fait que $\mathbf{L}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\mathbf{R}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\mathbf{K}_2)) = \mathbf{K}_2$, un calcul direct donne

$$\mathbf{N}(\mathbf{R}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\mathbf{K}_2)) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\mathbf{K}_2),$$

□

Proposition 7.4.4 (\mathbb{P}_0 -consistance of \mathbf{N}^*). Pour tout $K_1 \in \mathbb{P}_0(C_1)$, on a

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(K_1) - \mathbf{N}^*(\mathbf{R}_{\mathcal{V}_\Gamma}(K_1)) = 0.$$

Preuve. Soit $K_1 \in \mathbb{P}_0(C_1)$ un champ scalaire constant. En utilisant le fait que $\mathbf{L}_{\mathcal{V}_\Gamma}(\mathbf{R}_{\mathcal{V}_\Gamma}(K_1)) = K_1$ on obtient directement que

$$\mathbf{N}^*(\mathbf{R}_{\mathcal{V}_\Gamma}(K_1)) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(K_1).$$

□

En tenant compte des Propositions 7.4.1–7.4.4, on voit que les opérateurs \mathbf{N} et \mathbf{N}^* vérifient **(N1)**, **(N2)** et **(N3)**. Ainsi, les estimations formulées dans la section précédente sont vérifiées.

La section suivante propose une application numérique du schéma couplé (7.28) avec ces opérateurs.

7.4.2 Test numérique

Les calculs sont effectués sur le cube unité $\Omega = [0, 1]^3$. Celui-ci est divisé en deux sous-domaines et le maillage utilisé pour approximer Ω est un maillage Cartésien de taille $32 \times 32 \times 32$ (voir Figure 7.5). Dans la simulation, on prend le tenseur matériel $\underline{\lambda} = \underline{\text{Id}}$, et la source est définie par

$$s(x, y, z) = 3\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z), \quad \forall (x, y, z) \in]0, 1[^3,$$

de sorte que

$$u_{\text{exact}}(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z), \quad \forall (x, y, z) \in]0, 1[^3.$$

Les résultats sont donnés dans le plan de coupe orthogonal à l'interface séparant les sous-domaines (Figure 7.5) et sont illustrés dans la Figure 7.6. On observe que le schéma couplé formulé avec les opérateurs de transmission proposés dans la section précédente est bien stable (Proposition 7.3.1). Cependant, par rapport aux solutions obtenues avec les schémas pris séparément sur tout le domaine de calcul (voir Figure 7.6b pour le schéma Vb seul, et Figure 7.6c pour le schéma Cb seul), la solution numérique associée au problème couplé semble présenter un défaut au niveau de l'interface (voir Figure 7.6a). Cela peut être dû au problème de consistance souligné précédemment.

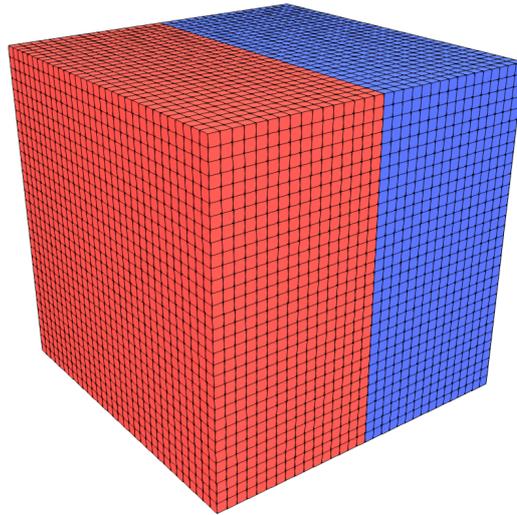
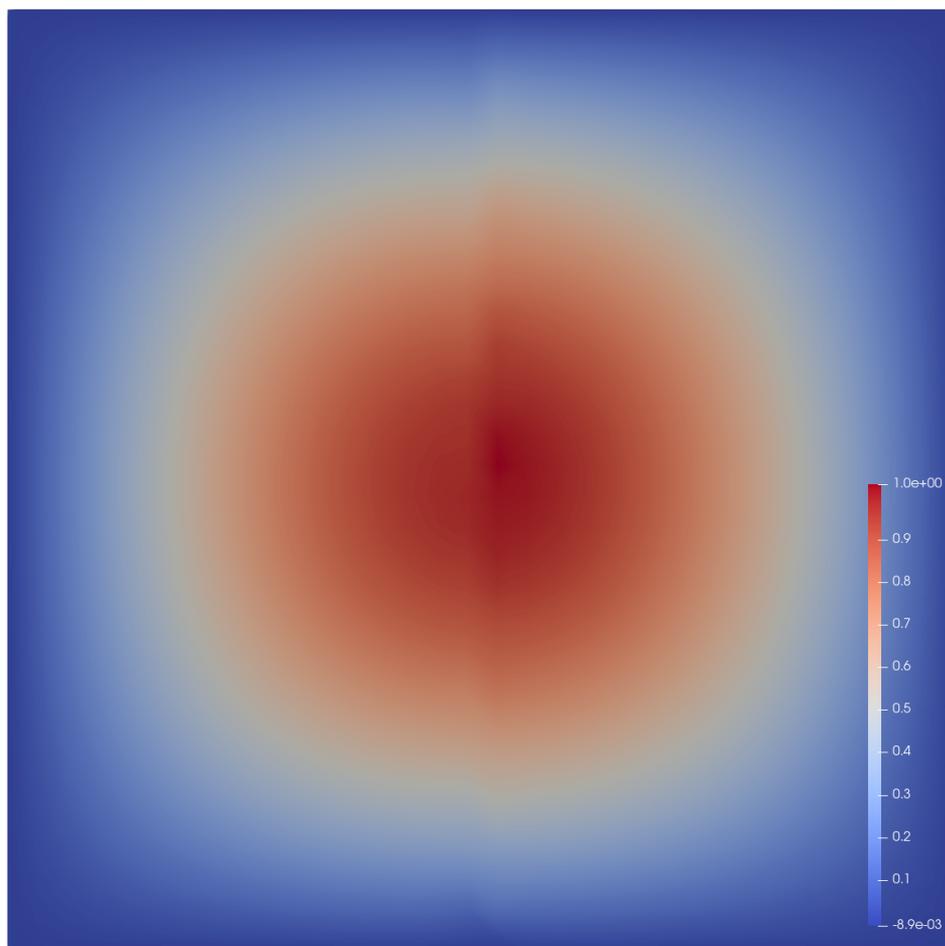


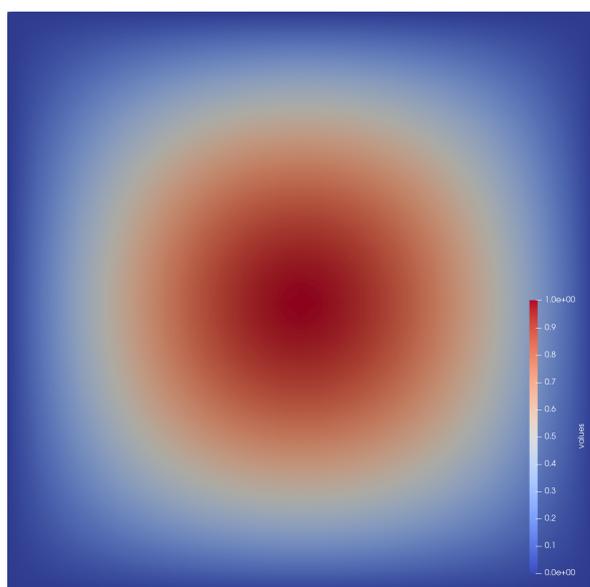
FIGURE 7.5 – Maillage $32 \times 32 \times 32$ du cube unité partitionné en deux sous-domaines.

Conclusion partielle

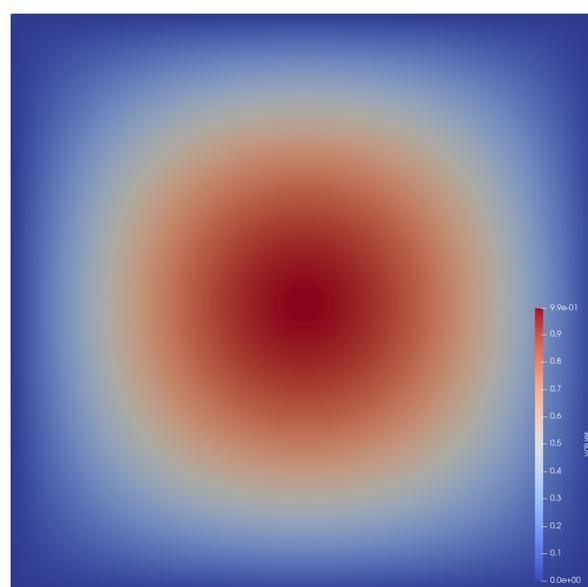
Dans ce chapitre, on a étudié un couplage de schémas numériques au moyen d'opérateurs définis sur l'interface. Afin de se focaliser uniquement sur le caractère spatial du couplage, on est sorti du cadre purement Maxwell et on a considéré un modèle stationnaire. Ce modèle a été formulé dans la Section 7.1, puis dans la Section 7.2, on a introduit les notations utilisées ainsi que les opérateurs du cadre CDO utiles à la formulation. Dans la Section 7.3, on a défini les opérateurs d'interface afin de formuler le problème discret avec couplage, puis on a mené l'analyse de celui-ci en terme de stabilité et de consistance. Enfin, dans la Section 7.4 on a proposé une application numérique du schéma couplé.



(a) Solution numérique associée au schéma avec couplage.



(b) Solution numérique associée au schéma *Vertex-based* seul.



(c) Solution numérique associée au schéma *Cell-based* seul.

FIGURE 7.6

Annexe du Chapitre 7

Preuve de la Proposition 7.3.1. De la définition (7.33) de \mathbb{A} , on déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{A}[(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2)] &= \|\text{GRAD}(\mathbf{u}_1)\|_{\lambda_1}^2 + \|\boldsymbol{\phi}_2\|_{\lambda_2^{-1}}^2 + [\text{DIV}\boldsymbol{\phi}_2, \mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} \\ &\quad + [\boldsymbol{\phi}_2, \widetilde{\text{GRAD}}(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + \mathbb{A}_\Gamma[(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\phi}_2), (\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\phi}_2)]. \end{aligned}$$

La définition (7.26) de \mathbf{N}^* , implique aussi

$$\mathbb{A}_\Gamma[(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\phi}_2), (\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\phi}_2)] = 0, \quad \forall (\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\phi}_2) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{F}_2.$$

La propriété d'adjonction (7.17b) entre les opérateurs $\widetilde{\text{GRAD}}$ et DIV donne

$$\mathbb{A}[(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2)] = \|\text{GRAD}(\mathbf{u}_1)\|_{\lambda_1}^2 + \|\boldsymbol{\phi}_2\|_{\lambda_2^{-1}}^2. \quad (7.40)$$

Il faut maintenant contrôler la norme de \mathbf{u}_2 . En posant

$$\boldsymbol{\psi}_2 = (\mathbb{H}_{\lambda_2^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^\partial) \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_2^\partial = \mathbf{N}^*(\gamma(\mathbf{u}_1)), \quad (7.41)$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{A}[(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\psi}_2)] &= \|\text{GRAD}(\mathbf{u}_1)\|_{\lambda_1}^2 + [\text{DIV}\boldsymbol{\phi}_2, \mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} + [\boldsymbol{\psi}_2, \mathbb{H}_{\lambda_2^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{\phi}_2]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + [\boldsymbol{\psi}_2, \widetilde{\text{GRAD}}(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \\ &\quad + [\gamma(\mathbf{u}_1), \mathbf{N}(\gamma(\boldsymbol{\phi}_2))]_{\mathcal{V}_\Gamma \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} - [\gamma(\boldsymbol{\psi}_2), \mathbf{N}^*(\gamma(\mathbf{u}_1))]_{\mathcal{F}_\Gamma \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}. \end{aligned}$$

De la symétrie de $\mathbb{H}_{\lambda_2^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}$ et de la définition (7.41) de $\boldsymbol{\psi}_2$, on déduit

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\psi}_2, \mathbb{H}_{\lambda_2^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{\phi}_2]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} &= [\boldsymbol{\phi}_2, \widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^\partial)]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \\ &= [\boldsymbol{\phi}_2, \widetilde{\text{GRAD}}(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} - [\gamma(\boldsymbol{\phi}_2), \mathbf{N}^*\gamma(\mathbf{u}_1)]_{(\mathcal{F}\tilde{\mathcal{V}})^\partial}, \end{aligned}$$

d'où

$$[\text{DIV}\boldsymbol{\phi}_2, \mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} + [\boldsymbol{\psi}_2, \mathbb{H}_{\lambda_2^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}\boldsymbol{\phi}_2]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + [\gamma(\mathbf{u}_1), \mathbf{N}(\gamma(\boldsymbol{\phi}_2))]_{\mathcal{V}_\Gamma \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} = 0.$$

En remplaçant dans \mathbb{A} , on obtient

$$\mathbb{A}[(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\psi}_2)] = \|\text{GRAD}(\mathbf{u}_1)\|_{\lambda_1}^2 + [\boldsymbol{\psi}_2, \widetilde{\text{GRAD}}(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} - [\gamma(\boldsymbol{\psi}_2), \mathbf{N}^*(\gamma(\mathbf{u}_1))]_{\mathcal{F}_\Gamma \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}.$$

Enfin, en utilisant la définition (7.41) de \mathbf{u}_2^∂ et la définition (7.18b) de $\widetilde{\text{GRAD}}^\sharp$, il vient

$$\mathbb{A}[(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\psi}_2)] = \|\text{GRAD}(\mathbf{u}_1)\|_{\lambda_1}^2 + \|\widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^\partial)\|_{\lambda_2}^2. \quad (7.42)$$

En combinant les identités (7.40) et (7.42) on obtient

$$\mathbb{A}[(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2), (2\mathbf{u}_1, 2\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2 + \boldsymbol{\psi}_2)] = 2\|\text{GRAD}(\mathbf{u}_1)\|_{\lambda_1}^2 + \|\boldsymbol{\phi}_2\|_{\lambda_2^{-1}}^2 + \|\widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^\partial)\|_{\lambda_2}^2.$$

Du fait que

$$\|(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2)\|^2 \lesssim \mathbb{A}[(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2), (2\mathbf{u}_1, 2\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2 + \boldsymbol{\psi}_2)], \quad (7.43)$$

il reste à borner la norme $\|(2\mathbf{u}_1, 2\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2 + \boldsymbol{\psi}_2)\|$ par $\|(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\phi}_2)\|$. On rappelle que $\boldsymbol{\psi}_2 = (\mathbb{H}_{\lambda_2^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}})^{-1} \widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^\partial)$ avec $\mathbf{u}_2^\partial = \mathbf{N}^*(\gamma(\mathbf{u}_1))$, d'où

$$\|\boldsymbol{\phi}_2 + \boldsymbol{\psi}_2\|_{\lambda_2^{-1}}^2 \lesssim \|\boldsymbol{\phi}_2\|_{\lambda_2^{-1}}^2 + \|\widetilde{\text{GRAD}}^\sharp(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^\partial)\|_{\lambda_2}^2,$$

et donc que

$$\|(2u_1, 2u_2, \phi_2 + \psi_2)\| \lesssim \|(u_1, u_2, \phi_2)\|.$$

Enfin, en combinant cette dernière estimation avec (7.43), il vient

$$\|(u_1, u_2, \phi_2)\| \lesssim \frac{\mathbb{A}[(u_1, u_2, \phi_2), (2u_1, 2u_2, \phi_2 + \psi_2)]}{\|(2u_1, 2u_2, \phi_2 + \psi_2)\|} \leq \sup_{\|(v_1, v_2, \psi_2)\|=1} \mathbb{A}[(u_1, u_2, \phi_2), (v_1, v_2, \psi_2)],$$

ce qui conclut la preuve. \square

Preuve de la Proposition 7.3.2. Tout d'abord on remarque que

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{C}}}(s_1)]_{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}}} = \llbracket \text{GRAD}(\mathbf{v}_1), \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\underline{\lambda}_1 \nabla u_1) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} - \llbracket \gamma(\mathbf{v}_1), \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}\partial}(\underline{\lambda}_1 \nabla u_1) \rrbracket_{\mathcal{V}_\Gamma \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}.$$

L'intégration sur chaque face de l'interface de la condition de transmission sur les flux dans (7.3), combinée avec la relation (7.15), donne

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{C}}}(s_1)]_{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}}} = \llbracket \text{GRAD}(\mathbf{v}_1), \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\underline{\lambda}_1 \nabla u_1) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} + \llbracket \gamma(\mathbf{v}_1), \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}\partial}(\varphi_2) \rrbracket_{\mathcal{V}_\Gamma \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}. \quad (7.44)$$

On remarque aussi que

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{R}_{\mathcal{C}}(s_2), \mathbf{v}_2 \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} &= \llbracket \text{DIV } \mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\varphi_2), \mathbf{v}_2 \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} + \llbracket \psi_2, \widetilde{\text{GRAD}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}}(u_2) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \\ &\quad + \llbracket \psi_2, \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\underline{\lambda}_2^{-1} \varphi_2) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \llbracket \gamma(\psi_2), \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(u_1) \rrbracket_{\mathcal{F}_\Gamma \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

La définition (7.35) et la définition (7.33) de \mathbb{A} impliquent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(u_1, u_2, \varphi_2), (v_1, v_2, \psi_2)] &:= \mathbb{A}_{\text{vb}}[u_1, v_2] + \mathbb{A}_{\text{cb}}[(u_2, \phi_2), (v_2, \psi_2)] + \mathbb{A}_\Gamma[(u_1, \phi_2), (v_1, \psi_2)] \\ &\quad - \llbracket \mathbf{v}_1, \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{C}}}(s_1) \rrbracket_{\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}}} - \llbracket \mathbf{R}_{\mathcal{C}}(s_2), \mathbf{v}_2 \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Ainsi, en combinant les identités (7.44), (7.45) et (7.46), on obtient la décomposition de \mathbb{E} souhaitée. \square

Preuve de la Proposition 7.3.4. On commence par borner le terme \mathbb{E}_{vb} . D'après la définition de \mathbb{E}_{vb} , on a

$$\mathbb{E}_{\text{vb}}[u_1, v_1] := \mathbb{A}_{\text{vb}}[\mathbf{R}_{\mathcal{V}}(u_1), v_1] - \llbracket \text{GRAD}(\mathbf{v}_1), \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\underline{\lambda}_1 \nabla u_1) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}.$$

En rappelant que

$$\mathbb{A}_{\text{vb}}[\mathbf{R}_{\mathcal{V}}(u_1), v_1] = \llbracket \text{GRAD}(\mathbf{v}_1), \mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \text{GRAD}(\mathbf{R}_{\mathcal{V}}(u_1)) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}},$$

et que $\text{GRAD}(\mathbf{R}_{\mathcal{V}}(u_1)) = \mathbf{R}_{\mathcal{E}}(\nabla u_1)$, il vient

$$\mathbb{E}_{\text{vb}}[u_1, v_1] = \llbracket \text{GRAD}(\mathbf{v}_1), \mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}}(\nabla u_1) - \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\underline{\lambda}_1 \nabla u_1) \rrbracket_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\mathbb{E}_{\text{vb}}[u_1, v_1] \leq \|\text{GRAD}(\mathbf{v}_1)\|_{\lambda_1} \|\mathbf{H}_{\lambda_1}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} \mathbf{R}_{\mathcal{E}}(\nabla u_1) - \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\underline{\lambda}_1 \nabla u_1)\|_{\lambda_1^{-1}}. \quad (7.47)$$

On se tourne maintenant vers le terme \mathbb{E}_{cb} . D'après la définition de \mathbb{E}_{cb} on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\text{cb}}[(u_2, \varphi_2), (v_2, \psi_2)] &:= \mathbb{A}_{\text{cb}}[(\mathbf{R}_{\mathcal{V}}(u_2), \mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\varphi_2)), (v_2, \psi_2)] - \llbracket \text{DIV}(\mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\varphi_2)), \mathbf{v}_2 \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} \\ &\quad - \llbracket \psi_2, \widetilde{\text{GRAD}}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}}(u_2)) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} - \llbracket \psi_2, \mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\underline{\lambda}_2^{-1} \varphi_2) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}. \end{aligned}$$

En rappelant que

$$\mathbb{A}_{\text{cb}}[(\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}}(u_2), \mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\varphi_2)), (v_2, \psi_2)] = \llbracket \text{DIV}(\mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\varphi_2)), \mathbf{v}_2 \rrbracket_{\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}}} + \llbracket \psi_2, \mathbf{H}_{\lambda_2}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{R}_{\mathcal{F}}(\varphi_2) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} + \llbracket \psi_2, \widetilde{\text{GRAD}}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathcal{V}}}(u_2)) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}$$

on obtient directement

$$\mathbb{E}_{\text{cb}}[(u_2, \varphi_2), (u_2, \psi_2)] = \llbracket \psi_2, \mathbb{H}_{\lambda_2^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \mathbb{R}_{\mathcal{F}}(\varphi_2) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\lambda_2^{-1} \varphi_2) \rrbracket_{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\mathbb{E}_{\text{cb}}[(u_2, \varphi_2), (v_2, \psi_2)] \leq \|\psi_2\|_{\lambda_2^{-1}} \|\mathbb{H}_{\lambda_2^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \mathbb{R}_{\mathcal{F}}(\varphi_2) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\lambda_2^{-1} \varphi_2)\|_{\lambda_2}. \quad (7.48)$$

Il reste maintenant à borner \mathbb{E}_{Γ} . On commence par utiliser la définition (7.32) de \mathbb{A}_{Γ} :

$$\mathbb{A}_{\Gamma}[(\mathbb{R}_{\mathcal{V}}(u_1), \mathbb{R}_{\mathcal{F}}(\varphi_2)), (v_1, \psi_2)] = +\llbracket \gamma(v_1), \mathbb{N}(\mathbb{R}_{\mathcal{F}_{\Gamma}}(\varphi_2)) \rrbracket_{\mathcal{V}_{\Gamma}\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}} - \llbracket \gamma(\psi_2), \mathbb{N}^*(\mathbb{R}_{\mathcal{V}_{\Gamma}}(u_1)) \rrbracket_{\mathcal{F}_{\Gamma}\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}.$$

Par un calcul direct, on obtient

$$\mathbb{E}_{\Gamma}[(u_1, \varphi_2), (v_1, \psi_2)] = \llbracket \gamma(v_1), \mathbb{N}(\mathbb{R}_{\mathcal{F}_{\Gamma}}(\varphi_2)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}}(\varphi_2) \rrbracket_{\mathcal{V}_{\Gamma}\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}} - \llbracket \gamma(\psi_2), \mathbb{N}^*(\mathbb{R}_{\mathcal{V}_{\Gamma}}(u_1)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}(u_1) \rrbracket_{\mathcal{F}_{\Gamma}\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\Gamma}[(u_1, \varphi_2), (v_1, \psi_2)] &\leq \|\gamma(v_1)\|_{2, \mathcal{F}_{\Gamma}} \|\mathbb{N}(\mathbb{R}_{\mathcal{F}_{\Gamma}}(\varphi_2)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}}(\varphi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}} \\ &\quad + \|\gamma(\psi_2)\|_{2, \mathcal{V}_{\Gamma}} \|\mathbb{N}^*(\mathbb{R}_{\mathcal{V}_{\Gamma}}(u_1)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}(u_1)\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Les définitions (7.10) des normes sur l'interface donnent

$$\|\gamma(\psi_2)\|_{2, \mathcal{F}_{\Gamma}}^2 = \sum_{f \in \mathcal{F}_{\Gamma}} \frac{1}{|f|} \gamma(\psi_2)_f^2, \quad \text{et} \quad \|\gamma(v_1)\|_{2, \mathcal{V}_{\Gamma}}^2 = \sum_{v \in \mathcal{V}_{\Gamma}} |\tilde{f}^{\partial}(v)| \gamma(v_1)_v^2.$$

La régularité des maillages M_1 et M_2 donne

$$|\tilde{f}^{\partial}(v)| \lesssim h^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{|f|} \lesssim h^{-2}.$$

Ainsi, par définition des normes discrètes volumiques (7.7) et (7.9), il vient

$$\|\gamma(\psi_2)\|_{2, \mathcal{F}_{\Gamma}} \lesssim h^{-\frac{1}{2}} \|\psi_2\|_{2, \mathcal{F}}, \quad \text{et} \quad \|\gamma(v_1)\|_{2, \mathcal{V}_{\Gamma}} \lesssim h^{-\frac{1}{2}} \|v_1\|_{2, \mathcal{V}},$$

d'où (7.49) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\Gamma}[(u_1, \varphi_2), (v_1, \psi_2)] &\leq h^{-\frac{1}{2}} \|v_1\|_{2, \mathcal{V}} \|\mathbb{N}(\mathbb{R}_{\mathcal{F}_{\Gamma}}(\varphi_2)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}}(\varphi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}} \\ &\quad + h^{-\frac{1}{2}} \|\psi_2\|_{2, \mathcal{F}} \|\mathbb{N}^*(\mathbb{R}_{\mathcal{V}_{\Gamma}}(u_1)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}(u_1)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}}. \end{aligned}$$

Enfin la stabilité des opérateurs de Hodge et de l'inégalité de Poincaré discrète (Proposition 7.3.3) permet d'obtenir l'estimation :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\Gamma}[(u_1, \varphi_2), (v_1, \psi_2)] &\leq h^{-\frac{1}{2}} \lambda_{1,b}^{-\frac{1}{2}} \|\text{GRAD}(v_1)\|_{\lambda_1} \|\mathbb{N}(\mathbb{R}_{\mathcal{F}_{\Gamma}}(\varphi_2)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}}(\varphi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}} \\ &\quad + h^{-\frac{1}{2}} \lambda_{2,\sharp}^{\frac{1}{2}} \|\psi_2\|_{\lambda_2^{-1}} \|\mathbb{N}^*(\mathbb{R}_{\mathcal{V}_{\Gamma}}(u_1)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_{\Gamma}}(u_1)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_{\Gamma}}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

La combinaison des estimations (7.47), (7.48) et (7.50) donne l'estimation cherchée par passage au sup. \square

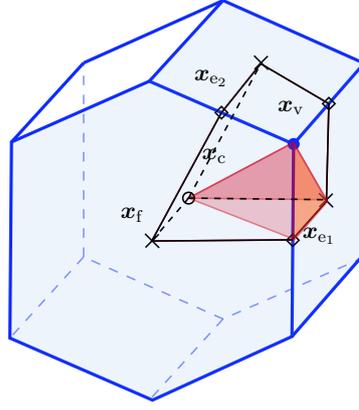


FIGURE 7.7 – Dans une cellule c , exemple de face triangulaire $f \subset f \cap \tilde{f}^\partial(v)$ (en orange) et de tétraèdre $t \subset c$ tel que $f \subset \partial t$.

Preuve de la Proposition 7.3.7. Soit $U_1 \in \mathbb{P}_0(C_1)$ la projection orthogonale L^2 de u_1 sur $\mathbb{P}_0(C_1)$. D'après les propriétés de \mathbb{P}_0 -consistance de \mathbf{N}^* (7.27a), on a

$$\|\mathbf{N}^*(R_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1)) - R_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(u_1)\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma} = \|\mathbf{N}^*(R_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1 - U_1)) - R_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}.$$

La continuité de \mathbf{N}^* combinée avec l'inégalité triangulaire, donne :

$$\|\mathbf{N}^*(R_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1 - U_1)) - R_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma} \lesssim \|R_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \mathcal{V}_\Gamma} + \|R_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}. \quad (7.51)$$

En utilisant la régularité du maillage et en intervertissant les sommes, on obtient

$$\|R_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \mathcal{V}_\Gamma}^2 = \sum_{v \in \mathcal{V}_\Gamma} \sum_{f \in \mathcal{F}_\Gamma \cap \mathcal{V}_v} |f \cap \tilde{f}^\partial(v)| (u_1 - U_1)^2(\mathbf{x}_v) \lesssim \sum_{f \in \mathcal{F}_\Gamma} \sum_{v \in \mathcal{V}_\Gamma \cap \mathcal{V}_f} h_f^2 (u_1 - U_1)^2(\mathbf{x}_v).$$

Pour une face $f \in \mathcal{F}_\Gamma$, on note $c(f) \in C_1$ l'unique cellule telle que $f \subset \partial c(f) \cap \Gamma$. En notant $h_{c(f)}$ le diamètre de $c(f)$, cette dernière inégalité devient

$$\|R_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \mathcal{V}_\Gamma}^2 \lesssim \sum_{f \in \mathcal{F}_\Gamma} \sum_{v \in \mathcal{V}_\Gamma \cap \mathcal{V}_f} h_{c(f)}^2 (u_1 - U_1)^2(\mathbf{x}_v). \quad (7.52)$$

Pour une face $f \in \mathcal{F}_\Gamma$ et un sommet $v \in \mathcal{V}_\Gamma \cap \mathcal{V}_f$, on considère une face triangulaire f contenue dans $f \cap \tilde{f}^\partial(v)$ (voir Figure 7.7). On note alors t le tétraèdre tel que $t \subset c(f)$ et $f \subset \partial t$. L'ensemble de ces tétraèdres forme une partition de $c(f)$ qui est notée $\mathfrak{T}_{c(f)}$. Il vient

$$\|R_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \mathcal{V}_\Gamma}^2 \lesssim \sum_{f \in \mathcal{F}_\Gamma} h_{c(f)}^2 \sum_{t \in \mathfrak{T}_{c(f)}} \|u_1 - U_1\|_{L^\infty(t)}^2. \quad (7.53)$$

D'où

$$\|R_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \mathcal{V}_\Gamma}^2 \lesssim \sum_{c \in C_1} h_c^2 \sum_{t \in \mathfrak{T}_c} \|u_1 - U_1\|_{L^\infty(t)}^2. \quad (7.54)$$

L'injection $H^2(t) \hookrightarrow L^\infty(t)$ combinée avec le passage sur le tétraèdre de référence, donne

$$\|v\|_{L^\infty(t)}^2 \lesssim h_c^{-3} \left(\|v\|_{L^2(t)}^2 + h_c^2 |v|_{H^1(t)}^2 + h_c^4 |v|_{H^2(t)}^2 \right).$$

En observant que

$$|u_1 - U_1|_{H^1(t)}^2 = |u_1|_{H^1(t)}^2 \quad \text{et} \quad |u_1 - U_1|_{H^2(t)}^2 = |u_1|_{H^2(t)}^2,$$

on obtient

$$\|u_1 - U_1\|_{L^\infty(t)}^2 \lesssim h_c^{-3} \left(\|u_1 - U_1\|_{L^2(t)}^2 + h_c^2 |u_1|_{H^1(t)}^2 + h_c^4 |u_1|_{H^2(t)}^2 \right).$$

De plus, en utilisant le fait que $\|u_1 - U_1\|_{L^2(\mathfrak{t})}^2 \lesssim h_c^2 |u_1|_{H^1(\mathfrak{t})}^2$, il vient

$$\|u_1 - U_1\|_{L^\infty(\mathfrak{t})}^2 \lesssim h_c^{-3} \left(h_c^2 |u_1|_{H^1(\mathfrak{t})}^2 + h_c^4 |u_1|_{H^2(\mathfrak{t})}^2 \right).$$

De la combinaison de cette dernière inégalité avec l'estimation (7.52), on en déduit que

$$\|\mathbb{R}_{\mathcal{V}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \mathcal{V}_\Gamma} \lesssim h_1^{\frac{1}{2}} \left(|u_1|_{H^1(C_1)}^2 + h_1^2 |u_1|_{H^2(C_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.55)$$

En ce qui concerne le deuxième terme de (7.51), de la définition de la norme $\|\cdot\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}$ et de la régularité du maillage, il vient

$$\|\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}^2 = \sum_{f \in \mathbb{F}} |f| (u_1 - U_1)^2(\mathbf{x}_{\tilde{\nu}^\partial(f)}) \lesssim \sum_{f \in \mathbb{F}} h_f^2 (u_1 - U_1)^2(\mathbf{x}_{\tilde{\nu}^\partial(f)}). \quad (7.56)$$

En considérant $c(f) \in C_1$ l'unique cellule telle que $f \subset \partial c(f) \cap \Gamma$ ainsi qu'une partition tétraédrique de celle-ci notée $\mathfrak{I}_{c(f)}$ on peut obtenir l'estimation

$$\|\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}^2 \lesssim \sum_{c \in C_1} h_c^2 \sum_{\mathfrak{t} \in \mathfrak{I}_c} \|u_1 - U_1\|_{L^\infty(\mathfrak{t})}^2.$$

Enfin, les mêmes arguments que précédemment permettent d'établir que

$$\|\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{V}}_\Gamma}(u_1 - U_1)\|_{2, \tilde{\mathcal{V}}_\Gamma} \lesssim h_1^{\frac{1}{2}} \left(|u_1|_{H^1(C_1)}^2 + h_1^2 |u_1|_{H^2(C_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.57)$$

La combinaison des estimations (7.51), (7.55) et (7.57) donne (7.36). \square

Preuve de la Proposition 7.3.8. Soit $\Phi_2 \in [\mathbb{P}_0(C_2)]^3$ la projection orthogonale L^2 de φ_2 sur $[\mathbb{P}_0(C_2)]^3$. D'après la propriété de \mathbb{P}_0 -consistance \mathbf{N} (7.27b) :

$$\|\mathbf{N}(\mathbb{R}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\varphi_2)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} = \|\mathbf{N}(\mathbb{R}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}.$$

Ainsi, en utilisant la continuité de \mathbf{N} et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|\mathbf{N}(\mathbb{R}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)) - \mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} \lesssim \|\mathbb{R}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \mathcal{F}_\Gamma} + \|\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}. \quad (7.58)$$

Pour le premier terme du membre de droite, on a l'estimation

$$\|\mathbb{R}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \mathcal{F}_\Gamma}^2 \leq \sum_{f \in \mathbb{F}_\Gamma} \|\varphi_2 - \Phi_2\|_{L^2(f)}^2. \quad (7.59)$$

Pour $f \in \mathbb{F}_\Gamma$, on considère $c(f) \in C_2$ une cellule telle que $f \subset \partial c(f)$. Par une inégalité de trace on a alors

$$\|\varphi_2 - \Phi_2\|_{L^2(f)}^2 \lesssim \|\varphi_2 - \Phi_2\|_{L^2(c(f))} \left(|\varphi_2|_{H^1(c(f))} + 3h_c^{-1} \|\varphi_2 - \Phi_2\|_{L^2(c(f))} \right).$$

De plus, de l'estimation $\|\varphi_2 - \Phi_2\|_{L^2(c(f))} \lesssim h_{c(f)} |\varphi_2|_{H^1(c(f))}$, il vient

$$\|\varphi_2 - \Phi_2\|_{L^2(f)}^2 \lesssim h_{c(f)} |\varphi_2|_{H^1(c(f))}^2.$$

Cette dernière inégalité combinée avec (7.59) donne

$$\|\mathbb{R}_{\mathcal{F}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \mathcal{F}_\Gamma} \lesssim h_2^{\frac{1}{2}} |\varphi_2|_{H^1(C_2)}. \quad (7.60)$$

De sorte à établir une estimation du terme $\|\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}$, on commence par écrire que

$$\|\mathbb{R}_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^2 = \sum_{v \in \mathbb{V}_\Gamma} \frac{1}{|\tilde{f}^\partial(v)|} \left(\sum_{f \in \mathbb{F}_\Gamma \cap \mathbb{F}_v} \int_{f \cap \tilde{f}^\partial(v)} (\varphi_2 - \Phi_2) \cdot \mathbf{n}_{\tilde{f}^\partial(v)} \right)^2$$

En utilisant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left(\sum_{f \in F_\Gamma \cap F_v} \int_{f \cap \tilde{f}^\partial(v)} (\varphi_2 - \Phi_2) \cdot \mathbf{n}_{\tilde{f}^\partial(v)} \right)^2 \leq \left(\sum_{f \in F_\Gamma \cap F_v} |f \cap \tilde{f}^\partial(v)| \right) \left(\sum_{f \in F_\Gamma \cap F_v} \|\varphi_2 - \Phi_2\|_{L^2(f \cap \tilde{f}^\partial(v))}^2 \right),$$

d'où

$$\|R_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^2 \leq \sum_{v \in V_\Gamma} \sum_{f \in F_\Gamma \cap F_v} \|\varphi_2 - \Phi_2\|_{L^2(f \cap \tilde{f}^\partial(v))}^2.$$

L'interversion des sommes dans l'inégalité précédente donne

$$\|R_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}^2 \leq \sum_{f \in F_\Gamma} \|\varphi_2 - \Phi_2\|_{L^2(f)}^2,$$

ainsi le même raisonnement que précédemment permet d'établir que

$$\|R_{\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma}(\varphi_2 - \Phi_2)\|_{2, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma} \lesssim h_2^{\frac{1}{2}} |\varphi_2|_{H^1(C_2)}. \quad (7.61)$$

La combinaison des estimations (7.58), (7.60) et (7.61) donne (7.37). \square

Vers des schémas CDO d'ordre élevé

Sommaire

8.1	Modèles continus 3D et 1D	131
8.2	Principes de construction	132
8.2.1	Principe	132
8.2.2	Maillages	133
8.2.3	Opérateurs topologiques	133
8.2.4	Opérateurs de Hodge d'ordre élevé	134
8.2.5	Problème discret	135
8.3	Etude en 1D	136
8.4	Perspectives	137
8.4.1	Un schéma sans inversion	137
8.4.2	Analyse numérique	139

Comme les schémas de Yee et Volumes Finis, le schéma CDO est un schéma d'ordre bas et donc sujet aux erreurs de dispersion et de dissipation. Une manière de limiter ces erreurs est de considérer une métrique d'ordre élevé. L'objectif de ce chapitre est de donner des éléments de perspectives sur la construction d'une métrique d'ordre élevé dans le schéma CDO. Pour cela, la Section 8.1 formule les problèmes continus 1D et 3D considérés. Ensuite, dans le but de formuler un schéma CDO d'ordre élevé appliqué aux équations de Maxwell, la Section 8.2 propose de formaliser la montée en ordre sur maillage cartésien pour le schéma CDO en s'inspirant des idées de Gerritsma (2012). Après cela, la Section 8.3 étudie cette formulation sur le problème 1D, et compare de manière qualitative les solutions obtenues avec les schémas *Discontinuous Galerkin* (DG) et *Spectral Difference* (SD). Enfin, la Section 8.4 discute de la possibilité d'éviter l'inversion de la matrice de Hodge $H_{\varepsilon}^{\mathcal{F}}$ à l'ordre élevé sur maillage cartésien, puis des propriétés de consistance des opérateurs de Hodge discrets par rapport au choix des fonctions de forme.

8.1 Modèles continus 3D et 1D

L'objectif de cette section est de formuler les problèmes continus 3D et 1D considérés dans ce chapitre. Ce sont des problèmes de cavité dans un domaine cubique.

Problème 3D. Soit Ω un domaine cubique de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$ dont la normale sortante est notée \mathbf{n} . Soit $t_F > 0$ un temps fini. Le problème considéré est : trouver $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}$:

$\Omega \times [0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (8.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad (8.1b)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (8.1c)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (8.1d)$$

dans $\Omega \times [0, t_F]$. Sur la frontière, la condition suivante est imposée :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, t_F], \quad (8.2)$$

et les conditions initiales sont :

$$\mathbf{E}(\cdot, t = 0) = \mathbf{E}_0 \text{ et } \mathbf{H}(\cdot, t = 0) = \mathbf{H}_0,$$

avec $\mathbf{E}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{H}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux champs donnés.

Problème 1D. En 1D, on formule le problème (8.1) sur le segment ouvert $\Omega =]a, b[$, avec $a < b$. Les champs sont supposés dirigés dans la direction x , c'est-à-dire que le problème est de trouver $B, E, H, D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \partial_x E, \quad (8.3a)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \partial_x H, \quad (8.3b)$$

$$D = \varepsilon E, \quad (8.3c)$$

$$B = \mu H, \quad (8.3d)$$

dans $\Omega \times [0, t_F]$. Aux limites du domaine on pose :

$$E(a, t) = E(b, t) = 0, \quad \forall t \in [0, t_F], \quad (8.4)$$

et les conditions initiales sont :

$$E(\cdot, t = 0) = E_0 \text{ et } H(\cdot, t = 0) = H_0,$$

avec $E_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $H_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux champs donnés.

La section suivante s'attache à définir le cadre discret pour formuler un schéma CDO avec une métrique d'ordre élevé associé aux problèmes 1D et 3D.

8.2 Principes de construction

8.2.1 Principe

La construction d'un schéma CDO d'ordre élevé pour les équations de Maxwell, suit les grandes lignes de celle à l'ordre bas : on discrétise d'une part les relations topologiques, et d'autre part, les relations constitutives. De sorte à augmenter le nombre de degrés de liberté (ddl) tout en préservant la notion de dualité entre les entités géométriques, l'idée est de sous-mailler localement les cellules. En procédant ainsi, le caractère circulatif des équations est préservé et les nouveaux ddl locaux permettent l'utilisation de fonctions de forme locales de degré plus élevé.

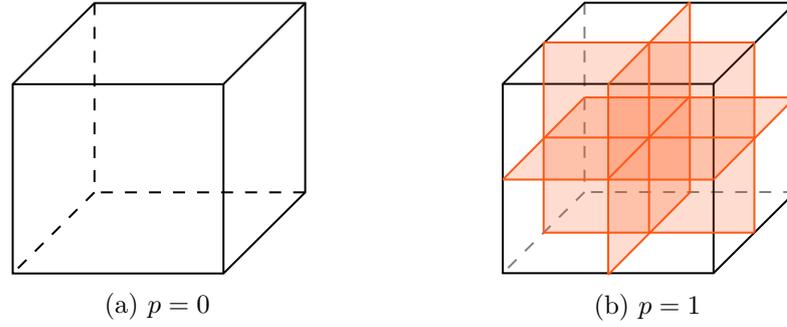


FIGURE 8.1 – Exemple de cellules spectrales : (a) si $p = 0$ alors le maillage est inchangé et $C_0 = C$, (b) si $p = 1$ alors la cellule c est partitionnée en 8 cellules spectrales.

8.2.2 Maillages

Maillage 3D. En suivant les notations du Chapitre 2, on note $M := \{V, E, F, C\}$ le maillage physique cartésien approchant Ω . C'est le maillage initial donné par l'utilisateur et construit par le logiciel de maillage. Soit $p \in \mathbb{N}$ le degré polynomial d'approximation, et soit $M_p := \{V_p, E_p, F_p, C_p\}$ un sous-maillage cubique d'ordre p de M qui partitionne chaque cellule $c \in C$ en $(p+1)^3$ cellules. Ce maillage est appelé *maillage spectral* et toutes ses entités sont qualifiées de *spectrale*. Comme dans la construction à l'ordre bas, les entités spectrales sont orientées : les arêtes par leur vecteur directeur, et les faces par leur vecteur normal. Par définition, si $p = 0$ alors $M_0 = M$, et si $p > 0$ alors $C_p \subset C$ et pour tout $c \in C$

$$c = \bigcup_{i \in [0, p]} c_{p,i}.$$

Dans la construction du schéma, on considère $\widetilde{M}_p := \{\widetilde{V}_p, \widetilde{E}_p, \widetilde{F}_p, \widetilde{C}_p\}$ le maillage dual associé à M_p . En ce sens, la dualité est *d'ordre élevé* et à un choix de sous-maillage correspond un maillage dual. Un exemple de découpage uniforme est donné dans la Figure 8.1. Dans la suite, les sommets du maillage primal sont choisis comme les points de Gauss-Lobatto et les sommets du maillage dual sont pris comme les racines du p -ième polynôme de Legendre. Ce choix correspond à celui de Bouman *et al.* (2010).

Maillage 1D. En 1D, le maillage $M = \{V, C\}$ est composé de cellules (de dimension 1) et de sommets et le maillage spectral d'ordre p est $M_p := \{V_p, C_p\}$. Les cellules spectrales, partitionnent chaque cellule c (voir Figure 8.2), ainsi pour $0 \leq i \leq p$, en notant $c_{p,i}$ la i -ième cellule spectrale locale, on a

$$c = \bigcup_{i \in [0, p]} c_{p,i}.$$

Le maillage dual associé est noté $\widetilde{M}_p := \{\widetilde{V}_p, \widetilde{C}_p\}$. Pour une cellule c , on a donc les ensembles V_p^c et C_p^c qui contiennent les sommets spectraux locaux et les cellules spectrales locales.

8.2.3 Opérateurs topologiques

D'un point de vue topologique, suite à *l'enrichissement* du maillage, la seule différence par rapport à l'ordre bas est que les applications de réduction et les opérateurs différentiels discrets sont définis sur le maillage spectral. De sorte à garder la présentation concise, les applications de réduction et les opérateurs différentiels discrets sont définis dans le cadre 1D.

Réduction. Les espaces de degré de liberté locaux à une cellule c , associés au maillage spectral M_p , sont notés \mathcal{V}_p^c , \mathcal{C}_p^c , $\widetilde{\mathcal{V}}_p^c$ et $\widetilde{\mathcal{C}}_p^c$. Pour une cellule $c \in C$, les applications de réduction locales

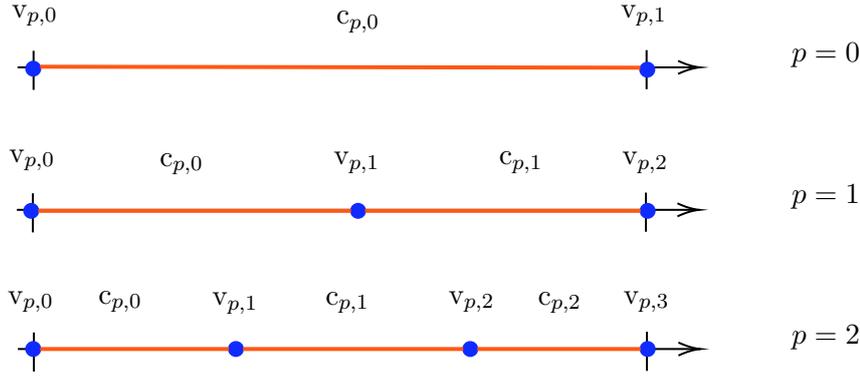


FIGURE 8.2 – Exemple de sous-maillages spectraux 1D, défini par un découpage uniforme, pour $p = 0$, $p = 1$ et $p = 2$.

sur les sommets spectraux locaux $R_{\mathcal{V}_p}^c : \mathcal{S}_{\mathcal{V}_p}(c) \rightarrow \mathcal{V}_p^c$ et $R_{\tilde{\mathcal{V}}_p}^c : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}_p}(c) \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_p^c$ sont respectivement définies, pour tout $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}_p}(c)$ et tout $v \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{V}}_p}(c)$, par

$$R_{\mathcal{V}_p}^c(u)|_v := u(x_v), \quad \forall v \in \mathcal{V}_p^c \quad \text{et} \quad R_{\tilde{\mathcal{V}}_p}^c(v)|_{\tilde{v}(c_p)} := v(x_{\tilde{v}(c_p)}), \quad \forall c_p \in \mathcal{C}_p^c.$$

Quant aux applications de réduction locales sur les cellules spectrales primales et duales $R_{\mathcal{C}_p}^c : \mathcal{S}_{\mathcal{C}_p}(c) \rightarrow \mathcal{C}_p^c$ et $R_{\tilde{\mathcal{C}}_p}^c : \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{C}}_p}(c) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_p^c$, elles sont respectivement définies, pour tout $v \in \mathcal{S}_{\mathcal{C}_p}(c)$ et tout $w \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathcal{C}}_p}(c)$, par

$$R_{\mathcal{C}_p}^c(v)|_{c_p} := \int_{c_p} v, \quad \forall c_p \in \mathcal{C}_p^c, \quad \text{et} \quad R_{\tilde{\mathcal{C}}_p}^c(w)|_{\tilde{c}(v)} := \int_{\tilde{c}(v)} w, \quad \forall v \in \mathcal{V}_p^c,$$

avec $\tilde{c}(v_p)$ la cellule spectrale duale associée au sommet spectral v_p .

Opérateurs différentiels discrets. La seule différence avec l'ordre bas est que les opérateurs différentiels discrets sont définis sur le maillage spectral. Ainsi, on définit l'opérateur de rotationnel discret 1D $\text{ROT} : \mathcal{V}_p \rightarrow \mathcal{C}_p$ pour tout $u \in \mathcal{V}_p$ par

$$\text{ROT}(u)|_{c_p} := \sum_{v \in \mathcal{V}_p} \iota_{v,c_p} u_v, \quad \forall c_p \in \mathcal{C}_p.$$

Dans le cadre de conditions homogènes, seule la définition du rotationnel dual suffit. Le rotationnel dual 1D $\widetilde{\text{ROT}} : \tilde{\mathcal{V}}_p \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_p$ est défini pour tout $u \in \tilde{\mathcal{V}}_p$ par

$$\llbracket v, \widetilde{\text{ROT}}(u) \rrbracket_{(\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}})^p} := -\llbracket \text{ROT}(v), u \rrbracket_{(\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}})^p},$$

avec les crochets de dualité

$$\llbracket u, w \rrbracket_{(\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}})^p} := \sum_{v_p \in \mathcal{V}_p} u_{v_p} w_{\tilde{c}(v_p)}, \quad \forall (u, w) \in \mathcal{V}_p \times \tilde{\mathcal{C}}_p, \quad \text{et} \quad \llbracket u, w \rrbracket_{(\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}})^p} := \sum_{c_p \in \mathcal{C}_p} u_{c_p} w_{\tilde{v}(c_p)}, \quad \forall (u, w) \in \mathcal{C}_p \times \tilde{\mathcal{V}}_p.$$

8.2.4 Opérateurs de Hodge d'ordre élevé

Définition formelle. A l'ordre élevé, les opérateurs de Hodge discrets sont définis à partir des opérateurs de Hodge locaux $H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p} : \mathcal{V}_p^c \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_p^c$ et $H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C}_c \tilde{\mathcal{V}}_c)^p} : \mathcal{C}_p^c \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_p^c$ définis sur chaque cellule. Ainsi, dès lors que $p > 0$, ils ont accès à plus de degrés de liberté locaux pour définir la métrique. Les opérateurs de Hodge à l'ordre élevé vérifient les propriétés suivantes :

(H0c) $H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p}$ et $H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C}_c \tilde{\mathcal{V}}_c)^p}$ sont symétriques,

(H1c) Définis positifs,

(H2cp) \mathbb{P}_p -consistants : dans toute cellule c et pour tout champ polynomial $Q \in \mathbb{P}_p(c)$

$$H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p} R_{\mathcal{V}_p^c}^\varepsilon(Q) - R_{\tilde{\mathcal{C}}_p^c}^\varepsilon(Q) = 0, \quad \text{et} \quad H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C}_c \tilde{\mathcal{V}}_c)^p} R_{\mathcal{C}_p^c}^\mu(Q) - R_{\tilde{\mathcal{V}}_p^c}^\mu(Q) = 0.$$

Les propriétés **(H0c)** et **(H1c)** sont les mêmes que pour les opérateurs de Hodge à l'ordre bas définis au Chapitre 4. Ces deux hypothèses sont nécessaires pour que les opérateurs de Hodge définissent une métrique discrète. Enfin la propriété **(H2cp)** généralise la propriété **(H2c)** au sens que, lorsque $p = 0$, elle est équivalente à la propriété **(H2c)**. Les opérateurs de Hodge globaux $H_\varepsilon^{(\mathcal{V} \tilde{\mathcal{C}})^p} : \mathcal{V}_p \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_p$ et $H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C} \tilde{\mathcal{V}})^p} : \mathcal{C}_p \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_p$ sont alors définis par

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{g}, H_\varepsilon^{(\mathcal{V} \tilde{\mathcal{C}})^p} \boldsymbol{\psi} \rrbracket_{(\mathcal{V} \tilde{\mathcal{C}})^p} &:= \sum_{c_p \in \mathcal{C}_p} \llbracket \mathbf{g}, H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p} \boldsymbol{\psi} \rrbracket_{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p}, \quad \forall \mathbf{g}, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{V}_p, \\ \llbracket \boldsymbol{\phi}, H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C} \tilde{\mathcal{V}})^p} \boldsymbol{\psi} \rrbracket_{(\mathcal{C} \tilde{\mathcal{V}})^p} &:= \sum_{c_p \in \mathcal{C}_p} \llbracket \boldsymbol{\phi}, H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C}_c \tilde{\mathcal{V}}_c)^p} \boldsymbol{\psi} \rrbracket_{(\mathcal{C}_c \tilde{\mathcal{V}}_c)^p}, \quad \forall \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}_p, \end{aligned}$$

avec les crochets de dualité locaux définis sur chaque cellule $c \in \mathcal{C}$

$$\llbracket \mathbf{u}, \mathbf{w} \rrbracket_{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p} := \sum_{v_p \in \mathcal{V}_p^c} \mathbf{u}_{v_p} \mathbf{w}_{\tilde{c}_c(v_p)}, \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathcal{V}_p^c \times \tilde{\mathcal{C}}_p^c, \quad \text{et} \quad \llbracket \mathbf{u}, \mathbf{w} \rrbracket_{(\mathcal{C}_c \tilde{\mathcal{V}}_c)^p} := \sum_{c_p \in \mathcal{C}_p^c} \mathbf{u}_{c_p} \mathbf{w}_{\tilde{v}_c(c_p)}, \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathcal{C}_p^c \times \tilde{\mathcal{V}}_p^c.$$

Construction pratique. Dans la suite, les opérateurs de Hodge locaux $H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p}$ et $H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C}_c \tilde{\mathcal{V}}_c)^p}$ sont construits cellule par cellule comme des matrices de masse. Ainsi pour tout $c \in \mathcal{C}$

$$(H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p})_{v_{p,1}, v_{p,2}} := \int_c \ell_{v_{p,1}}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon \ell_{v_{p,2}}(\mathbf{x}), \quad \forall v_{p,1}, v_{p,2} \in \mathcal{V}_p^c, \quad (8.5a)$$

$$(H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C}_c \tilde{\mathcal{V}}_c)^p})_{c_{p,1}, c_{p,2}} := \int_c \ell_{c_{p,1}}(\mathbf{x}) \cdot \mu^{-1} \ell_{c_{p,2}}(\mathbf{x}), \quad \forall c_{p,1}, c_{p,2} \in \mathcal{C}_p^c, \quad (8.5b)$$

avec $\{\ell_{v_p}\}_{v_p \in \mathcal{V}_p^c}$ et $\{\ell_{c_p}\}_{c_p \in \mathcal{C}_p^c}$ deux ensembles de fonctions de forme locales. Dans la suite, les premières sont choisies comme les polynômes de Lagrange sur les sommets spectraux locaux :

$$\ell_{v_{p,i}}(x_{v_{p,j}}) = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j \in \llbracket 0, p+1 \rrbracket,$$

et les secondes comme les fonctions de forme associées aux cellules spectrales introduites par Gerritsma (2011). Elles sont définies, pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, par

$$\ell_{c_{p,i}} := - \sum_{k=1}^i \ell'_{v_{p,k}} \quad \text{tel que} \quad \int_{c_{p,j}} \ell_{c_{p,i}} = \delta_{i,j}, \quad \forall i, j \in \llbracket 0, p \rrbracket.$$

8.2.5 Problème discret

Le problème discret associé au problème 1D (8.3) est : étant donné (E^0, H^0) , initialiser

$$D^0 = \frac{2}{\Delta t} H_\varepsilon^{(\mathcal{V} \tilde{\mathcal{C}})^p} E^0, \quad B^0 = \frac{2}{\Delta t} (H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C} \tilde{\mathcal{V}})^p})^{-1} H^0, \quad (8.6)$$

puis calculer

$$B^{n+\frac{1}{2}} - B^{n-\frac{1}{2}} = \text{ROT}(E^n), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (8.7a)$$

$$H^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C} \tilde{\mathcal{V}})^p} B^{n+\frac{1}{2}}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (8.7b)$$

$$D^{n+1} - D^n = \widetilde{\text{ROT}}(H^{n+\frac{1}{2}}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (8.7c)$$

$$E^{n+1} = \Delta t (H_\varepsilon^{(\mathcal{V} \tilde{\mathcal{C}})^p})^{-1} D^{n+1}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket, \quad (8.7d)$$

avec la notation $B^{-\frac{1}{2}} = B^0$. Enfin E^N , B^N et H^N sont obtenus par :

$$E^N = \frac{\Delta t}{2} (H_\varepsilon^{(\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}})^p})^{-1} D^N, \quad B^N = B^{N-\frac{1}{2}} + \text{ROT}(E^N), \quad H^N = \frac{\Delta t}{2} H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}})^p} B^N. \quad (8.8)$$

Avec au bord, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$E_{v_p,1}^n = E_{v_p,N}^n = 0, \quad (8.9)$$

où $v_{p,1}$ et $v_{p,2}$ tels que $x_{v_{p,1}} = a$ et $x_{v_{p,2}} = b$.

Remarque 8.2.1 (Lien avec les Différences Finies). Pour $p = 0$, en prenant les opérateurs de Hodge diagonaux comme suit :

$$(H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C}\tilde{\mathcal{V}})^p})_{c_p, c_p} = \frac{1}{\mu \Delta x} \quad \text{et} \quad (H_\varepsilon^{(\mathcal{V}\tilde{\mathcal{C}})^p})_{v_p, v_p} = \varepsilon \Delta x,$$

on retrouve le schéma Différences Finies 1D.

Remarque 8.2.2 (Cas 3D). Pour obtenir une formulation 3D du schéma (8.7) sur maillage cartésien, les opérateurs de Hodge

$$H_\varepsilon^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}} : \mathcal{V}_p \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_p \quad \text{et} \quad H_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} : \mathcal{E}_p \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_p$$

doivent être définis à partir de matrices de masse locales utilisant les arêtes et les faces spectrales pour définir une métrique d'ordre élevé. Quant aux opérateurs différentiels discrets GRAD, ROT et DIV, ils doivent être définis à partir de l'orientation du maillage spectral. Ainsi la structure de la formulation discrète (8.7) ne change pas et les propriétés de conservation des Propositions 5.2.1 et 5.2.2 sont toujours vérifiées.

8.3 Etude en 1D

L'objectif de cette section est de comparer différentes méthodes numériques d'ordre élevé en 1D : *Compatible Discrete Operator* (CDO), *Spectral Difference* (SD) et *Discontinuous Galerkin* (DG). Les méthodes SD et DG sont choisies avec flux centrés (voir Annexe B pour les SD). Pour p un degré polynomial donné, le découpage des cellules primales utilise des points de Gauss-Lobatto et les sommets du maillage dual sont définis comme les racines du p -ième polynôme de Legendre. La comparaison est faite qualitativement en terme de dispersion. On compare également pour le même pas de temps, les temps CPU sur les itérations des trois méthodes.

Données. Le domaine de calcul est $\Omega =]0, 1[$ et les conditions initiales imposées sont choisies telles que

$$E(x, t = 0) = \sin(2\pi x) \quad \text{et} \quad H(x, t = 0) = 0,$$

de sorte que la solution exacte soit donnée, pour tout $(x, t) \in]0, 1[\times]0, t_F]$, par

$$E_{\text{exact}}(x, t) = \sin(2\pi x) \cos(2\omega t) \quad \text{et} \quad H_{\text{exact}}(x, t) = \frac{\pi}{\mu\omega} \cos(2\pi x) \sin(2\omega t),$$

avec $\omega = \pi c_0$ la pulsation, $c_0 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{\frac{1}{2}}$ la vitesse de la lumière et $t_F = 10^{-6} s$. Dans les simulations le degré polynomial est pris tel que $p \in \{1, 2, 3\}$, et pour les trois méthodes, le pas de temps est fixé à :

$$\Delta t = \text{cfl} \frac{\Delta x}{c_0(p+1)}, \quad (8.10)$$

avec $\text{cfl} = 0.1$ et $\Delta x = 0.01$. Les solutions numériques pour le champ électrique sont comparées avec la solution analytique au point $x = 0.25$. Ces comparaisons sont données dans la Figure 8.3 pour $p \in \{1, 2\}$. Les solutions sont présentées sur l'intervalle $[9.9 \cdot 10^{-7}, 1 \cdot 10^{-6}]$, de sorte à observer le phénomène de dispersion à la fin du calcul. Pour $p \in \{1, 2, 3\}$, la Table 8.1 compare les temps CPU à nombre d'itérations égal. .

TABLE 8.1 – Temps CPU en secondes (s) des méthodes CDO, SD et DG pour différents degrés polynomiaux.

	CDO	SD	DG
p=1	12s	21s	25s
p=2	72s	30s	30s
p=3	244s	39	94s

Observations. Sur la Figure 8.3, pour $p = 1$, on observe que la solution CDO semble avoir l'erreur de dispersion la plus élevée, tandis que la solution SD ne semble pas présenter de dispersion, et que la solution DG se positionne entre les deux. Le fait que la solution CDO disperse plus pour $p = 1$ est dû au fait que les fonctions de bases sur les cellules sont de degrés $p - 1 = 0$. Pour $p > 1$, les solutions ne présentent plus de dispersion. En terme de temps calcul, la solution CDO semble être la plus coûteuse et la solution SD la plus rapide.

8.4 Perspectives

L'objectif de cette section est de donner quelques perspectives autour du schéma CDO d'ordre élevé présenté ci-dessus. On commence par discuter de la possibilité d'éviter l'inversion de la matrice dans (8.7d). Ensuite, du point de vue de l'analyse numérique, on discute des propriétés géométriques des fonctions de base pour que les opérateurs de Hodge discrets d'ordre élevé vérifient une propriété de consistance.

8.4.1 Un schéma sans inversion

Le principal désavantage dans le schéma CDO est l'inversion de la matrice de Hodge, par exemple dans (8.7d). Cela est dû au fait que l'opérateur de Hodge est construit comme transformant les variables sur le maillage primal en variables sur le maillage dual. Ainsi en construisant l'opérateur $H_\varepsilon^{(\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{V})^p} : \tilde{\mathcal{C}}_p \rightarrow \mathcal{V}_p$, l'équation (8.7d) se réécrit

$$\mathbf{E}^{n+1} = \Delta t H_\varepsilon^{(\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{V})^p} \mathbf{D}^{n+1}.$$

Pour construire cet opérateur de Hodge, il faut alors considérer des fonctions de forme sur le maillage dual. Pour un maillage quelconque, les fonctions de base sur le maillage dual peuvent être difficiles à définir car les faces et les arêtes peuvent être brisées. Cependant ce n'est pas le cas sur un maillage cartésien, puisque le maillage dual peut être défini comme parallélépipédique, donc les mêmes fonctions de forme que précédemment peuvent être utilisées pour construire l'opérateur $H_\varepsilon^{(\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{V})^p}$. Ainsi dans le cas 1D, la matrice de masse peut être construite à partir des matrices de masse locales définies sur chaque cellule duale $\tilde{c}(v)$:

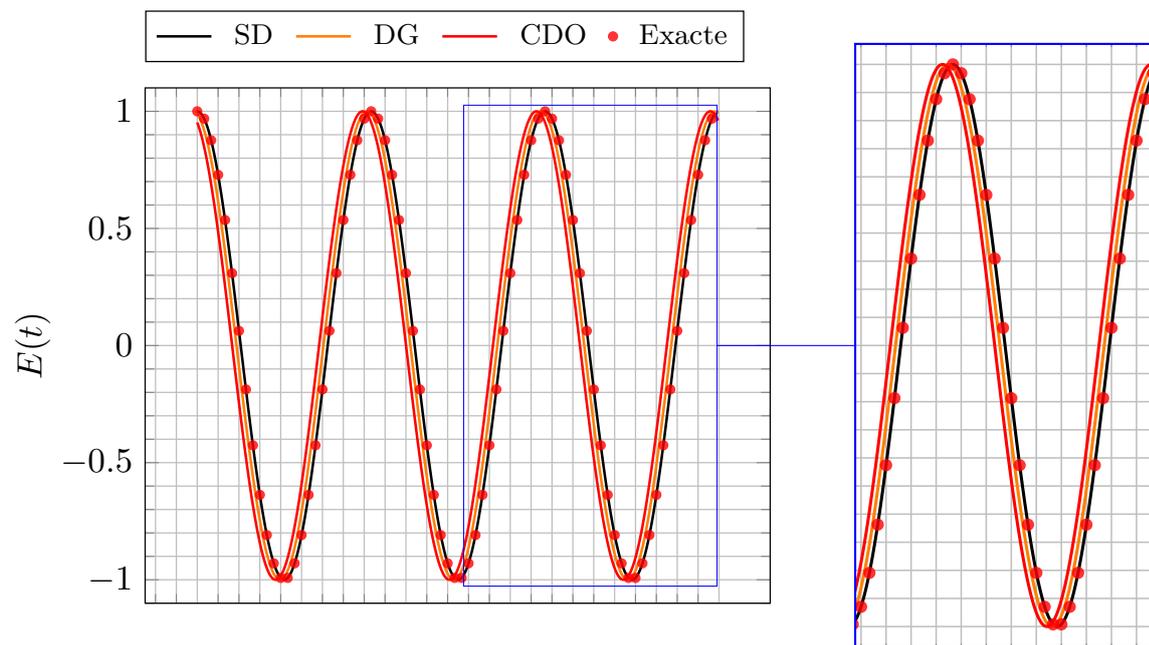
$$(H_\varepsilon^{(\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{V})^p})_{\tilde{c}(v_{p,1}), \tilde{c}(v_{p,2})} := \int_{\tilde{c}} \ell_{\tilde{c}(v_{p,1})}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon \ell_{\tilde{c}(v_{p,2})}(\mathbf{x}), \quad \forall v_{p,1}, v_{p,2} \in \mathcal{V}_p^c,$$

avec les fonctions de base choisies telles que

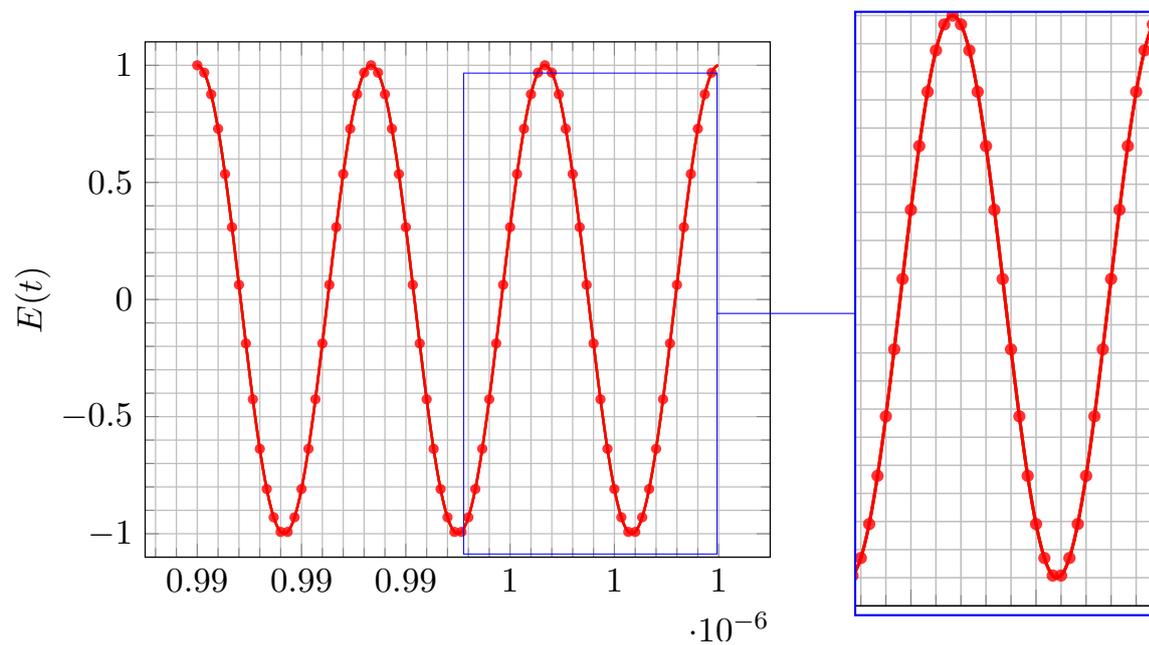
$$\ell_{\tilde{c}(v_p), i} := - \sum_{k=0}^i \ell'_{\tilde{v}(c_p), k}. \quad (8.11)$$

Elles vérifient

$$\int_{\tilde{c}(v_p, i)} \ell_{\tilde{c}(v_p), i} = \delta_{i, j}. \quad (8.12)$$



(a) $p = 1$



(b) $p = 2$

FIGURE 8.3

8.4.2 Analyse numérique

Comme dans le Chapitre 4, on formule un ensemble de propriétés suffisantes sur les fonctions de forme locales pour que les propriétés **(H0c)**, **(H1c)** et **(H2cp)** soient vérifiées. Pour cela, on commence par définir les opérateurs de reconstruction locaux dans chaque $c \in C$:

$$\mathbf{L}_{\mathcal{C}_p^c} : \mathcal{C}_p^c \rightarrow \mathbb{P}_p(c) \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{\mathcal{V}_p^c} : \mathcal{V}_p^c \rightarrow \mathbb{P}_{p+1}(c),$$

tels que

$$\mathbf{L}_{\mathcal{C}_p^c}(\mathbf{g})(x) := \sum_{c_p \in \mathcal{C}_p^c} \mathbf{g}_{c_p} \ell_{c_p}(x) \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{\mathcal{V}_p^c}(\phi)(x) := \sum_{f \in \mathcal{V}_p^c} \phi_{v_p} \ell_{v_p}(x), \quad \forall x \in c.$$

On suppose alors que les fonction de forme vérifient les propriétés suivantes.

(R1p) [*Unisolvance*] Pour toute cellule $c \in C$

$$\ell_{v_p'}(x_{v_p}) = \delta_{v_p, v_p'}, \quad \forall v_p, v_p' \in \mathcal{V}_p^c, \quad \text{et} \quad \int_{c_p'} \ell_{c_p} = \delta_{c_p, c_p'}, \quad \forall c_p, c_p' \in \mathcal{C}_p^c. \quad (8.13a)$$

(R2p) [*Stabilité*] Pour chaque cellule c , il existe des constantes $\eta_{\mathcal{V}_p^c}, \eta_{\mathcal{C}_p^c} > 0$ telles que

$$\eta_{\mathcal{V}_p^c} \|\mathbf{p}\|_{2, \mathcal{V}_p^c}^2 \leq \|\mathbf{L}_{\mathcal{V}_p^c}(\mathbf{p})\|_{L^2(c)} \leq \eta_{\mathcal{V}_p^c}^{-1} \|\mathbf{p}\|_{2, \mathcal{V}_p^c}^2, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{V}_p^c, \quad (8.14a)$$

$$\eta_{\mathcal{C}_p^c} \|\mathbf{w}\|_{2, \mathcal{C}_p^c}^2 \leq \|\mathbf{L}_{\mathcal{C}_p^c}(\mathbf{w})\|_{L^2(c)} \leq \eta_{\mathcal{C}_p^c}^{-1} \|\mathbf{w}\|_{2, \mathcal{C}_p^c}^2, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{C}_p^c, \quad (8.14b)$$

avec les normes discrètes :

$$\|\mathbf{g}\|_{2, \mathcal{V}_c}^2 := \sum_{v \in \mathcal{V}_p^c} |\tilde{c}_c(v)| \mathbf{p}_v^2, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{V}_p^c, \quad \text{et} \quad \|\mathbf{w}\|_{2, \mathcal{C}_p^c}^2 := \sum_{c_p \in \mathcal{C}_p^c} \frac{w_{c_p}^2}{|c_p|}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{C}_p^c.$$

(R3p) [*Partition de l'unité*] Pour toute cellule $c \in C$, et tout $Q \in \mathbb{P}_p(c)$

$$\mathbf{L}_{\mathcal{V}_p^c}(\mathbf{R}_{\mathcal{V}_p^c}^c(Q)) = Q \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{\mathcal{C}_p^c}(\mathbf{R}_{\mathcal{C}_p^c}^c(Q)) = Q. \quad (8.15)$$

(R4p) [*Consistance géométrique*] Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$

$$\int_c x^k \ell_{v_p}(x) dx = \int_{\tilde{c}_c(v_p)} x^k dx, \quad \forall v_p \in \mathcal{V}_p^c, \quad (8.16a)$$

$$\int_c x^k \ell_{c_p}(x) = x_{\tilde{v}(c_p)}^k, \quad \forall c_p \in \mathcal{C}_p^c. \quad (8.16b)$$

Proposition 8.4.1. Soient $H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p}$ et $H_{\mu^{-1}}^{(\mathcal{C}_c \tilde{\mathcal{V}}_c)^p}$ deux opérateurs de Hodge locaux définis par (8.5). Si les propriétés **(R2p)**, **(R3p)** **(R4p)** sont vérifiées alors **(H0c)**, **(H1c)** et **(H2cp)** le sont aussi.

Preuve. La preuve est donnée pour l'opérateur $H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p}$. La propriété **(H0c)** est vérifiée par définition. La propriété **(H1c)** est vérifiée du fait de **(R2p)** et que pour tout $u \in \mathcal{V}_p^c$

$$\llbracket u, H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p} u \rrbracket_{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p} = \int_c \mathbf{L}_{\mathcal{V}_p^c}(u) \cdot \varepsilon \mathbf{L}_{\mathcal{V}_p^c}(u) \quad (\text{définition de } H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p}) \quad (8.17)$$

$$= \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{L}_{\mathcal{V}_p^c}(u)\|_{L^2(c)}^2. \quad (8.18)$$

Enfin si **(R3p)** et **(R4p)** sont vérifiées, alors pour tout $Q \in \mathbb{P}_p(\mathcal{c})$ et tout $\psi \in \mathcal{V}_p^c$, il vient

$$\begin{aligned}
 \llbracket \psi, H_\varepsilon^{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p} R_{\mathcal{V}_p^c}^c(Q) \rrbracket_{\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c} &= \int_{\mathcal{c}} L_{\mathcal{V}_p^c}(\psi) \cdot \varepsilon L_{\mathcal{V}_p^c}(R_{\mathcal{C}_p^c}^c(Q)) \quad (\text{définition de } H_\varepsilon^{\mathcal{E}_c \tilde{\mathcal{F}}_c}) \\
 &= \int_{\mathcal{c}} L_{\mathcal{V}_p^c}(\psi) \cdot \varepsilon Q \quad (\mathbf{R3p}) \\
 &= \sum_{v_p \in \mathcal{V}_p^c} \psi_{v_p} \int_{\mathcal{c}} (\ell_{v_p} \cdot \varepsilon Q) \quad (\text{linéarité et bilinéarité}) \\
 &= \sum_{v_p \in \mathcal{V}_p^c} \psi_{v_p} \int_{\tilde{\mathcal{C}}_c(v_p)} \varepsilon Q \quad (\mathbf{R4p}) \\
 &= \llbracket \psi, R_{\tilde{\mathcal{C}}_p^c}^c(\varepsilon Q) \rrbracket_{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p}. \quad (\text{définition de } R_{\tilde{\mathcal{C}}_p^c}^c \text{ et de } \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{(\mathcal{V}_c \tilde{\mathcal{C}}_c)^p})
 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\psi \in \mathcal{V}_p^c$, on obtient **(H2cp)**. \square

Discussion. D'un point de vue pratique, les fonctions de base choisies, définies par (8.11) et (8.12), ne vérifient pas la propriété **(R4p)**. Par exemple pour $p = 1$, sur l'élément de référence $[-1, 1]$ on a

$$\ell_{v_p,0} = \frac{x(x-1)}{2}, \quad \ell_{v_p,1} = 1 - x^2 \quad \text{et} \quad \ell_{v_p,2} = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Par le calcul, le membre de gauche de (8.16a) de la propriété **(R4p)** pour $k = 0$ donne

$$\int_{-1}^1 \ell_{v_p,0} = \frac{1}{3}, \quad \int_{-1}^1 \ell_{v_p,1} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \ell_{v_p,2} = \frac{1}{3}, \quad (8.19)$$

et le membre de droite donne respectivement les mêmes valeurs. Cependant, pour $k = 1$, on peut vérifier que la propriété **(R4p)** n'est pas vérifiée pour ces fonctions de forme. On ne peut donc pas conclure quant à la propriété de consistance **(H2cp)**.

Dans le cadre d'un stage encadré à l'ONERA, on a souhaité mesurer l'ordre de reconstruction des solutions obtenues avec le schéma 1D. Pour cela, on a utilisé les fonctions de base définies par (8.11) et (8.12), et on a calculé numériquement les quantités :

$$\text{Err}_E = \sum_{c \in \mathcal{C}} \|E_{\text{exact}}(\cdot, t_F) - L_{\mathcal{V}_p^c}(\mathbf{E}^N)(\cdot)\|_{L^2(c)}, \quad \text{et} \quad \text{Err}_B = \sum_{c \in \mathcal{C}} \|B_{\text{exact}}(\cdot, t_F) - L_{\mathcal{C}_p^c}(\mathbf{B}^N)(\cdot)\|_{L^2(c)}.$$

Ces quantités sont représentées pour différentes tailles de maillages dans la Figure 8.4. Bien que la propriété **(R4p)** ne soit pas vérifiée, il semble que la reconstruction des solutions numériques converge au moins à l'ordre $p \in \{1, 2, 3, 4\}$. Le fait que les reconstructions sur le champ électrique convergent à l'ordre $p + 1$ est dû au fait qu'à p fixé, les fonctions de forme de Lagrange vérifient la propriété **(R3p)** pour tout $Q \in \mathbb{P}_{p+1}(\mathcal{c})$.

Conclusion partielle

Dans ce chapitre on a donné des éléments de perspectives sur la construction d'une métrique d'ordre élevé dans le schéma CDO. Pour cela, dans la Section 8.1 on a formulé les problèmes continus 1D et 3D considérés et dans la Section 8.2 on a proposé une formulation du schéma CDO d'ordre élevé appliqué aux équations de Maxwell. Après cela, dans la Section 8.3, on a étudié numériquement cette formulation sur le problème 1D, et comparé de manière qualitative les solutions obtenues avec les schémas *Discontinuous Galerkin* et *Spectral Difference*. Enfin, dans la Section 8.4, on a discuté de l'amélioration du schéma avec la possibilité d'éviter l'inversion de matrice sur maillage cartésien, puis des propriétés géométriques des fonctions de formes pour que les opérateurs de Hodge soient consistants à l'ordre élevé.

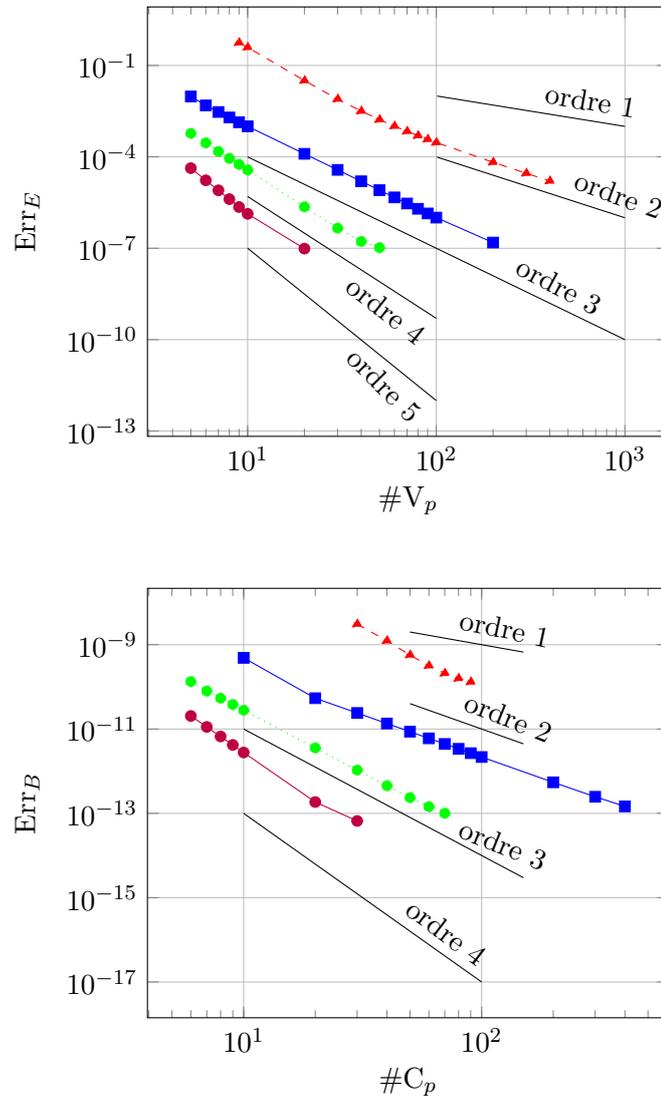


FIGURE 8.4 – Ordre de reconstruction des champs E et B en 1D pour différents choix de degrés polynomial $p \in \{0, 1, 2, 3\}$

Conclusion et perspectives

L'objectif de cette thèse a été d'étudier deux stratégies de couplage des méthodes *Compatible Discrete Operators* (CDO) appliqués aux équations de Maxwell en domaine temporel : l'une, par la définition de la métrique, l'autre, par la définition d'opérateurs d'interface.

Tout d'abord, on a proposé d'étendre le cadre CDO pour prendre en compte des conditions au bord non-homogènes. Cela a été d'abord initié dans le Chapitre 2 dans lequel on a défini, en plus d'un maillage volumique, un maillage surfacique dual. Ainsi dans le Chapitre 3, les degrés de liberté associés aux entités duales de bord ont permis de *compléter* au bord les opérateurs différentiels discrets du cadre CDO classique. On a nommé ces derniers *opérateurs différentiels discrets complétés* et leur définition constitue une version discrète des formules d'intégration par parties continues. Dans le Chapitre 4, on a défini un opérateur de Hodge discret permettant de formuler une version discrète d'une condition aux limites absorbante de Silver-Muller dans le cadre des équations de Maxwell.

On a ensuite proposé de mener l'analyse numérique du schéma CDO appliqué aux équations de Maxwell. Pour cela, dans le Chapitre 2, on a décrit la structure des équations de Maxwell comme formée de relations topologiques, faisant intervenir les circulations, et de relations constitutives, dépendantes des matériaux composant le milieu. Ainsi, dans le Chapitre 3, les premières ont été discrétisées au moyen des opérateurs différentiels *complétés* et dans le Chapitre 4, les secondes ont été formulées avec les opérateurs de Hodge discrets volumiques et surfaciques. Le schéma complètement discret en espace et en temps a été formulé et analysé en terme de consistance et de stabilité dans le Chapitre 5, ce qui a permis de montrer la convergence des solutions discrètes vers les solutions continues.

D'un point de vue des applications numériques, l'objectif était de comparer un solveur *Finite Difference in Time-Domain* (FDTD) structuré avec le schéma CDO non-structuré. Pour cela, dans le Chapitre 5, on a formulé une condition CFL faisant intervenir la plus grande valeur propre d'un opérateur des ondes discrets. On a ainsi pu comparer, dans le Chapitre 6, l'influence de la métrique sur la valeur de pas de temps et sur le temps de factorisation LU de la matrice de Hodge utilisée dans le schéma. D'une part, cela a permis de déterminer une stratégie minimisant les coûts de calcul pour déterminer le pas de temps, d'autre part, d'identifier le choix des fonctions de forme minimisant les coûts de calcul sur maillages hybrides. Finalement, les solveurs ont été comparés sur deux configurations : un calcul de Surface Équivalente Radar (SER) d'une sphère métallique ; un calcul de champs proches d'un avion de chasse. Cela a montré que l'utilisation de maillages hybrides dans ce type de simulation permet de gagner en temps de calcul et d'améliorer la précision sur la solution.

Pour finir, on a proposé l'étude d'un couplage de schémas numériques avec des opérateurs définis à l'interface. Pour cela, on s'est placé dans le cas d'un problème purement stationnaire et on a formulé le cadre CDO dans le cas spécifique de la partition du domaine de calcul en deux sous-domaines. Cela a été possible grâce à la notion de maillage de bord introduite au Chapitre 2. Le problème discret avec couplage a alors été formulé au moyen de deux opérateurs vérifiant

une propriété de \mathbb{P}_0 -consistance et d'adjonction. Ce schéma a été démontré stable, ce qui a été vérifié numériquement sur la solution couplée par la définition de deux opérateurs d'interface. Cela a fait l'objet du Chapitre 7.

Pour finir, on souligne que tous les schémas mentionnés ci-dessus ont été implémentés dans le code multi-domaines/multi-méthodes *Maxwell-TD* de l'ONERA et que les résultats numériques obtenus ont permis d'illustrer les résultats théoriques.

En termes de perspectives, plusieurs développements de nature mathématique et numérique ont été identifiés. A court terme, une optimisation directe du solveur CDO développé dans cette thèse peut être implémentée en utilisant un traitement structuré du schéma dans la partie Cartésienne. Une étude pourra alors être menée sur la pertinence d'utiliser des grossissements du maillage dans la zone Cartésienne. Toujours à court terme, afin de satisfaire aux exigences des simulations industrielles, des modèles physiques plus complexes pourront être ajoutés au solveur CDO, comme un modèle de fils minces et un modèle de matériaux composites.

A plus long terme, pour augmenter la précision et la fiabilité de la propagation d'ondes sur de grandes scènes de calcul, l'étude des schémas CDO d'ordre élevé pourra être menée en terme d'analyse mathématique en parallèle d'une étude numérique. De cela, la montée en ordre dans la métrique du schéma CDO en temps pourra également être étudiée et reliée à d'autres schémas de discrétisation temporelle existants.

Enfin, en terme de couplage de schémas numériques, l'étude mathématique pourra être poursuivie notamment en terme de consistance afin de déterminer une stratégie de couplage permettant de garder les propriétés de convergence des schémas couplés. Cela pourra ensuite être étendue au couplage d'autres solveurs présents dans le code *Maxwell-TD*, comme par exemple un couplage entre les méthodes Différences Finies et Volumes Finis qui sont des schémas faisant partie du cadre CDO. En parallèle de cela, l'étude de couplages en temps pourra être menée de sorte à proposer une formulation du schéma CDO avec des pas de temps localisés dans différentes zones du maillage.

Couplage FDTD structurée et CDO non-structuré

L'objectif de cette annexe est de dissocier les deux zones dans le schéma CDO (6.3) de sorte à traiter la zone Cartésienne en structurée (ST), et donc avec le schéma de Yee, et la zone polyédrique/tétraédrique en non-structurée (NST). Pour cela il faut décrire les mécanismes qui entrent en jeu à l'interface entre les deux zones. Dans la description suivante le champ électrique à l'interface est calculé par le schéma dans la partie NST. Le cas inverse où le champ électrique à l'interface est calculé par le schéma ST est décrit dans la Remarque A.0.1 Le système (6.3) peut se décomposer de la manière suivante :

$$\mathbf{B}_{\text{st}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}_{\text{st}}^{n-\frac{1}{2}} + \text{ROT}(\mathbf{E}_{\text{st}}^n, \mathbf{E}_{\text{nst}}^n) = 0, \quad (\text{A.1a}) \quad \mathbf{B}_{\text{nst}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}_{\text{nst}}^{n-\frac{1}{2}} + \text{ROT}(\mathbf{E}_{\text{nst}}^n) = 0, \quad (\text{A.2a})$$

$$\mathbf{H}_{\text{st}}^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{B}_{\text{st}}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.1b}) \quad \mathbf{H}_{\text{nst}}^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t \mathbf{H}_{\mu^{-1}}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}} \mathbf{B}_{\text{nst}}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.2b})$$

$$\mathbf{D}_{\text{st}}^{n+1} - \mathbf{D}_{\text{st}}^n - \widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H}_{\text{st}}^{n+\frac{1}{2}}) = 0, \quad (\text{A.1c}) \quad \mathbf{D}_{\text{nst}}^{n+1} - \mathbf{D}_{\text{nst}}^n - \widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H}_{\text{nst}}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}_{\text{st}}^{n+\frac{1}{2}}) = 0, \quad (\text{A.2c})$$

$$\mathbf{E}_{\text{st}}^{n+1} = \Delta t (\mathbf{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \mathbf{D}_{\text{st}}^{n+1}, \quad (\text{A.1d}) \quad \mathbf{E}_{\text{nst}}^{n+1} = \Delta t (\mathbf{H}_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}})^{-1} \mathbf{D}_{\text{nst}}^{n+1}. \quad (\text{A.2d})$$

Dans les équations (A.1a) et (A.2c) il a été mis en avant les endroits où le couplage a lieu : dans la partie ST le champ électrique de la partie NST complète la circulation pour calculer le flux magnétique (A.1a) tandis que dans la partie NST le champ magnétique de la partie ST complète la circulation pour calculer le flux électrique (A.2c). Ces situations sont illustrées dans la Figure A.2 et l'algorithme de transfert de données est illustré dans la Figure A.1.

Remarque A.0.1. Dans le cas où le champ électrique à l'interface est calculé par le schéma de la partie ST les équations topologiques deviennent

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{st}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}_{\text{st}}^{n-\frac{1}{2}} + \text{ROT}(\mathbf{E}_{\text{st}}^n) &= 0, & \mathbf{B}_{\text{nst}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}_{\text{nst}}^{n-\frac{1}{2}} + \text{ROT}(\mathbf{E}_{\text{nst}}^n, \mathbf{E}_{\text{st}}^n) &= 0, \\ \mathbf{D}_{\text{st}}^{n+1} - \mathbf{D}_{\text{st}}^n - \widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H}_{\text{st}}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{H}_{\text{nst}}^{n+\frac{1}{2}}) &= 0, & \mathbf{D}_{\text{nst}}^{n+1} - \mathbf{D}_{\text{nst}}^n - \widetilde{\text{ROT}}(\mathbf{H}_{\text{nst}}^{n+\frac{1}{2}}) &= 0. \end{aligned}$$

Cette fois les rôles sont inversés : dans la partie NST le champ électrique de la partie ST complète la circulation pour calculer le flux magnétique tandis que dans la partie ST le champ magnétique de la partie NST complète la circulation pour calculer le flux électrique.

Remarque A.0.2 (Numérotation). De sorte à pouvoir effectuer les transferts de données dans l'algorithme décrit sur la Figure A.1 il faut établir un tableau de correspondance entre les numérotation ST et NST.

Pour que les schémas (A.1) et (A.2) puissent effectuer leurs calculs à l'interface il est nécessaire de préciser comment les circulations sont opérées et comment la métrique est calculé à l'interface pour le schéma NST. Ces deux points dépendent de la situation à l'interface. Pour commencer on décrit la géométrie de l'interface entre les parties ST et NST.

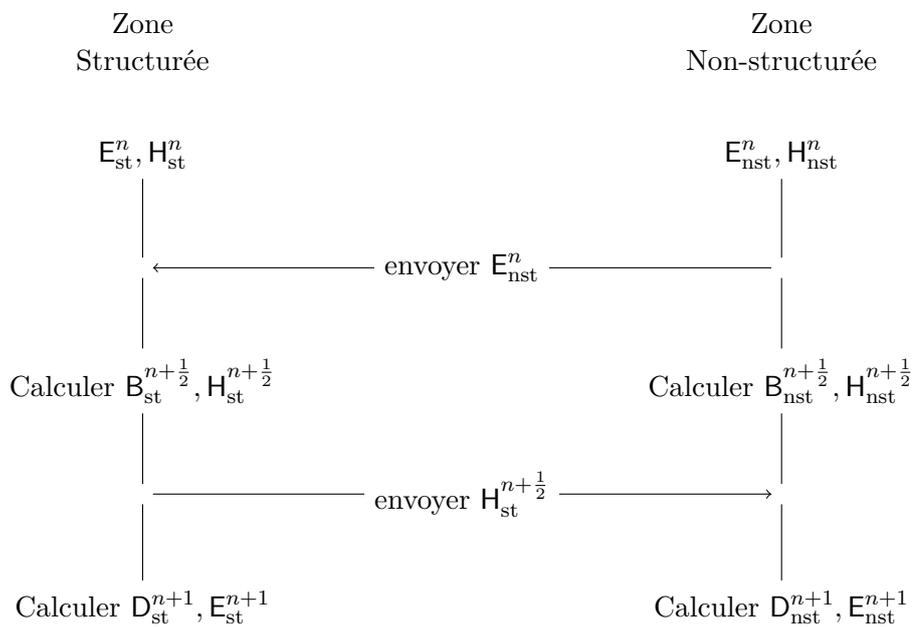


FIGURE A.1

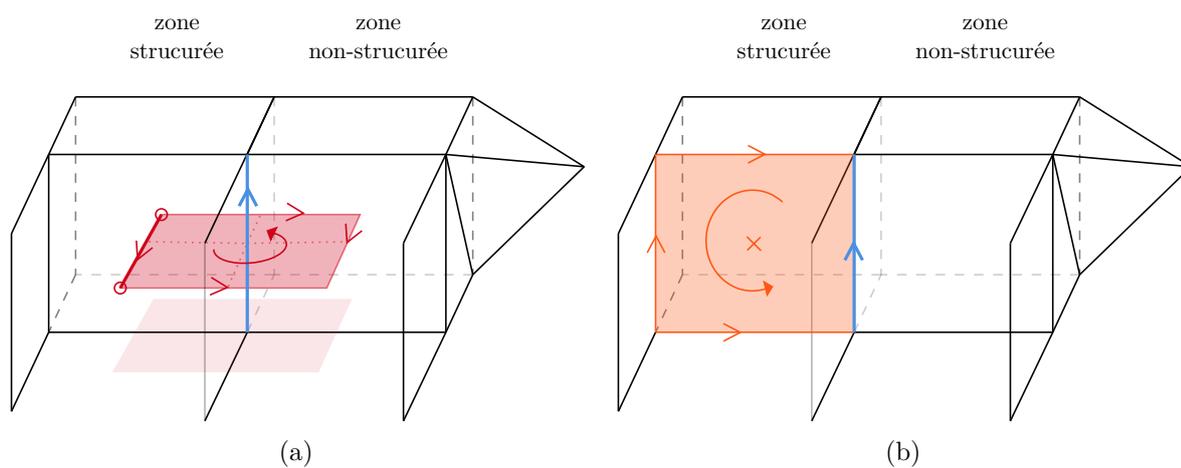


FIGURE A.2

L'interface. Dans le type de maillages hybrides que l'on souhaite traiter l'interface entre la zone Cartésienne et la zone d'éléments polyédriques/tétraédriques est un maillage 2D formé de faces carrées. Chacune de ces faces appartient à une cellule cubique et une cellule polyédrique, formée par un cube dont au moins une face est coupée par une arête (voir par exemple Figure A.3a). Pour une arête sur l'interface il y a trois situations possibles : soit elle appartient à deux cellules cubiques de la zone ST et donc à deux cellules polyédriques (voir Figure A.3a), soit elle appartient à trois cellules cubiques de la zone ST et une cellules polyédriques (voir Figure A.3b), soit elle appartient à une cellule cubique de la zone ST et trois cellules polyédriques (voir Figure A.3c).

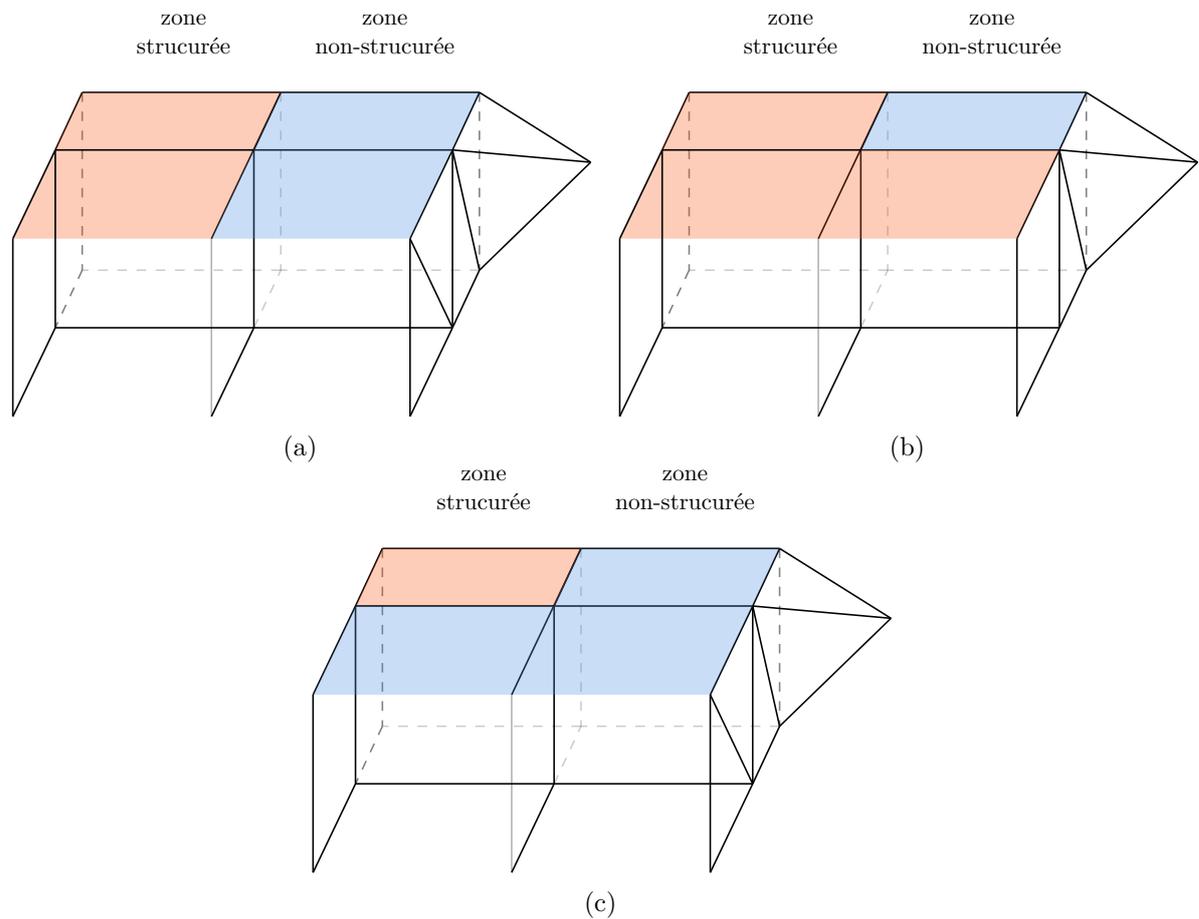


FIGURE A.3 – Différentes situations possibles au niveau de l'interface entre la zone ST et la zone NST. Une arête peut appartenir à une, deux ou trois cellules de la zone ST (en orange), et respectivement, à trois, deux ou une cellule NST.

Circulation. Pour le calcul des circulations des champs magnétiques autour d'une face duale (voir par exemple Figure A.2a), dans le schéma de la zone NST (équation (A.2c)), le rotationnel discret doit être complété par

- aucun terme si l'arête appartient à trois cellules polyédriques,
- un terme si l'arête appartient à deux cellules polyédriques,
- deux termes si l'arête appartient à une cellule polyédrique.

Remarque A.0.3 (Orientation). D'un point de vue pratique, de sorte à éviter les transferts d'orientation il est préférable que les orientations des faces et des arêtes stockées dans le maillage NST coïncident avec les orientations du maillage structurées

Remarque A.0.4 (Complétion des circulations). En plus d'établir une correspondance entre les numérotations (voir Remarque A.0.2), la complétion des circulations dans le schéma NST nécessite d'établir une structure de donnée contenant les valeurs de champ magnétique de la partie ST à ajouter et ainsi que leur nombre (aucune, une ou deux).

Métrie. Pour que les équations (A.2b) et (A.2d) calcul les "vrais champs" à l'interface il est nécessaire que les opérateurs métriques $H_{\mu-1}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}$ et $H_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}$ prennent en compte les contributions Cartésiennes de la zone ST. Dans le cas de l'opérateur $H_{\mu-1}^{\mathcal{F}\tilde{\mathcal{E}}}$, chaque face ayant une contribution ST et une contribution NST, l'opérateur est complété par une contribution $(2\mu\Delta x)^{-1}$ sur les termes diagonaux correspondants aux faces sur l'interface.

Dans le cas de l'opérateur $H_{\varepsilon}^{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{F}}}$, pour une arête sur l'interface, une contribution $\frac{\varepsilon\Delta x}{4}$ doit être ajoutée au terme diagonal correspondant à cette arête :

- une fois si l'arête appartient à trois cellules polyédriques,
- deux fois si l'arête appartient à deux cellules polyédriques,
- trois fois si l'arête appartient à un cellule polyédrique.

Différences Spectrales

L'objectif de cette annexe est de formuler la semi-discrétisation en espace *Différences Spectrales* (DS) (ou *Spectral Difference*) d'un problème hyperbolique en 1D. Dans le but de formuler un schéma conservatif d'ordre élevé, ce type de discrétisation a été introduit par Kopriva (1996) dans le cadre de mécanique des fluides.

B.1 Écriture locale

Soit le problème hyperbolique

$$\begin{cases} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial F(w(x,t))}{\partial x} = 0 & (x,t) \in]a,b[\times]0,t_F], \\ w(x,t=0) = w_0(x), \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

avec $]0,t_F]$ un intervalle de temps, $w :]0,t_F] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la variable conservée et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la densité de flux. Soit (x_i) un ensemble de $N + 1$ points distincts, $N \in \mathbb{N}^*$, formant un maillage du segment $[a,b]$, c'est-à-dire

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b, \quad \text{et} \quad [a,b] = \bigcup_{k=1}^N [x_k, x_{k+1}].$$

L'idée des différences spectrales (DS) est de chercher une solution approchée du problème **fort** (B.1) sous la forme d'un polynôme sur chacune des cellules, sans imposer de continuité aux interfaces entre cellules. Ainsi, les états de part et d'autre de l'interface sont généralement différents et on assure le couplage entre les cellules en résolvant un problème de Riemann. La solution obtenue est ainsi **localement continue** mais **globalement discontinue**. Soit alors la version local du problème (B.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial F(w(x,t))}{\partial x} = 0 & (x,t) \in]x_k, x_{k+1}[\times]0,t_F], \\ w(x,t=0) = w_0(x) & x \in]x_k, x_{k+1}[. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

On introduit la transformation

$$F_k : \begin{cases} [-1, 1] \longrightarrow [x_k, x_{k+1}] \\ \xi \longmapsto \frac{(1-\xi)}{2}x_k + \frac{(1+\xi)}{2}x_{k+1}, \end{cases}$$

et on pose

$$\hat{w}(t, \xi) = w(t, F_k(\xi)).$$

Le problème (B.2) se réécrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{w}(t, \xi)}{\partial t} + \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial F(\hat{w}(t, \xi))}{\partial \xi} = 0 & (t, \xi) \in]-1, 1[\times]0, t_F], \\ \hat{w}(\xi, t = 0) = \hat{w}_0(\xi) & x \in]-1, 1[. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Dans la suite de la présentation, s'il n'y a aucune ambiguïté le temps est omis dans les notations, on notera donc $\hat{w}(\xi, t) = \hat{w}(\xi)$.

B.2 Vers un problème de Cauchy

Pour l'approximation polynomiale, il y a deux manières de procéder. La première approche consiste à définir le polynôme par des monômes sur une base. La seconde utilise la dualité entre le polynôme et ses valeurs en des points bien identifiés. C'est la seconde approche qui sera utilisée dans la suite. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier, on cherche alors une solution approchée \hat{w}_h du problème (B.3) sous la forme d'un polynôme de degré p . Soient alors (s_i) , une famille de $p + 1$ points *distincts* tels que

$$-1 < s_1 < s_2 < \dots < s_{p+1} < 1.$$

Dans la suite, on appellera ces points les *points solution*. Soit (ℓ_i) une base de polynômes de Lagrange de degré p associée à la famille (s_i) , de sorte que

$$\ell_i(s_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq p + 1.$$

La décomposition de \hat{w}_h dans la base (ℓ_i) est

$$\hat{w}_h(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} \hat{w}(s_i) \ell_i(\xi), \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (\text{B.4})$$

En substituant l'expression (B.4) dans l'équation (B.3) il vient

$$\frac{\partial \hat{w}_h(x, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{\partial \hat{w}(s_i)}{\partial t} \ell_i(\xi) = -\frac{2}{\Delta x} \frac{\partial F_h(\hat{w}_h(\xi))}{\partial \xi}. \quad (\text{B.5})$$

Dans l'équation (B.5) la dérivée étant prise selon la variable t , le degré de $\partial_t \hat{w}_h$ en la variable ξ est donc encore un polynôme de degré p . Par conséquent la dérivée en espace du flux est aussi un polynôme de degré p en la variable ξ . La dérivée $\partial_\xi F_h$ peut donc être décomposée dans la base de Lagrange (ℓ_i) introduite plus haut.

$$\frac{\partial F(\hat{w}_h(\xi))}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{\partial F(\hat{w}_h(s_i))}{\partial \xi} \ell_i(\xi), \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (\text{B.6})$$

Les équations (B.5) et (B.6) combinées ensemble donnent

$$\sum_{i=1}^{p+1} \frac{\partial \hat{w}(s_i)}{\partial t} \ell_i(\xi) = -\frac{2}{\Delta x} \sum_{i=1}^{p+1} \frac{\partial F(\hat{w}_h(s_i))}{\partial \xi} \ell_i(\xi).$$

La famille (ℓ_i) formant une base de $\mathbb{R}_p[X]$, par unicité de la décomposition dans une base

$$\frac{\partial \hat{w}_h(s_i)}{\partial t} = -\frac{2}{\Delta x} \frac{\partial F_h(\hat{w}_h(s_i))}{\partial \xi}, \quad 1 \leq i \leq p + 1.$$

Résoudre le problème local (B.3) revient donc à résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{w}_h(s_i)}{\partial t} = -\frac{2}{\Delta x} \frac{\partial F_h(\hat{w}_h(s_i))}{\partial \xi} & 1 \leq i \leq p + 1, \quad t \in [0, t_F], \\ \hat{w}(\xi, t = 0) = \hat{w}_0(\xi). \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

B.3 Approximation de la dérivée du flux

Pour pouvoir résoudre (B.7), il reste à évaluer $\partial_\xi F_h(w_h(s_i))$. On note que la relation (B.5) impose que la dérivée du flux soit un polynôme de degré p , par conséquent, le flux lui-même doit être un polynôme de degré $p + 1$. Soient alors (f_i) , une famille de $p + 2$ points *distincts* tels que

$$-1 = f_1 < f_2 < \dots < f_{p+1} < f_{p+2} = 1.$$

On impose que deux de ces points soient pris au bord de sorte à pouvoir assurer le couplage entre les cellules. Dans la suite ces points seront appelés les *points flux*. Soit alors (h_i) une base de polynômes de Lagrange de degré $p + 1$ associée à la famille (f_i) , de sorte que

$$h_i(f_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq p + 2.$$

La décomposition de F_h dans la base (h_i) est

$$F_h(\xi) = \sum_{i=1}^{p+2} F(\hat{w}_h(f_i)) h_i(\xi), \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (\text{B.8})$$

Comme l'approximation polynomiale comprend localement les interfaces, d'un point de vu

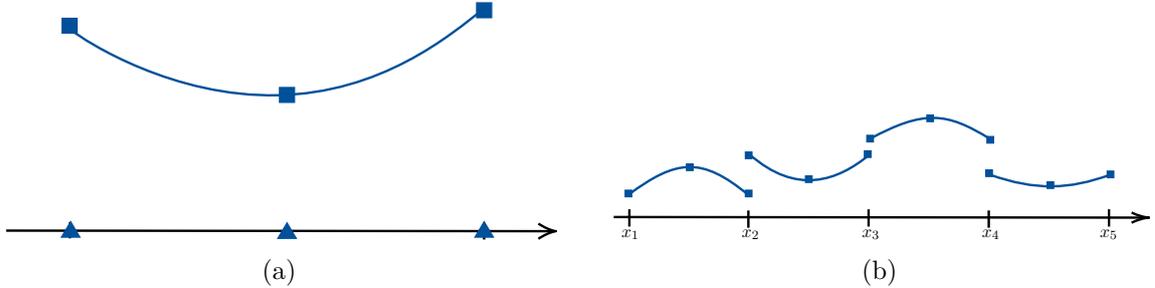


FIGURE B.1 – Pour $p = 1$: (a) le flux est localement représenté par un polynôme de degré $p + 1$; (b) globalement à chaque interface coexiste deux valeurs de flux.

global, à une interface donnée deux valeurs de flux peuvent coexister. Il y alors deux manières de procéder, la première est de considérer un problème de Riemann aux interfaces des cellules, la deuxième est de faire le choix d'un flux numérique F^* . C'est cette dernière que l'on considère dans le Chapitre 8, où l'on fait choix d'un flux centré aux interfaces. Ainsi la décomposition (B.8) permet d'évaluer $\partial_\xi F_h$ en chacun des *points solutions* :

$$\frac{\partial F_h(\hat{w}_h(s_i))}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^{p+2} F(\hat{w}_h(f_j)) h'_j(s_i), \quad 1 \leq i \leq p + 1, \quad (\text{B.9})$$

avec

$$F(w_h(f_i)) = \begin{cases} F^*(x_k) & \text{si } i = 1, \\ F^*(x_{k+1}) & \text{si } i = p + 2, \\ F(w_h(f_i)) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

B.4 Schéma DS

En introduisant l'approximation discrétisation de $\partial_\xi F_h$, le système (B.7) se réécrit comme un problème de Cauchy sur chaque cellule

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{w}_h(s_i)}{\partial t} = -\frac{2}{\Delta x} \sum_{j=1}^{p+2} F(\hat{w}_h(f_j)) h'_j(s_i) & 1 \leq i \leq p + 1, \quad t \in [0, t_F], \\ \hat{w}(\xi, t = 0) = \hat{w}_0(\xi). \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Ainsi pour résoudre le problème hyperbolique (B.1) avec le schéma spatial DS, on commence par construire le terme de droite de (B.11), puis on intègre en temps. Pour construire le terme de droite sur une cellule donnée on suit les étapes suivantes :

1. Extrapoler \hat{w}_h aux *flux points* (B.4) (voir Figure B.2a),
2. Évaluer $F(\hat{w}_h(f_j))$ pour $1 \leq j \leq p + 2$ en utilisant la définition du flux (voir Figure B.2b),
3. Calculer le flux numérique (B.10) à chaque interface (voir Figure B.2c),
4. Calculer la dérivée du flux aux *solutions points* (B.9) (voir Figure B.2d).

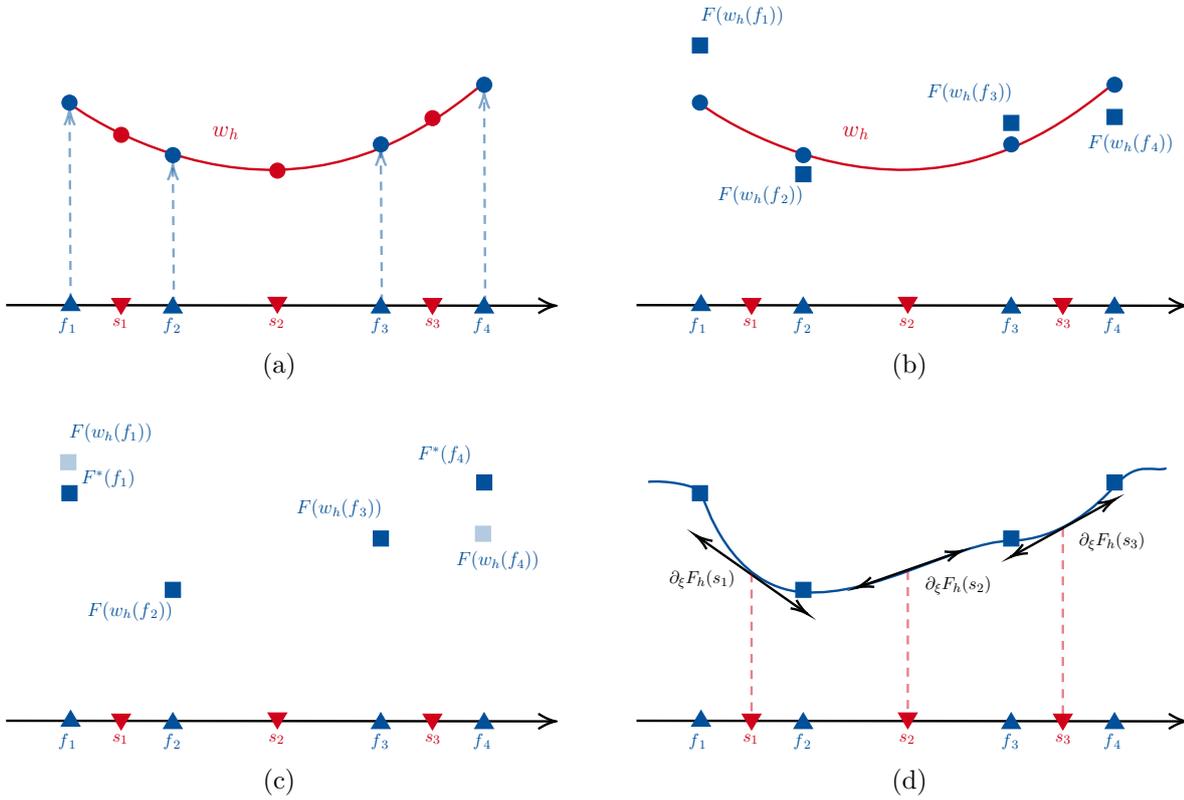


FIGURE B.2 – Différentes étapes de l'algorithme DS.

Bibliographie

- Abenius, E., Andersson, U., Edelvik, F., Eriksson, L. & Ledfelt, G. (2002) Hybrid time domain solvers for the Maxwell equations in 2D, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**(9), 2185–2199.
- Adam, J.-C., Gourdin Serveniére, A., Nédélec, J.-C. & Raviart, P.-A. (1980) Study of an implicit scheme for integrating Maxwell’s equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **22**(3), 327–346.
- Adams, R.A. & Fournier, J. (eds). (2003) *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics, vol. 140. Elsevier.
- Amestoy, P., Duff, I. S. & L’Excellent, J.-Y. (1998) MUMPS multifrontal massively parallel solver version 2.0.
- Amrouche, C., Bernardi, C., Dauge, M. & Girault, V. (1998) Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **21**(9), 823–864.
- Auchmann, B. & Kurz, S. (2006) A geometrically defined discrete Hodge operator on simplicial cells, *Magnetics, IEEE Transactions on*, **42**(05), 643–646.
- Back, A. & Sonnendrücker, E. (2014) Finite Element Hodge for spline discrete differential forms. Application to the Vlasov–Poisson system, *Applied Numerical Mathematics*, **79**, 124–136.
- Barham, W., Güçlü, Y., Morrison, P. J. & Sonnendrücker, E. 2021 . *A mimetic discretization of the macroscopic Maxwell equations in Hamiltonian form*.
- Beilina, L. (2010) Adaptive Hybrid Finite Element/Difference method for Maxwell’s equations : an a priori error estimate and efficiency, *Applied and Computational Mathematics*, **9**, 176–197.
- Beirão da Veiga, L. & Manzini, G. (2008) A Higher-Order Formulation of the Mimetic Finite Difference Method, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**(1), 732–760.
- Beirão da Veiga, L., Lipnikov, K. & Manzini, G. (2009) Convergence analysis of the high-order mimetic finite difference method, *Numerische Mathematik*, **113**(3), 325–356.
- Beirão da Veiga, L., Dassi, F., Manzini, G. & Mascotto, L. (2022) Virtual elements for Maxwell’s equations, *Computers & Mathematics with Applications*, **116**(June), 82–99.
- Berenger, J.-P. (1994) A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal of Computational Physics*, **114**(2), 185–200.
- Berenger, J.-P. (1996) Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, *Journal of Computational Physics*, **127**(2), 363–379.

- Bernardi, C., Yvon, Maday & Patera, A. (1989) A New Nonconforming Approach to Domain Decomposition : The Mortar Element Method, College de France seminar, *Brezis, H.(ed.) et al., Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, volume XI. Lectures presented at the weekly seminar on applied mathematics, Paris, France.*
- Bochev, P. & Hyman, J. (2007) *Principles of Mimetic Discretizations of Differential Operators.* vol. 142. Pages 89–119.
- Bonaldi, F., Di Pietro, D. A., Droniou, J. & Hu, K. 2023 . *An exterior calculus framework for polytopal methods.*
- Bonelle, J. & Ern, A. (2014a) Analysis of Compatible Discrete Operator schemes for elliptic problems on polyhedral meshes, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **48**(2), 553–581.
- Bonelle, J. & Ern, A. (2014b) Analysis of compatible discrete operator schemes for the Stokes equations on polyhedral meshes, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **35**(4), 1672–1697.
- Bonelle, J., Di Pietro, D. A. & Ern, A. (2015) Low-order reconstruction operators on polyhedral meshes : application to compatible discrete operator schemes, *Computer Aided Geometric Design*, **35/36**, 27–41.
- Bonnet, P., Ferrieres, X., Issac, F., Paladian, F., Grando, J., Alliot, J.C. & Fontaine, J. (1997) Numerical Modeling of Scattering Problems Using a Time Domain Finite Volume Method, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **11**(8), 1165–1189.
- Bossavit, A. (1988a) A rationale for 'edge-elements' in 3-D fields computations, *IEEE Transactions on Magnetics*, **24**, 74–79.
- Bossavit, A. (1988b) Whitney forms : A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism, *Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, IEE Proceedings A*, **135**(12), 493 – 500.
- Bossavit, A. (1999-2000) Computational electromagnetism and geometry, *Journal of Japanese Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, **7**(01), 150–159 (no1), 294–301 (no2), 401–408 (no3), 102–109 (no4), 203–209 (no5), 372–377 (no6).
- Bossavit, A. (2001) Generalized Finite Differences in Computational Electromagnetics, *Progress in Electromagnetics Research*, **32**, 45–64.
- Bouman, M., Palha, A., Kreeft, J. & Gerritsma, M. (2010) *A Conservative Spectral Element Method for Curvilinear Domains.* vol. 76. Pages 111–119.
- Branin, F. H. (1966) The Algebraic-Topological Basis for Network Analogies and the Vector Calculus. *Pages 453–491 of : Proceedings of the Symposium on Generalized Networks.* Microwave Research Institute Symposia Series. Polytechnic Press of the Polytechnic Institute of Brooklyn.
- Brezzi, F. & Buffa, A. (2010) Innovative mimetic discretizations for electromagnetic problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **234**(6), 1980–1987.
- Brezzi, F., Falk, R. S. & Donatella Marini, L. (2014) Basic principles of mixed Virtual Element Methods, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **48**(4), 1227–1240.
- Buksas, M. W. (2001) Implementing the Perfectly Matched Layer Absorbing Boundary Condition With Mimetic Differencing Schemes, *Progress in Electromagnetic Research*, **32**, 383–411.
- Caltagirone, J.-P. (2014) *Discrete Mechanics.* Wiley.

- Cangellaris, A., L., Chung-Chi & M., Kenneth. (1987) Point-matched time domain finite element methods for electromagnetic radiation and scattering, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **35**(10), 1160–1173.
- Cantin, P. & Ern, A. (2016) Vertex-Based Compatible Discrete Operator Schemes on Polyhedral Meshes for Advection-Diffusion Equations, *Computational Methods in Applied Mathematics*, **16**(2), 187–212.
- Cantin, P. & Ern, A. (2017) An edge-based scheme on polyhedral meshes for vector advection-reaction equations, *ESAIM : M2AN*, **51**(5), 1561–1581.
- Cartan, E. (1899) Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, **16**, 239–332.
- Christiansen, S. H. (2008) A construction of spaces of compatible differential forms on cellular complexes, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **18**(05), 739–757.
- Ciarlet, Jr, P. & Zou, J. (1999) Fully discrete finite element approaches for time-dependent Maxwell's equations, *Numerische Mathematik*, **82**(2), 193–219.
- Ciarlet, P. G. (1978) *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland.
- Cicuttin, M. & Geuzaine, C. (2024) Numerical investigation of a 3D hybrid high-order method for the indefinite time-harmonic Maxwell problem, *Finite Elements in Analysis and Design*, **233**, 104–124.
- Clemens, M. & Weiland, T. (2001) Discrete Electromagnetism with the Finite Integration Technique, *Progress in Electromagnetics Research*, **32**, 65–87.
- Codecasa, L. & Trevisan, F. (2007) Constitutive equations for discrete electromagnetic problems over polyhedral grids, *Journal of Computational Physics*, **225**(08), 1894–1918.
- Codecasa, L. & Trevisan, F. (2010a) Convergence of Electromagnetic Problems Modelled by Discrete Geometric Approach, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **58**(1), 15–44.
- Codecasa, L., Specogna, R. & Trevisan, F. (2010b) A new set of basis functions for the discrete geometric approach, *Journal of Computational Physics*, **229**(19), 7401–7410.
- Cohen, G., Ferrieres, X. & Pernet, S. (2006) A spatial high-order hexahedral discontinuous Galerkin method to solve Maxwell's equations in time domain, *Journal of Computational Physics*, **217**(2), 340–363.
- Courant, R., Friedrichs, K. O. & Lewy, H. (1928) Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, **100**(1), 32–74.
- Davies, R. W., Morgan, K. & Hassan, O. (2009) A high order hybrid finite element method applied to the solution of electromagnetic wave scattering problems in the time domain, *Computational Mechanics*, **44**(3), 321–331.
- De Dios, B. A., Lipnikov, K. & Manzini, G. (2016) The nonconforming virtual element method, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **50**(3), 879–904.
- Desbrun, M., Hirani, A. N., Leok, M. & Marsden, J. E. 2005 . *Discrete Exterior Calculus*.
- Di Pietro, D. A. & Droniou, J. (2021) An arbitrary-order method for magnetostatics on polyhedral meshes based on a discrete de Rham sequence, *Journal of Computational Physics*, **429**, 109991.

- Di Pietro, D. A. & Tittarelli, R. (2018) *An Introduction to Hybrid High-Order Methods*. Springer International Publishing. Pages 75–128.
- Di Pietro, D. A., Ern, A. & Lemaire, S. (2014) An Arbitrary-Order and Compact-Stencil Discretization of Diffusion on General Meshes Based on Local Reconstruction Operators, *Computational Methods in Applied Mathematics*, **14**(4), 461–472.
- Di Pietro, D. A., Droniou, J. & Rapetti, F. (2020) Fully discrete polynomial de Rham sequences of arbitrary degree on polygons and polyhedra, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **30**(09), 1809–1855.
- Dodziuk, J. (1976) Finite-Difference Approach to the Hodge Theory of Harmonic Forms, *American Journal of Mathematics*, **98**(1), 79.
- Dodziuk, J. (2023) A characterization of Whitney forms, *Proceedings of the American Mathematical Society, Series B*, **10**(39), 455–460.
- Durochat, C., Lanteri, S. & Léger, R. (2013) A non-conforming multi-element DGTD method for the simulation of human exposure to electromagnetic waves, *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*, **27**(3), 614–625.
- Durochat, Clément. 2013 . *Méthode de type Galerkin discontinu en maillages multi-éléments (et non-conformes) pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires*. Ph.D. thesis, Université Nice Sophia Antipolis.
- Edelvik, F. & Ledfelt, G. (2000) Explicit Hybrid Time Domain Solver for the Maxwell Equations in 3D, *Journal of Scientific Computing*, **15**(1), 61–78.
- Ern, A. & Guermond, J.-L. (2021) *Finite Elements I : Approximation and Interpolation*. vol. 1. Springer International Publishing.
- Ern, A. & Steins, M. (2024) Convergence Analysis for the Wave Equation Discretized with Hybrid Methods in Space (HHO, HDG and WG) and the Leapfrog Scheme in Time, *Journal of Scientific Computing*, **101**(1), 7.
- Euler, T. 2007 . *Consistent Discretization of Maxwell's Equations on Polyhedral Grids*. Ph.D. thesis, Technische Universität Darmstadt.
- Eymard, R., Gallouët, T. & Herbin, R. (2009) Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes SUSHI : a scheme using stabilization and hybrid interfaces, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **30**(4), 1009–1043.
- Ferrieres, X., Parmantier, J.-P., Bertuol, S. & Ruddle, A.R. (2004) Application of a hybrid finite difference/finite volume method to solve an automotive EMC problem, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, **46**(4), 624–634.
- Fezoui, L., Lanteri, S., Lohrengel, S. & Piperno, S. (2005) Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **39**(6), 1149–1176.
- Frankel, T. (2011) *The Geometry of Physics : An Introduction*. Cambridge University Press.
- Garcia, S.G., Fernandez Pantoja, M., de Jong van Coevorden, C.M., Rubio Bretones, A. & Gomez Martin, R. (2008) A New Hybrid DGTD/FDTD Method in 2-D, *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, **18**(12), 764–766.
- Gedney, S. D. (1996) An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **44**(12), 1630–1639.

- Gerritsma, M. (2011) Edge Functions for Spectral Element Methods. *Pages 199–207 of : Hesthaven, Jan S. & Rønquist, Einar M. (eds), Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations.* Springer Berlin Heidelberg.
- Gerritsma, M. (2012) An Introduction to a Compatible Spectral Discretization Method, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **19**(1-3), 48–67.
- Gyrya, V., Lipnikov, K. & Manzini, G. (2016) The arbitrary order mixed mimetic finite difference method for the diffusion equation, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **50**(3), 851–877.
- Hatcher, A. (2002) *Algebraic topology.* Cambridge University Press.
- He, B. & Teixeira, F. 2005 (08) . Compatible discretizations of Maxwell equations. vol. 3.
- Heinrich, B. & Nicaise, S. (2003) The Nitsche mortar finite-element method for transmission problems with singularities, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **23**(2), 331–358.
- Hermeline, F. (2000) A Finite Volume Method for the Approximation of Diffusion Operators on Distorted Meshes, *Journal of Computational Physics*, **160**(2), 481–499.
- Hermeline, F., Layouni, S. & Omnes, P. (2008) A finite volume method for the approximation of Maxwell’s equations in two space dimensions on arbitrary meshes, *Journal of Computational Physics*, **227**(22), 9365–9388.
- Hesthaven, J. S. & Warburton, T. (2002) Nodal High-Order Methods on Unstructured Grids, *Journal of Computational Physics*, **181**(1), 186–221.
- Hiptmair, R. (1999) Discrete Hodge Operators, *Numerische Mathematik*, **90**, 265–289.
- Hiptmair, R. (2001a) Discrete Hodge Operators : An Algebraic Perspective, *Progress in Electromagnetics Research*, **32**, 247–269.
- Hiptmair, R. (2001b) Higher Order Whitney Forms, *Progress In Electromagnetics Research*, **32**, 271–299.
- Hu, X. & Nicolaides, R. A. (1992) Covolume techniques for anisotropic media, *Numerische Mathematik*, **61**(1), 215–234.
- Hyman, J. & Shashkov, M. (1999) Mimetic Discretizations for Maxwell’s Equations, *Journal of Computational Physics*, **151**(2), 881–909.
- Hyman, M. & Scovel, J. C. 1988 . *Deriving Mimetic Difference Approximations to Differential Operators Using Algebraic Topology.* Tech. rept. Los Alamos National Laboratory.
- Karypis, G. & Kumar, V. 1998 (September) . *METIS : A Software Package for Partitioning Unstructured Graphs, Partitioning Meshes, and Computing Fill-Reducing Orderings of Sparse Matrices.*
- Kopriva, D.A. (1996) A conservative Staggered-Grid Chebyshev Multidomain Method for Compressible Flows. II. A Semi-Structured Method, *Journal of Computational Physics*, **128**(2), 475–488.
- Kotiuga, R. P. 1984 . *Hodge decompositions and computational electromagnetics.* Ph.D. thesis, McGill University.
- Kreeft, J., Palha, A. & Gerritsma, M. 2011 . *Mimetic framework on curvilinear quadrilaterals of arbitrary order.*

- Kron, G. (1945) Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations by Means of Equivalent Circuits, *Journal of Applied Physics*, 172–186.
- Kron, G. (1953) A Set of Principles to Interconnect the Solutions of Physical Systems, *Journal of Applied Physics*, 965–980.
- Lanteri, S. & Scheid, C. (2012) Convergence of a discontinuous Galerkin scheme for the mixed time-domain Maxwell’s equations in dispersive media, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **33**(2), 432–459.
- Léger, Raphaël. 2011 . *Couplage pour l’aéroacoustique de schémas aux différences finies en maillage structuré avec des schémas de type éléments finis discontinus en maillage non structuré*. Ph.D. thesis, Université Paris-Est.
- Lemoine, A., Caltagirone, J.-P., Azaïez, M. & Vincent, S. (2015) Discrete Helmholtz–Hodge Decomposition on Polyhedral Meshes Using Compatible Discrete Operators, *Journal of Scientific Computing*, **65**(1), 34–53.
- Lions, J.-L. & Magenes, E. (1968) *Problèmes aux limites non homogènes et applications . 1*. Dunod.
- Lipnikov, K. & Manzini, G. (2014) A high-order mimetic method on unstructured polyhedral meshes for the diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, **272**, 360–385.
- Lipnikov, K., Manzini, G. & Shashkov, M. (2014) Mimetic finite difference method, *Journal of Computational Physics*, **257**, 1163–1227.
- Lohi, J. (2022) Systematic implementation of higher order Whitney forms in methods based on discrete exterior calculus, *Numerical Algorithms*, **91**(3), 1261–1285.
- Lohi, J. & Kettunen, L. (2021) Whitney forms and their extensions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **393**, 113520.
- Madsen, N. K. & Ziolkowski, R. W. (1990) A Three-Dimensional Modified Finite Volume Technique for Maxwell’s Equations, *Electromagnetics*, **10**, 147–161.
- Manzini, G., Truong, P. M. D., Vuchkov, R. & Alexandrov, B. (2023) The tensor-train mimetic finite difference method for three-dimensional Maxwell’s wave propagation equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, **210**, 615–639.
- Mattiusi, C. (1997) An Analysis of Finite Volume, Finite Element, and Finite Difference Methods Using Some Concepts from Algebraic Topology, *Journal of Computational Physics*, **133**(2), 289–309.
- Maxwell, J. C. (1873) *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford University Press.
- Misner, C. W. & Wheeler, J. A. (1957) Classical physics as geometry, *Ann. Phys.*, **2**(6), 525–603.
- Monk, P. (1992) Analysis of a Finite Element Method for Maxwell’s Equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **29**(3), 714–729.
- Monk, P. B. (1991) A Mixed Method for Approximating Maxwell’s Equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **28**(6), 1610–1634.
- Nédélec, J.-C. (1980) Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 , *Numerische Mathematik*, **35**, 315–341.
- Nicolaidis, R. A. & Wang, D.-Q. (1998) Convergence Analysis of a Covolume Scheme for Maxwell’s Equations in Three Dimensions, *Mathematics of Computation*, **67**(223), 947–963.

- Piperno, S., Remaki, M. & Fezoui, L. (2002) A Nondiffusive Finite Volume Scheme for the Three-Dimensional Maxwell's Equations on Unstructured Meshes, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **39**(6), 2089–2108.
- Rapetti, F. & Bossavit, A. (2009) Whitney Forms of Higher Degree, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **47**(3), 2369–2386.
- Raviart, P.-A. & Thomas, J.-M. (1977) Primal Hybrid Finite Element Methods for 2nd Order Elliptic Equations, *Mathematics of Computation*, **31**(138), 391–413.
- Remaki, M. (2000) A new finite volume scheme for solving Maxwell's system, *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, **19**(3), 913–932.
- Rojas, O., Mendoza, L., Otero, B., Villamizar, J., Calderón, G., Castillo, J. E. & Miranda, G. (2023) A dispersion analysis of uniformly high order, interior and boundaries, mimetic finite difference solutions of wave propagation problems, *GEM - International Journal on Geomathematics*, **15**(1).
- Rovelli, C. & Zatloukal, V. (2019) Natural Discrete Differential Calculus in Physics, *Foundations of Physics*, **49**(07), 1–7.
- Rufat, D., Mason, G., Mullen, P. & Desbrun, M. (2014) The chain collocation method : A spectrally accurate calculus of forms, *Journal of Computational Physics*, **257**, 1352–1372.
- Rylander, T. & Bondeson, A. (2000) Stable FEM-FDTD hybrid method for Maxwell's equations, *Computer Physics Communications*, **125**(1), 75–82.
- Shankar, V., Mohammadian, A. H. & Hall, W. F. (1990) A Time-Domain, Finite-Volume Treatment for the Maxwell Equations, *Electromagnetics*, **10**, 127–145.
- Taflove, A. & Hagness, S. (2005) *Computational electrodynamics*. 3 edn. Artech House antennas and propagation library. Artech House.
- Tarhasaari, T., Kettunen, L. & Bossavit, A. (1999) Some realizations of a discrete Hodge operator : A reinterpretation of finite element techniques, *Ieee Transactions On Magnetics*, **35**(01), 1494–1497.
- Tonti, E. (1975) *On the formal structure of physical theories*. Istituto di matematica del Politecnico di Milano.
- Tonti, E. (2001) Finite Formulation of the Electromagnetic Field, *Progress in Electromagnetics Research*, **32**, 1–44.
- Tonti, E. (2002) Finite formulation of electromagnetic field, *IEEE Transactions on Magnetics*, **38**(2), 333–336.
- Tonti, E. (2013) *The Mathematical Structure of Classical and Relativistic Physics : A General Classification Diagram*.
- Tonti, E. (2014) Why starting from differential equations for computational physics?, *Journal of Computational Physics*, **257**, 1260–1290.
- Ventribout, Y. & Breuilh, P. 2008 . *Méthode hybride DGTD/FDTD pour la résolution des équations de Maxwell en domaine temporel*.
- Whitney, H. (1957) *Geometric Integration Theory*. Princeton University Press.

- Wu, R.-B. & Itoh, T. 1995 . Hybridizing FD-TD analysis with unconditionally stable FEM for objects of curved boundary. *Pages 833–836 vol.2 of : Proceedings of 1995 IEEE MTT-S International Microwave Symposium.*
- Yang, M., Chen, Y. & Mittra, R. (2000) Hybrid finite-difference/finite-volume time-domain analysis for microwave integrated circuits with curved PEC surfaces using a nonuniform rectangular grid, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **48**(6), 969–975.
- Yee, K.S. (1966) Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **14**(3), 302–307.
- Yee, K.S. & Chen, J.S. (1994) Conformal hybrid finite difference time domain and finite volume time domain, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **42**(10), 1450–1455.
- Zhu, Bao, Chen, Jiefu & Zhong, Wanxie. 2011 . A hybrid finite-element / finite-difference method with implicit-explicit time stepping scheme for Maxwell's equations. *Pages 481–484 of : 2011 IEEE International Conference on Microwave Technology & Computational Electromagnetics.*

Résumé

Dans le domaine de la simulation numérique des équations de Maxwell, l'un des principaux objectifs consiste à rendre compte numériquement de la réalité physique des champs électromagnétiques avec une haute précision et un faible coût de calcul. Il existe aujourd'hui de nombreuses méthodes permettant de résoudre le système de Maxwell en domaine temporel, présentant chacune, en fonction des situations, des qualités et des défauts. Dans cette thèse, on s'intéresse à deux stratégies de couplage des méthodes Compatible Discrete Operators (CDO) appliquées aux équations de Maxwell dans le domaine temporel. La première, consiste à définir localement la métrique du schéma en fonction de la géométrie du maillage. La seconde, consiste à partitionner le domaine de calcul en deux sous-domaines et à coupler les méthodes par la définition d'opérateurs sur l'interface. Pour cela, les équations de Maxwell sont étudiées en deux parties : les relations topologiques, d'une part, et les relations constitutives, d'autre part. Dans le cadre CDO, les relations topologiques sont formulées au moyen d'opérateurs différentiels discrets correspondant à la discrétisation des opérateurs vectoriels classiques. Afin de prendre en compte des conditions au bord non homogènes, ces opérateurs sont étendus au bord. Les relations constitutives sont, quant à elles, formulées au moyen d'opérateurs de Hodge discrets. Ils définissent la métrique du schéma et dépendent des paramètres matériels. Le schéma discret en espace et en temps est alors analysé en terme de stabilité et de consistance. Il est ensuite testé numériquement sur différentes configurations de maillages hybrides.

Mots clés. *équations de Maxwell instationnaires, couplage de schémas numériques, Opérateurs Compatibles Discrets, équations aux dérivées partielles, maillages polyédriques.*

Abstract

In numerical simulations of Maxwell's equations, one of the main goals is to accurately represent the physical reality of electromagnetic fields while keeping a low computational cost. Numerous methods exist for solving the system in the time domain, each with its own strengths and weaknesses, depending on the situation. In this thesis, we focus on two coupling strategies of Compatible Discrete Operators (CDO) schemes applied to Maxwell's equations in time domain. The first consists in locally defining the metric of the scheme by considering the mesh geometry. In the second approach, the computational domain is partitioned in two subdomains and the coupling is achieved by defining operators on the interface. To this end, Maxwell's equations are studied in two parts : the topological relations and the constitutive relations. In the CDO framework, the topological relations are formulated using discrete differential operators corresponding to the discretization of the classical vector operators. In order to take into account non-homogeneous boundary conditions, these operators are extended using a dual boundary mesh. The constitutive relations are formulated using discrete Hodge operators. They define the metric of the scheme and depend on the material parameters. The discrete scheme in space and time is then analyzed in terms of stability and consistency. We then test it on different configurations using hybrid meshes.

Keywords. *Maxwell's equations in time domain, numerical schemes coupling, Compatible Discrete Operators, partial differential equations, polyedral meshes*

