



**HAL**  
open science

# Diffusion, diffraction et mesures quantitatives pour les écoulements diphasiques

Loic Mees

► **To cite this version:**

Loic Mees. Diffusion, diffraction et mesures quantitatives pour les écoulements diphasiques. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Lyon; Université Claude Bernard Lyon 1, 2024. tel-04952492

**HAL Id: tel-04952492**

**<https://hal.science/tel-04952492v1>**

Submitted on 17 Feb 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Diffusion, diffraction et mesures quantitatives pour les écoulements diphasiques

Mémoire présenté

A L'ECOLE CENTRALE DE LYON

et à l'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD

en vue de l'obtention de

**L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES**

par

**Loïc MEES**

Soutenue le 1<sup>er</sup> février 2024

Rapporteurs :

**Dr. Guillaume Castanet**, Directeur de Recherche au CNRS - LEMTA - Nancy

**Pr. Denis Lebrun**, Professeur à l'Université de Rouen Normandie

**Pr. Christine Mounaïm-Rousselle**, Professeure à l'Université d'Orléans

Examineurs :

**Pr Jean-Bernard Blaisot**, Professeur à l'Université de Rouen Normandie

**Dr Corinne Fournier**, Maître de conférence à l'Université Jean Monet-Saint Etienne

**Dr Claude Inserra**, Maître de conférence à l'Université Claude Bernard - Lyon 1

**Pr Pietro Salizzoni**, Professeur à l'École Centrale Lyon

## Préambule

Ce document rapporte un ensemble de travaux réalisés entre 2001 et aujourd'hui. Il est proposé à l'évaluation en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches à l'École Centrale de Lyon et à l'Université Claude Bernard.

Les différents chapitres de ce document traitent des interactions de la lumière avec de petits objets, gouttes, bulles ou particules, des principes de mesure s'appuyant sur ces phénomènes de diffraction ou de diffusion, et des techniques de mesures avancées, principalement appliquées aux problèmes de mécanique des fluides. Cet assemblage est le reflet d'une méthode de travail qui consiste à considérer la problématique de la mesure à la fois du point de vue du problème direct et du problème inverse. Il est aussi le résultat de mon parcours de chercheur, fait de choix, mais aussi de rencontres et d'opportunités, parcours qui est rapidement décrit ci-dessous.

J'ai soutenu ma thèse en 2000 à l'Université de Rouen. Ces travaux de thèse, dirigés par le Pr Gérard Gouesbet et Gérard Gréhan au laboratoire CORIA, étaient essentiellement théoriques et numériques. Ils consistaient à développer une théorie de Lorenz-Mie généralisée pour des cylindres de sections circulaires et elliptiques.

À l'issue de ma thèse, je me suis rapidement tourné vers un sujet plus "porteur" et j'ai élaboré un projet de recherche qui visait à développer des techniques de mesure innovantes pour la mécanique des fluides, à l'aide d'impulsions laser ultra-brèves. L'idée phare de ce projet, qui m'a valu de rejoindre le CNRS en 2001, était de réaliser des mesures de manière instantanée dans des milieux fortement diffusifs, grâce à des mesures résolues en temps des phénomènes de diffusion. Fidèle à ma formation initiale, je me suis d'abord principalement consacré à l'extension des théories de Lorenz-Mie (cette fois pour des sphères) aux impulsions ultra-brèves, avec une première participation à un projet européen MUSCLES et la production de codes de calcul interfacés (en Fortran 90). En parallèle, j'ai fait mes premières armes en matière de traitement d'image en co-encadrant, avec le Pr Denis Lebrun, mon premier doctorant, Pu Shi-Liang, sur l'imagerie en défaut de mise au point ou ILIDS. La thèse de Shi-Liang portait également sur l'holographie numérique en ligne, dont je me désintéressais presque totalement à l'époque, faute de temps. Durant ces premières années au CNRS, j'ai également participé au développement de la réfractométrie d'arc-en-ciel et à l'extension de la théorie Mie pour les ellipsoïdes avec Gérard Gréhan, en collaboration avec l'université Xi-Dian de Xi'an (Chine).

En 2005, j'ai obtenu le soutien de mon laboratoire et de la Région Haute-Normandie pour faire l'acquisition d'un système laser femtoseconde amplifié, premier système de ce type dans un

laboratoire de la section 10 du CNRS, et pouvoir démarrer le volet expérimental de mon projet de recherche. Les années qui ont suivi ont constitué un premier tournant dans ma jeune carrière : la découverte de la recherche expérimentale, le travail en totale autonomie, loin du domaine d'expertise et des grandes compétences de mes mentors, mais avec le soutien d'autres chercheurs, d'autres équipes, de nouvelles collaborations... L'aide en particulier de l'équipe Laser à fibre et d'Amar Hideur en particulier, pour comprendre le fonctionnement de ces nouveaux outils et les notions d'optiques non linéaires essentielles au développement de mes expériences. Les deux expériences que j'ai développées en parallèle au CORIA avaient des objectifs complémentaires : l'une avait pour but de valider des calculs de diffusion multiple. Elle a été réalisée, comme les codes de Monte Carlo, dans le cadre de la thèse de Cécile Calba, que j'ai co-encadrée avec Claude Rozé et Thierry Girasole. L'autre, plus rapidement tournée vers l'application, consistait à réaliser des images balistiques de sprays denses en collaboration avec l'équipe "spray" du CORIA et Jean-Bernard Blaisot en particulier. Entre 2007 et 2008, j'ai pu transmettre l'essentiel des compétences que j'avais acquises sur ces expériences à Saïd Idlahcen, que j'ai co-encadré avec Claude Rozé lors de sa première année de thèse, puis à distance après mon départ pour Lyon.

Fin 2008, j'ai quitté le CORIA pour rejoindre le LMFA où j'ai été accueilli par Michel Lance, alors directeur de l'Unité. Cette mobilité constitue évidemment un second tournant dans ma carrière. Pendant 3 ans, j'ai continué à suivre les travaux de Saïd Idlahcen et poursuivi le suivi du projet européen HTA (HydroTesting Alliance - CEE - FP6-2005-transport4), où je développais des mesures par ILIDS dans le grand tunnel hydrodynamique du Val-de-Reuil en collaboration avec Didier Fréchoux.

En parallèle, et pour ma vie lyonnaise, j'ai pris en charge le projet NADIAbio pour le compte du LMFA, projet visant à mieux comprendre, à mieux décrire et à mieux maîtriser les phénomènes de cavitation dans les injecteurs automobiles. Ce projet impliquait une quinzaine de partenaires, dont le CORIA et le LMFA. Il constituait la transition idéale pour m'accompagner dans ma mobilité, puisque j'avais très largement contribué à son élaboration pour le CORIA avant mon départ et que j'ai assuré son exécution pour le LMFA. À Lyon, il n'était plus question de laser femtoseconde et d'imagerie balistique, mais plutôt de construire et de reconstruire des expériences d'injection Diesel, un peu lourdes et un peu "sales", sur des injecteurs à buses transparentes. Il s'agissait aussi de mettre en place des moyens de mesures optiques plus classiques pour étudier ces phénomènes de cavitation.



J'ai beaucoup appris durant cette période, avec Marc Michard notamment, qui m'a accompagné sur ces actions. J'ai beaucoup appris également de la cavitation et de la mécanique des fluides en général. Le projet a permis de financer la thèse de Cyril Mauger que j'ai encadrée et à qui j'ai pu transmettre, je crois, un certain goût pour les "belles manip" et pour la métrologie optique. Ces actions se sont poursuivies avec l'ANR CANNEx jusqu'en 2017, date à laquelle j'ai mis fin à mes activités autour de l'injection Diesel pour me consacrer davantage à d'autres collaborations, initiées pendant la même période, sur l'holographie numérique et sur les modèles de diffusion. Un retour à mes premiers amours, d'une part avec la théorie de Mie et des séries de Debye pour aider, entre autres, à développer un modèle élaboré d'optique géométrique (Vectorial Complex Ray Model) dans le cadre du projet ANR AMOCOPS, en collaboration avec Kuan Fang Ren du CORIA, Fabrice Onofri de l'IUSTI et Bernard Pouligny du CRPP.

À partir de 2012, j'ai rejoint progressivement le petit groupe constitué autour de Jean-Louis Marié et Nathalie Grosjean au LMFA, en collaboration avec l'équipe de Corinne Fournier du LaHC à Saint-Étienne. Leur objectif, dont j'ai également fait le mien, était de réaliser des mesures lagrangiennes de gouttelettes en évaporation dans une turbulence homogène et isotrope, par holographie numérique et à l'aide d'une méthode de reconstruction nouvelle et pleine de promesses, en suivant une approche "problème inverse". Ces travaux ont abouti en 2020, après de nombreuses étapes, avec la publication de résultats statistiques sur l'influence de la turbulence sur l'évaporation de ces gouttelettes. La collaboration avec le LaHC s'est étendue au cours du temps et ne se cantonne plus à la mécanique des fluides. Elle est toujours active aujourd'hui et se poursuit, en particulier, avec le projet ATICS (ANR) que je piloterai à partir de janvier 2024 et qui regroupe le LMFA, l'IUSTI, le LAHC et le CEA Marcoule.

En 2020, j'ai été sollicité (comme tout le monde) pour faire "quelque chose" en lien avec le COVID. Parmi les nombreuses propositions, celle de Pietro Salizzoni a retenu mon attention et c'est ainsi que j'ai co-encadré la thèse de Livia Grandoni sur la caractérisation d'aérosols respiratoires à l'aide d'une technique d'ILIDS. Mes compétences en optique et en holographie sont également mises à contribution dans le projet CAVISTRES (avec Cyril Mauger, Philippe Blanc-Benon et Claude Inserra du LabTau) et dans le projet Cryospray piloté par Jean-Philippe Matas, qui débutera également en 2024.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Généralités sur les ondes électromagnétiques</b>	<b>13</b>
2.1	Equations de Maxwell . . . . .	13
2.1.1	Equations de Maxwell à l'échelle macroscopiques, dans la matière . . . . .	14
2.1.2	Conditions limites . . . . .	14
2.1.3	Milieu linéaire, local, homogène et isotrope (l.l.h.i.) . . . . .	15
2.1.4	Régime harmonique . . . . .	17
2.1.5	Equation de Helmholtz . . . . .	17
2.1.6	Intensité de l'onde électromagnétique : Vecteur de Poynting . . . . .	19
2.2	Approximation de l'Optique Géométrique . . . . .	19
2.2.1	Equation eikonale . . . . .	20
2.2.2	Formules usuelles de l'optique géométrique . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Théories scalaires de la diffraction</b>	<b>26</b>
3.1	Principe de Huygens . . . . .	26
3.2	Théorème de Green . . . . .	27
3.3	Intégrale de Kirchhoff . . . . .	29
3.4	Intégrales de Rayleigh Sommerfeld . . . . .	30
3.5	Theorie du spectre angulaire . . . . .	33
3.6	Principe de Babinet . . . . .	36
3.7	Approximation de Fresnel . . . . .	37
3.8	Propagation en une transformée de Fourier . . . . .	39
3.9	Approximation de Fraunhofer . . . . .	39
3.10	Approche vectorielle en coordonnées cartésienne . . . . .	40

3.11	Limites de l'approche scalaire . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Diffusion de la lumière par un objet sphérique</b>	<b>43</b>
4.1	Introduction . . . . .	43
4.2	Potentiels de Bromwich . . . . .	45
4.3	Formalisation du problème de diffusion . . . . .	47
4.3.1	Le champ incident . . . . .	49
4.3.2	Champ diffusé . . . . .	50
4.3.3	Champ interne . . . . .	50
4.4	Conditions aux limites . . . . .	51
4.5	Description du faisceau incident . . . . .	53
4.5.1	Cas d'un faisceau axisymétrique . . . . .	56
4.5.2	Cas de l'onde plane . . . . .	56
4.6	Calcul des champs et des intensités . . . . .	57
4.6.1	Champ diffusé . . . . .	57
4.6.2	Champ interne . . . . .	59
4.6.3	Conclusion . . . . .	61
4.6.4	Calcul numérique et exemples . . . . .	61
4.7	Approximation de champs lointains . . . . .	63
4.8	Sections efficaces . . . . .	67
4.9	Cas particulier de l'onde plane : TLM . . . . .	68
4.10	Décomposition en séries de Debye . . . . .	69
4.10.1	Introduction . . . . .	69
4.10.2	Formulation des séries de Debye . . . . .	71
4.10.3	Exemple de troncature . . . . .	74
4.10.4	Interaction résonante . . . . .	75
4.10.5	Interprétation de la diffusion aux angles d'arcs-en-ciel . . . . .	78
4.10.6	Mise en évidence des ondes de surface . . . . .	79
4.10.7	Décomposition en séries de Debye pour une bulle . . . . .	81
4.11	Sphère multi-couches . . . . .	88
4.11.1	Cas pratiques . . . . .	89

<b>5</b>	<b>Impulsions ultra-brèves et applications métrologiques</b>	<b>92</b>
5.1	Introduction . . . . .	92
5.2	Nature et Description d'une impulsion ultra-brève . . . . .	93
5.2.1	Génération d'une impulsion . . . . .	93
5.2.2	Description d'une impulsion . . . . .	95
5.2.3	Amplification . . . . .	98
5.3	Diffusion simple . . . . .	99
5.3.1	Champs internes et champs proches . . . . .	103
5.4	Diffusion multiple . . . . .	107
5.4.1	Introduction . . . . .	107
5.4.2	Méthode de Monte Carlo . . . . .	108
5.4.3	Méthode de semi-Monte carlo . . . . .	111
5.4.4	Propagation/diffusion d'une impulsion dans un nuage de petites particules	112
5.4.5	Propagation/diffusion d'une impulsion dans un nuage de grosses particules	118
5.5	Imagerie balistique . . . . .	122
5.5.1	Principe et travaux pionniers . . . . .	123
5.5.2	Limitations . . . . .	126
5.5.3	Développements . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Holographie numérique en ligne</b>	<b>133</b>
6.1	Principe de l'holographie . . . . .	133
6.1.1	L'holographie dans sa version optique . . . . .	133
6.1.2	L'holographie numérique en ligne : de l'imagerie sans lentille . . . . .	135
6.2	Reconstruction des hologrammes . . . . .	136
6.2.1	Méthodes de reconstruction par rétropropagation . . . . .	137
6.2.2	Quelques mots sur les méthodes itératives . . . . .	140
6.2.3	Les limites de l'approche par rétropropagation . . . . .	140
6.2.4	L'approche "problème inverse" . . . . .	141
6.2.5	Gouttelettes sphériques en champ lointain . . . . .	143
6.2.6	Modèles de diffraction numériques . . . . .	149
6.3	Holographie en champ proche . . . . .	155
6.3.1	Comparaison des différents modèles en champ proche. . . . .	156
6.3.2	Rétropropagation en champ proche . . . . .	159

6.3.3	Inversion à l'aide de la TLM . . . . .	165
6.4	Quelques perspectives . . . . .	166
<b>7</b>	<b>Quelques exemples aboutis d'applications à la mécanique des fluides</b>	<b>168</b>
7.1	Suivi Lagrangien de gouttelettes en évaporation dans un écoulement turbulent .	169
7.1.1	Les grandes étapes du développement des outils de mesure . . . . .	169
7.1.2	Statistique Lagrangienne de l'évaporation de gouttelettes dans une turbulence homogène et quasi-isotrope . . . . .	171
7.2	Caractérisation des aérosols respiratoires par Imagerie Interférométrique en défaut de mise au point . . . . .	191
7.3	Étude des phénomènes de cavitation dans les injecteurs haute-pression des moteurs thermiques automobiles . . . . .	208
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>229</b>
<b>A</b>	<b>Quelques propriétés utiles</b>	<b>234</b>
A.1	Transformée de Fourier . . . . .	234
A.2	Transformée de Fourier et Transformée de Hankel . . . . .	235
A.3	Noyau de propagation de Rayleigh-Sommerfeld . . . . .	235
A.3.1	Fonction de Fresnel . . . . .	236
A.3.2	Intégrales de Fresnel et approximation de Fraunhofer . . . . .	236
<b>B</b>	<b>Équivalence entre la théorie du spectre angulaire et les intégrales de Rayleigh-Sommerfeld</b>	<b>238</b>
<b>C</b>	<b>Potentiels de Bromwich</b>	<b>241</b>
<b>D</b>	<b>Equation pour les potentiels de Bromwich et solutions</b>	<b>245</b>
<b>E</b>	<b>Approximation localisée pour les BSCs</b>	<b>249</b>
<b>F</b>	<b>Décomposition en série de Debye</b>	<b>251</b>
<b>G</b>	<b>Théorie de Lorenz-Mie Généralisée pour une sphère à couches concentriques</b>	<b>257</b>

<b>H</b>	<b>Calcul numérique des séries de Lorenz-Mie</b>	<b>262</b>
H.1	reformulation des séries . . . . .	262
H.2	Calcul des fonctions spéciales . . . . .	264
H.2.1	Polynômes de Legendre associés $P_n^m$ , $\pi_n^m$ et $\tau_n^m$ . . . . .	264
H.2.2	Calcul des fonctions de Bessel . . . . .	265
<b>I</b>	<b>Reformulation des coefficients de diffusion pour les calculs numériques</b>	<b>268</b>
I.1	Reformulation pour la sphere multicouche . . . . .	268
I.2	Cas particulier de la sphere homogène . . . . .	271
I.3	Reformulation des séries de Debye . . . . .	272
<b>J</b>	<b>Calculs de Monte carlo</b>	<b>276</b>
J.1	Carcatéristiques du milieu diffusant . . . . .	276
J.2	Tirage aléatoire de la distance de collision . . . . .	277
J.3	Tirage aléatoire de l'évenement absorption/diffusion . . . . .	277
J.4	Tirage aléatoire des angles de diffusion . . . . .	277
<b>K</b>	<b>Liste de mes principales publications</b>	<b>281</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Les méthodes de mesures optiques sont utilisées dans de nombreux domaines. Leur succès repose principalement sur leur précision et leur caractère non-intrusif. En mécanique des fluides, ces atouts sont particulièrement appréciés et l'imagerie ou des techniques optiques plus quantitatives telles que la Vélocimétrie Doppler Laser ou la Vélocimétrie par Image de Particules ont peu à peu remplacé les sondes intrusives pour réaliser des mesures de vitesse et de taille au cœur des écoulements. Les sondes optiques permettent également d'accéder aux tailles des gouttes ou des bulles présentes dans les écoulements diphasiques ou à des grandeurs scalaires telles que la température ou la composition chimique. Des techniques comme La vélocimétrie par image de particules, l'anémométrie phase Doppler, la diffractométrie ou la Fluorescence Induite par Laser sont commercialisées et assez largement appliquées, d'autre sont un peu plus confidentielles et sont principalement développés dans les laboratoires.

Les mesures optiques reposent sur l'analyse de la lumière après transmise, réfléchi, diffusée, diffractée, absorbée ou émise par le milieu sondé. Si les propriétés du milieu ne sont généralement pas ou peu modifiées par cette interaction, les propriétés de la lumière le sont fortement. C'est ce qui confère aux mesures optiques leur caractère non-intrusif. On utilise ainsi une source de lumière, généralement connue et on observe les modifications de sa répartition spatiale ou spectrale au moyens de capteurs plus ou moins complexes. La mesure consiste à déduire de ces modifications, les propriétés physiques des objets qui en sont à l'origine ; elle repose donc sur une bonne connaissance des phénomènes d'interaction, sur notre capacité à les décrire, à les quantifier et à les simuler.

Les travaux de recherche décrits et référencés dans ce document abordent à la fois le problème direct, celui de l'interaction entre une source de lumière et le milieu d'intérêt et le pro-

blème inverse, qui consiste à déduire de la mesure les propriétés optiques et physique du milieu. Les sources de lumière considérées sont le plus souvent LASER et les phénomènes d'interférence qui permettent de réaliser les mesures quantitatives les plus précises, sont très présents. Les milieux sondés sont pour la plupart des milieux en phases dispersées : des milieux diphasiques avec une phase continue et une phase dispersée sous forme de particules (au sens de petits objets), de gouttes ou de bulles. Ces objets sont souvent de forme simple et régulière, ce qui permet de décrire leur interaction avec la lumière de manière précise, parfois même rigoureuse et de réaliser des mesures d'une très grande précision.

On distingue différentes approches permettant de décrire les interactions entre lumière et une particule. Dans le cadre rigoureux de l'électromagnétisme et des équations de Maxwell, des solutions analytiques (ou semi-analytique) exactes existent pour des formes de particules régulières (sphère, sphéroïdes, cylindres...) en se limitant aux interactions élastiques et linéaires. Ces méthodes dites "à variables séparables" (MVS) sont construites sur le modèle de la plus connue et la plus ancienne d'entre elle, la Théorie de Lorenz-Mie [1] dont il sera largement question dans ce document. Pour des formes de particules plus complexes, on a recours à une résolution numérique des équations, soit par des méthodes dérivées des MVS (Matrice T, e.g. [2]), soit en discrétisant temps et espaces pour résoudre les équations de Maxwell par une méthode de différences finies dans le domaine temporel, e.g. [3] (acronyme anglais : FDTD). Sans chercher à être exhaustif dans cette liste de méthodes on peut également citer la méthode de Discrétisation en Dipole ou DDA, e.g. [4] (Discrete Dipole Approximation en anglais) qui comme son nom l'indique décrit la particule comme un ensemble discret de dipôles et s'apparente ainsi plus aux autres méthodes numériques qu'à une approximation. Ces méthodes numériques ne sont pas considérées dans ce document. Sans en minimiser l'intérêt potentiel, on notera que leur principal défaut est de se limiter à des objets de très petites tailles et que les différentes formes de discrétisation adoptées ne permettent pas de reproduire la parfaite continuité des surfaces que l'on rencontre fréquemment dans les milieux fluides. Un troisième type d'approche pour décrire les interactions entre lumière et particules consiste à faire appel à des approximations. La plus utilisée, la plus simple et la plus ancienne de ces approximations est l'Optique Géométrique. Elle permet d'interpréter les phénomènes de diffusion et de les décrire à partir de simples rayons lumineux de manière plus ou moins précise selon le niveau de complexité du modèle adopté. L'OG permet de considérer des particules de formes arbitraires mais le modèle ne décrit pas l'ensemble des phénomènes de diffusion. Elle ne permet notamment pas de décrire



la diffraction, la diffusion aux angles d'arc-en-ciel, la diffusion à l'angle critique, les caustiques, les effets tunnels ou autres ondes de surface. Plus globalement, l'approximation n'est valable par principe que quand l'objet et les courbures de l'interface sont grandes devant la longueur. Dans la famille des approximations, on peut également citer les Théories Scalaires de la Diffraction. Même si elles permettent de décrire la propagation de la lumière plutôt que son interaction avec un objet a proprement parler, elles peuvent être couplées avec d'autres modèles (souvent simples voire simplistes) pour décrire les phénomènes de diffusion et (beaucoup plus fréquemment) de diffraction. Compte tenu de leur importance pour les techniques d'holographie, ces approximations feront l'objet d'un chapitre dans ce document.

Les techniques de mesures optiques les plus utilisés en mécanique des fluides de nos jours sont les techniques de PIV (abréviation anglaise pour Velocimétrie par image de Particule) et de PTV (abréviation anglaise pour Vélocimétrie par Suivi de Particule). Ces techniques représentent un progrès considérable en comparaison des techniques ponctuelles (LDV, PDA) qu'elles ont peu à peu remplacées. On notera tout particulièrement l'engouement de la communauté de la mécanique des fluides pour les techniques de PTV en volume [5] ces dernières années. PIV et PTV sont basées sur des images des champs de particules (traceurs) et fournissent des mesures de champ de vitesse (parfois d'accélération) de l'écoulement, dans un volume ou une section donnée. Dans certaines conditions, les champs de pressions peuvent être déduit des champs de vitesses. Ces techniques peuvent également s'appliquer à la mesure des vitesses de particules inertielles, naturellement présentent dans l'écoulement (spray, nuage de bulles...) mais avec ces techniques les images de particules ne sont pas résolues spatialement. Seules, i.e. sans être couplée avec une autre technique (imagerie de fluorescence par exemple), elles ne permettent pas d'accéder à la taille, la forme ou d'autres paramètres caractérisant les objets de manière individuelle. Ces techniques, largement commercialisés et relativement simple à mettre en œuvre ne répondent donc pas à tous les besoins de caractérisation rencontrés par les chercheurs et les ingénieurs étudiant les écoulements, en particulier diphasiques. D'autres techniques de mesure plus confidentielles ont ainsi été développées, pour étendre les capacités de mesures à des nouveaux paramètres ou répondre à des besoins spécifiques auxquels les techniques existantes ne répondaient pas. Plusieurs de ces techniques sont abordées de manière plus ou moins détaillée dans ce document :

- **l'holographie Numérique en Ligne** permet de localiser et de mesurer les propriétés d'objets dans un volume à partir d'un seul enregistrement, à l'aide d'un montage

optique simple et robuste. Le principal avantage de l'holographie en comparaison des techniques de PTV volumiques qui font aujourd'hui référence pour la caractérisation 3D des écoulements et de fournir des informations précises sur les particules, gouttes ou bulles présentes dans l'écoulement. Associé à des méthodes de reconstruction avancées, l'holographie permet de réaliser des mesures très précises sur ces objets (position, taille et potentiellement d'autres propriétés physiques) sans réduire le volume de mesure pour augmenter la résolution, comme l'impose les techniques d'imagerie classiques.

- L'**imagerie balistique en régime femtoseconde** est une technique d'imagerie en transmission où seul les photons dont le temps de vol est minimum contribuent à la formation des images. La technique permet ainsi de réaliser des images dans ou à travers des milieux denses, fortement diffusifs, en éliminant ou en réduisant très fortement les effets de diffusion multiples. La technique qui repose sur une source laser impulsionnelle ultra-brève et un dispositif de porte optique, fournit des images de manière instantanée. Son application ne se limite donc pas à des milieux stationnaires. En mécanique des fluides, elle est ainsi la seule technique avec la radiographie X-synchrotron à pouvoir réaliser des images du cœur liquide d'un spray haute pression.
- La **Réfractométrie d'arc-en-ciel** est une technique interférométrique qui permet de mesurer l'indice de réfraction de gouttelettes. A travers cette mesure d'indice, on a accès à la température ou à la composition de ces gouttes.
- L'**imagerie en défaut de mise au point** (ILIDS pour Interferometric Laser Imaging Droplet Sizing en anglais) est une technique astucieuse qui combine les avantages de l'interférométrie et de l'imagerie pour caractériser en taille et en vitesse des écoulements de gouttes ou de bulles relativement diluée. Elle permet de mesurer la taille de ces objets de manière très précises dans un section de l'écoulement de grande dimension.
- l'**imagerie en transmission**, l'**Ombroscopie** et l'**imagerie Schlieren** sont des méthodes de visualisation à la fois sensibles à la présence d'interfaces et aux gradients d'indice de réfraction. Elles peuvent être considérées comme des variations autour d'un même principe de mesure, tout comme la technique BOS (pour Background oriented Schlieren en anglais) dont il ne sera pas question ici bien qu'elle leur soit aujourd'hui préférée dans la communauté de la mécanique des fluides. Toutes ces techniques fournissent des informations en 2 dimensions, non pas dans une section de l'écoulement mais intégrées selon l'axe optique. Elles s'appliquent donc préférentiellement dans des écou-

lements 2D, où elles permettent de quantifier des gradients d'indice de réfraction, de température ou de pression.

Ce document est organisé en 7 chapitres. Après cette introduction, le chapitre 2 rappelle quelques généralités sur les ondes électromagnétiques. Les deux chapitres suivants (3 et 4) sont dédiés au problème direct de l'interaction entre lumière et particules. Différents cadres théoriques sont présentés et discutés. Des formulations adaptées à leur implémentation numérique et à leur application sont proposées. Quelques exemples permettent d'illustrer les performances, les possibilités d'application et les limites de ces outils mais aussi de décrire les principaux phénomènes de diffusion/diffraction, d'en faire une interprétation physique et d'illustrer le potentiel qu'ils recèlent en matière de métrologie. Le chapitre 3 est consacré aux théories scalaires de la diffraction qui constituent le cadre général de l'holographie numérique qui sera abordée plus loin dans le chapitre 6. Ces théories de la diffraction sont introduites et discutées en mettant l'accent sur les hypothèses sur lesquels elles reposent et sur leur limites. Le chapitre 4 est consacré à la Théorie de Lorenz-Mie Généralisée, extension de la Théorie de Lorenz-Mie qui apporte une solution semi-analytique au problème de l'interaction entre une sphère et un faisceau laser de forme quelconque, sans limite de taille et d'indice pour la sphère. Outre son intérêt pratique dans le cas particulier d'objets sphériques (e.g. bulles ou gouttes de petites dimensions), ce cadre théorique rigoureux, ces nombreuses extensions et les outils numériques associés présentent un grand intérêt pour comprendre et interpréter les phénomènes de diffusion, comprendre et quantifier les limites d'autres approches, moins rigoureuses mais plus versatiles comme les théories de la diffraction ou l'optique géométrique.

Le chapitre 5 est consacré aux impulsions laser ultra-brèves, à leur interaction avec des objets diffusants, isolés ou en grande concentration et à leur application à la métrologie des milieux diphasiques. Ces impulsions dont la durée peut être comprise entre quelques femtosecondes ( $10^{-15}$  s) et quelques picosecondes ( $10^{-12}$  s) présentent des propriétés remarquables qui modifient notre manière de concevoir les phénomènes d'interaction lumière/particules et offrent de nouvelles perspectives en matière de métrologie, pour les milieux diphasiques denses en particulier.

Le chapitre 6 est dédié à l'holographie numérique en ligne et aux méthodes de reconstruction des hologrammes. Une attention particulière est portée aux méthodes de reconstructions par une approche de type "problème inverse". Ces méthodes d'une précision remarquable sont

l'objet d'un engouement croissant dans la communauté de l'holographie numérique. Elles sont au cœur de ce document car leur précision et leur potentiel pour la métrologie dépend fortement des modèles de propagation de la lumière ou d'interaction lumière particules sur lesquels elles s'appuient.

Le chapitre 7 propose trois exemples d'applications de techniques optiques avancées à la mécanique des fluides, qui s'appuient sur les outils et les connaissances exposés dans les chapitres précédents. Dans un premier exemple l'holographie numérique en ligne est couplée à une méthode de reconstruction "problème inverse" pour étudier l'évaporation de gouttelettes dans une turbulence homogène et isotrope. L'étude repose sur le suivi lagrangien d'un grand nombre de gouttelettes dans un volume et une mesure précise de l'évolution de leur diamètre. Ces mesures conduisent à une description statistique du taux d'évaporation en fonction de l'intensité de la turbulence qui est confrontée à un modèle d'évaporation simple où les effets convectifs sont introduit à travers un nombre de Sherwood basé sur la vitesse relative des gouttelettes.

Dans un second exemple, des techniques relativement classiques d'imagerie sont couplées pour visualiser des écoulements cavitants, comprendre les mécanismes de formation et de développement de la cavitation dans une expérience d'intérêt industriel, et extraire des éléments quantitatifs de technique de visualisation réputées qualitatives. Cette application illustre bien la nécessité de maîtriser les processus de formation d'images et l'importance d'une interprétation rigoureuse des ces images pour en extraire des informations quantitatives et fiables, y compris quand des modèles d'optique géométrique suffisent à décrire les phénomènes d'interaction mis en jeu.

Dans un troisième exemple, l'ILIDS (Interferometric Laser Imaging for Droplet Sizing en anglais), une technique très populaire à la fin des années 1990, est revisitée et adaptée à la caractérisation d'aérosols respiratoires, en taille, en vitesse et en concentration. La technique repose sur les propriétés de diffusion des gouttelettes et sur l'expertise associée aux développements décrits dans le chapitre 4 mais il montre surtout la nécessité de maîtriser l'ensemble du montage optique, de la source à la détection en passant par la diffusion et les optiques de collection, pour pousser la technique dans ces derniers retranchements et extraire des mesures un maximum d'informations. Les développements apportés à la technique ILIDS et rapportés dans cet article permettent notamment de mesurer des tailles de goutte de l'ordre de  $2 \mu\text{m}$  dans un volume, les 3 composantes de leur vitesse et d'en estimer la concentration malgré les biais

introduit par une large distribution de taille et un éclairage inhomogène.

# Chapitre 2

## Généralités sur les ondes électromagnétiques

Ce chapitre a pour objectif d'introduire des notions de base de l'électromagnétisme dont découlent les outils et formalismes présentés dans la suite du document pour décrire les interactions entre lumière et particules. Il permet d'introduire les hypothèses qui se cachent derrière les théories scalaire de la diffraction, la Théorie de Lorenz-Mie ou l'optique géométrique afin de mieux appréhender les limites et leur complémentarité.

### 2.1 Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell régissent l'ensemble des phénomènes électromagnétiques. A l'origine constituées d'un ensemble de 20 équations [6], Maxwell leur donne la forme plus concise d'un ensemble de 8 équations en 1873 [7]. Elles sont reformulées en 1884 par Oliver Heaviside sous la forme de quatre équations vectorielles. Ces équations décrivent la propagation des ondes électromagnétiques dans la matière, à l'échelle macroscopique. C'est plus tard que Lorentz proposera un ensemble d'équation décrivant les ondes électromagnétique à l'échelle microscopique, dans le vide (un vide contenant des sources ponctuelles de courant et de charge).

### 2.1.1 Equations de Maxwell à l'échelle macroscopiques, dans la matière

Maxwell décrit le comportement des ondes électromagnétiques dans la matière à l'échelle macroscopique en moyennant les champs sur des éléments de volume infinitésimaux. Ses équations peuvent s'écrire de manière concise sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Les vecteurs  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , sont fonction de la position et du temps et représentent respectivement les champs électrique et magnétique. Les vecteurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  représentent l'induction électrique (ou vecteur déplacement) et l'induction magnétique. Les termes sources de ces équation sont représentés par des densités de charge et de courant. On distingue les sources d'excitation externes (associé à un générateur) des sources induites par les champs électromagnétiques, par conduction par polarisation et par aimantation. Dans les equations (2.1)-(2.4) les sources réelles d'excitation sont la densité de charge électriques  $\rho_e$  et la densité de courant  $\mathbf{J}_e$ ;  $\mathbf{J}_c$  est la densité de courant induite par conduction. Les sources induites par polarisation et aimantation n'apparaissent pas explicitement mais au travers des vecteurs induction  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  et des vecteurs polarisation et aimantation  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$  qui vérifient

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (2.6)$$

Dans ces équations,  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  sont les constantes définissant les propriétés électromagnétiques du vide, à savoir la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.

### 2.1.2 Conditions limites

Les équations précédentes sont valables à l'échelle macroscopique. Elle sont valables en tout point ordinaire de l'espace, autour desquels les propriétés physiques du milieu évoluent

continuum. A l'interface entre des milieux ces propriétés présentent des discontinuités et les équations qui décrivent l'évolution des champs doivent être complétées par les conditions limites suivantes

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \quad (2.8)$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \wedge \mathbf{n} = 0 \quad (2.9)$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \quad (2.10)$$

où les indices 1 et 2 désignent les deux milieux,  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur unitaire normal à l'interface et dirigé de 1 vers 2,  $\rho_s$  la densité surfacique de charge et  $\mathbf{J}_s$  la densité surfacique de courant.

### 2.1.3 Milieu linéaire, local, homogène et isotrope (l.l.h.i.)

La résolution des équations de Maxwell dans la matière nécessite des relations supplémentaires, dites constitutives qui relient polarisation et aimantation aux champs électrique et magnétique. Dans le cas général, ces relations sont complexes, elles peuvent faire intervenir des termes de couplage entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , des termes quadratiques et d'ordres plus élevés, une dépendance non locale dans le temps et l'espace (introduisant des termes de convolutions spatiales et temporelles). Ces relations peuvent également s'écrire sous forme de tenseurs afin de prendre en compte des propriétés anisotropes du milieu. Les travaux décrits dans ce document ne requièrent pas un tel niveau de complexité. Dans la suite, nous considérerons presque tout le temps des milieux linéaires, locaux, homogène et isotrope (l.l.h.i.), sans source d'excitation externes. Dans un tel milieu, le vecteur polarisation est simplement proportionnel au champ électrique et s'écrit

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

où  $\chi_e$  est la susceptibilité électrique du milieu.

Le vecteur aimantation est lui proportionnel au champ magnétique et s'écrit

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.12)$$



où  $\chi_m$  est la susceptibilité magnétique du milieu. On introduit alors la perméabilité magnétique  $\mu$  du milieu

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

et sa permittivité électrique  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0(1 + \chi_e) - \frac{i\sigma}{\omega} \\ &= \varepsilon_r - \frac{i\sigma}{\omega} \end{aligned} \quad (2.15)$$

de sorte que

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.17)$$

Un milieu conducteur contient des charges libres qui sont susceptibles de se déplacer sous l'effet d'un champ électromagnétique. Dans la plupart des matériaux, la densité de courant dépend du champ électrique selon la loi d'Ohm

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.18)$$

où  $\sigma$  est la conductivité du milieu.  $\sigma$  est scalaire et constante dans le cas d'un milieu l.l.h.i. La loi de conservation de la charge et l'équation de Maxwell-Gauss permettent de montrer que la densité de charge associée s'annule quasi instantanément. On pose donc  $\rho_c = 0$ .

Enfin, dans un milieu l.l.h.i. les densités de charge et de courant  $\rho_e$  et  $\mathbf{J}_e$  n'ont plus lieu d'être et les équations de Maxwell se réduisent à

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.20)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu_0(1 + \chi_m) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.21)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon_0(1 + \chi_e) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.22)$$

### 2.1.4 Régime harmonique

Ces équations se simplifient encore si on se place en régime Harmonique, i.e. dans le cas où les champs sont des fonctions harmoniques du temps, soit

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{r}) \cos(i\omega t - \varphi(\mathbf{r})), \quad \text{où } \mathbf{X} = \mathbf{E}, \mathbf{H} \text{ et } \mathbf{x} = \mathbf{e}, \mathbf{h} \quad (2.23)$$

qui sera décrit à l'aide de la notation complexe

$$\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{r}) e^{-i\varphi(\mathbf{r})} e^{i\omega t} \quad (2.24)$$

Dans la suite, le tilde sera oublié pour ne pas alourdir les notations et  $X$  désignera aussi bien la quantité réelle que sa notation complexe. Le terme  $\exp(i\omega t)$  sera également omis, sauf exception. Il convient de noter que le signe de l'harmonique temporelle ( $e^{i\omega t}$  ou  $e^{-i\omega t}$ ) est un choix par convention qui varie d'un auteur à l'autre ou d'une communauté à l'autre. On retiendra simplement que le passage d'une convention à l'autre se fait en remplaçant toutes les quantités par leur complexe conjugué.

En régime harmonique, l'opérateur  $(\frac{\partial \cdot}{\partial t})$  est équivalent à l'opérateur  $(i\omega \cdot)$  et les équations (2.19) - (2.22) deviennent

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.26)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.27)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (2.28)$$

Notons que tout champ électromagnétique dépendant du temps peut être décrit sous la forme d'une décomposition de Fourier et considéré comme une somme pondérée d'ondes monochromatiques élémentaires obéissant aux équations (2.25)-(2.28).

### 2.1.5 Equation de Helmholtz

On se place dans le cas d'un milieu l.l.h.i. et des équations (2.19)-(2.22). Si on applique l'opérateur  $\nabla \wedge$  à l'équation (2.21) et qu'on introduit les autres équations et l'identité vectorielle

$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ , on montre que dans un milieu l.l.h.i. le champ électrique  $\mathbf{E}$  vérifie

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_r \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.29)$$

On montre de manière similaire que le champ  $\mathbf{H}$  et les inductions  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  obéissent à la même équation, tout comme les potentiels vecteurs magnétique et électrique, les potentiels scalaire associés et les potentiels de Hertz-Debye [8]. En régime harmonique, cette équation prend la forme de l'équation de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (2.30)$$

où  $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$

Cette équation vectorielle est valable pour tous les systèmes de coordonnées. Si on l'explique en coordonnées cartésiennes il vient que chacune des composantes  $E_i$  du champ  $\mathbf{E}$  vérifient la même équation sous sa forme scalaire.

$$\nabla^2 E_i + k^2 E_i = 0 \quad (2.31)$$

Mais ca n'est pas le cas pour des systèmes de coordonnées curvilignes, en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques notamment.

**Les problèmes de diffraction se réduisent ainsi souvent à la résolution d'une ou plusieurs équations scalaires, mais à condition que les conditions limites du problème puissent s'écrire simplement en coordonnées cartésiennes.** C'est le cas pour les problèmes classiques de diffraction à travers un écran ou pour formaliser la propagation de la lumière de plan à plan dans un milieu l.l.h.i. comme nous le verrons dans le chapitre 3. Pour des géométries plus complexes, quand les conditions limites ne s'écrivent pas de manière simple en coordonnées cartésiennes, il faut utiliser un autre système de coordonnées ; l'équation de Helmholtz ne s'applique alors pas composante par composante et il faut faire appel à un ou plusieurs potentiels, vecteurs ou scalaires pour poser et résoudre le problème de diffusion. C'est l'approche adoptée par les méthodes dites "à variables séparables" dont la Théorie de Lorenz-Mie (ou théorie de Mie, voir le chapitre 4) est la plus ancienne et la plus connue.

### 2.1.6 Intensité de l'onde électromagnétique : Vecteur de Poynting

Dans nos expériences et nos systèmes de mesures les champs électromagnétiques ne sont jamais mesurés directement. Les capteurs simples (photodiode, photomultiplicateur, capteur CCD ou CMOS, ...) ne sont sensibles qu'au flux d'énergie associé à ces ondes. Le vecteur de poynting [9] représente en amplitude et en direction la densité de flux d'énergie transportée par une onde électromagnétique. Il est défini à partir des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  (sans utiliser la représentation complexe) par

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \quad (2.32)$$

En régime harmonique, on définit ce vecteur à partir des représentations complexes des champs

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{\mathbf{E}} \wedge \tilde{\mathbf{H}}^*] \quad (2.33)$$

où  $\tilde{\mathbf{H}}^*$  désigne le conjuguée de  $\tilde{\mathbf{H}}$ . La norme de  $\mathbf{S}$  est la densité de puissance de l'onde électromagnétique (ou intensité) et l'énergie transportée par l'onde électromagnétique à travers une surface  $\Sigma$ , prend la forme

$$\int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \text{Re}[\tilde{\mathbf{E}} \wedge \tilde{\mathbf{H}}^*] \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (2.34)$$

Dans un certain nombre de formalismes, l'onde lumineuse est décrite à l'aide d'un seul scalaire, une seule amplitude complexe  $U$  souvent associée au champ électrique. Ces descriptions simplifiées qui seront abordés dans le chapitre suivant reposent sur une hypothèse (explicité ou non) de proportionnalité entre les champs électrique et magnétique. Dans ce cas, l'intensité de l'onde s'écrit simplement

$$I = \frac{1}{2} [U \cdot U^*] = \frac{1}{2} |U|^2$$

## 2.2 Approximation de l'Optique Géométrique

Le formalisme le plus répandu pour décrire la lumière, sa propagation et ses interactions avec des objets est sans nul doute l'optique géométrique. Elle repose sur la notion de rayon lumineux, connue et appliquée depuis l'Antiquité pour décrire les phénomènes optiques. Les lois classiques et universellement connues de l'optique géométrique peuvent être dérivées des équations de l'électromagnétisme à partir d'approximations.

### 2.2.1 Equation eikonale

L'approximation de l'optique géométrique est valable dans les milieux **linéaires, locaux, isotropes et transparents, non conducteurs** ( $\sigma = 0$ ), **sans charges ni courant** ( $\rho_e = 0, J_e = 0$ ). Ces milieux ne sont **pas forcément homogènes**. Si on admet ces premières hypothèses et qu'on se place en régime harmonique, les équations de Maxwell (2.1) - (2.4) prennent la forme suivante

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \quad (2.35)$$

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0 \quad (2.36)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -i\omega\mu \mathbf{H} \quad (2.37)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega\varepsilon \mathbf{E} \quad (2.38)$$

On adopte ensuite les notations de la relation (2.24) pour les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  et on introduit la quantité  $L$  telle que

$$\varphi = \frac{\omega}{c}L = \frac{2\pi}{\lambda}L = k_0L \quad (2.39)$$

Après quelques calculs qui sont détaillés dans la référence [10] (en unités de Gauss et non pas en notation SI comme dans le document présent), les relations (2.35) à (2.38) deviennent

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \nabla L = \frac{1}{ik_0} (\nabla \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) + \mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \nabla (\ln \varepsilon)) \quad (2.40)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \nabla L = \frac{1}{ik_0} (\nabla \cdot \mathbf{h}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \nabla (\ln \mu)) \quad (2.41)$$

$$\nabla L \wedge \mathbf{e}(\mathbf{r}) - c\mu \mathbf{h}(\mathbf{r}) = \frac{1}{ik_0} \nabla \wedge \mathbf{e}(\mathbf{r}) \quad (2.42)$$

$$\nabla L \wedge \mathbf{h}(\mathbf{r}) + c\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{1}{ik_0} \nabla \wedge \mathbf{h}(\mathbf{r}) \quad (2.43)$$

L'approximation de l'optique géométrique consiste à ajouter aux hypothèses précédentes une hypothèse de **variation lente de l'amplitude des champs électriques et magnétiques devant la variation de la phase  $\varphi$** . Cette hypothèse conduit à négliger les termes de droite des relations (2.42) et (2.43) qui deviennent

$$\nabla L \wedge \mathbf{e}(\mathbf{r}) = c\mu \mathbf{h}(\mathbf{r}) \quad (2.44)$$

$$\nabla L \wedge \mathbf{h}(\mathbf{r}) = -c\varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{r}) \quad (2.45)$$

et qui, combinées, conduisent à

$$[\nabla L (\nabla L \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h} (\nabla L)^2] = -c^2 \mu \varepsilon \mathbf{h} \quad (2.46)$$

ou alternativement à

$$[\nabla L(\nabla L \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{e}(\nabla L)^2] = -c^2 \mu \varepsilon \mathbf{e} \quad (2.47)$$

Si on ajoute une hypothèse de variation lente de  $\mu$  (ou de  $\ln \mu$ ) ou plus simplement qu'on considère un milieu non magnétique ( $\mu = \mu_0$ ) la relation (2.41) devient

$$\mathbf{h} \cdot \nabla L = 0 \quad (2.48)$$

et la relation (2.46) conduit à

$$(\nabla L)^2 = c^2 \mu \varepsilon = n_r^2 \quad (2.49)$$

où  $n_r = c\sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}$  est l'indice de réfraction du milieu (réel d'après nos hypothèses). L'équation (2.49) est l'**équation eikonal**, équation fondamentale de l'optique géométrique.

Notons que si on néglige la variation de  $\ln \varepsilon$  la relation (2.45) devient

$$\mathbf{e} \cdot \nabla L = 0 \quad (2.50)$$

qui avec la relation (2.47) conduit également à l'équation eikonal. Cette redondance traduit le fait que ces hypothèses de variation lentes des amplitudes et des propriétés physiques sont liées. Mathématiquement, il n'est pas nécessaire d'invoquer les relations (2.40) et (2.41) et les variations lentes de  $\ln \mu$  ou  $\ln \varepsilon$  car les relations (2.46) et (2.47) et la seule hypothèse de variation lente des amplitudes impliquent que  $\nabla L$ ,  $\mathbf{E}$ , et  $\mathbf{H}$  sont perpendiculaires et donc que les relations (2.48) et (2.50) se vérifient. Notons enfin que toutes ces conditions sont réunies si on admet simplement que  $\lambda \rightarrow 0$ , une hypothèse simple mais légèrement réductrice, couramment retenue.

## 2.2.2 Formules usuelles de l'optique géométrique

les relations (2.40) et (2.40) impliquent que  $\nabla L$ ,  $\mathbf{E}$ , et  $\mathbf{H}$  forment un trièdre rectangle direct. Dans l'approximation de l'optique géométrique l'onde se comporte ainsi localement comme une onde plane. Le flux d'énergie associé à l'onde (voir section 2.1.6) se propage dans la direction de  $\nabla L$ , c'est à dire perpendiculairement aux surfaces d'onde définies par  $\varphi = cste$  ( $L = cste$ ). On introduit la notion de rayon lumineux en définissant une courbe en tout point perpendiculaire aux surfaces d'ondes, c'est à dire colinéaire à  $\nabla L$ . Si on note  $\boldsymbol{\tau}$  le vecteur unitaire de la direction de  $\nabla L$ , on écrit, en tenant compte de l'équation eikonale

$$\nabla L = n_r \boldsymbol{\tau}$$

On introduit souvent les vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \boldsymbol{\tau}$  ou  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} n_r \boldsymbol{\tau}$  de sorte que

$$\nabla\varphi = n_r \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$$

Si on considère deux points  $P$  et  $P'$  infiniment proches sur un même rayon lumineux et que l'on note  $\tau$  l'abscisse curviligne le long de ce rayon il vient

$$dL = L(P') - L(P) = n_r d\tau$$

En intégrant cette relation entre deux points  $A$  et  $B$  quelconques du rayon, on écrit

$$[AB] = L(B) - L(A) = \int_A^B n_r d\tau$$

que l'on appelle chemin optique entre  $A$  et  $B$ . Entre ces deux points, la différence de phase s'écrit

$$\Delta\varphi = k_0 [AB] = \frac{2\pi}{\lambda} [AB] \quad (2.51)$$

L'équation eikonal, ou la relation vectorielle (2.2.2) ne sont d'aucun secours pour appliquer l'optique géométrique à des problèmes concrets. En revanche, on peut établir une équation pour les rayons lumineux exprimant la variation de la direction de propagation le long d'un rayon lumineux. Pour un point  $P$  de coordonnées  $\mathbf{r}$  se déplaçant sur un rayon on a

$$n_r \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \nabla L \quad (2.52)$$

en différentiant cette relation et après quelques de calculs, on obtient une équation différentielle pour le rayon :

$$\frac{d}{d\tau} \left( n_r \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) = \nabla n_r \quad (2.53)$$

qui permet par exemple de quantifier la déviation des rayons lumineux en présence d'un gradient d'indice, déviation à la base de la technique ombroscopie et de la technique Schlieren (section 7.3).

Notons que dans le cas particulier où  $n_r = cste$ , les solutions de la relation (2.53) sont des droites. La lumière se propage de manière rectiligne dans un milieu homogène.

Pour rendre compte des aspects énergétiques il faut considérer des pinceaux de lumière constitués de rayons très proches les uns des autres et veiller à respecter la loi de conservation des flux (de l'intensité) [10] (voir figure 2.1.a)

$$I_1 dS_1 = I_2 dS_2 \quad (2.54)$$

Pour décrire le comportement de la lumière à l'interface entre deux milieux dans le cadre de l'optique géométrique, on applique les lois de Snell-Descartes. Ces lois se déduisent des relations précédentes de différentes manières, à partir du principe de Fermat, en appliquant les conditions limites de la section 2.1.2 ou encore comme dans la référence [10] à partir de la relation (2.52) qui implique

$$\nabla \wedge n_r \boldsymbol{\tau} = 0$$

L'interface  $\Sigma$  entre deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$  est décrite par un gradient d'indice sur une épaisseur  $h$  qui dans la limite  $h \rightarrow 0$  conduit pour la réfraction (figure 2.1.b) à

$$\mathbf{n}_{12} \wedge (n_2 \boldsymbol{\tau}_2 - n_1 \boldsymbol{\tau}_1) = 0 \quad (2.55)$$

$$\text{ou encore} \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.56)$$

et pour la réflexion (figure 2.1.c) à

$$\mathbf{n}_{12} \wedge (n_2 \boldsymbol{\tau}_2 - n_1 \boldsymbol{\tau}_1) = 0 \quad (2.57)$$

$$\text{ou encore} \quad \theta'_1 = \pi - \theta_1 \quad (2.58)$$

Dans l'approximation de l'optique géométrique, les ondes se comportent localement comme une onde plane. De même, ces conditions limites n'ont un sens que si l'interface peut être considérée comme plane localement, si sa **courbure est négligeable à l'échelle de la longueur d'onde**.

L'amplitude des champs après réfraction ou réflexion sont décrit par les coefficients de Fresnel. Ces coefficients diffèrent selon la polarisation de la lumière par rapport au plan d'incidence (plan contenant les rayons incident, réfracté et réfléchi). On distingue ainsi les composantes parallèles au plan d'incidence (ou TM pour transverse magnétique) et perpendiculaires au plan d'incidence (ou TE pour transverse électrique). On définit les coefficients de transmission comme le rapport des amplitudes réfractée et incidente et les coefficients de réflexion comme les rapports des amplitudes réfléchies et incidentes. Ils s'expriment en fonction des indices de



réfraction ( $n_1$  et  $n_2$ ) et des angles d'incidence et de réfraction  $\theta_1$  et  $\theta_2$  de la manière suivante

$$t_{\parallel} = \frac{E_{2\parallel}}{E_{1\parallel}} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (2.59)$$

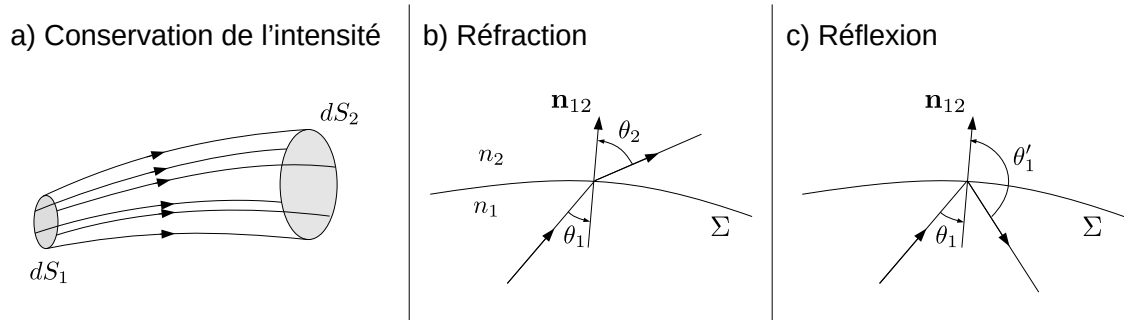
$$t_{\perp} = \frac{E_{2\perp}}{E_{1\perp}} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (2.60)$$

$$r_{\parallel} = \frac{E'_{1\parallel}}{E_{1\parallel}} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (2.61)$$

$$r_{\perp} = \frac{E'_{1\perp}}{E_{1\perp}} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (2.62)$$

Les interactions entre lumière et objets peuvent ainsi être décrites à l'aide de rayons dont la propagation est régie par les relations précédentes. On associe à chaque rayon une amplitude, une phase et un état de polarisation. Le rayon est lui-même décrit par une succession de positions ( $\mathbf{r}$ ) et de direction de propagation ( $\boldsymbol{\tau}$ ).

La phase associée à chaque rayon évolue avec la longueur du rayon (chemin optique) et avec les réflexions (sauts de phase présents dans les coefficients de Fresnel). Dans les modèles les plus élaborées ([11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]) la courbure du front d'onde est associée à chaque rayon (pinceau lumineux) ce qui permet d'intégrer la loi de conservation d'intensité mais aussi de comptabiliser les sauts de phase (de  $\pi/2$ ) au passage de lignes focales (quand les champs transverses associés au pinceau de lumière se "retournent" à la focalisation).



**FIGURE 2.1** – illustration des lois de conservation de l'intensité (a) de réfraction (b) et de réflexion (c) en Optique Géométrique.

L'optique géométrique est un modèle simple et intuitif qui s'adapte à toutes sortes de géométries. Il est permis notamment de décrire des systèmes optiques comme celui composé de lentilles asphériques décrit dans la section 7.2. Plus généralement il peut être appliqué à décrire la propagation de la lumière à des échelles grandes devant la longueur d'onde et est potentiellement capable de décrire les interactions de la lumière avec des objets de formes complexes.

En revanche il repose sur des hypothèses fortes qui ne permettent pas de rendre compte de toute la complexité de l'interaction et conduit à des résultats erronés pour des objets de petite dimension ou présentant des courbures de petite dimension, typiquement inférieur à quelques dizaines de longueurs d'onde. Cependant, y compris pour des objets de plus grandes dimensions, les modèles basés sur l'optique géométrique doivent être utilisés avec prudence car il ne rendent pas compte de l'ensemble des phénomènes d'interaction. Dans les chapitres suivants nous verrons en particulier que cette approximation est inadaptée quand les effets d'onde de surfaces deviennent important ou quand on cherche à décrire des phénomènes comme la diffusion aux angles d'arcs-en-ciel pour des gouttes ou proche de l'angle critique pour des bulles. Bien sûr, l'optique géométrique ne permet pas de décrire les phénomènes de diffraction qui sont abordés dans le chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Théories scalaires de la diffraction

Dans de nombreux cas, décrire les ondes lumineuses grâce à un seul scalaire s'avère suffisant. C'est cette description qui a été adoptée pour prendre en compte la nature ondulatoire de la lumière, bien avant la naissance de l'électromagnétisme. C'est sur cette description scalaire que reposent les théories scalaires de la diffraction et le principe de Huygens auquel elles apportent des formulations mathématiques plus ou moins rigoureuses. Aujourd'hui encore, cette approche est couramment préférée à une approche vectorielle. C'est le cas en particulier dans le domaine de l'holographie, ou plus généralement dès qu'il est possible de travailler en coordonnées cartésiennes. Chaque composante de chaque champ vérifie alors l'équation de Helmholtz sous sa forme scalaire (section 2.1.5). Pour des conditions aux limites appropriées, résoudre cette équation pour une seule composante ou un potentiel scalaire suffit alors.

### 3.1 Principe de Huygens

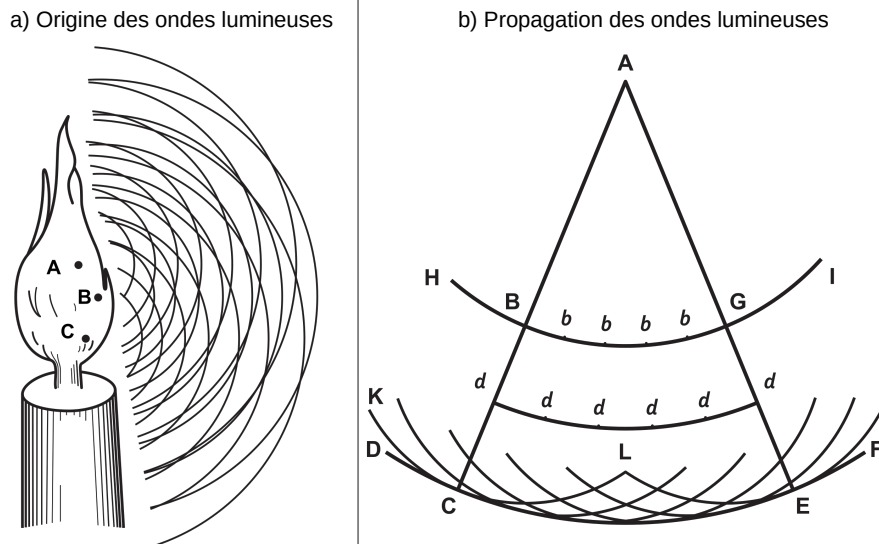
Cristiaan Huygens énonce son principe en 1678 dans son traité de la lumière qui sera publié en 1690 [19]. Il le considère alors comme un artifice géométrique permettant de décrire la propagation des fronts d'onde. C'est plus tard qu'on lui reconnaîtra son universalité, suite notamment aux reformulations qu'en ont fait Fresnel et Kirchhoff.

Ce principe peut s'énoncer de la manière suivante :

- *chaque élément d'une surface d'onde peut être considéré comme le centre d'une perturbation secondaire donnant naissance à de nouvelles ondes sphériques.*
- *la position du front d'onde à un instant postérieur est constitué par l'enveloppe de toutes*

ces ondes secondaires.

- fréquence et vitesse des ondes secondaires sont identiques à celle de l'onde première.
- l'amplitude de l'onde en tout point se déduit de la superposition de toutes les ondelettes.



**FIGURE 3.1** – Origine et propagation des ondes selon Huygens. Illustrations extraites de son traité de la lumière [19].

## 3.2 Théorème de Green

On doit à Kirchhoff la première formulation rigoureuse d'une théorie scalaire de la diffraction mais c'est à Rayleigh et Sommerfeld que l'on doit les formulations les plus consistantes qui font aujourd'hui encore référence en matière de diffraction scalaire. Dans tous les cas, on considère une onde monochromatique, fonction harmonique du temps se propageant dans un milieu linéaire, local, homogène et isotrope. Cette onde est représentée par un unique scalaire de représentation complexe  $U$ . Cette onde s'écrit ainsi

$$\operatorname{Re}[U(\mathbf{P}) \exp(i\omega t)] \quad (3.1)$$

et  $U$  vérifie l'équation de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{P}) = 0 \quad (3.2)$$

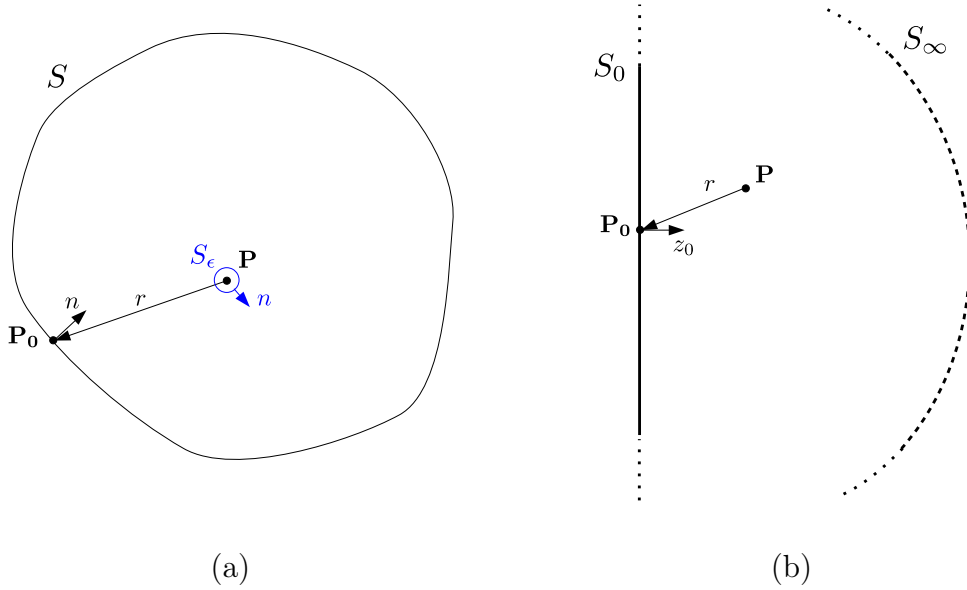
Pour résoudre cette équation, on fait appel au théorème de Green [20] qui stipule que si  $U$  et  $U'$  continûment dérivable au premier et au deuxième ordre à l'intérieur d'un volume  $V$  fermé par une surface  $S$  et sur cette surface alors

$$\int \int \int_V (U \nabla^2 U' - U' \nabla^2 U) dV = - \int \int_S \left( U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \quad (3.3)$$

où  $n$  est la normale intérieure à  $S$ . Si les fonctions  $U$  et  $U'$  sont des solutions de l'équation de Helmholtz (3.2), le terme sous l'intégrale de volume s'annule et il vient

$$\int \int_S \left( U' \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial U'}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (3.4)$$

A partir de la relation (3.4) il est possible d'établir une relation entre la fonction  $U$  en un point quelconque  $\mathbf{P}$  intérieur à  $S$  et les valeurs de  $U$  sur la surface  $S$ . Pour ce faire, il faut choisir une fonction de Green  $U'$ , solution de l'équation de Helmholtz sur et à l'intérieur de  $S$  et dont la définition fait intervenir le point  $\mathbf{P}$ .



**FIGURE 3.2** – Illustration (a) du théorème de Helmholtz-Kirchhoff et (b) de l'intégrale de Fresnel-Kirchhoff.

### 3.3 Intégrale de Kirchhoff

La fonction  $U' = \exp(-ikr)/r$  qui représente une onde sphérique issue d'un point source  $\mathbf{P}$  est une solution élémentaire de l'équation de Helmholtz en tout point excepté en  $P$  où elle présente une singularité. Si le point  $\mathbf{P}$  est extérieur à la surface  $S$ , la relation (3.4) conduit à

$$\int \int_S \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(-ikr)}{r} \right) - \frac{\exp(-ikr)}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS = 0 \quad (3.5)$$

Ce premier résultat n'est pas utile ici mais il le sera dans la prochaine section.

Si on considère maintenant que le point  $P$  est intérieur à  $S$  (voir figure 3.2.a), la singularité en  $P$  interdit d'appliquer la relation (3.4). On définit alors une petite surface sphérique de rayon  $\epsilon$  autour du point  $P$  et on applique la relation (3.4) au volume délimité par les deux surfaces  $S$  (à l'extérieur) et  $S_\epsilon$  (à l'intérieur), excluant ainsi le point  $P$  et la singularité du volume. En considérant la limite pour  $\epsilon \rightarrow 0$ , on montre [21] que

$$\int \int_{S_\epsilon} \left( U' \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial U'}{\partial n} \right) dS_\epsilon \rightarrow 4\pi U(P) \quad (3.6)$$

ce qui conduit à la forme générale du **théorème intégral de Helmholtz-Kirchhoff**

$$U(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(-ikr)}{r} \right) - \frac{\exp(-ikr)}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS \quad (3.7)$$

Cette relation permet d'exprimer la fonction  $U$  en tout point  $\mathbf{P}$  intérieur à la surface  $S$  en fonction des valeurs de  $U$  et de sa dérivée sur toute cette surface.  $r$  est la distance entre  $\mathbf{P}$  et le point  $\mathbf{P}_0$  de  $S$ ,  $n$  est la normale intérieure à  $S$  en  $P_0$ . Sous cette forme, l'intégrale s'applique à n'importe quelle surface  $S$ , à condition de pouvoir y définir les conditions limites pour  $U$  et sa dérivée. De ce point de vue, cette intégrale est plus générale que les intégrales de Rayleigh-Sommerfeld et elle mériterait peut-être qu'on s'y attarde un peu plus. En revanche, et c'est ce qui lui vaut d'être relayée au second plan, elle souffre d'une inconsistance mathématique quand on l'applique à un problème plan.

Pour appliquer la relation 3.7 au problème de diffraction dans un plan, on considère une surface fermée  $S$  composée d'une surface plane  $S_0$  et d'une surface de grande dimension  $S_\infty$  qui permet de fermer  $S$ , comme illustré figure 3.2.b. On suppose alors que les conditions limites du problème sont connues sur  $S_0$  et que  $S_\infty$  est suffisamment éloignée pour considérer que la contribution de  $U$  et de son gradient à l'intégrale sur cette surface est négligeable. Plus précisément,

le champ  $U$  doit vérifier la **condition de rayonnement de Sommerfeld**

$$\lim_{r \leftarrow \infty} r \left( \frac{\partial}{\partial r} + ik \right) U(r) = 0$$

Dans ces conditions, l'intégrale sur  $S$  se réduit à l'intégrale sur  $S_0$ , la normale intérieur à  $S_0$  est  $z_0$  et on obtient **l'intégrale de Fresnel- Kirchhoff**

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left[ U(\mathbf{P}_0) \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{\exp(-ikr)}{r} \right) \Big|_{z_0=0} - \frac{\exp(-ikr)}{r} \frac{\partial U(\mathbf{P}_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} \right] dx_0 dy_0 \quad (3.8)$$

avec  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ . Dans le cas simple d'un écran opaque percé d'une ouverture,  $U$  est égale à l'onde incidente dans l'ouverture et la condition qui s'impose à l'arrière de l'écran est  $U = 0$ . Si comme Kirchhoff on impose également  $\partial U / \partial n = 0$  à l'arrière de l'écran on aboutit à une inconsistance mathématique puisque ensemble ces deux conditions imposent la nullité de  $U$  partout. L'intégrale (3.8) conduit à des résultats correctes loin de l'ouverture. En revanche elle ne permet pas de reproduire les conditions limites imposées. C'est cette inconsistance qui a conduit Rayleigh et Sommerfeld à proposer des formulations alternatives.

### 3.4 Intégrales de Rayleigh Sommerfeld

Les solutions de Rayleigh et de Sommerfeld permettent d'écrire des conditions limites consistantes au problème de diffraction par un écran plan, mais elles imposent de définir des conditions limites dans un plan. On se place donc directement dans le cas où la surface fermée  $S$  de la relation (3.4) est composée d'une portion  $S_0$  du plan  $z = 0$  et d'une très grande surface  $S_\infty$ . On définit alors deux fonctions de Green différentes. La première fonction  $U'$  représente une onde sphérique centrée sur le point  $\mathbf{P}$  intérieur à  $S$  où l'on cherche à évaluer l'onde  $U$ , la deuxième représente une onde sphérique centrée sur le point  $\mathbf{P}_1$ , symétrique de  $\mathbf{P}$  par rapport à la surface  $S_0$  (plan de coordonnée  $z = 0$ ) comme schématisé figure 3.3.a. Pour l'onde issue du point  $\mathbf{P}$ , intérieur à  $S$ , la fonction de Green  $U'$  s'écrit

$$U' = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

et la relation 3.4 conduit comme dans la section précédente à la relation intégrale 3.7, à laquelle seule la surface  $S_0$  contribue, soit

$$\int \int_{S_0} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(-ikr)}{r} \right) - \frac{\exp(-ikr)}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS = 4\pi U(\mathbf{P}) \quad (3.9)$$

Pour l'onde issue du point  $\mathbf{P}_1$ , extérieur à  $S$ , la fonction de Green est

$$U'_1 = \frac{e^{-ikr_1}}{r_1}$$

et on retrouve la relation 3.5, également limitée à la surface  $S_0$ , soit

$$\int \int_{S_0} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(-ikr_1)}{r_1} \right) - \frac{\exp(-ikr_1)}{r_1} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS = 0 \quad (3.10)$$

Partout sur  $S_0$ , on a par  $r = r_1$  et donc

$$\frac{e^{-ikr}}{r} \Big|_{z_0=0} = \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \Big|_{z_0=0}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} \right) \Big|_{z_0=0} = - \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \Big|_{z_0=0}$$

Par conséquent, si l'on soustrait la relation (3.10) à la relation (3.9), on obtient la **première intégrale de Rayleigh-Sommerfeld(RS1)**

$$U(\mathbf{P}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_0} U(\mathbf{P}_0) \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \Big|_{z_0=0} dS \quad (3.11)$$

qui permet de décrire l'onde  $U(\mathbf{P})$  en tout point  $\mathbf{P}$  du demi-espace  $z > 0$  à partir des seules valeurs de  $U(\mathbf{P}_0)$  dans le plan  $z = 0$ . Cette relation est souvent écrite dans l'approximation  $r \gg \lambda$  ou elle devient :

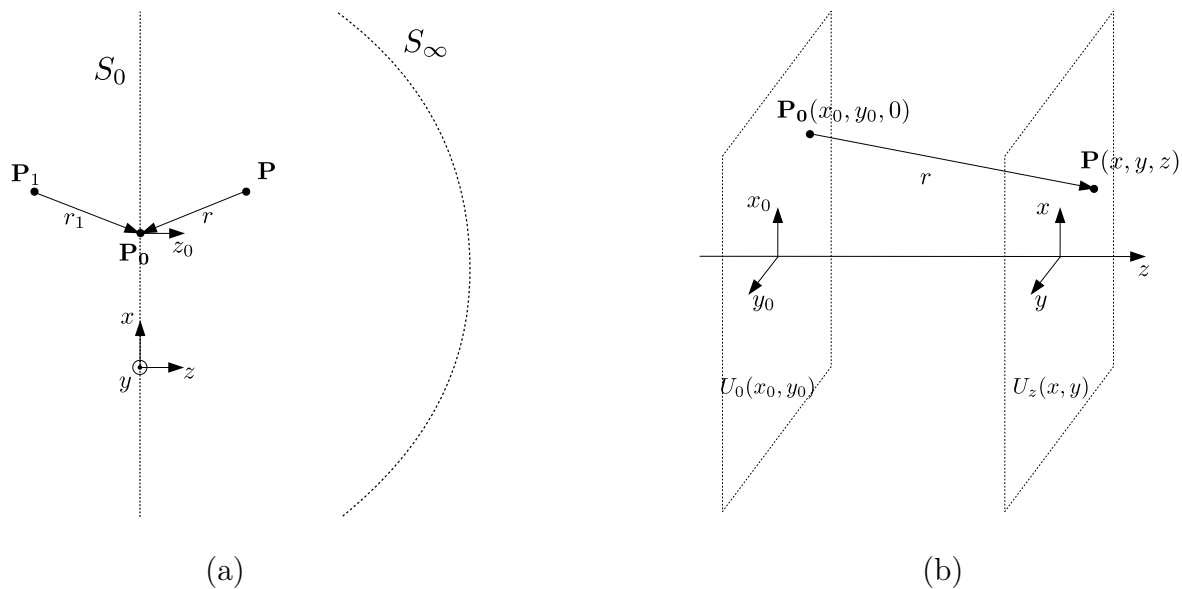
$$U(\mathbf{P}) = \frac{i}{\lambda} \iint_{S_0} U(\mathbf{P}_0) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{z}{r} dS \quad (3.12)$$

Alternativement, si l'on fait la somme des relations (3.9) et (3.10) on obtient la **seconde intégrale de Rayleigh-Sommerfeld**

$$U(\mathbf{P}) = \frac{-1}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{\partial U(\mathbf{P}_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} \frac{e^{-ikr}}{r} dS \quad (3.13)$$

Qui permet de décrire l'onde en  $P$  de coordonnée  $z > 0$  à partir des seules valeurs de  $\frac{\partial U(\mathbf{P})}{\partial z_0}$  dans le plan  $z = 0$





**FIGURE 3.3** – Les intégrales de Rayleigh et Sommerfeld reposent sur l'introduction de fonctions de Green représentant des ondes sphériques issue du point  $\mathbf{P}$  et de son symétrique  $\mathbf{P}'$  par rapport à l'écran (a) ; la première intégrale permet de décrire la propagation de l'amplitude complexe de l'onde d'un plan  $z = 0$  à un autre plan de coordonnée  $z > 0$  (b)

Cette formulation alternative est généralement délaissée au profit de la première car il est souvent plus commode de définir les conditions initiales du problème sur  $U$  que sur son gradient. On remarque aussi le lien bien connu qui existe entre les 3 intégrales : en comparant les relations (3.8), (3.11) et (3.13) on remarque que l'intégrale de Kirchhoff est la demi-somme des deux intégrales de Rayleigh-Sommerfeld. La différence entre ces 3 formulations a fait l'objet de nombreux travaux, aujourd'hui anciens. Dans le cas de la diffraction d'une onde plane ou d'une onde sphérique par une ouverture dans un écran opaque, ces différences s'interprètent comme une contribution des bords de l'ouverture à la diffraction [22]. Ces différences deviennent négligeables quand l'ouverture est grande devant la longueur d'onde et que l'on observe la diffraction en champ lointain.

On retiendra que la première intégrale de Rayleigh-Sommerfeld constitue la formulation scalaire la plus exacte et la plus commode des problèmes de diffraction avec des conditions limites planes. Cette intégrale permet également de décrire la propagation de la lumière de plan à plan, i.e. du plan  $z = 0$  à un plan  $z = cste > 0$  (voir figure 3.3.b) On l'écrit alors

généralement sous une forme plus concise, en remarquant que  $\frac{\partial r}{\partial z_0} = -\frac{\partial r}{\partial z}$ , soit

$$U_z(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \iint_{S_0} U_0(x_0, y_0) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dx_0 dy_0 \quad (3.14)$$

où la distance  $r$  entre les points  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}_0$  est à présent spécifiée pour  $z_0 = 0$ , soit  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$ . La fonction d'onde  $U$  dans le plan de coordonnées  $z$  s'écrit ainsi comme le produit de convolution entre la fonction d'onde dans le plan de coordonnée  $z = 0$  et un noyau  $G_z$ . En effet, la relation (3.17) s'écrit

$$U_z(x, y) = \iint_{S_0} U_0(x_0, y_0) G_z(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 \quad (3.15)$$

avec

$$G_z(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \quad (3.16)$$

où cette fois  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Si on admet que  $U$  et  $G_z$  deviennent négligeable quand  $x$  et  $y$  tendent vers l'infini, les bornes d'intégration peuvent être étendue à  $\pm\infty$  et  $U_z$  devient le produit de convolution entre  $U_0(x, y)$  et le noyau  $G_z$ .

$$\begin{aligned} U_z(x, y) &= \frac{-1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dx_0 dy_0 \\ &= U_0(x, y) * G_z(x, y) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dans le cas ou une onde incidente  $U_{inc}(x, y, z)$  éclaire un plan de transmittance complexe  $\mathcal{T}(x, y)$  en  $z = 0$ , l'onde en  $z$  s'écrit

$$U_z(x, y) = [U_{inc}(x, y, 0)\mathcal{T}(x, y)] * G_z(x, y) \quad (3.18)$$

### 3.5 Theorie du spectre angulaire

Cette approche décrit la propagation d'une onde scalaire, fonction harmonique du temps dans un milieu l.l.h.i. Elle conduit à une **formulation qui est mathématiquement équivalente à la première intégrale de Rayleigh-Sommerfeld** mais présente un avantage en termes d'interprétation physique et offre une alternative intéressante pour le calcul numérique.

On se place toujours dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et on cherche à décrire la propagation d'une amplitude complexe  $U(x, y, z)$  d'un plan défini par  $z = 0$  vers un autre plan défini par  $z = cste$ . L'amplitude complexe en  $z = 0$  est une fonction de  $x$  et  $y$ , notée  $U_0(x, y)$ , que l'on suppose connue et qui appartient à l'espace  $L_2$ , i.e, l'ensemble des fonctions  $f(x, y)$  telles que l'intégrale

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy$$

existe et est finie.

On peut donc définir la transformée de Fourier  $\widehat{U}_0(\eta, \xi)$  de  $U_0(x, y)$  par

$$\widehat{U}_0(\eta, \xi) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U_0(x, y) e^{2i\pi(\eta x + \xi y)} dx dy \quad (3.19)$$

En choisissant volontairement la convention de signe la moins courante afin d'assurer la cohérence de la formulation avec le reste du document, i.e. pour des fonctions harmoniques du temps de la forme  $e^{+i\omega t}$ .

La transformation inverse s'écrit quant à elle

$$U_0(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}_0(\eta, \xi) e^{-2i\pi(\eta x + \xi y)} d\eta d\xi \quad (3.20)$$

Si on procède au changement de variable  $(\alpha, \beta) = (\lambda\eta, \lambda\xi)$ , on obtient l'expression

$$U_0(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-ik(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (3.21)$$

où le terme exponentiel est l'expression en  $z = 0$  d'une onde plane se propageant dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ , avec  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ , soit

$$e^{-ik(\alpha x + \beta y)} = e^{-ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \Big|_{z=0}$$

La relation (3.21) s'interprète ainsi comme un spectre angulaire, un spectre d'ondes planes d'angle d'incidence variable.

On considère à présent l'amplitude complexe  $U(x, y, z)$  en  $z = cste \neq 0$  que l'on note  $U_z(x, y)$ , et sa transformée de Fourier  $\widehat{U}_z(\eta, \xi)$ .

On introduit comme pour  $U_0$  le spectre angulaire de  $U_z$

$$U_z(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}_z\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-ik(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (3.22)$$

Si l'onde représentée par  $U(x, y, z)$  se propage dans un milieu l.l.h.i.,  $U(x, y, z)$  vérifie l'équation de Helmholtz (3.2) qui combinée à la relation (3.22) conduit à l'équation

$$\frac{d^2}{dz^2} \widehat{U}_z\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) + k^2 \gamma^2 \widehat{U}_z\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = 0 \quad (3.23)$$

où  $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$ . Une solution élémentaire de cette équation, satisfaisant la condition limite en  $z = 0$  est

$$\widehat{U}_z\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \widehat{U}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-ik\gamma z} \quad (3.24)$$

ce qui nous amène à la relation suivante qui décrit la propagation de l'amplitude complexe de  $z = 0$  à  $z$ , en terme de spectre d'onde plane

$$U_z(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-ik\gamma z} e^{-ik(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (3.25)$$

Pour les composantes du spectre telles que  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ ,  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$  est réel et la propagation ce traduit par un déphasage de  $k\gamma z$ . Pour les composantes telles que  $\alpha^2 + \beta^2 \geq 1$ ,  $\gamma = \pm i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}$  est un imaginaire pur, le signe  $-$  s'impose avec notre convention pour interdire la divergence de l'onde à l'infini et l'onde évanescence. Le terme de propagation prend la forme  $e^{-\mu z}$ , où  $\mu = ik\gamma = \frac{2i\pi}{\lambda}\gamma$  est réel. Il traduit la décroissance rapide de ces ondes sur des distances  $z$  de l'ordre de  $\lambda$ .

Quelque soit la distance  $z$ , ces ondes s'évanouissent d'autant plus vite que  $\alpha^2 + \beta^2$  est grand et ainsi, seule une partie du spectre est propagée. Pour des distances de propagation grandes devant la longueur d'onde on peut exclure les ondes évanescence de la relation (3.25) en limitant les bornes d'intégration ou en introduisant la fonction *circ* en écrivant

$$U_z(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \text{circ}(\alpha^2 + \beta^2) e^{-ikz\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} e^{-ik(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (3.26)$$

Ce qui peut s'avérer utile pour manipuler les expressions ou pour le calcul numérique.

## Equivalence entre théorie du spectre angulaire et intégrales de Rayleigh-Sommerfeld

Ces approches reposent sur les mêmes hypothèses, on ne sera donc pas surpris que les deux formulations soient mathématiquement équivalentes, même si ce fait est souvent ignoré. Cette équivalence est démontrée de manière rigoureuse par Eamon Lalor [23] ou encore par George C. Sherman [24]. Elle repose essentiellement sur la représentation de Weyl [25] d'une onde plane par un spectre d'onde sphérique comme détaillée dans l'annexe B et, pour résumé, sur le fait que le noyau de convolution de Rayleigh-Sommerfeld  $G_z$  est la transformée de Fourier inverse de la fonction  $e^{-ik\gamma z}$ .

Les intégrales de Rayleigh-Sommerfeld et la théorie du spectre angulaire sont totalement équivalentes mais ces alternatives présentent un intérêt pour le calcul numérique. En effet, selon les conditions d'échantillonnage, choisies ou imposées par l'expérience ou les moyens de calcul, il peut s'avérer plus judicieux d'évaluer la fonction  $G_z(x, y)$  dans l'espace physique avant d'en calculer la transformée de Fourier de manière numérique (approche Rayleigh-Sommerfeld) ou bien de calculer directement sa transformée de Fourier dans l'espace des fréquences (spectre angulaire). Notons que cette alternative pour le calcul numérique de la propagation est bien connue dans le cadre l'approximation paraxiale ou approximation de Fresnel.

### Filtrage de l'information par la propagation

Un avantage de la formulation en spectre d'onde plane est de faire apparaître très clairement l'effet de filtrage de la propagation. Si on reprend la relation (3.25), on constate que les termes de fréquences les plus élevées, telles que  $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ , sont annulés par le terme  $e^{-ik\gamma z}$  qui prend alors la forme exponentielle décroissante associée aux ondes évanescentes. Cette décroissance est d'autant plus rapide que  $z$  devient grand devant la longueur d'onde si bien que seules les fréquences spatiales inférieures à  $1/\lambda$  sont conservées après propagation sur une distance de quelques longueur d'onde.

## 3.6 Principe de Babinet

Ce principe est un principe de superposition, très utile pour les problèmes de diffraction, en particulier pour les calculs numériques associés. On considère une onde  $U_{inc}(x, y, z)$ , incidente sur un plan de diffraction situé en  $z = 0$ . L'ouverture ou l'objet situé dans ce plan est défini par une transmittance complexe  $\mathcal{T}$  et l'amplitude complexe à l'arrière de ce le plan, en  $z = 0^+$

est  $U_0(x, y) = U_{inc}(x, y, 0) \cdot \mathcal{T}$ . On considère à présent l'objet ou l'écran complémentaire à notre objet, qui par définition est décrit par une transmittance complexe  $(1 - \mathcal{T})$ . L'amplitude complexe en  $z = 0^+$  s'écrit  $\tilde{U}_0 = U_{inc}(x, y, 0) \cdot (1 - \mathcal{T})$ . Sans approximation, on considère la propagation du plan  $z = 0$  au plan de coordonnée  $z$ , pour notre objet

$$U_z(x, y) = U_0(x, y) * G_z(x, y) = [U_{inc}(x, y, 0) \cdot \mathcal{T}] * G_z(x, y) \quad (3.27)$$

et pour son complémentaire

$$\tilde{U}_z(x, y) = \tilde{U}_0(x, y) * G_z(x, y) = [U_{inc}(x, y, 0) \cdot (1 - \mathcal{T})] * G_z(x, y) \quad (3.28)$$

Le principe de Babinet est une conséquence de la distributivité du produit de convolution sur la somme. Il stipule que la somme des amplitudes diffractées en  $z$  par l'objet et son complémentaire est égale à l'onde incidente en  $z$ , soit

$$U_z(x, y) + \tilde{U}_z(x, y) = U_{inc}(x, y, 0) * G_z(x, y) = U_{inc}(x, y, z) \quad (3.29)$$

Dans la pratique, ce principe permet de traiter analytiquement un problème de diffraction par un objet en le ramenant à un problème d'ouverture (intégration sur un domaine fini). Il facilite également les calculs numériques. On l'applique par exemple pour calculer la diffraction par un disque opaque de transmittance  $\mathcal{T}$  à partir de la diffraction par l'ouverture complémentaire, la pupille de transmittance  $\mathcal{P} = 1 - \mathcal{T}$ . On écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} U_z(x, y) &= U_{inc}(x, y, z) - \tilde{U}_z \\ &= U_{inc}(x, y, z) - \tilde{U}_0 * G_z(x, y) \\ &= U_{inc}(x, y, z) - \tilde{U}_{inc}(x, y, 0) \mathcal{P} * G_z(x, y) \end{aligned} \quad (3.30)$$

qui pour une onde incidente plane et unitaire  $U_{inc}(x, y, z) = e^{-ikz}$  devient

$$U_z(x, y) = e^{-ikz} - \mathcal{P} * G_z(x, y) \quad (3.31)$$

### 3.7 Approximation de Fresnel

L'approximation de Fresnel, ou approximation paraxiale se déduit de la première intégrale de Rayleigh-Sommerfeld, dans le cas où la distance d'observation  $z$  est grande devant la longueur

d'onde, devant les dimensions de l'objet ou de l'ouverture et devant la distance entre le point d'observation et l'axe optique (petits angles). A partir de l'intégrale RS1 (relation(3.17)), on admet d'abord que  $r \gg \lambda$ , et qu'ainsi

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \approx -ik \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{z}{r} \quad (3.32)$$

on admet ensuite que  $z \approx r$  pour les termes d'amplitude et la relation (3.17) devient

$$U_z(x, y) = \frac{i}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) e^{-ikr} dx_0 dy_0 \quad (3.33)$$

Pour le terme de phase, cette dernière approximation est bien trop forte et n'a pas de sens. On applique donc l'approximation suivante en explicitant  $r$  et en appliquant un développement limité à la racine carré

$$r = z \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{z^2}} \approx z \left[ 1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z^2} \right] \quad (3.34)$$

Cette approximation est valable quand le terme de phase résiduel (ordre 3) est négligable devant 1 radian, soit

$$z^3 \gg \frac{\pi L^4}{4\lambda} \quad (3.35)$$

où  $L$  est la distance transversale maximum entre un point diffractant  $\mathbf{P}_0$  et un point d'observation  $\mathbf{P}$ , soit

$$L^2 = |(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2|_{max} \quad (3.36)$$

On obtient ainsi l'intégrale de diffraction de Fresnel :

$$U_z(x, y) = \frac{i}{\lambda z} e^{-ikz} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) e^{-\frac{ik}{2z} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} dx_0 dy_0 \quad (3.37)$$

Comme l'intégrale RS1, elle prend la forme d'un produit de convolution

$$U_z(x, y) = e^{-ikz} [U_0 * H_z] \quad (3.38)$$

où le noyau de convolution  $H_z$  est la fonction de Fresnel

$$H_z = \frac{i}{\lambda z} e^{-\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \quad (3.39)$$

Cette approximation est l'intégrale de diffraction la plus utilisée et la plus connue, notamment dans le domaine de l'holographie.

### 3.8 Propagation en une transformée de Fourier

Si on développe l'expression (3.34) de la distance  $r$ , soit

$$r \approx z \left[ 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} - \frac{xx_0 + yy_0}{z^2} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z^2} \right]$$

l'approximation de Fresnel (3.33) devient

$$U_z(x, y) = \frac{i}{\lambda z} e^{-ikz} e^{-\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) e^{-\frac{ik}{2z}(x_0^2+y_0^2)} e^{\frac{ik}{z}(xx_0+yy_0)} dx_0 dy_0 \quad (3.40)$$

On constate que le terme intégral dans cette expression est la transformée de Fourier du produit de  $F(x_0, y_0) = U_0(x_0, y_0) e^{-\frac{ik}{2z}(x_0^2+y_0^2)}$ , évaluée aux fréquences  $\eta = \frac{x}{\lambda z}$  et  $\xi = \frac{y}{\lambda z}$ , soit

$$U_z(x, y) = e^{-ikz} H_z(x, y) \widehat{F} \left( \frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right) \quad (3.41)$$

Cette formulation permet de réaliser le calcul de la propagation à l'aide d'une seule transformation de Fourier (contre 3 pour le produit de convolution). En revanche, l'échantillonnage dans le plan d'observation dépend à la fois de l'échantillonnage dans le plan de diffraction et de la distance de propagation  $z$ , ce qui rend l'usage de cette formulation plus délicate, notamment en holographie, lorsqu'il s'agit de reconstruire des objets dans un volume et de les localiser avec précision. D'un point de vue formel, cette écriture présente également des avantages pour les calculs analytiques, pour appliquer l'approximation de Fraunhofer, par exemple.

### 3.9 Approximation de Fraunhofer

Physiquement, le terme de phase quadratique situé devant l'intégrale de la relation (3.40) correspond à la courbure du front d'onde dans le plan d'observation (plan de coordonnée  $z$ )



pour un point source situé dans le plan de diffraction. Le terme de phase quadratique sous l'intégrale

$$e^{-\frac{ik}{2z}(x_0^2+y_0^2)}$$

correspond quant à lui à la courbure du front d'onde dans le plan de diffraction ( $z = 0$ ), pour différents points sources du plan de diffraction éclairant un même point du plan d'observation. L'approximation de Fraunhofer consiste à négliger se dernier terme en écrivant

$$r \approx z \left[ 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} - \frac{xx_0 + yy_0}{z^2} \right] \quad (3.42)$$

et donc

$$\begin{aligned} U_z(x, y) &= \frac{i}{\lambda z} e^{-ikz} e^{-\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{z}(xx_0+yy_0)} dx_0 dy_0 \\ &= e^{-ikz} H_z(x, y) \widehat{U}_0 \left( \frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

L'amplitude diffractée s'écrit ainsi comme la transformée de Fourier de l'amplitude du plan de diffraction, évaluée aux fréquences  $\frac{x}{\lambda z}$  et  $\frac{y}{\lambda z}$ . Les autres termes traduisent la décroissance de l'amplitude avec  $z$ , le déphasage du plan  $z = 0$  au plan d'observation et la courbure du front d'onde dans ce dernier plan. Notons que dans la relation(3.43) le terme précédent la transformée de Fourier est explicité et dépend de la distance  $z$ . Ce terme est essentiel pour pouvoir utiliser l'approximation de Fraunhofer en holographie. Généralement, la formule de diffraction de Fraunhofer est présentée dans sa limite  $z \rightarrow \infty$ , sans expliciter ce pré-facteur, quand on observe la diffraction à l'aide d'une lentille par exemple.

Cette approximation est une approximation de champ lointain. Un critère pour estimer la validité de cette approximation est de comparer la valeur maximum de la phase à  $2\pi$ , ou de manière équivalente de comparer le nombre de Fresnel  $N_F = \frac{a^2}{\lambda z}$  à 1, où  $a$  est une grandeur caractéristique de l'ouverture ou de l'objet diffusant, la valeur maximum non nul prise par  $|x_0|$  et  $|y_0|$ , le rayon d'une ouverture circulaire par exemple.

### 3.10 Approche vectorielle en coordonnées cartésienne

Les théories de diffraction décrites jusqu'à présent sont scalaires. Si on travaille en coordonnées cartésiennes, chaque composante du champs peut être représenté par une amplitude

complexe qui vérifie l'équation de Helmholtz. Les théories de diffraction scalaire s'appliquent donc aux composantes d'un champ vectoriel pour lesquels on peut écrire des conditions limites dans le plan  $z = 0$ . Ses conditions sont parfois plus difficile à écrire pour la composante  $E_z$ , mais la composante  $E_z$  de la lumière diffractée se déduit facilement des autres composantes en introduisant la divergence nulle du champs  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  soit

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} \quad (3.44)$$

En appliquant aux composantes  $E_x$  et  $E_y$  de la première intégrale de Fresnel sous la forme (3.17) on obtient

$$E_x = \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{-\infty}^{+\infty} E_x(x_0, y_0, z_0) \frac{e^{-ikr}}{r} dx_0 dy_0 \quad (3.45)$$

et une relation identique pour  $E_y$ .

En intégrant, la compoante  $E_z$  s'écrit

$$E_z = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ E_x(x_0, y_0, z_0) \frac{x - x_0}{r} + E_y(x_0, y_0, z_0) \frac{y - y_0}{r} \right] \frac{e^{-ikr}}{r} \left( -ik - \frac{1}{r} \right) dx_0 dy_0 \quad (3.46)$$

La composante d'intégration devant être nulle pour satisfaire à la condition de rayonnement de Sommerfeld. On peut ainsi écrire, de manière plus concise, une relation vectorielle connue sous le nom de relation de Rayleigh-Sommerfeld-Smythe [26].

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \nabla \wedge \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_0(x_0, y_0, 0) \frac{e^{-ikr}}{r} dx_0 dy_0 \quad (3.47)$$

En coordonnées cartésienne, l'approche scalaire s'étend ainsi naturellement à une formulation vectorielle. La vraie limitation de cette approche se cache dans l'écriture des conditions limites planes associées au système de coordonnées cartésiennes.

### 3.11 Limites de l'approche scalaire

Pour de nombreux problèmes de diffraction ou de diffusion, l'écriture de conditions limites planes est difficile, impossible, ou demande des hypothèses supplémentaires. C'est le cas quand

on souhaite introduire la diffusion par les bords d'une ouverture ou quand on souhaite décrire la diffusion de la lumière par un objet réel, par nature 3D. A grandes distances devant la taille des objets et la longueur d'onde, les aspects 3D de l'interaction lumière-objet deviennent le plus souvent négligeables et ces objets peuvent être décrits par une simple transmittance 2D (un disque opaque pour une sphère diffusante par exemple). Les théories scalaires de la diffraction sont alors suffisantes. À l'inverse, en champ proche la description d'un objet 3D par une transmittance 2D n'est pas triviale et repose sur une résolution rigoureuse du problème de l'interaction entre la lumière et l'objet. Dans ce dernier cas et quand cela est possible, on travaille dans autre système de coordonnées, adapté à la forme de l'objet diffusant. Ces méthodes dites à variable séparables, existent pour un nombre restreint de forme de particule. La plus connue est la théorie de Lorenz-Mie. Elle permet de résoudre le problème de diffusion/diffraction pour des particules sphériques. Cette théorie est présentée sous sa forme généralisée dans le prochain chapitre.

# Chapitre 4

## Diffusion de la lumière par un objet sphérique

### 4.1 Introduction

Les théories scalaires de la diffraction ne permettent pas de résoudre le problème de l'interaction entre une onde lumineuse et un objet réel par nature tridimensionnelle, à défaut de pouvoir écrire les conditions limites (aux limites de la particule) en coordonnées cartésiennes. Ces théories permettent toutefois d'en faire une description approchée en séparant le problème de l'interaction de celui de la propagation. L'interaction est alors réduite à une fonction de transfert 2D, le plus souvent intuitée ou supposée et toujours approximée, en considérant par exemple qu'un objet sphérique se comporte comme un disque opaque ou transparent (avec un retard de phase). L'intégrale de propagation (Rayleigh-Sommerfeld ou Fresnel) permet alors de décrire la lumière diffractée ou diffusée à l'arrière du plan de diffraction ( $z > 0$ ) avec plus ou moins d'exactitude selon les régions considérées, distances d'observation et distances à l'axe optique.

La théorie de Lorenz-Mie est une méthode de résolution rigoureuse au problème de l'interaction entre une onde électromagnétique plane et monochromatique et une particule sphérique d'indice de réfraction quelconque. En plus de l'hypothèse forte d'une parfaite sphéricité, elle demande que le milieu constituant la sphère diffusante soit homogène et isotrope et que l'interaction soit linéaire et locale. En d'autres termes, la théorie de Lorenz-Mie, ses extensions et la famille des méthodes à variables séparables dont elle est la méthode mère, repose sur les

hypothèses l.l.h.i. de la section 2.1.3 pour le milieu constitutif de l'objet diffusant comme pour le milieu dans lequel il est plongé.

La principale limitation de la TLM et des méthodes à variables séparables dans leur ensemble est la forme régulière imposée à l'objet diffusant : sphère parfaite, cylindre infini ou sphéroïde, présentant éventuellement des couches concentriques d'indice différents, pour ne citer que les plus réalistes parmi les formes que ses méthodes permettent de considérer. De ce point de vue, pour décrire la diffusion vers l'avant, les théories scalaires de la diffraction sont plus souples, les transmittances 2D décrivant les particules n'étant pas soumises aux mêmes contraintes. Par contre, la TLM permet d'appréhender les aspects 3D de l'interaction entre la lumière et l'objet, dans un cadre électromagnétique vectoriel et rigoureux. Elle s'applique donc directement dans le cas où l'objet de l'étude est parfaitement sphérique, ce qui est assez fréquent en mécanique des fluides quand des gouttes ou des bulles de petites dimensions voient leur forme contrainte à cette perfection par la tension de surface. Dans les autres cas, elle reste une méthode de référence qui permet de mettre à l'épreuve ou d'accompagner dans leur développement des méthodes approchées mais plus versatiles : diffraction scalaire vers l'avant, optique géométrique et tracé de rayon pour les autres directions de l'espace, ou méthodes purement numériques reposant sur une discrétisation fine de l'espace et du temps. Un autre atout de ces méthodes est qu'elles fournissent des solutions semi-analytiques qui permettent de calculer rapidement des quantités intégrales comme les sections efficaces de diffusion ou d'extinction utiles dans les problèmes de diffusion multiples. Enfin, ces théories, contrairement aux modèles approchés ne sont pas limitées à une gamme de paramètre de taille ou d'indice. La théorie de Lorenz-Mie fait ainsi le lien entre la théorie de diffusion du dipôle de Rayleigh, à laquelle elle s'identifie dans la limite où le rayon  $a$  de la particule est très petit devant la longueur d'onde  $\lambda$ , et l'optique géométrique qui fournit des résultats exploitables pour  $a \gg \lambda$ . Elle comble également le fossé qui les sépare en offrant une solution rigoureuse au problème de diffusion dans la gamme de taille intermédiaire, gamme pour laquelle on parle souvent de régime de diffusion de Mie. Notons que ce terme est une source fréquente de confusion ; il désigne des gammes de taille pour lesquelles l'approximation du dipôle de Rayleigh n'est plus valable et où les approximations de type géométrique ne produisent pas de descriptions correctes ; il ne correspond en aucun cas à une limite d'application de la théorie de Lorenz-Mie, comme on l'entend parfois.

La Théorie de Lorenz-Mie a la particularité d'avoir été développée de manière indépendante dans le cadre de la théorie de l'éther par Ludvig Lorenz [27],[28] et dans un cadre Maxwellien

par Gustav Mie [29] et Peter Debye [30]. On parle de Théorie de Mie, de Théorie de Lorenz-Mie ou de Théorie de Lorenz-Mie-Debye selon que l'on est Allemand, Danois, Hollandais ou que l'on ne veut froisser personne. Pour ma part j'utilise le terme de Lorenz-Mie en accord avec les usages de l'école Rouennaise dont je suis issu.

Le terme de Théorie de Lorenz-Mie Généralisée désigne à l'origine l'extension de la Théorie de Lorenz-Mie à un éclairage non uniforme de la particule. Elle est décrite avec beaucoup de détail dans le livre de Gérard Gouesbet et Gérard Gréhan [31]. Les auteurs de ce livre parlent de Théories de Lorenz-Mie Généralisées au pluriel pour nommées toutes les solutions construites sur le même modèle pour d'autres formes d'objet, la sphère multi-couche [32], le cylindre [33] à section circulaire ou elliptique. Dans ce document nous nous intéresserons au cas de la sphère homogène décrite dans [31], mais aussi de la décomposition en séries de Debye de cette solution ainsi qu'au cas de la sphère à couches concentriques. Dans un chapitre suivant nous nous intéresserons à la généralisation de ces résultats aux cas des impulsions laser ultra-brèves. D'autres formes de particules comme les ellipsoïdes ou les sphéroïdes de révolution peuvent être traitées (dans un cadre légèrement différent) pour une onde plane [34],[35] ou pour un faisceau focalisé [36, 37].

Pour tirer profit de la symétrie du problème et écrire les conditions limites de manière triviale à la surface de la particule, il faut travailler dans un système de coordonnées sphériques. Comme nous l'avons déjà évoqué, en coordonnées sphérique, l'équation de Helmholtz vectorielle 2.30 ne conduit pas à l'équation scalaire pour chaque composante du champ. La résolution passe par (i) la définition de potentiels dont les composantes des champs dérivent, (ii) l'écriture d'équations et (iii) de conditions limites à la surface de la sphère pour ces potentiels. Il est possible de résoudre le problème en introduisant les potentiels de Hertz, c'est le choix le plus couramment rencontré dans le monde anglo-saxon. L'école Française qui est la mienne leur préfère les potentiels scalaires de Bromwich qui conduisent à un formalisme équivalent mais plus développé pour la description de faisceaux arbitraires et surtout l'approximation localisée qui facilite grandement la description de ces faisceaux et facilite les calculs numériques.

## 4.2 Potentiels de Bromwich

On se place dans le cadre des hypothèses l.l.h.i. de la section 2.1.3 et en régime harmonique. On cherche ainsi à résoudre les équations de Maxwell sous leur forme spéciale (2.25) à (2.28) dans

un système de coordonnées sphériques. La méthode de Bromwich consiste à écrire la solution générale de ces équations comme une combinaison linéaire de deux solutions particulières, linéairement indépendantes. Les deux solutions particulières, dites 'transverse électrique' (TE) et 'transverse magnétique' (TM), sont déterminées au travers de deux potentiels scalaires  $U_{TE}$  et  $U_{TM}$  dont dérivent l'ensemble des composantes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . la définition de ces potentiels et l'établissement de l'équation qu'ils vérifient sont détaillés dans l'annexe C. Pour la théorie de Lorenz-Mie, les potentiels sont définis dans un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . Les composantes du champ électromagnétique se déduisent de ces potentiels, dans ce même système de coordonnées, de la manière suivante (annexe C)

$$E_r = E_{r,TM} + E_{r,TE} = \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r^2} + k^2 U_{TM} \quad (4.1)$$

$$E_\theta = E_{\theta,TM} + E_{\theta,TE} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r \partial \theta} - \frac{i\omega\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial U_{TE}}{\partial \varphi} \quad (4.2)$$

$$E_\varphi = E_{\varphi,TM} + E_{\varphi,TE} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{i\omega\mu}{r} \frac{\partial U_{TE}}{\partial \theta} \quad (4.3)$$

$$H_{r,TM} = H_{r,TM} + H_{r,TE} = \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial r^2} + k^2 U_{TE} \quad (4.4)$$

$$H_\theta = H_{\theta,TM} + H_{\theta,TE} = \frac{i\omega\varepsilon}{r \sin \theta} \frac{\partial U_{TM}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial r \partial \theta} \quad (4.5)$$

$$H_\varphi = H_{\varphi,TM} + H_{\varphi,TE} = -\frac{i\omega\varepsilon}{r} \frac{\partial U_{TM}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial r \partial \varphi} \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

Dans ce système de coordonnées sphériques, les potentiels de Bromwich ne vérifient pas l'équation de Helmholtz scalaire mais l'équation suivante (annexe D)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 U + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (4.8)$$

où le nombre d'onde  $k$  vérifie  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ .

Cette équation est séparable dans le système de coordonnées sphérique. Elle admet donc une famille de solutions à variables séparables à partir de laquelle l'ensemble des solutions peut être construit, par combinaison linéaire [38]. La séparation des variables est obtenue en posant

$$U(r, \theta, \varphi) = r U_1(kr) U_2(\theta) U_3(\varphi) \quad (4.9)$$

L'équation (4.8) conduit alors à 3 équations séparées pour chacune des variables, comme détaillé dans l'annexe D. On obtient ainsi l'équation harmonique pour  $U_3(\varphi)$ , l'équation de

Bessel sphérique pour  $U_1(kr)$  et l'équation générale de Legendre pour  $U_2(\theta)$  en faisant le changement de variable  $u = \cos \theta$ . Les solutions générales de ces équations sont connues. Parmi ces solutions, seules les solutions vérifiant les contraintes de périodicité en  $\varphi$  et  $\theta$  et de continuité sont conservées, ce qui impose notamment que les constantes de séparation, notées  $m$  et  $n$  dans la suite, prennent des valeurs respectivement entières et entières et positives. Les solutions élémentaires à variables séparables de l'équation pour les potentiels prennent ainsi la forme

$$r\Psi_n^{(i)}(kr)P_n^m(\cos \theta)\exp(im\varphi) \quad , \quad i = 1, 2, 3, \text{ ou } 4. \quad (4.10)$$

où  $\Psi_n^{(i)}$  représentent les fonctions de Bessel sphériques, et  $P_n^m(\cos \theta)$  les polynômes de Legendre associés. La solution générale à l'équation est l'ensemble des combinaisons linéaires des solutions à variable séparable et s'écrit donc

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \alpha_n^m r \Psi_n^{(i)}(kr) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad , \quad i = 1, 2, 3, \text{ ou } 4. \quad (4.11)$$

où les  $\alpha_n^m$  sont des constantes.

A ce stade, toutes les fonctions de Bessel sphériques, qui ne sont pas linéairement indépendantes, sont admises comme solutions. Dans la suite, nous ne retiendrons que l'une ou l'autre de ces fonctions selon que le potentiel de Bromwich considéré est associé à un champ incident, diffusé ou interne. C'est le sens de la notation  $i = 1, 2, 3, \text{ ou } 4$  et ce qui justifie l'absence de sommation sur  $i$  dans la relation (4.11). Dans la suite, on introduira les fonctions de Riccati-Bessel, avec les notations suivantes

$$\psi_n(x) = x\Psi_n^{(1)}(x) \quad (4.12)$$

$$\chi_n(x) = x\Psi_n^{(2)}(x) \quad (4.13)$$

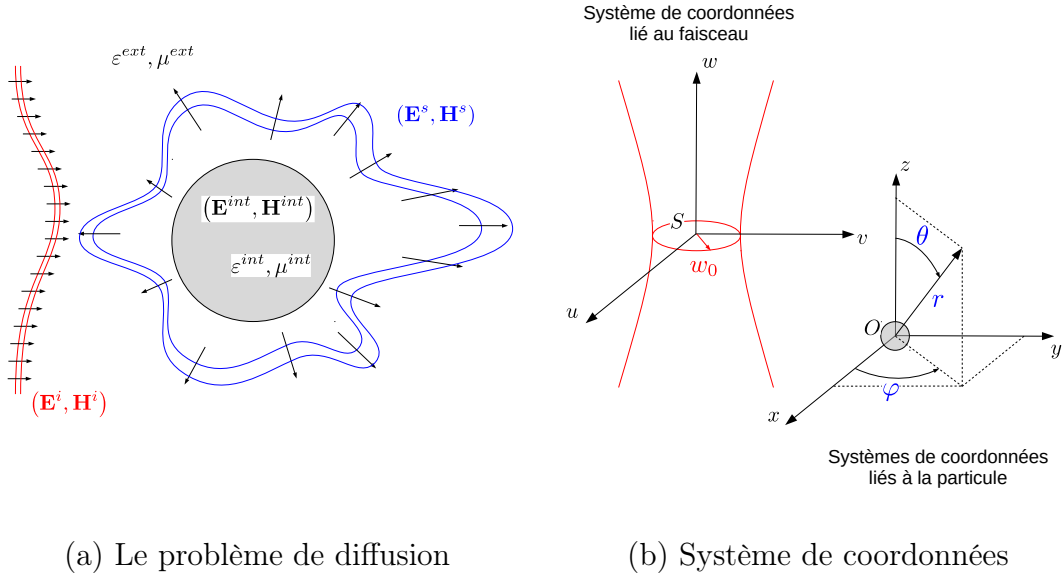
$$\Gamma_n(x) = x\Psi_n^{(3)}(x) = \Psi_n(x) + i\chi_n(x) \quad (4.14)$$

$$\xi_n(x) = x\Psi_n^{(4)}(x) = \Psi_n(x) - i\chi_n(x) \quad (4.15)$$

### 4.3 Formalisation du problème de diffusion

Le problème que l'on cherche à résoudre est celui de l'interaction entre un objet sphérique et un faisceau lumineux (figure 4.1.a). On considère que le faisceau d'éclairage est connu et qu'on dispose donc d'une description du champ électromagnétique incident (6 composantes de  $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ ) en absence d'objet diffusant. Ce faisceau est a priori quelconque, mais nous nous





**FIGURE 4.1** – Définitions et schémas

limiterons dans la suite à des faisceaux gaussiens. On connaît également les propriétés optiques de l'objet sphérique  $(\mu_{int}, \varepsilon_{int})$  et du milieu dans lequel il est plongé  $(\mu_{ext}, \varepsilon_{ext})$ . Ce milieu extérieur à l'objet est supposé non absorbant ( $\varepsilon_{ext}$  et  $\mu_{ext}$  réels). Les inconnues du problème sont le champ électromagnétique interne à l'objet (exposant 'int') et le champ diffusé (exposant 's' pour 'scattering'), qui est défini par superposition avec le champ incident. En d'autres termes, le champ électromagnétique à l'extérieur de l'objet diffusant, que l'on appelle le champ résultant ou champ total (exposant 't'), est la somme du champ diffusé et du champ incident (exposant 'i') non perturbé (en absence d'objet diffusant). On écrira ainsi à l'extérieur de la sphère :

$$\mathbf{E}^t = \mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^t = \mathbf{H}^s + \mathbf{H}^i \quad (4.16)$$

À chacun de ces champs, on associe deux potentiels de Bromwich, l'un associé à une onde TM, l'autre à une onde TE, selon la décomposition introduite précédemment. La superposition des champs conduit alors simplement à :

$$U_{TM}^t = U_{TM}^i + U_{TM}^s \quad \text{et} \quad U_{TE}^t = U_{TE}^i + U_{TE}^s \quad (4.17)$$

Nous travaillons dans le système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  centré sur le point  $O$  de l'objet diffusant, comme illustré dans la figure 4.1.b. Le faisceau est, lui, initialement décrit

dans un système de coordonnées cartésiennes  $(u, v, w)$  qui lui est attaché.

Dans la suite, nous allons spécifier les solutions de l'équation (4.8) pour les champs incident, diffusé et interne. Les potentiels de Bromwich et les champs prendront la forme de séries d'ondes sphériques faisant intervenir des coefficients de forme de faisceau (qui décrivent le faisceau incident) et des coefficients de diffusion. Le problème ainsi posé sera résolu dans la section suivante en écrivant les conditions de passage (conditions limites) à la surface de l'objet diffusant, qui, dans ce système de coordonnées, est définie simplement par  $r = d/2$ , où  $d$  est le diamètre de la particule, comme dans la version simple de la théorie de Lorenz-Mie.

### 4.3.1 Le champ incident

Le champ incident doit être défini partout dans l'espace. Parmi les fonctions de Bessel sphériques  $\Psi_n^{(i)}(kr)$ , seule  $\Psi_n^{(1)}(kr)$  est définie en  $r = 0$ . En introduisant la fonction de Riccati-Bessel

$$\psi_n(x) = x \Psi_n^{(1)}(x)$$

et les propriétés de symétrie des polynômes de Legendre associés

$$P_n^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^{|m|}(\cos \theta)$$

les potentiels ( $TM$  et  $TE$ ) du champ incident s'écrivent

$$U_X^i(r, \theta, \phi) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \gamma_{n,X}^m \psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (4.18)$$

où  $X$  vaut aussi bien pour  $TM$  que pour  $TE$  et où  $k$  est le nombre d'onde (réel) dans le milieu extérieur

$$k = k_{ext} = \omega \sqrt{\mu_{ext} \varepsilon_{ext}}$$

Les coefficients  $\gamma_{n,TX}^m$  de ces combinaisons linéaires sont ensuite décomposés, d'une manière qui peut sembler arbitraire à ce stade, sous forme de produits

$$\gamma_{n,TM}^m = \frac{1}{k} E_0 c_n^{pw} g_{n,TM}^m \quad (4.19)$$

$$\gamma_{n,TE}^m = \frac{1}{k} H_0 c_n^{pw} g_{n,TE}^m \quad (4.20)$$

où  $E_0$  et  $H_0$  sont des amplitudes de champ électrique et magnétique, le facteur  $\frac{1}{k}$  est introduit pour des raisons esthétiques et le coefficient  $c_n^{pw}$  est un coefficient apparaissant dans le formalisme original de Bromwich (pour le cas particulier d'une onde plane). Ici il est défini par

$$c_n^{pw} = (-i)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (4.21)$$

Le coefficient  $c_n^{pw}$  est introduit de manière à isoler les termes  $g_{n,TM}^m$  et  $g_{n,TE}^m$  qui décrivent la forme du faisceau d'éclairage et sont appelés **coefficients de forme de faisceau ou BSCs** pour 'Beam Shape Coefficients' en anglais. Notons que dans [39] et [31] le préfacteur  $\frac{1}{k}$  est inclus dans  $c_n^{pw}$ .

Les potentiels de Bromwich pour le champ incident s'écrivent finalement

$$U_{TM}^i(r, \theta, \phi) = \frac{E_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n,TM}^m \psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (4.22)$$

$$U_{TE}^i(r, \theta, \phi) = \frac{H_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n,TE}^m \psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (4.23)$$

### 4.3.2 Champ diffusé

Le champ diffusé doit être défini à l'extérieur de l'objet sphérique, mais pas nécessairement en  $r = 0$ . Par contre, il doit vérifier la condition de rayonnement de Sommerfeld en  $kr \rightarrow \infty$  et décrire une onde sphérique sortante. Parmi les fonctions de Bessel sphériques, seule  $\Psi_n^{(4)}$  vérifie cette condition. On introduit alors la fonction de Riccati-Bessel  $\xi_n(x) = x \Psi_n^{(4)}(kr)$  dans une écriture des potentiels diffusés proche de celle utilisée pour les potentiels incidents avec de nouveaux coefficients  $A_n^m$  et  $B_n^m$

$$U_{TM}^s(r, \theta, \phi) = -\frac{E_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} A_n^m \xi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (4.24)$$

$$U_{TE}^s(r, \theta, \phi) = -\frac{H_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} B_n^m \xi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (4.25)$$

### 4.3.3 Champ interne

Les potentiels associés au champ interne à l'objet doivent quant à eux être définis partout dans la sphère, y compris en  $r = 0$ . C'est ainsi la fonction de Bessel sphérique  $\Psi_n^{(1)}$  qui est

retenue, comme pour le champ incident à ceci près que l'argument  $k_{int}r$  est ici complexe avec  $k_{int}$  le nombre d'onde dans la sphère tel que

$$k_{int}^2 = \omega^2 \varepsilon_{int} \mu_{int}$$

Les potentiels de Bromwich pour le champ interne s'écrivent ainsi sous la forme suivante, similaire aux formes précédemment adoptées à l'exception du préfacteur, qui est choisi une nouvelle fois pour des raisons esthétiques qui apparaîtront un peu plus loin.

$$U_{TM}^{int}(r, \theta, \phi) = \frac{E_0}{k_{int}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} C_n^m \psi_n(k_{int}r) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (4.26)$$

$$U_{TE}^{int}(r, \theta, \phi) = \frac{H_0}{k_{int}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} D_n^m \psi_n(k_{int}r) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (4.27)$$

avec de nouveaux coefficients  $C_n^m$  et  $D_n^m$ .

## 4.4 Conditions aux limites

Au passage d'une interface, les conditions limites ou conditions de passage d'un milieu à l'autre se traduisent par les relations (2.7)-(2.10). Si les milieux sont L.L.H.I. et en l'absence de charge, ces conditions traduisent la continuité des composantes tangentielles des champs ( $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ ). La continuité des composantes normales des inductions  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  ne sera pas utilisée. Notons que pour une particule chargée, les composantes tangentielles de  $\mathbf{H}$  ne sont pas continues mais présentent un saut égal à la densité de charge surfacique. Ces conditions limites un peu plus générales sont prises en compte dans [40]. Pour des particules faiblement chargées (charge électrostatique par exemple) et de petite taille, les effets de la charge sont négligeables. Pour des particules plus grandes, ces effets mériteraient probablement d'être réévalués. Pour des charges nettement plus élevées (en présence d'un plasma par exemple), ces effets deviennent suffisamment importants pour envisager une mesure optique de cette charge [41].

Dans notre problème, les composantes tangentielles à la surface de la sphère sont les composantes selon  $\theta$  et  $\varphi$ . Les champs à l'intérieur de la sphère sont les champs  $\mathbf{E}^{int}$  et  $\mathbf{H}^{int}$ . Les champs à l'extérieur de la sphère sont les champs totaux ou résultants, sommes des champs diffusés et incidents. Pour la composante  $\theta$  et pour chacune des solutions particulières  $TM$  et  $TE$ , ces conditions s'écrivent

$$E_{\theta, TM}^i|_{r=a} + E_{\theta, TM}^s|_{r=a} = E_{\theta, TM}^{int}|_{r=a} \quad (4.28)$$

$$E_{\theta, TE}^i|_{r=a} + E_{\theta, TE}^s|_{r=a} = E_{\theta, TE}^{int}|_{r=a} \quad (4.29)$$

$$H_{\theta, TM}^i|_{r=a} + H_{\theta, TM}^s|_{r=a} = H_{\theta, TM}^{int}|_{r=a} \quad (4.30)$$

$$H_{\theta, TE}^i|_{r=a} + H_{\theta, TE}^s|_{r=a} = H_{\theta, TE}^{int}|_{r=a} \quad (4.31)$$

Des conditions similaires peuvent être écrites pour les composantes selon  $\phi$ , mais elles ne seront toutefois pas utiles par la suite.

Les composantes selon  $\theta$  sont ensuite développées en série, en introduisant les relations (4.22)-(4.27) dans les relations (C.18), (C.25), (C.21) et (C.28). Les quatre conditions limites conduisent alors à

$$M [g_{n, TM}^m \psi_n'(\alpha) - A_n^m \xi_n'(\alpha)] = C_n^m \psi_n'(\beta) \quad (4.32)$$

$$M^2 [g_{n, TE}^m \psi_n(\alpha) - B_n^m \xi_n(\alpha)] = \frac{\mu_{int}}{\mu_{ext}} D_n^m \psi_n(\beta) \quad (4.33)$$

$$[g_{n, TM}^m \psi_n(\alpha) - A_n^m \xi_n(\alpha)] = \frac{\mu_{int}}{\mu_{ext}} C_n^m \psi_n(\beta) \quad (4.34)$$

$$M [g_{n, TE}^m \psi_n'(\alpha) - B_n^m \xi_n'(\alpha)] = D_n^m \psi_n'(\beta) \quad (4.35)$$

où les fonctions  $\psi_n'$  et  $\xi_n'$  sont les dérivées de  $\psi_n$  et  $\xi_n$  respectivement.  $\alpha$  est le paramètre de taille de l'objet sphérique défini par  $\alpha = \pi d/\lambda$ ,  $\beta = M\alpha$  et  $M$  est l'indice de réfraction de la sphère défini relativement à l'indice du milieu extérieur soit

$$M = \frac{k_{int}}{k_{ext}} = \sqrt{\frac{\mu_{int}\varepsilon_{int}}{\mu_{ext}\varepsilon_{ext}}}$$

Les coefficients de forme du faisceau  $g_{n, TM}^m$  et  $g_{n, TE}^m$  étant supposés connus, les seules inconnues du système (4.32)-(4.35) sont les coefficients  $A_n^m$ ,  $B_n^m$ ,  $C_n^m$  et  $D_n^m$ . La résolution de ce système conduit à écrire ces coefficients comme des produits des coefficients de forme du faisceau et les coefficients  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  et  $d_n$  de la Théorie de Lorenz-Mie au sens strict (en onde plane) soit

$$A_n^m = a_n g_{n, TM} \quad (4.36)$$

$$B_n^m = b_n g_{n, TE} \quad (4.37)$$

$$C_n^m = c_n g_{n, TM} \quad (4.38)$$

$$D_n^m = d_n g_{n, TE} \quad (4.39)$$

avec

$$a_n = \frac{\mu_{int}\psi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - \mu_{ext}M\psi'_n(\alpha)\psi_n(\beta)}{\mu_{int}\xi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - \mu_{ext}M\xi'_n(\alpha)\psi_n(\beta)} \quad (4.40)$$

$$b_n = \frac{\mu_{ext}M\psi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - \mu_{int}\psi'_n(\alpha)\psi_n(\beta)}{\mu_{ext}M\xi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - \mu_{int}\xi'_n(\alpha)\psi_n(\beta)} \quad (4.41)$$

$$c_n = \frac{M\mu_{int}[\xi_n(\alpha)\psi'_n(\alpha) - \xi'_n(\alpha)\psi_n(\alpha)]}{\mu_{int}\xi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - \mu_{ext}M\xi'_n(\alpha)\psi_n(\beta)} \quad (4.42)$$

$$d_n = \frac{\mu_{ext}M^2[\xi_n(\alpha)\psi'_n(\alpha) - \xi'_n(\alpha)\psi_n(\alpha)]}{\mu_{ext}M\xi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - \mu_{int}\xi'_n(\alpha)\psi_n(\beta)} \quad (4.43)$$

Les potentiels de Bromwich associés au champ interne et au champ diffusé sont ainsi totalement déterminés à partir des coefficients de forme de faisceau, de même que l'ensemble des composantes de ces champs, à travers les relations (4.1) à (4.6).

La dernière étape de la résolution du problème est le calcul des coefficients de forme du faisceau (BSCs). C'est l'objet de la section suivante.

## 4.5 Description du faisceau incident

Pour calculer les BSCs, il faut se donner une description du faisceau incident. La forme de faisceau la plus répandue et la plus classique est le faisceau de profil Gaussien. Nous allons dans la suite considérer un faisceau Gaussien circulaire, positionné arbitrairement par rapport à l'objet diffusant. Un tel faisceau peut être décrit par un schéma de Davis. Nous choisirons le schéma d'ordre 'L', le moins élevé ('L' pour Lower) [42]. Dans un système de coordonnées cartésiennes  $(u, v, w)$  centré sur le faisceau (voir figure 4.1.b), les composantes du champ électromagnétique s'écrivent

$$E_v = H_u = 0 \quad (4.44)$$

$$E_u = E_0\Psi_{0c}\exp(-ikw) \quad (4.45)$$

$$E_w = -\frac{2Q_c u}{l}E_u \quad (4.46)$$

$$H_v = H_0\Psi_{0c}\exp(-ikw) \quad (4.47)$$

$$H_w = -\frac{2Q_c v}{l}H_v \quad (4.48)$$

avec  $l = kw_0^2$ , la longueur de diffraction du faisceau et

$$Q_c = \frac{1}{i + 2w/l}$$

$$\Psi_{0c} = iQ_c \exp\left(-iQ_c \frac{u^2 + v^2}{w_0^2}\right)$$

Le seul paramètre de cette description est  $w_0$ , le rayon du faisceau au col  $S$  (point de focalisation), auquel viennent s'ajouter les paramètres de position et de rotation du repère  $(S, u, v, w)$  lié au faisceau par rapport au repère  $(O, x, y, z)$  lié à l'objet diffusant (figure 4.1.b). Dans notre cas, on tire avantage de la symétrie sphérique de l'objet diffusant pour imposer que les axes des deux systèmes de coordonnées soient parallèles ( $w \parallel z, u \parallel x$  et  $v \parallel y$ ).

Si on note  $(x_0, y_0, z_0)$  les coordonnées du point  $S$  (du faisceau) dans le repère  $(O, x, y, z)$  lié à l'objet diffusant, on obtient à partir des relations (4.44) à (4.48), une description du faisceau incident dans le système de coordonnées sphériques  $(O, r, \theta, \varphi)$  lié à l'objet

$$E_r^i = E_0 \Psi_0 \left[ \cos \varphi \sin \theta \left( 1 - \frac{2Q}{l} r \cos \theta \right) + \frac{2Q}{l} x_0 \cos \theta \right] \exp(K) \quad (4.49)$$

$$E_\theta^i = E_0 \Psi_0 \left[ \cos \varphi \left( \cos \theta + \frac{2Q}{l} r \sin^2 \theta \right) - \frac{2Q}{l} x_0 \sin \theta \right] \exp(K) \quad (4.50)$$

$$E_\varphi^i = -E_0 \Psi_0 \sin \varphi \exp(K) \quad (4.51)$$

$$H_r^i = H_0 \Psi_0 \left[ \sin \varphi \sin \theta \left( 1 - \frac{2Q}{l} r \cos \theta \right) + \frac{2Q}{l} y_0 \cos \theta \right] \exp(K) \quad (4.52)$$

$$H_\theta^i = H_0 \Psi_0 \left[ \sin \varphi \left( \cos \theta + \frac{2Q}{l} r \sin^2 \theta \right) - \frac{2Q}{l} y_0 \sin \theta \right] \exp(K) \quad (4.53)$$

$$H_\varphi^i = H_0 \Psi_0 \cos \varphi \exp(K) \quad (4.54)$$

avec

$$K = -ik(r \cos \theta - z_0) \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= iQ \exp\left(-iQ \frac{r^2 \sin^2 \theta}{w_0^2}\right) \exp\left(-iQ \frac{x_0^2 + y_0^2}{w_0^2}\right) \\ &\quad \times \exp\left[\frac{2iQ}{w_0^2} r \sin \theta (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)\right] \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$Q = \left(i + 2 \frac{z - z_0}{kw_0^2}\right)^{-1} \quad (4.57)$$

Ces relations peuvent être directement utilisées pour calculer les composantes du champ incident quand cela est nécessaire en tout point de l'espace repéré par ces coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ , pour calculer le champ résultant (incident + diffusé) en un point de l'espace par exemple.

Les coefficients de forme de faisceau correspondants peuvent être calculés de différentes manières. La manière la plus directe (mais pas la plus efficace) est de les calculer à partir des seules composantes  $E_r^i$  et  $H_r^i$  (relations (4.49) et (4.52)). En effet,  $E_r^i$  et  $H_r^i$  peuvent être développées en série en injectant la relation (4.22) dans (C.17) et la relation (4.23) dans (C.27)

$$E_r^i = \frac{E_0}{k^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n, TM}^m n(n+1) \psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (4.58)$$

$$H_r^i = \frac{H_0}{k^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n, TE}^m n(n+1) \psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (4.59)$$

$$(4.60)$$

On tire alors profit des relations d'orthogonalité vérifiées par les fonctions harmoniques et les polynômes de Legendre :

$$\int_0^{2\pi} \exp(i(m-m')\varphi) d\varphi = 2\pi \delta_m^{m'} \quad (4.61)$$

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_n^l \quad (4.62)$$

où  $\delta_p^l = 1$  pour  $p = l$  et  $\delta_p^l = 0$  sinon. On établit ainsi après quelques calculs les formes intégrales suivantes des coefficients de forme de faisceau

$$g_{n, TM}^m = \frac{k^2 r^2}{\psi_n(kr)} \frac{1}{4\pi E_0 c_n^{pw}} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E_r^i(r, \theta, \varphi) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(-im\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.63)$$

$$g_{n, TE}^m = \frac{k^2 r^2}{\psi_n(kr)} \frac{1}{4\pi E_0 c_n^{pw}} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} H_r^i(r, \theta, \varphi) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(-im\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.64)$$

Ces relations sont valables pour tout  $r$ . Il est néanmoins important de bien choisir cette valeur de  $r$  pour réaliser une bonne évaluation numérique des coefficients de forme. Il est aussi possible d'utiliser les relations d'orthogonalité des fonctions de Bessel sphériques pour écrire ces coefficients sous forme d'intégrales triples, mais le moyen le plus efficace et le plus rapide est d'utiliser l'approximation localisée proposée et justifiée par le groupe de Gérard Gouesbet [43, 31]. Cette approximation est inspirée par le principe de localisation de Van de Hultz [44], qui dans le cas de l'onde plane, associe aux termes en ' $n$ ' des séries un ensemble de rayons localisés



sur un anneau distant de  $\rho_n = \frac{(n+1/2)\lambda}{2\pi}$  de l'axe  $z$ . Ce principe a été généralisé pas à pas d'abord pour un faisceau Gaussien focalisé en  $O$  (centre de la particule), puis un faisceau sur l'axe, et enfin dans le cas d'un faisceau arbitrairement localisé par rapport à la sphère diffusante. La démarche est pour l'essentiel intuitive et la validité de l'approximation est justifiée *a posteriori*.

Le détail des calculs est un peu fastidieux et ne sera pas reproduit ici. On se contentera de rappeler l'expression finale de ces coefficients approximatés  $\tilde{g}_{n,TM}^m$  et  $\tilde{g}_{n,TE}^m$  dans l'annexe E. Ces coefficients de formes approchés peuvent remplacer les coefficients  $g_{n,TM}^m$  et  $g_{n,TE}^m$  dans toutes les relations précédentes pour décrire un faisceau Gaussien circulaire de position et de rayon au col quelconque. Avec cette description efficace du faisceau incident, nous disposons à présent de tous les éléments nécessaires aux calculs des champs incident, interne et diffusé du problème.

#### 4.5.1 Cas d'un faisceau axisymétrique

Quand l'axe du faisceau passe par le centre de la sphère ( $x_0 = y_0 = 0$ ), les coefficients de forme  $g_{n,TM}^m$  et  $g_{n,TE}^m$  deviennent nuls pour  $|m| \neq 1$  et les coefficients non nuls vérifient

$$g_{n,TM}^1 = g_{n,TM}^{-1} = ig_{n,TE}^1 = -ig_{n,TE}^{-1} = \frac{g_n}{2}$$

Pour un faisceau Gaussien axisymétrique, les relations précédentes conduisent dans la limite  $x_0, y_0 \rightarrow 0$ , à

$$g_n = iQ_0 \exp\left(-iQ_0 \left(\frac{\rho_n}{\omega_0}\right)^2\right) \exp(-ikz_0) \quad (4.65)$$

où  $Q_0 = Q(z=0) = \left(i - \frac{2z_0}{kw_0^2}\right)^{-1}$ .

On retiendra ainsi que pour un faisceau axisymétrique, le faisceau peut être décrit à partir d'un seul coefficient  $g_n$  et que les sommations sur  $m$  se réduisent à des sommes de 2 éléments.

#### 4.5.2 Cas de l'onde plane

Pour une onde plane, dans la limite  $\omega_0 \rightarrow 0$ , les coefficients de forme du faisceau prennent une forme triviale. La relation (4.65) devient

$$g_n = 1 \quad (4.66)$$

et ainsi :

$$g_{n,TM}^1 = g_{n,TM}^{-1} = \frac{1}{2} \quad (4.67)$$

$$g_{n,TE}^1 = -g_{n,TE}^{-1} = \frac{-i}{2} \quad (4.68)$$

$$(4.69)$$

les autres coefficients, pour  $|m| \neq 1$  restant nuls.

## 4.6 Calcul des champs et des intensités

Les différentes composantes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  peuvent à présent être calculées numériquement sous forme de séries coefficientées de fonctions spéciales en dérivant (analytiquement) les développements en séries des potentiels de Bromwich correspondants, selon les relations (4.1) à (4.6).

### 4.6.1 Champ diffusé

Pour le champ diffusé, on introduit les relations (4.24) et (4.25) dans les relations (4.1) à (4.6) et on obtient :

$$E_r^s = \frac{-E_0}{k^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} a_n g_{n,TM}^m n(n+1) \xi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (4.70)$$

$$E_\theta^s = \frac{-E_0}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} [a_n g_{n,TM}^m \xi_n'(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) + m b_n g_{n,TE}^m \xi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta)] \exp(im\varphi) \quad (4.71)$$

$$E_\varphi^s = \frac{-iE_0}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} [m a_n g_{n,TM}^m \xi_n'(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) + b_n g_{n,TE}^m \xi_n(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta)] \exp(im\varphi) \quad (4.72)$$

$$H_r^s = \frac{-H_0}{k^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} b_n g_{n,TE}^m n(n+1) \xi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (4.73)$$

$$H_{\theta}^s = \frac{H_0}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} [m a_n g_{n,TM}^m \xi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) - b_n g_{n,TE}^m \xi_n'(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta)] \exp(im\varphi) \quad (4.74)$$

$$H_{\varphi}^s = \frac{iH_0}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} [a_n g_{n,TM}^m \xi_n(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) - m b_n g_{n,TE}^m \xi_n'(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta)] \exp(im\varphi) \quad (4.75)$$

où l'on a utilisé la propriété suivante des fonctions de Riccati-Bessel  $\xi_n$  (également valable pour  $\psi_n$ )

$$\xi_n''(x) + \xi_n(x) = \frac{n(n+1)}{x^2} \xi_n(x) \quad (4.76)$$

et où on a introduit les fonctions  $\tau_n^m(\cos \theta)$  et  $\pi_n^m(\cos \theta)$  définis par

$$\begin{aligned} \tau_n^m(\cos \theta) &= \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \\ \pi_n^m(\cos \theta) &= \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Les coefficients de diffusion  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  et  $d_n$  sont donnés par les relations (4.40) à (4.43) et les coefficients de forme du faisceau  $g_{n,TM}^m$  et  $g_{n,TE}^m$  par la relation (E.1). Le calcul de la somme sur  $n$  peut être tronqué. On montre que les termes de ces séries tendent rapidement vers zéro, comme les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ , quand  $n$  devient supérieur au paramètre de taille  $\alpha$  de la sphère diffusante. Dans la pratique, la sommation sur  $n$  est réalisée jusqu'à une valeur finie  $n_{max}$ . Cette valeur est généralement définie par la relation suivante, tirée du travail de Warren Wiscombe [45] :

$$n_{max} = \lfloor \alpha + 4\alpha^{1/3} + 2 \rfloor \quad (4.77)$$

En général, la sommation sur  $m$  peut être également tronquée, en fonction de la taille et de la position du faisceau.

La relation empirique de Wiscombe est utilisée dans la quasi totalité des codes de Théorie de Mie, mais elle a été établie pour des calculs en simple précision et la convergence d'une quantité intégrale (la section efficace) en vérifiant le critère suivant

$$|a_n|^2 + |b_n|^2 < 5 \cdot 10^{-14}, \quad \forall n \geq n_{max} \quad (4.78)$$

On peut remplacer ce critère par un critère de convergence adapté aux calculs en double précision et portant sur chacun des coefficients de diffusion, en demandant pour chaque valeur de  $\alpha$  que

$$\begin{cases} |a_n| < 10^{-15} \\ |b_n| < 10^{-15} \end{cases}, \forall n \geq n_{max} \quad (4.79)$$

Cette expérience numérique conduit à établir la formulation suivante, valable pour des valeurs du paramètres de taille  $\alpha$  comprise entre 0 et 10 000 et pour des indices de réfraction  $M$  compris entre 1.01 et 2.0.

$$n_{max} = \alpha + 7.15\alpha^{0.33} + 2 \quad (4.80)$$

Cette formule reste correcte quand l'indice est inférieur à 1 (cas de la bulle) ou quand il possède une partie imaginaire (absorption). Il faut néanmoins noter que dans certains cas, notamment pour le calcul de champs proches ou de champs internes ou surtout en appliquant une troncature dans une décomposition en série de Debye (décomposition qui sera introduite plus tard) il est préférable de tester cette convergence numériquement en utilisant la relation (4.80) comme point de départ. Ces deux relations empiriques illustrent un autre fait important. Plus la sphère diffusante est grande devant la longueur d'onde plus le nombre de termes des séries à calculer est important. Ces lois de puissances illustrent ainsi la croissance du temps de calcul et de la mémoire nécessaire au calcul avec le paramètre de taille.

## 4.6.2 Champ interne

On procède de même pour décrire les composantes du champ interne sous forme de série. On introduit cette fois les relations (4.26) et (4.27) dans les relations (4.1) à (4.6), en tirant profit des deux relations suivantes :

$$\frac{\varepsilon_{int}}{\varepsilon} \frac{k}{k_{int}} = \frac{\mu}{\mu_{int}} \frac{k_{int}}{k} = \frac{\mu}{\mu_{int}} M \quad (4.81)$$

$$k = \omega\varepsilon \frac{E_0}{H_0} = \omega\mu \frac{H_0}{E_0} \quad (4.82)$$

La première provient de la définition des nombres d'onde. La seconde est valable dans un milieu non absorbant (le milieu extérieur à la sphère ici).

On obtient ainsi les composantes du champ interne

$$E_r^{int} = \frac{E_0}{k_{int}^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} n(n+1) c_n g_{n, TM}^m \psi_n(k_{int} r) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (4.83)$$

$$E_{\theta}^{int} = \frac{E_0}{k_{int} r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} \left[ c_n g_{n, TM}^m \psi_n'(k_{int} r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) + \frac{\mu_{int}}{\mu M} m d_n g_{n, TE}^m \psi_n(k_{int} r) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) \right] \exp(im\varphi) \quad (4.84)$$

$$E_{\varphi}^{int} = \frac{iE_0}{k_{int} r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} \left[ m c_n g_{n, TM}^m \psi_n'(k_{int} r) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) + \frac{\mu_{int}}{\mu M} d_n g_{n, TE}^m \psi_n(k_{int} r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) \right] \exp(im\varphi) \quad (4.85)$$

$$H_r^{int} = \frac{H_0}{k_{int}^2 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} n(n+1) d_n g_{n, TE}^m \psi_n(k_{int} r) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (4.86)$$

$$H_{\theta}^{int} = -\frac{H_0}{k_{int} r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} \left[ \frac{\mu}{\mu_{int}} M m c_n g_{n, TM}^m \psi_n'(k_{int} r) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) - d_n g_{n, TE}^m \psi_n'(k_{int} r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) \right] \exp(im\varphi) \quad (4.87)$$

$$H_{\varphi}^{int} = -\frac{iH_0}{k_{int} r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} \left[ \frac{\mu}{\mu_{int}} M c_n g_{n, TM}^m \psi_n(k_{int} r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) - m d_n g_{n, TE}^m \psi_n(k_{int} r) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) \right] \exp(im\varphi) \quad (4.88)$$

Pour le champ interne, la sommation sur  $n$  est en pratique réalisée jusqu'à la valeur  $n_{max}$  donné par la relation (4.77) ou la relation (4.80) en remplaçant  $\alpha$  par  $\beta$ , soit

$$n_{max} = \lfloor \beta + 7.15\beta^{0.33} + 2 \rfloor \quad (4.89)$$

A partir de ces champs, il est possible de calculer les interférences entre l'onde résultante de cette interaction et une autre onde, pour simuler par exemple les expériences d'holographie, à condition de manier correctement les changement de repère qui s'imposent. On peut également calculer l'intensité ou le flux de densité de puissance résultant (vecteur de Poynting (section 2.1.6)) et simuler le signal enregistré par un capteur quadratique en calculant (par intégration) le flux énergétique traversant la surface du capteur ou d'un pixel, là encore en prenant soin de réaliser les changements de repères adéquates.

On déduit également des champs les densités d'impulsion électromagnétiques et en les intégrant, les forces de pression de radiation qui s'exercent sur l'objet. Cette possibilité offerte

par la TLMG en tenant compte de la focalisation du faisceau incident explique le succès de ce formalisme dans le domaine des pincettes optiques. Cet aspect n'est pas détaillé dans ce document, le lecteur curieux (et avisé) se référera au livre de G. Gouesbet et Gérard Gréhan pour en savoir plus [31].

### 4.6.3 Conclusion

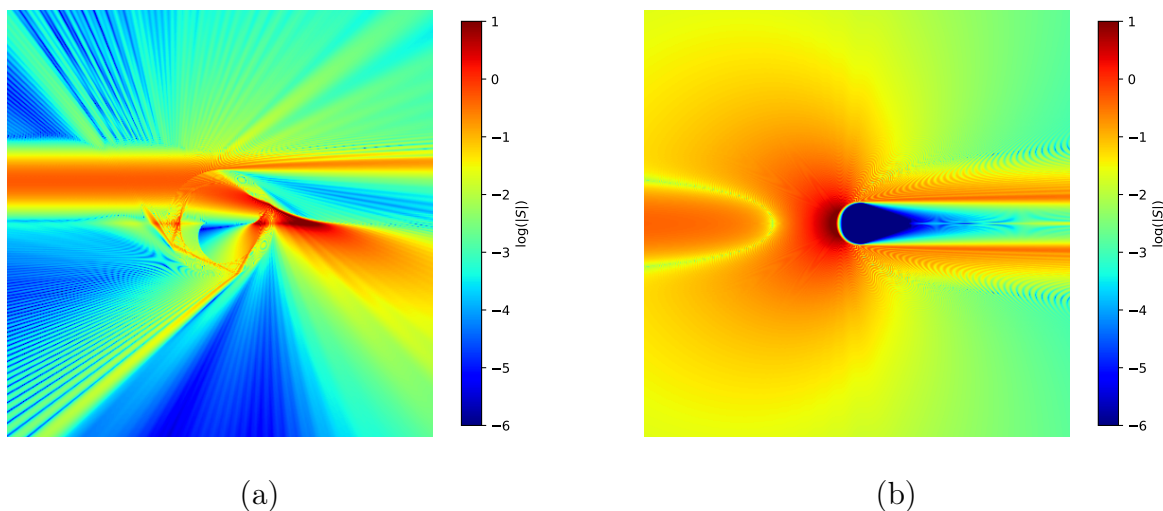
A partir de ces champs, il est possible de calculer les interférences entre l'onde résultante de cette interaction et une autre onde, pour simuler par exemple les expériences d'holographie, à condition de manier correctement les changements de repère qui s'imposent.

### 4.6.4 Calcul numérique et exemples

La théorie de Lorenz-Mie généralisée fournit une solution pseudo-analytique au problème de l'interaction entre une sphère et un faisceau focalisé. La prédiction des champs ou de l'intensité dans une région donnée de l'espace nécessite néanmoins le recours au calcul numérique pour évaluer les fonctions spéciales et sommer les nombreux termes des séries où elles apparaissent.

Les relations présentées dans les sections précédentes ne sont cependant pas sous une forme optimale du point de vue de la programmation. D'abord, de manière évidente, les séries des relations 4.70, 4.75 ou 4.83 à 4.88 peuvent être reformulées de manière à isoler les termes communs des différentes composantes et à réduire le nombre d'opérations, comme détaillé dans l'annexe H. Les coefficients de diffusion peuvent quant à eux être réécrits comme détaillé dans l'annexe I. Cette reformulation, basée sur l'introduction des dérivées logarithmiques des fonctions de Riccati-Bessel, permet d'améliorer la convergence et la précision des calculs pour les grands paramètres de taille, mais aussi pour les décompositions en séries de Debye et les sphères multicouches qui seront introduites plus tard.

La figure 4.2 montre deux exemples de calculs réalisés à partir des relations présentées dans ce chapitre 4.6. La densité de puissance de l'onde (norme du vecteur de Poynting) est représentée en échelle logarithmique dans un plan équatorial ( $x = 0$ ) à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Dans la figure 4.2.a, une goutte d'eau ( $n = 1.333$ ) sphérique de 100 microns ( $d = 100 \mu m$ ) est éclairée par une onde monochromatique ( $\lambda = 532 nm$ ) polarisée selon  $x$  (champ électrique perpendiculaire au plan d'observation, soit  $\varphi = \pi/2$ ). Le faisceau est focalisé (rayon au col  $w_0 = 20 \mu m$ ) à  $40 \mu m$  du centre de la sphère ( $x_0 = z_0 = 0$ ,  $y_0 = 40 \mu m$ ). La



**FIGURE 4.2** – Exemples de calculs de TLMG. Pour les deux exemples, la densité de puissance électromagnétique (norme de  $S$ , échelle log.) est calculée à partir du champ interne ou du champ total selon que l'on se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère. Le diamètre de la sphère est  $d = 100 \mu m$ . La longueur d'onde du faisceau est  $\lambda = 532 nm$ , il est polarisé selon  $x$  (champ électrique perpendiculaire au plan d'observation,  $\varphi = \pi/2$ ). À gauche (a), le rayon au col du faisceau est  $w_0 = 20 \mu m$ , et il est focalisé à  $40 \mu m$  du centre de la sphère ( $x_0 = z_0 = 0$ ,  $y_0 = -40 \mu m$ ). La sphère est transparente ( $n = 1.333$ ). À droite (b), le rayon au col du faisceau est  $w_0 = 100 \mu m$ , et il est focalisé au centre de la sphère ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ), qui est absorbante ( $n = 1.333 - 5.0 \cdot 10^{-2}i$ ).

sphère est clairement visible au centre de la figure à travers son interaction avec le faisceau. Le décentrement du faisceau permet de distinguer la lumière réfléchie par la sphère, la lumière réfractée, les réflexions à l'intérieur de la sphère, les nombreuses interférences et les arcs-en-ciel du premier et du second ordre, ainsi que les prémices de la diffraction en champ proche. Dans la figure 4.2.b, une sphère très absorbante ( $n = 1.33 - 5.0 \cdot 10^{-1}i$ ) de même diamètre est éclairée par un faisceau cinq fois plus large ( $w_0 = 100 \mu m$ ) focalisé au centre de la sphère ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ). Les autres paramètres sont identiques à ceux de la figure 4.2.a. Le calcul pour les  $500 \times 500$  points de l'une ou l'autre de ces cartes demande 7 minutes sur un PC portable. Le temps de calcul dépend principalement de la taille de la sphère (plus précisément du paramètre de taille  $\alpha$ ). Le même calcul ne demande que 50 secondes pour une sphère de 10 microns et 4 secondes pour une sphère de  $1 \mu m$ .

## 4.7 Approximation de champs lointains

Les relations établies jusqu'ici sont valables dans tout l'espace, à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère diffusante. En pratique, il est fréquent que les distances d'observation soit très grandes devant la longueur d'onde. Ces relations prennent alors une forme asymptotique qui simplifie les calculs. On parle d'approximation de champ lointain.

Pour  $r \gg \lambda$  ( $kr \rightarrow \infty$ ) on introduit la forme asymptotique de la fonction de Riccati-Bessel  $\xi_n(kr) \rightarrow i^{n+1} \exp(-ikr)$  dans les relations (4.70) à (4.75) ce qui conduit notamment à

$$\xi_n''(kr) + \xi_n(kr) \rightarrow 0$$

et finalement à

$$E_r^s = H_r^s = 0 \quad (4.90)$$

$$E_\theta^s = \frac{iE_0}{kr} \exp(-ikr) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} i^{n+1} [a_n g_{n, TM}^m \tau_n^{|m|}(\cos \theta) + i m b_n g_{n, TE}^m \pi_n^{|m|}(\cos \theta)] \exp(im\varphi) \quad (4.91)$$

$$E_\varphi^s = \frac{-E_0}{kr} \exp(-ikr) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} i^{n+1} [m a_n g_{n, TM}^m \pi_n^{|m|}(\cos \theta) + i b_n g_{n, TE}^m \tau_n^{|m|}(\cos \theta)] \exp(im\varphi) \quad (4.92)$$

$$H_\varphi^s = \frac{H_0}{E_0} E_\theta \quad (4.93)$$

$$H_\theta^s = \frac{H_0}{E_0} E_\varphi \quad (4.94)$$

On obtient ainsi un champ transverse, où les composantes radiales sont nulles et les composantes transversales sont liées.

On retrouve des relations proches de celle bien connues de la Théorie de Mie en posant

$$E_\theta^s = \frac{iE_0}{kr} \exp(-ikr) \bar{S}_2 \quad (4.95)$$

$$E_\varphi^s = \frac{-E_0}{kr} \exp(-ikr) \bar{S}_1 \quad (4.96)$$

où les quantités  $\bar{S}_1$  et  $\bar{S}_2$  sont une généralisation des quantités  $S_1$  et  $S_2$  de la TLM auxquelles elles ne s'identifient pas exactement (voir les relations (4.114) et (4.115) de la section 4.9) et



s'écrivent

$$\bar{S}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \frac{2n+1}{n(n+1)} [ma_n g_{n, TM}^m \pi_n^{|m|}(\cos \theta) + ib_n g_{n, TE}^m \tau_n^{|m|}(\cos \theta)] \exp(im\varphi) \quad (4.97)$$

$$\bar{S}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n g_{n, TM}^m \tau_n^{|m|}(\cos \theta) + imb_n g_{n, TE}^m \pi_n^{|m|}(\cos \theta)] \exp(im\varphi) \quad (4.98)$$

Dans cette approximation, le vecteur de poynting devient lui radial (direction du vecteur unitaire  $\mathbf{e}_r$ ) et s'écrit

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(E_\theta H_\varphi^* - E_\varphi H_\theta^*) \mathbf{e}_r = \frac{1}{2} \text{Re}(E_\theta E_\theta^* - E_\varphi E_\varphi^*) \mathbf{e}_r \quad (4.99)$$

et sa norme  $S$  prend la forme

$$S = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{E_0 H_0^*}{k^2 r^2} (|\bar{S}_1|^2 + |\bar{S}_2|^2) \right] \quad (4.100)$$

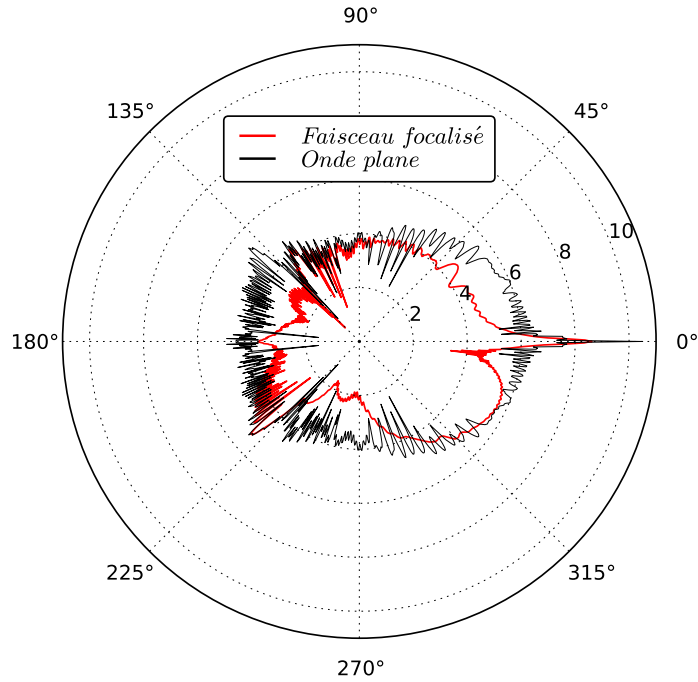
En adoptant la condition de normalisation suivante :

$$\frac{E_0 H_0^*}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |E_0|^2 = 1 \quad (4.101)$$

$S$  devient sans dimension et se simplifie en

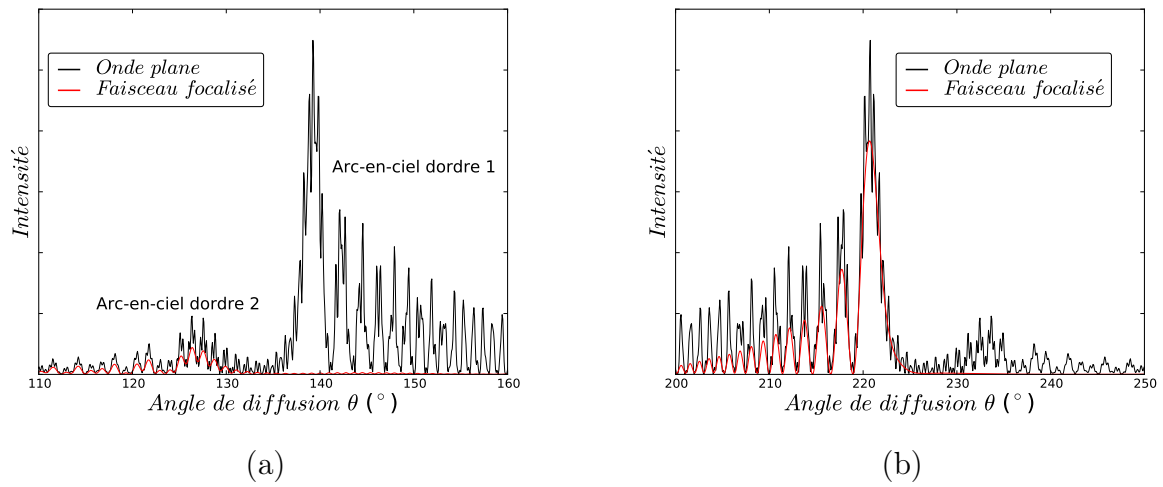
$$S = \frac{1}{k^2 r^2} \text{Re} (|\bar{S}_1|^2 + |\bar{S}_2|^2) = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} (|\bar{S}_1|^2 + |\bar{S}_2|^2) \quad (4.102)$$

La figure 4.3 montre un exemple de calcul en champ lointain pour les mêmes paramètres que ceux utilisés figure 4.2.a. Sur le diagramme en rouge on retrouve en champ lointain les principales structures apparentes en champ proche figure 4.2.a. En comparant le diagramme obtenu pour ce faisceau focalisé et décentré à celui obtenu pour une onde plane ( $w_0$  très grand, en noir sur la figure), on constate la dissymétrie attendue, l'affaissement de l'intensité dans certaines zones du diagramme et la disparition de certaines hautes fréquences liées à des interférences. Ces conséquences d'un éclairage non uniforme de la sphère se manifestent de manière remarquable autours des angles d'arc-en-ciel, comme l'illustre le figure 4.4. Avec un éclairage uniforme (onde plane) les arcs-en-ciel du premier et du second ordre sont visibles des deux cotés de la sphère, autour de  $140^\circ$  et de  $220^\circ$ . Pour l'éclairage focalisé et décentré, seul l'arc-en-ciel du second ordre est visible autour de  $140^\circ$ , du coté du faisceau. Du coté opposé au faisceau, vers  $220^\circ$  seul l'arc-en-ciel du premier ordre est visible (figure 4.4.b). La figure 4.5 illustre la formation

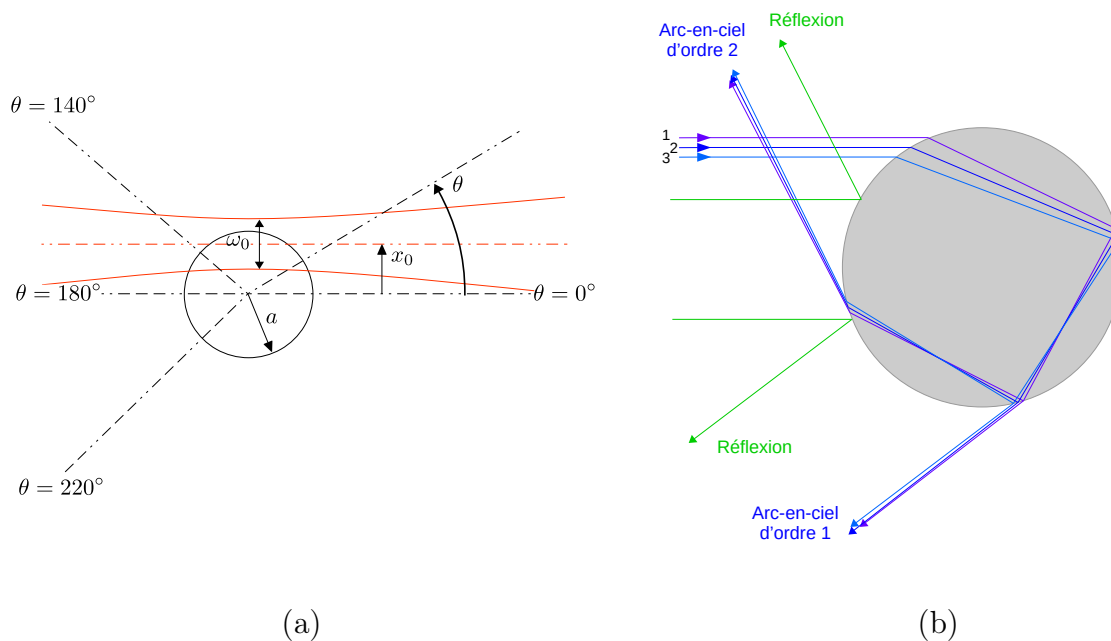


**FIGURE 4.3** – Exemple de calcul de TLMG en champ lointain. Les diagrammes de diffusion pour une onde plane ( $w_0$  très grand) et un faisceau focalisé décentré. La sphère diffusante est la même que celle déjà considérée dans le calcul des champs internes et des champs proches figure 4.2 ( $d = 100 \mu m$ ;  $n = 1.333$ ). Le faisceau focalisé est lui aussi identique à celui de la figure 4.2 ( $\lambda = 532 nm$ ;  $w_0 = 20 \mu m$ ;  $x_0 = z_0 = 0$ ;  $y_0 = 40 \mu m$ ).

des arc-en-ciel à l'aide d'un tracé de rayons. L'arc-en-ciel d'ordre 1 est une figure d'interférence associée à des rayons impactant le bord de la sphère, réfractés, réfléchis une fois à l'intérieur de la sphère puis réfractés vers l'extérieur. Il existe pour ces rayons un angle minimum de déviation, l'angle d'arc-en-ciel (rayon 2 sur la figure). Les rayons impactant la sphère légèrement plus haut ou plus bas (1 et 3 sur la figure) sont déviés d'un même angle, légèrement supérieur à l'angle d'arc-en-ciel, et ils interfèrent. Cette première interférence constitue la fréquence la plus basse du signal d'arc-en-ciel. Quand toute la sphère est éclairée, la figure d'arc-en-ciel présentent également des hautes fréquences dues aux interférences de la première figure avec la lumière directement réfléchié par la sphère au même angle ainsi qu'avec des arcs-en-ciels d'ordre plus élevés. L'arc-en-ciel d'ordre 2 se forme selon le même principe mais pour des rayons réfléchis deux fois à l'intérieur de la sphère. L'angle d'arc-en-ciel d'ordre 2 est proche de celui d'ordre 1 mais se situe à l'opposé.



**FIGURE 4.4** – Densité de puissance électromagnétique (intensité) en fonction de l'angle  $\theta$  autour de l'angle d'arc-en-ciel pour une onde plane et un faisceau focalisé décentré : (a) du côté du faisceau et (b) du côté opposé au faisceau



**FIGURE 4.5** – Formation des arcs-en-ciel d'ordre 1 et 2. Pour un faisceau focalisé décentré (a), seule une partie des rayons schématisés (b) participe à leur formation.

On comprend ainsi en revenant à la figure 4.4 que les arcs-en-ciel d'ordre 1 et 2 ne soient visibles que d'un seul coté pour un éclairage focalisé près du bord de la sphère. On comprend également que la figure d'arc-en-ciel d'ordre 1 ne présente plus de hautes fréquences, puisqu'il n'y pas de lumière réfléchi de ce coté de la sphère avec l'éclairage focalisé. Au contraire, l'arc-en-ciel d'ordre 2 présentent toujours une partie de ces hautes fréquences.

## 4.8 Sections efficaces

Les sections efficaces de diffusion, d'absorption et d'extinction sont établies à partir de bilan énergétique sur une sphère de rayon  $r$  très grand devant la longueur d'onde et la taille de la sphère diffusante. On applique donc l'approximation de champ lointain décrite dans la section précédente. L'un des atouts majeurs des solutions à variables séparables (dont la TLMG) est de permettre le calcul de ces sections efficaces sans calculer le champ en chaque point de la sphère de rayon  $r$ . Contrairement aux méthodes numériques, ces méthodes permettent en effet de réaliser l'intégration de manière analytique. Le flux total d'énergie sortant de cette sphère s'écrit

$$\Phi^t = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \text{Re} (E_\theta^t H_\varphi^{t*} - E_\varphi^t H_\theta^{t*}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.103)$$

Par définition ce bilan est l'opposé de la section efficace d'absorption, soit  $C_{abs} = -\Phi^t$  qui, en vertu de la condition de normalisation adoptée plus haut (4.101), a la dimension d'une surface. En introduisant la superposition  $\mathbf{E}^t = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$  et  $\mathbf{H}^t = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s$ , ce flux se décompose en trois parties

$$-C_{abs} = \Phi^t = \Phi^i + \Phi^s + \Phi^{is} \quad (4.104)$$

avec

$$\Phi^i = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \text{Re} (E_\theta^i H_\varphi^{i*} - E_\varphi^i H_\theta^{i*}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.105)$$

$$\Phi^s = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \text{Re} (E_\theta^s H_\varphi^{s*} - E_\varphi^s H_\theta^{s*}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.106)$$

$$\Phi^{is} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \text{Re} (E_\theta^i H_\varphi^{s*} + E_\theta^s H_\varphi^{i*} - E_\varphi^i H_\theta^{s*} - E_\varphi^s H_\theta^{i*}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.107)$$

Le milieu entourant la sphère étant non absorbant le flux  $\Phi^i$  est nul. Le flux  $\Phi^s$  représente un bilan sur le champ diffusé seul. Il n'y a pas d'énergie diffusée entrant dans la sphère ce flux

est donc toujours positif et représente la totalité de l'énergie diffusée. Par définition  $\Phi^s$  est la section efficace de diffusion  $C_{sca}$  (avec 'sca' pour 'scattering'), soit  $C_{sca} = \Phi^s$ . On en déduit que la section efficace d'extinction qui regroupe l'ensemble des pertes liées à l'absorption et à la diffusion s'écrit

$$C_{ext} = C_{abs} + C_{sca} = -\Phi^s \quad (4.108)$$

En introduisant les décompositions en série des différents champs et après quelques lignes de calcul on établit

$$C_{sca} = \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \left( |a_n|^2 |g_{n,TM}^m|^2 + |b_n|^2 |g_{n,TM}^m|^2 \right) \quad (4.109)$$

$$C_{ext} = \frac{\lambda^2}{\pi} \text{Re} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \left( |a_n| |g_{n,TM}^m|^2 + |b_n| |g_{n,TM}^m|^2 \right) \right] \quad (4.110)$$

Contrairement aux sections efficaces de la LMT (en onde plane), ces sections efficaces ne dépendent pas que des paramètres de la sphère et de la longueur d'onde. Elles dépendent aussi du faisceau incident, ce qui les rend peu utiles en pratique. Ce n'est évidemment pas le cas dans le cas particulier d'un éclairage par une onde plane qui est traité dans la section suivante.

## 4.9 Cas particulier de l'onde plane : TLM

Dans la limite  $\omega_0 \rightarrow \infty$  d'un faisceau de grande largeur (devant la longueur d'onde et la taille de la sphère), la Théorie de Lorenz-Mie Généralisée tend vers la Théorie de Lorenz-Mie Classique. Les coefficients de forme décrivant l'onde plane sont nuls pour  $|m| \neq 1$  et les coefficients non nuls sont donnés par les relations (4.67) et (4.68). Les sommations sur l'entier  $m$  disparaissent ainsi dans toutes les relations. Par exemple, le potentiel  $U_{TM}^i$  devient

$$U_{TM}^i = \frac{E_0}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{pw} \psi_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi \quad (4.111)$$

et les quantités  $\bar{S}_1$  et  $\bar{S}_2$  deviennent

$$\bar{S}_1 = i \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n^1(\cos \theta) + b_n \tau_n^1(\cos \theta)] \quad (4.112)$$

$$\bar{S}_2 = \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n^1(\cos \theta) + b_n \pi_n^1(\cos \theta)] \quad (4.113)$$

Ces relations s'identifient bien aux relations classiques de la LMT en posant

$$\bar{S}_1 = i \sin \varphi S_1 \quad (4.114)$$

$$\bar{S}_2 = \cos \varphi S_2 \quad (4.115)$$

et en utilisant les notations usuelles  $\pi_n$  et  $\tau_n$  pour les fonctions généralisées de Legendre  $\pi_n^1$  et  $\tau_n^1$ , soit

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)] \quad (4.116)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos \theta) + b_n \pi_n(\cos \theta)] \quad (4.117)$$

On retrouve également les résultats de la LMT pour les sections efficaces qui, pour une onde plane, deviennent

$$C_{sca} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [|a_n|^2 + |b_n|^2] \quad (4.118)$$

$$C_{ext} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n + b_n) \right] \quad (4.119)$$

Ces sections efficaces sont des caractéristiques de la sphère diffusante. Elles peuvent être calculées directement à partir du paramètre de taille et de l'indice de la sphère diffusante. Elles sont très utilisées, notamment dans le traitement des problèmes de diffusion multiple comme nous le verrons dans le chapitre 5 (section 5.4).

## 4.10 Décomposition en séries de Debye

### 4.10.1 Introduction

La TLM et les TLMG fournissent des solutions rigoureuses aux problèmes de diffusion, sans limite théorique de taille et d'indice. Il est cependant difficile d'en interpréter les résultats. Les champs solutions de la Théorie de Lorenz-Mie s'écrivent sous forme de série d'ondes sphériques élémentaires. Cette décomposition (sur  $n$ ) trouve une interprétation physique grâce au principe de localisation (section 4.5) mais cette interprétation reste limitée et peu intuitive.

A l’opposé, l’Optique Géométrique (OG) est une approximation (section 2.2). Son application est limitée aux objets grands devant la longueur et elle ne rend pas compte de nombreux phénomènes comme les arcs-en-ciel, la diffraction ou les ondes de surface (quelle que soit la taille des objets). En revanche, l’OG est beaucoup plus intuitive et permet de décrire simplement les interactions lumière/objet à l’aide de rayons lumineux qui se propagent en ligne droite (dans un milieu homogène), sont transmis ou réfléchis à chaque interface, ou sont courbés sous l’effet d’un gradient d’indice. C’est souvent cette approximation qui est utilisée pour se représenter de manière intuitive les phénomènes de diffusion, y compris quand il s’agit d’interpréter les résultats de calculs plus rigoureux.

La décomposition en séries de Debye permet d’interpréter les résultats de la TLM et de la TLMG d’une manière analogue à ce que permet l’OG ou le tracé de rayon tout en conservant la rigueur et l’exactitude des résultats.

L’approche proposée par Debye en 1908 dans le cas du cylindre [46] consiste à décomposer chaque terme des séries de la LMT en une infinité de termes qui chacun correspond à un nombre et un type d’interaction (réflexion ou transmission) avec la surface de la sphère (ou du cylindre). C’est ainsi que chaque coefficient de diffusion prend la forme d’une série infinie. On écrira par exemple

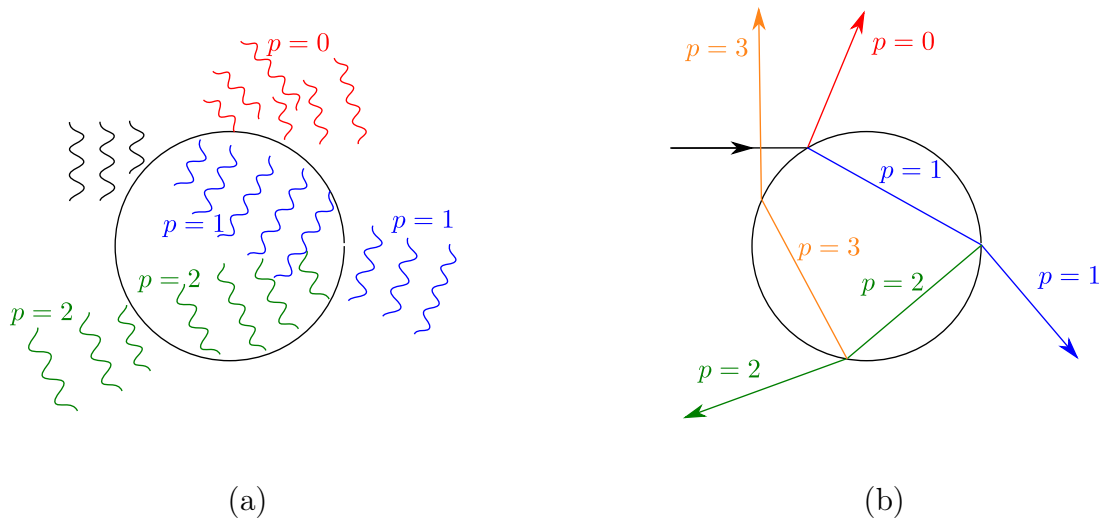
$$a_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_n^p \quad (4.120)$$

En tronquant ces séries de  $p = p_{min}$  à  $p_{max}$  ou en les réduisant à un seul terme et en substituant les coefficients de diffusion par ces coefficients tronqués dans les solutions, on isole les contributions de la réflexion et de la diffraction ( $p = 0$ ), de la réfraction simple ( $p = 1$ ) ou des réfractions d’ordre supérieurs (avec réflexion(s) interne(s),  $p > 1$ ). Cette décomposition peut être appliquée à la TLM, pour un objet sphérique et pour une onde plane [47]. Elle s’applique également de fait pour la TLMG puisqu’elle s’applique aux seuls coefficients de diffusion.

Cette décomposition constitue un outil puissant pour interpréter les phénomènes de diffusion comme nous l’illustrons dans les sections suivantes. Elle présente également des limites, pour l’essentiel méconnues ou négligées qui seront également abordées.

Les séries de Debye constituent également un outil précieux pour le développement de modèles plus simples et plus versatiles comme les modèles géométriques. Elles permettent en effet des comparaisons terme à terme entre un calcul exacte et ceux réalisés avec des modèles qui n’ont pas la même rigueur mais présentent d’autres avantages, comme celui de s’appliquer dans

des situations et à des formes de particules plus complexes, ou celui d'être plus rapide en temps de calcul. Cet ensemble d'outils (La TLM, TLMG et décomposition en séries de Debye) a par exemple joué un rôle central dans le développement du modèle VCRM (Vectorial Complex Ray Model) et des outils numériques associés [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. Enfin, les décompositions en séries de Debye s'appliquent aussi aux calculs de diffusion résolue en temps d'impulsions laser ultra-brèves. Les différents modes d'interaction sont alors séparés temporellement, et la décomposition de Debye permet d'aborder efficacement et rigoureusement les problèmes de diffusion multiple, comme nous le verrons dans le chapitre 5, sections 5.3 et 5.4.5.



**FIGURE 4.6** – Illustration de la décomposition en séries de debye (a) représentation équivalente en termes de tracé de rayon (b). Le terme  $p = 0$  correspond à la lumière réfléchiée à la surface de la sphère et diffractée (réflexion et diffraction ne sont dissociées). Le mode  $p = 1$  correspond à la réfraction les modes  $p \geq 2$  correspondent à la lumière réfractée après  $p$  réflexions à l'intérieur de la sphère.

#### 4.10.2 Formulation des séries de Debye

Les coefficients de diffusion de la TLM sont donnés par les relations (4.40) à (4.43).  $a_n$  et  $c_n$  correspondent à l'onde  $TM$  et  $b_n$  et  $d_n$  à l'onde  $TE$ . En observant ces coefficients on constate qu'ils présentent certaines similitudes et quelques différences associées à leur nature TE ou TM. Pour simplifier la formulation, il est utile de les écrire sous une forme commune en introduisant deux paramètres  $A$  et  $B$  qui prennent des valeurs différentes pour une onde TM et une onde TE. Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  s'identifient alors à un coefficient unique  $e_n$  et les coefficients  $c_n$  et



$dn$  à un coefficient  $f_n$  multiplié par  $M$ , soit

$$\begin{cases} a_n \\ b_n \end{cases} = e_n \quad (4.121)$$

$$\begin{cases} c_n \\ d_n \end{cases} = M f_n \quad (4.122)$$

avec

$$e_n = \frac{A\psi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - B\psi'_n(\alpha)\psi_n(\beta)}{A\xi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - B\xi'_n(\alpha)\psi_n(\beta)} \quad (4.123)$$

$$f_n = A \frac{\xi_n(\alpha)\psi'_n(\alpha) - \xi'_n(\alpha)\psi_n(\alpha)}{A\xi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - B\xi'_n(\alpha)\psi_n(\beta)} \quad (4.124)$$

où  $A$  et  $B$  prennent les valeurs suivantes pour l'onde  $TM$  et l'onde  $TE$ .

$$\begin{cases} A = 1 & \text{et} & B = \frac{M\mu_{ext}}{\mu_{int}} & \text{pour l'onde } TM \\ A = \frac{M\mu_{ext}}{\mu_{int}} & \text{et} & B = 1 & \text{pour l'onde } TE \end{cases} \quad (4.125)$$

Pour décomposer ces coefficients  $e_n$  et  $f_n$  en séries de Debye on considère des ondes élémentaires entrantes et sortantes. Quand ces ondes rencontrent la surface de la sphère, elles sont en partie réfléchies et en partie transmises. On définit ainsi des coefficients de transmission  $T_n^{21}$  (de l'extérieur vers l'intérieur de la sphère) et  $T_n^{12}$  (de l'intérieur vers l'extérieur) et des coefficients de réflexion  $R_n^{22}$  (à l'extérieur de la sphère) et  $R_n^{11}$  (à l'intérieur). L'annexe F décrit en détail la manière dont les coefficients  $T_n$  et  $R_n$  se déduisent des conditions aux limites de la sphère et la manière dont  $e_n$  et  $f_n$  peuvent être exprimés en fonction de ces coefficients. On obtient ainsi

$$f_n = \sum_{p=1}^{\infty} T_n^{21} (R_n^{11})^{p-1} \quad (4.126)$$

$$e_n = \frac{1}{2} \left[ 1 - R_n^{22} - \sum_{p=1}^{\infty} T_n^{12} (R_n^{11})^{p-1} T_n^{21} \right] \quad (4.127)$$

où

$$R_n^{11} = \frac{1}{D} [-A\xi_n(\alpha)\xi'_n(\beta) + B\xi'_n(\alpha)\xi_n(\beta)] \quad (4.128)$$

$$R_n^{22} = \frac{1}{D} [-A\Gamma_n(\alpha)\Gamma'_n(\beta) + B\Gamma'_n(\alpha)\Gamma_n(\beta)] \quad (4.129)$$

$$T_n^{12} = \frac{2iB}{D} \quad (4.130)$$

$$T_n^{21} = \frac{2iA}{D} \quad (4.131)$$

avec

$$D = A\xi_n(\alpha)\Gamma'_n(\beta) - B\xi'_n(\alpha)\Gamma_n(\beta) \quad (4.132)$$

Les coefficients de diffusion sont ainsi décomposés en une série infinie de termes d'indice  $p$ . Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  peuvent être calculés en attribuant les valeurs de  $A$  et  $B$  correspondant aux ondes  $TM$  ou  $TE$  selon la relation (4.125) dans le calcul des coefficients de transmission et de réflexion. On retrouve les relations données par Hovenac et Lock [47] et Gouesbet[48] à ceci près que nous n'avons pas imposé que la sphère et le milieu ambiant soit non-magnétique ( $\mu = \mu_{int} = \mu_0$ ).

Pour les coefficients diffusés, chaque terme de la relation (4.127) trouve une interprétation physique simple, proche de celle que nous offre l'Optique Géométrique et illustrée figure 4.6. Le terme  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}R_n^{22}$  correspond à l'ensemble de la lumière diffractée et réfléchiée par la sphère. On peut ainsi isoler cette contribution (on parlera du mode de Debye  $p = 0$ ) en tronquant le calcul des coefficients de diffusion à ce seul terme et en remplaçant ces coefficients tronqués dans les calculs des champs, des intensités ou des sections efficaces. Il est tentant d'associer le terme  $\frac{1}{2}$  à la diffraction et le terme  $-\frac{1}{2}R_n^{22}$  à la réflexion, mais cette séparation n'a pas de sens car ces deux termes pris séparément ne tendent pas vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini, propriétés indispensables des coefficients de diffusion qui doit également être vérifiée par les coefficients tronqués.

Le terme  $p = 1$  ( $T_n^{12}T_n^{21}$ ) correspond à la lumière réfractée par la sphère, transmise à l'intérieur de la sphère, puis transmise vers l'extérieur. Les autres termes ( $p = 2, p = 3, \dots$ ) correspondent à la lumière transmise dans la sphère, réfléchiée  $p - 1$  fois à l'intérieur de la sphère avant d'être de nouveau transmise vers l'extérieur de la sphère.

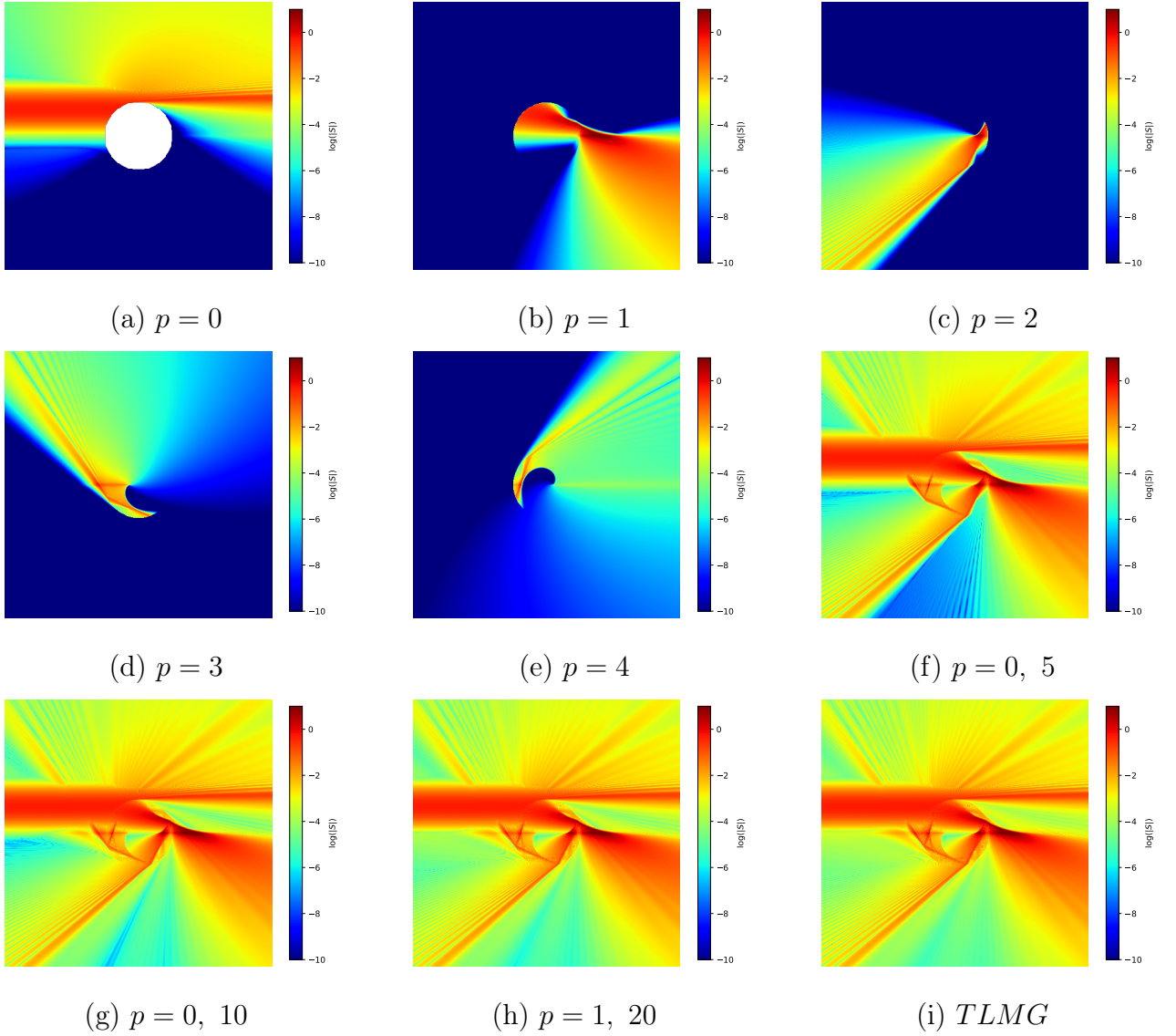
Pour les coefficients  $c_n$  et  $d_n$  ( $f_n$ ) le terme  $p = 0$  est nul (pas de réflexion ou de diffraction à l'intérieur de la sphère), le terme  $p = 1$  ( $T_n^{21}$ ) correspond à la lumière réfractée (transmise dans la sphère), et les termes suivants à la lumière transmise puis réfléchiée  $p - 1$  fois à l'intérieur de la sphère. On utilise parfois le terme de "réfraction d'ordre 1" pour  $p = 1$  et de "réfraction d'ordre  $p$ " pour  $p > 1$ .

### 4.10.3 Exemple de troncature

On peut ainsi reprendre l'exemple de la figure 4.2(a) et calculer le champ interne et le champ proche de la sphère en utilisant des coefficients  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  et  $d_n$  développés en séries de Debye et tronqués. Figure 4.7, ces coefficients sont réduits à un seul terme de la série ( $p = 1$ ,  $p = 2$ ,  $p = 3$  et  $p = 4$ ) ou à un ensemble de termes (somme sur  $p$  de 0 à  $p_{max} = 5$ , 10 ou 20).

On parvient ainsi à isoler la lumière réfléchie ( $p = 0$ ) figure 4.7(a), la lumière réfractée ( $p = 1$ ) figures 4.7(b), puis la lumière ayant expérimenté une, deux ou trois réflexions internes ( $p = 2$ ,  $p = 3$ ,  $p = 4$ ) figures 4.7(c-e). Sur ces figures, on constate sans surprise qu'avec les effets combinés d'un éclairage partiel de la sphère et de l'isolement d'un mode de Debye, seule une partie de l'espace est éclairée. On constate également que l'essentiel des interférences a disparu même si certaines persistent, au niveau des caustiques et des arcs-en-ciel. Ces zones particulières correspondent en termes de tracé de rayon à des croisements de trajectoires pour des rayons de même mode, proches les uns des autres.

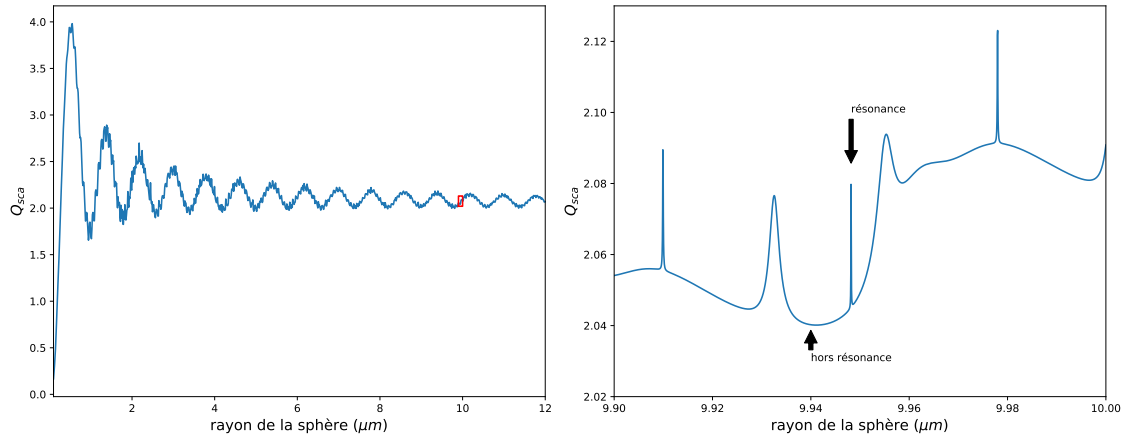
Les figures 4.7(f-h) montrent le résultat de troncatures à un ensemble de termes, de  $p = 0$  à une valeur croissante de  $p_{max} = 5$ , 10 et 20. La figure 4.7(i) montre le résultat du calcul sans troncature (TLMG sans décomposition en séries de Debye), identique à celui de la figure 4.2(a) mais avec une échelle de couleur différente. En comparant ce résultat de référence avec les troncatures, on constate que dans ce cas particulier, les 10 premiers modes de Debye suffisent à représenter l'essentiel de l'interaction. On constate toutefois quelques différences entre la figure 4.7(g) et la figure 4.7(i) si l'on se focalise sur certains détails dans les zones riches en interférences et dans les zones sombres dont l'échelle logarithmique augmente la visibilité. Lorsque les 20 premiers modes sont considérés (4.7(h)), ces écarts ne sont plus visibles, ce qui montre que la contribution des modes d'ordre  $p > 20$  est très faible dans le cas considéré. Notons toutefois que ces écarts existent et que si l'on souhaite les réduire partout sur le domaine de calcul en dessous d'une valeur donnée, un plus grand nombre de termes doit être pris en compte dans le développement en séries de Debye ( $p_{max}$  de l'ordre de 200 dans cet exemple pour obtenir un écart inférieur à 1% partout, et notamment dans les zones les plus sombres). Notons également que ce seuil de 20 ne constitue pas une règle générale et que davantage de termes sont souvent requis, du moins lorsque l'on considère un éclairage monochromatique et continu.



**FIGURE 4.7** – Densité de puissance (échelle log.) à l’intérieur et à l’extérieur d’une sphère pour différentes troncatures des séries de Debye. En dehors des paramètres définissant ces troncatures, les paramètres du calcul sont les mêmes que ceux de la figure 4.2.a. Pour les cas incluant le terme  $p = 0$  (a, f, g, h) et le calcul TLMG sans troncature (i), le champ à l’extérieur de la sphère est le champ total. Pour les autres cas, le champ est le champ diffusé (sans ajout du faisceau incident)

#### 4.10.4 Interaction résonante

Dans certains cas, le nombre de termes nécessaires pour reproduire l’essentiel de l’interaction peut devenir très important. C’est le cas pour une interaction résonante. La figure 4.8 montre le coefficient de diffusion  $Q_{sca} = C_{sca}/\pi a^2$  d’une sphère en fonction de son rayon  $a$  pour une

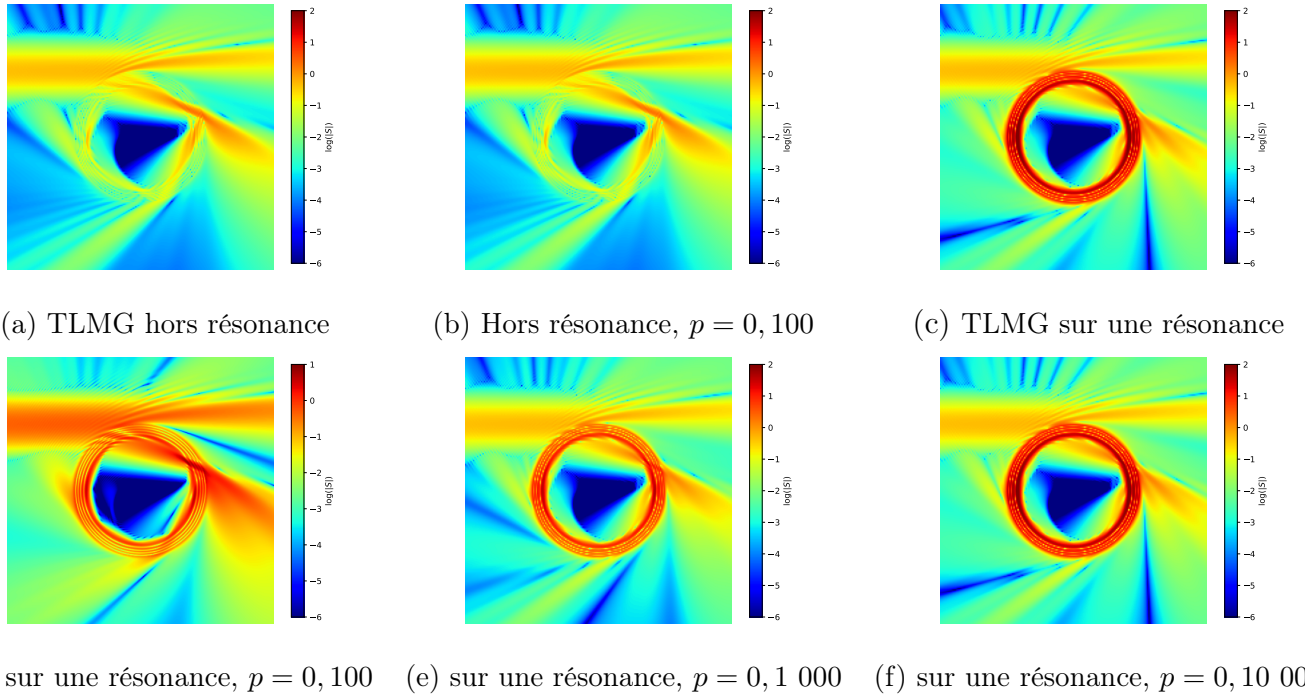


**FIGURE 4.8** – Coefficient de diffusion en fonction du rayon de la sphère, pour une longueur d’onde  $\lambda = 0.532 \mu m$ .

longueur d’onde  $\lambda = 0.532 \mu m$ . La figure de gauche montre le caractère oscillant de ce coefficient pour le rayon  $a$  variant de 0 à  $12 \mu m$ . La figure de droite montre le détail de cette courbe pour des valeurs de  $a$  très légèrement inférieures à  $10 \mu m$ . Les pics visibles sur cette figure correspondent à des résonances, plus ou moins larges, c’est-à-dire plus ou moins sensible au paramètre de taille de la sphère  $\alpha = 2\pi a/\lambda$  (rapport entre rayon et longueur d’onde).

Selon que l’on se trouve sur une résonance ou non, pour  $a = 9.948184 \mu m$  ou  $a = 9.94 \mu m$  par exemple, les champs internes et diffusés peuvent être très différents. C’est ce que montre la figure 4.9 qui représente la densité de puissance à l’intérieur et à l’extérieur de deux sphères de diamètres proches de  $20 \mu m$ . Les deux sphères considérées sont éclairées par un faisceau de  $3 \mu m$  de rayon, focalisé à  $10 \mu m$  du centre de la sphère (très proche du bord de la sphère). Le calcul est réalisé dans le plan  $\varphi = 90^\circ$ . Dans le cas non résonant (figure 4.9(a)), pour une sphère de rayon  $a = 9.94 \mu m$ , l’allure des champs internes et diffusés obtenus par la TLMG est assez proche de celle de la figure 4.7. Il faut néanmoins considérer les 100 premiers termes des séries de Debye avec cette sphère légèrement plus petite pour retrouver un résultat visuellement identique à celui du calcul complet (TLMG sans troncature) (figure 4.9(b)).

Figures 4.9(c-f), le rayon de la sphère est  $a = 9.948184 \mu m$ , de sorte qu’on se trouve sur la résonance de la figure 4.8. Cette résonance conduit à une accumulation importante d’énergie dans la sphère, à proximité de la surface, visible figure 4.9(c) qui montre le résultat du calcul complet de TLMG (sans troncatures). Les figures 4.9(d-f) montrent le résultat de calculs réalisés



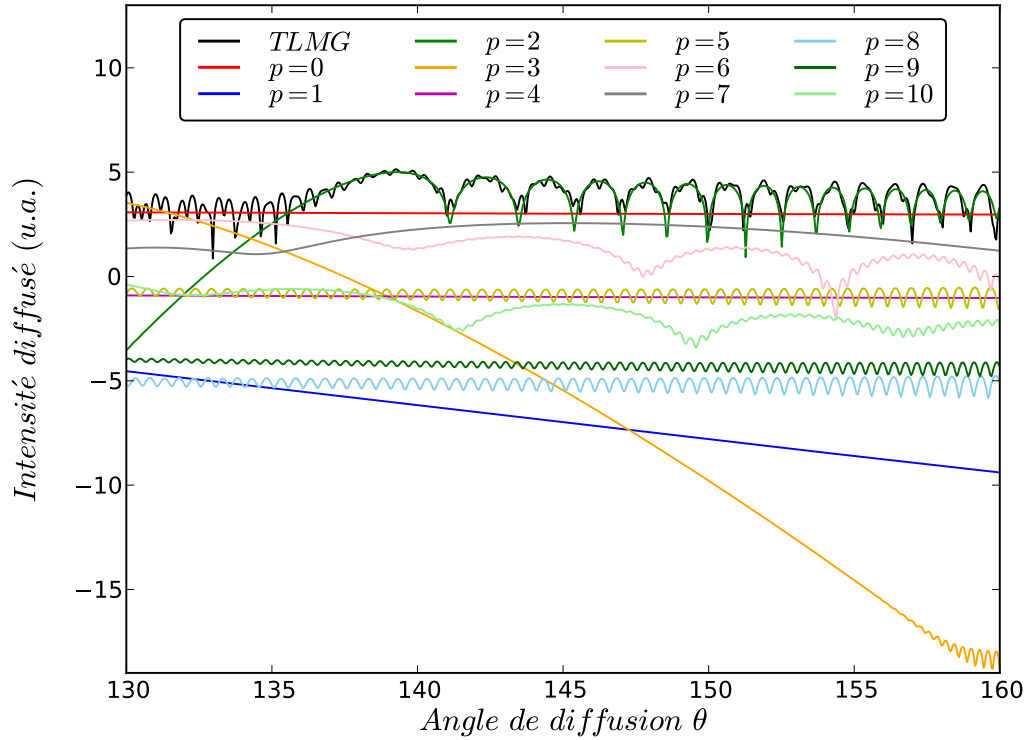
**FIGURE 4.9** – Densité de puissance électromagnétique dans des conditions résonantes et non résonantes et pour différentes troncatures des séries de Debye. Le diamètre de la sphère est proche de  $20 \mu m$ , son indice  $n = 1.333$ . Elle est éclairée par un faisceau gaussien focalisé au bord de la particule ( $\lambda = 0.532 \text{ nm}$ ,  $\omega_0 = 3 \mu m$ ,  $x_0 = -10 \mu m$ ,  $y_0 = z_0 = 0$ ). La figure compare les champs internes et proches (intensité en échelle log.) dans le plan  $\varphi = 90^\circ$  (perpendiculaire à la direction de polarisation), obtenu (a) par un calcul complet (TLMG) hors résonance pour une sphère de rayon  $a = 9.94 \mu m$ , (b) par un calcul tronqué aux 101 premiers termes des séries de Debye pour la même sphère, (c) par un calcul complet (TLMG) sur la résonance identifiée figure 4.8 pour  $a = 9.948184 \mu m$ , (d-f) pour un calcul tronqué aux 101, 1 001 et 10 001 premiers termes dans ces mêmes conditions résonantes.

avec troncatures des modes de Debye de  $p = 0$  à 100, 1 000 et 10 000. On constate ainsi que plusieurs milliers de modes sont nécessaires pour reproduire cette interaction résonante, contre quelques dizaines pour une interaction non résonante. Ce résultat confirme l'interprétation qui est faite de ces résonances en termes de rayon lumineux, piégés dans la cavité par de très nombreuses réflexions internes, selon des trajectoires quasi-circulaires qui, tour après tour, interfèrent constructivement. Ces résonances sont généralement désignées sous le nom de Modes Morphologiquement Dépendants (MDR en anglais) car elles sont très sensibles à la forme et à la taille de la cavité, ou encore Modes de Galerie par analogie avec le phénomène acoustique

équivalent de propagation du son près des murs d'une galerie circulaire. Notons que dans les exemples proposés, c'est le rayon de la sphère qui varie d'environ  $8 \text{ nm}$  pour passer d'un cas non résonant à un cas résonant. De manière équivalente nous aurions pu faire varier la longueur d'onde d'environ  $0.4 \text{ nm}$ . Dans les deux cas, la faiblesse de ces variations illustrent l'extrême sensibilité de ces résonances au paramètre de taille.

#### 4.10.5 Interprétation de la diffusion aux angles d'arcs-en-ciel

En approximation de champ lointain, les décompositions en séries de Debye permettent aussi d'interpréter physiquement les diagrammes de diffusion en isolant par exemple les différents modes contribuant à la formation d'une figure d'interférence [49]. Si l'on reprend l'exemple de l'arc-en-ciel d'ordre 1 de la figure 4.4 avec un éclairage en onde plane, on montre figure 4.10 que les modes (pour  $p$  entre 0 et 10) contribuant principalement à la figure d'arc-en-ciel sont par ordre d'importance, les modes  $p = 2$ ,  $p = 0$ ,  $p = 7$  et  $p = 6$ . Il s'agit ici des contributions en termes d'intensité de chaque mode pris individuellement. Mais la figure d'arc-en-ciel est une figure d'interférence et un mode dont l'intensité est très inférieure à celle des modes les plus élevés peut contribuer de manière notable à ces interférences. La figure 4.11 montre avec une échelle linéaire la figure d'arc-en-ciel complète (TLMG), celle obtenue avec le mode  $p = 2$  seul, puis les figures d'arc-en-ciel obtenues avec un ensemble de mode allant de  $p = 0$  à des valeurs bien choisi de  $p_{max}$  ( $p_{max} = 2, 6, 7, 15, 16$  et  $19$ ), celle qui correspondent à une modification notable de la figure d'interférence. On observe ainsi que le mode  $p = 2$  suffit à décrire les composantes basses fréquences de la figure. La contribution du mode  $p = 1$  est négligeable. Malgré sa faible intensité, la contribution du mode  $p = 0$  modifie fortement l'allure de la figure, en ajoutant la haute fréquence très sensible à la taille de la sphère. La figure obtenue pour  $p = 0, 2$  est déjà assez proche de la figure complète (TLMG sans troncature). L'ajout des modes  $p = 3, 4, 5$  ne modifie pas la figure d'arc-en-ciel de manière notable ce qui n'est pas le cas des modes  $p = 6$  et  $p = 7$ . Si on augmente la valeur de  $p_{max}$  on continue d'observer des modifications de la figure d'arc-en-ciel lorsque les modes  $p = 15$ ,  $p = 16$  ou encore  $p = 19$  sont introduits. On se rapproche alors lentement de la figure complète qui n'est parfaitement reproduite dans ce cas précis que pour  $p_{max} \approx 100$ . Il est intéressant de noter qu'en dehors de la réflexion, les modes de Debye contribuant à l'arc-en-ciel du premier ordre ( $p = 6, p = 7, p = 15, p = 16, p = 19, \dots$ ) correspondent aux arcs-en-ciels d'ordre 5, 6, 14, 15, 18, ... dont la position angulaire est proche de celle de l'ordre 1. L'influence de l'arc-en-ciel d'ordre 5 est considéré dans [50].

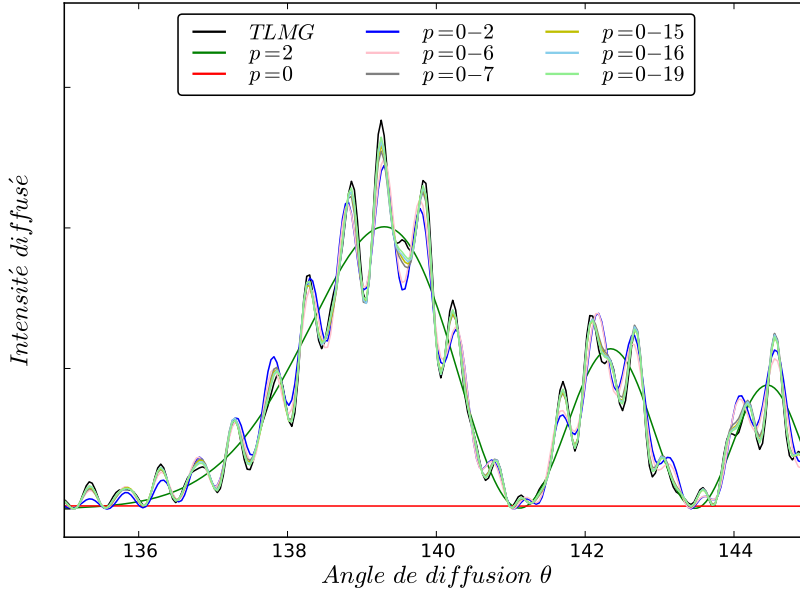


**FIGURE 4.10** – Contribution des 10 premiers modes de Debye à l’intensité diffusée (échelle log.) autour de l’angle d’arc-en-ciel. La sphère diffusante est la même que celle déjà considérée figure 4.4 ( $d = 100 \mu m$  ;  $n = 1.333$ ). Elle est éclairée par une onde plane ( $\lambda = 532 nm$ ). Les champs lointains sont calculés en fonction de  $\theta$  pour  $\varphi = 90^\circ$  et des coefficients de diffusion tronqués à une seule valeur de  $p$  allant de 0 à 10.

#### 4.10.6 Mise en évidence des ondes de surface

Les séries de Debye présentent donc un intérêt certain pour interpréter les phénomènes de diffusion en des termes simples. Elle permet également de comparer les résultats obtenus à l’aide de modèles plus ou moins élaborés d’optique géométrique comme l’illustrent les figures 4.12 et 4.13. La figure 4.12.a montre l’intensité diffusée en champ lointain, calculée par optique géométrique (à la manière de Van de Hulst [44]) pour la réflexion et la réfraction et calculée par troncature des séries de Debye de la TLM pour les modes correspondants ( $p = 0$  et  $p = 1$ ).

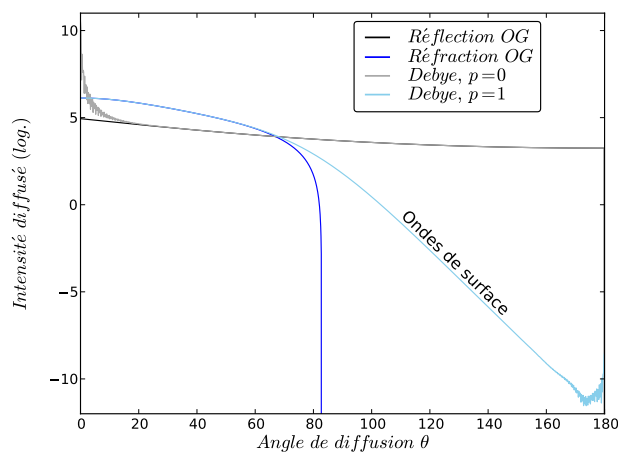




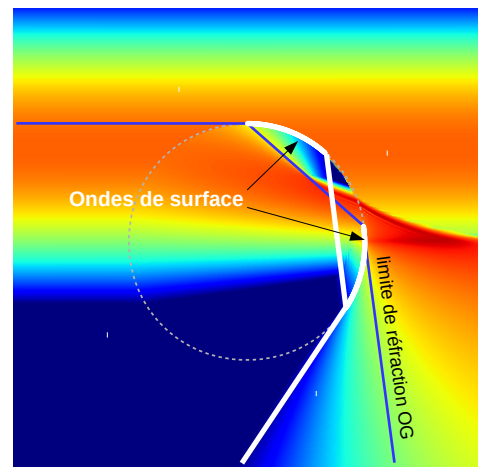
**FIGURE 4.11** – Contribution des arcs-en-ciel d’ordre élevés à la figure d’arc-en-ciel pour les même paramètre que la figure 4.10. Les séries de Debye sont tronquées à  $p = 2$  puis entre  $p = 0$  et  $p_{max}$ , avec  $p_{max}$  allant de 1 à 19. Seules les valeurs de  $p_{max}$  impliquant une modification de la figure d’arc-en-ciel par rapport à la valeur précédente sont considérés.

La sphère de diamètre  $d = 100 \mu m$  et d’indice  $n = 1.333$  est éclairée par une onde plane ( $\lambda = 532 nm$ ), polarisée perpendiculairement au plan d’observation ( $\varphi = 90^\circ$ ). La figure met en évidence les faiblesses du modèle géométrique dans la direction avant pour  $p = 0$  où la diffraction n’est pas prise en compte et autour et au-delà de l’angle limite de réfraction ( $\theta_{max} \approx 82.8^\circ$ ) pour  $p = 1$ . En effet, l’optique géométrique interdit aux rayons d’être réfractés au-delà d’un certain angle comme le montre le schéma de la figure 4.12.b, alors que le calcul rigoureux montre qu’il existe un prolongement par ondes de surface de ce mode. L’angle limite est atteint pour une incidence rasante au bord de la particule. Les ondes de surface sont interprétées comme un prolongement de ce mode d’interaction. Cette interprétation des ondes de surface en termes de tracé de rayons est celle proposée par Hovenac et Lock [47]. Une partie de l’énergie associée au rayon rasant n’est pas réfractée immédiatement dans la sphère mais après un parcours plus ou moins long, à la surface de la particule. Le même phénomène se produit au moment de la réfraction vers l’extérieur de la sphère. Ces ondes de surface sont de moins en moins intenses à mesure que la longueur des arcs associés grandie. L’intensité du mode  $p = 1$  diminue ainsi de

manière rapide (exponentielle) au-delà de l'angle limite  $\theta_{max}$ . Dans le diagramme de diffusion complets la contribution des ondes de surface est donc souvent négligeable mais ce n'est pas toujours le cas. Autours de  $90^\circ$  par exemple, l'optique géométrique ne prédit pas la présence du mode  $p = 1$ . La figure 4.13 montre l'intensité diffusée, calculée par optique géométrique à partir des rayons réfléchis et réfractés en prenant en attribuant une phase à chaque rayon et en calculant les interférences dues à la superposition des deux types de rayons. Cette intensité est comparée à celle calculée par troncature des séries de Debye au modes  $p = 0$  et  $p = 1$ . On constate que l'optique géométrique reproduit bien la figure d'interférence pour les angles supérieurs à  $15^\circ$  (quand la diffraction devient négligeable) et jusqu'à  $65^\circ$ . Au-delà, le calcul rigoureux montre des interférences plus contrastées et qui persistent au-delà de l'angle limite. C'est grâce à ces ondes de surface que la technique d'Imagerie Interférométrique en défaut de mise au point (ou en anglais : Interferometric Laser Imaging Droplet Sizing, ILIDS), basée sur ces interférences continue de fonctionner à  $90^\circ$  et au-delà [51, 52, 53].



(a) Optique Géométrique vs Debye

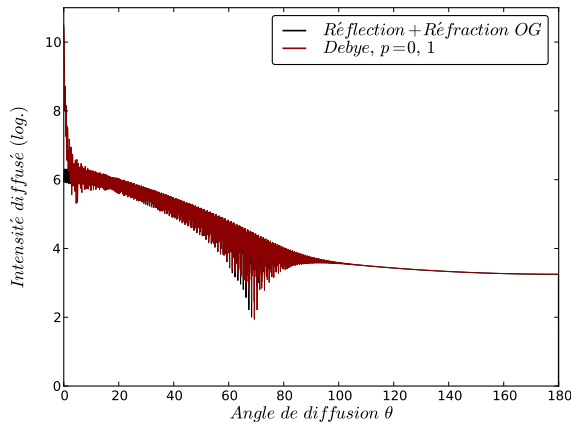


(b) Ondes de surface

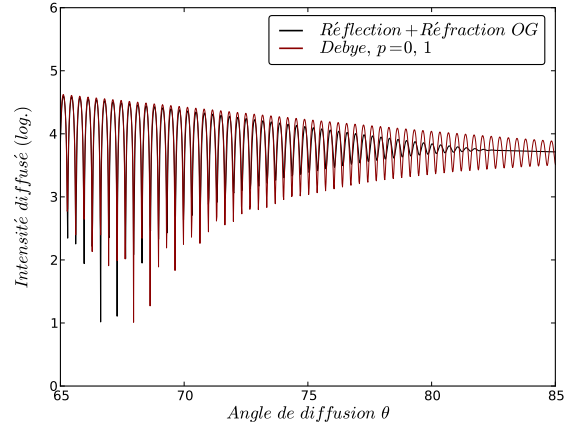
**FIGURE 4.12** – Comparaison entre Optique Géométrique et décomposition en séries de Debye de la TLM.

#### 4.10.7 Décomposition en séries de Debye pour une bulle

Dans le cas d'une bulle, ou plus généralement quand l'indice relatif  $M$  de la sphère est inférieur à 1, la décomposition en séries de Debye ne fournit pas des résultats similaires à ceux



(a) Optique Géométrique vs Debye  
avec interférences



(b) Agrandissement

**FIGURE 4.13** – Comparaison entre Optique Géométrique et décomposition en séries de Debye de la TLM.

obtenus dans le cas d'une goutte ( $M > 1$ ). Aucune hypothèse sur  $M$  dans la formulation de cette décomposition ne permet d'expliquer cette différence de comportement.

Pour  $M > 1$ , il existe généralement un nombre maximum de termes  $p_{max}$  à partir duquel la troncature des séries de Debye se confond, totalement ou presque, avec la solution non tronquée de la TLM (ou de la TLMG). Ce nombre de termes peut être parfois très grand. C'est le cas en présence de résonance comme nous l'avons vu dans la section 4.10.4, mais 10 à 20 termes suffisent généralement à décrire l'essentiel des champs internes ou du diagramme de diffusion. Quand  $M < 1$ , les choses sont différentes, comme l'illustre la figure 4.14. Dans le cas de la goutte, figure 4.14.a, les diagrammes de diffusion sont rapidement indissociables quand  $p_{max}$  croît, à quelques détails près. En revanche, pour une bulle, figure 4.14.b, le diagramme obtenu par décomposition en séries de Debye reste très différent du diagramme obtenu par TLM, y compris quand on considère 1 Million de termes. Les différences se situent dans un intervalle angulaire très large entre  $30^\circ$  et  $150^\circ$ . **Cette absence de convergence de la décomposition de Debye vers la solution complète de TLM n'est pas due à un problème de convergence numérique** dans le calcul de certains termes comme le prétendent les auteurs de la référence [54] dont les conclusions sont contestées dans l'annexe I.3. Cette absence de convergence trouve une origine

mathématique dans la décomposition en série du terme

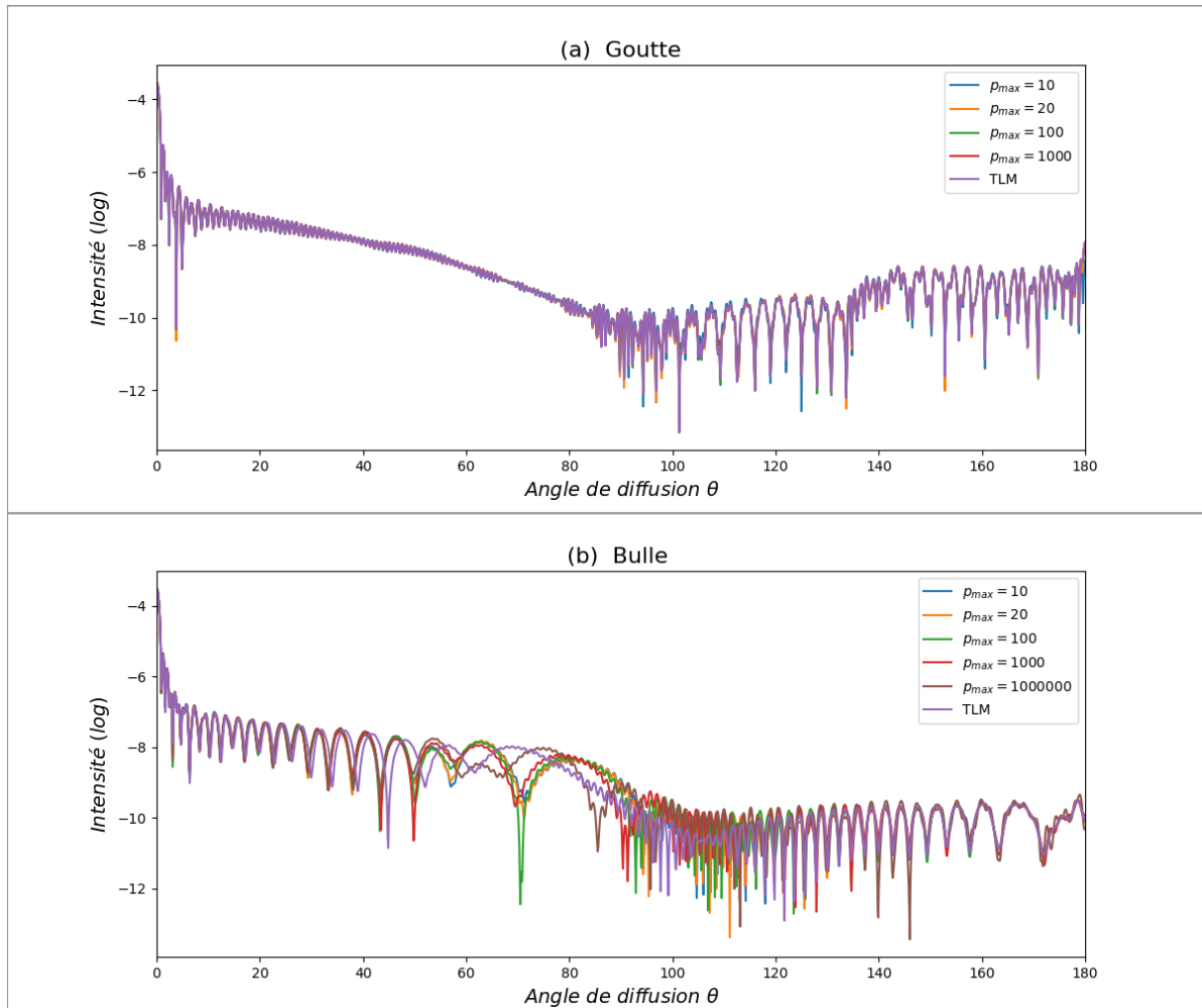
$$\frac{1}{1 - R_n^{11}} = \sum_{p=1}^{\infty} (R_n^{11})^{p-1}$$

qui est le cœur de la décomposition de Debye (voir l'annexe F et les relations (F.28) et (F.29) en particulier). Pour des valeurs de la norme de  $R_n^{11}$  très inférieures à 1, quelques termes suffisent pour que la série converge. En revanche, pour des valeurs s'approchant de 1, le nombre de termes requis pour approcher la valeur exacte augmente, et augmente très rapidement. Dans le cas d'une goutte ( $M > 1$ ) non absorbante ou faiblement absorbante,  $R_n^{11}$  ne prend des valeurs proche de 1 que pour des indices  $n$  élevés comme le montre la figure 4.15.a, pour les ondes  $TE$  comme pour les ondes  $TM$ . Pour la bulle, ces coefficients s'approchent de 1 pour des valeurs de  $n$  nettement plus faibles.

Avec un développement en séries de Debye et une sommation réduite aux 21 premiers termes ( $p_{max} = 20$ ), les coefficients de diffusion tronqués diffèrent des coefficients de diffusion complet de la TLM, à partir d'une certaine valeur de  $n$ . La figure 4.15.b compare les coefficients de diffusion  $a_n$  (en valeur absolue) tronqués et non tronqués (TLM) dans le cas de la goutte. Les coefficients sont quasiment identiques excepté pour les plus grandes valeurs de  $n$ . Dans ce cas, la différence entre les coefficients dépasse 1% à partir de  $n = 240$ . Pour cette valeur de  $n$ , le coefficient  $R_{240, TM}^{11} \approx 0.8165$  et le développement en série tronqué à 21 termes n'est plus suffisant.

En vertu du principe de localisation (voir section 4.5) ces coefficients correspondent à un point d'impact situé à 1.018 fois le rayon de sphère, à  $0.36 \mu m$  au-delà de la surface de la sphère. Dans le cas de la goutte, les modes de diffusion qui ne sont pas correctement décrits par les séries de Debye avec une troncature à  $p_{max} = 20$ , sont ainsi les modes de galeries (résonnants ou non), couplés à la particule au bord de celle-ci et associées à de multiples réflexions internes. En absence de résonance, comme c'est le cas figure 4.15.b, ces modes participent peu au diagramme de diffusion, en accord avec les faibles valeurs des coefficients  $a_n$  pour  $n \geq 240$ , c'est pourquoi les diagrammes pour le cas TLM et le cas  $p_{max} = 20$  de la figure 4.14.a sont quasiment identiques.

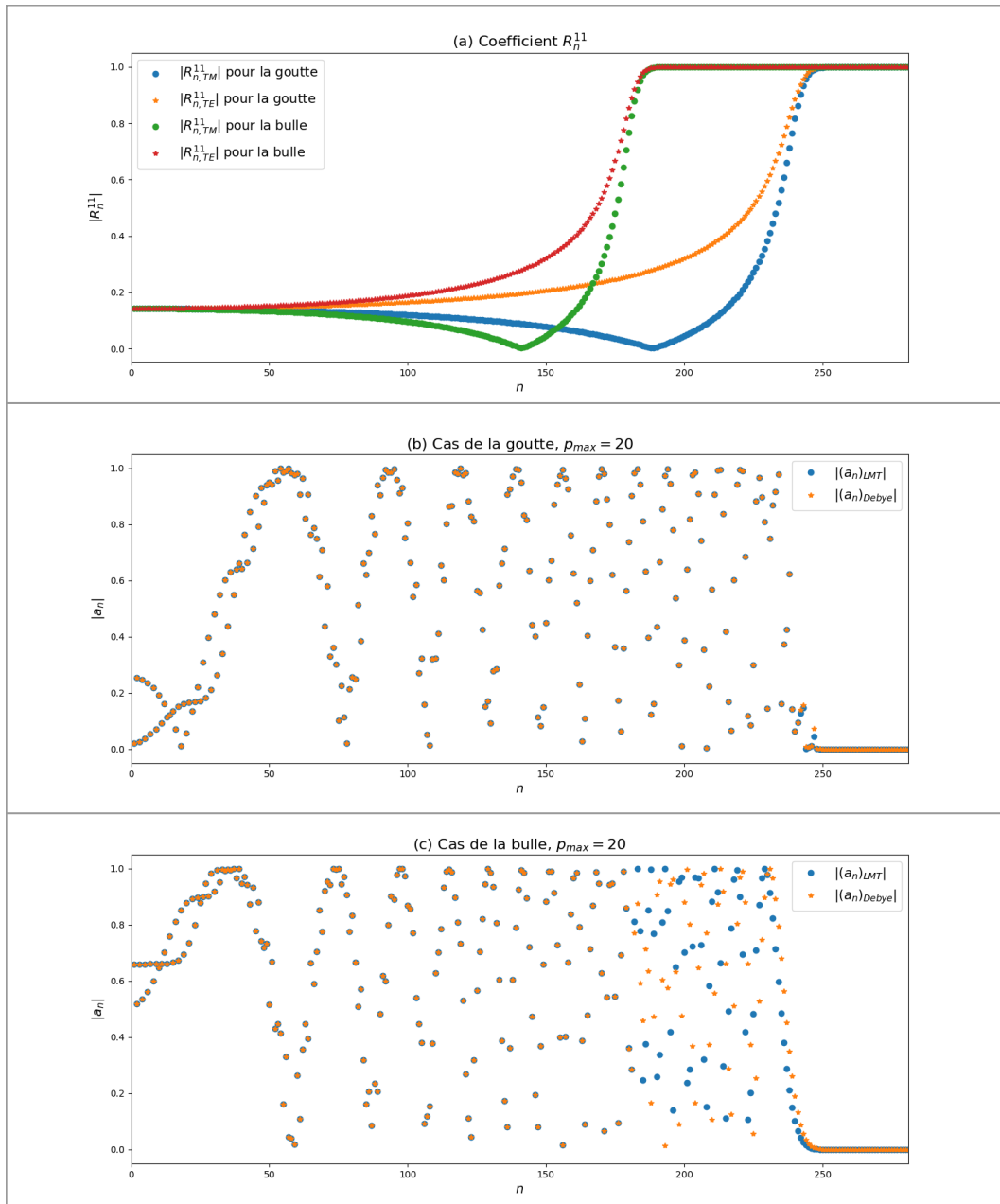
Dans le cas de la bulle, figure 4.15.c, une différence de plus de 1% est constatée à partir de  $n = 181$ . On a alors  $R_{181, TM}^{11} \approx 0.8271$  et le paramètre d'impact associé à  $n = 181$  est 0.7683, i.e. légèrement au-delà du paramètre d'impact de l'angle critique ( $\rho_c = M = 0.75$ ) à partir duquel la réflexion à la surface de la bulle est totale du point de vue de l'optique géométrique. Pour la bulle, contrairement au cas de la goutte, le nombre de coefficients mal évalués par la



**FIGURE 4.14** – Diagramme de diffusion avec décomposition en séries de Debye pour différents niveaux de troncature, pour une goutte (a) et pour une bulle (b) de  $40 \mu m$  de diamètre.

troncature à  $p_{max} = 20$  est très important et les valeurs de ces coefficients ne sont pas faibles. Par conséquent, les diagrammes de diffusion du cas TLM et du cas  $p_{max} = 20$  de la figure 4.14.b sont très différents, en particulier dans un large intervalle autour de  $90^\circ$ .

Ces coefficients sont associés à des ondes qui interagissent avec la sphère malgré un paramètre d'impact situé au-delà de l'angle critique. Les ondes qui pénètrent ainsi la sphère se propagent avec des trajectoires très rasantes, quasiment tangentes comme le font les ondes associées aux modes de galerie décrits précédemment dans le cas des gouttes. Ces ondes qui voyagent à proximité de l'interface rayonnent vers l'extérieur tout au long de leur trajectoire, tout autour de la bulle. Contrairement au cas de la goutte, ces ondes contribuent pour la bulle de manière



**FIGURE 4.15** – Comportement des coefficients de diffusion avec décomposition en séries de Debye. (a) Comparaison des coefficients  $R_n^{11}$  dans le cas d’une goutte et d’une bulle ; (b) coefficients  $a_n$  tronqués et LMT dans le cas de la goutte pour  $p_{max} = 20$  ; (c) coefficients  $a_n$  tronqués et LMT dans le cas de la goutte pour  $p_{max} = 20$ .

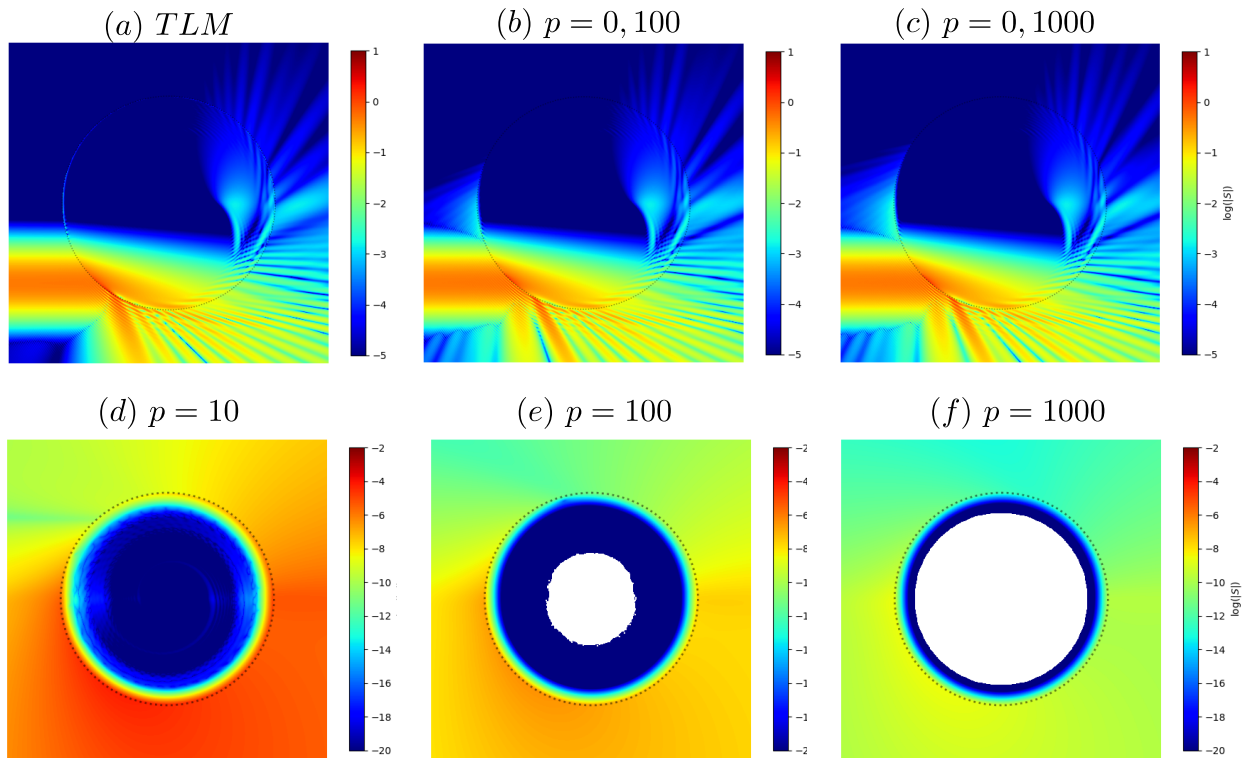
significative au rayonnement extérieur (à la lumière diffusée). La figure 4.16 montre les champs internes et les champs proches pour une bulle éclairée par un faisceau focalisé et décentré. En observant attentivement les 3 images du haut on constate quelques différences entre les

résultats du calcul complet ((a) TLMG) et les troncatures pour  $p$  allant de 0 à 100 (b) et de 0 à 1000 (c). Ces différences sont principalement visibles en bas à droite des cartes au niveau de la réflexion. En bas de la figure on peut voir les contributions isolées des modes  $p = 10$ ,  $p = 100$  et  $p = 1000$ . La présence d'énergie sous la surface tout autour de la bulle conforte les interprétations précédentes. On remarque également que l'énergie rayonnée par chaque mode est rayonnée dans la même région. Cette énergie décroît quand le paramètre  $p$  augmente mais de manière relativement lente, de sorte que ce sont des millions de modes qui contribuent ensemble à ce rayonnement que l'on retrouve en champ lointain dans les diagrammes de diffusion entre  $30^\circ$  et  $150^\circ$ . Le fait que les troncatures des séries de Debye conduisent, figure 4.16b et 4.16.c, à un surplus d'intensité diffusée en bas à droite des cartes qui n'est pas présent dans le calcul complet semblent indiquer que les modes à grand  $p$  interfèrent destructivement entre eux et que leur contribution dans cette zone du diagramme ne s'annule qu'en considérant un nombre colossal de termes dans la décomposition de Debye.

En théorie, il est possible de définir un nombre  $p_{max}$  suffisant pour obtenir un résultat de calcul convergé mais pour un diamètre de bulle de  $40 \mu m$  comme dans notre exemple ce nombre (que l'on estime ici à  $10^{12}$ ) n'est pas compatible avec les moyens de calcul existants. Surtout, face à des tels nombres, on doit s'interroger sur les avantages d'une telle décomposition. Notons toutefois que si on réduit le diamètre de la sphère à  $2 \mu m$  et que l'on réalise un calcul en séries de Debye avec 1 million de termes, on obtient un résultat proche de celui de la TLM comme le montre la figure 4.17. Dans ce cas, le nombre de terme devient suffisant pour estimer correctement l'ensemble de coefficient de diffusion. Notons que pour une taille de bulle inférieure on pourrait s'attendre à trouver un nombre de terme plus faible mais on se heurte alors à d'autres difficultés qui sont évoquées un peu plus loin.

La question de la non convergence des séries de Debye vers la TLM dans le cas des bulles est quasiment absente de la littérature. Elle est en revanche un sujet d'échange moins formel entre spécialistes depuis de nombreuses années. Quelques auteurs ont appliqué les séries de Debye au cas de bulles afin de comparer les résultats mode à mode avec des calculs d'optique géométrique, en prenant soin de ne pas poser la question de la convergence vers le TLM. Ces résultats ne sont pas faux mais quand un million de terme ne suffit pas à décrire ne serait-ce que l'allure basse fréquence du diagramme de diffusion entre  $30$  et  $150^\circ$  on est en droit de se demander à quoi de telles comparaisons peuvent servir.

Plus généralement, avec ces résultats, c'est **l'approche par un modèle de diffusion**



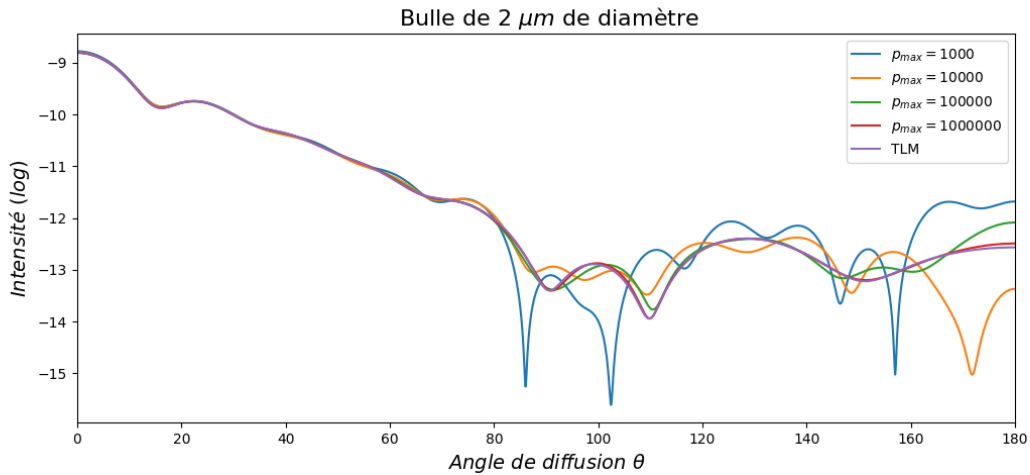
**FIGURE 4.16** – Champs internes et champs proches pour une bulle ( $M=0.75$  éclairé par un faisceau focalisé décentré. par un calcul de TLMG complet (a), avec une troncature en séries de Debye pour  $p$  allant de 0 à 100 (b), pour  $p = 0, \dots, 1000$  (c) et pour le mode  $p = 10$  seul (d),  $p = 100$  seul (e) et  $p = 1000$  seul (f).

séquentiel, comme la décomposition en séries de Debye mais aussi le tracé de rayon ou l'optique géométrique qui doit être remis en cause. Autrement dit, ces résultats montrent que la diffusion de la lumière par une bulle sphérique ne peut être décrite que par une approche électromagnétique globale comme la TLM et que l'usage d'autres méthodes doit au minimum être associé à une grande prudence.

Au-delà du cas des bulles, la pertinence de la décomposition en séries de Debye pourrait être questionnée dans toutes les situations où les coefficients  $R^{11}$  s'approche de 1. C'est le cas notamment pour une sphère absorbante et pour les particule petite devant la longueur d'onde. Dans ces deux cas qui mériteraient d'être étudiés de plus près, on notera simplement que la décomposition perd son sens physique. Pour une particule de plus en plus absorbante les modes à  $p$  élevés et à grand nombre de réflexions internes sont de plus en plus atténués, jusqu'à disparaître. Pour des particules dont le diamètre est de l'ordre de la longueur d'onde



ou inférieur, la notion de réflexions internes successives perd progressivement son sens et le nombre de termes nécessaires à la convergence vers le résultat complet ne cesse de croître, à mesure que le résultat de la TLM tend lui vers la diffusion de Rayleigh.



**FIGURE 4.17** – Diagramme de diffusion avec décomposition en séries de Debye pour différents niveaux de troncature, pour une petite bulle de 2 μm de diamètre.

## 4.11 Sphère multi-couches

Les méthodes à variables séparables s'appliquent aux problèmes de diffusion par des particules de formes régulières. Le problème est décrit dans un système de coordonnées qui permet de tirer parti des symétries de la particule. Pour une sphère homogène, on travaille dans un système de coordonnées sphériques. Le problème de diffusion par une sphère à couches concentriques peut également être traité dans ce système de coordonnées. Le problème de la diffusion d'une onde plane par une particule à deux couches est résolu dans [55]. La solution a été étendue à un grand nombre de couches dans [56] et le cas d'un éclairage focalisé a été traité par Onofri *et al* dans [32].

Il n'est pas très fréquent de rencontrer des particules sphériques composées de quelques couches. En revanche, une particule composée d'un grand nombre de couches est un très bon modèle pour décrire une particule présentant un gradient (concentrique) d'indice de réfraction et c'est là le principal intérêt de cette extension de la Théorie de Lorenz-Mie. Elle permet notamment de quantifier l'effet de gradients de composition ou de température, à l'intérieur ou

à l'extérieur d'une sphère.

Le formalisme pour la sphère multi-couche est très proche de celui de la sphère homogène. La particule diffusante est décrite par un ensemble de  $L$  couches concentriques de rayon  $r_j$  et d'indice complexe  $n_j$  (voir figure 4.18). Elle est plongée dans un milieu non magnétique d'indice  $n_0$ . On définit un champ électromagnétique et des potentiels de Bromwich  $TE$  et  $TM$  associés pour chacune des couches et pour l'extérieur de la particule. Ces potentiels sont solutions de l'équation (4.8) et s'écrivent donc comme des combinaisons linéaires des solutions élémentaires (4.10), où le choix des fonctions de Riccati-Bessel est conditionné, comme pour la sphère homogène, par des contraintes physiques, comme détaillé dans l'annexe G.

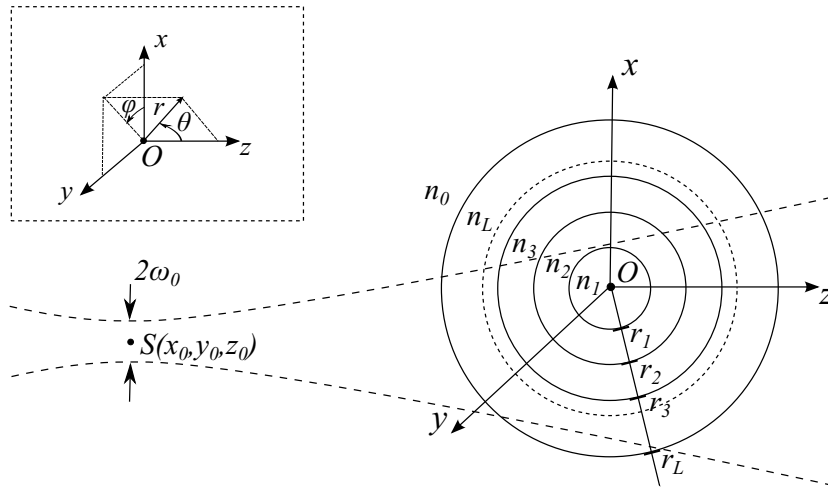


FIGURE 4.18 – Définition de la particule à couche concentrique.

### 4.11.1 Cas pratiques

Ce formalisme étendu de la Théorie de Lorenz-Mie permet de décrire la diffusion de la lumière par une sphère à couches concentriques. Il existe cependant peu d'exemples, dans la nature, de sphère à couches. Cet outil pourrait présenter un intérêt applicatif en biologie pour prendre en compte la structure membranaire des cellules mais ces dernières ne sont jamais de forme sphérique. En revanche, ici encore, le modèle à couches rigoureux peut être utilisé comme référence pour tester un modèle plus versatile et en quantifier les limites.

Le meilleur exemple de sphère à couches concentriques présent dans la nature est proba-

blement celui de la bulle de savon. Une telle bulle peut en effet être modélisée par une sphère à 2 couches, constituée d'un cœur d'air (indice  $n_1 = 1$ ) et d'une membrane d'eau (indice  $n_2 = 1.333$ ) de faible épaisseur. Si la bulle considérée est suffisamment petite, l'hypothèse de sphéricité est vérifiée, et il est possible de prédire le diagramme de diffusion de cette bulle de manière rigoureuse, avec une grande précision et sans autre hypothèse sur le paramètre de taille ou l'indice de réfraction. Ce cas de figure présente un intérêt applicatif relativement récent, avec l'utilisation croissante de bulles de savon pour ensemercer les écoulements, notamment pour des mesures de PIV ou PTV sur des grands champs ou des volumes. Ces bulles ont l'avantage de leur faible densité qui leur assure de suivre les variations de l'écoulement porteur et celui d'une grande taille et donc d'un fort pouvoir de diffusion. Des travaux ont été entrepris au LMFA pour étendre les mesures par ILIDS et par holographie aux bulles de savons utilisées comme traceurs.

Le principal intérêt de ce formalisme pour les sphères à couches est pour la modélisation de gradient d'indice à l'intérieur ou à l'extérieur d'une goutte liquide, même si là encore l'hypothèse de concentricité limite le champ d'application. Les gradients de température ou de concentration sont représentés par un grand nombre de couches, dont l'épaisseur est typiquement de l'ordre d'un dixième de longueur d'onde pour décrire un gradient continu. Nous disposons ainsi d'un outil de choix pour quantifier l'effet d'un gradient thermique (interne à la goutte) sur les mesures de réfractométrie d'arc-en-ciel [57]. Cet outil a également été appliqué pour décrire les effets des gradients thermiques et des gradients de concentration sur les hologrammes de gouttes en évaporation [58, 59]. Ces calculs rigoureux montrent qu'à la distance considérée (plusieurs dizaines de centimètres), les gradients à l'intérieur de la goutte n'ont pas d'influence sur la figure de diffraction. Ils montrent en revanche, que le gradient de concentration, à l'extérieur de la goutte est à l'origine d'une modification d'intensité au centre de la figure de diffraction comme le montre la figure 4.19, extraite de la référence [58] et où le gradient d'indice à l'extérieur de la goutte est modélisé à l'aide de 200 couches. L'indice de ces couches est une fonction exponentielle décroissante du rayon  $r$  de la couche de la forme  $n(r) = n_0 + n_s \exp\left(-\frac{r-r_s}{\sigma}\right)$ . Dans ce même article, les effets de grandissements liés à la divergence de l'éclairage sont également pris en compte, en considérant un faisceau fortement focalisé, comme le permet le formalisme décrit dans l'annexe G et initialement développé dans [32]. Ces calculs rigoureux montrent enfin que la perturbation de la figure de diffraction pour les paramètres de notre expérience, décrite dans cette publication [58] dans les références [60, 61, 62] et dans le chapitre 7, section 7.1 se limitent

aux 3 premières franges. Dans l'analyse des hologrammes par approche inverse avec un modèle de diffraction qui ne tient pas compte de la présence de vapeur, cette perturbation est considérée comme une erreur de modèle, qui conduit à l'altération de la mesure de diamètre et de position sur l'axe de l'ordre de 1%. Cette erreur est corrigée en appliquant un masque circulaire sur les données, qui couvrent les 3 premières franges de la figure de diffraction et exclut ainsi la partie erronée de l'inversion [59].

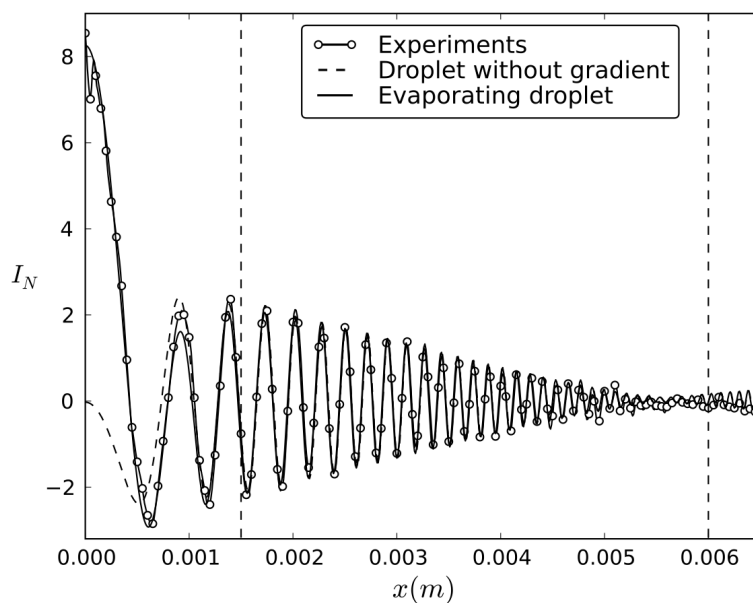


Fig. 9. Experimental hologram compared to computed holograms, with and without surrounding refractive index gradient. For both evaporating and nonevaporating case, the droplet diameter is  $r_D = 21 \mu\text{m}$  and the recording distance is  $z = 360.426 \text{ mm}$ . For the evaporating droplet, the surrounding refractive index gradient is defined by  $\sigma = 80 \mu\text{m}$  and  $n_s = 8.5 \times 10^{-5}$ .

FIGURE 4.19 – Figure 9 de la référence [58].

# Chapitre 5

## Impulsions ultra-brèves et applications métrologiques

### 5.1 Introduction

L'utilisation d'impulsions laser ultra-brèves (picoseconde/femtoseconde) s'est démocratisée depuis le début des années 2000, dans les laboratoires mais aussi dans l'industrie, pour le contrôle et la mesure, pour l'usinage ou la texturation de surface... Ces impulsions présentent deux caractéristiques principales : une durée exceptionnellement brève et une très grande puissance instantanée, malgré une énergie par impulsion relativement faible. C'est d'abord leur faible durée qui suscite notre intérêt dans le domaine de la diffusion de la lumière et de la métrologie des écoulements. En  $100\text{ fs}$  ( $10^{-13}\text{s}$ ) la lumière parcourt environ  $30\text{ }\mu\text{m}$  dans l'air (ou  $20\text{ }\mu\text{m}$  dans l'eau). Une analyse temporelle fine des phénomènes de diffusion à cette échelle permet ainsi, en principe de recueillir des informations sur la longueur des chemins optiques empruntés, dans un objet diffusant (mesure de taille, épaisseur de film...) ou d'un diffuseur à l'autre dans des situations de diffusion multiple. En mécanique des fluides ces impulsions présentent un très grand intérêt pour l'investigation de milieux optiquement denses en évolution rapide, en s'affranchissant des limites imposées par la diffusion multiple d'une manière compatible avec des mesures instantanées. Les impulsions ultra-brèves se caractérisent également par une très grande puissance crête (puissance instantanée maximum au pic de l'impulsion) associée à une faible énergie, favorisant les interactions non-linéaires avec le milieu tout en limitant les effets thermiques. Cette propriété, permet notamment de réaliser des découpes laser d'une grande

précision, de texturer des surfaces, de générer des plasmas à faible énergie ou d'atteindre une grande résolution spatiale en imagerie de fluorescence multi-photons. Ce type d'interaction avec le milieu n'est pas considéré directement dans ce document ou les interactions avec les objets se limitent pour l'essentiel à des interactions élastiques et linéaires (impulsions de faible puissance). Elles sont en revanche exploitées pour réaliser des mesures résolues en temps, à l'aide de portes optiques par effet Kerr ou par génération d'harmoniques. D'un point de vue formel, le problème de la diffusion d'une impulsion laser par un objet (diffusion simple) peut se ramener au même problème de diffusion d'une onde monochromatique continue par ce même objet. Une impulsion brève est en effet composée d'un ensemble d'ondes monochromatiques liées par une certaine relation de phase. Quand on se limite aux interactions élastiques et non linéaires, les formalismes présentés dans les chapitres précédents, et celui de la Théorie de Lorenz-Mie Généralisée en particulier, sont (assez facilement) généralisable en utilisant cette décomposition spectrale de l'impulsion. Pour traiter les problèmes de diffusion par un ensemble de diffuseurs, les méthodes les plus efficaces et les plus versatiles sont les méthodes de Monte Carlo. Pour un éclairage pulsé comme pour un éclairage continu, elles reposent sur les propriétés de diffusion simple. Nous verrons dans ce chapitre que la prise en compte des aspects temporels dans ces méthodes est relativement simple pour des diffuseurs de petites tailles mais qu'elle demande plus d'effort pour des diffuseurs de plus grande taille.

## 5.2 Nature et Description d'une impulsion ultra-brève

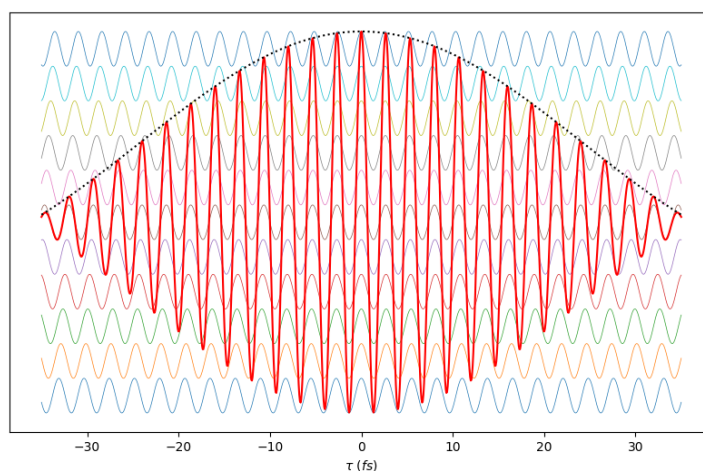
### 5.2.1 Génération d'une impulsion

Pour comprendre la nature d'une impulsion ultra-brève il faut comprendre comment elles sont produites. Ces impulsions sont générées à l'aide d'un oscillateur. Un oscillateur se compose d'une cavité résonnante, d'un milieu à gain large spectre et d'un dispositif dit de verrouillage de modes qui permet d'imposer le fonctionnement de ce laser en régime ultra-bref. Pour une longueur optique de cavité  $L_{cav}$ , l'ensemble des modes résonants sont espacés dans l'espace des fréquences de

$$\delta\nu = \frac{c}{2L_{cav}}$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière. Parmi ces modes, ceux dont la fréquence se situe dans la (large) gamme du milieu à gain sont potentiellement amplifiés. Si aucun dispositif particulier

n'est ajouté, l'un ou l'autre de ces modes est amplifié et le laser fonctionne en régime continu, mono-chromatique, autour de la fréquence pour laquelle le gain est maximum. Le fonctionnement de l'oscillateur en régime ultra-brève est imposé par un dispositif de verrouillage de mode qui permet d'amplifier tous les modes en même temps et en phase. Cette construction interférométrique de l'impulsion est illustrée figure 5.1 où un ensemble d'ondes monochromatiques de fréquence croissante (de bas en haut) sont en phase au temps  $\tau = 0$ . En  $\tau = 0$ , ces ondes élémentaires interfèrent donc de manière constructive et l'amplitude de l'impulsion (somme de ces ondes en rouge) est maximum. Quand on s'éloigne de  $\tau = 0$ , l'accord de phase entre les ondes élémentaires se dégrade progressivement et l'amplitude de l'impulsion diminue. On obtient ainsi une onde à la fréquence  $\nu_0$  qu'on appelle **fréquence porteuse** modulée par une enveloppe temporelle très brève (pointillés noirs sur la figure). L'amplitude maximum de cette impulsion, ou sa puissance crête est très grande devant l'amplitude des ondes élémentaires. C'est sur cette grande puissance crête que repose les dispositifs les plus courants de verrouillage de modes, lentilles de Kerr [63] ou absorbants saturables [64, 65]). Dans les deux cas, on utilise un effet de focalisation ou d'absorption non linéaire qui maximise les pertes des modes continus et minimise les pertes de l'impulsion de forte puissance crête.



**FIGURE 5.1** – Représentation schématique d'une impulsion ultra-brève.

## 5.2.2 Description d'une impulsion

Les impulsions ultra-brèves sont souvent décrites dans le domaine temporel en écrivant les composantes du champ électromagnétique sous la forme suivante

$$X_j(\mathbf{r}, \tau) = X_j^{cw}(\mathbf{r})g(\tau)e^{2i\pi\nu_0\tau} \quad (5.1)$$

où  $\nu_0$  est la fréquence porteuse,  $g(\tau)$  l'enveloppe temporelle de l'impulsion,  $\tau = t - z/c$  un temps translaté et où la quantité  $X_j^{cw}(x, y, z)$ , indépendante du temps décrit le support spatial de l'onde. Cette description qui est notamment adoptée dans les références [66, 67] [68] et dans les nombreux travaux qui se base sur cette formulation souffre d'un manque de généralité, avec une enveloppe  $g(\tau)$  réelle qui interdit la prise en compte d'une dérive de fréquence de l'impulsion et un support spatial indépendant de la fréquence optique qui interdit la prise en compte des aberrations chromatiques, inévitables lorsqu'on focalise fortement les impulsions. Le formalisme peut être généralisé à une enveloppe temporelle complexe [69] mais il est beaucoup plus intuitif à mon sens de partir d'une définition de ces impulsions ultra-brèves dans le domaine spectral.

Une onde électromagnétique monochromatique de fréquence  $\nu$  se propageant selon un axe  $z$  est décrit par un ensemble de composantes dont la représentation complexe peut se mettre sous la forme :

$$X_j(\mathbf{r}, t) = X_j^{cw}(\mathbf{r})e^{2i\pi\nu t}e^{-ikz}e^{i\phi} \quad (5.2)$$

où  $X$  désigne indifféremment  $E$  ou  $H$  et  $j$  l'une des trois coordonnées du système considéré.  $X_j^{cw}(\mathbf{r})$  est indépendant du temps et représente la distribution spatiale de l'onde.  $\phi$  est un terme de phase et le nombre d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$ . En introduisant le temps translaté  $\tau = t - \frac{z}{c}$ , on écrira plutôt

$$X_j(\mathbf{r}, \tau) = X_j^{cw}(\mathbf{r})e^{2i\pi\nu\tau}e^{i\phi} \quad (5.3)$$

Une impulsion laser est composée d'un ensemble discret d'ondes monochromatiques. On écrira donc ces composantes sous la forme

$$X_j(\mathbf{r}, \tau) = \sum_n X_j^{cw}(\mathbf{r}, \nu_n)A(\nu_n)e^{2i\pi\nu_n\tau}e^{i\phi(\nu_n)} \quad (5.4)$$

où  $A(\nu_n)$  est une fonction réelle qui représente le poids de la composante spectrale  $\nu_n$  dans l'impulsion en lien avec le gain et les pertes associés à ce mode dans la cavité. On notera



également que le terme de phase  $\phi(\nu_n)$  dépend de la fréquence afin de tenir compte des effets de dispersion introduit à l'intérieur ou à l'extérieur de la cavité. De même, dans le cas général, le support spatial de chaque mode doit être fonction de la fréquence pour pouvoir décrire les effets de dispersion chromatique, introduits notamment quand l'impulsion est mise en forme à l'aide de lentilles.

Si on admet que les fréquences  $\nu_n$  qui composent ce spectre sont régulièrement espacées de  $\delta\nu = \frac{c}{2L_{cav}}$  la relation (5.4) a la forme d'une série de Fourier. Les différentes fonctions qui interviennent dans cette relation sont continues et définies pour  $\nu > 0$ . Cette relation peut donc s'écrire sous la forme suivante

$$X_j(\mathbf{r}, \tau) = \int X_j^{cw}(\mathbf{r}, \nu) A(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} e^{i\phi(\nu)} \text{III}_{\delta\nu}(\nu) d\nu \quad (5.5)$$

où  $\text{III}_{\delta\nu}$  désigne le peigne de dirac de période  $\delta\nu$  et où les bornes de l'intégrale (volontairement non spécifiées) sont positives et permettent d'inclure tous les modes amplifiés dans la cavité. La fonction  $A(\nu)$  qui décrit cette amplification est défini autours d'une fréquence  $\nu_0$  et tend vers zéro en dehors de la gamme du milieu à gain. L'intégrale peut donc être prolongée en  $\pm\infty$ , pour s'identifier à une transformation de Fourier (inverse). On peut ainsi écrire

$$X_j(\mathbf{r}, \tau) = TF^{-1} [X_j^{cw}(\mathbf{r}, \nu) A(\nu) e^{i\phi(\nu)}] (\tau) \otimes TF^{-1} [\text{III}_{\delta\nu}] (\tau) \quad (5.6)$$

$$= \mathcal{P}(\mathbf{r}, \tau) \otimes \text{III}_{1/\delta\nu}(\tau) \quad (5.7)$$

où le produit de convolution (symbol  $\otimes$ ) entre l'impulsion  $\mathcal{P}(\mathbf{r}, \tau)$  et le peigne de dirac de période  $1/\delta\nu$  traduit le taux de répétition du train d'impulsion (à la fréquence  $\delta\nu = \frac{2L_{cav}}{c}$ ), répétition qui est directement associé à la nature discrète du spectre.

$\mathcal{P}(\mathbf{r}, \tau)$  fournit une description de l'impulsion dans le domaine temporel, mais la définition qui en est donnée dans les relations (5.6) et (5.7) n'est pas très intuitive. Il est plus commode d'explicitier la fréquence porteuse  $\nu_0$  et de l'écrire sous la forme

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, \tau) = e^{2i\pi\nu_0\tau} TF^{-1} [X_j^{cw}(\mathbf{r}, \nu + \nu_0) A(\nu + \nu_0) e^{i\phi(\nu + \nu_0)}] (\tau) \quad (5.8)$$

Cette formulation permet de définir l'impulsion dans le domaine temporel à partir de la description de chacune des composantes spectrale, sans perte de généralité. En posant  $G(\nu) = A(\nu + \nu_0) e^{i\phi(\nu + \nu_0)}$ ,  $g(\tau)$  sa transformée de Fourier inverse et en admettant que le support spatial est le même pour toutes les composantes spectrale de l'impulsion (focalisation sans aberrations chromatiques) on obtient

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, \tau) = X_j^{cw}(\mathbf{r})e^{2i\pi\nu_0\tau}TF^{-1}[G(\nu)](\tau) \quad (5.9)$$

$$= X_j^{cw}(\mathbf{r})g(\tau)e^{2i\pi\nu_0\tau} \quad (5.10)$$

On retrouve ainsi la description adoptée dans les références [66, 67] et [68] à ceci près que l'enveloppe  $g(\tau)$  est complexe est que la relation de phase entre les différentes composantes du spectre n'est pas nécessairement triviale.

Le spectre  $G(\nu)$  est la transformée de Fourier de l'enveloppe temporelle  $g(\tau)$ . Les relations de phase entre les différentes composante du spectre ont donc une grande influence sur la forme de l'impulsion. La figure 5.2 illustre cette dépendance entre spectre et enveloppe temporelle. En haut de la figure le spectre de l'impulsion à une forme Gaussienne, son module est le même dans les 3 cas considérés, seule sa phase  $\phi_G(\nu)$  évolue de gauche à droite. Ce spectre est de la forme

$$G(\nu) = e^{-\nu^2/\sigma_G^2}e^{i\phi_G(\nu)}$$

Quand les composantes du spectre sont en phase ( $\phi_G(\nu) = cste$ , en haut à gauche), l'impulsion est dite "limitée en transformée de Fourier", son enveloppe temporelle (également Gaussienne) à une durée minimum et sa phase est nulle :

$$g(\tau) = e^{-\tau^2/\sigma_g^2}$$

avec  $\sigma_G = \frac{1}{\sigma_g\pi}$ . Dans l'exemple proposé on considère une impulsion dont la largeur à mi-hauteur est  $\Delta t = 100 \text{ fs}$  en intensité. C'est généralement cette valeur qui est directement mesurée et donc utilisée. Pour l'enveloppe des composantes du champ, la valeur de  $\sigma_g$  correspondante se déduit simplement par la relation

$$\sigma_g = \frac{\Delta t}{2\sqrt{\ln \sqrt{2}}}$$

Pour  $\Delta t = 100 \text{ fs}$ ,  $\sigma_g \approx 85 \text{ fs}$ .

Au milieu de la figure 5.2, la phase du spectre évolue linéairement avec la fréquence selon

$$\phi_G(\nu) = 2\pi t_0\nu$$

où la constante  $t_0 = 200 \text{ fs}$ . Son enveloppe, transformée de Fourier (inverse) du spectre est simplement translatée de  $t_0$ , sans incidence sur la forme, la largeur ou la phase de  $g(\tau)$ . A

droite de la figure enfin, on applique une évolution quadratique à la phase du spectre de la forme

$$\phi_G(\nu) = 2\pi t_0^2 \nu^2$$

Cette fois, le module et la phase de l'enveloppe  $g(\tau)$  sont modifiés. Le module reste très proche d'une Gaussienne mais de plus grande largeur (la largeur à mi hauteur en intensité passe de 100 fs à 367 fs) et le maximum de ce module (la puissance crête de l'impulsion) a diminué. L'évolution de la phase de l'enveloppe temporelle  $g(\tau)$  traduit le fait que la fréquence instantanée de l'impulsion n'est plus constante et égale à  $\nu_0$  tout au long de l'impulsion, mais évolue continûment. On parle de dérive de fréquence ou de "chirp" en anglais.

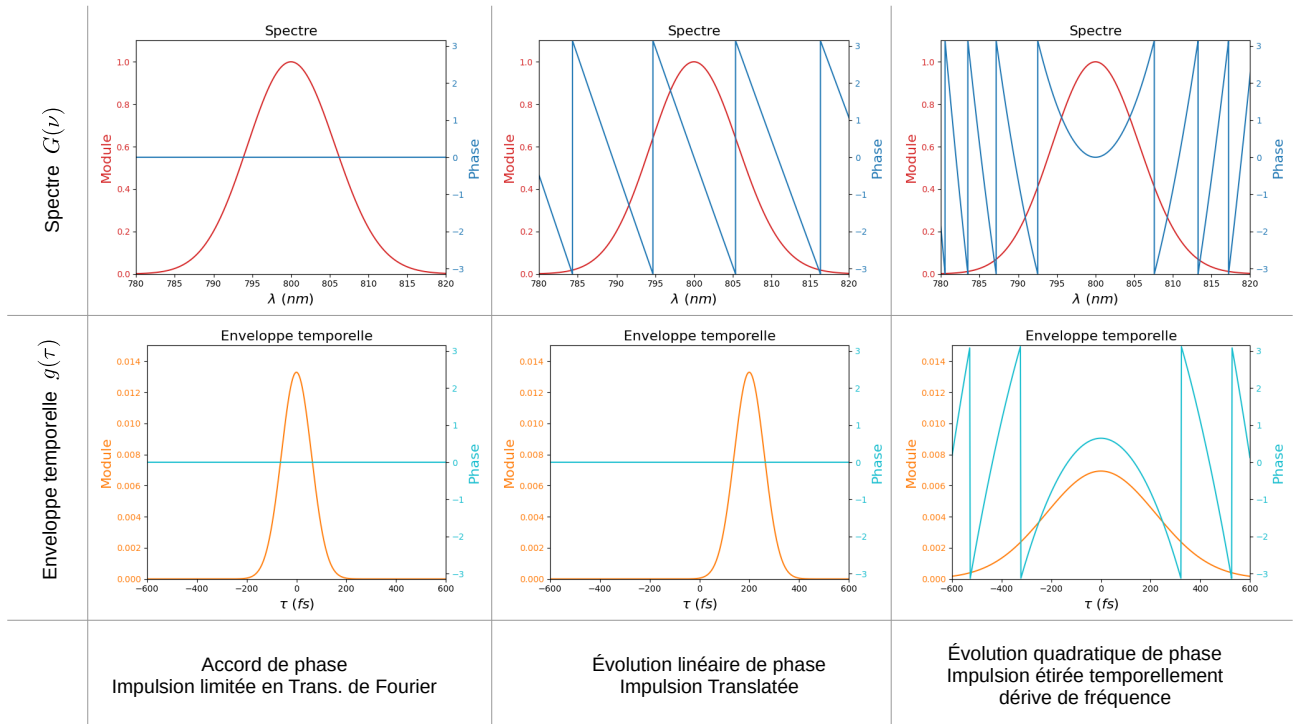


FIGURE 5.2 – Relation de phase durée d'impulsion et dérive de fréquence.

### 5.2.3 Amplification

L'énergie et la puissance crête des impulsions en sortie d'oscillateur ne sont pas toujours suffisantes et il faut les amplifier. Les amplificateurs à plus fort gain reposent sur le principe d'étirement / compression et isolent les impulsions du train d'impulsions et en diminuent très fortement la cadence. L'étirement consiste à introduire une relation de phase réversible au

spectre de l'impulsion afin de diminuer très fortement sa puissance crête. Celle-ci peut alors être amplifiée sans dépasser les seuils de dommage des composants de l'amplificateur avant d'être compressée pour rétablir la relation de phase initiale et retrouver une durée ultra-brève. Pour amplifier une impulsion on utilise généralement un milieu à gain pompé par un laser de forte énergie et dont la cadence est évidemment très limitée (de l'ordre de quelques kHz) en comparaison de la cadence de l'oscillateur (plusieurs dizaines de MHz). Ainsi seules quelques impulsions du train sont isolées, généralement au moyen d'une cellule de Pockels, pour être amplifiées.

Comme le montre la relation 5.7, la nature discrète du spectre des impulsions ultra-brèves en sortie d'oscillateur est associée à un taux de répétition très élevé (à la fréquence  $\delta\nu$ ), de l'ordre de plusieurs dizaine de MHz pour la plupart des oscillateurs femtosecondes. le fait d'isoler une impulsion de son train peut-être décrite en multipliant sa description temporelle par une fonction porte de largeur  $T$  inférieur à  $1/\delta\nu$ . Dans le domaine spectral, le spectre de l'impulsion est alors convolué par la transformée de Fourier de la fonction porte, à savoir  $T \text{sinc}(T\nu\pi)$ . Le pic principal de cette fonction ayant une largeur de l'ordre de  $1/T$ , supérieur à  $\delta\nu$ , cette convolution annule l'effet de la fonction  $\text{III}_{\delta\nu}$ . Autrement dit, d'un point de vue formel, **le spectre d'une impulsion isolée de son train d'impulsion n'est plus discret mais continu**. Il est donc tout à fait approprié de décrire les impulsions par des fonctions continues, dans le domaine temporel comme dans le domaine spectral. Pour le calcul numérique on introduira bien sur une discrétisation qui ne correspondra pas forcément à la discrétisation physique des impulsions en sortie d'oscillateur, et même rarement compte tenu de l'impact qu'aurait une telle discrétisation sur les temps de calcul.

### 5.3 Diffusion simple

Avec la description introduite précédemment, la résolution du problème de diffusion devient trivial. Que l'impulsion soit initialement décrite dans l'espace spectral dans le temps, elle s'écrit comme une somme ou une intégrale de termes de la forme  $X_j^{inc,cw}(\mathbf{r}, \nu) e^{2i\pi\nu\tau} \times A(\nu) e^{i\phi(\nu)}$ , où chaque onde élémentaire est monochromatique et définie partout dans l'espace par son support spatial  $X_j^{inc,cw}(\mathbf{r}, \nu)$ . Si la réponse de la particule à cette onde monochromatique est connue et qu'elle s'écrit  $X_j^{sc,cw}(\mathbf{r}, \nu)$  pour le champs diffusé par exemple, La réponse à l'impulsion en un point donnée de l'espace est simplement la somme ou l'intégrale de l'ensemble des composantes

du champ diffusé, pondéré de la même fonction  $A(\nu)e^{i\phi(\nu)}$ . La réponse en chaque point prend alors la forme d'une transformée de Fourier analogue à la relation (5.8)

$$X_j^{sca,cw}(\mathbf{r}, \tau) = e^{2i\pi\nu_0\tau} TF^{-1} [X_j^{sca,cw}(\mathbf{r}, \nu + \nu_0)A(\nu + \nu_0)e^{i\phi(\nu + \nu_0)}] (\tau) \quad (5.11)$$

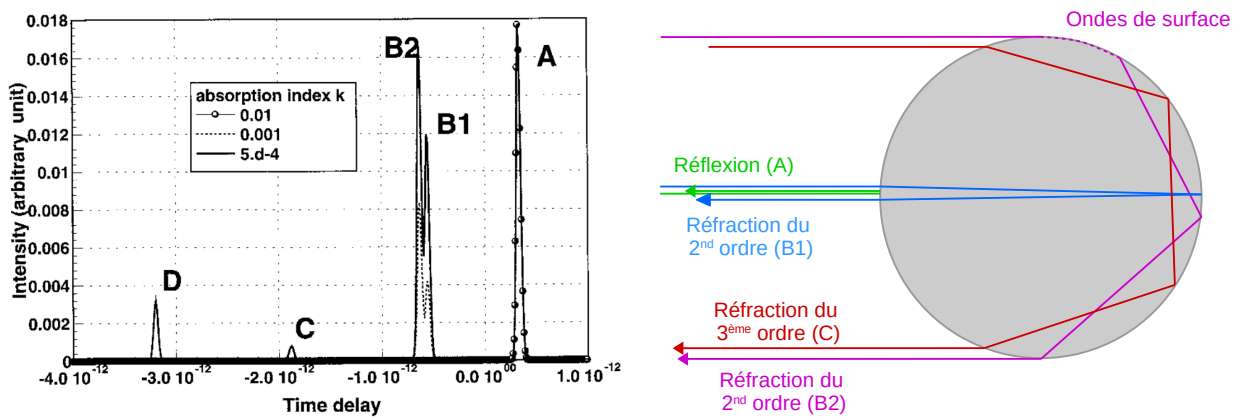
Le terme  $X_j^{sca,cw}(\mathbf{r}, \nu + \nu_0)$  est complexe, son module mais aussi sa phase dépendent de la fréquence  $\nu$ . Si le milieu à l'intérieur de la particule est dispersif, l'indice de réfraction dépend de cette fréquence. Les effets dispersifs associés à la traversée de la particule sont donc automatiquement inclus dans le calcul si cette variation d'indice n'est pas négligée.

Quand le point considéré est à l'intérieur de la particule, on applique exactement le même formalisme en calculant les composantes du champ interne au lieu des composantes du champ diffusé. La réponse de la particule peut être par exemple calculée au moyen de la TLMG, pour des faisceaux focalisés, une particule multi-couches. Il est également possible d'adopter une approximation de champs lointains, d'onde plane ou d'appliquer une décomposition en série de Debye. Autrement dit, tous les résultats du chapitre précédent sont généralisables au cas d'un éclairage pulsé ultra-bref.

## Diffusion en champs lointains

Les premiers résultats pour la diffusion d'une impulsion par une sphère pour des faisceaux focalisés ont été publiés dans les références [70, 71]. Dans ces travaux on retrouve le comportement décrit par Shiffrin et Zolotov ([72]) pour une extension spatiale infinie (onde plane) de l'impulsion, à savoir que pour une impulsion suffisamment brève et une particule suffisamment grosse, la diffusion de l'impulsion dans une direction donnée se compose d'un ensemble de pics séparés temporellement. La possibilité qui nous est offerte de considérer un faisceau focalisé et de n'éclairer qu'une partie de la sphère permet de donner une interprétation physique à ces différents pics. La figure 5.3 montre la diffusion d'une onde plane à l'arrière de la sphère ( $\theta = 180^\circ$ ). Un premier pic (A) correspondant à la lumière réfléchiée à la surface de la sphère. Un second pic (B1) correspond à la lumière réfractée et réfléchiée une fois à l'intérieur de la sphère (réfraction d'ordre 2, ou  $p=2$  au sens de Van de Hulst ou de Debye). Un 3<sup>ème</sup> pic (B2), légèrement plus retardé que B1 correspond également à une réfraction d'ordre 2, mais non pas pour une incidence sur l'axe de la sphère mais pour une incidence rasante, au bord de la particule. L'optique géométrique ne permet pas de prédire la présence de ce pic qui correspond

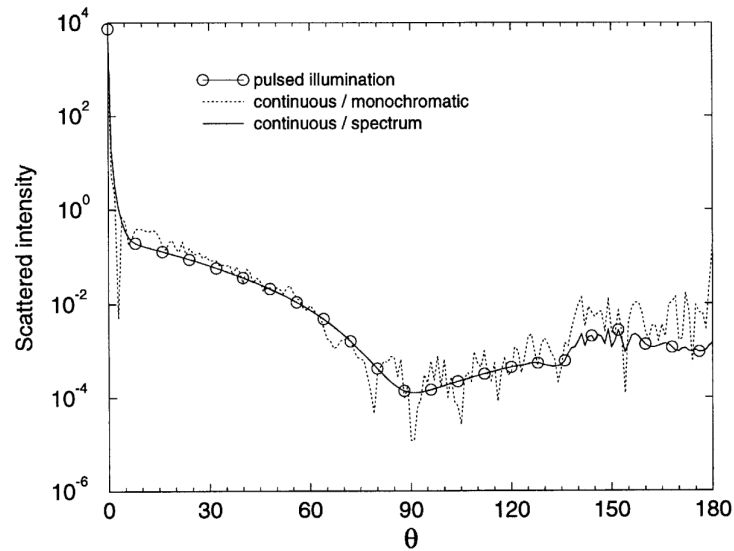
à une prolongation par ondes de surface du mode  $p=2$ . Le 4<sup>ème</sup> pic correspond quant à lui au mode  $p = 3$  et ainsi de suite... Ces interprétations sont étayées par les expériences numériques décrites dans la référence [70], où l'absorption, de la sphère, la taille et la position du faisceau d'éclairage varient et modifie l'intensité relative de ces pics en conséquence. Les délais entre les pics d'intensité correspondent ainsi aux différences de chemins optiques ainsi identifiés. Cette séparation temporelle entre les modes est observable à tous les angles. La référence [71] décrivent l'évolution des diagrammes de diffusion (intensité diffusée en fonction de l'angle) en fonction du temps en simulant une détection à tous les angles et résolue en temps. Ces résultats montrent en particulier que les délais temporels entre les pics d'intensité, comme les chemins optiques auxquels ils sont associés dépendent du mode d'interaction mais aussi de l'angle d'observation.



**FIGURE 5.3** – Diffusion vers l'arrière d'une impulsion de 100 fs par une goutte d'eau de 100  $\mu\text{m}$  de diamètre. A droite, la figure 2 de la référence [70]. A gauche, l'interprétation de la diffusion en terme de rayons lumineux.

Enfin, cette séparation temporelle des modes de diffusion a une influence sur les diagrammes de diffusion, y compris si la détection n'est pas résolue en temps. En effet, pour un éclairage continu ces modes interfèrent et ces interférences produisent des oscillations hautes fréquences dans le diagramme de diffusion, comme nous l'avons vu dans le chapitre 4. Pour un éclairage pulsé, ces modes sont séparés temporellement, c'est l'intensité de ces modes qui est intégrée (sommée) sur le détecteur. La figure 5.4 extraite de la référence [71] compare le diagramme de diffusion pour un éclairage continu et le diagramme de diffusion intégré dans le temps pour un éclairage pulsé. On constate que la plupart des oscillations ont disparu avec l'éclairage pulsé, à l'exception d'une partie d'entre elles autour des angles d'arcs-en-ciel. Dans cette région du

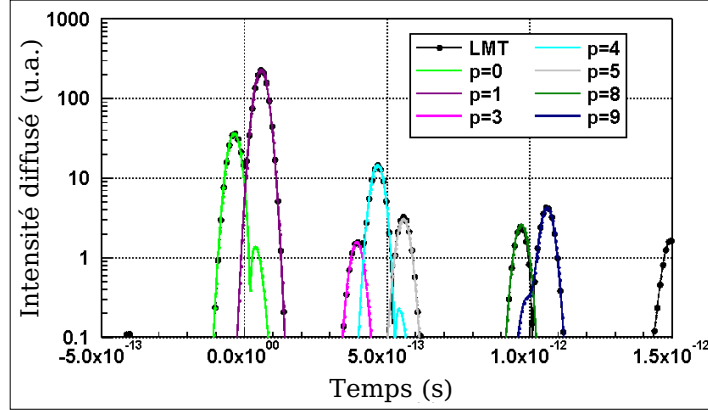
diagramme, des interférences (pas toutes) se produisent entre les "rayons lumineux" dont les trajets optiques sont très proches (voir section 4.6.4 et figure 4.5 en particulier). Les délais temporels associés sont donc inférieurs à la durée de l'impulsion (100 fs ici) et les interférences sont toujours visibles. Notons que si l'on considère un éclairage à large bande dont le spectre est identique à celui de l'impulsion mais sans accord de phase (éclairage continu de type lumière blanche), on obtient le même diagramme que pour l'éclairage pulsé et la détection intégrée dans le temps. Ce "lissage" du diagramme peut donc également être vu comme un effet d'intégration sur plusieurs longueurs d'onde.



**FIGURE 5.4** – Diagramme de diffusion pour un éclairage continu (pointillés) et pour un éclairage pulsé rapide et une détection intégrée dans le temps (cercles), et pour un éclairage à large spectre incohérent (figure 9 de la référence [71]).

La décomposition en séries de Debye de la TLM (section 4.10), très utile pour interpréter les diagrammes de diffusion peut également être appliquée pour un éclairage pulsé. On utilise le même formalisme en remplaçant simplement pour chaque composante du spectre le calcul de TLM par un calcul tronqué. Dans une direction donnée, le signal temporel se réduit alors à un seul pic (parfois deux), correspondant à la seule contribution d'un mode  $p$  comme le montre la figure 5.5 où la décomposition se traduit par l'unicité des pics de diffusion à l'exception du mode  $p = 0$  ou le pic principal correspond à la réflexion de la lumière à  $30^\circ$  et un second pic (d'intensité beaucoup plus faible) correspond à la lumière diffractée par le bord opposé. De

même, des pics secondaires de très faible intensité associés à des ondes de surface apparaissent pour les modes  $p = 4$  et  $p = 9$ .



**FIGURE 5.5** – Intensité diffusée en fonction du temps à  $30^\circ$ , par une sphère de  $50 \mu m$  éclairée par une impulsion de  $50 fs$ . Le calcul complet (LMT) est comparé au calculs tronqués à l’aide des séries de Debye pour les modes  $p = 0$  à  $p = 9$

### 5.3.1 Champs internes et champs proches

Le comportement des champs internes à la sphère et des champs proches a été étudiés dans les références [73, 74, 75], en appliquant le même formalisme.

Si l’on se place en point intérieur à la sphère, on observe comme pour le champ lointain, une série de pics d’intensité séparés temporellement. Si on calcule cette réponse en fonction du temps pour un très grand nombre de points dans (champ interne) et autour de la sphère (champ proche) et que l’on représente l’intensité dans et autour de la sphère pour chaque pas de temps, on reconstruit une image très claire de la propagation de l’impulsion et de son interaction avec la sphère. Bien sûr, cette interaction se visualise beaucoup plus facilement à l’aide d’une séquence vidéo. Néanmoins, la figure 5.6 permet d’illustrer les principales étapes de cette interaction. L’impulsion se propage dans la direction  $z$  (en rouge dans la figure en haut à gauche) polarisée linéairement dans la direction verticale. Elle a une extension spatiale infinie (onde plane) dans le plan perpendiculaire à  $z$ . Son profil temporel est Gaussien de largeur  $\Delta t = 100 fs$ . En conséquence, son profil spatial selon l’axe  $z$  est également Gaussien de largeur  $c\Delta t \approx 30 \mu m$  dans l’air, avant d’interagir avec la goutte d’eau de diamètre  $d = 100 \mu m$  et d’indice  $n_{eau} = 1.333$ , dont la surface est matérialisée par un cercle en pointillé blanc. Le



temps de référence  $0 fs$  correspond au temps de coïncidence entre l'impulsion et le centre de la goutte, en l'absence de goutte. A  $-200 fs$ , l'impulsion atteint la surface de la goutte. Elle est alors partiellement réfléchie et réfractée ( $-100 \& 0 fs$ ). L'impulsion est réfléchie vers l'arrière au centre de la goutte. La partie de l'impulsion impactant les bords de la goutte est réfléchie vers l'avant ( $100 fs$ ). On remarque un creux dans l'impulsion réfléchie autours de l'angle de Brewster où pour cette polarisation l'intensité réfléchie tend vers zéro. La partie réfractée dans la goutte prend une forme courbe due aux décalages entre les impacts au centre et au bord de la goutte ( $-100, 0 fs$ ) et elle est focalisée. L'impulsion réfractée atteint la face opposée de la goutte vers  $200 fs$ . Le temps de traversée sur l'axe peut-être estimé à partir de ces images et des images intermédiaires (non représentés) à environs  $440 fs$ , soit environ  $d \times n_{eau}/c$ . A  $200 fs$ , la partie non perturbée de l'impulsion a dépassée la goutte. Cette impulsion est amputée de l'ombre de la goutte. A l'intérieur de la goutte, une partie de la lumière est réfléchie ( $300 fs$ ), une autre est réfractée vers l'extérieur ou elle poursuit sa focalisation ( $300 \& 400 fs$ ). La partie réfléchie à l'intérieur se décompose clairement en plusieurs parties ( $400 \& 500 fs$ ) qui correspondent à une incidence au centre ou au bord de la goutte (rasantes), au début de l'interaction. Ces impulsions associées à une incidence rasante portent en partie ce qui deviendra le signal d'arc-en ciel du premier ordre en champ lointain, avec réfraction vers l'extérieur de la goutte vers  $600 fs$ . Avec la propagation, l'ombre de la goutte au centre de l'impulsion est de moins en moins net ( $300$  à  $600 fs$ ), selon le principe de diffraction. A  $700 fs$ , la lumière réfléchie une fois à l'intérieur de la goutte (partie centrale) est en partie réfractée vers l'extérieur. Une partie est ici aussi réfléchie (une seconde fois) à l'intérieur de la goutte, bien que la faible intensité associée soit moins visible, même avec cette échelle logarithmique. A  $900 fs$  les petites impulsions associées aux incidences rasantes, déjà réfléchies deux fois à l'intérieur de la goutte sont en partie réfractées vers l'extérieur. Elles formeront en champs lointain le signal d'arc-en-ciel du second ordre. Ces impulsions vont perdre une partie de leur énergie à chaque "rencontre" avec l'interface. Peu à peu, ce qui en restera à l'intérieur de la goutte suivra une trajectoire de plus en plus "rasante" et proche de la surface. Après plusieurs picosecondes, bien que l'intensité associée soit plusieurs ordres de grandeur en dessous de l'intensité de l'onde incidente, ce sont ces modes en partie piégés dans la goutte qui dominant la scène, avec une intensité de plus en plus grande en comparaison de celle des réflexions sur l'axe, associées à une incidence centrale au moment de l'impact. Ces modes sont le pendant impulsif, et donc non résonnants, des Modes de Galerie ou Modes Morphologiquement Dépendant (MDRs en anglais) dont nous avons parlé

au chapitre 4 (section 4.10.4). Leur observation en régime impulsionnel confirme la vision que l'on se fait généralement d'une propagation rasante à l'intérieur de la cavité sphérique et d'une construction interférométrique, tour après tour dans la cavité. Pour observer les résonances à proprement parler, il faut allonger la durée d'impulsion en réduisant sa largeur spectrale autour d'une longueur résonante. Une élongation par étirement (dérive de fréquence) ne permet pas cette construction. Plus la résonance est fine, plus la durée de l'impulsion doit être longue. En faisant varier cette durée on retrouve pour une résonance donnée les mêmes résultats qu'avec les développements en série de Debye et leur troncature, en associant la résonance non pas à un nombre de réflexions interne mais à une durée (ou un chemin optique) équivalent.

Ces modes de galerie en régime impulsionnel peuvent présenter un intérêt pour la métrologie. Les fuites régulières de ces modes (vers l'arrière par exemple) peuvent fournir une mesure très précise de la taille. Comme leurs équivalents résonants en régime continu, ils sont très sensibles à la forme de la cavité (la goutte). Cette dépendance a été étudiée dans la référence [76], où la sphère a été remplacée par un sphéroïde de révolution, en appliquant le même principe de généralisation en régime impulsionnel. Comme le montre les résultats présentés dans cet article, la décroissance au cours du temps, de l'intensité de ces modes, est très sensible à la déformation de la goutte. Dans un autre article ([77]), ces modes de galerie sont exploités dans une simulation d'expérience où deux impulsions sont utilisées pour générer une fluorescence à deux photons dans une goutte. Dans cette expérience numérique, le délai entre les deux impulsions varie de sorte que les modes de galerie des deux impulsions coïncident plus ou moins dans la goutte, sur des temps très long, produisant ainsi un signal très contrasté dépendant de la taille de la goutte.

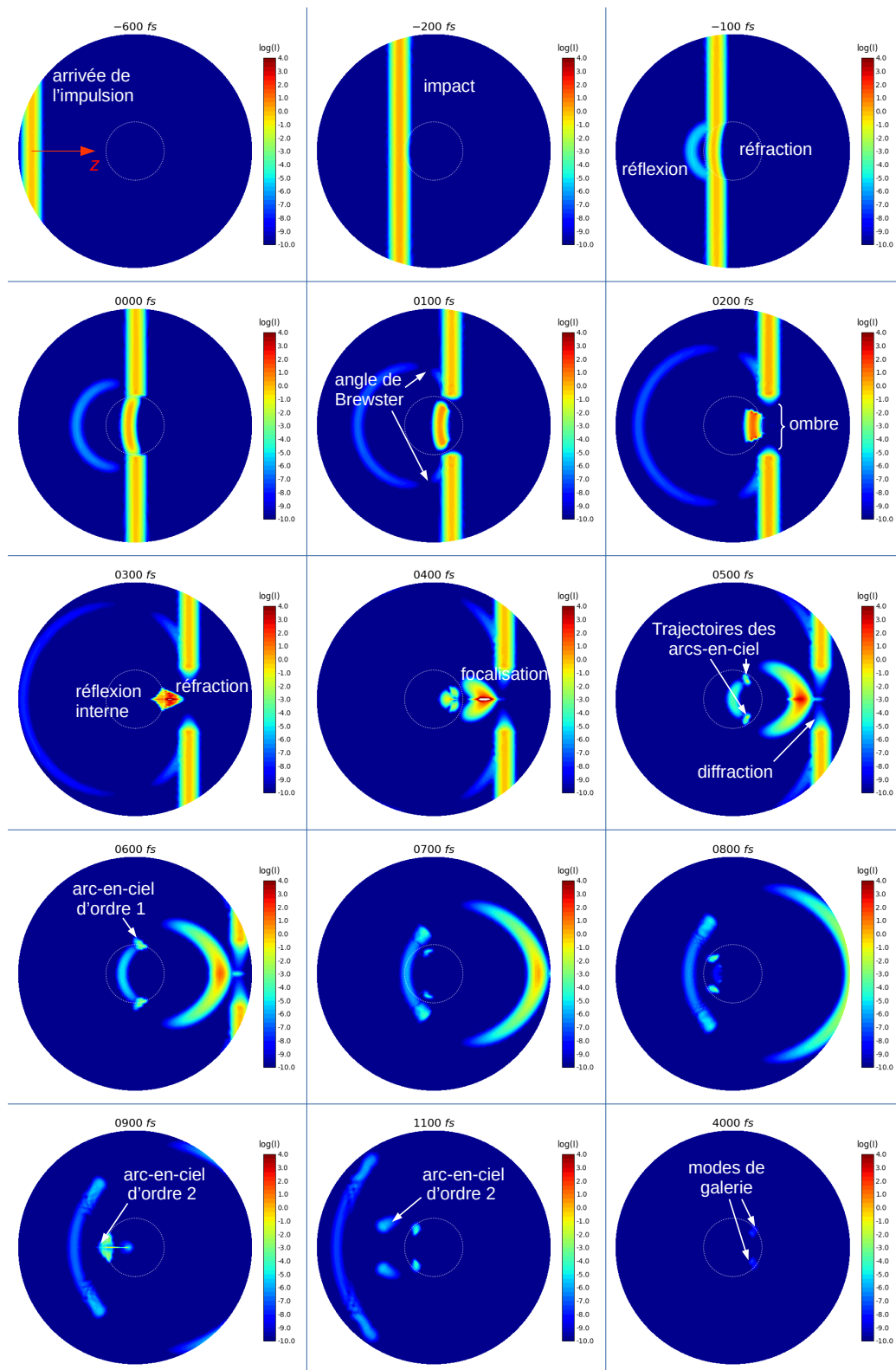


FIGURE 5.6 – Propagation d’une impulsion de 100 fs dans et autour d’une goutte d’eau de 100 μm

## 5.4 Diffusion multiple

### 5.4.1 Introduction

En mécanique des fluides, dans la nature ou les procédés industriels, les particules, bulles ou gouttelettes, ne sont le plus souvent pas isolées. Les problèmes de diffusion ne se résument donc pas à des problèmes de diffusion simple. Quand la distance entre les objets diffusants est grande devant leur taille, on est effectivement en situation de diffusion simple et le problème de diffusion par une ensemble d'objets peut être traité comme une somme de diffusions simples. On fait alors l'hypothèse que la présence des autres objets ne modifie ni la propagation du faisceau incident, ni l'éclairage de l'objet considéré, ni la détection de la lumière diffusé par cet objet. Quand la distance inter-particulaire devient plus petite, on ne peut plus faire ces hypothèses et on est en situation de diffusion Multiple. Là encore, on va distinguer deux cas de figure. Si la distance entre les objets reste suffisamment grande devant leur taille, on peut considérer que la lumière interagit en moyenne avec plusieurs particules entre la source et la détection, mais de manière successive. Autrement dit, la lumière n'interagit pas simultanément avec plusieurs particules. C'est à ce cas intermédiaire que nous allons nous restreindre dans ce document. Pour des distances encore plus faibles entre les particules, on parle de diffusion dépendante. On notera que le rapport entre la distance inter-particules et la taille des particules n'est pas le seul critère déterminant, si l'on se trouve ou non en situation de diffusion simple, de diffusion multiple, dépendante ou non. C'est pourquoi ce critère n'est pas chiffré, même si une distance inter-particule de 10 fois le diamètre des objets est parfois retenu pour admettre que la diffusion n'est pas dépendante. D'autres critères liés à la longueur d'onde, au volume total, à la géométrie, à la nature des sources et des détecteurs, ou des phénomènes optiques observés interviennent également.

Dans le cas qui nous intéresse, d'une diffusion multiple mais non dépendante, différentes méthodes existent : les méthodes itératives [78, 79], les méthodes de zones [80, 81], les méthodes de flux [82, 83, 84] et les méthodes statistiques dites de Monte Carlo [85, 86, 87, 88, 89]. Les méthodes les plus versatiles sont les méthodes de Monte Carlo. Elles reposent sur (i) une description statistique de la lumière par un ensemble de composants élémentaires (souvent appelés "photons" par abus de langage) et du milieu diffusant, (ii) des probabilités d'interaction et de diffusion de ces photons par les diffuseurs déduites des propriétés de diffusion simple et de tirages aléatoires. On s'appuie ainsi sur une description séquentielle d'événements : une collision

entre un photon et un objet, l'absorption ou la diffusion dans une direction donnée, d'une collision avec un nouvel objet et ainsi de suite jusqu'à la sortie du milieu et/ou la détection. A minima le photon est défini par une longueur d'onde (qui peut et est généralement fixe et unique) une position à un instant  $t$  donné et une direction de propagation. Le photon peut être enrichi d'une phase, d'un état de polarisation, d'une courbure de front d'onde ou d'un temps de vol.

Pour intégrer les aspects temporels à ces problèmes de diffusion multiples, les méthodes de Monte Carlo peuvent être adaptées de différentes manières. On distinguera ici deux cas, selon que la taille des diffuseurs est petite devant le produit  $c \times \Delta t$  entre la vitesse de la lumière et la résolution temporelle de l'expérience (durée de l'impulsion ou résolution de la méthode de détection) ou selon que la taille des diffuseurs est suffisante pour que les modes d'interaction soient séparés temporellement comme nous l'avons vu dans la section précédente. Le travail décrit dans ce chapitre a été réalisé dans le cadre de la thèse de Cécile Calba, en collaboration avec Claude Rozé et de Thierry Girasole [90]. Les principaux résultats sont également détaillés dans plusieurs publications [91, 92, 93].

## 5.4.2 Méthode de Monte Carlo

Les méthodes de Monte Carlo fournissent une solution statistique à l'Équation de Transfert Radiatif (ETR) qui décrit la propagation de la lumière dans un milieu diffusif. En régime stationnaire et en l'absence de terme source, cette équation s'écrit

$$\frac{dI_\lambda(\vec{p}, \vec{\Omega})}{dx} = - (k_{abs_\lambda} + k_{d_\lambda}) \cdot I_\lambda(\vec{p}, \vec{\Omega}) + k_{d_\lambda} \int_{4\pi} I_\lambda(\vec{p}, \vec{\Omega}') f_{d,\lambda}(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (5.12)$$

où  $I_\lambda(\vec{p}, \vec{\Omega})$  est l'intensité lumineuse à la longueur d'onde  $\lambda$  au point  $\vec{p}$  se propageant dans la direction  $\vec{\Omega}$ ,  $f_{d,\lambda}(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})$  est la fonction de phase, probabilité de diffusion de la direction  $\vec{\Omega}'$  vers la direction  $\vec{\Omega}$  et où  $k_d$ ,  $k_{abs}$  et  $k_{ext}$  sont les coefficients de diffusion, d'absorption et d'extinction, définis dans l'annexe J.1 et indépendant de la position  $\vec{p}$ .

Le premier terme du membre de droite de l'ERT représente l'extinction (absorption plus diffusion) de l'intensité provenant de la direction  $\vec{\Omega}$ . Le deuxième terme représente l'intensité qui provient de toutes les directions  $\vec{\Omega}'$  qui est diffusée (re-dirigée) dans la direction  $\vec{\Omega}$ . Notons qu'en l'absence de diffusion multiple cette équation conduit à la loi de Beer-Lambert

$$\frac{I}{I_0} = e^{-k_{ext\lambda}L}, \quad \text{où } k_{ext} = k_{d_\lambda} + k_{abs_\lambda} \quad (5.13)$$

$\frac{I}{I_0}$  est la fraction de lumière transmise à travers le milieu sans aucune interaction avec les particules. Par définition, la quantité

$$-\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = k_{ext}L \quad (5.14)$$

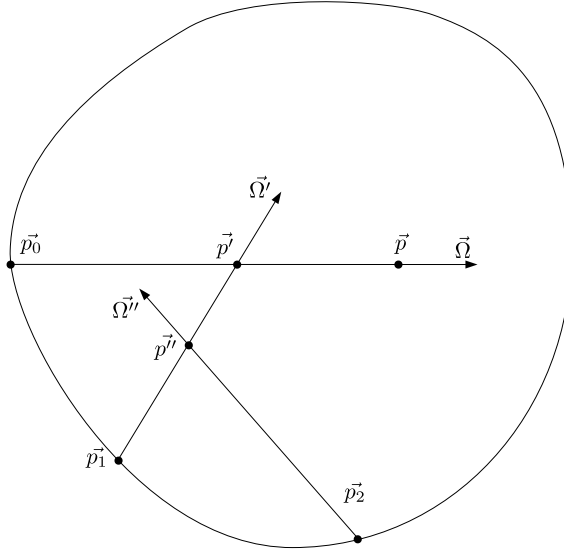
est l'**épaisseur optique** du milieu.

Sous forme intégrale, l'ETR prend la forme suivante (en ometant le symbol  $\lambda$ ) :

$$I(\vec{p}, \vec{\Omega}) = I(\vec{p}_0, \vec{\Omega})\tau(\vec{p}_0, \vec{p}) + \int_{\vec{\Omega}' \in 4\pi} \int_{\vec{p}' = \vec{p}_0}^{\vec{p}} I(\vec{p}', \vec{\Omega}')k_d f_d(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})\tau(\vec{p}', \vec{p})dx'd\Omega' \quad (5.15)$$

où  $\tau(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$  est la transmission sans interaction du point  $\vec{p}_1$  au point  $\vec{p}_2$  :

$$\tau(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = e^{-k_{ext}|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|} \quad (5.16)$$



**FIGURE 5.7** – Schéma de la forme intégrale et décomposée de l'Équation de Transfert Radiatif.

Dans (5.15), l'intensité  $I(\vec{p}, \vec{\Omega})$  est ainsi composée de l'intensité transmise en  $\vec{p}$  à partir d'un point  $\vec{p}_0$  de la frontière du domaine et d'une intensité rediffusée dans la direction  $\vec{\Omega}$  le long du parcours  $(\vec{p}_0, \vec{p})$ , provenant d'un point  $\vec{p}'$  avec une direction  $\vec{\Omega}'$  (voir la figure 5.7). Cette intensité  $I(\vec{p}', \vec{\Omega}')$  sous l'intégrale de l'équation (5.15) est elle aussi en partie composée de la l'intensité issue de la frontière du domaine (en  $\vec{p}_1$ ) et transmise en  $\vec{p}'$  et en partie composée de diffusion en  $\vec{p}''$  d'une intensité provenant de  $\vec{p}_2$ . Ce terme s'écrit ainsi

$$I(\vec{p}', \vec{\Omega}') = I(\vec{p}_1, \vec{\Omega}')\tau(\vec{p}_1, \vec{p}') + \int_{\vec{\Omega}'' \in 4\pi} \int_{\vec{p}'' = \vec{p}_1}^{\vec{p}'} I(\vec{p}'', \vec{\Omega}'')k_{d'}f_{d'}(\vec{\Omega}'', \vec{\Omega}')\tau(\vec{p}'', \vec{p}')dx''d\Omega'' \quad (5.17)$$

En appliquant la même décomposition au terme  $I(\vec{p}'', \vec{\Omega}'')$  et ainsi de suite, l'équation (5.15) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} I(\vec{p}, \vec{\Omega}) &= I(\vec{p}_0, \vec{\Omega})\tau(\vec{p}_0, \vec{p}) \\ &+ \int_{\vec{\Omega}' \in 4\pi} \int_{\vec{p}' = \vec{p}_0}^{\vec{p}} I(\vec{p}_1, \vec{\Omega}')\tau(\vec{p}_1, \vec{p}')k_d f_d(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})\tau(\vec{p}', \vec{p})dx'd\Omega' \\ &+ \int_{\vec{\Omega}' \in 4\pi} \int_{\vec{p}' = \vec{p}_0}^{\vec{p}} \int_{\vec{\Omega}'' \in 4\pi} \int_{\vec{p}'' = \vec{p}_1}^{\vec{p}'} I(\vec{p}_2, \vec{\Omega}'')\tau(\vec{p}_2, \vec{p}'')k_{d'}f_{d'}(\vec{\Omega}'', \vec{\Omega}')\tau(\vec{p}'', \vec{p}') \\ &\quad \times k_d f_d(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})\tau(\vec{p}', \vec{p})dx'd\Omega'dx''d\Omega'' \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (5.18)$$

L'intensité  $I(\vec{p}, \vec{\Omega})$  est ainsi décomposée en une transmission sans interaction (zéro diffusion, premier terme du membre de droite), une contribution de diffusion simple (deuxième terme), une contribution de diffusion double (troisième terme), etc...

La résolution statistique de cette équation repose sur la simulation d'un grand nombre de trajectoire de "photons" sur la base de tirages aléatoires et de probabilités décrivant les événements possibles (interaction avec une particule, absorption, diffusion, détection, ...), considérés de manière séquentielle (diffusion non dépendante).

Chaque "photon" est associé à une unité d'énergie et est défini par un ensemble de propriétés qui évoluent à chaque interaction avec les particules diffusantes : une position  $\vec{p}$ , un trièdre direct de vecteurs unitaires  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$  et deux amplitudes complexes  $E_i$  et  $E_j$ . Le vecteur  $\vec{e}_k$  est la direction de propagation du "photon", les vecteurs  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}_j$  permettent de définir son état de polarisation par les deux composantes  $E_i$  et  $E_j$ . L'algorithme de base est ainsi composé des étapes suivantes :

- Un "photon" est émis depuis la source. Sa position  $\vec{p}$  et sa direction  $\vec{\Omega}$  sont tirées aléatoirement à partir d'une description statistique de la source (voir la section J.2 dans l'annexe J).

- On calcule la nouvelle position du "photon" à partir de sa position, de sa direction de propagation avant la collision et de la distance  $l$ . On réalise alors des tests pour savoir si le "photon" est sorti du milieu, s'il est détecté ou s'il interagit effectivement avec un diffuseur dans le milieu.
- Si l'interaction est effective, on détermine les propriétés de la particule diffusante à partir de distributions de taille, d'indice...
- On détermine si le "photon" est absorbé ou diffusé en comparant un nombre aléatoire à l'albedo de la particule (voir section J.3 de l'annexe J).
- Si le "photon" est diffusé, on détermine sa nouvelle direction en tirant deux angles  $\theta$  et  $\varphi$  à partir de deux nombres aléatoires  $r_\theta$  et  $r_\varphi$  et des propriétés de diffusion de la particule (fonction de phase  $f_d(\vec{p}, \vec{\Omega})$ ) des relations ci-dessus, comme détaillée dans la section J.4 de l'annexe J. Si le milieu contient ou est délimité par des parois, la réfraction, la réflexion ou l'absorption par ces parois peuvent facilement être considéré lors de cette étape.
- On tire alors une nouvelle distance de collision et on réitère les opérations précédentes jusqu'à ce que le "photon" sorte du milieu, soit absorbé ou détecté. Une fois le destin de ce photon scellé, on tire un nouveau photon.

La description des détecteurs peut être plus ou moins complexes, ponctuelle ou composée de pixels, sensible ou non à la polarisation ou au temps de vol. Dans tous les cas, la simulation du signal détecté repose sur l'accumulation des "photons" détectés et il en faut généralement plusieurs Millions et jusqu'à plusieurs centaines de Millions pour obtenir un résultat convergé, selon la géométrie, la taille des détecteurs, la densité du milieu, l'albedo...

### 5.4.3 Méthode de semi-Monte carlo

Les méthodes de Monte Carlo sont relativement gourmandes en temps de calcul. Ce temps de calcul dépend fortement de la configuration. On comprend par exemple aisément que le nombre de "photons" nécessaire à l'obtention d'un résultat convergé augmente drastiquement quand la taille du détecteur diminue, car alors très peu de "photons" terminent leurs courses sur le détecteur. Dans ce cas, la méthode peut être adaptée en appliquant la méthode de semi-Monte Carlo. Dans cette variante, les trajectoires de "photons" sont toujours décrites comme une suite d'événements de diffusion et se terminent soit par une absorption soit par une sortie du milieu diffusif. Par contre, la détection est traitée de manière différente. En effet, A chaque collision, on peut déterminer la probabilité pour que le photon atteigne le détecteur, au cours



de l'événement suivant, i.e. qu'il soit diffusé en direction du détecteur et qu'il ne subissent pas d'autres collision sur ce dernier trajet. La méthode consiste ainsi à suivre le "photon" le long d'une trajectoire simulée de la même manière qu'avec la méthode classique et de calculer une contribution à la détection à chaque événement de diffusion. La trajectoire du "photon" prend fin quand celui-ci est absorbé ou qu'il quitte le milieu. Si on considère un détecteur ponctuel centré en  $\vec{p}_d$  et le  $n^{eme}$  événement de diffusion rencontré par le "photon" en  $\vec{p}_n$ , la direction entre la particule diffusante et le détecteur est définie par un vecteur unitaire

$$\vec{\Omega}_d^{(n)} = \frac{\vec{p}_d - \vec{p}_n}{\|\vec{p}_d - \vec{p}_n\|}$$

Si on note  $\delta\Omega_d^{(n)}$  l'angle solide du détecteur, vu depuis la particule la contribution de cette diffusion à la détection s'écrit

$$\delta\Phi = f(\vec{\Omega}_n, \vec{\Omega}_d^{(n)}) \exp(-k_{ext}\|\vec{p}_d - \vec{p}_n\|) \delta\Omega_d^{(n)} \quad (5.19)$$

Avec cette méthode, chaque "photon" contribue (et même plusieurs fois) à la détection. Chaque "photon" est ainsi "utile", contrairement à la méthode classique où un grand nombre de photons n'atteint jamais le détecteur, d'autant plus si le détecteur est de petites dimensions. Les gains en temps de calcul peuvent être de plusieurs ordres de grandeur.

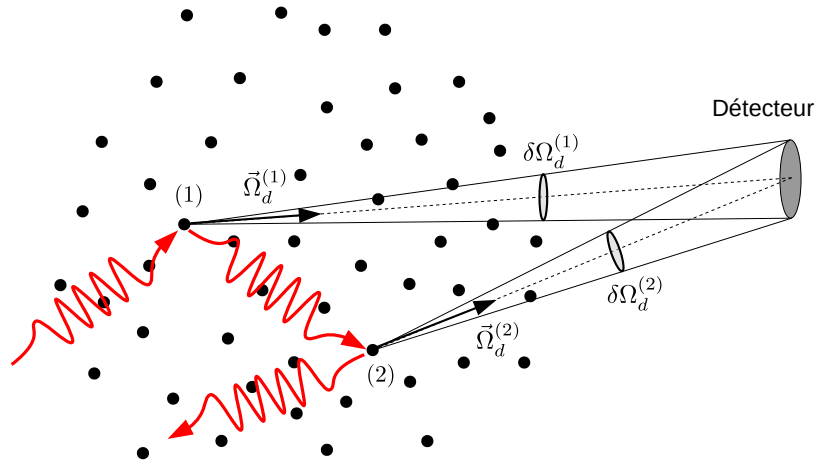
Cette méthode est justifiée à partir de la forme intégrale de l'ERT dans la thèse de Cécile Calba [90] (section 3.3.2), à partir d'une décomposition dans le même esprit celle présentée plus haut pour la méthode de Monte Carlo classique.

#### 5.4.4 Propagation/diffusion d'une impulsion dans un nuage de petites particules

Pour simuler la propagation et la diffusion d'une impulsion ultra-brève dans un nuage de particules, il faut introduire le temps dans l'ERT. En principe, une alternative à l'introduction du temps consisterait à considérer la décomposition de l'impulsion dans l'espace spectral et à résoudre l'ERT pour chaque longueur d'onde en prenant en compte la phase. Cette deuxième solution ne sera pas retenue pour des raisons évidentes de temps de calcul.

Si on introduit le temps dans l'ERT, celle ci devient (sous sa forme différentielle) :

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial I(t, \vec{p}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \frac{\partial I(t, \vec{p}, \vec{\Omega})}{\partial x} = -(k_{abs} + k_d) I(t, \vec{p}, \vec{\Omega}) + k_d \cdot \int_{4\pi} I(t, \vec{p}, \vec{\Omega}') \cdot f(t, \vec{\Omega}', \vec{\Omega}) d\Omega' \quad (5.20)$$



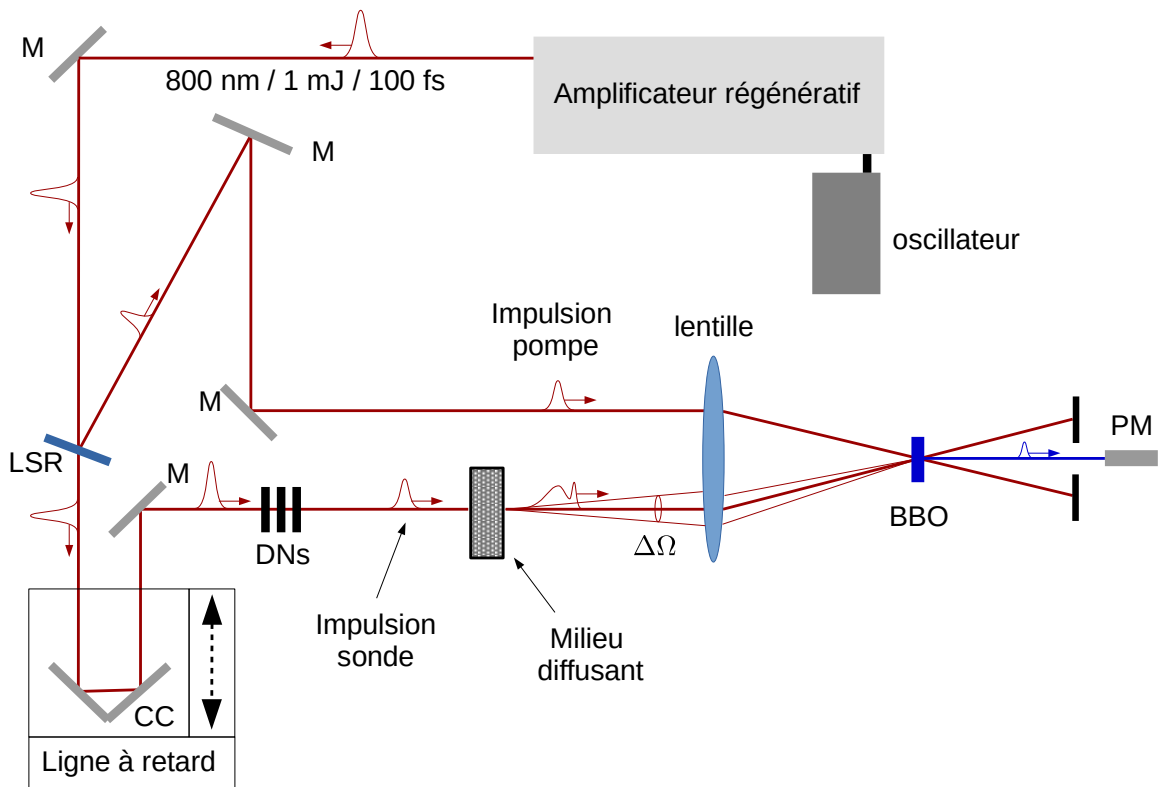
**FIGURE 5.8** – Schéma de principe de la méthode de semi-Monte Carlo. La trajectoire du photon est simulée de la même manière que pour la méthode Monte Carlo classique, mais une contribution à la détection est calculée à chaque événement de diffusion.

où l'intensité  $I(t, \vec{p}, \vec{\Omega})$  et la fonction de phase sont à présent dépendantes du temps. Comme nous l'avons vu dans la section 5.3, si la taille de la particule est suffisamment grande et que l'impulsion est suffisamment brève, la diffusion dans une direction donnée prend la forme d'une série d'impulsions séparées temporellement. En revanche, quand la particule est petite devant la longueur de l'impulsion, Les délais temporels associés aux trajets à l'intérieur de la particule sont négligeables devant la durée de l'impulsion. Autrement dit, à tous les angles, la lumière diffusée prend la forme d'une impulsion unique de même durée que l'impulsion incidente [91]. L'intensité de cette impulsion à son maximum dépend bien sur des angles de diffusion, mais selon une fonction de phase qui ne dépend pas du temps (similaire à une fonction de phase pour un éclairage continu mais sans les interférences, voir figure 5.4). Dans un milieu constitué de petites particules, les aspects temporels peuvent ainsi être négligés lors des interactions avec les particules. En revanche, lorsque l'impulsion est diffusée d'une particule vers une autre, les trajets optiques et les délais temporels associés à la diffusion multiple doivent être pris en compte. Pour les petites particules, nous pouvons donc construire un modèle de Monte Carlo de "centre à centre" où les fonctions de phase des objets diffusants sont les fonctions indépendantes du temps et où les délais temporels (les chemins optiques) d'un diffuseur à l'autre sont simplement

comptabilisés le long des trajectoires de "photons". le signal temporel détecté se compose ainsi d'un ensemble de pics discrets. Une simple convolution par l'enveloppe de l'impulsion incidente permet de reconstruire le signal temporel.

Un tel modèle a été développé et exploité pour étudier la faisabilité de mesures sur le principe de l'extinction, en situation de diffusion multiple [93]. Le modèle "centre à centre" est comparé à un modèle pleinement temporel dans [93] où la diffusion d'une impulsion de 35  $fs$  vers l'avant par des milieux fortement diffusifs (épaisseur optique jusqu'à 10) et différentes tailles de particules. Ce travail et le travail de thèse de C. Calba [90] permettent de conclure que pour des impulsions de quelques dizaines de  $fs$ , le modèle "centre à centre" est suffisant pour des tailles particules inférieures à 5  $\mu m$ . En revanche, pour des particules plus grosses, la prise en compte du temps lors des interactions avec chaque particule est nécessaire comme nous le verrons dans la section 5.4.5.

Le modèle de Monte Carlo de "centre à centre" permet de simuler la transmission/diffusion d'une impulsion ultra-brève dans un milieu diffusif modèle, constitué de particules diffusantes de petites tailles, et sa détection résolue en temps par un dispositif sensible à la polarisation. L'expérience correspondante a été développée dans le cadre de la thèse de Cécile Calba [90]. L'expérience permet de mesurer la transmission d'une impulsion femtoseconde à travers un milieu fortement diffusif. Son objectif est d'atteindre des épaisseurs optiques de l'ordre de 20 et ainsi mesurer des niveaux d'énergie environ  $10^9$  fois plus faible que l'énergie de l'impulsion incidente. C'est pourquoi l'expérience ne repose pas sur un simple oscillateur femtoseconde mais également sur un amplificateur régénératif qui produit des impulsions de 100  $fs$  d'environ 1  $mJ$ . La détection d'un signal à l'échelle de la femtoseconde ne peut pas être réalisée avec un dispositif électronique classique dont le temps de réponse est limité à l'échelle de la nanoseconde. C'est pourquoi la détection est réalisée optiquement à l'aide d'un montage de type pompe/sonde. Le dispositif expérimental est schématisé figure 5.9. L'impulsion amplifiée par l'amplificateur régénératif est séparée à l'aide d'une lame semi-réfléchissante (LSR) en une impulsion pompe (environ 10% de l'énergie) et une impulsion sonde. Les deux impulsions vont ensuite suivre des trajets différents mais de longueurs (chemins optiques) proches, jusqu'à la détection. L'impulsion sonde passe par une ligne à retard, constituée d'un coin de cube (CC) monté sur une platine de translation linéaire. Ce dispositif permet d'ajuster et de faire varier le chemin optique de l'impulsion sonde qui est ensuite dirigée vers le milieu diffusant à l'aide d'un miroir(M). Différentes combinaisons de densités neutres (DNs) sont placées sur le trajet



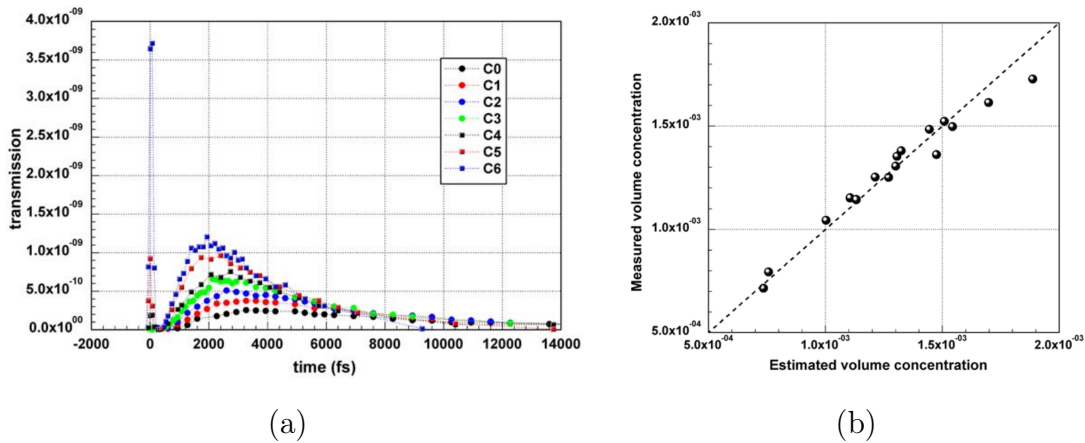
**FIGURE 5.9** – Montage expérimental permettant de détecter la transmission d’une impulsion femtoseconde à travers un milieu fortement diffusif en fonction du temps. L’impulsion est séparée en une impulsion sonde et une impulsion pompe par une lame semi réfléchissante (LSR). Un ensemble demi-rois (M) et une ligne à retard (coin de cube CC monté sur une translation) sont disposés et ajustés de sorte que les chemins optiques de ces 2 impulsions jusqu’à la détection, soient proches. Une série de densités neutres (DNs) permet d’ajuster l’intensité de l’impulsion sonde avant qu’elle ne traverse le milieu diffusant. Une lentille focalise les 2 impulsions dans un cristal BBO afin de générer une seconde harmonique, dont l’intensité est mesurée par un photo-multiplicateur. On obtient une image de l’impulsion sonde (transmise et diffusée vers l’avant) en fonction du temps en faisant varier le délai entre les deux impulsions grâce à la ligne à retard.

de l’impulsion afin d’adapter son intensité à la densité optique du milieu diffusant. L’impulsion traverse le milieu diffusant ou elle est partiellement transmise sans interaction, et partiellement diffusée. C’est la répartition temporelle de cette impulsion transmise et diffusée à l’avant du milieu diffusant que nous cherchons à mesurer. Pour ce faire, l’impulsion sonde et l’impulsion pompe sont focalisées à l’aide d’une lentille dans un cristal BBO (Bêta-Borate de Baryum) placé dans le plan focale d’une lentille. On réalise ainsi une génération de seconde harmonique

en configuration non-colinéaire. En terme simples, deux impulsions de  $800\text{ nm}$  se superposent spatialement et temporellement dans le cristal avec un petit angle et donnent naissance à une seconde harmonique (dans le bleu à  $400\text{ nm}$ ) dans la direction intermédiaire entre les deux impulsions. L'intensité de cette seconde harmonique est mesurée à l'aide d'un simple photomultiplicateur (PM), alors que les faisceaux à  $800\text{ nm}$  conservent leur direction de propagation et sont bloqués. Le temps de réponse du PM n'a pas d'importance, la mesure est intégrée dans le temps. Le signal mesuré est proportionnel à l'intégrale dans le temps du produit des deux impulsions. En faisant varier le délai (chemin optique) de l'impulsion sonde et en mesurant l'intensité de la seconde harmonique pour chaque position de la ligne à retard, on réalise un produit de convolution entre l'impulsion sonde et l'impulsion pompe qui fournit une image de l'impulsion sonde, transmise et diffusée à travers le milieu diffusant. La focale de la lentille, la divergence des faisceaux et l'angle entre les faisceaux définissent un angle solide de détection vers l'avant. Ainsi, seule la lumière diffusée vers l'avant avec un angle ne dépassant pas environ  $0.02$  est détectée. Enfin, la génération d'harmonique n'est effective que pour la composante verticale de polarisation. Le milieu diffusant est constitué de particules de polystyrène en solution, de diamètre  $1.0 \pm 0.03\ \mu\text{m}$  et d'indice  $m_p \approx 1.58 - 10^{-3}i$  à  $800\text{ nm}$ , ou de bille de verre en solution de diamètre  $2.0 \pm 0.5\ \mu\text{m}$  et d'indice  $m_p \approx 1.5 - 10^{-5}i$ . Les solutions dont la concentration varie sont placées dans des cuves de "qualité optique" (Helma) destinées à la spectroscopie et d'épaisseur variable ( $L = 1, 5$  ou  $10\text{mm}$ ).

Les premiers résultats expérimentaux ont été présentés en 2006 à Lisbonne [94] puis confrontés aux résultats de simulation Monte Carlo en 2008 [93]. La figure 5.10.a montre l'intensité mesurée à l'aide de ce montage en fonction du temps, pour des concentrations décroissantes (de  $C0$  à  $C6$ ) de particule de polystyrène en solution. Les signaux présentent tous un pic (en  $t = 0\text{ fs}$ ) qui correspond à la lumière balistique, directement transmise (sans diffusion) à travers le milieu. Un second pic, décalé dans le temps et plus étalé correspond à la lumière diffusée (de nombreuses fois) dans le milieu, puis détectée dans le petit angle de mesure très proche de l'axe optique. La durée du pic balistique correspond à la durée de l'impulsion initiale convoluée avec elle-même. Son intensité décroît rapidement quand la concentration croît. Le pic de diffusion multiple voit également son intensité décroître quand la concentration augmente mais beaucoup moins rapidement que l'intensité du pic balistique. Sa durée et la position de son maximum augmentent avec la concentration, avec le nombre moyen de diffusion. À partir de ces résultats, on comprend que malgré le très petit angle de collection de la détection, la quan-

tité de lumière diffusée qui serait détectée sans résolution temporelle (intégrée dans le temps) dépasserait largement la quantité de lumière directement transmise. En revanche, si on réalise une mesure résolue en temps en  $t = 0$ , on a accès à l'intensité directement transmise, non brouillée par la diffusion multiple. En inversant la loi de Beer-Lambert (5.4.2) on mesure ainsi l'épaisseur optique du milieu sans perturbation par la diffusion multiple. Dans le cas présent d'une mono-dispersion de taille, on en déduit directement la concentration, qui est comparée à la concentration des solutions utilisées (figure 5.10.b).



**FIGURE 5.10** – Mesures résolues en temps de la lumière transmise à travers un milieu fortement diffusif. (a) Intensité transmise/diffusée en fonction du temps pour différentes concentrations de particule de polystyrène en solution. (b) Mesures de concentration déduites de la mesure d'intensité en  $t = 0$  (pic balistique). Les mesures ont été réalisées avec le montage de la figure 5.9 dans une cuve de  $5 \text{ mm}$  d'épaisseur.

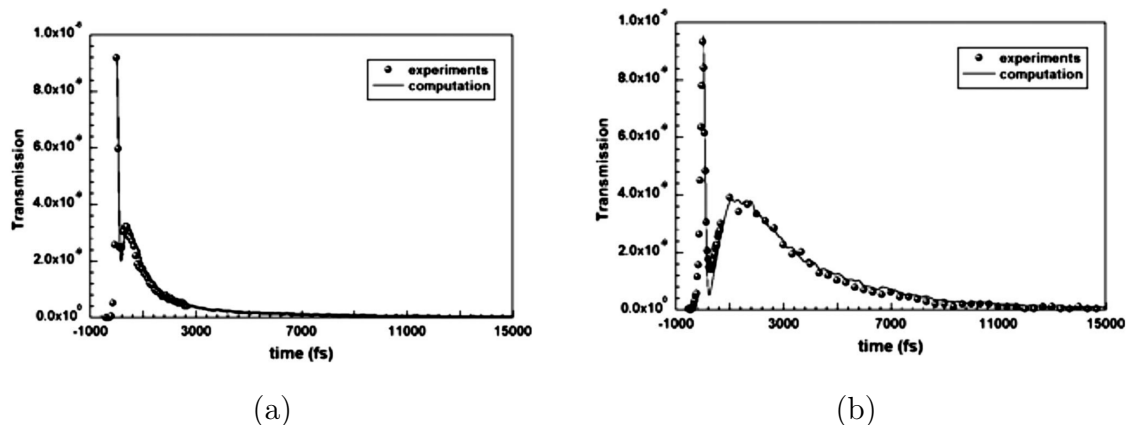
On peut ainsi réaliser une mesure instantanée (une seule position de la ligne à retard correspondant à  $t = 0$ ) de l'épaisseur optique du milieu. Ce résultat reste valable pour une épaisseur de cuve plus faible ou plus grande ( $L = 1, 10 \text{ mm}$ ), et pour une solution de bille de verre de diamètres légèrement plus grands, comme le montre les résultats de la référence [93]. Dans cette référence, les mesures sont également confrontés avec succès aux calculs réalisés avec la méthode de semi-Monte Carlo introduite plus haut. La figure 5.11 montre deux exemples de comparaison entre calculs et expériences, extraits de la référence, pour deux épaisseurs physiques différentes ( $L = 1, 10 \text{ mm}$ ), des tailles et une nature des diffuseurs différentes et une épaisseur optique équivalente, de l'ordre de 18.5. Les caractéristiques du pic formé par la diffusion dépendent de la taille, de l'épaisseur optique mais aussi de l'épaisseur physique du milieu. Pour une épaisseur

$L = 1 \text{ mm}$  on constate ainsi que le pic diffusé est peu décalé dans le temps en comparaison des décalages constatés pour  $L = 5 \text{ mm}$  (courbe C6 de la figure 5.10, pour une épaisseur optique de  $\approx 19.4$ ) et  $L = 10 \text{ mm}$ . On déduit de ce résultat qu'une résolution temporelle de l'ordre de  $100 \text{ fs}$  ou inférieur est nécessaire pour séparer efficacement la lumière balistique de la lumière diffusée pour ce milieu dont l'épaisseur physique est de  $1 \text{ mm}$ . En revanche, à même épaisseur optique mais pour une épaisseur physique  $L$  de  $10 \text{ mm}$ , une résolution temporelle d'une picoseconde ( $1000 \text{ fs}$ ) semble suffisante pour s'affranchir de l'essentiel de la diffusion multiple.

Le comportement du pic diffusé est étudié dans la thèse de Cécile Calba, en fonction de la concentration des objets, de leur taille, leur indice de réfraction, de l'angle de collection, de l'épaisseur physique du milieu... Cependant, le principal intérêt de l'approche "femtoseconde" pour le diagnostic des milieux denses est son caractère potentiellement instantané, notamment en mécanique des fluides. Or, le dispositif expérimental développé dans le cadre de ces études ne permet pas de mesurer l'ensemble du signal temporel en une seule fois. Pour exploiter, l'ensemble du signal, diffusion multiple incluse, on peut imaginer de réaliser des mesures à deux temps ou à trois temps selon le même principe ou bien utiliser des caméras linéaires de type streak camera, très coûteuses à l'époque, un peu moins aujourd'hui. Une autre voie, plus directement applicable aux milieux denses de type spray est le développement de méthodes de visualisation et/ou de mesure non perturbée par la diffusion multiple sur le principe de l'isolement temporel de la lumière balistique. L'imagerie balistique qui sera présentée dans la section 5.5 en est un exemple.

#### 5.4.5 Propagation/diffusion d'une impulsion dans un nuage de grosses particules

Comme nous l'avons vu dans la section 5.3, lorsqu'une particule diffusante est de taille suffisante, la diffusion d'une impulsion ultra-brève prend la forme (à tous les angles) d'une série d'impulsions associées à différents types d'interactions et différents chemins optiques : lumière diffractée, réfléchie ou réfractée après une ou plusieurs réflexions internes. Dans ce cas, le modèle "centre à centre" décrit dans la section précédente ne permet pas de décrire tous les aspects temporels en situation de diffusion multiple et il faut considérer non seulement les délais introduits d'un événement de diffusion à l'autre mais également la dépendance temporelle des fonctions de phase de la relation (5.20). Une méthode triviale consiste à développer un modèle de Monte Carlo, et à attribuer au "photon" un temps d'interaction, tiré aléatoirement à partir



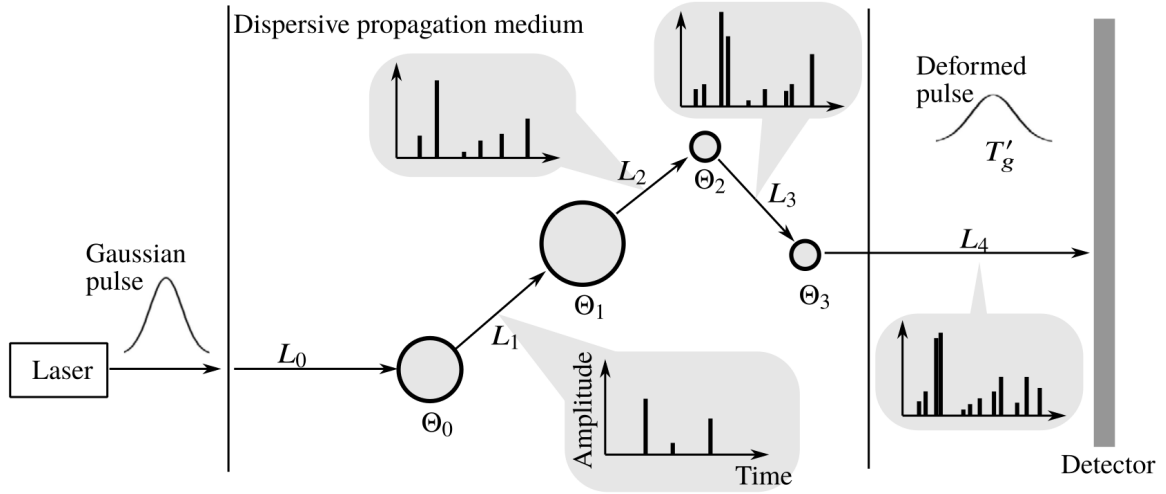
**FIGURE 5.11** – Intensité transmise/diffusée en fonction du temps à travers 1 *mm* d'une solution de bille de polystyrène de  $1\mu\text{m}$  d'épaisseur optique 18.5 (a) et à travers 10 *mm* d'une solution de billes de verre de  $2\mu\text{m}$  d'épaisseur optique 18.46 (b). Extraits des figures 8 et 10 de la référence [93]

de la fonction de phase temporelle, en plus des 2 angles  $\theta$  et  $\varphi$ . Une telle approche n'est pas raisonnable en termes de temps de calcul car le nombre de "photons" nécessaires à l'obtention d'un résultat convergé est démultiplié par l'ajout de cette dimension supplémentaire.

Une autre approche est possible. Elle est décrite dans les références [92] et [95]. Dans ce modèle de Monte Carlo, le "photon" n'est plus un simple quantum d'énergie associé à une position, une direction de propagation et un temps de vol. On considère à présent que le "photon" est constitué d'un ensemble de pics, définis chacun par une amplitude complexe  $a_i$  et un temps  $t_i$  relatif au temps de vol global du photon  $t$  du modèle "centre à centre", qui tient compte des parcours entre diffuseurs. Le nombre de pics associés au "photon" varie à chaque interaction comme l'illustre la figure 5.12. Lorsque le "photon" est émis depuis la source il est généralement associé à un seul pic pour décrire une impulsion incidente unique. Après une première diffusion, il est associé à un ensemble de pics, que l'on peut réduire à un nombre fini  $n$  si on décide de ne conserver que ceux dont l'amplitude reste au dessus d'un certain seuil. Lors de la deuxième diffusion, on considère que chacun des pics représente autant d'impulsions indépendantes, qui sont à leur tour diffusées. Si on ne conserve que  $m$  pics d'amplitude non négligeables lors de cette seconde diffusion, le nombre de pics associé au "photon" devient alors  $n \times m$ , et ainsi de suite...

De manière un peu plus formel, pour la diffusion par une particule de diamètre  $d$ , un angle





**FIGURE 5.12** – Représentation schématique de la méthode de Monte Carlo temporelle pour des diffuseurs de grande taille extrait de la référence [95]. Le photon est associé à un ensemble de pics qui varie à chaque diffusion.

de diffusion  $\theta$  est défini par tirage aléatoire, à partir d'une fonction de répartition stationnaire

$$F(\theta, d) = \int_{t=0}^{\infty} f(\theta, d, t) dt \quad (5.21)$$

où la fonction de phase normalisé dépendante du temps  $f(\theta, d, t)$  est calculée par Théorie de Mie. On ne considère pas ici les effets de polarisation, l'angle  $\varphi$  est donc défini de manière équiprobable entre 0 et  $2\pi$ . Le "photon" est associé à un ensemble de pics

$$S = \{(A_1, t_1); (A_2, t_2); \dots; (A_n, t_n)\} \quad (5.22)$$

après une diffusion cet ensemble devient

$$\begin{aligned} S' &= \{(A'_1, t'_1); (A'_2, t'_2); \dots; (A'_{n \times m}, t'_{n \times m})\} = \Pi_{\theta, d}[S] \\ &= \Pi_{\theta, d}[\{(A_1, t_1); (A_2, t_2); \dots; (A_n, t_n)\}] \\ &= \{\Pi_{\theta, d}[(A_1, t_1)]; \Pi_{\theta, d}[(A_2, t_2)]; \dots; \Pi_{\theta, d}[(A_n, t_n)]\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

L'opérateur de diffusion  $\Pi_{\theta, d}$  est directement déduit de calculs de diffusion simple (section 5.3) pour une seule impulsion d'amplitude 1 et de temps nul, soit

$$\Pi_{\theta, d}[(1, 0)] = \{(A_1^0, t_1^0); (A_2^0, t_2^0); \dots; (A_m^0, t_m^0)\} \quad (5.24)$$

et l'application de cet opérateur à un couple quelconque de l'ensemble  $S$  de la relation (5.23) s'écrit simplement

$$\Pi_{\theta,d}[(A_i, t_i)] = \{(A_1^0 \times A_i, t_1^0 + t_i); (A_2^0 \times A_i, t_2^0 + t_i); \dots; (A_m^0 \times A_i, t_m^0 + t_i)\} \quad (5.25)$$

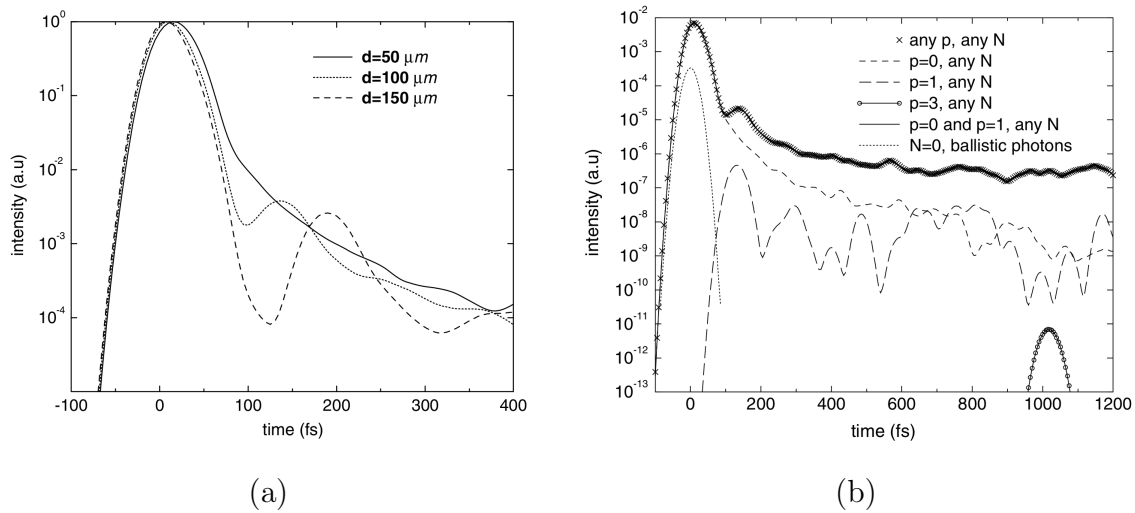
Le calcul de l'opérateur  $\Pi_{\theta,d}$  (relation (5.24)) peut être réalisé à partir de calculs de par TLM, par déconvolution du signal temporel calculé à chaque angle, ou bien de manière plus simple et plus fiable en utilisant la décomposition en séries de Debye (voir la figure 5.5 de la section 5.3. Cette décomposition permet d'isoler chaque modes  $p = 0, 1, \dots$  et de réduire la procédure d'extraction à la recherche d'un seul maximum, parfois deux, à certains angles, le deuxième pic étant souvent associé à une onde de surface d'intensité très faible en comparaison du pic principal.

Les séries de Debye ont été utilisées pour simuler la propagation dans un milieu constitué de gouttes [92]. Pour le cas de bulles en revanche [95], les séries de Debye ne permettent pas de reproduire l'ensemble du diagramme de diffusion (voir la section 4.10.7) et c'est donc une méthode par déconvolution qui est adoptée.

Lorsque le photon est détecté, les pics d'intensité sont comptabilisés en tenant compte du délai supplémentaire correspondant au parcours "centre à centre" entre la source, les diffuseurs et le détecteur. Le signal détecté est restitué en convoluant ce signal brut par l'enveloppe de l'impulsion incidente, modifiée le cas échéant par les effets de dispersion [95] quand le milieu continu est liquide.

Les résultats de simulation pour des grosses particules diffusantes sont très différent de ceux obtenus pour des petites particules. Le signal diffusé vers l'avant en fonction du temps prend la forme d'un pic principal proche du délai de référence  $t = 0$ , suivi d'une décroissance lente ou de pics d'intensité moindre, comme le montre la figure 5.13.a. Contrairement à ce qu'on obtiendrait avec de petites particules pour un angle de collection et une épaisseur optique équivalente, le premier pic ne correspond pas aux seuls photons balistiques. Ce pic est légèrement retardé (de 5 à 15 fs dans l'exemple proposé, pour des diamètres moyens de gouttes  $d_{moy}$  de 50 à 150  $\mu m$ ) et correspond à de la lumière multi-diffractée comme le montre la figure 5.13.b où différentes contributions au signal sont détaillées dans le cas  $d_{moy} = 100 \mu m$  et où l'on constate que ce premier pic est parfaitement reproduit en ne conservant que le mode de Debye  $p = 0$ . Ce résultat donne une interprétation physique à la notion de photon "serpentiles". Ce sont ainsi des photons multi-diffractés à de petits angles, peu retardés. Avec des diffuseurs de grande taille et une prédominance des effets de diffraction dans la fonction de phase, ces photons serpentiles

dépassent en nombre les photons balistiques avec lesquels ils peuvent facilement être confondus (premier pic dominant, très proche du temps de référence). Notons que la décomposition de la figure 5.13.b indique que le second pic, quand il est identifiable correspond à des photons diffractés un grand nombre de fois et réfracté à travers une particule. C'est pourquoi la position de ce second pic contient une information facilement exploitable pour l'inversion de la taille des objets (moyenne et écart type) [92].



**FIGURE 5.13** – Intensité transmise/diffusée en fonction du temps pour un milieu composé de gouttelettes d'eau et d'épaisseur optique égale à 8, éclairée par une impulsion de 50 fs. (a) Signal temporel détecté pour différents des diamètres (50 , 100 et 150  $\mu m$ ). (b) Les différentes contributions au signal dans le cas des gouttes de 100  $\mu m$ . Les deux figures sont extraites de la référence [92]

## 5.5 Imagerie balistique

Quand on cherche à caractériser optiquement un objet plongé dans un milieu fortement diffusif ou à travers un tel milieu, l'information (l'image par exemple) est brouillée par les effets de diffusion multiple, rendant dans certains cas cet objet totalement invisible. Le principe de l'imagerie balistique est d'isoler les photons balistiques et de produire une image à partir de ces seuls photons. Cette sélection des photons balistiques peut-être réalisée de différentes manières. On peut par exemple réduire l'angle de collection, au prix d'une dégradation importante de la résolution spatiale (incompatible avec l'imagerie). On peut également appliquer une modulation

temporelle d'intensité ou de polarisation à la source et à la détection, à condition que le milieu soit statique ou évolue très lentement. On peut enfin réaliser une sélection temporelle des photons balistiques, à l'aide d'un éclairage ultra-bref et d'une détection résolue en temps. C'est cette dernière solution qui doit être retenue pour les milieux en évolution rapide. C'est là, en effet, la seule méthode qui permette une mesure optique instantanée avec une résolution spatiale compatible avec l'imagerie.

### 5.5.1 Principe et travaux pionniers

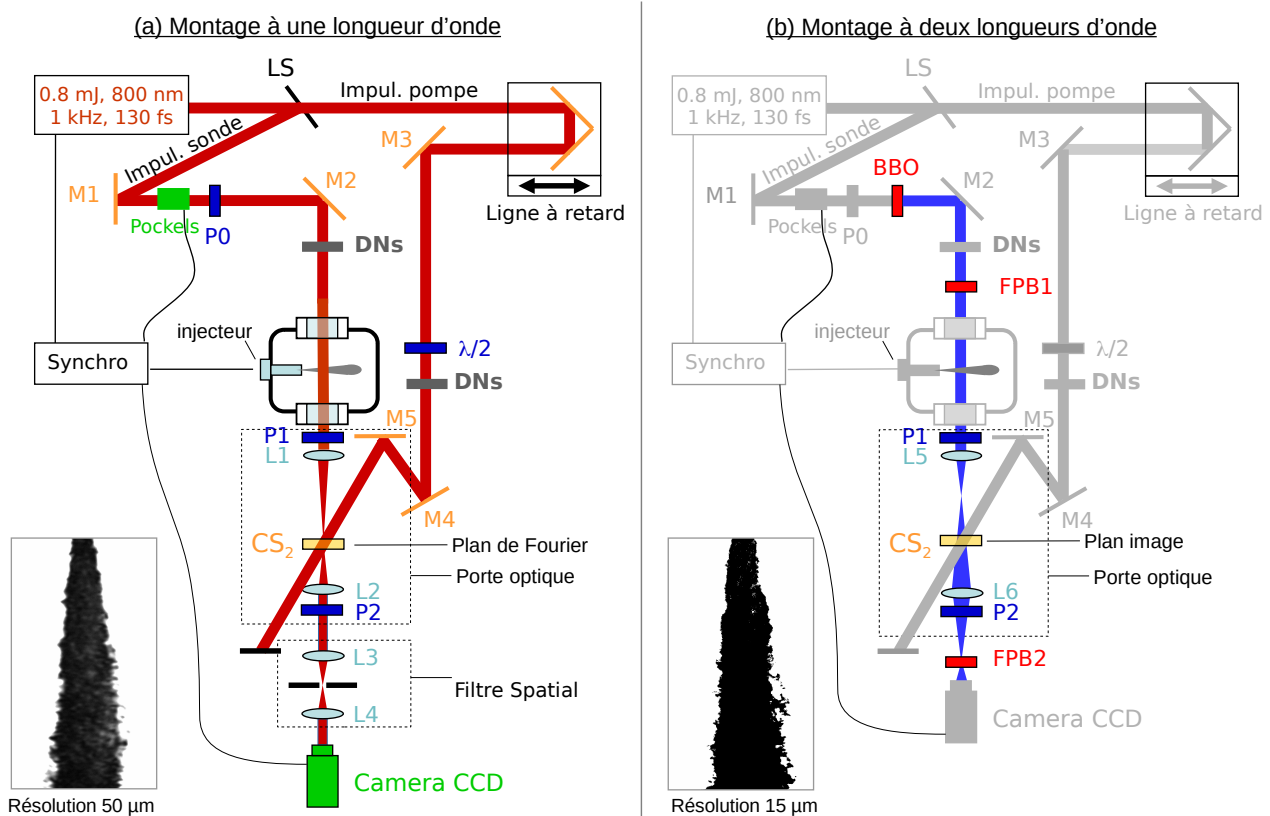
La technique d'imagerie balistique femtoseconde a été proposée et démontrée pour la première fois en 1991 par l'équipe d'Alfano [96], avec des images de mire optiques à travers une épaisseur de  $400 \mu\text{m}$  de tissus organiques. L'expérience repose sur un éclairage ultra-bref de  $8 \text{ ps}$  et l'utilisation d'une porte optique à effet Kerr de  $22 \text{ ps}$ . L'image d'une mire à travers  $3\text{mm}$  de tissu, avec et sans porte optique montre sans ambiguïté l'apport de la technique, potentiellement instantanée, pour l'imagerie dans ou à travers des milieux denses.

Une décennie plus tard, les mécaniciens des fluides se sont tournés vers cette technique pour tenter de caractériser et de comprendre la nature des sprays denses à très haute pression qui résistaient jusque là aux investigations par moyens optiques. Ces développements, comme les travaux présentés dans les sections précédentes étaient notamment motivés par la problématique de l'injection haute pression de carburant. Les premières images de sprays denses obtenues sur le principe de l'imagerie balistique avec une porte à effet Kerr ont été publiées par Megan Paciaroni and Mark Linne en 2004 [97], suivi par d'autres publications par le même groupe [98, 99].

La figure 5.14.a donne une vue schématique du montage réalisé à Rouen (CORIA) sur le même principe. Le dispositif d'imagerie balistique présenté à droite se compose d'un système laser femtoseconde amplifié (oscillateur Ti :Sa et amplificateur régénératif), produisant des impulsions de  $130\text{fs}$  et  $800 \mu\text{J}$  à  $800 \text{ nm}$  et à  $1 \text{ kHz}$ . Une lame séparatrice (LS) sépare l'impulsion en une impulsion sonde qui va éclairer le spray et une impulsion pompe qui va ouvrir la porte optique. Le délai entre les deux impulsions est ajusté à l'aide d'une ligne à retard placée sur le parcours de l'impulsion pompe. L'intensité de cette impulsion est ajustée à l'aide d'une densité neutre (ND) et sa polarisation (linéaire) est tournée de  $45^\circ$  à l'aide d'une lame d'onde ( $\lambda/2$ ) avant d'être dirigée (Miroirs M4 et M5) vers la cellule de  $\text{CS}_2$ . Sur l'autre bras, l'impulsion sonde passe à travers une cellule de Pockels et un polariseur P0 pour réduire sa cadence à

celle de l'injection ( $\sim 1 \text{ Hz}$ ). Son intensité est ajustée grâce à des densités neutres (DNs). L'impulsion éclaire ensuite le spray à travers les hublots d'une chambre de confinement, puis passe à travers la porte optique. Cette porte est constituée de deux polariseurs croisés (P1 et P2), de deux lentilles (L1 et L2), et d'une cellule contenant du Disulfure de Carbone ( $\text{CS}_2$ ). Le principe de la porte optique repose sur la biréfringence induite par effet Kerr dans le  $\text{CS}_2$  par le champ électrique intense de l'impulsion pompe. En l'absence d'impulsion pompe et de biréfringence l'impulsion sonde est bloquée par les deux polariseurs croisés (sélection de la polarisation verticale par le premier polariseur et blocage de cette polarisation par le second). En présence de l'impulsion pompe, la biréfringence induite dans le  $\text{CS}_2$  fait tourner la polarisation de l'impulsion sonde (idéalement de  $90^\circ$  qui passe à travers le second polariseur. La porte optique est ainsi ouverte pour une durée qui dépend essentiellement du temps de relaxation de la biréfringence induite et qui est typiquement de l'ordre de la  $ps$ . L'impulsion pompe est très intense (de l'ordre de  $500 \mu\text{J}$ ). Sa diffusion par le  $\text{CS}_2$  génère un bruit important sur les images qu'il faut réduire au moyen d'un filtrage spatial. Ce filtre positionné dans un plan de Fourier réduit la résolution des images qui pour ce montage est d'environ  $50 \mu\text{m}$ . Notons que la cellule de  $\text{CS}_2$  est également positionnée dans un plan de Fourier dans le montage de la figure 5.14.a. La taille fini des faisceaux limite donc également la résolution des images mais d'une manière moins importante que le filtrage spatial.

La figure 5.15 montre plusieurs images de spray à haute pression générées par un injecteur de type automobile à un seul orifice centré de diamètre  $200\mu\text{m}$ . La figure 5.15.a montre une image en transmission du spray, réalisée avec un éclairage pulsé (NanoLite /  $20 \text{ ns}$  à mi hauteur) classique pour ce type d'investigation. L'image de la figure 5.15.b a été réalisée à l'aide du montage de la figure 5.14.a. La comparaison entre ces deux images profite incontestablement à l'image balistique qui dévoile des détails sur le cœur liquide de l'écoulement, flouté et très peu contrasté sur l'image classique. La figure 5.14.c. montre une image plus complète du spray, reconstituée à partir de 3 images balistiques, enregistrées séparément en translatant la chambre, l'injecteur et donc le spray. Cependant, compte tenu des vitesses mises en jeu ( $300 - 400 \text{ m.s}^{-1}$ , du grandissement, et de la décroissance relativement lente de l'éclairage ( $20 \text{ ns}$  à mi-hauteur mais la moitié de l'énergie après  $30 \text{ ns}$ ), le flou de l'image classique est en partie attribuable au déplacement des structures liquides pendant le temps d'exposition, qui est de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$ . Au contraire, avec un éclairage de  $130 \text{ fs}$  à mi hauteur, l'écoulement est parfaitement figé. On doit ainsi se questionner sur le réel apport de l'imagerie balistique et de la porte optique au



**FIGURE 5.14** – Dispositif d'imagerie balistique à une longueur d'onde (a) et à deux longueurs d'onde (b). Les montages se composent d'un Système laser femtoseconde amplifié ( $130\text{ fs}$ ,  $0.8\text{ mJ}$ ,  $800\text{ nm}$  et  $1\text{ kHz}$ ); une lame séparatrice 30/70 (LS); une ligne à retard; des miroirs (M1 à M5); une cellule de Pockels; des densités neutres (NDs); des polariseurs (P0, P1 et P2); une lame demi-onde ( $\lambda/2$ ); une cellule de Disulfure de Carbone ( $\text{CS}_2$ ); des lentilles (L1 à L6). Pour le montage de droite (a) : un filtre spatial. Pour le montage de gauche (b) : un cristal de Bêta-borate de baryum (BBO), et des filtres passe-bande (FPB1 et FPB2) à  $400\text{ nm}$ .

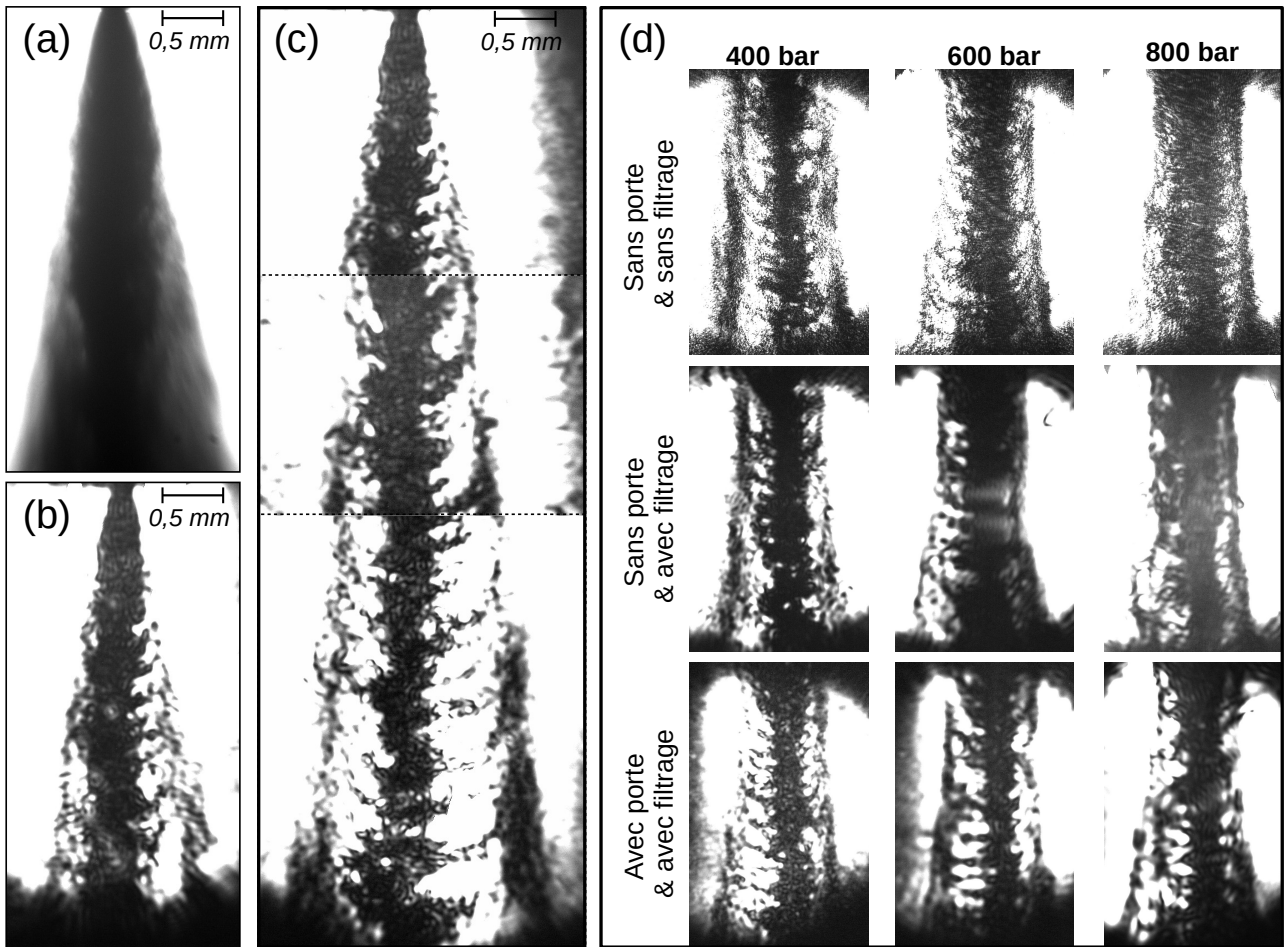
delà de cette comparaison. La figure 5.14.d apporte des éléments de réponse en comparant 3 types d'image. En haut, des images du spray réalisé avec un éclairage femtoseconde mais sans porte optique et sans filtrage spatial. Au milieu, des images réalisées sans porte optique mais avec le filtrage spatial et en bas des images balistiques, réalisées avec porte optique et avec filtrage spatial. Ces images permettent de visualiser l'effet du filtrage spatial sur les images. Elles permettent également de **relativiser l'apport de l'imagerie balistique dans cette configuration**. Notons que ces comparaisons sont très simples à mettre en œuvre, puisqu'il suffit de bloquer l'impulsion pompe et de tourner le polariseur P2 de la figure 5.14.a de  $90^\circ$ . On

est donc en droit de **s'interroger sur l'absence de telles comparaisons dans les publications des années 2000 du groupe Linne**. Dans ces publications comme ici, l'épaisseur physique du spray est de l'ordre de  $1\text{ mm}$ . Ca n'est pas le principe de l'imagerie balistique qui est remis en cause ici mais plutôt l'adéquation entre la résolution temporelle de la porte d'une part et les **épaisseurs physiques et optiques** du milieu. Si on se rapporte à la figure 5.11 où l'épaisseur physique du milieu diffusif est de  $1\text{ mm}$  et l'épaisseur optique de 18.5, il ressort qu'une résolution temporelle de l'ordre de  $100\text{ fs}$  est requise dans ce cas de figure pour exclure totalement les photons multi-diffusé. Ce résultat n'est cependant pas directement transposable aux cas des sprays et de l'imagerie balistique, notamment parce que l'épaisseur optique du spray est plus faible et que le détecteur (lentille + capteur) est très différent du capteur ponctuel de la section 5.4.4.

### 5.5.2 Limitations

Comme nous venons de le souligner, le réel avantage de l'imagerie balistique est discutable, selon la durée de la porte optique et l'épaisseur physique du milieu diffusif. Une autre limitation, liée au premier montage proposé est la résolution spatiale réduite des images. Cette réduction est imposée à la fois par le filtre spatial utilisé pour atténuer le bruit de diffusion de l'impulsion pompe par le  $\text{CS}_2$  mais aussi par la porte elle-même, qui placée dans un plan de Fourier, agit aussi comme un filtre spatial.

Pour évaluer le réel apport de l'imagerie balistique en fonction des paramètres de l'expérience on peut s'appuyer sur des simulations et les modèles détaillés précédemment. Une possibilité consiste à considérer une configuration idéale comme schématisé figure 5.16.a où le spray diffusant est défini de manière statistique dans une région cylindrique de rayon  $R_{\text{spray}}$ , autour d'un jet liquide, défini lui de manière géométrique comme un cylindre de rayon  $R_{\text{jet}}$ . La diffusion dans le milieu diffusif est traitée par la méthode de Monte Carlo "centre à centre" et l'interaction avec le jet est traitée par tracé de rayons, selon les lois de l'optique géométrique. Dans les exemples qui suivent, le jet est supposé absorbant pour faciliter le calcul de contraste et l'analyse des images (on ne décrit pas la réfraction dans le jet). Le détecteur est constitué par une lentille et un capteur matriciel composé de pixels. C'est ainsi qu'on peut simuler la formation de l'image du jet au cœur du milieu diffusif, en faisant varier les différents paramètres : les épaisseurs physiques et optiques du milieu diffusant, le délai au delà duquel les photons ne sont plus détectés, i.e. la résolution de la porte optique de l'imagerie balistique.



**FIGURE 5.15** – Images d’un spray haute pression par imagerie en transmission avec un éclairage pulsé blanc NanoLite  $\sim 20ns$  (a); image balistique du même spray avec éclairage pulsé et porte optique de  $650 fs$ , spray reconstruit à partir de 3 images balistiques, de 3 injections différentes (c); Comparaison des images obtenues avec et sans porte optique, avec et sans filtrage spatial (d) pour 3 pression d’injection différentes.

La figure 5.16 propose un exemple d’images simulées pour un jet liquide de rayon  $R_{jet} = 500 \mu m$ , entouré d’un nuage de gouttelettes de diamètre  $d_g = 5 \mu m$ . Le rayon du nuage est 10 fois supérieur à celui du jet ( $R_{spray} = 5 mm$ ). L’épaisseur optique maximum (au centre) est proche de 8, l’angle de collection  $\theta_c = 10^\circ$  correspondant à une optique d’ouverture de 2.8. L’image de droite (a) n’est pas résolue en temps, celle de gauche (b) correspond à un temps d’intégration de  $100 fs$ . La seconde image est plus sombre mais le jet liquide y est nettement plus contrasté comme nous le verrons avec la prochaine figure. Ces images simulées illustrent une première difficulté : L’image du jet liquide et du centre du spray étant très sombre pour des



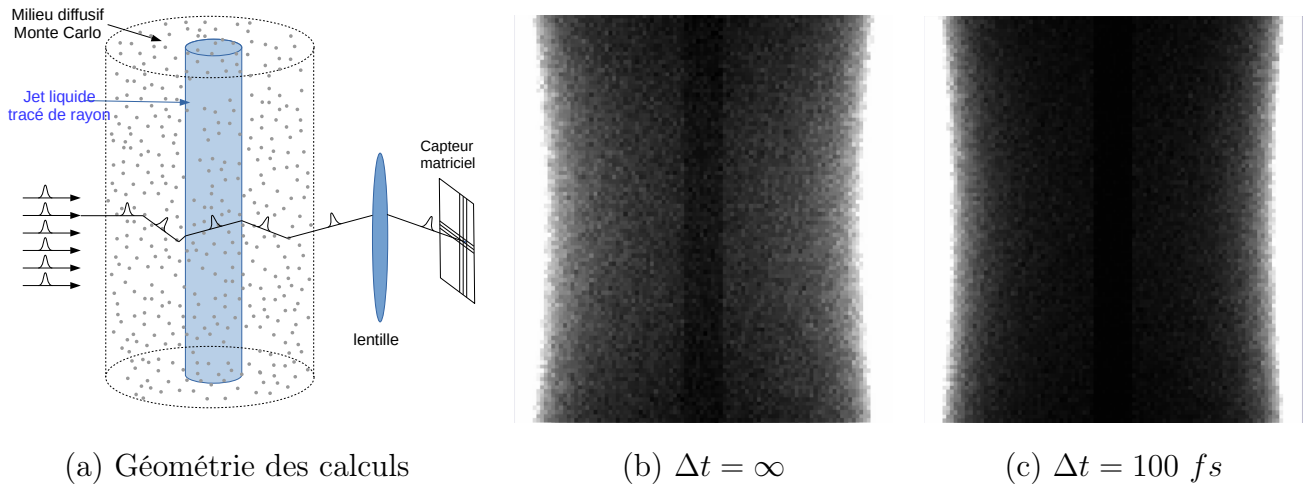
épaisseurs optiques importantes, il est souhaitable, pour ne pas dire nécessaire, de réduire le champ pour ne pas saturer le capteur avec la lumière directe au bord du spray et ainsi profiter de toute la dynamique de la caméra au centre de l'image et bénéficier des effets d'augmentation de contraste de la porte optique. Si on adapte la puissance de l'éclairage pour imager uniquement le centre de l'image, la capacité des images à montrer les détails du jet liquide à travers le spray peut être quantifiée en calculant un paramètre de contraste  $C$  que l'on définit par :

$$C = \frac{I_{spray} - I_{jet}}{I_{spray} + I_{jet}} \quad (5.26)$$

à partir de profils d'intensité des images. La figure 5.17.a montre un exemple de profils (intégration des niveaux de gris selon la verticale) correspondant aux images de la figure 5.16. Pour le calcul du contraste,  $I_{spray}$  est l'intensité dans le spray, au bord du jet et où  $I_{jet}$  est l'intensité au centre du jet. La figure 5.17.b montre l'évolution de ce paramètre de Contraste en fonction de l'épaisseur optique pour les paramètres de la figure 5.16 et pour des temps d'intégration infinis, de  $1 ps$  et de  $100 fs$ . Pour les faibles épaisseurs optiques ( $<4$ ), le contraste sans porte optique est supérieur 0.8. On peut alors considérer qu'il n'est pas vraiment utile d'appliquer une porte optique. En revanche, pour les épaisseurs optiques supérieures, le gain de contraste apporté par les portes optiques sont significatifs. Pour une épaisseur optique proche de 12 par exemple, le paramètre de contraste passe de  $\sim 0.1$  sans porte optique à  $\sim 0.65$  pour  $\delta_t = 1 ps$  et plus de  $\sim 0.75$  pour  $\delta_t = 100 fs$ . Figures 5.17.c et 5.17.d, l'épaisseur physique du spray est réduite à  $1 mm$  et  $0.5 mm$ . Le rayon du jet est réduit à  $100 \mu m$  et  $50 \mu m$  de sorte que les rapports de taille entre spray et jet soient conservés. Avec cette réduction d'épaisseur physique, le principal changement est visible sur le contraste des images balistiques pour une porte optique de  $1 ps$ . En effet, on constate que pour cette durée de porte intermédiaire, le gain en contraste diminue nettement avec l'épaisseur physique du milieu. Figure 5.17.d pour  $R_{spray} = 0.5 mm$  et une épaisseur optique proche de 12 par exemple, le contraste pour  $\delta t = 1 ps$  n'est que de 0.25, contre 0.15 sans porte et 0.65 pour  $\delta t = 100 fs$ . Ces résultats semblent donc confirmer qu'une porte optique dont la durée est de l'ordre de  $1 ps$  n'est pas adaptée à des milieux diffusifs dont l'épaisseur physique n'excède pas  $2 mm$ , ce qui est le cas dans les références [97, 98, 99]. En revanche, pour des sprays d'injecteurs approchant les  $10 mm$ , une porte optique de  $1$  à  $2 ps$  suffit à bénéficier des avantages de l'imagerie balistique comme le montre Schmidt et al. dans la référence [100] sur un spray d'injecteur aéronautique (diamètre d'orifice de  $5.4 mm$ ), même si les épaisseurs optiques, telles qu'elles sont estimées dans ce travail sont faibles ( $1.5$  à  $2$ ).

Des calculs similaires ont été réalisés en faisant varier les autres paramètres du calcul :

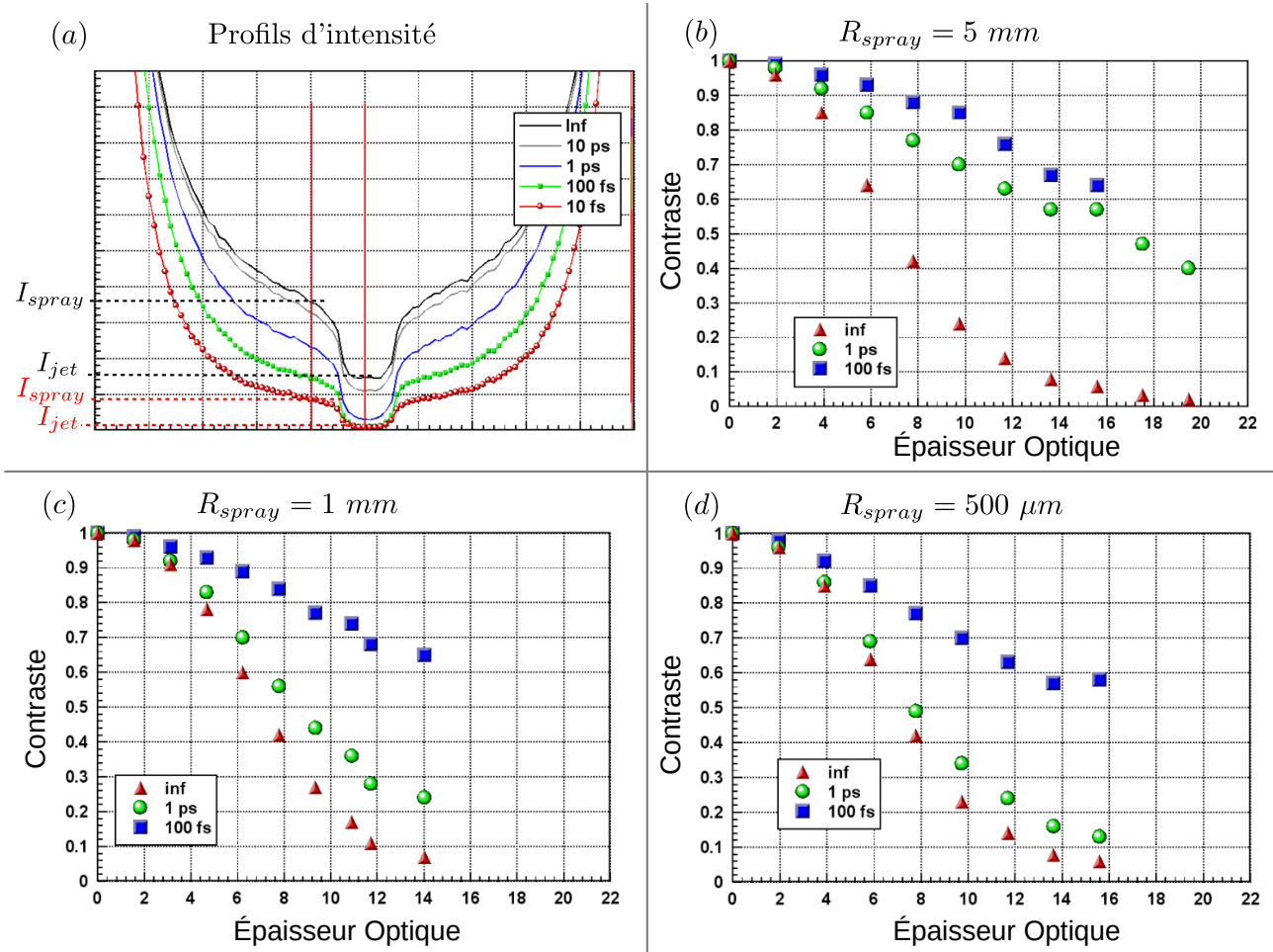
l'angle de collection (5 ou 10°), le diamètre des gouttes (de 1 à 20  $\mu m$ ) ou leur indice optique (1.33 à 1.5). Les variations observées sont visibles mais les conclusions présentées dans cette section et les ordres de grandeurs sur les épaisseurs optiques, physiques et les durées de porte nécessaires restent les mêmes. En particulier, pour les sprays de l'ordre de 1  $mm$  d'épaisseur, une durée de porte optique de l'ordre de 1  $ps$  est trop longue et il faut se rapprocher d'une durée de l'ordre de 100  $fs$  pour bénéficier pleinement des avantages de l'imagerie balistique.



**FIGURE 5.16** – Images simulées d'un jet liquide  $R_{jet} = 500 \mu m$  à travers un spray dense de rayon  $R_{spray} = 5 mm$  contenant des gouttelettes de diamètre  $d_g = 5 \mu m$ ; l'épaisseur optique maximum (au centre) du spray est  $\sim 8$ , l'angle de collection est  $\theta_c = 10^\circ$ . A droite (a), la géométrie simplifiée adoptée pour le calcul avec un jet liquide au centre d'une région cylindrique contenant des gouttelettes, une lentille et un capteur de type CCD. Au centre un exemple d'image non résolue en temps (sans porte optique,  $\Delta t = \infty$ ) et à gauche, une image simulée pour avec un temps d'intégration  $\Delta t = 100 fs$ .

### 5.5.3 Développements

Dans le dispositif de base de l'imagerie balistique présenté figure 5.14.a, la résolution des images est réduite par (i) l'application d'un filtre spatial pour réduire le bruit de diffusion de l'impulsion pompe et (ii) le positionnement de la porte optique dans un plan de Fourier. De nombreuses améliorations ont été apportées à ce dispositif de base au cours de travaux réalisés au CORIA, dans le cadre de la thèse de Saïd Idlahcen [101]. Le dispositif de la figure 5.14.b est un dispositif modifié où les longueurs d'onde des impulsions sonde et pompe sont différentes. Un cristal BBO est ajouté pour générer une seconde harmonique (à 400  $nm$ ), un filtre passe bande



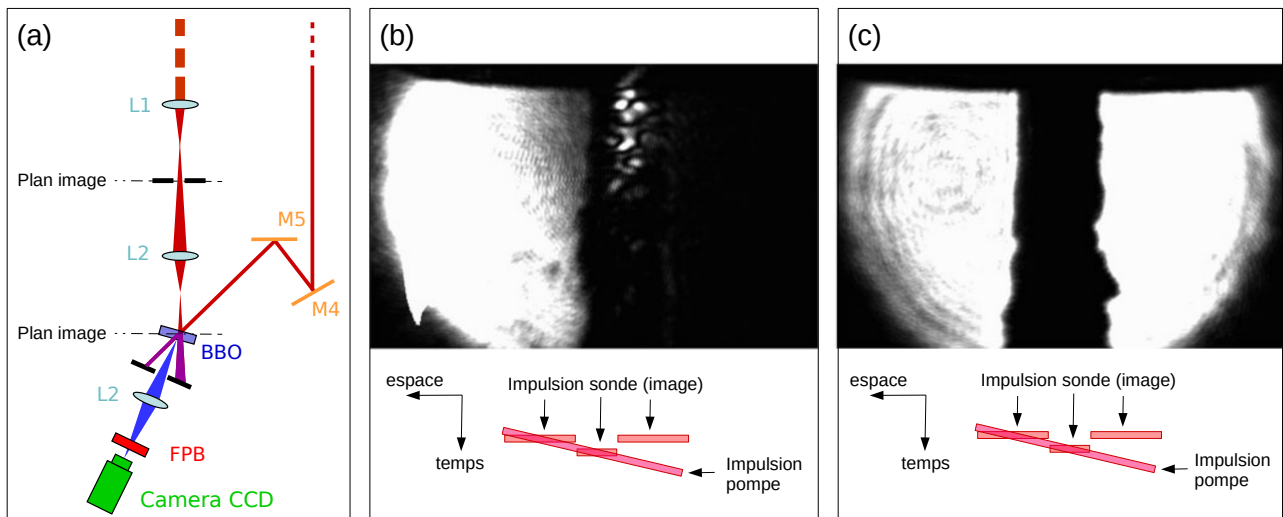
**FIGURE 5.17** – Contraste du jet sur les images en fonction de l'épaisseur optique, pour des temps d'intégration infinis, de  $1 \text{ ps}$  et de  $100 \text{ fs}$  et de l'épaisseur physique du milieu. (a) profils d'intensité des images de spray pour les paramètres de la figure 5.16, (b) évolution du contraste avec l'épaisseur optique du milieu pour les mêmes paramètres, (c) pour un spray de rayon  $R_{spray} = 1 \text{ mm}$  et un rayon de jet  $R_{jet} = 100 \mu\text{m}$  et (d) pour un spray de rayon  $R_{spray} = 0.5 \text{ mm}$  et un rayon de jet  $R_{jet} = 50 \mu\text{m}$ .

(FPB1) permet de supprimer la longueur d'onde fondamentale (à  $800 \text{ nm}$ ). Un second filtre passe bande (FPB2), placé après la porte optique supprime la diffusion de l'impulsion pompe et remplace le filtrage spatial du premier montage. De plus, les lentilles L5 et L6 remplacent les lentilles L1 et L2 du premier montage de sorte que la porte optique est à présent positionner dans un plan image. Les dimensions finies des faisceaux et de la porte optique qui limitaient la résolution dans le premier montage réduisent à présent le champ d'observation. Ce montage a fait l'objet d'une étude détaillée dans la référence [102] où les effets de dispersion entre

les impulsions à 400 *nm* et 800 *nm* sont notamment pris en compte. En effet, l'indice de réfraction du CS<sub>2</sub> n'est pas le même à ces deux longueurs d'onde. En conséquence, les vitesses de propagation des deux impulsions dans la cellule de CS<sub>2</sub> sont différentes et leur superposition n'est pas assurée sur des épaisseurs de cellule importante. Avec une épaisseur de 10 *mm*, comme celle utilisé dans le montage à "une couleur", la durée de la porte optique augmente de manière significative et approche 10 *ps*. Pour retrouver une porte optique de durée comparable à celle du montage de base  $\sim 1$  *ps*, il faut réduire l'épaisseur de la cellule de CS<sub>2</sub> à 1 *mm*. Notons que cette épaisseur réduite à des conséquences sur l'efficacité de la porte optique (rotation de polarisation partielle) d'un facteur 2 qui n'est pas limitante.

La deuxième limitation mise en évidence précédemment est la durée de la porte optique de l'ordre de 1 *ps* qui réduit l'intérêt de l'imagerie balistique à des milieux diffusifs de plusieurs millimètres d'épaisseur physique. Or cette durée est essentiellement imposée par le temps de relaxation de la biréfringence induite dans le CS<sub>2</sub>, le temps nécessaire pour que l'orientation des molécules de CS<sub>2</sub> imposées par le champ électrique intense redevienne aléatoire. En conservant le même principe, il est possible d'induire une biréfringence par effet Kerr dans un cristal solide, avec des temps de relaxation très inférieurs à ceux des cristaux liquides. Mais l'effet induit et donc l'efficacité de la porte serait réduite de plusieurs ordres de grandeur. Une solution alternative est basée sur la génération de seconde harmonique, à l'image des mesures ponctuelles présentées dans la section 5.4.4 mais pour toute l'image. Le montage proposé dans la référence [103] est schématisé figure 5.18 (porte optique uniquement). Une première image du spray est matérialisée à l'aide une lentille. Le champ d'observation est limité dans ce plan image à l'aide d'un fente afin de n'imager que le centre du spray dense. On évite ainsi de saturer l'image avec la lumière transmise sans atténuation au delà des bords du spray, ce qui permet d'augmenter l'intensité de l'impulsion et ainsi s'adapter à la forte épaisseur optique dans cette région. Une deuxième lentille permet de matérialiser une seconde image du spray, dans un cristal BBO où cette image est superposée avec l'impulsion pompe. La seconde harmonique générée par cette superposition se propage dans la direction intermédiaire entre les directions de propagation des deux impulsions à 800 *nm* et en séparée spatialement des impulsions à 800 *nm* ainsi que des secondes harmoniques colinéaires générées par chacune de ces impulsions. Une troisième lentille L3 forme une image résolue en temps à partir de la seule seconde harmonique non-colinéaire. Ce montage, ses particularités et ses performances sont étudiés dans les références [104, 103]. La durée de cette porte optique est de 270 *fs* à mi-hauteur ce qui est suffisamment bref

pour des sprays denses de 1 à 2 mm. Cette résolution temporelle permet également de séparer temporellement la lumière réfractée par le jet liquide et la lumière directement transmise à côté de celui-ci, comme le montre les figures 5.18.b et 5.18.c. L'effet de glissement de la porte temporelle de la droite à la gauche de l'image est lié à l'angle entre les deux impulsions sonde et pompe. Cet effet est détaillé dans la référence [103]. Il est également présent avec une porte à effet Kerr, dans un montage à deux longueurs d'onde ou la porte est positionnée dans un plan image. Ce glissement est également présent dans le montage de base mais il opère dans un plan de Fourier et agit donc sur les fréquences de l'image, ce qui est nettement plus difficile à intuiter. L'imagerie balistique a été appliquée à l'étude des sprays automobiles haute pression [105, 106, 107] et étendue à la mesure de vitesses sur le principe de la corrélation d'information extraites de deux images successives.



**FIGURE 5.18** – Montage d'imagerie balistique avec une porte optique basée sur la génération de seconde harmonique (a), image du jet liquide avec un délai de  $\Delta t = 380 \text{ fs}$  en les impulsions sonde et pompe (b) et avec un délai nul (c).  $\Delta t$  correspond au délai pour le centre du jet, les schémas sous les images illustrent l'effet de glissement de la porte optique de la droite à la gauche des images.

# Chapitre 6

## Holographie numérique en ligne

L'holographie est une technique interférométrique qui permet d'enregistrer une scène puis de la restituer en 3 dimensions. Elle repose sur le principe de la superposition entre une onde objet et une onde de référence. La version optique de la technique est aujourd'hui relayée dans les musées. Son utilisation à des fins de mesures s'est surtout développée avec sa version numérique à partir de la fin des années 90. Elle bénéficie depuis des progrès réalisés en matière de capteurs et de calculs numériques. En holographie numérique, la plaque holographique est remplacée par un capteur matriciel numérique et la restitution, ou la reconstruction est elle aussi réalisée numériquement. Dans ce document nous nous focaliserons exclusivement sur l'holographie numérique en ligne qui repose sur un montage simple et robuste ne mettant en jeu qu'un seul faisceau, qui joue à la fois le rôle de faisceau d'éclairage et de faisceau de référence. Cette configuration particulière présente l'avantage de la simplicité et de la robustesse comparée aux montages à deux faisceaux. En revanche, on peut considérer que le principe fondamental de l'holographie qui repose sur le codage de la phase de la lumière provenant de la scène par son interférence avec le faisceau de référence y est dégradée.

### 6.1 Principe de l'holographie

#### 6.1.1 L'holographie dans sa version optique

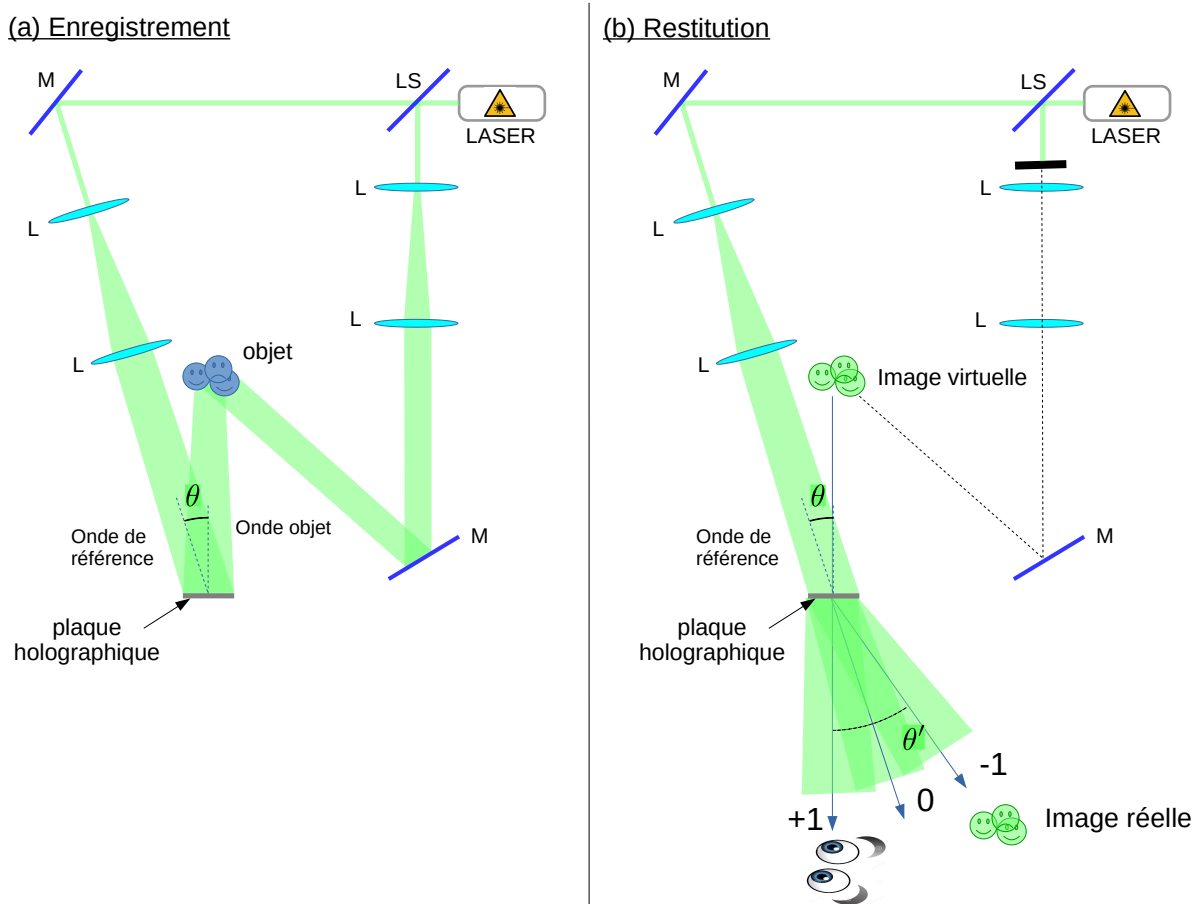
Dans sa version optique comme dans sa version numérique, l'holographie repose sur une phase d'enregistrement et une phase de restitution (ou de reconstruction). Dans la version optique, on enregistre sur une plaque holographique l'intensité résultant de l'interférence entre

une onde provenant de l'objet (de la forme  $U = ae^{i\varphi}$ ) et une onde de référence ( $U_r = a_r e^{i\varphi_r}$ ) (voir figure 6.1). Une fois développée, cette plaque présente une transparence proportionnelle à une constante près à l'intensité à laquelle elle a été exposée, soit

$$\tau = \beta + \alpha I = \alpha |U + U_r|^2 + \beta$$

La phase de restitution consiste à exposer de nouveau la plaque, après développement à l'onde de référence. La plaque se comporte alors comme un réseau de diffraction. L'onde transmise à travers cette plaque se décompose en trois termes, correspondant à trois ordres de diffraction :

$$U_t = U_r \tau = U_r [\beta + \alpha (|U|^2 + |U_r|^2)] + |U_r|^2 \cdot U + U^2 U_r^*$$



**FIGURE 6.1** – Principe de l'holographie. Phase d'enregistrement (a) où l'onde provenant de l'objet est superposée avec une onde de référence et phase de restitution (b) où la plaque holographique après développement est exposée à l'onde de référence.

Le premier terme est proportionnel à l'onde de référence, il correspond à l'ordre 0. Le deuxième terme est proportionnel à l'onde provenant de l'objet, il correspond à l'ordre 1 de la diffraction. Le troisième terme correspond à l'ordre -1. Ces trois ondes se propagent dans des directions différentes. En observant la plaque avec un angle adéquat, un observateur perçoit ainsi une onde proportionnel à l'onde provenant de l'objet (amplitude et phase), restituant ainsi l'effet de profondeur (3D) que procure la vision binoculaire.

Aujourd'hui, l'holographie est numérique. L'interférence entre les deux ondes est directement enregistrée sur un capteur CCD ou CMOS et la restitution est remplacée par un algorithme de reconstruction. La séparation des 3 termes de diffraction se fait dans l'espace de Fourier et on accède à l'amplitude complexe  $A$  provenant de l'objet. A cette amplitude complexe on peut alors appliquer des calculs de propagation pour reconstruire cette amplitude dans tout le volume, plan par plan, à différentes distances du capteur. Notons que la séparation des ordres de diffraction dans l'espace de Fourier se traduit par une perte de résolution des images reconstruites.

L'holographie de Gabor est une holographie à un seul faisceau, celui-ci faisant office à la fois de faisceau d'éclairage et faisceau de référence. Dans sa version numérique (on parlera plutôt d'**holographie numérique en ligne**), l'interférence entre la lumière diffractée par l'objet et le faisceau incident (non perturbé) est enregistrée sur un capteur matriciel faisant face au faisceau. Le montage en ligne est extrêmement simple et beaucoup plus robuste que les montages à deux faisceaux, vis à vis des vibrations notamment.

### 6.1.2 L'holographie numérique en ligne : de l'imagerie sans lentille

L'holographie en ligne peut être appréhender comme précédemment avec un seul faisceau. De manière alternative, elle peut également être vue comme une technique d'imagerie sans lentille. La figure 6.2.a propose un schéma d'imagerie en transmission où la lumière diffractée par l'objet est collectée par une lentille pour former une image au point de cet objet sur un capteur matriciel, placé à la distance adéquate. Figure 6.2.b, dans le montage d'holographie numérique en ligne, le capteur est directement positionné à la place de la lentille qui est supprimée. Pour obtenir une image de l'objet, la transformation (optique) réalisée avec la lentille en imagerie est remplacée par un calcul, une "lentille numérique". On note deux différences importantes entre ces deux montages. D'abord, la transformation optique appliquée en (a) par la lentille opère sur l'amplitude complexe de l'onde alors que seule l'intensité de la figure de diffraction



est enregistrée en (b). Cette perte d'information sur la phase de l'hologramme conduit à la formation d'une image jumelle sur les images reconstruites numériquement. L'autre différence est à l'avantage de l'holographie numérique. En effet, à partir d'un seul hologramme enregistré, on peut réaliser autant de calcul qu'on le souhaite, en modifiant la focale de la "lentille numérique" et par la même la distance de mise au point. On peut ainsi reconstruire plan par plan, tout un volume à partir d'un seul enregistrement.

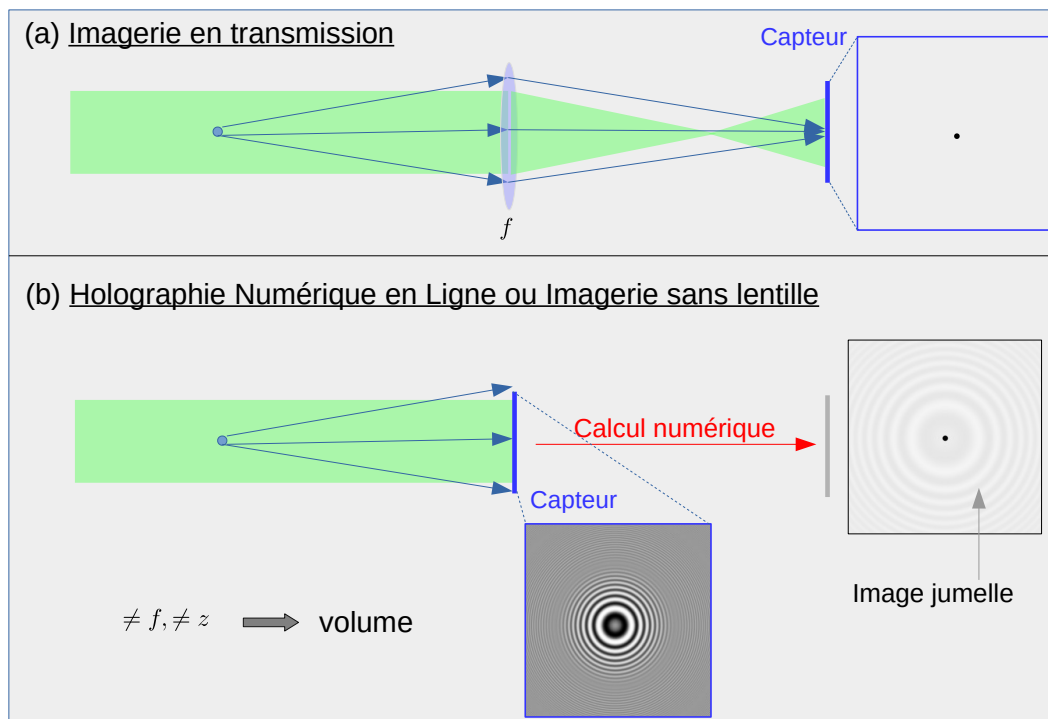


FIGURE 6.2 – Holographie numérique en ligne ou imagerie sans lentille.

## 6.2 Reconstruction des hologrammes

L'élément clé de la technique d'holographie numérique en ligne n'est pas son montage optique, qui se distingue par sa simplicité, mais la méthode de reconstruction qui lui est associée, ses performances et son adaptation au problème posé, à la nature des objets et des mesures souhaitées, à la précision requise ou encore aux contraintes de l'expérience, en matière de distance minimale d'enregistrement notamment.

### 6.2.1 Méthodes de reconstruction par rétropropagation

Les méthodes les plus connues et les plus utilisées pour reconstruire les hologrammes sont basées sur un calcul de propagation inverse de la lumière. On parlera de méthodes par rétropropagation. Ces méthodes reposent sur les théories scalaires de la diffraction exposées au chapitre 3.

On considère une onde  $U_{inc}(x_0, y_0)$  incidente sur un objet situé dans un plan de coordonnée  $z = 0$  représenté par la fonction de transmission (la transmittance)  $\mathcal{T}(x_0, y_0)$ . L'onde transmise à l'arrière de l'objet dans ce même plan s'écrit simplement  $U_0(x_0, y_0) = U_{inc}(x_0, y_0)\mathcal{T}(x_0, y_0)$ .

Dans le plan d'observation, de coordonnée  $z > 0$ , l'amplitude complexe est le produit de convolution de  $U_0$  par le noyau de Rayleigh-Sommerfeld  $G_z(x_0, y_0)$ , soit en introduisant le complémentaire  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{T}$

$$U_z(x, y) = [[U_{inc}(1 - \mathcal{P})] * G_z](x, y)$$

Les principales limites de l'holographie en ligne sont liées au fait que le capteur n'enregistre pas l'amplitude complexe de l'onde mais l'intensité résultante qui s'écrit

$$I_z = \frac{1}{2} \left( [U_{inc}(1 - \mathcal{P})] * G_z \right) \left( [U_{inc}(1 - \mathcal{P})] * G_z \right)^* \quad (6.1)$$

En développant cette expression et en introduisant l'onde incidente non perturbée dans le plan d'observation  $U_{ref}(x, y) = U_{inc} * G_z$  on obtient

$$I_z = \frac{1}{2} \left( U_{ref}U_{ref}^* - U_{ref}^*U_{inc}\mathcal{P} * G_z - U_{ref}U_{inc}^*\mathcal{P}^* * G_z^* + (U_{inc}\mathcal{P} * G_z)(U_{inc}\mathcal{P} * G_z)^* \right) \quad (6.2)$$

La méthode de reconstruction des hologrammes la plus classique repose sur un calcul de rétropropagation de l'intensité. On se place alors dans le cas où **l'onde incidente est une onde plane**,  $U_{inc}(x, y, z) = A_0e^{-ikz}$  indépendante de  $x$  et  $y$ . Dans ces conditions, l'intensité dans le plan d'observation devient

$$I_z^{pw} = I_{inc} \left[ 1 - e^{ikz}(\mathcal{P} * G_z) - e^{-ikz}(\mathcal{P}^* * G_z^*) + \alpha^2 \right] \quad (6.3)$$

où  $I_{inc} = \frac{1}{2}U_{inc}U_{inc}^* = \frac{1}{2}A_0^2$  est l'intensité dans le plan de diffraction, qui est identique à l'intensité dans le plan d'observation et peut donc être considérée comme une image de fond. Dans cette

relation,  $\alpha^2 = |\mathcal{P} * G_z|^2$  est un terme d'ordre 2 qui peut être négligé si  $\mathcal{P} * G_z$  est petit devant 1, ce qui est vérifié pour des valeurs de  $z$  suffisamment grandes. C'est pourquoi on se place généralement dans les conditions de l'approximation de Fresnel (section 3.7) et on écrit

$$I_z^{pw} = I_{inc} \left[ 1 - \mathcal{P} * H_z - \mathcal{P}^* * H_z^* + \alpha^2 \right] \quad (6.4)$$

où le terme  $\alpha^2 = |\mathcal{P} * H_z|^2$  peut être négligé. On normalise alors l'intensité enregistrée par  $I_{inc}$  (mesure de l'image de fond) et on applique l'opérateur de convolution  $.H_z^* = .H_{-z}$

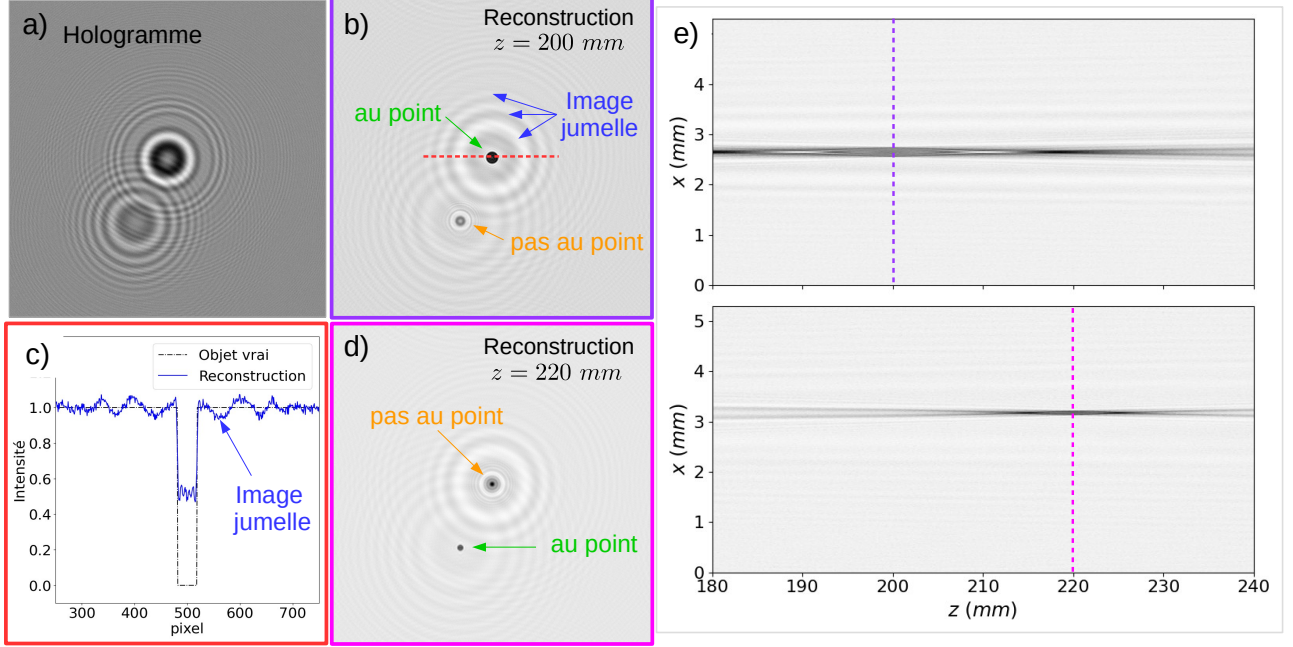
$$\left( \frac{I_z^{pw}}{I_{inc}} * H_{-z} \right) = (1 - \mathcal{P}) - (\mathcal{P}^* * H_{-2z}) \quad (6.5)$$

soit la superposition d'une image de l'objet  $(1 - \mathcal{P}) = \mathcal{T}$  et d'un terme qu'on appelle image jumelle, qui correspond à la diffraction sur une distance  $-2z$  de  $\mathcal{P}^*$ , le conjugué du complémentaire de l'objet. Généralement, pour un objet d'amplitude ( $\mathcal{T}$  réel), l'image jumelle qui est moins contrastée que l'image réelle n'empêche pas l'analyse de cette dernière et l'extraction d'information quantitative sur l'objet.

La figure 6.3 montre un exemple de reconstruction par rétropropagation de l'hologramme de 2 gouttelettes. L'hologramme (figure 6.3.a) est un hologramme synthétique calculé par LMT auquel on a ajouté un bruit blanc Gaussien. Le faisceau se propage dans la direction  $z$ . Les gouttes sont transparentes mais la distance d'enregistrement de l'hologramme est suffisamment grande ( $z = 200 \mu m$  et  $z = 220 \mu m$ ) et l'indice des gouttes élevé ( $n = 1.333$ ). Par conséquent, la lumière réfractée dans les gouttes diverge très rapidement et ne participe pas à la figure de diffraction, qui est identique à celle d'une goutte totalement absorbante. Dans les images reconstruites (figure 6.3.a et 6.3.b) les gouttes apparaissent donc logiquement sous forme de disques sombres. On remarque la présence des images jumelles dans ces images reconstruites. La figure 6.3.c montre un profil d'intensité dans l'image au point de la goutte de l'encadré b. L'image jumelle modifie le contraste de l'image de la goutte, mais il est clair que l'application de seuils d'intensité permet de reconstruire une image nette de la goutte et d'en extraire des informations comme son diamètre et sa position. Pour un objet décrit par une transmittance complexe en revanche (avec un indice plus faible et/ou avec un capteur beaucoup plus proche) la présence de l'image jumelle peut être beaucoup plus problématique.

Les images reconstruites (figure 6.3.a et 6.3.b) correspondent aux distances de reconstruction pour lesquelles la mise au point sur les gouttes est la meilleure. Différents critères peuvent être

appliqués pour déterminer ces images et donc localiser les objets selon l'axe  $z$ . On remarque, figure 6.3.e, la variation lente des intensités reconstruites selon l'axe optique  $z$ , qui limite la précision de la localisation des objets selon cet axe.



**FIGURE 6.3** – Reconstruction par rétropropagation. Figure extraite de la référence [108]. L'hologramme de deux gouttes simulé par Théorie de Mie à une distance d'environ 200 mm (a) ; Intensité rétropropagée aux distances  $z = 200$  mm (b) et  $z = 220$  mm (d) correspondant à la meilleure mise au point de chacune des gouttes ; profil d'intensité dans l'image reconstruite montrant la superposition entre l'image de la goutte et l'image jumelle (c) ; profil  $(x, z)$  illustrant la problématique de la localisation en  $z$  des objets (e)

**Remarque.** Il faut également noter que la reconstruction par rétropropagation repose sur un éclairage particulier. Les relations (6.3) à (6.5) ont été établies pour une onde incidente plane. Des relations similaires peuvent-être établies pour une onde incidente sans cette hypothèse (avec  $U_{inc}(x_0, y_0)$  et  $U_{ref}(x, y)$ ) et en introduisant le complémentaire de  $U_0$ ,  $\tilde{U}_0 = U_{inc} - U_0$ . L'intensité dans le plan du capteur devient alors

$$I_z = \frac{1}{2} \left[ U_{ref} U_{ref}^* - e^{-ikz} U_{ref}^* \left( \tilde{U}_0 * H_z \right) - e^{ikz} U_{ref} \left( \tilde{U}_0^* H_z \right)^* + \alpha'^2 \right] \quad (6.6)$$

où  $\alpha'^2 = |\tilde{U}_0 * H_z|^2$  est négligé.

Il faut donc, en principe, normaliser l'intensité  $I_z$  par l'amplitude complexe  $U_{ref}$  de l'onde incidente non perturbée dans le plan du capteur puis appliquer l'opérateur de propagation

inverse  $\cdot e^{ikz} H_{-z}$  pour reconstruire l'onde transmise  $U_0$  dans le plan de l'objet, image à laquelle se superpose toujours une image jumelle dont la forme a un peu changée :

$$\left( \frac{2I_z}{U_{ref}^*} \right) * e^{ikz} H_{-z} = U_0 - e^{2ikz} \left[ \frac{U_{ref}}{U_{ref}^*} (\tilde{U}_0^* H_{-z}) \right] * H_{-z} \quad (6.7)$$

On comprend bien que la quantité  $U_{ref}^*$  ne sera accessible que pour certaines conditions d'éclairage connues ou pouvant être déduite directement de la mesure de l'intensité, pour  $U_{ref}^* = U_{ref} = \sqrt{I_{ref}}$  par exemple. C'est le cas quand on considère une onde incidente sphérique.

## 6.2.2 Quelques mots sur les méthodes itératives

La présence de l'image jumelle est liée à la perte de l'information de phase dans le montage en ligne. Pour y remédier, on peut faire appel à des méthodes de reconstruction itératives. Ces méthodes permettent de reconstruire la phase de l'hologramme (on parle de "phase retrieval" en anglais ou de "récupération de phase" en français) en réalisant une succession de propagation et de rétropropagation entre le plan de diffraction et le plan d'observation et en imposant des contraintes pour assurer l'unicité de la solution et la convergence des calculs. Ces méthodes ont été proposées dans les années 70 [109], étendues dans les années 80 [110] et popularisées dans les années 2000 par Tatiana Latychevskaia [111]. Dans le cas simple d'un objet unique, situé dans un plan donné, on peut par exemple commencer par considérer que l'amplitude complexe de l'hologramme à un module égal à la racine carrée de l'amplitude et que sa phase est constante et nulle. On rétropropage alors cette amplitude complexe dans le plan de diffraction et on applique une contrainte à cette amplitude "objet" (que son module est partout inférieur ou égale à 1 par exemple). On repropage alors cette amplitude dans le plan d'observation et on réévalue le module de l'onde diffractée de sorte à conserver un module égal à la racine carrée de l'enregistrement. Après de nombreux aller-retour et si les contraintes sont bien choisies, le résultat converge et on obtient une description en module et en phase de l'onde dans le plan d'observation et dans le plan de diffraction dont on extrait les caractéristiques de l'objet.

## 6.2.3 Les limites de l'approche par rétropropagation

Outre les difficultés liées à la perte d'information sur la phase (pour l'holographie en ligne), les méthodes basées sur la rétropropagation sont également limitées du fait que l'intensité est

enregistrée sur un capteur de taille fini, composé de pixels de taille finie dont seule une partie de la surface est sensible. Formellement, ça n'est pas l'intensité  $I_z$  qui est enregistrée mais une quantité proportionnelle à

$$I_{cap}(x, y) = \kappa \left[ I_z(x, y) * \Pi_{\alpha\Delta_x, \alpha\Delta_y} \right] \times \text{III}_{\Delta_x, \Delta_y} \times \Pi_{N\Delta_x, M\Delta_y} \quad (6.8)$$

où le premier facteur traduit l'intégration sur le pixel de dimensions  $\Delta_x, \Delta_y$  et de taux de remplissage  $\alpha$ , le deuxième traduit l'échantillonnage par les pixels et le troisième la taille finie du capteur ( $N \times M$  pixels).

Ces aspects de discrétisation et d'intégration n'étant pas pris en compte par les méthodes de reconstruction par rétropropagation, ils se traduisent pas des erreurs et une précision limitée. Par exemple, un objet diffractant situé au bord du champ d'observation (au bord du capteur) est déformé dans l'image reconstruite. On doit également remarquer que la reconstruction d'images dans différents plans par ces méthodes ne constitue que la première étape du traitement des hologrammes, i.e. de la reconstruction des objets eux-mêmes. La reconstruction se décompose ainsi selon les étapes suivantes

- Reconstruction plan par plan du volume (calcul de rétropropagation)
- Détection d'un objet
- Localisation de cet objet dans le plan de meilleur mise au point (localisation selon l'axe optique)
- Caractérisation de l'objet par l'analyse de cette image au point reconstruite.

Une alternative à ces méthodes de reconstruction qui permet de repousser ces limites consiste à adopter une approche "Problème Inverse".

#### 6.2.4 L'approche "problème inverse"

L'approche "problème inverse" pour la reconstruction des hologrammes est moins courante mais connaît un succès croissant. Cette approche permet de réaliser des mesures d'une grande précision en prenant en compte tous les aspects de la formation de l'hologramme. L'approche consiste à modéliser la formation de l'hologramme en modélisant l'objet diffusant, la diffraction de la lumière par cet objet et l'enregistrement de cette hologramme sur le capteur avec ses dimensions finies, la taille de ces pixels, leur surface sensible. Pour chaque objet, les paramètres de l'hologramme modèle sont ajustés pour minimiser l'écart avec l'hologramme expérimental.

Ces paramètres optimum sont alors considérés comme une mesure des propriétés de l'objet.

L'approche problème inverse se distingue des approches par rétropropagation par leur grande précision qui tient à (i) la prise en compte des caractéristiques du capteur, (ii) l'exploitation directe, dans le plan du capteur des informations sur l'objet qui sont étalées sur un grand nombre de pixels, et sur (iii) l'injection d'a priori sur les objets, à travers le modèle de diffraction utilisés pour les modèles paramétriques (une forme sphérique pour de petites gouttes par exemple) ou à travers des contraintes de régulation plus globales pour les modèles non paramétriques. Enfin, (iv) les difficultés liées à la présence de l'image jumelle sont supprimés.

On peut raisonnablement penser qu'à partir de données expérimentales identiques, en injectant les mêmes a priori sur les objets et en intégrant les effets de la discrétisation et de l'ouverture limitée du capteur, on puisse atteindre des niveaux de performances équivalent avec une approche inverse ou une méthode de reconstruction par rétropropagation. Il s'agit là d'un débat sur lequel nous ne nous étendrons pas mais on notera qu'au minimum, l'approche inverse avec modèle paramétrique permet d'intégrer ces a priori de manière simple et naturelle dans le modèle de diffraction, quand leur introduction dans les différentes étape d'une reconstruction par rétropropagation et en présence des images jumelles est beaucoup plus délicate et fastidieuse.

Comme nous l'avons évoqué un peu plus haut, on distingue deux types d'approche "problème inverse". Celles basées sur un modèle paramétrique de diffraction. Ce sont en fait les objets qui sont modélisés à partir d'un petit nombre de paramètre (4 pour une sphère opaque, 5 pour une sphère transparente...). Quand les objets présentent des formes variées et/ou plus complexes, on préférera une reconstruction basée sur un modèle dit "non paramétrique". Le volume de reconstruction est alors discrétiser en voxel auxquels on cherche à associer une transmittance complexe. Le terme "non paramétrique" n'est pas très approprié car ce grand nombre de transmittances constituent en fait les nombreux paramètres de l'inversion. Ce qui distingue également ces méthodes des inversions à l'aide de modèle à faible nombre de paramètres, c'est la nécessité d'introduire des contraintes de régulation. Les a priori ne sont alors pas imposés au travers de la modélisation de l'objet, mais le sont sur les images ou les volumes reconstruits. On applique, par exemple, une contrainte de parcimonie qui favorise les solutions correspondant à des objets de petite taille, dispersés dans le volume et/ou des contraintes sur l'amplitude

maximum de la fonction de transmission (inférieur ou égale à 1 par exemple quand les objets sont opaques). En pratique et pour les deux approches, le gain en termes de précisions est important par rapport aux méthodes de reconstruction classiques ou les méthodes itératives, en revanche les temps de calcul sont très important, de l'ordre d'un facteur 10 à 100 par rapport aux méthodes les plus classiques. Dans ce document, les méthodes d'inversion à modèle non-paramétrique (ou par régulation) ne seront pas détaillées et nous nous focaliserons sur les approches paramétriques (à petit nombre de paramètres) qui sont particulièrement efficace et adapté à de nombreux problèmes de mécanique des fluides.

### 6.2.5 Gouttelettes sphériques en champ lointain

Un modèle de diffraction simple peut-être appliqué pour reconstruire des gouttelettes, à partir d'hologrammes enregistrés en champ lointain, par une approche problème inverse. Cette méthode a été appliquée dans une série d'études visant à comprendre l'influence de la turbulence sur l'évaporation de telles gouttelettes [112, 60, 61, 62]. La méthode a été proposée et développée initialement par l'équipe de Corinne Fournier du Laboratoire Hubert Curien de l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne en collaboration avec le LMFA.

Pour des gouttelettes sphériques à grande distance du capteur un modèle très simple de diffraction peut être utilisé. D'abord, à grande distance et pour un indice optique des gouttelettes suffisamment grand, la lumière réfractée dans la goutte diverge très rapidement. Ainsi, au-delà d'une certaine distance, la contribution de la lumière réfractée par la goutte devient négligeable et les figures de diffraction d'une goutte transparente et d'une goutte totalement absorbante sont identiques, ce qui peut être facilement vérifié à l'aide de la TLM, en tenant compte de tous les paramètres de l'expérience (taille et indice réel des gouttes, distance et taille du capteur). D'autre part, à grande distance, la forme 3D de la goutte n'a pas d'incidence sur la figure de diffraction et celle-ci peut être décrite par une transmittance 2D sans perte de précision.

Ainsi, une gouttelette sphérique d'indice 1.33, de diamètre inférieur à  $100 \mu m$  positionnée à au moins  $0.5 m$  du capteur (Nombre de Fresnel  $Nf < 10^{-2}$ , pour  $\lambda \sim 0.5 \mu m$ ) peut être modélisée par un simple disque opaque et sa figure de diffraction décrite dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer (relation (3.43)).



## Diffraction d'un disque opaque en champ lointain

Le principe de Babinet permet d'exprimer la diffraction par un disque opaque à partir de la diffraction de son complémentaire, l'ouverture circulaire de même rayon. La transmittance  $\mathcal{T}$  du disque opaque de rayon  $a$  s'écrit ainsi

$$\mathcal{T} = 1 - \mathcal{P}$$

avec

$$\mathcal{P} = \begin{cases} 1, & \text{si } r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leq a \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

Si  $U_{inc}$  est l'onde incidente, l'onde transmise dans le plan de diffraction par l'ouverture  $\mathcal{P}$  est

$$\tilde{U}_0 = U_{inc}\mathcal{P}(x_0, y_0)$$

et l'amplitude complexe de l'onde diffractée dans le plan d'observation s'écrit dans l'approximation de Fraunhofer (relation (3.43))

$$\tilde{U}_z(x, y) = U_{inc}e^{-ikz}H_z(x, y)\hat{\mathcal{P}}\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) \quad (6.9)$$

La symétrie circulaire de  $\mathcal{P}$  permet d'écrire sa transformée de Fourier sous la forme d'une transformée de Hankel (relation A.6 de l'annexe A.2).  $\mathcal{P}$  étant nulle pour  $r > a$ , on écrit

$$\hat{\mathcal{P}}(r) = 2\pi \int_0^a J_0(2\pi r_0 r) r_0 dr_0 \quad (6.10)$$

qui en appliquant la relation (A.7) devient

$$\hat{\mathcal{P}}(r) = \frac{a}{r} J_1(2\pi ar) \quad (6.11)$$

La relation (6.9) devient alors

$$\tilde{U}_z(x, y) = U_{inc} \frac{ia}{r} e^{-ikz} e^{-\frac{ikr^2}{2z}} J_1\left(\frac{kar}{z}\right) \quad (6.12)$$

En vertu du principe de Babinet (section 3.6), l'amplitude diffractée par le disque opaque de rayon  $a$  dans le plan de coordonnée  $z$  s'écrit

$$U_z(x, y) = U_{inc} e^{-ikz} \left[ 1 - \frac{ia}{r} e^{-\frac{ikr^2}{2z}} J_1\left(\frac{kar}{z}\right) \right] \quad (6.13)$$

avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  pour un disque placé au centre du repère ou  $r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2}$  quand la particule est positionnée en  $(x_d, y_d)$ .

## Intégration sur le pixel

L'intensité mesurée par le capteur n'est pas l'intensité  $I_z = \frac{1}{2}U_z U_z^*$  que l'on peut déduire directement de la relation (6.13) mais l'intensité décrite par la relation (6.8) qui prend notamment en compte l'intégration du signal sur la surface sensible des pixels. Si on se concentre sur cette intégration et que l'on omet l'échantillonnage et les dimensions finies du capteur dont, la prise en compte est triviale, l'intensité mesurée est

$$I_z^{cap} = I_z * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}} \quad (6.14)$$

Si on se place dans le cadre de l'approximation de Fresnel et que l'on adopte les mêmes notations que précédemment, il vient

$$I_z^{cap} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \tilde{U}_0 * H_z - (\tilde{U}_0 * H_z)^* + \alpha^2 \right] * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}} \quad (6.15)$$

où  $\alpha^2 = |\tilde{U}_0 * H_z|^2$  peut être négligé. Si on considère à présent l'amplitude complexe dans le plan de diffraction, intégrée sur la surface sensible du pixel, soit  $U_0^{pix} = U_0(x_0, y_0) * \Pi_{\frac{x_0}{\alpha\Delta_x}, \frac{y_0}{\beta\Delta_y}}$  la propagation de cette amplitude dans le plan d'observation  $U_z^{pix}$  et l'intensité correspondante  $I_z^{pix}$ , il vient

$$I_z^{pix} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \tilde{U}_0^{pix} * H_z - (\tilde{U}_0^{pix} * H_z)^* + \alpha^{pix^2} \right] \quad (6.16)$$

où  $\alpha^{pix^2} = |\tilde{U}_0 * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}} * H_z|^2$ . Si on néglige la différence  $\alpha^2 - \alpha^{pix^2}$  il vient que

$$I_z^{cap} = I_z^{pix} \quad (6.17)$$

Autrement dit, dans le cadre de l'approximation de Fresnel l'intégration sur le pixel s'applique de manière équivalente dans le plan de diffraction ou dans le plan d'observation.

Si on se place de nouveau dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer, on écrit

$$\tilde{U}_z^{pix} = U_{inc} e^{-ikz} H_z(x, y) TF[\mathcal{P} * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}}] \left( \frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right) \quad (6.18)$$

$$= U_{inc} e^{-ikz} H_z(x, y) \left[ TF[\mathcal{P}] \cdot TF[\Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}}] \right] \left( \frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right) \quad (6.19)$$

qui conduit en explicitant la Transformée de Fourier de la fonction porte à

$$U_z^{pix} = U_{inc} e^{-ikz} \left[ 1 - \frac{ia}{r} e^{-\frac{ikr^2}{2z}} \operatorname{sinc} \left( \frac{\alpha\Delta_x(x - x_d)}{\lambda z} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{\beta\Delta_y(y - y_d)}{\lambda z} \right) J_1 \left( \frac{kar}{z} \right) \right] \quad (6.20)$$

pour un disque positionné en  $(x_d, y_d)$ , avec  $r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2}$ . On en déduit alors aisément l'intensité intégrée sur la surface sensible du capteur :

$$I_z^{cap} \approx I_z^{pix} = \frac{1}{2} U_z^{pix} U_z^{pix*} \quad (6.21)$$

## Inversion

Ce modèle de diffraction par un disque opaque a été utilisé pour reconstruire des gouttelettes, à partir d'hologrammes enregistrées en champ lointain, à l'aide d'une approche problème inverse.

Le principe de l'inversion est la minimisation de l'écart entre l'intensité mesurée  $I^{mes}(x, y)$  et l'hologramme modèle  $I_{\Theta_d}^{mod}(x, y)$  défini par 4 paramètres  $\Theta_d = \{x_d, y_d, z_g, d_g\}$ . Cette minimisation repose sur une normalisation de l'hologramme expérimental et du modèle de sorte que la quantité à minimiser sur l'ensemble des pixels  $(x_i, y_j)$  est

$$\sum_{i,j} I^{mes}(x_i, y_j) - \alpha I_{\Theta_d}^{mod}(x_i, y_j) \quad (6.22)$$

où l'intensité mesurée est l'intensité mesurée sur le capteur, normalisée, et corrigée de l'image de fond (intensité non perturbée),  $I_{fond}(x_i, y_j)$  selon

$$I^{mes}(x_i, y_j) = \frac{I^{cap}(x_i, y_j) - I_{fond}(x_i, y_j)}{\sqrt{I_{fond}(x_i, y_j)}} \quad (6.23)$$

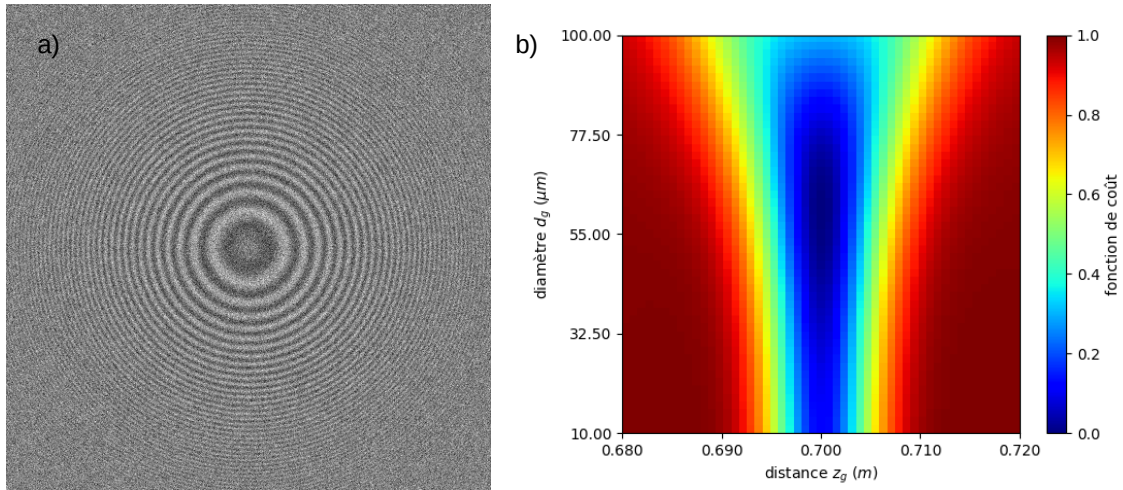
et où le coefficient  $\alpha$ , qui pourrait être considéré comme un cinquième paramètre du modèle est avantageusement déduit de la manière suivante [113] :

$$\alpha = \frac{\sum_{i,j} I_{\Theta_d}^{mod}(x_i, y_j) \times I^{mes}(x_i, y_j)}{\mathcal{C}} \quad (6.24)$$

$$\mathcal{C} = \frac{\sum_{i,j} I_{\Theta_d}^{mod}(x_i, y_j)^2 - \left( \sum_{i,j} I_{\Theta_d}^{mod}(x_i, y_j) \right)^2}{N \times M} \quad (6.25)$$

La minimisation de cette quantité est réalisée numériquement à l'aide d'un algorithme de "descente en gradient", la fonction `scipy.optimize import least_squares` de la library `scipy` (`scipy.optimize.least_squares`) en l'occurrence. Les valeurs des paramètres qui minimisent cette fonction de coût sont alors considérées comme une mesure des propriétés de l'objet. Un exemple de fonction de coût est donné figure 6.4 dans le cas d'une goutte sphérique unique. La fonction de coût est calculée à partir d'une image synthétique (figure 6.4.a, elle-même calculée à l'aide de la TLM avec ajout d'un bruit blanc Gaussien, et du modèle de disque opaque dans l'approximation de Fraunhofer.

Cette fonction qui s'étend dans l'espace à 4 paramètres  $\{x_d, y_d, z_g, d_g\}$  est représentée sous la forme d'une projection (figure 6.4.b) dans l'espace à 2 paramètres  $\{z_g, d_g\}$ . Elle atteint un minimum à proximité des paramètres utilisés pour le calcul de l'hologramme synthétique ( $z_g = 0.7 \text{ m}$ ,  $d_g = 60 \text{ }\mu\text{m}$ ).



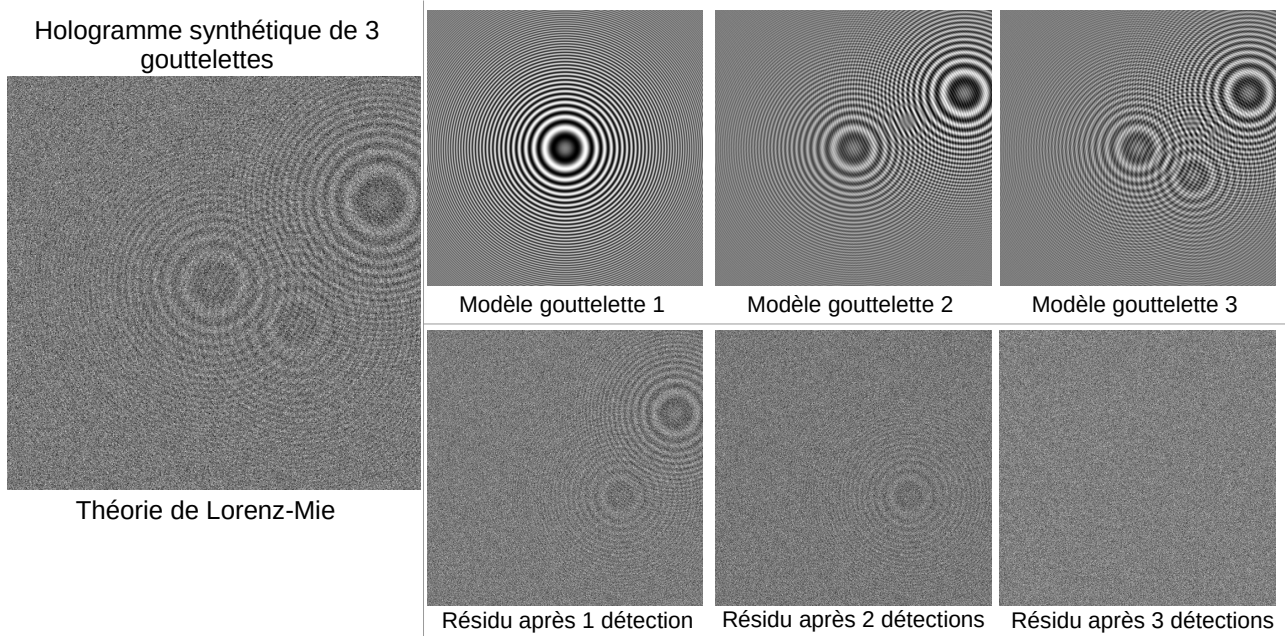
**FIGURE 6.4** – Exemple de fonction de coût pour une gouttelette d’eau de  $60 \mu m$  de diamètre, centrée sur le capteur et située à  $0.7 m$  de celui-ci (hologramme synthétique calculé par TLM à droite), comparée au modèle de diffraction par un disque opaque dans l’approximation de Fraunhofer. La fonction de coût est projetée dans l’espace à 2 paramètres  $\{z_g, d_g\}$  (à gauche).

### Détection préalable

Les fonctions de coût présentent généralement de nombreux maximum locaux. C’est le cas notamment quand plusieurs objets sont présents ou avec d’autres modèles de diffraction et d’objet, quand d’autres paramètres comme l’indice de réfraction ont une influence et sont considérés. Pour que l’algorithme de descente en gradient parvienne à converger vers ce minimum absolu de la fonction, il doit être initié par des conditions qui le place dans la bassin principale, à proximité de la solution, i.e. du minimum absolu. Ces conditions initiales sont générées à partir d’un autre algorithme, basé sur un calcul de convolution entre l’hologramme expérimental et le modèle, pour un ensemble de valeurs discrètes des paramètres autres que les coordonnées  $(x, y)$ . Dans le cas présent, on fait varier  $d_g$  et  $z_g$  sur une grille régulière, couvrant l’ensemble de l’espace de recherche. On extrait le maximum du produit de convolution pour chaque couple  $d_k, z_k$ . Les valeurs  $d_l, z_m$  correspondant au plus grand de ces maxima, ainsi que les coordonnées  $x, y$  de ce maximum sont utilisés comme première estimation par l’algorithme de descente en gradient. Cette étape de l’algorithme est assez coûteuse en temps de calcul mais il existe différentes manière de le réduire : en réalisant l’opération sur une image dégradée en résolution [62], en pré-calculant une partie des données quand de nombreux objets et/ou hologrammes sont inversés ou, dans la cas du suivi d’un objet au cours du temps, en la remplaçant par une estimation de la position à partir des positions aux instants précédents.

## Détection de plusieurs objets

Quand les paramètres définissant l'objet sont estimés de manière fine par l'algorithme de descente en gradient, sa figure de diffraction peut-être soustraite de l'hologramme et faciliter la détection d'autres objets, moins contrastés. C'est l'un des atouts majeurs de l'approche problème inverse. Dans l'exemple de la figure 6.5, un hologramme de 3 gouttelettes d'eau est simulé à l'aide de la TLM et l'ajout d'un bruit blanc Gaussien dont l'amplitude vaut 1% de l'intensité du faisceau incident, soit dans le cas présent environ 20% de l'amplitude de la figure de diffraction. L'inversion est réalisée de manière séquentielle. Après chaque détection, la figure de diffraction modèle résultant de la minimisation est soustraite à l'hologramme pour permettre la détection de la gouttelette suivante. La figure montre les hologrammes modèles ainsi que les résidus à chaque étape de la détection. Les particules ont des diamètres de 30, 40 et 20  $\mu m$  (dans l'ordre de leur détection), elles sont situées à 700, 750 et 650  $mm$  du capteur composé de 1 million de pixels de 20  $\mu m$ . Les écarts entre les grandeurs réelles et les estimations sont de 0.86, 0.56 et 0.57  $\mu m$  sur les diamètres, de 130, 102 et 88  $\mu m$  sur les distances au capteur et inférieures à  $2/100^e$  de pixel sur les positions latérale  $x$  et  $y$ , une précision hors de portée avec une méthode de restitution classique compte tenu de la taille des pixels (20  $\mu m$ ).



**FIGURE 6.5** – Détection séquentielle de 3 gouttelettes à partir d'un hologramme synthétique calculé par TLM (à gauche). Les hologrammes modèles correspondant à la meilleur inversion sont représentés en haut et les résidus après chaque détection en bas.

## Masques

Un autre atout des méthodes inverses est la possibilité de s'affranchir de certaines sources de bruit en appliquant un masque à la fois aux données et au modèle. Un masque fixe permet par exemple de couvrir une région de l'hologramme perturbée par la présence d'un support, par une réflexion ou des pixels défaillants, et ainsi exclure cette zone de l'optimisation. La position du masque peut également varier avec celle de l'objet, pour masquer une partie de l'hologramme, et ainsi masquer un bruit de modèle. Le centre de la figure de diffraction peut par exemple être exclu de la mesure, pour s'affranchir des déformations induites par le nuage de vapeur autour d'une gouttelette en évaporation, alors que la présence de ce nuage n'est pas incluse dans le modèle [59, 60, 61, 62]. En pratique, les hologrammes modèles et expérimentaux sont simplement multipliés par un masque binaire, de même dimension que les hologrammes, masquant les parties à exclure (valeurs nulles) dans toutes les relations (6.22) à (6.25).

### 6.2.6 Modèles de diffraction numériques

Quand on ne dispose pas d'une formulation analytique du modèle de diffraction, par exemple quand la distance d'observation n'est pas suffisante pour appliquer l'approximation de Fraunhofer, il est possible d'utiliser un modèle numérique. On applique par exemple l'opérateur de propagation de Fresnel à la transmittance 2D d'un objet défini par un nombre restreint de paramètres. Dans le cas d'un disque opaque, cette transmittance 2D est définie par 4 paramètres, 3 coordonnées et un diamètre  $(x_d, y_d, z_d, d_d)$ . La transmittance est définie en tout point de coordonnées  $x_0, y_0$  du plan de diffraction par

$$\mathcal{T} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_0 - x_d)^2 + (y_0 - y_d)^2 < \frac{d_d^2}{4} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.26)$$

L'amplitude complexe dans le plan d'observation peut être calculée numériquement à l'aide de l'opérateur de propagation de Fresnel

$$U_z = e^{-ikz} U_0 * H_z \quad (6.27)$$

$$= e^{-ikz} U_{inc} \mathcal{T} * H_z \quad (6.28)$$

$$= e^{-ikz} U_{inc} (1 - \mathcal{P}) * H_z \quad (6.29)$$

et l'intensité dans ce même plan s'écrit simplement  $I_z = \frac{1}{2}U_z U_z^*$ . Ce calcul d'intensité dans le plan du capteur dont  $(x_d, y_d, z_d, d_d)$  sont les paramètres peut être utilisé comme modèle dans une approche inverse, en lieu et place du modèle analytique basé sur l'approximation de Fraunhofer dans l'exemple précédent. La seule petite subtilité concerne la prise en compte de l'intégration sur le pixel. En effet, l'intensité mesurée sur le capteur n'est pas  $I_z$  mais l'intensité  $I_z^{cap}$  définie par la relation (6.8). Dans cette expression on remarque que le terme d'intégration sur le pixel (la prise en compte des deux autres termes est triviale) peut être écrit sous la forme suivante

$$I_z * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}} \approx \frac{1}{2}U_{inc}^2 [1 - \mathcal{P} * H_z - \mathcal{P}^* * H_{-z}] * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}} \quad (6.30)$$

$$= \frac{1}{2}U_{inc}^2 \left[ 1 - \mathcal{P} * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}} * H_z - \mathcal{P}^* * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}} * H_{-z} \right] \quad (6.31)$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{1}{2}U_{inc}^2 [1 - \mathcal{P}_{pix} * H_z - \mathcal{P}_{pix}^* * H_{-z}] \quad (6.32)$$

en posant  $\mathcal{P}_{pix} = \mathcal{P} * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}}$  qui n'est autre que la pupille associée à l'objet dans le plan de diffraction, intégrée sur le pixel. Dans le cas simple où 100% de la surface des pixels est sensible, cette intégration peut être réalisée en définissant la pupille dans un plan de diffraction sur-échantillonné, sur des pixels plus petits que ceux du capteur (voir figure 6.6.a) et en moyennant les valeurs (par binning) pour obtenir l'intensité  $I_{100\%}$  intégrée sur toute la surface des pixels. Figure 6.6.b, on remarque que cette pupille intégrée sur les pixels n'est plus binaire comme l'était la pupille initiale sur-échantillonnée dont les contours fins sont maintenant en partie codés par des niveaux de gris. Cette pupille intégrée sur le pixel est ensuite positionnée dans le plan de diffraction, selon un échantillonnage identique à celui du capteur (c) et l'amplitude complexe et l'intensité sont calculées dans le plan du capteur à l'aide de l'opérateur de propagation de Fresnel (d).

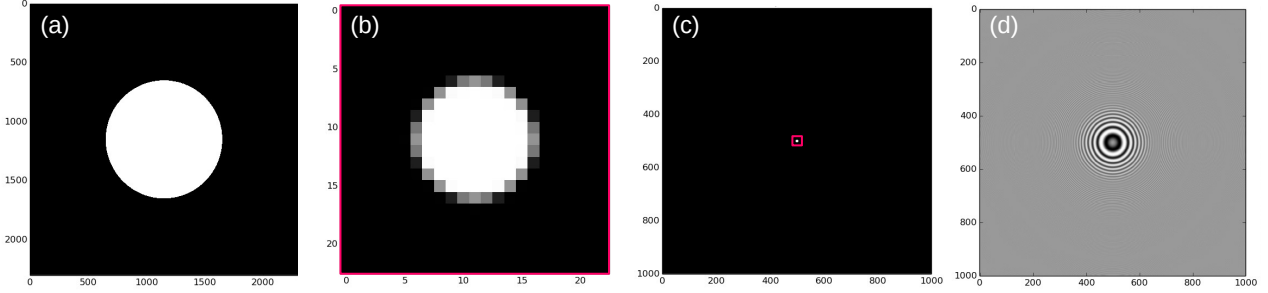
Dans le cas où les facteurs de remplissage des pixels  $\alpha$  et  $\beta$  sont inférieurs à 1, on réalise une petite opération dans l'espace de Fourier. En explicitant la transformée de Fourier des fonctions portes, on remarque que

$$I_z * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}} = FT^{-1} [FT(I_z) \cdot \text{sinc}(\alpha\Delta_x x) \cdot \text{sinc}(\beta\Delta_y y)] \quad (6.33)$$

On déduit donc l'intégration sur la seule surface sensible des pixels à partir de l'intégration sur

toute leur surface  $\mathcal{P} * \Pi_{\frac{x}{\Delta_x}, \frac{y}{\Delta_y}}$ , en réalisant l'opération suivante

$$I_z * \Pi_{\frac{x}{\alpha\Delta_x}, \frac{y}{\beta\Delta_y}} = TF^{-1} \left[ TF(I_z * \Pi_{\frac{x}{\Delta_x}, \frac{y}{\Delta_y}}) \frac{\text{sinc}(\alpha\Delta_x x) \text{sinc}(\beta\Delta_y y)}{\text{sinc}(\Delta_x x) \text{sinc}(\Delta_y y)} \right] \quad (6.34)$$

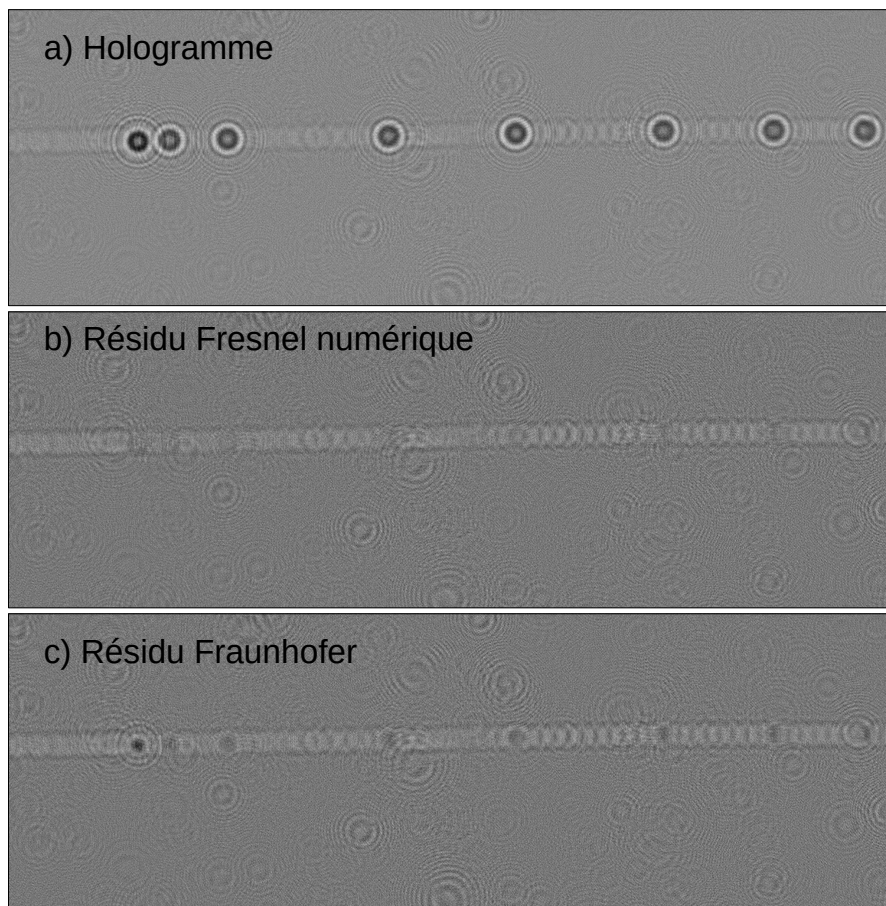


**FIGURE 6.6** – Modèle paramétrique numérique basé sur l'intégrale de Fresnel pour les approches inverses. (a) la pupille (complémentaire de la transmittance) de l'objet est définie dans un espace sur-échantillonné autour de l'objet (pixel au centième de la taille des pixels du capteur dans cet exemple); (b) la pupille de l'objet intégré sur des pixels de mêmes dimensions que ceux du capteur; (c) cette pupille positionnée dans le plan de diffraction entier, de dimensions et d'échantillonnage identiques à ceux du capteur et (d) la propagation dans le plan de diffraction à l'aide de l'opérateur de propagation de Fresnel

Ce modèle présente de nombreux avantages. Il permet d'abord de considérer des distances d'enregistrement plus faibles que le modèle analytique reposant sur l'approximation de Fraunhofer. En pratique le modèle de Fraunhofer s'avère suffisamment précis quand le nombre de Fresnel  $N_F = \frac{d^2}{4\lambda z}$  est inférieur à  $10^{-2}$  alors qu'avec ce modèle on peut travailler à des distances 10 à 20 fois plus faibles. La figure 6.7.a montre un hologramme de bulles de CO<sub>2</sub> dont le diamètre est de l'ordre de 200  $\mu m$  enregistré à une distance de l'ordre de 250  $mm$ . Avec une longueur d'onde de 532  $nm$ , le nombre de Fresnel est de l'ordre de 0.075. Quand l'inversion de l'hologramme est réalisée avec le modèle numérique, les figures de diffraction des bulles sont parfaitement reproduites ce qui se traduit par une sous-traction visuellement parfaite des figures de diffraction des différentes bulles sur le résidu de la figure 6.7.b. En comparaison, même pour un nombre de Fresnel inférieur à 0.1, l'inversion avec le modèle "Fraunhofer" ne permet pas de reproduire ces figures de diffraction, comme le montre le résidu de la figure 6.7.c. Notons que le diamètre des bulles, de l'ordre de 200  $\mu m$  est 10 fois supérieur à la taille des pixels de la caméra. Par conséquent, on peut s'attendre à ce qu'une méthode de reconstruction classique (par rétropropagation, localisation en  $z$  et traitement des images reconstruites) fournissent de

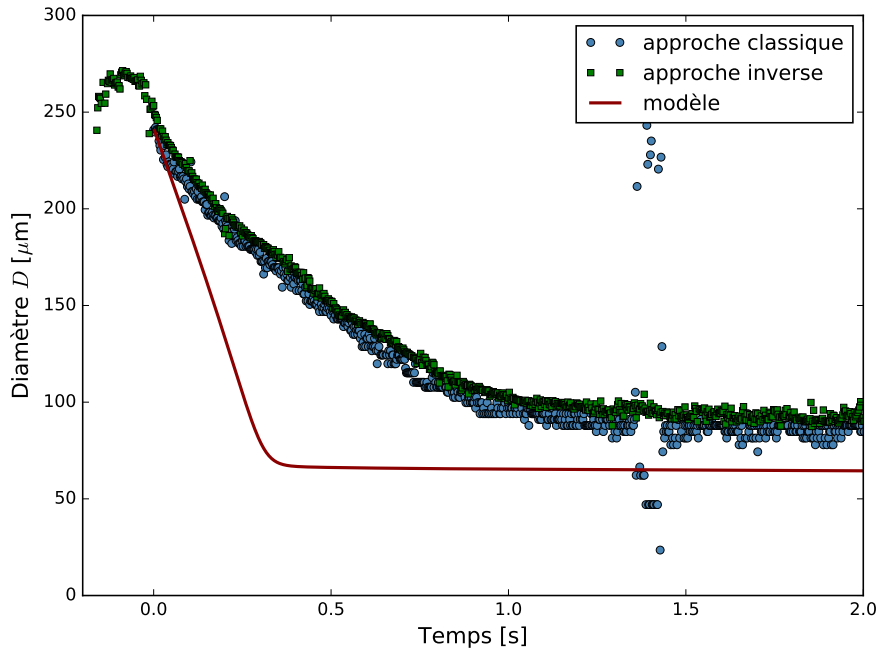


meilleurs résultat que dans le cas des gouttes considéré précédement. La reconstruction par méthode inverse fournit néanmoins de meilleurs résultats, comme le montre la figure 6.8 avec l'évolution du diamètre d'une bulle en fonction du temps, obtenue par les deux méthodes. Avec l'approche inverse, les mesures sont moins dispersées, la phase de croissance de la bulle à la sortie du capillaire d'injection avant que celle-ci ne se décroche n'est capturée que par cette méthode. De plus, les mesures aberrantes obtenues autour de 1.4 s avec la méthode classique et liées à la superposition partielle des figures de diffraction de deux bulles, ne sont pas présentes avec la méthode inverse. Notons même si ce n'est pas notre sujet ici que les résultats du modèle de dissolution présenté sur cette figure ne permet pas de reproduire l'évolution du diamètre observé.



**FIGURE 6.7** – Hologramme de bulles de  $CO_2$  de diamètre  $d \sim 200 \mu m$  enregistrés à une distance  $z \sim 0.25m$  ; résidus après inversion avec le modèle Fresnel Numérique (b) et avec le modèle de Fraunhofer (c).

Ce modèle peut être facilement adapter à des objets (transmittance 2D) plus complexes,



**FIGURE 6.8** – Mesure du diamètre d’une bulle de  $CO_2$  en cours de dissolution. extrait de la référence [114]

transparents, avec gradients d’indice ou de forme non sphérique, en introduisant des paramètres supplémentaires. Dans le cas des gouttelettes en évaporation dont nous avons déjà parlé, la figure de diffraction est modifiée par la présence d’un nuage de vapeur autour de la goutte. L’application d’un masque permet de s’affranchir de ces modifications essentiellement concentrées au centre de la figure. Une approche alternative est de développer un modèle qui décrit également ce nuage de vapeur et son influence. Dans le cas d’un nuage de symétrie sphérique, la figure de diffraction peut-être calculée rigoureusement à l’aide de la TLM. Il est alors possible de développer un modèle simple de diffraction, 2D, et de le valider numériquement. Si on considère une goutte sphérique entourée d’un nuage décrit par l’évolution d’indice suivante

$$n(r) = n_0 + n_s e^{-\frac{r-a}{\sigma}}, \quad r \geq a \quad (6.35)$$

où  $a$  est le rayon de la goutte,  $n_0$  l’indice à l’infini et  $n_s$  l’indice à la surface de la goutte. Le modèle d’objet 2D le plus simple se compose d’un disque opaque placé au centre d’un disque transparent à retard de phase comme schématisé figure 6.9.a. Le modèle de diffraction est basé sur la propagation de Fresnel avec suréchantillonnage similaire à celui décrit plus haut pour un objet sphérique simple. Intuitivement, sur la base de quelques considérations géométriques, et de quelques calculs de TLM en champ proche, on établit qu’un disque dont le retard de phase

vérifiant une loi du type

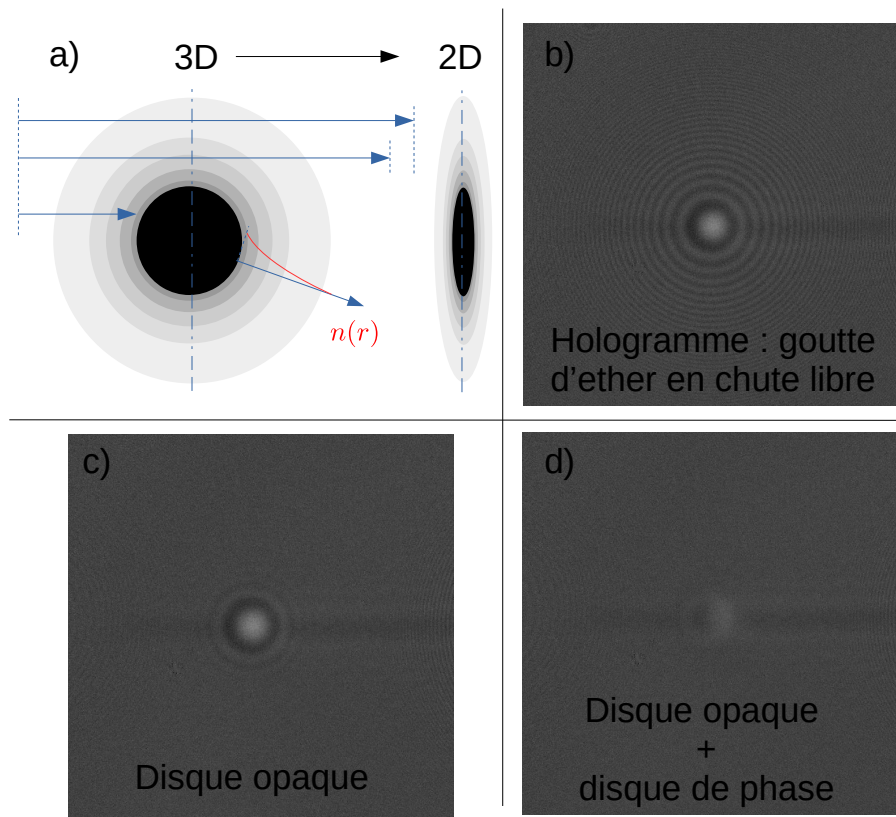
$$\varphi(x, y) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} n'_s e^{-\frac{\sqrt{(r_0 - a)}}{\sigma'}}, \quad r_0 = \sqrt{(x^2 + y^2)} \quad (6.36)$$

est un bon candidat. Les calculs de TLM permettent ensuite de préciser les paramètres de cette relation et de valider le modèle. On établit ainsi que

$$\begin{aligned} n'_s &= 2n_s(a + \sigma) \\ \sigma' &= \frac{3}{2}\sigma \end{aligned}$$

On dispose ainsi d'un modèle simple de diffraction à 6 paramètres ( $\Theta_g = \{x_g, y_g, z_g, d_g, n'_{s,g}, \sigma'_{s,g}\}$ ) qui peut être utilisé pour la reconstruction par méthode inverse des hologrammes de gouttes en évaporation, dont le nuage est à symétrie sphérique. Pour des gouttelettes d'ether s'évaporant en chute libre, cette symétrie est quasiment respectée. La figure 6.9.b propose un exemple d'hologramme expérimental issue des mêmes campagnes de mesures qui ont été exploitées dans la référence [60]. La figure 6.9.c montre le résidu après détection et mesure de la goutte à l'aide du modèle de diffraction par un disque opaque avec masque. Avec cette méthode appliquée dans la référence [60], la signature du nuage de vapeur reste naturellement présente dans le résidu. La figure 6.9.d montre le résidu après détection et mesure de la goutte à l'aide du modèle de diffraction par un disque opaque et un disque de phase. Cette fois, l'essentiel du nuage de vapeur à bien été reconstruit. La trace présente dans ce résidu correspond à la légère dissymétrie du nuage, plus forte quand la goutte est encore proche de l'injecteur et qui s'amenuise à mesure que la vitesse de chute se stabilise.

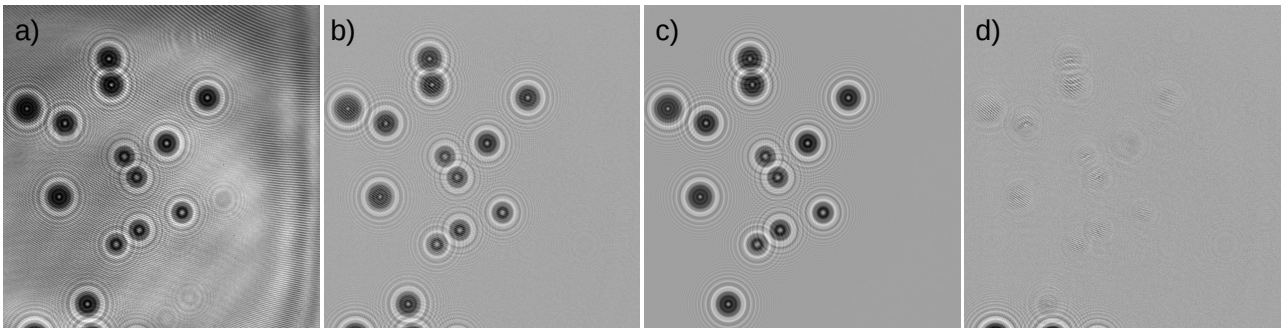
Un autre cas de figure intéressant est celui de gouttes peu réfractantes et suffisamment proche du capteur pour que la réfraction participe de manière significative à la figure de diffraction. Dans ce cas, la figure de diffraction dépend fortement de l'indice de réfraction de la goutte et celui-ci doit donc être intégré au modèle. Sur le même modèle que précédemment on peut construire un modèle de disque transparent (pour la goutte elle-même) avec un retard de phase de type lentille boule. Le modèle de diffraction comporte alors 5 paramètres ( $\Theta_g = \{x_g, y_g, z_g, d_g, n_g\}$ ) et peut être appliqué par exemple pour inverser des hologrammes de gouttes liquides/liquides comme illustré figure 6.10. Ce résultat n'est qu'un résultat préliminaire; le modèle et son application dans les reconstructions inverses demandant à être affinés. Notons toutefois que la principale difficulté dans ce cas de figure est du aux oscillations rapides de la fonction de coût qui présente de nombreux minimum locaux (déphasage de  $2\pi$  associées à des variations de taille ou d'indice).



**FIGURE 6.9** – Inversion d’un hologramme expérimental de goutte d’ether s’évaporant en chute libre (chute de droite à gauche sur les hologrammes) à l’aide d’un modèle paramétrique décrivant la goutte et son nuage de vapeur par un disque opaque et un disque à retard de phase : (a) description schématique du modèle de transmittance 2D, (b) hologramme expérimental, (c) résidu après inversion par un modèle de disque opaque (goutte seule) et (d) inversion par le modèle disque opaque & disque de phase.

### 6.3 Holographie en champ proche

Dans les sections précédentes, les hologrammes sont reconstruits à par une approche inverse, à l’aide de modèles de diffraction basés sur des approximations. Pour donner sa pleine mesure, l’approche inverse doit être basée sur un modèle de diffraction le plus exact possible. Dans le cas contraire, la reconstruction et les mesures qui lui sont associées seraient biaisées. Tous les modèles utilisés dans ce qui précède approxime l’interaction entre l’objet et la lumière par une fonction de transmittance 2D triviale et ils admettent que l’interaction et la propagation peuvent être décrite à l’aide d’un seul scalaire. Les approximations de Fresnel ou de Fraunhofer admettent une hypothèse supplémentaire de faible ouverture (grande distance) qui en champ proche est inévitablement remise en cause. Pour Rayleigh-Sommerfeld, c’est la prise en compte



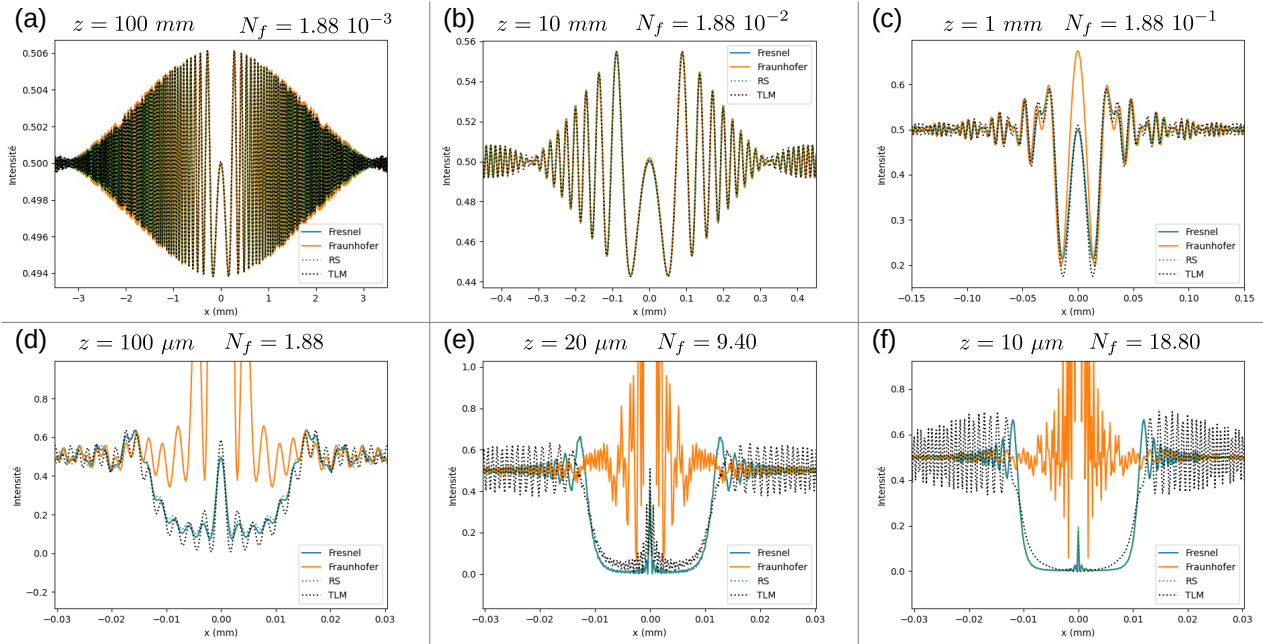
**FIGURE 6.10** – Hologramme de gouttes liquides dans un liquide (a) enregistré au CEA Marcoule (Fabrice Lamadie), hologramme corrigé par l’image de fond (b), modèle déduit de l’inversion avec un modèle à de type Fresnel sur-échantilloné à 5 paramètres (c) et résidu après soustraction des figure de diffraction des gouttes détectées (d). Les gouttes sont millimétriques, situé à environ 200 *mm* du capteur et leur indice relatif varie entre 1.05 et 1.08.

d’un seul scalaire, et surtout la modélisation de l’interaction lumière/objet, qui constituent les approximations. En mécanique des fluides, ces hypothèses sont rarement mises en défaut. En revanche, dès qu’il s’agit de réaliser de forts grossissements (en microscopie holographique par exemple), elles doivent être questionnées.

Les questions qui se posent quand on souhaite réaliser des mesures quantitatives précises en champ proche sont nombreuses et beaucoup ne sont aujourd’hui pas résolues. En revanche elle constituent des pistes de travail pour les prochaines années. La LMT dont il est largement question dans ce document est un outil précieux pour appréhender ces questions. Elle peut servir de référence pour valider ou invalider un modèle donné en comparant dans le cas d’un objet sphérique les figures de diffraction générées dans différentes conditions. La TLM peut également être mise à profit pour générer des hologrammes synthétiques et tester les performances d’un algorithme de reconstruction, inverse ou par rétropropagation, avec ou sans récupération de phase. Elle peut enfin, dans le cas (plutôt rare) où les objets sont effectivement sphériques être directement utilisée comme modèle pour la reconstruction par approche inverse.

### 6.3.1 Comparaison des différents modèles en champ proche.

Commençons par nous demander si les modèles de diffraction présentés dans les sections précédentes, très efficace dans les conditions pour lesquels il ont été formulés, restent performants quand la distance objet/capteur diminue. Nous allons ainsi considérer des objets parfaitement

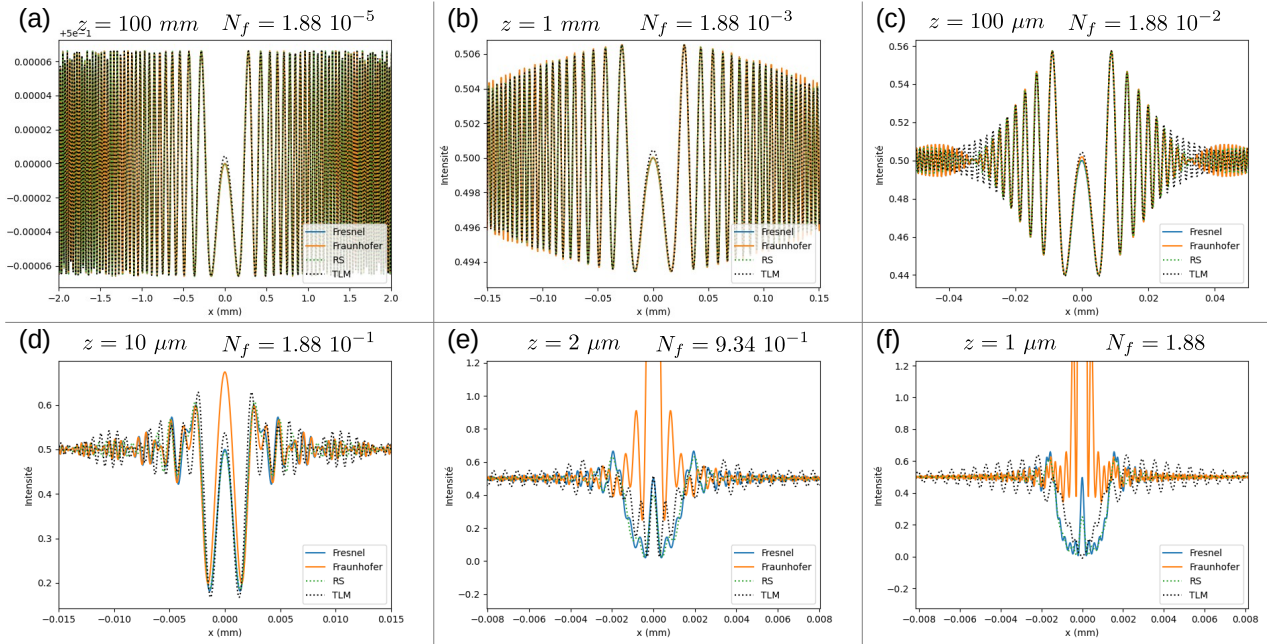


**FIGURE 6.11** – Hogrammes en ligne d’une sphère absorbante et d’un disque opaque équivalent calculés à l’aide de différents modèles de diffraction scalaire et par TLM. Le diamètre de la sphère est  $d = 20 \mu m$ , l’indice de la sphère est  $M = 1.35 - 1.0 i$  la longueur d’onde est  $\lambda = 532 nm$ . La distance  $z$  entre l’hologramme et le centre de la sphère varie sur les figures entre  $100 mm$  (a) et  $10 \mu m$  (f, plan d’observation collé à la sphère).

sphériques et comparer les hologrammes produits par la LMT et par les autres modèles. Les figures 6.11 et 6.12 montrent ces hologrammes calculés à l’aide des différentes méthodes : la première Intégrale de Rayleigh-Sommerfeld sans hypothèse sur la distance d’observation (relation (3.17)), l’approximation de Fresnel et l’approximation de Fraunhofer. Ces résultats sont comparés aux résultats de TLM. L’objet diffractant est une sphère de diamètre  $d = 20 \mu m$  figure 6.11 et  $d = 2 \mu m$  figure 6.12. Les sphères sont totalement absorbantes, leur indice de réfraction est  $M = 1.35 - 1.0 i$ . Pour les théories scalaires, la sphère est représentée par la fonction de transmission 2D d’un disque opaque. Pour Rayleigh-Sommerfeld et Fresnel on applique la méthode de suréchantillonnage proposée dans la section 6.2.6.

Ces résultats montrent comme nous l’avons déjà annoncé dans les sections précédentes que les théories scalaires fournissent une description précise des hologrammes quand les distances sont suffisamment grandes. Dans ces exemples, l’approximation de Fraunhofer fournit de bons résultats pour des distances supérieures à  $10 mm$ . A  $z = 1 mm$ , la figure d’interférence reste proche des autres pour la sphère de  $2 \mu m$  mais elle s’écarte de manière importante pour la sphère





**FIGURE 6.12** – Hologrammes en ligne d’une sphère absorbante et d’un disque opaque équivalent calculés à l’aide de différents modèles de diffraction scalaire et par TLM. Le diamètre de la sphère est  $d = 2 \mu m$ , l’indice de la sphère est  $M = 1.35 - 1.0 i$  la longueur d’onde est  $\lambda = 532 nm$ . La distance  $z$  entre l’hologramme et le centre de la sphère varie sur les figures entre  $100 mm$  (a) et  $1 \mu m$  (f, plan d’observation collé à la sphère).

de  $20 \mu m$ . On évalue généralement le domaine de validité de cette approximation à l’aide du nombre de Fresnel  $N_f$  qui est reporté sur les figures pour les différents cas. Pour la même distance  $z = 1 mm$ , figure 6.11.c où le rayon de la sphère est de  $10 \mu m$ ,  $N_f$  est 100 fois plus grand que figure 6.12.b, où le rayon de la sphère est de  $1 \mu m$ . Dans ce dernier cas, le modèle de Fraunhofer donne des résultats plus proche des autres modèles. Toutefois, ce nombre ne saurait à lui seul définir le domaine de validité de l’approximation. La largeur du capteur ou plutôt la distance maximum à l’axe optique pour laquelle on réalise le calcul, ou à laquelle on cherche à exploiter l’information contenue dans la figure de diffraction est tout aussi importante. Figure 6.12.b par exemple, pour un nombre de Fresnel de  $1.88 \times 10^{-3}$ , on constate une légère différence entre la courbe de Fraunhofer et les autres avec une décroissance un peu plus lente de l’amplitude des oscillations. Cette décroissance contient une information sur la taille de l’objet. Ces écarts apparaissant avant le retour à zéro de l’enveloppe. En pratique, l’utilisation de ce modèle va introduire un biais sur une mesure de taille à partir de l’hologramme. En revanche, figure 6.11.b, pour un nombre de Fresnel 10 fois plus grand la figure d’interférence est bien

décrite jusqu'au retour à zéro de l'enveloppe, ce qui en pratique permet une meilleure mesure de taille.

De même, le critère établi dans la section 3.7 (relation (3.35)) n'est pas d'un grand secours. En effet, ce critère est sensé fixer le domaine de validité de l'approximation de Fresnel, en considérant que l'intégral de RS fournit des résultats exacts. Il est clair, à la vue de ces figures, que lorsqu'on cherche à décrire la diffraction par un objet réel, en trois dimensions, les résultats obtenus avec RS et avec Fresnel s'écartent des résultats de la LMT, avant se s'écarter l'un de l'autre. Figure 6.11.d et figure 6.12.e par exemple, les courbes RS et Fresnel sont encore très proches l'une de l'autre alors qu'elles montrent des écarts significatifs avec la courbe de la LMT. **Ces écarts ne remettent pas en cause la validité de l'intégrale de RS** (ou de l'approximation de Fresnel) mais sont dus à la modélisation de l'interaction lumière-objet par une transmittance 2D triviale. C'est le modèle de disque opaque de transmittance binaire qui n'est plus valable.

De ces résultats, on retiendra que l'utilisation des théories scalaires de la diffraction en champs proches doit être considéré avec prudence. Un critère simple et unique comme celui basé sur le nombre de Fresnel n'est pas toujours suffisant pour justifier leur utilisation. Les méthodes inverses permettent de maximiser l'exploitation des informations contenues dans l'hologramme et d'obtenir des mesures très précises, à condition de disposer d'un modèle de diffraction exact. Les modèles proposés dans les sections précédentes ne répondent manifestement pas à cette exigence en champ proche, y compris avec un calcul de propagation par RS. Il est facile de montrer, à l'aide de la LMT, que la description de l'hologramme par un seul scalaire (la composante  $E_x$  du champ électrique) est suffisante, au moins dans les cas où  $z \geq 100 \text{ } \mu\text{m}$ . Les premiers écarts constatés en champ proche avec la LMT doivent donc être attribués à la modélisation de l'interaction entre la sphère et la lumière par une transmittance 2D trop simpliste.

### 6.3.2 Rétropropagation en champ proche

Les conclusions de la section précédente peuvent sembler inquiétantes. Si les modèles de diffraction basés sur l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld ne décrivent pas correctement les figures de diffraction d'une sphère en champ proche, peut-on utiliser cette intégrale pour reconstruire les

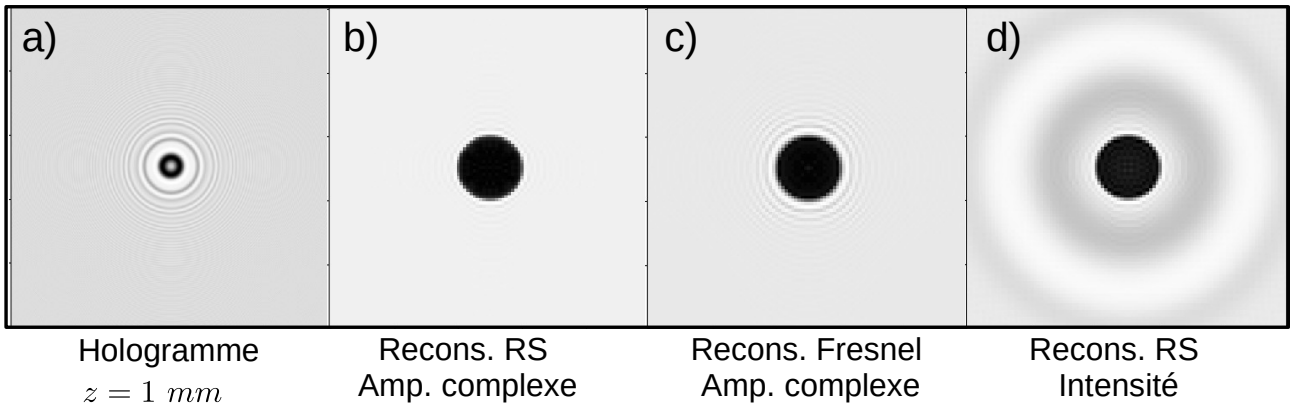


hologrammes en microscopie ? La réponse à cette question est bien heureusement positive. Nous allons cette fois utiliser la TLM pour générer des hologrammes synthétiques et les reconstruire par différentes méthodes de rétropropagation.

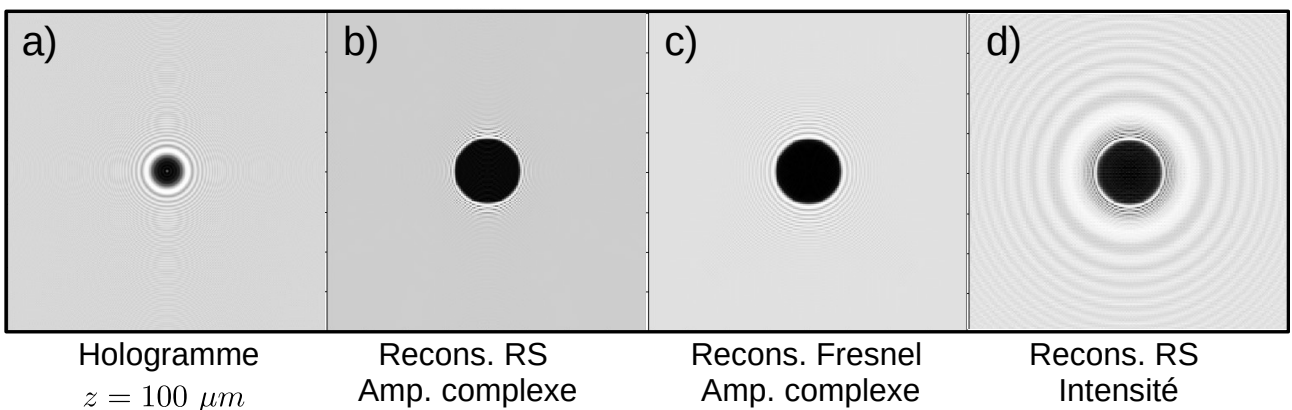
La figure 6.13.a montre un hologramme synthétique, calculé par TLM pour la sphère absorbante de  $d = 20 \mu m$  à  $1 mm$  du capteur de la figure 6.11.c. Différentes méthodes de reconstruction par rétropropagation sont proposées. On considère d'abord que l'on connaît l'amplitude complexe de l'hologramme, c'est-à-dire qu'on suppose que la phase a été parfaitement récupérée, grâce à une méthode de reconstruction itérative par exemple. Cette amplitude est fournie par le calcul de LMT dont on extrait la composante  $E_x$  du champ électrique, les autres composantes étant négligeables dans ces conditions. On reconstruit alors l'image de la sphère par rétropropagation à l'aide de l'intégrale de RS (fig.6.13.b) ou de l'approximation de Fresnel (fig.6.13.c). La figure 6.13.d montre la reconstruction obtenue à partir de l'intensité de l'hologramme (sans phase). Les images reconstruites semblent qualitativement satisfaisantes. L'image de la sphère absorbante est un disque sombre dont les contours sont assez bien dessinés et dont la taille correspond au diamètre de la sphère, au pixel près. On constate toutefois la présence de quelques franges d'interférences autour de ce disque, peu contrastées avec la reconstruction par RS, un peu plus avec l'approximation de Fresnel. Pour la reconstruction uniquement basée sur l'intensité, l'image jumelle s'ajoute à ces franges. La question de l'origine de ces franges mériteraient d'être approfondie, mais elles pourraient être liées, au moins en partie, à l'effet de filtrage introduit par la propagation (voir section 3.5).

La figure 6.14 est similaire à la figure 6.14 mais une distance d'enregistrement de l'hologramme  $z = 100 \mu m$ . La qualité de reconstruction est assez proche de celle de la figure précédente. On constate toutefois que les franges résiduelles, autour des contours du disque sombre, sont plus contrastées.

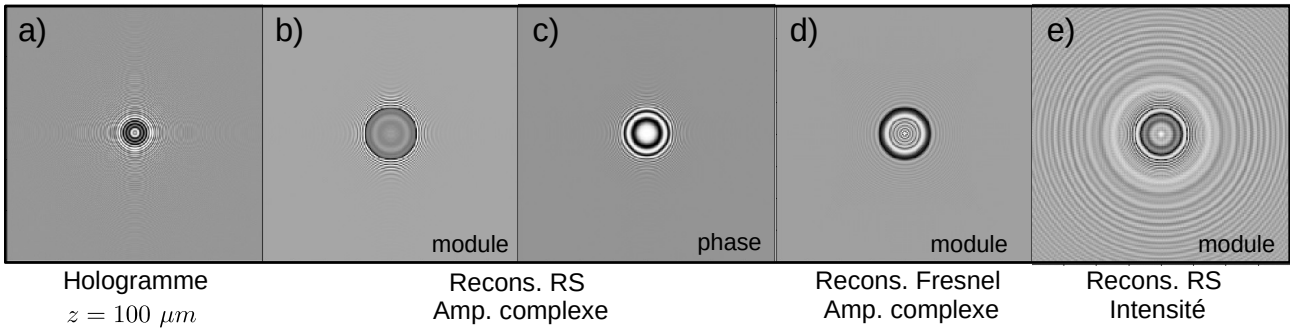
La principale application de la microscopie holographique est la caractérisation d'échantillons biologiques. Ces échantillons sont généralement transparents et peu réfractants. Les méthodes de reconstruction basées sur RS, couramment pour ne pas dire exclusivement utilisées en microscopie holographique fournissent également des résultats satisfaisants d'un point de vue qualitatif. La figure 6.15 est construite sur le même modèle que les figures 6.13 et 6.14 à ceci près que la phase de l'image reconstruite, qui contient une information sur l'indice de réfraction est également représentée (figure 6.15.c). Ici la sphère de  $20 \mu m$  est transparente et peu réfractante, son indice  $M = 1.1$  est réel. L'observation de cette figure conduit essentiel-



**FIGURE 6.13** – Reconstruction d’un hologramme synthétique calculé par TLM d’une sphère absorbante de diamètre  $d = 20 \mu\text{m}$  située à  $z = 1 \text{ mm}$  du capteur. L’indice de la sphère est  $M = 1.35 - 1.0 i$ , la longueur d’onde est  $\lambda = 532 \text{ nm}$ . De gauche à droite : (a) l’hologramme (en intensité), (b) module de la rétropropagation par Rayleigh-Sommerfeld (RS) à partir de l’amplitude complexe de l’hologramme (module et phase), (c) rétropropagation par l’approximation de Fresnel à partir de l’amplitude complexe de l’hologramme et (d) rétropropagation par RS à partir de l’intensité de l’hologramme. Les images reconstruites sont agrandies pour mieux visualiser l’objet.



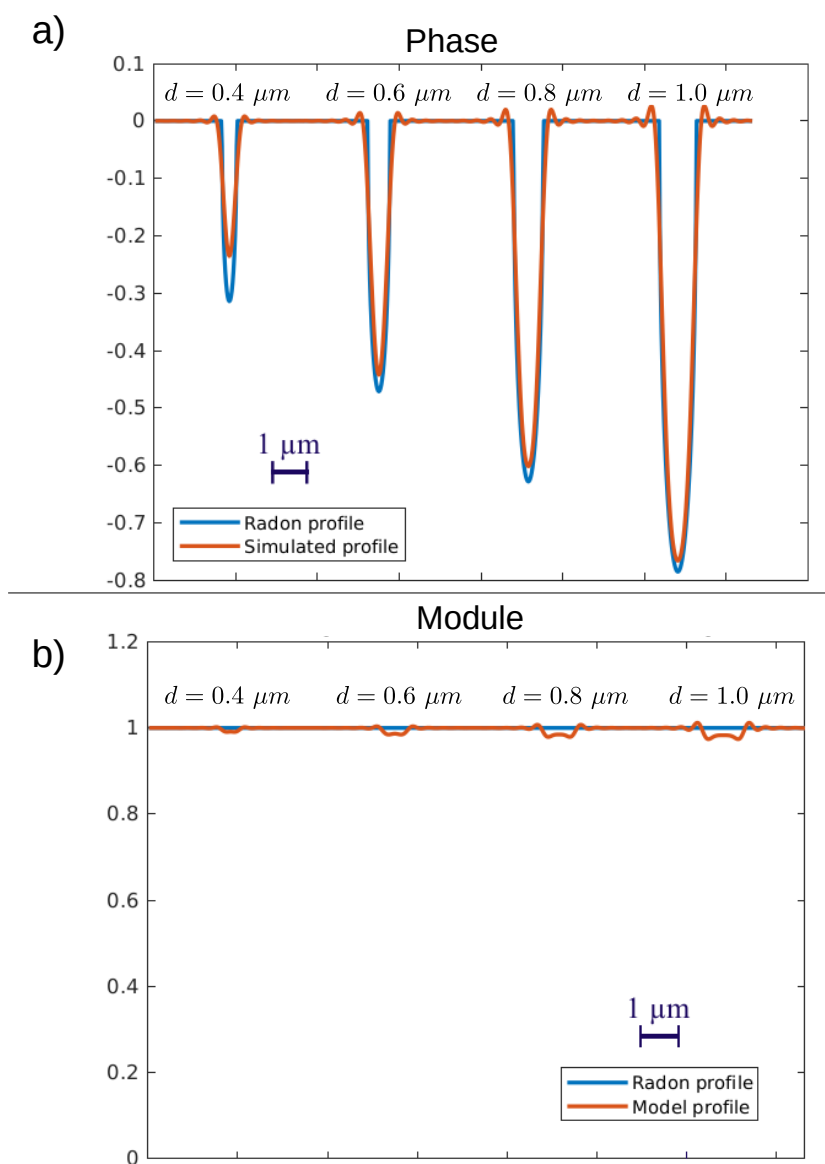
**FIGURE 6.14** – Reconstruction d’un hologramme synthétique calculé par TLM d’une sphère absorbante de diamètre  $d = 20 \mu\text{m}$  située à  $z = 100 \mu\text{m}$  du capteur. L’indice de la sphère est  $M = 1.35 - 1.0 i$ , la longueur d’onde est  $\lambda = 532 \text{ nm}$ . De gauche à droite : (a) l’hologramme (en intensité), (b) module de la rétropropagation par Rayleigh-Sommerfeld (RS) à partir de l’amplitude complexe de l’hologramme (module et phase), (c) rétropropagation par l’approximation de Fresnel à partir de l’amplitude complexe de l’hologramme et (d) rétropropagation par RS à partir de l’intensité de l’hologramme. Les images reconstruites sont agrandies pour mieux visualiser l’objet.



**FIGURE 6.15** – Reconstruction d’un hologramme synthétique calculé par TLM d’une sphère absorbante de diamètre  $d = 20 \mu m$  située à  $z = 100 \mu m$  du capteur. L’indice de la sphère est  $M = 1.1 - 0 i$ , la longueur d’onde est  $\lambda = 532 nm$ . De gauche à droite : (a) l’hologramme (en intensité), (b) module de la rétropropagation par Rayleigh-Sommerfeld (RS) à partir de l’amplitude complexe de l’hologramme, (c) la phase obtenue par la même reconstruction, (c) module de la rétropropagation par l’approximation de Fresnel à partir de l’amplitude complexe de l’hologramme et (d) rétropropagation par RS à partir de l’intensité de l’hologramme. Les images reconstruites sont agrandies pour mieux visualiser l’objet.

lement aux mêmes conclusions pour cette sphère transparente que pour la sphère absorbante. On remarquera néanmoins que la rétropropagation avec l’approximation de Fresnel produit une image très différente de la rétropropagation par RS et la reconstruction à partir de l’intensité seule (figure 6.15.e) semble très difficile à exploiter. C’est pourquoi, en champs proche, pour des objets transparent, les méthodes inverses ou itératives, permettant de récupérer la phase sont quasiment incontournables.

La question de la mesure de l’indice de réfraction à partir des hologrammes en champ proche est abordée dans la référence [115] où l’on considère des objets petits et des distances d’enregistrement plus faibles. La figure 6.16, extraite de cette référence, montre la phase (a) et le module (b) de l’image reconstruite de sphères transparentes très peu réfractantes ( $M = 0.956$ ), de différents diamètres (entre  $0.4$  et  $1 \mu m$ ), à partir d’un hologramme enregistré à  $z = 10 \mu m$ . Ici encore, on a considéré que la phase de l’hologramme était parfaitement retrouvée. Les résultats de ces reconstructions sont comparés à une représentation triviale de la sphère transparente (radon profile) : une transmittance 2D dont le module vaut 1 dans et en dehors de l’objet (parfaitement transparent) et une phase qui résulte de la différence de chemin optique dans la sphère (intégration de Radon), en négligeant les effets de focalisation (intégration en ligne droite). On constate que le module de la reconstruction n’est jamais égal à un et que la phase

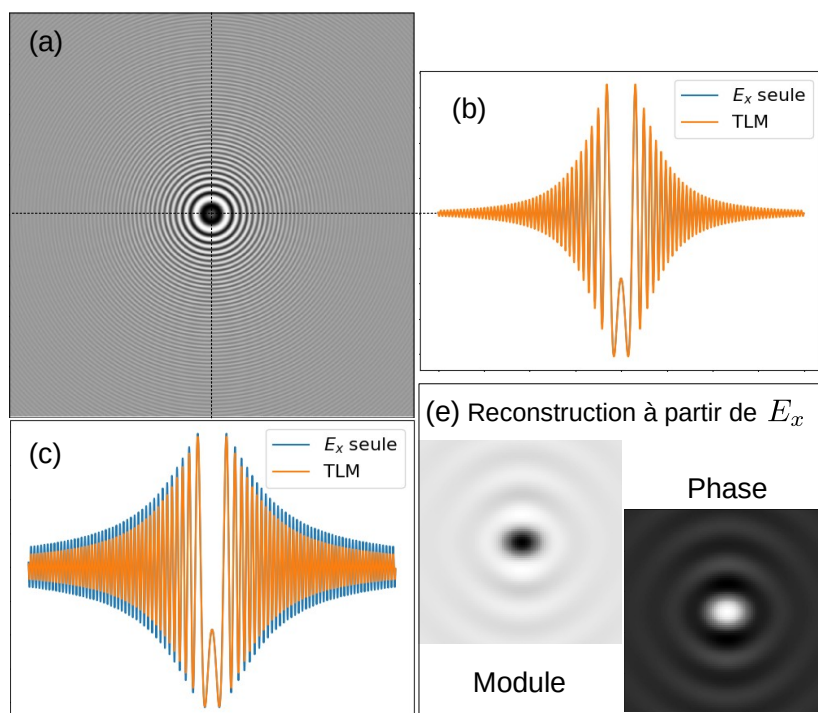


**FIGURE 6.16** – Reconstruction par RS d’hologrammes synthétiques calculés par TLM de sphères de silice (indice 1.445) transparentes de différents diamètres  $d = 0.4, 0.6, 0.8$  et  $1 \mu m$ , plongés dans une huile d’indice 1.5115 et située à  $z = 10 \mu m$  du capteur. L’indice relatif de la sphère dans le milieu  $M = 0.956$  est réel, la longueur d’onde est  $\lambda = 532 nm$  dans l’air ( $351.97 nm$  dans l’huile). La figure est extraite de la figure 2 de la référence [115].

est d’autant plus éloignée de la phase triviale attendue, à mesure que le diamètre de la sphère décroît. L’ensemble des résultats présentés dans la référence [115] montre qu’une estimation l’épaisseur optique de la sphère (taille et/ou indice), à partir du déphasage reconstruit au centre de la sphère est juste, à quelques pourcent prêt, pour un diamètre supérieur à la longueur

d'onde, mais que l'erreur augmente rapidement quand le diamètre devient inférieur à la longueur d'onde. Cette erreur atteint par exemple 25% pour la sphère de  $0.4 \mu m$  plongée dans l'huile. Les résultats présentés sur la figure montrent que la principale difficulté en champ proche est liée à la représentation de l'interaction entre l'objet et la lumière, soit dans le choix du modèle quand il s'agit du problème direct ou de reconstruction par méthode inverse, soit, comme ici, quand il s'agit d'interpréter les résultats de la reconstruction ou d'en extraire une mesure quantitative. Ces reconstructions ne sont a priori pas fausses mais difficiles à interpréter et à exploiter. On retrouve les oscillations (franges) observées précédemment sur les figures 6.13 et 6.14, à la fois sur le module et la phase des amplitudes reconstruites, et la diminution du pic du phase et son élargissement par rapport à l'attendu (modèle de Radon) n'est pas sans évoquer les conséquences d'un filtrage ou d'une limite de résolution.

Une dernière question, que nous avons évoquée mais à laquelle nous n'avons apporté que peu d'éléments de réponse est la question de l'approche scalaire. Jusqu'à présent cette représentation simplifiée n'a pas été mise en défaut. La figure 6.17 montre l'hologramme d'une sphère de  $200 \text{ nm}$  de diamètre, calculée par LMT à  $z = 5 \mu m$  de distance. Cela n'est pas très visible sur l'hologramme 2D, mais en traçant des profils verticaux et horizontaux, on constate que l'hologramme n'est pas symétrique. Sur ces profils, l'intensité calculée par LMT est également comparée à l'intensité déduite de la seule composante  $E_x$ , composante non nulle du champ électrique incident. Pour cette très petite sphère, cette composante n'est pas axisymétrique et son intensité est différente de l'intensité totale. La figure montre également le résultat de la reconstruction en module et en phase à partir de la seule composante complexe  $E_x$  (en module et en phase). Une dissymétrie apparaît, cette fois beaucoup plus clairement sur les images reconstruites. Nous n'irons pas plus loin dans l'analyse de ces résultats mais cet exemple montre, encore une fois, qu'une image reconstruite en champ proche ne donne pas toujours une image très fidèle (ou tout du moins triviale) de l'objet observé. La question de la prise en compte de plusieurs composantes n'est pas aussi évidente qu'il y paraît. Au-delà de la question de la modélisation qui ne pose pas vraiment de problème, il y a aussi celle de la mesure et de l'interférence entre l'onde diffractée et une onde de référence parfaitement alignée sur  $E_x$ . Il est tout à fait possible de rétropropager les autres composantes du champ, mais comment les mesure-t-on, et cela permet-il de mieux caractériser l'objet ?



**FIGURE 6.17** – Hologramme synthétique calculé par TLM (a) et reconstruction à partir de la seule composante  $E_x$  du champ (e). La sphère de silice (indice 1.445) de diamètre  $d = 0.2 \mu m$  est plongée dans une huile d'indice 1.5115. La particule est située à  $z = 5 \mu m$  du capteur. La longueur d'onde est  $\lambda = 532 nm$  dans l'air. Les profils selon  $x$  (b) et selon  $y$  (c) montrent la différence entre le calcul LMT complet (intensité calculée à partir de toutes les composantes du champ électromagnétique) et l'intensité déduite de la composante  $E_x$  seule, composante à partir de laquelle est réalisée la reconstruction (e) en module et en phase.

### 6.3.3 Inversion à l'aide de la TLM

Comme nous l'avons déjà signalé, les échantillons biologiques n'ont pas le bon goût d'être parfaitement sphériques. Néanmoins, l'une des principales difficultés associées à la reconstruction des objets de phase est la localisation précise du plan de l'échantillon. Pour résoudre ce problème, la méthodologie proposée dans la référence [116] consiste à introduire des micro-billes de verre dans l'échantillon et de les localiser très précisément à partir de l'hologramme à l'aide d'une méthode inverse paramétrique. Cette méthode de reconstruction est semblable à celles décrites dans les sections précédentes à ceci près que le modèle de diffraction est la solution exacte de la TLM, puisque les modèles de diffraction scalaire ne peuvent être appliqués à de tels objets à de si faibles distances d'observation. Une fois les billes et donc le plan de l'échantillon localisés, une autre méthode de reconstruction peut être appliquée par reconstruction des

autres objets présents dans l'échantillon, une méthode inverse par régularisation par exemple.

## 6.4 Quelques perspectives

Ce chapitre donne un aperçu des possibilités de l'holographie numérique et des méthodes de reconstruction par approche inverse pour des mesures quantitatives précises en 3D d'objets en mouvement. Il donne aussi des pistes de travail pour les prochaines années. Les progrès à venir et attendus à la fois pour la mécanique des fluides et pour la microscopie reposeront en grande partie sur la maîtrise des phénomènes d'interaction lumière/objets, le développement de modèles de diffraction adaptées aux différentes situations visées et sur le développement de méthodes de reconstruction avancées, performantes et précises. Parmi les défis qu'il nous faut encore relever, on peut souligner le besoin de caractérisation d'objets de forme plus complexes. Les micro-organismes ont rarement la politesse de prendre une forme parfaitement sphérique et dans certaines situations, gouttes et autres bulles que nous rencontrons en mécanique des fluides ne sont pas plus dociles. Pour prendre en compte des déformations d'objets vaguement sphériques, la piste la plus prometteuse consiste probablement à développer des méthodes d'inversion paramétrique, avec des modèles contenant un peu plus de paramètres. Pour des formes plus complexes, la pertinence d'une telle modélisation, à l'aide de quelques paramètres, est discutable. Il semble donc plus judicieux face à ces objets de se tourner vers des méthodes de reconstruction (dites non paramétrique). Ces méthodes ont l'avantage de s'appliquer à des objets dont on ignore tout ou presque de la forme. C'est souvent le cas avec les échantillons biologiques mais également en mécanique des fluides. Une méthode de reconstruction inverse non paramétrique (ou par régularisation) a été appliquée avec succès pour reconstruire le nuage de vapeur dans le sillage d'une goutte en évaporation [117, 118], nuage dont la forme peut difficilement être décrite par un petit nombre de paramètres.

Une autre difficulté que l'on rencontre avec l'holographie est liée au grandissement. Bien sûr, un hologramme peut être agrandi à l'aide de l'objectif du microscope ou à l'inverse réduit à l'aide d'une optique adaptée pour réaliser l'hologramme d'un volume plus grand que celui limité par la taille du capteur. Malheureusement les choses ne sont pas si simple et deviennent même très compliquées quand il s'agit de réaliser des mesures quantitatives précises ou de caractériser des objets de phase. Ces difficultés sont liées à l'introduction d'optiques entre l'objet et le

capteur, ou bien entre la source de lumière et l'objet, et aux effets des aberrations introduites par ces lentilles. Les méthodes inverses mettent en évidence ces difficultés en raison de leur grande précision et donc de leur grande sensibilité, mais elle doivent également permettre d'y apporter une solution à la fois élégante et performante, en intégrant ces aberrations dans la méthode de reconstruction, sous la forme de paramètres supplémentaires, par exemple.



# Chapitre 7

## Quelques exemples aboutis d'applications à la mécanique des fluides

Ce chapitre présente quelques exemples d'applications de techniques optiques avancées à des problématiques de mécanique des fluides. Les techniques mises en œuvre reposent directement ou indirectement sur les outils détaillés dans ce document.

- L'étude de l'évaporation de gouttes liquides dans un écoulement turbulent par la technique d'holographie en ligne et les outils détaillés dans le chapitre 6.
- La mesure d'aérosols respiratoires à l'aide d'une technique d'Imagerie Interférométrique en défaut de mise au point, revisitée et poussée dans ses derniers retranchements pour permettre des mesures simultanées de petits diamètres (inférieur à  $2 \mu m$ ), des trois composantes de la vitesse et de la concentration.
- L'étude des phénomènes de cavitation à l'aide de techniques d'imagerie en transmission, d'Imagerie Schlieren et d'imagerie interférométrique qui montrent comment des techniques relativement classiques peuvent être adaptées, améliorées et combinées pour fournir des informations quantitatives, même dans des conditions difficiles proches des conditions réelles d'intérêt industriel.

## 7.1 Suivi Lagrangien de gouttelettes en évaporation dans un écoulement turbulent

L'influence de la turbulence sur l'évaporation de gouttes liquides reste une question ouverte en mécanique des fluides. Tenter de répondre à cette question par une approche expérimentale est un véritable défi. Dans un air au repos, ou dans un écoulement stationnaire les processus d'évaporation sont bien compris. Dans ces conditions simples, leur dépendance à la concentration de vapeur environnante, aux températures de l'air et de la goutte, à la taille de la goutte. L'influence de la vitesse relative entre la goutte et l'écoulement est également bien connu dans le cas d'un écoulement stationnaire. En revanche, dans un écoulement turbulent par nature instationnaire, ces modèles simples ne sont a priori pas suffisants.

Dans un écoulement turbulent, les vitesses fluctuent à la fois en amplitude et en direction, ce qui conduit potentiellement à une déstabilisation des couches limites et à une réorganisation permanente des gradients de concentration et de température, qui pilotent l'évaporation autour des gouttes. Le taux d'évaporation dépend ainsi des conditions thermodynamiques fluctuantes que la goutte expérimente le long de sa trajectoire. Le phénomène d'évaporation devient réellement complexe quand les gouttes sont dans une gamme de taille intermédiaire, pour un nombre de Stokes de l'ordre de 1. Les gouttes ne se contentent alors pas de suivre l'écoulement (petites gouttes) ou de suivre une trajectoire balistique (grosses gouttes) mais suivent des trajectoires complexes, résultant des forces aérodynamiques mais aussi de l'inertie de la goutte et donc de sa taille. La taille de la goutte variant elle même avec le taux d'évaporation on se trouve potentiellement dans un cas de couplage fort entre évaporation et turbulence le long de ces trajectoires, avec une influence de l'histoire de la goutte sur des temps long à travers l'évolution du diamètre. Même pour une goutte isolée, plusieurs questions restent ainsi ouvertes et notamment : La turbulence influence-t-elle l'évaporation au delà de ce qui peut être décrit par les modèles quasi-stationnaires 1D couramment utilisés ? Si de tels effets existes, peut-on en mesurer l'ampleur, comprendre les principaux mécanismes mis en jeux et les modélisés ?

### 7.1.1 Les grandes étapes du développement des outils de mesure

Ce sont ces questions qui ont motivé une série d'études menées au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique entre 2010 et 2020. L'approche choisie pour ces études est expéri-

mentale et basée sur des mesures lagrangiennes afin de suivre les gouttes et leur évaporation le long de leur trajectoire. Une telle approche nécessite de relever plusieurs défis qui constituent les différentes étapes de ce travail.

- Produire un écoulement turbulent avec des fluctuations importantes ( $\sim 1 \text{ ms}^{-1}$ , d'intensité variable et dans une configuration propice au suivi des gouttes sur des temps suffisamment long. L'expérience repose ainsi sur une turbulence homogène isotrope générée par des haut-parleurs [112].
- Produire des gouttes de tailles intermédiaires (autour de  $100 \mu\text{m}$  en l'occurrence) d'un liquide très volatile. Après les difficultés rencontrées avec le fréon [112], ce sont des gouttelettes de diéthyler qui ont été injectées à l'aide d'un injecteur de type goutte à la demande [59, 60].
- Mettre au point et valider une technique de mesure capable de suivre les gouttes le long de trajectoire par nature tri-dimensionnelle, à une distance suffisante ( $\sim 0.5 \text{ m}$ ) pour ne pas perturber l'écoulement et mesurer le diamètre des gouttes avec une précision suffisante ( $< 1 \mu\text{m}$ ) pour réaliser une mesure précise du taux d'évaporation au cours du temps, à une cadence supérieure à  $1 \text{ kHz}$ . La seule technique identifiée pour répondre à ce cahier des charges exigeant est l'holographie en ligne, associée à une reconstruction par une approche problème inverse afin d'atteindre les précisions requises.
- Valider le principe de la mesure par comparaison avec d'autre technique en l'absence d'évaporation (gouttes d'eau) [112]
- Confronter les mesures à des modèles simples d'évaporation dans un écoulement simple et maîtrisé, en condition quasi-stationnaire (chute libre) [59, 60]. Dans la référence [60], l'influence de la condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air est mise en évidence et intégrée dans le modèle d'évaporation.
- Comprendre et corriger les effets optiques liés à la présence d'un gradient de vapeur autour de gouttes en évaporation [58, 59].
- Réaliser les mesures en présence de turbulence, en déduire vitesse et accélération des gouttes par dérivation, puis les vitesses relatives, "vues par les gouttes" grâce à un bilan de force, en modélisant les forces de traînée. Injecter ces valeurs dans un modèle simple d'évaporation et détecter les écarts éventuels par rapport à la fameuse loi en  $d^2$  [61].
- Dans l'article publié en 2017 [61], l'étude d'un petit échantillon de 10 trajectoires a mis en évidence des écarts significatifs à la loi en  $d^2$  pour quelques trajectoires, tandis que

d'autres semblaient s'y conformer. La dernière difficulté consistait à augmenter très fortement le nombre de trajectoires afin d'appréhender le problème de manière statistique. La stratégie de détection et d'inversion a ainsi été adaptée (détection automatique des trajectoires, indépendante de l'opérateur, calculs parallèles et traitement automatique des trajectoires). L'étude statistique qu'à permis cette dernière étape est détaillée dans la référence [62] qui est reproduite dans les prochaines pages de ce document.

### **7.1.2 Statistique Lagrangienne de l'évaporation de gouttelettes dans une turbulence homogène et quasi-isotrope**

Les résultats détaillés dans cet article montrent que le taux d'évaporation prédit par un modèle quasi-stationnaire d'évaporation, dans lequel les effets convectifs sont modélisés à travers un nombre de Sherwood basé sur la vitesse relative entre les gouttes et l'écoulement, sous-estime de manière significative le taux d'évaporation tel qu'il est mesuré par l'expérience. Bien que les mécanismes responsables de ces écarts n'aient pas encore été clairement établis, un terme correctif, fonction des fluctuations de vitesses relatives est proposé. Ce terme permet de reproduire parfaitement les résultats de mesures dans la gamme de paramètres de l'étude.

## Statistical Lagrangian evaporation rate of droplets released in a homogeneous quasi-isotropic turbulence

L. Méès <sup>\*</sup>, N. Grosjean, and J. L. Marié 

*Univ. Lyon, CNRS, Ecole Centrale de Lyon, INSA Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1 Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR 5509, F-69134, Ecully, France*

C. Fournier 

*Univ Lyon, UJM-Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien, UMR 5516, 42023, Saint-Etienne, France*



(Received 29 April 2020; accepted 29 September 2020; published 3 November 2020)

Turbulence has long been suspected to increase the evaporation rate of droplets via the convective effects it generates. The experimental data reported in this paper provide evidence of this increase and statistically quantify these effects. Ether droplets have been released in a quasi-isotropic homogeneous turbulence generated by synthetic jets and tracked using inline digital holography. Their Schmidt number is typically of the order of 2 and their Reynolds number is moderate ( $\leq 3$ ). Their instantaneous positions and diameters have been measured by processing the holograms with an inverse problem approach that has been implemented in Python language for a high-performance computer. This has allowed us to drastically reduce the processing time and to reconstruct a high number of trajectories for various turbulence conditions. The Lagrangian statistics computed from these trajectories, totaling 1.3 million samples, show that the relative mean motion and turbulence seen by the droplets on average increases their evaporation rate. Within the parameter range investigated, we find that this increase is not well predicted when estimating the convective effect in the Sherwood number with the norm of the instantaneous relative velocity seen by the droplets. In contrast, this increase is very well predicted when the Sherwood number is calculated using a Reynolds number based on the norm of the mean relative velocity plus its root-mean-square fluctuation.

DOI: [10.1103/PhysRevFluids.5.113602](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.113602)

### I. INTRODUCTION

Droplets evaporation occurs in numerous natural and industrial processes, covering a large variety of flow situations and scales (physics of clouds, atmospheric releases, spray dryers, agricultural spreading, motor engines...). In many situations the droplets vaporize in the turbulent gas flow carrying them, and the question that naturally arises is whether or not the turbulence increases the evaporation rate [1]. In the absence of turbulence the evaporation rate of individual droplets in quasistationary conditions obeys the well-known “ $d^2$ ” law and in that case, the square of the droplet diameter  $d$  decreases linearly with time [2]. The main parameters governing the evaporation rate are the temperature of the droplet and of the surrounding fluid, the mass fraction of vapor at the surface of the droplet and far away from it, and its velocity relative to the carrier mean gas flow (convective effect).

---

\*loic.mees@ec-lyon.fr

In a turbulent flow the droplets disperse spatially in time, which renders the heat and mass transfer with the gas flow much more complicated. By interacting with the turbulent eddies they cross, the droplets disperse following different trajectories [3,4]. As a result, the surrounding instantaneous velocity fluctuations, temperatures and vapor mass fraction that they “sample” along their trajectories and that are likely to affect the evaporation rate, will differ from one droplet to another. The evaporation rate of each droplet is thus linked to its history from its injection [5]. This history is all the more complex because the size of the droplets decreases along their trajectory. This in turn has an effect on the way they disperse, hence on the evaporation. Depending on their Stokes number (the dimensionless time response of the droplet to the typical timescale of the turbulent flow velocity fluctuation), droplets may concentrate in preferential regions and form clusters [4], which may reduce the evaporation rate [6]. Experimental evidence of this effect was recently reported by Sahu *et al.* [7], who clearly showed that the droplet clustering in an acetone droplet spray leads to a reduction of the droplet evaporation rate. Their results indicate that the reduction is caused by a decrease of the inter-droplet distance and the resulting enrichment of vapor from neighboring droplets. Moreover they find that the dispersion of acetone droplets is different from that of same diameter water droplets with a slower evaporation rate.

Faced with this complexity, we chose to investigate the coupling between turbulence and evaporation in a simple and academic situation. It consists of releasing a diluted spray of droplets in a homogeneous isotropic flow field produced by synthetic jets [8,9]. The droplets number density being low, no clustering effects are expected and we can focus on the role of the instantaneous relative velocities seen by the droplets on their evaporation rate. The fluid selected after preliminary tests with freon [9], is diethyl ether, which evaporates fast in the atmospheric conditions of temperature and pressure where we work. We adopted a Lagrangian point a view like in turbulent dispersion studies [3,10] that consists of tracking individual droplets and measuring the Lagrangian time evolution of their diameter along their trajectories. The tracking method that is used is inline digital holography because it provides information on size and position using a rather simple optical device [11–14]. To obtain the accuracy of position and diameter required for the study of evaporation, the holograms recorded are reconstructed using an “inverse problem approach” (IPA) algorithm [15–18] that differs from the standard back propagation reconstruction methods. Two sets of experiments were performed up to now, one without turbulence (free-falling droplets [19]) and one with turbulence (synthetic jets working [20]). This second experiment has shown that the Lagrangian evaporation rate that is quasi constant in the free falling situation, may fluctuate and sometimes strongly increases in the presence of turbulence. Unfortunately this was shown on a very limited number of trajectories so that no statistical quantitative conclusion could be drawn.

The objective of this paper is therefore to confirm these results by measuring the statistical Lagrangian evaporation rate for a large number of trajectories and for a wider range of turbulent flow conditions. This requires to handle two main difficulties: increasing the number of droplets imaged in the turbulence domain and decreasing drastically the processing time of the holograms. The first difficulty was solved by reducing the magnification of our holographic optical setup and optimizing the location of the droplets release. The second one was overcome by using parallel computing on a high-performance computer to process the holograms. The features of the experiments (turbulence flow, droplet injection, holographic optical setup and inverse-method used to process the holograms) have been detailed in our previous papers [9,19,20]. Thus, they will only be briefly presented, while we focus on improvements and new results. Section II provides some review of the experimental setup and procedures. It is followed by a section that describes how the hologram processing time was strongly reduced (Sec. III). The Lagrangian statistics are then reported and commented (Sec. IV). Within the range of parameter explored (Schmidt number  $\approx 2$ , droplets Reynolds number  $\leq 3$ ), they clearly show that the turbulence velocity seen by the droplets increase the evaporation rate. A formulation accounting for this effect in the frame of the film theory (Bird *et al.* [21], Abramzon and Sirignano [22]) is proposed and commented. The paper ends with a summary of the main findings.

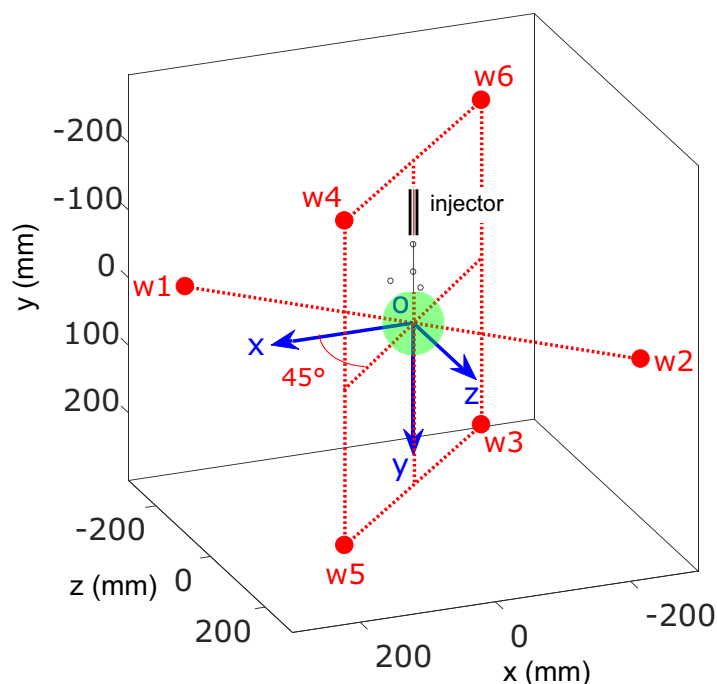


FIG. 1. Sketch of the woofers (red spheres) and of the holographic optical setup axes (blue axes); distance between woofers of each pair: 680 mm; the angle between each pair is  $90^\circ$ ;  $z$  is the optical axis of the inline holographic setup;  $y$ - $z$  are the two axes of the two-velocity component LDV system used to measure the velocity in the turbulence box; the green sphere represents the  $50 \text{ mm}^3$  turbulence box; the injector is positioned on the  $y$  axis.

## II. EXPERIMENTAL SET-UP AND PROCEDURES

A sketch of the experimental arrangement—woofers, holographic optical setup axes, and droplets injector—is displayed in Fig. 1.

### A. Turbulence characteristics

The turbulence is created by the meeting of three pairs of opposing synthetic jets produced by woofers, as described in Goepfert *et al.* [8]. This system generates a homogeneous, nearly isotropic turbulence whose properties are close to those of the “box of turbulence” imagined by Hwang and Eaton [23]. A similar system was operated some time ago in a four pair configuration by Lian *et al.* [24] with comparable turbulence characteristics and more recently in a quasi identical three pair configuration by Patel and Sahu [25]. The turbulence domain produced is a box of about  $50 \text{ mm}^3$ , located 340 mm from each woofer and centered on the stagnation point of the opposing jets. To obtain a good zero mean velocity within the box, this stagnation point must be stable, which requires balancing each pair of opposing jets at the center of the box. This is done by finely tuning the amplitude of the 50 Hz woofers sinusoidal driving signals using an iterative procedure. The balance is then kept in time by adjusting these amplitudes continuously so that the pressure signals of the sensors installed on each woofer exit remain constant within  $\pm 0.2\%$  standard deviation [20]. The level of turbulence within the box, and its characteristics scales are fixed by the amplitude of the sinusoidal driving signal. They are measured using two-velocity component laser Doppler velocimetry (LDV) and particle imaging velocimetry (PIV) following the procedure described in Chareyron *et al.* [9]. The experiments reported in Marié *et al.* [20] have been performed in turbulence with a mean flow velocity, root-mean-square (RMS) velocity fluctuations

TABLE I. Turbulence characteristics in Marié *et al.* [20].

Twice the kinetic energy $q^2(\text{m}^2\text{s}^{-2})$	Dissipation rate $\epsilon(\text{m}^2\text{s}^{-3})$	Taylor microscale $\lambda(\text{mm})$	Reynolds number $\text{Re}_\lambda$	Turnover time $T_E(\text{ms})$	Integral length scale $\Lambda(\text{mm})$	Kolmogorov	
						length scale $\eta_k(\text{mm})$	timescale $\tau_k(\text{ms})$
2.10	7.6	5.1	229	138	49	0.15	1.56

and an integral length scale of the order of  $0.03 \text{ ms}^{-1}$ ,  $0.8 \text{ ms}^{-1}$ , and  $49 \text{ mm}$ , respectively. Its characteristics are summarized in Table I. Here, the evaporation of ether droplets have been studied for the same conditions (two runs noted 1 and 2 for this reference situation), plus four other RMS turbulent velocities:  $0.2 \text{ ms}^{-1}$ ,  $0.4 \text{ ms}^{-1}$ ,  $0.6 \text{ ms}^{-1}$ , and  $1.0 \text{ ms}^{-1}$  (Table II), to quantify the influence of these turbulent velocities on the evaporation rate. The corresponding Reynolds number based on the Taylor microscale  $\text{Re}_\lambda$  were not systematically determined. However, referring to the results of Lian *et al.* [24] obtained with a similar system, we may expect  $\text{Re}_\lambda$  to vary between 50 and 250.

### B. Droplets injection

The droplets are generated by a piezoelectric MJ-AT-01 MicroFab Technologies jetting device, equipped with a  $60 \mu\text{m}$  orifice diameter glass capillary. The device was used in the “continuous jet-mode” in Marié *et al.* [20], whereas it is operated here in the “drop-on-demand mode,” as in Chareyron *et al.* [9], Marié *et al.* [19]. In this mode, the ether droplets are delivered by the contraction of the glass capillary at the selected piezoelectric frequency and their initial diameter is more stable and of the order of the orifice diameter [26,27]. The droplet exit velocity is also lower, of the order of  $1 \text{ ms}^{-1}$ , so that the injector can be positioned closer to the box of turbulence than with the “continuous jet-mode.” This allows the number of droplets entering the turbulence domain to be better controlled and thus, the number of droplets imaged inside it increases. Droplets are released above the turbulence box at a point on the vertical  $y$  axis (Fig. 1), but as illustrated in Fig. 2(a), many of them are expelled outside by the turbulence. Therefore, the injection distance from the center of the turbulence box (about  $25 \text{ mm}$ ) was adjusted to obtain a significant fraction of droplets entering the box. As noted in Chareyron *et al.* [9], turbulence slightly influences the size distribution at the exit of the orifice. This size that well peaked around  $60 \mu\text{m}$  without turbulence ranges between  $50\text{--}70 \mu\text{m}$  when the woofers are working. The number of droplets recorded within the turbulence on average per hologram never exceeds  $5\text{--}10$ , meaning that droplets are sufficiently sparse to consider

TABLE II. Flow conditions The time average velocities and fluctuations are those measured by LDV at the center of the domain.

Run	Ambient temperature $T^\infty(^\circ\text{C})$	Ambient relative humidity $R_h^\infty(\%)$	Average initial droplet diameter $\bar{d}_l(\mu\text{m})$	Average y velocity $\bar{U}_y(\text{ms}^{-1})$	Average z velocity $\bar{U}_z(\text{ms}^{-1})$	RMS	RMS	Twice the kinetic energy $q^2(\text{m}^2\text{s}^{-2})$
						y velocity fluctuation $\sqrt{u_y^2}(\text{ms}^{-1})$	z velocity fluctuation $\sqrt{u_z^2}(\text{ms}^{-1})$	
Free fall	25.0	36.1	41.7	–	–	–	–	–
RMS 0.2	28.0	32.9	71.1	0.04	0.01	0.21	0.21	0.13
RMS 0.4	28.1	33.2	66.6	0.13	–0.02	0.39	0.38	0.44
RMS 0.6	27.6	33.8	61.8	0.07	–0.10	0.58	0.60	1.05
RMS 0.8 <sup>1</sup>	27.0	35.0	59.5	–0.00	0.04	0.75	0.83	1.88
RMS 0.8 <sup>2</sup>	27.9	31.5	70.4	0.08	–0.03	0.80	0.80	1.92
RMS 1.0	27.6	34.0	65.8	–0.04	0.04	1.02	1.01	3.09



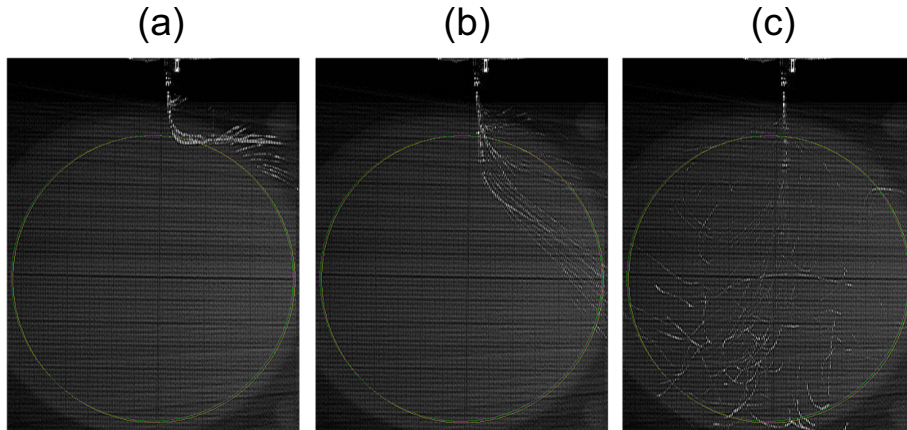


FIG. 2. A sequence illustrating the droplets jet behavior at the top of the turbulence box; the large circle materializes the edge of the turbulence box; the sequence was recorded with a 30 fps camera. (a) No entering, (b) partial entering, (c) full entering and dispersion.

that they evaporate without interaction. The fluid injected is diethyl ether manufactured by Sigma-Aldrich. It contains less than 0.1% residual water. Droplets are released at ambient temperature and pressure. Air temperature and relative humidity in the room are controlled with an air-conditioner and a dehumidifier, and measured for each run. Their values are reported in Table II. Despite our efforts to keep them constant, room temperature and relative humidity show small variations from one run to another. The effect of these variations on evaporation will be commented in the last section. Also, Table II provides the average initial diameter  $\bar{d}_I$  of droplets that are tracked in a run.

The droplets being smaller than in Marié *et al.* [20] due to the injection mode adopted, their time response  $\tau_d = \rho_e d^2 / 18 \mu_g^r$  to a sudden change in the surrounding velocity is between 7 and 14 ms, against 10–30 ms previously. As a result, their turbulent Stokes number  $\tau_d / \tau_\eta$  in the same turbulence condition (run RMS 0.8) is lower: between 4 and 9, against 7–20. The characteristic evaporation time  $\tau_{ev}$  of the droplet defined as  $\bar{d}_I^2 / K_s$ , with  $K_s = -\dot{d}^2$ , the surface evaporation rate is typically 120 ms. This time is of the same order of magnitude as the eddy turnover time  $T_E = 138$  ms for the reference turbulent flow conditions (RMS 08). The resulting Damkhöler number  $Da = T_E / \tau_{ev}$  is of the order of one, suggesting that we are in a situation where the turbulence can influence droplet evaporation [1].

### C. Digital holographic setup

Figure 3 provides a schematic of the inline holographic optical setup. The turbulence domain is illuminated by a laser beam (wavelength  $\lambda = 532$  nm) produced by a Nd:YVO4 solid laser Millennia II Spectra Physics. To improve the uniformity of the lighting, the beam at the laser exit is focused by a converging lens onto a pinhole placed at its focal lens  $f_1 = 25.4$  mm. Unlike in Marié *et al.* [20], where a divergent setup was used, the beam is then collimated toward the domain of measurement by a second lens placed at its focal lens  $f_2 = 400$  mm from the pinhole. This new setup allowed to image a larger part of the turbulence domain, which is essential to record longer trajectories and to increase the Lagrangian statistics. The imaged domain is a rectangular cuboid  $x \times y \times z$  of about  $16 \times 25.6 \times 50$  mm<sup>3</sup>, significantly larger than the previous one ( $10 \times 16 \times 50$  mm<sup>3</sup> in Marié *et al.* [20]). As shown in Chareyron *et al.* [9], the use of IPA to process the holograms enables to detect droplets outside of the field of view up to an effective cross size as large as  $42$  mm  $\times$   $40$  mm. This potential has not been used here because the thermal/vapour films created by evaporation around the droplets generate hologram modifications [28,29], which render the outfield detection more difficult and less accurate. The holograms of droplets are recorded at 6.2 kHz framerate on

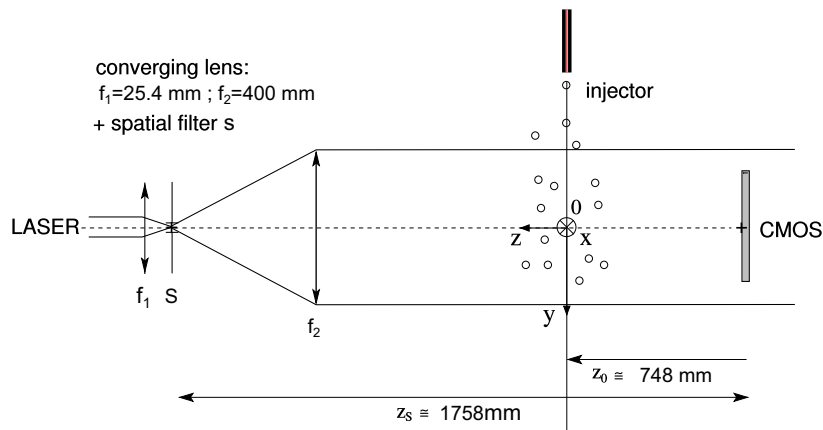


FIG. 3. Holographic optical setup. The coordinate axis are the same as in Fig. 1.

the  $800 \times 1280$  pixels CMOS sensor of a Phantom V611 camera, with pixels size of  $20 \mu\text{m}$  and a fill-factor of 0.56. The sensor is positioned at a distance  $z_0 = 748$  mm from the center of the turbulence domain ( $x = y = z = 0$ , Fig. 1). The magnification factor  $m$  of the collimated optical setup is nearly 1 (1.0013). It has been deduced from calibration by using a linear scale glass reticle (Edmunds Optics, #62 – 252), following the same procedure as described in Marié *et al.* [19].

### III. HOLOGRAM PROCESSING

#### A. Principle of the 3D droplet reconstruction with the IPA

The IPA was preferred to a standard back light propagation procedure to extract the coordinates and the diameter of the droplets. The reason is that it provides high accuracy on droplet position and size required to track them and to measure their evaporation rate at relatively large distances in a large measurement volume. The IPA for hologram reconstruction is described in Soulez *et al.* [15,16] and successfully applied to droplet tracking in Chareyron *et al.* [9], Marié *et al.* [19,20], Seifi *et al.* [28]. It consists of minimizing the root mean square difference between each recorded hologram and a model hologram. The model that describes a spherical droplet hologram at large distance with enough accuracy is the scalar diffraction model of an opaque disk with Fraunhofer approximation. It only depends on the diameter  $d_k$  and location  $x_k, y_k, z_k$  of the droplets [30]. Minimizing the difference is thus equivalent to find iteratively within a 4D search space, the set of parameters  $x_k, y_k, z_k, d_k$  producing the model hologram that best matches each individual droplet hologram in the image. In contrast to the classical back light propagation reconstruction process, the model hologram intrinsically takes into account truncation (finite size of the sensor) and low spatial resolution of the sensor (integration over a finite sized pixel), which are significant sources of error and lower accuracy of the measurements [17]. The accuracy of IPA for tracking droplets in the turbulence has been discussed in Chareyron *et al.* [9].

The vapor generated by the droplet evaporation induces refractive index gradients near the droplet surface [29] that are not taken into account in the diffraction model. To avoid any measurement inaccuracy associated with these gradients, the central part of each individual droplet hologram is masked as described in Seifi *et al.* [28], so that this part of the image is ignored from the fitting procedure. Here, the circular mask radius has been set to 75 pixels, to remove the three first fringes which have been proven to be the most sensitive to the presence of vapor [29]. Figure 4 provides an illustration of the hologram processing. An example of hologram with three evaporating droplets diffraction patterns after a background correction is given in Fig. 4(a). Its processing with the IPA and the mask method yields the best fit synthetic hologram displayed in Fig. 4(b). The residual obtained by subtracting the best fit hologram from the experimental one in Fig. 4(c) materializes

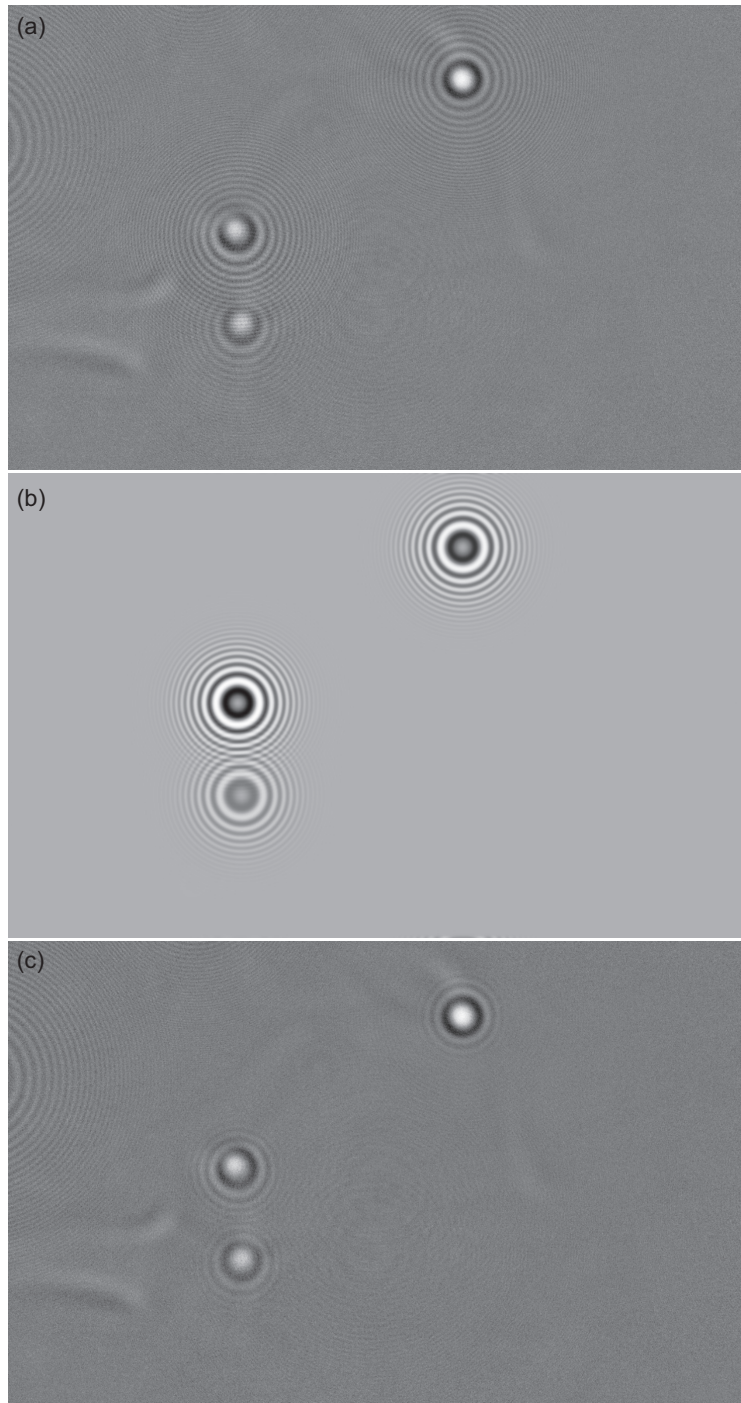


FIG. 4. Inline hologram of three evaporating droplets. The recorded hologram (a) after background correction is compared to the synthetic hologram that best matches it (b) and to the residual (c) obtained by subtracting the best fit hologram from the recorded hologram.

the modification of the first fringes by the vapor that is not included in the diffraction model. Signal integration over the effective pixel area (the fill factor of the sensors' pixels is 0.56) is taken into account in the model holograms. The initial guess on parameters  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $d$  required as input for the IPA process is obtained by a preprocessing based on the correlation product between the experimental hologram and the model with sampled values of  $z$  and  $d$  (typically  $31 \times 6$ ),  $z$  ranging from 0.3 to 0.8 m and  $d$  ranging from 5 to 200  $\mu\text{m}$ . The maximum of correlation provides the initial guess for the droplet parameters and the IPA process provides the accurate final estimations. At this step, the model diffraction pattern computed from the parameters final estimations is subtracted from the experimental hologram to allow the next droplet detection and measurement following an optimal iterative process (greedy algorithm).

### B. Description of the fast 3D reconstruction and droplets tracking

To track the droplets, sequences of about 0.9 s (5477 frames) were recorded on the high speed sensor and processed. For each hologram of a given sequence, diffracting objects were detected and the four parameters ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $d$ ) characterizing them were measured. The concentration of droplets being low, their tracking from frame to frame was achieved by using a simple 4D nearest-neighbor algorithm. Several trajectories are generally reconstructed from each hologram sequence but some of them are too short to be analysed and to extract statistically relevant measurements. This is the reason why only the trajectories longer than 200 frames ( $\approx 32$  ms) were kept. Also, this selection makes it possible to detect and delete the trajectories of solid particles inside the turbulence domain (less than 4%) and residual water drops, whose sizes remain almost constant over time. These drops are constituted by the water of the humid air that condensed on the cold ether droplets surface (temperature between  $-10^\circ\text{C}$  and  $-15^\circ\text{C}$ ) during their fast vaporization and that remains after all the ether vaporized [19].

The main limitation of holography is the processing time, especially when IPA is adopted. Here, the CPU time required to process a single hologram containing 10 droplets is about 10 min. Each hologram sequence of 0.9 s (5477 frames) then requires a thousand of hours on a single CPU unit. The 554 sequences recorded for our statistics thus represent more than 3 million holograms that would require 57 years to be processed on a single CPU. This limitation has been pushed back by implementing the processing code in Python language for a high-performance computing (HPC) system, reducing the effective computing time to about 1 day per sequence when a single node with 32 cores is used. Another source of time consumption are the empty frames that may occur in hologram sequences. In free falling conditions, all frames contains droplets holograms [19]. This is no longer the case when a low number density of droplets disperse in the turbulence. In Marié *et al.* [20] the parts of the sequences containing droplets were manually selected to focus only on the longest and most interesting trajectories. Here, to fasten the computation while preserving the process from any operator dependency, a preprocessing based on the reduction of hologram resolution has been implemented. This technique is inspired from the multi-resolution approach proposed by Seifi *et al.* [31] to accelerate the hologram processing with IPA. The spatial resolution was reduced by a factor 4 along  $x$  and  $y$  by using a binning process on the holograms and the temporal resolution was reduced by the same factor, i.e., selecting one in four images. All the droplets trajectories are detected and roughly characterised from the low resolution holograms in about one hour, allowing the selection of the useful frames to be processed with full resolution. The total gain obviously depends on the percentage of images kept for full processing. For the sequences processed for this paper, this percentage varies from 44% to 78%, leading to an average gain in time of 43%. Finally, the total CPU time used for this study was about 350 000 h, spread out onto different nodes of 32 or 16 cores.

## IV. LAGRANGIAN STATISTICS

The total number of trajectories that have been reconstructed to build our Lagrangian statistics is 4337, representing 1 347 960 time samples. Each trajectory provides the time evolution of the

TABLE III. Droplets and relative velocity components, average values and standard deviations.

Run	$\overline{U}_x$	$\overline{U}_y$	$\overline{U}_z$	$\sqrt{\overline{u}_x^2}$	$\sqrt{\overline{u}_y^2}$	$\sqrt{\overline{u}_z^2}$	$\overline{U}_{rx}$	$\overline{U}_{ry}$	$\overline{U}_{rz}$	$\sqrt{\overline{u}_{rx}^2}$	$\sqrt{\overline{u}_{ry}^2}$	$\sqrt{\overline{u}_{rz}^2}$
Free fall	-0.012	0.104	0.014	0.023	0.058	0.028	0.004	0.004	-0.004	0.014	0.028	0.04
RMS = 0.2	0.024	0.238	0.028	0.104	0.179	0.173	0.002	-0.09	0.011	0.029	0.081	0.118
RMS = 0.4	0.018	0.306	0.16	0.163	0.303	0.237	-0.015	-0.12	0.015	0.053	0.106	0.161
RMS = 0.6	-0.035	0.388	0.027	0.228	0.307	0.331	-0.016	-0.087	0.009	0.08	0.094	0.157
RMS = 0.8 <sup>1</sup>	-0.021	0.402	-0.025	0.263	0.354	0.415	-0.005	-0.093	0.017	0.107	0.128	0.163
RMS = 0.8 <sup>2</sup>	-0.016	0.363	-0.053	0.266	0.387	0.429	-0.008	-0.156	0.018	0.144	0.198	0.293
RMS = 1.0	-0.056	0.339	-0.082	0.278	0.455	0.459	-0.015	-0.145	-0.01	0.145	0.203	0.225

three spatial coordinates  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  and the diameter  $d(t)$  of the droplet. The velocities and accelerations of the droplet along the track have been computed by differentiating the droplet coordinates, once and twice, respectively, after applying a Gaussian filter in frequency domain of the form

$$G(\nu) = e^{-\nu^2/2\nu_c^2}$$

to reduce noise effects. This kind of filtering is currently used in tracking techniques [32] to reduce the noise that results when differentiating positions to obtain velocities and accelerations. With inline holography, it also allows to decrease the uncertainty on the depth position to a value approaching that of the lateral directions, as explained in Chareyron *et al.* [9]. The cutting frequency of the Gaussian filter that has been selected is  $\nu_c = 75$  Hz. It is of the same order of magnitude as the inverse of the time response of the droplets investigated in this study. It turns out a good compromise to efficiently filters the noise while respecting the droplets dynamics. The instantaneous evaporation rate has been computed by differentiating the diameter square  $d^2(t)$ , after applying the same Gaussian filter.

The Lagrangian instantaneous relative velocity along the droplet trajectory involved in the convective effect is defined as  $\mathbf{U}_r = \mathbf{U}_d - \mathbf{U}$ , with  $\mathbf{U}_d$  the droplet velocity and  $\mathbf{U}$  that of the surrounding gas velocity. This relative velocity cannot be directly measured with the holographic setup. However,  $\mathbf{U}_r$  can be reasonably well inferred from droplet position and diameter measured by digital holography, via the equation of motion of the droplet [9]. It consists in finding at each time step the relative velocity that is consistent with the positions and diameters measured by holography, as predicted by this equation. The relevancy of the Lagrangian relative velocity thus calculated is based on the fact that the components of this velocity are aligned with the vapor wake visible behind each droplet holograms [9,20].

The probability density functions (PDFs), the average, and the standard deviation of the quantities relevant for the study, namely, the droplet velocity and acceleration components, the relative velocity components, and the instantaneous evaporation rate, have been calculated for each of the flow conditions investigated (Table II). Each quantity  $Q$  is decomposed into the sum of a mean value  $\overline{Q}$  and a fluctuation  $q$ , where  $\overline{Q}$  designates the statistical average over all the samples of a given flow condition (number of trajectories  $\times$  number of points per trajectory). The RMS value of the fluctuation is noted  $q' = \sqrt{q^2}$ .

## A. Results

Figure 5(a) shows that the PDFs of the normalized droplet velocity components obtained for a high  $Re_\lambda$  conditions (RMS 0.8<sup>1</sup>) are almost Gaussian, with standard deviations which are relatively close to each other (Table III). However, the mean velocity in  $y$  direction is not as small as in other directions, as expected in a quasi-isotropic homogeneous turbulence with zero mean flow. The reason is that droplets are released at the top of the turbulence box and that they can enter the box when the turbulent flow facing them is not too strong or oriented downward [see Fig. 2(c)].



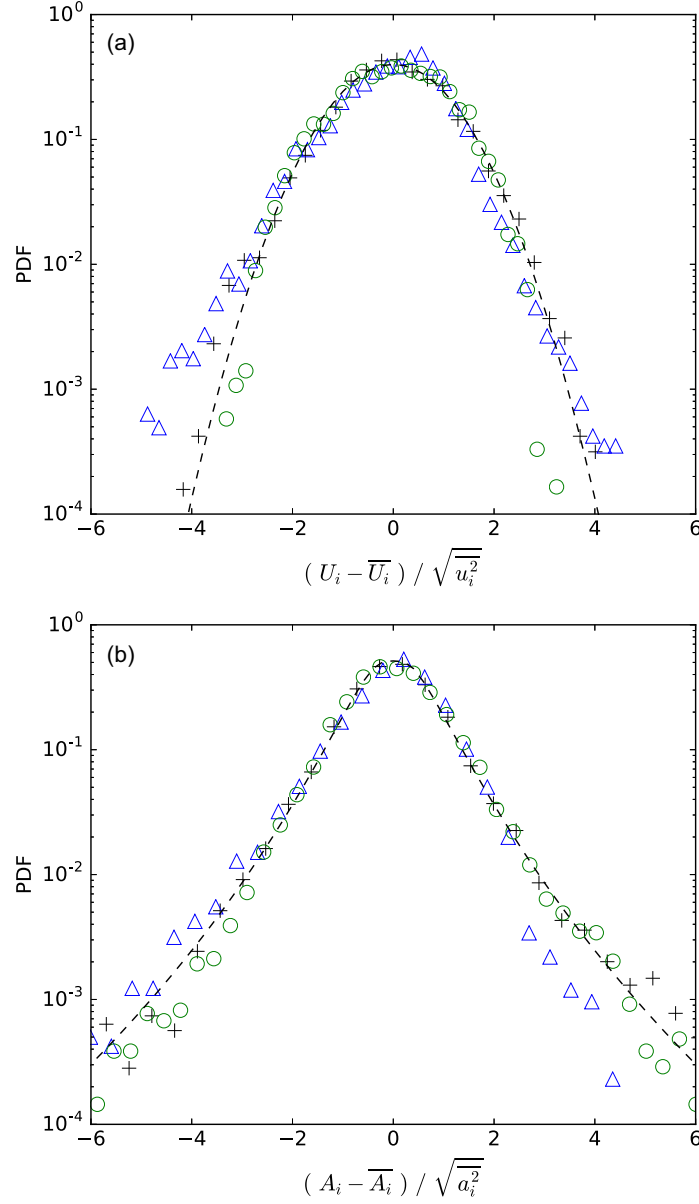


FIG. 5. Probability density functions of (a) the normalized droplets velocity components, +: x direction,  $\Delta$ : y direction,  $\circ$ : z direction, dashed line: normal distribution; (b) the normalized acceleration components, same symbols and colors, dashed line: Eq. (1) with  $s = 0.62$ .

This nonisotropic injection condition also slightly modifies the shape of the y velocity component PDF and explains the small asymmetry in Fig. 5(a). The PDFs of the acceleration components are presented in Fig. 5(b). As can be seen, the three components normalized by their RMS values superpose rather well. Their shape resembles the ones reported for fluid particles at this  $Re_\lambda$  by Mordant *et al.* [32], Voth *et al.* [33] and agree well with the statistical distribution found by these authors for the normalized acceleration components:

$$P(x_i) = \frac{e^{3s^2/2}}{4\sqrt{3}} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\ln(|x_i|/\sqrt{3}) + 2s^2}{\sqrt{2}s} \right) \right]. \quad (1)$$

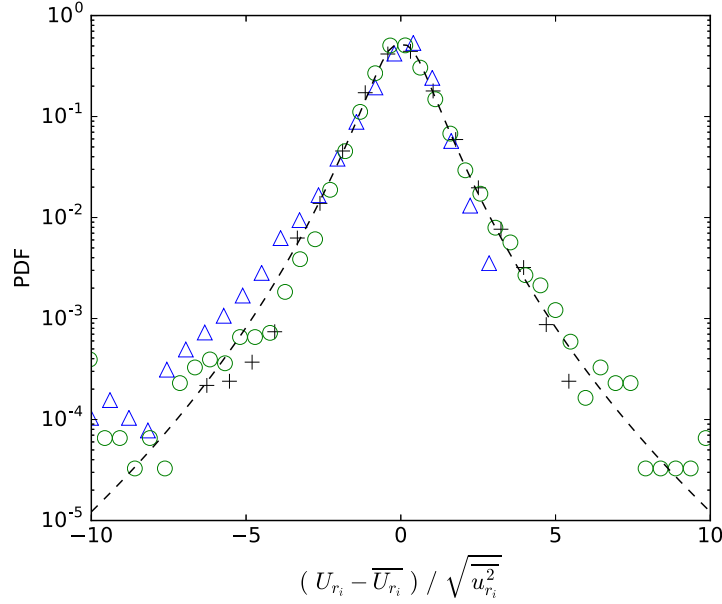


FIG. 6. Probability density functions of the normalized relative velocity components. +:  $x$  direction,  $\Delta$ :  $y$  direction,  $\circ$ :  $z$  direction, dashed line: Eq. (1) with  $s = 0.62$ .

This distribution supposes that components are isotropic and that the magnitude is log-normal.  $s$  is a parameter related to the global shape of the PDF [34]. A close agreement with our data has been obtained taking  $s = 0.62$ . This value turns to be the best-fit value found by Qureshi *et al.* [35] for inertial particles over a wide range of sizes and densities and with Stokes number between 1 and 40. This result is even more interesting since in our case the Stokes number of evaporating droplets varies in time. Compared to the measurements of these authors, the tails of the statistics distribution do not extend very far, the main reason being that the scarce strong events whose probability is smaller than  $10^{-3}$  can hardly be measured in our experimental conditions [9]. The average and standard values of the droplets velocity components for the other RMS turbulence values are reported in Table III.

The PDFs of the normalized relative velocity components, inferred from the equation of motion for the run RMS 0.8<sup>1</sup> are plotted in Fig. 6. Again, the three components superposes rather well, with a better symmetry in  $x$  and  $z$  directions, as expected due to our injection conditions. As noted in Table III,  $\overline{U_{rx}}$  and  $\overline{U_{rz}}$  are close to zero while  $\overline{U_{ry}}$  is slightly negative. These trends are observed for the other RMS turbulent velocities and reflect the non isotropic character of the injection. It confirms that droplets on average enter the domain when the turbulent velocity is oriented downward and is higher than the droplet velocity. The standard deviations in the three directions are relatively close to each other and on average smaller than those of the droplet velocity components. The shape of these PDFs in the  $x$  and  $z$  directions turns out to be similar to the one observed for the droplets acceleration components.

Finally, Fig. 7 shows the PDFs of the evaporation rate  $K_s$  for the various RMS turbulent velocities. Under their non-normalized form [Fig. 7(a)], we note that both the average and the RMS fluctuation of the evaporation rate tend to increase with the RMS turbulent velocity, but that this increase is not monotonic. This is confirmed in Table IV where the corresponding values are reported. As explained in the next section, the reason of this behavior is that  $K_s$  is influenced both by the mean and the fluctuating relative velocity seen by the droplets and that these quantities do not always increase monotonically with the RMS turbulent velocity. Under their normalized

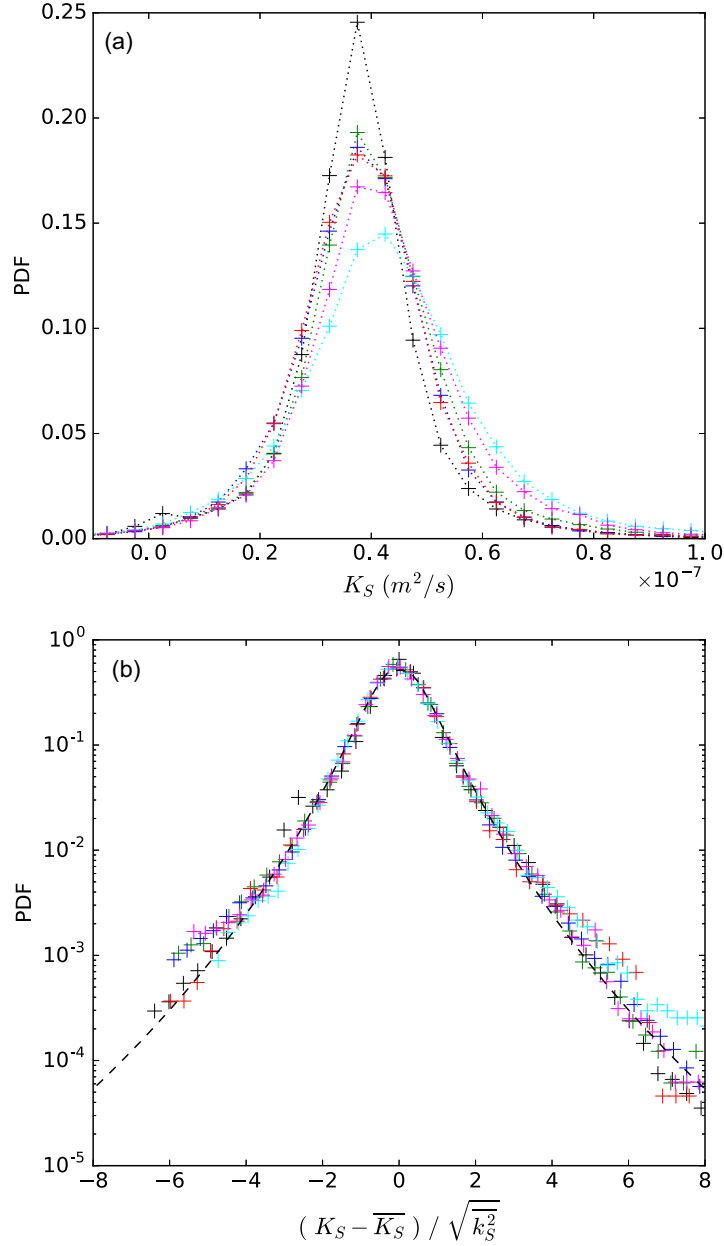


FIG. 7. Probability density function of evaporation rate  $K_S$  (a) and normalized evaporation rate (b) for the runs RMS 0.2 (+), RMS 0.4 (+), RMS 0.6 (+), RMS 0.8<sup>1</sup> (+), RMS 0.8<sup>2</sup> (+), RMS 1.0 (+). The black dashed line is the PDF of Eq. (1) with  $s = 0.62$ .

form [Fig. 7(b)] all these PDFs collapse fairly well onto a single distribution. Interestingly, the shape of this distribution is the same as the one of the PDFs of the droplet normalized acceleration components.

### B. Statistical turbulent convective effect

Without turbulence (Marié *et al.* [19]), we have shown that the Lagrangian evaporation rate of ether droplets is quasi constant like in a classical “ $d^2$ ” law. This was validated by a simple model,



TABLE IV. Mean Lagrangian statistics.

Run	Ambient temperature $T^\infty$ (°C)	Ambient relative humidity $R_h^\infty$ (%)	Average initial droplet diameter $\bar{d}_i$ (μm)	Average relative velocity $\bar{U}_r$ (ms <sup>-1</sup> )	RMS relative fluctuation $\sqrt{u_r^2}$ (ms <sup>-1</sup> )	Average evaporation rate $\bar{K}_s$ (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	RMS evaporation fluctuation $\sqrt{k_s^2}$ (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	Average Reynolds number $\bar{Re}_d(U_r)$
Free fall	25.0	36.1	41.8	0.011	0.010	$3.13 \times 10^{-8}$	$5.11 \times 10^{-9}$	0.03
RMS 0.2	28.0	32.9	71.1	0.124	0.119	$3.74 \times 10^{-8}$	$1.34 \times 10^{-8}$	0.64
RMS 0.4	28.1	33.2	66.6	0.178	0.152	$3.98 \times 10^{-8}$	$1.55 \times 10^{-8}$	0.86
RMS 0.6	27.6	33.8	61.8	0.178	0.126	$3.80 \times 10^{-8}$	$1.49 \times 10^{-8}$	0.77
RMS 0.8 <sup>1</sup>	27.0	35.0	59.5	0.207	0.143	$3.84 \times 10^{-8}$	$1.46 \times 10^{-8}$	0.85
RMS 0.8 <sup>2</sup>	27.9	31.5	70.4	0.333	0.244	$4.30 \times 10^{-8}$	$1.96 \times 10^{-8}$	1.67
RMS 1.0	27.6	34.0	65.8	0.309	0.197	$4.18 \times 10^{-8}$	$1.72 \times 10^{-8}$	1.40

in which the transfers between the droplets and the surrounding gas are expressed in the frame of the film theory (Bird *et al.* [21], Abramzon and Sirignano [22]). All processes in this model are supposed to be quasisteady, and the thermal and mass concentration boundary layers developing around the droplets are modeled by two spherical films, whose thicknesses account for the Stefan flux and the convective effects of the external flow. The corresponding Lagrangian mass evaporation rate is given by

$$\dot{m}_e = \frac{dm_e}{dt} = \pi \rho_g d D_e \log(1 + B_M) \text{Sh}_F, \quad (2)$$

where  $D_e$  is the mass diffusivity of the Diethyl Ether vapor in the air,  $\rho_g$  the surrounding gas film density,  $B_M$  and  $\text{Sh}_F$  the Spalding and the convective Sherwood numbers, respectively. The Spalding number, expressed as  $(Y_e^s - Y_e^\infty)/(1 - Y_e^s)$ , is calculated by taking the vapor mass fraction at the surface droplet  $Y_e^s$  under the saturation conditions corresponding to droplet temperature  $T^s$ . The vapor fraction far away from the droplet  $Y_e^\infty$  is assumed to be constant, equal to zero, which is justified by the fact that droplets are very diluted. The convective Sherwood number  $\text{Sh}_F$  is determined by

$$\text{Sh}_F = 2 + \frac{\text{Sh}_0 - 2}{F_M(B_M)}, \quad (3)$$

where  $\text{Sh}_0$  is the Sherwood number for a nonvaporizing sphere and  $F_M$  a factor that accounts for the blowing of the vapor film caused by the Stefan flow (Abramzon and Sirignano [22]). The Reynolds numbers of the droplets in our experiment being low, typically  $\text{Re}_d < 10$ ,  $\text{Sh}_0$  is estimated by using the Clift correlation (Clift *et al.* [36]):

$$\text{Sh}_0 = 1 + (1 + \text{Re}_d S_{cg})^{\frac{1}{3}} f(\text{Re}_d), \quad (4)$$

where  $f(\text{Re}_d)=1$  for  $\text{Re}_d \leq 1$ ,  $f(\text{Re}_d) = \text{Re}_d^{0.077}$  for  $1 < \text{Re}_d \leq 400$  and  $S_{cg}$  stands for the Schmidt number of the surrounding gas film. The thermophysical average properties in the gas film around the droplet are calculated at a temperature and a vapor mass fraction of reference, based on the so-called 1/3 law (Hubbard *et al.* [37], Yuen and Chen [38]):

$$T^r = \frac{2}{3}T^s + \frac{1}{3}T^\infty; \quad Y_e^r = \frac{2}{3}Y_e^s. \quad (5)$$

The gas in the film around the droplet is considered as a mixture of the humid air of the room and the vapor of diethyl ether. The Reynolds number  $\text{Re}_d$  used in Eq. (4), is the one based on the viscosity  $\mu_g^r$  of the gas film around the droplet in the reference conditions, and the density of humid air at

infinite  $\rho_{\text{ha}}^\infty$ :

$$\text{Re}_d = \frac{\rho_{\text{ha}}^\infty |\mathbf{U}_d - \mathbf{U}| d}{\mu_g^r} \quad (6)$$

In the absence of turbulence, the surrounding gas velocity  $\mathbf{U} \approx \vec{0}$  and taking the instantaneous values of  $\mathbf{U}_d$  measured along the trajectory by holography yields a quasilinear “ $d^2$ ” law that reproduces well the experimental “ $d^2$ ” Lagrangian evolution. As already noted, diethyl ether vaporizes very fast, which cools the humid air around the droplets and causes its condensation at their surface. The water mass condensation rate  $\dot{m}_w$  was therefore included in the model to account for this effect. With turbulence (Marié *et al.* [20]),  $\mathbf{U}$  being not null, we used for  $\mathbf{U}_d - \mathbf{U}$  the instantaneous relative velocity  $\mathbf{U}_r$  seen by the droplets along their trajectories and inferred from our holographic measurements. The implementation of this instantaneous velocity in the convective term [Eqs. (3) and (4)] was shown to reproduce rather well the measured evaporation rates for certain of the ten droplets trajectories reported, but to greatly underestimate these rates for the three of them where droplets were submitted to intense variations of the relative velocity. These results suggest that the turbulence seen by the droplets influence their evaporation and that the convective effects induced by this turbulence are not always well predicted by considering the dependency on the instantaneous relative velocity alone. We will now examine whether these trends are confirmed by the present statistics. The PDFs and statistics on a large number of samples presented in Fig. 7(a) and in Table IV clearly show that increasing the turbulence contributes to the increase of the mean evaporation rate and the occurrence of high evaporation rates relative to this mean. Compared with our previous study, droplets diameter and thus Stokes numbers are smaller (Sec. II B). Their Reynolds numbers are also typically lower:  $\text{Re}_d \leq 3$ , against 1-20 in the previous flow situation, meaning that convective effects induced by the turbulence are also lower.

Running the model with  $T^\infty$ ,  $R_h^\infty$ ,  $\bar{d}_l$ , and the statistical Lagrangian velocities of Table IV as input, indicates that whatever the turbulent flow conditions,  $S_{c_g}$  lies between 1.8 and 1.9,  $B_M$  between 0.41 and 0.43 and  $F_M(B_M)$  is close to 1.07. It means that the convective Sherwood number  $\text{Sh}_F$ , as defined by Eqs. (3) and (4), essentially depends on  $\text{Re}_d$ . The surface evaporation rates  $K_s = -\dot{d}^2$  can therefore be written in the form

$$K_s = K_{s_0} \text{Sh}_F(\text{Re}_d), \quad (7)$$

where  $K_{s_0} = 4 \frac{\rho_s}{\rho_e} D_{ve} \log(1 + B_M)$  is almost constant for a given turbulent flow condition. The resulting mean Lagrangian evaporation rate, calculated over all the samples corresponding to one turbulent condition, is expressed as

$$\bar{K}_s = K_{s_0} \overline{\text{Sh}_F(\text{Re}_d)}. \quad (8)$$

Figure 8 compares the mean statistical experimental evaporation rate  $\bar{K}_s^{\text{exp}}$  reported in Table IV (black circles) with the mean evaporation rate  $\overline{K_s(U_r)}$  calculated with the norm  $U_r$  of the instantaneous relative velocity (red solid line). The small experimental increase observed for  $\overline{\text{Re}_d} = 0.85$  is principally linked to the 1 degree temperature difference between runs RMS 0.4 and 0.8 and gives an order of magnitude of this effect on our measurements. Note that humidity rate also varies between the two runs, but the effect of these variations is much weaker. We see that, whatever the mean relative Reynolds number  $\overline{\text{Re}_d}$ , the model captures well this temperature effect but substantially underestimates the whole experimental data. Also, we note that  $\overline{K_s(U_r)}$  is very close to the mean evaporation rate  $\overline{K_s(\bar{U}_r)}$  (red triangles) that is obtained with the mean Lagrangian relative velocity ( $|\mathbf{U}_d - \mathbf{U}| = \bar{U}_r$ ). The fact that  $\bar{K}_s^{\text{exp}} > \overline{K_s(\bar{U}_r)}$  and that  $\overline{K_s(U_r)} \approx \overline{K_s(\bar{U}_r)}$  indicate that the relative velocities fluctuations statistically contribute to increase the average convective effect and that this increase is not taken into account with  $|\mathbf{U}_d - \mathbf{U}| = U_r$  in Eq. (6). The parameter that quantifies the strength of these relative velocities fluctuations is the RMS turbulent velocity  $u'_r$ . So we can expect that this turbulent velocity, added to the mean relative velocity, generates an additional turbulent

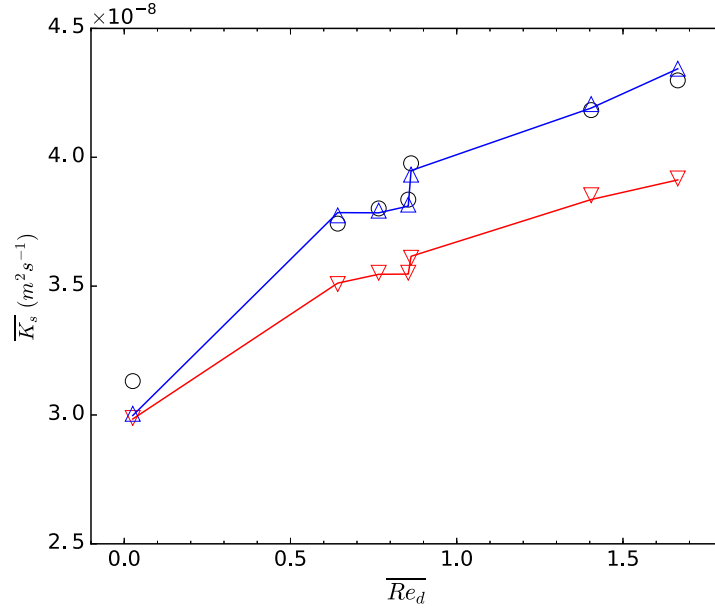


FIG. 8. Mean statistical Lagrangian surface evaporation rate as a function of the mean Reynolds number based on the instantaneous relative velocity.  $\circ$ : measurements, red solid line: calculation with  $|\mathbf{U}_d - \mathbf{U}| = U_r$ ;  $\nabla$ : calculation with  $|\mathbf{U}_d - \mathbf{U}| = \overline{U}_r$ ;  $\triangle$ : calculation with  $|\mathbf{U}_d - \mathbf{U}| = \overline{U}_r + u'_r$ ; blue solid line: calculation with Eq. (9).

convective effect that increases the average evaporation rate. To see whether this could explain the difference between  $\overline{K}_s^{\text{exp}}$  and  $\overline{K}_s(U_r)$ , we have calculated the mean evaporation rate that would result from the mean relative velocity plus the relative fluctuations strength:  $|\mathbf{U}_d - \mathbf{U}| = \overline{U}_r + u'_r$ . The results thus obtained (blue triangles) exhibit excellent agreement with the experimental data, confirming the above statement. We deduce that to agree with the Lagrangian statistics, the effective Reynolds number to be considered in the convective term for the simulation is

$$\text{Re}_d^{\text{turb}} = \text{Re}_d(U_r) \left( 1 + \frac{u'_r}{\overline{U}_r} \right), \quad (9)$$

where the second term in parenthesis quantifies the importance of  $u'_r$  relative to  $\overline{U}_r$ . This leads to an evaporation rate in Fig. 8 (blue solid curve) that on average well reproduces the experimental data.

These findings statistically validate what was suspected in Marié *et al.* [20], namely that the convective term is not accurately predicted by the film model, even when the norm of the instantaneous relative velocity is considered. The reason is that the modeling is based on quasisteady assumptions and mean values of heat/mass coefficients within boundary layers Clift *et al.* [36] that can hardly capture the disturbances generated by the turbulence. This turbulence induces changes in norm and direction of relative velocity which may be rapid as illustrated in Marié *et al.* [20], forcing the thermal and mass boundary layers to continuously reorient with the flow. This likely affects the transfers inside the boundary layers (Kleis and Rivera-Solorio [39], Sirignano [40]) and contributes to the evaporation enhancement. In this respect the formulation of Eq. (9), although empirical, turns out to be the simplest approach to include the statistical turbulence effects in the film model. This approach is shown to work well over the range of parameter investigated here: Schmidt number  $\approx 2$  and droplets Reynolds number  $\leq 3$ . This range of parameter is obviously too restricted to conclude whether Eq. (9) can be used for more general flow conditions, at high Reynolds numbers in particular. Investigating these high Reynolds number conditions would require to inject larger droplets. But larger droplets trajectories are closer to ballistic and there residence time in the box

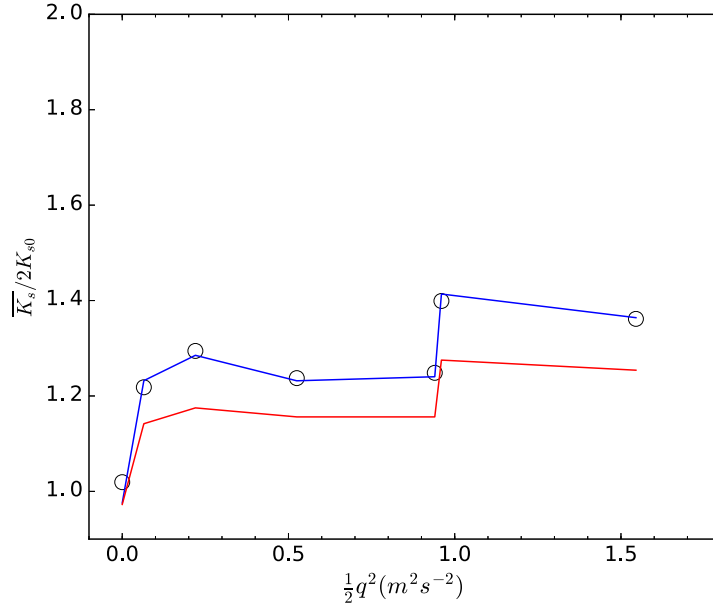


FIG. 9. The mean statistical Lagrangian evaporation rate  $\overline{K_s}$  normalized by the value without convective effect  $2K_{s,0}$  as a function of the box turbulent kinetic energy.  $\circ$ : measurements; blue line:  $\overline{K_s}$  calculated with Eq. (9); red line:  $\overline{K_s(\overline{U_r})}/2K_{s,0}$ .

is often too short to observe significant effect and to obtain reliable Lagrangian statistics. Also the fluids tested must vaporize very quickly which restrains the Schmidt number range allowed in this study. Despite these limitations, our results show that the turbulence in the box increases the mean evaporation rate via the  $\overline{U_r}$  and  $u'_r$  it generates at the droplets scale. However, the increase of the evaporation rate with the box turbulence is not monotonic. The reason is that  $\overline{U_r}$  and  $u'_r$  don't monotonically increase with the RMS turbulent velocity produced by the woofers (see Tables II and IV). This is attributed to the fact that injection conditions, like the initial droplet diameter, the velocity and the turbulence level at the injector exit, may differ from run to run. This is, for example, the case of the two runs RMS 0.8<sup>1</sup> and 0.8<sup>2</sup> where diameters are 59.5 and 70.5  $\mu\text{m}$ , respectively. These differences might influence the way the droplets respond to turbulence and explain the trends that are observed. To quantify the effect of the box turbulence on evaporation, the mean evaporation rate  $\overline{K_s}$  normalized by its value without convective effect  $2K_{s,0}$  has been plotted versus the turbulent kinetic energy  $0.5q^2$  in Fig. 9. We see that this normalized mean evaporation rate which is close to 1 for the free falling situation, increases with the turbulent kinetic energy up to 1.4 for the runs RMS 0.8<sup>2</sup> and RMS 1.0, representing an increase of 40%. The part of this percentage due to  $\overline{U_r}$  and represented by  $\overline{K_s(\overline{U_r})}/2K_{s,0}$  in the figure is about 30%. Although substantial, these increases are small in comparison with the experiments with droplets suspended in box of turbulence [1,25,41]. This comes from the nature of the fluids investigated in these experiments (usual fuels) and of their physical properties which are different, with an impact on the Schmidt and Damkhöler numbers. But more importantly, droplet diameters are generally greater (1.5-2 mm), resulting in turbulent Reynolds number of the order of 50–100 and much higher convective effects. Moreover being immobilized, droplets are submitted to stronger relative turbulent velocities at the same equal turbulent kinetic energy.

## V. SUMMARY OF THE MAIN FINDINGS

These experiments have been performed with the objective to statistically confirm our previous findings [20], and to check whether ether droplets released in a quasi-isotropic homogeneous

turbulence with zero mean flow, on average, vaporize faster than in free falling conditions. To this end, Lagrangian statistics were computed on a large amount of trajectories representing about 1.3 million samples and covering various RMS turbulent velocities between 0.2 and 1.0  $\text{ms}^{-1}$ . The instantaneous droplets coordinates and diameter constituting each trajectory were measured from sequences of digital holograms processed with an IPA. The time required to process the 554 sequences recorded for our statistics, and estimated to 57 years on a single CPU, has been drastically reduced to allow this study. This was made possible by implementing the IPA code in Python language for a high-performance computing system and running the code on various nodes of 16 or 32 cores within a few weeks.

The statistics on the droplets dynamics show that for high turbulence velocity fluctuations (0.8  $\text{ms}^{-1}$ ) and high  $\text{Re}_\lambda$ , the PDFs of the three normalized droplets velocity components superpose rather well onto a Gaussian distribution, with however a small asymmetry and a slightly higher mean velocity in the vertical direction. The reason is that droplets released at the top of the turbulence box enter the box when turbulence is preferentially oriented downward. The PDFs of their 3 normalized acceleration components also superposes rather well. Their shapes resembles the ones found for inertial particles by Qureshi *et al.* [35] and are in close agreement with the statistical distribution proposed by these authors, taking the same global parameter shape  $s = 0.62$ . The instantaneous relative velocity seen by the droplets was inferred, like in our previous works [9,20], from the droplet trajectories measured by holography, via the equation of motion. This relative velocity is on average vertical as expected with our injection conditions, with RMS fluctuations in the three directions close to each other, reflecting a certain isotropy of the fluctuating relative motion. The PDFs of the three normalized relative velocity components exhibit a shape similar to the one observed for the droplets acceleration components.

Regarding the evaporation rate, the statistics indicate that the mean Lagrangian evaporation rate increases with the mean and fluctuating relative velocity seen by the droplets. The latter two quantities are found to increase with the box RMS turbulent velocity. However this increase is not strictly monotonic which is attributed to variations in injection conditions. Results were confronted to the predictions of the simple evaporation film model proposed and tested in Marié *et al.* [19]. The use of the instantaneous norm of the relative velocity to estimate the convective effects in the Sherwood number yields predictions that significantly underestimate the measured mean Lagrangian evaporation rate. This validates what was assumed in Marié *et al.* [20] and shows that the model cannot capture the kinematic, thermal, and mass transfers disturbances induced by the turbulence at the droplet surface when using only this norm. In contrast, an excellent agreement with the data is obtained when the Sherwood number is calculated from a Reynolds number based on the norm of the mean relative velocity plus its RMS fluctuation. Adding this RMS fluctuation is thus a simple empirical formulation to correct the film model and to account for the evaporation enhancement caused by the turbulence. This formulation works well within the parameter range explored here: Schmidt number  $\approx 2$ , Reynolds number  $\leq 3$ . Further investigations would be necessary to test its possible validity for other flows situations, at higher Reynolds numbers in particular. The evaporation rates measured for the strongest turbulence levels, (turbulent velocities between 0.8 and 1  $\text{ms}^{-1}$ ) prove to be 40% higher than the one in free falling conditions. We conclude that the effect of turbulence on the droplet evaporation via the convective effects it generates at the droplet scale is substantial.

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was granted access to the HPC resources of the PMCS2I-FLMSN, Fédération Lyonnaise de Modélisation et Sciences Numériques. The authors express their gratitude to Anne Cadiou and Laurent Pouilloux for their technical assistance.

- [1] M. Birouk and I. Gökalp, Current status of droplet evaporation in turbulent flows, *Prog. Energ. Combust. Sci.* **32**, 408 (2006).
- [2] D. B. Spalding, Combustion of Fuel Particles, *Fuel* **30**, 121 (1951).
- [3] S. Pope, *Turbulent Flows* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000).
- [4] S. Balachandar and J. Eaton, Turbulent dispersed multiphase flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **42**, 111 (2010).
- [5] A. Berlemont, M.-S. Grancher, and G. Gouesbet, On the Lagrangian simulation of turbulence influence on droplet evaporation, *Int. J. Heat Mass Transf.* **34**, 2805 (1991).
- [6] J. Reveillon and F.-X. Demoulin, Effects of the preferential segregation of droplets on evaporation and turbulent mixing, *J. Fluid Mech.* **583**, 273 (2007).
- [7] S. Sahu, Y. Hardalupas, and A. Taylor, Interaction of droplet dispersion and evaporation in a polydispersed spray, *J. Fluid Mech.* **846**, 37 (2018).
- [8] C. Goepfert, J.-L. Marié, D. Chareyron, and M. Lance, Characterization of a system generating a homogeneous isotropic turbulence field by free synthetic jets, *Exp. Fluids* **48**, 809 (2010).
- [9] D. Chareyron, J.-L. Marié, C. Fournier, J. Gire, N. Grosjean, L. Denis, M. Lance, and L. Mèès, Testing an inline digital holography “inverse method” for the Lagrangian tracking of evaporating droplets in homogeneous nearly isotropic turbulence, *New J. Phys.* **14**, 043039 (2012).
- [10] F. Toschi and E. Bodenschatz, Lagrangian properties of particles in turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41**, 375 (2009).
- [11] B. Gopalan, E. Malkiel, and J. Katz, Experimental investigation of turbulent diffusion of slightly buoyant droplets in locally isotropic turbulence, *Phys. Fluids* **20**, 095102 (2008).
- [12] J. Lu, J. P. Fugal, H. Nordsiek, E. W. Saw, R. A. Shaw, and W. Yang, Lagrangian particle tracking in three dimensions via single-camera in-line digital holography, *New J. Phys.* **10**, 125013 (2008).
- [13] J. Katz and J. Sheng, Applications of holography in fluid mechanics and particle dynamics, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **42**, 531 (2010).
- [14] D. Nguyen, D. Honnery, and J. Soria, Measuring evaporation of micro-fuel droplets using magnified DIH and DPIV, *Exp. Fluids* **50**, 949 (2011).
- [15] F. Soulez, L. Denis, C. Fournier, E. Thiébaud, and C. Goepfert, Inverse-problem approach for particle digital holography: Accurate location based on local optimization, *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 1164 (2007).
- [16] F. Soulez, L. Denis, E. Thiébaud, C. Fournier, and C. Goepfert, Inverse problem approach in particle digital holography: Out-of-field particle detection made possible, *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 3708 (1991).
- [17] J. Gire, L. Denis, C. Fournier, E. Thiébaud, F. Soulez, and C. Ducottet, Digital holography of particles: Benefits of the “inverse-problem” approach, *M. Sci. Technol.* **19**, 074005 (2008).
- [18] C. Fournier, L. Denis, E. Thiébaud, T. Fournel, and M. Seifi, Inverse problems approaches for digital hologram reconstruction, in *Three Dimensional Imaging, Visualization, and Display* (Springer, Orlando, FL, 2011), Vol. 8043, pp. 1–14.
- [19] J.-L. Marié, N. Grosjean, L. Mèès, M. Seifi, C. Fournier, B. Barbier, and M. Lance, Lagrangian measurements of the fast evaporation of falling diethyl ether droplets using inline digital holography and a high speed camera, *Exp. Fluids* **55**, 1708 (2014).
- [20] J.-L. Marié, T. Tronchin, N. Grosjean, L. Mèès, O. Öztürk, C. Fournier, B. Barbier, and M. Lance, Digital holographic measurement of the lagrangian evaporation rate of droplets dispersing in a homogeneous isotropic turbulence, *Exp. Fluids* **58**, 11 (2017).
- [21] R.-B. Bird, W.-E. Stewart, and E.-N. Lightfoot, *Transport Phenomena* (John Wiley, New York, 1960).
- [22] B. Abramzon and W.-A. Sirignano, Droplet vaporization model for spray combustion calculations, *Int. J. Heat Mass Transf.* **32**, 1605 (1989).
- [23] W. Hwang and J.-K. Eaton, Creating homogeneous and isotropic turbulence without a mean flow, *Exp. Fluids* **36**, 444 (2004).
- [24] H. Lian, G. Charalampous, and Y. Hardalupas, Preferential concentration of poly-dispersed droplets in stationary isotropic turbulence, *Exp. Fluids* **54**, 1525 (2013).
- [25] U. Patel and S. Sahu, Effect of air turbulence and fuel composition on bi-component droplet evaporation, *Int. J. Heat Mass Transf.* **141**, 757 (2019).
- [26] S. Lin and R. Reitz, Drop and spray formation from a liquid jet, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30**, 85 (1998).
- [27] E. R. Lee, *Microdrop generation* (CRC Press, Boca Raton (Florida), 2003).



- [28] M. Seifi, C. Fournier, N. Grosjean, L. Méès, J.-L. Marié, and L. Denis, Accurate 3D tracking and size measurement of evaporating droplets using inline digital holography and “inverse problems” reconstruction approach, *Opt. Express* **21**, 27964 (2013).
- [29] L. Méès, N. Grosjean, D. Chareyron, J.-L. Marié, M. Seifi, and C. Fournier, Evaporating droplet hologram simulation for digital inline holography setup with divergent beam, *J. Opt. Soc. Am. A* **30**, 2021 (2013).
- [30] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 6th edition (Pergamon press, London, 1980).
- [31] M. Seifi, C. Fournier, L. Denis, D. Chareyron, and J.-L. Marié, 3D reconstruction of particle holograms: A fast and accurate multi-scale approach, *J. Opt. Soc. Am. A* **29**, 1808 (2012).
- [32] N. Mordant, A.-M. Crawford, and E. Bodenschatz, Three-Dimensional Structure of the Lagrangian Acceleration in Turbulent Flows, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 214501 (2004).
- [33] G.-A. Voth, A. Laporta, A.-M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz, Measurement of particle acceleration in fully developed turbulence, *J. Fluid. Mech.* **469**, 121 (2002).
- [34] N. M. Qureshi, M. Bourgoïn, C. Baudet, A. Cartellier, and Y. Gagne, Turbulent Transport of Material Particles: An Experimental Study of Finite Size Effects, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 184502 (2007).
- [35] N. M. Qureshi, U. Arrieta, C. Baudet, A. Cartellier, Y. Gagne, and M. Bourgoïn, Acceleration statistics of inertial particles in turbulent flow, *Eur. Phys. J. B* **66**, 531 (2008).
- [36] R. Clift, J.-R. Grace, and M.-E. Weber, *Bubbles, Drops, and Particles* (Academic Press, San Diego, CA, 1978).
- [37] G.-L. Hubbard, V.-E. Denny, and A.-F. Mills, Droplet evaporation: Effects of transients and variable properties, *Int. J. Heat Mass Transf.* **18**, 1003 (1975).
- [38] M. Yuen and L.-W. Chen, On drag of evaporating droplets, *Combust. Sci. and Technol.* **14**, 147 (1976).
- [39] S. J. Kleis and I. Rivera-Solorio, Timescales for unsteady mass transfer from a sphere at low-finite Reynolds numbers, *J. Heat Transfer* **125**, 716 (2003).
- [40] W.-A. Sirignano, *Fluid Dynamics and Transport of Droplets and Sprays* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010).
- [41] C. Verwey and M. Birouk, Experimental investigation of the effect of droplet size on the vaporization process in ambient turbulence, *Combust. Flame* **182**, 288 (2017).

## 7.2 Caractérisation des aérosols respiratoires par Imagerie Interférométrique en défaut de mise au point

Dans ce document, nous avons mis l'accent sur l'importance du problème direct (interaction lumière-objet) pour le développement de moyens de mesure (problème inverse). Toutefois, le développement et la mise au point d'une technique de mesure répondant à un besoin spécifique n'est pas qu'une affaire de modélisation de l'interaction lumière-particule. Les interférences entre lumière réfléchie et réfractée par une goutte fournissent, par exemple, une information précise sur sa taille. La relation entre la fréquence des franges d'interférence et le diamètre s'obtient facilement par des calcul d'Optique Géométrique ou de TLM, selon l'angle de la détection et la gamme de taille considérée. Différentes techniques de mesure plus ou moins élaborées peuvent être imaginées à partir de ce principe général. L'imagerie en défaut de mise au point (ou ILIDS pour Interferometric Laser Imaging Droplet Sizing en anglais) est une technique astucieuse qui permet la mise en œuvre de ce principe pour un ensemble (peu dense) de gouttes. L'originalité de la technique est de combiner la précision de l'information interférométrique contenue dans le champ diffusé lointain, et la capacité de l'imagerie à séparer les objets en fonction de leur position, pour obtenir des informations individualisées. En revanche, la technique a ses limites. En particulier : (i) la mesure de gouttelettes de petites tailles qui requiert un angle de collection très grand est très difficile à mettre en œuvre, (ii) comme toutes les techniques utilisant un éclairage plan, l'estimation du volume de mesure et donc des concentrations est très délicate. Dans la référence [51] qui est reproduite dans les pages suivantes, la technique ILIDS est revisitée pour permettre la caractérisation d'aérosols respiratoires en taille, en vitesses (3 composantes) et en concentration. Les modifications apportées au montage optique classique reposent principalement sur l'utilisation de lentilles asphériques et d'une nappe laser large de plusieurs millimètres. Les procédures de calibration et le traitement des images sont adaptées pour tenir compte des spécificités de ce montage et exploiter l'ensemble des informations contenues dans les images (taille position 3D et volume de mesure). Cet article décrit à la fois la technique de mesure, le montage optique, le traitement des images et les premiers résultats obtenus sur un échantillon de 23 volontaires, dans le cadre de la thèse Livia Grandoni [119].





# Interferometric laser imaging for respiratory droplets sizing

Livia Grandoni<sup>1,2,3</sup> · Loïc Méès<sup>4</sup> · Nathalie Grosjean<sup>4</sup> · Giovanni Leuzzi<sup>1</sup> · Paolo Monti<sup>1</sup> · Armando Pelliccioni<sup>3</sup> · Pietro Salizzoni<sup>2</sup>

Received: 1 July 2022 / Revised: 3 October 2022 / Accepted: 21 February 2023  
© The Author(s) 2023

## Abstract

Due to its importance in airborne disease transmission, especially because of the COVID-19 pandemic, much attention has recently been devoted by the scientific community to the analysis of dispersion of particle-laden air clouds ejected by humans during different respiratory activities. In spite of that, a lack of knowledge is still present particularly with regard to the velocity of the emitted particles, which could differ considerably from that of the air phase. The velocity of the particles is also expected to vary with their size. In this work, simultaneous measurements of size and velocity of particles emitted by humans while speaking have been performed by means of Interferometric Laser Imaging Droplet Sizing (ILIDS). This technique allowed us to detect emitted particles with size down to 2  $\mu\text{m}$  as well as to quantify all three components of the velocity vector and the particle concentration. The outcomes of this work may be used as boundary conditions for numerical simulations of infected respiratory cloud transmission.

## 1 Introduction

The particle-laden air cloud ejected by humans during different respiratory activities has drawn the attention of the scientific community since the first half of the twentieth century as it is involved in airborne disease transmission. This problem has become of major importance in the past 2 years due to the COVID-19 pandemic. Even though numerous experiments and numerical models have recently been carried out to assess the dynamics of dispersed cloud ejection (De Padova and Mossa 2021; Dbouk and Drikakis 2020a, b; Bourouiba et al. 2014; Busco et al. 2020; Wang et al. 2020;

Chaudhuri et al. 2020; Li et al. 2022; Wei and Li 2015, 2017; Xie et al. 2007; Buonanno et al. 2020), a lack of knowledge regarding the way in which particles are ejected by humans is present yet (Rosti et al. 2020; Seminara et al. 2020; Mittal et al. 2020). Since model results often influence decision-making bodies in politics and public health, it is imperative for these dispersion models to be properly run with reliable initial data before their prediction may be used with a certain degree of confidence. In particular, experimental characterization of cloud ejection is useful to provide realistic data concerning air velocity as well as particle size and velocity distributions at the emission point. These quantities

✉ Livia Grandoni  
livia.grandoni@uniroma1.it

✉ Loïc Méès  
loic.mees@ec-lyon.fr

Nathalie Grosjean  
nathalie.grosjean@ec-lyon.fr

Giovanni Leuzzi  
giovanni.leuzzi@uniroma1.it

Paolo Monti  
paolo.monti@uniroma1.it

Armando Pelliccioni  
a.pelliccioni@inail.it

Pietro Salizzoni  
pietro.salizzoni@ec-lyon.fr

<sup>1</sup> Department of Civil, Building and Environmental Engineering, Faculty of Civil and Industrial Engineering, University of Rome La Sapienza, Piazzale Aldo Moro, 5, 00185 Rome, Italy

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique, University of Lyon, CNRS UMR 5509 Ecole Centrale de Lyon, INSA Lyon, Université Claude Bernard, 36 Avenue Guy de Collongue, 69134 Écully, France

<sup>3</sup> Italian Workers' Compensation Authority (INAIL), Department of Occupational and Environmental Medicine, Epidemiology and Hygiene, Monte Porzio Catone (Rome), Italy

<sup>4</sup> Univ Lyon, CNRS, Ecole Centrale de Lyon, INSA Lyon, Univ Claude Bernard Lyon 1, LMFA, UMR5509, 69130 Écully, France

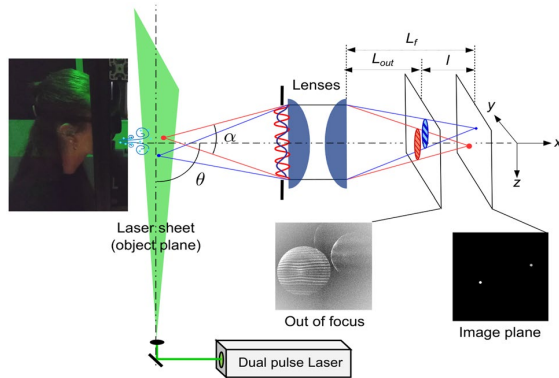
are important as ejected particle velocity and air velocity are expected to be different, particularly for the larger particles. Besides, particle velocity could vary with particle size. Particle size distribution and air velocity have been measured in several works, but only a few researches focused on the simultaneous measurements of particle size and velocity.

Size distribution of particles ejected during different respiratory activities, i.e., breathing, speaking, coughing, and sneezing has been analyzed, among others, by Han et al. (2013); Johnson et al. (2011); Asadi et al. (2019) (see also the review by Gralton et al. (2011) and the references cited therein). Different experimental techniques have been used in the past to measure particle size distribution, i.e., solid and liquid impaction (Duguid 1946; Loudon and Roberts 1967), optical particle counter (Han et al. 2013; Papineni and Rosenthal 1997), aerodynamic particle sizer (Asadi et al. 2019; Morawska et al. 2009; Johnson et al. 2011), electric low pressure impactor (Hersen et al. 2008), scanning mobility particle sizer (Holmgren et al. 2010), high-speed photography (de Silva et al. 2021) and Interferometric Laser Imaging for Droplet Sizing (ILIDS) (Chao et al. 2009). Despite the large availability of data, the works show considerable differences in the results (Bourouiba 2021; Johnson et al. 2011; Seminara et al. 2020; Mittal et al. 2020). This lack of agreement between different data sets enlightens the hurdles that have to be faced when characterizing experimentally this complex phenomenon.

The velocity of the ejected air has been measured by means of particle image velocimetry (Zhu et al. 2006; Chao et al. 2009; VanSciver et al. 2011), real-time shadowgraph imaging (Tang et al. 2013) and high-speed imaging (Nishimura et al. 2013). Alternatively, the airflow has been measured by means of spirometers (Mahajan et al. 1994; Singh et al. 1995; Gupta et al. 2009, 2010; de Silva et al. 2021). Only in a few cases experimental setups based on high-speed imaging techniques have been employed to measure the velocity of the ejected particles directly (Bahl et al. 2020; Nishimura et al. 2013; Scharfman et al. 2016; de Silva et al. 2021; Bahl et al. 2021). Even more rare are the simultaneous measures of particle size and velocity. This kind of measurement is not easy due to the small size of the particles and their low concentration. To our knowledge, only two studies, i.e., Wang et al. (2020) and de Silva et al. (2021), faced this problem, but only for large particles. In the former paper, the authors carried out a joint pdf of particle size and velocity for particles larger than 250  $\mu\text{m}$  using particle shadow tracking velocimetry technique. de Silva et al. (2021) measured simultaneously particle velocity and size down to 36  $\mu\text{m}$  using a back illumination and a high-speed camera. In both cases, only the vertical and the streamwise (normal-to-the-mouth) velocity components of the particles were measured, while no information about the spanwise component was available.

To provide an experimental characterization of the particles ejected by humans during different respiratory activities—namely measuring the three velocity components and size of the particles—we adopt here the ILIDS technique, which has so far never been used for this purpose. ILIDS is an interferometric technique based on a laser sheet illumination and an out-of-focus image recording. It was originally developed for liquid spray by Glover et al. (1995) based on a previous work of Ragucci et al. (1990). The basic idea is to combine the high accuracy of interferometric techniques with the capability of image analysis techniques to separate and identify several objects individually. The technique has been applied in several configurations (Dehaeck and van Beeck 2008; Porcheron et al. 2015; Rezaee and Kebriaee 2019; Sahu et al. 2016; Yilmaz et al. 2021) and extended to velocity measurements (Maeda et al. 2000) and bubble size measurements (Kawaguchi et al. 2002; Mees et al. 2011). One of the strengths of ILIDS is that it permits the simultaneous measurement of particle size and velocity using a Particle Image Velocimetry setup (double cavity laser and double frame camera or high repetition rate pulsed laser and camera). Another advantage of ILIDS is that it allows liquid droplets to be distinguished from suspended irregular solid particles even in a real environment, out of cleanroom conditions. Even though its applications are generally limited to diluted sprays, ILIDS is well suited to measure the low concentration of respiratory aerosols as well. A limitation of the ILIDS concerns the minimum size of the droplets that can be recognized, which depends on the aperture angle of the collection optic. In principle, a collection angle of about  $40^\circ$  is required to measure water droplet size down to 2  $\mu\text{m}$ , which is far above the effective aperture of standard optics (note that contrary to the common usage in the literature concerning airborne disease transmission, the term *droplet* is used in the present paper to mean liquid particles in general, including small liquid particles). To apply ILIDS to respiratory droplets and recognize particles with very small diameter, a large aperture optic, free from spherical aberration, must be designed. Finally, the estimation of the measurement volume and the related particle concentration is not an easy task using ILIDS in that it is not possible to fix the size of the measurement volume a priori. For this reason, the measurement volume and its variation with the particle size have been estimated in the present work based on droplet location along the direction normal to the laser sheet.

The paper is organized as follows: Section 2 describes the principle of the standard ILIDS technique along with the improvements made to (i) detect droplets down to 2  $\mu\text{m}$ , (ii) measure the three velocity components and size of the particles and (iii) determine the measurement volume for each size class and, hence, the droplet concentrations. Section 3 describes the experimental setup, the experimental protocol, and the image processing procedure. The results



**Fig. 1** Sketch of ILIDS technique principle. A laser light sheet illuminates the particles. A portion of the light scattered by the particles is collected by an optical system (lenses) along the direction identified by  $\theta$ . The angle formed between the particle and the effective lens aperture is the collection angle  $\alpha$ . Out-of-focus images of the particles are taken by means of a camera located at a distance  $L_{out}$  from the lenses. The light scattered by the particles is characterized by interference fringes, whose frequency is related to the particle size. Therefore, in the out-of-focus image, the particles appear as circles with interference fringes inside. Differently, in the image plane (at a distance  $L_f$  from the lenses), the particles appear as glare points. The out-of-focus images become more and more blurry as the distance  $l$  increases

are presented in Sect. 4, enlightening the potential of the ILIDS technique for respiratory droplets characterization. Conclusions are summarized in Sect. 4.

## 2 ILIDS technique

### 2.1 Basic principles

The ILIDS technique is based on the light scattering properties of transparent particles. As shown in Fig. 1, the droplets are illuminated by a coherent light source (the laser sheet) and the light scattered by the droplets is collected by a lens (or a lens assembly) with collection angle  $\alpha$  centered around the direction identified by angle  $\theta$ . With a classical imaging system, the droplet images would form in the image plane at distance  $L_f$ . Conversely, with the ILIDS technique, the sensor is placed on an out-of-focus plane at distance  $L_{out}$ . The light scattered by a single droplet gives rise to an interference pattern (fringes) produced by the superposition of reflected light, refracted light and light refracted after one or multiple internal reflections. At a given angle  $\theta$ , the fringe spacing directly depends on the particle diameter. Incidentally, it is worth noting that while for a single drop, an accurate measurement of the drop size could be obtained by placing a sensor (instead of the lenses) at the lens location able to record the interference pattern (see Fig. 1), in

the case of several droplets, the interference patterns would be superimposed on each other, and the information from individual droplets would be lost. With ILIDS, out-of-focus particle images are recorded by means of a lens (or a lens assembly) and a camera. In the out-of-focus plane, each droplet image takes the form of a circle containing the corresponding interference pattern. The circle location corresponds to the droplet location in the object plane (plane coinciding with the laser sheet where the observable objects, i.e., the particles, lay). Different droplets generate separated circles on the sensor, allowing the analysis of individual interference patterns and droplet size measurement. Note that, in ILIDS, the circle size is not related to the droplet size, but it only depends on the out-of-focus level, i.e., the ratio  $l/L_f$ . If the laser sheet was very thin, all the illuminated droplets would belong to the same plane, the image plane would be the same for all droplets, and all the corresponding circles would have the same size. For a thicker laser sheet, particularly when using a high magnification optic, both  $L_f$  and circle size vary significantly with the distance of the droplet from the lens, and the third droplet coordinate can be deduced from the circle diameter. For a spherical droplet, the interference pattern is easy to detect and to count in that it is composed of regular fringes in a well-defined direction. Conversely, irregular solid particles can be easily recognized and discarded as they show less regular scattering patterns. For spherical droplets, the number of fringes in the circle equals the number of fringes that would be measured in the lens aperture, i.e., the number of fringes in the collected part of the scattering diagram. For scattering angles  $20^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$ , the relation between fringe number and droplet diameter can be evaluated based on geometrical optics considerations. For  $\theta = 90^\circ$ , as adopted in this work, the relation is deduced from Lorenz–Mie theory.

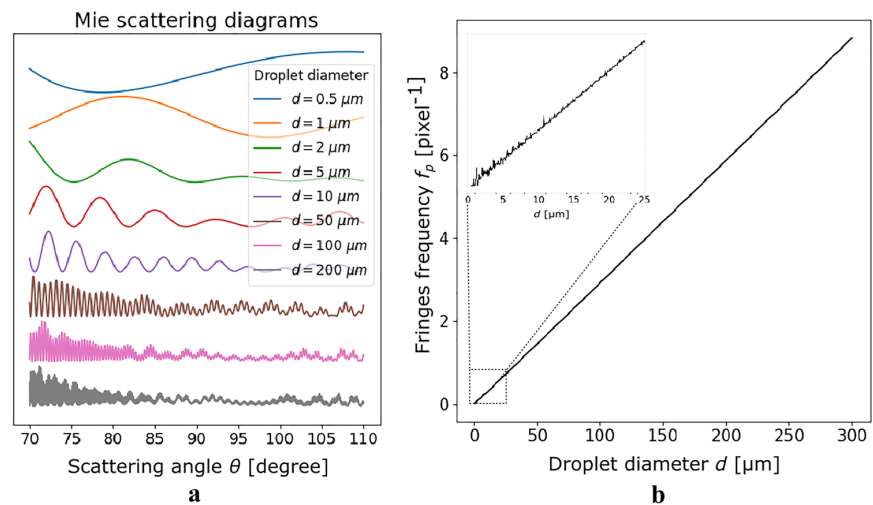
### 2.2 Particle size measurement

As mentioned in the former Section, the droplet diameter,  $d$ , can be determined in the scattering diagram from the angular spacing of the fringes,  $\Delta\theta$ . Assuming a perfect thin lens (i.e., of negligible thickness and not affected by any kind of aberrations) and a collection angle  $\alpha$ ,  $\Delta\theta$  can be written as follows:

$$\Delta\theta = \frac{\alpha}{N} = \frac{\alpha}{2Rf_p} \tag{1}$$

where  $N$  and  $R$  are the fringe number and the circle radius in out-of-focus image, respectively, while  $f_p$  is the fringe frequency, measured in pixel unit. Figure 2a shows portions of the scattering diagrams for  $70^\circ \leq \theta \leq 110^\circ$  ( $\alpha = 40^\circ$  centered on  $\theta = 90^\circ$ ) and droplet diameters lying in the range 0.5–200  $\mu\text{m}$ . The laser beam is linearly polarized.

**Fig. 2** **a** Water droplet scattering diagram computed according to Lorenz–Mie Theory, for droplet diameters between 0.5 and 200  $\mu\text{m}$  (from top to bottom of the left panel) and **b** Fringes angular frequency as a function of droplet diameter computed by using Lorenz–Mie Theory and Fourier analysis for scattering angle centered on  $\theta = 90^\circ$ , a wide collection angle  $\alpha = 40^\circ$ , a wavelength  $\lambda = 532\text{ nm}$  and a sampling step on scattering angle  $\delta_\theta = 0.05^\circ$



The polarization direction has been chosen perpendicular to the plane of incidence ( $x, z$ ) (S-polarization) to maximize the fringe contrast for the smallest droplets. Figure 2a also reveals that the number of fringes is too low to be measured for the smallest diameters, even with  $\alpha = 40^\circ$ . The lower limit for droplet diameter measurement is then around 1.5  $\mu\text{m}$ , corresponding to about 2 fringes in the collection angle. A smaller  $\alpha$  would increase the lower limit, while an  $\alpha$  significantly greater than  $40^\circ$  can hardly be considered in practice for several reasons, as detailed below. Thus,  $d_{\min} = 1.5\ \mu\text{m}$  can be considered as the lower limit of the technique, and a wide collection angle (nearly  $40^\circ$ ) is required to reach this limit.

The relation between the fringe spacing  $\Delta\theta$  (or the fringe angular frequency  $\Delta\theta^{-1}$ ) and droplet diameter can be established by using the Lorenz–Mie theory. Figure 2b depicts the main fringe frequency as a function of the droplet diameter for  $\theta = 90^\circ$ ,  $\alpha = 40^\circ$ , light wavelength  $\lambda = 532\text{ nm}$  and sampling step on scattering angle  $\delta_\theta = 0.05^\circ$ . This figure has been obtained by computing scattering diagrams similar to those presented in Fig. 2a for droplet diameters going from 0.5 to 300  $\mu\text{m}$  and by extracting the main fringe frequency from the derivative of the Fourier transform of each diagram. As Fig. 2b also shows, the droplet diameter is proportional to the fringe angular frequency, viz.

$$d = \kappa \frac{1}{\Delta\theta} = \kappa \frac{2Rf_p}{\alpha} \quad (2)$$

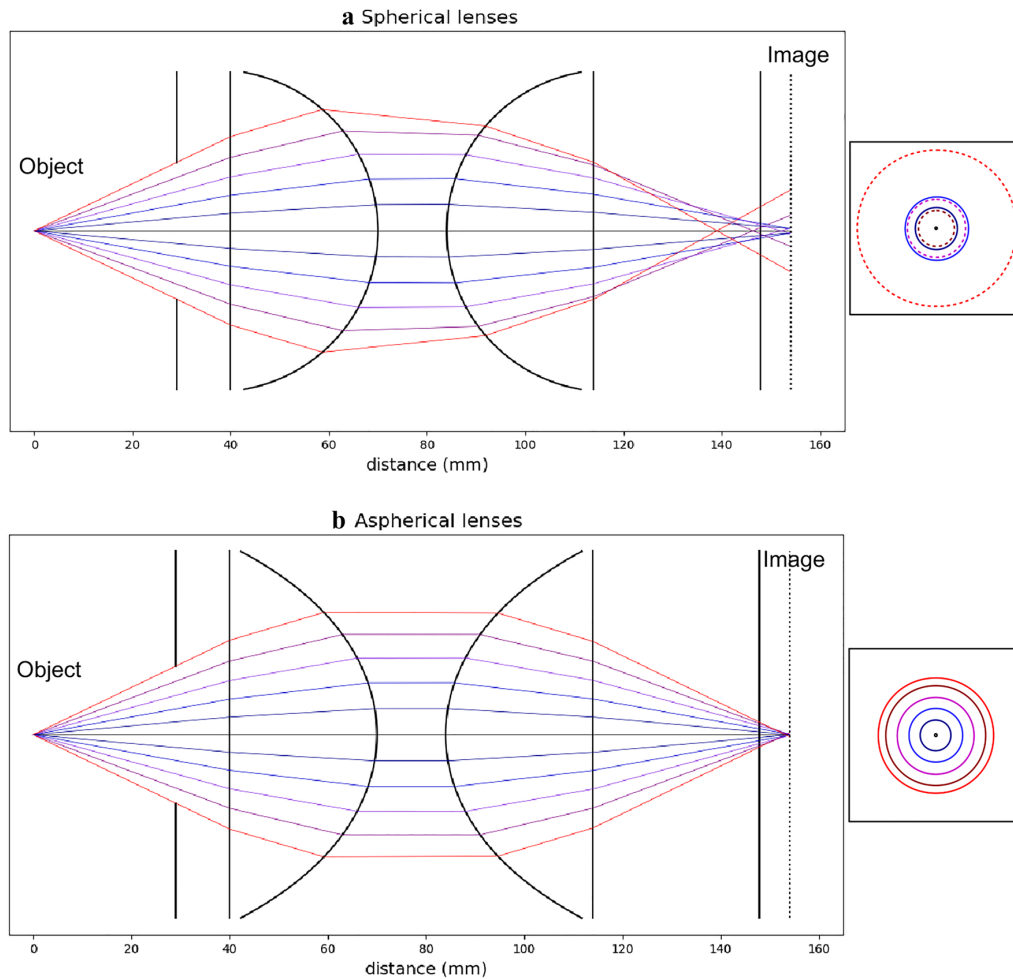
The coefficient  $\kappa = 34.0\ \mu\text{m degree}$  is calculated from a linear regression of the curve (Fig. 2b). This coefficient depends mainly on  $\lambda$ ,  $\theta$  and the droplet refractive index  $n$ . It also varies weakly with the collection angle ( $\kappa = 35.2\ \mu\text{m degree}$  for  $\alpha = 10^\circ$  and  $\kappa = 33.9\ \mu\text{m degree}$  for  $\alpha = 44^\circ$ ).

For the smallest diameters (inset in Fig. 2b), oscillations due to both Mie scattering properties and signal sampling are observed. These oscillations clearly limit the accuracy of the measurement of the smallest particles, with an uncertainty greater than 40% for diameters lower than 1.5  $\mu\text{m}$ . This confirms that 1.5  $\mu\text{m}$  is the lower particle diameter measurable with the ILIDS technique. To account for this unavoidable source of uncertainty, only droplets having  $d_{\min} \geq 2\ \mu\text{m}$  will be considered in the remainder of this work. For  $d_{\min} \geq 2\ \mu\text{m}$ , the absolute error is less than  $0.45\ \mu\text{m}$ .

The maximum measurable particle diameter  $d_{\max}$  depends on the sampling conditions. For the parameters adopted to compute the curve presented in Fig. 2b, in particular  $\delta_\theta = 0.05$ , the Nyquist frequency  $f_{\max} = 10\ \text{pixel}^{-1}$  corresponds to a maximum diameter  $d_{\max} = 340\ \mu\text{m}$ .

Note that the range of measurable diameters is also limited by the dynamic range of the camera sensor. The intensity of scattered light is roughly proportional to the particle diameter squared. Using a 16bit-camera with a low read noise, the diameter range is limited to one or two orders of magnitude.

To measure particle sizes down to 2  $\mu\text{m}$ , the scattering diagram (Fig. 2a) must be collected over a large collection angle and entirely projected onto the sensor. In practice, the effective collection angle is limited by spherical aberrations as illustrated by the examples of ray tracing depicted in Fig. 3. When using a pair of spherical lenses (Fig. 3a), the rays collected at large angles (far from the optical axis) are focused at shorter distances. In the out-of-focus sensor plane, information carried by rays with different incidence angles overlaps and the projected interference pattern is folded in on itself and deformed, thus, preventing any measurement. The different ways to limit spherical aberrations are (i) to reduce the lens aperture, thus increasing the lower size



**Fig. 3** Effect of spherical aberrations on out-of-focus images. Using a pair of spherical lenses **a** the red rays at greater angles, far from the optical axis, cross this axis at shorter distances than the blue rays, closer to the optical axis. Using aspherical lenses **b** almost all the rays cross the optical axis at the same distance. As a consequence, a set

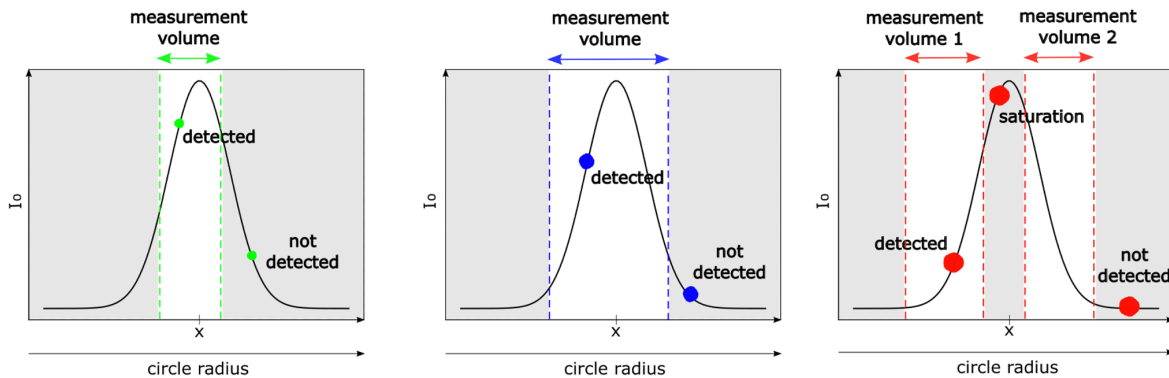
of concentric circles corresponding to the different rays appears on the out-of-focus images. With aspherical lenses, the circle diameter increases linearly with ray angle. With spherical lenses, the circle diameter increases, then decreases and increases again, leading to a destructive folding of the fringes to be analyzed

limit, (ii) to increase the magnification ratio, reducing the field of view (hereinafter FOV) and the measurement volume, (iii) to increase the defocused level  $l/L_f$  then increasing overlapping of defocused images and (iv) to use or design special lenses that reduce the spherical aberration. To reach an effective collection angle of order  $40^\circ$ , the last three solutions are applied together. Figure 3b illustrates the case of two aspherical lenses set in order to obtain a 1:1 magnification lens, nearly free from spherical aberration. In the out-of-focus plane (with the same out-of-focus level as in Fig. 3a), the different rays formed regularly spaced concentric circles, without any folding. This means that, despite the large collection angle ( $> 40^\circ$ ), the effects of spherical aberration are

negligible. Note that this collection angle is however limited by an adjustable aperture placed in front of the first lens. To select the maximum aperture for which spherical aberrations remain negligible, the procedure consists in increasing it progressively while the circle diameter in the out-of-focus plane remains proportional to the aperture diameter. Preliminary to this work, several commercial lens assemblies have been tested. The largest collection angle has been obtained by using a 100 mm macro-lens (Zeiss Milvus 2/100 M) similar to the one used by Chao et al. (2009). The nominal aperture of this lens is 50 mm, but it must be reduced to less than 30 mm to fulfill the ILIDS requirements, leading to an effective collection angle of about  $12^\circ$  and minimum measurable







**Fig. 5** Detection range for particle of different sizes. Small, medium and large particles are represented in green (left panel), blue (central panel) and red (right panel), respectively.  $I_0$  is the laser light intensity, while  $x$  is the position within the laser sheet thickness

$$R(\Delta x) = \frac{A}{2} \left[ 1 + \frac{e\Delta x}{f(f - \Delta x)} \right] \left[ 1 - \frac{L_{out}}{f - \Delta x} \right] \quad (4)$$

The radius variation  $\Delta R$ , for  $\Delta x$  close to zero, is nearly proportional to the displacement  $\Delta x$ , that is:

$$\Delta R \approx \frac{A}{2f^3} (ef + L_{out}f - eL_{out}) \Delta x = \gamma_2 \Delta x \quad (5)$$

$\gamma_2$  is nearly constant for small displacement  $\Delta x$  and depends on the optical system characteristics. Note that the variation of the circle radius  $R$  does not affect the measurement of droplet size  $d$ . Since  $f_p$  varies inversely as  $R$  varies, the fringe angular frequency  $1/\Delta\theta$  does not vary and so does the droplet size  $d$  (see Eq. 2).

To take into account for the real characteristics of the optical system used in the experiments and the inevitable default of optical adjustment, the two constants  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  have been estimated by means of a calibration procedure (see Sect. 3.2).

### 2.4 Measurement volume and particle concentration

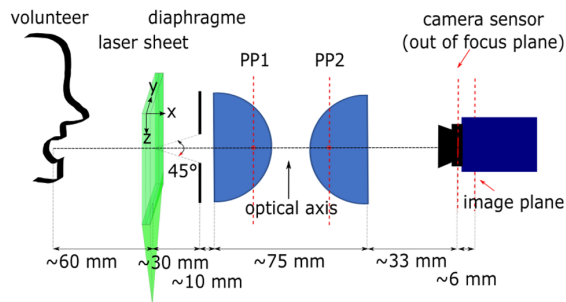
ILIDS is based on a laser light sheet illumination that is supposed to delimit the measurement volume. However, the intensity of the laser sheet profile  $I(x)$  is never perfectly sharp, so that the identification of the laser sheet edges is not trivial. Moreover, dealing with a large size distribution, the effective measurement volume actually depends on the particle size (Fig. 5). Therefore, the measurement volume cannot be estimated a priori by multiplying the FOV with the thickness of the laser sheet. To be detected, the light intensity corresponding to a particle on the image must be greater than a given threshold that depends on the sensor sensitivity and noise level. Considering the real shape of the

laser sheet profile, the actual width within which a particle can be detected decreases with its size. On the one hand, the intensity of the light scattered by a particle is roughly proportional to the square of its diameter and to the incident light intensity at the particle location. On the other hand,  $I(x)$  is not constant along the laser sheet thickness, but it is rather characterized by a smooth Gaussian-like shape. The measurement volume decreases with the particle size since smaller particles can be detected only at the center of the laser sheet, where the light intensity is sufficiently high. Conversely, the largest particles can be detected even in the edges of the laser sheet, where the light intensity is smaller, leading to a greater measurement volume. Note however that the largest particles located in the center of the laser sheet may lead to sensor saturation. This would prevent fringe frequency measurement, therefore leading to a measurement volume split into two parts. Besides, one should also consider the variation with  $x$  of the circle radius in the out-of-focus image. For smaller circle radii, the same amount of energy collected by the lenses is contained in a smaller area (circular surface in the out-of-focus image). Therefore, the minimum laser light intensity for which a particle of a given size can be detected is lower when the particle is positioned further away from the lenses, i.e., when the circle radius in the image is smaller.

The most reliable way to quantify the measurement volume for each particle size class is to deduce it *a posteriori* considering the actual  $x$ -coordinate variation observed for all the detected particles in a particle size class,  $d$ , through its standard deviation,  $\sigma_x(d)$ . This method has been previously used by Mees et al. (2011). The measurement volume for particle diameter  $d$  is then simply estimated as follows:

$$V(d) = \sigma_x(d)S \quad (6)$$

where  $S$  is the FOV area.



**Fig. 6** Schematic of the experimental setup. The principal planes (PP1 and PP2) of the two lenses are also drawn; these represent the position of the equivalent perfect thin lenses defined in Sect. 2.3

### 3 Experiments

#### 3.1 Setup and measurement campaign

To measure size and velocity of the particles ejected while speaking, twenty volunteers have been recruited to speak following the same protocol. To simulate the speech, they counted ten times from “one” to “one hundred.”

A double pulse Nd:YAG laser (Litron Bernoulli-PIV 200-15, wavelength: 532 nm, pulse duration: 8 ns, power: 2\*200 mJ) was synchronized with a double frame camera (Lavision imager sCMOS, 16 bit, 2560 × 2160 pixel, pixel size: 6.5 × 6.5 μm, sensor size: 16.6 × 14 mm) by using a programmable timing unit. The acquisition frequency was set to 15 Hz (i.e., 15 couples of frames per second). The time delay between two consecutive frames,  $\Delta t$ , varied with the different respiratory activities, based on the expected range of particle velocity. On the one hand,  $\Delta t$  must be high enough to observe a significant particle displacement. On the other hand,  $\Delta t$  must be small enough not to let the particle exit the laser sheet. The optical system consisted of two aspherical lenses in series (Thorlabs ACL7560U, focal length: 60 mm, lenses aperture: 75 mm) and a diaphragm, which limited the effective lenses aperture to about 28 mm. The laser sheet was parallel to the lenses and to the mouth of the volunteer (see Fig. 6 for a schematic of the experimental setup). The location of the focus image plane was found experimentally. The corresponding magnification and field of view were  $M \approx 1$  and FOV  $14 \times 17 \text{ mm}^2$ , respectively. The FOV was actually slightly narrower because of the cutting of a little portion of the images made in the image processing. Both the focus image plane position and magnification agreed well with those computed by a house made software calculating the light ray path derived from the properties of the optical system and laser sheet position. Given the distance between the laser sheet and the diaphragm, the collection angle was

$\alpha \approx 45^\circ$ —it slightly varied for particles located at the two edges of the laser sheet thickness.

A mask was used to allow volunteers to place their mouth close to the optical axis (Fig. 6). The mask protected also the face of the volunteers and prevented them from moving, therefore avoiding any contact with the laser sheet. Besides, a black paper panel was placed between the laser sheet and the volunteers’ body. The eyes of the volunteers were completely covered.

#### 3.2 Calibration

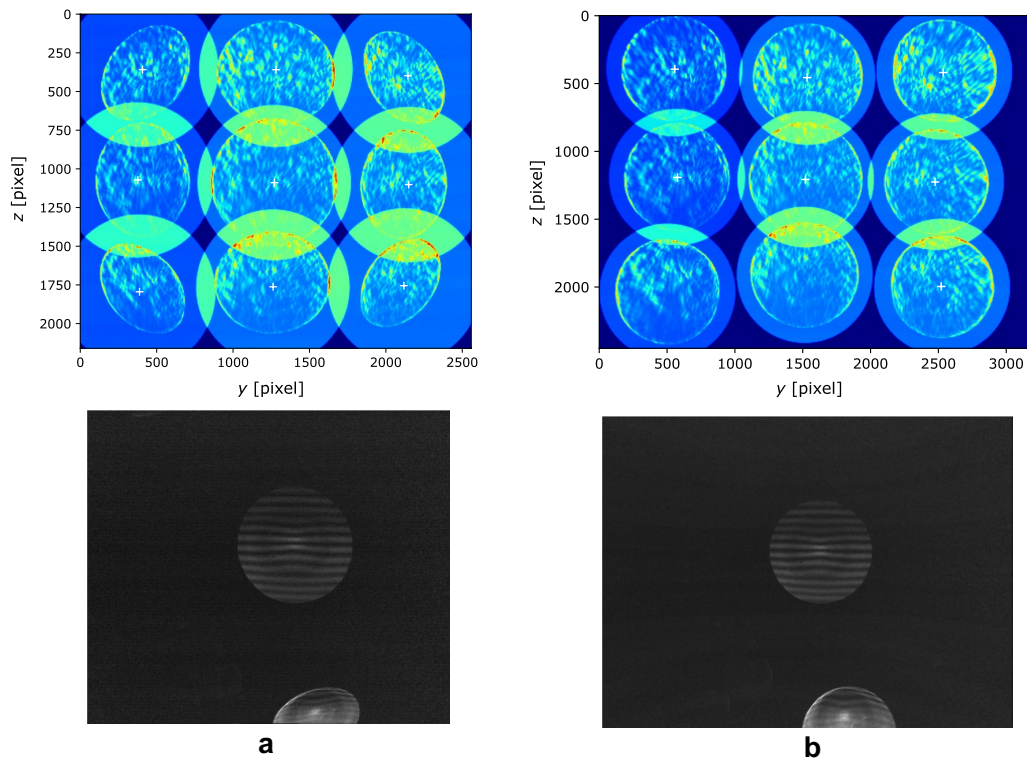
Several calibrations are required to consider the deformations due to comatic aberrations and to calculate the two coefficients  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  in Eqs. 3 and 5.

As described in Sects. 2.2 and 3.1, two aspherical lenses in series are used to obtain an effective collection angle  $\sim 45^\circ$ , to measure particle size down to 2 μm. The deformation of the circles due to comatic aberrations not compensated by these lenses must be corrected by means of image pre-processing. This consists in applying a deformation to the images to retrieve a circular shape whatever the particle location in the image. To estimate the deformation to be applied, images of a point light source are taken at different distances from the optical axis (Fig. 7a, upper panel). The point light source consists of a pin-hole mounted on a 3D translation stage, illuminated at oblique incidence. A fifth-order polynomial deformation as a function of the distance from the optical axis is chosen. The result obtained by applying the deformation to the calibration images is shown in the upper panel of Fig. 7b. Note that this deformation is not physical, but it has the aim to make the automatic detection of the circles associated with the particles easier. Such deformation is necessary to simplify the detection of out-of-focus images, of different sizes and sometimes overlapping, by imposing a circular shape and thus reducing the number of free parameters for the detection. In the lower panels of Fig. 7, an example of image before and after deformation is depicted.

Similar images of a point light source at different positions are used to estimate  $\gamma_1$ . The ratio between the real displacement of the point light source and the displacement measured in the images is calculated. The calibration suggests that  $\gamma_1$  is not perfectly constant over the whole FOV, with variations of  $\pm 0.05$  around a mean value  $\gamma_1 \sim 0.91$ . Note that, considering an equivalent idealized optical system, as that presented in Sect. 2.3, with  $f = 60 \text{ mm}$ ,  $e = 35 \text{ mm}$ ,  $L_{\text{out}} = 54 \text{ mm}$  and  $A = 56 \text{ mm}$ , Eq. 3 would lead to  $\gamma_1 \sim 0.86$ .

The proportionality between  $\Delta R$  and  $\Delta x$  (see Eq. 5) has been tested by displacing the point light source within the laser sheet thickness and measuring the circle radius. The coefficient  $\gamma_2 = 0.38$  obtained from the experiments is





**Fig. 7** Upper panels: **a** superposition of 9 images of a point light source at 9 different distances from the optical axis and **b** the same images after deformation. Lower panels: example of image before (**a**) and after (**b**) deformation

comparable with  $\gamma_2 = 0.44$ , obtained for the idealized optical system from Eq. 5. The parameter  $\gamma_2$  also varies slightly over the image, and its variations are also taken into account through the calibration.

### 3.3 Image processing

The data consisted of  $\sim 240,000$  images of about 15 MB each collected during the phase of speaking of the 20 volunteers. To deal with this large amount of images, a multicore version of the processing code, written in Python language, has been implemented on the high-performance computers available at the École Centrale de Lyon. To characterize droplet emission occurring over 2 min speaking (captured by 1200 images), data processing required about 96 h (CPU time). Using 32 cores on a HPC, the effective computing time was reduced to 3 h per test. Processing the data set acquired in the whole experimental campaign (240,000 images) would require 20,000 h CPU on a single core, which would be reduced to 600 h using 32 cores on HPC. In terms of memory, about 6 GB (Random Access Memory) per core are required. The image processing is composed of several steps, i.e., background subtraction, image deformation,

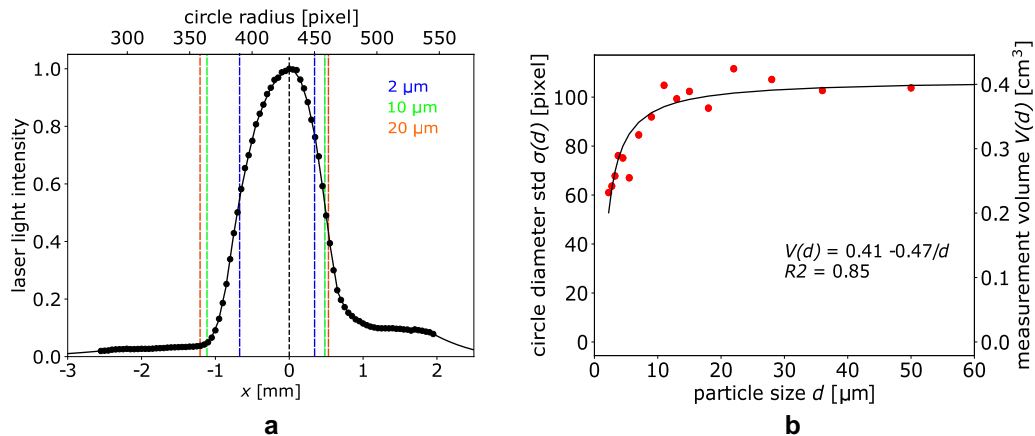
particle detection, fringe analysis as well as velocity, size distribution and concentration calculation.

A background image is calculated for each test. It consists of the minimum intensity value for each pixel over all the images. The background image is subtracted to each image of the set.

Each image is deformed in order to compensate the aberrations as described in Sect. 3.2.

In the third step, all particles—both liquid and solid—are detected by means of a convolutive approach. A Gaussian filter is applied to filter out the interference patterns within the circles. The gradient of the image is then calculated, exhibiting the circle edges, and convoluted by synthetic ring images of different sizes to detect the circles and to measure their position and radius. The detected particles are removed from the image, and new particles are identified, until the correlation peak is above a fixed threshold. At the end of this step, radius and position of all detected particles are known.

In the fourth step, the interference pattern within the circles is analyzed and the fringe frequency is measured. When the circles overlap, only the non-overlapped part of them is analyzed. It is worth noting here that solid particles are easily recognizable (and therefore rejectable) in that they do



**Fig. 8** **a** Measured laser intensity profile along with detection limits for particles of 2, 10 and 20  $\mu\text{m}$ , **b** Volume of measurement and related standard deviation of circle radius for each particle size

not show regular horizontal fringes. This is a strong point of ILIDS technique applied to droplet recognition as it makes unnecessary to filter out ambient air to remove dust. The size of the liquid particles is then calculated by means of Eq. 2 (provided that  $\alpha$  and  $k$  are known).

Particle size and position and circle radius are known at the end of the fourth step. Then, the three components of the particle velocity can be calculated by means of Eqs. 3 and 5 using  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  determined during the calibration procedure. The velocity components are directly inferred from associating the detected droplets in both frames once known the time delay  $\Delta t$  between two consecutive frames. The association of droplets from both frames is made by minimizing both particle location and size changes between the frames.

Once repeated the four steps for all the images, size and velocity distributions can be built. The measurement volume for each particle size class, and therefore the particle concentration, can be estimated from Eq. 6.

## 4 Results and discussion

In order to show the potential of the ILIDS technique employed in this paper, some preliminary results concerning the speaking activity are presented.

### 4.1 Measurement volume

Figure 8b shows the measurement volume referred to a single frame for each particle size class along with the standard deviation of the circle radius, the latter proportional to the volume. The measurement volume increases almost linearly from 2 to 10  $\mu\text{m}$ , while it remains nearly constant for  $d > 20 \mu\text{m}$ . The presence of such plateau can be ascribed to the

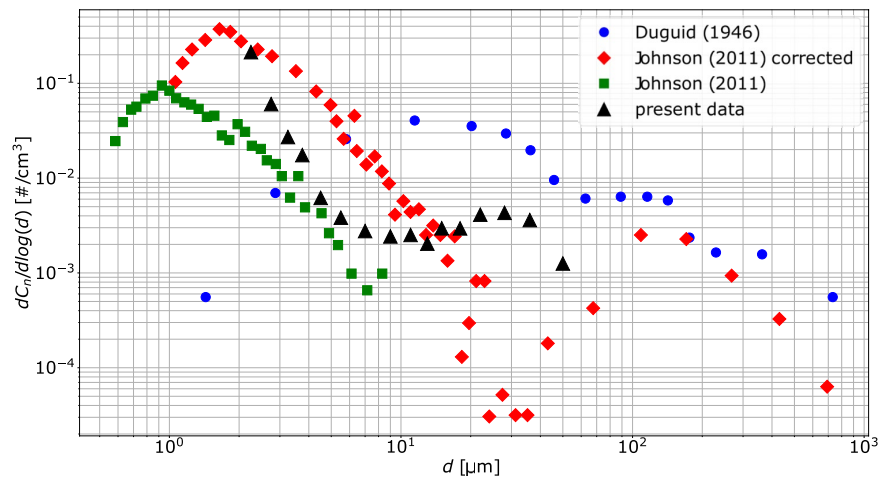
weak variation of the light intensity at the laser sheet edges. However, the range of volume variation with the particle size is quite narrow, i.e., 0.2–0.4  $\text{cm}^3$ . As expected, the measured laser light intensity profile shows an almost Gaussian shape (Fig. 8a). The figure also shows that the ranges of  $x$  for which particles of 2, 10 and 20  $\mu\text{m}$  have been detected. As mentioned earlier, smaller particles can be detected only at the center of the laser sheet, where the light intensity is higher. The circle radius corresponding to each  $x$ -position is also reported (see Eq. 5).

As already mentioned in Sect. 2.4, saturation is supposed to occur only for the larger particles (i.e.,  $d > 40 \mu\text{m}$ ). Nonetheless, saturation is not observed, probably because of a lack of data for the larger particles. Besides, since threshold estimation is based on light intensity measurement, it is intrinsically inaccurate.

### 4.2 Size distribution

Figure 9 shows the particle size distribution obtained considering all the tests. For each size class, the particle number concentration normalized with the width of each bin size is given. The range of particle diameters detected during all the experiments is 2–60  $\mu\text{m}$ , even though most of the particles lie in the size range 2–4  $\mu\text{m}$ . The particle number decreases quickly up to  $\sim 15 \mu\text{m}$ . The absolute concentration maximum occurs for  $d = 2 \mu\text{m}$ , while a local maximum takes place at  $d \sim 28 \mu\text{m}$ . The size distribution obtained with the technique presented here shows no droplet sizes greater than 60  $\mu\text{m}$  (even though the upper limit of the technique is above 300  $\mu\text{m}$ ). This shows that these larger droplets are very rare in emissions occurring while speaking. Note however that the detection of these droplets may be affected by measurement errors that would excluded them from the statistics, in case,

**Fig. 9** Measured particle size distribution, compared to data by Duguid (1946) and Johnson et al. (2011)



they contain solid or gas inclusions. Indeed, the presence of inclusions would lead to a much more complex fringes pattern. This would in turn result to a complex scattering pattern that would (erroneously) interpreted as representative of an irregular (solid) particle. For the interpretation of the complex patterns characterizing irregular particles, the reader is referred to the work by Brunel et al. (2014).

In Fig. 9, we also plot data from two other works found in the literature, i.e., the seminal work by Duguid (1946), which is considered as a main reference in the field, and that recently published by Johnson et al. (2011). In both the two works, the data were collected using almost the same protocol adopted here (for the respiratory activity associated with speaking). Johnson et al. (2011) detected a wide size range thanks to the use of a combination of two techniques, i.e., Aerodynamic Particle Sizer (APS) and Droplet Deposition Analysis (DDA). Note that APS data by Johnson et al. (2011) appear twice in Fig. 9. The green circles refer to APS data, while the red ones correspond to the same data set corrected for dilution and evaporation, together with the data provided by the DDA. Such correction had to be adopted since the sample probe of the APS was located far away from the volunteers' mouth.

The size distribution obtained in the present work lies between the two Johnson's distributions. We can explain this by recalling that, compared to Johnson et al. (2011), the measurement volume in our experiments is closer to the volunteers' mouth and that we did not apply any correction to the data to take into account for evaporation and dilution effects. Our results also differ considerably from those by Johnson et al. (2011) for larger particles. Namely, we observe a concentration maximum at  $d \sim 28 \mu\text{m}$  in place of the minimum found by Johnson et al. (2011). However such minimum occurs for diameters in the range corresponding to that of the maximum diameter detectable by

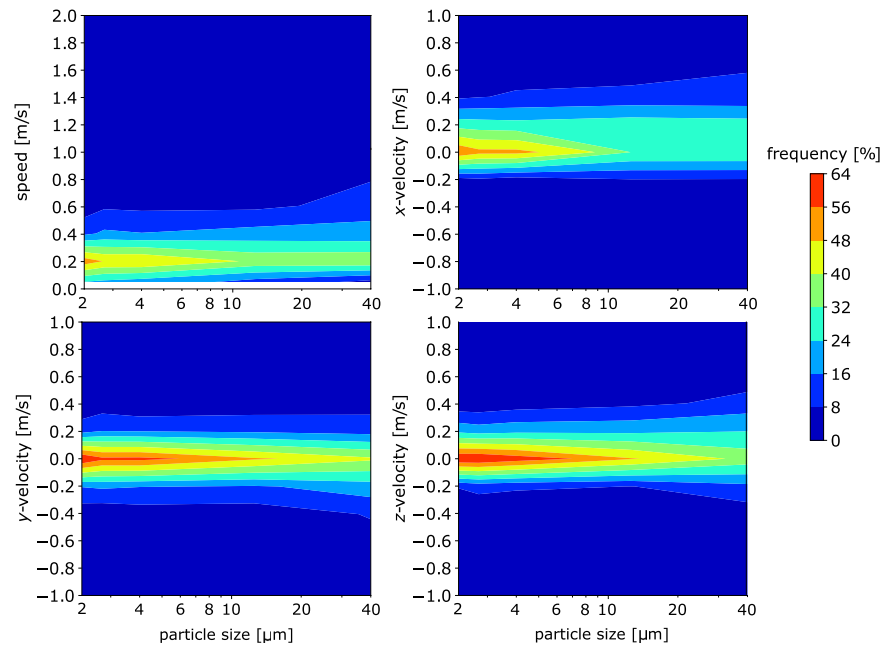
the APS and the minimum diameter for the DDA. Note also that the efficiency of the APS decreases as the particle size increases (Morawska et al. 2009). The size distribution of Duguid (1946) differs from that presented in this work and in Johnson et al. (2011). Nevertheless, Duguid (1946) stated that the size distribution he obtained should be taken with caution, because of the several approximations he made. For instance, Johnson et al. (2011) noted that the particle size estimated by Duguid (1946) could be shifted to larger sizes due to evaporation effect overestimation. Besides, since Duguid (1946) provided only the particle number, the particle concentration had to be calculated by estimating the air volume expired during the speaking activity (Johnson et al. 2011).

### 4.3 Joint probability density function of particle velocity and size

Figure 10 shows the joint probability density function (pdf) of particle velocity and size measured simultaneously in our experiments.

To build the joint pdf maps, five size classes have been considered in order to have robust statistics for each size class. All three velocity components depend on the particle size. In particular, the normal-to-the-mouth velocity component,  $v_x$ , grows with the particle size. On average,  $v_x$  is about  $0.1 \text{ ms}^{-1}$  for  $2 \leq d \leq 2.5 \mu\text{m}$  and  $0.3 \text{ ms}^{-1}$  for  $20 \leq d \leq 60 \mu\text{m}$ . It is worthwhile noting the presence of negative  $v_x$ . These can be probably ascribed to air inspiration by the volunteer while speaking and particle recirculation due to vortices forming along the border of the air jet associated with the emitted air. As expected, the spanwise velocity component,  $v_y$ , has (nearly) zero mean value ( $\sim 0.01 \text{ ms}^{-1}$ ) due to flow symmetry for all the size classes. The vertical component of the velocity  $v_z$  (positive downward) ranges

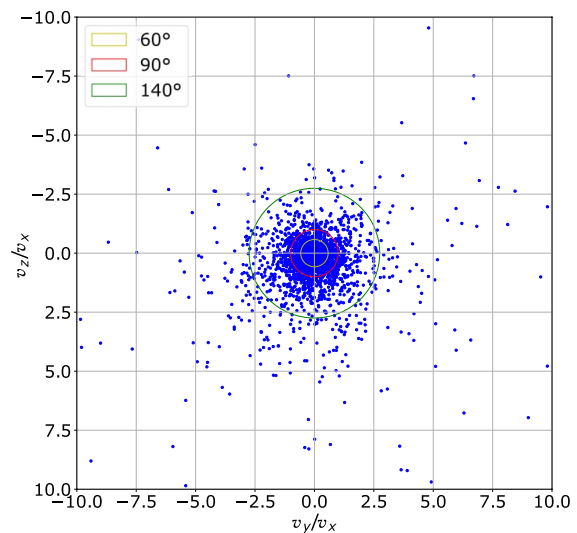
**Fig. 10** Joint probability density function of particle velocity and size. Colors are number of particles characterized by a certain size and velocity normalized by the total number of particles of each size



between  $0.02 \text{ ms}^{-1}$  and  $0.05 \text{ ms}^{-1}$  when  $2 \leq d \leq 20 \text{ μm}$ , while it is higher ( $\sim 0.1 \text{ ms}^{-1}$ ) for the largest particles, probably due to their settling.

Note that the theoretical minimum detectable value of the velocity components along  $y$  and  $z$  is  $\sim 0.005 \text{ ms}^{-1}$ , corresponding to a displacement of 0.5 pixel in  $700 \text{ μs}$ . The minimum velocity detectable along the  $x$ -direction is slightly higher,  $\sim 0.02 \text{ ms}^{-1}$  (i.e., a variation of 1-pixel in the radius of the circle between two frames). The maximal detectable particle velocity is  $7 \text{ ms}^{-1}$ . However, the maximum  $v_x$  is limited by the thickness of the laser sheet where the particles can be effectively detected. Considering the values shown in Sect. 4.1, the maximum  $v_x$  for  $2 \text{ μm}$  and  $50 \text{ μm}$  particles is  $1.5 \text{ ms}^{-1}$  and  $2.5 \text{ ms}^{-1}$ , respectively. The maximal values of  $v_x$  effectively measured are slightly higher. This is due to a slight underestimation of the  $x$ -particle detection range within the thickness of the laser sheet. The latter is, indeed, estimated by measuring the standard deviation of  $x$ , but some particles could be detected at an  $x$ -position which exceeds the  $\sigma_d(x)$  considered.

The mean particle velocity observed in our experiments ranges between  $0.26$  and  $0.56 \text{ ms}^{-1}$  for the smallest and the largest particles, respectively. For comparison, the mean particle velocity measured by Wang et al. (2020); Bahl et al. (2021) and de Silva et al. (2021) is far higher. The larger particle sizes and the different respiratory activity—i.e., coughing and sneezing rather than speaking—can explain such difference with the current work.



**Fig. 11** Ratios between the spanwise and the streamwise (normal-to-the-mouth) velocity components. The yellow (inner), red (intermediate) and green (outer) circles indicate an aperture angle of the particle cloud of  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  and  $140^\circ$ , respectively

#### 4.4 Particle direction

Particle direction can be determined once the three velocity components are known. The ratios between the velocity components,  $v_z/v_x$  and  $v_y/v_x$ , which are linked to the angle of departure of the particles from the  $x$ -axis

(normal to volunteers' mouth) are shown in Fig. 11. The ejected particle cloud appears symmetrical, and the aperture angle is quite wide. About 45–60% of the particles fall into an aperture angle of about 60° and 90°, respectively. Only a few particles depart from the mouth with an angle larger than 70°, corresponding to a ratio  $\sim 2.5$ . Note that only forward moving particles are considered in the figure.

#### 4.5 Uncertainty estimation

The droplet sizes are determined from the image circle radius and the fringes frequency measurements. The uncertainty on image radius is estimated to be 1-pixel. Given that the circles radius are of order 400 pixels, the relative uncertainty in droplet diameter is only 0.25%. The fringe frequency measurement relies on a sub-pixel determination. Considering an uncertainty of 0.5 pixel (probably overestimated), the resulting uncertainty depends on the fringe frequency itself and decreases linearly with the droplet diameter. For a 2  $\mu\text{m}$  droplet, this relative uncertainty is about 15%, and it decreases to 1.5% for a 20  $\mu\text{m}$  droplet. The droplet velocity in the x-direction is also deduced from the image circle radius in two consecutive images. Assuming a 1-pixel uncertainty on the image circle radius variation and given the 700  $\mu\text{s}$  time lag between two frames, the relative uncertainty on the x-velocity is about 0.02 m/s (about 20% for a typical velocity of 0.2 m/s). Velocities in the y- and z-direction are determined from the displacement of the image circle center. These locations are determined by detecting a sub-pixel maximum in a convolution map. Assuming a 0.5 pixel uncertainty, the uncertainty on z- and y-velocity is of order 0.005 m/s (i.e., 10% for typical velocity of 0.05 m/s in those directions). Note that the uncertainties on velocity measurement can be easily reduced by a factor 2 or 4 by increasing the time lag between the frames by the same factor. Other factors that could potentially increase the measurement uncertainty are related to (i) the presence of droplet images not perfectly circular after image deformation, (ii) image circles partly cut at the edge of the image or (iii) background noise. These uncertainties are more difficult to assess individually. However, a global estimate of the droplet sizing uncertainty can be provided by the average difference between the droplet size measured in the two consecutive frames (as the same size should be measured for the same particle detected in the two frames). On average, the variation of the droplet size between the two frames, (normalized with the mean size) is about 4%; considering each size class individually, a maximum variation of 8% is observed for droplet size in the range 20–24  $\mu\text{m}$ .

## 5 Summary and conclusion

In this work, the Interferometric Laser Imaging Droplet Sizing (ILIDS) technique has been employed to determine size and velocity of particles emitted by humans while speaking. ILIDS made it possible to overcome some of the problems encountered in previous works, i.e., i. it is effective in measuring low particle concentrations, as in the case of humans' emission; ii. it allows data collection close to the emission point and thus, it minimizes the effect of both dilution and evaporation; and iii solid irregular particles are easily recognized, so that the measures are not affected by dusts naturally present in the air (filtered-air chambers are not needed for the experiments).

Several improvements have been introduced over standard ILIDS in order to widen as much as possible the range of measurable diameters, in particular the smallest ones. In this way, particle diameters down to  $d = 2 \mu\text{m}$  and all three components of the particle velocity vector have been measured simultaneously. Besides, the variation of the measurement volume with particle size has been taken into account, making its estimation more reliable than that obtainable using more common measurement techniques based on light sheet illumination.

The main results that can be drawn from our experiments are:

1. The measurement volume increases linearly from 0.2 to 0.4  $\text{cm}^3$  going from  $d = 2$  to 10  $\mu\text{m}$ ; for bigger particles, it remains nearly constant.
2. The particle size distribution—expressed as particle number concentration—shows that most of the detected particles lie in the range 2–4  $\mu\text{m}$  in diameter; a relative maximum of particle number concentration occurs at  $d \sim 28 \mu\text{m}$ .
3. The agreement between our data with the APS measurements carried out by Johnson et al. (2011) via Droplet Deposition Analysis is quite good for particle size between  $2 \leq d \leq 10 \mu\text{m}$ . In contrast, large differences with the results by Johnson et al. (2011) and by Duguid (1946) are observed for bigger particles.
4. The joint probability density functions of particle diameter and velocity components show a clear dependence of the normal-to-the-mouth velocity component on the size, e.g.,  $v_x$  ranges between  $0.1 \text{ ms}^{-1}$  for  $2 \leq d \leq 2.5 \mu\text{m}$  and  $0.3 \text{ ms}^{-1}$  for  $20 \leq d \leq 60 \mu\text{m}$ .
5. The emission of the particles from the mouth is far from being unidirectional.

In spite of all its merits, the ILIDS technique has its drawbacks. For example, the size range of the ejected particles is not completely covered as particles smaller than 2  $\mu\text{m}$



cannot be recognized. Some problems occur also for the larger particles, whose scattering diagram may differ from that expected theoretically due to possible inclusions of air (or other substances) or to their not perfectly spherical shape. Another limitation of ILIDS consists in the small field of view area needed to detect the smallest particles. Long measuring time is thus required in order to have robust statistics. The last aspect to be considered is that ILIDS does not work well in case of high droplet concentrations, which would lead to a more likely overlapping of their out-of-focus images. The overlapping of droplet (or irregular particles) images is considered by limiting the fringe analysis to the non-overlapping part of the images, but for images that overlap almost completely, the fringe analysis becomes impossible. In the case of speaking or breathing activities, the droplet concentrations are relatively low, so that droplet image overlapping occurs rarely and is easily managed. In case of coughing instead, the number of droplet images overlapping increases due to higher droplet concentration. Preliminary tests show that overlapping is still manageable, without changing the optical setup. In the case of sneezing, however, we estimate that the higher droplet concentration and the larger droplet sizes would require some adaptations of the setup, to reduce the laser sheet thickness, the out-of-focus level and possibly the collection angle. A development of the present work concerns the use of consolidated techniques and instruments such as FMPS (Fast Mobility Particle Sizer) and OPS (Optical Particle Sizer), which could be employed to analyze the size range (but not the velocity) of particles not detectable with ILIDS. A partial superposition of the measured size range could be useful also to compare the results. Furthermore, the reliability of the technique to characterize other respiratory activities is worth to be evaluated.

**Acknowledgements** The authors gratefully acknowledge Laurent Pouilloux, the technical manager of the computing center of the Ecole Centrale de Lyon.

**Author contributions** Conceptualization was contributed by PS, LM; methodology was contributed by LM, NG; formal analysis and investigation were contributed by LG, LM; writing—original draft preparation, was contributed by LG, LM; writing—review and editing, was contributed by PM, PS, AP and GL; supervision was contributed by PS, AP and PM.

**Funding** Open access funding provided by Università degli Studi di Roma La Sapienza within the CRUI-CARE Agreement. This study was supported by the Italian workers' compensation authority, Istituto Nazionale Assicurazione e Infortuni sul Lavoro (INAIL), who founded the University of Rome La Sapienza. The current work was also founded by the Eiffel grant program proposed by the Ministère de l'Europe et des Affaires étrangères.

## Declarations

**Conflict of interest** The authors declare that they have no conflict of interest.

**Ethical standard** The experimental protocol was approved by the health and safety committee and by the direction of the Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique, which carefully evaluated the ethical implications and health risks related to the present measurement campaign.

**Open Access** This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

## References

- Asadi S, Wexler AS, Cappa CD et al (2019) Aerosol emission and superemission during human speech increase with voice loudness. *Sci Rep* 9(1):2348. <https://doi.org/10.1038/s41598-019-38808-z>
- Bahl P, de Silva CM, Chughtai AA et al (2020) An experimental framework to capture the flow dynamics of droplets expelled by a sneeze. *Exp Fluids* 61:176. <https://doi.org/10.1007/s00348-020-03008-3>
- Bahl P, de Silva C, MacIntyre CR et al (2021) Flow dynamics of droplets expelled during sneezing. *Phys Fluids* 33(11):111,901. <https://doi.org/10.1063/5.0067609>
- Bourouiba L (2021) The fluid dynamics of disease transmission. *Annu Rev Fluid Mech* 53(1):473–508. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-060220-113712>
- Bourouiba L, Dehandschoewercker E, Bush JWM (2014) Violent expiratory events: on coughing and sneezing. *J Fluid Mech* 745:537–563. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.88>
- Brunel M, Shen H, Coëtmelec S et al (2014) Determination of the size of irregular particles using interferometric out-of-focus imaging. *Int J Opt* 2014:1–8. <https://doi.org/10.1155/2014/143904>
- Buonanno G, Stabile L, Morawska L (2020) Estimation of airborne viral emission: Quanta emission rate of sars-cov-2 for infection risk assessment. *Environ Int* 141(105):794. <https://doi.org/10.1016/j.envint.2020.105794>
- Busco G, Yang SR, Seo J et al (2020) Sneezing and asymptomatic virus transmission. *Phys Fluids* 32(7):073,309. <https://doi.org/10.1063/5.0019090>
- Chao CYH, Wan MP, Morawska L et al (2009) Characterization of expiration air jets and droplet size distributions immediately at the mouth opening. *J Aerosol Sci* 40(2):122–133. <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2008.10.003>
- Chaudhuri S, Basu S, Kabi P et al (2020) Modeling the role of respiratory droplets in covid-19 type pandemics. *Phys Fluids* 32(6):063,309. <https://doi.org/10.1063/5.0015984>
- Dbouk T, Drikakis D (2020a) On coughing and airborne droplet transmission to humans. *Phys Fluids* 32(5):053,310. <https://doi.org/10.1063/5.0011960>

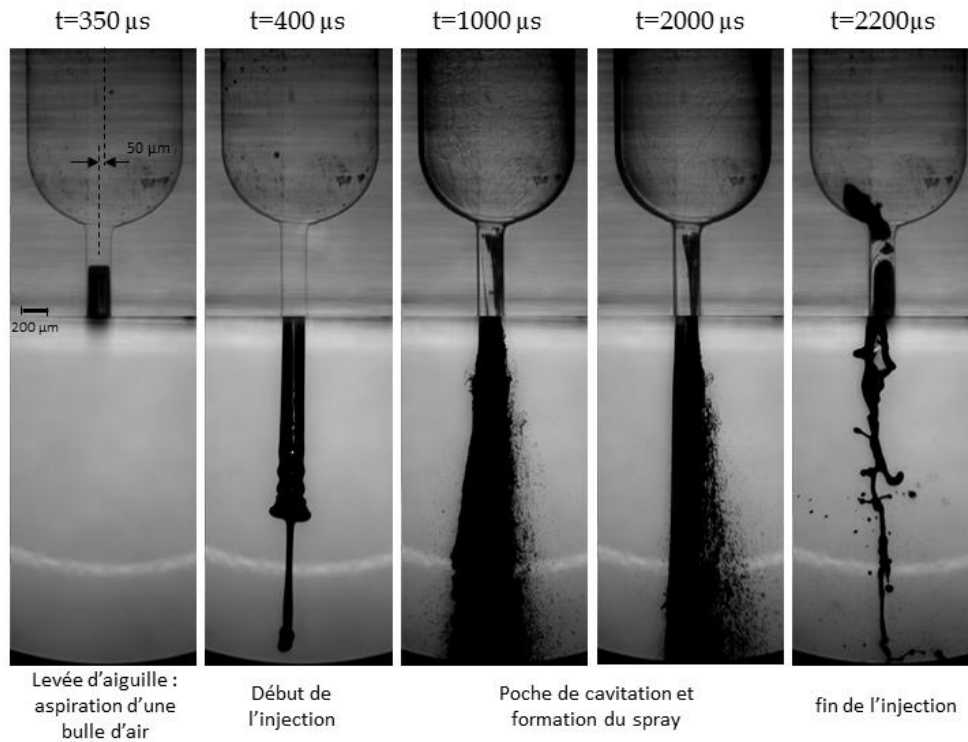
- Dbouk T, Drikakis D (2020b) Weather impact on airborne coronavirus survival. *Phys Fluids* 32(9):093,312. <https://doi.org/10.1063/5.0024272>
- De Padova D, Mossa M (2021) Multi-phase simulation of infected respiratory cloud transmission in air. *AIP Adv* 11(3):035,035. <https://doi.org/10.1063/5.0047692>
- de Silva CM, Bahl P, Doolan C et al (2021) Bespoke flow experiments to capture the dynamics of coughs and sneezes. *Meas Sci Technol* 32(12):125,302. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/ac2010>
- Dehaeck S, van Beeck J (2008) Multifrequency interferometric particle imaging for gas bubble sizing. *Exp Fluids* 45:823–831. <https://doi.org/10.1007/s00348-008-0502-8>
- Duguid JP (1946) The size and the duration of air-carriage of respiratory droplets and droplet-nuclei. *J Hyg* 44(6):471–479. <https://doi.org/10.1017/s00222172400019288>
- Glover AR, Skippon SM, Boyle RD (1995) Interferometric laser imaging for droplet sizing: a method for droplet-size measurement in sparse spray systems. *Appl Opt* 34(36):8409–8421. <https://doi.org/10.1364/AO.34.008409>
- Gralton J, Tovey E, McLaws ML et al (2011) The role of particle size in aerosolised pathogen transmission: a review. *J infect* 62(1):1–13. <https://doi.org/10.1016/j.jinf.2010.11.010>
- Gupta JK, Lin CH, Chen Q (2009) Flow dynamics and characterization of a cough. *Indoor Air* 19(6):517–25. <https://doi.org/10.1111/j.1600-0668.2009.00619.x>
- Gupta JK, Lin CH, Chen Q (2010) Characterizing exhaled airflow from breathing and talking. *Indoor Air* 20(1):31–39. <https://doi.org/10.1111/j.1600-0668.2009.00623.x>
- Han ZY, Weng WG, Huang QY (2013) Characterizations of particle size distribution of the droplets exhaled by sneeze. *J R Soc Interface* 10:20130560. <https://doi.org/10.1098/rsif.2013.0560>
- Hersen G, Moularat S, Robine E et al (2008) Impact of health on particle size of exhaled respiratory aerosols: case-control study. *Clean Soil Air Water* 36(7):572–577. <https://doi.org/10.1002/clen.20070189>
- Holmgren H, Ljungström E, Almstrand AC et al (2010) Size distribution of exhaled particles in the range from 0.01 to 2.0  $\mu\text{m}$ . *J Aerosol Sci* 41(5):439–446. <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2010.02.011>
- Johnson GR, Morawska L, Ristovski RD et al (2011) Modality of human expired aerosol size distributions. *J Aerosol Sci* 42(12):839–851. <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2011.07.009>
- Kawaguchi T, Akasaka Y, Maeda M (2002) Size measurements of droplets and bubbles by advanced interferometric laser imaging technique. *Meas Sci Technol* 13:308. <https://doi.org/10.1088/0957-0233/13/3/312>
- Li M, Chong KL, Ng CS et al (2022) Towards realistic simulations of human cough: effect of droplet emission duration and spread angle. *Int J Multiph Flow* 147(103):883. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103883>
- Loudon RG, Roberts RM (1967) Droplet expulsion from the respiratory tract. *Am Rev Respir Dis* 95(3):435–42
- Maeda M, Kawaguchi T, Hishida K (2000) Interferometric laser imaging for droplet sizing: a method for droplet-size measurement in sparse spray systems. *Meas Sci Technol* 11:L13–L18. <https://doi.org/10.1088/0957-0233/11/12/101>
- Mahajan RP, Singh P, Murty GE et al (1994) Relationship between expired lung volume, peak flow rate and peak velocity time during a voluntary cough manoeuvre. *Br J Anaesth* 72(3):298–301. <https://doi.org/10.1093/bja/72.3.298>
- Méès L, Lebrun D, Fréhou D, et al (2011) Interferometric laser imaging technique applied to nuclei size measurements in cavitation tunnel. Paper presented at the 2nd International conference on advanced model measurement technology for EU maritime industry (AMT'11), 2011, Newcastle upon Tyne, United Kingdom
- Mittal R, Ni R, Seo JH (2020) The flow physics of covid-19. *J Fluid Mech* 894:F2. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.330>
- Morawska L, Johnson GR, Ristovski ZD et al (2009) Size distribution and sites of origin of droplets expelled from the human respiratory tract during expiratory activities. *J Aerosol Sci* 40(3):256–269. <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2008.11.002>
- Nishimura H, Sakata S, Kaga A (2013) A new methodology for studying dynamics of aerosol particles in sneeze and cough using a digital high-vision, high-speed video system and vector analyses. *PLoS One* 8(11):e80,244. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0080244>
- Papineni R, Rosenthal FS (1997) The size distribution of droplets in the exhaled breath of healthy human subjects. *J Aerosol Med* 10(2):105–116. <https://doi.org/10.1089/jam.1997.10.105>
- Porcheron E, Lemaître P, Van Beeck J et al (2015) Development of a spectrometer for airborne measurement of droplet sizes in clouds. *J Eur Opt Soc, Rapid publ.* <https://doi.org/10.2971/jeos.2015.15030>
- Ragucci R, Cavaliere A, Massoli P (1990) Drop sizing by laser light scattering exploiting intensity angular oscillation in the mie regime. *Part Part Syst Charact* 7(1–4):221–225. <https://doi.org/10.1002/ppsc.19900070136>
- Rezaee H, Kebriaee A (2019) Droplet sizing of electrospray based on interferometric laser imaging. In: Paper presented at ILASS-Europe 2019, 29th conference on liquid atomization and spray systems, 2–4 Sept 2019, Paris, France
- Rosti ME, Olivieri S, Cavaiola M et al (2020) Fluid dynamics of covid-19 airborne infection suggests urgent data for a scientific design of social distancing. *Sci Rep* 10(22):426. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-80078-7>
- Sahu S, Hardalupas Y, Taylor AMKP (2016) Droplet-turbulence interaction in a confined polydispersed spray: effect of turbulence on droplet dispersion. *J Fluid Mech* 794:267–309. <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.169>
- Scharfman BE, Techet AH, Bush JWM et al (2016) Visualization of sneeze ejecta: steps of fluid fragmentation leading to respiratory droplets. *Exp Fluids* 57:24. <https://doi.org/10.1007/s00348-015-2078-4>
- Seminara G, Carli B, Forni G et al (2020) Biological fluid dynamics of airborne covid-19 infection. *Rend Fis Acc Lincei* 31(3):505–537. <https://doi.org/10.1007/s12210-020-00938-2>
- Singh P, Mahajan RP, Murty GE et al (1995) Relationship of peak flow rate and peak velocity time during voluntary coughing. *Br J Anaesth* 74(6):714–716. <https://doi.org/10.1093/bja/74.6.714>
- Tang JW, Nicolle AD, Klettner CA et al (2013) Airflow dynamics of human jets: sneezing and breathing - potential sources of infectious aerosols. *PLoS One* 8(4):e59,970. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0059970>
- VanSciver M, Miller S, Hertzberg J (2011) Particle image velocimetry of human cough. *Aerosol Sci Technol* 45(3):415–422. <https://doi.org/10.1080/02786826.2010.542785>
- Wang B, Wu H, Wan XF (2020) Transport and fate of human expiratory droplets—a modeling approach. *Phys Fluids* 32(8):083,307. <https://doi.org/10.1063/5.0021280>
- Wang H, Li Z, Zhang X et al (2020) The motion of respiratory droplets produced by coughing. *Phys Fluids* 32(12):125,102. <https://doi.org/10.1063/5.0033849>
- Wei J, Li Y (2015) Enhanced spread of expiratory droplets by turbulence in a cough jet. *Build Environ* 93:86–96. <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2015.06.018>
- Wei J, Li Y (2017) Human cough as a two-stage jet and its role in particle transport. *PLoS One* 12(1):e0169,235. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0169235>
- Xie X, Li Y, Chwang AT et al (2007) How far droplets can move in indoor environments—revisiting the wells evaporation-falling

- curve. *Indoor Air* 17(3):211–225. <https://doi.org/10.1111/j.1600-0668.2007.00469.x>
- Yilmaz E, Suzuki T, Ito K et al (2021) Analysis of the spray characteristics of water and water/glycerin mixtures using an interferometric laser imaging for droplet sizing technique. *Int J Technol* 12(1):101–112. <https://doi.org/10.14716/ijtech.v12i1.4188>
- Zhu S, Kato S, Yang JH (2006) Study on transport characteristics of saliva droplets produced by coughing in a calm indoor environment. *Build Environ* 41(12):1691–1702. <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2005.06.024>

**Publisher's Note** Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



### 7.3 Étude des phénomènes de cavitation dans les injecteurs haute-pression des moteurs thermiques automobiles



**FIGURE 7.1** – Visualisations simultanées de l'écoulement cavitant à l'intérieur de la buse d'injection et de l'écoulement en sortie de cette buse à différents instants après le début de l'injection. Dans cet exemple, la pression d'injection est de 400 bar. Elle peut atteindre 800 bar sur cette expérience et dépasser 2000 bar dans les injecteurs de série, métallique et percés de 5 à 7 orifices.

Le dernier exemple proposé dans ce chapitre montre les possibilités qu'offrent des techniques optiques relativement classiques, pour la caractérisation et l'étude d'un écoulement diphasique complexe, dans des conditions difficiles d'intérêt industriel. Dans ce qui suit, le succès des mesures ne repose ni sur des modèles complexes de propagation de la lumière, ni sur des théories de diffusion mathématiquement lourdes, ni sur l'utilisation de sources laser très onéreuses. En revanche, les montages optiques sont astucieux et très soignés, plusieurs techniques d'imagerie complémentaires sont mises en œuvre, et surtout un soin particulier est apporté à la quantification des informations et à l'interprétation des images. Le travail détaillé dans l'article qui est reproduit dans les pages suivantes [120] a été réalisé dans le cadre de la thèse de Cyril Mauger [121] et du projet collaboratif NADIAbio financé par un fond public interministériel. L'un des

résultats importants rapportés dans cet article est que lorsque l'on augmente progressivement le débit, l'initiation de la cavitation dans un canal, après une forte restriction de section, ne se produit pas à l'endroit où la pression est minimum en moyenne, mais au cœur de tourbillons générés par des instabilités dans une couche de fort cisaillement. L'expérience rapportée dans l'article a pour but de comprendre les mécanismes d'apparition et de développement de la cavitation dans les injecteurs haute pression de type injection directe automobile. Une seconde expérience, avec des conditions et des géométries plus proches des conditions réelles rencontrées dans les injecteurs diesel a été développée en parallèle : injecteur réel avec mesure de levée d'aiguille (écoulement instationnaire), buses mono-trou et bi-trou transparentes avec des variations géométriques. Une illustration issue de ces travaux connexes, réalisés dans le cadre de NADIAbio et du projet ANR CANNEX, est proposée figure 7.1.

## Shadowgraph, Schlieren and interferometry in a 2D cavitating channel flow

Cyril Mauger · Loïc Méès · Marc Michard ·  
Alexandre Azouzi · Stéphane Valette

Received: 27 March 2012/Revised: 30 September 2012/Accepted: 7 October 2012/Published online: 25 October 2012  
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

**Abstract** Cavitation plays an important role in fuel atomization mechanisms, but the physics of cavitation and its impact on spray formation and injector efficiency are not well documented yet. Experimental investigations are required to support the development and the validation of numerical models and the design of tomorrow's injectors, in the context of pollutant and fuel consumption reduction. The complexity of modern injectors and the extreme conditions of injection do not facilitate experimental investigations. In this paper, experiments are conducted in a simplified geometry. The model nozzle consists of a transparent 2D micro-channel supplied with a test oil (ISO 4113). Three different optical techniques are proposed to investigate the channel flow, with the pressure drop between upstream and downstream chambers as a parameter. A shadowgraph-like imaging technique allows the observation of cavitation inception and vapor cavities development throughout the channel. The technique also reveals the presence of density gradients (pressure or temperature) in the channel flow. However, this additional information is balanced by difficulties in image interpretation, which are discussed in the paper. In addition, a combination of Schlieren technique and interferometric imaging is used to measure the density fields inside the channel. The three techniques results are carefully

analyzed and confronted. These results reveal a wealth of information on the flow, with pressure waves generated by bubble collapses, turbulence in the wake of vapor cavities and bubble survival in flow regions of high pressure. Our results also show that cavitation inception is located in the shear layers between the recirculation zones and the main flow, relatively far from the inlet corner, where the pressure is minimum in average. To explain this behavior, we propose a scenario of cavitation inception based on the occurrence and the growing of instabilities in the shear layers.

### 1 Introduction

In the modern internal combustion engine, diesel or gasoline is directly injected into the combustion chamber. The liquid fuel is injected through a hole-type nozzle with very high injection pressure, to produce a spray of fine droplets. The spray characteristics are crucial, since they determine the evaporation and mixing processes before combustion. In the nozzle holes, the flow is strongly accelerated and the pressure may drop down to the fuel vapor pressure, leading to cavitation. Cavitation is generally regarded as a source of problems: noise, vibrations, efficiency loss and damage. In the case of fuel injection in particular, it leads to a limitation of the flow rate. However, cavitation offers some advantages by preventing nozzles from fouling and possibly enhancing atomization processes.

Cavitation in a diesel nozzle has been studied in the early work of Bergwerk (1959). In this paper, vapor cavities have been observed in transparent and up-scaled nozzles. In (Nurick 1976), the development of cavitation has been observed in sharp-edged orifices. Nurick proposed a one-dimensional model to describe cavitation inception

C. Mauger · L. Méès (✉) · M. Michard · A. Azouzi  
Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA),  
CNRS UMR5509, Ecole Centrale de Lyon, INSA de Lyon,  
Université Claude Bernard Lyon 1, Ecully, France  
e-mail: loic.mees@ec-lyon.fr

S. Valette  
Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS),  
CNRS UMR5513, Ecole Centrale de Lyon, Ecole Nationale  
d'Ingénieurs de Saint Etienne, Saint-Étienne, France

and development as a function of two dimensionless parameters (the cavitation number and the discharge coefficient). In the same paper, the great influence of the orifice entrance geometry on cavitation has been pointed out. The influence of geometric parameters, as the entrance radius (Soteriou et al. 1995; Schmidt et al. 1997; Winklhofer et al. 2001) or the orifice taper (Winklhofer et al. 2003; Payri et al. 2005), has been later confirmed experimentally and numerically. An effect of roughness at orifice wall and orifice inlet has been also considered (Jung et al. 2008; Chang et al. 2006; Winklhofer et al. 2003). These studies have shown that very weak variations in the orifice geometry could have a disproportionate influence on cavitation. A perfect control of the geometry and surface conditions is then suitable to study nozzle cavitation experimentally, especially when comparisons with computational fluid dynamics are concerned.

Experimental study of nozzle cavitation in real conditions is difficult. Direct observation of such a small and fast two-phase flow requires high resolutions in both space and time. The nozzles must be transparent and resist to high injection pressure and chocks caused by the needle lift. As a consequence, only a few experimental studies have been done in realistic conditions (Badock et al. 1999) while most of them have been conducted on simplified geometries: up-scaled nozzles, lower pressure and velocities... In the present paper, cavitation is studied in a quasi-two dimensional orifice (channel), in permanent flow condition (without needle lift) and lower pressure levels than those currently used in real injectors. Such a simplification has been already adopted in previous works (Roosen 2007; Winklhofer et al. 2001). It provides several advantages in terms of optical access and image interpretation, notably. In this paper, we also take advantage of the 2D geometry to control and characterize the channel geometry and surface roughness. Experimental results obtained in this simplified geometry, with simplified working conditions, cannot be directly transferred to real diesel injectors. However, these simplifications allow to obtain high quality images of the flow and quantitative information to be used as a reference for computational fluid dynamics (CFD) results and the cavitation models involved. In addition, such a simplified experimental set-up is suitable to study the physical mechanisms involved (cavitation inception and development, bubble collapse, etc) to enhance our general understanding of nozzle cavitation. The channel flow is visualized as a function of the pressure drop, by using a shadowgraph-like technique, the Schlieren method and interferometric imaging. We pay a special attention to images interpretation and to the inception of cavitation, by confronting results obtained with the three different techniques.

The paper is organized as follows. In Sect. 2, the apparatus set-up used to generate and control the channel flow is presented. Section 3 provides the general features of cavitation in channel flows. In Sect. 4, the principles of shadowgraph are recalled and the shadowgraph-like optical arrangement proposed in this paper is presented. Images of the flow obtained with this arrangement are then discussed, as a function of the pressure drop. A particular attention is paid to cavitation inception and to qualitative information on density gradients, provided by shadowgraph effect. Section 5 is dedicated to the Schlieren method. The basic features of the technique are recalled, and density profiles are deduced from the Schlieren images by integration. In Sect. 6, an interferometric imaging arrangement is presented. Unlike the previous technique, it provides quantitative information on the channel flow density. Density fields are deduced from the interferometric images by taking advantage of qualitative information provided by the Schlieren method. Section 7 is a discussion based on the three techniques results. Density fields, density gradients and shadowgraph-like images are discussed together to further detail the shadowgraph-like images interpretation, to discuss the mechanism of cavitation inception, and to study the bubble detachments and the pressure waves appearing in these images.

## 2 Experimental set-up

The channel consists of two separated metal sheets, sandwiched between a pair of glass windows (Fig. 1). The channel is continuously supplied with fuel (test oil SHELL V-Oel-1404, ISO 4113) by a volumetric pump, through holes directly drilled into the glass windows. A by-pass and valves allow one to set the flow rate in the channel, as well as upstream and downstream pressures. The temperature is regulated by using a heat exchanger, and the fuel is filtered before returning in a tank at atmospheric pressure. A flow meter and temperature and pressure sensors are used to measure the flow conditions.

The use of separated metal sheets allows a better control of the channel geometry and surface roughness. Figure 2 shows scanning electron microscope (SEM) images of the channel. Figure 2a shows the whole channel. The inserts (Fig. 2b–e) focus on the channel entrance with tilted and non-tilted views of the lower and upper entrance corners. The channel is about 400  $\mu\text{m}$  height (exact dimensions are reported in Fig. 2a) and 1,475  $\mu\text{m}$  long, with a weak taper of about 0.4°. The channel depth is  $L = 2$  mm. The surfaces constituting the channel walls have been mirror-polished. Surface roughness has been characterized with an optical profilometer, by an arithmetic mean roughness

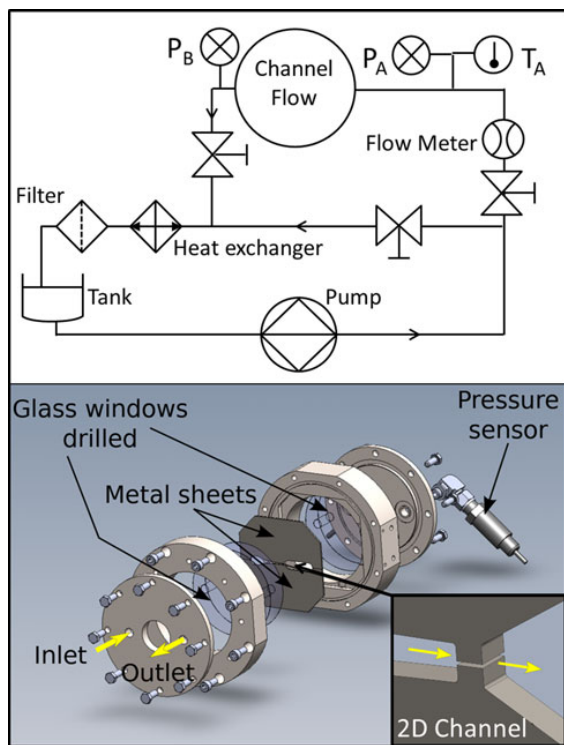


Fig. 1 Experimental set-up

$Ra < 0.1 \mu\text{m}$ . At the channel entrance corners, the rounding is evaluated to be less than  $10 \mu\text{m}$ .

Three optical techniques have been used to visualize the channel flow: a shadowgraph-like technique, the Schlieren method and an interferometric imaging technique. The

corresponding setups will be introduced later in the paper. The following section is dedicated to the presentation of the general features of the channel flow.

### 3 General features

Figure 3 is a schematic of the channel flow. The fluid flows between A and B under the effect of the pressure drop  $\Delta P = P_A - P_B$ . In the following, the upstream pressure  $P_A$  will remain constant, while pressure drop and flow rate will be increased by decreasing the downstream pressure  $P_B$ . At the orifice inlet, the strong change in cross-section and flow direction induces a separation of the boundary layers from the orifice walls and the formation of a *vena contracta*. Recirculation zones appear between the walls and the main flow which undergoes a supplementary contraction in the central part of the channel.

A one-dimensional model is proposed by Nurick (1976) to account for cavitation in nozzle flows. This simple model is based on two dimensionless parameters: the discharge coefficient and the cavitation number. The discharge coefficient is defined as the ratio between the actual mass flow rate  $\dot{m}$  and the theoretical mass flow rate, given the pressure drop  $\Delta P$  and the orifice section  $S_0$ . More precisely,

$$C_D = \frac{\dot{m}}{S_0 \sqrt{2\rho(P_A - P_B)}} \tag{1}$$

where  $\rho$  is the fluid density.

The cavitation number is defined by Nurick (1976) as the ratio

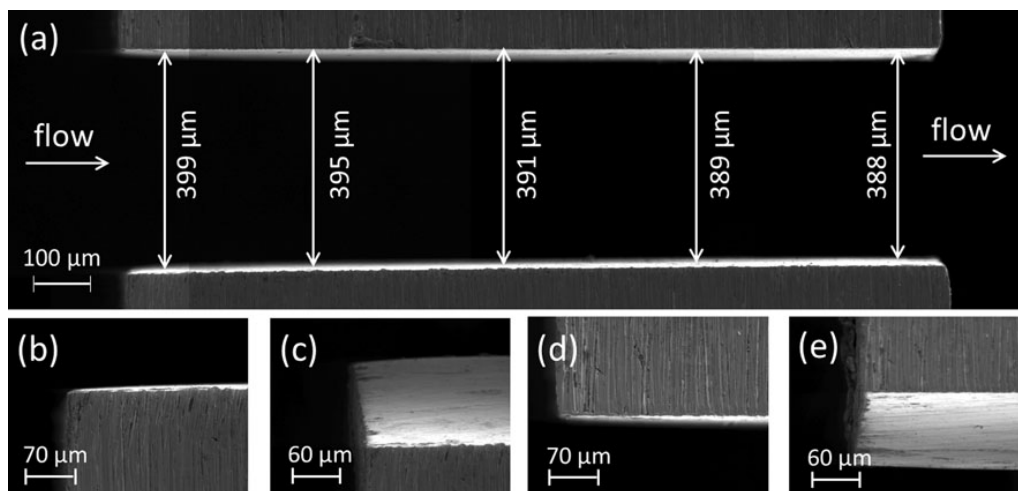
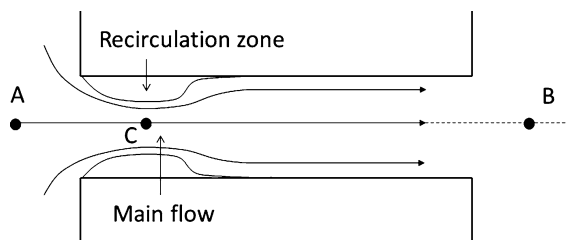


Fig. 2 SEM images of the channel. a Overview of the channel; b lower entrance corner (non-tilted view); c lower entrance corner (tilted view); d upper entrance corner (non-tilted view); e upper entrance corner (tilted view)



**Fig. 3** Schematic of the orifice flow

$$K = \frac{P_A - P_v}{P_A - P_B} \quad (2)$$

where  $P_v$  is the vapor pressure of the fluid.  $K$  decreases with decreasing  $P_B$  (increasing  $\Delta P$ ) and cavitation occurs at low value of  $K$  (typically lower than 2). Starting with low pressure drop  $\Delta P$ , the mass flow rate increases when  $P_B$  decreases and the pressure  $P_C$ , at the minimum section of the contracted flow, decreases. Following Nurick model, cavitation incepts in the orifice when  $P_C$  reaches the vapor pressure. The flow rate then reaches a maximum value and remains constant for further decreasing of  $P_B$ :

$$\dot{m}_{\text{crit}} = S_C \sqrt{2\rho(P_A - P_v)} \quad (3)$$

where  $S_C$  is the contracted flow section in C. Under this choked flow condition ( $K < K_{\text{crit}}$ ), the discharge coefficient can be related to the contraction coefficient:

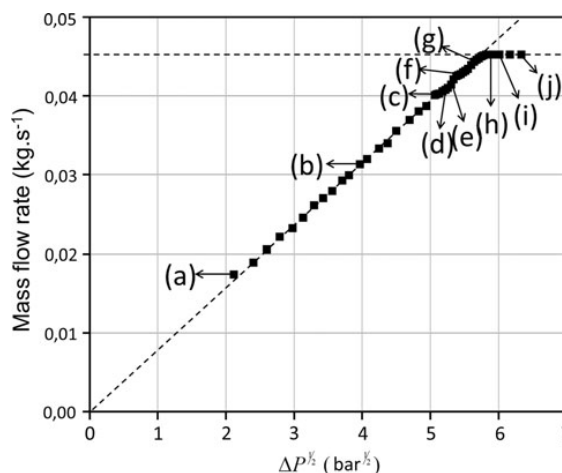
$$C_D = S_C/S_0 \quad (4)$$

by

$$C_D = C_C \sqrt{K} \quad (5)$$

Still following Nurick (1976): for  $K < K_{\text{crit}}$ , the flow is two-phase, the flow rate is choked and the discharge coefficient is proportional to the square root of cavitation number; for  $K > K_{\text{crit}}$ , the flow remains single phase and the discharge coefficient is almost constant at about 0.8.

Figure 4 displays the mass flow rate measured in the channel as a function of the square root of pressure drop. The pressure drop is changed by changing the downstream pressure  $P_B$  at constant upstream pressure  $P_A = 50$  bar. The flow temperature is maintained to 32 °C. At this temperature and at a pressure of 50 bar, the fluid density is  $\rho = 815.4 \text{ kg m}^{-3}$ . The curve evolution is simple and can be described in two parts. At low pressure drop, the mass flow rate is almost proportional to the pressure drop square root. This reflects that the discharge coefficient  $C_D$  is almost constant in these conditions. We deduce from the slope of the curve (with  $S_0 = 7.74 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ ) that  $C_D = 0.795$  for  $\sqrt{\Delta P} < 5.8$  ( $P_B > 16.1$  bar,  $K > 1.47$ ). For greater pressure drop, the mass flow rate remains constant.



**Fig. 4** Mass flow rate in the channel as a function of the square root of the pressure drop. The letters (a) to (j) refer to Fig. 9, where images recorded in the same pressure drop conditions are presented

This reflects the linear relation between  $C_D$  and  $K^{1/2}$  of Eq. (5), with a contraction coefficient  $C_C = 0.647$  deduced from Eqs. (3) and (4).

#### 4 Shadowgraph-like imaging

Almost all the observations of cavitating flows in nozzles are based on shadowgraph or backlight imaging configurations. Strictly speaking, shadowgraph is a density sensitive technique, based on a back illumination and an appropriate defocusing. By extension, the term shadowgraph is often misused to describe more general types of backlight images. In this paper, backlit images that are sensitive to density gradients are presented, but the set-up differs somewhat from the standard shadowgraph, as described by Merzkirch (1974) for example.

##### 4.1 The principle of the standard shadowgraph technique

Before introducing our optical arrangement in details, let us recall the main feature of the shadowgraph technique. Figure 5 is a schematic of shadowgraph arrangement, strictly speaking. A point light source is collimated to illuminate the disturbed medium  $D$ . Images are recorded on a CCD sensor (or a photographic plate) by using an imaging lens which is defocused with respect to the disturbed medium. More precisely, the imaging lens is focused onto a plane  $O$ , distant by  $l$  from the disturbed medium  $D$ . In the presence of refractive index gradients (related to density gradients) in  $D$ , an individual light ray



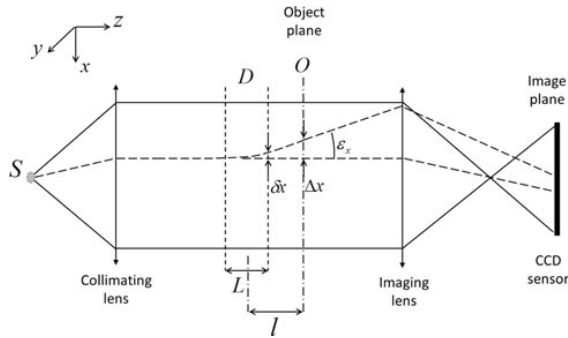


Fig. 5 Standard shadowgraph arrangement

undergoes a curved trajectory, leading to a displacement  $\delta x$  and a deviation angle  $\varepsilon_x$  with respect to the undisturbed ray at the medium  $D$  exit. Assuming that rays undergo only infinitesimal deviations (i.e.,  $x$  and  $y$  coordinates of the ray are the same at the medium entrance and exit) but have non-negligible curvature, the deflection angle is written as:

$$\varepsilon_x \approx \tan \varepsilon_x \approx \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} ds \tag{6}$$

where integration is done along the ray trajectory through  $D$ .

In plane  $O$ , the ray displacement  $\Delta x$  is roughly proportional to  $l$  and to angle  $\varepsilon_x$ . Considering all the rays which contribute to image formation, displacements  $\Delta x$  (and equivalent displacements  $\Delta y$  along  $y$  direction) lead to a redistribution of light intensity in plane  $O$  (and consequently in image plane) which depends on the refractive index  $n$  variations in the disturbed medium. Under the assumption of infinitesimal deviation previously introduced, the relative change in recorded intensity with respect to the undisturbed intensity can be approximated by

$$\frac{\Delta I}{I} \approx -l \int_{s_0}^{s_1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\ln n) ds \tag{7}$$

Assuming a 2D flow and still assuming infinitesimal ray displacements in  $D$ , Eq. (7) becomes

$$\frac{\Delta I(x, y)}{I(x, y)} \approx -lL \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\ln n(x, y)) \tag{8}$$

The shadowgraph intensity distribution is then roughly proportional to the second derivative of the refractive index, to the depth  $L$  of the disturbed medium and to the distance  $l$ . In principle,  $l$  can be adjusted to enhance or reduce the sensitivity of the technique to small density variations.

In principle, Eq. (8) can be integrated to obtain the refractive index (or the density) distribution in the medium.

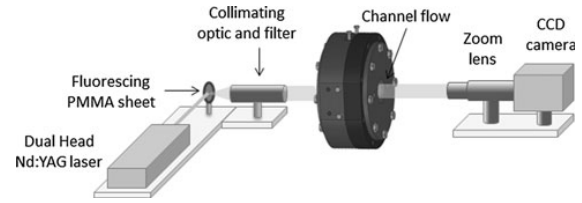


Fig. 6 Shadowgraph-like optical set-up

In practice, shadowgraph only provides qualitative information on flow density. Firstly, the technique is highly sensitive to any source of noise, as a double integration is required to obtain the density field. Secondly, the calibration of the technique appears to be a very difficult task as samples with a well-known second derivative of the refractive index must be used.

#### 4.2 Shadowgraph-like arrangement

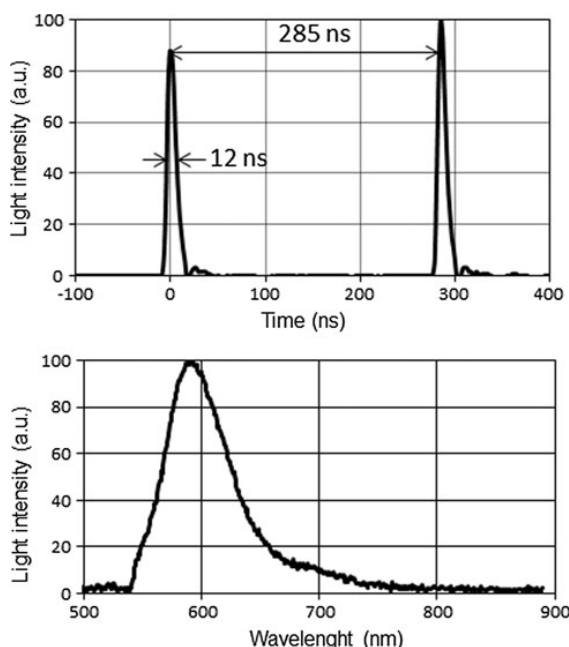
In the shadowgraph-like configuration considered in this paper, the light source and the camera are located on opposite sides of the channel (Fig. 6). However, it differs from the standard shadowgraph arrangement described above as the camera lens is focused onto the channel flow, in order to visualize bubbles and vapor cavity as usually done in backlit imaging. Backlit imaging is based on ray deflection by interfaces. Assuming that interfaces are never perfectly flat and oriented perpendicularly to the incident rays, most of rays crossing an interface are deviated with an angle greater than the collection angle, whatever they are reflected or refracted through the interface. As a consequence, bubbles and vapor cavities appear dark in the image. On the contrary, liquid regions would appear bright, as (in absence of density gradient) they do not induce any ray deviation. In the present case, however, density gradients and the channel depth  $L$  are large enough to produce visible shadowgraph effect, as shown later in this section (Figs. 8, 9).

The shadowgraph-like arrangement can be viewed as a backlit imaging arrangement which is sensitive to density gradients. Due to the very small size of the channel, the use of a large optical magnification is required. With flow velocities up to  $70 \text{ m s}^{-1}$ , an extremely short light pulse is needed to optically freeze the flow. In addition, an incoherent light source is suitable to avoid speckle on the images. To fulfill these requirements, a light source is generated by focusing the second harmonic of a Nd:YAG pulsed laser (wavelength  $\lambda_{\text{YAG}} = 532 \text{ nm}$  and pulse duration of  $6 \text{ ns}$ ) on a fluorescing polymethyl-methacrylate (PMMA) sheet. The fluorescence emission is collimated, and the remaining laser light is filtered by using a band reject filter (Notch filter  $\lambda_{\text{N}} = 533 \pm 8 \text{ nm}$ ). A dual head

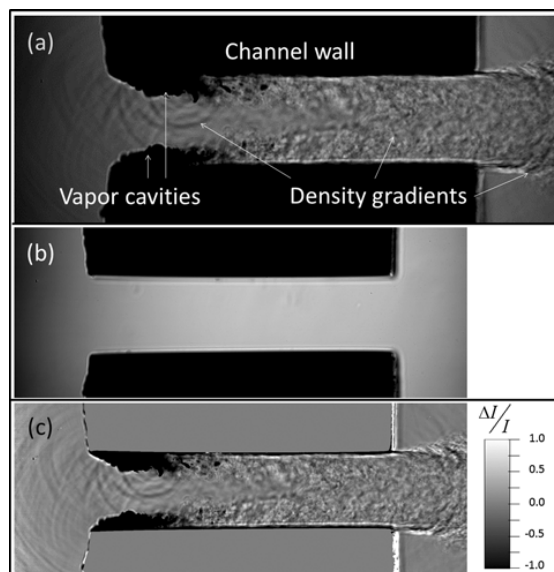
laser is used to produce time delayed light pulses with 12 ns duration (FWHM) and a broad spectrum (about 100 nm) centered on  $\lambda_P = 592$  nm (Fig. 7). The time delay between the two pulses is adjustable, down to about 30 ns. Images are recorded by means of an optical zoom (OPTEM 125C), at low repetition rate (1 Hz), on a  $2,048 \times 2,048$  pixels, 10-bit CCD camera. The resulting resolution is  $1.15 \mu\text{m}/\text{px}$ . Using the double-frame mode of the camera and the dual pulse system, couples of images separated by 285 ns have been recorded. The arrangement then allows the tracking of rapid events, as bubble collapses (Sect. 7) or the production of velocity information, which is not detailed in this paper.

#### 4.3 Shadowgraph-like images of the channel flow

Figure 8a displays an example of instantaneous image of the channel flow, recorded in the shadowgraph-like configuration previously described. In this raw image, the channel walls, the vapor cavities and the bubbles appear in black, when the liquid is essentially bright, as it should be in backlit imaging. However, gray structures are also visible in the image, as a result of a shadowgraph effect. Figure 8 also displays a background image (Fig. 8b) and the computation of the quantity  $\Delta I/I$  (Fig. 8c), previously introduced in Eqs. (7) and (8).  $I$  is the raw image intensity and  $\Delta I$  is the relative change with respect to the undisturbed intensity, that is,  $\Delta I = I - I_b$  where  $I_b$  is the background image intensity.



**Fig. 7** Light source temporal profile and spectrum measured by means of a fast photo-diode and a fiber-based mini-spectrometer

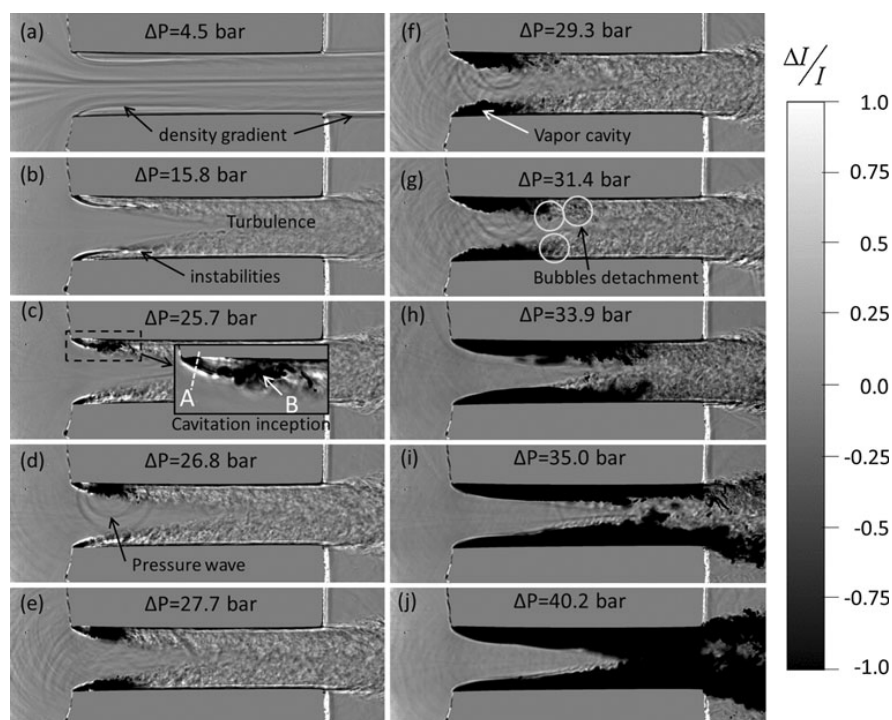


**Fig. 8** Shadowgraph-like instantaneous image of the channel flow (a), background image (b) and normalized intensity  $\Delta I/I$  (c)

Figure 9 displays a sample of instantaneous shadowgraph-like images for increasing pressure drop from  $\Delta P = 4.5$  bar (a) to  $\Delta P = 40.2$  bar (j). The images of Fig. 9 represent the quantity  $\Delta I/I$  previously introduced. These images can be viewed as the results of a background subtraction and a normalization of the raw images. At low pressure drop, in Fig. 9a for  $\Delta P = 4.5$  bar, the flow is single phase and laminar. However, shadowgraph effects reveal density (refractive index) gradients as gray-level variations. Density gradients are located in the shear layers at the channel inlet, in the out-going jet boundaries and along some streamlines of the flow. In a compressible fluid, density variation can be associated with pressure or temperature variation, or both together. In liquids, the temperature contribution generally overpasses the pressure contribution as a temperature drop of 1 K approximately corresponds to the same density variation than a pressure increase of 10 bar. In the present case, the origin of the density gradients is more ambiguous, as pressure gradients can become very large with increasing pressure drop. For  $\Delta P = 4.5$  bar (Fig. 9a), the density gradients in the shear layers are probably associated with both a pressure gradient between the main flow and the recirculation zone, and a temperature gradient. The image also reveals some streamlines, which probably originate from a thermal marking of the flow, far upstream from the channel. This effect completely disappears at higher pressure drop (higher velocity) in the following images. At the channel outlet, we also suspect that both temperature and pressure gradient are involved. The temperature gradient would be



**Fig. 9** Sample of instantaneous shadowgraph-like images (after background subtraction and normalization) for increasing pressure drop from **a** with  $\Delta P = 4.8$  bar to **j** with  $\Delta P = 40.2$  bar. Upstream pressure is constant and equals 50 bar when downstream pressure is changed. The fuel flows from the *left* to the *right*



due to viscous heating near the walls, in the boundary layer all along the channel. The pressure gradient would be associated with the pressure difference between the outgoing jet and the downstream chamber.

For a larger pressure drop  $\Delta P = 15.8$  bar (Fig. 9b), the density gradients in the shear layers appear more contrasted as the pressure difference between the recirculation zones and the main flow has increased. The gradients remain smooth and regular in the beginning of the shear layers (near the inlet corners), but they reveal developing instabilities at their end. Still in Fig. 9b, gray-level random-like variations appear in the wake of the recirculation zones. These structures are developing from the walls to the center of the flow where they join together, about the middle of the channel. We interpret this structure as a signature of turbulence and associated density (pressure) fluctuations.

Cavitation incepts for pressure drop  $\Delta P$  of about 26 bar, in the upper part of the channel inlet, as shown in Fig. 9c, d. Shadowgraph-like images interpretation is not obvious because dark zones can be due to liquid–vapor interfaces or to density gradients. In Fig. 9c, it seems that cavitation incepts in the shear layer, relatively far from the inlet corner, where the lowest pressures are expected in average. Further in this paper, we will propose a scenario of cavitation inception in the shear layer, based on the results provided by the three optical techniques presented in this paper. In the lower shear layer of Fig. 9c, it seems that

cavitation has not yet incepted. Here, the shear layer appears shortened with respect to the previous images as it seems that instabilities described in Fig. 9b develop more intensively and sooner (closer to the channel inlet) for increasing pressure drop. This apparent asymmetry between upper and lower part of the channel is probably due to a weak asymmetry in the channel inlet geometry.

For increasing pressure drop, the vapor cavities develop. They develop first in the upper shear layer (Fig. 9d), then in both upper and lower shear layers (Fig. 9e). From Fig. 9f–i, vapor cavities fill the entire recirculation zones and progressively elongate, as the downstream pressure further decreases. The choked flow conditions previously shown in Fig. 4 are reached for  $\Delta P = 33.9$  bar (Fig. 9h). At this stage, vapor cavities have developed beyond the one-half of the channel length. For the largest pressure drop considered here ( $\Delta P = 40.2$  bar, Fig. 9j), it seems that the vapor cavities join together and fill the entire channel section. In this extreme situation, cavities are probably no more 2D as it is hardly believable that all liquid transform into vapor.

Figure 9 shows that shadowgraph-like images provide a wealth of information on the flow. In addition to the features previously described, one can see bubble detachments in the wake of vapor cavities (e.g., Fig. 9g). In Fig. 9d, two regular circles centered on the vapor cavity are clearly visible. We interpret these circles as pressure waves

produced by bubble collapse. Several similar events are observed for larger pressure drop in Fig. 9e–g. For even larger pressure drops, in Fig. 9h–j, it seems that the amplitude of these pressure waves decreases and their occurrence becomes less frequent. Such pressure waves, produced by bubble collapse in an injector hole, have been considered numerically by Sezal et al. (2009), but to our knowledge, no experimental observation of this phenomenon has been reported yet in similar configuration.

#### 4.4 Cavitation probability

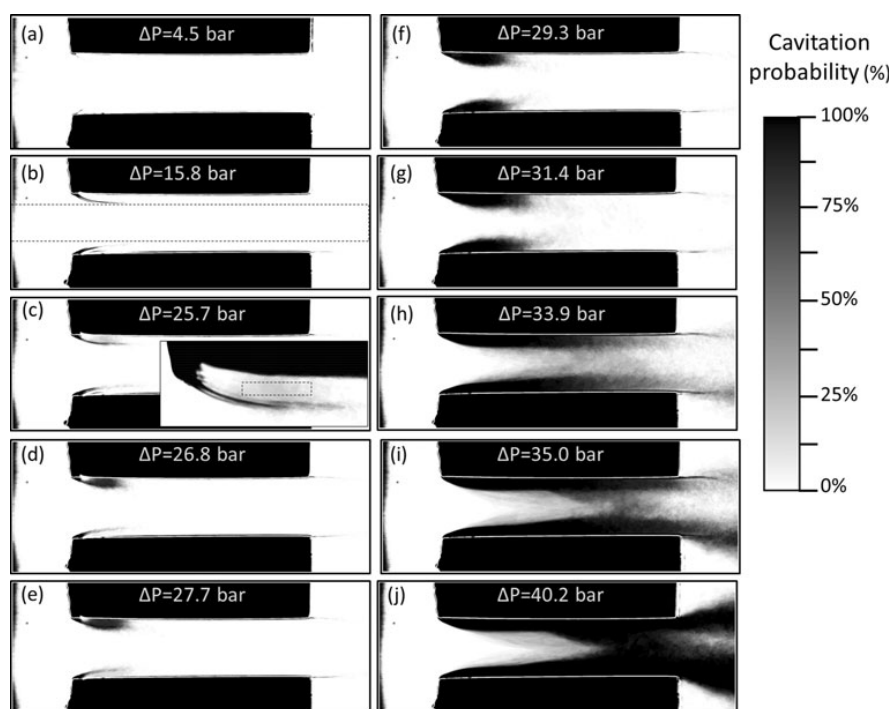
The sample images of Fig. 9 have been selected to be representative of all the images recorded in the same condition, but some variations from one image to another can be observed. These variations are considered in Fig. 10 which displays images representing probabilities of cavitation occurrence. The same pressure drop conditions than for Fig. 9 are considered in Fig. 10. Cavitation probabilities have been built by adding 50 images recorded in the same conditions, after applying a threshold to each image in order to separate liquid from vapor. It is then assumed that dark pixels correspond to vapor and bright pixels to liquid. In other words, no distinction is made between vapor cavities and dark regions resulting from intense gradients. Excepted for the gradients in the shear layers, the other flow features appearing by shadowgraph effects in Fig. 9 have been removed in Fig. 10 as a consequence of

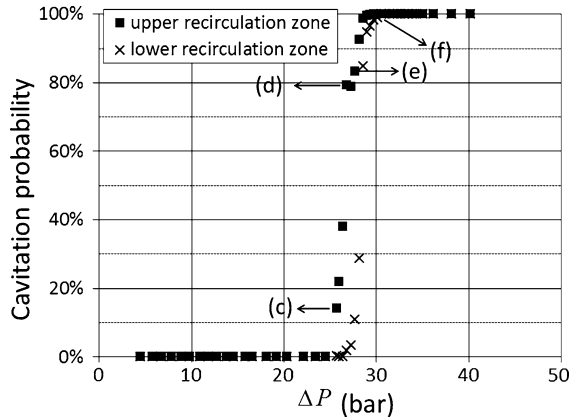
averaging. However, cavitation inception and cavities elongation are still clearly observed.

The Fig. 10 results offer some possibilities of quantification, taking the variability of the observations into account. For example, cavitation inception can be statistically associated with a critical pressure drop. An averaged cavitation probability has been calculated, in the rectangular area displayed with dashed boundaries in Fig. 10c. This area has been chosen to contain the first inception of cavitation, as previously identified in Fig. 9c, and to avoid the shear layer itself and density gradients that must not be considered in this calculation. The average cavitation probability in this area has been plotted as a function of pressure drop in Fig. 11. Considering an arbitrary threshold of 10 % in cavitation probability, one can establish from Fig. 11 that cavitation starts in the upper shear layer for a pressure drop of  $25.7 \pm 0.3$  bar. A similar analysis in the lower shear layer leads to a critical pressure drop of  $27.7 \pm 0.4$  bar.

As shadowgraph-like images are sensitive to density gradients, they could be used, in principle, to measure the flow density. However, our attempts to reconstruct density fields have failed and there are several reasons for that. As previously mentioned, such a reconstruction requires a double integration. In addition, calibration targets would be necessary to obtain reliable quantitative information. Finally, and this is probably the main reason of our failure, Eq. (7) is not valid as the assumption of infinitesimal

**Fig. 10** Cavitation probability deduced from shadowgraph-like images of the channel flow, for increasing pressure drop from a with  $\Delta P = 4.8$  bar to j with  $\Delta P = 40.2$  bar. Upstream pressure is constant and equals 50 bar when downstream pressure is changed. The fuel flows from the left to the right





**Fig. 11** Averaged cavitation probability in recirculation zones. The letters (c) to (f) refer to Figs. 9 and 10

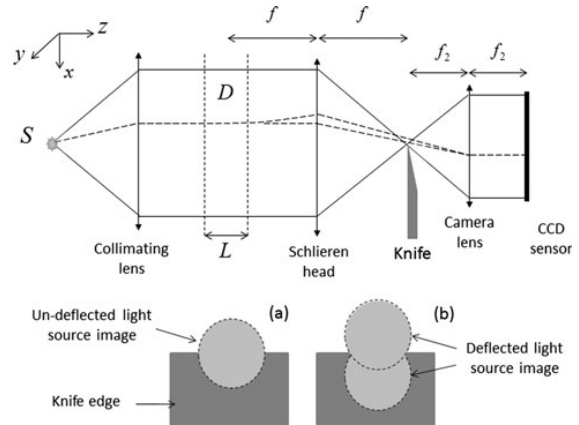
displacement is not satisfied. Eq. (7) predicts that the shadowgraph effects are proportional to the distance  $l$  and completely vanish for  $l = 0$ . We then tried to adjust the distance  $l$  (by displacing the channel by means of a linear translation stage) in order to reduce the shadowgraph effects. We found that these effects were still visible, with contrast in the same order of magnitude, whatever the value of  $l$ . It is then clear that Eq. (7) is not satisfied. The shadowgraph-like technique presented here cannot be used to obtain quantitative information on density fields. It is limited to provide qualitative information on density gradients.

**5 Schlieren imaging method**

The Schlieren method is an alternative technique to standard shadowgraph to measure density gradients. It is, in principle, sensitive to the first space derivative of the density along one direction.

**5.1 Principle of the Schlieren method**

Figure 12 is a schematic of a Schlieren imaging set-up. A point source is collimated to illuminate the test section  $D$ . A first lens, generally called Schlieren head, is used to generate a Fourier plane of the test section. A knife is placed in the Fourier plane, and a second lens is used to image the test section on a CCD sensor. The technique differs from shadowgraph which requires a defocusing. In the Fourier plane, the knife edge cuts off a part of the point source image, which is located on the optical axis, in absence of perturbation (see (a) in Fig. 12). In the presence of refractive index (density) gradients in the test section, optical rays are deflected. Depending on the gradient sign, the light source



**Fig. 12** Schematic of Schlieren imaging method

image associated with the ray is moved upward or downward with respect to the undisturbed case (see (b) in Fig. 12), leading to a lower or a greater attenuation of light. Density gradients then appear darker or brighter on images. Assuming that rays undergo only infinitesimal deviations in the test section, neglecting geometrical aberrations of the lenses and considering a rectangular point source image, the relative change of intensity with respect to the undisturbed case can be written as (Merzkirch 1974)

$$\frac{\Delta I}{I} \approx \frac{f}{a} \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x_i} ds \tag{9}$$

where  $f$  is the focal length of the Schlieren head and  $a$  is the width of the point source image in direction perpendicular to the knife edge. In Eq. (9),  $x_i$  stands for  $x$  in case of a horizontal knife edge (as considered in Fig. 12) and it stands for  $y$  in case of a vertical knife edge. Assuming a 2D flow and still assuming infinitesimal ray displacements in  $D$ , Eq. (9) becomes

$$\frac{\Delta I(x, y)}{I(x, y)} \approx \frac{fL}{a} \frac{1}{n(x, y)} \frac{\partial n(x, y)}{\partial x_i} \tag{10}$$

The Schlieren method is then sensitive to the first derivative of the refractive index, perpendicularly to the knife edge. Note that under the assuming assumptions, it is not sensitive to ray displacement (shadowgraph effect), because images are focused onto the test section. In our case, however, based on our experience with our shadowgraph-like configuration, sensitivity to the second derivative is expected in both directions and parallel to the knife edge in particular. In the following, Eq. (10) will be, however, integrated to obtain qualitative information on the density fields that we expect to be more reliable, or at least complementary, with shadowgraph-like results.

## 5.2 Schlieren method with a vertical knife edge

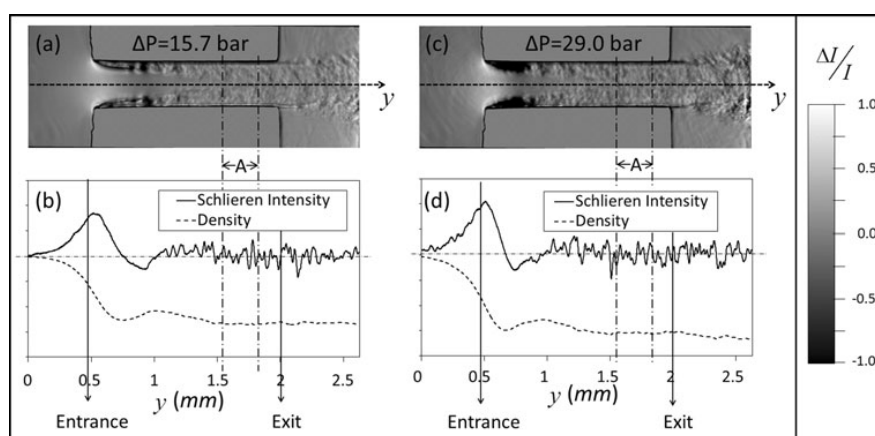
The knife edge is first placed vertically to obtain density information along horizontal direction ( $y$  coordinate). Figure 13 displays some examples of Schlieren images ( $\Delta I/I$ ), for pressure drop equal to 15.7 bar (without cavitation, Fig. 13a) and 29 bar (with vapor cavities, Fig. 13c). Figure 13b, d displays intensity profiles along the centerline of the channel, extracted from Fig. 13a, c respectively. These profiles have been averaged over 30 adjacent lines to limit the effect of noise. The remaining fast oscillations visible on the profiles are due to the turbulent structures and not to noise. The dashed lines plotted in these figures result from the integration (midpoint method) of the intensity profiles. These curves are similar to density profiles if we assume Eq. (10) as an approximation. The integrated profiles are very sensitive to any shift of intensity profiles, that is, to the zero intensity definition. As a consequence, integration has been done under constraint, by forcing the density evolution to be null in the zone (A) delimited by the vertical dashed lines in the figure, near the channel exit. Note that this assumption is not exact as the pressure would decrease slowly in this region. However, we assume that this decrease is negligible compared with the total pressure decrease in the channel. Further in this paper, the density fields obtained from interferometric imaging will confirm this assumption, with pressure variations lower than 1 bar in this specific region.

We estimate that the density profiles deduced from Schlieren images are not quantitatively reliable because the validity of Eq. (10) and underlying assumptions are questionable, because integrations are done under constraint and because no calibration has been done. However, we assume that integrated profiles provide the general features of the flow density evolution along the channel centerline. These density evolutions will be helpful in the next section

to interpret interferometric images and produce density fields of the channel flow.

The three techniques presented here are sensitive to density variations. It is not possible, in principle, to attribute this variation to a temperature change or a pressure change. However, one of the contributions can be sometime reasonably neglected compared with the other. In the present case, the density increase is about  $6.5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$  for 1 bar pressure increase, and about  $-7.1 \times 10^{-1} \text{ kg m}^{-3}$  for 1 K temperature decrease. A 1 K temperature decrease then produces the same effect on density than a 10.9 bar pressure increase. The global temperature elevation in the channel can be estimated following the work by Morini (2005), for a laminar flow with an adiabatic walls boundary condition. Temperature elevations of about  $2 \times 10^{-2} \text{ K}$  and  $2.5 \times 10^{-2} \text{ K}$  are found for the conditions of Fig. 13a, b, respectively. With Reynolds number in the order of  $10^4$ , the laminar flow assumption is not satisfied. However, assuming that the order of magnitude of these estimations is correct, the temperature effect on density would be equivalent to a pressure variation in the order of 0.2 bar, that is to say in the order of 1 % of the pressure drop. The estimation of temperature increase given in (Morini 2005) is global, that is to say, integrated over the whole channel section. One can suspect that the temperature profile in the channel section is not flat and that the temperature increase is greater in the boundary layers, near the walls, than in the centerline of the channel. Then, density variations deduced in Fig. 13 can be interpreted as pressure variations by neglecting temperature effect. Figure 13 then provides the general feature of pressure evolution along the centerline of the channel. The pressure decreases at the channel inlet as the main flow section decreases. The pressure reaches a minimum value at the minimum flow section, caused by the flow separation. It then increases, as the flow section

**Fig. 13** Examples of instantaneous images recorded using Schlieren method with vertical knife edge for  $\Delta P = 15.8$  bar (a) and  $\Delta P = 21$  bar (c). The curves under images represent intensity profiles along the centerline of the channel and density resulting from integration of these profiles



increases again, until a local maximum near about the flow reattachment. Beyond this point, the flow section remains constant and the pressure decreases slowly, until the end of the channel.

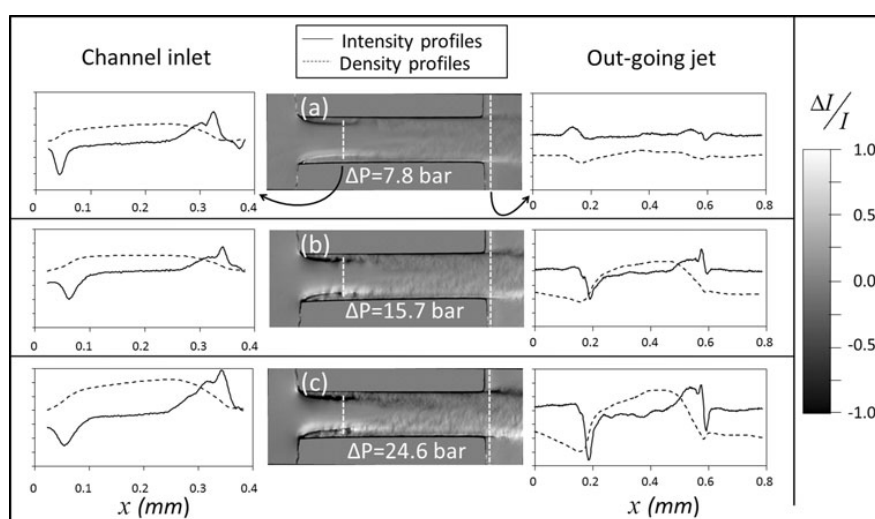
### 5.3 Schlieren method with a horizontal knife edge

Using a horizontal knife edge, Schlieren method provides information on horizontal density gradient (along  $x$  coordinate). Figure 14 shows images obtained with a horizontal knife edge for different pressure drops. Intensity profiles along the white dashed lines drawn on the images (averaged over 20 vertical lines) are shown together with the results of their integration with respect to coordinate  $x$  (increasing from top to bottom). Curves plotted on the left side of Fig. 14 correspond to the intensity profiles, along a line crossing the shear layers in the separated flow region, near the channel inlet. These density profiles are obtained by integration under the constraint of equal densities at both end points, that is, in upper and lower recirculation zones. Here again, this assumption is not completely satisfied as the effect of a weak asymmetry of the channel has been identified for cavitation inception (see Fig. 11 and associated comments in previous section). However, we also assume that the effect of this asymmetry on pressure fields can be neglected. This assumption will be confirmed in the next section, with the pressure fields deduced from interferometric images. In Fig. 14a, the flow symmetry at channel inlet is clearly visible in the image as the positive gradient in the upper shear layer appears dark and the negative gradient in the lower layer is bright. The integrated profile shows an increase in density from the recirculation zones to the center of the channel, with density gradient located in the shear layers. The density

evolution along this profile is then essentially associated with a pressure evolution. In Fig. 14b, c, for greater pressure drops  $\Delta P = 15.7$  bar and  $\Delta P = 24.6$  bar, respectively, the density profiles are similar but the pressure difference between the recirculation zones and the main flow increases. We note, however, that the apparent symmetry in images is broken. The lower shear layer remains essentially enlightened in Fig. 14b, c but it shows a dark line at its center. No equivalent bright line appears in the upper shear layer which remains completely dark. Such dark lines could be misinterpreted as vapor cavities, but the pressure drop is much lower here ( $\Delta P = 15.7$  bar in Fig. 14b) than the pressure drop for which cavitation inception has been observed ( $\Delta P > 25$  bar) in shadowgraph-like images (Figs. 9, 10). This dark line is due to a reversing of the Schlieren intensity that will be discussed later in this section (limit angle of deviation in Schlieren technique). As shown in Fig. 14c, The integrated profile at channel inlet is strongly affected by this effect.

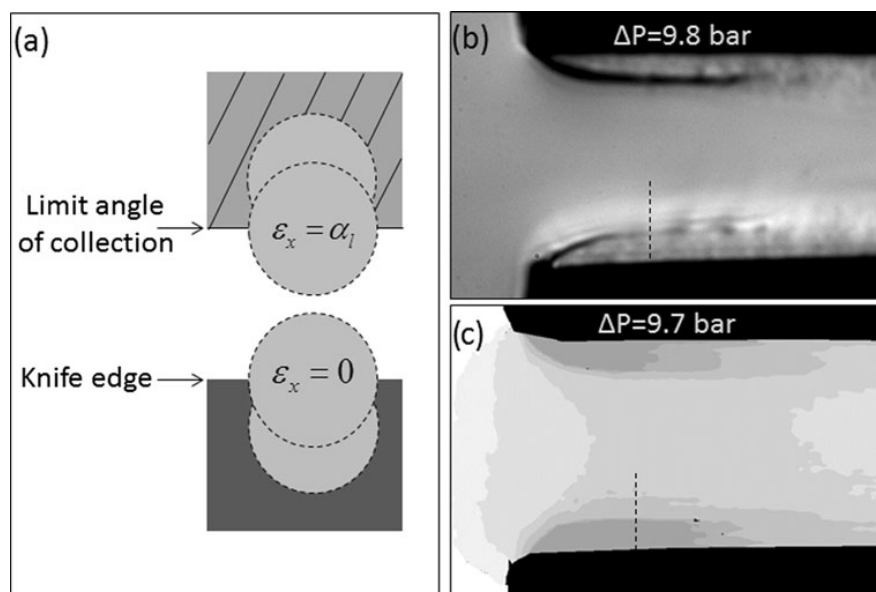
Intensity profiles in a cross-section of the out-going jet are also plotted on the right side of Fig. 14. The associated density profiles are obtained by integration under the constraint of equal densities at both end points, that is to say, assuming the same density above and below the jet in the downstream chamber. For  $\Delta P = 7.8$  bar, the density profile shows negative peaks at the jet boundaries. Such a density variation in the out-going jet can be explained as the consequence of both temperature and pressure evolution. The density slowly decreases with pressure from the jet center to the edges. At the jet boundaries, it undergoes a supplementary decrease associated with an increase in temperature due to flow heating near the walls, all along the channel. The temperature increase previously estimated for the whole channel section was very weak (in the order

**Fig. 14** Examples of instantaneous images recorded using Schlieren method with horizontal knife edge for  $\Delta P = 7.8$  bar (a),  $\Delta P = 15.7$  bar (b) and  $\Delta P = 24.6$  bar (c). The curves on the left side represent intensity profiles in the separated flow region, near the channel inlet. The curves on the right side represent intensity profiles at the channel outlet in a cross-section crossing of the out-going jet. The density profiles have been obtained by integration of the intensity profiles





**Fig. 15** Schematic of the Schlieren intensity reversing due to limit angle of collection (a). Schlieren image with horizontal knife edge for  $\Delta P = 9.8$  bar (b) and pressure map deduced for interferometric imaging for pressure drop  $\Delta P = 9.7$  bar (c)



of  $10^{-2}$  K). From the Schlieren results, it seems that the temperature increase is essentially located near the channel walls, and in the wake these walls downstream the channel. The local temperature increase would be high enough to be visible on Schlieren images. An order of magnitude of these temperature increases will be provided further in the paper with density maps deduced from interferometric images. At the right side of Fig. 14b, c (for pressure drops  $\Delta P = 15.7$  bar and  $\Delta P = 24.6$  bar, respectively), the density profiles at the jet boundaries are dominated by the pressure decrease. However, an additional effect of temperature increase is likely to remain, as suggested by the aspect of the density profile on the right side of Fig. 14c, in the lower jet boundary.

#### 5.4 Limit angle of deviation in Schlieren technique

The dark lines observed in the lower shear layers in Fig. 14 are due to a limit angle of deviation in the Schlieren technique. As previously described in Fig. 12, density gradients induce optical ray deviations and displacements of the point source image in the Fourier plane. The stronger the gradient amplitude, the stronger the displacement and the recorded intensity (with appropriated gradient sign). However, as schematically shown in Fig. 15a, strong gradient may produce ray deviation  $\varepsilon_x$  of the same amplitude than the collection angle  $\alpha_l$  of the optic. Instead of increasing, intensity then decreases with increasing ray deviation. For ray deviation equal to the limit angle, one can expect an intermediate intensity, equivalent to the undisturbed intensity (for zero deviation). Greater deviations

then result in dark regions, where brightness is expected, as previously observed in Fig. 14b.

To underpin this interpretation, the density gradient and associated deviation angle can be estimated from the density maps to be introduced in the next section and compared to the collection angle of the optical set-up. The dark line observed in the lower shear layer of Fig. 14b first appears for a lower pressure drop  $\Delta P = 9.8$  bar. In Fig. 15b, the beginning of the shear layer appears dark. Further from the inlet corner, where density gradients are smaller, the shear layer is still bright. In the middle of the shear layer, near about the dashed line of Fig. 15b, the Schlieren intensity is nearly equal to the undisturbed intensity. Then, the ray deviations at this point should be nearly equal to the collection angle of the Schlieren set-up. Figure 15c shows the density map for approximately the same pressure drop (9.7 bar) than Fig. 15b (9.8 bar). From this map, the maximum pressure gradient along the dashed line is estimated to be between  $1.5$  and  $2 \text{ bar } \mu\text{m}^{-1}$ . The associated ray deviation angle can be easily estimated from Eq. (6) which provides the ray deviation  $\varepsilon_x$  at the channel exit, in liquid. In air, after passing through the glass window, the deviation angle is nearly equal to  $n\varepsilon_x$ . Assuming a 2D flow, Eq. (6) then leads to

$$n\varepsilon_x \approx L \frac{\partial n}{\partial x}$$

Knowing the resolution of the Schlieren imaging system ( $1.58 \mu\text{m}/\text{px}$ ), and the relation between refractive index and pressure, the estimated deviation angle ranges from  $5.2^\circ$  to  $6.9^\circ$ . This estimation perfectly agrees with the

collection angle of the Schlieren imaging system, which is about 6°.

As well as for shadowgraph-like images, the interpretation of Schlieren images is not obvious. Dark zones are not systematically produced by the presence of vapor or by negative gradients, but it can be due to an excessive positive density gradient. More generally, the Schlieren method provides general trends on the channel flow density, but the reliability of the results is clearly questionable, especially for large density gradients. Another technique is then needed to obtain reliable and quantitative information on density fields.

### 6 Imaging interferometry

Unlike the two imaging methods previously introduced, imaging interferometry is not sensitive to optical ray deviation. It is based on ray retardation (phase shift) measurement, and it is then directly sensitive to density (or refractive index) rather than to its first or second derivative. Our interferometric arrangement is shown in Fig. 16. The green light ( $\lambda_{Ar} = 514 \text{ nm}$ ) of a Argon-ion laser in continuous wave operation is used as the light source. The beam size is magnified by using a beam expander which consists of two convergent lenses. A pin-hole is placed in the focal plane of the first lens in order to achieve a spatial filtering of the beam. A beam splitter (BS) divides the beam into a reference beam and an imaging beam which illuminates the channel flow. The two beams are re-combined using a second beam splitter, and they are transmitted through the camera lens. As a continuous illumination is used, the time resolution of the images is limited to the minimum exposure time of the camera. Interferometric images of the channel flow are then averaged over 20  $\mu\text{s}$ .

Figure 17 provides a sample of interferometric images of the channel flow, for pressure drops between  $\Delta P = 9.7 \text{ bar}$  and  $\Delta P = 35 \text{ bar}$  (Fig. 17a–e). These images show a fringe pattern which depends on the density fields. Optical rays traveling through the channel flow are phase

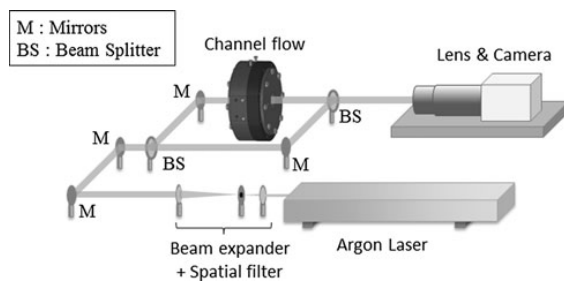


Fig. 16 Interferometric imaging set-up

shifted, depending on the refractive index (or flow density). In association to the reference beam, these phase shifts lead to constructive or destructive interferences. The succession of bright and dark fringes in Fig. 17a–e is then a signature of density evolution throughout the channel: at the channel inlet where pressure decreases fast, in the recirculation zones (for the lower pressure drops) and at the channel outlet. For increasing pressure drop, from Fig. 17a–e, the distance between fringes decreases throughout the channel, as density gradients increases in all parts of the flow. In interferometric images, channel walls appear in gray, as the reference beam contributes alone to images in these areas. Similarly, vapor cavities appear in gray in Fig. 17c–e.

To obtain quantitative information from imaging interferometry, we need a relation between optical ray phase shift and flow density. The optical path difference between a bright and a dark fringe is half the beam wavelength. The corresponding refractive index change is then

$$\delta n = \frac{\lambda_{Ar}}{2L} \tag{11}$$

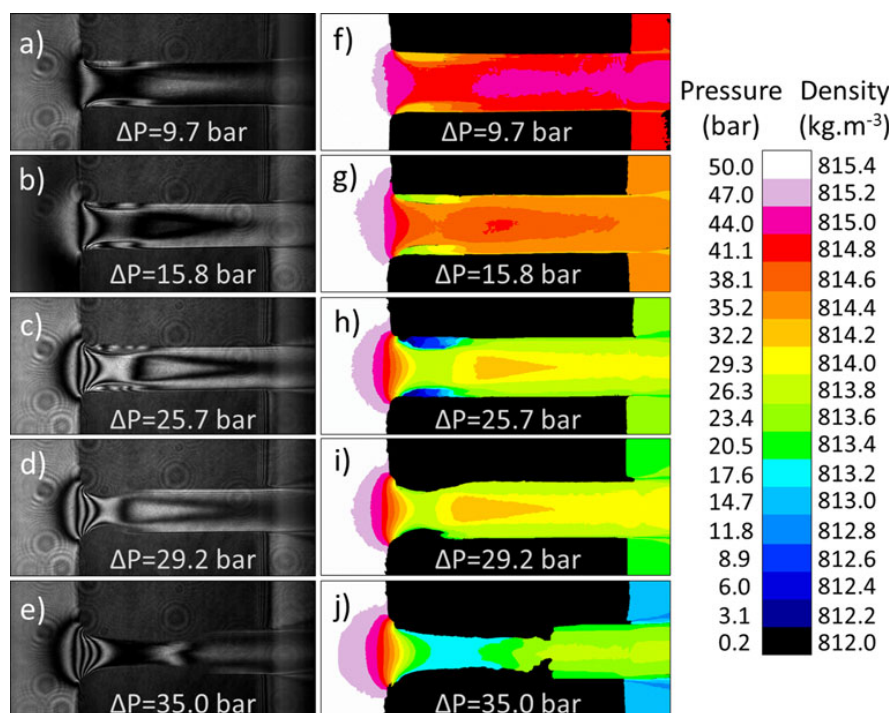
To relate refractive index  $n$  to flow density  $\rho$ , the following Lorentz-Lorenz relation is assumed

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = k\rho \tag{12}$$

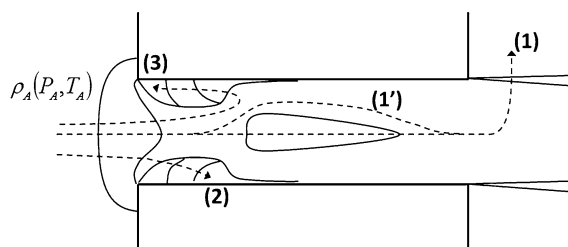
where  $k$  is a constant which depends only on material (the test oil in the present case). The constant  $k$  is determined from known values of the refractive index  $n_0 = 1.462$  and the density  $\rho_0 = 820 \text{ kg m}^{-3}$  at standard pressure and temperature conditions ( $P = 1 \text{ bar}$  and  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ). The refractive index has been measured by using a refractometer (NAR-1T). The density has been deduced from density measurement (Ndiaye et al. 2011) as a function of temperature in the range 10–130  $^\circ\text{C}$  and pressure in the range 1–1,400 bar. In the paper conditions (temperature  $T = 32 \text{ }^\circ\text{C}$  and pressure  $P$  ranging from 0 to 50 bar), the density increases almost linearly with refractive index. The refractive index change  $\delta n$  between a bright and a dark fringe in the interferometric images is then associated with a density change  $\delta\rho = 2.0 \times 10^{-1} \text{ kg m}^{-3}$ . If a constant temperature assumption is assumed, the refractive index change  $\delta n$  can be associated with a pressure change  $\delta P$  which depends weakly on  $P$  but is almost equal to 3 bar in the range 0–50 bar.

In principle, density fields can be deduced from imaging interferometry, from a known density condition (upstream for example) and counting the number of fringes. However, such a construction is difficult in practice as the sign of the change is unknown. In other words, the density change between a dark and a bright fringe can be interpreted as an increase of  $+\delta\rho$  or a decrease of  $-\delta\rho$ . The results obtained with the Schlieren method can be used to solve this

**Fig. 17** Interferometric images of the channel flow (*left*) and density fields deduced from these images (*right*). A pressure scale, equivalent to the density scale, is proposed. It provides a more meaningful view of the results but it relies on a constant temperature assumption which is not satisfied everywhere



indeterminacy and carefully reconstruct the density maps shown in Fig. 17f–j. Density maps are presented with both a density scale bar and an equivalent pressure scale. The pressure scale is a direct translation of density in terms of pressure, under the assumption of constant temperature. This assumption is reasonable in the channel but not at channel exit where temperature effect are not always negligible. The density maps are built starting from the known upstream condition  $\rho_A(P_A, T_A)$  and following the different paths shown in Fig. 18, counting  $\pm\delta\rho$  according to Schlieren results. Following path (1), the density profiles in the channel centerline previously shown in Fig. 13 are taken into account. The 2D consistency of the results is also checked by considering path (1') of Fig. 18 together with path (1). Through the out-going jet boundaries [end of path (1)], the Schlieren results shown in Fig. 14 are



**Fig. 18** Schematic of the paths followed to build density field from interferometric images

considered. For the lowest pressure drops ( $\Delta P = 9.7$  bar, Fig. 17a, f), the density decrease due to viscous heating is taken into account. In this case, the back pressure is retrieved with deviation lower than  $\delta P$  (one fringe). For the greater pressure drops, the temperature effect at jet boundaries was not clear in Schlieren results. However, the density at the jet boundaries must decrease under the downstream chamber density to retrieve the accurate back pressure. The density drop at the jet boundaries is in the order of  $0.1 \text{ kg m}^{-3}$  (lower or equal to  $\delta\rho = 0.2 \text{ kg m}^{-3}$ ), corresponding to a temperature increases of about 0.15 K. From these results, the temperature profiles in the outgoing jet are not flat, with a global temperature increase previously evaluated using (Morini 2005) in the order of  $10^{-2}$  K but a temperature increase, near the walls, ten times greater. In the recirculation zones, the density can be found following path (2) of Fig. 18, directly through the shear layers, but only for the lowest pressure drops (Fig. 17a, f). For greater pressure drops (Fig. 17b, c), the density gradients in the shear layers become higher, the fringes get closer to each other and cannot be separated anymore. The path (3) of Fig. 18 is then used in these conditions to build the density field in the recirculation zone.

In Fig. 17f–j, the pressure evolutions along the channel centerline show the same features than the pressure curves deduced from Schlieren technique in Fig. 13. For all the pressure drop conditions, the pressure decreases rapidly at the channel inlet, reaches a minimum, increases again to



reach a local maximum and then decreases slowly until the channel outlet. The minimum pressure point is located about the minimum section imposed by the flow contraction or the vapor cavities. It slowly moves toward the channel exit as the pressure drop increases from Fig. 17f–j. The minimum pressure value decreases with increasing pressure drop, as expected from the one-dimensional model introduced in Sect. 3. However, even in choked flow condition (Fig. 17j), this pressure remains much greater than the vapor pressure.

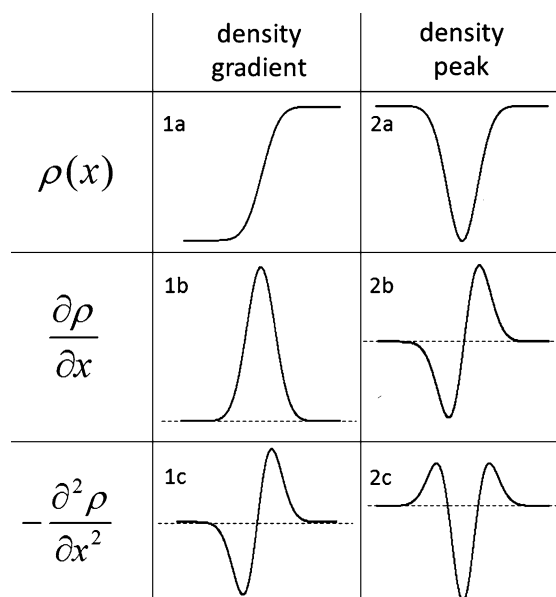
## 7 Discussion

In the previous section, three different optical techniques have been presented. The results have been partly discussed by considering the techniques one by one. In this section, we will further discuss our observations, based on comparisons between the three techniques results.

### 7.1 Cavitation inception

In the pressure field shown in Fig. 17h, for  $\Delta P = 25.7$  bar, the lower pressure (averaged on 20  $\mu\text{s}$ ) is found at the very beginning of the recirculation zone, near the inlet corner. One could expect that cavitation first incepts at this location, when pressure drops down to the fuel vapor pressure (to about zero). However, in the shadowgraph-like image of Fig. 9c, cavitation seems to first incepts in the upper shear layer, relatively far from the inlet corner. Here, the surrounded average pressure is higher. It ranges between 5 and 10 bar in the recirculation zone, just above the shear layer, and it is about 25 bar, in the main flow, under the shear layer.

The detection of cavitation inception in the shear layer is based on distinction between density gradient and bubbles or vapor cavity in shadowgraph-like images. In these images, intensity variations produced by density gradients are roughly proportional to the second derivative of the density. As a consequence, in shadowgraph images, dark zones are generally associated with bright zones, as illustrated in Fig. 19 which provides examples of density profile and corresponding first and second derivatives. As shown in Figure 9c, the right side of the upper shear layer (A, near the inlet corner) can be interpreted as an increase in density from the recirculation zone to the main flow, as the intensity distribution is similar to the scheme 1c of Fig. 19. In addition, the intensity profile at this location remains almost similar at this pressure drop condition ( $\Delta P = 25.7$  bar) than at lower pressure drop in non-cavitating condition (Fig. 9b for  $\Delta P = 15.8$  bar). On the contrary, on the left side of the shear layer (B) in Fig. 9c, the



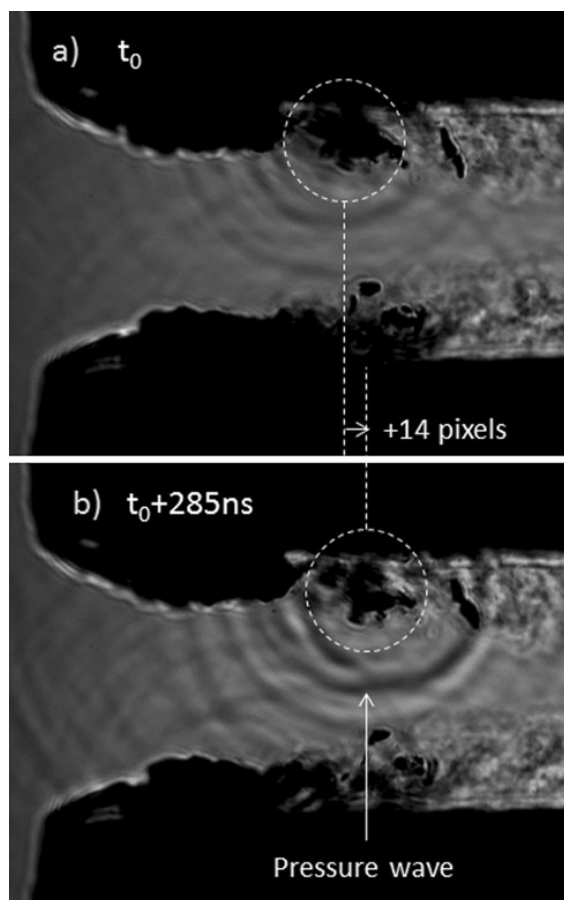
**Fig. 19** Schematic of simple density profiles and corresponding first and second derivatives

cloud-like shape dark zone has no bright boundary and must be interpreted as a bubble cloud.

Note that the schematics of Fig. 19 can also be used to underpin some interpretation previously given in Sect. 4, as it provides a way to qualitatively distinguish simple increase in density from density peak.

### 7.2 Pressure waves and bubble collapse

Previously in this paper, pressure waves have been observed in shadowgraph-like images of the channel flow. These pressure waves likely result from bubble collapse under the effect of an increase in pressure. These pressure waves are spherical and not quasi-2D, like most of the density gradients considered earlier in the paper. However, optical rays crossing the edge of the spherical waves, along a short chord, are actually deviated, resulting in a shadowgraph effect, as well as for the 2D gradients. Figure 20 shows a couple of shadowgraph-like images, recorded with a time delay of 285 ns. Several pressure waves can be observed in both images. However, these waves propagate too fast to enable the observation of the same wave in both images at this scale. On the contrary, the same detached vapor structure, probably composed of several bubbles, appears in both images, in the wake the main vapor cavity. Its displacement from Fig. 20a to b is about 16  $\mu\text{m}$  (14 pixels), leading to a velocity of about 56  $\text{m s}^{-1}$ . The apparent volume of the detached structure clearly reduces from Fig. 20a to b, likely due to its partial collapse. In the



**Fig. 20** Apparent correlation between pressure waves and bubble collapse in the wake of vapor cavity

same time, a pressure wave is visible in Fig. 20b. It is more contrasted than the others waves, and it is centered on the vapor structure which has partially collapse, supporting our interpretation.

As previously mentioned, pressure waves propagate at high velocity. It is then difficult to observe the same wave in two images, even with a very short time delay of 285 ns. Most of the time, there are several pressure waves in the same image. It is then very difficult to associate a wave of the first image to the same wave, after propagation, in the second image. There is, however, a few examples (over several thousands of images) of such observation. One example is displayed in Fig. 21. The pressure wave encircled in the first image (top of Fig. 21) has propagated during the 285 ns time delay between the two images. The distance travelled by the wave between the two images is 352  $\mu\text{m}$  upstream and 391  $\mu\text{m}$  downstream. The corresponding velocities are 1,230  $\text{m s}^{-1}$  and 1,370  $\text{m s}^{-1}$ , respectively. Taking into account the flow velocity, which

is 60  $\text{m s}^{-1}$  (deduced from the mass flow rate measurement), the relative velocity of the wave is 1,290  $\text{m s}^{-1}$  in upstream direction and 1,310  $\text{m s}^{-1}$  in downstream direction. These values are in the same order of magnitude than the sound speed measured in the test oil for the same temperature and pressure conditions (297 K and 20 bar), which is  $c = 1,335 \text{ m s}^{-1}$ . Note that during 12 ns (the duration of the pulsed illumination), the waves travel about 15  $\mu\text{m}$ . The pressure waves are then not completely frozen in the images, leading to supplementary difficulties in trying to quantify them with the different techniques presented in this paper. Note also that no pressure wave has been observed for pressure drop  $\Delta P$  lower than 25.7 bar, in absence of vapor bubble in the channel. This observation is another evidence of the cavitation inception at this pressure drop.

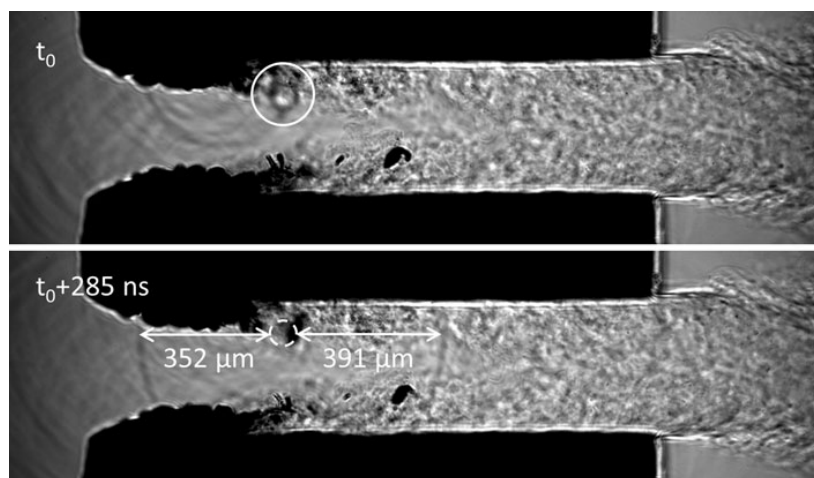
### 7.3 Bubble detachment

In shadowgraph-like images, bubbles have been observed in the wake of vapor cavities. As previously discussed, bubbles likely collapse when they move to a zone of higher pressure, leading to a pressure wave occurrence. However, some bubble detachments are observed in high pressure zones. As shown in Fig. 9f for example, vapor bubbles are observed in the wake of the vapor cavity for  $\Delta P = 29.3$  bar. At this location, for nearly the same pressure drop ( $\Delta P = 29.2$  bar), the interferometric results of Fig. 17i show an average pressure of 26 bar. Let us consider the bubble in the rightmost circle of Fig. 9g. The bubble has travelled about 230  $\mu\text{m}$  from the vapor cavity. Its diameter is in the order of 20  $\mu\text{m}$ . With a flow velocity in the order of 70  $\text{m s}^{-1}$ , the life time of this bubble is found to be greater than 3  $\mu\text{s}$ . Assuming a perfectly spherical bubble, the total collapse time can be approximated as a function of the initial radius  $R_0$  of the bubble and the pressure  $P$  in the surrounding liquid by Rayleigh (1917):

$$\tau \approx 0.915 \times R_0 \sqrt{\frac{\rho}{P - P_{\text{vap}}}}$$

For a radius  $R_0 \approx 10 \mu\text{m}$  and a pressure  $P = 26$  bar, the collapse time  $\tau$  is equal to about 160 ns. Even with an initial bubble radius equal to the full cavity height, that is,  $R_0 \approx 35 \mu\text{m}$ , the life time would remain lower than 600 ns. The deviation between the Rayleigh model and the observed collapse time is then clear. It could be attributed to the bubble non-sphericity. However, one can suspect that non-spherical bubble with very large aspect ratio would be needed to explain such a large deviation. Another explanation would consist in assuming pressure fluctuations, relatively infrequent but high enough, to allow bubble survival over a long time. Such fluctuations could

**Fig. 21** Couple of shadowgraph-like images (raw images) recorded with a time delay of 285 ns. The pressure wave encircled in the first image (*top*) is still visible in the second image, after propagation. The fluid temperature is equal to 20 °C and not 32 °C as for the rest of paper



be generated by turbulence. Their magnitude should be in the same order as the average pressure measured in the wake of the vapor cavity, that is, in the order of 20 bar.

#### 7.4 Instabilities and cavitation inception in shear layers

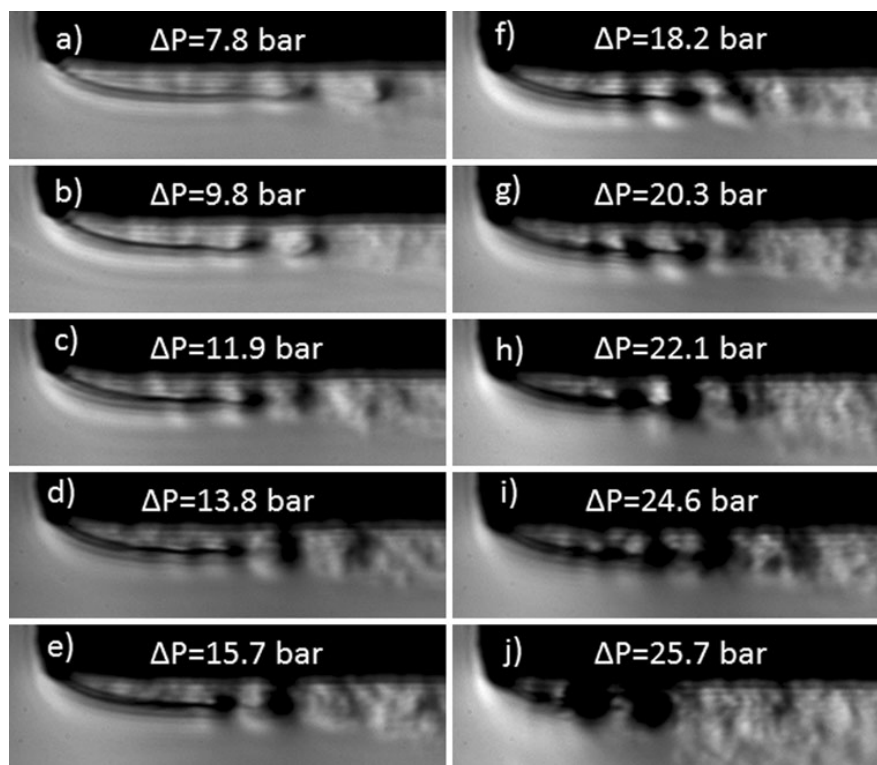
As shown in Sect. 4, instabilities have been identified in shadowgraph-like images, in the shear layers, at channel inlet. These instabilities are also visible in Schlieren images, especially when the knife edge is placed vertically as shown in Fig. 22. Instabilities develop with increasing pressure drop and produce vortices in the shear layer. In the Schlieren images, horizontal pressure gradients associated with these vortices appear as a succession of dark and bright spots, in the shear layer, relatively far from the inlet corner. For the lowest pressure drop, these intensity profiles are similar to the scheme 2b of Fig. 19, corresponding to negative pressure peaks, similar to the scheme 2a of the same figure, at the vortices center. For the lowest pressure drop, the pressure difference associated with vortices can be roughly estimated. To do so, the Schlieren intensity profiles of Fig. 13 are compared with the profiles obtained from the pressure maps of Fig. 17. A pseudo-calibration of the Schlieren images is then obtained, and the pressure difference associated with vortices can be estimated to be about 1.5 bar in Fig. 22a (for  $\Delta P = 7.8$  bar) and to be about 2 bar in Fig. 22b (for  $\Delta P = 9.8$  bar). For increasing pressure drop (Fig. 22c–j), the dark spots become larger and closer to the channel inlet, as the pressure drop in vortices is amplified. Unfortunately, any estimation of these pressure drops becomes hazardous, for several reasons. First, dark spots are rapidly saturated (from Fig. 22c) as their intensity reaches zero (camera reading noise). For the largest pressure drops, the bright peaks intensity reversed as the deviation angle reaches the limit imposed

by the collection optic, as previously detailed in case of horizontal knife edge. Next, Schlieren method is supposed to be sensitive to horizontal density gradients (with the vertical knife edge adopted here) but a shadowgraph effect along the perpendicular direction likely distorts the analysis. This effect is not negligible in the shear layers, where vertical pressure gradients increase with increasing pressure drop. Finally, we think that the 2D flow assumption is questionable in this particular location, especially for the largest pressure drops, just before cavitation inception.

A quantification of the density fields based on Schlieren images is hazardous, but it is obvious from Fig. 22 that vortices are amplified with increasing pressure drop. Starting from an estimation of about 2 bar for the lowest pressure drop, one can reasonably presume that pressure variation associated with vortices may reach 5 or 10 bar for the greatest pressure drops considered in Fig. 22. In other words, we think that the pressure variations associated with vortices in the shear layer are in the same order of magnitude that the average pressure measured in the recirculation zone, just above this shear layer. The absolute pressure may then decrease under the critical cavitation pressure (let say vapor pressure) under the effect of strong instabilities. This scenario is compatible with our previous observations on shadowgraph-like images, where cavitation incepts in the shear layer, relatively far from the inlet corner.

## 8 Conclusion

Visualizations of a quasi-2D channel flow have been carried out as a function of the pressure drop by using three different optical techniques. Shadowgraph-like imaging provides information on the presence of vapor cavities and



**Fig. 22** Growing instabilities in the upper shear layer visualized by Schlieren technique with vertical knife edge

bubbles in the channel. It also provides qualitative information on density gradients, leading to difficulties in image interpretation. A Schlieren technique has been used to provide more reliable information on density gradients. For relatively low pressure drops, this technique has provided the general features of the density field along the center line of the channel, at channel inlet and at the out-going jet boundaries. However, the technique does not allow density field reconstruction when the channel flow shows higher density gradients. Then, an interferometric imaging technique has been used to quantify the density fields. Interferometric images of the channel flow have been analyzed to reconstruct density fields, by taking advantage of the Schlieren results. Based on the three techniques results, the main features of the channel flow have been described. Cavitation incepts in the shear layers delimiting the recirculation zone and the main flow, at the channel inlet. It does not incept at the inlet corner, where the average pressure is minimum but a little further in the shear layer. Based on our observations, we have proposed a scenario in which cavitation incepts under the joint effect of decreasing pressure in recirculation zones and instabilities developing in the shear layer. The paper results also suggest that the channel flow is highly turbulent and compressible.

Bubble detachments have been observed. These bubbles likely collapse when they move through flow regions of higher pressure, leading to pressure wave occurrences. However, bubble detachments have been also observed in flow region where the average pressure is greater than 25 bar, suggesting the existence of pressure fluctuations in the same order of magnitude, generated by turbulence and carrying the bubbles.

**Acknowledgments** This work takes place in the French collaborative program NADIA-bio (New Advance Diesel Injection Diagnosis for bio fuels). This program is supported by the French Automotive Cluster Mov'eo and funded by the DGCIS (Direction Générale de la Compétitivité, de l'Industrie et des Services), the Région Haute Normandie and the Conseil Général des Yvelines.

## References

- Badock C, Wirth R, Fath A, Leipertz A (1999) Investigation of cavitation in real size diesel injection nozzles. *Int J Heat Fluid Flow* 20:538–544
- Bergwerk W (1959) Flow pattern in diesel nozzle spray holes. *Proc Inst Mech Eng* 173:655–660
- Chang JC, Huang SB, Lin CM (2006) Effect of inlet surface roughness, texture, and nozzle material on cavitation. *Atomization Sprays* 16:299–317

- Jung D, Wang WL, Knafl A, Jacobs TJ, Hu SJ, Assanis DN (2008) Experimental investigation of abrasive flow machining effects on injector nozzle geometries, engine performance, and emissions in a DI diesel engine. *Int J Automot Technol* 9:9–15
- Merzkirch W (1974) Flow visualization. Academic Press, New York
- Morini GL (2005) Viscous heating in liquid flows in micro-channels. *Int J Heat Mass Transf* 48:3637–3647
- Ndiaye EHI, Bazile JP, Nasri D, Boned C, Daridon JL (2011) Private communication. Laboratoire des Fluides Complexes et leurs Réservoirs, UMR CNRS 5150, Université de Pau
- Nurick WH (1976) Orifice cavitation and its effects on spray mixing. *J Fluids Eng* 98:681–687
- Payri R, Garcia JM, Salvador FJ, Gimeno J (2005) Using spray momentum flux measurements to understand the influence of diesel nozzle geometry on spray characteristics. *Fuel* 84:551–561
- Rayleigh L (1917) VIII. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Philosophical Magazine Series* 6, 34:200, 94–98
- Roosen P (2007) Investigation of the transient behaviour of cavitation effects in liquid injection nozzles. In: *Transient phenomena in multiphase and multicomponent systems*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, pp 72–83
- Schmidt DP, Rutland CJ, Corradini ML (1997) A numerical study of cavitating flow through various nozzle shapes. *SAE Trans J Eng* 106:1644–1673
- Sezal IH, Schmidt SJ, Schnerr GH, Thalhamer M, Förster M (2009) Shock and wave dynamics in cavitating compressible liquid flows in injection nozzles. *Shock Waves* 19:49–58
- Soteriou C, Andrews R, Smith M (1995) Direct injection diesel sprays and the effect of cavitation and hydraulic flip on atomization. SAE technical paper 950080. doi:10.4271/950080
- Winklhofer E, Kull E, Kelz E, Morozov A (2001) Comprehensive hydraulic and flow field documentation in model throttle experiments under cavitation conditions. ICLASS-Europe, 2–6 Sept 2001, Zurich Switzerland. <http://www.ilasseurope.org/ICLASS/ilass2001/ILASS2001.pdf>
- Winklhofer E, Kelz E, Morozov A (2003) Basic flow processes in high pressure fuel injection equipment. ICLASS, 13–17 July 2003, Sorrento, Italy. <http://www.ilasseurope.org/ICLASS/iclass2003/fullpapers/1409.pdf>

# Chapitre 8

## Conclusion

Ce document rapporte un grand nombre de travaux sur les interactions de la lumière avec des petits objets, gouttes bulles ou particules, des principes de mesure s'appuyant sur ces phénomènes de diffraction ou de diffusion, et des techniques de mesures avancées, principalement appliquées aux problèmes de mécanique des fluides. La mesure est une inversion. Pour réaliser une mesure optique, il faut d'abord se pencher sur le problème direct, comprendre et quantifier la manière dont la lumière interagit avec l'objet de la mesure, quel phénomène sera sensible à telle ou telle propriété de cet objet que l'on souhaite mesurer.

La manière dont les objets réfléchissent, diffractent ou transmettent la lumière peut être décrite dans des cadres théoriques différents. Selon que l'on considère la lumière comme une onde électromagnétique, une onde scalaire, un ensemble de rayon ou de faisceaux lumineux, différents moyens s'offrent à nous pour décrire l'image d'un écoulement, la diffusion de la lumière par une goutte, sa diffraction par une bulle, tous ces phénomènes sur lesquels reposent les moyens de mesure que nous développons et que nous appliquons en mécanique des fluides. Différents formalismes sont décrits dans les premiers chapitres de ce document. Ils reposent tous sur des hypothèses ou des approximations différentes et présentent donc tous leurs avantages et leurs limites. L'optique géométrique et les méthodes de tracé de rayon plus ou moins élaborées basées sur cette approximation reposent sur des notions simples et permettent de se représenter les phénomènes de diffusion de manière intuitive et séquentielle mais elles se limitent à des objets dont la taille et les courbures en général sont grandes devant la longueur d'onde. Les théories scalaires de la diffraction sont très efficaces pour décrire les phénomènes de propagation de la lumière. Leur principale limitation pour décrire les phénomènes de diffraction provient du fait qu'elles sont généralement associées à une modélisation des objets diffractant sous la forme

d'une fonction de transmission 2D triviale voire simpliste. La théorie de Lorenz-Mie enfin, permet de décrire de manière rigoureuse l'interaction élastique de la lumière avec un objet, mais à condition que celui-ci soit parfaitement sphérique. Dans le chapitre 2, Les équations et notions de base de l'électromagnétisme sont rappelées. Elles font le lien entre les différents formalismes qui en découlent via des hypothèses et des approximations qui sont rappelés et discutés dans les chapitres suivants.

Le chapitre 3 est également un ensemble de rappels sur les théories scalaires de la diffraction qui constituent le formalisme de base de l'holographie dont il est largement question, plus loin dans le document. On retiendra notamment que l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld est l'outil le plus rigoureux pour décrire la propagation de la lumière. On retiendra aussi que pour l'appliquer à des problèmes de diffraction, elle doit être complétée par un modèle d'interaction, une fonction de transmission de la lumière par l'objet dans le plan de diffraction. Nous concluons à plusieurs reprises dans ce document que c'est la définition de cette transmittance 2D qui constitue la principale limitation de cette approche. Ce chapitre introduit également la théorie du spectre angulaire, formalisme alternatif mais mathématiquement équivalent à la première intégrale de Rayleigh-Sommerfeld. Ce chapitre introduit également les relations de base permettant de formaliser le principe de l'holographie numérique en ligne et de développer les différentes méthodes de reconstruction au chapitre 6.

La diffusion de la lumière par un objet 3D ne peut pas être décrite de manière rigoureuse à l'aide de l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld, qui demande l'écriture de conditions limites planes. Pour des objets de formes régulières il existe une famille de solutions aux problèmes "à variables séparables" de diffusion. La plus ancienne et la plus connue de ces solutions est décrite par la Théorie de Lorenz-Mie (TLM) pour un objet de forme sphérique. Le chapitre 4 décrit dans le détail, en s'appuyant sur de nombreuses annexes le formalisme de la TLM étendue au cas d'un éclairage non uniforme de la sphère : la Théorie de Lorenz-Mie Généralisée développée par le groupe de Gérard Gouesbet et Gérard Gréhan. Le chapitre rappelle sous une forme concise le formalisme de base décrit dans de nombreuses références et un ouvrage assez peu diffusé ([31]). Il rappelle également le principe et la démonstration de la décomposition en série de Debye et l'extension de la théorie au cas de sphères à couche concentriques. Ces rappels permettent d'introduire les reformulations nécessaires à une implémentation numérique

efficace de la théorie (décrite pour la plupart en annexe). Ils permettent surtout de présenter un ensemble de résultats de calcul, sous forme d'exemples, pour décrire les principaux phénomènes de diffusion, d'introduire des principes de mesures et d'illustrer des limites des méthodes approchées comme l'optique géométrique ou la diffraction scalaire. Ce chapitre propose également des résultats inédits, en particulier sur les décompositions en séries de Debye et notamment sur les limites de cette décomposition dans le cas où l'indice relatif de la sphère est inférieur à celui du milieu extérieur : le cas de la bulle. On retiendra ce résultat important qui montre que la diffusion de la lumière par une bulle ne peut pas être décrite correctement par une approche séquentielle, où le parcours de la lumière est décomposé en réflexions/réfractions successives, comme les séries de Debye ou l'optique géométrique. La principale limitation de la TLMG est que l'objet diffusant doit être parfaitement sphérique. Les résultats exposés dans ce chapitre montrent néanmoins le fort potentiel de cette approche pour la métrologie. La TLMG permet de décortiquer les phénomènes de diffusion, de préciser les limites des approches alternatives, et de fournir des cas de références pour tester les méthodes et aux algorithmes de reconstruction, en produisant par exemple les hologrammes synthétiques qui sont utilisés dans le chapitre 6.

Les extensions de la TLM ne se limitent pas à la prise en compte d'un éclairage inhomogène de la particule. Le formalisme est étendu à des impulsions laser ultra-brèves dans le chapitre 5 qui décrit les phénomènes de diffusion simple (par un objet) par la TLMG mais aussi les phénomènes de diffusion multiple par des méthodes de Monte Carlo. Ce chapitre regroupe un ensemble de travaux qui visent à appliquer ces impulsions à la métrologie des écoulements. Il regroupe ainsi des résultats numériques et expérimentaux sur la propagation de ces impulsions dans des milieux diphasiques denses, et résume le développement d'une technique d'imagerie balistique appliquée à la caractérisation de sprays haute pression. Les principes des mesures réalisées à l'aide d'impulsions ultrabrèves est celui de la séparation dans le temps des phénomènes de diffusion. Cette séparation se manifeste lors des interactions simples, avec une seule particule, mais également en situation de diffusion multiple, quand les "photons" peuvent être discrétisés en fonction de leur trajet optique et du nombre de diffusion dont ils font l'objet. Il est ainsi possible de s'affranchir des effets néfastes de la diffusion multiple et de mesurer des concentrations de particules dans des milieux d'épaisseurs optiques considérables (de l'ordre de 20), ou encore de réaliser des images du cœur liquide d'un spray d'injection direct, à travers le nuage de gouttelettes qu'il produit. Ces images sont obtenues grâce à la technique d'imagerie



ballistique qui est décrite et discutée dans le chapitre 5 et dont les performances et les conditions optimales d'application sont discutées sur la base de résultats de simulation. Une analyse remet en question certains travaux pionniers en la matière.

Dans le chapitre suivant, le chapitre 6, les lasers puissants et les montages optiques complexes laissent place aux montages simples, robustes et souvent peu coûteux de l'holographie numérique en ligne. L'élément clé de cette technique qui permet de localiser et de réaliser des mesures quantitatives sur des objets dans un volume, est la méthode de reconstruction. Les méthodes de reconstruction classiques sont basées sur un calcul de retro-propagation de la lumière dans un ensemble de plan. Les objets sont alors localisés et analysés dans ces images reconstruites. Les méthodes de reconstruction basées sur une approche "problème inverse" offre une alternative performante à ces méthodes classiques. Ces méthodes consistent à modéliser la formation de l'hologramme à en tenant compte des caractéristiques du capteur, sa taille finie, sa discrétisation en pixel, l'intégration de l'intensité sur le pixel, ...et de minimiser l'écart entre l'hologramme modèle et l'hologramme expérimental. Elles reposent également sur l'introduction d'a priori sur les objets diffractant qui leur confèrent une grande sensibilité et permet d'atteindre des précisions de mesures très supérieures à celles obtenues par les méthodes classiques. Les méthodes inverses présentées dans le chapitre 6 sont essentiellement des méthodes inverses paramétriques, où les objets et la diffraction de la lumière par ces objets sont décrits par un petit nombre de paramètres. Le résultat de la reconstruction n'est ainsi pas une image ou un ensemble d'image dont on doit extraire les informations sur les objet, mais une reconstruction directe de ces objets, c.a.d. une estimation directe des paramètres décrivant ces objets. Pour ces approches, le modèle de diffraction joue un rôle central. Il doit être adapté aux objets (forme, nature, ...), aux conditions de la mesure (distance, ouverture, précision requise...). Il doit également, dans la mesure du possible, ne pas être trop pénalisant en termes de temps de calcul. Il est donc généralement basé sur des approximations. La plupart des modèles présentés dans ce chapitre sont basés sur les théories scalaires de la diffraction, avec différents niveaux d'approximation. Leur développement et leur validation reposent en grande partie sur des comparaisons avec des calculs de TLM qui est utiliser comme référence dans le cas d'objets sphériques. Les méthodes décrites dans ce document permettent ainsi de réaliser des mesures d'une grande précision sur des gouttes ou des bulles en écoulement et de quantifier les transferts de masse associés à leur évaporation ou leur dissolution. L'holographie numérique en ligne

se distingue notamment d'autres techniques d'imagerie en volume par sa capacité, quand elle est associée à une reconstruction par approche inverse, à fournir des mesures individuelles très précises sur les objets, tout en conservant un grand volume de mesures. Autrement dit, il n'est pas nécessaire d'utiliser un fort grandissement et ainsi limiter le volume de mesure, pour augmenter la résolution des mesures. Au delà de la mécanique des fluides, l'holographie en ligne et les reconstruction par approche inverse suscitent également un grand intérêt dans le domaine de la microscopie. C'est pourquoi la question de la modélisation de la diffraction en champs proche est abordée à la fin du chapitre 6. Cette partie du document soulève plus de questions qu'il n'apporte de réponses mais elle montre qu'ici encore les solutions exactes aux problèmes de diffusion de type TLM ont un rôle à jouer dans le développement de nouvelles méthodes.

Les travaux présentés dans ce document ont pour vocation principale à être appliqués aux mesures optiques en mécanique des fluides. Elles le sont dans de nombreux travaux qui sont cités au fil de l'eau mais ne sont pas réellement détaillés. Le chapitre 7 propose 3 exemples d'application de ces travaux à trois problèmes différents de mécanique des fluides. Ce chapitre prend la forme d'un recueil d'articles publiés dans des journaux où les problématiques abordées, les moyens optiques mis en œuvre et les résultats expérimentaux sont rapportés. Dans ces trois applications, les résultats reposent tous sur une expertise fine des phénomènes d'interaction lumière/particule ou lumière/écoulement, qui s'avère nécessaire, soit pour le développement de la technique et son adaptation à la problématique de mesure, soit pour l'interprétation correcte des résultats expérimentaux ou des images, parfois trompeuses.

# Annexe A

## Quelques propriétés utiles

### A.1 Transformée de Fourier

On définit la Transformée de Fourier (TF) 2D  $\widehat{f}(\eta, \xi)$  de  $f(x, y)$  par

$$\widehat{f}(\eta, \xi) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{2i\pi(\eta x + \xi y)} dx dy \quad (\text{A.1})$$

on notera aussi

$$\widehat{f}(\eta, \xi) = TF[f(x, y)](\eta, \xi) \quad (\text{A.2})$$

et

$$f(x, y) = FT^{-1}[\widehat{f}(\eta, \xi)](x, y) \quad (\text{A.3})$$

On choisi volontairement la convention de signe la moins courante afin d'assurer la cohérence de la formulation avec le reste du document, i.e. pour des fonctions harmoniques du temps de la forme  $e^{+i\omega t}$ . Les propriétés des transformées de Fourier utilisées dans ce document son les suivantes :

- linéarité : la TF de  $[af_1(x, y) + bf_2(x, y)]$  est  $a.\widehat{f}_1(\eta, \xi) + b\widehat{f}_2(\eta, \xi)$ .
- la contraction du domaine : si  $\widehat{f}(\eta, \xi)$  est la TF de  $f(x, y)$  alors

$$\widehat{f}(\alpha\eta, \alpha\xi) = \frac{1}{\alpha^2} \widehat{g}(\eta, \xi) \quad (\text{A.4})$$

où  $\widehat{g}$  est la TF de  $g(x, y) = f(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha})$

- la translation : la TF de  $f(x + x_0, y + y_0)$  est  $\widehat{f}(x, y) e^{2i\pi(\eta x_0 + \xi y_0)}$
- produit de convolution : la TF de  $h = f * g$  est  $\widehat{h} = \widehat{f}.\widehat{g}$

## A.2 Transformée de Fourier et Transformée de Hankel

Si la fonction  $f(x, y)$ , exprimée en coordonnées polaires ne dépend que du rayon  $f(x, y) = f(r, \phi) = \tilde{f}(r)$  sa transformée de Fourier  $\hat{f}(\eta, \xi) = \hat{f}(l, \psi) = \hat{f}(l)$  est la transformée de Hankel de  $f(r)$ , soit

$$\hat{f}(l) = 2\pi \int_0^\infty f(r) J_0(2\pi r l) r dr \quad (\text{A.5})$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 :

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm i x \cos \phi} d\phi \quad (\text{A.6})$$

La relation suivante entre les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1 est utilisée pour décrire de manière analytique (ou pseudo-analytique) la diffraction par une ouverture circulaire dans l'approximation de Fresnel ou de Fraunhofer :

$$\int_0^l r J_0(r) dr = l J_1(l) \quad (\text{A.7})$$

## A.3 Noyau de propagation de Rayleigh-Sommerfeld

La fonction  $G_z$  est définie par :

$$G_z(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{r} \frac{e^{-ikr}}{r} \left( ik - \frac{1}{r} \right) \quad (\text{A.8})$$

Dans la limite  $r \gg \lambda$  :

$$G_z(x, y) \approx \frac{i}{\lambda} \frac{z}{r} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (\text{A.9})$$

la Transformée de Fourier de  $G_z$  est (voir l'annexe B) est :

$$\hat{G}_z(\eta, \xi) = e^{-ik\gamma z} \quad (\text{A.10})$$

où  $\gamma$  vérifie  $\gamma^2 + \lambda^2 \eta^2 + \lambda^2 \xi^2 = 0$

Parmi les propriétés de la fonction  $G_z$  on retiendra les propriétés suivantes qui se démontrent aisément à partir de la définition précédente et du théorème de convolution.

$$G_z * G_z^* = \delta(x) \delta(y) \quad (\text{A.11})$$

$$G_z * G_z = G_{2z} \quad (\text{A.12})$$

$$cste * G_z = cste \cdot e^{-ikz} \quad (\text{A.13})$$

### A.3.1 Fonction de Fresnel

La fonction  $H_z$  s'écrit

$$H_z = \frac{i}{\lambda z} e^{-\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)}$$

Sa transformée de Fourier

$$H_z = \mathcal{F}(h_z) = e^{i\pi\lambda z(x_2^2+y_2^2)}$$

la fonction de Fresnel  $H_z$  vérifie

$$H_{z_1} * H_{z_2} = H_{z_1+z_2} \quad (\text{A.14})$$

$$H_z * H_z^* = H_z * H_{-z} = H_0 = \delta \quad (\text{A.15})$$

$$cste * H_z = cste \quad (\text{A.16})$$

On montre également que

$$\begin{aligned} h_{z_1} h_{z_2} &= \frac{1}{\lambda(z_1+z_2)} h_{mz_2} \quad , \quad \text{où} \quad m = \frac{z_1}{z_1+z_2} \\ &= \frac{1}{\lambda(z_1+z_2)} h_{m'z_1} \quad , \quad \text{où} \quad m' = \frac{z_2}{z_1+z_2} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{h_{z_1}}{h_{z_2}} = -i\lambda m z_2 h_{mz_1} \quad , \quad \text{où} \quad m = \frac{z_2}{z_2-z_1} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{1}{h_z} = \lambda^2 z^2 h_{-z} \quad (\text{A.19})$$

$$h_z h_{-z} = \frac{1}{\lambda^2 z^2} \quad (\text{A.20})$$

### A.3.2 Intégrales de Fresnel et approximation de Fraunhofer

Si  $U$  est une amplitude complexe quelconque alors

$$U * h_z = \frac{i}{\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-\frac{i\pi}{\lambda z}[(x_2-x)^2+(y_2-y)^2]} dx dy \quad (\text{A.21})$$

$$= \frac{i}{\lambda z} e^{-\frac{i\pi}{\lambda z}(x_2^2+y_2^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)} e^{2i\pi(x\frac{x_2}{\lambda z}+y\frac{y_2}{\lambda z})} dx dy \quad (\text{A.22})$$

$$= -i\lambda z h_z(x_2, y_2) \mathcal{F}^{-1} \left[ U \times h_z \right] \left( \frac{x_2}{\lambda z}, \frac{y_2}{\lambda z} \right) \quad (\text{A.23})$$

Dans l'approximation de Fraunhofer, cette expression devient

$$U * h_z \approx h_z(x_2, y_2) \mathcal{F}^{-1} \left[ U \right] \left( \frac{x_2}{\lambda z}, \frac{y_2}{\lambda z} \right) \quad (\text{A.24})$$

## Annexe B

# Équivalence entre la théorie du spectre angulaire et les intégrales de Rayleigh-Sommerfeld

La première intégrale de Rayleigh-Sommerfeld et La théorie du spectre angulaire présentés dans les sections 3.4 et 3.5 sont métriquement. La démonstration de cette équivalence repose sur la représentation de Weyl, d'une onde sphérique en terme de spectre d'onde plane, qui s'écrit

$$\frac{e^{-ikr}}{-ikr} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(\alpha x + \beta y + \gamma|z|)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} \quad (\text{B.1})$$

En se limitant au cas  $z > 0$ , en dérivant cette expression par rapport à  $z$  et en posant  $\eta = \frac{\alpha}{\lambda}$  et  $\xi = \frac{\beta}{\lambda}$  on écrit le noyau de propagation  $G_z$  de la relation (3.17) sous la forme

$$G_z = \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(\eta x + \xi y)} e^{-ik\gamma z} d\eta d\xi \quad (\text{B.2})$$

$G_z$  est ainsi et avec la convention de signe adoptée plus haut la transformée de Fourier inverse de la fonction  $e^{-ik\gamma z}$ . Inversement on a donc

$$\widehat{G}_z = e^{-ik\gamma z}$$

En vertu du théorème de convolution, la première intégrale de Rayleigh Sommerfeld conduit

à

$$\begin{aligned}
 U_z &= U_0 * G_z = TF^{-1} [\widehat{U}_0 \cdot \widehat{G}_z] \\
 U_z(x, y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}_0(\eta, \xi) e^{-ik\gamma z} e^{-2i\pi(\eta x + \xi y)} d\eta d\xi
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

expression qui s'identifie à l'équation de propagation (3.25) du spectre angulaire en ré-introduisant  $\alpha = \lambda\eta$  et  $\beta = \lambda\xi$ .

Pour la seconde intégrale de Rayleigh-Sommerfeld la démonstration est un peu moins directe car cette solution fait intervenir le gradient de l'amplitude dans le plan  $z = 0$  et non pas l'amplitude elle-même. Cependant, si on dérive par rapport à  $z$  la décomposition en spectre d'onde plane (B.3) de l'amplitude  $U_z$  dans le plan de coordonnée  $z$  et que l'on considère le cas  $z = 0$  on obtient

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}_0(\eta, \xi) (-ik\gamma) e^{-ik\gamma z} e^{-2i\pi(\eta x + \xi y)} d\eta d\xi \tag{B.4}$$

Si cette fonction  $F_0(x, y) = \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0}$  admet une transformée de Fourier elle vérifie

$$\widehat{F}_0(\eta, \xi) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} e^{-2i\pi(\eta x + \xi y)} d\eta d\xi \tag{B.5}$$

et on en déduit que

$$\widehat{F}_0(\eta, \xi) = -ik\gamma \widehat{U}_0(\eta, \xi) \tag{B.6}$$

et la relation (B.3) s'écrit

$$U(x, y, z) = U_z(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}_0(\eta, \xi) \frac{i}{k\gamma} e^{-ik\gamma z} e^{-2i\pi(\eta x + \xi y)} d\eta d\xi \tag{B.7}$$

On fait alors de nouveau appel à la décomposition de Weyl (B.1) dont on déduit que

$$G'_z(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{i\lambda}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\gamma z}}{\gamma} e^{-2i\pi(\eta x + \xi y)} d\eta d\xi \tag{B.8}$$



ou encore

$$\widehat{G}'_z(\eta, \xi) = \frac{i\lambda}{2\pi} \frac{e^{ik\gamma z}}{\gamma} \quad (\text{B.9})$$

La relation B.7 prend ainsi la forme d'un produit de convolution

$$U_z(x, y) = TF^{-1} \left[ \widehat{F}_0 \cdot \widehat{G}'_z \right] = F_0 * G'_z \quad (\text{B.10})$$

qui s'identifie avec la seconde intégrale de Rayleigh Sommerfeld (3.13).

# Annexe C

## Potentiels de Bromwich

La méthode de Bromwich consiste à écrire la solution générale des équations de Maxwell en régime harmonique et pour un milieu l.l.h.i, comme une combinaison linéaire deux solutions particulières, linéairement indépendantes. Ces deux solutions particulières, dites 'transverse électrique' (TE) et 'transverse magnétique' (TM) sont déterminées au travers de deux potentiels scalaires  $U_{TE}$  et  $U_{TM}$  dont dérivent l'ensemble des composantes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ .

On se place ainsi dans un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  liées aux coordonnées cartésienne par

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

On construit les potentiels scalaires à partir des équations (2.27) et (2.28) qui une fois l'opérateur rotationnel spécifié en coordonnées sphériques conduisent à d'une part à

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\varphi) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right] = -i\omega\mu H_r \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = -i\omega\mu H_\theta \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -i\omega\mu H_\varphi \quad (\text{C.3})$$

et d'autre part à

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\varphi) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right] = i\omega \varepsilon E_r \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = i\omega \mu E_\theta \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] = i\omega \varepsilon E_\varphi \quad (\text{C.6})$$

La solution  $TM$  vérifie par définition  $H_{r,TM} = 0$  et la solution TE vérifie  $E_{r,TE} = 0$ . Pour l'onde  $TM$  la relation (C.1) devient

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta E_{\varphi,TM}) = \frac{\partial}{\partial \varphi} (r E_{\theta,TM}) \quad (\text{C.7})$$

On introduit alors un potentiel  $V$  tel que

$$\begin{aligned} r E_{\theta,TM} &= \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ r \sin \theta E_{\varphi,TM} &= \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

puis un second potentiel  $U_{TM}$  tel que

$$V = \frac{\partial U_{TM}}{\partial r}$$

les composantes  $E_{\theta,TM}$  et  $E_{\varphi,TM}$  sont ainsi déterminées à partir de  $U_{TM}$  par

$$r E_{\theta,TM} = \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r \partial \theta} \quad (\text{C.8})$$

$$r E_{\varphi,TM} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r \partial \varphi} \quad (\text{C.9})$$

à partir des relations (C.5) et (C.8), avec  $H_{r,TM} = 0$  on obtient

$$\frac{\partial}{\partial r} (r H_{\varphi,TM}) = -i\omega \varepsilon \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r \partial \theta} \quad (\text{C.10})$$

de même à partir de (C.6) et (C.9) on obtient

$$\frac{\partial}{\partial r} (r H_{\theta,TM}) = \frac{i\omega \varepsilon}{\sin \theta} \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r \partial \varphi} \quad (\text{C.11})$$

On déduit de ces deux relations que

$$r H_{\varphi,TM} = -i\omega \varepsilon \frac{\partial U_{TM}}{\partial \theta} \quad (\text{C.12})$$

$$r H_{\theta,TM} = \frac{i\omega \varepsilon}{\sin \theta} \frac{\partial U_{TM}}{\partial \varphi} \quad (\text{C.13})$$

Il reste à exprimer la composante  $E_{r, TM}$  en fonction de  $U_{TM}$ , en utilisant les relations (C.2), (C.9) et (C.13) qui conduisent à

$$\frac{\partial E_{r, TM}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^3 U_{TM}}{\partial r^2 \partial \varphi} + \omega^2 \mu \varepsilon \frac{\partial U_{TM}}{\partial \varphi} \quad (C.14)$$

et les relations (C.3), (C.8) et (C.12) qui conduisent à

$$\frac{\partial E_{r, TM}}{\partial \theta} = \frac{\partial^3 U_{TM}}{\partial r^2 \partial \theta} + \omega^2 \mu \varepsilon \frac{\partial U_{TM}}{\partial \theta} \quad (C.15)$$

les relations (C.13) et (C.14) sont vérifiées pour

$$E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \omega^2 \mu \varepsilon U \quad (C.16)$$

ce qui achève de déterminer l'ensemble des 6 composantes de l'onde  $TM$  en fonction du potentiel scalaire  $U_{TM}$  qui s'écrivent en reportant les relations (C.8), (C.9), (C.13), (C.12) et (C.16) :

$$E_{r, TM} = \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r^2} + k^2 U_{TM} \quad (C.17)$$

$$E_{\theta, TM} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r \partial \theta} \quad (C.18)$$

$$E_{\varphi, TM} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U_{TM}}{\partial r \partial \varphi} \quad (C.19)$$

$$H_{r, TM} = 0 \quad (C.20)$$

$$H_{\theta, TM} = \frac{i\omega \varepsilon}{r \sin \theta} \frac{\partial U_{TM}}{\partial \varphi} \quad (C.21)$$

$$H_{\varphi, TM} = \frac{-i\omega \varepsilon}{r} \frac{\partial U_{TM}}{\partial \theta} \quad (C.22)$$

$$(C.23)$$

En suivant le même cheminement, on peut définir le potentiel  $U_{TE}$  associé à l'onde transverse électrique (en posant donc  $E_{r, TE} = 0$ ). Les composantes de l'onde  $TE$  dérivent alors de ce potentiel selon les relations

$$E_{r,TE} = 0 \quad (C.24)$$

$$E_{\theta,TE} = \frac{-i\omega\mu}{r \sin\theta} \frac{\partial U_{TE}}{\partial\varphi} \quad (C.25)$$

$$E_{\varphi,TE} = \frac{i\omega\mu}{r} \frac{\partial U_{TE}}{\partial\theta} \quad (C.26)$$

$$H_{r,TE} = \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial r^2} + k^2 U_{TE} \quad (C.27)$$

$$H_{\theta,TE} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial r \partial\theta} \quad (C.28)$$

$$H_{\varphi,TE} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial^2 U_{TE}}{\partial r \partial\varphi} \quad (C.29)$$

Toute solutions aux équations de Maxwell pour les milieux l.l.h.i en régime harmonique s'écrit donc comme une combinaison linéaire des ondes  $TE$  et  $TM$  et les composantes du champ en coordonnées sphériques dérivent de deux potentiels scalaires  $U_{TM}$  et  $U_{TE}$  selon les relations (C.17) à (C.22) et (C.24) à (C.29) où les potentiels scalaires  $U_{TM}$  et  $U_{TE}$  sont des solutions de l'équation (D.1)

## Annexe D

# Equation pour les potentiels de Bromwich et solutions

Dans la section 4.2 et l'annexe C nous avons vu que dans un milieu l.l.h.i., en régime harmonique, les composantes du champ électromagnétiques en coordonnées sphériques s'expriment toutes en fonction des deux potentiels scalaires  $U_{TM}$  et  $U_{TE}$ . Il nous faut donc établir une équation pour ces potentiels. Parmi les relations (C.1) à (C.6) directement issue des equations "rotationelles" de Maxwell, seule la relation (C.4) n'a pas été utilisée pour définir les potentiels. En introduisant les relations (C.12), (C.13) et (C.16) dans cette relation on obtient l'équation différentielle à résoudre pour le potentiel  $U$  :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 U + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{D.1})$$

où le nombre d'onde  $k$  vérifiant  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$  a été introduit.

La relation (D.1) est l'équation vérifiée par le potentiel  $U_{TM}$  associé à l'onde transverse magnétique. Cette même équation est également vérifiée par le potentiel  $U_{TE}$  associé à l'onde transverse électrique.

Il reste à trouver des solutions à cette équation. Cette équation est séparable dans le système de coordonnées sphérique. Elle admet une famille de solutions à variables séparables à partir de laquelle l'ensemble des solutions peut être construit, par combinaison linéaire [38]. La séparation des variables est obtenue en posant

$$U(r, \theta, \varphi) = rU_1(kr)U_2(\theta)U_3(\varphi) \quad (\text{D.2})$$

L'équation (4.8) conduit alors à

$$\frac{r}{U_1(kr)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rU_1(kr)] + k^2 r^2 = -\frac{1}{\sin \theta U_2(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U_2(\theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta U_3(\varphi)} \frac{\partial^2 U_3(\varphi)}{\partial \varphi^2} \quad (\text{D.3})$$

Les variables sont bien séparées dans cette équation. Le membre de droite ne dépend que de  $r$  qui n'intervient pas dans le membre de gauche. Chaque membre est donc égale à une constante complexe, qui est une constante de séparation et que l'on notera  $a(a+1)$ . On obtient ainsi une première équation qui en posant  $x = kr$  s'écrit

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dU_1(x)}{dx} \right) + (x^2 - a(a+1)) U_1(x) = 0 \quad (\text{D.4})$$

et une seconde où les variables  $\theta$  et  $\varphi$  sont également séparées. On introduit alors une seconde constante de séparation noté  $b$  et en posant  $u = \cos \theta$  on obtient

$$(1 - u^2) \frac{d^2 U_2(u)}{du^2} - 2u \frac{dU_2(u)}{du} + \left[ a(a+1) - \frac{b^2}{1 - u^2} \right] U_2(u) = 0 \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{d^2 U_3(\varphi)}{d\varphi^2} + b^2 U_3(\varphi) = 0 \quad (\text{D.6})$$

Ces trois équations différentielles sont connues. On reconnaît l'équation harmonique (D.6), l'équation générale de Legendre (D.5) et l'équation de Bessel sphérique (D.4). Leur solutions sont connues mais il nous faut sélectionner celles qui vérifient certaines contraintes imposées par la physique de notre problème. Les solutions  $U_3(\varphi)$  recherchées de l'équation harmonique (D.6) doivent ainsi être  $2\pi$ -périodique et montrer une continuité en 0 et  $2\pi$  ( $U_3(0) = U_3(2\pi)$ ). Les seules solutions admises sont donc les fonctions harmoniques de la forme  $\exp(im\varphi)$  où  $b = m$  est un entier relatif.

On considère à présent l'équation générale de Legendre (D.5) avec  $b = m$  entier.  $U_2$  doit être défini sur tout l'espace, quelque soit l'entier  $m$ , et y compris en  $u = \pm 1$ . Dans ces conditions,  $a$  ne peut prendre que des valeurs entières et positives et les seules solutions admises sont les polynômes de Legendre associés.

$$P_n^m(\cos \theta) = (-1)^m (\sin \theta)^m \frac{d^m}{d \cos \theta^m} P_n(\cos \theta) \quad (\text{D.7})$$

où  $n$  prend les valeurs entières de 0 à l'infini et  $m$  les valeurs comprise entre  $-n$  et  $+n$ .  $P_n(\cos \theta)$  est le polynôme de Legendre, il est défini par

$$P_n(x) = P_n^0(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{D.8})$$

L'équation de Bessel sphérique admet comme solution pour  $m$  entier et  $n$  entier positif les fonction de Bessel sphériques  $\Psi_n^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Ces fonctions sont définies à partir des solutions de l'équation Bessel ordinaire de la manière suivante :

$$\Psi_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{D.9})$$

$$\Psi_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{D.10})$$

$$\Psi_n^{(3)}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \quad (\text{D.11})$$

$$\Psi_n^{(4)}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) \quad (\text{D.12})$$

où  $J$ ,  $N$ ,  $H^{(1)}$  et  $H^{(2)}$ , sont la fonction de Bessel ordinaire, la fonction de Newmann, la fonction de Hankel du premier genre et la fonction de Hankel du second genre, respectivement. Ces solutions ne sont pas linéairement indépendantes car

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iN_\alpha(x) \quad (\text{D.13})$$

$$H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iN_\alpha(x) \quad (\text{D.14})$$

et donc

$$\Psi_n^{(3)}(x) = \Psi_n^{(1)}(x) + i\Psi_n^{(2)}(x) \quad (\text{D.15})$$

$$\Psi_n^{(4)}(x) = \Psi_n^{(1)}(x) - i\Psi_n^{(2)}(x) \quad (\text{D.16})$$

Les fonctions  $\Psi_n^{(1)}$  et  $\Psi_n^{(2)}$  representent des solutions stationnaires alors que les fonctions  $\Psi_n^{(3)}$  et  $\Psi_n^{(4)}$  representent des solutions propagatives, respectivement entrantes (vers les  $r$  négatifs) et sortantes (vers les  $r$  positifs). Dans la suite on ne conservera qu'une seule de ces solutions à la fois, afin de respecter certaines contraintes physiques. Ces contraintes et le choix de fonction associé seront différentes pour les potentiels Bromwich associés au champ interne, incident et diffusé ou à une onde élémentaire entrante ou sortante. Si le potentiel reste non-spécifié, la solution générale de l'équation, combinaison linéaire des solutions à variables séparables s'écrit



$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \alpha_n^m r \Psi_n^{(i)}(kr) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad , \quad i = 1, 2, 3, \text{ ou } 4. \quad (\text{D.17})$$

où les  $\alpha_n^m$  sont des constantes. Notons que le terme  $n = 0$  à été omis car il constitue une solution triviale au problème. Ce terme se réduit à  $\alpha_0^0 r \Psi_0^i(kr)$ , il ne dépend pas de  $\theta$  et de  $\varphi$  et conduit à un champ dont toutes les composantes sont nulles quand il est introduit dans les relations (C.18) à (C.29).

## Annexe E

### Approximation localisée pour les BSCs

Dans le formalisme de la TLMG, le faisceau est représenté par des coefficients de forme dont le calcul peut être simplifié grâce à une approximation localisée. Les coefficients  $\tilde{g}_{n,TM}^m$  et  $\tilde{g}_{n,TE}^m$  issus de cette approximation se substituent aux coefficients  $g_{n,TM}^m$  et  $g_{n,TE}^m$ . Pour un faisceau Gaussien arbitrairement localisé par rapport à la sphère diffusante ils s'expriment de la manière suivante [43] :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{g}_{n,TM}^m \\ \tilde{g}_{n,TE}^m \end{bmatrix} &= \frac{1}{2(1+2iz_0^+)} \exp\left(\frac{iz_0^+}{s^2} - \frac{x_0^{+2} + y_0^{+2}}{1+2iz_0^+}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{-(n+\frac{1}{2})^2 s^2}{1+2iz_0^+}\right) R_n^m (-i)^{|m|} \begin{bmatrix} iF_{n,TM}^m \\ F_{n,TE}^m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

avec

$$R_n^0 = \frac{2n(2n+1)}{2n+1} \quad \text{et} \quad R_n^m = \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{|m|-1}, \quad \text{pour } |m| \geq 1$$

$$\begin{bmatrix} F_{n,TM}^0 \\ F_{n,TE}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_0^+ \\ 2iy_0^+ \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j+1} \frac{X_-^j X_+^j}{j!(j+1)!} \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{bmatrix} F_{n,TM}^m \\ F_{n,TE}^m \end{bmatrix} = a^{m-1} \frac{X_-^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{j=m}^{\infty} a^{2j-m+1} \frac{X_-^j X_+^{j-m}}{j!(j-m)!} \begin{bmatrix} \frac{X_+}{j-m+1} + \frac{X_-}{j+1} \\ \frac{X_+}{j-m+1} - \frac{X_-}{j+1} \end{bmatrix}, \quad m > 0 \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{bmatrix} F_{n,TM}^m \\ -F_{n,TE}^m \end{bmatrix} = a^{-1-m} \frac{X_-^{-1-m}}{(-1-m)!} + \sum_{j=-m}^{\infty} a^{2j+m+1} \frac{X_-^{j+m} X_+^j}{j!(j+m)!} \begin{bmatrix} \frac{X_-}{j+m+1} + \frac{X_+}{j+1} \\ \frac{X_-}{j+m+1} - \frac{X_+}{j+1} \end{bmatrix}, m < 0 \quad (\text{E.4})$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{(n+1/2)s}{1+2iz_0^+}, & s &= \frac{w_0}{l} = \frac{1}{kw_0} \\ X_- &= x_0^+ - iy_0^+, & X_+ &= x_0^+ + iy_0^+ \\ x_0^+ &= \frac{x_0}{w_0}, & y_0^+ &= \frac{y_0}{w_0}, & \text{et} & z_0^+ = \frac{z_0}{k_0 w_0^2} \end{aligned}$$

Ces coefficients de formes approchées  $\tilde{g}_{n,TM}^m$  et  $\tilde{g}_{n,TE}^m$  peuvent remplacer les coefficients  $g_{n,TM}^m$  et  $g_{n,TE}^m$  dans toutes les relations précédentes pour décrire un faisceau Gaussien circulaire de position et de rayon au col quelconque. Avec cette description efficace du faisceau incident, nous disposons à présent de tous les éléments nécessaires aux calculs des champs incident, interne et diffusé du problème.

# Annexe F

## Décomposition en série de Debye

Les coefficients de diffusion des relations (4.40) à (4.43) s'exprime sous la forme commune de coefficients  $e_n$  et  $f_n$  et de deux paramètres  $A$  et  $B$  qui prennent des valeurs différentes pour les ondes TM et TE, selon les relations (4.121) à (4.125) de la section 4.10.2. on remarque d'abord que  $e_n$  et  $f_n$  ont le même dénominateur

$$E = A\xi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - B\xi'_n(\alpha)\psi_n(\beta) \quad (\text{F.1})$$

Pour décomposer les coefficients  $e_n$  et  $f_n$  en serie de Debye on considère des ondes élémentaires entrante (se propageant vers le centre de la sphère diffusante) et sortante. D'après les résultats de la l'annexe D, une onde élémentaire entrante est décrite par un potentiel de la forme

$$U_e = \frac{1}{k}\Gamma_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)$$

où on a choisi la fonction de Riccati-Bessel  $\Gamma_n(kr) = kr\Psi_n^{(3)}(kr)$  pour l'onde entrante. Quand cette onde rencontre la surface de la sphère, une partie  $T_n^{21}$  de cette onde est transmise à l'intérieur de la sphère et une partie  $R_n^{22}$  est réfléchie vers l'extérieur. L'onde résultante est alors défini par deux potentiels selon que l'on se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère de rayon  $a$  ( $a = d/2$ ), selon

$$\begin{aligned} U_e^1 &= \frac{T_n^{21}}{k_{int}}\Gamma_n(k_{int}r)P_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi) \quad , \text{ pour } r \leq a \\ U_e^2 &= \frac{1}{k}[\Gamma_n(kr) + R_n^{22}\xi_n(kr)]P_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi) \quad , \text{ pour } r \leq a \end{aligned}$$

où la fonction de Riccati-Bessel  $\xi_n(kr) = kr\Psi_n^{(4)}(kr)$  a été choisi pour l'onde sortante associée à la partie réfléchie. Les coefficients introduit ci-dessus doivent vérifier les conditions de continuité

des composantes tangentielles des champs à la surface de la particule. Pour une onde  $TE$  on écrit ainsi

$$E_{\theta,TE}^1|_{r=a} = E_{\theta,TE}^2|_{r=a} \quad (\text{F.2})$$

$$H_{\theta,TE}^1|_{r=a} = H_{\theta,TE}^2|_{r=a} \quad (\text{F.3})$$

En utilisant les relations (C.25) et (C.28) ainsi que la définition de l'indice relatif  $M = k_{int}/k$ , ces conditions limites deviennent

$$T_n^{21}\Gamma_n(\beta) = M \frac{\mu}{\mu_{int}} [\Gamma_n(\alpha) + R_n^{22}\xi_n(\alpha)] \quad (\text{F.4})$$

$$T_n^{21}\Gamma'_n(\beta) = \Gamma'_n(\alpha) + R_n^{22}\xi'_n(\alpha) \quad (\text{F.5})$$

Notons que l'écriture des conditions limites pour les composantes  $E_{\varphi,TE}$  et  $H_{\varphi,TE}$  conduisent aux mêmes relations.

Pour une onde TM, on écrit

$$E_{\theta,TM}^1|_{r=a} = E_{\theta,TM}^2|_{r=a} \quad (\text{F.6})$$

$$H_{\theta,TM}^1|_{r=a} = H_{\theta,TM}^2|_{r=a} \quad (\text{F.7})$$

qui conduisent en introduisant les relations (C.18) et (C.21) à

$$T_n^{21}\Gamma'_n(\beta) = \Gamma'_n(\alpha) + R_n^{22}\xi'_n(\alpha) \quad (\text{F.8})$$

$$T_n^{21}\Gamma_n(\beta) = \frac{\mu_{int}}{\mu M} [\Gamma_n(\alpha) + R_n^{22}\xi_n(\alpha)] \quad (\text{F.9})$$

Les relations (F.5) et (F.8) sont identiques et les relations (F.4) et (F.9) le deviennent quand on introduit les paramètres  $A$  et  $B$  définis par la relation (4.125). Les conditions limites se réduisent ainsi aux deux relations suivantes

$$T_n^{21}\Gamma'_n(\beta) = \Gamma'_n(\alpha) + R_n^{22}\xi'_n(\alpha) \quad (\text{F.10})$$

$$BT_n^{21}\xi_n(\beta) = A [\Gamma_n(\alpha) + R_n^{22}\xi_n(\alpha)] \quad (\text{F.11})$$

On procède de même pour une onde sphérique élémentaire sortante. Le potentiel associé est de la forme

$$U_s = \frac{1}{k}\Gamma_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)$$

Quand cette onde rencontre la surface de la sphère, une partie  $T_n^{12}$  de cette onde est transmise à l'extérieur de la sphère et une partie  $R_n^{11}$  est réfléchiée vers l'intérieur. L'onde résultante est alors

définie par deux potentiels selon que l'on se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère de rayon  $a$ , selon

$$\begin{aligned} U_s^1 &= \frac{1}{k_{int}} [\xi_n(k_{int}r) + R_n^{11}\Gamma_n(k_{int}r)] P_n^m(\cos\theta) \exp(im\varphi) \quad , \text{ pour } r \leq a \\ U_s^2 &= \frac{T_n^{21}}{k} \xi_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \exp(im\varphi) \quad , \text{ pour } r \geq a \end{aligned}$$

Comme pour l'onde entrante, les conditions limites pour les composantes  $E_\theta$  et  $H_\theta$  conduisent à deux équations faisant intervenir les coefficients  $A$  et  $B$

$$T_n^{12}\xi'_n(\alpha) = \xi'_n(\beta) + R_n^{11}\Gamma'_n(\beta) \quad (\text{F.12})$$

$$AT_n^{12}\xi_n(\alpha) = B [\xi_n(\beta) + R_n^{11}\Gamma_n(\beta)] \quad (\text{F.13})$$

On obtient ainsi deux systèmes indépendants de deux équations à deux inconnues. Les relations (F.10) et (F.11) d'une part, et (F.12) et (F.13) d'autre part conduisent à

$$R_n^{22} = \frac{A\Gamma_n(\alpha)\Gamma'_n(\beta) - B\Gamma'_n(\alpha)\Gamma_n(\beta)}{B\Gamma_n(\beta)\xi'_n(\alpha) + A\Gamma'_n(\beta)\xi_n(\alpha)} \quad (\text{F.14})$$

$$T_n^{21} = A \frac{\xi_n(\alpha)\Gamma'_n(\alpha) - \xi'_n(\alpha)\Gamma_n(\alpha)}{A\xi_n(\alpha)\Gamma'_n(\beta) - B\xi'_n(\alpha)\Gamma_n(\beta)} \quad (\text{F.15})$$

$$R_n^{11} = \frac{-A\xi_n(\alpha)\xi'_n(\beta) + B\xi'_n(\alpha)\xi_n(\beta)}{A\xi_n(\alpha)\Gamma'_n(\beta) - B\xi'_n(\alpha)\Gamma_n(\beta)} \quad (\text{F.16})$$

$$T_n^{12} = B \frac{\xi'_n(\beta)\Gamma_n(\beta) - \xi_n(\beta)\Gamma'_n(\beta)}{B\Gamma_n(\beta)\xi'_n(\alpha) + A\Gamma'_n(\beta)\xi_n(\alpha)} \quad (\text{F.17})$$

Dans ces relations, on reconnaît un dénominateur commun que l'on note  $D$  et on écrit

$$D = A\xi_n(\alpha)\Gamma'_n(\beta) - B\xi'_n(\alpha)\Gamma_n(\beta) \quad (\text{F.18})$$

$$R_n^{22} = \frac{1}{D} [-A\Gamma_n(\alpha)\Gamma'_n(\beta) + B\Gamma'_n(\alpha)\Gamma_n(\beta)] \quad (\text{F.19})$$

$$T_n^{21} = \frac{A}{D} [\xi_n(\alpha)\Gamma'_n(\alpha) - \xi'_n(\alpha)\Gamma_n(\alpha)] \quad (\text{F.20})$$

$$R_n^{11} = \frac{1}{D} [-A\xi_n(\alpha)\xi'_n(\beta) + B\xi'_n(\alpha)\xi_n(\beta)] \quad (\text{F.21})$$

$$T_n^{12} = \frac{B}{D} [\xi_n(\beta)\Gamma'_n(\beta) - \xi'_n(\beta)\Gamma_n(\beta)] \quad (\text{F.22})$$

On remarque également une certaine similitude entre ces coefficients et les coefficients de diffusion.

On cherche à présent à écrire les coefficients de diffusion  $e_n$  et  $f_n$  en fonction des coefficients  $R_n^{11}$ ,  $R_n^{22}$ ,  $T_n^{12}$ ,  $T_n^{21}$ . Tous ces coefficients, sont comme les quantités  $D$  et  $E$  des fonctions des paramètres  $A$  et  $B$ . On commence par développer les fonctions de Riccati-Bessel  $\xi_n$  et  $\Gamma_n$  dans

les coefficients  $R_n$  et  $T_n$ . Ces fonctions n'apparaissent pas dans les numérateurs des coefficients  $e_n$  et  $f_n$ . On utilise donc les relations (4.14) et (4.15), soit

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x) &= \psi_n(x) + i\chi_n(x) \\ \xi_n(x) &= \psi_n(x) - i\chi_n(x) \\ \Gamma'_n(x) &= \psi'_n(x) + i\chi'_n(x) \\ \xi'_n(x) &= \psi'_n(x) - i\chi'_n(x)\end{aligned}$$

On constate que les quantités  $D$  et  $DR_n^{11}$  ont en commun de nombreux termes. Le calcul de leur différence se simplifie notamment de la manière suivante

$$\begin{aligned}D - DR_n^{11} &= 2A\psi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - 2B\psi'_n(\alpha)\psi_n(\beta) \\ &\quad - 2iA\chi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) + 2iB\chi'_n(\alpha)\psi_n(\beta) \\ &= 2A\xi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - 2B\xi'_n(\alpha)\psi_n(\beta) \\ &= 2E\end{aligned}$$

Le dénominateur commun  $E$  des coefficients de diffusion s'écrit ainsi simplement en fonction de  $D$  et de  $R_n^{11}$ . En développant les fonctions  $\Gamma$  dans le numérateur de  $T_n^{21}$  on aboutit à

$$DT_n^{21} = E.f_n + iA[\xi'_n(\alpha)\chi_n(\alpha) - \xi_n(\alpha)\chi'_n(\alpha)] \quad (\text{F.23})$$

le terme entre crochet se réduit à 1 en utilisant la relation Wronskienne des fonctions de riccati-Bessel

$$\psi_n(x)\chi'_n(x) - \psi'_n(x)\chi_n(x) = 1 \quad (\text{F.24})$$

Cette même relation permet de réduire à son tour le numérateur de  $f_n$  qui devient

$$f_n E = iA \quad (\text{F.25})$$

nous conduisant à

$$DT_n^{21} = 2Ef_n = 2iA \quad (\text{F.26})$$

En utilisant les relations précédentes on obtient

$$f_n = T_n^{21} \frac{D}{2E} = \frac{T_n^{21}}{1 - R_n^{11}} \quad (\text{F.27})$$

Le développement recherché est alors obtenu en utilisant le développement en série de  $1/(1-x)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{p=0}^{\infty} x^p = \sum_{p=1}^{\infty} x^{p-1} \quad (\text{F.28})$$

qui nous conduit à

$$f_n = \sum_{p=1}^{\infty} T_n^{21} (R_n^{11})^{p-1} \quad (\text{F.29})$$

Cette étape de la démonstration qui n'est pas vraiment expliciter dans les références [47] et [48] est à la base de la décomposition en série de Debye, puisqu'elle fait apparaître la sommation sur  $p$ . **Cette étape est pourtant très importante car elle est aussi à la base des limites de cette décomposition.** La troncature des séries à une valeur  $p_{max}$  sous-entend en effet que la série converge. Plus  $R^{11}$  sera petit, plus petit sera le nombre de termes nécessaire pour retrouver le résultat de la LMT en totalité. A l'inverse, si le coefficient de réflexion (sa norme) tend vers 1, le nombre de termes requis pour atteindre cette convergence tend vers l'infini. C'est ce qui se produit dans le cas des bulles et dans une moindre mesure pour des sphères de petite dimensions comme discuté dans la section 4.10.7.

Pour le coefficient  $e_n$  le calcul plus fastidieux, mais en suivant la même méthode sans utiliser relation Wronskienne (F.24), on montre que

$$(1 - R_n^{11})(1 - R_n^{22}) - T_n^{12} T_n^{21} = \frac{4}{D} [A\psi_n(\alpha)\psi'_n(\beta) - B\psi'_n(\alpha)\psi_n(\beta)] \quad (\text{F.30})$$

En divisant cette relation par  $(1 - R_n^{11})$  et en appliquant le développement de la relation (F.28) on obtient

$$e_n = \frac{1}{2} \left[ 1 - R_n^{22} - \sum_{p=1}^{\infty} T_n^{12} (R_n^{11})^{p-1} T_n^{21} \right] \quad (\text{F.31})$$

Les coefficients de diffusion sont ainsi décomposés en une série infinie de termes d'indices  $p$ . Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  peuvent être calculés en attribuant les valeurs de  $A$  et  $B$  correspondant aux ondes  $TM$  ou  $TE$  selon la relation (4.125) dans le calcul des coefficients de transmission et de réflexion.  $R_n^{11}$   $R_n^{22}$  sont calculés à partir des relations (F.18) (F.19) et (F.21). Pour les coefficients de transmission on utilisera la relation Wronskienne pour réduire le calcul à

$$T_n^{12} = \frac{2iB}{D} \quad (\text{F.32})$$

$$T_n^{21} = \frac{2iA}{D} \quad (\text{F.33})$$

$$\text{et } T_n^{12} T_n^{21} = \frac{-4AB}{D^2} = \frac{-4M\mu}{D^2 \mu_{int}} \quad (\text{F.34})$$



On retrouve les relations données par Hovenac et Lock [47] et Gouesbet [48] à ceci près que nous n'avons pas imposé que la sphère et le milieu ambiant soit non-magnétique ( $\mu = \mu_{int} = \mu_0$ ).

## Annexe G

# Théorie de Lorenz-Mie Généralisée pour une sphère à couches concentriques

La particule diffusante est décrite par un ensemble de  $L$  couches concentriques de rayon  $r_j$  et d'indice complexe  $n_j$  (voir figure 4.18). Elle est plongée dans un milieu non magnétique d'indice  $n_0$ . On définit un champ électromagnétique et des potentiels de Bromwich  $TE$  et  $TM$  associés pour chacune des couches et pour l'extérieur de la particule. Ces potentiels sont solutions de l'équation (4.8) et s'écrivent donc comme des combinaisons linéaires des solutions élémentaires (4.10), où le choix des fonctions de Riccati-Bessel est conditionné, comme pour la sphère homogène par des contraintes physiques. Pour la couche située au coeur de la particule ( $j = 1$ ), la fonction  $\psi_n(kr)$ , seule à être définie en  $r = 0$ , s'impose. Pour les autres couches, toutes les fonctions sont admises.  $\Gamma_n$  et  $\xi_n$  étant des combinaisons linéaires des fonctions  $\psi_n$  et  $\chi_n$  les potentiels s'écrivent

$$U_{TM}^j(r, \theta, \varphi) = \frac{E_0}{k_j^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} (C_{j,n}^m \psi_n(k_j r) + E_{j,n}^m \chi_n(k_j r)) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (\text{G.1})$$

$$U_{TE}^j(r, \theta, \varphi) = \frac{H_0}{k_j^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} (D_{j,n}^m \psi_n(k_j r) + F_{j,n}^m \chi_n(k_j r)) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (\text{G.2})$$

avec, pour le coeur de la sphère

$$E_{1,n}^m = F_{1,n}^m = 0 \quad (\text{G.3})$$

Les potentiels de Bromwich associé au champ incident et au champ diffusé s'écrivent de la

même manière que pour la sphère homogène, soit

$$U_{TM}^i(r, \theta, \varphi) = \frac{E_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n, TM}^m \psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (G.4)$$

$$U_{TE}^i(r, \theta, \varphi) = \frac{H_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n, TE}^m \psi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (G.5)$$

et

$$U_{TM}^s(r, \theta, \varphi) = -\frac{E_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} A_n^m \xi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (G.6)$$

$$U_{TE}^s(r, \theta, \varphi) = -\frac{H_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} B_n^m \xi_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi) \quad (G.7)$$

Les composantes des champs électromagnétiques sont toujours dérivées des potentiels de Bromwich à l'aide des relations (C.17) à (C.29) et les coefficients  $A_n^m$ ,  $B_n^m$ ,  $C_{jn}^m$ ,  $E_{jn}^m$ ,  $D_{jn}^m$  et  $F_{jn}^m$  sont déduits de l'écriture des conditions limites à chaque interfaces, entre deux couches successives dans la particule et entre la couche externe ( $j = L$ ) et le milieu ambiant. Pour la couche externe, la continuité des composantes tangentielle des champs se traduit par

$$E_{\theta, TM}^i|_{r=r_L} + E_{\theta, TM}^s|_{r=r_L} = E_{\theta, TM}^L|_{r=r_L}$$

et des relations similaires pour  $E_{\theta, TE}$ ,  $H_{\theta, TM}$  et  $H_{\theta, TE}$  qui conduisent aux 4 relations suivantes :

$$\begin{aligned} g_{n, TM}^m \psi_n'(kr_L) - A_n^m \xi_n'(kr_L) &= \frac{k}{k_L} [C_{Ln}^m \psi_n'(k_L r_L) + E_{Ln}^m \chi_n'(k_L r_L)] \\ g_{n, TE}^m \psi_n(kr_L) - B_n^m \xi_n(kr_L) &= \frac{\mu_L k^2}{\mu k_L^2} [D_{Ln}^m \psi_n(k_L r_L) + F_{Ln}^m \chi_n(k_L r_L)] \\ g_{n, TM}^m \psi_n(kr_L) - A_n^m \xi_n(kr_L) &= \frac{\mu_L}{\mu} [C_{Ln}^m \psi_n(k_L r_L) + E_{Ln}^m \chi_n(k_L r_L)] \\ g_{n, TE}^m \psi_n'(kr_L) - B_n^m \xi_n'(kr_L) &= \frac{k}{k_L} [D_{Ln}^m \psi_n'(k_L r_L) + F_{Ln}^m \chi_n'(k_L r_L)] \end{aligned} \quad (G.8)$$

Les conditions limites en  $r = r_j$ , entre les couches d'indice  $j$  et  $j + 1$ , s'écrivent

$$E_{\theta, TM}^j|_{r=r_j} = E_{\theta, TM}^{j+1}|_{r=r_j}$$

avec des relations similaires pour  $E_{\theta, TE}$ ,  $H_{\theta, TM}$  et  $H_{\theta, TE}$ . On obtient alors les 4 relations sui-

vantes pour  $j = 1, L - 1$  :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_j} [C_{j,n}^m \psi'_n(k_j r_j) + E_{j,n}^m \chi'_n(k_j r_j)] &= \frac{1}{k_{j+1}} [C_{j+1,n}^m \psi'_n(k_{j+1} r_j) + E_{j+1,n}^m \chi'_n(k_{j+1} r_j)] \\
\frac{\mu_j}{k_j^2} [D_{j,n}^m \psi_n(k_j r_j) + F_{j,n}^m \chi_n(k_j r_j)] &= \frac{\mu_{j+1}}{k_{j+1}^2} [D_{j+1,n}^m \psi_n(k_{j+1} r_j) + F_{j+1,n}^m \chi_n(k_{j+1} r_j)] \\
-\frac{1}{\mu_j} [C_{j,n}^m \psi_n(k_j r_j) + E_{j,n}^m \chi_n(k_j r_j)] &= \frac{1}{\mu_{j+1}} [C_{j+1,n}^m \psi_n(k_{j+1} r_j) + E_{j+1,n}^m \chi_n(k_{j+1} r_j)] \\
\frac{1}{k_j} [D_{j,n}^m \psi'_n(k_j r_j) + F_{j,n}^m \chi'_n(k_j r_j)] &= \frac{1}{k_{j+1}} [D_{j+1,n}^m \psi'_n(k_{j+1} r_j) + F_{j+1,n}^m \chi'_n(k_{j+1} r_j)]
\end{aligned} \tag{G.9}$$

Pour résoudre ces systèmes d'équations, on introduit les rapports suivants

$$R_{j,n}^a = -\frac{E_{j,n}^m}{C_{j,n}^m}, \quad R_{j,n}^b = -\frac{F_{j,n}^m}{D_{j,n}^m} \tag{G.10}$$

qui sont nuls pour le coeur de la sphère, en vertu de la relation G.3, soit

$$R_{1,n}^a = R_{1,n}^b = 0 \tag{G.11}$$

On introduit également pour simplifier les notations les paramètres de tailles associés aux différentes couches

$$\begin{aligned}
\beta_j &= k_j r_j, & \alpha_j &= k_{j+1} r_j, & \text{pour } j &= 1, L - 1 \\
\beta_L &= \beta = k_L r_L, & \alpha_L &= \alpha = k r_L
\end{aligned}$$

On obtient ainsi le système d'équation suivant

$$\psi'_n(\beta_L) - R_{L,n}^a \chi'_n(\beta_L) = \frac{n_L}{n_0} \frac{1}{C_{L,n}^m} [g_{n,TM}^m \psi'_n(\alpha_L) - A_n^m \xi'_n(\alpha_L)] \tag{G.12}$$

$$\psi_n(\beta_L) - R_{L,n}^b \chi_n(\beta_L) = \frac{n_L^2}{n_0^2} \frac{\mu_0}{\mu_L} \frac{1}{D_{L,n}^m} [g_{n,TE}^m \psi_n(\alpha_L) - B_n^m \xi_n(\alpha_L)] \tag{G.13}$$

$$\psi_n(\beta_L) - R_{L,n}^a \chi_n(\beta_L) = \frac{\mu_L}{\mu_0} \frac{1}{C_{L,n}^m} [g_{n,TM}^m \psi_n(\alpha_L) - A_n^m \xi_n(\alpha_L)] \tag{G.14}$$

$$\psi'_n(\beta_L) - R_{L,n}^b \chi'_n(\beta_L) = \frac{n_L}{n_0} \frac{1}{D_{L,n}^m} [g_{n,TE}^m \psi'_n(\alpha_L) - B_n^m \xi'_n(\alpha_L)] \tag{G.15}$$

$$\psi'_n(\beta_j) - R_{j,n}^a \chi'_n(\beta_j) = \frac{n_j}{n_{j+1}} \frac{C_{j+1,n}^m}{C_{j,n}^m} [\psi'_n(\alpha_j) - R_{j+1,n}^a \chi'_n(\alpha_j)] \tag{G.16}$$

$$\psi_n(\beta_j) - R_{j,n}^b \chi_n(\beta_j) = \frac{n_j^2}{n_{j+1}^2} \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} \frac{D_{j+1,n}^m}{D_{j,n}^m} [\psi_n(\alpha_j) - R_{j+1,n}^b \chi_n(\alpha_j)] \tag{G.17}$$

$$\psi_n(\beta_j) - R_{j,n}^a \chi_n(\beta_j) = \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \frac{C_{j+1,n}^m}{C_{j,n}^m} [\psi_n(\alpha_j) - R_{j+1,n}^a \chi_n(\alpha_j)] \tag{G.18}$$

$$\psi'_n(\beta_j) - R_{j,n}^b \chi'_n(\beta_j) = \frac{n_j}{n_{j+1}} \frac{D_{j+1,n}^m}{D_{j,n}^m} [\psi'_n(\alpha_j) - R_{j+1,n}^b \chi'_n(\alpha_j)] \tag{G.19}$$

Pour résoudre ce système on calcule les rapports entre les relations (G.12) et (G.14), (G.13) et (G.15), (G.16) et (G.18) et (G.17) et (G.19) et on introduit les rapports suivants pour  $j = 1, L$  :

$$H_{j,n}^a = \frac{\psi'_n(\beta_j) - R_{j,n}^a \chi'_n(\beta_j)}{\psi_n(\beta_j) - R_{j,n}^a \chi_n(\beta_j)} \quad (\text{G.20})$$

$$H_{j,n}^b = \frac{\psi'_n(\beta_j) - R_{j,n}^b \chi'_n(\beta_j)}{\psi_n(\beta_j) - R_{j,n}^b \chi_n(\beta_j)} \quad (\text{G.21})$$

On établit ainsi les relations suivantes qui permettent de calculer les quantités  $R_{j,n}^a$ ,  $R_{j,n}^b$ ,  $H_{j,n}^a$  et  $H_{j,n}^b$  de manière récursive

$$R_{j+1,n}^a = \frac{\mu_{j+1} n_j \psi'_n(\alpha_j) - \mu_j n_{j+1} H_{j,n}^a \psi_n(\alpha_j)}{\mu_{j+1} n_j \chi'_n(\alpha_j) - \mu_j n_{j+1} H_{j,n}^a \chi_n(\alpha_j)} \quad (\text{G.22})$$

$$R_{j+1,n}^b = \frac{n_{j+1} \mu_j \psi'_n(\alpha_j) - n_j \mu_{j+1} H_{j,n}^b \psi_n(\alpha_j)}{n_{j+1} \mu_j \chi'_n(\alpha_j) - n_j \mu_{j+1} H_{j,n}^b \chi_n(\alpha_j)} \quad (\text{G.23})$$

et les coefficients de diffusion

$$a_n = \frac{n_L \mu_0 \psi'_n(\alpha_L) - n_0 \mu_L H_{L,n}^a \psi_n(\alpha_L)}{n_L \mu_0 \xi'_n(\alpha_L) - n_0 \mu_L H_{L,n}^a \xi_n(\alpha_L)} \quad (\text{G.24})$$

$$b_n = \frac{n_0 \mu_L \psi'_n(\alpha_L) - n_L \mu_0 H_{L,n}^b \psi_n(\alpha_L)}{n_0 \mu_L \xi'_n(\alpha_L) - n_L \mu_0 H_{L,n}^b \xi_n(\alpha_L)} \quad (\text{G.25})$$

où on a posé

$$A_n^m = a_n g_{n,TM}^m \quad \text{et} \quad B_n^m = a_n g_{n,TE}^m$$

Le calcul commence pour  $j = 1$  avec  $R_{1,n}^a = R_{1,n}^b = 0$  et  $H_{1,n}^a = H_{1,n}^b = \frac{\psi'_n(\alpha_L)}{\psi_n(\alpha_L)}$  et se poursuit de manière récursive pour  $j$  croissant, jusqu'au calcul de  $H_{L,n}^a$ ,  $H_{L,n}^b$ ,  $a_n$  et  $b_n$ . Une fois ces coefficients et les rapport  $R$  et  $H$  calculés, les coefficients associés aux champs internes  $C_{j,n}^m$  et  $D_{j,n}^m$  sont calculés par récurrence arrière en utilisant les relations suivantes

$$c_{L,n}^m = \frac{\mu_L}{\mu_0} \frac{\psi_n(\alpha_L) - a_n \xi_n(\alpha_L)}{\psi_n(\beta_L) - R_{L,n}^a \chi_n(\beta_L)} \quad (\text{G.26})$$

$$c_{j,n}^m = c_{j+1,n}^m \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \frac{\psi_n(\alpha_j) - R_{j+1,n}^a \chi_n(\alpha_j)}{\psi_n(\beta_j) - R_{j,n}^a \chi_n(\beta_j)} \quad (\text{G.27})$$

$$e_{j,n}^m = -R_{j,n}^a a_{j,n}^m \quad (\text{G.28})$$

$$d_{L,n}^m = \frac{\mu_0 n_L^2}{\mu_L n_0^2} \frac{\psi_n(\alpha_L) - b_n \xi_n(\alpha_L)}{\psi_n(\beta_L) - R_{L,n}^b \chi_n(\beta_L)} \quad (\text{G.29})$$

$$d_{j,n}^m = d_{j+1,n}^m \frac{n_j^2 \mu_{j+1}}{n_0^2 \mu_j} \frac{\psi_n(\alpha_j) - R_{j+1,n}^b \chi_n(\alpha_j)}{\psi_n(\beta_j) - R_{j,n}^b \chi_n(\beta_j)} \quad (\text{G.30})$$

$$f_{j,n}^m = -R_{j,n}^b b_{j,n}^m \quad (\text{G.31})$$

avec

$$\begin{aligned} C_n^m &= c_n g_{n, TM}^m, & D_n^m &= d_n g_{n, TE}^m \\ E_n^m &= e_n g_{n, TM}^m, & F_n^m &= f_n g_{n, TM}^m \end{aligned}$$

Pour le cas particulier de la sphère homogène, pour  $L = 1$ , on retrouve bien les relations (4.40) à (4.43).

Comme pour la sphère homogène, les coefficients peuvent être reformulés en introduisant les dérivées logarithmiques des fonctions de Riccati-Bessel (voir annexe I.1)

# Annexe H

## Calcul numérique des séries de Lorenz-Mie

Les champs électromagnétiques sont décrits sous forme de séries faisant intervenir des fonctions spéciales et des coefficients. On peut qualifier ces résultats de semi-analytique car ces fonctions et ces séries doivent être calculées numériquement pour chaque point de l'espace repère par ces coordonnées  $r, \theta, \varphi$ . Les calculs de ces séries sont naturellement basés sur des boucles. Les langages compilés (fortran ou C) sont donc plus adaptés aux langages interprétés optimisés pour le calcul matriciel (matlab ou python). On commence généralement par calculer les coefficients de diffusion et les coefficients de forme du faisceau qui ne dépendent pas de  $r, \theta, \varphi$ , avant de calculer les composantes des champs en un ou plusieurs points de l'espace. Le calcul des BSCs se fait directement à partir des résultats de l'approximation localisée de la section 4.5 (relations (E.1) à (E.4)). Les calculs de coefficient de diffusion se font préférentiellement à partir des reformulations de l'annexe I.

### H.1 reformulation des séries

Les séries de Lorenz-Mie des relations (4.70)(4.75) ou (4.83) à (4.88) peuvent (et doivent) être reformulées pour optimiser leur calcul numérique. On regroupe les termes en  $m$  et en  $-m$  en introduisant les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}G_{TM}^{m+} &= g_{n,TM}^m e^{im\varphi} + g_{n,TM}^{-m} e^{-im\varphi} \\G_{TM}^{m-} &= g_{n,TM}^m e^{im\varphi} - g_{n,TM}^{-m} e^{-im\varphi} \\G_{TE}^{m+} &= g_{n,TE}^m e^{im\varphi} + g_{n,TE}^{-m} e^{-im\varphi} \\G_{TE}^{m-} &= g_{n,TE}^m e^{im\varphi} - g_{n,TE}^{-m} e^{-im\varphi}\end{aligned}$$

puis les quantités qui ne dépendent que de  $n$

$$\begin{aligned}
c_n^r &= (-i)^{n+1}(2n+1) \\
c_n^{pw} &= \frac{c_n^r}{n(n+1)} \\
A_n^1 &= a_n \xi_n'(kr) \\
A_n^2 &= a_n \xi_n(kr) \\
B_n^1 &= b_n \xi_n(kr) \\
B_n^2 &= -b_n \xi_n'(kr) \\
C_n^1 &= g_{n,TM}^0 P_n^0(\cos \theta) \\
C_n^2 &= g_{n,TM}^0 \tau_n^0(\cos \theta) \\
C_n^3 &= g_{n,TE}^0 P_n^0(\cos \theta) \\
C_n^4 &= g_{n,TE}^0 \tau_n^0(\cos \theta)
\end{aligned}$$

Les relations (4.70)(4.75) s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
E_r^s &= -\frac{E_0}{k^2 r^2} \sum_{n=1}^{n_{max}} c_n^r A_n^2 \left[ C_n^1 + \sum_{m=1}^{m_{max}} G_{TM}^{m+} P_n^m(\cos \theta) \right] \\
E_\theta^s &= -\frac{E_0}{kr} \sum_{n=1}^{n_{max}} c_n^{pw} \left[ A_n^1 \left( C_n^2 + \sum_{m=1}^{m_{max}} G_{TM}^{m+} \tau_n^m(\cos \theta) \right) + B_n^1 \sum_{m=1}^{m_{max}} m G_{TE}^{m-} \pi_n^m(\cos \theta) \right] \\
E_\varphi^s &= -\frac{iE_0}{kr} \sum_{n=1}^{n_{max}} c_n^{pw} \left[ A_n^1 \sum_{m=1}^{m_{max}} m G_{TM}^{m-} \pi_n^m(\cos \theta) + B_n^1 \left( C_n^4 + \sum_{m=1}^{m_{max}} m G_{TE}^{m+} \tau_n^m(\cos \theta) \right) \right] \\
H_r^s &= -\frac{H_0}{k^2 r^2} \sum_{n=1}^{n_{max}} c_n^r B_n^1 \left[ C_n^3 + \sum_{m=1}^{m_{max}} G_{TE}^{m+} P_n^m(\cos \theta) \right] \\
H_\theta^s &= \frac{H_0}{kr} \sum_{n=1}^{n_{max}} c_n^{pw} \left[ A_n^2 \sum_{m=1}^{m_{max}} m G_{TM}^{m-} \pi_n^m(\cos \theta) + B_n^2 \left( C_n^4 + \sum_{m=1}^{m_{max}} G_{TE}^{m+} \tau_n^m(\cos \theta) \right) \right] \\
H_\varphi^s &= \frac{H_0}{kr} \sum_{n=1}^{n_{max}} c_n^{pw} \left[ A_n^2 \left( C_n^2 + \sum_{m=1}^{m_{max}} G_{TM}^{m+} \tau_n^m(\cos \theta) \right) + B_n^2 \sum_{m=1}^{m_{max}} m G_{TE}^{m-} \pi_n^m(\cos \theta) \right]
\end{aligned}$$

Certaines quantités comme  $c_n^r$  ou  $c_n^{pw}$  peuvent être calculés par récurrence. C'est également le cas pour  $e^{im\varphi} = e^{i(m-1)\varphi} e^{i\varphi}$ . On utilisera aussi  $e^{-im\varphi} = 1/e^{im\varphi}$ . On procède à la même réécriture pour calculer les champs internes.



## Cas particuliers

Pour un faisceau incident axisymétrique, seules les termes en  $m = 1$  et  $m = -1$  sont non nuls. Les sommations sur  $m$  disparaissent donc des relations précédentes et on applique les simplifications de la section 4.5.1 qui conduisent à

$$G_{TM}^{1+} = g_n \cos \varphi \quad G_{TM}^{1-} = g_n \sin \varphi \quad (\text{H.1})$$

$$G_{TE}^{1+} = ig_n \cos \varphi \quad G_{TE}^{1-} = -ig_n \sin \varphi \quad (\text{H.2})$$

$$C_n^i = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{H.3})$$

Dans ce cas particulier le calcul des composantes est ainsi grandement simplifié. Pour  $E_r^s$  par exemple, il prend la forme suivante :

$$E_r^s = -\frac{E_0}{k^2 r^2} \sum_{n=1}^{n_{max}} c_n^r A_n^2 g_n P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{H.4})$$

Dans le cas d'une onde plane le calcul se simplifie encore, puisqu'alors  $g_n = 1$ .

## H.2 Calcul des fonctions spéciales

### H.2.1 Polynômes de Legendre associés $P_n^m$ , $\pi_n^m$ et $\tau_n^m$

Le calcul de ces fonctions est basé sur les relations de récurrences vérifiées par les polynômes de Legendre associés

$$(n-m)P_n^m(x) = x(2n-1)P_{n-1}^m(x) - (n+m-1)P_{n-2}^m(x) \quad (\text{H.5})$$

$$P_m^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \prod_{i=1}^m (2i-1), \quad \text{pour } m > 0 \quad (\text{H.6})$$

$$P_{m+1}^m(x) = x(2m+1)P_m^m(x) \quad (\text{H.7})$$

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}P_n^m(x) = nxP_n^m(x) - (n+m)P_{n-1}^m(x) \quad (\text{H.8})$$

Ces relations se traduisent directement pour  $\pi_n^m = \pi_n^m(\cos \theta)$

$$(n-m)\pi_n^m = \cos \theta (2n-1)\pi_{n-1}^m - (n+m-1)\pi_{n-2}^m \quad (\text{H.9})$$

$$\pi_m^m = (-1)^m (\sin \theta)^{m-1} \prod_{i=1}^m (2i-1), \quad \text{pour } m > 0 \quad (\text{H.10})$$

$$\pi_{m+1}^m = \cos \theta (2m+1)\pi_m^m \quad (\text{H.11})$$

Pour  $\tau_n^m = \tau_n^m(\cos \theta)$ , on déduit de la relation (H.8) que

$$\tau_n^m = n \cos \theta \pi_n^m - (n + m) \pi_{n-1}^m \quad (\text{H.12})$$

On se rappelle par ailleurs que  $P_0^0(\cos \theta) = 1$ ,  $\pi_0^0(\cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta}$  et que  $P_n^m(x) = 0$  pour  $m > n$ . pour  $m = n$  la relation (H.12) devient donc

$$\tau_m^m = n \cos \theta \pi_m^m \quad (\text{H.13})$$

Pour calculer l'ensemble des valeurs non triviales nécessaires au calcul (pour  $n = 1, n_{max}$  et  $m = 0, m_{max} | m \leq n$ ) on procède de la manière suivante :

Pour  $m$  allant de 0 à  $m_{max}$  :

- On calcule  $\pi_m^m$  à partir de la relation H.11 (sauf pour  $m = 0$  où on pose  $\pi_0^0 = \frac{1}{\sin \theta}$ ) puis  $\tau_m^m$  à partir de la relation (H.13)
- On en déduit  $\pi_{m+1}^m$  à l'aide de la relation (H.11) et  $\tau_{m+1}^m$  à l'aide de la relation (H.12)
- On calcule  $\pi_n^m$  et  $\tau_n^m$  pour  $n$  allant de  $m + 2$  à  $n_{max}$  à l'aide des relations (H.9) et (H.12)
- et on passe à la valeur de  $m$  suivante.

Les valeurs de  $P_n^m(\cos \theta)$  sont déduites directement de ce qui précède par

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin \theta \pi_n^m(\cos \theta)$$

## H.2.2 Calcul des fonctions de Bessel

Le calcul des fonctions de Riccati-Bessel et des dérivées nécessaires aux calculs est basé sur les relations de récurrence, vérifiées pour toutes les fonctions de Bessel sphériques, i.e, pour  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$$\Psi_{n-1}^{(i)}(x) + \Psi_{n+1}^{(i)}(x) = \frac{2n+1}{x} \Psi_n^{(i)}(x) \quad (\text{H.14})$$

$$\Psi_n^{(i)}(x) = \frac{d}{dx} \Psi_n^{(i)}(x) = \frac{n}{x} \Psi_n^{(i)}(x) - \Psi_{n+1}^{(i)}(x) \quad (\text{H.15})$$

Pour une valeur donnée de  $x = kr$  (pour les champs diffusés) ou  $x = k_{int}r$  (pour les champs internes), ou  $x = ka$  (pour les coefficients de diffusion quand la reformulation de l'annexe I n'est pas utilisée), il faut calculer les fonctions de Riccati-Bessel pour  $n$  allant de 1 à  $n_{max}$ .

Pour la fonction  $\Psi_n^{(1)}(x) = j_n(x)$ , on procède par récurrence avant ou arrière selon les valeurs de  $n_{max}$  et de l'argument  $x$  :

— quand  $n_{max} \leq x$  on utilise une récurrence avant en partant des valeurs initiales

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad j_1(x) = \frac{j_0(x)}{x} - \frac{\cos x}{x}$$

et en appliquant, pour  $n = 2, ..n_{max}$  la relation (H.14) réécrite sous la forme :

$$j_n(x) = \frac{2n-1}{x} j_{n-1}(x) - j_{n-2}(x)$$

— quand  $n_{max} > x$ , ce qui toujours le cas pour une calcul complet, le calcul doit se faire par récurrence arrière, pour des raisons de stabilité et de précision. On part alors de valeurs initiales infinitésimales pour un ordre  $n_{sup}$  nettement supérieur à  $n_{max}$ . En pratique on choisi  $n_{sup} = n_{max} + \lceil (10 n_{max})^{1/2} \rceil$ , on pose  $j_{n_{sup}+1}(x) = 0$  et  $j_{n_{sup}}(x) = 10^{-100}$  et on applique la relation (H.14) pour  $n = n_{sup} - 1, ...0$  :

$$j_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) - j_{n+1}(x)$$

les valeurs obtenues correspondent aux fonctions  $j_n(x)$  à un facteur  $\kappa$  près. On renormalise donc les fonctions  $\kappa j_n(x)$  en les multipliant par le rapport entre la vrai valeur de la fonction et la valeur calculée à l'ordre 0 :  $\frac{j_0(x)}{\kappa j_0(x)} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\kappa j_0(x)}$ . Pour les arguments numériquement proche d'un multiple de  $\pi$ , les valeurs de  $j_0(x)$  et  $\kappa j_0(x)$  sont très faible et le calcul devient imprécis. Pour ces valeurs, la renormalisation doit être faite à l'ordre 1 avec le coefficient  $\frac{j_1(x)}{\kappa j_1(x)}$ .

Pour la fonction  $\Psi_n^{(2)}(x) = y_n(x)$ , on procède toujours par récurrence avant en partant des valeurs initiales  $y_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$  et  $y_1(x) = \frac{y_0(x)}{x} - \frac{\sin x}{x}$  et en appliquant la relation (H.14) pour  $n = 2, ..n_{max}$  sous la forme

$$y_n(x) = \frac{2n-1}{x} y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)$$

Les fonctions  $\Psi_n^{(3)}(x) = h_n^{(1)}(x)$  et  $\Psi_n^{(2)}(x) = h_n^{(2)}(x)$  sont déduites simplement des premières par

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(x) &= j_n(x) + iy_n(x) \\ h_n^{(2)}(x) &= j_n(x) - iy_n(x) \end{aligned}$$

Les fonctions de Riccati-Bessel sont déduites de fonctions de Bessel sphériques en les multipliant par leur argument

$$\psi_n(x) = x j_n(x); \quad \xi_n(x) = x y_n(x); \quad \Gamma_n(x) = x h_n^{(1)}(x); \quad \xi_n(x) = x h_n^{(2)}(x)$$

et les valeurs de leur dérivées premières se déduisent aisément de la relation (H.15) :

$$\begin{aligned}\psi'_n(x) &= xj_{n-1}(x) - nj_n(x) \\ \xi'_n(x) &= xh_{n-1}^{(2)}(x) - nh_n^{(2)}(x)\end{aligned}$$

# Annexe I

## Reformulation des coefficients de diffusion pour les calculs numériques

Le calcul numérique des coefficients de diffusion n'est pas toujours trivial, en particulier pour les particules multi-couches et les décompositions en séries de Debye. Les difficultés sont liées à la croissance exponentielle des fonctions de Riccati-Bessel avec le module de l'argument et aux erreurs de calculs cumulatives pour les fonctions d'ordre élevés, qui deviennent problématiques quand le diamètre extérieur de la sphère multicouche augmente et que le diamètre de son coeur devient très petit. Ces erreurs sont également problématiques quand les coefficients de diffusion sont décomposés en série de Debye pour les particules de grande taille. Pour une particule homogène, cas présenté ici comme un cas particulier de la sphère multi-couche, les calculs sont plus stables quand l'indice de réfraction de la sphère est inférieur à 1, et plus précis pour des grands paramètres de taille ( $> 3000$ ).

### I.1 Reformulation pour la sphere multicouche

Les reformulations repose sur l'introduction des dérivées logarithmiques des fonctions de Riccati-Bessel et des rapports de ces fonctions. On S'intéresse d'abord aux cas de la sphère multicouche [122, 123] et des expressions de la section 4.11 On introduit les fonctions

$$D_n^{(1)}(x) = \frac{\psi'_n(x)}{\psi_n(x)}, \quad D_n^{(2)}(x) = \frac{\chi'_n(x)}{\chi_n(x)} \text{ et } \quad D_n^{(4)}(x) = \frac{\xi'_n(x)}{\xi_n(x)} \quad (\text{I.1})$$

et les quatres rapports suivants

$$T_{j,n}^1 = \frac{\psi_n(\alpha_j)}{\psi_n(\beta_j)}, \quad T_{j,n}^2 = \frac{\psi_n(\alpha_j)}{\chi_n(\alpha_j)} \quad (\text{I.2})$$

$$T_{j,n}^3 = \frac{\chi_n(\beta_j)}{\psi_n(\beta_j)}, \quad T_n^4 = \frac{\psi_n(\alpha_L)}{\xi_n(\alpha_L)} \quad (\text{I.3})$$

Les relations permettant de calculer les coefficients de diffusion (G.20 à G.21) sont réécrites de la manière suivantes

$$a_n = T_n^4 \frac{n_L \mu_0 D_n^{(1)}(\alpha_L) - n_0 \mu_L H_{L,n}^a}{n_L \mu_0 D_n^{(4)}(\alpha_L) - n_0 \mu_L H_{L,n}^a} \quad (\text{I.4})$$

$$R_{1,n}^a = 0 \quad (\text{I.5})$$

$$H_{1,n}^a = D_n^{(1)}(\beta_1) \quad (\text{I.6})$$

$$R_{j+1,n}^a = T_{j,n}^2 \frac{\mu_{j+1} n_j D_n^{(1)}(\alpha_j) - \mu_j n_{j+1} H_{j,n}^a}{\mu_{j+1} n_j D_n^{(2)}(\alpha_j) - \mu_j n_{j+1} H_{j,n}^a}, \quad j = 1, \dots, L-1 \quad (\text{I.7})$$

$$H_{j,n}^a = \frac{D_n^{(1)}(\beta_j) - R_{j,n}^a D_n^{(2)}(\beta_j) T_{j,n}^3}{1 - R_{j,n}^a T_{j,n}^3}, \quad j = 2, \dots, L \quad (\text{I.8})$$

$$c_{L,n} = \frac{\mu_L}{\mu_0} T_{L,n}^1 \frac{1 - a_n / T_n^4}{1 - R_{L,n}^a T_{L,n}^3} \quad (\text{I.9})$$

$$c_{j,n} = c_{j+1,n} \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} T_{j,n}^1 \frac{1 - R_{j+1,n}^a / T_{j,n}^2}{1 - R_{j,n}^a T_{j,n}^3}, \quad j = L-1, \dots, 1 \quad (\text{I.10})$$

$$e_{j,n} = -R_{j,n}^a c_{j,n}, \quad j = 1, \dots, L \quad (\text{I.11})$$

De même, pour l'onde  $TE$

$$b_n = T_n^4 \frac{n_0 \mu_L D_n^{(1)}(\alpha_L) - n_L \mu_0 H_{L,n}^b}{n_0 \mu_L D_n^{(4)}(\alpha_L) - n_L \mu_0 H_{L,n}^b} \quad (\text{I.12})$$

$$R_{1,n}^b = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$H_{1,n}^b = D_n^{(1)}(\beta_1) \quad (\text{I.14})$$

$$R_{j+1,n}^b = T_{j,n}^2 \frac{n_{j+1} \mu_j D_n^{(1)}(\alpha_j) - n_j \mu_{j+1} H_{j,n}^b}{n_{j+1} \mu_j D_n^{(2)}(\alpha_j) - n_j \mu_{j+1} H_{j,n}^b}, \quad j = 1, \dots, L-1 \quad (\text{I.15})$$

$$H_{j,n}^b = \frac{D_n^{(1)}(\beta_j) - R_{j,n}^b D_n^{(2)}(\beta_j) T_{j,n}^3}{1 - R_{j,n}^b T_{j,n}^3}, \quad j = 2, \dots, L \quad (\text{I.16})$$

$$d_{L,n} = \frac{\mu_0 n_L^2 T_{L,n}^1}{\mu_L n_0^2 T_{L,n}^1} \frac{1 - b_n/T_n^4}{1 - R_{L,n}^b T_{L,n}^3} \quad (\text{I.17})$$

$$d_{j,n} = d_{j+1,n} \frac{n_j^2 \mu_{j+1} T_{j,n}^1}{n_{j+1}^2 \mu_j T_{j,n}^1} \frac{1 - R_{j+1,n}^b/T_{j,n}^2}{1 - R_{j,n}^b T_{j,n}^3}, \quad j = L-1, \dots, 1 \quad (\text{I.18})$$

$$f_{j,n} = -R_{j,n}^b d_{j,n}, \quad j = 1, \dots, L \quad (\text{I.19})$$

Dans la pratique on calculera les quantités intermédiaires  $\tilde{a}_n = a_n/T_n^4$ ,  $\tilde{b}_n = b_n/T_n^4$ ,  $\tilde{R}_{j+1,n}^a = R_{j+1,n}^a/T_{j,n}^2$  et  $\tilde{R}_{j+1,n}^b = R_{j+1,n}^b/T_{j,n}^2$ . Les fonctions  $D_n^{(i)}(x)$  et les rapports  $T_{j,n}^i$  sont calculés par récurrence (arrière pour  $D_n^1(x)$  et avant pour tous les autres), à l'aide de relations directement dérivées des relations de récurrence pour les fonctions de Riccati-Bessel. En effet, les fonctions de Riccati-Bessel vérifient

$$\psi_n^{(i)}(x) = \frac{n+1}{x} \psi_n^{(i)}(x) - \psi_{n+1}^{(i)}(x) \quad (\text{I.20})$$

$$\psi_{n+1}^{(i)}(x) = \frac{2n+1}{x} \psi_n^{(i)}(x) - \psi_{n-1}^{(i)}(x) \quad (\text{I.21})$$

pour  $\psi_n^{(i)} = \psi_n, \chi_n, \Gamma_n$  ou  $\xi_n$ . Ces relations sont utilisées pour calculer de manière récursive (avant ou arrière) les fonction de Riccati-Bessel et leurs dérivées avec pour conditions initiales

$$\psi_0(x) = \sin x, \quad \psi_0'(x) = \cos x \quad (\text{I.22})$$

$$\chi_0(x) = -\cos(x) \quad \chi_0'(x) = \sin(x) \quad (\text{I.23})$$

On en déduit aisément les relations suivantes pour les dérivées logarithmiques

$$D_n^{(i)}(x) = \frac{1}{\frac{n}{x} - D_{n-1}^{(i)}(x)} - \frac{n}{x} \quad (\text{I.24})$$

et les conditions initiales correspondantes

$$D_0^{(1)}(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (\text{I.25})$$

$$D_0^{(2)}(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \quad (\text{I.26})$$

$$D_0^{(4)}(x) = \frac{\cos x - i \sin x}{\sin x + i \cos x} = -i \quad (\text{I.27})$$

$D_n^{(1)}$  est calculé par récurrence arrière,  $D_n^{(2)}$  et  $D_n^{(4)}$  par récurrence avant.

Pour les autres rapports on établit les relations suivantes

$$T_{j,n}^1 = T_{j,n-1}^1 \frac{D_n^{(1)}(\beta_j) + \frac{n}{\beta_j}}{D_n^{(1)}(\alpha_j) + \frac{n}{\alpha_j}} \quad (\text{I.28})$$

$$T_{j,n}^2 = T_{j,n-1}^2 \frac{D_n^{(2)}(\alpha_j) + \frac{n}{\alpha_j}}{D_n^{(1)}(\alpha_j) + \frac{n}{\alpha_j}} \quad (\text{I.29})$$

$$T_{j,n}^3 = T_{j,n-1}^3 \frac{D_n^{(1)}(\beta_j) + \frac{n}{\beta_j}}{D_n^{(2)}(\beta_j) + \frac{n}{\beta_j}} \quad (\text{I.30})$$

$$T_n^4 = T_{n-1}^4 \frac{D_n^{(4)}(\alpha_L) + \frac{n}{\alpha_L}}{D_n^{(1)}(\alpha_L) + \frac{n}{\alpha_L}} \quad (\text{I.31})$$

et pour  $n = 0$

$$\begin{aligned} T_{j,0}^1 &= \frac{\sin \alpha_j}{\sin \beta_j} & , & & T_{j,0}^2 &= -\frac{\sin \alpha_j}{\cos \alpha_j} = D_0^{(2)}(\alpha_j) \\ T_{j,0}^3 &= -\frac{\cos \beta_j}{\sin \beta_j} = -D_0^{(1)}(\beta_j) & , & & T_0^4 &= \frac{\sin \alpha_L}{\sin \alpha_L + i \cos \alpha_L} \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

## I.2 Cas particulier de la sphère homogène

Cette reformulation peut également être appliquée dans le cas particulier de la sphere homogène (pour  $L = 1$ ). On écrit alors

$$a_n = T_n^4 \frac{n_1 \mu_0 D_n^{(1)}(\alpha) - n_0 \mu_1 D_n^{(1)}(\beta)}{n_1 \mu_0 D_n^{(4)}(\alpha) - n_0 \mu_1 D_n^{(1)}(\beta)} \quad (\text{I.33})$$

$$b_n = T_n^4 \frac{n_0 \mu_1 D_n^{(1)}(\alpha) - n_1 \mu_0 D_n^{(1)}(\beta)}{n_0 \mu_1 D_n^{(4)}(\alpha) - n_1 \mu_0 D_n^{(1)}(\beta)} \quad (\text{I.34})$$

$$c_n = \frac{\mu_0 n_1^2}{\mu_1 n_0^2} T_{1,n}^1 \left( 1 - \frac{b_n}{T_n^4} \right) \quad (\text{I.35})$$

$$d_n = \frac{\mu_1}{\mu_0} T_{1,n}^1 \left( 1 - \frac{a_n}{T_n^4} \right) \quad (\text{I.36})$$



On obtient ainsi une formulation similaire pour la sphère multicouche et la sphère homogène. Cette reformulation pour la sphère homogène présente également l'avantage d'être plus stable pour le calcul des coefficients internes ( $c_n$  et  $d_n$ ) quand l'indice relatif de la particule est inférieur à 1 (cas d'une bulle). On gagne également en précision quand le paramètre de taille devient très grand, par rapport à la formulation classique qui montre une baisse de précision pour  $\alpha$  supérieur à 3000, baisse de précision qui évolue lentement avec  $\alpha$  mais devient réellement problématique (de l'ordre de 1%) pour  $\alpha$  supérieur à  $10^5$ .

### I.3 Reformulation des séries de Debye

Pour le calcul des coefficients de diffusion en termes de séries de Debye il est également préférable de reformuler les expressions établies dans la section 4.10. On reprend ainsi les expressions de  $D$ , de  $R_n^{11}$  et  $R_n^{22}$  (relations (F.18) (F.21) et (F.19)) et on établit

$$R_n^{11} = T_n^5 \frac{-AD_n^{(4)}(\beta) + BD_n^{(4)}(\alpha)}{AD_n^{(3)}(\beta) - BD_n^{(4)}(\alpha)} \quad (\text{I.37})$$

$$R_n^{22} = T_n^6 \frac{-AD_n^{(3)}(\beta) + BD_n^{(3)}(\alpha)}{AD_n^{(3)}(\beta) - BD_n^{(4)}(\alpha)} \quad (\text{I.38})$$

$$(\text{I.39})$$

avec

$$T_n^5 = \frac{\xi_n(\beta)}{\Gamma_n(\beta)} \quad \text{et} \quad T_n^6 = \frac{\Gamma_n(\alpha)}{\xi_n(\alpha)} \quad (\text{I.40})$$

Puis, à partir des relations définissant  $T_n^{12}$  et  $T_n^{21}$  avant l'introduction de la relation Wronskienne (relations (F.22) et (F.20)) on établit

$$T_n^{21} = T_n^7 A \frac{D_n^{(3)}(\alpha) - D_n^{(4)}(\alpha)}{AD_n^{(3)}(\beta) - BD_n^{(4)}(\alpha)} \quad (\text{I.41})$$

$$T_n^{12} = T_n^8 B \frac{D_n^{(3)}(\beta) - D_n^{(4)}(\beta)}{AD_n^{(3)}(\beta) - BD_n^{(4)}(\alpha)} \quad (\text{I.42})$$

où on a introduit

$$T_n^7 = \frac{\Gamma_n(\alpha)}{\Gamma_n(\beta)} \quad \text{et} \quad T_n^8 = \frac{\xi_n(\beta)}{\xi_n(\alpha)} \quad (\text{I.43})$$

Comme pour les rapports introduit précédemment, on établit les relations de récurrence suivantes

$$T_n^5 = T_{n-1}^5 \frac{\frac{n}{\beta} + D_n^{(3)}(\beta)}{\frac{n}{\beta} + D_n^{(4)}(\beta)} \quad (\text{I.44})$$

$$T_n^6 = T_{n-1}^6 \frac{\frac{n}{\alpha} + D_n^{(4)}(\alpha)}{\frac{n}{\alpha} + D_n^{(3)}(\alpha)} \quad (\text{I.45})$$

$$T_n^7 = T_{n-1}^7 \frac{\frac{n}{\beta} + D_n^{(3)}(\beta)}{\frac{n}{\alpha} + D_n^{(3)}(\alpha)} \quad (\text{I.46})$$

$$T_n^8 = T_{n-1}^8 \frac{\frac{n}{\alpha} + D_n^{(4)}(\alpha)}{\frac{n}{\beta} + D_n^{(4)}(\beta)} \quad (\text{I.47})$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} T_0^5 &= -\exp(-2i\beta), & T_0^6 &= -\exp(2i\alpha) \\ T_0^7 &= T_0^8 = \exp(i(\alpha - \beta)), & D_0^{(3)}(x) &= i, \text{ pour tout } x \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

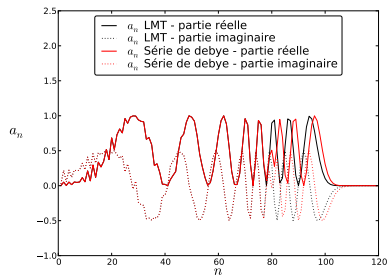
Cette reformulation permet d'augmenter la stabilité du calcul pour les grands paramètres de taille. Elle permet notamment d'éviter les problèmes liés à l'explosion des coefficients de diffusion pour les grandes valeurs de  $n$  et de  $\alpha$  et s'avère nécessaire dès lors que  $\alpha$  approche 3000 (valeur seuil qui dépend de l'indice  $M$ , 2940 par exemple pour  $M = 1.333$ ).

Cette reformulation ne règle pas tout les problèmes numériques qui sont pour l'essentiel liés au calcul de la fonction  $D^{(3)(z)}$  avec notre convention (pour la convention en  $\exp -i\omega t$  c'est la fonction  $D^{(4)(z)}$  qui pose problème). La fonction  $D^{(1)}$  est calculée par récurrence arrière, les autres fonctions sont calculées par récurrence avant. Quand l'indice de la particule est complexe (particule absorbante) le calcul de la fonction  $D^{(3)(z)}$  n'est plus stable. Ces problèmes interviennent quand la partie imaginaire de l'indice atteint une valeur de  $10^{-3}$  à  $10^{-2}$  selon la valeur du paramètre de taille de la partie réel de l'indice. Ce problème est abordé dans la référence [54]. Une relation de récurrence alternative est proposée pour les particules très absorbantes (partie imaginaire de l'indice supérieur à 1). Après vérification, cette relation qui calcule la différence entre  $D^{(3)(z)}$  et  $D^{(1)(z)}$  fonctionne bien quand la partie imaginaire de l'argument est suffisamment grande pour que  $D^{(3)(z)}$  approche  $D^{(1)(z)}$ . En pratique, nous avons vérifié qu'un simple calcul par récurrence arrière de  $D^{(3)(z)}$  donnait de meilleurs résultats pour les grandes valeurs de la partie imaginaire, mais il existe toujours un intervalle de valeurs de la partie ima-

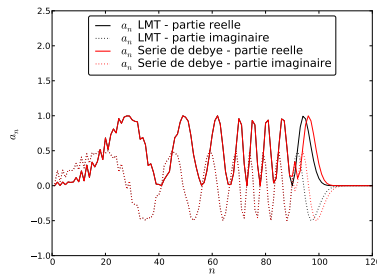
ginaire pour lequel ni la récurrence avant, ni la récurrence arrière ne fournissent des résultats satisfaisants.

Dans le cas  $M < 1$  (bulle dans un liquide par exemple) le calcul des séries de Debye pose également question comme nous l'avons vue dans la section 4.10.7 du chapitre 4. En effet, le calcul des coefficients à l'aide des séries ne converge pas vers les coefficients de Mie non tronqués, y compris quand un très grand nombre de mode est considéré. Dans la référence [54] cet écart est attribué à une très petite erreur numérique dans le calcul des fonctions  $t_n^{(5)}$  et  $t_n^{(6)}$  (avec nos notations) et les auteurs proposent de calculer ces fonctions par récurrence arrière pour résoudre le problème. Les véritables raisons de cette non convergence sont exposées dans la section 4.10.7. On ne sera donc pas étonné que nos tentatives pour reproduire les résultats de la référence [54] aient échouées, le choix d'un calcul par récurrence avant ou arrière ne modifiant en rien les résultats.

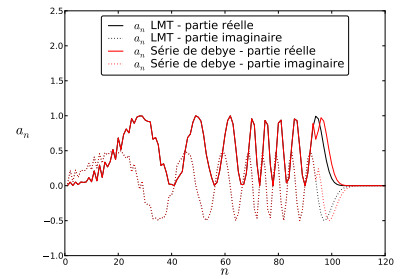
La figure I.1 montre les écarts entre les coefficients tronqués et non tronqués, calculés en suivant les recommandations de la référence [54] et avec les mêmes paramètres, pour une valeur croissante de  $p_{max}$ . Les coefficients sont identiques jusqu'à une valeur limite de  $n$  qui augmente avec  $p_{max}$ , c'est à dire avec le nombre de modes considéré, mais sans jamais atteindre la valeur  $n_{max}$  pour laquelle le coefficient devient nulle et ainsi assurer que les deux méthodes de calcul puisse produire le même résultat, comme dans le cas des gouttes. Nous arrivons ainsi aux mêmes conclusions que celles de la section 4.10.7. Autrement dit, quelque soit la valeur de  $p_{max}$ , les calculs par séries de Debye ne permettent pas de reproduire les calculs non tronqués de la Théorie de Lorenz-Mie pour des raisons mathématiques et physique et non pas en raison d'un problème numérique.



(a)  $p_{max} = 10$



(b)  $p_{max} = 10^6$



(c)  $p_{max} = 10^8$

**FIGURE I.1** – Coefficient de diffusion  $a_n$  calculé de manière classique (LMT) ou à l'aide des séries de Debye pour les modes  $p$  allant de 0 à  $p_{max} = 10, 10^6$  et  $10^8$ . Le paramètre de taille est  $\alpha = 100$  et l'indice  $M = 0.75 + 0i$ . On constate un décalage entre les coefficients tronqués et non tronqués qui intervient pour des valeurs de  $n$  croissantes avec  $p_{max}$  :  $n = 75$  pour  $p_{max} = 10$ ,  $n = 89$  pour  $p_{max} = 10^6$  et  $n = 92$  pour  $p_{max} = 10^8$ .

# Annexe J

## Calculs de Monte carlo

### J.1 Caractéristiques du milieu diffusant

Quand un nuage de particule n'est pas mono-dispersé mais défini par une distribution de taille, les coefficients de diffusion, d'extinction et l'albedo utilisé dans les calculs de Monte Carlo sont des coefficients moyens. Pour une distribution de taille en rayons  $n(r)$  et un nombre de particule total par  $m^3$

$$N = \int_{d=0}^{\infty} n(r) dr \quad (\text{J.1})$$

la section efficace moyenne de diffusion est

$$\bar{C}_d = \frac{1}{N} \int_{d=0}^{\infty} n(r) C_d(r) dr \quad (\text{J.2})$$

On définit de manière analogue les sections efficaces moyennes d'absorption  $\bar{C}_{abs}$  et d'extinction  $\bar{C}_{ext}$ . On considère des particules sphériques, les sections efficaces sont donc calculées à l'aide de la Théorie de Lorenz-Mie (dans le cas d'une onde plane) et les relations de la section 4.9. Pour caractériser l'absorption et la diffusion à la traversée du milieu, on définit les coefficients de diffusion, d'absorption et d'extinction :

$$\begin{aligned} k_d &= N\bar{C}_d \\ k_{abs} &= N\bar{C}_{abs} \\ k_{ext} &= k_d + k_{abs} = N\bar{C}_{ext} \end{aligned} \quad (\text{J.3})$$

## J.2 Tirage aléatoire de la distance de collision

Dans les algorithmes de Monte Carlo, les trajectoires de "photons" sont définies par une suite d'événements déterminés à l'aide de tirage aléatoires. Si le milieu diffusant est homogène, la probabilité de collision d'un "photon" à une distance comprise entre  $l$  et  $l + dl$  est (d'après la relation (5.16)  $k_{ext} \exp(-k_{ext}l)dl$ . On détermine donc la distance de collision  $l$  à partir d'un nombre  $r_l$  tiré aléatoirement dans l'intervalle  $]0, 1]$  par

$$l = -\frac{\log r_l}{k_{ext}} \quad (\text{J.4})$$

Notons que le coefficient d'extinction est ici supposé indépendant de la position mais cela n'implique pas que le milieu soit composé de diffuseurs identiques. Le milieu peut tout à être décrit par une distribution de taille, d'indice, de forme...

## J.3 Tirage aléatoire de l'événement absorption/diffusion

Lors d'une collision, on détermine si un photon est absorbé ou diffusé partir d'un nombre aléatoire  $r_a \in ]0, 1]$  et de l'albedo de la particule

$$a = \frac{k_d}{k_d + k_{abs}} = \frac{k_d}{k_{ext}} \quad (\text{J.5})$$

le photon est absorbé si  $r_a > a$ , dans le cas contraire il est diffusé.

## J.4 Tirage aléatoire des angles de diffusion

La fonction de phase associée à une particule sphérique est calculée à partir de la Théorie de Lorenz-Mie classique. On considère un éclairage en onde plane ; le paramètre d'impact du photon sur la particule n'a pas à être considéré, l'hypothèse d'onde plane traduit l'équiprobabilité pour ce paramètre. On admet aussi l'hypothèse de champs lointains, soit une distance suffisante entre les diffuseurs pour considérer des champs diffusés transverses et pour considérer l'onde diffusée par une particule comme une onde plane pour la diffusion suivante. Pour des raisons évidentes de temps de calcul, les fonctions de phase (ou plutôt les densités de probabilité et fonctions de répartition définies ci-dessous) sont pré-calculées et on fait appel à des interpolations sur les angles et les diamètres de particules à partir de cette base de données.

Dans le modèle de Monte Carlo de "centre à centre", chaque photon est associé à une unité d'énergie et est défini par un ensemble de propriétés qui évoluent à chaque interaction avec les particules diffusantes : une position  $\vec{p}$ , un trièdre direct de vecteurs unitaires  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$  et deux amplitudes complexes  $E_i$  et  $E_j$ . Le vecteur  $\vec{e}_k$  est la direction de propagation du photon, les vecteurs  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}_j$  permettent de définir son état de polarisation par les deux composantes  $E_i$  et  $E_j$ . L'intensité associée au photon est fixe et unitaire, on impose donc

$$\frac{1}{2}(|E_i|^2 + |E_j|^2) = 1$$

Lorsque le "photon" est diffusé par une particule sphérique, sa nouvelle direction de propagation est définie par deux angles  $\theta$  et  $\varphi$ . Pour appliquer les résultats de la TLM, on considère le plan de diffusion, commun à la direction d'incidence  $\vec{e}_k$  et la direction de diffusion  $\vec{e}_r$ , à la manière de Bohren et Huffman [1] et on projette les composantes du champ incident et du champ diffusé sur les vecteurs unitaires  $\vec{e}_{\perp i}, \vec{e}_{\parallel i}, \vec{e}_{\perp s}$  et  $\vec{e}_{\parallel s}$  comme définit figure J.1. On a ainsi :

$$E_{\parallel i} = \cos \varphi E_i + \sin \varphi E_j \quad \text{et} \quad E_{\perp i} = -\sin \varphi E_i + \cos \varphi E_j \quad (\text{J.6})$$

D'après la TLM, les champs diffusés s'écrivent alors

$$E_{\parallel s} = S_2 E_{\parallel i} \quad \text{et} \quad E_{\perp s} = S_1 E_{\perp i} \quad (\text{J.7})$$

où les quantités  $S_1$  et  $S_2$  sont celles définies pour une onde plane et en champ lointain, par les relations (4.117) dans la section 4.9 du chapitre 4. L'intensité diffusée dans la direction  $(\theta, \varphi)$  s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} I(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} |E_i|^2 (\cos^2 \varphi |S_2|^2 + \sin^2 |S_1|^2) + \frac{1}{2} |E_j|^2 (\sin^2 |S_2|^2 + \cos^2 \varphi |S_1|^2) \\ &= \frac{1}{2} (E_i E_j^* + E_i^* E_j) \sin \varphi \cos \varphi (|S_2|^2 - |S_1|^2) \end{aligned} \quad (\text{J.8})$$

La densité de probabilité  $f(\theta, \varphi)$  pour un "photon" d'être diffusé dans un angle solide  $d\Omega = d\theta \sin \theta d\varphi$  est telle que le flux d'énergie diffusé dans cet angle  $I(\theta, \varphi) d\Omega = f(\theta, \varphi) d\theta d\varphi$ . On a donc

$$\begin{aligned}
f(\theta, \varphi) d\theta d\varphi &= \frac{1}{2} |E_i|^2 \cos^2 \varphi d\varphi |S_2|^2 \sin \theta d\theta \\
&+ \frac{1}{2} |E_i|^2 \sin^2 \varphi d\varphi |S_1|^2 \sin \theta d\theta \\
&+ \frac{1}{2} |E_j|^2 \sin^2 \varphi d\varphi |S_2|^2 \sin \theta d\theta \\
&+ \frac{1}{2} |E_j|^2 \cos^2 \varphi d\varphi |S_1|^2 \sin \theta d\theta \\
&+ U \sin \varphi \cos \varphi d\varphi (|S_2|^2 - |S_1|^2) \sin \theta d\theta
\end{aligned} \tag{J.9}$$

où on a posé  $U = \frac{1}{2}(E_i E_j^* + E_i^* E_j)$

Dans l'algorithme de Monte Carlo on détermine l'angle  $\theta$  à partir de la densité de probabilité de diffusion à l'angle  $\theta$

$$f_\theta(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) d\varphi = \pi \sin \theta (|S_1|^2 + |S_2|^2) \tag{J.10}$$

dont on déduit la loi de répartition associée

$$F_\theta(\theta) = \frac{\int_0^\theta f_\theta(\theta) d\theta}{\int_0^\pi f_\theta(\theta) d\theta} = \frac{L(\theta)}{L(\pi)} \tag{J.11}$$

où

$$L(\theta) = \int_0^\theta (|S_1|^2 + |S_2|^2) \sin \theta d\theta \tag{J.12}$$

L'angle  $\theta$  est ainsi déterminé à partir d'un nombre  $r_\theta$  tiré aléatoirement entre 0 et 1, de sorte que  $\theta$  vérifie

$$L(\theta) = r_\theta L(\pi) \tag{J.13}$$

Une fois  $\theta$  défini, on détermine l'angle  $\varphi$  à l'aide de la densité probabilité de  $\varphi$  connaissant  $\theta$

$$f(\varphi|\theta) = \frac{f(\theta, \varphi)}{f_\theta(\theta)} \tag{J.14}$$

la lois de répartition associée

$$F(\varphi|\theta) = \frac{\int_0^\varphi f(\varphi|\theta) d\varphi}{\int_0^{2\pi} f(\varphi|\theta) d\varphi} \tag{J.15}$$

qui devient

$$F(\varphi|\theta) = \frac{\varphi}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin 2\varphi}{2} Q + U \sin^2 \varphi \right) P(\theta) \tag{J.16}$$



en posant

$$Q = \frac{|E_i|^2 - |E_j|^2}{2} \quad \text{et} \quad P(\theta) = \frac{|S_1|^2 - |S_2|^2}{|S_1|^2 + |S_2|^2}$$

L'angle  $\varphi$  est ainsi déterminé à partir d'un nombre  $r_\varphi$  tiré aléatoirement entre 0 et 1, de sorte que  $\varphi$  vérifie

$$r_\varphi = \frac{\varphi}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin 2\varphi}{2} Q + U \sin^2 \varphi \right) P(\theta)$$

Dans le cas où la polarisation n'est pas prise en compte, cette relation est réduite à

$$r_\varphi = \frac{\varphi}{2\pi}$$

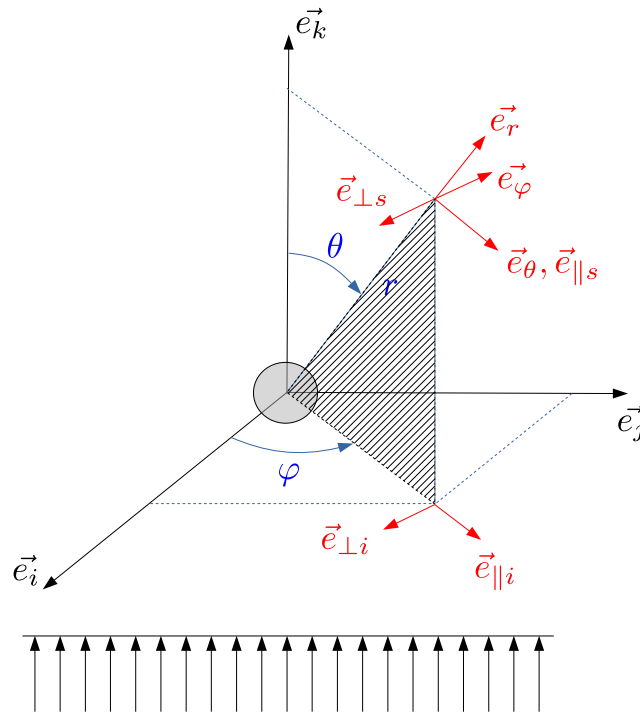


FIGURE J.1 – Changement de repère Monte Carlo/LMT

# Annexe K

## Liste de mes principales publications

Mes principales publications sont : [124] [116] [95] [125] [62] [118] [117] [61] [126] [127] [128] [60] [129] [58] [59] [130] [103] [120] [112] [131] [102] [132] [93] [133] [134] [57] [135] [136] [92] [137] [138] [139] [140] [76] [50] [91] [35] [75] [77] [141] [74] [70] [71] [73] [33] [142] [143] [144] [145] [146] [147] [148] [149] [150]

# Bibliographie

- [1] C.F. Bohren and D.R. Huffman. Absorption and scattering by a sphere. In *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, chapter 4, pages 82–129. John Wiley & Sons, Ltd, 1998.
- [2] Michael I. Mishchenko, Larry D. Travis, and Daniel W. Mackowski. T-matrix computations of light scattering by nonspherical particles : A review. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 55(5) :535–575, 1996. Light Scattering by Non-Spherical Particles.
- [3] Dakota E. McCoy, Anna V. Shneidman, Alexander L. Davis, and Joanna Aizenberg. Finite-difference time-domain (fdtd) optical simulations : A primer for the life sciences and bio-inspired engineering. *Micron*, 151 :103160, 2021.
- [4] Patrick Christian Chaumet. The discrete dipole approximation : A review. *Mathematics*, 10(17), 2022.
- [5] Andreas Schröder and Daniel Schanz. 3d lagrangian particle tracking in fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 55(1) :511–540, 2023.
- [6] J C Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155 :459–512, 1865.
- [7] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 1873. (Constable, London, 1891) [reprinted by Dover Books, New York, 1954].
- [8] J.A. Stratton. *Electromagnetic theory*. 1941, 1961. McGraw-Hill Book Company.
- [9] J. H. Poynting and J. W. Strutt. Xv. on the transfer of energy in the electromagnetic field. *Phil. Trans. R. Soc.*, 175 :343–361, 1897.
- [10] Max Born and Emil Wolf. Principles of optics : Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light (7th edition). chapter 3, Foundations of geometrical optics, pages 116–139. Cambridge University Press, 7th edition, 1999.

- [11] C. Zhang, C. Rozé, and K.F. Ren. Airy theory revisited with the method combining vectorial complex ray model and physical optics. *Optics Letters*, 47(9) :2149–2152, 2022.
- [12] Q. Duan, X. Han, and K.F. Ren. Light scattering by an infinite cylinder of arbitrarily smooth cross section based on vectorial complex ray model. *Optics Communications*, 467, 2020.
- [13] B. Sun, G.W. Kattawar, P. Yang, and K.F. Ren. Rigorous 3-d vectorial complex ray model applied to light scattering by an arbitrary spheroid. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 179 :1–10, 2016.
- [14] F.R.A. Onofri, K.F. Ren, M. Sentis, Q. Gaubert, and C. Pelcé. Experimental validation of the vectorial complex ray model on the inter-caustics scattering of oblate droplets. *Optics Express*, 23(12) :15768–15773, 2015.
- [15] K. Jiang, X. Han, and K.F. Ren. Scattering of a gaussian beam by an elliptical cylinder using the vectorial complex ray model. *Journal of the Optical Society of America A : Optics and Image Science, and Vision*, 30(8) :1548–1556, 2013.
- [16] K. Jiang, X. Han, and K.F. Ren. Scattering from an elliptical cylinder by using the vectorial complex ray model. *Applied Optics*, 51(34) :8159–8168, 2012.
- [17] K.F. Ren, C. Rozé, and T. Girasole. Scattering and transversal divergence of an ellipsoidal particle by using vectorial complex ray model. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 113(18) :2419–2423, 2012.
- [18] K.F. Ren, F. Onofri, C. Rozé, and T. Girasole. Vectorial complex ray model and application to two-dimensional scattering of plane wave by a spheroidal particle. *Optics Letters*, 36(3) :370–372, 2011.
- [19] C Huygens. *Traité De La Lumière*. 1690.
- [20] H.S. Green and E. Wolf. A scalar representation of electromagnetic fields. *Proceedings of the Physical Society A*, 66 :1129–1137, 1953.
- [21] Max Born and Emil Wolf. Principles of optics : Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light (7th edition). chapter 8.3, Kirchhoff’s diffraction theory, pages 417–430. Cambridge University Press, 7th edition, 1999.
- [22] E. Wolf. Comparison of the kirchhoff and the rayleigh-sommerfeld theories of diffraction at an aperture. *J. Opt. Soc. Am.*, 54(5) :587–594, 1964.

- [23] E. Lalor. Conditions for the validity of the angular spectrum of plane waves. *Journal of Optical Society of America Phys. Rev. Lett.*, 58(9) :1235–1237, 1968.
- [24] George C. Sherman. Application of the convolution theorem to rayleigh’s integral formulas. *J. Opt. Soc. Am.*, 57(4) :546–547, Apr 1967.
- [25] H. Weyl. Ausbreitung elektromagnetischer wellen  $\tilde{A}$ ber einem ebenen leiter. *Annalen der Physik*, 365 :481–500, 1919.
- [26] Kedar Khare. *The Angular Spectrum Method*, chapter 10, pages 145–151. John Wiley & Sons, Ltd, 2015.
- [27] L. Lorenz. Lysbevaegelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kulge. *Vidensk. Selk. Skr.*, 6 :1–62, 1890.
- [28] L. Lorenz. *Sur la lumière réfléchié et réfractée par une sphère transparente*. 1898. Lib. Lehmann et Stage, Oeuvres scientifiques de L. Lorenz, revues et annotées par H. Valentin.
- [29] G. Mie. Beiträge zur Optik Trüber Medien speziell kolloidaler Metallösungen. *Ann. der Phys.*, 25 :377–452, 1908.
- [30] P. Debye. Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material. *Ann. der Phys.*, 4(30) :57–136, 1909.
- [31] G. Gouesbet and G. Gréhan. *Generalized Lorenz-Mie Theories*. 2011.
- [32] F. Onofri, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Electromagnetic scattering from a multilayered sphere located in an arbitrary beam. *Appl. Optics*, 34(30) :7113–7124, 1995.
- [33] Loïc Méès. *Diffusion de la lumière par des objets cylindriques : simulations par Théorie de Lorenz-Mie Généralisée et applications métrologiques*. PhD thesis, Université de Rouen, janvier 2000.
- [34] S. Asano. Light scattering properties of spheroidal particles. *Applied Optics*, 18(5) :712–723, 1979.
- [35] Y. P. Han, L. Méès, K. F. Ren, G. Gouesbet, S. Z. Wu, and G. Gréhan. Scattering of light by spheroids : The far field case. *Optics Communications*, 210(1-2) :1–9, 2002.
- [36] Y. P. Han and Z. S. Wu. Scattering of a spheroidal particle illuminated by a by a Gaussian beam. *Applied Optics*, 40 :2501–2509, 2001.

- [37] Y. P. Han, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Generalized Lorenz-Mie Theory for a spheroidal particle with off-axis Gaussian beam illumination. *Applied Optics*, 42 :6621–6629, 2003.
- [38] P.M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*, chapter 5. 1953. page 497, McGraw-Hill.
- [39] G. Gouesbet, B. Maheu, and G. Gréhan. Light scattering from a sphere arbitrarily located in a Gaussian beam, using a Bromwich formulation. *J. Opt. Soc. Amer. A.*, 5(9) :1427–1443, 1988.
- [40] Craig F. Bohren and Arlon J. Hunt. Scattering of electromagnetic waves by a charged sphere. *Can. J. Phys.*, 55 :1930–1935, 1977.
- [41] R. L. Heinisch, F. X. Bronold, and H. Fehske. Mie scattering by a charged dielectric particle. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :243903, Dec 2012.
- [42] G. Gouesbet, G. Gréhan, and B. Maheu. The order of approximation in a theory of the scattering of a Gaussian beam by a Mie scatter center. *J. Optics (PARIS)*, 16(5) :239–247, 1985. *Re-published in selected papers on light scattering*, SPIE Milestone series, Vol. 951 edited by M. Kerker, Part I, pp. 352–360, 1988.
- [43] G. Gouesbet and J.A. Lock. A rigorous justification of the localized approximation to the beam shape coefficients in the generalized Lorenz-Mie theory. II : off-axis beams. *J. Opt. Soc. Amer. A*, 11(9) :2516–2525, 1994.
- [44] H. C. Van de Hulst. *Light scattering by small particles*. 1957. John Wiley and Sons, New York.
- [45] W.J. Wiscombe. Mie scattering calculations : Advances in technique and fast, vector-speed computer codes. *NCAR Technical Note NCAR/TN-140+STR*, 1979.
- [46] P. Debye. Das elektromagnetische Feld um einen Zylinder und die Theorie des Regenbogens. *Phys. Z.*, 9 :775–778, 1908.
- [47] A. H. Hovenac and J.A. Lock. Assessing the contributions of surface waves and complex rays to far field Mie scattering by use of the Debye series. *J. Opt. Soc. Am. A* ., 9(5) :781–795, 1992.
- [48] Gérard Gouesbet. Debye series formulation for generalized lorenz-mie theory with the bromwich method. *Particle & Particle Systems Characterization*, 20(6) :382–386, 2003.

- [49] X. Han, K. F. Ren, L. Méès, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Surface waves/geometrical rays interferences : Numerical and experimental behaviour at rainbow angles. *Optics Communications*, 195(1-4) :49–54, 2001.
- [50] H. Jiang, X. Han, K. Ren, F. Pan, and L. Méès. Reconstruction of intensity of the second and fifth rainbows and its applications to homogeneous droplet. *Guangxue Xuebao/Acta Optica Sinica*, 24(11) :1561–1565, 2004.
- [51] Livia Grandoni, Loïc Méès, Nathalie Grosjean, Leuzzi Giovanni, Paolo Monti, Armando Pelliccioni, and Pietro Salizzoni. Interferometric laser imaging for respiratory droplets sizing. *Experiments in Fluids*, 64(4) :80, Mar 2023.
- [52] Loïc Méès, Denis LEBRUN, Daniel Allano, Françoise Walle, Yves Lecoffre, Romuald Boucheron, and Didier Fréchou. Development of interferometric techniques for nuclei size measurement in cavitation tunnel. In *28th Symposium on Naval Hydrodynamics*, Pasadena, United States, September 2010.
- [53] L. Mees, Denis Lebrun, Didier Fréchou, and Romuald Boucheron. Interferometric Laser imaging technique applied to nuclei size measurements in cavitation tunnel. In *2nd International Conference on Advanced Model Measurement Technology for EU Maritime Industry (AMT'11)*, Newcastle upon Tyne, United Kingdom, April 2011.
- [54] J. Shen, H. Wang, B. Wang, H. Yu, and B. Yu. Stability in Debye series calculation for light scattering by absorbing particles and bubbles. *Journal of Quantitative Spectroscopy and radiative transfer*, 111 :772–781, 2010.
- [55] L. Aden and M. Kerker. Scattering of Electromagnetic Waves from two Concentric Spheres. *J. Appl. Phys.*, 22 :1242–1246, 1951.
- [56] L. Kai and P. Massoli. Scattering of electromagnetic-plane waves by radially inhomogeneous spheres : a finely stratified sphere model. *Applied Optics*, 33 :501–511, 1994.
- [57] S. Saengkaew, T. Charinpanitkul, H. Vanisri, W. Tanthapanichakoon, Y. Biscos, N. Garcia, G. Lavergne, L. Méès, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Rainbow refractrometry on particles with radial refractive index gradients. *Experiments in Fluids*, 43(4) :595–601, 2007.
- [58] L. Méès, N. Grosjean, D. Chareyron, J.L. Marié, M. Seifi, and C. Fournier. Evaporating droplet hologram simulation for digital in-line holography set-up with divergent beam.

- Journal of the Optical Society of America A : Optics and Image Science, and Vision*, 30(10) :2021–2028, 2013.
- [59] M. Seifi, C. Fournier, N. Grojean, L. Méès, J.L. Marié, and L. Denis. Accurate 3d tracking and size measurement of evaporating droplets using an in-line digital holography and ‘inverse problems’ reconstruction approach. *Optics express*, 21(23) :27964–27980, 2013.
- [60] J.L. Marié, N Grojean, L. Méès, M Seifi, C. Fournier, B. Barbier, and M. Lance. Lagrangian measurements of the fast evaporation of falling diethyl ether droplets using in-line digital holography and a high-speed camera. *Experiments in Fluids*, 55 :1708, 2014.
- [61] J.L. Marié, T. Tronchin, N. Grojean, L. Méès, O.C. Ozturk, C. Fournier, B. Barbier, and M. Lance. Digital holographic measurement of the lagrangian evaporation rate of droplets dispersing in a homogeneous isotropic turbulence. *Experiments in Fluids*, 58(2) :11, 2017.
- [62] L. Méès, N. Grosjean, J. L. Marié, and C. Fournier. Statistical lagrangian evaporation rate of droplets released in a homogeneous quasi-isotropic turbulence. *Phys. Rev. Fluids*, 5 :113602, Nov 2020.
- [63] D. E. Spence, P. N. Kean, and W. Sibbett. 60-fsec pulse generation from a self-mode-locked ti :sapphire laser. *Opt. Lett.*, 16(1) :42–44, Jan 1991.
- [64] Hans W. Mocker and R. J. Collins. Mode competition and self-locking effect in a Q-switch ruby laser. *Applied Physics Letters*, 7(10) :270–273, 11 2004.
- [65] A. J. DeMaria, D. A. Stetser, and H. Heynau. Self mode-locking of lasers with saturable absorbers. *Applied Physics Letters*, 8(7) :174–176, 11 2004.
- [66] K.S. Shifrin and I.G. Zolotov. Quasi-stationary scattering of electromagnetic pulses by spherical particles. *Applied Optics*, 33(33) :7798–7804, 1994.
- [67] G. Gouesbet and G. Gréhan. Generic formulation of a generalized lorenz-mie theory for a particle illuminated by laser pulses. *Particle & Particle Systems Characterization*, 17(5-6) :213–224, 2000.
- [68] G. Gouesbet, L. Mees, and G. Gréhan. Generic formulation of a generalized lorenz-mie theory for pulsed laser illumination. In *Laser Techniques for Fluid Mechanics*, pages 175–188, Berlin, Heidelberg, 2002. Springer Berlin Heidelberg.
- [69] L. Méès. Interaction between ultrashort pulses and particles and some metrological perspectives. 2004. Keynote lecture, Proceedings of the 7 International Congress on Optical Particle Characterization, Kyoto, 1-5 Aug 1-5, 2004, <https://hal.science/hal-04085145>.



- [70] L. Méès, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Scattering of laser pulses (plane wave and focused gaussian beam) by spheres. *Applied Optics*, 40(15) :2546–2550, 2001.
- [71] L. Méès, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Time-resolved scattering diagrams for a sphere illuminated by plane wave and focused short pulses. *Optics Communications*, 194(1-3) :59–65, 2001.
- [72] K.S. Shifrin and I.G. Zolotov. Efficiencies for extinction and backscattering of a microwave pulse incident on water drops. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, 33(2) :509–511, 1995.
- [73] L. Méès, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Interaction between femtosecond pulses and a spherical microcavity : Internal fields. *Optics Communications*, 199(1-4) :33–38, 2001.
- [74] M. Brunel, L. Méès, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Possibility of Cerenkov-based radiation from supra-luminic excitation in microdroplets by ultra-short pulses. *Optics Letters*, 26(20) :1621–1623, 2001.
- [75] L. Méès, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Numerical predictions of microcavity internal fields created by femtosecond pulses, with emphasis on whispering gallery modes. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 4(5) :S150–S153, 2002.
- [76] Y. P. Han, L. Méès, K. F. Ren, G. Gréhan, Z. S. Wu, and G. Gouesbet. Far scattered field from a spheroid under a femtosecond pulsed illumination in a Generalized Lorenz-Mie Theory framework. *Optics Communications*, 231(1-6) :71–77, 2004.
- [77] L. Méès, J.P. Wolf, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Two photon absorption and fluorescence in a spherical micro-cavity illuminated by using two laser pulses : numerical simulations. *Optics Communications*, 208 :371–375, 2002.
- [78] Alexander S. Zachor. Aureole radiance field about a source in a scattering–absorbing medium. *Appl. Opt.*, 17(12) :1911–1922, Jun 1978.
- [79] Meng-Sing Liou. A sequel to ausm : Ausm+. *Journal of Computational Physics*, 129(2) :364–382, 1996.
- [80] E. R. G. Eckert. Radiative transfer, h. c. hottel and a. f. sarofim, mcgraw-hill book company, new york, 1967. 52 pages. *AIChE Journal*, 15(5) :794–796, 1967.
- [81] H. C. Hottel. Determination of true temperature and total radiation from luminous gas flames. *Ind. Eng. Chem. Anal. Ed.*, 4 :166–175, 1932.

- [82] P. Kubelka and F. Munk. Ein beitrage zur optik der farbenstricke. *Ann. Techn. Phys.*, 11 :143–601, 1931.
- [83] A. Schuster. Radiation through a foggy atmosphere. *Astrophys. J.*, 21 :1, 1905.
- [84] Thomas Wriedt. A review of elastic light scattering theories. *Particle & Particle Systems Characterization*, 15(2) :67–74, 1998.
- [85] R. Siegel and J. Howell. *Thermal Radiation Heat Transfer*. Taylor and Francis Hemisphere, Washington, 4th edition, 2001.
- [86] G. Gouesbet G. Gréhan F. Le Meur J.N. Le Toulouzan J. Mroczka K.F. Ren C. Rozé T. Girasole, H. Bultynck and D. Wysoczanski. Cylindrical fibre orientation analysis by light scattering - part 1 : numerical aspects. *Part. Part. Syst. Charac.*, 14 :163–174, 1997.
- [87] B. Maheu G. Gréhan T. Girasole, C. Rozé and J. Ménard. Distances of visibility in a foggy atmosphere : comparisons between lighting installations by means of a monte carlo simulation. *Int. J. Light. Res. Tech.*, 30(1) :29–36, 1998.
- [88] V. Outters S. Langlois T. Girasole C. Lavigne, A. Roblin and C. Rozé. Comparison of iterative and monte carlo methods for calculation of the aureole about a point source in the earth’s atmosphere. *Appl. Optics*, 38(30) :6237–6246, 1999.
- [89] E. Veach. *Robust Monte-Carlo methods for light transport*. PhD thesis, Standfort University, 1997.
- [90] Cécile Calba. *Interaction entre une impulsion lumineuse ultra-brève et un nuage dense de particules : simulations numériques et expériences*. PhD thesis, 2008. Thèse de doctorat dirigée par Rozé, Claude et Girasole, Thierry Physique. Energétique Rouen 2008.
- [91] C. Rozé, T. Girasole, L. Méès, G. Gréhan, L. Hespel, and A. Delfour. Interaction between ultra short pulses and a dense scattering medium by monte carlo simulation : Consideration of particle size effect. *Optics Communications*, 220(4-6) :237–245, 2003.
- [92] C. Calba, C. Rozé, T. Girasole, and L. Méès. Monte carlo simulation of the interaction between an ultra-short pulse and a strongly scattering medium : The case of large particles. *Optics Communications*, 265(2) :373–382, 2006.
- [93] C. Calba, L. Méès, C. Rozé, and T. Girasole. Ultrashort pulse propagation through a strongly scattering medium : Simulation and experiments. *Journal of the Optical Society of America A : Optics and Image Science, and Vision*, 25(7) :1541–1550, 2008.

- [94] C. Calba, T. Girasole, C. Rozé, and L. Méès. Ultra-short pulses propagation through a strongly scattering medium. 2006. 13th Int Symp on Applications of laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, 26-29 June, 2006. Abstract p. 10.3.
- [95] G. Chaussonnet, L. Mees, M. À ormaz, P. Jenny, and P.M. Bardet. Modeling multiple scattering transient of an ultrashort laser pulse by spherical particles. *Journal of Computational Physics*, 457 :110696, 2022.
- [96] R.T. Wang and H.C. van de Hulst. Rainbows : Mie computations and the Airy approximation. *Appl. Opt.*, 30(1) :106–117, 1991.
- [97] Megan Paciaroni and Mark Linne. Single-shot, two-dimensional ballistic imaging through scattering media. *Appl. Opt.*, 43(26) :5100–5109, Sep 2004.
- [98] Mark A. Linne, Megan Paciaroni, James R. Gord, and Terrence R. Meyer. Ballistic imaging of the liquid core for a steady jet in crossflow. *Appl. Opt.*, 44(31) :6627–6634, Nov 2005.
- [99] Mark A. Linne, Megan Paciaroni, Tyler Hall, and Terry Parker. Ballistic imaging of the near field in a diesel spray. *Exp Fluids*, 40 :386–846, 2006.
- [100] Jacob B. Schmidt, Zane D. Schaefer, Terrence R. Meyer, Sukesh Roy, Stephen A. Danczyk, and James R. Gord. Ultrafast time-gated ballistic-photon imaging and shadowgraphy in optically dense rocket sprays. *Appl. Opt.*, 48(4) :B137–B144, Feb 2009.
- [101] Saïd Idlahcen. *Imagerie femtoseconde d'un spray Diesel haute pression en proche sortie d'injecteur*. PhD thesis, Université de Rouen, 2011. Thèse de doctorat en physique - spécialité énergétique.
- [102] S. Idlahcen, L. Méès, C. Rozé, T. Girasole, and J. . Blaisot. Time gate, optical layout, and wavelength effects on ballistic imaging. *Journal of the Optical Society of America A : Optics and Image Science, and Vision*, 26(9) :1995–2004, 2009.
- [103] S. Idlahcen, C. Rozé, L. Méès, T. Girasole, and J. B. Blaisot. Sub-picosecond ballistic imaging of a liquid jet. *Experiments in Fluids*, 52(2) :289–298, 2012.
- [104] S. Idlahcen, C. Rozé, L. Méès, T. Girasole, and J. Blaisot. Spatio-temporal analysis of a liquid jet using a sub-picosecond optical gate. In *23rd Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems*, Proceedings of the 23rd Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems (ILASS Europe 2010), Brno, Czech Republic, September 2010.

- [105] Harsh Purwar, Kamel Lounnaci, Saïd Idlahcen, Claude Rozé, Jean-Bernard Blaisot, Loïc Méès, and Marc Michard. Effect of cavitation on velocity in the near-field of a diesel nozzle. In *ICLASS 2015, 13th Triennial International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, Tainan, Taiwan, August 23-27, 2015*.
- [106] Harsh Purwar, Saïd Idlahcen, Loïc Méès, Claude Rozé, Jean-Bernard Blaisot, Marc Michard, and David Maligne. Simultaneous high-speed internal and external flow measurements for a high-pressure diesel nozzle. In *ILASS-Europe 2016, 27th Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, 4-7 September 2016, Brighton, UK, 2016*.
- [107] Yujun Cao, Saïd Idlahcen, Jean-Bernard Blaisot, Claude Rozé, Loïc Méès, and David Maligne. Effect of geometry of real-size transparent nozzles on cavitation and on the atomizing jet in the near field. In *ILASS-Europe 2017, 28th Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, Valencia, Spain, 2017*.
- [108] Fabrice Lamadie, Loïc Méès, and Corinne Fournier. Holographie numérique en ligne appliquée aux mesures en mécanique des fluides. *Techniques de l'ingénieur, Mesures Physique(R 2 163) :1–24, 2022*.
- [109] Ralph W Gerchberg. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik, 35 :237–246, 1972*.
- [110] James R Fienup. Phase retrieval algorithms : a comparison. *Applied optics, 21(15) :2758–2769, 1982*.
- [111] Tatiana Lатычевская and Hans Werner Fink. Solution to the twin image problem in holography. *Physical review letters, 98(23) :233901, 2007*.
- [112] D. Chareyron, J. L. Marié, C. Fournier, J. Gire, N. Grosjean, L. Denis, M. Lance, and L. Méès. Testing an in-line digital holography 'inverse method' for the lagrangian tracking of evaporating droplets in homogeneous nearly isotropic turbulence. *New Journal of Physics, 14, 2012*.
- [113] F. Soulez, L. Denis, C. Fournier, E. Thiébaud, and C. Goepfert. Inverse-problem approach for particle digital holography : accurate location based on local optimization. *J. Opt. Soc. Am. A, 24(4) :1164–1171, 2007*.
- [114] Cyril Mauger, Loïc Méès, Nathalie Grosjean, and Jean-Louis Marié. Etude de la dissolution de microbulles de co<sub>2</sub> par holographie numérique en ligne. In *5ème rencontre*

*francophone d'holographie numérique appliquée À la métrologie des fluides, Nov 2018, , Montpellier, France, 2018.*

- [115] Jérôme Dohet-Eraly, Loïc Méès, Thomas Olivier, Frank Dubois, and Corinne Fournier. Analysis of three-dimensional objects in quantitative phase contrast microscopy : a validity study of the planar approximation for spherical particles. In Corinne Fournier, Marc P. Georges, and Gabriel Popescu, editors, *Unconventional Optical Imaging II*, volume 11351, page 113510Y. International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2020.
- [116] D. Brault, C Fournier, T. Olivier, N. Faure, S. Dixneuf, L. Thibon, L Mees, and L. Denis. Automatic numerical focus plane estimation in digital holographic microscopy using calibration beads. *Appl. Opt.*, 61(5) :B345–B355, Feb 2022.
- [117] F. Jolivet, F. Momey, L. Denis, L. Méès, N. Faure, N. Grosjean, F. Pinston, J.L. Marié, and C. Fournier. Regularized reconstruction of absorbing and phase objects from a single in-line hologram, application to fluid mechanics and micro-biology. *Opt. Express*, 26(7) :8923–8940, 2018.
- [118] A. Berdeu, O. Flasseur, L. Méès, L. Denis, F. Momey, T. Olivier, N. Grosjean, and C. Fournier. Reconstruction of in-line holograms : combining model-based and regularized inversion. *Opt. Express*, 27(10) :14951, 2019.
- [119] Livia Grandoni. *Experimental characterization of respiratory droplet emission*. PhD thesis, Sapienza University of Rome and Ecole Centrale de Lyon, 2023.
- [120] C. Mauger, L. Méès, M. Michard, A. Azouzi, and S. Valette. Shadowgraph, schlieren and interferometry in a 2d cavitating channel flow. *Experiments in Fluids*, 53(6) :1895–1913, 2012.
- [121] Cyril Mauger. *Cavitation dans un micro-canal modèle d'injecteur diesel : méthodes de visualisation et influence de l'état de surface*. PhD thesis, 'Ecole Centrale de Lyon, 2012. Thèse de doctorat dirigée par Michel Lance, Loïc Méès et Stéphane Valette.
- [122] Z.S. Wu and Y.P. Wang. Electromagnetic scattering for multilayered sphere : Recursive algorithms. *Radio Science*, 26(6) :1393–1401, 1991.
- [123] Z.S. Wu, K.F. Ren, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Improved algorithm for electromagnetic scattering of plane waves and shaped beams by multilayered spheres. *Applied Optics*, 36(21) :5188–5198, 1997.

- [124] M. Delory, B. Chorein, A.C. Brulez, L. Méès, N. Grosjean, T. Fiorani, and S. Benayoun. Role of surface-tension additive in coating framing effect topography. *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, 658 :130554, 2023.
- [125] D. Cabut, M. Michard, S. Simoens, L. Méès, V. Todoroff, C. Hermange, and Y. Le Chenadec. Analysis of the water flow inside tire grooves of a rolling car using refraction particle image velocimetry. *Physics of Fluids*, 33(3) :032101, 2021.
- [126] N. Verrier, N. Grojean, E. Dib, L. Méès, C. Fournier, and J.L. Marié. Improvement of the size estimation of 3d tracked droplets using digital in-line holography with joint estimation reconstruction. *Measurement Science and Technology*, 27 :045001, 2016.
- [127] M. Sentis, F. Onofri, L. Méès, and S. Radev. Scattering of light by large bubbles : Coupling of geometrical and physical optics approximations. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 170 :8–18, 2016.
- [128] N. Verrier, C. Fournier, L. Méès, and T. Fournel. In-line particle holography with an astigmatic beam : setup self-calibration using an "inverse problems" approach. *Applied Optics*, 53(27) :G147–G156, 2014.
- [129] C. Mauger, L. Méès, M. Michard, and M. Lance. Velocity measurements based on shadowgraph-like image correlations in a cavitating microchannel flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 58 :301–312, 2014.
- [130] D. Lebrun, L. Méès, D. Fréchou, S. Coëtmellec, M Brunel, and D. Allano. Long time exposure digital in-line holography for 3-D particle trajectography. *Optics Express*, 21(20) :23522–23530, 2013.
- [131] D. Lebrun, D. Allano, L. Méès, F. Walle, F. Corbin, R. Boucheron, and D. Fréchou. Size measurement of bubbles in a cavitation tunnel by digital in-line holography. *Applied Optics*, 50(34) :H1–H9, 2011.
- [132] L. Méès, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Transient internal and scattered fields from a multi-layered sphere illuminated by a pulsed laser. *Optics Communications*, 282(21) :4189–4193, 2009.
- [133] J. Yon, C. Rozé, T. Girasole, A. Coppalle, and L. Méès. Extension of RDG-FA for scattering prediction of aggregates of soot taking into account interactions of large monomers. *Particle and Particle Systems Characterization*, 25(1) :54–67, 2008.

- [134] M. Ribière, L. Méès, D. Allano, and B. Chéron. Evolutions in time and space of laser ablated species by dual-laser photo-absorption spectroscopy. *Journal of Applied Physics*, 104(4) :043302, 2008.
- [135] Y. Han, J. Liu, L. Méès, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Resonance shift and q-factors of distortional liquid droplet. In *AIP Conference Proceedings*, volume 914, pages 509–513, 2007.
- [136] S. Saengkaew, T. Charinpanitkul, H. Vanisri, W. Tanthapanichakoon, L. Méès, G. Gouesbet, and G. Gréhan. Rainbow refractrometry : On the validity domain of airy’s and nussenzveig’s theories. *Optics Communications*, 259(1) :7–13, 2006.
- [137] Y. Han, L. Méès, G. Gouesbet, Z. Wu, and G. Gréhan. Resonant spectra of a deformed spherical microcavity. *Journal of the Optical Society of America B : Optical Physics*, 23(7):1390–1397, 2006.
- [138] G. Gouesbet, G. Gréhan, and L. Méès. Light scattering theory and practice : Beyond velocity and size measurements. In *10th International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, ICLASS 2006*, 2006.
- [139] G. Castanet, A. Delconte, F. Lemoine, L. Méès, and G. Gréhan. Evaluation of temperature gradients within combusting droplets in linear stream using two colors laser-induced fluorescence. *Experiments in Fluids*, 39(2) :431–440, 2005.
- [140] G. Gouesbet and L. Méès. Erratum : Generalized Lorenz-Mie Theory for infinitely long cylinders with elliptical cross sections (j. opt. soc. am. a). *Journal of the Optical Society of America A : Optics and Image Science, and Vision*, 22(3) :574–575, 2005.
- [141] G Gouesbet, L Méès, and G Gréhan. Generic formulation of a generalized Lorenz-Mie theory for pulsed laser illumination. In Adrian, RJ and Durao, DFG and Heitor, MV and Maeda, M and Tropea, C and Whitelaw, JH, editor, *LASER TECHNIQUES FOR FLUID MECHANICS*, pages 175–188. European Res Off ; USA ; USN ; USAF ; Luso-Amer Fdn Dev, 2002. 10th International Symposium on Laser Techniques for Fluid Mechanics, CALOUSTE GULBENKIAN FDN, LISBON, PORTUGAL, JUL 10-13, 2000.
- [142] G. Gouesbet, L. Méès, and G. Gréhan. *Introduction to the use of distributions for light scattering in elliptical cylinder coordinates*, pages 1–39. 2000. Research Signpost.
- [143] G. Gouesbet, L. Méès, G. Gréhan, and K. . Ren. Localized approximation for gaussian beams in elliptical cylinder coordinates. *Applied Optics*, 39(6) :1008–1025, 2000.

- [144] L. Méès, K. F. Ren, G. Gréhan, and G. Gouesbet. Scattering of a gaussian beam by an infinite cylinder with arbitrary location and arbitrary orientation : Numerical results. *Applied Optics*, 38(2-9) :1867–1876, 1999.
- [145] G. Gouesbet and L. Méès. Generalized Lorenz-Mie Theory for infinitely long elliptical cylinders. *Journal of the Optical Society of America A : Optics and Image Science, and Vision*, 16(6) :1333–1341, 1999.
- [146] G. Gouesbet, L. Méès, G. Gréhan, and K. F. Ren. Description of arbitrary shaped beams in elliptical cylinder coordinates, by using a plane wave spectrum approach. *Optics Communications*, 161(1-3) :63–78, 1999.
- [147] G. Gouesbet and L. Méès. Validity of the elliptical cylinder localized approximation for arbitrary shaped beams in Generalized Lorenz-Mie Theory for elliptical cylinders. *Journal of the Optical Society of America A : Optics and Image Science, and Vision*, 16(12) :2946–2958, 1999.
- [148] G. Gouesbet, L. Méès, G. Gréhan, and K. F. Ren. Structure of Generalized Lorenz-Mie Theory for elliptical infinite cylinders. *Particle and Particle Systems Characterization*, 16(1) :3–10, 1999.
- [149] G. Gouesbet, L. Méès, and G. Gréhan. Partial-wave expansions of higher-order gaussian beams in elliptical cylindrical coordinates. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 1(2) :121–132, 1999.
- [150] G. Gouesbet, L. Méès, and G. Gréhan. Partial-wave description of shaped beams in elliptical-cylinder coordinates. *Journal of the Optical Society of America A : Optics and Image Science, and Vision*, 15(12) :3028–3038, 1998.