



**HAL**  
open science

# Méthodes de propagation de type One-Way pour les équations de Navier-Stokes : vers le calcul des perturbations optimales

Maëlys Ruello

► **To cite this version:**

Maëlys Ruello. Méthodes de propagation de type One-Way pour les équations de Navier-Stokes : vers le calcul des perturbations optimales. Sciences de l'ingénieur [physics]. Toulouse, ISAE, 2024. Français. NNT : 2024ESAE0061 . tel-04915438

**HAL Id: tel-04915438**

**<https://hal.science/tel-04915438v1>**

Submitted on 27 Jan 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Doctorat de l'Université de Toulouse

délivré par l'ISAE-SUPAERO

---

Méthodes de propagation de type One-Way pour les équations  
de Navier-Stokes : vers le calcul des perturbations optimales

---

Thèse présentée et soutenue, le 11 décembre 2024 par  
**Maëlys RUELLO**

**École doctorale**

AA - Aéronautique, Astronautique

**Spécialité**

Mathématiques et Applications

**Unité de recherche**

ISAE-ONERA MOIS MOdélisation et Ingénierie des Systèmes

**Thèse dirigée par**

Sébastien PERNET et Jean-Philippe BRAZIER

**Composition du jury**

M. Christophe AIRIAU, Président, Université Toulouse III - Paul Sabatier

Mme Hélène BARUCQ, Rapporteur, Université de Pau et des Pays de l'Adour -INRIA

M. Jean-Christophe ROBINET, Rapporteur, ENSAM

M. Emmanuel PERREY-DEBAIN, Examineur, Université de Technologie de Compiègne

M. Sébastien PERNET, Directeur de thèse, ONERA

M. Jean-Philippe BRAZIER, Co-directeur de thèse, ONERA



*Il semble que la perfection soit atteinte non quand il n'y a plus rien à ajouter, mais quand il n'y a plus rien à retrancher.*

—ANTOINE DE SAINT-EXUPÉRY



# Remerciements

Une thèse ne serait pas ce qu'elle est sans les nombreuses personnes rencontrées durant ces trois ans et demi.

Tout d'abord, j'aimerais exprimer ma gratitude envers mes deux directeurs de thèse, Sébastien Pernet et Jean-Philippe Brazier. Merci pour votre aide constante depuis le stage jusqu'à la fin de la thèse, pour votre expertise en mathématiques, en numérique et en physique, ainsi que pour vos nombreux conseils qui m'ont permis de progresser. Je remercie particulièrement Sébastien Pernet pour avoir partagé le bureau 209 avec moi et pour les nombreux échanges, scientifiques ou non, que nous avons pu avoir.

Je tiens également à remercier Clément Rudel pour l'encadrement de stage et pour m'avoir initiée aux approches One-Way. Merci d'avoir toujours été présent pour répondre à mes multiples questions, qu'elles concernent la méthode, les phénomènes physiques ou le code.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à Hélène Barucq et Jean-Christophe Robinet pour avoir accepté de rapporter ma thèse, pour leur lecture attentive de mon manuscrit et leurs remarques pertinentes et constructives. Mes remerciements vont également à Christophe Airiau, qui a présidé le jury de thèse, ainsi qu'à Emmanuel Perray-Debain pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie l'ONERA et l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du "Programme d'Investissement d'Avenir" ANR 17-EURE-0005 pour le financement de cette thèse. Un merci particulier à l'équipe Mathématiques Appliquées et Calcul Intensif de l'ONERA pour m'avoir accueillie lors de cette aventure. Une pensée spéciale à Xavier Ferrieres, dont la gentillesse et les visites régulières au bureau ont su égayer ces années de thèse. Merci également à Claire Dabin pour avoir toujours su répondre avec patience à mes nombreuses interrogations administratives.

Je remercie ensuite les stagiaires, doctorants et post-docs rencontrés à l'ONERA, cités ici par ordre alphabétique : Adrian, Alfonso, Arthur, Axel, Clément, Gabriel, Julien, Margot, Marie, Matthias B., Matthias R., Timothée. Les moments de convivialité partagés (restaurants et bars, soirées raclette et tartiflette, karaokés, cross-training et bien d'autres encore) ont contribué à rendre ces années de thèse bien plus agréables.

Un remerciement particulier à Inès (mon binôme d'anniversaire!) pour ton soutien précieux pendant la fin de la thèse jusqu'à la soutenance. Rendez-vous en 2025 pour de nouvelles sorties animées et kpop, en croisant les doigts pour assister ensemble à un concert de BTS!

Un grand merci à Lisa-Marie pour avoir partagé avec moi l'aventure du doctorat à distance ou lors de tes passages à Toulouse. Félicitations encore pour la super soutenance de thèse, même si je n'ai pas pu y assister en personne.

Enfin, mes remerciements vont à mes parents qui ont toujours cru en moi et m'ont encouragée durant ces longues années d'études parfois semées d'embûches. Merci infiniment pour votre soutien indéfectible durant cette expérience qu'a été la thèse.



# Table des matières

Notations	vii
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
Introduction	1
<b>1 Aperçu sur quelques phénomènes ondulatoires en mécanique des fluides</b>	<b>5</b>
1.1 Phénomènes de propagation d’ondes en écoulement	6
1.1.1 Modes de conduit	6
1.1.2 Instabilités de couche limite	7
1.1.3 Problématique des perturbations optimales	11
1.2 Approches modales	12
1.2.1 Théorie de la stabilité locale (LST)	12
1.2.2 Approche non locale : équations de stabilité parabolisées (PSE)	14
1.2.3 Méthodes de <i>mode-matching</i> et de Wiener-Hopf	15
1.2.4 Analyse de la résolvante globale	17
1.3 Approches de propagation de type One-Way	21
1.3.1 Approche One-Way microlocale	21
1.3.2 Approches One-Way numériques	24
1.3.3 Approches One-Way basées sur une factorisation de l’opérateur de propagation	29
1.4 Conclusion	32
<b>2 Extension des approches One-Way aux écoulements visqueux</b>	<b>33</b>
2.1 Construction des approches OWNS	34
2.1.1 Linéarisation des équations de Navier-Stokes	34
2.1.2 Factorisation numérique de l’opérateur de propagation et obtention des équations OWNS	35
2.1.3 Séries de Bremmer avec termes sources	44
2.2 Algorithme de résolution des équations OWNS	48
2.2.1 Méthodes de discrétisation	48
2.2.2 Prise en compte des singularités	52
2.2.3 Complexité des approches One-Way et réduction des coûts de calcul	55
2.2.4 Choix pratique des coefficients	56
2.3 Conclusion	58
<b>3 Application à l’acoustique des conduits</b>	<b>59</b>
3.1 Modélisation des liners acoustiques	60
3.1.1 Configuration	60

3.1.2	Impédance acoustique . . . . .	61
3.2	Méthode de décomposition de domaine pour les liners acoustiques . . . . .	61
3.2.1	Principe . . . . .	62
3.2.2	Conditions de transmission . . . . .	64
3.3	Exemple du liner acoustique CT57 . . . . .	65
3.3.1	Configuration . . . . .	66
3.3.2	Conditions aux limites transverses . . . . .	67
3.3.3	Résultats numériques . . . . .	69
3.4	Conclusion . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Application aux couches limites bidimensionnelles</b>	<b>79</b>
4.1	Méthodologie pour calculer l'écoulement de base . . . . .	80
4.1.1	Définitions et notations . . . . .	80
4.1.2	Équations de similitude locale . . . . .	81
4.1.3	Résolution numérique . . . . .	82
4.1.4	Prise en compte d'un maillage non-cartésien . . . . .	83
4.2	Choix des conditions aux limites transverses . . . . .	84
4.2.1	Condition isotherme et condition adiabatique . . . . .	84
4.2.2	Une condition aux limites de type frontière libre . . . . .	85
4.3	Cas de la couche limite subsonique . . . . .	88
4.3.1	Définitions . . . . .	88
4.3.2	Configurations . . . . .	89
4.3.3	Résultats numériques . . . . .	89
4.4	Cas de la couche limite supersonique . . . . .	93
4.4.1	Configuration . . . . .	93
4.4.2	Résultats numériques . . . . .	94
4.5	Conclusion . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Calcul des perturbations optimales d'un écoulement</b>	<b>107</b>
5.1	Définition du problème de perturbations optimales basé sur un solveur One-Way	108
5.1.1	Détermination d'une condition d'entrée optimale . . . . .	108
5.1.2	Détermination d'un forçage optimal . . . . .	111
5.1.3	Choix d'une norme . . . . .	112
5.2	Calcul des perturbations optimales à partir de la résolution d'équations adjointes	113
5.2.1	Détermination d'une condition d'entrée optimale . . . . .	113
5.2.2	Détermination d'un forçage optimal . . . . .	118
5.3	Validations numériques . . . . .	122
5.3.1	Cas de la couche limite subsonique . . . . .	122
5.3.2	Cas de la couche limite supersonique . . . . .	127
5.4	Conclusion . . . . .	132
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>135</b>
<b>A</b>	<b>Équations de Navier-Stokes compressibles en variables primitives</b>	<b>139</b>
A.1	Équation en énergie interne massique . . . . .	139
A.2	Équation en entropie massique . . . . .	140
A.3	Équation en pression . . . . .	140
<b>B</b>	<b>Matrices des opérateurs de Navier-Stokes linéarisés</b>	<b>141</b>
B.1	Cas des écoulements parallèles . . . . .	142
B.2	Cas des couches limites . . . . .	142

<b>C</b>	<b>Matrices des résidus</b>	<b>143</b>
<b>D</b>	<b>Choix des coefficients pour les couches limites</b>	<b>145</b>
D.1	Cas de la couche subsonique de la configuration A . . . . .	146
D.2	Cas de la couche subsonique de la configuration B . . . . .	147
D.3	Cas de la couche supersonique . . . . .	148
D.4	Cas de la couche supersonique pour le calcul des perturbations optimales . . .	149
	<b>Références</b>	<b>151</b>



# Notations

$(x, y, z)$	Coordonnées cartésiennes
$E$	Énergie totale
$M$	Nombre de Mach
$N$	Facteur $N$
$T$	Température
$\alpha$	Nombre d'onde axial
$\beta$	Nombre d'onde transverse
$\delta^*$	Épaisseur de déplacement de couche limite
$\ell^*$	Longueur de Blasius
$\gamma$	Coefficient adiabatique
$\mathbf{q}'$	Vecteur des variables perturbées
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse composé de la vitesse axiale $u$ , de la vitesse normale $v$ et de la vitesse transversale $w$
$\mathcal{J}$	Fonction coût
$\mathcal{L}$	Lagrangien
$\mu$	Viscosité dynamique
$\nu$	Volume spécifique
$\omega$	Pulsation
$\bar{\mathbf{q}}$	Vecteur des variables de l'écoulement de base
$\rho$	Masse volumique
$\sigma$	Gain
$Pr$	Nombre de Prandtl
$Re$	Nombre de Reynolds
$\tilde{\mathbf{q}}$	Vecteur des variables d'amplitude
$a$	Vitesse du son
$c_V$	Capacité thermique massique à volume constant
$c_p$	Capacité thermique massique à pression constante
$e$	Énergie interne massique

$f$	Fréquence
$h$	Enthalpie massique
$k$	Conductivité thermique
$p$	Pression
$r$	Constante spécifique d'un gaz parfait
$s$	Entropie massique

### Accronymes

DDM	Domain Decomposition Method
DNS	Direct Numerical Simulation
GD	Galerkin Discontinu
LES	Large Eddy Simulation
LNS	Linearized Navier-Stokes
LST	Linear Stability Theory
OS	Orr-Sommerfeld
OW	One-Way
OWE	One-Way Euler
OWNS	One-Way Navier-Stokes
PSE	Parabolized Stability Equations
SVD	Singular Value Decomposition
TAOW	True Amplitude One-Way
TS	Tollmien-Schlichting

### Exposants

*	Grandeur avec dimension
$H$	Transposée conjuguée complexe
$in$	Grandeur à l'entrée
$out$	Grandeur à la sortie
$T$	Transposée

### Indices

$\infty$	Grandeur à l'infini amont
$e$	Grandeur à l'extérieur de la couche limite
$i$	Grandeur d'arrêt
$p$	Grandeur à la paroi

# Table des figures

1.1	Schéma représentant le conduit infini. . . . .	6
1.2	Différents chemins menant à la turbulence (figure adaptée de [Morkovin <i>et al.</i> , 1994]). . . . .	8
2.1	Convergence sur le spectre de l'opérateur de propagation pour différentes valeurs de $N_\beta$ dans le cas d'un écoulement cisailé. $\alpha$ correspond au spectre de l'opérateur exact, $\lambda_+$ au spectre de $\tilde{\mathbf{D}}_{++}$ et $\lambda_-$ au spectre de $\tilde{\mathbf{D}}_{--}$ . . . . .	57
3.1	Schéma d'un liner acoustique adapté de [Rolls Royce, 2015]. . . . .	60
3.2	Décomposition du domaine de calcul. . . . .	62
3.3	Transmission d'une onde à travers une discontinuité. . . . .	65
3.4	Configuration du conduit contenant un liner acoustique sur la paroi du bas [Rudel, 2022]. . . . .	66
3.5	Vitesse axiale adimensionnée de l'écoulement de base utilisé pour le Cas 1 (—) et le Cas 2 avec $n_y = 5$ (—) et $n_y = 7.5$ (—) en comparaison avec des données expérimentales (×) tirées de [Jones <i>et al.</i> , 2005]. . . . .	67
3.6	Parties réelle et imaginaire de l'impédance $Z$ du liner CT57 pour un nombre de Mach moyen égal à $M = 0.335$ : données expérimentales tirées de [Jones <i>et al.</i> , 2005] (×) et valeurs numériques obtenues en utilisant le modèle de [Deng <i>et al.</i> , 2019] (—). . . . .	69
3.7	Comparaison entre les modes approchés issus de la factorisation avec les modes exacts pour 15 coefficients $\beta_+$ (◇) et $\beta_-$ (◇) et pour une simulation OWNS à 2000 Hz : $\alpha$ (●) correspond au spectre de l'opérateur exact, $\lambda_+$ (○) au spectre de $\tilde{\mathbf{D}}_{++}$ et $\lambda_-$ (○) au spectre de $\tilde{\mathbf{D}}_{--}$ . . . . .	70
3.8	SPL de la pression acoustique le long de la paroi opposée au liner acoustique pour différentes fréquences. Comparaison entre les données expérimentales (×) issues de [Jones <i>et al.</i> , 2005], la méthode de mode-matching (—) de [Deng <i>et al.</i> , 2019] et les simulations OW avec décomposition de domaine : simulations OWE (•••••) et OWNS (—) pour le cas 1. Les traits pointillés noirs verticaux symbolisent l'emplacement du liner acoustique. . . . .	72
3.9	SPL de la pression acoustique le long de la paroi opposée au liner acoustique pour différentes fréquences. Comparaison entre les données expérimentales (×) issues de [Jones <i>et al.</i> , 2005], la méthode de mode-matching (—) de [Deng <i>et al.</i> , 2019] et les simulations OW avec décomposition de domaine : simulations OWE (avec $n_y = 5$ •••••) et OWNS ( $n_y = 7.5$ —) pour le cas 2. Les traits pointillés noirs verticaux symbolisent l'emplacement du liner acoustique. . . . .	74
3.10	Décomposition du SPL en composantes droite et gauche et résultats de l'OWNS complet pour le cas 2 à une fréquence de 1000 Hz. . . . .	75
3.11	Coefficients de la matrice de diffusion du conduit partiellement revêtu pour les résultats OWE (—) et OWNS (—) dans le Cas 2. . . . .	77

4.1	Schéma représentant le développement d'une couche limite. . . . .	85
4.2	Écoulement de base obtenu à partir d'une solution de similitude locale pour la couche subsonique à $M = 0.2$ : vitesse axiale (à gauche) et température (à droite) en fonction de la variable de similitude $\eta$ . . . . .	90
4.3	Champ du nombre de Mach local de l'écoulement de base à $M = 0.2$ . . . . .	90
4.4	Instabilité de Tollmien-Schlichting pour la couche limite subsonique à $M = 0.2$ . Champs de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression (de haut en bas), normalisés par la valeur de $\tilde{u}_{max}$ . Le domaine de calcul en $x$ et en $y$ a été réduit pour permettre une meilleure visualisation de la propagation du mode instable. . . . .	91
4.5	Facteur $N$ pour la couche limite subsonique de la configuration A basé sur la valeur de $\tilde{u}_{max}$ , en comparaison à une solution LST issue du code MAMOUT et à une solution PSE issue du code PASTEQ. . . . .	92
4.6	Facteur $N$ pour la couche limite subsonique de la configuration B basé sur $\tilde{u}_{max}$ : comparaison entre les résultats issus de notre approche OWNS, une solution LST issue du code MAMOUT, une solution PSE issue du code PASQTEQ et les résultats OWNS tirés de [Rigas <i>et al.</i> , 2017a]. . . . .	92
4.7	Partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des nombres d'ondes axiaux dimensionnés à $M = 4.5$ et $F = 2.2 \times 10^{-4}$ issus d'un résultat LST obtenu par code MAMOUT. . . . .	95
4.8	Convergence sur le spectre de l'opérateur de propagation à différentes abscisses $x$ pour $N_\beta = 18$ . $\alpha$ représente le spectre de l'opérateur exact et $\lambda_+$ le spectre de $\tilde{\mathbf{D}}_{++}$ . . . . .	96
4.9	Extraction de la partie réelle des perturbations de pression à la paroi ( $y = 0$ ) en imposant le mode S en entrée du domaine de calcul avec une condition de paroi isotherme (haut) et adiabatique (bas) pour les perturbations de température. . . . .	97
4.10	Propagation du mode S pour la couche limite supersonique à $M = 4.5$ avec une condition de paroi isotherme pour les perturbations de température. Champs de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression (de haut en bas), normalisés par la valeur de $\tilde{u}_{max}$ . . . . .	98
4.11	Propagation du mode S pour la couche limite supersonique à $M = 4.5$ avec une condition de paroi adiabatique pour les perturbations de température. Champs de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression (de haut en bas), normalisés par la valeur de $\tilde{u}_{max}$ . . . . .	99
4.12	Extraction de la partie réelle des perturbations de pression à la paroi ( $y = 0$ ) en imposant le mode F1 en entrée du domaine de calcul avec une condition de paroi isotherme (haut) et adiabatique (bas) pour les perturbations de température. . . . .	101
4.13	Propagation du mode F1 pour la couche limite supersonique à $M = 4.5$ avec une condition de paroi isotherme pour les perturbations de température. Champs de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression (de haut en bas), normalisés par la valeur de $\tilde{u}_{max}$ . . . . .	102
4.14	Propagation du mode F1 pour la couche limite supersonique à $M = 4.5$ avec une condition de paroi adiabatique pour les perturbations de température. Champs de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression (de haut en bas), normalisés par la valeur de $\tilde{u}_{max}$ . . . . .	103
4.15	Extraction de la partie réelle des perturbations de pression à la paroi ( $y = 0$ ) en imposant le mode S en entrée du domaine de calcul avec une condition de paroi isotherme pour 1 et 5 itérations de Bremmer. . . . .	104

---

5.1	Composantes du vecteur d'entrée optimal $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{in}$ obtenu par la méthode de résolvante globale. . . . .	124
5.2	Composantes du vecteur de sortie optimal $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{out}$ associé au vecteur d'entrée optimal obtenu par la méthode de résolvante globale. . . . .	125
5.3	Composantes du vecteur d'entrée optimal $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{in}$ projeté sur la base des modes issus de l'analyse locale de stabilité. . . . .	126
5.4	Composantes du vecteur de sortie optimal $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{out}$ associé au vecteur d'entrée projeté sur la base des modes issus de l'analyse locale de stabilité. . . . .	127
5.5	Écoulement de base obtenu à partir d'une solution de similitude locale pour la couche limite supersonique à $M_\infty = 4.5$ : vitesse axiale (à gauche) et température (à droite) en fonction de la variable de similitude $\eta$ . . . . .	129
5.6	Champ du nombre de Mach local de l'écoulement de base à $M_\infty = 4.5$ . . . . .	129
5.7	Valeurs du gain optimal pour le second mode de Mack en fonction de $\omega$ à $\beta = 0$ dans le cas de la couche limite compressible à $M = 4.5$ . . . . .	130
5.8	Forçage optimal et réponse optimale associée à $\omega = 2.5$ et $\beta = 0$ : champs de la partie réelle du forçage optimal $f_u$ , de la réponse optimale $\tilde{u}$ et de la réponse optimale $\tilde{\rho}$ (de haut en bas). La ligne pleine indique la ligne sonique : la région supersonique est située entre cette ligne et la paroi. La ligne pointillée noire indique l'emplacement du point d'inflexion généralisé. . . . .	131



# Liste des tableaux

2.1	Aperçu sur la complexité des méthodes One-Way : $(N_x, N_y)$ est la grille de discrétisation, $N_{sample}$ le nombre de points en $x$ où la factorisation est nécessaire, $N_{it}$ le nombre d'itérations de Bremmer et $N_\beta$ le nombre de coefficients $\beta_\pm$ .	55
3.1	Propriétés géométriques du liner CT57 dans [Jones <i>et al.</i> , 2005].	68
3.2	Paramètres utilisés pour le modèle d'impédance du liner CT57 dans [Deng <i>et al.</i> , 2019].	68
3.3	Aperçu des performances de la DDM pour les équations OWE et OWNS et pour le Cas 2 à 1000 Hz.	70
4.1	Paramètres physiques pour deux configurations A et B de couches limites subsoniques. Les paramètres issus de la configuration B sont tirés de [Rigas <i>et al.</i> , 2017a].	89
4.2	Paramètres numériques pour deux configurations A et B de couches limites subsoniques. Les paramètres issus de la configuration B sont tirés de [Rigas <i>et al.</i> , 2017a].	89
4.3	Aperçu des performances des équations OWNS pour les couches limites subsoniques des configurations A et B.	93
4.4	Paramètres physiques de la couche limite supersonique à $M = 4.5$ tirés de [Ma et Zhong, 2003].	94
4.5	Paramètres numériques pour la couche limite supersonique à $M = 4.5$ .	94
4.6	Convergence sur les itérations de Bremmer avec le mode S en entrée et une condition aux limites isotherme.	104
4.7	Aperçu des performances de l'approche OWNS pour la couche limite supersonique à $M = 4.5$ en comparaison aux approches OWNS-O, OWNS-P et OWNS-R [Zhu et Towne, 2023].	105
5.1	Domaine de calcul de la couche limite subsonique pour le calcul des perturbations optimales.	123
5.2	Convergence de l'algorithme itératif basé sur le calcul de l'état adjoint pour un nombre d'itérations maximum fixé à 10 et une tolérance égale à $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6}$ pour l'exemple de la couche limite subsonique.	123
5.3	Erreur de projection entre le vecteur d'entrée $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{in}$ obtenu par la méthode de résolution globale et le vecteur d'entrée projeté sur $N_{modes}$ et gain réduit $\sigma_{red}^2$ associé à $N_{modes}$ .	127
5.4	Paramètres physiques de la couche supersonique à $M = 4.5$ issus de [Bugeat <i>et al.</i> , 2019].	128
5.5	Domaine de calcul de la couche limite supersonique pour le calcul des perturbations optimales.	128

5.6	Convergence de l'algorithme itératif basé sur le calcul de l'état adjoint pour un nombre d'itérations maximum fixé à 100 et une tolérance égale à $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-7}$ pour l'exemple de la couche limite supersonique. . . . .	132
D.1	Valeurs des coefficients $\beta_{\pm}$ pour une longueur de référence $L^* = 1.5 \times 10^{-3}$ m et $N_{\beta} = 19$ . . . . .	146
D.2	Valeurs des coefficients $\beta_{\pm}$ pour une longueur de référence $L^* = 5.14 \times 10^{-5}$ m et $N_{\beta} = 12$ . . . . .	147
D.3	Valeurs des coefficients $\beta_{\pm}$ pour une longueur de référence $L^* = 1.39 \times 10^{-4}$ m et $N_{\beta} = 18$ . . . . .	148
D.4	Valeurs des coefficients $\beta_{\pm}$ pour une longueur de référence $L^* = 1.068 \times 10^{-4}$ m et $N_{\beta} = 23$ . . . . .	149

# Introduction

Dans le domaine de la mécanique des fluides, l'un des principaux enjeux consiste à comprendre, prévoir rapidement et ultérieurement piloter les mécanismes liés aux instabilités de l'écoulement. En effet, celles-ci jouent un rôle crucial dans le déclenchement de la transition laminaire-turbulent de la couche limite. Or le maintien d'une couche limite laminaire permet de réduire la traînée aérodynamique et donc la consommation de carburant. De même, conserver la laminarité permet d'obtenir un flux thermique plus faible dans le cas d'un véhicule spatial, d'alléger sa protection thermique et donc d'augmenter sa charge utile.

Les méthodes courantes de prévision de la transition reposent largement sur le calcul modal des ondes d'instabilités, basé sur des hypothèses de variation lente de l'écoulement. Ainsi la théorie de la stabilité linéaire (LST) ou les équations de stabilité parabolisées (PSE) [Herbert, 1997] sont-elles très efficaces quand l'écoulement présente un seul mode instable. Mais il existe des cas d'écoulements dans lesquels plusieurs modes, stables et instables, co-existent et où l'amplification maximale est obtenue par combinaison linéaire de plusieurs modes. On parle alors de croissances transitoires, qui peuvent parfois déclencher le passage en régime turbulent. La détermination de la combinaison produisant la plus forte amplification devient alors un problème d'optimisation. En présence d'un groupe d'ondes de natures différentes, les méthodes modales locales sont mal adaptées et résoudre les équations de Navier-Stokes à l'aide de méthodes directes (DNS et LES) en régime temporel se révèle alors beaucoup plus coûteux.

En réponse à ce constat, des recherches sont menées pour développer des méthodes intermédiaires permettant d'augmenter le domaine de validité des modèles de prévision rapide tout en garantissant une représentation fidèle des phénomènes physiques présents dans les écoulements.

Par exemple, pour modéliser la propagation d'ondes dans une direction privilégiée, il existe les approches One-Way, qui consistent à découpler les ondes se propageant dans une direction et dans l'autre, en ne conservant que la partie qui nous intéresse. Ces approches présentent ainsi l'avantage d'être, a priori, moins coûteuses que les méthodes dites "exactes" (DNS et LES) et offrent un domaine d'application plus étendu que les méthodes de type PSE. Celles-ci sont employées depuis plus de cinquante ans dans divers domaines tels que la géophysique [Claerbout, 1985], l'acoustique et l'électromagnétisme. L'existence et la construction d'un tel découplage des ondes sont connues, entre autres, depuis les travaux de [Taylor, 1974] et sa méthode de factorisation basée sur une analyse microlocale des problèmes hyperboliques [Antoine et Barucq, 2001]. Néanmoins, le caractère analytique de ce type de construction, utilisant le calcul symbolique et les opérateurs pseudo-différentiels [Op't Root et Stolk, 2010], rend son application très complexe, voire impraticable, pour des systèmes complexes comme les équations d'Euler et de Navier-Stokes. Plus récemment, l'équipe de T. Colonius au Cal-Tech [Towne et Colonius, 2014, Towne et Colonius, 2015, Towne, 2016] a contourné cette difficulté en utilisant une discrétisation préalable dans la direction transversale et une condition aux limites non-réfléchissante [Higdon, 1986, Higdon, 1987, Givoli et Neta, 2003, Hagstrom et Warburton, 2004], construite à partir d'une analyse locale de stabilité, afin d'extraire les fronts d'ondes se propageant dans la direction privilégiée. Bien que les résultats ob-

tenus par cette nouvelle approche soient convaincants, cette méthode reste soumise, comme l'approche One-Way analytique originale, à l'hypothèse de faibles variations de l'écoulement dans la direction de propagation des ondes.

Cette contrainte a néanmoins été levée dans le cadre des travaux de thèse de [Rudel *et al.*, 2021, Rudel, 2022, Rudel *et al.*, 2022], qui a construit et validé des approches One-Way pour les équations d'Euler, basées sur une factorisation explicite de l'opérateur de propagation. En effet, bien que l'approche One-Way classique reproduise correctement la longueur d'onde et la fréquence, elle ne permet pas d'obtenir l'amplitude exacte, car elle néglige les phénomènes de réfraction et de réflexion de l'onde incidente. Plusieurs méthodes existent pour corriger cette amplitude, comme l'approche True Amplitude [Stolk, 2004, Zhang *et al.*, 2005, Barucq *et al.*, 2008], qui permet de prendre en compte l'onde réfractée en ajoutant un terme à l'équation One-Way. Une autre méthode, utilisant les séries de Bremmer [De Hoop, 1996], repose sur la construction d'un opérateur de réfraction/réflexion et la décomposition de la solution en une série d'ondes se propageant dans les deux directions. Cette méthode présente l'avantage de prendre correctement en compte les ondes réfractées et réfléchies, mais elle est difficilement applicable aux équations de la mécanique des fluides, car elle nécessite la diagonalisation de l'opérateur de propagation. L'idée développée dans les travaux de [Rudel, 2022] a donc été d'appliquer la condition aux limites non-réfléchissante dans les deux directions. Il devient alors possible d'obtenir une approximation de la matrice de vecteurs propres à l'aide d'une factorisation entièrement numérique (et non plus une diagonalisation stricte) de l'opérateur de propagation, ce qui simplifie alors le calcul des coefficients de la matrice associée à l'opérateur de réfraction/réflexion. Cependant, si cette étude a été appliquée à divers exemples (liners acoustiques et jets, par exemple), elle est limitée aux équations d'Euler, qui ne permettent pas de prendre en compte les phénomènes de viscosité et par conséquent de traiter un plus grand nombre d'applications en mécanique des fluides.

L'objectif de cette thèse est double. Dans un premier temps, il s'agit de développer et d'analyser des approches de type One-Way dans le cadre des équations de Navier-Stokes, en étendant la méthode de factorisation numérique proposée par C. Rudel dans ses travaux de thèse. Dans un second temps, cette extension sera exploitée afin de concevoir un outil numérique permettant de calculer l'amplification maximale d'un écoulement de couche limite, pouvant mener à la transition laminaire-turbulent. Plus précisément, l'objectif est de proposer un algorithme basé sur la résolution de l'état adjoint, afin de déterminer les perturbations optimales (entrée optimale ou forçage optimal) pour plusieurs applications issues de la mécanique des fluides.

## Plan du manuscrit

Ces travaux de thèse s'articulent autour de trois axes : l'extension des approches One-Way basées sur une factorisation de l'opérateur de propagation aux équations de Navier-Stokes (OWNS), l'application et la validation des approches OWNS sur différents cas de complexité variable issus de l'aéroacoustique et plus généralement de la mécanique des fluides, ainsi que le développement d'algorithmes basés sur les équations One-Way permettant le calcul des perturbations optimales d'un écoulement. Ce manuscrit est constitué de cinq chapitres distincts.

Dans le Chapitre 1, nous exposons plusieurs phénomènes liés à la propagation d'ondes en mécanique des fluides qui seront étudiés dans les chapitres applicatifs, et nous présentons différentes méthodes numériques adaptées à l'étude de ces phénomènes. En particulier, nous

---

passons en revue les différentes approches One-Way proposées dans la littérature, de la version analytique microlocale, en passant par la version purement générique et numérique basée sur une condition aux limites non-réfléchissante proposée par [Towne et Colonius, 2015], en terminant par la nouvelle méthodologie proposée par Clément Rudel dans ses travaux de thèse dans lesquels il a introduit une factorisation numérique de l’opérateur de propagation [Rudel, 2022].

L’objectif du Chapitre 2 est de construire des approches One-Way pour les équations de Navier-Stokes et de proposer une résolution numérique des équations. Pour cela, à partir des équations de Navier-Stokes linéarisées bidimensionnelles et en reprenant la méthodologie présentée par [Rudel, 2022], nous détaillons la factorisation numérique de l’opérateur de propagation. Ensuite, il est possible de proposer différentes approches OWNS (standard, True Amplitude et séries de Bremmer) qui permettent de prendre en compte à divers degrés de précision les phénomènes de réflexion et de réfraction des ondes. Dans une seconde partie, nous exposons l’algorithme de résolution des équations OWNS obtenues, en détaillant le choix des schémas de discrétisation, mais également la gestion des singularités qui peuvent apparaître (écoulement de base qui s’annule à la paroi ou prise en compte des conditions aux limites, par exemple). Nous discutons également de la complexité des différentes approches One-Way ainsi que ce qui a été mis en place dans le code pour réduire les coûts de calcul. Enfin, le choix pratique des coefficients  $\beta_{\pm}$  qui apparaissent dans les conditions aux limites non-réfléchissantes est discuté, et nous donnons un algorithme en quelques étapes permettant de faciliter le placement de ces paramètres sur le plan complexe et d’assurer la stabilité des approches One-Way.

Dans le Chapitre 3, l’objectif est d’appliquer les équations OWNS à l’exemple des conduits partiellement recouverts de liners acoustiques. Ce type de matériau absorbant est généralement modélisé par une condition d’impédance, et la nature poreuse génère une discontinuité dans les conditions aux limites, ce qui implique l’utilisation d’une méthode de décomposition de domaine. En particulier, nous détaillons le principe de cette approche pour l’exemple d’un conduit rectangulaire divisé en trois sous-domaines dont le sous-domaine du milieu contient un liner acoustique. Après avoir dérivé des conditions de transmission à partir de la factorisation de l’opérateur de propagation décrite dans le Chapitre 2, il est ainsi possible de mettre en place une résolution itérative d’équations One-Way droites et gauches, dans chaque sous-domaine. Finalement, nous traitons un cas d’application classique, issu de la littérature, afin de valider nos approches OWNS. Pour cela, nous réalisons une série de calculs sur une gamme de fréquences, que nous comparons ensuite aux résultats OWE qui ont été obtenus par [Rudel, 2022] mais également à des données expérimentales [Jones *et al.*, 2005] et à des simulations issues d’autres méthodes numériques [Deng *et al.*, 2019]. Enfin, les performances du liner considéré dans ce chapitre ont été étudiées grâce à la construction d’une matrice de diffusion pouvant être obtenue à l’aide de la résolution des équations One-Way, qui permettent une décomposition des ondes selon leur sens de propagation. Les études menées dans ce chapitre ont donné lieu à la publication d’un article de recherche [Ruello *et al.*, 2024].

L’objectif du Chapitre 4 est d’étendre et de valider les approches OWNS aux cas des couches limites bidimensionnelles, afin de traiter d’autres types d’applications en mécanique des fluides. Pour cela, l’idée est d’adapter nos approches en prenant en compte des spécificités liées au cas des couches limites. En particulier, nous prenons en compte un maillage non-cartésien ainsi que des conditions aux limites transverses adaptées, permettant de modéliser le plus fidèlement possible le développement d’une couche limite. Ensuite, nous nous intéressons à deux exemples de couche limite subsonique, à Mach 0.2 et 0.5, respectivement. Les résultats obtenus, montrant la propagation du mode instable de Tollmien-Schlichting,

sont ensuite comparés à des résultats OWNS, LST et PSE. Finalement, le cas plus complexe d'un écoulement de couche supersonique à Mach 4.5 tiré de [Ma et Zhong, 2003] est traité. La particularité de cet écoulement est qu'il comporte deux modes, le mode S (*slow*) et le mode F (*fast*), qui peuvent se synchroniser pour faire apparaître l'instabilité du second mode de Mack. Les différentes simulations réalisées sont comparées à des résultats LST et DNS.

Enfin, dans le Chapitre 5, nous présentons deux méthodes basées sur les équations OWNS afin de calculer les perturbations optimales d'un écoulement. La première méthode présentée est une méthode de résolvante globale basée sur le schéma GD utilisé pour la marche en  $x$  des équations One-Way. La seconde méthode est basée sur l'écriture d'un problème sous contrainte que nous réécrivons sous la forme d'un problème sans contrainte à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Pour ces deux méthodes, nous présentons deux versions différentes : une première permettant de déterminer l'entrée optimale et une seconde permettant de déterminer le forçage optimal. Dans le cas de l'entrée optimale, les simulations OWNS sont validées avec une comparaison directe entre nos deux méthodes sur deux exemples distincts : un exemple d'écoulement cisailé et un exemple de couche limite subsonique à Mach 0.2, qui a également été traité dans le Chapitre 4. Dans le cas du forçage optimal, nous testons l'approche basée sur le problème d'optimisation sous contrainte sur un exemple de couche limite supersonique à Mach 4.5, en comparaison à des résultats OWNS [Towne *et al.*, 2022] et de résolvante globale [Bugeat *et al.*, 2019].

## Communications

Ces travaux de thèse ont fait l'objet d'une publication dans une revue à comité de lecture et ont été présentés lors de plusieurs conférences internationales :

- Article :
  - M. Ruello, C. Rudel, S. Pernet et J.-P. Brazier, Domain decomposition method based on One-Way approaches for sound propagation in a partially lined duct, *Wave Motion*, **130** (2024), p. 103351, <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2024.103351>.
- Conférences et congrès :
  - M. Ruello, S. Pernet et J.-P. Brazier, *Transmission conditions for simulating acoustic propagation in complex flows*, 16<sup>th</sup> International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (WAVES 2024), Berlin, 30 juin–5 juillet 2024, pp. 62–63, <https://doi.org/10.17617/3.MBE4AA>.
  - M. Ruello, S. Pernet et J.-P. Brazier, *Domain decomposition method based on One-Way approaches applied to acoustic liners*, 9<sup>th</sup> European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2024), Lisbonne, 2–7 juin 2024.
  - M. Ruello, S. Pernet et J.-P. Brazier, *One-Way propagation methods for Navier-Stokes equations*, Numerical Methods for Hyperbolic Problems (NumHyp2023), Bordeaux, 26–30 juin 2023.
  - M. Ruello, C. Rudel, S. Pernet et J.-P. Brazier, *One-Way methods for wave propagation in complex flows*, 15<sup>th</sup> International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (WAVES 2022), Palaiseau, 25–29 juillet 2022.

# Chapitre 1

## Aperçu sur quelques phénomènes ondulatoires en mécanique des fluides et sur leur modélisation

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Phénomènes de propagation d’ondes en écoulement . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1.1	Modes de conduit . . . . .	6
1.1.2	Instabilités de couche limite . . . . .	7
1.1.3	Problématique des perturbations optimales . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>Approches modales . . . . .</b>	<b>12</b>
1.2.1	Théorie de la stabilité locale (LST) . . . . .	12
1.2.2	Approche non locale : équations de stabilité parabolisées (PSE) . . .	14
1.2.3	Méthodes de <i>mode-matching</i> et de Wiener-Hopf . . . . .	15
1.2.4	Analyse de la résolvante globale . . . . .	17
<b>1.3</b>	<b>Approches de propagation de type One-Way . . . . .</b>	<b>21</b>
1.3.1	Approche One-Way microlocale . . . . .	21
1.3.2	Approches One-Way numériques . . . . .	24
1.3.3	Approches One-Way basées sur une factorisation de l’opérateur de propagation . . . . .	29
<b>1.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>32</b>

---

Ce premier chapitre a pour double objectif d’introduire les phénomènes physiques rencontrés dans le contexte de cette thèse ainsi que les méthodes numériques permettant de les étudier, analyser et modéliser. Dans la Section 1.1, on étudie en particulier les phénomènes de propagation d’ondes en écoulement, que ce soit dans les conduits infinis ou dans les couches limites. Nous évoquons également la problématique des perturbations optimales, qui seront au cœur du Chapitre 5. Dans la Section 1.2, nous introduisons les méthodes numériques dites modales, classiquement utilisées en mécanique des fluides pour modéliser la propagation d’ondes en écoulement. Dans la Section 1.3, nous introduisons les différentes approches One-Way, de l’approche microlocale, en passant par l’approche générique numérique jusqu’à l’approche fondée sur une factorisation numérique de l’opérateur de propagation, qui servira notamment de base au traitement des équations de Navier-Stokes linéarisées du Chapitre 2.

## 1.1 Phénomènes de propagation d'ondes en écoulement

### 1.1.1 Modes de conduit

Soit un conduit infini de section constante et à parois rigides contenant un écoulement fluide, représenté sur la Figure 1.1. Le problème est considéré en 2D, et le conduit est défini par un domaine ouvert  $\Omega = \mathbb{R} \times [0, h]$ ,  $h$  étant la hauteur entre les deux parois rigides.

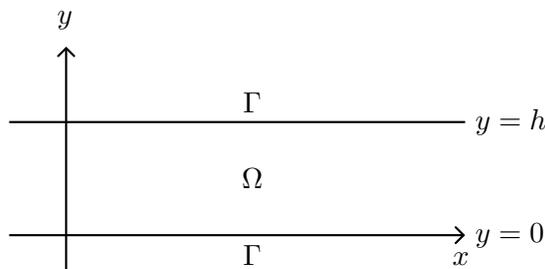


FIGURE 1.1 – Schéma représentant le conduit infini.

Afin de décrire la propagation d'ondes acoustiques dans ce conduit, plusieurs hypothèses sur le fluide sont faites :

- le fluide est homogène, non visqueux et non conducteur de chaleur ;
- l'écoulement de base  $u_0$  est uniforme et subsonique ;
- une dépendance temporelle harmonique  $e^{-i\omega t}$ ,  $\omega > 0$  étant la pulsation, est supposée.

Le champ de pression acoustique  $p(x, y)$  est alors solution de l'équation d'Helmholtz convectée :

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2ikM \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = f \text{ dans } \Omega, \quad (1.1)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  est une fonction à support compact représentant les sources acoustiques,  $M = u_0/a$  est le nombre de Mach,  $k = \omega/a$  le nombre d'onde et  $a$  la célérité du son. Le cas d'un écoulement subsonique étant considéré, on a  $0 < M < 1$ .

De plus, la pression acoustique satisfait une condition de Neumann homogène sur les deux parois rigides du conduit :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega, \quad (1.2)$$

où  $n$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\Gamma$ .

Pour ce faire, on introduit les modes de conduit, qui sont solutions des équations (1.1)-(1.2) en l'absence de source, c'est-à-dire pour  $f = 0$ . En appliquant une séparation des variables, ces modes s'écrivent :

$$p_{\pm}^n(x, y) = A^n(y) e^{i\alpha_{\pm}^n x}, \quad (1.3)$$

où

$$A^0(y) = \sqrt{\frac{1}{h}}, \quad A^n(y) = \sqrt{\frac{2}{h}} \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (1.4)$$

et où les nombres d'ondes axiaux  $\alpha_{\pm}^n$  sont solutions de l'équation suivante :

$$-(1 - M^2)\alpha^2 - 2kM\alpha + k^2 = \frac{n^2\pi^2}{h^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.5)$$

En posant :

$$K = \frac{kh}{\pi\sqrt{1 - M^2}}, \quad (1.6)$$

et  $N_K = \lfloor K \rfloor$  la partie entière de  $K$ . Si  $n \leq N_K$ , alors  $\alpha_{\pm}^n$  est réel et vaut :

$$\alpha_{\pm}^n = \frac{-kM \pm \sqrt{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{h^2}(1 - M^2)}}{1 - M^2}. \quad (1.7)$$

La fonction  $p_{\pm}^n$  est alors appelée mode propagatif, et le nombre de modes propagatifs est une fonction croissante du nombre de Mach  $M$ . Il est possible de différencier les modes  $p_+^n$  (modes amont se propageant dans le sens de l'écoulement) des modes  $p_-^n$  (modes aval se propageant dans le sens opposé à l'écoulement) en fonction de la valeur de la vitesse de groupe  $\partial\omega/\partial\alpha$ . On montre alors que cette vitesse est positive pour les modes  $p_+^n$ , et négative pour les modes  $p_-^n$ . En présence d'un écoulement et pour

$$\sqrt{1 - M^2} \frac{n\pi}{h} < k < \frac{n\pi}{h}, \quad (1.8)$$

il existe des modes  $p_+^n$  qui possèdent une vitesse de phase  $\omega/\alpha$  négative et une vitesse de groupe positive. Ces modes sont appelés modes amont inverses.

Au contraire,  $\alpha_{\pm}^n$  est complexe lorsque  $n > N_K$  et vaut :

$$\alpha_{\pm}^n = \frac{-kM \pm i\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{h^2}(1 - M^2) - k^2}}{1 - M^2}. \quad (1.9)$$

Dans ce cas,  $p_{\pm}^n$  décroît exponentiellement lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  et est alors appelé mode évanescent.

*Remarque 1.* Dans le cas des équations d'Euler ou de Navier-Stokes, une nouvelle famille de modes apparaît, en plus des modes propagatifs et évanescents : ce sont les modes convectifs. Ces modes ne se propagent que dans le sens de l'écoulement, avec une vitesse non plus similaire à la vitesse du son, mais à la vitesse de l'écoulement.

### 1.1.2 Instabilités de couche limite

La notion de couche limite a été introduite pour la première fois par Prandtl en 1904 lors de la troisième édition du congrès international des mathématiciens qui s'est tenu à Heidelberg, en Allemagne. Les équations de Navier-Stokes sont ainsi simplifiées en divisant le champ d'écoulement en deux zones : une zone à l'intérieur de la couche limite, dominée par la viscosité et à l'origine de la traînée de frottement subie par le corps, et une zone à l'extérieur de la couche limite, où la viscosité peut être négligée sans effets significatifs sur la solution.

#### 1.1.2.1 Chemins vers la turbulence

Une propriété fondamentale de la mécanique des fluides est l'apparition de la turbulence. On doit la première expérience dans le domaine à Reynolds en 1883. Il injecte ainsi du colorant à l'entrée d'un tube et constate l'existence de plusieurs régimes d'écoulements. Pour des vitesses relativement faibles, le filet coloré reste rectiligne : il s'agit d'un écoulement laminaire. Pour des vitesses plus élevées, le filet coloré ondule, indiquant la présence de tourbillons : l'écoulement laminaire est devenu instable, mais le filet reste cependant bien net. Enfin, à partir d'une certaine vitesse plus élevée encore, les tourbillons finissent par mélanger le fluide et le filet coloré est détruit, laissant le colorant envahir le tube ; il s'agit d'un écoulement turbulent.

On peut alors définir le nombre de Reynolds  $Re_L = UL/\nu$  où  $U$  et  $L$  sont respectivement des valeurs caractéristiques de vitesse et de longueur, ici le diamètre du tube, et  $\nu$  est la

viscosité cinématique. L'écoulement dans le tube restera laminaire jusqu'à une certaine valeur critique  $Re_c$  du nombre de Reynolds. Pour  $Re_L$  proche de  $Re_c$ , on observe l'apparition de fluctuations sur toutes les variables (vitesse, pression) autour des valeurs moyennes. Ces fluctuations reflètent la déstabilisation de l'écoulement. Pour  $Re_L > Re_c$ , l'amplitude des fluctuations augmente jusqu'à déclencher l'apparition de la turbulence, par l'entremise de phénomènes non linéaires. Dans l'exemple de la couche limite se développant sur une plaque plane, l'écoulement au niveau du bord d'attaque de la couche est ainsi laminaire et stable, puis à partir d'une valeur critique du Reynolds  $Re_x = Ux/\nu$ , l'écoulement reste laminaire, mais devient instable avec des fluctuations croissantes jusqu'à l'apparition de phénomènes non linéaires (cela constitue la zone de transition) puis la couche limite devient turbulente.

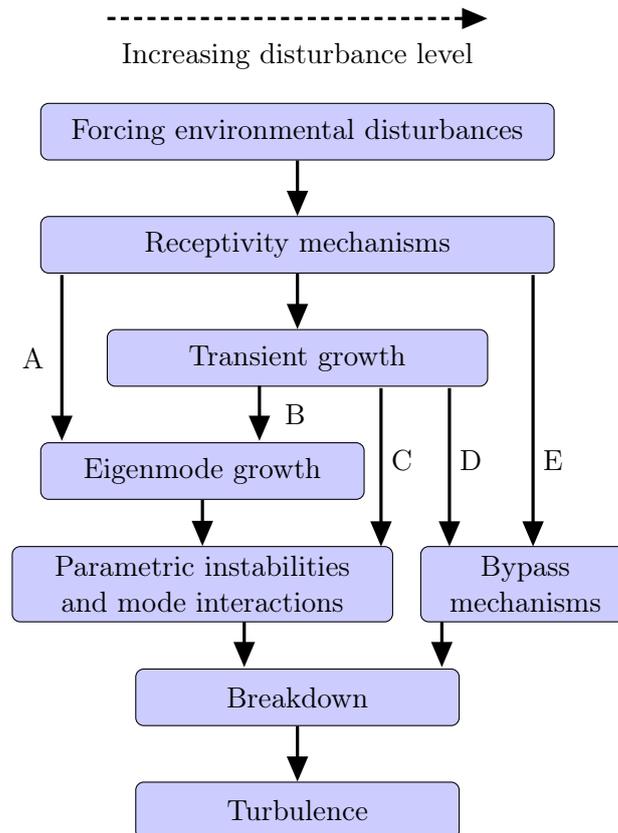


FIGURE 1.2 – Différents chemins menant à la turbulence (figure adaptée de [Morkovin *et al.*, 1994]).

La figure 1.2 représente de manière simplifiée les différents chemins menant à la turbulence.

- Le chemin A correspond à la transition provoquée par des amplifications modales. Cette situation se produit pour des environnements à faible perturbation pour lesquels la croissance modale est dominante. La croissance exponentielle des ondes de Tollmien-Schlichting (TS) ou des ondes *crossflow* (pour des couches limites tridimensionnelles sur des ailes en flèche par exemple) conduit à la rupture vers la turbulence. Les instabilités de Görtler suivent également ce chemin pour des écoulements sur des surfaces concaves. La prévision de la turbulence est alors basée sur l'évolution du mode le plus instable, qui pilote l'instabilité de la couche limite et donc la transition.
- Lorsque l'amplitude des perturbations extérieures augmente, la croissance transitoire commence à apparaître. Lors du chemin B, l'amplitude des perturbations est suffisamment faible de sorte qu'une croissance modale et non modale apparaît.

- Pour le chemin C, l’amplitude des perturbations est suffisamment élevée pour que la croissance transitoire soit supérieure à l’amplification modale. La théorie des perturbations optimales montre que les perturbations initiales, correspondant à des tourbillons longitudinaux, entraînent la formation de stries dans la couche limite. Ces perturbations optimales peuvent alors présenter une croissance énergétique transitoire importante.
- Pour le chemin D comme pour le chemin C, les perturbations extérieures pénètrent la couche limite au niveau du bord d’attaque pour former des stries. Dans le chemin C, la transition est causée par une instabilité secondaire, c’est-à-dire une instabilité de l’écoulement de couche limite déformée par la propagation des modes de Klebanoff. Dans le chemin D, la croissance transitoire produit un spectre complet de perturbations et les hautes fréquences interagissent avec les modes de Klebanoff pour accélérer la transition.
- Le chemin E représente le cas de perturbations extérieures très amplifiées. L’amplitude du forçage est si grande qu’il n’y a pas de régime linéaire. La couche limite est entièrement turbulente dès le départ, et la notion de région laminaire et de transition est alors discutable.

Il est alors possible d’identifier différents types d’instabilités pouvant mener à la transition laminaire-turbulent, selon la nature de la couche limite. Nous allons détailler quelques instabilités modales pour les écoulements bi et tridimensionnels dans la sous-section ci-dessous. Une liste plus détaillée est donnée dans [Arnal et Casalis, 2000]. La problématique des instabilités multimodales et des perturbations optimales sera alors évoquée en sous-section 1.1.3.

### 1.1.2.2 Instabilités de Tollmien-Schlichting

Ces modes sont appelés instabilités de Tollmien-Schlichting (TS), en l’honneur de deux chercheurs allemands (Tollmien en 1935 et Schlichting en 1933) qui ont montré que l’équation d’Orr-Sommerfeld (cf. Sous-section 1.2.1) possédait des perturbations instables pour les écoulements sans points d’inflexion. Ils ont montré que la stabilité de la couche limite dépendait à la fois de la fréquence des perturbations et du nombre de Reynolds. Les résultats théoriques de Tollmien & Schlichting ont par la suite été validés expérimentalement pour la première fois par [Schubauer et Skramstad, 1947], via l’utilisation d’un ruban vibrant, afin de mettre en évidence la propagation de ces modes instables dans la couche limite. La transition laminaire-turbulent étant obtenue pour l’amplification du mode le plus instable, on parle alors de transition naturelle.

Les instabilités de TS montrent d’abord une croissance exponentielle pouvant être calculée par une analyse de stabilité linéaire [Mack, 1984]. Un résultat important issu de cette théorie montre l’existence d’un nombre de Reynolds critique en dessous duquel toutes les perturbations sont amorties. Pour une couche limite de Blasius se développant sur une plaque plane, le nombre de Reynolds critique vaut  $Re_{c,\delta_1} = 520$ , avec  $\delta_1$  l’épaisseur de déplacement de la couche. Le premier mode instable calculé correspond alors au mode TS. Puis, lorsque cette instabilité est amplifiée jusqu’à atteindre une amplitude d’environ 1% de la vitesse extérieure, une instabilité secondaire se développe, pouvant conduire à la turbulence.

### 1.1.2.3 Instabilités de couche limite compressible

Les travaux de [Lees et Lin, 1946] ont constitué une importante contribution théorique concernant les instabilités d’écoulement compressibles. Ils ont notamment classé les perturbations en trois catégories : subsoniques, soniques et supersoniques, selon que la vitesse de phase  $c_\varphi$  est supérieure, égale ou inférieure à  $u_\infty - a_\infty$ , où  $u_\infty$  et  $a_\infty$  sont respectivement la vitesse et la célérité du son à l’infini amont. Lees & Lin ont montré qu’en régime supersonique, les instabilités étaient de nature non visqueuse et inflexionnelle, et ils ont défini une

condition suffisante à l'existence de telles instabilités pouvant s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]_{y=y_s} = 0, \quad (1.10)$$

sous réserve que  $\bar{u}(y_s) > u_\infty - a_\infty$ , où  $\bar{\rho}$  est la masse volumique,  $\bar{u}$  est la composante axiale de la vitesse de l'écoulement,  $y$  est la distance normale à la paroi et  $y_s$  est la position à partir de laquelle la condition précédente est satisfaite. Cette égalité est connue sous le nom de théorème du point d'inflexion généralisé (PIG) qui est une extension du théorème du point d'inflexion (ou théorème de Rayleigh) pour les écoulements incompressibles.

Par la suite, Mack [Mack, 1969, Mack, 1984] a développé une théorie plus complète pour les instabilités non-visqueuses de couches limites compressibles. D'après ses travaux, il est possible de définir le nombre de Mach relatif local  $\hat{M}$  qui s'écrit :

$$\hat{M} = \frac{\bar{u} - c_\varphi}{a} = M - \frac{c_\varphi}{a}, \quad (1.11)$$

où  $M$  et  $a$  sont respectivement le nombre de Mach et la célérité du son locaux. Les perturbations sont dites localement subsoniques si  $\hat{M}^2 < 1$ , localement soniques si  $\hat{M}^2 = 1$  et localement supersoniques si  $\hat{M}^2 > 1$ . Si une onde est localement supersonique, alors la nature mathématique des équations de stabilité est modifiée et il existe une infinité de modes instables (c'est-à-dire que le problème aux valeurs propres admet une infinité de solutions neutres [Ferrier, 2008]). Le premier de ces modes constitue l'équivalent compressible du mode TS, mais les modes supplémentaires n'ont pas d'équivalent en régime incompressible. Le premier de ces modes supplémentaires, que l'on nomme second mode de Mack, est le plus instable. Il devient le mode dominant menant à la transition laminaire-turbulent lorsque le nombre de Mach augmente, et son maximum d'amplification est atteint pour  $M = 4.5$ . Plusieurs différences permettent alors de distinguer ces deux modes : la première concerne la plage de fréquences, qui est plus haute dans le cas du second mode que dans le cas du premier mode (une dizaine de kHz contre une centaine de kHz, voire de l'ordre du MHz [Ferrier, 2008]). De plus, le second mode est le plus instable pour les perturbations 2D (avec un angle  $\Psi \approx 0^\circ$ ), alors que le premier est le plus instable pour les perturbations 3D (mode oblique avec un angle  $\Psi$  compris entre  $50$  et  $70^\circ$  selon le nombre de Mach). En outre, si le premier mode possède une nature tourbillonnaire, le second est de nature acoustique [Mack, 1990]. Enfin, la température de paroi semble jouer un rôle important sur la stabilisation de ces modes. En effet, contrairement au premier mode, le second mode tend à se stabiliser par réchauffement de la paroi. Cet effet de la température de paroi a été étudié par [Vignau, 1989, Özgen et Kırçali, 2008]. Le second mode de Mack a notamment été observé lors de plusieurs expériences réalisées en soufflerie par [Demetriades, 1974, Kendall, 1975, Stetson et Kimmel, 1992].

*Remarque 2.* Une revue détaillée des différentes instabilités de couches limites bidimensionnelles et tridimensionnelles a été réalisée par [Özgen et Kırçali, 2008] pour des valeurs du nombre de Mach comprises entre 0 et 10.

#### 1.1.2.4 Crossflow

Dans le cas des couches limites tridimensionnelles (par exemple, sur les ailes en flèche d'un avion), un point d'inflexion étant toujours présent dans la vitesse transversale  $\bar{w}$  de l'écoulement de base, une instabilité inflexionnelle se produit dans des régions où la vitesse transversale augmente rapidement [Arnal et Casalis, 2000]. L'étude de la stabilité de ces ondes transversales, ou *crossflow*, peut être réalisée de la même manière que pour les ondes TS. Ce type d'instabilités ne sera pas étudié dans le cadre de cette thèse et n'est donc pas plus détaillé ici.

### 1.1.3 Problématique des perturbations optimales

Dans le cas de certains écoulements comme la convection de Rayleigh-Bénard ou l'écoulement de Taylor-Couette, la prévision basée sur l'analyse des valeurs propres est en adéquation avec les expériences réalisées. Cependant, dans certaines expériences, il a été montré que les nombres de Reynolds critiques sont inférieurs à ceux calculés par une analyse de stabilité linéaire [Vermeersch, 2009]. En effet, par exemple, la transition de l'écoulement de Poiseuille plan se produit pour un nombre de Reynolds critique plus faible que celui obtenu par analyse des valeurs propres ( $Re_c \approx 1000$  au lieu de 5772). De même, pour l'écoulement de Couette plan, inconditionnellement stable selon les études de stabilité linéaire, l'expérience a montré un nombre de Reynolds critique au-delà duquel la transition peut être observée. Pour mieux comprendre ce type de phénomène, la stabilité linéaire n'est plus suffisante, et il est alors nécessaire d'introduire le concept de stabilité multimodale et de perturbations optimales [Vermeersch, 2009].

#### 1.1.3.1 Phénomène de croissance transitoire

Ces différences observées entre la théorie et l'expérience peuvent s'expliquer par le phénomène de croissance transitoire (pouvant être spatiale ou temporelle) ou de croissance algébrique (de l'anglais *transient growth* ou *algebraic growth*) de l'énergie des perturbations. Il est aujourd'hui avéré que ces croissances transitoires proviennent du couplage entre les modes d'Orr-Sommerfeld (OS) légèrement amortis et très obliques, et de Squire. Cela peut alors conduire, à court terme, à une amplification supérieure à la croissance exponentielle d'un mode unique. À long terme, la croissance exponentielle reprend le dessus sur la croissance algébrique qui est amortie. Il a été montré que ce processus d'amplification linéaire provenait de la non-normalité des opérateurs [Trefethen, 1991, Schmid et Henningson, 2001, Reshotko, 2001] : l'opérateur OS et son homologue ne sont pas auto-adjoints, ce qui implique que leurs fonctions propres ne sont pas strictement orthogonales [Zuccher *et al.*, 2006b]. Cela conduit alors à des interactions possibles entre plusieurs modes pouvant entraîner une augmentation significative de l'énergie des perturbations.

La première analyse de perturbations multimodales a été réalisée dans le cas d'un écoulement non visqueux par [Ellingsen et Palm, 1975]. Ils ont étudié l'évolution d'une perturbation transversale dans un écoulement cisailé et ont montré l'apparition de perturbations de vitesse longitudinale, qui peuvent croître et évoluer en stries (*streaks*) haute et basse vitesse alternées dans le sens transverse de l'écoulement. Ces stries sont aussi appelées modes de Klebanoff. Ce type de phénomène de croissance a été nommé effet "lift-up" [Landahl, 1980]. Une transition précoce peut alors être déclenchée, il s'agit de la transition Bypass d'après [Morkovin *et al.*, 1994], signifiant que le processus d'amplification linéaire du mode le plus instable (transition naturelle induite par le mode TS) peut être "contourné".

#### 1.1.3.2 Perturbations optimales

L'analyse de stabilité linéaire ne se concentrant que sur l'amplification du mode le plus instable, il est nécessaire d'introduire une analyse multimodale permettant d'étudier plus précisément le phénomène de croissance transitoire, et ainsi de prendre en compte les interactions entre les modes non-normaux [Lucas, 2014]. En considérant un écoulement évolutif, l'objectif recherché est alors de calculer la perturbation optimale [Farrell et Moore, 1992, Butler et Farrell, 1992]. Ce terme a d'abord été introduit par [Farrell, 1988], et fait référence à la perturbation initiale qui produit l'amplification maximale (ou le gain maximal) à l'intérieur de la couche limite ; le gain étant généralement défini comme le rapport de l'énergie cinétique finale sur l'énergie cinétique initiale.

La croissance spatiale de perturbations optimales a été étudiée pour la première fois dans les couches limites de Blasius par [Andersson *et al.*, 1999, Luchini, 2000], qui ont inclus les effets non parallèles. Il a été montré par [Andersson *et al.*, 1999, Luchini, 2000, Tumin et Reshotko, 2001] que la perturbation d'entrée optimale était composée de tourbillons longitudinaux stationnaires, alors que le champ de vitesse induit est dominé par des stries se propageant dans le sens de l'écoulement. Par exemple, pour le cas d'une couche limite incompressible se développant sur plaque plane, le maximum d'amplification a lieu en régime stationnaire ( $\omega = 0$ ) et pour une valeur du nombre d'onde transverse adimensionné égal à  $\beta = 0.45$  [Biau, 2006]. Pour le problème spatial, [Zuccher *et al.*, 2006a] ont calculé les perturbations obtenues dans le cas non linéaire.

D'autres études ont été menées dans le cas d'écoulements de couches limites compressibles. Par exemple, [Hanifi *et al.*, 1996, Hanifi et Henningson, 1998] ont réalisé l'analyse temporelle et [Reshotko et Tumin, 2000, Tumin et Reshotko, 2001, Tumin et Reshotko, 2004] l'analyse spatiale d'un phénomène de croissance transitoire avec une hypothèse d'écoulement parallèle. Par la suite, [Tumin et Reshotko, 2003, Zuccher *et al.*, 2006b] ont développé un modèle pour l'analyse des croissances transitoires incluant les effets non parallèles d'une couche limite compressible sur plaque plane. Ces derniers ont confirmé la formation dans la couche limite de stries de vitesse et de température, et ont également montré l'effet significatif de la température de paroi à la fois sur la structure et sur l'amplitude des stries. Dans des thèses réalisées à l'ONERA, [Vermeersch, 2009, Lucas, 2014] ont aussi étudié les croissances spatiales optimales pour les couches limites compressibles.

Enfin, l'influence du choix de la norme sur les résultats de perturbations optimales, et qui permet de déterminer la quantité que l'on cherche à maximiser, a été étudiée dans diverses publications. [Andersson *et al.*, 1999] ont par exemple choisi de maximiser une norme d'énergie complète incluant toutes les composantes de vitesse pour les couches limites incompressibles, tandis que [Luchini, 2000] n'a considéré que la composante axiale. De même, le choix de la condition initiale, correspondant au choix de la norme d'entrée, peut également impacter le résultat obtenu. En régime incompressible, plusieurs choix sont possibles : [Andersson *et al.*, 1999] ont considéré la norme énergétique de l'entrée totale alors que [Luchini, 2000] a seulement pris en compte les composantes normale et transverse de la vitesse. Dans [Andersson *et al.*, 1999], les normes d'entrée et de sortie dépendent toutes les deux du nombre de Reynolds  $Re$ . En passant à la limite  $Re \rightarrow \infty$  (en pratique, cela est obtenu pour  $Re > 10^4$  [Zuccher *et al.*, 2006b]), les normes coïncident avec celles obtenues par [Luchini, 2000]. Pour les écoulements compressibles, il est possible de considérer la norme de l'énergie cinétique ou encore la norme de Chu [Chu, 1965], aussi appelée norme de Mack. Cette dernière est couramment utilisée afin d'étudier le comportement non modal des écoulements compressibles [Hanifi *et al.*, 1996, Tumin et Reshotko, 2001, Paredes *et al.*, 2016] et contient l'énergie cinétique des perturbations ainsi qu'un terme positif lié aux perturbations thermodynamiques [Bugeat *et al.*, 2019]. La norme de Chu est donc nécessairement supérieure ou égale à la norme de l'énergie cinétique. Ces différentes normes seront vues à nouveau dans le Chapitre 5.

## 1.2 Approches modales

### 1.2.1 Théorie de la stabilité locale (LST)

La théorie de la stabilité linéaire locale ou *local stability theory* (LST) nécessite l'introduction de petites perturbations dans les équations de Navier-Stokes qui sont ensuite linéarisées (seuls les termes d'ordre 1 sont alors gardés). On suppose que les quantités de l'écoulement de base sont des fonctions ne dépendant que de la variable  $y$ ; ceci constitue l'hypothèse

d'écoulement parallèle. L'écoulement de base s'écrit alors, avec  $\bar{v} = 0$  :

$$\bar{\mathbf{q}}(y) = [\bar{u}(y), 0, \bar{w}(y), \bar{p}(y)]^T. \quad (1.12)$$

Les perturbations  $\mathbf{q}'$  peuvent alors être décomposées comme des modes normaux :

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)], \quad (1.13)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement les nombres d'onde axial et transverse, et  $\omega$  est la fréquence angulaire et  $\tilde{\mathbf{q}}(y)$  est la fonction d'amplitude complexe donnant l'évolution de la perturbation dans la couche limite.

En remplaçant la décomposition en modes normaux (1.13) dans les équations de Navier-Stokes linéarisées et en éliminant les composantes de la vitesse  $\tilde{u}$  et  $\tilde{w}$ , après simplification, on obtient l'équation d'Orr-Sommerfeld qui permet d'étudier la stabilité d'un écoulement incompressible bidimensionnel parallèle :

$$(D_y^2 + \alpha^2)^2 \tilde{v} - i\text{Re}_L [(\alpha \bar{u} - \omega)(D_y^2 - \alpha^2) - \alpha D_y^2 \bar{u}] \tilde{v} = 0, \quad D_y = \frac{d}{dy}. \quad (1.14)$$

Numériquement, la résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld représente un problème aux valeurs propres temporel ou spatial : quand l'écoulement de base est précisé, des solutions non triviales existent seulement pour des combinaisons particulières des nombres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  et  $\text{Re}_L$  qui sont liés par une relation de dispersion complexe :

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta, \omega, \text{Re}_L) = 0. \quad (1.15)$$

Il existe alors deux approches de stabilité locale possibles :

- La théorie de la stabilité temporelle :  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels.  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  est alors complexe, avec une partie réelle représentant la pulsation et la partie imaginaire représentant la croissance temporelle du mode ;
- La théorie de la stabilité spatiale :  $\omega$  est réel, alors que  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$  et  $\beta = \beta_r + i\beta_i$  sont complexes. Le vecteur d'onde peut être défini comme  $\mathbf{k} = (\alpha_r, \beta_r)$  tandis que le vecteur d'amplification  $(-\alpha_i, -\beta_i)$  désigne la croissance spatiale dans les directions  $x$  et  $z$ , respectivement.

Si ces deux approches sont équivalentes en utilisant la transformation de Gaster [Gaster, 1962], nous nous concentrerons uniquement sur la théorie de la stabilité spatiale, plus conforme à l'étude des couches limites. Pour des écoulements bidimensionnels incompressibles, le théorème de Squire [Squire, 1933] permet de restreindre l'analyse à des perturbations bidimensionnelles ( $\beta = 0$ ). S'il y a présence d'un mode instable tridimensionnel ( $\beta \neq 0$ ) à un nombre de Reynolds donné, ce théorème statue qu'il existe un mode instable bidimensionnel à un nombre de Reynolds moins élevé.

Pour  $\beta = 0$ , la perturbation (1.13) devient alors :

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(y) \exp(-\alpha_i x) \exp[i(\alpha_r x - \omega t)], \quad (1.16)$$

Il y a alors trois possibilités : si  $\alpha_i > 0$  pour toutes les valeurs propres, alors l'écoulement est stable. En revanche, si au moins un  $\alpha_i$  est négatif, alors l'écoulement est instable. La courbe pour laquelle  $\alpha_i = 0$  délimite alors le domaine instable est appelée courbe neutre.

L'amplitude des perturbations  $A$  est liée au coefficient d'amplification par la relation suivante :

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = -\alpha_i. \quad (1.17)$$

Si l'on considère une perturbation se propageant à une fréquence donnée  $f = \omega/2\pi$ , le taux d'amplification total s'écrit :

$$N_f(x) = \ln(A/A_0) = \int_{x_0}^x -\alpha_i(\xi) d\xi, \quad (1.18)$$

où  $x_0$  est l'abscisse initiale à partir de laquelle l'onde s'amplifie et  $A_0 = A(x_0)$ .

En calculant ce taux d'amplification total pour une série de fréquences, il est possible de définir le facteur  $N$  enveloppe :

$$N(x) = \max_f [N_f(x)]. \quad (1.19)$$

[Van Ingen, 2008] a développé la méthode du  $e^N$  pour des écoulements à basse vitesse. Dans cette méthode, la transition laminaire-turbulent a lieu lorsque le facteur  $N$  atteint une valeur prédéfinie notée  $N_T$ , en général autour de 7-10, ce qui signifie que l'onde la plus instable localement est amplifiée d'un facteur  $e^7 - e^{10}$ . Pour des écoulements bidimensionnels à faible vitesse, [Mack, 1977] a proposé une relation reliant le facteur  $N_T$  critique au niveau de turbulence  $Tu$  de l'écoulement amont :

$$N_T = -8.43 - 2.4 \ln(Tu), \quad \text{pour } 10^{-3} < Tu < 10^{-2}. \quad (1.20)$$

### 1.2.2 Approche non locale : équations de stabilité parabolisées (PSE)

Afin de prendre en compte les effets non parallèles des couches limites, [Herbert, 1997] a proposé une nouvelle formulation pour l'analyse de stabilité, connue sous le nom d'équations de stabilité parabolisées ou *parabolized stability equations* (PSE). Cette méthode permet ainsi de paraboliser les équations de perturbations linéarisées. Les quantités qui étaient considérées comme locales (c'est-à-dire indépendantes de la direction  $x$ ) dans l'approche LST sont maintenant des fonctions de  $x$  faiblement variables.

Les perturbations  $\mathbf{q}'$  peuvent être décomposées en une fonction de forme  $\tilde{\mathbf{q}}$  faiblement variable en  $x$  et une fonction de phase  $\Theta$  oscillant rapidement en  $x$  de la manière suivante [Airiau, 1994, Lucas, 2014] :

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(x, y) \exp[i\Theta(x, z, t)], \quad (1.21a)$$

$$\Theta(x, z, t) = \int_{x_0}^x \alpha(\xi) d\xi + \beta z - \omega t. \quad (1.21b)$$

Cette décomposition est ensuite introduite dans les équations de Navier-Stokes linéarisées. Il reste alors à déterminer la fonction de forme ainsi que le nombre d'onde axial  $\alpha$ . Le système d'équations aux dérivées partielles ainsi obtenu peut être résolu en utilisant un algorithme de marche en  $x$  permettant de calculer la fonction de forme pour un  $\alpha$  fixé.

En théorie parallèle, le nombre d'onde axial  $\alpha$  est déterminé par la relation de dispersion. En PSE, il n'est pas possible ni souhaité d'obtenir un problème aux valeurs propres fournissant une relation de dispersion [Airiau, 1994]. D'après la décomposition (1.21a), on remarque qu'il y a à la fois une dépendance en  $x$  de la fonction de forme  $\tilde{\mathbf{q}}$  et du terme exponentiel. L'idée proposée par [Herbert et Bertolotti, 1987] a donc été d'ajouter une relation de fermeture appelée condition de normalisation permettant de déterminer le nombre d'onde axial.

En utilisant la décomposition en modes normaux (1.13) de l'approche LST, le nombre d'onde axial peut être obtenu de la manière suivante :

$$\alpha(x) = -i \frac{\partial}{\partial x} (\ln(\mathbf{q}')) = -i \frac{1}{\mathbf{q}'} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial x}. \quad (1.22)$$

De la même manière qu'en théorie locale, en utilisant l'équation (1.21a), un nombre d'onde  $\tilde{\alpha}$  peut être défini par :

$$\tilde{\alpha}(x) = -i \frac{\partial}{\partial x} (\ln(\mathbf{q}')) = \alpha(x) - i \frac{1}{\tilde{\mathbf{q}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x}. \quad (1.23)$$

D'après l'équation (1.23), la variation de perturbation totale dans la direction  $x$  est décomposée en deux parties : la première est absorbée par la fonction de phase à travers le nombre d'onde  $\alpha$  et la seconde est absorbée par la fonction de forme à travers le terme  $(i/\tilde{\mathbf{q}})\partial\tilde{\mathbf{q}}/\partial x$ .

On note que l'équation (1.22) est indépendante de  $y$ , ce qui n'est pas le cas de l'équation (1.23). D'après [Airiau, 1994], une quantité ne dépendant pas de  $y$ , équivalente au nombre d'onde axial de la théorie locale, peut être obtenue à partir de (1.23) en multipliant l'équation par  $\tilde{\mathbf{q}}^H \tilde{\mathbf{q}}$ , en l'intégrant ensuite sur  $y$  et en divisant par l'intégrale de  $\tilde{\mathbf{q}}^H \hat{\mathbf{q}}$  :

$$\frac{\int_0^{+\infty} \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{q}}^H \tilde{\mathbf{q}} dy}{\int_0^{+\infty} \tilde{\mathbf{q}}^H \tilde{\mathbf{q}} dy} = \alpha(x) - \frac{\int_0^{+\infty} \tilde{\mathbf{q}}^H (\partial \tilde{\mathbf{q}} / \partial x) dy}{\int_0^{+\infty} \tilde{\mathbf{q}}^H \tilde{\mathbf{q}} dy}. \quad (1.24)$$

La condition de normalisation s'écrit alors :

$$\int_0^{+\infty} \tilde{\mathbf{q}}^H \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} dy = 0, \quad (1.25)$$

où  $H$  dénote la transconjuguée. Cette condition permet d'assurer à la fois que la croissance et la variation périodique de la perturbation sont principalement absorbées par la fonction de phase. Celle-ci dépend du choix de l'amplitude de la perturbation choisie pour déterminer le taux d'amplification en LST. Cette condition de normalisation a cependant aussi pour effet de restreindre les PSE à l'étude d'un seul nombre d'onde correspondant en général au mode dominant, limitant ainsi leur domaine d'application au cas où les interactions entre modes de même fréquence n'apparaissent pas ou sont sans impact sur la solution finale.

L'équation (1.24) peut alors se réécrire sous la forme suivante :

$$\alpha^*(x) = \alpha(x) - i \frac{\mathcal{N}}{A^2}, \quad (1.26)$$

avec  $\alpha^*$  le nombre d'onde axial recherché,  $\mathcal{N}$  la condition de normalisation et  $A$  l'amplitude des perturbations associées. Une liste d'amplitudes possibles ainsi que les conditions de normalisation associées sont données dans [Airiau, 1994].

Comme évoqué plus haut, les PSE permettent de résoudre les équations grâce à une marche en espace en  $x$ , initialisée en  $x_0$  par une solution connue (en utilisant une analyse de stabilité locale par exemple). Des problèmes de stabilité ont cependant été rapidement observés après l'introduction des PSE en raison d'un pas trop petit pour la marche en  $x$  [Chang *et al.*, 1991]. Ce problème de stabilité est dû au caractère mal posé des PSE lorsqu'elles sont résolues comme un problème spatial de valeur initiale [Haj-Hariri, 1994, Li et Malik, 1996, Li et Malik, 1997]. L'opérateur PSE n'est pas parabolique et contient en effet des modes se propageant vers l'amont, ce qui nous oblige en théorie à imposer une condition en entrée du domaine et une condition en sortie. Cette solution n'étant pas compatible avec la marche en espace, des méthodes de régularisation [Andersson *et al.*, 1998, Towne et Colonius, 2013, Towne *et al.*, 2019] ont été développées afin d'éviter ce problème d'instabilité.

### 1.2.3 Méthodes de *mode-matching* et de Wiener-Hopf

Dans cette sous-section, nous évoquons les méthodes permettant le calcul de la propagation acoustique dans les conduits à partir d'une résolution modale [Pascal, 2013]. Ces méthodes sont notamment utilisées dans le cas des conduits contenant des discontinuités comme

les liners acoustiques (modélisés par une condition d'impédance acoustique), qui seront traités dans le Chapitre 3.

- La méthode de *mode-matching* : cette méthode est couramment utilisée pour prévoir la propagation du son dans les conduits et les guides d'ondes présentant des discontinuités. Le principe de la méthode repose sur une décomposition modale de la pression acoustique de part et d'autre de la discontinuité, tandis qu'au niveau de la discontinuité, on impose une condition de continuité de la vitesse axiale et de la pression (ou encore de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement axiale) des deux décompositions modales obtenues [Gabard et Astley, 2008, Gabard, 2010]. Cette méthode présente cependant l'inconvénient de ne s'appliquer qu'à des conduits ne possédant aucune variation dans le sens de propagation. En outre, celle-ci ne permet pas de prendre en compte les ondes de surface [Rienstra, 2003] (et donc en particulier les instabilités hydrodynamiques) qui peuvent apparaître en présence d'un écoulement cisailé (cf. Chapitre 3).
- La méthode de Wiener-Hopf<sup>1</sup> : cette méthode permet de résoudre de manière analytique certaines équations intégrales et équations aux dérivées partielles possédant des conditions aux limites discontinues. Cette technique utilise des propriétés d'analyse complexe des fonctions de transformation telles que la transformation de Fourier. La méthode est détaillée dans [Noble et Weiss, 1959, Crighton, 1977] et nous n'en donnons ici qu'un aperçu. On considère une configuration dans le plan  $(x, y)$ , invariante pour  $x < 0$  et pour  $x > 0$ , possédant une discontinuité en  $x = 0$ . Il est possible de définir les transformées de Fourier partielles en espace, pour les données du problème, par exemple la pression, de la manière suivante :

$$\begin{cases} P^+(\alpha) = \int_0^{\infty} p(x)e^{i\alpha x} dx, \\ P^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 p(x)e^{i\alpha x} dx, \end{cases} \quad (1.27)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{C}$  le nombre d'onde,  $P^+$  une fonction analytique dans  $\mathbb{C}^+$  le demi-plan supérieur de  $\mathbb{C}$  et  $P^-$  une fonction analytique dans  $\mathbb{C}^-$  le demi-plan inférieur de  $\mathbb{C}$ . Par intégration des équations (1.27) suivant  $x$ , il est possible d'écrire la formule suivante :

$$K(\alpha)P^+(\alpha) + P^-(\alpha) = C(\alpha), \quad (1.28)$$

avec  $K(\alpha)$  le noyau de l'équation de Wiener-Hopf et  $C(\alpha)$  une fonction analytique de  $\mathbb{C}$ . La prochaine étape consiste à factoriser cette fonction noyau (factorisation de Wiener-Hopf) de la manière suivante :

$$K(\alpha) = K^+(\alpha)K^-(\alpha), \quad (1.29)$$

où  $K^+$  et  $K^-$  sont respectivement deux fonctions analytiques de  $\mathbb{C}^+$  et  $\mathbb{C}^-$ . En injectant cette factorisation dans l'équation (1.28), il est possible d'écrire :

$$K^+(\alpha)P^+(\alpha) + \frac{P^-(\alpha)}{K^-(\alpha)} = \frac{C(\alpha)}{K^-(\alpha)}. \quad (1.30)$$

Cette dernière équation fait intervenir un premier terme analytique dans  $\mathbb{C}^+$ , un deuxième analytique dans  $\mathbb{C}^-$ , et un dernier terme qu'on peut factoriser en la somme d'une fonction analytique dans  $\mathbb{C}^+$  et d'une fonction analytique dans  $\mathbb{C}^-$  :

$$\frac{C(\alpha)}{K^-(\alpha)} = L^+(\alpha) + L^-(\alpha). \quad (1.31)$$

---

1. La méthode tire son nom des deux mathématiciens américains Wiener et Hopf qui l'ont mise en place en 1931.

Finalement, en remplaçant dans l'équation (1.30), on obtient une égalité entre un terme analytique dans  $\mathbb{C}^+$  et un terme analytique dans  $\mathbb{C}^-$  :

$$K^+(\alpha)P^+(\alpha) - L^+(\alpha) = L^-(\alpha) - \frac{P^-(\alpha)}{K^-(\alpha)}. \quad (1.32)$$

Par prolongement analytique, il est alors possible de définir une fonction  $E(\alpha)$ , analytique dans  $\mathbb{C}$ . Cette fonction possède au plus une croissance algébrique à l'infini dans le plan complexe tout entier. D'après le théorème de Liouville étendu, cette fonction est un polynôme constant. Finalement, par transformée de Fourier inverse, il est possible d'obtenir la solution du problème initial. Cette méthode permet de prendre en compte le caractère non-infini d'un conduit afin de calculer le bruit rayonné en champ lointain par l'embouchure d'un conduit [Koch, 1977]. Celle-ci étant analytique, elle est difficile, voire impossible à mettre en œuvre dans le cas des équations d'Euler et de Navier-Stokes, et n'est utilisée que dans le cas des équations de Helmholtz et Helmholtz convectée.

### 1.2.4 Analyse de la résolvante globale

Les analyses de résolvante dans le domaine fréquentiel nous renseignent, pour les écoulements de base laminares, sur les forçages et les réponses dans les scénarios de transition les plus défavorables [Monokrousos *et al.*, 2010], alors que dans le cas d'écoulements de base turbulents, elles sont utiles pour caractériser les mécanismes d'amplification linéaire conduisant à des structures cohérentes. Dans les deux cas, nous cherchons à maximiser une quantité scalaire prescrite (en général, une norme) qui représente le gain entre les entrées et les sorties les plus défavorables. S'il existe des variations dans les approches utilisées, le calcul typique consiste à :

1. Discrétiser le problème continu de l'écoulement afin d'obtenir un problème de dimension finie ;
2. Représenter la relation linéaire entre les entrées et les sorties sous forme matricielle (opérateur de résolvante) ;
3. Trouver un ou plusieurs couples valeurs/vecteurs singuliers de l'opérateur de résolvante via la décomposition en valeurs singulières (SVD).

#### 1.2.4.1 Description de la méthode

En pratique, l'opérateur de résolvante est obtenu à partir des équations de Navier-Stokes linéarisées (LNS) et constitue une fonction de transfert entre les entrées et sorties qui nous intéressent.

Soit la variable d'état  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ . Les équations de Navier-Stokes, après discrétisation par une méthode numérique adaptée, peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{N}(\mathbf{q}), \quad (1.33)$$

où  $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est l'opérateur différentiel non-linéaire des équations de Navier-Stokes.

La décomposition de Reynolds sur la variable  $\mathbf{q}$  donne :

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \bar{\mathbf{q}}(x, y) + \mathbf{q}'(x, y, t), \quad (1.34)$$

où  $\bar{\mathbf{q}}(x, y)$  représente l'écoulement de base stationnaire et  $\mathbf{q}'(x, y, t)$  le vecteur des perturbations.

En remplaçant dans l'équation (1.33), les équations de Navier-Stokes peuvent se réécrire :

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} = \mathcal{J} \mathbf{q}' + \mathbf{f}', \quad (1.35)$$

où  $\mathcal{J} = \partial \mathcal{N} / \partial \mathbf{q}_{|\bar{\mathbf{q}}}$   $\in \mathbb{R}^{m \times m}$  est le Jacobien de  $\mathcal{N}$  évalué en  $\bar{\mathbf{q}}$  et  $\mathbf{f}'$  contient les termes non-linéaires ainsi que les forçages externes. En réalisant une transformée de Fourier en temps et en  $z$  (la direction  $z$  étant homogène) sur les variables  $\mathbf{q}'$  et  $\mathbf{f}'$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{q}'(x, y, t) &= \tilde{\mathbf{q}}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ \mathbf{f}'(x, y, t) &= \tilde{\mathbf{f}}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)},\end{aligned}\tag{1.36}$$

où  $\omega$  est la fréquence et  $\beta$  le nombre d'onde transverse.

L'équation (1.34) peut alors se réécrire :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathcal{R} \tilde{\mathbf{f}},\tag{1.37}$$

où  $\mathcal{R} = (-i\omega \mathcal{I} + \mathcal{J})^{-1} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  est appelé l'opérateur de résolvante globale ( $\mathcal{I}$  étant l'opérateur identité) qui dépend de la fréquence  $\omega$  fixée. Le gain optimal peut alors être introduit et est défini comme le rapport maximum entre l'énergie des perturbations et celle du forçage :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\tilde{\mathbf{f}} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}\|_M^2}{\|\tilde{\mathbf{f}}\|_N^2} = \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}_{max}\|_M^2}{\|\tilde{\mathbf{f}}_{max}\|_N^2},\tag{1.38}$$

où  $\tilde{\mathbf{q}}_{max} = \mathcal{R} \tilde{\mathbf{f}}_{max}$  d'après (1.37) et l'on a :

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{q}}\|_M^2 &= \langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle_M = \tilde{\mathbf{q}}^H \mathbf{Q}_M \tilde{\mathbf{q}}, \\ \|\tilde{\mathbf{f}}\|_N^2 &= \langle \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}} \rangle_N = \tilde{\mathbf{f}}^H \mathbf{Q}_N \tilde{\mathbf{f}}.\end{aligned}\tag{1.39}$$

où  $H$  est l'opérateur conjugué transposé.

En utilisant l'équation (1.37), on a :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\tilde{\mathbf{f}} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathcal{R} \tilde{\mathbf{f}}\|_M^2}{\|\tilde{\mathbf{f}}\|_N^2} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}^H \mathcal{R}^H \mathbf{Q}_M \mathcal{R} \tilde{\mathbf{f}}}{\tilde{\mathbf{f}}^H \mathbf{Q}_N \tilde{\mathbf{f}}}.\tag{1.40}$$

En posant  $\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{Q}_N^{1/2} \tilde{\mathbf{f}}$  et  $\mathcal{R}_{M,N} = \mathbf{Q}_M^{1/2} \mathcal{R} \mathbf{Q}_N^{-1/2}$  une forme pondérée de l'opérateur de résolvante globale  $\mathcal{R}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_{max}^2 &= \max_{\tilde{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}} \frac{\tilde{\mathbf{h}}^H \mathcal{R}_{M,N}^H \mathcal{R}_{M,N} \tilde{\mathbf{h}}}{\tilde{\mathbf{h}}^H \tilde{\mathbf{h}}} \\ &= \lambda_{max}(\mathcal{R}_{M,N}^H \mathcal{R}_{M,N}) \\ &= \sigma_{max}^2(\mathcal{R}_{M,N}).\end{aligned}\tag{1.41}$$

$\tilde{\mathbf{h}}_{max}$  est donc le mode associé à la valeur propre  $\lambda_{max}(\mathcal{R}_{M,N}^H \mathcal{R}_{M,N})$  et l'on détermine ainsi  $\tilde{\mathbf{f}}_{max}$  grâce à la formule suivante :

$$\tilde{\mathbf{f}}_{max} = \mathbf{Q}_N^{-1/2} \tilde{\mathbf{h}}_{max}.\tag{1.42}$$

*Remarque 3.* La même chose peut être réalisée avec une condition d'entrée et un forçage nul. Dans ce cas, une relation entre  $\tilde{\mathbf{q}}_{out}$  et  $\tilde{\mathbf{q}}_{in}$  est considérée et il faut non plus déterminer le forçage optimal, mais la condition d'entrée optimale.

### 1.2.4.2 Méthodes de calcul

Dans cette sous-section, nous allons voir quelques méthodes de calcul classiques nous permettant d'obtenir le couple gain-perturbation optimale  $(\sigma_{max}, \tilde{\mathbf{f}}_{max})$ .

**Méthodes de type Singular Value Decomposition (SVD)** Dans le cadre de cette méthode, les gains optimaux et les forçages sont calculés en réalisant la décomposition en valeurs singulières ou *Singular Value Decomposition* (SVD) de l'opérateur de résolvante :

$$\mathcal{R}_{M,N} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H, \quad (1.43)$$

où  $\mathbf{V}^H$  est la conjuguée transposée de  $\mathbf{V}$ .

Les valeurs singulières rangées par ordre croissant sont contenues dans la matrice semi-définie positive  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ , et donnent ainsi la racine carrée des gains optimaux entre les modes d'entrée et de sortie définis par les vecteurs singuliers droite et gauche, contenus respectivement dans les colonnes des matrices orthogonales  $\mathbf{V} = (\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_m)$  et  $\mathbf{U} = (\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_m)$ .

*Remarque 4.* À la place de la SVD de l'opérateur de résolvante, on peut également réaliser une décomposition en valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{R}_{M,N}^H \mathcal{R}_{M,N}$ .

Le coût de la SVD de l'opérateur de résolvante est en  $\mathcal{O}(m^3)$  avec  $m$  le degré de liberté du système linéaire à résoudre, mais quelques améliorations de cette approche sont cependant possibles :

- Pour éviter de calculer toute la SVD, des méthodes de Krylov [Lehoucq *et al.*, 1998, Stewart, 2002] peuvent être envisagées afin d'accéder uniquement à l'information spectrale. Ce type d'approche est utilisé par exemple dans [Martini *et al.*, 2021] où des calculs matrices-free du produit matrice-vecteur sont proposés avec l'utilisation d'une approche temporelle ou stationnaire.
- Dans [Herrmann *et al.*, 2021], une méthode basée sur un algorithme de type data-driven est appliquée à l'analyse de résolvante afin d'éviter d'utiliser des solveurs numériques haute fidélité.
- [Moarref *et al.*, 2013] proposent une Randomized Singular Value Decomposition (RSVD) pour calculer les modes résolvants dans le cas d'un écoulement turbulent dans un canal. La méthode SVD aléatoire permet d'économiser beaucoup de temps de calcul pour l'approximation des modes principaux dans les grands systèmes. Une étude plus approfondie a également été publiée par Ribeiro *et al.* [Ribeiro *et al.*, 2020] et montre des améliorations significatives pour l'application des RSVD pour l'analyse de résolvante avec des résultats prometteurs dans les systèmes de grande dimension ainsi qu'une réduction importante des coûts de calcul. D'autres [Monokrousos *et al.*, 2010, Farghadan *et al.*, 2021] ont également exploité les méthodes temporelles où le coût principal de calcul réside dans l'intégration de l'équation linéaire directe et adjointe dans le domaine temporel afin d'appliquer l'opérateur de résolvante et son adjoint.

**Méthodes d'optimisation** On cherche ici à maximiser une fonction coût  $\mathcal{J}$  définie par :

$$\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{q}}) := \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}\|_M^2}{\|\tilde{\mathbf{f}}\|_N^2} \quad (1.44)$$

sous la contrainte que  $\tilde{\mathbf{q}}$  est une solution numérique du problème (1.37) avec  $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}^m$ . On remarque qu'on a donc  $\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \sigma^2$  où  $\sigma^2$  a été précédemment défini dans l'équation (1.38).

*Remarque 5.* Dans le cas où l'on ne recherche plus le forçage optimal, mais la condition d'entrée optimale  $\tilde{\mathbf{q}}_0$ , la fonction coût devient :

$$\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}_0) := \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}\|_M^2}{\|\tilde{\mathbf{q}}_0\|_N^2}. \quad (1.45)$$

Il est possible de réécrire le problème d'optimisation sous contrainte précédent sous la forme des multiplicateurs de Lagrange. On a alors :

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) := \mathcal{J}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{q}}) - \langle \boldsymbol{\lambda}, L\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{f}} \rangle, \quad (1.46)$$

où  $\mathcal{L}$  est le lagrangien,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente un produit scalaire quelconque dépendant du choix de la norme et  $L = -i\omega\mathcal{I} + \mathcal{J}$ .

Cette nouvelle écriture permet ainsi de passer d'un problème avec contrainte pour la fonction de coût  $\mathcal{J}$  à un problème d'optimisation sans contrainte pour le lagrangien  $\mathcal{L}$ . Les variables  $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{q}}$  et  $\boldsymbol{\lambda}$  sont alors obtenues en cherchant les points fixes du lagrangien. Pour ce faire, on fixe à zéro la différentielle de Gateaux du lagrangien  $d\mathcal{L}$  par rapport à une variation arbitraire de la variable considérée, par exemple  $\tilde{\mathbf{q}}$  :

$$d\mathcal{L}|_{\tilde{\mathbf{q}}}(\delta\tilde{\mathbf{q}}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{q}} + \varepsilon\delta\tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{q}})}{\varepsilon}. \quad (1.47)$$

En supposant  $\mathcal{L}$  différentiable au sens de Fréchet, le gradient du lagrangien calculé en  $\tilde{\mathbf{q}}$ , noté  $\nabla\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{q}})$ , s'écrit alors pour tout  $\delta\tilde{\mathbf{q}}$  :

$$\langle \nabla\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{q}}), \delta\tilde{\mathbf{q}} \rangle = d\mathcal{L}|_{\tilde{\mathbf{q}}}(\delta\tilde{\mathbf{q}}). \quad (1.48)$$

Dans notre cas, on doit donc avoir :

$$\langle \nabla\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{f}}), \delta\tilde{\mathbf{f}} \rangle + \langle \nabla\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{q}}), \delta\tilde{\mathbf{q}} \rangle + \langle \nabla\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}), \delta\boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \quad (1.49)$$

Cette condition est obtenue lorsque tous les termes sont nuls simultanément :

- la variation par rapport à la variable adjointe  $\boldsymbol{\lambda}$  nous redonne le problème direct à résoudre :

$$\langle \nabla\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}), \delta\boldsymbol{\lambda} \rangle = 0 \Rightarrow L\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{f}}. \quad (1.50)$$

- la variation par rapport à la variable  $\tilde{\mathbf{q}}$  donne le problème adjoint à résoudre :

$$\langle \nabla\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{q}}), \delta\tilde{\mathbf{q}} \rangle = \langle \nabla\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{q}}), \delta\tilde{\mathbf{q}} \rangle - \langle L^H\boldsymbol{\lambda}, \delta\tilde{\mathbf{q}} \rangle = 0 \Rightarrow L^H\boldsymbol{\lambda} = \frac{2\mathbf{Q}_M\tilde{\mathbf{q}}}{\tilde{\mathbf{f}}^H\mathbf{Q}_N\tilde{\mathbf{f}}}. \quad (1.51)$$

- la variation par rapport à la variable  $\tilde{\mathbf{f}}$  donne le nouveau terme de forçage à calculer :

$$\langle \nabla\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{f}}), \delta\tilde{\mathbf{f}} \rangle = \langle \nabla\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{f}}), \delta\tilde{\mathbf{f}} \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}, \delta\tilde{\mathbf{f}} \rangle = 0 \Rightarrow \frac{\tilde{\mathbf{f}}}{(\tilde{\mathbf{f}}^H\mathbf{Q}_N\tilde{\mathbf{f}})^2} = \frac{\mathbf{Q}_N^{-1}\boldsymbol{\lambda}}{2(\tilde{\mathbf{q}}^H\mathbf{Q}_M\tilde{\mathbf{q}})}. \quad (1.52)$$

La résolution des problèmes direct et adjoint, afin de calculer les perturbations optimales, se fait alors via l'utilisation d'un algorithme itératif. Plusieurs types d'algorithmes itératifs sont proposés dans la littérature :

- Un algorithme itératif entièrement dérivé du cadre discret, ce qui permet de simplifier la dérivation des équations adjointes et les conditions de couplage à l'entrée et à la sortie [Zuccher *et al.*, 2006b]. Ce type de méthode a été introduit pour la première fois par [Farrell et Moore, 1992] afin d'obtenir les perturbations qui croissent le plus vite dans les écoulements océaniques. La convergence de l'algorithme varie selon le type de norme utilisé : deux ou trois itérations pour la norme de [Luchini, 2000]; plus lente dans le cas de la norme énergétique totale.
- Un algorithme basé sur une méthode de puissance itérée augmentée d'une orthogonalisation de Gram-Schmidt, qui permet le calcul de modes multiples [Towne *et al.*, 2022]. Si cet algorithme est très simple à mettre en place, il peut être lent à converger, et certaines techniques peuvent être utilisées afin d'accélérer la convergence (méthode d'Arnoldi ou RSVD). Dans les exemples traités par [Towne *et al.*, 2022], seules quelques itérations sont cependant nécessaires.

- Un algorithme de gradient conjugué utilisé pour calculer la direction de descente dans [Guegan, 2007]. Ces méthodes d’optimisation basées sur le gradient sont très efficaces et applicables aux systèmes à grande échelle. La plupart des calculs convergent en moins de cinq itérations.

### 1.3 Approches de propagation de type One-Way

Dans cette section, différentes approches One-Way vont être présentées. La première approche, l’approche microlocale ou analytique (section 1.3.1) utilise la théorie des opérateurs pseudo-différentiels permettant la prise en compte des termes variables contenus dans les expressions des équations. La méthode développée par l’équipe de Tim Colonius au Cal-Tech (section 1.3.2), s’appuyant sur une discrétisation rapide, permet quant à elle d’éviter les complications liées au calcul analytique. Bien que les résultats obtenus par cette nouvelle approche soient convaincants, cette méthode reste soumise à l’hypothèse de faibles variations de l’écoulement dans le sens de propagation des ondes. Cette contrainte a néanmoins été levée dans le cadre de la thèse de Clément Rudel [Rudel, 2022, Rudel *et al.*, 2022], qui propose une version modifiée de cette approche One-Way pour les équations d’Euler linéarisées. En appliquant la condition aux limites non réfléchissante dans les deux directions (et non plus dans une seule), il est possible d’obtenir une approximation de la matrice de vecteurs propres en diagonalisant l’opérateur de façon entièrement numérique et le calcul des coefficients de la matrice de réfraction/réflexion s’en trouve alors facilité (section 1.3.3). C’est cette dernière approche qui servira de base à la construction de la méthode One-Way pour les équations de Navier-Stokes linéarisées (OWNS) dans le Chapitre 2.

#### 1.3.1 Approche One-Way microlocale

L’analyse microlocale introduite par Hörmander [Hörmander, 1994] représente un outil puissant dans le but de définir des approximations mathématiquement rigoureuses de solutions issues d’équations aux dérivées partielles. Cette approche se base sur l’étude des singularités des solutions en utilisant l’ensemble des fronts d’ondes. En pratique, les singularités sont doublement localisées : une première localisation autour d’un point et une deuxième à l’intérieur d’un cône de propagation dont l’angle dépend de la régularité de la solution. On détermine ainsi les rayons le long desquels s’effectue la propagation d’ondes grâce à ces positions et directions. De cette manière, il est possible d’exprimer en quel sens les ondes sont approchées lorsque l’on résout les équations One-Way obtenues par factorisation de l’opérateur de propagation (associé à une direction privilégiée).

##### 1.3.1.1 Opérateurs pseudo-différentiels

Nous allons évoquer ici brièvement les bases des opérateurs pseudo-différentiels ainsi que le calcul symbolique que l’on peut trouver plus en détail dans les différentes publications [Taylor, 1974, Hörmander, 1994, Alinhac et Gérard, 2007].

Nous nous plaçons ici dans  $\mathbb{R}^d$ . On rappelle que la transformée de Fourier est définie par l’expression suivante, pour  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$(\mathcal{F}\phi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) e^{-i\xi \cdot y} dy, \quad (1.53)$$

avec  $y, \xi \in \mathbb{R}^d$ , où  $\xi$  est la variable duale de  $y$ .

**Quantification** La *quantification* fait référence à la procédure mettant en correspondance une fonction de variables spatio-temporelles et de leurs associées de Fourier à un opérateur [Op't Root et Stolk, 2010]. On dit que  $P$  est un opérateur pseudo-différentiel s'il vérifie :

$$(P\phi)(y) := \text{Op}(p)\phi(y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} p(y, \xi) (\mathcal{F}\phi)(\xi) e^{i\xi \cdot y} d\xi, \quad (1.54)$$

où  $p$  est le symbole de l'opérateur  $P$ .

On rappelle qu'un multi-indice  $\alpha$  est un élément de  $\mathbb{N}^d$  avec  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  de longueur  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$  et que  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_d^{\alpha_d}$  avec  $\partial_i^{\alpha_i} = \partial^{\alpha_i} / \partial x_i^{\alpha_i}$ .

Un opérateur pseudo-différentiel est l'opérateur que l'on obtient avec la quantification gauche d'un symbole [Hörmander, 1994, Alinhac et Gérard, 2007]. Un symbole  $p$  d'ordre  $m \in \mathbb{R}$  est une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  d'une variable spatio-temporelle et de sa variable duale de Fourier, que l'on nomme  $y$  et  $\xi$ , qui satisfait la condition mathématique suivante : pour tous multi-indices  $\alpha$  et  $\beta$ , il existe une constante  $C_{\alpha, \beta} > 0$  telle que

$$|\partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta p(y, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}, \quad y, \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (1.55)$$

On dit alors que  $p$  est de classe  $S^m$  et  $P$  de classe  $OPS^m$ .

Prenons un exemple simple d'opérateur pseudo-différentiel, une dérivée en  $y_k$  :

$$P = \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad (1.56)$$

son symbole associé de classe  $S^1$  s'écrit alors :

$$p = i\xi_k. \quad (1.57)$$

Dans le contexte des équations d'ondes unidirectionnelles, il est possible de travailler avec une classe plus restreinte, appelée symboles polyhomogènes d'ordre  $m$ . Un symbole polyhomogène ou classique peut être écrit sous la forme d'une somme asymptotique de fonctions homogènes  $p_j(y, \xi)$  :

$$p(y, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(y, \xi) \Leftrightarrow p(y, \xi) - \sum_{j=0}^{\infty} p_j(y, \xi) \in S^{-\infty}. \quad (1.58)$$

L'homogénéité signifie que :

$$p_j(z, \lambda\xi) = \lambda^{m-j} p_j(y, \xi),$$

pour une grande valeur de  $\xi$  et un  $\lambda$  positif. La fonction  $p_j(y, \xi)$  est ainsi elle-même un symbole d'ordre  $m-j$  et  $p_0(y, \xi)$  est appelé symbole principal. C'est généralement ce symbole principal qui nous intéresse, car il contient la plus grande contribution. Dans certains cas, le symbole sous-principal  $p_1$  est également considéré.

**Composition d'opérateurs** Un résultat important est que la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels,  $P = \text{Op}(p)$  d'ordre  $m$  et  $Q = \text{Op}(q)$  d'ordre  $n$  (c'est-à-dire  $P \in OPS^m$  et  $Q \in OPS^n$ ) est encore un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m+n$ . Le symbole de  $PQ$  s'écrit  $p\#q$  et son développement asymptotique peut être trouvé par un théorème fondamental du calcul symbolique [Alinhac et Gérard, 2007, Hörmander, 1994]. Les symboles étant indépendants du temps, ce théorème s'écrit, pour les variables  $y$  et  $\xi$  :

**Théorème 1.**

$$(p\#q)(y, \xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p(y, \xi) D_y^k q(z, \xi) \sim p(y, \xi) q(y, \xi) + \partial_\xi p(y, \xi) D_y q(y, \xi) + r(y, \xi) \quad (1.59)$$

où  $r(y, \xi)$  est un symbole d'ordre  $m+n-2$  et  $D_y := -i\partial_y$ .

On peut donc en déduire que le symbole principal de  $PQ$  est le produit des symboles principaux de  $P$  et  $Q$ .

**Paramétrice d'un opérateur** Soient deux opérateurs pseudo-différentiels  $P \in OPS^m$  et  $Q \in OPS^{-m}$ . On dit que  $Q$  est une *paramétrice* de  $P$  si la relation suivante est vérifiée :

$$PQ = I + R, \quad (1.60)$$

où  $I$  est l'opérateur identité et  $R$  un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $n < 0$ .  $R$  peut être considéré comme un résidu et être tronqué à l'ordre souhaité.

**Commutateurs d'opérateurs** Soient  $P \in OPS^m$  et  $Q \in OPS^n$  deux opérateurs pseudo-différentiels. Le commutateur de ces deux opérateurs est noté  $[P, Q]$  et est défini par :

$$[P, Q] = PQ - QP. \quad (1.61)$$

En appliquant la règle de composition des opérateurs, on obtient alors en termes de symboles d'opérateurs :

$$p([P, Q]) = p(y, \xi)q(y, \xi) + \partial_\xi p(y, \xi)D_y q(y, \xi) - q(y, \xi)p(y, \xi) - \partial_\xi q(y, \xi)D_y p(y, \xi) + r(y, \xi) \quad (1.62)$$

avec  $r(y, \xi)$  le résidu de classe  $S^{m+n-2}$ . Les symboles pouvant commuter entre eux, les symboles  $p$  et  $q$  s'annulent, ne laissant comme symbole principal du commutateur que leurs dérivées selon  $\xi$  ou  $y$ . L'opérateur  $[P, Q]$  est donc d'ordre  $m + n - 1$ .

### 1.3.1.2 Dérivation de la méthode One-Way

Dans cette partie, nous allons décrire la construction classique de l'approximation One-Way microlocale (ou analytique). La description proposée ici est purement formelle; pour plus de détails, on peut s'intéresser aux références [Op't Root et Stolk, 2010, Antoine et Barucq, 2001].

Pour illustrer sa construction, nous nous basons sur le système d'équations différentielles linéaires hyperboliques suivant :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A(x, \mathbf{y}) \frac{\partial q}{\partial x} + \sum_{j=1}^{d-1} B_j(x, \mathbf{y}) \frac{\partial q}{\partial y_j} + C(x, \mathbf{y})q = 0. \quad (1.63)$$

La direction privilégiée est ici  $x$  et nous allons "paraboliser" les équations le long de cet axe. La variable  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_{d-1}\}$  indique la partie transverse dans ce problème de dimension  $d$ . L'inconnue  $q(x, \mathbf{y}, t)$  est une fonction à valeurs vectorielles et  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des fonctions à valeurs matricielles dépendant de  $x$  et  $\mathbf{y}$  mais ne dépendant pas du temps.

Nous appliquons une transformée de Fourier en temps pour résoudre l'équation (1.63) dans le domaine fréquentiel et nous notons la variable duale du temps  $i\omega$ . Si nous supposons que la matrice  $A$  est inversible ou diagonalisable, le système (1.63) peut être réécrit

$$\frac{\partial q}{\partial t} = L(x, \mathbf{y}, \mathbf{D}_y, \omega)q, \quad (1.64)$$

où

$$l(x, \mathbf{y}, \xi, \omega) = -A^{-1} \left( i\omega I + \sum_{j=1}^d B_j(i\xi_j) + C \right),$$

est le symbole de  $L$  et  $D_y := (-i\partial_{y_1}, \dots, -i\partial_{y_{d-1}})$ .

Si nous supposons maintenant que l'opérateur du premier ordre  $\partial_x - L$  est strictement hyperbolique, nous avons le résultat suivant [Taylor, 1974, Antoine et Barucq, 2001] :  $\exists V =$

$V(x, y, D_y, D_t) \in OPS^0$  un opérateur inversible tel que  $w = Vq$  (microlocalement) où  $w = (w^+, w^-)$  est solution de

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w^+ \\ w^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^+ & 0 \\ 0 & \Lambda^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^+ \\ w^- \end{pmatrix} \text{ mod un opérateur de } OPS^{-\infty}, \quad (1.65)$$

où  $\Lambda^+$  et  $\Lambda^-$  sont des opérateurs pseudo-différentiels diagonaux d'ordre 1 de symbole principal respectivement égal à  $\text{diag}((\lambda_{1,j}^+)_{j=1,\dots,N^+})$  et  $\text{diag}((\lambda_{1,j}^-)_{j=1,\dots,N^-})$ . Les  $(\lambda_{1,j}^\pm)_{j=1,\dots,N^\pm}$  sont les valeurs propres imaginaires pures du symbole principal  $l_0$  de  $L$  qui ont été classées selon leur sens de propagation.

La méthode One-Way standard consiste alors à prendre des approximations  $V_0$  de l'opérateur  $V$  et  $\Lambda_1^\pm$  de  $\Lambda^\pm$  et à calculer  $q_{ow} = V_0^{-1}w_{ow}$  où  $w_{ow} = (w_{ow}^+, w_{ow}^-)$  est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial w_{ow}^+}{\partial x} = \Lambda_1^+ w_{ow}^+, \\ w_{ow}^- = 0, \end{cases} \quad (1.66)$$

avec  $w_{ow}^- = 0$  la condition One-Way permettant de supprimer du calcul les ondes se propageant vers la gauche.

L'opérateur  $\Lambda_1^+$  est généralement un opérateur pseudo-différentiel, comme un opérateur racine carrée, qui possède un caractère non local (dans les directions transverses). Une discrétisation de cet opérateur est très difficile à réaliser et peut être très coûteuse en calcul, étant donné que le nombre de degrés de liberté dans les directions transverses augmente. C'est pour cette raison que l'approche standard est basée sur des approximations d'opérateurs d'ordre élevé utilisant, par exemple, des approximants de Padé [Milinazzo *et al.*, 1997] pour former  $V_0$  et  $\Lambda_1^+$ . Même si ces méthodes peuvent être efficaces et très précises, les expressions analytiques des valeurs propres et vecteurs propres sont nécessaires. Cette condition rend donc cette approche compliquée, voire impossible à mettre en œuvre dans des systèmes plus complexes. Des tests ont été également effectués dans [Rudel, 2022].

La formulation de l'équation (1.66) correspond à la méthode One-Way standard qui a été développée à l'origine [Claerbout, 1985] pour s'assurer que la longueur d'onde et le temps de parcours de l'onde calculés étaient corrects même dans des milieux hétérogènes. Cependant, la précision de l'amplitude résultante n'est pas assurée dans le cas de coefficients variables en  $x$ , étant donné que certains phénomènes physiques ne sont pas pris en compte. Des modèles True Amplitude [Zhang *et al.*, 2005, Stolk, 2004, Barucq *et al.*, 2008] ont été développés par la suite, afin d'améliorer la précision de l'amplitude de l'onde dans des cas non homogènes, mais ils nécessitent des développements analytiques encore plus complexes qui ne peuvent être appliqués pour les équations d'Euler ou de Navier-Stokes.

## 1.3.2 Approches One-Way numériques

### 1.3.2.1 Construction exacte de la méthode One-Way

Dans cette partie, nous allons présenter l'approximation numérique de la méthode One-Way proposée par Towne et Colonius dans deux publications [Towne et Colonius, 2015, Towne et Colonius, 2014] et une thèse de doctorat [Towne, 2016].

Tout d'abord, nous appliquons une transformée de Laplace (ou de Fourier) à l'équation (1.63) pour passer le système en domaine fréquentiel. Ce qui nous intéresse est le comportement stationnaire du système, nous supposons donc les conditions initiales nulles. La transformée de Laplace de variable  $q$  décrivant la perturbation sera écrite  $q = \hat{q}e^{st}$  et la variable duale temporelle  $s \in \mathbb{C}$  est décomposée en  $s = \eta - i\omega$  où  $\omega \in \mathbb{R}$  représente la pulsation et  $\eta \in \mathbb{R}$  peut servir pour le critère permettant de différencier les ondes se propageant à droite

et les ondes se propageant à gauche. Ainsi, à moins qu'il soit explicitement précisé l'inverse, nous posons  $\eta = 0$ .

Ensuite, nous allons discrétiser la variation de  $\hat{q}$  dans la direction transverse  $\mathbf{y}$  en utilisant une approximation numérique telle que la méthode des différences finies ou la méthode des éléments finis.

Dans toute la suite, l'équivalent semi-discret de la matrice  $A$  sera écrit  $\mathbf{A}$  et celui du vecteur  $\hat{q}$  sera écrit  $\hat{\mathbf{q}}$ . L'équation (1.63) devient alors

$$\mathbf{A}(x) \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} = -s\hat{\mathbf{q}} - \sum_{j=1}^d \mathbf{B}_j(x) \hat{\mathbf{q}} - \mathbf{C}(x) \hat{\mathbf{q}}, \quad (1.67)$$

dans laquelle la matrice  $\mathbf{B}_j$  est induite par la discrétisation transverse de l'opérateur  $B_j(x, y) \partial_{y_j}$ , en utilisant, par exemple, une méthode de différences finies.

L'équation (1.67) étant hyperbolique et unidimensionnelle, la matrice  $A(x)$  est nécessairement diagonalisable pour chaque valeur de  $x$ , possède des valeurs propres réelles et est supposée inversible.  $\mathbf{A}$  étant la version discrétisée de  $A$ , les mêmes hypothèses peuvent être faites. Cela garantit également que les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont réelles et nous connaissons le nombre exact de valeurs propres positives ( $N_+$ ) et de valeurs propres négatives ( $N_-$ ).  $\mathbf{A}$  étant diagonalisable, il existe une matrice inversible  $\mathbf{T}$  telle que :

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{++} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{--} \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

avec  $\tilde{\mathbf{A}}$  une matrice diagonale contenant toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_{++} \in \mathbb{R}^{N_+ \times N_+}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_{--} \in \mathbb{R}^{N_- \times N_-}$  deux matrices diagonales contenant respectivement les valeurs propres positives et les valeurs propres négatives.

Nous effectuons à présent le changement de variable suivant :  $\phi = \mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{q}}$  et nous obtenons la relation

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \mathbf{M}(s, x) \phi, \quad (1.69)$$

avec  $\mathbf{M}(s, x) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \left( -s\mathbf{I} - \sum_{j=1}^d \mathbf{B}_j - \mathbf{C} \right) \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x}$ . La matrice  $\mathbf{M}$  est ici l'opérateur de propagation selon la direction privilégiée  $x$ .

D'après la précédente décomposition de  $\mathbf{A}$  en valeurs propres positives et négatives, on peut réaliser la même chose pour l'opérateur de propagation et le vecteur  $\phi$ . L'équation (1.69) peut être écrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{++} & \mathbf{M}_{+-} \\ \mathbf{M}_{-+} & \mathbf{M}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}, \quad (1.70)$$

le premier indice désignant le nombre de lignes ( $N_+$  ou  $N_-$ ) et le second, le nombre de colonnes de la matrice par blocs.

Il existe une décomposition en valeurs propres de l'opérateur discrétisé  $\mathbf{M}$  telle que

$$\mathbf{M} = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{U}, \quad (1.71)$$

avec  $\mathbf{D}$  la matrice diagonale contenant toutes les valeurs propres de  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{V}$  la matrice des vecteurs propres droits et  $\mathbf{U}$  la matrice des vecteurs propres gauches. Ces matrices sont inverses l'une de l'autre :  $\mathbf{U} = \mathbf{V}^{-1}$ .

Nous réalisons alors un nouveau changement de variable :

$$\phi = \mathbf{V}\boldsymbol{\psi} = \sum_{j=1}^{N_++N_-} \psi_j \mathbf{v}_j. \quad (1.72)$$

L'équation (1.70) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{++} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} - \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

La matrice  $\mathbf{W} = -\mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}$  couplant les fonctions  $\psi_+$  et  $\psi_-$  ensemble, peut être considérée comme la matrice de transmission/réflexion. Ce terme est négligé dans la construction de la méthode, de sorte à découpler les ondes se propageant vers la droite de celles se propageant vers la gauche, et cette approximation est à l'origine de l'hypothèse de milieu faiblement variable dans la direction  $x$ .

L'équation (1.73) s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{++} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Les matrices  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{U}$  peuvent être décomposées à partir de la diagonalisation précédente :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{++} & \mathbf{V}_{+-} \\ \mathbf{V}_{-+} & \mathbf{V}_{--} \end{pmatrix}, \quad (1.75)$$

et

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{++} & \mathbf{U}_{+-} \\ \mathbf{U}_{-+} & \mathbf{U}_{--} \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

Nous devons désormais identifier les ondes se propageant vers la droite et la gauche pour sélectionner celles qui nous intéressent. Pour cela, nous allons utiliser le critère de Briggs [Briggs, 1964] pour séparer les modes selon leur direction de propagation. La matrice  $\mathbf{D}$  étant diagonale, on peut écrire :

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x} = i\alpha_j \psi_j, \quad (1.77)$$

où  $\alpha_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  valeur propre de l'opérateur  $\mathbf{M}$ . La présence du nombre imaginaire  $i$  permet de garder la cohérence avec l'expression usuelle des nombres d'onde spatiaux. De cette manière, la partie réelle de  $\alpha_j$  est liée à la vitesse de phase du mode tandis que la partie imaginaire est liée au taux de croissance spatial du mode.

Le terme  $\eta$  amené précédemment par la transformation de Laplace va nous être utile afin d'appliquer le critère de Briggs [Briggs, 1964] qui nous dit que le mode  $j$  se propage vers la droite si

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \Im(\alpha_j) = +\infty, \quad (1.78)$$

et au contraire, que le mode se propage vers la gauche si

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \Im(\alpha_j) = -\infty. \quad (1.79)$$

Comme  $\eta$  va tendre vers  $+\infty$ , l'opérateur discrétisé  $\mathbf{M}$  convergera vers  $-\eta \tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ . La matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  étant diagonale, chaque valeur diagonale de  $\mathbf{M}$  tendra soit vers  $+\infty$ , soit vers  $-\infty$ . Le

signe de ces valeurs propres peut être déterminé par le signe de  $\tilde{\mathbf{A}}_{jj}$  et nous pouvons alors en déduire que les  $N_+$  premiers modes seront les modes droits tandis que les  $N_-$  autres modes seront les modes gauches.

Enfin, il faut supprimer les modes se propageant dans la direction opposée par rapport à l'intégration de la marche spatiale en appliquant la condition One-Way

$$\boldsymbol{\psi}_- = \mathbf{0}. \quad (1.80)$$

La condition précédente peut bien sûr être inversée si l'on souhaite obtenir les modes gauches en posant cette fois-ci :  $\boldsymbol{\psi}_+ = \mathbf{0}$ .

Dans notre cas, le nouveau système One-Way prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_+}{\partial x} = \mathbf{D}_{++} \boldsymbol{\psi}_+, \\ \boldsymbol{\psi}_- = 0. \end{cases} \quad (1.81)$$

Pour implémenter le système (1.81), nous devons utiliser une partie de la matrice des valeurs propres de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$ . Dans le cas d'un milieu ou d'un écoulement variable, nous devons ainsi calculer ces valeurs propres et vecteurs propres pour chaque valeur de  $x$ , ce qui peut vite devenir très coûteux.

### 1.3.2.2 Dérivation des équations One-Way numériques

C'est pour cette raison que l'approche numérique [Towne et Colonius, 2015, Towne, 2016, Towne et Colonius, 2014] est basée sur l'utilisation d'une condition aux limites non réfléchissante pour obtenir une approximation de la relation (1.80), tout en évitant la construction d'une diagonalisation complète de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$ . Ce type de condition aux limites a été introduit pour la première fois par [Higdon, 1987] et ensuite dérivé en une version d'ordre élevé par [Givoli et Neta, 2003]. Son application aux systèmes hyperboliques, tels que les équations d'Euler et de Navier-Stokes, est décrite dans un article de [Hagstrom et Warburton, 2004]. Cette approche est appelée *outflow approach*, notée OWNS-O. Deux autres approches One-Way ont été développées par les chercheurs du Caltech : l'approche projective (ou *projection approach* notée OWNS-P et basée sur l'utilisation d'opérateurs de projection) présentée dans [Towne, 2016] et l'approche récursive (ou *recursive approach* notée OWNS-R) présentée dans [Zhu et Towne, 2023]. Les approches OWNS-P et OWNS-R étant des variantes de l'approche OWNS-O, nous ne développerons que cette approche ici.

Tout d'abord, la condition One-Way (1.80) peut être réécrite en termes de variables  $\boldsymbol{\phi}$  :

$$\boldsymbol{\psi}_- = \mathbf{U}_{-+} \boldsymbol{\phi}_+ + \mathbf{U}_{--} \boldsymbol{\phi}_- = 0. \quad (1.82)$$

En isolant le terme  $\boldsymbol{\phi}_-$ , on obtient :

$$\boldsymbol{\phi}_- = -\mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{U}_{-+} \boldsymbol{\phi}_+, \quad (1.83)$$

en supposant pour la suite que la matrice  $\mathbf{U}_{--}$  est inversible. Le système (1.81) peut alors être réécrit en termes de variables caractéristiques  $\boldsymbol{\phi}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_+}{\partial x} = \mathbf{M}_{++} \boldsymbol{\phi}_+ + \mathbf{M}_{+-} \boldsymbol{\phi}_-, \\ \boldsymbol{\phi}_- = -\mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{U}_{-+} \boldsymbol{\phi}_+. \end{cases} \quad (1.84)$$

La décomposition en valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{M}$  en  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{D}$  est très coûteuse et doit être réalisée pour chaque valeur de  $x$  si l'écoulement est variable en  $x$ . Par conséquent,

nous souhaitons remplacer la deuxième équation du système (1.84) par une expression ne dépendant pas de  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{D}$ . Nous allons donc procéder par récursion en utilisant des variables auxiliaires  $\phi^j$  et  $\psi^j$  pour  $j = 0, \dots, N_\beta$ , avec  $N_\beta$  l'ordre d'approximation. Plus nous prenons un  $N_\beta$  grand et plus une solution proche de la solution exacte est obtenue. Les variables indexées 0 sont les variables physiques ( $\phi^0 = \phi$  et  $\psi^0 = \psi$ ).

D'après ce qui a été vu précédemment, il est possible de trier les ondes à l'aide des valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{M}$ . C'est ce que nous allons utiliser pour supprimer les ondes se propageant vers la gauche. Tout d'abord, nous définissons un coefficient de réflexion :

$$R(\alpha) = \prod_{j=0}^{N_\beta-1} \frac{\alpha - \beta_+^j}{\alpha - \beta_-^j}, \quad (1.85)$$

avec  $\alpha$  une valeur propre de l'opérateur  $\mathbf{M}$  et  $\beta_+^j$  et  $\beta_-^j$  un ensemble de paramètres choisis plus ou moins de manière arbitraire. Pour que la solution converge vers la solution exacte (c'est-à-dire pour maximiser l'effet des valeurs propres droites tout en minimisant l'effet des valeurs propres gauches afin de supprimer les modes "amont") et pour s'assurer d'une bonne convergence, on peut choisir les  $\beta_+$  proches des modes de l'opérateur  $\mathbf{M}$  allant vers la droite et les  $\beta_-$  proches des modes de  $\mathbf{M}$  se propageant vers la gauche. Plus ces deux groupes de coefficients sont éloignés et meilleure est la convergence. Ainsi le rapport  $R(\alpha_+)$  va tendre vers 0 étant donné que les coefficients  $\beta_+^j$  sont proches des  $\alpha_+$  tandis que les  $\beta_-^j$  en sont plus éloignés. De la même façon, le rapport  $R(\alpha_-)$  tendra vers  $+\infty$ .

Nous introduisons désormais les variables auxiliaires définies précédemment :

$$\psi_k^{N_\beta} = R(\alpha_k) \psi_k, k = 1, \dots, N, \quad (1.86)$$

qui peuvent également s'écrire

$$\psi_k^{j+1} = \frac{\alpha_k - \beta_+^j}{\alpha_k - \beta_-^j} \psi_k^j, k = 1, \dots, N \text{ et } j = 0, \dots, N_\beta - 1. \quad (1.87)$$

Cette relation de récursion définit donc toutes les autres variables auxiliaires. En termes matriciels, la relation précédente devient :

$$(\mathbf{D} - i\beta_+^j \mathbf{I}) \psi^j = (\mathbf{D} - i\beta_-^j \mathbf{I}) \psi^{j+1}, j = 0, \dots, N_\beta - 1, \quad (1.88)$$

où  $\mathbf{D}$  est la matrice diagonale composée des valeurs propres  $i\alpha_j$  de  $\mathbf{M}$  et  $\psi^j$  est le vecteur  $[\psi_1^j \dots \psi_N^j]^T \in \mathbb{C}^N$  pour  $j = 0, \dots, N_\beta$ . La convention sur les valeurs propres permet d'expliquer la présence du nombre imaginaire  $i$  devant les paramètres  $\beta_\pm$ .

En définissant  $\psi^j = \mathbf{U} \phi^j$ , nous obtenons la relation récursive finale :

$$(\mathbf{M} - i\beta_+^j \mathbf{I}) \phi^j = (\mathbf{M} - i\beta_-^j \mathbf{I}) \phi^{j+1}, j = 0, \dots, N_\beta - 1. \quad (1.89)$$

Il y a alors un nombre de variables supérieur au nombre d'équations (une variable en plus). Afin de trouver l'équation supplémentaire, nous allons montrer que la relation précédente converge vers la relation One-Way exacte sous une condition simple :  $\phi_-^{N_\beta} = 0$ . Pour cela, on réécrit l'équation (1.86) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \psi_+^{N_\beta} \\ \psi_-^{N_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{++} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad (1.90)$$

où  $\mathbf{R}_{++}$  et  $\mathbf{R}_{--}$  sont des matrices diagonales avec les valeurs de  $R(\alpha)$  toujours triées par valeurs propres droites ( $\alpha_+$ ) et valeurs propres gauches ( $\alpha_-$ ). En remplaçant le terme de gauche par les variables  $\phi$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_{++} & \mathbf{U}_{+-} \\ \mathbf{U}_{-+} & \mathbf{U}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+^{N_\beta} \\ \phi_-^{N_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{++} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

En éliminant  $\phi_+^{N_\beta}$ , on trouve

$$\psi_- = \mathbf{R}_{--}^{-1} \mathbf{U}_{-+} \mathbf{U}_{++}^{-1} \mathbf{R}_{++} \psi_+ + \mathbf{R}_{--}^{-1} (\mathbf{U}_{--} - \mathbf{U}_{-+} \mathbf{U}_{++}^{-1} \mathbf{U}_{+-}) \phi_-^{N_\beta}. \quad (1.92)$$

En appliquant la condition  $\phi_-^{N_\beta} = 0$ , la relation précédente devient

$$\psi_- = \mathbf{R}_{--}^{-1} \mathbf{U}_{-+} \mathbf{U}_{++}^{-1} \mathbf{R}_{++} \psi_+. \quad (1.93)$$

À partir de cette équation, on en déduit la relation suivante :

$$\|\mathbf{R}_{--}^{-1} \mathbf{U}_{-+} \mathbf{U}_{++}^{-1} \mathbf{R}_{++} \psi_+\| \leq \|\mathbf{R}_{--}^{-1}\| \|\mathbf{U}_{-+} \mathbf{U}_{++}^{-1}\| \|\mathbf{R}_{++}\| \|\psi_+\|. \quad (1.94)$$

Les normes des matrices  $\mathbf{U}_{-+}$  et  $\mathbf{U}_{++}$  et du vecteur  $\psi_+$  ne seront pas affectées ici par le choix des  $\beta_\pm$  puisqu'elles proviennent directement de la diagonalisation exacte de l'opérateur  $\mathbf{M}$ . En outre, les normes des matrices de réflexion  $\mathbf{R}_+$  et  $\mathbf{R}_-$  vont respectivement tendre vers 0 et  $+\infty$  lorsque l'ensemble des valeurs des  $\beta_\pm$  sont bien choisies. On en déduit donc que l'équation (1.93) converge bien vers la condition One-Way de l'équation (1.80).

Nous avons alors trouvé deux relations supplémentaires et l'approximation des équations One-Way donnée par Towne-Colonius s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_+}{dx} = \mathbf{M}_{++} \phi_+ + \mathbf{M}_{+-} \phi_-, \\ (\mathbf{M} - i\beta_+^j \mathbf{I}) \phi^j = (\mathbf{M} - i\beta_-^j \mathbf{I}) \phi^{j+1}, j = 0, \dots, N_\beta - 1 \\ \phi_-^{N_\beta} = \mathbf{0}, \\ \phi(0) \text{ donné.} \end{array} \right. \quad (1.95)$$

Cette méthode converge vers la condition One-Way exacte :  $\psi_- = \mathbf{0}$  lorsque  $N_\beta \rightarrow +\infty$ . En pratique, cette méthode reste efficace tant que  $N_\beta \ll N$ , ce qui est généralement le cas [Towne et Colonius, 2015]. En outre, cette méthode One-Way est relativement simple à implémenter et a montré sa capacité à prendre en compte les variations de l'écoulement de base dans la direction transverse, tout en ayant une hypothèse de variation lente dans la direction  $x$  [Kamal et al., 2020].

*Remarque 6.* Comme nous le verrons dans le Chapitre 5, leur approche OWNS a également été utilisée pour calculer les perturbations optimales dans divers exemples en comparaison à une méthode d'analyse de résolvante globale : modélisation de structures cohérentes dans un jet supersonique turbulent [Rigas et al., 2017b]; analyse entrée/sortie pour les couches limites hypersoniques [Kamal et al., 2021, Kamal et al., 2022] ou encore application à un jet supersonique turbulent et à une couche limite supersonique [Towne et al., 2022].

### 1.3.3 Approches One-Way basées sur une factorisation de l'opérateur de propagation

Dans cette partie, nous allons présenter un dernier type d'approche One-Way, proposée par Clément Rudel dans deux publications [Rudel et al., 2021, Rudel et al., 2022] et une

thèse de doctorat [Rudel, 2022]. Le point de départ de ces approches est qu'il n'est pas nécessaire de réaliser une diagonalisation stricte de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$ , contrairement aux approches One-Way de Towne & Colonius. L'objectif est ici de construire une nouvelle factorisation de  $\mathbf{M}$  s'écrivant :

$$\mathbf{M} \approx \widetilde{\mathbf{M}} = \widetilde{\mathbf{V}} \widetilde{\mathbf{D}} \widetilde{\mathbf{U}}, \quad (1.96)$$

avec

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{D}}_{++} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{D}}_{--} \end{pmatrix}. \quad (1.97)$$

Nous allons voir brièvement en quoi cette nouvelle factorisation consiste, tandis que les détails de la méthode seront donnés dans le Chapitre 2 dans le cadre de l'application aux équations de Navier-Stokes linéarisées.

Pour ce faire, nous allons utiliser des matrices de non-réflexion (basées sur des conditions aux limites non-réfléchissantes, également introduites par Towne & Colonius dans leurs approches) dans les deux directions de l'espace. Celles-ci peuvent s'écrire :

$$\mathbf{Z}^{r,N_\beta} = \prod_{j=0}^{N_\beta-1} \left( \mathbf{M} - i\beta_{-}^j \mathbf{I} \right)^{-1} \left( \mathbf{M} - i\beta_{+}^j \mathbf{I} \right), \quad (1.98)$$

et

$$\mathbf{Z}^{l,N_\beta} = \prod_{j=0}^{N_\beta-1} \left( \mathbf{M} - i\beta_{+}^j \mathbf{I} \right)^{-1} \left( \mathbf{M} - i\beta_{-}^j \mathbf{I} \right). \quad (1.99)$$

Elles contiennent à la fois l'opérateur de propagation exact  $\mathbf{M}$  ainsi que des paramètres  $(\beta_{\pm}^j)_j$  qui seront choisis en pratique par l'utilisateur,  $N_\beta$  correspondant au nombre de paramètres. De plus, ces deux matrices de non-réflexion possèdent les propriétés suivantes :

1.  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  et  $\mathbf{Z}^{l,N_\beta}$  possèdent les mêmes vecteurs propres que l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$ .
2. Les valeurs propres de  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  et  $\mathbf{Z}^{l,N_\beta}$  ont deux points d'accumulation respectifs : 0 et  $+\infty$ .

Autrement dit, la matrice  $\mathbf{Z}^{+,N_\beta}$  permet de "neutraliser" les modes droits et de préserver les modes gauches, et inversement la matrice  $\mathbf{Z}^{-,N_\beta}$  permet de "neutraliser" les modes gauches et de préserver les modes droits.

En utilisant ces deux matrices  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  et  $\mathbf{Z}^{l,N_\beta}$  et en choisissant judicieusement le nombre  $N_\beta$  de paramètres  $\beta_{\pm}$  et leur position dans le plan complexe, on peut alors construire une factorisation approchée du type (1.96), c'est-à-dire :

$$\mathbf{M} \approx \widetilde{\mathbf{M}} = \widetilde{\mathbf{V}}^{N_\beta} \widetilde{\mathbf{D}}^{N_\beta} \widetilde{\mathbf{U}}^{N_\beta}, \quad (1.100)$$

où

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{N_\beta} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{D}}_{++}^{N_\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{D}}_{--}^{N_\beta} \end{pmatrix}, \quad (1.101)$$

avec  $\widetilde{\mathbf{D}}_{++}^{N_\beta}$  et  $\widetilde{\mathbf{D}}_{--}^{N_\beta}$  deux matrices blocs contenant respectivement de l'information sur les valeurs propres positives et négatives de  $\mathbf{M}$ .

En posant  $\phi = \widetilde{\mathbf{V}}^{N_\beta} \psi$ , il est alors possible de construire des équations One-Way droites et gauches :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_+}{dx} = \widetilde{\mathbf{D}}_{++}^{N_\beta} \psi_+ + \delta \widetilde{\mathbf{W}}_{++}^{N_\beta} \psi_+, \\ \psi_- = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1.102)$$

et

$$\begin{cases} \frac{d\psi_-}{dx} = \tilde{\mathbf{D}}_{--}^{N_\beta} \psi_- + \delta \tilde{\mathbf{W}}_{--}^{N_\beta} \psi_-, \\ \psi_+ = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1.103)$$

où  $\tilde{\mathbf{W}}^{N_\beta} := -\tilde{\mathbf{U}}^{N_\beta} \frac{d\tilde{\mathbf{V}}^{N_\beta}}{dx}$  est appelé l'opérateur de réfraction/réflexion, auquel nous avons désormais accès grâce à la factorisation purement numérique de  $\mathbf{M}$ . Cela permet ainsi de s'affranchir de l'hypothèse d'écoulement faiblement variable dans la direction de propagation (ici  $x$ ) et de prendre en compte les phénomènes de réfraction et de réflexion de l'onde incidente. Il est ainsi possible d'obtenir trois approches One-Way différentes :

1. Approche One-Way standard pour  $\delta = 0$  : permet de capturer correctement la longueur d'onde. C'est l'approche que l'on retrouve en considérant l'hypothèse d'écoulement faiblement variable en  $x$ .
2. Approche True Amplitude One-Way (TAOW) pour  $\delta = 1$  : permet d'approcher correctement les ondes réfractées [Zhang *et al.*, 2005].
3. Approche One-Way basée sur les séries de Bremmer : résolution d'équations One-Way droites et gauches de manière itérative jusqu'à la convergence. Cela permet à la fois de capturer correctement les ondes réfractées et réfléchies [De Hoop, 1996].

Ces nouvelles approches One-Way ont ensuite été appliquées aux équations d'Euler linéarisées bidimensionnelles dans un article de conférence dédié aux liners acoustiques [Rudel *et al.*, 2021]. Puis une première formalisation de la factorisation unidirectionnelle de l'opérateur de propagation a été proposée dans [Rudel *et al.*, 2022]. Une application plus générale aux problèmes d'aéroacoustique a finalement été réalisée dans le cadre de la thèse de Clément Rudel [Rudel, 2022] avec des exemples de résolution d'équations One-Way dans le cas notamment de matériaux absorbants acoustiques et de l'étude du bruit de jet.

Le coût de calcul de la méthode en temps CPU et en mémoire a également été mesuré [Rudel *et al.*, 2022, Rudel, 2022] pour l'exemple d'un conduit de hauteur  $L_y = 1$  et de longueur  $L_x$  variable contenant un écoulement cisailé (pas de variation en  $x$ ). Une simulation directe issue d'une méthode éléments finis 2D a ensuite été comparée à une méthode One-Way et à une méthode One-Way échantillonnée. La méthode échantillonnée permet d'utiliser le fait que l'écoulement soit parallèle afin de former et d'utiliser un seul jeu de matrices pour toutes les stations en  $x$ . Par exemple, pour  $L_x = 20$ , la méthode One-Way demande moins de temps de calcul que la méthode directe ( $-61\%$ ), mais elle reste cependant plus coûteuse en mémoire ( $+27.3\%$ ). La méthode One-Way échantillonnée, de son côté, permet une réduction de  $93\%$  du temps de calcul et de  $69.8\%$  du coût mémoire. Pour  $L_x$  plus grand, le temps CPU est divisé par deux pour la One-Way en comparaison de la méthode directe, alors qu'un coût d'environ  $+10\%$  est observé en augmentant la longueur. Ces résultats montrent donc l'intérêt de telles approches, et notamment en présence d'un écoulement parallèle, ce qui permet alors de les coupler à une méthode d'échantillonnage et d'obtenir à la fois un gain de temps et de coût mémoire.

Enfin, une comparaison entre la nouvelle factorisation numérique et celle proposée par [Towne et Colonius, 2015] peut être faite. La première différence notable est que leur approche ne nécessite pas l'assemblage des matrices  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  et  $\mathbf{Z}^{l,N_\beta}$ . En effet, le système peut être résolu à l'aide d'un système linéaire augmenté de la forme  $Ax = b$ , où  $x$  est le vecteur composé des variables caractéristiques  $\phi$  ainsi que des variables auxiliaires  $\phi^j$ , pour  $1 \leq j \leq N_\beta$  [Rudel, 2022]. De plus, cette résolution peut être faite en utilisant des matrices creuses, qui nécessitent moins de ressources en mémoire. La nouvelle formulation One-Way impose quant à elle aux matrices de non-réflexion d'être formées explicitement. Dans ce cas, on résout successivement des systèmes linéaires de la forme  $AX = B$ , où  $X$  et  $B$  sont dans ce cas des matrices de même taille que  $A$ , formées à partir de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$  et

des coefficients  $\beta_{\pm}$ . Si les systèmes à résoudre sont de taille très inférieure à celui de l'autre approche, il s'agit d'une résolution numérique plus coûteuse en ressources computationnelles. Cependant, si la construction des deux matrices de non-réflexion est plus coûteuse, leur accès permet l'utilisation d'algorithmes de marche en  $x$  plus efficaces comme la méthode de Galerkin discontinu qui permet l'utilisation d'un nombre restreint de points en  $x$  en comparaison à des méthodes de type *Backward Differentiation Formula* (BDF), utilisées notamment dans [Rigas *et al.*, 2017a, Kamal *et al.*, 2020, Towne *et al.*, 2022]. L'accès à l'opérateur de réfraction/réflexion  $\widetilde{\mathbf{W}}$  permet en outre d'obtenir plusieurs approches One-Way (True Amplitude et séries de Bremmer), permettant de traiter un plus grand nombre d'applications numériques. Il a également été montré dans [Rudel, 2022], pour le cas d'un écoulement cisailé et pour un même jeu de paramètres  $\beta_{\pm}$ , que la nouvelle approche converge plus rapidement vers le spectre exact par rapport à l'approche *outflow*.

## 1.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons donné le contexte applicatif de cette thèse en détaillant quelques phénomènes de propagation d'ondes en écoulement. Si l'étude des modes de conduit est une problématique vue en aéroacoustique, notamment pour réduire le bruit de soufflante en utilisant des liners acoustiques, les instabilités de couches limites ainsi que les perturbations optimales sont liées à la détermination de la transition laminaire-turbulent en calculant la combinaison de modes menant à la plus grande amplification.

Ensuite, plusieurs méthodes numériques couramment utilisées pour ces différentes problématiques de mécanique des fluides ont été passées en revue de manière non exhaustive. Celles-ci se distinguent surtout par l'étendue de leurs applications possibles, ainsi que par leur implémentation plus ou moins aisée.

Nous avons ensuite présenté les approches dites One-Way qui sont des méthodes unidirectionnelles permettant de séparer les ondes se propageant dans un sens et dans l'autre. Les approches microlocales sont utilisées depuis plus de cinquante ans dans divers domaines tels que la géophysique, l'acoustique et l'électromagnétisme. Cependant, ce sont des approches analytiques utilisant des opérateurs pseudo-différentiels et du calcul symbolique (présence d'un opérateur racine carrée dans la formulation des équations One-Way) qui sont, d'une part, coûteuses à mettre en place, et d'autre part, difficiles, voire impossibles à étendre aux équations de la mécanique des fluides.

La deuxième approche One-Way, plus récente, a été proposée par Towne & Colonius pour la mécanique des fluides numérique. La construction de cette approche est purement numérique et générique pour tout système d'équations hyperboliques, et se base sur l'utilisation d'une condition aux limites non-réfléchissante permettant de trier les modes se propageant vers la gauche et vers la droite. Contrairement à l'approche microlocale, elle n'implique pas l'utilisation d'opérateurs pseudo-différentiels ni de développements analytiques complexes et garantit un coût de résolution faible, pouvant même se rapprocher du coût de résolution d'une PSE. Cependant, la résolution ayant lieu en variables caractéristiques (et non pas en variables One-Way), cette méthode se heurte à l'hypothèse d'écoulement faiblement variable.

Enfin, une dernière approche One-Way, développée dans le cadre de la thèse de Clément Rudel, a été présentée ici. Celle-ci a été proposée dans le but de s'affranchir de l'hypothèse d'écoulement faiblement variable et donc d'élargir le domaine d'application en considérant désormais des milieux et/ou écoulements variables. Elle permet désormais de prendre en compte les phénomènes de réfraction et de réflexion de l'onde incidente. Si cette dernière approche a seulement été parcourue dans ce chapitre, elle sera détaillée dans le Chapitre 2 où nous allons la mettre en application pour l'étendre aux équations de Navier-Stokes linéarisées 2D.

## Chapitre 2

# Extension aux écoulements visqueux des approches One-Way basées sur une factorisation de l'opérateur de propagation

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Construction des approches OWNS</b>	<b>34</b>
2.1.1	Linéarisation des équations de Navier-Stokes	34
2.1.2	Factorisation numérique de l'opérateur de propagation et obtention des équations OWNS	35
2.1.3	Séries de Bremmer avec termes sources	44
<b>2.2</b>	<b>Algorithme de résolution des équations OWNS</b>	<b>48</b>
2.2.1	Méthodes de discrétisation	48
2.2.2	Prise en compte des singularités	52
2.2.3	Complexité des approches One-Way et réduction des coûts de calcul	55
2.2.4	Choix pratique des coefficients	56
<b>2.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>58</b>

---

Dans ce deuxième chapitre, nous présentons l'extension des approches One-Way basées sur une factorisation de l'opérateur de propagation au cas des écoulements visqueux. Si cette méthode a déjà été présentée dans le cadre des équations d'Euler linéarisées dans [Rudel, 2022], cette extension a nécessité un certain nombre d'ajustements et de mises à jour, même si la méthode en elle-même est générique et a été reformulée dans [Ruello *et al.*, 2024] pour les systèmes linéaires hyperboliques (d'après une première formalisation proposée dans [Rudel, 2022]). C'est cette reformulation qui va être reprise dans ce chapitre. Dans la Section 2.1, nous verrons comment construire des approches One-Way basées sur une factorisation numérique de l'opérateur de propagation pour les équations de Navier-Stokes linéarisées (abrégées en OWNS par la suite) dans le cas bidimensionnel. Dans la Section 2.2, nous présenterons la mise en œuvre numérique et pratique de la résolution des équations OWNS à travers différentes étapes.

## 2.1 Construction des approches OWNS à partir d'une factorisation de l'opérateur de propagation

Dans cette section, nous présentons la construction des équations One-Way utilisant une factorisation purement numérique de l'opérateur de propagation. La Sous-section 2.1.1 présente en détail l'obtention des équations de Navier-Stokes linéarisées, qui serviront de point de départ des différentes approches One-Way. Dans la Sous-section 2.1.2, nous abordons la factorisation purement numérique (déjà présentée succinctement dans le Chapitre 3 en Sous-section 1.3.3) de l'opérateur de propagation. Pour ce faire, nous introduisons le principe des conditions aux limites non-réfléchissantes qui vont nous permettre d'identifier un espace invariant gauche et un espace invariant droit de  $N_+$  et  $N_-$  vecteurs, respectivement, qui engendrent les espaces vectoriels contenant les informations sur le sens de propagation de l'onde considérée. Une fois que nous aurons obtenu cette nouvelle factorisation, nous pourrons l'appliquer afin d'obtenir les équations OWNS. Selon le degré de précision recherché, nous déduirons deux approches : l'approche standard et l'approche True Amplitude. Enfin, dans la Sous-section 2.1.3, nous décrivons l'approche One-Way avec séries de Bremmer et prise en compte de termes sources. Cette approche présente l'avantage de pouvoir considérer des variations continues et de prendre en compte les réflexions et réfractions d'ondes. Elle consiste en une résolution itérative d'équations One-Way droites et gauches jusqu'à la convergence.

### 2.1.1 Linéarisation des équations de Navier-Stokes

Nous considérons les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles pour un fluide compressible en coordonnées cartésiennes (les détails des calculs pour obtenir le système en variables primitives sont donnés en Annexe A). Pour un gaz parfait, il est ainsi possible d'écrire :

$$\frac{D\nu}{Dt} - \nu(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nu\nabla p = \frac{\nu}{\text{Re}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}), \quad (2.1b)$$

$$\frac{Dp}{Dt} + \gamma p(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \nabla \cdot (k\nabla(p\nu)) + \frac{\gamma-1}{\text{Re}} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}), \quad (2.1c)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (2.1d)$$

$$p = \frac{T}{\gamma M^2 \nu}, \quad (2.1e)$$

$$M = \frac{u_\infty^*}{a_\infty^*}, \quad (2.1f)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty^* u_\infty^* L^*}{\mu_\infty^*}, \quad (2.1g)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu_\infty^* c_{p\infty}^*}{k_\infty^*}. \quad (2.1h)$$

où  $\nu = 1/\rho$ ,  $\mathbf{u} = (u, v)^T$ ,  $p$ ,  $\gamma$ ,  $k$ ,  $a$ ,  $\mu$ ,  $c_p$ ,  $\text{Re}$ ,  $\text{Pr}$  et  $M$  sont respectivement le volume spécifique, le vecteur vitesse, la pression, l'indice adiabatique, la conductivité thermique, la vitesse du son, la viscosité dynamique, la capacité thermique, le nombre de Reynolds, le nombre de Prandtl et le nombre de Mach. Par hypothèse de Stokes, la viscosité de volume (ou *bulk viscosity*) est supposée nulle. Les variables ont été adimensionnées par les quantités suivantes :  $L^*$ ,  $u_\infty^*$ ,  $\rho_\infty^*$ ,  $k_\infty^*$ , et  $\mu_\infty^*$ .

On suppose que le fluide est un gaz parfait avec  $\gamma = 1.4$ , et la viscosité dynamique est

fonction de la température et est décrite par la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = T^{3/2} \frac{1 + S^*/T_\infty^*}{T + S^*/T_\infty^*}, \quad (2.2)$$

où  $S^* = 110.4$  K et où la valeur  $T_\infty^*$  dépendra de l'application étudiée (cf. Chapitres 4 et 5).

Les équations sont ensuite linéarisées autour d'un écoulement de base stationnaire :

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \bar{\mathbf{q}}(x, y) + \mathbf{q}'(x, y, t), \quad (2.3)$$

où le vecteur de l'écoulement de base et le vecteur des perturbations inconnues sont décrits respectivement par  $\bar{\mathbf{q}} = [\bar{\nu}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p}]^T$  et  $\mathbf{q}' = [\nu', u', v', p']^T$ . L'écoulement de base est supposé vérifier les équations de Navier-Stokes, et nous ne gardons que les termes d'ordre 1.

En remplaçant dans les équations de Navier-Stokes, on obtient le système matriciel suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} + A(x, y) \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial x} + B_y(x, y) \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial y} + B_{yy}(x, y) \frac{\partial^2 \mathbf{q}'}{\partial y^2} + C(x, y) \mathbf{q}' = 0. \quad (2.4)$$

*Remarque 7.* Deux termes de diffusion des équations de Navier-Stokes ont été mis de côté dans le système précédent : les dérivées secondes en  $x$  ainsi que les dérivées croisées en  $x$  et  $y$  du vecteur de perturbation  $\mathbf{q}'$ . Il est en effet nécessaire de partir d'un système linéaire et hyperbolique afin d'obtenir la factorisation numérique de l'opérateur de propagation. En pratique, selon les applications traitées, ces termes seront traités comme des sources dans l'algorithme de marche en  $x$  ou alors négligés. C'est ce qui est généralement réalisé dans les approches One-Way classiques comme celle présentée par [Rigas *et al.*, 2017a].

### 2.1.2 Factorisation numérique de l'opérateur de propagation et obtention des équations OWNS

Nous choisissons ensuite une direction privilégiée, ici  $x$ , et nous appliquons une transformée de Fourier-Laplace en temps pour passer le système (2.4) dans le domaine fréquentiel. Comme nous sommes uniquement intéressés par le comportement stationnaire du système, nous supposons les conditions initiales nulles. La transformée de Fourier de la variable  $\mathbf{q}'$  décrivant la perturbation s'écrit  $\mathbf{q}'(x, y, t) = \tilde{\mathbf{q}}(x, y) \exp[-i\omega t]$ , avec  $\omega$  la fréquence angulaire. Nous procédons ensuite comme dans [Towne et Colonius, 2015] en isolant le terme  $\frac{\partial}{\partial x}$  et en effectuant une première discrétisation dans la direction transverse  $y$  à l'aide d'une approximation numérique telle qu'un schéma différences finies compactes d'ordre 4 à 6 [Gamet *et al.*, 1999].

En utilisant une notation en gras pour représenter l'équivalent semi-discret des variables, l'équation (2.4) conduit alors à :

$$\mathbf{A}(x) \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dx} = (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{B}_y \mathbf{D}_y - \mathbf{B}_{yy} \mathbf{D}_{yy} - \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{q}} := \mathbf{B}(x) \tilde{\mathbf{q}}, \quad (2.5)$$

avec  $\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{D}_{yy}$  les opérateurs discrets de dérivées première et seconde en la variable  $y$  et  $\mathbf{I}$  la matrice identité. Tous les opérateurs sont de taille  $(4N_y) \times (4N_y)$ , où  $N_y$  est le nombre de points de discrétisation dans la direction transverse  $y$ .

L'équation (2.4) étant supposée hyperbolique, la matrice  $A(x, y)$  est alors nécessairement diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  pour chaque valeur de  $x$ , c'est-à-dire que ses valeurs propres sont réelles. Comme  $\mathbf{A}$  est la version semi-discrétisée de la matrice  $A$ , la même propriété s'applique :  $\mathbf{A}$  possède  $N$  valeurs propres qui correspondent à  $N_+$  valeurs propres positives,  $N_-$  valeurs propres négatives et  $N_0$  valeurs propres nulles. De plus, on a  $N = N_+ + N_- + N_0$ . En pratique, il est possible de connaître le nombre exact de ces valeurs propres positives, négatives et nulles, en fonction de la célérité du son et de la vitesse de l'écoulement de base, mais aussi en fonction

du nombre d'équations du système à résoudre et du nombre de points de discrétisation dans la direction transverse. Par conséquent, la matrice  $\mathbf{A}$  étant diagonalisable, il existe une matrice de transformation  $\mathbf{T}$  inversible telle que :

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{++} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{--} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{00} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

avec  $\tilde{\mathbf{A}}$  la matrice diagonale contenant toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ , et  $\tilde{\mathbf{A}}_{++} \in \mathbb{R}^{N_+ \times N_+}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_{--} \in \mathbb{R}^{N_- \times N_-}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_{00} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N_0 \times N_0}$  les trois matrices diagonales contenant respectivement les valeurs propres positives, négatives et nulles. On note également que  $\mathbf{0}$  représente une matrice nulle de taille variant selon son emplacement dans la matrice  $\mathbf{A}$ , par exemple  $N_+ \times N_-$  ou  $N_+ \times N_0$  sur la première ligne. La matrice de transformation  $\mathbf{T}$  est connue analytiquement, puisqu'il s'agit de la version semi-discrétisée de la matrice  $T$  qui diagonalise  $A$  [Towne et Colonius, 2015].

*Remarque 8.* Les expressions des matrices  $A$ ,  $\tilde{A}$ ,  $T$  et  $T^{-1}$  sont données en Annexe B.

Pour la présentation globale de la méthode, nous supposons désormais que  $N_0 = 0$  et, par conséquent,  $\tilde{\mathbf{A}}$  est une matrice inversible. Le cas  $N_0 \neq 0$  peut être résolu simplement en procédant à une réduction du système en éliminant les dépendances linéaires induites par ces valeurs propres nulles. Ce type de situation apparaît notamment lorsque la vitesse axiale de l'écoulement de base s'annule aux parois ou lors de l'application des conditions aux limites transverses. Le traitement de ce type de singularités sera présenté dans la Section 2.2.2.

Nous effectuons désormais le changement de variable suivant  $\phi = \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{q}}$  ( $\phi$  sont appelées les variables caractéristiques), et nous obtenons alors le nouveau système d'équations suivant :

$$\frac{d\phi}{dx} = \left( \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\frac{d\mathbf{T}}{dx} \right) \phi := \mathbf{M}(x)\phi, \quad (2.7)$$

dans lequel la matrice  $\mathbf{M}$  est appelée l'opérateur de propagation le long de la direction privilégiée  $x$ .

D'après la précédente décomposition de  $\tilde{\mathbf{A}}$  en valeurs propres positives et négatives, nous pouvons faire de même avec l'opérateur de propagation ainsi que le vecteur  $\phi$ . L'équation (2.7) peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{++} & \mathbf{M}_{+-} \\ \mathbf{M}_{-+} & \mathbf{M}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

le premier indice désignant le nombre de lignes ( $N_+$  ou  $N_-$ ) et le second, le nombre de colonnes dans la matrice par blocs.

La construction de méthodes One-Way nécessite d'identifier les modes se propageant vers la gauche et la droite contenus dans l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$ . Une manière naturelle de le faire est de diagonaliser  $\mathbf{M}$  et d'analyser le comportement des valeurs propres afin de déterminer différentes catégories de modes, en utilisant par exemple de critère de Briggs [Briggs, 1964]. Cependant, cette approche est généralement coûteuse en termes de ressources de calcul, principalement parce que l'opérateur de propagation dépend de  $x$ , mais aussi parce qu'il faut trier les valeurs propres selon leur sens de propagation. Pour contourner ce problème, nous proposons une nouvelle factorisation de cet opérateur basée sur le concept de conditions aux limites non-réfléchissantes d'ordre élevé. Le point de départ de cette méthode est fondé sur l'observation suivante : une diagonalisation "stricte" de  $\mathbf{M}$  n'est pas nécessaire pour réaliser un découplage One-Way complet, et la connaissance d'une famille de vecteurs générant les espaces invariants est suffisante.

### 2.1.2.1 Identification des espaces invariants gauche et droit en utilisant des conditions aux limites non-réfléchissantes

Nous sommes intéressés par l'identification des deux espaces invariants de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}(x)$  pour une valeur fixée de  $x$ . Ils représentent les espaces invariants droit et gauche correspondant aux espaces générés par les modes se propageant vers la droite et vers la gauche, respectivement. Ces espaces sont de tailles respectives  $N_+$  et  $N_-$ . Dans cette sous-section, nous utilisons deux conditions aux limites non-réfléchissantes de type (1.95), construites à partir du même ensemble de paramètres donnés  $(\beta_{\pm}^j)$ , afin d'approcher ces deux espaces. Ainsi, pour chaque valeur de  $x$ , il est montré qu'il est non seulement possible d'accéder à l'information nécessaire à la propagation d'ondes vers la droite et vers la gauche, mais aussi d'obtenir une séparation complète de cette information. Cette séparation, qui est la base du découplage des équations One-Way, est nécessaire à leur bonne résolution locale.

Cette condition permet de préserver l'information se propageant dans une direction et d'éliminer le reste en résolvant les équations. Cependant, afin d'augmenter le champ d'application de telles équations, l'information se propageant dans les deux directions peut être préservée. L'idée est donc d'appliquer ce type de condition aux limites non-réfléchissante dans les deux directions de propagation pour déterminer les termes (sous forme discrétisée) responsables de la propagation de l'onde dans l'une ou l'autre direction.

Afin de construire la factorisation numérique de l'opérateur de propagation, nous introduisons une matrice de non-réflexion droite  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$ , obtenue par récurrence :

$$\mathbf{Z}^{r,N_\beta} = \prod_{j=0}^{N_\beta-1} (\mathbf{M} - i\beta_-^j \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{M} - i\beta_+^j \mathbf{I}). \quad (2.9)$$

Cette matrice est le point de départ de notre technique d'identification, car si l'ensemble des paramètres  $(\beta_{\pm}^j)$  est bien choisi, l'action de la matrice est à la fois de "neutraliser" les modes allant vers la gauche et de préserver ceux allant vers la droite.

De la même manière, nous introduisons la matrice de non-réflexion gauche  $\mathbf{Z}^{l,N_\beta}$ , définie par :

$$\mathbf{Z}^{l,N_\beta} = \prod_{j=0}^{N_\beta-1} (\mathbf{M} - i\beta_+^j \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{M} - i\beta_-^j \mathbf{I}), \quad (2.10)$$

afin d'identifier l'espace invariant droit, c'est-à-dire l'espace des modes allant vers la droite associés à  $\mathbf{M}$ . Cette matrice permet à la fois de "neutraliser" les modes se propageant vers la droite et de préserver ceux se propageant vers la gauche.

Comme évoqué dans le Chapitre 1, les deux matrices de non-réflexion  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  et  $\mathbf{Z}^{l,N_\beta}$  possèdent les mêmes vecteurs propres que la matrice de propagation  $\mathbf{M}$ . En effet, en supposant  $\mathbf{M}$  diagonalisable, c'est-à-dire  $\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{U}$ , on a :

$$\mathbf{Z}^{r,N_\beta} = \prod_{j=0}^{N_\beta-1} (\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{U} - i\beta_-^j \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{U} - i\beta_+^j \mathbf{I}). \quad (2.11)$$

En factorisant  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{U}$  dans chaque terme du produit, on obtient :

$$\mathbf{Z}^{r,N_\beta} = \mathbf{V} \left( \prod_{j=0}^{N_\beta-1} (\mathbf{D} - i\beta_-^j \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{D} - i\beta_+^j \mathbf{I}) \right) \mathbf{U}. \quad (2.12)$$

La matrice  $\mathbf{D}$  étant diagonale, les matrices  $(\mathbf{D} - i\beta_-^j \mathbf{I})$  et  $(\mathbf{D} - i\beta_+^j \mathbf{I})$  le sont également. Par conséquent,  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  est de la forme :

$$\mathbf{Z}^{r,N_\beta} = \mathbf{V}\mathbf{D}^r\mathbf{U}, \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{D}^r$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  et composée de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$  et des coefficients  $\beta_\pm$ .

Finalement, nous en déduisons que  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  et  $\mathbf{M}$  ont les mêmes vecteurs propres, bien qu'elles possèdent des valeurs propres différentes. Les valeurs propres de  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  peuvent cependant s'exprimer en fonction de celles de  $\mathbf{M}$ . En effet,  $\mathbf{D}$  est la matrice diagonale composée des valeurs propres  $i\alpha_j$  de  $\mathbf{M}$ . Les valeurs propres  $z_j^r$  de  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  sont ainsi données par :

$$z_j^r = R^r(\alpha_j), \quad (2.14)$$

où  $R^r(\alpha)$  est un coefficient de réflexion qui s'écrit :

$$R^r(\alpha) = \prod_{j=0}^{N_\beta-1} \frac{\alpha - \beta_+^j}{\alpha - \beta_-^j}. \quad (2.15)$$

De même, pour la matrice  $\mathbf{Z}^{l,N_\beta}$ , on a :

$$\mathbf{Z}^{l,N_\beta} = \mathbf{V} \left( \prod_{j=0}^{N_\beta-1} (\mathbf{D} - i\beta_+^j \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{D} - i\beta_-^j \mathbf{I}) \right) \mathbf{U}, \quad (2.16)$$

qui peut se réécrire :

$$\mathbf{Z}^{l,N_\beta} = \mathbf{V} \mathbf{D}^l \mathbf{V}, \quad (2.17)$$

où  $\mathbf{D}^l$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $\mathbf{Z}^{l,N_\beta}$  et composée de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$  et des coefficients  $\beta_\pm$ .

$\mathbf{Z}^{l,N_\beta}$  possède donc les mêmes vecteurs propres que l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$  et ses valeurs propres  $z_j^l$  peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$z_j^l = R^l(\alpha_j), \quad (2.18)$$

où  $R^l(\alpha)$  est un coefficient de réflexion qui s'écrit :

$$R^l(\alpha) = \prod_{j=0}^{N_\beta-1} \frac{\alpha - \beta_-^j}{\alpha - \beta_+^j}. \quad (2.19)$$

En pratique, les coefficients  $\beta_+$  sont choisis proches des modes  $\alpha_+$  et les coefficients  $\beta_-$  proches des modes  $\alpha_-$ . Dans le cas particulier où l'on considère un mode se propageant vers la droite  $\alpha_+$ , on a :

$$|R^r(\alpha_+)| \ll 1, \quad (2.20)$$

et il est alors possible de "neutraliser" les modes se propageant vers la droite tout en préservant ceux se propageant vers la gauche.

À l'inverse, si  $\alpha_-$  est un mode se propageant vers la gauche, on a :

$$|R^l(\alpha_-)| \ll 1, \quad (2.21)$$

et il est alors possible de neutraliser les modes se propageant vers la gauche tout en préservant ceux se propageant vers la droite.

Néanmoins, pour garantir la robustesse de la méthode, il est crucial d'introduire la version "pré-conditionnée"  $\tilde{\mathbf{Z}}^{r,N_\beta}$  de la matrice  $\mathbf{Z}^{r,N_\beta}$  :

$$\tilde{\mathbf{Z}}^{r,N_\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{++} & (\mathbf{Z}_{++}^{r,N_\beta})^{-1} \mathbf{Z}_{+-}^{r,N_\beta} \\ (\mathbf{Z}_{--}^{r,N_\beta})^{-1} \mathbf{Z}_{-+}^{r,N_\beta} & \mathbf{I}_{--} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

De même, il est possible d'introduire  $\tilde{\mathbf{Z}}^{l,N_\beta}$  la version "pré-conditionnée" de la matrice  $\mathbf{Z}^{l,N_\beta}$  :

$$\tilde{\mathbf{Z}}^{l,N_\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{++} & (\mathbf{Z}_{++}^{l,N_\beta})^{-1} \mathbf{Z}_{+-}^{l,N_\beta} \\ (\mathbf{Z}_{--}^{l,N_\beta})^{-1} \mathbf{Z}_{-+}^{l,N_\beta} & \mathbf{I}_{--} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Le comportement de  $\tilde{\mathbf{Z}}^{r,N_\beta}$  et  $\tilde{\mathbf{Z}}^{l,N_\beta}$  dépend fortement du choix d'une famille de paramètres  $(\beta_\pm^j)_{j \in \mathbb{N}}$  en ce qui concerne l'emplacement dans le plan complexe des modes de  $\mathbf{M}$  se propageant vers la gauche et vers la droite. Pour formaliser ces contraintes, nous considérons la définition suivante [Rudel, 2022] :

**Définition 1.** Une famille de paramètres  $(\beta_\pm^j)_{j \in \mathbb{N}}$  est adaptée à l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}(x)$  si et seulement si pour toutes les valeurs propres  $i\alpha_+$  et  $i\alpha_-$  de  $\mathbf{M}(x)$ , respectivement associées à un mode allant vers la droite et vers la gauche, nous avons la propriété suivante :

$$\begin{cases} \lim_{N_\beta \rightarrow +\infty} \prod_{j=0}^{N_\beta-1} \left| \frac{\alpha_+ - \beta_+^j}{\alpha_+ - \beta_-^j} \right| = 0, \\ \lim_{N_\beta \rightarrow +\infty} \prod_{j=0}^{N_\beta-1} \left| \frac{\alpha_- - \beta_+^j}{\alpha_- - \beta_-^j} \right| = +\infty. \end{cases} \quad (2.24)$$

On suppose pour la suite de cette partie que la famille de paramètres  $(\beta_\pm^j)_{j \in \mathbb{N}}$  est adaptée à l'opérateur de propagation. Il est possible de démontrer le résultat de convergence suivant :

**Théorème 2.** Soit  $(\beta_\pm^j)_{j \in \mathbb{N}}$  une famille de paramètres adaptée à l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$  au point  $x$  dont la diagonalisation s'écrit  $\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{U}$ . Nous avons alors les deux résultats suivants :

(i) Les sous-suites matricielles  $\tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^{r,N_\beta}$  et  $\tilde{\mathbf{Z}}_{+-}^{l,N_\beta}$  admettent des limites notées  $\tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^r$  et  $\tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^l$ , respectivement, et définies par :

$$\begin{cases} \lim_{N_\beta \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^{r,N_\beta} = \tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^r = \mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{U}_{-+}, \\ \lim_{N_\beta \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{Z}}_{+-}^{l,N_\beta} = \tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^l = \mathbf{U}_{++}^{-1} \mathbf{U}_{+-}. \end{cases} \quad (2.25)$$

(ii) Nous avons les identités suivantes :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^r & \tilde{\mathbf{Z}}_{--}^r \end{pmatrix} \mathbf{M} = (\mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{D}_{--} \mathbf{U}_{--}) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^r & \tilde{\mathbf{Z}}_{--}^r \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{++}^l & \tilde{\mathbf{Z}}_{+-}^l \end{pmatrix} \mathbf{M} = (\mathbf{U}_{++}^{-1} \mathbf{D}_{++} \mathbf{U}_{++}) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{++}^l & \tilde{\mathbf{Z}}_{+-}^l \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2.26)$$

De plus, soient  $\mathcal{S}^l := \text{Span}\{\mathbf{U}_{i,*} \in \mathbb{C}^{N_++N_-} | i = N_+ + 1, \dots, N_+ + N_-\}$  et  $\mathcal{S}^r := \text{Span}\{\mathbf{U}_{i,*} \in \mathbb{C}^{N_++N_-} | i = 1, \dots, N_+\}$  les espaces invariants gauche et droite générés par les vecteurs propres gauche et droite, respectivement. Alors les espaces

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{S}}^l := \text{Span}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{i,*}^l \in \mathbb{C}^{N_++N_-} | i = N_+ + 1, \dots, N_+ + N_-\}, \\ \tilde{\mathcal{S}}^r := \text{Span}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{i,*}^r \in \mathbb{C}^{N_++N_-} | i = 1, \dots, N_+\}, \end{cases} \quad (2.27)$$

vérifient les propriétés d'invariance :

$$\begin{cases} \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{S}}^l, \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{M} \in \text{Span}\{\mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{W} : \forall \mathbf{W} \in \mathcal{S}^l\}, \\ \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{S}}^r, \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{M} \in \text{Span}\{\mathbf{U}_{++}^{-1} \mathbf{W} : \forall \mathbf{W} \in \mathcal{S}^r\}, \end{cases} \quad (2.28)$$

et nous avons :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{W} \in \mathcal{S}^l, \mathbf{W}\mathbf{M} \in \text{Span} \left\{ \mathbf{U}_{--} \widetilde{\mathbf{W}} : \forall \widetilde{\mathbf{W}} \in \widetilde{\mathcal{S}}^l \right\}, \\ \forall \mathbf{W} \in \mathcal{S}^r, \mathbf{W}\mathbf{M} \in \text{Span} \left\{ \mathbf{U}_{++} \widetilde{\mathbf{W}} : \forall \widetilde{\mathbf{W}} \in \widetilde{\mathcal{S}}^r \right\}. \end{cases} \quad (2.29)$$

**Démonstration :** Nous rappelons la démonstration donnée dans [Rudel, 2022, Ruello *et al.*, 2024]. Nous ne démontrons que les résultats associés à la partie "droite", c'est-à-dire ceux donnés par l'analyse de  $\widetilde{\mathbf{Z}}^{r, N_\beta}$ , les résultats pour la partie "gauche" utilisant exactement les mêmes arguments.

Nous démontrons d'abord (i). Pour cela, nous utilisons le fait que  $\mathbf{Z}^{r, N_\beta}$  possède les mêmes vecteurs propres que  $\mathbf{M}$ , associés aux matrices de valeurs propres  $\mathbf{R}_{++}^{r, N_\beta}$  et  $\mathbf{R}_{--}^{r, N_\beta}$  c'est-à-dire :

$$\mathbf{Z}^{r, N_\beta} \mathbf{V} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{++}^{r, N_\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{--}^{r, N_\beta} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

avec  $\mathbf{R}_{++}^{r, N_\beta}$  et  $\mathbf{R}_{--}^{r, N_\beta}$  deux matrices diagonales dont les  $k^{\text{èmes}}$  termes sont définis par :

$$\mathbf{R}_{++, k}^{r, N_\beta} = \prod_{j=0}^{N_\beta} \frac{\alpha_{+, k} - \beta_+^j}{\alpha_{+, k} - \beta_-^j}, \quad (2.31)$$

et

$$\mathbf{R}_{--, k}^{r, N_\beta} = \prod_{j=0}^{N_\beta} \frac{\alpha_{-, k} - \beta_+^j}{\alpha_{-, k} - \beta_-^j}. \quad (2.32)$$

En faisant des produits par blocs, nous avons en particulier la relation suivante :

$$\mathbf{Z}_{-+}^{r, N_\beta} \mathbf{V}_{++} + \mathbf{Z}_{--}^{r, N_\beta} \mathbf{V}_{-+} = \mathbf{V}_{-+} \mathbf{R}_{++}^{r, N_\beta} \quad (2.33)$$

qui peut se réécrire comme :

$$(\mathbf{Z}_{--}^{r, N_\beta})^{-1} \mathbf{Z}_{-+}^{r, N_\beta} + \mathbf{V}_{-+} (\mathbf{V}_{++})^{-1} = (\mathbf{Z}_{--}^{r, N_\beta})^{-1} \mathbf{V}_{-+} \mathbf{R}_{++}^{r, N_\beta} (\mathbf{V}_{++})^{-1} \quad (2.34)$$

En réutilisant le fait que  $\mathbf{Z}^{r, N_\beta}$  possède les mêmes vecteurs propres que  $\mathbf{M}$ , on en déduit que :

$$\mathbf{Z}_{--}^{r, N_\beta} = \mathbf{V}_{-+} \mathbf{R}_{++}^{r, N_\beta} \mathbf{U}_{+-} + \mathbf{V}_{--} \mathbf{R}_{--}^{r, N_\beta} \mathbf{U}_{--}. \quad (2.35)$$

L'hypothèse faite sur la famille de paramètres  $(\beta_\pm^j)_{j \in \mathbb{N}}$  permet de passer à la limite et de déduire l'identité suivante :

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_{-+}^r + \mathbf{V}_{-+} (\mathbf{V}_{++})^{-1} = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

comme nous avons  $\lim_{N_\beta \rightarrow +\infty} \|\mathbf{R}_{++}^{r, N_\beta}\| = 0$  et  $\lim_{N_\beta \rightarrow +\infty} \|(\mathbf{Z}_{--}^{r, N_\beta})^{-1}\| = 0$  car  $\lim_{N_\beta \rightarrow +\infty} \|\mathbf{R}_{--}^{r, N_\beta}\| = +\infty$ . Nous utilisons alors l'identité  $\mathbf{U}\mathbf{V} = \mathbf{I}$  afin de trouver la prochaine relation :

$$\mathbf{U}_{-+} \mathbf{V}_{++} + \mathbf{U}_{--} \mathbf{V}_{-+} = \mathbf{0}, \quad (2.37)$$

qui peut aussi être écrite comme :

$$\mathbf{V}_{-+} (\mathbf{V}_{++})^{-1} = -(\mathbf{U}_{--})^{-1} \mathbf{U}_{-+}. \quad (2.38)$$

En combinant (2.36) et (2.38), on obtient immédiatement (i).

Nous démontrons maintenant (ii). La première partie vient immédiatement avec le résultat (i). En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^r & \tilde{\mathbf{Z}}_{--}^r \end{pmatrix} \mathbf{M} &= (\mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{U}_{-+} \quad \mathbf{I}) \mathbf{M} \\
 &= \mathbf{U}_{--}^{-1} (\mathbf{U}_{-+} \quad \mathbf{U}_{--}) \mathbf{M} \\
 &= \mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{D}_{--} (\mathbf{U}_{-+} \quad \mathbf{U}_{--}) \\
 &= \mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{D}_{--} \mathbf{U}_{--} (\mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{U}_{-+} \quad \mathbf{I}) \\
 &= (\mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{D}_{--} \mathbf{U}_{--}) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^r & \tilde{\mathbf{Z}}_{--}^r \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Pour montrer la propriété d'invariance, nous exploitons l'identité précédente. Soit  $\tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{S}}^l$ .  $\tilde{\mathbf{W}}$  peut s'écrire comme  $\tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\Lambda}_{--} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^r & \tilde{\mathbf{Z}}_{--}^r \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{\Lambda}_{--}$  une matrice diagonale de taille  $N_-$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{M} &= \tilde{\Lambda}_{--} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^r & \tilde{\mathbf{Z}}_{--}^r \end{pmatrix} \mathbf{M} \\
 &= \tilde{\Lambda}_{--} (\mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{D}_{--} \mathbf{U}_{--}) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{-+}^r & \tilde{\mathbf{Z}}_{--}^r \end{pmatrix} \\
 &= \tilde{\Lambda}_{--} \underbrace{\mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{D}_{--} \mathbf{U}_{--}}_{\text{dans } \mathcal{S}^l} \in \text{Span} \left\{ \mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{W} : \forall \mathbf{W} \in \mathcal{S}^l \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

La deuxième partie de la propriété d'invariance peut être démontrée de la même manière. ■

Ce théorème montre que les espaces invariants de  $\mathbf{M}$  associés aux modes se propageant vers la gauche et la droite peuvent être décrits et approchés par des parties des matrices de non-réflexion "pré-conditionnées"  $\tilde{\mathbf{Z}}^{r, N_\beta}$  (ou sa limite  $\tilde{\mathbf{Z}}^r$ ) et  $\tilde{\mathbf{Z}}^{l, N_\beta}$  (ou sa limite  $\tilde{\mathbf{Z}}^l$ ), respectivement. Ainsi, en utilisant les matrices  $\tilde{\mathbf{Z}}^l$  et  $\tilde{\mathbf{Z}}^r$  au même point  $x$ , il est possible d'obtenir une caractérisation complète des espaces invariants des modes droite et gauche. La combinaison de ces deux matrices va donc permettre de construire une matrice de pseudo-vecteurs propres, conduisant à une factorisation de l'opérateur  $\mathbf{M}$ . Les détails de cette opération sont expliqués dans la sous-section suivante.

### 2.1.2.2 Nouvelle factorisation de l'opérateur de propagation

Le théorème 2 permet d'obtenir les résultats suivants sur les matrices de non-réflexion pré-conditionnées :

$$\begin{aligned}
 \lim_{N_\beta \rightarrow +\infty} \left( \mathbf{Z}_{--}^{r, N_\beta} \right)^{-1} \mathbf{Z}_{-+}^{r, N_\beta} &= \mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{U}_{-+}, \\
 \lim_{N_\beta \rightarrow +\infty} \left( \mathbf{Z}_{++}^{l, N_\beta} \right)^{-1} \mathbf{Z}_{+-}^{l, N_\beta} &= \mathbf{U}_{++}^{-1} \mathbf{U}_{+-},
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

où  $\mathbf{U}$  est la matrice exacte de vecteurs propres issue de la diagonalisation de  $\mathbf{M}$ .

Ces résultats suggèrent l'introduction de la matrice  $\tilde{\mathbf{U}}^{N_\beta}$  suivante :

$$\tilde{\mathbf{U}}^{N_\beta} := \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{++} & \left( \mathbf{Z}_{++}^{l, N_\beta} \right)^{-1} \mathbf{Z}_{+-}^{l, N_\beta} \\ \left( \mathbf{Z}_{--}^{r, N_\beta} \right)^{-1} \mathbf{Z}_{-+}^{r, N_\beta} & \mathbf{I}_{--} \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

et en utilisant  $\tilde{\mathbf{V}}^{N_\beta} = (\tilde{\mathbf{U}}^{N_\beta})^{-1}$ , une nouvelle factorisation de  $\mathbf{M}$  est proposée comme suit :

$$\tilde{\mathbf{D}}^{N_\beta} := \tilde{\mathbf{U}}^{N_\beta} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}}^{N_\beta}. \tag{2.43}$$

Enfin, une application directe du théorème 2 conduit au résultat de découplage fondamental suivant entre les espaces invariants gauche et droite :

$$\lim_{N_\beta \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{D}}^{N_\beta} = \tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{++}^{-1} \mathbf{D}_{++} \mathbf{U}_{++} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{--}^{-1} \mathbf{D}_{--} \mathbf{U}_{--} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

où  $\mathbf{D}_{++}$  et  $\mathbf{D}_{--}$  sont des matrices diagonales contenant les modes  $\mathbf{M}$  se propageant à droite et à gauche, respectivement.

Ce résultat implique qu'en choisissant judicieusement un nombre fini  $N_\beta$  de paramètres  $\beta_\pm^j$ , nous avons :

$$\tilde{\mathbf{D}}^{N_\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{++}^{N_\beta} & \boldsymbol{\varepsilon}_{+-} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{-+} & \tilde{\mathbf{D}}_{--}^{N_\beta} \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

où  $\tilde{\mathbf{D}}_{++}^{N_\beta}$  et  $\tilde{\mathbf{D}}_{--}^{N_\beta}$  sont deux matrices par blocs contenant l'information sur les valeurs propres de  $\mathbf{M}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{+-}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{-+}$  sont deux matrices par blocs négligeables contenant les résidus de l'approximation et qui tendent vers  $\mathbf{0}$  lorsque  $N_\beta \rightarrow +\infty$ .

Finalement, la factorisation approchée de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$  s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{V}}^{N_\beta} \tilde{\mathbf{D}}^{N_\beta} \tilde{\mathbf{U}}^{N_\beta} \approx \mathbf{M}, \quad (2.46)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{D}}^{N_\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{++}^{N_\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{D}}_{--}^{N_\beta} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Les termes résiduels extra-diagonaux sont négligés, ce qui permet un découplage complet des modes droits et gauches.

*Remarque 9.* Contrairement à une décomposition spectrale directe, la factorisation numérique (2.46) et (2.47) de l'opérateur de propagation permet de trier naturellement les modes en fonction de leur direction de propagation.

Grâce à la factorisation approchée de  $\mathbf{M}$  (2.46), il est possible de dériver directement des équations One-Way en variables One-Way. De cette manière, nous avons également accès à de l'information précise sur les phénomènes de réfraction et de réflexion, qui se produisent en fonction de la complexité de l'écoulement de base. Plus précisément, il est possible de construire des équations One-Way (version True Amplitude et séries de Bremmer) qui possèdent un domaine de validité plus large [Rudel *et al.*, 2022] que les formulations classiques telles que celles proposées par Towne & Colonius. En outre, la précision de cette information sera utilisée dans le Chapitre 3 pour construire des conditions de transmission précises en présence de discontinuités dans le domaine de calcul.

### 2.1.2.3 Obtention de différentes équations One-Way : standard et True Amplitude

À présent, en effectuant le changement de variable  $\boldsymbol{\phi} = \tilde{\mathbf{V}}^{N_\beta} \boldsymbol{\psi}$ , l'équation (2.8) peut se réécrire en termes de variables One-Way :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_+ \\ \boldsymbol{\psi}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{++}^{N_\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{D}}_{--}^{N_\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_+ \\ \boldsymbol{\psi}_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{++}^{N_\beta} & \tilde{\mathbf{W}}_{+-}^{N_\beta} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{-+}^{N_\beta} & \tilde{\mathbf{W}}_{--}^{N_\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_+ \\ \boldsymbol{\psi}_- \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

où la matrice  $\tilde{\mathbf{W}}^{N_\beta} := -\tilde{\mathbf{U}}^{N_\beta} \frac{d\tilde{\mathbf{V}}^{N_\beta}}{dx}$  est appelée l'opérateur de réfraction/réflexion.

La première étape pour construire les équations One-Way est le découplage entre les variables  $\boldsymbol{\psi}_+$  et  $\boldsymbol{\psi}_-$ , c'est-à-dire les informations à gauche et à droite. Pour cela, les termes extra-diagonaux de la matrice  $\widetilde{\mathbf{W}}^{N_\beta}$  sont négligés, c'est-à-dire que  $\widetilde{\mathbf{W}}_{+-}^{N_\beta} = \widetilde{\mathbf{W}}_{-+}^{N_\beta} = \mathbf{0}$  et l'équation (2.48) conduit à :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_+ \\ \boldsymbol{\psi}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{D}}_{++}^{N_\beta} + \widetilde{\mathbf{W}}_{++}^{N_\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{D}}_{--}^{N_\beta} + \widetilde{\mathbf{W}}_{--}^{N_\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_+ \\ \boldsymbol{\psi}_- \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Négliger ces termes est obligatoire pour résoudre un système bien posé, mais c'est aussi à l'origine de l'hypothèse d'écoulement faiblement variable le long de la direction privilégiée ( $x$  dans notre cas) [Towne, 2016].

L'équation (2.49) permet alors de dériver deux types d'équations One-Way :

- 1/ Les équations One-Way standard droite et gauche sont obtenues en négligeant les termes  $\widetilde{\mathbf{W}}_{++}^{N_\beta}$  et  $\widetilde{\mathbf{W}}_{--}^{N_\beta}$  :

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\psi}_+}{dx} = \widetilde{\mathbf{D}}_{++}^{N_\beta} \boldsymbol{\psi}_+, & \text{(One-Way standard droite)} \\ \boldsymbol{\psi}_- = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.50)$$

et

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\psi}_-}{dx} = \widetilde{\mathbf{D}}_{--}^{N_\beta} \boldsymbol{\psi}_-, & \text{(One-Way standard gauche)} \\ \boldsymbol{\psi}_+ = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.51)$$

Ces équations reproduisent précisément les fréquences spatiales du signal, mais l'amplitude peut être inexacte lorsque les deux termes  $\widetilde{\mathbf{W}}_{++}^{N_\beta}$  et  $\widetilde{\mathbf{W}}_{--}^{N_\beta}$  ne sont pas suffisamment petits.

- 2/ Les équations One-Way True Amplitude droite et gauche :

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\psi}_+}{dx} = \left( \widetilde{\mathbf{D}}_{++}^{N_\beta} + \widetilde{\mathbf{W}}_{++}^{N_\beta} \right) \boldsymbol{\psi}_+, & \text{(One-Way True Amplitude droite)} \\ \boldsymbol{\psi}_- = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.52)$$

et

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\psi}_-}{dx} = \left( \widetilde{\mathbf{D}}_{--}^{N_\beta} + \widetilde{\mathbf{W}}_{--}^{N_\beta} \right) \boldsymbol{\psi}_-, & \text{(One-Way True Amplitude gauche)} \\ \boldsymbol{\psi}_+ = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.53)$$

Ces équations reproduisent fidèlement les fréquences spatiales et l'amplitude du signal.

*Remarque 10.* La formulation One-Way de Towne & Colonius appartient à la première catégorie.

*Remarque 11.* Le cas où l'écoulement de base est invariant en  $x$  dans tout le domaine de calcul conduit à une matrice  $\widetilde{\mathbf{V}}^{N_\beta}$  indépendante de la variable  $x$ , ce qui signifie que négliger le terme  $\widetilde{\mathbf{W}}^{N_\beta}$  ne génère pas d'approximation du modèle.

*Remarque 12.* Il est par ailleurs également possible de prendre en compte un terme source volumique [Rudel, 2022]. Afin d'être correctement séparé en termes se propageant vers la droite et la gauche, il est nécessaire de projeter ce terme dans l'espace des variables One-Way en utilisant la matrice  $\widetilde{\mathbf{U}}$ . En partant d'un terme source  $\mathbf{f}$  dans l'équation (2.5), on obtient :

$$\mathbf{f}_\psi = \widetilde{\mathbf{U}} \widetilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{f}. \quad (2.54)$$

De cette manière, ce terme source est également décomposé selon le sens de propagation des modes excités par ses différentes composantes et peut s'écrire :

$$\mathbf{f}_\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\psi,+} \\ \mathbf{f}_{\psi,-} \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

où  $\mathbf{f}_{\psi,+}$  correspond à la partie excitant des modes se propageant vers la droite et  $\mathbf{f}_{\psi,-}$  la partie excitant des modes se propageant vers la gauche.

Enfin, l'intégration numérique des équations (2.50), (2.51), (2.52) et (2.53) est réalisée à partir d'un schéma de Galerkin Discontinu (GD) adapté à partir du système hyperbolique du premier ordre [Di Pietro et Ern, 2012]. Les détails sont donnés par la suite dans la sous-section 2.2.1.2.

**Pour simplifier les notations, la factorisation (2.46) sera maintenant définie par  $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{U}}$  dans le reste du manuscrit.**

### 2.1.3 Séries de Bremmer avec termes sources

La méthode des séries de Bremmer se base sur une décomposition de la solution en une somme infinie de termes selon le sens de propagation de l'onde. Les séries de Bremmer permettent de tenir compte de termes correctifs d'ordre supérieur. Elles ont déjà été traitées dans [Rudel, 2022], mais nous ajoutons ici des termes sources (source volumique ainsi que termes résiduels provenant de l'opérateur tronqué de l'équation (2.4)). Leur ajout nous permet notamment de comparer des résultats sans et avec des itérations de Bremmer, afin de justifier le fait d'ajouter ou au contraire de négliger ces termes résiduels dans l'approximation. Nous allons voir dans cette partie comment les construire et les résoudre numériquement.

#### 2.1.3.1 Construction des séries de Bremmer

Dans cette partie, nous présentons la construction des séries de Bremmer [Bremmer, 1951] avec des termes sources (résidus ainsi que forçages volumiques externes). Cette méthode a été introduite pour la première fois dans le cadre des approximations WKB<sup>1</sup> pour les problèmes unidimensionnels. Puis, elles ont été adaptées pour les ondes sismiques bidimensionnelles [Ursin, 1984], avant d'être couplées avec une résolution des équations One-Way utilisant la théorie des opérateurs pseudo-différentiels [De Hoop, 1996]. Les séries de Bremmer vont être construites d'après [Gustafsson, 2000], tout en se servant des notations utilisées dans le cadre de la factorisation numérique de l'opérateur de propagation vue précédemment.

Tout d'abord, les résidus contenant tous les termes non linéaires des équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 \frac{d}{dx} + \mathbf{R}_2 \frac{d^2}{dx^2}, \quad (2.56)$$

où  $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2 \in \mathbb{C}^{(N_++N_-) \times (N_++N_-)}$  sont respectivement les résidus d'ordre 0, 1 et 2. L'obtention de ces termes est explicitée en Annexe C.

On a alors la décomposition suivante :

$$\mathbf{R}\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{++} & \mathbf{R}_{+-} \\ \mathbf{R}_{-+} & \mathbf{R}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{i,++} & \mathbf{R}_{i,+-} \\ \mathbf{R}_{i,-+} & \mathbf{R}_{i,--} \end{pmatrix} \frac{d^i}{dx^i} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

---

1. L'approximation WKB (d'après les physiciens Wentzel, Kramers et Brillouin) est une méthode permettant d'approcher les solutions d'une équation différentielle linéaire avec des coefficients variables en espace. Cette méthode est notamment utilisée en mécanique quantique.

D'après l'équation (2.48), il est alors possible de déduire deux systèmes d'équations One-Way à résoudre. La première équation vers la droite s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_+}{dx} = \left( \tilde{\mathbf{D}}_{++} + \tilde{\mathbf{W}}_{++} \right) \psi_+ + \tilde{\mathbf{W}}_{+-} \psi_- + \mathbf{R}_{++} \psi_+ + \mathbf{R}_{+-} \psi_- + \mathbf{f}_+, \\ \psi_+(0) = \psi_+^{in}, \end{cases} \quad (2.58)$$

et celle vers la gauche :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_-}{dx} = \left( \tilde{\mathbf{D}}_{--} + \tilde{\mathbf{W}}_{--} \right) \psi_- + \tilde{\mathbf{W}}_{-+} \psi_+ + \mathbf{R}_{-+} \psi_+ + \mathbf{R}_{--} \psi_- + \mathbf{f}_-, \\ \psi_-(L) = \psi_-^{in}, \end{cases} \quad (2.59)$$

où  $\mathbf{f}_+$  et  $\mathbf{f}_-$  sont respectivement des forçages externes droite et gauche ayant subi les mêmes transformations que les variables  $\psi_+$  et  $\psi_-$ .

La résolution est faite ici entre  $x = 0$  et  $x = L$ . Nous avons imposé une condition aux limites de type Dirichlet non-homogène en  $x = 0$  pour  $\psi_+$  et en  $x = L$  pour  $\psi_-$ , bien qu'en pratique, cette dernière soit généralement nulle. Ces deux équations peuvent être réécrites sous forme intégrale de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \psi_+(x) &= e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{++} + \tilde{\mathbf{W}}_{++})x} \psi_+^{in} \\ &+ \int_0^x e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{++} + \tilde{\mathbf{W}}_{++})(x-\tau)} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{+-} \psi_-(\tau) + \mathbf{R}_{++} \psi_+(\tau) + \mathbf{R}_{+-} \psi_-(\tau) + \mathbf{f}_+ \right) d\tau, \end{aligned} \quad (2.60)$$

et

$$\begin{aligned} \psi_-(x) &= e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{--} + \tilde{\mathbf{W}}_{--})x} \psi_-^{in} \\ &+ \int_L^x e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{--} + \tilde{\mathbf{W}}_{--})(x-\tau)} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{-+} \psi_+(\tau) + \mathbf{R}_{-+} \psi_+(\tau) + \mathbf{R}_{--} \psi_-(\tau) + \mathbf{f}_- \right) d\tau, \end{aligned} \quad (2.61)$$

où les deux équations précédentes désignent des exponentielles de matrices classiques.

Le principe des séries de Bremmer est de considérer les variables  $\psi_+$  et  $\psi_-$  comme des sommes infinies :

$$\psi_+ = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_+^i \quad ; \quad \psi_- = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_-^i. \quad (2.62)$$

En remplaçant dans (2.60) et (2.61), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_+^i &= e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{++} + \tilde{\mathbf{W}}_{++})x} \psi_+^{in} \\ &+ \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^x e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{++} + \tilde{\mathbf{W}}_{++})(x-\tau)} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{+-} \psi_-(\tau) + \mathbf{R}_{++} \psi_+(\tau) + \mathbf{R}_{+-} \psi_-(\tau) + \mathbf{f}_+ \right) d\tau, \end{aligned} \quad (2.63)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_-^i &= e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{--} + \tilde{\mathbf{W}}_{--})x} \psi_-^{in} \\ &+ \sum_{i=0}^{+\infty} \int_L^x e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{--} + \tilde{\mathbf{W}}_{--})(x-\tau)} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{-+} \psi_+(\tau) + \mathbf{R}_{-+} \psi_+(\tau) + \mathbf{R}_{--} \psi_-(\tau) + \mathbf{f}_- \right) d\tau. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Il est alors possible de définir l'algorithme suivant :

1. Calcul de  $\psi_+^0$  et de  $\psi_-^0$  : choix d'initialiser avec deux équations One-Way standard droite et gauche et forçage

$$\begin{aligned}\psi_+^0(x) &:= e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{+++} + \tilde{\mathbf{W}}_{+++})x} \psi_+^{in} + \int_0^x e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{+++} + \tilde{\mathbf{W}}_{+++})(x-\tau)} \mathbf{f}_+(\tau) d\tau, \\ \psi_-^0(x) &:= e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{---} + \tilde{\mathbf{W}}_{---})x} \psi_-^{in} + \int_x^L e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{---} + \tilde{\mathbf{W}}_{---})(x-\tau)} \mathbf{f}_-(\tau) d\tau.\end{aligned}\tag{2.65}$$

2. Calcul de  $\psi_+^{i+1}$  et  $\psi_-^{i+1}$  : on a  $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\psi_+^{i+1}(x) &= \int_0^x e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{+++} + \tilde{\mathbf{W}}_{+++})(x-\tau)} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{+-} \psi_-^i(\tau) + \mathbf{R}_{++} \psi_+^i(\tau) + \mathbf{R}_{+-} \psi_-^i(\tau) \right) d\tau, \\ \psi_-^{i+1}(x) &= \int_x^L e^{(\tilde{\mathbf{D}}_{---} + \tilde{\mathbf{W}}_{---})(x-\tau)} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{-+} \psi_+^i(\tau) + \mathbf{R}_{-+} \psi_+^i(\tau) + \mathbf{R}_{--} \psi_-^i(\tau) \right) d\tau.\end{aligned}\tag{2.66}$$

*Remarque 13.* Il existe des résultats théoriques de convergence des séries de Bremmer dans le cas de l'équation des ondes [Atkinson, 1960, Wing, 1974], mais à notre connaissance pas dans le cas d'équations plus complexes comme celles d'Euler et de Navier-Stokes. Il a été montré en effet que ces séries pouvaient se mettre sous la forme de séries de Neumann et certains critères assurent également la convergence. Des tests numériques concernant la convergence des séries de Bremmer ont cependant été réalisés pour les équations d'Euler linéarisées dans la thèse de [Rudel, 2022] et ont montré que ces approches étaient robustes.

### 2.1.3.2 Résolution des séries de Bremmer

Il est désormais nécessaire de résoudre itérativement les équations One-Way droites et gauches définies par les équations (2.65) et (2.66). Les sommes sont infinies, mais en pratique, la résolution de ces équations est réalisée jusqu'à respecter un certain critère de convergence. La première étape du calcul consiste à déterminer les termes  $\psi_+^0$  et  $\psi_-^0$  définis par le système d'équations (2.65), par résolution d'une équation One-Way droite :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_+^0}{dx} - \varepsilon \tilde{\mathbf{W}}_{+++} \psi_+^0 = \tilde{\mathbf{D}}_{+++} \psi_+^0 + \mathbf{f}_+, \\ \psi_+^0(0) = \psi_+^{in}, \end{cases}\tag{2.67}$$

et par résolution d'une équation One-Way gauche :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_-^0}{dx} - \varepsilon \tilde{\mathbf{W}}_{---} \psi_-^0 = \tilde{\mathbf{D}}_{---} \psi_-^0 + \mathbf{f}_-, \\ \psi_-^0(L) = \psi_-^{in}, \end{cases}\tag{2.68}$$

où  $\varepsilon \in [0, 1]$  est un paramètre indiquant si le terme  $\tilde{\mathbf{W}}_{+++}$  ou  $(\tilde{\mathbf{W}}_{---})$  est résolu de manière explicite ou implicite. Pour  $\varepsilon = 0$ , les séries de Bremmer sont initialisées avec une équation One-Way standard et pour  $\varepsilon = 1$ , elles sont initialisées avec une équation One-Way True Amplitude. Les différences de stabilité et de convergence entre ces deux approches sont discutées dans [Rudel *et al.*, 2022].

*Remarque 14.* En général, nous imposons seulement une onde à l'entrée du domaine (à gauche) et nous avons par conséquent la condition suivante :  $\psi_-^0 = \mathbf{0}$ . Dans ce cas, le terme source volumique  $\mathbf{f}_-$  est introduit dans l'équation (2.70).



avec  $N_r$  l'ordre des séries de Bremmer.

Contrairement à la méthode True Amplitude présentée dans la sous-section précédente, les séries de Bremmer peuvent calculer correctement les ondes se propageant dans les deux directions. En outre, itérer à droite et à gauche garantit que le résultat est correct dans l'ensemble du domaine de calcul, de l'entrée à la sortie. En pratique, dans les différents exemples traités, seules cinq itérations suffisent à la convergence des séries de Bremmer [Rudel, 2022].

## 2.2 Algorithme de résolution des équations OWNS

Nous avons mis en place le cadre permettant de construire plusieurs types d'approches One-Way basées sur les équations de Navier-Stokes linéarisées, nous pouvons désormais aborder la résolution numérique des équations OWNS. Pour ce faire, nous évoquons tout d'abord les schémas de discrétisation utilisés pour la discrétisation transverse des équations ainsi que pour l'algorithme de marche en  $x$  dans la Sous-section 2.2.1. Dans la Sous-section 2.2.2, la question de la gestion des singularités pouvant apparaître dans le système One-Way à résoudre est évoquée de manière théorique puis appliquée sur un exemple. Nous présentons ensuite en Sous-section 2.2.3 la complexité des trois approches One-Way ainsi que la méthode d'échantillonnage mise en place afin de réduire le coût de la méthode selon le type d'écoulement de base considéré. Enfin, dans la Sous-section 2.2.4, nous parlons du choix pratique des coefficients  $\beta_{\pm}$  qui permettent de faire converger les conditions aux limites non-réfléchissantes et d'obtenir des équations One-Way bien posées.

### 2.2.1 Méthodes de discrétisation

La construction des équations One-Way implique deux étapes distinctes de discrétisation : une discrétisation du système d'équations différentielles selon la direction transverse  $y$  et une résolution de l'équation ordinaire matricielle selon la direction privilégiée  $x$ , qui est totalement découplée de la première étape. Ce découplage permet notamment d'utiliser des méthodes de discrétisation différentes et adaptées à chaque étape.

#### 2.2.1.1 Discrétisation transverse

La méthode de discrétisation transverse étant appliquée à un système d'équations aux dérivées ordinaires unidimensionnel, de nombreuses méthodes numériques étaient possibles : éléments finis, différences finies, Galerkin discontinue, etc. Dans notre cas, nous avons choisi une discrétisation par une méthode de différences finies, qui présente l'avantage d'être adaptée aux équations de la mécanique des fluides (pour la prise en compte des couches limites, par exemple) et d'être relativement simple à implémenter.

À partir de l'équation (2.5), on discrétise les opérateurs transverses pour chaque valeur de  $x$ . Concernant les termes  $i\omega\mathbf{I}$  et  $\mathbf{C}$ , on implémente une simple matrice diagonale que l'on multiplie par les poids correspondants. Pour les matrices  $\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{D}_{yy}$ , on utilise des méthodes de différences finies afin de former respectivement une matrice de "transport" et une matrice de "rigidité" que l'on multipliera ensuite par les poids correspondants contenus dans  $\mathbf{B}_y$  et  $\mathbf{B}_{yy}$  (cf. Annexe B). En pratique, nous allons donc remplacer les termes  $\mathbf{B}_y\partial_y$  et  $\mathbf{B}_{yy}\partial_y^2$  par des opérateurs discrétisés en différences finies  $\mathbf{B}_y\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{B}_{yy}\mathbf{D}_{yy}$ .

Nous allons approcher les dérivées première et seconde en  $y$  à l'aide d'un schéma de différences finies compactes d'ordre 4 à 6 [Gamet *et al.*, 1999] qui présente l'avantage de pouvoir être utilisé sur un maillage non-uniforme tout en garantissant une approximation d'ordre 4 pouvant monter continûment jusqu'à l'ordre 6 pour un maillage uniforme. Les schémas aux différences finies compactes d'ordre élevé représentent une famille de schémas numériques pouvant à la fois être utilisés pour l'évaluation des dérivées ainsi que pour des

applications de filtrage et d'interpolation. Il s'agit d'une généralisation des schémas classiques de Padé [Lele, 1992]. Les algorithmes basés sur de tels schémas peuvent fournir des solutions numériques avec une résolution de type spectrale et une très faible dissipation numérique. En outre, il s'agit d'un schéma d'ordre élevé permettant de réduire le nombre de points de discrétisation  $N_y$  et d'alléger les calculs des matrices  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}$  et  $\tilde{\mathbf{D}}$ . Enfin, ce type de méthode permet une application des conditions aux limites transverses simple et directe.

Nous expliquons comment obtenir les dérivées première et seconde dans le cas d'un maillage uniforme avec un pas  $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ ,  $i = 1, \dots, N_y - 1$  constant. On obtient une approximation tridiagonale d'ordre 6 pour les deux dérivées pour les points intérieurs du maillage ( $i = 3, \dots, N_y - 3$ ). Un schéma non centré est nécessaire aux points proches de la frontière, c'est-à-dire aux nœuds 1, 2,  $N_y - 1$  et  $N_y$ . On peut utiliser un schéma de Padé d'ordre 4 et un schéma compact d'ordre 3 pour les nœuds 2 et  $N_y - 1$  et 1 et  $N_y$  respectivement pour les deux dérivées.

**Approximation de la dérivée première** La dérivée première peut être approchée de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial y} \approx \mathbf{D}_y = \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{G}_2, \quad (2.76)$$

où  $\mathbf{D}_y$  est une matrice dense de taille  $N_y \times N_y$ ,  $\mathbf{G}_1$  est une matrice tridiagonale qui s'écrit :

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

et  $\mathbf{G}_2$  est une matrice qui s'écrit :

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{\Delta y} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{36} & -\frac{7}{9} & 0 & \frac{7}{9} & \frac{1}{36} & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

**Approximation de la dérivée seconde** La dérivée seconde peut être approchée de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \approx \mathbf{D}_{yy} = \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{G}_2, \quad (2.79)$$

où  $\mathbf{D}_y$  est une matrice dense de taille  $N_y \times N_y$ ,  $\mathbf{G}_1$  est une matrice tridiagonale qui s'écrit :

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & \frac{1}{10} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{11} & 1 & \frac{2}{11} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{10} & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 11 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

et  $\mathbf{G}_2$  est une matrice qui s'écrit :

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{\Delta y^2} \begin{pmatrix} 13 & -27 & 15 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{6}{5} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{36} & -\frac{7}{9} & 0 & \frac{7}{9} & \frac{1}{36} & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -15 & 27 & -13 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

*Remarque 15.* La matrice  $\mathbf{G}_1$  étant tridiagonale, il est possible d'utiliser une routine LAPACK adaptée afin de résoudre les deux systèmes (2.76) et (2.79).

*Remarque 16.* Dans le cas d'un pas  $\Delta y$  non uniforme, les formules sont données dans [Gamet *et al.*, 1999].

### 2.2.1.2 Algorithme de marche en $x$ : méthode de Galerkin Discontinue (GD)

La résolution le long de l'axe  $x$  est effectuée par une méthode de Galerkin discontinue (GD) amont avec un ordre polynomial  $k$  [Di Pietro et Ern, 2012]. Cette méthode a l'avantage d'être quasi explicite (c'est-à-dire qu'on obtient une matrice triangulaire inférieure compacte par construction) et inconditionnellement stable pour l'équation d'advection. Nous décrivons ici les principales étapes de l'algorithme de marche en  $x$  dans le cas d'une équation One-Way standard droite avec terme source :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_+}{dx} = \tilde{\mathbf{D}}_{++}\psi_+ + \mathbf{h}_+ \text{ dans } ]0, L_x[, \\ \psi_+(0) = \mathbf{g}^{in} \in \mathbb{C}^{N_+}, \end{cases} \quad (2.82)$$

mais la construction est obtenue de la même manière et avec les mêmes propriétés pour les équations One-Way gauches ou leurs versions True Amplitude.

Tout d'abord, le domaine de calcul  $[0, L_x]$  est maillé par  $N_s$  segments non uniformes, c'est-à-dire  $[0, L_x] = \cup_{j=1}^{N_s} S_j$  avec  $S_j = [x_j, x_{j+1}]$  pour  $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{N_s} < x_{N_s+1} = L_x$  et l'espace d'approximation (discontinu) suivant est introduit :

$$V_{h,k}^{N_+} = \left\{ \varphi_h \in [L^2(]0, L_x[)]^{N_+} \mid \forall j \in \llbracket 1, N_s \rrbracket, \varphi_h^j \in [\mathcal{P}^k(S_j)]^{N_+} \right\}, \quad (2.83)$$

où  $k \in \mathbb{N}$  et  $\mathcal{P}^k(S_j)$  est l'espace polynomial de degré total inférieur ou égal à  $k$  défini sur le segment  $S_j$ .

L'étape suivante consiste à obtenir la formulation variationnelle de l'équation (2.82) en la multipliant par une fonction test  $\varphi_h \in V_{h,k}^{N_+}$ , puis en intégrant sur chaque segment  $S_j$ . On a alors pour tout  $j \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$  :

$$\int_{S_j} \frac{d\psi_+}{dx} \cdot \varphi_h dx = \int_{S_j} \tilde{\mathbf{D}}_{++} \psi_+ \cdot \varphi_h dx + \int_{S_j} \mathbf{h}_+ \cdot \varphi_h dx. \quad (2.84)$$

En réalisant une intégration par parties sur le terme de gauche, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{S_j} \psi_+ \cdot \frac{d\varphi_h}{dx} dx + \psi_{+|S_j}(x_{j+1}) \cdot \varphi_{h|S_j}(x_{j+1}) - \psi_{+|S_j}(x_j) \cdot \varphi_{h|S_j}(x_j) \\ & = \int_{S_j} \tilde{\mathbf{D}}_{++} \psi_+ \cdot \varphi_h dx + \int_{S_j} \mathbf{h}_+ \cdot \varphi_h dx. \end{aligned} \quad (2.85)$$

La formulation GD consiste alors à trouver une approximation  $\psi_{+,h} \in V_{h,k}^{N_+}$  de  $\psi_+$  satisfaisant l'équation (2.85) dans laquelle les flux (ou traces numériques ici) ( $\psi_{+|S_j}(x_j)$ ,  $\psi_{+|S_j}(x_{j+1})$ ) sont remplacés par leurs versions numériques ( $\hat{\psi}_{+,j}^l$ ,  $\hat{\psi}_{+,j}^r$ ) :

$$\begin{aligned} & - \int_{S_j} \psi_{+,h} \cdot \frac{d\varphi_h}{dx} dx + \hat{\psi}_{+,j}^r \cdot \varphi_{h|S_j}(x_{j+1}) - \hat{\psi}_{+,j}^l \cdot \varphi_{h|S_j}(x_j) \\ & = \int_{S_j} \tilde{\mathbf{D}}_{++} \psi_{+,h} \cdot \varphi_h dx + \int_{S_j} \mathbf{h}_+ \cdot \varphi_h dx. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Un choix classique et efficace pour les flux numériques dans le contexte de l'équation d'advection est l'approche upwind (ou amont) [Di Pietro et Ern, 2012] :

$$\hat{\psi}_{+,j}^l = \begin{cases} \psi_{+,h|S_{j-1}}(x_j) & \forall j \geq 2, \\ \mathbf{g}^{in} & \text{pour } j = 1. \end{cases} \quad (2.87)$$

$$\hat{\psi}_{+,j}^r = \psi_{+,h|S_j}(x_{j+1}) \quad \forall j \geq 1.$$

En réalisant une nouvelle intégration par parties de l'équation (2.86) et en utilisant la définition des flux numériques (2.87), nous obtenons la formulation GD finale : trouver une solution  $\psi_{+,h} \in V_{h,k}^{N_+}$  telle que  $\forall j \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$ ,  $\forall \varphi_h \in V_{h,k}^{N_+}$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{S_1} \frac{d\psi_{+,h}}{dx} \cdot \varphi_h dx + [\psi_{+,h|S_1}(x_1) - \mathbf{g}^{in}] \cdot \varphi_{h|S_1}(x_1) \\ & = \int_{S_1} \tilde{\mathbf{D}}_{++} \psi_{+,h} \cdot \varphi_h dx + \int_{S_1} \mathbf{h}_+ \cdot \varphi_h dx \quad \text{pour } j = 1, \\ & \int_{S_j} \frac{d\psi_{+,h}}{dx} \cdot \varphi_h dx + [\psi_{+,h|S_j}(x_j) - \psi_{+,h|S_{j-1}}(x_j)] \cdot \varphi_{h|S_j}(x_j) \\ & = \int_{S_j} \tilde{\mathbf{D}}_{++} \psi_{+,h} \cdot \varphi_h dx + \int_{S_j} \mathbf{h}_+ \cdot \varphi_h dx \quad \forall j \geq 2. \end{aligned} \right. \quad (2.88)$$

*Remarque 17.* La formulation (2.88) montre la structure triangulaire inférieure du système linéaire GD, puisque le calcul de la solution sur le segment  $S_j$  ne nécessite que la connaissance de la solution sur le segment  $S_{j-1}$ . On calcule donc d'abord  $\psi_{+,h|S_1}$  puis  $\psi_{+,h|S_2}$  et ainsi de suite. La taille du système linéaire à résoudre pour chaque segment est de  $(k+1)N_+$ , ce qui correspond à une complexité globale de  $N_s N_+^3$ .

*Remarque 18.* Pour discrétiser l'équation (2.88), nous utilisons des fonctions de base de type Lagrange associées à des points de quadrature de Gauss-Lobatto.

*Remarque 19.* La valeur de  $k$  sera fixée à 2 pour toutes les simulations numériques réalisées dans les applications suivantes. Quelques tests ont été réalisés afin de comparer cette formulation GD du second ordre à une méthode BDF (Backward Differentiation Formula) du second ordre dans [Rudel et al., 2022], ainsi qu'à une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) dans [Rudel, 2022].

### 2.2.2 Prise en compte des singularités

Des singularités peuvent apparaître dans le système hyperbolique (2.5), notamment lorsque la vitesse axiale de l'écoulement de base s'annule à la paroi (écoulement de Poiseuille par exemple) ou lorsqu'on impose des conditions aux limites transverses (sans dérivées en  $x$ ) avec une méthode de différences finies. Bien que toujours diagonalisable, la matrice  $\mathbf{A}$  possède alors des valeurs propres nulles,  $\tilde{\mathbf{A}}$  n'est plus de plein rang et n'est donc plus inversible. Il n'est donc plus possible de former le système (2.7) et d'exprimer l'opérateur de propagation nécessaire à la factorisation One-Way.

Afin de gérer la non-inversibilité de la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ , une méthode proposée dans [Majda et Osher, 1975] a montré qu'il était possible de réécrire le problème à résoudre sous forme réduite afin d'obtenir un système similaire à celui de l'équation (2.7). Nous allons dans un premier temps traiter les singularités dans le cas général des équations One-Way puis nous appliquerons le traitement à un exemple précis.

Tout d'abord, la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  définie dans l'équation (2.6) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{++} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{--} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\pm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.89)$$

où l'on rappelle que  $\tilde{\mathbf{A}}$  est une matrice diagonale de dimension  $N \times N$  et de rang  $N_+ + N_-$ , avec  $N_+$  le nombre de valeurs propres positives et  $N_-$  le nombre de valeurs propres négatives. Les matrices  $\tilde{\mathbf{A}}_{++}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_{--}$  sont des matrices diagonales de tailles respectives  $N_+ \times N_+$  et  $N_- \times N_-$ .  $\tilde{\mathbf{A}}_{00}$  est une matrice diagonale de taille  $N_0 \times N_0$ , où  $N_0$  représente alors le nombre de valeurs propres nulles et on a  $N = N_+ + N_- + N_0$ . Enfin, la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}_{\pm}$  est de taille  $(N_+ + N_-) \times (N_+ + N_-)$  et contient sur sa diagonale les matrices blocs  $\tilde{\mathbf{A}}_{++}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_{--}$ .

Il est alors possible d'appliquer la même décomposition à la variable caractéristique  $\phi$  :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\pm} \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

où  $\phi_{\pm}$  est le vecteur contenant les variables  $\phi_+$  et  $\phi_-$ , de taille  $N_+ + N_-$  et où  $\phi_0$  est de taille  $N_0$ .

La matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  étant non inversible, il n'est pas possible d'obtenir le système (2.7) permettant d'obtenir les équations One-Way. On peut cependant écrire le nouveau système suivant :

$$\tilde{\mathbf{A}} \frac{d\phi}{dx} = \tilde{\mathbf{M}}(x)\phi, \quad (2.91)$$

où  $\tilde{\mathbf{M}}$  correspond à l'opérateur de propagation précédemment défini avant multiplication à gauche par l'inverse de la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Ainsi, en utilisant la décomposition de  $\tilde{\mathbf{A}}$  et de  $\phi$ ,

l'équation (2.91) peut se réécrire :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{A}}_{\pm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{\pm} \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{M}}_{\pm\pm} & \widetilde{\mathbf{M}}_{\pm 0} \\ \widetilde{\mathbf{M}}_{0\pm} & \widetilde{\mathbf{M}}_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\pm} \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad (2.92)$$

où les indices de la matrice  $\widetilde{\mathbf{M}}$  désignent les dimensions de chaque bloc qui la compose. Par exemple, la matrice bloc  $\widetilde{\mathbf{M}}_{\pm\pm}$  est de dimension  $(N_+ + N_-) \times (N_+ + N_-)$  tandis que  $\widetilde{\mathbf{M}}_{00}$  est de dimension  $N_0 \times N_0$ .

Ce dernier système nous permet alors d'obtenir les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\phi_{\pm}}{dx} = \widetilde{\mathbf{A}}_{\pm}^{-1} [\widetilde{\mathbf{M}}_{\pm\pm}\phi_{\pm} + \widetilde{\mathbf{M}}_{\pm 0}\phi_0], \\ \mathbf{0} = \widetilde{\mathbf{M}}_{0\pm}\phi_{\pm} + \widetilde{\mathbf{M}}_{00}\phi_0. \end{cases} \quad (2.93)$$

Finalement, en supposant le bloc  $\widetilde{\mathbf{M}}_{00}$  inversible, le système réduit en termes de variables caractéristiques peut s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d\phi_{\pm}}{dx} = \widetilde{\widetilde{\mathbf{M}}}\phi_{\pm}, \\ \phi_0 = -\widetilde{\mathbf{M}}_{00}^{-1}\widetilde{\mathbf{M}}_{0\pm}\phi_{\pm}. \end{cases} \quad (2.94)$$

où  $\widetilde{\widetilde{\mathbf{M}}} := \widetilde{\mathbf{A}}_{\pm}^{-1} [\widetilde{\mathbf{M}}_{\pm\pm} - \widetilde{\mathbf{M}}_{\pm 0}\widetilde{\mathbf{M}}_{00}^{-1}\widetilde{\mathbf{M}}_{0\pm}]$  est de dimension  $(N_+ + N_-) \times (N_+ + N_-)$  et est considérée comme le nouvel opérateur de propagation en présence de singularités. Ce système est désormais dans une configuration identique à celle de l'équation (2.8) et il est alors possible de réaliser la factorisation de l'opérateur de propagation sur le système réduit.

### 2.2.2.1 Exemple

On se place ici dans le cas d'un écoulement parallèle ( $\bar{u}(x, y) = \bar{u}(y)$  et  $\bar{v} = 0$ ) dans un conduit de hauteur  $L_y$ , et s'annulant à la paroi (en  $y = 0$  et  $y = L_y$ ). Nous avons deux possibilités :

1. Cas d'un écoulement subsonique ( $M < 1$ ) :  $\bar{u}(y) < a \forall y \in [0, L_y]$ .
2. Cas d'un écoulement supersonique ( $M > 1$ ) :  $\exists y^* \in ]0, L_y[$  tel que  $\bar{u}(y^*) = a$ . On a alors :
  - $\forall y < y^* \Rightarrow \bar{u}(y) < a$ ;
  - $\forall y > y^* \Rightarrow \bar{u}(y) > a$ .

Dans l'exemple considéré, il y a en réalité trois régions distinctes dans l'écoulement : une région dans laquelle  $M > 1$  et deux régions dans lesquelles  $M < 1$ . Dans ce cas, il y a deux lignes soniques et on suppose qu'il existe un certain  $y_{s1}$  vérifiant  $y^* = y_{s1}$  ainsi qu'un certain  $y_{s2}$  vérifiant  $y^* = y_{s2}$  (c'est-à-dire les deux ordonnées soniques permettant le passage du régime subsonique au régime supersonique).

**Cas subsonique** Nous considérons le cas d'un conduit aux parois rigides modélisées par une condition de non-glissement (ou *no slip*) assortie d'une condition isotherme se traduisant par :

$$\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{T} = 0, \quad (2.95)$$

où la perturbation de température  $\tilde{T}$  est obtenue en linéarisant l'équation d'état (2.1e) :

$$\tilde{T} = \gamma M^2 (\bar{v}\tilde{p} + \tilde{v}\bar{p}). \quad (2.96)$$

En partant de la relation  $\tilde{q} = T\phi$ , nous avons :

$$\begin{cases} \tilde{v} = -\frac{\bar{v}}{\gamma\bar{p}}\phi_1 + \phi_2 - \frac{\bar{v}}{\gamma\bar{p}}\phi_4, \\ \tilde{u} = \sqrt{\frac{\bar{v}}{\gamma\bar{p}}}\phi_1 - \sqrt{\frac{\bar{v}}{\gamma\bar{p}}}\phi_4, \\ \tilde{v} = \phi_3, \\ \tilde{p} = \phi_1 + \phi_4, \end{cases} \quad (2.97)$$

L'équation (2.95) peut alors être réécrite en termes de variables caractéristiques :

$$\begin{cases} \phi_1 - \phi_4 = 0, \\ \phi_3 = 0, \\ (1 - \frac{1}{\gamma})\phi_1 + \frac{\bar{p}}{\bar{v}}\phi_2 + (1 - \frac{1}{\gamma})\phi_4 = 0. \end{cases} \quad (2.98)$$

*Remarque 20.* D'autres types de conditions aux limites transverses seront vus dans les Chapitres 3 et 4.

À ce nouveau système, on associe également des contraintes de singularités qui s'écrivent :

$$\sum_{k=1}^{4N_y} \tilde{\mathbf{M}}_{N_y+j,k} \phi_k = 0, \text{ pour } j = \{1, N_y, N_y + 1, 2N_y\}. \quad (2.99)$$

Ces relations nous permettent alors d'éliminer 4 inconnues.

Désormais, nous allons décider quels degrés de liberté nous devons garder. Dans les contraintes de singularités, nous gardons :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{4N_y} \tilde{\mathbf{M}}_{2N_y+1,k} \phi_k = 0, \\ \sum_{k=1}^{4N_y} \tilde{\mathbf{M}}_{3N_y,k} \phi_k = 0. \end{cases} \quad (2.100)$$

Nous faisons donc le choix d'éliminer  $\phi_4^1$  (condition du bas) et  $\phi_4^{N_y}$  (condition du haut).

Dans les conditions aux limites, nous décidons d'éliminer  $\phi_1^1$  (condition du bas) et  $\phi_1^{N_y}$  (condition du haut) ainsi que  $\phi_2^1$  (condition du bas) et  $\phi_2^{N_y}$  (condition du haut). Dans cet exemple, nous éliminons donc finalement 8 degrés de liberté. Nous avons 10 relations au début, mais les conditions aux limites étant imposées en pratique sur les bords (bas et haut) et non sur des lignes intérieures, nous n'avons que 8 possibilités au maximum (élimination de deux composantes de chaque vecteur  $\phi_k$ , pour  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ).

*Remarque 21.* Des choix ont été faits afin d'éviter les modes doubles et parasites. Après de nombreux tests numériques, nous avons décidé de garder l'équation liée à la variable  $\phi_3$  et d'éliminer celle liée à la variable  $\phi_4$ .

**Cas supersonique** On reprend les étapes du cas subsonique ainsi que les mêmes conditions aux limites. Nous avons une condition supplémentaire : pour un certain  $y^*$ , nous avons désormais  $\bar{u}(y^*) = a$  ce qui donne une singularité. Celle-ci s'écrit alors :

$$\sum_{k=1}^{4N_y} \tilde{\mathbf{M}}_{3N_y+1,k} \phi_k = 0, \quad (2.101)$$

et l'on décide d'éliminer la variable  $\phi_4^{i_s}$ , où  $i_s \in \llbracket 1, 4N_y \rrbracket$  correspond à l'indice pour lequel l'écoulement de base passe du régime subsonique au régime supersonique.

Finalement, comme il y a deux lignes soniques, nous répétons cette étape deux fois et nous obtenons deux singularités supplémentaires par rapport au cas subsonique.

### 2.2.3 Complexité des approches One-Way et réduction des coûts de calcul

On rappelle que  $N_x$  correspond au nombre de positions en  $x$  comprenant l'ordre du GD, tandis que  $N_y$  est le nombre de points de discrétisation en  $y$ . Lors de nos différents exemples numériques, nous sommes confrontés à trois régimes différents selon le type de l'écoulement de base : indépendant en  $x$ , faiblement variable en  $x$  et le cas général correspondant à une variation en  $x$  moyenne à forte. En fonction du type d'écoulement considéré, la complexité de la factorisation à chaque point  $x$  et de la résolution de la marche en  $x$  est donnée dans le Tableau 2.1. Ainsi, dans le cas d'un écoulement indépendant en  $x$ , la complexité est significativement réduite, car la factorisation n'est réalisée qu'en un seul point  $x$ . Dans le cas d'un écoulement faiblement variable en  $x$ , la factorisation peut être réalisée sur un nombre réduit de points en  $x$ .

**Méthode d'échantillonnage de la factorisation** Pour ce faire, nous avons mis en place une méthode d'échantillonnage (ou de *sampling*) en introduisant  $N_{sample} \ll N_x$  correspondant au nombre de points uniformément distribués en  $x$  pour lesquels la factorisation est réalisée. En pratique, pour déterminer la valeur de  $N_{sample}$ , il est possible de mettre en place un critère permettant de mesurer les variations du milieu de propagation. Il peut être intéressant par exemple dans certains cas de mesurer les variations de l'écoulement de base et de ses dérivées. Il est également possible de réaliser une nouvelle factorisation lors d'un changement de condition aux limites transverse (cf. Chapitre 3 avec l'exemple d'une condition d'impédance).

La complexité de la marche en  $x$  correspond à deux étapes successives de l'algorithme : une décomposition LU avec descente et remontée en  $\mathcal{O}(N_x N_y^3)$ , suivie de la résolution en  $\mathcal{O}(N_x N_y^2)$ . Comme dans le cas de la factorisation, on remarque que la complexité est linéaire en  $N_x$ , tandis qu'elle est d'ordre 2 à 3 en  $N_y$ . En pratique, nous avons toujours  $N_x > N_y$ , ce qui permet de relativiser le coût de ces opérations. En outre, en comparaison à une méthode globale (solveur direct de type éléments finis par exemple) donnant une complexité de  $(N_x N_y)^3$ , les approches One-Way présentent un coût de calcul moindre, et ce même dans le cas général.

Type d'écoulement	Indépendant de $x$	Faiblement variable en $x$	Cas général
Approche One-Way	Standard	Standard ou True Amplitude	Séries de Bremmer
Complexité de la factorisation	$N_\beta N_y^3$	$N_\beta N_{sample} N_y^3$	$N_\beta N_x N_y^3$
Complexité de la marche en $x$	$N_y^3 + N_x N_y^2$	$N_x N_y^3 + N_x N_y^2$	$N_{it} N_x N_y^3 + N_x N_y^2$

TABLE 2.1 – Aperçu sur la complexité des méthodes One-Way :  $(N_x, N_y)$  est la grille de discrétisation,  $N_{sample}$  le nombre de points en  $x$  où la factorisation est nécessaire,  $N_{it}$  le nombre d'itérations de Bremmer et  $N_\beta$  le nombre de coefficients  $\beta_\pm$ .

**Parallélisation du code** La factorisation de l'opérateur est facilement parallélisable en MPI. En effet, pour chaque position en  $x$ , la factorisation est indépendante, ce qui permet de paralléliser cette étape du calcul en utilisant plusieurs processeurs. La résolution de la marche en  $x$  des équations One-Way standard et True Amplitude est séquentielle, tandis que l'approche des séries de Bremmer utilise deux processeurs : un premier qui s'occupe de la

partie résolution de l'équation One-Way droite, et un second qui s'occupe de la résolution de l'équation One-Way gauche. Enfin, les opérations réalisées (produit matriciel ou matrice-vecteur par exemple) dans le code utilisent des routines LAPACK et BLAS (Level 2 et Level 3) qui sont "threadées", permettant une optimisation du temps de calcul.

#### 2.2.4 Choix pratique des coefficients $\beta_{\pm}$

Le choix des coefficients  $\beta_{\pm}$  est essentiel dans la résolution numérique des approches One-Way et dans la convergence de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$  vers  $\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{U}}$ . La convergence du spectre doit avoir lieu pour un nombre réduit de coefficients et pour l'ensemble des  $N_{sample}$  points d'échantillonnage. En pratique, le choix de ces paramètres est laissé à l'utilisateur, qui doit placer les  $\beta_+$  proches des valeurs propres positives  $\alpha_+$  associées à des modes se propageant vers la droite et les  $\beta_-$  proches des valeurs propres négatives  $\alpha_-$  associées à des modes se propageant vers la gauche. La convergence est d'autant meilleure que ces deux groupes de coefficients sont éloignés l'un de l'autre. Cette méthode nécessite cependant d'avoir une connaissance précise du spectre de l'opérateur. Il est en effet nécessaire de converger sur les bons modes se propageant en amont et en aval, tout en garantissant une séparation correcte de ces modes. Si un mode se propageant vers la gauche se retrouve au milieu de ceux se propageant vers la droite, les équations One-Way deviennent mal posées et leur résolution peut alors présenter des instabilités numériques [Rudel, 2022].

Dans le cas d'un écoulement uniforme pour les équations d'Euler linéarisées, il est possible de déterminer l'expression analytique des valeurs propres  $\alpha$  de l'opérateur de propagation  $M$ . Ces valeurs propres sont de trois types différents [Towne et Colonius, 2015] :

$$i\alpha_c = \frac{ik}{M}, \quad \alpha_{a1}(z) = ik \frac{-M + r(z)}{1 - M^2}, \quad \alpha_{a2}(z) = ik \frac{-M - r(z)}{1 - M^2}, \quad (2.102)$$

où  $r(z) = \sqrt{1 - (1 - M^2)z^2}$ ,  $M = u_0/a$  est le nombre de Mach local et  $k = \omega/a$  est le nombre d'onde.

La première famille  $\alpha_c$  représente les modes convectés qui se propagent à la vitesse de l'écoulement. Les deux autres types de modes restants  $\alpha_{a1}$  et  $\alpha_{a2}$  sont des branches continues et décrivent à la fois les modes propagatifs (qui se propagent le long de l'axe  $x$ ) et les modes évanescents (dont l'amplitude diminue de façon exponentielle). Ces informations concernant l'emplacement des modes discrets et des branches continues peuvent s'avérer intéressantes et guider l'utilisateur quant au choix des paramètres  $\beta_{\pm}$  sur le spectre complexe dans le cas d'écoulements simples.

Pour faciliter le choix de ces paramètres pour des applications numériques plus variées, nous avons cependant mis en place une méthodologie en quelques étapes. Celle-ci permet de choisir relativement aisément les paramètres  $\beta_{\pm}$  (cela dépend naturellement de l'exemple traité qui peut générer un spectre plus "compliqué" visuellement) tout en garantissant un nombre  $N_{\beta}$  réduit afin de diminuer le coût de calcul engendré par l'approximation. Cette méthodologie se présente sous la forme suivante :

1. On commence par réaliser une première analyse locale de stabilité (LST) pour une certaine position en  $x$  qui correspond généralement au premier point de sampling  $x_0$  ;
2. On choisit un premier jeu de coefficients  $\beta_{\pm}$  (4 à 5 généralement). Il est par exemple possible de placer une diagonale de coefficients  $\beta_{\pm}$ , ce qui permet une convergence relativement rapide. Cette approche a notamment été étudiée dans [Rudel *et al.*, 2022, Rudel, 2022]. Une deuxième approche possible consiste à choisir une zone d'intérêt du spectre réduite et à l'encadrer en positionnant des coefficients  $\beta_{\pm}$  le long de l'axe réel et de l'axe imaginaire.

3. Par un processus adaptatif, on vérifie la qualité de l'approximation et on ajoute éventuellement des coefficients  $\beta_{\pm}$  supplémentaires afin de converger sur le spectre de référence. La qualité de l'approximation peut être évaluée visuellement ou en mesurant la distance (norme euclidienne) entre le spectre approché et le spectre exact sur l'ensemble du spectre ou sur une zone d'intérêt.
4. Enfin, on effectue une vérification à différents points de sampling lorsqu'il y a variation en  $x$  de l'écoulement de base ou changement de condition aux limites transverse. Le jeu de coefficients doit permettre une bonne approximation pour l'ensemble des positions en  $x$  choisies (en général, on considère une dizaine de positions).

On représente un exemple de convergence du spectre pour  $N_{\beta} = 4, 8, 12, 16$  sur la Figure 2.1. L'écoulement considéré est un écoulement parallèle cisailé. Nous voyons que pour seulement 16 coefficients  $\beta_{\pm}$ , nous obtenons la convergence sur le spectre de l'opérateur de propagation.

*Remarque 22.* Des modes numériques "parasites" peuvent apparaître dans le spectre, mais il est nécessaire qu'ils se situent du "bon côté". Ainsi, un mode devant se propager vers la gauche ne doit pas se trouver au milieu des modes se propageant vers la droite et inversement. En outre, il est d'autant plus important d'approcher correctement les modes droits et gauches dans le cas d'une résolution par séries de Bremmer.

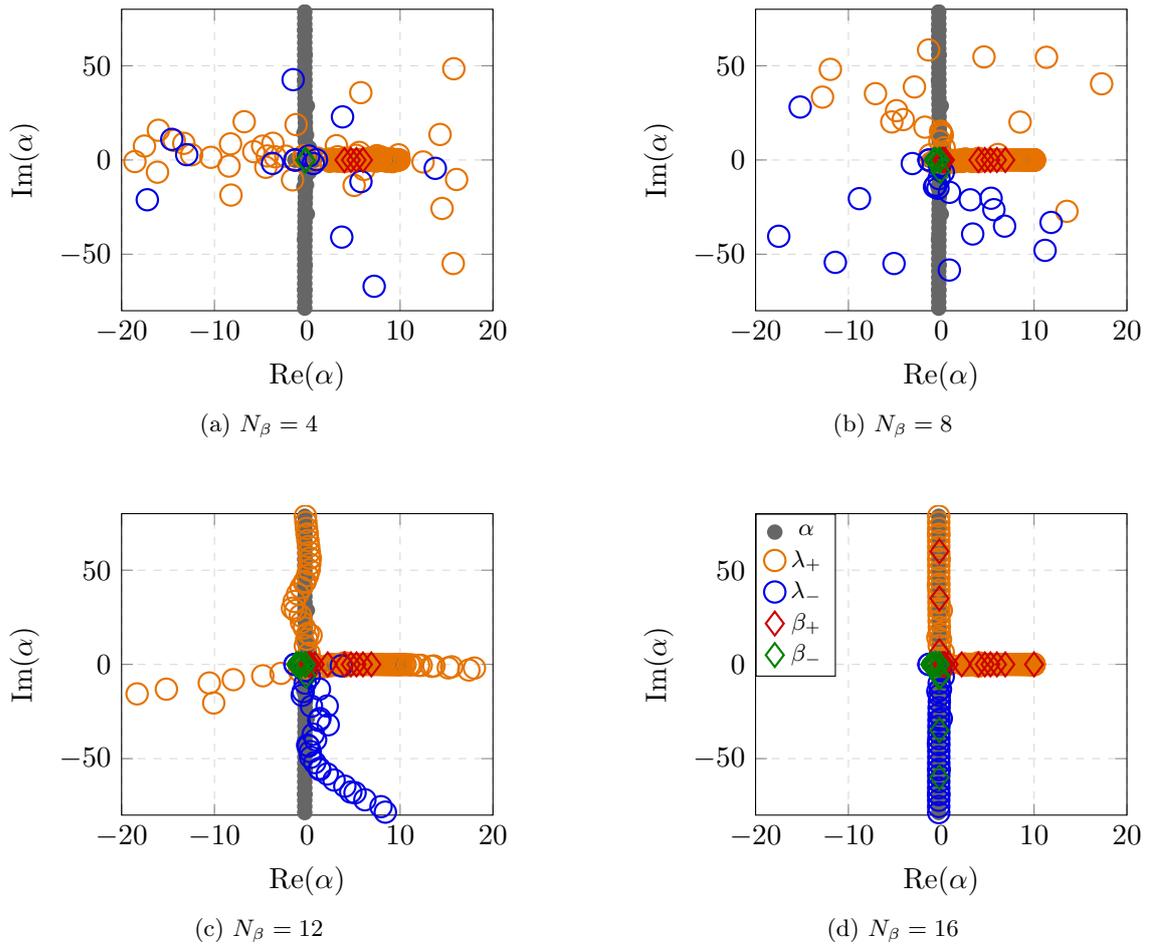


FIGURE 2.1 – Convergence sur le spectre de l'opérateur de propagation pour différentes valeurs de  $N_{\beta}$  dans le cas d'un écoulement cisailé.  $\alpha$  correspond au spectre de l'opérateur exact,  $\lambda_+$  au spectre de  $\tilde{\mathbf{D}}_{++}$  et  $\lambda_-$  au spectre de  $\tilde{\mathbf{D}}_{--}$ .

*Remarque 23.* Dans le cas d'un écoulement de base variant également en  $x$ , le choix des

coefficients adéquats pour l'ensemble des points de sampling peut s'avérer plus compliqué. Le placement de ces paramètres pour l'exemple des couches limites sera traité dans le Chapitre 4.

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps construit différentes approches One-Way pour les équations de Navier-Stokes linéarisées basées sur une factorisation numérique de l'opérateur de propagation. Les différentes approches développées ici, que ce soit l'approche One-Way standard, l'approche True Amplitude ou celle basée sur les séries de Bremmer, permettent d'obtenir des degrés de précision différents en fonction de l'application recherchée. Ainsi, en fonction des critères choisis par l'utilisateur (milieu faiblement ou fortement variable, calcul plus ou moins rapide ou précis, domaine de calcul nécessitant plusieurs itérations pour prendre en compte les réflexions et réfractions, etc.), le choix de l'une des trois approches peut être plus intéressant et/ou adéquat.

Nous avons ensuite développé l'algorithme de résolution des équations One-Way en évoquant les différents schémas de discrétisation, la gestion des singularités pouvant apparaître dans certains cas (écoulement de base qui s'annule ou encore prise en compte des conditions aux limites, par exemple), ainsi que le choix pratique des coefficients  $\beta_{\pm}$  qui est essentiel à la qualité et à la stabilité de la résolution numérique des équations One-Way. Nous avons également détaillé la complexité théorique des différentes approches pour l'étape de factorisation et de marche en  $x$ , en évoquant notamment la méthode d'échantillonnage mise en place permettant de réduire significativement les coûts de calcul de la factorisation en fonction du type d'écoulement de base considéré.

En conclusion, on a présenté dans ce chapitre une boîte à outils numériques utile aux différentes applications en mécanique des fluides que nous allons désormais détailler dans les prochains chapitres. En effet, les trois chapitres suivants vont à présent illustrer ces approches à travers trois directions différentes prises lors de ces travaux de thèse. La première direction sera une application dans le domaine aéroacoustique, centrée sur les modes de conduit avec écoulement et une méthode de décomposition de domaine basée sur les approches One-Way (Chapitre 3). La deuxième direction sera consacrée aux écoulements de couches limites et leurs phénomènes d'instabilités (Chapitre 4) en régime subsonique et supersonique. Enfin, nous parlerons du calcul des perturbations optimales basé sur l'utilisation de solveurs One-Way dans le Chapitre 5 dans le cas de plusieurs exemples numériques.

# Chapitre 3

## Application à l’acoustique des conduits

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modélisation des liners acoustiques</b>	<b>60</b>
3.1.1	Configuration	60
3.1.2	Impédance acoustique	61
<b>3.2</b>	<b>Méthode de décomposition de domaine pour les liners acoustiques</b>	<b>61</b>
3.2.1	Principe	62
3.2.2	Conditions de transmission	64
<b>3.3</b>	<b>Exemple du liner acoustique CT57</b>	<b>65</b>
3.3.1	Configuration	66
3.3.2	Conditions aux limites transverses	67
3.3.3	Résultats numériques	69
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>77</b>

---

Dans ce troisième chapitre, nous allons appliquer notre approche One-Way à l’exemple des liners acoustiques, et plus particulièrement des conduits contenant des revêtements acoustiques. Cette application a été plus largement traitée dans [Rudel, 2022], et certains des résultats issus de cette thèse serviront de référence en comparaison des résultats One-Way basés sur les équations de Navier-Stokes linéarisées. Dans la Section 3.1, nous introduirons brièvement les liners acoustiques, qui sont des dispositifs utilisés en aéronautique afin de permettre de réduire le bruit généré notamment par les moteurs d’avion. Nous verrons également comment ces dispositifs absorbants sont modélisés par une condition d’impédance. Dans la Section 3.2, nous présenterons une méthode de décomposition de domaine pour les liners acoustiques. Dans la Section 3.3, nous étudierons l’effet d’un écoulement cisailé avec une couche limite plus ou moins fine ainsi que l’effet de la viscosité sur le cas du liner CT57. Nous comparons les simulations OWNS avec les simulations OWE, ainsi qu’avec d’autres résultats numériques et des données expérimentales issues d’un banc d’essai de la NASA.

Les résultats de ce chapitre sont tirés de la publication parue dans *Wave Motion* [Ruello *et al.*, 2024], qui a été traduite et remise en forme dans le cadre du manuscrit. La partie formalisation des approches One-Way ayant déjà été traitée dans le Chapitre 2, nous passons alors directement à une application aux conduits partiellement revêtus d’un liner acoustique.

### 3.1 Modélisation des liners acoustiques

La réduction du bruit produit par les avions est l'un des enjeux majeurs du développement de l'aviation commerciale mondiale. La recherche s'intéresse tout particulièrement à la réduction du son émis pendant les phases de décollage et d'approche, étant donné la construction de zones résidentielles à proximité d'aéroports.

Les revêtements ou *liners* acoustiques sont utilisés dans une grande variété de configurations pour diminuer le niveau sonore produit par une onde se propageant dans un conduit. Ce traitement de surface est utilisé depuis de nombreuses années dans le domaine aéronautique afin de réduire le son produit par les moteurs d'avion [Pascal *et al.*, 2015, Richter *et al.*, 2007]. La réduction du bruit vers l'avant des moteurs est ainsi obtenue par le revêtement acoustique de l'intérieur de l'entrée d'air. La même méthode fournit une technique essentielle pour réduire le bruit de turbine et le bruit de soufflante se propageant vers l'arrière des moteurs.

En pratique, les liners acoustiques sont déjà utilisés à l'intérieur de la plupart des moteurs d'avions de ligne récents ; cependant, pour montrer leur efficacité, leurs développements nécessitent de nombreuses simulations numériques et expérimentales. Par conséquent, calculer rapidement et facilement de nombreuses configurations avec des types de liners différents est une problématique essentielle pour l'avenir de l'aviation.

#### 3.1.1 Configuration

Le dispositif généralement utilisé pour l'étude numérique de telles configurations est un conduit, avec une section rectangulaire ou circulaire, et des parois partiellement recouvertes d'un liner acoustique. Le principal défi de ce type de simulation est de modéliser correctement l'effet du liner sur l'onde incidente se propageant dans le conduit. En effet, un liner acoustique consiste généralement en un réseau de cavités en nid d'abeilles (voir Figure 3.1) sur une plaque de support rigide et sous une plaque résistive, pouvant être une plaque perforée ou un tissu à mailles métalliques. Pour éviter de calculer tous les phénomènes se produisant dans le liner, une condition aux limites d'impédance est généralement imposée sur la paroi du liner. La nature poreuse de ce type de matériau absorbant crée une discontinuité dans les conditions aux limites, entraînant une réflexion et une réfraction des ondes à l'intérieur du conduit, avec des effets non négligeables sur les résultats obtenus. De plus, l'écoulement présent dans le conduit ajoute une certaine complexité au modèle utilisé, puisque celui-ci affecte le type d'ondes se propageant et peut même conduire à l'apparition d'instabilités, c'est-à-dire que les fluctuations sont amplifiées au lieu d'être amorties.

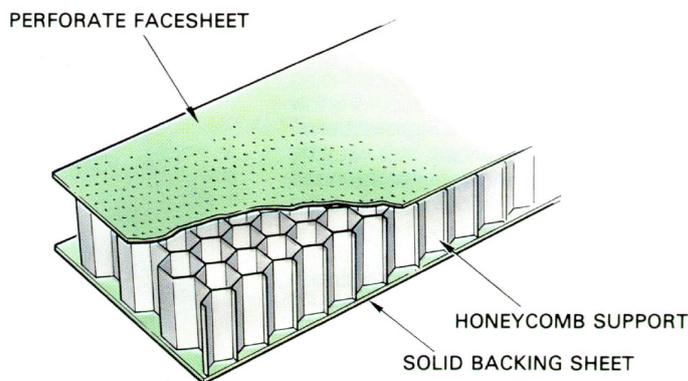


FIGURE 3.1 – Schéma d'un liner acoustique adapté de [Rolls Royce, 2015].

### 3.1.2 Impédance acoustique

En l'absence de vitesse moyenne à la paroi ( $\bar{u}(0) = 0$ ), la présence d'un liner acoustique est modélisée par une condition d'impédance reliant les fluctuations de pression et de vitesse normale via l'équation suivante [Rienstra et Hirschberg, 2004] :

$$\tilde{Z}(\omega) = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}} = R(\omega) + i\chi(\omega), \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire entrant dans la paroi du matériau et  $Z$  est l'impédance qui est un nombre complexe dépendant de  $\omega$ , sa partie réelle étant appelée résistance  $R$ , sa partie imaginaire réactance  $\chi$  et son inverse  $1/Z$  admittance, notée alors  $Y$ . Si cette expression est valable dans le domaine fréquentiel, de nombreuses recherches ont été menées afin de l'exprimer dans le domaine temporel [Chevaugéon *et al.*, 2006, Richter *et al.*, 2011], en utilisant notamment l'admittance [Monteghetti *et al.*, 2018, Fiévet *et al.*, 2020].

Cette impédance acoustique peut alors être adimensionnée par  $a_0$  la vitesse du son dans le fluide et  $\rho_0$  la masse volumique du fluide au repos afin d'obtenir l'impédance acoustique spécifique. Celle-ci peut s'écrire :

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{Z}(\omega)}{a_0 \rho_0}. \quad (3.2)$$

Par souci de simplicité, dans toute la suite, l'impédance spécifique sera nommée impédance (il en sera de même pour les termes de résistance et de réactance).

Il est alors possible de définir plusieurs modèles d'impédance. Les plus couramment utilisés sont les suivants :

- Modèle masse-ressort-amortisseur [Tam et Auriault, 1996] :

$$Z(\omega) = R - im\omega + \frac{ib}{\omega}, \quad (3.3)$$

où  $m$  est la masse,  $R$  l'amortissement et  $b$  la raideur.

- Modèle EHR (*Extended Helmholtz Resonator*) :

$$Z(\omega) = R - im\omega + i\Phi \cot\left(\frac{\omega h}{a_0} + i\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (3.4)$$

avec  $R$  la résistance de la feuille de surface,  $m\omega$  la réactance de la feuille de surface,  $\Phi$  un paramètre de porosité,  $h$  la profondeur de la cavité et  $\varepsilon$  l'amortisseur dans la cavité du fluide. Il s'agit d'un modèle proposé par [Rienstra, 2006], lui-même inspiré du modèle du résonateur de Helmholtz "standard" (pour  $\varepsilon = \Phi = 0$ ).

*Remarque 24.* Nous verrons dans la Section 3.3 qu'il est possible d'utiliser un autre modèle d'impédance acoustique que ceux présentés ici.

## 3.2 Méthode de décomposition de domaine pour les liners acoustiques

Dans cette section, nous décrivons une méthode de décomposition de domaine adaptée aux conduits partiellement revêtus d'un liner acoustique et s'appuyant sur l'approche de factorisation One-Way numérique. En Sous-section 3.2.1, nous détaillons le principe de cette méthode en prenant pour exemple un conduit rectangulaire découpé en trois sous-domaines. En Sous-section 3.2.2, nous déduisons ensuite des conditions de transmission efficaces au niveau des interfaces entre les trois sous-domaines.



découplage de cette variable :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_+^{1,1}}{dx} = \tilde{\mathbf{D}}_{++}^{rig} \psi_+^{1,1} & \text{dans } \Omega_1, \\ \psi_+^{1,1} = \mathbf{g}^{in} & \text{sur } \Gamma^{in}. \end{cases} \quad (3.5)$$

-  $\psi_-^{1,n+1}$  est calculé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_-^{1,n+1}}{dx} = \tilde{\mathbf{D}}_{--}^{rig} \psi_-^{1,n+1} & \text{dans } \Omega_1, \\ \psi_-^{1,n+1} = \mathbf{T}_{1 \leftarrow 2}(\psi_{\pm}^{1,n}, \psi_{\pm}^{2,n}) & \text{sur } \Gamma_{12}. \end{cases} \quad (3.6)$$

— Dans le sous-domaine du liner  $\Omega_2$  :

-  $\psi_+^{2,n+1}$  est calculé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_+^{2,n+1}}{dx} = \tilde{\mathbf{D}}_{++}^{lin} \psi_+^{2,n+1} & \text{dans } \Omega_2, \\ \psi_+^{2,n+1} = \mathbf{T}_{1 \rightarrow 2}(\psi_{\pm}^{1,n}, \psi_{\pm}^{2,n}) & \text{sur } \Gamma_{12}. \end{cases} \quad (3.7)$$

-  $\psi_-^{2,n+1}$  est calculé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_-^{2,n+1}}{dx} = \tilde{\mathbf{D}}_{--}^{lin} \psi_-^{2,n+1} & \text{dans } \Omega_2, \\ \psi_-^{2,n+1} = \mathbf{T}_{2 \leftarrow 3}(\psi_{\pm}^{2,n}, \psi_{\pm}^{3,n}) & \text{sur } \Gamma_{23}. \end{cases} \quad (3.8)$$

— Dans le sous-domaine de sortie  $\Omega_3$  :

-  $\psi_+^{3,n+1}$  est calculé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_+^{3,n+1}}{dx} = \tilde{\mathbf{D}}_{++}^{rig} \psi_+^{3,n+1} & \text{dans } \Omega_3, \\ \psi_+^{3,n+1} = \mathbf{T}_{2 \rightarrow 3}(\psi_{\pm}^{2,n}, \psi_{\pm}^{3,n}) & \text{sur } \Gamma_{23}. \end{cases} \quad (3.9)$$

-  $\psi_-^{3,n+1} = \psi_-^{3,1}$  est obtenu en une seule itération en raison de la propriété de découplage de cette variable :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_-^{3,1}}{dx} = \tilde{\mathbf{D}}_{--}^{rig} \psi_-^{3,1} & \text{dans } \Omega_3, \\ \psi_-^{3,1} = \mathbf{g}^{out} & \text{sur } \Gamma^{out}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Les notations  $\tilde{\mathbf{D}}_{\pm\pm}^{rig}$  et  $\tilde{\mathbf{D}}_{\pm\pm}^{lin}$  sont utilisées dans les équations précédentes pour distinguer si le calcul est effectué dans la région de la paroi rigide ou dans la région du liner acoustique.

*Remarque 25.* Dans chaque sous-domaine, des résolutions d'équations One-Way droite et gauche sont effectuées pour capturer des ondes se propageant vers la droite et vers la gauche, la réflexion et la réfraction de ces ondes doivent donc être calculées sur chaque interface. Ces ondes calculées vont alors être utilisées dans l'itération suivante pour initialiser un nouveau calcul des équations One-Way droite et gauche. À chaque itération, le résultat obtenu va devenir de plus en plus précis, car les réflexions et les transmissions de l'approximation précédente sont incluses. Ces itérations peuvent être effectuées jusqu'à ce que la convergence soit jugée satisfaisante.

*Remarque 26.* Dans la description de l'algorithme de décomposition de domaine, la version True Amplitude des équations One-Way peut évidemment être utilisée pour une résolution locale si l'opérateur de réfraction/réflexion  $\widetilde{\mathbf{W}}$  n'est pas négligeable.

Dans la prochaine sous-section, nous proposons des candidats efficaces pour les conditions de transmission  $T_{k \rightarrow l}$  et  $T_{k \leftarrow l}$  associés à l'interface de discontinuité  $\Gamma_{kl}$  en exploitant les opérateurs de projection induits par la factorisation numérique de l'opérateur de propagation présentée dans le Chapitre 2.

### 3.2.2 Conditions de transmission

Dans ce qui suit, nous allons nous concentrer sur l'exemple particulier de l'interface  $\Gamma_{12}$  et nous aurons alors un résultat qui nous permettra de traiter de manière générale l'interface  $\Gamma_{kl}$  en utilisant les opérateurs de transmission  $T_{k \rightarrow l}$  et  $T_{k \leftarrow l}$ . À chaque interface, les ondes incidentes (provenant des sous-domaines gauche et droit) doivent être triées afin de communiquer correctement les ondes sortant du domaine actuel, y entrant ou s'y réfléchissant. Pour ce faire, l'information contenue à l'intérieur des matrices de pseudo-vecteurs venant d'être formées  $\widetilde{\mathbf{U}}$  et  $\widetilde{\mathbf{V}}$  va être utilisée afin de projeter les variables One-Way d'un sous-domaine dans leur forme physique, avant de les projeter sur les variables One-Way du sous-domaine suivant. L'idée est que nous souhaitons que les variables physiques soient continues, même à travers la discontinuité, donc l'objectif est d'imposer la relation suivante sur l'interface  $\Gamma_{12}$  :

$$\widetilde{\mathbf{q}}^1 = \widetilde{\mathbf{q}}^2, \quad (3.11)$$

avec  $\widetilde{\mathbf{q}}^1$  le vecteur de perturbation discrétisé situé à l'interface provenant du sous-domaine gauche et  $\widetilde{\mathbf{q}}^2$  le même vecteur de perturbation discrétisé, mais provenant du sous-domaine droit. Pour la suite de ce développement, ces indices ont la même signification lorsqu'ils sont appliqués à d'autres variables ou matrices. En outre, la dérivation de cette décomposition de domaine est réalisée, ici, pour la première discontinuité (c'est-à-dire une condition de paroi rigide sur la gauche et une condition d'impédance sur la droite), mais le même développement peut être fait pour la seconde discontinuité située au niveau du bord de fuite du liner acoustique. Généralement, cette condition seule peut poser des problèmes de convergence et est usuellement associée avec, par exemple, une condition de continuité sur le gradient de la variable à travers l'interface [Collino *et al.*, 1998]. Toutefois, dans notre cas, la condition (3.11) pouvant être exprimée en termes de variables One-Way qui sont déjà décomposées en composants gauche et droite, cette condition additionnelle n'est pas nécessaire. Pour exprimer l'équation (3.11) en termes de variables One-Way, il faut d'abord utiliser les variables caractéristiques :

$$\mathbf{T}^1 \phi^1 = \mathbf{T}^2 \phi^2. \quad (3.12)$$

Ici, cette condition peut être simplifiée car les deux conditions aux limites différentes impliquées n'affectent pas l'expression de la matrice  $\mathbf{A}$ , ni celle de la matrice de transformation  $\mathbf{T}$ , donc  $\mathbf{T}^1 = \mathbf{T}^2$ . Par conséquent, l'équation (3.12) devient :

$$\phi^1 = \phi^2. \quad (3.13)$$

En appliquant un second changement de variable avec les matrices de pseudo-vecteurs propres  $\widetilde{\mathbf{V}}$ , la condition de continuité prend la forme suivante en termes de variables One-Way :

$$\widetilde{\mathbf{V}}^1 \psi^1 = \widetilde{\mathbf{V}}^2 \psi^2. \quad (3.14)$$

De la même manière que précédemment, la matrice  $\widetilde{\mathbf{V}}$  peut être séparée en composants + et - comme suit :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{V}}_{++}^1 \psi_+^1 + \widetilde{\mathbf{V}}_{+-}^1 \psi_-^1 = \widetilde{\mathbf{V}}_{++}^2 \psi_+^2 + \widetilde{\mathbf{V}}_{+-}^2 \psi_-^2, \\ \widetilde{\mathbf{V}}_{-+}^1 \psi_+^1 + \widetilde{\mathbf{V}}_{--}^1 \psi_-^1 = \widetilde{\mathbf{V}}_{-+}^2 \psi_+^2 + \widetilde{\mathbf{V}}_{--}^2 \psi_-^2. \end{cases} \quad (3.15)$$

Cette expression de la relation de continuité (3.11) donne la séparation en composants droite et gauche des ondes à l'interface. L'étape suivante est de déterminer quelle partie de l'onde entrante est renvoyée dans le sous-domaine d'origine et quelle partie est transmise au sous-domaine suivant. La figure 3.3 illustre la configuration dans laquelle la décomposition de domaine est effectuée. L'itération précédente des résolutions One-Way gauche et droite donne une approximation des ondes incidentes qui prend la forme de  $\psi_+^1$  du sous-domaine d'entrée et de  $\psi_-^2$  pour le sous-domaine du liner. Ces deux variables deviennent donc connues dans l'équation (3.15). Ce problème de transmission devient alors un système de deux équations à deux variables qui peut être facilement résolu. Cette équation donne une approximation des ondes sortantes qui dépend du degré de précision de l'information donnée (dans ce cas,  $\psi_+^1$  et  $\psi_-^2$ ) qui s'améliore en fonction du nombre d'itérations.

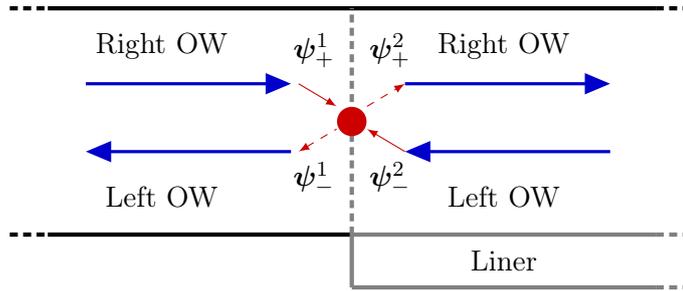


FIGURE 3.3 – Transmission d'une onde à travers une discontinuité.

Les valeurs manquantes  $\psi_+^2$  et  $\psi_-^1$  peuvent être aisément exprimées à partir de  $\psi_+^1$  et  $\psi_-^2$  sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \psi_+^2 = \left[ \tilde{\mathbf{V}}_{++}^2 - \tilde{\mathbf{V}}_{+-}^1 (\tilde{\mathbf{V}}_{--}^1)^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_{-+}^2 \right]^{-1} \left[ (\tilde{\mathbf{V}}_{++}^1 - \tilde{\mathbf{V}}_{+-}^1 (\tilde{\mathbf{V}}_{--}^1)^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_{-+}^1) \psi_+^1 \right. \\ \quad \left. - (\tilde{\mathbf{V}}_{+-}^2 - \tilde{\mathbf{V}}_{+-}^1 (\tilde{\mathbf{V}}_{--}^1)^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_{--}^2) \psi_-^2 \right], \\ \psi_-^1 = (\tilde{\mathbf{V}}_{--}^1)^{-1} \left[ \tilde{\mathbf{V}}_{-+}^2 \psi_+^2 + \tilde{\mathbf{V}}_{--}^2 \psi_-^2 - \tilde{\mathbf{V}}_{-+}^1 \psi_+^1 \right]. \end{cases} \quad (3.16)$$

Les nouvelles valeurs obtenues peuvent alors être définies comme initialisation pour la résolution One-Way gauche dans le sous-domaine gauche et pour la résolution One-Way droite dans le sous-domaine du liner.

Les relations (3.16) peuvent alors être généralisées et conduire à la proposition suivante pour les opérateurs de transmission  $T_{k \rightarrow l}$  et  $T_{k \leftarrow l}$  :

$$\begin{cases} T_{k \rightarrow l}(\psi_{\pm}^{k,n}, \psi_{\pm}^{l,n}) = C_{k \rightarrow l} \left[ (\tilde{\mathbf{V}}_{++}^k - \tilde{\mathbf{V}}_{+-}^k (\tilde{\mathbf{V}}_{--}^k)^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_{-+}^k) \psi_+^{k,n} \right. \\ \quad \left. - (\tilde{\mathbf{V}}_{+-}^l - \tilde{\mathbf{V}}_{+-}^k (\tilde{\mathbf{V}}_{--}^k)^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_{--}^l) \psi_-^{l,n} \right], \\ T_{k \leftarrow l}(\psi_{\pm}^{k,n}, \psi_{\pm}^{l,n}) = C_{k \leftarrow l} \left[ \tilde{\mathbf{V}}_{-+}^l \psi_+^{l,n} + \tilde{\mathbf{V}}_{--}^l \psi_-^{l,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{-+}^k \psi_+^{k,n} \right], \end{cases} \quad (3.17)$$

avec  $C_{k \rightarrow l} := \left[ \tilde{\mathbf{V}}_{++}^l - \tilde{\mathbf{V}}_{+-}^k (\tilde{\mathbf{V}}_{--}^k)^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_{-+}^l \right]^{-1}$  et  $C_{k \leftarrow l} := (\tilde{\mathbf{V}}_{--}^k)^{-1}$ .

### 3.3 Exemple du liner acoustique CT57

Dans cette section, les approches OWNS sont appliquées à un conduit rectangulaire partiellement recouvert d'un liner acoustique CT57 [Jones *et al.*, 2005]. En Sous-section 3.3.1, la configuration du conduit est donnée avec les paramètres géométriques correspondants, les

différents écoulements de base considérés et les conditions aux limites transverses utilisées pour les différentes simulations réalisées. En Sous-section 3.3.3.1, une comparaison entre différents écoulements de base (plus ou moins cisailés) est effectuée pour les équations OWNS et OWE. Enfin, en Sous-section 3.3.3.2, nous étudions les performances du liner CT57 à travers la construction de la matrice de diffusion (ou *scattering matrix*) du conduit. Celle-ci peut être obtenue grâce à l'approche One-Way qui permet naturellement de décomposer les ondes selon leur sens de propagation.

### 3.3.1 Configuration

La configuration du conduit contenant un liner acoustique est présentée dans cette section, ainsi que les différents écoulements de base utilisés pour la comparaison avec les données expérimentales et avec plusieurs simulations numériques. La configuration expérimentale sur laquelle ces simulations sont basées est tirée de [Jones *et al.*, 2005]. Les données fournies par cette étude ont été largement utilisées pour la validation des codes en 2D et 3D avec une résolution dans le domaine temporel ou fréquentiel [Richter *et al.*, 2007, Burak *et al.*, 2009]. Par conséquent, le conduit présente une section partiellement recouverte par un liner en bas (dans le cas de l'installation expérimentale, le liner est placé en haut) avec une longueur  $L_{liner} = x_2 - x_1 = 0.406$  m où  $x_1 = 0.203$  m et  $x_2 = 0.609$  m. Le conduit complet possède une longueur totale de  $L_x = x_3 - x_0 = 0.812$  m avec  $x_0 = 0$  et  $x_3 = 0.812$  m. La hauteur de cette section est  $L_y = y_1 - y_0 = 0.051$  m avec  $y_0 = 0$  et  $y_1 = 0.051$  m. La configuration du conduit est représentée sur la Figure 3.4 avec un exemple de la partie réelle de la pression calculée pour une fréquence de 3000 Hz avec un écoulement de Poiseuille, montrant nettement l'atténuation de l'onde par le liner acoustique.

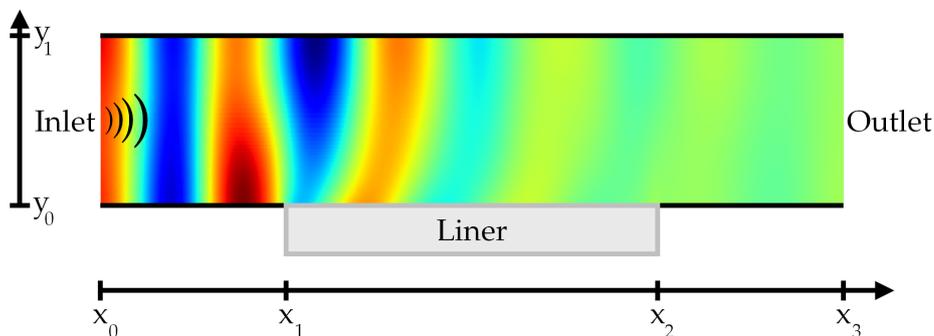


FIGURE 3.4 – Configuration du conduit contenant un liner acoustique sur la paroi du bas [Rudel, 2022].

Dans les différentes simulations 2D effectuées ici, une onde plane se propageant vers la droite est imposée à l'entrée du domaine de calcul. Son expression a été obtenue via une analyse modale locale de l'écoulement de base à  $x = 0$ . D'autre part, aucune onde se propageant vers la gauche n'est imposée à la sortie du domaine, signifiant que toute onde se réfléchissant après  $x_3$  est négligée.

En ce qui concerne l'écoulement de base, deux cas ont été étudiés ici. Dans les deux cas, l'écoulement de base représente un écoulement de Poiseuille laminaire ou turbulent entièrement développé, avec différentes épaisseurs de couche limite et différentes valeurs du Mach maximum  $M_{max}$ , mais avec la même valeur de Mach moyen  $M_{mean} = 0.335$ , qui est la valeur utilisée dans le dispositif expérimental de [Jones *et al.*, 2005]. De plus, seule la vitesse axiale est imposée, et le même profil est utilisé partout à l'intérieur du domaine de calcul. Le as 1

présente un écoulement laminaire modélisé par l'équation suivante [Özyörük et Long, 2000] :

$$\bar{u}(y) = 4M_{max}a \frac{y}{L_y} \left(1 - \frac{y}{L_y}\right), \quad (3.18)$$

où  $M_{max} = 0.5025$  le nombre de Mach maximum et  $a$  est la vitesse du son. La valeur du Mach a été choisie afin d'assurer un Mach moyen de 0.335.

En revanche, dans le cas 2, l'écoulement turbulent parallèle est approché par l'équation suivante :

$$\bar{u}(y) = Ma \frac{n_y + 1}{n_y} \left(1 - \left|1 - \frac{2y}{L_y}\right|^{n_y}\right), \quad (3.19)$$

où  $n_y$  est le coefficient paramétrant l'épaisseur de la couche limite et  $M = 0.335$ . Cette expression est tirée de [Deng et al., 2019], dans laquelle la troisième composante le long de l'axe en  $z$  a été supprimée, puisque les simulations One-Way sont effectuées ici en 2D. Cette expression de l'écoulement présente de plus une épaisseur de couche limite différente de celle prise dans [Deng et al., 2019]. Dans la figure 3.5, les profils d'écoulements de base sont tracés le long de la direction transverse avec les données expérimentales prises au centre du conduit.

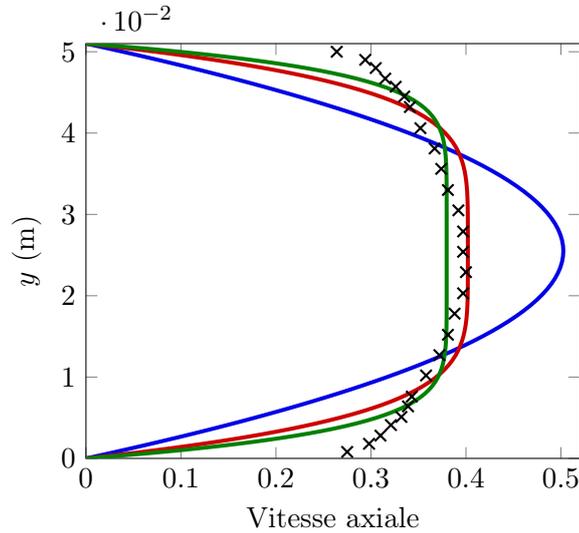


FIGURE 3.5 – Vitesse axiale adimensionnée de l'écoulement de base utilisé pour le Cas 1 (—) et le Cas 2 avec  $n_y = 5$  (—) et  $n_y = 7.5$  (—) en comparaison avec des données expérimentales (×) tirées de [Jones et al., 2005].

### 3.3.2 Conditions aux limites transverses

#### 3.3.2.1 Paroi rigide

Les conditions de paroi rigide sont appliquées en haut du conduit et de chaque côté du liner acoustique. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, nous devons imposer une condition de non-glissement associée à une condition isotherme. Ces conditions, réécrites en variables caractéristiques, ont déjà été présentées dans le Chapitre 2, à la Sous-section 2.2.2.

*Remarque 27.* Dans le cas des équations d'Euler, la paroi rigide est modélisée par une condition limite de glissement, qui permet aux particules de glisser tangentiellement à la paroi tout en imposant la vitesse normale  $\tilde{v}$  à zéro afin de satisfaire la continuité de la masse. De plus, cette condition limite de glissement est équivalente à la modélisation d'une couche limite acoustique infiniment mince [Nayfeh et al., 1975, Özyörük et Long, 2000]. Les équations sont données dans [Rudel, 2022].

### 3.3.2.2 Impédance acoustique

La condition d'impédance est appliquée d'après la relation classique suivante :

$$\tilde{p} = Z(\omega)\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.20)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale unitaire entrant dans la paroi et  $Z(\omega)$  l'impédance complexe dépendant de la fréquence, c'est-à-dire, dans notre cas, que sa valeur doit être modifiée selon la valeur de  $\omega$  fixée.

Le modèle d'impédance est tiré de [Deng *et al.*, 2019] et a été utilisé, à l'origine, pour modéliser le comportement de  $Z$  pour de hautes fréquences (supérieures à 3000 Hz), mais il se montre en bon accord avec les données expérimentales disponibles en-dessous de 3000 Hz. D'après [Monteghetti *et al.*, 2016], l'expression de l'impédance normalisée du liner CT57 est modélisée par :

$$Z(\omega) = \frac{1}{\sigma} \coth [-ik_c(\omega)l_c], \quad (3.21)$$

avec  $\sigma$  la porosité de la surface du liner,  $k_c$  le nombre d'onde acoustique à l'intérieur du tube du liner et  $l_c$  la longueur du tube. Les propriétés géométriques du liner CT57 sont données dans le Tableau 3.1. Cependant, d'après [Deng *et al.*, 2019], celles-ci ne permettaient pas une concordance suffisante entre le modèle d'impédance et les données expérimentales fournies par [Jones *et al.*, 2005]. Les paramètres  $d_c$  et  $l_c$  ont alors été légèrement modifiés afin de permettre une meilleure adéquation entre le modèle et les données. Ces nouveaux paramètres sont fournis dans le Tableau 3.2.

Liner	Porosité $\sigma$	Diamètre du tube $d_c$	Longueur du tube $l_c$
CT57	57%	0.6 mm	85.6 mm

TABLE 3.1 – Propriétés géométriques du liner CT57 dans [Jones *et al.*, 2005].

$M$	Diamètre effectif du tube $d'_c$	Longueur effective du tube $l'_c$
0.335	0.75 mm	77.5 mm

TABLE 3.2 – Paramètres utilisés pour le modèle d'impédance du liner CT57 dans [Deng *et al.*, 2019].

Sur la figure 3.6, les parties réelle et imaginaire de  $Z(\omega)$  ont été représentées pour un nombre de Mach moyen égal à 0.335. Les valeurs sont également comparées à des valeurs d'impédance expérimentale tirées de [Jones *et al.*, 2005]. Il est à noter que l'expression de l'impédance correspond ici à une convention  $e^{-i\omega t}$ , contrairement aux résultats tirés à la fois de [Jones *et al.*, 2005] et de [Deng *et al.*, 2019], c'est-à-dire qu'ici  $Z$  est le conjugué de celui des deux publications. De plus, si les données expérimentales sont fournies pour une gamme de fréquence entre 0.5 et 3 kHz, le modèle d'impédance a été testé pour des fréquences allant de 0.5 à 10 kHz.

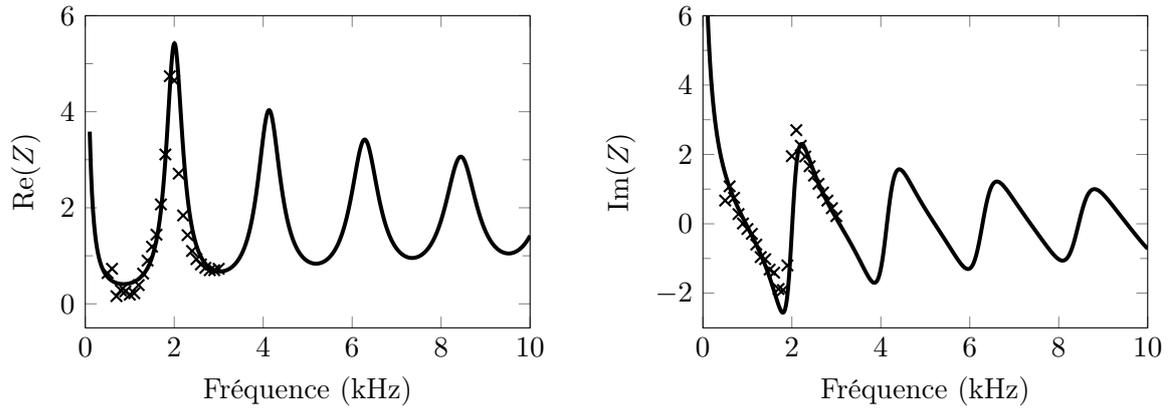


FIGURE 3.6 – Parties réelle et imaginaire de l’impédance  $Z$  du liner CT57 pour un nombre de Mach moyen égal à  $M = 0.335$  : données expérimentales tirées de [Jones *et al.*, 2005] (×) et valeurs numériques obtenues en utilisant le modèle de [Deng *et al.*, 2019] (—).

### 3.3.3 Résultats numériques

Les résultats numériques présentés ici ont été calculés pour les deux configurations présentées ci-dessus. Pour comparer les résultats obtenus avec les simulations OWE et OWNS aux données expérimentales ainsi qu’à d’autres résultats numériques, le niveau de pression acoustique ou *Sound Pressure Level* (SPL) est défini comme suit :

$$\text{SPL} = 20 \log \left( \frac{|\tilde{p}|}{p_{\text{ref}}} \right), \quad (3.22)$$

avec la pression acoustique de référence  $p_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$  Pa. Le SPL est exprimé en décibels (dB). On dispose des mesures de SPL sur la paroi opposée au liner acoustique.

Dans les deux cas, les simulations One-Way ont été initialisées avec une onde plane harmonique de 130 dB obtenue par la résolution d’une analyse de stabilité modale à l’entrée du domaine de calcul (source gauche). Ces ondes planes ont été mises à l’échelle afin d’obtenir un SPL similaire à celui des données expérimentales.

La propagation des ondes à l’intérieur du conduit contenant le liner est calculée avec les deux écoulements de base présentés précédemment. La présence d’un mode instable à 1000 Hz a déjà été signalée dans plusieurs études [Richter *et al.*, 2007, Burak *et al.*, 2009, Boyer *et al.*, 2011, Marx, 2015, Deng *et al.*, 2019], lorsque le profil de l’écoulement de base est fortement cisailé à la paroi.

Concernant le nombre de points de discrétisation, la plupart des cas ont été simulés avec 173 points dans la direction transverse, avec un maillage construit à partir d’un raffinement local près des parois du conduit afin de prendre en compte avec précision le phénomène de couches de Stokes très fines se produisant dans les simulations OWNS et de capturer correctement les ondes se propageant. En outre, 2000 points avec maillage uniforme ont été nécessaires dans la direction axiale pour l’algorithme de marche en  $x$ .

*Remarque 28.* Un maillage en  $x$  non uniforme permet par ailleurs de diminuer le nombre de points nécessaires à une bonne restitution du SPL, mais augmente considérablement le temps de calcul de l’algorithme de marche en  $x$  qui est optimisé dans le cas d’un pas constant  $\Delta x$ .

Le nombre requis de coefficients  $\beta_{\pm}$  est de 15 pour toutes les simulations (OWE et OWNS). Une comparaison entre le spectre approché résultant d’une factorisation de l’opérateur de propagation et le spectre exact à la fréquence  $f = 2000$  Hz dans le cas 2 avec une simulation OWNS est représenté sur la figure 3.7. Nous pouvons voir que les deux spectres correspondent bien pour un nombre limité de paramètres. La convergence de la méthode One-Way numérique

est assurée en plaçant ces paramètres "proches" du spectre de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$ , c'est-à-dire les coefficients  $\beta_+$  proches des valeurs propres positives et les coefficients  $\beta_-$  proches des valeurs propres négatives. En pratique, nous utilisons des informations sur le spectre exact telles que la position de la branche des modes évanescents ou la zone contenant la branche des modes convectifs, qui sont déduits d'une analyse modale locale. Le choix du placement des coefficients  $\beta_{\pm}$  ainsi que l'influence de leur nombre sur la méthode de convergence sont discutés plus en détail dans [Rudel *et al.*, 2022].

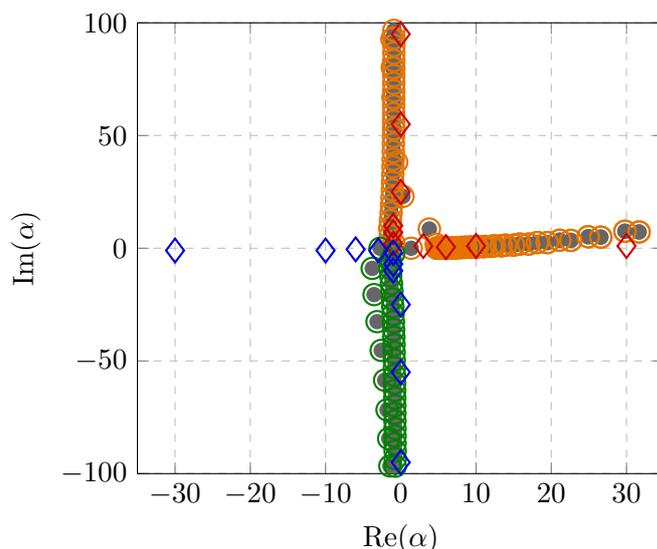


FIGURE 3.7 – Comparaison entre les modes approchés issus de la factorisation avec les modes exacts pour 15 coefficients  $\beta_+$  ( $\blacklozenge$ ) et  $\beta_-$  ( $\blacklozenge$ ) et pour une simulation OWNS à 2000 Hz :  $\alpha$  ( $\bullet$ ) correspond au spectre de l'opérateur exact,  $\lambda_+$  ( $\circ$ ) au spectre de  $\tilde{\mathbf{D}}_{++}$  et  $\lambda_-$  ( $\circ$ ) au spectre de  $\tilde{\mathbf{D}}_{--}$ .

Dans le tableau 3.3, nous fournissons quelques informations numériques à propos de la méthode de décomposition de domaine telles que le nombre d'itérations requises, le temps CPU (à la fois pour la factorisation et la marche en  $x$ ) et les erreurs de continuité en regard de la variable de pression au niveau des deux interfaces (c'est-à-dire la restauration de la continuité aux deux interfaces). Il convient de noter que nous avons considéré la continuité en ce qui concerne la pression, étant donné que nous sommes intéressés ici par les résultats de SPL. De même, nous nous sommes concentrés sur la fréquence 1000 Hz, car il s'agit du cas le plus "pathologique", et les résultats pour les autres fréquences sont similaires, voire légèrement plus faibles.

Équation	Itérations DDM	Temps CPU factorisation	Temps CPU total marche en $x$	Erreur de continuité
OWE	4	1.4 s	30 s	0.02 %
OWNS	4	3.2 s	51 s	0.1 %

TABLE 3.3 – Aperçu des performances de la DDM pour les équations OWE et OWNS et pour le Cas 2 à 1000 Hz.

### 3.3.3.1 Comparaison entre les deux écoulements de base et les simulations OWE et OWNS

Les valeurs du SPL calculées au niveau de la paroi opposée au liner acoustique sont représentées sur les deux figures, avec les données expérimentales [Jones *et al.*, 2005] ainsi qu'un résultat numérique de [Deng *et al.*, 2019] (pour les fréquences 1000, 2000 et 3000 Hz) qui a été obtenu par une méthode de mode-matching basée sur les équations d'Euler linéarisées. Ce dernier résultat est obtenu pour un écoulement de base légèrement différent de celui utilisé dans les simulations One-Way. En effet, le coefficient utilisé pour paramétrer l'épaisseur de couche limite est égal à  $n_y = 24$ , contre une valeur de 5 et 7.5, pour les simulations OWE et OWNS, respectivement.

**Écoulement de Poiseuille laminaire** Notre première approche a consisté à considérer un profil d'écoulement de Poiseuille laminaire (Cas 1) pour les deux simulations OWE et OWNS. Dans les six cas, représentés sur la figure, les simulations One-Way sont sensiblement proches les unes des autres, et les résultats sont aussi également similaires à ceux de la méthode de mode-matching [Deng *et al.*, 2019] pour toutes les fréquences étudiées ici. De même, les résultats One-Way correspondent bien aux données expérimentales, sauf pour les cas à 1000 et 3000 Hz, dans lesquels une différence d'environ 10 dB peut être remarquée. Cet écart de précision peut s'expliquer par différents facteurs. Tout d'abord, cette configuration de conduit avec liner possède une fréquence de résonance autour de 1000 Hz, entraînant une grande sensibilité au modèle d'impédance utilisé, qui est une approximation du liner acoustique réel. Une autre raison possible pour une telle différence dans les résultats de SPL est que l'effet de l'instabilité hydrodynamique n'est pas correctement pris en compte dans les équations One-Way, pour ce profil d'écoulement de base spécifique (pas assez cisailé pour faire apparaître ce mode de surface instable). Finalement, la présence d'un mécanisme non-linéaire ou l'apparition d'ondes 3D pourrait être à l'origine de la différence constatée avec les données expérimentales à 3000 Hz. Enfin, il faut noter que l'écoulement à profil parabolique (laminaire) est très éloigné du profil de vitesse expérimental.

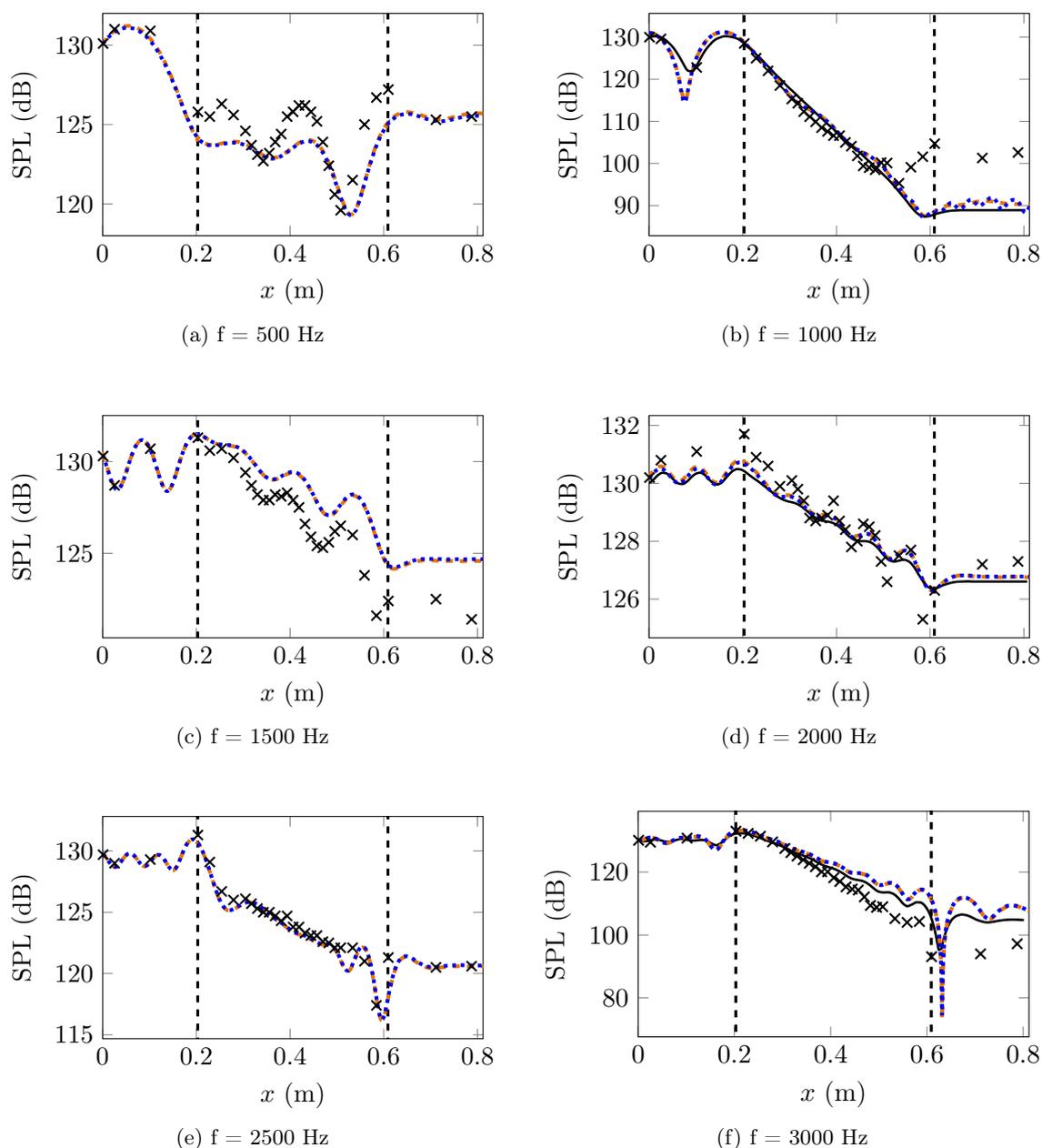


FIGURE 3.8 – SPL de la pression acoustique le long de la paroi opposée au liner acoustique pour différentes fréquences. Comparaison entre les données expérimentales ( $\times$ ) issues de [Jones *et al.*, 2005], la méthode de mode-matching (—) de [Deng *et al.*, 2019] et les simulations OW avec décomposition de domaine : simulations OWE (.....) et OWNS (- - -) pour le cas 1. Les traits pointillés noirs verticaux symbolisent l'emplacement du liner acoustique.

**Écoulement de Poiseuille turbulent** Afin de réduire ces différences de résultats, nous avons examiné le deuxième type de profil d'écoulement de base (écoulement de Poiseuille turbulent), qui représente un peu mieux l'écoulement expérimental obtenu dans [Jones *et al.*, 2005]. Nous avons alors réalisé une étude paramétrique autour de  $n_y$  afin de trouver une valeur pertinente pour les simulations OWE et OWNS (représentées sur la figure 3.9). Nous avons trouvé que le meilleur compromis pour les simulations OWE était  $n_y = 5$ , car des instabilités numériques ont été observées pour des valeurs plus grandes de ce paramètre, ceci ayant déjà été mentionné dans [Rudel, 2022]. Ces instabilités ont eu pour conséquence

d'augmenter de manière significative les valeurs du SPL obtenues, à partir du sous-domaine du liner. Nous n'avons pas réussi à éviter ces instabilités, même en affinant le maillage en  $x$  ou en adaptant les coefficients  $\beta_{\pm}$ . Si le SPL obtenu pour une fréquence de 1500 Hz est plus proche que dans le cas 1, l'effet de l'épaisseur de la couche limite de ce profil d'écoulement de base ne semble toujours pas suffisant pour prendre en compte correctement cette instabilité. Les résultats les plus proches ont finalement été obtenus pour les simulations OWNS avec une valeur de paramètre  $n_y = 7.5$ . Des valeurs inférieures nous ont donné des résultats de SPL sensiblement similaires à ceux obtenus en simulations OWE ; tandis que des valeurs supérieures ont fait également apparaître des instabilités numériques importantes. Pour toutes les fréquences testées, les résultats OWNS sont proches des résultats expérimentaux, en particulier pour la fréquence  $f = 1000$  Hz où l'instabilité hydrodynamique semble bien prise en compte. La viscosité contenue dans les équations de Navier-Stokes (bien que faible) pourrait expliquer les meilleurs résultats obtenus, en jouant un rôle dissipatif, permettant ainsi de "reculer" l'apparition des instabilités numériques de la méthode. Le profil de l'écoulement de base, plus cisailé, et ainsi plus proche de l'écoulement expérimental, pourrait également expliquer pourquoi nous obtenons un meilleur comportement du SPL, qui était sous-estimé dans toutes les autres simulations. Cependant, les résultats OWNS pourraient être améliorés en considérant non seulement la viscosité laminaire (constante), mais aussi la viscosité turbulente, comme discuté dans [Marx et Aurégan, 2013].

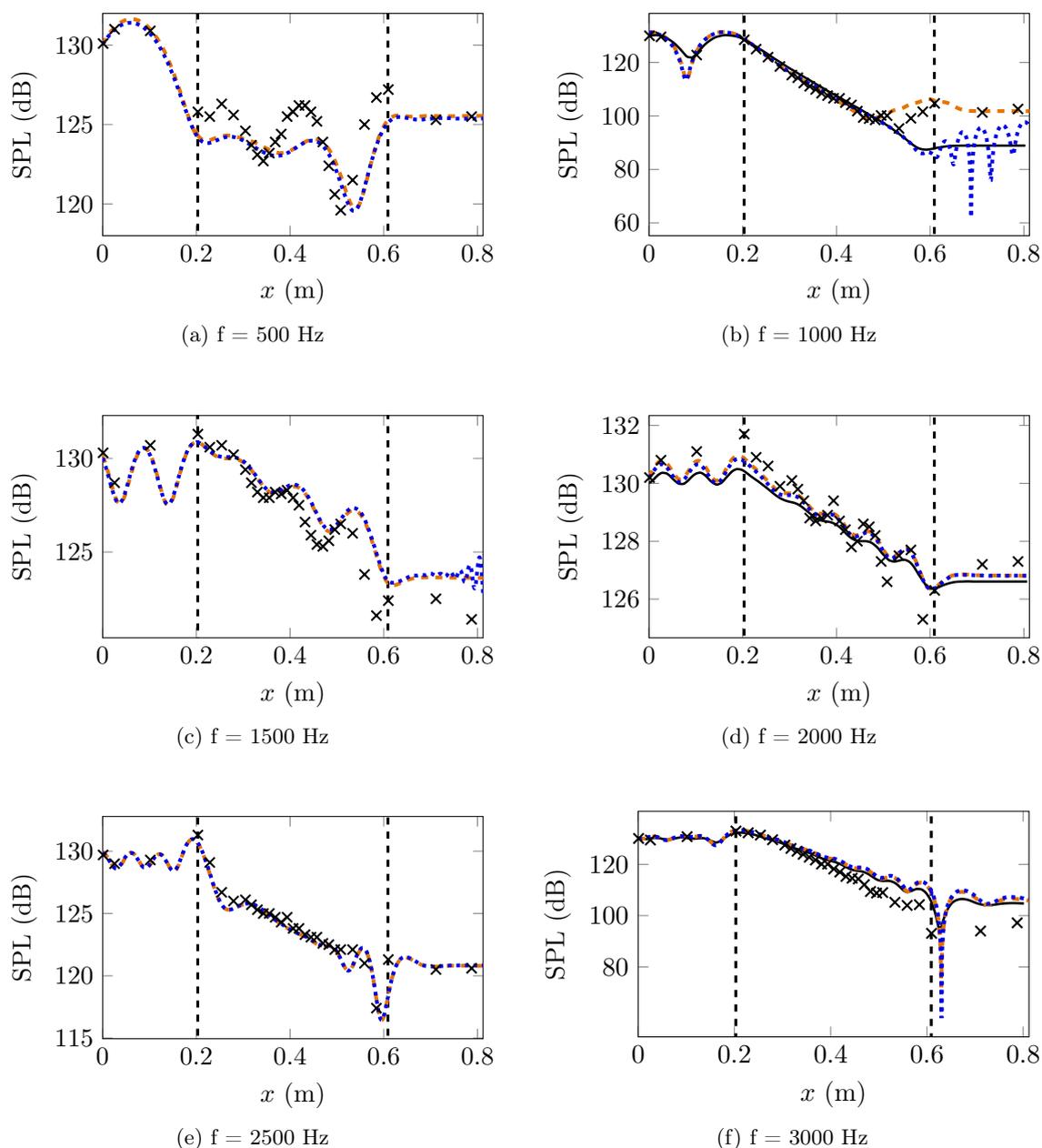


FIGURE 3.9 – SPL de la pression acoustique le long de la paroi opposée au liner acoustique pour différentes fréquences. Comparaison entre les données expérimentales ( $\times$ ) issues de [Jones *et al.*, 2005], la méthode de mode-matching (—) de [Deng *et al.*, 2019] et les simulations OW avec décomposition de domaine : simulations OWE (avec  $n_y = 5$  ..... ) et OWNS ( $n_y = 7.5$  - - -) pour le cas 2. Les traits pointillés noirs verticaux symbolisent l'emplacement du liner acoustique.

### 3.3.3.2 Analyse de la performance des liners acoustiques par la construction de la matrice de diffusion

L'une des particularités des équations One-Way est la possibilité de naturellement décomposer le résultat obtenu en contributions droite et gauche partout dans le domaine de calcul. Le SPL de ces deux contributions et les résultats OWNS finaux sont présentés dans la figure 3.10 pour le deuxième cas avec une fréquence de 1000 Hz. Comme espéré, le SPL de la partie se propageant vers la droite reste constant dans le sous-domaine d'entrée. Après la première

discontinuité, le SPL commence à décroître avant d’atteindre une certaine valeur avec des oscillations amorties. Au milieu, les oscillations qui correspondent à l’onde de surface générée par le liner acoustique, tendant à être instables avec ce profil d’écoulement de base cisailé. Ces oscillations augmentent en amplitude à l’intérieur du domaine du liner avant d’être amorties lorsque l’onde traverse la seconde discontinuité entre le liner et le domaine de sortie. Le SPL de la contribution vers la gauche n’est pas disponible dans le domaine de sortie, puisqu’il n’y a pas d’onde se propageant vers la gauche dans ce sous-domaine. Par conséquent, la valeur du SPL présentée à l’intérieur du domaine du liner provient de la réflexion de l’onde incidente allant vers la droite et diminue le long du liner sans aucune instabilité. Dans le domaine d’entrée, la transmission de l’onde gauche depuis le domaine du liner et la réflexion de l’onde droite se propagent avec une valeur fixée du SPL sans aucune perturbation. Enfin, la somme des deux contributions est présentée en bas et ne présente aucune discontinuité au niveau des interfaces entre les sous-domaines. Le fait que ce résultat soit continu même à travers les interfaces est une indication de la bonne approximation des matrices de pseudo-vecteurs propres utilisées pour la projection et la bonne convergence du processus itératif utilisé pour la décomposition de domaine.

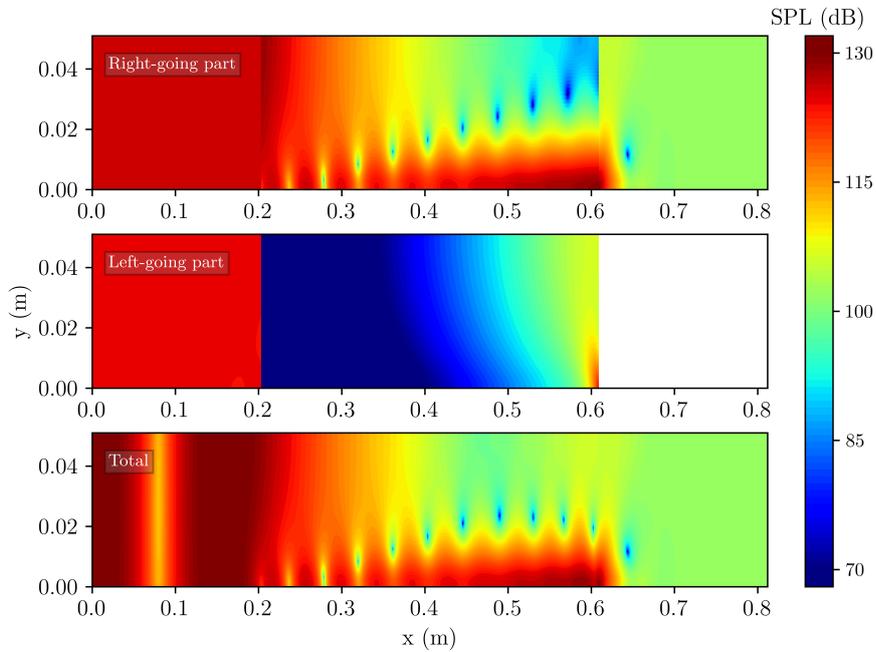


FIGURE 3.10 – Décomposition du SPL en composantes droite et gauche et résultats de l’OWNS complet pour le cas 2 à une fréquence de 1000 Hz.

L’accès à cette décomposition en composantes gauche et droite permet d’accéder directement à la matrice de diffusion (ou *scattering matrix*) utilisée pour évaluer la performance des liners acoustiques [Åbom, 1991, Taktak *et al.*, 2008] et d’autres configurations [Félix et Pagneux, 2002, Merk *et al.*, 2019]. Cette matrice de diffusion peut être exprimée par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} p_+^3 \\ p_-^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{++} & S_{+-} \\ S_{-+} & S_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+^1 \\ p_-^3 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

où  $p_+^1$  et  $p_-^1$  sont les valeurs des perturbations de pression des ondes se propageant à droite et à gauche à l’entrée du conduit, tandis que  $p_+^3$  et  $p_-^3$  sont les valeurs des perturbations de pression des ondes se propageant à droite et à gauche à la sortie du conduit. Ces valeurs de pression ont été moyennées transversalement. Les coefficients  $S_{++}$  et  $S_{--}$  peuvent être

considérés comme les coefficients de transmission des ondes droite et gauche dans ce conduit, alors que  $S_{+-}$  et  $S_{-+}$  peuvent être interprétés comme les coefficients de réflexion des ondes incidentes droite et gauche dans ce conduit.

Les modules de ces coefficients de diffusion obtenus, en fonction de la fréquence, pour ce conduit contenant un liner acoustique et pour ce profil d'écoulement de base dans le Cas 2 sont représentés dans la figure 3.11. Les données obtenues  $S_{++}$  et  $S_{-+}$  proviennent directement des simulations présentées précédemment. Ces simulations ont été réalisées avec les mêmes paramètres explicités précédemment, avec une onde plane de 130 dB imposée à l'entrée du domaine (source gauche). Cependant, pour obtenir les valeurs des coefficients  $S_{--}$  et  $S_{+-}$ , une autre série de simulations a été réalisée avec une onde plane se propageant vers la gauche utilisée comme initialisation et imposée à la sortie du conduit (source droite), avec le même SPL de 130 dB.

En ce qui concerne l'onde incidente se propageant (Fig. 3.11a), comme prévu, le coefficient de transmission  $S_{++}$  est très faible pour les valeurs à 1000 Hz ainsi que pour les résultats OWE. La surestimation de l'amortissement de l'onde pour une source gauche peut être expliqué par le fait que les équations OWE ne capturent pas correctement l'effet de l'instabilité hydrodynamique, comme le montrent les résultats du SPL ci-dessus. En outre, à la même fréquence, le coefficient de réflexion  $S_{-+}$  (Fig. 3.11c) présente un pic, ce qui indique qu'une partie significative de l'onde incidente a été réfléchi à travers l'entrée du conduit. Par ailleurs, le choix du modèle d'équation (OWE ou OWNS) ne semble pas avoir d'influence sur la valeur de ce coefficient de réflexion.

Lorsqu'une onde se propage à travers la section du liner (Fig. 3.11a et 3.11d), les valeurs obtenues du coefficient de transmission ( $S_{--}$ ) se comportent de la même manière que l'autre coefficient de transmission ( $S_{++}$ ). En effet, on peut observer approximativement un motif central en forme de parabole inversée (surtout pour le résultat OWE, moins pour celui OWNS), avec un premier pic d'amortissement à 1000 Hz pour les deux coefficients de transmission, et un second pic à 3000 Hz pour  $S_{++}$  et 2500 Hz pour  $S_{--}$ . De même, le maximum de transmission est atteint autour de 2000 Hz pour  $S_{++}$  et autour de 1500 Hz pour l'autre coefficient, illustrant le décalage en fréquence (effet Doppler). En outre, les plages de faibles valeurs pour  $S_{--}$  sont plus larges que celles pour  $S_{++}$ .

De même, l'évolution du coefficient de réflexion  $S_{+-}$  ressemble à l'autre coefficient de réflexion  $S_{-+}$ . La différence principale est que la valeur maximale atteinte est beaucoup plus faible, bien qu'elle soit encore atteinte pour la fréquence de 1000 Hz, pour les résultats OWE et OWNS. Le fait que dans la direction de propagation gauche, les coefficients de transmission et de réflexion de la matrice de diffusion soient plus faibles que ceux dans la direction de propagation droite, peut indiquer que le liner acoustique a un effet d'amortissement plus fort pour les ondes se propageant en amont que pour celles se propageant en aval. Ce phénomène est classiquement observé en présence de convection des ondes. Lorsqu'une onde se déplace vers l'amont, sa longueur d'onde est réduite, signifiant qu'elle "voit" le liner un nombre de fois plus grand spatialement. L'onde est ainsi mieux absorbée vers l'amont que vers l'aval, ceci se traduisant par des coefficients de diffusion plus faibles.

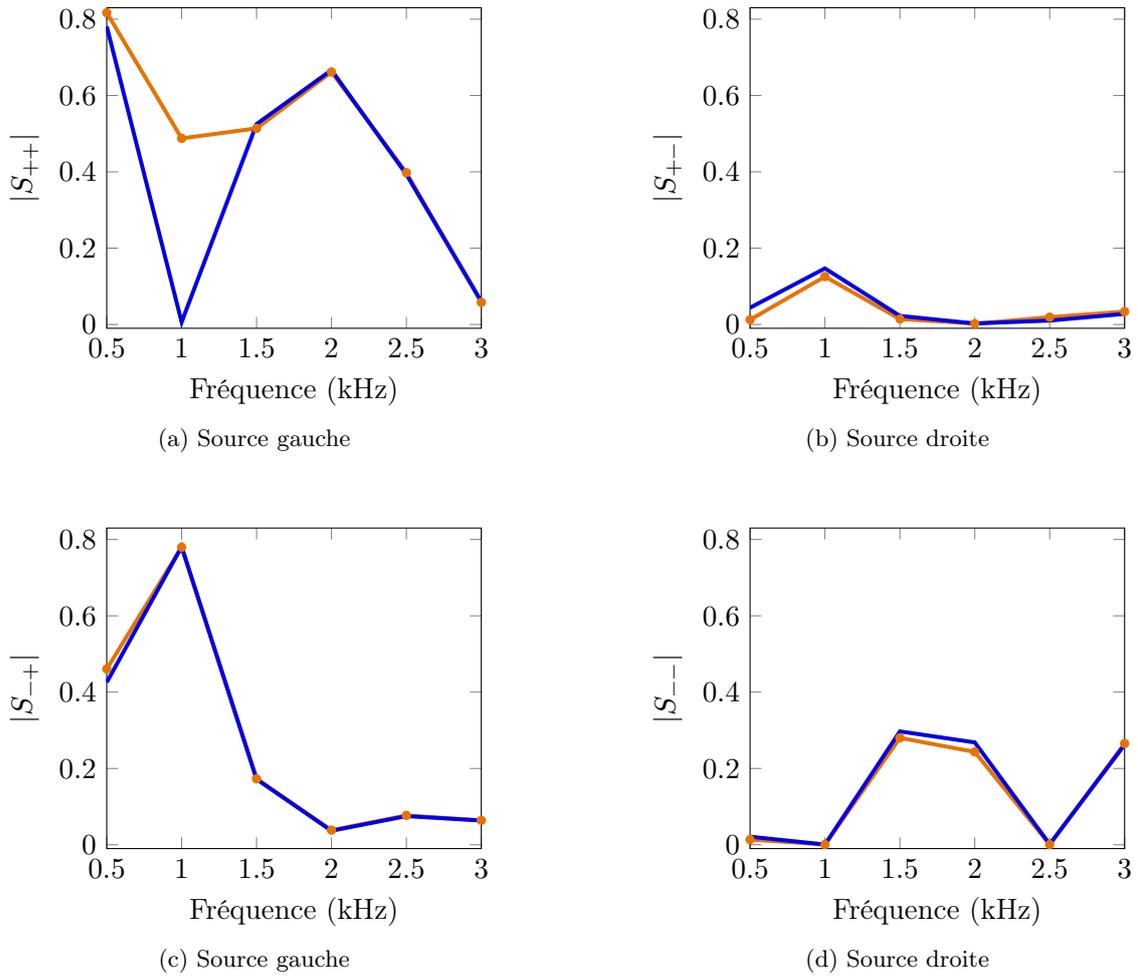


FIGURE 3.11 – Coefficients de la matrice de diffusion du conduit partiellement revêtu pour les résultats OWE (—) et OWNS (—) dans le Cas 2.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations OWE et OWNS sont couplées à une méthode de décomposition de domaine qui est directement dérivée de la factorisation numérique réalisée pour séparer les ondes se propageant vers la gauche et vers la droite dans les équations One-Way. Cette méthodologie est appliquée ici à un cas de conduit partiellement revêtu, où une discontinuité dans les conditions aux limites (paroi rigide et condition d'impédance acoustique) conduit à la génération d'ondes réfléchies et transmises se propageant dans les deux directions. Un processus de résolution itérative d'équations One-Way droites et gauches est ensuite appliqué afin d'obtenir un résultat "full wave" après la convergence.

En particulier, cette méthode est appliquée à un cas présentant un écoulement (plus ou moins) cisaillé dans l'ensemble du conduit revêtu. Cet exemple est étudié avec deux profils de vitesse axiale différents, avec des épaisseurs de couche limite variables et avec les équations d'Euler ou de Navier-Stokes linéarisées. La comparaison entre les simulations OWE et OWNS montre peu ou pas de différence dans les résultats de SPL pour presque toutes les fréquences étudiées, avec une exception pour le cas présentant une instabilité hydrodynamique. Pour cette fréquence particulière, la simulation OWNS, avec le deuxième type de profil d'écoulement de base, montre une meilleure conformité avec les données expérimentales que celle avec le premier profil ou que les deux simulations OWE (ainsi qu'avec un résultat issu d'une

méthode de mode-matching).

En outre, la décomposition naturelle du résultat One-Way en ses composants gauche et droit permet d'obtenir directement la matrice de diffusion pour le liner CT57, qui est souvent utilisée pour caractériser de la performance de la section du liner. Finalement, cette décomposition est utilisée pour étudier le comportement du liner acoustique dans le cas d'une onde incidente droite et gauche, et de leurs réflexions respectives.

Pour résumer, ce chapitre, qui reprend en partie une application déjà traitée dans le cadre des équations d'Euler par [Rudel, 2022], a permis de valider l'extension des approches One-Way aux équations de Navier-Stokes. Pour la majorité des fréquences calculées, nous avons ainsi retrouvé des résultats similaires entre les simulations OWNS et OWE. La présence d'une instabilité de surface autour de 1000 Hz mérite cependant d'être investiguée plus en détail dans le cas des équations OWNS. Une étude plus poussée à des fréquences proches de 1000 Hz permettrait par exemple de distinguer au mieux le phénomène d'instabilité hydrodynamique physique et les instabilités numériques liées à la méthode qui peuvent apparaître. Comme évoqué précédemment, il pourrait également être utile de considérer la viscosité turbulente en plus de la viscosité laminaire. Celle-ci, d'un ordre de grandeur supérieur à la viscosité laminaire, pourrait permettre de mieux prendre en compte l'instabilité de surface et de se rapprocher des résultats expérimentaux.

# Chapitre 4

## Application aux couches limites bidimensionnelles

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Méthodologie pour calculer l'écoulement de base</b>	<b>80</b>
4.1.1	Définitions et notations	80
4.1.2	Équations de similitude locale	81
4.1.3	Résolution numérique	82
4.1.4	Prise en compte d'un maillage non-cartésien	83
<b>4.2</b>	<b>Choix des conditions aux limites transverses</b>	<b>84</b>
4.2.1	Condition isotherme et condition adiabatique	84
4.2.2	Une condition aux limites de type frontière libre	85
<b>4.3</b>	<b>Cas de la couche limite subsonique</b>	<b>88</b>
4.3.1	Définitions	88
4.3.2	Configurations	89
4.3.3	Résultats numériques	89
<b>4.4</b>	<b>Cas de la couche limite supersonique</b>	<b>93</b>
4.4.1	Configuration	93
4.4.2	Résultats numériques	94
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>105</b>

---

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'application des équations OWNS aux couches limites bidimensionnelles se développant sur plaque plane adiabatique sans gradient de pression. Dans la Section 4.1, nous décrivons la méthodologie pour calculer l'écoulement de base pour les couches limites. Si les applications précédentes présentées dans le Chapitre 3 utilisaient des écoulements de base analytiques, il est à présent nécessaire de prendre en compte des écoulements de base numériques. Nous verrons notamment quelles équations régissent cet écoulement de couche limite ainsi que la mise en place d'un maillage non-cartésien, pour différentes raisons qui seront abordées. La Section 4.2 se concentrera sur le choix de conditions limites adaptées à la simulation numérique des couches limites, avec notamment l'obtention d'une condition de frontière libre, afin d'éviter la réflexion d'ondes pouvant interférer avec la propagation des modes recherchés. Le cas des couches limites subsoniques sera tout d'abord abordé dans la Section 4.3, avec deux configurations présentées. Dans la Section 4.4, nous étudierons finalement le cas des couches limites supersoniques, qui présentent certaines spécificités, voire difficultés, nécessitant d'être traitées avant l'utilisation des approches One-Way.

## 4.1 Méthodologie pour calculer l'écoulement de base

Dans cette section, nous mettons en place une méthodologie particulière, adaptée à l'extension de nos approches One-Way aux couches limites, pour le calcul de l'écoulement de base. Dans la Sous-section 4.1.1, nous donnons quelques définitions et notations qui seront utiles à la compréhension de cette section, et plus généralement de ce chapitre. Dans la Sous-section 4.1.2, nous évoquons les équations de similitude locale, nécessaires à l'obtention d'un code permettant de calculer l'écoulement de base de couche limite. Nous verrons ensuite en Sous-section 4.1.3 la résolution numérique de ces équations de similitude, en présentant le code utilisé et les adaptations nécessaires à nos approches OWNS. Enfin, dans la Sous-section 4.1.4, nous parlerons de la prise en compte d'un maillage non-cartésien, à la fois pour des questions de géométrie, mais également pour des raisons liées à des particularités des couches limites supersoniques.

### 4.1.1 Définitions et notations

Soit une couche limite bidimensionnelle sur une paroi imperméable et rigide. L'axe  $x$  désigne la direction le long de la paroi, l'axe  $y$  la direction le long de la normale à la paroi et  $z$  la direction transversale. Les variables  $u, v$  et  $w$  représentent respectivement les composantes en  $x$ , en  $y$  et en  $z$  de la vitesse,  $T$  est la température,  $h$  l'enthalpie massique et  $\rho$  la masse volumique.

L'indice  $e$  désigne l'écoulement à l'extérieur de la couche limite. Cet écoulement est isentropique et suit les équations d'Euler :

$$\rho_e u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{dp_e}{dx}, \quad (4.1a)$$

$$h_e + \frac{1}{2}u_e^2 = h_{ie}, \quad (4.1b)$$

où  $h_{ie}$  est l'enthalpie d'arrêt. Les équations isentropiques s'écrivent également :

$$\frac{T_{ie}}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_e^2, \quad (4.2a)$$

$$\frac{p_{ie}}{p_e} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (4.2b)$$

où  $M_e = u_e/c_e$  est le nombre de Mach avec  $c_e$  la célérité du son :

$$c_e^2 = \gamma r T_e = \frac{\gamma p_e}{\rho_e}, \quad (4.3)$$

et la constante spécifique de l'air  $r = 287.1$  J/mol/K.

Sur paroi adiabatique, la température de paroi est approximativement égale à la température de frottement :

$$T_f = T_e \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2}M_e^2\right), \quad (4.4)$$

où  $r$  est le coefficient de récupération égal à  $r = \sqrt{\text{Pr}} \approx 0.85$ .

D'après les hypothèses sur les couches limites, l'écoulement de base est régi par les équations

tions de la couche limite compressible [Cousteix, 1988] :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v})}{\partial y} &= 0, \\ \bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} &= -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right), \\ \bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{h}_i}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{h}_i}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right).\end{aligned}\tag{4.5}$$

### 4.1.2 Équations de similitude locale

Il est possible d'utiliser des solutions de similitude locale afin de créer des familles paramétriques de profils de couche limite bidimensionnelle. En régime incompressible (pour de faibles nombres de Mach) et à température quasi-constante, on peut utiliser les équations de Blasius ou de Falkner-Skan. Pour un nombre de Mach plus élevé ou en présence d'un gradient de température (paroi significativement plus chaude ou plus froide que l'écoulement), les équations de similitude peuvent être généralisées en utilisant la transformation de Levy-Lees [Schlichting et Gersten, 2016, Cousteix, 1988] :

$$\begin{aligned}\xi &= \int_0^x \rho_p \mu_p u_e dx, \\ \eta &= \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy.\end{aligned}\tag{4.6}$$

En introduisant les deux fonctions :

$$\begin{aligned}\frac{u}{u_e} &= f'(\xi, \eta), \\ \frac{h_i}{h_{ie}} &= 1 + g(\xi, \eta),\end{aligned}\tag{4.7}$$

les équations de quantité de mouvement et d'énergie deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p} f'' \right] + f f'' + \beta_H \left[ \frac{\rho_e}{\rho} - f'^2 \right] = 2\xi \left( f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right),\tag{4.8a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p} \frac{1}{\text{Pr}} g' \right] + f g' + \frac{u_e^2}{h_{ie}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\text{Pr} - 1}{\text{Pr}} \frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p} f' f'' \right] = 2\xi \left( f' \frac{\partial g}{\partial \xi} - g' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right),\tag{4.8b}$$

où le symbole prime désigne la dérivée partielle par rapport à la variable  $\eta$  et le paramètre  $\beta$  représente ici le gradient de vitesse extérieure (aussi appelé le paramètre de Hartree) :

$$\beta_H = \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi}.\tag{4.9}$$

Les conditions de similitude exacte ( $f$  et  $g$  indépendants de  $\xi$ ) ne sont pas vérifiées dans le cas général (on parle alors de similitude locale), car il faut avoir à la fois  $u = cste$  et  $\beta_H = cste$  ( $h_{ie}$  est supposée constante). Ces conditions peuvent être toutefois vérifiées dans le cas de la plaque plane ( $u_e = cste$  donc  $\beta_H = 0$ ) ou dans le cas du point d'arrêt. Dans l'exemple de la plaque plane (le seul qu'on traitera ici), les équations de similitude peuvent se réécrire :

$$\left( \frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p} f'' \right)' + f f'' = 0,\tag{4.10a}$$

$$\left( \frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p} \frac{1}{\text{Pr}} g' \right)' + f g' + \frac{u_e^2}{h_{ie}} \left[ \frac{\text{Pr} - 1}{\text{Pr}} \frac{\rho\mu}{\rho_p\mu_p} f' f'' \right]' = 0,\tag{4.10b}$$

Les conditions aux limites suivantes s'appliquent :

$$\begin{aligned}\eta = 0 : f = 0, f' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty : f' = 1, g = 0.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Sur paroi adiabatique, on impose en plus :

$$g'(0) = 0.\tag{4.12}$$

Si la température de paroi  $T_p$  est fixée, on impose alors :

$$g(0) = \frac{T_p}{T_{ie}} - 1.\tag{4.13}$$

### 4.1.3 Résolution numérique

La résolution des équations de similitude est réalisée avec le programme `similc`, écrit en 1985 par Widah Haj-Ibrahim (alors doctorante de Robert Houdeville au CERT/DERAT) en Fortran 77, puis mis à jour en Fortran 90 par Jean-Philippe Brazier. La discrétisation en  $\eta$  est réalisée par un schéma d'ordre 2. Les non-linéarités sont résolues en ajoutant un terme pseudo-instationnaire. Le faible niveau de couplage entre les deux équations fait que l'algorithme n'est pas très stable. Il ne converge que sur une plage réduite de valeurs de  $\beta_H$ , dont l'amplitude se réduit quand le nombre de Mach augmente. En particulier, pour  $\beta_H < 0$ , on ne peut pas atteindre le décollement [Brazier, 2022].

Ce programme a ensuite été adapté afin de fournir tous les fichiers nécessaires à la lecture de l'écoulement de base (numérique et non plus analytique) ainsi que toutes ses dérivées, qui sont ensuite lues dans notre code One-Way. Afin d'obtenir les matrices des opérateurs de Navier-Stokes linéarisés (cf. Annexe B), l'écoulement de base a été dérivé en utilisant le schéma de différences finies compactes d'ordre 4 à 6 pour les dérivées première et seconde en  $y$  (cf. sous-section 2.2.1). Concernant les dérivées en  $x$  (termes non linéaires et dérivées secondes) ainsi que les dérivées croisées et pour des raisons de stabilité/précision numérique, nous avons utilisé les dérivées en  $y$  de l'écoulement de base ainsi que le fait que la solution reste constante le long des lignes caractéristiques  $(x, r(x))$ . En effet, on a par exemple pour la vitesse axiale de l'écoulement de base :

$$\bar{u}(x, r(x)) = cste.\tag{4.14}$$

Par dérivation, on a alors :

$$0 = \frac{d}{dx}\bar{u}(x, r(x)) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x, r(x)) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x, r(x))\frac{dr(x)}{dx}.\tag{4.15}$$

Soit encore :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x, r(x)) = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x, r(x))\frac{dr(x)}{dx}.\tag{4.16}$$

De même, pour les dérivées secondes, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(x, r(x)) = -2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}(x, r(x))\frac{dr(x)}{dx} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}(x, r(x))\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2 \\ - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(x, r(x))\frac{d^2 r(x)}{dx^2}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Enfin, pour les exemples traités dans ce chapitre et dans le suivant, les hypothèses suivantes ont été considérées :

- couche limite se développant sur plaque plane ( $\beta_H = 0$ );
- sur paroi adiabatique ( $T_p/T_f = 1$ ).

#### 4.1.4 Prise en compte d'un maillage non-cartésien

Jusqu'au Chapitre 3 et pour les travaux de thèse de Clément Rudel [Rudel, 2022], la méthode One-Way a toujours été appliquée sur un maillage cartésien. Pour l'exemple des couches limites, le maillage issu du code de similitude est non-cartésien (pour chaque profil en  $x$ , un nouveau vecteur en  $y$  est fourni). Ce type de maillage permet notamment de respecter le développement des couches limites qui est proportionnel à  $\sqrt{x}$ . De plus, en régime supersonique (nombre de Mach  $M > 1$ ), la valeur propre issue de la matrice  $\tilde{A}$  (cf. Chapitre 2)  $\bar{u} - a$  change de signe au passage de la ligne sonique, c'est-à-dire lorsque  $\bar{u} = a$ . En régime subsonique, cette valeur propre reste toujours négative. Cette ligne traverse donc le maillage cartésien en donnant localement un nombre de modes  $N_+$  et  $N_-$  variable, ce qui est incompatible avec la méthode One-Way actuelle qui considère un nombre fixe de modes se propageant vers la droite et vers la gauche. Pour obtenir un nombre de modes  $N_+$  et  $N_-$  constant, il faut passer à un maillage non-cartésien et s'assurer que le nombre de points de discrétisation en  $y$  pour une position en  $x$  fixée en dessous et au-dessus de la ligne sonique soit constant. Pour ce faire, nous avons choisi d'étendre l'approche One-Way en l'adaptant à une résolution numérique sur le maillage non-cartésien issu du code de similitude, qui garantit alors naturellement cette propriété.

Une difficulté supplémentaire rencontrée lors de l'extension de la méthode aux écoulements de couches limites, est que dans le cas supersonique, nous avons  $N_- \ll N_+$ . Par comparaison, nous avons pour un écoulement subsonique  $N_+ = 3N_y - N_{sing}$  et  $N_- = N_y$ , où  $N_{sing}$  est le nombre de singularités. Cet écart important entre le nombre de modes se propageant vers la droite et vers la gauche, renforcé par une augmentation du nombre de points de discrétisation en  $y$ , crée des problèmes de stabilité dans la factorisation de l'opérateur de propagation. Ces derniers se produisent au moment de la phase de construction de la version pré-conditionnée de l'opérateur  $\tilde{\mathbf{Z}}^r$  (cf. Section 2.1.2), ce qui se traduit alors par la non-inversibilité du bloc  $\tilde{\mathbf{Z}}^r_-$ . Pour pouvoir stabiliser la méthode, nous avons procédé à une renumérotation des degrés de liberté en recherchant un bloc de rang maximal sur la diagonale par une technique de permutation de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$ , après prise en compte des singularités et réduction du système à résoudre (cf. Section 2.2.2).

En outre, le fait que les valeurs de  $y$  dépendent désormais de  $x$  impose une nouvelle définition de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$ . L'équation (2.5) avant discrétisation et après passage dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$A(x, y) \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x}(x, y) = B(x, y) \tilde{q}(x, y). \quad (4.18)$$

En diagonalisant la matrice  $A = T \tilde{A} T^{-1}$ , on obtient :

$$T(x, y) \tilde{A}(x, y) T^{-1}(x, y) \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x}(x, y) = B(x, y) \tilde{q}(x, y). \quad (4.19)$$

Puis en réalisant le changement de variable  $\tilde{q} = T\phi$ , on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \left( \tilde{A}(x, y)^{-1} T^{-1}(x, y) B(x, y) T(x, y) - T^{-1}(x, y) \frac{\partial T}{\partial x}(x, y) \right) \phi(x, y). \quad (4.20)$$

Le maillage étant non-cartésien, pour chaque position en  $x$ , on a  $y_j = y_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, N_y$ . La discrétisation en variables  $y$  nécessite d'abord d'introduire une nouvelle variable d'inconnues  $\underline{\phi}$  :

$$\underline{\phi}(x) = \left[ \underline{\phi}_1(x), \underline{\phi}_2(x), \underline{\phi}_3(x), \underline{\phi}_4(x) \right]^T, \quad (4.21)$$

où l'on peut définir chaque  $\underline{\phi}_i \in \mathbb{R}^{N_y}$  par :

$$\underline{\phi}_i(x) = \left[ \phi_i(x, y_1(x)), \dots, \phi_i(x, y_{N_y}(x)) \right]^T. \quad (4.22)$$

La dérivée en  $x$  de chaque variable  $\underline{\phi}_i$  peut alors s'écrire :

$$\frac{d\underline{\phi}_i}{dx}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y_1(x)) + y'_1(x) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y_1(x)) \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y_{N_y}(x)) + y'_{N_y}(x) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y_{N_y}(x)) \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

soit encore :

$$\frac{d\underline{\phi}_i}{dx}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y_1(x)) \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y_{N_y}(x)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y'_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & y'_{N_y}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y_1(x)) \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y_{N_y}(x)) \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

En posant  $Y'(x) := \text{diag}[y'_1(x), \dots, y'_{N_y}(x)] \in \mathbb{R}^{N_y}$  et en remplaçant dans l'équation (4.20) après discrétisation, on obtient finalement :

$$\frac{d\underline{\phi}}{dx} = [\mathbf{M}(x) + Y'(x)\mathbf{D}_y] \underline{\phi} := \underline{\mathbf{M}}(x)\underline{\phi}, \quad (4.25)$$

où l'opérateur  $\mathbf{M}$  est défini dans l'équation (2.7) et  $\mathbf{D}_y$  est l'opérateur discret de dérivée première en  $y$  défini en Section 2.2.1. La matrice  $\underline{\mathbf{M}}$  est le nouvel opérateur de propagation à factoriser pour obtenir les différentes équations One-Way.

## 4.2 Choix des conditions aux limites transverses

Dans cette section, nous discutons du choix des conditions aux limites pour modéliser au mieux les couches limites. En sous-section 4.2.1, nous évoquons le choix de la condition de température au niveau de la paroi de la couche limite, qui peut être de type isotherme ou adiabatique. En sous-section 4.2.2, nous dérivons une condition aux limites de type frontière libre afin de respecter la géométrie de la couche limite, tout en évitant des ondes réfléchies indésirables, qui viendraient interagir avec les phénomènes d'instabilités que nous souhaitons observer.

### 4.2.1 Condition isotherme et condition adiabatique

Au niveau de la paroi de la couche limite, en plus d'une condition de non-glissement  $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$ , il est nécessaire d'ajouter une condition de température. Celle-ci peut être isotherme  $\tilde{T}|_{y=0} = 0$  ou adiabatique  $\partial \tilde{T} / \partial y|_{y=0} = 0$ . Une condition adiabatique est généralement utilisée pour l'écoulement de base. D'après Mack [Mack, 1984, Mack, 1990], il est plus physique de supposer que les perturbations de température s'annulent à la paroi, même si une condition adiabatique peut être utilisée pour le calcul de l'écoulement de base [Ma et Zhong, 2003]. L'effet de ces deux conditions de température de paroi sur les instabilités de couche limite sera notamment étudié dans la Section 4.4.

Notre résolution ayant lieu en variables primitives, il est nécessaire de linéariser l'équation d'état. La perturbation de température se réécrit alors :

$$\tilde{T} = \gamma M^2 (\bar{v}\tilde{p} + \tilde{v}\bar{p}). \quad (4.26)$$

que l'on peut réécrire en variables caractéristiques en utilisant l'équation (2.97) :

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \gamma M^2 \left[ \bar{\nu}(\phi_1 + \phi_4) + \bar{p} \left( -\frac{\bar{\nu}}{\gamma \bar{p}} \phi_1 + \phi_2 - \frac{\bar{\nu}}{\gamma \bar{p}} \phi_4 \right) \right] \\ &= \gamma M^2 \bar{p} \left[ \frac{\bar{\nu}}{\bar{p}} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \phi_1 + \phi_2 + \frac{\bar{\nu}}{\bar{p}} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \phi_4 \right].\end{aligned}\quad (4.27)$$

La condition isotherme se réécrit donc :

$$\left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\bar{\nu}}{\bar{p}} \phi_1 + \phi_2 + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\bar{\nu}}{\bar{p}} \phi_4 = 0, \quad (4.28)$$

et la condition adiabatique s'écrit alors en dérivant par rapport à  $y$  :

$$\left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial y} \phi_1 + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\bar{\nu}}{\bar{p}} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial y} \phi_4 + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\bar{\nu}}{\bar{p}} \frac{\partial \phi_4}{\partial y} = 0, \quad (4.29)$$

où l'on a considéré  $\bar{p} = cste$  et où les dérivées en  $y$  peuvent être remplacées en utilisant un schéma de différences finies d'ordre 2 ou un schéma de différences finies compactes d'ordre 4 à 6 (cf. 2.2.1).

### 4.2.2 Une condition aux limites de type frontière libre

Le but est ici de construire une condition aux limites d'onde sortante d'ordre 0 sur le bord  $\Gamma_{top}$  de la couche limite, comme représenté sur la figure 4.1.

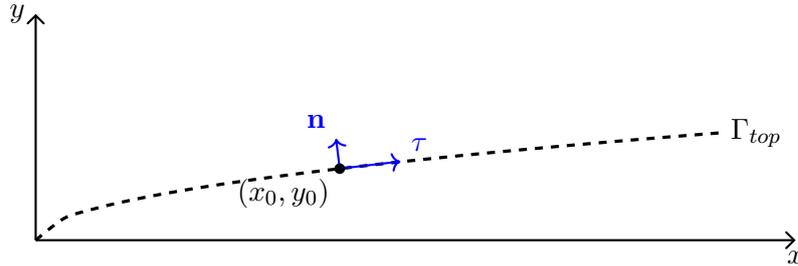


FIGURE 4.1 – Schéma représentant le développement d'une couche limite.

Pour ce faire, on garde uniquement la partie hyperbolique du système des équations de Navier-Stokes linéarisées (2.4) en régime fréquentiel :

$$A(x, y) \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} + B_y(x, y) \frac{\partial \tilde{q}}{\partial y} = i\omega \tilde{q}. \quad (4.30)$$

On note  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$  la normale sortante unitaire à  $\Gamma_{top}$  et  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)^T$  la tangente associée de telle sorte que le repère  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$  soit direct. On commence par réaliser le changement de repère suivant :

$$(x, y)^T = (x_0, y_0)^T + r_{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{\tau} + r_{\mathbf{n}} \mathbf{n}, \quad (4.31)$$

où

$$\begin{aligned}r_{\boldsymbol{\tau}} &= (x - x_0)\tau_1 + (y - y_0)\tau_2 = (x - x_0)n_2 - (y - y_0)n_1, \\ r_{\mathbf{n}} &= (x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2.\end{aligned}\quad (4.32)$$

En définissant  $\hat{q}(r_{\boldsymbol{\tau}}, r_{\mathbf{n}}) := \tilde{q}(x, y)$ , on obtient les relations suivantes entre les dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_{\boldsymbol{\tau}}} \frac{\partial r_{\boldsymbol{\tau}}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_{\mathbf{n}}} \frac{\partial r_{\mathbf{n}}}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_{\boldsymbol{\tau}}} n_2 + \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_{\mathbf{n}}} n_1,\end{aligned}\quad (4.33)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial y} &= \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_\tau} \frac{\partial r_\tau}{\partial y} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_n} \frac{\partial r_n}{\partial y}, \\ &= -\frac{\partial \hat{q}}{\partial r_\tau} n_1 + \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_n} n_2.\end{aligned}\tag{4.34}$$

On remplace ensuite les expressions précédentes dans l'équation (4.30) :

$$A \left( \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_\tau} n_2 + \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_n} n_1 \right) + B_y \left( -\frac{\partial \hat{q}}{\partial r_\tau} n_1 + \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_n} n_2 \right) = i\omega \hat{q},\tag{4.35}$$

que l'on peut réécrire :

$$(An_1 + B_y n_2) \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_n} = i\omega \hat{q} - (An_2 - B_y n_1) \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_\tau}.\tag{4.36}$$

Pour obtenir une condition d'onde sortante d'ordre 0, il suffit alors de négliger la dérivée tangentielle, ce qui nous donne la nouvelle équation suivante :

$$(An_1 + B_y n_2) \frac{\partial \hat{q}}{\partial r_n} = i\omega \hat{q}.\tag{4.37}$$

*Remarque 29.* Les conditions issues de l'équation (4.37) permettent de transmettre sans réflexion une onde plane arrivant normalement à une surface plane.

*Remarque 30.* Dans le cas d'une paroi droite, on a  $\mathbf{n} = (0, 1)^T$  et la condition se réécrit :

$$B_y \frac{\partial \hat{q}}{\partial y} = i\omega \hat{q}.\tag{4.38}$$

En reprenant les coefficients donnés en Annexe B, la matrice  $An_1 + B_y n_2$  s'écrit :

$$An_1 + B_y n_2 = \begin{pmatrix} \bar{u}n_1 & -\bar{v}n_1 & -\bar{v}n_2 & 0 \\ 0 & \bar{u}n_1 & 0 & \bar{v}n_1 \\ 0 & 0 & \bar{u}n_1 & \bar{v}n_2 \\ 0 & \gamma\bar{p}n_1 & \gamma\bar{p}n_2 & \bar{u}n_1 \end{pmatrix},\tag{4.39}$$

en considérant l'hypothèse d'écoulement uniforme ( $\bar{u} = \text{cte}$  et  $\bar{v} = 0$ ) au niveau de  $\Gamma_{top}$ .

On souhaite alors diagonaliser cette matrice. Le polynôme caractéristique  $\mathcal{P}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\lambda) &= \det [An_1 + B_y n_2 - \lambda I] \\ &= (\bar{u}n_1 - \lambda) [(\bar{u}n_1 - \lambda) ((\bar{u}n_1 - \lambda)^2 - \bar{v}\gamma\bar{p}n_2^2) + \bar{v}n_1 (-n_1\gamma\bar{p}(\bar{u}n_1 - \lambda))] \\ &= (\bar{u}n_1 - \lambda)^2 [(\bar{u}n_1 - \lambda)^2 - \bar{v}\gamma\bar{p}(n_1^2 + n_2^2)], \\ &= (\bar{u}n_1 - \lambda)^2 [(\bar{u}n_1 - \lambda)^2 - \bar{v}\gamma\bar{p}],\end{aligned}\tag{4.40}$$

car  $n_1^2 + n_2^2 = 1$ .

La relation  $\mathcal{P}(\lambda) = 0$  nous donne trois valeurs propres (dont l'une double) :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \bar{u}n_1 + \sqrt{\bar{v}\gamma\bar{p}}, \\ \lambda_{2,3} &= \bar{u}n_1, \\ \lambda_4 &= \bar{u}n_1 - \sqrt{\bar{v}\gamma\bar{p}}.\end{aligned}\tag{4.41}$$

Plus précisément, nous avons la diagonalisation suivante :

$$P^{-1}(An_1 + B_y n_2)P = \Lambda = \begin{pmatrix} \bar{u}n_1 + \sqrt{\bar{\nu}\gamma\bar{p}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u}n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u}n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}n_1 - \sqrt{\bar{\nu}\gamma\bar{p}} \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

où les matrices de transformation sont données par :

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\nu}}{\gamma\bar{p}} & 1 & 0 & -\frac{\bar{\nu}}{\gamma\bar{p}} \\ \sqrt{\frac{\bar{\nu}}{\gamma\bar{p}}}n_1 & 0 & 1 & -\sqrt{\frac{\bar{\nu}}{\gamma\bar{p}}}n_1 \\ \sqrt{\frac{\bar{\nu}}{\gamma\bar{p}}}n_2 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\bar{\nu}}{\gamma\bar{p}}}n_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2n_2}\sqrt{\frac{\gamma\bar{p}}{\bar{\nu}}} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\bar{\nu}}{\gamma\bar{p}} \\ 0 & 1 & -\frac{n_1}{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2n_2}\sqrt{\frac{\gamma\bar{p}}{\bar{\nu}}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

En remplaçant dans l'équation (4.37) et en réalisant le changement de variable  $\hat{q} = P\hat{\phi}$ , on obtient une nouvelle équation One-Way dans la direction privilégiée  $r_{\mathbf{n}}$  :

$$\Lambda \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r_{\mathbf{n}}} = i\omega \hat{\phi}, \quad (4.45)$$

qui peut se réécrire :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r_{\mathbf{n}}} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

La composante  $n_1$  étant négative (cf. Figure 4.1) et en faisant l'hypothèse que  $n_1 \ll 1$  (ce qui est le cas dans les applications visées dans cette thèse), les équations donnant des ondes entrantes sont les équations 2, 3 et 4. On a donc :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_2 = 0 &\Rightarrow \hat{v} + \frac{\bar{\nu}}{\gamma\bar{p}}\hat{p} = 0 \\ \hat{\phi}_3 = 0 &\Rightarrow \hat{u} - \frac{n_1}{n_2}\hat{v} = 0, \\ \hat{\phi}_4 = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{2n_2}\sqrt{\frac{\gamma\bar{p}}{\bar{\nu}}}\hat{v} + \frac{1}{2}\hat{p} = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Les conditions aux limites étant appliquées en variables caractéristiques  $\phi$  (avec le changement de variable  $\hat{q} = T\phi$ ), nous avons finalement les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_2 &= 0 \\ \frac{\bar{v}}{\gamma\bar{p}}\phi_1n_2 - \phi_3n_1 - \frac{\bar{v}}{\gamma\bar{p}}\phi_4n_2 &= 0, \\ \phi_1n_2 - \sqrt{\frac{\gamma\bar{p}}{\bar{v}}}\phi_3 + \phi_4n_2 &= 0.\end{aligned}\tag{4.48}$$

En pratique, la première relation est imposée sur la variable  $\phi_2$ , la deuxième sur la variable  $\phi_1$  et la dernière sur la variable  $\phi_3$ .

### 4.3 Cas de la couche limite subsonique

Dans cette section, nous considérons l'extension des approches OWNS aux couches limites subsoniques, lors de deux configurations différentes qui nous ont servi de cas de validation. En Sous-section 4.3.1, nous donnons quelques définitions essentiellement liées aux différents nombres de Reynolds utilisés dans les publications concernant les couches limites. Ces définitions seront également valables dans la section suivante sur les couches limites supersoniques. En Sous-section 4.3.2, nous présenterons les deux configurations de couches limites subsoniques. Finalement, en Sous-section 4.3.3, nous présenterons les résultats obtenus pour les deux configurations en comparaison à d'autres résultats obtenus par d'autres approches numériques (LST, PSE et OWNS Towne & Colonius).

#### 4.3.1 Définitions

Toutes les quantités dimensionnées sont écrites avec un astérisque. Nous pouvons définir le nombre de Reynolds unitaire (mesuré en  $\text{m}^{-1}$ ) par :

$$\text{Re}_\infty^* = \frac{\rho_\infty^* u_\infty^*}{\mu_\infty^*},\tag{4.49}$$

et nous avons la relation suivante :

$$\text{Re}_x = \frac{\rho_\infty^* u_\infty^* x^*}{\mu_\infty^*} = \text{Re}_\infty^* x^*,\tag{4.50}$$

et

$$\text{Re}_\delta = \frac{\rho_\infty^* u_\infty^* \delta^*}{\mu_\infty^*} = \text{Re}_\infty^* \delta^*,\tag{4.51}$$

où  $\delta^*$  peut être ici l'épaisseur de déplacement prise en entrée ou en sortie du domaine de calcul de la couche limite.

La longueur de Blasius peut également être prise comme longueur de référence dans certains calculs. Elle est définie par :

$$\ell^* = \sqrt{\frac{\mu_\infty^* x^*}{\rho_\infty^* u_\infty^*}},\tag{4.52}$$

et nous pouvons en déduire le nombre de Reynolds associé, généralement noté  $R$  :

$$R = \frac{\rho_\infty^* u_\infty^* \ell^*}{\mu_\infty^*}.\tag{4.53}$$

Nous avons par conséquent  $R = \sqrt{\text{Re}_x}$ .

De plus, pour certaines applications traitées dans les Chapitres 4 et 5, la fréquence est caractérisée par une fréquence adimensionnée  $F$  [Ma et Zhong, 2003] définie par :

$$F = \frac{\omega^* \mu_\infty^*}{\rho_\infty^* u_\infty^{*2}}, \quad (4.54)$$

où  $\omega^*$  est la pulsation dimensionnée.

La pulsation dimensionnée  $\omega^*$  est adimensionnée par  $u_\infty^*/\ell^*$  et la relation entre la pulsation adimensionnée  $\omega$  et la fréquence  $F$  est donnée par :

$$\omega = RF. \quad (4.55)$$

### 4.3.2 Configurations

Dans le cas de la configuration A, la longueur de référence servant à adimensionner les variables est l'épaisseur de déplacement à l'entrée du domaine  $\delta_0^*$ . L'entrée du domaine de calcul est située à un nombre de Reynolds  $Re_{\delta_0} = 1500$  tandis que la sortie du domaine est située à  $Re_{\delta_1} = 4000$  (où  $\delta_1^*$  est l'épaisseur de déplacement à la sortie du domaine). Dans le cas de la configuration B, la longueur de référence considérée est la longueur de Blasius calculée en  $x^* = x_{min}^*$ . L'entrée du domaine est située à  $R = 600$  et la sortie à  $R = 1400$ . Pour ces deux configurations, les conditions aux limites à la paroi sont des conditions de non-glissement assorties d'une condition isotherme ainsi que la condition de frontière libre pour borner la partie supérieure du domaine de calcul. Les coefficients  $\beta_\pm$  choisis sont donnés en Annexe D. Les paramètres physiques et numériques sont résumés respectivement par les tableaux 4.1 et 4.2 :

Configuration	$M_\infty$	$T_\infty^*$ (K)	$p_\infty^*$ (Pa)	Pr	$Re_\infty^*$ (m <sup>-1</sup> )
A	0.2	297.6	22596	0.725	$1.0 \times 10^6$
B	0.5	288	101325	0.72	$1.17 \times 10^7$

TABLE 4.1 – Paramètres physiques pour deux configurations A et B de couches limites subsoniques. Les paramètres issus de la configuration B sont tirés de [Rigas *et al.*, 2017a].

Configuration	$f^*$ (Hz)	$x_{min}^*$ (m)	$x_{max}^*$ (m)	$y_{min}^*$ (m)	$y_{max}^*$ (m)	$N_x$	$N_y$
A	300	0.745	5.305	0.0	0.195	3001	151
B	$1.26 \times 10^4$	0.0308	0.168	0.0	0.0102	401	251

TABLE 4.2 – Paramètres numériques pour deux configurations A et B de couches limites subsoniques. Les paramètres issus de la configuration B sont tirés de [Rigas *et al.*, 2017a].

### 4.3.3 Résultats numériques

Dans cette sous-section, nous montrons quelques résultats numériques issus des cas de couches limites subsoniques en Configuration A et B.

### 4.3.3.1 Configuration A

L'écoulement de base a été obtenu avec le code de similitude `similc`. La solution de similitude est représentée sur la Figure 4.2. Le Mach local est quant à lui représenté sur la Figure 4.3.

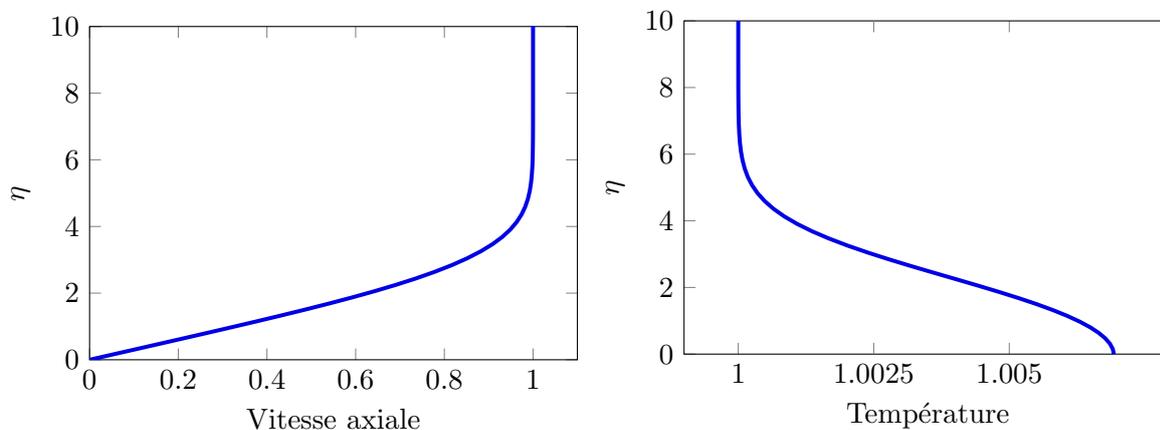


FIGURE 4.2 – Écoulement de base obtenu à partir d'une solution de similitude locale pour la couche subsonique à  $M = 0.2$  : vitesse axiale (à gauche) et température (à droite) en fonction de la variable de similitude  $\eta$ .

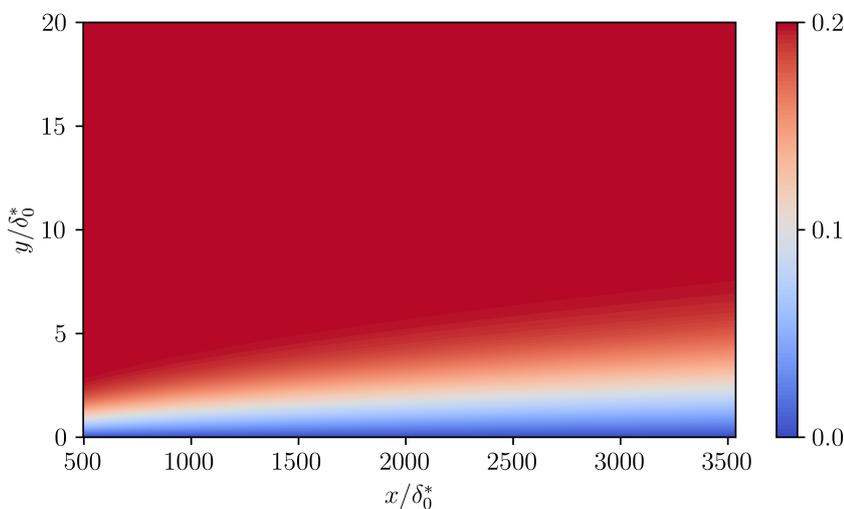


FIGURE 4.3 – Champ du nombre de Mach local de l'écoulement de base à  $M = 0.2$ .

Sur la Figure 4.4, nous montrons la propagation du mode instable de TS par notre approche OWNS avec le champ de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression. Sur la Figure 4.5, on représente le facteur  $N$  basé sur la valeur de  $\tilde{u}_{max}$  pour un calcul OWNS en comparaison à un calcul LST issu du code `MAMOUT` (Modules d'Analyse MODale Unidimensionnelle avec les polynômes de Tchebychev) développé par Jean-Philippe Brazier à l'ONERA et à un calcul PSE issu du code `PASTEQ` (PARabolized STability EQUations), également développé à l'ONERA. Les effets non-parallèles sont négligeables pour les perturbations 2D et diminuent avec la fréquence [Bertolotti *et al.*, 1992], les deux courbes sont donc similaires pour les trois calculs. Ces résultats numériques nous permettent ainsi de valider notre nouvelle approche OWNS sur maillage non-cartésien dans le cas d'une couche

limite subsonique avec propagation d'un unique mode instable.

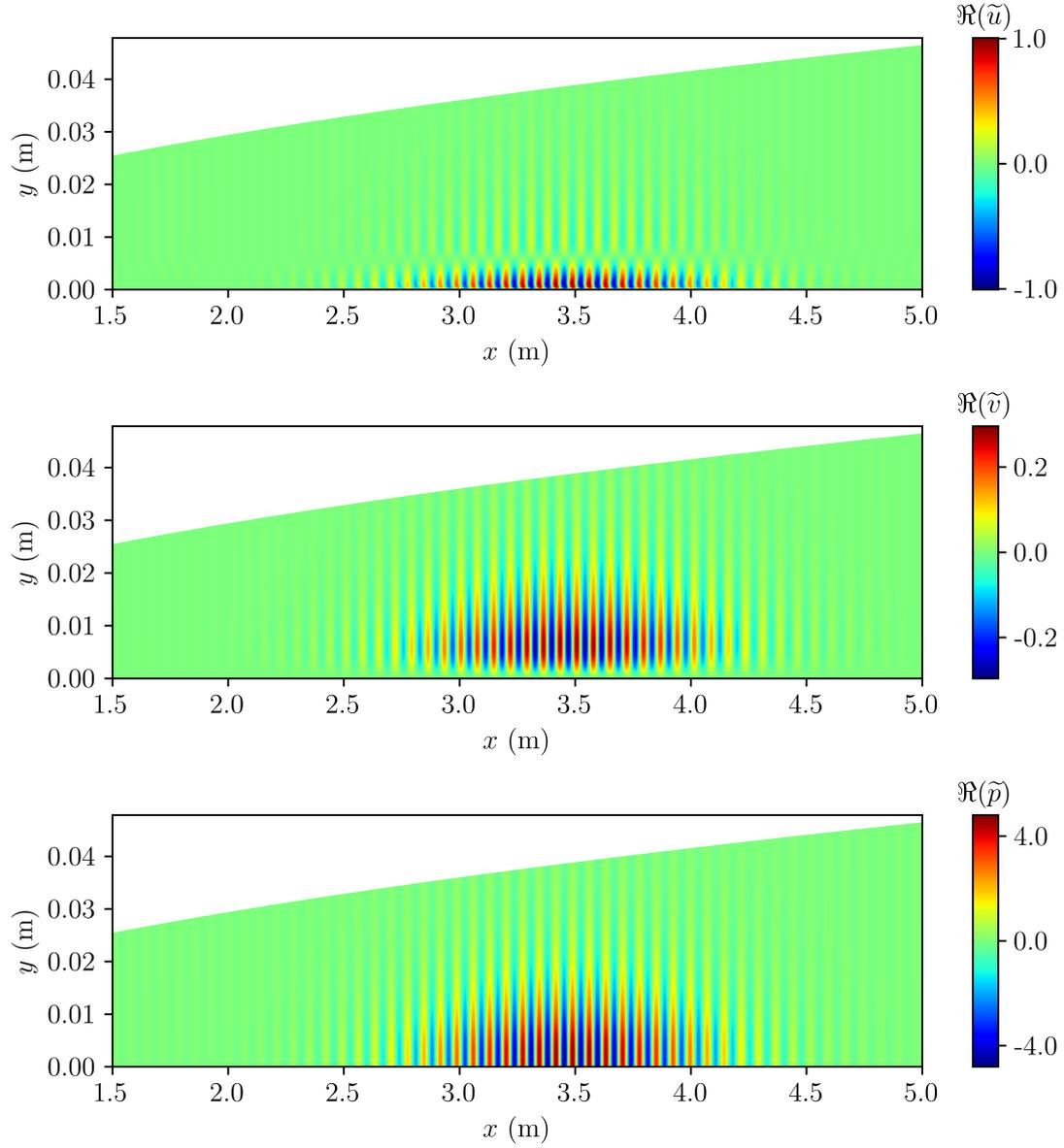


FIGURE 4.4 – Instabilité de Tollmien-Schlichting pour la couche limite subsonique à  $M = 0.2$ . Champs de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression (de haut en bas), normalisés par la valeur de  $\tilde{u}_{max}$ . Le domaine de calcul en  $x$  et en  $y$  a été réduit pour permettre une meilleure visualisation de la propagation du mode instable.

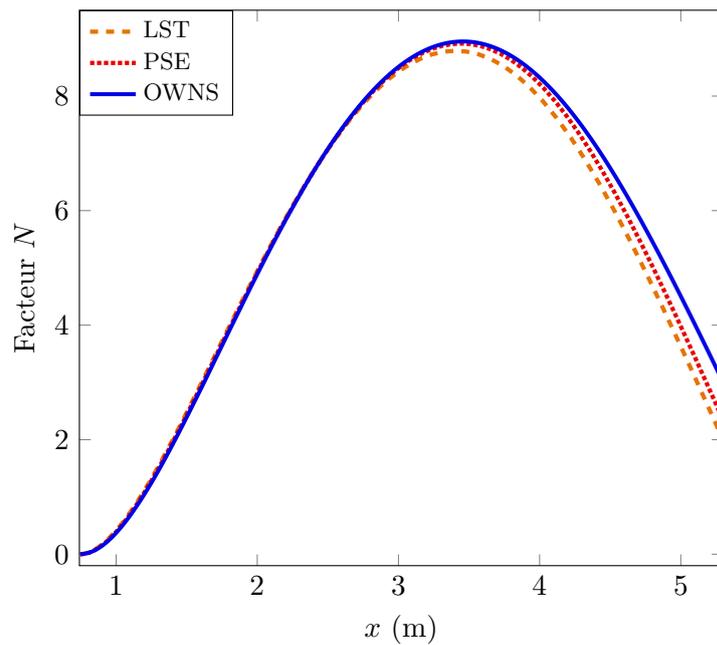


FIGURE 4.5 – Facteur  $N$  pour la couche limite subsonique de la configuration A basé sur la valeur de  $\tilde{u}_{max}$ , en comparaison à une solution LST issue du code MAMOUT et à une solution PSE issue du code PASTEQ.

#### 4.3.3.2 Configuration B

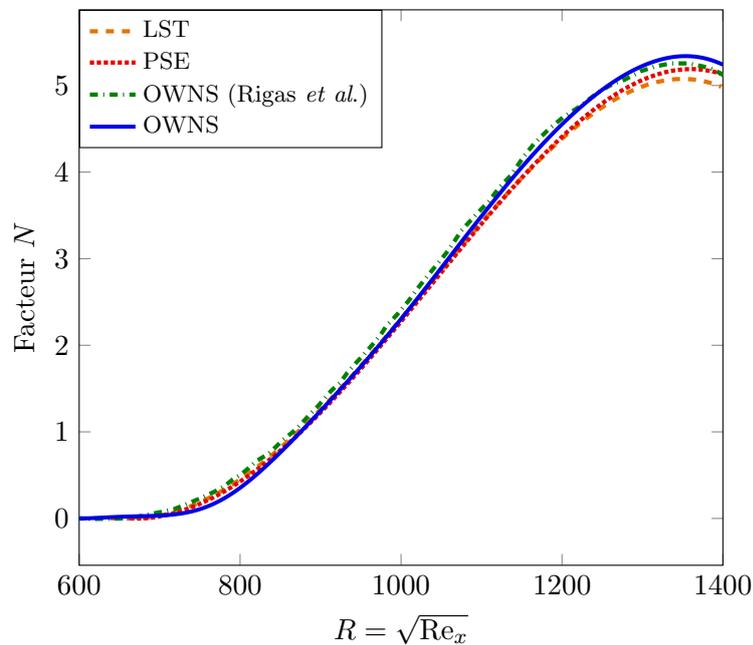


FIGURE 4.6 – Facteur  $N$  pour la couche limite subsonique de la configuration B basé sur  $\tilde{u}_{max}$  : comparaison entre les résultats issus de notre approche OWNS, une solution LST issue du code MAMOUT, une solution PSE issue du code PASQTEQ et les résultats OWNS tirés de [Rigas *et al.*, 2017a].

Pour la configuration B, nous comparons directement les résultats issus de notre approche OWNS aux résultats OWNS tirés de [Rigas *et al.*, 2017a] ainsi qu'à des résultats LST

(MAMOUT) et PSE (PASTEQ). Comme pour le cas de la Configuration A, nous représentons le facteur  $N$  sur la Figure 4.6 correspondant à la propagation de l’instabilité de TS. Les 4 approches donnent des résultats de facteur  $N$  similaires. Dans [Rigas *et al.*, 2017a], leur calcul OWNS est également comparé à un calcul LST et un calcul PSE. Leurs trois résultats sont similaires, les effets non-parallèles étant également petits pour cet exemple. Dans ce cas où nous ne suivons qu’un seul mode (et pas une combinaison de modes), la méthode PSE permet de capturer précisément la croissance de la perturbation associée. Rigas *et al.* montrent donc la validation de leur approche OWNS, ainsi que le fait que les résultats PSE convergent vers ceux de l’approche OWNS. De cette manière, nous pouvons également valider notre approche One-Way pour ce cas d’écoulement de couche limite subsonique pour un nombre de Mach égal à 0.5.

#### 4.3.3.3 Temps de calcul et coûts mémoire

Les performances en termes de temps CPU et de coûts mémoire sont donnés dans le Tableau 4.3 pour les configurations A et B. Pour la configuration A, les simulations ont été réalisées sur un cluster de calcul ONERA avec 4 nœuds : 3 nœuds Broadwell Intel Xeon CPU E5-2650 v4 2.20GHz à 256 Go de mémoire et un nœud Broadwell Intel Xeon CPU E5-2650 v4 2.20GHz à 512 Go de mémoire. Pour la configuration B, le calcul a été effectué sur un cluster ONERA avec 6 nœuds Broadwell Intel Xeon CPU E5-2650 v4 2.20GHz à 128 Go de mémoire.

Configuration	Temps CPU (s)	Étapes ( $N_x$ )	Temps CPU/étape (s)	Coût mémoire (Mo)
A	857	3001	0.29	420
B	152	401	0.38	186

TABLE 4.3 – Aperçu des performances des équations OWNS pour les couches limites subsoniques des configurations A et B.

Il est intéressant de constater que malgré un nombre de points de discrétisation en  $x$  largement supérieur pour la configuration A, le coût mémoire est 2.26 fois inférieur à celui obtenu pour la configuration B. Ceci s’explique par le fait que le coût mémoire dépend essentiellement du nombre de points de discrétisation en  $y$ . Les approches One-Way sont donc plus favorables à des cas permettant un nombre de points  $N_y$  moindre, tandis que  $N_x$  n’a qu’une faible influence sur le coût mémoire obtenu.

## 4.4 Cas de la couche limite supersonique

Dans cette section, nous appliquons notre approche OWNS à un cas de couche limite supersonique à Mach 4.5 issu de la littérature [Ma et Zhong, 2003] qui présentent des résultats LST et DNS (Direct Numerical Simulation). Contrairement aux exemples subsoniques de la section précédente, nous avons ici des phénomènes de couplage de modes dans certaines conditions que nous allons développer. Les paramètres physiques sont résumés dans le Tableau 4.4 et les paramètres numériques choisis pour les différentes simulations One-Way sont donnés dans le Tableau 4.5.

### 4.4.1 Configuration

Toutes les quantités ont été adimensionnées en utilisant la vitesse à l’infini amont  $u_\infty$  et la longueur de Blasius  $\ell^*$  calculée pour un nombre de Reynolds  $R = 1000$  (soit une abscisse

correspondante  $x^* = 0.139$  m). Le nombre de Mach est égal à  $M_\infty = u_\infty/a_\infty$ . Le domaine de calcul en termes de nombres de Reynolds s'étend de  $R = 400$  (entrée) à  $R = 1473$  (sortie). Le domaine de calcul considéré a été tronqué en comparaison de celui de [Ma et Zhong, 2003] qui s'étend de  $R = 207.9$  à  $R = 2129.8$ . En particulier, le bord d'attaque de la plaque plane a été pris en compte dans leurs calculs, résultant en l'apparition d'un choc au niveau du bord d'attaque. Dans notre cas, l'entrée du domaine de calcul est située légèrement après le bord d'attaque de la plaque, afin d'éviter l'apparition d'une singularité dans la distribution de pression. De même, le domaine de sortie a été tronqué pour des questions de performances du code afin d'obtenir une meilleure représentation des résultats avec plus de points en  $x$  par longueur d'onde.

$M_\infty$	$T_\infty^*$ (K)	$p_\infty^*$ (Pa)	Pr	$Re_\infty^*$ (m <sup>-1</sup> )
4.5	65.15	728.438	0.72	$7.2 \times 10^6$

TABLE 4.4 – Paramètres physiques de la couche limite supersonique à  $M = 4.5$  tirés de [Ma et Zhong, 2003].

$f^*$ (Hz)	$x_{min}^*$ (m)	$x_{max}^*$ (m)	$y_{min}^*$ (m)	$y_{max}^*$ (m)	$N_x$	$N_y$
$1.84 \times 10^5$	0.022	0.30	0.0	0.033	2201	251

TABLE 4.5 – Paramètres numériques pour la couche limite supersonique à  $M = 4.5$ .

#### 4.4.2 Résultats numériques

Dans cette section, nous réalisons plusieurs simulations en modifiant à la fois le mode d'entrée (mode S ou mode F1) de la marche en  $x$  de nos équations One-Way et la condition aux limites sur les perturbations de température (isotherme ou adiabatique). De plus, on travaille ici à fréquence fixée et abscisse  $x$  variable. La terminologie des modes acoustiques *slow* (mode S) et *fast* (mode F1, mode F2, etc.) est récapitulée dans [Knisely et Zhong, 2019]. Le mode S débute avec une vitesse de phase égale à  $c_\varphi = \omega / \text{Re}(\alpha) = 1 - 1/M_\infty$  tandis que le mode F1 débute avec une vitesse de phase égale à  $c_\varphi = 1 + 1/M_\infty$ . Pour une  $c_\varphi = 1$ , le mode S est synchronisé avec les ondes d'entropie/vorticité [Ma et Zhong, 2003, Fedorov, 2011]. Plus en aval, le mode S est synchronisé avec le mode F1. Il devient alors le second mode de Mack, qui est le mode dominant menant à la transition laminaire-turbulent à  $M = 4.5$  (cf. Chapitre 1). La Figure 4.7 représente la partie réelle et la partie imaginaire des nombres d'ondes axiaux  $\alpha$  en fonction du nombre de Reynolds  $R$ , qui sont issues d'une solution LST obtenue par le code MAMOUT. Contrairement au mode S, le mode F1 est toujours stable ( $\text{Im}(\alpha) > 0$ ) au sens de l'analyse locale de stabilité. Quant au mode S, la LST montre une zone dans laquelle le mode est instable allant de  $R = 840$  à  $R = 1030$  environ. Le début de la région instable concorde avec le point de synchronisation des modes S et F1, que l'on peut observer sur la courbe représentant  $\text{Re}(\alpha)$  en fonction de  $R$ .

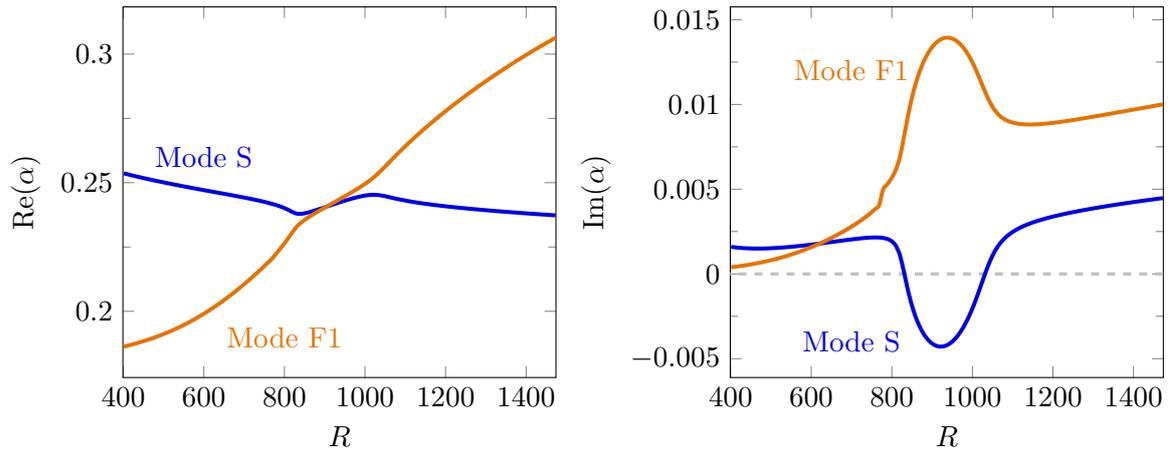


FIGURE 4.7 – Partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des nombres d’ondes axiaux dimensionnés à  $M = 4.5$  et  $F = 2.2 \times 10^{-4}$  issus d’un résultat LST obtenu par code MAMOUT.

Sur la Figure 4.8, nous montrons la convergence du spectre de l’opérateur de propagation induit par la factorisation numérique présentée dans le Chapitre 2 pour différents points de sampling. En pratique, l’analyse locale de stabilité a été réalisée en 20 points de sampling, et nous représentons les spectres pour 4 d’entre eux. Comme évoqué dans le Chapitre 2, il peut parfois être compliqué de choisir les coefficients  $\beta_{\pm}$  lorsque l’on considère une application avec une grande variation en  $x$ , et notamment pour de petites valeurs de  $x$ . Pour cet exemple, toutes les simulations ont été effectuées avec  $N_{\beta} = 18$  et les coefficients  $\beta_{\pm}$  correspondants sont donnés en Annexe D. Les spectres sont représentés sur une zone d’intérêt contenant les modes S et F1 (cf. 4.4.2) avec lesquels nous allons initialiser la marche en  $x$  des équations OWNS. La zone d’intérêt a été choisie pour permettre une comparaison avec le spectre obtenu par [Ma et Zhong, 2003] pour un nombre de Reynolds  $R = 1000$ . Les modes se propageant vers la gauche ne sont pas représentés ici, étant donné que nous considérons l’approche True Amplitude avec une seule itération de Bremmer (résolution d’une équation One-Way droite) pour la plupart des calculs effectués en Sous-section 4.4.2. Un test avec plusieurs itérations de Bremmer est cependant réalisé en fin de chapitre.

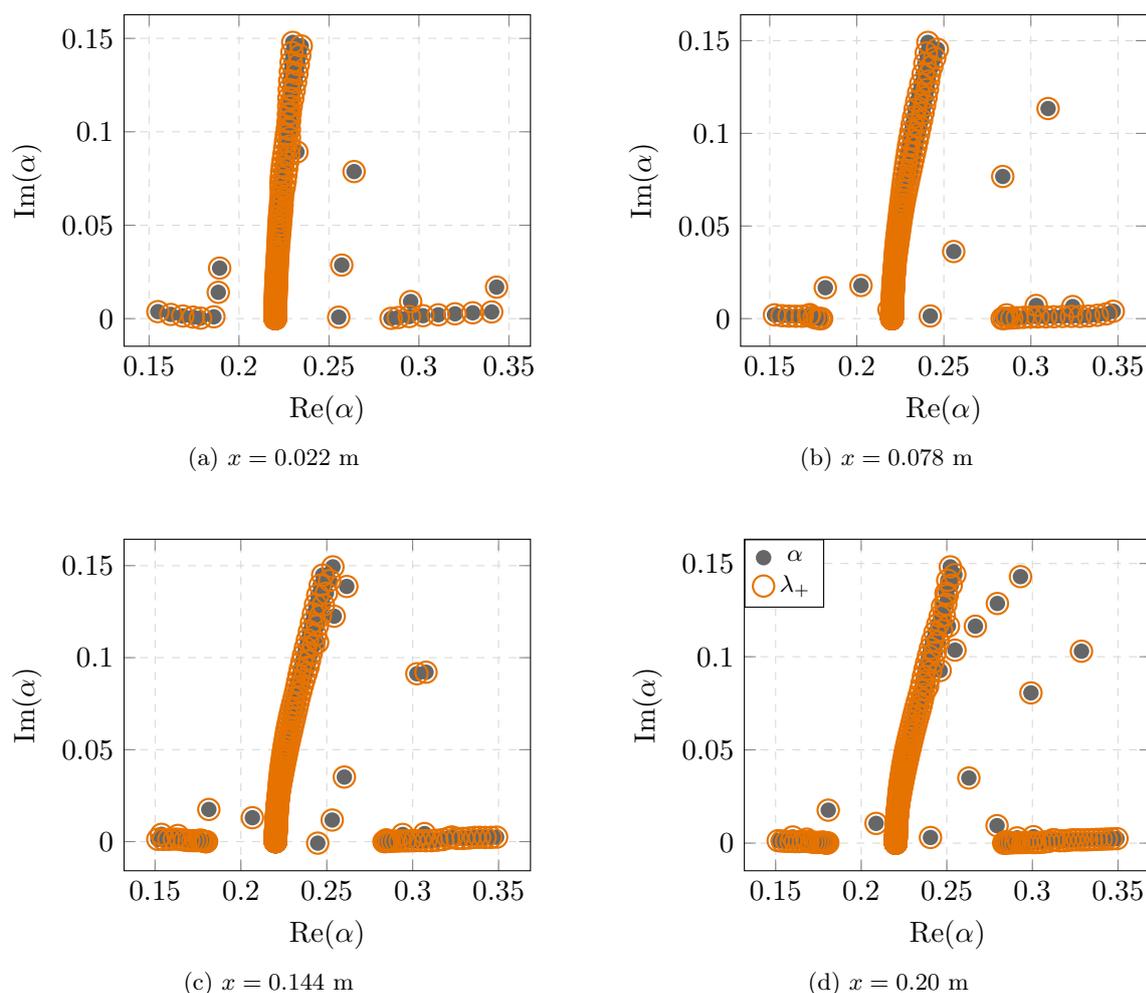


FIGURE 4.8 – Convergence sur le spectre de l’opérateur de propagation à différentes abscisses  $x$  pour  $N_\beta = 18$ .  $\alpha$  représente le spectre de l’opérateur exact et  $\lambda_+$  le spectre de  $\tilde{\mathbf{D}}_{++}$ .

#### 4.4.2.1 Propagation du mode S

Dans ce premier exemple numérique, le mode S a été imposé en entrée du domaine de calcul à  $x^* = 0.022$  m (soit  $R = 400$ ). Sur la Figure 4.9, nous comparons la partie réelle des perturbations de pression à la paroi ( $y = 0$ ) pour le cas isotherme et le cas adiabatique. Les résultats LST de [Ma et Zhong, 2003] indiquent que le mode S devient le second mode de Mack pour  $x^* = 0.098$  m (ou  $R = 840$ ) en interagissant avec le mode F1. Dans le cas isotherme, l’amplitude maximum de la pression est atteinte pour  $x^* = 0.148$  m et le pic a pour valeur  $|\tilde{p}|/p_\infty = 0.219$ . Dans le cas adiabatique, le pic est atteint pour  $x^* = 0.154$  m avec une valeur  $|\tilde{p}|/p_\infty = 0.251$ . Le maximum d’amplitude pour les perturbations de pression est donc plus grand dans le cas adiabatique que dans le cas isotherme, ce qui suggère que le second mode de Mack est plus instable dans le cas adiabatique. En outre, après  $x^* = 0.2$  m, il est possible de constater des oscillations dans le cas adiabatique, que nous n’apercevons pas dans le cas isotherme dans lequel les perturbations de pression décroissent directement vers 0. Ces oscillations sont également présentes dans [Ma et Zhong, 2003] et pourraient venir de l’interaction avec d’autres modes acoustiques rapides (F2, F3, etc.) présents dans l’écoulement. Les Figures 4.10 et 4.11 représentent respectivement le champ de la partie réelle des perturbations de vitesse et de pression dans le cas isotherme et dans le cas adiabatique. Dans les deux cas, nous observons l’instabilité du second mode de Mack qui se développe ainsi que

des phénomènes d'ondes acoustiques radiatives. La présence de ces ondes pourrait confirmer les phénomènes de couplages de modes entre le mode S ainsi que le second mode de Mack obtenu avec d'autres modes acoustiques.

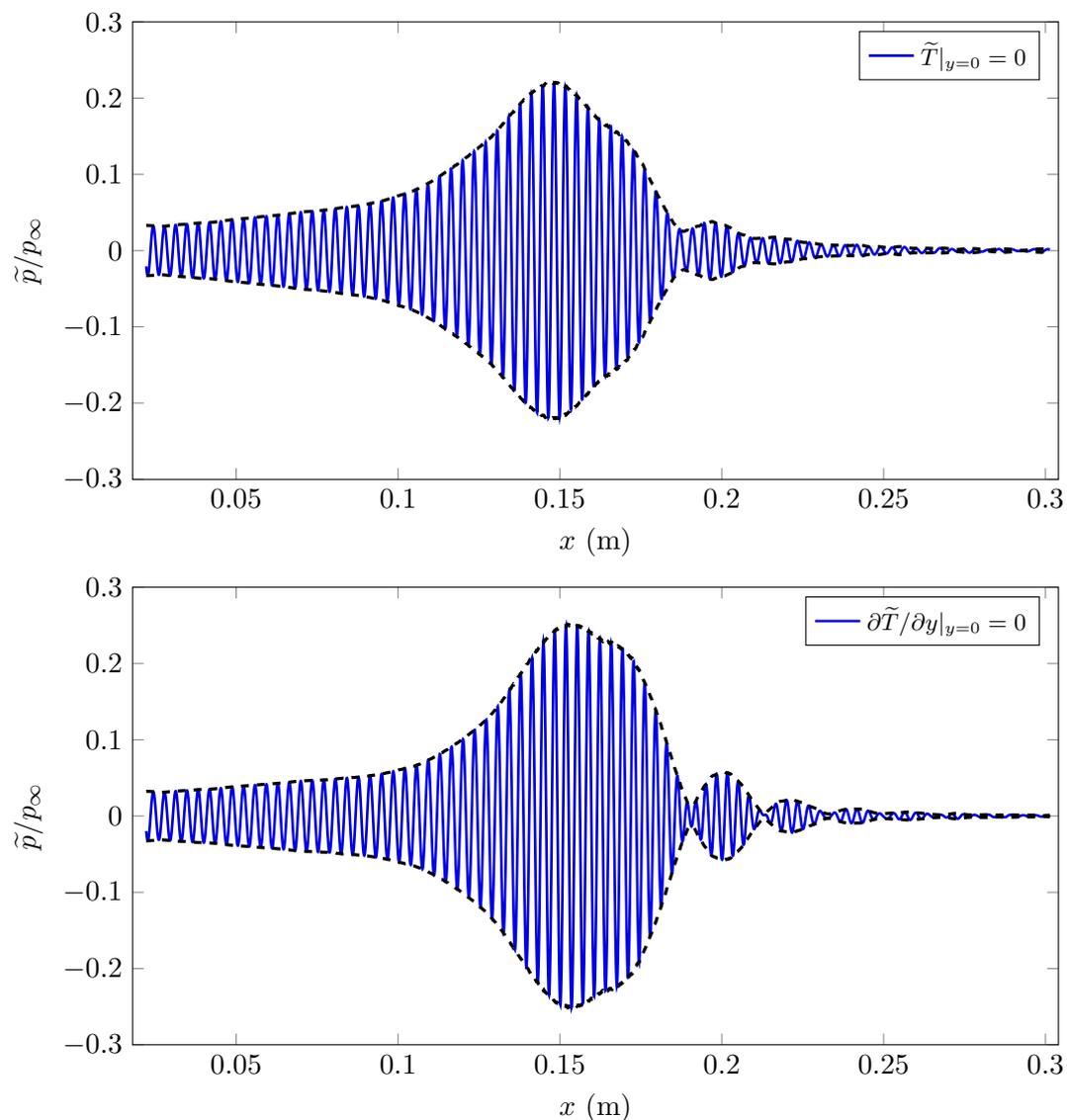


FIGURE 4.9 – Extraction de la partie réelle des perturbations de pression à la paroi ( $y = 0$ ) en imposant le mode S en entrée du domaine de calcul avec une condition de paroi isotherme (haut) et adiabatique (bas) pour les perturbations de température.

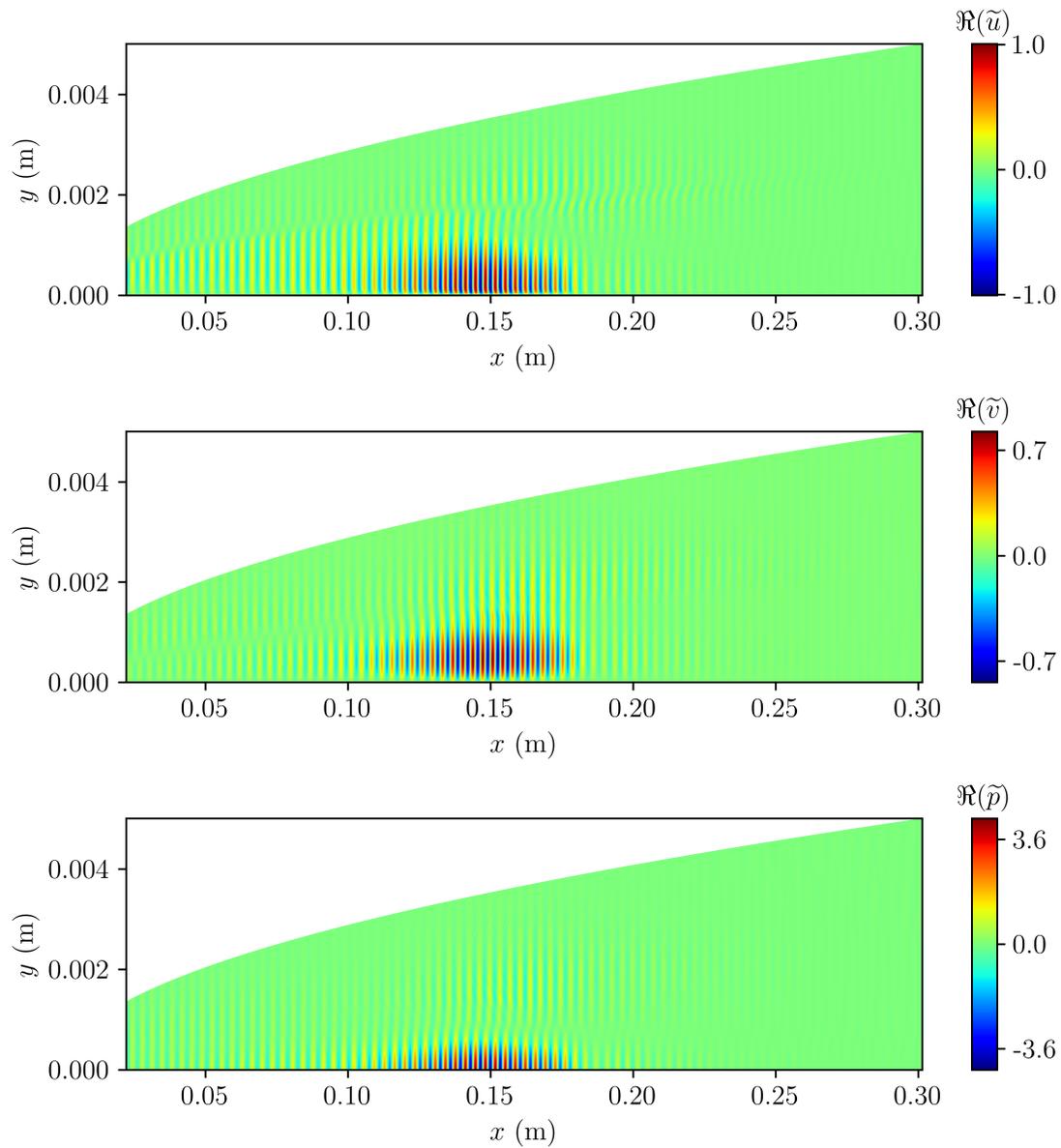


FIGURE 4.10 – Propagation du mode S pour la couche limite supersonique à  $M = 4.5$  avec une condition de paroi isotherme pour les perturbations de température. Champs de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression (de haut en bas), normalisés par la valeur de  $\tilde{u}_{max}$ .

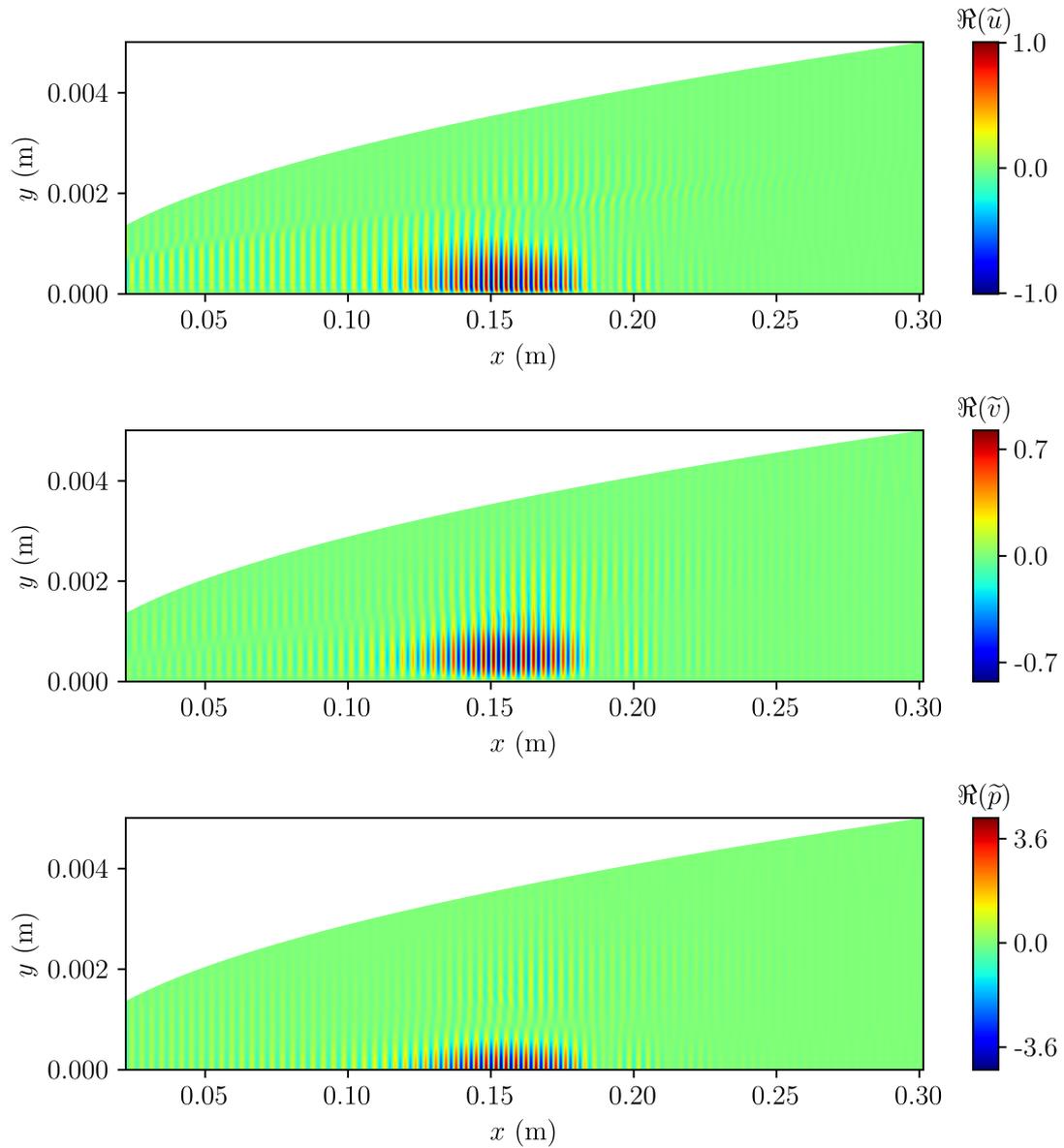


FIGURE 4.11 – Propagation du mode S pour la couche limite supersonique à  $M = 4.5$  avec une condition de paroi adiabatique pour les perturbations de température. Champs de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression (de haut en bas), normalisés par la valeur de  $\tilde{u}_{max}$ .

#### 4.4.2.2 Propagation du mode F1

Nous imposons désormais le mode F1 en entrée du domaine de calcul à  $x^* = 0.022$  m (ou  $R = 400$ ). La partie réelle des perturbations de pression dans les cas isotherme et adiabatique est représentée sur la Figure 4.12. En comparaison aux résultats présentés sur la Figure 4.9, nous pouvons observer des motifs plus complexes avec de multiples pics dans l'amplitude des perturbations de pression qui indiquent l'excitation de plusieurs modes à différentes abscisses lors de la propagation du mode F1 le long du domaine de calcul [Ma et Zhong, 2003]. Nous observons un premier pic pour  $x^* = 0.06$  m, qui concorde avec les résultats obtenus par [Ma et Zhong, 2003], indiquant que le mode est instable dans cette région. Ce résultat vient contredire ce qui était prévu par la LST qui prévoit un mode F1 toujours stable (cf. Figure 4.7). [Ma et Zhong, 2003] expliquent que cela pourrait venir de l'effet de l'onde de choc qui

n'est pas pris en compte dans la LST. Cependant, les résultats OWNS montrent l'instabilité alors que la solution de similitude utilisée pour calculer l'écoulement de base ne tient pas non plus compte du choc. De plus, dans [Ma et Zhong, 2000] ils ont montré sur une simulation sans l'onde de choc et en utilisant une solution de similitude que l'effet du choc sur la propagation du mode F1 était négligeable. Une autre possibilité serait que l'amplification du mode F1 soit liée à l'interaction de ce mode avec d'autres modes présents dans l'écoulement. Ensuite, après avoir passé le premier pic à  $x^* = 0.06$  m, l'amplitude des ondes décroît. On observe alors une nouvelle zone de croissance du mode F1 entre  $x^* = 0.115$  m et  $x^* = 0.155$  m environ. Cette deuxième croissance est liée à l'instabilité du second mode de Mack [Ma et Zhong, 2003]. En effet, la synchronisation entre le mode S et le mode F1 entraîne l'apparition du second mode de Mack, qui devient instable au niveau du point de synchronisation que l'on observe sur la Figure 4.7.

Si les pics d'amplitude et les régions observés sont situés à des abscisses  $x^*$  similaires, les amplitudes obtenues dans le cas isotherme et dans le cas adiabatique sont différentes. En effet, dans la première zone de croissance, le maximum d'amplitude de pression est atteint pour  $|\tilde{p}|/p_\infty = 0.174$  avec une condition isotherme contre  $|\tilde{p}|/p_\infty = 0.222$  pour une condition adiabatique. Dans la deuxième zone, nous obtenons un pic égal à  $|\tilde{p}|/p_\infty = 0.129$  dans le cas isotherme contre  $|\tilde{p}|/p_\infty = 0.473$  dans le cas adiabatique. Ces phénomènes peuvent également être observés sur les Figures 4.13 et 4.14 qui représentent respectivement la partie réelle des perturbations de vitesse et de pression dans le cas isotherme et adiabatique. L'instabilité liée au second mode de Mack est donc bien plus visible dans le cas adiabatique que dans le cas isotherme.

Enfin, si les phénomènes de couplage des modes S et F1 sont bien visibles sur nos résultats OWNS, nous observons des différences en termes d'amplitude des perturbations de pression en fonction des conditions aux limites par rapport aux simulations DNS [Ma et Zhong, 2003]. Ces différences de résultats entre les simulations OWNS et DNS restent à investiguer plus en détail afin de déterminer si les causes sont plutôt liées au modèle utilisé ou aux paramètres numériques choisis.

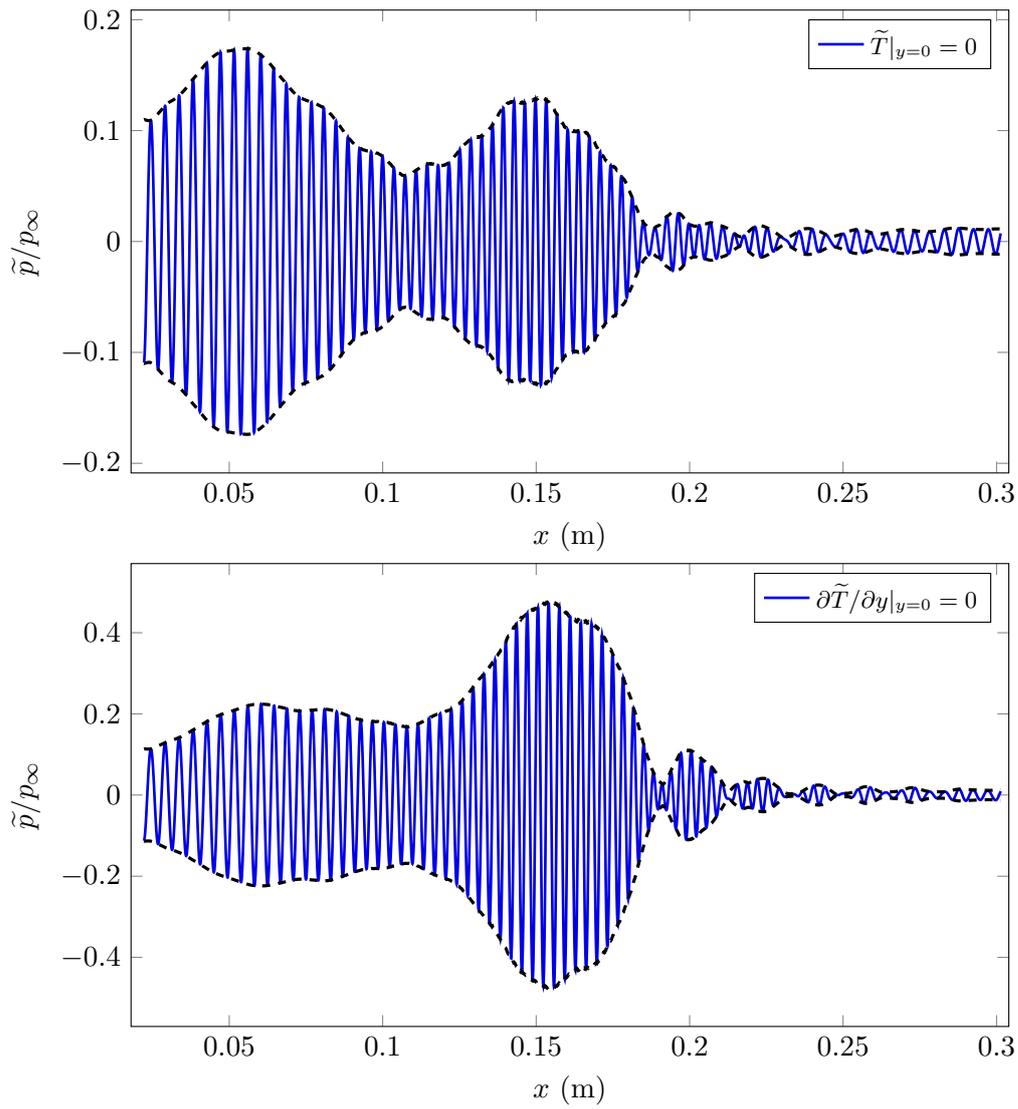


FIGURE 4.12 – Extraction de la partie réelle des perturbations de pression à la paroi ( $y = 0$ ) en imposant le mode F1 en entrée du domaine de calcul avec une condition de paroi isotherme (haut) et adiabatique (bas) pour les perturbations de température.

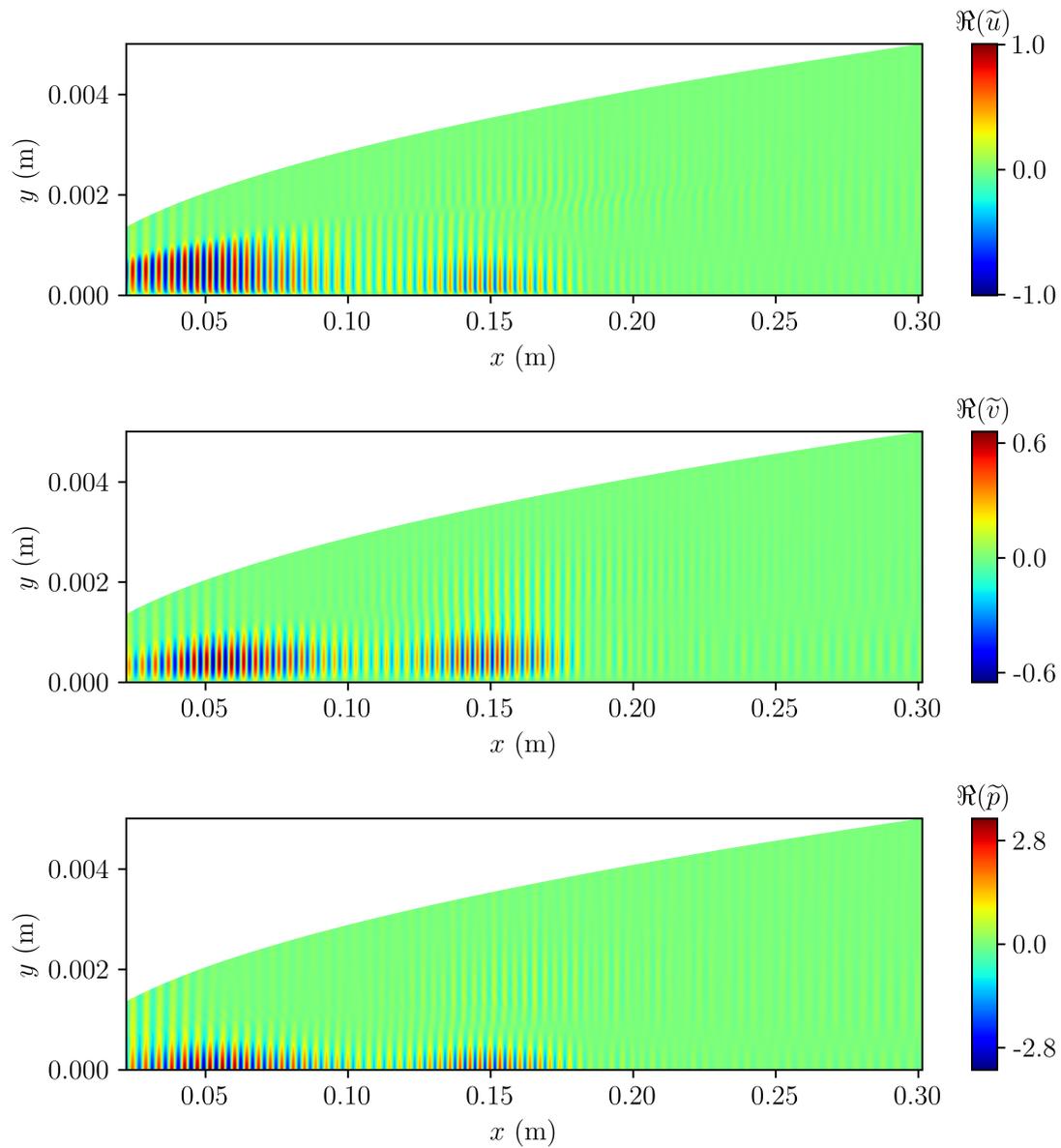


FIGURE 4.13 – Propagation du mode F1 pour la couche limite supersonique à  $M = 4.5$  avec une condition de paroi isotherme pour les perturbations de température. Champs de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression (de haut en bas), normalisés par la valeur de  $\tilde{u}_{max}$ .

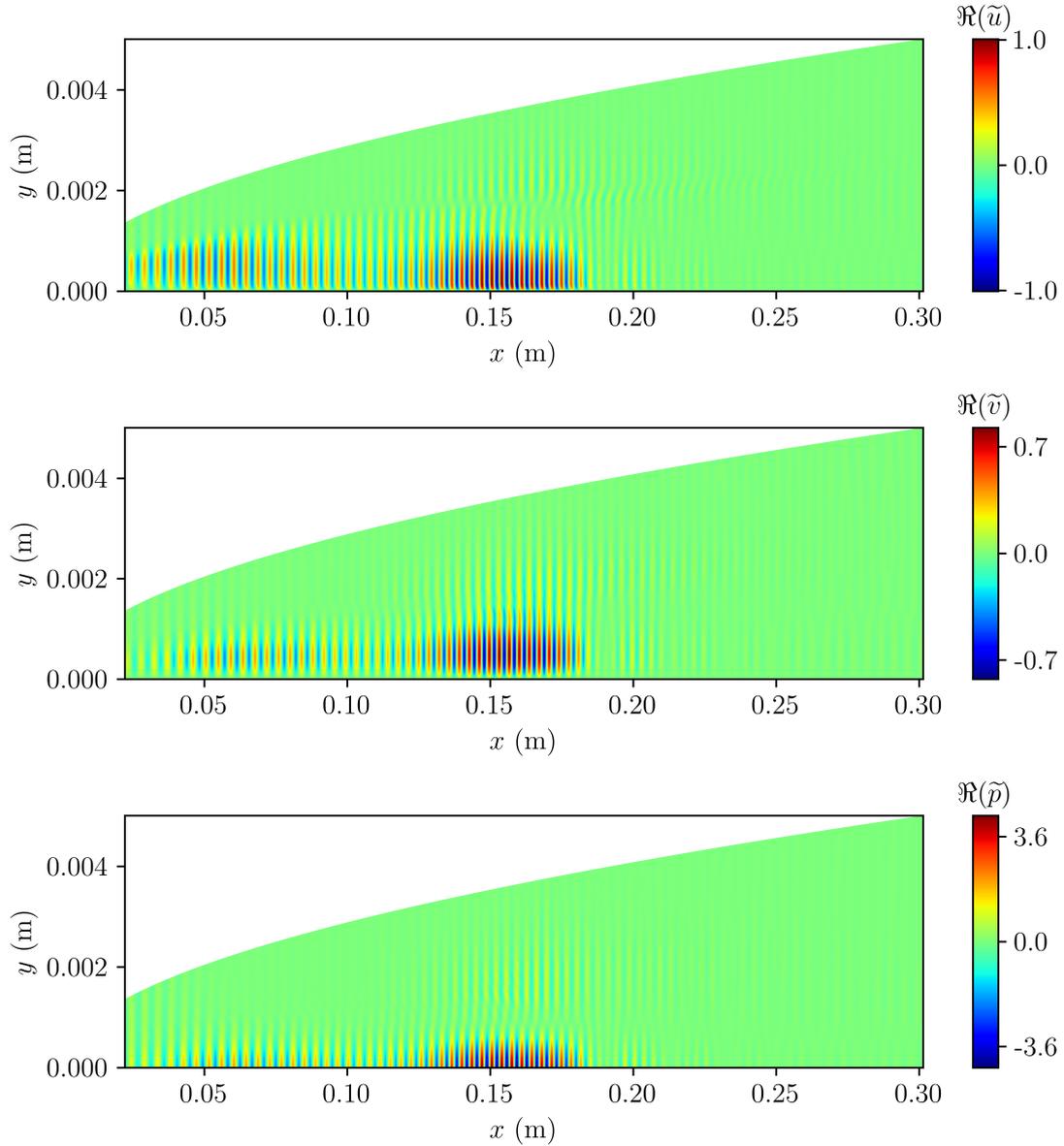


FIGURE 4.14 – Propagation du mode F1 pour la couche limite supersonique à  $M = 4.5$  avec une condition de paroi adiabatique pour les perturbations de température. Champs de la partie réelle des perturbations de vitesse axiale, de vitesse normale et de pression (de haut en bas), normalisés par la valeur de  $\tilde{u}_{max}$ .

#### 4.4.2.3 Séries de Bremmer

Dans cette partie, nous imposons à nouveau le mode S à l'entrée du domaine avec une condition de paroi isotherme pour les perturbations de température. Si pour tous les calculs précédents, nous avons considéré une approche One-Way True Amplitude, nous testons dans cette sous-partie 5 itérations de Bremmer (contre 1 habituellement) afin de mesurer l'intérêt d'une telle approche sur ce type d'application de couche limite. Sur la Figure 4.15, nous représentons la partie réelle des perturbations de pression à la paroi pour 5 itérations de Bremmer contre 1 seule itération (résultat issu du calcul réalisé en sous-section 4.4.2.1). La longueur d'onde restituée dans les deux cas est la même, étant donné que nous avons considéré une approche TAOW dans les deux cas. Nous observons de très légères différences en termes d'amplitude entre les deux résultats, ce qui montre que les termes correctifs pris en compte

sont négligeables et qu'une seule itération de Bremmer suffit. La convergence sur les itérations de Bremmer est vérifiée dans le Tableau 4.6 avec le calcul des normes des solutions obtenues  $\psi_+$  et  $\psi_-$  pour chaque itération. Chaque terme correctif possède ainsi une norme de plus en plus faible, ce qui montre que le processus itératif de résolution d'équations One-Way droites et gauches des séries de Bremmer a bien convergé.

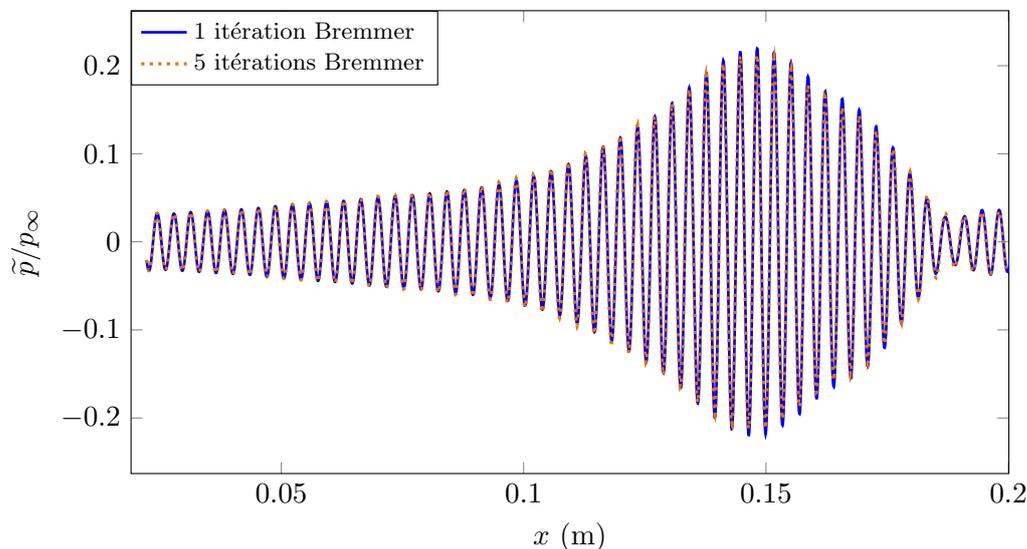


FIGURE 4.15 – Extraction de la partie réelle des perturbations de pression à la paroi ( $y = 0$ ) en imposant le mode S en entrée du domaine de calcul avec une condition de paroi isotherme pour 1 et 5 itérations de Bremmer.

Itération n°	$\ \psi_+\ $	$\ \psi_-\ $
1	$2.093 \times 10^2$	0.0
2	$1.196 \times 10^1$	$3.788 \times 10^{-3}$
3	$4.842 \times 10^{-1}$	$1.864 \times 10^{-4}$
4	$2.440 \times 10^{-2}$	$8.307 \times 10^{-6}$
5	$1.349 \times 10^{-3}$	$4.393 \times 10^{-7}$

TABLE 4.6 – Convergence sur les itérations de Bremmer avec le mode S en entrée et une condition aux limites isotherme.

#### 4.4.2.4 Temps de calcul et coûts mémoire

Les temps CPU et les coûts mémoire obtenus pour les 4 calculs précédents sont donnés dans le Tableau 4.7. Les calculs ont été réalisés sur un cluster de calcul ONERA avec 4 nœuds : 3 nœuds Broadwell Intel Xeon CPU E5-2650 v4 2.20GHz à 256 Go de mémoire et un nœud Broadwell Intel Xeon CPU E5-2650 v4 2.20GHz à 512 Go de mémoire. Les performances de l'approche OWNS sont comparées aux trois approches Towne & Colonius testées sur un exemple reprenant les paramètres de [Ma et Zhong, 2003] : OWNS-O (qui est l'approche originale présentée dans [Towne et Colonius, 2015]), OWNS-P (approche projetée permettant de prendre en compte des forçages volumiques) et OWNS-R (la dernière approche

présentée dans [Zhu et Towne, 2023] avec des coûts de calcul proches d’une méthode PSE). Nous observons des performances très similaires à l’approche OWNS-O et inférieures à la fois en termes de temps de calcul et de coût mémoire par rapport à l’approche OWNS-P, qui est la plus similaire à la nôtre en termes de méthodologie One-Way. Les performances obtenues restent cependant supérieures à la fois en temps CPU et en coût mémoire par rapport à l’approche OWNS-R.

Méthode	Temps CPU (s)	Étapes ( $N_x$ )	Temps CPU/étape (s)	Coût mémoire (Mo)
OWNS	2014	2201	0.92	456
OWNS-O	3297	3601	0.92	458
OWNS-P	7623	3601	2.12	995
OWNS-R	462	3601	0.128	31

TABLE 4.7 – Aperçu des performances de l’approche OWNS pour la couche limite supersonique à  $M = 4.5$  en comparaison aux approches OWNS-O, OWNS-P et OWNS-R [Zhu et Towne, 2023].

*Remarque 31.* Le coût mémoire présenté dans ce chapitre (pour les cas subsonique et supersonique) est basé sur une estimation en considérant l’ensemble des structures nécessaires à la réalisation de l’avancée en  $x$  d’un segment GD ainsi que le stockage de la solution globale pour le post-traitement. Ceci correspond au pic mémoire de la méthode.

*Remarque 32.* En prenant en compte une discrétisation identique à celle considérée dans [Zhu et Towne, 2023], c’est-à-dire  $N_x = 3601$  et  $N_y = 200$ , on obtient un coût mémoire de 320 Mo.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu les approches OWNS au cas des couches limites bidimensionnelles se développant sur plaque plane adiabatique. Plusieurs étapes ont été nécessaires avant de considérer différentes applications concrètes. Dans un premier temps, il a fallu prendre en considération l’écoulement de base numérique, à partir d’un code de similitude locale. En outre, afin d’obtenir un nombre de modes  $N_+$  et  $N_-$  constant, les équations One-Way ont dû être adaptées sur le maillage non-cartésien issu du code `similc`, qui garantit naturellement cette propriété. Des conditions aux limites transverses spécifiques aux cas des couches limites ont ensuite été présentées.

La première application considérée a été le cas de la couche limite subsonique, pour deux configurations à deux nombres de Mach différents (0.2 et 0.5, respectivement). Dans les deux cas, les couches limites présentaient un mode de Tollmien-Schlichting instable et les simulations OWNS ont propagé correctement cette instabilité. Les résultats ont ensuite été comparés à trois types d’approches possibles : une approche de type LST, une méthode PSE ainsi qu’à l’approche One-Way Towne & Colonius. Sur ces premiers exemples réalisés en régime subsonique, l’extension de la méthode aux couches limites se comporte de la bonne manière, ce qui nous permet de la valider en comparaison à d’autres types de résultats numériques.

Une seconde application a ensuite été réalisée, et concernait cette fois une couche limite supersonique à Mach 4.5. Pour cet exemple, nous avons la présence du mode S et du mode F1 toujours stable qui se synchronisent à partir d’une certaine valeur  $x$  avant de devenir

le second mode de Mack, qui est le mode dominant à  $M = 4.5$  dans le cas d'une couche limite 2D. Le mode S a d'abord été initialisé en entrée de la marche en  $x$  de la résolution des équations One-Way. Les simulations ont été réalisées pour deux types de conditions à la paroi pour les perturbations de température. Il a ainsi été montré que le maximum d'amplitude des perturbations de pression dans le cas adiabatique était supérieur à celui obtenu dans le cas isotherme, ce qui indique que le second mode de Mack est un peu plus instable en imposant une condition adiabatique. Ensuite, le mode F1 a été imposé en entrée des simulations One-Way. Pour cet exemple, nous avons observé des motifs d'ondes plus complexes qu'en imposant le mode S, avec plusieurs pics dans les perturbations de pression. Si la LST prévoit que le mode F1 est toujours stable, les simulations One-Way ont été capables de prendre en compte la croissance du mode, également captée par les simulations DNS de [Ma et Zhong, 2003]. Comme pour le mode S, nous avons également pu noter la synchronisation entre différents modes présents dans l'écoulement avant l'obtention du second mode de Mack, instable. À nouveau, les amplitudes observées dans les cas isotherme et adiabatique montrent certaines différences, avec notamment l'instabilité du second mode de Mack plus visible dans le cas adiabatique. Enfin, même si nous pouvons observer des différences entre les résultats OWNS et DNS, il est possible de noter que les approches OWNS permettent de restituer correctement les phénomènes parfois complexes de couplages de modes pouvant mener à une instabilité de couche limite.

La capacité des approches OWNS en termes de temps et de coûts de calcul a aussi été étudiée, en comparaison avec les autres approches One-Way proposées dans le cas de la couche limite supersonique. Ces premiers résultats nous permettent de nous situer parmi les autres approches OWNS, bien qu'il serait également intéressant de se comparer à des méthodes directes ou des méthodes PSE, par exemple, afin de valider pleinement l'efficacité des approches OWNS.

Finalement, pour l'ensemble des résultats, nous avons considéré une approche One-Way True Amplitude. Les séries de Bremmer ont été testées, mais n'ont pas montré d'utilité pour les applications considérées dans ce chapitre. Si l'intérêt d'une telle approche a été montré dans [Rudel, 2022] sur plusieurs exemples, les effets sur l'exemple des couches limites ne sont pas forcément visibles. En outre, la question de l'approche True Amplitude par rapport à celle dite "standard" peut être posée. En effet, lors de la construction de la factorisation numérique, des matrices pré-conditionnées ont été considérées ( $\tilde{\mathbf{Z}}^l$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}^r$  et  $\tilde{\mathbf{U}}$ ). Ce choix de normalisation [Stolk, 2004, Rudel, 2022] implique le fait d'obtenir naturellement une approche True Amplitude par construction. Enfin, la technique d'échantillonnage (*sampling*) n'a pas été mise en place, faute de résultats satisfaisants. La majorité des exemples traités ici nécessitent en effet un grand nombre de points de discrétisation en  $x$ , afin de représenter de manière correcte les phénomènes de propagation d'instabilités.

## Chapitre 5

# Calcul des perturbations optimales d'un écoulement

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Définition du problème de perturbations optimales basé sur un solveur One-Way</b>	<b>108</b>
5.1.1	Détermination d'une condition d'entrée optimale	108
5.1.2	Détermination d'un forçage optimal	111
5.1.3	Choix d'une norme	112
<b>5.2</b>	<b>Calcul des perturbations optimales à partir de la résolution d'équations adjointes</b>	<b>113</b>
5.2.1	Détermination d'une condition d'entrée optimale	113
5.2.2	Détermination d'un forçage optimal	118
<b>5.3</b>	<b>Validations numériques</b>	<b>122</b>
5.3.1	Cas de la couche limite subsonique	122
5.3.2	Cas de la couche limite supersonique	127
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>132</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons proposer deux méthodes basées sur les équations OWNS et l'utilisation d'une marche en  $x$  afin de calculer les perturbations optimales d'un écoulement (cf. sous-section 1.2.4). La première méthode sera une méthode de résolvante globale tirant parti des propriétés du schéma GD utilisé pour la marche en  $x$  (cf. Chapitre 2), et la seconde sera basée sur l'écriture d'un problème d'optimisation sous contrainte. Dans la Section 5.1, nous allons présenter deux problèmes de perturbations optimales de type résolvante globale basés sur la résolution d'équations One-Way. Pour ce faire, nous allons partir d'une équation One-Way se propageant vers la droite, et nous allons en déduire l'opérateur ainsi que l'expression du gain maximal. Dans la Section 5.2, nous proposerons des algorithmes basés sur un état adjoint pour réaliser le calcul de perturbations optimales via des problèmes d'optimisation sous contrainte. Dans la Section 5.3, nous validerons le calcul des perturbations optimales basées sur un solveur OWNS pour trois exemples distincts. Les deux premiers exemples seront réalisés en entrée/sortie avec une comparaison directe entre nos deux méthodes, et le troisième exemple permettra de tester notre méthode d'optimisation pour la détermination du forçage optimal en comparaison avec des résultats issus de la littérature. Des approches similaires ont été développées récemment dans [Towne *et al.*, 2022] en se basant sur les méthodes One-Way de Towne & Colonius.

## 5.1 Définition du problème de perturbations optimales basé sur un solveur One-Way

Le problème que nous souhaitons résoudre est de trouver les conditions d'entrée  $\mathbf{f}_\psi$  et/ou  $\psi^{in}$  induisant la plus "grande" perturbation  $\psi$  (ou  $\tilde{\mathbf{q}}$ ) solution de l'équation One-Way standard droite définie par :

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++}\psi = \mathbf{f}_\psi, \\ \psi(x^{in}) = \psi^{in}, \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{f}_\psi$  est un terme source volumique. Pour alléger les notations et parce que nous ne résolvons que des équations One-Way vers la droite, l'indice + a été enlevé du terme  $\psi$ .

*Remarque 33.* Il est également possible de considérer une équation TAOW ou des séries de Bremmer à la place de l'équation OW standard. L'équation standard est considérée pour simplifier la présentation, et une approche TA a d'ailleurs été appliquée lors de tous les exemples numériques de ce chapitre.

### 5.1.1 Détermination d'une condition d'entrée optimale

Notre objectif est de déterminer  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{in}$  la perturbation optimale à l'entrée du domaine (en  $x = x^{in}$ ) induisant le gain maximal  $\sigma_{max}$  à la sortie du domaine (en  $x = x^{out}$ ) et définie par :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\tilde{\mathbf{q}}^{in} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}^{out}\|_1^2}{\|\tilde{\mathbf{q}}^{in}\|_0^2}, \quad (5.2)$$

où  $\tilde{\mathbf{q}}^{in}$  désigne la perturbation physique calculée en  $x = x^{in}$  et  $\tilde{\mathbf{q}}^{out}$  désigne la perturbation de sortie associée. La norme  $\|\tilde{\mathbf{q}}\|_i^2$  désigne la norme associée au produit hermitien  $\langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle_i = \tilde{\mathbf{q}}^H \mathbf{M}_i \tilde{\mathbf{q}}$  pour  $i \in \{0, 1\}$ , et  $\mathbf{M}_i$  définit un produit hermitien (par exemple, issue de la discrétisation de la norme  $L^2$  suivant la variable transverse  $y$ ). L'énergie des perturbations est quant à elle donnée par  $E_i(\tilde{\mathbf{q}}) = \|\tilde{\mathbf{q}}\|_i^2$ . Il est alors possible de définir différentes normes pour mesurer l'énergie des perturbations (cf. sous-section 5.1.3).

Nous allons ensuite réécrire le problème en variables One-Way  $\psi$ . Pour ce faire, nous adoptons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}^{in} &\rightarrow \phi^{in} \rightarrow \psi^{in} \\ \tilde{\mathbf{q}}^{out} &\rightarrow \phi^{out} \rightarrow \psi^{out}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

où les flèches horizontales désignent les transformations définies pour la méthode de factorisation décrite dans le Chapitre 2 (voir ci-dessous).

Nous commençons par rappeler que les perturbations One-Way  $\psi^{in}$  et  $\psi^{out}$  sont liées par la résolution de l'équation One-Way (5.1) (pour  $\mathbf{f}_\psi = \mathbf{0}$  ici) à l'aide d'un schéma GD décentré amont basé sur une approximation polynomiale d'ordre  $k$ . Ce schéma induit un système linéaire triangulaire inférieur de la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_{32} & \mathcal{M}_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{M}_{N_+, N_+ - 1} & \mathcal{M}_{N_+, N_+} \end{pmatrix}}_{:= \mathcal{M}_{GD}} \begin{pmatrix} \psi|_{S_1} \\ \psi|_{S_2} \\ \psi|_{S_3} \\ \vdots \\ \psi|_{S_{N_s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi|_{S_1}^{in} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

où  $S_j = [x_j, x_{j+1}]$  pour  $j \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$  désigne les cellules de la discrétisation GD avec  $N_s$  le nombre de segments,

$$\boldsymbol{\psi}_{|S_j} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1^j \\ \boldsymbol{\psi}_2^j \\ \boldsymbol{\psi}_3^j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{k+1}^j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(k+1)N_+} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\psi}_{|S_1}^{in} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}^{in} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(k+1)N_+} \quad (5.5)$$

sont respectivement la restriction au segment  $S_j$  de l'inconnue  $\boldsymbol{\psi}$  et le second membre induit sur la cellule  $S_1$  par la condition d'entrée  $\boldsymbol{\psi}^{in}$  et la discrétisation GD.

*Remarque 34.* La structure particulière du second membre est induite par l'utilisation de points de Gauss-Lobatto pour caractériser la discrétisation locale du schéma GD.

*Remarque 35.* Nous rappelons que  $N_+$  désigne le nombre de modes se propageant vers la droite (cf. Chapitre 2).

Cette structure nous permet d'écrire directement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi}_{|S_1} = \mathcal{M}_{11}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{|S_1}^{in}, \\ \boldsymbol{\psi}_{|S_2} = -\mathcal{M}_{22}^{-1} \mathcal{M}_{21} \boldsymbol{\psi}_{|S_1}, \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{|S_j} = -\mathcal{M}_{jj}^{-1} \mathcal{M}_{j,j-1} \boldsymbol{\psi}_{|S_{j-1}}. \end{cases} \quad (5.6)$$

En remplaçant par l'expression de  $\boldsymbol{\psi}_{|S_1}$  dans les autres équations, on obtient alors :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi}_{|S_1} = \mathcal{M}_{11}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{|S_1}^{in}, \\ \boldsymbol{\psi}_{|S_2} = -\mathcal{M}_{22}^{-1} \mathcal{M}_{21} \mathcal{M}_{11}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{|S_1}^{in}, \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{|S_j} = (-1)^{j+1} \left( \prod_{i=2}^j \mathcal{M}_{ii}^{-1} \mathcal{M}_{i,i-1} \right) \mathcal{M}_{11}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{|S_1}^{in}. \end{cases} \quad (5.7)$$

En particulier, on a pour le dernier segment  $S_{N_s}$  :

$$\boldsymbol{\psi}_{|S_{N_s}} = (-1)^{N_s+1} \left( \prod_{i=2}^{N_s} \mathcal{M}_{ii}^{-1} \mathcal{M}_{i,i-1} \right) \mathcal{M}_{11}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{|S_1}^{in}, \quad (5.8)$$

et  $\boldsymbol{\psi}^{out} = \boldsymbol{\psi}_{k+1}^{N_s} \in \mathbb{C}^{N_+}$ .

On introduit alors  $E_m$  la matrice d'extraction de la  $m^{\text{ème}}$  inconnue pour  $m \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$  de taille  $N_+ \times (k+1)N_+$ . Elle s'écrit :

$$E_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N_+} & \cdots & \mathbf{I}_{N_+} & \cdots & \mathbf{0}_{N_+} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

où  $\mathbf{I}_{N_+}$  est la matrice identité de taille  $N_+ \times N_+$  et  $\mathbf{0}_{N_+}$  une matrice nulle de taille  $N_+ \times N_+$ . On obtient alors :

$$E_m \boldsymbol{\psi}_{|S_j} = \boldsymbol{\psi}_m^j \in \mathbb{C}^{N_+}. \quad (5.10)$$

En particulier, on a :

$$\boldsymbol{\psi}^{out} = \boldsymbol{\psi}_{k+1}^{N_s} = E_{k+1} \boldsymbol{\psi}_{|S_{N_s}}. \quad (5.11)$$

Finalement, en remplaçant, nous pouvons écrire le lien entre  $\boldsymbol{\psi}^{out}$  le vecteur de sortie calculé à l'abscisse  $x = x^{out}$  et  $\boldsymbol{\psi}^{in}$  le vecteur d'entrée calculé à l'abscisse  $x = x^{in}$  :

$$\boldsymbol{\psi}^{out} = (-1)^{N_s+1} E_{k+1} \left( \prod_{i=2}^{N_s} \mathcal{M}_{ii}^{-1} \mathcal{M}_{i,i-1} \right) \mathcal{M}_{11}^{-1} E_1^T \boldsymbol{\psi}_0 := \mathcal{M} \boldsymbol{\psi}^{in}. \quad (5.12)$$

*Remarque 36.*  $E_m^T$  est ici la matrice d'expansion qui joue le rôle "opposé" à celui de  $E_m$ . Elle est de taille  $(k+1)N_+ \times N_+$  et on a ainsi :

$$E_1^T \boldsymbol{\psi}^{in} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N_+} \\ \mathbf{0}_{N_+} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{N_+} \end{pmatrix} \boldsymbol{\psi}^{in} = \boldsymbol{\psi}_{|S_1}^{in}. \quad (5.13)$$

L'expression du gain étant exprimée en variables physiques  $\tilde{\mathbf{q}}$  alors que l'équation One-Way à résoudre l'est en variables  $\boldsymbol{\psi}$ , il est nécessaire de réaliser deux changements de variables successifs. Le premier changement de variable  $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}$  (passage en variables caractéristiques, cf. Chapitre 2) nous donne :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\boldsymbol{\phi}^{in} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{T}_1 \boldsymbol{\phi}^{out}\|_1^2}{\|\mathbf{T}_0 \boldsymbol{\phi}^{in}\|_0^2} = \max_{\boldsymbol{\phi}^{in} \neq \mathbf{0}} \frac{(\mathbf{T}_1 \boldsymbol{\phi}^{out})^H \mathbf{M}_1 \mathbf{T}_1 \boldsymbol{\phi}^{out}}{(\mathbf{T}_0 \boldsymbol{\phi}^{in})^H \mathbf{M}_0 \mathbf{T}_0 \boldsymbol{\phi}^{in}} = \max_{\boldsymbol{\phi}^{in} \neq \mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{\phi}^{out,H} \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\phi}^{out}}{\boldsymbol{\phi}^{in,H} \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\phi}^{in}}. \quad (5.14)$$

où  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{T}_i^H \mathbf{M}_i \mathbf{T}_i$  pour  $i \in \{0, 1\}$  avec  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}(x^{in})$  et  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}(x^{out})$ .

De même, le second changement de variable  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{U} \boldsymbol{\phi}$  (passage en variables One-Way, cf. Chapitre 2) donne une nouvelle expression du gain maximal égale à :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\boldsymbol{\psi}^{in} \neq \mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{\psi}^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out}}{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}, \quad (5.15)$$

où  $\tilde{\mathbf{Q}}_i = \tilde{\mathbf{V}}_i^H \mathbf{Q}_i \tilde{\mathbf{V}}_i$  pour  $i \in \{0, 1\}$ .

En utilisant l'équation (5.12), il est alors possible de réécrire l'expression du gain maximal :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\boldsymbol{\psi}^{in} \neq \mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \mathcal{M}^H \tilde{\mathbf{Q}}_1 \mathcal{M} \boldsymbol{\psi}^{in}}{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}, \quad (5.16)$$

et l'expression de la perturbation optimale :

$$\boldsymbol{\psi}_{opt}^{in} = \arg \max_{\boldsymbol{\psi}^{in} \neq \mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \mathcal{M}^H \tilde{\mathbf{Q}}_1 \mathcal{M} \boldsymbol{\psi}^{in}}{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}, \quad (5.17)$$

où les énergies des perturbations peuvent respectivement s'écrire :  $E_0 = \boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}$  et  $E_1 = \boldsymbol{\psi}^{H,out} \mathcal{M}^H \tilde{\mathbf{Q}}_1 \mathcal{M} \boldsymbol{\psi}^{out}$ .

En utilisant le caractère hermitien de  $\tilde{\mathbf{Q}}_0$ , on peut poser  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_0 = \tilde{\mathbf{Q}}_0^{1/2} \boldsymbol{\psi}^{in}$  et  $\mathcal{R} = \tilde{\mathbf{Q}}_1^{1/2} \mathcal{M} \tilde{\mathbf{Q}}_1^{-1/2}$  une forme pondérée de l'opérateur  $\mathcal{M}$ , et on obtient alors la nouvelle version du gain maximal :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\hat{\boldsymbol{\psi}}^{in} \neq \mathbf{0}} \frac{\hat{\boldsymbol{\psi}}^{in,H} \mathcal{R}^H \mathcal{R} \hat{\boldsymbol{\psi}}^{in}}{\hat{\boldsymbol{\psi}}^{in,H} \hat{\boldsymbol{\psi}}^{in}}, \quad (5.18)$$

qui représente le quotient de Rayleigh de l'opérateur auto-adjoint  $\mathcal{R}^H \mathcal{R}$ .

Le gain maximum  $\sigma_{max}^2$  correspond alors à la plus grande valeur propre  $\lambda_{max}$  du problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\mathcal{R}^H \mathcal{R} \hat{\boldsymbol{\psi}}^{in} = \lambda \hat{\boldsymbol{\psi}}^{in}, \quad (5.19)$$

et la perturbation optimale recherchée  $\boldsymbol{\psi}_{opt}^{in}$  est le vecteur propre correspondant. La décomposition en valeurs singulières (SVD) de  $\mathcal{R}$  correspond à la décomposition en valeurs propres de  $\mathcal{R}^H \mathcal{R}$ . Le gain maximal est donc équivalent au carré de la plus grande valeur singulière de  $\mathcal{R}$ , et la perturbation optimale correspond alors au vecteur singulier gauche.

*Remarque 37.* Dans notre cas, la résolution du problème aux valeurs propres généralisé est réalisée par appel au package LAPACK ZGGEVX directement dans le code Fortran. Des approches de type Krylov comme par exemple ARPACK peuvent également être utilisées.

### 5.1.2 Détermination d'un forçage optimal

Dans ce cas, le gain maximal est désormais défini comme le rapport maximum entre l'énergie des perturbations et celle du forçage :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\mathbf{f} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}\|_E^2}{\|\mathbf{f}\|_F^2}, \quad (5.20)$$

où  $\|\tilde{\mathbf{q}}\|_*^2$  désigne la norme associée au produit scalaire  $\langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle_* = \int_{x_0}^{x_1} \tilde{\mathbf{q}}^H(x) M_*(x) \tilde{\mathbf{q}}(x) dx$  et  $M_*$  est une matrice diagonale ou symétrique définie positive, avec  $* = \{E, F\}$ . Dans le cadre du problème totalement discrétisé et en utilisant la discrétisation GD en  $x$ , ce produit hermitien peut être remplacé par sa version discrète :  $\langle \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \rangle_E = \tilde{\mathbf{q}}^H \mathbf{M}_E \tilde{\mathbf{q}}$ , où  $\tilde{\mathbf{q}}$  est la concaténation de l'ensemble des degrés de liberté du calcul et  $\mathbf{M}_E \in \mathbb{R}^{(4N_y N_x) \times (4N_y N_x)}$ . De même, nous avons pour le forçage :  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle_F = \mathbf{f}^H \mathbf{M}_F \mathbf{f}$ .

En réalisant les deux changements successifs introduits précédemment (c'est-à-dire passage à la variable caractéristique  $\tilde{\mathbf{q}} \rightarrow \boldsymbol{\psi}$  et  $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}_\phi$  puis à la variable One-Way  $\boldsymbol{\psi} \rightarrow \boldsymbol{\psi}$  et  $\mathbf{f}_\phi \rightarrow \mathbf{f}_\psi$ ), il est possible de réécrire le gain maximal :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\mathbf{f}_\psi \neq \mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \boldsymbol{\psi}}{\mathbf{f}_\psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_\psi}, \quad (5.21)$$

où  $\tilde{\mathbf{Q}}_E = (\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}})^H \mathbf{M}_E \mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}_F = (\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}})^H \mathbf{M}_F \mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}}$ .

De plus, la résolution GD de l'équation One-Way induit naturellement le lien matriciel entre les variables  $\boldsymbol{\psi}$  et  $\mathbf{f}_\psi$  suivant :

$$\boldsymbol{\psi} = \mathcal{M}_{GD}^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_E \mathbf{f}_\psi =: \mathcal{M}_F \mathbf{f}_\psi, \quad (5.22)$$

où  $\mathcal{M}_{GD}$  a été définie dans l'équation (5.4),  $\tilde{\mathbf{M}}_E$  est la matrice de masse associée au produit hermitien  $L^2$  pour des inconnues de taille  $N_+$ , et  $\mathcal{M}_F$  est une matrice de taille  $(N_+(k+1)N_s) \times (N_+(k+1)N_s)$ . On remplace ensuite dans le gain maximal et on obtient :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\mathbf{f}_\psi \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}_\psi^H \mathcal{M}_F^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \mathcal{M}_F \mathbf{f}_\psi}{\mathbf{f}_\psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_\psi}. \quad (5.23)$$

De la même manière que pour la détermination de l'entrée optimale, il est possible de poser  $\hat{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{Q}}_F^{-1/2} \mathbf{f}_\psi$  et  $\mathcal{R} = \tilde{\mathbf{Q}}_E^{1/2} \mathcal{M}_F \tilde{\mathbf{Q}}_E^{-1/2}$ . On a alors :

$$\sigma_{max}^2 = \max_{\hat{\mathbf{h}} \neq \mathbf{0}} \frac{\hat{\mathbf{h}}^H \mathcal{R}^H \mathcal{R} \hat{\mathbf{h}}}{\hat{\mathbf{h}}^H \hat{\mathbf{h}}}. \quad (5.24)$$

Le gain maximum  $\sigma_{max}^2$  correspond alors à la plus grande valeur propre  $\lambda_{max}$  du problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\mathcal{R}^H \mathcal{R} \hat{\mathbf{h}} = \lambda \hat{\mathbf{h}}, \quad (5.25)$$

et le forçage optimal recherché est le vecteur propre correspondant noté  $\hat{\mathbf{h}}_{max}$ . On en déduit alors la source optimale (en variables One-Way)  $\mathbf{f}_{\psi, max}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{f}_{\psi, max} = \tilde{\mathbf{Q}}_F^{-1/2} \hat{\mathbf{h}}_{max}. \quad (5.26)$$

*Remarque 38.* Il est possible de résoudre le problème aux valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{R}^H \mathcal{R}$  ou la SVD de  $\mathcal{R}$  en utilisant une routine LAPACK. Cependant, la construction de la matrice  $\mathcal{M}_F$  peut s'avérer coûteuse (elle dépend désormais du nombre de points de discrétisation en  $x$ ). En conséquence, nous n'avons pas mis en place dans le code la détermination du forçage optimal par cette méthode globale.

### 5.1.3 Choix d'une norme

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, il est possible de considérer différentes normes selon le cas traité (régime subsonique ou supersonique, par exemple). Pour différencier le cas de l'entrée optimale du cas du forçage optimal, nous considérons les définitions suivantes :  $\Omega = [x^{in}, x^{out}] \times [0, L_y]$  (domaine entier),  $\Gamma^{in} = \{x^{in}\} \times [0, L_y]$  (interface d'entrée) et  $\Gamma^{out} = \{x^{out}\} \times [0, L_y]$  (interface de sortie). De plus, on rappelle que  $\tilde{\mathbf{q}} = [\tilde{\nu}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}]^T$  et  $\mathbf{f} = [f_\nu, f_u, f_v, f_p]^T$ .

#### 5.1.3.1 Cas de l'entrée optimale

Dans le cas du calcul de l'entrée optimale, nous considérons les deux normes  $L^2$  à poids suivantes :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}\|_0^2 &= \int_{\Gamma^{in}} \tilde{\mathbf{q}}^H(x, y) W_0(x, y) \tilde{\mathbf{q}}(x, y) dx dy, \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\|_1^2 &= \int_{\Gamma^{out}} \tilde{\mathbf{q}}^H(x, y) W_1(x, y) \tilde{\mathbf{q}}(x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (5.27)$$

où  $W_0$  et  $W_1$  sont des matrices diagonales ou semi-définies positives de taille  $4 \times 4$ . Les matrices  $\mathbf{M}_0$  et  $\mathbf{M}_1$  introduites précédemment sont donc issues de la discrétisation de  $W_0$  et  $W_1$ , respectivement. Dans le cas des simulations réalisées en Section 5.3, nous avons considéré  $W_0 = W_1 = W_K$  où  $W_K$  est une matrice de poids diagonale associée à l'énergie cinétique des perturbations qui peut s'écrire :

$$W_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

#### 5.1.3.2 Cas du forçage optimal

Dans le cas du calcul du forçage optimal, nous considérons des normes de la forme :

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\|_E^2 = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{q}}^H(x, y) W_E(x, y) \tilde{\mathbf{q}}(x, y) dx dy, \quad (5.29)$$

où  $W_E$  est une matrice diagonale ou semi-définie positive de taille  $4 \times 4$ . La matrice  $\mathbf{M}_E$  est alors issue de la discrétisation de  $W_E$ . En pratique, on peut choisir classiquement  $W_E = W_K$  définie précédemment ou  $W_E = W_{Chu}$ , où  $W_{Chu}$  est une matrice de poids diagonale associée à l'énergie de [Chu, 1965]. Cette dernière norme est généralement utilisée dans le cas d'écoulements compressibles, et contient l'énergie cinétique des perturbations ainsi qu'un terme strictement positif relatif aux perturbations thermodynamiques [Bugeat *et al.*, 2019]. Son expression en termes de variables de perturbation  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  et  $\tilde{T}$  peut s'écrire :

$$W_{Chu} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{T}}{\bar{\rho}\gamma M^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\rho}}{(\gamma-1)\gamma M^2 \bar{T}} \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

En utilisant les relations  $\bar{v} = 1/\bar{\rho}$  et  $\bar{p} = \bar{T}/\gamma M^2 \bar{v}$ , il est alors possible d'obtenir les coefficients de  $W_{Chu}$  pour la variable  $\tilde{\mathbf{q}}$  utilisée dans cette thèse. En effet, nous utilisons les variables  $\tilde{v}$  et  $\tilde{p}$  à la place de  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{T}$  utilisées dans la définition (5.30).

Pour mesurer l'énergie du forçage d'entrée, on considère la norme  $L^2$  classique :

$$\|\mathbf{f}\|_F^2 = \int_{\Omega} \mathbf{f}^H(x, y) \mathbf{f}(x, y) dx dy. \quad (5.31)$$

*Remarque 39.* Comme précisé dans [Bugeat *et al.*, 2019],  $\|\mathbf{f}\|_F^2$  n'est pas homogène à une énergie. Il s'agit plutôt d'une norme mathématique permettant de mesurer l'apport énergétique du forçage. Le gain optimal obtenu n'est donc pas exactement défini comme le rapport de deux énergies et n'a pas de signification physique.

## 5.2 Calcul des perturbations optimales à partir de la résolution d'équations adjointes

Dans cette section, nous allons montrer comment calculer les perturbations optimales pour les couples entrée optimale/réponse optimale et forçage optimal/réponse optimale en utilisant une méthode d'optimisation basée sur les multiplicateurs de Lagrange. Pour ce faire, nous gardons une partie des notations introduites dans la Section 5.1.

### 5.2.1 Détermination d'une condition d'entrée optimale

Pour calculer les perturbations optimales d'entrée comme décrites dans la sous-section 5.1.1, nous commençons par reformuler les problèmes (5.16) et (5.17) sous forme du problème d'optimisation sous contrainte suivant : on souhaite maximiser la fonction coût :

$$\mathcal{J}(\psi^{in}, \psi^{out}) = \frac{\psi^{out, H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \psi^{out}}{\psi^{in, H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \psi^{in}}. \quad (5.32)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \psi = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \\ \psi(x^{in}) = \psi^{in}, \\ \psi(x^{out}) = \psi^{out}. \end{cases} \quad (5.33)$$

Ce problème d'optimisation sous contrainte se réécrit sous la forme d'un problème d'optimisation sans contrainte à l'aide de trois multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_0$  et  $\boldsymbol{\lambda}_1$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\psi}^{in}, \boldsymbol{\lambda}^{in}, \boldsymbol{\psi}^{out}, \boldsymbol{\lambda}^{out}) &= \mathcal{J}(\boldsymbol{\psi}^{in}, \boldsymbol{\psi}^{out}) + \operatorname{Re} \left[ - \int_{\Omega} \langle \boldsymbol{\lambda}, \left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \boldsymbol{\psi} \rangle dx \right] \\ &+ \operatorname{Re} [\langle \boldsymbol{\lambda}^{in}, \boldsymbol{\psi}^{in} - \boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle \\ &- \langle \boldsymbol{\lambda}^{out}, \boldsymbol{\psi}^{out} - \boldsymbol{\psi}(x^{out}) \rangle], \end{aligned} \quad (5.34)$$

*Remarque 40.* Le Lagrangien étant forcément réel et les variables que nous manipulons étant complexes, il est nécessaire de prendre uniquement la partie réelle du produit scalaire considéré.

En réalisant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \boldsymbol{\lambda}, \left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \boldsymbol{\psi} \rangle dx &= \int_{\Omega} \langle \left( -\frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H \right) \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\psi} \rangle dx \\ &+ \langle \boldsymbol{\lambda}(x^{out}), \boldsymbol{\psi}(x^{out}) \rangle - \langle \boldsymbol{\lambda}(x^{in}), \boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle. \end{aligned} \quad (5.35)$$

où  $\tilde{\mathbf{D}}_{++}^H$  est l'adjoint de l'opérateur  $\tilde{\mathbf{D}}_{++}$ .

Le Lagrangien peut alors se réécrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\psi}^{in}, \boldsymbol{\lambda}^{in}, \boldsymbol{\psi}^{out}, \boldsymbol{\lambda}^{out}) &= \mathcal{J}(\boldsymbol{\psi}^{in}, \boldsymbol{\psi}^{out}) + \operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega} \langle \left( \frac{d}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H \right) \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\psi} \rangle dx \right] \\ &+ \operatorname{Re} [-\langle \boldsymbol{\lambda}(x^{out}), \boldsymbol{\psi}(x^{out}) \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}(x^{in}), \boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle] \\ &+ \operatorname{Re} [\langle \boldsymbol{\lambda}^{in}, \boldsymbol{\psi}^{in} - \boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle \\ &- \langle \boldsymbol{\lambda}^{out}, \boldsymbol{\psi}^{out} - \boldsymbol{\psi}(x^{out}) \rangle] \end{aligned} \quad (5.36)$$

### 5.2.1.1 Conditions d'optimalité

La condition d'entrée optimale et les réponses sont obtenues en trouvant les points fixes de la fonction Lagrangienne. Ces points fixes sont généralement caractérisés par des conditions d'optimalité. Pour définir ces conditions, nous pouvons utiliser deux notions de différentiabilité : la différentiabilité au sens de Fréchet et celle au sens de Gateaux dont nous rappelons les définitions ci-dessous.

**Définition 2.** On suppose que le Lagrangien  $\mathcal{L}$  est une fonction sur un sous-ensemble ouvert  $U$  d'un espace de Banach  $X$  dans l'espace de Banach  $Y$ .  $\mathcal{L}$  est dite Fréchet-différentiable en  $u \in U$  s'il existe un opérateur linéaire borné  $d\mathcal{L} : X \rightarrow Y$  tel que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{L}(u + \varepsilon\psi) - \mathcal{L}(u) - d\mathcal{L}|_u(\psi)\|_Y}{\|\varepsilon\|_X} = 0. \quad (5.37)$$

**Définition 3.** On suppose que le Lagrangien  $\mathcal{L}$  est une fonction sur un sous-ensemble ouvert  $U$  d'un espace de Banach  $X$  dans l'espace de Banach  $Y$ . La différentielle de Gateaux  $d\mathcal{L}|_u(\psi)$  de  $\mathcal{L}$  en  $u \in U$  dans la direction  $\psi \in X$  est définie par :

$$d\mathcal{L}|_u(\psi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(u + \varepsilon\psi) - \mathcal{L}(u)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}(u + \varepsilon\psi)|_{\varepsilon=0}. \quad (5.38)$$

Si la limite existe pour tout  $\psi \in X$ , alors  $\mathcal{L}$  est dite Gateaux-différentiable en  $u$ .

La définition de la Fréchet-différentiabilité est plus forte que la Gateaux-différentiabilité, c'est-à-dire qu'une fonctionnelle Fréchet-différentiable est automatiquement Gateaux-différentiable, alors que la réciproque n'est pas forcément vraie. De plus, le cadre Fréchet est plus complexe à utiliser que la notion de dérivée directionnelle contenue dans la définition 3. Nous avons donc choisi de dériver les conditions d'optimalité du problème (5.36) en considérant la différentiabilité au sens de Gateaux, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{L}|_{\lambda}(\delta\lambda) &= 0 \quad \forall \delta\lambda, \\
 d\mathcal{L}|_{\psi}(\delta\psi) &= 0 \quad \forall \delta\psi, \\
 d\mathcal{L}|_{\lambda^{in}}(\delta\lambda^{in}) &= 0 \quad \forall \delta\lambda^{in}, \\
 d\mathcal{L}|_{\psi^{in}}(\delta\psi^{in}) &= 0 \quad \forall \delta\psi^{in}, \\
 d\mathcal{L}|_{\lambda^{out}}(\delta\lambda^{out}) &= 0 \quad \forall \delta\lambda^{out}, \\
 d\mathcal{L}|_{\psi^{out}}(\delta\psi^{out}) &= 0 \quad \forall \delta\psi^{out}.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Les conditions d'optimalité obtenues sont synthétisées dans la proposition suivante :

**Proposition 1.** *Les conditions d'optimalité du problème d'optimisation sans contrainte (5.36) s'écrivent :*

- Condition d'optimalité sur  $\lambda$  :  $\frac{d\psi}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++}\psi = \mathbf{0}$ .
- Condition d'optimalité sur  $\psi$  :  $\frac{d\lambda}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H\lambda = \mathbf{0}$ ,  $\lambda(x^{in}) = \lambda^{in}$ ,  $\lambda(x^{out}) = \lambda^{out}$ .
- Condition d'optimalité sur  $\lambda^{in}$  :  $\psi(x^{in}) = \psi^{in}$ .
- Condition d'optimalité sur  $\psi^{in}$  :  $\frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_0\psi^{in}}{(\psi^{in,H}\tilde{\mathbf{Q}}_0\psi^{in})^2} = \frac{\lambda^{in}}{\psi^{out,H}\tilde{\mathbf{Q}}_1\psi^{out}}$ .
- Condition d'optimalité sur  $\lambda^{out}$  :  $\psi(x^{out}) = \psi^{out}$ .
- Condition d'optimalité sur  $\psi^{out}$  :  $\lambda^{out} = \frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_1\psi^{out}}{\psi^{in,H}\tilde{\mathbf{Q}}_0\psi^{in}}$ .

**Démonstration :** Pour établir les conditions d'optimalité, nous réalisons successivement et explicitement les calculs des dérivées au sens de Gateaux associées aux conditions (5.39). De plus, les conditions d'optimalité sur  $\lambda_0$  et sur  $\lambda_1$  sont obtenues immédiatement, nous démontrons donc uniquement les quatre autres relations.

- Condition d'optimalité sur  $\lambda$  :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{L}|_{\lambda}(\delta\lambda) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\operatorname{Re} \left[ \frac{\int_{\Omega} \langle \lambda + \varepsilon\delta\lambda, \left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \psi \rangle dx - \int_{\Omega} \langle \lambda, \left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \psi \rangle dx}{\varepsilon} \right] \\
 &= -\operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega} \langle \delta\lambda, \left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \psi \rangle dx \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Cette condition étant vraie pour tout  $\delta\lambda$ , on obtient alors :

$$\left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \psi = \mathbf{0}. \tag{5.41}$$

– Condition d'optimalité sur  $\boldsymbol{\psi}$  :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_{|\boldsymbol{\psi}}(\delta\boldsymbol{\psi}) &= \operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega} \left\langle \left( \frac{d}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H \right) \boldsymbol{\lambda}, \delta\boldsymbol{\psi} \right\rangle dx \right] \\ &\quad + \operatorname{Re} \left[ -\langle \boldsymbol{\lambda}(x^{out}), \delta\boldsymbol{\psi}(x^{out}) \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}(x^{in}), \delta\boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle \right] \\ &\quad + \operatorname{Re} \left[ -\langle \boldsymbol{\lambda}^{in}, \delta\boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}^{out}, \delta\boldsymbol{\psi}(x^{out}) \rangle \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Cette condition étant vraie pour tout  $\delta\boldsymbol{\psi}$ , on obtient alors :

$$\begin{cases} \left( \frac{d}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H \right) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda}(x^{in}) = \boldsymbol{\lambda}^{in}, \quad \boldsymbol{\lambda}(x^{out}) = \boldsymbol{\lambda}^{out}. \end{cases} \quad (5.43)$$

– Condition d'optimalité sur  $\boldsymbol{\psi}^{in}$  :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_{|\boldsymbol{\psi}^{in}}(\delta\boldsymbol{\psi}^{in}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\boldsymbol{\psi}^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out}}{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in} + \varepsilon(\delta\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}) + \varepsilon(\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \delta\boldsymbol{\psi}^{in}) + \varepsilon^2(\delta\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \delta\boldsymbol{\psi}^{in})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\boldsymbol{\psi}^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out}}{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}} \right] + \operatorname{Re} [\langle \boldsymbol{\lambda}^{in}, \delta\boldsymbol{\psi}^{in} \rangle] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\boldsymbol{\psi}^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out}}{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon \operatorname{Re} \left[ \left\langle \frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}, \delta\boldsymbol{\psi}^{in} \right\rangle \right] + \varepsilon^2(\delta\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \delta\boldsymbol{\psi}^{in})} - 1 \right) \\ &\quad + \operatorname{Re} [\langle \boldsymbol{\lambda}^{in}, \delta\boldsymbol{\psi}^{in} \rangle]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

En réalisant un développement limité en 0 à l'ordre 1 sur le premier terme de la parenthèse, on obtient :

$$\frac{1}{1 + \varepsilon \operatorname{Re} \left[ \left\langle \frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}, \delta\boldsymbol{\psi}^{in} \right\rangle \right]} = 1 - \varepsilon \operatorname{Re} \left[ \left\langle \frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}, \delta\boldsymbol{\psi}^{in} \right\rangle \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.45)$$

En remplaçant, on a finalement :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_{|\boldsymbol{\psi}^{in}}(\delta\boldsymbol{\psi}^{in}) &= \operatorname{Re} \left[ \left\langle \frac{-2(\boldsymbol{\psi}^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out}) \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}{(\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in})^2} + \boldsymbol{\lambda}^{in}, \delta\boldsymbol{\psi}^{in} \right\rangle \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ceci étant vrai pour tout  $\delta\boldsymbol{\psi}^{in}$ , la condition d'optimalité s'écrit :

$$\frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}{(\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in})^2} = \frac{\boldsymbol{\lambda}^{in}}{\boldsymbol{\psi}^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out}} \quad (5.47)$$

– Condition d'optimalité sur  $\psi^{out}$  :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{L}|_{\psi^{out}}(\delta\psi^{out}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{(\psi^{out} + \varepsilon\delta\psi^{out})^H \tilde{\mathbf{Q}}_1 (\psi^{out} + \varepsilon\delta\psi^{out}) - \psi^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \psi^{out}}{\psi^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \psi^{in}} \\
 &\quad - \operatorname{Re} [\langle \lambda^{out}, \delta\psi^{out} \rangle] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon(\delta\psi^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \psi^{out}) + \varepsilon(\psi^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \delta\psi^{out}) + \varepsilon^2(\delta\psi^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \delta\psi^{out})}{\psi^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \psi^{in}} \\
 &\quad - \operatorname{Re} [\langle \lambda^{out}, \delta\psi^{out} \rangle].
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

Or on a l'égalité suivante :

$$\delta\psi^{out,H} (\tilde{\mathbf{Q}}_1 \psi^{out}) + (\tilde{\mathbf{Q}}_1 \psi^{out})^H \delta\psi^{out} = \operatorname{Re} [\langle 2\tilde{\mathbf{Q}}_1 \psi^{out}, \delta\psi^{out} \rangle]. \tag{5.49}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{L}|_{\psi^{out}}(\delta\psi^{out}) &= \operatorname{Re} \left[ \left\langle \frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_1 \psi^{out}}{\psi^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \psi^{in}} - \lambda^{out}, \delta\psi^{out} \right\rangle \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Ceci nous donne alors :

$$\lambda^{out} = \frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_1 \psi^{out}}{\psi^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \psi^{in}}. \tag{5.51}$$

■

### 5.2.1.2 Algorithme itératif pour le calcul de l'entrée optimale et de la réponse associée

À partir des expressions des conditions d'optimalité de la Proposition 1, nous pouvons formuler un algorithme itératif de résolution du problème d'optimisation sous contrainte (5.32) (5.33) similaire à celui proposé dans [Towne *et al.*, 2022] :

**Algorithme 1** Condition d'entrée optimale et réponse optimale
 

---

- 1: Initialiser une condition d'entrée  $\boldsymbol{\psi}^{in}$  telle que  $\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in} = 1$  pour le problème direct.  
Définir un seuil de tolérance  $\varepsilon$ .
- 2: Résoudre l'équation One-Way directe pour  $\boldsymbol{\psi}$  en marchant sur  $x$  :

$$\left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\psi}(x^{in}) = \boldsymbol{\psi}^{in}. \quad (5.52)$$

- 3: Calculer la condition d'entrée  $\boldsymbol{\lambda}^{out}$  pour l'équation adjointe :

$$\boldsymbol{\lambda}^{out} = \frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out}}{\boldsymbol{\psi}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \boldsymbol{\psi}^{in}}. \quad (5.53)$$

- 4: Résoudre l'équation One-Way adjointe pour  $\boldsymbol{\lambda}$  en marchant sur  $-x$  :

$$\left( \frac{d}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H \right) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}(x^{out}) = \boldsymbol{\lambda}^{out}. \quad (5.54)$$

- 5: Calculer la nouvelle condition d'entrée  $\boldsymbol{\psi}^{in}$  pour le problème direct :

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}^{in} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_0^{-1} \boldsymbol{\lambda}(x^{in})}{\boldsymbol{\psi}^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out}} \text{ et } \boldsymbol{\psi}^{in} = \frac{\hat{\boldsymbol{\psi}}^{in}}{\hat{\boldsymbol{\psi}}^{in,H} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \hat{\boldsymbol{\psi}}^{in}}. \quad (5.55)$$

- 6: Calculer la variation relative de la fonction coût  $\mathcal{J}$  :

$$\Delta = \left| \frac{\mathcal{J}_{k+1} - \mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_k} \right| = \left| \frac{(\boldsymbol{\psi}^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out})_{k+1} - (\boldsymbol{\psi}^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out})_k}{(\boldsymbol{\psi}^{out,H} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \boldsymbol{\psi}^{out})_k} \right|, \quad (5.56)$$

où  $k$  est la variable d'itération.

- 7: Répéter les étapes 2 à 6 jusqu'à obtenir  $\Delta < \varepsilon$ .
- 

### 5.2.2 Détermination d'un forçage optimal

Pour calculer le forçage optimal comme décrit dans la sous-section 5.1.2, nous commençons par reformuler le problème (5.23) sous forme du problème d'optimisation sous contrainte suivant : on souhaite maximiser la fonction coût :

$$\mathcal{J}(\mathbf{f}_\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \boldsymbol{\psi} dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_\boldsymbol{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_\boldsymbol{\psi} dx}. \quad (5.57)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{f}_\boldsymbol{\psi} \text{ dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\psi}(x^{in}) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (5.58)$$

Le problème précédent peut alors être réécrit sous la forme d'un problème d'optimisation sans contrainte en utilisant deux multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  et  $\boldsymbol{\lambda}^{in}$  :

$$\mathcal{L}(\mathbf{f}_\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}^{in}) = \mathcal{J}(\mathbf{f}_\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}) + \text{Re} \left[ - \int_{\Omega} \langle \boldsymbol{\lambda}, \left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \boldsymbol{\psi} - \mathbf{f}_\boldsymbol{\psi} \rangle dx - \langle \boldsymbol{\lambda}^{in}, \boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle \right]. \quad (5.59)$$

En réalisant une intégration par parties, le Lagrangien peut alors se réécrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{f}_\psi, \psi, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}^{in}) = & \mathcal{J}(\mathbf{f}_\psi, \psi) + \operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega} \left\langle \left( \frac{d}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H \right) \boldsymbol{\lambda}, \psi \right\rangle dx + \int_{\Omega} \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{f}_\psi \rangle dx \right] \\ & + \operatorname{Re} \left[ -\langle \boldsymbol{\lambda}(x^{out}), \psi(x^{out}) \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}(x^{in}), \psi(x^{in}) \rangle - \langle \boldsymbol{\lambda}^{in}, \psi(x^{in}) \rangle \right], \end{aligned} \quad (5.60)$$

où  $\tilde{\mathbf{D}}_{++}^H$  est l'adjoint de l'opérateur  $\tilde{\mathbf{D}}_{++}$ .

### 5.2.2.1 Conditions d'optimalité

Comme dans le cas de l'entrée optimale, nous déterminons ici des conditions d'optimalité associées au Lagrangien défini en (5.59) ou en (5.60) en utilisant la notion de Gateaux-différentiabilité, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}|_{\boldsymbol{\lambda}}(\delta\boldsymbol{\lambda}) &= 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{\lambda}, \\ d\mathcal{L}|_{\psi}(\delta\psi) &= 0 \quad \forall \delta\psi, \\ d\mathcal{L}|_{\boldsymbol{\lambda}^{in}}(\delta\boldsymbol{\lambda}^{in}) &= 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{\lambda}^{in}, \\ d\mathcal{L}|_{\mathbf{f}_\psi}(\delta\mathbf{f}_\psi) &= 0 \quad \forall \delta\mathbf{f}_\psi. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Les résultats obtenus sont synthétisés dans la proposition suivante :

**Proposition 2.** *Les conditions d'optimalité du problème d'optimisation sans contrainte (5.60) s'écrivent :*

- Condition d'optimalité sur  $\boldsymbol{\lambda}$  :  $\frac{d\psi}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++}\psi = \mathbf{f}_\psi$ .
- Condition d'optimalité sur  $\psi$  :  $\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H\boldsymbol{\lambda} = \frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_E\psi}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_\psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_\psi dx}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}(x^{out}) = \mathbf{0}$ .
- Condition d'optimalité sur  $\boldsymbol{\lambda}^{in}$  :  $\psi(x^{in}) = \mathbf{0}$ .
- Condition d'optimalité sur  $\mathbf{f}_\psi$  :  $\frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_F\mathbf{f}_\psi}{\left(\int_{\Omega} \mathbf{f}_\psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_\psi dx\right)^2} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\int_{\Omega} \psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \psi dx}$ .

**Démonstration :** Pour établir les conditions d'optimalité, nous réalisons successivement et explicitement les calculs des dérivées au sens de Gateaux associées aux conditions (5.61).

La condition d'optimalité sur  $\boldsymbol{\lambda}_0$  étant obtenue immédiatement, nous ne démontrons que les trois autres conditions.

- Condition d'optimalité sur  $\boldsymbol{\lambda}$  :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}|_{\boldsymbol{\lambda}}(\delta\boldsymbol{\lambda}) &= -\operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega} \langle \delta\boldsymbol{\lambda}, \left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \psi - \mathbf{f}_\psi \rangle dx \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Ceci étant vrai pour tout  $\delta\boldsymbol{\lambda}$ , on retrouve l'expression de l'équation One-Way directe :

$$\left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \psi = \mathbf{f}_\psi. \quad (5.63)$$

– Condition d'optimalité sur  $\boldsymbol{\psi}$  :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{L}_{|\boldsymbol{\psi}}(\delta\boldsymbol{\psi}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\psi} + \varepsilon\delta\boldsymbol{\psi})^H \tilde{\mathbf{Q}}_E (\boldsymbol{\psi} + \varepsilon\delta\boldsymbol{\psi}) - \boldsymbol{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \boldsymbol{\psi} dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx} \\
 &+ \operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega} \left\langle \left( \frac{d}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H \right) \boldsymbol{\lambda}, \delta\boldsymbol{\psi} \right\rangle dx \right] \\
 &+ \operatorname{Re} \left[ -\langle \boldsymbol{\lambda}(x^{out}), \delta\boldsymbol{\psi}(x^{out}) \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}(x^{in}), \delta\boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle - \langle \boldsymbol{\lambda}^{in}, \delta\boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Or on a l'égalité suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\psi} + \varepsilon\delta\boldsymbol{\psi})^H \tilde{\mathbf{Q}}_E (\boldsymbol{\psi} + \varepsilon\delta\boldsymbol{\psi}) - \boldsymbol{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \boldsymbol{\psi} dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx} = \operatorname{Re} \left[ \left\langle \frac{\int_{\Omega} 2\tilde{\mathbf{Q}}_E \boldsymbol{\psi} dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx}, \delta\boldsymbol{\psi} \right\rangle \right]. \tag{5.65}$$

En remplaçant, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{L}_{|\boldsymbol{\psi}}(\delta\boldsymbol{\psi}) &= \operatorname{Re} \left[ \left\langle \int_{\Omega} \frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_E \boldsymbol{\psi}}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx} + \left( \frac{d}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H \right) \boldsymbol{\lambda} dx, \delta\boldsymbol{\psi} \right\rangle \right] \\
 &+ \operatorname{Re} \left[ -\langle \boldsymbol{\lambda}(x^{out}), \delta\boldsymbol{\psi}(x^{out}) \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}(x^{in}), \delta\boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle - \langle \boldsymbol{\lambda}^{in}, \delta\boldsymbol{\psi}(x^{in}) \rangle \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

Cette condition étant vraie pour tout  $\delta\boldsymbol{\psi}$ , on obtient alors :

$$\begin{cases} \left( \frac{d}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H \right) \boldsymbol{\lambda} = \frac{-2\tilde{\mathbf{Q}}_E \boldsymbol{\psi}}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx}, \\ \boldsymbol{\lambda}(x^{in}) = \boldsymbol{\lambda}^{in}, \quad \boldsymbol{\lambda}(x^{out}) = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{5.67}$$

– Condition d'optimalité sur  $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}$  :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{L}_{|\mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}}(\delta\mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \boldsymbol{\psi} dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx + \varepsilon \operatorname{Re} \left[ \langle 2\tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}, \delta\mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} \rangle \right] + \varepsilon^2 \delta\mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \delta\mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx} \right. \\
 &\left. - \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \boldsymbol{\psi} dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx} \right] + \operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega} \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} \rangle \delta dx \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \boldsymbol{\psi} dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx} \left( \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\int_{\Omega} \operatorname{Re} \left[ \langle 2\tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}, \delta\mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} \rangle \right] dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx} + \varepsilon^2 \frac{\int_{\Omega} \delta\mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \delta\mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} dx}} - 1 \right) \\
 &+ \operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega} \langle \boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} \rangle dx \right].
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

En réalisant un développement limité en 0 à l'ordre 1 sur le premier terme de la parenthèse, on obtient :

$$\frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\int_{\Omega} \operatorname{Re} \left[ \langle 2\tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\psi}, \delta \mathbf{f}_{\psi} \rangle \right] dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\psi} dx}} = 1 - \varepsilon \frac{\int_{\Omega} \operatorname{Re} \left[ \langle 2\tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\psi}, \delta \mathbf{f}_{\psi} \rangle \right] dx}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\psi} dx} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.69)$$

En remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_{|\mathbf{f}_{\psi}}(\delta \mathbf{f}_{\psi}) &= \frac{-\int_{\Omega} \psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \psi dx}{\left(\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\psi} dx\right)^2} \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left[ \langle 2\tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\psi}, \delta \mathbf{f}_{\psi} \rangle \right] dx + \operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega} \langle \boldsymbol{\lambda}, \delta \mathbf{f}_{\psi} \rangle dx \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \int_{\Omega} \left\langle \frac{-2\tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\psi} \int_{\Omega} \psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \psi dx}{\left(\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\psi} dx\right)^2} + \boldsymbol{\lambda}, \delta \mathbf{f}_{\psi} \right\rangle dx \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Ceci étant vrai pour tout  $\delta \mathbf{f}_{\psi}$ , on a finalement :

$$\frac{2\tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\psi}}{\left(\int_{\Omega} \mathbf{f}_{\psi}^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_{\psi} dx\right)^2} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\int_{\Omega} \psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \psi dx} \quad (5.71)$$

■

*Remarque 41.* On retrouve bien des conditions d'optimalité similaires à celles obtenues dans [Towne *et al.*, 2022], à la différence près qu'ils résolvent leur problème d'optimisation en variables caractéristiques  $\phi$ , alors que nous le résolvons en variables One-Way  $\psi$ .

### 5.2.2.2 Algorithme itératif pour le calcul du forçage optimal et de la réponse associée

À partir des expressions des conditions d'optimalité de la Proposition 2, nous pouvons formuler un algorithme itératif de résolution du problème d'optimisation sous contrainte (5.57) (5.58) similaire à celui proposé dans [Towne *et al.*, 2022] :

**Algorithme 2** Forçage optimal et réponse optimale
 

---

- 1: Initialiser un forçage aléatoire  $\mathbf{f}_\psi$  tel que  $\int_{\Omega} \mathbf{f}_\psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_\psi dx = 1$  pour le problème direct. Définir un seuil de tolérance  $\varepsilon$ .
- 2: Résoudre l'équation One-Way directe avec forçage pour  $\psi$  en marchant sur  $x$  :

$$\left( \frac{d}{dx} - \tilde{\mathbf{D}}_{++} \right) \psi = \mathbf{f}_\psi, \quad \psi(x^{in}) = \mathbf{0}. \quad (5.72)$$

- 3: Calculer le forçage adjoint  $\mathbf{f}_\lambda$  pour l'équation One-Way adjointe :

$$\mathbf{f}_\lambda = \frac{-2\tilde{\mathbf{Q}}_E \psi}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_\psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_\psi dx}. \quad (5.73)$$

- 4: Résoudre l'équation One-Way adjointe pour  $\lambda$  en marchant sur  $-x$  :

$$\left( \frac{d}{dx} + \tilde{\mathbf{D}}_{++}^H \right) \lambda = \mathbf{f}_\lambda \quad \lambda(x^{out}) = \mathbf{0}. \quad (5.74)$$

- 5: Calculer le nouveau forçage direct  $\mathbf{f}_\psi$  :

$$\hat{\mathbf{f}}_\psi = \frac{1}{2} \frac{(\int_{\Omega} \mathbf{f}_\psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_\psi dx)^2}{\int_{\Omega} \psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \psi dx} \tilde{\mathbf{Q}}_F^{-1} \lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_\psi = \frac{\hat{\mathbf{f}}_\psi}{\int_{\Omega} \mathbf{f}_\psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_F \mathbf{f}_\psi dx}. \quad (5.75)$$

- 6: Calculer la variation relative de la fonction coût  $\mathcal{J}$  :

$$\Delta = \left| \frac{\mathcal{J}_{k+1} - \mathcal{J}_k}{\mathcal{J}_k} \right| = \left| \frac{(\int_{\Omega} \psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \psi dx)_{k+1} - (\int_{\Omega} \psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \psi dx)_k}{(\int_{\Omega} \psi^H \tilde{\mathbf{Q}}_E \psi dx)_k} \right|, \quad (5.76)$$

où  $k$  est la variable d'itération.

- 7: Répéter les étapes 2 à 6 jusqu'à obtenir  $\Delta < \varepsilon$ .
- 

## 5.3 Validations numériques

Dans cette section, nous allons traiter plusieurs exemples afin de valider les deux méthodes One-Way permettant d'obtenir la condition d'entrée optimale ou le forçage volumique ainsi que la réponse optimale associée. Pour le cas de l'entrée optimale, nous allons reprendre l'exemple de la couche limite subsonique de la configuration A qui a été traité dans la Section 4.3 du Chapitre 4. Enfin, pour le cas du forçage optimal, nous allons nous intéresser à l'exemple d'un écoulement de couche limite supersonique à Mach 4.5 qui présente une instabilité liée au second mode de Mack (différent de celui traité au Chapitre 4).

### 5.3.1 Cas de la couche limite subsonique

Pour cet exemple, nous reprenons la configuration A de couche limite subsonique à Mach 0.2 présentée dans le Chapitre 4. Les paramètres numériques considérés sont rappelés dans le Tableau 5.1.

$f^*$ (Hz)	$x_{min}^*$ (m)	$x_{max}^*$ (m)	$y_{min}^*$ (m)	$y_{max}^*$ (m)	$N_x$	$N_y$
300	0.745	5.305	0.0	0.195	3001	151

TABLE 5.1 – Domaine de calcul de la couche limite subsonique pour le calcul des perturbations optimales.

Dans cette sous-section, nous comparons directement nos deux méthodes permettant de calculer l'entrée optimale ainsi que la réponse associée : la méthode de résolvante globale ainsi que la méthode d'optimisation sous contrainte basée sur la résolution de l'état adjoint. Tout d'abord, la convergence de l'algorithme itératif présenté à la sous-section 5.2.1.2 est vérifiée dans le Tableau 5.2. Pour chaque itération, nous donnons la valeur de la variation relative  $\Delta$  ainsi que celle du gain  $\sigma^2$ . Pour cet exemple de couche limite subsonique, nous observons une convergence de l'algorithme en seulement 3 itérations. Par comparaison, le gain optimal calculé par la méthode globale est de  $\sigma^2 = 153941.71$  (en tronquant à la deuxième décimale après la virgule), ce qui nous donne deux valeurs identiques du gain optimal pour les deux méthodes.

Itération n°	Variation relative $\Delta$	Gain $\sigma^2$
1	0.9998	233.83
2	657.34	153941.63
3	$5.197 \times 10^{-7}$	153941.71

TABLE 5.2 – Convergence de l'algorithme itératif basé sur le calcul de l'état adjoint pour un nombre d'itérations maximum fixé à 10 et une tolérance égale à  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6}$  pour l'exemple de la couche limite subsonique.

Sur la Figure 5.1, nous représentons les composantes du vecteur d'entrée optimal  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{in}$  qui a été obtenu à partir du vecteur  $\psi_{opt}^{in}$  grâce aux deux changements de variables décrits au début de la sous-section 5.1.1. Sur la Figure 5.4, nous représentons les composantes de la réponse associée  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{out}$  calculée à partir de  $\psi_{opt}^{in}$  et de  $\psi_{opt}^{out}$ . L'entrée optimale observée ici est "brute", c'est-à-dire qu'elle a été obtenue directement après la résolution du problème aux valeurs propres généralisé de la méthode de résolvante globale. Le gain optimal calculé étant le même pour les deux méthodes, il était également possible de considérer l'entrée optimale  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{in}$  obtenue en fin de l'algorithme itératif. Afin d'obtenir des représentations identiques des différentes variables, il est seulement nécessaire de normaliser les vecteurs obtenus par les deux méthodes de la même manière. Sur ces résultats, nous remarquons également que si nous obtenons une réponse associée ayant l'allure d'un mode de TS, l'entrée optimale calculée possède un aspect "parasité" avec des oscillations visibles sur les composantes du vecteur.

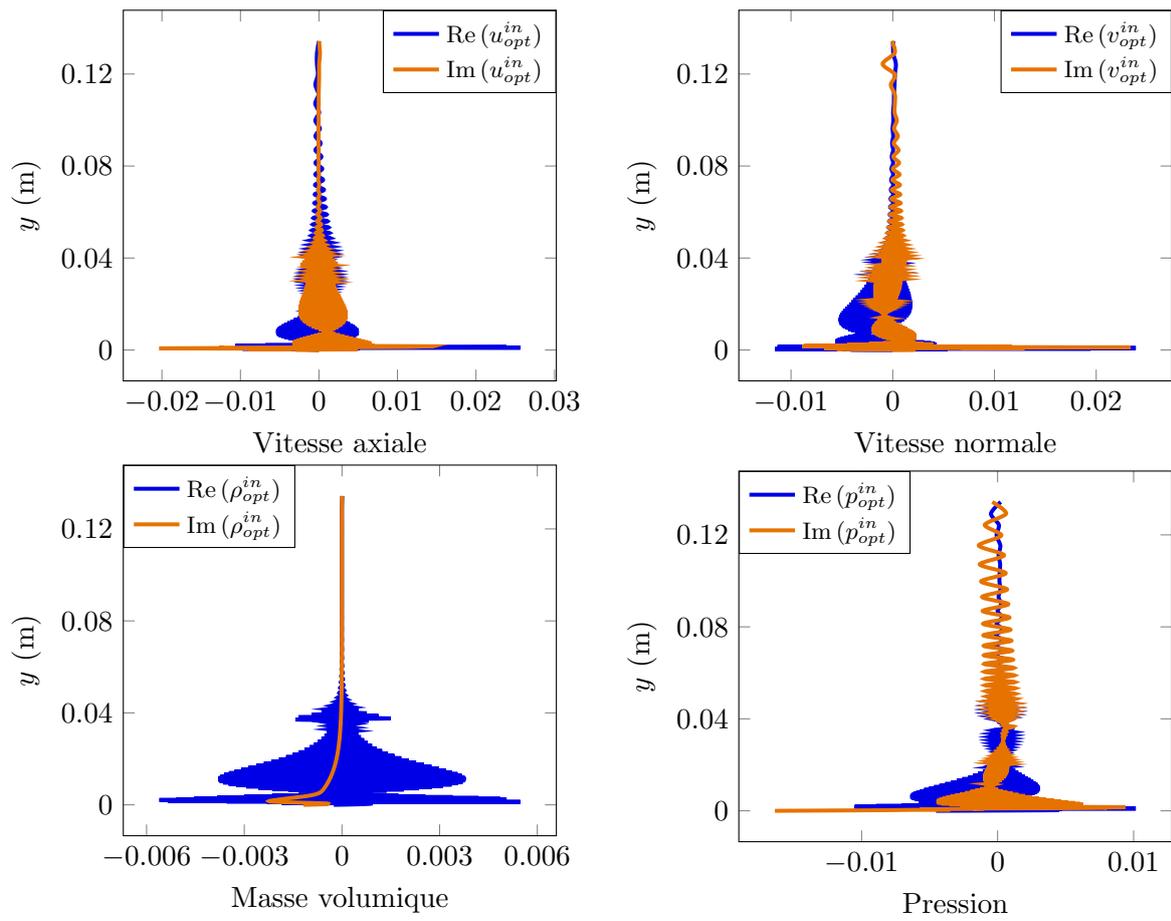


FIGURE 5.1 – Composantes du vecteur d'entrée optimal  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{in}$  obtenu par la méthode de résolvante globale.

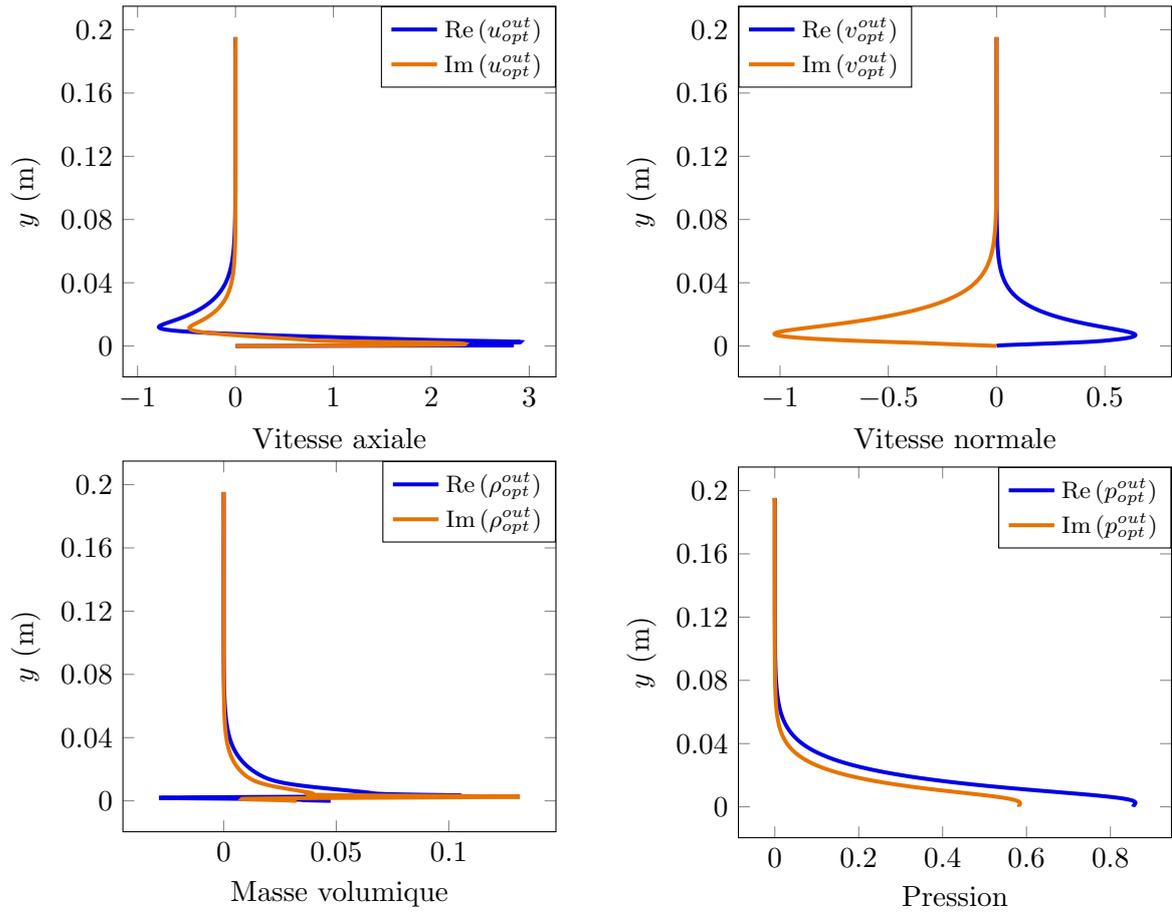


FIGURE 5.2 – Composantes du vecteur de sortie optimal  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{out}$  associé au vecteur d'entrée optimal obtenu par la méthode de résolvante globale.

Dans un second temps, nous avons calculé un vecteur d'entrée optimal projeté sur  $N_{modes}$  issus de l'analyse locale de stabilité, c'est-à-dire issus du spectre de l'opérateur de propagation induit par la factorisation numérique décrite au Chapitre 2. L'objectif ici était de vérifier s'il était possible d'obtenir un vecteur d'entrée  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{in}$  non parasité ainsi qu'un éventuel couplage de modes. Les figures 5.3 et 5.4 représentent respectivement l'entrée optimale projetée ainsi que la réponse associée à cette entrée projetée pour  $N_{modes} = 1$ . Les composantes du vecteur d'entrée optimal sont cette fois-ci non bruitées, tandis que les figures 5.2 et 5.4 représentant  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{out}$  sont identiques. De plus, le mode sélectionné, qui correspond ici au mode dominant induisant le gain maximal, est bien le mode de Tollmien-Schlichting qui avait été identifié dans le Chapitre 4 lors de la simulation OWNS directe. De plus, il est possible de calculer une erreur relative de projection entre le vecteur d'entrée optimal obtenu par la méthode de résolvante globale (ou celui obtenu par l'algorithme itératif) et le vecteur d'entrée projeté sur le mode dominant. De même, il est également possible de calculer un gain réduit  $\sigma_{red}^2$  associé à  $N_{modes}$ . Ces valeurs sont récapitulées dans le Tableau 5.3 pour différentes valeurs de  $N_{modes}$ .

En augmentant  $N_{modes}$ , les modes sélectionnés sont le mode de TS ainsi que des modes évanescents dont l'amplitude diminue de façon exponentielle. Ces derniers peuvent avoir un impact sur l'allure du vecteur d'entrée, mais jamais sur celle du vecteur de sortie. En effet, même s'il peut y avoir un couplage entre différents modes issus du spectre de l'opérateur de propagation, pour cet exemple de couche limite subsonique, nous constatons que seul le mode de TS est dominant. L'ajout de modes évanescents n'a donc pas d'impact sur la réponse obtenue, seulement sur l'erreur relative ainsi que sur le calcul du gain réduit. En effet, on

remarque que les valeurs des gains réduits calculés sont différentes de la valeur calculée par nos deux méthodes  $\sigma^2 = 153941.71$  et  $\sigma_{red}^2 < \sigma^2$ . Ces résultats soulèvent ainsi la question de la signification réelle du gain optimal.

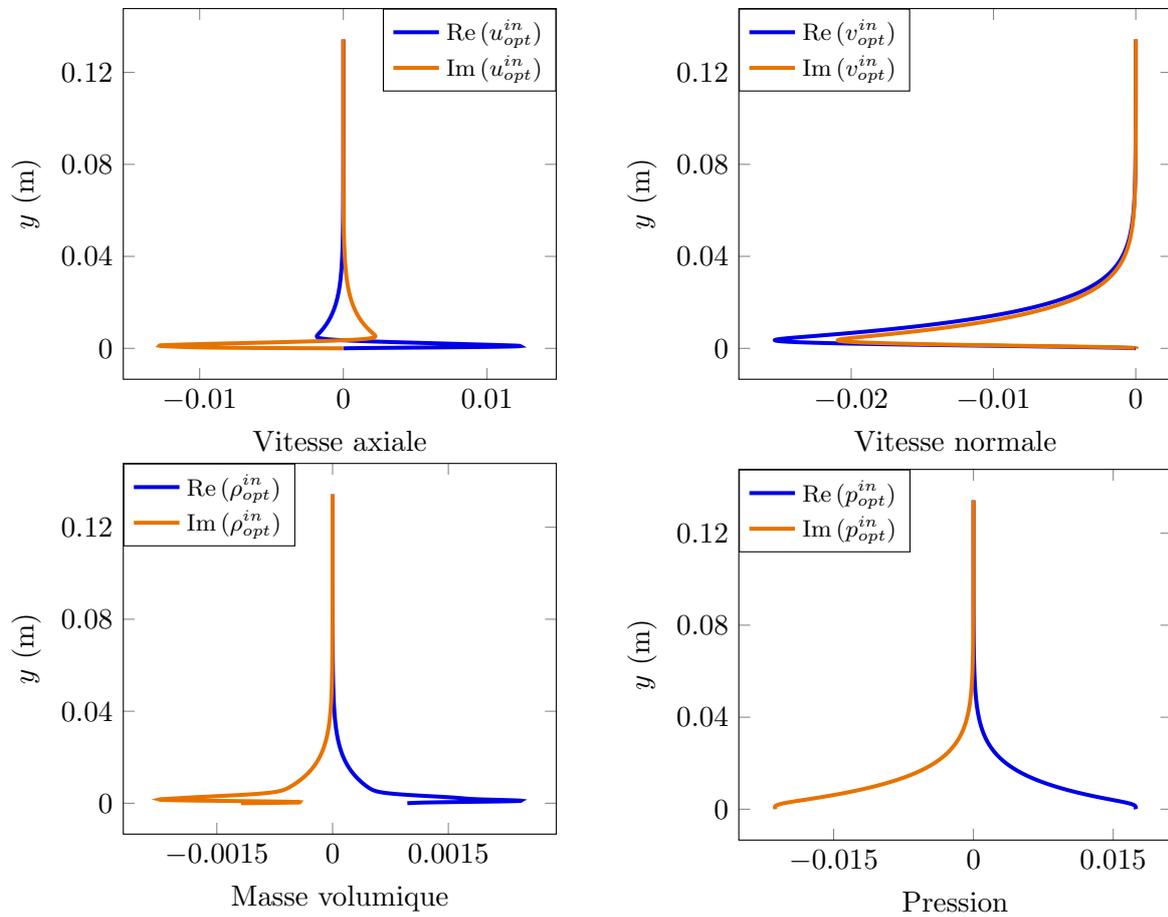


FIGURE 5.3 – Composantes du vecteur d'entrée optimal  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{in}$  projeté sur la base des modes issus de l'analyse locale de stabilité.

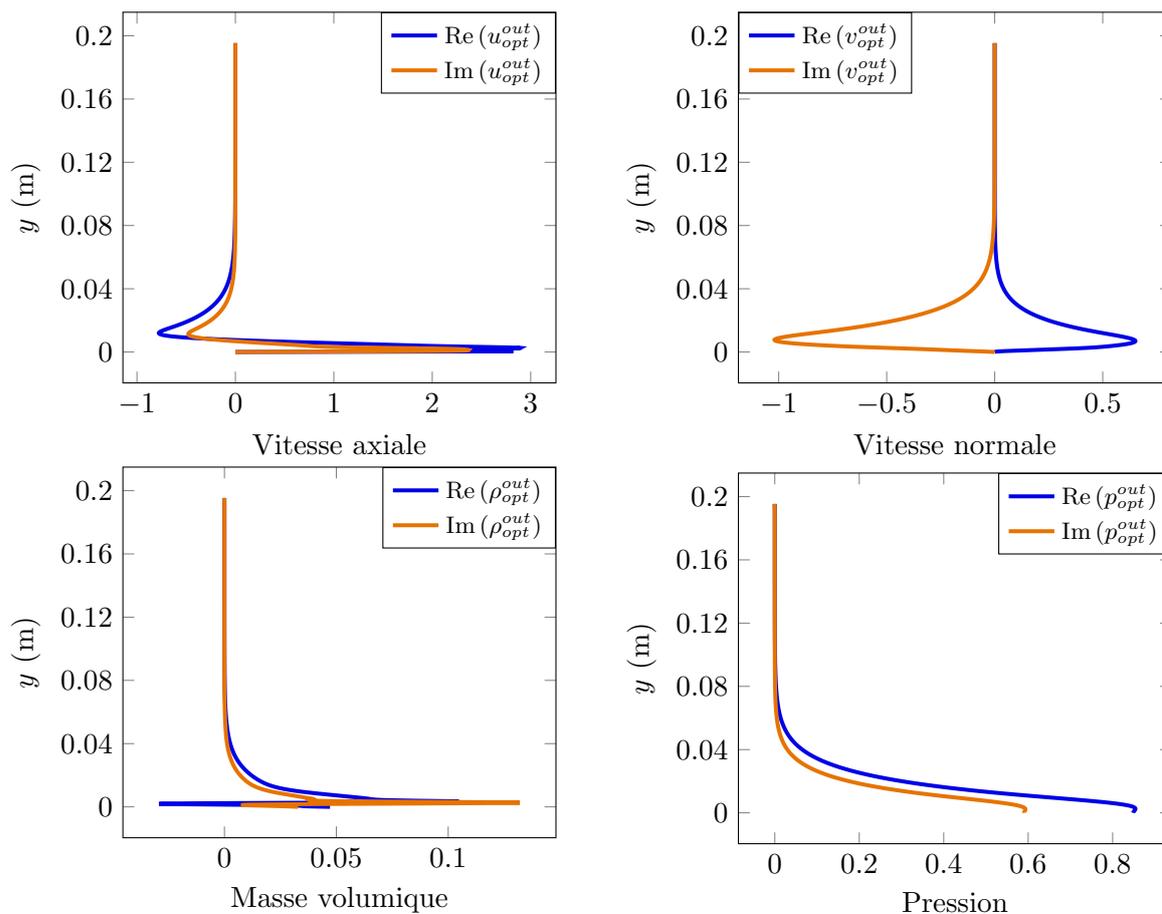


FIGURE 5.4 – Composantes du vecteur de sortie optimal  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{out}$  associé au vecteur d'entrée projeté sur la base des modes issus de l'analyse locale de stabilité.

$N_{modes}$	Erreur relative (%)	Gain réduit $\sigma_{red}^2$
1	0.01	3469.61
2	0.05	3.70
3	0.03	9.00
10	0.006	27.76

TABLE 5.3 – Erreur de projection entre le vecteur d'entrée  $\tilde{\mathbf{q}}_{opt}^{in}$  obtenu par la méthode de résolvante globale et le vecteur d'entrée projeté sur  $N_{modes}$  et gain réduit  $\sigma_{red}^2$  associé à  $N_{modes}$ .

### 5.3.2 Cas de la couche limite supersonique

Dans cette partie, nous allons déterminer le forçage optimal ainsi que la réponse associée pour l'exemple d'une couche limite supersonique à  $M = 4.5$  qui a été présenté tout d'abord par [Bugeat *et al.*, 2019], puis repris par [Towne *et al.*, 2022]. Si les premiers ont proposé une approche de résolvante globale, les seconds ont proposé des résultats à la fois issus d'une méthode globale et de leur approche OWNS-P. Les paramètres physiques tirés de [Bugeat *et al.*, 2019] sont résumés dans le Tableau 5.4 tandis que les paramètres numériques

considérés pour les simulations OWNS sont donnés dans le Tableau 5.5.

### 5.3.2.1 Configuration

Toutes les quantités ont été adimensionnées en utilisant la vitesse à l'infini amont  $u_\infty$  et l'épaisseur de déplacement  $\delta_0^*$  prise à l'abscisse correspondant à la sortie du domaine. Le nombre de Mach est égal à  $M_\infty = u_\infty/a_\infty$ . Le domaine de calcul considéré s'étend de  $Re_\delta = 4000$  (soit  $Re_x = 2.21 \times 10^5$ ) à  $Re_\delta = 11216$  (soit  $Re_x = 1.74 \times 10^6$ ). L'entrée du domaine de calcul, comme pour [Towne *et al.*, 2022], est située à une certaine distance du bord d'attaque de la plaque, afin d'éviter l'apparition d'une singularité dans la distribution de pression (comme évoqué dans le Chapitre 4). De plus, si [Towne *et al.*, 2022] ont considéré une entrée de domaine à  $Re_\delta = 87.1$  (soit  $Re_x = 105$ ), nous avons considéré une valeur plus élevée afin d'éviter des problèmes de stabilité de notre approche One-Way liée au choix des coefficients  $\beta_\pm$  pour de faibles valeurs de  $x$ . De plus, la sortie de notre domaine de calcul est la même que pour [Towne *et al.*, 2022], tandis que [Bugeat *et al.*, 2019] ont considéré une sortie de domaine à  $Re_\delta = 11000$  (soit  $Re_x = 1.75 \times 10^6$ ). Enfin, [Bugeat *et al.*, 2019] ont également inclus le bord d'attaque de la plaque dans leur domaine de calcul, résultant en un faible choc au niveau du bord d'attaque.

Pour cette configuration, les conditions aux limites à la paroi sont des conditions de non-glissement assorties d'une condition isotherme ainsi que la condition de frontière libre pour borner la partie supérieure du domaine de calcul (cf. Chapitre 4).

Les calculs ont été réalisés avec  $N_\beta = 23$  et les coefficients  $\beta_\pm$  correspondants sont donnés en Annexe D.

$M_\infty$	$T_\infty^*$ (K)	$p_\infty^*$ (Pa)	Pr	$Re_\infty^*$ (m <sup>-1</sup> )
4.5	288	101325	0.72	$1.05 \times 10^8$

TABLE 5.4 – Paramètres physiques de la couche supersonique à  $M = 4.5$  issus de [Bugeat *et al.*, 2019].

$f^*$ (Hz)	$x_{min}^*$ (m)	$x_{max}^*$ (m)	$y_{min}^*$ (m)	$y_{max}^*$ (m)	$N_x$	$N_y$
$5.70 \times 10^6$	$2.11 \times 10^{-3}$	$1.66 \times 10^{-2}$	0.0	$5.05 \times 10^{-4}$	2001	251

TABLE 5.5 – Domaine de calcul de la couche limite supersonique pour le calcul des perturbations optimales.

### 5.3.2.2 Écoulement de base

L'écoulement de base a été obtenu avec le code de similitude `similc`. La solution de similitude est représentée sur la Figure 5.5 et le Mach local sur la Figure 5.6.

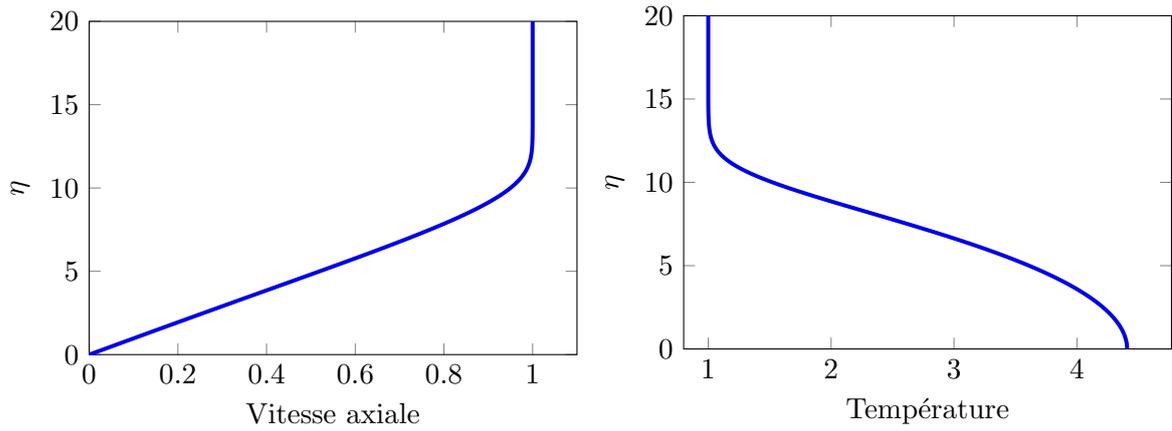


FIGURE 5.5 – Écoulement de base obtenu à partir d’une solution de similitude locale pour la couche limite supersonique à  $M_\infty = 4.5$  : vitesse axiale (à gauche) et température (à droite) en fonction de la variable de similitude  $\eta$ .

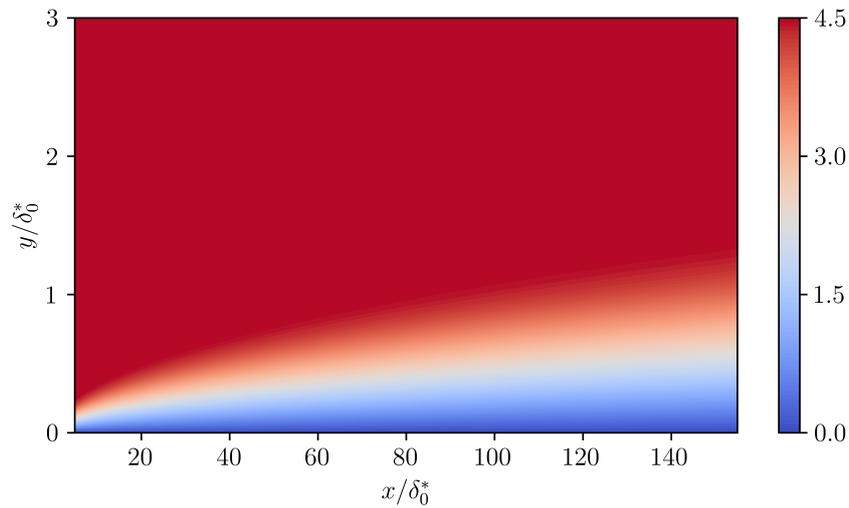


FIGURE 5.6 – Champ du nombre de Mach local de l’écoulement de base à  $M_\infty = 4.5$ .

### 5.3.2.3 Gain optimal

Les résultats de calculs de gain optimal pour des perturbations 2D dans le cas de la couche limite supersonique à Mach 4.5 sont présentés pour une gamme de fréquences sur la Figure 5.7. À haute fréquence, comme c’est le cas ici, le maximum de gain est atteint pour un nombre d’onde transverse nul ( $\beta = 0$ ) et correspond à la croissance du second mode de Mack. Le gain maximum est ainsi obtenu pour une fréquence  $\omega = 2.5$ , qui est également la valeur retrouvée par [Bugeat *et al.*, 2019] et [Towne *et al.*, 2022], bien qu’ils obtiennent des valeurs de gains supérieures aux nôtres.

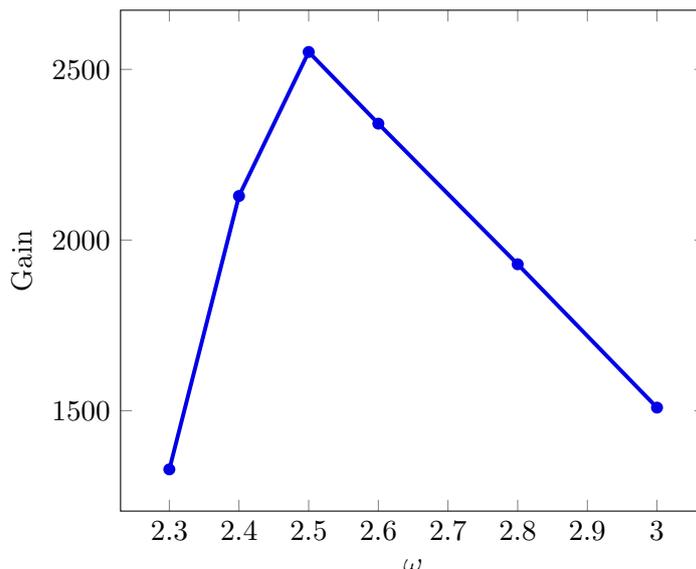


FIGURE 5.7 – Valeurs du gain optimal pour le second mode de Mack en fonction de  $\omega$  à  $\beta = 0$  dans le cas de la couche limite compressible à  $M = 4.5$ .

### 5.3.2.4 Forçage optimal et réponse associée

Le forçage optimal ainsi que la réponse associée obtenus par notre approche OWNS optimale sont représentés en Figure 5.8. Comme énoncé dans le Chapitre 1, il est possible de définir un nombre de Mach relatif  $\hat{M}$  qui dépend de la vitesse de phase  $c_\varphi$  de la réponse optimale. Il est ainsi possible de détecter une région supersonique, dans laquelle  $\hat{M} < -1$  proche de la paroi. Celle-ci se matérialise par des ondes acoustiques piégées entre la ligne sonique et la paroi [Towne *et al.*, 2022]. Ces observations sont en adéquation avec [Mack, 1984] qui prévoit l'existence de modes instables supplémentaires dans cette région. On observe également que le maximum de la réponse optimale associée  $\tilde{u}$  est atteint dans la région supersonique. Quant au forçage optimal, et notamment sa composante axiale  $f_u$ , il n'est pas localisé dans cette région, mais plutôt proche du point d'inflexion généralisé (représenté par une ligne pointillée noire sur la figure). De même, on observe un pic de masse volumique  $\tilde{\rho}$  ainsi que l'annulation de la vitesse axiale  $\tilde{u}$  au niveau du point d'inflexion généralisé, qui sont également visibles sur les résultats obtenus par [Bugeat *et al.*, 2019]. Dans cet exemple, deux mécanismes distincts semblent ainsi coexister. Le premier est lié à la croissance des perturbations hydrodynamiques et thermodynamiques dans la région supersonique, qui dépendent uniquement de l'instabilité du second mode de Mack, tandis que le second montre une amplification des variables thermodynamiques le long du point d'inflexion généralisé [Bugeat *et al.*, 2019], qui seraient plutôt reliées au premier mode de Mack.

Pour des raisons liées à la maturité du code OWNS pour le calcul des perturbations optimales, nous ne sommes pas en mesure de comparer directement nos résultats à ceux obtenus par [Bugeat *et al.*, 2019] et [Towne *et al.*, 2022]. En effet, le domaine de calcul étant réduit, nous obtenons des différences, non pas dans les phénomènes physiques observés, qui sont correctement restitués, mais dans les valeurs obtenues (par exemple dans les extractions du forçage optimal et de la réponse associée, mais aussi dans le champ). Ces différences sont à étudier plus longuement, afin de réaliser des comparaisons directes avec les simulations OWNS-P et celles obtenues par résolvante globale et de mesurer ainsi pleinement la capacité de nos approches OWNS à traiter ce type d'applications.

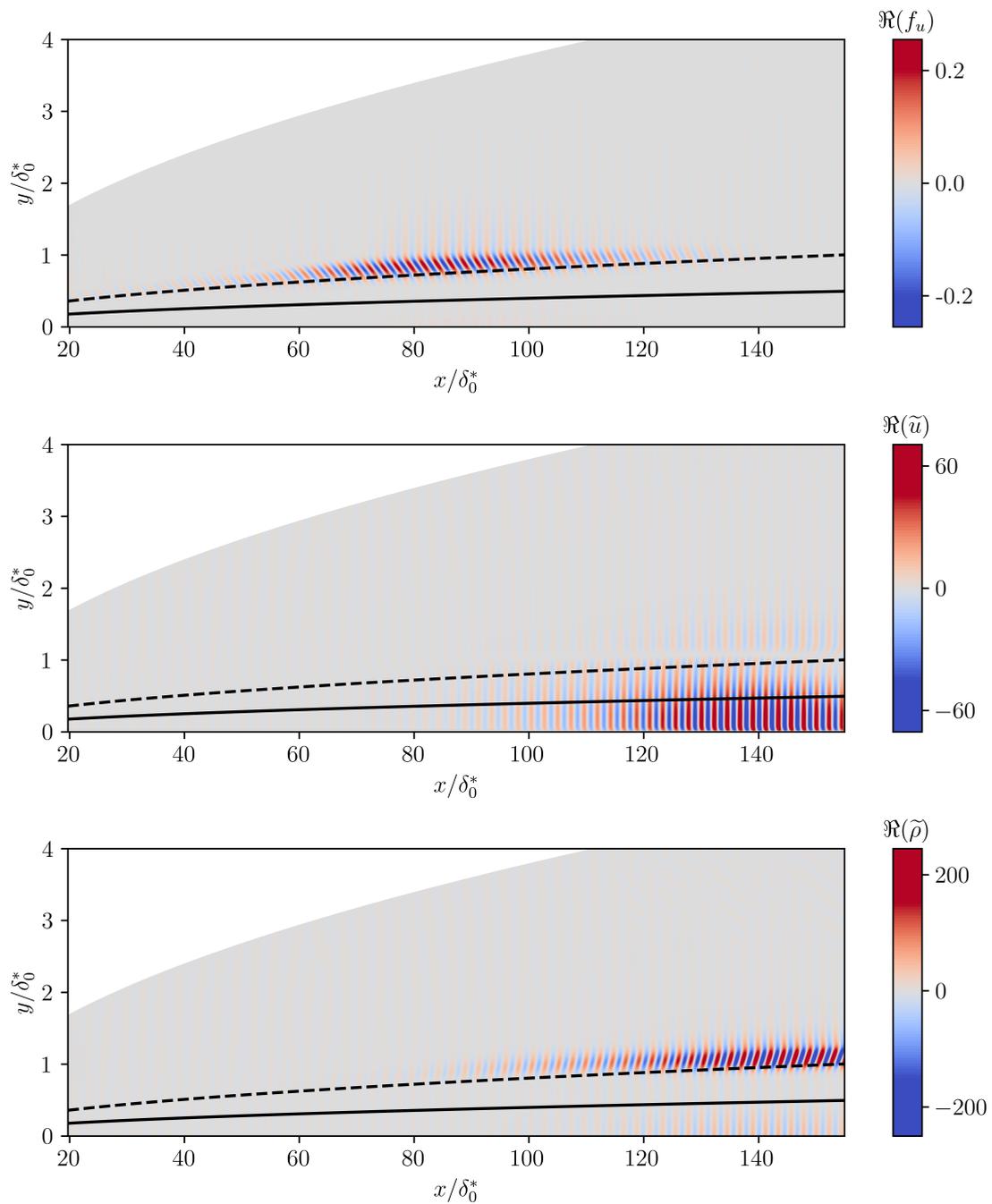


FIGURE 5.8 – Forçage optimal et réponse optimale associée à  $\omega = 2.5$  et  $\beta = 0$  : champs de la partie réelle du forçage optimal  $f_u$ , de la réponse optimale  $\tilde{u}$  et de la réponse optimale  $\tilde{\rho}$  (de haut en bas). La ligne pleine indique la ligne sonique : la région supersonique est située entre cette ligne et la paroi. La ligne pointillée noire indique l'emplacement du point d'inflexion généralisé.

Itération n°	Variation relative $\Delta$	Gain $\sigma^2$
1	0.99	$1.05504 \times 10^{-2}$
2	$5.93 \times 10^8$	$6.230554 \times 10^6$
3	$4.09 \times 10^{-2}$	$6.485489 \times 10^6$
4	$4.39 \times 10^{-4}$	$6.482644 \times 10^6$
5	$1.87 \times 10^{-5}$	$6.482523 \times 10^6$
6	$4.63 \times 10^{-7}$	$6.482520 \times 10^6$
7	$1.54 \times 10^{-7}$	$6.482519 \times 10^6$

TABLE 5.6 – Convergence de l'algorithme itératif basé sur le calcul de l'état adjoint pour un nombre d'itérations maximum fixé à 100 et une tolérance égale à  $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-7}$  pour l'exemple de la couche limite supersonique.

Enfin, la convergence de l'algorithme itératif présenté à la sous-section 5.2.2.2 est vérifiée dans le Tableau 5.6. Pour chaque itération, nous donnons la valeur de la variation relative  $\Delta$  ainsi que celle du gain  $\sigma^2$ . Pour cet exemple de couche limite supersonique, nous observons une convergence de l'algorithme en seulement 7 itérations.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les approches OWNS ont été étendues au calcul des perturbations optimales d'un écoulement pour deux situations : le calcul de l'entrée optimale et le calcul du forçage optimal. Ces approches nous permettent de dériver une première méthode de résolvante globale et une méthode basée sur un problème d'optimisation sous contrainte et la résolution d'équations OWNS adjointes à l'aide d'un algorithme itératif.

Un exemple d'écoulement de couche subsonique à Mach 0.2 (configuration A déjà traitée dans le Chapitre 4) comprenant le mode instable de TS a été traité dans le cas de l'entrée optimale. Pour cet exemple, nous avons pu comparer directement nos deux méthodes (résolvante globale et optimisation sous contrainte basée sur la résolution de l'état adjoint), ce qui a permis une auto-validation de l'extension sur les résultats obtenus. Pour le calcul de l'entrée optimale, les approches OWNS permettent ainsi de restituer correctement les phénomènes d'instabilités tout en ayant un nombre d'itérations restreint pour l'algorithme itératif (3 pour l'exemple considéré).

Pour le cas du forçage optimal, nous avons considéré un exemple de couche limite supersonique à Mach 4.5. Les résultats des simulations OWNS ont ensuite été comparés avec les résultats issus de deux publications différentes : les premiers étant également des résultats OWNS [Towne *et al.*, 2022] tandis que les seconds provenaient d'une méthode de résolvante globale [Bugeat *et al.*, 2019]. Cet exemple nous a posé de nombreuses difficultés, essentiellement liées aux paramètres numériques (dont le choix des coefficients  $\beta_{\pm}$ ) et au maillage. Ces difficultés sont similaires à celles observées dans le Chapitre 4 où nous avons aussi traité le cas d'une couche limite supersonique à  $M = 4.5$ . Pour perfectionner les résultats des simulations OWNS, il serait par exemple possible d'améliorer la condition de champ libre à la frontière supérieure ou encore de considérer un domaine rectangulaire et non plus courbe. Ces améliorations pourraient permettre d'éviter les phénomènes d'ondes parasites qui sont parfois apparues lors de certaines simulations et ainsi prendre en compte le domaine de calcul complet considéré par [Towne *et al.*, 2022].

Globalement, nous voyons une bonne restitution des phénomènes physiques. En effet, en régime subsonique et en entrée/sortie, nous retrouvons bien le mode instable de TS pour l'exemple de la couche limite subsonique. En régime supersonique, et pour le cas considéré, l'instabilité liée au second mode de Mack est bien visible, avec un phénomène d'ondes acoustiques que l'on retrouve le long de la ligne sonique. De plus, le forçage optimal obtenu  $f_u$  est situé à proximité du point d'inflexion généralisé (cf. Chapitre 1), ce qui a également été observé dans les deux publications.

Ces exemples d'applications constituent ainsi les premiers tests de calcul de perturbations optimales réalisés avec une version True Amplitude. Afin de démontrer pleinement l'efficacité de nos deux méthodes, il reste cependant à évaluer les temps de restitution tout en se comparant à d'autres types de méthodes (directes et OWNS déjà existantes). En outre, il reste également à améliorer la mise en place des algorithmes d'entrée optimale et de forçage optimal pour obtenir des résultats encore plus proches de ceux obtenus dans la littérature (c'est-à-dire en termes de phénomènes, mais également de valeurs obtenues). Enfin, il faudrait également voir si la version avec séries de Bremmer des équations One-Way peut être introduite et si elle apporterait alors des informations supplémentaires.



# Conclusion et perspectives

L'objectif principal de cette thèse était de développer et d'étudier des outils de simulation numérique pour l'analyse de certains phénomènes d'instabilités en écoulement. Notre point de départ a été l'utilisation d'approches de type One-Way et plus particulièrement, celles développées dans la thèse de C. Rudel pour les équations d'Euler linéarisées [Rudel, 2022]. Plus précisément, nous avons travaillé selon deux axes : le premier a été de réaliser une extension dans le cadre des équations de Navier-Stokes linéarisées et le second a été de les exploiter pour le calcul des perturbations optimales. Les problèmes traités dans cette thèse sont bidimensionnels et les résultats numériques issus de cas tests de la littérature servent à montrer l'intérêt et le potentiel de ces méthodes. Il est à noter que ces méthodes restent peu exploitées pour l'instant en mécanique des fluides et à notre connaissance, seuls les travaux de A. Towne & T. Colonius (et co-auteurs) existent dans ce domaine. Par conséquent, cette thèse avait aussi pour vocation de proposer une offre plus large à la communauté en termes d'approches One-Way.

Nous synthétisons à présent les contributions de chaque chapitre.

## Contributions

Dans le Chapitre 1, nous avons présenté quelques phénomènes de propagation d'ondes en mécanique des fluides. Ces derniers ont constitué les différentes applications qui ont été étudiées lors de ces travaux de thèse. Ensuite, plusieurs types de méthodes numériques permettant de prendre en compte ces phénomènes ont été passés en revue. En particulier, des approches permettant de séparer les ondes se propageant dans une direction et dans celle opposée ont été introduites. Celles-ci sont nommées les approches One-Way et sont utilisées depuis une cinquantaine d'années dans divers domaines. Historiquement, celles-ci sont des approches analytiques basées sur des opérateurs pseudo-différentiels ainsi que du calcul symbolique [Taylor, 1974], et ne sont donc pas adaptées aux équations d'Euler et de Navier-Stokes. Dans le domaine de la mécanique des fluides, il a fallu attendre les travaux précurseurs de [Towne et Colonius, 2015] qui ont proposé une approche One-Way numérique et générique se basant sur une condition aux limites non-réfléchissante [Hagstrom et Warburton, 2004]. Cependant, cette méthode requiert une hypothèse d'écoulement faiblement variable dans la direction de propagation privilégiée. Finalement, cette contrainte a pu être levée dans le cadre des travaux de [Rudel, 2022] qui a proposé une factorisation purement numérique de l'opérateur de propagation. Cette nouvelle méthodologie permet ainsi de prendre en compte les ondes réfractées et réfléchies, contrairement à l'approche One-Way "standard" qui garantit seulement la restitution de la longueur d'onde et de la fréquence de l'onde incidente. Ces approches ont donc été retenues pour le reste des travaux présentés.

Dans le Chapitre 2, nous avons étendu les approches One-Way basées sur une factorisation purement numérique de l'opérateur de propagation aux équations de Navier-Stokes linéarisées. En effet, celles-ci étaient restreintes aux équations d'Euler et ne pouvaient donc prendre en compte les phénomènes de viscosité. Afin de construire des approches One-Way, il est essentiel de pouvoir trier les modes de l'opérateur de propagation selon leur sens de propagation.

L'idée ici est qu'une diagonalisation stricte de l'opérateur de propagation n'est pas nécessaire pour obtenir un découplage des modes droits et gauches, mais que l'utilisation de la condition aux limites non-réfléchissantes (introduite dans l'approche [Towne et Colonius, 2015]) dans les deux directions permet d'obtenir des informations sur l'opérateur de propagation. Cette factorisation numérique, bien que moins complète qu'une diagonalisation, assure la séparation des espaces invariants gauche et droit de l'opérateur selon le sens de propagation des modes. Il a ensuite été possible d'obtenir plusieurs approches One-Way (standard, True Amplitude ou séries de Bremmer) qui peuvent être choisies en fonction des applications considérées. Ensuite, nous avons donné les détails de la résolution des équations One-Way, en justifiant le choix des schémas de discrétisation. Nous avons également expliqué la gestion des singularités dans notre méthodologie avec l'obtention d'un système réduit qu'on peut ensuite factoriser. En outre, le choix pratique des coefficients  $\beta_{\pm}$  qui apparaissent dans les conditions aux limites non-réfléchissantes a été abordé, avec la présentation d'un algorithme visant à simplifier cette sélection. Enfin, la complexité théorique a été donnée pour les différentes approches One-Way obtenues et nous avons présenté une méthode d'échantillonnage pour réduire le nombre de points en  $x$  pour lesquels la factorisation est réalisée.

Dans le Chapitre 3, nous avons appliqué ces approches pour les équations de Navier-Stokes aux conduits partiellement revêtus de liners acoustiques. Ces derniers comportent ainsi une discontinuité dans les conditions aux limites (rupture d'impédance) que nous avons dû traiter à l'aide d'une méthode de décomposition de domaine. Dans chaque sous-domaine considéré, des équations One-Way droites et gauches ont ainsi été résolues de manière itérative, jusqu'à la convergence. Cette méthode a été ensuite appliquée sur une gamme de fréquences dans une configuration présentant un liner acoustique de type CT57 [Jones *et al.*, 2005] ainsi qu'un écoulement cisailé. Deux profils de vitesse ont ainsi été considérés et nous avons comparé les simulations OWNS et OWE (tirées de [Rudel, 2022]) à des données expérimentales [Jones *et al.*, 2005] mais aussi à des résultats issus d'une méthode de *mode-matching* [Deng *et al.*, 2019]. Les simulations OWNS donnent ainsi des résultats proches des données expérimentales et les performances de la méthode de décomposition de domaine ont pu être vérifiées avec des temps de calcul courts, peu d'itérations et une faible erreur relative de continuité mesurée aux interfaces. De plus, la décomposition des équations One-Way en composantes gauche et droite permet d'obtenir directement la matrice de diffusion et d'analyser les mécanismes d'ondes réfractées et réfléchies dans le liner acoustique. Cette première application a donc essentiellement servi à valider l'extension des approches One-Way aux équations de Navier-Stokes.

Dans le Chapitre 4, les approches OWNS ont été appliquées aux couches limites bidimensionnelles. Dans un premier temps, nous avons dû adapter la méthode en considérant un écoulement de base numérique issu d'un code de similitude, ainsi qu'un maillage non-cartésien afin de garantir un nombre de modes se propageant vers la gauche et la droite constant. La question du choix de conditions aux limites adaptées aux couches limites a également été discutée, à la fois pour la condition de paroi ainsi que la condition de champ libre à la frontière supérieure. Ensuite, deux configurations de couches limites subsoniques ont été traitées en comparaison à des résultats LST et PSE ainsi qu'à des simulations OWNS de [Rigas *et al.*, 2017a]. Pour ces deux exemples, l'extension a pu être validée, avec des résultats montrant une bonne propagation du mode de Tollmien-Schlichting en comparaison à d'autres méthodes numériques. Les approches ont ensuite été appliquées à un cas de couche limite supersonique à Mach 4.5 [Ma et Zhong, 2003] qui présente deux modes, le mode S et le mode F qui peuvent se synchroniser pour former le second mode de Mack, instable. L'effet de la condition de paroi (isotherme ou adiabatique) a notamment été étudié et a montré des différences en termes d'amplitude des perturbations de pression avec un second mode de Mack un peu plus instable dans le cas adiabatique. Des motifs d'ondes plus ou moins complexes, selon que le mode S ou le mode F était imposé en entrée du domaine de calcul, ont également

---

été constatés. Si les phénomènes observés et en particulier le couplage de deux modes sont similaires à ceux montrés dans les résultats DNS de [Ma et Zhong, 2003], il a été constaté des différences en termes de valeurs d’amplitude calculées par les approches OWNS. Finalement, nous avons montré que la méthode permettait de restituer correctement les phénomènes d’instabilités de couches limites et qu’elle était compétitive en termes de coûts de calcul et de mémoire, en comparaison des approches *outflow* (OWNS-O) et *projective* (OWNS-P) [Zhu et Towne, 2023].

Dans le Chapitre 5, les approches OWNS ont été étendues au calcul des perturbations optimales d’un écoulement de couche limite. Une première méthode de résolution globale a ainsi été proposée, en utilisant les propriétés du schéma GD de l’algorithme de marche en  $x$ . Une seconde méthode basée sur un problème d’optimisation sous contrainte et la résolution de l’état adjoint a ensuite été présentée. Pour la détermination de l’entrée optimale et de la réponse associée, l’extension a été appliquée à un cas de couche limite subsonique, qui avait déjà été traité dans le Chapitre 4. Les deux méthodes ont ainsi pu être comparées directement, et l’instabilité de TS a bien été identifiée comme le mode dominant de l’écoulement. La capacité de l’algorithme de résolution de la méthode d’optimisation a également été vérifiée, avec une bonne convergence (très peu d’itérations) et un gain optimal identique à celui obtenu par l’approche globale. Enfin, la robustesse de l’algorithme de calcul du forçage optimal basé sur les approches OWNS développées dans cette thèse a été mise en valeur à travers un cas de couche limite supersonique à Mach 4.5 issu de la littérature [Bugeat *et al.*, 2019, Towne *et al.*, 2022]. En particulier, on a bien retrouvé l’instabilité liée au second mode de Mack.

## Perspectives

Au cours des différentes applications abordées dans ces travaux de thèse, nous avons évoqué plusieurs perspectives possibles. Nous en développons quelques-unes ici et donnons également des pistes de travail possibles. Celles-ci concernent à la fois la modélisation des phénomènes physiques et l’aspect numérique du code.

La première perspective envisageable est une extension aux équations de Navier-Stokes 3D, qui permettrait de prendre en compte des phénomènes supplémentaires observés en mécanique des fluides et d’enrichir nos applications. Par exemple, dans le cas des couches limites, nous pourrions considérer, en plus de l’étude des modes plans (mode de TS ou second mode de Mack, par exemple), l’étude du mode oblique (pour un nombre d’onde transverse  $\beta \neq 0$ ) ainsi que des stries (*streaks*) obtenues pour une pulsation  $\omega \rightarrow 0$ . Il existe deux approches possibles afin de prendre en compte les aspects 3D : une approche purement 3D avec discrétisation dans les directions normale  $y$  et transverse  $z$  ou une approche dite 2.5D. Celle-ci est similaire à une approche utilisant les équations axisymétriques, où l’on considère un nombre d’onde azimutal  $m$ , et qui avait été traitée dans le cas d’un jet dans [Rudel, 2022]. Dans ce cas, le vecteur de perturbations peut être écrit sous la forme suivante :  $\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \sum \tilde{\mathbf{q}}_{\omega, \beta}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)}$  et introduit dans les équations de Navier-Stokes afin d’obtenir un nouveau système d’équations One-Way.

Ensuite, la prise en compte des phénomènes de non-linéarités est envisageable. En plus des instabilités linéaires, il serait en effet possible de considérer les instabilités non-linéaires. [Sleman *et al.*, 2023] ont présenté une version non-linéaire de leurs approches OWNS dans laquelle ils comparent leurs simulations à des résultats PSE non-linéaires (NPSE) et DNS dans le cadre de perturbations 2D et 3D pour les couches limites de Blasius à basse vitesse. Cela permettrait d’élargir le domaine de validité de nos approches et de traiter plus d’applications réalistes.

Nous avons mis en place dans le Chapitre 4 une condition aux limites de frontière libre d'ordre 0 afin de borner le domaine de calcul. Il serait alors intéressant d'améliorer (en montant en ordre par exemple) ou de modifier cette condition afin de gagner en précision et éviter ainsi les réflexions numériques parasites qui apparaissent dans certaines applications et qui viennent alors interagir avec les phénomènes physiques recherchés. Une possibilité est d'imposer des conditions aux limites caractéristiques non visqueuses [Thompson, 1987]. Ces dernières sont notamment utilisées dans [Kamal *et al.*, 2020, Towne *et al.*, 2022], les effets visqueux de la couche limite étant négligeables au niveau de la frontière supérieure.

Une autre perspective serait l'automatisation de l'algorithme de choix des paramètres  $\beta_{\pm}$  décrit dans le Chapitre 2, en proposant une approche autoadaptative contrôlée par un indicateur d'erreur entre le spectre issu de la LST et celui induit par la factorisation numérique. En effet, l'influence de l'ajout de quelques coefficients  $\beta_{\pm}$  dans le plan complexe n'est pas toujours intuitive, selon le cas considéré. Par exemple, au niveau du bord d'attaque de la couche limite (c'est-à-dire pour de petites valeurs de  $x$ ), le spectre peut parfois être très variable et les coefficients  $\beta_{\pm}$  sont par conséquent difficiles à placer. Il serait donc possible de changer les paramètres lors de la marche en  $x$  et de découper le calcul en plusieurs étapes (résolutions d'équations One-Way en chaîne) pour des exemples avec de grandes variations en  $x$  et lorsque la méthode de sampling n'est pas applicable.

Bien que l'extension sur maillage courbe non-cartésien dans le cadre des applications de couche limite donne des résultats satisfaisants, nous avons constaté dans certains cas que l'extension du domaine de calcul en  $y$ , permettant de tenir compte de l'espace non borné du maillage obtenu par le code de similitude `similc`, génère parfois des instabilités numériques. Une perspective à court terme serait donc d'étudier comment étendre correctement le maillage en  $y$  ou alors de réaliser la résolution des équations One-Way sur maillage cartésien en utilisant des approches de projection ou de transformation de coordonnées.

Enfin, une perspective autour des coûts mémoire de la méthode est envisagée. Pour ce faire, différentes pistes peuvent être examinées. Actuellement, l'algorithme de résolution est basé sur un stockage de la factorisation de l'opérateur de propagation  $\mathbf{M}$  pour tous les points de sampling, avec un nombre de samplings pouvant être égal, dans le cas des couches limites, au nombre total de points de discrétisation  $N_x$ . Nous souhaitons alors éviter le pré-calcul global de l'ensemble des factorisations, en assemblant chaque factorisation à la volée durant la marche en  $x$ . Une autre possibilité serait de réduire le stockage des matrices de pseudo-vecteurs propres  $\tilde{\mathbf{U}}$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  en la variable transverse  $y$  en utilisant des structures  $\mathcal{H}$ -matrix hiérarchiques rendues possibles par la nature pseudo-différentielle des opérateurs associés à ces matrices. Cette propriété est facilement mise en évidence dans le cadre de l'équation de Helmholtz pour lequel ces matrices sont induites par la discrétisation d'opérateurs de type racinée carrée construits à partir de l'opérateur de Laplace-Beltrami. Nous pourrions alors envisager de reprogrammer le code (c'est-à-dire les étapes de factorisation et de marche en  $x$ ) à partir d'une algèbre de type  $\mathcal{H}$ -matrix nous permettant d'améliorer à la fois le coût mémoire et le coût calcul.

## Annexe A

# Équations de Navier-Stokes compressibles en variables primitives

Les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles pour un fluide compressible se décomposent en équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \sigma, \\ \rho \frac{DE}{Dt} = \nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot (k\nabla T), \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

où  $\sigma = -pI + \tau = -pI + \mu(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}^T) - \frac{2\mu}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})I$ , avec  $I$  le tenseur identité,  $\sigma$  le tenseur des contraintes et  $\tau$  le tenseur des contraintes visqueuses. Le symbole  $\frac{D}{Dt}$  représente la dérivée particulaire (ou dérivée droite) et se décompose en  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ .

Nous souhaitons ensuite passer le système précédent en variables primitives vitesse-pression. Pour ce faire, l'équation en énergie totale  $E$  va être transformée en équation en énergie interne massique  $e$  puis en entropie massique  $s$ , puis nous obtiendrons l'équation en pression.

### A.1 Équation en énergie interne massique

L'énergie totale  $E$  est liée à l'énergie interne massique  $e$  par la relation :

$$E = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}. \quad (\text{A.2})$$

En remplaçant dans l'équation de conservation de l'énergie, on obtient

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[ e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right] = \nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot (k\nabla T), \quad (\text{A.3})$$

et en multipliant l'équation de quantité de mouvement par  $\mathbf{u}$  :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{A.4})$$

puis finalement en soustrayant (A.4) à (A.3) et en utilisant l'identité suivante :

$$\nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \sigma) \cdot \mathbf{u} = \sigma : \nabla \mathbf{u}, \quad (\text{A.5})$$

il vient :

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (k\nabla T). \quad (\text{A.6})$$

## A.2 Équation en entropie massique

On a la relation suivante :

$$\frac{De}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (\text{A.7})$$

d'où en remplaçant dans l'équation en énergie interne  $e$  :

$$\rho \left[ T \frac{Ds}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right] = \sigma : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (\text{A.8})$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse pour remplacer le terme  $\frac{D\rho}{Dt}$  et en développant le terme  $\sigma : \nabla \mathbf{u}$ , on obtient :

$$\rho \left[ T \frac{Ds}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} (-\rho \nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \tau : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (\text{A.9})$$

Nous obtenons finalement l'équation en entropie massique :

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \tau : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (\text{A.10})$$

## A.3 Équation en pression

La relation reliant l'entropie à la pression  $p$  et à la masse volumique  $\rho$  s'écrit :

$$Ds = c_V \frac{Dp}{p} - \gamma c_V \frac{D\rho}{\rho}, \quad (\text{A.11})$$

que l'on peut réécrire en dérivant et en utilisant la conservation de la masse :

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{c_V}{p} \frac{Dp}{Dt} + \gamma c_V \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (\text{A.12})$$

En remplaçant dans l'équation (A.10), on a :

$$\rho T \left[ \frac{c_V}{p} \frac{Dp}{Dt} + \gamma c_V \nabla \cdot \mathbf{u} \right] = \tau : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (\text{A.13})$$

La loi des gaz parfaits

$$p = \rho r T, \quad (\text{A.14})$$

où  $r = 287.1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  est la constante spécifique de l'air, permet d'écrire :

$$\frac{c_V}{r} \frac{Dp}{Dt} + \frac{p c_V}{r} \gamma \nabla \cdot \mathbf{u} = \tau : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T), \quad (\text{A.15})$$

soit finalement l'équation en pression s'écrit :

$$\frac{Dp}{Dt} + \gamma p (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{r}{c_V} (\tau : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T)). \quad (\text{A.16})$$

## Annexe B

# Matrices des opérateurs de Navier-Stokes linéarisés

Matrices des opérateurs de Navier-Stokes linéarisés, tenant compte des caractéristiques spécifiques de l'écoulement de base pour le cas des liners acoustiques et des couches limites. Seules les matrices  $A$ ,  $\tilde{A}$ ,  $T$  et  $T^{-1}$  restent inchangées. On a alors :

$$A = \begin{pmatrix} \bar{u} & -\bar{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & \bar{\nu} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \gamma\bar{p} & 0 & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

La matrice des valeurs propres  $\tilde{A}$  est donnée par l'expression suivante :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \bar{u} + a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u} - a \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

où  $a = \sqrt{\bar{\nu}\gamma\bar{p}}$  est la vitesse du son.

Les matrices de transformation utilisées pour le premier changement de variable entre les variables primitives et caractéristiques  $q = T\phi$  sont données par :

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\nu}^2}{a^2} & 1 & 0 & -\frac{\bar{\nu}^2}{a^2} \\ \frac{\bar{\nu}}{a} & 0 & 0 & -\frac{\bar{\nu}}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{2\bar{\nu}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\bar{\nu}^2}{a^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2\bar{\nu}} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Les opérateurs semi-discrétisés  $\mathbf{A}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}^{-1}$  sont obtenus en calculant les matrices  $A$ ,  $\tilde{A}$ ,  $T$  et  $T^{-1}$ , respectivement, aux points de discrétisation.

## B.1 Cas des écoulements parallèles

Dans cet exemple, l'écoulement de base est défini par :  $\bar{u}(x, y) = \bar{u}(y)$ ,  $\bar{v} = 0$ ,  $\bar{p} = p_0$  et  $\bar{\nu} = \nu_0$  avec  $p_0$  et  $\nu_0$  des constantes réelles.

$$B_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} \\ 0 & -\frac{2(\gamma-1)\mu}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & \gamma \bar{p} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

$$B_{yy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\nu}}{\text{Re}} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{\nu}}{\text{Re}} \frac{4\mu}{3} & 0 \\ -\frac{\gamma k}{\text{PrRe}} \bar{p} & 0 & 0 & -\frac{\gamma k}{\text{PrRe}} \bar{\nu} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} & 0 & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Cas des couches limites

Dans le cas des couches limites, l'écoulement de base est défini par :  $\bar{q}(x, y) = [\bar{\nu}(x, y), \bar{u}(x, y), \bar{v}(x, y), p_0]^T$  avec  $p_0$  une constante réelle.

$$B_y = \begin{pmatrix} \bar{\nu} & 0 & -\bar{\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu} & \bar{\nu} \\ 0 & -\frac{2(\gamma-1)\mu}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \gamma \bar{p} - \frac{2(\gamma-1)}{\text{Re}} \left( \frac{4\mu}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) & \bar{\nu} - \frac{2\gamma k}{\text{PrRe}} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

$$B_{yy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\nu}}{\text{Re}} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{\nu}}{\text{Re}} \frac{4\mu}{3} & 0 \\ -\frac{\gamma k}{\text{PrRe}} \bar{p} & 0 & 0 & -\frac{\gamma k}{\text{PrRe}} \bar{\nu} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

$$C = \begin{pmatrix} -\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) & \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{4\mu}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \right) & \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{4\mu}{3} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{\gamma k}{\text{PrRe}} \left( \frac{\partial^2 \bar{\nu}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\nu}}{\partial y^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

## Annexe C

# Matrices des résidus

Il est possible d'obtenir les termes résiduels des équations de Navier-Stokes en considérant le système suivant :

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + (A_0 + A) \frac{\partial q'}{\partial x} + B_y \frac{\partial q'}{\partial y} + B_{xx} \frac{\partial^2 q'}{\partial y^2} + B_{xy} \frac{\partial^2 q'}{\partial x \partial y} + B_{yy} \frac{\partial^2 q'}{\partial y^2} + Cq' = 0 \quad (\text{C.1})$$

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2(\gamma-1)}{\text{Re}} \left( \frac{4\mu}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\mu}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) & -\frac{2(\gamma-1)}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & -\frac{2\gamma k}{\text{PrRe}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$B_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\nu}}{\text{Re}} \frac{4\mu}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{\nu}}{\text{Re}} \mu & 0 \\ -\frac{\gamma k}{\text{PrRe}} \bar{\rho} & 0 & 0 & -\frac{\gamma k}{\text{PrRe}} \bar{\nu} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

$$B_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{\nu}}{\text{Re}} \frac{\mu}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{\nu}}{\text{Re}} \frac{\mu}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Après être passé dans le domaine fréquentiel et avoir discrétisé en  $y$ , l'équation (C.1) se réécrit :

$$\mathbf{A}(x) \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dx} = \mathbf{B}(x) \tilde{\mathbf{q}} + (\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_{xy} \mathbf{D}_y) \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dx} + \mathbf{B}_{xx} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{q}}}{dx^2}. \quad (\text{C.5})$$

Par changement de variable  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}}\psi$ , on obtient :

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dx} = \frac{d(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}}\psi)}{dx} = \frac{d(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}})}{dx} \psi + (\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}}) \frac{d\psi}{dx}, \quad (\text{C.6})$$

et

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{q}}}{dx^2} = \frac{d^2(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}}\psi)}{dx^2} = \frac{d^2(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}})}{dx^2} \psi + 2 \frac{d(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}})}{dx} \frac{d\psi}{dx} + (\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}}) \frac{d^2 \psi}{dx^2}. \quad (\text{C.7})$$

En diagonalisant la matrice  $\mathbf{A} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}$ , en remplaçant dans l'équation (C.5) et en multipliant par  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ , il est possible d'identifier les résidus  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_0 &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{T}^{-1} \left[ (\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_{xy}\mathbf{D}_y) \frac{d(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}})}{dx} + \mathbf{B}_{xx} \frac{d^2(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}})}{dx^2} \right], \\ \mathbf{R}_1 &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{T}^{-1} \left[ (\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_{xy}\mathbf{D}_y)\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{B}_{xx} \frac{d(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}})}{dx} \right], \\ \mathbf{R}_2 &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_{xx}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{V}}.\end{aligned}\tag{C.8}$$

## Annexe D

# Choix des coefficients $\beta_{\pm}$ pour les couches limites

Nous donnons dans cette annexe quatre jeux de coefficients  $\beta_{\pm}$  utilisés dans le cadre des couches limites subsoniques et supersoniques étudiées dans les Chapitres 4 et 5. Nous précisons également pour chaque cas traité la valeur de la longueur de référence  $L^*$  servant à adimensionner le système d'équations de Navier-Stokes. En pratique, cette longueur de référence influe sur les valeurs du spectre à approcher et il peut alors être intéressant de tester plusieurs choix (longueur de Blasius  $\ell^*$  ou épaisseur de déplacement  $\delta^*$  par exemple) afin de trouver celle permettant de converger au mieux sur le spectre de référence avec un nombre restreint de coefficients.

## D.1 Cas de la couche subsonique de la configuration A

$\text{Re}(\beta_+)$	$\text{Im}(\beta_+)$	$\text{Re}(\beta_-)$	$\text{Im}(\beta_-)$
0.01	-0.01	0.0	-60
0.04	-0.01	0.0	-20
0.1	-0.01	0.1	-10
0.0	112	-0.02	-0.01
0.0	0.08	0.0	-0.2
0.4	18	0.0	-0.6
0.0	50	0.0	-1.0
0.0	20	0.0	-5.0
0.0	10	0.0	-0.01
0.0	3.0	0.0	-2.0
0.075	-0.01	-1.0	-0.05
0.075	-0.01	-10	-10
10	10	-0.02	-0.1
10	75	-0.02	-0.1
0.04	-0.01	-0.02	-0.01
0.1	0.5	-0.005	-0.05
0.06	-0.01	-0.04	-0.1
0.2	2.0	-5.0	-5.0

TABLE D.1 – Valeurs des coefficients  $\beta_{\pm}$  pour une longueur de référence  $L^* = 1.5 \times 10^{-3}$  m et  $N_{\beta} = 19$ .

## D.2 Cas de la couche subsonique de la configuration B

$\text{Re}(\beta_+)$	$\text{Im}(\beta_+)$	$\text{Re}(\beta_-)$	$\text{Im}(\beta_-)$
0.02	0.0	-0.02	0.0
0.05	0.0	-0.05	0.0
0.05	0.06	-0.05	-0.06
0.0	0.06	0.0	-0.06
0.15	0.0	-0.15	0.0
0.05	0.04	-0.05	-0.04
0.0	0.5	0.0	-0.5
0.0	1.25	0.0	-1.25
0.0	5.0	0.0	-5.0
0.0	2.5	0.0	-2.5
0.0	100	0.0	-75
0.0	800	0.0	-25

TABLE D.2 – Valeurs des coefficients  $\beta_{\pm}$  pour une longueur de référence  $L^* = 5.14 \times 10^{-5}$  m et  $N_{\beta} = 12$ .

## D.3 Cas de la couche supersonique

$\text{Re}(\beta_+)$	$\text{Im}(\beta_+)$	$\text{Re}(\beta_-)$	$\text{Im}(\beta_-)$
-0.059	2.183	-0.6	-1.0
1.296	0.543	-0.6	-2.190
2.651	1.636	-0.6	-2.190
2.651	-0.003	-0.6	-2.736
2.651	0.543	-0.6	-3.283
0.219	-0.060	-0.6	-15.62
0.192	-0.060	-0.6	-48.06
0.257	-0.060	-10.81	-115.8
0.0	408.5	-0.6	-2.403
0.0	841.1	-0.6	-7.209
62.48	62.48	-4.81	-48.06
-64.40	76.66	-0.63	-0.25
-7.209	12.02	-0.63	-0.25
0.0	24.03	-12.02	-240.3
-7.209	4.806	-0.6	-1202
0.5	1.5	-0.6	-80.0
-0.4	0.1	-0.6	-100.0
0.0	200.0	-0.6	-0.5

TABLE D.3 – Valeurs des coefficients  $\beta_{\pm}$  pour une longueur de référence  $L^* = 1.39 \times 10^{-4}$  m et  $N_{\beta} = 18$ .

## D.4 Cas de la couche supersonique pour le calcul des perturbations optimales

$\text{Re}(\beta_+)$	$\text{Im}(\beta_+)$	$\text{Re}(\beta_-)$	$\text{Im}(\beta_-)$
-0.245	9.085	-11.52	-9.113
5.394	2.260	-5.884	-9.114
11.03	6.810	-17.16	-9.114
11.03	-0.014	-11.52	-13.66
11.03	2.260	-5.884	-13.66
300.0	300.0	-5.0	-3.0
20.0	20.0	-20.0	-20.0
50.0	50.0	-50.0	-50.0
100.0	100.0	-100.0	-100.0
500.0	500.0	-500.0	-500.0
-100.0	200.0	-100.0	-200.0
-40.0	25.0	-40.0	-25.0
2.2	-1.0	-150.0	-150.0
-100.0	60.0	60.0	-100.0
-200.0	400.0	200.0	-400.0
-20.0	5.0	20.0	-20.0
-15.0	0.0	15.0	0.0
2.938	-1.0	-150.0	-150.0
2136	5340	-2136	-5341
-30.0	0.0	0.0	-20.0
0.0	1000	0.0	-1000
0.0	2000	0.0	-2000
-60.0	0.0	0.0	-3000

TABLE D.4 – Valeurs des coefficients  $\beta_{\pm}$  pour une longueur de référence  $L^* = 1.068 \times 10^{-4}$  m et  $N_{\beta} = 23$ .



# Références

- [Åbom, 1991] ÅBOM, M. (1991). Measurement of the scattering-matrix of acoustical two-ports. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 5(2):89–104.
- [Airiau, 1994] AIRIAU, C. (1994). *Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite laminaire incompressible par un système d'équations parabolisé (PSE)*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
- [Alinhac et Gérard, 2007] ALINHAC, S. et GÉRARD, P. (2007). *Pseudo-differential Operators and the Nash–Moser Theorem*, volume 82 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society.
- [Andersson *et al.*, 1999] ANDERSSON, P., BERGGREN, M. et HENNINGSON, D. S. (1999). Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers. *Physics of Fluids*, 11(1):134–150.
- [Andersson *et al.*, 1998] ANDERSSON, P., HENNINGSON, D. et HANIFI, A. (1998). On a stabilization procedure for the parabolic stability equations. *Journal of Engineering Mathematics*, 33:311–332.
- [Antoine et Barucq, 2001] ANTOINE, X. et BARUCQ, H. (2001). Microlocal diagonalization of strictly hyperbolic pseudodifferential systems and application to the design of radiation conditions in electromagnetism. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 61(6):1877–1905.
- [Arnal et Casalis, 2000] ARNAL, D. et CASALIS, G. (2000). Laminar-turbulent transition prediction in three-dimensional flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 36(2):173–191.
- [Atkinson, 1960] ATKINSON, F. V. (1960). Wave propagation and the Bremmer series. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1(3-4):255–276.
- [Barucq *et al.*, 2008] BARUCQ, H., DUQUET, B. et PRAT, F. (2008). True amplitude One-Way propagation in heterogeneous media. Rapport technique 6517, INRIA.
- [Bertolotti *et al.*, 1992] BERTOLOTTI, F. P., HERBERT, T. et SPALART, P. (1992). Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 242:441–474.
- [Biau, 2006] BIAU, D. (2006). *Étude des structures longitudinales dans la couche limite laminaire et de leur lien avec la transition*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
- [Boyer *et al.*, 2011] BOYER, G., PIOT, E. et BRAZIER, J.-P. (2011). Theoretical investigation of hydrodynamic surface mode in a lined duct with sheared flow and comparison with experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 330:1793–1809.
- [Brazier, 2022] BRAZIER, J.-P. (2022). Études autour des critères de transition longitudinaux pour les couches limites hypersoniques. Rapport technique 1/31841 DMPE, ONERA.
- [Bremmer, 1951] BREMMER, H. (1951). The W.K.B. approximation as the first term of a geometric-optical series. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 4:105–115.
- [Briggs, 1964] BRIGGS, R. (1964). *Electron-stream interaction with plasmas*. MIT Press.

- [Bugeat *et al.*, 2019] BUGEAT, B., CHASSAING, J.-C., ROBINET, J.-C. et SAGAUT, P. (2019). 3D global optimal forcing and response of the supersonic boundary layer. *Journal of Computational Physics*, 398:108888.
- [Burak *et al.*, 2009] BURAK, M. O., BILLSON, M., ERIKSSON, L.-E. et BARALON, S. (2009). Validation of a Time- and Frequency-Domain Grazing Flow Acoustic Liner Model. *AIAA Journal*, 47(8):1841–1848.
- [Butler et Farrell, 1992] BUTLER, K. M. et FARRELL, B. F. (1992). Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 4(8):1637–1650.
- [Chang *et al.*, 1991] CHANG, C.-L., MALIK, M. R., ERLEBACHER, G. et HUSSAINI, M. (1991). Compressible stability of growing boundary layers using parabolized stability equations. In *22nd Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*.
- [Chevaugéon *et al.*, 2006] CHEVAUGEON, N., REMACLE, J.-F. et GALLEZ, X. (2006). Discontinuous Galerkin implementation of the extended Helmholtz resonator model in time domain, AIAA Paper 2006-2569. In *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*.
- [Chu, 1965] CHU, B.-T. (1965). On the energy transfer to small disturbances in fluid flow (Part I). *Acta Mechanica*, 1(3):215–234.
- [Claerbout, 1985] CLAERBOUT, J. (1985). *Imaging the Earth's Interior*. Blackwell Scientific Publications.
- [Collino *et al.*, 1998] COLLINO, F., GHANEMI, S. et JOLY, P. (1998). Domain Decomposition Method for Harmonic Wave Propagation : A General Presentation. Rapport technique 3473, INRIA.
- [Cousteix, 1988] COUSTEIX, J. (1988). *Aérodynamique : Couche limite laminaire*. Éd. Cépaduès.
- [Crighton, 1977] CRIGHTON, D. G. (1977). Introduction to Wiener-Hopf methods in acoustics and vibration. Rapport technique, Catholic university of America, Washington D.C.
- [De Hoop, 1996] DE HOOP, M. V. (1996). Generalization of the Bremmer coupling series. *Journal of Mathematical Physics*, 37(7):3246–3282.
- [Demetriades, 1974] DEMETRIADES, A. (1974). Hypersonic viscous flow over a slender cone. III-laminar instability and transition, AIAA Paper 1974-535. In *7th Fluid and Plasma Dynamics Conference*.
- [Deng *et al.*, 2019] DENG, Y., DRAGNA, D., GALLAND, M.-A. et ALOMAR, A. (2019). Comparison of three numerical methods for acoustic propagation in a lined duct with flow, AIAA Paper 2019-2658. In *25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Delft, The Netherlands.
- [Di Pietro et Ern, 2012] DI PIETRO, D. A. et ERN, A. (2012). *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*, volume 69 de *Mathématiques & Applications*. Springer.
- [Ellingsen et Palm, 1975] ELLINGSEN, T. et PALM, E. (1975). Stability of linear flow. *Physics of Fluids*, 18(4):487–488.
- [Farghadan *et al.*, 2021] FARGHADAN, A., TOWNE, A., MARTINI, E. et CAVALIERI, A. (2021). A randomized time-domain algorithm for efficiently computing resolvent modes, AIAA Paper 2021-2896. In *AIAA Aviation 2021 Forum*.
- [Farrell, 1988] FARRELL, B. F. (1988). Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow. *Physics of Fluids*, 31(8):2093.
- [Farrell et Moore, 1992] FARRELL, B. F. et MOORE, A. M. (1992). An adjoint method for obtaining the most rapidly growing perturbation to oceanic flows. *Journal of Physical Oceanography*, 22(4):338–349.

- [Fedorov, 2011] FEDOROV, A. (2011). Transition and stability of high-speed boundary layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43:79–95.
- [Ferrier, 2008] FERRIER, M. (2008). *Analyse de la stabilité et prévision de la transition laminaire/turbulent de l'écoulement proche paroi sur l'avant-corps d'un véhicule hypersonique*. Thèse de doctorat, Université d'Orléans.
- [Fiévet *et al.*, 2020] FIÉVET, R., DENIAU, H. et PIOT, E. (2020). Strong compact formalism for characteristic boundary conditions with discontinuous spectral methods. *Journal of Computational Physics*, 408:109276.
- [Félix et Pagneux, 2002] FÉLIX, S. et PAGNEUX, V. (2002). Multimodal analysis of acoustic propagation in three-dimensional bends. *Wave Motion*, 36:157–168.
- [Gabard, 2010] GABARD, G. (2010). Mode-matching techniques for sound propagation in lined ducts with flow, AIAA Paper 2010-3940. *In 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*.
- [Gabard et Astley, 2008] GABARD, G. et ASTLEY, R. J. (2008). A computational mode-matching approach for sound propagation in three-dimensional ducts with flow. *Journal of Sound and Vibration*, 315(4-5):1103–1124.
- [Gamet *et al.*, 1999] GAMET, L., DUCROS, F., NICOUD, F. et POINSOT, T. (1999). Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. Application to direct numerical simulations of compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29:159–191.
- [Gaster, 1962] GASTER, M. (1962). A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(2):222–224.
- [Givoli et Neta, 2003] GIVOLI, D. et NETA, B. (2003). High-order non-reflecting boundary scheme for time-dependent waves. *Journal of Computational Physics*, 186:24–46.
- [Guegan, 2007] GUEGAN, A. (2007). *Optimal perturbations in swept leading edge boundary layers*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.
- [Gustafsson, 2000] GUSTAFSSON, M. (2000). The Bremmer series for a multi-dimensional acoustic scattering problem. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 33(9):1921.
- [Hagstrom et Warburton, 2004] HAGSTROM, T. et WARBURTON, T. (2004). A new auxiliary variable formulation of high-order local radiation boundary conditions : corner compatibility conditions and extensions to first-order systems. *Wave Motion*, 39(4):327–338.
- [Haj-Hariri, 1994] HAJ-HARIRI, H. (1994). Characteristics analysis of the parabolized stability equations. *Studies in Applied Mathematics*, 92(1):41–53.
- [Hanifi et Henningson, 1998] HANIFI, A. et HENNINGSON, D. S. (1998). The compressible inviscid algebraic instability for streamwise independent disturbances. *Physics of Fluids*, 10(8):1784–1786.
- [Hanifi *et al.*, 1996] HANIFI, A., SCHMID, P. J. et HENNINGSON, D. S. (1996). Transient growth in compressible boundary layer flow. *Physics of Fluids*, 8(3):826–837.
- [Herbert, 1997] HERBERT, T. (1997). Parabolized stability equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 29:245–283.
- [Herbert et Bertolotti, 1987] HERBERT, T. et BERTOLOTTI, F. P. (1987). Stability analysis of non-parallel boundary layers. *Bulletin of the American Physical Society*, 32(2079):590.
- [Herrmann *et al.*, 2021] HERRMANN, B., BADDOO, P., SEMAAN, R., BRUNTON, S. et MCKEON, B. (2021). Data-driven resolvent analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 918:A101–A1019.

- [Higdon, 1986] HIGDON, R. (1986). Absorbing Boundary Conditions for Difference Approximation to the Multi-Dimensional Wave Equation. *Mathematics of Computation*, 47(176):437–459.
- [Higdon, 1987] HIGDON, R. (1987). Numerical Absorbing Boundary Conditions for the Wave Equation. *Mathematics of Computation*, 49(179):65–90.
- [Hörmander, 1994] HÖRMANDER, L. (1994). *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*. Classics in Mathematics. Springer.
- [Jones et al., 2005] JONES, M., WATSON, W. et PARROTT, T. (2005). Benchmark data for evaluation of aeroacoustic propagation codes with grazing flow, AIAA Paper 2005-2853. *In 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Monterey, California.
- [Kamal et al., 2022] KAMAL, O., RIGAS, G., LAKEBRINK, M. et COLONIUS, T. (2022). Input/output analysis of a Mach-6 cooled-wall hypersonic boundary layer using the One-Way Navier-Stokes (OWNS) Equations, AIAA Paper 2022-3556. *In AIAA Aviation 2022 Forum*, Chicago.
- [Kamal et al., 2020] KAMAL, O., RIGAS, G., T. LAKEBRINK, M. et COLONIUS, T. (2020). Application of the One-Way Navier-Stokes (OWNS) equations to hypersonic boundary layers, AIAA Paper 2020-2986. *In AIAA Aviation 2020 Forum*.
- [Kamal et al., 2021] KAMAL, O., RIGAS, G., T. LAKEBRINK, M. et COLONIUS, T. (2021). Input/output analysis of hypersonic boundary layers using the One-Way Navier-Stokes (OWNS) equations. *In AIAA Aviation 2021 Forum, AIAA paper 2021-2827*.
- [Kendall, 1975] KENDALL, J. M. (1975). Wind tunnel experiments relating to supersonic and hypersonic boundary-layer transition. *AIAA Journal*, 13(3):290–299.
- [Knisely et Zhong, 2019] KNISELY, C. P. et ZHONG, X. (2019). Sound radiation by supersonic unstable modes in hypersonic blunt cone boundary layers. II. Direct numerical simulation. *Physics of Fluids*, 31(2).
- [Koch, 1977] KOCH, W. (1977). Radiation of sound from a two-dimensional acoustically lined duct. *Journal of Sound and Vibration*, 55(2):255–274.
- [Landahl, 1980] LANDAHL, M. (1980). A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 98(2):243–251.
- [Lees et Lin, 1946] LEES, L. et LIN, C.-C. (1946). Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. *In NACA Tech. Note 1115*, Washington, DC. National Advisory Committee for Aeronautics.
- [Lehoucq et al., 1998] LEHOUCQ, R., SORENSEN, D. et YANG, C. (1998). *ARPACK users' guide : solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods*. SIAM.
- [Lele, 1992] LELE, S. K. (1992). Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103(1):16–42.
- [Li et Malik, 1996] LI, F. et MALIK, M. R. (1996). On the nature of PSE approximation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 8(4):253–273.
- [Li et Malik, 1997] LI, F. et MALIK, M. R. (1997). Spectral analysis of parabolized stability equations. *Computers & fluids*, 26(3):279–297.
- [Lucas, 2014] LUCAS, J.-M. (2014). *Spatial optimal perturbations for transient growth analysis in three-dimensional boundary layers*. Thèse de doctorat, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace.
- [Luchini, 2000] LUCHINI, P. (2000). Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface : optimal perturbations. *Journal of Fluid Mechanics*, 404:289–309.

- [Ma et Zhong, 2000] MA, Y. et ZHONG, X. (2000). Direct numerical simulation of instability of nonequilibrium reacting hypersonic boundary layers, AIAA Paper 2000-0539. In *38th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*.
- [Ma et Zhong, 2003] MA, Y. et ZHONG, X. (2003). Receptivity of a supersonic boundary layer over a flat plate. Part 1. Wave structures and interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 488:31–78.
- [Mack, 1969] MACK, L. M. (1969). Boundary-layer stability theory. In *J.P.L. Rep. No. 900-277*, Pasadena. Jet Propulsion Laboratory.
- [Mack, 1977] MACK, L. M. (1977). Transition prediction and linear stability theory. In *Laminar-Turbulent Transition*, pages 1–22. AGARD CP 224.
- [Mack, 1984] MACK, L. M. (1984). Boundary-layer linear stability theory. In *AGARD Special Course on Stability and Transition of Laminar Flow*, pages 1–81. AGARD Rep. No. 709.
- [Mack, 1990] MACK, L. M. (1990). On the inviscid acoustic-mode instability of supersonic shear flows : Part 1 : Two-dimensional waves. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2(2):97–123.
- [Majda et Osher, 1975] MAJDA, A. et OSHER, S. (1975). Initial-Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations with Uniformly Characteristic Boundary. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 28(5):607–675.
- [Martini et al., 2021] MARTINI, E., RODRÍGUEZ, D., TOWNE, A. et CAVALIERI, A. (2021). Efficient computation of global resolvent modes. *Journal of Fluid Mechanics*, 919:A31–A327.
- [Marx, 2015] MARX, D. (2015). Numerical Computation of a Lined Duct Instability Using the Linearized Euler Equations. *AIAA Journal*, 53(8):2379–2388.
- [Marx et Aurégan, 2013] MARX, D. et AURÉGAN, Y. (2013). Effect of turbulent eddy viscosity on the unstable surface mode above an acoustic liner. *Journal of Sound and Vibration*, 332:3803–3820.
- [Merk et al., 2019] MERK, M., SILVA, C., POLIFKE, W., GAUDRON, R., GATTI, M., MIRAT, C. et SCHULLER, T. (2019). Direct Assessment of the Acoustic Scattering Matrix of a Turbulent Swirl Combustor by Combining System Identification, Large Eddy Simulation and Analytical Approaches. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 141:021035.
- [Milinazzo et al., 1997] MILINAZZO, F. A., ZALA, C. A. et BROOKE, G. H. (1997). Rational square-root approximations for parabolic equation algorithms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(2):760–766.
- [Moarref et al., 2013] MOARREF, R., SHARMA, A., TROPP, J. et MCKEON, B. (2013). Model-based scaling of the streamwise energy density in high-Reynolds-number turbulent channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 734:275–316.
- [Monokrousos et al., 2010] MONOKROUSOS, A., AKERKVIK, A., BRANDT, L. et HENNINGSON, D. (2010). Global three-dimensional optimal disturbances in the Blasius boundary-layer flow using time-steppers. *Journal of Fluid Mechanics*, 650:181–214.
- [Monteghetti et al., 2018] MONTEGHETTI, F., MATIGNON, D. et PIOT, E. (2018). Energy analysis and discretization of nonlinear impedance boundary conditions for the time-domain linearized Euler equations. *Journal of Computational Physics*, 375:393–426.
- [Monteghetti et al., 2016] MONTEGHETTI, F., MATIGNON, D., PIOT, E. et PASCAL, L. (2016). Design of broadband time-domain impedance boundary conditions using the oscillatory-diffusive representation of acoustical models. *Journal of the Acoustical Society of America*, 140(3):1663–1674.

- [Morkovin *et al.*, 1994] MORKOVIN, M. V., RESHOTKO, E. et HERBERT, T. (1994). Transition in open flow systems : a reassessment. *Bulletin of the American Physical Society*, 39(9):1–31.
- [Nayfeh *et al.*, 1975] NAYFEH, A. H., KAISER, J. E. et TELIONIS, D. P. (1975). Acoustics of aircraft engine-duct systems. *AIAA Journal*, 13(2):130–153.
- [Noble et Weiss, 1959] NOBLE, B. et WEISS, G. (1959). Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations. *Physics Today*, 12(9):50–50.
- [Op’t Root et Stolk, 2010] OP’T ROOT, T. et STOLK, C. (2010). One-Way wave propagation with amplitude based on pseudo-differential operators. *Wave Motion*, 47:67–84.
- [Özgen et Kırcalı, 2008] ÖZGEN, S. et KIRCALI (2008). Linear stability analysis in compressible, flat-plate boundary-layers. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 22:1–20.
- [Özyörük et Long, 2000] ÖZYÖRÜK, Y. et LONG, L. N. (2000). Time-domain calculation of sound propagation in lined ducts with sheared flows. *AIAA Journal*, 38(5):768–773.
- [Paredes *et al.*, 2016] PAREDES, P., CHOUDHARI, M. M., LI, F. et CHANG, C.-L. (2016). Transient growth analysis of compressible boundary layers with parabolized stability equations, AIAA Paper 2016-0051. In *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*.
- [Pascal, 2013] PASCAL, L. (2013). *Acoustique modale et stabilité linéaire par une méthode numérique avancée : Cas d’un conduit traité acoustiquement en présence d’un écoulement*. Thèse de doctorat, Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace.
- [Pascal *et al.*, 2015] PASCAL, L., PIOT, E. et CASALIS, G. (2015). A new implementation of the extended Helmholtz resonator acoustic liner impedance model in time domain CAA. *Journal of Computational Acoustics*, 24(01):1550015.
- [Reshotko, 2001] RESHOTKO, E. (2001). Transient growth : A factor in bypass transition. *Physics of Fluids*, 13(5):1067–1075.
- [Reshotko et Tumin, 2000] RESHOTKO, E. et TUMIN, A. (2000). The blunt body paradox—a case for transient growth. In *Laminar-Turbulent Transition : IUTAM Symposium, Sedona/AZ September 13–17, 1999*, pages 403–408. Springer.
- [Ribeiro *et al.*, 2020] RIBEIRO, J., YEH, C. et TAIRA, K. (2020). Randomized resolvent analysis. *Physical Review Fluids*, 5(3):033902.
- [Richter *et al.*, 2007] RICHTER, C., H. THIELE, F. et ZHUANG, M. (2007). Comparison of time-domain impedance boundary conditions for lined duct flows. *AIAA Journal*, 45(6):1333–1345.
- [Richter *et al.*, 2011] RICHTER, C., HAY, J. A., SCHÖNWALD, N., BUSSE, S. et THIELE, F. (2011). A review of time-domain impedance modelling and applications. *Journal of Sound and Vibration*, 330(16):3859–3873.
- [Rienstra, 2006] RIENSTRA, S. (2006). Impedance models in time domain, including the extended Helmholtz resonator model, AIAA Paper 2006-2686. In *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (27th AIAA Aeroacoustics Conference)*.
- [Rienstra, 2003] RIENSTRA, S. W. (2003). A classification of duct modes based on surface waves. *Wave motion*, 37(2):119–135.
- [Rienstra et Hirschberg, 2004] RIENSTRA, S. W. et HIRSCHBERG, A. (2004). An introduction to acoustics. Eindhoven University of Technology. Extended and revised edition of Report IWDE92-06.
- [Rigas *et al.*, 2017a] RIGAS, G., COLONIUS, T. et BEYAR, M. (2017a). Stability of wall-bounded flows using one-way spatial integration of Navier-Stokes equations, AIAA Paper 2017-1881. In *55th AIAA Aerospace Sciences Meeting*.

- [Rigas *et al.*, 2017b] RIGAS, G., SCHMIDT, O. T. et COLONIUS, T. (2017b). One Way Navier-Stokes and resolvent analysis for modeling coherent structures in a supersonic turbulent jet, AIAA Paper 2017-4046. In *23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*.
- [Rolls Royce, 2015] ROLLS ROYCE, p. (2015). *The jet engine*. John Wiley & Sons.
- [Rudel, 2022] RUDEL, C. (2022). *Equations one-way pour la propagation d'ondes en écoulements complexes*. Thèse de doctorat, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace.
- [Rudel *et al.*, 2021] RUDEL, C., PERNET, S. et BRAZIER, J.-P. (2021). Backscattering in complex flow : application of the One-Way Euler equations to Poiseuille flow inside lined ducts, AIAA Paper 2021-2138. In *AIAA Aviation 2021 Forum*.
- [Rudel *et al.*, 2022] RUDEL, C., PERNET, S. et BRAZIER, J.-P. (2022). Numerical Factorization of Propagation Operator for Hyperbolic Equations and Application to One-way, True Amplitude One-way Equations and Bremmer series. *Journal of Scientific Computing*, 93(27):1–40.
- [Ruello *et al.*, 2024] RUELLO, M., RUDEL, C., PERNET, S. et BRAZIER, J.-P. (2024). Domain decomposition method based on One-Way approaches for sound propagation in a partially lined duct. *Wave Motion*, 130:103351.
- [Schlichting et Gersten, 2016] SCHLICHTING, H. et GERSTEN, K. (2016). *Boundary-layer theory*. Springer.
- [Schmid et Henningson, 2001] SCHMID, P. J. et HENNINGSON, D. S. (2001). *Stability and Transition in Shear Flows*, volume 142 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer New York.
- [Schubauer et Skramstad, 1947] SCHUBAUER, G. B. et SKRAMSTAD, H. K. (1947). Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 14(2):69–78.
- [Sleeman *et al.*, 2023] SLEEMAN, M. K., LAKEBRINK, M. T. et COLONIUS, T. (2023). Nonlinear stability of wall-bounded flows using the One-Way Navier-Stokes (OWNS) Equations, AIAA Paper 2023-3273. In *AIAA Aviation 2023 Forum*.
- [Squire, 1933] SQUIRE, H. B. (1933). On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 142(847):621–628.
- [Stetson et Kimmel, 1992] STETSON, K. et KIMMEL, R. (1992). On hypersonic boundary-layer stability. In *30th Aerospace sciences meeting and exhibit*, page 737.
- [Stewart, 2002] STEWART, G. (2002). A Krylov-Schur Algorithm for Large Eigenproblems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(3):601–614.
- [Stolk, 2004] STOLK, C. (2004). A pseudodifferential equation with damping for one-way wave propagation in inhomogeneous acoustic media. *Wave Motion*, 40:111–121.
- [Taktak *et al.*, 2008] TAKTAK, M., VILLE, J.-M., HADDAR, M. et FOUCART, F. (2008). Evaluation of the lined duct performances based on a 3D two port scattering matrix. *Proceedings of Meetings on Acoustics*, 4:157–168.
- [Tam et Auriault, 1996] TAM, C. K. W. et AURIAULT, L. (1996). Time-domain impedance boundary conditions for computational aeroacoustics. *AIAA Journal*, 34(5):917–923.
- [Taylor, 1974] TAYLOR, M. (1974). *Pseudo Differential Operators*, volume 416 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer.
- [Thompson, 1987] THOMPSON, K. W. (1987). Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68(1):1–24.

- [Towne, 2016] TOWNE, A. (2016). *Advancements in jet turbulence and noise modeling : accurate One-Way solutions and empirical evaluation of the nonlinear forcing of wavepackets*. Thèse de doctorat, California Institute of Technology.
- [Towne et Colonius, 2013] TOWNE, A. et COLONIUS, T. (2013). Improved Parabolization of the Euler Equations, AIAA Paper 2013-2171. *In 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Berlin.
- [Towne et Colonius, 2014] TOWNE, A. et COLONIUS, T. (2014). Continued development of the One-Way Euler equations : application to jets, AIAA Paper 2014-2903. *In 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Atlanta, Georgia.
- [Towne et Colonius, 2015] TOWNE, A. et COLONIUS, T. (2015). One-way spatial integration of hyperbolic equations. *Journal of Computational Physics*, 300:844–861.
- [Towne et al., 2019] TOWNE, A., RIGAS, G. et COLONIUS, T. (2019). A critical assessment of the parabolized stability equations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 33:359–382.
- [Towne et al., 2022] TOWNE, A., RIGAS, G., KAMAL, O., PICKERING, E. et COLONIUS, T. (2022). Efficient global resolvent analysis via the one-way Navier–Stokes equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 948:A9.
- [Trefethen, 1991] TREFETHEN, L. N. (1991). Pseudospectra of matrices. *Numerical analysis*, 91:234–266.
- [Tumin et Reshotko, 2001] TUMIN, A. et RESHOTKO, E. (2001). Spatial theory of optimal disturbances in boundary layers. *Physics of Fluids*, 13(7):2097–2104.
- [Tumin et Reshotko, 2003] TUMIN, A. et RESHOTKO, E. (2003). Optimal disturbances in compressible boundary layers. *AIAA journal*, 41(12):2357–2363.
- [Tumin et Reshotko, 2004] TUMIN, A. et RESHOTKO, E. (2004). Optimal disturbances in the boundary layer over a sphere, AIAA Paper 2004-2241. *In 34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*.
- [Ursin, 1984] URSIN, B. (1984). Seismic migration using the WKB approximation. *Geophysical Journal International*, 79(1):339–352.
- [Van Ingen, 2008] VAN INGEN, J. (2008). The eN method for transition prediction. Historical review of work at TU Delft. *In 38th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, page 3830.
- [Vermeersch, 2009] VERMEERSCH, O. (2009). *Étude et modélisation du phénomène de croissance transitoire pour des couches limites incompressibles et compressibles*. Thèse de doctorat, Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace.
- [Vignau, 1989] VIGNAU, F. (1989). *Étude théorique et expérimentale de la transition en écoulement bidimensionnel compressible*. Thèse de doctorat, École Nationale supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace.
- [Wing, 1974] WING, G. M. (1974). Invariant imbedding and generalizations of the WKB method and the Bremmer series. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 48(2):400–422.
- [Zhang et al., 2005] ZHANG, Y., ZHANG, G. et BLEISTEIN, N. (2005). Theory of true-amplitude one-way wave equations and true-amplitude common-shot migration. *Geophysics*, 70(4):E1–E10.
- [Zhu et Towne, 2023] ZHU, M. et TOWNE, A. (2023). Recursive One-Way Navier-Stokes equations with PSE-like cost. *Journal of Computational Physics*, 473:111744.
- [Zuccher et al., 2006a] ZUCCHER, S., BOTTARO, A. et LUCHINI, P. (2006a). Algebraic growth in a Blasius boundary layer : Nonlinear optimal disturbances. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 25(1):1–17.

- [Zuccher *et al.*, 2006b] ZUCCHER, S., TUMIN, A. et RESHOTKO, E. (2006b). Parabolic approach to optimal perturbations in compressible boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 556:189–216.





## Méthodes de propagation de type One-Way pour les équations de Navier-Stokes : vers le calcul des perturbations optimales

Les approches One-Way sont des méthodes de simulation numérique des phénomènes de propagation d'ondes dans une direction privilégiée, qui permettent de palier le défaut (suivi d'un seul mode) des méthodes modales tout en garantissant un coût de calcul faible par rapport à une simulation directe. Bien que ces méthodes soient utilisées depuis plus de cinquante ans dans divers domaines comme l'électromagnétisme et la géophysique, leur application en mécanique des fluides est plus récente avec les travaux pionniers de T. Colonius et A. Towne en 2015.

Cette thèse possédait un double objectif. Dans un premier temps, il s'agissait de développer des méthodes de simulation de type One-Way dans le cadre des équations de Navier-Stokes en réalisant une extension de la méthodologie proposée dans les travaux de thèse de C. Rudel pour les équations d'Euler. Dans un second temps, elles ont été exploitées pour concevoir un outil numérique dans le but de calculer la perturbation optimale d'un écoulement. L'ensemble de ces développements a été éprouvé sur différentes problématiques représentatives et en considérant des situations de complexité croissante. En particulier, le cas d'un conduit partiellement revêtu d'un liner acoustique en présence d'une instabilité de surface a été traité à l'aide d'une approche de type méthode de décomposition de domaine basée sur les solveurs One-Way et comparé à la fois à des données expérimentales et des résultats issus d'autres solveurs numériques. De plus, la capacité des approches One-Way à propager des instabilités de couches limites et leur éventuel couplage a été observée. Enfin, un algorithme de calcul de perturbations optimales, basé sur une méthode adjointe, a été utilisé pour déterminer entre autres le forçage optimal et la réponse associée d'un écoulement de couche limite bidimensionnelle à Mach 4.5.

**Mots-clés :** équations One-Way, propagation d'ondes, transition laminaire-turbulent, écoulement de couche limite, perturbations optimales.

---

## One-Way propagation methods for Navier-Stokes equations: towards the calculation of optimal perturbations

One-Way approaches are numerical simulation methods for wave propagation phenomena in a preferred direction, which overcome the limitation (single-mode tracking) of modal methods while ensuring a low computational cost compared to a direct simulation. Although these methods have been used for over fifty years in various fields such as electromagnetism and geophysics, their application in fluid mechanics is more recent, with pioneering work by T. Colonius and A. Towne in 2015.

This thesis had a dual objective. Firstly, it aimed to develop One-Way type simulation methods for the Navier-Stokes equations, by extending the methodology proposed in C. Rudel's thesis work for the Euler equations. Subsequently, these methods were used to develop a numerical tool for calculating optimal flow disturbance. All these developments have been tested on a number of representative problems, considering situations of increasing complexity. In particular, the case of a partially lined duct, in the presence of a surface instability, was treated using a domain decomposition method based on One-Way solvers, and compared with both experimental data and results from other numerical solvers. Additionally, the ability of One-Way approaches to propagate boundary layer instabilities and their possible coupling was observed. Finally, an optimal perturbation algorithm, based on an adjoint method, was used to determine, among other things, the optimal forcing and associated response of a two-dimensional boundary layer flow at Mach 4.5.

**Keywords:** One-Way equations, wave propagation, laminar-turbulent transition, boundary layer flow, optimal perturbations.