



HAL
open science

Quelques problèmes de modélisation mathématique et numérique : Évolution d'interfaces géométriques et problèmes inverses appliqués à l'imagerie médicale

Élie Bretin

► **To cite this version:**

Élie Bretin. Quelques problèmes de modélisation mathématique et numérique : Évolution d'interfaces géométriques et problèmes inverses appliqués à l'imagerie médicale. Analyse numérique [math.NA]. Université de Lyon, 2022. tel-04840571

HAL Id: tel-04840571

<https://hal.science/tel-04840571v1>

Submitted on 16 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
et l'Université Claude Bernard LYON I

Quelques problèmes de modélisation mathématique et numérique : Évolution d'interfaces géométriques et problèmes inverses appliqués à l'imagerie médicale

SPÉCIALITÉ : Mathématiques appliquées

par Elie Bretin

Soutenue le 11 février 2022 devant la Commission d'examen

M. Guillaume Bal	Université de Chicago (CAMI),	(Rapporteur)
M. Franck Boyer	Université de Toulouse 3 (IMT)	(Rapporteur)
M. Bertrand Maury	Université Paris-Saclay (LMO)	(Rapporteur)
M. Grégoire Allaire	École Polytechnique (CMAP)	(Examinateur)
Mme Julie Delon	Université de Paris (MAP5)	(Examinatrice)
M. Simon Masnou	Université Claude Bernard Lyon 1 (ICJ)	(Examinateur)
Mme Françoise Peyrin	INSA Lyon (CREATIS)	(Examinatrice)
M. Yves Renard	INSA Lyon (ICJ)	(Examinateur)

Remerciements

Merci beaucoup à Guillaume Bal, Franck Boyer et Bertrand Maury d'avoir pris de leur temps précieux pour lire et évaluer ce travail ainsi que pour vos retours très encourageants. Je remercie également Grégoire Allaire, Julie Delon et Françoise Peyrin d'avoir honoré de leur présence ma soutenance.

Ce manuscrit synthétise une dizaine d'années de recherche et c'est donc tout naturellement que je souhaiterais remercier l'ensemble de mes co-auteurs qui ont toujours réussi à motiver ces travaux par leur curiosité et leur passion des mathématiques.

Merci donc à mes deux directeurs de thèse, Valérie Perrier et Eric Bonnetier de m'avoir initié à la recherche avec notamment la découverte des méthodes de champ de phase qui restent une des grandes thématiques de ces travaux d'HDR. Merci aussi à Habib Ammari, Jocelin Garnier et Abdul Wahab qui m'ont offert un cadre de travail exceptionnel en post-doct sur des sujets passionnants autour des problèmes inverses en photoacoustique.

J'ai aussi eu la chance dès mon arrivée à l'ICJ en septembre 2011 de bénéficier d'un cadre de travail particulièrement favorable en participant notamment à de nombreux projets d'ANRs. Merci donc à tous les membres des projets GEOMETRYA et DIGITALSNOW pour nos échanges passionnants et en particulier à Edouard Oudet, Jacques-Olivier Lachaud, Roland Denis, Benoit Merlet, Antonin Chambolle, Antoine Lemenant, Matthieu Bonnard, Filippo Santambrogio pour nos collaborations sur des modèles de champ de phase.

Je souhaiterais aussi remercier Maitine Bergounioux de m'avoir proposé de participer à son projet d'ANR ADVENTURES avec de nombreuses discussions sur des techniques de photoacoustiques et m'ouvrant ainsi à de nouvelles collaborations, en particulier avec Yannick Privat et Carine Lucas.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Laurent Seppecher pour nos nombreux échanges au cours des dernières années concernant notre projet en élastographie. C'est l'un des travaux dont je suis particulièrement satisfait. J'espère que le projet ANR REWARD nous offrira l'opportunité d'aller encore plus loin. Je saisis également cette occasion pour remercier chaleureusement toute l'équipe, composée de Pierre Millien, Laure Giovangigli, Maya De Buhan, et en particulier d'Elisabeth Brusseau, dont les discussions sont toujours aussi enrichissantes sur les aspects appliqués de l'élastographie. Je n'oublie pas non plus mes collègues du laboratoire d'imagerie médicale CREATIS, Voichita Maxim et Nicolas Ducros, avec qui j'ai récemment échangé et discuté de nouveaux défis en imagerie médicale.

Merci aussi à Yves Renard pour notre collaboration de ces dernières années et notamment de m'avoir proposé le co-encadrement de la thèse de Julien Chapelat me permettant ainsi de découvrir les méthodes de Nistche mais aussi l'environnement

RD d'une grande entreprise comme Michelin.

Je tiens enfin à remercier tout particulièrement Simon Masnou pour ces 10 ans d'échanges et de collaborations au sein de l'ICJ. Ta curiosité et ton optimisme sont une grande source d'inspiration pour moi. Merci aussi pour ton soutien sans faille, pour tes nombreux conseils et pour tous ces projets que nous avons déjà réalisés ensemble.

Tous ces travaux ont été réalisés au sein du pôle de mathématiques de l'INSA de Lyon, et je tiens à exprimer ma gratitude envers tous ses membres, en particulier son directeur, Bernard Roux, ainsi que ses secrétaires, Sandrine Danon et Chantal Dutel. Leurs nombreuses discussions ont enrichi mes journées et les ont rendues des plus agréables.

Enfin, un mot spécial pour ma petite famille : merci à vous quatre, Emmanuelle, Loane, Manoé et Owen, pour vos encouragements constants et votre soutien.

Table des matières

1	Introduction	7
2	Listes de publications	10
2.1	Articles présentés dans ce mémoire	10
2.2	Autres travaux	12
3	Approximation par champ de phase d'évolutions géométriques d'interfaces	14
3.1	Modèles multi-phases, ordre et mobilités	17
3.2	Diffusion de surface et équation de Cahn-Hilliard	27
3.3	Energie de Willmore et applications	33
3.4	Problèmes de Steiner et Plateau	41
3.5	Réseaux de neurones et méthode de champ de phase	48
4	Problèmes inverses appliqués aux méthodes d'imagerie médicale	51
4.1	Méthode de renversement temporel dans un milieu atténué	52
4.2	Deux problèmes liés à l'imagerie photo-acoustique en pratique	61
4.3	Reconstruction de cartes d'élasticité en élastographie	67
5	Autres travaux et perspectives	73
5.1	Élasticité et contact	73
5.2	Perspectives	75

Chapitre 1

Introduction

Ma thèse, effectuée à Grenoble sous la direction d'E. Bonnetier et de V. Perrier a porté sur les méthodes de champ de phase pour l'approximation d'évolution d'interfaces de type mouvement par courbure moyenne. Plus précisément, je me suis concentré sur la modélisation numérique en analysant les développements asymptotiques des solutions de différents modèles de champ de phase et en proposant des variantes aux équations classiques pour améliorer leur ordre d'approximation. Dans un premier travail avec M. Brassel, nous nous sommes intéressés aux pertes de volume observées dans les méthodes classiques de champ de phase pour l'approximation du flot de courbure moyenne conservé. Nous avons montré dans [A21] comment les réduire de manière conséquente en modifiant la forme du multiplicateur de Lagrange associé de sorte à le localiser autour de l'interface diffuse. Le deuxième article [A23] avec A. Chambolle et E. Bonnetier a porté sur l'approximation du mouvement par courbure moyenne anisotrope. La difficulté du problème vient de la non linéarité de l'opérateur laplacien de Finsler, et cela nous a conduit à proposer et étudier une pseudo-linéarisation de cet opérateur par rapport à la base de Fourier. Nous avons montré que cette approche permet de traiter très simplement toutes sortes d'anisotropies en dimensions 2 et 3. Elle sera justifiée ultérieurement par son lien avec les méthodes bi-domaines [13]. Un dernier article [A22] avec V. Perrier s'intéresse au traitement des zones d'inclusions-exclusions, généralement abordées à l'aide de conditions de bord de type Dirichlet. Nous avons proposé de traiter ces contraintes différemment en les intégrant directement dans des potentiels pénalisés afin de gagner un ordre de précision.

Après ma thèse, j'ai effectué un post-doctorat à l'École polytechnique sous la direction d'Habib Ammari autour de l'imagerie photo-acoustique [70] et des algorithmes de reconstruction des propriétés de tissus biologiques à partir de mesures de pression. L'objectif initial était d'améliorer les algorithmes de l'état de l'art en intégrant les effets d'atténuation présents lorsque des ondes acoustiques ou élastiques évoluent dans le milieu biologique. En particulier, nous avons étudié avec A. Wahab, H. Ammari et J. Garnier l'effet des différents modèles d'atténuation en connectant les données acoustiques atténuées aux données idéales par l'intermédiaire d'un opérateur d'atténuation. Nous avons alors montré comment inverser cet opérateur efficacement et corriger les données perturbées en utilisant le théorème de la phase stationnaire. Cette nouvelle

méthode nous a permis d'étudier des versions modifiées des techniques de retournement temporel [66] en acoustique et en élastique afin d'améliorer les algorithmes de reconstruction de l'état de l'art.

Depuis mon recrutement à l'INSA de Lyon en septembre 2011, j'ai continué à travailler sur les méthodes de champ de phase pour l'approximation de flot géométrique d'interfaces mais aussi sur des problèmes inverses appliqués à l'imagerie médicale. Ces travaux ont été effectués en grande partie dans le cadre de projets ANR (ADVENTURES, GEOMETRYA, BEEP, DIGITAL SNOW, MIMESIS). Plus précisément, j'ai commencé à participer aux réunions de l'ANR Digital SNOW en 2011, et j'ai démarré une collaboration sur des problèmes de partitions optimales avec E. Oudet, J.-O. Lachaud et R. Denis. En 2012, deux nouveaux projets ont été acceptés : le projet ANR ADVENTURE, porté par M. Bergounioux et dans lequel je me suis intéressé à de nouvelles questions concernant l'imagerie photo-acoustique et le projet ANR GEOMETRYA, porté par H. Pajot et traitant de problèmes de théorie géométrique de la mesure avec un aspect théorique et numérique. Enfin les projets BEEP (porté par J. Penuelas) et MIMESIS (porté par F. Flin) sont des projets pluridisciplinaires actuels où notre contribution concerne essentiellement la modélisation par des méthodes de champ de phase du phénomène de mouillage et de l'évolution de grains de neiges sous l'influence d'un gradient de température.

La plupart de mes travaux de recherche ont été réalisés en collaboration avec des membres de ces différents projets d'ANR, mais aussi avec des collègues de l'ICJ, notamment S. Masnou, L. Seppecher, Y. Renard et J. Poussin. J'ai aussi cherché durant toutes ces années à développer de nouvelles collaborations locales et pluridisciplinaires comme par exemple avec des collègues de l'École centrale de Lyon (A. Danescu, J. Penuelas, Institut de Nanotechnologie de Lyon), de l'INSA de Lyon (L. Petrusca, E. Brusseau, V. Maxim, laboratoire CREATIS d'imagerie médicale), ou encore plus récemment avec F. Flin du Centre de la neige à Grenoble.

Plus précisément, j'ai continué à travailler sur des approximations de champ de phase, notamment dans le cadre des projets ANR GEOMETRYA, CNRS Nanophase, ANR Beep (J. Penuelas, INL) et ANR MIMESIS (F. Flin, CEN). Un axe conséquent concerne des modèles multiphases, qui ont été utilisés pour obtenir des solutions du problème de Kelvin (DIGITAL SNOW), la modélisation de la croissance de nanofils (projet CNRS Nanophase) ou encore la simulation numérique de phénomènes de mouillage (BEEP, avec l'encadrement d'A. Sengers en post-doctorat). Je me suis aussi intéressé aux différentes méthodes de champ de phase pour approcher les énergies de Willmore, un sujet commun que nous avons avec S. Masnou, et dont les applications concernent la régularisation d'objets pixelisés (en collaboration avec E. Oudet et J.-O. Lachaud) ou encore le post-traitement d'images d'IRM (thèse de F. Dayrens, encadré par S. Masnou et M. Novaga). Enfin, j'ai également étudié différentes approches pour calculer les solutions numériques des problèmes de Steiner et de Plateau [47], une thématique née de différentes rencontres et discussions dans le cadre de l'ANR GEOMETRYA et qui m'ont amené à travailler avec A. Lemenant, M. Bonnivard et B. Merlet. Cette thématique de recherche se retrouve aussi dans la thèse de C.K. Huang encadrée

par S. Masnou et O. Druet : J'ai participé à l'encadrement des travaux portant sur le développement de modèles d'évolution d'interfaces avec contrainte topologique. Enfin, le sujet de thèse de G. Terii que j'encadre avec S. Masnou porte sur l'utilisation de réseaux de neurones inspirés des équations champ de phase, avec comme application l'approximation des arbres de Steiner en dimension 3 et des surfaces minimales orientables ou non orientables.

Dans le domaine de recherche des problèmes inverses appliqués à l'imagerie médicale, j'ai poursuivi le travail sur l'imagerie photo-acoustique dans le cadre du projet d'ANR ADVENTURE porté par M. Bergounioux. En particulier, nous avons essayé de comprendre comment améliorer les reconstructions des cartes d'atténuation en optimisant la position des capteurs (avec Y. Privat et M. Bergounioux) ou encore en prenant en compte le profil des impulsions du laser (avec Y. Privat et C. Lucas). Par ailleurs, J. Pousin m'a proposé de participer avec lui à l'encadrement de la thèse d'I. Mekkaoui en imagerie par IRM de diffusion. L'objectif était de prendre en compte des effets de mouvement dans les équations de Bloch-Torrey. A la suite du recrutement de L. Seppecher à l'Ecole centrale de Lyon en 2013, nous avons commencé à nous intéresser avec lui, P. Millien et H. Ammari à des algorithmes de reconstruction pour l'imagerie par élastographie. Ces techniques d'imagerie consistent à retrouver des propriétés élastiques d'un milieu biologique à partir de champs de déformations internes mesurés à l'aide d'un échographe. L'idée est alors d'étudier une nouvelle approche directe basée sur l'estimation numérique du noyau d'opérateur et qui s'avère suffisamment stable et efficace en pratique pour traiter le cas des données réelles, données obtenues à la suite d'une collaboration avec L. Petrusca et E. Brusseau du laboratoire CREATIS de Lyon. Très récemment, nous avons aussi proposé et testé avec V. Maxim (CREATIS) des algorithmes de type primal-dual de régularisation par variation totale et adaptés au bruit de Poisson. Nous avons appliqué ces méthodes) des problèmes d'imagerie par rayon X.

Enfin et depuis environ trois ans maintenant, je travaille avec Y. Renard sur la stabilité de méthodes numériques pour la résolution d'équations d'ondes élastiques avec des termes de contact. L'idée de départ était d'étudier dans ce contexte les propriétés des schémas de type splitting convexe-concave [37] ou encore des méthodes dites SAV [1], deux approches récemment introduites dans la littérature des méthodes de champ de phase et qui présentent de très bonnes propriétés de stabilité en pratique. A la suite de ces premiers travaux, Y. Renard m'a proposé d'encadrer avec lui la thèse de J. Chapelat (thèse CIFRE, Michelin) sur des problèmes d'optimisation de forme d'objets élastiques avec contrainte de contact où l'application concerne l'optimisation de la structure des pneus pleins. Un des objectifs de la thèse est par exemple de regarder l'apport des méthodes de Nitsche [27] dans la gestion des termes de contact par rapport à des méthodes plus classiques comme la pénalisation. Une deuxième question de type modélisation numérique est de savoir quels critères de minimisation nous permettent d'imposer efficacement une certaine homogénéité de la pression sur la zone de contact.

Chapitre 2

Listes de publications

2.1 Articles présentés dans ce mémoire

I) Méthode de champ de phase et évolution géométrique d'interface

— *Modèles multiphases et mobilités*

(A1) **A new phase field model for inhomogeneous minimal partitions, and applications to droplets dynamics**, E. BRETIN, S. MASNOU, *Interfaces Free Bound.*, 19, 141–182, (2017) .

(A2) **Phase-field modelling and computing for a large number of phases**, E. BRETIN, R. DENIS, J.-O. LACHAUD AND E. OUDET , *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 53, 3, 805–832 (2019) .

(A3) **Multiphase mean curvature flows with high mobility contrasts : a phase-field approach, with applications to nanowires** , E. BRETIN, A. DANESCU, J. PENUELAS, AND S. MASNOU, *J. Comput. Phys.*, 365, 324–349 (2018) .

(A4) **Multiphase mean curvature flows approximation : the case of non harmonically additive mobilities** , E. BONNETIER, E. BRETIN AND S. MASNOU, *preprint*.

— *Energie de Willmore et applications*

(A5) **Phase-field approximations of the Willmore functional and flow**, E. BRETIN, S. MASNOU AND E. OUDET, *Numerische Mathematik*, 131, 115-171 (2015).

(A6) **Regularization of discrete contour by Willmore energy**, E. BRETIN, J.-O. LACHAUD AND E. OUDET , *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40(2) 2014-229 (2011).

(A7) **Volume reconstruction from slices**, E. BRETIN, F. DAYRENS AND S. MASNOU , *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 10, 2326-2358 (2017).

— *Problèmes de Steiner et de Plateau*

(A8) **Numerical approximation of the Steiner problem in dimension 2 and 3**, M.

BONNIVARD, E. BRETIN, A. LEMENANT, *Math. Comp.*, 89, 2020, 1–43.

(A9) **A self-avoiding approximate mean curvature flow**, E. BRETIN, C.K. HUANG S. MASNOU, *preprint*.

— *Diffusion de surface et équation de Cahn-Hilliard*

(A10) **Approximation of surface diffusion flow : a second order variational Cahn–Hilliard model with degenerate mobilities**, E. BRETIN, S. MASNOU, A. SENGERS AND G. TERII, *accepté à M3AS*.

(A11) **A multiphase Cahn–Hilliard system with mobilities for the simulation of wetting**, E. BRETIN, R. DENIS, S. MASNOU, A. SENGERS AND G. TERII, *preprint*.

II) Problèmes inverses en imagerie médicale :

— *Retournement temporel et atténuation*

(A12) **Time reversal in attenuating acoustic media**, H. AMMARI, E. BRETIN, J. GARNIER AND A. WAHAB, *Contemporary Mathematics*, 548, 151-153 (2012) .

(A13) **Noise source localization in an attenuating medium**, H. AMMARI, E. BRETIN, J. GARNIER AND A. WAHAB, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 72 : 317-336(2012) .

(A14) **Time-reversal in visco-elastic media**, H. AMMARI, E. BRETIN, J. GARNIER AND A. WAHAB, *European Journal of Applied Mathematics*, 24 565-600 (2013) .

— *Quelques problèmes liés à l'imagerie photo-acoustique*

(A15) **Photo-acoustic imaging for attenuating acoustic media**, H. AMMARI, E. BRETIN, V. JUGNON, AND A. WAHAB, *Chapter in a Lecture Notes in Mathematics Volume*, Springer-Verlag (2011) .

(A16) **A time reversal algorithm in acoustic media with Dirac measure approximations**, E. BRETIN, C. LUCAS AND Y. PRIVAT, *Inverse Problems*, 34, 4, (2018) .

(A17) **How to position sensors in thermo-acoustic tomography**, M. BERGOUNIOUX, E. BRETIN AND Y. PRIVAT, *Inverse Problems*, 35, 7, (2019) .

— *Problèmes inverses en élastographie*

(A18) **Mathematical modeling in full-field optical coherence elastography** , H. AMMARI, E. BRETIN, P. MILLIEN, J.K. SEO, AND L. SEPPECHER, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 75,1015-1030 (2015).

(A19) **A direct linear inversion for discontinuous elastic parameters recovery from internal displacement information only**, H. AMMARI, E. BRETIN, P. MILLIEN AND L. SEPPECHER, *Numerische Mathematik*, soumis .

- (A20) **Shear modulus identification from full field static displacement data**, L. SEPPECHER, E. BRETIN, P. MILLIEN L. PETRUSCA AND E. BRUSSEAU, *soumis* .

2.2 Autres travaux

— *Travaux liés à la thèse de doctorat*

- (A21) **A modified phase field approximation for mean curvature flow with conservation of volume**, M. BRASSEL AND E. BRETIN, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34(10) 1157-1180 (2011).
- (A22) **Phase field method for mean curvature flow with boundary constraints**, E. BRETIN AND V. PERRIER, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46(06) : 1509-1526 (2012) .
- (A23) **Consistency result for a non monotone scheme for anisotropic mean curvature flow** , E. BONNETIER, E. BRETIN AND A. CHAMBOLLE, *Interfaces and Free Boundaries*, 14 1-35 (2012) .

— *Travaux effectués en post-doctorat*

- (A24) **On the Green function in visco-elastic media obeying frequency power law**, E. BRETIN, L. GUADARRAMA BUSTOS AND A. WAHAB, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34(7) : 819-830 (2011) .
- (A25) **Some Anisotropic Viscoelastic Green Functions**, E. BRETIN AND A. WAHAB, *Contemporary Mathematics*, 548, 129-149 (2012) .
- (A26) **Coherent interferometry algorithms for photoacoustic imaging**, H. AMMARI, E. BRETIN, J. GARNIER AND V. JUGNON, *SIAM J. Numerical Analysis*, 50(5) : 2259-2280 (2012) .
- (A27) **Localization, stability, and resolution of topological derivative based imaging functionals in elasticity**, H. AMMARI, E. BRETIN, J. GARNIER, W. JING, H. KANG, AND A. WAHAB, *SIAM Journal on Imaging Sciences* 6 : 2174-2212 (2013).
- (A28) **Mathematical Methods in Elasticity Imaging** , H. AMMARI, E. BRETIN, J. GARNIER, H. KANG, H. LEE, AND A. WAHAB, *Princeton Series in Applied Mathematics*, Princeton University Press, (2015) .

— *Travaux d'encadrement ou liés à de nouveaux thèmes de recherche*

- (A29) **Assessment of the effect of tissue motion in diffusion MRI : Derivation of new apparent diffusion coefficient formula** , E. BRETIN, IMEN MEKKAOUI AND JEROME POUSIN, *Inverse Problems and Imaging*, 12, 1, 125–152 (2018) .

-
- (A30) **Tomographic reconstruction from Poisson distributed data : a fast and convergent EM-TV dual approach**, V. MAXIM, Y. FENG, H. BANJAK AND E. BRETIN, *preprint*.
- (A31) **Stable IMEX schemes for a Nitsche-based approximation of elastodynamic contact problems. Selective mass scaling interpretation**, E. BRETIN AND Y. RENARD, *SMAI Journal of computational mathematics*, 6, 159-185 (2020).
- (A32) **Stability for finite element discretization of some elliptic inverse parameter problems from internal data – application to elastography**, E. BRETIN, P. MILLIEN AND L. SEPPECHER, *preprint*.

Chapitre 3

Approximation par champ de phase d'évolutions géométriques d'interfaces

Les méthodes de champ de phase représentent un outil très efficace pour l'approximation numérique d'évolutions géométriques d'interfaces $t \mapsto \partial\Omega(t)$. L'exemple le plus classique est certainement le mouvement par courbure moyenne qui s'obtient comme le flot de gradient L^2 du périmètre

$$\text{Per}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 d\sigma,$$

et dont la vitesse normale à l'interface $\partial\Omega$ s'identifie à la courbure moyenne

$$V^n = H.$$

La figure (3.1) montre un exemple de mouvement par courbure moyenne d'une forme initiale en forme de fleur.

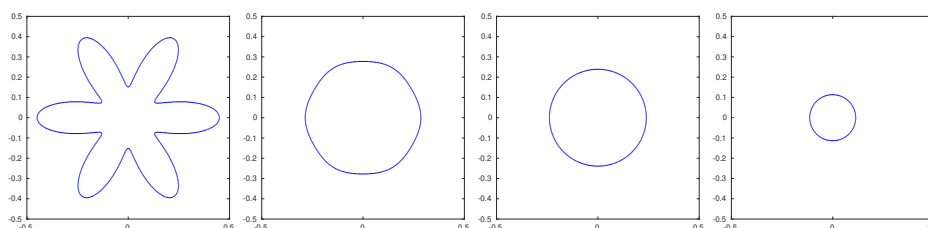


FIGURE 3.1 – Exemple de mouvement par courbure moyenne en dimension 2; chaque image représente l'interface $\partial\Omega(t)$ à différents instants t au cours du flot.

Dans ce cas précis, l'approche par champ de phase consiste alors à introduire une approximation du périmètre au sens de la Γ -convergence à l'aide d'une énergie de Cahn-Hilliard [56]

$$P_\varepsilon(u) = \int_Q \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx.$$

Ici, l'ensemble Q représente le domaine d'intégration, ε est un paramètre d'approximation et W est un potentiel double puits comme par exemple $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$. Ce résultat de Γ -convergence a en particulier été démontré par Modica et Mortola [56].

Intuitivement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le potentiel W impose à la fonction u d'être une régularisation de la fonction caractéristique d'un ensemble Ω dont la taille d'interface diffuse est de l'ordre de ε . L'énergie de Cahn-Hilliard mesure alors la longueur de transition de phase entre les phases 0 et 1 et permet d'obtenir une approximation du périmètre de l'ensemble Ω .

L'idée est alors d'approcher le mouvement par courbure moyenne en considérant le flot de gradient L^2 de l'énergie de Cahn-Hilliard conduisant ainsi à la célèbre équation d'Allen-Cahn [2]

$$\partial_t u = \Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u).$$

Le lien entre l'équation d'Allen Cahn et le mouvement par courbure moyenne s'obtient plus précisément à l'aide de développements asymptotiques des solutions u^ε de l'équation d'Allen Cahn lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, voir par exemple [26, 32, 11]. En effet, celles-ci sont attendues de la forme

$$u^\varepsilon = q \left(\frac{\text{dist}(x, \Omega^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon^2),$$

où q est un profil associé au potentiel W , Ω^ε est l'ensemble défini par

$$\Omega^\varepsilon = \{x; u^\varepsilon(x, t) \leq 1/2\},$$

et dist représente la distance signée à l'ensemble Ω^ε . On peut alors montrer que la vitesse normale V_n^ε de l'ensemble évoluant $t \mapsto \Omega^\varepsilon(t)$ s'identifie à

$$V_\varepsilon^n = H + O(\varepsilon^2).$$

En fin de compte, l'équation d'Allen Cahn associée à la condition initiale bien préparée $u(x, 0) = q \left(\frac{\text{dist}(x, \Omega(0))}{\varepsilon} \right)$, permet d'obtenir une approximation du mouvement par courbure moyenne $t \mapsto \partial\Omega(t)$ avec une erreur sur la position de l'interface de l'ordre de ε^2 . Le modèle de champ de phase est ici d'ordre 2.

D'un point de vue pratique, l'efficacité des méthodes de champ de phase est aussi liée à la complexité numérique nécessaire pour la résolution des équations associées. Dans le cas du mouvement par courbure moyenne, l'équation d'Allen Cahn est une équation de réaction diffusion dont les termes de diffusion sont linéaires et homogènes en espace et peuvent donc se traiter efficacement avec des approches spectrales. Pour les différents problèmes d'approximation de flots présentés dans ce manuscrit, nous avons considéré des équations de champ de phase sur des ensembles cartésiens Q couplées à des conditions périodiques permettant ainsi l'utilisation de la transformée de Fourier pour traiter implicitement les opérateurs de dérivation linéaires et homogènes. Une partie de mon travail de modélisation a consisté à introduire des modèles de champ de phase qui permettent de bien approcher les flots considérés tout en étant suffisamment simples pour en déduire des schémas de discrétisation efficaces.

Dans le cas de l'équation d'Allen Cahn, il est par exemple possible d'utiliser le schéma semi-implicite d'ordre 1 en temps suivant

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta_t} = \Delta u^{n+1} - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u^n),$$

dont l'implémentation numérique est simplifiée avec un traitement explicite des termes non linéaires. Ici l'approximation u^{n+1} de la solution u à l'instant $t^{n+1} = (n+1)\delta_t$ vérifie la formule de récurrence suivante

$$u^{n+1} = \left(\frac{1}{I_d - \delta_t \Delta} \right)^{-1} \left(u^n - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u^n) \right),$$

où l'action de l'opérateur $\left(\frac{1}{I_d - \delta_t \Delta} \right)^{-1}$, associé au symbole $\sigma(\xi) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 dt |\xi|^2}$, s'obtient par simple application de la transformée de Fourier discrète. La stabilité numérique d'un tel schéma nécessite cependant une condition CFL de la forme $\delta_t \leq C\varepsilon^2$ où la constante C dépend de la régularité du potentiel W utilisé. Il faut noter que cette condition n'est pas complètement déraisonnable. En effet, le schéma numérique utilisé est d'ordre 1 en temps alors que l'approximation du modèle d'Allen Cahn vers le mouvement par courbure moyenne est quant à lui en $O(\varepsilon^2)$. Ces deux erreurs que sont l'erreur d'approximation de champ de phase et l'erreur de discrétisation numérique apparaissent donc au même ordre avec cette CFL. La figure (3.2) présente un script **Matlab** implémentant le schéma numérique précédent en quelques lignes. La figure (3.3) montre des approximations de solution de l'équation d'Allen Cahn à différents instants t obtenues avec ce script.

```

1 - clear all; clf;
2 - %%%%%%%%%%%%% parametres %%%%%%%%%%%%%
3 - N = 2^9; epsilon = 2/N; dt = epsilon^2;
4 - %%%%%%%%%%%%% initialisation u(x,0) %%%%%%%%%%%%%
5 - x = linspace(-1/2,1/2,N); [X1,X2] = meshgrid(x,x);
6 - Theta = angle(X1 + 1i*X2);
7 - dist = sqrt( X1.^2 + X2.^2) - 0.3*(1 + 0.5*cos(6*Theta));
8 - U = 1/2 - tanh(dist/(2*epsilon^2))/2;
9
10 - %%%%%%%%%%%%% Noyau de la chaleur %%%%%%%%%%%%%
11 - k = [0:N/2, -N/2+1:-1]; [K1,K2] = meshgrid(k,k);
12 - M = 1./(1 + 4*pi^2*dt*(K1.^2 + K2.^2));
13
14 - T = 0.06; T_vec = linspace(0,1.1*T,6); j_sauvegarde = 1;
15 - for n=1:T/dt,
16 - %%%%%%%%%%%%% Schéma semi-implicite %%%%%%%%%%%%%
17 - W_prim = U.*(U-1).*(2*U - 1);
18 - U = real(ifft2(M.*fft2(U - dt/epsilon^2*(W_prim))));
19 - if (n*dt > T_vec(j_sauvegarde))
20 -     imagesc(x,x,U); caxis([0,1]); axis square; colormap('jet'); colorbar;
21 -     name_fig = ['Test_AllenCahn_', num2str(j_sauvegarde), '.eps'];
22 -     print('-depsc', name_fig)
23 -     j_sauvegarde = j_sauvegarde + 1;
24 - end
25 - end

```

FIGURE 3.2 – Script **Matlab** qui permet d'obtenir une approximation numérique de l'équation d'Allen Cahn en utilisant le schéma numérique semi-implicite présenté dans cette section.

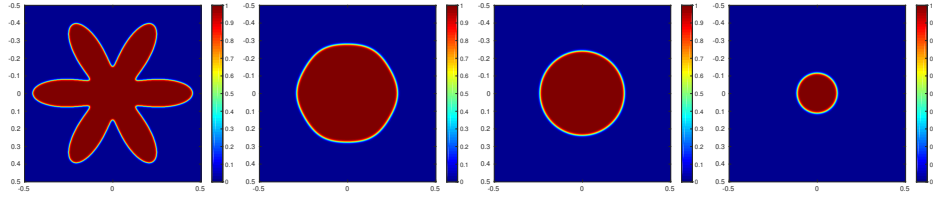


FIGURE 3.3 – Exemple d’approximation de mouvement par courbure moyenne en résolvant l’équation d’Allen Cahn. Chaque image représente la solution u à différents instants t . Le code utilisé est présenté à la figure (3.2).

Notons qu’il est possible de relaxer la contrainte de stabilité $\delta_t \leq C\varepsilon^2$ en considérant une variante de la forme

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta_t} = (\Delta - \alpha/\varepsilon^2 I_d)u^{n+1} - \frac{1}{\varepsilon^2}(W'(u^n) - \alpha u^n).$$

Le paramètre de stabilisation α permet en effet de garantir, sous réserve d’être suffisamment grand, un critère de stabilité énergétique assurant la décroissance de l’énergie de Cahn-Hilliard au cours des itérations et sans aucune restriction sur le pas de temps δ_t . Ce gain en stabilité cache cependant une perte de précision du schéma numérique.

Nous avons avec ce qui précède illustré l’efficacité des méthodes de champ de phase pour approcher le mouvement par courbure moyenne de bords de domaines en présentant un modèle d’ordre 2 en ε et une approche numérique très simple et efficace pour la résolution de l’équation d’Allen Cahn. Ce n’est malheureusement pas toujours aussi simple dans le cas de flots d’ordre supérieur, des modèles multiphases ou encore avec l’ajout de contraintes supplémentaires. En effet, ces modèles de champ de phase peuvent facilement perdre un ordre de précision ou encore conduire à des systèmes d’équations difficile à intégrer numériquement, ce qui les rend en pratique inutilisables. Une partie de mes contributions a donc consisté à proposer des variantes pour retrouver l’efficacité de l’approche par champ de phase qu’on observe dans le cas du mouvement par courbure moyenne simple.

Voici une synthèse de ces contributions que j’ai regroupées par thématique selon les types de flots considérés.

3.1 Modèles multi-phases, ordre et mobilités

Cette première partie concerne des modèles multi-phases intervenant dans de nombreuses applications physiques où apparaissent des énergies d’interface de la forme

$$P(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{i,j} \text{Aire}(\Gamma_{i,j}).$$

Ici $\Gamma_{i,j} = \Omega_i \cap \Omega_j$ représente l’interface entre les phases Ω_i et Ω_j et $\sigma_{i,j}$ le coefficient de tension de surface associé à $\Gamma_{i,j}$. Dans le cadre des méthodes de champ de phase, E.

Oudet [61] avait par exemple proposé d'utiliser un modèle multi-phase homogène ($\sigma_{i,j} = 1$) pour essayer de retrouver les partitions optimales de Weaire et Phelan [69] liées à la conjecture de Kelvin. D'autres exemples d'applications que nous visons concernent la croissance de nanofils de type VLS ou encore des problèmes de mouillage d'une phase liquide sur un support rugueux.

L'avantage d'utiliser un modèle homogène est de pouvoir exprimer cette énergie d'interface comme la somme de périmètres de phase :

$$P(\Omega) = \sum_i \text{Per}(\Omega_i).$$

On en déduit alors une approximation de champ de phase très simple obtenue comme la somme des énergies de Cahn-Hilliard [56] sur chacune des phases.

$$P_\varepsilon(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \int_Q \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_i|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_i) \right) dx,$$

en imposant que $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ vérifie la contrainte de partition $\sum u_i = 1$.

Le problème est que l'hypothèse d'homogénéité $\sigma_{i,j} = 1$ n'est pas vérifiée dans la plupart des applications que nous visons et des approches alternatives doivent être élaborées.

3.1.1 Un modèle multi-phase dans le cas non homogène

Dans un premier travail en collaboration avec S. Masnou et qui a fait l'objet de la publication [A1], nous avons proposé une généralisation de cette approche dans le cas non homogène. Il existe en effet dans la littérature un certain nombre de modèles permettant de traiter le cas général de coefficients de tension de surface comme par exemple les travaux de Garcke et al [41, 40] où les auteurs proposent des modèles de la forme

$$P_\varepsilon(\mathbf{u}) = \int_Q \varepsilon f(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{W}(\mathbf{u}) dx,$$

considérant des termes de diffusion et des potentiels multi-phases du type

$$f(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\alpha_{i,j}}{2} |u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i|^2 \text{ et } \mathbf{W}(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2} \alpha_{i,j} u_i^2 u_j^2 + \sum_{i<j<k} \alpha_{i,j,k} u_i^2 u_j^2 u_k^2$$

Ce type d'approche a malheureusement un certain nombre d'inconvénients. Tout d'abord, la démarche n'est pas vraiment constructive dans le sens où il est difficile de déterminer le choix de coefficients $\alpha_{i,j}$ et $\alpha_{i,j,k}$ pour être consistant avec un jeu de coefficients de tension de surface σ_{ij} donné. Il n'existe pas non plus à ma connaissance de preuve de Γ -convergence pour ce type de modèle. Enfin, le traitement numérique de ces modèles introduit aussi des difficultés supplémentaires car les opérateurs de diffusion associés sont non linéaires et mal conditionnés.

Notre démarche a donc consisté à nous recentrer sur des coefficients de tension de surface additifs, i.e ceux pour lesquels il existe des coefficients positifs σ_i tels que $\sigma_{i,j} = \sigma_i + \sigma_j$. En nous inspirant des travaux d'Esedoglu et Otto [36], nous avons traité le cas des coefficients $\sigma_{i,j}$ dits ℓ^1 -plongeable. L'intérêt est de pouvoir encore une fois exprimer l'énergie d'interface

$$P(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{i,j} \text{area}(\Gamma_{i,j}).$$

comme une somme d'énergies de bords d'ensembles

$$P(\Omega) = \sum_{S \subset \{1,2,\dots,N\}} \sigma_S \text{Per}(\cup_{i \in S} \Omega_i),$$

où les coefficients σ_S sont positifs et dépendent des coefficients $\sigma_{i,j}$. L'avantage est que cette somme peut s'approcher avec le modèle de Cahn-Hilliard suivant

$$P_\varepsilon(\mathbf{u}) = \int_Q \left[\sum_{S \subset \{1,2,\dots,N\}} \sigma_S \left(\frac{\varepsilon}{2} \left| \nabla \left(\sum_{i \in S} u_i \right) \right|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W \left(\sum_{i \in S} u_i \right) \right) \right] dx$$

Nous en déduisons facilement une preuve de Γ -convergence de P_ε vers le périmètre multi-phase précédent en utilisant des arguments similaires au cas homogène. Par la suite, une difficulté de ce travail était d'obtenir un modèle qui ne dépendait pas explicitement de la décomposition précédente et des coefficients σ_S . Nous avons réussi à identifier un modèle de champ de phase équivalent de la forme

$$P_\varepsilon(\mathbf{u}) = \int_Q -\frac{\varepsilon}{4} \sigma \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{W}_\sigma(\mathbf{u}) dx,$$

où les termes de diffusion s'écrivent

$$\sigma \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \sum_{i,j=1}^N \sigma_{i,j} \nabla u_i \cdot \nabla u_j,$$

et les potentiels multi-phases $\mathbf{W}_\sigma(\mathbf{u})$ se décomposent de la façon suivante :

$$\mathbf{W}_\sigma(\mathbf{u}) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{i,j} u_i^2 u_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{i < j, k \neq i, k \neq j} \sigma_{i,k,j} u_i u_j u_k^2 + \sum_{i < j < k < l} \sigma_{i,j,k,l} u_i u_j u_k u_l,$$

avec

$$\sigma_{i,j,k} = (\sigma_{i,k} + \sigma_{j,k} - \sigma_{i,j}), \quad \sigma_{i,j,k,l} = 6\sigma_{i,j,k,l}^* - \sum_{(i',j') \subset \{i,j,k,l\}, i' < j'} \sigma_{i',j'},$$

et le poids $\sigma_{i,j,k,l}^*$ choisi arbitrairement dans l'intervalle

$$I_{i,j,k,l} = \left(\min_{i' \in \{i,j,k,l\}} \left\{ \sum_{\{j',k',l'\} \subset \{i,j,k,l\} \setminus \{i'\}} \frac{\sigma_{i',j'} + \sigma_{i',k'} + \sigma_{i',l'}}{2} \right\}, \max_{\{i',j',k',l'\} \in \{i,j,k,l\}} \left\{ \frac{\sigma_{i',j'} + \sigma_{k',l'}}{2} \right\} \right).$$

D'un point de vue numérique, cette énergie ne pose pas vraiment de difficultés par rapport à un modèle homogène, les opérateurs de diffusion étant aussi homogènes en espace. Un certain nombre d'expériences numériques témoignent alors de la flexibilité et de l'efficacité d'une telle approche. Nous avons ici utilisé des schémas de discrétisation semi-implicites avec splitting où les traitements des termes implicites sont effectués dans l'espace de Fourier [25]. Concernant les termes explicites, le splitting est généralement choisi afin que ces derniers dérivent d'une énergie concave, assurant ainsi la décroissance de l'énergie sans contrainte de stabilité sur le pas de temps. Une technique de splitting convexe-concave a été introduite par Eyre [38] dans le cas de l'énergie de Cahn-Hilliard avec

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(u) &= \int_Q \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_Q \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \left(W(u) - \frac{\alpha}{2} u^2 \right) dx \end{aligned}$$

où le deuxième terme correspond à la partie explicite et s'avère concave lorsque $\alpha > \sup_s \{W''(s)\}$. Plus précisément, la stabilité de la méthode s'obtient en remarquant que le traitement semi-implicite de P_ε est équivalent à un traitement implicite d'une énergie \tilde{P}_ε où les termes "explicites" ont simplement été linéarisés autour de la solution courante u_n :

$$\tilde{P}_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_Q \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \left(W(u_n) - \frac{\alpha}{2} u_n^2 \right) + (W'(u_n) - \alpha u_n) u dx.$$

L'hypothèse de concavité des termes explicites permet de contrôler l'énergie d'origine P_ε par \tilde{P}_ε , et d'assurer ainsi la stabilité du schéma de discrétisation en temps au sens où l'énergie décroît au cours des itérations.

Dans une dernière partie de l'article [A1], nous nous sommes intéressés à la modélisation de l'évolution d'une gouttelette sur des supports solides. L'idée est d'ajouter des contraintes de volume supplémentaires tout en figeant la phase solide du système. La figure (3.4) présente une telle approximation pour laquelle l'influence des coefficients de tension de surface sur la dynamique des interfaces est retrouvée. On remarquera ici que les angles de contact entre les gouttelettes et le support solide sont bien traités de manière implicite directement dans l'énergie de Cahn-Hilliard et non en utilisant des conditions de Neumann comme c'est généralement le cas dans la littérature pour ce type d'expériences numériques.

3.1.2 Cas d'un grand nombre de phases

Dans le cadre de l'ANR DIGITAL SNOW, j'ai eu l'occasion de travailler avec R. Denis, E. Oudet et de J.-O. Lachaud sur la conjecture de Kelvin [69] concernant le pavage de l'espace \mathbb{R}^3 par des cellules de volumes identiques et de surface minimale. Nous souhaitions initialement infirmer cette conjecture en recherchant une partition meilleure que celle proposée par Weaire et Phelan. En effet, cette structure a été trouvée en optimisant une partition du cube (en conditions périodiques) avec 8 phases

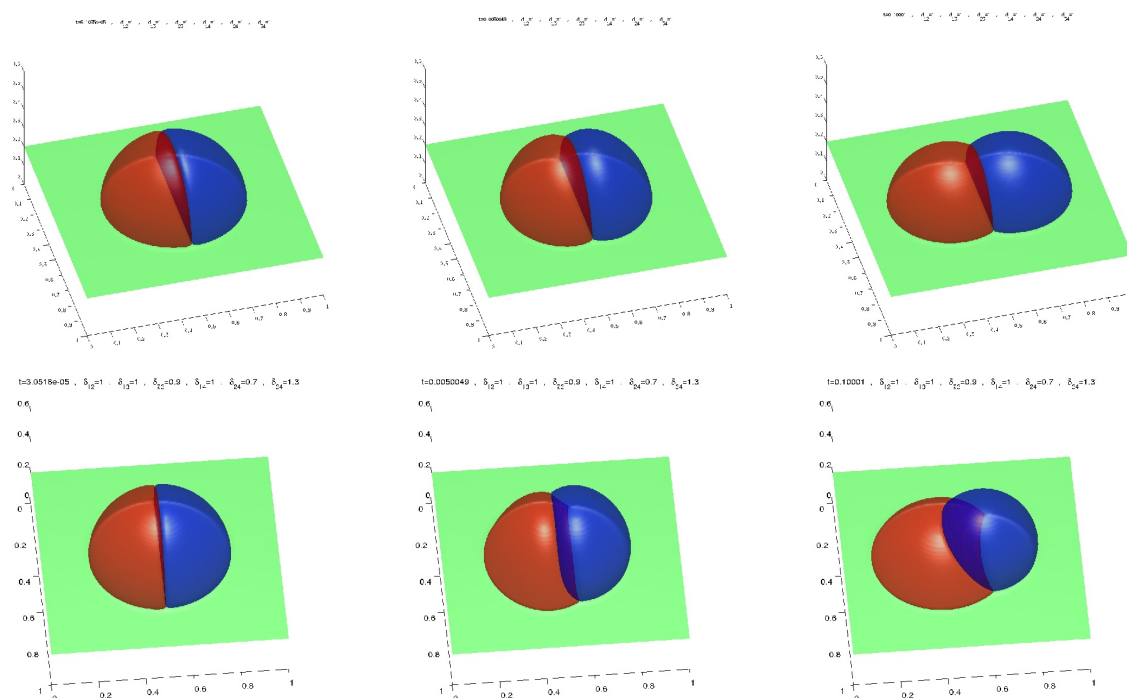


FIGURE 3.4 – Exemples d'évolution de deux gouttelettes (phases 1 et 2) sur un support solide (phase 4); chaque ligne représente l'évolution des différentes phases u_i à différents instants t obtenues avec la résolution du système d'équation d'Allen Cahn. Le jeu de coefficients de tension de surface est homogène pour la première ligne ($\sigma_{i,j} = 1$) et correspond à ($\sigma_{1,2} = 1$, $\sigma_{1,3} = 1$, $\sigma_{2,3} = 0.9$, $\sigma_{1,4} = 1$, $\sigma_{2,4} = 0.7$, $\sigma_{3,4} = 1.3$) pour la seconde ligne.

seulement. Mais l'utilisation d'un plus grand nombre de phases permet aussi d'atteindre des pavages périodiques plus complexes, nous laissant ainsi espérer trouver une structure avec de meilleures propriétés dans \mathbb{R}^3 . L'objectif visé était donc de développer une approche numérique suffisamment efficace pour être capable de traiter plus d'une centaine de phases en 3D. Ce travail est publié dans l'article [A2].

L'utilisation d'un grand nombre de phases nous a posé des difficultés de gestion de mémoire et a nécessité d'introduire une représentation creuse de chacune des phases ainsi que des opérateurs de troncatures. La conséquence directe a été l'apparition de pertes de volume des phases, rendant ainsi inexploitable les modèles de champ de phase classiques. Ce qui semblait n'être initialement qu'un problème de discrétisation numérique s'est avéré être par la suite un problème de modélisation mathématique avec un modèle de champ de phase pas assez précis dans ce contexte d'un grand nombre de phases. Nous avons ainsi effectué une analyse asymptotique formelle de ce modèle de système d'Allen-Cahn homogène en suivant la méthode des papiers [26, 11, 40] afin d'identifier l'origine de cette perte de précision.

Plus précisément, nous nous sommes intéressés à la minimisation de l'énergie de Cahn-Hilliard multiphase

$$P_\varepsilon(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \int_Q \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_i|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_i) \right) dx,$$

couplée à des contraintes de volume supplémentaires sur chaque phase. L'idée est alors de considérer le flot de gradient L^2 de P_ε et ainsi obtenir le système d'équations suivant

$$\partial_t u_i(x, t) = \Delta u_i(x, t) - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u_i) + \lambda(x, t) + \mu_i(t) \sqrt{2W(u_i)}, \quad (3.1)$$

où λ et μ_i représentent respectivement les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes $\sum u_i = 1$ et $\int_Q u_i dx = V_i$.

Remarque 1. Le choix particulier de la forme $\mu_i(t) \sqrt{2W(u_i)}$ au lieu de $\mu_i(t)$ pour la conservation de la masse de u_i vient du travail publié avec M. Brassel dans l'article [A21] où nous montrons qu'il est possible de gagner un ordre de précision sur la conservation de volume en utilisant cette forme non variationnelle du multiplicateur de Lagrange.

Les développements asymptotiques des solutions de champ de phase autour de l'interface $\Gamma_{i,j}$ montrent que la solution \mathbf{u}^ε de (3.1) vérifie

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon &= q \left(\frac{\text{dist}(x, \Omega_i^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon), \\ u_j^\varepsilon &= 1 - q \left(\frac{\text{dist}(x, \Omega_j^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon), \\ u_k^\varepsilon &= O(\varepsilon), \text{ for } k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i, j\}, \end{cases}$$

Remarque 2. On rappelle que dans le cas de l'équation d'Allen-Cahn à une phase, le modèle apparaît à l'ordre 2 avec des solutions u^ε de la forme

$$u^\varepsilon = q \left(\frac{\text{dist}(x, \Omega^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon^2).$$

Ici, la fonction q est le profil de champ de phase associé au potentiel W , $\Omega^\varepsilon = \{x; u(x, t) \leq 1/2\}$ et $dist$ représente la distance signée à l'ensemble Ω^ε . Ce développement montre en particulier que la masse de u est bien localisée dans l'ensemble Ω^ε . Dans le cas d'un ensemble régulier, il est aussi possible de montrer en utilisant la symétrie du profil q que la masse de u est une bonne approximation du volume de Ω^ε en $O(\varepsilon)$:

$$Vol(\Omega^\varepsilon(t)) = \int_Q u(x, t) dx + O(\varepsilon^2).$$

Pour revenir au cas multi-phase, ce résultat montre une approximation à l'ordre 1 seulement où chaque phase semble avoir une contribution en $O(\varepsilon)$ sur chacune des interfaces $\Gamma_{i,j}$. Lorsque le nombre N de phases utilisées est de l'ordre de $O(1/\varepsilon)$, cette contribution s'évalue en $O(1)$ par rapport à ε et implique des pertes de volume non négligeables en pratique. L'utilisation de ce modèle de champ de phase n'est donc plus adapté pour traiter un grand nombre de phases.

Nous avons eu l'idée de corriger ce modèle en perturbant la forme du multiplicateur de Lagrange λ dans (3.1). On propose ainsi de le multiplier par un poids $\sqrt{2W(u_i)}$ afin de concentrer sa contribution sur la phase u_i au bord de l'interface $\partial\Omega_i$ seulement. Cette stratégie conduit au système d'Allen Cahn suivant

$$\partial_t u_i(x, t) = \Delta u_i(x, t) - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u_i) + \lambda(x, t) \sqrt{2W(u_i)} + \mu_i(t) \sqrt{2W(u_i)}.$$

L'intérêt est que les développements asymptotiques montrent maintenant une approximation d'ordre 2 :

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon &= q\left(\frac{dist(x, \Omega_i^\varepsilon)}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^2), \\ u_j^\varepsilon &= 1 - q\left(\frac{dist(x, \Omega_i^\varepsilon)}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^2), \\ u_k^\varepsilon &= O(\varepsilon^2), \text{ for } k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i, j\}. \end{cases}$$

D'un point de vue numérique, ce nouveau système ne pose pas de difficultés supplémentaires. L'avantage est qu'il permet de corriger efficacement les pertes de volume observées avec l'utilisation du modèle initial. La figure 3.5 présente ainsi deux expériences numériques en dimensions 2 et 3 pour lesquelles on augmente le nombre de phases au cours des itérations.

Finalement, et malgré des centaines de simulations numériques en dimension 3 réalisées en variant le nombre de phases et en utilisant des initialisations aléatoires, nous n'avons jamais réussi à trouver une meilleure structure que celle proposée par Weaire et Phelan et donc à contredire numériquement la conjecture de Kelvin.

3.1.3 Modèle de croissance de nanofil et introduction de la mobilité

En 2014, nous avons entamé avec S. Mansou une collaboration avec deux physiciens de l'Institut des Nanotechnologie de Lyon sur la modélisation de la croissance de nanofils. La motivation initiale d'A. Danescu et de J. Penuelas était de comprendre,

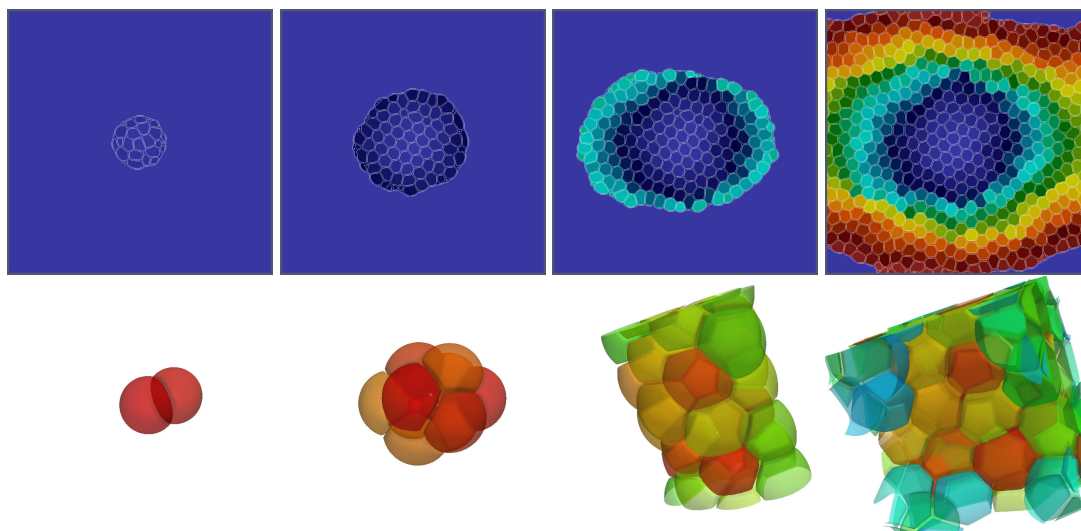


FIGURE 3.5 – Exemples de simulations numériques obtenues à partir de notre modèle de champ de phase et en utilisant un grand nombre de phases en dimension 2 et 3. La première ligne présente une évolution en $2D$ à différents instants t où le nombre de phases augmente au cours des itérations jusqu'à obtenir environ 1000 phases. La deuxième ligne représente une simulation $3D$ avec un nombre maximal de 100 phases de même volume.

grâce à des expériences numériques, l'influence des paramètres de simulations expérimentales sur la présence de pathologies dans la structure des nanofils. La figure (3.6) présente des exemples de nanofils obtenus par J. Penuelas. Le principe de la croissance de type VLS consiste à déposer une goutte d'or sur un substrat puis à vaporiser des atomes de silicium sur l'ensemble. La goutte d'or agit alors comme un catalyseur, les atomes se fixent à l'interface or-silicium et le nanofil commence à croître.

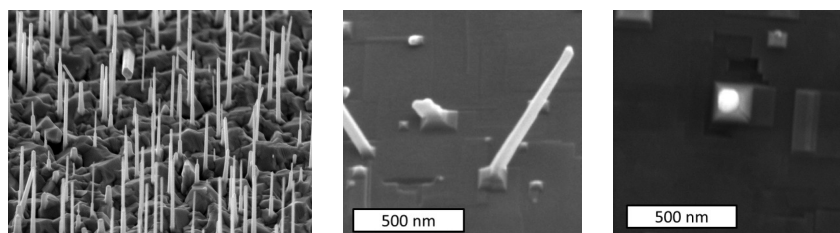


FIGURE 3.6 – Exemple de nanofils de type VLS obtenus par J. Penuelas

A cette échelle, seules les énergies d'interfaces entre les phases solide (silicium), liquide (or) et vapeur (vide) ont une réelle contribution dans la dynamique de croissance. Le modèle est par ailleurs très sensible puisque la taille du pied du nanofil dépend fortement de l'angle de contact donné par la loi de Herring [48] au niveau des lignes triples. Il est assez délicat en pratique d'obtenir des simulations numériques quantitatives avec des modèles classiques de la littérature, ces modèles étant généralement d'ordre 1 et pas suffisamment précis pour bien approcher ces angles. Une deuxième difficulté est que l'interface solide-vapeur est fixe alors que l'interface so-

lide -liquide évolue lors de la croissance. Ce point a nécessité d'introduire une notion de mobilité en considérant des mouvements par courbure moyenne multiphase où la vitesse normale de l'interface $\Gamma_{i,j}$ vérifie

$$V_{i,j}^n = m_{i,j} \sigma_{i,j} H_{i,j}.$$

Il suffit alors d'imposer un choix de mobilité nulle $m_{i,j} = 0$ pour figer l'interface $\Gamma_{i,j}$. Nous avons ici adopté un point de vue métrique et non énergétique comme c'est généralement le cas dans les modèles champ de phase. Ces recherches ont abouti à la rédaction des deux papiers [A3,A4].

Dans un premier article [A3], nous introduisons un modèle de champ de phase d'ordre 2 qui se restreint à des jeux de mobilités pseudo-additives. Ce modèle est validé par la suite quantitativement en reproduisant une croissance de nanofil dans le cas isotrope et en comparant la forme du pied avec celle obtenue théoriquement. Dans un deuxième travail, nous exploitons la décomposition d'un jeu de coefficients de mobilité quelconque comme une somme de jeux de mobilités pseudo-additives pour obtenir un modèle d'Allen Cahn d'ordre 2 permettant de traiter très facilement toutes sortes de mobilités.

Dans les approches classiques, voir par exemple le papier de référence de Garcke et al [41], l'idée consiste généralement à intégrer la mobilité $m_{i,j}$ directement dans l'énergie de Cahn-Hilliard. Des termes de diffusion de la forme

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = \sum_{i < j} m_{i,j} \sigma_{i,j} |u_i \nabla u_j - u_j \nabla u_i|^2$$

sont ainsi couplés avec les potentiels multi-puits de type

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1, i < j}^N \frac{\sigma_{i,j}}{m_{i,j}} u_i^2 u_j^2 + \sum_{i < j < k} \sigma_{i,j,k} u_i^2 u_j^2 u_k^2.$$

Mais l'inconvénient d'une telle approche est que la taille des interfaces diffuses va alors dépendre du coefficient de mobilité $m_{i,j}$, limitant ainsi ces modèles à traiter le cas de grandes variations dans les coefficients de mobilité.

Comme notre application concernait la modélisation de la croissance de nanofils, nous avons restreint notre cadre de travail à des jeux de coefficients de tension de surface additifs, $\sigma_{i,j} = \sigma_i + \sigma_j$, hypothèse toujours vérifiée lorsque le système est composé de trois phases seulement. Nous nous sommes alors intéressés au système d'Allen Cahn suivant

$$\partial_t u_i(x, t) = m_i \left[\sigma_i \left(\Delta u_i(x, t) - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u_i(x, t)) \right) + \lambda(x, t) \sqrt{2W(u_i)} \right].$$

L'analyse asymptotique de ce système montre un modèle d'ordre 2 et dont la mobilité $m_{i,j}$ du flot limite vérifie

$$\frac{1}{m_{i,j}} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}.$$

On appelle par la suite mobilités "pseudo-additives", l'ensemble des jeux de mobilités $m_{i,j}$ vérifiant une telle décomposition. A titre d'exemple (avec la convention $\frac{1}{0^+} = +\infty$), il est par exemple possible d'utiliser ce modèle pour traiter le jeu de mobilités

$$(m_{LV}, m_{VS}, m_{LS}) = (1, 0, 0)$$

où la phase solide est fixe. En revanche, le jeu $m_{LV} = m_{LS} = 1$ et $m_{VS} = 0$ où seule l'interface vapeur-solide est fixe, comme dans le cas du nanofil, n'est pas pseudo-additif. Afin de traiter ces jeux de mobilités non additives, nous avons proposé dans l'article [A3] un deuxième modèle où le système d'Allen est multiplié par une matrice de mobilité. Nous n'avons pas retenu ce point de vue par la suite car ce modèle apparaît d'ordre 1 seulement et pose de nombreuses difficultés numériques. Finalement, pour revenir à la modélisation de croissance de nanofils, nous avons proposé d'utiliser une approche quasi-statique associée au jeu de mobilités suivant

$$(m_{S,L}, m_{L,V}, m_{V,S}) = \left(\frac{\delta}{1+\delta}, \frac{1}{2}, \frac{\delta}{1+\delta} \right),$$

qui repose sur l'hypothèse valable physiquement que l'interface liquide-vapeur évolue beaucoup plus vite que les interfaces solide-liquide et solide-vapeur, permettant ainsi d'obtenir un premier modèle de champ de phase reproduisant la croissance de nanofils de manière quantitative. La figure (3.7) montre une simulation numérique 3D obtenue avec notre approche.

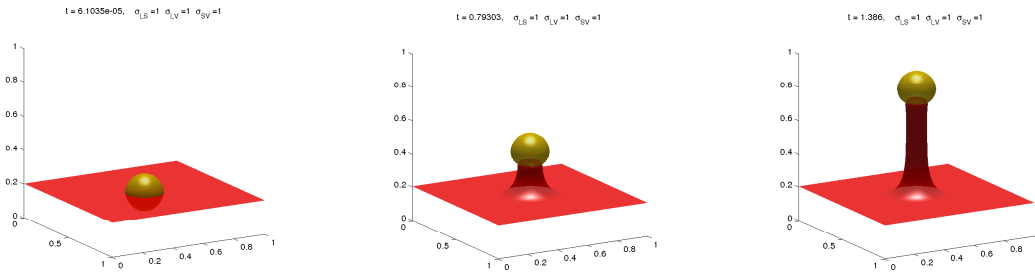


FIGURE 3.7 – Exemple de simulation numérique de la croissance d'un nanofil obtenue avec notre modèle quasi-statique de champ de phase. Chaque image représente les différentes phases au cours des itérations. On observe ainsi la croissance du nanofil guidée par la position de la goutte d'or.

Pour revenir au cas général de mobilités, nous avons proposé dans un travail plus récent [A4] un modèle basé sur la décomposition des mobilités en une somme de P jeux de mobilités additives :

$$m_{ij} = \sum_{p=1}^P m_{ij}^p, \text{ où } \frac{1}{m_{ij}^p} = \frac{1}{m_i^p} + \frac{1}{m_j^p}.$$

Remarque 3. On notera qu'une telle décomposition est toujours possible à partir du moment où les mobilités $m_{i,j}$ sont positives. Un choix canonique correspond d'ailleurs à utiliser

$$m_{ij} = \sum_{1 \leq k < l \leq N} m_{ij}^{kl}, \text{ avec } m_{ij}^{kl} = \delta_k(i)\delta_k(j).$$

En effet, il est possible de vérifier que

$$\frac{1}{m_{ij}^{kl}} = \frac{1}{m_i^{kl}} + \frac{1}{m_j^{kl}}, \text{ où } m_i^{kl} = 2m_{kl}(\delta_k(i) + \delta_l(i)).$$

A partir de cette décomposition, nous en déduisons le modèle suivant en utilisant une sorte d'homogénéisation en temps :

$$\partial_t u_i = m_i^* \left[\sigma_i \left(\Delta u_i - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u_i) \right) + \lambda_i \sqrt{2W(u_i)} \right],$$

où

— le coefficient m_i^* vérifie

$$m_i^* = \sum_{p=1}^P m_i^p.$$

— le multiplicateur de Lagrange λ_i s'explique sous la forme

$$\lambda_i = \frac{1}{m_i^*} \sum_{p=1}^P m_i^p \lambda^p, \quad \text{avec } \lambda^p = - \left(\frac{\sum_{k=1}^N m_k^p \sigma_k \left(\Delta u_k^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u_k^\varepsilon) \right)}{\sum_{k=1}^N m_k^p \sqrt{2W(u_k)}} \right).$$

L'étude asymptotique de ce système montre toujours un modèle de champ de phase d'ordre 2 et dont la loi limite correspond parfaitement à la mobilité initiale $m_{i,j}$. Ce résultat permet en fin de compte de traiter toutes formes de mobilités tout en gardant de bonnes propriétés de modélisation champ de phase. D'un point de vue numérique, ce système ne pose pas de problèmes supplémentaires avec un traitement semi-implicite toujours en suivant l'idée de splitting convexe-concave. La figure (3.8) présente trois exemples de simulations numériques obtenues avec un système d'énergie isotrope mais en utilisant trois jeux de mobilités différents, dont un qui n'est pas pseudo-additif.

3.2 Diffusion de surface et équation de Cahn-Hilliard

Nous avons par la suite continué à travailler avec A. Danescu et J. Penuelas dans le cadre du projet ANR BEEP porté par J. Penuelas. Notre contribution concerne ici l'approximation numérique du mouillage d'une gouttelette sur un support rugueux. L'objectif était de comprendre comment optimiser la position des nanofils pour faciliter leur mouillage. Ces travaux ont aussi été effectués dans le cadre de la thèse de G. Terii et du travail de postdoctorat d'A. Sengers.

Les modèles classiques de diffusion de surface s'obtiennent généralement à l'aide du flot de gradient H^{-1} de l'énergie de Cahn-Hilliard. On obtient ainsi l'équation de Cahn-Hilliard

$$u_t = -\Delta \left(\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \right).$$

Ce modèle garantit une conservation locale de la masse contrairement à l'utilisation d'une équation d'Allen Cahn conservée dont la conservation du volume est seulement

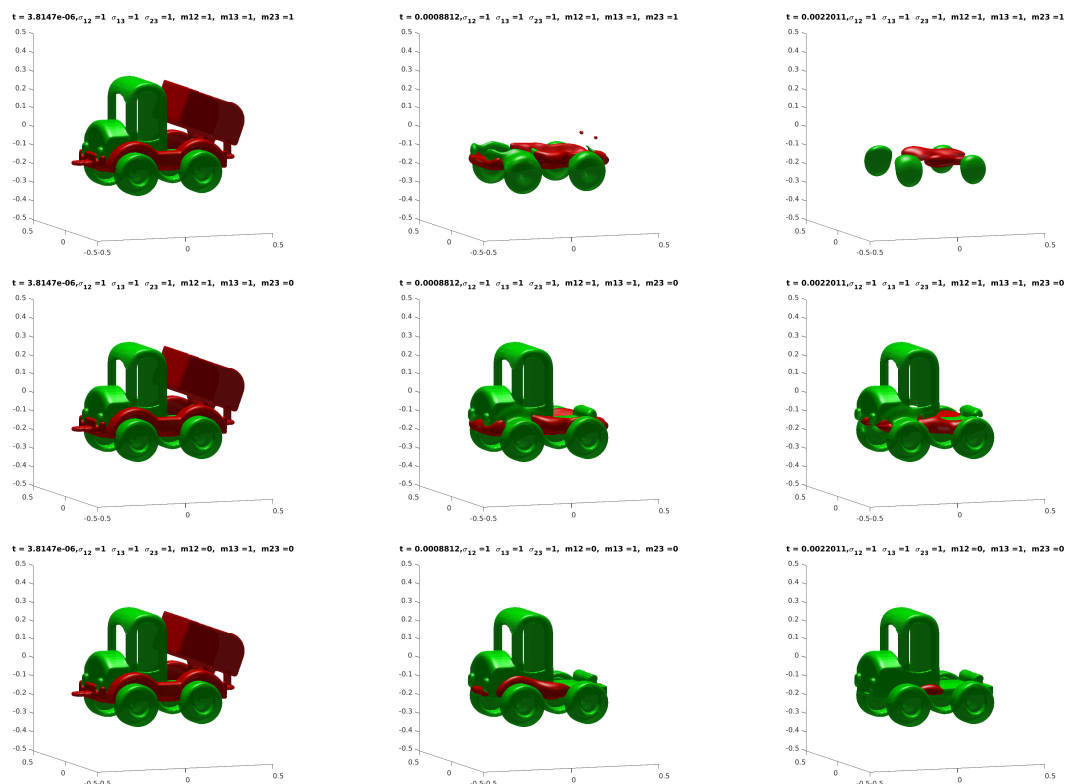


FIGURE 3.8 – Exemples numériques 3D avec des coefficients de tension de surface homogène. Chaque ligne correspond respectivement à un jeu de coefficients de mobilités donné par $(m_{12}, m_{13}, m_{23}) = (1, 1, 1)$, $(m_{12}, m_{13}, m_{23}) = (1, 1, 0)$ et $(m_{12}, m_{13}, m_{23}) = (0, 1, 0)$. Les images représentent les lignes de niveau $1/2$ de u_1 en rouge et de u_2 en vert.

globale et semble moins coller à la physique du mouillage. Les méthodes numériques permettant d'intégrer des angles de contact suivant la loi de Young s'effectuent généralement en rajoutant des conditions de Neumann non linéaires, ou encore des énergies de surface sur le bord du domaine de calcul [21, 68].

L'idée de départ de ce travail était d'essayer d'adapter l'approche développée précédemment sur les systèmes d'Allen Cahn avec une mobilité nulle sur la phase solide afin de la fixer. On rappelle que l'avantage de cette approche est de traiter les angles de contact de manière implicite directement dans l'énergie de Cahn-Hilliard sans avoir besoin d'introduire des conditions de bord supplémentaires. Nous nous sommes donc naturellement intéressés à la version suivante du système de Cahn-Hilliard

$$\partial_t u_i(x, t) = -m_i \Delta \left[\sigma_i \left(\Delta u_i(x, t) - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u_i(x, t)) \right) + \lambda(x, t) \right],$$

où le terme λ représente toujours le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de partition $\sum_i u_i = 1$. Mais, contrairement au système d'Allen-Cahn, l'aspect non local du flot limite de l'équation de Cahn-Hilliard rend l'étude asymptotique d'un tel système assez délicate. Il n'existe pas d'ailleurs à ma connaissance de tel résultat même dans le cas formel, sans mobilité et avec des coefficients de tension de surface $\sigma_{i,j}$ homogènes.

3.2.1 Cas d'un modèle biphasique

On rappelle que, dans le cas de l'équation de Cahn-Hilliard à deux phases, le flot limite est donné par le modèle de Hele-Shaw [20, 63, 54] où la vitesse normale de l'interface vérifie

$$V^n = \partial_n v,$$

avec v solution de l'équation

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } Q \setminus \partial\Omega, \\ v = H & \text{pour } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où H désigne la courbure moyenne à l'interface $\partial\Omega$. Ce flot limite est donc légèrement différent d'un flot par diffusion de surface où la vitesse normale s'écrit

$$V^n = \Delta_s H.$$

Une méthode qui permet de retrouver le bon flot limite est par exemple de considérer une variante avec mobilité dégénérée :

$$u_t = \operatorname{div} \left(M(u) \nabla \left(\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \right) \right), \quad (3.2)$$

où la fonction de mobilité M permet ainsi d'éviter des transferts de matières entre deux gouttelettes. Ce modèle est toujours variationnel et s'obtient comme le flot H^{-1} de l'énergie de Cahn-Hilliard par rapport à la nouvelle métrique

$$\mu \mapsto \frac{1}{2} \int M(u) |\nabla \mu|^2 dx.$$

L'analyse asymptotique de l'équation (3.2) dans le cas où $M(s) = s^2(1-s)^2$ montre que la solution u est de la forme

$$u_\varepsilon(t) = q\left(\frac{\text{dist}(x, \Omega_\varepsilon(t))}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

avec le flot limite qui s'identifie à

$$V_n = c_W c_M \Delta_\Gamma H.$$

Les deux constantes c_M et c_W dépendent de W et M et s'écrivent $c_W = \int (q'(z))^2 dz$ et $c_M = \int \frac{M(z)}{q(z)(1-q(z))} dz$.

Remarque 4. L'analyse menée dans l'article [46] a montré l'importance d'avoir une mobilité doublement dégénérée en $s = 0$ et $s = 1$. En effet, l'utilisation d'une mobilité simplement dégénérée comme c'est le cas avec $M(s) = s(1-s)$ conduit à un flot limite de la forme

$$V_n = c_W c_M \Delta_\Gamma H \pm c_W^2 c_M H \nabla_n H,$$

où un terme parasite apparaît à l'ordre 0.

Par la suite, nous avons cherché à corriger l'ordre de ce modèle qui pose des difficultés lorsque l'on considère des évolutions de structures fines. Nous nous sommes alors intéressés à une nouvelle variante que nous avons introduite, variante de la forme

$$u_t = N(u) \operatorname{div} \left(M(u) \nabla N(u) \left(\Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \right) \right), \quad (3.3)$$

et qui généralise le modèle de départ. Comme précédemment, ce modèle reste variationnel et s'obtient comme le flot H^{-1} de l'énergie de Cahn-Hilliard par rapport à la nouvelle métrique

$$\mu \mapsto \frac{1}{2} \int M(u) |N(u) \nabla \mu|^2 dx.$$

En revanche, l'étude asymptotique présentée dans l'article [A10] montre que si $N(u) = 1/\sqrt{M(u)}$ et $M(u) = W(u)$, alors le modèle converge bien à l'ordre 2

$$u_\varepsilon = q\left(\frac{\text{dist}(x, \Omega_\varepsilon(t))}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

vers le flot de diffusion de surface suivant

$$V_n = \frac{c_W c_M}{c_N^2} \Delta_\Gamma H + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

où la constante c_N s'écrit $c_N = \int \frac{q'(z)}{N(q(z))} dz$.

D'un point de vue numérique, le traitement des termes de mobilité M et N pose un certain nombre de difficultés avec des approches splitting-Fourier car ils conduisent à des termes de diffusion non homogènes en espace et singuliers. Nous avons donc développé de nouveaux schémas numériques très efficaces où l'idée était de reprendre

le splitting convexe-concave en l'appliquant aussi sur la métrique J . Plus précisément, nos modèles de type Cahn-Hilliard peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} u_t = -\nabla J_u(\mu), \\ \mu = \nabla P_\varepsilon(u), \end{cases}$$

où

$$J_u(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int M(u) |\nabla \mu|^2 dx & \text{dans le cas du modèle (3.2),} \\ \frac{1}{2} \int M(u) |N(u) \nabla \mu|^2 dx, & \text{dans le cas du modèle (3.3).} \end{cases}$$

L'idée est alors de traiter le terme $\nabla J_u(\mu)$ de manière semi-implicite qui s'obtient à l'aide d'une décomposition convexe-concave de J_u . Les termes traités explicitement dérivent alors de la partie concave de cette décomposition afin de conserver un contrôle sur la métrique J_u .

Dans le cas du modèle (3.2), on a ainsi la décomposition suivante

$$J_u(\mu) = \frac{1}{2} \int m |\nabla \mu|^2 dx + \frac{1}{2} \int (M(u) - m) |\nabla \mu|^2 dx,$$

où la partie de droite, correspondant aux parties explicites, est concave pour $m \geq \sup_s \{M(s)\}$. Le cas du deuxième modèle, bien que plus complexe, est assez similaire et s'implémente en considérant le splitting suivant

$$J_u(\mu) = \frac{1}{2} \int_Q m |\nabla \mu|^2 + \beta \mu^2 dx + \frac{1}{2} \int M(u) |N(u) \nabla \mu|^2 - m |\nabla \mu|^2 - \beta \mu^2 dx,$$

où les paramètres m et β doivent être suffisamment grands pour assurer la concavité du terme de droite.

Dans les deux cas, l'idée est aussi de faire apparaître des opérateurs homogènes en espace dans la partie implicite afin de pouvoir les traiter efficacement dans l'espace de Fourier. En ce qui concerne le schéma numérique, le second modèle conduit par exemple à la résolution d'un système de la forme

$$\begin{cases} (u^{n+1} - u^n) / \delta_t & = m \Delta \mu^{n+1} - \beta \mu^{n+1} + H(u^n, \mu^n) \\ \mu^{n+1} & = (-\Delta u^{n+1} + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} u^{n+1}) + (\frac{1}{\varepsilon^2} (W'(u^n) - \alpha u^n)), \end{cases}$$

où

$$H(u^n, \mu^n) = N(u^n) \operatorname{div}((M(u^n) \nabla(N(u^n) \mu^n)) - m \Delta \mu^n + \beta \mu^n).$$

La solution u^n correspond ici à l'approximation de u à l'instant $t^n = n \delta_t$. Nous obtenons ainsi des schémas numériques très simples, inconditionnellement stables en pratique et dont les solutions s'obtiennent avec une transformée de Fourier rapide sans avoir recours à la résolution de systèmes linéaires. Notons que bien que les termes de mobilités soient dégénérés et singuliers, nous arrivons numériquement à obtenir très facilement des expériences numériques en dimension 3 comme celles illustrées à la figure (3.9).

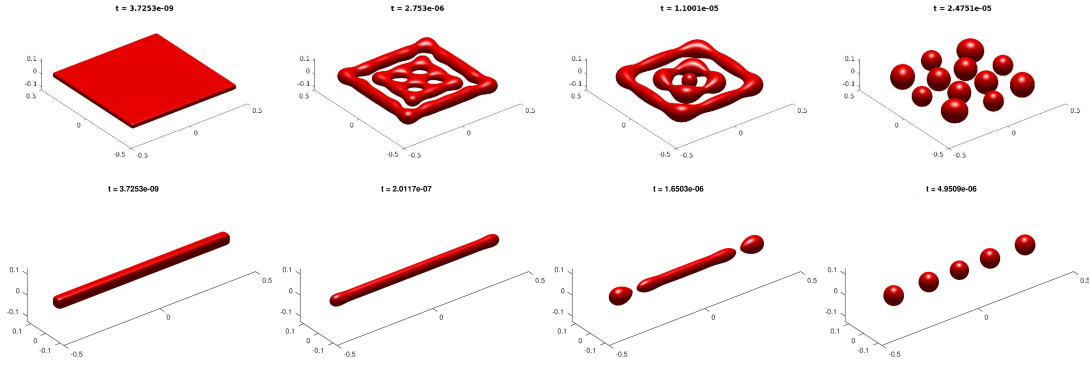


FIGURE 3.9 – Exemples de simulations numériques 3D de diffusion de surface obtenues avec le modèle de Cahn-Hilliard (3.3) à double mobilités M et N . La première ligne correspond à l'évolution d'une plaque fine qui démouille et converge vers une union de petites sphères. La deuxième ligne correspond à l'évolution par diffusion de surface d'un tube fin et là encore, on observe un démouillage vers 5 sphères.

3.2.2 Cas de modèles multiphases

Le démouillage d'une phase liquide sur une surface solide entourées d'air peut être simulée en utilisant un système multiphase de type **MCH**

$$\partial_t u_i(x, t) = -m_i \operatorname{div} \left[M(u_i) \nabla \left[\sigma_i \left(\Delta u_i(x, t) - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u_i(x, t)) \right) + \lambda(x, t) \right] \right].$$

ou **NMNCH**

$$\partial_t u_i(x, t) = -m_i \operatorname{div} \left[M(u_i) \nabla N(u_i) \left[\sigma_i \left(\Delta u_i(x, t) - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u_i(x, t)) \right) + \lambda(x, t) \right] \right].$$

Il suffit alors d'appliquer ces modèles en considérant un modèle à trois phases (Liquide, Vapeur et Solide), tout en fixant la phase Solide par un choix des coefficients de mobilités $m_{SL} = m_{SV} = 0$.

Nous avons étudié dans [A11] le flot limite de ces modèles et montré que la loi limite de la vitesse normale de l'interface $\Gamma_{i,j}$ vérifie dans les deux cas

$$V_{ij}^n = m_{i,j} \sigma_{i,j} H_{i,j}.$$

avec $\sigma_{i,j} = \sigma_i + \sigma_j$, $m_{i,j}^{-1} = m_i^{-1} + m_j^{-1}$ et $H_{i,j}$ correspond à la courbure moyenne à l'interface $\Gamma_{i,j}$. Concernant les ordres d'approximation, on retrouve les mêmes résultats que dans le cas biphasique avec un ordre 1 pour le **MCH** et 2 pour le modèle **NMNCH**.

D'un point de vue numérique, ces modèles ne posent pas vraiment de difficultés supplémentaires par rapport aux systèmes biphasiques précédents. Le seul point à souligner concerne le traitement du multiplicateur de Lagrange λ associé à la contrainte $\sum u_i = 1$. Ici nous avons fait le choix d'un traitement implicite où l'estimation du multiplicateur λ^{n+1} nécessite la résolution d'une équation homogène supplémentaire afin de vérifier exactement la contrainte $\sum u_i^{n+1} = 1$ à l'instant $n + 1$. Des expériences numériques réalisées avec cette approche sont présentées à la figure (3.10) et permettent d'observer clairement l'influence de la rugosité de la phase solide sur la dynamique de démouillage.

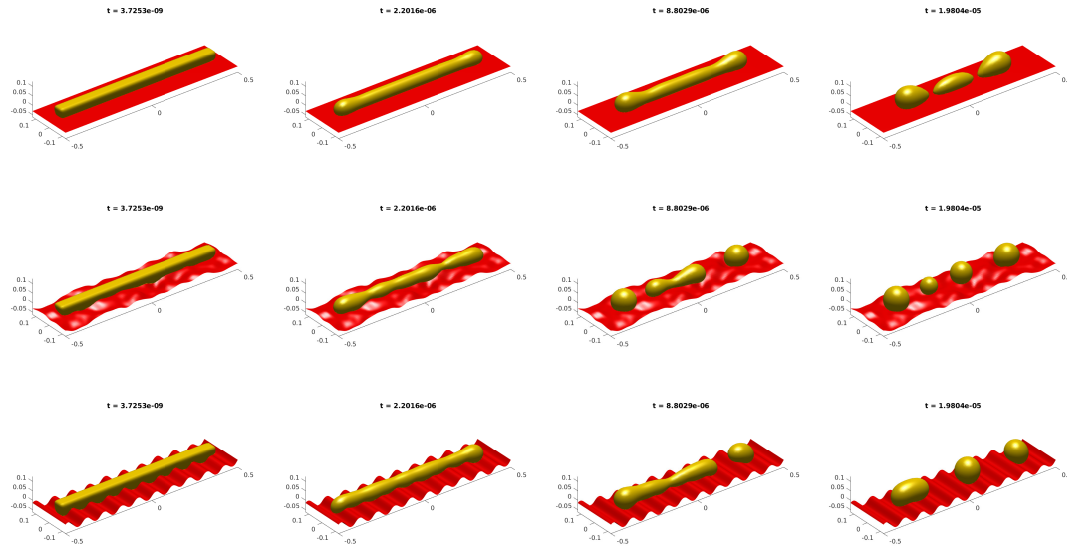


FIGURE 3.10 – Exemples de simulations numériques 3D du démouillage d’un tube liquide sur une surface solide plus ou moins rugueuse en utilisant le modèle multiphase NMNCH. Chaque ligne correspond à un choix particulier de rugosité et on affiche les différentes phases à différents instants t au cours des itérations. On observe bien l’influence de la surface solide sur la forme finale.

3.3 Energie de Willmore et applications

C’est à la suite de ma soutenance de thèse que j’ai commencé à travailler avec E. Oudet et J.O Lachaud sur l’utilisation de l’énergie de Willmore pour régulariser des ensembles pixelisés. Rappelons que l’énergie de Willmore d’une surface est l’intégrale du carré de sa courbure moyenne.

3.3.1 Approximation d’objets pixelisés

L’idée était alors de comparer trois méthodes différentes, dont une approche basée sur les méthodes de champ de phase. La méthode, illustrée dans la figure (3.11), revenait

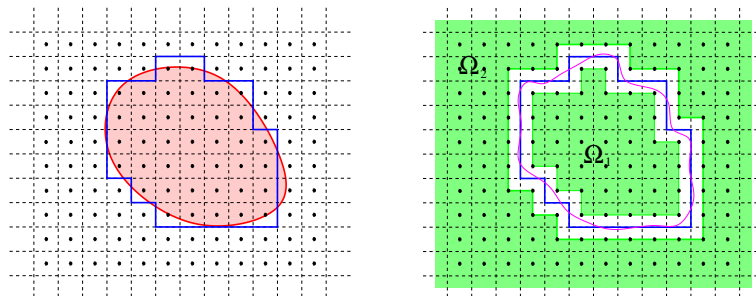


FIGURE 3.11 – Régularisation d’objet pixelisé en utilisant l’énergie de Willmore

à minimiser l'énergie de Willmore

$$\mathcal{W}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} H^2 d\sigma,$$

sous une contrainte d'inclusion-exclusion $\Omega_{int} \subset \Omega \subset \Omega_{ext}$, où les domaines Ω_{int} et Ω_{ext} sont déduits directement de l'ensemble pixelisé.

D'un point de vue modélisation numérique, je m'étais déjà intéressé dans mes travaux de thèse à ce type de contraintes d'inclusion-exclusion et j'avais montré (voir article [A22]) que l'utilisation de potentiels pénalisés permettait de gagner un ordre d'approximation par rapport à des contraintes de bord de type Dirichlet. Cette approche semblait alors assez intéressante pour notre application où la zone d'évolution de l'interface est relativement fine. Nous avons donc naturellement repris cette idée en l'appliquant à une énergie de Willmore. Ce travail a conduit à considérer une énergie de la forme

$$\mathcal{W}_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_Q \left(\varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W'_{\Omega_{int}, \Omega_{ext}}(u) \right)^2 dx$$

où $W_{\Omega_{int}, \Omega_{ext}}$ est le même potentiel pénalisé que celui proposé dans l'article [A22] et qui s'obtient simplement en relevant les puits du potentiel de base dans les différentes zones afin de forcer l'une des deux phases.

Bien que cette méthode ait montré des premiers résultats assez convaincants comme l'illustre la figure (3.12), elle peut être grandement améliorée en remplaçant l'utilisation de potentiels pénalisés par des contraintes linéaires de la forme $u_{int}^\varepsilon \leq u \leq u_{ext}^\varepsilon$. En effet, les deux fonctions de champ de phase u_{int}^ε et u_{ext}^ε se déduisent très simplement des ensembles Ω_{int} et Ω_{ext} suivant la formule suivante :

$$u_{int}^\varepsilon = q \left(\frac{dist(x, \Omega_{int})}{\varepsilon} \right) \text{ et } u_{ext}^\varepsilon = q \left(\frac{dist(x, \Omega_{ext})}{\varepsilon} \right).$$

et permettent de vérifier facilement la contrainte initiale $\Omega_{int} \subset \Omega \subset \Omega_{ext}$. C'est cette approche que nous développerons par la suite.

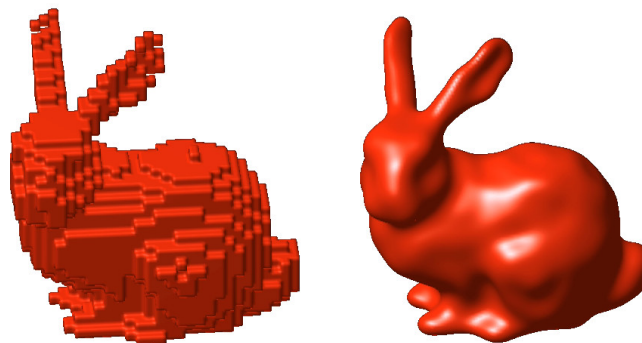


FIGURE 3.12 – Exemple d'objet pixelisé et sa régularisation obtenue en minimisant l'énergie de Willmore sous contrainte d'inclusion-exclusion.

D'un point de vue numérique, la minimisation de \mathcal{W}^ε est assez délicate par rapport à l'énergie de Cahn-Hilliard. Une explication est que le flot limite fait intervenir des termes d'ordre 2 dans le développement asymptotique des solutions u de l'équation et nécessitent donc d'être pris soigneusement en compte si on souhaite approcher correctement le flot de Willmore.

Dans l'article [A22], nous avons proposé une approche semi-implicite en traitant de manière implicite uniquement le terme d'ordre supérieur, c'est à dire le bi-Laplacien. Mais par la suite, une méthode purement implicite basée sur un point fixe et étudiée dans l'article [A23] permet de capter plus précisément le flot de Willmore. Enfin, une approche convexe-concave à la Eyre a été testée et permet aussi d'obtenir un algorithme plus simple, plus efficace et inconditionnellement stable pour minimiser ce type d'énergie. L'idée consiste à utiliser le splitting suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_Q \left(\varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W'(u) \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_Q \alpha (\Delta u)^2 + \beta |\nabla u|^2 + \gamma u^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_Q \frac{1}{\varepsilon} \left(\varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W'(u) \right)^2 - (\alpha (\Delta u)^2 + \beta |\nabla u|^2 + \gamma u^2) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, sous des hypothèses de régularité sur u , il est possible de montrer que le dernier terme associé au traitement explicite est bien concave à partir du moment où (α, β, γ) sont suffisamment grands. Plus récemment, nous avons aussi remarqué que l'équation de Willmore version champ de phase

$$\text{des } \begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t u = \Delta \mu - \frac{1}{\varepsilon^2} W''(u) \mu \\ \mu = W'(u) - \varepsilon^2 \Delta u, \end{cases}$$

pouvait aussi s'obtenir comme le flot de l'énergie de Cahn-Hilliard par rapport à la métrique

$$J_u(\mu) = \int_Q \frac{1}{2} |\nabla \mu|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} W''(u) \mu^2 dx,$$

et ainsi réutiliser les approches développées précédemment pour les équations de Cahn-Hilliard afin d'obtenir des schémas numériques très simples et efficaces.

3.3.2 Approximation de champ de phase du flot de Willmore

Lorsque que je suis arrivé à Lyon en 2011, l'énergie de Willmore représentait un sujet de recherche en commun avec S. Masnou. L'idée initiale était de comprendre les nuances entre les différents modèles de champ de phase qui approchent l'énergie Willmore et plus particulièrement, d'identifier leur comportement après l'apparition de premières singularités. Ce travail s'inscrivait aussi naturellement dans le projet ANR GEOMETRYA, ce qui a grandement facilité notre collaboration.

On rappelle que la conjecture de De Giorgi [31] est reliée à la Γ -convergence de \mathcal{W}_ε et notamment à l'identification de sa limite dans le cas singulier. L'existence de solutions singulières [29] de l'équation d'Allen Cahn montre que celle-ci ne peut pas être

identifiée à la relaxée L^1 de \mathcal{W} . D'un autre coté, son identification nécessite aussi d'être capable de classifier toutes les solutions de l'équation d'Allen Cahn.

Dans l'article [A5], nous nous sommes intéressés aux différents flots des principales énergies de champ de phase qui approchent l'énergie de Willmore. Parmi ces énergies, on retrouve notamment

- Le modèle classique [10, 67, 9, 57, 65, 58] en dimension $d \geq 2$

$$\mathcal{W}_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_Q \left(\varepsilon \Delta u - \frac{W'(u)}{\varepsilon} \right)^2 dx$$

- L'approximation de Bellettini [8], en dimension $d \geq 2$

$$\mathcal{W}_\varepsilon^{\text{Be}}(u) = \frac{1}{2} \int_{Q \setminus \{|\nabla u|=0\}} (|\operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}|^2) \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{W(u)}{\varepsilon} \right) dx$$

- L'approximation de Mugnai [12] en dimension $d = 2$

$$\mathcal{W}_\varepsilon^{\text{Mu}}(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega \left| \varepsilon \nabla^2 u - \frac{W'(u)}{\varepsilon} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \otimes \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right|^2 dx$$

- L'approximation de Esedoglu-Rätz-Röger [34] en dimension $d \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varepsilon^{\text{EsRäRö}}(u) &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_Q \left(\varepsilon \Delta u - \frac{W'(u)}{\varepsilon} \right)^2 dx \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon^{1+\alpha}} \int_Q \left(\varepsilon \Delta u - \frac{W'(u)}{\varepsilon} - (\varepsilon |\nabla u| \sqrt{2W(u)})^{\frac{1}{2}} \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Toutes ces énergies, à l'exception de l'énergie classique, Γ -convergent vers la relaxée L^1 de Willmore. D'un point de vue flot, il est aussi intéressant de comparer le cas classique

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t u = \Delta \mu - \frac{1}{\varepsilon^2} W''(u) \mu \\ \mu = W'(u) - \varepsilon^2 \Delta u, \end{cases}$$

du cas de l'approximation de Mugnai

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \partial_t u = \Delta \mu - \frac{1}{\varepsilon^2} W''(u) \mu + W'(u) \mathcal{B}(u) \\ \mu = \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) - \Delta u, \end{cases}$$

où la différence tient essentiellement dans la présence du terme $W'(u) \mathcal{B}(u)$ où

$$\mathcal{B}(u) = \operatorname{div} \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \operatorname{div} \left(\nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

On remarque alors que ce terme agit uniquement lorsque deux interfaces deviennent trop proches l'une de l'autre.

Remarque 5. Nous nous intéresserons ultérieurement, en décrivant les travaux de thèse de C.K Huang, à l'utilisation d'une variante de ce terme pour retrouver le squelette de l'ensemble Ω et forcer ainsi la conservation de la topologie au cours d'une évolution par courbure moyenne.

Pour revenir au développement asymptotique de ces deux modèles, on retrouve dans le premier cas une vitesse normale de l'interface égale à

$$V^n = \Delta_\Gamma H - \frac{1}{2}H^3 + H\|A\|^2,$$

alors que dans le cas de l'approximation de Mugnai, cette même vitesse s'identifie à

$$V^n = \Delta_\Gamma H + \sum_i \kappa_i^3 - \frac{1}{2}\|A\|^2 H.$$

Ici, H , A , κ_i et Δ_Γ représentent respectivement la courbure moyenne, la seconde forme fondamentale, les courbures principales et le Laplacien surfacique sur l'interface. On peut alors observer que ces deux flots, bien qu'ayant des expressions différentes, sont bien identiques dans le cas de la dimension 2 mais aussi 3. Dans le cas régulier, ces deux modèles se comportent donc de manière analogue. En revanche, la différence est notable dans le cas singulier où le modèle classique autorise les croisements d'interfaces, alors que le terme $B(u)$ du modèle de Mugnai a tendance à repousser deux interfaces qui se rapprochent à une distance inférieure à ε . La figure (3.13) présente un exemple d'approximation numérique du flot obtenu avec le modèle classique où l'initialisation est donnée par deux cercles disjoints qui se rejoignent par la suite pour former un huit.

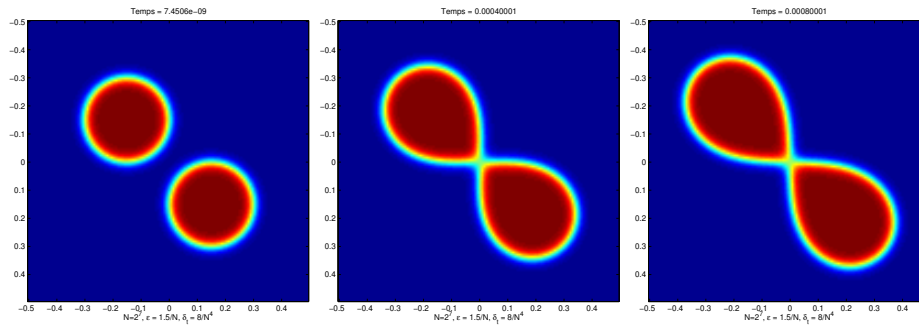


FIGURE 3.13 – Exemple de flot de Willmore singulier approché par le modèle classique de champ de phase. L'ensemble de départ correspond à l'union de deux disques disjoints, qui grossissent jusqu'à se toucher et former une singularité. L'évolution continue ensuite en formant un huit où l'on observe clairement un croisement d'interfaces stable.

Ces simulations numériques ont été obtenues avec un schéma numérique implicite dont la solution est approchée à l'aide d'un point fixe couplé à une approche spectrale. Ce schéma nous a aussi permis de retrouver des surfaces critiques de l'énergie de Willmore comme par exemple le tore de Clifford et d'autres surfaces de Lawson-Kusner [55]. Ces expériences numériques, présentées à la figure (3.14), témoignent aussi implicitement de la fiabilité de nos schémas numériques pour ce type de minimisation.

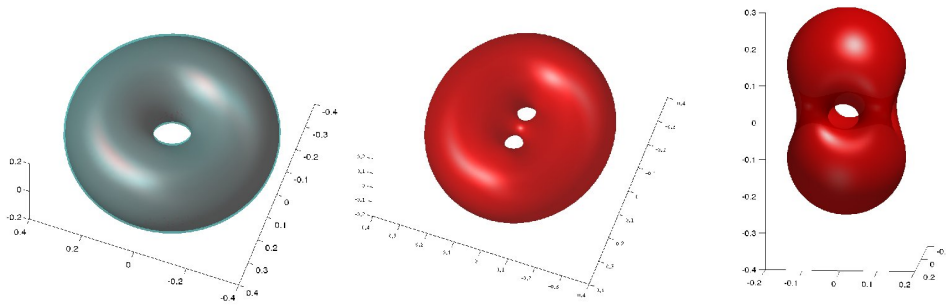


FIGURE 3.14 – Exemple d’expériences numériques obtenues avec le modèle classique et qui permettent de retrouver le tore de Clifford et d’autres surfaces de Lawson-Kusner. Chaque image montre la solution stationnaire obtenue à partir de différentes conditions initiales. Par exemple, dans le cas de la première image, nous avons pris comme condition initiale un tore qui a ensuite évolué vers le tore de Clifford.

3.3.3 Reconstruction à partir d’un ensemble de coupes

Nous nous sommes ensuite intéressés dans le cadre de la thèse F. Dayrens, voir aussi l’article [A6], à des problèmes de reconstruction $3D$ pour le post-traitement d’images issues d’IRM. Plus précisément, les images issues d’IRM représentent une collection de coupes planes d’un milieu donné comme sur la figure (3.15). L’idée était alors de proposer une reconstruction $3D$ de l’ensemble avec comme objectif d’être capable de réussir à connecter les structures fines entre les différentes coupes et retrouver ainsi des topologies complexes. La figure (3.16) présente un exemple d’empilement de segmentations $2D$ de la matière blanche obtenues à partir de chacune des images de (3.15).

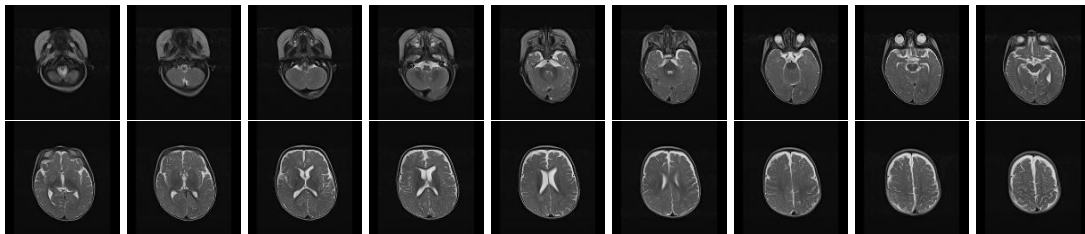


FIGURE 3.15 – Exemple d’images provenant d’une IRM d’un cerveau d’un enfant d’un an. Chaque image représente une coupe horizontale du cerveau.

Comment obtenir une reconstruction $3D$ raisonnable? Le point de départ était de reprendre un peu l’idée de la régularisation d’objets pixelisés en minimisant un critère géométrique comme le périmètre ou l’énergie de Willmore sous une contrainte d’inclusion-exclusion de type

$$\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2^c.$$

La difficulté supplémentaire réside ici dans le fait que les ensembles Ω_1 et Ω_2 sont maintenant de codimension 1 et forment ainsi des ensembles fins. Nous nous sommes

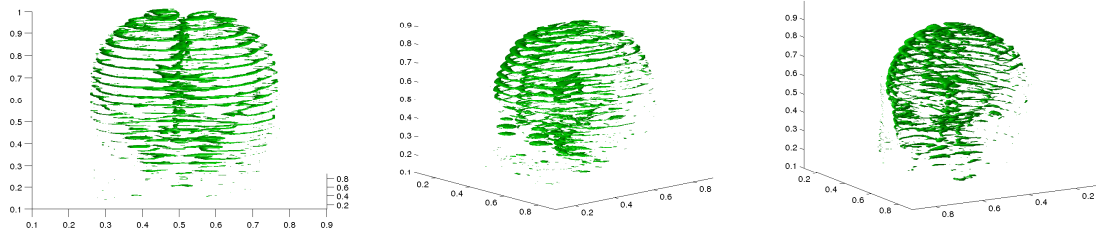


FIGURE 3.16 – Segmentation 2D de la matière blanche à partir des images de (3.15). Chaque figure représente une vue différente de l'ensemble constitué de la partie blanche de chaque coupe. A noter qu'il est assez difficile d'observer à partir de ces trois images la structure 3D de la partie blanche du cerveau.

d'abord concentrés sur un résultat de Γ -convergence uniquement dans le cas du périmètre. Pour ce faire, nous avons introduit un périmètre pénalisé de la forme

$$P_{\Omega_1, \Omega_2}(\Omega) = \begin{cases} P(\Omega) & \text{si } \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2^c, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et montré que son enveloppe semi-continue inférieure pour la topologie L^1 des fonctions caractéristiques s'identifie à

$$\overline{P_{\Omega_1, \Omega_2}}(\Omega) = P(\Omega) + 2\mathcal{H}^{n-1}(\Omega^0 \cap \Omega_1) + 2\mathcal{H}^{n-1}(\Omega^1 \cap \Omega_2).$$

Dans sa version champ de phase, ce problème d'optimisation revient alors à minimiser l'énergie de Cahn-Hilliard pénalisée suivante

$$P_{\varepsilon, u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}}(u) = \begin{cases} \int \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W'(u) dx & \text{si } u_{1,\varepsilon} \leq u \leq 1 - u_{2,\varepsilon}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases},$$

Ici, les fonctions champ de phase $u_{1,\varepsilon}$ et $u_{2,\varepsilon}$ sont toujours définies par

$$u_{1,\varepsilon} = q\left(\frac{\text{dist}(x, \Omega_1)}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad u_{2,\varepsilon} = q\left(\frac{\text{dist}(x, \Omega_2)}{\varepsilon}\right)$$

Malheureusement, l'étude de la Γ -convergence de $P_{\varepsilon, u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}}$ montre que la limite s'identifie à

$$P_{\Omega_1, \Omega_2}^*(\Omega) = P(\Omega) + \mathcal{H}^{n-1}(\Omega^0 \cap \Omega_1) + \mathcal{H}^{n-1}(\Omega^1 \cap \Omega_2),$$

une limite légèrement différente de la relaxée $\overline{P_{\Omega_1, \Omega_2}}$ du problème de départ. La conséquence pratique de ce résultat est que les formes optimales qui minimisent le périmètre pénalisé $P_{\varepsilon, u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}}$ ne satisfont pas en général la contrainte d'inclusion-exclusion à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Il est en effet moins coûteux de ne pas la respecter.

Pour retrouver l'objectif initial qui consiste à trouver les minimums de $\overline{P_{\Omega_1, \Omega_2}}$, il a donc été nécessaire de proposer une version épaisse du problème. L'idée est alors de

minimiser l'énergie de Cahn-Hilliard $P_{\varepsilon, u_{1,\varepsilon}^e, u_{2,\varepsilon}^e}$, avec pour contrainte $u_{i,\varepsilon}^e = q \left(\frac{\text{dist}(x, \Omega_{i,\varepsilon^\alpha})}{\varepsilon} \right)$, où l'ensemble $\Omega_{i,\varepsilon^\alpha}$ s'obtient en élargissant l'ensemble de départ Ω_i d'une grandeur caractéristique de l'ordre de ε^α . Avec cette nouvelle version, nous avons réussi à montrer un résultat de Γ -convergence de $P_{\varepsilon, u_{1,\varepsilon}^e, u_{2,\varepsilon}^e}$ vers $\overline{P_{\Omega_1, \Omega_2}}$ à une constante multiplicative près lorsque $\alpha < 1$.

D'un point de vue numérique, nous avons testé différentes reconstructions obtenues en minimisant les versions champ de phase du périmètre pénalisé mais aussi le cas de l'énergie de Willmore pénalisée à l'aide d'un modèle classique. La figure (3.17) présente un tel résultat. A noter que la reconstruction obtenue avec l'énergie de Willmore semble ici la plus naturelle. C'est cette approche que nous utilisons pour traiter le cas des images d'IRM, dont un exemple de reconstruction est donné à la figure (3.18).

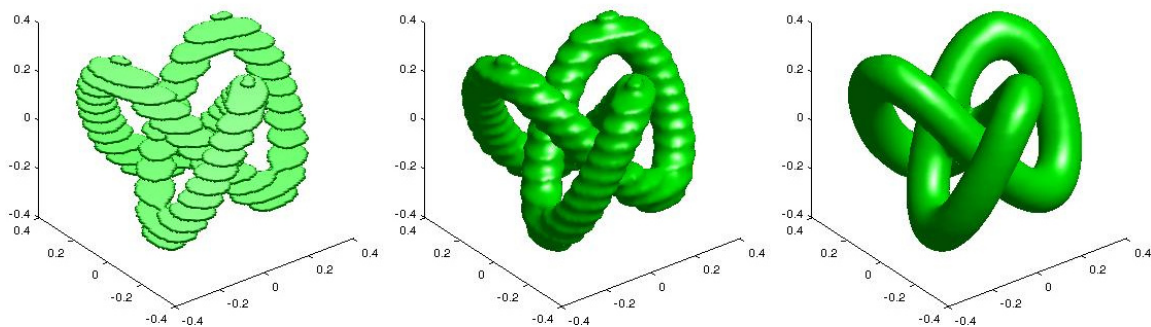


FIGURE 3.17 – Exemples de reconstruction en utilisant un périmètre pénalisé (figure du milieu) et l'énergie de Willmore. (figure de droite). La première figure représente les contraintes d'inclusion. L'énergie de Willmore semble ici fournir une reconstruction assez naturelle de l'ensemble de départ.

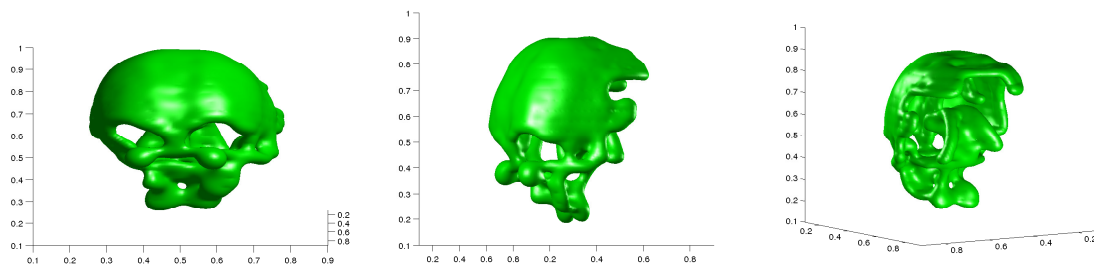


FIGURE 3.18 – Reconstruction de la matière blanche du cerveau obtenue en minimisant l'énergie de Willmore sous contrainte d'inclusion-exclusion définie par les données illustrées à la figure (3.16). Chaque image représente une vue différente de cette reconstruction. On arrive à bien identifier la structure topologique de l'ensemble.

3.4 Problèmes de Steiner et Plateau

C'est une nouvelle fois dans le cadre du projet d'ANR GEOMETRYA que j'ai commencé à entendre parler d'approximations par méthode de champ de phase des problèmes de Steiner [44] et de Plateau [30]. Rappelons que le problème de Steiner consiste à trouver l'ensemble compact de longueur minimale qui connecte un ensemble de points $x_i \in \mathbb{R}^d$ donnés. Concernant le problème de Plateau, l'objectif est de déterminer une surface minimale s'appuyant sur un bord donné Γ . La figure (3.19) présente des exemples de solutions numériques de ces deux problèmes obtenues à l'aide de méthode de champ de phase.

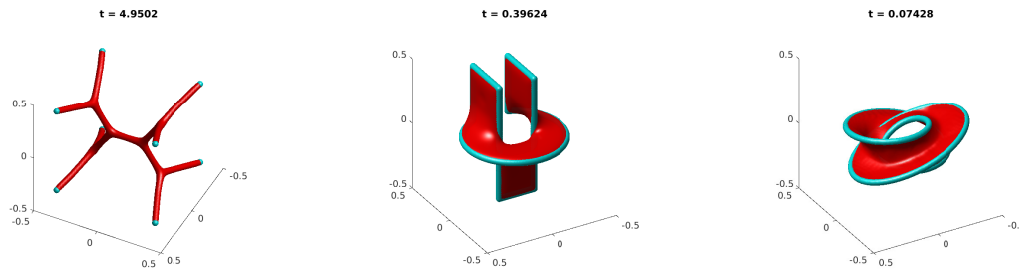


FIGURE 3.19 – Problème de Plateau et de Steiner : exemples d'approximations numériques obtenues avec une approche de champ de phase. Sur chaque image, la surface minimale est tracée en rouge et la donnée de bord en bleu. La première image correspond à la solution de Steiner en $3D$ associée aux sommets du cube. La deuxième image présente une solution du problème de Plateau lisse mais non orientée. La troisième image présente une solution du problème de Plateau non régulière avec une ligne triple.

Dans le cas du problème de Steiner en dimension 2, un premier modèle [53, 17] a été introduit par A. Lemenant, F. Santambrogio et M. Bonnivard qui propose de coupler une énergie de type Cahn-Hilliard avec un terme forçant la connexité de l'ensemble. E. Oudet s'est de son côté intéressé [15] à une relaxation convexe du problème permettant ainsi de retrouver des combinaisons linéaires de plusieurs solutions à la fois, et d'éviter ainsi les minimums locaux, nombreux pour ces problèmes. Enfin, A. Chambolle, B. Merlet et L. Ferrari ont étudié une version champ de phase dans le cadre des courants [22, 23], une version capable de traiter à la fois des problèmes de Steiner et de Plateau en dimension quelconque. Ce modèle a été testé en dimension 2 [22] et permet de bien retrouver les solutions classiques du problème de Steiner dans le cas d'un petit nombre de points. En revanche, l'approche numérique utilisée, basée sur une discrétisation du problème par éléments finis, s'avère assez complexe en dimension 3. Un projet de collaboration en perspective avec S. Masnou et B. Merlet concerne le développement d'une approche Fourier avec un traitement implicite des contraintes "courant" exploitant encore une fois l'idée d'un splitting convexe-concave. Ce schéma permet d'obtenir de jolies solutions numériques du problème Plateau en dimension 3 comme l'illustre la figure (3.20). L'idée est maintenant de chercher à étendre ce premier modèle pour traiter le cas de surfaces non orientable ou encore le cas de bords

incomplets. Ce travail n'étant pas encore suffisamment abouti pour l'instant, je préfère ne pas l'aborder davantage dans ce rapport de synthèse.

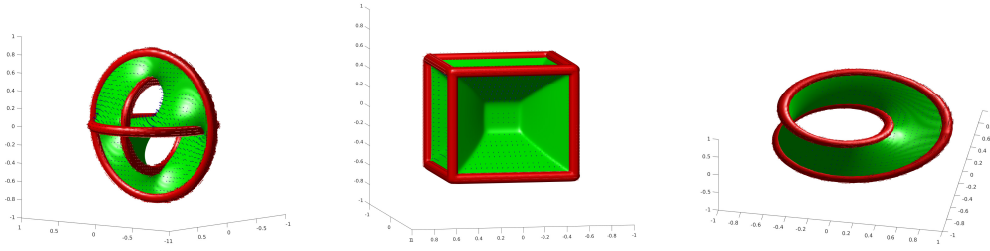


FIGURE 3.20 – Exemples d'approximations numériques du problème de Plateau obtenues avec le modèle d'A. Chambolle, de B. Merlet et de L. Ferrari. Sur chaque image, nous traçons en rouge les données de bord et en vert la surface minimale estimée numériquement. En particulier, il est possible de traiter un certain nombre de configurations, notamment le cas de surfaces non orientables comme sur la troisième figure avec le ruban de Möbius.

3.4.1 Problème de Steiner et contrainte de connexité

Pour revenir au modèle d'A. Lemenant, F. Santambrogio et M. Bonnard, l'idée est de coupler une énergie de type Ambrosio-Tortorelli [3]

$$P_\varepsilon(u) = \int_Q \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1 - u)^2 dx,$$

avec un terme de distance géodésique pondéré

$$\mathbf{D}(w; a, b) := \inf_{\Gamma: a \rightsquigarrow b} \int_\Gamma w d\mathcal{H}^1 \in [0, +\infty],$$

pour obtenir un modèle final de la forme

$$F_\varepsilon(u) = P_\varepsilon(u) + \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \sum_{i=1}^N \mathbf{D}(u^2 + \delta_\varepsilon; x_0, x_i).$$

Ici, les paramètres λ_ε et δ_ε sont supposés converger vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Intuitivement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le terme géodésique converge vers la distance à un ensemble compact K ,

$$\mathbf{D}(u_\varepsilon^2 + \delta_\varepsilon; x_0, \cdot) \rightarrow d_K(\cdot),$$

qui connecte bien les points $\{x_i\}$ donnés et le terme d'Ambrosio-Tortorelli permet d'en mesurer la longueur. Des approximations numériques des solutions du problème de Steiner s'obtiennent ainsi en minimisant la fonctionnelle F_ε et des tests avec trois et quatre points [53, 17] illustrent le potentiel de ce modèle.

J'ai par la suite commencé à travailler avec A. Lemenant et M. Bonnivard dans l'idée de proposer des variantes à leur modèle afin d'obtenir des solutions numériques plus fiables dans le cas d'un grand nombre de points en dimension 2 et 3.

Une première correction vient d'un manque de régularité des solutions u_ε du problème d'optimisation dont l'étude est proposée dans l'article [16]. La conséquence pratique est une forte variabilité des solutions en fonction de la discrétisation numérique spatiale utilisée. Nous avons donc proposé d'utiliser une variante du terme d'Ambrosio-Tortorelli [19] qui consiste à rajouter de la régularité en dimension 2 en remplaçant le gradient par un Laplacien :

$$P_\varepsilon(u) = \int_Q \varepsilon^3 |\Delta u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1 - u)^2 dx.$$

L'avantage est que ce Laplacien permet aussi de rajouter suffisamment de compacité pour traiter le cas de la dimension 3.

Une autre difficulté numérique vient du traitement du terme géodésique qui fait intervenir le gradient d'une distance géodésique pondéré rapport à son propre poids de pondération. Afin d'éviter l'apparition d'effets anisotropes dans les solutions numériques, nous avons proposé de relaxer ce terme en introduisant la fonctionnelle

$$E_\varepsilon(u, \gamma) := P_\varepsilon(u) + \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma(\gamma_i)} (\delta_\varepsilon + u^2) d\mathcal{H}^1,$$

où $\gamma_i \in \mathcal{P}(x_0, x_i) := \left\{ \gamma \in \text{Lip}([0, 1]; \bar{\Omega}_0) : \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma(1) = x_i \right\}$. L'intérêt que les gradients de la fonctionnelle E_ε par rapport aux variables u et γ sont maintenant explicites et plus simple à estimer numériquement. D'un autre coté, il ressort que

$$F_\varepsilon(u) = \inf_{\gamma_i \in \mathcal{P}(x_0, x_i)} E_\varepsilon(u, \gamma).$$

Un autre point est que le flot de gradient L^2 de $E_\varepsilon(u, \gamma)$ fait intervenir un terme singulier qui nécessite d'être régularisé pour faciliter son traitement. Nous avons ainsi considéré la variante suivante

$$\frac{1}{\lambda_\varepsilon} \int_Q \omega^\varepsilon[\gamma] (\delta_\varepsilon + u^2) dx, \text{ où } \omega^\varepsilon[\gamma] = \sum_{i=1}^N (\rho_{\varepsilon^\alpha} * \mathcal{H}^1|_{\Gamma(\gamma_i)}),$$

où le noyau de régularisation $\rho_{\varepsilon^\alpha}$ est d'une taille caractéristique ε^α .

Enfin, le cas d'un grand nombre de points a aussi nécessité de remplacer le poids $\omega^\varepsilon[\gamma]$ par $\omega_{\max}^\varepsilon[\gamma]$ dont l'expression est donnée avec

$$\omega_{\max}^\varepsilon[\gamma] = \text{Max}_{i=1}^N \left\{ \rho_{\varepsilon^\alpha} * \mathcal{H}^1|_{\Gamma(\gamma_i)} \right\},$$

Ici, l'idée revient à ne compter qu'une seule contribution lorsque plusieurs géodésiques passent au même endroit. Cette variante permet en particulier d'observer en

pratique une meilleure homogénéité de la forme de la solution numérique autour de l'ensemble de Steiner K .

L'étude de toutes ces variantes a été publiée dans l'article [A8], où nous montrons notamment un résultat de Γ -convergence en dimensions $d = 2$ et $d = 3$ de l'énergie

$$G_\varepsilon(u) = \int_Q \varepsilon^{5-d} |\Delta u|^2 + \frac{(1-u)^2}{\varepsilon^{d-1}} dx + \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \int_K (u^2 + \delta_\varepsilon) d\mathcal{H}^1$$

vers la longueur de K à un coefficient multiplicatif près. Ici, il n'était pas évident que l'utilisation du Laplacien ne rajoute pas un coût énergétique aux extrémités du segment. La preuve de Γ -convergence a ainsi nécessité d'explicitier en dimensions 2 et 3 les profils optimaux associés et de vérifier des estimations de décroissance exponentielle de leurs dérivées.

D'un point de vue numérique, nous expliquons aussi dans ce travail comment discrétiser efficacement le flot de gradient de E_ε toujours en gardant en tête une approche semi-implicite basée sur un splitting convexe-concave et des traitements spectraux des termes implicites. La régularisation du terme géodésique a aussi un intérêt purement numérique car il permet de contrôler et de stabiliser les termes explicites. L'apport des différentes corrections a ainsi permis d'obtenir un modèle de champ de phase efficace en dimensions 2 et 3 comme l'illustrent les expériences numériques présentées aux figures (3.21) et (3.22).

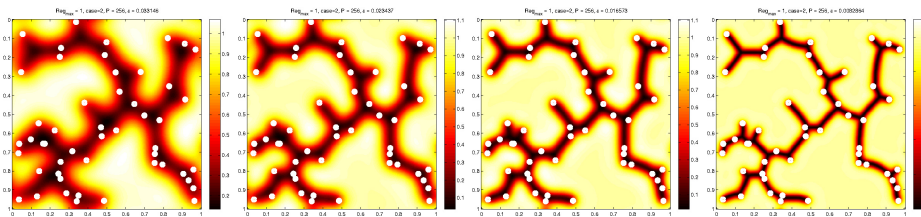


FIGURE 3.21 – Expérience numérique pour le problème de Steiner avec cinquante points en 2D : solutions obtenues au cours des itérations pour différentes valeurs de ε . On observe ici la convergence lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de la fonction de champ de phase vers la solution de Steiner du problème.

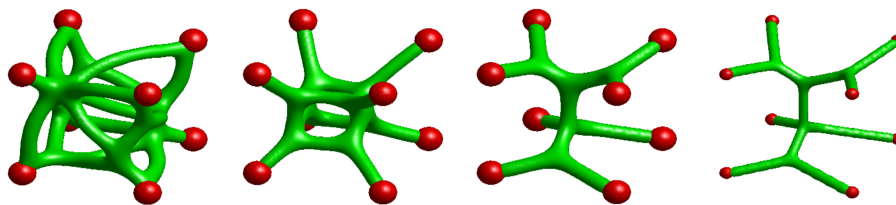


FIGURE 3.22 – Expérience numérique pour le problème de Steiner avec huit points en 3D : solutions obtenues au cours des itérations pour différentes valeurs de ε .

3.4.2 Equation d'Allen Cahn et contrainte de topologie

A la suite de ce travail, nous avons essayé avec S. Masnou et C.K. Huang dans le cadre de la thèse de ce dernier d'imposer une contrainte de connexité sans utiliser de termes géodésiques mais plutôt en forçant l'ensemble à conserver toujours la même topologie au cours des itérations. L'idée était donc de s'inspirer du terme

$$\mathcal{B}(u) = \operatorname{div} \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \operatorname{div} \left(\nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

qui apparaît dans le flot de Willmore version Mugnai et dont le support est inclus dans le squelette de Ω lorsque u est un profil de champ de phase $u = q(\operatorname{dist}(x, \Omega)/\varepsilon)$. Plus précisément, nous nous sommes intéressés à une équation d'Allen-Cahn de la forme

$$\partial_t u = \Delta u - \frac{W'(u)}{\varepsilon^2} (1 + f^\sigma),$$

dont le flot limite est donné par la loi

$$V_n = H + \frac{\nabla f^\sigma \cdot \mathbf{n}}{2(1 + f^\sigma)}.$$

Il s'agit alors de déterminer un terme de forçage f^σ , localisé uniquement sur le squelette de Ω et suffisamment important pour empêcher tout changement de topologie lors d'une évolution par courbure moyenne. Cette stratégie nous a conduits à analyser les propriétés du terme de saut suivant

$$Sn^\sigma = (\nabla n^\sigma \cdot n^\sigma) \cdot n^\sigma,$$

où n^σ est la régularisée de la normale n à un ensemble Ω , définie en appliquant un noyau de convolution k^σ de taille caractéristique σ à n . Plus précisément, nous avons démontré que si n est un champ normal de classe $SBV(\Omega, S^{N-1})$ et si l'ensemble de discontinuités de n noté Σ est de classe C^1 et orienté par ν , alors

$$Sn^\sigma \rightarrow \frac{1}{12} |[n]|^2 \langle [n], \nu \rangle ds_\Sigma \text{ dans } D'(\Omega) \text{ lorsque } \sigma \rightarrow 0.$$

où le terme ds_Σ désigne la mesure de volume de Σ . Ce résultat suggère en particulier que l'équation d'Allen-Cahn

$$\partial_t u = \Delta u - \frac{W'(u)}{\varepsilon^2} (1 + f_u^\sigma), \quad (3.4)$$

perturbée avec un terme f^σ de la forme

$$f_u^\sigma = c (k^\sigma * |Sn_{u^\varepsilon}^\sigma|), \quad \text{où} \quad n_{u^\varepsilon}^\sigma = k^\sigma * \frac{\nabla u^\varepsilon}{|\nabla u^\varepsilon|},$$

devrait permettre de contraindre la topologie à partir du moment où le poids c est suffisamment grand. C'est un résultat que nous avons essayé de montrer en considérant l'évolution d'ensemble tubulaire pour approcher des mouvements par courbure

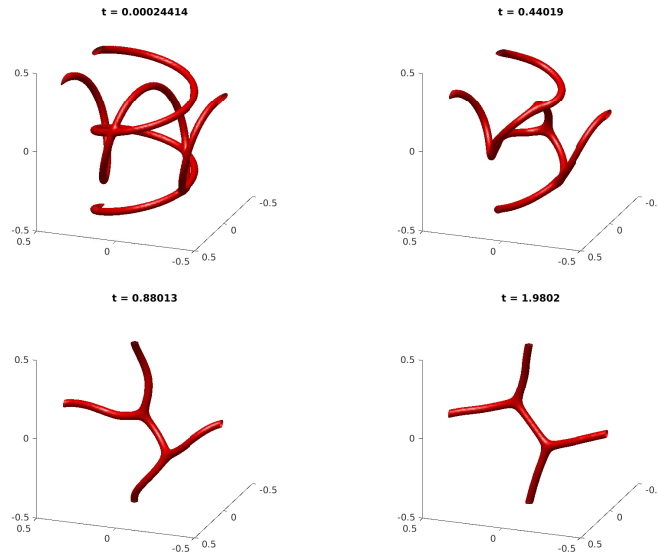


FIGURE 3.23 – Exemple d'évolution de filament obtenu à l'aide de l'équation d'Allen Cahn perturbée (3.4). Chaque image représente la solution u à différents instants t . Les conditions périodiques permettent d'obtenir un ensemble stationnaire présentant deux points triples.

moyenne de filaments de codimension 2. La figure (3.23) présente des exemples d'expériences numériques obtenues via une résolution de l'équation d'Allen Cahn perturbée (3.4).

Pour revenir au problème de Steiner, il suffit alors d'ajouter simplement une contrainte d'inclusion de type

$$u \geq \sum_i q \left(\frac{\text{dist}(x, B(x_i, \sigma))}{\varepsilon} \right),$$

afin d'assurer que l'ensemble Ω contienne bien les boules épaissies de taille σ centrées en les points de Steiner x_i . La figure présente un exemple de simulations numériques obtenues avec cette approche.

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet aussi d'approcher les solutions du problème de Plateau en considérant toujours une contrainte d'inclusion, mais basée cette fois-ci sur un bord épaissi Γ_σ , et en ajoutant aussi une contrainte de volume supplémentaire pour être certain que l'ensemble Ω soit suffisamment dégonflé dans sa position stationnaire. La figure montre un exemple de solution numérique obtenue suivant cette approche.

Ce travail est présenté dans le manuscrit de thèse de Chih-Kang et sera très prochainement soumis à publication, voir la prépublication [A9].

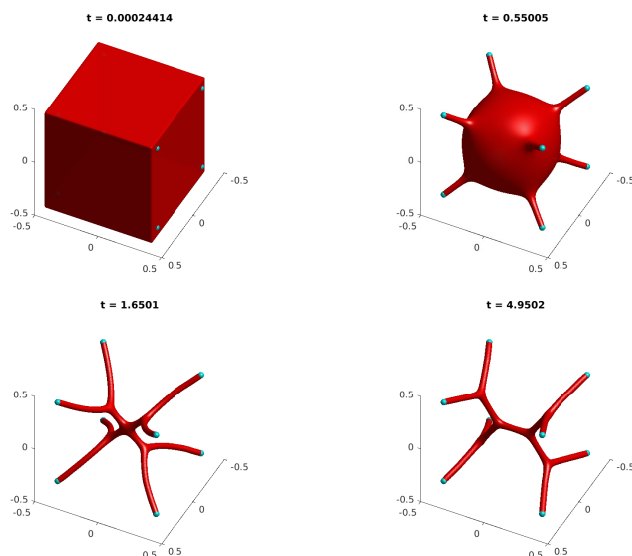


FIGURE 3.24 – Solution du problème de Steiner dans le cas du cube : approximation numérique obtenue en résolvant l'équation d'Allen Cahn perturbée et combinée à des contraintes d'inclusion pour que l'ensemble contienne les points de Steiner affichés en bleu. L'évolution montre ici un ensemble qui dégonfle au cours des itérations puis évolue jusqu'à convergence vers la solution de Steiner associée aux sommets du cube.

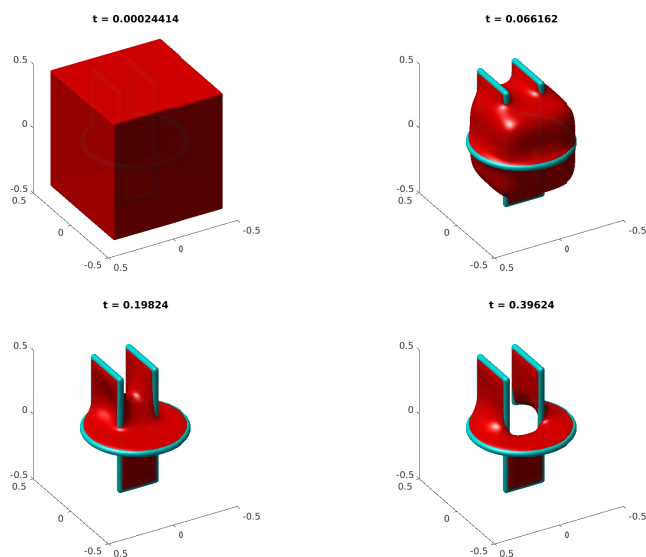


FIGURE 3.25 – Solution du problème de Plateau : approximation numérique obtenue en résolvant l'équation d'Allen Cahn perturbée et combinée à des contraintes d'inclusion pour que la solution contienne les données de bord affichées en bleu. La solution ici dégonfle au cours des itérations et converge vers une bonne approximation du problème de Plateau associé aux données de bord.

3.5 Réseaux de neurones et méthode de champ de phase

Nous souhaitons proposer avec S. Masnou et R. Denis un sujet de thèse sur l'utilisation des réseaux de neurones pour l'approximation de flots géométriques d'interfaces. Nous avons alors dans l'idée d'essayer d'apprendre différents flots comme le mouvement par courbure moyenne classique, anisotrope ou encore le flot de Willmore en fournissant au réseau des couples de fonctions de champ de phase $q(d(x, \Omega(t))/\epsilon)$ associées à des temps t et $t + \delta_t$. Nous espérons ainsi améliorer les propriétés des schémas classiques, reconnaître certains flots par exemple par l'identification de fonctions d'anisotropies dans le cas de mouvements par courbure moyenne anisotrope ou encore traiter le cas de flots géométriques d'interface qui ne sont pas adaptés aux méthodes de champ de phase comme par exemple le cas du mouvement par courbure moyenne en co-dimension 2 ou encore les mouvements par courbure moyenne d'interfaces non orientable.

G. Terii a ainsi commencé sa thèse en septembre 2018 avec comme point de départ l'analyse des structures de réseaux qui pourraient être efficaces dans le cadre de modèle de champ de phase. En effet, l'idée n'était pas d'utiliser des réseaux conventionnels classiques mais plutôt de partir de différents schémas à notre disposition pour en extraire une structure particulière de neurones adaptée à nos méthodes. Lorsque l'on regarde le cas le plus simple de l'équation d'Allen Cahn

$$u_t = \Delta u - \frac{1}{\epsilon^2} W'(u),$$

des schémas efficaces consistent par exemple à traiter la partie diffusion en implicite et le potentiel en explicite. Cette approche conduit alors à des schémas de la forme

$$u^{n+1} = (Id - \delta_t \Delta)^{-1} (u^n - \frac{\delta_t}{\epsilon^2} W'(u^n)),$$

qui alterne un opérateur de réaction $\rho(s) = s - \frac{\delta_t}{\epsilon^2} W'(s)$ avec un opérateur de convolution $K = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{1+4\pi^2|\xi|^2\delta_t} \right] (x)$. Nous avons alors introduit deux types de neurones : un neurone de diffusion D consistant simplement à appliquer un noyau de convolution K et un neurone de réaction R constitué d'un perceptron à deux couches cachées avec respectivement huit et trois neurones gaussiens. La figure (3.26) présente ces deux neurones aux structures bien différentes.

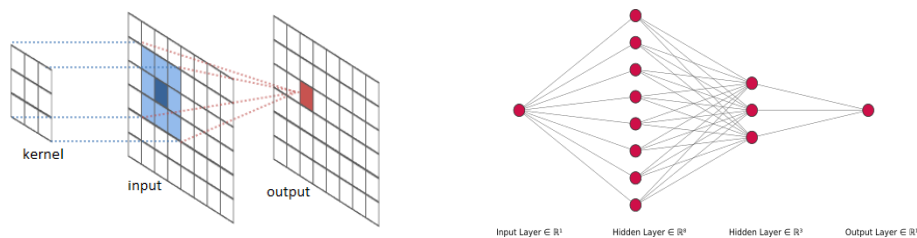


FIGURE 3.26 – Illustration du neurone de diffusion et du neurone de réaction

A partir de ces neurones de champ de phase, nous avons construit et testé plusieurs réseaux dont celui présenté à la figure (3.27). L'idée était alors d'apprendre les paramètres θ de ce réseau à partir d'un jeu de données en minimisant une erreur sur le flot. La mise en oeuvre d'une telle démarche d'apprentissage a nécessité beaucoup de travail et a été réalisée en grande partie par G. Terii et R. Denis en utilisant la librairie Pytorch.

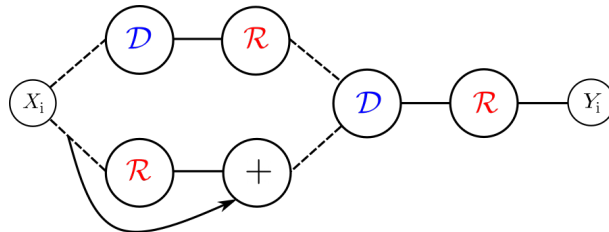


FIGURE 3.27 – Représentation du réseau de neurones (DR-R)(DR) constitué de cinq neurones et qui présente de très bonnes propriétés

Les premiers résultats d'apprentissage que nous avons obtenus sont très positifs, les expériences nous ont aussi montré que la structure du réseau, le choix du critère de minimisation et la taille des noyaux de convolution ont énormément d'importance sur le résultat final.

La figure (3.28) présente un exemple de reconstruction obtenue à partir de l'apprentissage du flot du mouvement par courbure moyenne d'une surface non orientable en dimension 2. Les données d'apprentissage sont construites à partir de l'évolution de cercles dont la description champ de phase utilise des fonctions de la forme $u = -4q'(d(x, \Omega(t))\varepsilon)$. Ces données permettent en particulier de bien décrire les flots réguliers mais ne donnent aucune indication sur le comportement que devrait avoir l'interface au niveau des points singuliers comme les points triples. La figure présente ainsi une simulation numérique obtenue en appliquant simplement le réseau appris. La nouveauté ici est qu'on arrive à faire évoluer une interface non orientée alors qu'il n'existe pas à ma connaissance de modèles de champs de phase permettant d'approcher un tel flot.

Cette approche a aussi été testée en dimension 3 avec un apprentissage basé cette fois-ci sur l'évolution de plusieurs sphères. En couplant par la suite ce schéma dérivant du réseau avec des contraintes d'inclusion, il est possible d'obtenir des solutions du problème de Plateau. La figure (3.29) présente trois exemples de reconstruction obtenues avec une telle approche. Bien que ces premiers résultats soient préliminaires, l'approche montre clairement l'intérêt d'utiliser des réseaux de neurones. En effet, en terme de coût algorithmique, les solutions du problème de Plateau obtenues à l'aide de la résolution de l'équation d'Allen Cahn perturbée nécessitent environ deux heures de calcul alors que celles obtenues avec l'approche par réseaux de neurones sont calculées en trois minutes environ.

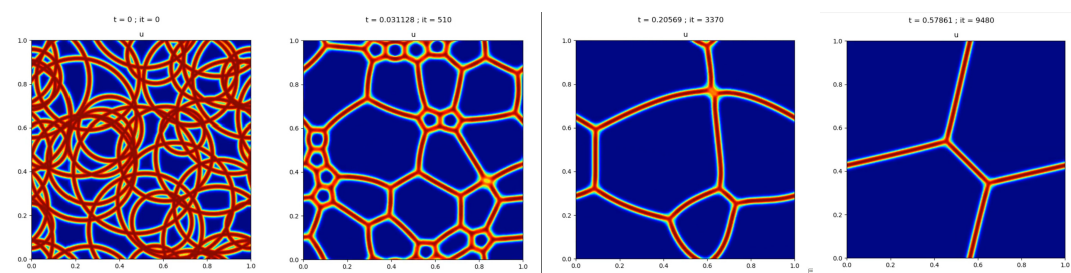


FIGURE 3.28 – Exemple de flot obtenu à partir d’un réseau appris sur des jeux de données de la forme $u(x, t) = -4q'(d(x, \Omega(t))\varepsilon)$. Chaque image représente la solution u à différents instants t . En particulier, il semble que cette approche numérique permet bien d’approcher un mouvement par courbure moyenne dans le cas d’une interface non orientée pour laquelle il n’existe pas à ma connaissance de modèle de champs phase adapté.

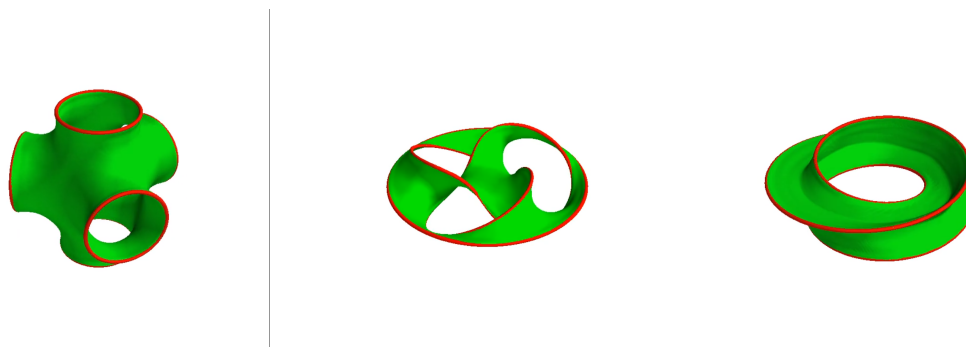


FIGURE 3.29 – Exemple de solutions du problème de Plateau obtenues en appliquant notre schéma numérique basé sur le réseau de neurones appris et couplé avec des contraintes d’inclusion pour contenir les données de bord tracées en rouge. L’approche par réseau de neurones montre de très bonnes reconstructions des solutions du problème de Plateau même dans le cas de surfaces non orientables et singulières.

Chapitre 4

Problèmes inverses appliqués aux méthodes d'imagerie médicale

J'ai commencé à m'intéresser à des problèmes inverses en imagerie médicale lors de mon post-doctorat effectué sous la direction d'Habib Ammari de septembre 2009 à août 2011. Le cadre initial de travail était l'imagerie photo-acoustique ou thermoacoustique [4, 70, 51]. Il s'agit essentiellement de problèmes de reconstruction des sources à partir de données de pression mesurées à l'aide de capteurs acoustiques. Plus précisément, ces méthodes d'imagerie hybrides consistent à éclairer ou à chauffer un milieu à l'aide d'un laser. Le milieu va absorber l'énergie transmis par le laser et se déformer, émettant ainsi une onde initiale qui se propage ensuite dans le milieu jusqu'aux capteurs. L'idée est alors d'essayer de reconstruire cette déformation initiale pour en déduire des informations sur les propriétés physiques des tissus. En règle générale, le temps caractéristique des pulses du laser est très faible devant le temps de propagation de l'onde, ce qui nous amène à une approximation du pulse d'illumination par une masse de Dirac en temps. Le problème inverse peut alors se simplifier et se ramener à la reconstruction d'une condition initiale d'une équation d'ondes à partir des données constituées des valeurs de la solution sur le bord d'un domaine Ω . Ce problème inverse est linéaire et les algorithmes de reconstruction classiques de la littérature consistent par exemple à inverser une transformée de Radon sphérique [60, 52, 39] ou à appliquer des techniques de renversement temporel [66]. Ces méthodes de reconstruction fonctionnent parfaitement dans le cas de milieux acoustiques sans atténuation. L'objectif de mon travail de post-doctorat était donc de prendre en compte les effets d'atténuation de la propagation des ondes dans des milieux acoustiques ou élastiques.

A la suite de mon arrivée à Lyon en septembre 2011, j'ai eu l'occasion de continuer à travailler sur des problèmes liés à l'imagerie photo-acoustique dans le cadre de l'ANR ADVENTURES, portée par M. Bergounioux. Nous nous sommes ainsi focalisés sur deux nouvelles questions : l'optimisation des placements des capteurs et la correction de l'approximation du pulse du laser par une masse de Dirac.

Toujours sur des problèmes inverses en imagerie médicale, j'ai aussi eu l'occasion de travailler sur des techniques d'imagerie par IRM de diffusion avec la participation à l'encadrement de la thèse d'I. Mekkaoui avec J. Pousin. L'objectif était de comprendre

l'influence du mouvement du milieu sur les reconstructions et de proposer une correction en supposant ce mouvement connu. L'article [29], issu de ce travail, ne sera pas détaillé dans ce manuscrit.

Enfin, et depuis maintenant quelques temps, je m'intéresse avec plusieurs collègues à l'élastographie [43, 62, 33]. Il s'agit encore une fois d'une imagerie hybride où la technique consiste à effectuer une échographie d'un milieu tout en le déformant. En comparant ainsi les différentes données, il est possible de reconstruire les champs de déformation internes et d'en déduire par la suite les cartes d'élasticité du milieu. Dans un premier article [A18] que je ne détaillerai pas, nous nous sommes intéressés aux problèmes de reconstruction du champ de déformation u à partir de deux images échographiques du milieu légèrement déformé. Nous avons ensuite proposé une reconstruction des coefficients de Lamé (λ, μ) en suivant une approche itérative classique minimisant l'erreur d'écart aux données.

Dans un deuxième travail publié dans l'article [A19], nous avons développé une approche beaucoup plus efficace qui, dans le cas quasi-statique, explique que l'on peut reconstruire les coefficients de Lamé en étudiant simplement le noyau d'un opérateur défini à partir des champs de déformations. Nous avons aussi testé cette méthode sur des données réelles [A20]. Les données ont été fournies par L. Petrusca et E. Brusseau, deux collègues de CREATIS. Notre approche s'est alors avérée suffisamment stable pour reconstruire de manière quantitative à la fois l'emplacement mais aussi la rigidité des inclusions présentes dans les fantômes que l'on observait.

4.1 Méthode de renversement temporel dans un milieu atténué

On s'intéresse dans cette section à la reconstruction d'une source H dont le support est inclus dans un ensemble Ω à partir de mesures de pression $g(y, t) = u(y, t)$ sur le bord d'un ensemble Ω et pour les temps $t \in [0, T]$. Ici, on suppose que u est solution d'une équation des ondes avec comme second membre la dérivée en temps de la masse de Dirac multipliée par la source. Par exemple, dans un milieu idéal acoustique, u vérifie l'équation

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(x, t) - \Delta u(x, t) = \partial_t (\delta_{t=0}) H(x), & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T] \\ u(x, t) = 0, & \forall t < 0. \end{cases}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{cases} \partial_{tt}u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T], \\ u(x, 0) = H(x), \quad \partial_t u(x, 0) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

La méthode de renversement temporel [66], basée sur la réversibilité des équations des ondes, permet alors d'obtenir une bonne approximation de la source H . Il s'agit de réémettre la pression mesurée sur le bord du domaine Ω tout en ayant préalablement inversé le temps.

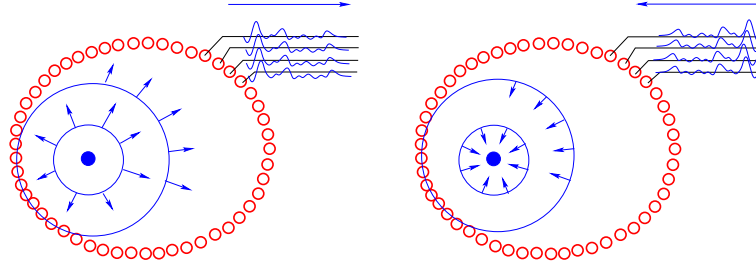


FIGURE 4.1 – Principe de la méthode de renversement temporel

Cette méthode, illustrée sur la figure (4.1), peut s'expliquer sous la forme

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^T v_s(x, T) ds,$$

où v_s est solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_{tt}v_s(x, t) - \Delta v_s(x, t) = \partial_t (\delta_{t=s}) (g(x, T-s)\delta_{\partial\Omega}), & \text{dans } \mathbb{R}^d \times [0, T] \\ v_s(x, t) = 0 = \partial_t v_s(x, t) & \text{pour } t < s. \end{cases},$$

L'étude de $\mathcal{I}(x)$ s'effectue alors avec l'introduction des fonctions de Green $\Gamma_\omega(x, y)$ de l'équation d'Helmholtz,

$$\Delta \Gamma_\omega(x, y) + \omega^2 \Gamma_\omega(x, y) = -\delta_y,$$

ainsi que celle de l'équation des ondes :

$$\Gamma(x, y, t) = \mathcal{F}^{-1}[\Gamma_\omega(x, y)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Gamma_\omega(x, y) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Il ressort ainsi que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x) &= \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(x, y, t) d(y, t) d\sigma(y) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} H(z) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial\Omega} \omega^2 \Gamma_\omega(x, y) \bar{\Gamma}_\omega(z, y) d\sigma(y) d\omega \right] dz. \end{aligned}$$

Enfin, à partir d'approximation des identités d'Helmholtz Kirchhoff, il est possible de montrer que le terme entre crochets est une approximation de la masse de Dirac δ_x lorsque Ω est un disque et que les variables x et y sont supposées suffisamment éloignées du bord de Ω .

4.1.1 Cas d'un milieu acoustique et visqueux

Dans un premier travail présenté dans l'article [A12], nous nous sommes intéressés à des techniques de renversement temporel dans le cas d'un modèle d'équation d'onde acoustique thermovisqueux de la forme

$$\partial_{tt}u_a(x, t) - \Delta u_a(x, t) - a\partial_t(\Delta u_a(x, t)) = \partial_t(\delta_{t=0}) H(x).$$

Il s'agit donc toujours de reconstruire une source H à partir de données $g_a(y, t) = u_a(y, t)$ obtenues sur l'ensemble $\partial\Omega \times [0, T]$.

La figure (4.2) présente un exemple de reconstruction à partir de données atténuées en utilisant la technique de renversement temporel précédente sans prendre en compte l'atténuation. On observe ainsi un effet de lissage dans la reconstruction de la source H que l'on cherche à corriger.

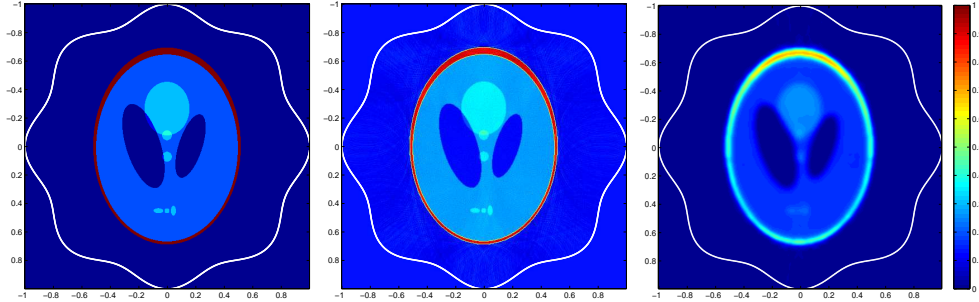


FIGURE 4.2 – Effet de l'atténuation sur la reconstruction par renversement temporel. Successivement, la source H et ses reconstructions à partir de données idéales et atténuées ($a = 0.005$).

Ce problème inverse devient dans ce cas mal posé car les hautes fréquences ne se propagent plus dans le milieu et n'apparaissent plus dans les données de pression mesurées sur le bord de Ω . L'idée est alors de proposer une simple amélioration de la fonctionnelle $\mathcal{I}(x)$ en regardant ce qui se passe asymptotiquement lorsque le coefficient d'atténuation a tend vers 0. L'idée naturelle est alors de considérer la fonctionnelle

$$I_a(x) = \int_0^T v_{s,a}(x, T) ds,$$

où $v_{s,a}(x, t)$ serait une "solution" de

$$\partial_{tt}v_{s,a}(x, t) - \Delta v_{s,a}(x, t) + a\partial_t(\Delta v_{s,a}(x, t)) = \partial_t(\delta_{t=s})(g_a(y, T-s)\delta_{\partial\Omega}).$$

Comme cette équation est mal posée et nécessite une régularisation, nous nous sommes intéressés à une version qui tronque les hautes fréquences en ω et qui conduit à la fonctionnelle

$$\mathcal{I}_{\rho,a}(x) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \partial_t \Gamma_{-a,\rho}(x, y, t) g_a(y, t) d\sigma(y) dt,$$

où $\Gamma_{a,\rho}$ est la fonction de Green associée à l'équation adjointe des ondes atténuées et tronquée aux fréquences $\omega < \rho$:

$$\Gamma_{-a,\rho}(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| < \rho} \Gamma_{-a,\omega} \exp(-i\omega t) d\omega$$

et où $\Gamma_{a,\omega}$ est la fonction de Green de l'équation de Helmholtz atténuée.

$$\omega^2 \Gamma_{a,\omega}(x, y) + (1 + ia\omega) \Delta \Gamma_{a,\omega}(x, y) = -\delta_y.$$

En comparant ensuite les équations dans le domaine fréquentiel par rapport à t , il ressort un opérateur d'atténuation de la forme

$$\mathcal{L}_{a,\rho}[\phi](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \rho} \frac{\kappa_a(\omega)}{\omega} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi(s) \exp\{i\kappa_a(\omega)s\} ds \right\} \exp\{-i\omega t\} d\omega,$$

tel que

$$g_a = \mathcal{L}_{a,\infty}[g], \text{ et } \partial_t \Gamma_{-a,\rho} = \mathcal{L}_{-a,\rho}[\partial_t \Gamma].$$

En particulier, κ_a dépend du modèle d'atténuation et vérifie $\kappa_a(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{1-i a \omega}}$ dans le cas du modèle thermo-visqueux. Ainsi, l'étude asymptotique basée sur le théorème de la phase stationnaire montre que ces deux opérateurs vérifient

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{a,\infty}[\phi](t) &= \phi(t) + \frac{a}{2} (t\phi')'(t) + o(a), \\ \mathcal{L}_{-a,\rho}^*[\phi](t) &= S_\rho[\phi](t) - \frac{a}{2} S_\rho[(t\phi)'] + o(a), \end{cases}$$

où S_ρ est l'opérateur de troncature des hautes fréquences supérieures à ρ . Ce résultat permet ainsi de conclure que l'utilisation de la fonctionnelle d'imagerie $\mathcal{I}_{\rho,a}(x)$ permet bien de corriger l'effet de l'atténuation à l'ordre 1 par rapport à la fonctionnelle \mathcal{I}

Une autre idée développée dans le papier [A15] consiste à corriger les effets de l'atténuation directement sur les données g_a plutôt que d'utiliser la fonctionnelle $\mathcal{I}_{\rho,a}$. En particulier, il est possible de montrer que dans le cas d'un modèle d'atténuation thermo-visqueux, l'opérateur d'atténuation vérifie le développement asymptotique suivant

$$\mathcal{L}_a[\phi](t) = \sum_{m=0}^k \frac{a^m}{m! 2^m} (t^m \phi')^{(2m-1)}(t) + o(a^k).$$

Naturellement, nous pouvons ainsi en déduire un opérateur inverse $\mathcal{L}_{a,k}^{-1}$ d'ordre k de la forme

$$\mathcal{L}_{a,k}^{-1}[\phi] = \sum_{m=0}^k a^m \phi_{k,m},$$

où les coefficients a^m sont déterminés de sorte à vérifier

$$\mathcal{L}_{a,k}^{-1}[\mathcal{L}[\phi]] = \phi + o(a^k).$$

La figure (4.3) montre un exemple de reconstruction de la source H en appliquant i) aucun opérateur de correction, ii) un opérateur d'ordre 1 et iii) un opérateur d'ordre 4. L'avantage est que cette approche s'adapte aussi parfaitement à d'autres modèles d'atténuation comme par exemple ceux proposés dans l'article [50].

4.1.2 Cas d'un milieu élastique

Nous avons par la suite adapté ces premiers travaux dans le cadre de modèles d'ondes élastiques. Tout d'abord, nous nous sommes focalisés dans la publication

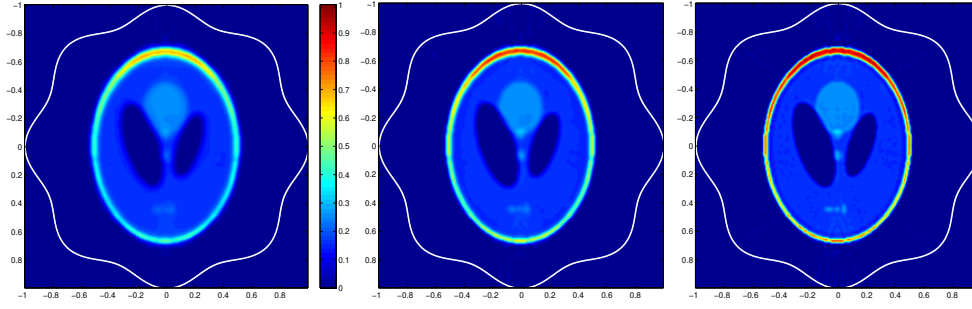


FIGURE 4.3 – Correction de l’effet de l’atténuation dans le cas de $a = 0.005$ avec respectivement aucune correction, une correction d’ordre 1 et une correction d’ordre 4.

[A24] sur l’expression du tenseur de Green dans le cas d’un modèle élastique atténué. L’idée était de se placer dans un cadre assez général, isotrope et en considérant des modèles de viscosité de la forme

$$\partial_{tt}^2 \mathbf{u} = \text{div}(C \nabla^s \mathbf{u} + C_a \mathcal{A}_\gamma[\nabla^s \mathbf{u}]),$$

où C et C_a sont respectivement les tenseurs d’élasticité et d’atténuations isotropes définies par $C = 2\mu \mathbf{I} + \lambda I \otimes I$ et $C_a = 2\mu_a \mathbf{I} + \lambda_a I \otimes I$ et où \mathcal{A}_γ vérifie

$$\mathcal{A}_\gamma[S] = \begin{cases} -(-1)^{\gamma/2} \frac{\partial^{\gamma-1} S}{\partial t^{\gamma-1}} & \text{si } \gamma \text{ est un entier pair} \\ \frac{2}{\pi} (\gamma-1)! (-1)^{(\gamma+1)/2} \frac{U(t)}{t^\gamma} * S & \text{si } \gamma \text{ est un entier impair} \\ \frac{2}{\pi} \Gamma(\gamma) \sin(\gamma\pi/2) \frac{U(t)}{|t|^\gamma} * S & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans cette expression, $U(t)$ correspond à la fonction d’Heaviside et permet d’assurer la causalité du modèle, et Γ est la fonction Gamma. Le cas $\gamma = 2$ permet alors de retrouver un modèle thermo-visqueux de la forme

$$\partial_{tt} \mathbf{u} = \text{div}(C \nabla^s \mathbf{u} + C_a \partial_t[\nabla^s \mathbf{u}]).$$

On notera cependant que les milieux biologiques correspondent généralement à un paramètre γ proche de 1.

L’idée est alors d’essayer de retrouver un opérateur d’atténuation comme dans le cas acoustique afin de connecter les données atténuées aux données idéales et d’en déduire ainsi une correction asymptotique. Plus précisément et dans le cas de coefficients homogènes, le tenseur d’élasticité peut s’exprimer à partir des fonctions de Green des équations d’ondes acoustiques associées respectivement aux ondes de pression et aux ondes de cisaillement.

En séparant ces deux ondes à l’aide d’une décomposition de Helmholtz, on observe alors que l’effet de l’atténuation consiste simplement à appliquer un opérateur d’atténuation acoustique sur chacune des deux ondes, la difficulté étant que ces deux opérateurs sont différents. Une correction même asymptotique des effets d’atténuations nécessite alors d’être capable de séparer les contributions de chacune des ondes

dans les données mesurées.

Ainsi et pour revenir au papier [A24], nous nous sommes placés dans un milieu incompressible afin de faire disparaître les ondes de pression. L'avantage étant que dans ce cas, le problème revient simplement à inverser un opérateur de type \mathcal{L}_a comme nous l'avons déjà fait dans la section précédente. Nous avons aussi appliqué cette démarche dans le cas de l'élasticité anisotrope, un travail qui sera publié dans l'article [A25].

Cette approche visant à corriger les données atténuées \mathbf{g}_a n'ayant pas vraiment aboutie dans le cadre général, nous sommes revenus sur les méthodes de retournement. Nous avons ainsi proposé de compenser au moins le premier ordre des effets de l'atténuation à partir d'une variante de la fonctionnelle de renversement temporel. Ce travail a été publié dans l'article [A14].

On rappelle que dans le cas idéal, \mathbf{u} est solution de

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(x, t) - \mathcal{L}_{\lambda, \mu} \mathbf{u}(x, t) = \frac{d\delta_{t=0}}{dt} \mathbf{H}(x), \text{ pour } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},$$

avec $\mathbf{u}(x, t) = 0$ pour $t < 0$ et $\mathcal{L}_{\lambda, \mu} \mathbf{u} = [\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}(\mathbf{u})]$. Le problème inverse consiste alors à reconstruire la source \mathbf{H} à partir des données $\mathbf{g} = \mathbf{u}$ enregistrées aux instant $t \in [0, T]$ sur le bord de Ω . En appliquant le principe de renversement temporel comme dans le cas acoustique, on pense alors à introduire la fonctionnelle

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^T \mathbf{v}_s(x, T) ds,$$

où \mathbf{v}_s correspond à la contribution des données mesurées à l'instant $T - s$ et est définie comme la solution de

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_s}{\partial t^2} - \mathcal{L}_{\lambda, \mu} \mathbf{v}_s = \frac{d\delta_{t-s}}{dt} \mathbf{g}(x, T - s) \delta_{\partial\Omega}(x).$$

Le problème est que l'analyse et les tests numériques montrent que cette fonctionnelle ne permet pas de retrouver une bonne approximation de \mathbf{H} mais une version où les contributions des ondes de pression et de cisaillement sont mélangées. Il est en revanche possible de corriger simplement cette fonctionnelle à partir de sa décomposition de Helmholtz :

$$\mathcal{I}(x) = \mathcal{H}^p(\mathcal{I}) + \mathcal{H}^s(\mathcal{I}).$$

Ici, les composantes $\mathcal{H}^s(\mathcal{I})$ et $\mathcal{H}^p(\mathcal{I})$ correspondent respectivement aux parties à divergence nulle et à rotationnelle nulle de $\mathcal{I}(x)$. Plus précisément, l'idée est alors de considérer une version modifiée de la forme

$$\tilde{\mathcal{I}}(x) = c_p \mathcal{H}^p(\mathcal{I}) + c_s \mathcal{H}^s(\mathcal{I}),$$

où les poids $c_p = \sqrt{\lambda + 2\mu}$ et $c_s = \sqrt{\mu}$ s'identifient aux vitesses des ondes de pression et de cisaillement. L'analyse de cette fonctionnelle est essentiellement basée sur les propriétés du tenseur de Green élastique \mathbb{G}_ω , tenseur défini comme la solution de

$$(\mathcal{L}_{\lambda, \mu} + \omega^2) \mathbb{G}_\omega = -\delta_0 \mathbb{I},$$

sur \mathbb{R}^d et satisfaisant des conditions de Sommerfeld à l'infini. Il ressort en effet que

$$\tilde{\mathcal{I}}(x) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \left[\int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbb{G}}_\omega(x, y) \overline{\mathbb{G}}_\omega(y, z) d\sigma(y) \right] d\omega \mathbf{H}(z) dz \right].$$

où $\mathbb{G}_\omega = c_p \mathbb{G}_\omega^p + c_s \mathbb{G}_\omega^s$. Ici, les tenseurs \mathbb{G}_ω^p et \mathbb{G}_ω^s correspondent encore aux contributions des ondes de pression et cisaillement et s'obtiennent à partir de la décomposition de Helmholtz de \mathbb{G}_ω . L'analyse de $\tilde{\mathcal{I}}$ s'effectue alors en remarquant que

$$\int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial \mathbb{G}_\omega(x, y)}{\partial \nu} \overline{\mathbb{G}}_\omega(y, z) - \mathbb{G}_\omega(x, y) \frac{\partial \overline{\mathbb{G}}_\omega(y, z)}{\partial \nu} \right] d\sigma(y) = 2i \Im m \{ \mathbb{G}_\omega(x, z) \}.$$

et en utilisant une approximation des dérivées conormales de \mathbb{G}_ω . On montre en effet que lorsque Ω est une boule et que x est supposé suffisamment loin du bord de Ω , alors

$$\frac{\partial \mathbb{G}_\omega^p(x, y)}{\partial \nu} \simeq i\omega c_p \mathbb{G}_\omega^p(x, y), \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbb{G}_\omega^s(x, y)}{\partial \nu} \simeq i\omega c_s \mathbb{G}_\omega^s(x, y)$$

Cette approximation justifie le fait d'obtenir une bonne reconstruction de la source \mathbf{H} à partir de cette nouvelle fonctionnelle.

La figure (4.4) présente des expériences numériques de reconstruction de source en élasticité où les solutions des équations sont calculées dans le domaine de Fourier en utilisant des conditions de bord périodiques sur un domaine suffisamment grand. De même, la décomposition de Helmholtz est calculée numériquement dans l'espace de Fourier avec des conditions de bord de type Dirichlet.

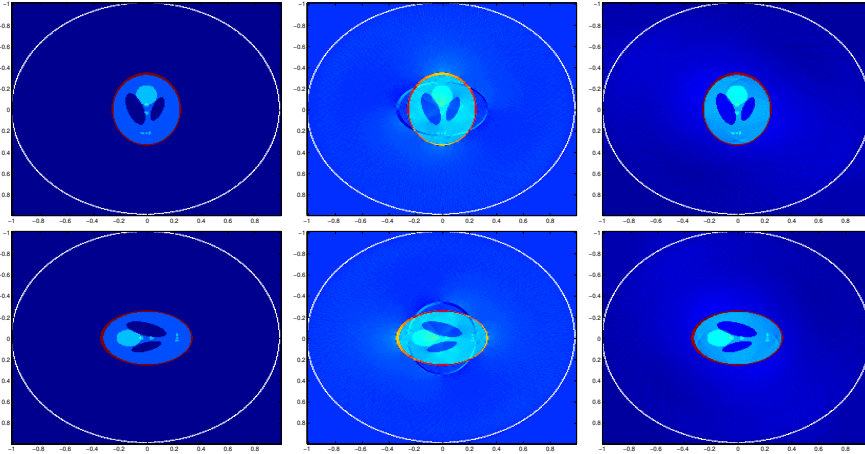


FIGURE 4.4 – Exemple d'expériences numériques de reconstruction de source en élasticité; La première et deuxième ligne correspondent respectivement à la première et deuxième composante de \mathbf{H} . A gauche : source exacte; Milieu avec \mathcal{I} ; A droite avec $\tilde{\mathcal{I}}$.

Toujours dans l'article [A14], nous avons ensuite adapté la méthode de renversement temporel dans le cas de milieux élastiques thermo-visqueux. On suppose ainsi que \mathbf{u}_a est définie comme la solution de

$$\partial_{tt} \mathbf{u}_a - \mathcal{L}_{\lambda, \mu} \mathbf{u}_a - \partial_t \mathcal{L}_{\alpha, \beta} \mathbf{u}_a = \partial_t (\delta_{t=0}) \mathbf{H},$$

où le couple (a_λ, a_μ) correspond aux coefficients d'atténuation. En suivant la même démarche que dans le cas acoustique, nous avons ainsi introduit une version régularisée $\mathbf{v}_{s,a,\rho}(x, t)$ de l'équation rétrograde

$$\partial_{tt}\mathbf{v}_{a,s}(x, t) - \mathcal{L}_{\lambda,\mu}\mathbf{v}_{a,s}(x, t) + \partial_t\mathcal{L}_{a_\lambda,a_\mu}\mathbf{v}_{a,s}(x, t) = \partial_t(\delta_{t=s})\mathbf{g}_a(x, T-s)\delta_{\partial\Omega},$$

et montré que la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{I}}_{a,\rho}$ définie par

$$\tilde{\mathcal{I}}_{a,\rho} = c_s\mathcal{H}^s[\mathcal{I}_{a,\rho}] + c_p\mathcal{H}^p[\mathcal{I}_{a,\rho}] \text{ où } \mathcal{I}_{a,\rho}(x) = \int_0^T \mathbf{v}_{s,a,\rho}(x, T)ds,$$

permettait de bien compenser les effets d'ordre 1 de l'atténuation lorsque a_λ et a_μ tendent vers zéro par rapport à l'utilisation de $\tilde{\mathcal{I}}$.

4.1.3 Cas de la reconstruction du support d'une source de bruit

Par la suite, nous avons cherché à appliquer notre correction de l'atténuation dans un contexte où la source H est une source de bruit décorrélée en espace. Ces travaux ont fait l'objet de la publication [A13]. Plus précisément, l'idée était de considérer une équation des ondes de la forme

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = n(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ u(x, t) = \partial_t u(x, t) = 0, & t < 0, \end{cases}$$

où la source de bruit n est supposée être un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle et dont la fonction de covariance vérifie

$$\langle n(x, t)n(y, s) \rangle = F(t-s)K(x)\delta(x-y). \quad (4.1)$$

L'objectif est d'essayer de reconstruire le support de K (supposé inclus dans l'ensemble de Ω) et le signal F à partir des données $\{g(x, t) = u(x, t), t \in [0, T], x \in \partial\Omega\}$. Une solution proposée par J. Garnier et G. Papanicolaou [42] consiste alors à introduire les corrélations entropiques croisées

$$C(\tau, x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t)u(y, t+\tau)dt, \quad x, y \in \partial\Omega.$$

et à considérer la fonctionnelle d'imagerie suivante

$$\mathcal{I}(z) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \Gamma_\omega(x, z)\overline{\Gamma_\omega(y, z)}\hat{C}(\omega, x, y)d\sigma(x)d\sigma(y)d\omega$$

Toujours en utilisant les propriétés des fonctions Green Γ_ω , il est alors possible de montrer que

$$\mathcal{I}(z) \simeq \int_{\Omega} \mathcal{Q}(z, x)K(x)dx,$$

où le noyau de lissage \mathcal{Q} dépend de F et vérifie l'expression suivante

$$\mathcal{Q}(z, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{F}(\omega)}{\omega^2} \text{Im}\{\Gamma_\omega(z, x)\}^2 d\omega.$$

Le lien avec les méthodes de retournement temporel précédentes s'effectue simplement en remarquant que

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^T v(x,t)^2 dt, \text{ avec } v(x,t) = \int_0^T v_s(x,t) ds,$$

et où v_s correspond toujours au retournement des données mesurées à l'instant $T - s$:

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 v_s(x,t) - \Delta v_s(x,t) = \partial_t (\delta_{t=s}) (g(x, T-s) \delta_{\partial\Omega}), & \text{dans } \mathbb{R}^d \times [0, T] \\ v_s(x,t) = 0 = \partial_t v_s(x,t) & \text{pour } t < s. \end{cases},$$

Une façon simple de compenser l'effet du noyau régularisant \mathcal{Q} sur la reconstruction de la source K s'effectue alors en considérant des versions avec un poids W

$$\mathcal{I}_W(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{W(\omega)}{\hat{F}(\omega)} \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \Gamma_\omega(x,z) \overline{\Gamma_\omega(y,z)} \hat{C}(\omega, x, y) d\sigma(x) d\sigma(y) d\omega.$$

En pratique, il suffit notamment d'appliquer la formule de retournement précédente aux données filtrées $\tilde{g}(x,t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sqrt{W(\omega)}}{\sqrt{\hat{F}(\omega)}} \mathcal{F}[g(x, \cdot)](\omega)(t) \right]$, ce qui nécessite d'avoir une bonne estimation de la fonction de corrélation temporelle F .

La figure (4.5) présente un exemple de reconstruction dans le cas où F est une gaussienne $\hat{F}(\omega) = \exp(-\pi \frac{\omega^2}{\omega_{max}^2})$.

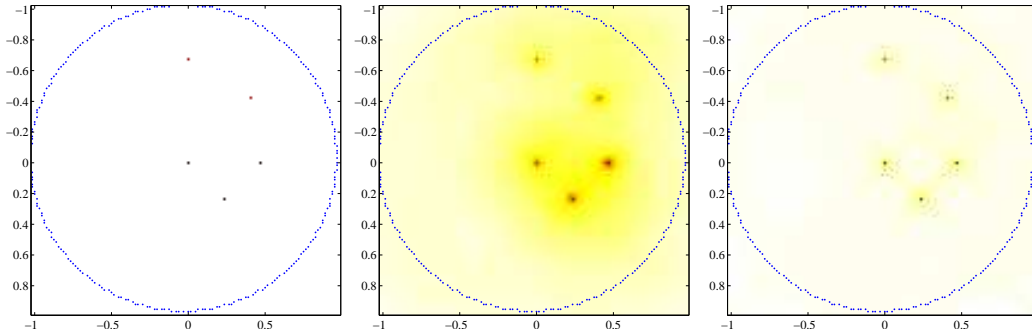


FIGURE 4.5 – Exemple de reconstruction de source de bruit K ; à gauche K , au milieu \mathcal{I} , à droite \mathcal{I}_W avec $W(\omega) = |\omega|^3 \mathbf{1}_{|\omega| < \omega_{max}}$.

La nouveauté de ce travail était alors de considérer un milieu atténué avec des solutions u_a de l'équation

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u_a(x,t) - \Delta u_a(x,t) - a \partial_t \Delta u_a = n(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}. \\ u_a(x,t) = \partial_t u_a(x,t) = 0, & t < 0, \end{cases}$$

Comme précédemment, il s'agit encore de reconstruire le support de K à partir des données $\{g_a(x,t) = u_a(x,t), t \in [0, T], x \in \partial\Omega\}$. En suivant la stratégie des méthodes de retournement temporel dans le cas de données atténuées, nous avons alors étudié la fonctionnelle

$$\mathcal{I}_\rho(z) = \int_{|\omega| \leq \rho} \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \Gamma_{-a,\omega}(x,z) \overline{\Gamma_{-a,\omega}(y,z)} \hat{C}_a(\omega, x, y) d\sigma(x) d\sigma(y) d\omega$$

où

$$C_a(\tau, x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T u_a(x, t) u_a(y, t + \tau) dt, \quad x, y \in \partial\Omega.$$

En particulier, nous avons montré l'approximation suivante

$$\mathcal{I}_\rho(z) \simeq \int_{\Omega} \mathcal{Q}_{\rho,a}(z, x) K(x) dx,$$

où le noyau de lissage \mathcal{Q} vérifie maintenant l'expression suivante

$$\mathcal{Q}_{\rho,a}(z, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{F}(\omega)}{4\omega^2(1 + a^2\omega^2)^{1/2}} |\Gamma_{-a,\omega}(x, z) - \bar{\Gamma}_{a,\omega}(x, z)|^2 d\omega,$$

Ce résultat montre que cette approche permet bien de compenser légèrement les effets de l'atténuation. La figure (4.6) présente aussi des exemples de reconstruction sur des données atténuées avec une comparaison des reconstructions obtenues respectivement avec la fonctionnelle \mathcal{I}_W et \mathcal{I}_ρ .

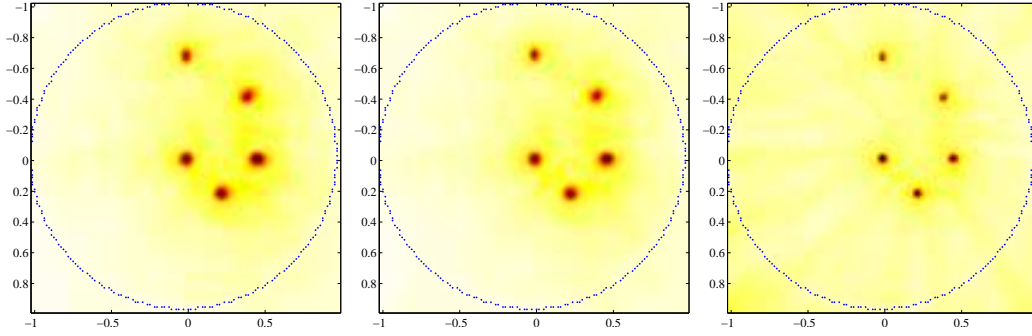


FIGURE 4.6 – Exemple de reconstruction avec une correction des effets d'atténuation avec $a = 0.002$. à gauche \mathcal{I}_W , au centre \mathcal{I}_ρ avec $\rho = 7.5$, à droite \mathcal{I}_ρ avec $\rho = 15$.

4.2 Deux problèmes liés à l'imagerie photo-acoustique en pratique

Par la suite, et dans le cadre de l'ANR ADVENTURE, je me suis intéressé à deux nouvelles questions concernant l'imagerie photo-acoustique.

4.2.1 Prise en compte du profil du pulse du laser

La première question que nous avons regardée avec C. Lucas et Y. Privat concerne l'approximation du pulse du Dirac par la masse de Dirac. Cette question nous avait été posée par deux collègues de l'Institut Fresnel à Marseille, A. Da Silva et A. Litman. En effet, de leurs expériences physiques, il ressortait qu'il était nécessaire d'émettre plusieurs pulses de laser afin d'augmenter la quantité d'énergie absorbée par le tissu et ainsi améliorer le rapport signal sur bruit. Dans ce cas pratique, l'approximation du

pulse du laser par la masse de Dirac n'est pas toujours possible et dans certains cas, cela fausse même grandement la reconstruction de la source. D'un point de vue numérique, les méthodes de renversement temporel ne s'appliquent plus vraiment. L'approche naturelle consiste plutôt à reconstruire la source H à l'aide de la minimisation d'une énergie modélisant l'erreur aux données et nécessitant aussi une discrétisation temporelle suffisamment fine pour prendre en compte le bon profil temporel du pulse. L'expérience numérique présentée à la figure (4.7) montre un exemple de reconstruction de source en utilisant la fonctionnelle de renversement temporel sans prendre en compte le profil du pulse.

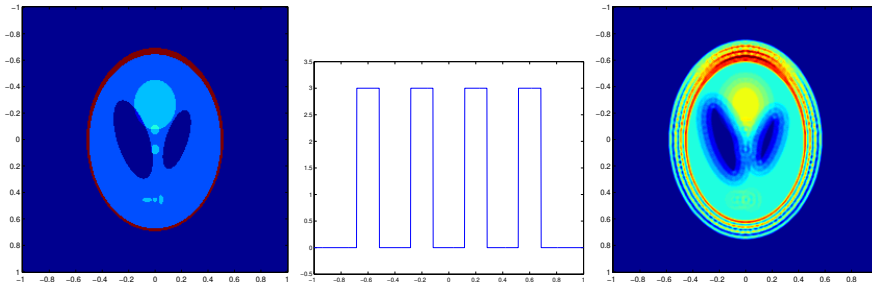


FIGURE 4.7 – Exemple de reconstruction par une méthode de renversement temporel de la source H . A gauche : la source initiale ; Au centre : le profil du pulse ; A droite La source reconstruite.

Ainsi, on suppose maintenant que les données g_ε sont collectées à partir de la pression u_ε définie comme solution de l'équation des ondes suivante

$$\partial_{tt}u_\varepsilon(x, t) - \Delta u_\varepsilon(x, t) = \partial_t(f_\varepsilon(t))H(x).$$

La fonction f_ε s'identifie ici à $f_\varepsilon(t) = f(t/\varepsilon)/\varepsilon$ où f correspond au profil du pulse, supposé connu et dont le support est supposé inclus dans l'intervalle $[-T_f, T_f]$. Le cas limite $\varepsilon \rightarrow 0$ correspond en particulier au problème de base lorsque l'approximation de la masse de Dirac est effectuée. L'idée de ce travail, publié dans l'article [A16], était alors d'identifier la reconstruction H_ε fournie par la méthode de retournement temporel, puis d'en proposer une correction. En supposant en effet que le support de la source H est strictement inclus dans l'ensemble Ω et en supposant ε suffisamment petit, il est possible d'explicitier un problème de Cauchy équivalent

$$\begin{cases} \partial_{tt}\tilde{u}_\varepsilon(x, t) - \Delta\tilde{u}_\varepsilon(x, t) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \\ \tilde{u}_\varepsilon(x, 0) = H_\varepsilon(x), & \partial_t\tilde{u}_\varepsilon(x, 0) = G_\varepsilon(x) \text{ dans } \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

dans le sens où $\tilde{u}_\varepsilon(y, t) = u_\varepsilon(y, t)$ pour tout $(y, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$. En effet, il est possible de montrer l'existence d'un tel problème de Cauchy équivalent assez simplement à partir du moment où $2\varepsilon T_f < \delta$ et où δ correspond à la distance entre le support de H et le bord de l'ensemble Ω . Plus précisément, en comparant ces deux solutions, il ressort que

$$H_\varepsilon = H * K_{0, f_\varepsilon} \quad \text{et} \quad G_\varepsilon = H * K_{1, f_\varepsilon},$$

où les noyaux K_{0,f_ε} et K_{1,f_ε} s'identifient à

$$H_\varepsilon = H * \left(\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(s) \partial_t \Gamma(x, s) ds \right) \text{ et } G_\varepsilon = H * \left(\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(s) \partial_{tt} \Gamma(\cdot, s) ds \right).$$

En exploitant encore une fois les propriétés de la fonction de Green Γ de l'équation des ondes, il est possible de montrer les formules plus explicites suivantes :

$$K_{0,f_\varepsilon}(x) = \mathcal{F}_x^{-1} \left[\hat{f}_p(|\xi| \varepsilon) \right] (x) \text{ et } K_{1,f_\varepsilon}(x) = i \mathcal{F}_x^{-1} \left[\frac{1}{|\xi|} \hat{f}_i(|\xi| \varepsilon) \right],$$

où f_p et f_i correspondent respectivement aux parties paire et impaire de f .

La correction de la source obtenue par la méthode de renversement temporel peut alors s'effectuer tout simplement à l'aide d'un algorithme de déconvolution. La figure (4.8) présente une telle reconstruction à partir d'une régularisation TV.

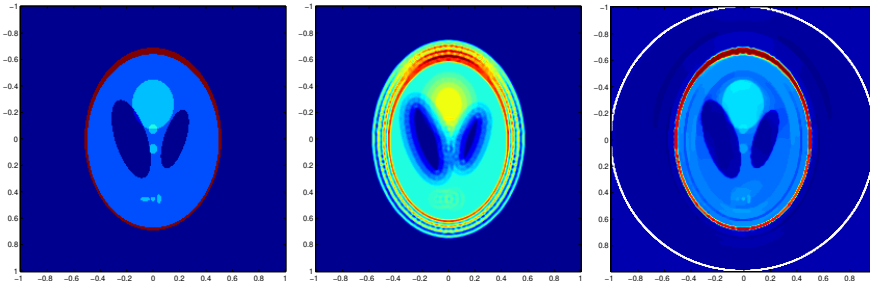


FIGURE 4.8 – Correction de la méthode de renversement temporel à l'aide d'un algorithme de déconvolution. A gauche : la source initiale; au centre : H_ε ; à droite, la source reconstruite par l'algorithme de déconvolution.

Finalement, le cas élastique a aussi été abordé dans l'article [A16] avec un résultat assez similaire. En particulier, on montre tout d'abord que la source \mathbf{H}_ε reconstruite en appliquant la technique de renversement temporel vérifie

$$\mathbf{H}_\varepsilon = K_{0,f_\varepsilon}^p * \mathbf{H}^p + K_{0,f_\varepsilon}^s * \mathbf{H}^s,$$

où les termes \mathbf{H}^p et \mathbf{H}^s dérivent de la décomposition de Helmholtz de \mathbf{H} . Dans ce cas, les noyaux $K_{0,f_\varepsilon}^\alpha$ sont définis pour $\alpha \in \{s, p\}$ par

$$K_{0,f_\varepsilon}^\alpha(x) = \mathcal{F}_x^{-1} \left[\hat{f}_p(|\xi| c_\alpha \varepsilon) \right].$$

On retrouve ici des noyaux de diffusion différents selon le type d'onde et dont les tailles caractéristiques dépendent des vitesses associées $c_p = \sqrt{\lambda + 2\mu}$ et $c_s = \sqrt{\mu}$.

4.2.2 Optimisation de la position des capteurs

Une deuxième question, abordée avec M. Bergounioux et Y. Privat, concerne l'optimisation de la position des capteurs. En effet, on ne dispose en pratique que d'un nombre limité de capteurs à positionner sur le bord de l'ensemble Ω . La question de savoir comment optimiser cette position afin d'augmenter la quantité d'informations présente dans les données mesurées devient donc assez naturelle. En notant que la position optimale dépend aussi a priori de la source que l'on est en train d'imager, la méthodologie développée par la suite consiste à :

- Effectuer un premier jeu de mesures avec des capteurs non optimisés
- Exploiter ces données pour reconstruire une première approximation de la source H
- Déterminer une répartition optimisée des capteurs
- En déduire une meilleure reconstruction de la source H .

Ce travail a été publié dans l'article [A17].

Nous nous plaçons tout d'abord dans un cadre continu et nous supposons que les capteurs sont localisés sur un ensemble $\Gamma \subset \partial\Omega$ avec

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Gamma) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega),$$

où $L \in [0, 1]$ représente la quantité de capteurs. Il s'agit donc de données $g(y, t) = u(y, t)$ incomplètes, restreintes à l'ensemble $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$. Le problème de reconstruction de la source H à partir de g devient donc dans ce cas un problème inverse mal posé. L'idée est alors d'obtenir une approximation \tilde{H}_0 de la source H , en minimisant $J(H_0) = A_1(H_0) + \gamma\|H_0\|_{TV}$ où

$$A_1(1_\Gamma, H_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int 1_\Gamma(x) (u_{[H_0]}(t, x) - g(t, x))^2 dx dt,$$

et $u_{[H_0]}$ représente la solution de l'équation des ondes acoustiques associée à la source H_0 .

L'intérêt du terme de régularisation TV est d'introduire suffisamment de compacité pour rendre ce problème d'optimisation bien posé. D'un point de vue pratique, nous utilisons un algorithme de minimisation alterné où l'optimisation de A_1 s'effectue à l'aide d'une technique de renversement temporel alors que le terme de variation totale est traité à l'aide de l'algorithme dual de Chambolle [24]. La figure (4.9) présente un exemple de reconstruction de source à l'aide d'une régularisation TV . Les capteurs sont ici positionnés sur un cercle et sont représentés par des points blancs. Ces expériences numériques montrent des reconstructions plus ou moins précises en fonction de cette répartition bien que la quantité de capteurs soit identique dans les deux cas.

Par la suite, l'optimisation de la localisation des capteurs s'effectue à partir de la reconstruction \tilde{H}_0 . L'idée est alors de maximiser par rapport à Σ une fonctionnelle d'observabilité [71] de la forme

$$A_2(1_\Sigma, \tilde{H}_0) = \frac{\int_0^T \int 1_\Sigma(x) \partial_t u_{[\tilde{H}_0]}(t, x)^2 dx dt}{\|\tilde{H}_0\|_{H^1(\Omega)}^2}.$$

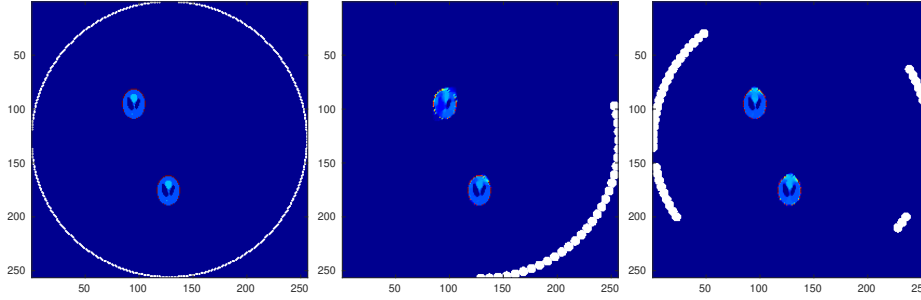


FIGURE 4.9 – Exemple de reconstruction de la source à l'aide d'une régularisation TV pour différentes positions des capteurs.

Plus précisément, ce problème n'étant pas bien posé à cause d'un manque de contrôlabilité, il est nécessaire de considérer une variante avec des ensembles épaissis Σ_ε d'une profondeur caractéristique de ε ,

$$\Sigma_\varepsilon = \{s + \mu \nu(s), s \in \Gamma, \mu \in [0, \varepsilon]\},$$

où la variable ν représente la normale intérieure à $\partial\Omega$. Ainsi, en introduisant les ensembles

$$\mathcal{V}_L = \left\{ a \in L^\infty(\partial\Omega), a \in \{0, 1\} \text{ et } \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \right\}$$

et

$$\mathcal{U}_L = \{a \in L^\infty((\partial\Omega)_\varepsilon), a(s + \mu\nu(s)) = X(s), \text{ pour } (s, \mu) \in \partial\Omega \times [0, \varepsilon] \text{ et avec } X \in \mathcal{V}_L\},$$

on rend le problème de maximisation de A_2 dans l'ensemble \mathcal{U}_L bien posé. La solution optimale Γ^* s'identifie de plus grâce à l'existence d'un réel λ tel que

$$1_{\{\psi_{[\tilde{H}_0]}(s) > \lambda\}} \leq 1_{\Gamma^*}(s) \leq 1_{\{\psi_{[\tilde{H}_0]} \geq \lambda\}}(s), \quad \forall s \in \partial\Omega,$$

où

$$\psi_{[\tilde{H}_0]}(s) = \int_0^T \int_0^\varepsilon \partial_t u_{[\tilde{H}_0]}(t, s + \mu\nu(s))^2 d\mu dt$$

Il suffit en pratique d'estimer la fonction $\psi_{[\tilde{H}_0]}$ à partir de la reconstruction approximative \tilde{H}_0 et d'identifier la valeur de λ qui permet de satisfaire la contrainte sur la quantité de capteurs $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Gamma^*) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$.

Une expérience numérique est présentée à la figure (4.10). La première image représente la source \tilde{H}_0 obtenue à partir d'une première position de capteurs. La fonction $\psi_{[\tilde{H}_0]}$ ainsi que le nouvel ensemble Γ^* sont présentés sur la deuxième image. Enfin, la nouvelle reconstruction de la source H obtenue à partir du nouvel emplacement de capteurs est affichée sur la troisième image. Cet exemple montre une reconstruction de meilleure qualité avec l'utilisation des nouveaux capteurs. Cette nouvelle position sera aussi d'autant plus adaptée que la reconstruction de départ sera précise. Pour s'en convaincre, la figure (4.11) montre un exemple numérique où la position des capteurs

est déterminée à partir de $\psi_{[H]}$ et non de $\psi_{[\tilde{H}_0]}$. La reconstruction est ici quasi-optimale et témoigne bien de l'intérêt d'utiliser une fonctionnelle d'observabilité pour optimiser la position de capteurs. Une question qui reste cependant en suspens serait de savoir quelle serait la meilleure fonctionnelle d'observabilité pour notre problème.

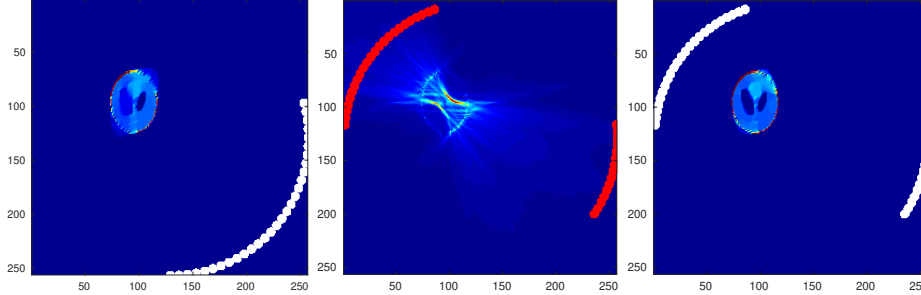


FIGURE 4.10 – Optimisation de l'emplacement des capteurs; A gauche : la source approchée \tilde{H}_0 ; au centre : la fonction $\psi_{[\tilde{H}_0]}$ et l'ensemble optimal Γ^* ; à droite : la reconstruction de la source H à partir de la nouvelle position Γ^* .

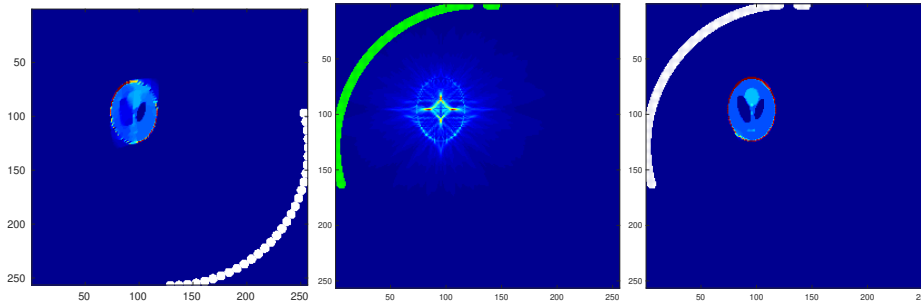


FIGURE 4.11 – Optimisation de l'emplacement des capteurs; A gauche : la source approchée \tilde{H}_0 ; au centre : la fonction ψ_H et l'ensemble optimal Γ^* associé à la véritable source H ; à droite : la reconstruction de la source H à partir de la nouvelle position Γ^* .

Enfin, une version discrète de ce résultat est aussi présenté dans l'article [A17]. Sans rentrer dans les détails, il s'agit de considérer un nombre fini N_Θ de capteurs et d'optimiser leurs positions

$$\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N_\Theta}).$$

L'idée est de définir un épaississement des capteurs sous la forme

$$\Gamma_\Theta = \cup_{i=1}^{N_\Theta} [\theta_i - \ell, \theta_i + \ell], \quad \text{avec} \quad 2\ell N_0 = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$$

et d'optimiser une fonctionnelle d'observation discrète de la forme

$$J(\Theta, \tilde{H}_0) = \frac{\int_0^T \int 1_{\Gamma_{\Theta, \varepsilon}}(x) \partial_t u_{[\tilde{H}_0]}(t, x)^2 dx dt}{\|\tilde{H}_0\|_{H^1(\Omega)}^2}.$$

Nous arrivons alors à obtenir une preuve d'existence ainsi qu'une caractérisation de la solution. En revanche cette caractérisation ne permet pas d'obtenir aussi simplement

que précédemment la position optimale θ^* des capteurs et l'utilisation d'un algorithme génétique devient nécessaire pour maximiser J . La figure (4.12) montre un exemple d'optimisation numérique obtenue dans le cas discret avec $N_\Theta = 38$ capteurs.

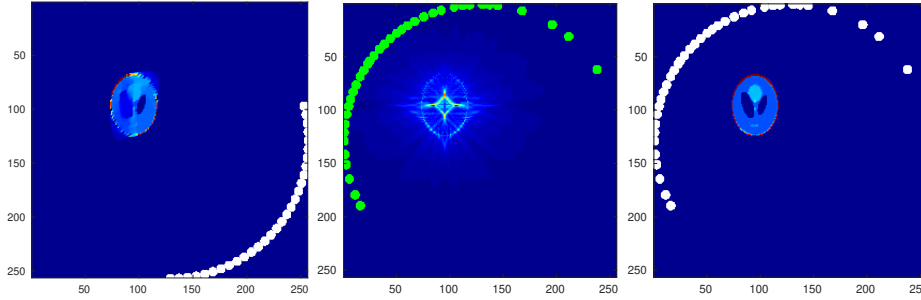


FIGURE 4.12 – Optimisation de l'emplacement des capteurs dans le cas discret; A gauche : la source approchées \tilde{H}_0 ; au centre : la fonction ψ_H et l'ensemble optimal Γ^* associé à la véritable source H ; à droite : la reconstruction de la source H à partir de la nouvelle position Γ^* .

4.3 Reconstruction de cartes d'élasticité en élastographie

Enfin, nous nous sommes récemment intéressés à la reconstruction des propriétés élastiques d'un tissu biologique [43, 62, 33] à partir de la connaissance de champs de déformation internes $\{\mathbf{u}^{(\ell)}\}$ d'un milieu Ω . Les déformations sont supposées ici suffisamment petites pour se placer dans un cadre linéaire. On admet aussi que les champs de déformation $\{\mathbf{u}^{(\ell)}\}$ vérifient sur l'ensemble Ω l'équation statique suivante

$$-\operatorname{div}(\mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{u}^{(\ell)}) = 0.$$

Plus précisément, \mathbf{C} représente le tenseur d'élasticité du milieu qui s'identifie à $\mathbf{C} = 2\mu\mathbf{I} + \lambda I \otimes I$ dans le cas d'un milieu isotrope. On rappelle aussi que le couple (λ, μ) représente les coefficients de Lamé. L'idée est alors de reconstruire les différentes composantes de \mathbf{C} à partir d'une famille de données $\{u^{(\ell)}\}$, de manière quantitative mais à un coefficient multiplicatif près.

Il existe un certain nombre d'études de stabilité de ce problème inverse. En particulier, les articles [5, 7, 6] montrent un résultat général de stabilité lipschitzienne qui nécessite a priori $n = d(d + 1)/2 + N/d$ jeux de données en dimension d dans le cas où le tenseur d'élasticité est constitué de N composantes scalaires indépendantes. Ce résultat montre ainsi qu'il faudrait a priori 4 champs de déformation pour reconstruire de manière stable les coefficients de Lamé dans le cas d'un modèle d'élasticité isotrope $N = 2$ en dimension 2.

L'approche classique consiste alors à minimiser une énergie d'écarts aux données comme par exemple

$$J(\lambda, \mu) = \sum_{\ell} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{(\ell)} - \mathbf{u}[\lambda, \mu, \ell])^2 dx,$$

où la fonction $u[\lambda, \mu, \ell]$ est définie comme la solution de l'équation d'élasticité sur Ω associée aux conditions aux limites $u[\lambda, \mu, \ell](y) = u^{(\ell)}(y)$ pour $y \in \partial\Omega$. En pratique, une telle optimisation pose quelques difficultés à cause de la dépendance non linéaire de la solution $u[\lambda, \mu, \ell]$ par rapport aux coefficients (λ, μ) . C'était le point de vue que nous avons regardé dans un premier papier [A18] et pour lequel nous discutons de la reconstruction des champs de déformation u à partir de couples d'images représentant respectivement l'image du milieu et l'image du milieu déformé. Sans rentrer dans les détails, cette reconstruction s'effectue avec des algorithmes de flots optiques mais le manque d'unicité nécessite une régularisation que nous avons choisie de type variation totale.

Nous avons proposé par la suite, toujours avec H. Ammari, L. Seppecher et P. Millien, une méthode plus directe où l'idée est de rechercher les composantes du tenseur d'élasticité \mathbf{C} en analysant le noyau des opérateurs

$$A_{\mathbf{u}^\ell} : \mathbf{C} \mapsto \operatorname{div}(\mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{u}^{(\ell)}).$$

L'analyse théorique de la faisabilité d'une telle méthode a été effectuée seulement dans le cas d'un modèle d'élasticité de la forme $\mathbf{C} = \mu \mathbf{I}$. Nous avons ainsi étudié quelques propriétés de l'opérateur

$$A_{\mathbf{u}}^I : \mu \mapsto \operatorname{div}(\mu \nabla^s \mathbf{u}).$$

Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur le noyau de cet opérateur et nous avons montré, sous des hypothèses de régularité de la forme $\nabla^s \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}) \cap W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^{d \times d})$ avec $p > d$ et $|\det \nabla^s \mathbf{u}| \geq c > 0$, que ce noyau est bien de dimension au plus 1. Dans le cas où il est de dimension 1, nous avons aussi montré qu'il contenait bien un élément positif μ_0 de régularité $W^{1,p}$. De plus, la propriété d'image fermé de cet opérateur démontrée dans le cas où son noyau est bien de dimension 1 assure ainsi la stabilité L^2 de la reconstruction d'un élément μ du noyau.

D'un point de vue numérique, nous avons testé notre méthode dans le cas de différents modèles d'élasticité et à chaque fois, les résultats ont été très positifs. L'idée est d'utiliser une discrétisation par éléments finis à partir de la formulation faible de l'opérateur $A_{\mathbf{u}}$. Dans le cas d'un modèle général d'élasticité où le tenseur d'élasticité est de la forme $\mathbf{C}(x) = \sum_{k=1}^N \theta^k(x) \mathbf{C}^k$, le problème revient alors à déterminer une solution θ du système suivant $A_{u^1, u^2, \dots, u^n}^{\mathbf{C}} \theta = 0$ où

$$A_{u^1, u^2, \dots, u^n}^{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} A_{\mathbf{u}^1}^{\mathbf{C}^1} & \dots & A_{\mathbf{u}^1}^{\mathbf{C}^N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{\mathbf{u}^n}^{\mathbf{C}^1} & \dots & A_{\mathbf{u}^n}^{\mathbf{C}^N} \end{pmatrix} \text{ et } \theta = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^N \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

et où les opérateurs $A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{C}^\ell}$ sont définis par

$$\langle A_{\mathbf{u}}^{\mathbf{C}^\ell} \theta, \mathbf{v} \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} \theta(x) (\mathbf{C}^\ell : \nabla^s \mathbf{u}(x)) : \nabla^s \mathbf{v}(x) dx, \quad \forall \theta \in L^2(\Omega), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d). \quad (4.3)$$

Plus précisément, les premières expériences numériques proposées dans le papier [A19] ont été réalisées sur maillages triangulaires en utilisant respectivement des espaces de discrétisation P^0 pour les cartes d'élasticité $\theta \in L^2(\Omega)$ et P^1 pour les champs de déformations $\mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Bien qu'une telle discrétisation ne soit pas adaptée en pratique car elle ne vérifie pas les inégalités inf-sup nécessaires à la stabilité du problème inverse discret, elle était motivée par l'utilisation de **Matlab** et de sa librairie d'éléments finis. Il nous paraissait en effet plus simple de stabiliser le problème discret que de changer d'environnement de travail. Nous avons ainsi ajouté un terme de régularisation de type TV afin d'éviter des problèmes de stabilité numérique dans la reconstruction des coefficients θ . Des approximations des champs θ ont alors été obtenues en minimisant une énergie convexe de la forme

$$J(\theta) = \|A_{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n}^C \theta\|^2 + \varepsilon \|\theta\|_{TV},$$

sous une contrainte linéaire de la forme $\theta \geq 1$. En pratique, une telle optimisation peut alors s'effectuer facilement à l'aide du solveur CVX [45] sous *Matlab* qui est basé sur une approche primale-duale du problème d'optimisation.

Toutes les expériences numériques présentées dans l'article [A19] ont été effectuées à partir de données simulées. Un point étonnant est qu'elles montrent de très bonnes reconstructions même lorsque le nombre de données ne vérifie pas les hypothèses théoriques garantissant l'unicité de la reconstruction. La figure (4.13) présente un exemple de telles reconstructions des coefficients de Lamé en utilisant respectivement $n = 1, n = 2$ et $n = 4$ jeux de données. On observe ainsi une bonne approximation de (λ, μ) à partir d'un seul jeu de données.

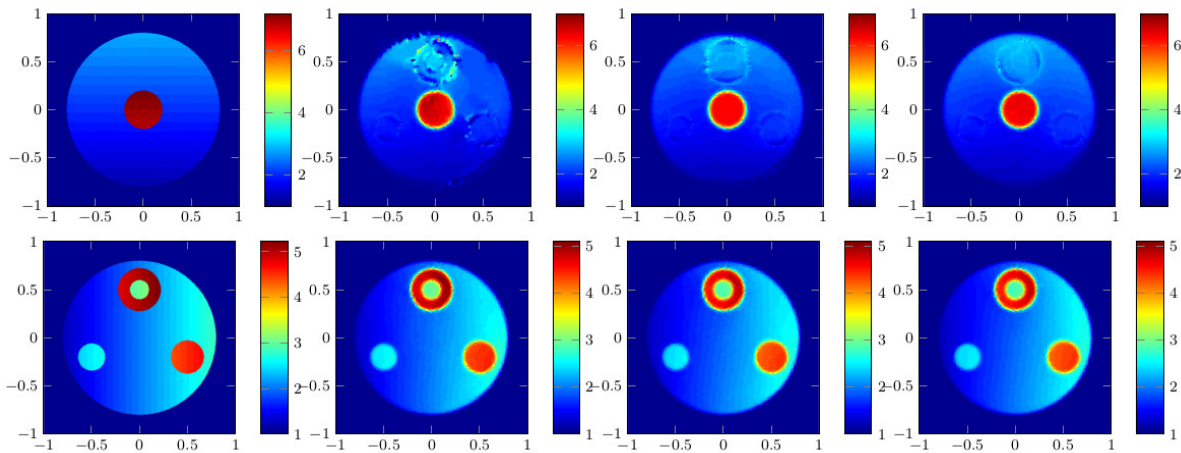


FIGURE 4.13 – Exemple de reconstruction des coefficients de Lamé en utilisant respectivement $n = 1, n = 2$ et $n = 4$ jeux de données. Sur chacune des lignes, les coefficients μ et λ ainsi que leurs reconstructions en utilisant un nombre croissant de données.

A la suite de ces premiers résultats, nous avons cherché à appliquer notre méthode sur

des données réelles. L. Petrusca et E. Brusseau, deux collègues de CREATIS (laboratoire d'imagerie médicale à Lyon) nous ont alors fourni des jeux de données fantômes et cliniques et, bien que la méthode semble capable de reconstruire de manière stable et efficace des coefficients de Lamé sur données simulées, le passage aux données réelles a posé de nombreuses difficultés supplémentaires toujours d'actualité.

Nous avons par exemple à notre disposition un jeu de données comme celles présentées à la figure (4.16). Il faut savoir que ces champs sont reconstruits directement sur les données radio-fréquence de la sonde échographique [18], ce qui implique une très bonne reconstruction du champ transverse u_x mais aussi des données latérales u_y plus approximatives.

Les champs de déformations sont aussi mesurés sur une coupe $2D$ d'un ensemble $3D$. Ce passage $3D-2D$ peut donc déstabiliser la reconstruction des coefficients d'élasticité, notamment dans le cas où la déformation ne serait pas complètement dans le plan d'observation. Un travail en cours consiste à analyser la validité d'hypothèses de type contrainte plane afin d'en déduire un modèle d'élasticité équivalent sur le plan $2D$.

Enfin, les tissus biologiques forment en général un milieu incompressible. D'un point de vue pratique, l'utilisation d'un coefficient $\lambda \gg \mu$ se traduit par des problèmes de conditionnement des opérateurs d'élasticité.

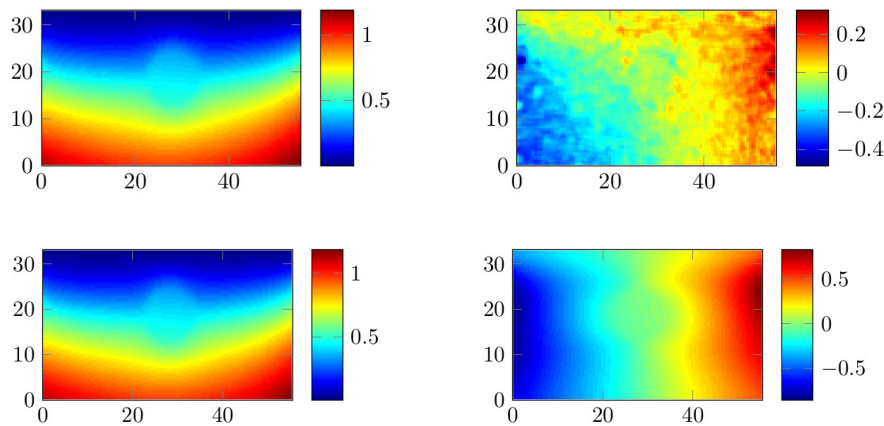


FIGURE 4.14 – Exemple d'un jeu de données réelles et sa version régularisée; champ transverse à gauche et champ latéral à droite

Il a donc été nécessaire de proposer quelques pistes d'amélioration de notre méthode numérique pour traiter le cas de données réelles. Cela fait l'objet de l'article [A20].

Un premier travail a consisté à stabiliser la méthode de reconstruction en utilisant d'autres espaces d'éléments finis que les approches (P^0, P^1) sur maillage triangulaire. L'idée est alors de s'assurer que les inégalités inf-sup [14] soient bien vérifiées

d'un point de vue discret pour éviter d'introduire une régularisation supplémentaire pouvant perturber la reconstruction de coefficients d'élasticité. Après avoir testé différentes méthodes de reconstruction basées sur une augmentation des degrés des polynômes d'approximation, la solution qui nous a semblé la plus efficace consiste à utiliser des polynômes de degrés (P^0, P^1) mais définis cette fois-ci sur des maillages hexagonaux et non triangulaires comme illustrés à la figure (4.15). Les reconstructions ont en effet montré de meilleures propriétés de stabilité. L'analyse de cette approche est présentée dans la prépublication [32]. L'idée est alors de généraliser la notion de constante inf-sup pour des opérateurs quelconques afin d'obtenir des estimations d'erreurs entre la solution approchée et la solution exacte.

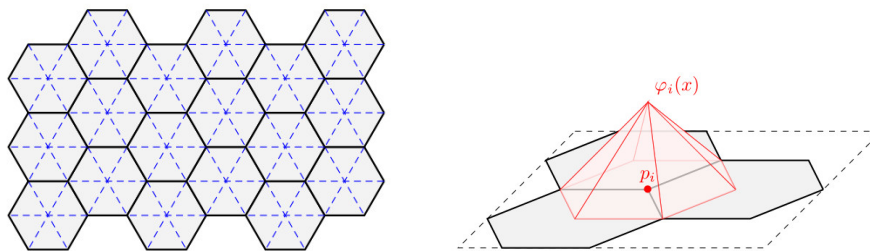


FIGURE 4.15 – Exemple d'un maillage hexagonal et d'une fonction test P^1 associée proposé.

Un autre point nécessaire a été de développer une méthode de régularisation des champs transverses, inexploitable à l'état actuel. Nous avons proposé d'utiliser les propriétés d'incompressibilité du milieu élastique en minimisant une énergie élastique de la forme

$$J(v) = \int_{\Omega} 2\mu^* \|\nabla^s \mathbf{v}\|^2 + \lambda^* (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \frac{1}{\varepsilon_x} (u_x - v_x)^2 + \frac{1}{\varepsilon_y} (u_y - v_y)^2 dx.$$

Ici, les coefficients de régularisation (μ^*, λ^*) vérifient $\lambda^* \gg \mu^*$ afin d'imposer l'incompressibilité dans le plan. De même, les coefficients d'attaches aux données $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ vérifient $\varepsilon_x \ll \varepsilon_y$ afin de modifier essentiellement le champ u_y à partir du champ u_x . La figure (4.16) présente un exemple de régularisation d'un champ brut mesuré par L. Petrusca et E. Brusseau.

Enfin, comme en pratique seuls les champs μ nous intéressent et pour éviter des problèmes de conditionnement, nous avons appliqué notre méthode de reconstruction en supposant un modèle d'élasticité isotrope avec un coefficient λ constant. Toutes ces variantes nous ont alors permis d'identifier à la fois la position des inclusions mais aussi de retrouver une estimation quantitative de leur rigidité comme l'illustre la figure (4.16).

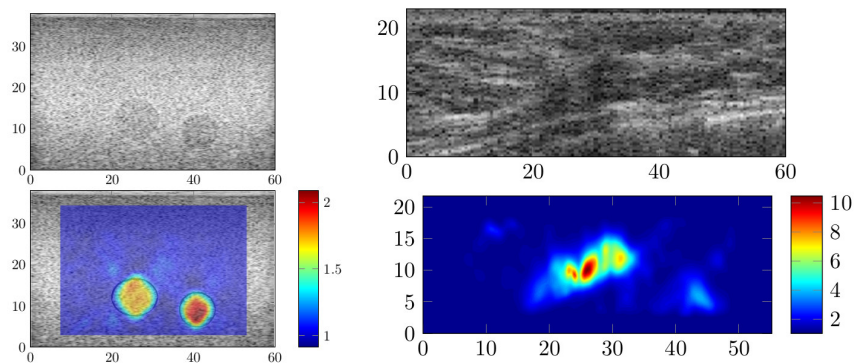


FIGURE 4.16 – Exemples d’une image échographiques et la reconstruction du champ μ sur des données fantômes à gauche et des données cliniques à droite.

Chapitre 5

Autres travaux et perspectives

5.1 Élasticité et contact

Je souhaitais terminer ce rapport de synthèse en mentionnant des travaux actuels en collaboration avec Y. Renard sur l'optimisation de forme d'objets élastiques avec terme de contact. En effet, et bien que cette thématique de recherche soit nouvelle dans un certain sens, elle permet aussi de faire un lien entre les deux sections précédentes. Le point de départ de notre collaboration était d'adapter les techniques de stabilisation convexe-concave, méthodes classiques dans la littérature des méthodes de champ de phase [38], un peu moins pour la résolution d'équations d'ondes élastiques. Ces travaux ont été publiés dans l'article [A31]. Plus précisément, nous nous sommes intéressés à la résolution numérique de l'équation

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad \text{avec } \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{u},$$

sur un ensemble Ω , où \mathbf{u} vérifie des conditions de bord de type Neumann sur Γ_N et des conditions de contact sur la partie de bord Γ_C . La figure (5.1) schématise le cadre de travail pour plus de visibilité.

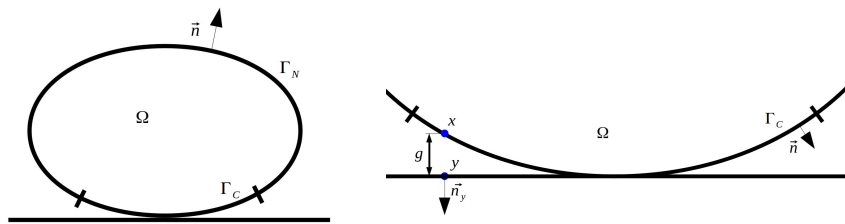


FIGURE 5.1 – Schéma d'un problème d'élasticité avec une zone de contact unilatéral.

En particulier, les conditions de contact unilatéral [64] considérées ici sont de la forme $\sigma_n(\mathbf{u}) = -(\sigma_n(\mathbf{u}) - \gamma(u_n - g))_-$ où $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_y$ et $\sigma_n(\mathbf{u})N = \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_y$. La méthode de Nitsche proposée et étudiée dans ce cadre par Y. Renard [49, 28] consiste alors à introduire la formulation faible suivante

$$\int_{\Omega} \rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n_c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(t)(v), \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d,$$

où

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla^s \mathbf{u} dx, \quad \ell(t)(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f(t) \cdot \mathbf{v} dx$$

et où le terme de contact n_c s'identifie à

$$n_c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma} \sigma_n(\mathbf{u}) \sigma_n(\mathbf{v}) dS(x) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma} (\sigma_n(\mathbf{u}) - \gamma(u_n - g))_-(\sigma_n(\mathbf{v}) - \gamma(v_n)) dS(x).$$

Une discrétisation par la méthode des éléments finis conduit ainsi à un système de la forme

$$\mathbf{M}^h \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^h + \mathbf{B}^h(\mathbf{u}^h) = \mathbf{L}^h.$$

Ici \mathbf{M}^h est la matrice de masse et \mathbf{B}^h est composée de la matrice d'élasticité a ainsi que du terme de contact dérivant de n_c . Le second membre \mathbf{L}^h correspond aussi à la version discrétisée de ℓ . La difficulté numérique de la résolution d'un tel système provient essentiellement du traitement du terme de contact. Un traitement explicite pose des difficultés de stabilité alors qu'un traitement implicite nécessite de résoudre un système non linéaire, évoluant à chaque itération et très coûteux en pratique pour des résolutions très fines du maillage. L'idée développée dans ce travail consiste alors à découper le terme \mathbf{B}^h en deux morceaux $\mathbf{B}^h = \mathbf{K}^h - \mathbf{A}^h$ et à appliquer un schéma numérique semi-implicite de type β -Newmark [59]

$$\mathbf{M}^h \left(\frac{\mathbf{u}^{h,n+1} - 2\mathbf{u}^{h,n} + \mathbf{u}^{h,n-1}}{\delta_t^2} \right) + \frac{\mathbf{K}^h}{4} (\mathbf{u}^{h,n+1} + 2\mathbf{u}^{h,n} + \mathbf{u}^{h,n-1}) - \mathbf{A}^h \mathbf{u}^{h,n} = \mathbf{L}^{h,n},$$

avec respectivement un traitement implicite et explicite des termes \mathbf{K}^h et \mathbf{A}^h . Nous avons alors montré qu'il était possible de stabiliser ces schémas numériques en choisissant les termes explicites de telle sorte qu'ils dérivent d'un potentiel concave. L'intérêt est alors de pouvoir utiliser des pas de temps δ_t supérieurs à ceux qu'implique un traitement complètement explicite de ces termes. Voici un exemple de choix de splitting que nous proposons vérifiant de telles propriétés :

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma} (\sigma_n(\mathbf{u}) - \gamma(u_n - g)) (\sigma_n(\mathbf{v}) - \gamma(v_n)) dS(x) \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma} \sigma_n(\mathbf{u}) \sigma_n(\mathbf{v}) dS(x) \end{aligned}$$

et

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma} (\sigma_n(\mathbf{u}) - \gamma(u_n - g))_+ (\sigma_n(\mathbf{v}) - \gamma(v_n)) dS(x).$$

Ce qui n'apparaissait pas dans le cadre de modèles de champ de phase est que cette technique de stabilisation a des conséquences drastiques sur la précision des schémas numériques. Les expériences ont en effet montré que l'utilisation de termes "concaves" implique un déphasage de temps rendant ces schémas inefficaces pour des pas de temps au dessus de la CFL classique, régime qui nous intéressait initialement. Nous avons alors tenté de corriger ce biais en analysant précisément l'influence de ces termes de correction dont la contribution apparaît essentiellement comme une perturbation

de la matrice de masse M . Dans l'article [A31], nous proposons en particulier différentes variantes permettant de réduire ce déphasage tout en garantissant une certaine stabilité du schéma numérique.

A la suite de ce premier travail, Y. Renard m'a proposé d'encadrer avec lui une thèse CIFRE financée par l'entreprise Michelin sur l'optimisation de forme d'un pneumatique. L'objectif est ici d'optimiser la forme d'un pneu plein en minimisant des critères de compliance couplés à des énergies garantissant une certaine uniformité de pression lorsqu'on fait tourner la roue (voir illustration figure (5.1)).



FIGURE 5.2 – Exemple de structure porteuse : le pneu Michelin Tweel

Il s'agit donc de prendre un point de vue statique tout en analysant différentes positions du pneu. L'idée est aussi d'utiliser une approche level set pour représenter le domaine élastique optimisé à partir des gradients de forme des énergies considérées et suivant une méthode de descente. J. Chapelat a ainsi commencé son travail de thèse en novembre 2019 avec comme premier objectif une comparaison des approches de type Nitsche avec des techniques de pénalisation pour traiter les termes de contact. L'intérêt est ainsi d'illustrer l'avantage des méthodes de Nitsche, plus précises et plus stables en pratique. D'autres aspects de la thèse concernent la modélisation numérique. Il s'agit par exemple de mettre en place un critère efficace pour uniformiser ces pressions, ou encore l'intégration de modèles d'élasticité non linéaires qui s'avèrent plus précis pour modéliser la déformation d'un pneumatique sous contrainte de chargement. La figure (5.1) présente un exemple numérique d'optimisation obtenu par J. Chapelat.

Ce projet de recherche fait aussi écho à un précédent travail publié dans l'article [A27] et effectué à la fin de mon post-doctorat. Il concerne en effet l'étude de la stabilité de la dérivée topologique d'une fonctionnelle d'élasticité. Il serait donc intéressant par la suite de reprendre cette analyse de sensibilité topologique dans le cas des nouvelles fonctionnelles correspondant aux critères d'optimisation du pneu. L'intérêt serait alors d'être capable de faire évoluer efficacement la topologie de l'ensemble Ω au cours de l'optimisation en rajoutant des trous au cours des itérations, dont la position serait elle-même optimisée.

5.2 Perspectives

Je viens de présenter dans ce rapport de synthèse un certain nombre de travaux de modélisation mathématique et numérique appliqués d'une part aux méthodes de

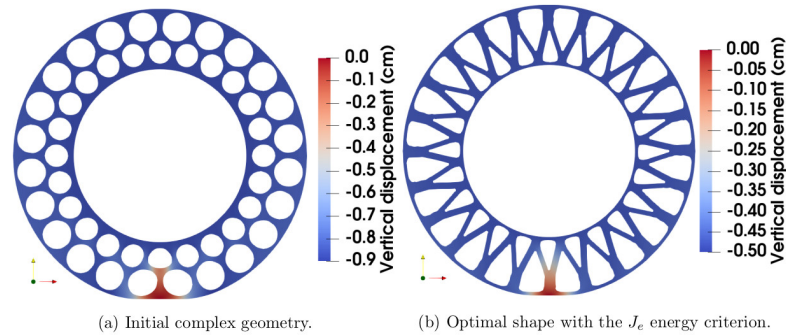


FIGURE 5.3 – Exemple d’optimisation obtenue par J. Chapelat; à gauche, structure de départ; à droite, structure optimisée

champ de phase pour l’approximation d’évolutions géométriques d’interfaces, et d’autre part à des problèmes inverses liés aux techniques d’imagerie médicale actuelles. Ces travaux posent de nombreuses questions que je souhaiterais aborder par la suite.

5.2.1 Méthodes de champ de phase et flots géométriques

Concernant les méthodes de champ de phase, un certain nombre de projets sont actuellement en cours, dont certains en pause faute de temps, mais voici quelques pistes que je souhaiterais poursuivre ces prochaines années.

Tout d’abord, nous avons montré que les modèles multiphases avec mobilité dégénérée étaient très efficaces pour traiter des conditions de bord de manière implicite. L’extension de ces travaux au cas anisotrope pose de nombreuses difficultés car il nécessite d’introduire des modèles de champ de phase dont la solution ne dépend pas de l’anisotropie. Ajouter de l’anisotropie dans la mobilité serait aussi intéressant pour la modélisation de la croissance de grains. Ici on pourrait s’inspirer des travaux de S. Esedoglu [35] proposant une solution dans le cadre des algorithmes de type Bence-Merriman-Osher. Enfin, l’approximation de flots géométriques sur des surfaces fixes pourraient être aussi traitée à l’aide de modèle multiphase avec l’idée d’immobiliser la surface fixe entre deux ensembles de mobilité nulle.

L’étude des modèles de Cahn-Hilliard de type NMN est uniquement formelle et il serait intéressant de voir s’il est possible de démontrer rigoureusement des résultats de convergence de ces modèles vers le flot de diffusion de surface. Les schémas numériques basés sur un splitting convexe-concave de la métrique ont aussi montré leur efficacité mais la preuve de leur stabilité n’est pas encore complètement établie. Il serait donc intéressant d’effectuer une analyse plus précise de ce type de discrétisation qui s’applique en particulier à d’autres équations comme par exemple les flots de Willmore ou encore les mouvements par courbure moyenne avec mobilité anisotrope. Nous sommes aussi en train de regarder l’extension des résultats de développements

asymptotiques à des énergies de surfaces anisotropes.

A propos de l'énergie de Willmore, l'extension multi-phase des applications de reconstructions de surfaces à partir d'un ensemble de coupes ou de régularisations d'objets pixelisés semble aussi intéressante mais nécessite une relaxation au niveau des points triples. Une autre piste concerne l'utilisation de l'énergie de Willmore pour la régularisation de la forme des gouttelettes sur des supports fixes. Il s'agirait d'utiliser une approche multiphase en ajoutant une énergie de Willmore uniquement sur la phase liquide. L'idée serait alors d'obtenir une modélisation plus précise de la forme de la gouttelette tout en faisant le lien avec les énergies de lignes.

Sur le résultat de l'équation d'Allen Cahn avec contrainte topologique, nous attendons ici des résultats plus précis de convergence de l'évolution de mouvement par courbure moyenne 3D d'ensemble tubulaire vers les mouvements par courbure moyenne de co-dimension 2. Des travaux sont aussi actuellement en cours sur l'approximation des solutions de Plateau à l'aide d'approches champ de phase dans le cadre des courants. L'avantage ici est de garder un point de vue variationnel afin de traiter plus facilement le cas de bords incomplets.

Enfin, les premiers résultats de G. Terri sur l'utilisation de réseaux de neurones pour l'apprentissage de flots géométriques semblent très prometteurs. Il s'agit maintenant non seulement de mieux comprendre comment optimiser la structure des réseaux, la base de données ou encore les fonctionnelles à minimiser afin de faciliter l'apprentissage pour les réseaux d'un flot donné, mais aussi d'analyser le réseau lui-même pour en déduire des informations sur le flot appris.

5.2.2 Problèmes inverses appliqués à l'imagerie médicale

A propos de nos travaux sur les algorithmes de reconstruction en élastographie, nous arrivons enfin après plusieurs années de recherche à proposer des reconstructions de cartes d'élasticité très compétitives par rapport à ce qui se fait de mieux dans la littérature. Ces premiers résultats sont donc très encourageants et soulèvent de nombreux points et pistes d'amélioration que nous souhaiterions aborder par la suite.

Concernant les données expérimentales, il s'agit par exemple de mieux comprendre l'influence du passage données 3D-2D en justifiant plus précisément les hypothèses de champs de contraintes plan que l'on peut faire pour se ramener à un problème 2D. Ces données sont aussi très bruitées et il serait intéressant de mieux comprendre la méthode utilisée pour obtenir les champs de déplacement à partir des mesures échographiques. L'idée serait alors de prendre un point de vue variationnel et de proposer une méthode de reconstruction en une seule étape directement sur les données échographiques en intégrant des termes de régularisation élastique.

Sur la discrétisation des opérateurs d'élasticité par la méthode d'éléments finis, les maillages hexagonaux présentent de très bonnes propriétés en pratique. Une étude

de stabilité discrète sur la reconstruction des noyaux d'opérateurs est actuellement en cours. Il serait aussi intéressant d'intégrer plus efficacement la régularité de ces opérateurs sur les énergies d'erreur que l'on minimise en pratique. Nous utilisons en effet, pour l'instant, une erreur L^2 mais une erreur en norme H^{-1} semble plus naturelle et devrait améliorer la reconstruction.

La méthodologie s'applique aussi à d'autres types de données et d'applications comme par exemple le cas de champs de déformation dynamique ou encore l'imagerie par OCT (optical coherence tomography). L'avantage ici est que P. Millien a des contacts directs avec ses collègues expérimentateurs et qu'il peut facilement avoir accès à des données expérimentales.

Enfin, et depuis quelques années, je m'intéresse fortement à l'utilisation des réseaux de neurones. L'idée est de trouver de nouvelles approches ou encore des schémas numériques optimisés et plus efficaces que ceux que j'utilise actuellement. Je pense ici en particulier à la thèse de G. Terri dont j'ai déjà détaillé quelques idées précédemment, mais aussi à l'encadrement de plusieurs stagiaires sur des problèmes inverses en imagerie médicale et en collaboration avec des membres de CREATIS dont les équipes ont déjà développé de nombreuses expertises dans le domaine. Par exemple, j'ai eu l'occasion d'encadrer avec V. Maxim un étudiant sur la segmentation automatique de fractures à partir de données issues d'IRM 3D. Un autre stage encadré avec N. Ducros concerne des problèmes inverses appliqués à des caméras à un seul pixel où l'idée est de regarder des méthodes variationnelles de reconstruction couplées avec des termes de régularisation qui s'obtiennent avec l'apprentissage d'un réseau de neurones. Il me semble donc intéressant de poursuivre ces travaux par la suite et d'essayer de comprendre l'utilité des outils du "deep learning" pour traiter les différents problèmes inverses que j'étudie actuellement.

Bibliographie

- [1] Georgios Akrivis, Buyang Li, and Dongfang Li. Energy-decaying extrapolated RK-SAV methods for the Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 41(6) :A3703–A3727, 2019.
- [2] Samuel M. Allen and John W. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metall.*, 27 :1085–1095, 1979.
- [3] Luigi Ambrosio and Vincenzo Maria Tortorelli. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43(8) :999–1036, 1990.
- [4] Habib Ammari, Emmanuel Bossy, Vincent Jugnon, and Hyeonbae Kang. Mathematical modeling in photoacoustic imaging of small absorbers. *SIAM Rev.*, 52(4) :677–695, 2010.
- [5] Guillaume Bal, Cédric Bellis, Sébastien Imperiale, and François Monard. Reconstruction of constitutive parameters in isotropic linear elasticity from noisy full-field measurements. *Inverse Problems*, 30(12) :125004, 2014.
- [6] Guillaume Bal and Sébastien Imperiale. Displacement reconstructions in ultrasound elastography. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 8(2) :1070–1089, 2015.
- [7] Guillaume Bal, François Monard, and Gunther Uhlmann. Reconstruction of a fully anisotropic elasticity tensor from knowledge of displacement fields. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 75(5) :2214–2231, 2015.
- [8] G. Bellettini. Variational approximation of functionals with curvatures and related properties. *J. Convex Anal.*, 4(1) :91–108, 1997.
- [9] G. Bellettini and L. Mugnai. On the approximation of the elastica functional in radial symmetry. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 24 :1–20, 2005.
- [10] G. Bellettini and M. Paolini. Approssimazione variazionale di funzionali con curvatura. In *Seminario Analisi Matematica, Univ. Bologna*, pages 87–97, 1993.
- [11] G. Bellettini and M. Paolini. Quasi-optimal error estimates for the mean curvature flow with a forcing term. *Differential Integral Equations*, 8(4) :735–752, 1995.
- [12] Giovanni Bellettini and Luca Mugnai. Approximation of Helfrich’s functional via diffuse interfaces. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(6) :2402–2433, 2010.
- [13] Giovanni Bellettini, Maurizio Paolini, and Franco Pasquarelli. Nonconvex mean curvature flow as a formal singular limit of the nonlinear bidomain model. *Adv. Differential Equations*, 18(9-10) :895–934, 2013.

- [14] Christine Bernardi, Martin Costabel, Monique Dauge, and Vivette Girault. Continuity properties of the inf-sup constant for the divergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48(2) :1250–1271, 2016.
- [15] M. Bonafini, G. Orlandi, and E. Oudet. Variational approximation of functionals defined on 1-dimensional connected sets : the planar case. *SIAM J. Math. Anal.*, 50(6) :6307–6332, 2018.
- [16] M. Bonnivard, A. Lemenant, and V. Millot. On a phase field approximation of the planar steiner problem : existence, regularity, and asymptotic of minimizers. *Interfaces Free Bound.*, 20(1) :69–106, 2018.
- [17] M. Bonnivard, A. Lemenant, and F. Santambrogio. Approximation of length minimization problems among compact connected sets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 47(2) :1489–1529, 2015.
- [18] Elisabeth Brusseau, Valérie Detti, Agnès Coulon, Emmanuèle Maissiat, Nawele Boublay, Yves Berthezène, Jérémie Fromageau, Nigel Bush, and Jeffrey Bamber. In Vivo Response to Compression of 35 Breast Lesions Observed with a Two-Dimensional Locally Regularized Strain Estimation Method. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 40(2) :300–312, February 2014.
- [19] M. Burger, T. Esposito, and C. I. Zeppieri. Second-order edge-penalization in the Ambrosio–Tortorelli functional. *Multiscale Modeling & Simulation*, 13(4) :1354–1389, 2015.
- [20] G. Caginalp and P. C. Fife. Dynamics of layered interfaces arising from phase boundaries. *SIAM J. Appl. Math.*, 48(3) :506–518, 1988.
- [21] John W Cahn. Critical point wetting. *The Journal of Chemical Physics*, 66(8) :3667–3672, 1977.
- [22] A. Chambolle, L. Ferrari, and B. Merlet. A phase-field approximation of the Steiner problem in dimension two. *Adv. Calc. Var.*, to appear.
- [23] A. Chambolle, L. Ferrari, and B. Merlet. Variational approximation of size-mass energies for k-dimensional currents. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, to appear.
- [24] Antonin Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. volume 20, pages 89–97. 2004. Special issue on mathematics and image analysis.
- [25] L.Q. Chen and Jie Shen. Applications of semi-implicit Fourier-spectral method to phase field equations. *Computer Physics Communications*, 108 :147–158.
- [26] Xinfu Chen. Generation and propagation of interfaces for reaction-diffusion equations. *J. Differential Equations*, 96(1) :116–141, 1992.
- [27] Franz Chouly, Patrick Hild, and Yves Renard. A Nitsche finite element method for dynamic contact : 2. Stability of the schemes and numerical experiments. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 49(2) :503–528, 2015.
- [28] Franz Chouly and Yves Renard. Explicit Verlet time-integration for a Nitsche-based approximation of elastodynamic contact problems. *Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci.*, 5 :93–141, 2019.

- [29] Ha Dang, Paul C. Fife, and L.A. Peletier. Saddle solutions of the bistable diffusion equation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 43(6) :984–998, November 1992.
- [30] Guy David. Should we solve plateau’s problem again? Lecture for the conference in Honor of E. Stein, 2011, July 2012.
- [31] E. De Giorgi. Some remarks on Γ -convergence and least square methods. In G. Dal Maso and G.F. Dell’Antonio, editors, *Composite Media and Homogenization Theory*, pages 135–142. Birkhäuser, Boston, 1991.
- [32] Piero de Mottoni and Michelle Schatzman. Geometrical evolution of developed interfaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 347(5) :1533–1589, 1995.
- [33] MM Doyley. Model-based elastography : a survey of approaches to the inverse elasticity problem. *Physics in Medicine and Biology*, 57(3) :R35, 2012.
- [34] S. Esedoglu, A. Rätz, and M. Röger. Colliding Interfaces in Old and New Diffuse-interface Approximations of Willmore-flow. *ArXiv e-prints*, September 2012.
- [35] Selim Esedoğlu, Matt Jacobs, and Pengbo Zhang. Kernels with prescribed surface tension & mobility for threshold dynamics schemes. *J. Comput. Phys.*, 337 :62–83, 2017.
- [36] Selim Esedoglu and Felix Otto. Threshold dynamics for networks with arbitrary surface tensions. *Communications on pure and applied mathematics*, 2014.
- [37] D. Eyre. Computational and mathematical models of microstructural evolution. *Warrendale :The Material Research Society*, 1998.
- [38] David J. Eyre. Unconditionally gradient stable time marching the cahn-hilliard equation. *MRS Proceedings*, 529, 001 1998.
- [39] David Finch, Markus Haltmeier, and Rakesh. Inversion of spherical means and the wave equation in even dimensions. *SIAM J. Appl. Math.*, 68(2) :392–412, 2007.
- [40] Harald Garcke, Britta Nestler, and Barbara Stoth. On anisotropic order parameter models for multi-phase systems and their sharp interface limits. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 115(1-2) :87 – 108, 1998.
- [41] Harald Garcke, Britta Nestler, and Barbara Stoth. A multi phase field concept : Numerical simulations of moving phase boundaries and multiple junctions. *SIAM J. Appl. Math.*, 60 :295–315, 1999.
- [42] Josselin Garnier and George Papanicolaou. Passive sensor imaging using cross correlations of noisy signals in a scattering medium. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2(2) :396–437, 2009.
- [43] J-L Gennisson, Thomas Deffieux, Mathias Fink, and Michaël Tanter. Ultrasound elastography : principles and techniques. *Diagnostic and Interventional Imaging*, 94(5) :487–495, 2013.
- [44] E. N. Gilbert and H. O. Pollak. Steiner minimal trees. *SIAM J. Appl. Math.*, 16 :1–29, 1968.
- [45] Michael Grant and Stephen Boyd. CVX : Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1, mar 2014.

- [46] Clemens Gugenberger, Robert Spatschek, and Klaus Kassner. Comparison of phase-field models for surface diffusion. *Physical Review E*, 78(1) :016703, 2008.
- [47] J. Harrison. Soap film solutions to plateau’s problem. *Journal of Geometric Analysis*, 24(1) :271–297, Jan 2014.
- [48] Conyers Herring. *Surface Tension as a Motivation for Sintering*, pages 33–69. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [49] Houari Boumediène Khenous, Patrick Laborde, and Yves Renard. Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics. *Eur. J. Mech. A Solids*, 27(5) :918–932, 2008.
- [50] Richard Kowar, Otmar Scherzer, and Xavier Bonnefond. Causality analysis of frequency-dependent wave attenuation. *Math. Methods Appl. Sci.*, 34(1) :108–124, 2011.
- [51] Peter Kuchment and Otmar Scherzer. *Tomography, Photoacoustic, and Thermoacoustic*, pages 1488–1496. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2015.
- [52] Leonid A. Kunyansky. Explicit inversion formulae for the spherical mean Radon transform. *Inverse Problems*, 23(1) :373–383, 2007.
- [53] A. Lemenant and F. Santambrogio. A Modica-Mortola approximation for the Steiner problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 352(5) :451–454, 2014.
- [54] P. Loreti and R. March. Propagation of fronts in a nonlinear fourth order equation. *European Journal of Applied Mathematics*, 11 :203–213, 3 2000.
- [55] Fernando C. Marques and André Neves. Min-Max theory and the Willmore conjecture. *arXiv :1202.6036*, 2012.
- [56] Luciano Modica and Stefano Mortola. Un esempio di Γ -convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)*, 14(1) :285–299, 1977.
- [57] Roger Moser. A higher order asymptotic problem related to phase transitions. *SIAM J. Math. Analysis*, 37(3) :712–736, 2005.
- [58] Yuko Nagase and Yoshihiro Tonegawa. A singular perturbation problem with integral curvature bound. *Hiroshima Mathematical Journal*, 37 :455–489, 2007.
- [59] Nathan M Newmark. A method of computation for structural dynamics. *J. Eng. Mech. Div.-ASCE*, 85(3) :67–94, 1959.
- [60] Linh V. Nguyen. A family of inversion formulas in thermoacoustic tomography. *Inverse Probl. Imaging*, 3(4) :649–675, 2009.
- [61] Edouard Oudet. Approximation of partitions of least perimeter by Gamma-convergence : around Kelvin’s conjecture. *Experimental Mathematics*, 20(3) :260–270, 2011.
- [62] Kevin J Parker, Marvin M Doyley, and Deborah J Rubens. Imaging the elastic properties of tissue : the 20 year perspective. *Physics in Medicine and Biology*, 56(1) :R1, 2010.
- [63] R. L. Pego. Front migration in the nonlinear Cahn-Hilliard equation. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 422(1863) :261–278, 1989.
- [64] Yves Renard. A uniqueness criterion for the signorini problem with coulomb friction. *SIAM journal on mathematical analysis*, 38(2) :452–467, 2006.

-
- [65] Matthias Röger and Reiner Schätzle. On a modified conjecture of De Giorgi. *Math. Z.*, 254(4) :675–714, 2006.
- [66] Mickael Tanter and Mathias Fink. *Time Reversing Waves For Biomedical Applications*, pages 73–97. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [67] Yoshihiro Tonegawa. Phase field model with a variable chemical potential. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 132 :993–1019, 7 2002.
- [68] Alessandro Turco, François Alouges, and Antonio DeSimone. Wetting on rough surfaces and contact angle hysteresis : numerical experiments based on a phase field model. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 43(6) :1027–1044, 2009.
- [69] Denis Weaire and Robert Phelan. A counter-example to kelvin’s conjecture on minimal surfaces. *Philosophical Magazine Letters*, 69(2) :107–110, 1994.
- [70] Minghua Xu and Lihong V Wang. Photoacoustic imaging in biomedicine. *Review of scientific instruments*, 77(4) :041101–041101, 2006.
- [71] Enrique Zuazua. Controllability and observability of partial differential equations : some results and open problems. *Handbook of differential equations : evolutionary equations*, 3 :527–621, 2007.