



HAL
open science

Dynamique de vol et commande non linéaire adaptative pour projectiles guidés

Sofiane Pineau

► **To cite this version:**

Sofiane Pineau. Dynamique de vol et commande non linéaire adaptative pour projectiles guidés. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Lorraine (UL), 2024. Français. NNT : . tel-04810735

HAL Id: tel-04810735

<https://hal.science/tel-04810735v1>

Submitted on 29 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Ecole doctorale IAEM – DFD Automatique
Université de Lorraine – UFR Sciences et Technologies

Institut Franco-Allemand de
Recherches de Saint-Louis (ISL)

Dynamique de Vol et Commande Non Linéaire Adaptative pour Projectiles Guidés

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 5 septembre 2024

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique)

(sous-spécialité Automatique)

par

Sofiane Pineau

Composition du jury

<i>Président :</i>	RACHID OUTBIB	Professeur, LIS LAB, UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE
<i>Rapporteurs :</i>	RACHID OUTBIB	Professeur, LIS LAB, UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE
	JEAN-MARC BIANNIC	Professeur, ISAE SUPAERO et Directeur de Recherches, ONERA
<i>Examineurs :</i>	IOANNIS SARRAS	Ingénieur de Recherches , ONERA, PALAISEAU
	NAIRA HOVAKIMYAN	Professeur, ADVANCED CONTROLS RESEARCH LABORATORY, UNIVERSITY OF ILLINOIS AT URBANA-CHAMPAIGN
<i>Directeurs de thèse :</i>	MICHEL ZASADZINSKI	Professeur, CRAN, UNIVERSITÉ DE LORRAINE
	MOHAMED BOUTAYEB	Professeur, CRAN, UNIVERSITÉ DE LORRAINE
<i>Encadrants :</i>	SPILIOS THEODOULIS	Associate Professor, DÉPARTEMENT CONTRÔLE ET SIMULATION UNIVERSITÉ TECHNIQUE DE DELFT
	EMMANUEL ROUSSEL	Chargé de Recherches, DÉPARTEMENT GUIDAGE, NAVIGATION, CONTRÔLE (GNC), ISL

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon comité d'encadrement de thèse. En commençant par mes directeurs de thèse, Michel Zasadsinki, pour sa gentillesse, son implication et sa grande disponibilité et Mohamed Boutayeb qui m'a toujours fait confiance et m'a fourni des précieux conseils pour avancer. Ensuite, je remercie chaleureusement mon premier encadrant Spilios Theodoulis, qui a été d'un grand soutien tout au long de mes années de thèse, je pense que ses conseils m'ont non seulement permis de progresser dans ma thèse, mais aussi de grandir humainement. Enfin, je remercie Emmanuel Roussel qui a fait preuve d'un grand investissement dans la thèse. Je les remercie également pour leur patience, leur aide et leur compréhension face aux difficultés que j'ai pu rencontrer.

Je souhaite également remercier mes collègues et amis doctorants du groupe GNC de l'ISL et du CRAN. En premier, Gian-Marco Vinco qui a été un véritable frère d'armes. Ayant commencé nos thèses presque au même moment, nous avons beaucoup travaillé ensemble au début et nous nous sommes vu progresser. Paul Bérard avec qui j'ai partagé mon bureau à l'ISL pendant quelques mois et avec qui je partage beaucoup de centre d'intérêts. Mes remerciements vont également à Valentin Riss, Gaëtan Chevrin, Nadège Pinon et Rémy Sautot que j'ai côtoyés pendant mon temps à l'ISL. Ils sont devenus mes amis et une ambiance de travail très agréable s'est créée au laboratoire. Je souhaite également remercier Sébastien Changey, chef du groupe GNC pour sa disponibilité, son accueil chaleureux au sein du groupe GNC et pour m'avoir aidé à m'acclimater à l'ISL.

Ensuite, mes remerciements vont à mes amis doctorants du CRAN, Ayoub Farkhane, Dyhia Bouhadjra, Ichem Bessafa, Hasni Areki, Shivaraj Mohite, Echrak Chnib, Quang-Huy Nguyen et Shengya Meng avec qui j'ai partagé beaucoup de bon moments. Mes remerciements vont également aux chercheurs permanents du CRAN, Marouane Alma, Latifa Baddas, Cédric Delattre et Harouna Souley Ali pour leurs conseils et encouragements tout au long de la thèse.

Pour finir, je remercie Damien Gilbert du laboratoire GREEN, et Mohamed Ouiakoub du laboratoire CEREFIGE avec qui j'ai partagé beaucoup de pauses déjeuner. Enfin je remercie Souad Boutaguermouchet et Aurore Tranchina de l'école doctorale IAEM pour leur aide dans les démarches administrative.

Table des Matières

Remerciements	i
Glossaire	xiii
Publications	1

Introduction générale

Contexte général de la thèse	3
Concept de projectile guidé à fusée de correction de trajectoire	8
Boucle GNC et stratégie générale de commande	9
Stratégies de commande appliquées aux projectiles guidés	11
Objectifs de la thèse	11
Plan du manuscrit	12

Chapitre 1

Modélisation non-linéaire et conception d'un simulateur de vol

1.1 Introduction	14
1.2 Modèle mathématique non-linéaire du projectile guidé dual-spin	14
1.2.1 Repères et systèmes de coordonnées	14
1.2.2 Équations dynamiques de translation	16
1.2.3 Équations dynamiques de rotation	17
1.2.4 Équations cinématiques	18
1.2.4.1 Cinématique de rotation	19
1.2.4.2 Cinématique de translation	20
1.2.5 Calcul des paramètres de vol	21
1.2.6 Modélisation de l'environnement	21

1.2.7	Expression des forces et moments extérieurs appliqués au projectile	22
1.2.7.1	Forces et moments de portance et de traînée	23
1.2.7.2	Force et moment de Magnus	26
1.2.7.3	Force et moment d'amortissement	28
1.2.7.4	Force et moment générés par les canards	29
1.2.7.5	Allocation des commandes	33
1.2.7.6	Moment de frottements	34
1.2.7.7	Force de gravité	35
1.2.7.8	Forces et moments totaux	35
1.2.8	Modélisation des actionneurs et des capteurs	36
1.3	Conception du simulateur de vol dans l'environnement Matlab-Simulink	37
1.3.1	Boîte à outils SMART	37
1.3.2	Architecture générale du simulateur	39
1.4	Simulations balistiques et validation du simulateur non-linéaire	40
1.5	Conclusion	43

<p>Chapitre 2</p> <p>Conception d'Autopilotes Non-Linéaires</p>

2.1	Introduction	46
2.1.1	Intérêt de la commande par inversion dynamique	46
2.1.2	État de l'art sur la commande par inversion dynamique	48
2.2	Théorie de la commande par inversion dynamique	49
2.2.1	Motivations : exemple de la stabilisation à l'origine d'un pendule simple	49
2.2.2	Préliminaires et définitions	50
2.2.2.1	Difféomorphisme	50
2.2.2.2	Dérivée de Lie et crochet de Lie	51
2.2.2.3	Degré relatif	52
2.2.3	Linéarisation entrée/états et linéarisation entrée/sortie	52
2.2.3.1	Linéarisation entrée/états	52
2.2.3.2	Linéarisation entrée/sortie	53
2.2.4	Architecture générale d'un autopilote par inversion dynamique	55

2.2.5	Inversion dynamique non-linéaire incrementale	55
2.2.5.1	INDI en temps continu	55
2.2.5.2	INDI en temps discret	57
2.2.6	Discussion sur l'approche à privilégier entre NDI et INDI	58
2.3	Rappel sur la commande robuste et le façonnage de fonctions de sensibilité	59
2.3.1	Norme \mathcal{H}_∞	59
2.3.2	Définition des fonctions de sensibilité	59
2.3.3	Formulation du problème \mathcal{H}_∞ et gabarits fréquentiels	60
2.3.4	Sélection des gabarits frequentiels	62
2.3.5	Méthodes de résolution du problème \mathcal{H}_∞	64
2.4	Méthodologie générale de réglage des autopilotes INDI	64
2.4.1	Cahier des charges	65
2.4.2	Méthodologie de réglage	65
2.5	Conception de l'autopilote de roulis	67
2.5.1	Expression analytique de la commande INDI	68
2.5.2	Analyse du modèle inverse	68
2.5.3	Réglage du contrôleur externe	71
2.5.4	Validation de l'autopilote	73
2.6	Conception de l'autopilote de facteurs de charge	74
2.6.1	Inversion de la dynamique rapide	75
2.6.1.1	Expression analytique de la commande INDI	76
2.6.1.2	Analyse du modèle inverse	77
2.6.1.3	Réglage du contrôleur externe	80
2.6.1.4	Validation de l'autopilote	81
2.6.2	Inversion de la dynamique lente	83
2.6.2.1	Expression analytique de la commande INDI	84
2.6.2.2	Analyse du modèle inverse	86
2.6.2.3	Réglage du contrôleur externe	89
2.6.2.4	Validation de l'autopilote	90
2.7	Simulations non-linéaires et trajectoires guidées	93

2.7.1	Loi de guidage	93
2.7.2	Simulations de trajectoires guidées	94
2.8	Conclusion	95

Chapitre 3

Conception d’une augmentation adaptative pour autopilote INDI

3.1	Introduction	98
3.2	Modélisation des incertitudes	98
3.2.1	Type d’incertitudes considérées	99
3.2.2	Influence des incertitudes sur les performances des autopilotes INDI	99
3.3	État de l’art des techniques de commande adaptative	100
3.3.1	Chronologie de la commande adaptative	101
3.3.2	Commande adaptative et commande non-linéaire	103
3.3.3	Commande adaptative par modèle de référence (MRAC)	103
3.3.3.1	Formulation du problème	103
3.3.3.2	Commande MRAC direct	104
3.3.3.3	Commande MRAC indirect	105
3.3.4	Commande \mathcal{L}_1 adaptative	106
3.3.4.1	Préliminaires	106
3.3.4.2	Définition de la commande \mathcal{L}_1 adaptative	106
3.3.4.3	Analyse et propriétés de la commande \mathcal{L}_1 adaptative	107
3.3.5	Discussion	109
3.4	Augmentation adaptative pour les autopilotes INDI	110
3.4.1	Architecture de l’augmentation adaptative	110
3.4.2	Prédicteur d’état basé sur la linéarisation INDI	111
3.4.3	Loi d’adaptation constante par morceaux	112
3.4.4	Filtrage du signal de commande adaptatif	112
3.4.5	Méthodologie de réglage de l’augmentation adaptative	113
3.5	Application à la chaîne de roulis	115
3.5.1	Réglage du prédicteur d’état	116
3.5.2	Réglage du filtre-passe bas	118

3.5.3	Validation par simulations de type Monte-Carlo	119
3.6	Application à la chaîne de tangage/lacet	121
3.6.1	Réglage du prédicteur d'état	122
3.6.2	Réglage du filtre passe-bas	124
3.6.3	Validation par simulations de type Monte-Carlo	125
3.7	Application à la chaîne de facteurs de charge	127
3.7.1	Réglage du prédicteur d'état	129
3.7.2	Réglage du filtre passe-bas	130
3.7.3	Validation par simulations de type Monte-Carlo	131
3.8	Comparaison et validation avec des trajectoires guidées	133
3.9	Conclusion	136

Chapitre 4

Méthode de synthèse d'un filtre passe-bas via des LMI pour l'augmentation adaptative en roulis

4.1	Introduction et motivations	137
4.2	Système bouclé et retards considérés	138
4.3	Définition des LMI à résoudre pour la synthèse du filtre	139
4.3.1	LMI pour la caractérisation de la norme \mathcal{L}_1 d'un système	139
4.3.2	LMI pour la stabilité robuste et marge de retard	141
4.3.3	Problèmes structurels pour la résolution des LMI	141
4.4	Réalisation d'état de la dynamique de roulis en boucle fermée	142
4.4.1	Approximation de Padé	142
4.4.2	Dynamique de roulis avec INDI	143
4.4.3	Augmentation adaptative	148
4.5	Résultats de synthèse	151
4.5.1	Problèmes numériques	151
4.5.2	Algorithme d'analyse du filtre par LMI	151
4.6	Conclusion	156

Conclusion Générale et Perspectives

Annexe A

Généralités mathématiques

A.1	Normes	162
A.1.1	Définition	162
A.1.2	Normes des vecteurs	162
A.1.3	Normes de signaux	162
A.1.4	Norme des systèmes	163
A.2	Méthodes d'Euler	163
A.3	Transformée bilinéaire de Tustin	164
A.4	Inégalités matricielles affines (LMI)	165
A.4.1	Lemme de Schur	165
A.4.2	Lemme d'élimination	166

Annexe B

Annexe au Chapitre 1

B.1	Valeurs numériques des paramètres du projectile dual-spin	168
B.2	Coefficients aérodynamiques	168
B.2.1	Force et moment de tangage	169
B.2.2	Force et moment de Magnus	169
B.2.3	Force et moment d'amortissement	170

Annexe C

Annexe du Chapitre 2

C.1	Transformées en \mathcal{Z} et décompositions en éléments simples pour le modèle inverse de la dynamique de roulis	172
C.1.1	Calcul de $BOZG_\delta(z)$	172
C.1.2	Calcul de $BOZG_\delta P(z)$	173

Annexe D

Annexes au chapitre 4

C.1	Matrices de la réalisation d'états avec retards sans approximation de Padé	176
C.2	Détermination des LMI pour la synthèse d'un filtre	177
C.3	Paramétrage pour que le filtre ait un gain statique égal à 1	180

Bibliographie

Glossaire

Acronymes

AoA	Angle d'Attaque
AoS	Angle de Dérapage
BFR	Repère lie au référentiel non tournant du corps du projectile
CA	Commande adaptative
CFD	Computational Fluid Dynamics (Mécanique des Fluides Numérique)
c.m.	Centre de masse
c.m. B	Centre de masse du projectile complet
c.m. B_1	Centre de masse de la partie arrière du projectile
c.m. B_2	Centre de masse de la FCT
c.p.	Centre de poussée
DDL	Degré De Liberté
FCT	Fusée de Correction de Trajectoire
GNC	Guidage, Navigation et Commande
INDI	Incremental Nonlinear Dynamic Inversion (Inversion Dynamique Non-linéaire Incrementale)
LMI	Linear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Affine)
LTI	Linéaire Invariant dans le Temps
MRAC	Model Reference Adaptive Control (Commande Adaptative par Modèle de Référence)
NDI	Nonlinear Dynamic Inversion (Inversion dynamique non-linéaire)
PI	Proportionnel-Intégral
PI-P	Proportionnel-Intégral/Proportionnel
Indice ou exposant B_1	Indice ou exposant désignant la dynamique de roulis, tangage et lacet du corps du projectile
Indice ou exposant B_2	Indice ou exposant désignant la dynamique de roulis de la FCT

Notations

$G(s)$	Fonction de transfert nominale $G(s)$
$KS(s)(s)$	Fonction de sensibilité de commande
$[M]$	Matrice de symétrie par rapport à un axe
$[R^{90}]$	Matrice de rotation de 90 degrés dans le sens positif
$S(s)$	Fonction de sensibilité
$\mathbb{I}_{n \times p}$	Matrice identité de taille $n \times p$
\star^\top	Transposée du vecteur ou de la matrice \star
\star^\perp	Orthogonal du vecteur ou de la matrice \star
\wedge	Produit vectoriel
$\hat{\star}$	Estimation de la représentation d'état \star
$\dot{\star}$	Dérivée temporelle continue de l'état \star
$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{x=x_0}$	dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x évaluée autour de x_0
$\ \star\ $	Norme de \star

Repères, Systèmes de Coordonnées et Origines

Repère B_1	repère du corps du projectile
Repère B_2	repère de la FCT
Repère B'_1	Repère BFR non tournant
Repère A	Repère attaché à l'atmosphère
Repère E	Repère terrestre inertiel
Système de coordonnées $]^{B'_1}$	Système de coordonnées non tournant
Système de coordonnées $]^L$	Système de coordonnées local géodésique
Système de coordonnées $]^{B_2}$	Système de coordonnées associé au repère B_2 de la FCT
Système de coordonnées $]^W$	Système de coordonnées du vent attaché au repère A
c.m. B	Centre de masse du projectile complet
c.m. B_1	Centre de masse du corps du projectile
c.m. B_2	Centre de masse de la FCT

Dynamique de vol

v_B^E	Vecteur vitesse linéaire du c.m. B du projectile dual-spin complet par rapport au référentiel inertiel terrestre E
s_B^E	Vecteur position du c.m. B du projectile dual-spin complet par rapport au référentiel inertiel terrestre E
$\omega^{B_1^E}$	Vecteur vitesse angulaire du repère non tournant B_1' par rapport au référentiel inertiel terrestre E
ω^{B_1E}	Vecteur vitesse angulaire de la partie arrière du projectile au référentiel inertiel terrestre E
$\Omega^{B_1^E}$	Matrice antisymétrique du vecteur $\omega^{B_1^E}$
$\tilde{I}_B^{B_{1,2}}$	Moment d'inertie effectif de la partie arrière du projectile
$I_B^{B_{1,2}}$	Moment d'inertie total du projectile
$I_{B_1}^{B_1}$	Moment d'inertie de la partie arrière seule
$I_{B_2}^{B_2}$	Moment d'inertie de la FCT seule
$[T]^{XY}$	Matrice de rotation permettant le passage du système de coordonnées Y vers le systèmes de coordonnées X

Symboles, Paramètres et Variables

Paramètres du Projectile

d	Calibre du projectile (m)
I_{x_1}	Moment d'inertie de roulis du corps du projectile
I_{x_2}	Moment d'inertie de roulis de la FCT du projectile
I_{t_1}	Moment d'inertie transversal de tangage et de lacet du corps du projectile
I_{t_2}	Moment d'inertie transversal de tangage et de lacet de la FCT du projectile
\tilde{I}_t	Moment d'inertie transversal de tangage et de lacet total du projectile
K_s	Coefficient statique de frottement
K_v	Coefficient visqueux de frottement
m^B	Masse totale du projectile guidé
m^{B_1}	Masse du corps du projectile
m^{B_2}	Masse de la FCT du projectile
S	Surface de référence (m ²)

Paramètres des Actionneurs des Canards

ω_δ	Pulsation naturelle (rad/s)
ζ_δ	Coefficient d'amortissement

Variables et Paramètres de l'Environnement

a	Vitesse du son (m/s)
g	Accélération scalaire de la pesanteur, Vecteur d'accélération gravitationnelle (m/s ²)
\mathcal{M}	Nombre de Mach
\bar{q}	Pression dynamique de l'air (Pa)
ρ	Masse volumique de l'air (kg/m ³)
u_W, v_W, w_W	Vitesses linéaires du vent (de l'air A par rapport au référentiel inertiel), exprimées dans le système de coordonnées non tournant $J^{B'}$ terrestre E (m/s)
p_W, q_W, r_W	Vitesses angulaires du vent (de l'air A par rapport au référentiel inertiel), exprimées dans le système de coordonnées non tournant $J^{B'}$ terrestre E (m/s)

Variables d'Etat des Dynamiques du Projectile

α	Angle d'attaque (°)
α'	Angle d'attaque total (°)
β	Angle de dérapage (°)
ϕ'	Angle de roulis aérobalistique (°)
V	Vitesse du projectile (m/s)
u, v, w	Vitesses linéaires du c.m. B du projectile dual-spin complet par rapport au référentiel inertiel terrestre E, exprimées dans le système de coordonnées non tournant $J^{B'_1}$ (m/s)
u_A, v_A, w_A	Vitesses linéaires du c.m. B du projectile dual-spin complet par rapport à l'atmosphère A, exprimées dans le système de coordonnées non tournant $J^{B'_1}$ (m/s)
p_2, p_1, q, r	Vitesses angulaires de roulis, de tangage et de lacet du projectile dual-spin par rapport au repère inertiel terrestre E, exprimées dans le système de coordonnées non tournant $J^{B'_1}$ (rad/s)
x_L, y_L, z_L	Composantes de la position du c.m. B par rapport au référentiel inertiel terrestre E, exprimées dans le système de coordonnées J^L (m)
h	Altitude du projectile par rapport au référentiel inertiel terrestre E ($h = -z_L$), exprimée dans le système de coordonnées J^E (m)

$\phi_2, \phi_1, \theta, \psi$	Angles de roulis de la FCT, de roulis de la partie arrière , tangage et lacet (°)
n_x, n_y, n_z	Facteurs de charge axial, latéral et vertical du projectile dual-spin (-)

Variables de Commande et d'Entrée des Dynamiques du Projectile

$\delta_{p,c}, \delta_{q,c}, \delta_{r,c}$	Signaux de commande virtuels de roulis, tangage et lacet (°)
$\delta_p, \delta_q, \delta_r$	Angles de braquage virtuels de roulis, tangage et lacet (°)
$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$	Signaux de commande réels des canards(°)

Variables de Sortie des Dynamiques du Projectile

n_x, n_y, n_z	Facteurs de charge au c.m. B exprimés dans le système de coordonnées BFR (g)
p_2, q_2, r_2	Vitesses angulaires mesurées au c.m. B ₂ de la FCT (rad/s)
$p_{2,m}, q_m, r_m$	Mesures des vitesses angulaires au c.m. B ₂ de la FCT (rad/s)
x_2, y_2, z_2	Composantes de la position mesurée au c.m. B ₂ de la FCT (m)
$\phi_{2,m}, \theta_m, \psi_m$	angles d'Euler mesurés au c.m B ₂ de la FCT (°).

Forces et Moments

f_B^{12}	Forces totales extérieure (N)
X, Y, Z	Composantes axiale, latérale et normale de la force totale extérieure (N)
f_B^G	Forces gravitationnelle (N)
f_B^P	Forces de tangage/lacet (N)
f_B^C	Forces des canards (N)
f_B^M	Forces de Magnus (N)
f_B^D	Forces d' amortissement (N)
m_B^{12}	Moments totaux extérieurs de roulis, de tangage et de lacet (N.m)
L_2, L_1, M, N	Composantes de roulis, de tangage et de lacet des moments totaux extérieures (M.m)
m_B^P	Moments de tangage/lacet (N.m)
m_B^C	Moments des canards (N.m)
m_B^M	Moments de Magnus (N.m)
m_B^D	Moment d' amortissement (N.m)
m_B^F	Moment de frottement (N.m)

Coefficients Aérodynamiques

C_A, C_N	Coefficients de la force de tangage/lacet
$C_{Y_{p\alpha}}$	Coefficients de la force de Magnus

C_{m_q}	Coefficients de la force d'amortissement
C_{N_δ}	Coefficient de la force des canards
C_{m_α}	Coefficients de moment de tangage/lacet
$C_{n_{p_\alpha}}$	Coefficients du moment de Magnus
C_{l_p}, C_{m_q}	Coefficients des moments d'amortissement de roulis et de tangage/lacet
$C_{l_\delta}, C_{m_\delta}$	Coefficients des moments des canards de roulis et de tangage/lacet

Publications

Revue Internationale avec Comité de Lecture

S. Pineau, S. Theodoulis, M. Zasadzinski, M. Boutayeb and E. Roussel, Adaptive Augmentation of an Incremental Nonlinear Dynamic Inversion Autopilot for Dual-Spin Guided Projectiles, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* - **Article à soumettre**

Conférences Internationales avec Comité de Lecture et Actes

S. Pineau, S. Theodoulis, M. Zasadzinski, and M. Boutayeb, Terminal Phase Nonlinear Attitude Autopilot design for Dual-Spin Guided Projectiles, *2022 CEAS EuroGNC conference* Berlin, Germany, May 2022.

S. Pineau, S. Theodoulis, M. Zasadzinski, and M. Boutayeb, Autopilot Design for Dual-Spin Projectiles using Incremental Nonlinear Dynamic Inversion, *IEEE Mediterranean Conference of Control and Automation (MED)*, Athenes, Grece, July 2022.

S. Pineau, S. Theodoulis, M. Zasadzinski, M. Boutayeb and E. Roussel, \mathcal{L}_1 Adaptive Augmentation of an Incremental Nonlinear Dynamic Inversion Autopilot for Dual-Spin Guided Projectiles, *2023 AIAA SciTech Forum*, National Harbor, Maryland, USA, January 2023

Présentation Orale dans un Séminaire National

S. Pineau, S. Theodoulis, M. Zasadzinski, M. Boutayeb, Robust Nonlinear Attitude Autopilot Design for Dual-Spin Guided Projectiles, *Groupe de Travail Méthodes et Outils pour la Synthèse et l'Analyse Robuste (GT MOSAR CNRS)*, Novembre, 2021.

Introduction générale

Sommaire

Contexte général de la thèse	3
Concept de projectile guidé à fusée de correction de trajectoire	8
Boucle GNC et stratégie générale de commande	9
Stratégies de commande appliquées aux projectiles guidés	11
Objectifs de la thèse	11
Plan du manuscrit	12

Contexte général de la thèse

"*Ultima ratio regum*", le dernier argument des rois. Cette devise gravée sur tous les canons de l'armée de Louis XIV témoigne déjà de l'importance de l'artillerie au sein des forces armées dès le XVIII^e siècle. Importance encore plus marquée durant la période du premier empire : Napoléon Bonaparte étant lui même artilleur de formation, incorporera l'artillerie au cœur de ses tactiques militaires. Elle s'avéra être un élément décisif de plusieurs batailles, notamment le siège de Toulon (1793), la campagne d'Italie (1796-1797) or encore la bataille d'Austerlitz (1805) .

Par la suite, les améliorations techniques apportées par la révolution industrielle, notamment sur la poudre, font de l'artillerie un élément déterminant du champ de bataille pendant la première guerre mondiale, causant entre 60 % et 75% des pertes militaires [emndIPGM]. Au début du conflit, la France présente un retard technologique important et ne dispose pas encore d'artillerie lourde. En effet, sa pièce d'artillerie principale est le canon de 75 mm datant de 1897, qui n'est pas adapté à la guerre de tranchée. Cependant, en 1916, l'armée française se dote de son premier canon d'artillerie lourde, le 155 mm G.P.F (voir la figure 0.1) qui sera utilisé jusqu'à la seconde guerre mondiale. Par plusieurs aspects, ce canon marque un tournant dans le domaine de l'artillerie : il est très stable grâce à son système de fixation, il dispose d'un angle d'élévation maximale supérieur à ce qui se faisait à l'époque et permet un grand champ de tir horizontal grâce à son axe de rotation en lacet.

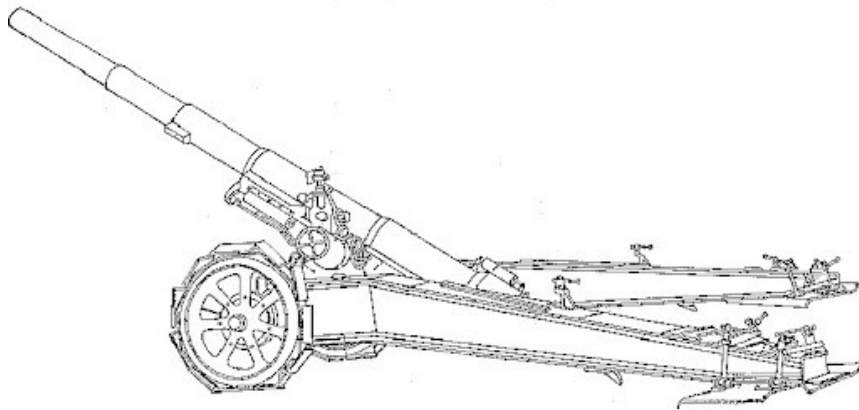


FIGURE 0.1 – Canon de 155 mm GPF modèle 1916

Pendant la seconde guerre mondiale, il n’y a pas de véritable bond technologique pour l’artillerie française même si le canon 155mm GPF aura droit à une nouvelle version appelée 155 GPF-T. Les principales améliorations se situent au niveau de sa structure et de ses pneumatiques, ce qui permet une meilleure mobilité et une meilleure robustesse.

Durant la deuxième moitié du XX^{ème} siècle, la précision de l’artillerie s’améliore. Tout d’abord grâce à l’utilisation de la radio, puis grâce aux premiers systèmes de guidage laser dans les années 1970-1980. De nos jours, l’équipement incontournable de l’artillerie lourde française est le CAESAR (CAMion Equipé d’un Système d’ARTillerie). Mis en service, au début des années 2000, le canon CAESAR vise à remplacer les canons tractés 155 TRF1. Il apporte un véritable avantage sur le champ de bataille grâce à son autonomie et sa grande mobilité. Le canon CAESAR s’est illustré dans de nombreux théâtres d’opérations notamment en Afghanistan (2009), au Mali (2013), en Irak (2016), au Yémen (2019) et plus récemment en Ukraine (2022).



FIGURE 0.2 – Canon CAESAR

Au delà des améliorations technologiques qui peuvent être apportées au canon et au système de tir pour augmenter la précision de l’arme, il est pertinent de s’intéresser à la munition en elle même pour réduire la dispersion balistique. En effet, les projectiles balistiques standard de 155 mm (voir la figure 0.3), très utilisés dans l’artillerie moderne, souffrent d’une dispersion relativement élevée à l’impact en raison des incertitudes sur les conditions de tir et des perturbations dues au vent. Il en résulte que les artilleurs doivent tirer plusieurs munitions afin d’atteindre la cible. Les tirs multiples impliquent un coût plus élevé pour l’opération, une augmentation potentielle des dommages collatéraux, ainsi qu’un risque plus important pour le personnel militaire puisque la durée de la mission augmente.



FIGURE 0.3 – Munition d’artillerie 155 mm LU-211

Il existe plusieurs solutions dans la littérature pour réduire la dispersion balistique des projectiles d’artillerie. On peut les classer dans les catégories suivantes :

■ Propulseurs de jets ou impulseurs pyrotechniques :

Le principe de cette méthode est de modifier la trajectoire du projectile en déclenchant un jet de gaz ou une petite détonation contrôlée. La figure 0.4 montre le principe de l’approche. Ce concept a déjà fait l’objet d’étude à l’ISL pour des munitions gyrostabilisées de calibres 30 mm [CWB11]. Cette méthode de commande permet une grande correction de la trajectoire en fournissant une force latérale très importante lors de l’explosion impulsionnelle ou du jet de gaz, mais nécessite une estimation très précise de l’angle de roulis du projectile, ce qui est rendu difficile par la vitesse de rotation très élevée du projectile. De plus, ce type de méthode requiert une stratégie de commande spécifique (tout ou rien) adaptée. Enfin, même si l’utilisation de plusieurs impulseurs est envisageable, un guidage continu en boucle fermée jusqu’à la cible n’est pas réalisable, la précision attendue à l’impact est donc relativement faible. On peut également commenter que l’implémentation de ce type de solution est difficile car le dispositif de propulsion doit être inséré dans la munition.

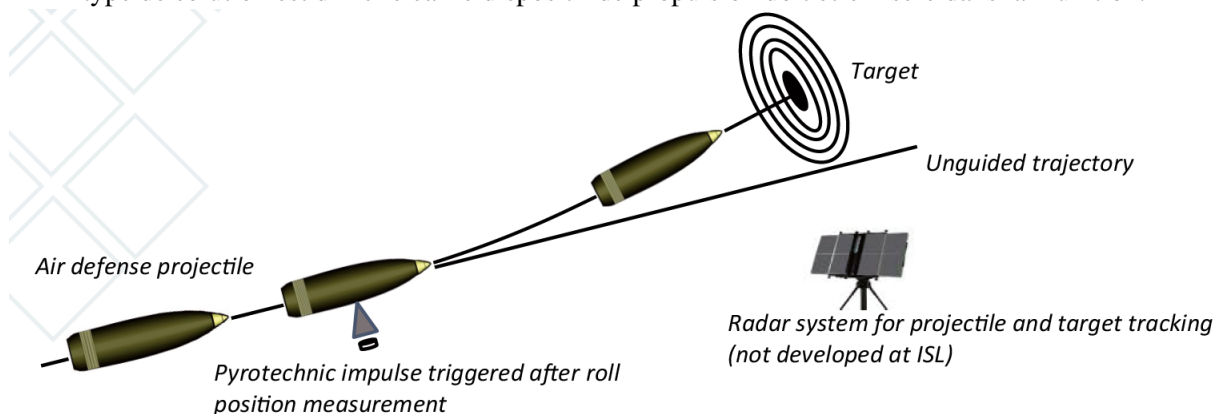


FIGURE 0.4 – Correction par impulsion pyrotechnique de la trajectoire d’une munition de 30 mm

Au delà des travaux faits à l’ISL, plusieurs références de la littérature traitent de cette solution : [BPC02, SGJ20, GC02]

■ Surfaces de commandes aérodynamiques (canards et ailerons) :

Comparées aux propulseurs de jets, les méthodes de correction via des surfaces de commandes aérodynamiques ont l’avantage de permettre une stratégie de commande continue beaucoup plus

répandue et maîtrisée, qui se rapproche des méthodes utilisées pour les missiles et les avions. Les figures 0.5, 0.6 et 0.10 montrent trois concepts utilisant des surfaces de commandes aérodynamiques pour corriger la trajectoire d'une munition d'artillerie.



FIGURE 0.5 – M712 Copperhead

La munition M712 Copperhead [MA77] a été l'un des premiers projets de munition d'artillerie de 155 mm contrôlée par des surfaces aérodynamiques. Développée à partir de 1971, la munition est stabilisée et contrôlée par des ailettes et est guidée par laser. L'un de ses principaux défauts est que son système de guidage peut être fortement perturbé par les conditions météorologiques.



FIGURE 0.6 – M982 Excalibur

La munition M982 Excalibur [Wei00], conçue au début des années 2000 dans le cadre d'un partenariat entre Raytheon et BAE Systems, dispose d'un système de guidage inertiel combiné avec un GPS. Le projectile est équipé d'ailettes et de canards rétractables qui se déploient en sortie de bouche du canon. Cette architecture permet d'augmenter drastiquement la précision de l'arme, passant d'une précision d'environ 200 mètres à 30 km de portée pour des munitions 155 mm conventionnelles à une précision métrique. En 2013, une version améliorée verra le jour baptisée "Excalibur S" capable d'atteindre des cibles mobiles. Son prix, très supérieur à une munition 155 mm standard, destine l'Excalibur à des missions à hauts risques de dommages collatéraux nécessitant une grande précision (*i.e.* combats urbains).



FIGURE 0.7 – M1156 Precision Guidance Kit

Le M1156 Precision Guidance Kit [SL22] développé en 2013 par Alliant Techsystems se présente

comme une alternative à l'Excalibur, moins précis (precision estimée à 50 mètres) mais beaucoup moins cher. Le concept du PGK est une rupture par rapport aux deux autres solutions. En effet, contrairement aux deux autres solutions présentées qui sont des projectiles dits "monolithiques" et stabilisés par empennage, l'objectif du PGK est de transformer un obus de 155 mm standard en munition guidée en s'interfaçant avec le nez du projectile. La figure 0.8 montre le M1171 LR-PGK (Long Range Precision Guidance Kit) qui est une nouvelle version du PGK dont la principale nouveauté est l'utilisation de canards à angles variables contrôlés permettant un meilleur contrôle de la trajectoire du projectile.



FIGURE 0.8 – M1171 Long Range Precision Guidance Kit

Il existe d'autres modules de guidage pour projectiles de 155 mm gyrostabilisés dans la littérature similaire au concept du PGK. On retrouve le ALKON Fuze Guidance Kit développé par Escibano Mechanical & Engineering (EM&E), le Silver Bullet de Elbit Systems et le TOP GUN de Israel Aerospace Industries. Ces trois concepts sont montrés par la figure 0.9.



FIGURE 0.9 – ALKON Fuze Guidance Kit (gauche), Top GUN (milieu) et Silver Bullet (droite)

■ Charges inertielles :

Il est intéressant de noter que certains travaux ont montré que le mouvement de masses ou de liquide interne pouvait influencer la trajectoire du projectile [Mur78, FC06]. Les résultats dans [Rou23] à

l'ISL, démontre qu'il est possible de contrôler la trajectoire d'un projectile grâce au moment produit par un actionneur à effet gyroscopique. L'actionneur à l'intérieur du projectile permet une réduction de la traînée aérodynamique par rapport aux projectiles équipés de canards.



FIGURE 0.10 – Prototype de projectile guidé équipé d'un actionneur gyroscopique interne [Rou23]

L'institut de recherches franco-allemand de Saint-Louis (ISL), quant à lui, développe des solutions dans les trois catégories présentées (impulseurs pyrotechniques, surfaces de commandes aérodynamiques et charges inertielles), celle étudiée dans la thèse est similaire au Precision Guidance Kit qui consiste à équiper les projectiles non guidés déjà existants d'une fusée de correction de trajectoire découplée en roulis qui intègre jusqu'à quatre surfaces de commandes aérodynamiques appelés canards, des capteurs (centrale inertielle, gyromètre, magnétomètre et GNSS), ainsi qu'une loi de commande et de guidage embarquée. La différence majeure entre le PGK et la fusée de correction développée à l'ISL est l'utilisation de canards pilotés (angle de braquage des canards variables) contrairement au PGK qui possèdent des angles de braquages de canards fixes. La précision attendue du projectile guidé de l'ISL est donc bien supérieure.

Le concept de cette solution est présenté plus en détails dans la section suivante.

Concept de projectile guidé à fusée de correction de trajectoire

Le projectile guidé étudié pendant la thèse est un projectile gyrostabilisé équipé d'une fusée de correction de trajectoire (FCT) découplée en roulis. Il est également nommé DFGP pour Decoupled Fuse Guided Projectile. Les figures 0.11 et 0.12 montrent respectivement les différentes parties du projectile et ses dimensions principales. La particularité de la configuration en deux parties du projectile (corps+ FCT) appelée "dual-spin" est la différence de vitesse de rotation entre la partie arrière et la FCT. En effet, le projectile étant gyrostabilisé, la partie arrière tourne très rapidement sur elle-même pour stabiliser le projectile durant le vol. La vitesse angulaire de la FCT quant à elle est réduite à zéro pendant le vol grâce à l'autopilote de roulis pour permettre aux canards de pouvoir corriger la trajectoire du projectile. Ce type de configuration dual-spin a fait l'objet de diverses publications dans la littérature, notamment concernant la dynamique de vol et sa commande par les approches linéaires, en particulier [CP00, Wer09, TSW15, STW⁺17]. Cependant, ces travaux considéraient un moteur coaxial permettant le contrôle du roulis de la pointe. Ce moteur est absent dans le cas du DFGP, et le roulis est piloté par les canards.

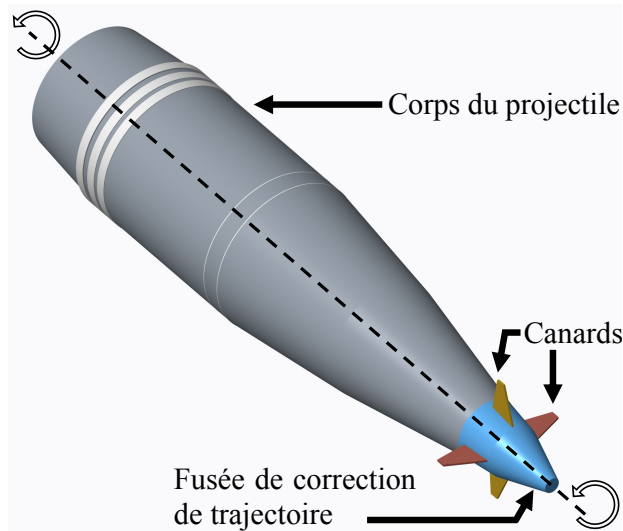


FIGURE 0.11 – Projectile guidé à fusée de correction de trajectoire

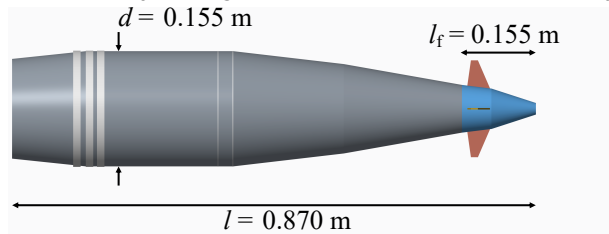


FIGURE 0.12 – Dimensions du projectile dual-spin étudié

Boucle GNC et stratégie générale de commande

Pour être en mesure d'atteindre la cible et de corriger sa dispersion balistique de manière automatique, le DFGP embarque un système de Guidage, Navigation et Commande (GNC) complet dont l'architecture est présentée par la figure 0.13.

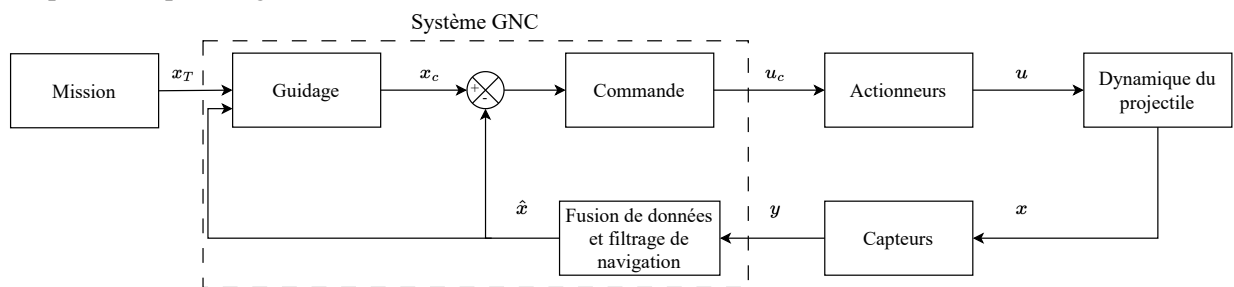


FIGURE 0.13 – Architecture du système GNC appliqué au projectile

- **Guidage** : Le système de guidage calcule la correction nécessaire à apporter pour que le projectile suive la trajectoire définie pour la mission, cela se traduit par des accélérations désirées verticales et latérales que le projectile doit avoir. Ces accélérations désirées servent de consignes au système de commande.
- **Navigation** : Le système de navigation fusionne les données des capteurs embarqués (centrale inertielle, gyroscope, magnétomètres et GNSS) pour obtenir une bonne estimation des états du projectile (position, vitesse et accélération linéaire et angulaire, angle d'Euler, *etc...*). Des filtres de navigation

sont également embarqués pour réduire le bruit des capteurs.

- **Commande :** Le système de commande a pour mission de faire converger les états du projectile vers ceux désirés par le système de guidage. A partir des informations issues des algorithmes de la navigation et des consignes du guidage, le système de commande calcule le signal de commande à envoyer à chaque canard.

Le projectile guidé passe par différentes phases de vol le long de sa trajectoire, comme le montre la figure 0.14. Lors du tir, le projectile subit une accélération qui peut être supérieure à 10 000 g. Les capteurs sont saturés à ce stade, et les algorithmes de navigation mettent donc un certain temps à converger en sortie de bouche. De plus, le récepteur GNSS met également un certain temps à accrocher les satellites (de l'ordre de quelques dizaines de secondes typiquement). Ainsi, le guidage du projectile n'est pas possible tant qu'une solution de navigation n'est pas disponible. C'est pourquoi le système GNC bascule entre différents états sur la trajectoire du projectile, comme détaillé ci-dessous où ϕ_2 et p_2 sont respectivement l'angle de roulis et la vitesse de roulis de la FCT.

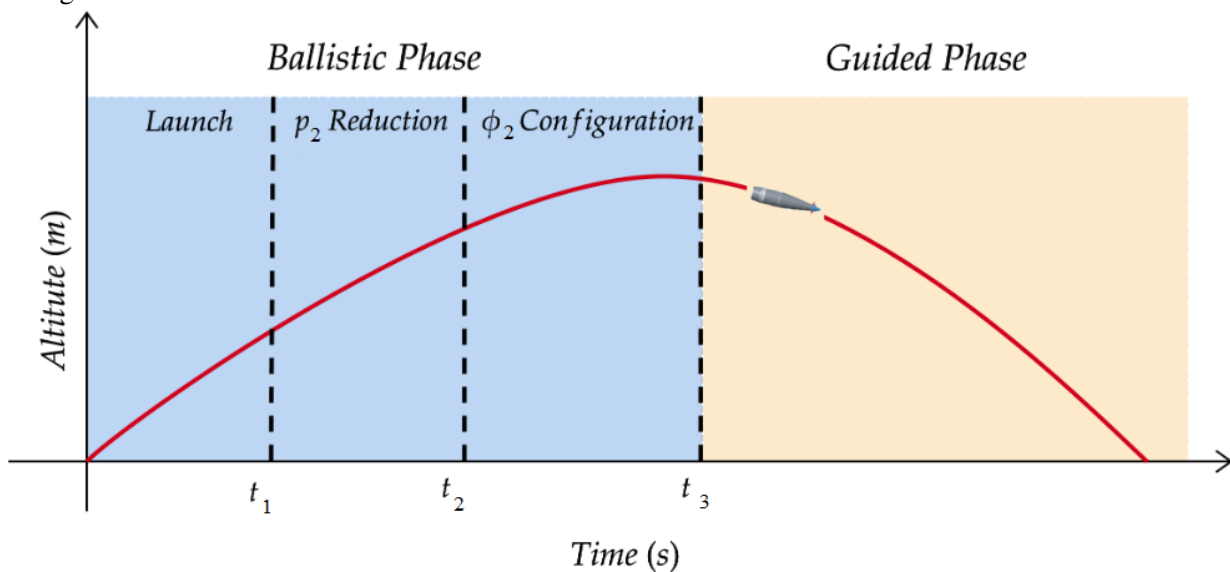


FIGURE 0.14 – Différentes phases de vol du projectile guidé

- **Phase de sortie de canon ($t < t_1$) :** Pendant la première phase de vol, le système GNC n'est pas actif car les capteurs sont saturés et le système de navigation n'est pas opérationnel.
- **Phase de réduction de la vitesse de roulis de la FCT ($t_1 < t < t_2$) :** Pendant cette phase, les quatre canards sont mis en saturation afin de réduire la vitesse de roulis de la FCT par effet aérodynamique. En effet, la partie arrière du projectile étant en rotation très rapide, et du fait des frottements dans le système de découplage, la vitesse de roulis de la FCT augmente rapidement.
- **Phase de stabilisation de l'angle de roulis de la FCT ($t_2 < t < t_3$) :** Une fois la vitesse en roulis de la FCT suffisamment réduite, l'autopilote de roulis est enclenché afin de stabiliser l'angle de roulis de la FCT.
- **Phase de trajectoire guidée ($t > t_3$) :** La dernière phase de vol est la phase guidée, à ce stade, une solution de navigation est disponible, la position de la cible est connue, et le roulis de la FCT est stabilisé. Les autopilotes de tangage, de lacet et de facteurs de charge sont enclenchés pour permettre la correction de la trajectoire du projectile.

Stratégies de commande appliquées aux projectiles guidés

La dynamique du projectile est non linéaire et dépend fortement du point de vol : typiquement le nombre de Mach, l'altitude, les angles d'incidence, et la vitesse de roulis du corps. La conception d'un correcteur remplissant le cahier des charges sur l'ensemble du domaine de vol n'est donc pas triviale. Au delà des méthodes classiques en boucle ouverte qui relèvent de la balistique traditionnelle [Fre11, Cos97], les principales stratégies de commande appliquées aux projectiles guidés sont le séquençement de gains [LL00] et plus récemment la commande Linéaire à Paramètres Variants (LPV)[Mac19].

La commande par séquençement de gains consiste à concevoir une loi de commande non-linéaire par interpolation d'un contrôleur linéaire synthétisé autour de différents points de fonctionnement. Plus précisément la méthode du séquençement de gains consiste en trois étapes :

- Linéarisation : Cette étape consiste à effectuer une linéarisation jacobienne de la dynamique non-linéaire du projectile autour de différents points de fonctionnement (conditions de vol fixées).
- Synthèse : Un contrôleur linéaire LTI est synthétisé pour chaque modèle linéaire obtenu dans l'étape de linéarisation.
- Interpolation : Le contrôleur non-linéaire global est obtenu par interpolation des contrôleurs linéaires synthétisés.

Plusieurs travaux à l'ISL, à l'ONERA [Tha21], au CRAN [Sèv16] et dans la littérature de manière générale [GB22] ont montré les avantages de la commande par séquençement de gains et sa pertinence pour la commande des projectiles dual-spin. Cette méthode permet de concevoir une loi de commande non-linéaire relativement simple tout en utilisant les outils puissants de la commande multivariable et robuste pour synthétiser les contrôleurs locaux.

La commande LPV est une approche alternative au séquençement de gains qui produit également un contrôleur non-linéaire mais, contrairement au séquençement de gains, la commande LPV permet de garantir des propriétés globales de stabilité et de performance sur l'ensemble du domaine de vol avec un seul contrôleur LPV automatiquement séquéncé. Cependant cette méthode, comme le séquençement de gains, nécessite de linéariser la dynamique non-linéaire. La commande LPV pour des projectiles guidés à longue portée a également fait l'objet de travaux récents à l'ISL [VSST24]. La section suivante présente les principaux défauts du séquençement de gains justifiant les objectifs de la thèse, détaillés également ci-dessous.

Objectifs de la thèse

La plupart des lois de commande, conçues pour les projectiles gyro-stabilisés, utilisent des techniques de séquençement de gains basées sur la linéarisation locale de la dynamique du projectile autour d'un nombre défini de points de vol. Cette approche donne des performances satisfaisantes tout en permettant l'utilisation d'outils bien connus de la théorie de la commande linéaire. Cependant, le séquençement de gains présente deux inconvénients principaux : premièrement, la conception peut prendre beaucoup de temps car l'ingénieur automatique a besoin de développer des modèles linéaires de la dynamique étudiée autour d'un nombre significatif de points de vol pour que la conception de l'autopilote soit réussie. Deuxièmement, le contrôleur non linéaire obtenu par interpolation de contrôleurs linéaires ne peut garantir les performances et la stabilité du système en boucle fermée qu'au voisinage des points de vol susmentionnés.

Au delà des considérations sur le séquençement de gains, le modèle du projectile étudié est sujet

à de nombreuses incertitudes paramétriques. En effet, l'aérodynamique des projectiles guidés à fusée de correction de trajectoire est complexe et constitue encore actuellement un sujet de recherche actif [KMM20, KHL12]. L'estimation précise des coefficients aérodynamiques du projectile nécessite des campagnes expérimentales en soufflerie, longues, compliquées et coûteuses. De plus, mener une telle étude n'est pas toujours possible. Une alternative est de se baser sur les estimations provenant de logiciels semi-empiriques dédiés comme PRODAS [KCS⁺20], mais ces résultats sont entachés d'une incertitude élevée. En effet, ces logiciels reposent sur une base de données empiriques qui utilise en général un modèle simplifié du projectile et ne prend en général pas en compte l'action aérodynamique des canards. Or, il est admis que les canards situés en amont du projectile ont une influence majeure sur l'aérodynamique de celui-ci. Ces constats menés sur le séquençement de gains et sur les incertitudes paramétriques du modèle du projectile ont servi à définir les objectifs de la thèse.

L'axe principal de recherche qui encadre les travaux de thèse est l'établissement d'une méthodologie de conception rapide et générique d'autopilotes pour des projectiles guidés avec des garanties de performance et de robustesse face aux incertitudes, et ce pour toute l'enveloppe de vol. Par "rapide" et "générique", l'objectif sous-jacent est de s'affranchir du séquençement de gains et de proposer une stratégie de contrôle non-linéaire rapide à régler (un seul contrôleur pour l'ensemble du domaine de vol) et facilement implementable qui prenne en compte directement les non-linéarités du système et qui, par conséquent, évite la procédure de linéarisation et de synthèse pour chaque point de vol.

Plan du manuscrit

Le chapitre 1 décrit le modèle mathématique non-linéaire du projectile en détaillant les équations de la dynamique de vol, les forces et moments aérodynamiques, ainsi que la modélisation des différents paramètres de vol, des actionneurs et des capteurs. Ce chapitre détaille également la conception du simulateur de vol utilisé tout au long de la thèse pour la validation du comportement balistique du projectile et des trajectoires guidées.

Le chapitre 2 traite de la synthèse d'autopilotes non-linéaires par inversion dynamique incrémentale. La méthodologie de réglage prenant en compte des contraintes d'implémentation numérique et utilisant les outils de la commande robuste est présentée : une analyse des performances et de la robustesse des autopilotes de roulis, tangage et lacet du projectile est réalisée. Des simulations non-linéaires de trajectoires guidées, utilisant le simulateur du chapitre 1, sont également présentées pour valider le comportement nominal des lois de commandes synthétisées.

Le chapitre 3 se concentre sur la conception d'une augmentation adaptative pour réduire l'impact des incertitudes paramétriques sur les performances des autopilotes de roulis, de tangage et de lacet et facteurs de charge. Des simulations non-linéaires permettent d'évaluer le gain en performance obtenu par l'utilisation de la commande adaptative en sur-couche des lois de commandes par inversion dynamique.

Pour terminer, le chapitre 4, s'intéresse à l'utilisation des LMI pour l'analyse et la synthèse du filtre passe-bas de l'augmentation adaptative de l'autopilote de roulis, permettant un bon compromis entre minimisation de la norme \mathcal{L}_1 du système bouclé et robustesse face aux retards de mesures et de commande.

Chapitre 1

Modélisation non-linéaire et conception d'un simulateur de vol

Sommaire

1.1	Introduction	14
1.2	Modèle mathématique non-linéaire du projectile guidé dual-spin	14
1.2.1	Repères et systèmes de coordonnées	14
1.2.2	Équations dynamiques de translation	16
1.2.3	Équations dynamiques de rotation	17
1.2.4	Équations cinématiques	18
1.2.4.1	Cinématique de rotation	19
1.2.4.2	Cinématique de translation	20
1.2.5	Calcul des paramètres de vol	21
1.2.6	Modélisation de l'environnement	21
1.2.7	Expression des forces et moments extérieurs appliqués au projectile	22
1.2.7.1	Forces et moments de portance et de traînée	23
1.2.7.2	Force et moment de Magnus	26
1.2.7.3	Force et moment d'amortissement	28
1.2.7.4	Force et moment générés par les canards	29
1.2.7.5	Allocation des commandes	33
1.2.7.6	Moment de frottements	34
1.2.7.7	Force de gravité	35
1.2.7.8	Forces et moments totaux	35
1.2.8	Modélisation des actionneurs et des capteurs	36
1.3	Conception du simulateur de vol dans l'environnement Matlab-Simulink	37
1.3.1	Boîte à outils SMART	37
1.3.2	Architecture générale du simulateur	39
1.4	Simulations balistiques et validation du simulateur non-linéaire	40
1.5	Conclusion	43

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif, d'une part, de détailler le modèle mathématique non-linéaire décrivant le comportement en vol d'un projectile "dual-spin", et, d'autre part, de présenter le simulateur balistique dans l'environnement `Matlab/Simulink`.

La modélisation mathématique d'un projectile à sept degrés de liberté se base principalement sur les équations de la dynamique de vol présentes dans [Zip14] et dans les travaux de recherches de [Sèv16]. Cependant, certains aspects de la modélisation ont été améliorés par rapport aux travaux de [Sèv16]. Tout d'abord, le calcul du moment d'inertie total du projectile par rapport à son véritable centre de masse permet un calcul plus fidèle des équations dynamiques de rotation. Ensuite, la méthode des cosinus directeur (Direct Cosine Matrix) a été choisie pour le calcul de la cinématique de rotation. Cette approche a l'avantage d'être moins complexe à implémenter que la méthode par quaternion et ne présente pas de singularité de calcul contrairement à la méthode d'intégration d'Euler directe.

Le simulateur de vol se base sur la boîte à outils SMART (System Modeling Ammunition Research Tools) conçue pendant cette thèse. Cette boîte à outils a été créée avec l'objectif d'apporter plus de généricité, de modularité et de simplicité au simulateur. Les caractéristiques de SMART sont présentées dans la section 1.3.

La section 1.2 présente les équations du modèle non-linéaire du projectile, ensuite la section 1.3 présente la boîte à outils SMART et les caractéristiques principales du simulateur de vol et, enfin, dans la section 1.4, le fonctionnement du simulateur est validé par l'analyse de simulations balistiques et de simulations de tir en boucle ouverte.

1.2 Modèle mathématique non-linéaire du projectile guidé dual-spin

Le comportement d'un projectile guidé dual-spin est décrit par un modèle dynamique à sept degrés de liberté. Plus précisément, en plus des trois translations et des trois rotations dans les trois directions de l'espace, le modèle comporte un degré de rotation supplémentaire dû au découplage en roulis entre la fusée de correction de trajectoire et la partie arrière du projectile. Dans cette section, les repères et les systèmes de coordonnées utilisés pour la modélisation sont tout d'abord présentés, ensuite les équations dynamiques et cinématiques sont détaillées. Une partie importante de cette section est dédiée au calcul des forces et des moments extérieurs au projectile. Enfin, la modélisation des actionneurs est discutée ainsi que des hypothèses simplificatrices sur la dynamique des capteurs. Les valeurs numériques des différents paramètres du projectile dual-spin sont détaillées dans le tableau B.1 en annexe B.1.

1.2.1 Repères et systèmes de coordonnées

Les repères et les systèmes de coordonnées servent de cadres mathématiques à la modélisation du comportement du projectile pendant sa phase de vol. En effet, le mouvement du projectile, son orientation et les forces et les moments qui lui sont appliqués sont toujours exprimés par rapport à un repère. Il est donc primordial de définir certains repères fondamentaux à la modélisation de la dynamique du projectile. Ainsi, cette sous-section présente les différents repères nécessaires à l'écriture des équations de la dynamique de vol ainsi que leurs systèmes de coordonnées préférentiels associés. La figure 1.1 montre les rotations entre les différents systèmes de coordonnées et la figure 1.2 illustre les différents repères utilisés où B_1 et B_2 sont respectivement les centres de masse de la partie arrière et de la FCT du projectile et B est le centre de masse total.

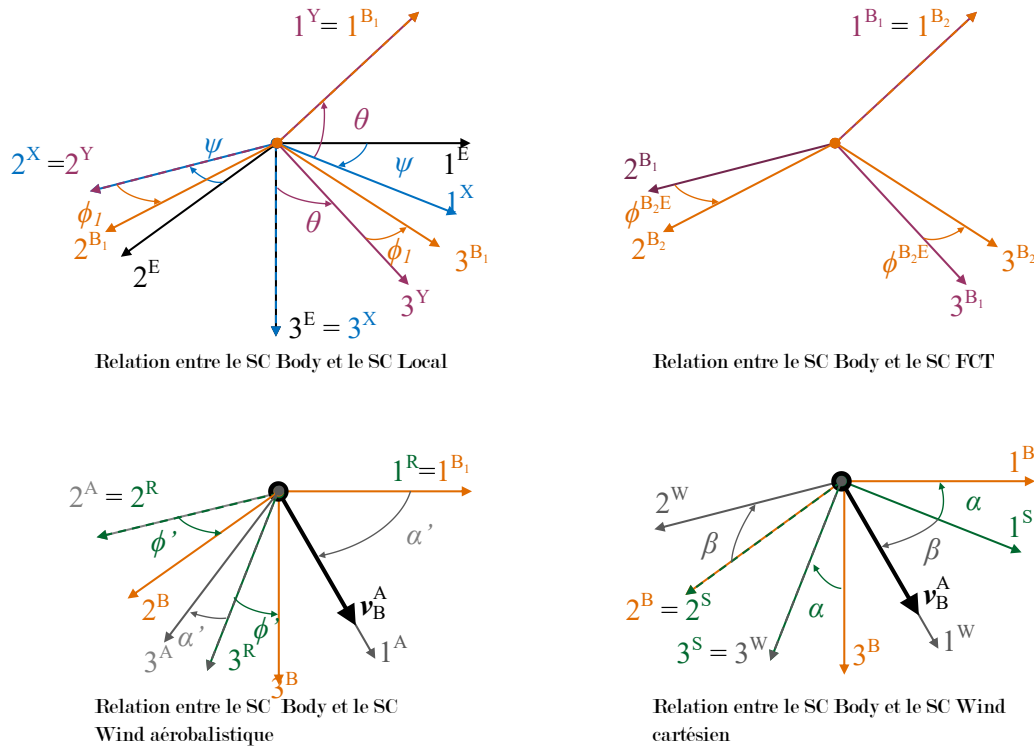


FIGURE 1.1 – Rotations entre les différents systèmes de coordonnées

■ Repère terrestre et système de coordonnées local :

Le repère E lié à la Terre est supposé inertiel (galiléen) avec un changement d'orientation et de position dans le temps jugé négligeable. L'origine du repère est fixée au site de lancement. Le projectile étudié possède une portée balistique inférieure à 30 kilomètres et évolue dans l'atmosphère avec une vitesse maximale inférieure à Mach 5 par conséquent la courbure terrestre est négligeable pour la modélisation de la trajectoire. Un système de coordonnées local J^L peut donc être utilisé dans le plan tangent à la surface terrestre sur le site de lancement. Les trois vecteurs principaux du repère (e_1, e_2, e_3) sont orientés respectivement vers le nord, vers l'est et vers le centre de la Terre et sont associés aux axes $(1^E, 2^E, 3^E)$ qui constituent le système de coordonnées préférentiel J^L .

■ Repères du corps du projectile (tournant et non-tournant) et systèmes de coordonnées préférentiels associés :

Les repères Body Varying Roll (BVR) B_1 et Body Fixed Roll (BFR)¹ B'_1 sont tous les deux fixés au corps du projectile (partie arrière) et ils partagent le même premier vecteur de leurs bases suivant l'axe de symétrie du projectile, c'est à dire $b_{1,1} = b'_{1,1}$. Cependant, à la différence de B_1 , le repère B'_1 ne suit pas le mouvement en roulis du corps du projectile et possède par définition un angle de roulis nul ($\phi_{BFR} = 0$). Les deuxièmes vecteurs de leurs bases $(b_{1,2}$ et $b'_{1,2})$ sont normaux à la surface du projectile et sont confondus quand l'angle de roulis du projectile est nul. Leurs troisièmes vecteurs $(b_{1,3}$ et $b'_{1,3})$ complètent leurs bases orthonormales respectives. L'utilisation du repère non-tournant BFR a l'avantage de rendre l'expression de la dynamique en rotation indépendante du roulis de corps. Dans le cas contraire, la forte vitesse de rotation du projectile augmente significativement les durées de simulation (petit pas d'intégration) et peut dans certains cas mener à des erreurs numériques. Pour cette raison le repère BFR est privilégié par rapport au repère BVR et est utilisé systématiquement dans la thèse. Les systèmes de coordonnées préférentiels J^{B_1} et $J^{B'_1}$ composés des

1. Il existe un troisième repère appelé BNS (Body Non Spinning) pour les systèmes tournants, il possède la particularité d'avoir une vitesse angulaire en roulis nulle et un angle de roulis non nul.

axes $(1^{B_1}, 2^{B_1}, 3^{B_1})$ et $(1^{B'_1}, 2^{B'_1}, 3^{B'_1})$ sont respectivement associés au repère B_1 et B'_1 .

■ Repère de la FCT et système de coordonnées préférentiel associé

Le repère B_2 est lié à la fusée de correction de trajectoire avec une base formée des trois vecteurs suivants : $b_{2,1}$ suivant l'axe de symétrie de la FCT et donc du projectile entier, $b_{2,2}$ suivant le plan de symétrie horizontale des canards et $b_{2,3}$ pour compléter la base orthonormale suivant la règle de la main droite. Le système de coordonnées préférentiel $]^{B_2}$ composé des axes $(1^{B_2}, 2^{B_2}, 3^{B_2})$ est associé au repère B_2 .

■ Repère atmosphérique et système de coordonnées du vent

L'atmosphère est considérée comme une masse d'air monolithique dans laquelle évolue le projectile et par conséquent un repère A peut lui être associé avec les trois vecteurs (a_1, a_2, a_3) [Zip14, p.85]. Le projectile se déplace dans cette masse d'air et subit un vent relatif générant les forces et les moments aérodynamiques. Un système de coordonnées lié au vent $]^W$ est associé au repère atmosphérique A . Le premier axe de $]^W$ (1^W) est aligné avec le vecteur vitesse du centre de masse du projectile par rapport à l'air v_B^A . Les deux autres axes de $]^W$ peuvent être définis de deux manières selon l'utilisation des angles d'incidence cartésien (α, β) ou des angles aérobalistiques polaires (α', ϕ') . Pour éviter toute confusion le système de coordonnées lié au vent utilisant les angles aérobalistiques est nommé $]^A$. Les angles cartésiens sont associés aux conventions de la dynamique de vol "avion" alors que les angles aérobalistiques sont associés aux missiles et à la balistique traditionnelle. La section 1.2.7 propose une modélisation des efforts aérodynamiques que subit le projectile selon ces deux conventions.

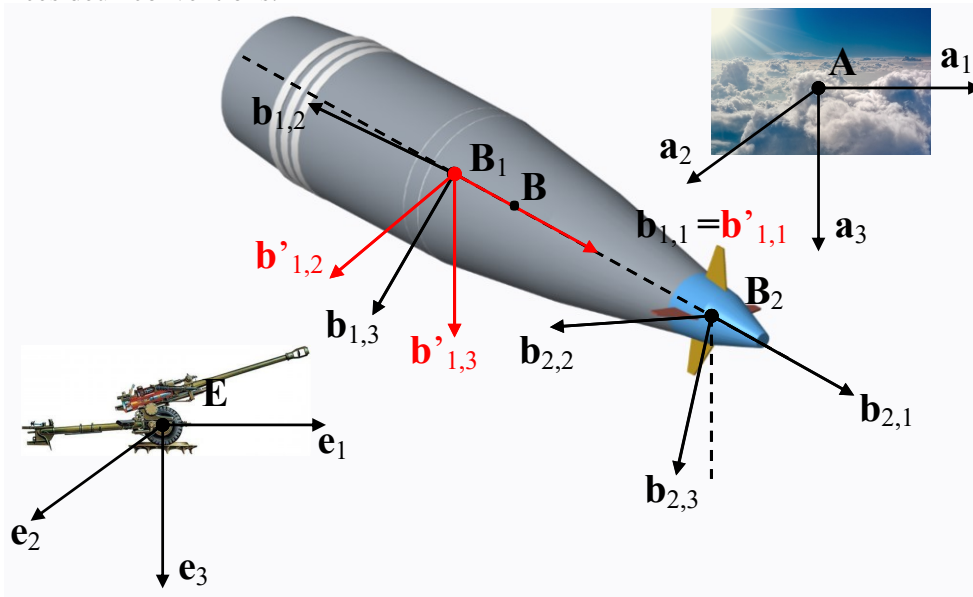


FIGURE 1.2 – Repères utilisés [Sèv16]

1.2.2 Équations dynamiques de translation

L'équation dynamique de translation (1.1) décrit la dérivée du vecteur vitesse $[v_B^E]^{B'_1} : \left[\frac{dv_B^E}{dt} \right]^{B'_1}$ par rapport au repère inertiel terrestre E exprimé dans le système de coordonnées préférentiel lié au repère non-tournant $]^{B'_1}$ [Zip14] :

$$[f_B]^{B'_1} = m^B \left[\frac{dv_B^E}{dt} \right]^{B'_1} + m^B [\Omega^{B'_1 E}]^{B'_1} [v_B^E]^{B'_1} \quad (1.1)$$

L'équation (1.2) est obtenue en isolant $\left[\frac{dv_B^E}{dt}\right]^{B'_1} = [\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}]^T$:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{m^B}\right) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & r \tan \theta \\ -q & -r \tan \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Dans l'équation (1.2), m^B est la masse totale du projectile, $[v_B^E]^{B'_1} = [u \quad v \quad w]^T$ est le vecteur vitesse du centre de masse du projectile B par rapport au repère inertiel terrestre E coordonné dans B'_1 et $[f_B]^{B'_1} = [X \quad Y \quad Z]^T$ est le vecteur des forces extérieures appliquées au centre de masse B du projectile. La nature et l'effet de chaque force agissant sur le projectile sont détaillés dans la section 1.2.7. Le terme $[\Omega^{B'_1 E}]$ représente la matrice antisymétrique du vecteur vitesse de rotation $[\omega^{B'_1 E}] = [-r \tan \theta \quad q \quad r]^T$ du repère non tournant B'_1 où q et r sont respectivement les vitesses de tangage et de lacet du projectile et θ est l'angle de tangage². Il est intéressant de noter que l'utilisation du repère BFR non tournant B'_1 évite la présence de la vitesse angulaire de roulis de la partie arrière du projectile p_1 dans l'équation (1.2). La vitesse de rotation p_1 étant très élevée, son intégration est numériquement coûteuse ce qui augmente le temps de simulation d'une trajectoire.

1.2.3 Équations dynamiques de rotation

Les équations dynamiques de rotation (1.3) ci-dessous décrivent l'accélération angulaire du corps du projectile et de la fusée de correction de trajectoire. La FCT et la partie arrière du projectile sont physiquement couplées en tangage et en lacet, mais découplées en roulis. Pour éviter toute redondance, l'équation (1.3a) traite des mouvements de tangage et de lacet communs aux deux parties, ainsi que du roulis de la partie arrière du projectile tandis que l'équation (1.3b) traite uniquement du roulis de la FCT :

$$[m_B]^{B'_1} = [\tilde{I}_B^{B_{12}}]^{B'_1} \left[\frac{d\omega^{B_1 E}}{dt}\right]^{B'_1} + [\Omega^{B'_1 E}]^{B'_1} [\tilde{I}_B^{B_{12}}]^{B'_1} [\omega^{B_1 E}]^{B'_1} \quad (1.3a)$$

$$L_2 = I_{x_2} \frac{dp_2^{B_2 E}}{dt} \quad (1.3b)$$

Les équations (1.3a) et (1.3b) sont développées et regroupées comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{x_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_{x_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{I}_t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & -q \\ 0 & -r & 0 & -r \tan \theta \\ 0 & q & r \tan \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ L_1 \\ M \\ N \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Dans l'équation (1.3), $[\omega^{B_1 E}]^{B'_1} = [p_1 \quad q \quad r]^T$ est le vecteur des vitesses angulaires de la partie arrière du projectile et $[m_{B_1}]^{B'_1} = [L_1 \quad M \quad N]^T$ est le vecteur des moments extérieurs appliqués à la partie arrière du projectile. Concernant la FCT, p_2 est sa vitesse angulaire en roulis et L_2 est la composante en roulis de la somme des moments extérieurs appliqués à la FCT.

L'équation (1.3a) prend en compte le moment d'inertie effectif de la partie arrière du projectile $[\tilde{I}_B^{B_{1,2}}]^{B'_1}$

2. Le terme $-r \tan \theta$ provient du calcul de la vitesse angulaire du repère par intégration directe de $p'_1 = -r \tan \theta$ [Zip14, p 136]

calculé à partir du centre de masse réel B de celui-ci. Le calcul de l'inertie effective de la partie arrière est effectué grâce à la théorie des corps groupés [Zip14, pp.217] et détaillé par l'équation (1.5) :

$$\left[I_B^{B_{1,2}} \right]^{B'_1} = \left[I_{B_1}^{B_1} \right]^{B'_1} + m^{B_1} \left(\left[\overline{S}_{B_1 B} \right]^{B'_1} \left[S_{B_1 B} \right]^{B'_1} \right) + \left[\overline{T} \right]^{B_2 B'_1} \left[I_{B_2}^{B_2} \right]^{B_2} + m^{B_2} \left(\left[\overline{S}_{B_2 B} \right]^{B'_1} \left[S_{B_2 B} \right]^{B'_1} \right) \quad (1.5a)$$

$$\begin{aligned} \left[\tilde{I}_B^{B_{1,2}} \right]^{B'_1} &= \left[I_B^{B_{1,2}} \right]^{B'_1} - \left[I_{B_2}^{B_2} \right]^{B'_1} \\ &= \left[I_B^{B_{1,2}} \right]^{B'_1} - \left[\overline{T} \right]^{B_2 B'_1} \left[I_{B_2}^{B_2} \right]^{B_2} \end{aligned} \quad (1.5b)$$

L'utilisation du moment d'inertie effectif du projectile permet une modélisation plus précise de la dynamique de rotation de la partie arrière du projectile. On calcule tout d'abord l'inertie totale du projectile $\left[I_B^{B_{1,2}} \right]^{B'_1}$ par rapport à son centre de masse réel, auquel on vient soustraire le moment d'inertie de la FCT $\left[I_{B_2}^{B_2} \right]^{B'_1}$ exprimé dans le système de coordonnées non tournant. Dans l'équation (1.5), $\left[T \right]^{B_2 B'_1}$ est la matrice de rotation permettant le changement de système de coordonnées à partir de $]^{B'_1}$ vers $]^{B_2}$, $\left[S_{B_1 B} \right]$ et $\left[S_{B_2 B} \right]$ sont respectivement les matrices antisymétriques des vecteurs de déplacement $\left[S_{B_1 B} \right]^{B'_1} = \begin{bmatrix} x_{B_1 B} & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ et $\left[S_{B_2 B} \right]^{B'_1} = \begin{bmatrix} -x_{B_2 B} & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

1.2.4 Équations cinématiques

Les équations cinématiques permettent, tout d'abord, de calculer les différents angles d'Euler du projectile et ainsi déterminer son orientation en vol par rapport au repère inertiel terrestre. Ensuite, la vitesse linéaire locale et la position du projectile sont déterminées grâce aux angles d'Euler.

A cause de sa configuration "dual-spin", la cinématique du projectile est décrite par 4 angles : θ son angle de tangage, ψ son angle de lacet, ϕ_1 l'angle de roulis du corps du projectile et ϕ_2 l'angle de roulis de la FCT. La détermination des angles d'Euler permet de construire des matrices des rotation $\left[T \right]^{B_1 L}$ et $\left[T \right]^{B_2 L}$ faisant la correspondance entre le système de coordonnées local $]^L$ et le système de coordonnées $]^{B_1}$, puis entre le système de coordonnées local $]^L$ et le système de coordonnées $]^{B_2}$. Les équations (1.6), (1.7) et (1.8) montrent la construction des matrices de rotation $\left[T \right]^{B_1 L}$ et $\left[T \right]^{B_2 L}$ ainsi que le cas particulier de $\left[T \right]^{B_1 L}$. La matrice $\left[T \right]^{B_1 L}$ est ensuite utilisée pour calculer la vitesse linéaire $\left[v_B^E \right]^L = \begin{bmatrix} u_e & v_e & w_e \end{bmatrix}^\top$ et la position $\left[s_B^E \right]^L = \begin{bmatrix} x_e & y_e & z_e \end{bmatrix}^\top$ du projectile dans le système de coordonnées local. La matrice $\left[T \right]^{B_1 L}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \left[T \right]^{B_1 L} &= \left[T \right]^{B_1 Y} \left[T \right]^{Y X} \left[T \right]^{X L} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ 0 & -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi_1 - \sin \psi \cos \phi_1 & \sin \psi \sin \theta \sin \phi_1 + \cos \psi \cos \phi_1 & \cos \theta \sin \phi_1 \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi_1 + \sin \psi \sin \phi_1 & \sin \psi \sin \theta \cos \phi_1 - \cos \psi \sin \phi_1 & \cos \theta \cos \phi_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.6)$$

La matrice $[T]^{B_2L}$ se construit de la même manière que $[T]^{B_1L}$ avec une rotation en roulis d'angle ϕ_2 au lieu de ϕ_1 :

$$[T]^{B_2L} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi_2 - \sin \psi \cos \phi_2 & \sin \psi \sin \theta \sin \phi_2 + \cos \psi \cos \phi_2 & \cos \theta \sin \phi_2 \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi_2 + \sin \psi \sin \phi_2 & \sin \psi \sin \theta \cos \phi_2 - \cos \psi \sin \phi_2 & \cos \theta \cos \phi_2 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

La caractéristique principale du repère non-tournant B'_1 est d'avoir un angle de roulis nul ($\phi_{BFR} = 0$), par conséquent $[T]^{B'_1L}$ se construit avec uniquement deux rotations comme suit :

$$\begin{aligned} [T]^{B'_1L} &= [T]^{B'_1Y} [T]^{YX} [T]^{XL} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \cos \psi \sin \theta & \sin \psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2.4.1 Cinématique de rotation

Il existe trois méthodes principales utilisées dans la littérature pour la détermination de l'orientation d'un repère : par intégration directe des vitesses angulaires du corps du projectile, par utilisation de la matrice des cosinus directeurs (DCM matrix) et par quaternion. La figure 1.3 fait le comparatif des trois méthodes. Le choix de l'utilisation de la méthode par matrice des cosinus directeur est justifié par l'absence de singularité de calcul et par une implémentation plus simple que les quaternions. La méthode de la matrice des cosinus directeurs est basée sur la dynamique de la matrice $[T]^{B'_1L}$ régie par l'équation (1.9) :

$$\frac{d[T]^{B'_1L}}{dt} = \left[\overline{\Omega}^{B'_1E} \right]^{B'_1} [T]^{B'_1L} \quad (1.9a)$$

$$[T]^{B'_1L} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \cos \psi \sin \theta & \sin \psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.9b)$$

Les angles de tangage θ et de lacet ψ sont calculés directement à partir de $[T]^{B'_1L}$ selon les équations cinématiques de sortie (1.10a) et (1.10b) :

$$\theta = -\arcsin(T^{B'_1L}\{1, 3\}) \quad (1.10a)$$

$$\psi = -\arctan\left(\frac{T^{B'_1L}\{2, 1\}}{T^{B'_1L}\{2, 2\}}\right) \quad (1.10b)$$

Néanmoins, du fait de l'utilisation de $]^{B'_1}$, il n'est pas possible de calculer de la même manière les angles de roulis ϕ_1 et ϕ_2 , ceux-ci sont donc calculés par intégration directe comme suit :

$$\dot{\phi}_2 = p_2 - p'_1$$

Méthodes de calcul des angles d'Euler du corps du projectile			
	Intégration directe	Matrice des cosinus directeurs	Quaternions
Equations différentielles	$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi_1 \tan \theta & \cos \phi_1 \tan \theta \\ 0 & \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ 0 & \frac{\sin \phi_1}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi_1}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q \\ r \end{bmatrix}$	$\frac{d[T]^{B_1L}}{dt} = [\bar{\Omega}^{B_1E}]^{B_1} [T]^{B_1L}$	$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p_1 & -q & -r \\ p_1 & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p_1 \\ r & q & -p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$
Angles d'Euler	Détermination des angles d'Euler par intégration directe des équations différentielles.	$\phi_1 = \arctan \left(\frac{T^{B_1L}\{2,3\}}{T^{B_1L}\{3,3\}} \right)$ $\theta = \arcsin(T^{B_1L}\{1,3\})$ $\psi = -\arctan \left(\frac{T^{B_1L}\{2,1\}}{T^{B_1L}\{2,2\}} \right)$	$\tan \phi_1 = \frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}$ $\sin \theta = -2(q_1q_3 - q_0q_2)$ $\tan \psi = \frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}$
Avantages	Calcul direct des angles d'Euler.	Matrice de transformation directement calculée. Aucune singularité dans les équations différentielles.	Equations différentielles linéaires.
Inconvénients	Singularité de calcul à : $\theta = \frac{\phi_1}{2}$	Les angles d'Euler ne sont pas directement disponibles	Les angles d'Euler et la matrice de transformation ne sont pas directement disponibles. Implementation plus complexe.

FIGURE 1.3 – Méthodes de calcul des équations cinématiques [Zip14, pp. 143]

$$= p_2 + r \tan \theta \quad (1.11a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= p_1 - p'_1 \\ &= p_1 + r \tan \theta \end{aligned} \quad (1.11b)$$

1.2.4.2 Cinématique de translation

Les équations cinématiques de translation permettent de calculer la vitesse linéaire du centre de masse du projectile $[v_B^E]^L$ par rapport au repère inertielle terrestre exprimé dans le système de coordonnées local, ainsi que le vecteur position du projectile $[s_{BE}]^L = [x_e \ y_e \ z_e]^T$ par intégration directe. La matrice $[T]^{B_1L}$ (calculée grâce à la cinématique de rotation) permet le passage entre le système de coordonnées local vers le système de coordonnées Body B'_1 :

$$[v_B^E]^L = [T]^{B_1L} [v_B^E]^{B'_1} \quad (1.12)$$

qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

1.2.5 Calcul des paramètres de vol

La dynamique du projectile ainsi que les forces et les moments que celui-ci subit pendant sa trajectoire sont fortement influencés par les conditions de vol. En effet, les différents paramètres de vol comme la vitesse du projectile par rapport au vent relatif V , le nombre de Mach \mathcal{M} , l'angle d'attaque α , l'angle de dérapage β ou encore la pression dynamique \bar{q} régissent l'intensité des forces et des moments aérodynamiques extérieurs, qui à leur tour changent les conditions de vol. L'équation (1.14) décrit la relation permettant de calculer la vitesse du projectile par rapport à son vent relatif (repère atmosphérique A) :

$$\begin{aligned} [v_B^A]^{B'_1} &= [v_B^E]^{B'_1} - [v_A^E]^{B'_1} \\ &= [v_B^E]^{B'_1} - [T]^{B'_1 L} [v_A^E]^L \end{aligned} \quad (1.14)$$

où $[v_B^A]^{B'_1} = [u_a \ v_a \ w_a]^\top$ et $[v_A^E]^L$ sont la vitesse du projectile par rapport à l'air et la vitesse de l'air (vent) par rapport au repère terrestre. En l'absence de vent, on obtient la relation suivante $[v_B^A]^{B'_1} = [v_B^E]^{B'_1}$. La vitesse V est calculée avec la norme euclidienne du vecteur $[v_B^A]^{B'_1}$. L'équation (1.15) donne également les relations entre V , le nombre de Mach \mathcal{M} et la pression dynamique \bar{q} où $\rho(h)$ et $a(h)$ sont respectivement la masse volumique de l'air en kg/m^3 et la vitesse du son (m/s) et dépendent de l'altitude h :

$$V = \sqrt{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2} \quad (1.15a)$$

$$\mathcal{M} = \frac{V}{a(h)} \quad (1.15b)$$

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho(h) V^2 \quad (1.15c)$$

La section 1.2.6 donne plus de détails sur le calcul des variables d'environnement a et ρ . La figure 1.4 et l'équation (1.16) montre les relations trigonométriques entre les composantes $[u_a \ v_a \ w_a]^\top$ de $[v_B^A]^{B'_1}$ et les angles aérodynamiques cartésiens α, β :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w_a}{u_a}\right) \quad (1.16a)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_a}{\sqrt{u_a^2 + w_a^2}}\right) \quad (1.16b)$$

De la même manière, on obtient les relations trigonométriques (1.17) entre $[u_a \ v_a \ w_a]^\top$ et les angles aérodynamiques α' et ϕ' :

$$\alpha' = \arccos\left(\frac{u_a}{V}\right) \quad (1.17a)$$

$$\phi' = \arctan\left(\frac{v_a}{w_a}\right) \quad (1.17b)$$

1.2.6 Modélisation de l'environnement

Les équations de la modélisation de l'environnement calculent les paramètres atmosphériques nécessaires aux équations des paramètres de vol. Ces paramètres dépendent de l'altitude du projectile h et de

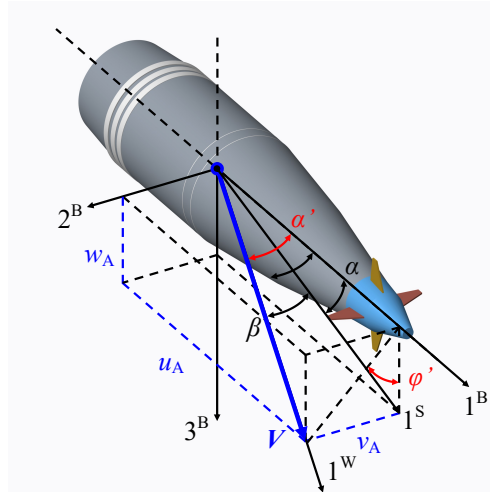


FIGURE 1.4 – Représentation des angles aérodynamiques et du vecteur vitesse V

plusieurs constantes pouvant être calculés selon les standards suivants [oEttSA76, fS75] :

$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad (1.18a)$$

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (1.18b)$$

où, R est la constante de spécifique de l'air (J/(K.kg)), T est la température de l'air (K), κ est l'index adiabatique et P est la pression atmosphérique dépendante de l'altitude.

1.2.7 Expression des forces et moments extérieurs appliqués au projectile

Tout au long de son vol, le projectile est soumis à plusieurs forces et moments influençant sa trajectoire. Cette sous-section détaille le calcul des différentes forces et moments aérodynamiques et leurs passages depuis le système de coordonnées du vent vers le système de coordonnées $]^{B'}$. Les forces et les moments peuvent s'écrire de deux façons différentes dans le système de coordonnées $]^{B'}$ selon que l'on utilise $]^W$ ou $]^A$ comme système de coordonnées d'origine. Ainsi l'expression finale des forces et moments aérodynamiques fera intervenir les angles aérodynamiques cartésiens α et β dans un cas et les angles aérobalistiques polaires α' et ϕ' dans l'autre. Les deux approches étant sensées conduire aux mêmes résultats, il a été décidé d'utiliser les deux systèmes de coordonnées et de comparer les résultats en simulation pour vérifier la validité des expressions des forces et des moments aérodynamiques.

La matrice de rotation entre les systèmes de coordonnées $]^{B'}$ et $]^W$ est donnée par l'équation (1.19a) et la matrice de rotation entre $]^{B'}$ et $]^A$ est donnée par l'équation (1.19b), les expressions des forces et moments étant principalement tirés de [McC12].

$$[T]^{WB'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.19a)$$

$$[T]^{AB'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha' & \sin \alpha' \sin \phi' & \sin \alpha' \cos \phi' \\ 0 & \cos \phi' & \sin \phi' \\ -\sin \alpha' & \cos \alpha' \sin \phi' & \cos \alpha' \cos \phi' \end{bmatrix} \quad (1.19b)$$

L'expression des forces et des moments fait intervenir plusieurs coefficients aérodynamiques, leur modélisation est présenté en annexe B.

1.2.7.1 Forces et moments de portance et de traînée

La traînée aérodynamique génère une force et un moment de frottements dus au déplacement du projectile dans l'atmosphère et à la résistance du vent relatif. La portance aérodynamique quant à elle s'exerce perpendiculairement à la trajectoire du projectile et génère un effort latéral en fonction de l'angle d'attaque total (voir équation (1.23)). Dans les equations (1.20) à (1.25), $C_D(\alpha', \mathcal{M}) > 0$ est le coefficient aérodynamique de force de traînée, $C_{L_\alpha}(\alpha', \mathcal{M}) > 0$ est le coefficient de force de portance.

■ Force de traînée aérodynamique :

Le vecteur de la force de traînée aérodynamique F_B^D est aligné avec v_B^A mais en direction opposée puisque les repères cartésien et aérobalistique partagent le même premier vecteur de leurs bases, on a la relation suivante :

$$F_B^D = -\bar{q}S C_D a_1 \quad (1.20a)$$

$$[F_B^D]^W = [F_B^D]^A = -\bar{q}S C_D \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.20b)$$

L'équation (1.21) détaille le passage des systèmes de coordonnées]^A et]^W vers]^{B₁} en utilisant respectivement les matrices de rotation $[T]^{AB'_1}$ et $[T]^{WB'_1}$

$$\begin{aligned} [F_B^D]^{B'_1} &= -\bar{q}S C_D [\bar{T}]^{AB'_1} [a_1]^A = -\bar{q}S C_D [\bar{T}]^{WB'_1} [a_1]^W \\ &= -\bar{q}S C_D \begin{bmatrix} \cos \alpha' \\ \sin \alpha' \sin \phi' \\ \sin \alpha' \cos \phi' \end{bmatrix} = -\bar{q}S C_D \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.21)$$

■ Force de portance :

La force de portance F_B^L se situe dans le plan de facteur de charges défini par les axes $1^{B'_1}$ et 1^W :

$$F_B^L = \bar{q}S C_{L_\alpha} [a_1 \wedge (b_{1,1} \wedge a_1)] \quad (1.22)$$

Contrairement à la force de traînée aérodynamique, l'expression de la force de portance est différente dans le système de coordonnées]^A (équation (1.23)) et dans le système de coordonnées]^W (équation (1.24)).

Ecriture de la force de portance dans le système de coordonnées]^A :

$$\begin{aligned} [F_B^L]^A &= \bar{q}S C_{L_\alpha} [a_1]^A \wedge ([T]^{AB'_1} [b_{1,1}]^{B'_1} \wedge [a_1]^A) \\ &= \bar{q}S C_{L_\alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \left(\begin{bmatrix} \cos \alpha' \\ 0 \\ -\sin \alpha' \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$= \bar{q}S C_{L_\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \alpha' \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Écriture de la force de portance dans le système de coordonnées]^W :

$$\begin{aligned} [F_B^L]^W &= \bar{q}S C_{L_\alpha} [a_1]^A \wedge ([T]^{WB'_1} [b_{1,1}]^{B'_1} \wedge [a_1]^W) \\ &= \bar{q}S C_{L_\alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \left(\begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \bar{q}S C_{L_\alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \\ &= \bar{q}S C_{L_\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Écriture de la force de portance dans le système de coordonnées]^{B'_1} :

$$\begin{aligned} [F_B^L]^{B'_1} &= \bar{q}S C_{L_\alpha} [\bar{T}]^{AB'_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \alpha' \end{bmatrix} = \bar{q}S C_{L_\alpha} [\bar{T}]^{WB'_1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \\ &= \bar{q}S C_{L_\alpha} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha' \\ -\cos \alpha' \sin \alpha' \sin \phi' \\ -\cos \alpha' \sin \alpha' \sin \phi' \end{bmatrix} = \bar{q}S C_{L_\alpha} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \beta \\ -\cos \alpha \cos^2 \beta \sin \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.25)$$

■ Force de tangage/lacet :

Les forces de trainée aérodynamique et de portance sont additionnées pour former la force de tangage/lacet grâce à la relation suivante :

$$\begin{aligned} C_A(\alpha', \mathcal{M}) &= C_D(\alpha', \mathcal{M}) \cos \alpha' - C_{L_\alpha}(\alpha', \mathcal{M}) \sin^2 \alpha' \\ &= \cos \alpha \cos \beta C_D(\alpha', \mathcal{M}) - C_{L_\alpha}(\alpha', \mathcal{M}) (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) \end{aligned} \quad (1.26a)$$

$$\begin{aligned} C_{N_\alpha}(\alpha', \mathcal{M}) &= C_D(\alpha', \mathcal{M}) + C_{L_\alpha}(\alpha', \mathcal{M}) \cos \alpha' \\ &= C_D(\alpha', \mathcal{M}) + C_{L_\alpha}(\alpha', \mathcal{M}) \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (1.26b)$$

où $C_A(\alpha', \mathcal{M}) > 0$, $C_{N_\alpha}(\alpha', \mathcal{M}) > 0$ sont respectivement les coefficients aérodynamiques de force axiale et normale. Ainsi en combinant les équations (1.21), (1.25) et (1.26), on obtient l'équation (1.27) qui donne l'expression finale de la force de tangage/lacet au projectile en fonction des angles aérodynamiques cartésiens ou aérobalistiques :

$$[F_B^P]^{B'_1} = \bar{q}S \begin{bmatrix} -C_A \\ -C_{Na} \sin \beta \\ -C_{Na} \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} = \bar{q}S \begin{bmatrix} -C_A \\ -C_{Na} \sin \alpha' \sin \phi' \\ -C_{Na} \sin \alpha' \cos \phi' \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

■ Moment de tangage/lacet :

Le moment de tangage/lacet m_B^P existe à cause de la distance entre le centre de pression de la force de tangage/lacet et le centre de masse du projectile. Le moment de tangage/lacet est uniquement dû à la force normale car la force axiale est alignée avec le centre de pression et le centre de masse du projectile. Dans l'équation suivante $C_{m_\alpha}(\alpha', \mathcal{M}) > 0^3$ est le coefficient de moment de tangage et lacet :

$$m_B^P = \bar{q}S dC_{m_\alpha} (a_1 \wedge b_1) \quad (1.28)$$

L'écriture du moment de tangage/lacet dans le système de coordonnées $]^A$ permet de montrer que celui-ci est perpendiculaire au plan de facteur de charges car sa seule composante est selon l'axe 2^A :

$$\begin{aligned} [m_B^P]^A &= \bar{q}S dC_{m_\alpha} ([a_1]^A \wedge [T]^{AB'_1} [b_1]^{B'_1}) \\ &= \bar{q}S dC_{m_\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha' \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Écriture du moment de tangage/lacet dans le système de coordonnées $]^W$:

$$\begin{aligned} [m_B^P]^W &= \bar{q}S dC_{m_\alpha} ([a_1]^W \wedge [T]^{WB'_1} [b_1]^{B'_1}) \\ &= \bar{q}S dC_{m_\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Écriture du moment de tangage/lacet dans le système de coordonnées $]^{B'_1}$:

$$\begin{aligned} [m_B^P]^{B'_1} &= \bar{q}S dC_{m_\alpha} [\bar{T}]^{AB'_1} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha' \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{q}S dC_{m_\alpha} [\bar{T}]^{WB'_1} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \\ &= \bar{q}S dC_{m_\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha' \cos \phi' \\ -\sin \alpha' \sin \phi' \end{bmatrix} = \bar{q}S dC_{m_\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.31)$$

A cause de la configuration dual-spin du projectile, la forme matricielle du moment de tangage/lacet total $[m_B^P]^{B'_1/2}$ possède un degré de liberté de plus pour prendre en compte l'action du moment sur la

3. $C_{m_\alpha}(\alpha', \mathcal{M}) > 0$ car le projectile est gyrostabilisé :

dynamique de roulis de la FCT.

$$[m_B^P]^{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.32a)$$

$$[m_B^P]^{B_{1/2}} = \bar{q}S dC_{m_\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{bmatrix} = \bar{q}S dC_{m_\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \alpha' \cos \phi' \\ -\sin \alpha' \sin \phi' \end{bmatrix} \quad (1.32b)$$

1.2.7.2 Force et moment de Magnus

A cause de la vitesse en roulis importante de la partie arrière du projectile, il y a une différence de pression entre les deux faces latérales du projectile ce qui crée une force latérale et un moment dits de Magnus. La force de Magnus a tendance à être faible par rapport aux autres forces aérodynamiques mais le moment de Magnus peut être important et affecte la stabilité de la munition.

Le coefficient $C_{Y_{pa}}(\alpha', \mathcal{M}) < 0$ est le coefficient de la force de Magnus et $C_{np\alpha}(\alpha', \mathcal{M})$ est le coefficient du moment de Magnus. Le coefficient $C_{np\alpha}$ peut être négatif ou positif en fonction du régime de vol (dans notre cas : $C_{np\alpha} < 0$ quand $\mathcal{M} < 1$ et $C_{np\alpha} > 0$ quand $\mathcal{M} > 1$, voir Annexe B).

■ Force de Magnus :

L'expression de la force de Magnus est donnée par l'équation (1.33).

$$F_B^M = \bar{q}S \frac{\rho_1 d}{2V} C_{Y_{pa}} (a_1 \wedge b_1) \quad (1.33)$$

Ecriture de la force de Magnus dans le système de coordonnées]^A :

L'utilisation du système de coordonnées aérobalistique met en lumière l'action latérale de la force de Magnus :

$$\begin{aligned} [F_B^M]^A &= \bar{q}S \frac{\rho_1 d}{2V} C_{Y_{pa}} ([a_1]^A \wedge [T]^{AB_1} [b_1]^{B_1}) \\ &= \bar{q}S \frac{\rho_1 d}{2V} C_{Y_{pa}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha' \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ecriture de la force de Magnus dans le système de coordonnées]^W :

$$\begin{aligned} [F_B^M]^W &= \bar{q}S \frac{\rho_1 d}{2V} C_{Y_{pa}} ([a_1]^W \wedge [T]^{WB_1} [b_1]^{B_1}) \\ &= \bar{q}S \frac{\rho_1 d}{2V} C_{Y_{pa}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ecriture de la force de Magnus dans le système de coordonnées]^{B_1} :

$$\begin{aligned}
 [F_B^M]^{B'_1} &= \bar{q}S \frac{p_1 d}{2V} C_{Ypa} [\bar{T}]^{AB'_1} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha' \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{q}S \frac{p_1 d}{2V} C_{Ypa} [\bar{T}]^{WB'_1} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \beta \sin \alpha \\ -\sin \beta \end{bmatrix} \\
 &= \bar{q}S \frac{p_1 d}{2V} C_{Ypa} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha' \cos \phi' \\ -\sin \alpha' \sin \phi' \end{bmatrix} = \bar{q}S \frac{p_1 d}{2V} C_{Ypa} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \beta \end{bmatrix} \quad (1.36)
 \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que du fait de la présence de la vitesse angulaire de roulis de la partie arrière p_1 dans l'équation (1.33), la force de Magnus est d'autant plus forte que le projectile tourne rapidement sur lui même.

■ Moment de Magnus :

Même si la force de Magnus a tendance à être faible, le moment de Magnus est quant à lui important :

$$m_B^M = \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} (b_1 \wedge (a_1 \wedge b_1)) \quad (1.37)$$

Ecriture du moment de Magnus dans le système de coordonnées]^A :

$$\begin{aligned}
 [m_B^M]^A &= \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} \left([T]^{AB'_1} [b_1]^{B'_1} \wedge ([a_1]^A \wedge [T]^{AB'_1} [b_1]^{B'_1}) \right) \\
 &= \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} \left(\begin{bmatrix} \cos \alpha' \\ 0 \\ -\sin \alpha' \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha' \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha' \\ 0 \\ \cos \alpha' \sin \alpha' \end{bmatrix} \quad (1.38)
 \end{aligned}$$

Ecriture du moment de Magnus dans le système de coordonnées]^W :

$$\begin{aligned}
 [m_B^M]^W &= \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} \left([T]^{WB'_1} [b_1]^{B'_1} \wedge ([a_1]^W \wedge [T]^{WB'_1} [b_1]^{B'_1}) \right) \\
 &= \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} \left(\begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \right) \\
 &= \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha \cos \beta \sin \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (1.39)
 \end{aligned}$$

Ecriture du moment de Magnus dans le système de coordonnées $]^{B'_1}$:

$$\begin{aligned}
 [m_B^M]^{B'_1} &= \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} [\bar{T}]^{AB'_1} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha' \\ 0 \\ \cos \alpha' \sin \alpha' \end{bmatrix} = \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} [\bar{T}]^{WB'_1} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha \cos \beta \sin \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \end{bmatrix} \\
 &= \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha' \cos \phi' \\ -\sin \alpha' \sin \phi' \end{bmatrix} = \bar{q}S d \frac{p_1 d}{2V} C_{np\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

L'expression finale du moment de Magnus dans les systèmes de coordonnées $]^A$ et $]^W$ est donnée par :

$$[m_B^M]^{B_{1'2}} = \bar{q}S d \frac{P_1 d}{2V} C_{np\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \alpha' \cos \phi' \\ -\sin \alpha' \sin \phi' \end{bmatrix} = \bar{q}S d \frac{P_1 d}{2V} C_{np\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

1.2.7.3 Force et moment d'amortissement

La force et le moment d'amortissement sont dus à la résistance visqueuse de l'air.

■ Force d'amortissement :

La force d'amortissement F_B^D fait intervenir deux coefficients aérodynamiques $C_{N_q}(\alpha', \mathcal{M}) > 0$ et $C_{N_{\dot{\alpha}}}(\alpha', \mathcal{M}) > 0$ dont l'expression est :

$$F_B^D = \bar{q}S \frac{d}{2V} C_{N_q} b_1 + \bar{q}S \frac{d}{2V} C_{N_{\dot{\alpha}}} (b_1 - \dot{\alpha}_1) \quad (1.42)$$

Dans la pratique, les deux sont difficilement dissociables et la contribution de $C_{N_{\dot{\alpha}}}$ est faible. Par conséquent, l'équation (1.42) est simplifiée comme suit :

$$\begin{aligned}
 [F_B^D]^{B'_1} &\approx \bar{q}S \frac{d}{2V} (C_{N_q} + C_{N_{\dot{\alpha}}}) [b_1]^{B'_1} \\
 &\approx \bar{q}S \frac{d}{2V} C_{N_q} \left([\omega^{B_1 E}]^{B'_1} \wedge [b_1]^{B'_1} \right) \\
 &\approx \bar{q}S \frac{d}{2V} C_{N_q} \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (1.43)
 \end{aligned}$$

En négligeant le terme $\dot{\alpha}$, la force d'amortissement s'écrit naturellement dans le système de coordonnées $]^{B'_1}$:

$$[F_B^D]^{B'_1} = \bar{q}S \frac{d}{2V} C_{N_q} \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ -q \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

■ Moment d'amortissement :

Le moment total d'amortissement m_B^D est composé du moment d'amortissement en roulis m_B^{Ds} et du moment d'amortissement en tangage et lacet m_B^{Dp} comme suit :

$$m_B^D = m_B^{Dp} + m_B^{Ds} \quad (1.45)$$

Le moment d'amortissement en roulis réduit la vitesse de roulis de la partie arrière du projectile car $C_{l_p}(\alpha', \mathcal{M}) < 0$:

$$m_B^{Ds} = \bar{q}S \frac{p_1 d}{2V} C_{l_p} \cdot b_1 \quad (1.46)$$

Ecriture du moment d'amortissement en roulis dans le système de coordonnées $]^{B'_1}$:

$$[m_B^{Ds}]^{B'_1} = \bar{q}S \frac{p_1 d}{2V} \begin{bmatrix} C_{l_p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Le moment d'amortissement en tangage et lacet possède une partie dépendante de la dérivée temporelle de l'angle d'attaque $\dot{\alpha}$ et une autre dépendante de la vitesse de tangage q .

$$\begin{aligned} m_B^{Dp} &= \bar{q}S \frac{d}{2V} C_{m_q} (b_1 \wedge \dot{b}_1) + \bar{q}S \frac{d}{2V} C_{m_{\dot{\alpha}}} (b_1 \wedge \dot{b}_1 - b_1 \wedge \dot{\alpha}_1) \\ &\approx \bar{q}S \frac{d}{2V} (C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}}) (b_1 \wedge \dot{b}_1) \\ &\approx \bar{q}S \frac{d}{2V} C_{m_q} (b_1 \wedge (\omega^{B_1 A} \wedge b_1)) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Ecriture du moment d'amortissement en tangage/lacet dans le système de coordonnées $]^{B'_1}$:

$$\begin{aligned} [m_B^{Dp}]^{B'_1} &\approx \bar{q}S \frac{d}{2V} C_{m_q} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ -q \end{bmatrix} \right) \\ &\approx \bar{q}S \frac{d}{2V} C_{m_q} \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.49)$$

En combinant les équations (1.47) et (1.49), l'expression globale du moment d'amortissement est obtenue :

$$[m_B^D]^{B'_1} = \bar{q}S \frac{d}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{l_p} p_1 \\ C_{m_q} q \\ C_{m_q} r \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

1.2.7.4 Force et moment générés par les canards

Pour estimer la force totale exercée par l'ensemble des canards ainsi que le moment total généré, la force exercée par un seul canard est d'abord calculée, puis à partir de celle-ci, les forces des trois autres

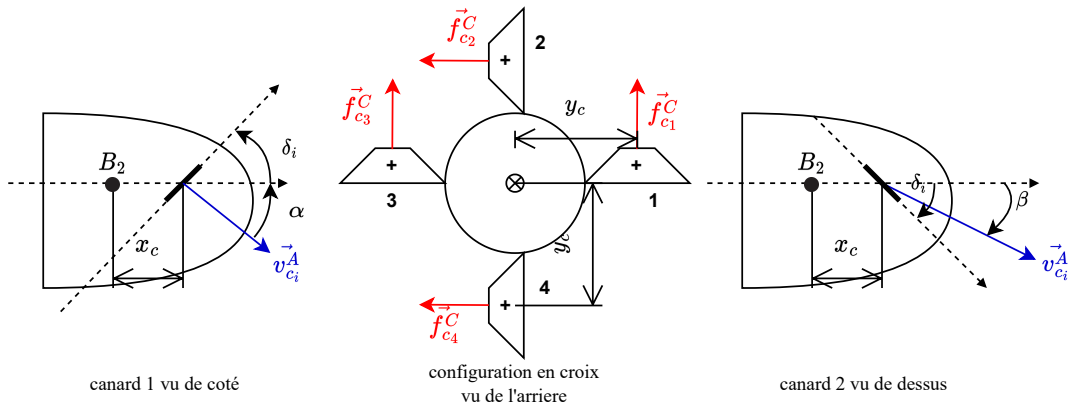


FIGURE 1.5 – Configuration des canards et modélisation de leurs forces respectives

canards sont calculées en exploitant la configuration en croix de la FCT montrée par la figure 1.5. Enfin, le moment exercé par chaque canard au c.m B du projectile est calculé à partir des distance $x_C = x_c + x_{B_2B}$ et y_c séparant B du c.m de chaque canard. Plusieurs hypothèses simplificatrices sont utilisées :

- La composante axiale de la force de tangage/lacet est négligée, les canards ne génèrent que de la portance pour le projectile (force normale).
- Les équations sont simplifiées en considérant uniquement des petits angles : $\cos x \approx 1$, $\sin x \approx x$.

■ Force générée par le canard 1 :

De manière analogue à l'équation (1.27), on obtient la force normale générée par le canard 1 $[F_{c_1}^C]^{B_2}$ avec l'équation (1.51) :

$$\begin{aligned}
 [F_{c_1}^C]^{B_2} &= \bar{q} S C_{N\delta c} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \beta \\ -\sin(\alpha + \delta_1) \cos \beta \end{bmatrix} \\
 &\approx \bar{q} S C_{N\delta c} \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ -\delta_1 - \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

■ Force générée par le canard 2 :

Une rotation de 90 degrés $[R^{90}]$ dans le sens positif est appliquée pour calculer la force du canard 2 $[F_{c_2}^C]^{B_2}$, Celle-ci étant dans le plan de lacet on remplace $\alpha = -\beta$ et δ_1 par δ_2 et on obtient :

$$\begin{aligned}
 [F_{c_2}^C]^{B_2} &= [R^{90}][F_{c_1}^C]^{B_2} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\delta_2 + \beta \end{bmatrix} \\
 &= \bar{q} S C_{N\delta c} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2 - \beta \\ \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

■ Force générée par le canard 3 :

La force générée par le canard 3 $[F_{c_3}^C]^{B_2}$ est symétrique à $[F_{c_1}^C]^{B_2}$ par rapport au plan des canards 2 et 4. On utilise la matrice de symétrie $[M]$ avec la correspondance $\delta_3 = \delta_1$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
 [F_{c_3}^C]^{B_2} &= [M][F_{c_1}^C]^{B_2} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ -\delta_3 - \alpha \end{bmatrix} \\
 &= \bar{q} S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ -\delta_3 - \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

■ Force générée par le canard 4 :

Enfin, la force du canard 4 est calculée avec à la fois une symétrie et une rotation de 90 degrés dans le sens positif à partir de $[F_{c_1}^C]^{B_2}$, avec la correspondance $\alpha = -\beta$ et $\delta_1 = \delta_4$:

$$\begin{aligned}
 [F_{c_4}^C]^{B_2} &= [R^{90}][M][F_{c_1}^C]^{B_2} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\delta_4 + \beta \end{bmatrix} \\
 &= \bar{q} S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_4 - \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

■ Force totale générée par les canards :

La force totale des canards $[F_B^C]^{B_2}$ est obtenue en additionnant les contributions de chaque canard :

$$\begin{aligned}
 [F_B^C]^{B_2} &= \sum_{i=1}^4 [F_{c_i}^C]^{B_2} \\
 &= \bar{q} S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2 + \delta_4 - 2\beta \\ -\delta_1 - \delta_3 - 2\alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}
 &= \bar{q} S 2 C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\delta_2 + \delta_4}{2} - \beta \\ -\frac{\delta_1 + \delta_3}{2} - \alpha \end{bmatrix} \\
 &= \bar{q} S C_{N_{\delta}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\delta_2 + \delta_4}{2} - \beta \\ -\frac{\delta_1 + \delta_3}{2} - \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

avec $C_{N_\delta}(\alpha', \mathcal{M}) = 2C_{N_{\delta_c}}$.

■ Moment généré par le canard 1 :

Le moment individuel généré par chaque canard m_{c_i} au centre de masse de la FCT B_2 est calculé à partir de leur force respective et de la distance qui sépare le centre de masse de chaque canard du centre de masse de la FCT $s_{c_i B_2}$. Pour le canard 1 on obtient :

$$m_B^{C_1} = s_{c_1 B} \wedge F_{c_1}^C \quad (1.57a)$$

$$\begin{aligned} [m_B^{C_1}]^{B_2} &= \bar{q} S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} x_C \\ y_c \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ -\delta_1 - \alpha \end{bmatrix} \\ &= \bar{q} S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} -y_c(\delta_1 + \alpha) \\ x_C(\delta_1 + \alpha) \\ -x_C \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.57b)$$

■ Moment généré par le canard 2 :

$$m_B^{C_2} = s_{c_2 B} \wedge F_{c_2}^C \quad (1.58a)$$

$$\begin{aligned} [m_B^{C_2}]^{B_2} &= \bar{q} S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} x_C \\ 0 \\ y_c \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta + \delta_2 \\ \alpha \end{bmatrix} \\ &= \bar{q} S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} y_c(-\delta_2 + \beta) \\ -x_C \alpha \\ x_C(-\beta + \delta_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.58b)$$

■ Moment généré par le canard 3 :

$$m_B^{C_3} = s_{c_3 B} \wedge F_{c_3}^C \quad (1.59a)$$

$$\begin{aligned} [m_B^{C_3}]^{B_2} &= \bar{q} S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} x_C \\ -y_c \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \delta_3 - \alpha \end{bmatrix} \\ &= \bar{q} S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} -y_c(-\delta_3 - \alpha) \\ x_C(\delta_3 + \alpha) \\ x_C \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.59b)$$

■ Moment généré par le canard 4 :

$$m_B^{C_4} = s_{c_4B} \wedge F_{c_4}^C \quad (1.60a)$$

$$\begin{aligned} [m_B^{C_4}]^{B_2} &= \bar{q}S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} x_C \\ 0 \\ -y_C \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_4 - \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} \\ &= \bar{q}S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} y_C(\delta_4 - \beta) \\ x_C\alpha \\ x_C(\delta_4 - \beta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.60b)$$

■ Moment total des canards :

Le moment total générés par les quatre canards est donné par :

$$\begin{aligned} [m_B^C]^{B_2} &= \sum_{i=1}^4 [m_B^{C_i}]^{B_2} \\ &= \bar{q}S d \begin{bmatrix} 4C_{N_{\delta_c}} \left(\frac{y_C}{d}\right) \frac{-\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 + \delta_4}{4} \\ 2C_{N_{\delta_c}} \frac{x_C}{d} \left(\frac{\delta_1 + \delta_3}{2} + \alpha\right) \\ 2C_{N_{\delta_c}} \frac{x_C}{d} \left(\frac{\delta_2 + \delta_4}{2} - \beta\right) \end{bmatrix} \\ &= \bar{q}S d \begin{bmatrix} C_{l_\delta} \frac{-\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 + \delta_4}{4} \\ C_{m_\delta} \left(\frac{\delta_1 + \delta_3}{2} + \alpha\right) \\ C_{m_\delta} \left(\frac{\delta_2 + \delta_4}{2} - \beta\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.61)$$

avec $C_{l_\delta}(\alpha', \mathcal{M}) = 4C_{N_{\delta_c}}\left(\frac{y_C}{d}\right)$, et $C_{m_\delta}(\alpha', \mathcal{M}) = 2C_{N_{\delta_c}}\left(\frac{x_C}{d}\right)$.

Pour terminer, les equations (1.62a) et (1.62b) regroupent les expressions des forces et moments générées par les canards.

$$[F_B^C]^{B_1} = \bar{q}S C_{N_{\delta_c}} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_r - \beta \\ -\delta_q - \alpha \end{bmatrix} \quad (1.62a)$$

$$[m_B^C]^{B_{1'2}} = \bar{q}S d \begin{bmatrix} C_{l_\delta} \delta_p \\ 0 \\ C_{m_\delta}(\delta_q + \alpha) \\ C_{m_\delta}(\delta_r - \beta) \end{bmatrix} \quad (1.62b)$$

1.2.7.5 Allocation des commandes

L'allocation des commandes permet de faire la correspondance entre les signaux de commande virtuelle générés par l'autopilote et les signaux de commande réelle qui doivent être envoyés à chaque canard. Plus précisément, l'autopilote embarqué envoie un vecteur de commande en roulis, en tangage, et en lacet

dans le système de coordonnées $[\delta_v]^{B'_1}$ donnée par :

$$[\delta_v]^{B'_1} = \begin{bmatrix} \delta_p \\ \delta_q \\ \delta_r \end{bmatrix}^{B'_1} \quad (1.63)$$

Le vecteur de commande réelle $[\delta_r]^{B_2}$ nécessaire à la commande des servomoteurs s'écrit de la manière suivante :

$$[\delta_r]^{B_2} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

A partir des équations (1.56) et (1.61), on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta_p \\ \delta_q \\ \delta_r \end{bmatrix}^{B_2} &= \begin{bmatrix} \frac{-\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 + \delta_4}{4} \\ \frac{\delta_1 + \delta_3}{2} \\ \frac{\delta_2 + \delta_4}{2} \end{bmatrix}^{B_2} \\ &= \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}^{B_2} \\ &= [T]^{VR} [\delta_r]^{B_2} \end{aligned} \quad (1.65a)$$

L'équation (1.66) décrit la relation complète entre $[\delta_v]^{B'_1}$ et $[\delta_r]^{B_2}$ où $[T]^{B_2 B'_1}$ est la matrice de rotation entre $]^{B_2}$ et $]^{B'_1}$

$$[\delta_v]^{B'_1} = [\bar{T}]^{B_2 B'_1} [T]^{VR} [\delta_r]^{B_2}, \quad (1.66a)$$

$$[T]^{B_2 B'_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_2 & \sin \phi_2 \\ 0 & -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{bmatrix}. \quad (1.66b)$$

1.2.7.6 Moment de frottements

Le projectile étudié étant gyro-stabilisé, la partie arrière de celui ci tourne très rapidement sur elle même. Cette forte rotation en roulis entraîne une rotation de la FCT par frottement entre les deux parties. Les équations (1.67) et (1.68) modélisent le moment de frottement visqueux entre les deux parties du

projectile :

$$[m_B^F]^{B_{1/2}} = \begin{bmatrix} L_f \\ -L_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

avec

$$L_f = \bar{q}S d C_{Asgn} (p_1 - p_2) (K_s + K_v |p_1 - p_2|) \quad (1.68)$$

ou K_s et K_v sont les coefficients de frottement statique et visqueux.

1.2.7.7 Force de gravité

La force de gravité s'applique directement au centre de masse du projectile. Par conséquent, elle ne génère aucun moment. La matrice $[T^{B_1^L}]$ est utilisée pour exprimer le vecteur $[g]^L = [0 \ 0 \ g]^T$ dans le système de coordonnées $]^{B_1}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} [f_B^G]^{B_1} &= m^B [T^{B_1^L}] [g]^L \\ &= m^B g \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.69a)$$

1.2.7.8 Forces et moments totaux

L'expression de la force totale $[f_B^{12}]^{B_1}$ et du moment total $[m_B^{12}]^{B_{1/2}}$ que subit le projectile sont résumés par les équations (1.70), (1.71) et (1.72) :

$$[f_B^{12}]^{B_1} = [f_B^P]^{B_1} + [f_B^M]^{B_1} + [f_B^D]^{B_1} + [f_B^C]^{B_1} + [f_B^G]^{B_1} \quad (1.70a)$$

$$[m_B^{12}]^{B_{1/2}} = [m_B^P]^{B_{1/2}} + [m_B^M]^{B_{1/2}} + [m_B^D]^{B_{1/2}} + [m_B^C]^{B_{1/2}} + [m_B^F]^{B_{1/2}} \quad (1.70b)$$

Les équations (1.71a) et (1.71b) sont dépendantes des angles Cartésiens, et les équations (1.72a) et (1.72b) sont dépendantes des angles aérobalistiques

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \bar{q}S d \left(\begin{bmatrix} -C_A \\ -C_{N_\alpha} \sin \beta \\ -C_{N_\alpha} \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} + \frac{p_1 d}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{Y p_\alpha} \sin \alpha \cos \beta \\ -C_{Y p_\alpha} \sin \beta \end{bmatrix} + \frac{d}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{N_q} r \\ -C_{N_q} q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_{N_\delta} (\delta_r - \beta) \\ C_{N_\delta} (-\delta_q - \alpha) \end{bmatrix} \right) + m^B g \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.71a)$$

$$\begin{bmatrix} L_2 \\ L_1 \\ M \\ N \end{bmatrix} = \bar{q}S d \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{m_\alpha} \sin \alpha \cos \beta \\ -C_{m_\alpha} \sin \beta \end{bmatrix} + \frac{p_1 d}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{n_{p_\alpha}} \sin \beta \\ C_{n_{p_\alpha}} \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} + \frac{d}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{l_p} p_1 \\ C_{m_q} q \\ C_{m_q} r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{l_\delta} \delta_p \\ 0 \\ C_{m_\delta} (\delta_q + \alpha) \\ C_{m_\delta} (\delta_r - \beta) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} L_f \\ -L_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.71b)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \bar{q}S \begin{bmatrix} -C_A \\ -C_{N_\alpha} \sin \alpha' \sin \phi' \\ -C_{N_\alpha} \sin \alpha' \cos \phi' \end{bmatrix} + \frac{p_1 d}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{Yp_\alpha} \sin \alpha' \cos \phi' \\ -C_{Yp_\alpha} \sin \alpha' \sin \phi' \end{bmatrix} + \frac{d}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{N_q} r \\ -C_{N_q} q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_{N_\delta}(\delta_r - \beta) \\ C_{N_\delta}(-\delta_q - \alpha) \end{bmatrix} + m^B g \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.72a)$$

$$\begin{bmatrix} L_2 \\ L_1 \\ M \\ N \end{bmatrix} = \bar{q}S d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{m_\alpha} \sin \alpha' \cos \phi' \\ -C_{m_\alpha} \sin \alpha' \sin \phi' \end{bmatrix} + \frac{P_1 d}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -C_{n_{p_\alpha}} \sin \alpha' \cos \phi' \\ -C_{n_{p_\alpha}} \sin \alpha' \sin \phi' \end{bmatrix} + \frac{d}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{l_p} p_1 \\ C_{m_q} q \\ C_{m_q} r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{l_\delta} \delta_p \\ 0 \\ C_{m_\delta}(\delta_q + \alpha) \\ C_{m_\delta}(\delta_r - \beta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_f \\ -L_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.72b)$$

avec L_f la valeur du moment de frottement donné par :

$$L_f = \bar{q}S d C_{AS} \text{sgn}(p_1 - p_2) (K_s + K_v |p_1 - p_2|) \quad (1.73)$$

1.2.8 Modélisation des actionneurs et des capteurs

L'une des principales limitations des performances des lois de commande et plus particulièrement celle utilisée pendant la thèse, est liée à la bande passante des actionneurs. Par conséquent, pour prendre en compte cette bande passante, chaque canard est modélisé par une fonction de transfert $G_\delta(s)$ du second ordre :

$$G_\delta(s) = \frac{\omega_\delta^2}{s^2 + 2\xi_\delta \omega_\delta s + \omega_\delta^2} \quad (1.74)$$

La fusée de correction de trajectoire embarque les capteurs suivants :

- Un gyromètre trois axes pour mesurer les vitesses angulaires de la FCT : $[\omega^{B_2 E}]^{B_2} = [p_2 \quad q \quad r]^\top$
- Un magnétomètre trois axes qui permet via un algorithme d'estimation d'estimer les angles d'Euler de la FCT : $[e^{B_2 L}]^{B_2} = [\phi_2 \quad \theta \quad \psi]^\top$
- Un système GNSS pour mesurer la position du centre de masse B_2 de la FCT par rapport au repère inertiel.

$$[s_{B_2 E}]^L = [s_{BE}]^L + [\bar{T}]^{B_1 L} [s_{B_2 B}]^{B_1} \quad (1.75)$$

- Un accéléromètre trois axes qui mesure les facteurs de charges au centre de masse du projectile,

$$\begin{bmatrix} n_B^E \end{bmatrix}^{B_1} = \frac{[f_B^{12}]^{B_1} - [f_B^G]^{B_1}}{m^B g} \quad (1.76a)$$

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{m^B g} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - m^B g \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (1.76b)$$

Plusieurs hypothèses simplifient grandement la modélisation des capteurs. Il est fait ici l'hypothèse d'une

navigation parfaite, c'est à dire que les états du projectile estimés à partir des capteurs embarqués ne sont entachés ni de bruit ni d'erreurs.

D'autre part, la dynamique des capteurs n'est pas modélisée car leur bande passante est très rapide par rapport à l'échelle de temps de la boucle de contrôle.

Enfin, la différence de mesure entre les facteurs de charge au centre de masse du projectile $[n_B^E]$ et celle au centre de masse de la FCT $[n_{B_2}^E]$ n'est pas considérée dans ce manuscrit. Une modélisation de cette différence est proposée dans [Sèv16].

1.3 Conception du simulateur de vol dans l'environnement Matlab-Simulink

Le simulateur de vol utilisé pendant la thèse a été construit à partir d'une boîte à outils Matlab-Simulink conçue au début de cette thèse et dédiée à la modélisation de la dynamique de vol d'un projectile dual-spin. Plusieurs simulateurs balistiques ont déjà été conçus à l'ISL et l'idée de la boîte à outils SMART (System Ammunition Research Tool) est née de plusieurs constats. Premièrement, du fait de la complexité des équations dynamiques et du nombre important de paramètres intervenant dans la modélisation, il était devenu difficile de maintenir un simulateur à jour au sein du laboratoire. Deuxièmement, la modélisation est une étape chronophage, il est donc intéressant de disposer d'un simulateur plus générique et modulaire afin d'accélérer le travail de modélisation lors de l'étude de projectiles similaires à celui étudié pendant la thèse. Enfin, il est avantageux d'avoir des outils de modélisations respectant les conventions de la dynamique de vol moderne [Zip14] et non les conventions balistiques traditionnelles [McC12, Car07]. Cela permet d'être plus en phase avec l'état de l'art et donc de simplifier le travail de modélisation.

1.3.1 Boîte à outils SMART

Afin de fournir une architecture modulaire au simulateur, SMART comprend tous les blocs nécessaires à la modélisation de la dynamique de vol du projectile. La figure 1.6 montre l'arborescence de la boîte à outils. Plusieurs versions de certains blocs sont disponibles pour pouvoir s'adapter à différents projets futurs, par exemple en utilisant le système de coordonnées J^{B_1} lié au repère tournant BVR du projectile. Ou encore le bloc "control allocation" permet à l'utilisateur d'utiliser sa propre matrice $[T]^{VR}$.

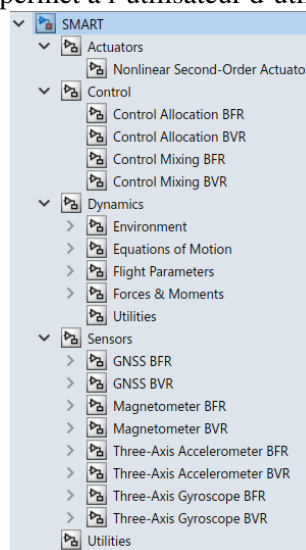


FIGURE 1.6 – Arborescence de la boîte à outils SMART

Les figures 1.7 et 1.8 montrent respectivement les blocs "Équations de mouvements" et "Forces et moments" avec leurs interfaces d'initialisation. Ces interfaces permettent une implémentation plus générique (aucun paramètre "en dur" dans le code).

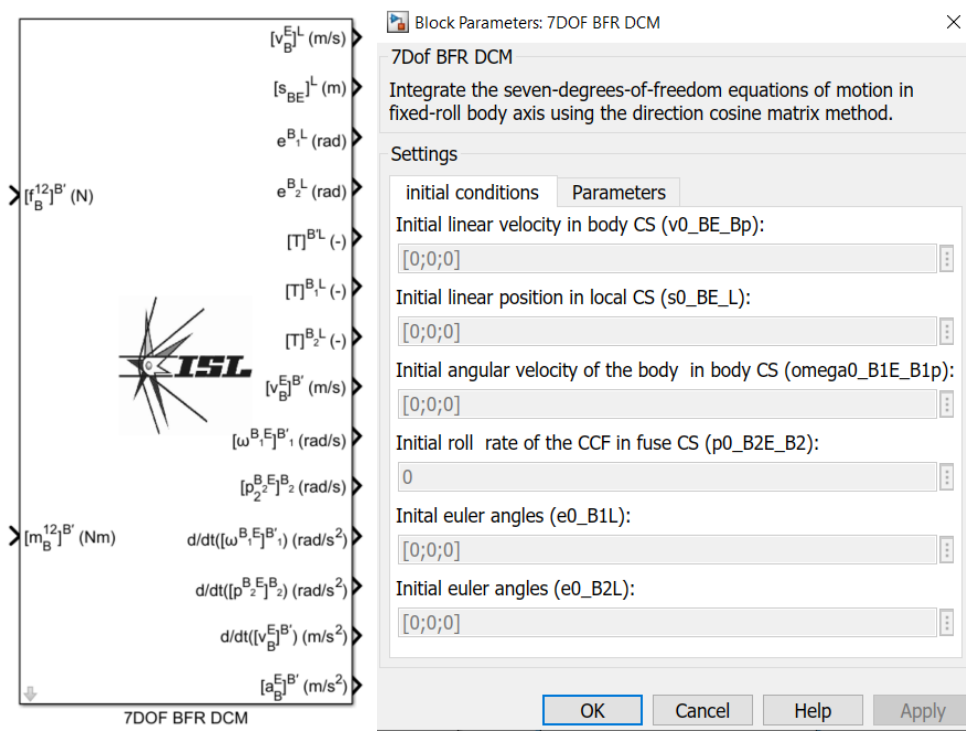


FIGURE 1.7 – SMART-bloc Équations de mouvement

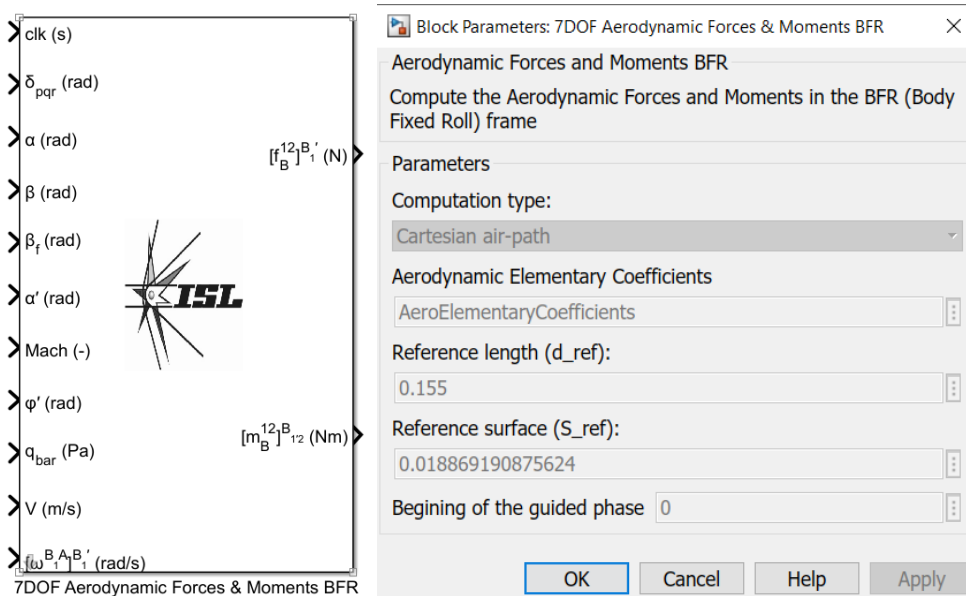


FIGURE 1.8 – SMART-bloc Forces et moments

Les figures 1.9 et 1.10 quant à elles montrent respectivement les schémas Simulink des bloc "Équations de mouvement" et "Forces et moments".

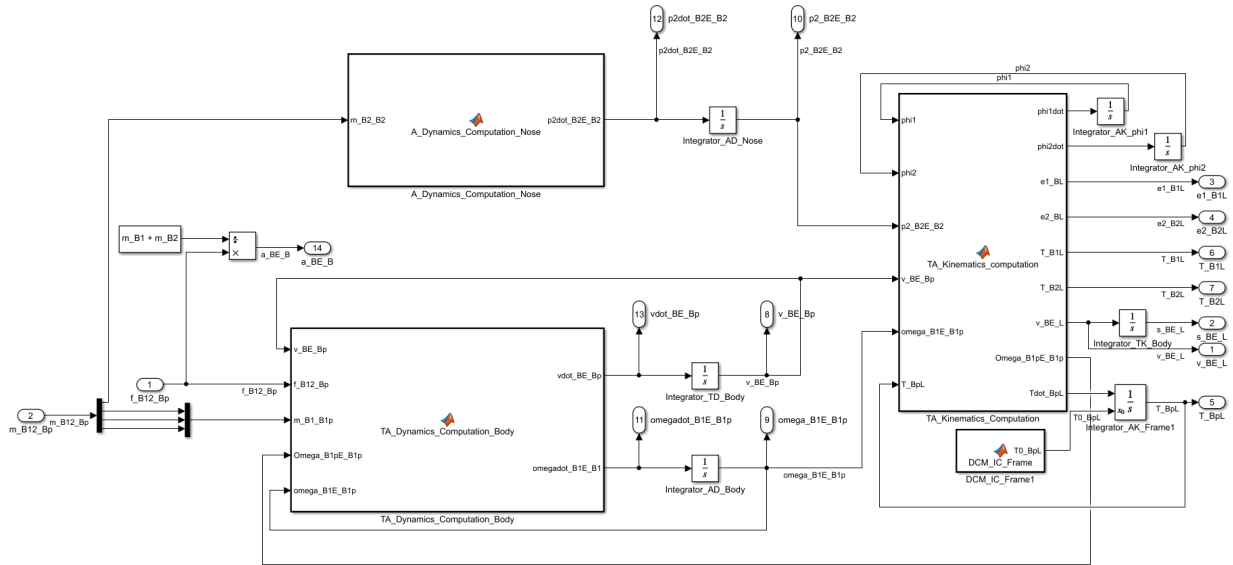


FIGURE 1.9 – SMART-implémentation du bloc Équations de mouvement

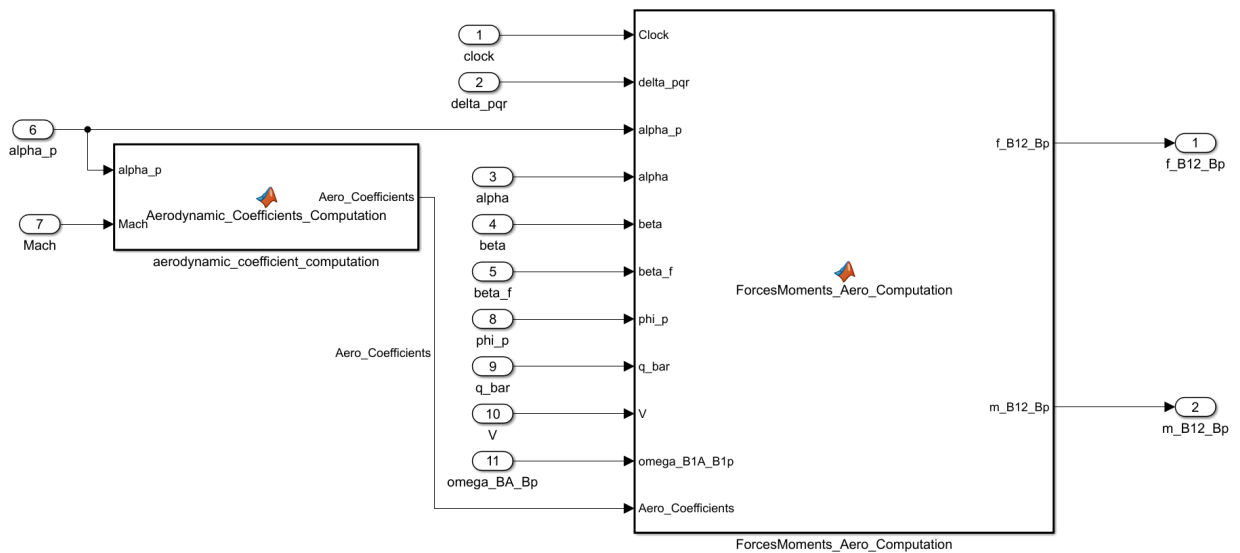


FIGURE 1.10 – SMART-implémentation du bloc Forces et moments

1.3.2 Architecture générale du simulateur

Les figures 1.11, 1.12, 1.13 montrent l'architecture du simulateur à différents niveaux. Plus précisément, le simulateur balistique est construit avec trois niveaux d'abstractions.

■ Niveau 1 : représentation générale

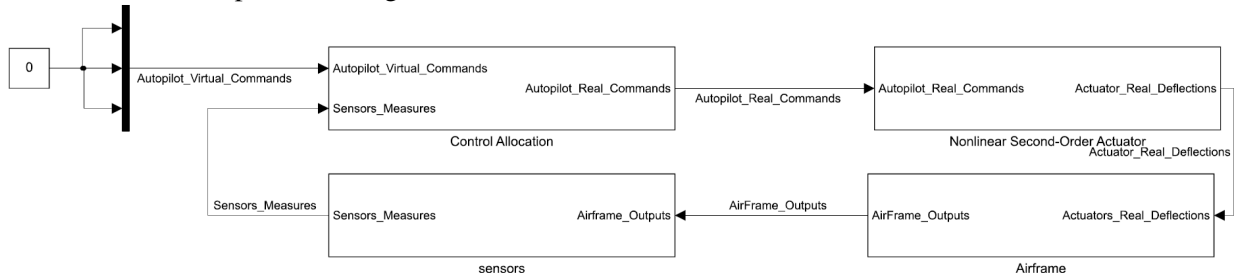


FIGURE 1.11 – Architecture générale du simulateur balistique

■ Niveau 2 : représentation système

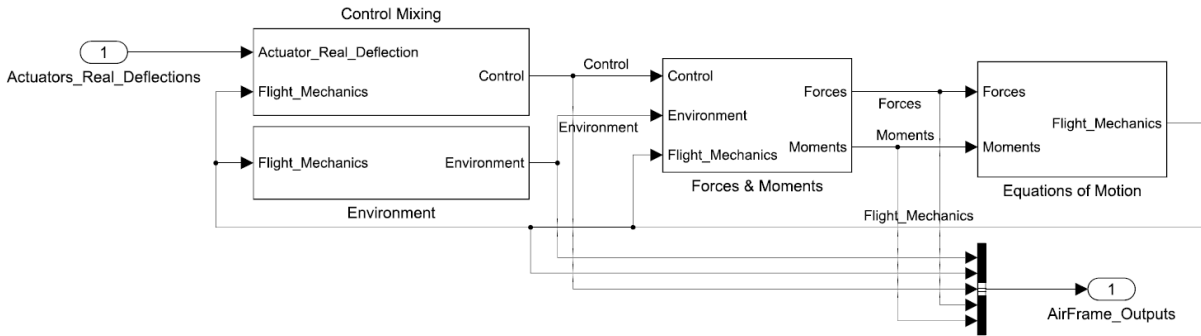


FIGURE 1.12 – Architecture système "Airframe"

■ Niveau 3 : représentation fonctionnelle (SMART)

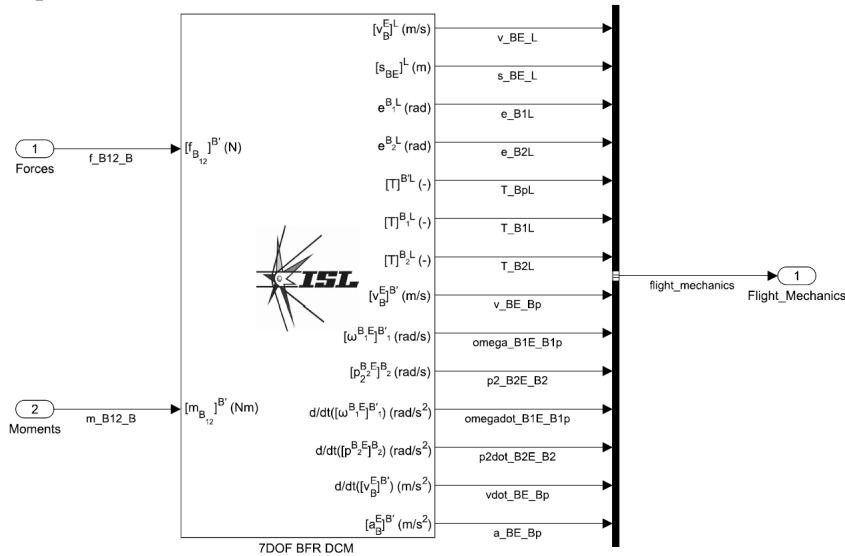


FIGURE 1.13 – Architecture fonctionnelle

Le premier niveau (représentation générale) décrit par la figure 1.11 montre l'architecture du simulateur à son plus haut niveau d'abstraction. Grâce au bloc "Control Allocation", les signaux de commande virtuelle venant des autopilotes de roulis, tangage et lacet, sont traduits en signaux de commande pour les servo-moteurs des canards avant d'être envoyés aux actionneurs. Le bloc "Airframe" calcule tous les états du projectile qui sont ensuite envoyés aux capteurs.

Le second niveau d'abstraction représente les sous-systèmes du simulateur. La figure 1.12 montre les sous-systèmes du bloc "Airframe" nécessaires au calcul des états du projectile. On retrouve les blocs "Environment", "Forces & Moments", "Equations of Motion" et "Control Mixing" qui produit le résultats inverse du bloc "Control Allocation".

Le troisième niveau d'abstraction décrit dans la figure 1.13, est composé uniquement de blocs fonctionnels SMART et sert d'interface entre les equations mathématiques et le reste du simulateur.

1.4 Simulations balistiques et validation du simulateur non-linéaire

Plusieurs simulations sont effectuées pour valider le comportement balistique du projectile et son fonctionnement en boucle ouverte. Les figures 1.14 et 1.15 montrent les principaux états du projectile pendant sa phase de vol avec deux angles de tangage initiaux différents : $\theta_0 = 42$ deg (trajectoire bleue)

et $\theta_0 = 62$ deg (trajectoire rouge). Les deux simulations partagent les mêmes conditions initiales pour les autres paramètres : vitesse initiale $V_0 = 939$ m/s, vitesse angulaire initiale $\omega_0^{B_1E} = [1885 \quad -1 \quad -1]$ rad/s.

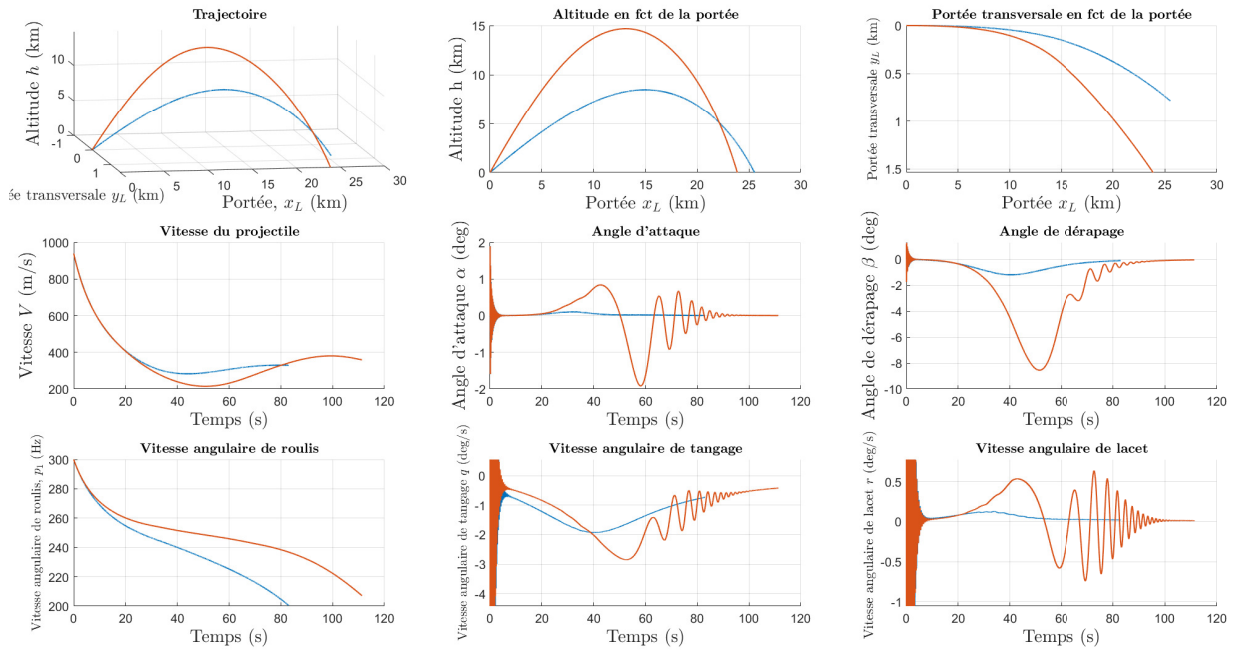


FIGURE 1.14 – Simulations balistiques pour deux conditions initiales différentes : $\theta_0 = 42^\circ$ (bleu) et $\theta_0 = 62^\circ$ (rouge)

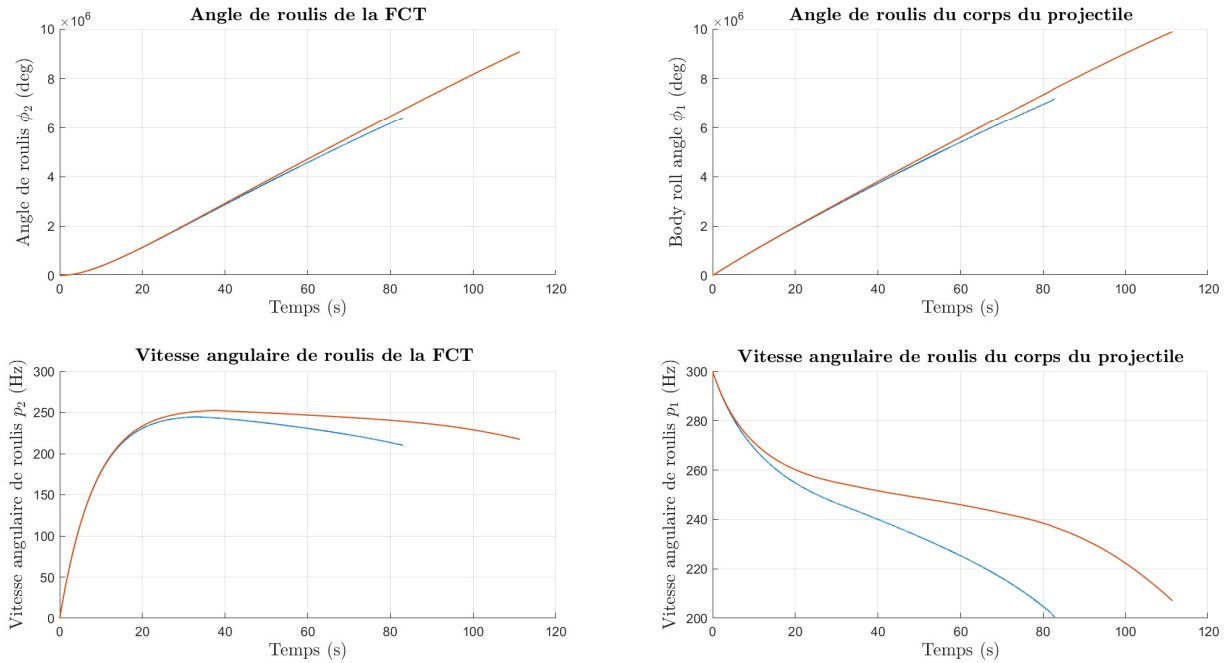


FIGURE 1.15 – Simulations balistiques pour deux conditions initiales différentes : $\theta_0 = 42^\circ$ (bleu) et $\theta_0 = 62^\circ$ (rouge)

On remarque qu'un angle de tangage initial plus élevé (élévation du canon) permet d'atteindre une altitude maximale plus importante, mais réduit la portée du tir. On observe également des angles d'attaque et de dérapage beaucoup plus importants pour la simulation à $\theta_0 = 62$ deg (rouge) à cause d'une trajectoire plus en cloche. La trajectoire en cloche permet de mettre en évidence les mouvements de précession et de nutation du projectile pendant la phase descendante (oscillation des angles aérodynamiques après l'apogée). Lors de la simulation rouge, le projectile souffre d'une déviation latérale plus importante à cause de l'angle de dérapage plus élevé, ce qui provoque un moment de Magnus plus élevé. La figure 1.15 met en évidence l'influence du frottement entre la partie arrière et la FCT. Durant la phase montante, avant l'apogée, la vitesse en roulis de la FCT augmente jusqu'à se stabiliser autour de 250 Hz. La vitesse en roulis de la partie arrière diminue tout au long de la trajectoire.

Les figures 1.16 et 1.17 montrent la contribution de chaque force et de chaque moment en phase de vol balistique (aucune contribution des canards). Le projectile subit une force axiale négative très importante pendant son ascension à cause de la traînée aérodynamique qui ralentit le projectile. La force axiale devient positive après l'apogée à cause de la force de gravité arrivant à compenser la traînée aérodynamique. Ceci est dû à la vitesse du projectile minimale en début de phase descendante et à l'angle de tangage négatif du projectile qui crée un effort axial de gravité positif. Les composantes latérale et verticale ont un comportement très oscillatoire à cause des forts angles aérodynamiques générés par le passage à l'apogée. Les efforts latéraux et verticaux que subit le projectile sont principalement dus aux forces de portance et de gravité.

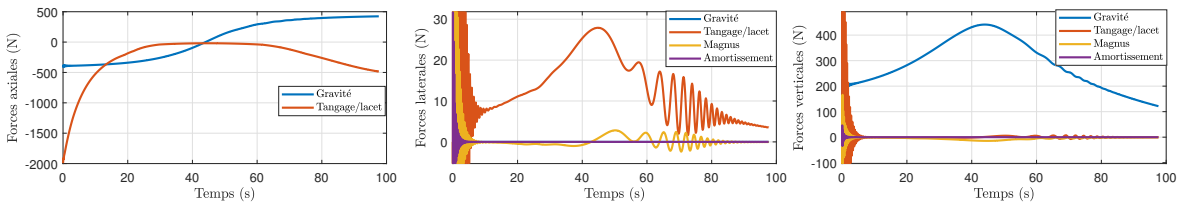


FIGURE 1.16 – Composantes axiales, normales et verticales des forces extérieures au projectile

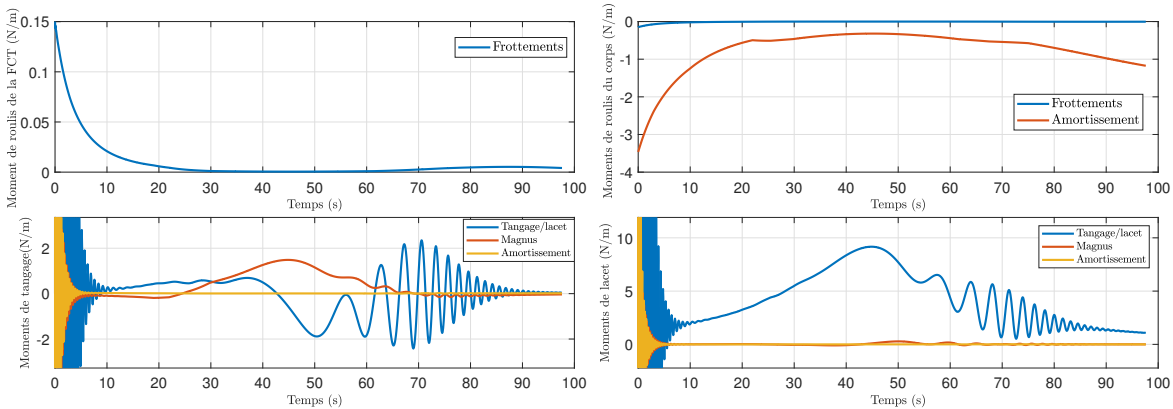


FIGURE 1.17 – Composantes axiales, normales et verticales des moments extérieurs au projectile

Les figures 1.18 et 1.19 comparent l'évolution des forces et des moments selon l'utilisation des angles aérodynamiques cartésiens ou aérobalistiques. La superposition des courbes confirme la validité des équations (1.71) et (1.72).

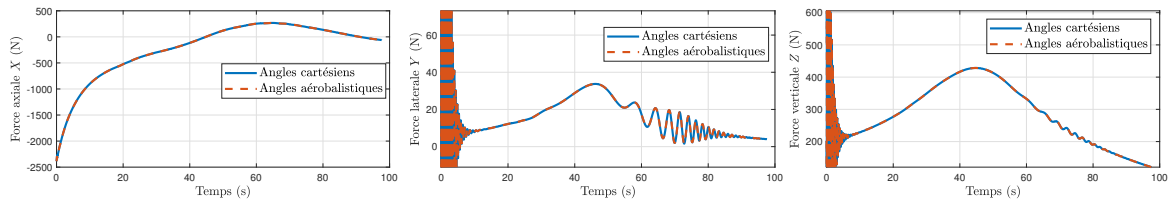


FIGURE 1.18 – Comparaison des forces entre les conventions cartésienne et aérobalistique

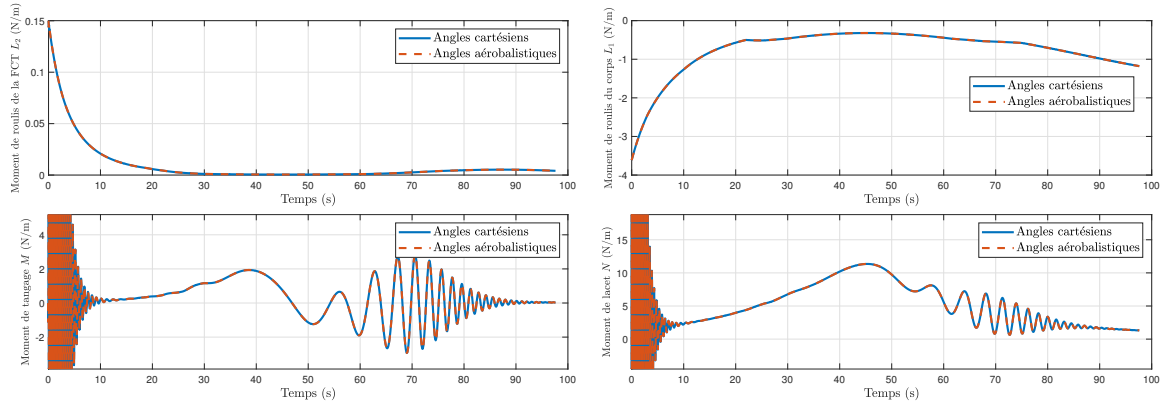


FIGURE 1.19 – Comparaison des moments entre les conventions cartésienne et aérobalistique

1.5 Conclusion

Ce chapitre dédié à la modélisation non-linéaire du comportement du projectile et à la conception d'un simulateur de vol présente dans un premier temps les repères et les systèmes de coordonnées ainsi que les équations dynamiques et cinématiques du modèle 7-DDL. Ensuite, les forces, moments et les paramètres de vols intervenant dans leurs expressions sont détaillés en utilisant les angles aerobalistiques ou cartésiens. Ce chapitre présente également le simulateur de vol dans l'environnement Matlab/Simulink ainsi que la boîte à outils SMART à partir de laquelle le simulateur a été construit. Au-delà des améliorations apportées à la modélisation de la dynamique du projectile, la principale contribution se porte sur le simulateur. En effet, un simulateur plus modulaire, plus simple à maintenir à jour et plus générique est proposé. Ce simulateur est systématiquement utilisé pour la validation finale des différents autopilotes conçus pendant la thèse.

Chapitre 2

Conception d'Autopilotes Non-Linéaires

Sommaire

2.1 Introduction	46
2.1.1 Intérêt de la commande par inversion dynamique	46
2.1.2 État de l'art sur la commande par inversion dynamique	48
2.2 Théorie de la commande par inversion dynamique	49
2.2.1 Motivations : exemple de la stabilisation à l'origine d'un pendule simple	49
2.2.2 Préliminaires et définitions	50
2.2.2.1 Difféomorphisme	50
2.2.2.2 Dérivée de Lie et crochet de Lie	51
2.2.2.3 Degré relatif	52
2.2.3 Linéarisation entrée/états et linéarisation entrée/sortie	52
2.2.3.1 Linéarisation entrée/états	52
2.2.3.2 Linéarisation entrée/sortie	53
2.2.4 Architecture générale d'un autopilote par inversion dynamique	55
2.2.5 Inversion dynamique non-linéaire incrementale	55
2.2.5.1 INDI en temps continu	55
2.2.5.2 INDI en temps discret	57
2.2.6 Discussion sur l'approche à privilégier entre NDI et INDI	58
2.3 Rappel sur la commande robuste et le façonnage de fonctions de sensibilité	59
2.3.1 Norme \mathcal{H}_∞	59
2.3.2 Définition des fonctions de sensibilité	59
2.3.3 Formulation du problème \mathcal{H}_∞ et gabarits fréquentiels	60
2.3.4 Sélection des gabarits fréquentiels	62
2.3.5 Méthodes de résolution du problème \mathcal{H}_∞	64
2.4 Méthodologie générale de réglage des autopilotes INDI	64
2.4.1 Cahier des charges	65
2.4.2 Méthodologie de réglage	65
2.5 Conception de l'autopilote de roulis	67
2.5.1 Expression analytique de la commande INDI	68
2.5.2 Analyse du modèle inverse	68

2.5.3	Réglage du contrôleur externe	71
2.5.4	Validation de l'autopilote	73
2.6	Conception de l'autopilote de facteurs de charge	74
2.6.1	Inversion de la dynamique rapide	75
2.6.1.1	Expression analytique de la commande INDI	76
2.6.1.2	Analyse du modèle inverse	77
2.6.1.3	Réglage du contrôleur externe	80
2.6.1.4	Validation de l'autopilote	81
2.6.2	Inversion de la dynamique lente	83
2.6.2.1	Expression analytique de la commande INDI	84
2.6.2.2	Analyse du modèle inverse	86
2.6.2.3	Réglage du contrôleur externe	89
2.6.2.4	Validation de l'autopilote	90
2.7	Simulations non-linéaires et trajectoires guidées	93
2.7.1	Loi de guidage	93
2.7.2	Simulations de trajectoires guidées	94
2.8	Conclusion	95

2.1 Introduction

Ce chapitre traite de la conception des autopilotes nécessaires au contrôle de la trajectoire et de l'attitude du projectile et présente l'analyse des performances des systèmes bouclés de roulis, tangage, lacet et facteurs de charge.

Tout d'abord, dans la section 2.1, l'intérêt et la pertinence, par rapport au contexte de la thèse, de l'utilisation des lois de commande par inversion dynamique sont discutés. Ensuite, le choix de l'utilisation de l'inversion dynamique non-linéaire (NDI), et plus particulièrement, de l'inversion dynamique non-linéaire incrémentale (INDI), comme méthodologie de commande non-linéaire est justifié par rapport aux objectifs et axes de recherches définis en introduction du manuscrit. Par la suite, les principaux éléments théoriques nécessaires à la conception et à l'analyse des lois de commande par inversion dynamique sont résumés dans la section 2.2. Un état de l'art sur la commande par inversion dynamique est également dressé afin de fournir un aperçu global de l'utilisation de cette approche dans la littérature. La section 2.3 rappelle le principe de la commande robuste et du façonnage de fonctions de sensibilité car cette méthode est utilisée pour régler le contrôleur externe faisant partie de la loi de commande.

La section 2.4 présente les objectifs, le cahier des charges et la méthodologie de réglage des autopilotes INDI mise en place pendant la thèse. Dans les sections 2.5 et 2.6, les étapes de réglages des autopilotes de roulis, de tangage, lacet et de facteurs de charge nécessaires à la correction de la trajectoire du projectile sont présentées. Pour finir, dans la section 2.7, les performances nominales des autopilotes de roulis, tangage, lacet et de facteurs de charges sont validées sur une trajectoire guidée complète avec l'implémentation d'une loi de guidage.

2.1.1 Intérêt de la commande par inversion dynamique

La commande par inversion dynamique ou commande par rétroaction linéarisante est un type de commande non-linéaire qui linéarise un système en l'inversant par la commande. Plus précisément, le but est

de concevoir un signal de commande qui annule les non-linéarités de la dynamique du système considéré. Le système linéarisé par la commande se comporte alors comme une chaîne d'intégrateurs d'ordre égal à celui du système. La dynamique du système linéarisé peut alors être imposée par un contrôleur linéaire réglé avec les outils de l'automatique linéaire classique (placement de pôle [TTTP20], LQG [Esc98], commande robuste [RBG95, SC98], valeur singulière structurée [ABB94], etc.). La figure 2.1 montre l'architecture générale d'un autopilote par inversion dynamique, la boucle interne linéarise le système et le boucle externe impose la dynamique en boucle fermée.

Il est intéressant de noter que cette approche est fondamentalement différente de la linéarisation jacobienne sur laquelle se base le séquençage de gains car, la linéarisation faite par l'inversion dynamique est valable pour tous les points de fonctionnement du système.

La commande par inversion dynamique est particulièrement adaptée à l'objectif principal de la thèse, qui est d'établir une méthodologie de conception d'autopilotes rapide et générique pour des projectiles guidés avec des garanties de performance et de stabilité pour toute l'enveloppe de vol. Les raisons suivantes justifient l'utilisation de cette approche :

■ Conception rapide :

L'inversion dynamique étant un type de commande non-linéaire, le processus chronophage de linéarisation locale autour d'un point de fonctionnement utilisé par le séquençage de gains n'est pas requis. En effet, grâce à l'inversion du système, il n'est nécessaire de régler qu'un seul contrôleur pour toute l'enveloppe de vol au lieu de plusieurs centaines avec le séquençage de gains, ce qui permet un processus de conception d'autopilote simplifié et significativement accéléré.

■ Généricité de l'approche :

En inversant la dynamique non-linéaire, la boucle interne de l'inversion dynamique fait se comporter le système comme une chaîne d'intégrateurs du point de vue du contrôleur externe. Ainsi, le réglage du contrôleur est plus générique car il est indépendant de la dynamique non-linéaire réelle du système.

■ Validité de la loi de commande sur l'ensemble du domaine de vol :

La loi de commande par séquençage de gains produit un contrôleur non-linéaire global sur l'enveloppe de vol par interpolation de contrôleurs linéaires locaux autour des différents points de fonctionnements. Cependant, selon la méthode d'interpolation utilisée, il peut être difficile de garantir les performances du contrôleur entre les points de fonctionnements utilisés pour le réglage. Comme expliqué précédemment, la commande par inversion dynamique permet de s'affranchir de la notion de points de fonctionnement car la boucle interne force le système à se comporter comme une chaîne d'intégrateurs, quel que soit le point de vol.

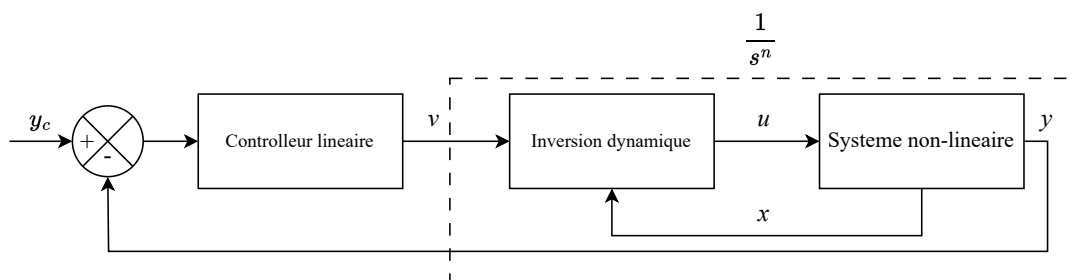


FIGURE 2.1 – Architecture générale d'un système commandé avec un autopilote par inversion dynamique

2.1.2 État de l'art sur la commande par inversion dynamique

La commande par inversion dynamique est un type de commande non-linéaire très utilisé dans le domaine aéronautique. Son approche évitant le sequencement de gains permet son implémentation sur des systèmes avec des dynamiques hautement non-linéaires et qui changent rapidement de conditions de vol comme les avions hautement manœuvrant [RBG95, ABB94, SEG92] et les missiles [KJ95, MIO⁺97]. La commande par inversion dynamique est également utilisée pour des véhicules de rentrée atmosphérique qui doivent opérer sur une grande enveloppe de vol [dCCM03, MPC⁺07].

Les performances permises par la commande par inversion dynamique sont contrebalancées par son manque important de robustesse dû à sa dépendance au modèle dynamique du système, or le modèle mathématique du projectile étudié est jugé très incertain à cause du manque de données aérodynamiques fiables et exhaustives. Plusieurs auteurs proposent des solutions pour augmenter la robustesse de la NDI. Leur approche est d'utiliser diverses méthodes de robustification de la boucle externe de l'autopilote. Par exemple, dans [RBG95, BGR92, AB93], la théorie de la commande robuste est associée à la NDI en réglant le contrôleur externe avec la méthode de la μ -synthèse. Dans [MIO⁺97], le contrôleur externe est réglé par façonnage de fonctions de sensibilité. Une autre approche de robustification de la NDI est l'utilisation de réseaux de neurones comme dans [JK05], cependant l'apprentissage nécessaire du réseau complexifie le processus de réglage de l'autopilote. Une autre approche utilisée dans la littérature qui ne repose pas sur les méthodes de réglages du contrôleur externe est l'utilisation d'observateurs afin d'estimer la potentielle erreur de modélisation due aux incertitudes paramétriques [Che03].

Une méthode différente de celles basées sur la "robustification" par la boucle externe, est l'INDI (Incremental Nonlinear Dynamic Unversion) qui utilise une reformulation de la boucle interne réduisant la dépendance de la loi de commande au modèle dynamique. Les fondements théoriques de la INDI sont développés dans la section 2.2.5. En se basant sur une hypothèse de séparation des échelles de temps entre la dynamique des actionneurs et celle des états du système, la INDI permet une loi de commande simplifiée qui utilise seulement les paramètres du système liés à l'autorité de commande. Cette hypothèse de séparation des échelles de temps est généralement vérifiée pour les systèmes aéronautiques avec des actionneurs performants et est considérée valide pour la majorité des auteurs. Cependant, dans [WvKCL19], les équations de la INDI sont redeveloppées sans cette hypothèse et montrent que les termes négligés agissent comme une perturbation bornée sur la dynamique en boucle fermée. Ce terme est d'autant plus faible que la fréquence d'échantillonnage est élevée. Appelée NDI simplifiée [Smi98] ou encore NDI modifiée [BOJ01], la INDI a été appliquée à beaucoup de systèmes aéronautiques, principalement on retrouve les systèmes type-avion [SCM10, SdCC18, GLK⁺18, KLCVK19] ou type UAV (Unmanned Aerospace Vehicle)[SCdC16, SdCC18, DFMD14] Plusieurs auteurs ont montré sa meilleure robustesse aux incertitudes paramétriques que la NDI [SCM10, PvK23].

La INDI est une méthode de commande par inversion dit "basée-capteurs" car elle utilise plus de mesures que la NDI-classique (accélérations et signaux de commandes). Ainsi, la bande passante des actionneurs et la fiabilité de l'estimation des accélérations ont un impact sur les performances de la loi de commande. Dans [CVKC18], les auteurs montrent que mesurer directement les accélérations d'un système permet d'éviter l'introduction de retard lié à l'estimation de l'accélération dans la boucle de contrôle.

Même si certains auteurs s'intéressent à des contraintes précises (retards de mesures [PvK23, KFVKC13], saturation des actionneurs [RZBH19] ou encore temps d'échantillonnage [AVKC22]), il n'existe pas dans la littérature de méthodologie générique de réglage du contrôleur externe incluant des contraintes de robustesse aux erreurs d'inversion dynamique provoquées par les limitations d'implémentation. Par conséquent, dans le cadre de cette thèse, une méthodologie de réglage des autopilotes INDI a été mise en place afin

d'essayer d'évaluer l'effet des contraintes d'implémentation sur la linéarisation effectuée par la INDI et de mieux les prendre en compte dans le réglage du contrôleur externe. La méthodologie de réglage est présentée dans la section 2.4.2.

2.2 Théorie de la commande par inversion dynamique

Cette section rappelle la théorie de la commande par inversion dynamique en s'intéressant tout d'abord au problème bien connu de la stabilisation d'un pendule simple afin d'introduire la méthode. Ensuite, les concepts mathématiques nécessaires à la définition et à l'analyse de la classe des systèmes linéarisables par inversion dynamique sont introduits en définissant les notions de difféomorphisme, de dérivée et crochet de Lie et de degré relatif. Ensuite, la différence entre linéarisation entrée/états et linéarisation entrée/sortie est discutée en traitant des notions de dynamique interne et de dynamique des zéros. La définition et l'explication des concepts de l'inversion dynamique sont principalement tirées de [Kha02] pp. 505-525.

Enfin, le cas particulier de la commande par inversion dynamique incrémentale (INDI) est présenté dans le cas du temps continu et dans le cas de son implémentation en temps discret. Les raisons qui ont conduit à considérer la INDI comme plus adaptée aux objectifs de la thèse que la NDI classique sont justifiées.

2.2.1 Motivations : exemple de la stabilisation à l'origine d'un pendule simple

La dynamique d'un pendule simple est modélisée par l'équation suivante

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.1a)$$

$$\dot{x}_2 = -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu \quad (2.1b)$$

où x_1 et x_2 sont respectivement la position et la vitesse angulaire du pendule, a , b et δ des paramètres physiques et u le signal de commande. En utilisant une loi de commande de la forme

$$u = \frac{a}{c} [\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] + \frac{v}{c} \quad (2.2)$$

les non-linéarités $[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta]$ de l'équation (2.1b) peuvent être annulées. Ainsi on obtient le système linéaire suivant

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.3a)$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + v \quad (2.3b)$$

qui peut maintenant être stabilisé par retour d'états en choisissant le signal de commande virtuel v comme suit

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2 \quad (2.4)$$

où k_1 et k_2 sont des gains choisis pour rendre le système 2.3 stable en boucle fermée.

On se pose maintenant la question de savoir si cette méthode peut être généralisée à n'importe quel système et si non, quelles seraient les conditions nécessaires pour pouvoir appliquer l'inversion dynamique. Cet exemple montre que, pour pouvoir être linéarisé par inversion dynamique, un système doit posséder certaines propriétés structurelles. De manière générale, un système de la forme :

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (2.5)$$

peut être ramené au système linéaire suivant

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (2.6)$$

en choisissant

$$u = \alpha(x) + \gamma^{-1}(x)v \quad (2.7)$$

Si le système non-linéaire étudié n'est pas de la forme de l'équation (2.5), sachant qu'il existe plusieurs représentations équivalentes d'un même système, on peut se demander s'il existe un changement de variable $z = T(x)$ qui transforme le système non-linéaire (2.8)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.8)$$

en

$$\dot{z} = Az + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (2.9)$$

Ainsi, pour définir la classe de systèmes linéarisables par inversion dynamique, il est nécessaire d'étudier ce changement de variable, la forme qu'il doit avoir et ses conditions d'existence. La sous-section 2.2.2 présente les concepts de difféomorphisme, de dérivée et crochet de Lie et de degré relatif d'un système.

2.2.2 Préliminaires et définitions

2.2.2.1 Difféomorphisme

Definition 2.2.1 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et soit U un sous-espace ouvert de E et V un sous-espace ouvert de F .

L'application $f : U \mapsto V$ est un difféomorphisme si f est bijective, différentiable sur U et si sa réciproque est différentiable sur V .

Ainsi dans le changement de variable $z = T(x)$, T doit être un difféomorphisme car son inverse T^{-1} doit être définie telle que $T^{-1}(T(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$. D'autre part, T et T^{-1} doivent être continues et dérivables sur l'ensemble de définition de T . La classe des systèmes linéarisables par inversion dynamique peut donc être définie de la façon suivante.

Definition 2.2.2 Le système non-linéaire suivant

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.10)$$

est linéarisable par inversion dynamique s'il existe un difféomorphisme T tel que le changement de variable $z = T(x)$ transforme le système (2.10) en :

$$\dot{z} = Az + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (2.11)$$

La notion de difféomorphisme permet donc de définir les caractéristiques du changement de variable $z = T(x)$. Les notions de dérivée de Lie et crochet de Lie sont maintenant introduites pour définir la fonction $T(x)$ en elle-même.

2.2.2.2 Dérivée de Lie et crochet de Lie

Definition 2.2.3 Soit le système SISO suivant

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.12a)$$

$$y = h(x) \quad (2.12b)$$

où f, g et h sont des fonctions continues et différentiables sur $D \subset \mathbb{R}^n$, la dérivée de la sortie y est donnée par :

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (2.13)$$

où

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (2.14a)$$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) \quad (2.14b)$$

sont respectivement appelées les dérivées de Lie de h par rapport à f et g .

La dérivée de Lie est utile à la conception de loi de commande par inversion dynamique car elle permet de simplifier la notation de dérivées successives comme suit

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g(x) \quad (2.15a)$$

$$L_f^2 h(x) = L_f L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} f(x) \quad (2.15b)$$

$$L_f^k h(x) = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x) \quad (2.15c)$$

$$L_f^0 h(x) = h(x) \quad (2.15d)$$

Si $L_g h(x) = 0$, cela signifie qu'il n'y a pas de relation entre \dot{y} et la commande u , donc qu'il n'est pas possible d'annuler les non-linéarités de \dot{y} par la commande u . C'est pourquoi le but est de calculer les dérivées successives jusqu'à obtenir

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{(\rho-1)} h(x) \neq 0 \quad (2.16)$$

et l'équation (2.13), peut se généraliser à

$$\begin{aligned} y^{(\rho)} &= L_f^{(\rho)} h(x) + L_g L_f^{(\rho-1)} h(x)u \\ &= \beta(x) + \gamma(x)u \end{aligned} \quad (2.17)$$

où ρ est appelé le degré relatif du système. Si le degré relatif ρ n'est pas égale à l'ordre du système cela signifie qu'à partir d'un certain degré $\rho < n$, la commande u n'apparaît plus dans l'expression de $y^{(n-\rho)}$. Cela signifie que les dynamiques de $y^{(n-\rho)}$ jusqu'à $y^{(n)}$ ne sont pas linéarisable par inversion dynamique.

Definition 2.2.4 Soit f et g deux champs de vecteurs sur un espace $D \subset \mathbb{R}^n$, le crochet de Lie $[f, g]$ est un champ de vecteur défini par

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (2.18)$$

De manière analogue à la dérivée de Lie, la notation suivante est introduite pour simplifier l'utilisation successive du crochet de Lie comme suit

$$\text{ad}_f^0 g(x) = g(x) \quad (2.19a)$$

$$\text{ad}_f g(x) = [f, g](x) \quad (2.19b)$$

$$\begin{aligned} \text{ad}_f^2 g(x) &= \text{ad}_f(\text{ad}_f g(x)) \\ &= [f, \text{ad}_f g](x) \end{aligned} \quad (2.19c)$$

$$\text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g](x) \quad (2.19d)$$

2.2.2.3 Degré relatif

Le degré relatif d'un système correspond au nombre de dérivées de Lie nécessaires pour faire apparaître la commande dans l'expression de la dérivée de la sortie. L'étude du degré relatif permet de déterminer si la dynamique de tous les états d'un système peut être linéarisée ou seulement la relation entrée/sortie.

Definition 2.2.5 *Le système non-linéaire (2.12) d'ordre n a un degré relatif ρ , $1 \leq \rho \leq n$, dans le domaine $D_0 \subset D$ si*

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0, \quad \forall x \in D_0 \quad (2.20)$$

Dans le cas d'un système linéaire représenté par la fonction de transfert $H(s)$ de la forme

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (2.21)$$

le degré relatif $\rho = n - m$ est la différence entre le degré polynomial du numérateur et du dénominateur.

2.2.3 Linéarisation entrée/états et linéarisation entrée/sortie

2.2.3.1 Linéarisation entrée/états

On considère le système non-linéaire d'ordre n suivant

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.22a)$$

$$y = h(x) \quad (2.22b)$$

Definition 2.2.6 *Le système (2.22) est linéarisable en entrée/états s'il existe une fonction $h(x)$ telle que le système (2.22) possède un degré relatif $\rho = n$.*

L'existence d'une telle fonction $h(x)$ est déterminée par des conditions nécessaires et suffisantes sur les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ faisant intervenir le crochet de Lie $[f, g]$. Plus précisément les conditions suivantes garantissent l'existence de la fonction $h(x)$ [Kha02, pp. 525]

Theorem 2.2.7 *Le système (2.22) est linéarisable en entrée/états si et seulement s'il existe un ensemble $D_0 \subset D$ tel que :*

- La matrice $\varrho(x) = [g(x), \text{ad}_f g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-1} g(x)]$ est de rang plein pour tout $x \in D_0$.

- La distribution $\mathcal{D} = \text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2}g\}$ est invariante dans D_0 .

La preuve de ce théorème est détaillée dans [Kha02] pp. 523-525. Ainsi, si le degré relatif ρ est égal à n alors tous les états du système (2.22) sont linéarisables par inversion dynamique et un changement de variable de la forme

$$z = T(x) \quad (2.23)$$

peut être utilisé, où $T(x)$ est un difféomorphisme contenant les dérivées de Lie de h par rapport à f comme suit :

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

La forme normale suivante est ainsi obtenue :

$$\dot{z} = A_c z + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (2.25a)$$

$$y = C_c z \quad (2.25b)$$

où A_c , B_c et C_c est la réalisation d'état de la forme canonique d'une chaîne de n intégrateurs comme suit :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times n} \quad (2.26)$$

Une fois la forme normale obtenue, la loi de commande u qui linéarise le système est donnée par :

$$u = \alpha(x) - \gamma^{-1}(x)v \quad (2.27)$$

avec

$$\gamma(x) = L_g L_f^{n-1} h(x) \quad \text{et} \quad \alpha(x) = \frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (2.28)$$

2.2.3.2 Linéarisation entrée/sortie

Contrairement à la linéarisation entrée/états, la linéarisation entrée/sortie est caractérisée par le fait qu'il existe seulement une relation linéaire entre l'entrée et la sortie et qu'il peut rester des non-linéarités

entre les états du système. Le changement de variable utilisé est de la forme :

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1}h(x) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \Phi(x) \\ \Psi(x) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

où les fonctions $\phi_1(x)$ à $\phi_{n-\rho}(x)$ sont choisies pour satisfaire les conditions pour que $T(x)$ soit un difféomorphisme et pour que la relation suivante soit satisfaite.

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n - \rho. \quad (2.30)$$

Le changement de variable $z = T(x)$ permet d'obtenir le système suivant :

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (2.31a)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (2.31b)$$

$$y = C_c \xi \quad (2.31c)$$

avec

$$\gamma(x) = L_g L_f^{\rho-1} h(x) \quad \text{et} \quad \alpha(x) = \frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \quad (2.32)$$

et

$$f_0(\eta, \xi) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(z)} \quad (2.33)$$

On remarque que si le degré relatif ρ est inférieur à l'ordre n du système, alors la dynamique de l'équation (2.22) n'est que partiellement linéarisable par la commande. Le système (2.31) possède une dynamique linéarisable $\dot{\xi}$ et une dynamique $\dot{\eta}$ devenue inobservable qui est appelée dynamique interne (équation (2.31a)) Il est donc nécessaire de s'assurer que cette dynamique inobservable soit stable ou bornée. Pour cela le concept de dynamique des zéros est utilisé.

La dynamique des zéros décrite par l'équation (2.34) permet d'assurer la stabilité de la dynamique interne car l'origine d'un système en boucle fermée est asymptotiquement stable si l'origine de la dynamique des zéros est stable. Si la dynamique interne est instable alors le système n'est pas stabilisable par rétroaction.

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) \quad (2.34)$$

2.2.4 Architecture générale d'un autopilote par inversion dynamique

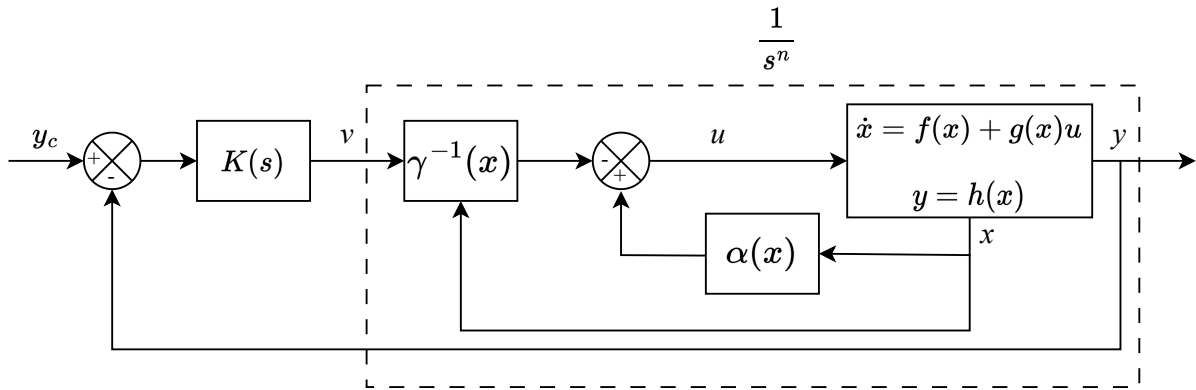


FIGURE 2.2 – Architecture générale d'un contrôleur NDI

Finalement, que le système non-linéaire étudié soit linéarisable entrée/sortie ou bien entrée/états, l'architecture générale d'un contrôleur par inversion dynamique est donnée par la figure 2.2. Les fonctions $\gamma(x)$ et $\alpha(x)$ sont définies par l'équation (2.32) et $K(s)$ est le contrôleur externe linéaire. En observant la forme de $\gamma(x)$ et de $\alpha(x)$, on peut remarquer qu'il est nécessaire d'avoir une connaissance parfaite de l'ensemble du modèle dynamique étudié. Cette hypothèse, peu réaliste dans le cas de la classe de projectiles étudiée pendant la thèse, suggère de s'intéresser à un type de loi de commande qui garde les avantages de l'inversion dynamique tout en étant moins dépendant de la connaissance du modèle du procédé à commandé. L'Incremental Nonlinear Dynamic Inversion, présentée brièvement dans la section 2.1.2 répond à ces critères et est définie plus en détails dans la section suivante.

2.2.5 Inversion dynamique non-linéaire incrementale

La commande par inversion dynamique incrémentale est une loi de commande par inversion dynamique qui utilise une partie réduite du modèle dynamique pour réaliser l'inversion, mais s'appuie davantage sur des informations issues des capteurs et des actionneurs.

Les équations théoriques de la INDI sont présentées tout d'abord en temps continu puis en temps discret (contrôleur discret et système physique continu échantillonné). Pour chacune de ces versions, seul le cas idéal est détaillé. Plus précisément, les actionneurs et les capteurs sont considérés comme parfaits et, pour le cas discret, les dynamiques du bloqueur d'ordre zéro ainsi que celles des échantillonneurs sont également considérées comme parfaites. Ces hypothèses ne sont considérées que pour définir les équations théoriques de la loi de commande. Lors du réglage des autopilotes de roulis, tangage, lacet et facteurs de charge, l'influence de la vitesse des actionneurs et des contraintes du temps discret sur l'inversion dynamique est modélisée et analysée.

2.2.5.1 INDI en temps continu

L'architecture d'un système non-linéaire bouclé avec un autopilote INDI continu est donnée par la figure 2.3.

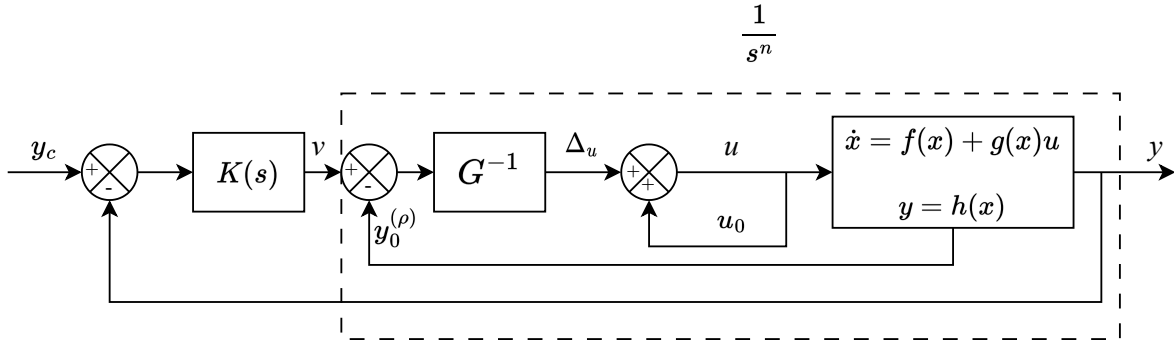


FIGURE 2.3 – Architecture générale d'un contrôleur INDI

On rappelle qu'un système non linéaire (2.12) peut être mis sous la forme

$$y^{(\rho)} = \beta(x) + \gamma(x)u \quad (2.35)$$

en utilisant les équations (2.13) et (2.17).

L'inversion dynamique non-linéaire incrémentale se base sur une approximation de la dynamique non linéaire du système (2.35) par un développement de Taylor du premier ordre tel que le système (2.35) de degré relatif ρ puisse être approximé par :

$$y^{(\rho)} \approx y_0^{(\rho)} + \left. \frac{\partial [\beta(x) + \gamma(x)u]}{\partial x} \right|_{x=x_0, u=u_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial [\beta(x) + \gamma(x)u]}{\partial u} \right|_{x=x_0, u=u_0} (u - u_0) + \mathcal{O}(\|(x - x_0), (u - u_0)\|_2) \quad (2.36)$$

où y_0 , x_0 et u_0 sont, respectivement, les dernières mesures disponibles de la sortie, des états et de la commande et les termes d'ordre supérieur à un sont négligés ($\mathcal{O}(\|(x - x_0), (u - u_0)\|_2) = 0$). Pour simplifier la notation de l'équation (2.36), les quantités $F\Delta x$ et $G\Delta u$ sont définies de la manière suivante :

$$F\Delta x = \left. \frac{\partial [\beta(x) + \gamma(x)u]}{\partial x} \right|_{x=x_0, u=u_0} (x - x_0) \quad (2.37a)$$

$$G\Delta u = \left. \frac{\partial [\beta(x) + \gamma(x)u]}{\partial u} \right|_{x=x_0, u=u_0} (u - u_0) \quad (2.37b)$$

L'équation (2.36) devient alors :

$$y^{(\rho)} = y_0^{(\rho)} + F\Delta x + G\Delta u \quad (2.38)$$

Afin de réduire de manière importante la dépendance de la INDI vis-à-vis du modèle de la dynamique du système à commander, l'hypothèse forte suivante est faite : la dynamique des états du système est supposée être beaucoup plus lente que la dynamique des actionneurs¹. Ainsi, on suppose $\Delta x \ll \Delta u$, ce qui permet de négliger le terme $F\Delta x$ dans l'équation (2.38) et ainsi d'obtenir l'équation suivante :

$$y^{(\rho)} = y_0^{(\rho)} + G\Delta u \quad (2.39)$$

De la même manière que pour la NDI, on souhaite imposer la dynamique du système en boucle fermée et obtenir :

$$y^{(\rho)} = v \quad (2.40)$$

1. La validité de cette hypothèse est conditionnée par la bande passante des actionneurs (Δu grand par rapport à Δx) mais aussi par l'autorité de commande du système (G grand par rapport F).

$$y^{(\rho)}[k] \approx y^{(\rho)}[k-1] + F(x[k] - x[k-1]) + G(u[k] - u[k-1]) \quad (2.45)$$

En utilisant les mêmes hypothèses de séparation des échelles de temps que pour la INDI en temps continu, la simplification suivante apparaît :

$$y^{(\rho)}[k] \approx \frac{y^{(\rho-1)}[k] - y^{(\rho-1)}[k-1]}{T} + G(u[k] - u[k-1]) \quad (2.46)$$

Par conséquent en voulant imposer la dynamique du système en boucle fermée ($y^{(\rho)}[k] \approx v[k]$), on obtient l'équation suivante

$$\frac{y^{(\rho-1)}[k] - y^{(\rho-1)}[k-1]}{T} + G(u[k] - u[k-1]) = v[k] \quad (2.47)$$

Finalement, la forme discrète de la loi de commande INDI est obtenue par :

$$u[k] = u[k-1] + G^{-1} \left(v[k] - \frac{y^{(\rho-1)}[k] - y^{(\rho-1)}[k-1]}{T} \right) \quad (2.48)$$

2.2.6 Discussion sur l'approche à privilégier entre NDI et INDI

La NDI et la INDI sont deux méthodes de commande reposant sur le principe de l'inversion dynamique. Même si on observe une utilisation plus importante dans la littérature de la INDI, cela ne veut pas nécessairement dire que la INDI est globalement plus performante ou robuste. De fait, ce qui les différencie, ce sont la linéarisation du système et la façon de l'obtenir. Dans le cas de la NDI, il y a une linéarisation exacte utilisant l'entièreté du modèle dynamique pour réaliser l'inversion. Dans le cas de la INDI, l'inversion est basée sur une approximation de la dynamique où une partie du modèle est négligée. N'utilisant que la partie du modèle liée à l'autorité de contrôle, la INDI est plus robuste aux incertitudes paramétriques. Cependant, la INDI nécessite, d'une part, des actionneurs rapides à cause de l'hypothèse sur la séparation des échelles de temps entre la dynamique de la commande et celle des états, et d'autre part, des capteurs performants pour l'estimation de la dérivée des états du système.

Ainsi, puisque l'exactitude de la linéarisation est perdue avec l'approche INDI, des actionneurs et des capteurs performants sont nécessaires, mais on obtient une loi de commande plus simple et plus robuste aux incertitudes paramétriques qu'avec la NDI. Comme expliqué précédemment, le modèle mathématique du projectile guidé à fusée de correction de trajectoire est considéré comme très incertain, principalement à cause des difficultés d'estimation des coefficients aérodynamiques. Cependant, la capacité des actionneurs est également limitée.

Finalement, il a été décidé d'utiliser la INDI en considérant des actionneurs suffisamment rapides (mais pas instantanés) pour respecter la séparation des échelles de temps, et des capteurs non-bruités mais avec des mesures potentiellement retardées (voir chapitre 4). Cette hypothèse sur les capteurs est justifiée par l'utilisation d'algorithmes d'estimation et de navigation supposés suffisamment performants pour ne pas avoir à prendre en compte les bruits de mesure et la dynamique des capteurs.

Une des contributions de la thèse est la mise en évidence de l'impact de la vitesse des actionneurs et de la fréquence d'échantillonnage sur la capacité de la INDI à linéariser les dynamiques de roulis, de tangage et de lacet du projectile guidé. L'effet des retards de mesures sur la stabilité de la boucle fermée de la chaîne de roulis est étudié dans le chapitre 4.

La sous-section 2.3 traite de la seconde partie de la synthèse de la loi de commande, c'est-à-dire, le façonnage de la dynamique en boucle fermée par le contrôleur de la boucle externe de l'autopilote INDI. Le

contrôleur externe faisant partie de la loi de commande est réglé par façonnage de fonctions de sensibilité, par conséquent la section 2.3 rappelle le principe de cette méthode et ses éléments théoriques principaux en suivant le cheminement de [BP02] pp.93-99.

2.3 Rappel sur la commande robuste et le façonnage de fonctions de sensibilité

2.3.1 Norme \mathcal{H}_∞

Definition 2.3.1 La norme \mathcal{H}_∞ d'un système LTI représenté par une fonction de transfert stable $G(s)$ est définie comme la plus grande valeur singulière de sa réponse fréquentielle :

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (2.49)$$

La norme \mathcal{H}_∞ d'un système est induite par la norme \mathcal{L}_2 de ses signaux en entrée/sortie. Ainsi pour un système LTI $G(s)$ avec une entrée w et une sortie z on a également :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \quad (2.50)$$

Dans le cas d'un système SISO stable, la norme \mathcal{H}_∞ de $G(s)$ correspond au plus grand gain du diagramme de Bode de $G(s)$. L'équation (2.49) est utilisée pour façonner les fonctions de sensibilité définies dans la section 2.3.2 et l'équation (2.50) est utilisée pour évaluer la robustesse d'un système bouclé.

Definition 2.3.2 La norme \mathcal{H}_∞ étant une norme induite, elle vérifie l'inégalité triangulaire sur le produit des normes. Ainsi avec A et B deux matrices, on a :

$$\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty \quad (2.51)$$

Cette propriété est importante pour la synthèse de contrôleur robuste car elle assure la majoration des fonctions de sensibilité par un gabarit fréquentiel choisi.

2.3.2 Définition des fonctions de sensibilité

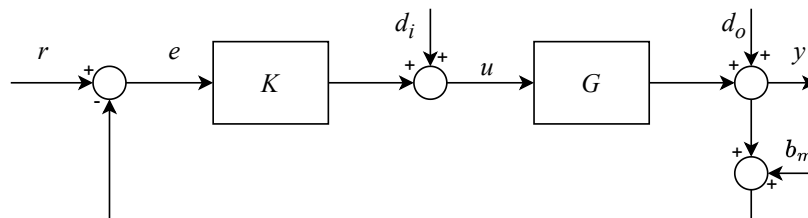


FIGURE 2.5 – Représentation générique d'un système en boucle fermée

La figure 2.5 montre la représentation générique d'un système en boucle fermée où d_i et d_o sont les perturbations en entrée et en sortie et où b_m est le bruit de mesure. A partir de cette représentation les relations suivantes peuvent être écrites :

$$y = T_o r + S_o G d_i + S_o d_o - T_o b_m \quad (2.52a)$$

$$u = K S_o r - K S_o d_o + S_i d_i - K S_o b_m \quad (2.52b)$$

La fonction de transfert S_o représente l'influence de la perturbation en sortie d_o sur la sortie y , de la même manière S_i représente l'influence de la perturbation en entrée d_i sur la commande u . Enfin, T_o est la fonction de transfert entre le bruit de mesure et la sortie.

Les fonctions S_o , S_i , T_o sont respectivement appelés fonction de sensibilité en sortie, de sensibilité en entrée et de sensibilité complémentaire en sortie. La complémentarité entre S_o et T_o donne la relation suivante

$$S_o + T_o = \mathbb{I} \quad (2.53)$$

Ainsi, certains objectifs de réglage sur les performances nominales du système bouclé comme le rejet de perturbation, le suivi de référence, ou la limitation de l'activité haute fréquence du contrôleur peuvent être traduits en contraintes sur les valeurs singulières maximales des fonctions de sensibilité.

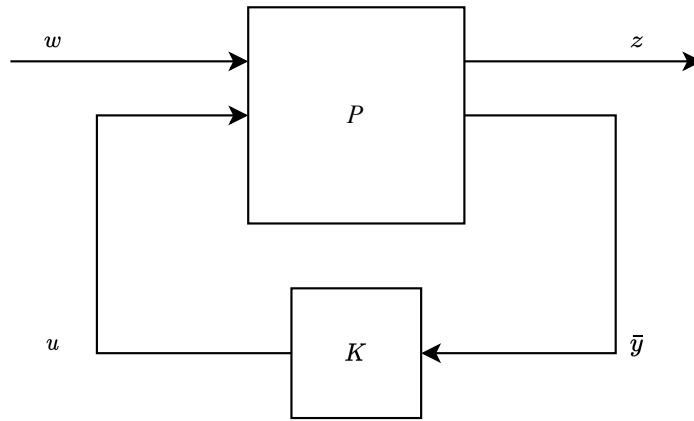
On peut notamment remarquer que :

- Pour réduire l'influence des perturbations de sortie sur la sortie du système $\bar{\sigma}(S_o)$ doit être faible.
- Pour réduire l'influence des perturbations de sortie sur l'entrée du système, $\bar{\sigma}(K S_o)$ doit être faible.
- Pour réduire l'influence des perturbations d'entrée sur l'entrée du système, $\bar{\sigma}(S_i)$ doit être faible.
- Pour réduire l'influence des perturbations d'entrée sur la sortie du système, $\bar{\sigma}(S_o G)$ doit être faible.
- Pour réduire l'influence du bruit de mesure sur la sortie du système, $\bar{\sigma}(T_o)$ doit être faible.
- Pour réduire l'influence du bruit de mesure sur l'entrée du système, $\bar{\sigma}(K S_o)$ doit être faible.
- Pour réduire l'amplitude du signal de commande, $\bar{\sigma}(K S_o)$ doit être faible.
- Pour avoir un suivi de référence satisfaisant, $\bar{\sigma}(S_o)$ doit être faible.
- Pour avoir un suivi de référence satisfaisant, $\bar{\sigma}(S_o)$ doit tendre vers 1.

Il n'est cependant pas possible de satisfaire toutes les contraintes car certains objectifs sont contradictoires. Par exemple, vouloir réduire $\bar{\sigma}(S_o)$ et $\bar{\sigma}(T_o)$ en même temps est impossible car S_o et T_o sont complémentaires. Une des façons de régler le compromis est de réduire les fonctions de sensibilité sur des plages de fréquences réduites. Par exemple, il est intéressant de réduire $\bar{\sigma}(S_o)$ en basse fréquence pour contrer les perturbations additives en sortie, alors qu'il est plus intéressant de réduire $\bar{\sigma}(K S_o)$ en haute fréquence pour réduire l'activité haute fréquence du contrôleur. Ainsi, l'objectif de la synthèse de contrôleur par façonnage de fonctions de sensibilité est de contraindre certaines fonctions de sensibilités choisies à être majorées par un gabarit fréquentiel défini par les objectifs de synthèse.

2.3.3 Formulation du problème \mathcal{H}_∞ et gabarits fréquentiels

La synthèse de contrôleur \mathcal{H}_∞ par façonnage de fonctions de sensibilité est une technique qui permet de poser la synthèse du contrôleur $K(s)$ comme solution d'un problème d'optimisation où l'objectif est de satisfaire des objectifs de réglages traduits en contraintes fréquentielles sur les fonctions de sensibilité.


 FIGURE 2.6 – Configuration standard du problème H_∞ via LFT basse

Sur la figure 2.6, w est le vecteur des entrées exogènes comprenant la référence et les perturbations. z est le vecteur des sorties à réguler dont on doit minimiser l'énergie pour satisfaire les contraintes de réglage. \bar{y} est le vecteur des entrées du contrôleur dans notre cas, cela inclut l'erreur de bouclage, les mesures et la référence. La matrice $P(s)$ décrit le transfert entre les signaux d'entrée w et u et les signaux de sortie z et y comme suit :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.54a)$$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.54b)$$

En utilisant une Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT) basse, le transfert entre w et z en boucle fermée est donné par :

$$z = (P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21})w \quad (2.55a)$$

$$= F_l(P, K)w \quad (2.55b)$$

Le problème d'optimisation \mathcal{H}_∞ se résume à déterminer le contrôleur $K(s)$ stabilisant P qui minimisera la norme \mathcal{H}_∞ du transfert $F_l(P, K)$ comme suit :

$$\inf_K \|F_l(P, K)(j\omega)\|_\infty = \inf_K \max_\omega \bar{\sigma}(F_l(P, K)(j\omega)) \quad (2.56)$$

Dans la pratique, il est difficile de synthétiser le contrôleur optimal qui donnera la norme $\|F_l(P, K)(j\omega)\|_\infty$ minimale, mais il est possible de s'en rapprocher :

$$\gamma_{\min} < \|F_l(P, K)(j\omega)\|_\infty < \gamma \quad (2.57)$$

La figure 2.7 montre l'architecture de P permettant d'inclure des contraintes sur les fonctions de sensibilité S et sur le transfert KS pour satisfaire certains objectifs de réglage définis dans la sous-section 2.3.2 :

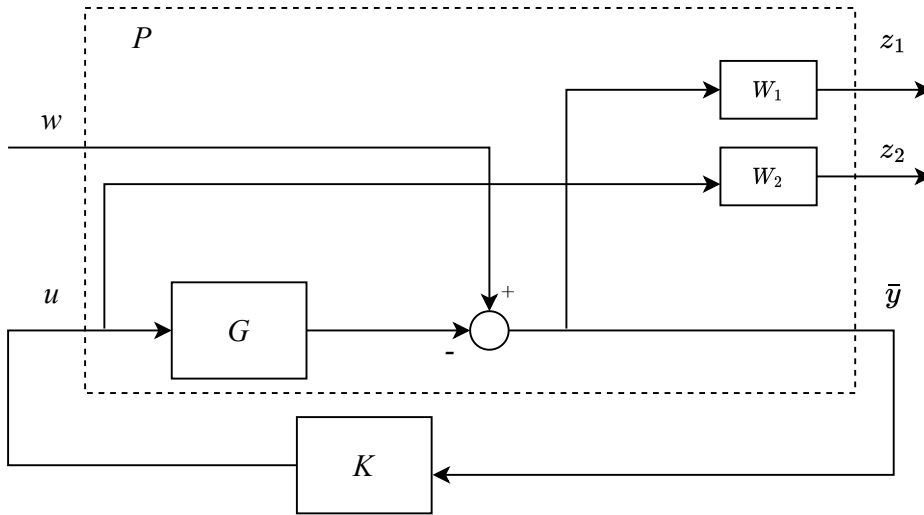


FIGURE 2.7 – Construction de \$P\$ pour l'optimisation \$H_\infty\$ des fonctions de sensibilité \$S/KS\$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

avec

$$P_{11} = \begin{bmatrix} W_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} W_1 G \\ W_2 \end{bmatrix}, \quad P_{21} = -\mathbb{I}, \quad P_{22} = -G \quad (2.59a)$$

\$W_1\$ et \$W_2\$ sont respectivement un filtre passe-bas bicausal et un filtre passe-haut bicausal. Le transfert \$F_l(P, K)\$ s'écrit alors :

$$F_l(P, K) = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire sur le produit des normes (équation (2.51)), résoudre le problème d'optimisation \$\mathcal{H}_\infty\$ revient alors à obtenir un indice \$\gamma < 1\$ dans l'équation (2.57) en utilisant une des méthodes de résolutions de la section suivante. Une valeur de \$\gamma < 1\$ signifie que les gabarits fréquentiels \$\frac{1}{W_1}\$ et \$\frac{1}{W_2}\$ sont respectés et que le correcteur remplit donc les objectifs fixés. Si l'indice obtenue est trop grand, il est nécessaire de modifier les valeurs de \$W_1\$ et \$W_2\$ pour relaxer le problème. La section 2.3.4 présente la méthode de sélection des gabarits fréquentiels utilisée par le réglage des contrôleurs externes des autopilotes de roulis, tangage, lacet et facteurs de charge.

2.3.4 Sélection des gabarits fréquentiels

La sélection des gabarits fréquentiels ou filtres de pondérations est une étape importante de la synthèse. Cette étape peut s'avérer être difficile car il est important de choisir des filtres qui traduisent un problème d'optimisation équilibré entre les différentes contraintes imposées, cela est généralement un processus itératif. Comme expliqué dans la section 2.3.2, certains objectifs sont contradictoires et par conséquent il est nécessaire de faire des compromis en choisissant des gabarits fréquentiels dynamiques qui vont contraindre les différentes fonctions de sensibilité sur des domaines frequentiels choisis. Pour chaque

filtre, le gain haute fréquence $k_{i,HF}$, basse fréquence $k_{i,BF}$, la fréquence de coupure ω_i à -3dB et l'ordre du filtre n sont utilisés pour créer le filtre bicausal suivant :

$$W_i^{-1} = \left(\frac{(k_{i,HF})^{\frac{1}{n}} s + (k_{i,BF})^{\frac{1}{n}} \omega_i}{s + \omega_i} \right)^n \quad (2.61)$$

Il est plus facile d'exprimer le filtre sous sa forme inverse car $S W_i < 1 \Leftrightarrow S < 1/W_i$. La figure 2.8 montre le diagramme de Bode du filtre décrit par l'équation (2.61).

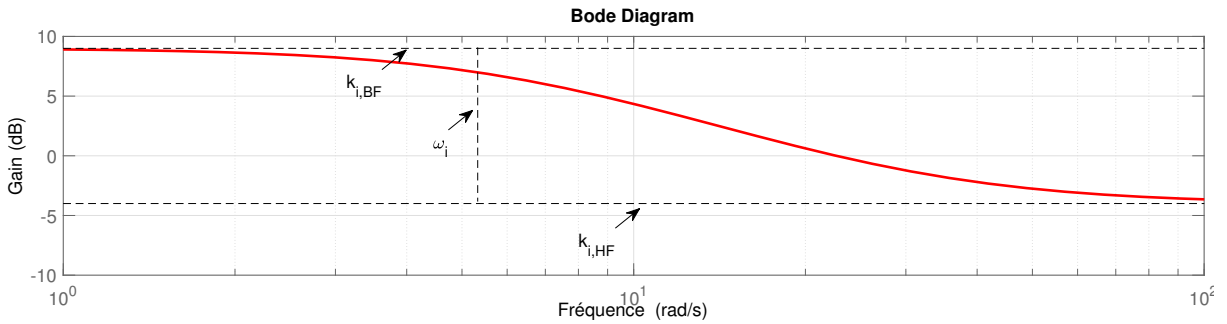


FIGURE 2.8 – Gabarit fréquentiel et ses paramètres

Dans la synthèse des contrôleurs externe de roulis, tangage, lacet et facteurs de charges trois gabarits fréquentiels sont utilisés, en plus de W_1 et W_2 présentés dans la section 2.3.3, un troisième gabarit fréquentiel W_3 est utilisé pour contraindre l'erreur entre la sortie du système et celle d'un modèle de référence. Les valeurs initiales des paramètres des gabarits fréquentiels sont choisis de la façon suivante :

- Le filtre W_1 sert à contraindre la fonction de sensibilité S qui représente le transfert entre la perturbation et la sortie. Ainsi on souhaite un filtre W_1^{-1} avec un gain en basse fréquence $k_{1,BF}$ faible pour réduire l'effet des perturbations constantes sur la sortie et ne pas avoir d'erreur statique (action intégrale). Le gain $k_{1,BF}$ est typiquement choisie à 10^{-3} comme valeur de départ. Ensuite le fréquence de coupure est placée autour de la bande passante désirée du système en boucle fermée définie à partir du modèle de référence $\omega_1 \approx \omega_r$. Pour le gain haute fréquence $k_{1,HF}$, on souhaite également une valeur faible pour réduire l'amplitude des perturbations haute fréquence une valeur de départ choisie est 3.
- Le filtre W_2 sert à contraindre la fonction de sensibilité de commande KS qui représente le transfert entre la consigne r et le signal de commande u . Les actionneurs du projectile ayant une bande passante limitée il est intéressant de synthétiser un contrôleur dont l'action en haute fréquence est la plus faible possible. Ainsi, on souhaite un filtre W_2^{-1} avec un gain en basse fréquence $k_{2,BF}$ constant et suffisamment élevée pour ne pas restreindre l'action basse fréquence du contrôleur. Une valeur de départ est 10 (amplitude maximale d'angle des canards). Ensuite, on souhaite ω_2 une fréquence de coupure située autour de la bande passante des actionneurs du système. Une valeur de départ est $\omega_2 = \omega_\delta/3$. Enfin, on souhaite un gain en haute fréquence le plus faible possible ($\approx 10^{-3}$) pour réduire l'action haute fréquence du contrôleur.
- Le filtre W_3 sert à contraindre l'erreur entre la sortie régulée du système et la sortie du modèle de référence. La solution la plus simple est de définir W_3 constant et le plus faible possible. Cependant, il est plus intéressant, car moins contraignant pour la synthèse, de définir un filtre dynamique comme pour W_1 et W_2 . Ici, on souhaite un gain basse fréquence $k_{3,BF}$ de W_3^{-1} proche de 0 pour ne pas avoir d'erreur statique. Une fréquence de coupure située également autour de la fréquence en boucle

fermée désirée $\omega_1 \approx \omega_r$ et enfin un gain haute fréquence $k_{3,HF}$ également faible mais plus relaxé, une valeur de départ choisie est 0.1.

Les valeurs initiales choisies pour les filtres ne sont pas toujours les plus adaptées et il est parfois nécessaire de faire des ajustements pour réussir à synthétiser un contrôleur qui respecte les gabarits fréquentiels. Pour relaxer le problème d'optimisation, on pourra augmenter ω_2 pour laisser au contrôleur plus d'action en haute fréquence, on pourra également augmenter légèrement $k_{3,HF}$ ou $k_{1,HF}$. Les valeurs des filtres utilisés pour le réglage des contrôleurs externes de roulis, tangage, lacet et facteurs de charge sont données dans les sections 2.5.3, 2.6.1.3, 2.6.2.3.

2.3.5 Méthodes de résolution du problème \mathcal{H}_∞

Plusieurs auteurs ont contribué à l'étude de la résolution du problème \mathcal{H}_∞ et à la synthèse de contrôleur robuste. Tout d'abord, dans [DGKF88], une solution basée sur la résolution des équations de Riccati est proposée, cependant cette méthode ne peut s'appliquer qu'à des systèmes dits réguliers. Plus tard, des méthodes utilisant les LMI [GA94, IS94] ont permis d'étendre la résolution aux systèmes non réguliers. Ces méthodes permettent la synthèse d'un contrôleur à ordre plein ce qui peut poser des difficultés d'implémentation. Le développement de la fonction `hinfstruct` et ensuite de `systeme` (Matlab Control System Toolbox) basé sur les travaux de [AGB14, AN17] permettent d'imposer la structure du contrôleur et de régler les gains en fonctions de plusieurs objectifs (norme \mathcal{H}_∞ des fonctions de sensibilités, minimisation de l'erreur de suivi de modèle, marge de gains et phase *etc*) en recourant à des techniques d'optimisation non-lisses, cependant, l'optimalité du correcteur n'est plus garantie. Dans le cadre de la thèse, la fonction `systeme` a été choisie pour régler les gains des contrôleurs externes de roulis, tangage, lacet et facteurs de charge car elle permet de synthétiser un contrôleur structuré satisfaisant plusieurs objectifs de synthèse.

2.4 Méthodologie générale de réglage des autopilotes INDI

La section 2.4 présente le cahier des charges et la méthodologie générale de réglage des autopilotes INDI de roulis, tangage, lacet et facteurs de charge. Élaborée pendant la thèse, cette méthodologie se veut générique et simple à mettre en place.

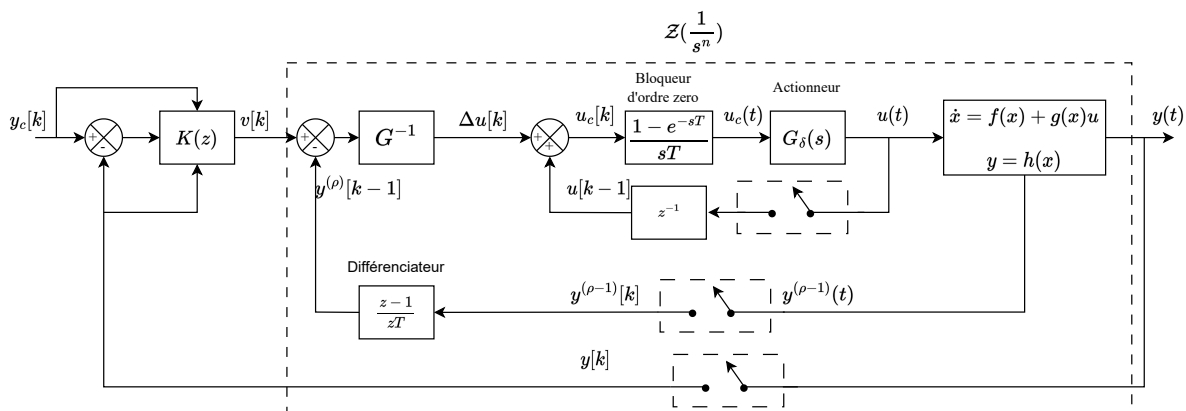


FIGURE 2.9 – Architecture considérée pour les autopilotes INDI

La figure 2.9 montre l'architecture considérée et les choix de modélisation faits pour l'implémentation des autopilotes INDI dans le cadre de la thèse. Tout d'abord, la dynamique des actionneurs ainsi que

celle du bloqueur d'ordre zéro sont considérées. Ensuite, l'estimation de la dérivée nécessaire à la loi de commande s'effectue avec un différenciateur numérique utilisant la méthode d'Euler explicite (voir Annexe C). Enfin, la dynamique des échantillonneurs est considérée comme négligeable.

2.4.1 Cahier des charges

Le cahier des charges pour la synthèse des autopilotes a été défini par rapport aux objectifs de la thèse et aux travaux déjà existants dans la littérature[Sév16]. Les contraintes de performance et de robustesse sur les boucles fermées des chaînes de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge sont données ci-dessous :

- Contrainte sur le régime transitoire et permanent des boucles fermées :
Les contraintes temporelles sur le comportement en boucle fermée des chaînes de roulis et de facteurs de charges sont définies par des spécifications sur leurs régimes transitoires et permanents. Ainsi, l'autopilote de roulis doit permettre le suivi d'un échelon de référence avec un temps de réponse à 2% de 0.3 s, un dépassement inférieur à 2% et une erreur statique nulle. L'autopilote de facteur de charges doit, quant à lui, permettre le suivi d'un échelon de référence avec un temps de réponse à 2% de 1.5 s, un dépassement inférieur à 2% et une erreur statique nulle.
- Performance uniforme sur l'enveloppe de vol :
La commande par inversion dynamique permettant d'utiliser un seul contrôleur pour toute l'enveloppe de vol, il faut s'assurer que cette hypothèse est vérifiée, en analysant la réponse en boucle fermée des chaînes de roulis et de facteur de charges en différents points de fonctionnements.
- Rejet de perturbation additive sur la commande et sur la sortie :
Durant sa trajectoire, le projectile peut être soumis à des perturbations dues à plusieurs facteurs. Par exemple, à cause du vent, le comportement de certaines variables de sortie (*i.e.* θ , ψ , ϕ_2 , q , r) du projectile peut être perturbé. Des problèmes mécaniques (défauts, erreur de position, etc...) peuvent également perturber le signal de commande. Tous ces phénomènes sont modélisés par des perturbations extérieures de type échelon. Les autopilotes de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge doivent être en mesure de rejeter asymptotiquement ces perturbations.
- Limitation de l'activité du contrôleur en haute fréquence :
La capacité des actionneurs du projectile guidé étant limitée, un signal de commande de fréquence supérieure à la bande passante des actionneurs verra son amplitude réduite, ce qui impactera la réponse en boucle fermée du système. Ainsi, l'activité des autopilotes de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charges doit être contrainte en fréquence par rapport à la bande passante des actionneurs.
- Prise en compte des contraintes d'implémentation :
Le réglage du contrôleur externe $K(z)$ devra prendre en compte le bloqueur d'ordre zero et l'effet de la fréquence d'échantillonnage et des actionneurs sur la linéarisation faite par la INDI.

2.4.2 Méthodologie de réglage

Après avoir défini les objectifs du cahier des charges, la méthode de réglage des autopilotes INDI utilisée pour satisfaire le cahier des charges est présentée dans la figure 2.10, les étapes sont ensuite détaillées.

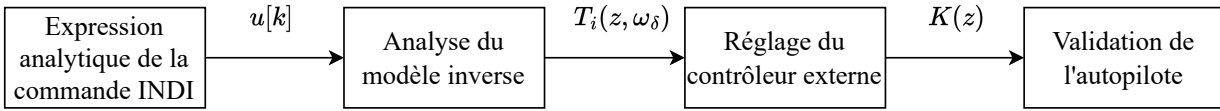


FIGURE 2.10 – Méthode de réglage pour les autopilotes INDI

■ Expression analytique de la commande INDI :

La première étape de réglage est de déterminer la commande INDI $u[k]$ en partant de l'équation (2.48) et en l'appliquant à la dynamique étudiée. La matrice d'autorité de contrôle G est alors déterminée grâce à l'équation (2.37b). L'expression de la matrice G comprend des paramètres de vol variant au cours du temps, il est donc important de vérifier que G est toujours inversible quel que soit le point de vol. Le degré relatif ρ du système est également calculé afin de déterminer l'existence ou non de la dynamique interne.

■ Analyse du modèle inverse :

Une fois l'étude de l'expression analytique de la commande INDI $u[k]$ effectuée, l'objectif est de déterminer le modèle à utiliser pour régler le contrôleur externe. Dans un contexte idéal, (*i.e.* actionneurs parfaits, capteurs parfaits et temps continu), la commande INDI permet au contrôleur externe d'imposer la dynamique en boucle fermée du système et force celui-ci à se comporter comme une chaîne d'intégrateurs purs. Cependant, la vitesse des actionneurs et la période d'échantillonnage, peuvent avoir un impact non négligeable sur le transfert entre la sortie du contrôleur et la dynamique du système. Ce transfert $T_i(z)$ est appelée la dynamique inverse et satisfait la relation suivante :

$$y^{(\rho)}(z) \approx T_i(z)v(z) \tag{2.62}$$

■ Réglage du contrôleur externe :

Le modèle inverse définit le modèle de synthèse utilisé pour le réglage du contrôleur externe. Le réglage du contrôleur externe $K_c(s)$ s'effectue en temps continu en utilisant la transformation bilinéaire de Tustin inverse (détaillée dans l'annexe A.3) sur le modèle inverse. Ainsi, pour respecter les contraintes de performance et robustesse demandées par le cahier des charges, un réglage de contrôleur robuste \mathcal{H}_∞ par façonnage de boucle de sensibilité est effectué. L'architecture du contrôleur $K_c(s)$ est donné par la figure 2.11.

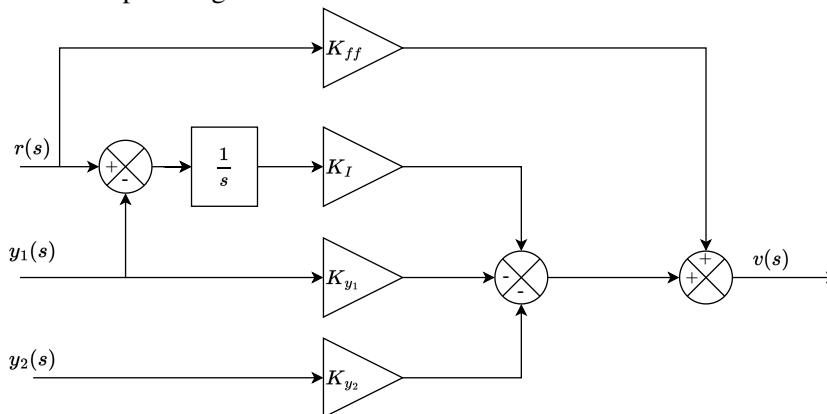
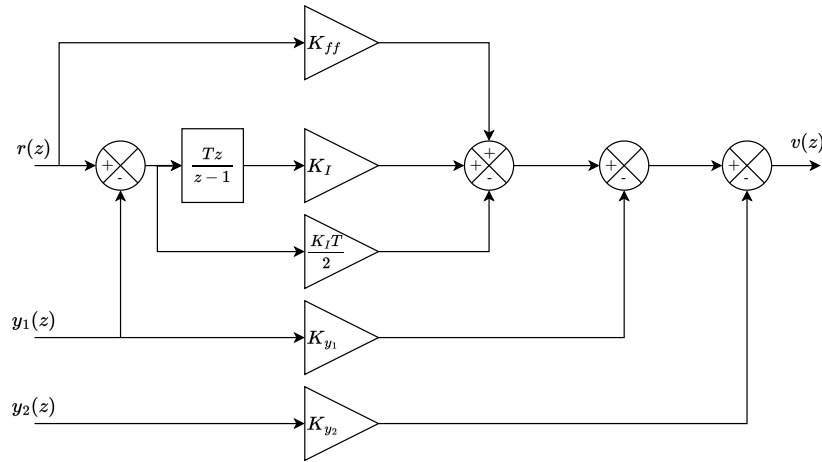


FIGURE 2.11 – Architecture du contrôleur externe continu $K_c(s)$

Dans la figure 2.11, y_1 désigne la variable régulée et y_2 sa dérivée. Si cette dernière n'est pas mesurable, y_2 est fixée à 0. Le contrôleur $K_c(s)$ synthétisé est discrétisé en utilisant à nouveau la transformée bilinéaire de Tustin. La figure 2.12 montre l'architecture du contrôleur discret obtenu.

FIGURE 2.12 – Architecture du contrôleur $K(z)$ résultant de la discrétisation de $K_c(s)$

■ Validation de l'autopilote :

Le contrôleur discret $K(z)$ est validé tout d'abord avec le modèle de la dynamique inverse, afin de vérifier le respect des contraintes de synthèse. Ensuite, l'autopilote INDI complet composé des boucles interne et externe est testé sur le modèle non-linéaire, mais avec les paramètres de vol fixés (*i.e* G constant). Enfin, l'homogénéité des performances de l'autopilote est validée sur une trajectoire de vol complète.

2.5 Conception de l'autopilote de roulis

Les simulations balistiques de la figure 1.15 mettent en évidence l'effet du couple de frottements L_f entre la partie arrière du projectile et la fusée de correction de trajectoire. En effet, la partie arrière du projectile tourne rapidement sur elle-même et entraîne la fusée de correction de trajectoire. Pour fournir un environnement stable pour le contrôle de la trajectoire du projectile, l'angle de roulis ϕ_2 doit être stabilisé à un angle constant par l'autopilote de roulis. Pour limiter la charge sur les actionneurs, la vitesse de roulis p_2 de la FCT est réduite en mettant les canards en saturation jusqu'à avoir $p_2 < p_{20}$. Une fois cette vitesse angulaire p_{20} atteinte, l'autopilote de roulis est enclenché.

La conception de l'autopilote de roulis suit les étapes détaillées par la méthodologie présentée en section 2.4.2. Le système non-linéaire décrivant la dynamique de roulis est obtenu à partir des équations (1.11a), (1.72b) et (1.68) :

$$\begin{cases} \dot{\phi}_2 = p_2 + r \tan \theta \\ \dot{p}_2 = I_{x_2}^{-1} (\bar{q} S d C_{l_\delta} \delta_p + L_f) \end{cases} \quad (2.63)$$

En considérant le moment de frottement L_f et le terme $r \tan \theta$ comme des perturbations extérieures, la dynamique de roulis peut être décrite selon la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_2 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_{x_2}^{-1} \bar{q} S d C_{l_\delta} \end{bmatrix} \delta_p + \begin{bmatrix} r \tan \theta \\ I_{x_2}^{-1} L_f \end{bmatrix} \quad (2.64a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (2.64b)$$

Le système (2.64) est déjà linéarisé grâce aux hypothèses faites sur L_f et sur le terme $r \tan \theta$, ce-

pendant la conception d'un autopilote INDI est malgré tout pertinente car les paramètres \bar{q} et C_{l_δ} varient sur l'enveloppe de vol. Par conséquent, l'autopilote INDI, en inversant la dynamique de roulis, annule l'influence des paramètres et évite ainsi la nécessité d'un séquençement de gains.

2.5.1 Expression analytique de la commande INDI

A partir de l'équation (2.64), le degré relatif de la dynamique de roulis peut être calculé. La sortie régulée est $y_1 = \phi_2$. Sans perturbations extérieures, le système (2.64) est linéaire, on a donc :

$$\frac{\phi_2(s)}{\delta_p(s)} = \frac{I_{x_2}^{-1} \bar{q} S d C_{l_\delta}}{s^2} \quad (2.65)$$

En utilisant la définition 2.2.5, le degré relatif ρ du système (2.65) est égale au degré du dénominateur $n = 2$ moins le degré du numérateur $m = 0$, tel que $n - m = n$. Ainsi, on a $\rho = n$, la dynamique de roulis est donc linéarisable en entrée/états et n'a pas de dynamique interne. Pour faire le lien avec les equations théorique de la INDI on définit

$$y_1 = \phi_2, \quad y_1^{(\rho-1)} = y_2 = p_2, \quad y_1^{(\rho)} = \dot{p}_2 \quad (2.66)$$

L'expression analytique de la matrice d'autorité de commande G_r du système (2.64) est maintenant identifiée :

$$\begin{aligned} G_r &= \frac{\partial y_1^{(\rho)}}{\partial u} \\ &= \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial \delta_p} \\ &= I_{x_2}^{-1} \bar{q} S d C_{l_\delta} \end{aligned} \quad (2.67)$$

G_r est inversible sur l'ensemble du domaine de vol car I_{x_2} , S , et d sont des constantes non nulles du projectile et C_{l_δ} et \bar{q} sont des variables aérodynamiques qui ne peuvent être nulles que si la vitesse du projectile est nulle. Finalement le signal de commande $\delta_{p,c}[k]$ envoyé aux actionneurs est donné par l'équation

$$\delta_{p,c}[k] = \delta_p[k-1] + \frac{I_{x_2}}{\bar{q} S d C_{l_\delta}} \left(v[k] - \frac{p_2[k] - p_2[k-1]}{T} \right) \quad (2.68)$$

en utilisant l'équation (2.48).

2.5.2 Analyse du modèle inverse

Le système en boucle fermée avec une commande INDI idéale se comporte comme un double intégrateur de gain unitaire du point de vue du contrôleur externe. Pour vérifier la validité de cette hypothèse avec la loi de commande (2.48), on calcule la fonction de transfert $T_i(z)$ entre la sortie du contrôleur v et l'estimation numérique de \dot{p}_2 noté \tilde{p}_2 .

La figure 2.13 montre l'architecture de la boucle interne de l'autopilote de roulis appliqué à la dynamique de roulis.

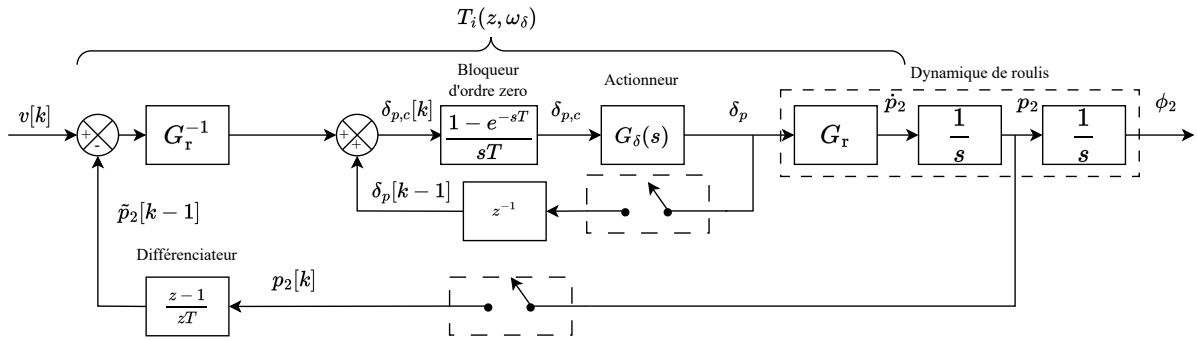


FIGURE 2.13 – Architecture de la boucle interne de l'autopilote INDI pour la dynamique de roulis

La figure 2.13 comprend des fonctions de transfert en temps continu et des fonctions de transfert en temps discret. La figure 2.14 montre la réorganisation de la figure 2.13 en réunissant les blocs continus précédés d'un bloqueur d'ordre zéro et suivi d'un échantillonneur par un transfert discret. Par ailleurs, la sortie ϕ_2 n'étant pas utilisée dans la boucle interne, elle disparaît de la figure 2.14.

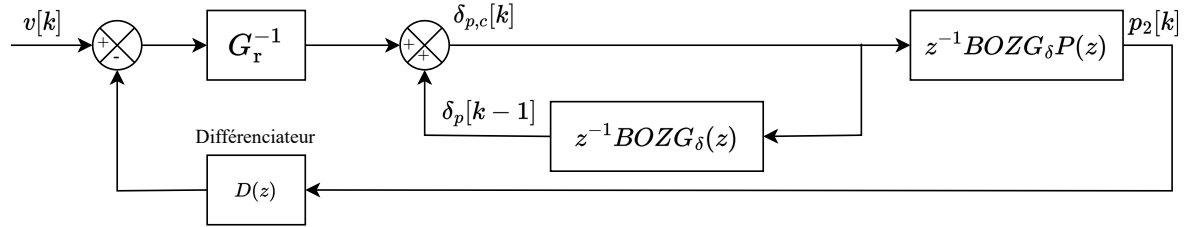


FIGURE 2.14 – Équivalent discret la boucle interne de la INDI pour la dynamique de roulis

Dans la figure 2.14 la fonction de transfert $BOZG_\delta(z)$ désigne la représentation discrète de la fonction de transfert $G_\delta(s)$ précédée d'un bloqueur d'ordre zéro et suivi d'un échantillonneur parfait. De même, la fonction de transfert $BOZG_\delta P(z)$ désigne la représentation discrète de la fonction de transfert $G_\delta(s)P(s)$ avec $P(s) = \frac{G_r}{s}$ précédée d'un bloqueur d'ordre zéro et suivi d'un échantillonneur parfait. Dans un premier temps, on calcule le transfert entre $v(z)$ et $p_2(z)$

$$\begin{aligned} p_2(z) &= BOZG_\delta P(z) \delta_{p,c}(z) \\ &= BOZG_\delta P(z) \left[z^{-1} BOZG_\delta(z) \left(BOZG_\delta P(z) \right)^{-1} p_2(z) + G_r^{-1} (v(z) - D(z) p_2(z)) \right] \end{aligned} \quad (2.69a)$$

$$\begin{aligned} G_r^{-1} BOZG_\delta P(z) v(z) &= p_2(z) - z^{-1} BOZG_\delta(z) p_2 + G_r^{-1} BOZG_\delta P(z) D(z) p_2(z) \\ &= p_2(z) \left[1 - z^{-1} BOZG_\delta(z) + G_r^{-1} BOZG_\delta P(z) D(z) \right] \end{aligned} \quad (2.69b)$$

$$\frac{p_2(z)}{v(z)} = \frac{G_r^{-1} BOZG_\delta P(z)}{1 - z^{-1} BOZG_\delta(z) + G_r^{-1} D(z) BOZG_\delta P(z)} \quad (2.69c)$$

A partir, de la fonction de transfert (2.69c), on calcule le transfert entre $\tilde{p}_2(z)$ et $v(z)$. On définit d'abord

$$\tilde{p}_2(z) = G_r BOZG_\delta(z) \delta_{p,c}(z) \quad (2.70)$$

D'après la figure 2.14 on a également :

$$p_2(z) = BOZG_\delta P(z) \delta_{p,c}(z) \quad (2.71)$$

Par conséquent, on peut écrire la relation suivante :

$$p_2(z) = \frac{\tilde{p}_2(z)}{G_r BOZG_\delta(z)} BOZG_\delta P(z) \quad (2.72)$$

Pour ainsi obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}_2(z)}{v(z)} &= \frac{p_2(z)}{v(z)} \frac{BOZG_\delta P(z)}{G_r BOZG_\delta(z)} \\ &= \frac{BOZG_\delta(z)}{1 - z^{-1} BOZG_\delta(z) + G_r^{-1} D(z) BOZG_\delta P(z)} \end{aligned} \quad (2.73)$$

En revenant à la définition du modèle inverse $T_i(z)$ décrit par l'équation (2.62), on a bien l'expression analytique de la boucle interne de l'autopilote INDI :

$$T_i(z) = \frac{BOZG_\delta(z)}{1 - z^{-1} BOZG_\delta(z) + G_r^{-1} D(z) BOZG_\delta P(z)} \quad (2.74)$$

Avec $D(z) = \frac{z-1}{zT}$ la fonction de transfert du différenciateur numérique utilisant l'équation d'Euler explicite.

Les expressions analytiques des fonctions de transfert $BOZG_\delta(z)$ et $BOZG_\delta P(z)$ sont calculées avec une décomposition en éléments simples dont le détail est disponible en annexe C.1. Il est intéressant de noter que la fonction de transfert n'est dépendante d'aucun paramètre de vol car le terme G_r^{-1} se simplifie avec G_r en facteur de $BOZG_\delta P(z)$ détaillé en annexe C.1.2. On remarque également que dans des conditions idéales (*i.e.*, $G_\delta(s) = 1$ et $T \rightarrow 0$), $T_i(z)$ converge vers 1 ce qui caractérise une inversion parfaite de la dynamique du système.

Cette étude du modèle inverse confirme donc la validité de l'autopilote de roulis sur l'ensemble du domaine de vol et la possibilité de n'avoir qu'un seul contrôleur externe à régler pour imposer la dynamique de roulis en boucle fermée. En remplaçant la période d'échantillonnage T et les paramètres des actionneurs (*i.e.* ω_δ et ξ_δ) par leurs valeurs numériques données par la table B.1, on obtient l'implémentation suivante :

$$T_i(z) = \frac{0.4215z^2 + 0.2291z}{z^3 - 0.3522z^2 + 0.1641z - 0.1614} \quad (2.75)$$

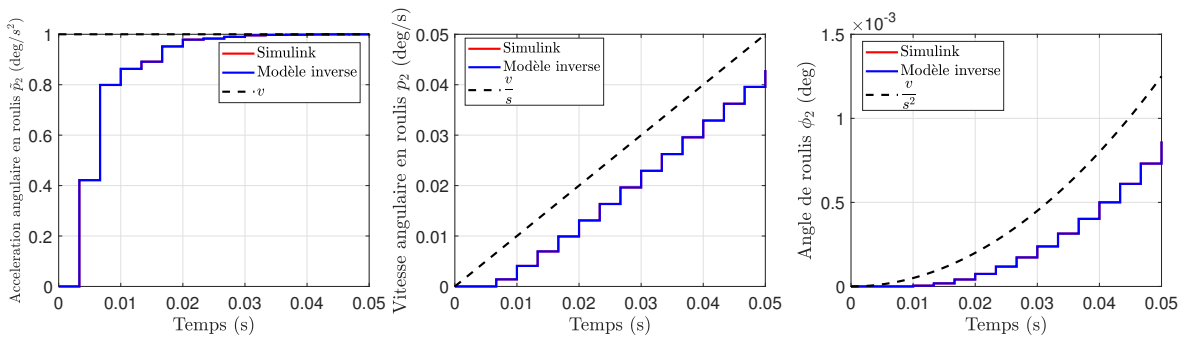


FIGURE 2.15 – Validation de l'expression analytique du modèle inverse par comparaison avec un modèle Simulink

La figure 2.15 compare la réponse à l'échelon de $T_i(z)$ décrit par l'équation (2.75) avec l'implémentation dans Simulink du modèle de la boucle interne de l'autopilote INDI décrit par la figure 2.13. La superposition des réponses du modèle Simulink et de $T_i(z)$ démontre la validité de l'équation (2.75). La figure 2.15 montre également l'écart entre une suite d'intégrateurs purs et le système (2.65) commandé par la boucle interne de l'autopilote INDI.

En utilisant la transformation bilinéaire inverse de Tustin, on obtient l'équivalent continu $T_{i,c}(s)$ de $T_i(z)$ qui sera inclu dans le modèle de réglage du contrôleur externe

$$T_{i,c}(s) = \frac{4.13 \cdot 10^4 s + 8.376 \cdot 10^7}{s^3 + 967s^2 + 6.369 \cdot 10^5 s + 8.376 \cdot 10^7} \quad (2.76)$$

La figure 2.16 compare les réponses à un échelon des fonctions de transfert $T_i(z)$ et $T_{i,c}(s)$ et valide l'équation (2.76).

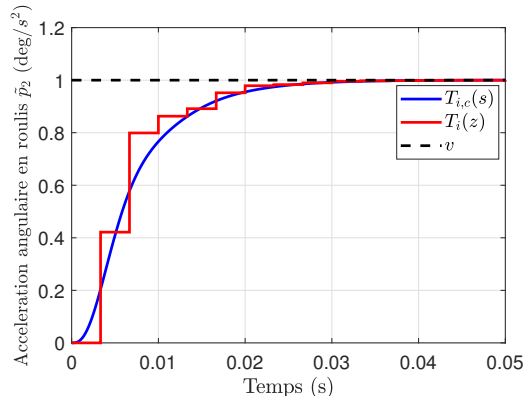


FIGURE 2.16 – Comparaison des réponse à l'échelon entre $T_i(z)$ et $T_{i,c}(s)$

2.5.3 Réglage du contrôleur externe

La figure 2.17 montre le modèle utilisé pour la synthèse du contrôleur externe de l'autopilote de roulis. La fonction de transfert $G_r(s)$ décrit le modèle de référence à suivre comme suit :

$$G_r(s) = \frac{\omega_r^2}{s^2 + 2\xi_r \omega_r s + \omega_r^2} \quad (2.77)$$

avec $\omega_r = 17.1$ rad/s et $\xi_r = 0.78$, ce qui correspond à un temps de réponse à 2% de 0.3 s et un dépassement inférieur à 2%, conformément au cahier des charges.

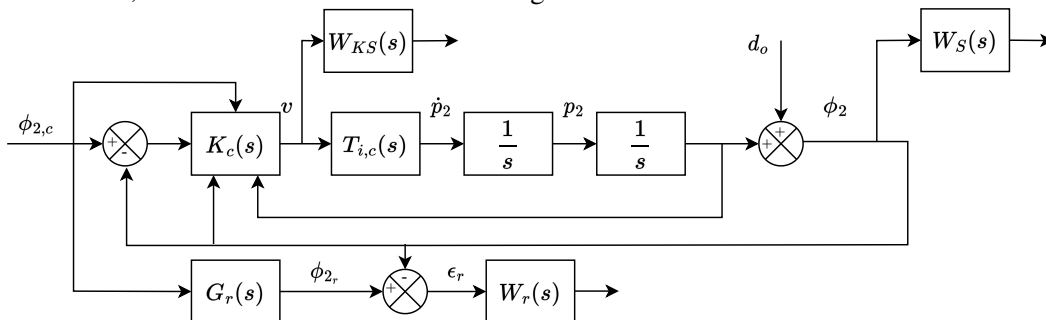


FIGURE 2.17 – Modèle de synthèse pour le réglage du contrôleur externe de roulis

Pour faire le lien entre la figure 2.17 et la figure 2.7, on identifie W_1 à W_S et W_2 à W_{KS} , on a également $\bar{y} = [\phi_{2,c} \quad \phi_2 \quad p_2]^T$ et $w = \phi_{2,c}$. Les filtres de gabarits fréquentiels utilisés pour définir le problème d'optimisation \mathcal{H}_∞ (2.57) sont donnés par l'équation (2.78). Ils ont été construits de manière itérative en utilisant la fonction Matlab `Makeweight` et en suivant les directives de [BP02, pp.102-103]. L'équa-

tion (2.78) montre les valeurs des filtres choisis.

$$W_{KS}(s) = \frac{s + 150}{0.3162s + 8.45e04} \quad W_S(s) = \frac{s^2 + 56s + 784}{1.73s^2 + 0.7382s + 0.0784} \quad W_r(s) = \frac{s + 30}{0.12s + 0.3} \quad (2.78)$$

Le problème \mathcal{H}_∞ pour la synthèse du contrôleur externe de roulis est donc défini ainsi :

$$\|W_r(s)T_{\phi_{2,c} \rightarrow \epsilon_r}(s, K_c)\|_\infty \leq \gamma \quad (2.79a)$$

$$\|W_S(s)T_{d_o \rightarrow \phi_2}(s, K_c)\|_\infty \leq \gamma \quad (2.79b)$$

$$\|W_{KS}(s)T_{\phi_{2,c} \rightarrow v}(s, K_c)\|_\infty \leq \gamma \quad (2.79c)$$

avec pour objectif d'avoir $\gamma < 1$. La résolution du problème H_∞ défini par l'équation (2.79) est effectuée avec le logiciel MatLab Systune et donne les résultats fréquentiels suivants pour $\gamma = 0.99$:

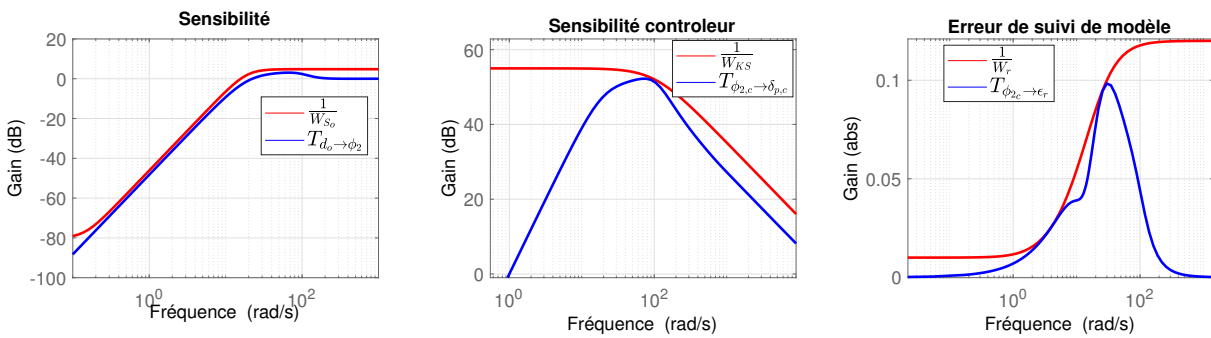


FIGURE 2.18 – Résultats fréquentiels de façonnage de fonctions de sensibilité pour la synthèse du contrôleur de roulis

Tout d'abord, l'indice γ obtenu qui majore les normes H_∞ des fonctions de sensibilité est très légèrement inférieur à 1 ce qui traduit un problème d'optimisation convenablement contraint où tous les gabarits fréquentiels imposés ont été respectés. Plus précisément, les trois majorations obtenues sont $[\gamma_r \ \gamma_s \ \gamma_{KS}]^T = [0.99 \ 0.89 \ 0.999]^T$. La figure 2.18 montre les résultats fréquentiels de la synthèse. La fonction de sensibilité S est contrainte en basse fréquence avec une pente de 40dB par décade garantissant un bon rejet de perturbation additive sur la sortie. Les composantes haute fréquence de la fonction KS sont réduites à partir de 60 Hz correspondant à la bande passante des actionneurs. Enfin, l'erreur par rapport au modèle de référence est très faible en basse fréquence mais plus relaxée en haute fréquence pour permettre à l'algorithme d'optimisation de satisfaire plus facilement les autres gabarits fréquentiels.

La table 2.1 montre les gains obtenus après la résolution du problème d'optimisation (2.79), en utilisant le logiciel MatLab-Systune,

gains	K_{ff}	K_I	K_ϕ	K_p
valeurs	192	13039	1346	64

TABLE 2.1 – Gains obtenus pour la synthèse du contrôleur $K_c(s)$

où $K_\phi = K_{y_1}$ et $K_p = K_{y_2}$ par rapport à la figure 2.11. Les gains obtenus sont très élevés car $T_{i,c}$ a un gain unitaire et la réponse demandée est rapide.

2.5.4 Validation de l'autopilote

Les performances nominales de l'autopilote de roulis sont validées en simulation sur plusieurs cas. La figure 2.19 montre la réponse à un échelon $\phi_{2,c} = 45$ degrés du modèle de référence $\phi_{2,r}$, de la réponse en boucle fermée $\phi_{2,i}$ du système $K(z)T_i(z)$ et de la réponse ϕ_2 de la dynamique de roulis bouclée avec l'autopilote INDI de roulis complet contenant les boucles internes et externes. La figure 2.19 montre également le signal de commande $\delta_{p,c}$ envoyé aux actionneurs et la sortie du contrôleur externe v . Ensuite les figures 2.20 et 2.21 montrent l'angle et la vitesse en roulis de la FCT soumis à une perturbation du signal de commande et du signal de sortie. Dans le cas de la figure 2.20, le signal de commande $\delta_{p,c}$ subit une perturbation additive modélisée par un échelon d'un degré. Dans le cas de la figure 2.21, l'angle de roulis de la FCT subit également une perturbation additive d'un échelon de cinq degrés. Les paramètres de vol sont constants ($G_r = 7391 \text{ rad/sec}^2$) et sont choisis sans a priori dans l'enveloppe de vol.

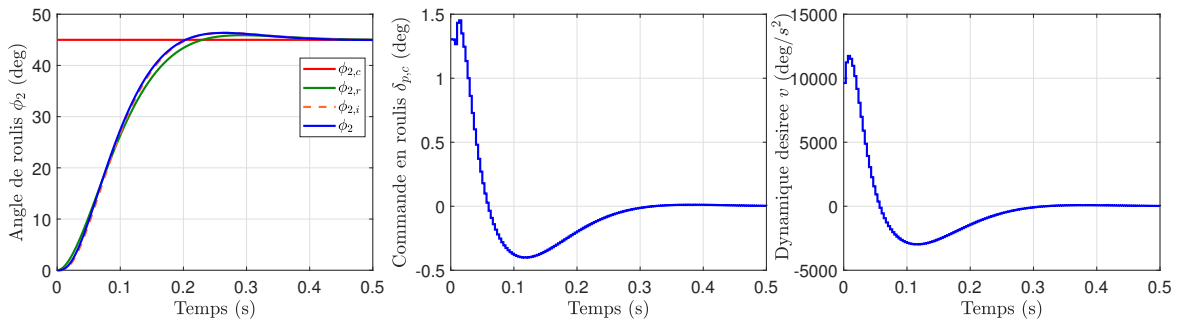


FIGURE 2.19 – Validation du comportement nominal de l'autopilote de roulis

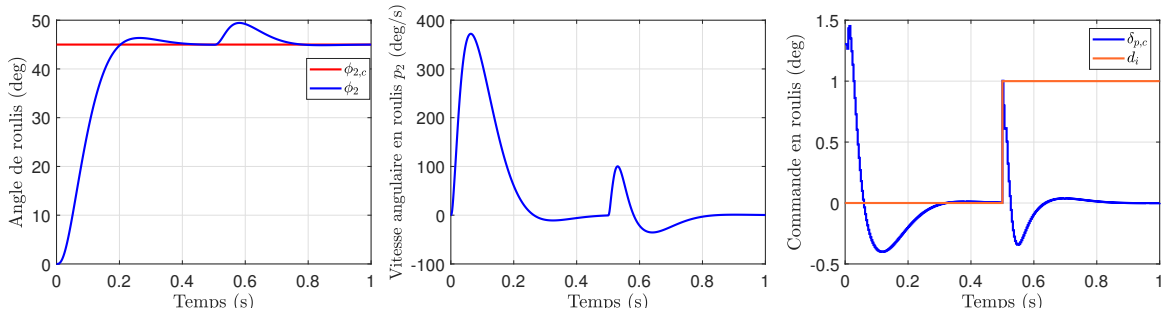


FIGURE 2.20 – Validation du rejet de perturbation sur la commande de roulis

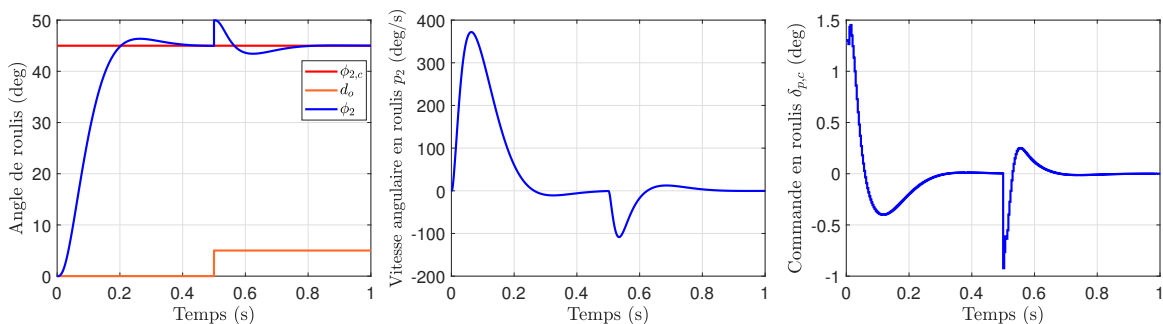


FIGURE 2.21 – Validation du rejet de perturbation sur l'angle de roulis

Sur la figure 2.19, $\phi_{2,i}$ désigne l'angle de roulis généré par le modèle de synthèse 2.17. La figure 2.19 montre les réponses ϕ_2 et $\phi_{2,i}$ confondues. Dans le cas de ϕ_2 la sortie v du contrôleur externe est l'entrée de la boucle interne de l'autopilote INDI, tandis que dans le cas de $\phi_{2,i}$ la sortie du contrôleur est envoyée directement au modèle inverse comme sur la figure 2.17. La superposition de ϕ_2 et $\phi_{2,i}$ valide la démarche de réglage par utilisation du modèle inverse. Les deux courbes sont également proches de la réponse du

modèle de référence conformément aux résultats de réglage montré par la figure 2.18. Une différence est tout de même notable due à la forme du gabarit fréquentiel W_r qui contraint moins l'erreur de suivi de modèle en haute fréquence. Les gains très élevés du contrôleur $K(z)$ produisent une dynamique désirée v très forte mais qui est remise à l'échelle par la boucle interne de la INDI. Les figure 2.20 et 2.21 montrent quant à elle la capacité de l'autopilote de roulis à rejeter asymptotiquement les perturbations de commande et de sortie.

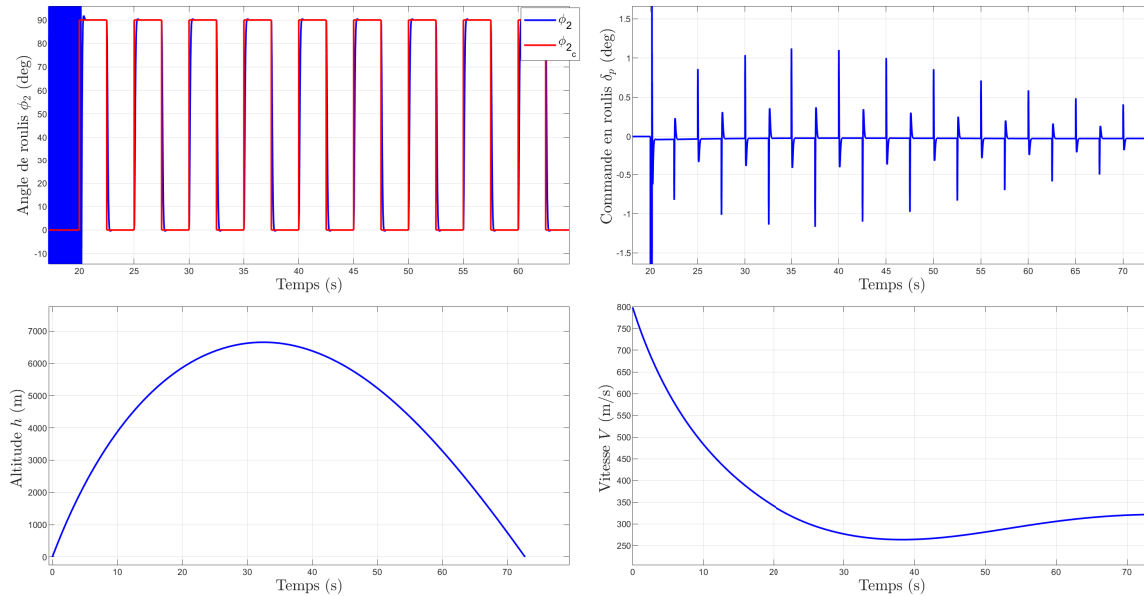


FIGURE 2.22 – Validation de l'autopilote de roulis sur une trajectoire entière

La figure 2.22 montre le contrôle de l'angle de roulis sur une trajectoire de vol complète (*i.e* paramètres de vol variant dans le temps). Avant $t = 20s$, l'angle de roulis oscille très fortement à cause du frottement visqueux entre la pointe et l'obus. Une fois la vitesse en roulis de la FCT suffisamment réduite en mettant les canards en saturation, l'autopilote de roulis s'enclenche pour stabiliser ϕ_2 . La consigne en créneaux $\phi_{2,c}$ permet de vérifier l'homogénéité de la réponse ϕ_2 quand les paramètres de vol varient. On remarque que, grâce à l'inversion dynamique, la réponse en roulis est homogène car le signal de commande s'adapte automatiquement aux conditions de vol. Par exemple, autour de l'apogée, la vitesse du projectile est la plus faible, donc la dynamique de roulis possède le moins d'autorité de commande et, par inversion, le signal de commande sera le plus élevé (terme G^{-1} dans l'équation (2.48)).

2.6 Conception de l'autopilote de facteurs de charge

Pour pouvoir corriger la dispersion balistique du projectile, l'ordinateur de bord de la FCT doit calculer les corrections à apporter à la trajectoire pour atteindre la cible. Pour cela, une loi de guidage et une loi de commande sont implémentées. Le rôle de la loi de guidage est de définir la trajectoire à suivre à partir des coordonnées de la cible et de générer les facteurs de charge latéraux désirés $[n_{z,c} \quad n_{y,c}]^T$ que le projectile doit générer pour rester sur cette trajectoire. L'autopilote de facteurs de charge, quant à lui, s'assure que les facteurs de charges réels du projectile convergent vers ceux désirés par la loi de guidage. L'architecture de l'autopilote de facteurs de charge implémentée est montré par la figure 2.23 et est constitué de deux autopilotes INDI en cascade.

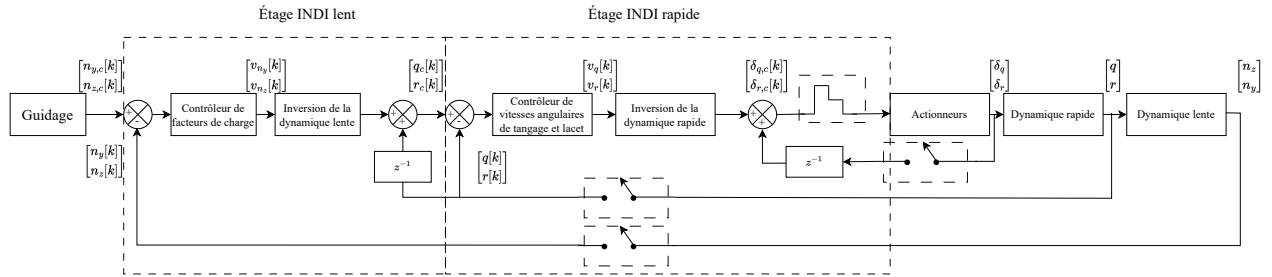


FIGURE 2.23 – Architecture de l'autopilote de facteurs de charge

L'architecture de l'autopilote de facteurs de charge se base sur la séparation des échelles de temps entre la dynamique rapide des vitesses angulaires latérales $[q \ r]^T$ et celle lente des facteurs de charge $[n_z \ n_y]^T$. Ce type d'architecture a déjà été utilisé dans la littérature dans le cas d'application aux systèmes aéronautiques de lois de commandes par inversion dynamique [MIO⁺97]. La dynamique des facteurs de charge est incluse dans la dynamique lente et la dynamique des vitesses de tangage et lacet est incluse dans la dynamique rapide. Pour respecter cette séparation des échelles de temps, le temps de réponse de la boucle rapide est divisé par cinq par rapport à celui de la dynamique lente. Cette architecture permet de réduire la complexité de l'inversion dynamique en dissociant le problème d'inversion en deux sous-ensembles de degré moindre, au prix de l'ajout du réglage d'un contrôleur externe supplémentaire. Un autre avantage de ce type d'architecture est d'éviter la présence de dynamique interne. En effet, les signaux de commandes apparaissent directement dans l'expression des facteurs de charge, donc, sans cette architecture une loi de commande par inversion dynamique n'aurait pu lineariser en entrée/états, mais seulement en entrée/sortie.

Les variables de chaque étage d'inversion sont détaillées ci-dessous.

■ Inversion de la dynamique rapide :

L'étage d'inversion de la dynamique rapide commande les vitesses angulaires de tangage et de lacet du projectile $[q \ r]^T$ et génère les signaux de commande virtuels de tangage et de lacet $[\delta_{q,c} \ \delta_{r,c}]^T$.

■ Inversion de la dynamique lente :

L'étage d'inversion dynamique lente commande les facteurs de charge du projectile $[n_z \ n_y]^T$ et génère les vitesses angulaires désirées de tangage et de lacet $[q_c[k] \ r_c[k]]^T$ utilisées comme consignes par l'étage d'inversion rapide.

La section 2.6.1 détaille le réglage de l'autopilote INDI dédié à la dynamique rapide et la section 2.6.2 détaille le réglage de l'autopilote INDI dédié à la dynamique lente. Les deux autopilotés sont réglés en suivant la même méthodologie décrite en section 2.4.2.

2.6.1 Inversion de la dynamique rapide

Le projectile étudié est gyrostabilisé, par conséquent le corps du projectile tourne très rapidement sur lui-même (*i.e* $p_1 \approx 300$ Hz). Cette vitesse en roulis stabilise le projectile pendant le vol mais crée également un couplage très important entre les dynamiques de tangage et de lacet. A partir de l'équation (1.4), la dynamique de tangage et de lacet peut être extraite sous la forme donnée par l'équation (2.80b).

$$\dot{q} = -\frac{I_{x1}}{I_t} p_1 r - r^2 \tan \theta + \frac{M}{I_t} \quad (2.80a)$$

$$\dot{r} = \frac{I_{x1}}{I_t} p_1 q - q r \tan \theta + \frac{N}{I_t} \quad (2.80b)$$

Le couplage entre les axes est mis en évidence par le terme p_1 dans l'équation (2.80b). En remplaçant M et N par leurs expressions données par l'équation (1.72b), on peut déterminer que la dynamique des vitesses de tangage/lacet est non-linéaire et affine en la commande

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(I_{x_1} \tilde{I}_t^{-1} p_1 + r \tan \theta) r \\ (I_{x_1} \tilde{I}_t^{-1} p_1 + r \tan \theta) q \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{\bar{q} S d}{\tilde{I}_t} \begin{bmatrix} C_{m_\alpha} \sin \alpha \cos \beta \\ -C_{m_\alpha} \sin \beta \end{bmatrix} + \frac{p_1 d}{2V} \begin{bmatrix} C_{n_{p_\alpha}} \sin \beta \\ -C_{n_{p_\alpha}} \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} + \frac{d}{2V} \begin{bmatrix} C_{m_q} q \\ -C_{m_q} r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{m_\delta} (\delta_q + \alpha) \\ C_{m_\delta} (\delta_r - \beta) \end{bmatrix}}_{f_{TL}(q,r)} \\
 &= \begin{bmatrix} -(I_{x_1} \tilde{I}_t^{-1} p_1 + r \tan \theta) r \\ (I_{x_1} \tilde{I}_t^{-1} p_1 + r \tan \theta) q \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{\bar{q} S d}{\tilde{I}_t} \begin{bmatrix} C_{m_\alpha} \sin \alpha \cos \beta \\ -C_{m_\alpha} \sin \beta \end{bmatrix} + \frac{p_1 d}{2V} \begin{bmatrix} C_{n_{p_\alpha}} \sin \beta \\ -C_{n_{p_\alpha}} \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} + \frac{d}{2V} \begin{bmatrix} C_{m_q} q \\ -C_{m_q} r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{m_\delta} \alpha \\ -C_{m_\delta} \beta \end{bmatrix}}_{G_{TL}} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \frac{\bar{q} S d}{\tilde{I}_t} C_{m_\delta} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{q} S d}{\tilde{I}_t} C_{m_\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_q \\ \delta_r \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= f_{TL}(q, r) + G_{TL} \begin{bmatrix} \delta_q \\ \delta_r \end{bmatrix} \tag{2.81}
 \end{aligned}$$

La figure 2.24 montre l'architecture de l'autopilote INDI pour le contrôle des vitesses de tangage et de lacet.

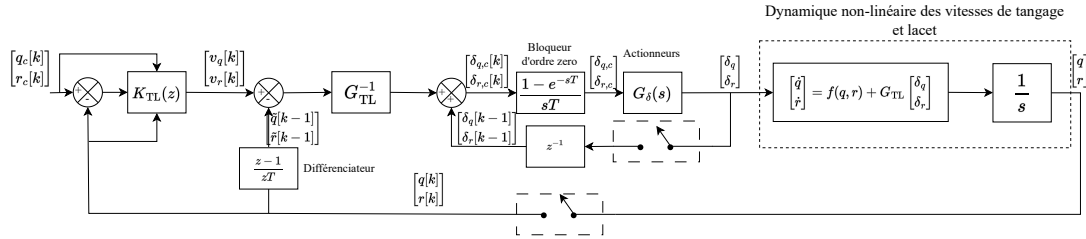


FIGURE 2.24 – Architecture de l'autopilote INDI des vitesses de tangage et de lacet

2.6.1.1 Expression analytique de la commande INDI

Le degré relatif de la dynamique des vitesses angulaires de tangage et de lacet est calculé à partir de l'équation (2.81) et de la définition 2.2.2.3. Les deux états du système q et r sont supposés mesurables grâce au gyromètre trois axes embarqué dans la FCT, le système non-linéaire (2.81) peut donc être mis sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f_{TL}(x) + G_{TL}u \tag{2.82a}$$

$$y = h(x) \tag{2.82b}$$

avec $x = [q \ r]^T$, $u = [\delta_q \ \delta_r]^T$ et $h(x) = x$. On a donc :

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f_{TL}(x) = f_{TL}(x) \tag{2.83a}$$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} G_{TL} = G_{TL} \tag{2.83b}$$

Pour faire apparaître le degré relatif, on peut écrire :

$$L_g L_f^{(0)} h(x) = L_g h(x) = G_{TL} \neq 0 \tag{2.84a}$$

$$L_g L_f^{(\rho-1)} h(x) \neq 0 \quad (2.84b)$$

On peut donc dire que $\rho = 1$. Le degré relatif du système (2.81) est égal à son ordre, donc le système (2.81) est linéarisable en entrée/états et aucune dynamique interne n'est à considérer.

La forme affine en la commande de la dynamique des vitesses angulaires de tangage et de lacet permet d'identifier facilement la matrice G_{TL} d'autorité de commande nécessaire à l'écriture de la loi de commande INDI

$$G_{TL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_q} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial \delta_q} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \delta_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\bar{q} S d}{\bar{I}_t}\right) C_{m_\delta} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\bar{q} S d}{\bar{I}_t}\right) C_{m_\delta} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

La loi de commande INDI pour les vitesses de tangage et de lacet s'écrit alors comme suit

$$\begin{bmatrix} \delta_{q,c}[k] \\ \delta_{r,c}[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_q[k-1] \\ \delta_r[k-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\bar{I}_t}{\bar{q} S d C_{m_\delta}} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{I}_t}{\bar{q} S d C_{m_\delta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_q[k] - \frac{q[k]-q[k-1]}{T} \\ v_r[k] - \frac{r[k]-r[k-1]}{T} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Il est intéressant de remarquer que, d'une part, grâce à la symétrie des plans des canards, l'autorité de commande en tangage est la même que l'autorité de commande en lacet. Ce qui donne une loi de commande INDI également symétrique entre δ_q et δ_r . D'autre part, l'intérêt de la loi de commande INDI est mis en lumière car seuls les paramétrés liés à l'autorité de commande du projectile sont utilisés, ce qui permet une dépendance très réduite au modèle dynamique du projectile. Sur les quatre coefficients aérodynamiques présents dans les équations dynamiques de tangage et de lacet (2.81), seul C_{m_δ} est utilisé.

La matrice G_{TL} est inversible sur l'ensemble du domaine de vol car, comme pour l'autopilote de roulis, l'autorité de commande en tangage et en lacet est nulle seulement si la vitesse du projectile est nulle.

2.6.1.2 Analyse du modèle inverse

La figure 2.25 montre l'architecture de la boucle interne de l'autopilote INDI pour les vitesses de tangage et lacet.

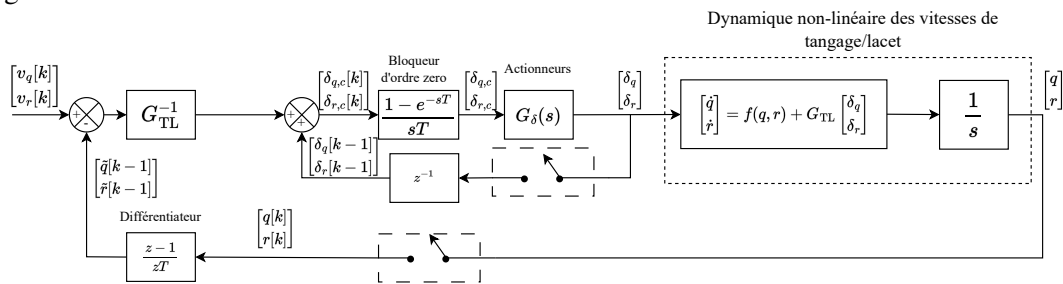


FIGURE 2.25 – Architecture de la boucle interne de l'autopilote INDI pour les vitesses de tangage et lacet

De la même manière que pour l'autopilote de roulis, l'analyse du modèle inverse de la dynamique des vitesses de tangage et de lacet permet d'évaluer l'inversion de l'équation (2.81). Cependant, à cause de la fonction non-linéaire $f_{TL}(q, r)$, il n'est pas possible d'employer strictement la même approche que dans la section 2.5.2. En effet, il n'est pas possible de définir la relation entre $[v_q[k] \ v_r[k]]^T$ et $[q[k-1] \ r[k-1]]^T$ par une fonction de transfert. Néanmoins, en injectant l'expression de la loi de commande (2.86) dans les équations dynamiques de tangage et de lacet on obtient le développement suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = f_{TL}(q, r) + G_{TL} \begin{bmatrix} \delta_q \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (2.87a)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{q[k+1]-q[k]}{T} \\ \frac{r[k+1]-r[k]}{T} \end{bmatrix} = f_d(q[k], r[k]) + G_{TL} \begin{bmatrix} \delta_q[k] \\ \delta_r[k] \end{bmatrix} \quad (2.87b)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{q}(z) \\ \tilde{r}(z) \end{bmatrix} &= F_d(q(z), r(z)) + G_{TL} \begin{bmatrix} \delta_q(z) \\ \delta_r(z) \end{bmatrix} \\ &= F_d(q(z), r(z)) + G_{TL} \begin{bmatrix} BOZG_\delta(z)z^{-1}\delta_q(z) \\ BOZG_\delta(z)z^{-1}\delta_r(z) \end{bmatrix} + G_{TL}^{-1} \begin{bmatrix} BOZG_\delta(z)(v_q(z) - z^{-1}\tilde{q}(z)) \\ BOZG_\delta(z)(v_r(z) - z^{-1}\tilde{r}(z)) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{F_d(q(z), r(z)) + G_{TL} \begin{bmatrix} \delta_q(z) \\ \delta_r(z) \end{bmatrix}}_{[\tilde{q}(z) \quad \tilde{r}(z)]^\top} - G_{TL} \begin{bmatrix} \delta_q(z) \\ \delta_r(z) \end{bmatrix} \\ &\quad + G_{TL} \begin{bmatrix} BOZG_\delta(z)z^{-1}\delta_q(z) \\ BOZG_\delta(z)z^{-1}\delta_r(z) \end{bmatrix} + G_{TL}^{-1} \begin{bmatrix} BOZG_\delta(z)(v_q(z) - z^{-1}\tilde{q}(z)) \\ BOZG_\delta(z)(v_r(z) - z^{-1}\tilde{r}(z)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{q}(z) \\ \tilde{r}(z) \end{bmatrix} - G_{TL} \begin{bmatrix} \delta_q(z) \\ \delta_r(z) \end{bmatrix} + G_{TL} \begin{bmatrix} BOZG_\delta(z)z^{-1}\delta_q(z) \\ BOZG_\delta(z)z^{-1}\delta_r(z) \end{bmatrix} + G_{TL}^{-1} \begin{bmatrix} BOZG_\delta(z)(v_q(z) - z^{-1}\tilde{q}(z)) \\ BOZG_\delta(z)(v_r(z) - z^{-1}\tilde{r}(z)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{q}(z) \\ \tilde{r}(z) \end{bmatrix} + G_{TL} \begin{bmatrix} (BOZG_\delta(z)z^{-1} - 1)\delta_q(z) \\ (BOZG_\delta(z)z^{-1} - 1)\delta_r(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BOZG_\delta(z)(v_q(z) - z^{-1}\tilde{q}(z)) \\ BOZG_\delta(z)(v_r(z) - z^{-1}\tilde{r}(z)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.87c)$$

$$\begin{bmatrix} BOZG_\delta(z)z^{-1}\tilde{q}(z) \\ BOZG_\delta(z)z^{-1}\tilde{r}(z) \end{bmatrix} = G_{TL} \begin{bmatrix} (BOZG_\delta(z)z^{-1} - 1)\delta_q(z) \\ (BOZG_\delta(z)z^{-1} - 1)\delta_r(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BOZG_\delta(z)v_q(z) \\ BOZG_\delta(z)v_r(z) \end{bmatrix} \quad (2.87d)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z^{-1}\tilde{q}(z) \\ z^{-1}\tilde{r}(z) \end{bmatrix} &= G_{TL} \begin{bmatrix} \frac{BOZG_\delta(z)z^{-1}-1}{BOZG_\delta(z)}\delta_q(z) \\ \frac{BOZG_\delta(z)z^{-1}-1}{BOZG_\delta(z)}\delta_r(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_q(z) \\ v_r(z) \end{bmatrix} \\ &= G_{TL} \begin{bmatrix} \frac{BOZG_\delta(z)z^{-1}-1}{BOZG_\delta(z)}BOZG_\delta(z)\delta_{q,c}(z) \\ \frac{BOZG_\delta(z)z^{-1}-1}{BOZG_\delta(z)}BOZG_\delta(z)\delta_{r,c}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_q(z) \\ v_r(z) \end{bmatrix} \\ &= G_{TL} \begin{bmatrix} (BOZG_\delta(z)z^{-1} - 1)\delta_{q,c}(z) \\ (BOZG_\delta(z)z^{-1} - 1)\delta_{r,c}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_q(z) \\ v_r(z) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.87e)$$

Finalement la relation entre $[v_q[k] \quad v_r[k]]^\top$ et $[\tilde{q}[k-1] \quad \tilde{r}[k-1]]^\top$ est donnée par l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{q[k]-q[k-1]}{T} \\ \frac{r[k]-r[k-1]}{T} \end{bmatrix} = \overbrace{G_{TL} \begin{bmatrix} (BOZG_\delta[k-1] - 1)\delta_{q,c}[k] \\ (BOZG_\delta[k-1] - 1)\delta_{r,c}[k] \end{bmatrix}}^{\text{erreur d'inversion}} + \begin{bmatrix} v_q[k] \\ v_r[k] \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

L'équation (2.88) montre la dégradation de l'inversion produite par la INDI quand celle-ci est effectuée en temps discret et avec des actionneurs non-parfaits. La figure 2.26 compare les réponses obtenues par la simulation de l'équation (2.88) et le modèle Simulink de la figure 2.25. On remarque que la réponse en tangage et lacet est très éloignée de la réponse idéale (*i.e* intégrateur pur), les chaînes de tangage et lacet sont encore fortement couplées.

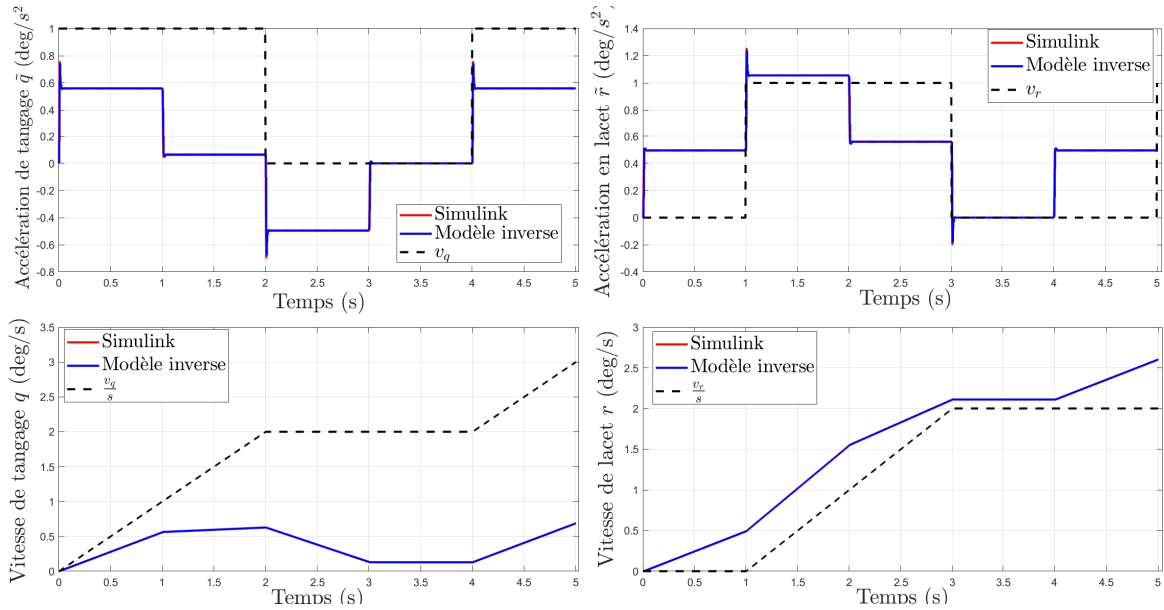


FIGURE 2.26 – Simulation et comparaison de l’expression analytique du modèle inverse de tangage/lacet avec un modèle Simulink 2.25 (temps discret et actionneurs)

La Figure 2.27 compare également les réponses obtenues par la simulation de l’équation (2.88) et le modèle Simulink de la figure 2.25, mais dans le cas d’actionneurs parfaits et de fréquence d’échantillonnage très élevée (*i.e* $G_\delta(s) = 1$ et $T \rightarrow 0$). Dans ce cas, la boucle interne de la INDI produit une linéarisation parfaite. Dans tous les cas, l’équation (2.88) modélise correctement le comportement de la boucle interne de l’autopilote de tangage et lacet.

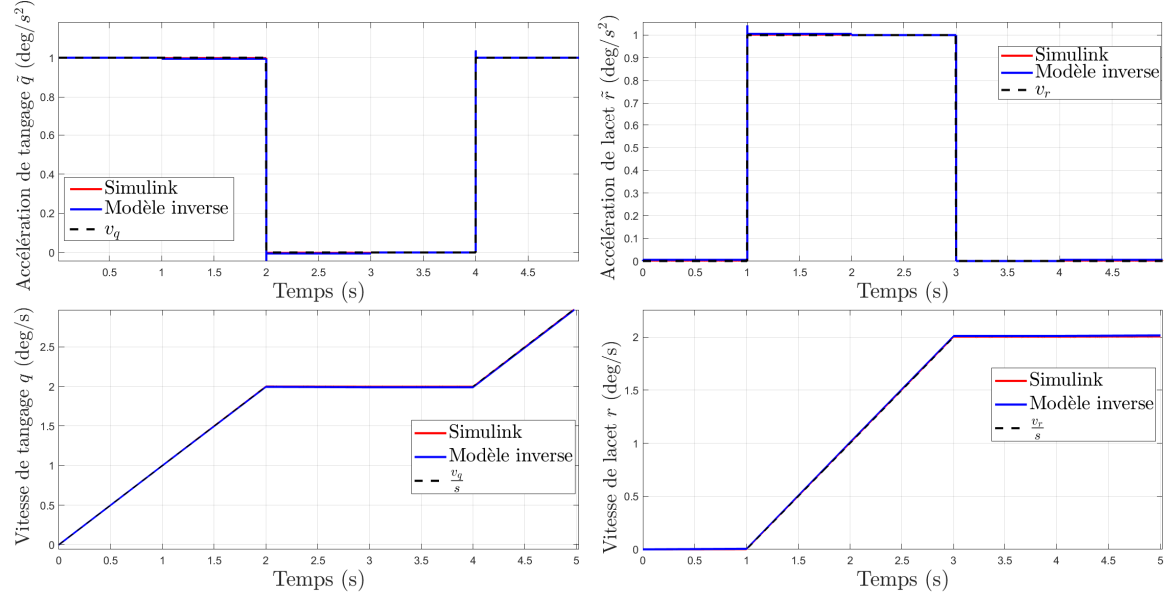


FIGURE 2.27 – Simulation et comparaison de l’expression analytique du modèle inverse de tangage/lacet avec un modèle Simulink 2.25 (temps continu sans actionneurs)

De part la présence du terme G_{TL} dans l’équation (2.88), l’erreur d’inversion dynamique n’est pas constante au travers de l’enveloppe de vol, il est donc difficile de prendre en compte cette erreur dans la synthèse du contrôleur externe car les gains du contrôleur doivent être constants et celui-ci doit avoir les mêmes performances nominales pour tous les points de vols. Une approche multi-modèle pourrait être envisagée pour corriger cet aspect mais sort du cadre défini pour la thèse.

Certaines hypothèses ont été considérées pour simplifier le réglage du contrôleur externe K_{TL} de la figure 2.24 :

■ Découplage du tangage et lacet :

Le réglage du contrôleur externe K_{TL} se faisant avec un modèle de synthèse unique et ne devant dépendre d'aucun paramètre de vol, il a été jugé préférable de considérer le couplage restant entre les chaînes de tangage et de lacet comme une perturbation extérieure et donc de ne pas le prendre en compte pendant la synthèse.

■ Symétrie des chaînes de tangage et de lacet :

Les contraintes du cahier des charges sur le comportement en boucle fermée des dynamiques de tangage et de lacet sont les mêmes.

2.6.1.3 Réglage du contrôleur externe

Ces deux hypothèses permettent de réduire le modèle pour la synthèse du contrôleur externe K_{TL} à un système SISO. Le contrôleur synthétisé sera ensuite implémenté à la fois sur la chaîne de tangage et celle de lacet. La figure 2.28 montre l'architecture complète du modèle de synthèse où la méthode du Modified Continuous Design [SLJ16, p. 608] est utilisée afin de prendre en compte l'effet du bloqueur d'ordre zéro dans le modèle de synthèse.

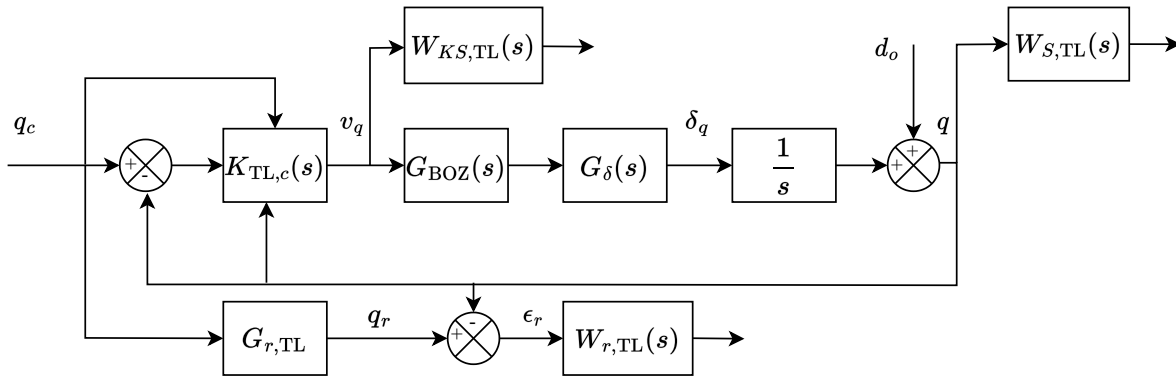


FIGURE 2.28 – Modèle de synthèse pour le réglage du contrôleur externe de tangage et lacet

Dans la figure 2.28 $G_\delta(s)$ la fonction de transfert des actionneurs, $G_{BOZ}(s)$ est la fonction de transfert du bloqueur d'ordre zero approximée par un approximation de Padé du premier ordre :

$$G_{BOZ}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{sT} \approx \frac{-Ts/6 + 1}{Ts/3 + 1} \quad (2.89)$$

Pour faire le lien entre la figure 2.28 et la figure 2.7, on identifie W_1 à $W_{S,TL}$ et W_2 à $W_{KS,TL}$, on a également $\bar{y} = [q_c \quad q]^T$ et $w = q_c$. Le modèle de référence $G_{r,TL}(s)$ reprend la même forme que le modèle de référence de roulis avec $\omega_r = 17.1$ rad/s et $\xi_r = 0.78$. Les gabarits fréquentiels servant au façonnage des fonctions de sensibilité sont décrits par l'équation suivante :

$$W_{KS,TL}(s) = \frac{s + 40}{0.01s + 400} \quad W_{S,TL}(s) = \frac{0.4s^2 + 21s + 292}{s^2 + 0.34s + 0.03} \quad W_{r,TL}(s) = \frac{s + 12}{0.1s + 0.12} \quad (2.90)$$

Le problème \mathcal{H}_∞ pour la synthèse du contrôleur externe de tangage est donc défini ainsi :

$$\|W_{r,TL}(s)T_{q_c \rightarrow \epsilon_r}(s, K_{TL,c})\|_\infty \leq \gamma \quad (2.91a)$$

$$\|W_{S,TL}(s)T_{d_o \rightarrow q}(s, K_{TL,c})\|_\infty \leq \gamma \quad (2.91b)$$

$$\|W_{KS,TL}(s)T_{q_c \rightarrow v_q}(s, K_{TL,c})\|_\infty \leq \gamma \quad (2.91c)$$

De manière analogue à la synthèse du contrôleur externe de roulis, la résolution du problème H_∞ défini par l'équation (2.79) est effectué avec le logiciel Matlab Systune et donne les résultats fréquentiels suivants pour $\gamma = 0.99$:

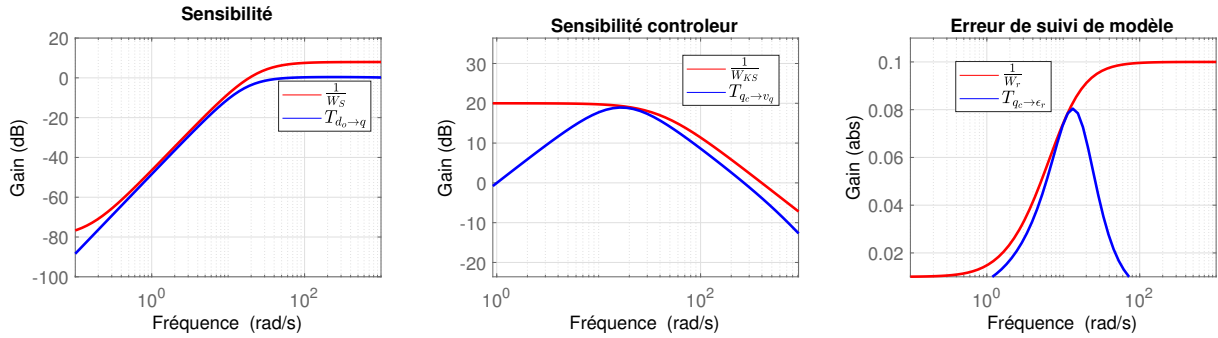


FIGURE 2.29 – Résultats fréquentiels de façonnage de fonctions de sensibilité pour la synthèse du contrôleur externe de tangage et de lacet

L'indice γ obtenu, qui majore les normes H_∞ des fonctions de sensibilité, traduit un problème d'optimisation légèrement sous-contraint notamment par rapport à la fonction de sensibilité. Plus précisément, les trois majorations obtenues sont $[\gamma_{r,TL} \ \gamma_{s,TL} \ \gamma_{KS,TL}]^T = [0.999 \ 0.81 \ 0.999]^T$. Cependant, tous les gabarits fréquentiels imposés ont été respectés. Comme pour la synthèse du contrôleur de roulis, la fonction de sensibilité S est contrainte en basse fréquence garantissant un bon rejet de perturbation additive sur la sortie. Les composantes haute fréquence de la fonction KS sont également réduites et l'erreur par rapport au suivi de modèle de référence est inférieur à 0.09.

La table 2.2 montre les gains obtenus après la résolution du problème d'optimisation (2.91), en utilisant le logiciel Matlab-Systune.

gains	K_{ff}	K_I	K_{qr}
valeurs	-0.01	261.5	30.4

TABLE 2.2 – Gains obtenus pour la synthèse du contrôleur $K_{TL,c}(s)$

où $K_{qr} = K_{y_1}$ et $K_{y_2} = 0$ par rapport à la figure 2.11. Le gain K_{y_2} n'est pas utilisé dans le contrôleur $K_{c,TL}$ car le projectile utilisé ne possède pas de capteurs pour mesurer les accélérations angulaires.

2.6.1.4 Validation de l'autopilote

La validation de l'autopilote de vitesses de tangage et de lacet suit les mêmes étapes de validation que l'autopilote de roulis. Dans les simulations des figures 2.30 à 2.33, les conditions de vol sont constantes tel que $G_{TL} = 25\mathbb{1}_2 \text{ rad/sec}^2$.

Tout d'abord, la figure 2.30 montre la réponse en boucle fermée du contrôleur $K_{TL}(z)$ avec le modèle de synthèse. La figure 2.30 valide le suivi de référence du contrôleur $K_{TL}(z)$ avec le modèle de synthèse, (*i.e.* inversion parfaite). Cette simulation ne permet cependant pas de valider les capacités de découplage du contrôleur car le modèle de synthèse considère que les dynamiques de tangage et de lacet sont parfaitement

découplées.

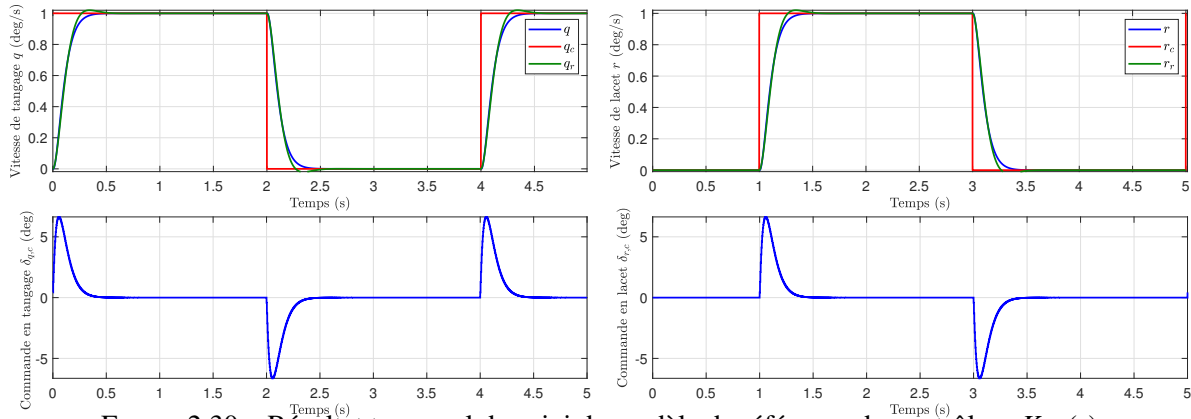


FIGURE 2.30 – Résultat temporel de suivi de modèle de référence du contrôleur $K_{TL}(z)$

Ensuite, la figure 2.31 montre la réponse du système non-linéaire (2.80b) commandé par l'autopilote INDI complet (boucles interne et externe).

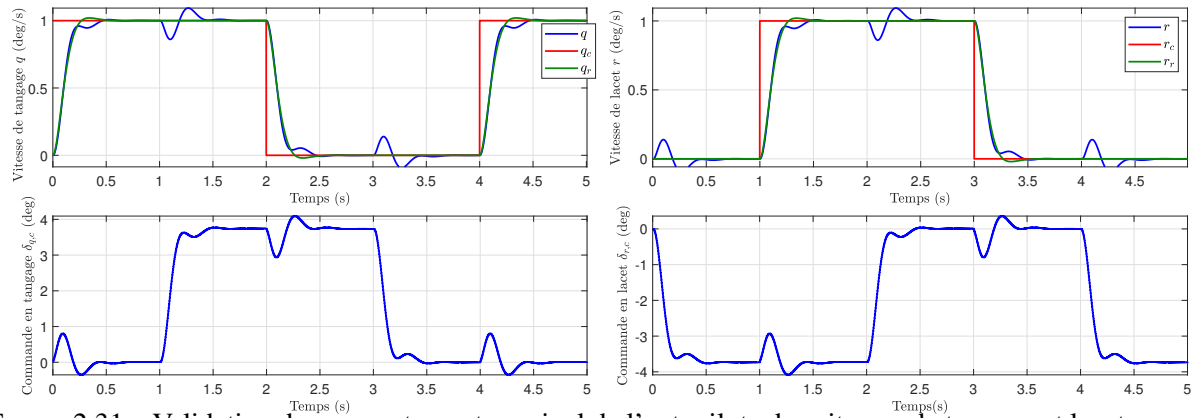


FIGURE 2.31 – Validation du comportement nominal de l'autopilote des vitesses de tangage et lacet avec le modèle non-linéaire

La figure 2.31 montre l'impact des hypothèses utilisées pour la synthèse du contrôleur externe. En effet, la réponse en tangage et en lacet présente des oscillations dues au couplage entre ces deux chaînes. On remarque cependant que les perturbations du couplage sont rejetées asymptotiquement.

Les figures 2.32 et 2.33 montrent le rejet des perturbations sur les sorties et sur les signaux de commandes.

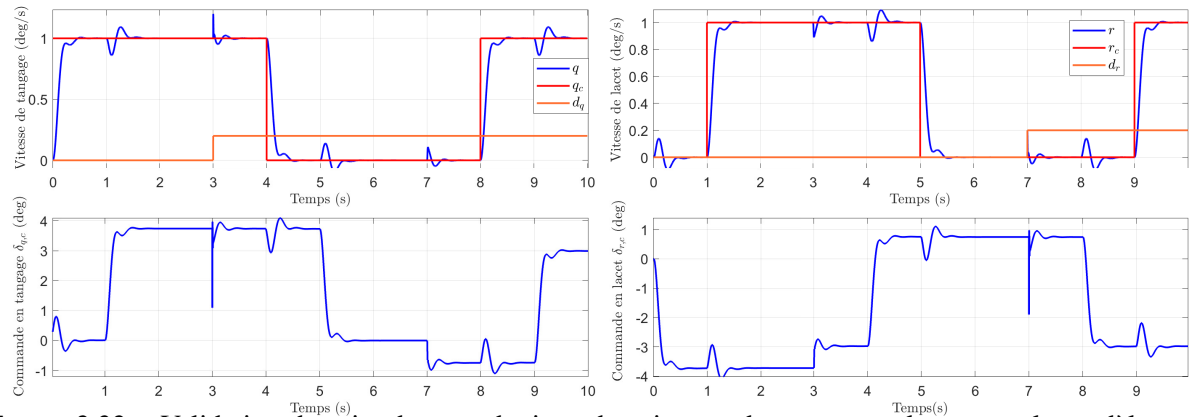


FIGURE 2.32 – Validation du rejet de perturbations des vitesses de tangage et lacet avec le modèle non-linéaire

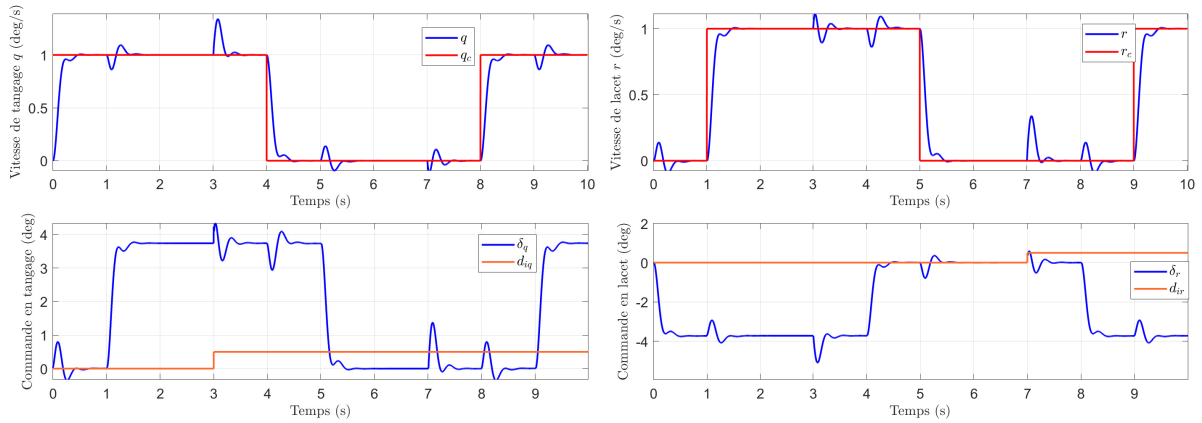


FIGURE 2.33 – Validation du rejet de perturbations sur la commande en vitesse de tangage et de lacet avec le modèle non-linéaire

A cause du couplage entre les deux dynamiques, les perturbations sur la chaîne de tangage affectent également la chaîne de lacet et inversement. Dans tous les cas les perturbations sont rejetées asymptotiquement. Enfin, la figure 2.34 évalue la capacité de l'autopilote de vitesses de tangage et de lacet à fournir une réponse homogène sur une trajectoire de validation.

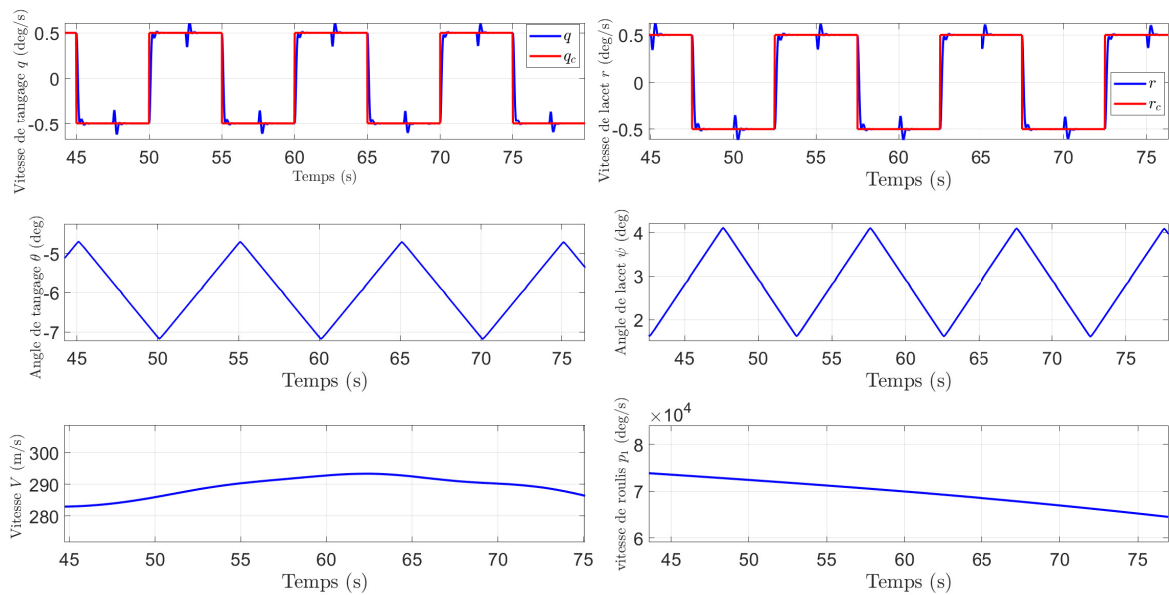


FIGURE 2.34 – Validation du comportement nominal de l'autopilote des vitesses de tangage et de lacet sur une trajectoire de test

Comme pour le roulis, l'objectif est de vérifier que les comportements en boucle fermée des dynamiques de tangage et de lacet sont similaires quel que soit le point de vol. La figure 2.34 montre que le temps de réponse et les oscillations dus au couplage entre les deux chaînes sont globalement similaires le long de la trajectoire de validation avec des paramètres de vol variants.

2.6.2 Inversion de la dynamique lente

La sous-section 2.6.2 traite de la conception de l'autopilote INDI dédié au contrôle de la dynamique des facteurs de charges latéraux du projectile $[n_z \ n_y]^T$ définis par l'équation (1.76). La loi de commande analytique INDI est déterminée en considérant une séparation des échelles de temps parfaite (*i.e.*

$[q_c \ r_c]^\top = [q \ r]^\top$) entre la dynamique lente des facteurs de charge et la dynamique rapide des vitesses de tangage et lacet. De manière analogue à l'étude sur l'impact de la vitesse des actionneurs sur l'inversion des dynamiques de roulis, tangage et lacet, les sous-sections 2.6.2.2 et 2.6.2.4 mettent en évidence l'effet du temps de réponse des dynamiques en boucle fermée des vitesses de tangage et de lacet sur l'inversion dynamique de facteurs de charges.

2.6.2.1 Expression analytique de la commande INDI

L'étude de l'expression analytique de la commande INDI pour l'autopilote de facteurs de charge nécessite de se confronter à une difficulté supplémentaire par rapport à celle des autopilotes de roulis, de tangage et de lacet. En effet, pour les autopilotes INDI précédents, les dynamiques étaient déjà définies grâce aux équations de la dynamique de vol, ce qui n'est pas le cas pour les facteurs de charges. Plus précisément, les équations de la dynamique de vol du projectile se basent sur les équations de Newton et donc définissent une relation entre les accélérations et les forces extérieures. Ainsi, pour pouvoir définir une loi de commande INDI pour la dynamique des facteurs de charge (qui dépendent des accélérations du projectile), il faut tout d'abord définir les équations qui régissent les variations des facteurs de charges $[\dot{n}_z \ \dot{n}_y]^\top$ dont la dynamique est donnée par

$$\begin{bmatrix} \dot{n}_y \\ \dot{n}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{mg} \left(\begin{bmatrix} \frac{dY}{dt} \\ \frac{d(Z-m^B g \cos \theta)}{dt} \end{bmatrix} \right) \quad (2.92)$$

L'expression analytique des facteurs de charges $[n_z \ n_y]^\top$ inclut beaucoup de paramètres variant dans le temps, ce qui complexifie le développement analytique de $[\dot{n}_z \ \dot{n}_y]^\top$. Ainsi, pour réduire la complexité des équations, une hypothèse sur des petits angles aérodynamiques simplifiant les expressions trigonométriques est considérée (*i.e* $\cos x = 1 - x$ et $\sin x = x$). Également, la force d'amortissement est considérée comme négligeable, sa contribution aux efforts étant minime. Ainsi, l'expression simplifiée des facteurs de charge est donnée par :

$$n_z \approx \frac{\bar{q}S}{gm^B} \left(-C_{N_\delta}(\alpha + \delta_q) - \frac{p_1 d}{2V} C_{Y_{p\alpha}} \beta + C_{N_\alpha} \alpha (1 - \beta) \right) \quad (2.93a)$$

$$n_y \approx \frac{\bar{q}S}{gm^B} \left(C_{N_\delta}(\delta_r - \beta) + \frac{p_1 d}{2V} C_{Y_{p\alpha}} \alpha (1 - \beta) - C_{N_\alpha} \beta \right) \quad (2.93b)$$

Dans les équations (2.93a) et (2.93b), les paramètres variants dans le temps sont : $\bar{q}, \alpha, \beta, \delta_q, \delta_r, V, p_1, C_{N_\delta}, C_{Y_{p\alpha}}$ et C_{N_α} . Ainsi, l'expression analytique de \dot{n}_z et \dot{n}_y est donné par

$$\begin{aligned} \dot{n}_z \approx & -\frac{\dot{\bar{q}}S}{gm^B} \left(C_{N_\delta}(\dot{\alpha} + \dot{\delta}_q) + \dot{C}_{N_\delta}(\alpha + \delta_q) - C_{N_\alpha}(\beta - 1)\dot{\alpha} - \dot{C}_{N_\alpha}(\beta - 1)\alpha \right. \\ & \left. - C_{N_\alpha} \alpha \dot{\beta} + \frac{dp_1}{2V} C_{Y_{p\alpha}} \dot{\beta} + \frac{dp_1}{2V} C_{Y_{p\alpha}} \beta + \frac{dp_1}{2V} \dot{C}_{Y_{p\alpha}} \beta - dp_1 C_{Y_{p\alpha}} \frac{\dot{V}}{4V^2} \right) \end{aligned} \quad (2.94a)$$

$$\begin{aligned} \dot{n}_y \approx & -\frac{\dot{\bar{q}}S}{gm^B} \left(C_{N_\delta}(\alpha + \delta_q) - C_{N_\alpha}(\beta - 1) + \frac{dp_1}{2V} C_{Y_{p\alpha}} \beta \right) \\ & -\frac{\dot{\bar{q}}S}{gm^B} \left(C_{N_\delta}(\dot{\beta} - \dot{\delta}_r) + \dot{C}_{N_\delta}(\beta - 1) + C_{N_\alpha} \dot{\beta} + \beta \dot{C}_{N_\alpha} + \frac{dp_1}{2V} C_{Y_{p\alpha}} \alpha \dot{\beta} \right. \\ & \left. + \frac{dp_1}{2V} C_{Y_{p\alpha}} (\beta - 1) + \frac{dp_1}{2V} C_{Y_{p\alpha}} (\beta - 1)\dot{\alpha} + \frac{dp_1}{2V} \dot{C}_{Y_{p\alpha}} (\beta - 1) - dp_1 C_{Y_{p\alpha}} (\beta - 1)\alpha \frac{\dot{V}}{4V^2} \right) \\ & -\frac{\dot{q}S}{gm^B} \left(C_{N_\delta}(\beta - 1) + C_{N_\alpha} \beta + \frac{dp_1}{2V} C_{Y_{p\alpha}} \alpha (\beta - 1) \right) \end{aligned} \quad (2.94b)$$

Pour faire apparaître les vitesses de tangage et de lacet q et r dans les expressions de \dot{n}_z et \dot{n}_y , les expressions analytiques de $\dot{\alpha}$ et de $\dot{\beta}$ sont utilisées en considérant également des petits angles aérodynamiques :

$$\dot{\alpha} \approx q + r((1 - \alpha) \tan \theta - \alpha) \frac{\beta}{1 - \beta} + \frac{1}{m^B V} \left(\frac{-\alpha}{1 - \beta} X + \frac{1 - \alpha}{1 - \beta} Z \right) \quad (2.95a)$$

$$\dot{\beta} \approx -r(1 - \alpha + \alpha \tan \theta) + \frac{1}{m^B V} (-\beta(1 - \alpha)X + (1 - \beta)Y - \alpha\beta Z) \quad (2.95b)$$

En injectant les équations (2.95a) et (2.95b) dans les équations (2.94a) et (2.94b), un système affine en q et r est obtenu :

$$\begin{bmatrix} \dot{n}_z \\ \dot{n}_y \end{bmatrix} = f_{FC} + G_{FC} \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

avec

$$G_{FC} = \frac{\bar{q}S}{gm^B} \begin{bmatrix} -C_{N_\delta} - C_{N_\alpha}(1 - \beta) & (\alpha\beta + \tan \theta(\alpha - 1)\beta) \left(C_{N_\alpha} - \frac{C_{N_\delta}}{\beta - 1} \right) + (\tan \theta\alpha - \alpha + 1)(-C_{N_\alpha}\alpha + \frac{p_1 d}{2V} C_{Y_{p_\alpha}}) \\ \frac{p_1 d}{2V} C_{Y_{p_\alpha}}(1 - \beta) & (\tan \theta\alpha - \alpha + 1)(C_{N_\alpha} + C_{N_\delta} + \frac{p_1 d}{2V} C_{Y_{p_\alpha}}\alpha) - \frac{p_1 d}{2V} C_{Y_{p_\alpha}}\beta(\alpha + \tan \theta(\alpha - 1)) \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Contrairement aux lois de commande en roulis, en tangage et en lacet, la matrice d'autorité de commande liée à la dynamique des facteurs de charge n'est pas diagonale ou scalaire, donc l'étude de son inversibilité est moins triviale. La matrice G_{FC} est inversible si et seulement si son déterminant $|G_{FC}|$ n'est jamais nul

$$\begin{aligned} |G_{FC}| &= G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} \\ &= \frac{-\bar{q}^2 S^2 (\tan \theta\alpha - \alpha + 1)}{g^2 m^2} \left(C_{N_\alpha}^2 (1 - \beta) + C_{N_\delta}^2 + C_{Y_{p_\alpha}}^2 \frac{d^2 p_1^2}{4V^2} (1 - \beta) + C_{N_\delta} C_{N_\alpha} (2 - \beta) + C_{N_\delta} C_{Y_{p_\alpha}} \frac{d p_1}{2V} \alpha \right) \end{aligned} \quad (2.98)$$

Il est possible de montrer que $(\tan \theta\alpha - \alpha + 1) \neq 0 \implies |G_{FC}| \neq 0$ car le facteur de droite n'admet aucune racine en α et β et $C_{Y_{p_\alpha}}$ et les autres paramètres ne sont nuls que si la vitesse du projectile est nulle. Ainsi, la condition inversibilité de G_{FC} est donnée par :

$$\alpha \neq \frac{-1}{\tan \theta - 1} \quad (2.99)$$

L'étude de l'enveloppe de vol et de la condition sur α donné par l'équation (2.99) permet de conclure que les conditions pour que la matrice G_{LF} ne soit plus inversible ne sont pas réalisables. En effet, le projectile étudié étant gyrostabilisé, il est par conséquent peu manœuvrant. Il possède une plage d'angle d'attaque très réduite (*i.e* $\alpha \in [-10; 10]$ degrés). Or, l'équation (2.99) ne donne des valeurs de α dans cette plage de valeurs que pour des valeurs de $\theta \in [-90; -70] \cup [80; 90]$ degrés. L'angle d'attaque du projectile étant maximale à l'apogée quand $\theta \approx 0$ degré, il est raisonnable de considérer que, pour les conditions de vol standard, la matrice G_{FC} sera inversible.

Enfin, de manière analogue à l'étude du degré relatif de la dynamique des vitesses de tangage et lacet, on peut écrire

$$\begin{aligned} L_g L_f^{(0)} h(x) &= L_g h(x) = G_{LF} \neq 0 \\ L_g L_f^{(\rho-1)} h(x) &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.100a)$$

avec $x = [n_z \quad n_y]^\top$ et $h(x) = x$. Ce qui donne un degré relatif $\rho = 1 = n$. La dynamique des facteurs de charge est donc linéarisable en entrées/états avec aucune dynamique interne. Finalement la loi de commande INDI s'écrit

$$\begin{bmatrix} q_c[k] \\ r_c[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_c[k-1] \\ r_c[k-1] \end{bmatrix} + G_{FC}^{-1} \begin{bmatrix} v_z[k] - \frac{n_z[k] - n_z[k-1]}{T} \\ v_y[k] - \frac{n_y[k] - n_y[k-1]}{T} \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

où $v_z[k]$ et $v_y[k]$ sont les dynamiques de facteurs de charge désirées, imposées par le contrôleur externe.

2.6.2.2 Analyse du modèle inverse

L'étude du modèle inverse de la dynamique de facteurs de charge nécessite des étapes d'analyse supplémentaires par rapport au roulis, au tangage et au lacet à cause des hypothèses faites sur la séparation des échelles de temps entre la dynamique des facteurs de charge et la dynamique des vitesses de tangage et de lacet. En effet, une séparation des échelles de temps parfaite implique un découplage entre la dynamique rapide et la dynamique lente, ce qui n'est pas le cas pour la dynamique du projectile car les canards ont un effet sur la dynamique de tangage et de lacet (moment de contrôle $[m_B^C]^{B1'2}$) et sur la dynamique des facteurs de charge (force de contrôle $[f_B^C]^{B1'}$). Ainsi, plusieurs simulations sont effectuées pour vérifier la validité de l'équation (2.101), et pour mettre en évidence l'impact de la dynamique rapide en boucle fermée sur la linéarisation de la dynamique lente et, enfin, l'interaction entre les dynamiques rapide et lente.

■ Séparation parfaite des échelles de temps :

La figure 2.35 montre l'architecture considérée pour l'analyse de la linéarisation de la dynamique de facteurs de charge avec séparation parfaite des échelles de temps.

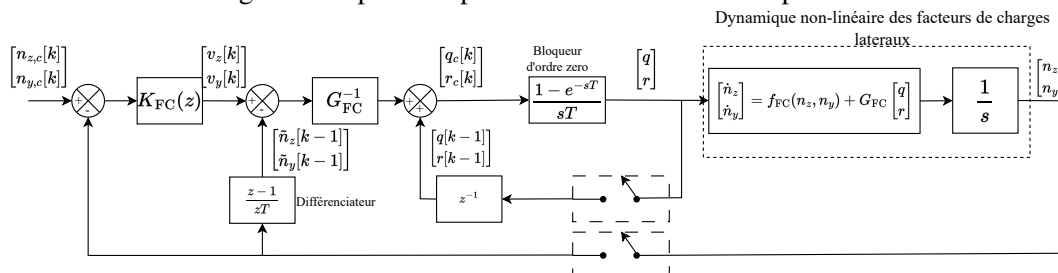


FIGURE 2.35 – Architecture de l'autopilote de facteur de charge avec séparation parfaite des échelles de temps

Dans ce cas, la boucle de commande des vitesses de tangage et lacet est considérée instantanée. La figure 2.36 montre que dans ces conditions le transfert entre $[v_z \quad v_y]^\top$ et $[n_z \quad n_y]^\top$ est un intégrateur pur. Ces conditions de simulations idéales permettent de valider l'expression analytique de G_{FC} . Les petites perturbations observées à $t=2,5$ s, $t=5$ s et $t=7,5$ s, sont des résidus de couplage dus à la fréquence d'échantillonnage.

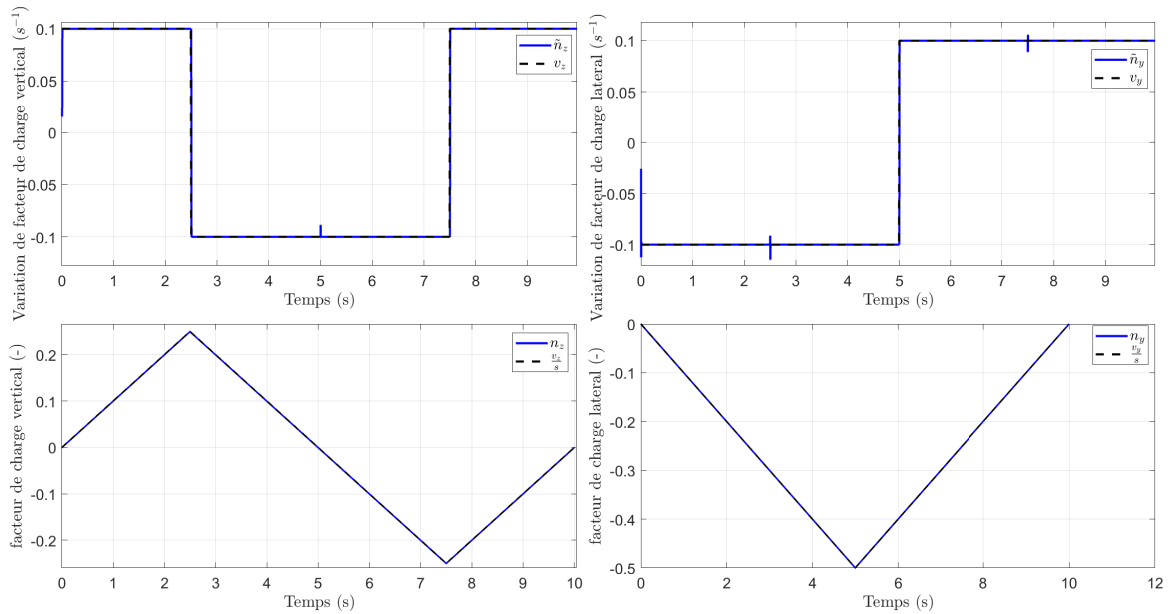


FIGURE 2.36 – Simulation de l'inversion de la dynamique de facteurs de charge avec séparation parfaite des échelles de temps

■ Séparation des échelles de temps avec modélisation de la dynamique rapide :

Pour mettre en évidence l'impact du temps de réponse de la dynamique rapide sur la dynamique lente, le comportement en boucle fermée des vitesses de tangage et de lacet est modélisée par l'équation (2.102).

$$\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{r,TL}(s) & 0 \\ 0 & G_{r,TL}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_c \\ r_c \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

La figure 2.37 montre l'architecture obtenue.

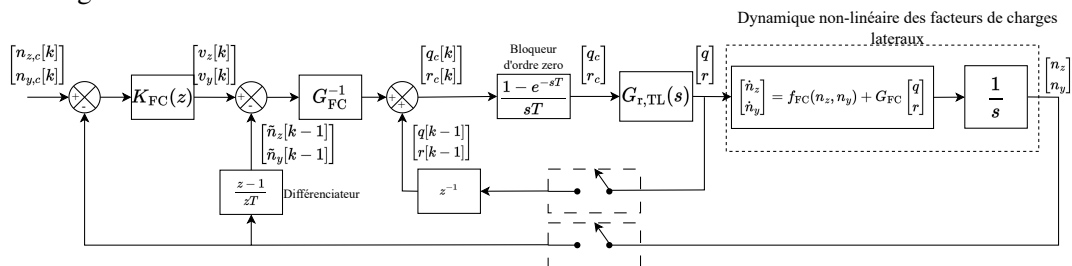


FIGURE 2.37 – Architecture de l'autopilote de facteur de charges avec séparation des échelles de temps et modélisation de la dynamique rapide

La figure 2.38 montre que le temps de réponse de la boucle de commande de la dynamique lente impacte la linéarisation de la dynamique rapide en créant du dépassement et un temps de réponse plus long. Les perturbations de couplage sont également accentuées par rapport à la simulation de la figure 2.36.

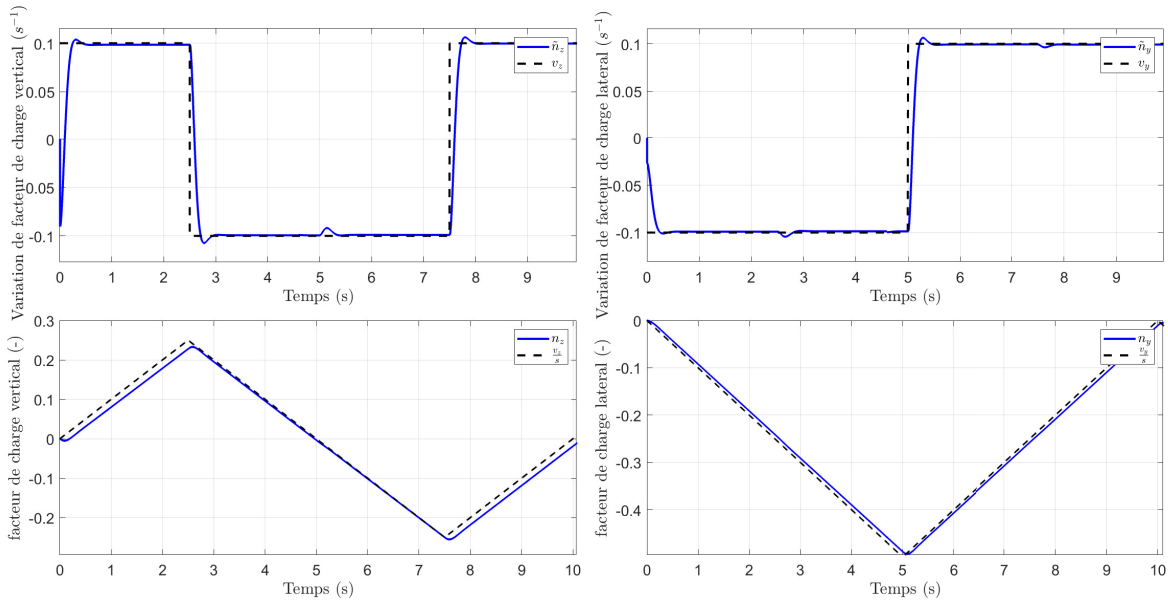


FIGURE 2.38 – Simulation de l’inversion de la dynamique de facteurs de charge avec séparation des échelles de temps et modélisation de la dynamique rapide

■ Dynamique réelle des facteurs de charge :

En ne faisant aucune hypothèse de séparation des échelles de temps et en considérant la boucle de commande réelle de tangage et de lacet (figure 2.39), on remarque, sur la simulation en figure 2.40, que les variations des facteurs de charges latéraux $[\tilde{n}_z \ \tilde{n}_y]^T$ subissent du couplage entre eux. Ce phénomène est dû à la fois au non-découplage total des chaînes de vitesses de tangage et de lacet mais également aux interactions entre la dynamique lente et rapide. En effet, les efforts des canards ont une influence sur la dynamique des vitesses de tangage et de lacet, mais aussi sur la dynamique des facteurs de charge.

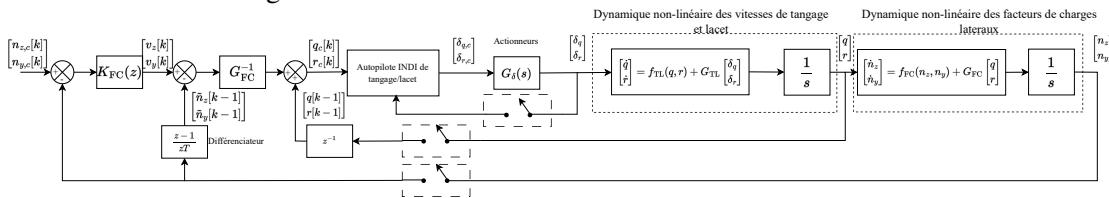


FIGURE 2.39 – Architecture de l’autopilote de facteur de charge sans séparations des échelles de temps

La dynamique de facteurs de charge étant affine en la commande, en procédant de manière analogue à l’équation (2.88), il est possible de modéliser le modèle inverse de la dynamique de facteurs de charge.

$$\begin{bmatrix} \frac{n_z[k]-n_z[k-1]}{T} \\ \frac{n_y[k]-n_y[k-1]}{T} \end{bmatrix} = \overbrace{G_{FC} \begin{bmatrix} (BOZG_{r,TL}[k-1]-1)q_c[k] \\ (BOZG_{r,TL}[k-1]-1)r_c[k] \end{bmatrix}}^{\text{erreur d'inversion}} + \begin{bmatrix} v_z[k] \\ v_y[k] \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

L’équation (2.103) montre que comme pour l’inversion des vitesses de tangage et de lacet, l’inversion des facteurs de charges est dégradée par le temps d’échantillonnage et la dynamique rapide qui agit comme un actionneur pour la dynamique lente. On peut voir sur la figure 2.40 que le couplage entre les facteurs de charge est moins bien modélisé à t=2.5 s et t=5 s, cela est dû au fait que la fonction $G_{r,TL}$ ne modélise pas le couplage entre les chaînes de tangage et de lacet. Comme cette erreur d’inversion dépend des conditions de vol, il est difficile de la prendre en compte dans le réglage du contrôleur externe. La même approche que pour la dynamique rapide est donc employée en utilisant

les mêmes hypothèse de découplage et de symétrie entre les chaînes de facteur de charge verticaux et latéraux.

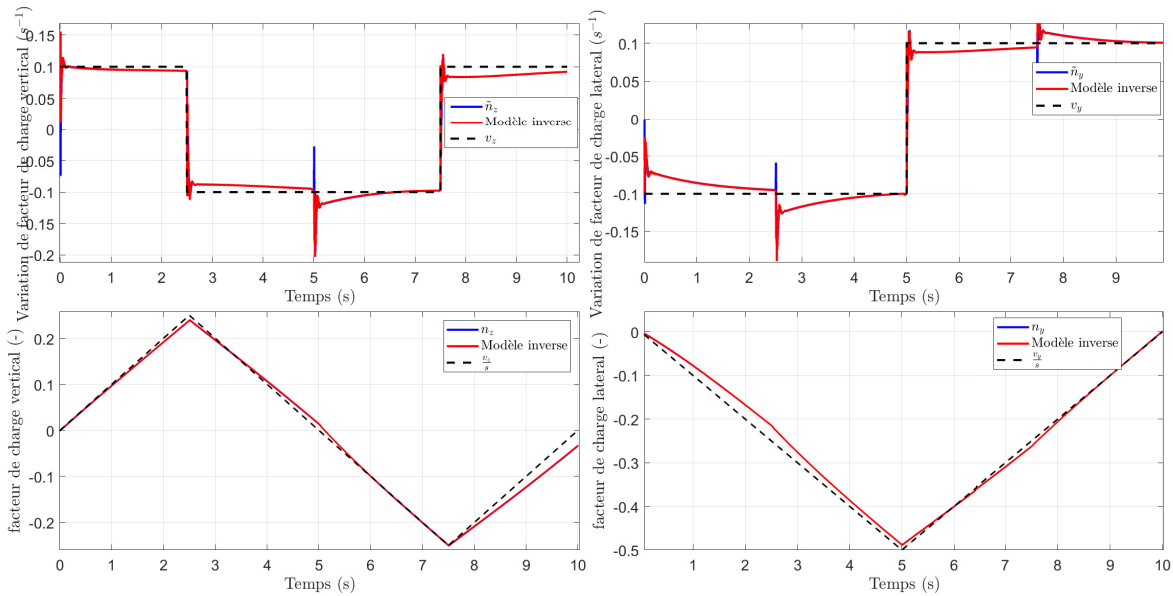


FIGURE 2.40 – Simulation et comparaison de l'expression analytique du modèle inverse de facteurs de charge avec un modèle Simulink

2.6.2.3 Réglage du contrôleur externe

Le réglage du contrôleur externe de facteur de charge s'effectue avec un modèle de synthèse ayant la même architecture que celui de la synthèse du contrôleur pour le tangage et le lacet où la fonction de transfert des actionneurs $G_\delta(s)$ est remplacée par le modèle de référence de la dynamique des vitesses de tangage et de lacet en boucle fermée $G_{r,TL}$.

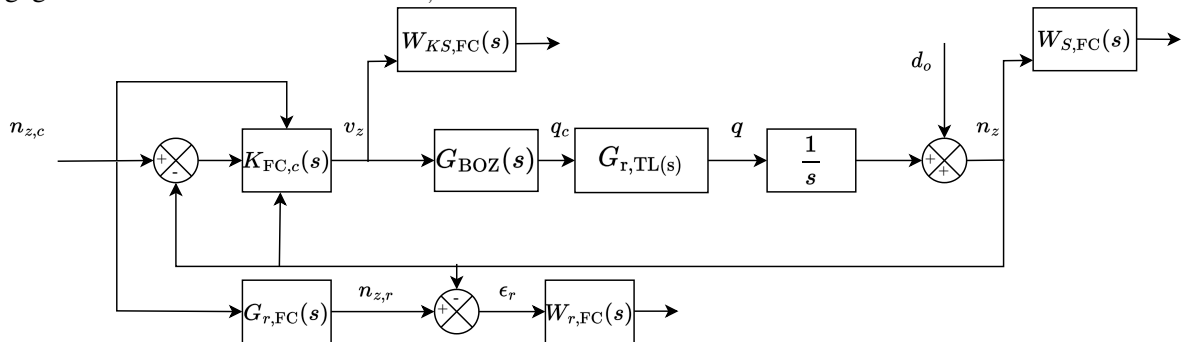


FIGURE 2.41 – Modèle de synthèse pour le réglage du contrôleur externe de facteur de charge

Dans la figure 2.41 la fonction de transfert $G_{r,TL}(s)$ donnée par l'équation (2.77) représente la dynamique en boucle fermée des vitesses de tangage et de lacet et $G_{r,FC}(s)$ est le modèle de référence à suivre donné par :

$$G_{r,FC}(s) = \frac{\omega_{r,FC}}{s^2 + 2s\xi_{r,FC}\omega_{r,FC} + \omega_{r,FC}^2} \quad (2.104)$$

avec $\omega_{r,FC} = 3.42$ rad/s et $\xi_{r,FC} = 0.78$ ce qui correspond à un temps de stabilisation à 2% de 1.5 s et 2% de dépassement maximum. Pour faire le lien entre la figure 2.41 et la figure 2.7, on identifie W_1 à $W_{S,FC}$

et W_2 à $W_{KS,FC}$, on a également $\bar{y} = [n_{z,c} \quad n_z]^\top$ et $w = n_{z,c}$.

Les gabarits fréquentiels servant au façonnage des fonctions de sensibilité sont décrits par l'équation suivante :

$$W_{KS,FC}(s) = \frac{s + 6.7}{0.63s + 19} \quad W_{S,FC}(s) = \frac{0.33s^2 + 2.793s + 5.849}{s^2 + 0.4837s + 0.05849} \quad W_{r,FC}(s) = \frac{s + 2}{0.11s + 0.2} \quad (2.105)$$

Le problème \mathcal{H}_∞ pour la synthèse du contrôleur externe de facteurs de charge est donc défini ainsi :

$$\|W_{r,FC}(s)T_{n_{z,c} \rightarrow \epsilon_r}(s, K_{FC,c})\|_\infty \leq \gamma \quad (2.106a)$$

$$\|W_{S,FC}(s)T_{d_o \rightarrow n_z}(s, K_{FC,c})\|_\infty \leq \gamma \quad (2.106b)$$

$$\|W_{KS,FC}(s)T_{n_{z,c} \rightarrow v_z}(s, K_{FC,c})\|_\infty \leq \gamma \quad (2.106c)$$

avec pour objectif d'avoir $\gamma < 1$. La figure 2.42 montre les résultats fréquentiels obtenus et les gabarits fréquentiels décrits par l'équation (2.105). L'indice $\gamma = 0.99$ obtenu confirme que toutes les contraintes fréquentielles imposées ont été respectées. Plus particulièrement on a $[\gamma_{r,FC} \quad \gamma_{s,FC} \quad \gamma_{KS,FC}]^\top = [0.99 \quad 0.94 \quad 0.999]^\top$. Le gabarit fréquentiel $W_{KS,FC}(s)$ est choisi pour limiter l'action haute fréquence du contrôleur afin que celui-ci génère des vitesses de tangage et de lacet désirées $[q_c \quad r_c]^\top$ pouvant être suivies par l'étage d'inversion rapide.

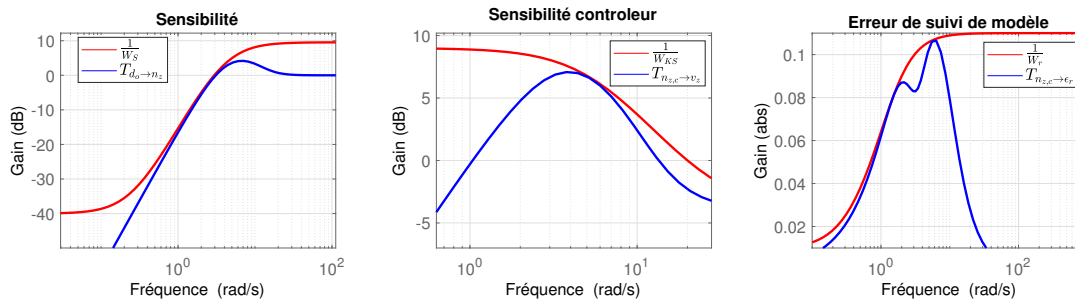


FIGURE 2.42 – Résultats fréquentiels du réglage du contrôleur de facteur de charge

La table 2.3 montre les gains obtenus après la résolution du problème d'optimisation (2.106), en utilisant le logiciel MatLab-Systune :

gains	K_{ff}	K_I	$K_{n_{zy}}$
valeurs	0.64	6.44	4.01

TABLE 2.3 – Gains obtenus pour la synthèse du contrôleur $K_{FC,c}(s)$

où $K_{n_{zy}} = K_{y_1}$ et $K_{y_2} = 0$ par rapport à la figure 2.11. De la même manière que pour le contrôleur de tangage et de lacet, le gain K_{y_2} n'est pas utilisé dans le contrôleur $K_{c,FC}$ car le projectile utilisé ne possède pas de capteurs pour mesurer les variations de facteurs de charge.

2.6.2.4 Validation de l'autopilote

De manière analogue à l'analyse du modèle inverse de la dynamique de facteurs de charge dans la section 2.6.2.2, les performances nominales en boucle fermée de l'autopilote de facteur de charge sont validés en simulation avec plusieurs modèles dynamiques.

La figure 2.43 montre la réponse en boucle fermée des chaînes de facteurs de charge latéral et vertical avec uniquement le contrôleur externe $K_{FC}(z)$ et le modèle utilisé pour la synthèse.

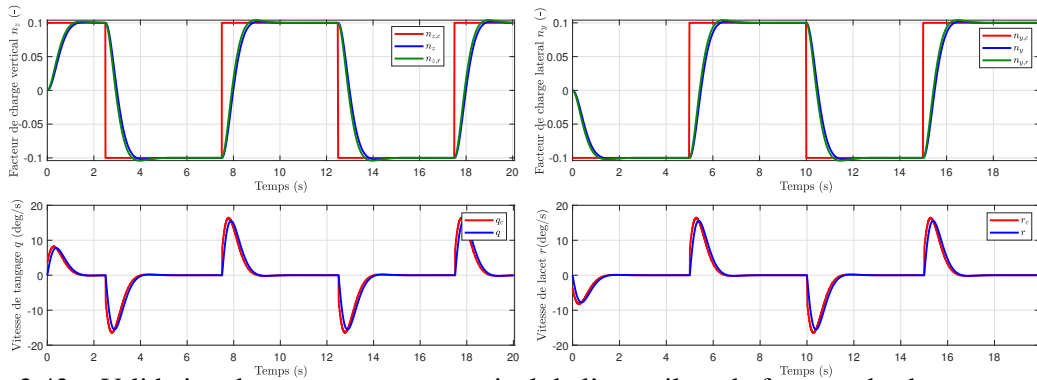


FIGURE 2.43 – Validation du comportement nominal de l'autopilote de facteurs de charge avec le modèle de synthèse

On note un bon suivi de modèle de référence et aucun couplage entre les chaînes car le modèle de synthèse est découplé. La simulation en figure 2.44 se rapproche plus du cas réel, l'autopilote INDI de facteur de charge complet est simulé avec le modèle non-linéaire respectant la séparation des échelles de temps dont l'architecture est détaillée par la figure 2.37.

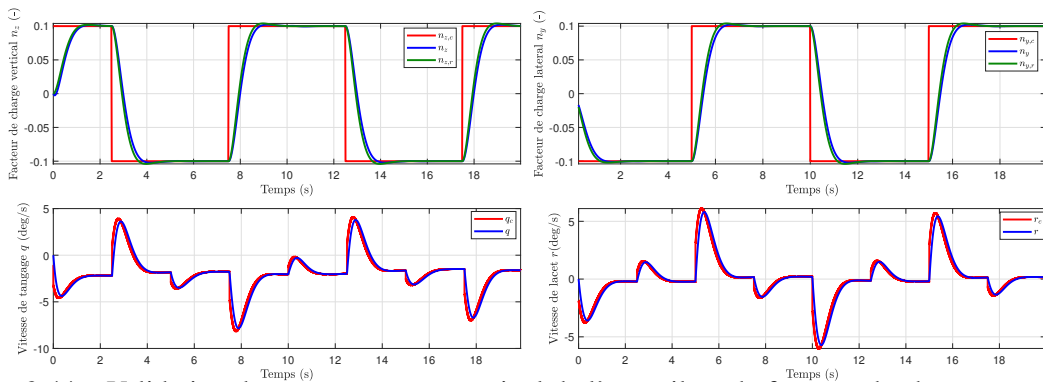


FIGURE 2.44 – Validation du comportement nominal de l'autopilote de facteurs de charge avec le modèle nonlinéaire et la séparation des échelles de temps entre les dynamiques de tangage, de lacet et de facteurs de charge

On remarque que le suivi de modèle de référence est tout aussi satisfaisant que pour le modèle de synthèse et un découplage presque parfait.

La figure 2.45 montre la simulation de l'autopilote INDI complet avec la dynamique nonlinéaire de facteurs de charge.

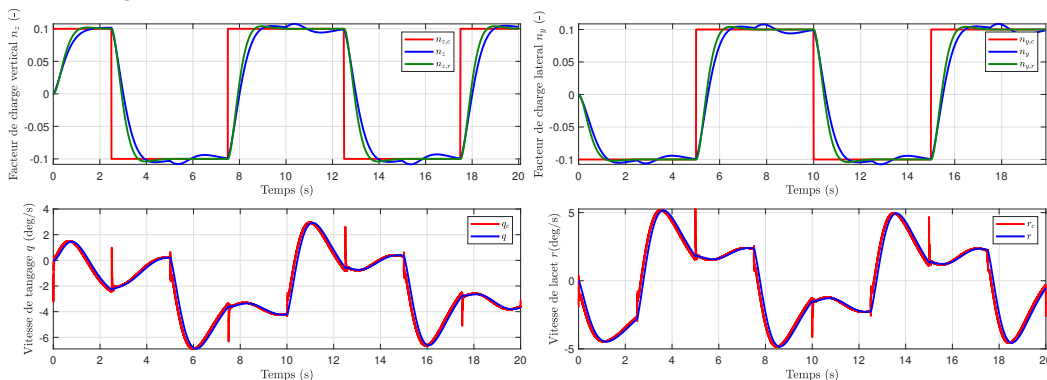


FIGURE 2.45 – Validation du comportement nominal de l'autopilote de facteurs de charge avec le modèle non-linéaire sans séparation des échelles de temps

On remarque que le suivi de référence est moins bon avec également un couplage plus important.

Cette dégradation est due aux hypothèses fortes de linéarisation et de découplage faites lors de la synthèse du contrôleur externe. Les figures 2.46 et 2.47 montrent des simulations non-linéaires avec perturbations sur les facteurs de charge $[n_z \ n_z]^T$ et sur les vitesses de tangage et de lacet $[q \ r]^T$.

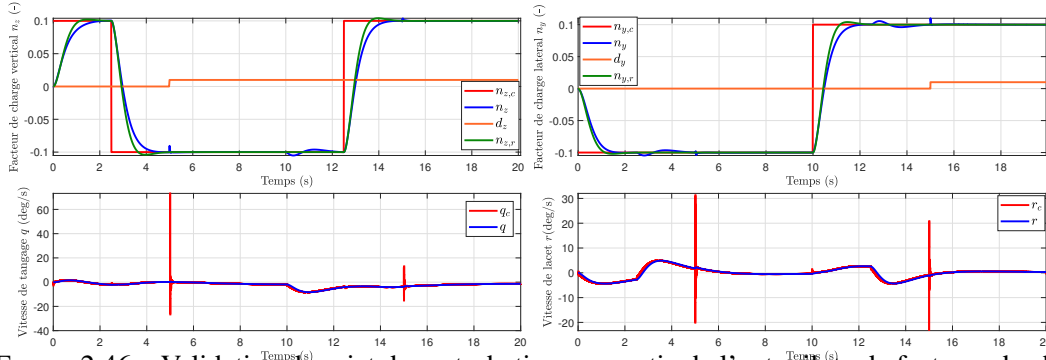


FIGURE 2.46 – Validation du rejet de perturbations en sortie de l'autopilote de facteurs de charge

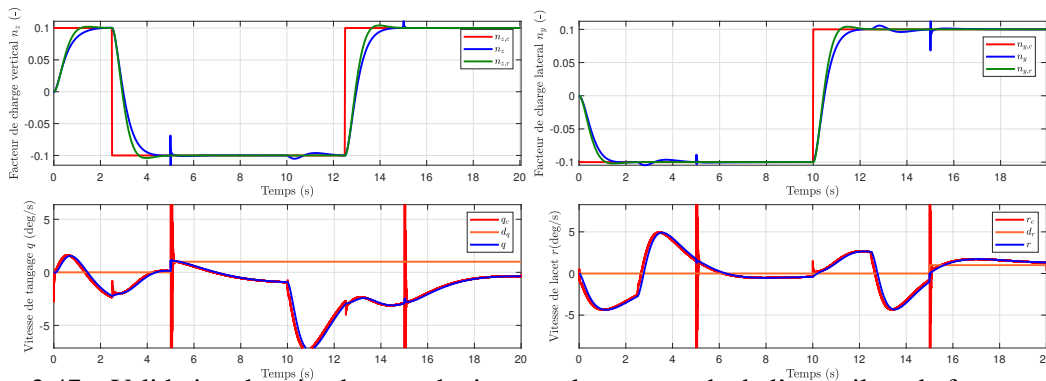


FIGURE 2.47 – Validation du rejet de perturbations sur la commande de l'autopilote de facteurs de charge

Comme pour les simulations en boucle fermée des vitesses de tangage et lacet, les perturbations additives se transmettent entre les deux chaînes. Même si les perturbations sont rejetées asymptotiquement, elles affectent les vitesses de tangage et de lacet commandées $[q_c \ r_c]^T$ (i.e pic à $t = 5$ secondes sur la figure 2.46). Enfin, la figure 2.48 montre la simulation des dynamiques de facteurs de charge en boucle fermée sur une trajectoire de test.

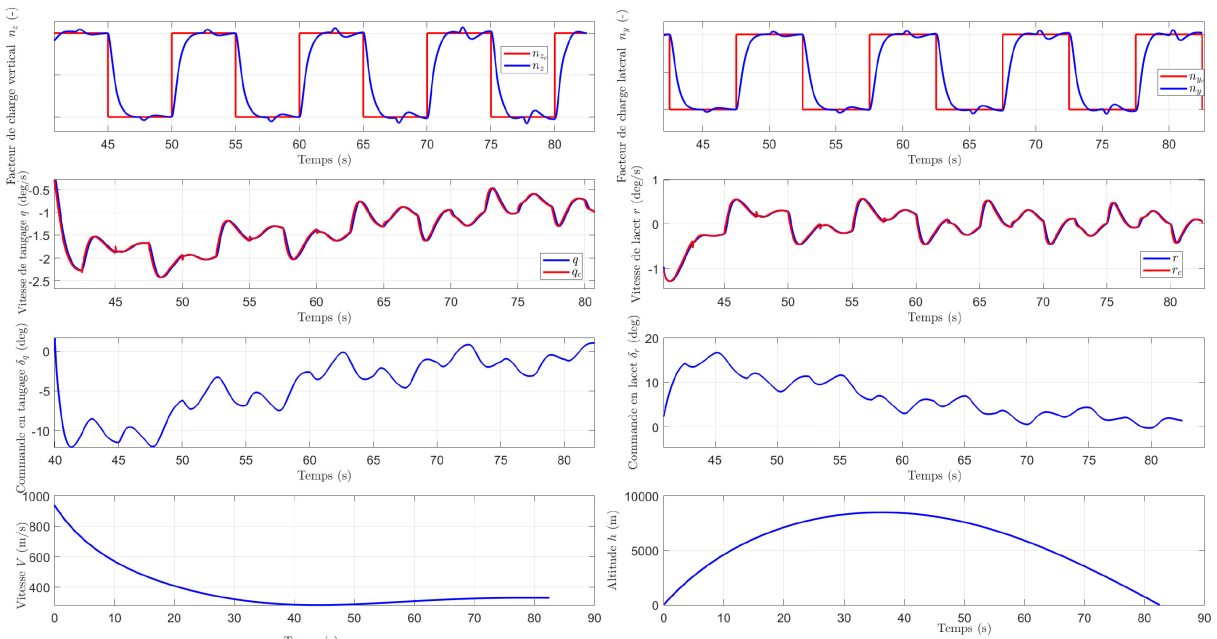


FIGURE 2.48 – Validation du comportement nominale de l'autopilote de facteur de charge sur une trajectoire de test

Le suivi de référence pour les vitesses de tangage et de lacet est très satisfaisant, mais on remarque un couplage encore important sur les facteurs de charge. Ce défaut peut être relativisé car les consignes en créneaux utilisées sur la simulation ne sont pas employées dans des scénarios réalistes pour projectiles guidés gyro-stabilisés. Ce genre de manœuvre agressive demande de la manœuvrabilité que ne possède pas le projectile étudié. C'est pourquoi la section 2.7 traite de la validation de l'autopilote de facteurs de charge dans le cadre d'un scénario de trajectoire guidée réaliste avec l'implémentation d'une loi de guidage.

2.7 Simulations non-linéaires et trajectoires guidées

L'étape finale de la validation de l'autopilote de facteurs de charge s'inscrit dans un scénario de trajectoires guidées. Dans cette section, le principe de la loi de guidage implémenté est tout d'abord détaillé puis une simulation de trajectoires guidées montre les performances nominales de l'autopilote avec la loi de guidage implémentée.

2.7.1 Loi de guidage

La loi de guidage utilisée est une loi de guidage ZEM (Zero Effort Miss) [LSLT18]. Son principe est d'utiliser la différence entre la prédiction du point d'impact sans action des canards et les coordonnées de la cible. Les écarts de distance longitudinal ZEM_x et latéral ZEM_y à corriger sont donnés par [Zar12] :

$$ZEM_x = x(t_{go}) - x_t \quad (2.107a)$$

$$ZEM_y = y(t_{go}) - y_t \quad (2.107b)$$

où $x(t_{go})$ et $y(t_{go})$ sont les coordonnées estimées du point d'impact, calculées en utilisant des méthodes de prédiction de point d'impact [FCC11] et où x_t et où y_t sont les coordonnées de la cible. L'accélération que doit subir le projectile pour corriger sa trajectoire est alors donnée par

$$a_{go} = k_g \begin{bmatrix} -ZEM_x & -ZEM_y & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.108)$$

où k_g est un gain dépendant du temps de vol restant t_{go} et du gain de navigation N comme suit

$$k_g = \frac{N}{t_{go}^2} \quad (2.109)$$

L'équation (2.108) produit une accélération désirée avec une composante longitudinale non nulle, or le projectile étudié ne possède aucun système de propulsion et les canards n'ont pas d'autorité de commande dans cette direction. Par conséquent, l'accélération désirée est reformulée pour avoir uniquement des composantes latérales et verticales comme suit

$$a_{go} = \begin{cases} k_g \begin{bmatrix} 0 & -ZEM_y & -ZEM_x \end{bmatrix}^T & \text{si } \theta_0 > \frac{\pi}{4} \text{ et } \gamma > 0 \\ k_g \begin{bmatrix} 0 & -ZEM_y & +ZEM_x \end{bmatrix}^T & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.110)$$

Les facteurs de charge désirés utilisés comme consigne par l'autopilote sont donnés par

$$\begin{bmatrix} n_{z,c} \\ n_{y,c} \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} a_{go,z} \\ a_{go,y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_z \\ n_y \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

2.7.2 Simulations de trajectoires guidées

La simulation montrée par les figures 2.49 et 2.50 représente un scénario typique de correction de trajectoire à longue portée. Les paramètres initiaux de simulation sont donnés par le tableau suivant :

paramètres	valeurs
V_0	939 m/s
θ_0	42 deg
p_{1_0}	257 Hz

TABLE 2.4 – Conditions initiales pour la simulation de trajectoire guidée

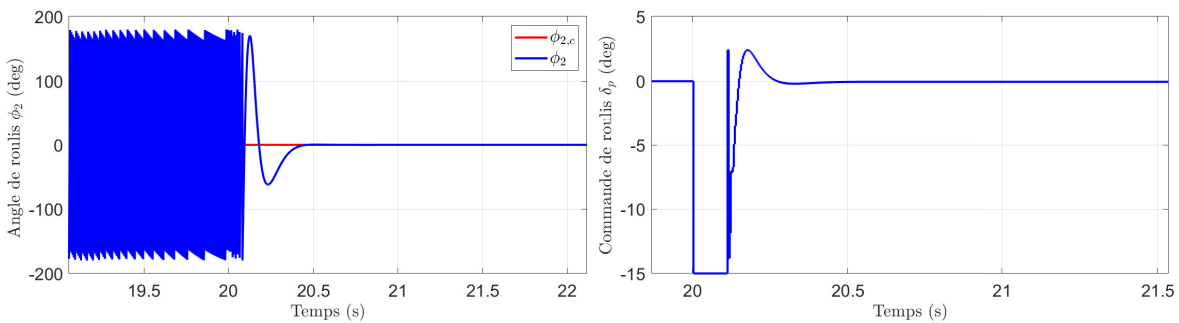


FIGURE 2.49 – Stabilisation de l'angle de roulis dans un scénario de trajectoire guidée

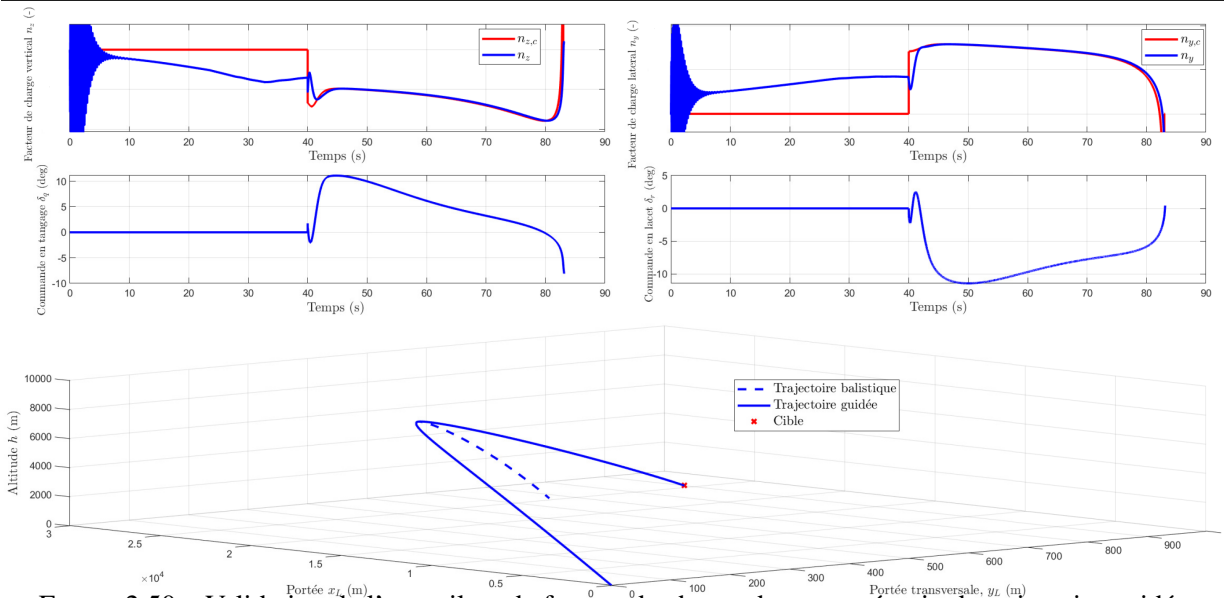


FIGURE 2.50 – Validation de l'autopilote de facteur de charge dans un scénario de trajectoire guidée

Après stabilisation de l'angle de roulis de la FCT ϕ_2 à $t = 20$ s (figure 2.49), l'autopilote de facteurs de charge est enclenché pendant la phase de vol descendante à $t = 40$ s. Sur la figure 2.50, on observe un suivi des facteurs de charges de référence satisfaisant permettant de réduire la dispersion balistique par rapport au tir non guidé. L'effort demandé aux canards est également satisfaisant car on observe un angle de braquage maximale inférieur à 15 degrés sans oscillations du signal de commande. Ces résultats montrent la capacité de l'autopilote INDI implémenté à corriger la dispersion balistique du projectile et valident la pertinence de la méthodologie mise en place pour régler les correcteurs.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthodologie et les résultats de conception des autopilotes de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge ont été présentés et discutés. Tout d'abord, l'intérêt des méthodes de commande par inversion dynamique a été justifié par leurs rapidité, généricité de conception et validité théorique sur l'ensemble du domaine de vol. Ensuite la théorie de la commande par inversion dynamique a été présentée en traitant des cas de linéarisations entrée/états et entrée/sortie en utilisant les concepts de dynamique interne, dynamique des zéros et de degré relatif. Les équations théoriques de la commande par inversion dynamique incrementale (INDI) ont été détaillées en temps continu et en temps discret. L'approche par commande INDI a été choisie pour la conception des autopilotes de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge pour sa dépendance réduite au modèle mathématique du projectile qui dépend de coefficients aérodynamiques entachés d'une incertitude importante. Enfin, un rappel sur le réglage d'un contrôleur robuste par façonnage de fonctions de sensibilité a été fait car cette méthode a été utilisée pour la synthèse du contrôleur externe afin de garantir un bon suivi de référence, un rejet de perturbations et une limitation de l'activité du contrôleur en hautes fréquences.

Après avoir présenté le cahier des charges et la méthodologie générale de réglage pour les autopilotes INDI de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge, le cheminement et les résultats de conception des autopilotes ont été traités. L'autopilote de facteurs de charge utilise deux autopilotes INDI mis en cascade en se basant sur la séparation des échelles de temps entre la dynamique rapide des vitesses de tangage et lacet et la dynamique lente des facteurs de charge. Cette architecture permet de réduire la complexité mathématique de la loi de commande et évite d'avoir une dynamique interne mais ajoute un contrôleur externe supplémentaire à régler.

Les expressions analytiques des commandes INDI ont été directement dérivées des équations dynamiques de roulis, de tangage, de lacet et facteurs de charge. Les degrés relatifs des systèmes ont été étudiés afin de déterminer l'existence de dynamique interne. Les conditions d'inversion des matrices d'autorité de commande utilisées dans les lois de commandes ont également été étudiées. Ensuite pour le roulis, l'analyse du modèle inverse a permis une description analytique très fidèle de la boucle interne INDI, ce qui a permis de garantir que la dynamique de roulis inversée n'était plus dépendante d'aucun paramètres de vol. Cette étude a également montré que l'inversion était impactée par les contraintes d'implémentation. Cette étude a été adaptée aux systèmes non-linéaires affines en la commande des dynamiques de tangage, de lacet et de facteurs de charges, et a révélé que contrairement au cas théorique, la linéarisation de la boucle interne était encore impactée par certains paramètres de vol à cause des contraintes d'implémentations.

La synthèse du contrôleur externe a été effectuée en incluant le modèle inverse pour la dynamique de roulis. Pour les dynamiques de tangage, lacet et de facteurs de charge, des hypothèses fortes de découplage ont été faites pour n'avoir à régler qu'un seul contrôleur pour toute l'enveloppe de vol. Les résultats de synthèse sont satisfaisants, les différentes fonctions de sensibilité respectent les gabarits fréquentiels imposés.

Les différentes simulations effectuées ont montré des performances satisfaisantes, mais aussi les limites de la méthodologie de réglage. Pour l'autopilote de roulis les résultats de simulations sont conformes aux attentes avec un bon suivi de référence, un rejet de perturbation et une uniformité sur l'enveloppe de vol. L'autopilote de facteurs de charge, quant à lui, a souffert de dégradations dues au couplage très fort des dynamiques de tangage/lacet mais également des interactions entre les dynamiques rapide et lente à cause de l'action des canards. Une simulation guidée sur trajectoire complète avec l'implémentation d'une loi de guidage ZEM permet de valider la conception de l'autopilote.

Chapitre 3

Conception d'une augmentation adaptative pour autopilote INDI

Sommaire

3.1	Introduction	98
3.2	Modélisation des incertitudes	98
3.2.1	Type d'incertitudes considérées	99
3.2.2	Influence des incertitudes sur les performances des autopilotes INDI	99
3.3	État de l'art des techniques de commande adaptative	100
3.3.1	Chronologie de la commande adaptative	101
3.3.2	Commande adaptative et commande non-linéaire	103
3.3.3	Commande adaptative par modèle de référence (MRAC)	103
3.3.3.1	Formulation du problème	103
3.3.3.2	Commande MRAC direct	104
3.3.3.3	Commande MRAC indirect	105
3.3.4	Commande \mathcal{L}_1 adaptative	106
3.3.4.1	Préliminaires	106
3.3.4.2	Définition de la commande \mathcal{L}_1 adaptative	106
3.3.4.3	Analyse et propriétés de la commande \mathcal{L}_1 adaptative	107
3.3.5	Discussion	109
3.4	Augmentation adaptative pour les autopilotes INDI	110
3.4.1	Architecture de l'augmentation adaptative	110
3.4.2	Prédicteur d'état basé sur la linéarisation INDI	111
3.4.3	Loi d'adaptation constante par morceaux	112
3.4.4	Filtrage du signal de commande adaptatif	112
3.4.5	Méthodologie de réglage de l'augmentation adaptative	113
3.5	Application à la chaîne de roulis	115
3.5.1	Réglage du prédicteur d'état	116
3.5.2	Réglage du filtre-passe bas	118
3.5.3	Validation par simulations de type Monte-Carlo	119
3.6	Application à la chaîne de tangage/lacet	121

3.6.1	Réglage du prédicteur d'état	122
3.6.2	Réglage du filtre passe-bas	124
3.6.3	Validation par simulations de type Monte-Carlo	125
3.7	Application à la chaîne de facteurs de charge	127
3.7.1	Réglage du prédicteur d'état	129
3.7.2	Réglage du filtre passe-bas	130
3.7.3	Validation par simulations de type Monte-Carlo	131
3.8	Comparaison et validation avec des trajectoires guidées	133
3.9	Conclusion	136

3.1 Introduction

Le choix de la loi de commande INDI dans le chapitre 2 a été justifié par sa dépendance réduite au modèle dynamique, permettant ainsi d'avoir une loi de commande plus robuste aux incertitudes paramétriques que la NDI (voir la discussion dans la section 2.2.6). Cet aspect est illustré dans l'équation (2.86), car sur les quatre coefficients aérodynamiques présents dans les équations non-linéaires de tangage et de lacet, seuls les coefficients aérodynamiques des moments des canards sont utilisés. De manière générale, la INDI n'utilise que les paramètres liés à l'autorité de contrôle du projectile, mais, dans le cas du projectile étudié, ces paramètres sont les plus incertains (*i.e.* $C_{l_\delta}, C_{m_\delta}, C_{N_\delta}$). En plus, la matrice G_{FC} utilise les angles aérodynamiques α et β qui sont difficiles à mesurer ou estimer. Il est donc nécessaire de s'intéresser à un moyen de garantir les performances des autopilotes INDI implémentés en tenant compte des incertitudes sur les paramètres utilisés dans les lois de commande.

Pour tenter de résoudre ce problème, le chapitre 3 traite de l'utilisation de la commande adaptative pour compenser les effets des incertitudes paramétriques sur les performances des autopilotes INDI conçus dans le chapitre 2. Plus précisément, ce chapitre présente, dans la section 3.2, le type d'incertitude considéré et son impact sur les lois de commande INDI. Ensuite, dans la section 3.3, un état de l'art sur les différents types de commande adaptative est effectué en s'intéressant plus particulièrement aux deux approches très utilisées dans la littérature, qui sont le MRAC (Model Reference Adaptive Control) et la commande \mathcal{L}_1 adaptative. Après, la section 3.4 montre, dans un premier temps, l'architecture de l'augmentation adaptative implémentée en détaillant les équations de prédicteur d'états, de la loi d'adaptation et du filtre passe-bas. La section 3.4 présente également, dans un second temps, la méthodologie de réglage employée pour les paramètres de l'augmentation adaptative. Par la suite, les sections 3.5, 3.6 et 3.7 détaillent l'application de la méthode de réglage pour les autopilotes de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge. Enfin, la section 3.8 compare les performances des autopilotes INDI avec et sans augmentation adaptative en présence d'incertitudes paramétriques sur des scénarios de trajectoires guidées.

3.2 Modélisation des incertitudes

La loi de commande INDI n'utilise qu'une partie réduite du modèle dynamique du projectile. Dans le cadre de la thèse, on ne s'intéresse qu'aux incertitudes qui affectent directement la loi de commande, c'est-à-dire uniquement aux paramètres liés à l'autorité de commande G du projectile.

3.2.1 Type d'incertitudes considérées

Dans l'équation (3.1), G est la matrice d'autorité de commande, qui est réécrite comme la somme d'une partie nominale G_n et d'une partie incertaine ΔG .

$$G = G_n + \Delta G \quad (3.1)$$

avec

$$\Delta G = \gamma_i G_n \quad (3.2)$$

ce qui permet d'écrire

$$G = (1 + \gamma_i)G_n \quad (3.3)$$

où γ_i est un scalaire déterminant le niveau d'incertitude de la matrice d'autorité de contrôle G .

3.2.2 Influence des incertitudes sur les performances des autopilotes INDI

Pour évaluer l'influence des incertitudes paramétriques sur les performances des autopilotes INDI, l'équation (2.39) est reprise en introduisant des incertitudes paramétriques sur la matrice G

$$\begin{aligned} y^{(\rho)} &= y_0^{(\rho)} + G\Delta u \\ &= y_0^{(\rho)} + (G_n + \Delta G)\Delta u \end{aligned} \quad (3.4)$$

où Δu est le signal de commande incrémentale qui est calculé à partir de G_n comme suit :

$$\Delta u = G_n^{-1}(v - y_0^{(\rho)}) \quad (3.5)$$

En injectant l'équation (3.5) dans l'équation (3.4), on obtient le développement suivant

$$\begin{aligned} y^{(\rho)} &= y_0^{(\rho)} + (G_n + \Delta G)(G_n^{-1}(v - y_0^{(\rho)})) \\ &= y_0^{(\rho)} + v - y_0^{(\rho)} + \underbrace{\Delta G G_n^{-1}(v - y_0^{(\rho)})}_{\text{perturbations}} \\ &= v + \Delta G G_n^{-1}(v - y_0^{(\rho)}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) met en évidence la perturbation apportée par les incertitudes paramétriques sur la linéarisation du système commandé par INDI. Le terme additionnel $\Delta G G_n^{-1}(v - y_0^{(\rho)})$ disparaît dans le cas nominal (*i.e.* $\Delta G = 0$) et tend vers 0 en régime permanent quand $y_0^{(\rho)}$ converge asymptotiquement vers v . Cependant, ce terme perturbe le régime transitoire en créant des oscillations des variables commandées et, dans le cas les plus critiques, peut rendre le système instable. Il est donc pertinent de se demander si un signal de commande incrémental additionnel permettrait d'annuler le terme perturbant l'équation (3.6).

Le nouveau signal de commande incrémental est alors défini par

$$\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2 \quad (3.7)$$

où $\Delta u_1 = G_n^{-1}(v - y_0^{(\rho)})$ est le signal incrémental INDI nominal et Δu_2 le signal de commande additionnel à déterminer qui permettrait de retrouver la relation suivante

$$y^{(\rho)} = v \quad (3.8)$$

En repartant de l'équation (3.4) et en injectant l'équation (3.7), on obtient

$$y^{(\rho)} = y_0^{(\rho)} + (G_n + \Delta G)(\Delta u_1 + \Delta u_2) \quad (3.9)$$

Sachant que l'on souhaite $y^{(\rho)} = v$, on a donc :

$$\begin{aligned} v &= y_0^{(\rho)} + (G_n + \Delta G)(\Delta u_1 + \Delta u_2) \\ &= y_0^{(\rho)} + (G_n + \Delta G)(G_n^{-1}(v - y_0^{(\rho)}) + \Delta u_2) \\ &= y_0^{(\rho)} + v - y_0^{(\rho)} + \Delta G G_n^{-1}(v - y_0^{(\rho)}) + (G_n + \Delta G)\Delta u_2 \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$0 = \Delta G \Delta u_1 + (G_n + \Delta G)\Delta u_2 \quad (3.10b)$$

$$\Delta u_2 = -(G_n + \Delta G)^{-1} \Delta G \Delta u_1 \quad (3.10c)$$

L'équation (3.10a) peut être reformulée pour faire apparaître la relation entre Δu et Δu_2 . D'après l'équation (3.7), on a

$$\begin{aligned} \Delta u_2 &= -(G_n + \Delta G)^{-1} \Delta G (\Delta u - \Delta u_2) \\ (\mathbb{I} - (G_n + \Delta G)^{-1} \Delta G) \Delta u_2 &= -(G_n + \Delta G)^{-1} \Delta G \Delta u \\ ((G_n + \Delta G)^{-1} ((G_n + \Delta G) - \Delta G) \Delta u_2 &= -(G_n + \Delta G)^{-1} \Delta G \Delta u \\ (G_n + \Delta G)^{-1} G_n \Delta u_2 &= -(G_n + \Delta G)^{-1} \Delta G \Delta u \\ \Delta u_2 &= -G_n^{-1} \Delta G \Delta u \end{aligned} \quad (3.11)$$

Quelle que soit l'expression de Δu_2 choisie, la présence du terme ΔG fait que les lois de commande incrémentales (équations (3.10a) et (3.11)) ne sont pas implémentables car il faudrait connaître la valeur des incertitudes à l'avance. La question est donc de savoir s'il existe un type de loi de commande qui convergerait vers les équations (3.10a) et (3.11) et qui dépendrait uniquement de la connaissance du modèle dynamique nominal et des mesures disponibles. La section suivante traite de la commande adaptative et de sa pertinence pour résoudre ce problème.

3.3 État de l'art des techniques de commande adaptative

Pour définir la commande adaptative, il faut d'abord s'intéresser à la notion d'adaptation. Il est légitime de se poser plusieurs questions concernant le sens de cette notion appliquée au champ disciplinaire de l'automatique. Par exemple, quel type de lois de commande peut être qualifié "d'adaptatif" ? Quel avantage l'adaptation apporte-t-elle par rapport à une autre loi de commande ? Ou encore, à quels phénomènes est sensé "s'adapter" une loi de commande adaptative ?

Dans le sens commun "s'adapter" se définit par la capacité à modifier son comportement conformément à un changement de circonstance. Cette première définition trop générale n'est pas la plus pertinente pour définir les lois de commandes adaptatives. Dans [IF06], Ioannou *et al.* définissent la commande adaptative comme " la combinaison d'une estimation en ligne des paramètres du système et d'une loi de commande de façon à commander une classe de systèmes dont les paramètres sont incertains, inconnus ou variant de manière imprédictible". Cette définition plus pertinente précise le sens de l'adaptation dans le contexte de la commande adaptative. On comprend qu'une loi de commande adaptative est sensée s'adapter aux incertitudes d'un système dynamique (changement de point de fonctionnement, paramètres incertains, dynamique négligée). On comprend également que pour qu'une loi de commande soit qualifiée d'adaptative, il faut qu'elle possède un mécanisme interne d'estimation des incertitudes (estimateur para-

métrique) et un mécanisme de modification de la loi de commande qui s'adapte en temps réel au système physique (loi d'adaptation). On peut en déduire également que l'objectif de la commande adaptative est donc une robustesse aux incertitudes des systèmes physiques en s'adaptant en temps réel aux variations de la dynamique. Ce qui différencie les différentes lois de commande adaptative dans la littérature ce sont les mécanismes d'estimation paramétrique et d'adaptation utilisés.

La sous-section 3.3.1 présente une revue de littérature sur la commande adaptative. Dans la section 3.3.3 et 3.3.4 les principales architectures de lois de commande adaptative existantes dans la littérature sont présentées. Enfin, dans la section 3.3.5 une discussion est apportée sur le type de commande adaptative le plus pertinent pour la thèse.

3.3.1 Chronologie de la commande adaptative

La recherche sur la commande adaptative à tout d'abord été motivée dans les années 1950, par le problème lié à la commande des avions agiles ou hyper-manœuvrants. En effet, ce genre d'engins opère à des conditions de vol très différentes (vitesses et altitudes) et peuvent changer de conditions de vol très rapidement. Le changement de points de fonctionnement modifie la dynamique du système et par conséquent, un contrôleur LTI classique n'est pas une solution envisageable. Il y avait donc un besoin de concevoir des contrôleurs pouvant fonctionner correctement même confrontés à des incertitudes paramétriques, ou à des grands changements de conditions de vol. L'une des premières solutions à ce problème est proposée par Whitaker *et al.* [WYKoTIL58]. Cette première architecture de type MRAC est basée sur un mécanisme d'identification paramétrique appelée loi du MIT qui utilise l'algorithme de la descente de gradient [MAB⁺87]. L'identification n'est cependant garantie que si une condition d'excitation persistante est respectée.

La décennie 1960 est marquée des avancées dans le domaine de la commande adaptative notamment, grâce à l'élaboration de la théorie de la représentation d'état et de la stabilité au sens de Lyapunov. Dans [Par66], la loi du MIT est reformulée en utilisant la deuxième méthode de Lyapunov.

Plus tard, dans les années 1980, une première controverse apparaît concernant la robustesse de la commande adaptative. En effet, dans [RVAS82], il est montré que les architectures de contrôleur adaptatif développées jusque là manquaient de robustesse face aux incertitudes additives ou aux dynamiques négligées, ces phénomènes pouvaient provoquer une instabilité du contrôleur adaptatif en créant une dérive de l'estimation paramétrique. Ce problème a été traité notamment par Ioannou *et al.* [IK82, IK84] en limitant le gain de la boucle d'adaptation et son action intégrale. Ces travaux mèneront plus tard à une littérature plus homogène autour du concept de "commande adaptative robuste" qui vise à garantir un signal d'erreur borné entre la sortie du modèle de référence et la sortie du système incertain en présence de perturbations extérieures bornées et de dynamiques négligées [IS12, ID91].

Le développement de la théorie de la commande adaptative a permis de l'appliquer à une classe toujours plus grande de systèmes dynamiques, notamment les systèmes non-linéaires [KKK95] et les systèmes à phase non-minimale [HYC06].

Dans [CH08], Cao et Havokimyan soulèvent un certain nombre de manquements de la théorie de la commande adaptative qui pourraient s'avérer critiques pour des applications à des systèmes physiques réels. Tout d'abord, ils affirment que, même si la bornitude du signal de l'erreur de poursuite est généralement étudiée dans la majorité des publications sur la commande adaptative, il n'en est pas de même pour les signaux de commande. Dans le cas linéaire, la bornitude du signal d'erreur de poursuite implique généralement la bornitude du signal de commande, mais cela n'est pas garanti pour les systèmes non-linéaires. Ensuite, Cao et Hovakimyan insistent sur la nécessité de garantir l'uniformité des performances du contrôleur adaptatif quels que soient les paramètres à estimer ou la consigne. Enfin, ils suggèrent de trouver une solution pour fournir une adaptation rapide sans pour autant avoir un grand gain de rétroaction

qui réduirait la robustesse du système.

En effet, pour garantir un bon suivi, il faut avoir une séparation des échelles de temps entre la boucle de commande et la boucle d'estimation paramétrique. Dans la commande adaptative cela est fait en choisissant un gain d'adaptation élevé produisant cependant des oscillations hautes fréquences du signal de commande, et par conséquent une plus grande sensibilité aux retards.

Hovakimyan *et al.* dans [CH08], se posent donc la question de la détermination d'une nouvelle architecture de commande adaptative qui permettrait une adaptation rapide tout en préservant un certain niveau de robustesse aux retards et aux perturbations extérieures. L'étude de cette question mena à l'établissement d'une nouvelle théorie appelée commande \mathcal{L}_1 adaptative.

La théorie de la commande \mathcal{L}_1 adaptative se consacre donc au problème du découplage entre la vitesse d'adaptation et la robustesse du système. Les avantages promis par la théorie de la commande \mathcal{L}_1 adaptative sont les suivants [HC10] :

- Adaptation rapide garantie.
- Découplage entre adaptation et robustesse.
- Performances du système bouclé déterminables a priori sans conditions de type excitation persistante ou sans séquençement de gain.
- Une marge de retard du système garantie et déterminable a priori.
- Le régime transitoire du système bouclé s'adapte aux conditions initiales, à la consigne et aux incertitudes.

Le principal changement d'architecture de contrôleur adaptatif apporté par la commande \mathcal{L}_1 adaptative est l'introduction d'un filtre passe-bas à un emplacement particulier du correcteur. Ce changement d'architecture est accompagné également d'un changement d'objectif. Là où l'objectif de la commande adaptative MRAC est de réduire l'influence des incertitudes sur la sortie du système incertain pour toutes les fréquences, l'objectif de la commande \mathcal{L}_1 adaptative est de réduire l'influence des incertitudes sur la sortie du système incertain uniquement dans la bande passante du correcteur. L'objectif de la commande \mathcal{L}_1 adaptative est plus modeste, mais également plus réaliste, pour des systèmes de commandes dont la bande passante est limitée par des actionneurs lents. L'architecture et le fonctionnement du MRAC et de la \mathcal{L}_1 sont présentés plus en détails dans les sections 3.3.3 et 3.3.4.

La commande \mathcal{L}_1 a été appliquée à de nombreux systèmes aéronautiques en simulation et en test en vol [PHXH12]. Dans [GXCH10, Hov11], la commande \mathcal{L}_1 adaptative est testée sur le modèle réduit d'avion NASA AirStar piloté à distance. Les résultats des tests en vol ont montré que la loi de commande était robuste aux retards de transport des signaux de commande dus au pilotage à distance. Également, le pilote a réussi à garder la stabilité de l'appareil dans des conditions de vol inhabituels sujettes à d'importantes incertitudes aérodynamiques.

Toutefois, même si la théorie de la commande \mathcal{L}_1 adaptative semble apporter de véritables avancées, elle ne fait pas l'unanimité au sein de la communauté scientifique. En effet, certains auteurs remettent en cause la pertinence de l'architecture \mathcal{L}_1 adaptative et, plus particulièrement, l'utilité du filtre passe-bas utilisé. Ainsi, dans [IAN⁺14, JIR13], la pertinence du filtre passe-bas est remise en question. En effet, dans ces articles, les auteurs montrent que le filtre passe-bas sensé réduire les oscillations du signal de commande adaptative n'est pas nécessaire. Les auteurs présentent les oscillations comme le résultat d'instabilité numérique dues au fort gain d'adaptation. Par conséquent, les auteurs affirment qu'il suffit de réduire le gain d'adaptation pour faire disparaître les oscillations. Dans [OP14], les auteurs soutiennent que l'architecture \mathcal{L}_1 adaptative n'est pas nouvelle et que, dans le cas d'un système SISO LTI, le signal de

commande adaptative converge vers celui d'un correcteur PI perturbé et donc que si un correcteur PI ne stabilise pas le système, alors le signal de commande \mathcal{L}_1 adaptatif ne le fera pas non plus.

3.3.2 Commande adaptative et commande non-linéaire

L'association d'un autopilote nominal non-linéaire appelée "baseline" avec une commande adaptative est une idée qui a été utilisée dans la littérature pour garantir la stabilité de systèmes incertains. Plus particulièrement on retrouve, ces dernières années, des publications autour de l'association entre NDI et commande \mathcal{L}_1 adaptative appliquée aux systèmes aéronautiques. Dans [PHXH12] un contrôleur \mathcal{L}_1 adaptatif est implémenté en parallèle du contrôleur externe d'un autopilote NDI. Les deux signaux sortants du contrôleur externe NDI et adaptative sont additionnés avant d'être envoyés à la boucle interne de l'autopilote NDI. Des simulations type Monte-Carlo comparent les résultats obtenus avec [PLH12]. Dans ce dernier, la même architecture d'autopilote NDI-adaptatif est proposée mais cette fois-ci en utilisant l'approche MRAC. Les conclusions de la comparaison sont que l'approche \mathcal{L}_1 garantie une meilleure robustesse par rapport aux incertitudes paramétriques tout en réduisant la complexité de l'architecture et du réglage. L'étude [EHT18] montre aussi le gain en robustesse apporté par une augmentation \mathcal{L}_1 adaptative. Cependant, les dynamiques des systèmes aéronautiques étudiés ont été linéarisées, ce qui n'est pas le cas pour le projectile étudié dans la thèse. Dans [GXH⁺11], les simulations Monte-Carlo utilisées pour la validation de l'augmentation \mathcal{L}_1 adaptative ne considèrent qu'une perte d'autorité de commande du système, cette hypothèse n'est pas pertinente dans le cadre de la thèse, car on ne fait pas d'hypothèse sur le signe de γ_i dans l'équation (3.3).

De manière générale, les résultats de la littérature [QJ17, HET19, BAZ⁺19] confirment la pertinence de l'association entre commande par inversion dynamique et commande adaptative avec une amélioration de la robustesse aux incertitudes paramétriques. Cependant, la dynamique du projectile étudié avec son autopilote INDI présente des spécificités assez peu étudiées dans la littérature. Par exemple, la structure en cascade entre l'autopilote de tangage et de lacet et l'autopilote de facteurs de charge est-elle compatible avec une augmentation adaptative ? La forme incrementale de la loi de commande INDI est-elle adaptée à la commande adaptative ? Il est donc nécessaire dans un premier temps de déterminer l'approche la plus pertinente à implémenter dans le cadre de la thèse, et à définir une méthode de réglage de l'augmentation adaptative générique. Pour cela, les théories de la commandes adaptative MRAC directe, indirecte puis \mathcal{L}_1 adaptative sont présentées.

3.3.3 Commande adaptative par modèle de référence (MRAC)

Dans cette section, la théorie de la commande adaptative par modèle de référence est présentée. On distingue deux approches, dites directe ou indirecte, selon que le modèle de référence est explicite ou remplacé par un prédicteur d'état.

3.3.3.1 Formulation du problème

Le système (3.12) permet de formuler les objectifs de la commande adaptative par modèle de référence :

$$\dot{x}(t) = A_m x(t) + b(u(t) + \sigma x(t)) \quad (3.12)$$

Dans l'équation (3.12), $x(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les états du système, σ représente les incertitudes du système (3.12), $u(t)$ est le signal de commande adaptatif et $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice qui définit la dynamique désirée en

boucle fermée :

$$A_m \triangleq A - bk_m \quad (3.13)$$

grâce à un signal de commande nominale $u_n(t) = -k_m x(t)$. Le vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ est connu et $\sigma \in \mathbb{R}^n$, est inconnu. L'objectif est de définir un signal de commande adaptatif $u(t)$ tel que $x(t)$ converge vers la référence $r(t)$. Il faut donc un signal de commande $u(t)$ qui annule l'influence de σ sur le système (3.12). Ce signal de commande $u(t)$ est additionné au signal de commande $u_n(t)$ qui définit la dynamique nominale du système. Deux architectures différentes existent pour construire le signal de commande adaptatif, l'architecture MRAC directe présentée dans la section 3.3.3.2 et l'architecture MRAC indirecte présentée dans la section 3.3.3.3.

3.3.3.2 Commande MRAC direct

La figure 3.1 montre l'architecture d'un contrôleur MRAC direct.

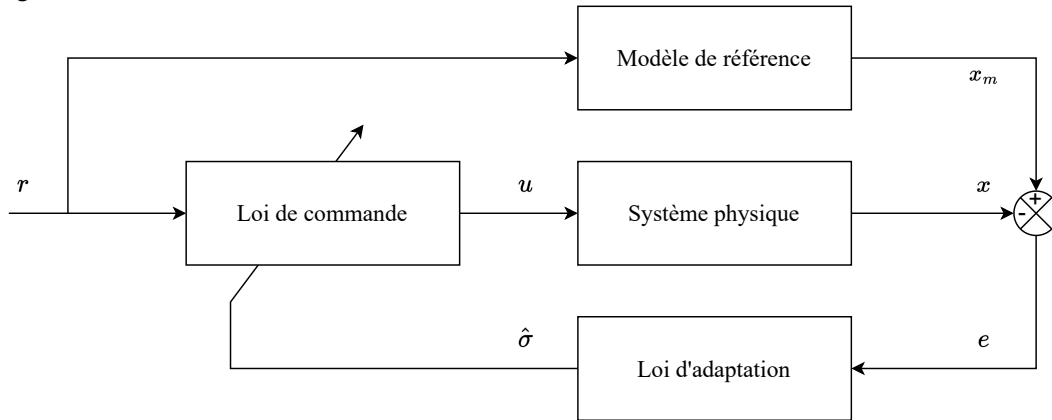


FIGURE 3.1 – Architecture MRAC direct

En supposant les incertitudes du système connues à l'avance, le signal de commande qui annule parfaitement les incertitudes est donné par

$$u_{id} = -\sigma x(t) + k_g r(t) \quad (3.14)$$

avec

$$k_g \triangleq A_m b^{-1} \quad (3.15)$$

pour avoir une erreur statique nulle. En injectant le signal u_{id} à la place de u dans le système (3.12), on obtient le modèle de référence dont la dynamique ne dépend plus des incertitudes

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + b k_g r(t) \quad (3.16)$$

Cependant la loi de commande u_{id} n'est pas implementable car il faudrait connaître la valeur des incertitudes à l'avance, l'expression du signal de commande u est donnée par :

$$u(t) = -\hat{\sigma} x(t) + k_g r(t) \quad (3.17)$$

où σ est remplacée par son estimation $\hat{\sigma}$ générée par la loi d'adaptation (3.18)

$$\dot{\hat{\sigma}}(t) = -\Gamma x(t)e(t), \quad \hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_0 \quad (3.18)$$

Dans l'équation (3.18), $\Gamma \in \mathbb{R}$ est appelé le gain d'adaptation et $e(t) = x(t) - x_m(t)$ est l'erreur de suivi de modèle de référence. La dynamique de l'erreur est décrite par l'équation suivante

$$\dot{e}(t) = -A_m e(t) + b\tilde{\sigma}x(t), \quad e(0) = 0 \quad (3.19)$$

où $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$. Les propriétés de la loi d'adaptation (3.18) sont étudiées dans [Hov11]. Il est prouvé grâce au lemme de Barbalat [Bar59] que l'erreur d'estimation paramétrique $\tilde{\sigma}$ est bornée, mais sa convergence vers 0 n'est pas garantie.

3.3.3 Commande MRAC indirect

L'architecture MRAC indirecte se différencie du MRAC direct par l'absence de modèle de référence, remplacé par un prédicteur d'état. Ici, la loi d'adaptation a pour entrée l'erreur de prédiction $\tilde{x} \triangleq \hat{x} - x$ et non l'erreur par rapport au modèle de référence $e(t) \triangleq x_m - x$. L'expression de la loi de commande u reste inchangée.

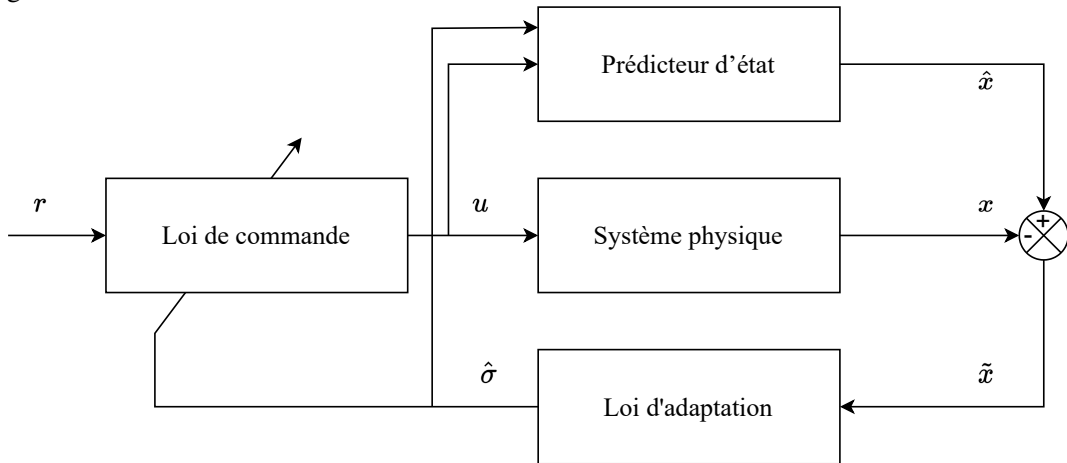


FIGURE 3.2 – Architecture MRAC indirect

La dynamique du prédicteur d'état est donnée par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_m \hat{x}(t) + b(u(t) + \hat{\sigma}x(t)) \quad (3.20)$$

Par conséquent, on obtient la dynamique de l'erreur de prédiction suivante :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -a_m \tilde{x}(t) + b\tilde{\theta}(t)x(t), \quad \tilde{x}(0) = 0 \quad (3.21)$$

Le paramètre incertain σ est estimé à partir de l'erreur de prédiction comme suit :

$$\dot{\hat{\sigma}}(t) = -\Gamma x(t)\tilde{x}(t), \quad \hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}_0 \quad (3.22)$$

En comparant les équations (3.19) et (3.21), on peut remarquer que la dynamique de l'erreur de suivi du MRAC direct est équivalente à la dynamique de l'erreur de prédiction du MRAC indirect, cependant l'équation (3.21) est indépendante du signal de commande u contrairement à l'équation (3.19). Ainsi dans le cas du MRAC indirect, la loi de commande peut être redéfinie sans modifier la stabilité de l'erreur de prédiction. Cette propriété est utilisée ensuite dans le cadre de la commande \mathcal{L}_1 adaptative.

3.3.4 Commande \mathcal{L}_1 adaptative

Dans cette section, la théorie de la commande \mathcal{L}_1 adaptative est définie et ses principales caractéristiques sont analysées.

3.3.4.1 Préliminaires

Definition 3.3.1 (opérateur de projection) [HC10, pp.294] Soit Ω_c un espace convexe continu donné par :

$$\Omega_c = \{\sigma \in \mathbb{R}^n | f(\sigma) < c\}, \quad 0 \leq c \leq 1 \quad (3.23)$$

où $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue :

$$f(\sigma) = \frac{(\epsilon_\sigma + 1)\sigma^\top \sigma - \sigma_{max}^2}{\epsilon_\sigma \sigma_{max}^2} \quad (3.24)$$

avec $\epsilon_\sigma > 0$, le paramètre de tolérance de l'opérateur de projection qui est défini ainsi

$$\text{Proj}(\sigma, y) = \begin{cases} y & \text{si } f(\sigma) < 0, \\ y & \text{si } f(\sigma) \geq 0 \text{ et } \nabla f^\top y \leq 0, \\ y - \frac{\nabla f(\sigma)(\nabla f(\sigma))^\top}{\|\nabla f(\sigma)\|^2} y f(\sigma) & \text{si } f(\sigma) \geq 0 \text{ et } \nabla f^\top y > 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Ainsi, l'opérateur de projection ne modifie la valeur de y que sous certaines conditions sur le vecteur σ et son évolution dans l'espace convexe Ω_c . Si σ sort de Ω_c alors y est transformé afin de le restreindre à Ω_c .

3.3.4.2 Définition de la commande \mathcal{L}_1 adaptative

La figure 3.3 présente l'architecture de la loi de commande \mathcal{L}_1 adaptative. L'une des modifications principales entre l'architecture MRAC indirect et l'architecture \mathcal{L}_1 adaptative est l'ajout d'un filtre passe-bas $C(s)$ dans la loi de commande comme suit :

$$u(s) = C(s)\hat{\eta}(s) \quad (3.26)$$

où $\eta(s)$ est la transformée de Laplace de la loi de commande MRAC (équation (3.17)).

$$\hat{\eta}(t) \triangleq -\hat{\sigma}(t)x(t) + k_g r(t) \quad (3.27)$$

La loi d'adaptation de la commande \mathcal{L}_1 adaptative est une version modifiée de celle du MRAC indirecte (equation (3.22)). L'équation (3.28) montre cette modification de cette loi d'adaptation en insérant un opérateur de projection sur l'espace des paramètres :

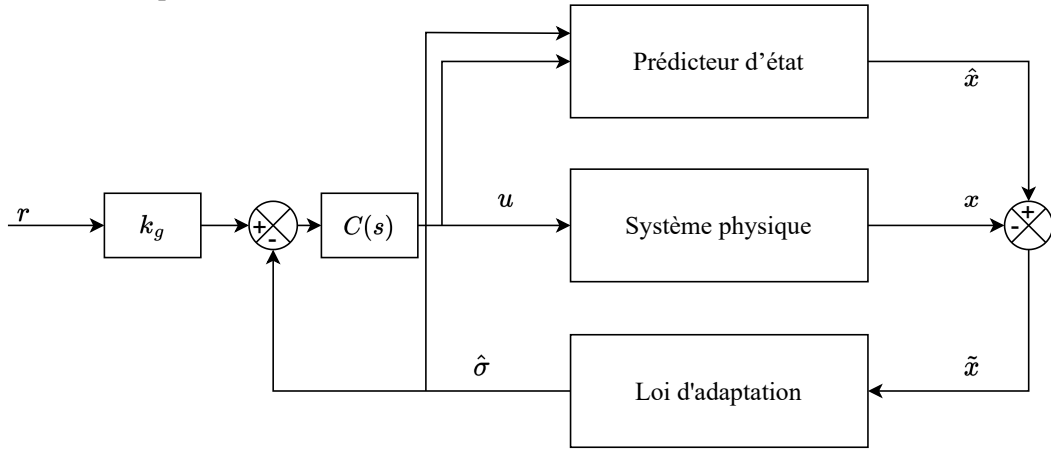
$$\dot{\hat{\sigma}} = -\Gamma \text{Proj}(\hat{\sigma}, -\tilde{x}Pb x(t)) \quad (3.28)$$

Dans l'équation (3.28), P est la matrice de Lyapunov qui est solution de l'équation suivante

$$A_m^\top P + P A_m = -Q \quad (3.29)$$

où Q est arbitrairement choisie telle que $Q = Q^\top > 0$.

L'avantage de la loi d'adaptation par projection est qu'elle permet de garantir des bornes sur $\hat{\sigma}$ et d'éviter la divergence de l'estimation paramétrique. Cette propriété est ensuite utilisée dans l'analyse de la commande \mathcal{L}_1 adaptative.


 FIGURE 3.3 – Architecture commande \mathcal{L}_1 adaptative

3.3.4.3 Analyse et propriétés de la commande \mathcal{L}_1 adaptative

L'introduction du filtre passe-bas $C(s)$ dans le contrôleur adaptatif limite son action en haute fréquence. Ainsi, même dans le cas d'estimation parfaite des incertitudes par la loi d'adaptation, la sortie du système \mathcal{L}_1 adaptatif en boucle fermée ne convergera pas vers la sortie du système de référence MRAC qui est définie par l'équation (3.12).

Plus précisément, la commande de référence u_{ref} pour le système \mathcal{L}_1 adaptatif reprend l'équation (3.14) en ajoutant le filtre $C(s)$ comme suit :

$$u_{\text{ref}}(s) = C(s)(k_g r(s) - \sigma x_{\text{ref}}(s)) \quad (3.30)$$

Pour permettre les développements de x_{ref} et u_{ref} , le transfert $H(s)$ du système (3.12) sans incertitudes est défini comme suit

$$H(s) \triangleq (s\mathbb{I} - A_m)^{-1} b \quad (3.31)$$

En injectant l'équation (3.30) dans l'équation (3.12), on obtient l'état de référence x_{ref} comme suit :

$$\begin{aligned} x_{\text{ref}}(s) &= (s\mathbb{I} - A_m)^{-1} b(u_{\text{ref}}(s) + \sigma x_{\text{ref}}) \\ &= H(s)(C(s)(k_g r(s) - \sigma x_{\text{ref}}(s)) + \sigma x_{\text{ref}}) \\ &= H(s)C(s)k_g r(s) + H(s)(1 - C(s))\sigma x_{\text{ref}}(s) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Grâce à l'inégalité des normes de l'équation (A.9), la norme $\|x_{\text{ref}}\|_{\mathcal{L}_\infty}$ peut être majorée par

$$\|x_{\text{ref}}\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \|H(s)C(s)k_g\|_{\mathcal{L}_1} \|r\|_{\mathcal{L}_\infty} + \|H(s)(1 - C(s))\sigma\|_{\mathcal{L}_1} \|x_{\text{ref}}\|_{\mathcal{L}_\infty} \quad (3.33)$$

Ensuite, si la condition suivante est respectée

$$\|G(s)\sigma\|_{\mathcal{L}_1} < 1 \quad (3.34a)$$

avec

$$G(s) \triangleq H(s)(1 - C(s)) \quad (3.34b)$$

alors l'inégalité suivante est obtenue

$$\|x_{\text{ref}}\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \frac{\|H(s)C(s)k_g\|_{\mathcal{L}_1} \|r\|_{\mathcal{L}_\infty}}{1 - \|G(s)\sigma\|_{\mathcal{L}_1}} \quad (3.35)$$

Il est important de noter que si la condition (3.34a) n'est pas respectée alors l'équation (3.35) n'est pas valide mathématiquement. Il est donc nécessaire, dans la théorie de la commande \mathcal{L}_1 adaptative de Hovakimyan *et al.*, de garantir la condition (3.34a). Cela est fait par la synthèse du filtre $C(s)$ et par l'étude de sa bande passante.

L'expression du signal $u(s)$ (équation (3.26)) est reformulée pour faire apparaître l'erreur d'estimation d'incertitude $\tilde{\eta}(t) \triangleq \tilde{\sigma}x(t)$

$$\begin{aligned} u(s) &= C(s)(k_g r(s) - \hat{\sigma}x(s)) \\ &= C(s)(k_g r(s) - \sigma x(s) - \tilde{\eta}(s)) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Le signal de commande $u(s)$ sert ensuite à calculer l'expression des états $x(s)$

$$\begin{aligned} x(s) &= (s\mathbb{I} - A_m)^{-1} b(u(s) + \sigma x(s)) \\ &= H(s)(C(s)k_g r(s)) + H(s)(1 - C(s))\sigma x(s) - C(s)\tilde{\eta}(s) \end{aligned} \quad (3.37)$$

L'équation (3.37) est soustraite à l'équation (3.32) et le développement suivant est obtenu

$$\begin{aligned} x_{\text{ref}}(s) - x(s) &= H(s)C(s)k_g r(s) + H(s)(1 - C(s))\sigma x_{\text{ref}}(s) \\ &\quad - (H(s)(C(s)k_g r(s)) + H(s)((1 - C(s))\sigma x(s) - C(s)\tilde{\eta}(s))) \\ &= H(s)C(s)k_g r(s) + G(s)x_{\text{ref}}(s) - (H(s)(C(s)k_g r(s) + (1 - C(s))\sigma x(s) - C(s)\tilde{\eta}(s))) \\ &= G(s)\sigma x_{\text{ref}}(s) - G(s)\sigma x(s) + H(s)C(s)\tilde{\eta}(s) \\ &= G(s)\sigma(x_{\text{ref}}(s) - x(s)) + H(s)C(s)\tilde{\eta}(s) \\ &= \frac{C(s)}{1 - G(s)\sigma} H(s)\tilde{\eta}(s) \end{aligned} \quad (3.38)$$

La relation suivante lie l'erreur de prédiction $\tilde{x}(s)$ avec l'erreur d'estimation paramétrique $\tilde{\eta}(s) \triangleq \tilde{\sigma}x(s)$:

$$\tilde{x}(s) = H(s)\tilde{\eta}(s) \quad (3.39)$$

Grâce au lemme 2.1.2 de [HC10, p20-21], l'erreur de prédiction peut être bornée par

$$\|\tilde{x}\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\lambda(P)\Gamma}} \quad (3.40)$$

En remplaçant $H(s)\tilde{\eta}(s)$ dans l'équation (3.38) par \tilde{x} , on obtient

$$x_{\text{ref}}(s) - x(s) = \frac{C(s)}{1 - G(s)\sigma} \tilde{x}(s) \quad (3.41)$$

Par conséquent, l'écart entre les états du système réel et les états du système de référence peut être borné par

$$\|x_{\text{ref}} - x\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \left\| \frac{C(s)}{1 - G(s)\sigma} \right\|_{\mathcal{L}_1} \|\tilde{x}\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \left\| \frac{C(s)}{1 - G(s)\sigma} \right\|_{\mathcal{L}_1} \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\lambda(P)\Gamma}} \quad (3.42)$$

De manière similaire à l'équation (3.38), on calcule la différence entre $u_{\text{ref}}(s)$ et $u(s)$

$$\begin{aligned} u_{\text{ref}}(s) - u(s) &= C(s)(-\sigma(x_{\text{ref}} - x(s)) + \tilde{\eta}(s)) \\ &= -C(s)\sigma(x_{\text{ref}} - x(s)) + C(s)H^{-1}(s)\tilde{x}(s) \end{aligned} \quad (3.43)$$

et on obtient l'inégalité suivante :

$$\|u_{\text{ref}} - u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \|C(s)\sigma\|_{\mathcal{L}_1} \|x_{\text{ref}} - x\|_{\mathcal{L}_\infty} + \|C(s)H^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}_1} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{max}}}{\lambda(P)\Gamma}} \quad (3.44)$$

L'introduction du filtre passe-bas dans le contrôleur adaptatif permet d'obtenir un paramètre supplémentaire pour le réglage de la loi de commande \mathcal{L}_1 adaptative. Une propriété importante détaillée dans [HC10, p27] est l'équation suivante

$$\lim_{\omega_c \rightarrow +\infty} \|(1 - C(s))H(s)\|_{\mathcal{L}_1} = 0 \quad (3.45)$$

L'équation (3.45) montre qu'augmenter la bande passante du filtre $C(s)$ réduit la norme \mathcal{L}_1 de $G(s) = (1 - C(s))H(s)$, ce qui permet de garantir la condition (3.34a). Cependant laisser une trop grande bande passante réduit la marge de retard du système bouclé [CH10].

3.3.5 Discussion

Maintenant que les principaux éléments théoriques nécessaires à la détermination de la commande MRAC et \mathcal{L}_1 adaptative ont été introduits, il est nécessaire de se questionner sur l'approche la plus pertinente à utiliser dans le contexte de la thèse. Du point de vue de l'architecture du contrôleur, les approches MRAC et \mathcal{L}_1 adaptative sont similaires, la différence majeure étant la présence d'un filtre passe-bas en sortie de contrôleur dans l'approche \mathcal{L}_1 adaptative. Cette modification sert principalement à garantir l'existence de l'inégalité (3.35) et montre également un changement d'objectifs entre les deux stratégies de commande. Dans l'approche MRAC, l'objectif du contrôleur adaptatif est de réduire le plus possible l'influence des incertitudes sur les états du système réel en optimisant directement les paramètres de la loi de commande pour réduire une erreur de poursuite. L'approche \mathcal{L}_1 adaptative propose de résoudre un problème moins ambitieux, mais plus réaliste. En effet, la loi de commande \mathcal{L}_1 adaptative est conçue pour compenser les incertitudes essentiellement dans la bande passante du filtre $C(s)$ et garantir des bornes entre la sortie du système réel et la sortie d'un système de référence, différent de celui du MRAC (équation (3.32)). La commande \mathcal{L}_1 adaptative inclut également dans sa méthodologie des garanties sur le signal de commande, ce qui est intéressant dans le cadre de la thèse car la bande passante des actionneurs est limitée. Cependant, de manière générale, la théorie de la commande \mathcal{L}_1 adaptative présentée dans la section 3.3.4 est difficilement applicable aux systèmes non-linéaires commandés par des autopilotes INDI pour plusieurs raisons. Premièrement, la théorie de la commande \mathcal{L}_1 adaptative fait l'hypothèse d'une commande nominale par retour d'état, hypothèse qui n'est pas valide avec la commande INDI implémentée dans la thèse. Cela a pour conséquence que la construction de la matrice A_m telle que définie par l'équation (3.13) est impossible, les signaux u_{ref} et x_{ref} ne pouvant pas être définis de la même manière que les équations (3.32) et (3.30). Ensuite, le prédicteur d'état utilisé (Équation 3.20) est linéaire, ce qui rend également impossible son utilisation pour l'autopilote de tangage, de lacet et de facteurs de charge. Enfin, l'utilisation de la loi d'adaptation par projection (équation (3.28) implique de connaître les bornes supérieures et inférieures du paramètre incertain à estimer, or l'équation (3.11) montre que le signal vers lequel doit converger la loi d'adaptation dépend du signal de commande incrementale Δu dont les bornes

sont fonctions des paramètres de vol et de la consigne. Malgré ces difficultés d'implémentation, l'approche \mathcal{L}_1 adaptative semble être le choix le plus judicieux à considérer pour notre système grâce à ses garanties intéressantes pour le réglage apporté par le filtre $C(s)$.

Le choix qui a donc été retenu dans cette thèse est celui d'implémenter une augmentation adaptative de type commande \mathcal{L}_1 adaptative avec un filtre passe-bas non pas pour garantir certaines bornes, mais pour avoir un degré de liberté supplémentaire sur le réglage et notamment éviter une instabilité du système à commander à cause d'un signal de commande trop riche en hautes fréquences. La section 3.4 détaille la solution proposée et la section 3.4.5 présente la méthodologie mise en place pour régler l'augmentation adaptative.

3.4 Augmentation adaptative pour les autopilotes INDI

La section 3.4.1 montre l'architecture de l'augmentation adaptative implémentée qui se base sur [BAZ⁺19] à la différence qu'ici aucun modèle embarqué de la dynamique du projectile n'est utilisé.

3.4.1 Architecture de l'augmentation adaptative

La figure 3.4 montre l'architecture de l'augmentation adaptative utilisée pour les autopilotes de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge. L'augmentation adaptative génère le signal de commande incrémentale Δu_{ad} qui vient se rajouter au signal de commande incrémentale de l'autopilote INDI Δu_{bl} . La raison de l'utilisation d'un signal de commande adaptative incrémentale est que cela permet l'utilisation d'un prédicteur d'état basé sur la reformulation incrémentale et linéarisée de la dynamique du projectile. Cela permet d'avoir un prédicteur d'état linéaire en évitant l'utilisation de la matrice A_m utilisée dans la commande \mathcal{L}_1 adaptative d'Hovakimyan *et al.*. La section 3.4.2 présente les équations décrivant le prédicteur d'état basé sur la linéarisation incrémentale. La loi d'adaptation utilisée est présentée dans la sous-section 3.4.3 et la structure du filtre passe-bas est donnée dans la section 3.4.4.

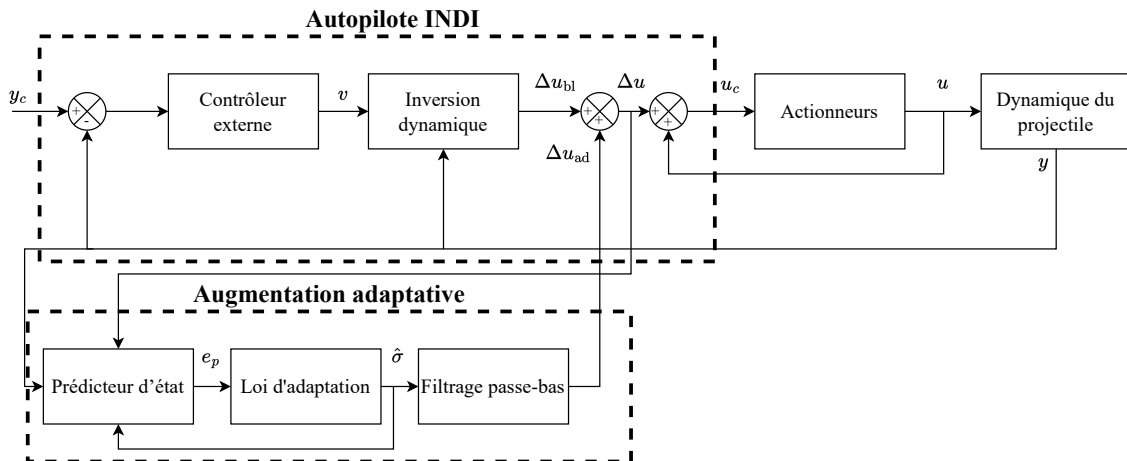


FIGURE 3.4 – Architecture d'un autopilote INDI avec une augmentation adaptative

L'architecture de l'augmentation adaptative choisie à l'avantage d'être peu contraignante à implémenter. En effet, aucune modification de l'autopilote INDI n'est nécessaire (aucun gain du contrôleur externe à modifier) et il suffit de connecter ou de déconnecter le signal Δu_{ad} pour activer ou non l'augmentation adaptative.

3.4.2 Prédicteur d'état basé sur la linéarisation INDI

Les équations du prédicteur d'état sont basées sur la représentation du système incertain linéarisé sous forme incrementale (équation (3.4))

$$\begin{aligned}
 y^{(\rho)} &= y_0^{(\rho)} + (G_n + \Delta G)\Delta u \\
 &= \frac{y^{(\rho-1)}(t) - y^{(\rho-1)}(t-T)}{T} + G_n (\Delta u + G_n^{-1} \Delta G \Delta u) \\
 &= \frac{y^{(\rho-1)}(t) - y^{(\rho-1)}(t-T)}{T} + G_n (\Delta u + \sigma)
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Pour pouvoir influencer sur la vitesse de convergence du prédicteur et ainsi améliorer les performances de l'augmentation adaptative, un gain K_e , proportionnel à l'erreur de prédiction, est ajouté à l'équation (3.46). Par conséquent, la dynamique du prédicteur d'état est donnée par

$$\hat{y}^{(\rho)} = \frac{y^{(\rho-1)}(t) - y^{(\rho-1)}(t-T)}{T} + G_n (\Delta u + \hat{\sigma}) - K_e (\hat{y} - y) \tag{3.47}$$

Afin de procéder plus simplement à sa discrétisation le prédicteur d'état décrit par l'équation (3.47) est reformulé sous la forme d'une représentation d'état comme suit

$$\hat{\dot{x}} = A_p \hat{x} + B_p u_p \tag{3.48a}$$

$$\hat{y} = C_p \hat{x} + D_p u_p \tag{3.48b}$$

avec

$$A_p = -K_e \tag{3.48c}$$

$$B_p = \left[K_e + \frac{1}{T} \quad G_n \quad G_n \quad -\frac{1}{T} \right] \tag{3.48d}$$

$$C_p = \mathbb{I}_n \tag{3.48e}$$

$$D_p = 0 \tag{3.48f}$$

où $u_p = \left[x \quad \Delta u \quad \hat{\sigma} \quad x(t-T) \right]^T$ est le vecteur d'entrée du prédicteur. La représentation discrète du prédicteur est donnée par

$$\hat{x}[k+1] = A_d \hat{x}[k] + B_d u_p[k] \tag{3.49a}$$

$$\hat{y}[k+1] = C_d \hat{x}[k] + D_d u_p[k] \tag{3.49b}$$

où les matrices A_d, B_d, C_d et D_d sont calculées à partir de A_p, B_p, C_p et D_p en utilisant la transformation bilinéaire de Tustin A.3 comme suit

$$A_d = \left(\mathbb{I} - \frac{A_p T}{2} \right)^{-1} \left(\mathbb{I} + \frac{A_p T}{2} \right) \tag{3.50a}$$

$$B_d = T \left(\mathbb{I} - \frac{A_p T}{2} \right)^{-1} B_p \tag{3.50b}$$

$$C_d = C_p \left(\mathbb{I} - \frac{A_p T}{2} \right)^{-1} \tag{3.50c}$$

$$D_d = D_p + C_p \left(\mathbb{I} - \frac{A_p T}{2} \right)^{-1} \frac{B_p T}{2} \tag{3.50d}$$

La dynamique de l'erreur de prédiction est calculée à partir de l'équation dynamique du prédicteur (équation. (3.47) et celle du système réel (Eq. (3.46)) comme suit

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_p &= \dot{\hat{y}} - \dot{y} \\
 &= \frac{y^{(\rho-1)}(t) - y^{(\rho-1)}(t-T)}{T} + G_n(\Delta u + \hat{\sigma}) - K_e(\hat{y} - y) - \left(\frac{y^{(\rho-1)}(t) - y^{(\rho-1)}(t-T)}{T} + G_n(\Delta u + \sigma) \right) \\
 &= -K_e(\hat{y} - y) + G_n(\hat{\sigma} - \sigma) \\
 &= -K_e e_p + G_n \tilde{\sigma}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

3.4.3 Loi d'adaptation constante par morceaux

La loi d'adaptation constante par morceaux a été introduite dans [CH09]. Elle est constante entre deux périodes d'échantillonnage. Par conséquent, la vitesse de convergence de ce type de loi d'adaptation dépend de la fréquence d'échantillonnage. A partir de la dynamique de l'erreur de prédiction définie par (3.51), l'équation (3.52) donne la valeur de l'erreur de prédiction au prochain temps d'échantillonnage.

$$e_p(kT + t) = e^{-K_e t} e_p(iT) + \int_0^t e^{-K_e(t-\tau)} G_n \hat{\sigma}(kT) d\tau \tag{3.52}$$

L'objectif est de calculer l'expression de $\hat{\sigma}$ qui ramènera l'erreur de prédiction à 0 au prochain temps d'échantillonnage, ainsi on a

$$\begin{aligned}
 e_p(kT + t) &= 0 \\
 e^{-K_e T} e_p(kT) &= - \int_0^T e^{-K_e(T-\tau)} G_n \hat{\sigma}(kT) d\tau \\
 &= - \left[K_e^{-1} e^{-K_e(T-\tau)} G_n \hat{\sigma}(kT) \right]_0^T \\
 &= K_e^{-1} (\mathbb{I} - e^{-K_e T}) G_n \hat{\sigma}(kT)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

En définissant $\Phi(kT)$ et $\mu(kT)$ avec les équations (3.54a) et (3.54b) comme suit

$$\Phi(kT) = K_e^{-1} (\mathbb{I} - e^{-K_e T}) \tag{3.54a}$$

$$\mu(kT) = e^{-K_e T} e_p(kT) \tag{3.54b}$$

l'expression de la loi d'adaptation est donnée par

$$\hat{\sigma}(kT) = -G_n^{-1} \Phi(kT)^{-1} \mu(kT) \tag{3.55}$$

3.4.4 Filtrage du signal de commande adaptatif

La structure du filtre passe-bas avec un gain statique unitaire est fixée à l'avance pour simplifier le réglage de l'augmentation adaptative et est donnée par

$$C(s) = \frac{\omega_f^2}{s^2 + 2\omega_f \xi_f s + \omega_f^2} \tag{3.56}$$

où ω_f est la bande passante de $C(s)$ et ξ_f est le coefficient d'amortissement.

Finalement, la loi de commande adaptative (3.57) est définie par l'estimation $\hat{\sigma}$ filtrée par $C_d(z)$, la représentation discrète de $C(s)$ comme suit

$$\Delta u_{ad} = -C_d(z)\hat{\sigma} \quad (3.57)$$

Le filtre $C_d(z)$ est discrétisé par la méthode bilinéaire de Tustin.

3.4.5 Méthodologie de réglage de l'augmentation adaptative

En faisant le bilan des paramètres dont dépend l'augmentation adaptative, on compte quatre variables :

- la période d'échantillonnage T ,
- le gain du prédicteur d'état K_e ,
- la fréquence de coupure ω_f , du filtre passe-bas $C(s)$,
- le coefficient d'amortissement ξ_f du filtre passe-bas $C(s)$.

Parmi ces paramètres, la période d'échantillonnage est considérée comme une donnée d'entrée fixée pour le système, et n'est donc pas prise en compte comme paramètre de réglage. Le coefficient d'amortissement $\xi_f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ n'a que peu d'influence sur les performances de l'augmentation adaptative si on choisit une valeur entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1. Par conséquent, seuls K_e et ω_f sont considérés critiques pour le réglage de l'augmentation adaptative.

Avec ces deux seuls paramètres à régler, la dimension du problème de réglage est faible. Cependant à la manière du façonnage des fonctions de sensibilité, il est difficile de trouver les paramètres optimaux qui vont permettre d'obtenir le meilleur gain de performance sur une large gamme d'incertitudes. Ainsi, les principaux compromis sont les suivants :

- Avoir un fort gain K_e permet un meilleur suivi de référence quand l'autorité de contrôle du système est plus faible que le système nominal ($\gamma_i < 0$) dans l'équation (3.3).
- Avoir un fort gain K_e crée des oscillations du signal de commande quand le niveau d'incertitude est faible ($\gamma_i \approx 0$)
- Avoir une grande bande passante ω_f permet d'avoir un signal de commande adaptatif Δu_{ad} plus proche de $\hat{\sigma}$ et donc de mieux réduire l'influence des incertitudes paramétriques sur la sortie du système.
- Avoir une faible bande passante ω_f permet de réduire les oscillations du signal de commande adaptatif dans les cas où le niveau d'incertitude est faible ($\gamma_i \approx 0$) mais réduit également la qualité de l'adaptation dans les cas plus critiques ($\gamma_i \ll 0$ ou $\gamma_i \gg 0$).

Il faut donc trouver les paramètres K_e et ω_f qui vont améliorer les performances du contrôleur sur l'ensemble de la plage d'incertitudes considérée sans hypothèse préalable sur le niveau d'incertitude du système (le signe de γ_i dans l'équation (3.3) est considéré inconnu). Puisqu'il n'existe pas d'algorithme de réglage dans la littérature proprement dédié au problème étudié, il a donc été décidé de mettre en place une méthodologie itérative détaillée par la figure 3.5.

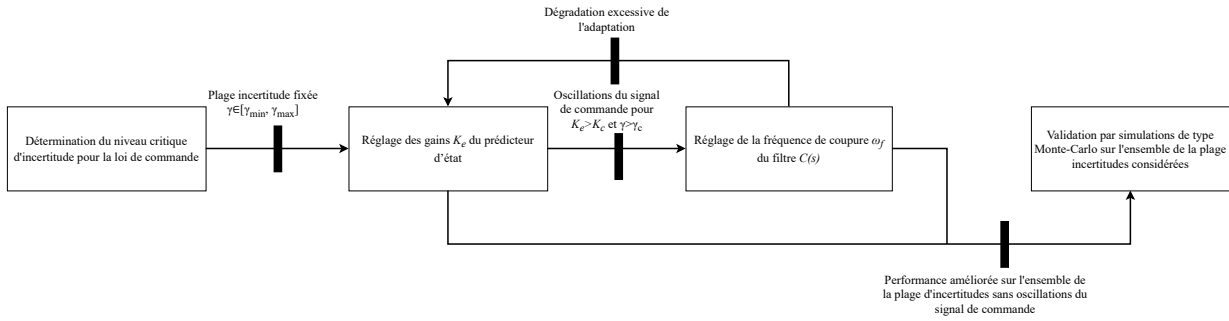


FIGURE 3.5 – Méthode de réglage de l’augmentation adaptative

Cette méthodologie basée sur une approche empirique par simulations se veut générique car il n’y a pas d’hypothèses a priori sur les bornes des incertitudes, et est composée des étapes décrites ci-dessous :

■ Détermination du niveau critique d’incertitudes :

La première étape est la détermination de la plage d’incertitudes considérée pour le réglage de l’augmentation adaptative. Pour cela, on choisit un indice qui va permettre de comparer les performances entre le système avec et sans augmentation adaptative. Le critère choisi \check{y} est le rapport de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\infty}$ de la sortie régulée $y(t)$ du système en boucle fermée et de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\infty}$ de l’échelon $r(t)$ en consigne.

$$\check{y} = \frac{\|y\|_{\mathcal{L}_\infty}}{\|r\|_{\mathcal{L}_\infty}} \tag{3.58}$$

Un critère \check{y} élevée traduit un grand dépassement de la réponse et donc un mauvais suivi de référence, l’objectif du réglage de l’augmentation adaptative est d’avoir un indice \check{y} proche de 1 pour toute la plage d’incertitude considérée. Ce critère est calculé pour plusieurs valeurs de γ . Les bornes γ_{\min} et γ_{\max} sont choisies quand $\bar{y} > 1.5$. Ainsi la plage d’incertitudes déterminée par $\gamma \in [\gamma_{\min} \ \gamma_{\max}]$ sert de cadre pour la suite du réglage. Par ailleurs en cas d’instabilité du système, \check{y} n’est pas borné, par conséquent pour garantir la lisibilité des figures faisant intervenir \check{y} , \check{y} est affiché avec une saturation à 1.5 .

■ Réglage du gain K_e du prédicteur :

La seconde étape de réglage consiste à trouver le gain K_e qui va réduire au maximum \check{y} pour $\gamma = \gamma_{\min}$. Pour cela, l’indice \check{y} est calculé en fonction de K_e pour toute la plage d’incertitudes considérée et une surface de réglage est générée ($\check{y} = f(\gamma_i, K_e)$). A cette étape du réglage, le filtre $C_d(z) = 1$. Si les performances sont satisfaisantes (\check{y} faible pour toute la plage d’incertitudes) alors on passe à la validation par simulation de type Monte-Carlo.

Cependant, sans filtrage, le signal de commande adaptative Δu_{ad} est riche en hautes fréquences ce qui peut rendre le système instable à partir d’un certain niveau d’incertitudes $\gamma_i > \gamma_c$. Dans ce cas, on garde la valeur de K_e qui donne les meilleures performances pour $\gamma_i = \gamma_{\min}$, puis on passe au réglage de la fréquence de coupure ω_f .

■ Réglage de la fréquence de coupure ω_f :

Une fois le gain K_e déterminé, la troisième étape de réglage consiste à trouver le paramètre ω_f qui réduira les composantes hautes fréquences de Δu_{ad} tout en préservant le gain de performance de l’augmentation adaptative. Pour cela, l’indice \check{y} est calculé en fonction de ω_f pour toute la plage d’incertitudes considérée et une seconde surface est générée $\check{y} = f(\gamma, \omega_f)$. Si les performances de l’augmentation adaptative sont trop dégradées, alors on ajuste le gain K_e , sinon on passe à la

validation par simulations de type Monte-Carlo.

■ Validation par simulations de type Monte-Carlo :

La dernière étape de réglage est la comparaison des performances de l'autopilote INDI avec et sans augmentation adaptative sur toute la plage d'incertitudes considérée. Aucune composante aléatoire n'est introduite dans la validation. Les simulations effectuées pour le système sans adaptation ont les mêmes conditions initiales et les mêmes niveaux d'incertitudes que pour le système avec adaptation.

Cette méthodologie de réglage a été appliquée aux chaînes de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge.

3.5 Application à la chaîne de roulis

Le principal paramètre incertain utilisé dans la loi de commande INDI de roulis (equation (2.68)) est le coefficient aérodynamique $C_{l\delta}$. A partir de ce constat, on modélise le lien entre l'autorité de commande nominale en roulis $G_{r,nom}$ et l'autorité de commande réelle en roulis G_r (qui est inconnue) par l'équation suivante

$$\begin{aligned} G_r &= I_{x_2}^{-1} \bar{q} S d C_{l\delta} \\ &= I_{x_2}^{-1} \bar{q} S d C_{l\delta,nom} (1 + \gamma_\phi) \\ &= G_{r,nom} (1 + \gamma_\phi) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Ainsi, l'incertitude paramétrique du système de roulis est définie par un seul paramètre scalaire γ_ϕ . En faisant varier le taux d'incertitude γ_ϕ , la figure 3.6 est obtenue.

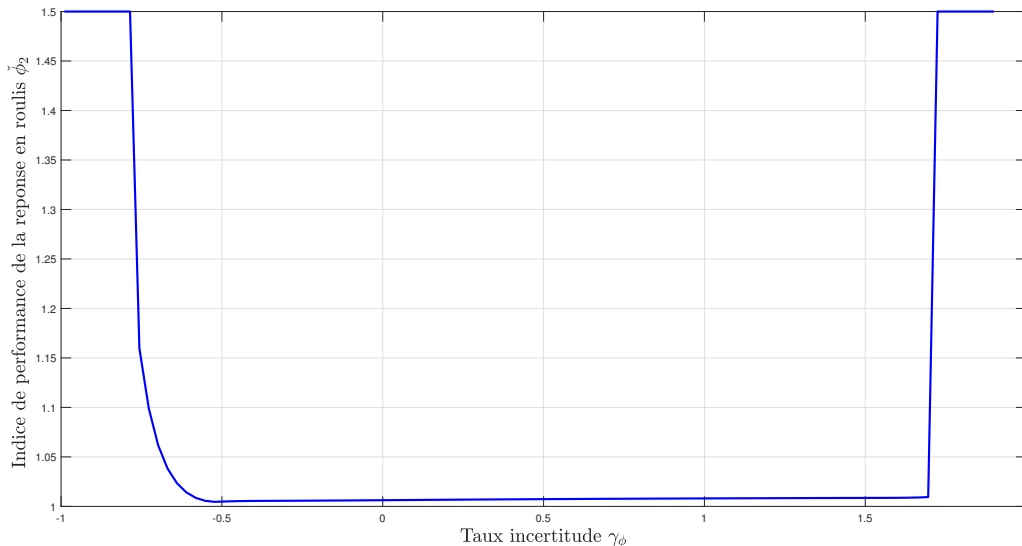


FIGURE 3.6 – Indice de performance $\check{\phi}_2$ en fonction du taux d'incertitude γ_ϕ pour l'autopilote INDI de roulis

L'indice de performance $\check{\phi}_2 = \frac{\|\phi_2\|_{\mathcal{L}_\infty}}{\|\phi_{2,c}\|_{\mathcal{L}_\infty}}$ est l'indice \check{y} appliqué à la dynamique de roulis. La figure 3.6 montre $\check{\phi}_2$ calculée en fonction de γ_ϕ . On remarque que pour $-0.8 > \gamma_\phi < 1.8$, on a $\check{\phi}_2 \geq 1.5$ c'est-à-dire que pour cette plage de variation du taux d'incertitude, le sortie ϕ_2 ne dépasse pas 50% pour une consigne $\phi_{2,c}$ de type échelon unitaire. La plage d'incertitudes utilisée pour le réglage de l'augmentation adaptative

en roulis est donc définie par :

$$\gamma_\phi \in [-0.8; 1.8] \quad (3.60)$$

3.5.1 Réglage du prédicteur d'état

Deux architectures de prédicteurs d'états sont étudiées pour l'augmentation adaptative en roulis. L'équation (3.61) montre l'architecture à un degré de liberté (estimation uniquement faite sur p_2) et l'équation (3.62) montre l'architecture à deux degrés de libertés (estimation faite sur p_2 et ϕ_2).

■ Prédicteur à 1 DDL :

$$\dot{\hat{p}}_2 = \frac{p_2 - p_2(t-T)}{T} + I_{x_2}^{-1} \bar{q} S dC_{l_\delta} (\Delta_p + \hat{\sigma}_\phi) - K_{e,\phi} (\hat{p}_2 - p_2) \quad (3.61)$$

■ Prédicteur 2 DDL :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{p}}_2 \\ \dot{\hat{\phi}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_2 - p_2(t-T)}{T} \\ \hat{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{x_2}^{-1} \bar{q} S dC_{l_\delta} \\ 0 \end{bmatrix} (\Delta_p + \hat{\sigma}_\phi) - K_{e,\phi} \begin{bmatrix} \hat{p}_2 - p_2 \\ \hat{\phi}_2 - \phi_2 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Le réglage du prédicteur à 1 DDL est plus simple car, dans ce cas, $K_{e,\phi}$ est scalaire contrairement au cas du prédicteur à 2DDL où $K_{e,\phi} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice. Pour réduire le nombre de paramètres à régler dans le cas du prédicteur à 2DDL, la méthode du placement de pôles est utilisée. Dans l'équation (3.63) p représente les pôles de la dynamique de roulis en boucle fermée et p_e les pôles du prédicteur 2 DDL.

$$p = -13.3 \pm 10.7j \quad (3.63a)$$

$$p_e = -13.3\kappa \pm 10.7j \quad (3.63b)$$

Le nouveau paramètre à régler devient κ qui modifie la vitesse des pôles du prédicteur par rapport aux pôles de la dynamique de roulis en boucle fermée.

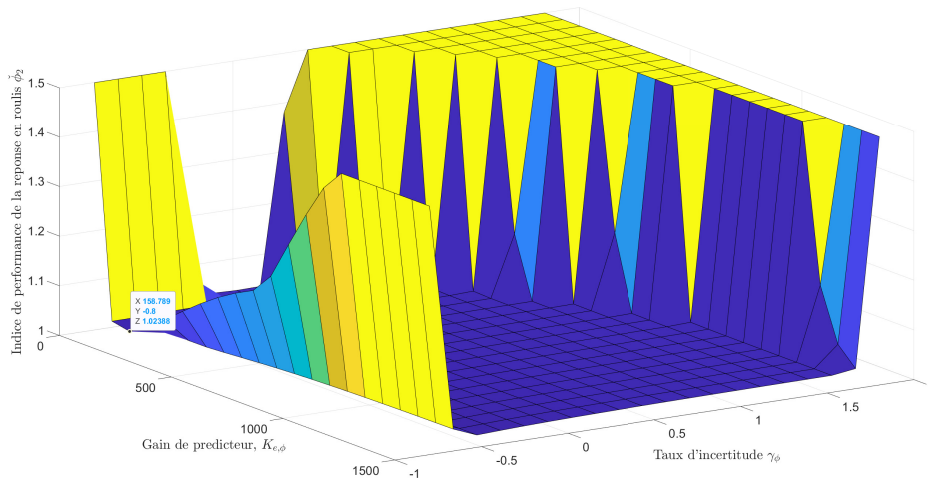


FIGURE 3.7 – Surfaces de réglage du gain $K_{e,\phi}$ pour l'augmentation adaptative en roulis (1DDL)

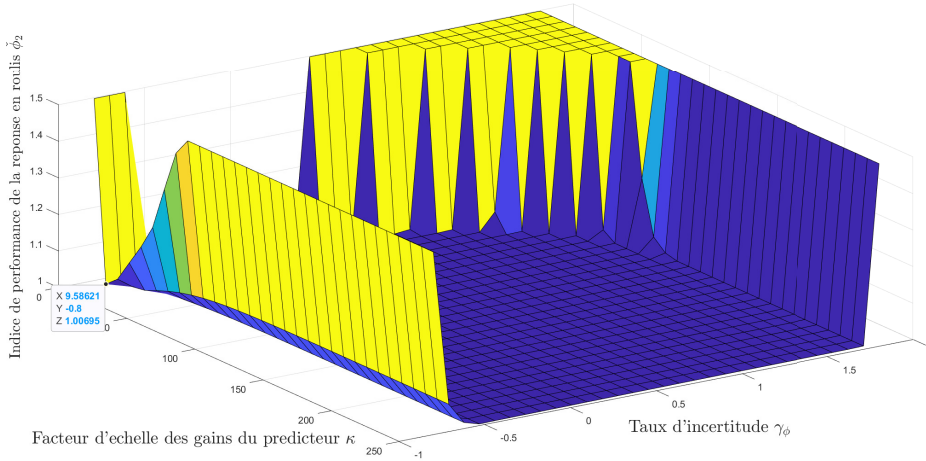


FIGURE 3.8 – Surfaces de réglage du gain $K_{e,\phi}$ pour l’augmentation adaptative en roulis (2DDL)

Les figures 3.7 et 3.8 montrent les surfaces de réglage des gains $K_{e,\phi}$ pour le prédictor à 1 DDL et κ pour le prédictor à 2 DDL. On remarque que les indices de performances $\check{\phi}_2$ obtenus dans les deux cas sont similaires. On remarque également qu’à partir de $K_{e,\phi} > 1000$ ou $\kappa > 70$, l’augmentation adaptative n’a plus d’effet sur la sortie ϕ_2 . Cela s’explique par la convergence trop rapide de l’erreur de prédiction du fait des gains du prédictor très élevées. Plus précisément, la dynamique de l’erreur de prédiction devient trop rapide par rapport à la période d’échantillonnage, ce qui fait que la loi d’adaptation calcule une valeur de $\hat{\sigma}$ trop faible par rapport à σ .

En respectant la méthodologie présentée dans la section 3.4.5, on choisit le gain $K_{e,\phi}$ ou κ qui donne l’indice $\check{\phi}_2$ le plus faible pour $\gamma_\phi = \gamma_{\phi,\min}$ (i.e $K_{e,\phi} = 150$ ou $\kappa = 9.58$). L’équation (3.64) montre la matrice de gains obtenue pour le prédictor à 2DDL avec $\kappa = 9.58$.

$$K_{e,\phi} = \begin{bmatrix} 127.8 & -9.7 \\ 10.7 & 127.8 \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

La figure 3.9 montre plus en détail le gain de performance apporté par l’augmentation adaptative sans filtrage.

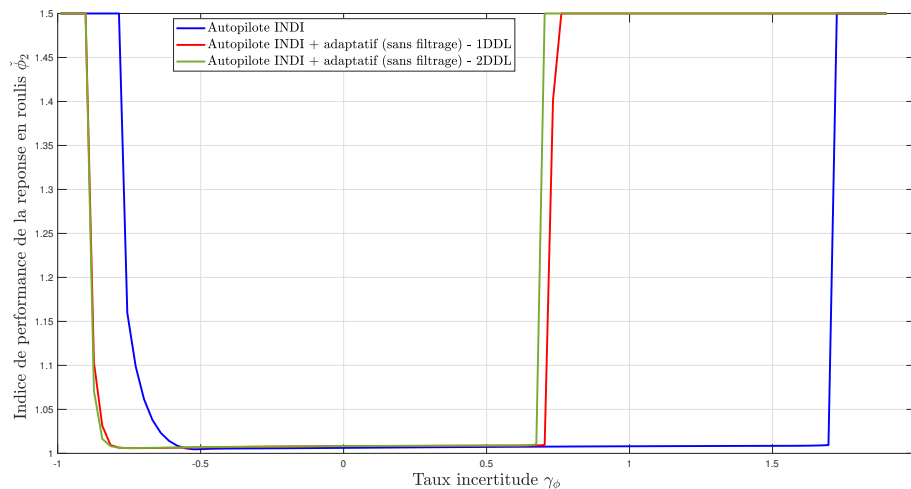


FIGURE 3.9 – Comparaison de l’Indice de performance $\check{\phi}_2$ en fonction du taux d’incertitude γ_ϕ entre l’autopilot INDI de roulis et l’autopilot INDI adaptatif (sans filtrage)

Le gain en performance du prédicteur à 1 DDL et à 2 DDL sont très similaires et, à ce stade de la méthodologie, il n'est pas possible de déterminer la meilleure architecture. Dans les deux cas, une amélioration des performances est observée pour $\gamma_\phi < -0.5$, mais une forte dégradation est présente pour $\gamma_\phi > 0.5$. Cette dégradation est due aux oscillations hautes fréquences non-filtrées du signal de commande Δu_{ad} . Ce problème est étudié dans la section suivante.

3.5.2 Réglage du filtre-passe bas

Les figures 3.10 et 3.11 montrent les surfaces de réglage de la bande passante du filtre passe-bas $C_\phi(s)$ avec les gains du prédicteur déjà choisis.

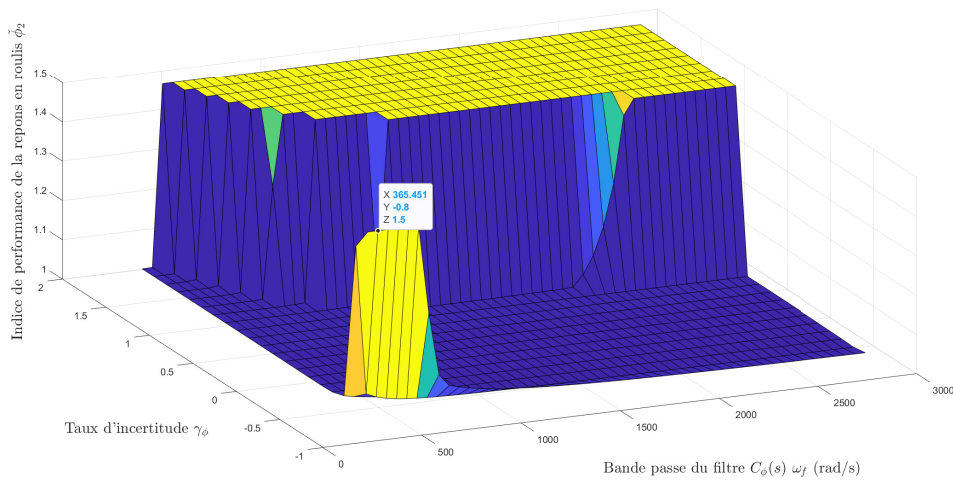


FIGURE 3.10 – surface de réglage de la bande passante ω_f du filtre $C_\phi(s)$ pour l'augmentation adaptative en roulis avec le prédicteur 1DDL

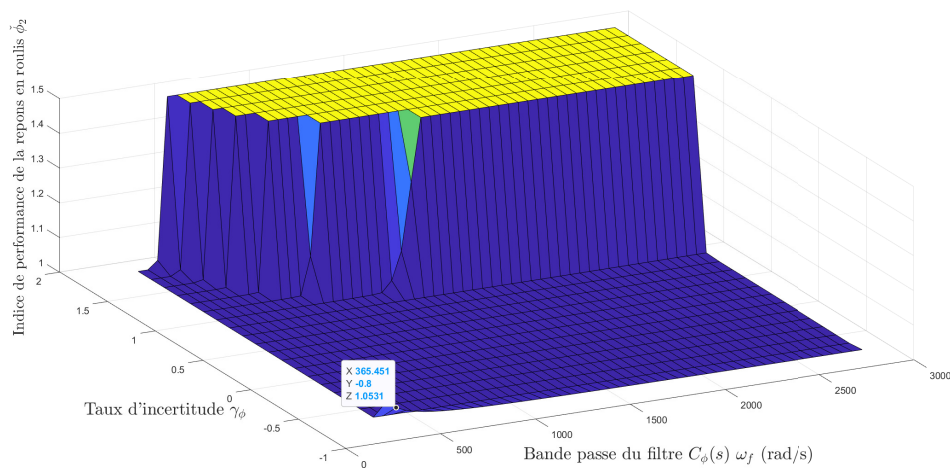


FIGURE 3.11 – surface de réglage de la bande passante ω_f du filtre $C_\phi(s)$ pour l'augmentation adaptative en roulis avec le prédicteur 2DDL

On remarque que dans le cas du prédicteur à 1 DDL, il n'est pas possible de trouver une fréquence de coupure ω_f de filtre $C_\phi(s)$ qui donne un indice $\check{\phi}_2$ plus faible que l'autopilote INDI seul sur l'ensemble de la plage d'incertitude. Dans le cas du prédicteur à 2 DDL, en choisissant $\omega_f = 365$ rad/s, ce qui est légèrement en dessous de la bande passante des actionneurs, l'augmentation adaptative améliore les

performances de l'autopilote pour toute la bande d'incertitude considérée. L'architecture du predicteur à 2 DDL est donc choisie. La figure 3.12 compare l'indice $\check{\phi}_2$ dans le cas sans augmentation adaptative, avec augmentation adaptative sans filtrage et avec augmentation adaptative filtrée.

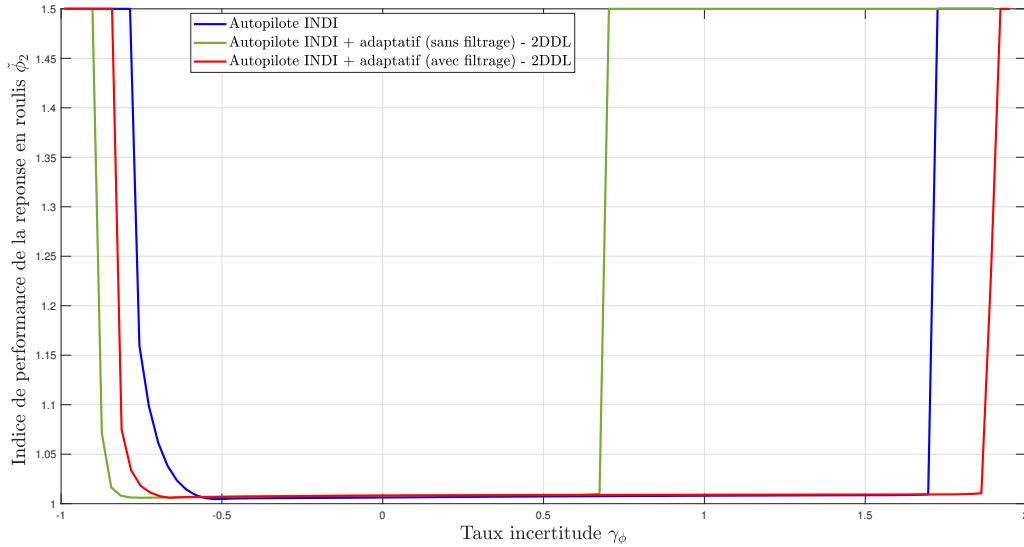


FIGURE 3.12 – Comparaison de l'indice de performance $\check{\phi}_2$ en fonction du taux d'incertitude γ_ϕ entre l'autopilote INDI de roulis et l'autopilote INDI adaptatif (avec et sans filtrage)

On remarque que l'ajout du filtre a fait disparaître la dégradation de performance pour $\gamma_\phi > 0.7$, mais à également légèrement augmenté $\check{\phi}_2$ pour $\gamma_\phi < -0.5$ comparée à la version non-filtrée. Cette observation illustre le compromis entre performance et robustesse apporté par le filtre $C(s)$.

La validation de l'augmentation adaptative est effectuée par des simulations de type Monte-Carlo dans la section suivante.

3.5.3 Validation par simulations de type Monte-Carlo

Pour valider le réglage, 30 simulations sont effectuées, balayant uniformément l'ensemble de la plage d'incertitude. Les figures 3.13 et 3.14 montrent le suivi de référence de l'angle de roulis ϕ_2 sans et avec augmentation adaptative sur toute la plage d'incertitude considérée.

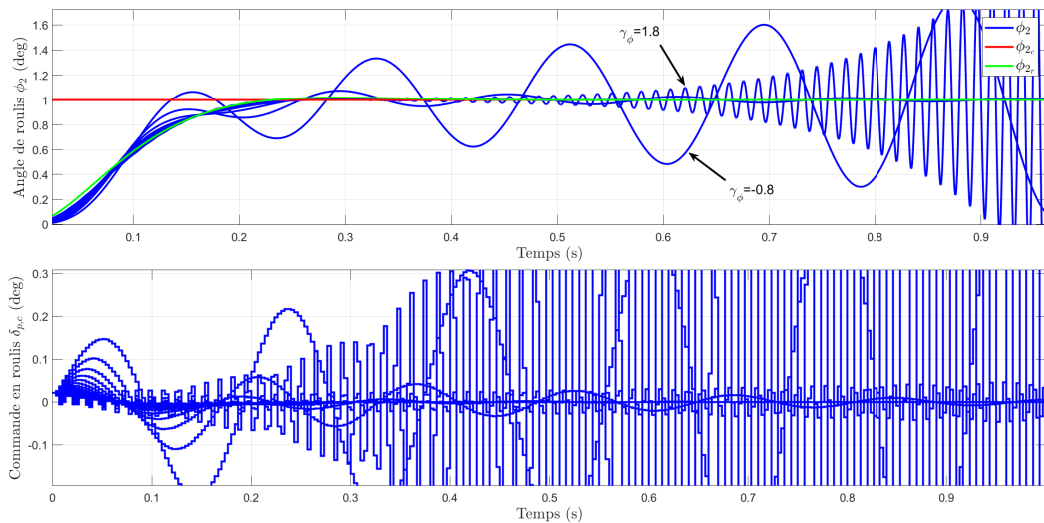


FIGURE 3.13 – Simulations de type Monte-Carlo sans l'augmentation adaptative

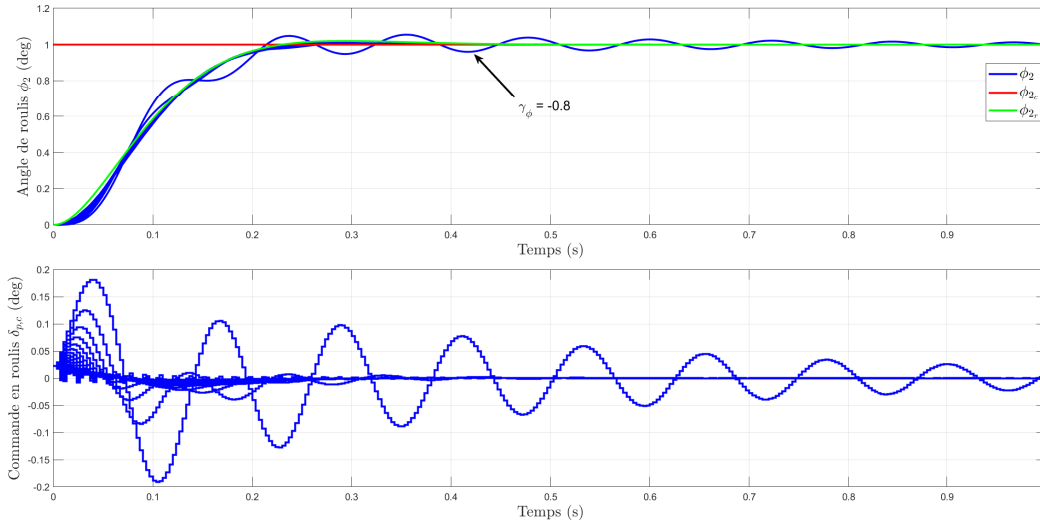


FIGURE 3.14 – Simulations de type Monte-Carlo avec l'augmentation adaptative

Même s'il reste une simulation avec quelques oscillations dans la figure 3.14 correspondant au cas extrême $\gamma_\phi = -0.8$, l'amélioration notable du suivi de référence entre les figures 3.13 et 3.14 permet de valider le réglage de l'augmentation adaptative pour le roulis.

Les figures 3.15, 3.16 et 3.17 permettent de commenter plus en détails le fonctionnement de l'augmentation adaptative, en affichant les variables internes pour des niveaux d'incertitudes particuliers (*i.e* $\gamma = 0, \gamma \ll 0, \gamma \gg 0$).

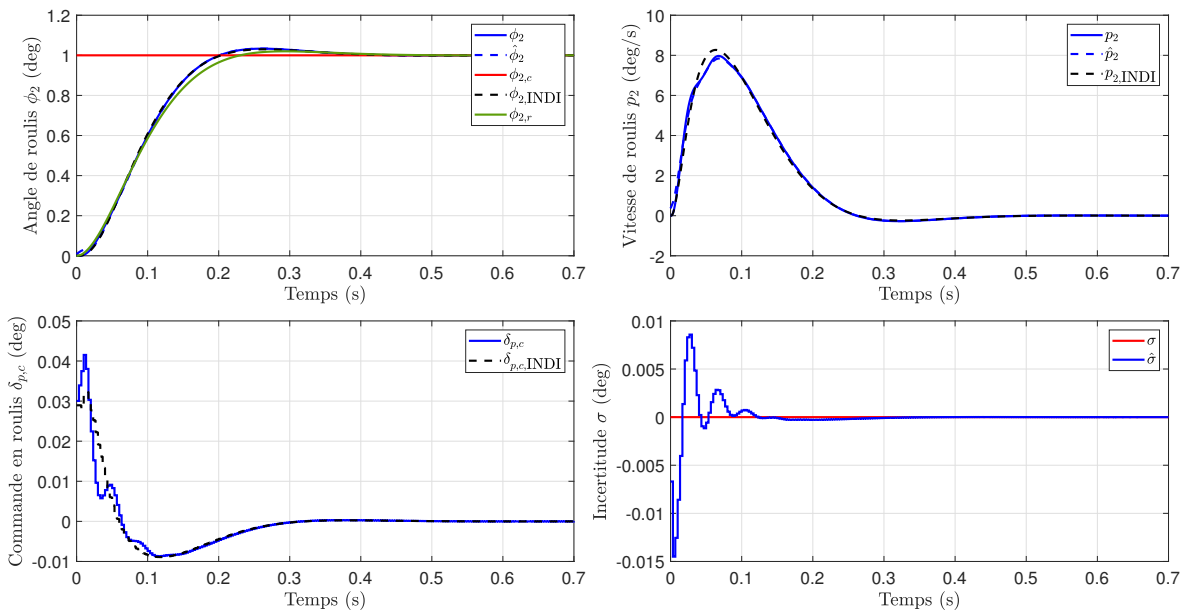
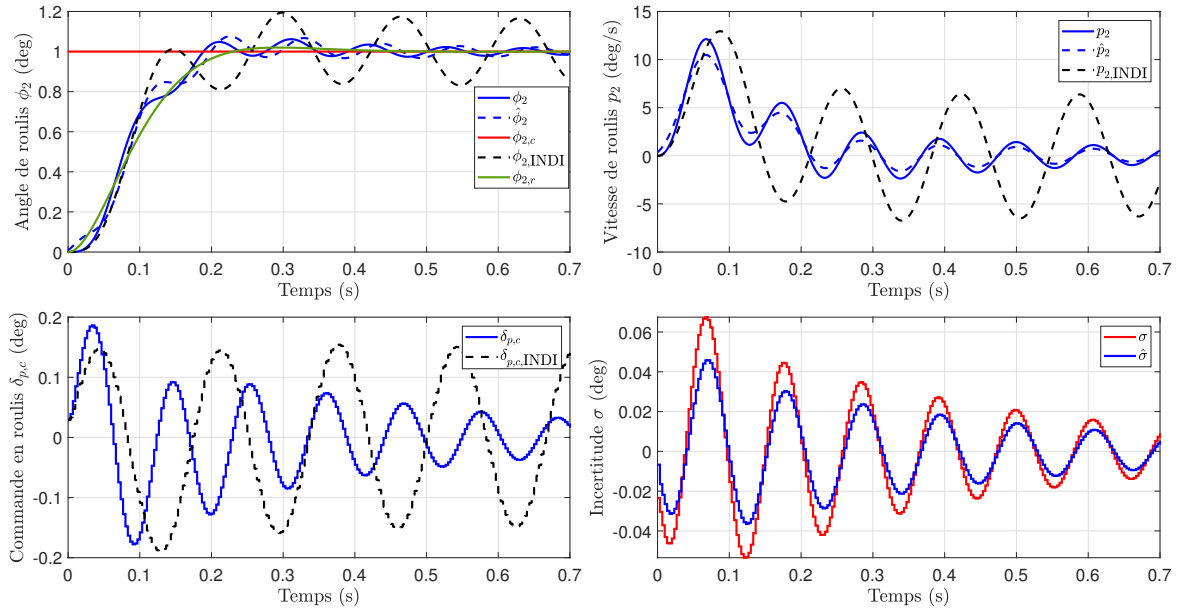
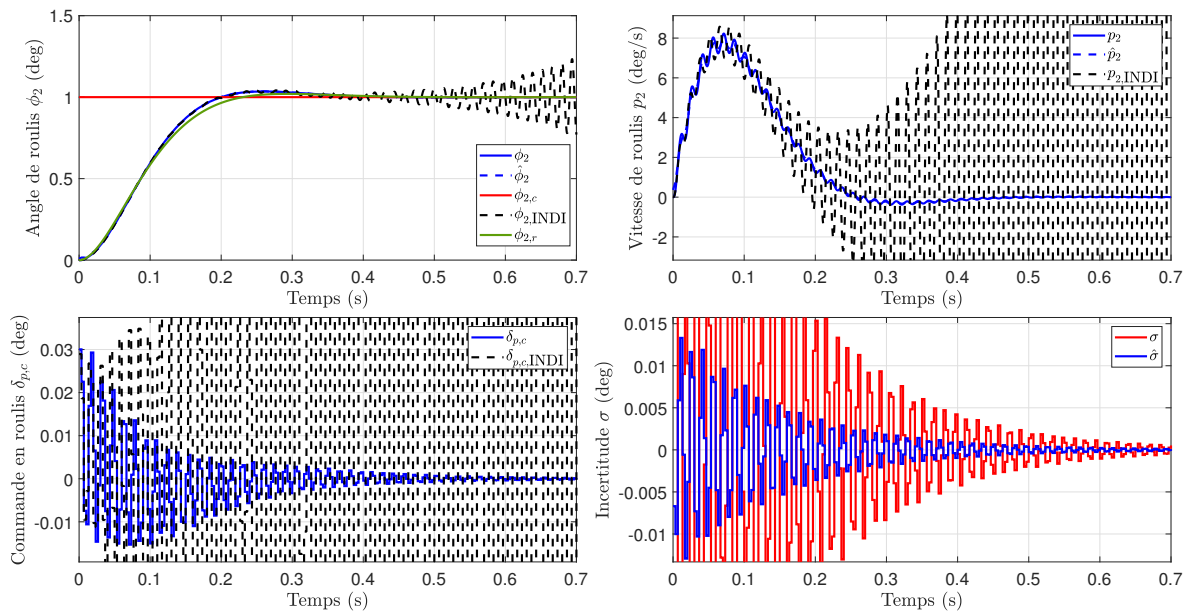


FIGURE 3.15 – Simulations de la dynamique de roulis pour $\gamma_\phi = 0$

La simulation étudiée dans la figure 3.15 correspond au cas nominal (*i.e* $\gamma_\phi = 0$). La courbe bleue (ϕ_2) correspond à l'architecture INDI avec augmentation (et filtre), la courbe noire pointillée à l'autopilote INDI seul. La courbe verte $\phi_{2,r}$ correspond quant à elle au signal généré par le modèle de référence. Le signal de commande généré par l'augmentation adaptative devrait être nul car il n'y a pas d'incertitude à estimer. Or on remarque que, même si le signal $\hat{\sigma}$ finit par converger vers 0, il n'est pas nul. Cela est dû à l'erreur de prédiction qui n'est pas totalement nulle à cause des gains $K_{e,\phi}$ et qui provoque une oscillation résiduelle sur le signal de commande.

FIGURE 3.16 – Simulations de la dynamique de roulis pour $\gamma_\phi = -0.8$ FIGURE 3.17 – Simulations de la dynamique de roulis pour $\gamma_\phi = 1.8$

Les simulations des figures 3.16 et 3.17 montrent deux cas où l'augmentation adaptative pour le roulis permet de stabiliser l'angle de roulis là où l'autopilote INDI seul échoue. Pour conclure l'analyse du réglage de l'augmentation adaptative pour l'autopilote de roulis, Les simulations montrent que l'ajout de l'augmentation adaptative dégrade légèrement le cas nominal sans incertitude, mais permet de stabiliser le système et d'obtenir les performances requises en cas de fortes incertitudes.

3.6 Application à la chaîne de tangage/lacet

En utilisant la même démarche que pour le roulis, le principal paramètre incertain utilisé dans la loi de commande INDI de tangage/lacet (équation (2.86)) est le coefficient aérodynamique lié au moment de

tangage et de lacet généré par les canards. Par conséquent, on peut faire la modélisation suivante :

$$\begin{aligned}
 G_{TL} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\bar{q}Sd}{\bar{I}_t}\right) C_{m_\delta} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\bar{q}Sd}{\bar{I}_t}\right) C_{m_\delta} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\bar{q}Sd}{\bar{I}_t}\right) C_{m_\delta, \text{nom}}(1 + \gamma_{qr}) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\bar{q}Sd}{\bar{I}_t}\right) C_{m_\delta, \text{nom}}(1 + \gamma_{qr}) \end{bmatrix} \\
 &= (1 + \gamma_{qr}) \begin{bmatrix} \left(\frac{\bar{q}Sd}{\bar{I}_t}\right) C_{m_\delta, \text{nom}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\bar{q}Sd}{\bar{I}_t}\right) C_{m_\delta, \text{nom}} \end{bmatrix} \\
 &= (1 + \gamma_{qr}) G_{TL, \text{nom}}
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Les mêmes hypothèses de découplage et de symétrie faites dans la section 2.6.1.2 sont utilisées pour simplifier le réglage de l'augmentation adaptative appliquée à la chaîne de tangage et de lacet. Plus précisément, le réglage du gain $K_{e,qr}$ du prédicteur et le réglage de la bande passante du filtre passe-bas $C_{qr}(s)$ sont effectués sur la chaîne de tangage et sont réutilisés sur la chaîne de lacet. Les simulations de type Monte-Carlo dans la figure 3.24, permettent de confirmer la validité de cette approche.

Comme la figure 3.6, la figure 3.18 montre l'indice de performance $\check{q} = \frac{\|q\|_{\mathcal{L}_\infty}}{\|q_c\|_{\mathcal{L}_\infty}}$ sur la chaîne de tangage en fonction du taux d'incertitude γ_{qr} .

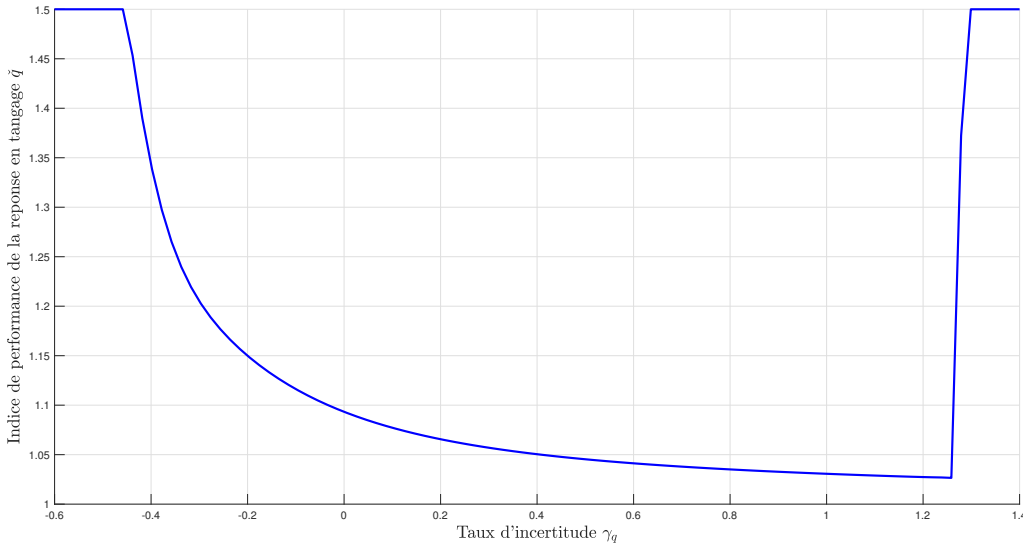


FIGURE 3.18 – Indice de performance \check{q} en fonction du taux d'incertitude γ_{qr} pour l'autopilote INDI de tangage/lacet

A partir de la figure 3.18 et en respectant la méthodologie de réglage, on définit les bornes de γ_{qr} comme suit

$$\gamma_{qr} \in [-0.5; 1.2] \tag{3.66}$$

3.6.1 Réglage du prédicteur d'état

L'équation (3.67) montre l'architecture du prédicteur d'état de tangage/lacet

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{q}} \\ \dot{\hat{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q(t) - q(t-T)}{T} \\ \frac{r(t) - r(t-T)}{T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\bar{q}Sd C_{m_\delta}}{\bar{I}_t} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{q}Sd C_{m_\delta}}{\bar{I}_t} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \Delta_q \\ \Delta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_q \\ \hat{\sigma}_r \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} K_{e,qr} & 0 \\ 0 & K_{e,qr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} - q \\ \hat{r} - r \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

A cause de la dynamique non-linéaire des vitesses de tangage et de lacet, il n'est pas possible d'employer une approche par placement de pôles comme pour le prédictor à 2DDL appliqué au roulis. A la place, la surface de réglage (figure 3.19) est obtenue en faisant varier $K_{e,qr}$ sur une plage fixée et γ_{qr} sur la plage déterminée par l'équation (3.66).

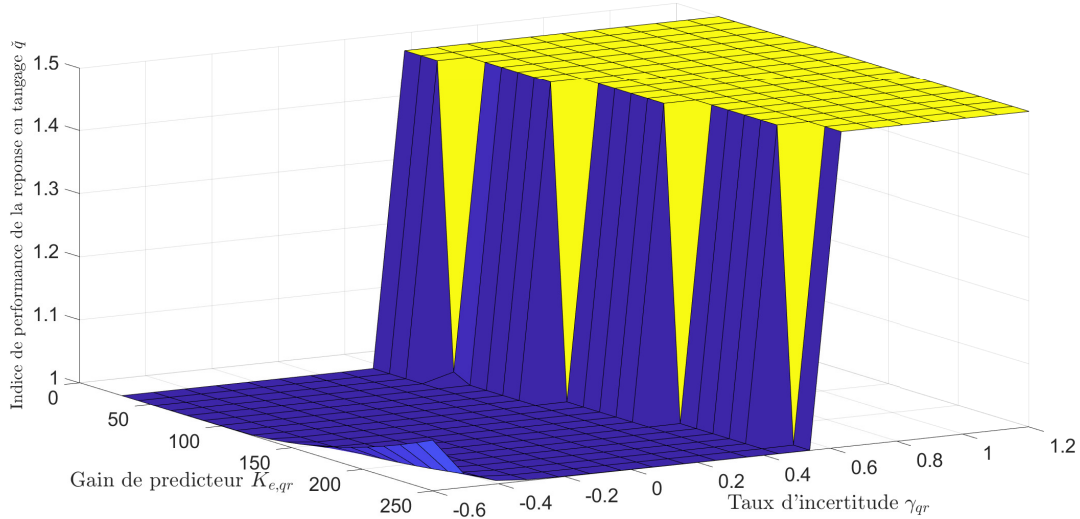


FIGURE 3.19 – Surface de réglage du gain $K_{e,qr}$ pour l'augmentation adaptative en tangage

La figure 3.19 montre que l'action du gain $K_{e,qr}$ améliore grandement l'indice \check{q} quand $\gamma_{qr} < -0.5$, mais dégrade fortement les performances quand $\gamma_{qr} > 0.3$. On remarque également que, quand $K_{e,qr} > 120$, l'indice \check{q} ré-augmente pour $\gamma_{qr} < -0.5$. Cela est dû au fait que le gain $K_{e,qr}$ devient trop fort pour permettre une bonne estimation des incertitudes par la loi d'adaptation (dynamique de l'erreur de prédiction trop forte). La valeur de $K_{e,qr} = 100$ est choisie pour la suite du réglage. La comparaison de \check{q} entre l'autopilote INDI avec et sans augmentation adaptative est faite à la figure 3.20.

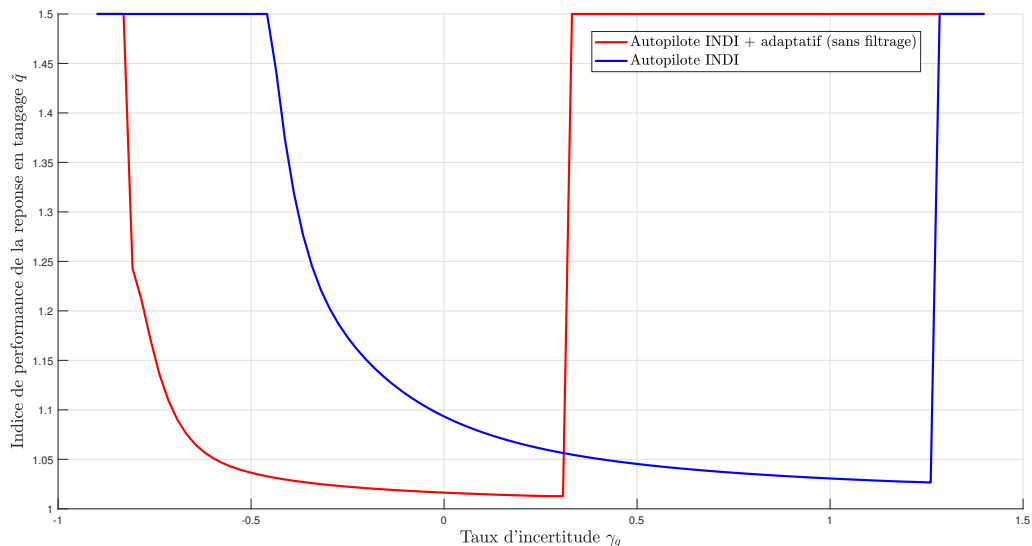


FIGURE 3.20 – Comparaison de l'indice de performance \check{q} en fonction du taux d'incertitude γ_{qr} entre l'autopilote INDI de tangage/lacet et l'autopilote INDI adaptatif (sans filtrage)

La figure 3.20 montre que le filtrage du signal de commande adaptative est nécessaire pour réduire \check{q} quand $\gamma_{qr} > 0.3$ mais que le gain en performance est très important pour $\gamma_{qr} < 0$.

3.6.2 Réglage du filtre passe-bas

La figure 3.21 montre la surface de réglage de la fréquence de coupure $\omega_{f,qr}$ du filtre passe-bas $C_{qr}(s)$.

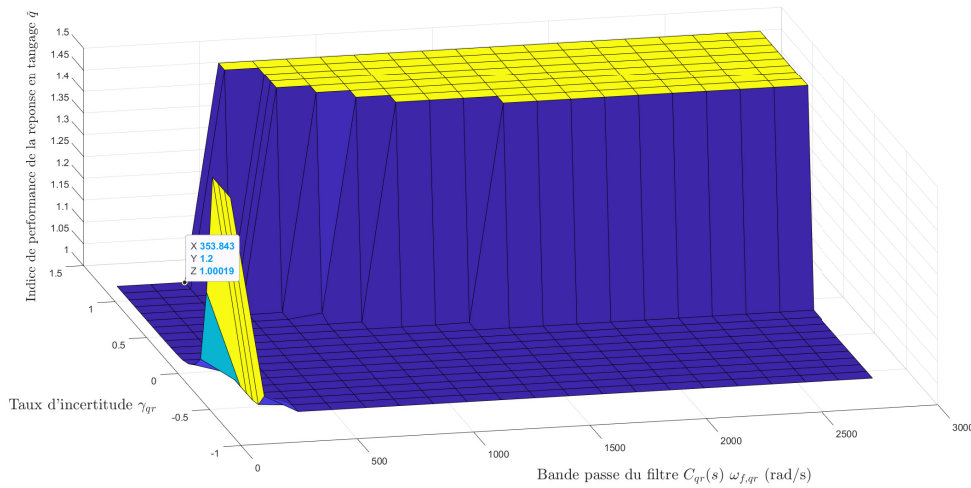


FIGURE 3.21 – Surface de réglage de la bande passante $\omega_{f,qr}$ du filtre $C_{qr}(s)$ pour l'augmentation adaptative en tangage/lacet

La surface de réglage montrée dans la figure 3.21 montre que, pour $K_{e,qr} = 100$, la plage des fréquences de coupure du filtre $C_{qr}(s)$ qui permet de réduire \check{q} sur toute la plage d'incertitude est faible. Pour $\omega_{f,qr} > 500$ rad/s, le filtre $C_{qr}(s)$ ne coupe pas assez les oscillations du signal de commande adaptative, ce qui dégrade les performances et, pour $\omega_{f,qr} < 200$ rad/s, le filtre réduit trop les composantes hautes fréquence de $\hat{\sigma}_q$, ce qui dégrade également les performance de l'augmentation adaptative. La figure 3.21 montre que la fréquence de coupure $\omega_{f,qr}$ adéquate se situe autour de 350 rad/s, ce qui, comme pour l'augmentation adaptative appliquée au roulis, est cohérent avec la bande passante des actionneurs.

La figure 3.22 compare l'indice \check{q} entre les différentes versions de l'autopilote (sans augmentation adaptative, avec augmentation adaptative non filtrée et avec augmentation adaptative filtrée) et permet de valider le réglage.

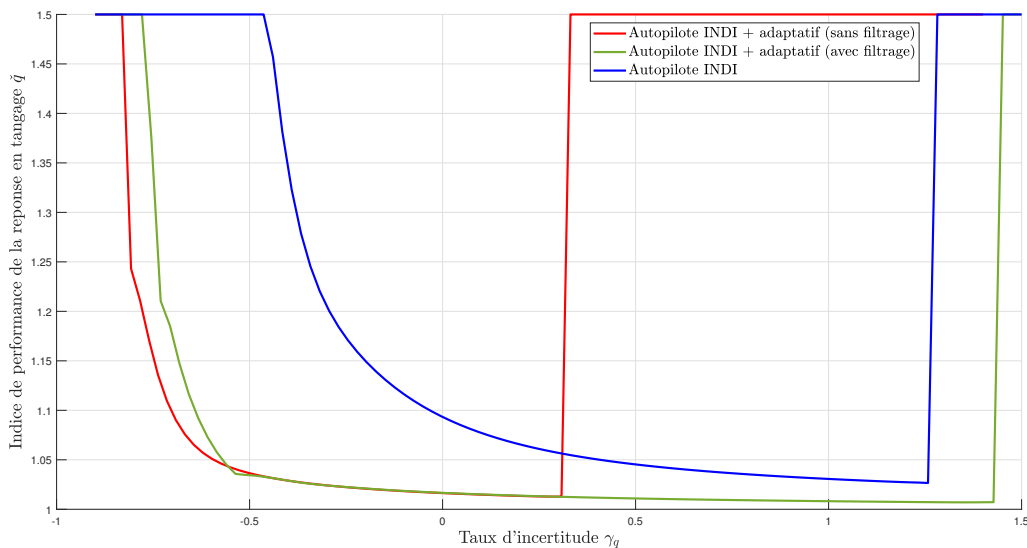


FIGURE 3.22 – Comparaison de l'indice de performance \check{q} en fonction du taux d'incertitude γ_{qr} entre l'autopilote INDI de tangage/lacet et l'autopilote INDI adaptatif (avec filtrage)

3.6.3 Validation par simulations de type Monte-Carlo

Les simulations de type Monte-Carlo (figures 3.23 et 3.24) effectuées sur toute la plage d'incertitude complètent la figure 3.22 et confirment l'amélioration des performances apportée par l'augmentation adaptative.

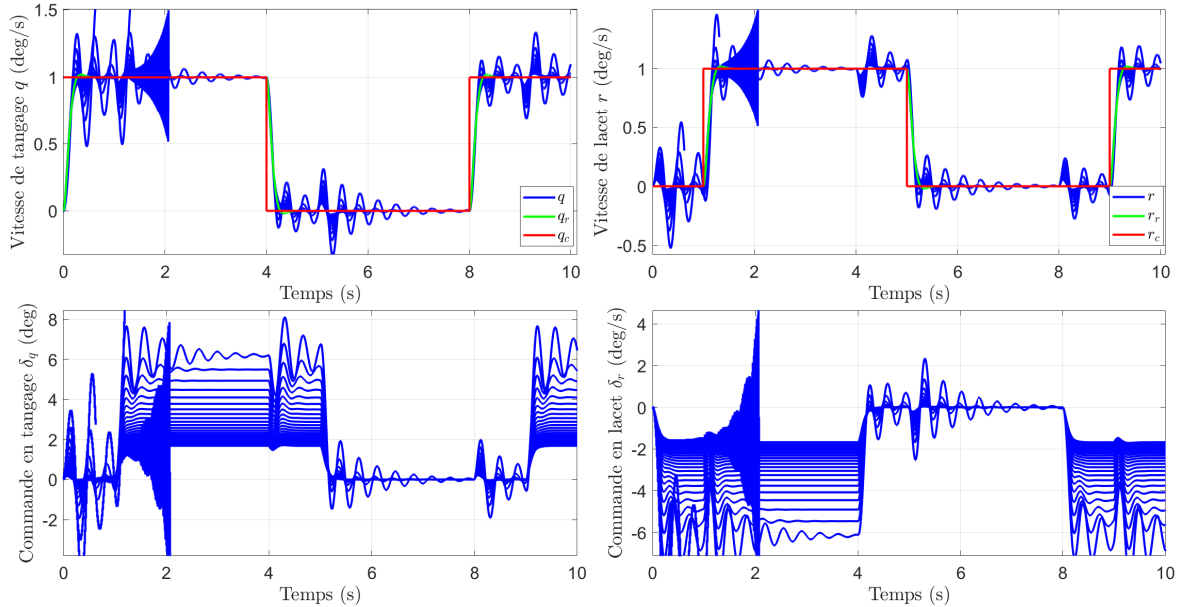


FIGURE 3.23 – Simulations type Monte-Carlo sans l'augmentation adaptative

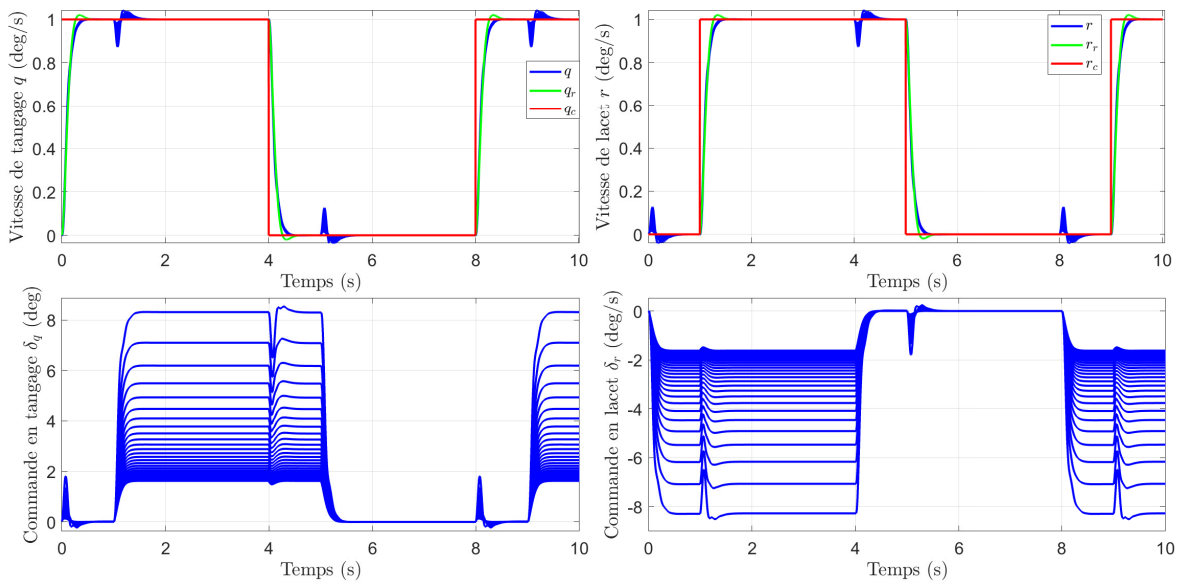


FIGURE 3.24 – Simulations de type Monte-Carlo avec l'augmentation adaptative

Ces simulations permettent également de valider les hypothèses de découplage et de symétrie faites pour simplifier le réglage. En effet, le même filtre passe-bas et le même gain du prédicteur que sur la chaîne de tangage sont appliqués sur la chaîne de lacet et améliorent de la même façon les performances.

Les figures 3.25, 3.26 et 3.27 comparent les performances entre les deux versions de l'autopilote INDI (avec et sans augmentation adaptative) pour des niveaux d'incertitudes particuliers.

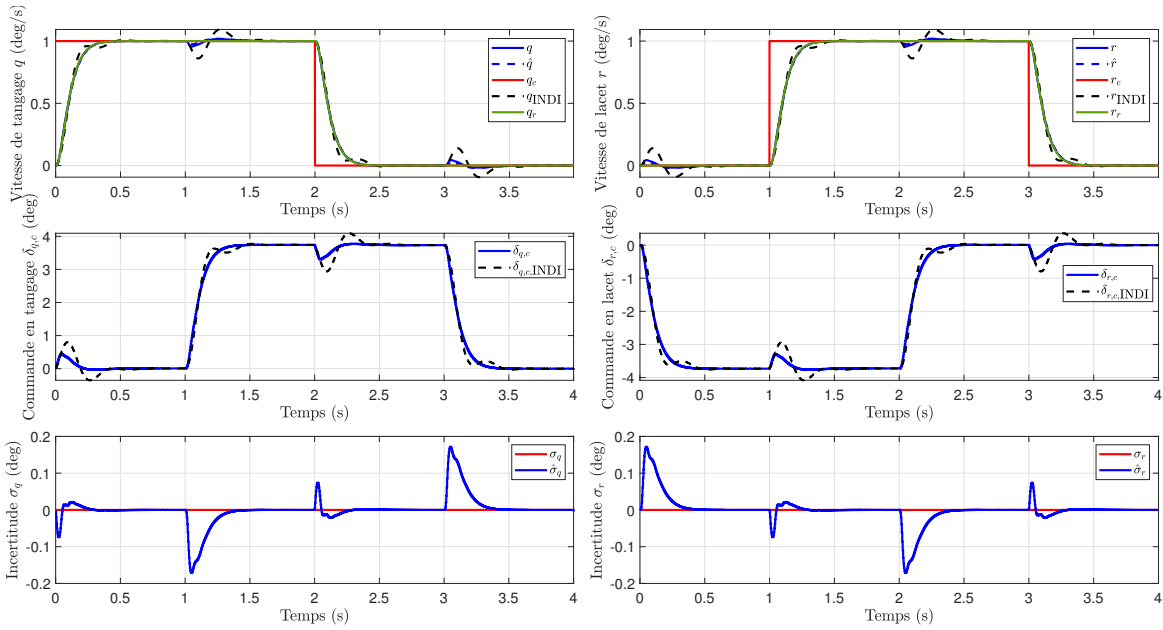


FIGURE 3.25 – Simulations de la dynamique de tangage/lacet pour $\gamma_{qr} = 0$

La simulation dans la figure 3.25 montre le cas nominal ($\gamma_{qr} = 0$). Dans ce cas, le signal de commande incremental généré par l'augmentation adaptative devrait être nul. Cependant, on remarque que $\hat{\sigma}$ est non nul à certains moments. Cela est dû au fait que le prédicteur d'état est basé sur les équations linéarisées de la INDI qui ne prennent pas en compte le couplage entre les chaines de tangage et de lacet. Par conséquent, cette différence augmente l'erreur de prédiction, cette dernière alimentant la loi d'adaptation. Ainsi, la simulation présentée en figure 3.25 montre que l'augmentation adaptative permet de diminuer l'erreur d'inversion dynamique décrit par l'équation (2.88) et par conséquent, de diminuer le couplage entre les chaines de tangage et de lacet.

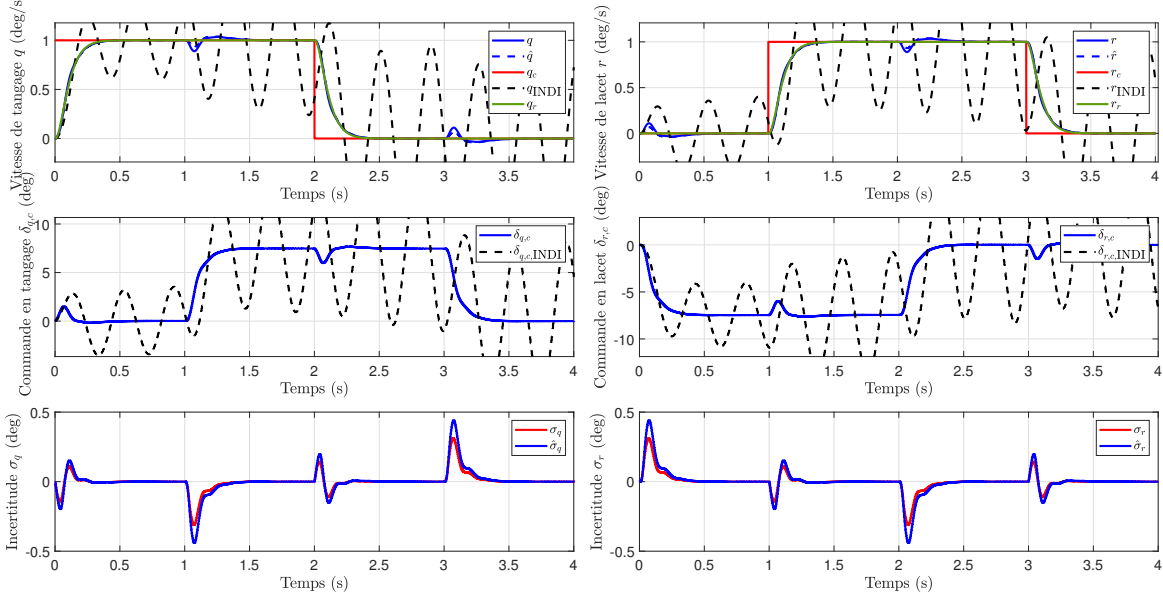
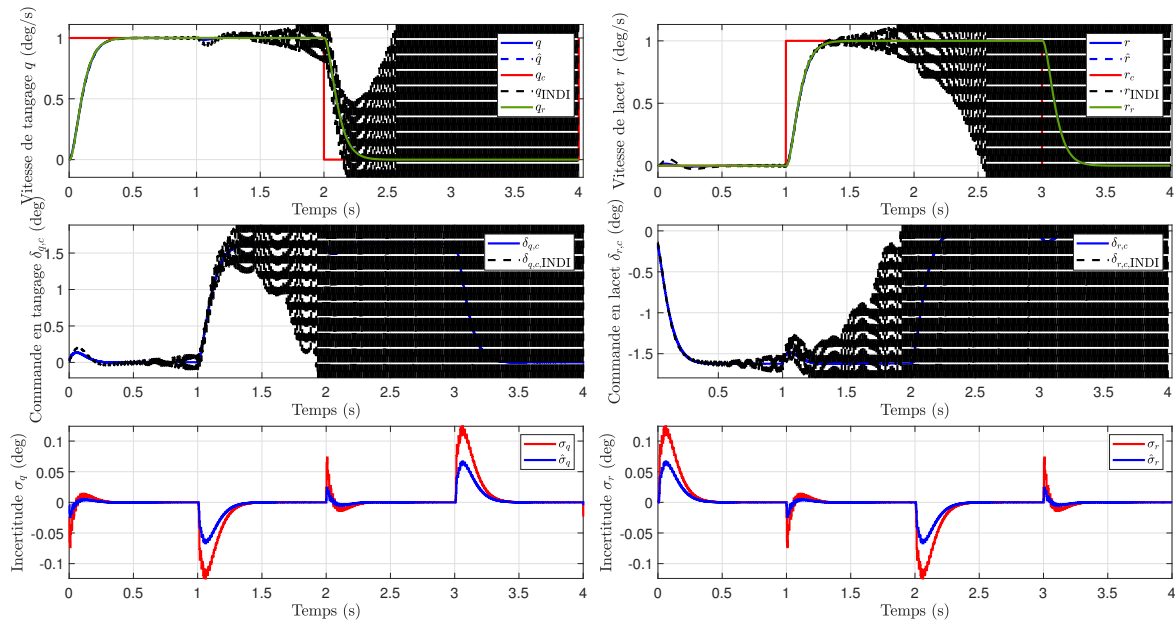


FIGURE 3.26 – Simulations de la dynamique de tangage/lacet pour $\gamma_{qr} = -0.5$

FIGURE 3.27 – Simulations de la dynamique de tangage/lacet pour $\gamma_{qr} = 1.3$

Les simulations dans les figures 3.26 et 3.27, montrent plus en détail les cas où les taux d'incertitudes considérés est à la limite minimale puis maximale de la plage d'incertitude considérée. Dans ces deux cas, on observe que la réponse du système bouclé en tangage/lacet est instable sans augmentation adaptative et est très proche de la réponse idéale avec l'augmentation adaptative.

Pour conclure la validation du réglage de l'augmentation adaptative de tangage et de lacet, la comparaison entre les simulations des figures 3.23 et 3.24 met en lumière un gain en performance apportée par l'augmentation adaptative bien plus marqué que pour la dynamique de roulis. Cela est dû à la dynamique non-linéaire de tangage et de lacet qui est plus sensible aux incertitudes paramétriques. Au delà de l'amélioration de la robustesse du système face au incertitudes paramétriques, la simulation 3.25 montre que l'augmentation adaptative réduit le couplage entre les chaînes de tangage et de lacet grâce à la prise en compte du couplage dans l'erreur de prédiction.

3.7 Application à la chaîne de facteurs de charge

Le dernier réglage effectué est fait sur l'augmentation adaptative de l'autopilote pour les facteurs de charge. Contrairement aux lois de commande INDI pour le roulis, pour le tangage et pour le lacet, la loi de commande INDI pour les facteurs de charge fait intervenir plusieurs coefficients aérodynamiques (voir équation (2.97)). Comme pour la chaîne de tangage/lacet, afin de réduire la dimension du réglage, plusieurs hypothèses simplificatrices sont employées :

- Découplage :

Comme pour les dynamiques de tangage et de lacet, les dynamiques des facteurs de charge latéraux et verticaux sont considérées suffisamment découplées par l'autopilote INDI pour être traitées séparément.

- Symétrie :

Les spécifications du cahier des charges imposent la même dynamique en boucle fermée pour les deux chaînes de facteurs de charge

- Incertitudes uniquement sur $C_{N\delta}$:

La matrice G_{FC} utilisée dans la loi de commande INDI fait intervenir l'estimation de trois coefficients aérodynamiques (i.e C_{N_δ} , $C_{Y_{p\alpha}}$ et C_{N_α}). C_{N_δ} est le coefficient aérodynamique lié à la force des canards et est le coefficient le plus incertain parmi ceux intervenant dans G_{FC} . Ainsi, pour simplifier le réglage de l'augmentation adaptative, seul C_{N_δ} est considéré comme incertain et son expression est donnée par :

$$C_{N_\delta} = (1 + \gamma_{yz})C_{N_\delta, \text{nom}} \quad (3.68)$$

Ces trois hypothèses permettent de simplifier le réglage et de pouvoir employer la même méthodologie de réglage que pour l'augmentation adaptative en roulis, en tangage et en lacet. Le réglage est effectué sur la chaîne de facteur de charge vertical n_z et est réutilisé pour la chaîne de facteur de charge latéral n_y .

En faisant varier le taux d'incertitude γ_{yz} du coefficient aérodynamique C_{N_δ} , on obtient les résultats de la figure 3.28. Dans la simulation de la figure 3.28, $\check{n}_z = \frac{\|n_z\|_{\mathcal{L}^\infty}}{\|n_{z,c}\|_{\mathcal{L}^\infty}}$ est l'indice \check{y} appliqué au réglage de l'augmentation adaptative pour les chaînes de facteurs de charge. Du fait de l'architecture en cascade de l'autopilote de facteurs de charge (figure 2.23), le signal de commande de l'autopilote de facteurs de charge est utilisé comme consigne par l'autopilote de tangage et de lacet. On peut donc se demander si l'augmentation adaptative en tangage et en lacet permet d'améliorer les performances de l'autopilote de facteurs de charge.

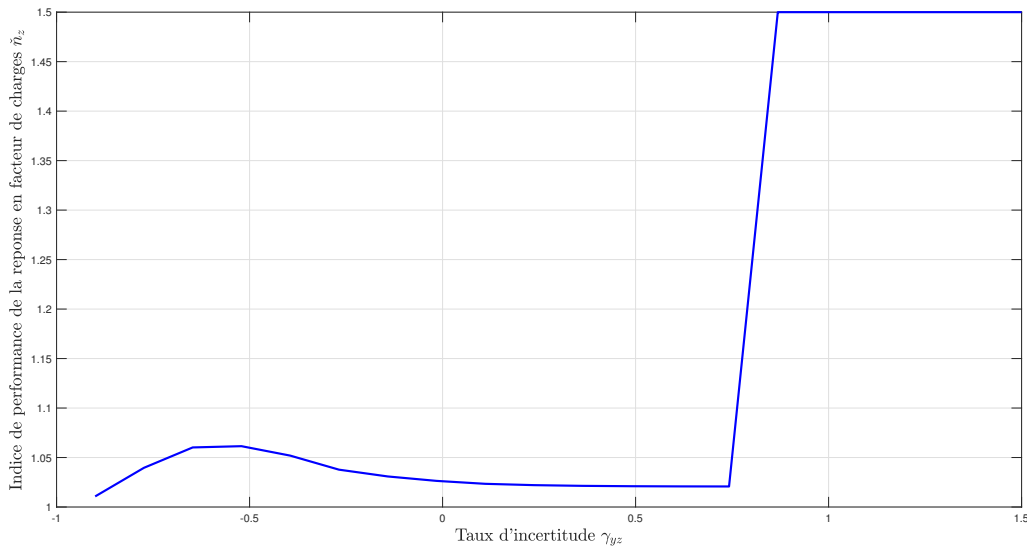


FIGURE 3.28 – Indice de performance \check{n}_z en fonction du taux d'incertitude γ_{yz} pour l'autopilote de facteurs de charge

La figure 3.29 compare l'indice γ_{yz} avec et sans augmentation adaptative en tangage/lacet pour la plage d'incertitude suivante :

$$\gamma_{yz} \in [-0.9; 0.9] \quad (3.69)$$

La zone $\gamma_{yz} \in [-1; -0.9]$ est volontairement exclue du réglage car cela reviendrait à annuler presque totalement la force des canards sur le système, et engendrerait la perte de la contrôlabilité du système.

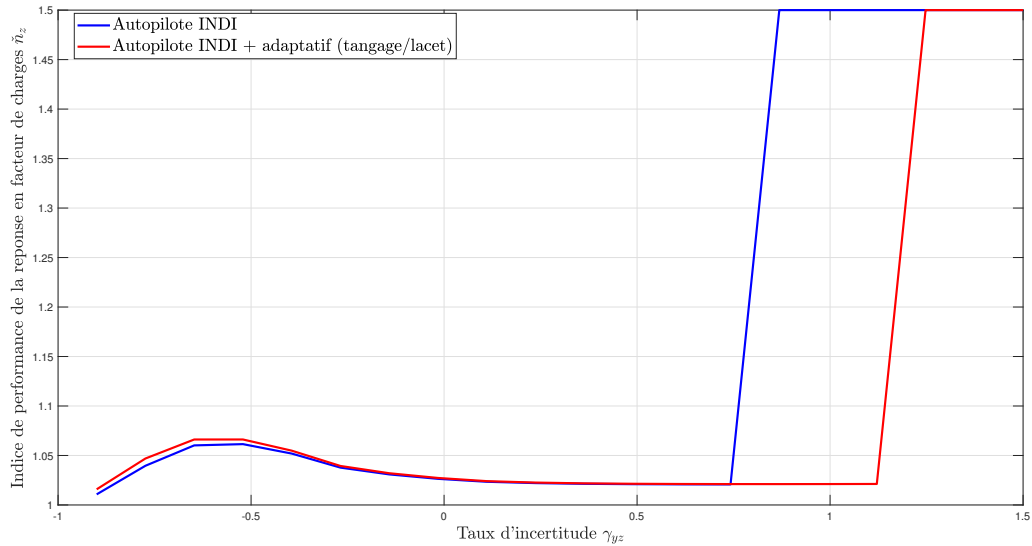


FIGURE 3.29 – Indice de performance \tilde{n}_z en fonction du taux d'incertitude γ_{yz} pour l'autopilote de facteurs de charge

On remarque que l'augmentation adaptative en tangage et en lacet apporte un gain en performance quand $\gamma_{yz} > 0.7$.

3.7.1 Réglage du prédicteur d'état

L'architecture du prédicteur d'état de l'augmentation adaptative pour l'autopilote de facteurs de charge est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{\dot{n}}_z \\ \hat{\dot{n}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_z(t) - n_z(t-T)}{T} \\ \frac{n_y(t) - n_y(t-T)}{T} \end{bmatrix} + G_{FC} \begin{bmatrix} \Delta_z + \hat{\sigma}_{n_z} \\ \Delta_y + \hat{\sigma}_{n_y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{e,yz} & 0 \\ 0 & K_{e,yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{n}_z - n_z \\ \hat{n}_y - n_y \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

où $K_{e,yz}$ est le gain du prédicteur à régler dont la surface de réglage est montrée par la figure 3.30.

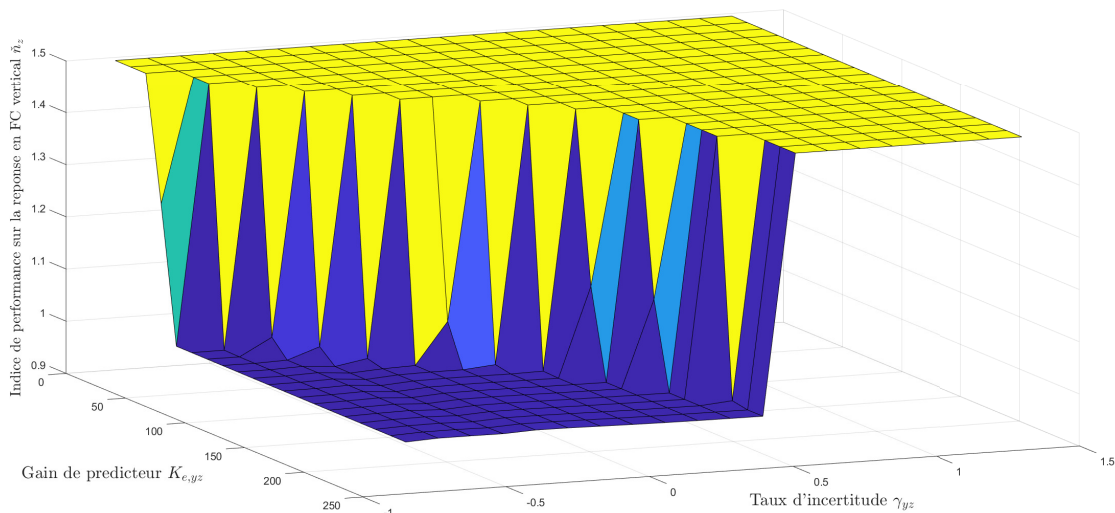


FIGURE 3.30 – Surface de réglage du gain $K_{e,yz}$ pour l'augmentation adaptative en facteurs de charge

En choisissant $K_{e,yz} = 100$, la figure 3.31 est obtenue.

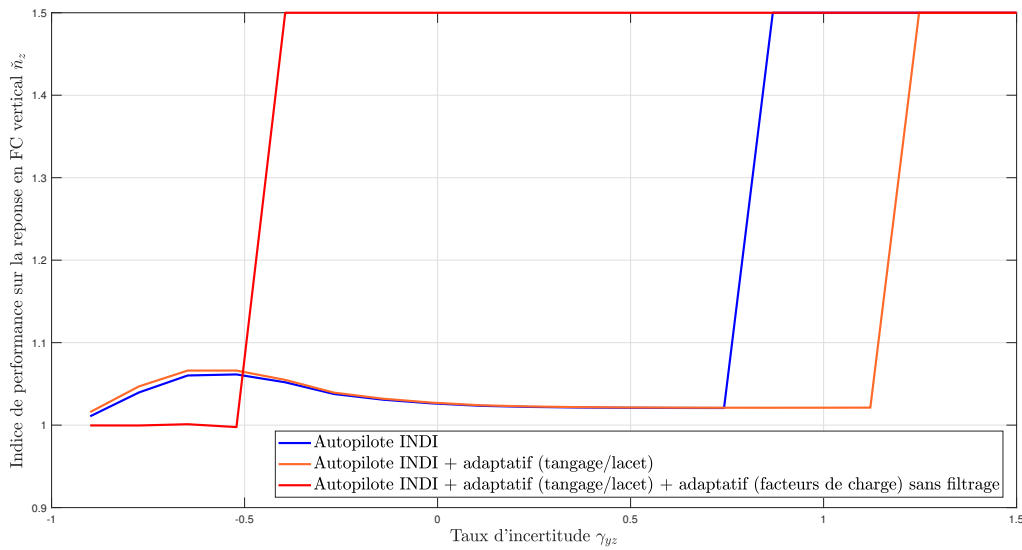


FIGURE 3.31 – Indice de performance \check{n}_z en fonction du taux d'incertitude γ_{yz} pour l'autopilote de facteurs de charge

On remarque que, sans filtrage, l'augmentation adaptative diminue l'indice \check{n}_z pour les taux d'incertitude les plus critiques (*i.e* $\gamma_{yz} < -0.5$) mais dégrade les performances pour la majorité des cas (*i.e* $\gamma_{yz} > -0.5$). Cela est dû au fait que le signal de commande de l'étage d'inversion lente est envoyé à l'étage d'inversion rapide qui possède une bande passante très faible compte tenu du temps de stabilisation de la dynamique de vitesse de tangage et de lacet en boucle fermée (0.3 s) . Le filtrage du signal de commande adaptative est donc indispensable.

3.7.2 Réglage du filtre passe-bas

La surface de réglage de la bande passante $\omega_{f,yz}$ du filtre passe bas $C_{yz}(s)$ montrée par la figure 3.32 suggère une valeur de $\omega_{f,yz}$ comprise entre 40 et 71 rad/s.

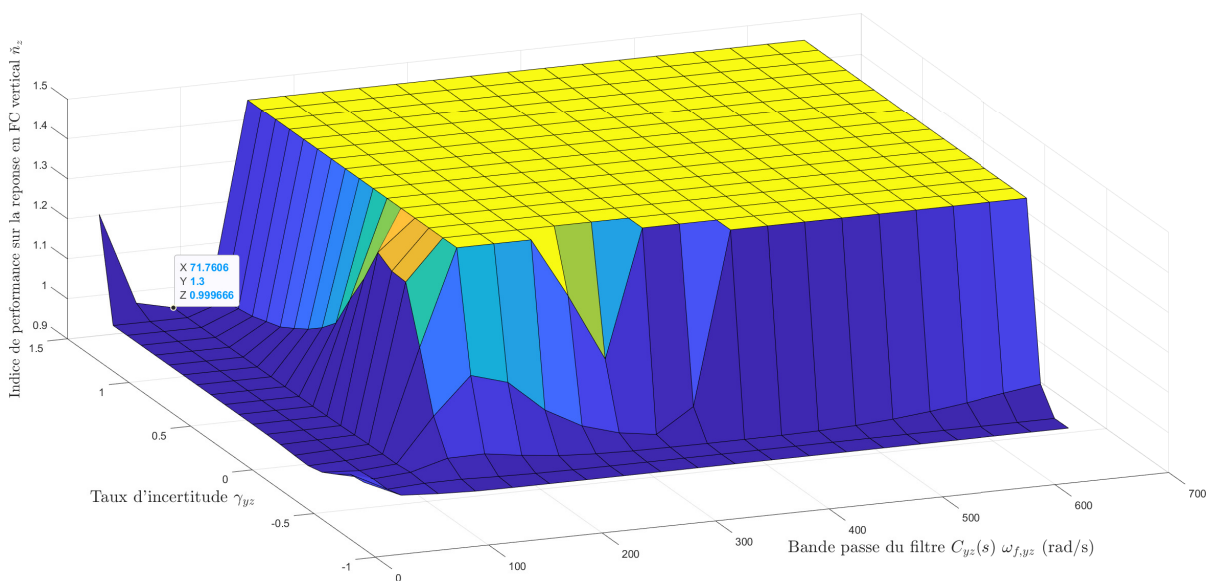


FIGURE 3.32 – Surface de réglage de la bande passante $\omega_{f,yz}$ du filtre $C_{yz}(s)$ pour l'augmentation adaptative en facteurs de charge

La figure 3.33 compare l'indice \check{n}_z entre plusieurs versions de l'autopilote de facteurs de charge.

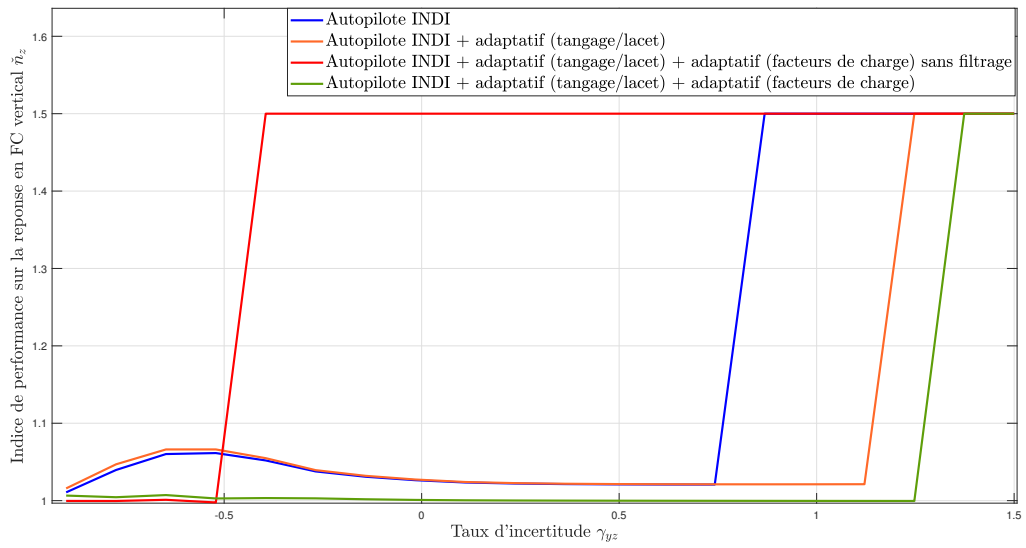


FIGURE 3.33 – Indice de performance \check{n}_z en fonction du taux d'incertitude γ_{yz} pour l'autopilote de facteurs de charge

On remarque que l'augmentation adaptative de l'autopilote de facteurs de charge permet de réduire \check{n}_z pour $\gamma_{yz} < 0.5$ et pour $\gamma_{yz} < 1.3$, alors que le système avec l'autopilote INDI seul devient instable à partir de $\gamma_{yz} > 0.7$. Les simulations effectuées dans la section suivante présentent plus en détail le gain en performance apporté par l'augmentation adaptative de l'autopilote de facteurs de charge.

3.7.3 Validation par simulations de type Monte-Carlo

Les figures 3.34 et 3.35 comparent les réponses en boucle fermée des dynamiques de facteurs de charge avec et sans augmentation adaptative sur la plage d'incertitudes définie par l'équation (3.69).

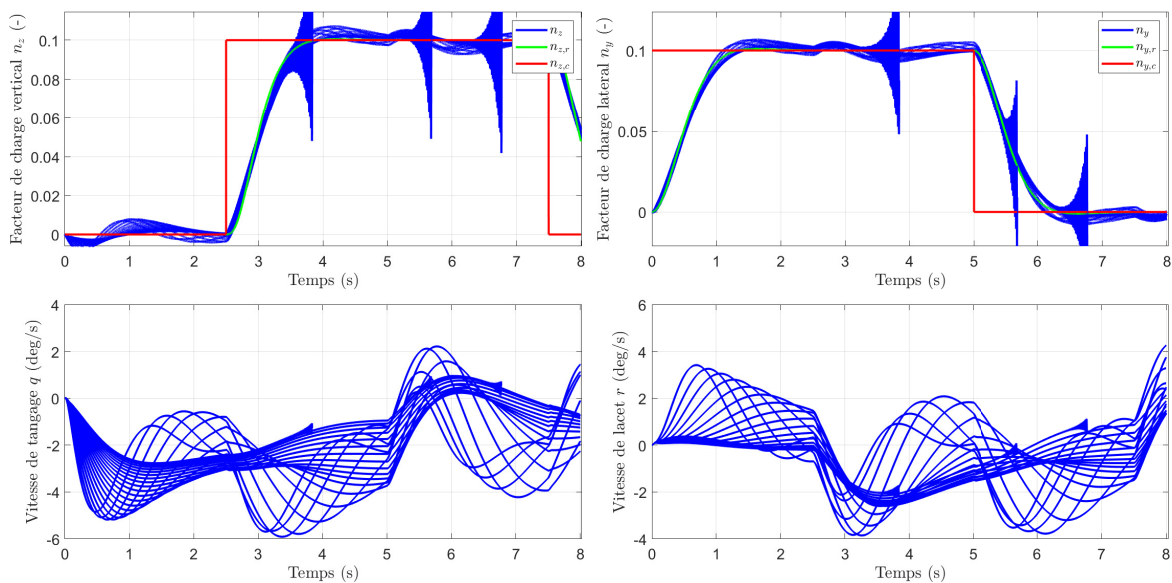


FIGURE 3.34 – Simulations de type Monte-Carlo de la dynamique des facteurs de charge sans l'augmentation adaptative

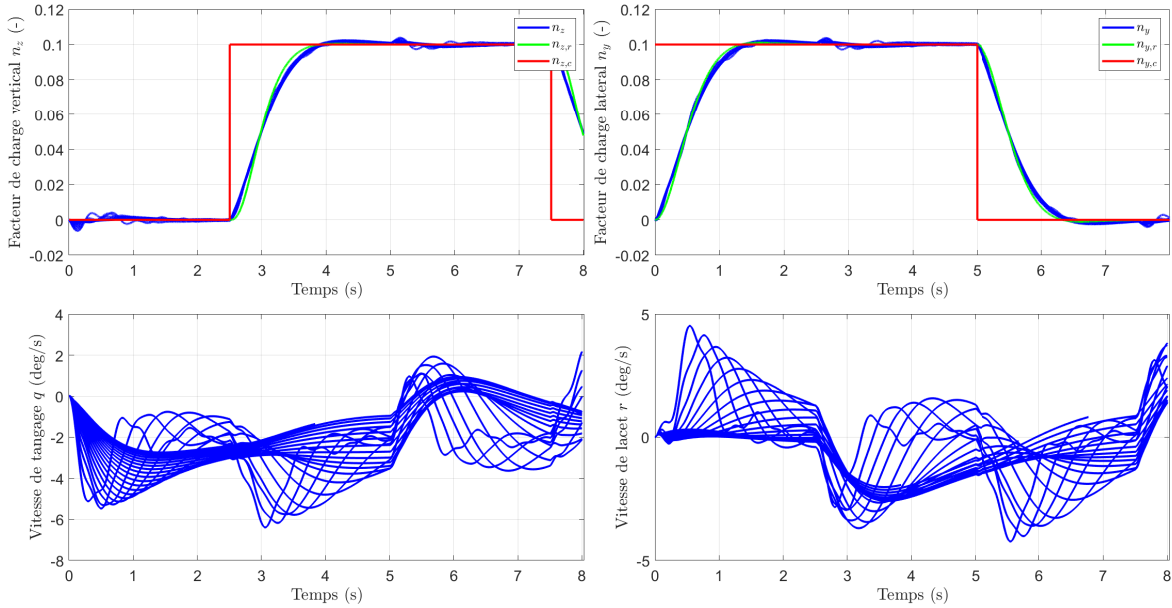


FIGURE 3.35 – Simulations de type Monte-Carlo de la dynamique des facteurs de charge avec l’augmentation adaptative

Même si des petites oscillations dans les réponses sont toujours présentes pour les cas les plus critiques, on remarque que l’augmentation adaptative améliore les performances de l’autopilote des facteurs de charge. Le système reste stable et le couplage entre les deux chaînes est réduit.

Les simulations dans les figures 3.36, 3.37 et 3.36 comparent plus en détail les deux versions de l’autopilote de facteurs de charge à des niveaux d’incertitudes fixes.

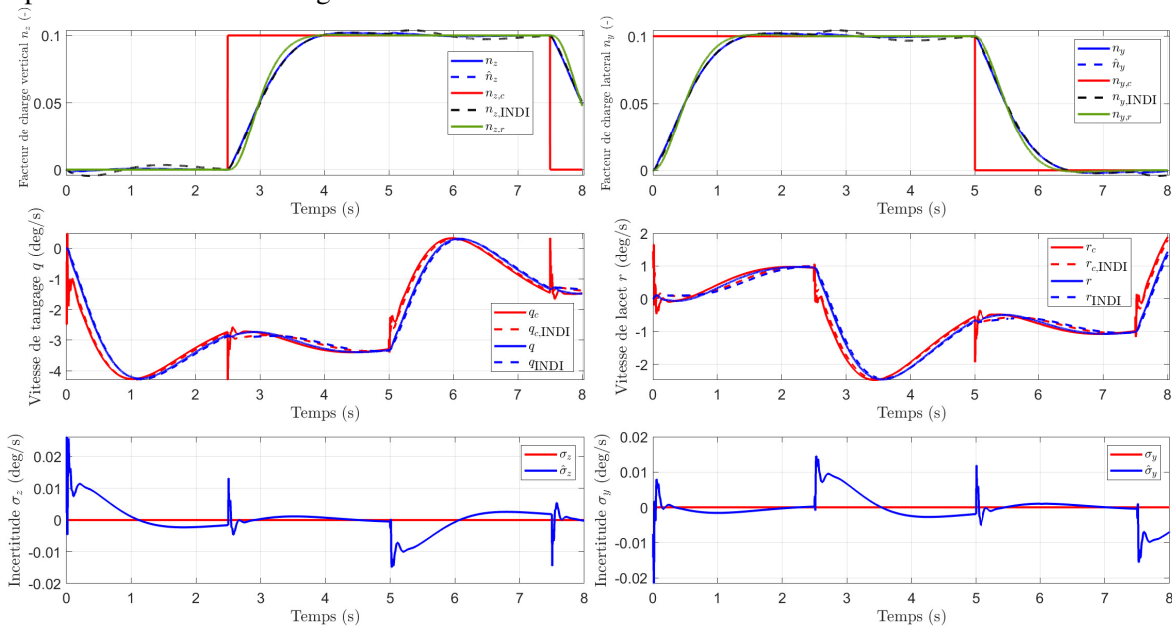


FIGURE 3.36 – Simulations de la dynamique des facteurs de charge pour $\gamma_{yz} = 0$

Comme dans la figure 3.25, la figure 3.36 montre que l’augmentation adaptative de facteurs de charge améliore les performances de l’autopilote même dans le cas nominal. On remarque un couplage légèrement réduit entre les deux chaînes mais on remarque également que les vitesses de tangage et de lacet commandées $[q_c \ r_c]^T$ sont plus grandes avec l’augmentation adaptative.

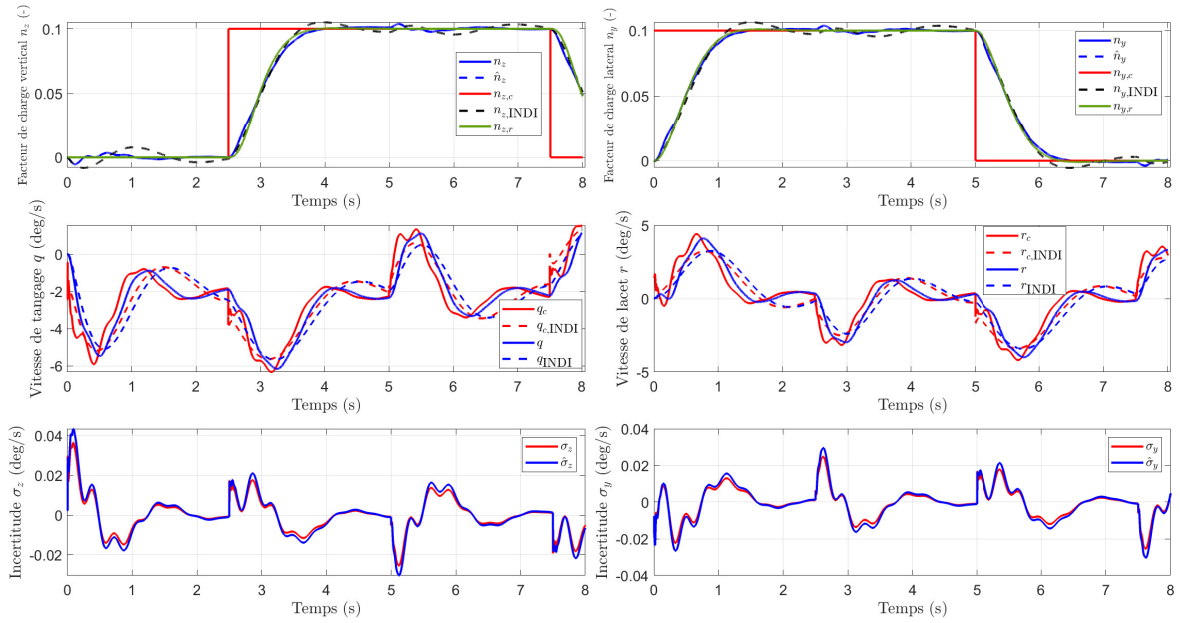


FIGURE 3.37 – Simulations des facteurs de charge pour $\gamma_{yz} = -0.9$

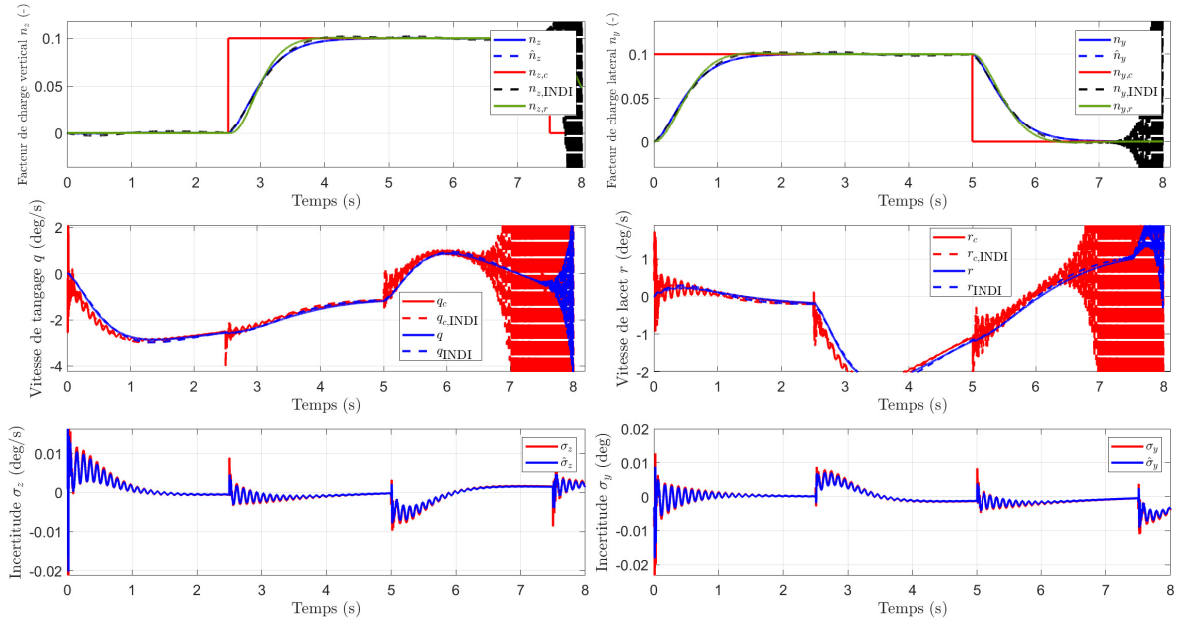


FIGURE 3.38 – Simulations des facteurs de charge pour $\gamma_{yz} = 0.9$

Les simulations dans les deux figures 3.37 et 3.38 montrent que l'augmentation adaptative améliore globalement les performances. Cependant, l'amélioration apportée est bien inférieure à celle apportée à l'augmentation adaptative sur l'autopilote de tangage et de lacet. Cela peut être expliqué par le fait que les hypothèses utilisées (présentées en début de section 3.7) pour le réglage sont trop simplificatrices. En effet, il serait pertinent de considérer une matrice $K_{e,yz}$ pleine et des incertitudes sur les trois coefficients aérodynamiques utilisés dans la loi de commande.

3.8 Comparaison et validation avec des trajectoires guidées

La dernière étape de la validation de l'augmentation adaptative dans son ensemble est la comparaison des performances des deux autopilotes dans un scénario de trajectoire guidée. Les conditions initiales

de simulations sont identiques à celles définies dans la section 2.7.2. 30 simulations sont effectuées en considérant les incertitudes données par le tableau suivant :

paramètres	niveau d'incertitude
C_{l_δ}	[-80% 180%]
C_{m_δ}	[-90% 90%]
C_{N_δ}	[-90% 180%]

TABLE 3.1 – Paramètres et incertitudes considérés pour la validation du réglage des augmentations adaptative

Les simulations sont effectuées avec un paramètre incertain à la fois, c'est-à-dire que dans les dix premières simulations, seulement des incertitudes sur C_{l_δ} sont considérées, ensuite dans les 10 suivantes, seulement des incertitudes sur C_{m_δ} et enfin dans les 10 dernières seulement sur C_{N_δ} . Les figures 3.39 et 3.40 montrent l'évolution de l'angle de roulis ϕ_2 et des facteurs de charges latéral et vertical $[n_z \ n_y]^\top$, ainsi que les signaux de commande en roulis, en tangage et en lacet $[\delta_p \ \delta_q \ \delta_r]^\top$ dans les simulations avec et sans augmentation adaptative.

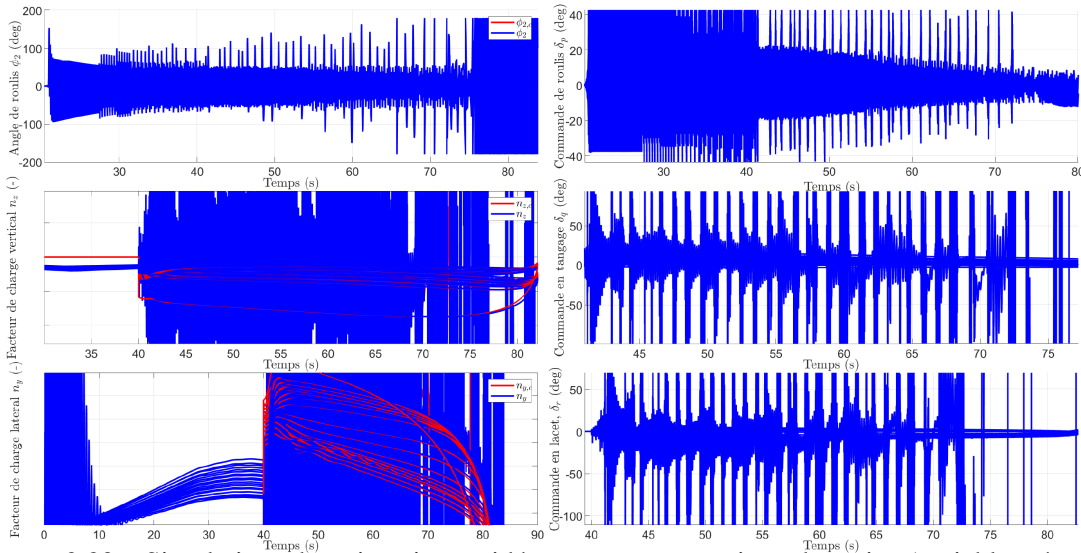


FIGURE 3.39 – Simulations de trajectoires guidées sans augmentation adaptative (variables régulées)

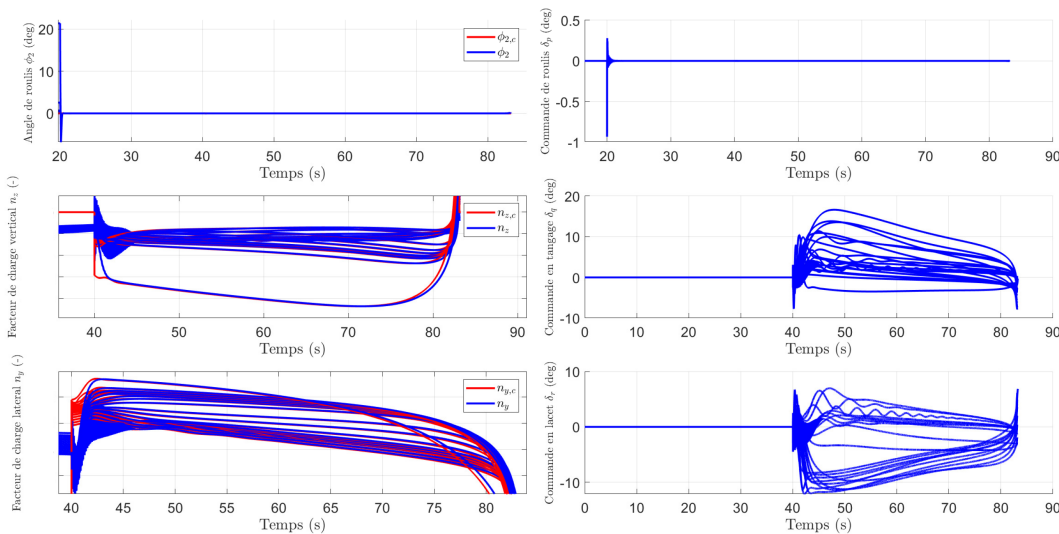


FIGURE 3.40 – Simulations de trajectoires guidées avec augmentation adaptative (variables régulées)

Les figures 3.41 et 3.42 montrent les trajectoires guidées et les écarts de distance entre les points d'impacts de chaque tir d'une part et la cible d'autre part.

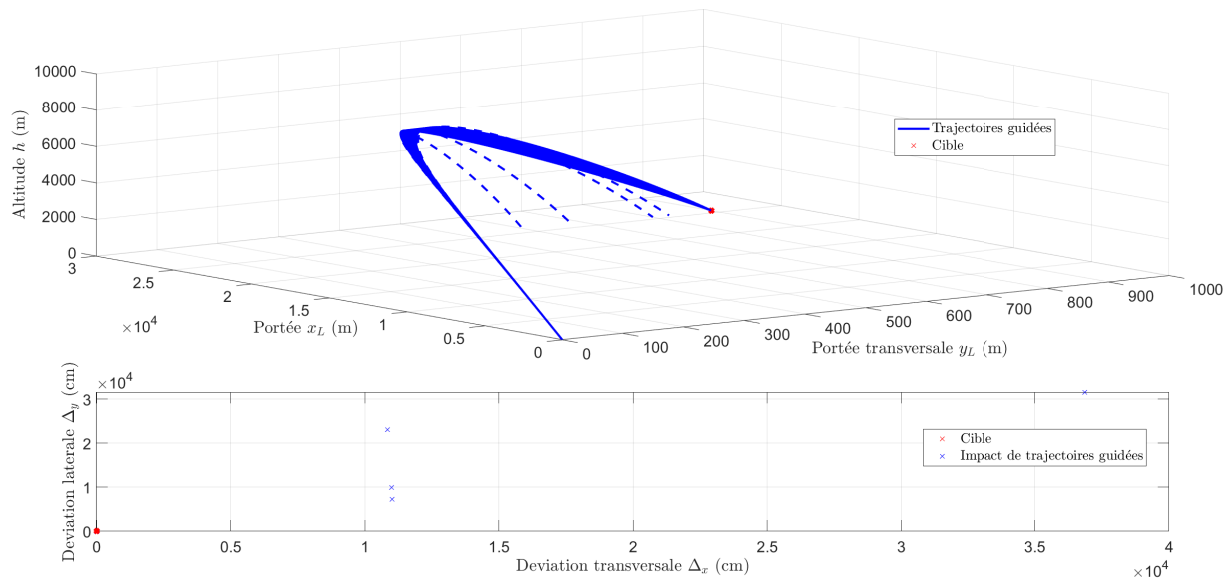


FIGURE 3.41 – Simulations de trajectoires guidées sans augmentation adaptative (trajectoires)

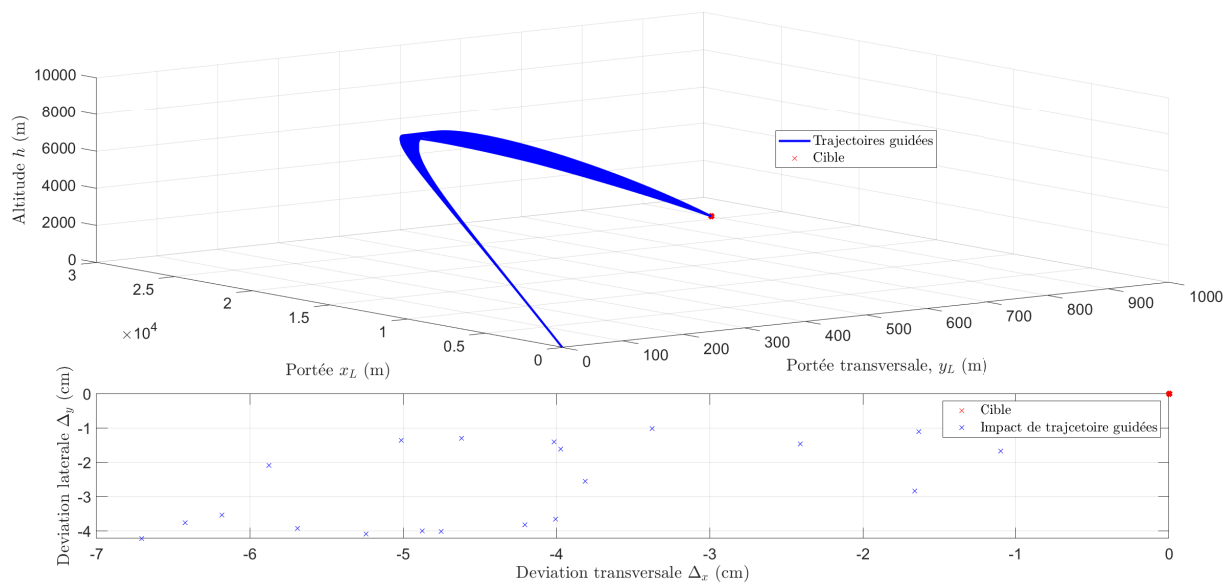


FIGURE 3.42 – Simulations de trajectoires guidées avec augmentation adaptative (trajectoires)

Sur la figure 3.41, les courbes en pointillés désignent les trajectoires où l'un des autopilotes de roulis, de tangage, de lacet ou de facteurs de charge a divergé. En comparant respectivement les figures 3.39 et 3.41 avec les figures 3.40 et 3.42, on peut noter l'amélioration apportée par l'augmentation adaptative mais également les limites de la méthodologie de réglage utilisée. En effet, la méthodologie de réglage présentée dans la section 3.4.5 ne considère que des consignes de type échelon pour définir le critère \check{y} . Cette hypothèse est valide pour la chaîne de roulis car la loi de guidage utilisée impose un angle de roulis de la FCT constant (*i.e.* $\phi_{2,c} = 0$ degré). Les facteurs de charges désirés par la loi de guidage, quant à eux évoluent lentement dans le temps (figure 3.40), ce qui les rend plus faciles à suivre par l'autopilote de facteurs de charge qu'une référence de type échelon. Ainsi, même si l'augmentation adaptative permet de garder la stabilité du système dans les cas d'incertitudes les plus difficiles, l'autopilote INDI seul reste suffisamment robuste dans la majorité des cas considérés et présente des meilleures performances que

dans les simulations de validation des sections 3.5.3, 3.6.3 et 3.7.3.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de la dégradation des performances des autopilotes INDI soumis aux incertitudes paramétriques est traité.

Dans un premier temps, la légitimité de ce problème est justifiée par l'utilisation de l'estimation de certains coefficients aérodynamiques jugés très incertains dans les lois de commande conçues dans le chapitre 2. La modélisation des incertitudes et leur influence sur les performances des autopilotes INDI ont ensuite été détaillées.

Dans un second temps, un état de l'art concernant la commande adaptative a été dressé et la théorie des deux architectures principales de commande adaptative (MRAC et commande \mathcal{L}_1 adaptative) ont été résumées. L'architecture de la commande \mathcal{L}_1 adaptative a été jugée plus intéressante à implémenter notamment grâce à l'utilisation d'un filtre passe-bas qui permet d'avoir un degré de liberté supplémentaire pour le réglage de l'augmentation adaptative. Cependant la théorie de la commande \mathcal{L}_1 adaptative étant basée sur les systèmes linéaires il a été nécessaire d'adopter une architecture qui associe commande INDI et architecture type \mathcal{L}_1 adaptative.

Une fois l'architecture d'augmentation adaptative utilisée définie en détail, la méthodologie de réglage des paramètres de l'augmentation adaptative a été présentée. Les résultats de simulations obtenus pour l'autopilote de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge montrent l'efficacité de la méthodologie de réglage, mais également ses limites. Plus précisément, les simulations type Monte-Carlo ont mis en lumière le gain en performance très important qu'apporte l'augmentation adaptative, en réduisant les oscillations en sortie et en gardant le système stable dans les cas les plus critiques. Les résultats de ce chapitre ont également montré l'intérêt du filtre passe-bas, permettant de réduire les oscillations du signal de commande et ainsi de ne pas dégrader les performances du système dans le cas d'incertitudes faibles. Des hypothèses fortes de découplage et de symétrie ont été utilisées pour le réglage des chaînes de tangage, de lacet et de facteurs de charge afin de réduire la complexité du réglage. De plus, la méthode ne considère que des entrées de type échelon, or la loi de guidage utilisée envoie des consignes évoluant dans le temps. Enfin, la méthodologie de réglage ne prend pas en compte la marge de retard. Le chapitre 4 traite de ce dernier aspect, c'est à dire la synthèse d'un filtre passe-bas permettant d'obtenir un bon compromis entre la minimisation de la norme \mathcal{L}_1 d'un système bouclé et la garantie d'une certaine marge de retard, retard typiquement introduit par les capteurs et les temps de calcul.

Chapitre 4

Méthode de synthèse d'un filtre passe-bas via des LMI pour l'augmentation adaptative en roulis

Sommaire

4.1	Introduction et motivations	137
4.2	Système bouclé et retards considérés	138
4.3	Définition des LMI à résoudre pour la synthèse du filtre	139
4.3.1	LMI pour la caractérisation de la norme \mathcal{L}_1 d'un système	139
4.3.2	LMI pour la stabilité robuste et marge de retard	141
4.3.3	Problèmes structurels pour la résolution des LMI	141
4.4	Réalisation d'état de la dynamique de roulis en boucle fermée	142
4.4.1	Approximation de Padé	142
4.4.2	Dynamique de roulis avec INDI	143
4.4.3	Augmentation adaptative	148
4.5	Résultats de synthèse	151
4.5.1	Problèmes numériques	151
4.5.2	Algorithme d'analyse du filtre par LMI	151
4.6	Conclusion	156

4.1 Introduction et motivations

La méthodologie de réglage des augmentations adaptatives mise en place dans la section 3.4.5 présente des limitations évidentes. Premièrement, le critère d'optimisation choisi ne considère que des entrées de type échelon, or les simulations de trajectoires guidées montrent que les facteurs de charge désirés par la loi de guidage ne sont pas de type échelon. Deuxièmement, la méthodologie de réglage n'inclut pas de critère sur une marge de retard à garantir.

Par conséquent pour améliorer le réglage de l'augmentation adaptative, il faudrait une méthodologie qui ne fasse pas d'hypothèse sur la forme du signal de consigne et qui inclut des critères sur la marge de retard du système bouclé.

Ce chapitre traite donc de l'étude de méthodes pour la synthèse du filtre passe-bas de l'augmentation adaptative appliquée à la dynamique de roulis. En effet, le filtre passe-bas adaptatif permet de régler le compromis entre performance et robustesse. Plus précisément, un filtre avec une grande bande passante permet une meilleure adaptation (voir équation (3.45)) mais réduit la marge de retard du système [CH10]. L'objectif est donc d'obtenir un filtre qui permette la meilleur adaptation possible (*i.e.* norme \mathcal{L}_1 minimale) tout en imposant une marge de retard à respecter. Ce type de synthèse par optimisation LMI a déjà été traité dans la littérature [LHCW08], mais le problème qui est ici étudié diffère grandement de part les objectifs d'optimisation et l'architecture du contrôleur (emplacements des retards différents et modélisation du système bouclé plus complexe). L'étude est effectuée en temps continu, le filtre obtenu est ensuite discrétisé via la transformée bilinéaire de Tustin. La section 4.2 rappelle la structure de la chaîne de roulis bouclée et montre la nature et la localisation des différents retards considérés. Ensuite, la section 4.3 traite des solutions dans la littérature pour l'optimisation d'une norme \mathcal{L}_1 et pour la stabilité des systèmes à retards et montre les difficultés d'applications des méthodes de la littérature au problème étudié. Dans la section 4.4, la réalisation d'état du système bouclé comprenant la dynamique de roulis, l'autopilote INDI et l'augmentation adaptative est détaillée. Enfin, la section 4.5 présente et discute les résultats obtenus.

4.2 Système bouclé et retards considérés

Pour simplifier la notation dans ce chapitre, les variables d'états et de commande spécifiques à la dynamique de roulis (*i.e.* ϕ_2 , p_2 , δ_p) sont remplacées par des équivalents génériques, (*i.e.* x_1 , x_2 , u). La réalisation d'état en boucle ouverte de la dynamique de roulis dans le cas incertain est donnée par

$$\dot{x} = Ax + (B + \Delta B)u \quad (4.1)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}, \Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta G \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ p_2 \end{bmatrix}, u = \delta_p \quad (4.2)$$

Les figures 4.1 et 4.2 montrent les architectures de la dynamique de roulis bouclée avec l'autopilote INDI. Sur la figure 4.1, il n'y a pas d'augmentation adaptative, contrairement à la figure 4.2. Dans les deux figures, deux retards sont présents dans le système, modélisés par les transferts $e^{-s\tau_1}$ et $e^{-s\tau_2}$.

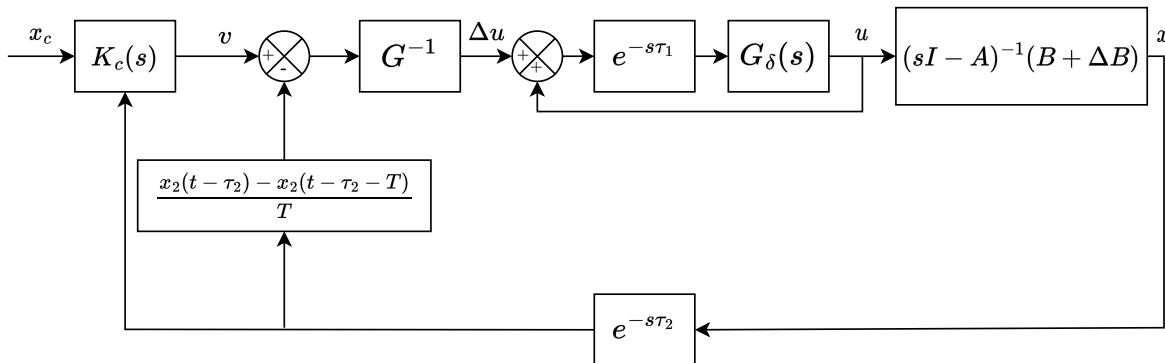


FIGURE 4.1 – Architecture de la dynamique de roulis avec l'autopilote INDI et les retards

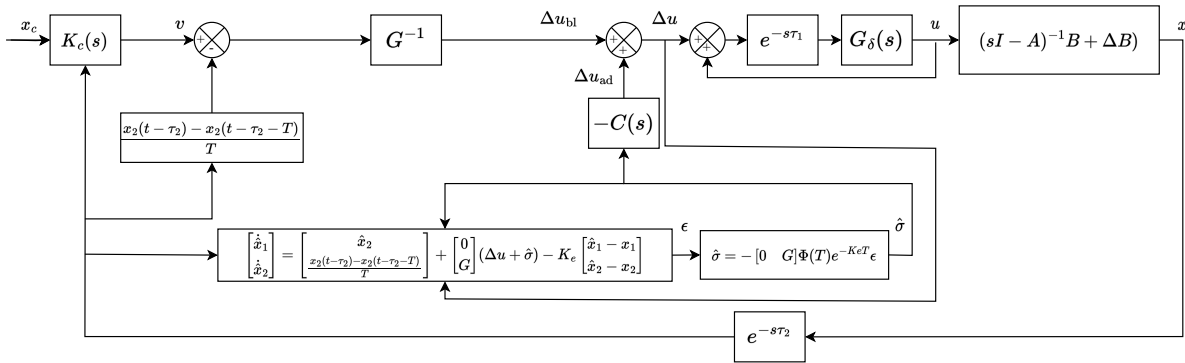


FIGURE 4.2 – Architecture de la dynamique de roulis avec l’INDI, les retards et l’augmentation adaptative

Plus précisément, trois retards sont considérés dans le système bouclé :

- Retard de calcul τ_1 : Retard en sortie d’autopilote modélisant le retard que prend le calculateur embarqué pour calculer le signal de commande à envoyer aux actionneurs.
- Retard de transmission des capteurs τ_2 : Retard modélisant à la fois le retard lié à la dynamique des capteurs et le retard lié aux différents filtrages de navigation (estimation et filtrage). Les états x_1 et x_2 sont considérés retardés de la même façon.
- Retard lié à l’estimation de \dot{x}_2 : Pour estimer \dot{x}_2 , la formule d’Euler explicite est utilisée, ce qui introduit un retard d’une période d’échantillonnage T . L’estimation numérique de \dot{x}_2 est notée \hat{x}_2 .

La section 4.3 définit l’ensemble des LMI à résoudre pour la synthèse d’un filtre passe-bas optimisant une norme \mathcal{L}_1 en garantissant une marge de retard et discute de l’application des méthodes de la littérature au problème considéré dans ce chapitre.

4.3 Définition des LMI à résoudre pour la synthèse du filtre

4.3.1 LMI pour la caractérisation de la norme \mathcal{L}_1 d’un système

On considère le système $\mathcal{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B$ avec

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.3a)$$

$$y = Cx + Du \quad (4.3b)$$

Différentes caractérisations de la norme \mathcal{L}_1 par une approche LMI sont proposées dans les références suivantes [ANP96, NPT07]. Dans notre cas le terme direct D est nul mais les références [SGC97, PPR00] traitent du cas général. Dans le théorème 2.2 dans [ANP96], on a $\|\mathcal{G}\|_{\mathcal{L}_1} < \lambda$ si et seulement s’il existe une matrice $P = P^T > 0$ et un réel $\alpha > 0$ tels que

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{BB^T}{\alpha} \leq 0, \quad (4.4a)$$

$$\lambda^2 P^{-1} > C^T C. \quad (4.4b)$$

En appliquant le lemme de Schur (A.4.1), les inégalités (4.4a) et (4.4b) sont équivalentes à

$$\begin{bmatrix} AP + PA^T + \alpha P & B \\ B^T & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0, \quad (4.5a)$$

$$\lambda^2 P^{-1} > C^T C. \quad (4.5b)$$

les LMI à résoudre sont

$$\begin{bmatrix} AP + PA^T + \alpha P & B \\ B^T & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0, \quad (4.6a)$$

$$\begin{bmatrix} P & PC^T \\ CP & \lambda^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.6b)$$

Il faut que $0 < \alpha < -2 \max(\Re(\lambda(A)))$ pour que les LMI (4.6) admettent une solution, où $\lambda(A)$ est un élément de l'ensemble des valeurs propres de la matrice A . La matrice inconnue est alors la matrice P . Ainsi, les LMIs (4.6) permettent de déterminer une majoration λ de $\|\mathcal{G}\|_{\mathcal{L}_1}$. Cependant l'équation (4.6) n'est pas adéquate pour la synthèse d'un filtre $C(s) = C_f(sI_{n_f} - A_f)^{-1} B_f$ car l'équation (4.6) n'est pas linéaire en A_f et C_f (la structure de $B_f = [0 \ 1]^T$ est imposée). L'annexe C.2 détaille le cheminement qui conduit aux LMIs suivant :

$$\begin{bmatrix} A_{01}P_1 + P_1A_{01}^T + \alpha P_1 & P_1A_{02}^T + W_1Z & \widetilde{B}_1 \\ A_{02}P_1 + Z^T W_1^T & Y + Y^T + \alpha P_3 & 0 \\ \widetilde{B}_1^T & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \leq 0, \quad (4.7a)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 & P_1\widetilde{C} \\ 0 & P_3 & 0 \\ \widetilde{C}P_1 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.7b)$$

où les nouvelles variables de décisions sont P_1, P_3, Y et Z . Pour que le filtre $C(s) = C_f(sI_{n_f} - A_f)^{-1} B_f$ ait un gain statique unitaire (propriété nécessaire pour ne pas amplifier le signal $\hat{\sigma}$), on impose la structure de Y et de Z comme suit (preuve en annexe C.3)

$$Y = \begin{bmatrix} \overline{Y}_1 & 0_{(n_f-1) \times 1} \\ \overline{Y}_2 & \rho \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} \overline{Z} & -\rho \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Finalement le filtre $C(s)$ est synthétisé grâce aux solutions obtenues pour les variables de décisions Y, Z et P_3 :

$$C_f = ZP_3^{-1} \quad (4.9a)$$

$$A_f = YP_3^{-1} \quad (4.9b)$$

4.3.2 LMI pour la stabilité robuste et marge de retard

Il existe plusieurs LMI dans la littérature pouvant garantir la stabilité d'un système subissant plusieurs retards et pouvant être décrit par l'équation suivante :

$$\dot{X} = A_{d0}X + \sum_{i=0}^r A_{di}X(t - \tau_i) \quad (4.10)$$

Dans notre cas,

$$\dot{X} = A_{d0}X + A_{d1}X(t - \tau_1) + A_{d2}X(t - \tau_2) + A_{d3}X(t - \tau_1 - \tau_2) + A_{d4}X(t - \tau_1 - \tau_2 - T) + B_{d0}r + B_{d1}r(t - \tau_1) \quad (4.11)$$

avec $X = [x_1 \ x_2 \ x_\delta \ x_v \ \hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^\top$ où x_δ est l'état des actionneurs et x_v l'état du contrôleur externe lié à son action intégrale. Les matrices $A_{d0}, A_{d1}, A_{d2}, A_{d3}, A_{d4}, B_{d0}$ et B_{d1} sont calculées à partir de la figure 4.2 et sont données en annexes C.1.

Parmi les solutions étudiées dans la littérature, aucune ne s'est révélée être compatible avec le problème traité dans ce chapitre (c'est pourquoi le calcul des matrices de l'équation (4.11) n'est pas détaillé) : calculer un filtre $C(s)$ garantissant une majoration de la norme \mathcal{L}_1 et une marge de retards.

- Les LMIs proposées dans [NDD96], [GKC03, pp.233], [XL03] et [KNR99] comportent des bilinéarités si elles sont utilisées pour la synthèse du filtre $C(s)$.
- Les LMIs proposées dans [WHS10] et [HWS06], [KR99] et [CSC98] sont non-affines.
- Dans [Xu01], le nombre de LMI à résoudre dépend du nombre de retards r considérés, pour $r = 4$, cela revient à résoudre 32 LMI.
- Dans [dPP01] [SLJ00] et [PPd00], on suppose que le système est stable en l'absence de retard ($\Re(\lambda(A_{d0})) < 0$), or cette hypothèse n'est pas vérifiée dans notre cas à cause de l'utilisation de la dérivée numérique \tilde{x}_2 qui introduit un retard d'une période d'échantillonnage T . Sans ce retard, $\tilde{x}_2 = 0$, ce qui produit une loi de commande qui rend instable le système bouclé en roulis.
- Dans [DLSW09], on suppose que $A_{d1} = A_{d2} \dots = A_{dr}$, ce qui n'est pas vérifié dans notre cas.

4.3.3 Problèmes structurels pour la résolution des LMI

La méthode initiale qui était de résoudre conjointement les LMI de la section 4.3.1 et celles des articles cités dans la section 4.3.2 n'est pas envisageable car, il n'existe pas de LMI dans la littérature dédiée à la stabilité des systèmes à retards qui soient adaptée au problème étudié. La solution envisagée pour résoudre ce problème structurel a été de modéliser les retards τ_1, τ_2 et T par des approximations de Padé et de les inclure directement dans la réalisation d'état du système bouclé. Ainsi, il n'est plus nécessaire de résoudre les LMI liée à la stabilité des systèmes à retards. Il suffit de résoudre les LMI liée à l'optimisation \mathcal{L}_1 en associant les approximations de Padé liée à τ_1 et τ_2 aux marges de retard souhaitées. La section 4.4 détaille la réalisation d'état de la dynamique de roulis en boucle fermée avec la modélisation des retard par approximation de Padé.

4.4 Réalisation d'état de la dynamique de roulis en boucle fermée

L'optimisation par LMI nécessite d'avoir le système entier sous la forme d'une réalisation d'état. Cependant, les fonctions de transferts $e^{-s\tau}$ ne sont pas rationnelles. La sous-section 4.4.1 montre les approximations de Padé utilisées pour approximer $e^{-s\tau}$ avec une fonction de transfert rationnelle.

4.4.1 Approximation de Padé

L'approximation de Padé d'un retard pur est donnée par

$$e^{-\tau s} \approx P_r(s) = \frac{\sum_{k=0}^r \frac{(r-k)!}{k!(r-k)!} (-\tau s)^k}{\sum_{k=0}^r \frac{(r-k)!}{k!(r-k)!} (\tau s)^k} \quad (4.12)$$

où r est le degré de la fonction de transfert $P_r(s)$ et $k!$ est la factorielle du nombre entier naturel k .

Pour $r = 1, 2, 3$ et 4 on obtient

$$e^{-\tau s} \approx P_1(s) = \frac{-\tau s + 2}{\tau s + 2} \quad (4.13a)$$

$$e^{-\tau s} \approx P_2(s) = \frac{\tau^2 s^2 - 6\tau s + 12}{\tau^2 s^2 + 6\tau s + 12} \quad (4.13b)$$

$$e^{-\tau s} \approx P_3(s) = \frac{-\tau^3 s^3 + 12\tau^2 s^2 - 60\tau s + 120}{\tau^3 s^3 + 12\tau^2 s^2 + 60\tau s + 120} \quad (4.13c)$$

$$e^{-\tau s} \approx P_4(s) = \frac{\tau^4 s^4 - 20\tau^3 s^3 + 180\tau^2 s^2 - 840\tau s + 1680}{\tau^4 s^4 + 20\tau^3 s^3 + 180\tau^2 s^2 + 840\tau s + 1680} \quad (4.13d)$$

Pour avoir une "bonne" approximation du retard τ , il faut que $r \geq 2$.

Pour les retards τ_1 et τ_2 et T , on introduit les approximations de Padé $P_1(s)$ et $P_2(s)$ et $P_T(s)$ données par

$$e^{-\tau_1 s} \approx P_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{p1} & B_{p1} \\ \hline C_{p1} & D_{p1} \end{array} \right], \quad (4.14a)$$

$$e^{-\tau_2 s} \approx P_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{p2} & B_{p2} \\ \hline C_{p2} & D_{p2} \end{array} \right], \quad (4.14b)$$

$$e^{-T s} \approx P_T(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{pT} & B_{pT} \\ \hline C_{pT} & D_{pT} \end{array} \right] \quad (4.14c)$$

On appelle $x_{pT} \in \mathbb{R}^{n_{pT}}$, $x_{p1} \in \mathbb{R}^{n_{p1}}$, $x_{p2_1} \in \mathbb{R}^{n_{p2}}$ et $x_{p2_2} \in \mathbb{R}^{n_{p2}}$, les vecteurs d'état des trois approximations de Padé pour les retards sur la période T , la commande et sur les états x_1 et x_2 . Il y a deux états x_{p2_1} et x_{p2_2} car le retard τ_2 affecte x_1 et x_2 .

Les approximations de Padé ayant été définies, il est maintenant possible d'écrire la réalisation d'état de la dynamique de roulis bouclée avec l'autopilote INDI et l'augmentation adaptative. La sous-section 4.4.2 s'intéresse à la partie INDI avec la dynamique de roulis et la section 4.4.3 calcule la partie adaptative. La

réalisation d'état totale est ensuite utilisée pour la synthèse du filtre par LMI.

4.4.2 Dynamique de roulis avec INDI

A partir des équations (4.1) et (4.2), on peut écrire

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.15)$$

$$\dot{x}_2 = (G + \Delta G)u \quad (4.16)$$

On cherche à obtenir l'expression de la commande u à partir des états du système. La première étape est d'écrire la relation entre u et Δu , d'après la figure suivante :

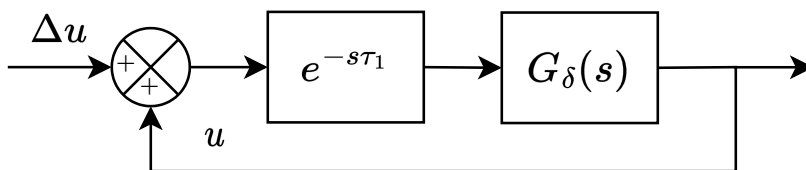


FIGURE 4.3 – Actionneurs avec retard

La réalisation d'état des actionneurs est donnée par :

$$G_\delta(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_\delta & B_\delta \\ \hline C_\delta & 0 \end{array} \right] \quad (4.17)$$

Donc la configuration de la figure 4.3 peut être modélisée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_\delta = A_\delta x_\delta + B_\delta (u(t - \tau_1) + \Delta u(t - \tau_1)) \\ u = C_\delta x_\delta \end{cases} \quad (4.18)$$

avec $x_\delta \in \mathbb{R}^{n_\delta}$.

Ce système retardé s'approxime ainsi avec les approximations de Padé

$$\begin{aligned} u &= \left[\begin{array}{c|c} A_\delta & B_\delta \\ \hline C_\delta & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_{p1} & B_{p1} \\ \hline C_{p1} & D_{p1} \end{array} \right] (u + \Delta u) \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} A_\delta & B_\delta C_{p1} & B_\delta D_{p1} \\ \hline 0 & A_{p1} & B_{p1} \\ \hline C_\delta & 0 & 0 \end{array} \right] (u + \Delta u) \end{aligned} \quad (4.19)$$

On obtient donc

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.20a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= (G + \Delta G)u \\ &= (G + \Delta G)C_\delta x_\delta \end{aligned} \quad (4.20b)$$

$$\dot{x}_\delta = A_\delta x_\delta + B_\delta C_{p1} x_{p1} + B_\delta D_{p1} (u + \Delta u) \quad (4.20c)$$

$$\dot{x}_{p1} = A_{p1}x_{p1} + B_{p1}(u + \Delta u) \quad (4.20d)$$

$$u = C_{\delta}x_{\delta} \quad (4.20e)$$

On fait disparaître u dans (4.20)

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.21a)$$

$$\dot{x}_2 = (G + \Delta G)C_{\delta}x_{\delta} \quad (4.21b)$$

$$\dot{x}_{\delta} = A_{\delta}x_{\delta} + B_{\delta}C_{p1}x_{p1} + B_{\delta}D_{p1}C_{\delta}x_{\delta} + B_{\delta}D_{p1}\Delta u \quad (4.21c)$$

$$\dot{x}_{p1} = A_{p1}x_{p1} + B_{p1}C_{\delta}x_{\delta} + B_{p1}\Delta u \quad (4.21d)$$

et on obtient le système à commander avec la commande incrementale Δu

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.22a)$$

$$\dot{x}_2 = (G + \Delta G)C_{\delta}x_{\delta} \quad (4.22b)$$

$$\dot{x}_{\delta} = (A_{\delta} + B_{\delta}D_{p1}C_{\delta})x_{\delta} + B_{\delta}C_{p1}x_{p1} + B_{\delta}D_{p1}\Delta u \quad (4.22c)$$

$$\dot{x}_{p1} = B_{p1}C_{\delta}x_{\delta} + A_{p1}x_{p1} + B_{p1}\Delta u \quad (4.22d)$$

Dans la figure 4.2, on a

$$\Delta u = \Delta u_{bl} + \Delta u_{ad}. \quad (4.23)$$

L'objectif est maintenant de faire disparaître Δu des calculs. On commence par calculer le signal de commande incrementale INDI Δu_{bl} rappelé par l'équation (4.24).

$$\Delta u_{bl} = G^{-1}(v - \tilde{x}_2(t - \tau_2)) \quad (4.24)$$

avec la dérivée numérique suivante

$$\tilde{x}_2(t - \tau_2) = \frac{x_2(t - \tau_2) - x_2(t - \tau_2 - T)}{T} \quad (4.25)$$

et v la sortie du contrôleur externe $K_c(s)$ dont l'architecture est rappelée par la figure 4.4.

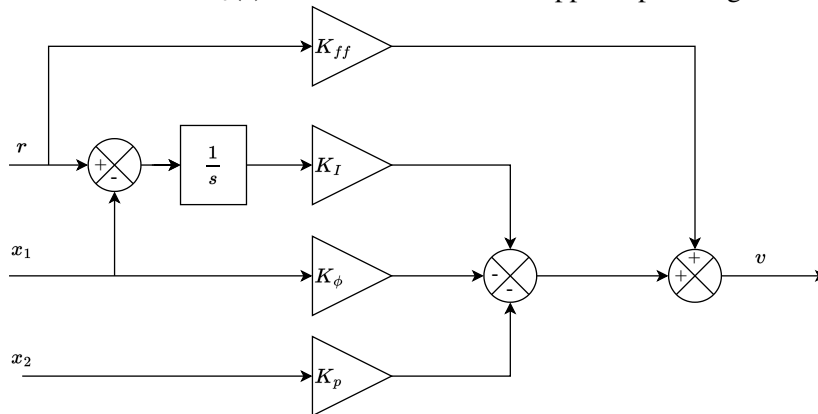


FIGURE 4.4 – Architecture du contrôleur de roulis

D'après la figure 4.4, il est possible d'écrire la sortie du contrôleur externe sous la forme suivante

$$v = K_{ff}r + \frac{K_I}{s}(r - x_1(t - \tau_2)) - K_{\phi}x_1(t - \tau_2) - K_p x_2(t - \tau_2) \quad (4.26)$$

Le contrôleur possède trois entrées (x_1 , x_2 et r) et un état x_v lié à l'intégrateur. Sa réalisation d'état est donnée par :

$$v(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_v & B_v \\ \hline C_v & D_v \end{array} \right] \begin{bmatrix} r \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline K_I & K_{ff} & -K_\phi & -K_p \end{array} \right] \begin{bmatrix} r \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

On a donc

$$\begin{cases} \dot{x}_v = r - x_1(t - \tau_2) \\ v = K_I x_v + K_{ff} r - K_\phi x_1(t - \tau_2) - K_p x_2(t - \tau_2) \end{cases} \quad (4.28)$$

En introduisant des signaux intermédiaires et les approximations de Padé des retards, on obtient avec (4.24), (4.25) et (4.28)

$$\Delta_{u_{bl}} = G^{-1}v - \frac{G^{-1}}{T}a \quad (4.29a)$$

$$a = b - b(t - T) \quad (4.29b)$$

$$b = x_2(t - \tau_2) \quad (4.29c)$$

$$v = \bar{K}_r(s)r + \bar{K}_\phi(s)x_1(t - \tau_2) + \bar{K}_p(s)b \quad (4.29d)$$

On remplace les retards dans (4.29) par les approximations de Padé

$$\Delta_{u_{bl}} = G^{-1}v - \frac{G^{-1}}{T}a \quad (4.30a)$$

$$a = b - P_T(s)b \quad (4.30b)$$

$$b = P_2(s)x_2 \quad (4.30c)$$

$$v = \bar{K}_r(s)r + \bar{K}_\phi(s)P_2(s)x_1 + \bar{K}_p(s)b \quad (4.30d)$$

La réalisation d'état de (4.31) est donnée par

$$\Delta_{u_{bl}} = G^{-1}v - \frac{G^{-1}}{T}a \quad (4.31a)$$

$$\dot{x}_{p_T} = A_{p_T}x_{p_T} + B_{p_T}b \quad (4.31b)$$

$$\begin{aligned} a &= b - C_{p_T}x_{p_T} - D_{p_T}b \\ &= -C_{p_T}x_{p_T} + (1 - D_{p_T})b \end{aligned} \quad (4.31c)$$

$$\dot{x}_{p_2} = A_{p_2}x_{p_2} + B_{p_2}x_2 \quad (4.31d)$$

$$b = C_{p_2}x_{p_2} + D_{p_2}x_2 \quad (4.31e)$$

$$v = \bar{K}_r(s)r + \bar{K}_\phi(s)P_2(s)x_1 + \bar{K}_p(s)b \quad (4.31f)$$

La loi de commande du contrôleur externe dans (4.31f) est donnée par

$$\begin{aligned}
 v &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 0 & A_{p_2} & 0 & B_{p_2} & 0 \\ \hline K_I & K_{ff} & -K_\phi & -K_p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ C_{p_2} & 0 & D_{p_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} r \\ x_1 \\ b \end{bmatrix} \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -C_{p_2} & 1 & -D_{p_2} & 0 & & & \\ \hline 0 & A_{p_2} & 0 & B_{p_2} & 0 & & & \\ K_I & -K_\phi C_{p_2} & K_{ff} & -K_\phi D_{p_2} & -K_p & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} r \\ x_1 \\ b \end{bmatrix} \\
 &= \bar{K}(s) \begin{bmatrix} r \\ x_1 \\ b \end{bmatrix} \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

et on obtient donc la réalisation d'état suivante

$$\dot{x}_v = -C_{p_2}x_{p_{2_1}} + r - D_{p_2}x_1 \tag{4.33a}$$

$$\dot{x}_{p_{2_1}} = A_{p_2}x_{p_{2_1}} + B_{p_2}x_1 \tag{4.33b}$$

$$v = K_Ix_v - K_\phi C_{p_2}x_{p_{2_1}} + K_{ff}r - K_\phi D_{p_2}x_1 - K_p b \tag{4.33c}$$

En remplaçant (4.31f) par (4.33) dans (4.31), on obtient

$$\Delta_{u_{bl}} = G^{-1}v - \frac{G^{-1}}{T}a \tag{4.34a}$$

$$\dot{x}_{p_T} = A_{p_T}x_{p_T} + B_{p_T}b \tag{4.34b}$$

$$a = -C_{p_T}x_{p_T} + (1 - D_{p_T})b \tag{4.34c}$$

$$\dot{x}_{p_{2_2}} = A_{p_2}x_{p_{2_2}} + B_{p_2}x_2 \tag{4.34d}$$

$$b = C_{p_2}x_{p_{2_2}} + D_{p_2}x_2 \tag{4.34e}$$

$$\dot{x}_v = -C_{p_2}x_{p_{2_1}} + r - D_{p_2}x_1 \tag{4.34f}$$

$$\dot{x}_{p_{2_1}} = A_{p_2}x_{p_{2_1}} + B_{p_2}x_1 \tag{4.34g}$$

$$v = K_Ix_v - K_\phi C_{p_2}x_{p_{2_1}} + K_{ff}r - K_\phi D_{p_2}x_1 - K_p b \tag{4.34h}$$

On fait disparaître b dans (4.34)

$$\Delta_{u_{bl}} = G^{-1}v - \frac{G^{-1}}{T}a \tag{4.35a}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{p_T} &= A_{p_T}x_{p_T} + B_{p_T}b \\
 &= A_{p_T}x_{p_T} + B_{p_T}(C_{p_2}x_{p_{2_2}} + D_{p_2}x_2) \\
 &= B_{p_T}C_{p_2}x_{p_{2_2}} + A_{p_T}x_{p_T} + B_{p_T}D_{p_2}x_2 \tag{4.35b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= -C_{p_T}x_{p_T} + (1 - D_{p_T})b \\
 &= -C_{p_T}x_{p_T} + (1 - D_{p_T})(C_{p_2}x_{p_{2_2}} + D_{p_2}x_2) \\
 &= (1 - D_{p_T})C_{p_2}x_{p_{2_2}} - C_{p_T}x_{p_T} + (1 - D_{p_T})D_{p_2}x_2 \tag{4.35c}
 \end{aligned}$$

$$\dot{x}_{p2_2} = A_{p2}x_{p2_2} + B_{p2}x_2 \quad (4.35d)$$

$$\dot{x}_v = -C_{p2}x_{p2_1} - D_{p2}x_1 + r \quad (4.35e)$$

$$\dot{x}_{p2_1} = A_{p2}x_{p2_1} + B_{p2}x_1 \quad (4.35f)$$

$$\begin{aligned} v &= K_I x_v - K_\phi C_{p2} x_{p2_1} + K_{ff} r - K_\phi D_{p2} x_1 - K_p b \\ &= K_I x_v - K_\phi C_{p2} x_{p2_1} + K_{ff} r - K_\phi D_{p2} x_1 - K_p (C_{p2} x_{p2_2} + D_{p2} x_2) \\ &= K_I x_v - K_\phi C_{p2} x_{p2_1} - K_p C_{p2} x_{p2_2} - K_\phi D_{p2} x_1 - K_p D_{p2} x_2 + K_{ff} r \end{aligned} \quad (4.35g)$$

On fait disparaître a dans (4.35)

$$\dot{x}_v = -C_{p2}x_{p2_1} - D_{p2}x_1 + r \quad (4.36a)$$

$$\dot{x}_{p2_1} = A_{p2}x_{p2_1} + B_{p2}x_1 \quad (4.36b)$$

$$\dot{x}_{p2_2} = A_{p2}x_{p2_2} + B_{p2}x_2 \quad (4.36c)$$

$$\dot{x}_{pT} = B_{pT}C_{p2}x_{p2_2} + A_{pT}x_{pT} + B_{pT}D_{p2}x_2 \quad (4.36d)$$

$$v = K_I x_v - K_\phi C_{p2} x_{p2_1} - K_p C_{p2} x_{p2_2} - K_\phi D_{p2} x_1 - K_p D_{p2} x_2 + K_{ff} r \quad (4.36e)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{u_{bl}} &= G^{-1}v - \frac{G^{-1}}{T}a \\ &= G^{-1}v - \frac{G^{-1}}{T} \left((1 - D_{pT})C_{p2}x_{p2_2} - C_{pT}x_{pT} + (1 - D_{pT})D_{p2}x_2 \right) \\ &= G^{-1}v - \frac{G^{-1}(1 - D_{pT})C_{p2}}{T}x_{p2_2} + \frac{G^{-1}C_{pT}}{T}x_{pT} - \frac{G^{-1}(1 - D_{pT})D_{p2}}{T}x_2 \end{aligned} \quad (4.36f)$$

On obtient la réalisation d'état de la loi de commande $\Delta_{u_{bl}}$ en faisant disparaître v dans (4.36)

$$\dot{x}_v = -C_{p2}x_{p2_1} - D_{p2}x_1 + r \quad (4.37a)$$

$$\dot{x}_{p2_1} = A_{p2}x_{p2_1} + B_{p2}x_1 \quad (4.37b)$$

$$\dot{x}_{p2_2} = A_{p2}x_{p2_2} + B_{p2}x_2 \quad (4.37c)$$

$$\dot{x}_{pT} = B_{pT}C_{p2}x_{p2_2} + A_{pT}x_{pT} + B_{pT}D_{p2}x_2 \quad (4.37d)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{u_{bl}} &= G^{-1}v - \frac{G^{-1}(1 - D_{pT})C_{p2}}{T}x_{p2_2} + \frac{G^{-1}C_{pT}}{T}x_{pT} - \frac{G^{-1}(1 - D_{pT})D_{p2}}{T}x_2 \\ &= G^{-1} \left(K_I x_v - K_\phi C_{p2} x_{p2_1} - K_p C_{p2} x_{p2_2} - K_\phi D_{p2} x_1 - K_p D_{p2} x_2 + K_{ff} r \right) \\ &\quad - \frac{G^{-1}(1 - D_{pT})C_{p2}}{T}x_{p2_2} + \frac{G^{-1}C_{pT}}{T}x_{pT} - \frac{G^{-1}(1 - D_{pT})D_{p2}}{T}x_2 \\ &= G^{-1}K_I x_v - G^{-1}K_\phi C_{p2} x_{p2_1} - G^{-1} \left(K_p + \frac{1 - D_{pT}}{T} \right) C_{p2} x_{p2_2} + \frac{G^{-1}C_{pT}}{T} x_{pT} \\ &\quad - G^{-1}K_\phi D_{p2} x_1 - G^{-1} \left(K_p + \frac{1 - D_{pT}}{T} \right) D_{p2} x_2 + G^{-1}K_{ff} r \end{aligned} \quad (4.37e)$$

On insère la commande Δ_u donnée par (4.23) et (4.37) dans le système (4.22) et on obtient

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.38a)$$

$$\dot{x}_2 = (G + \Delta G)C_\delta x_\delta \quad (4.38b)$$

$$\dot{x}_\delta = (A_\delta + B_\delta D_{p1} C_\delta) x_\delta + B_\delta C_{p1} x_{p1} + B_\delta D_{p1} \Delta_{u_{ad}} + B_\delta D_{p1} \Delta_{u_{bl}} \quad (4.38c)$$

$$\dot{x}_v = -D_{p2}x_1 - C_{p2}x_{p2_1} + r \quad (4.38d)$$

$$\dot{x}_{p1} = B_{p1}C_{\delta}x_{\delta} + A_{p1}x_{p1} + B_{p1}\Delta_{u_{ad}} + B_{p1}\Delta_{u_{bl}} \quad (4.38e)$$

$$\dot{x}_{p2_1} = B_{p2}x_1 + A_{p2}x_{p2_1} \quad (4.38f)$$

$$\dot{x}_{p2_2} = B_{p2}x_2 + A_{p2}x_{p2_2} \quad (4.38g)$$

$$\dot{x}_{pT} = B_{pT}D_{p2}x_2 + B_{pT}C_{p2}x_{p2_2} + A_{pT}x_{pT} \quad (4.38h)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{u_{bl}} = G^{-1}K_Ix_v - G^{-1}K_{\phi}C_{p2}x_{p2_1} - G^{-1}\left(K_p + \frac{1-D_{pT}}{T}\right)C_{p2}x_{p2_2} + \frac{G^{-1}C_{pT}}{T}x_{pT} \\ - G^{-1}K_{\phi}D_{p2}x_1 - G^{-1}\left(K_p + \frac{1-D_{pT}}{T}\right)D_{p2}x_2 + G^{-1}K_{ff}r \end{aligned} \quad (4.38i)$$

Il reste maintenant à calculer la réalisation d'état du signal de commande adaptatif $\Delta_{u_{ad}}$

4.4.3 Augmentation adaptative

Le signal de commande adaptatif est donné par

$$\Delta_{u_{ad}} = -C(s)\hat{\sigma} \quad (4.39)$$

où $C(s)$ est le filtre passe bas dont la réalisation d'état est

$$C(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_f & B_f & \\ \hline C_f & & 0 \end{array} \right] \quad (4.40)$$

ce qui donne

$$\dot{x}_f = A_fx_f + B_f\hat{\sigma} \quad (4.41a)$$

$$\Delta_{u_{ad}} = -C_fx_f \quad (4.41b)$$

L'estimation des incertitudes $\hat{\sigma}$ est calculée par la loi d'adaptation à partir de l'erreur de prédiction $\varepsilon \triangleq [(\hat{x}_1 - x_1(t - \tau_2)) \quad (\hat{x}_2 - x_2(t - \tau_2))]^T$ comme suit

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & G^{-1} \end{bmatrix} \Phi(T)^{-1} e^{-K_e T} \varepsilon \quad (4.42)$$

$$\Phi(T) = K_e^{-1} (\mathbb{I}_2 - e^{-K_e T}) \quad (4.43)$$

On a donc la relation suivante entre $\hat{\sigma}$ et ε

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= - \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & G^{-1} \end{bmatrix} \Phi(T)^{-1} e^{-K_e T}}^{D_{\sigma}} \varepsilon \\ &= D_{\sigma} \varepsilon \\ &= \begin{bmatrix} D_{\sigma_1} & D_{\sigma_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 - x_1(t - \tau_2) \\ \hat{x}_2 - x_2(t - \tau_2) \end{bmatrix} \\ &= D_{\sigma_1} (\hat{x}_1 - x_1(t - \tau_2)) + D_{\sigma_2} (\hat{x}_2 - x_2(t - \tau_2)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

L'erreur de prédiction ε est quant à elle calculée à partir des mesures et du prédicteur d'état basé sur

la linéarisation de la INDI comme suit

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \tilde{x}_2(t - \tau_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} (\Delta u + \hat{\sigma}) - K_e \begin{bmatrix} \hat{x}_1 - x_1(t - \tau_2) \\ \hat{x}_2 - x_2(t - \tau_2) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

avec

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{e1} & K_{e2} \\ K_{e3} & K_{e4} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

D'après (4.45) on a

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= K_I x_v + K_{ffr} r - K_\phi x_1(t - \tau_2) - K_p x_2(t - \tau_2) - G C_f x_f + (G D_{\sigma_1} - K_{e3})(\hat{x}_1 - x_1(t - \tau_2)) \\ &\quad + (G D_{\sigma_2} - K_{e4})(\hat{x}_2 - x_2(t - \tau_2)) \\ &= K_I x_v + K_{ffr} r - K_\phi C_{p_2} x_{p_2_1} - K_p C_{p_2} x_{p_2_2} - K_\phi D_{p_2} x_1 - K_p D_{p_2} x_2 - G C_f x_f \\ &\quad + (G D_{\sigma_1} - K_{e3})(\hat{x}_1 - C_{p_2} x_{p_2_1} - D_{p_2} x_1) + (G D_{\sigma_2} - K_{e4})(\hat{x}_2 - C_{p_2} x_{p_2_2} - D_{p_2} x_2) \end{aligned} \quad (4.47a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_f &= A_f x_f + B_f (D_{\sigma_1}(\hat{x}_1 - x_1(t - \tau_2)) D_{\sigma_2}(\hat{x}_2 - x_2(t - \tau_2))) \\ &= A_f x_f + B_f D_{\sigma_1}(\hat{x}_1 - C_{p_2} x_{p_2_1} - D_{p_2} x_1) + B_f D_{\sigma_2}(\hat{x}_2 - C_{p_2} x_{p_2_2} - D_{p_2} x_2) \end{aligned} \quad (4.47b)$$

D'après (4.41a) et (4.44), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{x}_f &= A_f x_f + B_f (D_{\sigma_1}(\hat{x}_1 - x_1(t - \tau_2)) D_{\sigma_2}(\hat{x}_2 - x_2(t - \tau_2))) \\ &= A_f x_f + B_f D_{\sigma_1}(\hat{x}_1 - C_{p_2} x_{p_2_1} - D_{p_2} x_1) + B_f D_{\sigma_2}(\hat{x}_2 - C_{p_2} x_{p_2_2} - D_{p_2} x_2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Finalement le système entier s'écrit :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.49a)$$

$$\dot{x}_2 = (G + \Delta G) C_\delta x_\delta \quad (4.49b)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= (A_\delta + B_\delta D_{p_1} C_\delta) x_\delta + B_\delta C_{p_1} x_{p_1} + B_\delta D_{p_1} \Delta u_{ad} + B_\delta D_{p_1} \Delta u_{bl} \\ &= (A_\delta + B_\delta D_{p_1} C_\delta) x_\delta + B_\delta C_{p_1} x_{p_1} + B_\delta D_{p_1} \Delta u \\ &= (A_\delta + B_\delta D_{p_1} C_\delta) x_\delta + B_\delta C_{p_1} x_{p_1} + B_\delta D_{p_1} G^{-1} K_I x_v - B_\delta D_{p_1} G^{-1} K_\phi C_{p_2} x_{p_2_1} \\ &\quad - B_\delta D_{p_1} G^{-1} \left(K_p + \frac{1 - D_{pT}}{T} \right) C_{p_2} x_{p_2_2} + \frac{B_\delta D_{p_1} G^{-1} C_{pT}}{T} x_{pT} - B_\delta D_{p_1} G^{-1} K_\phi D_{p_2} x_1 \\ &\quad - B_\delta D_{p_1} G^{-1} \left(K_p + \frac{1 - D_{pT}}{T} \right) D_{p_2} x_2 + B_\delta D_{p_1} G^{-1} K_{ffr} r - B_\delta D_{p_1} C_f x_f \end{aligned} \quad (4.49c)$$

$$\dot{x}_v = -D_{p_2} x_1 - C_{p_2} x_{p_2_1} + r \quad (4.49d)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p_1} &= B_{p_1} C_\delta x_\delta + A_{p_1} x_{p_1} + B_{p_1} \Delta u_{ad} + B_{p_1} \Delta u_{bl} \\ &= B_{p_1} C_\delta x_\delta + A_{p_1} x_{p_1} + B_{p_1} \Delta u \\ &= B_{p_1} C_\delta x_\delta + A_{p_1} x_{p_1} + B_{p_1} G^{-1} K_I x_v - B_{p_1} G^{-1} K_\phi C_{p_2} x_{p_2_1} \\ &\quad - B_{p_1} G^{-1} \left(K_p + \frac{1 - D_{pT}}{T} \right) C_{p_2} x_{p_2_2} + \frac{B_{p_1} G^{-1} C_{pT}}{T} x_{pT} - B_{p_1} G^{-1} K_\phi D_{p_2} x_1 \\ &\quad - B_{p_1} G^{-1} \left(K_p + \frac{1 - D_{pT}}{T} \right) D_{p_2} x_2 + B_{p_1} G^{-1} K_{ffr} r - B_{p_1} C_f x_f \end{aligned} \quad (4.49e)$$

$$(4.49f)$$

$$\dot{x}_{p_2_1} = B_{p_2} x_1 + A_{p_2} x_{p_2_1} \quad (4.49g)$$

$$\dot{x}_{p2_2} = B_{p2}x_2 + A_{p2}x_{p2_2} \quad (4.49h)$$

$$\dot{x}_{pT} = B_{pT}D_{p2}x_2 + B_{pT}C_{p2}x_{p2_2} + A_{pT}x_{pT} \quad (4.49i)$$

$$\dot{x}_f = A_f x_f + B_f D_{\sigma_1}(\hat{x}_1 - C_{p2}x_{p2_1} - D_{p2}x_1) + B_f D_{\sigma_2}(\hat{x}_2 - C_{p2}x_{p2_2} - D_{p2}x_2) \quad (4.49j)$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2(1 - K_{e2}) - K_{e1}(\hat{x}_1) - K_{e1}(C_{p2}x_{p2_1} - D_{p2}x_1) - K_{e2}(C_{p2}x_{p2_2} - D_{p2}x_2) \quad (4.49k)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 = & K_I x_v + K_{ff}r - K_{\phi}C_{p2}x_{p2_1} - K_p C_{p2}x_{p2_2} - K_{\phi}D_{p2}x_1 - K_p D_{p2}x_2 - GC_f x_f \\ & + (GD_{\sigma} - K_e)(\hat{x}_2 - C_{p2}x_{p2_2} - D_{p2}x_2) \end{aligned} \quad (4.49l)$$

A partir de l'ensemble d'équations donné par (4.49), on peut écrire le système entier sous la forme

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}r \quad (4.50a)$$

$$\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \quad (4.50b)$$

avec

$$\tilde{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_{\delta}^T \quad x_v \quad x_{p1}^T \quad x_{p2_1}^T \quad x_{p2_2}^T \quad x_{pT}^T \quad \hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad x_f^T] \quad (4.51)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (G+\Delta G)C_{\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{\delta}D_{p1}G^{-1}K_{\phi}D_{p2} & \bar{A}_{3,2} & A_{\delta} + B_{\delta}D_{p1}C_{\delta} & B_{\delta}D_{p1}G^{-1}K_I & B_{\delta}C_{p1} & \bar{A}_{3,6} & \bar{A}_{3,7} & B_{\delta}D_{p1}\frac{C_{pT}}{GT} & 0 & 0 & -B_{\delta}D_{p1}C_f \\ -D_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{p1}G^{-1}K_{\phi}D_{p2} & \bar{A}_{5,2} & B_{p1}C_{\delta} & B_{p1}G^{-1}K_I & A_{p1} & \bar{A}_{5,6} & \bar{A}_{5,7} & B_{p1}\frac{C_{pT}}{GT} & 0 & 0 & -B_{p1}C_f \\ B_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{pT}D_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{pT}C_{p2} & A_{pT} & 0 & 0 & 0 \\ K_{e1}D_{p2} & K_{e2}D_{p2} & 0 & 0 & 0 & -K_{e1}C_{p2} & -K_{e2}C_{p2} & 0 & -K_{e1} & 1 - K_{e2} & 0 \\ \bar{A}_{10,1} & \bar{A}_{10,2} & 0 & K_I & 0 & \bar{A}_{10,6} & \bar{A}_{10,7} & 0 & \bar{A}_{10,9} & \bar{A}_{10,10} & -GC_f \\ -B_f D_{\sigma_1} D_{p2} & -B_f D_{\sigma_2} D_{p2} & 0 & 0 & 0 & -B_f D_{\sigma_1} C_{p2} & -B_f D_{\sigma_2} C_{p2} & 0 & B_f D_{\sigma_1} & B_f D_{\sigma_2} & Af \end{bmatrix}, \quad (4.52a)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{\delta}D_{p1}G^{-1}K_{ff} \\ 1 \\ B_{p1}G^{-1}K_{ff} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_{ff} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.52b)$$

$$\tilde{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (4.52c)$$

et

$$\tilde{A}_{3,2} = -B_\delta D_{p1} G^{-1} \left(K_p + \frac{1 - D_{pT}}{T} \right) D_{p2}, \quad \tilde{A}_{5,2} = -B_{p1} G^{-1} \left(K_p + \frac{1 - D_{pT}}{T} \right) D_{p2}, \quad (4.53a)$$

$$\tilde{A}_{3,6} = -B_\delta D_{p1} G^{-1} K_\phi C_{p2}, \quad \tilde{A}_{5,6} = -B_{p1} G^{-1} K_\phi C_{p2}, \quad (4.53b)$$

$$\tilde{A}_{3,7} = -B_\delta D_{p1} G^{-1} \left(K_p + \frac{1 - D_{pT}}{T} \right) C_{p2}, \quad \tilde{A}_{5,7} = -B_{p1} G^{-1} \left(K_p + \frac{1 - D_{pT}}{T} \right) C_{p2} \quad (4.53c)$$

$$\tilde{A}_{10,7} = (-K_p + K_{e4} - G D_{\sigma_2}) C_{p2}, \quad \tilde{A}_{10,2} = (K_{e4} - K_p - G D_{\sigma_2}) D_{p2} \quad (4.53d)$$

$$\tilde{A}_{10,1} = (K_{e3} - K_\phi - G D_{\sigma_1}) D_{p2} \quad \tilde{A}_{10,6} = (K_{e3} - K_\phi - G D_{\sigma_1}) C_{p2} \quad (4.53e)$$

$$\tilde{A}_{10,9} = G D_{\sigma_1} - K_{e3} \quad \tilde{A}_{10,10} = G D_{\sigma_2} - K_{e4} \quad (4.53f)$$

4.5 Résultats de synthèse

La section 4.5 présente les résultats obtenus et les problèmes rencontrés lors de la synthèse du filtre $C(s)$ par LMI.

4.5.1 Problèmes numériques

Les contraintes sur les variables de décisions Y et Z , associées à l'utilisation de trois approximations de Padé d'ordre supérieur à deux, introduisent des problèmes numériques dans la résolution des LMI. Le solveur utilisé synthétise des filtres dont la bande passante est très petite dans des conditions où le filtre $C(s)$ devrait avoir une très grande bande passante.

Ces problèmes numériques ajoutés aux problèmes structurels déjà rencontrés par rapport aux LMI liées à la marge de retard nous ont contraint à changer d'approche et à abandonner l'idée de la synthèse directe d'un filtre et à s'intéresser plutôt à l'utilisation des LMI comme d'un outil d'analyse des propriétés d'un filtre déjà existant. Plus précisément, en définissant un filtre $C(s)$ ayant déjà un gain statique unitaire, il n'est pas nécessaire de résoudre les LMI liés à l'optimisation de la norme \mathcal{L}_1 sous la forme (4.7), il est suffisant de résoudre les LMI (4.6) plus faciles à résoudre de part la forme moins contrainte de la matrice P . Ainsi, le résultat des LMI ne sert plus à produire un filtre mais à valider un filtre proposé en calculant la norme \mathcal{L}_1 du système bouclé soumis aux retards τ_1 , τ_2 et T .

Plusieurs algorithmes d'analyse de filtre passe-bas ont été conçus basés sur la résolution des LMI (4.6). La section 4.5.2 les détaille et discute des résultats obtenus.

4.5.2 Algorithme d'analyse du filtre par LMI

Les algorithmes d'analyse de filtre présentés sont implémentés dans l'environnement Matlab avec l'outil Yalmip pour la descriptions des LMI et le solveur Mosek pour leur résolution. L'algorithme 1 permet, à partir d'un filtre passe-bas donné de calculer une majoration de sa norme \mathcal{L}_1 : λ et de trouver sa valeur la plus faible parmi toutes celles calculées pour différentes valeurs de α .

Algorithm 1 Algorithme d'analyse de la norme \mathcal{L}_1 avec un filtre passe-bas $C(s)$ pour la dynamique de roulis en boucle fermée soumise à un retard de calcul τ_1 et un retard de mesure τ_2 .

- 1: **Entrées :** $\omega_f, \xi_f, \gamma_\phi, \tau_1, \tau_2, r, i_\alpha, \epsilon$
- 2: **Sorties :** $\|\tilde{C}(s\mathbb{I} - \tilde{A})\tilde{B}\|_{\mathcal{L}_1} \leq \lambda_{\min}$
- 3: Calculer A_f, B_f, C_f, D_f comme suit :
- 4:
$$A_f = \begin{bmatrix} -\omega_f \xi_f & -\omega_f \sqrt{1 - \xi_f^2} \\ -\omega_f \sqrt{1 - \xi_f^2} & \omega_f \xi_f \end{bmatrix} \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_f = \begin{bmatrix} \frac{-\omega_f}{\sqrt{1 - \xi_f^2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_f = 0$$
- 5: Calculer les réalisations d'état des approximations de Padé de $e^{-s\tau_1}, e^{-s\tau_2}, e^{-sT}$ en utilisant l'équation (4.14) et l'ordre d'approximation r :
- 6:
$$\begin{bmatrix} A_{p1} & B_{p1} \\ C_{p1} & D_{p1} \end{bmatrix} = P_1(s) \approx e^{-\tau_1 s} \quad \begin{bmatrix} A_{p2} & B_{p2} \\ C_{p2} & D_{p2} \end{bmatrix} = P_2(s) \approx e^{-\tau_2 s} \quad \begin{bmatrix} A_{pT} & B_{pT} \\ C_{pT} & D_{pT} \end{bmatrix} = P_T(s) \approx e^{-Ts}$$
- 7: Calculer $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times 1}, \tilde{C} \in \mathbb{R}^{1 \times \tilde{n}}$ en utilisant l'équation (4.52)
- 8: **if** $\max(\Re(\lambda(\tilde{A})) \geq 0)$ **then**
- 9: La matrice \tilde{A} n'est pas Hurwitz.
- 10: **return**
- 11: **end if**
- 12: Calculer la forme équilibrée de $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ en utilisant l'algorithme de Moore [Moo81].
- 13: Déclarer la variable de décision P des LMI (4.6) comme suit :
- 14: $P \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}} > 0$
- 15: Déclarer la variable d'optimisation $\lambda \in \mathbb{R}$
- 16: **for** $\alpha = 0 : i_\alpha : -2\max(\Re(\sigma(\tilde{A})))$ **do**
- 17: Décrire les LMI à résoudre avec Yalmip
- 18:
$$\text{LMI}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{A}P + P\tilde{A}^\top + \alpha P & \tilde{B} \\ \tilde{B}^\top & -\alpha \end{bmatrix} \leq \epsilon \mathbb{I}_{\tilde{n}}$$
- 19:
$$\text{LMI}_2 = \begin{bmatrix} P & P\tilde{C}^\top \\ \tilde{C}P & \lambda^2 \end{bmatrix} \geq \epsilon \mathbb{I}_{\tilde{n}}$$
- 20: Résoudre LMI₁ et LMI₂ en utilisant le solveur Mosek où P et λ sont inconnues.
- 21: Récupérer les résultats P_v et λ_v donnés par le solveur.
- 22: Vérifier la validité des solutions en testant les valeurs propres de LMI_{1,v} et LMI_{2,v} avec les solutions obtenues λ_v et P_v comme suit
- 23:
$$\text{LMI}_{1,v} = \begin{bmatrix} \tilde{A}P_v + P_v\tilde{A}^\top + \alpha P_v & \tilde{B} \\ \tilde{B}^\top & -\alpha \end{bmatrix}$$
- 24:
$$\text{LMI}_{2,v} = \begin{bmatrix} P_v & P_v\tilde{C}^\top \\ \tilde{C}P_v & \lambda_v^2 \end{bmatrix}$$
- 25: **if** $(\max(\Re(\lambda(\text{LMI}_{1,v})) > 0) \vee (\max(\Re(\lambda(\text{LMI}_{2,v})) < 0))$ **then**
- 26: Solution non valide
- 27: **else if** $\lambda_v < \lambda_{\min}$ **then**
- 28: $\lambda_{\min} = \lambda_v$
- 29: **end if**
- 30: **end for**

Les figures 4.5 et 4.6 montrent les résultats obtenus par l'algorithme 1 en fonction de α . Dans la figure 4.6, les points rouges signifient que le solveur n'a pas trouvé de solution.

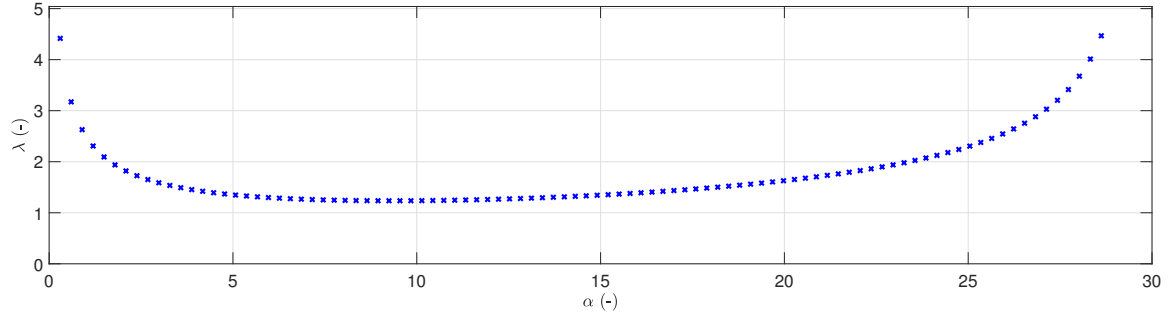


FIGURE 4.5 – Majoration de $\|\tilde{C}(s\mathbb{I} - \tilde{A})\tilde{B}\|_{\mathcal{L}_1}$ par λ en fonction de α avec $\tau_1 = 0.5$ ms, $\tau_2 = 1$ ms, $\omega_f = 200$ rad/s, $\xi_f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\gamma_\phi = 0$

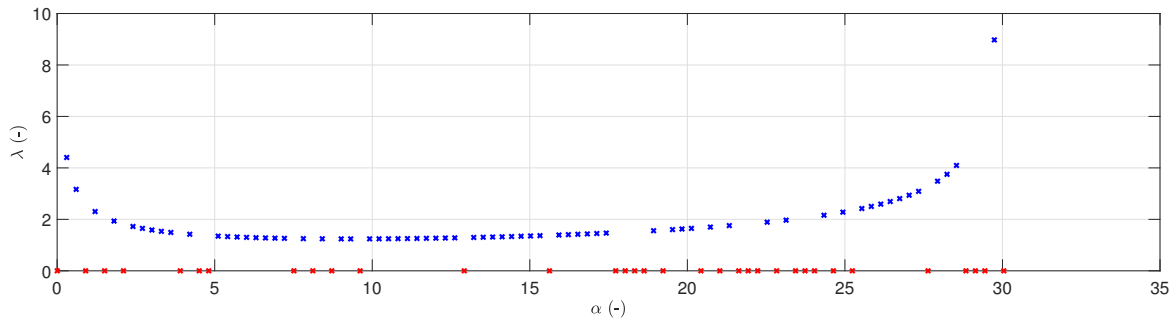


FIGURE 4.6 – Majoration de $\|\tilde{C}(s\mathbb{I} - \tilde{A})\tilde{B}\|_{\mathcal{L}_1}$ par λ en fonction de α avec $\tau_1 = 1$ ms, $\tau_2 = 0.1$ ms, $\omega_f = 350$ rad/s, $\xi_f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\gamma_\phi = 0$

Les résultats des figures 4.5 et 4.6 donnent la même valeur minimale de $\lambda_{\min} = 1.24$, mais on remarque qu'il y a plus de valeur de α qui donnent des résultats non valide dans la figure 4.6. Il est donc important de balayer finement toute la plage des valeurs de α possible pour trouver la valeur de λ minimale.

Maintenant qu'un algorithme pour calculer λ a été validé, deux autres algorithmes d'analyse du filtre ont été définis en utilisant l'algorithme 1. L'algorithme 2 calcule une majoration de la norme \mathcal{L}_1 du système $\tilde{C}(s\mathbb{I} - \tilde{A})\tilde{B}$ pour des plages de retard τ_1 et τ_2 définies.

Algorithme 2 Algorithme d'analyse de la norme \mathcal{L}_1 avec un filtre passe-bas $C(s)$ dans un système soumis à une plage de retard de calcul $0 < \tau_1 < \tau_{1,\max}$ et une plage de retard de mesure $0 < \tau_2 < \tau_{2,\max}$.

- 1: **Entrées :** $\omega_f, \xi_f, \gamma_\phi, r, \gamma_\phi, \tau_{1,\max}, \tau_{2,\max}, i_\tau$
- 2: **Sorties :** $\lambda(\tau_1, \tau_2)$
- 3: **for** $\tau_1 = 0 : i_\tau : \tau_{1,\max}$ **do**
- 4: **for** $\tau_2 = 0 : i_\tau : \tau_{2,\max}$ **do**
- 5: Calculer $\lambda(\tau_1, \tau_2)$ grâce à l'algorithme 1
- 6: $\lambda(\tau_1, \tau_2) = \lambda_{\min}$
- 7: **end for**
- 8: **end for**

Les figures 4.7 et 4.8 montrent les résultats obtenus par l'algorithme 2 pour deux fréquences de coupure ω_f différentes de filtre $C(s)$.

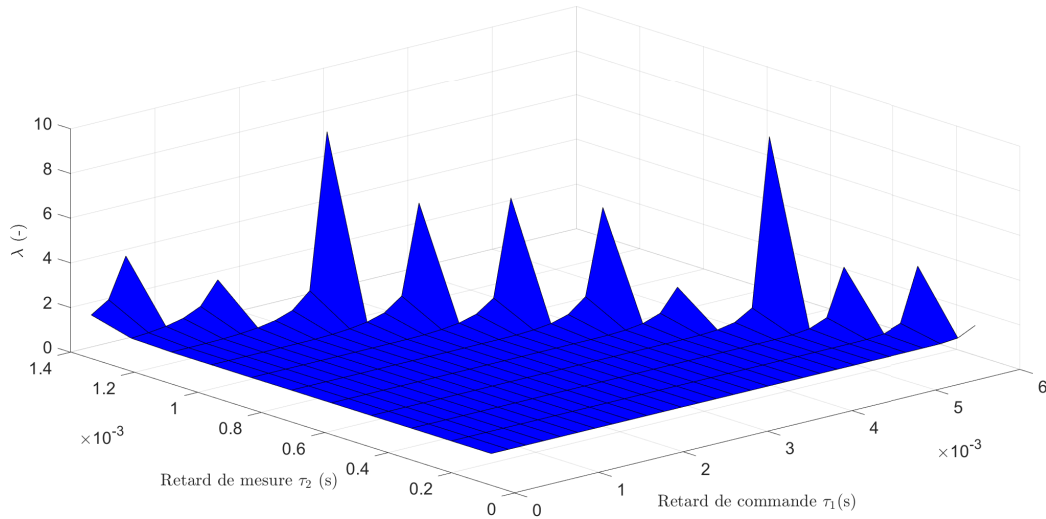


FIGURE 4.7 – Majoration de $\|\tilde{C}(s\mathbb{I} - \tilde{A})\tilde{B}\|_{\mathcal{L}_1}$ par λ en fonction de τ_1 et τ_2 avec $\omega_f = 200$ rad/s, $\xi_f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\gamma_\phi = 0$

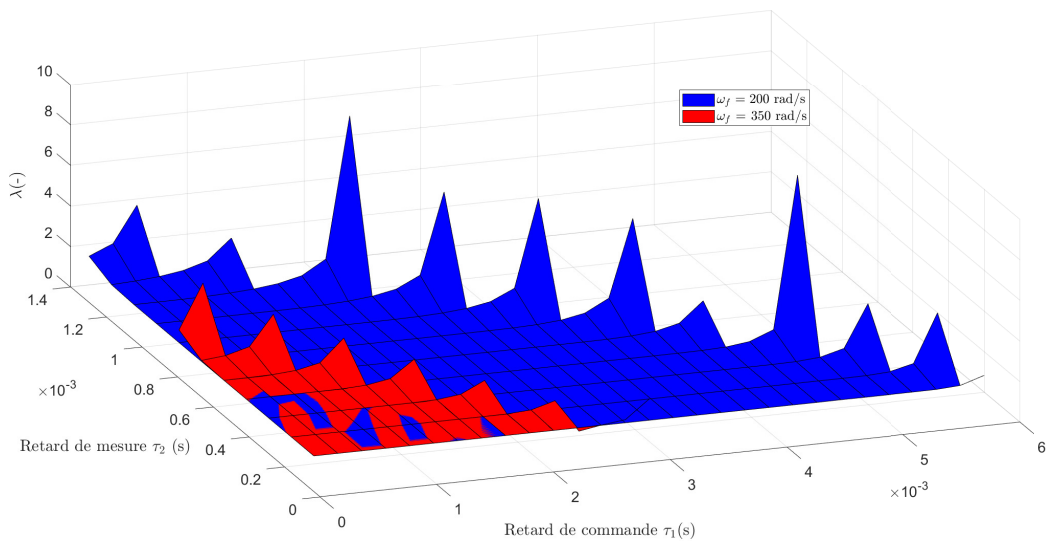


FIGURE 4.8 – Majoration de $\|\tilde{C}(s\mathbb{I} - \tilde{A})\tilde{B}\|_{\mathcal{L}_1}$ par λ en fonction de τ_1 et τ_2 avec $\gamma_\phi = 0$

Les figures 4.7 et 4.8 mettent en évidence une tolérance plus importante au retard de commande qu’au retard de mesure, ce qui s’explique par le fait que les deux mesures retardées sont utilisées plusieurs fois dans l’autopilote et dans les différentes parties (prédicteur d’état, contrôleur externe et dérivée numérique). La figure 4.8 montre également que la marge de retard du système est inversement proportionnelle à la bande passante du filtre ce qui est cohérent avec la théorie de la commande \mathcal{L}_1 adaptative.

L’algorithme 3 calcule la majoration de la norme \mathcal{L}_1 du système $\tilde{C}(s\mathbb{I} - \tilde{A})\tilde{B}$ pour une plage d’incertitude γ_ϕ et une plage de fréquence de coupure du filtre $C(s)$ choisies.

Les figures 4.9 et 4.10 montrent les résultats obtenus en utilisant l’algorithme 3 avec des retards τ_1 et τ_2 différents.

Algorithm 3 Algorithme d'analyse de la norme \mathcal{L}_1 avec un filtre passe-bas $C(s)$ dans un système soumis à une plage de retard de calcul $0 < \tau_1 < \tau_{1,\max}$ et une plage de retard de mesure $0 < \tau_2 < \tau_{2,\max}$.

- 1: **Entrées** : $\xi_f, \tau_1, \tau_2, i_{\omega_f}, i_{\gamma}, \omega_{f,\max}, \gamma_{\phi,\min}, \gamma_{\phi,\max}$
- 2: **Sorties** : $\lambda(\omega_f, \gamma_\phi)$
- 3: **for** $\omega_f = 0 : i_{\omega_f} : \tau_{1,\max}$ **do**
- 4: **for** $\gamma_\phi = \gamma_{\phi,\min} : i_{\gamma} : \gamma_{\phi,\max}$ **do**
- 5: Calculer $\lambda(\omega_f, \gamma_\phi)$ grâce à l'algorithme 1
- 6: $S_\lambda(\omega_f, \gamma_\phi) = \lambda_{\min}$
- 7: **end for**
- 8: **end for**

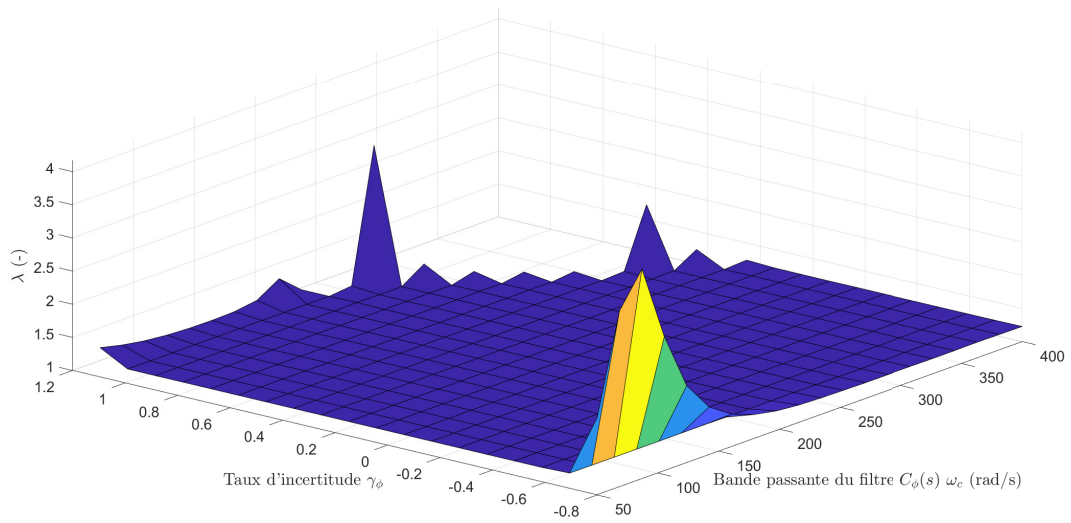


FIGURE 4.9 – Majoration de $\|\tilde{C}(s\mathbb{I} - \tilde{A})\tilde{B}\|_{\mathcal{L}_1}$ par λ en fonction de ω_f et γ_ϕ avec $\tau_1 = \tau_2 = 0.1\text{ms}$

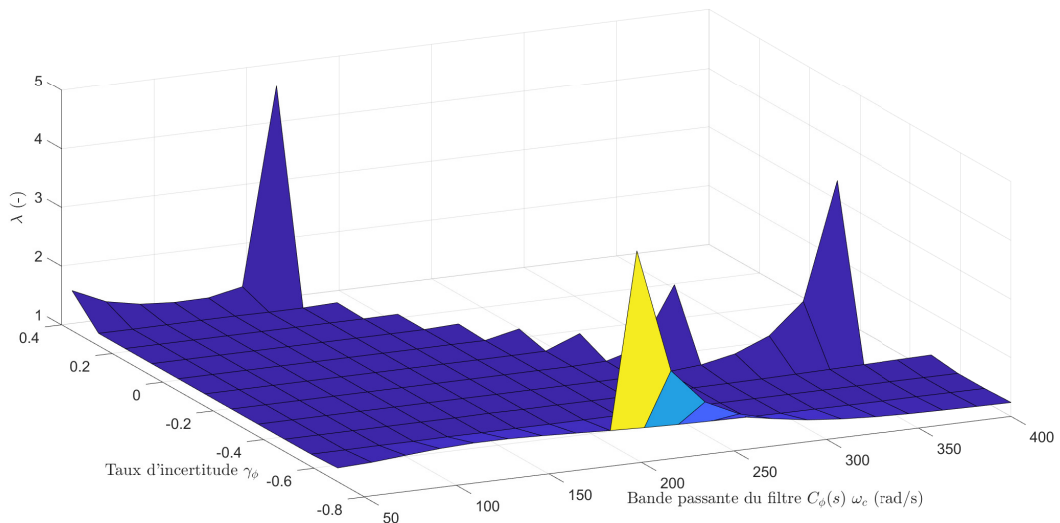


FIGURE 4.10 – Majoration de $\|\tilde{C}(s\mathbb{I} - \tilde{A})\tilde{B}\|_{\mathcal{L}_1}$ par λ en fonction de ω_f et γ_ϕ avec $\tau_1 = 0.5\text{ms}$ et $\tau_2 = 1\text{ms}$

Les surfaces des figures 4.9 et 4.10 sont similaires à celles de la figure 3.10 à la différence qu'ici les retards sont pris en compte et l'indice de performance $\check{\phi}_2$ a été remplacé par λ ce qui généralise plus le

réglage.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de la synthèse d'un filtre passe-bas minimisant la norme \mathcal{L}_1 du système bouclé en roulis tout en garantissant une marge de retard a été étudié. Tout d'abord, le problème à résoudre a été présenté et la nature et l'emplacement de chaque retard dans le système ont été justifiés. La première solution envisagée a été de résoudre conjointement des LMI de la littérature dédiée à l'optimisation de la norme \mathcal{L}_1 d'un système et des LMI pour garantir la stabilité d'un système retardé.

Les LMI utilisées pour l'optimisation de la norme \mathcal{L}_1 ont été présentées avec le détail de la structure des variables de décisions pour permettre la synthèse d'un filtre avec un gain statique unitaire, ce qui est important pour l'augmentation adaptative. La difficulté d'application des méthodes de la littérature pour la stabilité du système retardé a été justifiée par des problèmes structurels. Pour résoudre ces problèmes, les retards de mesures et de commande ont été directement inclus dans la réalisation d'état du système bouclé en modélisant les retards par des approximations de Padé.

En plus des problèmes structurels, des problèmes numériques ont complexifié la résolution des LMIs dédiée à l'optimisation de la norme \mathcal{L}_1 . En effet, la structure imposée aux variables de décisions pour garantir un gain statique unitaire au filtre synthétisé s'est avérée être une contrainte importante pour le solveur. La solution proposée a été de définir les caractéristiques du filtre à l'avance, ce qui a permis de relaxer l'optimisation en transformant le problème de synthèse en problème d'analyse.

Ainsi, l'objectif initial de ce chapitre qui était la synthèse par LMI d'un filtre passe-bas minimisant la norme \mathcal{L}_1 de la dynamique de roulis en boucle fermée tout en garantissant une marge de retard n'a pas été atteint. Cependant l'étude de ce problème a permis de mettre en lumière certaines difficultés théoriques qui ne sont pas étudiées dans la littérature (garantir la stabilité d'un système retardé qui n'est pas stable sans retard) et également, elle a permis également de définir la réalisation d'état de la dynamique de roulis et des algorithmes d'analyse utilisant les LMI de la littérature pour l'optimisation de la norme \mathcal{L}_1 . Ces algorithmes d'analyse se situent dans une approche de synthèse de filtre à mi-chemin entre une méthode purement empirique comme celle développée dans le chapitre 3 et une méthode de synthèse "analytique" comme voulue initialement.

Conclusion Générale et Perspectives

Bilan des travaux réalisés

L'objectif principal de la thèse, qui est de proposer une méthodologie de conception rapide et générique d'autopilotes valides sur l'ensemble du domaine de vol, a été défini par rapport aux constats faits sur la méthode du séquençement de gains et ses potentielles limites. Dans la première partie du chapitre 1, un modèle non-linéaire à sept degrés de liberté est présenté avec le développement détaillé des équations dynamiques et cinématiques, des paramètres de vol, et de l'ensemble des forces et des moments aérodynamiques. Dans la seconde partie du chapitre 1, la boîte à outils SMART et le simulateur de vol développés pendant la thèse ont été présentés et ont servi d'outils de validation pour le réglage des autopilotes développés dans le chapitre 2. L'étude de la dynamique de vol du projectile dual-spin a permis de mettre en lumière la complexité de cette classe de systèmes, liée en particulier aux nombreux paramètres de vol, à la détermination complexe de l'ensemble des forces et moments, aux non linéarités présentes, et au fort couplage entre les différents axes. Ce chapitre a également été l'occasion de justifier les hypothèses simplificatrices faites sur les capteurs.

Dans le chapitre 2, la question de la stratégie de commande à utiliser pour atteindre les objectifs de la thèse a été traitée. La commande par inversion dynamique, plus particulièrement la commande INDI, a été choisie pour sa simplicité, son réglage rapide, sa validité théorique sur l'ensemble du domaine de vol et sa dépendance réduite au modèle mathématique du projectile qui est jugé incertain à cause de la partie aérodynamique mal connue. Une méthodologie générique de réglage des autopilotes associant INDI et commande robuste a été conçue et appliquée aux chaînes de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge du projectile.

L'étude du transfert entre la sortie du contrôleur externe et la sortie du système à commander a permis de mettre en évidence l'impact des contraintes d'implémentation (*i.e.* période d'échantillonnage et vitesse des actionneurs) sur la linéarisation effectuée par la boucle interne de l'autopilote INDI. Cette erreur d'inversion a été prise en compte pour le réglage du contrôleur externe de roulis. Pour le réglage des contrôleurs externes de tangage, de lacet et des facteurs de charge des hypothèses de découplage et de symétrie des dynamiques ont été utilisées pour réduire la complexité du réglage. La validité de ces hypothèses repose sur les propriétés de linéarisation et de découplage de l'inversion dynamique qui ont été jugées valides en simulation. Le réglage de la loi de commande a été validé en simulation dans un scénario de trajectoire guidée réaliste. Les performances obtenues sont limitées par les hypothèses de découplage des dynamiques latérales et de séparations des échelles de temps faites pendant le réglage.

Dans le chapitre 3, le constat est fait que même si la INDI est plus robuste aux incertitudes paramétriques que la NDI classique, ce type de loi de commande utilise tout de même les paramètres liés à l'autorité de commande du projectile pour réaliser l'inversion. Or, parmi ceux-ci certains sont difficiles à estimer de manière précise et donc entachés d'une incertitude importante (en particulier les coefficients aérodynamiques liés à l'efficacité des canards). De plus, la loi de commande INDI de la dynamique de facteurs de charge utilise les valeurs des angles d'attaque et de dérapage qui sont également difficilement

estimables. La solution étudiée pour améliorer la robustesse des autopilotes INDI aux incertitudes paramétriques a été l'implémentation d'une augmentation adaptative. Après avoir détaillé la théorie de deux approches parmi les plus utilisées dans la littérature (la commande MRAC et la commande \mathcal{L}_1 adaptative), une discussion a mis en lumière l'intérêt du filtre passe-bas de la commande \mathcal{L}_1 adaptative pour le réglage des autopilotes du projectile dual-spin, mais aussi les difficultés d'application de la théorie de la commande \mathcal{L}_1 adaptative aux systèmes étudiés dans la thèse. La méthodologie conçue pour le réglage des augmentations adaptatives basées sur une approche empirique par simulations a été détaillée et appliquée aux dynamique de roulis, de tangage, de lacet et de facteurs de charge. Des simulations de type Monte Carlo ont montré la pertinence de cette méthode.

Tout d'abord, L'architecture d'augmentation adaptative utilisée est simple, ne requiert pas de modifier l'autopilote INDI nominal et possède peu de paramètres de réglage. Ensuite, les résultats obtenus montrent des performances des autopilotes avec augmentation adaptative toujours accrues par rapport à leur version nominale. Même dans les cas les plus critiques, la stabilité du système bouclé est préservé et les réponses temporelles des sorties régulées sont toujours plus proches de la réponse de référence. Globalement, le gain en performance apporté par l'augmentation adaptative justifie son implémentation et le temps nécessaire à son réglage. Cependant, les résultats obtenus dans le chapitre 3 montrent aussi les limites de la méthodologie de réglage mise en place. En effet, d'une part, en ne considérant que des consignes de type échelon pour le réglage, on remarque un gain en performance moindre sur des scénarios de trajectoire guidée. D'autre part, il s'est avéré que certaines hypothèses simplificatrices ont un impact fort sur les performances de l'augmentation adaptative de facteurs de charge, ainsi il serait pertinent de considérer une matrice de gains du prédictor pleine pour améliorer les performances de l'augmentation adaptative de cette chaîne. Enfin, la méthode de réglage ne prend pas en compte l'effet du filtre passe-bas sur la marge de retard, cet aspect a été étudié dans le chapitre 4.

Dans le chapitre 4, le problème de la synthèse d'un filtre passe-bas offrant le meilleur compromis entre performance et robustesse (la métrique choisie étant respectivement la norme \mathcal{L}_1 du système boucle et la marge de retard) a été étudié. De part, l'emplacement des retards dans le système et les spécificités de la loi de commande (estimation de l'accélération angulaire par la méthode d'Euler), les méthodes de la littérature pour la stabilité du système retardé n'ont pas pu être appliqués. Des problèmes numériques lors de la résolution des LMI se sont ajoutés aux problèmes structurels à cause de l'utilisation des approximations de Pade pour modéliser les retards. Ces contraintes structurelles et numériques ont conduit à opérer un changement d'approche, de la synthèse vers l'analyse, afin de relaxer le problème. L'étude du chapitre 4 a permis de concevoir des algorithmes d'analyse d'un filtre passe-bas pour l'augmentation adaptative en roulis qui viennent compléter la méthode de réglage mise en place dans le chapitre 3. L'étude du chapitre 4 a également permis de mettre en lumière le manque de solutions théoriques dans la littérature concernant la stabilité lorsque les systèmes sont instables sans retard.

Pour conclure, les résultats apportés par ces travaux de recherches montrent qu'il est possible d'avoir une alternative solide à la méthodologie du séquençage de gains et que l'inversion dynamique est une méthode pertinente. Cette thèse montre aussi comment associer, dans une certaine mesure, commande non-linéaire, commande robuste et commande adaptative pour essayer d'obtenir des autopilotes performants, robustes et faciles à régler. Les limites de l'approche ont été exposées en détails, et des pistes d'améliorations sont discutées dans la section suivante.

Perspectives

Cette section fait l'inventaire non-exhaustif de pistes de réflexion abordées pendant la thèse, d'idées d'amélioration des méthodologies mises en place, et de questions ouvertes pour de futures travaux de

recherches. Il serait donc pertinent de s'intéresser à :

- L'intégration d'une modélisation plus avancée des capteurs (bruit de mesure, biais et dynamique réaliste) et des algorithmes de navigations embarqués afin de produire un environnement de simulation plus réaliste à ce niveau et d'intégrer ces contraintes dans la synthèse des autopilotes INDI.
- L'utilisation d'un modèle d'actionneur plus réaliste.(bande passante plus faible, saturation et zone morte) . L'intérêt serait de confronter la théorie de la INDI aux limites apportées par des actionneurs très peu performants et potentiellement saturés utilisables en pratique sur un kit de guidage pour projectile.
- L'évaluation de la robustesse des lois de commande développées face au vent (turbulence type Von-Karman).
- Au réglage du contrôleur de tangage et de lacet reposant sur un modèle de synthèse multivariable pour mieux prendre en compte le couplage entre les chaines de tangage et de lacet.
- L'utilisation d'une matrice de gains pleine pour le réglage de l'augmentation adaptative de facteurs de charge.
- Enfin, même si cela sort du cadre de la thèse car c'est une problématique liée à la navigation, il serait intéressant de se pencher sur le problème d'estimation des états du projectile en son centre de gravité à partir d'une centrale inertielle située dans la pointe de la FCT. Dans le cadre de la thèse, il a été considéré que les algorithmes de navigation fournissent une solution directement au centre de gravité. Avoir une mesure des accélérations décalée par rapport au centre de gravité du projectile peut complexifier l'inversibilité du système et donc avoir un impact sur les performances de la loi de commande.

Annexe A

Généralités mathématiques

Sommaire

A.1 Normes	162
A.1.1 Définition	162
A.1.2 Normes des vecteurs	162
A.1.3 Normes de signaux	162
A.1.4 Norme des systèmes	163
A.2 Méthodes d'Euler	163
A.3 Transformée bilinéaire de Tustin	164
A.4 Inégalités matricielles affines (LMI)	165
A.4.1 Lemme de Schur	165
A.4.2 Lemme d'élimination	166

A.1 Normes

A.1.1 Définition

Definition A.1.1 Pour tout $x \in \mathbb{C}$, une application $F(x) : E \mapsto \mathbb{R}^+$ est une norme de E si elle vérifie les propriétés suivantes :

- Positivité : $F(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
- Séparation : $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- inégalité triangulaire : $F(x_1 + x_2) \leq F(x_1) + F(x_2)$
- absolue homogénéité : $F(\lambda x) = |\lambda|F(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

A.1.2 Normes des vecteurs

Definition A.1.2 Soit $x \in \mathbb{C}^n$, les normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ sont définies comme suit :

- La norme 1 de x est donnée par la somme des modules des éléments de x :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad (\text{A.1})$$

- La norme 2 ou norme euclidienne de x est donnée par :

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} \quad (\text{A.2})$$

- La norme ∞ de x est donnée par le plus grand module des éléments de x

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i| \quad (\text{A.3})$$

A.1.3 Normes de signaux

Definition A.1.3 La norme \mathcal{L}_∞ d'un signal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est définie par la borne supérieure de sa norme 2 au cours du temps :

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{L}_\infty} &= \sup_t \sqrt{x^T(t)x(t)} \\ &= \sup_t \|x(t)\|_2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Definition A.1.4 La norme \mathcal{L}_2 ou norme énergie d'un signal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\|x\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^T x(t) dt} \quad (\text{A.5})$$

A.1.4 Norme des systèmes

Definition A.1.5 Soit G une fonction de transfert d'un système avec une réponse impulsionnelle $g(t)$, la norme \mathcal{L}_1 de G peut être définie par :

$$\|G\|_{\mathcal{L}_1} = \int_0^{\infty} \|g(\tau)\|_{\mathcal{L}_2} d\tau \quad (\text{A.6})$$

En définissant $g(t)$ comme la réponse impulsionnelle du système et $*$, l'opérateur de convolution on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) * u(t) \\ &= \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Ainsi en utilisant la définition A.1.3, on peut majorer $\|y(t)\|_2$ grâce au développement suivant :

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_{\mathcal{L}_2} &= \left\| \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \right\|_2 \\ &\leq \int_0^t \|g(\tau)\|_{\mathcal{L}_2} \|u(t - \tau)\|_{\infty} d\tau \\ &\leq \int_0^{\infty} \|g(\tau)\|_2 d\tau \|u\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ce qui permet l'inégalité suivante permettant de majorer $\|y\|_{\mathcal{L}_{\infty}}$ comme suit :

$$\|y\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \leq \|G\|_{\mathcal{L}_1} \|u\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \quad (\text{A.9})$$

Le gain \mathcal{L}_1 d'un système stable G avec une entrée $u(t)$ et une sortie $y(t)$ peut être défini par le rapport entre la valeur maximale de sa sortie et la valeur maximale de son entrée. Ainsi, on a :

$$\|G\|_{\mathcal{L}_1} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y(t)\|_{\mathcal{L}_{\infty}}}{\|u(t)\|_{\mathcal{L}_{\infty}}} \quad (\text{A.10})$$

A.2 Méthodes d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode numérique permettant d'approximer linéairement la solution d'une équation différentielle du premier ordre. On considère l'équation différentielle suivante

$$\dot{y} = f(t, y(t)) \quad (\text{A.11a})$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (\text{A.11b})$$

La solution de l'équation (A.11) est donnée par

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} f(t, y(t))dt \quad (\text{A.12})$$

Le terme intégral peut être approximé par une somme de Riemann d'un seul rectangle de deux manières différentes comme suit :

$$\int_{t_0}^{t_0+h} f(t, y(t))dt \approx hf(t_0, y(t_0)) \quad (\text{A.13a})$$

$$\approx hf(t_0 + h, y(t_0 + h)) \quad (\text{A.13b})$$

Ainsi, en combinant l'équation (A.12) et (A.13a), on obtient l'approximation de $y(t_0 + h)$ par la méthode d'Euler explicite

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) \quad (\text{A.14})$$

et en combinant l'équation (A.12) et (A.13b), on obtient l'approximation de $y(t_0 + h)$ par la méthode d'Euler implicite

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + hf(t_0 + h, y(t_0 + h)) \quad (\text{A.15})$$

L'équation (A.14) peut être reformulée pour approximer la dérivée $\dot{y}(t_0)$ autour du point $(t_0, y(t_0))$ par

$$\dot{y}(t_0) = f(t_0, y(t_0)) \approx \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} \quad (\text{A.16})$$

Dans le cadre de la thèse, la méthode d'Euler explicite est utilisée car, à la différence de la méthode d'Euler implicite, elle ne fait pas intervenir de terme en $t_0 + h$ qui ne seraient pas mesurable (état futur).

A.3 Transformée bilinéaire de Tustin

La relation entre la variable de Laplace s et la variable discrète z est donnée par :

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \\ &= \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

En utilisant une approximation de Padé du premier ordre, l'équation (A.17) peut être approximée par l'équation bilinéaire suivante appelée transformée bilinéaire de Tustin

$$z \approx \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \quad (\text{A.18})$$

La relation inverse entre s et z est donnée par :

$$s = \frac{1}{T} \ln(z) \quad (\text{A.19})$$

Pour approximer l'équation (A.19) on utilise la méthode des trapèzes :

$$F(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} f(z) \quad (\text{A.20})$$

ou $F(z)$ est une primitive de la fonction $f(z)$. Ensuite une des propriété de la transformée de Laplace permet la relation suivante :

$$F(s) = \frac{1}{s} f(s) \quad (\text{A.21})$$

ainsi on obtient,

$$\frac{1}{s} \approx \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (\text{A.22a})$$

et finalement la transformée bilinéaire de Tustin inverse est donnée par :

$$s \approx \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (\text{A.23})$$

A.4 Inégalités matricielles affines (LMI)

Les LMI (Linear Matrix Inequalities), ou inégalités matricielles affines, sont des contraintes de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{n=1}^m x_n F_n > 0 \quad (\text{A.24})$$

utilisées pour décrire des problèmes d'optimisation convexe où x_1, \dots, x_n sont les inconnues aussi appelées variables de décision.

Definition A.4.1 *Un ensemble D est convexe si pour tout $x_1, x_2 \in D$ et $\lambda \in [0; 1]$, la propriété suivante est vérifiée :*

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in D \quad (\text{A.25})$$

Géométriquement, l'équation (A.25) se traduit par l'inclusion dans D de tous les points formant le segment entre x_1 et x_2 .

Definition A.4.2 *Soit D un ensemble convexe. La fonction $f : D \mapsto \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x_1, x_2 \in D$ et $\lambda \in [0; 1]$, la propriété suivante est vérifiée :*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (\text{A.26})$$

Ainsi un problème d'optimisation convexe, est un problème où l'on cherche à minimiser une fonction convexe sur un ensemble convexe. L'une des propriétés intéressantes des problèmes d'optimisation convexe est qu'ils n'admettent qu'un seul minimum ou maximum, celui-ci étant global. Les sections A.4.1 et A.4.2 traitent de résultats importants qui permettent de mettre sous forme LMI des problèmes d'automatisme (synthèse de correcteur, preuve de stabilité d'un système *etc*) ou de simplifier un problème d'optimisation.

A.4.1 Lemme de Schur

Le lemme de Schur permet de transformer des contraintes matricielles non-linéaires en LMI.

Lemma A.4.3 ([BEFB94]) *(Lemme de Schur). Soit trois matrices $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $C = C^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$, les relations suivantes sont valides*

$$\begin{bmatrix} A & B^\top \\ B & C \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow C > 0 \quad \text{et} \quad A - B^\top C^{-1} B > 0 \quad (\text{A.27a})$$

$$\Leftrightarrow A > 0 \quad \text{et} \quad C - BA^{-1}B^T > 0 \quad (\text{A.27b})$$

A.4.2 Lemme d'élimination

Le lemme d'élimination permet d'éliminer des bilinéarités entre certaines variables de décisions.

Lemma A.4.4 ([BEFB94], [IS94], [GA94]) (*Lemme d'élimination*). Soit les matrices $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $X \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et la LMI suivante

$$Q + BXC^T + CX^TB^T < 0 \quad (\text{A.28})$$

Soit $B^\perp \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ et $C^\perp \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$ respectivement des orthogonaux de B et C telle que

$$B^\perp B = 0 \quad \text{et} \quad \text{rang}([B \quad B^{\perp T}]) = n \quad (\text{A.29a})$$

$$C^\perp C = 0 \quad \text{et} \quad \text{rang}([C \quad C^{\perp T}]) = n \quad (\text{A.29b})$$

alors la LMI (A.28) admet une solution si et seulement si

$$B^\perp Q B^{\perp T} < 0 \quad (\text{A.30})$$

$$C^\perp Q C^{\perp T} < 0 \quad (\text{A.31})$$

Annexe B

Annexe au Chapitre 1

Sommaire

B.1	Valeurs numériques des paramètres du projectile dual-spin	168
B.2	Coefficients aérodynamiques	168
B.2.1	Force et moment de tangage	169
B.2.2	Force et moment de Magnus	169
B.2.3	Force et moment d'amortissement	170

B.1 Valeurs numériques des paramètres du projectile dual-spin

Symboles	Paramètres du projectile	Valeurs
d	Calibre	0.155 m
S	Surface de référence	0.019 m ²
m^{B_1}	Masse de la partie arrière	43.5 kg
m^{B_2}	Masse de la FCT	1.5 kg
m^B	Masse totale du projectile guidé	45 kg
x_{B_1B}	Distance entre le c.m B_1 de la partie arrière et le c.m total du projectile B	0.041 m
x_{B_2B}	Distance entre le c.m de la FCT B_2 et le c.m total du projectile B	0.49 m
x_c	Distance suivant l'axe de rotation du projectile entre le c.m de la FCT B_2 et le c.m d'un des canards	0.018 m
y_c	Distance suivant l'axe de révolution entre le c.m de la FCT B_2 et le c.m d'un des canards	0.0365 m
I_{x_1}	Moment d'inertie de roulis du corps du projectile	0.149 kg/m ²
I_{x_2}	Moment d'inertie de roulis de la FCT du projectile	0.00095 kg/m ²
I_{t_1}	Moment d'inertie transversal de tangage et de lacet du corps du projectile	1.4843 kg/m ²
I_{t_2}	Moment d'inertie transversal de tangage et de lacet de la FCT du projectile	0.149 kg/m ²
K_s	Coefficient statique de frottement entre la partie arrière du projectile et la FCT	$3 \cdot 10^{-7}$
K_v	Coefficient visqueux de frottement entre la partie arrière du projectile et la FCT	$3 \cdot 10^{-7}$ s/rad
ω_δ	Pulsation naturelle de la dynamique des actionneurs	2 π 60 rad/s
ζ_δ	Coefficient d'amortissement de la dynamique des actionneurs	0.707

TABLE B.1 – Paramètres du projectile guidé étudié

B.2 Coefficients aérodynamiques

Cette annexe présente les calculs des différents coefficients aérodynamiques nécessaires à la détermination des forces et moments aérodynamiques du projectile. Les figures de B.1 à ?? donnent les coefficients aérodynamiques élémentaires en fonction du nombre de \mathcal{M} . Les marques oranges sur les figures sont les données obtenues par simulation CFD et les courbes sont ensuite obtenues par interpolation linéaire. Dans cette annexe on pose :

$$\delta = \sin \alpha' \quad (\text{B.1})$$

B.2.1 Force et moment de tangage

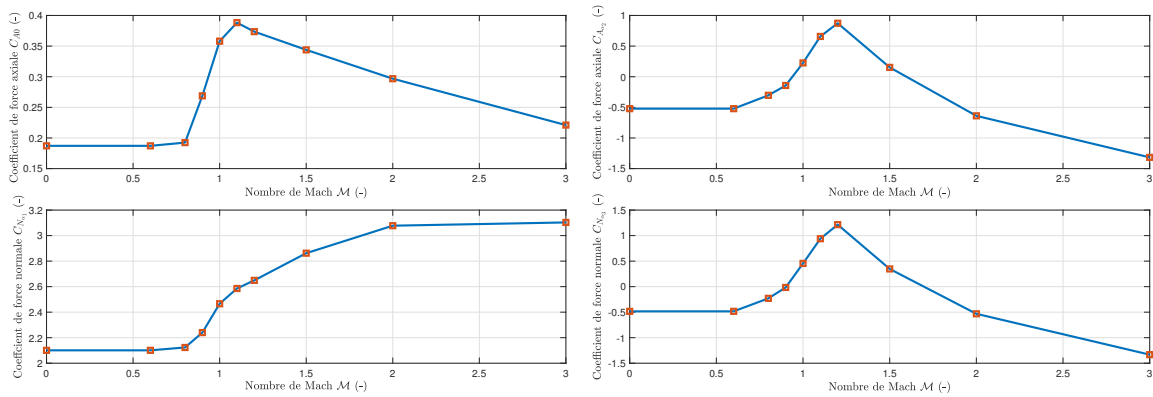


FIGURE B.1 – Coefficients aérodynamiques élémentaires pour la force de tangage

$$C_A(\mathcal{M}, \alpha) = C_{A0} + C_{Aa2}\delta^2 \quad (B.2)$$

$$C_{N\alpha}(\mathcal{M}, \alpha) = C_{Na1} + C_{Na3}\delta^2 \quad (B.3)$$

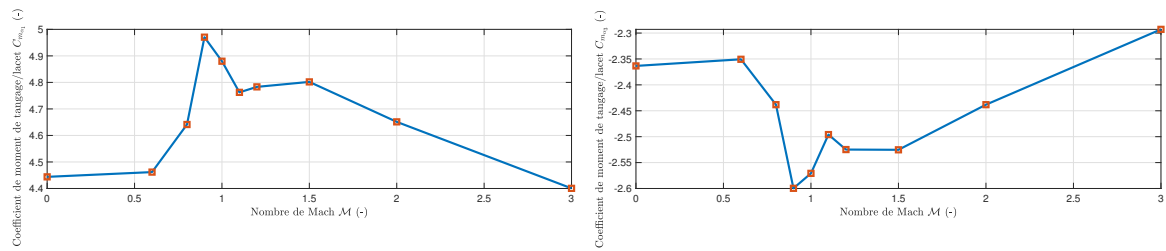


FIGURE B.2 – Coefficients aérodynamiques élémentaires pour le moment de tangage

$$C_{m\alpha}(\mathcal{M}, \alpha) = C_{ma1} + C_{ma3}\delta^2 \quad (B.4)$$

B.2.2 Force et moment de Magnus

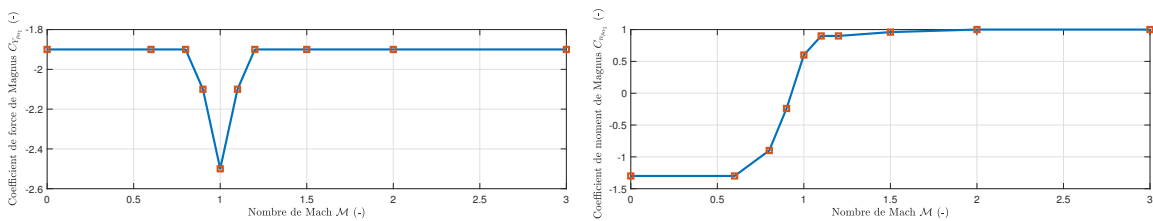


FIGURE B.3 – Coefficients aérodynamiques élémentaires pour la force et le moment de Magnus

B.2.3 Force et moment d'amortissement

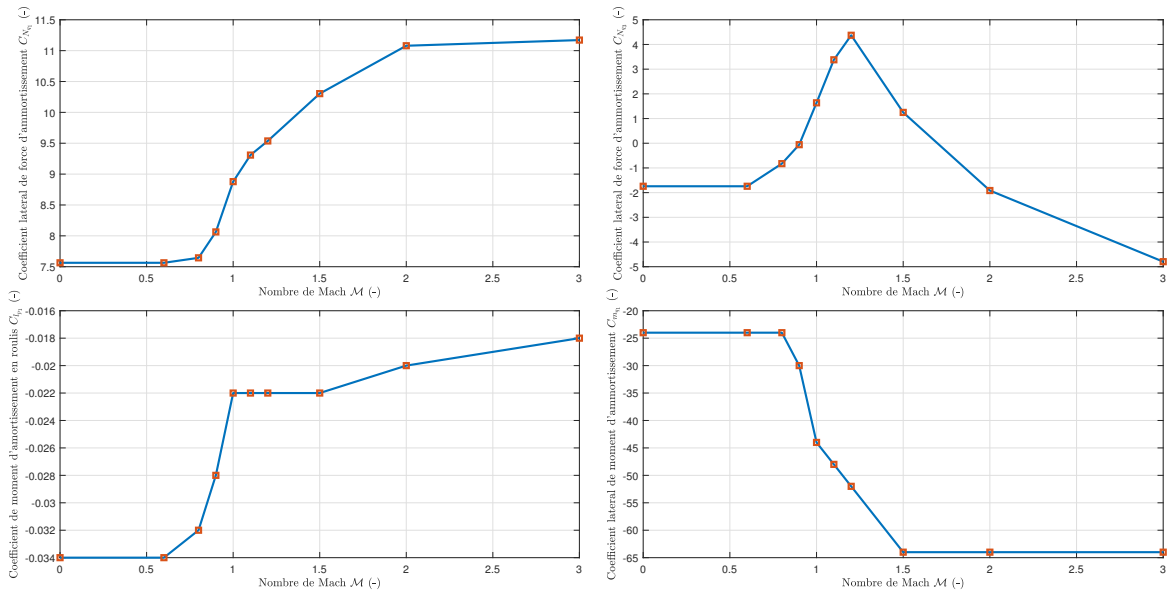


FIGURE B.4 – Coefficients aérodynamiques élémentaires pour la force et le moment d'amortissement

$$C_{Nq}(\mathcal{M}, \alpha) = C_{Nq_1} + C_{Nq_3} \delta^2 \quad (\text{B.5})$$

Annexe C

Annexe du Chapitre 2

Sommaire

C.1 Transformées en \mathcal{Z} et décompositions en éléments simples pour le modèle inverse de la dynamique de roulis	172
C.1.1 Calcul de $BOZG_\delta(z)$	172
C.1.2 Calcul de $BOZG_\delta P(z)$	173

C.1 Transformées en \mathcal{Z} et décompositions en éléments simples pour le modèle inverse de la dynamique de roulis

Les fonctions de transfert discrète $BOZG_\delta(z)$ et $BOZG_\delta P(z)$ servant à calculer l'expression du modèle inverse de la dynamique de roulis, sont calculées analytiquement dans les sections suivantes.

C.1.1 Calcul de $BOZG_\delta(z)$

La fonction de transfert de la dynamique des actionneurs est donnée par :

$$\begin{aligned} G_\delta(s) &= \frac{\omega_\delta^2}{s^2 + 2\xi_\delta\omega_\delta s + \omega_\delta^2} \\ &= \frac{\omega_\delta^2}{(s - p_1)(s - p_2)} \end{aligned} \quad (C.1)$$

Avec p_1 et p_2 , les deux pôles complexes conjugués de $G_\delta(s)$, dont les expressions sont :

$$p_1 = -\xi_\delta\omega_\delta + j\omega_\delta\sqrt{1 - \xi_\delta^2} \quad (C.2a)$$

$$p_2 = -\xi_\delta\omega_\delta - j\omega_\delta\sqrt{1 - \xi_\delta^2} \quad (C.2b)$$

La représentation discrète de $G_\delta(s)$ avec le bloquer d'ordre zero est :

$$\begin{aligned} BOZG_\delta(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_\delta(s)}{s} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{\omega_\delta^2}{s(s - p_1)(s - p_2)} \right\} \end{aligned} \quad (C.3)$$

Avec \mathcal{Z} , l'opérateur de transformation en z . En utilisant une décomposition en éléments simples, on peut reformuler $G_\delta(s)$ par une somme de terme dont la transformée en z est usuelle :

$$\frac{\omega_\delta^2}{s(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s - p_1} + \frac{c}{s - p_2} \quad (C.4)$$

avec

$$a = \frac{\omega_\delta^2}{p_1 p_2} = 1, \quad (C.5a)$$

$$b = \frac{\omega_\delta^2}{p_1(p_1 - p_2)} = \frac{1 - \xi_\delta^2 + j\sqrt{\xi_\delta^2 - 1}}{2(\xi_\delta - 1)} \quad (C.5b)$$

$$c = \frac{\omega_\delta^2}{p_2(p_2 - p_1)} = \frac{1 - \xi_\delta^2 + j\sqrt{1 - \xi_\delta^2}}{2(\xi_\delta - 1)} \quad (C.5c)$$

Finalement, on obtient :

$$BOZG_\delta(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{a}{s} + \frac{b}{s - p_1} + \frac{c}{s - p_2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z-1}{z} \left(\frac{az}{z-1} + \frac{bz}{z-e^{p_1 T}} + \frac{cz}{z-e^{p_2 T}} \right) \\
 &= \frac{z-1}{z} \left(\frac{az(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T}) + bz(z-1)(z-e^{p_2 T}) + cz(z-1)(z-e^{p_1 T})}{(z-1)(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T})} \right) \\
 &= \frac{(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T}) + b(z-1)(z-e^{p_2 T}) + c(z-1)(z-e^{p_1 T})}{(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T})} \tag{C.6}
 \end{aligned}$$

C.1.2 Calcul de $BOZG_\delta P(z)$

Le calcul de $BOZG_\delta P(z)$ suit la même démarche que le calcul de $BOZG_\delta(z)$.

$$\begin{aligned}
 BOZG_\delta P(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_\delta(s)P(s)}{s} \right\} \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{\omega_\delta^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} \frac{G}{s} \right\} \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G\omega_\delta^2}{s^2(s-p_1)(s-p_2)} \right\} \\
 &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{a}{(s-p_1)} + \frac{b}{(s-p_2)} + \frac{c}{s} + \frac{d}{s^2} \right\} \tag{C.7}
 \end{aligned}$$

avec

$$a = \frac{\omega_\delta^2 G}{p_1^2(p_1 - p_2)} \tag{C.8a}$$

$$b = \frac{\omega_\delta^2 G}{p_2^2(p_2 - p_1)} \tag{C.8b}$$

$$c = -a - b \tag{C.8c}$$

$$d = \frac{\omega_\delta^2 G}{p_1 p_2} = G \tag{C.8d}$$

Finalement,

$$BOZG_\delta P(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{az}{z-e^{p_1 T}} + \frac{bz}{z-e^{p_2 T}} + \frac{cz}{z-1} + \frac{dzT}{(z-1)^2} \right) \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
 &= (z-1) \left(\frac{a}{z-e^{p_1 T}} + \frac{b}{z-e^{p_2 T}} + \frac{c}{z-1} + \frac{dT}{(z-1)^2} \right) \\
 &= (z-1) \frac{a(z-e^{p_2 T})(z-1)^3 + b(z-e^{p_1 T})(z-1)^3}{(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T})(z-1)^3} \\
 &\quad + (z-1) \frac{c(z-1)^2(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T}) + dT(z-1)(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T})}{(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T})(z-1)^3} \\
 BOZG_\delta P(z) &= \frac{a(z-e^{p_2 T})(z-1)^3 + b(z-e^{p_1 T})(z-1)^3}{(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T})(z-1)^2} \\
 &\quad + \frac{c(z-1)^2(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T}) + dT(z-1)(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T})}{(z-e^{p_1 T})(z-e^{p_2 T})(z-1)^2} \tag{C.10}
 \end{aligned}$$

Annexe D

Annexes au chapitre 4

Sommaire

C.1	Matrices de la réalisation d'états avec retards sans approximation de Padé	176
C.2	Détermination des LMI pour la synthèse d'un filtre	177
C.3	Paramétrage pour que le filtre ait un gain statique égal à 1	180

C.1 Matrices de la réalisation d'états avec retards sans approximation de Padé

La représentation d'état de la dynamique de roulis bouclée avec l'autopilote INDI, l'augmentation adaptative et avec retards peut être décrit sous la forme suivante :

$$\dot{X} = \bar{A}X + A_{d1}X(t - \tau_1) + A_{d2}X(t - \tau_2) + A_{d3}X(t - \tau_1 - \tau_2) + A_{d4}X(t - \tau_1 - \tau_2 - T) + \bar{B}r + B_{d1}r(t - \tau_1) \quad (D.1)$$

avec $X = [x_1 \quad x_2 \quad x_\delta \quad x_v \quad \hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad x_f]^\top$ et

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (G + \Delta G)C_\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{e1} & 1 - K_{e2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_I & (GD_{\sigma_1} - K_{e3}) & (GD_{\sigma_2} - K_{e4}) & -GC_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_f D_{\sigma_1} & B_f D_{\sigma_2} & A_f & 0 \end{bmatrix} \quad (D.2a)$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_\delta C_\delta & B_\delta G^{-1} K_I & 0 & 0 & -B_\delta C_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.2b)$$

$$A_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{e1} & K_{e2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{e3} - GD_{\sigma_1} - K_\phi & K_{e4} - GD_{\sigma_2} - K_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_f D_{\sigma_1} & -B_f D_{\sigma_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.2c)$$

$$A_{d3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_\delta G^{-1} K_\phi & -B_\delta G^{-1} (K_p + \frac{1}{T}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.2d)$$

$$A_{d4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B_\delta G^{-1}}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2e})$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ K_{ff} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2f})$$

$$B_{d1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G^{-1} B_\delta K_{ff} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2g})$$

C.2 Détermination des LMI pour la synthèse d'un filtre

On peut réécrire \tilde{A} de de la façon suivante

$$\tilde{A} = A_0 + W_1 C_f W + W_2 A_f W \quad (\text{D.3})$$

avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (G+\Delta G)C_\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_\delta D_{p_1} G^{-1} K_\phi D_{p_2} & \tilde{A}_{3,2} & A_\delta + B_\delta D_{p_1} C_\delta & B_\delta D_{p_1} G^{-1} K_I & B_\delta C_{p_1} & \tilde{A}_{3,6} & \tilde{A}_{3,7} & B_\delta D_{p_1} \frac{C_{p_r}}{GT} & 0 & 0 & 0 \\ -D_{p_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{p_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{p_1} G^{-1} K_\phi D_{p_2} & \tilde{A}_{5,2} & B_{p_1} C_\delta & B_{p_1} G^{-1} K_I & A_{p_1} & \tilde{A}_{5,6} & \tilde{A}_{5,7} & B_{p_1} \frac{C_{p_r}}{GT} & 0 & 0 & 0 \\ B_{p_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{p_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{p_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{p_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{p_r} D_{p_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{p_r} C_{p_2} & A_{p_r} & 0 & 0 & 0 \\ K_{e_1} D_{p_2} & K_{e_2} D_{p_2} & 0 & 0 & 0 & -K_{e_1} C_{p_2} & -K_{e_2} C_{p_2} & 0 & -K_{e_1} & 1 - K_{e_2} & 0 \\ \tilde{A}_{10,1} & \tilde{A}_{10,2} & 0 & K_I & 0 & \tilde{A}_{10,6} & \tilde{A}_{10,7} & 0 & \tilde{A}_{10,9} & \tilde{A}_{10,10} & 0 \\ -B_f D_{\sigma_1} D_{p_2} & -B_f D_{\sigma_2} D_{p_2} & 0 & 0 & 0 & -B_f D_{\sigma_1} C_{p_2} & -B_f D_{\sigma_2} C_{p_2} & 0 & B_f D_{\sigma_1} & B_f D_{\sigma_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (D.4a)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_{n_f} \end{bmatrix} \quad (D.4b)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -B_\delta^T D_{p_1}^T & 0 & -B_{p_1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -G & 0 \end{bmatrix}^T \quad (D.4c)$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_f} \end{bmatrix}^T \quad (D.4d)$$

On pose

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \quad (D.5)$$

avec $P_1 \in \mathbb{R}^{n_{\bar{x}}-n_f \times n_{\bar{x}}-n_f}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{n_{\bar{x}}-n_f \times n_f}$, $P_3 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$, $P \in \mathbb{R}^{n_{\bar{x}} \times n_{\bar{x}}}$. On a

$$\begin{aligned} W_1 C_f W P &= W_1 C_f \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_{n_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \\ &= W_1 C_f \begin{bmatrix} P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \\ &= W_1 \begin{bmatrix} C_f P_2^T & C_f P_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (D.6a)$$

$$\begin{aligned} W_2 A_f W P &= W_2 A_f \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_{n_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \\ &= W_2 A_f \begin{bmatrix} P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \\ &= W_2 \begin{bmatrix} A_f P_2^T & A_f P_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (D.6b)$$

Pour linéariser on pose $P_2 = 0$ et on obtient

$$W_1 C_f W P = W_1 \begin{bmatrix} 0 & Z \end{bmatrix} \quad (D.7a)$$

$$W_2 A_f W P = W_2 \begin{bmatrix} 0 & Y \end{bmatrix} \quad (D.7b)$$

avec

$$Z = C_f P_3 \quad (\text{D.8a})$$

$$Y = A_f P_3 \quad (\text{D.8b})$$

En posant

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{01} & 0 \\ A_{02} & 0_{n_f \times n_f} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9a})$$

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0_{n_f \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9b})$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} W_{11} \\ 0_{n_f \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9c})$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_f} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9d})$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_f} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9e})$$

et en choisissant d'optimiser la norme \mathcal{L}_1 sur x_1 et x_2 , les LMI (4.5a) et (4.5b) deviennent (avec $P_2 = 0$ dans (D.5))

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \widetilde{A}P + P\widetilde{A}^T + \alpha P & \widetilde{B} \\ \widetilde{B}^T & -\alpha I_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A_0 + W_1 C_f W + W_2 A_f W)P + P(A_0 + W_1 C_f W + W_2 A_f W)^T + \alpha P & \widetilde{B} \\ \widetilde{B}^T & -\alpha I_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2^T \\ \Upsilon_2 & \Upsilon_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1^T & 0 \end{bmatrix} & -\alpha I_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{01}P_1 + P_1 A_{01}^T + \alpha P_1 & P_1 A_{02}^T + W_{11}Z & \widetilde{B}_1 \\ A_{02}P_1 + Z^T W_{11}^T & Y + Y^T + \alpha P_6 & 0 \\ \widetilde{B}_1^T & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \leq 0, \end{aligned} \quad (\text{D.10a})$$

$$\begin{bmatrix} P & PC^T \\ CP & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & P_1 \widetilde{C} \\ 0 & P_3 & 0 \\ \widetilde{C}P_1 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{D.10b})$$

avec

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2^T \\ \Upsilon_2 & \Upsilon_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} A_{0_1} & 0 \\ A_{0_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0_1}^T & A_{0_2}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{1_1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Z \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ Z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{1_1}^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{n_f} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A_{0_1}P_1 + P_1A_{0_1}^T + \alpha P_1 & P_1A_{0_2}^T + W_{1_1}Z \\ A_{0_2}P_1 + Z^TW_{1_1}^T & Y + Y^T + \alpha P_3 \end{bmatrix} \tag{D.11a}
 \end{aligned}$$

où $C = I_2$, $P_a = P_a^T > 0$ et $P_a \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et avec les deux conditions nécessaires $0 < \alpha < -2 \max(\text{Re}(\lambda(A_{0_1})))$, $\lambda^2 > P_a$.

Puisque $P = P^T > 0$ implique que $P_6 = P_6^T > 0$, on peut supprimer P_6 de la LMI (D.10b) qui devient

$$\begin{bmatrix} P_a & P_b & P_a \\ P_b^T & P_c & 0 \\ P_a & 0 & \lambda \end{bmatrix} > 0. \tag{D.12}$$

C.3 Paramétrage pour que le filtre ait un gain statique égal à 1

La matrice d'état du filtre est $A_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$

Dans la LMI à résoudre on doit avoir

$$Y + Y^T + \alpha P_3 > 0,$$

avec $P_2 = P_2^T > 0$, $P_2 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ et $Y \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$. On a aussi $Z^T \in \mathbb{R}^{n_f}$ et $B_f \in \mathbb{R}^{n_f}$. Afin d'avoir un gain statique du filtre égal à 1 et vérifier $Y + Y^T + \alpha P_3 > 0$, on choisit Y et Z comme suit

$$Y = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 & 0_{(n_f-1) \times 1} \\ \bar{Y}_2 & \rho \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{bmatrix} \bar{Z} & -\rho \end{bmatrix},$$

avec

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_{3_a} & P_{3_b} \\ P_{3_b}^T & P_{3_c} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_f = \begin{bmatrix} 0_{(n_f-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

et avec $\rho \in \mathbb{R}$, $\bar{Y}_1 \in \mathbb{R}^{(n_f-1) \times (n_f-1)}$, $\bar{Y}_2^T \in \mathbb{R}^{n_f-1}$, $\bar{Z}^T \in \mathbb{R}^{n_f-1}$, $P_{3_a} \in \mathbb{R}^{(n_f-1) \times (n_f-1)}$, $P_{3_b} \in \mathbb{R}^{n_f-1}$ et $P_{3_c} \in \mathbb{R}$.

On peut obtenir $Y + Y^T + \alpha P_3 > 0$ car

$$Y + Y^T + \alpha P_3 = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 + \bar{Y}_1^T + \alpha P_{3_a} & \bar{Y}_2^T + \alpha P_{3_b} \\ \bar{Y}_2 + \alpha P_{3_b}^T & 2\rho + P_{3_c} \end{bmatrix}.$$

On a

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1^{-1} & 0_{(n_f-1) \times 1} \\ \frac{-\bar{Y}_2 \bar{Y}_1^{-1}}{\rho} & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}$$

car

$$YY^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 & 0_{(n_f-1) \times 1} \\ \bar{Y}_2 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1^{-1} & 0_{(n_f-1) \times 1} \\ \frac{-\bar{Y}_2 \bar{Y}_1^{-1}}{\rho} & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_f-1} & 0_{(n_f-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n_f-1)} & 1 \end{bmatrix}.$$

On a un gain statique du filtre égal à 1 car

$$-ZY^{-1}B_f = -\begin{bmatrix} \bar{Z} & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1^{-1} & 0_{(n_f-1) \times 1} \\ \frac{-\bar{Y}_2 \bar{Y}_1^{-1}}{\rho} & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{(n_f-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{Z} & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{(n_f-1) \times 1} \\ \frac{1}{\rho} \end{bmatrix} = 1.$$

Bibliographie

- [AB93] R. Adams and S. Banda. Robust flight control design using dynamic inversion and structured singular value synthesis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1(2) :80–92, June 1993.
- [ABB94] R. J. Adams, J. M. Buffington, and S. S. Banda. Design of nonlinear control laws for high-angle-of-attack flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 17(4) :737–746, July 1994.
- [AGB14] P. Apkarian, P. Gahinet, and C. Buhr. Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers. In *2014 European Control Conference (ECC)*. IEEE, June 2014.
- [AN17] P. Apkarian and D. Noll. The H_∞ control problem is solved. *Aerospace Lab*, 13, November 2017.
- [ANP96] J. Abedor, K. Nagpal, and K. Poolla. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 6 :899–927, 1996.
- [AVKC22] P. Acquatella, E.-J. Van Kampen, and Q. P. Chu. A sampled-data form of incremental nonlinear dynamic inversion for spacecraft attitude control. In *AIAA SCITECH 2022 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, January 2022.
- [Bar59] I. Barbalat. Systèmes d’équations différentielles d’oscillations non linéaires. *rmpa*, 4 :267–270, 1959.
- [BAZ⁺19] P. Bhardwaj, V. S. Akkinapalli, J. Zhang, S. Saboo, and F. Holzapfel. Adaptive augmentation of incremental nonlinear dynamic inversion controller for an extended f-16 model. In *AIAA Scitech 2019 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, January 2019.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [BGR92] G. BALAS, W. GARRARD, and J. REINER. Robust dynamic inversion control laws for aircraft control. In *Guidance, Navigation and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 1992.
- [BOJ01] B. Bacon, A. Ostroff, and S. Joshi. Reconfigurable ndi controller using inertial sensor failure detection & isolation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 37(4) :1373–1383, 2001.
- [BP02] D. Bates and I. Postlewaite. *Robust Multivariable Control of Aerospace Systems*. DUP Science, 2600 MG Delft The Netherlands, 1st edition, 2002.

- [BPC02] B. Burchett, A. Peterson, and M. Costello. Prediction of swerving motion of a dual-spin projectile with lateral pulse jets in atmospheric flight. *Mathematical and Computer Modelling*, 35(7 ?8) :821–834, April 2002.
- [Car07] D. E. Carlucci. *Ballistics : theory and design of guns and ammunition*. Crc Press, 2007.
- [CH08] C. Cao and N. Hovakimyan. Design and analysis of a novel \mathcal{L}_1 adaptive control architecture with guaranteed transient performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(2) :586–591, March 2008.
- [CH09] C. Cao and N. Hovakimyan. \mathcal{L}_1 adaptive output-feedback controller for non-strictly-positive-real reference systems : Missile longitudinal autopilot design. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 32(3) :717–726, May 2009.
- [CH10] C. Cao and N. Hovakimyan. Stability margins of \mathcal{L}_1 adaptive control architecture. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(2) :480–487, February 2010.
- [Che03] W.-H. Chen. Nonlinear disturbance observer-enhanced dynamic inversion control of missiles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, (1) :161–166, January 2003.
- [Cos97] M. F. Costello. Potential field artillery projectile improvement using movable canards. *Rept. ARL-TR-1344, US Military Academy, West Point, NY*, 1997.
- [CP00] M. Costello and A. Peterson. Linear theory of a dual-spin projectile in atmospheric flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 23(5) :789–797, September 2000.
- [CSC98] Y. Cao, Y. Sun, and C. Cheng. Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays. *IEEE Trans. Aut. Control*, 43 :1608–1612, 1998.
- [CVKC18] C. Cakiroglu, E.-J. Van Kampen, and Q. P. Chu. Robust incremental nonlinear dynamic inversion control using angular accelerometer feedback. In *2018 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, January 2018.
- [CWB11] D. Corriveau, P. Wey, and C. Berner. Thrusters pairing guidelines for trajectory corrections of projectiles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34(4) :1120–1128, July 2011.
- [dCCM03] R. R. da Costa, Q. P. Chu, and J. A. Mulder. Reentry flight controller design using nonlinear dynamic inversion. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 40(1) :64–71, January 2003.
- [DFMD14] G. Di Francesco, M. Mattei, and E. D’Amato. Incremental nonlinear dynamic inversion and control allocation for a tilt rotor uav. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, January 2014.
- [DGKF88] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. In *American Control Conference*. IEEE, June 1988.
- [DLSW09] B. Du, J. Lam, Z. Shu, and Z. Wang. delay-partitioning projection approach to stability analysis of continuous systems with multiple delay components. *IET Control Theory and Applications*, 3 :383–390, 2009.

-
- [dPP01] C. de Souza, R. Pálhares, and P. Peres. Robust \mathcal{H}_∞ filter design for uncertain linear systems with multiple time-varying state delays. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 49 :569–576, 2001.
- [EHT18] C. M. Elliott, J. A. Harris, and G. Tallant. \mathcal{L}_1 adaptation as a bolt-on robustifying control law to a baseline dynamic inversion system. In *2018 IEEE Aerospace Conference*. IEEE, March 2018.
- [emndIPGM] M. et mémorial national de la Première Guerre Mondiale. <https://www.theworldwar.org/fr/learn/about-wwi/artillery>.
- [Esc98] B. Escande. Nonlinear dynamic inversion and linear quadratic techniques. In *Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 1998.
- [FC06] G. Frost and M. Costello. Control authority of a projectile equipped with an internal unbalanced part. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 128(4) :1005, 2006.
- [FCC11] F. Fresconi, G. Cooper, and M. Costello. Practical assessment of real-time impact point estimators for smart weapons. *Journal of Aerospace Engineering*, 24(1) :1–11, January 2011.
- [Fre11] F. Fresconi. Guidance and control of a projectile with reduced sensor and actuator requirements. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34(6) :1757–1766, November 2011.
- [fS75] I. O. for Standardization. *ISO 2533 Standard Atmosphere*. 1975.
- [GA94] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(4) :421–448, 1994.
- [GB22] B. C. Gruenwald and J. Bryson. A gain-scheduled approach for the control of a high-speed guided projectile. In *AIAA Scitech 2022 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, January 2022.
- [GC02] B. J. Guidos and G. R. Cooper. Linearized Motion of a Fin-Stabilized Projectile Subjected to a Lateral Impulse. *Journal of Spacecraft*, 39(3) :384–391, May-June 2002.
- [GKC03] K. Gu, V. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of Time-Delay Systems*. Springer, New York, 2003.
- [GLK⁺18] F. Grondman, G. Looye, R. O. Kuchar, Q. P. Chu, and E.-J. Van Kampen. Design and flight testing of incremental nonlinear dynamic inversion-based control laws for a passenger aircraft. In *2018 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, January 2018.
- [GXCH10] I. Gregory, E. Xargay, C. Cao, and N. Hovakimyan. Flight test of an \mathcal{L}_1 adaptive controller on the nasa airstar flight test vehicle. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, June 2010.
- [GXH⁺11] M. Geiser, E. Xargay, N. Hovakimyan, T. Bierling, and F. Holzapfel. \mathcal{L}_1 adaptive augmented dynamic inversion controller for a high agility uav. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, June 2011.

- [HC10] N. Hovakimyan and C. Cao. *\mathcal{L}_1 Adaptive Control Theory : Guaranteed Robustness with Fast Adaptation*. SIAM, Philadelphia, 2010.
- [HET19] J. Harris, C. M. Elliott, and G. S. Tallant. Stability and performance robustness of an \mathcal{L}_1 adaptive dynamic inversion flight control system. In *AIAA Scitech 2019 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, January 2019.
- [Hov11] \mathcal{L}_1 adaptive control for safety-critical systems. *IEEE Control Systems*, 31(5) :54–104, October 2011.
- [HWS06] Y. He, M. Wu, and J. H. She. Delay-dependent stability criteria for linear systems with multiple time delays. *IEE Proc. - Part D, Contr. Theory & Applications*, 153 :447–452, 2006.
- [HYC06] N. Hovakimyan, B.-J. Yang, and A. J. Calise. Adaptive output feedback control methodology applicable to non-minimum phase nonlinear systems. *Automatica*, 42(4) :513–522, April 2006.
- [IAN⁺14] P. A. Ioannou, A. M. Annaswamy, K. S. Narendra, S. Jafari, L. Rudd, R. Ortega, and J. Boskovic. \mathcal{L}_1 -adaptive control : Stability, robustness, and interpretations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(11) :3075–3080, November 2014.
- [ID91] P. Ioannou and A. Datta. Robust adaptive control : a unified approach. *Proceedings of the IEEE*, 79(12) :1736–1768, 1991.
- [IF06] P. Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1st edition, 2006.
- [IK82] P. Ioannou and P. Kokotovic. An asymptotic error analysis of identifiers and adaptive observers in the presence of parasitics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(4) :921–927, August 1982.
- [IK84] P. Ioannou and P. Kokotovic. Robust redesign of adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(3) :202–211, March 1984.
- [IS94] T. Iwasaki and R. Skelton. All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problems : LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30 :1307–1317, 1994.
- [IS12] P. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control*. Dover Books on Electrical Engineering Series. Dover Publications, Incorporated, 2012.
- [JIR13] S. Jafari, P. Ioannou, and L. E. Rudd. What is \mathcal{L}_1 -adaptive control. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 2013.
- [JK05] E. N. Johnson and S. K. Kannan. Adaptive trajectory control for autonomous helicopters. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28(3) :524–538, May 2005.
- [KCS⁺20] A. Ko, K. Chang, D.-J. Sheen, C.-H. Lee, Y. Park, and S. W. Park. Prediction and analysis of the aerodynamic characteristics of a spinning projectile based on computational fluid dynamics. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2020 :1–12, June 2020.

-
- [KFVKC13] J. Koschorke, W. Falkena, E.-J. Van Kampen, and Q. P. Chu. Time delayed incremental nonlinear control. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 2013.
- [Kha02] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3rd edition, 2002.
- [KHL12] D. Klatt, R. Hruschka, and F. Leopold. Numerical and experimental investigation of the magnus effect in supersonic flows. In *30th AIAA Applied Aerodynamics Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, June 2012.
- [KJ95] J. Kim and J. Jang. Nonlinear model inversion control for bank-to-turn missile. In *Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 1995.
- [KKK95] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotović. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 1995.
- [KLCVK19] T. Keijzer, G. Looye, Q. P. Chu, and E.-J. Van Kampen. Design and flight testing of incremental backstepping based control laws with angular accelerometer feedback. In *AIAA Scitech 2019 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, January 2019.
- [KMM20] D. Klatt, A. Mielke, and C. Mundt. Magnus effect for roll-decoupled canards on a spinning body of revolution. *International Journal of Numerical Methods for Heat and amp; Fluid Flow*, 31(2) :641–654, May 2020.
- [KNR99] V. Kolmanovskii, S. I. Niculescu, and J. Richard. On the Liapunov-Krasovskii functional for stability analysis of linear delay systems. *International Journal of Control*, 72 :374–384, 1999.
- [KR99] V. Kolmanovskii and J. Richard. Stability of some linear systems with delays. *IEEE Trans. Aut. Control*, 44 :984–989, 1999.
- [LHCW08] D. Li, N. Hovakimyan, C. Cao, and K. Wise. Filter design for feedback-loop trade-off of \mathcal{L}_1 adaptive controller : A linear matrix inequality approach. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, June 2008.
- [LL00] D. J. Leith and W. E. Leithead. Survey of Gain-Scheduling Analysis and Design. *International Journal of Control*, 73(11) :1001–1025, 2000.
- [LSLT18] C.-H. Lee, H.-S. Shin, J.-I. Lee, and M.-J. Tahk. Zero-effort-miss shaping guidance laws. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 54(2) :693–705, April 2018.
- [MA77] P. H. Morrison and D. S. Amberntson. Guidance and control of a cannon-launched guided projectile. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 14(6) :328–334, June 1977.
- [MAB⁺87] I. M. Mareels, B. D. Anderson, R. R. Bitmead, M. Bodson, and S. S. Sastry. Revisiting the mit rule for adaptive control. *IFAC Proceedings Volumes*, 20(2) :161–166, July 1987.
- [Mac19] D. Machala. *Comportement D’un Projectile en Vol Libre : Modélisation LPV Et Analyse de Sensibilité*. PhD thesis, Université de Lorraine, France, 2019.

- [McC12] R. L. McCoy. *Modern Exterior Ballistics : The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*. Schiffer Publishing, Ltd., second edition, 2012.
- [MIO⁺97] P. Menon, V. Iragavarapu, E. Ohlmeyer, P. Menon, V. Iragavarapu, and E. Ohlmeyer. Non-linear missile autopilot design using time-scale separation. In *Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 1997.
- [Moo81] B. Moore. Principal component analysis in linear systems : controllability, observability, and model reduction. *IEEE Trans. Aut. Control*, 26 :17–32, 1981.
- [MPC⁺07] A. Marcos, L. F. Peñín, A. Caramagno, J. Sommer, and W. Belau. Atmospheric re-entry ndi control design for the hopper rlv concept. *IFAC Proceedings Volumes*, 40(7) :786–791, 2007.
- [Mur78] C. H. Murphy. Influence of moving internal parts on angular motion of spinning projectiles. *Journal of Guidance and Control*, 1(2) :117–122, March 1978.
- [NDD96] S. Niculescu, J. Dion, and L. Dugard. Delays-dependent stability for linear systems with several delays : an LMI approach. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, San Francisco, USA, 1996.
- [NPT07] S. Nazin, B. Polyak, and M. Topunov. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids. *Automation and Remote Control*, 68 :467–486, 2007.
- [oEttSA76] U. S. C. on Extension to the Standard Atmosphere. *U.S. Standard Atmosphere, 1976*. NOAA - SIT 76-1562. National Oceanic and Amospheric [sic] Administration, 1976.
- [OP14] R. Ortega and E. Panteley. \mathcal{L}_1 adaptive control always converges to a linear pi control and does not perform better than the pi. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3) :6926–6928, 2014.
- [Par66] P. Parks. Liapunov redesign of model reference adaptive control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(3) :362–367, July 1966.
- [PHXH12] F. Peter, F. Holzapfel, E. Xargay, and N. Hovakimyan. \mathcal{L}_1 adaptive augmentation of a missile autopilot. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 2012.
- [PLH12] F. Peter, M. Leitao, and F. Holzapfel. Adaptive augmentation of a new baseline control architecture for tail-controlled missiles using a nonlinear reference model. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 2012.
- [PPd00] R. Pálhares, P. Peres, and C. de Souza. Robust \mathcal{H}_∞ filter design for linear continuous-time uncertain systems with multiple delays : an LMI approach. In *Proc. IFAC Symp. on Robust Control Design*, Prague, Czech Republic, 2000.
- [PPR00] R. Pálhares, P. Peres, and J. Ramírez. A linear matrix inequality approach to the peak-to-peak guaranteed cost filtering design. In *Proc. IFAC Symp. on Robust Control Design*, Prague, Czech Republic, 2000.
- [PvK23] T. Pollack and E.-J. van Kampen. Robust stability and performance analysis of incremental dynamic-inversion-based flight control laws. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 46(9) :1785–1798, September 2023.

-
- [QJ17] C. Qi and A. Jianliang. Ndi-based \mathcal{L}_1 adaptive control design for a generic hypersonic vehicle model. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, January 2017.
- [RBG95] J. Reiner, G. J. Balas, and W. L. Garrard. Robust dynamic inversion for control of highly maneuverable aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 18(1) :18–24, January 1995.
- [Rou23] E. Roussel. Control moment gyro actuator for a guided projectile. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 46(6) :1155–1168, June 2023.
- [RVAS82] C. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, and G. Stein. Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics. In *1982 21st IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, December 1982.
- [RZBH19] S. A. Raab, J. Zhang, P. Bhardwaj, and F. Holzapfel. Consideration of control effector dynamics and saturations in an extended indi approach. In *AIAA Aviation 2019 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, June 2019.
- [SC98] M. Smit and I. Craig. Robust flight controller design using \mathcal{H}_∞ loop-shaping and dynamic inversion techniques. In *Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, August 1998.
- [SCdC16] E. J. J. Smeur, Q. Chu, and G. C. H. E. de Croon. Adaptive incremental nonlinear dynamic inversion for attitude control of micro air vehicles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 39(3) :450–461, March 2016.
- [SCM10] S. Sieberling, Q. Chu, and J. Mulder. Robust flight control using incremental nonlinear dynamic inversion and angular acceleration prediction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 33 :1732–1742, 2010.
- [SdCC18] E. Smeur, G. de Croon, and Q. Chu. Cascaded incremental nonlinear dynamic inversion for mav disturbance rejection. *Control Engineering Practice*, 73 :79–90, April 2018.
- [SEG92] S. A. Snell, D. F. Enns, and W. L. Garrard. Nonlinear inversion flight control for a supermaneuverable aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 15(4) :976–984, July 1992.
- [Sèv16] F. Sève. *Commande Robuste pour une Classe de Systèmes Non Linéaires à Paramètres Variants : Application aux Projectiles Guidés*. PhD thesis, Université de Lorraine, France, 2016.
- [SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. Aut. Control*, 42 :896–911, 1997.
- [SGJ20] A. Szklarski, R. Glebocki, and M. Jacewicz. Impact point prediction guidance parametric study for 155 mm rocket assisted artillery projectile with lateral thrusters. *Archive of Mechanical Engineering*, pages 31–56, January 2020.
- [SL22] K. Shi and M. Liu. Trajectory analysis of a dual-spin-stabilized projectile with fixed-canards for the precision guidance kit. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, 236(13) :2620–2632, July 2022.

- [SLJ00] T. Su, C. Lu, and G. Jong. An LMI approach for robust stability of linear uncertain systems with time-varying multiple state delays. In *Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2000.
- [SLJ16] B. L. Stevens, F. L. Lewis, and E. N. Johnson. *Aircraft Control and Simulation. Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems*. Wiley-Blackwell, third edition, February 2016.
- [Smi98] P. Smith. A simplified approach to nonlinear dynamic inversion based flight control. In *23rd Atmospheric Flight Mechanics Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August 1998.
- [STW⁺17] F. Seve, S. Theodoulis, P. Wernert, M. Zasadzinski, and M. Boutayeb. Flight dynamics modeling of dual-spin guided projectiles. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 53(4) :1625–1641, August 2017.
- [Tha21] S. Thai. *Algorithmes de Contrôle en vol avancés avec compensation anti-windup pour des systèmes aérospatiaux variant rapidement dans le temps*. PhD thesis, Université de Toulouse, France, 2021.
- [TSW15] S. Theodoulis, F. Sève, and P. Wernert. Robust gain-scheduled autopilot design for spin-stabilized projectiles with a course-correction fuze. *Aerospace Science and Technology*, 42 :477–489, April 2015.
- [TTTP20] S. Tipàn, S. Theodoulis, S. Thai, and M. Proff. Nonlinear dynamic inversion flight control design for guided projectiles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 43(5) :975–980, May 2020.
- [VSST24] G. M. Vinco, O. Sename, G. Strub, and S. Theodoulis. Linear parameter-varying polytopic modeling and control design for guided projectiles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, pages 1–15, January 2024.
- [Wel00] L. Wells. The projectile gram saasm for ergm and excalibur. In *IEEE 2000. Position Location and Navigation Symposium (Cat. No.00CH37062)*, PLANS-00. IEEE, 2000.
- [Wer09] P. Wernert. Stability analysis for canard guided dual-spin stabilized projectiles. In *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, June 2009.
- [WHS10] M. Wui, Y. He, and J. She. *Stability Analysis and Robust Control of Time-Delay Systems*. Springer, Heidelberg, 2010.
- [WvKCL19] X. Wang, E.-J. van Kampen, Q. Chu, and P. Lu. Stability analysis for incremental nonlinear dynamic inversion control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 42(5) :1116–1129, May 2019.
- [WYKoTIL58] H. Whitaker, J. Yamron, A. Kezer, and M. I. of Technology. Instrumentation Laboratory. *Design of Model Reference Adaptive Control Systems for Aircraft*. Report Massachusetts Institute of Technology Instrumentation Laboratory R. M.I.T. Instrumentation Laboratory, 1958.
- [XL03] B. Xu and Y. Liu. Delay-dependent/delay-independent stability of linear systems with multiple time-varying delays. *IEEE Trans. Aut. Control*, 48 :697–701, 2003.

-
- [Xu01] B. Xu. Stability of retarded dynamical systems : a Lyapunov function approach. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 253 :590–615, 2001.
- [Zar12] P. Zarchan. *Tactical and Strategic Missile Guidance, Seventh Edition*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, 6th edition, 2012.
- [Zip14] P. H. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Washington, DC, third edition, February 2014.



Résumé

Les munitions gyrostabilisées standard de 155 mm, très utilisées dans l'artillerie, souffrent d'une dispersion relativement élevée à l'impact en raison des incertitudes sur les conditions de tir et des perturbations dues au vent. Pour réduire cette dispersion balistique, un concept de projectile à fusée de correction de trajectoire est étudié. C'est une solution innovante et peu coûteuse qui consiste à équiper les projectiles non guidés déjà existants d'un module de guidage découplé en roulis qui intègre jusqu'à quatre surfaces de commandes aérodynamiques appelés canards, des capteurs (centrale inertielle, magnétomètres et GNSS), ainsi que d'une loi de commande et guidage embarquée.

La principale stratégie de commande utilisée dans la littérature pour les projectiles gyrostabilisés est le séquençement de gains. Cette méthode se base sur la linéarisation locale de la dynamique du projectile autour d'un nombre défini de points de vol et produit un correcteur non-linéaire séquentiel. Cette approche est chronophage du fait du nombre important de correcteurs locaux à régler et ne garantit pas de performance et de stabilité globale sur l'ensemble du domaine de vol.

Ainsi, l'axe principal de recherche qui encadre les travaux liés à la thèse est l'établissement d'une méthodologie de conception rapide et générique d'autopilotes pour projectiles guidés avec des garanties de performance et de robustesse face aux incertitudes paramétriques pour toute l'enveloppe de vol. Pour cela, la modélisation non-linéaire du projectile a tout d'abord été étudiée pour concevoir un simulateur balistique dans l'environnement Matlab/Simulink. Ensuite, la commande non-linéaire par inversion dynamique incrémentale (INDI) a été utilisée pour concevoir les autopilotes de roulis, tangage, lacet et facteurs de charge nécessaires à la correction de la trajectoire du projectile. Une méthodologie de réglage a été mise en place utilisant les outils d'analyse de la commande numérique et la synthèse de correcteur par façonnage de fonctions de sensibilité pour respecter les contraintes de performance nominale du cahier des charges. Enfin, pour faire face aux incertitudes paramétriques du modèle du projectile et garantir les performances globales du système de commande, les autopilotes INDI ont été augmentés d'une surcouche adaptative. Des simulations non-linéaires de trajectoires guidées permettent de valider le comportement nominal de la loi de commande INDI et le gain en robustesse apportés par l'augmentation adaptative.

Mots-clés: Dynamique de vol ; Projectiles guidés ; Commande non-linéaire ; Commande adaptative ; Commande par inversion dynamique incrémentale

Abstract

155 mm spin-stabilized ammunitions commonly used in artillery suffer from a high ballistic dispersion toward the target due to uncertain launch conditions and wind disturbances. To reduce this lack of precision, a concept of a dual-spin guided projectile geared with a course-correction fuse is investigated. This is an innovative and low-cost solution that consists of equipping existing shells with a roll-decoupled guidance fuse embedding up to four aerodynamic control surfaces called canards. The fuse embeds also all necessary sensors (IMU, magnetometers, and GNSS), a control law and a guidance law.

The main control strategy used in the literature for dual-spin guided projectiles is called gain-scheduling. This methodology is based on the local linearization of the projectile dynamics around a fixed number of flight points in order to synthesize a nonlinear scheduled controller. Gain-scheduling is time-consuming due to the large number of local controllers to be tuned, and does not guarantee global performance and stability over the entire flight envelope.

Therefore, the main objective of this thesis is to establish a generic and rapid design methodology for guided projectile autopilots with guaranteed performance and robustness to parameter uncertainties through the whole flight envelope.

To achieve this objective, first, the nonlinear modelling of the projectile was conducted and a ballistic simulator was designed in the Matlab/Simulink environment. Then, the Incremental Nonlinear Dynamic Inversion (INDI) control method was used to design the roll, pitch, yaw and load factor autopilots required to correct the projectile's trajectory. A tuning methodology was designed using digital control analysis tools and mixed-sensitivity synthesis to meet the design requirements. Finally, to deal with the parametric uncertainties of the projectile model and to guarantee the overall performance of the control system, the INDI autopilots were augmented with an adaptive layer. Simulations of guided trajectories were used to validate the nominal behavior of the INDI control law and the increased robustness provided by the adaptive augmentation.

Keywords: Flight dynamics ; Guided projectiles ; Nonlinear control ; Adaptive control ; Incremental Non-linear dynamic inversion

