



HAL
open science

Interactions dynamiques entre denture, lignes d'arbres, roulements et carter dans les transmissions par engrenages

Emmanuel Rigaud

► **To cite this version:**

Emmanuel Rigaud. Interactions dynamiques entre denture, lignes d'arbres, roulements et carter dans les transmissions par engrenages. Vibrations [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 1998. Français. NNT: . tel-04802927

HAL Id: tel-04802927

<https://hal.science/tel-04802927v1>

Submitted on 25 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

Spécialité : **Mécanique**

par **Emmanuel RIGAUD**

Ingénieur de L'INSA de Lyon en Génie Mécanique et Développement

**INTERACTIONS DYNAMIQUES ENTRE DENTURE,
LIGNES D'ARBRES, ROULEMENTS ET CARTER
DANS LES TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES**

Soutenu le 28 avril 1998

JURY

Messieurs	L. JEZEQUEL	Président
	G. LALLEMENT	Rapporteur
	D. LE HOUEDDEC	Rapporteur
	D. BARDAY	
	M. OCTRUE	
	J. PERRET-LIAUDET	
	J. SABOT	

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé à l'Ecole Centrale de Lyon, au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, Unité Mixte de Recherche 5513 dirigée par Monsieur Philippe KAPSA.

Je tiens à exprimer ma plus vive gratitude à Monsieur le Professeur Jean SABOT qui a dirigé ce travail de thèse. Son expérience et ses connaissances ont facilité mon intégration au sein de l'équipe Mécanismes et m'ont permis de bien comprendre les différents aspects du comportement dynamique des engrenages avant d'engager ce travail. Sa rigueur scientifique n'a d'égale que la souplesse des relations qu'il entretient avec moi même et, je le crois, avec l'ensemble des membres présents ou passés de notre équipe. Enfin, c'est grâce à lui que j'ai pu trouver, dans le cadre de mon travail d'Ingénieur de Recherche et de Formation, le temps nécessaire à mes recherches, à la rédaction du document écrit et à la préparation de la soutenance orale.

Je remercie Messieurs les Professeurs Gérard LALLEMENT et Donatien LE HOUEDDEC pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail de recherche et pour l'intérêt et l'attention qu'ils lui ont apportés.

Je remercie également Monsieur le Professeur Louis JEZEQUEL d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse.

Je remercie Monsieur Michel OCTRUE, Ingénieur au service Transmissions Mécaniques du CETIM pour avoir participé à mon jury. Ces remerciements s'adressent aussi à Denis BARDAY, Ingénieur de Recherche de RENAULT V.I. avec qui j'ai pu avoir de nombreux échanges scientifiques et amicaux dans le cadre des activités du Club TRANSSIL.

Je tiens à remercier plus particulièrement Joël PERRET-LIAUDET pour ses nombreux conseils et ses critiques avisées. Sa compagnie m'est toujours agréable, aussi bien pendant qu'après les heures de travail.

Enfin, je remercie tous ceux et celles qui m'ont soutenu chaque fois que j'ai sollicité leur aide morale ou matérielle. Je tiens notamment à citer Pierre HERBIN pour ses précieux coups de main en informatique et Annabel SIBE qui a partagé mon bureau pendant plusieurs années et qui a consacré beaucoup d'attention à la relecture de mes travaux.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	13
CHAPITRE 1. EXCITATION VIBRATOIRE GENEREE PAR L'ENGRENEMENT	17
I- Introduction	17
II- Etude bibliographie	18
II.1 Description des sources d'excitation vibratoire des transmissions par engrenages	18
II.1.1 L'erreur de transmission	18
II.1.2 Autres sources d'excitation internes et externes	29
II.1.3 Conclusion	31
II.2 Evaluation des déformations élastostatiques des engrenages	32
III.2.1 Déformation locale de contact	32
III.2.2 Déformation en flexion des dents d'engrenages	33
II.3 Evaluation de l'erreur statique de transmission sous charge	37
II.3.1 Hypothèses	37
II.3.2 Synthèse des principaux résultats	39
II.4 Conclusion	40
III- Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge: méthode adoptée	41
III.1 Démarche	41
III.2 Calcul des déformations élastostatiques des engrenages	42
III.2.1 Calcul des déformations locales de contact	42
III.2.2 Calcul des déformations en flexion des dents	42
III.3 Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge	46
III.3.1 Détermination du lieu des points de contact	47
III.3.2 Construction de la matrice de transfert statique $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ associée aux noeuds de la ligne de contact réelle	47
III.3.3 Equilibre statique du système	49
III.4 Calcul de la fluctuation de la raideur d'engrènement	52
IV- Résultats numériques	53
IV.1 Engrenage de référence	53
IV.2 Validation de la méthode de calcul	54
IV.2.1 Vérification de quelques hypothèses	54
IV.2.2 Interactions entre les couples de dents en prise	57
IV.2.3 Influence de l'élasticité des roues	60
IV.2.4 Influence des déformations hertziennes	63
IV.3 Introduction des corrections de denture	64
IV.3.1 Introduction	64
IV.3.2 Influence des corrections élémentaires	64
IV.3.3 Denture corrigée	66
V- Conclusion	71

CHAPITRE 2. CALCUL DE LA REPONSE DYNAMIQUE DES TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES	73
I- Introduction	73
II- Bibliographie	74
II.1 Modèles dynamiques	74
II.1.1 Modèles linéaires à coefficients constants	74
II.1.2 Modèles linéaires à coefficients périodiques (systèmes paramétriques)	75
II.1.3 Modèles non linéaires	77
II.1.4 Mécanismes d'amortissement	77
II.2 Discrétisation de la transmission	79
II.2.1 Modèles à un degré de liberté	79
II.2.2 Modèles à paramètres concentrés	79
II.2.3 Modèles éléments finis	80
II.3 Calcul de la réponse vibratoire des carters	82
II.4 Conclusion	84
III- Méthode de calcul adoptée	85
III.1 Introduction d'une modélisation globale des transmissions par engrenages	85
III.1.1 Lignes d'arbres	85
III.1.2 Roulements	86
III.1.3 Carter	87
III.2 Calcul de la réponse dynamique par une méthode spectrale et itérative	89
III.3 Conclusion	91
CHAPITRE 3. APPLICATION : ETUDE NUMERIQUE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE TRANSMISSION DE TYPE BOITE D'INVERSION	93
I- Introduction	93
II- Caractéristiques de la boîte d'inversion	95
II.1 Description	95
II.2 Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge	97
II.3 Modélisation de la boîte d'inversion par éléments finis	100
II.4 Déformations statiques de la boîte d'inversion	101
II.5 Analyse modale de la boîte d'inversion	102
II.5.1 Premiers modes propres	102
II.5.2 Modes de denture et modes de roulement	105
III- Influence de l'élasticité des arbres, des roulements, du carter et des accouplements sur les vitesses "critiques" de rotation de la boîte d'inversion	108
III.1 Introduction	108
III.2 Influence de la flexion des arbres	109
III.3 Influence des roulements	111
III.3.1 Influence des raideurs radiales	112
III.3.2 Influence des raideurs angulaires	113
III.4 Influence des raideurs en torsion des accouplements flexibles	115
III.5 Influence du carter	117

III.6 Conclusion	119
IV- Efforts transmis au carter par les roulements et réponse vibratoire du carter	120
IV.1 Introduction	120
IV.2 Principe de calcul	122
IV.3 Résultats	123
IV.4 Analyse des résultats	129
IV.4.1 Modes de roulement et amplification des efforts dynamiques transmis au carter	129
IV.4.2 Analyse de l'évolution de la réponse vibratoire du carter	132
V- Influence du type de roulements et de l'architecture du carter sur la réponse vibratoire du carter de la boîte d'inversion	136
V.1 Introduction	136
V.2 Influence des raideurs des roulements	138
V.2.1 Raideurs angulaires	138
V.2.2 Raideurs radiales	140
V.2.3 Raideurs axiales	144
V.2.4 Effet du couplage entre les différents termes de raideur des roulements	145
V.3 Influence de l'architecture du carter	147
V.3.1 Modification des conditions limites du carter	147
V.3.2 Augmentation locale de la masse du carter	149
V.3.3 Augmentation locale de la raideur du carter	153
V.4 Synthèse des résultats	156
VI- Réponse vibratoire de la boîte d'inversion induite par l'erreur statique de transmission sous charge	160
VI.1 Introduction	160
VI.2 Surcharge dynamique de denture	161
VI.3 Erreur dynamique de transmission	163
VI.4 Moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter	167
VI.5 Introduction d'un défaut d'excentricité	168
VI.5.1 Introduction	168
VI.5.2 Résultats	168
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	173
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	177

INTRODUCTION GENERALE

Une transmission par engrenages est un organe mécanique qui permet de transformer et de transmettre à un organe récepteur le couple et le mouvement de rotation générés par un moteur. Parmi l'ensemble des mécanismes qui remplissent une telle fonction (roues de friction, courroies, chaînes...), les engrenages constituent actuellement la solution technologique la mieux adaptée à la transmission de grandes puissances. En effet, ils permettent de minimiser les défauts de transmission, ils présentent un rendement élevé, leur encombrement est faible et ils possèdent le meilleur ratio poids/puissance transmise. Pour toutes ces raisons, les engrenages sont utilisés dans de nombreux domaines et, en particulier, dans celui des moyens de transport (route, rail, air et mer).

Les efforts de recherche effectués au cours des dernières décennies ont permis de progresser dans la maîtrise des mécanismes de dégradation des engrenages. Les progrès techniques accomplis se sont traduits par une amélioration de leur tenue en service et une augmentation significative de leur puissance massique.

Depuis quelques années, les évolutions de la demande de la clientèle et de la législation en matière d'environnement sonore ont conduit à la prise en compte du bruit rayonné par les transmissions par engrenages comme critère de qualité. L'apparition du métier de psycho-acousticien dans le secteur automobile est un exemple révélateur de l'intérêt que les industriels portent désormais aux problèmes de nuisances acoustiques. En effet, le consommateur est de plus en plus exigeant en matière de confort. Il considère, à tort ou à raison, que des émissions sonores modérées sont un gage de fiabilité et de qualité d'un produit. L'image de marque de ce dernier est donc de plus en plus intimement liée aux caractéristiques du bruit qu'il rayonne.

Dans le domaine des transports ou des machines, les transmissions par engrenages peuvent être à l'origine d'émissions acoustiques importantes. Ces émissions, qui résultent pour l'essentiel de l'état vibratoire de la transmission, sont d'autant plus gênantes qu'elles sont souvent situées dans une gamme de fréquences où la sensibilité de l'oreille humaine est maximale. Aussi, au cours de ces dernières années, de nombreux travaux de recherche ont été consacrés à l'étude du comportement dynamique des transmissions par engrenages.

Une transmission par engrenages est constituée de roues dentées montées sur des lignes d'arbres. Ces lignes d'arbres sont supportées par des paliers, le plus souvent des roulements. L'ensemble de ces composantes mécaniques est généralement assemblé dans un carter qui

supporte les paliers, encaisse les efforts transmis par les lignes d'arbres et assure le confinement du lubrifiant.

La réponse vibratoire des transmissions par engrenages est en grande partie générée par une excitation interne liée au processus d'engrènement et dont les sources sont :

- (1) les écarts de géométrie de l'engrenage (défauts de fabrication, corrections de denture, erreurs de parallélisme...),
- (2) les déformations élastiques des dentures dues à l'application du couple moteur.

En régime de fonctionnement stationnaire, ces sources d'excitation sont à l'origine d'une fluctuation périodique de la raideur d'engrènement, raideur qui résulte du contact entre les différents couples de dents en prise. Elles génèrent des surcharges dynamiques sur les dentures qui sont transmises aux lignes d'arbres, aux roulements et au carter de la transmission. Les vibrations qui résultent de l'excitation de ces différentes composantes sont à l'origine de nuisances acoustiques. C'est l'état vibratoire du carter de la transmission qui constitue la principale source du bruit rayonné.

Dans ce contexte, différents modèles dynamiques des transmissions par engrenages ont été développés. Ces modèles prennent en compte les vibrations de torsion des lignes d'arbres et, plus rarement, les vibrations de flexion des arbres et les déformations élastiques des roulements. Les études effectuées se sont intéressées essentiellement aux surcharges dynamiques supportées par les dentures et à la réponse vibratoire de l'engrenage (erreur dynamique de transmission). En effet, bien que la connaissance de la réponse vibratoire du carter soit nécessaire à la prédiction du bruit rayonné, de nombreux auteurs supposent que la réponse du seul engrenage est représentative du comportement acoustique de la transmission complète.

L'effet des propriétés mécaniques du carter sur le comportement dynamique des engrenages n'a pas, à notre connaissance, été analysé en détail. D'autre part, les modèles développés rendent difficile la prédiction correcte du comportement vibratoire de ce carter. La réduction des nuisances acoustiques des transmissions existantes et la conception de nouvelles transmissions plus silencieuses nécessitent donc l'analyse des interactions dynamiques existant entre les différentes composantes de la transmission et la compréhension des mécanismes de transfert entre l'engrènement et la réponse vibratoire du carter.

C'est dans ce contexte que s'inscrit la présente étude. Le premier chapitre débute par une étude bibliographique consacrée à la description des sources d'excitation vibratoire des transmissions par engrenages et aux méthodes développées pour évaluer les déformations élastiques des engrenages et l'erreur statique de transmission sous charge. Nous proposons ensuite un outil numérique pour calculer l'excitation générée par l'erreur statique de transmission sous charge d'un engrenage parallèle à denture droite ou hélicoïdale. Cet outil s'appuie sur une modélisation par éléments finis de l'engrenage et une résolution du système

d'équations non linéaires qui gère le contact entre les différents couples de dents en prise. La méthode mise en oeuvre permet d'analyser l'influence des paramètres de conception et des écarts de géométrie sur les caractéristiques de l'excitation.

Le deuxième chapitre a pour objet l'introduction d'une méthode de calcul de la réponse dynamique des transmissions par engrenages. Après avoir présenté les avantages et les inconvénients respectifs des modèles existants et des méthodes utilisées pour résoudre les équations de mouvement qui leur sont associées, nous choisissons d'analyser le comportement dynamique des transmissions par engrenages à partir d'une approche globale et d'une discrétisation de l'ensemble de leurs composantes (engrenages, lignes d'arbres, roulements et carter) par la méthode des éléments finis. Nous résolvons le grand système d'équations différentielles à coefficients périodiques qui gère la dynamique de toute la transmission par une méthode spectrale et itérative. Cette méthode fournit directement le spectre de la réponse vibratoire en chaque degré de liberté du système.

Pour mettre en oeuvre la méthodologie exposée dans les deux premiers chapitres et pour analyser en détail les caractéristiques essentielles du comportement dynamique des transmissions, nous consacrons le troisième chapitre à l'étude numérique du comportement dynamique d'une transmission de type boîte d'inversion. Bien qu'étant un cas particulier, cette boîte présente toutes les caractéristiques essentielles des transmissions existantes. De nombreuses simulations nous permettent d'étudier les mécanismes de transfert entre l'excitation générée par l'engrènement, la surcharge dynamique qui s'exerce sur la denture et la réponse vibratoire du carter. Nous nous intéressons notamment à l'influence des propriétés mécaniques des différentes composantes de la boîte d'inversion sur ces mécanismes. Enfin, les caractéristiques essentielles de la réponse vibratoire de la boîte d'inversion induite par l'erreur statique de transmission sous charge sont analysées en détail.

Chapitre 1

EXCITATION VIBRATOIRE GÉNÉRÉE PAR L'ENGRENNEMENT

I- Introduction

Ce chapitre débute par une étude bibliographique consacrée à la description de l'ensemble des sources d'excitation vibratoires des transmissions par engrenages. Cette étude nous conduit à supposer que la réponse vibratoire d'une transmission est induite par une excitation interne, de type déplacement, correspondant à l'erreur statique de transmission sous charge.

Nous présentons les différentes méthodes utilisées pour calculer, à partir de l'évaluation des déformations élastostatiques des engrenages, les caractéristiques de cette excitation. Après avoir analysé leurs avantages et limites respectifs, nous proposons une démarche basée sur une approche "éléments finis" en trois dimensions, qui permet de prendre en compte les interactions entre les différents couples de dents en prise et les couplages élastiques entre les corps de roue et la denture. À partir de cette approche, nous introduisons une méthode pour calculer numériquement l'erreur statique de transmission sous charge et les fluctuations de la raideur d'engrènement. Nous décrivons cette dernière caractéristique, dont la connaissance est indispensable aux modélisations dynamiques qui seront décrites ultérieurement, par une grandeur linéarisée autour du couple transmis et variable au cours du temps.

Après avoir calculé la contribution de chaque type de déformations de l'engrenage à l'erreur statique de transmission sous charge, nous déterminons les caractéristiques de l'excitation vibratoire générée par un engrenage parallèle à denture droite ou hélicoïdale, corrigé ou non : outre le calcul de la valeur moyenne de la raideur d'engrènement, nous calculons les fluctuations de cette raideur, ainsi que les termes d'excitation induits par les écarts de forme de l'engrenage.

II.1 Description des Sources d'excitation vibratoire des transmissions par engrenages

La réponse vibratoire d'une transmission par engrenages est générée par des excitations internes et externes. Par opposition aux sources d'excitation externes, les sources d'excitation internes sont celles qui résultent du principe de fonctionnement de la transmission. Il est généralement admis qu'en l'absence de chocs entre les dents, l'erreur de transmission constitue la principale origine du bruit rayonné par une transmission par engrenages. On se propose ici de décrire plus précisément cette erreur avant de présenter succinctement les autres sources d'excitation.

II.1.1 L'erreur de transmission

a) Définition

Les engrenages dont les profils de denture sont en développante de cercle permettent, en théorie, d'assurer un rapport de transmission constant. Ceci suppose que l'engrenage est indéformable et géométriquement parfait. Un engrenage réel ne vérifie jamais ces conditions. En effet, il présente un certain nombre de défauts de géométrie ou de corrections de forme qui induisent un écart entre la forme réelle des dents et leur forme théorique. D'autre part, sous l'effet de l'application d'un couple moteur et d'un couple de charge, l'engrenage se déforme, si bien que les profils des dents en prise s'écartent de la position correspondant à celle d'un engrenage infiniment rigide. La loi entrée/sortie associée au fonctionnement de l'engrenage présente donc des perturbations. Harris (1958) a défini l'erreur de transmission comme l'écart entre la position réelle occupée par la roue menée et sa position théorique. Elle peut être exprimée sous forme d'un écart angulaire ou bien sous forme d'un rapprochement des dents en prise si elle est observée dans le plan d'action correspondant au lieu des points de contact théoriques.

Pour une vitesse de rotation très faible et sous l'application du couple moteur, on parle d'**erreur statique de transmission sous charge**. Elle résulte d'une part, de la déformation élastique des engrenages, et, d'autre part, des corrections de forme, des défauts de géométrie consécutifs à la fabrication, au montage ou à l'usure des engrenages (Welbourn 1979, Pearce 1986).

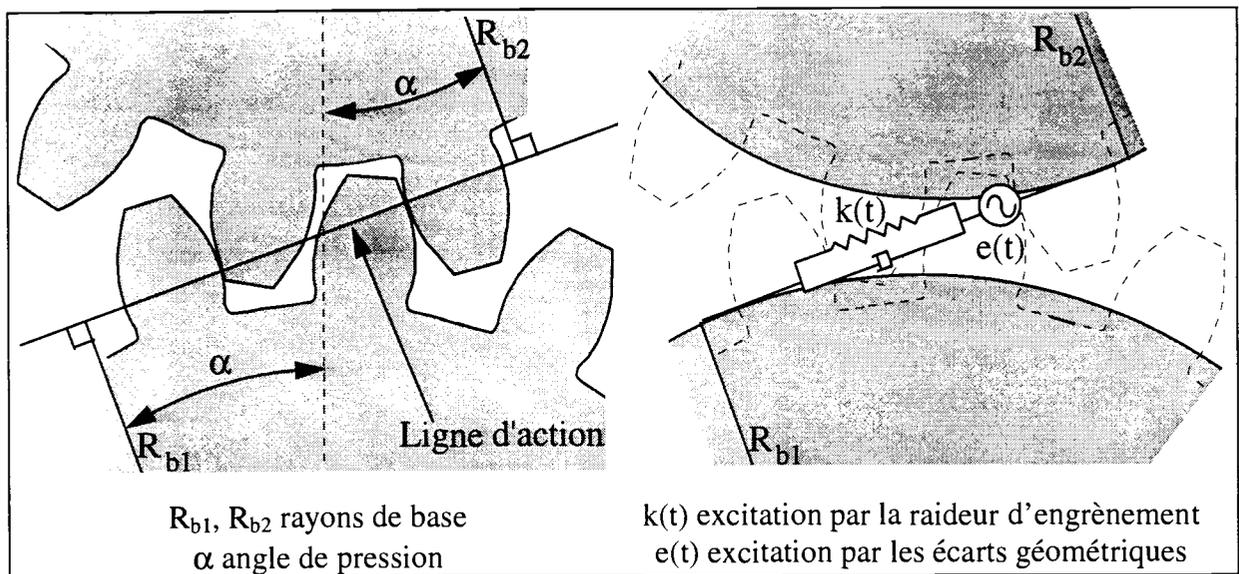


Figure II.1. Engrenement entre les roues dentées.

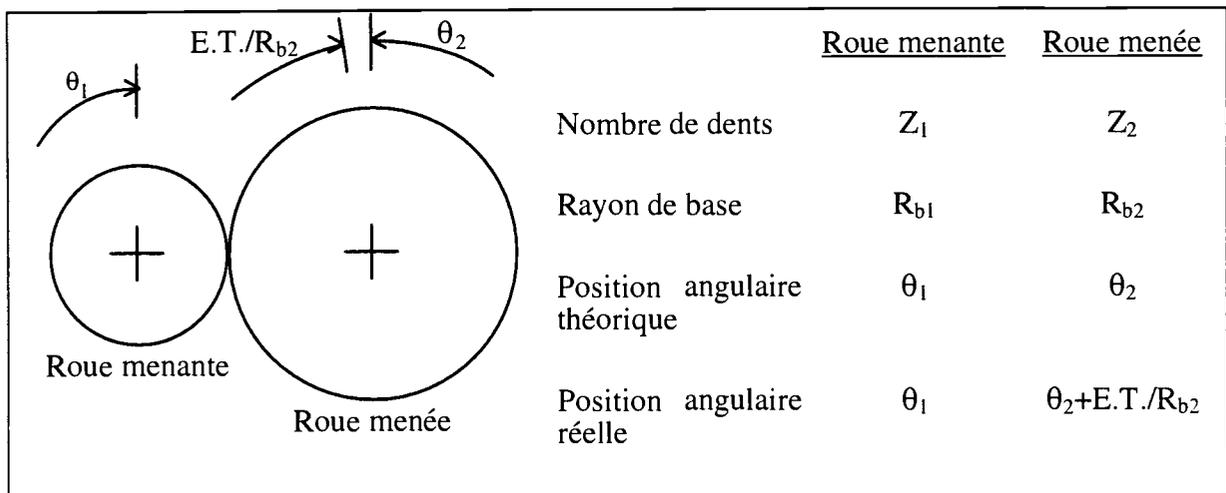


Figure II.2. Erreur de transmission (d'après Munro 1989).

Pour un couple moteur nul (ou juste suffisant pour maintenir les dents en contact), on peut définir une **erreur statique de transmission hors charge** ou erreur cinématique (Welbourn 1979). Les seules contributions à cette erreur sont alors les défauts de géométrie. Sa mesure fournit une image de la qualité de fabrication de l'engrenage.

De même, en dehors des régimes de fonctionnement quasi-statiques, on peut définir une **erreur dynamique de transmission** (Welbourn 1979). En l'absence de sources d'excitations externes, cette erreur correspond à la réponse dynamique de l'engrenage à l'excitation induite par l'erreur statique de transmission sous charge.

b) Caractéristiques

L'excitation générée par le processus d'engrènement dépend des situations instantanées des couples de dents en prise. Si ces situations résultent essentiellement des écarts de géométrie et des déformations élastostatiques des engrenages, elles peuvent aussi être affectée par les

déformations dynamiques de la transmission. Toutefois, on suppose généralement que c'est l'erreur statique de transmission sous charge qui constitue la principale source d'excitation interne d'une transmission par engrenage (Harris 1958, Gregory 1963, Munro 1967, Kohler 1970, Mark 1978, Remmers 1978, Welbourn 1979, Pearce 1986...). Cette hypothèse permet de découpler le calcul des caractéristiques de l'excitation et le calcul du comportement vibratoire de la transmission, aucun modèle ne permettant de gérer correctement les difficultés liées à la prise en compte d'un problème couplé.

En régime de fonctionnement stationnaire, sa fluctuation est périodique. Son amplitude crête à crête varie selon le type d'engrenage et la charge transmise, de quelques μm à quelques dizaines de μm .

L'erreur statique de transmission sous charge se caractérise par un spectre large et riche. Elle génère des excitations aux fréquences de rotation des arbres et leurs harmoniques (quelques dizaines de hertz) et des excitations à la fréquence d'engrènement et ses harmoniques (quelques kilohertz). (La fréquence d'engrènement est égale au produit entre le nombre de dents d'une roue et sa fréquence de rotation.) La figure II.3 présente un exemple de spectre de l'erreur statique de transmission sous charge. Elle se limite à la description des raies basses fréquences et des raies situées autour de la fréquence d'engrènement ou de son premier harmonique, mais de nombreuses raies d'ordre supérieur sont présentes dans le spectre d'excitation.

Les principales caractéristiques de l'erreur statique de transmission sous charge ont été décrites par de nombreux auteurs. Elles sont associées principalement à la fluctuation de la raideur d'engrènement, aux corrections de forme et aux défauts de géométrie des engrenages. (Il faut souligner que l'élévation de la température de fonctionnement peut induire des déformations thermiques qui contribuent à l'erreur de transmission, mais ces phénomènes ne sont que rarement évoqués).

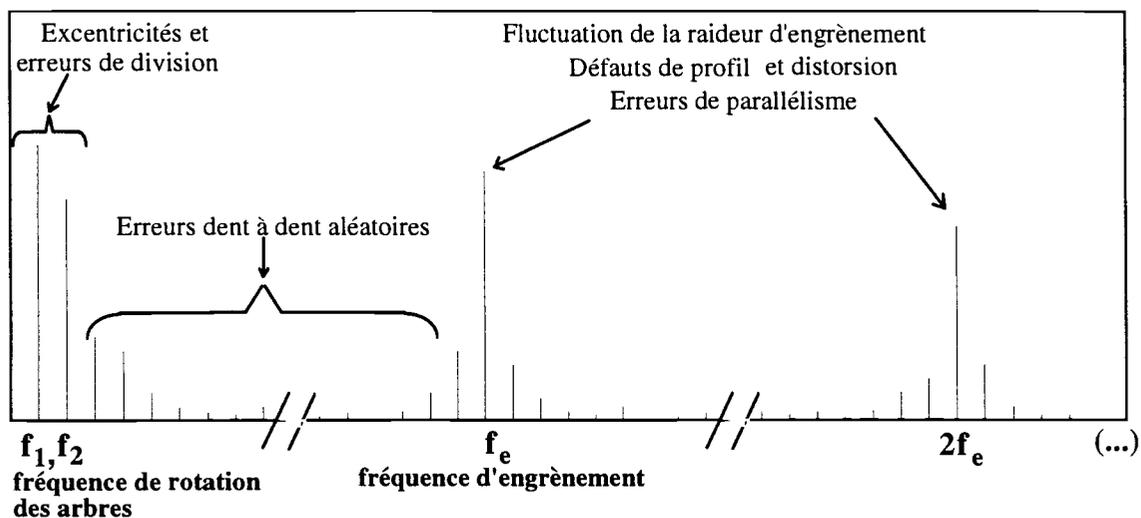


Figure II.3. Spectre de l'erreur statique de transmission sous charge.

c) Fluctuation de la raideur d'engrènement

La transmission d'un couple moteur par l'intermédiaire de la denture entraîne la déformation élastique de l'engrenage. On peut distinguer des déformations linéaires associées à la flexion des dents et aux déformations des corps des roues dentées et des déformations locales non linéaires associées aux contacts hertziens. Ces deux types de déformations sont du même ordre de grandeur et varient, pour des engrenages en acier, entre quelques μm et quelques dizaines de μm , selon la taille des engrenages et le couple transmis.

Pour chaque position de la roue menante, la charge se répartit de telle façon que le rapprochement des surfaces conjuguées selon la ligne d'action est identique pour tous les couples de dents en prise. Ce rapprochement évolue de façon non linéaire avec la charge transmise, en raison de la présence de contacts hertziens et de l'évolution de la surface de contact (non-linéarité géométrique).

L'évolution du rapprochement des dents en prise avec la charge nous conduit à définir une **raideur d'engrènement**, raideur non linéaire qui gouverne le couplage élastique entre les roues dentées induit par les contacts entre les différents couples de dents en prise.

Le fonctionnement stationnaire d'un engrenage (couple transmis et vitesse de rotation moyenne constants) induit une fluctuation périodique de la raideur d'engrènement. En effet, le rapprochement des surfaces conjuguées varie au fur et à mesure que la roue menante tourne, en raison de :

- (a) l'évolution du nombre de couples de dents présents dans la zone de contact, c'est à dire de la longueur totale de contact (le rapprochement est d'autant plus faible que la charge est répartie entre plusieurs couples de dents en prise),
- (b) l'évolution du point d'application des efforts sur chaque dent (une dent se déforme d'autant plus que le point d'application de l'effort est proche de sa tête),
- (c) l'évolution de la répartition de la charge entre les différents couples de dents en prise.

Niemann (1970) suppose que la raideur d'un couple de dents est constante (il néglige les effets de (b) et (c)). La raideur d'engrènement est alors directement proportionnelle au nombre de dents en prise, c'est à dire à la longueur totale de la ligne de contact. Celle-ci dépend de la géométrie des engrenages, notamment du rapport de conduite apparent ε_α et, pour les engrenages hélicoïdaux, du rapport de recouvrement ε_β associé à l'angle d'hélice. Ainsi, pour un rapport de conduite apparent ε_α entier, la longueur de contact théorique est constante. L'amplitude de la fluctuation de la raideur d'engrènement est donc faible (Mitchell 1971).

Dans le cas d'un engrenage hélicoïdal, chaque dent entre progressivement dans la zone de contact. La longueur totale de contact présente donc des variations moins brutales que celles d'un engrenage droit. De même, l'introduction d'un angle d'hélice permet d'augmenter la longueur totale de contact. La fluctuation de celle-ci, rapportée à sa valeur moyenne, est donc faible.

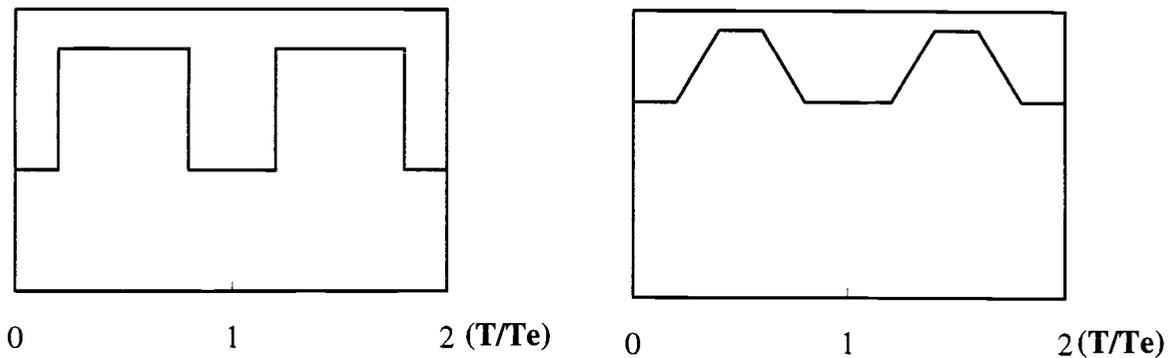


Figure II.4. Evolution de la longueur totale de contact théorique d'un engrenage à denture droite et d'un engrenage à denture hélicoïdale (T_e : période d'engrènement).

Pour des engrenages en acier à dentures normales et droites, Welbourn (1979) fournit une valeur indicative de la raideur d'engrènement égale à $14 \text{ N}/\mu\text{m}$ par unité de longueur de contact exprimée en mm. Cette valeur, indépendante de la charge transmise, ne tient pas compte du caractère non linéaire de la raideur d'engrènement.

Si l'évolution de la raideur d'engrènement est associée à l'évolution de la longueur totale de contact, la raideur d'un couple de dents unique évolue le long de la ligne d'action (Umezawa 1986, Lin 1988). Par conséquent, la raideur d'engrènement évolue même lorsque la longueur de contact reste constante.

Dans tous les cas, la fluctuation de la raideur d'engrènement induit une excitation associée à la fréquence d'engrènement et ses premiers harmoniques. L'erreur statique de transmission sous charge qui résulte de cette fluctuation présente, elle aussi, un spectre dominé par la fréquence d'engrènement et ses harmoniques (voir figure II.3). Selon Mark (1984), l'amplitude d'une raie est d'autant plus faible que son ordre est élevé, ce phénomène étant plus marqué pour les engrenages droits que pour les engrenages hélicoïdaux ayant un rapport de recouvrement ϵ_p supérieur à 1.

d) *Écarts de forme*

Les écarts de forme des engrenages (défauts de géométrie ou corrections de denture) constituent, au même titre que la fluctuation de la raideur d'engrènement, une origine physique de l'erreur statique de transmission sous charge. La norme NF-E-23-006 relative à la précision des engrenages parallèles à denture en développante fournit la définition exacte de chaque défaut ainsi que les tolérances d'usinage et de montage des engrenages selon leur taille et leur classe de précision. Ces tolérances vont généralement de quelques μm (erreur de profil ou distorsion) à quelques dizaines de μm (excentricité).

La littérature présente généralement l'influence des écarts de forme sur l'erreur de transmission **hors charge**. Les mesures sous charge sont très souvent associées à un régime de

fonctionnement **dynamique** (mesure de l'erreur dynamique de transmission, de la réponse vibratoire du carter ou du bruit rayonné par celui-ci).

Chaque type d'écart de forme génère une erreur de transmission spécifique dont la nature est analysée ci-après.

- *Excentricité et erreurs de division*

Munro (1967) montre que l'excentricité d'une roue se caractérise par la présence, dans le spectre de l'erreur statique de transmission, d'une raie à la fréquence de rotation de la roue (voir figure II.3).

Welbourn (1970) considère les fréquences de rotation des roues comme les fréquences les plus basses du système. Brière (1989, 1991) a mis en évidence la présence de composantes de fréquences inférieures et supérieures à ces fréquences de rotation. Ces composantes sont induites par l'existence simultanée d'une excentricité sur chacune des deux roues. La combinaison de ces deux défauts induit une erreur de transmission de période beaucoup plus longue que la période de rotation des roues : sa fréquence fondamentale correspond au plus grand dénominateur commun entre les deux fréquences de rotation.

L'erreur de pas cumulée, qui inclut éventuellement un défaut d'excentricité généré par le taillage, se traduit par une erreur de transmission dont le spectre est marqué par la fréquence de rotation de la roue et ses harmoniques (Munro 1991).

D'après Kohler (1970), la combinaison d'un défaut d'excentricité avec la fluctuation de la raideur d'engrènement induit la présence, dans le spectre de l'erreur statique de transmission sous charge, de raies latérales autour de la fréquence d'engrènement et ses harmoniques. La présence de ces raies génératrices d'un phénomène de modulation d'amplitude caractéristique des transmissions par engrenages, a été confirmée par de nombreux auteurs lors de mesures de l'erreur dynamique de transmission, de la réponse vibratoire ou du bruit rayonné par le carter. A partir de ces observations en régime dynamique, certains auteurs concluent à l'existence de ces mêmes raies latérales en régime quasi-statique. Néanmoins, la présence simultanée, dans le spectre de l'erreur statique de transmission, de raies à la fréquence de rotation des roues et à la fréquence d'engrènement est suffisante pour qu'on observe, en régime dynamique, des raies latérales autour de la fréquence d'engrènement et ses harmoniques. Les mesures de l'erreur statique de transmission d'un engrenage marqué par sa seule excentricité effectuée par Brière (1991) se traduisent par l'absence de raies latérales.

Welbourn (1970, 1979) et Munro (1991) modélisent les erreurs de pas individuelles par une distribution aléatoire et gaussienne de ces défauts. Celui-ci génère alors une erreur statique de transmission qui se manifeste par des raies à la fréquence de rotation des arbres et l'ensemble de ses harmoniques (voir figure II.3).

A partir d'une analyse roue par roue, Mark (1978, 1979, 1984) montre que les erreurs de division conduisent à une erreur statique de transmission marquée par tous les harmoniques de la fréquence de rotation f_0 des roues, sauf la fréquence d'engrènement f_e et ses harmoniques. L'absence de ces raies est contestée par Kohler (1985). Mark souligne que parmi l'ensemble des raies, les premiers harmoniques $f_0, 2f_0, 3f_0...$ et les harmoniques situés au voisinage de la fréquence d'engrènement (raies latérales situées à $n.f_e \pm f_0, n.f_e \pm 2.f_0...$) émergent plus particulièrement. Une répartition défavorable des erreurs de pas individuelles peut entraîner l'émergence de n'importe quelle autre raie.

Winter (1989) signale par ailleurs que, sous charge, la déformation des dents atténue les effets de l'erreur de pas individuelle sur l'erreur statique de transmission.

- *Erreur de profil et distorsion*

Welbourn (1979) considère que les erreurs de profil et la distorsion ont les mêmes effets sur l'erreur statique de transmission. Ils peuvent être décomposés en un défaut identique sur chaque dent et un défaut dont la répartition est aléatoire.

Munro (1967) a montré qu'une erreur de profil identique sur chaque dent induisait une erreur de transmission associée à la fréquence d'engrènement et ses harmoniques (voir figure II.3). Randall (1982) considère que l'usure peut être considérée comme une erreur de profil identique sur chaque dent et se traduit au cours du temps par l'émergence des harmoniques supérieurs de la fréquence d'engrènement.

D'après Mark (1978), un défaut de profil ou de distorsion aléatoire induit une erreur de transmission associée à l'ensemble des harmoniques de la fréquence de rotation des lignes d'arbres. Parmi l'ensemble des raies, les premiers harmoniques et les harmoniques situés au voisinage de la fréquence d'engrènement émergent plus particulièrement, ce qui explique la présence de raies latérales autour de la fréquence d'engrènement et ses harmoniques.

Le processus de taillage des dentures peut générer un défaut de très faible amplitude qui se répète très régulièrement sur le profil. Ce défaut génère une erreur de transmission à une fréquence qui dépend des caractéristiques de la machine de taillage et non des caractéristiques géométriques de l'engrenage (Welbourn 1979, Kassai 1992). La raie associée est appelée raie fantôme. Son amplitude qui peut être importante, diminue avec l'usure de l'engrenage (Randall 1982).

- *Erreurs de parallélisme des axes*

Ces erreurs qui incluent le défaut d'inclinaison et le défaut de déviation résultent du montage des roues dentées, des arbres et des paliers. Les erreurs de parallélisme ont une grande influence sur les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement car elles peuvent conduire à une modification de l'aire de contact et les portées peuvent être localisées sur le bord de la dent.

Les erreurs de parallélisme sont définies par rapport aux axes des engrenages et non par rapport au plan d'action. Toutefois, il est possible de mesurer l'influence de ces erreurs sur le parallélisme des profils conjugués. Elles peuvent alors être considérées comme des erreurs de distorsion identiques sur chaque dent (Umezawa 1986). L'erreur de distorsion e_d associée à l'inclinaison i est égale à $e_d=i.\sin(\alpha_t)$ et l'erreur associée à la déviation d est égale à $e_d=d.\cos(\alpha_t)$. L'angle de pression apparent α_t étant généralement proche de 20° , l'effet de la déviation est entre 2.5 et 3 fois plus important que l'effet d'une inclinaison équivalente. De même, pour des engrenages hélicoïdaux, les travaux expérimentaux d'Umezawa (1986) montrent que l'influence d'une erreur de parallélisme est plus marquée si ce défaut se traduit par une augmentation de l'angle d'hélice apparent.

Les erreurs de parallélisme conduisent à une augmentation, dans le spectre de l'erreur statique de transmission, des raies associées à la fréquence d'engrènement et à ses harmoniques (voir figure II.3). Leur effet peut être comparé à celui d'un défaut de distorsion identique sur chaque dent.

D'autre part, une erreur de parallélisme introduit une variation supplémentaire de la vitesse de sortie. Le spectre de l'erreur statique de transmission présente alors une raie importante associée au premier harmonique de la fréquence de rotation de l'arbre ($2.f_0$). Le spectre de la réponse dynamique de la transmission sera donc marqué par des raies latérales situées de part et d'autres de la fréquence d'engrènement et de ses harmoniques à $n.f_e \pm 2.f_0$.

Sous l'application du couple moteur, les différentes composantes de la transmission se déforment. La situation relative des engrenages est donc différente de celle observée à vide. On peut alors définir des erreurs de parallélisme sous charge. L'ordre de grandeur de ces erreurs générées par l'application d'une charge statique est souvent plus important que celui des défauts d'inclinaison et de déviation tolérés au montage.

Les différentes erreurs de parallélisme (montage ou bien déformation sous charge) peuvent se combiner plus ou moins favorablement.

- *Ecarts d'entraxe*

Un écart d'entraxe n'affecte pas la conjugaison des profils en développante de cercle de l'engrenage. Néanmoins, il induit une modification de l'angle de pression apparent et du rapport de conduite réel. Mitchell (1971) et Pearce (1986) considèrent que l'entraxe est un paramètre important mais son influence sur l'erreur de transmission n'a, à notre connaissance, pas été abordée.

Rémond (1991) observe une diminution de bruit quand on diminue légèrement l'entraxe de fonctionnement par rapport à l'entraxe nominal. Mais, le bruit mesuré à l'aide d'un microphone situé au-dessus de l'engrenage a des origines diverses qu'on peut difficilement mettre en parallèle avec l'erreur de transmission. Houjoh (1981) a d'ailleurs mis en évidence un fort effet de l'entraxe sur le bruit d'origine aérodynamique induit par les écoulements d'air

entre les dents. Ce phénomène, dû à une modification du jeu en fond de dent, est sans rapport avec l'erreur statique de transmission.

- *Corrections de denture*

Les corrections de denture sont des modifications volontaires de la forme des dents. On distingue les corrections de profil et les corrections longitudinales.

Les corrections de profil consistent à enlever de la matière en tête ou en pied de dent du pignon ou de la roue. Le but de ces corrections est :

- de compenser la déformation des dents en prise pour éviter tout impact au moment de l'entrée d'une nouvelle dent dans la zone de contact (Houser 1988),
- de minimiser les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge, notamment pour les engrenages à denture droite,
- de permettre une mise en charge progressive de chaque dent.

Lorsqu'une dent entre dans la zone de contact, la dent précédente n'a pas encore quitté cette zone. Les portions de profil situées en tête et en pied de dent sont donc associées à l'engrènement simultané d'au moins deux couples de dents. La longueur de correction de profil nominale correspond à une modification de forme de ces portions de profil. Les développantes de cercle ne sont pas modifiées dans la zone associée à la présence d'un seul couple de dents dans la zone de contact. Par comparaison avec cette longueur de correction nominale, on peut définir des corrections de profil longues (la longueur de correction est supérieure à la longueur nominale) ou courtes (la longueur de correction est inférieure à la longueur nominale).

Tavakoli et Houser (1986) calculent les déformations élastiques des dents en prise à l'aide d'un modèle de poutres et définissent les longueurs et profondeurs de correction de profil qui permettent de minimiser les fluctuations de l'erreur statique de transmission d'un engrenage droit ne présentant pas de défauts de géométrie. Sundaresan (1991) estime qu'une correction de profil ne permet de réduire que faiblement les fluctuations de l'erreur de transmission sous charge d'un engrenage à denture hélicoïdale.

Les corrections longitudinales symétriques (bombé) et non symétriques (hélice) permettent :

- de minimiser les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge des engrenages à denture hélicoïdale,
- de compenser les effets des défauts de distorsion et des erreurs de parallélisme et, en recentrant la zone de contact par rapport au flanc actif des dents, d'augmenter la surface de contact et d'éviter que les portées soient localisées sur le bord des dents en prise.

Munro (1989) présente les effets de différents types de correction sur l'erreur de transmission sous charge d'un engrenage à denture hélicoïdale.

Les corrections optimales dépendent de l'amplitude des déformations élastiques des dents en prise. On peut en déduire que, d'une part, la recherche de ces corrections nécessitent une

estimation précise de ces déformations et que, d'autre part, les corrections ne sont optimales que pour un seul couple transmis.

Il faut souligner que les défauts de géométrie ou les corrections de forme modifient la raideur d'engrènement. En effet, les erreurs de division, les défauts d'excentricité ou les erreurs de profil peuvent retarder ou avancer l'entrée d'une dent dans la zone de contact. L'évolution réelle de la longueur de contact est donc différente de son évolution théorique. De même, l'existence d'erreurs de parallélisme ou de distorsion peut se traduire par une modification sensible de la distribution de la charge sur les flancs de la denture. Pour une portée sur le bord des dents en prise, on observe une chute de la raideur moyenne d'engrènement. Ce résultat a été confirmé par les travaux expérimentaux d'Umezawa (1986).

e) Mesure de l'erreur statique de transmission sous charge

• Contrôles classiques

Les dispositifs généralement utilisés pour contrôler la géométrie des engrenages consistent à mesurer directement les différents défauts (erreur de profil, distorsion) sur quelques dents, ou bien à mesurer l'erreur composée radiale ou l'erreur composée tangentielle qui résultent de la combinaison de différents défauts. Malheureusement, il n'est pas possible de caractériser l'erreur statique de transmission sous charge à partir de ces mesures. En effet :

- les relevés profilométriques qui permettent d'évaluer les erreurs de profil et la distorsion de l'engrenage sont coûteux en temps. Pour chaque roue dentée, on explore seulement quelques dents et, pour chaque dent, un seul profil et une seule hélice.

- Lors de la mesure de l'erreur composée radiale, on mesure la variation de l'entraxe qui permet de maintenir nul le jeu de fonctionnement de l'engrenage. Alors qu'au cours du fonctionnement de la transmission, un seul flanc de chaque dent est actif, l'erreur composée radiale est fonction des défauts de géométrie présents sur les deux flancs. Par ailleurs, il n'est pas possible d'établir une relation entre l'erreur mesurée et l'amplitude de chacun des défauts de géométrie des engrenages. Enfin, l'engrenage est totalement isolé de son contexte de fonctionnement. L'erreur composée radiale ne fournit donc qu'une image partielle de la qualité d'un engrenage.

- Dans la mesure de l'erreur composée tangentielle, on compare le mouvement de deux roues dentées avec le roulement sans glissement de deux cylindres dont les diamètres correspondent aux diamètres primitifs de l'engrenage. On mesure ainsi directement la fluctuation de position angulaire des roues dentées. La réponse de l'engrenage correspond donc à l'erreur de transmission hors charge. Malheureusement, l'application d'un couple de charge est impossible et les erreurs induites par une déformation des différentes composantes de la transmission ne sont pas prises en compte.

- *Mesure de l'erreur statique de transmission sous charge*

Seule une mesure effectuée directement sur la transmission complète permet d'accéder à l'erreur de transmission sous charge. Sous l'application du couple moteur, elle permet de tenir compte d'une part de la fluctuation de la raideur d'engrènement induite par les déformations de l'engrenage et, d'autre part, des écarts de forme induits par la fabrication des roues dentées, par leur montage ou par les déformations statiques des lignes d'arbres, des roulements et du carter de la transmission (erreurs de parallélisme). Pour effectuer la mesure de l'erreur statique de transmission sous charge, il faut équiper les lignes d'arbres de la transmission de capteurs de position angulaire (codeurs optiques par exemple) et travailler à une vitesse de fonctionnement très lente (régime quasi-statique). Toutefois, il est généralement très difficile d'appliquer le couple moteur nominal à des vitesses de fonctionnement aussi faibles et un tel type de mesure est difficile à mettre en oeuvre.

II.1.2 Autres sources d'excitations internes et externes

a) Autres sources d'excitation internes

- *Chocs entre dents*

Certaines conditions de fonctionnement des engrenages peuvent conduire à des pertes de contact entre les dents en prise. Le rétablissement du contact, soit sur le flanc actif de la dent conjuguée, soit sur le flanc opposé de la dent suivante, se traduit par un choc. Ces phénomènes de chocs sont décrits, sous le nom de cliquetis ("rattling noise") pour des engrenages non chargés (Singh 1989, Pfeiffer 1991, 1996) et sous le nom de martèlement ("hammering noise") pour des engrenages chargés (Pfeiffer 1992). Ils sont induits par l'entraînement de pignons fous (pignons très peu chargés), par des fluctuations importantes du couple moteur ou bien par des résonances non linéaires qui apparaissent au voisinage des vitesses critiques de fonctionnement et qui résultent de l'excitation interne induite par le processus d'engrènement (Kahraman 1991).

Les chocs entre dents constituent une préoccupation importante dans le domaine des transports terrestres, car, dans certaines conditions de fonctionnement très particulières, ils sont à l'origine de nuisances acoustiques importantes. Aussi, ils font l'objet de différentes études. Le contact entre les dents en prise est représenté par une raideur non linéaire qui devient nulle lorsque le contact est rompu. La réponse de l'engrenage est gouvernée essentiellement par la distribution des jeux entre dents ("backlash"). En régime de fonctionnement stationnaire, elle peut être périodique, quasi-périodique ou chaotique (Blankenship 1995, Perret-Liaudet 1996).

- *Impacts à l'engagement*

Les déformations élastiques et les défauts de géométrie des dents peuvent conduire à des impacts au moment de l'entrée des dents dans la zone de contact. Les forces générées par ces impacts sont transmises au carter via les roues dentées, les arbres et les roulements et peuvent conduire à un bruit important à la fréquence d'engrènement (Houser 1988). Toutefois, cette source d'excitation peut facilement être éliminée en effectuant des corrections de denture appropriées.

- *Forces de frottements*

Lors du processus d'engrènement, les deux surfaces actives appartenant à un couple de dents en prise roulent et glissent l'une par rapport à l'autre. La vitesse de glissement, tangente au profil pour un engrenage parfait infiniment rigide, est nulle au niveau du point primitif et varie de façon linéaire avec la position du point de contact sur la ligne d'action. Il existe, pour les engrenages réels, d'autres mécanismes de glissement des surfaces en contact. L'ensemble de ces phénomènes physiques est à l'origine de forces de frottement. La variation, au cours de l'engrènement, des forces de frottement induit nécessairement une fluctuation du couple

transmis qui excite le carter, via les lignes d'arbres et les roulements. Toutefois, selon Smith (1983), la contribution de cette source d'excitation reste minime.

- *Champ acoustique interne*

Il existe un champ acoustique interne qui excite le carter de la transmission. Ce champ acoustique interne, appelé bruit d'engrènement (Sabot, dans Rémond et al. 1992), est induit d'une part par les vibrations des corps d'engrenages et, d'autre part, par une source de bruit d'origine aérodynamique. Cette source est associée aux écoulements instationnaires dus aux phénomènes d'aspiration et de refoulement d'air entre les dents en prise. Ce bruit d'engrènement a été analysé expérimentalement par Houjoh (1981, 1988, 1991) et sa contribution au bruit rayonné par le carter a été étudiée numériquement par Sibé (1996, 1997).

- *Projections d'huile*

Par ailleurs, le processus d'engrènement génère des projections d'huile qui peuvent exciter le carter de la transmission (Houser 1988). Les mécanismes mis en jeu et leur influence sur le bruit des transmissions n'ont, à notre connaissance, pas été abordés.

- *Excitations induites par les roulements*

Enfin, les défauts des roulements et la fluctuation périodique de leurs caractéristiques de raideur sont à l'origine d'une excitation du carter. Ces phénomènes ne sont pas propres aux transmissions par engrenages. On peut aussi noter que les roulements constituent eux-même une source de rayonnement acoustique, mais, en général, celle-ci reste secondaire devant le bruit rayonné par le carter.

b) Sources d'excitation externes

Le fonctionnement du moteur génère des fluctuations de couple dont l'amplitude peut être grande. Ces excitations externes dépendent fortement du type d'actionneur employé mais, en règle générale, elles se caractérisent, en régime de fonctionnement stationnaire, par des perturbations périodiques associées à la fréquence de rotation de la ligne d'arbre moteur, à ses harmoniques et à ses sous-harmoniques :

- Pour un moteur électrique, on observe une excitation à la fréquence de rotation du moteur f_0 induite par un défaut d'excentricité (balourd magnétique), une excitation associée à l'ensemble des harmoniques de f_0 induite par un défaut de pas d'encoches, et plus particulièrement aux fréquences $k.n.f_0$ où k est un entier et n est le nombre de paires d'encoches de l'induit, et aux fréquences $k.n.f_0 \pm f_0$ (phénomènes de modulations de fréquences). Il existe aussi des fréquences d'excitation indépendantes du régime de fonctionnement du moteur (50 Hz et, en présence de thyristors, 300 Hz).
- Pour un moteur à explosion, la nature et l'amplitude des raies du spectre d'excitation dépendent du type de moteur et du nombre de cylindres. Pour un moteur monocylindrique à

deux temps, il se produit une explosion par cylindre et par tour. L'excitation est dominée par f_0 et ses harmoniques. Pour un moteur monocylindrique à quatre temps, il se produit une explosion par cylindre pour deux tours. L'excitation est dominée par $f_0/2$ et ses harmoniques.

L'organe récepteur peut engendrer des fluctuations périodiques du couple de charge qui présentent les mêmes caractéristiques que celles du couple moteur.

Pour certains types de machines et de véhicules, on observe une variation instantanée de l'inertie de charge (Bouchareb 1988).

Enfin, les vibrations communiquées à la transmission par ses différents points d'attache peuvent être une source d'excitation externe importante (Neriya 1987).

II.1.3 Conclusion

L'erreur statique de transmission sous charge constitue la principale source d'excitation d'une transmission par engrenages. Elle résulte d'une part de la déformation élastique des engrenages et, d'autre part, des corrections de forme et des défauts de géométrie des engrenages. En régime de fonctionnement stationnaire, elle évolue de façon périodique. Son spectre présente :

- des raies de grande amplitude à la fréquence d'engrènement et ses harmoniques induites par la fluctuation de la raideur d'engrènement, les défauts de profil, la distorsion et les erreurs de parallélisme,
- des raies de grande amplitude à la fréquence de rotation des roues induites par l'erreur de pas cumulée et les défauts d'excentricité,
- des raies latérales situées de part et d'autre de la fréquence d'engrènement et de ses harmoniques et induites par la combinaison de deux défauts associés à chacune des deux familles citées ci-dessus,
- des raies à tous les harmoniques de la fréquence de rotation des roues induites par une distribution aléatoire des erreurs de pas et des défauts de profil,
- des raies associées à des sous-harmoniques des fréquences de rotation des roues et induites par la combinaison de deux défauts d'excentricité,
- des raies fantômes induites par le processus de taillage.

La connaissance des caractéristiques de l'erreur statique de transmission sous charge est indispensable à la caractérisation du comportement dynamique de la transmission par engrenages. Malheureusement, nous avons vu qu'il était difficile de mesurer in-situ l'erreur statique de transmission sous charge. Des outils de calcul de celle-ci s'avèrent donc très utiles pour prédire les niveaux de vibrations, optimiser le comportement dynamique et réduire les nuisances acoustiques des transmissions existantes et pour concevoir de nouvelles transmissions plus silencieuses.

II.2 Evaluation des déformations élastostatiques des engrenages

Sa caractérisation expérimentale étant très difficile, différents auteurs proposent de calculer numériquement l'erreur statique de transmission sous charge. Les méthodes développées s'appuient en général sur une évaluation préalable des déformations élastostatiques des engrenages soumis à un chargement normal à la surface théorique des dents. Le point d'application évolue sur l'ensemble de la surface active. Les déformations linéaires (flexion des dents, déformation du corps des roues dentées) et les déformations locales non linéaires (contacts hertiens) sont calculées simultanément ou de manière indépendante.

II.2.1 Déformation locale de contact

Quelques auteurs calculent simultanément la déformation locale de contact et la déformation en flexion de la dent. Varadi (1989) utilise la méthode des éléments finis en deux dimensions (2D), mais la zone de contact doit être maillée très finement et le maillage utilisé dépend du point d'application de l'effort normal. Coy (1982) utilise un maillage unique pour calculer la déformation locale et la déformation en flexion de la dent, quel que soit le point d'application de l'effort normal. Mais, la densité de maillage nécessaire pour traiter correctement le problème posé conduit à des temps de calcul prohibitifs.

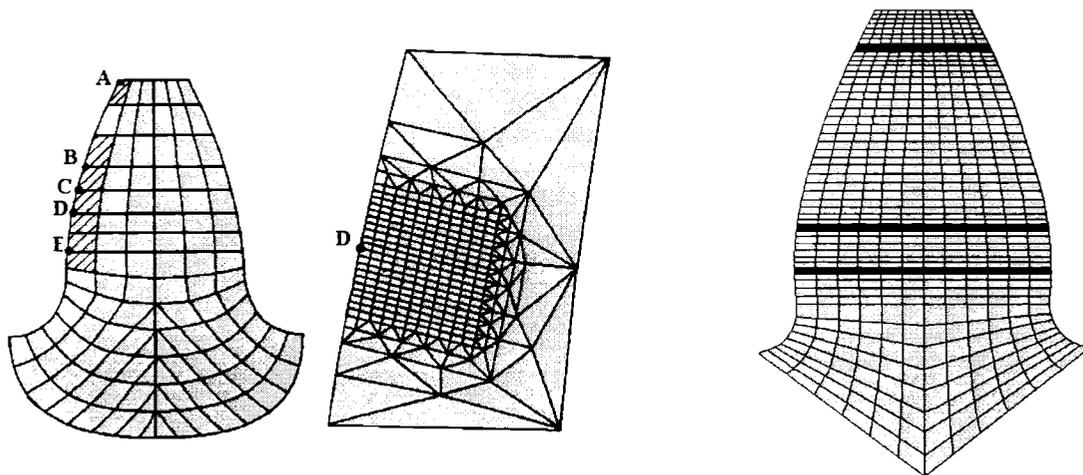


Figure II.5. Maillages éléments finis 2D d'une dent utilisés par Varadi (1989) et Coy (1982).

Plus généralement, la déformation locale est calculée indépendamment de la déformation en flexion de la dent, à partir de la géométrie du contact, affectée éventuellement par les corrections de denture ou les défauts de géométrie, correspondant à l'état non déformé. La déformation locale est alors déduite de la théorie de Hertz ou de formulations empiriques (Palmgren, Weber). D'autres formulations permettent de traiter les contacts entre des corps ayant une surface d'interpénétration dont l'équation est une fonction continue quelconque (Singh 1974, De Mul 1986).

Ces méthodes ne prennent pas en compte les effets de bord, lorsque la surface de contact s'étend sur toute la largeur de la dent et qu'elle est physiquement limitée par les deux extrémités de la dent. Dans le cas du contact entre deux cylindres parallèles de longueurs finies, De Mul (1986) a tenté de résoudre les problèmes de bord en plaçant des cylindres virtuels de part et d'autre du cylindre de largeur finie. Si ces cylindres virtuels subissent un champ de pression symétrique par rapport à l'extrémité du contact, le champ de cisaillement aux interfaces entre cylindre réel et cylindres virtuels tend vers zéro. En réalité, pour que les extrémités soient effectivement des surfaces libres, il est nécessaire d'avoir un cisaillement nul et une contrainte normale nulle. Les symétries ne détruisent pas les contraintes normales mais leur influence sur les caractéristiques du contact est, selon De Mul, négligeable. Reproduire l'opération de symétrie plusieurs fois doit conduire à des résultats meilleurs. Cependant, la contribution des symétries s'exprime sous la forme d'une série qui tend vers l'infini lorsque le nombre de symétries tend vers l'infini. La méthode des symétries n'est donc pas entièrement satisfaisante.

II.2.2 Déformation en flexion des dents d'engrenages

a) modèles analytiques

Attia (1964), Cornell (1981), Tavakoli (1984) met en oeuvre des techniques analytiques en modélisant la dent par une poutre en flexion sur une embase élastique. Tobe (1978) utilise des plaques d'épaisseur variable. Les hypothèses associées aux modèles décrits ci-dessus sont difficilement justifiables car les dimensions caractéristiques d'une dent ne sont ni représentatives d'une poutre, ni représentatives d'une plaque.

b) Modèles 2D

D'autres auteurs discrétisent par éléments finis la section de la dent d'un engrenage en 2D à l'aide d'éléments quadrangulaires à 4 ou 8 noeuds (Wilcox 1973, Chabert 1974, Sainsot 1989).

Umezawa (1972) et Guingand (1990) exploitent la méthode des différences finies et discrétisent la dent d'un engrenage en 2D selon sa largeur (la section de la dent est représentée par une ligne de noeuds). Cette méthode, utilisée pour des dentures droites ou hélicoïdales, conduit à prendre en compte l'évolution du comportement de la dent selon sa largeur.

Olakorédé (1990) utilise la méthode des prismes finis pour discrétiser en 2D une section de la jante et des dents potentiellement en prise à l'aide d'éléments quadrangulaires à 8 noeuds. A partir de l'écriture d'un certain nombre d'hypothèses sur le comportement de la dent dans la direction de l'hélice, il calcule la déformée en flexion des dents d'un engrenage droit ou hélicoïdal. Le corps de la roue n'est pas discrétisé. Sa déformation est calculée préalablement

et son effet est, selon l'auteur, pris en compte à travers les conditions limites appliquées au modèle. Notons enfin que la discrétisation de plusieurs dents successives permet de prendre en considération les interactions entre les dents voisines, c'est à dire de tenir compte de l'effet de la charge appliquée sur une dent sur la flexion des autres dents.

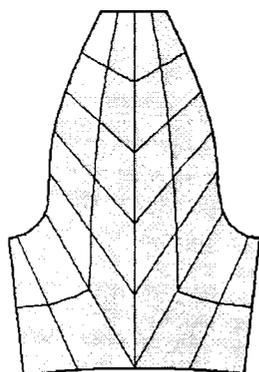


Figure II.6

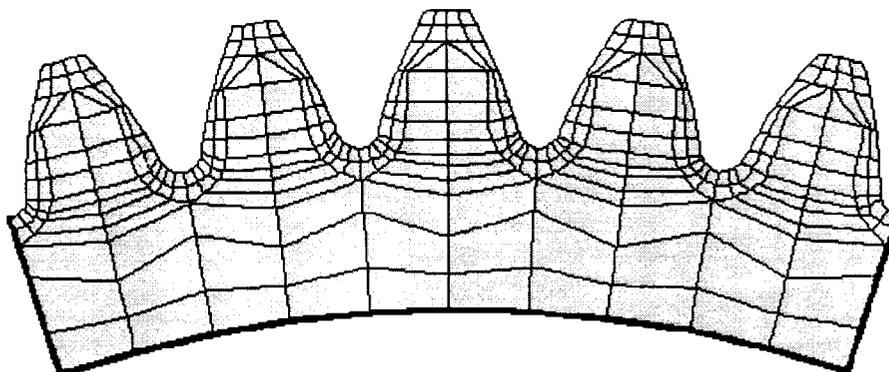


Figure II.7

Figure II.6. Maillage éléments finis 2D d'une dent (Sainsot 1989).

Figure II.7. Maillage prismes finis d'un engrenage cylindrique (Olaworédé 1990).

D'autres auteurs (Brebis 1980, Bezine 1982) utilisent la méthode des équations intégrales, couplée à la méthode des éléments finis de frontière. Mais l'application de cette technique aux engrenages présente peu d'avantages car, si seule la surface extérieure de la dent est discrétisée, le nombre des degrés de liberté de la surface représente une part importante de l'ensemble des degrés de liberté de la structure.

c) Modèles 3D

Enfin, différents auteurs utilisent la méthode des éléments finis en 3D. Sainsot (1989) discrétise une dent qui repose sur une jante rigide à l'aide d'éléments volumiques à 20 noeuds.

L'ensemble des modèles présentés jusqu'ici n'intègre pas les déformations des corps des roues. Celles-ci sont systématiquement calculées séparément des déformations des dents. Pour tenir compte des couplages élastiques qui peuvent exister entre le corps de la roue et les dents en prise, Prabhu (1996) discrétise deux dents et un secteur important de la roue à l'aide d'éléments volumiques à 20 noeuds. Il apparaît que la faible densité du maillage utilisé ne permet pas de prendre en compte la forme réelle de la dent et de son raccordement avec la jante. De plus, la discrétisation partielle du corps de la roue permet de prendre en compte les couplages entre la flexion des dents et la déformation de la roue au voisinage des dents en prise, mais, elle ne permet pas de prendre en compte les déformations globales de la roue, et notamment ses déformations de torsion.

Barday (1996) introduit l'ensemble du corps de la roue dans un modèle éléments finis 3D utilisant des éléments à formulation linéaire (8 noeuds). Le nombre d'éléments retenus permet

de mieux décrire la géométrie de la dent et de son raccordement avec la roue que dans le modèle de Prabhu. La roue est encastrée au niveau de l'arbre.

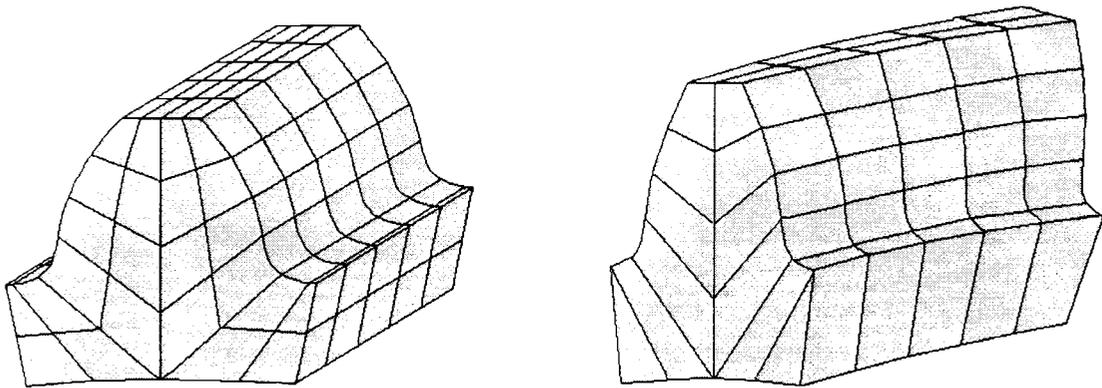


Figure II.8. Maillages éléments finis 3D d'un engrenage à denture droite (a) et hélicoïdale (b) (Sainsot 1989).

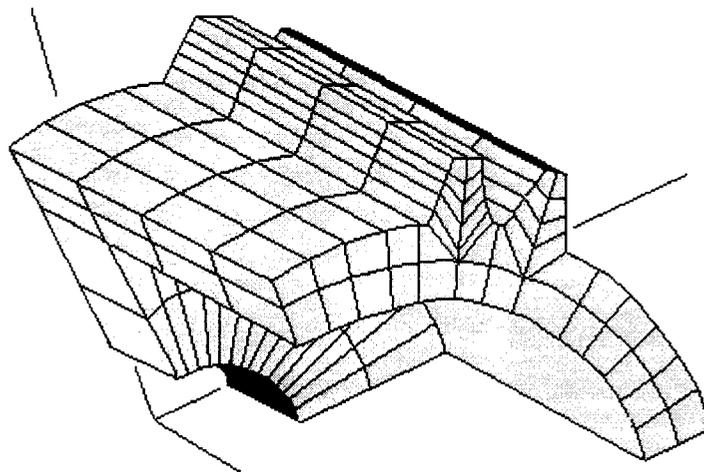


Figure II.9. Maillage d'une roue d'engrenage à voile mince (Prabhu 1996)

d) Synthèse des principaux résultats

Sainsot (1989) montre que la déformation de la dent évolue de façon très sensible avec des paramètres géométriques tels que le déport, la saillie, le creux ou la forme du raccordement en pied de dent (rayon de l'outil crémaillère). Il apparaît donc difficile d'évaluer de façon générique la déformée de n'importe quel type de dent en raison de la multiplicité des paramètres mis en jeu. Les formulations qui établissent une relation entre la déformée de la dent et les caractéristiques de l'engrenage ne tiennent compte que de quelques paramètres et ne peuvent donc fournir qu'un ordre de grandeur des résultats. L'évaluation de la déformation des dents ne peut se faire qu'à travers une étude au cas par cas qui tienne compte de la géométrie de l'engrenage dans la configuration réelle de fonctionnement et de la géométrie du raccordement de la dent avec la jante.

Pourtant, plusieurs auteurs ont exploité les modèles décrits ci-dessus pour formuler des équations qui fournissent une valeur approximative de la raideur d'un couple de dents d'un

engrenage quelconque. Ainsi, Umezawa (1986) propose, à partir des résultats obtenus avec la méthode des différences finies, une équation de la raideur d'un couple de dents en prise pour des dentures hélicoïdales. Seuls l'angle d'hélice et le rapport entre la largeur et la hauteur de la dent sont retenus dans cette formulation. Le même type de formulation analytique est repris par Cai (1995).

Gagnon (1991) a étudié le comportement en flexion d'une dent d'un engrenage droit à voile rigide chargée uniformément selon sa largeur. Il a comparé les résultats provenant de différents types de modèles éléments finis 2D et 3D avec des résultats expérimentaux obtenus par interférométrie Speckle. Il montre l'intérêt des éléments quadratiques (éléments 2D à 8 noeuds et éléments 3D à 20 noeuds). A nombres de degrés de liberté identiques et malgré le plus grand nombre d'éléments utilisés, le champ de déformations de la dent calculé à partir d'éléments à formulation linéaire est moins représentatif que celui calculé à partir d'éléments à formulation quadratique. D'autre part, il met clairement en évidence l'influence de la densité du maillage utilisé sur la précision du résultat obtenu.

Dans tous les cas, les calculs des déformations élastostatiques des engrenages sont exploités pour estimer l'erreur statique de transmission sous charge. Les limites induites par le modèle retenu vont donc fortement conditionner la qualité du résultat obtenu.

II.3 Evaluation de l'erreur statique de transmission sous charge

L'évaluation de l'erreur statique de transmission sous charge consiste à déterminer, pour différentes positions de la roue menante, la valeur du rapprochement des surfaces conjuguées induit par les déformations statiques des engrenages et les écarts de forme. D'une manière générale, une étude de la cinématique de l'engrenage permet, pour chaque position de la roue menante, de déterminer les zones de contact potentielles. Si l'engrenage présente des écarts de forme, la distance initiale entre les surfaces conjuguées est estimée. Les déformations de l'engrenage induites par le couple transmis sont estimées grâce aux calculs effectués précédemment. La résolution des équations qui gouvernent l'équilibre statique du système permet alors de calculer la répartition de la charge et le rapprochement des surfaces conjuguées.

II.3.1 Hypothèses

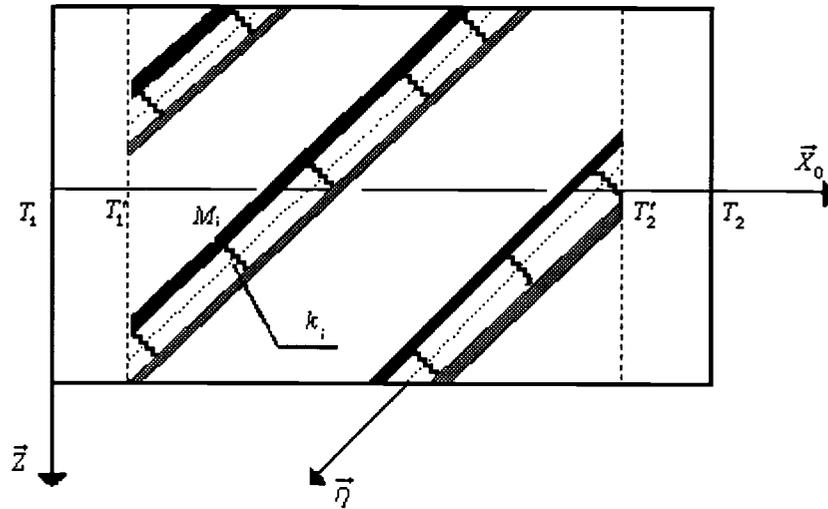
Les auteurs s'appuient généralement sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le contact entre les dents en prise s'effectue dans le plan d'action au niveau des points de contact théoriques, définis pour des engrenages géométriquement parfaits et infiniment rigides.
- Sous l'application du couple moteur, la charge qui s'applique sur l'engrenage est normale à la surface théorique des dents en prise.
- Bien que le déplacement de la surface active de la dent et l'effort appliqué ne soient pas colinéaires, seule la composante du déplacement normale à la surface de la dent est conservée pour estimer l'erreur statique de transmission sous charge. Le rapprochement des profils conjugués dû au déplacement tangent au profil de la dent est négligé. De même, les modifications du point d'application et de la direction de l'effort qui résultent de ce déplacement ne sont pas prises en compte.

Les autres hypothèses adoptées pour calculer l'erreur statique de transmission sous charge dépendent étroitement du modèle retenu pour calculer les déformations élastiques de l'engrenage.

Dans les méthodes qui exploitent une modélisation des engrenages par éléments finis en 2D, l'évolution des écarts initiaux entre les surfaces conjuguées selon la largeur de denture ne peut être prise en compte. Les auteurs supposent que la géométrie, le chargement et les déformations en flexion de la dent sont identiques sur toute sa largeur. Ces approches permettent de calculer, pour des engrenages droits parfaitement alignés, une raideur par unité de largeur de denture. Le contact sur chaque dent est discrétisé par un seul noeud et le nombre d'efforts à calculer correspond au nombre instantané de couple de dents en prise.

Velex (1988) discrétise la largeur de chaque dent en prise en "tranches minces" (voir figure II.10). La ligne de contact est composée de cellules élémentaires auxquelles sont associées des raideurs élémentaires k_i . Dans cette approche, l'effet du couplage entre les différentes tranches est négligé : l'application d'un effort sur un noeud i de la ligne de contact n'a aucun effet sur le déplacement d'un autre noeud j de cette même ligne de contact.



PLAN D'ACTION

Figure II.10. Discrétisation des lignes de contact en cellules élémentaires (D'après Velex 1988).

Les autres auteurs qui exploitent des modèles éléments finis en 3D ou éventuellement des prismes finis tiennent compte des couplages entre les différentes cellules de la ligne de contact. Toutefois, lorsque la discrétisation de l'engrenage se limite à une seule dent par roue dentée, seuls les couplages entre les cellules appartenant à une même dent sont pris en compte et il n'est pas possible de tenir compte des couplages élastiques entre les différents couples de dents en prise simultanément.

Par ailleurs, de nombreux modèles éléments finis n'intègrent pas les déformations des corps de roues. Les auteurs supposent que ces déformations sont découplées de celles des dents en prise et que leur contribution est identique pour l'ensemble des cellules de la ligne de contact.

Enfin, certains auteurs (Barday 1996) prennent en compte l'influence des déformations statiques des lignes d'arbres et du carter à travers l'introduction d'erreurs de parallélisme et d'un écart d'entraxe proportionnels au couple transmis.

II.3.2 Synthèse des principaux résultats

Les simulations numériques effectuées par Bard (1995) à partir de l'utilisation de la méthode des prismes finis couplée à une étude de la cinématique de l'engrenage permettent de retrouver un certain nombre de résultats expérimentaux publiés antérieurement dans la littérature. Elles conduisent à une évaluation chiffrée de l'effet des défauts de géométrie sur l'erreur statique de transmission. Bard observe que, en l'absence d'erreurs de parallélisme, le chargement extérieur a une faible influence sur la raideur d'engrènement d'un engrenage droit alors que son influence devient significative dans le cas d'un engrenage hélicoïdal. Pour de faibles charges, l'introduction de défauts de parallélisme ou de corrections de bombé conduit à une modification sensible de l'aire de contact et à une diminution de la valeur moyenne de la raideur d'engrènement. Ceci confirme les résultats expérimentaux obtenus par Umezawa (1986). Les effets des corrections de profil et d'une modification d'entraxe sur l'erreur statique de transmission sont aussi abordés.

Barday (1996) étudie l'effet du couple transmis et, pour un couple donné, l'effet de différents types de corrections de denture sur la valeur crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge.

Prabhu et Houser (1996) mettent en évidence l'effet des déformations du voile sur la répartition de la charge le long de la ligne de contact. Ces déformations influent sur l'erreur statique de transmission sans que les auteurs précisent si elles agissent uniquement sur l'amplitude des déformations des dents ou si elles modifient aussi le continu spectral des fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge. Ces résultats sont confirmés par Barday (1996). Celui-ci analyse l'influence de la forme de la roue, c'est à dire de la position, de l'épaisseur et du diamètre de son voile. Les temps de calcul associés à l'algorithme développé permettent de tester de nombreuses configurations d'engrenages. Il montre que les déformations du corps de la roue modifient les conditions d'engrènement, et ce d'autant plus que l'angle d'hélice est grand. La position, l'épaisseur et le diamètre du voile des roues ont une grande influence sur l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge. L'ajustement de la microgéométrie de l'engrenage et/ou de la forme des roues permet donc de minimiser l'excitation vibratoire générée par l'engrènement.

Bien que les modèles utilisés par Prabhu et Houser ou Barday permettent d'estimer le déplacement sur une dent induit par un effort sur une autre dent, l'effet du couplage élastique entre les différents couples de dents en prise n'est pas clairement mis en évidence.

II.4 Conclusion

Les principaux résultats qui se dégagent de l'étude bibliographique concernant les sources d'excitation des transmissions par engrenages sont les suivants.

L'erreur statique de transmission sous charge constitue la principale source d'excitation d'une transmission par engrenages. Elle résulte d'une part de la déformation élastique des engrenages et, d'autre part, des corrections de forme et des défauts de géométrie des engrenages. En régime de fonctionnement stationnaire, elle évolue de façon périodique. Si l'estimation de cette erreur reste difficile, les caractéristiques de son spectre ont été largement analysées.

Le calcul de l'erreur statique de transmission sous charge nécessite des modèles permettant d'estimer les déformations élastostatiques des engrenages. On peut distinguer les déformations globales (flexion des dents d'engrenages, des corps de roue) et les déformations locales associées à la présence de contacts hertziens. Ces deux types de déformation peuvent être calculés séparément.

Le calcul des déformations en flexion d'une dent nécessite une description précise de la géométrie de la dent et de son raccordement avec la roue. Le recours à des simplifications conduisant à des formulations analytiques approchées ne permet pas d'intégrer l'ensemble des paramètres qui définissent la géométrie d'un engrenage particulier.

La méthode des éléments finis est la mieux adaptée au calcul des déformations des dents d'engrenages. Un modèle 3D permet de prendre en compte la variation du comportement de la dent dans la direction de l'hélice sans avoir recours à des hypothèses simplificatrices. L'utilisation d'éléments volumiques à formulation quadratique (20 noeuds) permet une description précise du champ de déformation des dents.

La modélisation de plusieurs dents successives permet de tenir compte des interactions entre les différents couples de dents en prise.

La modélisation de l'ensemble du corps des roues dentées permet de tenir compte de l'influence de l'élasticité des roues sur les déformations des dents.

Compte-tenu de ces remarques, nous avons développé un outil de calcul des déformations des dents d'engrenages et une méthode de calcul de l'erreur statique de transmission sous charge intégrant l'ensemble de ces exigences.

III- Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge : méthode adoptée

III.1 Démarche

L'objectif de cette partie est de développer un outil numérique qui permette de déterminer l'erreur statique de transmission sous charge d'un engrenage à denture droite ou hélicoïdale, à partir de ses caractéristiques géométriques, de ses corrections de forme, de ses défauts et des conditions de fonctionnement (couple moteur).

Cette approche nécessite, en premier lieu, le calcul des déformations locales de contact et le calcul des déformations en flexion des dents d'engrenages, ce dernier point faisant l'objet d'une modélisation des roues dentées de l'engrenage par éléments finis.

A partir des hypothèses classiques généralement utilisées, il est ensuite possible de calculer, pour différentes positions de la roue menante, le rapprochement des dents en prise exprimé selon la normale aux surfaces actives de ces dents. On peut ainsi connaître, à partir de calculs successifs, toutes les caractéristiques de l'évolution périodique de l'erreur statique de transmission sous charge.

Pour caractériser la réponse dynamique de la transmission à l'excitation générée par l'engrènement, nous verrons dans le deuxième chapitre qu'il est nécessaire de définir et de calculer, à partir de l'erreur statique de transmission sous charge, la fluctuation de la raideur d'engrènement. Bien que cette raideur soit une fonction non linéaire de la charge transmise, nous nous orientons vers une description associée à une grandeur linéarisée autour de la charge de fonctionnement et variable au cours du temps. Cette description permet des simplifications qui, dans le cadre de l'étude du comportement dynamique d'une transmission complète, constituent le meilleur compromis simplicité-précision.

Les différents résultats numériques concernant l'évolution de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement seront présentés ultérieurement.

III.2 Calcul des déformations élastostatiques des engrenages

Nous avons choisi de calculer les déformations locales de contact et les déformations en flexion de la dent de façon distincte.

III.2.1 Calcul des déformations locales de contact

Nous calculons les déformations locales de contact à partir de la théorie de Hertz. Nous supposons donc que :

- les corps sont en contact parce qu'ils sont soumis à une force qui les contraint à avoir un déplacement parallèle à la direction de cette force,
- le milieu est et reste élastique durant le contact,
- les corps en contact sont des milieux semi-infinis,
- les surfaces en contact sont non rugueuses,
- les frottements sont négligeables (calcul statique),
- l'équation de la surface d'interpénétration est un polynôme du second degré. Nous calculons les rayons de courbure de chaque surface au voisinage du premier point de contact en prenant en considération la géométrie du contact correspondant à l'état non déformé de l'engrenage affecté éventuellement par les écarts de forme. L'aire de contact est alors de forme elliptique.

La théorie de Hertz permet de déterminer l'aire de la zone d'interpénétration, la pression de contact et le rapprochement des surfaces.

Une des principales limites de ce type de représentation des déformations locales est qu'il ne permet pas de prendre en compte les effets de bord lorsque la surface de contact s'étend sur toute la largeur de la dent. Ainsi, pour le cas des engrenages ne présentant pas d'écarts de forme, nous utilisons les formules associées au contact entre deux cylindres de largeur infinie.

III.2.2 Calcul des déformations en flexion des dents

a) Modélisation des roues dentées par éléments finis

Nous calculons les déformations en flexion de la dent à partir d'une modélisation de chaque roue dentée par éléments finis. Pour cela, nous avons développé un modèle éléments finis 3D de chaque roue dentée (logiciel ANSYS 5.3[®]). L'influence sensible des paramètres de l'engrenage sur la déformation en flexion des dents nous a conduits à décrire précisément la géométrie de celui-ci, notamment le profil en développante de cercle et la trochoïde de raccordement en pied de dent correspondant aux engrenages taillés à l'aide d'un outil crémaillère. Pour chaque roue dentée, nous avons pris en considération trois dents successives ainsi que l'ensemble du corps de la roue.

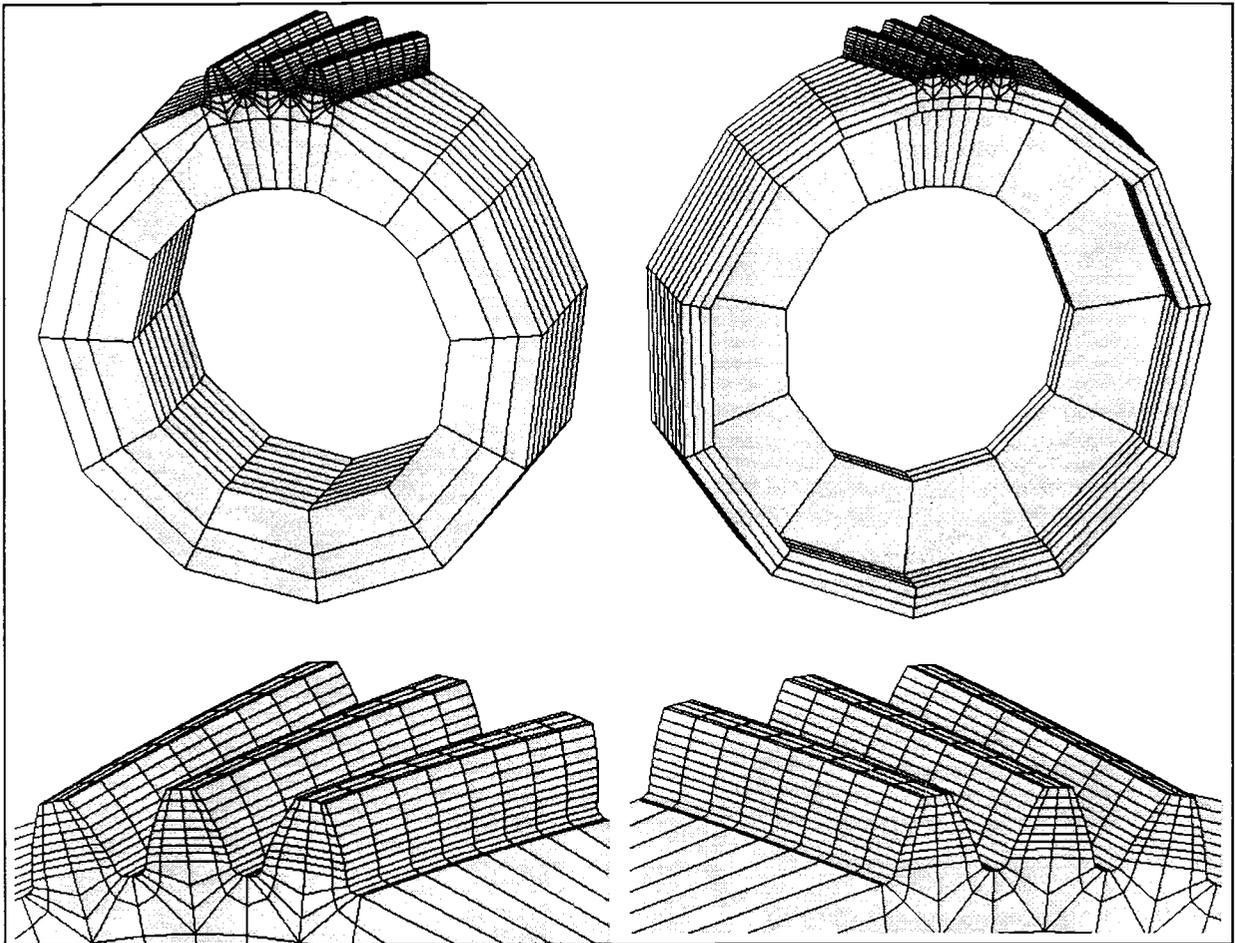


Figure III.1. Maillage éléments finis 3D d'un engrenage 35/49 dents.

Les données géométriques nécessaires à la génération des maillages sont :

- le nombre de dents de chaque roue,
- le module, l'angle de pression et le rayon de l'outil crémaillère,
- l'angle d'hélice de taillage,
- le coefficient de déport, la saillie et le creux de chaque roue,
- la largeur de denture,
- l'entraxe de fonctionnement,
- le diamètre de raccordement entre la trochoïde et le profil en développante de cercle,
- le rayon de l'arbre,
- la géométrie de la roue et, éventuellement, de son voile.

Nous avons utilisé des éléments finis de forme hexaédrique à 20 noeuds et 3 degrés de liberté par noeuds. Chaque dent est discrétisée par $4 \times 7 \times 8$ éléments (épaisseur \times hauteur \times largeur). Le raccordement en pied de dent est généralement discrétisé par 4 éléments et la circonférence de la roue par 18 éléments. Nous supposons que la roue dentée est encastrée sur son arbre. Le maillage de chaque roue dentée possède environ **8000 noeuds**, **1500 éléments** et **17000 degrés de liberté**. A titre d'illustration, la figure III.1 présente le maillage d'un engrenage parallèle à denture hélicoïdale 35/49 dents. Le corps de la première roue est plein tandis que celui de la seconde présente un voile mince.

b) Calcul de la matrice de souplesse des roues dentées

Le calcul des déformations élastostatiques permet de construire la matrice de souplesse $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ de chaque roue dentée. Cette matrice de dimension (72x216) correspond à la matrice de transfert statique entre un effort unitaire normal qui s'applique sur la dent centrale et les déplacements normaux observés sur les surfaces actives de chacune des trois dents. Elle est définie comme suit :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{u,F} (\omega = 0) \underline{\mathbf{F}}$$

Lors de l'engrènement, le contact s'établit, pour chaque couple de dents en prise, sur une ligne que nous pouvons discrétiser. Nous pouvons extraire, à partir des matrices de souplesse de chaque roue dentée, une sous-matrice associée aux seuls noeuds de la ligne de contact. Par la suite, nous appellerons **matrice de souplesse** la matrice associée à chaque roue dentée et **matrice de transfert statique** la matrice associée à la ligne de contact de l'engrenage, pour mieux les distinguer l'une de l'autre.

Comme le montre la figure III.2, chaque coefficient $\mathbf{H}^{u,F}(\mathbf{M}, \mathbf{N}; \omega=0)$ correspond au déplacement selon la normale au profil d'un noeud \mathbf{M} appartenant à l'une des trois dents induit par un chargement unitaire appliqué sur un noeud \mathbf{N} appartenant à la dent centrale.

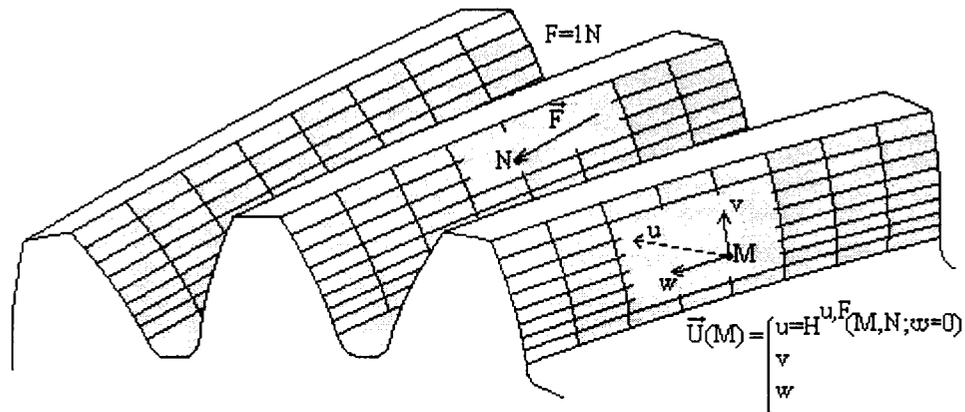


Figure III.2. Evaluation du coefficient $H^{u,F}(\mathbf{M}, \mathbf{N}; \omega=0)$.

Le calcul du champ de déformation de la roue dentée permet d'évaluer non seulement les déplacements des noeuds appartenant aux surfaces actives des dents dans la direction normale au contact (déplacement \mathbf{u}), mais aussi les déplacements dans la direction tangente au profil (déplacement \mathbf{v}) et dans la direction tangente à l'hélice (déplacement \mathbf{w}). Le calcul de \mathbf{v} et \mathbf{w} permet de vérifier si les déplacements et les normales à la surface active de la dent sont colinéaires.

L'application d'un effort ponctuel sur un noeud du maillage éléments finis induit une perturbation importante du champ de déplacements de la dent, localisée autour du point d'application de cet effort. Pour éliminer les effets dus à cette perturbation, certains auteurs estiment la déformation du profil de la dent à partir des déplacements sur le profil opposé ou

des déplacements dans le plan médian de la dent (Prabhu 1996). Sainsot (1989) estime la déformée en flexion de la dent à partir de deux calculs distincts qui utilisent des conditions limites différentes. La perturbation locale induite par l'application d'un effort ponctuel est alors soustraite au champ de déformations de la dent.

Nous avons utilisé cette dernière technique et nous avons calculé la perturbation locale à partir du champ de déplacement du profil d'une dent encastrée au niveau du plan médian de la dent et au-dessous de son cercle de pied actif (figure III.3). Comme le montre la figure III.4, le champ de déformation final de la dent ne présente plus de perturbations.

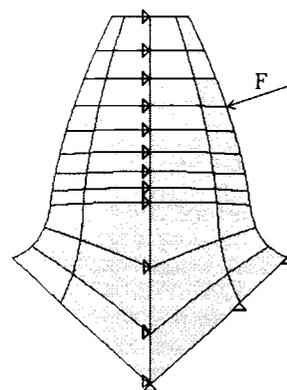


Figure III.3. Conditions limites pour le calcul de la composante locale du déplacement induite par l'application d'un effort ponctuel.

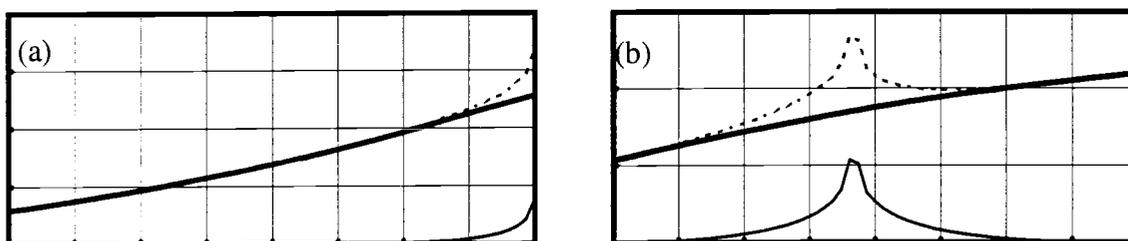


Figure III.4. Evolution de la déformée de la dent le long du profil actif. Résultat brut induit par un effort ponctuel (-----); Contribution locale due à l'effort ponctuel (trait continu fin); Résultat final (trait continu gras). Effort en tête de dent (a) et au point primitif (b).

Pour déterminer la valeur de l'ensemble des coefficients de la matrice $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ d'une roue dentée, nous appliquons un chargement sur la dent centrale en chacun des noeuds de la surface active situés au niveau d'un angle des éléments finis hexaédriques à 20 noeuds ($8 \times 9=72$ noeuds) et calculons, pour chaque cas de chargement, deux champs de déformations statiques pour éliminer la perturbation locale autour du point d'application de l'effort. Vu le nombre d'éléments retenu, il est nécessaire d'effectuer 144 calculs distincts pour déterminer la valeur de l'ensemble des coefficients de la matrice de souplesse $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$. Cette étape est donc coûteuse en temps.

Toutefois, il faut noter que, d'une part, les déformations en flexion des dents varient de façon linéaire avec la charge et que, d'autre part, l'ordre de grandeur des défauts de géométrie ou des corrections de forme étant négligeable devant celui des dimensions de la dent, on suppose que la matrice de souplesse $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ de la roue dentée n'est pas affectée par ces écarts. Les calculs effectués lors de cette étape préliminaire permettent donc de calculer l'erreur statique de transmission sous charge de l'engrenage pour n'importe quelle charge appliquée et pour n'importe quel type de corrections de denture ou de défauts de géométrie (hormis une correction par déport qui modifie la forme de la dent).

III.3 Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge

Pour évaluer l'erreur statique de transmission sous charge, nous avons développé un programme de calcul en langage Turbo-Pascal 7.0[®]. Ce programme permet de calculer l'évolution du rapprochement des dents selon la ligne d'action en fonction de la position de la roue menante. Ce rapprochement est appelé δ . Le calcul s'appuie sur les hypothèses classiques que nous avons énoncées au début du paragraphe II.3.1. Ses différentes étapes sont présentées succinctement ci-après, puis développées une à une.

D'abord, nous discrétisons la rotation de la roue menante en un nombre fini de positions θ . En régime de fonctionnement stationnaire, l'erreur statique de transmission sous charge d'un engrenage ne présentant pas de défauts de géométrie est périodique, de fréquence fondamentale égale à la fréquence d'engrènement. Nous discrétisons la période d'engrènement en 32 positions θ distinctes. La première valeur de θ (abscisse $x=0$) correspond à la première position où l'ensemble de la dent appartient à la zone de contact potentielle. La figure III.5 présente le lieu théorique des points de contact dans le plan d'action de l'engrenage, pour l'abscisse $x=0$. L'un des couples de dents est en prise sur toute la largeur de denture tandis que les couples précédents et suivants n'appartiennent que partiellement à la zone de contact.

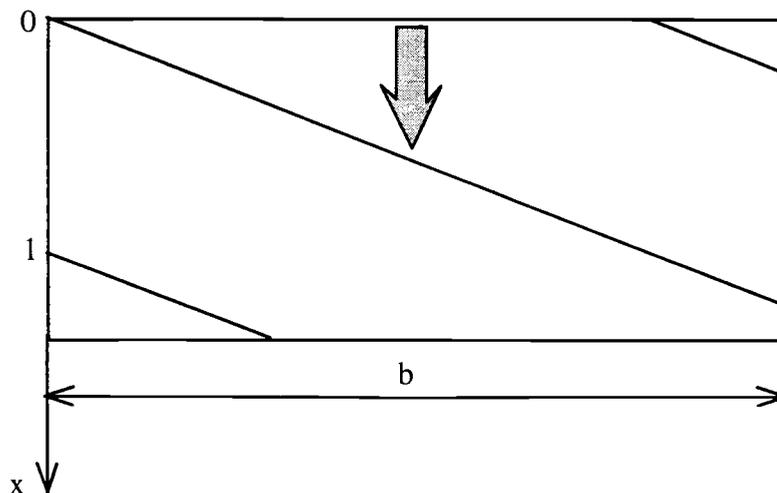


Figure III.5. Plan d'action correspondant à la position $x=0$.

Ensuite, pour chacune de ces positions θ , un processus itératif permet de calculer le rapprochement des dents $\delta(\theta)$ ainsi que la répartition de la charge et l'aire de contact qui lui sont associées :

- nous initialisons la valeur du rapprochement des dents $\delta(\theta)$,
- nous déterminons le lieu des points de contacts,
- nous discrétisons la ligne de contact en un grand nombre de noeuds,
- à partir des matrices de souplesse de chaque roue dentée, nous construisons la matrice de transfert statique $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ associée à ces noeuds,

- nous résolvons l'équation non linéaire qui gère l'équilibre statique du système afin de connaître la répartition des efforts sur la ligne de contact et la nouvelle valeur du rapprochement $\delta(\theta)$,
- nous corrigeons l'aire de contact en fonction de la valeur du rapprochement et réexécutons, si cette aire de contact a changé, les quatre étapes précédentes.

III.3.1 Détermination du lieu des points de contact

Pour chaque position de la roue menante θ , nous calculons l'erreur statique de transmission sous charge à partir d'un processus itératif qui permet d'évaluer, à chaque étape, le rapprochement des dents $\delta(\theta)$. Un test de convergence sur la valeur de $\delta(\theta)$ permet d'arrêter ce processus.

Pour chaque θ , nous déterminons, pour l'ensemble des couples de dents en prise, le lieu des contacts potentiels correspondant à un engrenage sans écarts de géométrie. Le résultat obtenu est appelé ligne de contact potentielle. Nous discrétisons cette ligne en un grand nombre de noeuds i . Nous introduisons alors les défauts de géométrie et les corrections de denture au niveau de chacun des noeuds de la ligne de contact potentielle, sous la forme d'un écart initial $e[i]$ entre les profils conjugués. Cet écart est mesuré dans le plan d'action, selon la normale aux surfaces actives des dents. Nous déterminons alors la ligne de contact réelle en comparant chaque écart initial au rapprochement des dents calculé à l'itération précédente.

Si $(\delta(\theta) \geq e[i])$, le noeud i appartient à la ligne de contact,

Si $(\delta(\theta) < e[i])$, le noeud i n'appartient pas à la ligne de contact.

III.3.2 Construction de la matrice de transfert statique $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ associée aux noeuds de la ligne de contact réelle

L'étape suivante consiste à calculer les coefficients $\mathbf{H}^{u,F}(\mathbf{I}, \mathbf{J}; \omega=0)$ de la matrice de transfert statique associée aux noeuds appartenant à la ligne de contact réelle. Nous calculons ces coefficients, par interpolation linéaire, à partir des coefficients $\mathbf{H}^{u,F}(\mathbf{M}, \mathbf{N}; \omega=0)$ des matrices de souplesse associées à chaque roue dentée que nous avons calculées précédemment. Ils sont égaux à la somme des coefficients associés à la roue menante et à la roue menée. Ils correspondent aux déformées dans la direction normale au contact du noeud i appartenant à la ligne de contact, pour un effort unitaire appliqué en \mathbf{j} , autre noeud de la ligne de contact. La matrice $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ est donc une matrice carrée dont l'ordre est égal au nombre de noeuds \mathbf{N} de la ligne de contact réelle.

Le nombre maximum de couples de dents en prise est, pour la plupart des engrenages à denture hélicoïdale, compris entre 3 et 5. Si on suppose qu'il y a cinq couples de dents qui

participent simultanément à la transmission du mouvement, la matrice de transfert statique $\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{u,F}(\omega=0)$ se présente sous la forme générale suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{u,F}(\omega = 0) = \begin{bmatrix} [A] & [b] & [c] & [d] & [e] \\ [f] & [G] & [h] & [i] & [j] \\ [k] & [l] & [M] & [n] & [o] \\ [p] & [q] & [r] & [S] & [t] \\ [u] & [v] & [w] & [x] & [Y] \end{bmatrix}$$

L'ensemble des sous-matrices $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$, ..., $\underline{\underline{\mathbf{Y}}}$ sont des matrices pleines. Chaque terme de la diagonale de la matrice correspond à la déformation d'un noeud induit par l'effort s'exerçant sur ce noeud. Les autres termes traduisent les couplages élastiques existant entre les différents noeuds. Les sous-matrices $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{Y}}}$ correspondent aux déformations d'un couple de dents (appartenant à chacune des deux roues dentées) induites par un chargement appliqué sur ce même couple. Les sous-matrices $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{l}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{r}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{x}}}$ correspondent aux déformations d'un couple de dents induites par un chargement appliqué sur le couple de dents précédent. Les sous-matrices $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{h}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{n}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{t}}}$ correspondent aux déformations d'un couple de dents induites par un chargement appliqué sur le couple de dents suivant.

Dans notre modélisation des roues dentées, nous n'avons pris en considération que trois dents. Nous ne considérons que les couplages élastiques entre les dents adjacentes. Lorsque le nombre de couples de dents en prise est supérieur à 2, nous supposons que le chargement sur une dent n'a pas d'influence sur la déformation des dents autres que la dent précédente et la dent suivante. Nous avons validé cette hypothèse à partir du calcul du champ de déformations de cinq dents successives modélisées en 2D. Les sous-matrices $\underline{\underline{\mathbf{c}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{i}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{j}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{o}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{p}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{q}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{v}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{w}}}$ sont donc des matrices nulles.

Pour les cas où trois couples de dents, quatre couples de dents ou cinq couples de dents participent simultanément à la transmission du mouvement, la matrice de transfert statique $\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{u,F}(\omega=0)$ se présente sous la forme suivante :

Trois couples	Quatre couples	Cinq couples
$\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{u,F} = \begin{bmatrix} [A] & [b] & 0 \\ [f] & [G] & [h] \\ 0 & [l] & [M] \end{bmatrix}$	$\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{u,F} = \begin{bmatrix} [A] & [b] & 0 & 0 \\ [f] & [G] & [h] & 0 \\ 0 & [l] & [M] & [n] \\ 0 & 0 & [r] & [S] \end{bmatrix}$	$\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{u,F} = \begin{bmatrix} [A] & [b] & 0 & 0 & 0 \\ [f] & [G] & [h] & 0 & 0 \\ 0 & [l] & [M] & [n] & 0 \\ 0 & 0 & [r] & [S] & [t] \\ 0 & 0 & 0 & [x] & [Y] \end{bmatrix}$

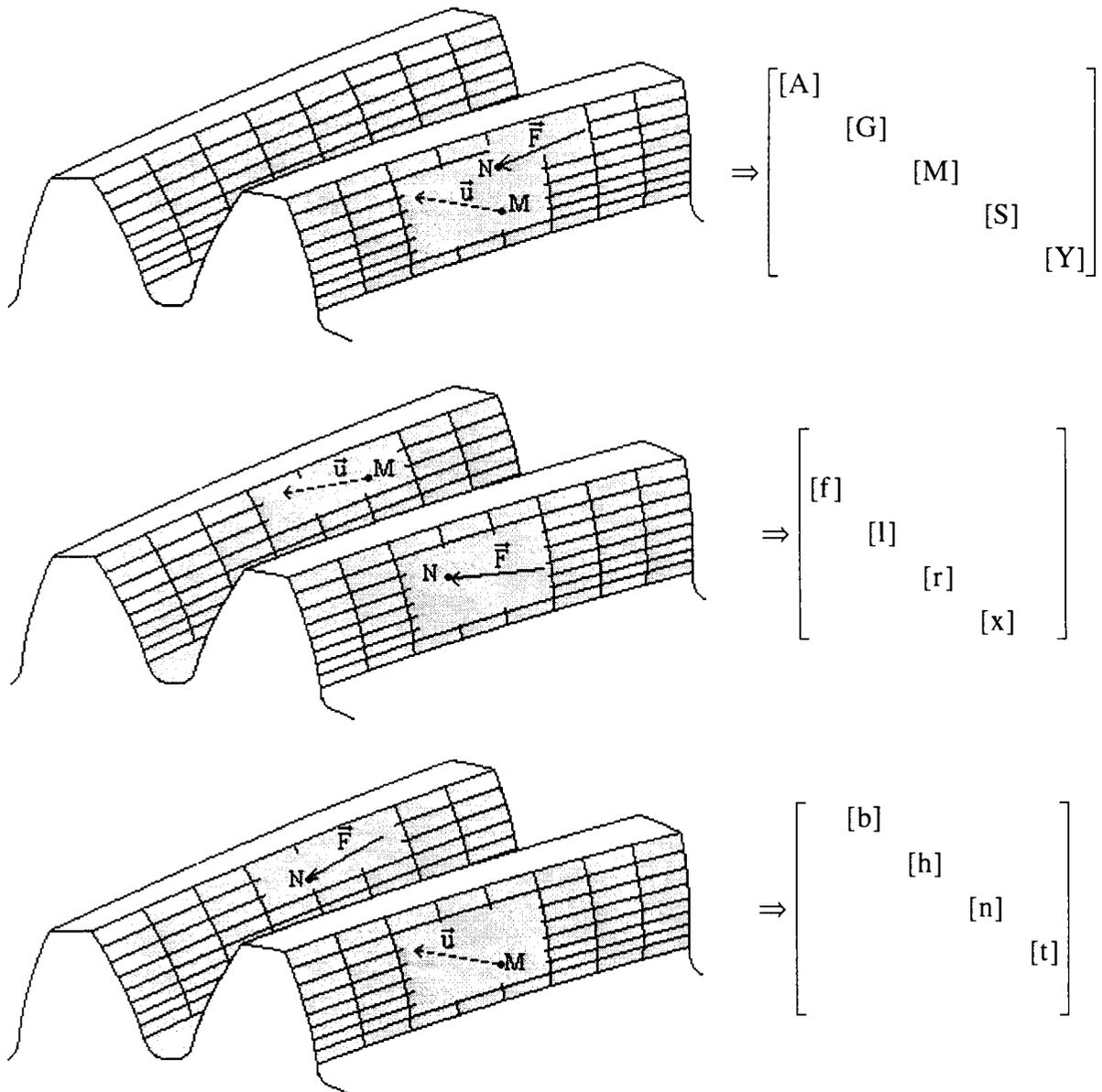


Figure III.6. Calcul de la matrice de transfert $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$.

III.3.3 Equilibre statique du système

Le système d'équations qui gère les déformations élastostatiques de l'engrenage peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{H}^{u,F}(\omega=0) \cdot \underline{\mathbf{F}} = \underline{\delta}(\theta) - \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{hertz}}(\underline{\mathbf{F}}) \\ \Sigma \mathbf{F}[i] = \mathbf{F}_{total} \end{cases} \quad (1)$$

- $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ est la matrice de transfert statique associée aux noeuds de la ligne de contact,
- $\underline{\delta}(\theta)$ est un vecteur dont les composantes, toutes identiques, correspondent au rapprochement des dents,
- $\underline{\mathbf{F}}$ correspond au vecteur des efforts s'exerçant sur les dents,
- $\underline{\mathbf{e}}$ correspond au vecteur des écarts initiaux séparant les dents,

- **hertz** correspond au vecteur des déplacements induits par les déformations de contact,
- $\mathbf{F}_{\text{total}}$ correspond à l'effort total s'exerçant sur l'ensemble des couples de dents en prise, exprimé selon la ligne d'action.

Dans ce système composé de (N+1) équations, les inconnues sont les N composantes du vecteur \mathbf{F} qui s'appliquent sur les N noeuds de la ligne de contact et la valeur du rapprochement $\delta(\theta)$. Le système est non linéaire car les déformations hertziennes varient de façon non linéaire avec la charge appliquée. Nous résolvons donc celui-ci à l'aide d'un processus itératif. Tout d'abord, nous initialisons le vecteur **hertz** ($\forall i, \text{hertz}[i]=0$). Nous résolvons successivement les deux équations linéaires suivantes grâce à la méthode du pivot de Gauss :

$$\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0) \cdot \mathbf{F}_1 = \mathbf{e} + \mathbf{hertz} \quad (2)$$

$$\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0) \cdot \mathbf{F}_2 = \underline{\delta}_k(\theta) \quad (3)$$

δ_k correspond à la valeur du rapprochement à l'itération k. Sa valeur est identique en tout noeud de la ligne de contact.

On recherche alors le coefficient de pondération \mathbf{p} associé à la deuxième équation :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{F}_{\text{total}} - \sum \mathbf{F}_1[i]}{\sum \mathbf{F}_2[i]} \quad (4)$$

Le vecteur \mathbf{F} des efforts qui s'applique sur chaque noeud de la ligne de contact réelle et la nouvelle valeur du rapprochement sont alors égaux à :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{F}_2 \quad (5)$$

$$\delta_{k+1}(\theta) = \mathbf{p} \cdot \delta_k(\theta) \quad (6)$$

La connaissance de la répartition des efforts nous permet de calculer les déformations de hertz associées à chaque noeud de la ligne de contact réelle. Nous calculons donc la nouvelle valeur du vecteur **hertz**, réintroduisons celui-ci dans l'équation (2) et reprenons les étapes (4), (5) et (6) jusqu'à convergence du processus. Cette convergence est assez rapide en raison de la faible non-linéarité hertzienne qui modifie peu la répartition des efforts entre deux itérations. Elle est d'autant plus rapide que la charge appliquée est grande en raison de la prédominance des déformations élastiques linéaires.

Une fois calculées la répartition finale de la charge et la nouvelle valeur du rapprochement entre dents $\delta(\theta)$, on détermine la nouvelle ligne de contact réelle et, si celle-ci est différente de la précédente, on reprend une à une les différentes étapes du calcul de l'équilibre statique du système jusqu'à convergence vers une valeur de $\delta(\theta)$.

Le diagramme III.1 présente les différentes étapes du calcul de l'erreur statique de transmission sous charge. Bien que la méthode de résolution du système d'équations qui gère les déformations élastostatiques de l'engrenage n'ait pas été optimisée, nous avons observé une convergence rapide de celle-ci pour l'ensemble des applications que nous avons traitées.

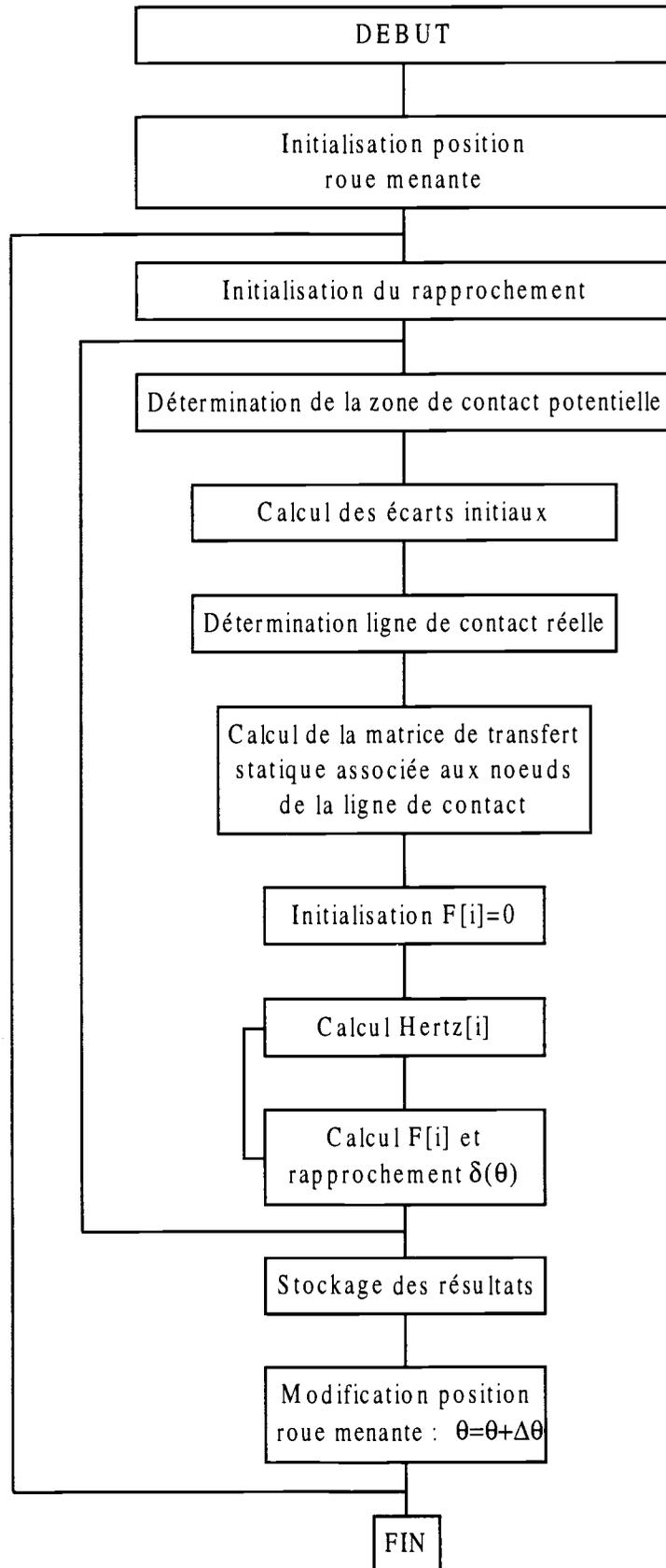


Diagramme III.1. Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge.

III.4 Calcul de la fluctuation de la raideur d'engrènement

Pour une position de la roue menante donnée θ , le rapprochement $\delta(\theta)$ évolue de façon non linéaire avec la charge statique appliquée F_S . Cette non-linéarité résulte d'une part des déformations locales des contacts hertziens et d'autre part, de l'entrée en contact progressive (en fonction de la charge) de chaque dent (non-linéarité géométrique). De manière classique, la raideur d'engrènement est définie, comme étant égale à :

$$K(F_S, \theta) = \partial(F_S) / \partial(\delta(F_S, \theta))$$

D'un point de vue pratique, la raideur d'engrènement est déterminée par linéarisation à partir du calcul de deux valeurs $\delta_1(\theta)$ et $\delta_2(\theta)$ correspondant à deux valeurs F_{S1} et F_{S2} qui encadrent l'effort statique correspondant au couple nominal.

Comme nous le verrons dans le deuxième chapitre, la modélisation du couplage entre les roues dentées par une raideur linéarisée variable au cours du temps permet des simplifications qui, dans le cadre de l'étude du comportement dynamique d'une transmission complète, constituent le meilleur compromis entre simplicité et précision. Cette représentation est valable si le mécanisme s'écarte peu de la position correspondant à l'équilibre statique.

Il faut noter que de nombreux auteurs définissent la raideur d'engrènement comme étant égale au rapport suivant :

$$K(F_S, \theta) = F_S / \delta(F_S, \theta)$$

Dans cette définition, la raideur d'engrènement est inversement proportionnelle à l'erreur de transmission sous charge. Elle ne correspond pas à la linéarisation de la courbe caractérisant l'évolution de la charge en fonction du rapprochement. Pour distinguer ces deux types d'approches, nous parlerons de la **raideur tangente linéarisée** autour d'une position d'équilibre statique et de la **raideur "proportionnelle"** (voir figure III.7).

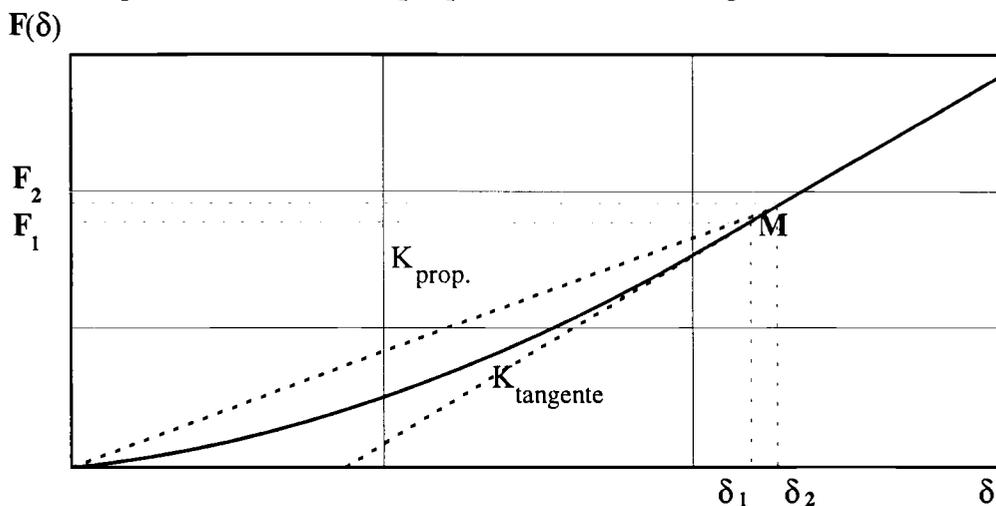
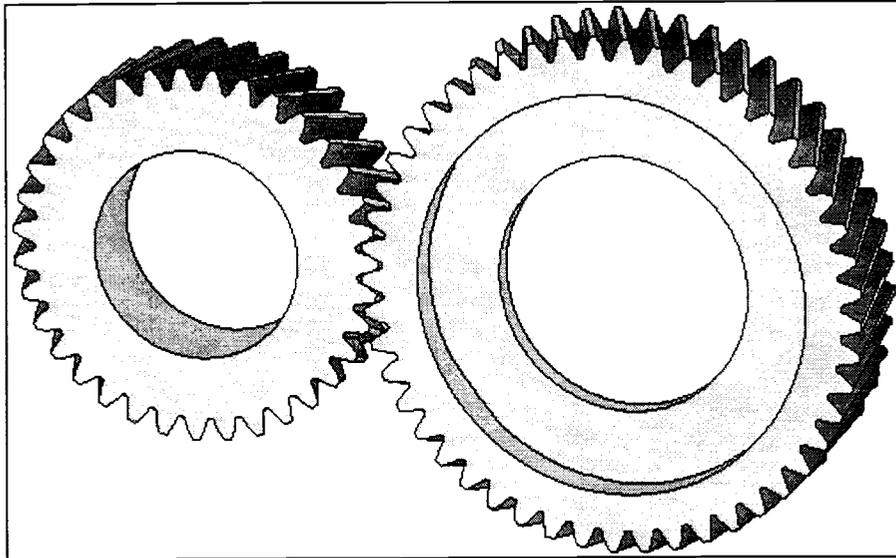


Figure III.7. Evolution de la charge en fonction du rapprochement δ pour une position θ de la roue menante. Comparaison de la raideur "proportionnelle" et de la raideur tangente linéarisée autour d'une position d'équilibre statique.

IV- Résultats numériques

IV.1 Engrenage de référence

La plupart des résultats qui suivent correspondent à un engrenage parallèle à denture hélicoïdale dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau IV.1.



Z	35	49
Rayon de base R_b (mm)	60.2	84.2
Module de l'outil m_0 (mm)	3.5	
Angle de pression de l'outil α	22.5°	
Entraxe de fonctionnement a' (mm)	158	
Angle d'hélice de base β	21.5°	
Largeur de denture b (mm)	36.5	
Rapport de conduite apparent ϵ_α	1.373	
Rapport de recouvrement ϵ_β	1.219	
Creux h_f	1.35 m_0	1.20 m_0
Saillie h_a	0.94 m_0	0.94 m_0

Tableau IV.1. Caractéristiques géométriques de l'engrenage.

Nous avons considéré deux configurations distinctes de l'engrenage correspondant à deux modélisations différentes des corps de roue :

- la première configuration correspond à des corps de roue rigides (seule la jante de la roue est élastique),
- la seconde correspond à une roue élastique pleine (celle du pignon 35 dents) et une roue élastique présentant un voile mince (celle de la roue 49 dents). A titre d'illustration, les maillages de ces deux roues correspondent à ceux présentés sur la figure III.1 (p. 43).

- Les nombreuses simulations numériques que nous avons effectuées nous ont permis :
- de valider un certain nombre d'hypothèses,
 - d'analyser l'influence du couplage élastique entre les différents lieux de contact. Nous avons effectué cette analyse en comparant différentes formes de la matrice de transfert statique associée aux noeuds de la ligne de contact. Nous avons pu mesurer, entre autres, l'effet des interactions entre les différents couples de dents en prise.
 - d'évaluer l'influence de l'élasticité des corps de roue,
 - d'évaluer l'amplitude relative des déformations locales de contact,
 - d'analyser les effets des corrections de denture sur l'erreur statique de transmission sous charge et la raideur d'engrènement.

IV.2 Validation de la méthode de calcul

IV.2.1 Vérification de quelques hypothèses

Nous avons d'abord effectué, à partir d'une modélisation de l'engrenage en 2D, un certain nombre de calculs préliminaires qui nous permettent de valider plusieurs hypothèses. Les résultats présentés correspondent à un engrenage parallèle à denture droite 35/49 dents soumis à un couple moteur de $2 \cdot 10^4$ Nm par unité de largeur de denture.

a) Localisation du point de contact réel et orientation de l'effort appliqué

Nous avons d'abord tracé l'évolution du rapprochement d'un couple de dents en fonction de la position du point de contact sur la ligne d'action (figure IV.1).

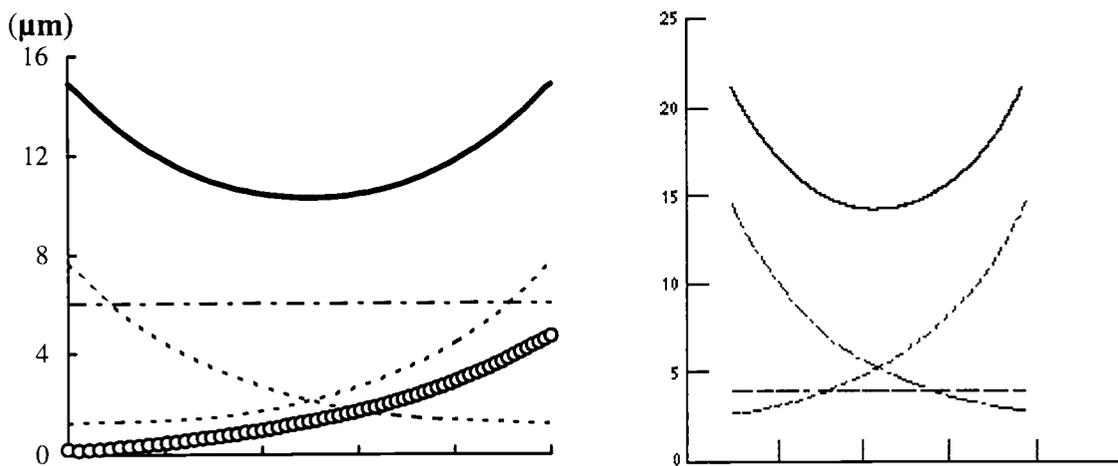


Figure IV.1a. Evolution des déformations d'un couple de dents le long du profil actif :

- rapprochement des surfaces conjuguées (—————),
- déformations hertziennes (— - — —),
- déplacements normaux u dus à la flexion des dents menante et menée (-----),
- déplacement tangent au profil v de la roue menante (OOOOOOOO).

Figure IV.1b. Résultats comparables présentés par Lin pour un autre engrenage parallèle à denture droite (1988).

L'évolution de la déformée d'un couple de dents présente les mêmes caractéristiques que celle obtenue par Lin (1988) pour une géométrie différente. Lorsque le contact s'effectue au niveau du point primitif, la raideur du couple de dents est plus faible que lorsqu'il s'effectue au niveau du cercle de pied actif d'une dent (et, par conséquent, au niveau du cercle de tête de l'autre dent). Les déformations hertziennes participent de façon importante au rapprochement des surfaces conjuguées. Le rapprochement des dents induit par ces déformations varie de façon non linéaire avec l'effort appliqué. Lorsqu'un seul couple de dents engrène, le rapprochement hertzien est quasi-indépendant de la position du point de contact sur la ligne d'action.

Si on conserve les hypothèses classiques, les déplacements tangents à la surface des dents ne participent pas au rapprochement des surfaces. On observe néanmoins que ceux-ci, orientés vers la tête de dent, sont du même ordre de grandeur que les déplacements normaux, notamment quand le contact s'effectue en tête de dent.

Ces premiers résultats nous permettent de discuter la validité de certaines hypothèses généralement utilisées. En effet, le contact entre les dents en prise ne s'effectue pas exactement au niveau du point de contact théorique défini pour des engrenages parfaits et infiniment rigides :

- Le déplacement de la roue menante dans la direction normale à la surface de la dent induit une modification du point de contact sur la ligne d'action.
- Le point d'application de l'effort s'écarte de la ligne d'action et se déplace vers le pied de dent (par rapport au point d'application théorique) en raison de la déformation des dents dans la direction tangente aux profils. La déformation des dents dans la direction normale au profil sous-estime donc la déformation réelle.
- Les déplacements tangents aux profils induisent un rapprochement des surfaces en raison de la courbure de celles-ci.
- La direction de l'effort appliqué n'est plus normale à la surface théorique des dents.

Nous avons évalué l'ordre de grandeur de ces perturbations : Pour l'exemple présenté, le déplacement de la roue menante dans la direction normale au profil varie entre 2 et 8 μm . La modification de l'abscisse du point correspond donc à 0.05% de la longueur de la ligne d'action. Par ailleurs, nous avons recalculé le champ de déformation des dents après avoir estimé la position réelle du point d'application de l'effort sur le profil de la dent. Les déplacements normaux aux profils diffèrent de ceux calculés précédemment d'environ 0.1 %. L'écart angulaire entre la direction réelle de l'effort appliqué et la normale au profil de la dent est inférieur à 1 μrad . Enfin, le rapprochement des profils induits par les déplacements tangents est d'environ $5 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}$ (1/20000 du déplacement normal au profil de la dent).

Ainsi, pour un engrenage parallèle à denture droite, on peut supposer que le contact entre les dents en prise s'effectue dans le plan d'action au niveau des points de contact théoriques, définis pour des engrenages géométriquement parfaits et infiniment rigides. En effet, les écarts observés par rapport à la configuration réelle de l'engrenage sont tout à fait négligeables devant l'ordre de grandeur des déformations des profils des dents.

b) Géométrie de l'engrenage

Nous avons fait varier différents paramètres géométriques de l'engrenage afin d'évaluer l'influence de ces derniers sur le champ de déformations des dents.

Indépendamment de la modification du rapport de conduite, l'introduction d'un déport ou la modification de la saillie et du creux a une influence sur la forme de la dent et sur le champ de déformation de celle-ci. L'ordre de grandeur des déformations d'une dent corrigée présente

des écarts importants par rapport à une dent normale (de 5 % en tête de dent à 30 % en pied de dent entre une denture normale et une denture présentant un déport égal à $u=0.5 m_0$). Par ailleurs, la prise en compte de la trochoïde de raccordement en pied de dent conduit à des déformations qui diffèrent d'environ 15 % par rapport à une dent ayant un rayon de filet nul. Enfin, des écarts de 5 % sur les déformations des profils des dents peuvent résulter de la prise en compte des tolérances d'épaisseur des dents. Il est donc très important de décrire avec le plus grand soin la géométrie des dents pour bien prédire leurs déformations.

IV.2.2 Interactions entre les couples de dents en prise

a) Champ de déformation d'une dent soumise à un effort unitaire

Les calculs des déformations en flexion des dents nécessaires à la construction de la matrice de souplesse de chaque roue dentée permettent d'ores et déjà de mettre en évidence les couplages élastiques entre les différents noeuds d'une même dent d'une part et entre les dents voisines d'autre part. Lorsque l'on applique le chargement sur un noeud, les déformations s'étendent sur toute la surface active de la dent chargée et les déformations observées sur les dents précédente et suivante ne sont pas négligeables. Ces dernières contribuent à l'erreur statique de transmission sous charge car, le rapport de conduite étant supérieur à 1, plusieurs couples de dents peuvent engrener simultanément. Ainsi, la déformation d'une dent est induite non seulement par les efforts qui s'exercent sur cette dent, mais aussi par les efforts qui s'exercent sur les autres dents en prise. A titre d'illustration, la figure IV.2 montre le champ de déformation des trois dents pour un effort unitaire appliqué en pied et dans le plan médian de la dent centrale du pignon 35 dents.

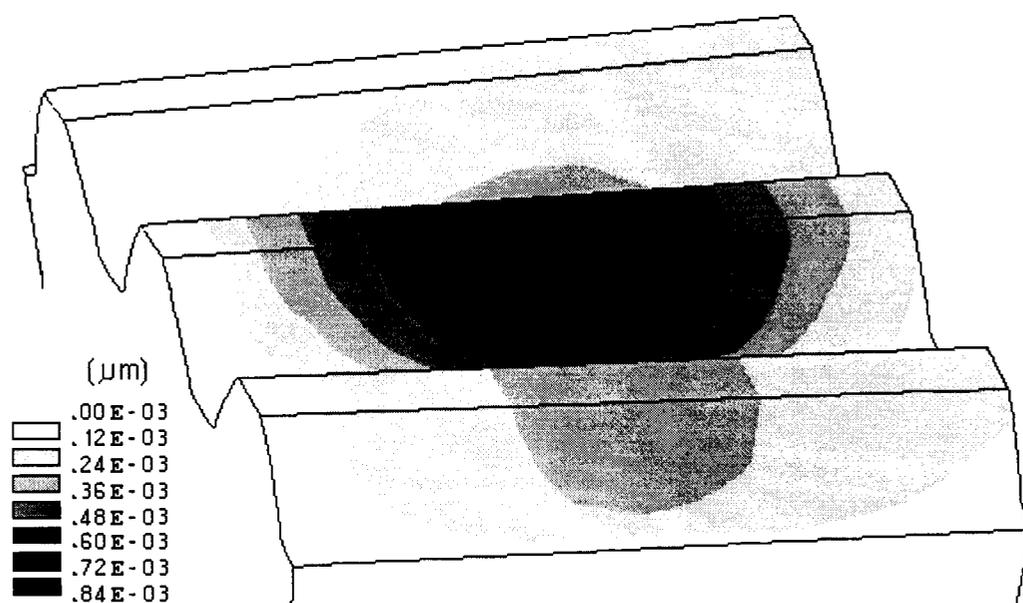


Figure IV.2. Champ de déformation des trois dents pour un effort unitaire appliqué en pied et dans le plan médian de la dent centrale.

b) Effet des interactions entre les différents noeuds de la ligne de contact

Nous avons vu que, pour calculer l'erreur statique de transmission sous charge, certains auteurs discrétisaient la ligne de contact en cellules indépendantes les unes des autres. Ceci revient à considérer que la déformation en un noeud de la ligne de contact est uniquement induite par l'effort s'exerçant sur ce noeud. Pour vérifier si le découplage entre les différentes cellules élémentaires est justifié ou non, nous avons comparé, l'erreur statique obtenue avec une matrice de transfert $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ complète et celle obtenue avec une matrice diagonale. Les termes de la matrice diagonale correspondent aux termes diagonaux de la matrice complète. Ils sont donc calculés à partir du maillage éléments finis 3D présentés précédemment. Ils ne correspondent pas aux termes généralement introduits par les auteurs qui exploitent des matrices diagonales car ceux-ci utilisent des modèles 2D ou des formulations empiriques. La figure IV.3 présente, pour l'engrenage de référence à corps de roue rigide, l'évolution de l'erreur statique de transmission sous charge pour un couple transmis de 500 Nm. Cet exemple montre que l'utilisation d'une matrice de transfert statique $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ diagonale conduit à une estimation erronée de l'erreur statique de transmission sous charge. Le rapprochement des dents calculé au niveau d'un noeud de la ligne de contact et induit par l'ensemble des efforts s'exerçant sur les dents en prise est plus important que le rapprochement induit par le seul effort s'exerçant sur le noeud. La prise en compte des interactions entre les différentes cellules est donc capitale pour estimer de façon correcte la raideur d'engrènement.

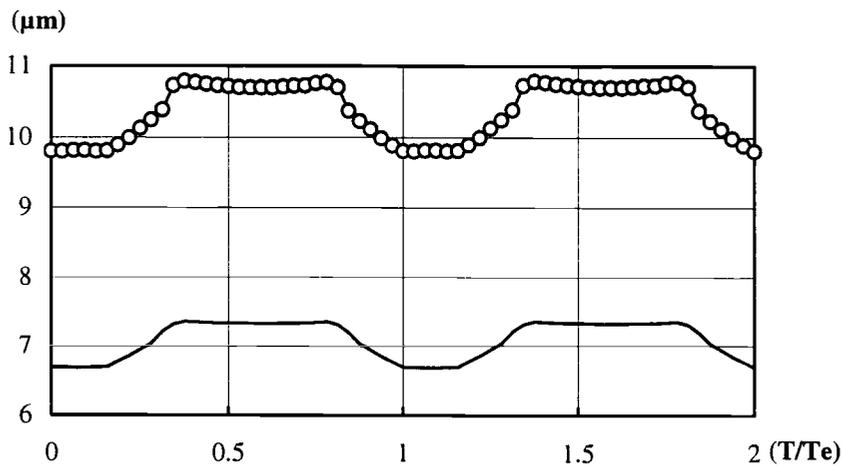


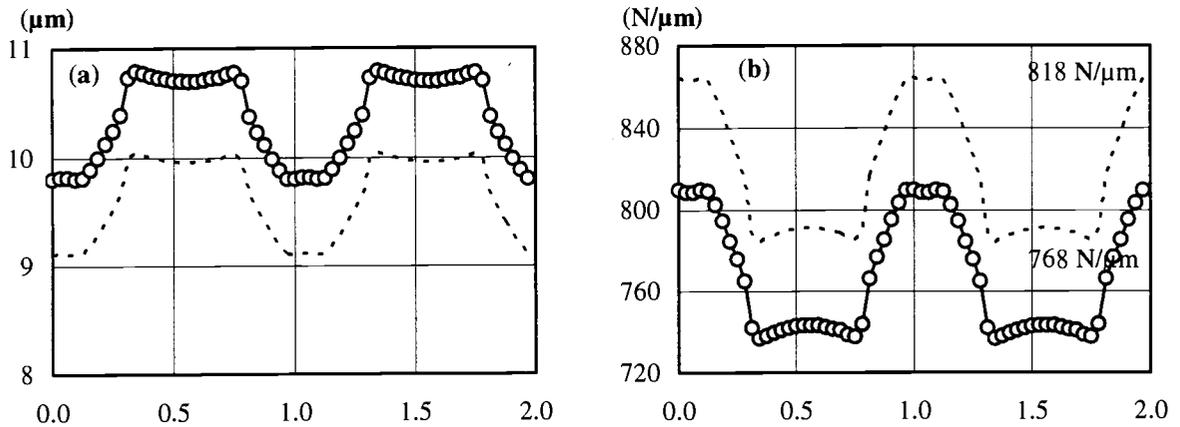
Figure IV.3. Evolution temporelle de l'erreur statique de transmission sous charge pour une matrice de transfert statique $\mathbf{H}^{u,F}_{i,j}(\omega=0)$ diagonale (—) ou complète (oooooo).

c) Influence des interactions entre les couples de dents

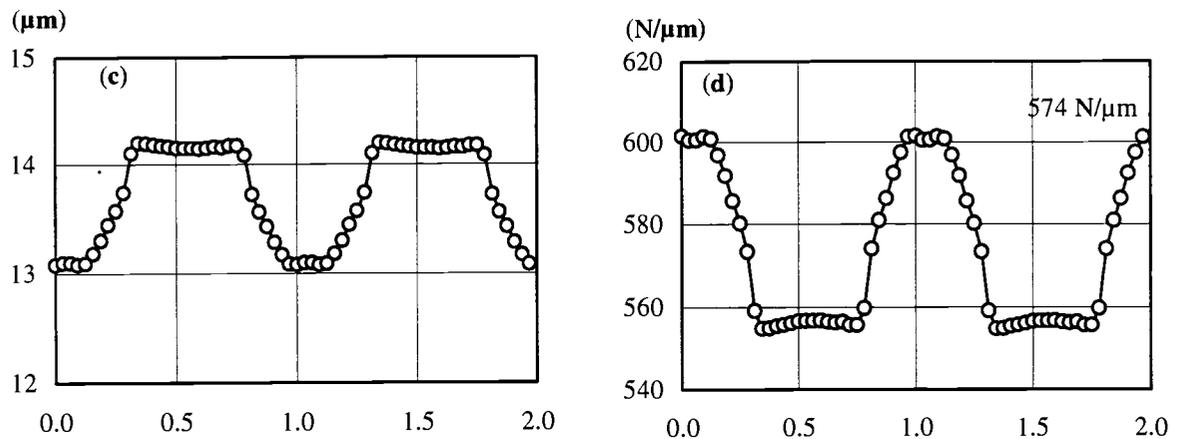
Nous avons calculé, l'erreur statique de transmission sous charge et la fluctuation de la raideur d'engrènement en éliminant les coefficients $\mathbf{H}^{u,F}(\mathbf{I}, \mathbf{J}; \omega=0)$ qui traduisent l'effet de l'effort s'exerçant sur une dent sur les déformations des dents précédente et suivante. La

matrice $\mathbf{H}^{u,F}(\omega=0)$ devient diagonale par blocs (les matrices [f], [l], [r], [x], [b], [h], [n] et [t] présentées au paragraphe III.3.2 sont alors des matrices nulles). Les figures IV.4 a, b, e et f présentent, pour l'engrenage de référence, les résultats obtenus pour un couple transmis de 500 Nm.

Corps de roue rigides



Modèle intermédiaire : Roues élastiques pleines



Roues élastiques (corps du pignon 35 dents plein et roue 49 dents à voile mince).

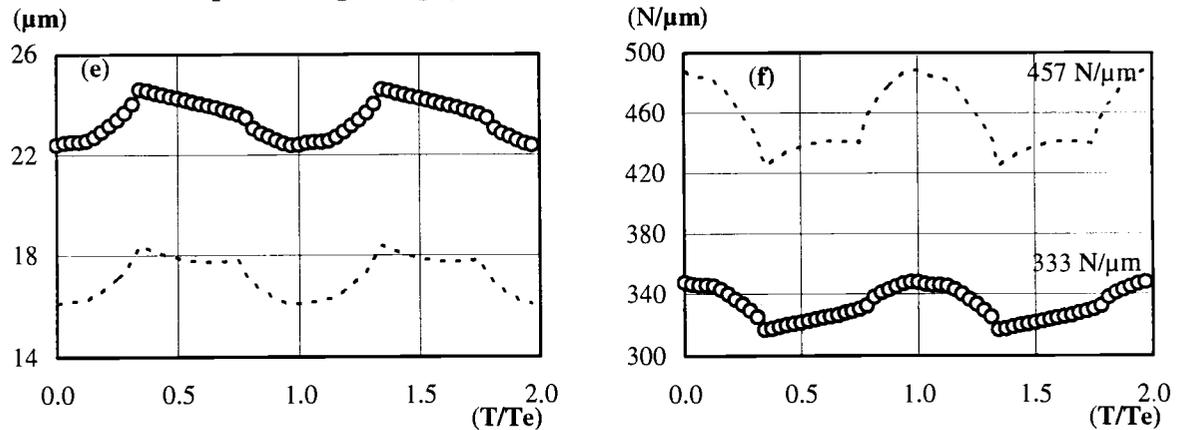


Figure IV.4. Evolution temporelle de l'erreur statique de transmission sous charge (a, c, e) et de la raideur d'engrènement (b, d, f) de l'engrenage.

Dents adjacentes couplées (ooooooo) et dents adjacentes non couplées (-----).

Les interactions entre les différents couples de dents en prise sont plus marquées si on prend en compte l'élasticité des corps de roue que si on suppose que ceux-ci sont rigides. Elles se traduisent par une augmentation significative de l'erreur statique de transmission sous charge et par une diminution de la valeur moyenne de la raideur d'engrènement. Pour l'engrenage à corps de roue élastiques, la raideur moyenne passe ainsi de 457 à 333 N/ μ m (-35%) tandis que pour l'engrenage à corps de roue rigides, elle passe de 818 à 768 N/m (-6%).

De plus, les interactions entre les différents couples de dents se traduisent par une diminution des fluctuations crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement. En effet, lorsque le nombre de dents en prise instantané est grand, l'erreur statique de transmission est petite mais la contribution des efforts qui s'exercent sur les autres dents est importante. Lorsque le nombre de dents en prise instantané est faible, l'erreur statique de transmission est grande mais la contribution des efforts qui s'exercent sur les autres dents est faible (cette contribution devient nulle s'il n'y a qu'un couple de dents qui engrène).

En définitive, il n'est pas possible de calculer les fluctuations de la raideur d'engrènement à partir de l'estimation de la raideur d'un seul couple de dents. Cette technique largement utilisée néglige les déformations induites par les efforts s'exerçant sur les autres dents.

IV.2.3 Influence de l'élasticité des roues

Les calculs de déformations en flexion des dents qui permettent de construire la matrice de souplesse de chaque roue dentée montrent que la prise en compte de l'élasticité du corps de la roue modifie considérablement l'ordre de grandeur et la répartition des déformations sur les surfaces actives des dents. Les figures IV.4 b, d et f montrent que l'erreur statique de transmission sous charge augmente de façon significative avec l'élasticité des roues. Sa valeur moyenne passe de 10.4 μ m pour des corps de roue rigides à 13.7 μ m (+30 %) pour des roues élastiques pleines et à 23.4 μ m (+125 %) si on prend en compte le voile de la roue 49 dents. Le couplage entre la flexion des dents et les déformations des roues est donc important même pour des engrenages pleins. Il dépend des dimensions des roues par rapport aux arbres sur lesquelles elles sont supposées encastées.

Les figures IV.4 b, d et f permettent, pour l'engrenage de référence, de mesurer l'influence de l'élasticité des roues sur la valeur moyenne et sur la forme de la fluctuation de la raideur d'engrènement.

a) Valeur moyenne de la raideur d'engrènement

Les résultats que nous avons obtenus montrent que l'élasticité des corps de roue a une très grande influence sur la valeur moyenne de la raideur d'engrènement. Celle-ci passe de 768 N/μm pour des roues rigides à 333 N/μm pour des roues élastiques.

Différents auteurs ont montré qu'il était possible d'estimer l'effet des déformations des corps de roue sur la valeur moyenne de la raideur d'engrènement même avec un modèle pour lequel les dents sont encastées en pied de dent. La raideur des corps de roue (K_c) est calculée indépendamment de la raideur des dents (K_d) et de la raideur hertzienne (K_H). La raideur globale de l'engrenage est alors égale à :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_{c1}} + \frac{1}{K_{d1}} + \frac{1}{K_H} + \frac{1}{K_{d2}} + \frac{1}{K_{c2}} \quad (\text{où 1 et 2 correspondent au pignon et à la roue}).$$

Ces auteurs supposent que les déformations des corps d'engrenage sont indépendantes des conditions de contact instantanées entre les dents en prise et de la répartition de la charge le long de la ligne de contact. Les déformations des corps de roue sont alors constantes quelle que soit la position de la roue menante. Elles augmentent la valeur moyenne de l'erreur statique de transmission sous charge (et, par conséquent, diminuent la valeur moyenne de la raideur d'engrènement) sans modifier la forme de ses fluctuations.

b) Fluctuation de la raideur d'engrènement

Les figures IV.4 b, d et f montrent que, pour l'engrenage de référence, l'élasticité des corps de roue diminue l'amplitude crête à crête de la fluctuation de la raideur d'engrènement (celle-ci passe de 75 à 31 N/μm). Par contre, elle ne modifie que très peu l'amplitude relative de cette fluctuation (10% de la raideur moyenne).

Bien que, entre les abscisses $x=0.375$ et $x=0.781$, le nombre de dents moyen présents dans le contact et la longueur de la ligne de contact soient constants, la raideur d'engrènement de l'engrenage augmente sensiblement lorsque la roue 49 dents présente un voile mince. La forme de la fluctuation de la raideur d'engrènement n'est donc plus liée à l'évolution de la longueur de contact. En effet, les efforts s'exerçant sur la ligne de contact sont à l'origine d'un moment qui induit une déformation en flexion de la roue et un déplacement angulaire important des dents en prise. L'amplitude de ce moment dépend de la position de la ligne de contact sur chaque couple de dents en prise et de la répartition de la charge sur cette ligne de contact. Elle varie donc en fonction de la position de la roue menante.

La figure IV.4 b montre que ce phénomène devient moins prépondérant si on considère des roues élastiques pleines. Il est donc surtout induit par l'élasticité du voile de la roue 49 dents.

Remarque : Nous avons supposé que les points de contacts réels étaient situés dans le plan d'action théorique défini pour des engrenages géométriquement parfaits et infiniment rigides et que les efforts s'exerçant sur les dents étaient normaux à la surface théorique de celles-ci. Nous avons montré que ces hypothèses étaient justifiées si l'on observait le comportement de

l'engrenage dans un plan apparent. Par contre, le déplacement angulaire des dents en prise modifie l'angle d'hélice réel par rapport à l'angle d'hélice théorique. La surface de contact réelle et la surface théorique ne sont plus confondues. Néanmoins, aucun modèle n'a, à notre connaissance, remis en cause les hypothèses initiales.

Les déformations des corps de roue influent directement sur la répartition de la charge le long de la ligne de contact et modifient de façon sensible la nature de l'excitation interne à la transmission. Ces résultats sont illustrés par la figure IV.5 qui présente la répartition de la charge le long de la ligne de contact pour une position de la roue menante correspondant à $x=0.72$, et par la figure IV.6 qui présente le spectre d'amplitude de la fluctuation de la raideur d'engrènement (l'amplitude des raies situées au-delà du quatrième harmonique de la fréquence d'engrènement est très inférieure à celle des premières raies). Le spectre obtenu est dominé par la raie associée à la fréquence d'engrènement. En règle générale, plus l'ordre d'une raie est élevé, moins son amplitude est importante (l'amplitude du quatrième harmonique est vingt fois moins grande que celle du fondamental). Par ailleurs, l'élasticité des roues entraîne une diminution sensible de l'amplitude de l'ensemble des raies (le fondamental passe de 18 à 7 N/ μm).

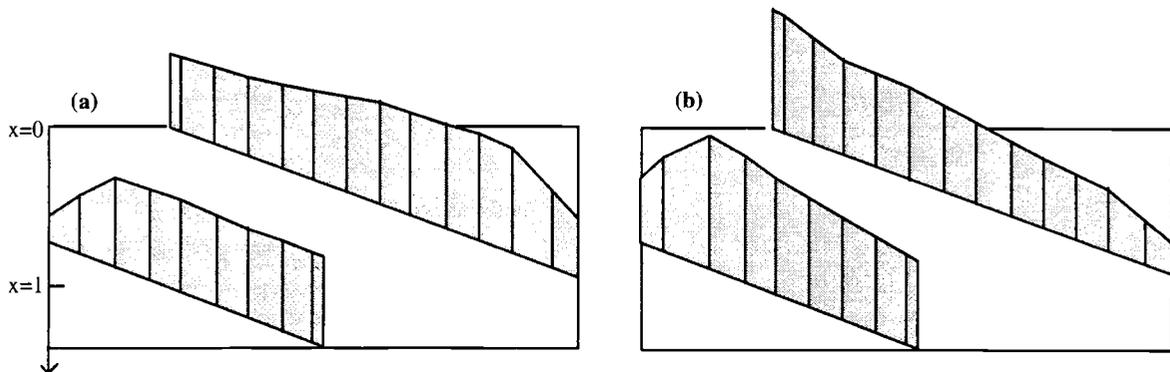


Figure IV.5. Répartition de la charge le long de la ligne de contact pour $x=0.72$. Engrenage à corps de roue rigides (a) ou élastiques (b).

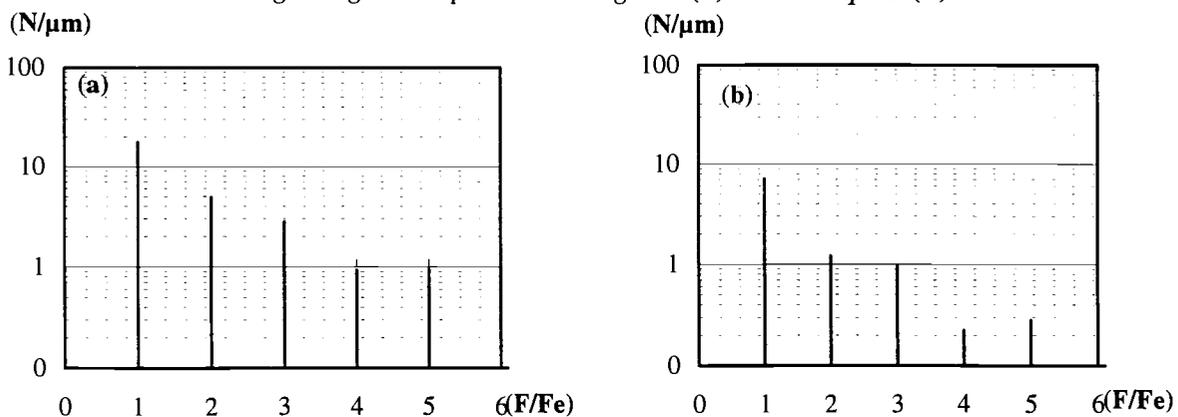


Figure IV.6. Spectre de la fluctuation de la raideur d'engrènement (échelle log.). Engrenage à corps de roue rigides (a) ou élastiques (b).

IV.2.4 Influence des déformations hertziennes

Nous avons calculé les évolutions de l'erreur statique de transmission sous charge et de la fluctuation de la raideur d'engrènement en éliminant l'influence des déformations hertziennes. Les figures IV.7 a, b, c et d présentent, pour l'engrenage de référence, les résultats obtenus pour l'engrenage à corps de roue rigides ou élastiques. Les déformations hertziennes contribuent de façon significative à l'erreur statique de transmission sous charge. L'ordre de grandeur de ces déformations correspond à celui des déformations en flexion des dents d'engrenage.

Les déformations hertziennes se traduisent par une diminution de la valeur moyenne de la raideur d'engrènement et une modification de la fluctuation de cette raideur. Pour l'engrenage élastique, la raideur moyenne passe de 418 à 333 N/μm (-25%) tandis que pour l'engrenage à corps de roue rigides, elle passe de 1397 à 778 N/m (-80%). L'influence des déformations hertziennes est d'autant plus grande que le couple transmis est faible. En définitive, négliger ces déformations conduit donc à une estimation erronée de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement.

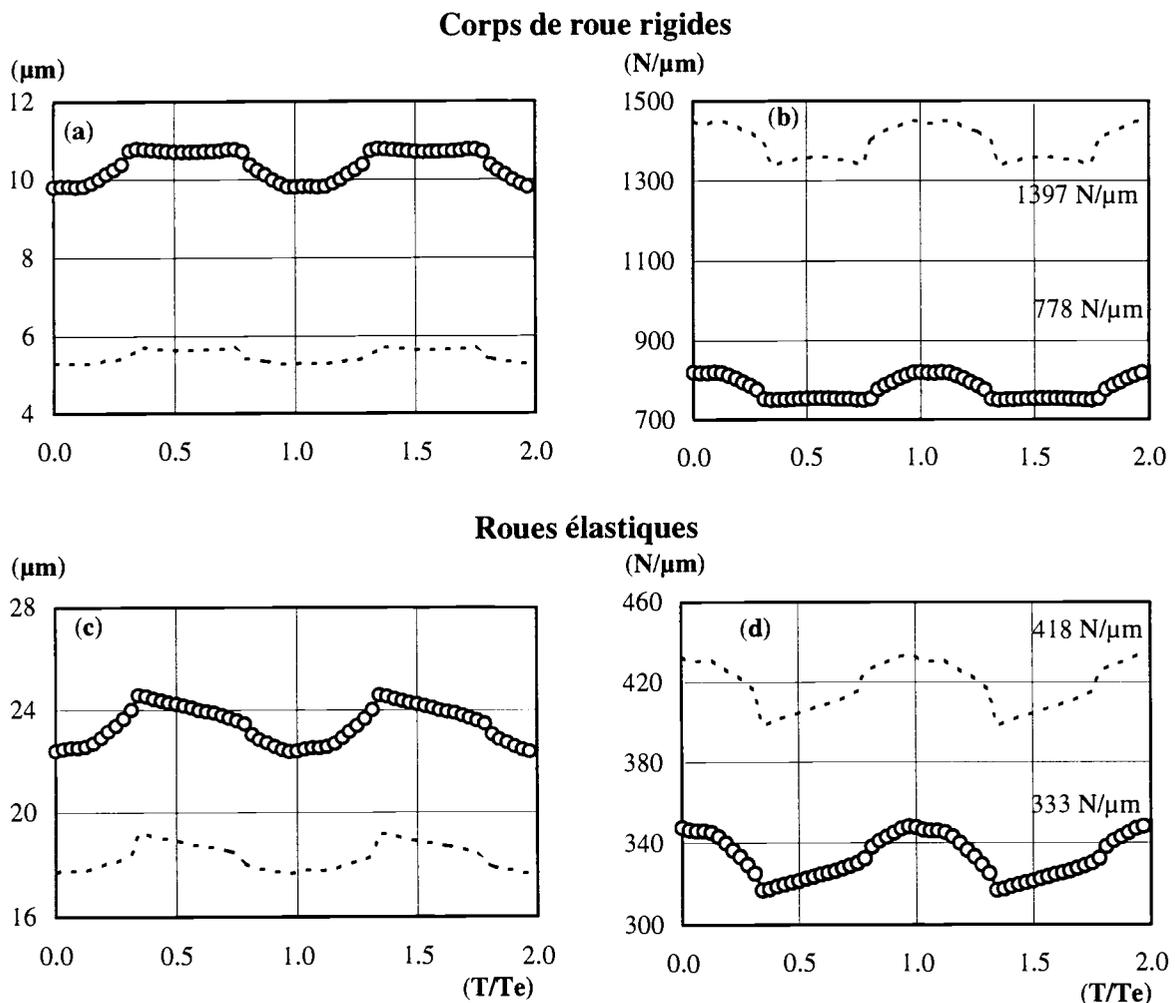


Figure IV.7. Evolution temporelle de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement de l'engrenage à corps de roue rigides ou élastiques. Déformations hertziennes incluses (ooooooo) et exclues (-----).

IV.3 Introduction des corrections de denture

IV.3.1 Introduction

La recherche d'une entrée progressive des dents dans la zone de contact, d'une répartition de charge le long de la ligne de contact optimale et d'une erreur statique de transmission présentant des fluctuations les plus faibles possibles conduit à modifier volontairement la forme des dents en leur apportant des corrections. Ces corrections correspondent à des enlèvements de matière dans la direction du profil ou dans la direction longitudinale (voir le paragraphe II.1.1).

Après avoir analysé l'influence de chaque type de corrections élémentaires, nous présentons, pour l'engrenage à corps de roue élastique corrigé, les évolutions de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement, ainsi que la répartition de la charge le long de la ligne de contact. Ensuite, l'influence de la charge extérieure sur les valeurs moyennes et les amplitudes crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement est analysée, de même que l'influence du modèle de calcul retenu sur la définition des corrections optimales.

IV.3.2 Influence des corrections élémentaires

Les résultats présentés ci-dessous permettent de mesurer l'effet de chaque type de correction de denture élémentaire sur l'erreur statique de transmission sous charge. Ces résultats correspondent à un couple de 1300 Nm appliqué sur le pignon 35 dents. Il faut souligner le fait que le couple de charge est toujours suffisant pour que le contact s'établisse sur toute la ligne de contact potentielle. Les corrections de denture apportées ne modifient donc pas la longueur totale de contact.

Nous avons introduit (1) une correction de profil longue en tête de dent, de forme parabolique et d'amplitude égale à 20 μm , (2) un bombé parabolique de 20 μm sur chaque roue dentée et (3) une correction d'hélice qui varie de façon linéaire de 0 à 20 μm sur la largeur de la roue menée. Le profil de la dent est corrigé à partir du cercle primitif jusqu'à la tête de dent.

La figure IV.8 montre les effets de chacune de ces corrections élémentaires sur l'évolution de l'erreur statique de transmission sous charge. Les échelles utilisées pour chaque courbe sont différentes pour mettre en évidence l'influence des corrections sur la forme de la fluctuation de l'erreur statique de transmission sous charge.

On peut souligner que n'importe quel type de correction élémentaire conduit à une augmentation de la valeur moyenne de l'erreur statique de transmission sous charge.

Les corrections de profil ont pour fonction de limiter les chocs lorsqu'une nouvelle dent entre dans la zone de contact et de permettre une mise en charge progressive de cette dent. Contrairement aux engrenages à denture droite, la réduction des fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge des engrenages à denture hélicoïdale est généralement obtenue grâce à des corrections longitudinales. Néanmoins, comme le montre la figure IV.8b et contrairement à ce qu'affirme Sundaresan (1991), les corrections de profil que nous avons introduites modifient les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge. En particulier, elles conduisent à une diminution de l'amplitude crête à crête de cette erreur de l'ordre de 25%.

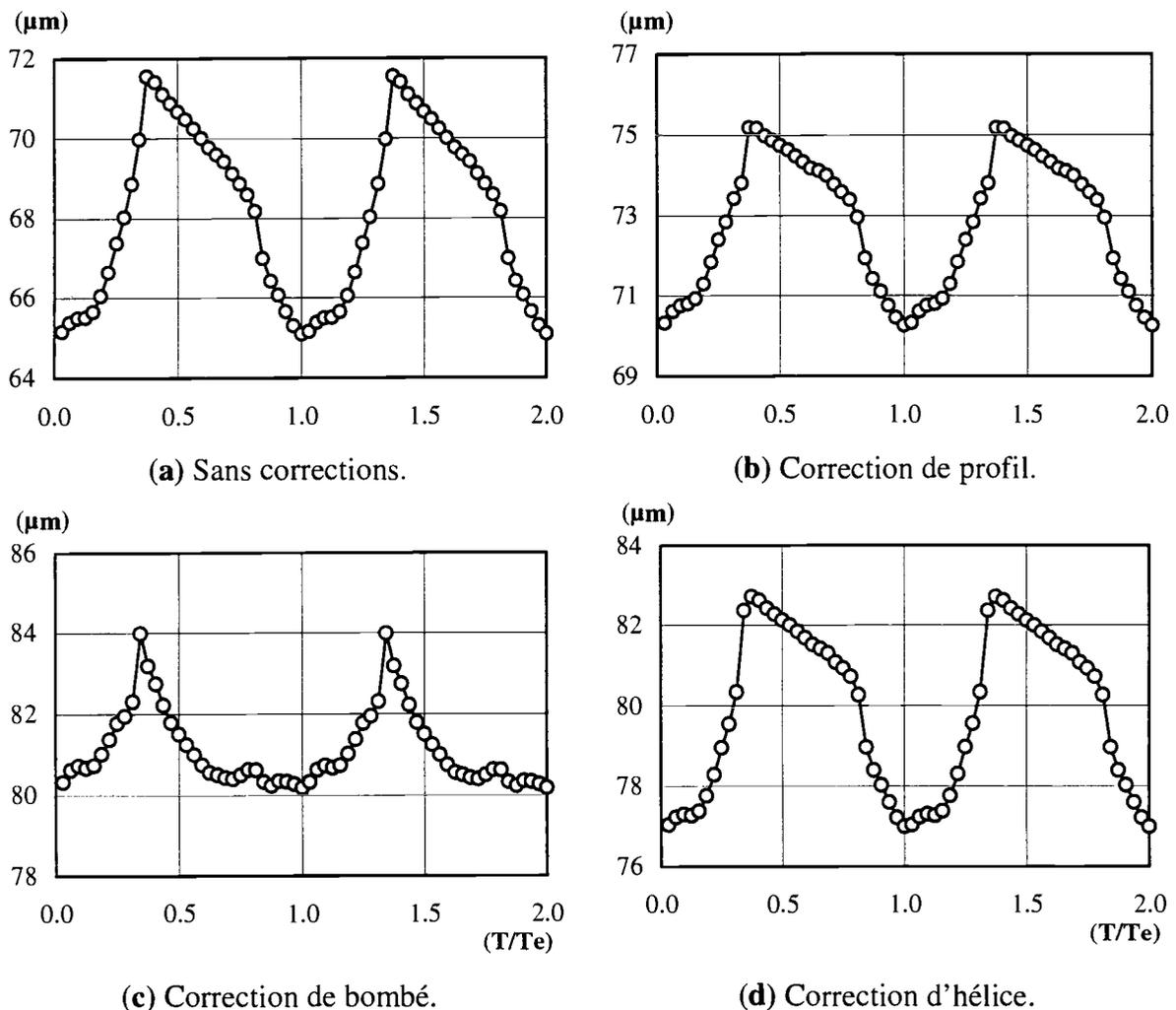


Figure IV.8. Evolution temporelle de l'erreur statique de transmission sous charge pour une durée correspondant à deux fois la période d'engrènement ($x=0$ à 2).

Les corrections de bombé diminuent l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge de l'ordre de 50%. En effet, lorsque le nombre de dents en prise instantané est grand, l'erreur statique de transmission est petite mais elle augmente sensiblement avec les corrections de bombé. Lorsque le nombre de dents en prise instantané est faible, l'erreur statique de transmission est grande mais la contribution des corrections de bombé est faible.

Pour des engrenages à denture droite, le même type de résultats est obtenu avec des corrections de profil.

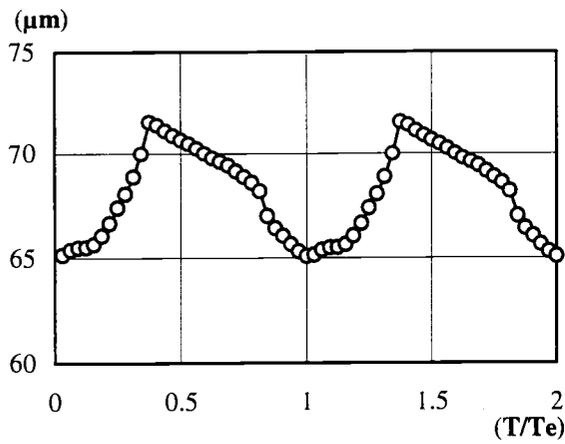
Comme nous l'avons vu précédemment, l'erreur statique de transmission sous charge de l'engrenage non corrigé diminue entre $x=0.375$ et $x=0.781$, alors que la longueur totale de la ligne de contact reste constante dans cet intervalle. Cette variation, induite par les déformations élastiques du voile de la roue menée, entraîne une concentration de la charge sur le bord des dents en prise (voir figure IV.10). La correction d'hélice que nous avons introduite a pour fonction de compenser les déformations du voile. L'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge diminue de l'ordre de 15%. Bien sûr, le sens de la correction d'hélice est important. Une modification de ce sens conduirait à une augmentation de la fluctuation de l'erreur statique de transmission sous charge et à une plus grande concentration de la charge sur le bord de la dent.

IV.3.3 Denture corrigée

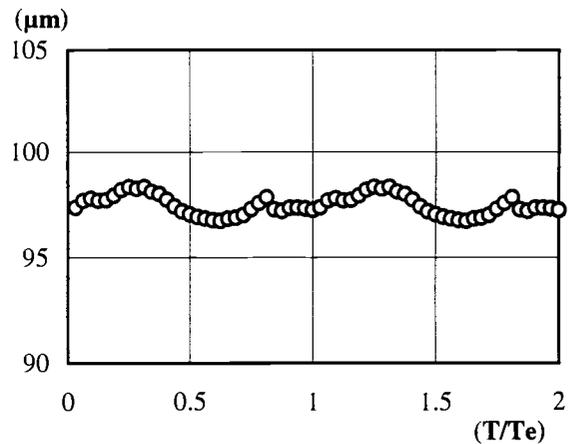
a) Erreur statique de transmission sous charge

Comme le montre la figure IV.9, la superposition des corrections élémentaires que nous avons présentées dans le paragraphe précédent permet de diminuer, pour un couple moteur de 1300 Nm, les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge. L'amplitude crête à crête est de $1.5 \mu\text{m}$ contre $6.5 \mu\text{m}$ pour la denture non corrigée. Les corrections apportées ne correspondent toutefois pas aux corrections optimales puisqu'il est théoriquement possible, pour un engrenage ne présentant pas de défauts de géométrie soumis à une charge donnée, d'annuler les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge.

A titre d'illustration, la figure IV.10 présente la répartition de la charge le long de la ligne de contact pour l'abscisse $x=0.60$. La figure IV.11 présente l'évolution de la répartition de charge entre les différents couples de dents en prise en fonction de la position de la roue menante. (L'abscisse $x=0$ correspond à la présence de toute la dent (1) dans la zone de contact. La dent (0) correspond à la dent précédente (elle quitte progressivement le contact). La dent (2) correspond à la dent suivante (elle n'appartient que partiellement au contact lorsque $x=0$ et a pris la position initiale de la dent (1) lorsque $x=1$). La dent (3) correspond à la dent qui suit la dent (2).) Cette figure montre que les corrections permettent un chargement plus progressif des dents. Par contre, le maximum de l'effort global s'exerçant sur une même dent a augmenté.

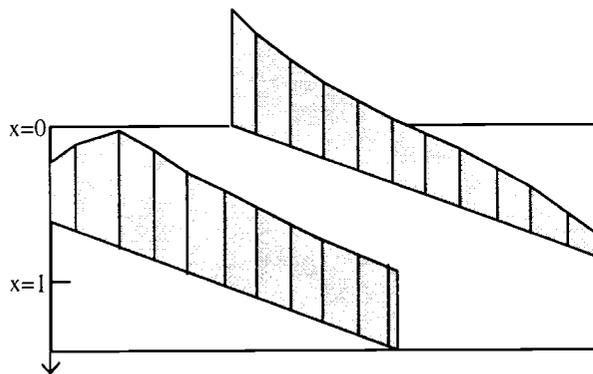


(a) Sans corrections.

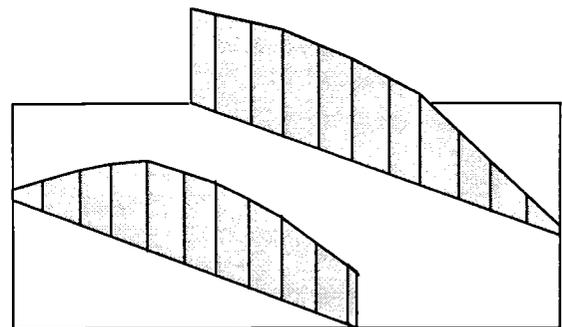


(b) Denture corrigée.

Figure IV.9. Evolution temporelle de l'erreur statique de transmission sous charge.

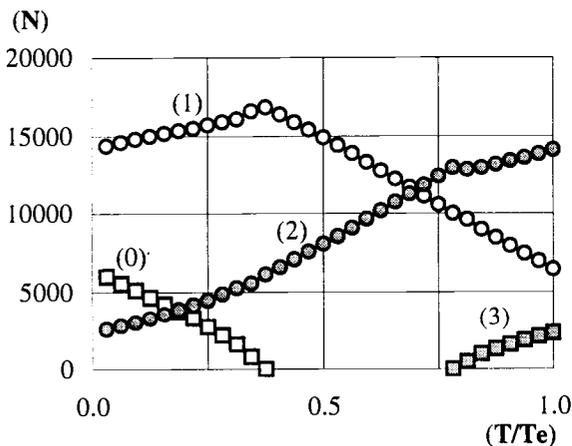


(a) Sans corrections.

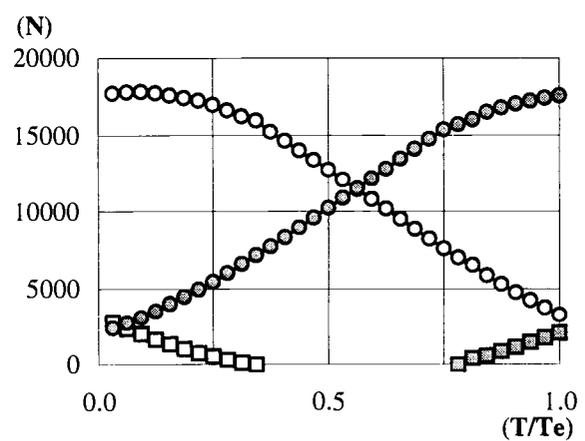


(b) Denture corrigée.

Figure IV.10. Répartition de la charge le long de la ligne de contact pour $x=0.60$.



(a) Sans corrections.



(b) Denture corrigée.

Figure IV.11. Evolution temporelle de la répartition de charge entre les différents couples de dents en prise en fonction de la position de la roue menante.

b) Fluctuation de la raideur d'engrènement

La figure IV.12 présente l'évolution de la raideur d'engrènement de l'engrenage corrigé. Les corrections de denture ne modifient que très peu l'évolution de la raideur d'engrènement, que ce soit du point de vue de sa valeur moyenne ou du point de vue de ses fluctuations.

Rappelons que cette raideur correspond à la raideur tangente linéarisée autour d'une position d'équilibre statique. La figure III.7 montre que, pour les faibles charges, les dents entrent progressivement en contact, la non-linéarité géométrique induit une forte non-linéarité de l'erreur statique de transmission sous charge. Par contre, lorsque le couple de charge est suffisant pour que le contact s'établisse sur toute la longueur totale de contact potentielle, cette évolution devient quasi-linéaire. Comme le montre la figure VI.6a, la raideur d'engrènement devient presque indépendante de la charge puisque les non-linéarités de l'erreur statique de transmission ne sont plus induites que par les déformations hertziennes.

En définitive, les corrections qui permettent de minimiser l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge ne correspondent pas aux corrections qui permettent de minimiser les fluctuations de la raideur d'engrènement.

Les auteurs qui définissent la raideur comme le rapport entre l'effort appliqué et le rapprochement des dents en prise (raideur "proportionnelle") aboutissent à des conclusions contraires. Selon eux, une optimisation des corrections de denture qui conduit à une réduction des fluctuations de l'erreur de transmission entraîne forcément une réduction simultanée des fluctuations de la raideur d'engrènement.

Les figures IV.12a et b montrent que cette définition de la raideur d'engrènement conduit à une estimation erronée de sa valeur moyenne (220 N/μm contre 320 N/μm). En effet, si pour un engrènement non corrigé ne présentant pas de défauts de géométrie, la non-linéarité du rapprochement avec la charge appliquée est induite par les seules déformations hertziennes, il n'en est pas de même pour un engrènement corrigé. La non-linéarité géométrique devient alors prépondérante. La raideur tangente linéarisée autour d'une position d'équilibre statique et la raideur "proportionnelle" correspondent alors à deux grandeurs très différentes l'une de l'autre.

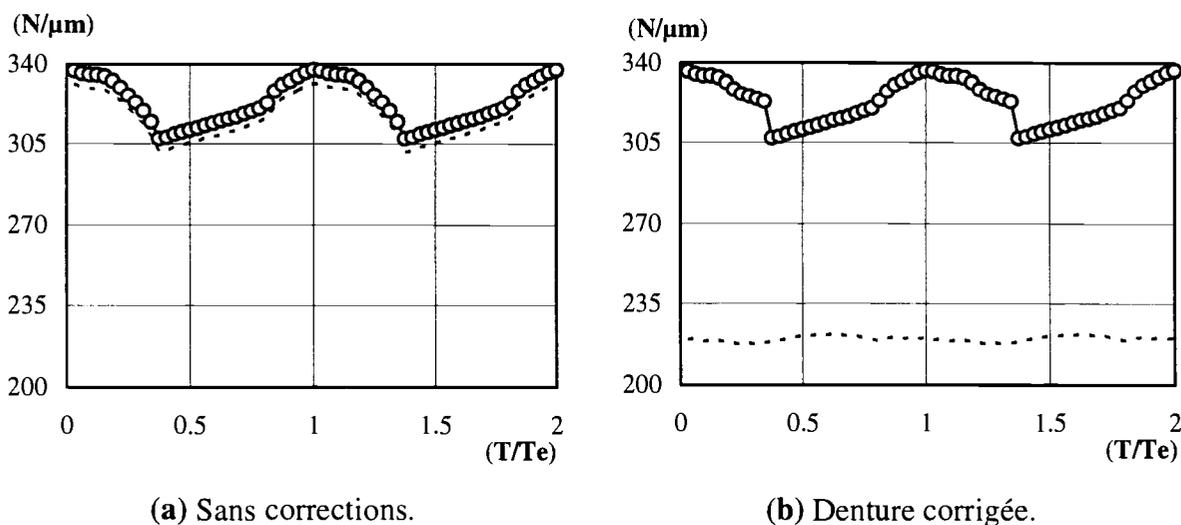


Figure IV.12. Evolution de la raideur d'engrènement. Raideur tangente linéarisée autour de la position d'équilibre statique (ooooooo) et raideur "proportionnelle" (-----).

c) Influence du couple transmis

La figure IV.13a présente l'évolution de la valeur moyenne de l'erreur de transmission en fonction du couple transmis. La figure IV.13b présente l'évolution de l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge en fonction du couple transmis. L'erreur statique de transmission hors charge (couple moteur nul) de l'engrenage corrigé a une amplitude crête à crête de $2.8 \mu\text{m}$. Dans un premier temps, cette amplitude croît jusqu'à $5 \mu\text{m}$ lorsque le couple moteur augmente ($C=400 \text{ Nm}$). Ensuite, elle décroît jusqu'à $C=1400 \text{ Nm}$ pour atteindre sa valeur minimale ($1.5 \mu\text{m}$). Ce couple correspond à celui pour lequel les corrections de denture ont été calculées. Au-delà de ce couple transmis, l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission croît avec la charge.

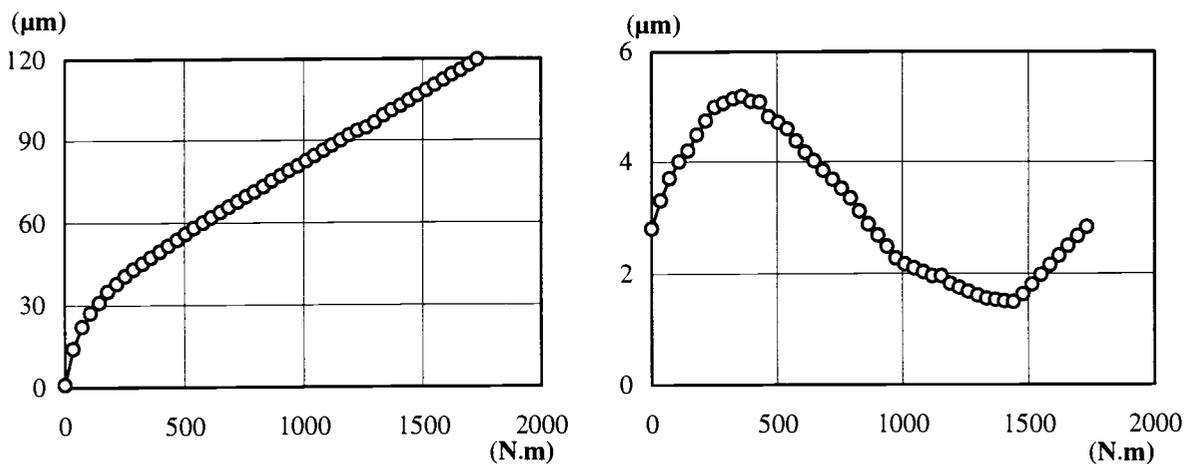


Figure IV.13. Evolution de la valeur moyenne (a) et de l'amplitude crête à crête (b) de l'erreur statique de transmission sous charge avec la charge.

d) remarques

Les simulations numériques que nous avons effectuées nous conduisent à formuler un certain nombre de remarques sur la définition des corrections optimales.

a) Au même titre que le couple moteur, la forme du corps des roues a une grande influence sur les déformations élastostatiques de l'engrenage. En particulier, les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge d'un engrenage présentant des voiles minces sont sensiblement différentes de celles d'un engrenage à corps de roue supposés rigides. Pour un couple moteur donné, la recherche des corrections de denture optimales nécessite donc l'utilisation d'un modèle qui permet une estimation précise des déformations élastostatiques des engrenages.

b) Les déformations statiques de l'ensemble de la transmission (lignes d'arbres, roulement et carter) induites par l'application d'un couple moteur peuvent modifier les positions relatives du pignon et de la roue menée et introduire une erreur de parallélisme entre ces roues. Cette erreur peut être compensée par une correction d'hélice supplémentaire qui vient

s'ajouter ou se soustraire à la correction permettant de compenser les déformations élastiques du voile de la roue menée. Par ailleurs, la fabrication et le montage des roues dentées conduisent à une nouvelle erreur de parallélisme. L'amplitude tout comme le signe de cette erreur est a priori inconnue. Par définition, elle est indépendante de la charge appliquée mais, pour des engrenages de bonne qualité, elle est généralement inférieure à celle induite par les déformations élastiques. Elle peut entraîner une augmentation de la fluctuation de l'erreur statique de transmission sous charge. Une correction de bombé suffisante permet d'éviter que les portées soient trop réduites et que la charge soit concentrée sur les bords des dents en prise.

c) Si l'engrenage est réversible, il faut envisager de corriger les deux flancs de chaque dent. Pour un engrenage sans défauts de géométrie, les corrections sur les deux flancs auront la même amplitude si les corps de roue sont symétriques par rapport au plan médian de l'engrenage. Par contre, si une roue possède un voile dissymétrique, les déformations élastostatiques d'un engrenage à denture hélicoïdale associées à chaque sens de rotation sont différentes. Il devient nécessaire de calculer indépendamment ces déformations, ce que ne permettent pas les modèles qui ne prennent pas en compte les couplages élastiques entre les corps de roue et les dents en prise.

V- Conclusion

L'objectif de ce chapitre était la détermination des sources d'excitation vibratoire d'une transmission par engrenages générée par l'engrènement.

Nous avons calculé les déformations élastostatiques des dents à partir d'une approche "éléments finis" tridimensionnels et d'une description exacte de la géométrie des engrenages. Ceci nous a permis de développer une méthode de calcul de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement. Nous avons défini l'erreur de transmission comme le rapprochement linéaire des dents en prise dans le plan d'action, exprimé selon la normale aux surfaces actives de ces dents. Nous avons défini la raideur d'engrènement comme la raideur tangente, linéarisée autour d'une position d'équilibre statique, de la courbe charge appliquée / erreur statique de transmission sous charge. La méthode s'applique aux engrenages à denture droite ou hélicoïdale, présentant éventuellement des voiles minces et des écarts de forme.

Les nombreuses simulations numériques effectuées nous ont permis de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes physiques qui sont en partie ignorés par les autres modèles de calcul. Tout d'abord, il est nécessaire de prendre en compte la géométrie exacte de l'engrenage pour bien prédire ses déformations. Ensuite, les interactions entre les différents couples de dents en prise et les couplages entre les corps de roue et les dentures augmentent considérablement la valeur moyenne de l'erreur statique de transmission sous charge et diminuent celle de la raideur d'engrènement. Ces couplages élastiques modifient la forme des fluctuations de ces grandeurs : les déformations du voile des roues peuvent ainsi conduire à une variation importante de l'erreur statique de transmission sous charge d'un engrenage sans écarts de forme, même lorsque la longueur totale de la ligne de contact reste constante au cours de l'engrènement. Enfin, si une roue présente un voile dissymétrique, les déformations élastostatiques et l'erreur statique de transmission sous charge d'un engrenage à denture hélicoïdale sans écarts de forme sont différentes selon le sens de rotation considéré.

Ces différentes remarques justifient les choix que nous avons fait lors du développement du modèle éléments finis 3D qui nous a permis de calculer les déformations élastiques de chaque roue dentée.

Nous avons analysé l'effet des corrections de denture. Les corrections qui permettent de minimiser l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge ne correspondent pas aux corrections qui permettent de minimiser les fluctuations de la raideur d'engrènement. Ces corrections peuvent être non symétriques, même pour un engrenage sans défauts de géométrie : la correction d'hélice permet alors de compenser les déformations élastiques des corps de roue. D'autre part, les corrections optimales évoluent avec le niveau de l'erreur statique de transmission sous charge. Elles sont donc dépendantes du couple moteur

transmis, de la géométrie des roues (les corrections optimales d'un engrenage à corps de roue rigides diffèrent de celles d'un engrenage présentant des voiles minces), mais aussi des méthodes employées et des hypothèses retenues pour calculer les déformations élastostatiques des dents en prise.

Nous n'avons pas présenté l'influence des différents défauts de géométrie sur l'erreur statique de transmission sous charge. Ces défauts peuvent être intégrés dans le calcul de la même façon que les corrections de denture. Toutefois, si l'engrenage présente des défauts "basse fréquence" (fréquence de rotation des lignes d'arbres) couplés avec des défauts "haute fréquence" (fréquence d'engrènement), il est nécessaire de calculer l'évolution de l'erreur statique de transmission sous charge sur une période correspondant à la période fondamentale du système. Cette période peut être beaucoup plus grande que la période d'engrènement. L'évaluation de l'erreur statique de transmission sous charge peut alors demander des temps de calcul très grands. Nous considérons donc que les défauts "basse fréquence" sont découplés des défauts "haute fréquence" et nous intégrons leur contribution dans le spectre d'excitation sous la forme de raies supplémentaires à la fréquence de rotation des lignes d'arbres et ses harmoniques.

En définitive, la détermination de l'erreur statique de transmission et de la raideur d'engrènement et la recherche des corrections qui minimisent les fluctuations de ces grandeurs doit s'appuyer sur des méthodes qui intègrent l'ensemble des contributions possibles.

Les outils numériques que nous avons développés nous permettent de connaître, à travers le calcul de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement, les caractéristiques de l'excitation vibratoire des transmissions par engrenages. On peut donc désormais envisager de calculer la réponse dynamique des transmissions aux excitations générées par l'engrènement.

Chapitre 2

CALCUL DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES

I- Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire une méthode permettant de calculer la réponse dynamique d'une transmission par engrenages excitée par l'erreur statique de transmission sous charge.

D'abord, nous recensons les différents modèles dynamiques utilisés pour décrire les vibrations des engrenages. Après avoir analysé les avantages et inconvénients respectifs de ces modèles et des méthodes de résolution exploitées pour résoudre les équations de mouvement qui leur sont associées, nous présentons les différents types de discrétisation retenus pour décrire les transmissions par engrenages.

Ensuite, nous présentons la méthode de calcul que nous avons adoptée. Elle est basée sur une discrétisation, par la méthode des éléments finis, de l'ensemble des composantes de la transmission (engrenage, lignes d'arbres, roulements et carter). Cette démarche a pour but non plus d'étudier le comportement de l'engrenage isolé de son environnement direct mais de permettre l'analyse des interactions dynamiques existant entre l'engrenage, les lignes d'arbres, les roulements et le carter. Le comportement dynamique de la transmission par engrenages est décrit par un système d'équations linéaires à coefficients périodiques qui est résolu par une méthode spectrale et itérative (Perret-Liaudet 1992, 1996).

II- Bibliographie

II.1 Modèles dynamiques

De nombreux auteurs ont consacré leurs travaux à la modélisation dynamique des transmissions par engrenages. Plusieurs études bibliographiques font l'inventaire de ces travaux (Özgüven et Houser 1988, Rémond, Velez et Sabot 1992). Nous proposons de classer les démarches théoriques qui sont le plus souvent adoptées en dégagant les avantages et inconvénients respectifs de chacune d'elles.

La raideur d'engrènement, dont la fluctuation constitue l'une des origines de l'excitation vibratoire des transmissions par engrenages, est une caractéristique mécanique a priori non linéaire et non constante au cours du temps. Les différentes démarches se distinguent les unes des autres par la manière dont sont introduites les caractéristiques élastiques de la transmission. Par souci de simplicité et sans nuire à la généralité du problème, nous considérons l'équation de mouvement d'un système à un seul degré de liberté.

II.1.1 Modèles linéaires à coefficients constants

En l'absence de sources d'excitation externes, l'équation matricielle qui gouverne la réponse non amortie d'une transmission par engrenages s'écrit, pour ce type de modèle, de la façon suivante :

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{k}_m \mathbf{x}(t) = \mathbf{k}_m \mathbf{x}_s(t) \quad (1)$$

Dans cette équation, la raideur du système est considérée comme constante. Le couplage élastique entre les roues dentées est introduit via la raideur moyenne d'engrènement k_m . Les termes excitateurs sont introduits sous la forme d'un terme d'excitation extérieure, via l'erreur statique de transmission sous charge $x_s(t)$. Ces caractéristiques sont évaluées à partir d'un calcul statique préalable ou éventuellement mesurées.

Ce modèle simplifié présente l'avantage d'être directement généralisable à un système à grand nombre de degrés de liberté. La résolution des équations de mouvement peut s'appuyer sur une analyse modale de la transmission et peut s'effectuer grâce aux techniques classiques utilisées pour les problèmes de vibrations linéaires des structures.

Par contre, un tel modèle ne permet pas de prendre en compte les phénomènes paramétriques et non linéaires associés à la fluctuation de la raideur d'engrènement.

Compte-tenu de ces remarques, le domaine de validité de ce type de modèle correspond aux engrenages fortement chargés présentant des faibles fluctuations de raideur et soumis à des niveaux d'excitations modérés.

II.1.2 Modèles linéaires à coefficients périodiques (système paramétrique)

De nombreux auteurs dont Gregory (1963) et Opitz (1967) qui utilisent des modèles élémentaires, ainsi que Kubo (1978, 1986), Umezawa (1984) et Küçükay (1984) décrivent le comportement dynamique des engrenages en introduisant la fluctuation périodique de la raideur d'engrènement tout en restant dans le domaine linéaire.

En l'absence de sources d'excitation externes, l'équation matricielle qui gouverne la réponse non amortie du système s'écrit alors :

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{k}(\mathbf{t}) \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{k}(\mathbf{t}) \mathbf{x}_s(\mathbf{t}) \quad (2)$$

Les différents termes de cette équation de type Matthieu-Hill sont généralement calculés, pour le couple de fonctionnement, en régime quasi-statique. La valeur moyenne de la raideur d'engrènement, sa fluctuation et l'erreur statique de transmission sous charge $\mathbf{x}_s(\mathbf{t})$ dépendent alors du couple moyen transmis par le moteur.

Cette équation non homogène a pour principal avantage de prendre en compte les phénomènes paramétriques associés au fonctionnement des transmissions par engrenages (instabilités, réponse multi-fréquentielle, résonances paramétriques) Les principales caractéristiques des solutions de ce type d'équations sont les suivantes (Bolotin 1964, Nayfeh 1979) :

- Les solutions de l'équation homogène (vibrations libres) sont à l'origine de comportements instables tandis que les solutions particulières (vibrations forcées) révèlent l'existence de résonances paramétriques. Au contraire des phénomènes de résonances paramétriques, les instabilités n'ont jamais été mises en évidence expérimentalement. Elles sont susceptibles d'apparaître uniquement pour des engrenages droits très peu amortis et ayant un rapport de conduite inférieur à 2. En effet, Bolotin (1964) a montré que les zones d'instabilités disparaissaient pour de faibles amplitudes de la fluctuation de la raideur d'engrènement et pour des amortissements relativement importants. Toujours pour des engrenages droits peu amortis, l'augmentation de l'amplitude du mouvement avec le temps, induite par l'apparition éventuelle d'un comportement instable, est limitée physiquement par la perte de contact entre les dents.

- La réponse du système à une excitation harmonique est périodique. Elle présente donc des raies absentes du spectre d'excitation. Ainsi, lorsque l'excitation présente des raies à basse fréquence (induites par exemple par un défaut d'excentricité) et à haute fréquence, la réponse dynamique de l'engrenage présente non seulement des raies à ces fréquences, mais aussi des raies latérales qui apparaissent autour de la fréquence d'engrènement et de ses harmoniques. Elle est donc enrichie en fréquence par rapport à l'excitation. Les phénomènes paramétriques de modulations d'amplitude qui en résultent sont caractéristiques des transmissions par engrenages. Ils sont illustrés sur la figure II.1.

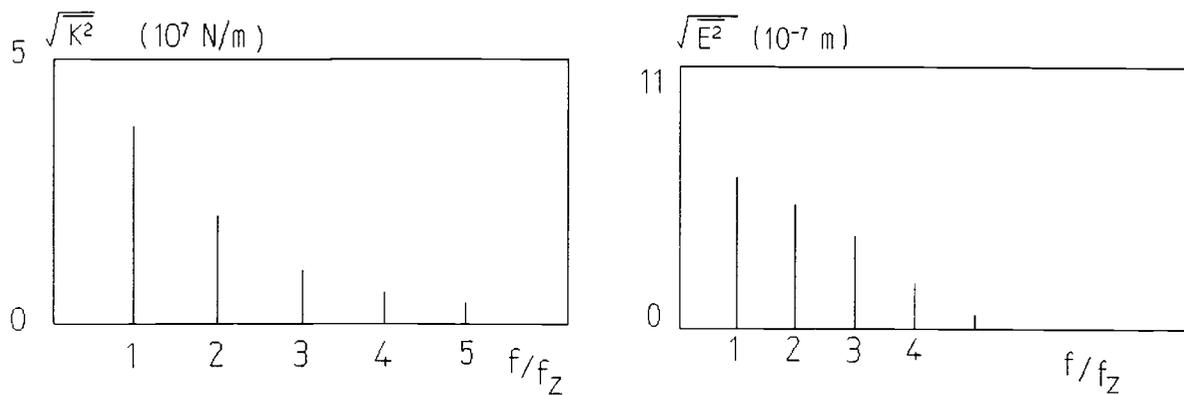


Figure II.1a. Spectres de la fluctuation de la raideur d'engrènement et de l'erreur statique de transmission sous charge sans défaut d'excentricité (Perret-Liaudet 1992).

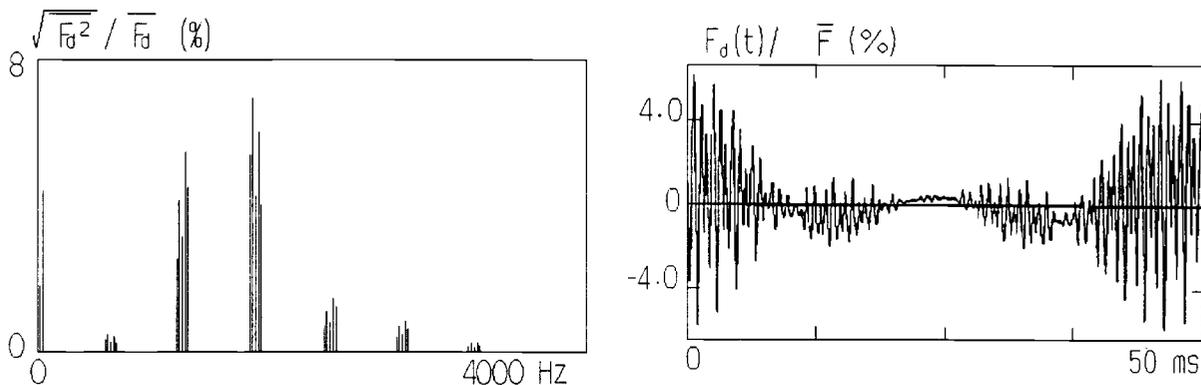


Figure II.1b. Spectre et évolution temporelle de l'effort dynamique de denture. Phénomènes de modulations d'amplitude induit par un défaut d'excentricité basse fréquence (Perret-Liaudet 1992).

La résolution des équations de mouvement de systèmes linéaires s'appuie généralement sur une décomposition de la solution dans la base des modes propres du système. Pour les systèmes à coefficients variables, la base modale est définie à partir des caractéristiques élastiques moyennes de la transmission.

Comme nous le verrons ultérieurement, il est possible de calculer la réponse d'un système paramétrique à grand nombre de degrés de liberté en utilisant une méthode spectrale et itérative (Perret-Liaudet 1992, 1996).

Le domaine de validité de ce type de modèle correspond aux engrenages fortement chargés et soumis à des niveaux d'excitations modérés, c'est à dire en l'absence de pertes de contact entre les dents en prise et si le système s'écarte peu de la position correspondant à l'équilibre statique.

II.1.3 Modèles non linéaires

Plusieurs auteurs ont considéré des modèles non linéaires. Dans tous les cas, les caractéristiques de ces modèles sont calculées préalablement à partir d'approches statiques. Les non-linéarités concernent la raideur d'engrènement proprement dite ou le jeu entre-dents introduit au niveau de l'engrenage.

En l'absence de sources d'excitation externes, l'équation matricielle qui gouverne la réponse du système s'écrit :

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{F}_d(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{t}) = \mathbf{F} \quad (3)$$

L'utilisation de ce type d'équations permet de prendre en compte les phénomènes non linéaires qui peuvent apparaître lors du fonctionnement des transmissions par engrenages peu ou pas chargées et soumises à des niveaux d'excitations importants. On observe alors une évolution de la raideur d'engrènement avec la charge instantanée en raison de :

- la (faible) non-linéarité des contacts hertziens,
- l'évolution de l'aire de contact (pour des engrenages peu chargés présentant des écarts de géométrie, les dents ne sont que partiellement en contact : on observe alors une évolution de l'aire de contact avec la charge dynamique).

De plus, ce type d'équation permet d'étudier les phénomènes de chocs induits par des pertes de contact entre dentures (Singh 1989, Kahraman 1990, Pfeiffer 1991, 1996). Le contact entre les dents en prise est alors représenté par une raideur non linéaire qui devient nulle lorsque le contact est rompu.

La complexité des phénomènes étudiés et des équations à résoudre est telle que, dans tous les cas, les modèles non linéaires ne sont pas adaptés aux systèmes à grand nombre de degrés de liberté. En effet, pour ce type de systèmes, la valeur moyenne de la matrice de raideur varie avec la réponse dynamique du système; la recherche d'une base modale sur laquelle on pourrait décomposer la réponse du système devient impossible. Seul une méthode de résolution temporelle associée à une actualisation à chaque pas de temps de la valeur des paramètres permet de résoudre les équations de mouvement. Pratiquement, les systèmes étudiés possèdent rarement plus de 4 degrés de liberté.

II.1.4 Mécanismes d'amortissement

La dissipation d'énergie dans les transmissions par engrenages a des origines très diverses. Les sources et les propriétés de l'amortissement sont, pour la plupart, mal identifiées. En plus des sources d'amortissement présentes dans les structures classiques (dissipation dans le matériau, dissipation dans les liaisons, rayonnement acoustique ...), une part importante de l'énergie est dissipée au niveau des contacts hertziens présents dans les roulements et au

niveau des dentures. A l'amortissement interne des corps en contact, viennent s'ajouter, au niveau de chaque contact :

- un amortissement dû au travail des forces de frottements induites par le glissement entre les surfaces en contact,
- l'amortissement provenant de micro-glissements induits par l'existence d'une charge dynamique tangentielle,
- l'amortissement provenant du mécanisme cyclique d'aspiration et de refoulement du fluide environnant le contact ("fluid-pumping") induit par la charge dynamique normale,
- l'amortissement induit par le rayonnement acoustique des surfaces vibrantes.

Dans les modèles linéaires, l'amortissement est souvent introduit a posteriori sous la forme d'un taux d'amortissement visqueux équivalent associé à chaque mode propre du système. Cette hypothèse facilite la résolution des équations du mouvement mais elle est sans doute peu représentative des mécanismes réels de dissipation d'énergie. Les taux d'amortissement introduits par les différents auteurs varient dans des plages considérables : 0.5 % (Kasuba 1981), 1.3 à 2.6 % (Gregory 1963), 2.5 % (Kohler 1959), 4 % (Blankenship 1995), 5 % (Perret-Liaudet 1992), 7 % (Umezawa 1984, 1991, 1992), 10 % (Özgüven 1992), 17 % (Ichimaru 1974).

A partir d'une analyse modale, Dussac (1996) détermine les modes propres de la transmission pour lesquels une part importante de l'énergie de déformation est contenue dans la raideur d'engrènement. Il applique un taux d'amortissement visqueux équivalent distinct pour chaque mode :

$$\zeta = \zeta_s + \alpha \cdot \zeta_m$$

- avec
- ζ_s amortissement dans la structure (entre 0.5 et 1 %),
 - ζ_m amortissement au niveau du contact entre les dents en prise (entre 5 et 10 %),
 - α taux d'énergie de déformation contenue dans la raideur d'engrènement.

Krempf (1993, 1994) a montré que l'amortissement total dans un contact hertzien de type sphère-plan excité par une charge harmonique purement normale pouvait être représenté par un taux d'amortissement visqueux équivalent. Sabot (1996) a analysé la nature de l'amortissement dissipé dans ce type de contact et a montré que le taux d'amortissement était proportionnel à la viscosité dynamique du fluide environnant. Ce taux d'amortissement, qui évolue avec la charge statique, est de l'ordre de 1% pour un contact unique représentatif des contacts présents dans les transmissions.

II.2 Discrétisation de la transmission

II.2.1 Modèles à un degré de liberté

Un grand nombre des travaux consacrés au comportement dynamique des engrenages a été réalisé à l'aide d'un modèle élémentaire de torsion pure à 1 seul degré de liberté. Les deux roues sont représentées par deux inerties en rotation qui sont reliées par une raideur en torsion. Ces modèles ont permis de calculer l'erreur dynamique de transmission exprimée sous forme d'un écart angulaire, ainsi que les surcharges dynamiques s'exerçant sur les dentures. Différents auteurs ont aussi étudié l'effet des paramètres de conception et des écarts de géométrie.

II.2.2 Modèles à paramètres concentrés

Les premiers modèles prenant en compte les lignes d'arbres sont des modèles à paramètres concentrés. Souvent, seuls les degrés de liberté en torsion sont conservés en raison des difficultés rencontrées lors de la résolution des équations de mouvement à coefficients variables. Les différents auteurs supposent qu'il n'existe pas de couplage entre les différents types de vibrations (torsion, flexion et mouvement axial). Ces modèles semblent bien adaptés pour l'étude des surcharges dynamiques de dispositifs à arbres courts et support rigide. Velex (Rémond et al. 1992) souligne par ailleurs que, au voisinage des fréquences critiques pour les dentures, les vibrations de torsion contribuent de façon majoritaire aux déformations des engrenages, ce qui justifie selon lui l'utilisation des modèles de torsion pure.

Özgüven (1988) signale que quelques auteurs ont intégré les vibrations de flexion des arbres et des paliers au sein de modèles à paramètres concentrés à faible nombre de degrés de liberté.

Özgüven souligne aussi la nécessité de mettre en place des modèles dynamiques qui intègrent correctement l'ensemble des déformations des lignes d'arbres et des paliers. Iida (1980) a notamment montré que, les couplages élastiques entre les déformations de torsion et les déformations de flexion sont importants et que, même si les déformations de torsion sont dominantes, les fréquences propres d'une transmission par engrenages sont très affectées par les déformations de flexion des lignes d'arbres.

II.2.3 Modèles éléments finis

Depuis une quinzaine d'années, l'utilisation des éléments finis a permis une modélisation des lignes d'arbres et des paliers avec prise en compte des déformations de torsion, de flexion et de traction-compression. Cette technique de discrétisation a été utilisée par Neriya (1985, 1988), Kahraman (1989), Özgüven (1992) et Perret-Liaudet (1992).

a) Lignes d'arbres

Les roues dentées sont modélisées par des cylindres rigides et leurs mouvements sont décrits par 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations). Les déformations dynamiques des corps de roue ne sont donc pas prises en compte dans le modèle. Il s'avère que les premières fréquences propres de corps de roue peuvent être excitées par la fréquence d'engrènement et ses harmoniques (quelques kHz), notamment pour des roues de grande taille présentant un voile mince (Drago 1981). Par ailleurs, Vexex (Rémond et al. 1992) souligne que pour des engrenages larges, un seul degré de liberté est insuffisant pour décrire le comportement en torsion de la roue dentée. Toutefois, d'après la définition d'un engrenage large fournie par Maatar (1995) (largeur de denture/diamètre supérieur à l'unité), seules quelques applications très particulières sont concernées par ce problème.

La raideur d'engrènement est modélisée par une matrice qui couple les degrés de liberté des deux roues dentées. Cette matrice de raideur intègre les déformations des dents en prise et, quelquefois, celles des corps de roue. Seules les caractéristiques moyennes de la raideur sont intégrées au sein du modèle éléments finis.

Les arbres sont discrétisés par des éléments de poutre à 2 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud.

Les inerties correspondant au moteur et à la charge et les raideurs des accouplements ne sont pas toujours intégrées dans les modèles. Karhaman (1993) souligne que ces grandeurs n'affectent que le comportement basse fréquence de la transmission.

Les vitesses de rotation des transmissions par engrenages étant relativement peu élevées, les effets gyroscopiques ne sont généralement pas pris en compte.

b) Roulements

Comme nous l'avons vu précédemment, les paliers à roulements peuvent constituer une source d'excitation interne secondaire de la transmission. Cet aspect n'est pas encore intégré dans les modèles des transmissions. Les roulements sont alors considérés uniquement comme éléments de couplage élastique entre les lignes d'arbres et le carter de la transmission. Le comportement des roulements est gouverné par les jeux fonctionnels et par les contacts hertziens entre les éléments roulants et les bagues intérieure et extérieure. Les raideurs des

roulements sont donc des fonctions non linéaires de la charge (Eschamm 1985). Ces non-linéarités peuvent fortement influencer le comportement dynamique de la transmission.

Pourtant, les roulements sont généralement modélisés par des éléments de raideur linéaire. Neriya (1985) et Karhman (1989, 1993) introduisent une raideur axiale et deux raideurs radiales pour chaque roulement. Karhman calcule notamment les surcharges dynamiques sur les dentures, ainsi que les efforts axiaux et radiaux transmis au carter par les roulements.

Bien que les carters soient principalement sollicités en flexion, les raideurs angulaires des roulements qui couplent la flexion des lignes d'arbres aux déformations du carter ne sont que très rarement prises en compte. Ces raideurs ont toutefois été introduites, notamment par Rajab (1982), De Mul (1989) et par Lim (1990, 1991) qui décrivent le roulement par une matrice de couplage linéaire entre les degrés de liberté de la bague intérieure et ceux de la bague extérieure. Les raideurs des roulements sont calculées à partir des équations non linéaires qui relient le chargement aux déplacements relatifs de la bague intérieure (supposée rigide) par rapport à la bague extérieure (supposée rigide). Les résultats obtenus sont linéarisés autour de la position correspondant à l'équilibre statique du système. Il faut noter que le calcul de cet équilibre statique présente quelques difficultés puisqu'il nécessite une modélisation complète de la transmission et une connaissance préalable de la raideur des roulements.

Lim (1991) calcule la réponse dynamique de l'engrenage ainsi que les efforts et moments transmis au carter par les roulements.

c) Carter

Dans l'ensemble des articles cités jusqu'ici, le carter est supposé infiniment rigide. Les différents auteurs considèrent que la raideur du carter est très supérieure à celle des autres éléments de la transmission. De plus, la plupart des méthodes de résolution des équations de mouvement à coefficients périodiques ne permettent pas de traiter les systèmes à grand nombre de degrés de liberté de manière efficace.

Bien qu'ils n'intègrent pas les carters et ne calculent pas sa réponse vibratoire, de nombreux auteurs parlent du bruit rayonné par les transmissions. Laskin (1968), le premier, introduit des hypothèses simplificatrices et s'appuie, pour calculer le bruit rayonné par une transmission, sur une dépendance linéaire entre l'énergie mécanique excitatrice associée à l'erreur statique de transmission sous charge et la puissance acoustique rayonnée par les transmissions. Ce type d'approche est encore couramment répandu et de nombreux auteurs considèrent abusivement que le bruit rayonné par le carter de la transmission est directement proportionnel à la réponse vibratoire de l'engrenage.

Malgré tout, certains auteurs se sont intéressés au comportement du carter des transmissions. Les différentes approches pour calculer leur réponse vibratoire induite par l'erreur statique de transmission sous charge sont présentées dans le paragraphe suivant.

II.3 Calcul de la réponse vibratoire des carters

L'état vibratoire du carter constitue la principale origine du bruit rayonné par une transmission par engrenages. Mais, la complexité des mécanismes mis en jeu, rendent particulièrement difficile le calcul de sa réponse dynamique à l'erreur statique de transmission sous charge.

Inoue (1993) discrétise un carter de forme parallélépipédique rectangle à l'aide d'éléments de plaque et optimise l'épaisseur de chaque élément pour minimiser le transfert entre un effort normal harmonique et unitaire (appliqué au niveau des noeuds correspondant aux roulements) et la réponse vibratoire du carter nu. Cette approche conduit à une solution impossible à mettre en oeuvre (l'épaisseur du carter varie en fonction du noeud considéré).

Maruyama (1992) compare les réponses vibratoires de carters nus ayant différentes formes.

Storm (1991) assimile chaque face du carter à une plaque homogène rectangulaire simplement appuyée et bafflée. Cette plaque est soumise à des efforts normaux au niveau des points correspondant aux roulements. Ces efforts correspondent aux efforts axiaux transmis au carter par les roulements. Leurs caractéristiques sont calculées à partir de l'erreur statique de transmission sous charge et d'une modélisation dynamique de l'engrenage et des lignes d'arbres. Storm détermine, pour chaque face, le "facteur de son solidien" (transfert entre l'excitation et la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne) et le facteur de rayonnement. Il calcule ainsi la puissance acoustique rayonnée par la structure. Cette approche simplifiée permet de tester différentes solutions à partir de diverses modifications mécaniques possibles du carter.

Takatsu (1991) et Kato (1994, 1996) découplent eux aussi le comportement dynamique des lignes d'arbres de celui du carter. Takatsu calcule d'abord les efforts radiaux transmis par des roulements à billes en supposant le carter rigide. Puis, il calcule la réponse vibratoire du carter élastique nu soumis aux efforts calculés précédemment. Kato procède de la même façon et étudie la réponse du carter nu aux moments transmis par des roulements à rouleaux.

Ces différents auteurs proposent des solutions qui permettent, selon eux, de réduire le bruit rayonné par les transmissions. Maruyama montre qu'à excitation identique, un carter nu en forme de cocon présente un niveau vibratoire moins élevé qu'un carter nu de forme parallélépipédique rectangle. Storm propose de repousser la première fréquence de résonance du système, de diminuer le facteur de son solidien, d'augmenter l'impédance d'entrée au point d'excitation et d'augmenter l'amortissement de structure. A partir de l'étude d'une boîte de vitesses de bateau fonctionnant à vitesse constante, il montre que, à masse constante, une combinaison de nervures qui raidissent le carter et de masses ajoutées à l'emplacement des paliers permet de réduire la puissance acoustique du carter nu excité par des efforts extérieurs (-12 dB par rapport à un carter d'épaisseur constante). Enfin, Kato (1996) montre que la puissance acoustique d'un carter nu excité par des efforts extérieurs ayant des angles arrondis est inférieure à celle d'un carter présentant des arêtes vives.

Bien que les auteurs proposent de nouvelles architectures de carter potentiellement intéressantes, les hypothèses simplificatrices qu'ils utilisent conduisent à des modèles qui ne sont pas satisfaisants. Ainsi Inoue et Maruyama ne prennent pas en compte les caractéristiques réelles des efforts qui excitent le carter d'une transmission. L'omission des moments et des efforts radiaux transmis au carter par les roulements est pénalisante car ces excitations peuvent influencer fortement sur la réponse vibratoire.

De plus, l'ensemble des auteurs considère que les efforts appliqués sont indépendants de la forme du carter. Or, les propriétés élastiques du carter peuvent modifier le transfert entre l'erreur statique de transmission sous charge et les efforts transmis par les roulements sur le carter. Enfin, les modes propres du carter nu sont fondamentalement différents de ceux du carter couplé à l'engrenage et aux lignes d'arbres. La réponse du carter à une même excitation est donc différente selon que l'on considère le carter nu ou la transmission complète.

Perret-Liaudet (1992) a intégré la face élastique d'un carter simplifié au sein du modèle d'une transmission par engrenages. Il calcule donc directement la réponse vibratoire de toute la transmission induite par l'erreur statique de transmission, sans découpler les lignes d'arbres et le carter.

En définitive, l'intégration du carter au sein du modèle de la transmission et le calcul direct de sa réponse dynamique sont indispensables à la caractérisation des nuisances sonores émises par la transmission. De plus, comme la recherche d'une puissance massique de plus en plus grande conduit aujourd'hui, notamment dans le domaine des transports, à diminuer l'épaisseur des carters et à introduire des matériaux plus légers mais aussi moins rigides (aluminium), il est important de vérifier si le comportement dynamique de la transmission est affecté ou non par les propriétés mécaniques du carter.

II.4 Conclusion

De nombreuses approches, parfois très différentes les unes des autres, ont été adoptées pour calculer le comportement dynamique des engrenages. La description des vibrations par des équations linéaires à coefficients constants semble bien adaptée à l'étude des transmissions fortement chargées présentant des faibles fluctuations de raideur et soumises à des niveaux d'excitations modérés. Néanmoins, les phénomènes paramétriques induits par la fluctuation de la raideur d'engrènement ne peuvent être décrits que par des équations à coefficients variables. On peut supposer que ces équations sont linéaires si les caractéristiques de raideur moyenne ne sont pas affectées par le comportement dynamique de la transmission. Par contre, elles deviennent non linéaires si la fluctuation du couple moteur ou les résonances du système conduisent à des pertes de contact, à des modifications importantes des situations relatives des dentures ou à des variations des caractéristiques de raideur moyenne de la transmission.

La plus grande partie des études a été consacrée à des modèles élémentaires à 1 degré de liberté ou bien à des modèles en torsion pure de l'engrenage et des lignes d'arbres. Ces modèles semblent bien adaptés pour l'étude de dispositifs à arbres courts et support rigide. Néanmoins, les études récentes ont montré qu'il était nécessaire de décrire correctement les déformations de l'ensemble des composantes de la transmission pour prédire de façon réaliste l'évolution de son comportement vibratoire.

Enfin, les manques d'informations concernant les mécanismes et les niveaux d'amortissement constituent un obstacle majeur à la détermination précise des niveaux vibratoires de la transmission.

Özgüven (1988) constate que l'ensemble des modèles, même les plus élémentaires, ont permis d'obtenir des résultats corrélés avec des résultats expérimentaux. Il souligne cependant que les premiers bancs d'expérimentation ont été réalisés dans le but de vérifier les hypothèses des modèles mathématiques. Les conditions très particulières de fonctionnement ne permettent pas d'extrapoler les conclusions obtenues à l'ensemble des engrenages. Il faut aussi noter que certains auteurs ajustent les paramètres de leur modèle (inertie des roues, valeur moyenne de la raideur d'engrènement...) pour recalibrer leurs prédictions avec la résonance principale obtenue expérimentalement.

III.1 Introduction d'une modélisation globale des transmissions par engrenages

Nous avons choisi de modéliser de manière globale les transmissions par engrenages afin de permettre une étude des interactions dynamiques existant entre ces différentes composantes mécaniques. Pour cela, nous avons utilisé la méthode des éléments finis (logiciel ANSYS 5.3[®]) pour discrétiser leurs composantes (engrenage, lignes d'arbres, roulements et carter. Les paragraphes suivants ont pour objet de décrire le modèle retenu.

III.1.1 Lignes d'arbres

Nous discrétisons les arbres par des éléments de poutre à 2 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud. Ces éléments prennent en compte les déformations de torsion, de flexion et de traction-compression.

Les déformations dynamiques des roues dentées ne sont pas prise en compte. Nous modélisons chacune d'entre elles par des éléments de masse et d'inertie en rotation rapportés sur les noeuds des lignes d'arbres correspondants. Les déplacements de chaque roue sont définis par les degrés de liberté associés à son centre (3 translations et 3 rotations repérant l'orientation instantanée de la roue).

La vitesse de rotation de la transmission restant limitée, nous négligeons les effets gyroscopiques.

Pour décrire le couplage élastique entre les lignes d'arbres induit par le contact entre les différents couples de dents en prise, nous introduisons une matrice de raideur généralisée symétrique qui couple les 6 degrés de liberté du noeud central de la roue menante aux 6 degrés de liberté du noeud central de la roue menée. Il s'agit donc d'une matrice carrée de rang 12. Elle est calculée à partir des caractéristiques géométriques de l'engrenage et la raideur d'engrènement linéarisée autour de la position d'équilibre statique mais qui demeure une fonction temporelle (Perret-Liaudet 1992). Dans le repère local orthonormé direct (X, Y, Z) défini sur la figure III.1, la matrice de couplage que nous introduisons s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{K} = k(t) \cdot \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{T}$$

avec
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \tan \beta, & R_{b1} \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta, & -R_{b1} \cdot \tan \beta, & R_{b1}, \\ 0, & -1, & -\tan \beta, & R_{b2} \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta, & -R_{b2} \cdot \tan \beta, & R_{b2} \end{pmatrix}$$

où $k(t)$ est la raideur d'engrènement,
 R_{b1} et R_{b2} sont les rayons de base des roues menante et menée,

α est l'angle de pression apparent de fonctionnement,
 β est l'angle d'hélice de base.

Nous modélisons les caractéristiques inertielles et élastiques des organes situés en amont et en aval de la transmission par des inerties en rotation (représentant le moteur et la charge) et des raideurs en torsion (représentant les accouplements flexibles).

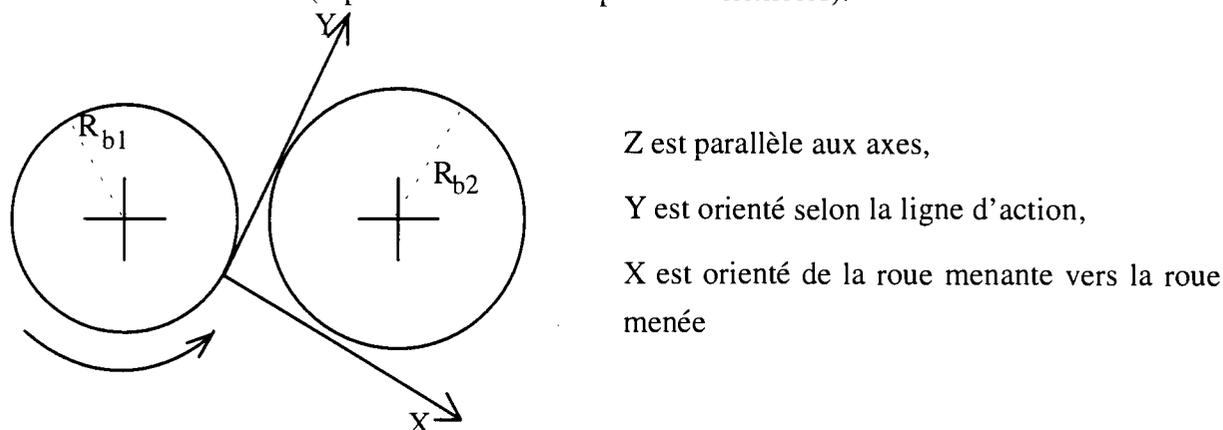


Figure III.1. Plan apparent de l'engrenage. Définition du repère local.

III.1.2 Roulements

La modélisation des roulements s'appuie sur l'hypothèse de bagues intérieure et extérieure rigides. Les déplacements de chacune de ces bagues sont représentés par un seul noeud à 6 degrés de liberté attaché à l'arbre d'une part (bague intérieure) et au boîtier de roulement fixé sur le carter d'autre part (bague extérieure). Nous modélisons la raideur du roulement, induite par la déformation des contacts hertziens entre les éléments roulants et les bagues, par une matrice symétrique de dimension 10, qui couple 5 degrés de liberté de la bague intérieure à 5 degrés de liberté de la bague extérieure (la rotation autour de l'axe correspondant à l'arbre est libre). Nous obtenons cette matrice à partir de la matrice élémentaire symétrique présentée ci-dessous :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} & k_{x\theta x} & k_{x\theta y} \\ & k_{yy} & k_{yz} & k_{y\theta x} & k_{y\theta y} \\ & & k_{zz} & k_{z\theta x} & k_{z\theta y} \\ & & & k_{\theta x\theta x} & k_{\theta x\theta y} \\ & & & & k_{\theta y\theta y} \end{bmatrix}$$

L'évaluation des différents termes de cette matrice est complexe. En effet, la nature et le nombre de contacts entre les éléments roulants et les bagues intérieure et extérieure rendent difficile la prédiction de l'état d'équilibre du roulement.

Même lorsque le roulement est préchargé, la raideur du roulement évolue (faiblement) avec la charge appliquée. Aussi, les valeurs que nous introduisons correspondent aux raideurs des roulements autour de la position d'équilibre statique induite par l'application du couple de

charge. Elles sont déterminées en supposant que le jeu du roulement est nul. Ces valeurs dépendent fortement de l'environnement dans lequel les roulements sont intégrés. En effet, dans une transmission par engrenages, les efforts qui s'exercent sur un roulement peuvent modifier les positions relatives bague intérieure / éléments roulants / bague extérieure des autres roulements en raison des couplages élastiques induits par les lignes d'arbres et le carter. Le calcul de la matrice de raideur des roulements ne peut donc se faire qu'à l'aide d'un processus itératif :

- D'abord, on introduit une valeur réaliste des raideurs des roulements au sein du modèle éléments finis de la transmission.
- Ensuite, le calcul de la déformée statique du système permet de déterminer le vecteur d'effort généralisé qui s'exerce sur chaque roulement.
- Enfin, à partir de la connaissance de la charge appliquée, on peut recalculer la matrice de raideur de chaque roulement.

Le processus est poursuivi jusqu'à convergence des termes de la matrice.

Bien que l'élévation de la température au cours du fonctionnement conduise à une modification des précharges s'exerçant sur les roulements, les effets thermiques ne sont pas intégrés dans le calcul des raideurs de roulements.

En définitive, la modélisation retenue prend en compte l'ensemble des couplages élastiques entre la bague intérieure et la bague extérieure des roulements. Elle permet notamment d'introduire les raideurs angulaires qui couplent la flexion des lignes d'arbres aux déformations en flexion du carter. Pour certaines simulations numériques destinées à mettre en évidence un certain nombre d'évolutions paramétriques du comportement dynamique de la transmission, nous ne conservons que les termes diagonaux k_{xx} , k_{yy} , k_{zz} , $k_{\theta_x\theta_x}$ et $k_{\theta_y\theta_y}$.

A titre d'illustration, la figure III.2 présente un maillage de lignes d'arbres et des roulements.

III.1.3 Carter

Le carter de la transmission est discrétisé par des éléments de plaques à 4 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud et des éléments volumiques à 8 noeuds et 3 degrés de liberté par noeud. La liaison entre ces deux types d'éléments est effectuée en superposant un élément de plaque et un élément volumique. Les liaisons élastiques entre le carter de la transmission et son environnement ne sont pas prise en compte. Le carter est supposé appuyé ou encastré sur son support. A titre d'illustration, différents maillages de carters sont présentés sur la figure III.3.

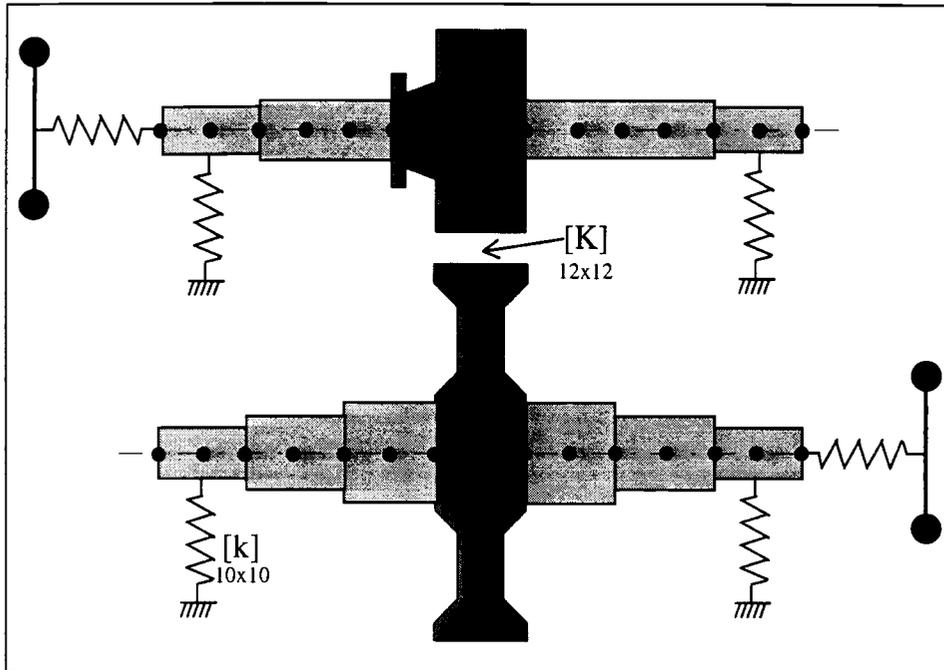


Figure III.2. Maillage des lignes d'arbres et des roulements.

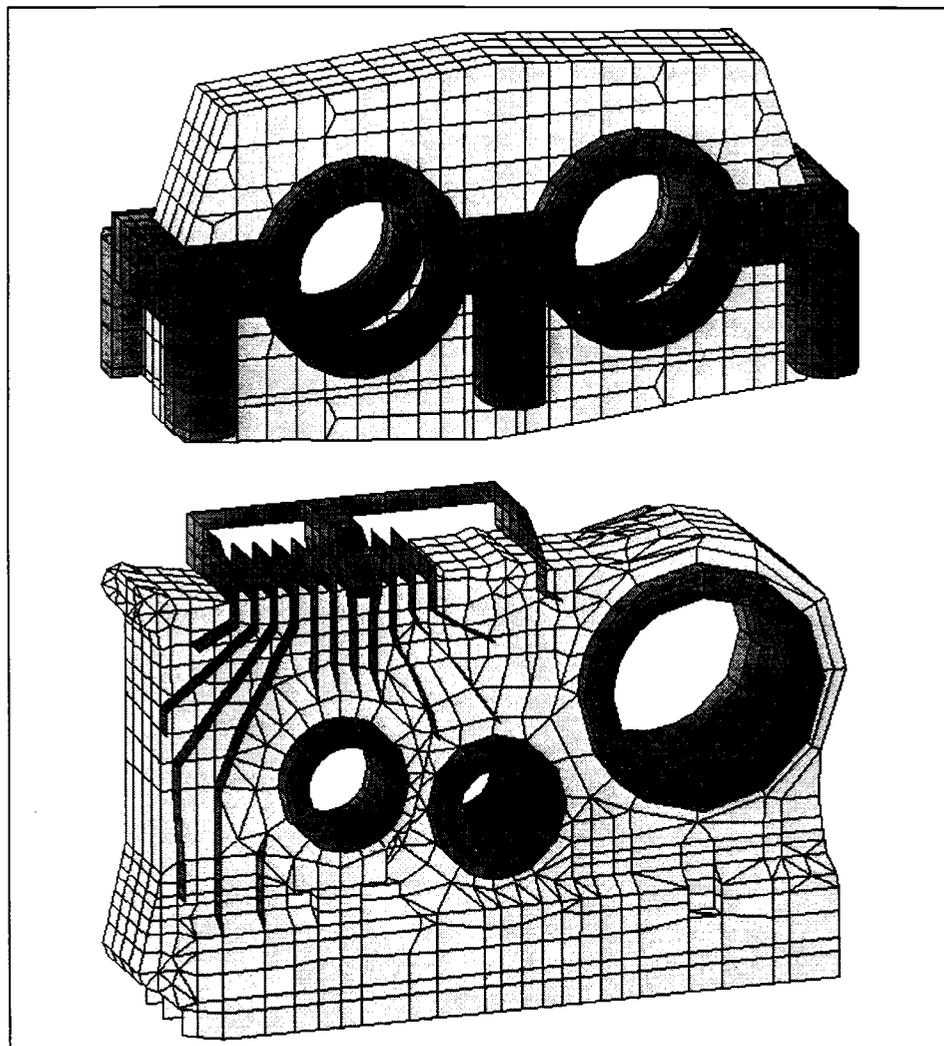


Figure III.3. Maillage de carters.

III.2 Calcul de la réponse dynamique par une méthode spectrale et itérative

Özgülven (1988) signale que la plupart des auteurs utilisent des méthodes de discrétisation temporelle pour résoudre les équations de mouvement des transmissions par engrenages. Les différents termes des équations sont actualisés à chaque pas de temps et la réponse dynamique du système est calculée pas à pas. Ces méthodes sont les seules méthodes permettant de traiter les problèmes transitoires. Différents auteurs ont utilisé la méthode de Runge-Kutta pour étudier le comportement dynamique d'engrenages droits à partir de modèles possédant quelques degrés de liberté. Bard (1995) et Dussac (1996) ont utilisé la méthode de Newmark pour étudier le comportement d'engrenages droits et hélicoïdaux. Ces auteurs n'ont pas pris en compte les excitations à basse fréquence, afin de limiter le nombre de pas nécessaire à la description des grandeurs variables.

Lorsque l'excitation présente un spectre large bande, l'utilisation de méthodes de discrétisation temporelle peut conduire à des temps de calcul prohibitifs. La prise en compte des excitations à basse fréquence (fréquences de rotation des arbres) nécessite une discrétisation temporelle sur une période longue et la prise en compte des excitations à haute fréquence (fréquence d'engrènement et ses harmoniques) nécessite un pas de temps fin. Le nombre de pas nécessaire à la discrétisation temporelle des signaux devient donc très grand, ce qui nous a conduit à exploiter une autre méthode de résolution.

Perret-Liaudet (1992, 1996) a développé une méthode baptisée méthode spectrale itérative qui permet, en régime stationnaire, de résoudre les systèmes d'équations à coefficients périodiques en minimisant les temps de calcul. Cette méthode s'appuie non pas sur une description temporelle des grandeurs, très coûteuse en temps de calcul, mais sur une description spectrale de la fluctuation de la raideur d'engrènement et du vecteur d'excitation induit par les écarts de géométrie. Son utilisation s'avère donc particulièrement intéressante lorsque l'excitation peut être décrite sous la forme d'un spectre possédant un nombre limité de raies. Elle ne s'applique qu'aux équations linéaires (à coefficients périodiques ou non). Cette méthode est décrite ci-après.

Nous supposons que le couple moteur est suffisant pour prévenir toute perte de contact entre dentures. De même, nous supposons que si les efforts dynamiques restent suffisamment faibles devant les efforts statiques induits par le couple moteur et par les précharges appliquées sur les roulements, la valeur moyenne de la raideur d'engrènement et les raideurs des roulements ne sont pas affectées par les déformations dynamiques de la transmission. Le comportement vibratoire de la transmission peut alors être décrit par un système différentiel d'équations linéaires à coefficients périodiques.

Une fois la transmission discrétisée par la méthode des éléments finis, le système des équations régissant la réponse forcée $\underline{X}(t)$ de la transmission peut s'écrire, pour un régime stationnaire et par assemblage des différents éléments, sous la forme matricielle suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\underline{\mathbf{X}}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\dot{\underline{\underline{\mathbf{X}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{\mathbf{X}}} + \mathbf{k}(t)\underline{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{E}}}(t) \quad (1)$$

Dans cette équation, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ sont les matrices classiques de masse et de raideur fournies par la méthode des éléments finis. Le couplage élastique entre les roues en prise est introduit par le terme $\mathbf{k}(t)$ qui représente la variation de la raideur d'engrènement. La matrice $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ est associée aux caractéristiques de l'engrenage et la matrice $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ représente les termes de dissipation que nous introduirons ultérieurement par des taux d'amortissement modaux visqueux équivalents. Enfin, les vecteurs $\underline{\underline{\mathbf{F}}}(t)$ et $\underline{\underline{\mathbf{E}}}(t)$ constituent les efforts généralisés associés aux éventuelles excitations externes et internes. En régime de fonctionnement stationnaire, la variation de la raideur d'engrènement est une fonction périodique du temps. Après avoir déterminé la base modale associée à l'équation matricielle homogène à coefficients constants (la raideur périodique est alors remplacée par sa valeur moyenne, l'équation du mouvement du système à plusieurs degrés de liberté s'écrit dans cette base :

$$\underline{\underline{\mathbf{m}}}\ddot{\underline{\underline{\mathbf{q}}}} + \underline{\underline{\mathbf{c}}}\dot{\underline{\underline{\mathbf{q}}}} + \underline{\underline{\mathbf{k}}}\underline{\underline{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(t)\underline{\underline{\mathbf{d}}}\underline{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) \quad (2)$$

où $\underline{\underline{\mathbf{m}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{c}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{k}}}$ sont les matrices diagonales de masse, d'amortissement et de raideur, $\underline{\underline{\mathbf{q}}}$ est le vecteur des coordonnées modales, $\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t)$ est le vecteur des forces généralisées, et $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$ est la matrice non diagonale déduite des caractéristiques géométriques de l'engrenage et de la fluctuation centrée $\mathbf{g}(t)$ de la raideur périodique d'engrènement qui couple les équations de mouvement.

La méthode utilisée fournit directement le spectre complexe de la réponse vibratoire pour chacun des degrés de liberté de la transmission discrétisée par la méthode des éléments finis. La procédure de calcul associée à cette méthode consiste tout d'abord en une transformation de Fourier de l'équation (2). Après quelques calculs élémentaires, on montre que la nouvelle équation matricielle qui régit, en régime de fonctionnement stationnaire, les vibrations forcées de la transmission peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\tilde{\underline{\underline{\mathbf{q}}}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}\tilde{\underline{\underline{\mathbf{s}}}} - \underline{\underline{\mathbf{H}}}\tilde{\underline{\underline{\mathbf{g}}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{d}}}\tilde{\underline{\underline{\mathbf{q}}}} \quad (3)$$

où le signe tilde désigne une transformée de Fourier fréquentielle, \otimes un produit de convolution et la matrice diagonale $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$ est la matrice des fonctions complexes de réponse en fréquence des modes propres. On résout ensuite cette équation matricielle par itérations successives selon le schéma suivant :

$$\tilde{\underline{\underline{\mathbf{q}}}}^{j+1} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}\tilde{\underline{\underline{\mathbf{s}}}} - \underline{\underline{\mathbf{H}}}\left(\tilde{\underline{\underline{\mathbf{g}}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{d}}}\tilde{\underline{\underline{\mathbf{q}}}}^j\right)$$

$$\text{avec comme solution initiale,} \quad \tilde{\underline{\underline{\mathbf{q}}}}^1 = \underline{\underline{\mathbf{H}}}\tilde{\underline{\underline{\mathbf{s}}}}$$

Un test de convergence basé sur l'écart entre deux solutions successives et sur le nombre d'itérations permet d'arrêter le processus itératif. On effectue ainsi le calcul direct des spectres de la réponse vibratoire en chaque degré de liberté du système. A partir de nombreux tests effectués avec cette méthode, Perret-Liaudet (1992, 1996) a constaté que la solution est obtenue avec un faible nombre d'itérations et que le temps de calcul associé à cette méthode est entre 10 et 100 fois plus court qu'avec les méthodes d'intégration temporelle habituellement utilisées pour la résolution des équations différentielles à coefficients périodiques.

III.3 Conclusion

Pour calculer la réponse dynamique des transmissions par engrenages, nous proposons de discrétiser l'ensemble des composantes de la transmission par la méthode des éléments finis. L'originalité de la modélisation retenue résulte essentiellement dans la prise en compte des propriétés mécaniques du carter au sein du modèle dynamique. Si cette prise en compte conduit à une augmentation significative du nombre de degrés de liberté du système, elle est indispensable pour :

- évaluer l'influence du carter sur les vibrations de l'engrenage et des lignes d'arbres et sur les efforts dynamiques s'exerçant sur les dentures et les roulements. Cette influence risque d'être d'autant plus grande que l'augmentation des puissances massiques conduit aujourd'hui, notamment dans le domaine des transports, à concevoir des carters de moins en moins épais et à introduire des matériaux plus légers mais aussi moins rigides (aluminium).
- calculer de façon réaliste la réponse vibratoire du carter, réponse nécessaire à la prédiction des propriétés du champ acoustique rayonné par la transmission (puissance acoustique, directivité et facteur de rayonnement).

Après avoir justifié dans quelles conditions les caractéristiques mécaniques moyennes de la transmission n'étaient pas affectées par la réponse vibratoire de celle-ci, nous avons introduit un système d'équations linéaires à coefficients périodiques pour décrire le comportement dynamique de la transmission. Ce système est résolu par une méthode spectrale et itérative développée par Perret-Liaudet (1992, 1996). Cette méthode présente l'avantage de traiter les systèmes qui possèdent un grand nombre de degrés de liberté et qui sont soumis à une excitation large bande avec des temps de calcul très courts.

Les différents outils numériques que nous avons présentés nous permettent, dans le chapitre suivant, de calculer et d'analyser les caractéristiques de l'erreur statique de transmission sous charge et de la réponse vibratoire d'une transmission par engrenages induite par cette excitation.

Chapitre 3

APPLICATION : ETUDE NUMERIQUE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE TRANSMISSION DE TYPE BOITE D'INVERSION

I- Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'exploiter les outils numériques que nous avons développés et présentés dans les chapitres 1 et 2 pour analyser les interactions dynamiques entre la denture, les arbres, les roulements et le carter d'une transmission par engrenages. Les transmissions par engrenages que l'on rencontre dans le domaine des transports ou des machines présentent des architectures et des dimensions très diverses. Pour analyser en détail les caractéristiques essentielles du comportement dynamique des transmissions, nous choisissons de nous intéresser au comportement vibratoire d'une boîte d'inversion équipée d'un engrenage à denture hélicoïdale. Bien qu'étant un cas particulier, cette boîte est constituée d'un ensemble d'éléments caractéristiques des transmissions existantes (engrenage, arbres, paliers à roulements, carter).

Après avoir présenté les caractéristiques géométriques et mécaniques de cette boîte d'inversion et les conditions de fonctionnement retenues, nous calculons l'excitation induite par l'erreur statique de transmission sous charge. Ensuite, nous modélisons cette boîte d'inversion et, après avoir calculé ses déformations statiques et ses modes propres, nous exploitons la méthode spectrale et itérative présentée au chapitre 2 pour calculer sa réponse vibratoire. L'ensemble des résultats présentés correspond à des régimes de fonctionnement stationnaires, c'est à dire des régimes pour lesquels le couple moteur et la vitesse moyenne de rotation restent constants.

Dans un premier temps, nous analysons le transfert entre l'excitation et la surcharge dynamique de denture dans le but de détecter les vitesses "critiques" de rotation de la boîte d'inversion, vitesses pour lesquelles la surcharge dynamique est maximale. Nous cherchons notamment à évaluer l'influence des propriétés élastiques des lignes d'arbres, des roulements et du carter sur ces vitesses "critiques".

Nous nous intéressons ensuite au transfert entre la surcharge dynamique de denture et les réponses dynamiques des autres éléments de la boîte d'inversion. Nous analysons plus particulièrement les efforts dynamiques transmis au carter par les roulements et la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter, car cette caractéristique est indispensable

au calcul du bruit rayonné par le carter. Nous comparons notamment les résultats obtenus pour différents types de roulement et différentes architectures de carter.

Enfin, nous analysons les caractéristiques de la réponse dynamique de la boîte d'inversion induite par l'excitation que nous avons calculée.

II- Caractéristiques de la boîte d'inversion

II.1 Description

Pour mettre en oeuvre la méthodologie précédemment exposée et pour analyser en détail les caractéristiques essentielles du comportement dynamique des transmissions, nous avons retenu une boîte d'inversion équipée d'un engrenage 49/49 dents à denture hélicoïdale dont les principales caractéristiques de fonctionnement sont présentées dans le tableau II.1. L'engrenage est constitué de deux roues pleines en acier qui sont montées sur des arbres relativement courts de diamètre égal à 50 mm. Ces arbres sont supportés par des roulements à rouleaux coniques et l'ensemble de ces composantes est assemblé dans un carter en acier dont la forme correspond à un parallélépipède rectangle. Les dimensions de ce dernier sont 450 x 280 x 160 mm. Son épaisseur est de 10 mm. Le carter est équipé de quatre boîtiers de forme cylindrique dont le diamètre extérieur est égal à 100 mm et la hauteur à 32 mm. Ces boîtiers permettent de supporter les roulements à rouleaux coniques dont les principales caractéristiques sont présentées dans le tableau II.2.

Les transmissions par engrenages sont généralement fixées sur le moteur ou bien sur un support horizontal fixe. Nous considérons que la boîte d'inversion étudiée est fixée sur le moteur par l'intermédiaire de quatre points d'encrage situés aux quatre coins de la face en vis à vis avec celui-ci. L'effet du type de montage de la boîte d'inversion sur son comportement dynamique sera abordé au cours de ce chapitre.

Les lignes d'arbres sont reliées au moteur et à la charge par l'intermédiaire d'accouplements flexibles. Les inerties en rotation correspondant au moteur et à la charge sont égales à 1 kg.m². Les valeurs des raideurs en torsion des accouplements flexibles constituent des paramètres du problème, au même titre que les raideurs des roulements.

Nombre de dents Z	49	49
Rayon de base R_b (mm)	80.58	80.58
Module normal m_n (mm)	3.5	
Angle de pression apparent de fonctionnement α'_t	20°	
Angle d'hélice de base β	20°	
Largeur de denture b (mm)	35	
Entraxe de fonctionnement a' (mm)	171.5	
Rapport de conduite apparent ε_α	1.646	
Rapport de recouvrement ε_β	1.232	
Rapport de conduite total ε_γ	2.878	

Tableau II.1. Caractéristiques géométriques de l'engrenage.

Nombre d'éléments roulants	17
Diamètre extérieur (mm)	80
Diamètre intérieur (mm)	40
Largeur (mm)	32

Tableau II.2. Caractéristiques des roulements.

Nous supposons que la vitesse de fonctionnement de la boîte d'inversion peut varier entre 0 et 3000 tours/min, ce qui correspond à une fréquence d'engrènement variant entre 0 et 2450 Hz. Le couple nominal correspondant au couple moteur pour lequel les corrections de denture sont optimales est égal à 1300 Nm. Nous étudions aussi le comportement de la boîte d'inversion pour un couple égal à 650 Nm.

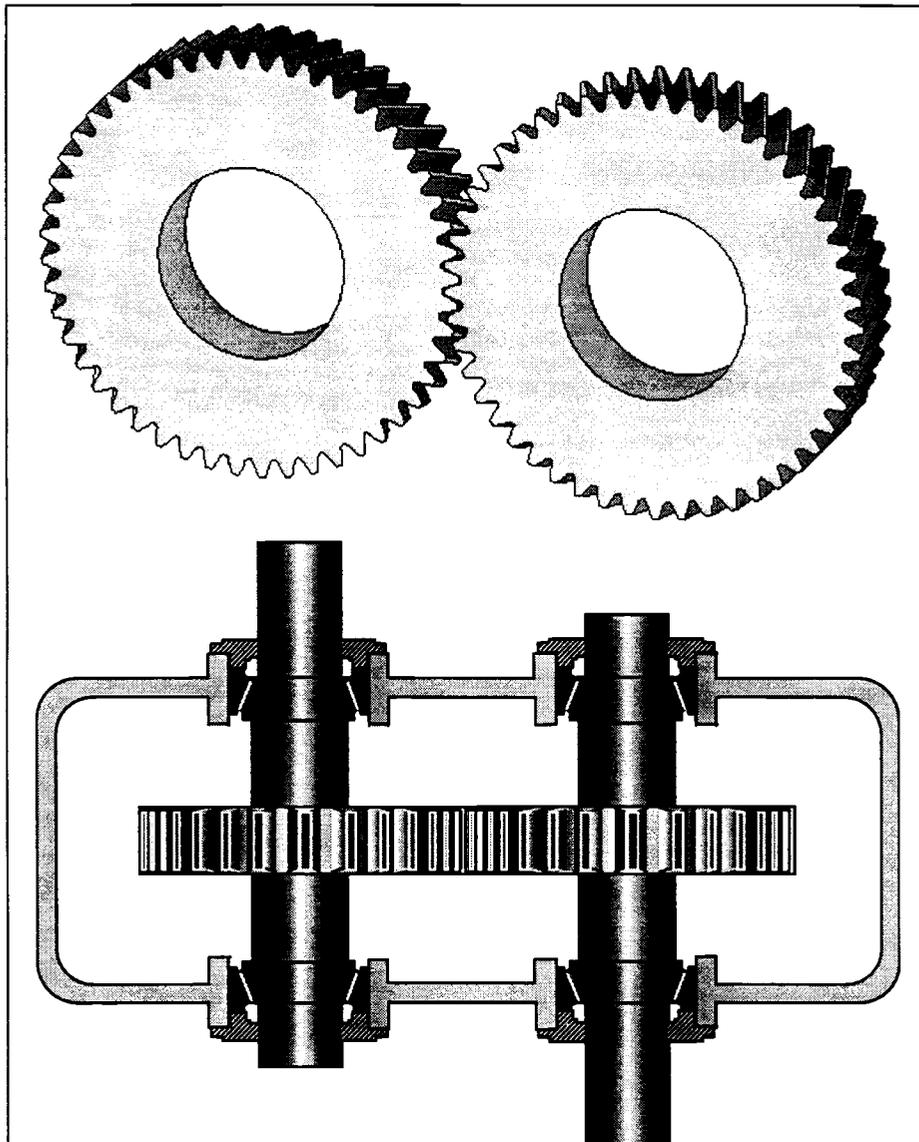


Figure II.1. Schéma de l'engrènement et de la boîte d'inversion.

L'architecture de la transmission étudiée est relativement simple mais elle présente toutes les caractéristiques essentielles des transmissions existantes. Les caractéristiques de l'engrènement et les conditions de fonctionnement que nous avons choisies sont représentatives de celles d'un véhicule de transport terrestre.

II.2 Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge

Après avoir discrétisé les roues de l'engrenage par la méthode des éléments finis (17000 degrés de liberté) et calculé la matrice de souplesse associée à chaque roue dentée à partir de la méthodologie présentée au chapitre I, nous avons calculé l'erreur statique de transmission sous charge et la raideur d'engrènement de l'engrenage, pour des couples moteur de 1300 Nm et 650 Nm.

Nous avons introduit des corrections de denture (pour chaque dent, 20 μm de bombé longitudinal et 10 μm de correction de profil en tête de dent) afin de permettre une entrée progressive des dents dans la zone de contact et de minimiser les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge. Ces corrections sont "optimales" pour un couple moteur de 1300 Nm.

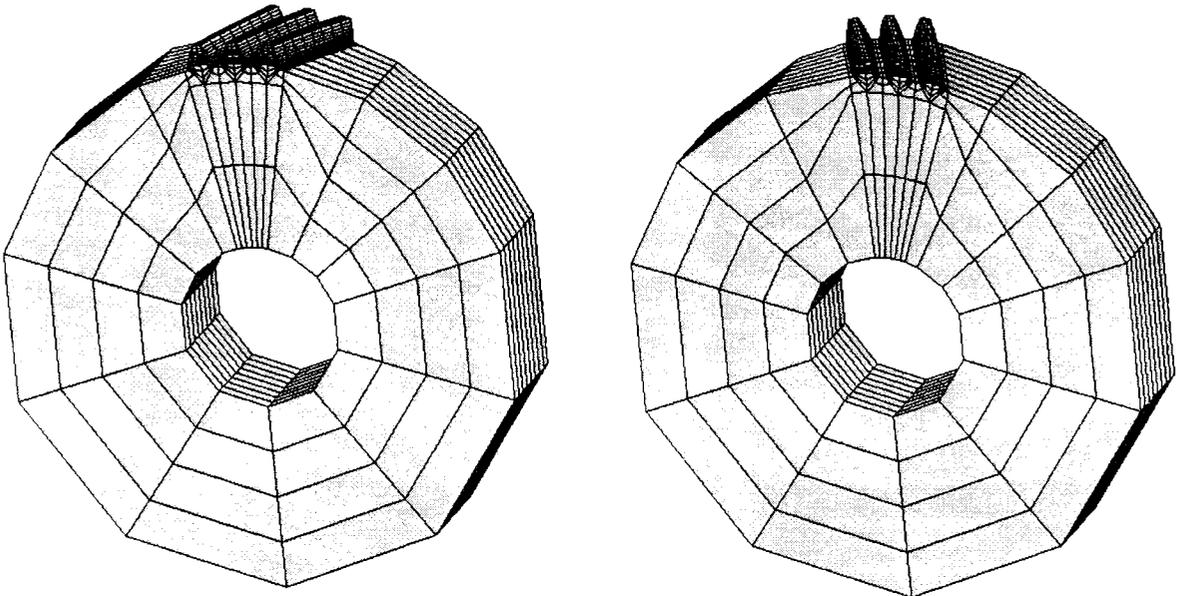


Figure II.2. Maillage des roues menante et menée.

Les évolutions de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement sont, en l'absence de défauts de géométrie, périodiques de fréquence fondamentale égale à la fréquence d'engrènement (figures II.3 à II.5).

Les corrections de denture que nous avons introduites modifient l'évolution de l'erreur statique de transmission sous charge. Elles permettent, pour un couple moteur de 1300 Nm, de réduire l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge de 4 μm à 0.5 μm . Par contre, pour un couple moteur de 650 Nm, cette amplitude crête à crête est égale à 2 μm .

Nous constatons que la valeur moyenne de la raideur d'engrènement évolue en fonction du couple transmis. Bien que le contact s'établisse sur toute la longueur de la ligne de contact potentielle pour les deux couples moteur étudiés, elle passe de 430 à 400 N/ μm . L'amplitude crête à crête des fluctuations de la raideur d'engrènement est égale à 40 N/ μm (10 % de la raideur moyenne). La forme de ces fluctuations dépend du couple moteur.

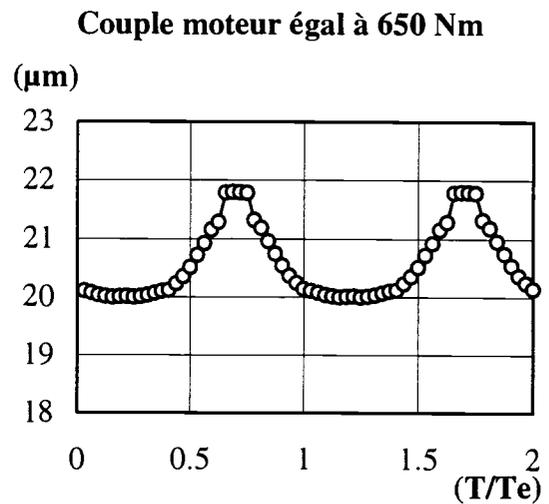
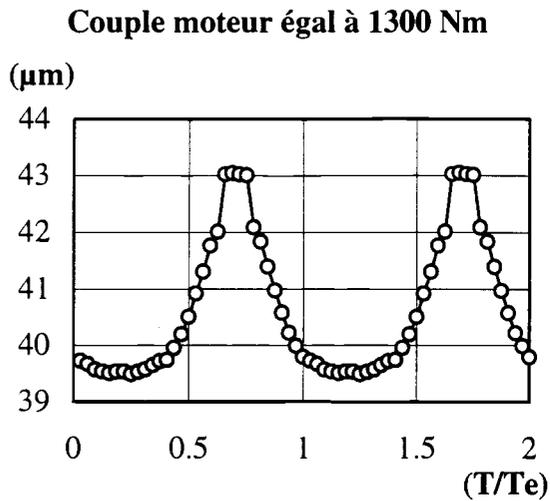


Figure II.3. Erreur statique de transmission sous charge de l'engrenage non corrigé.

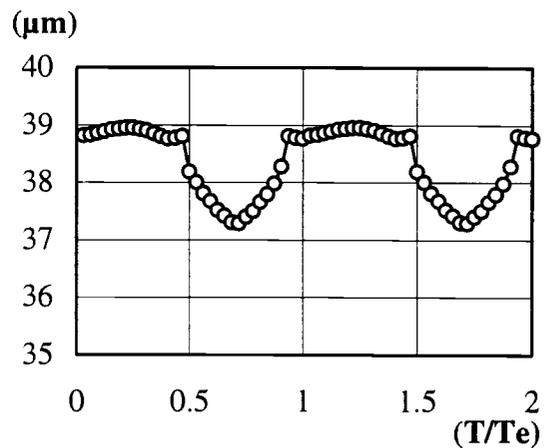
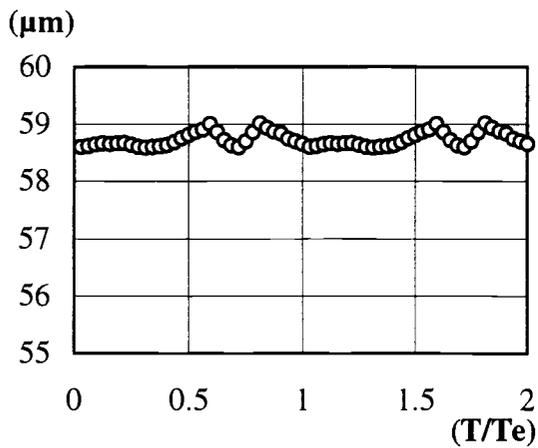


Figure II.4. Erreur statique de transmission sous charge de l'engrenage corrigé.

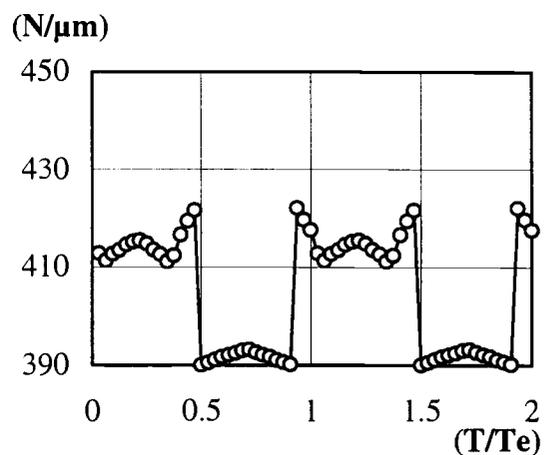
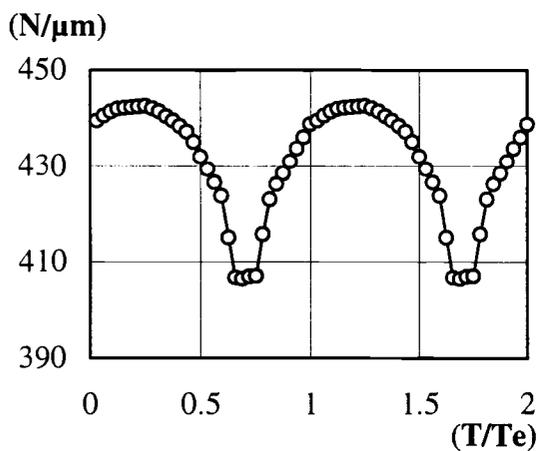


Figure II.5. Fluctuation de la raideur d'engrènement de l'engrenage corrigé.

Pour calculer la réponse dynamique de la boîte d'inversion à l'excitation induite par l'erreur statique de transmission sous charge, nous avons considéré le cas du couple moteur égal à 650 Nm (la valeur moyenne de la raideur d'engrènement est alors égale à 400 N/μm). La figure II.6 présente, pour ces conditions de fonctionnement, les spectres d'amplitude de l'erreur statique de transmission et de la fluctuation de la raideur d'engrènement. Seuls le fondamental et les quatre premiers harmoniques de la fréquence d'engrènement sont présentés. Les spectres sont dominés par les raies associées à la fréquence d'engrènement.

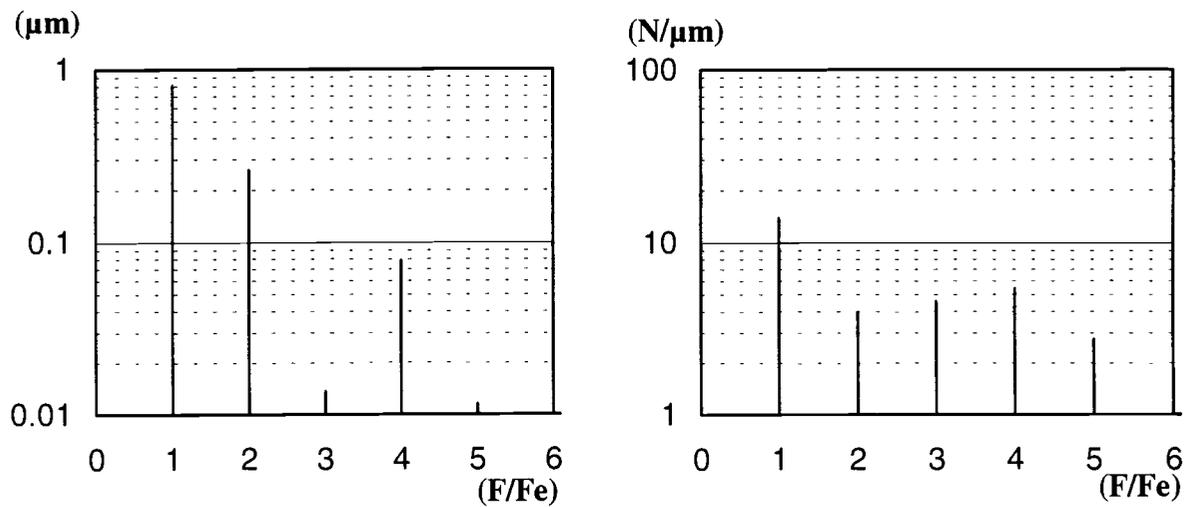


Figure II.6. Spectres d'amplitude de l'erreur statique de transmission et de la fluctuation de la raideur d'engrènement (F_e fréquence d'engrènement)

II.3 Modélisation de la boîte d'inversion par éléments finis

- Nous avons appliqué la méthode présentée au chapitre 2 pour discrétiser la boîte d'inversion :
- le carter est discrétisé par 1400 éléments de plaques et 256 éléments volumiques,
 - les lignes d'arbres sont discrétisées par 36 éléments de poutre,
 - chaque roue dentée est discrétisée par 3 éléments de masse et d'inertie en rotation,
 - la valeur moyenne de la raideur d'engrènement est introduite via une matrice de raideur généralisée d'ordre 12,
 - chaque roulement est modélisé par une matrice de raideur d'ordre 10,
 - chaque accouplement flexible est modélisé par une raideur en torsion et deux éléments de masse et d'inertie en rotation,
 - le moteur et la charge sont discrétisés par deux éléments d'inerties en rotation.

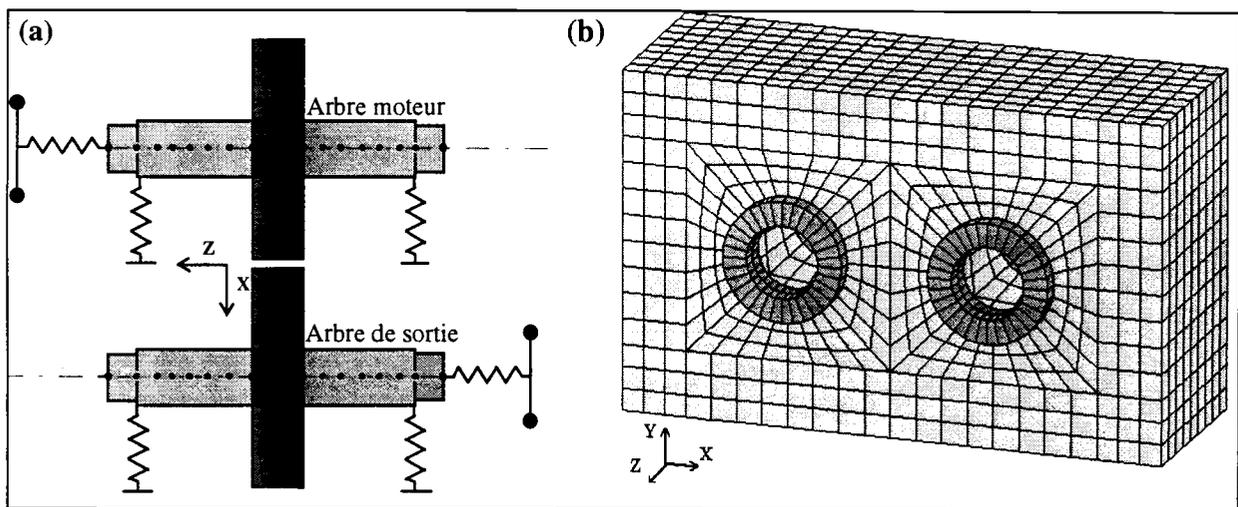


Figure II.7. (a) Maillage des lignes d'arbres et des roulements.
(b) Maillage du carter de la boîte d'inversion.

Le modèle complet possède 1700 éléments, 2000 noeuds et 12800 degrés de liberté. Sa masse totale est de **68 kg**. La masse du carter (40 kg) représente 60 % de la masse totale.

Pour le calcul des modes propres de la boîte d'inversion, nous avons adopté une méthode de condensation de Guyan et sélectionné 600 degrés de libertés dynamiques ("masters"). Nous avons imposé 12 "masters" sur l'engrènement, 40 sur les roulements et 2 sur le moteur et la charge. 160 "masters" sont situés sur les arbres et 380 sur le carter. Ces derniers sont orientés pour la plupart selon la normale à la surface et répartis de manière à respecter les symétries du carter. Ils sont sélectionnés en partie par le logiciel éléments finis.

L'origine du repère global correspond au centre du carter, c'est à dire au point primitif du plan médian de l'engrènement. Les orientations des axes X, Y, et Z correspondent à celles présentées sur la figure II.7b.

Le sens de rotation de l'arbre moteur correspond à celui présenté sur la figure III.1 du chapitre 2 (rotation selon Z). L'une des faces normales à Z est encastrée au niveau de seize noeuds correspondant aux quatre coins de cette face.

II.4 Déformations statiques de la boîte d'inversion

Pour calculer les déformations statiques de la boîte d'inversion, nous avons introduit des raideurs des roulements égales à 10^9 N/m (raideurs radiales), 10^8 N/m (raideurs axiales) et 10^6 Nm/rad (raideurs angulaires) et des raideurs en torsion des accouplements flexibles égales à 1000 Nm/rad. Dans un premier temps, nous avons supposé que les termes extra-diagonaux de la matrice de raideur des roulements étaient nuls. Nous avons appliqué un couple moteur de 650 Nm au niveau du noeud représentant le moteur et encastré le noeud représentant la charge. Ces conditions limites diffèrent quelque peu de celles utilisées pour les calculs dynamiques puisque les arbres sont alors libres en rotation.

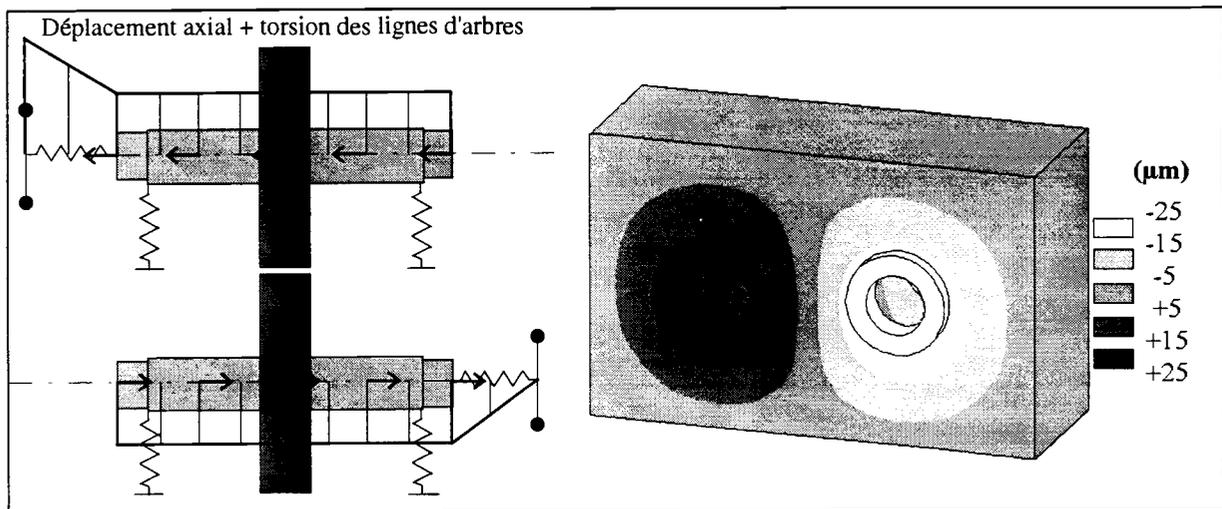


Figure II.8. Déformations statiques des lignes d'arbres et du carter.

Sous l'effet de l'effort axial induit par l'application du couple moteur et l'angle d'hélice de la denture, les lignes d'arbres se déforment peu mais elles se déplacent comme des corps rigides dans la direction axiale et en sens opposé. L'amplitude du déplacement est égale à $38 \mu\text{m}$. Elles tournent autour de leur axe de rotation de $65 \mu\text{rad}$ en sens opposé.

Le carter se déforme, au niveau des roulements, dans la direction correspondant à l'axe de rotation des arbres (axe Z). L'amplitude maximale du déplacement sur le carter est de $25 \mu\text{m}$. L'amplitude du déplacement axial des arbres est donc due principalement aux déformations du carter et, plus accessoirement, à celles des roulements. Les déformations du carter dans les directions X et Y ne dépassent pas $4 \mu\text{m}$.

Les deux accouplements flexibles subissent une grande déformation en torsion.

Etant données les symétries de l'engrenage et du carter, les déformations statiques de la boîte d'inversion n'induisent pas d'erreurs de parallélisme entre les lignes d'arbres.

II.5 Analyse modale de la boîte d'inversion

II.5.1 Premiers modes propres

Nous avons calculé les modes propres de la boîte d'inversion entre 0 et 5000 Hz (75 modes). Cette plage correspond à celle balayée par la fréquence d'engrènement (0-2450 Hz) et son premier harmonique (0-4900 Hz) pour des régimes moteur variant entre 0 et 3000 tours/min.

Les raideurs des roulements et des accouplements flexibles correspondent à celles utilisées pour calculer les déformations statiques de la boîte d'inversion. L'introduction de raideurs radiales, axiales et angulaires indépendantes les unes des autres permet de découpler les effets de ces différents paramètres sur les modes propres et sur les vitesses "critiques" de rotation de la boîte d'inversion. L'inertie de charge est libre en rotation. La figure II.9 présente les fréquences des modes propres situés entre 0 et 2000 Hz (24 modes).

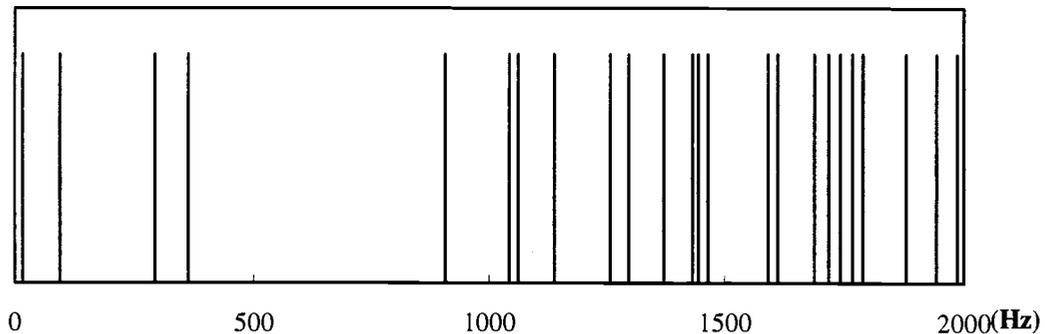


Figure II.9. Fréquences des modes propres entre 0 et 2000 Hz.

A partir de l'analyse des formes propres des premiers modes de la boîte d'inversion, nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Le premier mode de la boîte d'inversion a une fréquence nulle. C'est un mode de corps rigide des lignes d'arbres.
- Les deux modes suivants sont des modes de déformation des accouplements flexibles. On observe une rotation des inerties correspondant au moteur et à la charge (15 Hz) ou une rotation des lignes d'arbres (94 Hz). Les fréquences de ces modes sont gouvernées par la raideur en torsion des accouplements.
- Les modes à 292 Hz et 363 Hz sont des modes de déplacements axiaux des lignes d'arbres induisant une déformation des faces du carter normales à Z (figures II.10a et b). Leurs fréquences sont gouvernées par les raideurs axiales des roulements et du carter.
- La présence de masses importantes à l'intérieur du carter conduit à l'apparition de deux modes de flexion de l'ensemble du carter (910 Hz et 1140 Hz). On constate que, pour ces deux modes, les lignes d'arbres se déplacent latéralement et une partie de l'énergie de déformation élastique est associée aux raideurs radiales des roulements.

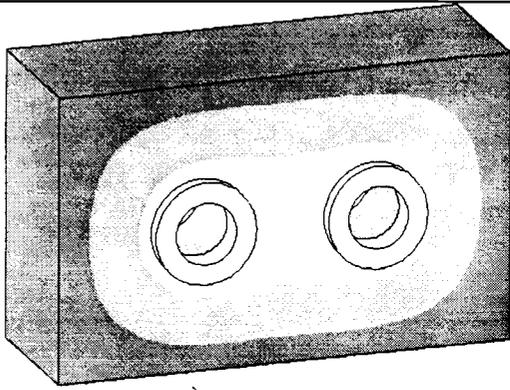
- Les modes à 1040 et 1060 Hz sont associés à une déformation en flexion des lignes d'arbres. Une partie de l'énergie de déformation élastique est associée à la raideur d'engrènement. Bien que, à l'exception de l'engrènement, les éléments de la boîte d'inversion soient symétriques par rapport au plan $X=0$, les déformations observées sur le carter présentent, notamment à 1040 Hz, une dissymétrie importante (figures II.10c et d).
- Les déformations du mode à 1260 Hz sont proches de celles d'un mode (1,1) des faces normales à Z. Celles du mode à 1300 Hz sont proches du mode (2,1) des faces normales à Z (figures II.10e et f).
- Les différentes faces du carter sont couplées les unes aux autres. Pour chaque mode présentant des déformations sur les faces normales à Z, les faces latérales normales à X et Y se déforment (figures II.10g, h, i et j).
- Les lignes d'arbres fléchissent de façon significative pour certains modes situés à partir de 1440 Hz. Elles se déforment en torsion à partir de 1770 Hz. Les déformations de flexion des lignes d'arbres peuvent être couplées aux déformations de torsion.

A l'exception du premier mode (0 Hz, mode de corps rigide des lignes d'arbres) et du deuxième mode (15 Hz, mode de torsion de l'accouplement et de déplacement angulaire des inerties correspondant à la charge et au moteur), les noeuds d'entrée et de sortie des lignes d'arbres correspondent à des noeuds de vibration pour l'ensemble des modes propres de la boîte d'inversion.

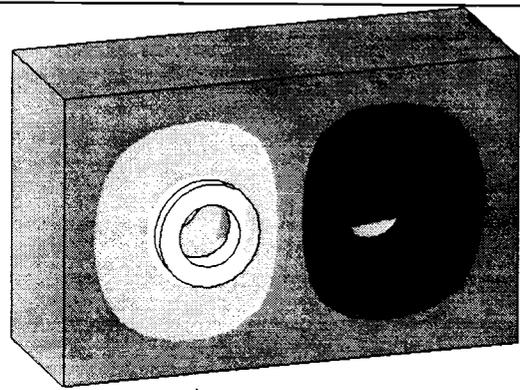
Remarques :

1) A l'exception des deux premiers modes (0 Hz et 15 Hz), les modes propres que nous avons calculés sont identiques aux modes propres de la boîte d'inversion calculés en intégrant les déformations statiques induites par l'application d'un couple moteur (modes précontraints).

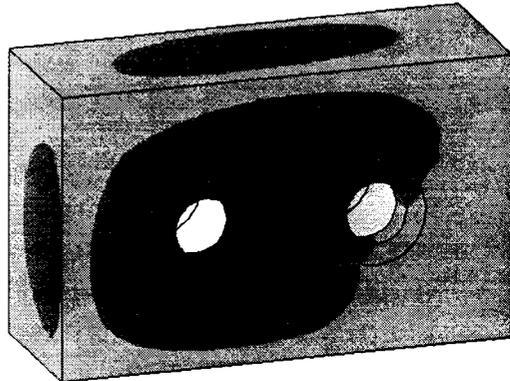
2) A partir d'une modélisation dynamique 3D de l'engrènement, nous avons calculé les premiers modes propres des corps des roues isolés et ceux des corps de roue couplés par la raideur moyenne d'engrènement (nous avons supposé que les roues étaient encastrées sur l'arbre moteur et l'arbre de sortie). Les premières fréquences propres des roues isolées sont supérieures à 5000 Hz. Elles se situent donc au-delà de notre domaine d'étude. Les premières fréquences propres des roues couplées sont supérieures ou égales à celles des roues isolées. Ceci justifie a posteriori la modélisation des roues dentées par des éléments de masse et d'inertie concentrées rapportés sur les lignes d'arbres.



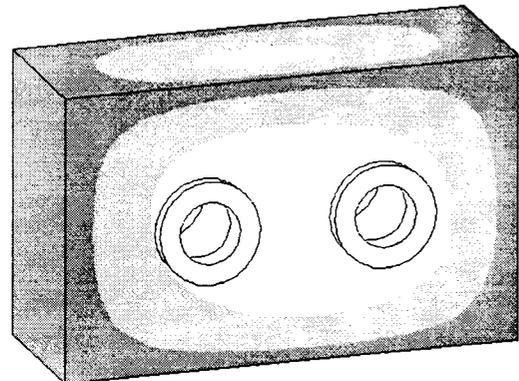
(a) 4^{ème} mode : 292 Hz



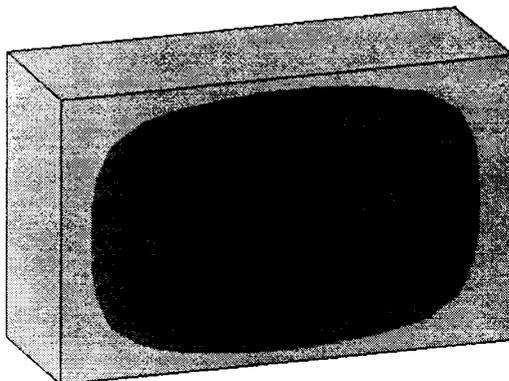
(b) 5^{ème} mode : 363 Hz



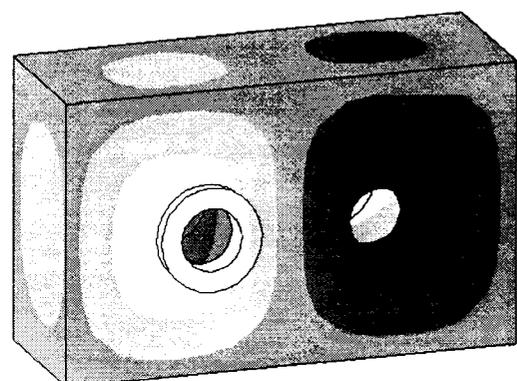
(c) 7^{ème} mode : 1040 Hz



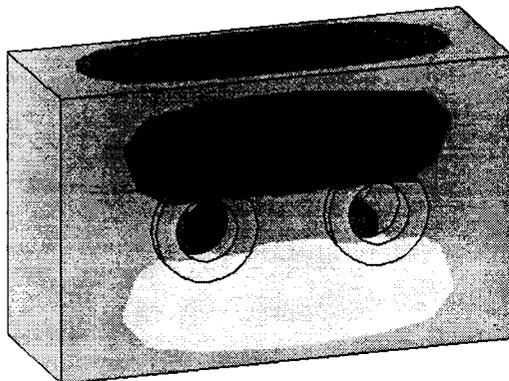
(d) 8^{ème} mode : 1060 Hz



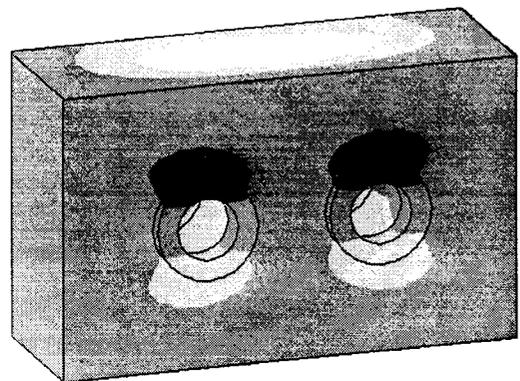
(e) 10^{ème} mode : 1260 Hz



(f) 11^{ème} mode : 1300 Hz



(g) 12^{ème} mode : 1360 Hz



(h) 13^{ème} mode : 1430 Hz

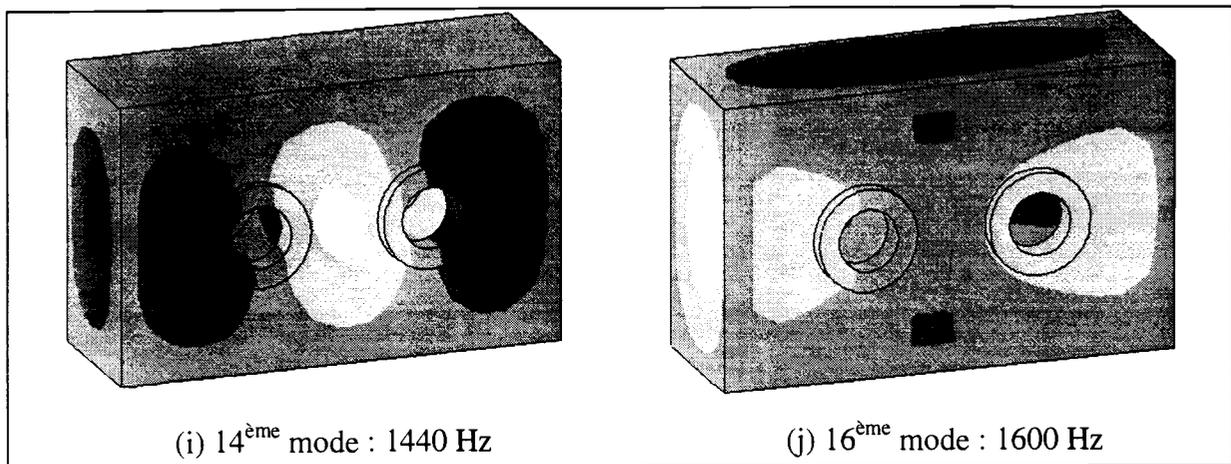


Figure II.10. Déformées modales du carter.

II.5.2 Modes de denture et modes de roulement

L'interprétation du comportement dynamique de boîte d'inversion nécessite l'analyse de ses formes propres et l'identification de certains modes particuliers que nous appelons "modes de denture" et "modes de roulement". Nous définissons ces modes à partir d'une approche énergétique qui est décrite ci-après.

Pour chacun des modes propres de la transmission, nous définissons U_e l'énergie de déformation associée à la raideur d'engrènement et U_T l'énergie totale de déformation :

$$\text{pour le } j\text{-ième mode,} \quad U_e^{(j)} = \frac{1}{2} \underline{\Phi}^{(j)} \cdot \underline{k}_e \cdot \underline{\Phi}^{(j)}$$

$$U_T^{(j)} = \frac{1}{2} \underline{\Phi}^{(j)} \cdot \underline{K}_T \cdot \underline{\Phi}^{(j)}$$

où - $\underline{\Phi}^{(j)}$ est le vecteur propre du j -ième mode,

- \underline{K}_T est la matrice de raideur de la transmission complète,

- \underline{k}_e est la matrice de raideur généralisée associée à la raideur d'engrènement. A l'exception des termes situés sur les 12 lignes et les 12 colonnes associées aux degrés de liberté de l'engrenage, les termes de cette matrice, de dimension égale à \underline{K}_T , sont nuls.

Nous définissons le taux d'énergie de déformation ρ_e associée à la raideur d'engrènement :

$$\rho_e^{(j)} = \frac{U_e^{(j)}}{U_T^{(j)}}$$

Nous pouvons comparer les valeurs de ρ_e associées à chaque mode propre de la transmission et nous choisissons d'appeler "modes de denture" les modes qui présentent le taux d'énergie ρ_e le plus élevé.

La définition des modes de denture est donc basée sur deux comparaisons successives : (1) la comparaison, pour chaque mode propre, des énergies de déformation associées à chaque élément de la transmission et (2) la comparaison des énergies de denture associées à chaque mode.

De la même manière que nous avons défini les modes de denture, nous pouvons définir les modes de roulement de la manière suivante. Pour chaque mode propre de la transmission, l'énergie de déformation associée au roulement est égale à :

$$U_r^{(j)} = \frac{1}{2} \underline{\Phi}^{(j)} \cdot \underline{k}_r \cdot \underline{\Phi}^{(j)}$$

où \underline{k}_r est la matrice de raideur du roulement. A l'exception des termes situés sur les 10 lignes et les 10 colonnes associées aux degrés de liberté du roulement, les termes de cette matrice sont nuls.

Nous définissons le taux d'énergie de déformation ρ_r associée au roulement :

$$\rho_r^{(j)} = \frac{U_r^{(j)}}{U_T^{(j)}}$$

Nous pouvons comparer les valeurs de ρ_r associées à chaque mode propre de la transmission et nous choisissons d'appeler "modes de roulement" les modes qui présentent le taux d'énergie ρ_r le plus élevé. Comme pour les modes de denture, l'amplitude vibratoire maximale des modes de roulement n'est pas forcément située au niveau du roulement. En effet, ces modes peuvent présenter à la fois un ventre de vibration localisé au niveau du roulement et d'autres ventres de vibration, sur les autres éléments de la transmission.

Si les roulements sont modélisés par des raideurs radiales k_{xx} et k_{yy} , une raideur axiale k_{zz} et des raideurs angulaires $k_{\theta_{xx}}$ et $k_{\theta_{yy}}$ indépendantes les unes des autres, nous pouvons calculer l'énergie de déformation associée à chaque raideur élémentaire et distinguer les modes de roulement au sens de k_{xx} et k_{yy} des modes de roulement au sens de k_{zz} et des modes de roulement au sens de $k_{\theta_{xx}}$ et $k_{\theta_{yy}}$.

Le tableau II.2 présente les fréquences des modes de denture principaux et les taux d'énergie qui leur sont associés.

La figure II.11 présente, pour l'ensemble des 75 modes propres compris entre 0 et 5000 Hz, les taux d'énergie ρ_e et ρ_r associés à la raideur d'engrènement et aux quatre roulements. Le nombre des modes de denture est relativement peu important. Ils ne correspondent pas aux premiers modes propres du système. Le taux d'énergie associé à la raideur d'engrènement des modes de denture principaux est proche de 10 % de l'énergie de déformation totale du mode. Par contre, pour de nombreux modes propres, le taux d'énergie associé aux quatre roulements est important. Il peut atteindre jusqu'à 70 % de l'énergie totale du mode.

1040 Hz	10 %
1880 Hz	9 %
2765 Hz	3 %
3000 Hz	4 %
3145 Hz	8 %
3350 Hz	4 %
3440 Hz	11 %
3620 Hz	5 %
3860 Hz	12 %
4070 Hz	12 %

Tableau II.2. Fréquence et taux d'énergie des modes de denture principaux

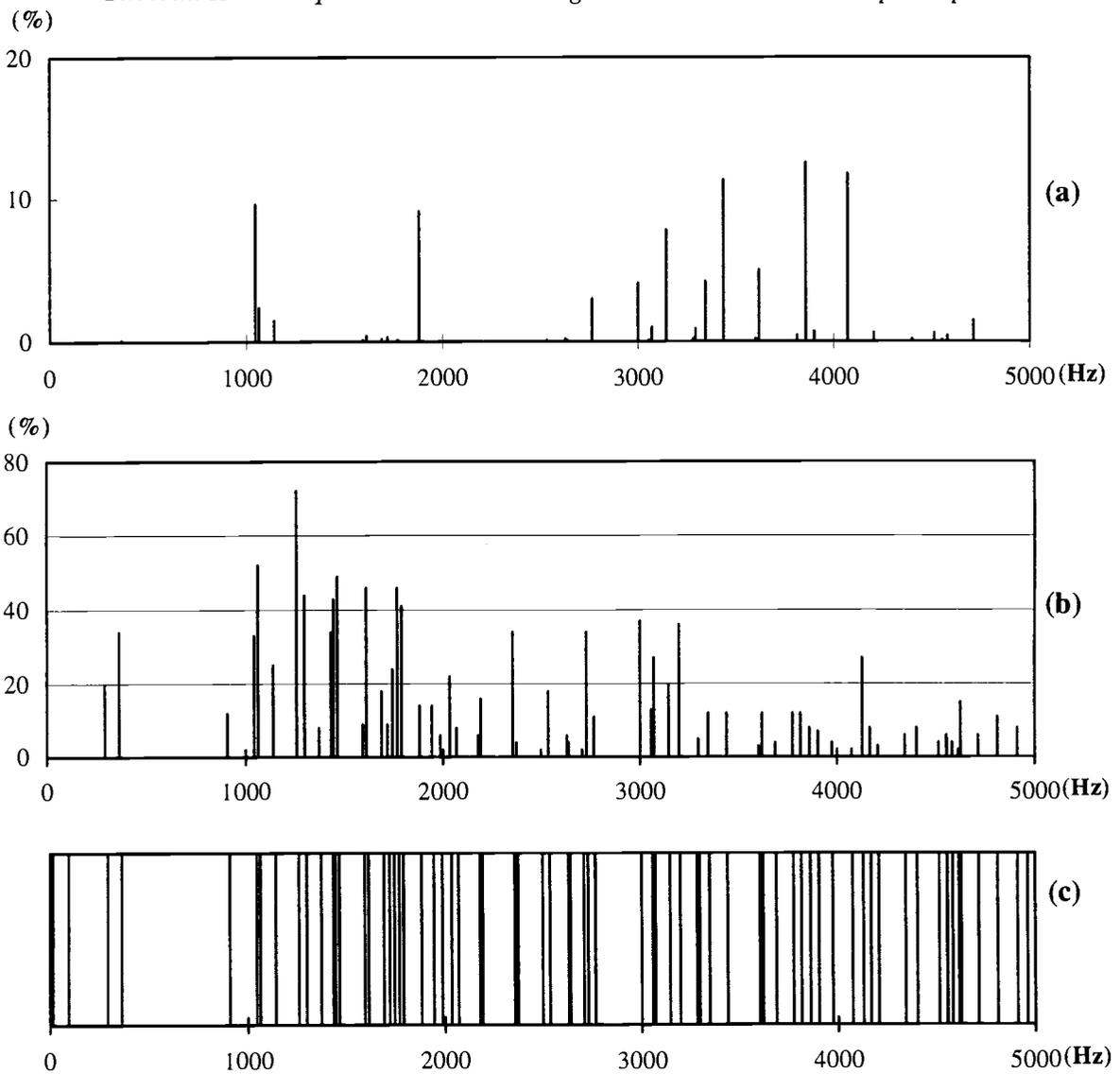


Figure II.11. (a) Taux d'énergie ρ_e associée à la raideur d'engrènement.
 (b) Taux d'énergie ρ_r associée aux quatre roulements.
 (c) Fréquences propres des modes situées entre 0 et 5000 Hz.

III- Influence de l'élasticité des arbres, des roulements, du carter et des accouplements sur les vitesses "critiques" de rotation de la boîte d'inversion

III.1 Introduction

Lors de la conception d'une transmission par engrenages, il est important de savoir prédire quelles seront les vitesses de rotation qui donneront naissance aux plus grandes surcharges dynamiques sur les dentures. La prédiction de ces vitesses "critiques" est souvent basée sur des hypothèses simplistes (modèles à 1 d.d.l.) ou sur des résultats issus de modélisation des lignes d'arbres de la transmission en torsion pure et, plus rarement, en torsion-flexion.

Nous cherchons à préciser l'influence de chacune des composantes mécaniques sur les vitesses "critiques" de rotation d'une transmission. Pour cela, nous introduisons différentes modélisations de la boîte d'inversion étudiée (modèle de torsion pure, modèle de torsion-flexion des lignes d'arbres, prise en compte des roulements, modèle global intégrant les propriétés mécaniques du carter). En vue de déterminer et de comparer les vitesses "critiques" de rotation associées à chaque modèle, nous calculons la base modale qui lui est associée ainsi que l'évolution de la surcharge dynamique de denture en fonction de la fréquence d'engrènement. Cette surcharge dynamique est égale à la somme des surcharges s'exerçant sur l'ensemble des couples de dents en prise. Elle est calculée dans le plan apparent de l'engrenage. Nous analysons d'autre part l'influence d'une modification des raideurs des roulements ou des accouplements flexibles. La modélisation des roulements par des raideurs radiales, axiales et angulaires indépendantes les unes des autres nous permet de découpler les effets liés à ces différents paramètres.

Nous choisissons un couple moteur égal à 650 Nm et une plage de fréquence variant de 0 à 5000 Hz. Pour définir quels sont les modes qui peuvent être excités par l'une des composantes harmoniques de l'erreur statique de transmission sous charge, nous ne retenons, comme excitation, que la raie fondamentale (associée à la fréquence d'engrènement) des spectres de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement que nous avons calculés. Ceci permet de ne faire émerger que les résonances principales du système. Pour un régime de fonctionnement variant entre 0 et 3000 tours/min, la plage de fréquence retenue correspond à celle que balaie le fondamental (0-2450 Hz) et le premier harmonique (0-4900 Hz) de la fréquence d'engrènement, ces raies constituant les raies dominantes du spectre de l'erreur statique de transmission sous charge que nous avons calculé. Même si nous avons vu dans le chapitre 2 que la réponse d'un système paramétrique à une fluctuation harmonique de raideur pouvait être périodique, la fluctuation de la raideur d'engrènement que nous retenons est suffisamment faible pour que la réponse du système soit quasi-harmonique. Pour l'ensemble des régimes de fonctionnement, l'évolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture coïncide donc avec l'évolution de la valeur efficace de la raie

fondamentale associée à la fréquence d'engrènement. Nous introduisons, pour chaque mode propre de la boîte d'inversion, un taux d'amortissement visqueux équivalent égal à 3 %.

III.2 Influence de la flexion des arbres

Pour mettre en évidence l'influence de la flexion des arbres sur les vitesses "critiques" de rotation, nous avons calculé les modes propres de la boîte d'inversion pour un modèle n'incluant que les déformations de torsion des lignes d'arbres. Ce modèle possède uniquement 40 degrés de liberté (d.d.l.) en rotation et 6 modes propres entre 0 et 5000 Hz. La figure III.1a présente les fréquences propres de ces modes. L'analyse des formes propres des modes nous a permis de détecter deux modes de denture Φ_d possédant des taux d'énergie ρ_e respectivement égaux à 34 % (**1530 Hz**) et 61 % (**3140 Hz**).

La figure III.1b montre que l'excitation en résonance des modes de denture génère des amplifications de la surcharge dynamique de denture. Elle donne donc naissance à deux vitesses "critiques" de rotation. La valeur efficace de la surcharge dynamique de denture peut atteindre des valeurs très élevées (2250 N) qui correspondent à 30 % de la charge statique (8000 N) induite par le couple moteur. L'amplitude des pics est proportionnelle aux taux d'énergie ρ_e des modes de denture correspondants.

Nous avons ensuite calculé les modes propres de la boîte d'inversion en utilisant un modèle incluant les déformations de traction-compression et de flexion des lignes d'arbres. Le carter et les roulements étaient supposés rigides. Les roulements étaient considérés comme des appuis simples. Ce modèle possède 218 d.d.l. et 10 modes propres entre 0 et 5000 Hz. La figure III.2a présente les fréquences propres des modes associés à ce modèle. On note la présence de trois modes de denture possédant des taux d'énergie ρ_e respectivement égaux à 22 % (**1250 Hz**), 26 % (**3060 Hz**) et 27 % (**3680 Hz**). Contrairement à certains autres modes de la boîte d'inversion, les formes propres des modes de denture présentent simultanément des déformations de flexion et des déformations de torsion. Ce phénomène s'explique par le fait que l'engrènement couple l'ensemble des degrés de liberté de la roue menée à l'ensemble des degrés de liberté du pignon.

La figure III.2b montre que l'excitation des modes de denture génère trois amplifications de la surcharge dynamique de denture. L'écart entre le modèle de torsion-flexion et le modèle de torsion pure traduit un effet de la flexion des arbres. Il en résulte que le modèle de torsion pure qui est souvent retenu ne permet pas de prédire correctement les vitesses "critiques" de rotation d'une transmission par engrenages. On note de plus que ce type de modèle surestime le niveau des surcharges dynamiques maximales s'exerçant sur les dentures.

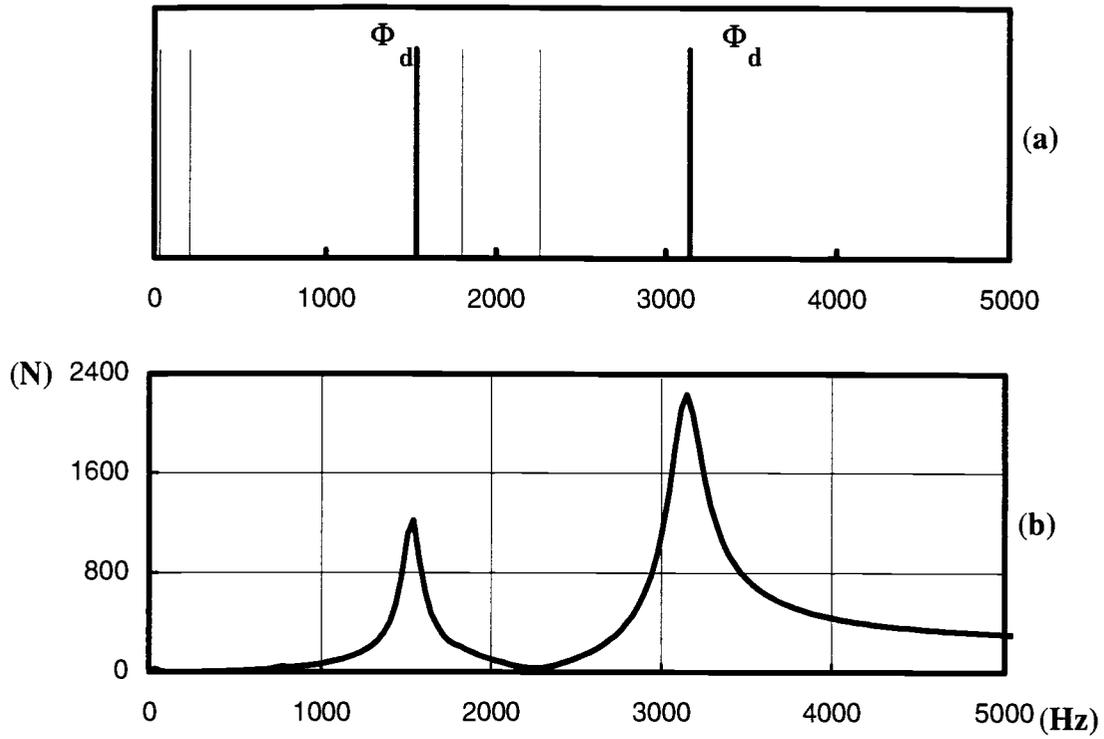


Figure III.1. Modélisation des lignes d'arbres en torsion pure.
Fréquences propres des modes (a) et évolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture avec la fréquence d'engrènement (b).

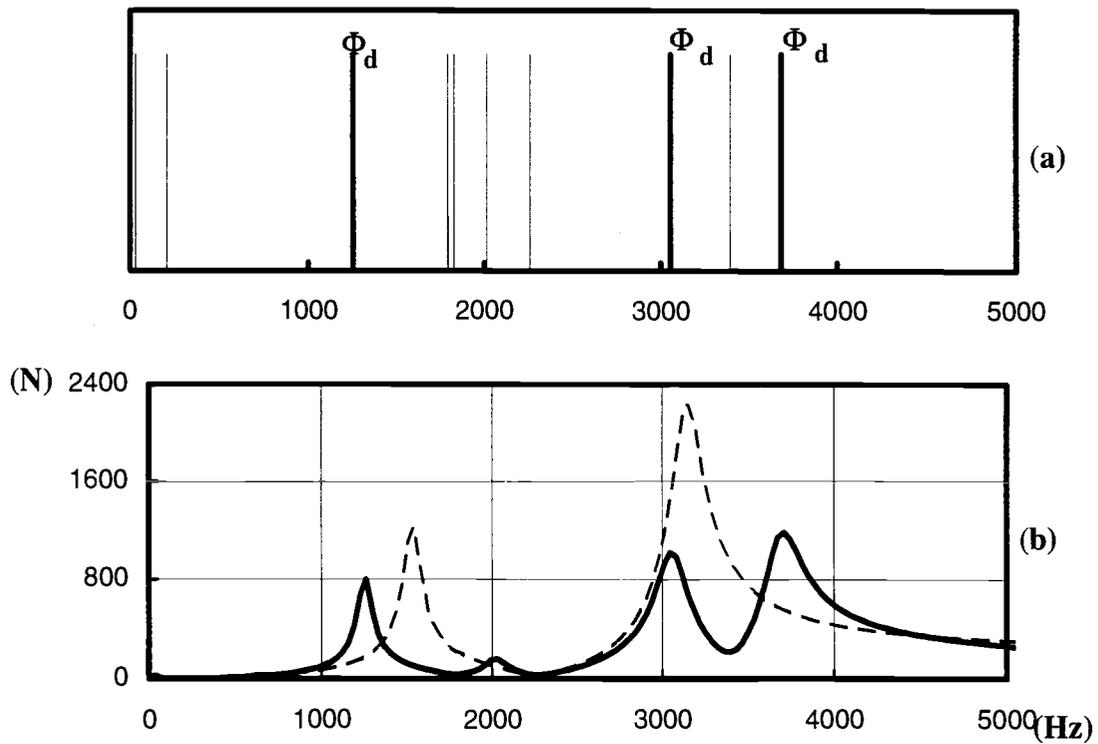


Figure III.2. Modélisation des lignes d'arbres en torsion-flexion.
Fréquences propres des modes (a) et évolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture avec la fréquence d'engrènement (b).

III.3 Influence des roulements

Pour mettre en évidence l'influence des roulements sur les vitesses "critiques" de rotation, nous avons pris en compte non seulement les déformations en torsion-flexion des lignes d'arbres, mais aussi les déformations élastiques des roulements. Les valeurs nominales des raideurs radiales (identiques selon deux directions perpendiculaires), de la raideur axiale et des raideurs angulaires sont égales respectivement à 10^9 N/m, 10^8 N/m et 10^6 Nm/rad. Le nouveau modèle possède 230 d.d.l. et 14 modes propres entre 0 et 5000 Hz. La figure III.3a présente les fréquences propres de ces modes. Les deux premières fréquences propres (15 Hz et 94 Hz) correspondent à des modes de torsion pure induits par l'environnement. La boîte d'inversion présente deux modes de déplacements axiaux (590 Hz et 605 Hz), quatre modes de flexion (1730 Hz, 2240 Hz, 2900 Hz et 2960 Hz), et un mode de torsion des lignes d'arbres (1770 Hz). Elle présente des nouveaux modes de denture (**1190 Hz**, **3370 Hz** et **4160 Hz**).

La figure III.3b montre que l'excitation des modes de denture donne naissance à trois amplifications de la surcharge dynamique de denture différentes de celles associées au modèle avec roulements rigides. L'élasticité des roulements modifie donc les vitesses "critiques" de rotation de la boîte d'inversion.

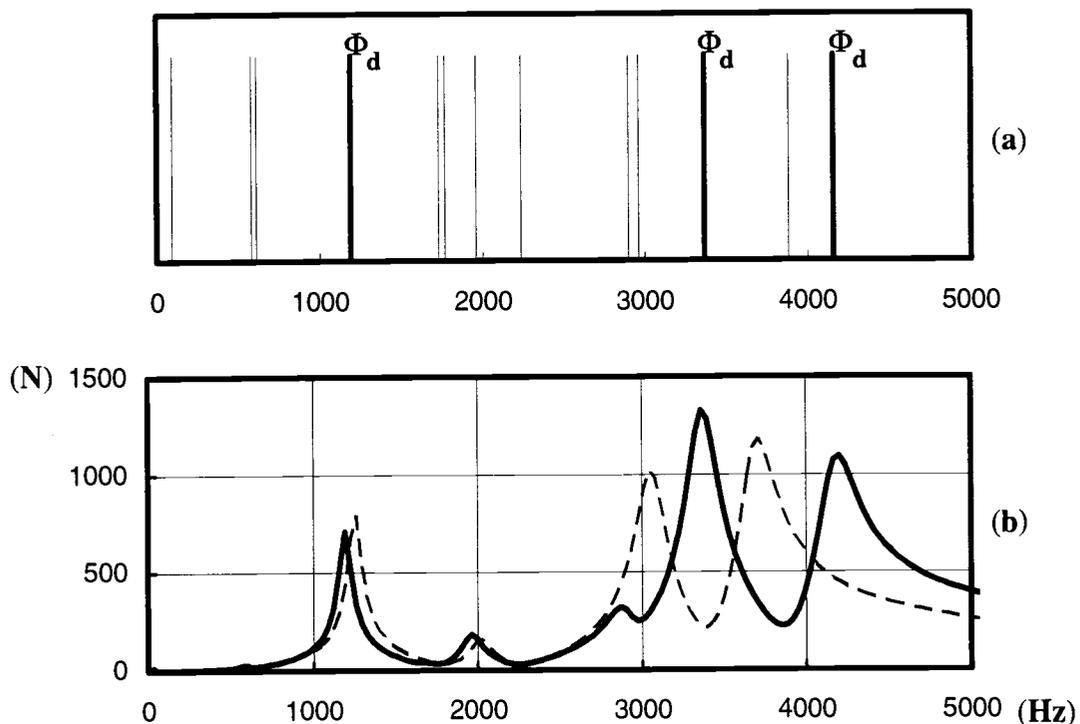


Figure III.3. Fréquences propres des modes (a) et évolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture avec la fréquence d'engrènement (b). Roulements élastiques (—) et roulements rigides (-----).

III.3.1 Influence des raideurs radiales

Pour analyser plus en détail l'influence des raideurs des roulements sur les modes de denture, nous avons fait varier les raideurs radiales dans une plage comprise entre 10^8 N/m à 10^{10} N/m. Cette plage correspond aux valeurs habituelles rencontrées dans les transmissions par engrenages (à titre comparatif, rappelons que la valeur moyenne de la raideur d'engrènement de la boîte d'inversion est, pour un couple moteur de 650 Nm, égale à $4 \cdot 10^8$ N/m).

La figure III.4 présente les courbes d'égal niveau de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture en fonction de la raideur radiale des roulements et de la fréquence d'engrènement. Pour la boîte d'inversion étudiée et dans la plage de variation de raideur considérée (10^8 N/m à 10^{10} N/m), on observe les caractéristiques suivantes :

1) La fréquence propre des modes de denture principaux augmente avec les raideurs radiales des roulements. Cette augmentation se manifeste pour des raideurs radiales d'autant plus grandes que les fréquences des modes de denture sont élevées. Pour chaque mode de denture, elle dépend du taux d'énergie ρ_{ra} associé aux raideurs radiales des roulements. Ainsi, pour les premiers modes de denture (fréquence propre inférieure à 2000 Hz), la valeur de ρ_{ra} est importante entre 10^8 et 10^9 N/m puis faible entre 10^9 et 10^{10} N/m. L'évolution de la fréquence des modes de denture est donc très marquée entre 10^8 et 10^9 N/m, puis moins marquée à partir de 10^9 N/m. Pour les modes de denture situés à des fréquences plus élevées (fréquence propre supérieure à 2000 Hz), la valeur de ρ_{ra} est faible entre 10^8 et 10^9 N/m puis plus importante entre 10^9 et 10^{10} N/m. L'évolution de la fréquence des modes de denture est donc assez faible entre 10^8 et 10^9 N/m, puis plus marquée à partir de 10^9 N/m.

2) L'évolution de la fréquence propre des modes de denture principaux s'accompagne d'une modification de la forme propre associée à ces modes si bien que le taux d'énergie ρ_e associé aux modes de denture principaux diminue au fur et à mesure que leur fréquence augmente.

3) Les modes de denture principaux (**1680 Hz**, **3350 Hz** et **4140 Hz** pour $K=10^8$ N/m) finissent par disparaître au profit de l'apparition de nouveaux modes de denture situés à des fréquences plus basses (respectivement **1360 Hz**, **3310 Hz** et **4050 Hz** pour $K=10^{10}$ N/m). Ce dernier comportement se traduit par le fait que les vitesses "critiques" de rotation sont plus faibles lorsque les raideurs radiales sont grandes.

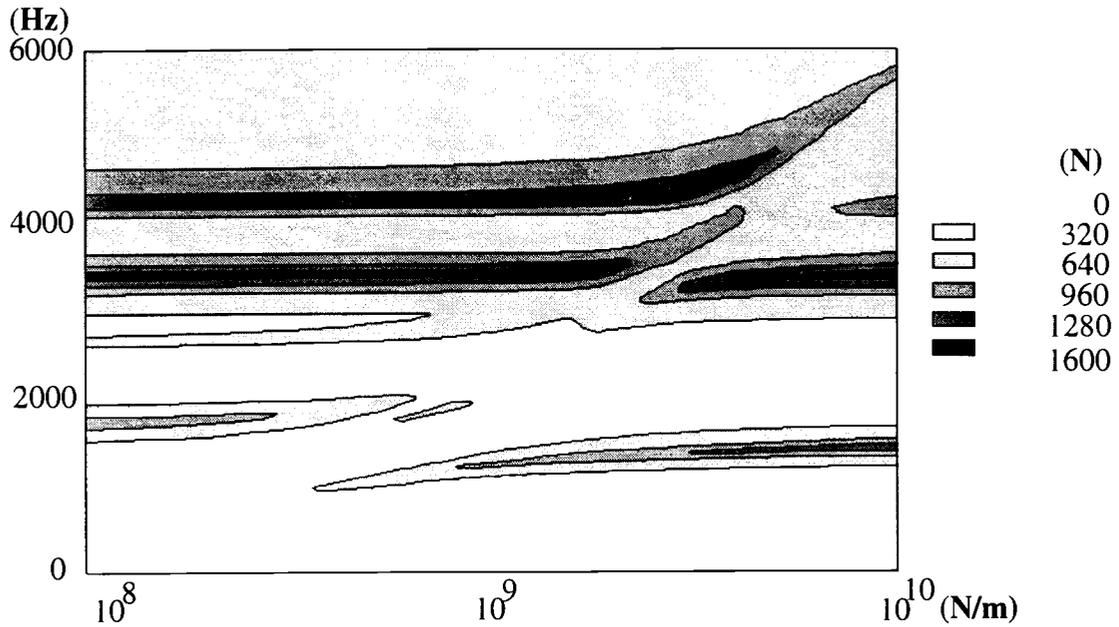


Figure III.4. Evolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture avec les raideurs radiales des roulements (en abscisse) et la fréquence d'engrènement (en ordonnée).

III.3.2 Influence des raideurs angulaires

Les raideurs angulaires des roulements peuvent varier dans une plage importante en fonction de la nature du roulement et de sa précharge. Ainsi, les roulements à billes ont des raideurs angulaires faibles tandis que les roulements à rouleaux coniques ont des raideurs angulaires élevées, notamment s'ils sont fortement préchargés. Aussi, nous avons aussi fait varier les raideurs angulaires des roulements entre 10^4 Nm/rad et 10^8 Nm/rad.

La figure III.5 présente les courbes d'égal niveau de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture en fonction de la raideur angulaire des roulements et de la fréquence d'engrènement. Les fréquences propres des modes de denture principaux augmentent avec les raideurs angulaires des roulements. Pour chaque mode de denture, cette augmentation dépend du taux d'énergie ρ_{r0} associé aux raideurs angulaires des roulements. Ainsi, entre 10^6 et 10^7 Nm/rad, les modes de denture présentent un taux ρ_{r0} élevé et l'évolution de la fréquence des modes de denture est très marquée. Les modes de denture principaux (respectivement **1110 Hz**, **3100 Hz** et **3910 Hz** pour $K=10^4$ Nm/rad) disparaissent au profit de l'apparition de nouveaux modes (respectivement **1260 Hz** et **3460 Hz** pour $K=10^8$ Nm/rad).

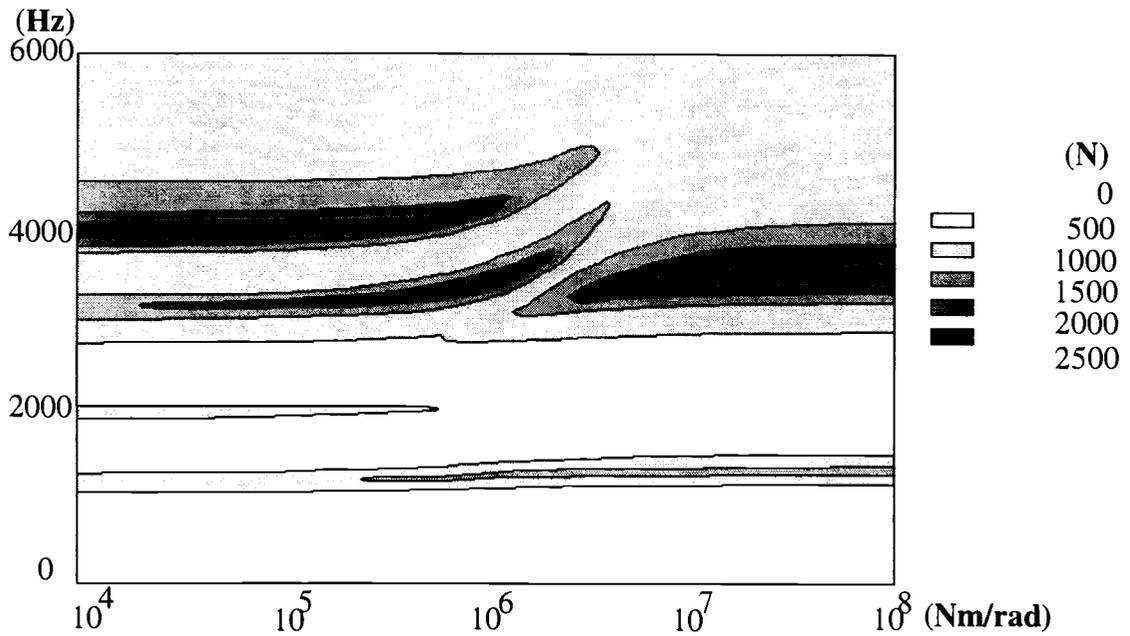


Figure III.5. Evolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture avec les raideurs angulaires des roulements (en abscisse) et la fréquence d'engrènement (en ordonnée).

Nous avons également évalué l'influence des raideurs axiales des roulements sur les modes de denture. Pour cela, nous avons fait varier ces raideurs entre 10^8 et 10^9 N/m. Nous avons constaté que, pour la boîte d'inversion étudiée, les raideurs axiales des roulements n'avaient pas d'influence sur les modes de denture.

III.4 Influence des raideurs en torsion des accouplements flexibles

Pour mettre en évidence l'influence des accouplements flexibles sur le comportement des lignes d'arbres, nous avons mis en série leur raideur en torsion avec la raideur en torsion des demi-arbres adjacents. Les figures III.6a et III.6b montrent que, pour une faible raideur en torsion des accouplements, la raideur équivalente de l'ensemble accouplement+demi-arbre évolue comme la raideur en torsion de l'accouplement. Par contre, pour une raideur de l'accouplement supérieure à celle du demi-arbre adjacent, la raideur équivalente de l'ensemble accouplement+demi-arbre converge vers la raideur du demi-arbre.

L'évolution de la raideur en torsion de l'ensemble accouplement+demi-arbre est significativement différente selon que les arbres sont suffisamment longs (et donc souples) ou courts (et donc raides). La boîte d'inversion est équipée d'arbres de 160 mm de long. La raideur de l'ensemble accouplement+demi-arbre reste inférieure à la raideur en torsion de l'engrenage, quelle que soit la raideur de l'accouplement flexible. Par contre, pour des arbres de 80 mm de long, la raideur de l'ensemble accouplement+demi-arbre est initialement inférieure à la raideur en torsion de l'engrenage. Elle devient égale, puis supérieure à cette raideur lorsque la raideur en torsion de l'accouplement flexible augmente.

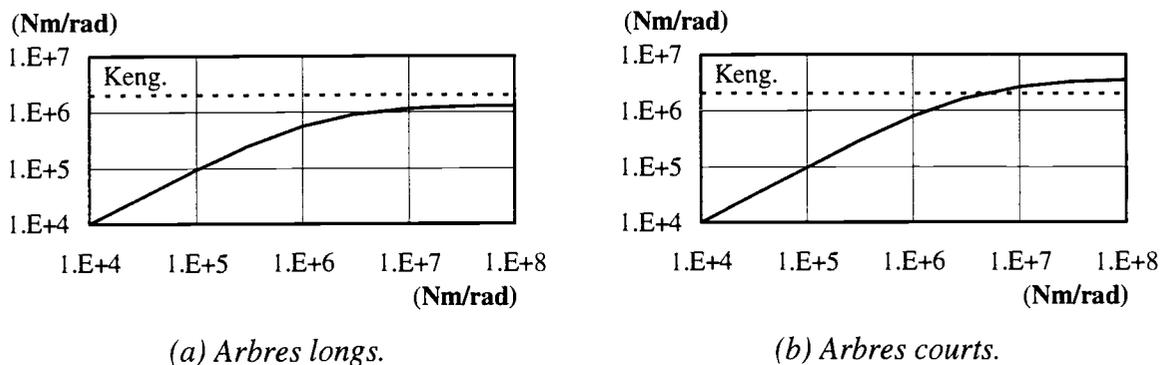


Figure III.6. Evolution de la raideur en torsion de l'ensemble accouplement+demi-arbre en fonction de la raideur en torsion de l'accouplement.

Les figures III.7a et III.7b présentent l'évolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture en fonction de la raideur d'engrènement, pour des accouplements très flexibles ($K_{\text{torsion}}=10^4$ Nm/rad) et des accouplements à denture ($K_{\text{torsion}}=10^8$ Nm/rad).

Pour des arbres suffisamment longs, une augmentation des raideurs en torsion des accouplements ne modifie que les premiers modes propres de la boîte d'inversion. Les modes de denture principaux (3350 Hz et 4160 Hz) évoluent donc peu. En effet, les inerties en rotation correspondant au moteur et au frein sont découplées de l'engrenage car l'ensemble accouplements+demi-arbres est toujours plus souple que la denture. Le type d'accouplements flexibles utilisé n'a donc pas d'influence sur les vitesses critiques de rotation de la boîte d'inversion.

Pour des arbres plus courts, les fréquences des modes de denture sont égales à **1390 Hz** et **2720 Hz** pour des raideurs d'accouplements égales à $K_{torsion}=10^4$ Nm/rad. Elles augmentent avec la raideur des accouplements et deviennent égales à **2080 Hz** et **3430 Hz** pour des raideurs égales à $K_{torsion}=10^8$ Nm/rad. L'amplitude des pics d'amplification de la surcharge dynamique de denture associés à l'excitation de ces modes diminue. De nouveaux modes de denture apparaissent à des fréquences plus faibles (**208 Hz** et **660 Hz**).

Pour des accouplements flexibles ($K_{torsion}=10^4$ Nm/rad), le moteur et le frein correspondent à des noeuds de vibration des modes de denture. Ils sont découplés de l'engrenage en raison de la déformation des accouplements. Pour des accouplements à denture ($K_{torsion}=10^8$ Nm/rad), le premier mode propre du système correspond à un mode de denture (**208 Hz**). Il est dominé par les déformations de torsion. Les arbres, les accouplements, le moteur et la charge se déplacent comme des corps rigides. L'engrenage étant l'élément le plus souple en torsion, il est le seul à se déformer. La mise en série d'arbres courts et d'accouplements raides conduit donc à l'apparition de modes de denture à basse fréquence en raison de la présence d'inerties en rotation importantes correspondant au moteur et à la charge.

L'ensemble de ces phénomènes se traduit, pour des arbres courts, par une modification sensible de l'évolution de la surcharge dynamique de denture avec le type d'accouplements choisi.

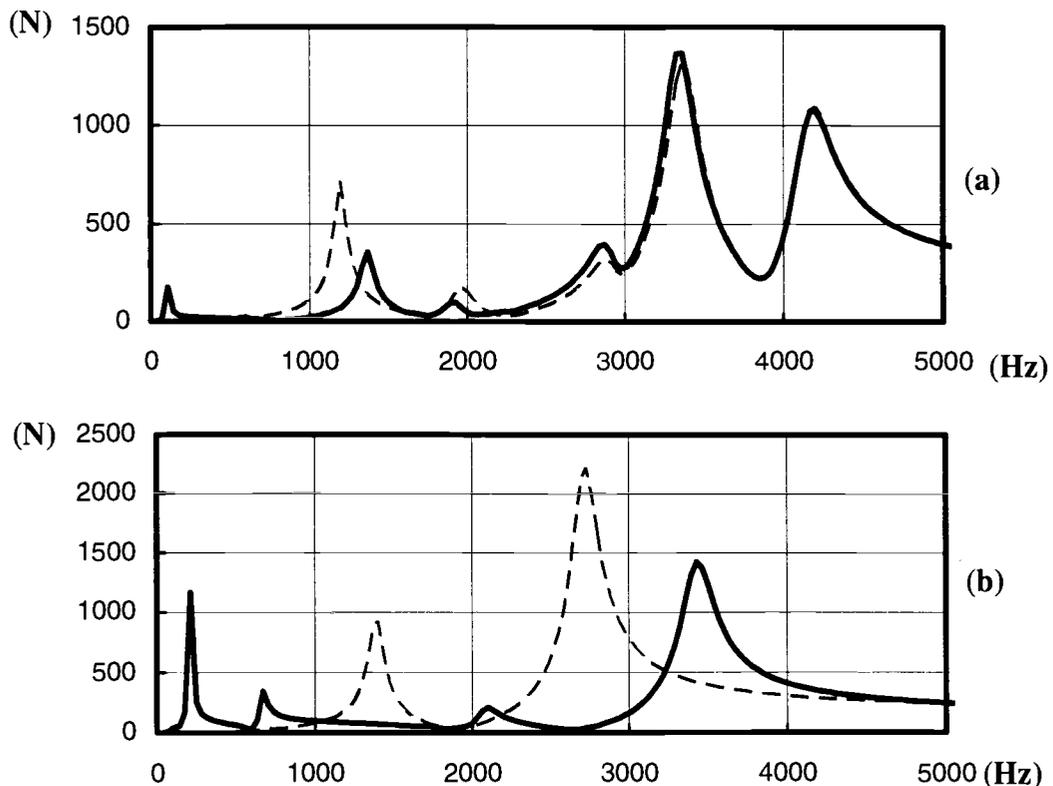


Figure III.7. Evolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture.

$K_{acc}=10^4$ Nm/rad (- - - - -); $K_{acc}=10^8$ Nm/rad (———).

Arbres longs (a) et arbres courts (b).

III.5 Influence du carter

Afin d'évaluer l'influence des propriétés mécaniques (élasticité et inertie) du carter sur les vitesses critiques de rotation de la boîte d'inversion, nous avons réalisé une analyse modale de la transmission complète. Le modèle prend en compte l'ensemble des composantes de la boîte d'inversion, c'est à dire l'engrenage, les arbres, les roulements, le carter et l'environnement. Il possède 75 modes propres entre 0 et 5000 Hz qui correspondent, pour un type de roulements particulier, aux modes présentés au paragraphe II.5. L'examen détaillé des nouveaux modes propres conduit à un certain nombre de remarques.

- 1) Dans la plage de fréquences considérée, les modes de denture sont nombreux. Pour chaque mode, le taux d'énergie ρ_e associée à la raideur d'engrènement est assez faible. En effet, pour chaque mode propre, une partie de l'énergie de déformation est stockée sur le carter. La part relative de l'énergie de déformation associée aux arbres, aux roulements et à la denture est donc plus faible que dans le cas où le carter est supposé rigide.
- 2) Les déformations des lignes d'arbres sont couplées aux déformations du carter. Le comportement dynamique du carter interagit donc avec l'engrenage.
- 3) En raison des déformations du carter, la fréquence et la forme propre de chaque mode de denture sont différentes de celles calculées avec un carter rigide.

Nous avons comparé l'évolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture avec les résultats précédents (carter infiniment rigide). Cette comparaison est présentée pour des couples raideur radiale-raideur angulaire des roulements respectivement égaux à 10^8 N/m- 10^4 Nm/rad (figure III.8a), à 10^9 N/m- 10^6 Nm/rad (figure III.8b) et 10^{10} N/m- 10^8 Nm/rad (figure III.8c).

Comme l'illustre la figure III.8a, pour des roulements très souples, les propriétés mécaniques du carter ne modifient pas les modes de denture. En effet, dans ce cas de figure, les déformations du carter ne sont pas couplées à celles des lignes d'arbres.

Par contre, pour des raideurs de roulements plus élevées, le comportement dynamique de la boîte d'inversion est très affecté par les propriétés élastiques du carter. Comme l'illustrent les figures III.8b et III.8c, les pics d'amplification de la surcharge dynamique de denture sont plus nombreux. Leur fréquence a sensiblement évolué et le niveau maximum de la valeur efficace de la surcharge dynamique devient plus faible. Il correspond désormais à 10 % de la charge statique induite par le couple moteur. Des études paramétriques nous ont montré que, pour la boîte d'inversion étudiée, les raideurs angulaires jouent un rôle plus important que les raideurs radiales dans le couplage entre le carter et l'engrenage.

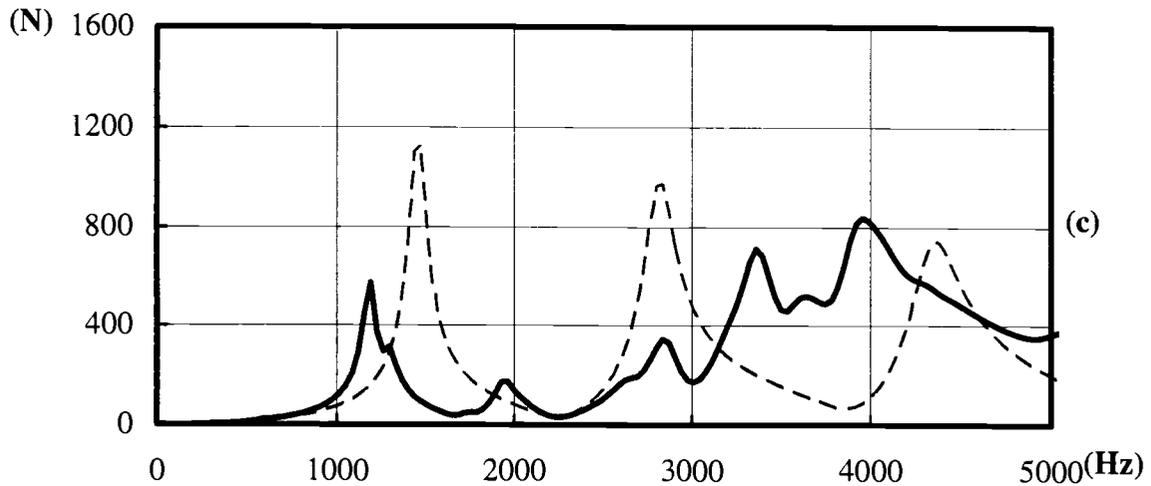
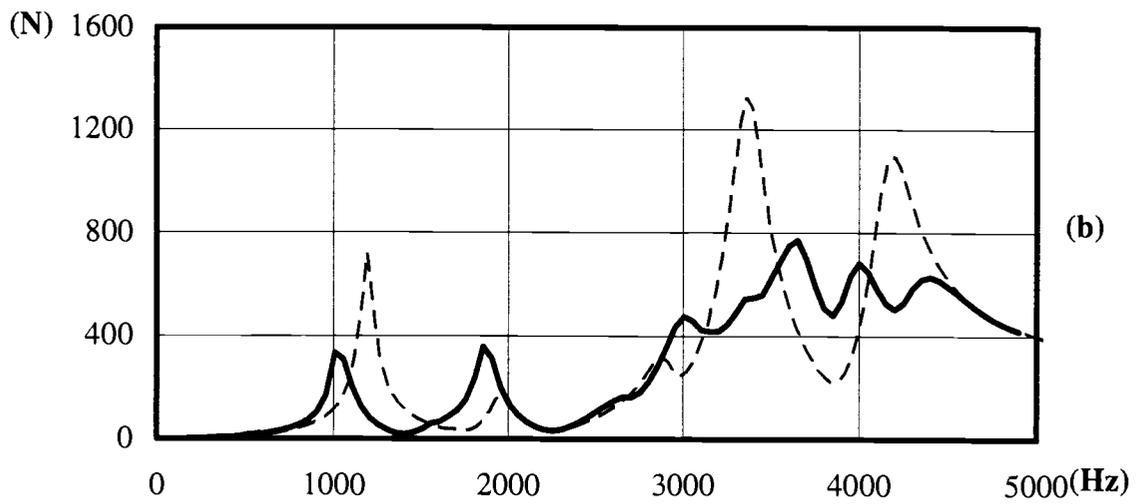
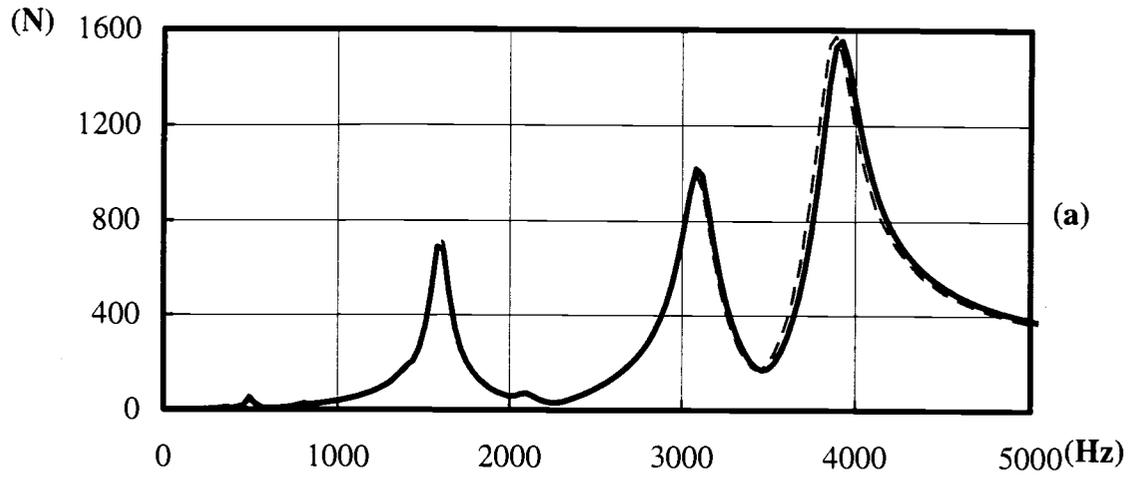


Figure III.8. Evolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture.

Carter élastique (—) et carter rigide (-----).

(a) $K_{ang} = 10^4 \text{ Nm/rad}$. $K_{rad} = 10^8 \text{ N/m}$.

(b) $K_{ang} = 10^6 \text{ Nm/rad}$. $K_{rad} = 10^9 \text{ N/m}$.

(c) $K_{ang} = 10^8 \text{ Nm/rad}$. $K_{rad} = 10^{10} \text{ N/m}$.

III.6 Conclusion

Pour certaines vitesses de rotation dites vitesses "critiques", l'excitation en résonance des modes de denture génère les plus grandes surcharges dynamiques de denture. La vitesse de rotation du moteur de la boîte d'inversion étudiée varie entre 0 et 3000 tours/min. Si l'excitation interne de la transmission est périodique et résulte de la superposition de nombreuses composantes harmoniques, les modes de denture, situés entre 0 et 4500 Hz, peuvent être excités par la fréquence d'engrènement ou l'un de ses harmoniques. L'amplitude des pics d'amplification de la surcharge dynamique de denture est directement proportionnelle au taux d'énergie de déformation ρ_e associée à la raideur d'engrènement.

Alors que les vitesses "critiques" de rotation sont très souvent définies à partir d'une étude du comportement des lignes d'arbres en torsion pure, nous avons mis en évidence l'influence de la flexion des lignes d'arbres, de l'élasticité des roulements, des raideurs en torsion des accouplements et des propriétés mécaniques du carter sur ces vitesses "critiques" de rotation et sur les niveaux des surcharges dynamiques de denture. Nous pouvons donc conclure que seule une modélisation globale, incluant l'ensemble des lignes d'arbres, les roulements et le carter peut permettre de prédire de façon réaliste les modes de denture et les vitesses "critiques" de rotation des transmissions par engrenages.

Dans la suite de ce chapitre, l'analyse du transfert entre la surcharge dynamique de denture et la réponse vibratoire des autres éléments de la transmission doit nous permettre de comprendre dans quelles mesures les vitesses "critiques" de rotation donnent naissance à de forts niveaux vibratoires et acoustiques du carter.

IV.1 Introduction

Le bruit rayonné par les transmissions par engrenages résulte essentiellement de l'état vibratoire de leur carter. Le calcul des propriétés de ce bruit nécessite la mise en oeuvre d'outils complexes. Ducret (1995, 1997, 1998) a développé une méthodologie qui permet, à partir de la connaissance de son état vibratoire, de calculer l'ensemble des caractéristiques du bruit rayonné par une transmission simplifiée, c'est à dire sa puissance acoustique, son facteur de rayonnement et le niveau de pression acoustique perceptible en n'importe quel point de l'espace environnant la transmission. Néanmoins, les temps de calcul associés à la résolution des problèmes de rayonnement des structures vibrantes rendent difficile l'accès à ces informations. Aussi, le but de cette partie est de déterminer quel paramètre issu d'un calcul vibratoire permet d'estimer correctement la puissance acoustique rayonnée par le carter d'une transmission. Cette puissance acoustique est égale, à la pulsation ω , à :

$$W_{ac}(\omega) = \rho_0 \cdot c_0 \cdot S \cdot \sigma_{rad}(\omega) \cdot \langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$$

- où
- ρ_0 est la masse volumique de l'air,
 - c_0 est la vitesse du son dans l'air,
 - S est la surface du carter qui rayonne,
 - $\sigma_{rad}(\omega)$ est le facteur de rayonnement du carter dépendant de la pulsation ω ,
 - $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$ est la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter.

Pour chaque fréquence, le calcul de la puissance acoustique rayonnée par la transmission nécessite donc la connaissance de son facteur de rayonnement $\sigma_{rad}(\omega)$ et de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne de son carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$. Si la réponse vibratoire du carter est périodique, la puissance acoustique est égale à la somme des puissances associées à chaque fréquence.

Le calcul du facteur de rayonnement $\sigma_{rad}(\omega)$ d'une structure est complexe. Néanmoins, Ducret (1997) a montré que les puissances de couplage acoustique entre les différentes faces d'un carter parallélépipède rectangle étaient suffisamment faibles pour qu'on considère que le rayonnement global du carter correspond à la somme des rayonnements de chaque face isolée.

De plus, on sait que, au-delà d'une fréquence critique f_c , le facteur de rayonnement d'une plaque bafflée est égal à 1. Le facteur de rayonnement d'une plaque non bafflée est quant à lui quasi-constant et égal à une valeur inférieure à 1. Cette fréquence critique f_c est égale à :

$$2\pi \cdot f_c = c_0^2 \sqrt{[12 \rho \cdot (1-\nu^2) / (E \cdot h^2)]}$$

- où
- E et ν sont le module d'Young et le coefficient de poisson du matériau,
 - ρ est la masse volumique du matériau,
 - h est l'épaisseur de la plaque.

Pour une plaque en acier d'épaisseur égale à 10 mm, la fréquence critique f_c est égale à 1175 Hz.

Si l'on suppose que le carter de la boîte d'inversion est composée de 6 plaques en acier d'épaisseur 10 mm assemblées les unes avec les autres, il apparaît très intéressant de calculer, pour chaque fréquence, la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$. En effet, même si le calcul de ce paramètre ne permet pas de connaître l'ensemble des propriétés du champ acoustique rayonné par la boîte d'inversion, il est un bon indicateur de la puissance acoustique rayonnée par le carter de celle-ci puisque, au-delà de la fréquence critique, cette dernière est quasi-proportionnelle à $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$ (par souci de simplification, nous avons choisi d'appeler abusivement $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$ "réponse vibratoire du carter").

Nous nous intéressons donc au transfert entre la surcharge dynamique de denture et la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter. Pour permettre d'analyser les résultats présentés, nous calculons aussi les efforts dynamiques transmis au carter par les roulements. La modélisation des roulements par des raideurs radiales, axiales et angulaires indépendantes les unes des autres nous permet une nouvelle fois de découpler les effets liés à ces différents paramètres.

Rappelons que nous ne retenons, comme excitation, que la raie fondamentale (associée à la fréquence d'engrènement) des spectres de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement que nous avons calculés. Pour l'ensemble des régimes de fonctionnement, la réponse dynamique de la boîte d'inversion est quasi-harmonique. L'évolution de sa valeur efficace coïncide avec l'évolution de la valeur efficace de la raie fondamentale associée à la raideur d'engrènement.

IV.2 Principe de calcul

Pour une excitation et une réponse harmoniques à la pulsation ω , nous avons défini les efforts et moments dynamiques transmis au carter par un roulement à partir de la réponse dynamique du roulement et des raideurs de celui-ci de la façon suivante :

- Efforts radiaux : $F_X(\omega) = k_{XX} \cdot (U_{X2}(\omega) - U_{X1}(\omega))$ $F_Y(\omega) = k_{YY} \cdot (U_{Y2}(\omega) - U_{Y1}(\omega))$
- Effort axial : $F_Z(\omega) = k_{ZZ} \cdot (U_{Z2}(\omega) - U_{Z1}(\omega))$
- Moments : $M_X(\omega) = k_{\theta_{\phi X}} \cdot (\theta_{X2}(\omega) - \theta_{X1}(\omega))$ $M_Y(\omega) = k_{\theta_{\phi Y}} \cdot (\theta_{Y2}(\omega) - \theta_{Y1}(\omega))$

où 2 désigne le noeud attaché à la ligne d'arbre (bague intérieure du roulement) et 1 désigne le noeud attaché au carter (bague extérieure). Ces efforts sont calculés dans le repère local associé à l'engrènement présenté sur la figure III.1 du chapitre 2 (p. 86). L'axe Y est orienté selon la ligne d'action.

La moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter est égale à :

$$\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S = \frac{1}{S} \int_S \overline{v^2(M, \omega)} dS$$

où $V^2(M, \omega)$ est la vitesse quadratique moyenne en un point M du carter.

$$\overline{v^2(M, \omega)} = \frac{1}{T} \int_T v^2(M, \omega, t) dt$$

Le grand intérêt de la résolution des équations du mouvement par la méthode spectrale et itérative présentée au chapitre 2 est que celle-ci permet de déterminer, avec des temps de calcul très courts, la réponse dynamique en tout lieu d'un système à grand nombre de degrés de liberté. Son utilisation s'avère donc particulièrement intéressante dans le cadre du calcul de la réponse vibratoire du carter (1500 noeuds pour la boîte d'inversion étudiée). Rappelons que, à notre connaissance, aucune autre méthode n'a permis de calculer directement la réponse du carter d'une transmission à l'erreur statique de transmission sous charge.

Nous calculons, pour chaque noeud du maillage éléments finis, la vitesse normale à la surface du carter ainsi que la surface élémentaire associée à chaque noeud. Pour les noeuds situés sur des arêtes, nous calculons les vitesses selon les normales aux deux surfaces considérées. Ensuite, nous estimons la vitesse quadratique moyenne de chaque noeud puis, nous calculons la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S$ correspondant à l'ensemble du carter.

Si l'on introduit la mobilité quadratique moyenne du carter $h_T^2(\omega)$ défini par Pascal (1993), la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter s'écrit :

$$\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S = F^2(\omega) \cdot h_T^2(\omega)$$

où $F^2(\omega)$ est le carré de la surcharge dynamique de denture.

$h_T^2(\omega)$ correspond donc à la fonction de transfert entre la surcharge dynamique de denture et la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter.

Pour tenir compte de la surface rayonnante, Storm (1991) introduit le facteur de son solidien $Sh_T^2(\omega)$:

$$Sh_T^2(\omega) = S \cdot h_T^2(\omega)$$

IV.3 Résultats

La figure IV.1a présente l'évolution de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter en fonction de la fréquence d'engrènement. Nous comparons cette évolution à celle de la surcharge dynamique de denture (figure IV.1b).

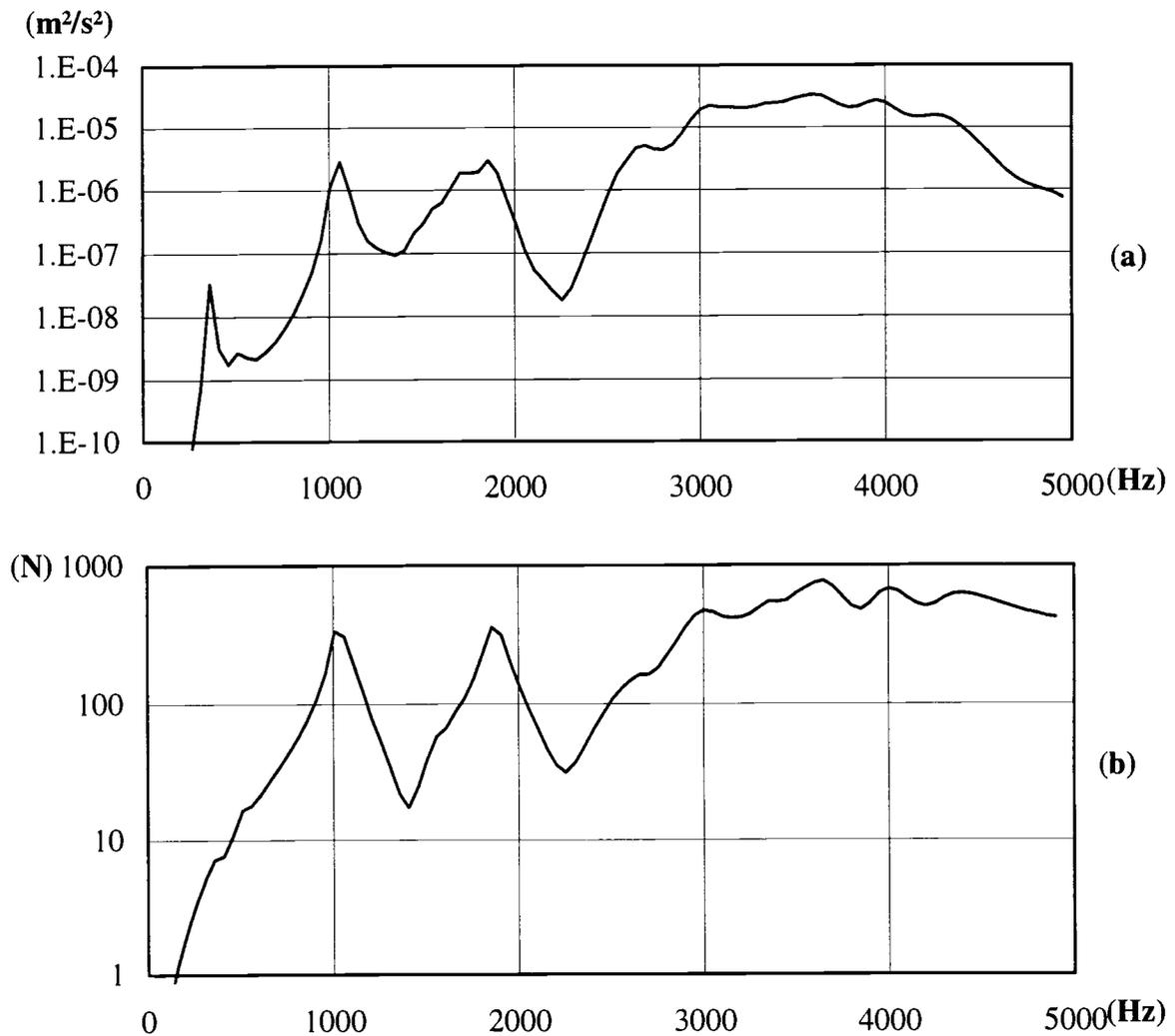


Figure IV.1. Evolution de la réponse vibratoire du carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$ (a) et de la surcharge dynamique de denture (b) avec la fréquence d'engrènement.

En deçà de 1000 Hz, le niveau de la réponse vibratoire du carter est faible. De même, la fréquence de coupure d'une plaque en acier de 10 mm étant égale à 1175 Hz, nous pouvons supposer que le facteur de rayonnement de la boîte d'inversion entre 0 et 1000 Hz est faible.

Les nuisances acoustiques de la boîte d'inversion dans cette plage de fréquence sont donc limitées.

Les figures IV.1a et IV.1b montrent que les vitesses "critiques" de rotation coïncident avec les régimes pour lesquels la réponse vibratoire du carter est maximale.

En effet, la réponse vibratoire du carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$ présente des valeurs élevées à 1040 et 1890 Hz. Elle atteint ses valeurs maximales ($6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^2$) entre 2700 et 4100 Hz (pour un facteur de rayonnement égal à 1, la puissance acoustique rayonnée serait supérieure à 100 dB). Cette plage de fréquence coïncide avec celle où la surcharge dynamique de denture est maximale.

L'analyse des mécanismes de transfert entre la surcharge dynamique de denture et la réponse vibratoire du carter nécessite le calcul des efforts dynamiques transmis au carter par les quatre roulements (figures IV.2a à IV.2l).

Les efforts radiaux F_x présentent des pics d'amplification à 1040 Hz, 1880 Hz et des niveaux élevés pour l'ensemble des régimes correspondant à une fréquence d'engrènement comprise entre 3000 Hz et 4500 Hz. Les efforts radiaux F_y présentent des pics d'amplification à 1040 Hz et 1880 Hz. Leur valeur efficace atteint 300 N. En deçà de 2000 Hz, les efforts radiaux F_y (orientés selon la ligne d'action) sont supérieurs aux efforts radiaux F_x (perpendiculaires à la ligne d'action). Par contre, ils présentent des niveaux plus faibles au-delà de 2000 Hz.

Les efforts axiaux F_z présentent un pic d'amplification principal à 1040 Hz (ils atteignent 30 N) et un niveau élevé pour l'ensemble des régimes correspondant à une fréquence d'engrènement comprise entre 2700 et 4000 Hz. Il présente des pics d'amplification secondaires autour de 300 Hz et de 1600 Hz. Les déplacements axiaux de l'arbre par rapport au carter sont du même ordre de grandeur que les déplacements radiaux. Par contre, pour l'ensemble des régimes de fonctionnement (sauf autour de 300 Hz), les efforts dynamiques axiaux transmis au carter sont nettement inférieurs aux efforts dynamiques radiaux car les raideurs axiales des roulements (10^8 N/m) sont plus faibles que leurs raideurs radiales (10^9 N/m).

Les moments M_x et M_y présentent des niveaux peu importants en deçà de 2500 Hz (inférieurs à 1 Nm), puis des niveaux plus élevés, notamment entre 2700 et 4500 Hz (jusqu'à 10 Nm).

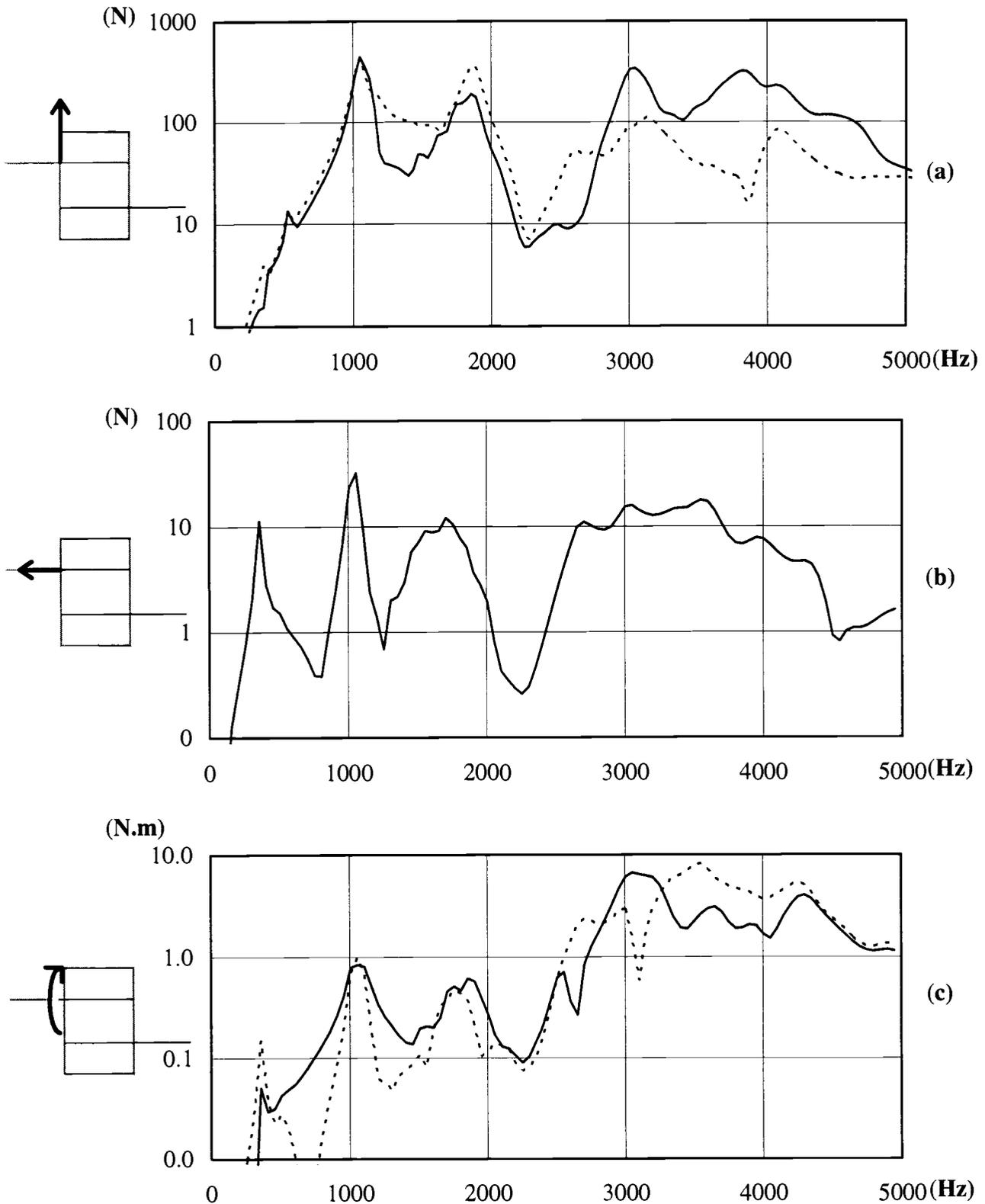


Figure IV.2. Evolution des valeurs efficaces des efforts dynamiques généralisés transmis au carter par le roulement de l'arbre moteur situé sur la face d'entrée (côté moteur).
 (a) Evolution des efforts radiaux F_x (—) et F_y (-----).
 (b) Evolution de l'effort axial F_z .
 (c) Evolution des moments M_x (—) et M_y (-----).

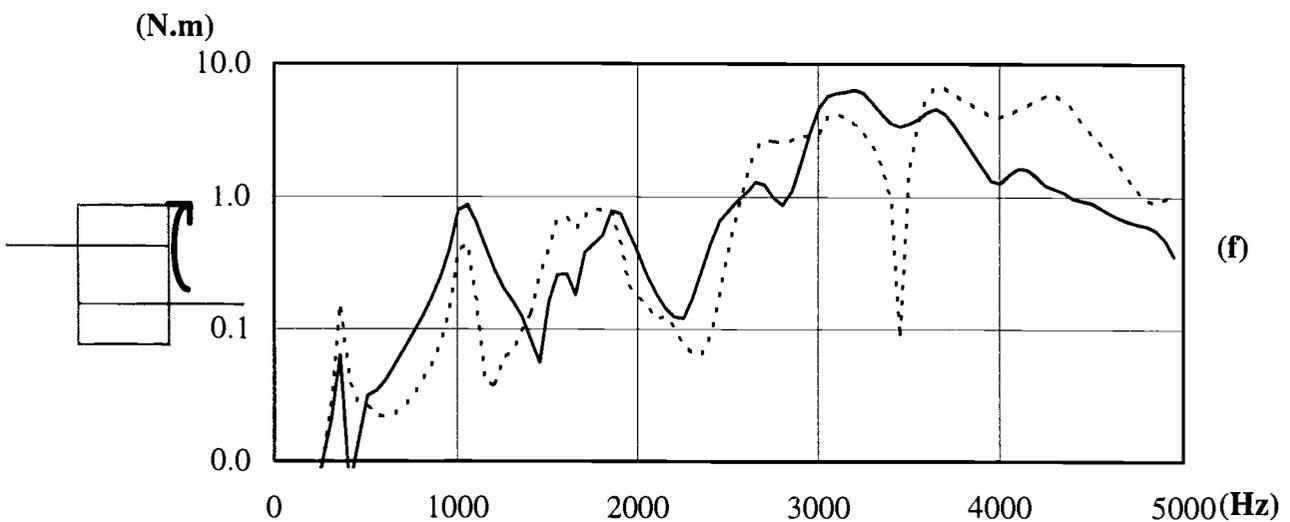
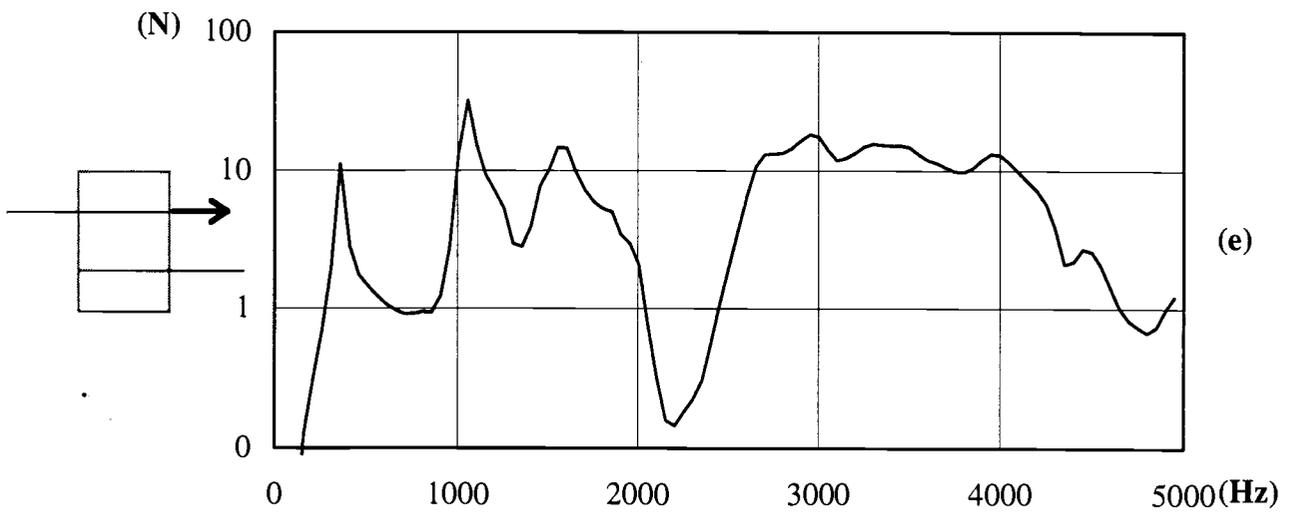
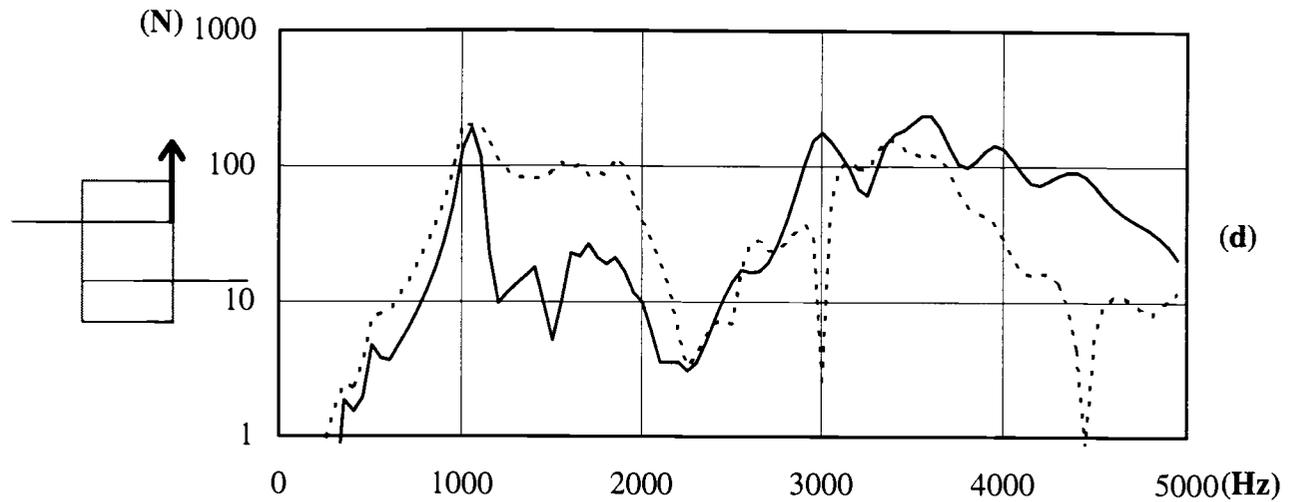


Figure IV.2. Evolution des valeurs efficaces des efforts dynamiques généralisés transmis au carter par le roulement de l'arbre moteur situé sur la face de sortie.

(d) Evolution des efforts radiaux F_x (—) et F_y (-----).

(e) Evolution de l'effort axial F_z .

(f) Evolution des moments M_x (—) et M_y (-----).

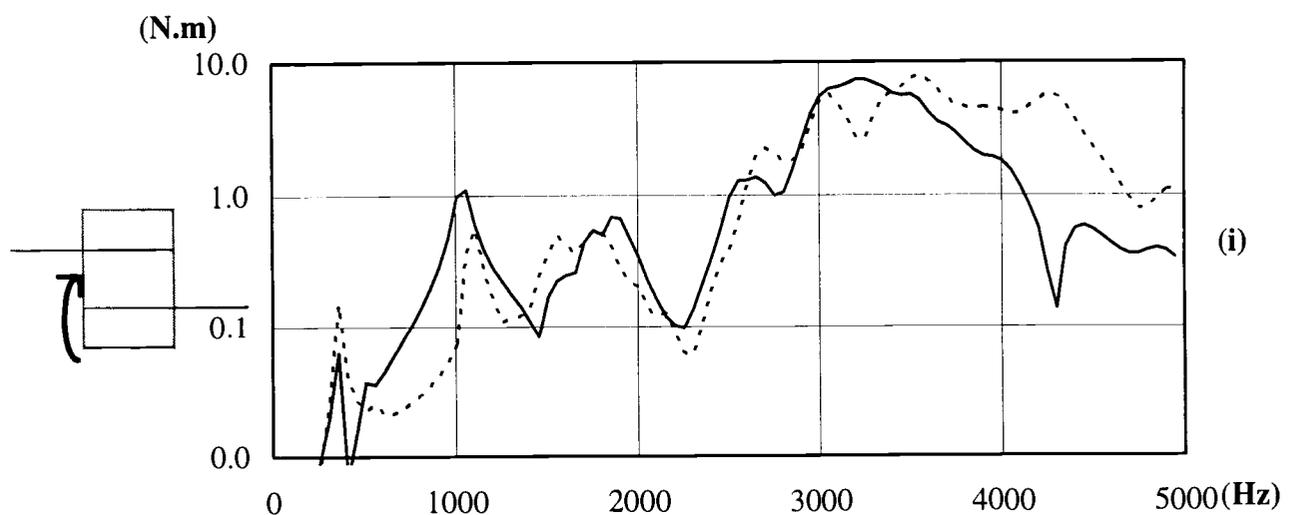
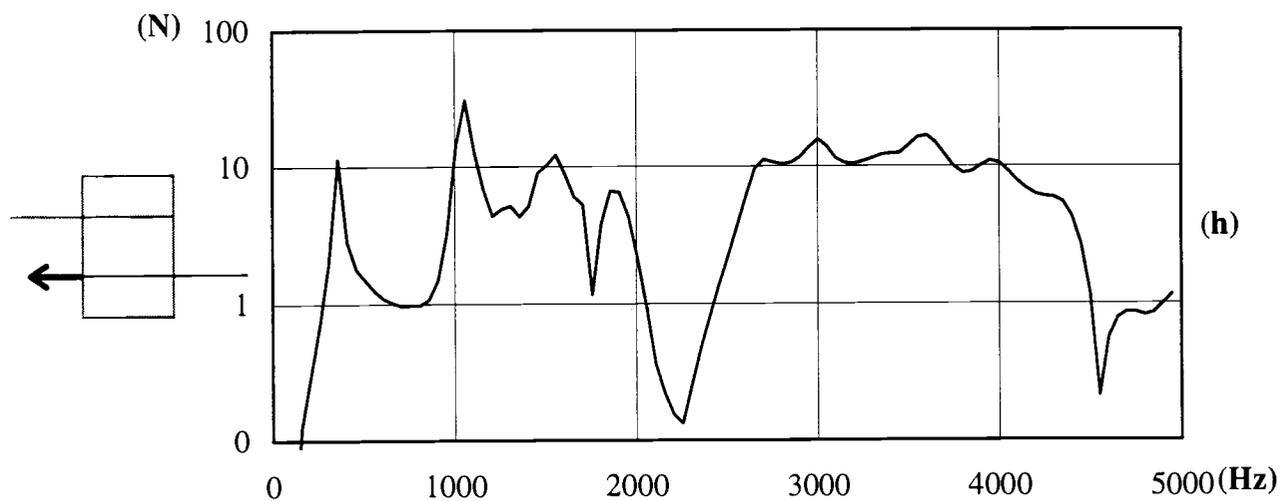
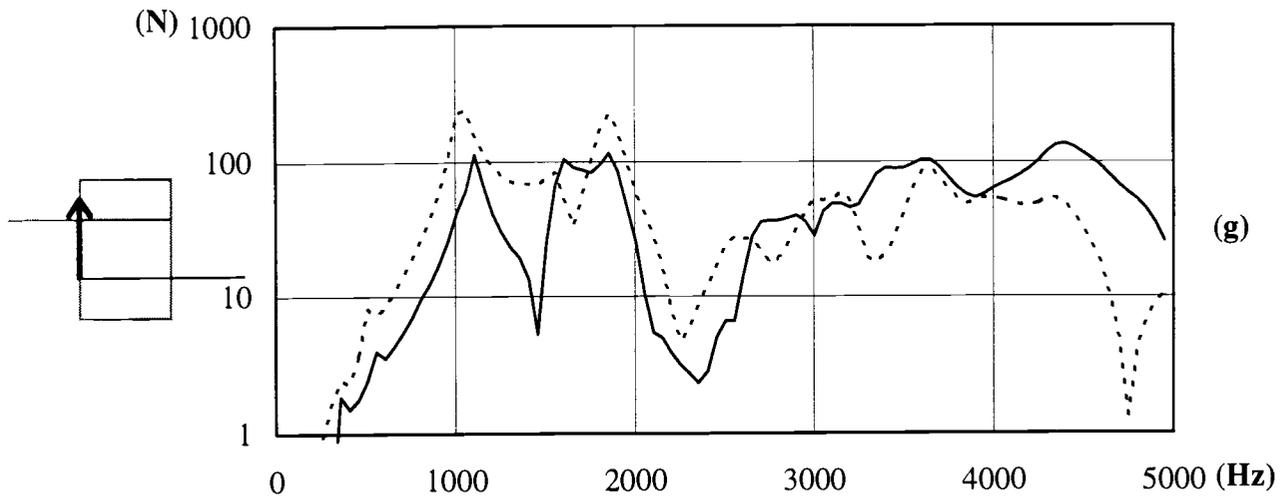


Figure IV.2. Evolution des valeurs efficaces des efforts dynamiques généralisés transmis au carter par le roulement de l'arbre de sortie situé sur la face d'entrée.

(g) Evolution des efforts radiaux F_x (—) et F_y (-----).

(h) Evolution de l'effort axial F_z .

(i) Evolution des moments M_x (—) et M_y (-----).

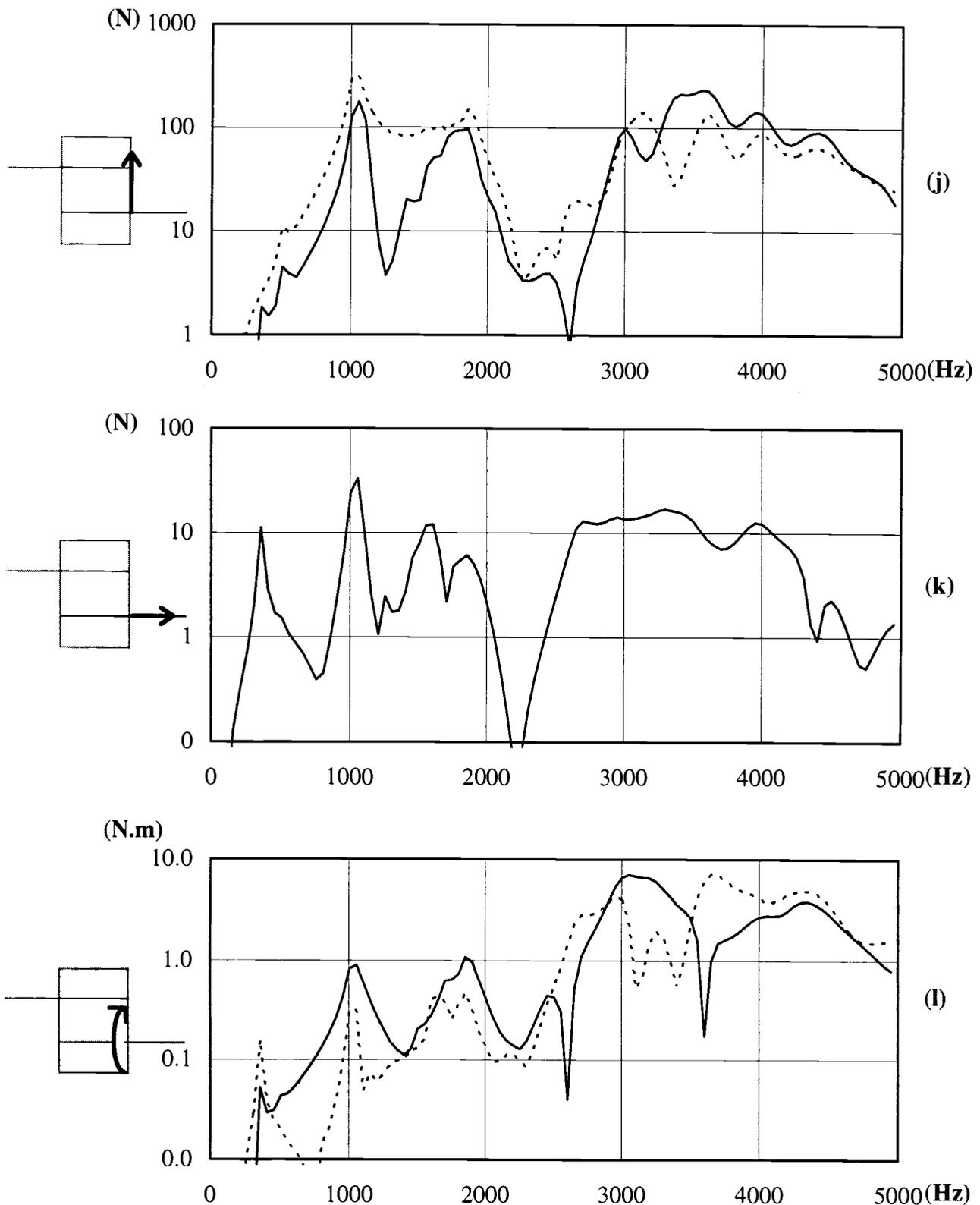


Figure IV.2. Evolution des valeurs efficaces des efforts dynamiques généralisés transmis au carter par le roulement de l'arbre de sortie situé sur la face de sortie.

(j) Evolution des efforts radiaux F_x (—) et F_y (-----).

(k) Evolution de l'effort axial F_z .

(l) Evolution des moments M_x (—) et M_y (-----).

IV.4 Analyse des résultats

IV.4.1 Modes de roulements et amplification des efforts dynamiques transmis au carter

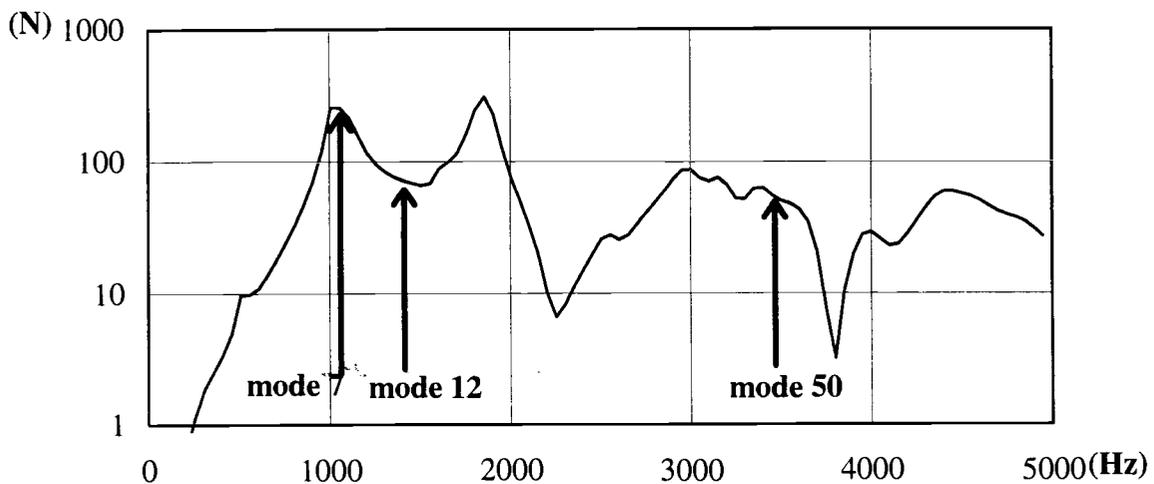
L'analyse modale de la boîte d'inversion nous a permis de définir les modes de roulements. Ces modes présentent une énergie importante associée soit aux raideurs radiales k_{xx} ou k_{yy} , soit à la raideur axiale k_{zz} , soit aux raideurs angulaires $k_{\theta_x\theta_x}$ ou $k_{\theta_y\theta_y}$ d'un roulement.

A partir de l'analyse de l'évolution des efforts dynamiques transmis au carter par les roulements, nous avons pu mettre en évidence une relation entre les régimes pour lesquels les efforts dynamiques transmis au carter par les roulements sont maximums et la nature du mode excité par l'erreur statique de transmission sous charge : l'excitation d'un mode engendre une amplification des efforts dynamiques transmis au carter par les roulements si et seulement si ce mode est à la fois un mode de denture et un mode de roulement.

Quatre situations sont donc possibles. Elles sont illustrées, pour la raideur k_y du roulement de l'arbre moteur situé sur la face d'entrée, par le tableau IV.1 :

- le mode est à la fois un mode de denture et un mode de roulement (exemple : le 7^{ème} mode),
- le mode est un mode de roulement mais pas un mode de denture (exemple : le 12^{ème} mode),
- le mode est un mode de denture mais pas un mode de roulement (exemple : le 50^{ème} mode),
- le mode n'est ni un mode de denture, ni un mode de roulement.

Comme l'illustre la figure IV.2a, l'excitation des modes situés à 1420 Hz et 3440 Hz n'engendre pas d'amplification de l'effort dynamique radial F_y transmis au carter par le roulement considéré. Par contre, l'excitation du mode qui est à la fois mode de denture et mode de roulement (1040 Hz) induit une amplification de l'effort dynamique F_y transmis par ce roulement. L'amplitude de F_y est proportionnelle au facteur $\sqrt{(\rho_e \cdot \rho_y)}$.



Rappel de la figure IV.2a. Evolution de la valeur efficace de l'effort radial F_y transmis au carter par le roulement de l'arbre moteur situé sur la face d'entrée (côté moteur).

Fréquence	ρ_e	ρ_y	$\sqrt{(\rho_e \cdot \rho_y)}$
mode 7 : 1040 Hz	9.6 %	4.0 %	6.2 %
mode 12 : 1420 Hz	0 %	16.4 %	0 %
mode 50 : 3440 Hz	11.3 %	0.004 %	0.2 %

Tableau IV.1.

Le tableau IV.2 présente, pour les modes qui sont à la fois mode de denture et mode de roulement, les taux d'énergie ρ_e et ρ_r associés à la raideur d'engrènement et aux raideurs k_{xx} , k_{yy} , k_{zz} , $k_{\theta_x\theta_x}$ ou $k_{\theta_y\theta_y}$ des quatre roulements. Il permet d'expliquer l'origine des amplifications des efforts radiaux (1040 Hz, 1880 Hz, 3000 Hz et 3860 Hz), de la principale amplification de l'effort axial (1040 Hz) et des amplifications des moments dynamiques transmis au (2760 à 3860 Hz).

Fréquence	ρ_e	ρ_x	ρ_y	ρ_z	ρ_{θ_x}	ρ_{θ_y}
mode 7 : 1040 Hz	10 %	5 %	16 %	12 %	1 %	-
mode 24 : 1880 Hz	9 %	3 %	10 %	-	-	-
mode 40 : 2760 Hz	3 %	1 %	-	2 %	-	8 %
mode 41 : 3000 Hz	4 %	20 %	-	1 %	-	5 %
mode 44 : 3140 Hz	8 %	3 %	1 %	1 %	12 %	6 %
mode 49 : 3440 Hz	11 %	3 %	-	1 %	4 %	6 %
mode 52 : 3620 Hz	5 %	-	-	1 %	1 %	12 %
mode 56 : 3860 Hz	12 %	4 %	-	-	1 %	4 %
mode 59 : 4070 Hz	12 %	1 %	1 %	-	-	-

Tableau IV.2.

Les amplifications secondaires de l'effort axial correspondent à l'excitation des modes de déplacement axial des lignes d'arbres (290 et 360 Hz) et à l'excitation du mode à 1600 Hz. Pour ces modes, le taux d'énergie dans les raideurs k_z des roulements est important ($\rho_z=20$ et 34 % d'une part et $\rho_z=10$ % d'autre part). Même si le taux d'énergie dans la raideur d'engrènement est inférieur à 1 %, on observe une amplification de faible amplitude des efforts axiaux transmis au carter, bien qu'on ne soit pas en présence d'une vitesse "critique".

IV.4.2 Analyse de l'évolution de la réponse vibratoire du carter

La méthode spectrale et itérative que nous avons utilisée permet de calculer directement la réponse vibratoire du carter. Il est aussi possible de calculer cette réponse de manière indirecte, en appliquant sur le carter nu les efforts internes complexes que nous avons calculés pour chaque régime de fonctionnement. Bien que cette méthode indirecte soit moins rapide que la méthode spectrale itérative, elle présente un certain nombre d'intérêts.

- D'abord, elle permet, dans les conditions réelles de fonctionnement, d'identifier, par des méthodes inverses, les efforts internes s'exerçant sur le carter à partir de la réponse vibratoire du carter et de la détermination préalable des fonctions de transfert entre les efforts appliqués aux paliers et la réponse du carter nu. Cette technique a été exploitée par Zhang (1996, 1998) pour identifier expérimentalement les efforts appliqués à des transmissions, sachant que la mesure de l'excitation au niveau de l'engrènement et la mesure directe des efforts aux paliers sont très difficiles à réaliser expérimentalement.

- Ensuite, elle permet d'analyser les contributions respectives de chaque type d'effort à la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter. Après avoir vérifié que l'application simultanée de tous les efforts sur le carter nu permettait de retrouver l'évolution de la réponse vibratoire du carter, nous avons calculé les moyennes spatiales de la vitesse quadratique moyenne du carter induites par les seuls efforts axiaux, puis par les seuls efforts radiaux, et enfin par les seuls moments dynamiques transmis au carter par les roulements.

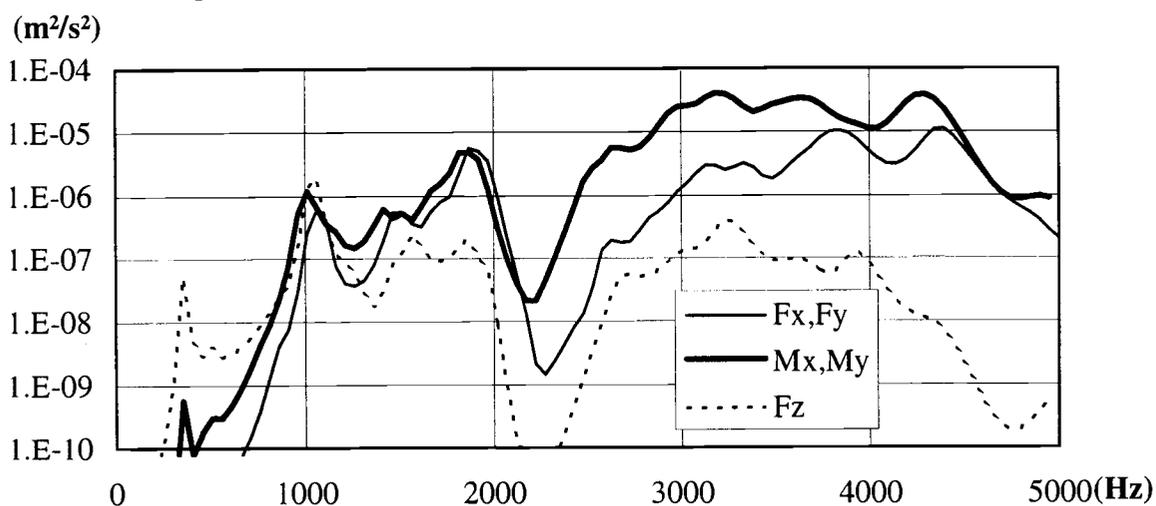


Figure IV.3. Evolution de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne induite par les seuls efforts axiaux, par les seuls efforts radiaux ou bien par les seuls moments transmis au carter par les roulements.

Les résultats obtenus nous conduisent à faire les remarques suivantes :

- Les fréquences pour lesquelles la réponse vibratoire du carter est maximale correspondent à celles pour lesquelles les efforts et/ou les moments dynamiques transmis au carter par les roulements sont maximaux. Elles correspondent donc à l'excitation des modes qui sont à la fois modes de denture et modes de roulement.

- L'effet des efforts axiaux transmis par les roulements sur la réponse vibratoire du carter est prépondérant entre 0 et 1100 Hz, puis négligeable au-delà de 1100 Hz. L'effet des efforts radiaux est important entre 1000 et 2000 Hz. L'effet des moments est important entre 1000 et 2000 Hz et prépondérant entre 2000 et 5000 Hz.
- Les amplifications de la réponse vibratoire du carter sont donc induites par des amplifications des efforts axiaux autour de 300 Hz (fréquence pour laquelle $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S$ présente un pic d'amplification de faible amplitude), par des amplifications des efforts radiaux et des moments entre 1000 et 2000 Hz et par des amplifications des seuls moments entre 2700 et 4100 Hz.
- Les modes pour lesquels l'énergie de déformation modale est concentrée uniquement sur le carter de la boîte d'inversion ne sont pas excités en résonance.

Si on analyse la réponse vibratoire du carter face par face (figure IV.4), on constate que les faces avant et arrière du carter (faces Z) sont celles qui présentent la vitesse quadratique moyenne la plus élevée entre 0 et 500 Hz. Par contre, au-delà de 500 Hz, la contribution des vibrations des quatre faces latérales (faces X et Y) n'est pas négligeable. Comme leur surface totale de rayonnement (0.234 m²) est du même ordre de grandeur que celle des faces avant et arrière (0.252 m²), une estimation de la puissance acoustique rayonnée par la transmission étudiée à partir des seules réponses vibratoires des faces avant et arrière conduiraient à des résultats erronés.

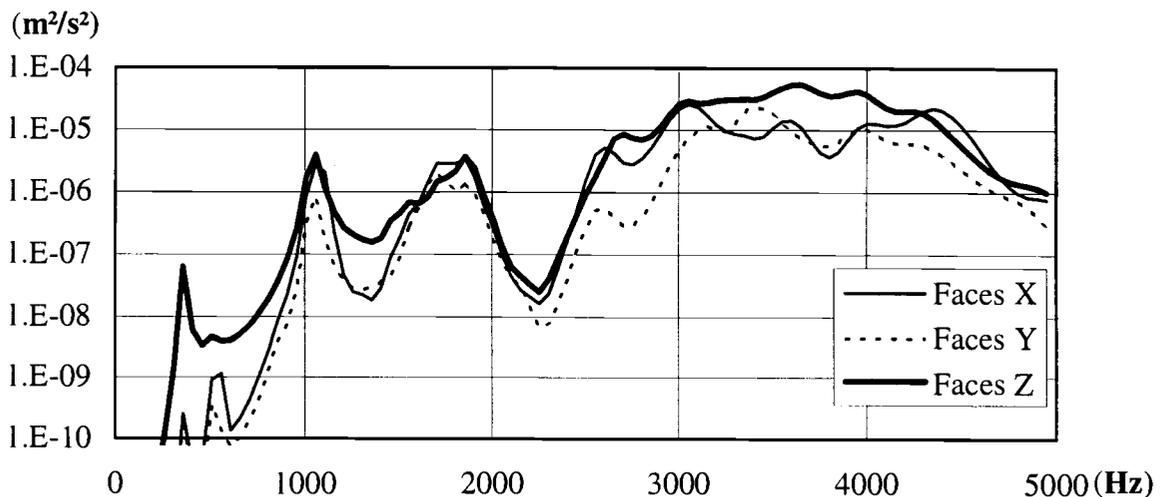


Figure IV.4. Evolution de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne des 2 faces du carter normales à X, des 2 faces normales à Y et des 2 faces normales à Z en fonction de la fréquence d'engrènement.

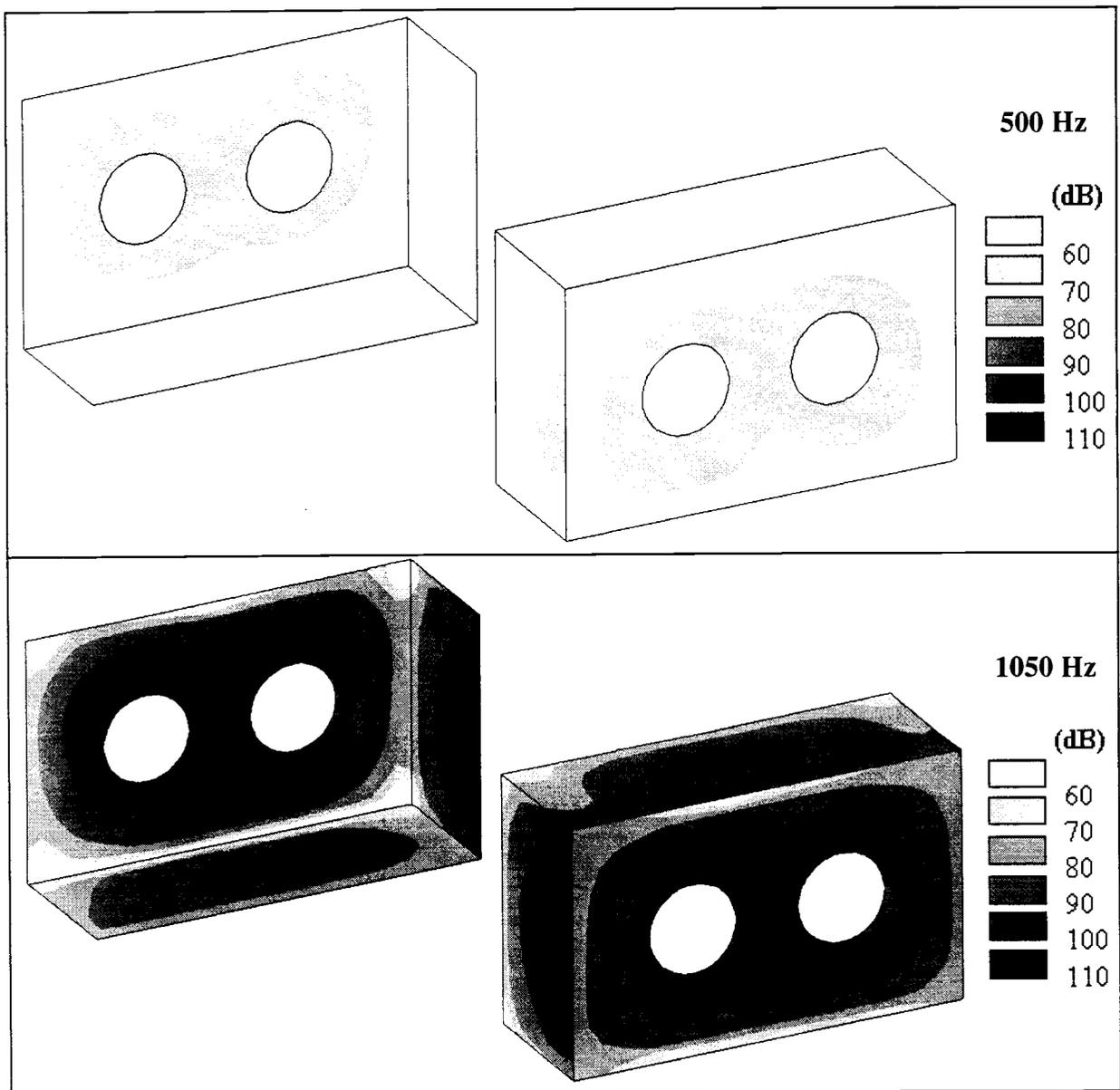
Ces résultats sont confirmés par les figures IV.5. Celles-ci présentent quelques exemples de répartition spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter. Les niveaux maximums atteints par la vitesse quadratique moyenne sont respectivement égaux à 71 dB (500 Hz), 92 dB (1500 Hz), 91 dB (2000 Hz) et 96 dB (2500 Hz) pour les fréquences qui ne correspondent pas à l'excitation de modes de denture. Ils sont égaux à 99 dB (1050 Hz et 1900 Hz), 108 dB (3000 Hz) et 110 dB (3500 Hz) pour les régimes qui correspondent à l'excitation de modes de denture.

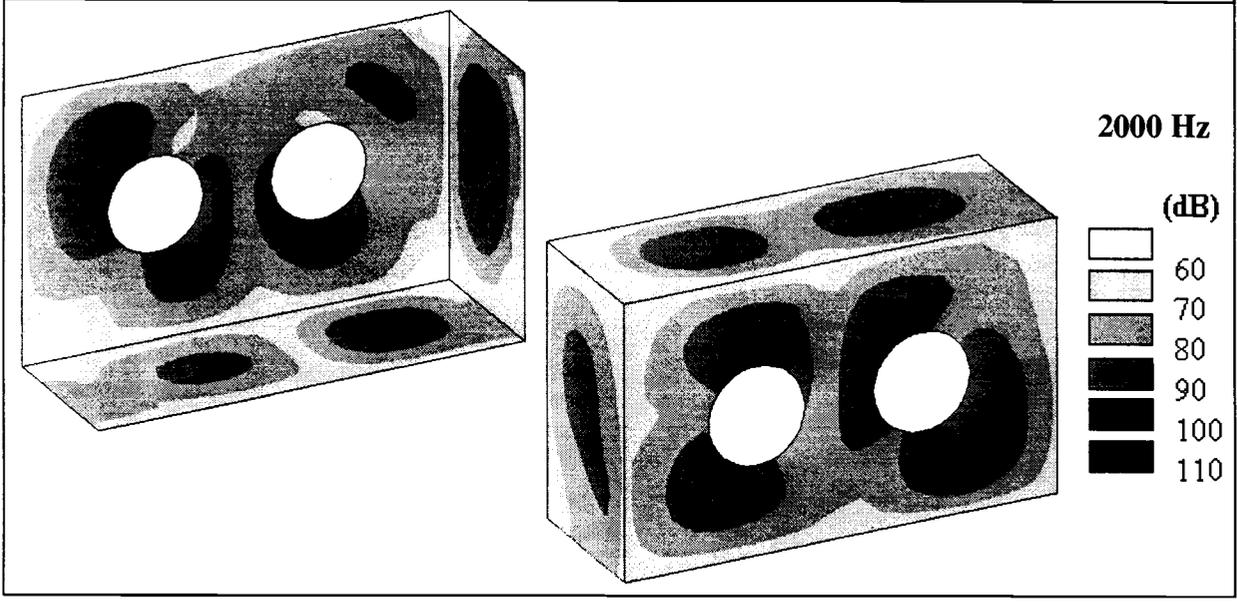
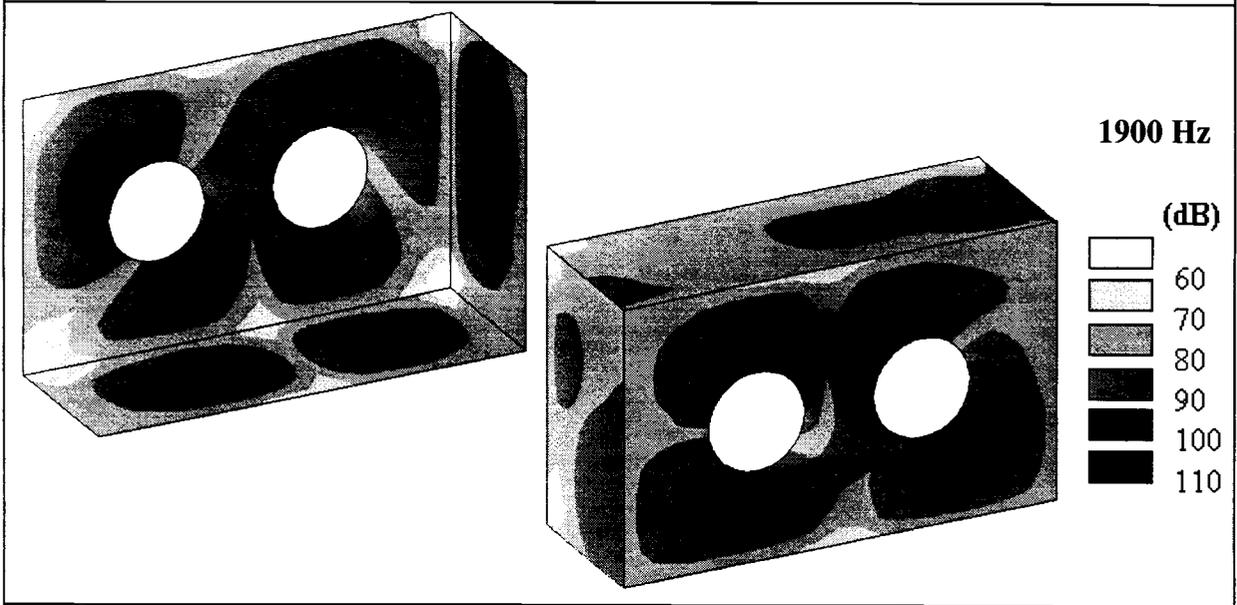
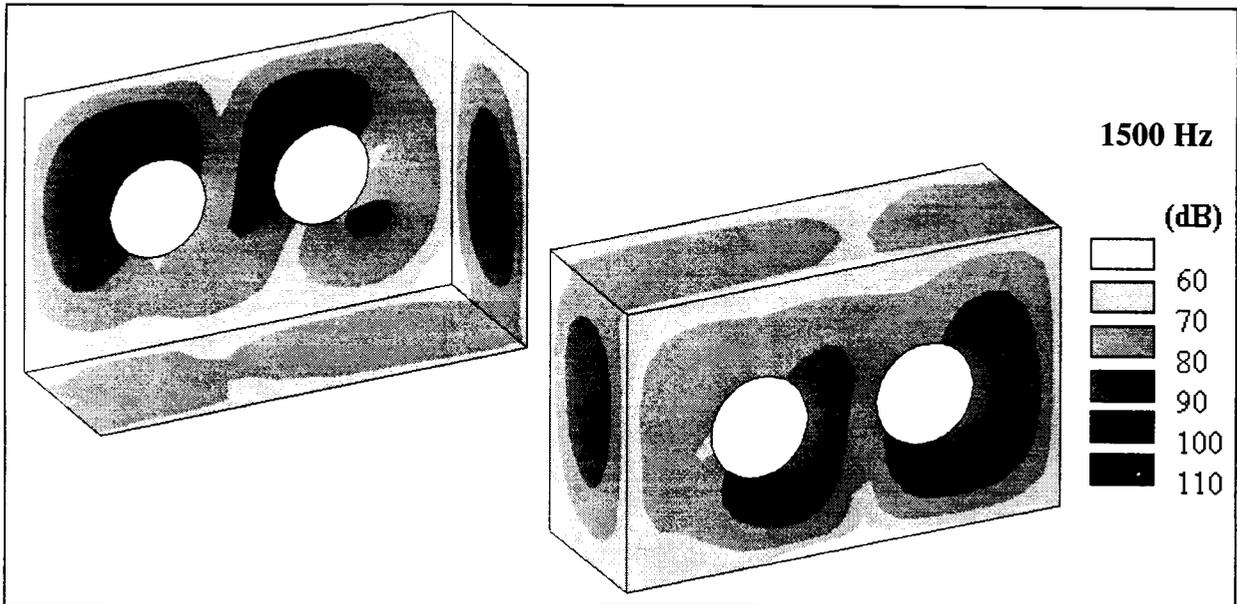
la vitesse quadratique moyenne du carter est exprimée en dB à partir de la formule suivante :

$$\overline{v^2(\omega)} \text{ (en dB)} = 10.\log(\overline{v^2(\omega)}/v_{\text{ref}}^2)$$

avec $v_{\text{ref}}^2 = 2.5 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2/\text{s}^2$ (Storm 1991).

Nous avons choisi de garder la même échelle pour l'ensemble des résultats présentés.





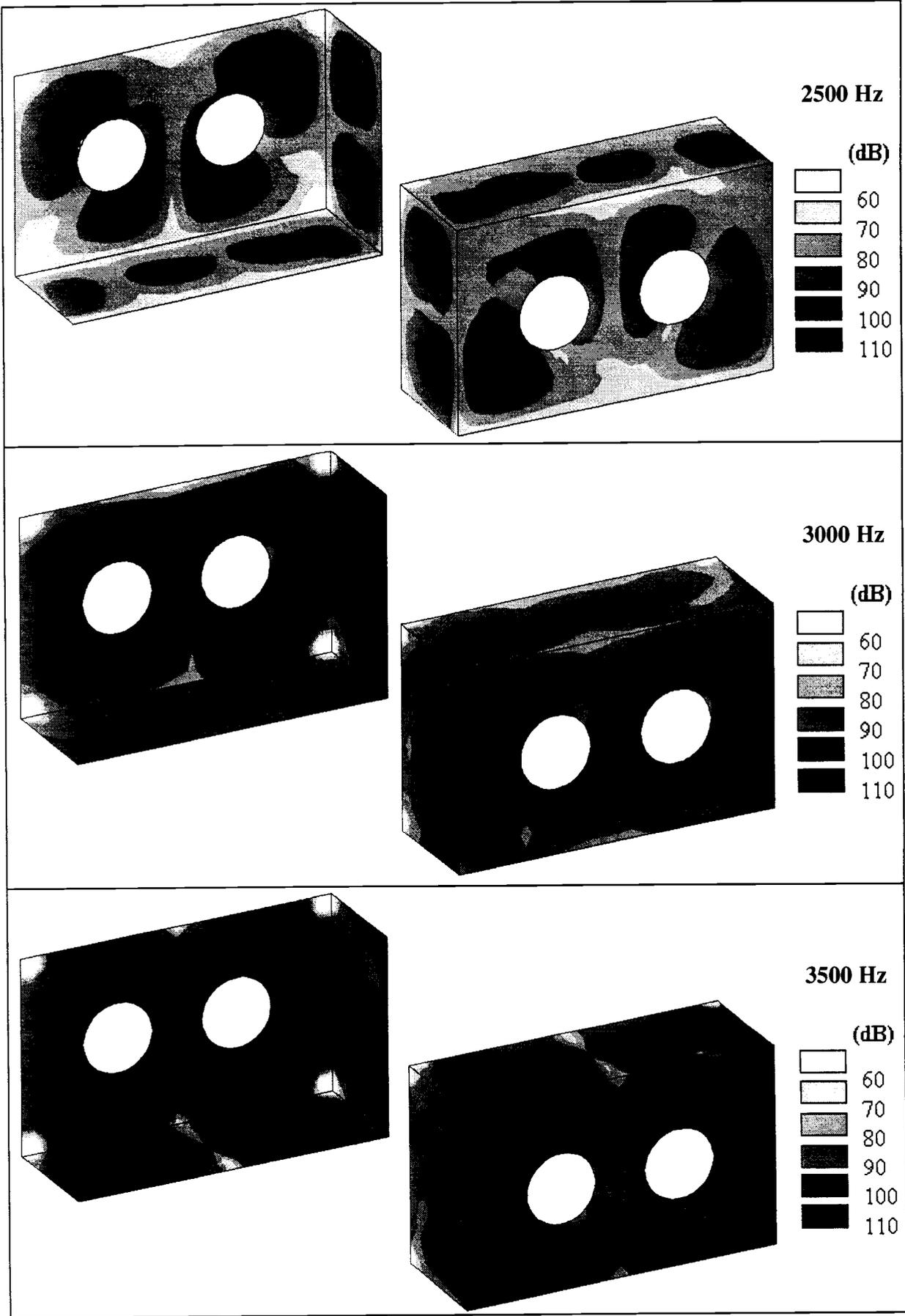


Figure IV.5. Répartition spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter.

**V- Influence du type de roulements et de l'architecture du carter
sur la réponse vibratoire du carter de la boîte d'inversion**

V.1 Introduction

Nous avons vu que la puissance acoustique rayonnée par le carter d'une transmission et induite par la surcharge dynamique de denture était égale à :

$$W_{ac}(\omega) = \rho_0 \cdot c_0 \cdot \sigma_{rad}(\omega) \cdot S \cdot \langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s \quad (1)$$

$$\text{avec } S \cdot \langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s = S \cdot F^2(\omega) \cdot h_T^2(\omega) \quad (2)$$

où $F^2(\omega)$ est la valeur quadratique de la surcharge dynamique de denture,
 $h_T^2(\omega)$ est la mobilité quadratique moyenne du carter.

Pour réduire les nuisances acoustiques d'une transmission, il faut donc adopter des règles de construction qui permettent de :

- (1) diminuer la valeur quadratique de la surcharge dynamique de denture $F^2(\omega)$,
- (2) diminuer la mobilité quadratique moyenne du carter $h_T^2(\omega)$ et/ou la surface vibrante S (c'est à dire le facteur de son solidien $S \cdot h_T^2(\omega)$),
- (3) diminuer le facteur de rayonnement $\sigma_{rad}(\omega)$.

La solution (3) consiste à modifier une caractéristique purement acoustique de la transmission. Nous limitons notre étude au comportement vibratoire des transmissions et cherchons, à travers les deux autres solutions, à diminuer la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter de la boîte d'inversion.

Il peut exister des interactions fortes entre $F^2(\omega)$ et $S \cdot h_T^2(\omega)$ si bien qu'il faut vérifier qu'une solution permettant de diminuer l'un de ces paramètres ne conduit pas à une augmentation de l'autre.

Pour analyser l'effet du type des roulements et de l'architecture du carter sur les nuisances vibroacoustiques de la boîte d'inversion, nous nous appuyons sur des comparaisons de résultats obtenus pour différentes configurations de la boîte d'inversion. En plus de l'évolution de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$, nous calculons, pour chaque configuration, l'indice de modification de la réponse vibratoire du carter L_{v^2} entre 100 et 5000 Hz, en bandes larges tiers d'octave (définies par les normes ISO 266, NF S30-002 et NF C97-010) :

$$L_{v^2}(\omega) = 10 \cdot \log \left[\frac{\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle}{\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_0} \right] \quad (\text{en dB}) \quad (3)$$

où $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_0$ est la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne d'une solution de référence et $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle$ celle correspondant à la nouvelle configuration.

A partir de la relation (2), nous pouvons décomposer $L_{v^2}(\omega)$ de la façon suivante :

$$L_{v^2}(\omega) = L_{F^2}(\omega) + L_{h_T^2}(\omega) \quad (4)$$

avec $L_{F^2}(\omega) = 10 \cdot \log \left[\frac{F^2(\omega)}{F_0^2(\omega)} \right]$ en (dB) (5)

et $L_{h_T^2}(\omega) = 10 \cdot \log \left[\frac{h_T^2(\omega)}{h_{T0}^2(\omega)} \right]$ en (dB) (6)

- $F^2(\omega)$ et $F_0^2(\omega)$ sont les valeurs quadratiques des surcharges dynamiques de denture correspondant à la nouvelle configuration et à la configuration de référence,
- $h_T^2(\omega)$ et $h_{T0}^2(\omega)$ sont les mobilités quadratiques moyennes correspondant à la nouvelle configuration et à la configuration de référence.

Nous appelons $L_{F^2}(\omega)$ l'indice de modification de la valeur quadratique de la surcharge dynamique de denture et $L_{h_T^2}(\omega)$ l'indice de modification de la mobilité quadratique moyenne.

V.2 Influence des raideurs des roulements

V.2.1 Raideurs angulaires

Les figures V.1a et b montrent respectivement les évolutions de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter et de la surcharge dynamique de denture pour différentes valeurs de raideurs angulaires. Ces valeurs peuvent correspondre à celles de roulements à billes à contact obliques (10^4 Nm/rad) ou de roulements à rouleaux coniques plus ou moins préchargés (10^5 à 10^6 Nm/rad).

Les simulations numériques que nous avons effectuées montrent que l'influence des raideurs angulaires des roulements sur la réponse vibratoire du carter est différente selon la plage de fréquence considérée. Elle dépend de la nature des efforts qui contribuent de façon majoritaire à la réponse vibratoire du carter.

lorsque les raideurs angulaires sont égales à 10^4 Nm/rad, les moments transmis au carter par les roulements sont très faibles et leur contribution à la réponse vibratoire du carter est négligeable. Celle-ci est gouvernée par les efforts axiaux transmis par les roulements entre 0 et 1000 Hz et par les efforts radiaux au-delà de 1000 Hz.

Entre 0 et 2500 Hz, l'augmentation des raideurs angulaires des roulements ne modifie pas l'évolution de la surcharge dynamique de denture, mais elle induit une légère diminution des efforts axiaux et radiaux transmis par les roulements et, par conséquent, de la réponse vibratoire du carter.

Entre 2500 et 5000 Hz, les moments sont de l'ordre de 1 Nm pour des raideurs angulaires égales à 10^5 Nm/rad (contre 0.1 Nm pour des raideurs angulaires égales à 10^4 Nm/rad) et leur contribution reste modeste. Par contre, pour des raideurs angulaires égales à 10^6 Nm/rad, les moments transmis au carter par les roulements sont élevés (de l'ordre de 10 Nm) et leur contribution à la réponse vibratoire du carter devient majoritaire. Bien que la surcharge dynamique de denture présente des valeurs maximales d'amplitudes moins importantes que pour des raideurs angulaires égales à 10^5 Nm/rad, la réponse vibratoire du carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$ a sensiblement augmenté.

La figure V.2 présente les indices de modification $L_{v^2}(\omega)$, $L_{F^2}(\omega)$ et $L_{hT^2}(\omega)$ obtenus en remplaçant les roulements ayant des raideurs angulaires égales à 10^6 Nm/rad (solution de référence) par des roulements ayant des raideurs angulaires égales à 10^5 Nm/rad et 10^4 Nm/rad. Il existe une grande similitude entre les évolutions de $L_{v^2}(\omega)$ et de $L_{hT^2}(\omega)$. La valeur maximale de $L_{F^2}(\omega)$ (+3 dB à 4000 Hz) traduit localement l'effet des raideurs angulaires des roulements sur les modes de denture et les vitesses "critiques" de rotation. Néanmoins, la modification de la surcharge dynamique de denture qui en résulte a un effet négligeable sur la réponse vibratoire du carter devant celui de la modification de la mobilité quadratique moyenne du carter.

$L_{v_2}(\omega)$ est faible entre 0 et 2000 Hz. Par contre, $L_{v_2}(\omega)$ varie de -5 à -16 dB au-delà de 2000 Hz lorsqu'on introduit des raideurs angulaires de 10^5 Nm/rad. Cette atténuation est encore plus significative (-7 à -20 dB) lorsqu'on introduit des raideurs angulaires de 10^4 Nm/rad, car la contribution des moments transmis par les roulements, qui était majoritaire, devient alors négligeable.

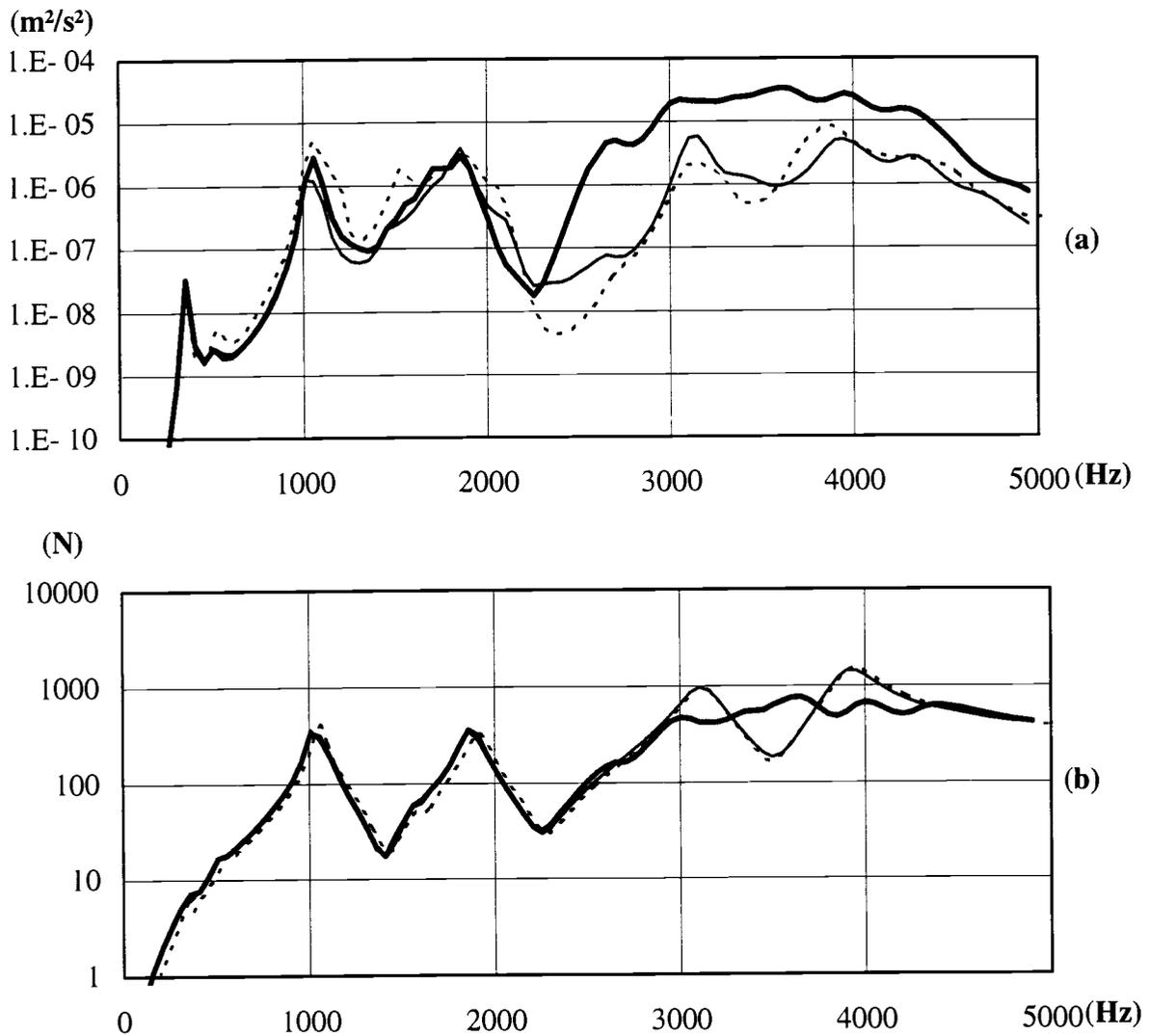


Figure V.1. Evolution de la réponse vibratoire du carter $\langle \overline{v^2}(\omega) \rangle_s$ (a) et de la surcharge dynamique de denture (b) avec la fréquence d'engrènement.

$K_{ang} = 10^6$ Nm/rad (trait continu gras); $K_{ang} = 10^5$ Nm/rad (trait continu fin);

$K_{ang} = 10^4$ Nm/rad (-----).

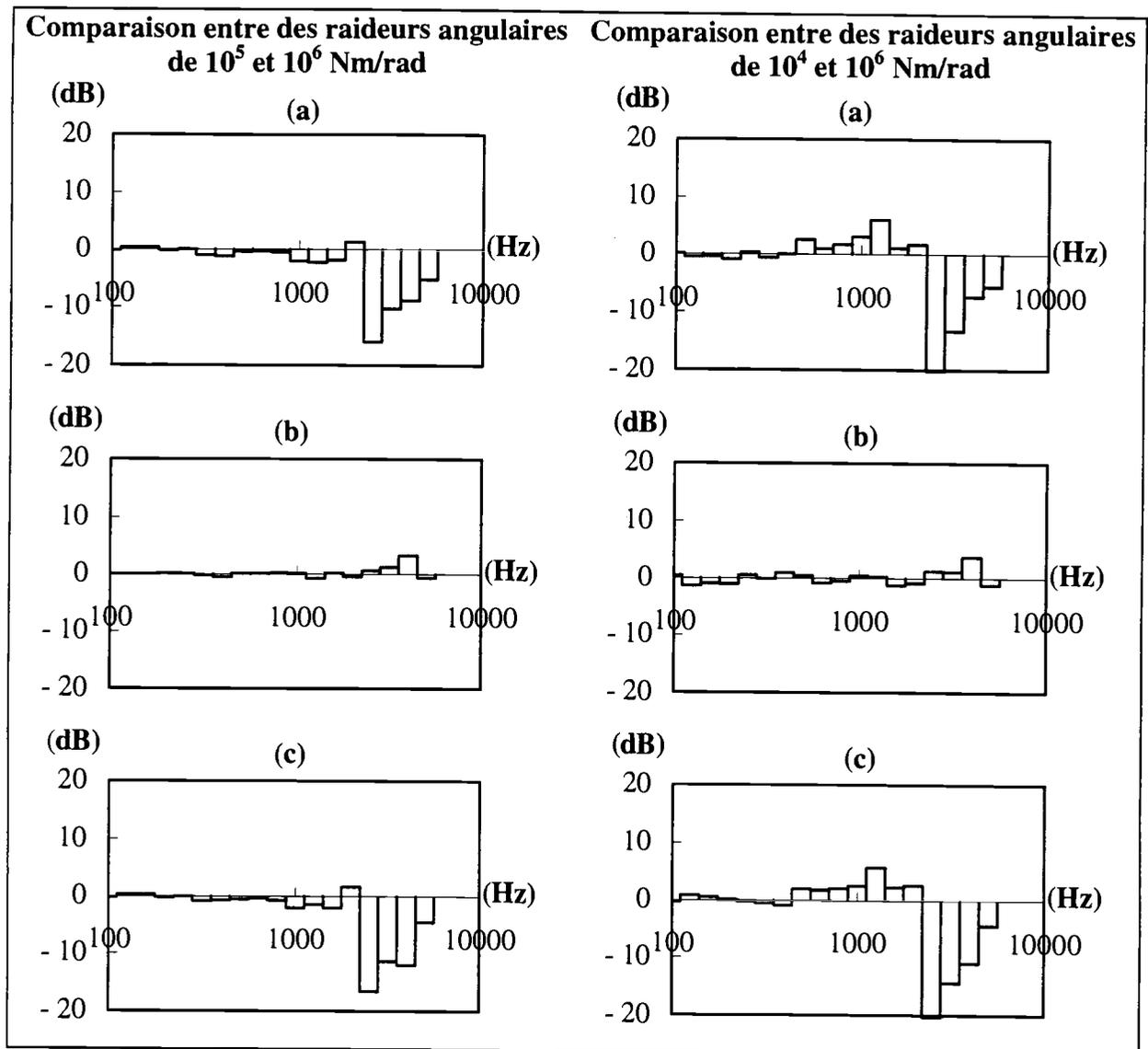


Figure V.2. Evolution des indices de modification avec la fréquence d'engrènement.

(a) Réponse vibratoire du carter $L_{v2}(\omega)$.

(b) Valeur quadratique de la surcharge dynamique de denture $L_{F2}(\omega)$.

(c) Mobilité quadratique moyenne du carter $L_{hT2}(\omega)$.

V.2.2 Raideurs radiales

Nous avons calculé les évolutions de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter (figures V.3a et V.4a) et de la surcharge dynamique de denture (figures V.3b et V.4b) pour des raideurs radiales des roulements égales à 10^9 N/m et 10^8 N/m. Les résultats présentés correspondent à des raideurs angulaires de 10^4 Nm/rad et 10^5 Nm/rad.

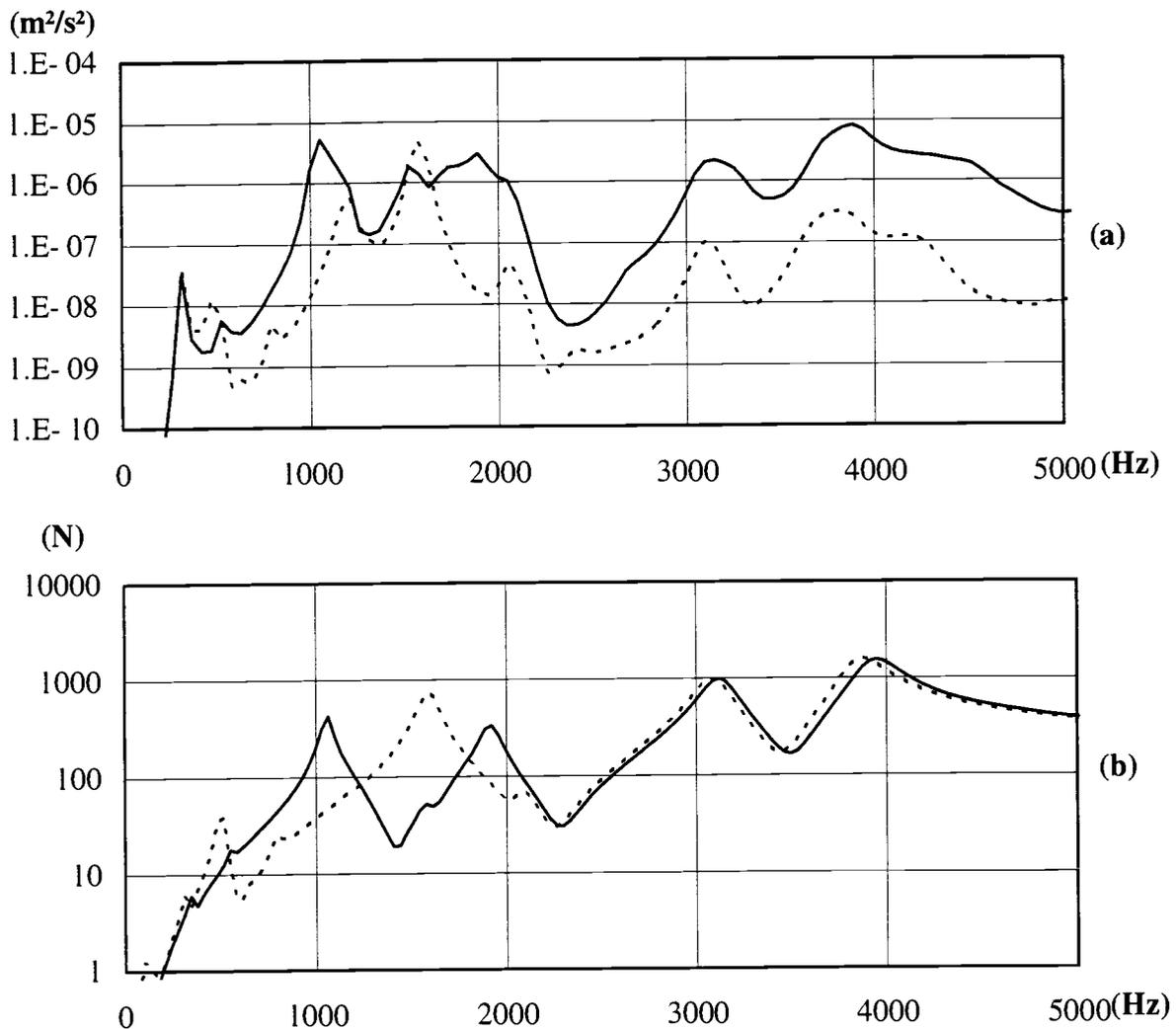


Figure V.3. Evolution de la réponse vibratoire du carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$ (a) et de la surcharge dynamique de denture (b) pour des raideurs angulaires de 10^4 Nm/rad.
 $K_{rad}=10^9$ N/m (—); $K_{rad}=10^8$ N/m (-----).

La modification des raideurs radiales des roulements induit un glissement fréquentiel de certaines vitesses "critiques" de rotation. Les modes de denture à 1030 Hz et 1880 Hz disparaissent tandis qu'apparaît un nouveau mode à 1590 Hz. L'excitation en résonance de ce mode induit des amplifications de la surcharge dynamique de denture, des efforts radiaux transmis par les roulements et de la réponse vibratoire du carter.

En dehors de ce régime particulier, l'influence des raideurs radiales des roulements sur la réponse vibratoire du carter dépend de la plage de fréquence considérée et de la nature des efforts qui contribuent de façon majoritaire à la réponse vibratoire du carter.

Au delà de 1000 Hz, lorsque les raideurs angulaires des roulements sont faibles (10^4 Nm/rad), la contribution des efforts axiaux et des moments transmis par les roulements à la réponse vibratoire du carter est minime devant celle des efforts radiaux. L'influence des raideurs radiales sur la réponse vibratoire du carter est donc significative. Le niveau des efforts radiaux transmis au carter par les roulements pour des raideurs radiales égales à

10^8 N/m est beaucoup plus faible que pour des raideurs radiales égales à 10^9 N/m et, par conséquent, la réponse vibratoire du carter a sensiblement diminué (figure V.3a).

L'influence des raideurs radiales des roulements est beaucoup moins sensible lorsque les raideurs angulaires des roulements sont grandes (10^5 Nm/rad). En effet, la contribution des moments transmis par les roulements à la réponse vibratoire du carter n'est plus négligeable et la diminution des efforts radiaux transmis au carter a une incidence moindre (figure V.4a).

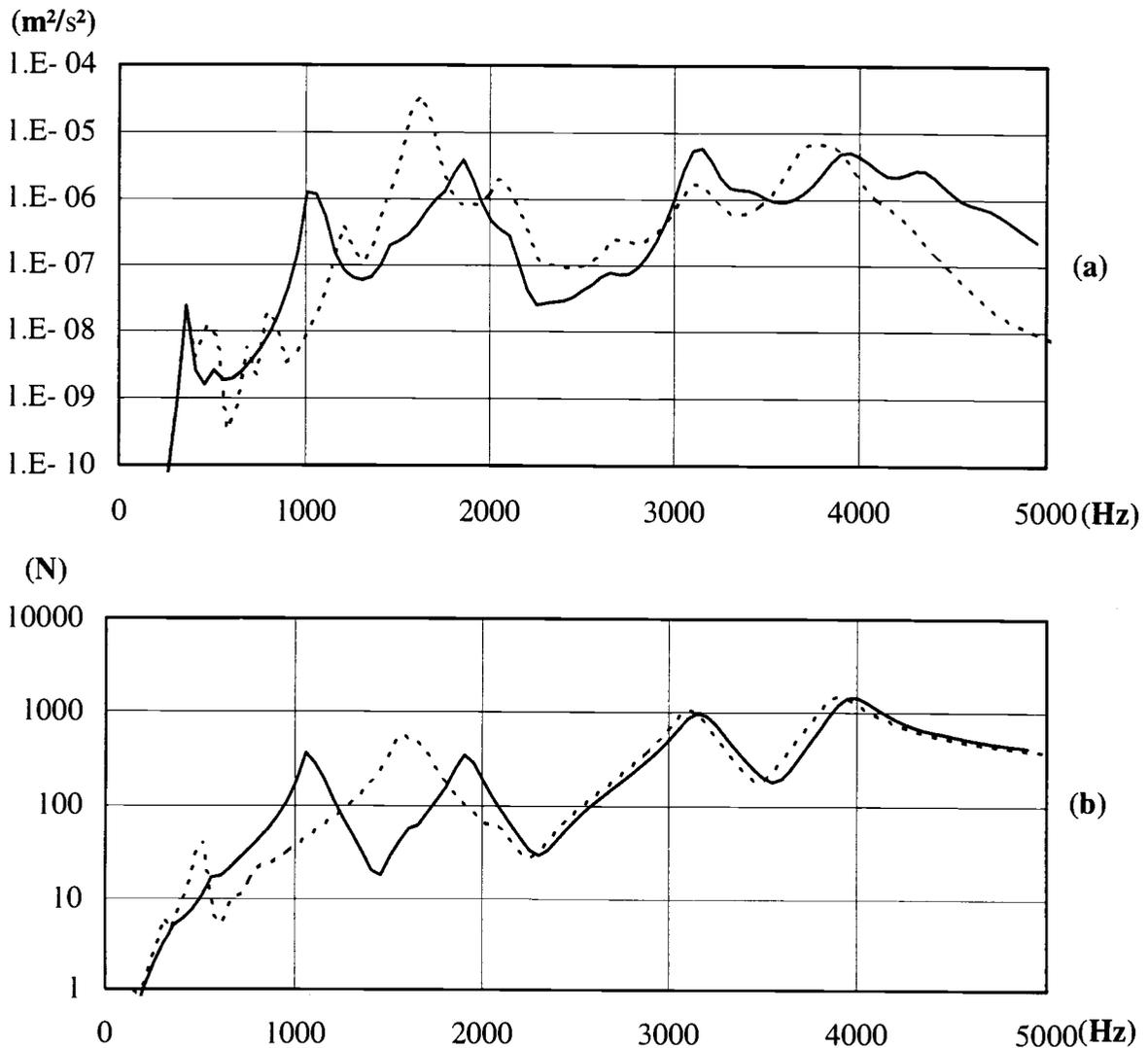


Figure V.4. Evolution de la réponse vibratoire du carter $\langle \mathbf{v}^2(\omega) \rangle_s$ (a) et de la surcharge dynamique de denture (b) pour des raideurs angulaires de 10^5 Nm/rad.
 $K_{rad} = 10^9$ N/m (—); $K_{rad} = 10^8$ N/m (-----).

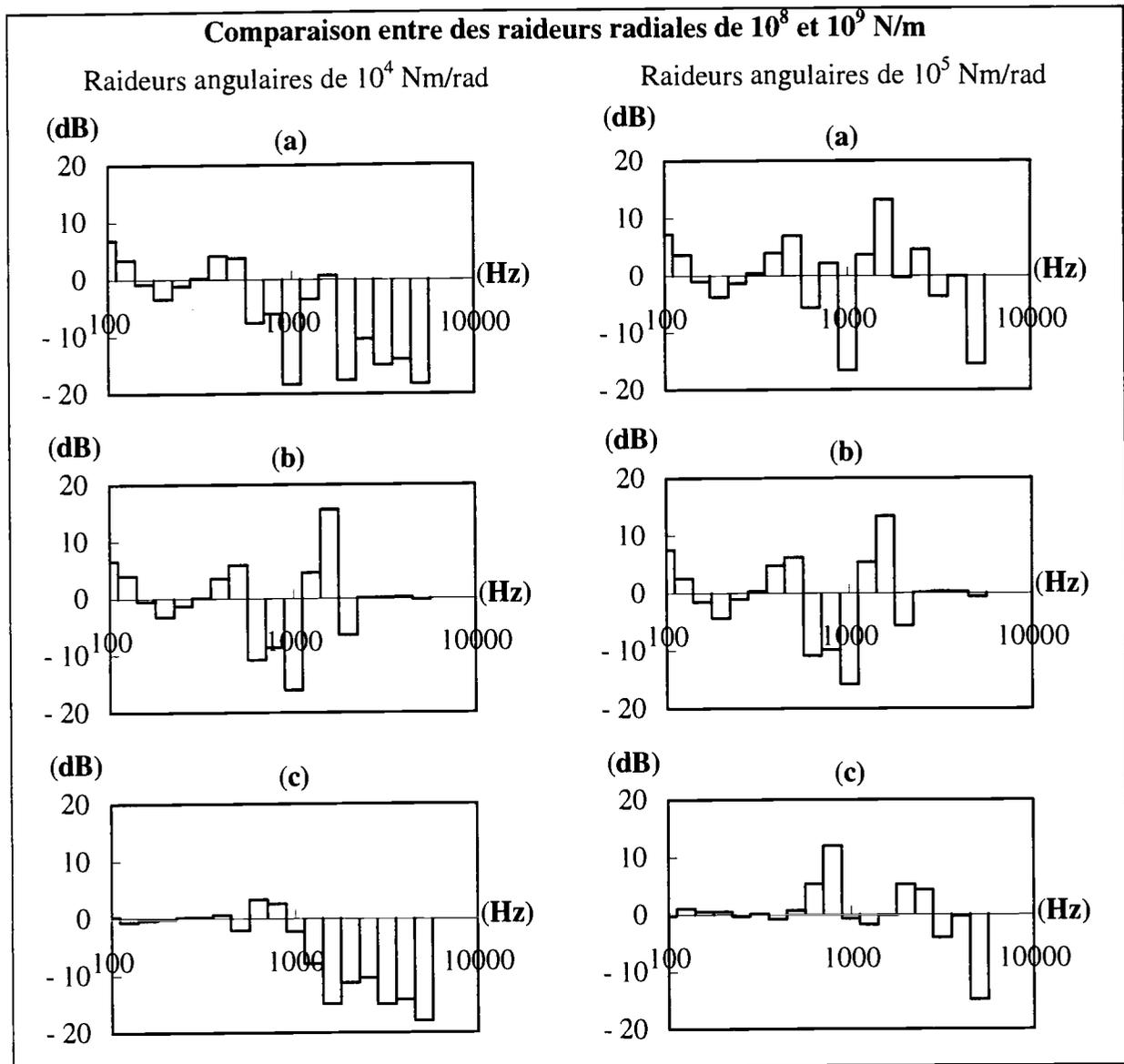


Figure V.5. Evolution des indices de modification avec la fréquence d'engrènement.

- (a) Réponse vibratoire du carter $L_{v2}(\omega)$.
- (b) Valeur quadratique de la surcharge dynamique de denture $L_{F2}(\omega)$.
- (c) Mobilité quadratique moyenne du carter $L_{hT2}(\omega)$.

La figure V.5 présente les évolutions des indices $L_{v2}(\omega)$, $L_{F2}(\omega)$ et $L_{hT2}(\omega)$ obtenus en remplaçant les roulements ayant des raideurs radiales égales à 10^9 N/m (solution de référence) par des roulements ayant des raideurs radiales égales à 10^8 N/m.

Les valeurs obtenues pour $L_{F2}(\omega)$ (-16 dB à 1000 Hz, +16 dB à 1590 Hz et -6 dB à 2000 Hz) illustrent l'influence des raideurs radiales des roulements sur certaines vitesses "critiques" de rotation.

Les modifications de la réponse vibratoire du carter entre 0 et 500 Hz sont peu significatives car la réponse vibratoire du carter et son facteur de rayonnement sont faibles dans cette plage de fréquence (elles sont induites par les modifications de l'évolution de la surcharge dynamique de denture).

Pour des raideurs angulaires faibles, la diminution des raideurs radiales des roulements atténue sensiblement la mobilité quadratique moyenne du carter, notamment au-delà de 1000 Hz. La réponse vibratoire du carter diminue donc sensiblement, sauf pour le régime correspondant à l'excitation du nouveau mode de denture. Par contre, pour des raideurs angulaires fortes, les efforts radiaux ne contribuent que partiellement à la réponse vibratoire du carter et les effets d'une modification des raideurs radiales sur la réponse vibratoire du carter sont tantôt positifs, tantôt négatifs, selon la fréquence considérée.

V.2.3 Raideurs axiales

Nous avons calculé l'évolution de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S$ pour des raideurs axiales des roulements égales à $5 \cdot 10^7$ N/m, $1 \cdot 10^8$ N/m et $5 \cdot 10^8$ N/m (figure V.6). Les raideurs radiales et les raideurs angulaires étaient égales à 10^9 N/m et 10^5 Nm/rad.

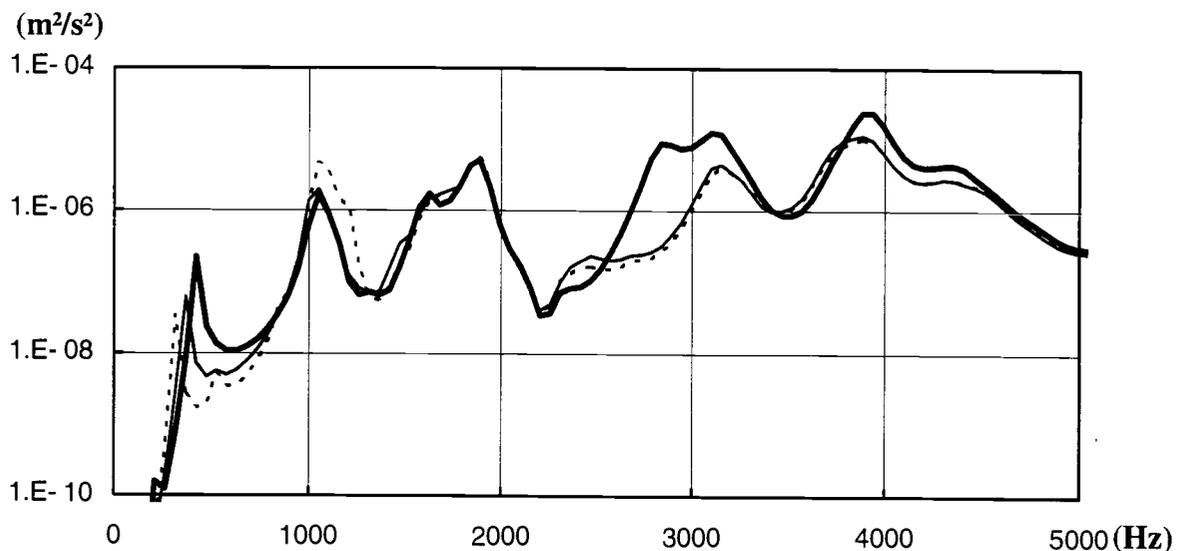


Figure V.6. Evolution de la réponse vibratoire du carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_S$ pour des raideurs radiales des roulements de 10^9 N/m et des raideurs angulaires de 10^5 Nm/rad. $K_{ax}=5 \cdot 10^8$ N/m (trait continu gras); $K_{ax}=1 \cdot 10^8$ N/m (trait continu fin); $K_{ax}=5 \cdot 10^7$ N/m (-----).

L'influence des raideurs axiales des roulements sur la vitesse quadratique moyenne du carter est moins importante que l'influence des raideurs angulaires et des raideurs radiales des roulements. En effet, les efforts axiaux transmis au carter ne contribuent de façon majoritaire à la réponse vibratoire du carter que dans une plage de fréquences limitée (0 à 1000 Hz). Cette plage correspond à l'excitation des modes de déplacements axiaux des lignes d'arbres, modes pour lesquels le carter se déforme. La modification des raideurs axiales des roulements induit une augmentation des fréquences de ces modes, des efforts axiaux et de la réponse vibratoire du carter. Au-delà de 1000 Hz, il faut augmenter sensiblement les raideurs axiales des

roulements ($5 \cdot 10^8$ N/m) pour que les efforts axiaux participent de façon significative à la réponse vibratoire du carter.

V.2.4 Effet du couplage entre les différents termes de raideur des roulements

Nous avons jusqu'ici supposé que les matrices de raideurs des roulements étaient diagonales. Cette hypothèse souvent retenue permet de définir des efforts axiaux et radiaux et des moments transmis au carter par les roulements. Grâce à cette simplification, nous avons pu découpler et analyser séparément les effets induits par la modification des raideurs radiales, axiales ou angulaires des roulements, et proposer des solutions pour réduire le transfert entre l'excitation et la réponse vibratoire du carter.

Toutefois, pour calculer de façon plus précise la réponse vibratoire d'une transmission, il est nécessaire de décrire les raideurs des roulements réels à partir d'une modélisation plus complexe. Si l'on suppose que les bagues intérieure et extérieure d'un roulement sont rigides, la raideur de celui-ci peut être décrite par une matrice qui couple 5 degrés de liberté de la bague intérieure à 5 degrés de liberté de la bague extérieure. A priori, aucun terme de cette matrice n'est nul. Néanmoins, les ordres de grandeur de certaines raideurs nous conduisent à négliger certains types de couplage. Il apparaît notamment que, lorsqu'on applique une précharge purement axiale sur un roulement à rouleaux coniques, les termes extra-diagonaux dominants sont les termes qui couplent les déplacements radiaux et angulaires de la bague extérieure par rapport à la bague intérieure. Le signe de ces termes dépend du sens de l'inclinaison des rouleaux par rapport à l'axe Z.

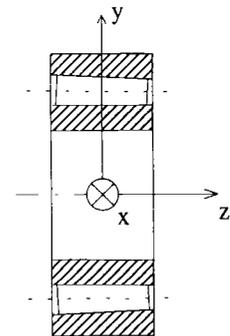
$$[K]= \begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \theta_x & \theta_y \\ \hline \mathbf{x} & 10^9 & 0 & 0 & 0 & \pm 10^7 \\ \mathbf{y} & 0 & 10^9 & 0 & \pm 10^7 & 0 \\ \mathbf{z} & 0 & 0 & 10^8 & 0 & 0 \\ \theta_x & 0 & \pm 10^7 & 0 & 10^5 & 0 \\ \theta_y & \pm 10^7 & 0 & 0 & 0 & 10^5 \end{array}$$


Tableau V.1. Caractéristiques d'un roulement à rouleaux coniques.

Nous avons donc introduit la matrice de raideur présentée dans le tableau V.1. Nous avons calculé les évolutions de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$ (figure V.7a) et de la surcharge dynamique de denture (figure V.7b) et nous avons comparé les résultats obtenus avec ceux correspondant à une matrice diagonale (les ordres de grandeur des termes de raideur correspondent à ceux qui seront calculés et introduits dans la dernière partie de ce chapitre).

La prise en compte des termes extra-diagonaux des matrices de raideur des roulements induit un glissement fréquentiel de certaines vitesses "critiques" de rotation. D'autre part, elle induit une augmentation des efforts radiaux et des moments transmis au carter par les roulements et, par conséquent, de la réponse vibratoire du carter.

Le calcul de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter nécessite donc non seulement l'estimation précise des raideurs radiales, axiales et angulaires des roulements, mais aussi la prise en compte des termes de couplage entre les déplacements radiaux et angulaires de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure.

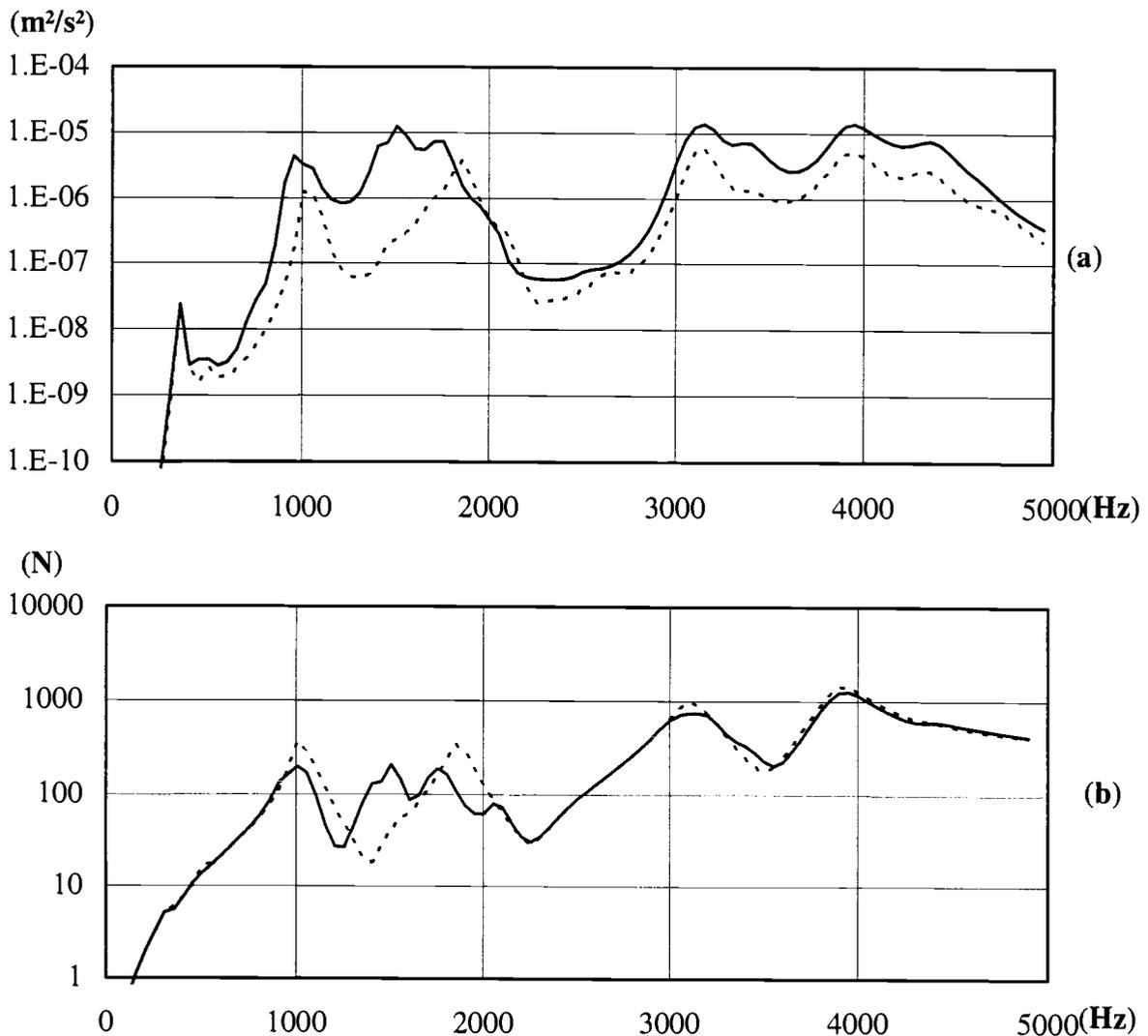


Figure V.7. Evolution de la réponse vibratoire du carter $\langle \overline{v^2(\omega)} \rangle_s$ (a) et de la surcharge dynamique de denture (b).

Matrices de raideur des roulements complète (————) ou diagonale (-----).

V.3 Influence de l'architecture du carter

Pour réduire la mobilité quadratique du carter d'une transmission, on peut envisager de modifier son architecture. Nous avons donc comparé les réponses dynamiques de la boîte d'inversion associées à différentes configurations du carter. Les modifications introduites s'inspirent des différentes solutions proposées par les auteurs qui ont étudié le transfert entre des efforts excitateurs extérieurs introduits au niveau des roulements et la réponse vibroacoustique des carters nus. Ces solutions consistent à :

- modifier les conditions limites du carter,
- augmenter localement la masse du carter,
- augmenter localement la raideur du carter.

Dans tous les cas, nous adaptions l'épaisseur du carter pour maintenir la masse de la boîte d'inversion constante.

V.3.1 Modification des conditions limites du carter

Pour évaluer l'influence des conditions limites du carter sur sa réponse vibratoire, nous comparons les résultats obtenus avec un carter dont la face inférieure est encastrée avec ceux correspondant à la configuration initiale (le carter est encastré au niveau de 16 noeuds situés aux quatre coins de la face avant). Les raideurs axiales et radiales et angulaires des roulements sont égales respectivement à 10^8 N/m, 10^9 N/m et 10^5 Nm/rad.

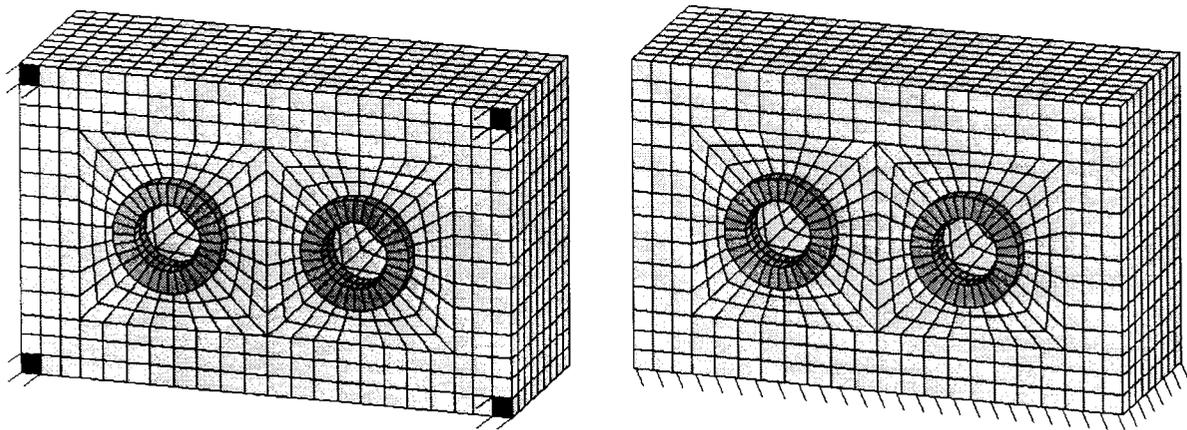


Figure V.8. Conditions limites du carter. Configuration initiale et nouvelle configuration.

La boîte d'inversion possède moins de modes propres entre 0 et 5000 Hz (70 contre 80) lorsque sa face inférieure est encastrée en raison de la disparition des modes associée aux déformations de cette face (figure V.9). Il apparaît des nouveaux modes de basculement du carter (890 Hz et 1170 Hz).

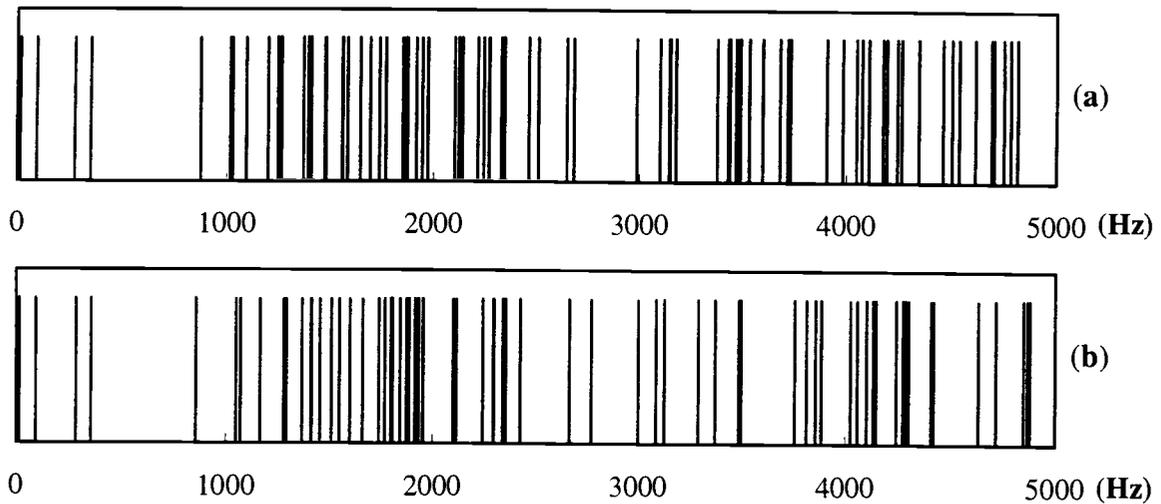


Figure V.9. Influence des conditions limites sur les fréquences propres de la boîte d'inversion. Configuration initiale (a) et nouvelle configuration (b).

Pour comparer les évolutions des réponses vibratoires de la boîte d'inversion correspondant aux deux configurations, nous calculons ces réponses en bandes fines et nous exprimons les indices de modification $L_{v_2}(\omega)$ (moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter), $L_{F_2}(\omega)$ (valeur quadratique de la surcharge dynamique de denture) et $L_{hT}(\omega)$ (mobilité quadratique moyenne du carter) obtenus en comparant la configuration initiale (solution de référence) et la boîte d'inversion ayant la face inférieure du carter encastrée. La figure V.10 présente les résultats obtenus en dB et en bandes larges tiers d'octave entre 100 et 5000 Hz.

Les conditions limites affectent peu les modes de denture. Comme le montre la figure V.10b, l'évolution de la surcharge dynamique de denture avec la fréquence d'engrènement a peu changé par rapport à la boîte d'inversion de référence. Les modifications de la réponse vibratoire du carter (figure V.10a) ont donc pour principales origines les modifications de la mobilité quadratique moyenne du carter (figure V.10c). La modification des conditions limites ne permet pas d'atténuer cette réponse sur une gamme de fréquences importante. Bien que, à l'exception des premiers modes correspondant à une déformation de l'environnement, les conditions limites affectent les modes propres de la boîte d'inversion, les variations de $L_{v_2}(\omega)$ restent limitées (-3 à +3 dB). Même pour une transmission fonctionnant à vitesse constante, l'erreur statique de transmission présente un spectre large bande et l'atténuation éventuelle d'une raie risque d'être compensée par l'augmentation d'une autre.

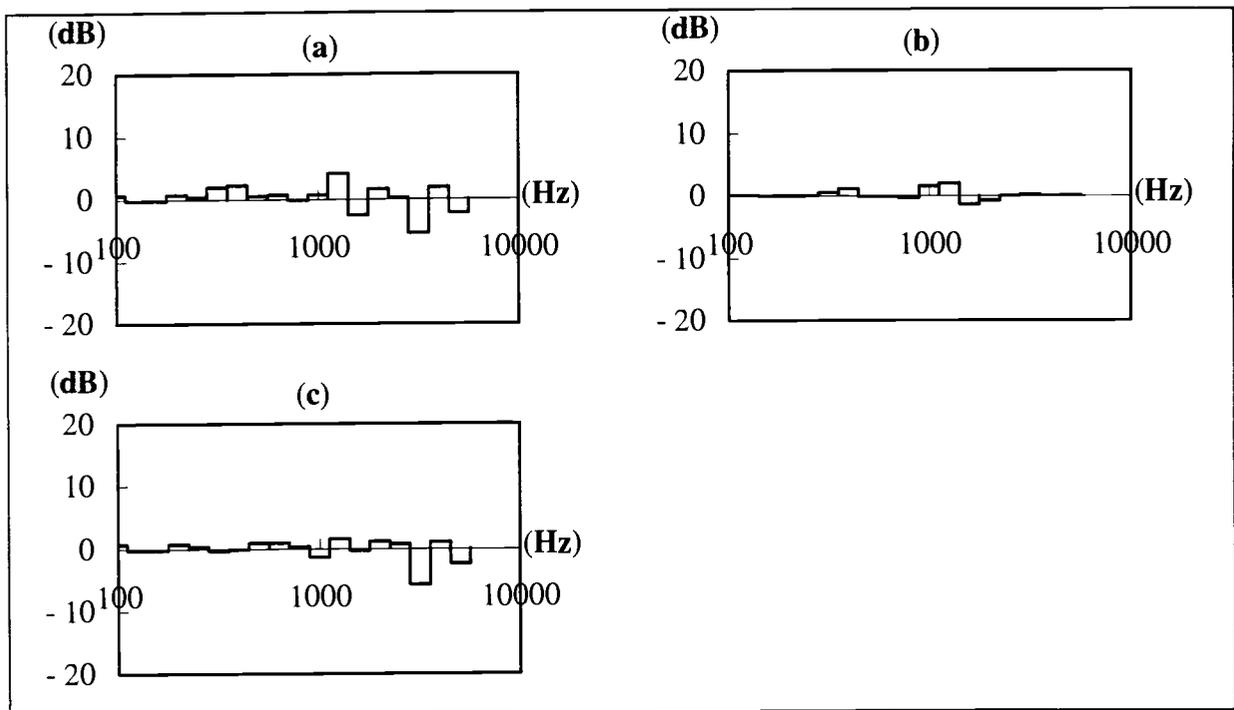


Figure V.10. Evolution des indices de modification avec la fréquence d'engrènement.

(a) Réponse vibratoire du carter $L_{v2}(\omega)$.

(b) Valeur quadratique de la surcharge dynamique de denture $L_{F2}(\omega)$.

(c) Mobilité quadratique moyenne du carter $L_{hT2}(\omega)$.

V.3.2 Augmentation locale de la masse du carter

Dans un premier temps, nous avons modifié la hauteur des boîtiers de roulements (75 mm contre 32 mm précédemment). Ces boîtiers restent symétriques par rapport à la face du carter qui les supportent. Comme le modèle de référence, le modèle de la boîte d'inversion possède 1680 éléments, 2070 noeuds et 11100 degrés de liberté. Ensuite, nous avons introduit une partie massive d'une hauteur de 39 mm qui permet de solidariser les boîtiers de roulements et qui est symétrique par rapport aux faces avant et arrière du carter. Le modèle de la boîte d'inversion possède alors 1820 éléments, 2100 noeuds et 11200 degrés de liberté.

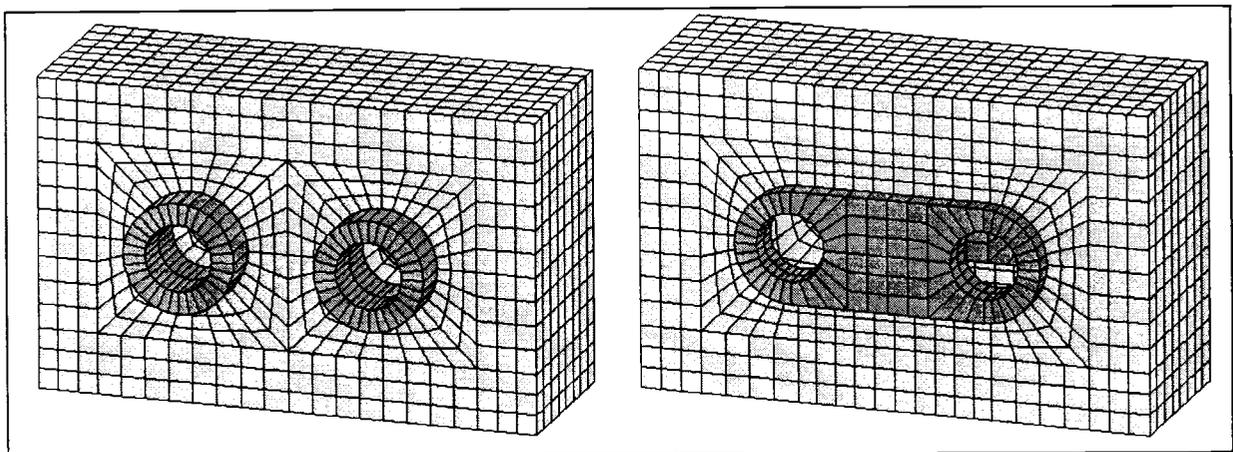


Figure V.11. Maillage des carters correspondant aux nouvelles configurations.

Pour maintenir la masse de la boîte d'inversion constante, l'épaisseur du carter est de 8 mm dans les deux cas de figures (contre 10 mm précédemment). Les boîtiers et la partie massive représentent 30 % de la masse totale du carter. La face inférieure du carter est encastrée, la solution de référence correspondant à la boîte d'inversion initiale lorsque sa face inférieure est encastrée.

a) 1ère solution : augmenter la hauteur des boîtiers de roulements

L'idée d'augmenter la hauteur des boîtiers de roulements s'appuie sur l'étude du transfert entre un effort extérieur appliqué au niveau des roulements et la réponse vibratoire du carter nu. Des boîtiers plus hauts permettent alors d'augmenter l'impédance d'entrée du carter. Ducret (1997, 1998) a par exemple constaté, à partir de l'analyse modale d'une plaque élastique encastrée munie de deux boîtiers de grande taille, qu'il existait une bande de fréquence de largeur importante séparant les modes de déplacement des boîtiers des modes locaux de plaque pour lesquels les boîtiers de roulements sont immobiles (la largeur de cette bande dépend de la hauteur des boîtiers).

L'analyse des modes propres du carter nu de la boîte d'inversion modifiée (figure V.12a) ne permet pas de mettre en évidence l'existence d'une bande de fréquence "vide" en raison de la présence des modes propres des faces latérales du carter. Le couplage entre les différentes faces élastiques du carter conduit, pour ces modes propres, à la déformation des faces avant et arrière du carter nu. Toutefois, la présence de boîtiers de roulements de grande taille découpe bien la distribution des fréquences propres en deux groupes de modes distincts. Le premier groupe correspond aux modes gouvernés par le déplacement des boîtiers. Le deuxième groupe contient des modes locaux de plaque. Au-delà de 1500 Hz, les boîtiers de roulements constituent des noeuds de vibration pour l'ensemble des modes propres de la structure. Le transfert entre un effort extérieur appliqué au niveau des roulements et la réponse vibratoire du carter nu modifié est donc plus faible que pour le carter nu de la boîte d'inversion de référence.

Comme l'illustre la figure V.12b, la boîte d'inversion modifiée possède plus de modes que la boîte de référence en raison de la diminution de l'épaisseur du carter (85 modes propres entre 0 et 5000 Hz contre 70 modes). L'augmentation de la hauteur des boîtiers affecte peu les modes de denture. Comme le montre la figure V.13b, l'évolution de la surcharge dynamique de denture avec la fréquence d'engrènement a peu changé par rapport à la boîte d'inversion de référence. Les modifications de la réponse vibratoire du carter (figure V.13a) ont donc pour principales origines les modifications de la mobilité quadratique moyenne du carter (figure V.13c). Malheureusement, les conclusions issues de l'analyse modale du carter nu ne sont pas transposables à la boîte d'inversion complète. Le couplage entre la flexion des arbres et les déformations du carter entraînent un déplacement angulaire des boîtiers de roulements sur toute la plage de fréquence étudiée (0-5000 Hz). L'augmentation de la hauteur des boîtiers

ne permet donc pas d'immobiliser ceux-ci au-delà des premières fréquences propres de la boîte d'inversion. Comme le montre la figure V.13c, elle ne permet pas de diminuer sensiblement la mobilité quadratique moyenne du carter à haute fréquence.

D'autre part, les modes de déplacement axial des lignes d'arbre étant gouvernés par les raideurs axiales des roulements (inchangées) et du carter, la diminution de l'épaisseur du carter entraîne une diminution de leur fréquence de 290 à 240 Hz (déplacements dans le même sens) et de 360 à 330 Hz (déplacements en sens opposé) et une augmentation de la mobilité quadratique moyenne du carter entre 100 et 300 Hz.

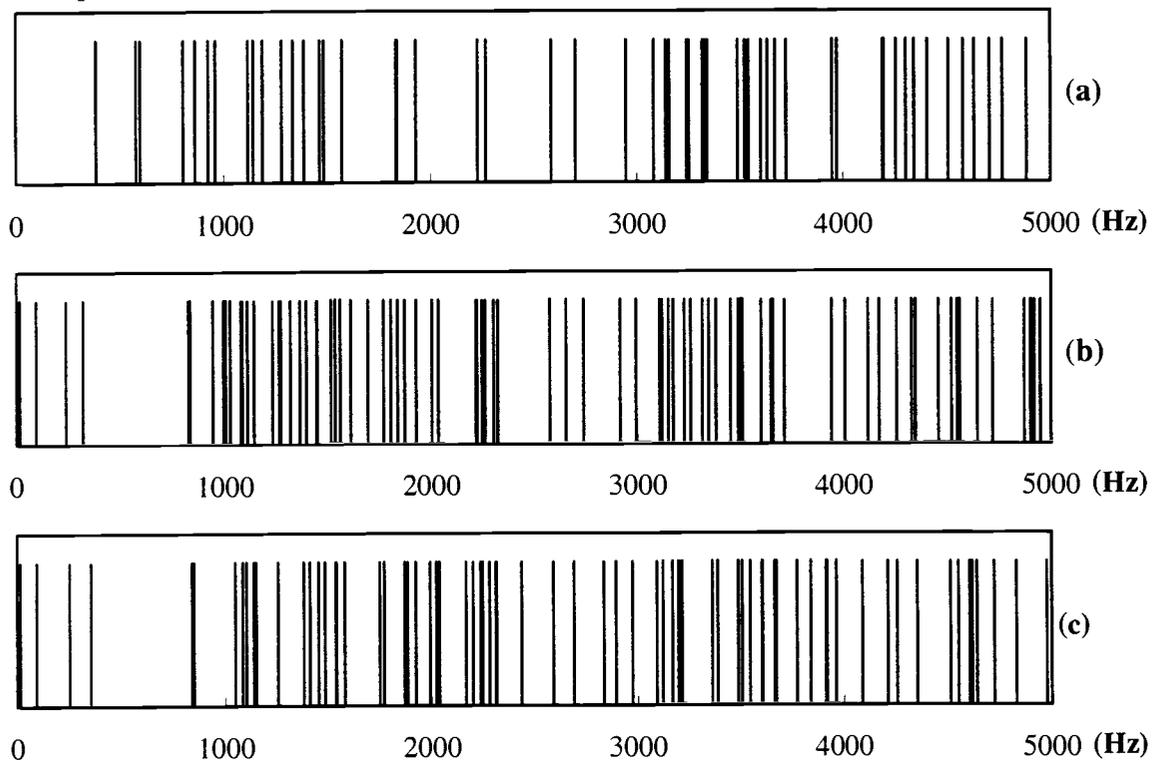


Figure V.12. Fréquences propres de la boîte d'inversion.

(a) Carter nu (équipé de boîtiers de roulements hauts).

(b) Boîte d'inversion équipée de boîtiers de roulements hauts.

(c) Boîte d'inversion équipée de roulements "solidaires".

b) 2ème solution : solidariser les boîtiers de roulements

L'idée de solidariser les boîtiers de roulements est issue encore une fois de l'analyse du transfert entre un effort extérieur et la réponse vibratoire du carter nu. Cette modification permet de supprimer un certain nombre de modes de déplacement des boîtiers qui gouvernent la réponse vibratoire du carter nu à basse fréquence. Elle permet aussi de rendre la partie centrale du carter nu immobile à haute fréquence.

La disparition d'un certain nombre de modes des faces avant et arrière du carter est compensée par l'augmentation du nombre de modes des faces latérales induit par la diminution de l'épaisseur du carter. La boîte d'inversion possède 75 modes entre 0 et 5000 Hz. De plus, Les résultats présentés sur la figure V.13 montrent que les conclusions

issues de l'analyse de la réponse vibratoire du carter nu ne s'appliquent pas à la boîte d'inversion complète. Si l'évolution de la surcharge dynamique de denture avec la fréquence d'engrènement a peu changé (figure V.13e), l'augmentation de la mobilité quadratique moyenne du carter induit une augmentation de sa réponse vibratoire sur l'ensemble de la plage de fréquence étudiée (figures V.13d et f).

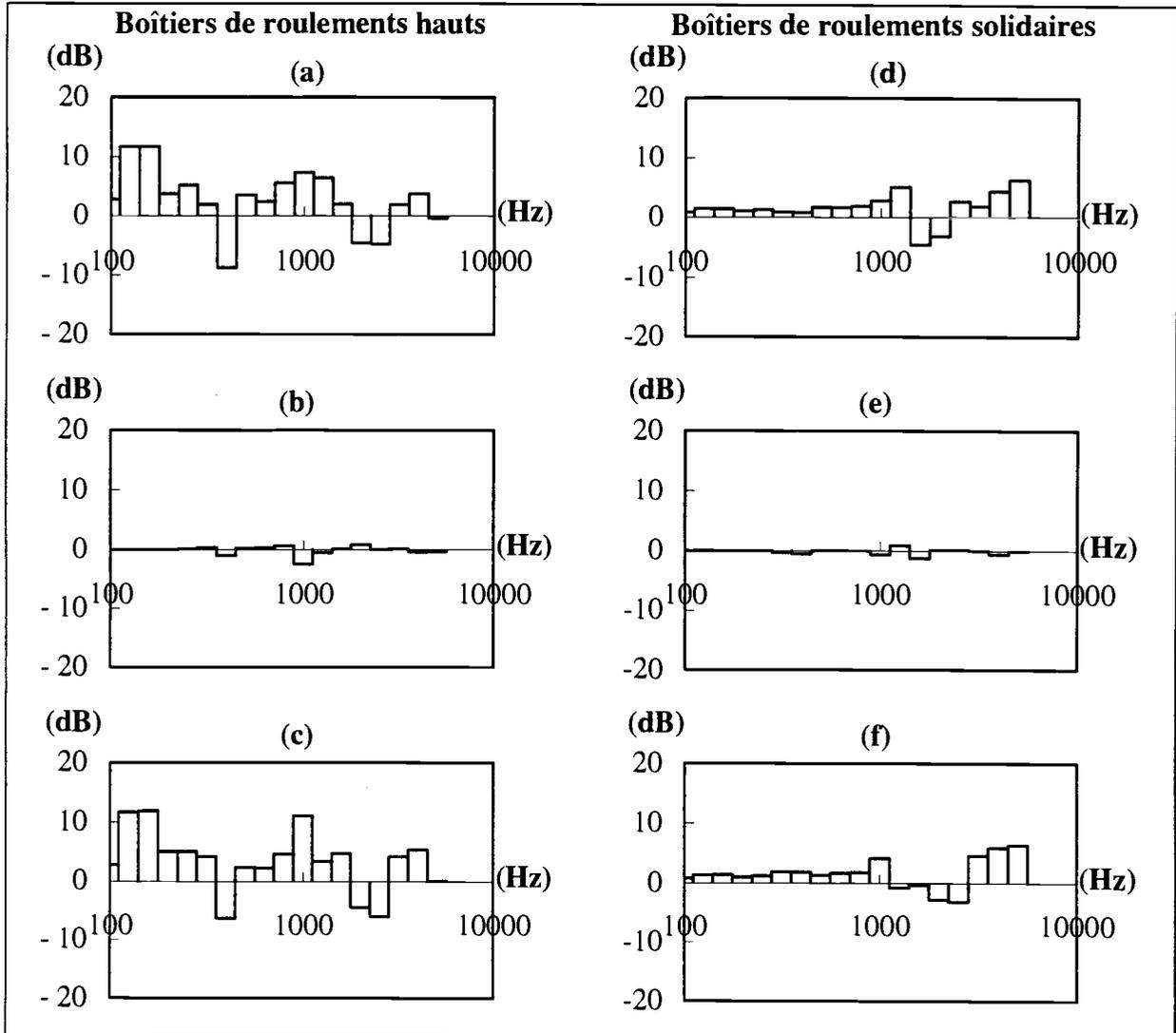


Figure V.13. Evolution des indices de modification avec la fréquence d'engrènement.

(a) et (d) Réponse vibratoire du carter $L_{v2}(\omega)$.

(b) et (e) Valeur quadratique de la surcharge dynamique de denture $L_{F2}(\omega)$.

(c) et (f) Mobilité quadratique moyenne du carter $L_{hT2}(\omega)$.

En définitive, l'augmentation locale de la masse du carter de la boîte d'inversion a un impact plutôt négatif sur sa réponse vibratoire, alors que l'analyse du transfert entre un effort extérieur et la réponse vibratoire du carter nu laissait espérer une diminution significative de celle-ci à haute fréquence.

V.3.3 Augmentation locale de la raideur du carter

Dans un premier temps, nous avons introduit un carter de forme "ovale" dans le but de raidir ses faces latérales. Le modèle de la boîte d'inversion possède 1420 éléments, 1800 noeuds et 10300 degrés de liberté. Dans un deuxième temps, nous avons introduit une nervure située dans le plan des roulements et à l'extérieur du carter. Sa hauteur correspond donc à la moitié de celle des boîtiers de roulements (16 mm contre 32 mm). Son épaisseur est de 40 mm. Le modèle de la boîte d'inversion possède alors 1800 éléments, 2230 noeuds et 12150 degrés de liberté.

Pour maintenir la masse de la boîte d'inversion constante, l'épaisseur du carter est de 12 mm dans la première configuration. Les boîtiers de roulements représentent 12 % de la masse totale du carter. Dans la deuxième configuration, l'épaisseur du carter est de 9 mm. La masse des boîtiers de roulements et de la nervure représentent 22 % de la masse totale du carter.

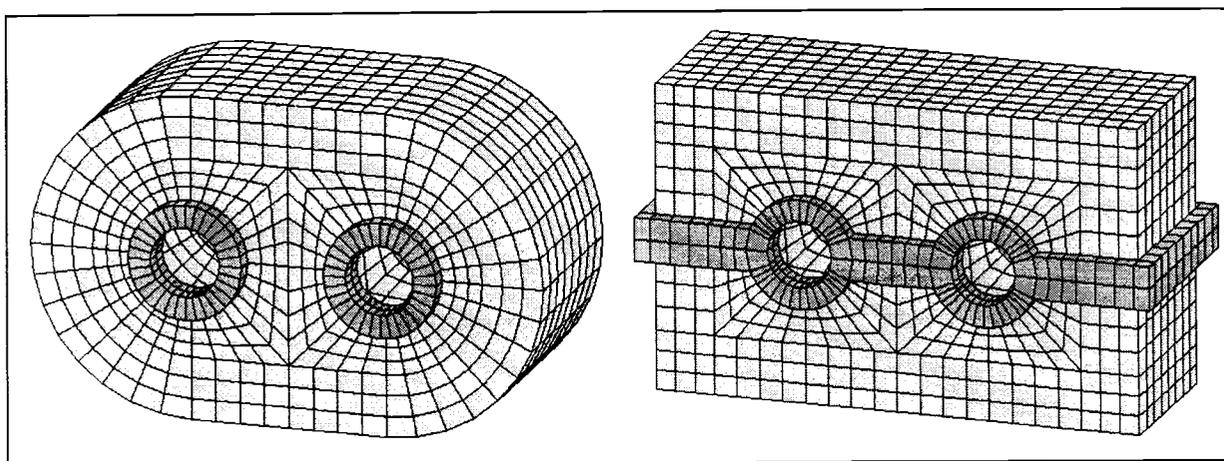


Figure V.14. Maillage des carters correspondant aux nouvelles configurations.

a) 1ère solution : introduire un carter de forme ovale

Les faces latérales du carter participant de façon non négligeable à la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter, il semble intéressant de modifier la forme du carter pour augmenter la raideur de ces faces. L'introduction d'une forme ovale et l'augmentation de l'épaisseur du carter qui en résulte permet de diminuer sensiblement le nombre de modes de la boîte d'inversion (58 modes propres entre 0 et 5000 Hz contre 70 modes pour la boîte de référence). Mais il affecte peu les modes de denture. La figure V.16b montre que l'évolution de la surcharge dynamique de denture avec la fréquence d'engrènement a peu changé.

Les fréquences des modes de déplacements axiaux des lignes d'arbres ont augmenté (de 390 à 320 Hz et de 360 à 410 Hz) en raison de l'augmentation de l'épaisseur du carter. Ceci conduit donc à une diminution de la mobilité quadratique moyenne et de la réponse vibratoire du carter entre 100 et 400 Hz. Au-delà de 400 Hz, bien que le nombre de modes propres de la boîte d'inversion soit moins grand, la modification de la forme du carter ne permet pas de

diminuer la mobilité quadratique moyenne et la réponse vibratoire du carter (figures V.16a et c).



Figure V.15. Fréquences propres de la boîte d'inversion.

(a) Carter ovale.

(b) Nervure dans le plan des roulements.

b) 2ème solution : introduire d'une nervure dans le plan des roulements

L'idée d'introduire une nervure dans le plan des roulements est associée au fait que l'ensemble des efforts internes qui sont induits par le processus d'engrènement et qui excitent le carter sont localisés dans ce plan. Tout comme la boîte d'inversion de référence, la boîte d'inversion modifiée possède 75 modes propres entre 0 et 5000 Hz. Par contre, sa réponse vibratoire a considérablement évolué.

La modification de l'architecture du carter se traduit par la disparition des vitesses "critiques" à 1040 Hz et 1880 Hz et par l'apparition d'une nouvelle vitesse "critique" à 1620 Hz et d'une vitesse "critique" secondaire à 630 Hz. Ces résultats illustrent l'influence des propriétés élastiques du carter sur les modes de denture. La figure V.16e montre que l'évolution de la surcharge dynamique de denture est très affectée entre 500 et 2000 Hz.

Comme l'augmentation de l'épaisseur du carter, l'introduction d'une nervure augmente la raideur axiale du carter. Les fréquences des modes de déplacement axial des lignes d'arbres ont donc augmenté de 290 à 300 Hz (déplacements dans le même sens) et de 360 Hz à 420 Hz (déplacements en sens opposé). Comme l'illustre la figure V.16f, la mobilité quadratique moyenne du carter entre 100 et 400 Hz a donc diminué.

D'autre part, pour l'ensemble des modes propres situés au-delà de 2000 Hz, la partie nervurée se déforme beaucoup moins que le reste du carter. Les déformations du carter correspondent alors à des modes locaux de plaque. La nervure modifie donc considérablement la mobilité quadratique moyenne du carter. L'atténuation de celle-ci atteint -2.5 dB en moyenne entre 200 et 700 Hz et -8.5 dB en moyenne entre 900 et 5000 Hz.

En définitive, l'introduction d'une nervure dans le plan des roulements est une solution très intéressante pour diminuer la réponse vibratoire du carter de la boîte d'inversion sur la quasi-totalité de la plage de fréquence étudiée. L'augmentation de la valeur quadratique de la surcharge dynamique de denture associée aux nouvelles vitesses "critiques" de fonctionnement (630 Hz et 1620 Hz) est compensée par l'atténuation de la mobilité quadratique moyenne du carter à ces fréquences. La réponse vibratoire du carter n'augmente que de +4 dB et +3 dB pour ces régimes de fonctionnement particuliers. Par contre, elle diminue de -2.5 dB en moyenne entre 100 et 900 Hz et de -10 dB en moyenne entre 900 et 5000 Hz.

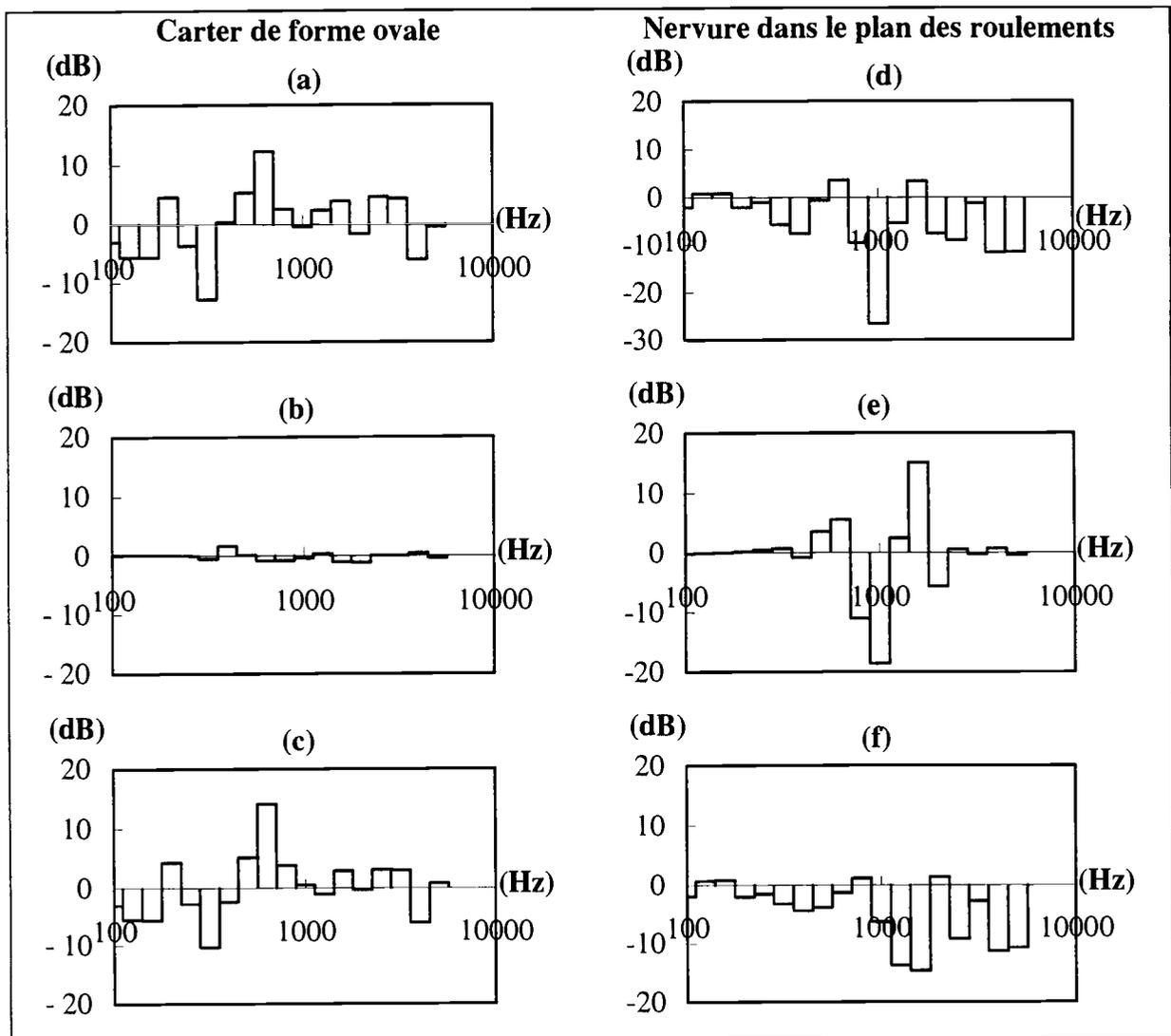


Figure V.16. Evolution des indices de modification avec la fréquence d'engrènement.

(a) et (d) Réponse vibratoire du carter $L_{v^2}(\omega)$.

(b) et (e) Valeur quadratique de la surcharge dynamique de denture $L_{F^2}(\omega)$.

(c) et (f) Mobilité quadratique moyenne du carter $L_{hT^2}(\omega)$.

V.4 Synthèse des résultats

Les simulations numériques que nous avons effectuées nous ont permis de mettre en évidence les points suivants.

1) Une modification des raideurs des roulements et de l'architecture du carter peut conduire à une modification sensible de la réponse vibratoire du carter. En effet, elle peut engendrer un glissement des vitesses "critiques" et affecter les évolutions de la surcharge dynamique de denture. De plus, elle induit une modification sensible de la mobilité quadratique moyenne du carter.

2) Outre la modélisation du carter, la prédiction correcte de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter d'une transmission par engrenages nécessite une estimation précise des raideurs des roulements, y compris les termes de couplage entre les déplacements radiaux et angulaires de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure.

3) Seul un calcul couplé des réponses vibratoires des lignes d'arbres et du carter permet d'analyser correctement les conséquences d'une modification de l'architecture de la boîte d'inversion.

4) L'influence des raideurs des roulements sur la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter dépend de la plage de fréquence considérée et de la nature des efforts qui contribuent de façon majoritaire à la réponse vibratoire du carter. Pour la boîte d'inversion étudiée, la réponse vibratoire du carter est induite par les efforts axiaux transmis par les roulements entre 0 et 1000 Hz et par les moments et les efforts radiaux au-delà de 1000 Hz. La diminution des raideurs angulaires permet d'atténuer sensiblement cette réponse dans la plage de fréquence où celle-ci est induite par les moments (-10 dB en moyenne entre 2500 et 5000 Hz, plage de fréquence qui correspond aux niveaux les plus élevés de la réponse vibratoire du carter). De même, la diminution des raideurs radiales permet (pour des raideurs angulaires faibles) d'atténuer la réponse vibratoire du carter dans la plage de fréquence où celle-ci est induite par les efforts radiaux (-10 dB en moyenne entre 1000 et 5000 Hz). Cette atténuation s'ajoute à celle obtenue précédemment.

La nature, les dimensions, le type de montage et la raideur des roulements dépendent d'un grand nombre de paramètres de fonctionnement (vitesse, charge appliquée, température, environnement...). Dans les transmissions par engrenages, on rencontre le plus souvent des roulements à rouleaux coniques préchargés qui permettent d'encaisser les charges axiales induites par l'angle d'hélice. La diminution des précharges ou l'utilisation de roulements à billes à contact obliques permettrait, en diminuant les raideurs radiales et les raideurs angulaires des roulements, de limiter le transfert entre la surcharge dynamique de denture et la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter, même si ces solutions n'ont d'effets que dans une gamme de fréquence limitée et même si les roulements à rouleaux coniques fortement préchargés sont, en tant que sources acoustiques, les plus silencieux (Opitz 1969).

5) Parmi l'ensemble des configurations de carter que nous avons testé, l'introduction d'une nervure dans le plan des roulements constitue la meilleure solution pour diminuer de manière significative la réponse vibratoire du carter de la boîte d'inversion sur la quasi-totalité de la plage de fréquence étudiée.

La figure V.17 montre les effets cumulés de l'introduction d'une nervure dans le plan des roulements et de la modification des raideurs angulaires des roulements (de 10^6 à 10^5 Nm/rad). Au-delà de 800 Hz l'atténuation de la réponse vibratoire du carter atteint jusqu'à 28 dB alors que le niveau de la surcharge dynamique de denture a légèrement augmenté.

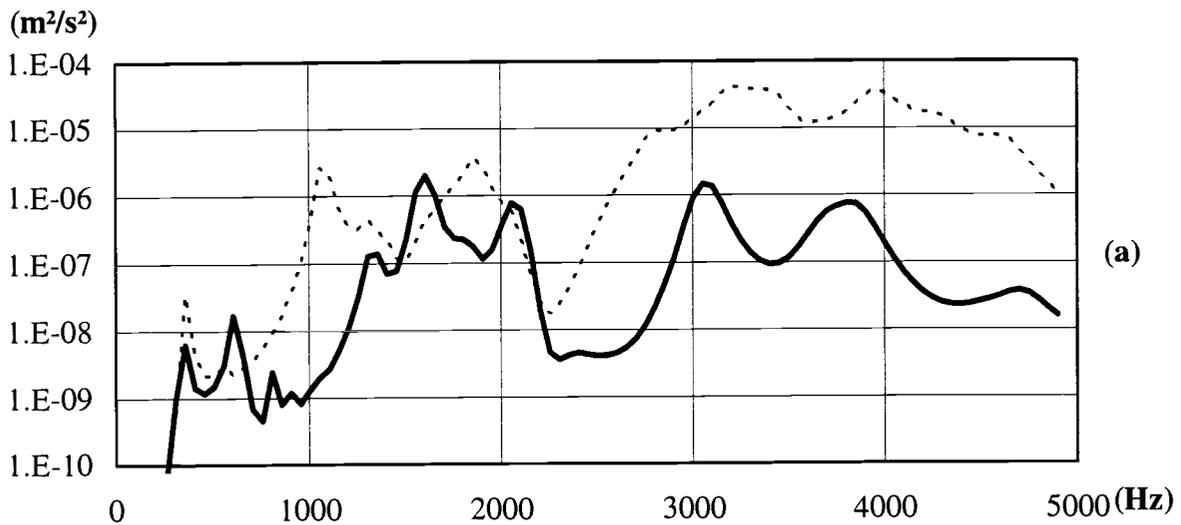


Figure V.17a. Evolution de la réponse vibratoire du carter avec la fréquence d'engrènement.
 Carter standard et raideurs angulaires de 10^6 Nm/rad (-----).
 Carter avec nervure et raideurs angulaires de 10^5 Nm/rad (—).

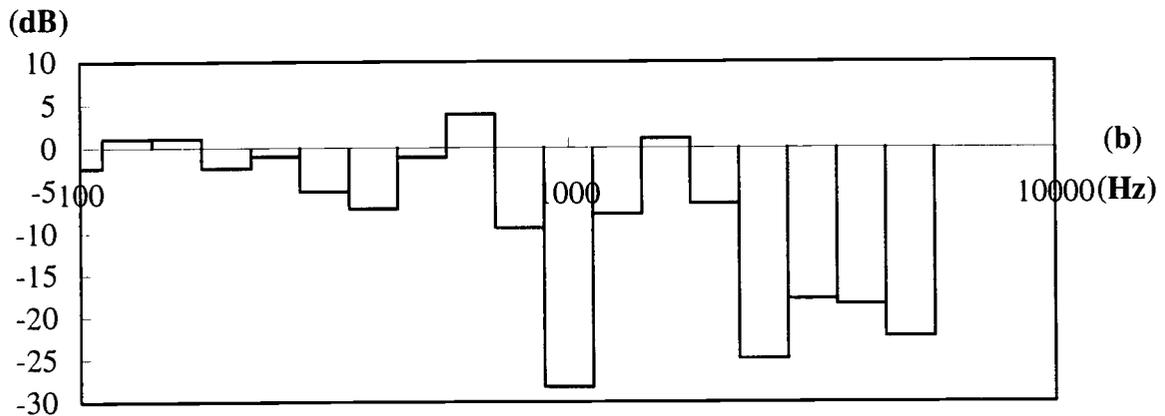


Figure V.17b. Evolution de l'indice de modification de la réponse vibratoire du carter $L_v(\omega)$ avec la fréquence d'engrènement.

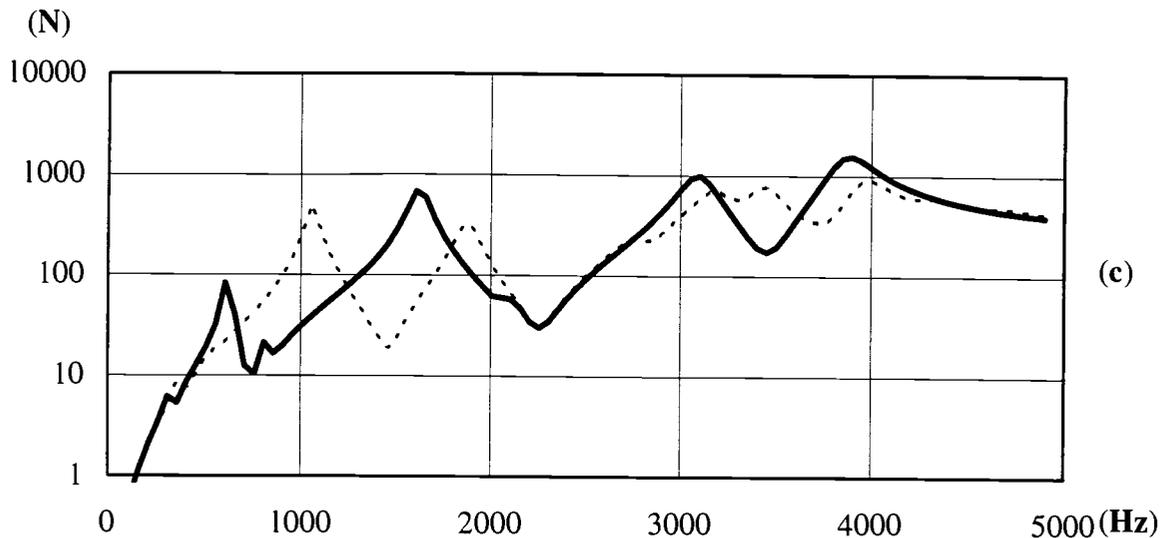


Figure V.17c. Evolution de la surcharge dynamique de denture avec la fréquence d'engrènement.

Carter standard et raideurs angulaires de 10^6 Nm/rad (-----).
 Carter avec nervure et raideurs angulaires de 10^5 Nm/rad (———).

Remarques :

1) Pour chaque type de roulement, nous avons calculé la réponse vibratoire de la boîte d'inversion à la même erreur statique de transmission harmonique. Il faut noter que la modification des raideurs des roulements peut conduire à une évolution du spectre de l'excitation vibratoire de la boîte d'inversion. En effet, l'introduction de raideurs angulaires plus faibles risque notamment d'augmenter les erreurs de parallélisme induites par l'application du couple moteur et de modifier les conditions de contact entre les dents en prise.

2) Rappelons que la puissance acoustique rayonnée par le carter d'une transmission est égale au produit entre la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter et son facteur de rayonnement. Il convient donc de vérifier, pour chaque solution proposée et pour chaque fréquence, si le facteur de rayonnement associé à la boîte d'inversion modifiée n'est pas supérieur à celui de la boîte initiale.

3) Pour comparer les réponses vibratoires associées à différentes configurations de carter et induites par des excitations solidiennes, nous avons dû adapter l'épaisseur des carters pour maintenir la masse totale de la boîte d'inversion constante. L'épaisseur du carter conditionne la transparence de celui-ci vis à vis des sources de bruit internes à la boîte d'inversion (bruit d'engrènement généré par la vibration des corps d'engrenages et les écoulements d'air instationnaires entre les dents en prise). Sibé (1997) a montré sur un exemple que l'indice d'atténuation d'un carter en acier de 10 mm vis à vis du bruit d'engrènement était supérieur de 4 dB en moyenne entre 100 Hz et 5000 Hz par rapport à un carter en acier de 6 mm. Néanmoins, étant données les épaisseurs de carter rencontrées, nous pouvons supposer que le

bruit d'engrènement interne contribue de façon minoritaire au bruit global rayonné par la boîte d'inversion.

En définitive, on peut penser que les amplifications éventuelles des raies de l'excitation et les effets d'une modification du facteur de rayonnement et de la transparence acoustique du carter sont sans commune mesure avec les atténuations de la réponse vibratoire que nous avons obtenues.

VI- Réponse vibratoire de la boîte d'inversion induite par l'erreur statique de transmission sous charge

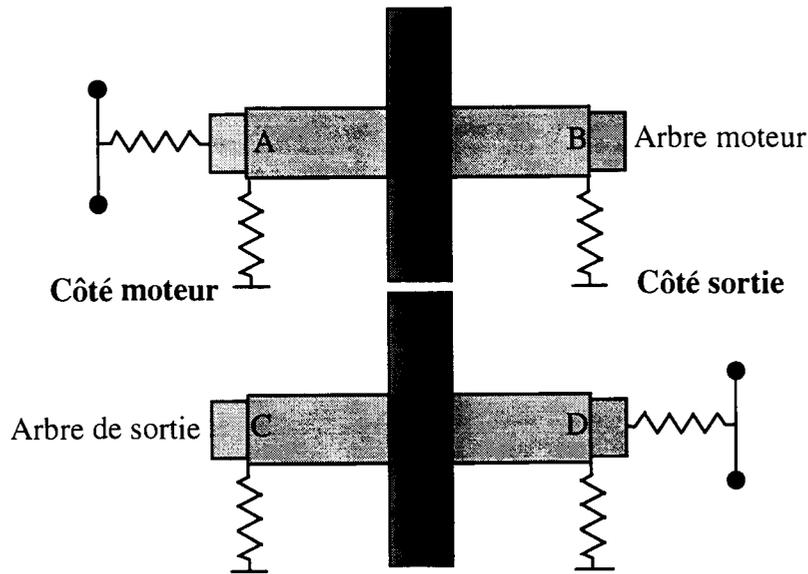
VI.1 Introduction

L'objectif de cette dernière partie est de mettre en évidence les phénomènes paramétriques et les principales caractéristiques de la réponse dynamique de la boîte d'inversion lorsqu'elle est soumise à une excitation interne périodique. Pour cela, nous calculons sa réponse vibratoire aux fluctuations de l'erreur statique de transmission et de la raideur d'engrènement que nous avons calculées dans la première partie du chapitre, pour un couple moteur de 650 Nm. Pour un régime moteur variant entre 0 et 3000 tours/min, la fréquence d'engrènement varie entre 0 et 2450 Hz. Pour chaque mode de la boîte d'inversion, nous introduisons un taux d'amortissement visqueux équivalent égal à 3 %.

Pour évaluer les différents termes des matrices de raideur des roulements, nous avons utilisé la méthode proposée par Lim et Singh (1991). Cette méthode consiste à résoudre un système d'équations non linéaires qui relie le chargement statique s'appliquant sur un roulement aux déplacements relatifs de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure. Nous avons introduit une précharge axiale sur chaque roulement. Celle-ci peut être obtenue en introduisant un décalage axial des bagues à l'aide d'entretoises ou par serrage d'un écrou. La charge statique due à l'application du couple moteur induit une (faible) dissymétrie entre les roulements d'un même arbre. Par contre, la précharge appliquée est suffisante pour que les raideurs radiales et les raideurs angulaires d'un même roulement soient symétriques. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau VI.1. Les raideurs sont exprimées en N/m, (k_{xx} , k_{yy} et k_{zz}) en Nm/rad ($k_{\theta_x\theta_x}$ et $k_{\theta_y\theta_y}$) ou en N/rad ($k_{x\theta_y}$ et $k_{y\theta_x}$).

		x	y	z	θ_x	θ_y		x	y	z	θ_x	θ_y	
$[K]=$	x	1.01 10 ⁹	0	0	0	±9.8 10 ⁶	ou	0.96 10 ⁹	0	0	0	±8.8 10 ⁶	
	y	0	1.01 10 ⁹	0	±9.8 10 ⁶	0		0	0.96 10 ⁹	0	±8.8 10 ⁶	0	0
	z	0	0	2.13 10 ⁸	0	0		0	0	1.79 10 ⁸	0	0	0
	θ_x	0	±9.8 10 ⁶	0	0.96 10 ⁵	0		0	±8.8 10 ⁶	0	0.81 10 ⁵	0	0
	θ_y	±9.8 10 ⁶	0	0	0	0.96 10 ⁵		±8.8 10 ⁶	0	0	0	0.81 10 ⁵	0
			Roulements chargés axialement (A et D)						Roulements déchargés axialement (B et C)				

Tableau VI.1. Matrices de raideur des roulements.



VI.2 Surcharge dynamique de denture

Compte-tenu de la modification des raideurs des roulements, les modes propres et plus particulièrement les modes de denture de la boîte ont évolué par rapport à ceux présentés dans la première partie du chapitre.

Fréquence	Taux d'énergie
Mode 7 : 980 Hz	6 %
Mode 9 : 1070 Hz	3 %
Mode 17 : 1490 Hz	6 %
Mode 21 : 1690 Hz	2 %
Mode 26 : 1790 Hz	3 %
Mode 47 : 3020 Hz	5 %
Mode 48 : 3090 Hz	9 %
Mode 50 : 3180 Hz	12 %
Mode 63 : 3900 Hz	28 %
Mode 64 : 3980 Hz	6 %

Tableau VI.2. Modes de denture de la boîte d'inversion.

L'évolution de la surcharge dynamique de denture en fonction de la fréquence d'engrènement (figure VI.1) est marquée par la présence de pics d'amplification à 980 Hz, 1500 Hz et 1950 Hz (=3900/2) qui correspondent à l'excitation en résonance des modes de denture par l'une ou l'autre des composantes harmoniques de l'erreur statique de transmission sous charge. La valeur maximale de la surcharge dynamique de denture entre 0 et 3000 tours/min est égale à 450 N, c'est à dire 6 % de la charge statique induite par le couple moteur de 650 Nm (8000 N). La comparaison de cette évolution avec celle correspondant à

une excitation purement harmonique montre que la contribution des différents harmoniques de la fréquence d'engrènement n'est pas négligeable. Le fait de ne retenir que la raie fondamentale de l'erreur statique de transmission sous charge pour calculer la réponse vibratoire de la boîte d'inversion peut conduire, pour certains régimes de fonctionnement, à des erreurs très importantes.

La figure VI.3 présente les spectres d'amplitude et les évolutions temporelles de la surcharge dynamique de denture pour différents régimes de fonctionnement (500 tours/min, 1200 tours/min, 1800 tours/min et 3000 tours/min) correspondant à des fréquences d'engrènement égales à 410 Hz (1), 980 Hz (2), 1470 Hz (3), et 2450 Hz (4). L'analyse de ces spectres montre que le contenu fréquentiel de la surcharge dynamique de denture est étroitement lié à celui de l'erreur statique de transmission sous charge. En particulier, ces spectres sont constitués de raies à la fréquence d'engrènement et à ses harmoniques. Nous avons constaté que le transfert entre l'erreur statique de transmission sous charge et la surcharge dynamique de denture était très peu affecté par la fluctuation de la raideur d'engrènement car l'amplitude de celle-ci est relativement faible par rapport à sa valeur moyenne.

Le pic à 980 Hz correspond à l'excitation simultanée du 7^{ème} mode (980 Hz) par le fondamental de la fréquence d'engrènement et du mode de denture principal (3900 Hz) par son troisième harmonique. Le pic à 1500 Hz correspond à l'excitation simultanée du 17^{ème} mode (1490 Hz) par le fondamental de la fréquence d'engrènement et du 47^{ème} mode (3020 Hz) par son premier harmonique. Enfin, le pic à 1950 Hz correspond à l'excitation du mode de denture principal par le premier harmonique de la fréquence d'engrènement.

En dehors des pics d'amplification, la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture augmente avec la vitesse moyenne de rotation. Son spectre est dominé le plus souvent par le fondamental et le premier harmonique de la fréquence d'engrènement qui constituent les raies les plus importantes du spectre de l'erreur statique de transmission sous charge.

Le calcul des évolutions temporelles de la surcharge dynamique de denture permet d'estimer la valeur crête de celle-ci, valeur qui fournit la surcharge maximale qui s'exerce sur la denture. Pour les vitesses de fonctionnement présentées, celle-ci atteint 550 N à 1800 tours/min. Pour l'ensemble des régimes de fonctionnement compris entre 0 et 3000 tours/min, la surcharge maximale est égale à 750 N à 2400 tours/min, soit 9 % de la charge statique. (Les évolutions temporelles sont présentées sur une période égale à quatre fois la période d'engrènement).

VI.3 Erreur dynamique de transmission

L'évolution de l'erreur dynamique de transmission en fonction de la fréquence d'engrènement (figure VI.2) est marquée par la présence de pics d'amplification à 980 Hz, 1500 Hz et 1950 Hz. Rappelons que cette erreur correspond à l'écart entre la position réelle de la roue menée par rapport à sa position théorique. Il est également possible d'exprimer cette erreur en terme de vitesse ou d'accélération. La valeur maximale de la valeur efficace de l'erreur dynamique de transmission entre 0 et 3000 tours/min (37 mm/s) représente 0.8 % de la vitesse d'entraînement de l'engrenage (4835 mm/s) exprimée sur le plan d'action. En dehors des résonances, l'erreur dynamique de transmission augmente avec la vitesse moyenne de rotation.

Bien qu'elle présente elle aussi des pics d'amplification associés à l'excitation en résonance des modes de denture, l'évolution de l'erreur dynamique de transmission est différente de celle de la surcharge dynamique de denture, qu'elle soit exprimée en terme de vitesse ou bien d'accélération. Ces résultats sont confirmés par la figure VI.4 qui présente les spectres d'amplitude et les évolutions temporelles de l'erreur dynamique de transmission, exprimée en vitesse, pour des régimes de 1200 tours/min et 1800 tours/min. Alors que les spectres de la surcharge dynamique sont dominés, pour ces régimes de fonctionnement, par le fondamental de la fréquence d'engrènement, ceux de l'erreur dynamique de transmission sont dominés par le troisième harmonique (1200 tours/min) et le premier harmonique (1800 tours/min) de cette fréquence. Ces différences sont encore plus significatives si l'on s'intéresse aux spectres de l'erreur dynamique de transmission exprimée en accélération. La comparaison des évolutions temporelles de la surcharge dynamique de denture et de l'erreur dynamique de transmission montre par ailleurs que leur signature est différente et que leur amplitude crête n'est pas proportionnelle.

Bien que cette démarche soit couramment adoptée, il semble difficile d'établir un parallèle entre l'évolution de l'erreur dynamique de transmission et celle des nuisances vibroacoustiques associées au fonctionnement d'une transmission par engrenages. En effet, il n'existe pas de lien direct entre cette erreur et les efforts dynamiques internes qui excitent le carter de la transmission, même si ces grandeurs constituent deux réponses à la même erreur statique de transmission sous charge. Toutefois, contrairement à la surcharge dynamique de denture, l'erreur dynamique de transmission, ou tout du moins sa trace exprimée sous forme d'écart angulaire entre l'arbre moteur et l'arbre de sortie, peut être mesurée à l'aide de codeurs optiques ou d'accéléromètres montés sur les lignes d'arbres. Elle constitue donc la seule valeur accessible expérimentalement qui est représentative de la réponse dynamique de l'engrenage et qui permet de détecter les vitesses "critiques" de rotation d'une transmission par engrenages.

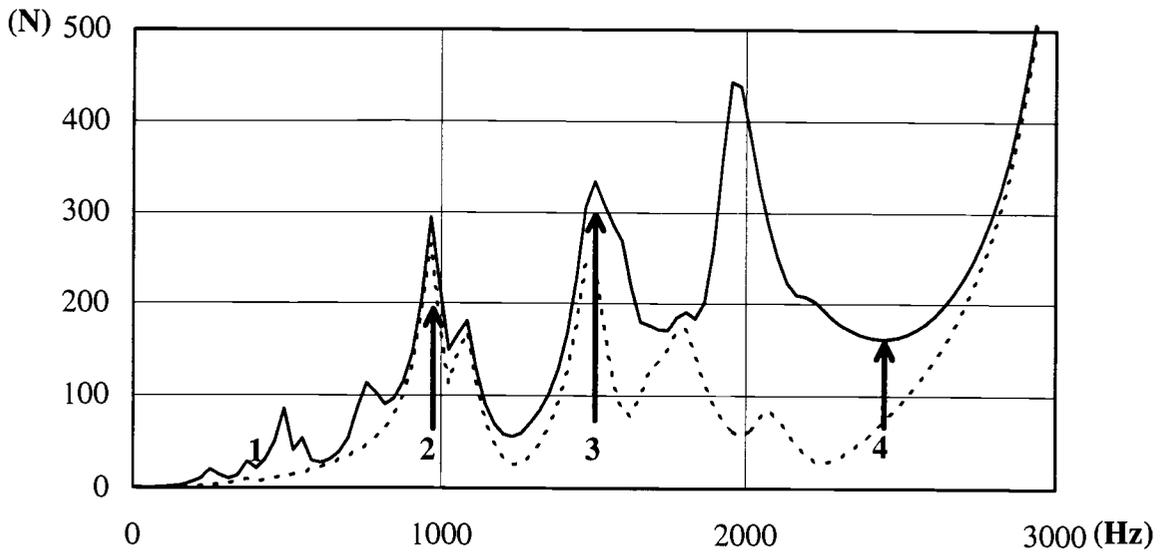


Figure VI.1. Evolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture avec la fréquence d'engrènement. Excitation périodique (—) et harmonique (-----).

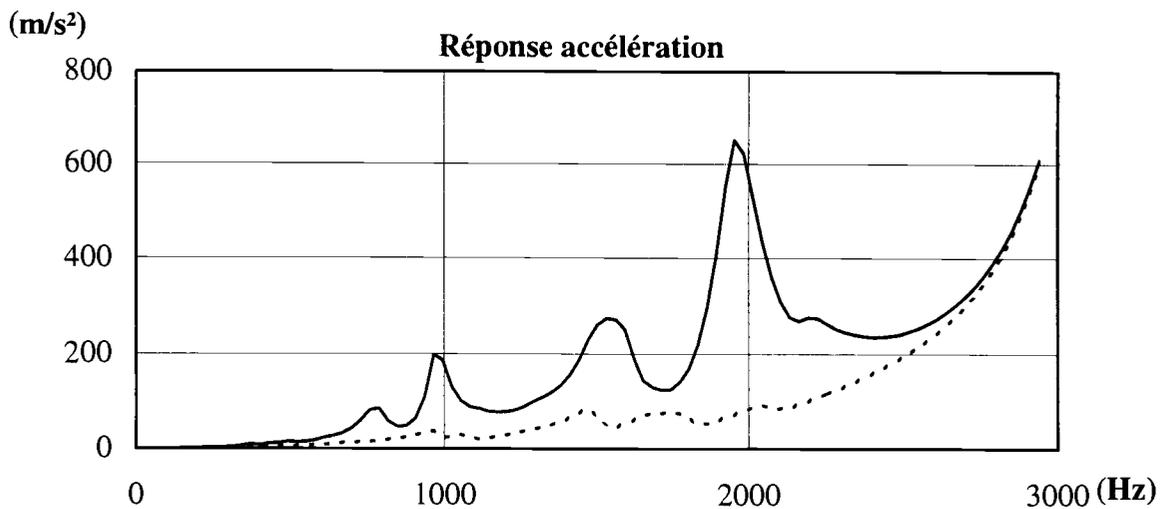
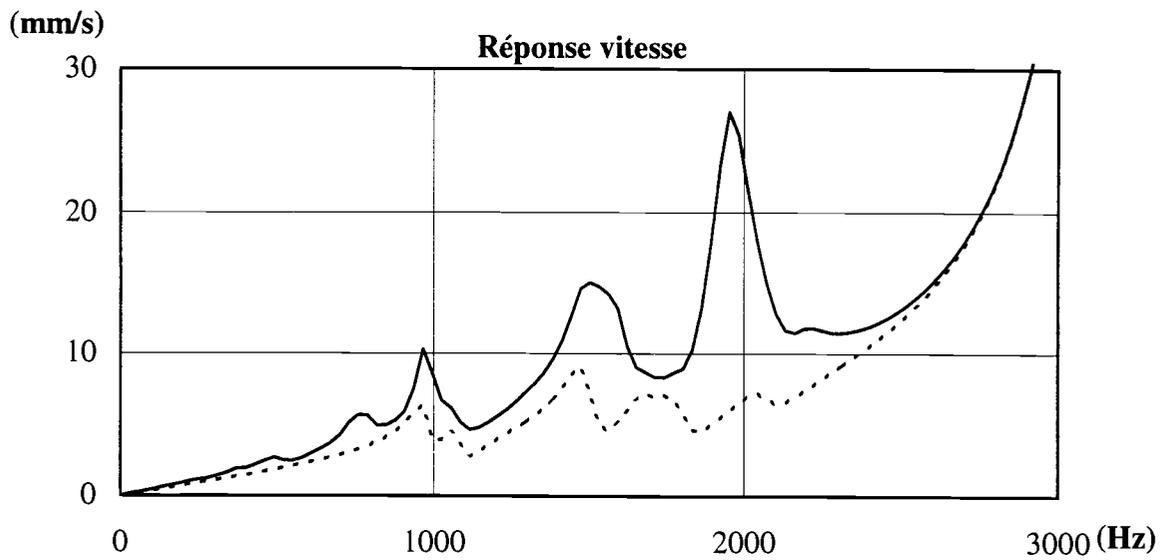
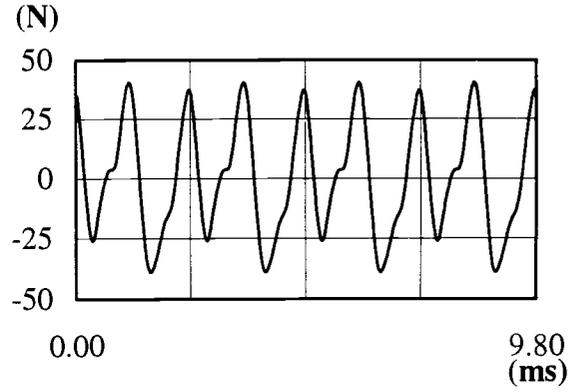
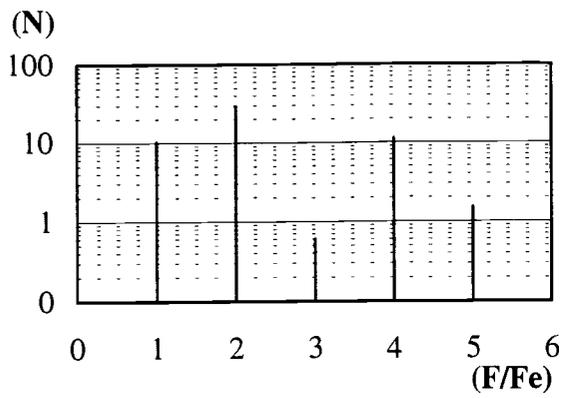
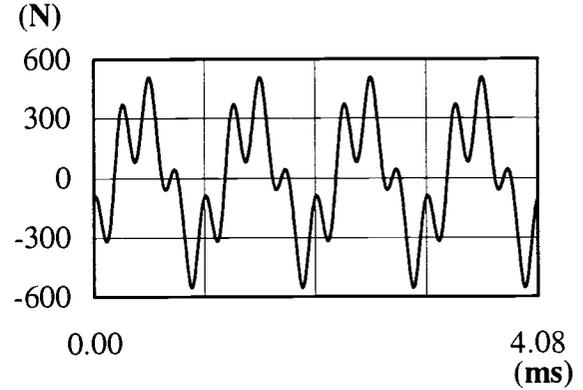
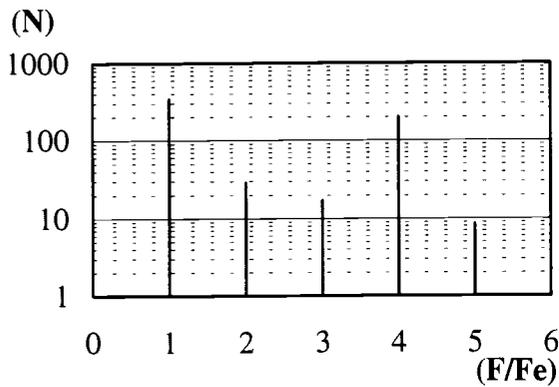


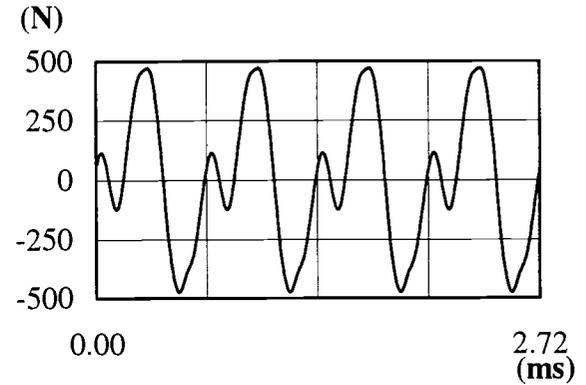
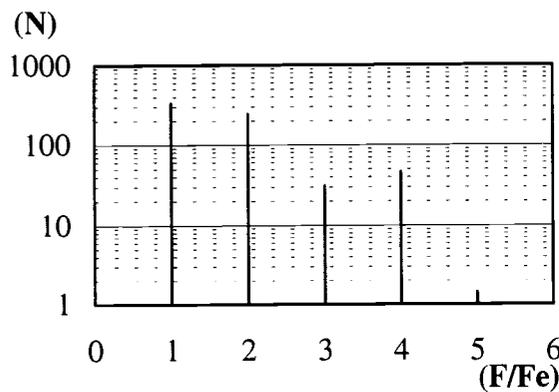
Figure VI.2. Evolution de la valeur efficace de l'erreur dynamique de transmission avec la fréquence d'engrènement. Excitation périodique(—) et harmonique (-----).



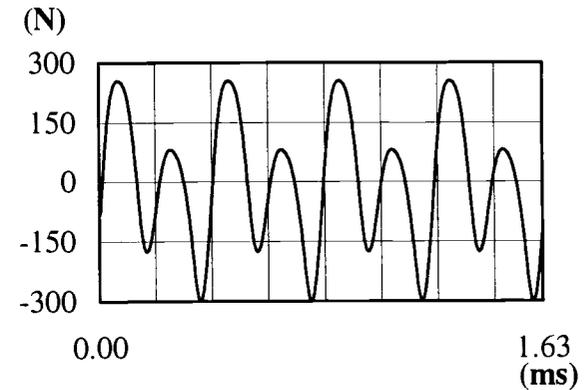
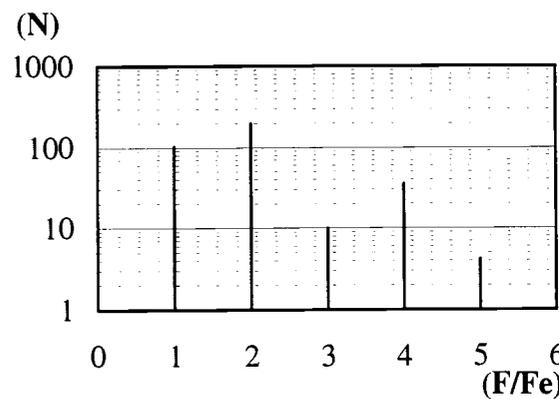
500 tours/min ($F_e=410$ Hz)



1200 tours/min ($F_e=980$ Hz)

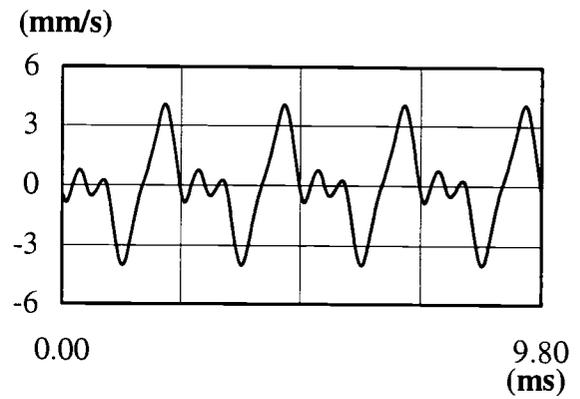
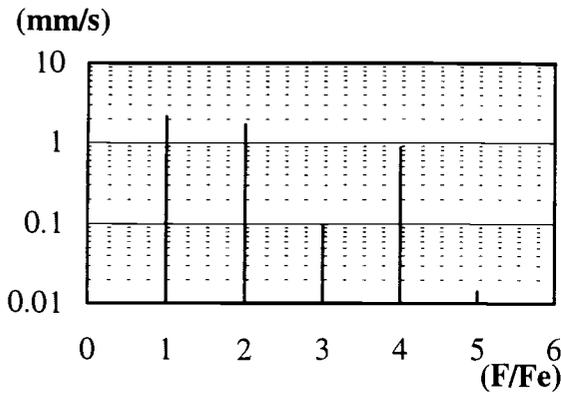


1800 tours/min ($F_e=1470$ Hz)

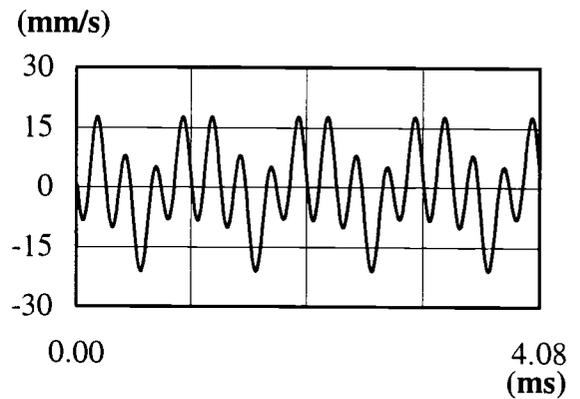
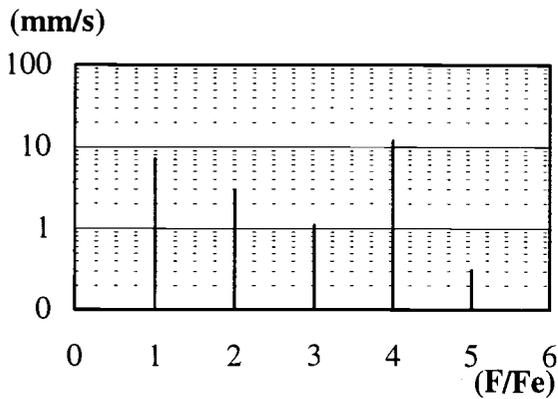


3000 tours/min ($F_e=2450$ Hz)

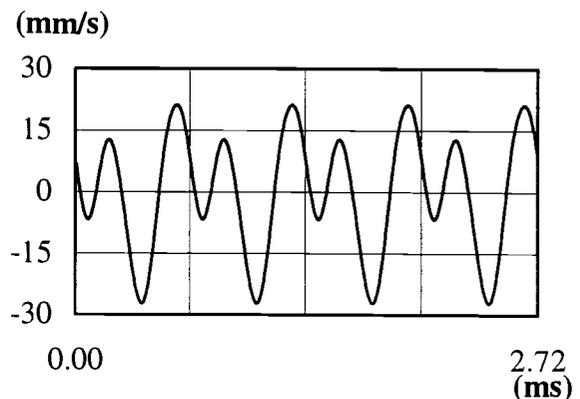
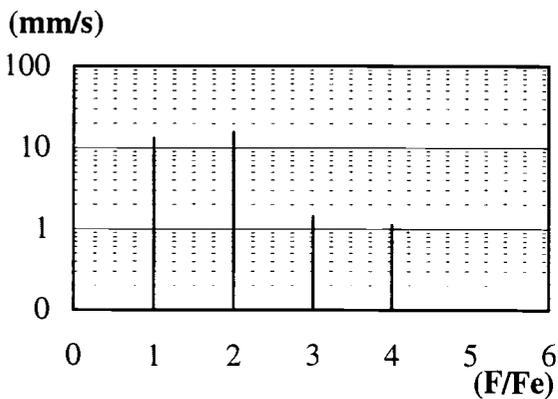
Figure VI.3. Spectre d'amplitude et évolution temporelle de la surcharge dynamique de denture.



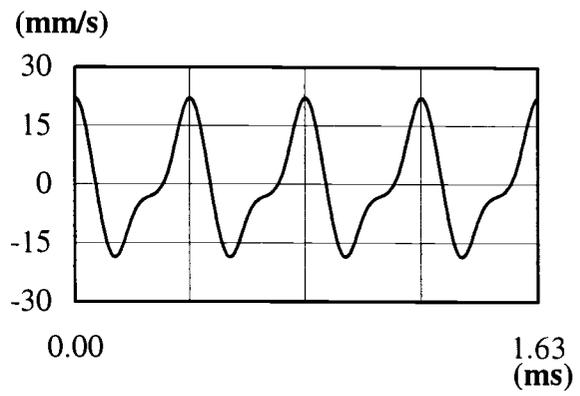
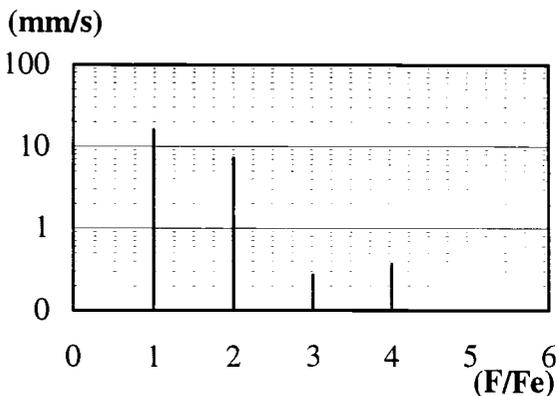
500 tours/min ($F_e=410$ Hz)



1200 tours/min ($F_e=980$ Hz)



1800 tours/min ($F_e=1470$ Hz)

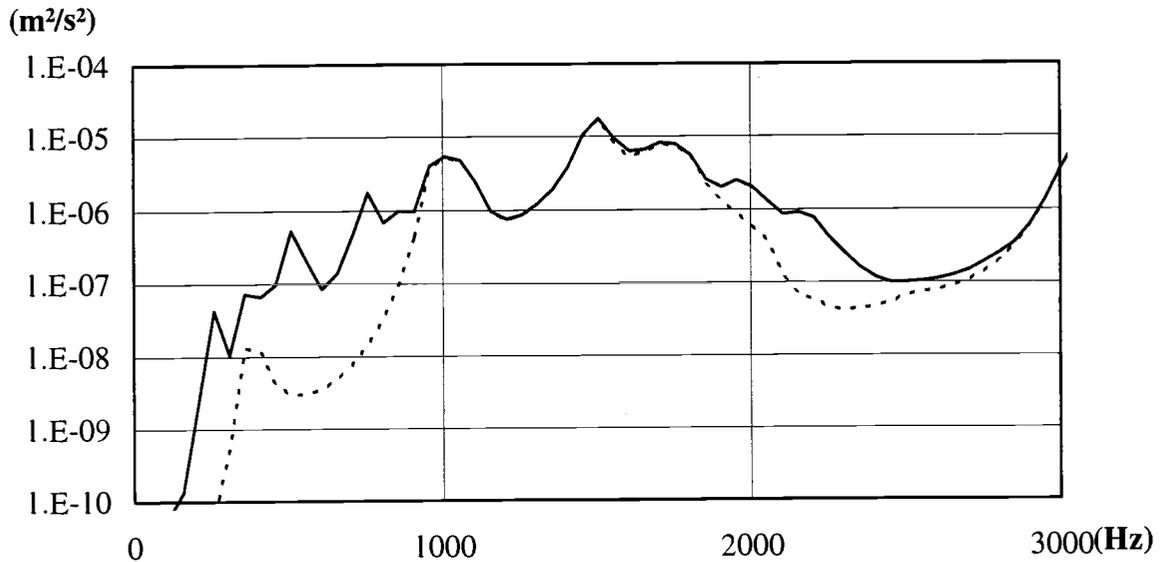


3000 tours/min ($F_e=2450$ Hz)

Figure VI.4. Spectre d'amplitude et évolution temporelle de l'erreur dynamique de transmission (exprimée en vitesse).

VI.4 Moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter

La figure IV.5 montre l'évolution de la valeur efficace de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique du carter. Les pics d'amplification correspondent à l'excitation en résonance de modes de denture et de roulement. Entre 1000 et 1900 Hz, la réponse est dominée par le fondamental associé à la fréquence d'engrènement. Pour les autres fréquences d'excitation, la contribution des autres harmoniques peut être prépondérante.



*Figure VI.5. Evolution de la valeur efficace de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter avec la fréquence d'engrènement.
Excitation périodique(——) et harmonique (-----).*

VI.5 Introduction d'un défaut d'excentricité

5.1 Introduction

Nous avons vu (figure II.2 du chapitre 1) que les écarts de géométrie de l'engrenage induits par la fabrication et le montage des roues dentées ou par les déformations des différentes composantes de la transmission génèrent des excitations principalement à la fréquence de rotation des arbres (excentricité, erreurs de division) et à la fréquence d'engrènement (erreurs de parallélisme, distorsion, erreurs de profil...).

En ce qui concerne les défauts associés à la fréquence d'engrènement, il est possible d'étudier leurs effets à travers l'analyse des fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement. La réponse vibratoire de la transmission induite par ces défauts sera marquée par des raies à la fréquence d'engrènement et ses harmoniques.

Il faut noter que, si les défauts induisent une fluctuation importante de la raideur d'engrènement, chaque raie du spectre de l'erreur statique de transmission peut générer une réponse périodique marquée par tous les harmoniques de la fréquence d'engrènement (Perret-Liaudet 1992).

Le but de ce paragraphe est d'analyser les effets de défauts à la fréquence de rotation des lignes d'arbres sur la réponse vibratoire d'une transmission par engrenages. Nous choisissons d'introduire un défaut d'excentricité sur la roue menante d'amplitude égale à 25 μm (défaut correspondant à un faux-rond de denture de 50 μm). Nous découplons le calcul de l'excitation induite par ce défaut et celui de l'erreur statique de transmission sous charge et introduisons dans l'équation de mouvement un terme F_{eq} au second membre tel que :

$$F_{eq} = k_m \cdot e \cdot \sin(\omega t)$$

où k_m est la valeur moyenne de la raideur d'engrènement,

e est l'amplitude de l'excentricité,

ω est la fréquence de rotation de l'arbre.

5.2 Résultats

Comme le montrent les figures IV.6 et IV.7, la prise en compte d'un défaut d'excentricité conduit à une augmentation significative de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture et de l'erreur dynamique de transmission. Leur évolution présente de nouveaux pics d'amplification, notamment pour une fréquence d'engrènement comprise entre 500 et 800 Hz ou égale à 1310 Hz.

L'amplitude des raies à la fréquence d'engrènement et ses harmoniques n'a pas changé. L'analyse des spectres d'amplitude montre que l'augmentation de la surcharge dynamique et

de l'erreur dynamique de transmission est liée à l'apparition d'une raie à la fréquence de rotation des roues et de raies latérales autour de la fréquence d'engrènement et de ses harmoniques. L'amplitude de ces raies peut être, pour certains régimes de fonctionnement supérieure à celles des raies associées à la fréquence d'engrènement et ses harmoniques.

Les nouveaux pics d'amplification sont induits par les phénomènes paramétriques induits par la fluctuation de la raideur d'engrènement. Ainsi, pour une vitesse de rotation de 1600 tours/min ($F_e=1310$ Hz), la fréquence du mode de denture principal (3900 Hz) coïncide avec celle du deuxième harmonique de la fréquence d'engrènement. La surcharge dynamique de denture sans excentricité ne présente pas d'amplification pour cette vitesse car la raie du spectre de l'erreur statique de transmission sous charge associée au deuxième harmonique de la fréquence d'engrènement est très faible (voir figure II.6). Par contre, en présence d'un défaut d'excentricité, la figure IV.9 montre que le couplage entre l'excitation à basse fréquence et le deuxième harmonique du spectre de la raideur d'engrènement donne naissance à des raies latérales de grandes amplitudes qui dominent le spectre de la surcharge dynamique de denture.

Comme le montre la figure IV.8, l'augmentation de la surcharge dynamique de denture conduit à une augmentation significative de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter, notamment entre 500 et 1000 tours/min.

Les évolutions temporelles de la réponse vibratoire de la boîte d'inversion sont marquées par des phénomènes de battement (ces évolutions sont présentées sur une période égale à deux fois la période de rotation des arbres). Ces modulations d'amplitude sont induites par les raies latérales. Elles sont à l'origine de phénomènes de "ronnement" qui modifient sensiblement la qualité du bruit rayonné et sont particulièrement gênantes pour l'utilisateur. Les valeurs crêtes de la surcharge dynamique de denture sont très supérieures à ses valeurs efficaces. La surcharge dynamique maximale que nous avons calculée est égale à 1400 N pour une vitesse de rotation de 2400 tours/min (17 % de la charge statique).

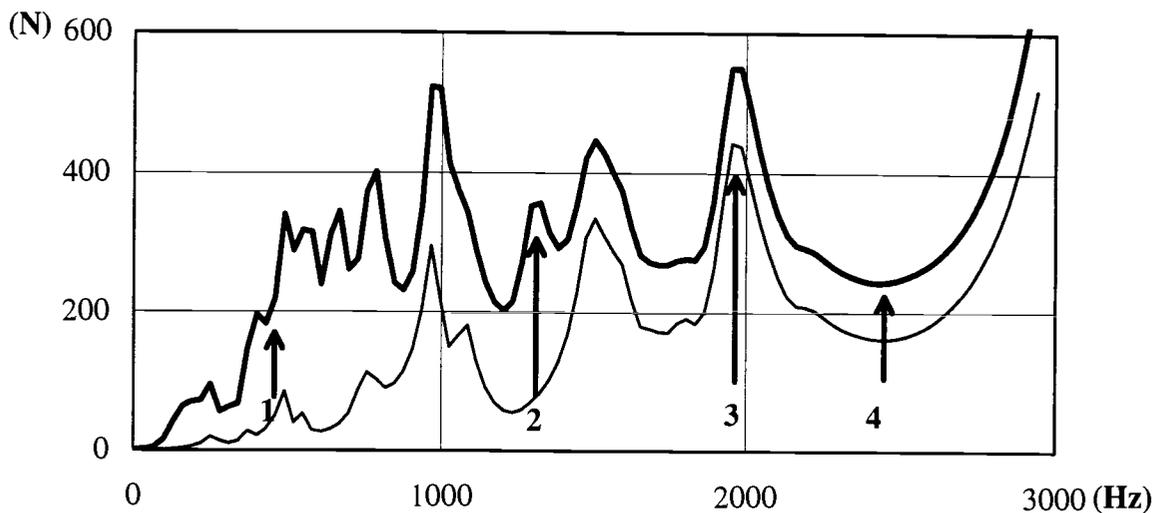


Figure VI.6. Evolution de la valeur efficace de la surcharge dynamique de denture avec la fréquence d'engrènement. Sans excentricité (trait fin) avec excentricité (trait gras).

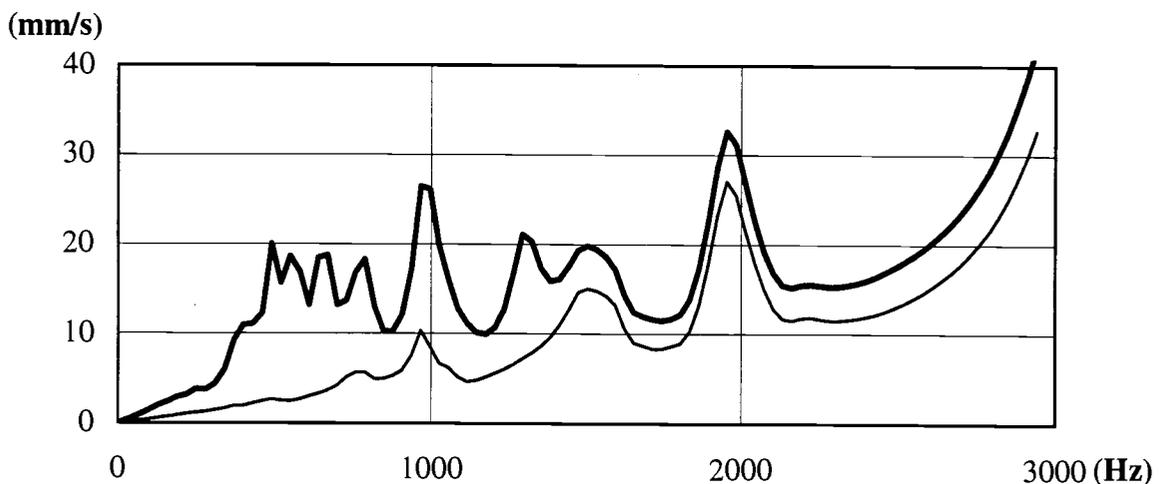


Figure VI.7. Evolution de la valeur efficace de l'erreur dynamique de transmission (exprimée en vitesse) avec la fréquence d'engrènement. Sans excentricité (trait fin) avec excentricité (trait gras).

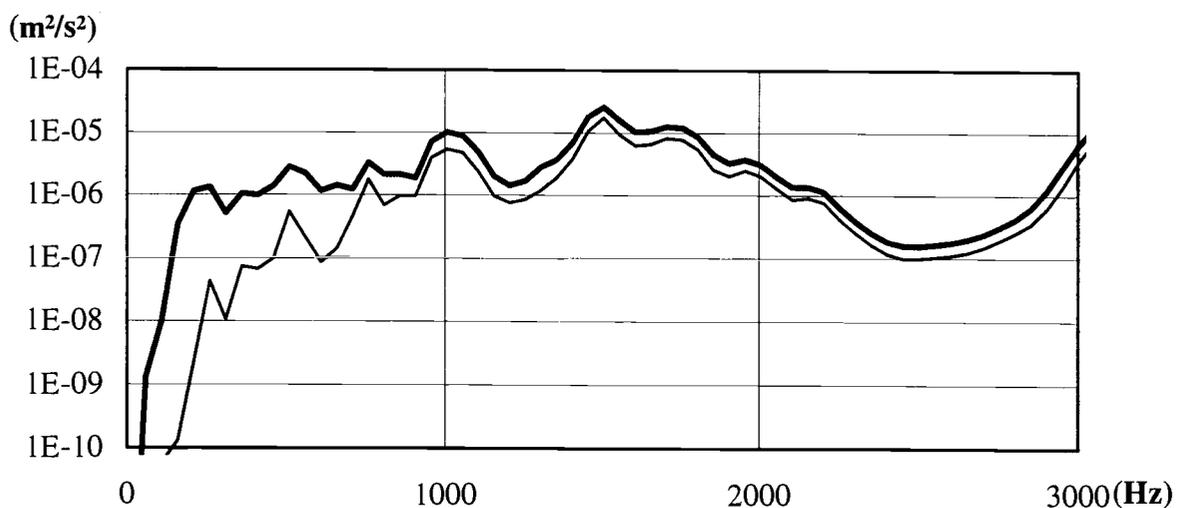
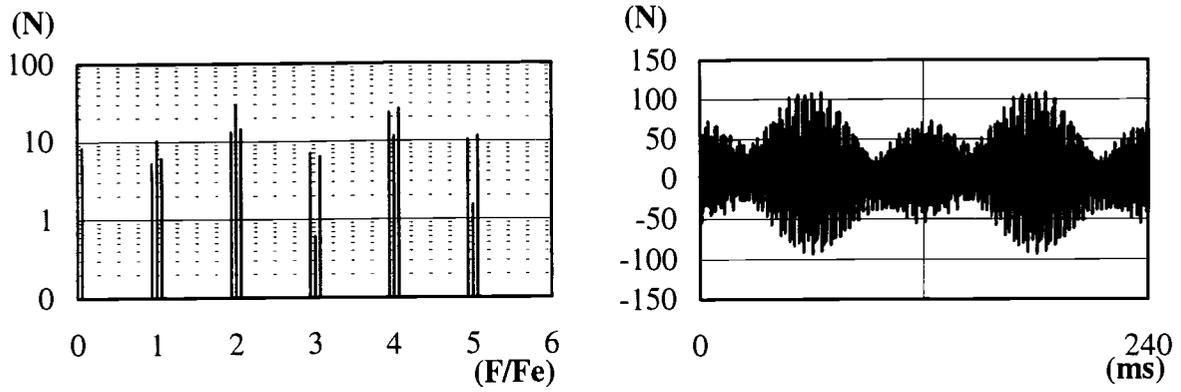
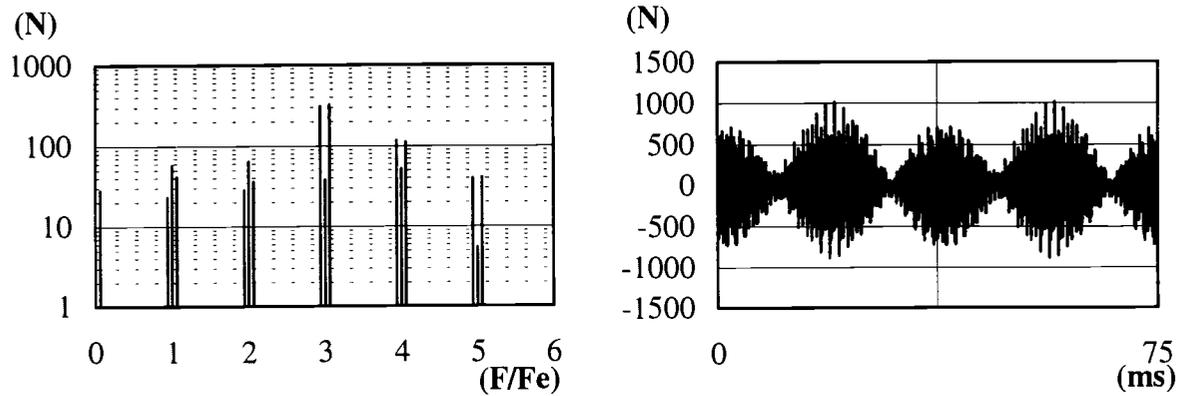


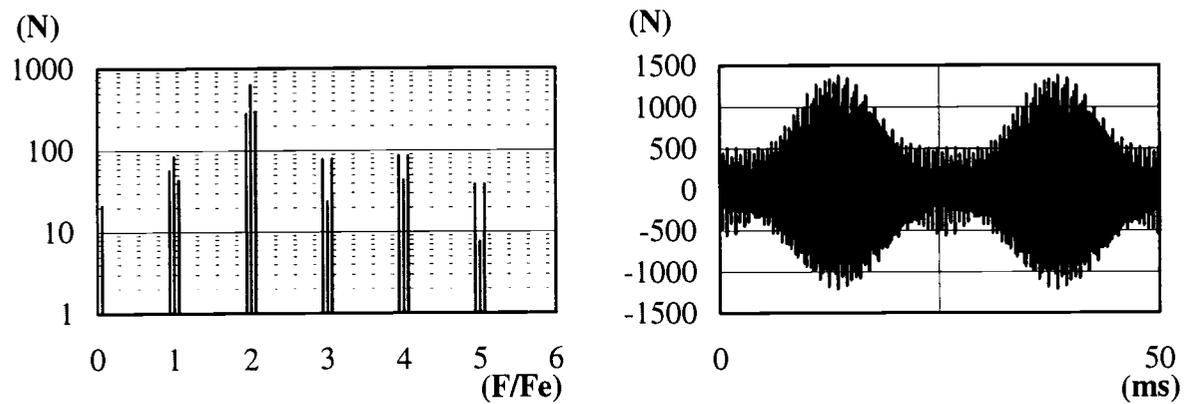
Figure VI.8. Evolution de la valeur efficace de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter avec la fréquence d'engrènement. Sans excentricité (trait fin) et avec excentricité (trait gras).



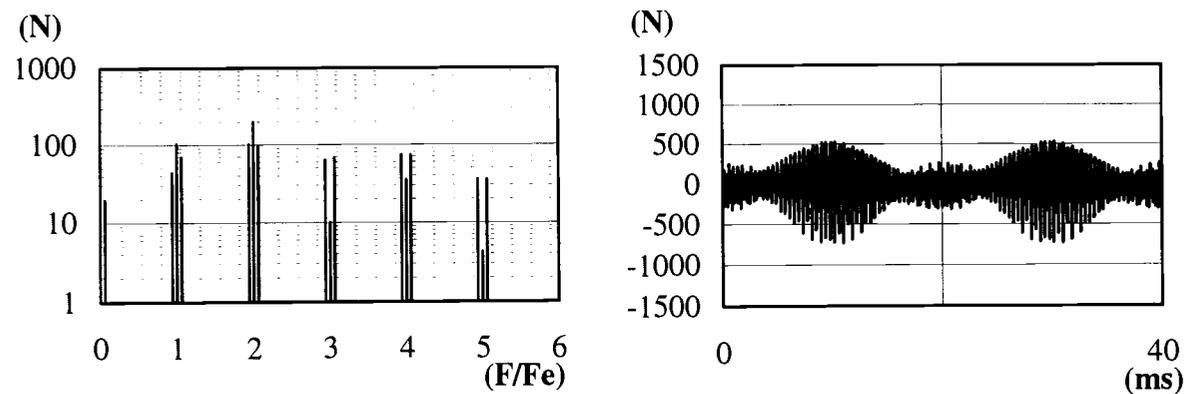
500 tours/min ($F_c=410$ Hz)



1600 tours/min ($F_c=1307$ Hz)



2400 tours/min ($F_c=1960$ Hz)



3000 tours/min ($F_c=2450$ Hz)

Figure VI.9. Spectre d'amplitude et évolution temporelle de la surcharge dynamique de denture.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif de ce travail était d'analyser le comportement dynamique des transmissions par engrenages et plus particulièrement les interactions entre la denture, les lignes d'arbres, les roulements et le carter.

Nous avons tout d'abord développé un outil numérique pour calculer l'excitation interne d'une transmission par engrenages générée par le processus d'engrènement. Nous avons exploité la théorie de Hertz pour estimer les déformations locales associées à la présence de contacts étroits. Nous avons adopté une approche éléments finis en trois dimensions pour estimer les déformations en flexion des dents, les déformations des corps de roue et les interactions entre les différents couples de dents en prise. Nous avons calculé les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement en résolvant le système d'équations non linéaires qui gère le contact entre les roues dentées, pour plusieurs positions successives de la roue menante. La mise en oeuvre de l'outil numérique que nous avons développé nous a permis de rechercher quelles sont les corrections de denture qui permettent de minimiser les fluctuations de l'erreur statique de transmission sous charge.

Nous avons ensuite présenté une méthode de calcul de la réponse vibratoire des transmissions à l'excitation générée par le processus d'engrènement. Nous avons adopté une approche globale basée sur une discrétisation par la méthode des éléments finis de l'ensemble des composantes de la transmission (engrenage, lignes d'arbres, roulements et carter). Nous avons décrit son comportement dynamique par un système d'équations linéaires à coefficients variables. La résolution des équations de mouvement par une méthode spectrale et itérative nous a permis de calculer la réponse vibratoire de la transmission en régime stationnaire et, plus particulièrement, la surcharge dynamique de denture et la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter. Ce dernier paramètre est un indicateur de la puissance acoustique rayonnée par la boîte d'inversion, même si certains modes, et notamment des modes locaux de plaque, peuvent être caractérisés par une plus grande efficacité de rayonnement acoustique que d'autres.

Nous avons choisi de nous intéresser au comportement vibratoire d'une boîte d'inversion présentant toutes les caractéristiques essentielles des transmissions existantes. Nous n'avons conservé dans un premier temps que les composantes de l'excitation associées à la fréquence d'engrènement, afin de ne faire émerger que les résonances principales du système. Les conclusions qui se dégagent des simulations numériques que nous avons effectuées sont les suivantes.

1) Parmi l'ensemble des modes propres d'une transmission par engrenages, certains présentent une énergie de déformation importante localisée au niveau de la raideur d'engrènement et/ou des roulements. Nous les avons appelés modes de denture et modes de roulement.

L'excitation par l'erreur statique de transmission sous charge des modes de denture est à l'origine d'amplifications de la surcharge dynamique de denture (vitesses "critiques" de rotation). L'amplitude de la surcharge dynamique de denture est directement proportionnelle au taux d'énergie associée à la raideur d'engrènement. Elle dépend aussi de l'amortissement dont les sources et les niveaux sont mal connus.

La flexion des lignes d'arbres, la déformation des accouplements flexibles, les raideurs des roulements et les propriétés élastiques du carter ont une influence sensible sur les vitesses "critiques" de rotation. Seule une analyse globale qui intègre l'ensemble des composantes de la boîte d'inversion peut donc permettre de prédire correctement ces vitesses "critiques".

2) Les amplifications de la surcharge dynamique de denture engendrent des amplifications des efforts et des moments dynamiques transmis au carter par les roulements si et seulement si les modes de denture sont aussi des modes de roulement.

3) Pour la boîte d'inversion étudiée, les pics d'amplification de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter sont induits par des amplifications des efforts radiaux et des moments dynamiques transmis au carter par les roulements. Ils correspondent le plus souvent à l'excitation en résonance de modes qui sont à la fois mode de denture et mode de roulements. Néanmoins, la fonction de transfert entre la réponse dynamique de l'engrenage et celle du carter est complexe et dépend fortement de la fréquence d'excitation. Ni la surcharge dynamique de denture, ni l'erreur dynamique de transmission ne peuvent être considérées comme suffisamment représentatives du comportement vibroacoustique d'une transmission par engrenages.

4) Les roulements jouent un rôle essentiel dans les mécanismes de transfert entre la surcharge dynamique de denture et la réponse vibratoire du carter. Leurs raideurs conditionnent fortement la nature (efforts axiaux, efforts radiaux ou moments) et le niveau des efforts transmis au carter par les roulements. La prédiction correcte du comportement dynamique d'une transmission par engrenages nécessite donc une estimation précise de ces raideurs, y compris des termes de couplage entre les déplacements radiaux et angulaires de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure.

La diminution de la précharge des roulements à rouleaux coniques ou l'utilisation de roulements à billes à contact oblique devraient permettre, en diminuant les raideurs radiales et angulaires des roulements, d'atténuer la réponse vibratoire du carter. Ces modifications doivent rester compatibles avec les contraintes imposées par le fonctionnement de la transmission.

5) Seul un calcul couplé des réponses vibratoires des lignes d'arbres et du carter conduit à une analyse correcte des conséquences d'une modification de l'architecture de la boîte d'inversion. Cette modification peut permettre de diminuer sensiblement la réponse vibratoire du carter tout en conservant sa masse constante.

La comparaison entre la configuration initiale de la boîte d'inversion encastrée sur sa base et la configuration modifiée (introduction d'une nervure dans le plan des roulements et raideurs angulaires des roulements plus faibles) montre qu'on peut atténuer de manière efficace la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter sans que le niveau maximum de la surcharge dynamique de denture ait changé.

Enfin, nous avons calculé la réponse dynamique de la boîte d'inversion en prenant en compte l'ensemble des composantes harmoniques de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement. La réponse vibratoire de la boîte d'inversion est gouvernée par des composantes à la fréquence d'engrènement et à ses principaux harmoniques. Pour certains régimes de fonctionnement, l'amplitude de ces dernières domine le spectre de la surcharge dynamique de denture, de l'erreur dynamique de transmission et de la réponse du carter.

Par ailleurs, en présence de défauts d'excentricité, les phénomènes paramétriques induits par la fluctuation de la raideur d'engrènement sont à l'origine de l'émergence de raies latérales autour de la fréquence d'engrènement et ses harmoniques qui conduisent à une augmentation sensible de la réponse vibratoire de la boîte d'inversion. L'évolution temporelle de celle-ci est alors marquée par des phénomènes de battement qui modifient sensiblement la qualité du bruit rayonné et sont particulièrement gênants pour l'utilisateur.

La réponse vibratoire des transmissions par engrenages fonctionnant à des vitesses élevées est marquée, si la roue menante possède un grand nombre de dents, par des raies dont la fréquence est relativement élevée (plusieurs kHz). Les résultats associés à ces fréquences présentent une certaine imprécision car, même si l'ensemble des études paramétriques et des phénomènes physiques mis en évidence reste valable, la base modale est mal définie dans le domaine autre que celui des basses fréquences. Ceci est d'autant plus vrai que nous avons représenté un certain nombre de composantes de la transmission par des éléments rigides (roues dentées et bagues de roulements).

La recherche d'une puissance massique toujours plus grande conduit à alléger les voiles des roues dentées les plus grandes. Il conviendrait donc d'analyser le comportement d'engrenages en intégrant les déformations dynamiques des corps de roue.

De même, la représentation d'un roulement par une matrice de raideur associant un noeud de l'arbre et un noeud du carter suppose que les bagues intérieure et extérieure soient rigides. Vu le rôle essentiel que jouent les roulements, il conviendrait de rechercher, notamment pour

les roulements de grande taille, des modélisations plus fines qui permettent de prendre en compte le comportement de chaque élément roulant et d'intégrer éventuellement les déformations élastiques des bagues.

Enfin, on peut souligner que, dans le cadre de recherches contractuelles effectuées pour différents partenaires industriels, des campagnes expérimentales ont permis de valider, pour des transmissions de tailles et d'architectures diverses, l'existence et la localisation de vitesses critiques de rotation que nous avons prédites à partir de notre approche (modélisation globale). De plus, dans le cadre des activités du club national TRANSSIL (Transmissions Silencieuses), nous avons conçu, en collaboration avec d'autres partenaires, un banc d'essai d'une transmission simple étage à denture hélicoïdale. Des investigations en cours au CETIM (Senlis) doivent permettre de confronter nos prédictions avec des résultats expérimentaux et de valider les outils de calcul du comportement dynamique des transmissions par engrenages.

BIBLIOGRAPHIE

- ATTIA A.Y., 1964, "Deflection of Spur Gear Teeth cut in Thin Rims". *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 86, (4), p. 333-342.
- BARD C., 1995, "Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages". Thèse de doctorat de L'INSA de Lyon N°95 ISAL 0031, 295 p.
- BARDAY D., 1996, "Contribution to the Study of Quiet Gears for Truck Gearboxes". *Proceedings of FISITA Congress, Prague*.
- BEZINE G., 1982, "Application de la méthode des équations intégrales à la résolution des problèmes statiques et dynamiques stationnaires ou transitoires de flexion". Thèse d'état de l'université de Poitiers, 170 p.
- BLANKENSHIP G., SINGH R., 1992, "A Comparative Study of Selected Gear Mesh Interface Dynamic Model". *Proceedings of the 6th International Conference on Power Transmission and Gearing, Phoenix*, Vol. 1, p. 137-146.
- BLANKENSHIP G., SINGH R., 1995, "Dynamic Force Transmissibility in Helical Gear Pairs". *Mechanical and Machine Theory*, Vol. 30 (3), p. 323-339.
- BLANKENSHIP G., KAHRAMAN A., 1995, "Steady-state Forced Response of a Mechanical Oscillator with Combined Parametric Excitation and Clearance Type Non-Linearity". *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 185 (5), p. 743-765.
- BOLOTIN V., 1964, "The Dynamic Stability of Elastic Systems". traduit du Russe, Holden-Day Inc., San-Fransisco, p. 145-277.
- BOUCHAREB A., 1988, "Erreur Dynamique de Transmission induite par les Réducteurs Mécaniques de Vitesse utilisés en Robotique". Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon, 123 p.
- BREBIA C. A., WALKER M. A., 1980, "Boundary Element Techniques in Engineering". New-York, Newnes-Butterworths, 210 p.
- BRIERE P., PREISS, L., SABOT J., 1989, "Engrenages à denture droite : erreur cinématique de transmission induite par un défaut d'excentricité". *Comptes Rendus Académie des Sciences de Paris*, Tome 308, Série 2, p. 1307-1311.
- BRIERE P., 1991, "Contribution à l'étude du comportement dynamique des réducteurs harmoniques". Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon, 203 p.
- CAI Y., 1995, "Simulation of the Rotational Vibration of Helical Gears in Consideration of the Tooth Separation Phenomenon (A New Stiffness Function of Helical Involute Tooth Pair)". *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 117 (3), p. 460-469.
- CHABERT G., DAN TRAN T., MATHIS R., 1974, "An Evaluation of Stresses and Deflections of Spur Gear Teeth under Strain". *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 96, p. 85-93.
- CORNELL R.W., 1981, "Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth". *Journal of Mechanical Design*, Vol. 103, p. 447-459.

- COY J.J., CHAO C., 1982, "A Method of Selecting Guide Size to account for Hertz Deformation in Finite Element Analysis of Spur Gears". *Journal of Mechanical Design*, Vol. 104, p. 759-766.
- DE MUL J., KALKER J., FREDRICKSON B., 1986, "The Contact between Arbitrarily Curved Bodies of Finite Dimensions". *Journal of Tribology*, Vol. 108, p. 140-148.
- DE MUL J., VREE J., MAAS D., 1989, "Equilibrium and Associated Load Distribution in Ball and Roller Bearings in Five Degrees of Freedom while Neglecting Friction". *Journal of Tribology*, Vol. 111, p. 142-155.
- DRAGO R., BROWN F., 1981, "The Analytical and Experimental Evaluation of Resonant Response in High Speed, Light Weight, Highly Loaded Gearing". *Journal of Mechanical Design*, Vol. 103, p. 346-356.
- DUCRET P., SABOT J., LUBOWICKI J.P., RIGAUD E., PERRET-LIAUDET J., 1995, "Noise of Geared Transmissions : A Simplified Numerical Tool for the Casing Design". 9th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Milan, p. 1167-1173.
- DUCRET P., 1997, "Prédiction du bruit rayonné par les carters des transmissions à engrenages". Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon N°9709, 150 p.
- DUCRET P., SABOT J., 1998, "Calcul du bruit rayonné par les carters des transmissions à engrenages : méthode et applications". *Acustica united with Acta Acustica*, Vol. 84, (1), p. 97-107.
- DUSSAC M., PLAY D., BARD C., REMOND D., 1996, "Design of Advanced Mechanical Systems- Realistic Gear Dynamic Modelisation". *VDI Berichte N°1230*, p. 115-127.
- ESCHAMM P., HASBARGEN L., WEIGAND K., 1985, "Ball and Roller Bearings. Theory, Design and Application". R. Oldenburg Verlag, John Wiley and Sons Inc.
- GAGNON P., GOSSELIN C., CARDOU A., CLOUTIER L., 1991, "Assessment of FEA Calculation of Spur Gear Tooth Deflection Using Electronic Speckle Pattern Interferometry". *Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima*, p. 236-241.
- GREGORY R.W. HARRIS S.L., MUNRO R.G., 1963, "Dynamic Behavior of Spur Gears". *Proc. of Institution of Mechanical Engineering*, Vol. 178 (8), p. 207-226.
- GUINGAND M., OCTRUE M., 1990, "Calcul de la rigidité de denture par différences finies". *Recueil de Conférences, 4ème Journées d'Etude sur les Transmissions Mécaniques, E.C.A.M., Lyon*, p. 109-110.
- HARRIS S. L., 1958, "Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears". *Proc. of Institution of Mechanical Engineering*, Vol. 172, p. 87-112.
- HOUJOH H., UMEZAWA K., 1981, "Aerodynamic Generation of Meshing Frequency Sound by Spur Gears". *Proceedings of the International Symposium on Gearing and Power Transmissions, Tokyo, C1*, 6 p.
- HOUJOH H., 1988, "The Sound of Gears Generated Aerodynamically". *Proc. of the 17th International Conference on Noise Control Engineering, Avignon*, p. 619-622.

- HOUJOH H., 1991, "An Investigation of Air Flow Induced by Tooth Meshing with Regard to an Aerodynamic Sound Generation". Proceedings of the JSME International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, p. 57-62.
- HOUSER D. R., 1988, "Gear Noise- State of the Art". Proceedings of the 17th International Conference on Noise Control Engineering, Avignon, p. 601-606.
- ICHIMARU K., HIRANO F., 1974, "Dynamic Behavior of Heavy-Loaded Spur Gears". ASME Journal of Engineering for Industry N°96, p. 373-381.
- IIDA H., TAMURA A., KIKUCH K., AGATA H., 1980, "Coupled Torsional-Flexural Vibration of a Shaft in a Geared-System of Rotors". Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers N°23, p. 2111-2117.
- INOUE K., TOWNSEND D., COY J., 1993, "Optimum Design of a Gearbox for Low Vibration". Journal of Mechanical Design, Vol. 115, p. 1002-1006.
- KAHRAMAN A., ÖZGÜVEN M., HOUSER D., ZAKRAJSEK J., 1989, "Dynamic Analysis of Geared Rotors by Finite Elements". Proceedings of the 5th International Conference on Gearing and Power Transmission, Vol. 1, p. 375-382.
- KAHRAMAN A., SINGH R., 1990, "Nonlinear Dynamics of a Spur Gear Pair". Journal of Sound and Vibration, Vol. 146 (1), p. 49-75.
- KAHRAMAN A., 1993, "Effect of Axial Vibrations on the Dynamics of a Helical Gear Pair". Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115, p. 33-39.
- KASSAI A., MATHIEU J.P. CHAHMIRIAN G., 1992, "Sirènement de denture : composantes non harmoniques de l'engrènement liées à la rectification par génération" 3ème Congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions, Paris, p. 853-864.
- KASUBA R., EVANS J., 1981, "An Extended Model for Determining Dynamic Loads in Spur Gearing". Journal of Mechanical Design, Vol. 103, p. 398-409.
- KATO M., INOUE K., SHIBATA K, ZHOU H., 1994, "Evaluation of Sound Power Radiated from Gearbox". Proceedings of International Gearing Conference, Newcastle, p. 69-74.
- KATO M., ZHOU H., INOUE K., SHIBATA K., YASUNAMI M., 1996, "Comments on Gearbox Housing Structure for Low Noise". VDI Berichte N°1230, p. 765-777.
- KOLHER H., 1959, "The Mechanism and Measurement of Dynamic Loading in Spur Gears". Ph. D. Thesis, University of Sheffield.
- KOLHER H.K., PRATT A., THOMPSON A.M., 1970, "Dynamic and Noise of Parallel Axis Gearing", Proc. of Institution of Mechanical Engineering, Vol. 184, p. 111-121.
- KOLHER H.K., REGAN R., 1985, "The Derivation of Gear Transmission Error from Pitch Error Records". Proc. of Institution of Mechanical Engineering, Part C : Mechanical Engineering Sciences, Vol. 199 (3), p. 195-201.
- KREMPEF P., SABOT J., 1993, "Identification of the Damping in an Hertzian Contact from Experimental Non-Linear resonance Curve". Proceeding of the IUTAM Symposium on Identification of Mechanical Systems, Wupertal.

- KREMPF P., 1994, "Vibrations non-linéaires d'un contact sphère-plan excité par une charge normale". Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon, 117 p.
- KUBO A., 1978, "Stress Condition, Vibrational Exciting Force and Contact Pattern of Helical Gears with Manufacturing and Alignment Errors". Journal of Mechanical Design Vol.°100, p. 77-84.
- KUBO A., KIYONO S., FUJINO S., 1986, "On Analysis and Prediction of Machine Vibration Caused by Gear Meshing". Bulletin of JSME, Vol. 29, N°258, p. 4424-4429.
- KÜÇÜKAY F., 1984, "Dynamic Behavior of High Speed Gears". Proceedings of the 3rd International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Institution of Mechanical Engineers, p. 81-90.
- LASKIN I., 1968, "Prediction of Gear Noise from Design Data". AGAMA paper 299.03.
- LIM T., SINGH R., 1990, "Vibration Transmission through Rolling Element Bearings. Part I : Bearing Stiffness Formulation. Part II : System Studies". Journal of Sound and Vibration, Vol. 139 (2), p. 179-225.
- LIM T., SINGH R., 1991, "Vibration Transmission through Rolling Element Bearings. Part III : Geared Rotor System Studies". Journal of Sound and Vibration, Vol. 151, p. 31-54.
- LIN H., HUSTON R.L., COY J.J., 1988, "On Dynamic Load in Parallel Shaft Transmissions. Part 1, Modelling and Analysis. Part 2, Parameter Study". ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 110, p. 221-229.
- MAATAR M., 1995, "Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages simple étage. Influence des écarts de forme et des défauts de montage". Thèse de doctorat de L'INSA de Lyon, 192 p.
- MARK W., 1978, "Analysis of the Vibratory Excitation of Gear Systems : Basic Theory". Journal of Acoustical Society of America, Vol. 63 (5), p. 1409-1430.
- MARK W., 1979, "Analysis of the Vibratory Excitation of Gear Systems : Tooth Error Representations, approximations and Application". Vol. 66 (6), p. 1758-1787.
- MARK W., 1984, "Gear Noise Origins". AGARD Conference Proceedings N°369, Propulsion and Energetics Panel Symposium, Lisbonne, p. 30-1 à 30-14.
- MARUYAMA N., MORIKAWA K., HITOMI N., 1992, "Gear Case Shape and Rib Distribution for Reducing Automobile Transmission Gear Noise". Proceedings of the 6th International Confence on Power Transmission and Gearing, Phoenix, Vol. 2, p. 583-588.
- MITCHELL L. D., 1971, "Gear Noise : The Purchaser's and the Manufacturer's view". Proceedings of the Noise Control Conference, Lafayette-Indiana, p. 95-106.
- MUNRO R., 1967, "Gear Transmission Error". AGMA paper N°239.10.
- MUNRO R., 1989, "The D. C. Component of Gear Transmission Error". Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing conference, Chicago, p. 467-470.
- MUNRO R., 1991, "A Review of the Theory and Measurement of Gear Transmission Error". 1st International Conference on Gearbox Noise and Vibration, Cambridge, p. 3-10.

- MUNRO R., YILDIRIM N., HALL D. M., 1991, "Optimum Profile Relief and Transmission Error in Spur Gears". 1st International Conference on Gearbox Noise and Vibration, Cambridge, p. 35-44.
- NAYFEH A., MOOK D., 1979, "Non Linear Oscillations". John Wiley, New-York, p. 258-365.
- NERIYA S. V., BHAT R., SANKAR T., 1985, "Coupled Torsional-Flexural Vibration of a geared Shaft System using Finite Element Analysis". The Shock and Vibration Bulletin N°55, p. 13-25.
- NERIYA S., BHAT R. B., SANKAR T. S., 1987, "Dynamic Response of Helical Geared Shaft System Subjected to Random Support Excitations". Proceedings of the 7th World Congress IFTOMM on the Theory of Machines and Mechanisms, Séville, p. 1295-1302.
- NERIYA S., BHAT R., SANKAR T., 1988, "On the Dynamic Response of a Helical Geared System Subjected to a Static Transmission Error in the Form of a Deterministic and Filtered White Noise Input". Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 110, p. 501-506.
- NIEMANN G., BAETHGE J., 1970, "Drehwegfehler, Zahnfederharte und Gerauschk bei Stirnrädern". Zeitschrift des VDI, Vol. 112 (4), p. 205-214 et (8), p. 495-499.
- OLAKOREDE A.A., 1990, "Répartition des charges et résistance en conception d'engrenages cylindriques. Application de la méthode des Prismes Finis en C.A.O.". Thèse de doctorat de L'INSA de Lyon N°90 ISAL 0049, 157 p.
- OPITZ, 1967, "Dynamic Behavior of Spur and Helical Gear". Proceedings of the Japanese Society of Mechanical Engineers Semi-International Gearing Symposium, p. 199-209.
- OPITZ, 1969, "Noise of Gears". Transactions of the Royal Society, Vol. 263, p. 369-380.
- ÖZGÜVEN H., HOUSER D., 1988, "Mathematical Models used in Gear Dynamics - A Review". Journal of Sound and Vibration, Vol. 121 (3), p. 383-411.
- ÖZGÜVEN H., HOUSER D., 1988, "Dynamic Analysis of High Speed Gears by using Loaded Static Transmission Error". Journal of Sound and Vibration, Vol. 125 (1), p. 71-83.
- ÖZGÜVEN H., KESAN M., 1992, "Dynamic Response of Geared Rotors to Internal Excitation by using a Finite Element Model". 3ème Congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions, Paris, p. 921-930.
- PASCAL J.C., 1993, "Prédiction simplifiée du comportement vibroacoustique des carters de réducteurs à engrenages". Actes des journées CETIM sur les engrenages silencieux, Senlis, 7 p.
- PERRET-LIAUDET J., 1992, "Etude des mécanismes de transfert entre l'erreur de transmission et la réponse dynamique des boîtes de vitesses automobiles". Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon N°9207, 198 p.
- PERRET-LIAUDET J., SABOT J., 1992, "Dynamics of a Truck Gearbox". Proceedings of the 6th International Conference on Power Transmission and Gearing, Phoenix, Vol. 1, p. 249-258.

- PERRET-LIAUDET J., 1996, "An Original Method for Computing the Response of a Parametrically Excited Forced System". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 196 (2), p. 165-177.
- PERRET-LIAUDET J., SABOT J., 1996, "Effet du jeu entre dents et de la raideur d'engrènement sur la dynamique non linéaire des engrenages". *Publications du LMA, deuxième colloque du GDR 1138 Vibroacoustique, Marseille*, p. 111-132.
- PRABHU M. S., HOUSER D., 1996, "A Hybrid Finite Element Approach for Analysing the Load Distribution and Transmission Error in Thin-Rimmed gears". *VDI Berichte 1230*, p. 201-212.
- PEARCE W., NIELSEN M., ROUVEROL W., 1986, "Reducing Gear Noise Excitation". *Proceedings of the 2nd World Congress on Gearing, Paris, Vol. 1*, p. 587-598.
- PFEIFFER F., 1991, "Modelling Problems of Rattling in Gearboxes". *Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima*, p. 43-48.
- PFEIFFER F., PRESTL W., 1992, "Hammering in Gears". *3ème congrès mondial des engrenages et des transmissions, Paris*, p. 931-945.
- PFEIFFER F., 1996, "Rattling in Gears- A Review". *VDI Berichte N°1230*, p. 719-737.
- RAJAB M., 1982, "Modeling off the Transmissibility through Rolling Element Bearing under Radial and Moment Loads". *Ph. D. Thesis, Ohio State University, Columbus*.
- RANDALL R. B., 1982, "A New Method of Modeling Gear Faults". *Journal of Mechanical Design, Vol. 104*, p. 259-267.
- REMMERS E. P., 1978, "Gear Mesh Excitation Spectra for Arbitrary Tooth Spacing Errors, Load and Design Contact Ratio". *ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 100*, p. 715-722.
- REMOND D., 1991, "Contribution à l'étude et à l'analyse expérimentale du bruit d'engrènement. Développement et application de la transformée en ondelettes rapides". *Thèse de doctorat de l'INSA de Lyon N°91 ISAL 0067*, 232 p.
- REMOND D., VELEX P., SABOT J., 1992, "Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages - Synthèse bibliographique". *Publication du CETIM*, 192 p.
- RIGAUD E., PERRET-LIAUDET J., SABOT J., 1995, "Transmissions par engrenages : Influence du carter et des roulements sur les modes de denture". *Actes du 12ème Congrès Français de Mécanique, Strasbourg, Vol. 4*, p. 361-364.
- RIGAUD E., SABOT J., 1996, "Effect of Elasticity of Shafts, Bearings, Casing and Couplings on the Critical Rotational Speeds of a Gearbox". *VDI Berichte N°1230*, p. 833-845.
- RIGAUD E., SABOT J., 1997, "Influence de l'élasticité des lignes d'arbres, des roulements et du carter sur les vitesses critiques de rotation d'une transmission par engrenages". *Mécanique Industrielle et Matériaux, Vol. 50 (2)*, p. 70-72.
- RIGAUD E., SABOT J., 1997, "Influence des modes locaux sur la réponse dynamique du carter d'une transmission par engrenages". *Actes du 13ème Congrès Français de Mécanique, Poitiers, Vol. 2*, p. 343-346.

RIGAUD E., BARDAY D., 1998, "Modélisation et analyse de l'erreur statique de transmission sous charge. Influence des déformations des roues et interactions entre les couples de dents en prise". Accepté pour le 12ème Colloque Vibrations, Chocs et Bruit, 10-12 juin, Ecully.

RIGAUD E., BARDAY D., "Static Transmission Error- Modelling and Analysis- Effect of Wheel Body Deformation and Interactions between Adjacent Loaded Teeth". Accepté pour le 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, juin 1999, Paris.

RIGAUD E., SABOT J., "Effects of Gearbox Design Parameters on the Dynamic Response of Housing Generated by Transmission Error". Accepté pour le 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, juin 1999, Paris.

SABOT J., JANOLIN C., 1996, "Caractéristiques de l'amortissement dans un contact Hertzien de type sphère-plan excité par une charge normale". Mécanique industrielle et matériaux, Vol. 49 (4), p. 199-201.

SAINOT P., 1989, "Analyse du contact entre dentures d'engrenage cylindriques de réducteur". Thèse de doctorat de L'INSA de Lyon N°89 ISAL 0091, 205 p.

SIBE A., SABOT J., 1996, "Sound Transmission through Gearbox : Study and Modelling of the Internal Acoustic Sources". Proceedings of InterNoise 96, Liverpool, p. 167-170.

SIBE A., 1997, "Etude de la transparence acoustique des carters des transmissions à engrenages". Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon N°9724, 208 p.

SINGH R., PAUL B., 1974, "Numerical Solution of Non-Hertzian Elastic Contact Problems". Journal of Applied Mechanics, Vol. 96 (2), p. 484-490.

SINGH R., XIE H., COMPARIN R. J., 1989, "Analysis of Automotive Neutral Gear Rattle". Journal of Sound and Vibration, Vol. 131 (2), p. 177-196.

SMITH J. D., 1983, "Gears and their Vibration : A basic Approach to Understand Gear Noise". Marcel Dekker, New-York.

STORM M., 1991, "Prédiction de l'émission acoustique pour des structures simples". Congrès sur la prévision du bruit rayonné par les structures mécaniques vibrantes, Senlis, Revue Française de Mécanique, Numéro Spécial, p. 336-352.

SUNDARESAN S., ISHII K., HOUSER D., 1991, "Design of Helical Gears with Minimum Transmission Error under Manufacturing and Operating Variances". Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, p. 92-97.

TAKATSU N., KATO M., INOUE K., ISHIKAWA M., 1991, "Analysis and Experiment on the Vibration Transmission in a Single Stage Gearbox". Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions, p. 104-109.

TAVAKOLI M.S., HOUSER D.R., 1984, "Optimum Profile Modifications for the Minimisation of Static Transmission Error of Spur Gears". Journal of Mechanical Transmissions and Automation in Design, Vol. 108 (1), p. 86-95.

TAVAKOLI M.S., HOUSER D.R., 1986, "Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gears". Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 180, p. 86-95.

- TOBE T., KATO M., INOUE K., 1978, "Bending of Stub Cantilever Plate and some Applications to Strength of Gear Teeth, Journal of Mechanical Design, Vol. 100, p. 374-381.
- UMEZAWA K., 1972, "The Meshing Test of Helical Gears under Load Transmission". Bulletin of JSME., Vol. 15 (90), p. 1632-1639.
- UMEZAWA K., SATO T., ISHIKAWA J., 1984, "Simulation of Rotational Vibration of Spur Gears". Bulletin of JSME N°27, p. 102-109.
- UMEZAWA K., SUZUKI T. SATO T., 1986, "Vibration of Power Transmission Helical Gears. Approximate Equation of Tooth Stiffness". Bulletin of JSME., Vol. 29, N°251, p. 1605-1611.
- UMEZAWA K., SUZUKI T., HOUJOH H., BAGIASNA K., 1986, "Influence of Misalignment on Vibration of Helical Gears". Proc. 2nd Congress on Gearing, Paris, p. 615-626.
- UMEZAWA K., HOUJOH H., ICHIKAWA N., MATSUMURA S., 1991, "Simulation of Rotational Vibration of a Helical Gear Pair Transitting Light Load". Proceedings of the 3rd International Conference on Motion and Power Transmission, Hiroshima, p. 85-91.
- UMEZAWA K., HOUJOH H., MATSUMURA S., 1992, "The Influence of Flank Deviations on the Vibration of a Helical Gear Pair Transmitting Light Load". Proceedings of 6th International Conference on Power Transmission and Gearing, Phoenix, Vol. 2, p. 681-688.
- VARADI K., POLLER R., 1989, "F.E.M. Analysis of Gear Teeth Contact". Proceedings of the 4th Structural Analysis Systems World Conference, Paris, Vol. 1, p. 250-261.
- VELEX P., 1988, "Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles". Thèse de doctorat de L'INSA de Lyon N°88 ISAL 0032, 188 p.
- WELBOURN D. B., 1970, "Gears Errors and their Resultant Noise Spectra". Gearing in 1970 Conference, Institution of Mechanical Engineering, Vol. 184, p. 131-139.
- WELBOURN D. B., 1979, "Fundamental Knowledge of Gear Noise- A Survey". Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions, Cranfield Institute of Technology, paper C177/79, p. 9-29.
- WILCOX L., COLEMAN W., 1973, "Application of Finite Elements to the Analysis of Gear Tooth Stresses". Journal of Engineering for Industry, Vol. 95 (4), p. 1139-1148.
- WINTER H., GERBER H., MULLER R., 1989, "Investigations on the Excitation of Vibrations and Noise of Spur and Helical Gears". Proceedings of the 5th ASME International Conference on Power Transmission and Gearing, Chicago, Vol. 2, p. 765-772.
- ZHANG G., PASCAL J.C., 1996, "Détermination indirecte des forces appliquées aux structures mécaniques". Mécanique industrielle et matériaux, Vol. 49 (2), p. 98-100.
- ZHANG G., 1998, "Détermination des forces appliquées aux structures industrielles par des méthodes inverses". Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse III, 142 p.
- ZHANG G., RIGAUD E., PASCAL J.C., SABOT J., "Identification of Dynamic Forces produced by a Gearbox". Accepté pour le 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, juin 1999, Paris.

RESUME

Le but de ce travail est de calculer l'excitation vibratoire générée par le processus d'engrènement (erreur statique de transmission sous charge) puis d'analyser les caractéristiques du comportement dynamique des transmissions par engrenages induit par cette excitation.

L'excitation vibratoire des transmissions résulte des écarts de géométrie et des déformations élastiques de l'engrenage. Pour calculer ses caractéristiques, nous introduisons une modélisation par éléments finis 3D de l'engrenage puis résolvons le système d'équations non linéaires qui gère le contact entre les dentures. A partir de cette approche, nous pouvons mettre en évidence les interactions entre les couples de dents en prise et les couplages élastiques entre les corps de roue et les dentures. Nous analysons aussi les effets des corrections de denture sur les fluctuations périodiques de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement.

Dans une deuxième partie, nous calculons la réponse dynamique des transmissions par engrenages à partir d'une approche globale basée sur une discrétisation par éléments finis de toutes les composantes (engrenages, lignes d'arbres, roulements et carter). Pour résoudre le système d'équations différentielles à coefficients périodiques gouvernant la dynamique de la transmission complète, nous exploitons une méthode spectrale et itérative. A partir de l'étude d'une boîte d'inversion équipée d'un engrenage parallèle à denture hélicoïdale, nous validons la méthodologie adoptée et mettons en évidence les phénomènes dynamiques caractéristiques. Les vitesses de rotation qui correspondent à l'excitation en résonance des "modes de denture", donnent naissance à de fortes surcharges sur les dentures. L'analyse des mécanismes de transfert et de couplage entre ces surcharges, les efforts transmis au carter par les roulements et la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne du carter permet de mettre en évidence les influences des roulements et de l'architecture du carter sur les niveaux vibratoires des transmissions. La méthodologie adoptée et les simulations numériques effectuées permettent de proposer des solutions qui conduisent, à masse constante, à une diminution sensible de la vitesse quadratique moyenne des carters de transmissions.

ABSTRACT

The aim of this work is to calculate the vibratory excitation induced by the meshing process of spur and helical gear pairs (static transmission error under load) and to analyse the dynamics of gearboxes.

Static transmission error results from geometry faults and elastic deformation of gears. In order to calculate its characteristics, we propose a method based on a 3-D Finite Element modelling of each toothed wheel. A non-linear algorithm computes load distribution and static transmission error, for a set of successive positions of the driving wheel. Numerical simulations show that interactions between the adjacent loaded teeth and wheel body deformation modify the load distribution and the variations of static transmission error. We also analyse the effect of different tooth modification types on static transmission error and mesh stiffness.

In order to analyse dynamic response of gearboxes generated by static transmission error, we propose a method based on the modelling of all the components (gears, shafts, bearings and housing). Forced response of the whole gearbox is computed using a spectral and iterative method. The analyse of dynamics of a particular gearbox fitted out with a helical gear pair allows to validate the proposed methodology and to show the most important dynamic phenomena. The highest dynamic mesh force levels correspond to a resonant excitation of modes which have a high potential energy associated with mesh stiffness. The analyse of coupling mechanisms between dynamic mesh force, generalised dynamic forces (axial, radial and angular) transmitted to the housing through the bearings and time- and space-averaged mean square vibrational velocity of housing shows that bearings stiffnesses and mechanical properties of housing have an appreciable influence on the vibrational responses. Our methodology and numerical results allow to propose new designs which lead to a significant reduction of the mean square vibrational velocity of housing of gearboxes.