



HAL
open science

Quelques modèles de convection pour l'ingénierie et l'environnement

Mathieu Creyssels

► **To cite this version:**

Mathieu Creyssels. Quelques modèles de convection pour l'ingénierie et l'environnement. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. École Centrale de Lyon, 2020. tel-04781733

HAL Id: tel-04781733

<https://hal.science/tel-04781733v1>

Submitted on 13 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

HABILITATION A DIRIGER LES RECHERCHES

Quelques modèles de convection pour l'ingénierie et l'environnement

Mathieu Creyssels

Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique
Ecole Centrale de Lyon, CNRS, UCBL, INSA Lyon

*soutenue publiquement le 8 décembre 2020
devant le jury constitué des membres suivants*

Christophe Corre	Professeur Ecole centrale de Lyon	Examineur
Luminita Danaila	Professeur Université de Rouen	Rapporteur
Michael Le Bars	Directeur de Recherches, CNRS, Aix-Marseille Université	Rapporteur
Jean-Philippe Matas	Professeur Université Lyon 1	Examineur
Jean-François Pinton	Directeur de Recherches, CNRS, Ecole normale supérieure de Lyon	Examineur
Frédéric Plourde	Directeur de Recherches CNRS, ISAE-ENSMA, Poitiers	Rapporteur

Introduction

Mes travaux de recherche consistent à développer des expériences de laboratoire et des simulations numériques afin de comprendre et décrire les phénomènes et processus physiques qui ont lieu dans certaines applications d'ingénierie ou environnementales. Nous avons fourni des réponses quantifiées aux questions qui se posent dans les domaines suivants :

- Echangeurs thermiques pour des applications micro-fluidiques (Chapitre 1).
- Ventilation et sécurité des tunnels en cas d'incendie (Chapitre 2).
- Rejets de fluide de masse volumique plus faible ou plus grande que l'air environnant - effets dits non-Boussinesq (Chapitre 3).
- Convection naturelle dite de Rayleigh-Bénard (Chapitre 4).

En plus du développement d'expériences en laboratoire et de simulations, j'ai développé des modèles théoriques dits simples afin d'expliquer les observations expérimentales et numériques obtenues et ceux de la littérature.

Pour chacun des 4 thèmes de recherche, les enjeux pour l'ingénierie ou l'environnement et la mécanique des fluides sont dans un premier temps présentés. Puis, les montages expérimentaux, les simulations numériques et les modèles théoriques sont décrits. Viennent ensuite les principaux résultats ainsi que des comparaisons entre les expériences, les simulations et les prédictions théoriques. Enfin, des perspectives sont données à ces travaux.

Ce mémoire est un résumé condensé de mes travaux de recherche et vous trouverez bien entendu beaucoup plus de détails et de précisions sur les dispositifs expérimentaux, les simulations et les résultats, en consultant les articles publiés. Ils sont listés et regroupés par thème en annexe [A.1](#). Vous pouvez directement les consulter en cliquant sur les liens. Ils sont aussi accessibles également sur HaL.

J'ai également choisi de ne pas présenter mes activités de recherche sur les matériaux granulaires (travaux de thèse à l'ENS Lyon et de post-doc à Rennes) car j'ai arrêté (pour l'instant) cette thématique malgré ma dernière publication en 2017 ([Creysse et al., Eur. Phys. J. E, 40, 56, 2017](#)).

L'annexe [B](#) présente une synthèse de mes travaux d'encadrement et de mes responsabilités collectives. Enfin, un résumé de mes activités d'enseignement est fourni en annexe [C](#).

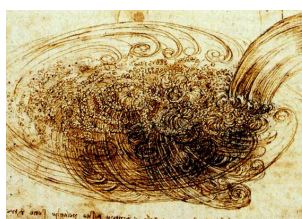
Table des matières

1	Echangeur thermique chaotique	3
1.1	Les enjeux pour l'ingénierie et la mécanique des fluides	3
1.2	Le MLLM (Multi-Level Laminating Mixer)	5
1.3	Les maquettes expérimentales et numériques	7
1.4	Les principaux résultats	10
1.5	Perspectives	11
1.6	Références	11
2	Ventilation des tunnels	15
2.1	Les enjeux pour l'ingénierie et la mécanique des fluides	15
2.2	Les maquettes expérimentales et numériques	18
2.3	Le modèle théorique pour la vitesse critique	21
2.4	Les principaux résultats	23
2.5	Perspectives	23
2.6	Références	24
3	Jets dits non-Boussinesq	27
3.1	Les enjeux pour l'ingénierie/environnement et la mécanique des fluides	27
3.2	Les expériences de Ricou & Spalding	29
3.3	Les simulations LES et le calcul du coefficient d'entraînement	32
3.4	Le modèle théorique	34
3.5	Les principaux résultats	38
3.6	Perspectives	40
3.7	Références	40
4	Rayleigh-Bénard et ses variantes	43
4.1	Les enjeux pour l'ingénierie/environnement et la mécanique des fluides	44
4.2	Effet de rugosités de paroi sur la convection de RB	46
4.3	Convection dans un long canal vertical	51
4.4	Convection par chauffage des couches limites	55
4.5	Convection et stratification	58
4.6	Perspectives	61
4.7	Références	62

A	Production scientifique	I
A.1	Articles	I
A.2	Actes de conférences	III
A.3	Conférences sans acte	IV
A.4	Contrats de recherche obtenus	V
B	Encadrement, responsabilités collectives et évaluation	VII
B.1	Encadrement de thèses	VII
B.2	Encadrement de stages	VII
B.3	Responsabilités collectives	VIII
B.4	Evaluation de la recherche	VIII
C	Enseignement	IX
C.1	Responsabilités de filières	IX
C.2	Responsabilités de cours	IX
C.3	Autres cours et enseignements	X
C.4	Action spécifique	X
D	Entrainment in non-Boussinesq jets : a numerical study	XI
E	Entrainment in non-Boussinesq jets : theoretical aspects	XXIX
F	Model for thermal convection driven by uniform volumetric energy sources	XLV

Chapitre 1

Echangeur thermique chaotique



Léonard de Vinci, "Tourbillons"

Sommaire

1.1	Les enjeux pour l'ingénierie et la mécanique des fluides	3
1.2	Le MLLM (Multi-Level Laminating Mixer)	5
1.3	Les maquettes expérimentales et numériques	7
1.3.1	Choix d'étudier un échangeur à température de paroi constante	7
1.3.2	Le dispositif expérimental	8
1.3.3	Les simulations numériques	9
1.4	Les principaux résultats	10
1.5	Perspectives	11
1.6	Références	11

1.1 Les enjeux pour l'ingénierie et la mécanique des fluides

Il s'agit du seul chapitre où la turbulence n'est pas présente. Mais les tourbillons sont là, générés par des processus dits chaotiques, et ils permettent de compenser cette absence de turbulence. D'un point de vue de l'ingénierie, il s'agit de proposer des solutions innovantes permettant d'augmenter quantitativement le mélange et les transferts thermiques pour des applications et des systèmes particuliers pour lesquels la turbulence ne peut pas être observée. Alors que pour les prochains chapitres, on s'assurera que les nombres de Reynolds soient suffisants afin que la turbulence se développe pleinement, ici, tout au contraire, les nombres de Reynolds sont faibles car les applications concernent des systèmes fluidiques de petites tailles et de petits débits, et éventuellement utilisant des fluides de grande viscosité. On s'intéresse donc à la milli-fluidique, voire à la micro-fluidique qui sont des disciplines en pleine essor ces 20 dernières années. Une des explications à ce développement est liée au nouveau concept de micro-réacteur-échangeur multi-fonctionnel [1; 2] (voir également les figures 1.2). Il s'agit

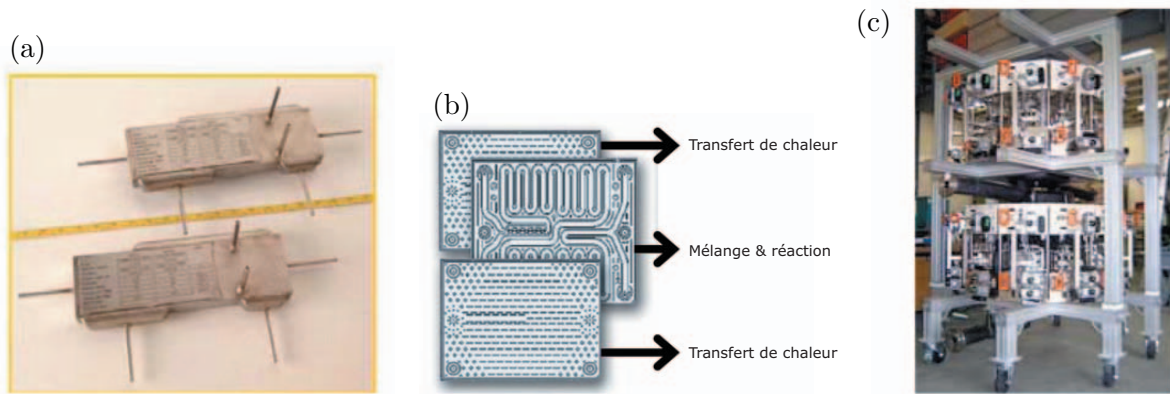


FIGURE 1.1 – (a) Exemple de réacteurs-échangeurs métalliques commercialisés par *Heatric*. (b) Plaques de réaction et de transfert de chaleur dans les réacteurs microstructurés en verre commercialisés par *Corning*. (c) Unité constituée de 22 microréacteurs *Cytos* ayant une capacité maximale de production de 20 tonnes/an. Extraits de [1].

de prendre le contre-pied des réacteurs classiques de la chimie dite lourde. Ces réacteurs sont très volumineux et permettent de produire de grandes quantités d'espèces chimiques. Le mélange des réactifs est réalisé par brassage mécanique. Malgré ce brassage, il est évident que la concentration en réactif n'est pas uniforme dans tout le réacteur, la température n'est pas non plus uniforme, et donc la réaction chimique ne se déroule pas au même moment et avec la même cinétique à chaque endroit du réacteur classique. On obtient alors un ensemble de produits de la réaction qu'il faut ensuite trier et purifier. Une production chimique différente est aujourd'hui envisagée. Il s'agit de diminuer drastiquement la taille des réacteurs afin d'utiliser une masse beaucoup plus faible de réactifs (voir exemple Fig. 1.2a). En revanche, la réaction chimique est mieux contrôlée car les concentrations en réactifs et produits peuvent être ajustées continûment et la température est également régulée avec plus grande précision (Fig. 1.2b). Afin de produire suffisamment, on peut imaginer une analogie avec la construction automobile pour laquelle les voitures sont assemblées progressivement le long d'une chaîne de montage qui fonctionne en continue. Contrairement aux réacteurs classiques que l'on doit vider et nettoyer après chaque cycle, les réacteurs-échangeurs multi-fonctionnels sont conçus pour que la réaction chimique se déroule durant l'écoulement du fluide le long d'une conduite, et donc la production se déroule sans arrêt. Comme pour la construction automobile, des opérations unitaires se suivent le long de la chaîne et permettent de réaliser une succession de réactions chimiques ainsi que d'analyses afin d'obtenir en fin de parcours un produit fini correspondant parfaitement aux exigences demandées (Fig. 1.2c). Une autre application de ces micro-réacteur-échangeurs multi-fonctionnels concerne les analyses biologiques. Ils permettent une succession d'analyses sur un même échantillon de très petit volume.

Du point de vue de la mécanique des fluides, ce nouveau contexte applicatif est l'occasion d'un retour à la recherche sur les écoulements dits laminaires. En effet, pour les micro-réacteur-échangeurs multi-fonctionnels, les processus fondamentaux comme le mélange ou les transferts thermiques ne peuvent pas être amplifiés par la turbulence. Les systèmes classiques de mélange comme les contacteurs en T (Fig. 1.2a) ou Y (Fig. 1.2b), ou encore utilisant la convergence hydrodynamique (Fig. 1.2c,d) sont d'autant moins efficaces que les tailles et débits caractéristiques sont faibles. En vue d'une intensification des procédés, des mécanismes physiques bien différents de ceux utilisés pour les réacteurs de taille classique sont à rechercher.

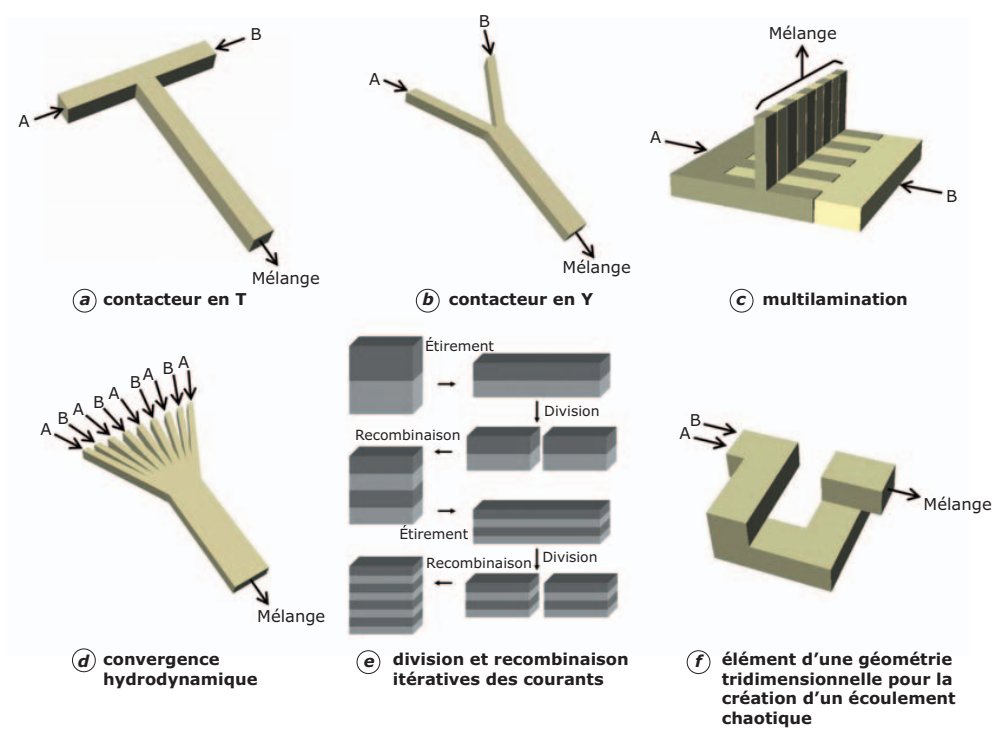


FIGURE 1.2 – Les différents mécanismes de mélange des réactifs [1].

Il s'agit généralement de faire subir aux fluides des phases d'étirement, de découpage et de recombinaison (Fig.1.2e,f), afin d'augmenter la surface de contact entre les fluides, car, in fine, à très petite échelle, le mélange et le transfert thermique sont assurés par les phénomènes de diffusion et de conduction. La performance de ces mélangeurs est largement augmentée lorsque l'écoulement généré possède des caractéristiques dits chaotiques [3; 4; 5; 6]. Ce chaos peut être vu en considérant la trajectoire de particules de fluide et il est produit par des perturbations périodiques en temps et/ou en espace [3; 7; 8; 9; 10]. Ici, on ne s'intéressera qu'aux mélangeurs chaotiques dits statiques, qui ne comportent pas de pièces mécaniques mobiles, ce qui présente un grand avantage d'un point de vue applicatif. Le chaos est engendré par une géométrie du mélangeur obligatoirement tri-dimensionnelle [11; 12; 13]. En 2007, juste avant mon arrivée au LMFA, Philippe Carrière a montré théoriquement la très grande efficacité de ce type de mélangeur [14], et nous avons travaillé à partir de mon arrivée en 2009 au LMFA à démontrer expérimentalement et numériquement que ce mélangeur est aussi un bon échangeur thermique, permettant de proposer un design de micro-réacteurs-échangeurs efficaces pour le mélange de réactifs et le contrôle de la réaction chimique.

1.2 Le MLLM (Multi-Level Laminating Mixer)

Le design de mélangeur-échangeur que nous avons proposé est indiqué sur la figure 1.3. Il permet d'approcher au plus près la transformation du boulanger garantissant un mélange optimal. Le MLLM (Multi-Level Laminating Mixer, [14]) est l'analogue pour un fluide du geste du boulanger qui étire sa pâte à pain jusqu'à ce qu'elle soit d'épaisseur moitié, puis la

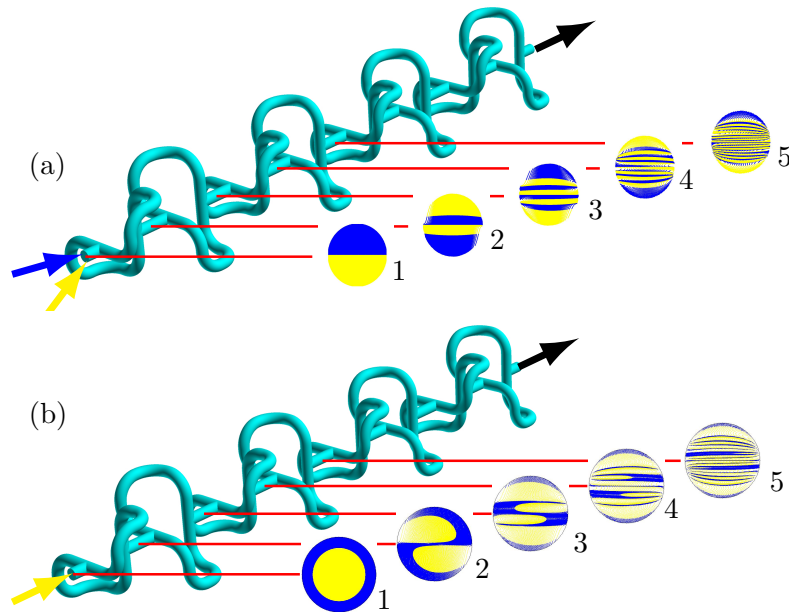


FIGURE 1.3 – Schémas du MLLM et principes de fonctionnement. (a) Fonctionnement en tant que mélangeur. Deux fluides (par exemple deux réactifs : un jaune et un bleu) sont introduits en entrée. L'image (1) montre le champ de concentration en entrée du MLLM. La deuxième image (2) représente ce même champ obtenu après le premier élément. Deux couches de réactif jaune se sont interposées entre deux couches de réactif bleu. L'image (3) présente le champ de concentration obtenu après le passage dans deux éléments. 4 couches de réactif bleu se sont interposées entre 4 couches de réactif jaune. Après 3 éléments, nous observons 16 couches et puis 32 couches après 4 éléments. (b) Fonctionnement en tant qu'échangeur thermique. Un fluide chaud entre dans le MLLM dont les parois sont froides (ici, le système qui maintient la température des parois constante n'est pas représenté). L'image (1) montre le champ de température en entrée du MLLM, le fluide placé au centre du tube est chaud (en jaune) tandis que celui près des parois est froid (en bleu). L'image (2) représente le champ de température obtenu après le premier élément. Par rapport à l'état du fluide en entrée, nous voyons que du fluide froid a été amené vers le centre du tube et du fluide chaud vers les parois. L'image (3) présente le champ de température obtenu après le passage dans deux éléments. Et ainsi de suite ...

coupe en deux et superpose les deux moitiés pour lui redonner sa dimension initiale (et ainsi de suite). Il est formé par la succession d'un certain nombre d'éléments de base constitués de tubes et de coudes. Le fonctionnement de chaque élément est le suivant : le fluide est d'abord séparé en deux flux puis recombinaé en sortie de façon à obtenir un grand mélange entre les deux fluides à mélanger (voir Fig. 1.3a), ou bien, en configuration échangeur de chaleur, on obtient un mélange entre le fluide chaud qui était au centre du tube et le fluide froid placé près des parois en entrée (Fig. 1.3b). Chaque élément permet de diviser par deux la distance caractéristique sur laquelle la diffusion moléculaire ou la conduction thermique doit agir afin d'homogénéiser totalement la composition du fluide dans une section droite du tube. Il s'agit donc d'un processus très efficace puisqu'au bout de n éléments, cette distance caractéristique est divisé par 2^n . Cet échangeur peut également fonctionner pour le chauffage d'un fluide froid avec la même efficacité thermique.

Le fonctionnement du MLLM décrit précédemment est bien entendu un fonctionnement idéal ou théorique et qui ne correspond pas forcément à celui d'un MLLM réel car un grand nombre de phénomènes physiques non discutés jusqu'à présent peuvent intervenir, aussi bien

dans le sens d'une amélioration ou d'une réduction du transfert thermique. Par exemple, des tourbillons de Dean ([15]) peuvent apparaître au niveau des coudes et sont eux-mêmes générateurs d'advection chaotique ([10]) et pourraient augmenter l'efficacité thermique ([16]). Pour des différences de température élevées, le phénomène de convection naturelle apparaît, sans doute favorable également au transfert thermique. L'écoulement de fluide et le couplage vitesse/température sont complexes et donc la mesure expérimentale ou numérique de l'efficacité de l'échangeur a représenté des enjeux techniques et scientifiques majeurs.

1.3 Les maquettes expérimentales et numériques

Un résumé du dispositif expérimental et des simulations numériques est présenté ici, ainsi que des explications sur les choix techniques que nous avons pris lors du développement de cette activité.

1.3.1 Choix d'étudier un échangeur à température de paroi constante

Le principe d'un échangeur thermique est de transférer de l'énergie d'un fluide intérieur vers un fluide extérieur (ou l'inverse) et dans la plupart des cas, sans transfert de masse. De façon générale, la résistance thermique locale de l'échangeur s'écrit comme la somme de 3 résistances thermiques :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{h_{int}} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_{ext}}. \quad (1.1)$$

h_{int} et h_{ext} sont respectivement les coefficients de convection au sein des fluides intérieur et extérieur, λ et e sont respectivement la conductivité et l'épaisseur du matériau (généralement du métal) de la paroi de l'échangeur. Les coefficients de convection h_i dépendent chacun des écoulements intérieur et extérieur et donc de la géométrie de l'échangeur. Déterminer ces coefficients et optimiser leurs valeurs sont les enjeux techniques et scientifiques majeurs des échangeurs de chaleur mais ce sont des travaux difficiles à réaliser. C'est pour cette raison qu'il y a très peu d'études de la littérature qui comparent directement l'efficacité de plusieurs échangeurs. Autrement dit, les études de la littérature ne fournissent pas directement une efficacité absolue mais des variations de l'efficacité pour un type d'échangeur thermique donné lorsqu'un paramètre géométrique varie. Au contraire, pour le MLLM, nous souhaitons montrer l'intérêt de générer un écoulement chaotique pour le fluide intérieur et donc l'idée était de pouvoir comparer son efficacité à un échangeur de référence. Il n'est pas non plus facile de trouver dans la littérature un échangeur de référence, à part bien entendu l'échangeur le plus simple que l'on peut imaginer, le tube droit de *Graetz* [17] pour lequel une solution théorique est calculable. C'est pour cette raison que nous avons décidé de développer un dispositif expérimental et des simulations numériques permettant cette comparaison avec le tube droit. Dans ce but, l'échangeur a été construit en cuivre ($\lambda_{Cu} \approx 400 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) et il a été posé dans un canal dans le lequel de l'eau circulait à très grand débit, donc avec un nombre de Reynolds $Re_{ext} > 50000$. Nous avons donc montré que pour notre étude $h = h_{int}$ avec une précision supérieure à 1% (Annexe A de [18]).

Deux choix sont possibles pour la condition aux limites aux parois : soit on fixe le flux thermique, soit la température de paroi est maintenue à température uniforme et constante. Pour les expériences, les 2 choix possèdent des avantages et des inconvénients majeurs et ils

ont été discutés bien en amont de la construction du dispositif expérimental. Dans la littérature des échangeurs, ils sont très souvent étudiés expérimentalement en tentant d'imposer un flux thermique uniforme et constant sur toute la paroi extérieure de l'échangeur. Ce choix a l'avantage de s'affranchir de toute mesure de flux thermique $\bar{\phi}(x)$ qui traverse une section transversale de l'échangeur. En effet, cette mesure de flux est très complexe à réaliser expérimentalement car, en toute rigueur, elle nécessite la mesure des profils de vitesse et de température dans une section afin de calculer $\bar{\phi}(x) = \int \rho c_p \bar{T}(r, \theta, x) \bar{v}_x(r, \theta, x) r dr d\theta$. $\bar{\phi}(x)$ peut s'exprimer également comme une température moyenne sur une section, en considérant une moyenne de la température locale pondérée par la vitesse :

$$\hat{T}(x) = \frac{\bar{\phi}(x)}{c_p d_m} = \frac{1}{d_m} \int \rho \bar{T}(r, \theta, x) \bar{v}_x(r, \theta, x) r dr d\theta. \quad (1.2)$$

En choisissant un flux de paroi constant, la mesure de la température de paroi suffit pour obtenir le nombre de Nusselt car $\bar{\phi}(x)$ est proportionnel au flux de paroi et à la longueur développée de l'échangeur. En revanche, à température de paroi imposée, $\bar{\phi}(x)$ doit être mesuré ou estimé pour différentes sections transverses de l'échangeur. Cependant, nous avons choisi de fixer la température de paroi pour les deux raisons suivantes :

(i) Imposer un flux constant est difficile dans les expériences (surtout lorsque la géométrie est complexe comportant des coudes et des tés) alors qu'imposer une température de paroi est plus réaliste en déposant l'échangeur dans un canal dans lequel de l'eau circule à très grande vitesse ;

A flux constant, le nombre de Nusselt est obtenu à partir de la température de paroi (T_p). Les variations de T_p sont induites par les variations du nombre de Nusselt et donc la température varie de façon importante à la paroi (par exemple entre les coudes et les parties droites). La mesure des pertes thermiques représente alors un enjeu majeur et obtenir in fine un nombre de Nusselt moyen avec une faible incertitude est peu réaliste.

La mesure de $\hat{T}(x)$ est alors essentielle en fixant la température de paroi. C'est pour cette raison que nous avons développé des simulations numériques en parallèle des expériences, avec les mêmes conditions aux limites et les mêmes propriétés du fluide. Elles ont permis de montrer que $\hat{T}(x)$ est très proche de la température du fluide au centre du tube, du moins juste après les tés (Fig. 6 de [18]).

1.3.2 Le dispositif expérimental

Christian Nicot, Philippe Carrière et moi-même avons construit une maquette expérimentale du MLLM, à une échelle plus grande que celle pour laquelle il est conçu pour des raisons de faisabilité technique et d'instrumentation. Le but de notre étude était dans un premier temps de valider le MLLM en tant qu'échangeur thermique et de quantifier son efficacité et nous avons repoussé à plus long terme les études de fabrication à plus petite échelle ainsi que de recherche de design plus compact (voir perspectives). Le MLLM a été fabriqué en assemblant par soudure des tubes, des coudes et des tés en cuivre de diamètre intérieur $d_h = 10\text{mm}$ (voir figure 1.4a). Le fluide testé a été dans un premier temps de l'eau à différentes températures et récemment des études avec des mélanges d'eau et de glycérol ont débuté. Le débit est mesuré par simple pesée ce qui permet d'obtenir en régime stationnaire une mesure très précise du débit nécessaire pour la fiabilité des résultats. En effet, le débit intervient à la fois dans la définition du nombre de Reynolds (ou de Péclet) mais aussi dans la définition du nombre de Nusselt (voir [18]).

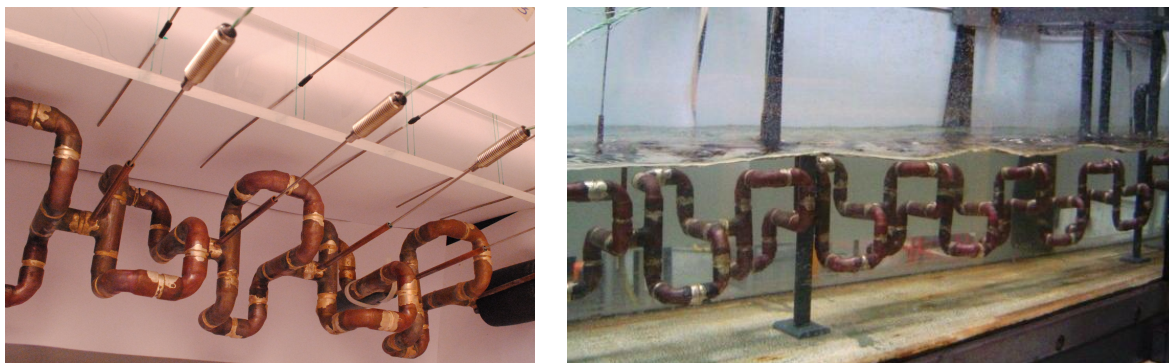


FIGURE 1.4 – Le MLLM expérimental. A gauche : les premiers éléments et ses thermocouples. A droite : le MLLM posé dans le grand canal dans lequel circule de l’eau froide à grande vitesse.

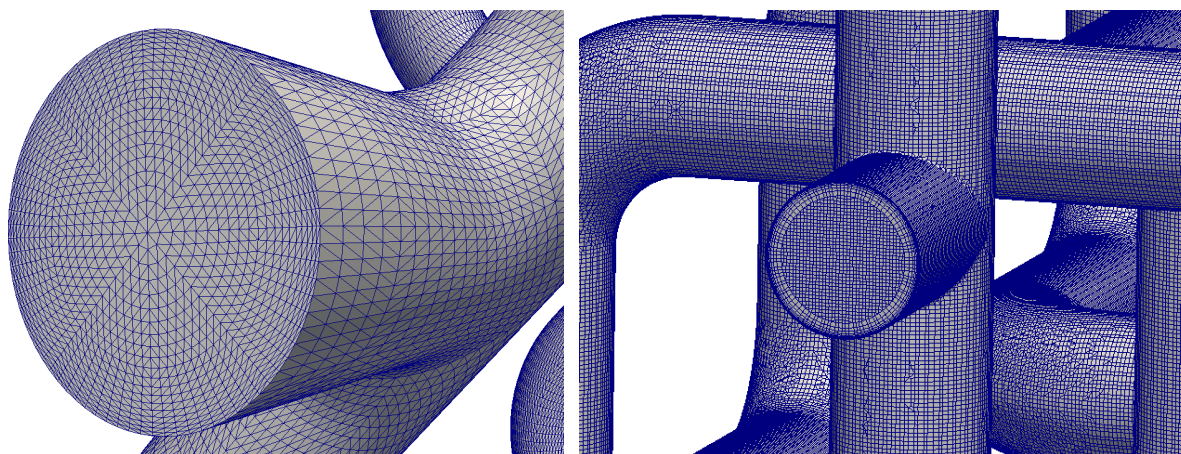


FIGURE 1.5 – Vues du maillage utilisé pour le code *Saturne* à gauche et pour le code *OpenFOAM* à droite.

Le MLLM est placé dans un canal dans lequel de l’eau ($T_0 \approx 20^\circ\text{C}$) circule à grande vitesse afin de maintenir la température des parois en cuivre à température constante et égale à celle de l’eau froide du canal. Des thermocouples sont insérés dans le tube en cuivre et placés au milieu de celui-ci, au cœur de l’écoulement intérieur de fluide chaud. Ils permettent d’obtenir l’efficacité de chaque élément du MLLM en utilisant la formule suivante :

$$\text{Nu}_i = \frac{\text{Pe } d_h}{4L} \ln \left(\frac{T_i - T_0}{T_{i+1} - T_0} \right), \quad (1.3)$$

avec T_i et T_{i+1} les températures d’entrée et de sortie de l’élément i .

1.3.3 Les simulations numériques

Les simulations numériques directes ont été développées dans un premier temps avec le code aux volumes finis *Saturne* [19; 20], puis dans un second temps avec *OpenFOAM* [21]. Les équations de Navier-Stokes et l’équation de la thermique sont résolues dans le contexte des hypothèses d’incompressibilité, stationnarité et sans effet de flottabilité (gravité négligée).

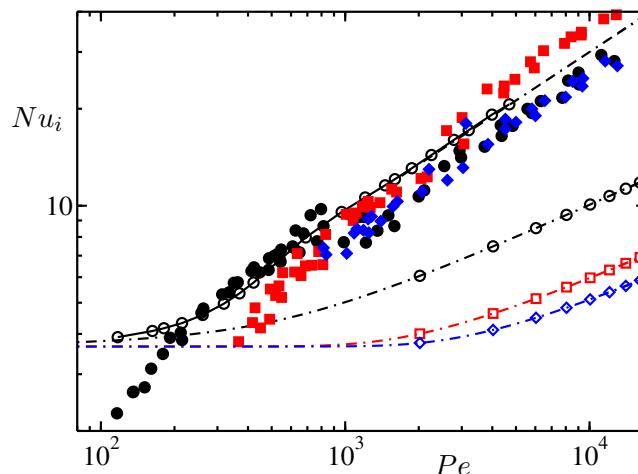


FIGURE 1.6 – Nombre de Nusselt (défini par l'équation 1.3) en fonction du nombre de Péclet pour le 1^{er} élément du MLLM (ronds), le 2nd élément (carrés) et 3^{ième} élément (losanges). Les symboles pleins correspondent aux résultats expérimentaux alors que les symboles vides représentent les simulations numériques. La solution de l'échangeur thermique de référence, le tube droit de *Graetz*, est également représentée (symboles vides et lignes discontinues).

Les maillages pour chaque code sont représentés sur la figure 1.5 et nous avons montré que pour chaque cas, la convergence de maillage sur la mesure du nombre de Nusselt est atteinte à partir de 2 à 3 millions de mailles par élément. Une validation a également été réalisée sur le problème du tube de *Graetz*. Les calculs ont été effectués grâce aux moyens de calcul parallèle du LMFA. A titre d'exemple, les simulations convergées sont restituées en 25 heures pour un maillage de 9 millions pour 3 éléments.

1.4 Les principaux résultats

Le nombre de Nusselt défini par l'équation 1.3 est tracé sur la figure 1.6 en fonction du nombre de Péclet pour les trois premiers éléments du MLLM, et avec de l'eau comme fluide intérieur utilisé. Nous observons aussi bien pour le premier élément du MLLM que pour le second élément un bon accord entre le Nusselt expérimental et celui obtenu par la simulation numérique. De plus, l'efficacité du MLLM reste constant : le Nusselt du second élément est égal (pour le numérique) ou même supérieur (pour la mesure expérimentale) à celui du premier élément. Nous avons pu également mesurer les Nusselts expérimentaux pour les troisième, quatrième et cinquième éléments du MLLM et nous avons aussi observé des valeurs très proches de celles du premier élément. Il s'agit d'un comportement thermique du MLLM bien différent de celui observé pour un tube droit (*Graetz* [17]) pour lequel l'efficacité thermique décroît très rapidement avec la distance à l'entrée. La figure 1.6 présente également la solution de *Graetz* pour un tube de longueur L égale à la longueur développée du premier élément (ronds et ligne discontinue), le Nusselt pour la deuxième partie d'un tube de longueur $2L$ (carrés et ligne discontinue) et le Nusselt pour la troisième partie d'un tube de longueur $3L$ (losanges et ligne discontinue). Ainsi, grâce aux phénomènes de séparation puis de recombinaison de l'écoulement au niveau des jonctions en T, l'advection chaotique permet d'amener du fluide chaud présent au cœur de l'écoulement vers les parois froides pour

transférer son énergie et être refroidi. Le fonctionnement thermique de chaque élément n'est pas perturbé par l'élément précédent de sorte que tous les éléments sont efficaces pour faire chuter la température moyenne du fluide. Une augmentation de la longueur de l'échangeur permet d'augmenter le transfert thermique à efficacité constante, le transfert thermique par unité de longueur ne diminuant pas avec la distance à l'entrée. En revanche, cet effet recherché dans le MLLM de séparation et de recombinaison de l'écoulement de fluide ne permet pas d'expliquer, pour le premier élément du MLLM, une efficacité du transfert thermique bien plus élevée que pour un tube de Graetz de même longueur développé. Lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement interne au mélangeur devient significatif, un second mécanisme, lui-même générateur d'advection chaotique, doit être pris en compte, notamment pour le premier élément. En effet, chaque branche de l'élément est constituée de quatre coudes alternés, auxquels il convient d'ajouter les deux jonctions en T entrant et sortant. Or l'apparition naturelle d'un écoulement secondaire sous la forme de tourbillons de Dean [15; 22] dans le plan perpendiculaire à l'écoulement principal, associée à des permutations successives de ce plan dans différentes directions spatiales conduit à des trajectoires chaotiques, au moins dans une certaine partie du domaine fluide [10; 23].

1.5 Perspectives

Des études expérimentales et numériques avec des mélanges d'eau et de glycérol ont déjà débuté en collaboration avec deux collègues du LMFA : Xavier Escriva (Maître de conférences, Univ. Claude Bernard) et Massimo Marro (Ing. Etudes, CNRS). Il s'agit d'étendre les résultats que nous avons obtenus pour l'eau à des fluides plus visqueux permettant :

(i) d'explorer les effets du nombre de Prandtl ($Pr = \nu/\kappa$). Pour l'eau, le Prandtl variant peu, les variations en Péclet ($Pe = Re Pr$) correspondent aussi à des variations en Reynolds. Si le Prandtl varie, on peut explorer et différencier les phénomènes qui dépendent plutôt du Péclet et ceux qui sont influencés par le Reynolds comme les tourbillons de Dean. Nous avons commencé à effectuer de simulations numériques à nombre de Péclet constant mais pour différents nombres de Reynolds afin de regarder l'intensification des tourbillons de Dean lorsque Re augmente mais Pe est fixe. Il s'agit aussi de mieux comprendre et quantifier l'augmentation du Nusselt en fonction de l'intensité de ces tourbillons.

(ii) La deuxième idée est de se rapprocher un peu plus des conditions pour lesquelles le MLLM est prévu d'être utilisé dans les applications micro-fluidiques. Après avoir quantifié son efficacité et le gain obtenu grâce aux phénomènes d'advection chaotique, il faudra songer à produire un design plus compact, quitte à dégrader un peu ses performances. Ces designs pourront être étudiés numériquement, mais aussi expérimentalement grâce au développement actuel d'imprimante 3D permettant de construire des géométries complexes nécessaires à la génération d'écoulements présentant des phénomènes d'advection chaotique. Il faudra également s'intéresser au refroidissement extérieur, car dans un échangeur, c'est la somme des 3 résistances thermiques qui donne la performance de l'échangeur (Eq. 1.1).

1.6 Références

- [1] J. Aubin and C. Xuereb. Microréacteurs pour l'industrie. *Techniques de l'Ingénieur*, IN94 V1, 2008.

- [2] D. Della Valle, Z. Anxionnaz, M. Cabassud, P. Carriere, J.F. Fourmigue, T. Lemenand, M. Gonzalez, M. Goroghovsky, C. Gourdon, H. Mohand, P. Paranthoen, H. Peerhossaini, F. Raynal, and P. Tochon. Extrapolation of multifunctional heat exchangers at industrial scale - the extrapolis project. 2009.
- [3] H. Aref. Stirring by chaotic advection. *J. Fluid Mech.*, 143 :1–21, 1984.
- [4] V. Toussaint, Ph Carrière, and F. Raynal. A numerical Eulerian approach to mixing by chaotic advection. *Phys. Fluids*, 7 :2587–2600, 1995.
- [5] V. Toussaint and Ph Carrière. Diffusive cut-off of fractal surfaces in chaotic mixing. *Int. J. Bif. Chaos*, 9(3) :443–454, 1999.
- [6] X. Z. Tang and A.H. Boozer. A Lagrangian analysis of advection-diffusion equation for a three dimensional chaotic flow. *Phys. Fluids*, 11(6) :1418–1434, 1999.
- [7] H. Aref and S. Balachandar. Chaotic advection in a Stokes flow. *Phys. Fluids*, 29(11) :3515–3521, 1986.
- [8] J. Chaiken, R. Chevray, M. Tabor, and Q.M. Tan. Experimental study of Lagrangian turbulence in a Stokes flow. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 408 :165–174, 1986.
- [9] W. L. Chien, H. Rising, and J.M. Ottino. Laminar mixing and chaotic mixing in several cavity flows. *J. Fluid Mech.*, 170 :355–377, 1986.
- [10] S.W. Jones, O.M. Thomas, and H. Aref. Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe. *J. Fluid Mech*, 209 :335–357, 1989.
- [11] B.L. Gray, D. Jaeggi, N.J. Mourlas, B.P. van Drieënhuizen, K.R. Williams, N.I. Maluf, and G.T.A. Kovacs. Novel interconnection technologies for integrated microfluidic systems. *Sensors Actuators*, 77 :57–65, 1999.
- [12] H. Chen and J.-S. Meiners. Topologic mixing on a microfluidic chip. *Appl. Phys. Lett.*, 84(12) :2193–2195, 2004.
- [13] Y. Liao, J. X. Song, E. Li, Y. Luo, Y. L. Shen, D. P. Chen, Y. Cheng, Z. Z. Xu, K. Sugioka, and K. Midorikawa. Rapid prototyping of three-dimensional microfluidic mixers in glass by femtosecond laser direct writing. *Lab on Chip*, 49(4) :746–749, 2012.
- [14] Ph Carrière. On a three-dimensional implementation of the baker’s map. *Phys. Fluids*, 19 :118110, 2007.
- [15] W. R. Dean. Note on the motion of fluid in a curved pipe. *Phil. Mag.*, 4(20) :208–223, 1927.
- [16] C. Chagny, C. Castelain, and H. Peerhossaini. Chaotic heat transfer for heat exchanger design and comparison with a regular regime for a large range of reynolds numbers. *Appl. Therm. Eng.*, 20 :1615–1648, 2000.
- [17] L. Graetz. Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten. *Annalen der Physik und Chemie*, 18 :79, 1883.

- [18] M. Creyssels, S. Prigent, Y. Zhou, X. Jianjin, C. Nicot, and P. Carrière. Laminar heat transfer in the “mlm” static mixer. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 81 :774–783, 2015.
- [19] F. Archambeau, N. Mehitoua, and M. Sakiz. Code_Saturne : A Finite Volume Code for the Computation of Turbulent Incompressible Flows - Industrial Applications. *Int. J. Finite Volumes*, 1 :1–62, 2004.
- [20] Code Saturne. <https://www.code-saturne.org>.
- [21] OpenFOAM. www.openfoam.org.
- [22] S. A. Berger, L. Talbot, and L.-S. Yao. Flow in curved pipes. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15 :461–512, 1983.
- [23] C. Castelain, D. Berger, P. Legentilhomme, A. Mokrani, and H. Peerhossaini. Experimental and numerical characterisation of mixing in a steady spatially chaotic flow by means of residence time distribution measurements. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43 :3687–3700, 2000.

Chapitre 2

Ventilation des tunnels

■ *D'une chose légère peut naître un grand désastre.* ■

Léonard de Vinci

Sommaire

2.1	Les enjeux pour l'ingénierie et la mécanique des fluides	15
2.2	Les maquettes expérimentales et numériques	18
2.3	Le modèle théorique pour la vitesse critique	21
2.4	Les principaux résultats	23
2.5	Perspectives	23
2.6	Références	24

2.1 Les enjeux pour l'ingénierie et la mécanique des fluides

La problématique des incendies dans les tunnels routiers constitue aujourd'hui une des pré-occupations majeures des pouvoirs publics en terme de risques et de conséquence sur les vies humaines, sur les infrastructures et sur l'activité économique associée au transit à travers les tunnels. La région Auvergne-Rhône-Alpes est particulièrement sensible à cette problématique car elle englobe à la fois des zones métropolitaines majeures et des territoires de montagne et dans les deux cas, les infrastructures souterraines de transport revêtent un caractère stratégique. Les tunnels routiers les plus connus sont ceux du Mont Blanc, du Fréjus et ceux de l'agglomération lyonnaise, mais cette problématique concerne aussi les tunnels ferroviaires et du réseau métropolitain lyonnais. Dans les prochaines années et décennies, de nouvelles infrastructures souterraines se réalisera comme le Lyon-Turin ferroviaire (dont le seul tunnel transfrontalier représentera 88 km de tubes, auxquels s'ajouteront ultérieurement les tunnels de liaison sous Belledonne et la Chartreuse), les nœud et contournement ferroviaires lyonnais ou encore la nouvelle ligne de métro E passant sous Fourvière afin de desservir l'ouest lyonnais. A l'échelle nationale, la région Parisienne dispose de très nombreux tunnels existants et en projet, notamment dans le cadre du projet du Grand Paris.

Suite aux graves accidents survenus à la fin des années 90 (tunnels du Mont-Blanc (39 décès) et du Tauern (12 décès) en 1999, tunnels de Gleinalm (5 décès) et du St. Gotthard



FIGURE 2.1 – Accidents des tunnels du Saint Gothard (à gauche, police cantonale tessinoise) et du Mont-Blanc (à droite, AP Photo/SIPA).



FIGURE 2.2 – Stratégie de ventilation longitudinale. La vitesse de ventilation dite critique correspond à la vitesse minimale pour laquelle toutes les fumées de l’incendie sont évacuées en aval.

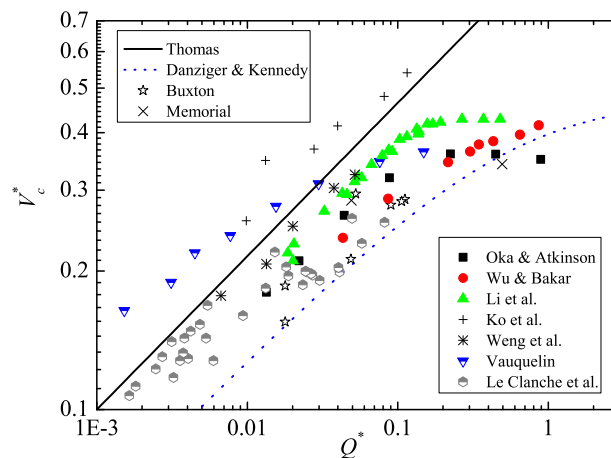


FIGURE 2.3 – Résultats de la littérature concernant les variations de la vitesse critique en fonction du flux thermique à la source en variables sans dimension (voir Jiang et al., *Fire Saf. J.*, 2018).

(11 décès) en 2001, tunnel Viamala (9 décès) en 2006, voir figure 2.1 et [vidéo de l’analyse de l’incendie du Mont-Blanc](#)), ce risque est pris en compte très en amont dans la conception des projets et les tunnels existants sont largement rénovés afin d’améliorer la sécurité en cas d’incendie. Dans les tunnels, comme pour tout espace confiné, le principal risque provient des fumées qui : (i) transportent des gaz toxiques et surtout (ii) gênent considérablement l’évacuation des usagers et l’intervention des secours par leur opacité. Les constructeurs et les responsables des tunnels doivent fournir des systèmes pouvant garantir que les fumées n’envahiront pas le tunnel en cas d’incendie et que les usagers et les secours auront la possibilité

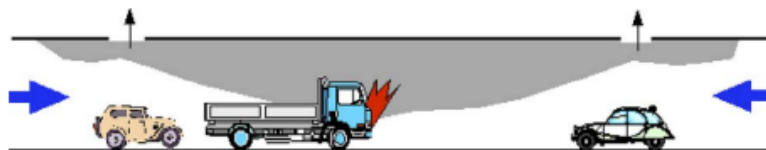


FIGURE 2.4 – Stratégie de ventilation transversale. La vitesse de ventilation critique correspond à la vitesse minimale pour laquelle toutes les fumées de l’incendie sont évacuées en aval.

soit de quitter ou d’arriver sur le lieu de l’accident.

Deux stratégies de ventilation sont alors possibles. La première stratégie est la plus simple à mettre en place. Elle est appelée la ventilation longitudinale et consiste à pousser vers l’aval toutes les fumées provenant de l’incendie afin d’éviter l’apparition d’une *nappe de retour* en amont de l’incendie (voir figure 2.2). Ainsi, les usagers peuvent évacuer la zone sinistrée en amont dans un air sain et les secours atteindre l’incendie. Les véhicules en aval n’étant pas bloqués peuvent également évacuer rapidement. Il existe une vitesse critique (ou un débit) de ventilation en dessous de laquelle la nappe de retour se forme et empêche l’évacuation des usagers. Cette vitesse critique est très importante pour les constructeurs de tunnels et les pouvoirs publics car elle conditionne le dimensionnement des ventilateurs, leur nombre et leur puissance ainsi que l’installation électrique nécessaire. Mais la vitesse critique est fonction des paramètres physiques tels que la température, la puissance et les dimensions de l’incendie et du tunnel. Elle a été étudiée de manière assez empirique ces 30 dernières années et la grande majorité des résultats a été obtenue dans des maquettes de tunnel à échelles réduites (voir [1] et notre article Jiang et al., *Fire Saf. J.*, 2018). L’incendie a été modélisé soit par des feux de bac [2; 3], soit par des brûleurs au gaz [1; 4; 5; 6] ou encore par des rejets de fluides plus légers que l’air ambiant [7; 8]. Non seulement les résultats expérimentaux sont assez dispersés (voir figure 2.3), mais, de plus, il n’y avait pas de consensus sur les définitions des vitesse (V_c^*) et puissance (Q^*) caractéristiques permettant d’adimensionner la vitesse critique et la puissance thermique du feu. Aucune modélisation théorique n’avait réussi à décrire l’évolution de la vitesse critique en fonction des paramètres physiques caractérisant la source de l’incendie et de la géométrie du tunnel. Enfin, un consensus s’était dégagé dans la littérature afin d’accepter qu’au delà d’une certaine puissance ($Q^* > 0.1$, voir figure 2.3), la vitesse critique n’augmente plus avec la puissance du feu et atteint une certaine vitesse critique dite ‘super-critique’. Aucune explication satisfaisante n’avait été donnée à l’apparition de cette vitesse super-critique.

Une deuxième stratégie de ventilation dite ‘transversale’ consiste à confiner les fumées dans un volume relativement restreint proche du foyer de l’incendie (voir figure 2.4). Cette stratégie est plus complexe et délicate à mettre en œuvre mais elle est plus efficace. Les études la concernant sont aussi beaucoup moins nombreuses que pour la ventilation longitudinale (voir Chaabat et al., *Build. Environ.*, 2020). Deux enjeux techniques majeurs sont à signaler. Le premier est lié au coût d’installation des trappes dans la voûte du tunnel. Les constructeurs et exploitants sont à la recherche d’études permettant de donner des recommandations sur le nombre, la taille et la disposition de ces trappes ainsi que sur les débits de ventilation nécessaires pour le confinement des fumées en fonction, comme pour la ventilation longitudinale, des paramètres physiques de la source de l’incendie et de la géométrie du tunnel. Un deuxième enjeu majeur correspond au fait que pour la ventilation transversale, des débits de ventilation trop grands peuvent être contre-productifs pour la sécurité. En effet, les fumées chaudes ont

naturellement tendance à monter et à stagner au niveau de la voûte du tunnel, ce qui permet aux usagers et pompiers d'être moins 'enfumés'. Mais, pour des vitesses de ventilation trop grandes, on assiste à un phénomène de 'dé-stratification' de cette couche de fumées chaudes et les fumées envahissent l'ensemble du tunnel y compris près du sol.

En résumé, la problématique majeure pour la sécurité des tunnels est de connaître les valeurs des vitesses de ventilation minimales nécessaires au blocage des fumées. Il s'agit de la vitesse critique dans le cas de la ventilation longitudinale et de la vitesse de confinement pour la ventilation transversale, sachant que dans ce dernier cas, une deuxième vitesse caractéristique est à déterminer, c'est la vitesse de dé-stratification qui a lieu lorsque la vitesse de ventilation est bien plus grande que la vitesse de confinement. Ces vitesses caractéristiques dépendent bien entendu des paramètres physiques du foyer de l'incendie et de la géométrie du tunnel. D'un point de vue de la mécanique des fluides, les écoulements que nous avons investigués correspondent aux écoulements turbulents, très répandus mais complexes à modéliser, de jets ou panaches ascendants soumis à un écoulement transverse [9; 10; 11; 12; 13; 14] (voir figure 2.6). Il s'agit de comprendre les effets du confinement lié aux parois du tunnel sur ces écoulements.

2.2 Les maquettes expérimentales et numériques

Modélisation du foyer de l'incendie

Afin de se concentrer sur les écoulements engendrés par l'interaction entre la source chaude et l'écoulement longitudinal de ventilation (et aussi car le LMFA n'a ni les compétences, ni le savoir faire expérimental dans le domaine de la combustion), nous avons suivi l'idée originale de l'équipe d'Olivier Vauquelin (IUSTI, Marseille) de modéliser l'incendie par un jet de fluide moins dense que l'air [7; 8]. Ce modèle de foyer d'incendie permet de s'affranchir de toute modélisation de la combustion [15] et nous avons montré qu'il y a un bon accord entre ce modèle de feu et un feu réel pour des feux dont les flammes ne dépassent pas la moitié de la hauteur du tunnel (voir Jiang et al., *Fire Saf. J.*, 2018). Deux systèmes de production de rejets ont été développés (voir les figures 2.5 a et b). Le premier utilise un réchauffeur électrique de puissance 15 kW maximum. Il s'agit d'un tube dans lequel peut circuler un écoulement d'air avec une grande surface d'échange entre les résistances électriques et l'air. Un ventilateur permet d'aspirer l'air ambiant et de pousser l'air dans ce tube puis dans le tunnel (Fig. 2.5a). Des grilles et du nid d'abeille ont été placés à la sortie du réchauffeur afin de rectifier l'écoulement en sortie. En plus des jets et panaches chauds, une deuxième source a été construite afin de produire des rejets de mélange d'air et d'hélium. Réaliser des expériences avec des jets chauds et des jets isothermes a permis :

- d'étudier les effets des pertes thermiques et de rayonnement sur la vitesse critique de ventilation,
- d'explorer une plus grande gamme de paramètres physiques de la source du rejet, tels que le rapport ρ_s/ρ_0 des masses volumiques du rejet et de l'air ambiant (effets dits non-Boussinesq) et le nombre de Richardson de la source qui caractérise le rapport entre le flux de flottabilité et le flux de quantité de mouvement.

Pour les panaches, le nombre de Richardson est défini de la manière suivante :

$$\Gamma_s = \frac{5}{8\alpha} \frac{(\rho_0 - \rho_s)gb_s}{\rho_0 w_s^2}, \quad (2.1)$$

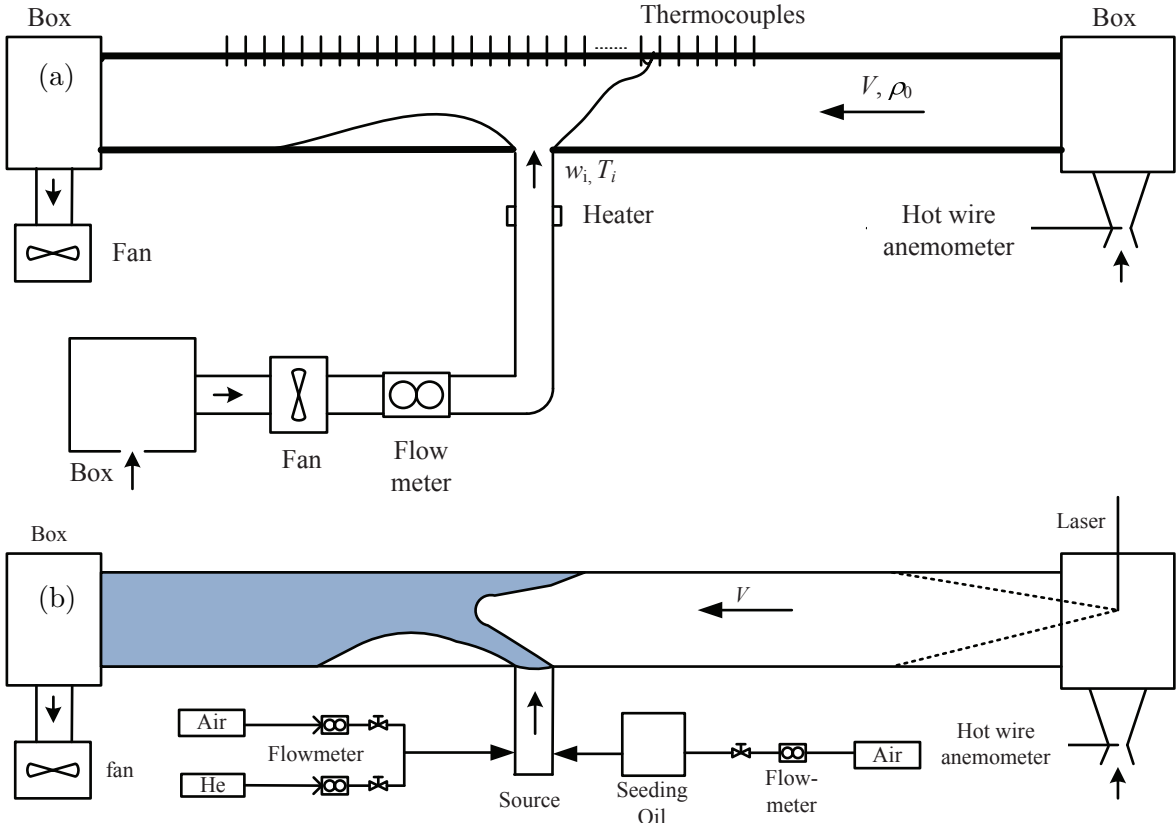


FIGURE 2.5 – Schémas des maquettes expérimentales. Modèles thermique en (a) et isotherme (hélium) en (b).

avec b_s et w_s le rayon et la vitesse caractéristiques de la source du rejet. L'ajout du coefficient $\frac{5}{8\alpha}$ permet d'obtenir la valeur $\Gamma = 1$ comme limite entre les panaches forcés qui sont dominés par les effets d'inertie ($\Gamma < 1$) et les panaches dits paresseux pour lesquels la flottabilité domine ($\Gamma > 1$). Lorsque $\Gamma = 1$, le panache n'évolue plus. Pour un panache forcé, $\Gamma(z)$ augmente avec la distance à la source (z) et $\Gamma(z) \rightarrow 1$ lorsque $z \rightarrow \infty$, tandis que pour un panache paresseux, $\Gamma(z)$ tend rapidement vers 1 lorsque z augmente.

α est le coefficient d'entraînement de l'air ambiant par le panache. Il est défini dans le chapitre 3 (Eq. 3.1) et il est l'objet des études présentées dans le chapitre 3. Dans ce chapitre 2 consacré aux panaches en milieu confiné et soumis à un écoulement transverse, l'étude théorique que nous avons réalisé (Jiang et al., *J. Fluid Mech.*, 2019) a montré que les petites variations de α en fonction des propriétés du panache (flottabilité et masse volumique) influencent très peu les valeurs de vitesse critique obtenue. C'est pour cette raison que α est pris constant dans ce chapitre ($\alpha = 0.12$). En d'autres termes, les incertitudes qui découlent des expériences et des simulations en tunnel sont assez faibles afin de pouvoir obtenir les variations de la vitesse critique en fonction des paramètres du panache. En revanche, étudier les variations de α grâce à ces expériences demanderait des incertitudes beaucoup plus faibles et pour l'instant inaccessibles. D'ailleurs, dans le chapitre 3, nous présenterons uniquement des simulations numériques dans des conditions très particulières afin de pouvoir observer les variations de α avec le rapport des masses volumiques (ρ_s/ρ_0).

La maquette expérimentale du tunnel

Une conduite de 9 m de long et de section rectangulaire $18 \times 36 \text{ cm}^2$ a été construite au LMFA afin de reproduire à l'échelle 1-25 le tunnel du Mont-Blanc. Cette maquette peut également être inclinée afin d'étudier les effets induits par une pente (le tunnel de Fourvière présente par exemple une pente prononcée). Elle a été en premier lieu utilisée pour les études de ventilation dite longitudinale (thèses de Julien Le CLanche et Lei Jiang). Un ventilateur ainsi que des caissons d'homogénéisation ont été installés afin de créer un écoulement contrôlé le long de l'axe de la conduite. Pour la thèse de Fateh Chaabat, deux trappes ont été ajoutées au plafond de la conduite, longitudinalement placées à gauche et à droite de la source, afin de reproduire la ventilation transverse. La maquette a été instrumentée afin de pouvoir imposer et mesurer les différents débits de ventilation et extraction de fluides. Ainsi les conditions aux limites sont connues dans les expériences. Enfin, les mesures ont toujours été réalisées en régime stationnaire. En utilisant la source d'hélium, le régime stationnaire est très vite atteint (quelques s). En revanche, à cause des pertes thermiques, le régime permanent nécessite des temps d'expérience assez longs, pouvant aller au-delà de la dizaine de minutes.

Pour les rejets chauds, les températures à l'intérieur de la maquette ont été mesurées par des thermocouples, permettant ainsi de déterminer la position de la nappe de retour. Cette nappe se forme au niveau du plafond du tunnel lorsque la vitesse de ventilation est plus faible que la vitesse critique. Elle disparaît lorsque $V > V_c$. Pour la ventilation transverse, deux nappes de retour se forment lorsque la vitesse d'extraction au niveau des trappes est inférieure à la vitesse appelée de confinement. Au-delà de la vitesse de confinement, les nappes de retour disparaissent. Cependant, si la vitesse de ventilation est trop grande, une dé-stratification de l'écoulement apparaît et le fluide léger située au plafond se mélange fortement avec le fluide plus lourd situé à l'origine au sol.

Pour la source d'hélium, les mesures ont été majoritairement visuelles grâce à une nappe laser et un ensemencement de fines gouttelettes d'huile. Les figures 2.6a-d montrent des images obtenues par photographie de l'écoulement dans la condition de vitesse critique (ventilation longitudinale) pour des rejets forcés et paresseux.

Enfin, nous avons également étudié les effets de l'encombrement du tunnel en présence de voitures et camions en ajoutant des blocs de différentes tailles au sol. Des barrières placées dans le sens transversal et au plafond ont également été ajoutées afin de proposer des solutions afin d'obtenir des vitesses critiques et de confinement plus faibles. En effet, l'installation de ventilateurs puissants peut soit être très coûteux, soit difficile selon l'espace disponible, et des méthodes permettant de réduire ces vitesses sont recherchées.

Les simulations numériques

En parallèle de ces travaux expérimentaux, des simulations numériques LES ont été développées. Le logiciel **Fire Dynamics Simulator** (FDS) permet de modéliser l'incendie en tunnel et les ventilations, en adoptant plusieurs modèles de source de feu : combustion mais aussi rejets de fluides légers. Nous avons par exemple comparé les résultats expérimentaux aux résultats numériques et nous avons par exemple montré que modéliser le feu par des panaches de fluide léger est raisonnable tant que la hauteur des flammes ne dépasse pas la moitié de la hauteur du tunnel.

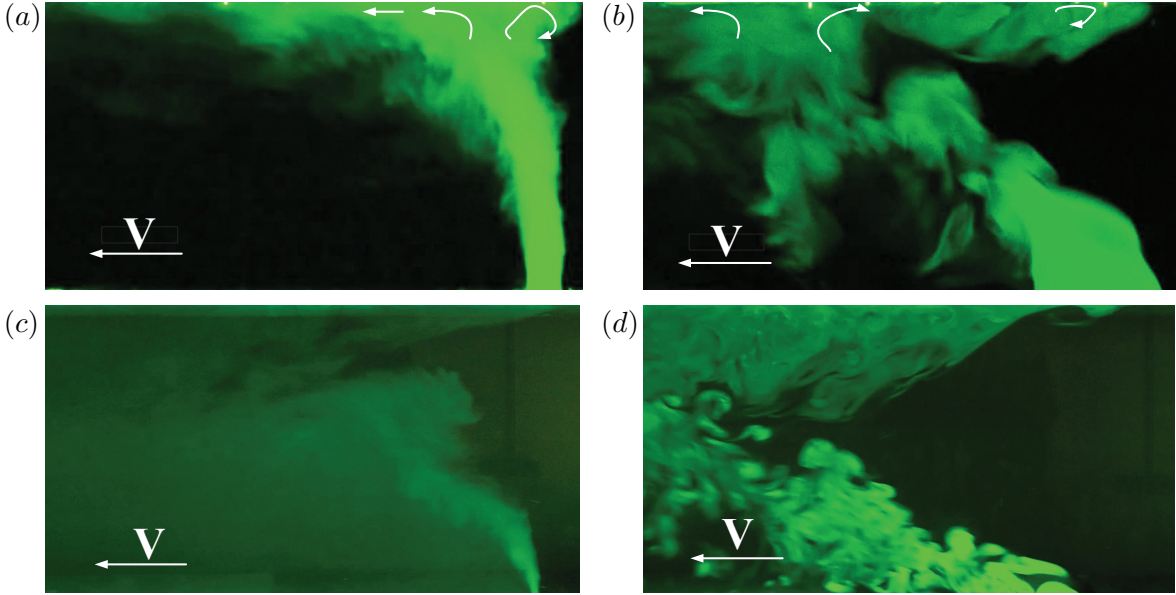


FIGURE 2.6 – Visualisations du rejet soumis à une ventilation longitudinale lorsque $V = V_c$. En (a), le panache est forcé $\Gamma_s < 1$ tandis que en (b) il est paresseux $\Gamma_s > 1$. En (c) et (d), les panaches sont produits par une source 2D (rejet le long d'une ligne transverse à l'axe du tunnel).

2.3 Le modèle théorique pour la vitesse critique

En parallèle aux mesures expérimentales et numériques de la vitesse critique en fonction des paramètres de la source du panache, nous avons développé un modèle théorique décrivant l'évolution du panache qui est soumis à l'écoulement transverse et au confinement du tunnel (voir la figure 2.7). En suivant les approches classiques de Morton (1956) [16], les équations de conservation des flux de masse, de quantité de mouvement et de flottabilité s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{d}{dy}(\rho w b^2) = 2\rho_0 \alpha w b, \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dy}(\rho w^2 b^2) = (\rho_0 - \rho) g b^2, \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dy} [(\rho_0 - \rho) w b^2] = 0. \quad (2.4)$$

L'une des principales hypothèses du modèle est que le panache n'est pas très incliné lorsque la vitesse de ventilation est égale à la vitesse critique, ce qui permet de négliger l'angle d'inclinaison θ (voir Fig. 2.7). Cette hypothèse est assez bien vérifiée pour les panaches forcés, mais beaucoup moins pour les panaches paresseux.

La condition critique est déterminée par un équilibre entre la pression exercée par la ventilation ($\rho_0 V_c^2$) et la pression ou le flux de quantité de mouvement provenant du panache après impact contre le plafond ($\rho_H u_H^2$). Sachant que $u_H \propto w_H$, l'équation qui détermine la vitesse critique est la suivante :

$$\frac{V_c}{w_i} = C \left(\frac{\rho_H}{\rho_0} \right)^{1/2} \frac{w_H}{w_i}, \quad (2.5)$$

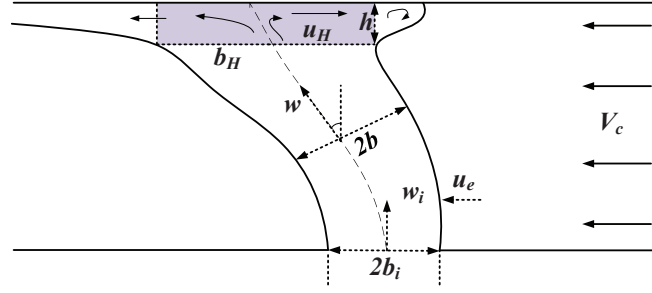


FIGURE 2.7 – Modèle théorique de panache soumis à un écoulement transverse dans un milieu confiné. La zone grisée correspond à la zone d'impact du panache contre le plafond du tunnel.

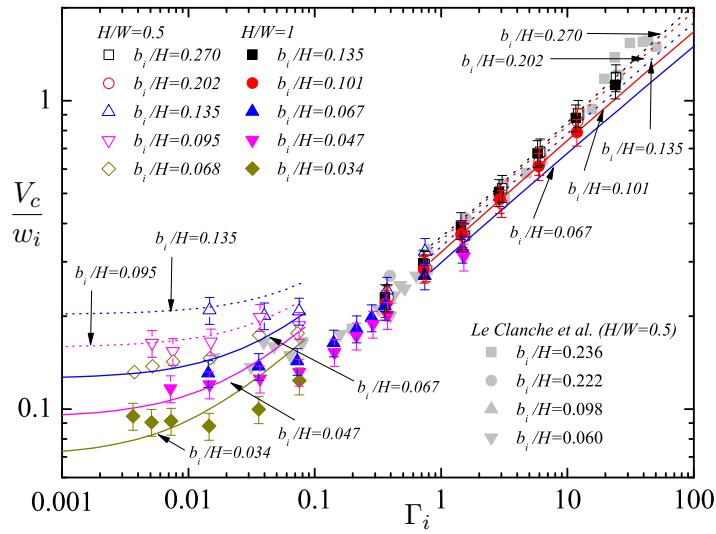


FIGURE 2.8 – La vitesse critique adimensionnée par la vitesse à la source du panache en fonction du nombre de Richardson à la source. Le rapport des masses volumiques à la source est constant et égal à $\rho_i/\rho_0 = 0.7$. Les symboles représentent les résultats expérimentaux obtenus pour différents rapports b_i/H (H est la hauteur du tunnel) et les lignes correspondent aux prédictions théoriques.

C est le seul paramètre ajustable du modèle.

En résolvant les équations (2.2)-(2.5), la vitesse critique est prédite. Des solutions quasi-analytiques peuvent même être obtenues en suivant les résolutions données par [17; 18; 19] (voir Jiang et al., *J. Fluid Mech.*, 2019).

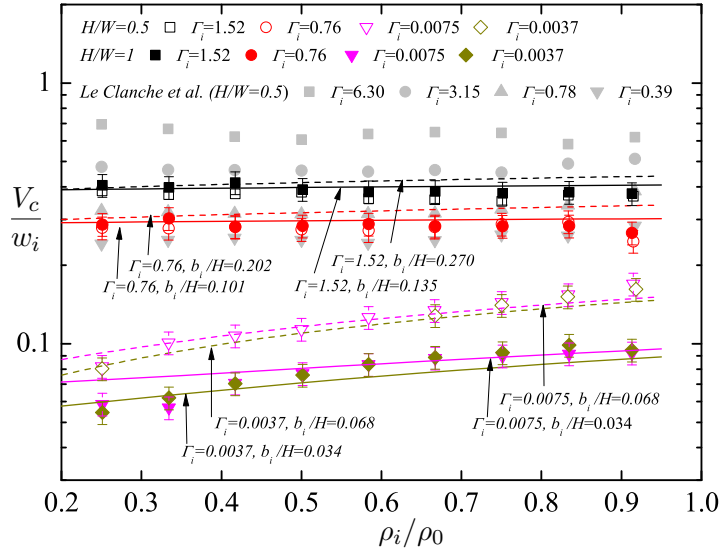


FIGURE 2.9 – La vitesse critique adimensionnée par la vitesse à la source du panache en fonction du rapport des masses volumiques ρ_i/ρ_0 pour différents Γ_i . Symboles : résultats expérimentaux. Lignes : modèle théorique.

2.4 Les principaux résultats

La figure 2.8 montre le bon accord entre les résultats expérimentaux et les prédictions théoriques que nous avons obtenus. L'évolution de V_c/w_i en fonction du nombre de Richardson à la source est très bien prédite en utilisant pour le paramètre ajustable C , deux valeurs différentes selon que le panache est forcé ($\Gamma_i < 1$), $C_F = 0.70$ ou paresseux ($\Gamma_i > 1$) $C_L = 0.44$. Il n'est pas du tout étonnant que le modèle théorique nécessite des valeurs différentes de C pour les panaches forcés et paresseux car, comme observé sur les figures 2.6a-d, l'évolution du panache dans le tunnel est différente selon le caractère du panache. Néanmoins, le fait d'obtenir 2 valeurs proches de 1 est un résultat très intéressant et valide le traitement théorique du problème. L'évolution de la vitesse critique en fonction du rapport des masses volumiques entre la source du panache et l'air ambiant (ρ_i/ρ_0) est également bien décrite par le modèle théorique. (voir Fig. 2.9).

2.5 Perspectives

Concernant la ventilation longitudinale, nous avons fourni des mesures précises de la vitesse critique en fonction des paramètres physiques de la source ainsi qu'un modèle théorique relativement simple permettant d'expliquer ses variations. D'autres phénomènes restent sans mesure précise et mal compris. Lorsque la vitesse de ventilation est plus faible que la vitesse critique, une nappe dite de retour se forme au plafond du tunnel et envahit d'autant plus le tunnel que la vitesse est faible. Pour la sécurité des usagers et des secours, cette nappe de retour n'est pas si gênante si 2 conditions sont remplies :

- L'extension longitudinale de la nappe doit être raisonnable, sinon par diffusion, les fumées envahissent la section entière du tunnel.
- La nappe doit rester stratifiée pour que les fumées légères restent au plafond.

Des études expérimentales et numériques sont nécessaires afin d'évaluer les propriétés

de cette nappe (longueur, épaisseur, profils de température) en fonction des paramètres de la source et de la vitesse de ventilation. Des modèles théoriques sont peut-être envisageables même si le point d'arrêt de la nappe est à mon avis difficile à prédire et représente un processus physique compliqué à modéliser.

2.6 Références

- [1] Y Wu and M. Z. A Bakar. Control of smoke flow in tunnel fires using longitudinal ventilation systems - a study of the critical velocity. *Fire Saf. J.*, 35(4) :363–390, November 2000.
- [2] G.H. Ko, S.R. Kim, and H.S. Ryou. An experimental study on the effect of slope on the critical velocity in tunnel fires. *J Fire Sci.*, 28 :27–47, January 2010.
- [3] M. C. Weng, X. L. Lu, F. Liu, X. P. Shi, and L. X. Yu. Prediction of backlayering length and critical velocity in metro tunnel fires. *Tunnel. Underg. Space Technol.*, 47 :64–72, March 2015.
- [4] P. H. Thomas. The movement of smoke in horizontal passages against an air flow. *Fire Research Note 723*, 723 :Fire Research Station, 1968.
- [5] Y. Oka and G. T. Atkinson. Control of smoke flow in tunnel fires. *Fire Saf. J.*, 25 :305–322, November 1995.
- [6] Y. Z. Li, B. Lei, and H. Ingason. Study of critical velocity and backlayering length in longitudinally ventilated tunnel fires. *Fire Saf. J.*, 45 :361–370, November 2010.
- [7] O. Megret and O. Vauquelin. A model to evaluate tunnel fire characteristics. *Fire Saf. J.*, 34 :393–401, June 2000.
- [8] O. Vauquelin. Parametrical study of the back flow occurrence in case of a buoyant release into a rectangular channel. *Exp. Therm Fluid Sci.*, 29(6) :725–731, July 2005.
- [9] D. P. Hoult, J. A. Fay, and L. J. Forney. A theory of plume rise compared with field observation. *J. Air Pollut. Control Assoc.*, 19 :585–590, 1969.
- [10] T.A. Hewett, J.A. Fay, and D.P. Hoult. Laboratory experiments of smokestack plumes in a stable atmosphere. *Atmos. Environ.*, 5(9) :767–789, 1971.
- [11] A. G. Robins, D. D. Apsley, D. J. Carruthers, C. A. McHugh, and S. J. Dyster. Plume rise model specification. *Technical report, University of Surrey, National Power and CERC*, 2009.
- [12] B. J. Devenish, G. G. Rooney, H. N. Webster, and D. J. Thomson. The entrainment rate for buoyant plumes in a crossflow. *Bound-Lay Meteorol*, 134 :411–439, 2010.
- [13] M. Marro, P. Salizzoni, F.X. Cierco, I. Korsakissok, E. Danzi, and L. Soulhac. Plume rise and spread in buoyant releases from elevated sources in the lower atmosphere. *Environ Fluid Mech.*, 55 :50–57, 2014.

- [14] M. J. Woodhouse, A. J. Hogg, J. C. Phillips, and R. S. J. Sparks. Interaction between volcanic plumes and wind during the 2010 Eyjafjallajakull eruption, Iceland. *J. Geophys. Res. : Solid Earth*, 118(1) :92–109, 2013.
- [15] O. Vauquelin. Experimental simulations of fire-induced smoke control in tunnels using a helium reduced scale model : principle, limitations, results and future. *Tunn. Undergr. Sp. Technol.*, 23 :171–178, 2008.
- [16] B. R. Morton, G. Taylor, and J. S. Turner. Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. *Proc. Roy. Soc. London A*, 234 :1–23, 1956.
- [17] G. R. Hunt and N. B. Kaye. Lazy plumes. *J. Fluid Mech.*, 533 :329–338, 2005.
- [18] G. Michaux and O. Vauquelin. Solutions for turbulent buoyant plumes rising from circular sources. *Phys. Fluids*, 20 :066601, June 2008.
- [19] T. S. Van Den Bremer and G. R. Hunt. Universal solutions for Boussinesq and non-Boussinesq plumes. *J. Fluid Mech.*, 644 :165–192, February 2010.

Chapitre 3

Jets dits non-Boussinesq

■ *Détourne-toi des préceptes de ceux qui spéculent sur le monde mais dont les raisons ne sont pas confirmées par l'expérience.* ■

Léonard de Vinci

Sommaire

3.1	Les enjeux pour l'ingénierie/environnement et la mécanique des fluides	27
3.2	Les expériences de Ricou & Spalding	29
3.3	Les simulations LES et le calcul du coefficient d'entraînement	32
3.4	Le modèle théorique	34
3.5	Les principaux résultats	38
3.6	Perspectives	40
3.7	Références	40

3.1 Les enjeux pour l'ingénierie/environnement et la mécanique des fluides

Les jets sont des outils académiques qui permettent de modéliser le comportement plus complexe de rejets de gaz par exemple toxiques en espace confiné ou directement dans l'atmosphère (voir Fig. 3.1). En fonction des quantités de matière en jeu, les effets de ces rejets peuvent affecter des communautés locales ou bien des pays ou continents dans leur globalité, l'éruption du volcan Eyjafjallajökull en Islande et les problèmes rencontrés à la centrale nucléaire de Fukushima au Japon sont deux exemples de rejets dans l'atmosphère qui ont marqué les esprits. Les organismes de contrôle des industries et les autorités publiques sont demandeuses d'informations sur l'étalement de la contamination induite par ces rejets, de façon à définir des seuils de risque sanitaire.

La littérature sur les jets est assez vaste mais généralement les études expérimentales et numériques concernent uniquement les jets de fluide de densité proche de la densité du fluide environnant, de façon à simplifier les équations de la dynamique dans le cadre de



FIGURE 3.1 – Exemples de jets/panaches se développant dans l’atmosphère. A gauche : panache produit par l’éruption du volcan Eyjafjöll (Islande) en avril 2010 (<https://www.maxisciences.com/>). A droite : panache issu de l’incendie de produits pour piscine à la barrière de péage de la Gravelle le 1^{er} juin 2020 (photo : A. Berthelot).

l’approximation bien connue de Boussinesq. Le champ de vitesse est alors à divergence nulle et, dans les bilans de quantité de mouvement et d’énergie interne, les variations de densité du fluide sont considérées comme non nulles uniquement pour le terme de flottabilité. La plupart des descriptions théoriques ont pour origine les équations intégrales proposées par Morton et al. [1] dans lesquelles le taux de mélange entre le jet et l’environnement est modélisé par un coefficient d’entraînement constant :

$$u_e = \alpha w_m, \quad (3.1)$$

la vitesse d’entraînement de l’air ambiant par le jet (u_e) étant définie à partir de l’augmentation du flux de masse du jet (G) au fur et à mesure de son développement :

$$\frac{dG}{dz} = 2\rho_0 r_m u_e = 2\alpha\rho_0 r_m w_m, \quad (3.2)$$

w_m et r_m sont respectivement la vitesse verticale et le rayon du jet moyennés sur sa section transverse, ρ_0 est la masse volumique de l’air ambiant (voir la figure 3.2 pour une description du jet et des grandeurs physiques).

Ce modèle représente encore un outil très puissant pour l’analyse quantitative de phénomènes associés à la dynamique de panaches, tels que la sur-hauteur d’un panache issu d’une cheminée industrielle dans un écoulement atmosphérique transverse, la dynamique de panaches en collision [2; 3; 4] l’évolution de la stratification dans un espace confiné [5] l’évolution de l’interface de densité créée par une ou plusieurs source de chaleur placées dans un espace confiné et ventilé naturellement [6]. La principale limite à ce modèle provient de la variabilité du coefficient d’entraînement obtenue expérimentalement (entre 0.6 et 1.3).

Le manque de données expérimentales concernant les jets non-Boussinesq provient de la difficulté à obtenir des mesures de vitesse et de densité fiables à partir des techniques classiques à cause de la présence de forts gradients de densité ou de température. Les premières expériences ont été menées par Ricou et Spalding [7] (R&S) puis il faut attendre la fin des années 90 pour que le sujet revienne à la mode. Les travaux théoriques des 20 dernières années [8; 9; 10] s’appuient sur les résultats expérimentaux de R&S et adoptent un modèle d’entraînement modifié dans lequel le coefficient d’entraînement est proportionnel à la racine

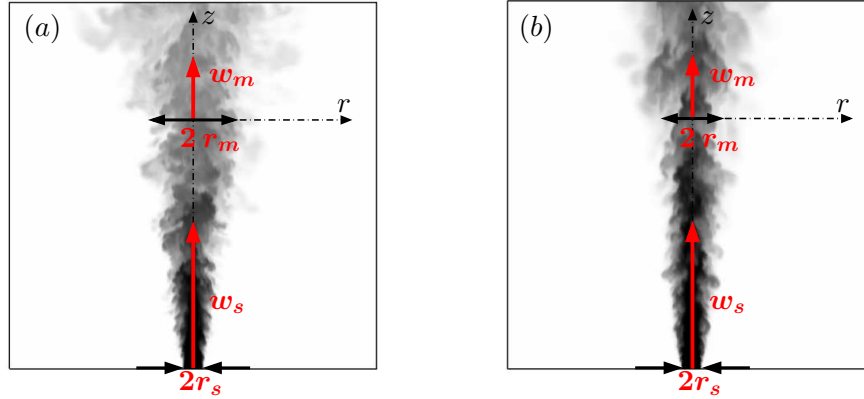


FIGURE 3.2 – Résultats des simulations numériques LES (Salizzoni et al., *soumis à J. Fluid. Mech.*) et présentation des différentes grandeurs physiques caractérisant le jet. Les rayon ($r_m = (QG/M)^{1/2}$), vitesse ($w_m = M/G$) et masse volumique ($\rho_m = G/Q$) caractéristiques du jet à une distance z de la source sont définis à partir des grandeurs globales flux de volume (Q), masse (G) et quantité de mouvement (M). r_s , w_s et ρ_s sont respectivement le rayon, la vitesse et la masse volumique du jet à la source. A gauche : $\rho_s/\rho_0 = 0.2$ et la couleur blanche correspond à $\rho/\rho_0 = 1$, et la couleur noire à $\rho/\rho_0 = 0.2$. A droite : $\rho_s/\rho_0 = 5$ et la couleur blanche correspond à $\rho_0/\rho = 1$ et la couleur noire à $\rho_0/\rho = 0.2$.

carré du rapport des densités du fluide flottant et environnant :

$$\alpha = \alpha_j \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Le taux d'entraînement prédit par ce modèle est donc réduit dès que la densité du fluide injecté diminue, ce qui est bien résumé par Morton ([11]) : 'the rate of entrainment in very hot plumes is substantially less than that into cool plumes'. Il est intéressant de remarquer que cette conclusion impliquerait que la dynamique des panaches chauds serait antithétique de celle des jets chauds. En effet, malgré une certaine dispersion des résultats, la plupart des auteurs conviennent que pour les jets le taux de mélange entre les deux fluides augmente si on diminue la densité du fluide injecté : 'the lighter the gas, the better it mixes' ([12; 13; 14; 15; 16]). L'origine physique de cette dépendance du coefficient d'entraînement avec le rapport de densité n'est pas claire et repose de plus essentiellement sur l'interprétation des résultats expérimentaux de R&S et peut même sembler contraire aux études montrant que le mélange entre les deux fluides est amplifiée pour les jets légers [13; 17].

3.2 Les expériences de Ricou & Spalding

En 1961, R&S [7] ont conçu un montage expérimental très astucieux afin de pouvoir mesurer le coefficient d'entraînement α de l'air ambiant par des jets et panaches d'air, de CO₂ et d'hélium. Les difficultés expérimentales proviennent du caractère ouvert de ces écoulements. Selon la définition de α (3.2), le flux de masse ($G = \rho_m r_m^2 w_m$) doit être mesuré pour différentes distances à la source du jet. Mais pour un écoulement ouvert, cette mesure implique une mesure précise des profils de vitesse et de densité dans une section transverse jusqu'à une distance ∞ par rapport à l'axe central du jet. Les simulations numériques présentent la même difficulté (voir section 3.3) et un travail important doit être réalisé afin que les conditions aux

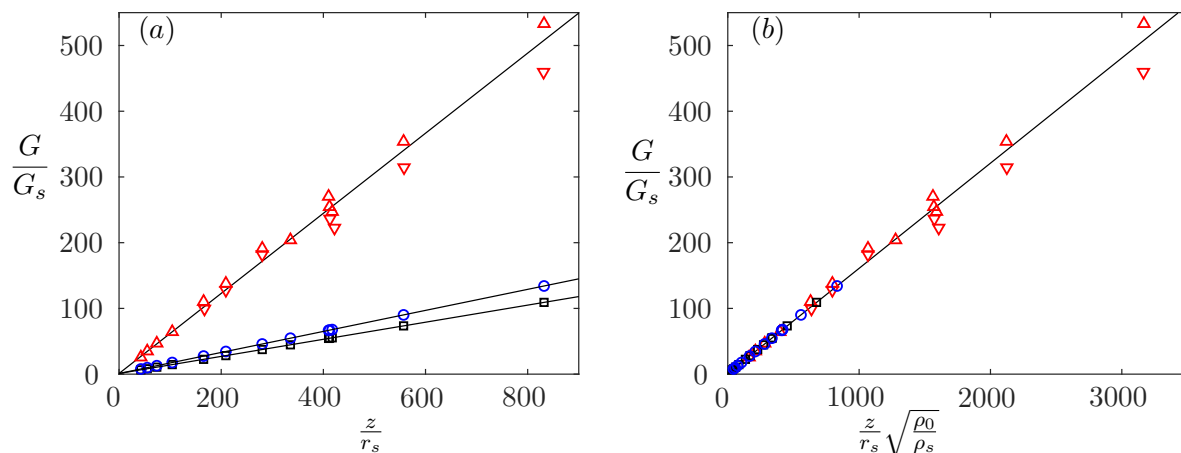


FIGURE 3.3 – Résultats des expériences de R&S ([7]). (a) Flux de masse en fonction de la distance à la source, en variables sans dimension, pour un jet d'air (ronds bleus, $\rho_s/\rho_0 = 1$), un jet de CO2 (carrés noirs, $\rho_s/\rho_0 = 1.5$) et un jet d'hélium (triangles rouges, $\rho_s/\rho_0 = 0.07$) dans l'air ambiant. Les droites sont des régressions linéaires (3.6). (b) Flux de masse en fonction de la variable $\frac{z}{r_s} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_s}}$.

limites n'influencent pas le calcul de α . Dans les expériences de R&S, le jet s'établit dans un espace confiné, certes grand par rapport à son rayon initial. L'astuce expérimentale est de choisir des parois latérales poreuses et de pouvoir imposer un deuxième écoulement de l'autre côté de ces parois qui confinent le jet. En ajustant et en mesurant le débit de ce deuxième écoulement d'air, R&S ont imposé un gradient axial de pression nul, ce qui garantit que le jet expérimental est bien dans les mêmes conditions qu'un jet se développant dans un milieu infini.

Pour démontrer que $\alpha \propto (\rho_m/\rho_0)^{1/2}$ (3.3), R&S montre d'abord ce que cette dépendance de α avec la masse volumique implique pour un jet (c'est à dire dans le cas où la gravité peut être négligée). En utilisant (3.3), l'équation de conservation de la masse (3.2) devient :

$$\frac{dG}{dz} = 2\alpha_j \rho_0^{1/2} \rho_m^{1/2} r_m w_m, \quad (3.4)$$

En absence de gravité, le flux de quantité de mouvement est constant : $M(z) = \rho_m r_m^2 w_m^2 = \rho_s r_s^2 w_s^2 = M_s$, et (3.4) devient :

$$\frac{dG}{dz} = 2\alpha_j \rho_0^{1/2} M_s^{1/2}, \quad (3.5)$$

ce qui montre que dans le cas où $\alpha \propto (\rho_m/\rho_0)^{1/2}$, le flux de masse est proportionnel à la distance à la source. L'intégration de (3.5) entre la source ($G = G_s$ à $z = 0$) et une distance z donne :

$$\frac{G}{G_s} = 1 + 2\alpha_j \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} \right)^{1/2} \frac{z}{r_s}, \quad (3.6)$$

R&S et de nombreux auteurs de la littérature s'appuient sur cette équation simple et sur les résultats expérimentaux montrés sur la figure 3.3 afin d'affirmer que le coefficient d'entraînement varie bien comme la racine carré du rapport de densité (3.3).

Les limites des expériences de R&S

La figure 3.3 montre que R&S ont mesuré les flux de masse à des distances très grandes de la source des jets. Pour $z/r_s \gg 1$, la masse volumique caractéristique du jet doit être très proche de celle de l'air ambiant : $\rho_m(z)/\rho_0 \approx 1$ (voir figure 3.4a). Dans ces conditions expérimentales, les effets non-Boussinesq devraient donc être assez faibles et difficile à mesurer. En adoptant une loi de puissance plus générale pour le coefficient d'entraînement :

$$\alpha = \alpha_j \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\beta, \quad (3.7)$$

il est possible de calculer le flux de masse $G(z)$ et $\rho_m(z)$ pour différents exposants β . Nous avons testé 3 β engendrant des comportements bien différents pour α : $\beta_{R\&S} = 1/2$ (α augmente avec le rapport de densité), $\beta = 0$ (aucun effet de ρ_m/ρ_0) et $\beta = -1/2$ (α diminue avec le rapport de densité). L'avantage de l'exposant proposé par R&S est qu'il ne nécessite aucune équation supplémentaire afin d'obtenir le flux de masse en fonction de z et G est même proportionnel à z . Pour $\beta \neq 1/2$, la solution des équations n'est plus analytique. En utilisant (3.7), l'équation de conservation de la masse (3.2) devient :

$$\frac{r_s}{G_s} \frac{dG}{dz} = 2\alpha_j \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_m}{\rho_0} \right)^{\beta-1/2}. \quad (3.8)$$

L'équation de conservation du flux de flottabilité s'écrit de la manière suivante :

$$(\rho_0 - \rho_m)r_m^2 w_m = (\rho_0 - \rho_s)r_s^2 w_s. \quad (3.9)$$

Comme $\frac{G}{G_s} = \frac{\rho_m r_m^2 w_m}{\rho_s r_s^2 w_s}$, (3.9) devient :

$$\frac{\rho_m}{\rho_0} = \frac{1}{1 + \frac{G_s}{G} \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} - 1 \right)}. \quad (3.10)$$

En utilisant (3.8) et (3.10), l'équation différentielle pour $G(z)$ est obtenue :

$$\frac{r_s}{G_s} \frac{dG}{dz} = 2\alpha_j \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{G_s}{G} \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} - 1 \right) \right]^{1/2-\beta}. \quad (3.11)$$

(3.11) devient bien (3.6) lorsque $\beta = \beta_{R\&S} = 1/2$. Les solutions de (3.11) pour 3 valeurs de β (1/2, 0 et -1/2) sont représentées sur les figures 3.4a et 3.4b. Tout d'abord, ces solutions montrent que des grandes différences de masse volumique entre le jet et l'air ambiant ne sont observées que près de la source (Fig. 3.4a). Mais nous remarquons aussi que la masse volumique du jet dépend finalement assez peu du coefficient β . De même, en s'intéressant au flux de masse adimensionné par le flux de masse à la source (Fig. 3.4b), les différences entre les 3 solutions obtenues pour 3 β différents sont très faibles lorsque l'on s'éloigne de la source. Bref, compte tenu des incertitudes expérimentales, il est en fin de compte difficile d'affirmer que la solution obtenue pour $\beta = 1/2$ est la plus proche des résultats expérimentaux. Ainsi, il est nécessaire de réaliser de nouvelles expériences ou simulations numériques mais en mesurant le coefficient d'entraînement à une distance beaucoup plus faible de la source (typiquement $z < 50r_s$), et avec des jets de masse volumique très différente du fluide environnant. La deuxième conclusion de ce calcul est la suivante : les effets dits non-Boussinesq ne sont réellement visibles que dans une région très proche de la source, ce qui limite, il faut bien le dire, l'impact de cette étude.

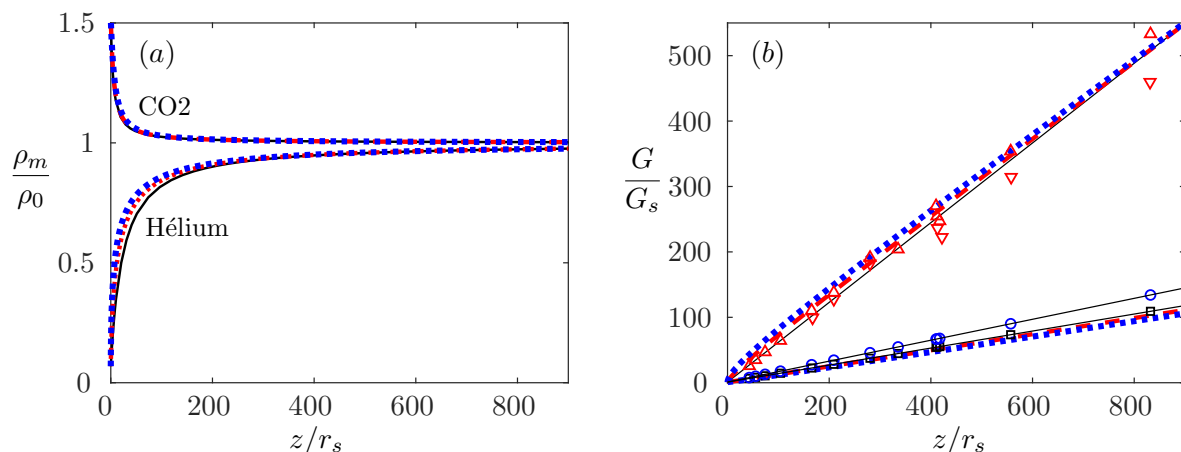


FIGURE 3.4 – (a) Prédications de l'évolution en fonction de z du rapport des masses volumiques, pour un jet de CO₂ et un jet d'hélium dans l'air. Ligne continue noire : (3.10) et en utilisant (3.6) (R&S scaling, $\beta = 1/2$). Ligne discontinue rouge : (3.10) et en intégrant (3.11) avec $\beta = 0$. Ligne en pointillées bleus : (3.10) et en intégrant (3.11) avec $\beta = -1/2$. (b) Comparaison des résultats de R&S et les prédictions des équations (3.6) et (3.11). Même symboles que les figures 3.3a et 3.3b. Ligne continue noire : (3.11). Ligne discontinue rouge : intégration de (3.11) avec $\beta = 0$. Ligne en pointillées bleus : intégration de (3.11) avec $\beta = -1/2$.

3.3 Les simulations LES et le calcul du coefficient d'entraînement

Samuel Vaux (IRSN, Cadarache) a développé des simulations numériques LES en utilisant le code ISIS¹ de l'IRSN ([18]). Le domaine d'étude correspond à un cube de côté $40 r_s$. Dans une section transverse et au cœur du jet ($-4r_s \leq r \leq 4r_s$), le pas de discrétisation est pris à $r_s/14$, puis le maillage est d'autant moins fin que l'on s'éloigne du centre du jet. Le long de l'axe longitudinal du jet, le pas de discrétisation est pris à $r_s/8$. L'ensemble du domaine contient environ 15 millions de mailles. Nous nous sommes assurés que les conditions aux limites (limites latérales et la source du jet) n'influencent pas les résultats. Ces simulations LES ont été validées dans le cas où $\rho_s/\rho_0 = 1$ (jet iso-densité) en les comparant aux résultats numériques DNS obtenus par John Craske et Maarten van Reeuwijk (Imperial College, Londres) ([19]). Huit jets ont été ensuite simulés, le rapport des masses volumiques entre la source et le fluide environnant variant entre 0.2 et 10. Les variations en fonction de la distance à la source de la masse volumique, du rayon, de la vitesse moyenne verticale et du flux de masse sont représentées sur la figure 3.5a-d. Comme discuté précédemment, la masse volumique des jets très légers ou très lourds reste différente de celle de l'environnement uniquement dans une région proche de la source.

Le coefficient d'entraînement peut être obtenu directement à partir de sa définition (équation de conservation de la masse 3.2) mais nécessite de dériver le flux de masse par rapport à z . En suivant l'analyse développé par John Craske et Maarten van Reeuwijk ([19]) et à l'étendant au cas des jets non-Boussinesq, le coefficient α peut être relié directement à l'intensité des fluctuations turbulentes au sein du jet. Cette analyse permet aussi d'obtenir α à partir de grandeurs moyennées sur une section transverse du jet à une distance z de la source. A partir des équations locales de conservation de la masse et de Navier-Stokes (on utilise ici des

1. <https://gforge.irsn.fr/gf/project/isis/>

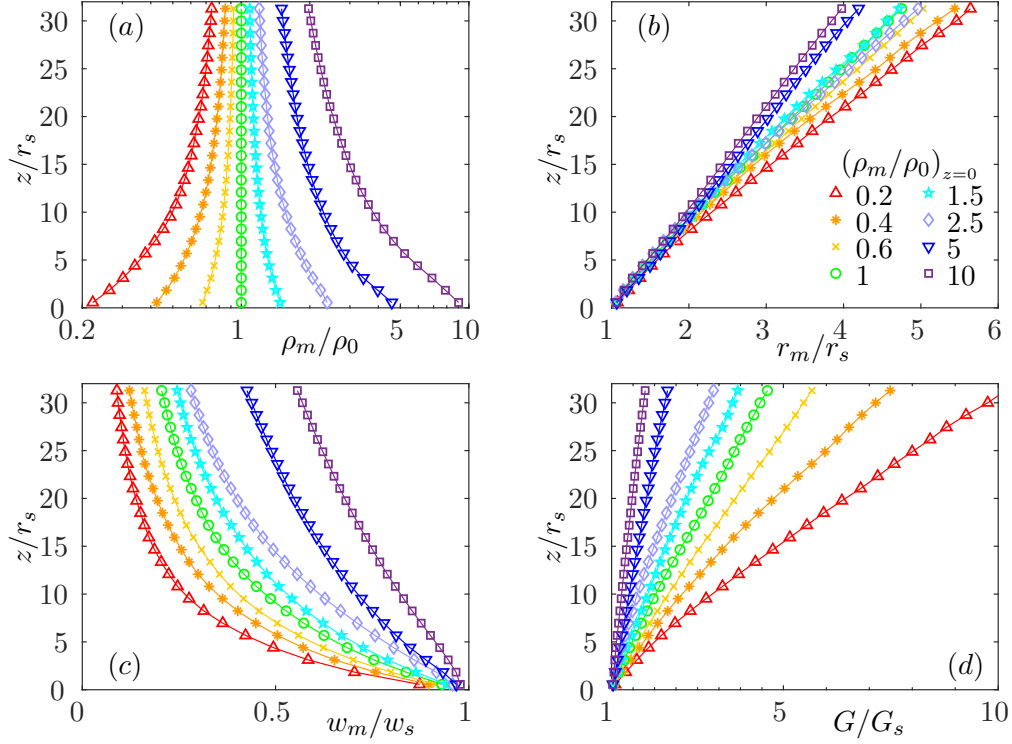


FIGURE 3.5 – Rapport des masses volumiques (a), rayon (b), vitesse moyenne verticale (c) et flux de masse (d) en fonction de la distance à la source. 8 jets ont été simulés, du plus léger au plus lourd : $(\rho_m/\rho_0)_{z=0} = 0.2$ (\triangle), 0.4 (\square), 0.6 (\times), 1 (\circ), 1.5 (\star), 2.5 (\diamond), 5 (∇), 10 ($*$).

moyennes de Favre représentées par un tilde pour les vitesses moyennes et fluctuantes) :

$$\frac{1}{r}r(\bar{\rho}u) + (\bar{\rho}w) = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{r}r(\bar{\rho}uw + \bar{\rho}u''w'') + (\bar{\rho}w^2 + \bar{\rho}w''^2) = -\bar{p}, \quad (3.13)$$

et en intégrant ces équations dans une section transverse, nous obtenons la relation suivante pour le coefficient α :

$$\alpha = \underbrace{-\frac{\rho_m}{\rho_0} \frac{\delta_g}{2\gamma_g}}_{\alpha_{prod}} + \underbrace{\frac{\rho_m}{\rho_0} r_m \frac{d}{dz} \left[\ln \left(\frac{\gamma_g^{1/2}}{\beta_g} \right) \right]}_{\alpha_{shape}}, \quad (3.14)$$

avec $\beta_g = \beta_m + \beta_f + \beta_p$, $\gamma_g = \gamma_m + \gamma_f + \gamma_p$, $\delta_g = \delta_m + \delta_f + \delta_p$ et :

$$\begin{aligned} \beta_m &\equiv \frac{M}{\rho_m w_m^2 r_m^2} \equiv 1, & \beta_f &\equiv \frac{2}{\rho_m w_m^2 r_m^2} \int_0^\infty \bar{\rho} w''^2 r dr, & \beta_p &\equiv \frac{2}{\rho_m w_m^2 r_m^2} \int_0^\infty \bar{p} r dr, \\ \gamma_m &\equiv \frac{2}{\rho_m w_m^3 r_m^2} \int_0^\infty \bar{\rho} w^3 r dr, & \gamma_f &\equiv \frac{4}{\rho_m w_m^3 r_m^2} \int_0^\infty \bar{\rho} w w''^2 r dr, & \gamma_p &\equiv \frac{4}{\rho_m w_m^3 r_m^2} \int_0^\infty w \bar{p} r dr, \\ \delta_m &\equiv \frac{4}{\rho_m w_m^3 r_m} \int_0^\infty \bar{\rho} w'' u'' \bar{w} r dr, & \delta_f &\equiv \frac{4}{\rho_m w_m^3 r_m} \int_0^\infty \bar{\rho} w''^2 \bar{w} r dr, & \delta_p &\equiv \frac{4}{\rho_m w_m^3 r_m} \int_0^\infty \bar{p} w r dr. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La démonstration est donnée dans l'annexe A de notre article [Salizzoni et al.](#) soumis à J. Fluid. Mech. (une copie est jointe dans l'annexe D).

L'équation (3.14) montre que α est composé de deux termes. α_{prod} est directement le rapport entre l'intensité des fluctuations turbulentes et le flux d'énergie moyen. α_{shape} est relié aux variations des profils moyens de la vitesse. Pour des jets dits Boussinesq (différence de densité avec l'air ambiant faible), le deuxième terme (α_{shape}) devient nul lorsqu'on s'éloigne de la source (condition dite asymptotique) et le premier terme (α_{prod}) est constant et égal à environ 0.065. Le but de ces travaux est de déterminer l'évolution de ce dernier terme en fonction du rapport de densité entre le jet et l'air ambiant. Il est à noter que les termes β_m , γ_m et δ_m sont les termes prépondérants dans β_g , γ_g et δ_g et une approximation de (3.14) est :

$$\alpha = -\frac{\rho_m}{\rho_0} \frac{\delta_m}{2\gamma_m} + \frac{\rho_m}{\rho_0} r_m \frac{d}{dz} \left(\ln \gamma_m^{1/2} \right). \quad (3.16)$$

3.4 Le modèle théorique

Le processus d'entraînement par le jet du fluide ambiant peut être décrit par les coefficients β_i , γ_i et δ_i , avec $i = m, f$ et p . Ces coefficients dépendent du profil de la vitesse verticale moyenne $w(r, z)$, des profils des fluctuations ($w''^2(r, z)$ et $u''^2(r, z)$), du profil de la pression moyenne $\bar{p}(r, z)$ et du profil de la masse volumique $\bar{\rho}(r, z)$. Pour des profils auto-similaires, une modélisation théorique permet d'obtenir directement l'évolution du coefficient α en fonction de la masse volumique. Ce travail est en cours d'élaboration et une copie de mon premier jet est donné dans l'annexe E. Dans la suite, seul un résumé des considérations théoriques est présenté.

Modélisation des profils

Tout d'abord, la vitesse moyenne $w(r, z)$ peut être décrite par une fonction f de la manière suivante :

$$\frac{w(r, z)}{w_c(z)} = f(\eta), \quad \text{avec } \eta = \frac{r}{\sigma(z)} \quad \text{et } f(0) = 1. \quad (3.17)$$

Les 2 fonctions w_c et σ dépendent uniquement de la distance à la source (z) et représentent respectivement la vitesse moyenne du jet sur son axe central et le rayon du jet. Le lien entre ces deux fonctions (w_c , σ) et les propriétés globales du jet (w_m et r_m) dépendent de la forme particulière de f . Comme exemples de fonction f , on prendra dans la suite une loi Gaussienne ou une loi du type Goertler.

Ensuite, la masse volumique moyenne est reliée à la concentration $\bar{c}(r, z)$ en fluide du jet selon la relation :

$$\frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{c}}{\rho_s} + \frac{1 - \bar{c}}{\rho_0}. \quad (3.18)$$

Et le profil de la concentration peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\bar{c}(r, z)}{\bar{c}_c(z)} = f_c(\eta_c), \quad \text{avec } \eta_c = \frac{r}{\sigma_c(z)} \quad (3.19)$$

with $0 \leq \bar{c}_c(z) \leq 1$ and $\lim_{z \rightarrow \infty} \bar{c}_c = 0$. De plus le profil de la concentration doit être très similaire à celui de la vitesse moyenne, et pas très éloigné d'un profil gaussien ou Type

Goertler. Afin d'obtenir un modèle le plus simple possible, non seulement la fonction f_c sera prise égale à la fonction f dans la suite, mais le rayon σ_c sera aussi supposé égal au rayon du profil de vitesse (σ). La plupart des travaux de la littérature a observé que σ_c est légèrement plus grand que σ mais cette différence est assez faible et elle n'engendre pas de grandes variations dans les prédictions théoriques du modèle. A partir des équations (3.18) et (3.19), le profil de $\bar{\rho}$ s'écrit :

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = \frac{1}{1 + c_1(z)f(\eta)}, \quad (3.20)$$

avec $c_1(z) = (\frac{\rho_0}{\rho_s} - 1)\bar{c}_c(z)$. Pour des jets dits légers ($\rho_s/\rho_0 < 1$), $c_1(z) > 0$, alors que pour des jets dits lourds, on a : $-1 < c_1(z) < 0$). Mais pour tous les jets, on remarque : $\lim_{z \rightarrow \infty} c_1 = 0$.

Liens entre les 3 paramètres c_1 , w_c , σ et α

La modélisation précédente des profils met en jeu 3 fonctions de z : c_1 , w_c et σ . A partir des flux de volume, de masse et de quantité de mouvement, les grandeurs globales caractérisant le jet peuvent être reliées à ces 3 fonctions :

$$\frac{\rho_m}{\rho_0} = \frac{g_1}{q}, \quad \frac{w_m}{w_c} = \frac{m_1}{g_1}, \quad \frac{r_m}{\sigma} = \left(\frac{q g_1}{m_1}\right)^{1/2}. \quad (3.21)$$

avec :

$$q = 2 \int_0^\infty f \eta d\eta, \quad g_1(z) = 2 \int_0^\infty \frac{f}{1 + c_1(z)f} \eta d\eta, \quad m_1(z) = 2 \int_0^\infty \frac{f^2}{1 + c_1(z)f} \eta d\eta. \quad (3.22)$$

Des expressions générales de ces fonctions peuvent être obtenues à partir de la série de Taylor : $(1 + c_1 f)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty (-c_1 f)^k$, et des moments du profil de la vitesse moyenne ou de la concentration : $\mathcal{M}_k = 2 \int_0^\infty f^k \eta d\eta$ ($k \geq 1$). Les équations (3.22) deviennent :

$$q = \mathcal{M}_1, \quad g_1 = \sum_{k=0}^\infty (-c_1)^k \mathcal{M}_{k+1}, \quad m_1 = \sum_{k=0}^\infty (-c_1)^k \mathcal{M}_{k+2}. \quad (3.23)$$

A partir des équations (3.23), on peut démontrer que la variable $c_1(z)$ ne dépend que du rapport de densité ρ_m/ρ_0 :

$$\frac{m_1 c_1}{q} = 1 - \frac{\rho_m}{\rho_0}. \quad (3.24)$$

Les 3 équations de conservation des flux de masse, de quantité de mouvement et de la flottabilité permettent de relier les 3 paramètres c_1 , w_c et σ au coefficient d'entraînement α :

$$r_m \frac{dc_1}{dz} = 2\alpha \frac{q - g_1}{g_1^*}, \quad (3.25)$$

$$r_m \frac{d(\ln w_c)}{dz} = 2\alpha \frac{m_1}{g_1^*}, \quad (3.26)$$

$$r_m \frac{d(\ln \sigma)}{dz} = \alpha \frac{g_1^* - m_1}{g_1^*}, \quad (3.27)$$

avec : $g_1^* = \frac{dg_1}{dc_1} = -\sum_{k=1}^\infty k(-c_1)^{k-1} \mathcal{M}_{k+1}$

Calcul des coefficients γ_m et δ_m

A partir de sa définition (3.15) et en utilisant (3.21), γ_m s'écrit de la manière suivante :

$$\gamma_m(z) = \frac{g_1 \gamma_1}{m_1^2}, \quad (3.28)$$

avec γ_1 une fonction de z qui dépend du profil radial de la vitesse moyenne :

$$\gamma_1(z) = 2 \int_0^\infty \frac{f^3}{1 + c_1(z)f} \eta d\eta = \sum_{k=0}^\infty (-c_1)^k \mathcal{M}_{k+3}. \quad (3.29)$$

En utilisant (3.22), (3.29) devient : $\gamma_1 c_1 = \mathcal{M}_2 - m_1$, et finalement :

$$\gamma_m = \frac{\rho_m/\rho_0}{1 - \rho_m/\rho_0} \frac{\mathcal{M}_2 - m_1}{m_1}. \quad (3.30)$$

Les équations (3.30) et (3.24) montrent que γ_m ne dépend que du rapport des masses volumiques, en supposant constant le profil radial de la vitesse moyenne (les moments \mathcal{M}_k sont alors constants).

Le coefficient δ_m est plus difficile à obtenir car il dépend de la dérivée de f mais aussi du tenseur de Reynolds $w''u''$. Le calcul théorique est donné en annexe (E) et aboutit à :

$$\delta_m = 2\alpha g_1 \frac{(g_1^* - m_1)\gamma_1 + m_1(3\gamma_1 - c_1\gamma_2)}{m_1^2 g_1^*}. \quad (3.31)$$

Cas particuliers de profils gaussien ou Goertler pour f

Les moments \mathcal{M}_k de $f = \exp(-\eta^2)$ sont égaux à $1/k$ et nous obtenons :

$$\gamma_m = \frac{\rho_m/\rho_0}{1 - \rho_m/\rho_0} \frac{1/2 - m_1}{m_1} \quad \text{et} \quad \delta_m = -\frac{2\alpha}{m_1} \frac{1 - \gamma_1/m_1}{1 - m_1/g_1}, \quad (3.32)$$

avec :

$$\frac{\rho_m}{\rho_0} = \frac{\ln(1 + c_1)}{c_1}, \quad m_1 c_1 = 1 - \frac{\rho_m}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \gamma_1 c_1 = \frac{1}{2} - m_1. \quad (3.33)$$

Lorsque ρ_m/ρ_0 est proche de 1, γ_m et δ_m se comportent comme des lois de puissance de ρ_m/ρ_0 :

$$\gamma_m = \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_m}{\rho_0} \right)^{-1/6} \quad \text{et} \quad \delta_m = -\frac{8}{3} \alpha \left(\frac{\rho_m}{\rho_0} \right)^{-4/3}. \quad (3.34)$$

Pour f de type Goertler ($f = (1 + A\eta^2)^{-2}$ avec A un paramètre libre), les moments de f s'écrivent alors : $\mathcal{M}_k = (2k - 1)^{-1} A^{-1}$. Les équations (3.30) and (3.31) s'écrivent alors :

$$\gamma_m = \frac{\rho_m/\rho_0}{Am_1} \frac{1/3 - Am_1}{1 - \rho_m/\rho_0} \quad \text{et} \quad \delta_m = -\frac{2\alpha}{Am_1} \frac{1 - \gamma_1/m_1}{1 - m_1/g_1}, \quad (3.35)$$

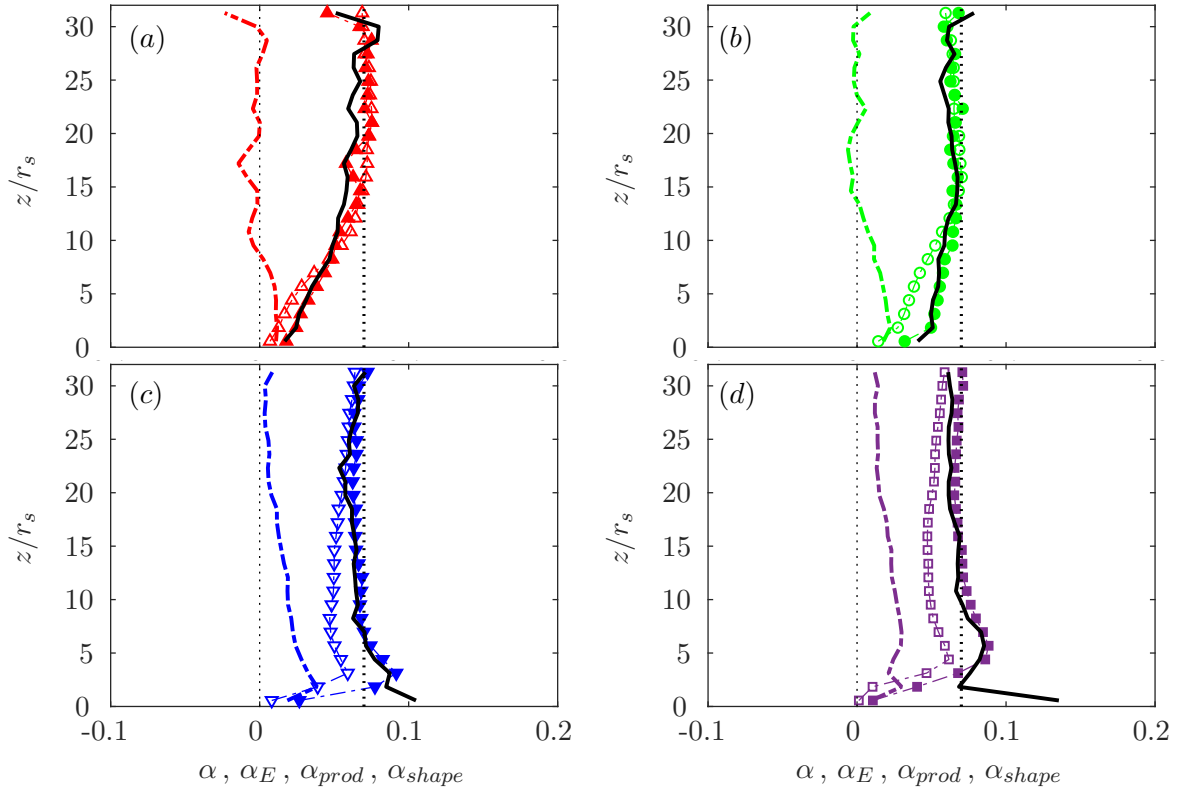


FIGURE 3.6 – Profil vertical du coefficient d’entraînement α calculé à partir de sa définition (3.2) (lignes pleines noires) et calculé à partir de la relation théorique (3.14) (symboles pleins), profils verticaux de α_{prod} (symboles ouverts) et α_{shape} (lignes discontinues), pour le jet le plus léger (a), jet iso-densité (b) et jets lourds (c et d). Mêmes symboles que sur les figures 3.5a-d.

avec :

$$\frac{\rho_m}{\rho_0} = \begin{cases} \frac{\arctan(\sqrt{c_1})}{\sqrt{c_1}} & \text{for } c_1 > 0 \text{ or } \frac{\rho_m}{\rho_0} < 1, \\ \frac{(\sqrt{-c_1})}{\sqrt{-c_1}} & \text{for } c_1 < 0 \text{ or } \frac{\rho_m}{\rho_0} > 1, \end{cases} \quad (3.36)$$

$$Am_1 c_1 = 1 - \frac{\rho_m}{\rho_0} \quad \text{et} \quad A\gamma_1 c_1 = 1/3 - Am_1 \quad (3.37)$$

Pour $\rho_m/\rho_0 \approx$, γ_m et δ_m se comportent comme des lois de puissance de ρ_m/ρ_0 :

$$\gamma_m = \frac{9}{5} \left(\frac{\rho_m}{\rho_0} \right)^{-16/35} \quad \text{et} \quad \delta_m = -\frac{18}{5} \alpha \left(\frac{\rho_m}{\rho_0} \right)^{-9/5} \quad (3.38)$$

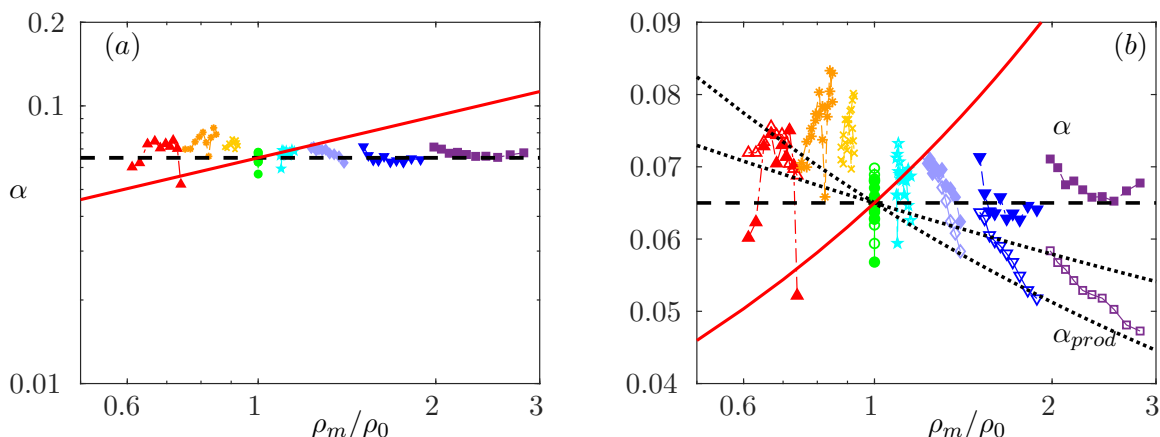


FIGURE 3.7 – α (symboles pleins) et α_{prod} (symboles vides) en fonction du rapport des masses volumiques entre le jet et le fluide ambiant. La ligne continue rouge correspond à la loi de puissance proposée par R&S (exposant 1/2) tandis que la ligne horizontale noire correspond à un coefficient d’entraînement constant : $\alpha = 0.065$. Les lignes en pointillés noirs correspondent à des lois de puissance d’exposant $-1/6$ (f gaussien) et $-12/35$ (f Goertler) que nous proposons pour $\delta_m/(2\gamma_m) \approx \alpha_{prod}$.

3.5 Les principaux résultats

L’évolution du coefficient d’entraînement avec la distance à la source est tracée sur les figures 3.6a-d pour les 4 jets dont le rapport des masses volumiques à la source est égal à 0.2, 1, 5 et 10. Calculer α à partir de sa définition (3.2) (lignes pleines noires) ou à partir de la relation théorique (3.14) (symboles pleins) donnent des résultats quasiment identiques. Pour les jets dits lourds et dans une région très proche de la source ($z \geq 3$), des différences notables sont cependant observées et caractérisent les limites des simulations numériques pour le calcul des coefficients quand le profil de vitesse varie sur des distances très courtes. Le but de ce travail n’est pas de s’intéresser aux phénomènes particuliers qui se produisent près des conditions aux limites car ces phénomènes sont dépendants de la façon à laquelle la turbulence est générée. En revanche, à partir de $10r_s$, nous avons obtenus des résultats que nous pouvons qualifier d’universel et entre $10r_s$ et $35r_s$, le rapport des masses volumiques reste bien différent de 1 pour les jets les plus légers et les plus lourds, ce qui nous a permis de mesurer les effets dits non-Boussinesq (voir plus loin et les figures 3.7a et 3.7b). Pour le jet le plus léger (Fig. 3.6a), le terme de forme (α_{shape}) décroît très vite avec z . En revanche, plus le jet est lourd (quand ρ_m/ρ_0 augmente), plus la décroissance de α_{shape} se réalise sur des distances longues (voir figures 3.6c et 3.6d).

Les évolutions de α et α_{prod} en fonction du rapport des masses volumiques ρ_m/ρ_0 sont représentées sur les figures 3.7 (a) et (b). Contrairement aux prédictions de R&S, α est quasiment indépendant du rapport des masses volumiques et α_{prod} diminue même lorsque ρ_m/ρ_0 augmente.

Le modèle présenté dans le paragraphe 3.4 (et avec plus de détails en annexe E) permet d’obtenir des prédictions théoriques pour les coefficients γ_m et δ_m en fonction du rapport des masses volumiques. En considérant des profils de vitesse et de concentration moyennes de forme gaussienne, les figures 3.8 (a) et 3.8 (b) montrent qu’un très bon accord est observé entre les résultats numériques et théoriques aussi bien pour γ_m que pour δ_m . Pour δ_m et en accord avec les résultats numériques, α est pris constant et égal à 0.065. En revanche, en

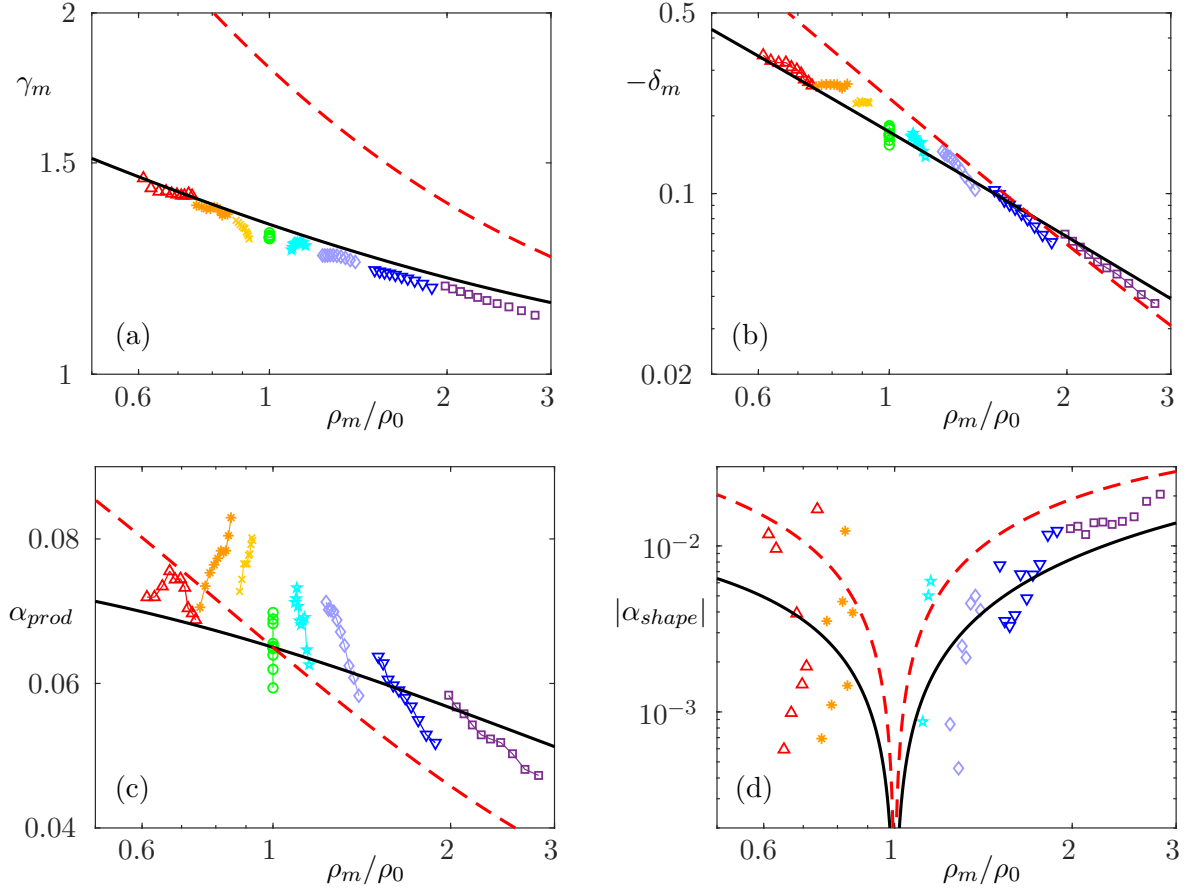


FIGURE 3.8 – γ_m (a), $-\delta_m$ (b), α_{prod} (c) et valeur absolue de α_{shape} (d) en fonction du rapport des masses volumiques entre le jet et le fluide ambiant. La ligne continue noire correspond aux prédictions théoriques en considérant des profils de vitesse et concentration moyennes de forme gaussienne. Pour la ligne discontinue rouge, des profils de type Goertler sont adoptés pour f . Pour $\rho_m/\rho_0 \leq 1$, $\alpha_{shape} \leq 0$ tandis que pour $\rho_m/\rho_0 \geq 1$, $\alpha_{shape} \geq 0$.

considérant un profil de type Goertler, des écarts significatifs sont observés entre les résultats numériques et théoriques.

En négligeant tous les coefficients β_i , γ_i et δ_i avec $i = f$ ou $i = p$, une bonne approximation de α_{prod} est $-\frac{\rho_m}{\rho_0} \frac{\delta_m}{2\gamma_m}$. De nouveau, un bon accord est observé entre α_{prod} obtenu à l'aide des simulations numériques et la prédiction théorique de $-\frac{\rho_m}{\rho_0} \frac{\delta_m}{2\gamma_m}$ (voir figure 3.8 c). Enfin, une bonne approximation de α_{shape} est : $\frac{\rho_m}{\rho_0} r_m \frac{d}{dz} (\ln \gamma_m^{1/2})$. En dérivant l'équation (3.30), nous obtenons :

$$\alpha_{shape} \approx \frac{\rho_m}{\rho_0} r_m \frac{d}{dz} (\ln \gamma_m^{1/2}) = \alpha \left[1 + \frac{\rho_m}{\rho_0} \frac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_2 - m_1} \left(1 + \frac{m_1}{g_1^*} \right) \right] \quad (3.39)$$

En considérant un profil gaussien ou un profil de type Goertler pour f , (3.39) s'exprime de

la manière suivante :

$$\frac{\alpha_{shape}}{\alpha} \approx \begin{cases} 1 + \frac{\rho_m}{\rho_0} \frac{2 + (m_1 - g_1)^{-1}}{1 - 2m_1} & (f \text{ gaussien}), \\ 1 + \frac{\rho_m}{\rho_0} \frac{3 + 2(Am_1 - Ag_1)^{-1}}{1 - 3Am_1} & (f \text{ Goertler}). \end{cases} \quad (3.40)$$

Pour ρ_m/ρ_0 proche de 1 (jets Boussinesq), $\alpha_{shape} \approx \frac{\alpha}{6}(\rho_m/\rho_0 - 1)$ (f gaussien) ou $\alpha_{shape} \approx \frac{16\alpha}{35}(\rho_m/\rho_0 - 1)$ (f Goertler).

3.6 Perspectives

Les simulations numériques ont montré que le coefficient d'entraînement est indépendant du rapport des masses volumiques ρ_m/ρ_0 pour les jets dits non-Boussinesq, du moins dans la gamme $0.6 \leq \rho_m/\rho_0 \leq 3$. Ce résultat est contraire à l'idée répandue dans la littérature depuis les travaux de R&S (664 citations dans *Web of Science*) que $\alpha \propto (\rho/\rho_0)^{1/2}$. Le modèle théorique que nous avons développé prédit avec une très bonne précision les variations avec le rapport des masses volumiques du coefficient γ_m , et aussi les variations de δ_m , en accord avec un coefficient d'entraînement α constant. Le terme de forme α_{shape} est également prédit et nous avons montré que $\alpha_{shape} \propto \rho_m/\rho_0 - 1$ lorsque $\rho_m/\rho_0 \rightarrow 1$.

A l'avenir, ces résultats seront sans doute étendus au cas des panaches montants ou descendants, c'est à dire en présence de gravité. Dans cette situation, le coefficient d'entraînement ne dépend pas que du rapport des masses volumiques mais aussi du nombre de Richardson ($\Gamma = \frac{5}{8\alpha} \frac{(\rho_0 - \rho_m)gr_m}{\rho_0 w_m^2}$, voir chapitre 2 sur la ventilation des tunnels en présence de panaches modélisant un feu d'incendie).

3.7 Références

- [1] B. R. Morton, G. I. Taylor, and J. S. Turner. Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. *Proc. Roy. Soc. London A*, 234 :1–23, 1956.
- [2] N.B. Kaye. Turbulent plumes in stratified environments : a review of recent work. *Atmos.-Ocean*, 46(4) :433–441, 2008.
- [3] N. B. Kaye and G. R. Hunt. Weak fountains. *J. Fluid Mech.*, 558 :319–328, 2006.
- [4] P.F. Linden and N. B. Kaye. Interacting turbulent plumes in a naturally ventilated enclosure. *Int. J. of Vent.*, 4 :301–310, 03 2006.
- [5] W. D. Baines and J. S. Turner. Turbulent buoyant convection from a source in a confined region. *J. Fluid Mech.*, 37 :51–80, 1969.
- [6] P. F. Linden, G. F. Lane-Serff, and D. A. Smeed. Emptying filling boxes : the fluid mechanics of natural ventilation. *J. Fluid Mech.*, 212 :309–335, 1990.
- [7] F. P. Ricou and D. B. Spalding. Measurements of entrainment by axisymmetrical turbulent jets. *J. Fluid Mech.*, 11 :21–32, 1961.

- [8] G. G. Rooney and P. F. Linden. Similarity considerations for non-Boussinesq plumes in an unstratified environment. *J. Fluid Mech.*, 318 :237–250, 1996.
- [9] A. W. Woods. A note on non-Boussinesq plumes in an incompressible stratified environment. *J. Fluid Mech.*, 345 :347–356, 1997.
- [10] P. Carloti and G. R. Hunt. Analytical solutions for turbulent non-Boussinesq plumes. *J. Fluid Mech.*, 538 :343–359, 2005.
- [11] B. R. Morton. Modeling fire plumes. *Tenth Symposium (International) on Combustion*, pages 973–982, 1965.
- [12] M. Amielh, T. Djeridane, F. Anselmet, and L. Fulachier. Velocity near-field of variable density turbulent jets. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39(10) :2149–2164, 1996.
- [13] T. Djeridane, M. Amielh, F. Anselmet, and L. Fulachier. Velocity turbulence properties in the near-field region of axisymmetric variable density jets. *Phys. Fluids*, 8(6) :1614–1630, 1996.
- [14] L. Pietri, M. Amielh, and F. Anselmet. Simultaneous measurements of temperature and velocity fluctuations in a slightly heated jet combining a cold wire and laser doppler anemometry. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 21(1) :22–36, 2000.
- [15] M. García-Villalba, J. Fröhlich, and W. Rodi. Identification and analysis of coherent structures in the near field of a turbulent unconfined annular swirling jet using Large Eddy Simulation. *Physics of Fluids*, 18(5) :055103, 2006.
- [16] P. Wang, J. Frohlich, V. Michelassi, and W. Rodi. Large-eddy simulation of variable-density turbulent axisymmetric jets. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 29(3) :654–664, 2008. The Fifth Int. Symp. Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP5).
- [17] B. R. Morton. Forced plumes. *J. Fluid Mech.*, 5 :151–163, 1959.
- [18] Babik F., Lapuerta C., and Suard S. Isis 3.0.0. : Physical modelling. technical report semic-2011- 054. *Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire*, 2011.
- [19] J. Craske and M. van Reeuwijk. Energy dispersion in turbulent jets. Part 1 : Direct simulation of steady and unsteady jets. *J. Fluid Mech.*, 763 :500–537, 2015.

Chapitre 4

Rayleigh-Bénard et ses variantes

■ *Plus on connaît, plus on aime.* ■

Léonard de Vinci

Sommaire

4.1	Les enjeux pour l'ingénierie/environnement et la mécanique des fluides . . .	44
4.2	Effet de rugosités de paroi sur la convection de RB	46
4.2.1	La polémique du régime ultime	46
4.2.2	La stratégie pour observer le régime ultime et le dispositif expérimental	47
4.2.3	Résultats expérimentaux	49
4.2.4	Interprétation théorique	50
4.3	Convection dans un long canal vertical	51
4.3.1	Dispositifs expérimentaux	51
4.3.2	Nusselt versus Rayleigh dans un canal	53
4.3.3	Description de l'écoulement et mesure de viscosité et diffusivité turbulentes	54
4.4	Convection par chauffage des couches limites	55
4.4.1	L'idée originale de Bouillaut et al.	55
4.4.2	Modèles théoriques	55
4.4.3	Comparaison entre les modèles théoriques et les résultats expérimentaux	57
4.5	Convection et stratification	58
4.5.1	Description de l'écoulement et lois d'échelle obtenues dans la littérature	58
4.5.2	Modèle pour le Nusselt de la plaque supérieure	59
4.5.3	Modèle pour le Nusselt de la plaque inférieure	60
4.5.4	Comparaisons modèles/résultats de la littérature	61
4.6	Perspectives	61
4.7	Références	62

4.1 Les enjeux pour l'ingénierie/environnement et la mécanique des fluides

La configuration dite de Rayleigh-Bénard (RB) produit des mouvements de fluides convectifs de référence analogue aux écoulements dans des conduites ou de jets non confinés qui sont les écoulements de référence pour la mécanique des fluides. On peut se poser la question de savoir si l'étude de telles configurations académiques sont pertinentes afin d'appréhender les écoulements naturels ou observés en ingénierie. Jusqu'à présent, mes études de la convection de Rayleigh-Bénard a toujours eu pour objectif d'ajouter un ingrédient physique supplémentaire à la configuration de RB. Lorsque j'étais Agrégé Préparateur à l'ENS Lyon, je me suis intéressé à l'effet de parois rugueuses sur le transfert thermique convectif (voir figure 4.1a). Connaître les effets de rugosité de parois sur l'efficacité du transfert thermique convectif, même dans une configuration académique, a une importance pour les écoulements naturels qui bien entendu se développent sur des surfaces rugueuses. D'ailleurs, les études sur ce sujet étaient assez rares avant les années 2000 alors que les travaux sur les effets de rugosité sur le développement de la couche limite turbulente sont assez nombreux même avant les années 2000. J'ai également étudié durant mes 2 années d'AP à l'ENS Lyon une configuration toute particulière de RB qui permet de se soustraire des parois (!) (voir figure 4.1b). Cette configuration permet d'analyser en laboratoire la convection naturelle qui se produit dans des canaux ou des galeries de très grandes longueurs, ou encore il s'agit d'une première approche de la convection dans l'atmosphère pour laquelle des conditions aux limites types plaques horizontales fixes et à température constante semblent irréalistes. J'ai repris depuis un an mon activité sur RB et, en plus de modifier les conditions aux limites, j'ai ajouté un deuxième ingrédient supplémentaire. Le chauffage et éventuellement le refroidissement (même si expérimentalement il est toujours plus difficile de refroidir que de chauffer) ne se réalisent pas uniquement par les conditions aux limites dans les 2 nouvelles configurations étudiées présentées sur les figures 4.1c et 4.1d. De manière similaire aux observations réalisées dans l'atmosphère terrestre ou d'autres planètes, le fluide peut être chauffé en volume grâce aux rayonnements du soleil [1; 2; 3]. Au sein même de la Terre, une part d'énergie est apportée par les radiations nucléaires qui peuvent être modélisées par un terme de source dans l'équation de l'énergie. En ingénierie, le refroidissement par convection naturelle du corium fondu en cas d'accident grave sur le cœur d'une centrale nucléaire est un très bon exemple d'application directe de la configuration présentée sur la figure 4.1d.

Se rapprocher un peu plus près des configurations réelles n'est pas la seule motivation au choix d'étudier une expérience de RB modifiée. Il fait consensus pour affirmer que les travaux expérimentaux ou numériques de ces cellules de RB modifiées permettent de progresser dans la compréhension des processus physiques qui règlent le transfert thermique dans une cellule standard de RB. Les rugosités ont été utilisés par l'équipe de Grenoble [4; 5] afin d'étudier le fameux régime ultime de la convection de RB. Chauffer en volume et uniquement les couches limites (figure 4.1c) est l'idée de l'équipe de Saclay afin de forcer la transition vers ce régime ultime [2; 3]. La convection de type canal (figure 4.1b), sans les effets des couches limites proches des parois, permet d'appréhender le transfert thermique dans le cœur de la cellule de RB. Enfin, la configuration de la figure 4.1d est un outil afin d'appréhender un processus physique non présent dans une cellule de RB. Les deux plaques horizontales sont maintenues à températures constantes et égales et l'ensemble du fluide est chauffé avec une puissance volumique uniforme. Ainsi, la partie supérieure de la cellule est très similaire à la

partie supérieure d'une cellule de RB standard, tandis que la partie inférieure est stratifiée, sans processus turbulent. Cette configuration permet donc de tester l'interaction entre un écoulement turbulent et une stratification, et elle est très similaire à ce qui est observé en dessous des lacs gelés (voir section 4.5).

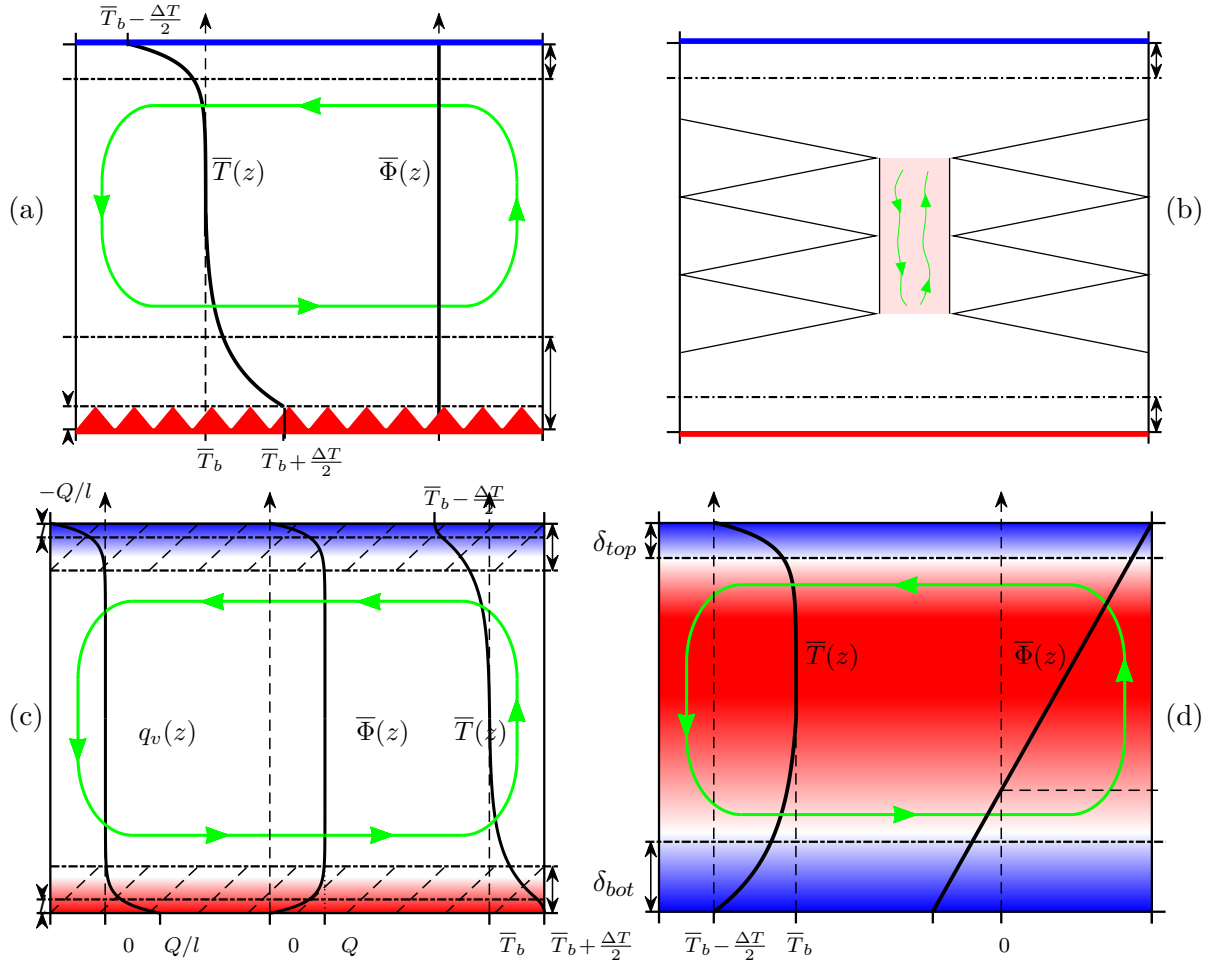


FIGURE 4.1 – Les 4 configurations de convection turbulente étudiées ici. (a) Convection dite de Rayleigh-Bénard : les plaques horizontales inférieure et supérieure sont maintenues à température constante. L'effet d'une rugosité de paroi est étudié ici. (b) Convection dans un long canal vertical (région en rose). L'ajout d'une structure en forme d'un château de cartes permet l'étude de l'écoulement turbulent dans le cœur de RB, sans effet des couches limites. (c) Convection par chauffage des couches limites. Contrairement à la configuration de RB, l'énergie n'est pas injectée par l'intermédiaire de la plaque inférieure. Les 2 plaques horizontales sont même isolées et le flux thermique est nul : $\bar{\Phi}(z=0) = \bar{\Phi}(z=h) = 0$. L'énergie est injectée en volume $q(z)$, par exemple par l'intermédiaire de rayonnements électromagnétiques ou à cause de réactions chimiques ou nucléaires. (d) Dans cette dernière configuration, l'énergie est injectée en volume avec une puissance volumique constante dans toute la cellule. Cette énergie est évacuée au niveau des 2 plaques horizontales car elles sont maintenues à température constante. Pour chaque configuration, les épaisseurs moyennes δ_{top} et δ_{bot} des deux couches thermiques sont indiquées.

4.2 Effet de rugosités de paroi sur la convection de RB

4.2.1 La polémique du régime ultime

Pour des nombres de Rayleigh ($Ra = \frac{g\beta\Delta T h^3}{\nu\kappa}$) inférieurs à 10^{11} - 10^{12} , un consensus s'est dégagé à partir des années 2000. Les nombres de Nusselt ($Nu = \frac{\Phi h}{\lambda\Delta T}$) mesurés dans les différentes expériences et simulations numériques publiés jusqu'à présent se regroupent autour d'une loi de puissance $Nu = C_{RB} Ra^{\theta_{RB}}$, avec $0.28 \leq \theta_{RB} \leq 0.33$ et $C_{RB} \approx 0.06$ pour $\theta_{RB} = 1/3$ (voir les figures 4.2a et 4.2b). L'exposant $1/3$ joue un rôle particulier car c'est l'exposant prédit par la théorie de Malkus [6] et Priestley [7]. Cette théorie de RB à hauts nombres de Ra est fort simple. Elle suppose que le transfert thermique est contrôlé essentiellement par les 2 couches limites placées contre les deux plaques horizontales inférieure et supérieure. L'écoulement dans le cœur de la cellule de RB est suffisamment turbulent pour ne pas être le paramètre limitant. La température en dehors des couches limites présente des fluctuations temporelles et spatiales importantes, en revanche sa valeur moyenne en temps est très homogène au sein du cœur de RB¹. Ainsi, le flux thermique doit être indépendant de la hauteur h de la cellule. A partir des définitions de Ra et Nu , une loi de puissance avec un exposant $1/3$ est obtenue. En adoptant une démonstration plus mathématique, il suffit d'affirmer que le nombre de Rayleigh caractérisant chaque couche limite thermique (ra^*) est constant. De plus, dans chaque couche limite thermique, la conduction est le seul processus qui transfère l'énergie. Alors, $\Phi = \frac{\Delta T}{2\delta_T}$, avec ΔT la différence de température entre les 2 plaques et δ_T est l'épaisseur de chaque couche limite thermique. A partir de cette dernière équation, nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{\delta_T}{h} = \frac{1}{2Nu}. \quad (4.1)$$

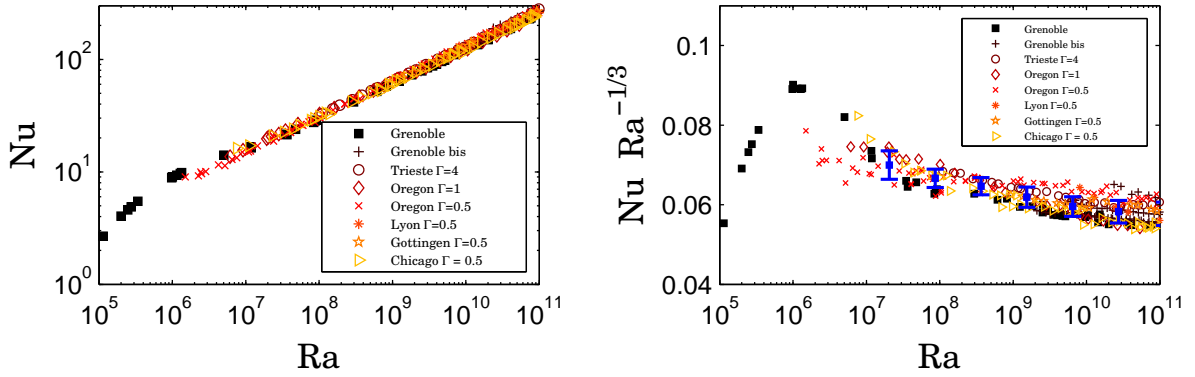
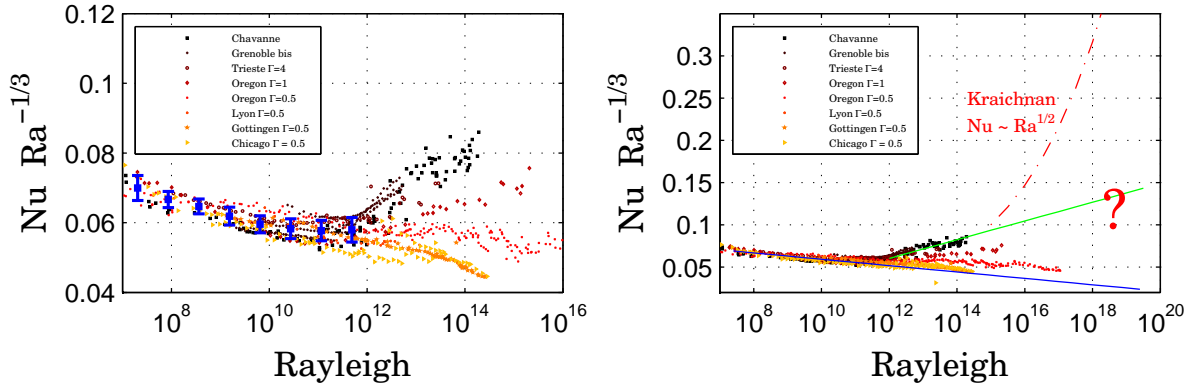
Cette équation est très solide et elle est utilisée dans toutes les théories développées ici, aussi bien pour RB que pour les cellules de RB modifiées (voir sections 4.4 et 4.5). En utilisant (4.30) et $ra^* = Ra(\delta_T/h)^3$, nous obtenons :

$$Nu = \left(\frac{Ra}{2^4 ra^*} \right)^{1/3}. \quad (4.2)$$

Le succès de cette théorie vient de sa simplicité et de la prédiction de l'exposant $1/3$, même si un exposant un peu plus faible est toujours observé dans les résultats expérimentaux et numériques (voir la figure 4.2b), montrant qu'il reste une petite interaction entre les 2 couches limites, elle-même, provenant sans doute de l'écoulement à grande échelle qui 'balaie' les couches limites (voir la figure 4.1a).

En oubliant sans doute un peu le très bon accord entre toutes les expériences et simulations pour $Ra \leq 10^{12}$ (ce qui n'est pas commun pour un système physique), la polémique provient du fait que ce n'est plus le cas lorsque le Rayleigh dépasse 10^{12} (voir Fig. 4.3a). Même si ce résultat est en fin de compte pas très surprenant pour un système physique complexe qui présente des phénomènes d'hystérésis et de relaxations lentes (voir Tisserand et al., *Phys. Fluids*, 2011 ou Salort et al., *Phys. Fluids*, 2014), il a des implications importantes pour les

1. Ce qui permet justement de réaliser des mesures expérimentales du nombre de Nusselt avec grande précision, car il suffit de placer un écran thermique à la même température que celle du cœur de RB pour éliminer les pertes thermiques.


 FIGURE 4.2 – Nusselt en fonction de Rayleigh pour $Ra \leq 10^{11}$.

 FIGURE 4.3 – Nusselt en fonction de Rayleigh pour $10^7 \leq Ra \leq 10^{16}$.

systèmes naturels. En effet, en extrapolant à des Rayleigh beaucoup plus grands les lois de puissance obtenues, les Nusselt et donc les flux thermiques calculés pour les systèmes naturels varient énormément selon l'exposant choisi entre $1/3$ et $1/2$ (voir Fig. 4.3b).

L'exposant $1/2$ provient de la théorie de Kraichnan (1962) [8]. Trente-cinq ans avant l'observation expérimentale de l'équipe de Grenoble (1997) [9], Kraichnan a émis l'hypothèse qu'au delà d'un certain Ra , les couches limites laminaires pouvaient se dé-stabiliser et devenir turbulentes. Un résumé de la théorie est donné dans [Creysseles, J. Fluid Mech., 2020](#) ainsi qu'une démonstration de la formule théorique obtenue par Kraichnan :

$$Nu \sim \left(\frac{Pr Ra}{[Pe^* \ln(Re)]^3} \right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

4.2.2 La stratégie pour observer le régime ultime et le dispositif expérimental

En 1997, en utilisant de l'hélium à basse température, l'équipe de Grenoble a observé une transition pour le nombre de Nusselt semblable à celle prédite par Kraichnan [9] et ils l'ont appelé régime ultime. Ce régime est interprété comme une transition vers la turbulence des couches limites semblable à celle observée pour les couches limites de vitesse qui se



FIGURE 4.4 – Photographies du dispositif expérimental.

développent contre une paroi². En suivant la théorie de Kraichnan (4.3), cette transition n'est pas brutale. Elle devrait avoir lieu sur plusieurs décades de Ra ce qui rend très difficile l'observation de l'exposant $1/2$ ($Nu \propto Ra^{1/2}$). En 2001, l'équipe de Grenoble a utilisé l'astuce d'ajouter des rugosités de paroi afin de faire transiter la couche limite sur une plage de Ra plus faible [5]. Ils ont alors observé une loi de puissance avec un exposant $1/2$ dans la gamme $10^{12} \leq Ra \leq 4 \cdot 10^{13}$.

Sachant qu'il est possible d'atteindre $Ra = 10^{13}$ en utilisant de l'eau entre 20 et 60°C dans une cellule de RB de hauteur 1m, notre objectif quand j'étais AP à l'ENS Lyon était de tester ces résultats à température usuelle. Des photographies du dispositif expérimental sont montrées sur la figure 4.4 (voir également Tisserand et al., *Phys. Fluids*, 2011).

2. Cependant, dans le régime classique, des observations expérimentales ont montré que les couches limites de RB sont assez différentes des couches limites laminaires de vitesse. Par exemple, de grandes variations temporelles de l'épaisseur de la couche sont observées et des filaments de fluides chaud ou froid naissent dans les couches thermiques ce qui provoque de grandes variations temporelles de la température. De plus, la transition vers le régime ultime a lieu pour des nombres de Reynolds plus faibles que pour les couches limites de vitesse. Malgré le grand succès de la théorie de Grossmann et Lohse [10] qui décrit la couche thermique de RB par une loi du type Prandtl-Blasius, l'analogie entre les couches limites de RB et celles de Blasius est à prendre avec des pincettes.

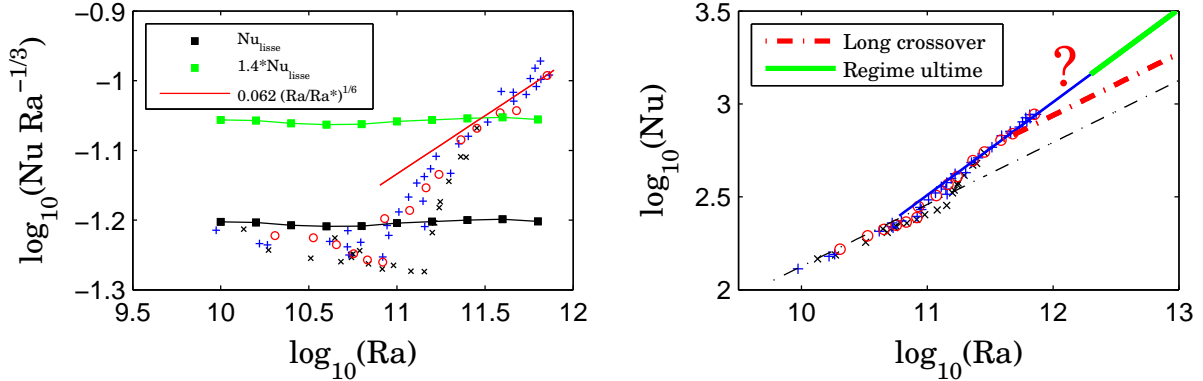


FIGURE 4.5 – Résultats expérimentaux pour la cellule aux parois rugueuses de hauteur 1m.

4.2.3 Résultats expérimentaux

Les résultats sont présentés sur la figure 4.5, en variable compensée ($NuRa^{-1/3}$ en fonction de Ra). Nous avons bien observé une transition du transfert thermique pour un Rayleigh de transition de $Ra^* = 10^{11}$. Cette valeur n'est pas le fruit du hasard. Nous avons choisi la hauteur des rugosités δ_r de telle façon que l'épaisseur de la couche limite thermique soit égale à δ_r pour $Ra^* = 10^{11}$. Pour des Rayleigh supérieurs à Ra^* , le nombre de Nusselt augmente plus vite que $Ra^{1/3}$ et nous pouvons penser que Ra varie comme $Ra^{1/2}$ pour $Ra \geq 4 \cdot 10^{11}$ (ou $NuRa^{-1/3} \sim Ra^{1/6}$). Nous remarquons également que l'augmentation du Nusselt dépasse largement l'augmentation de la surface effective de contact entre le fluide et la paroi rugueuse (40%). Ce résultat a des conséquences pratiques très intéressantes sur l'intérêt de placer des rugosités sur les parois afin d'augmenter le transfert thermique. Enfin, pour $Ra \leq Ra^*$, nous notons en revanche un Nusselt plus faible pour une cellule avec parois rugueuses que pour une cellule avec parois lisses.

Les résultats sont ainsi assez convaincants et auraient pu être publiés tels quels (et on aurait été cité beaucoup de fois vu le nombre d'articles sur le régime ultime). Il semble bien que la loi d'exposant $1/2$ soit observée mais seulement sur une décade en Ra car nous n'avons pas la possibilité de pousser à plus haut Ra . Cependant, il existe toujours la possibilité que ces observations ne correspondent pas au régime ultime observé par l'équipe de Grenoble. En effet, nous n'excluons pas l'hypothèse d'une longue transition entre un régime $1/3$ et un autre régime $1/3$, certes plus efficace au niveau transfert thermique, mais avec un exposant toujours en accord avec la loi de Malkus (voir la figure 4.5 de droite). Afin de tester ces résultats, nous aurions pu augmenter encore la hauteur de la cellule mais cela nous paraissait déraisonnable. Nous avons donc décidé de réaliser l'expérience avec une cellule 5 fois moins haute ($h = 20\text{cm}$), donc pour des Ra 125 fois faibles. Le rayleigh de transition dans la petite cellule est donc 125 fois plus faible que pour la grande cellule (voir Fig. 4.6). Les résultats montrent que la même transition est observée pour les 2 cellules avec la même loi de puissance et un exposant $1/2$. Pourtant, le Reynolds de transition est beaucoup plus faible pour la petite cellule et il est déraisonnable de penser que le régime ultime soit atteint dans cette cellule³.

3. A l'époque, hormis l'équipe de Grenoble, aucune autre équipe avait observé l'apparition du régime

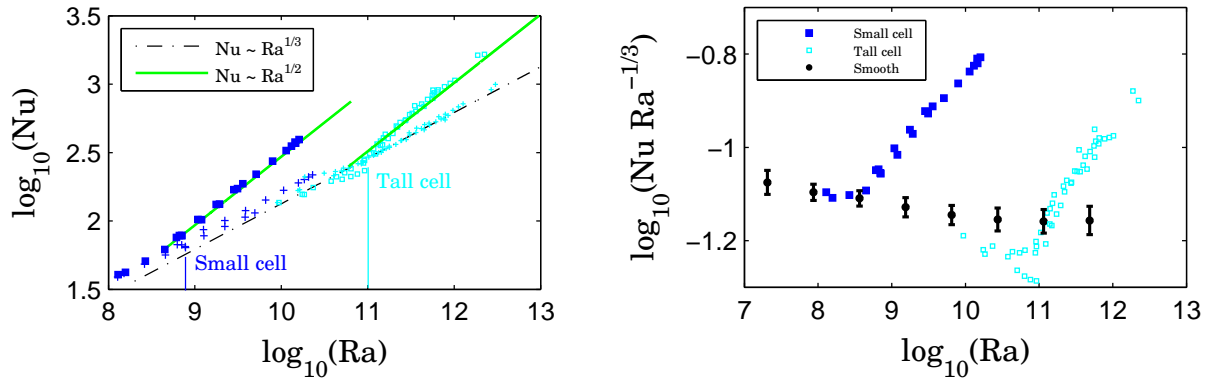


FIGURE 4.6 – Comparaison des résultats expérimentaux pour les 2 cellules aux parois rugueuses de hauteur 1m et 20cm.

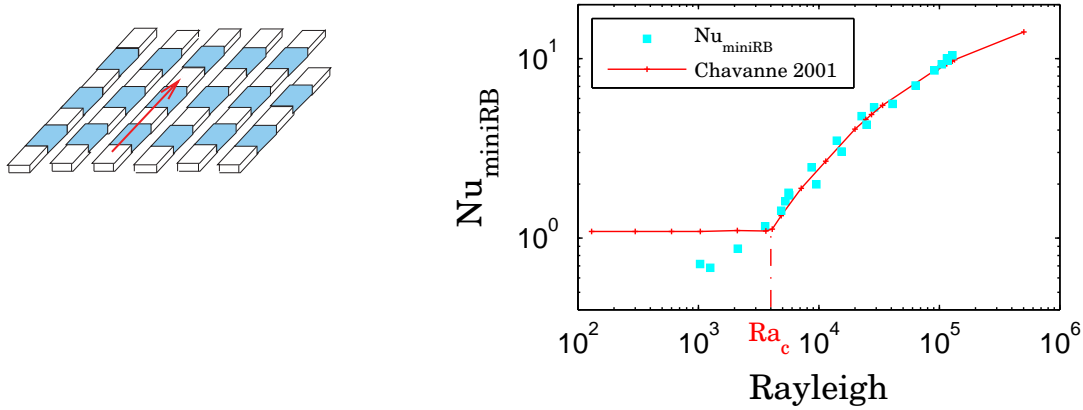


FIGURE 4.7 – Interprétation théorique.

4.2.4 Interprétation théorique

Nous avons développé un modèle théorique bien différent du régime ultime afin d'expliquer ces observations expérimentales. Ce modèle s'appuie sur le fait que dans une cellule de RB, un écoulement grande échelle balaie les couches limites thermiques. Il est représenté par la flèche en rouge sur le schéma de la figure 4.7 de gauche. Cet écoulement est produit par la convection et met en relation les couches limites inférieure et supérieure. Il n'est pas forcément stationnaire et peut osciller et changer d'orientation dans une cellule cylindrique. Cependant, pour ce modèle, on supposera que son orientation est fixée. C'est souvent le cas lorsque la cellule n'est pas parfaitement symétrique, une orientation est privilégiée. Pour une paroi présentant des rugosités, une partie du fluide placée contre la paroi est 'protégée' de cet écoulement global (zone en bleue sur le schéma). Elle représente 1/4 de la surface totale de la plaque. Pour $Ra \leq Ra^*$, cette partie de fluide ne participe pas ou peu à la convection ce qui explique que le nombre de Nusselt est plus faible pour une cellule aux parois rugueuses

ultime. Ce n'est d'ailleurs plus le cas aujourd'hui...

que pour une cellule aux parois lisses. En revanche, au delà de Ra^* , cette partie de fluide peut être dé-stabiliser de façon analogue à une mini-cellule de RB pour un rayleigh critique proche de 2000. On doit avoir :

$$Nu_{miniRB} = f(Ra_{miniRB}), \quad (4.4)$$

avec $Ra_{miniRB} = Ra \left(\frac{2\delta_r}{h}\right)^3$ et la fonction f est donnée par une mesure de Nu dans une cellule aux parois lisses mais pour des Ra allant de 1000 à 10^6 . Pour la paroi rugueuse, le fux thermique total est la somme des contributions de la zone protégée et de la zone balayée par l'écoulement grande échelle. Nous obtenons ainsi :

$$Nu_r = \frac{1}{4}Nu_{prot} + \frac{3}{4}Nu_{non\ prot}, \quad (4.5)$$

avec Nu_r le nombre de Nusselt de la cellule aux parois rugueuses, Nu_{prot} et $Nu_{non\ prot}$ représentent respectivement les nombres de Nusselt des zones protégées et non protégées par la circulation grande échelle. A partir de (4.5), le Nusselt de la mini-cellule de RB est obtenu :

$$Nu_{miniRB} = \frac{2\delta_r}{h}Nu_{prot}, \quad (4.6)$$

$$= \frac{2\delta_r}{h}(4Nu_r - 3Nu_{non\ prot}), \quad (4.7)$$

$$= \frac{2\delta_r}{h}(4Nu_r - 3Nu_l), \quad (4.8)$$

avec Nu_l le Nusselt d'une cellule de RB aux parois lisses.

Le Nusselt de la mini-cellule de RB est tracé en fonction de Ra sur la figure 4.7 de droite. Un bon accord est observé entre les mesures expérimentales obtenues dans une cellule de RB aux parois rugueuses et à très haut Ra et les mesures plus classiques dans une cellule aux parois lisses mais à de Ra beaucoup plus faibles.

4.3 Convection dans un long canal vertical

Cette expérience permet "d'oublier" les couches limites et d'étudier l'écoulement dans le cœur de RB (voir figure 4.1b). Les observations réalisées par ombroscopie sont assez impressionnantes. Le transfert thermique se réalise grâce aux déplacements de petits filaments de fluides chaud ou froid allant de haut en bas ou de bas en haut. L'organisation de ces filaments semblent quelconque mais dans la plupart du temps, l'ensemble des filaments qui montent se situent sur un côté du canal, et ceux qui descendent de l'autre côté (voir Figs. 4.9). Il existe des transitions au cours du temps entre ces régimes de convection. Dans les périodes de transition, il est difficile de savoir si la majorité des filaments montent ou descendent plutôt d'un côté ou d'un autre. Nous avons étudié ces transitions et les temps passés entre deux transitions. Nous avons remarqué que ces temps sont très variables et ne présentent pas de temps caractéristique.

4.3.1 Dispositifs expérimentaux

Le 1^{er} prototype a été installé dans une cellule de RB classique (voir Fig. 4.8 de gauche), de hauteur et largeur égales à 40 cm, et de profondeur 10 cm. Le canal est formé par l'ajout de

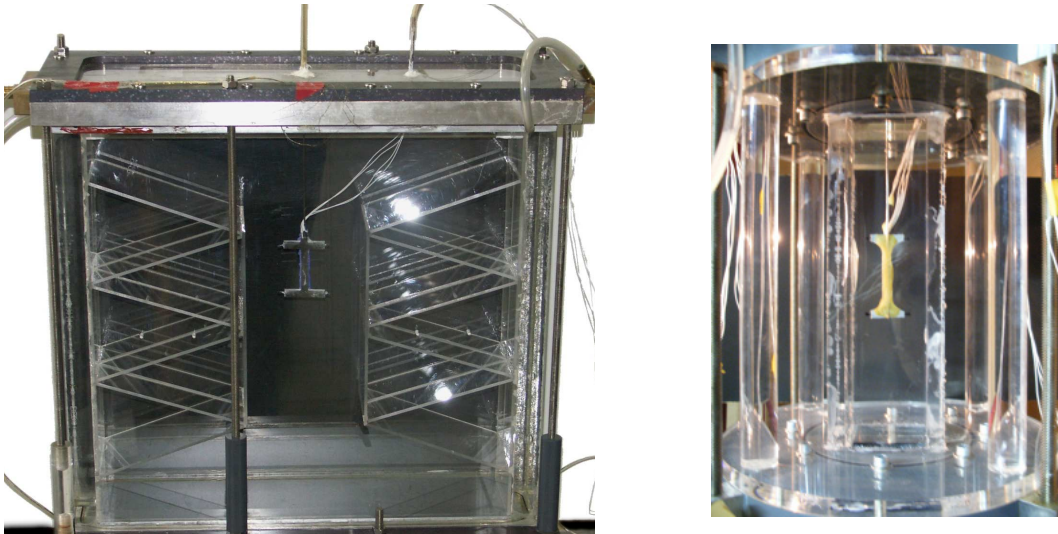


FIGURE 4.8 – Dispositifs expérimentaux.

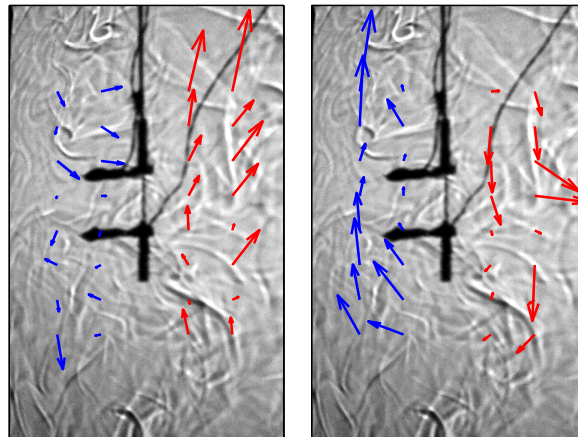


FIGURE 4.9 – Images par ombroscopie à deux temps différents de l'écoulement dans le canal.

deux structures en plexiglas en forme de château de cartes. Cette structure permet d'arrêter la convection en dehors du canal central. Le canal a une section horizontale carré de côté 10 cm et sa longueur est de 20 cm. Un autre dispositif expérimental a été développé par la suite (voir Fig. 4.8 de droite), avec un rapport d'aspect plus grand : section carré de 5 cm de côté et longueur de 20 cm.

Les températures ont été mesurées, soit avec des sondes de Platines pour accéder aux températures absolues, soit avec des thermistances de $200 \mu\text{m}$ afin de mesurer les fluctuations et les gradients de température. Le temps de réponse typique de ces thermistances est de 0.1 s dans l'eau. Les champs de vitesses moyennes et fluctuations ont été mesurés par vélocimétrie par images de particules (voir Figs. 4.11).

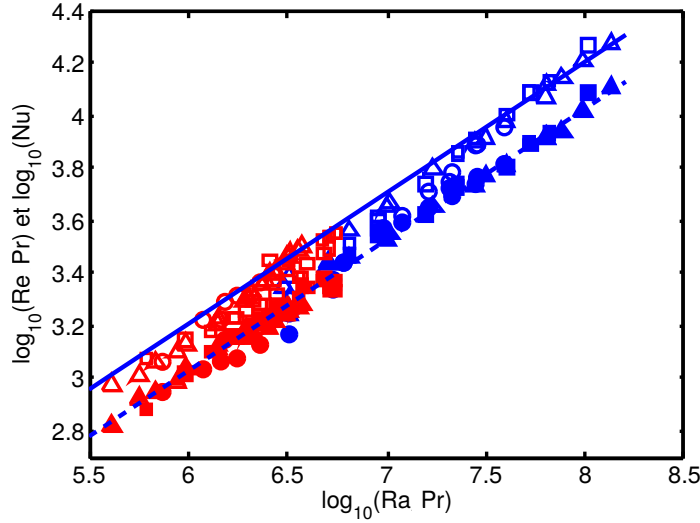


FIGURE 4.10 – Nombres de Nusselt et Reynolds en fonction du nombre de Grashof ($RaPr$). Les symboles pleins correspondent aux mesures effectuées dans la grande cellule (canal de rapport d’aspect 2) alors les symboles vides correspondent aux mesures effectuées dans la petite cellule dont la canal a pour rapport d’aspect 4.

4.3.2 Nusselt versus Rayleigh dans un canal

Dans un long canal vertical, la hauteur du canal n’a plus réellement de sens et les définitions des nombres de Nusselt et de Rayleigh nécessitent une longueur caractéristique. L’adoption de la largeur n’est pas non plus entièrement satisfaisante car le transfert thermique est avant tout vertical. Le paramètre moteur de la convection dans un long canal est le gradient de la température moyenne : $d\bar{T}/dz$. Nous avons développé un système de mesure particulier qui permet de mesurer ce gradient (voir images des dispositifs expérimentaux 4.8). Nous avons donc proposé de définir une longueur caractéristique en utilisant $d\bar{T}/dz$ et les fluctuations moyennes de la température :

$$L_c = \frac{\sigma_T}{d\bar{T}/dz} \quad (4.9)$$

La longueur caractéristique est donc intrinsèque à la convection, elle n’est pas directement contrôlée par l’expérimentateur. En revanche, nous l’avons mesurée pour chaque expérience réalisée. Les nombres de Rayleigh et de Nusselt sont définis par les expressions suivantes :

$$Ra = \frac{g\beta(d\bar{T}/dz)L^4}{\nu\kappa} \quad (4.10)$$

$$Nu = \frac{\Phi}{\lambda(d\bar{T}/dz)} \quad (4.11)$$

$$(4.12)$$

Les nombres de Nusselt et de Reynolds sont tracés en fonction de $RaPr$ sur la figure 4.10 et ces résultats expérimentaux sont en corrd avec des lois de puissance :

$$Nu = 1.6 RaPr \quad (4.13)$$

$$RePr = 1.07 RaPr \quad (4.14)$$

4.3.3 Description de l'écoulement et mesure de viscosité et diffusivité turbulentes

En plus des grandeurs globales, nous avons étudié les profils des vitesses moyennes verticales et horizontales, ainsi que leurs fluctuations. Les distributions des vitesses horizontales et verticales sont montrées sur les figures 4.12.

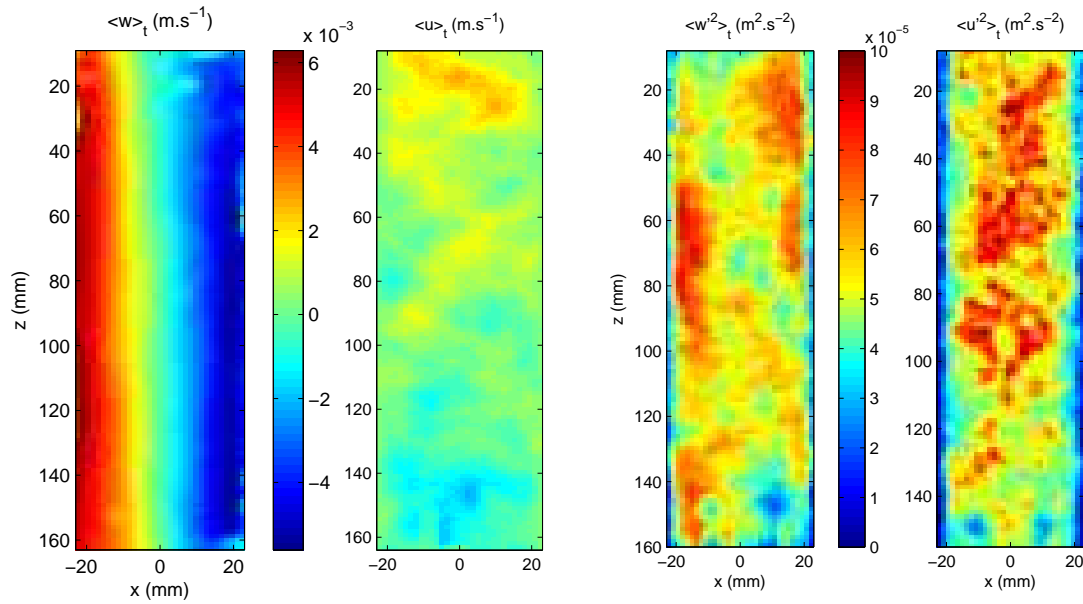


FIGURE 4.11 – Mesures par vélocimétrie par images de particules.

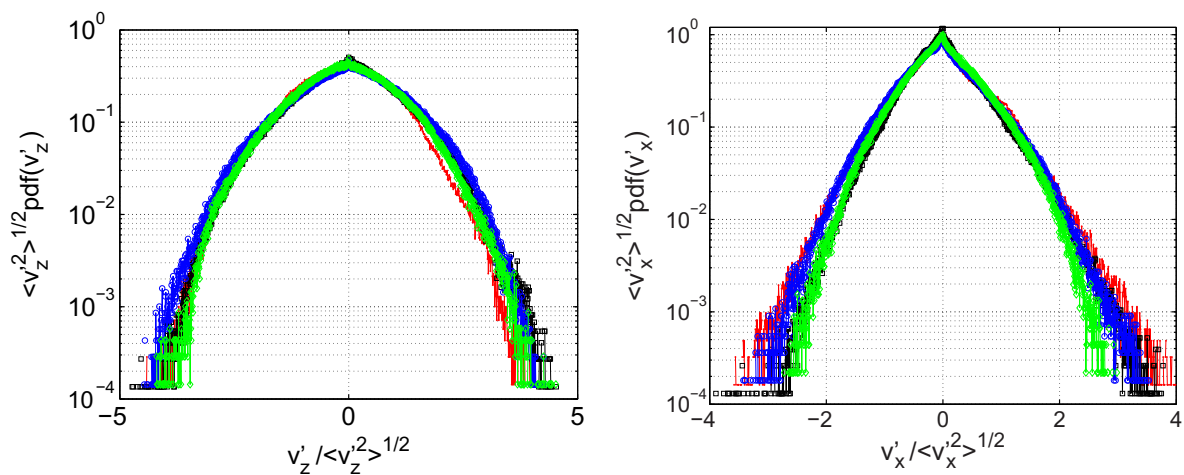


FIGURE 4.12 – Distribution des fluctuations des vitesses (normalisée par l'écart-type) selon l'axe du canal (à gauche) et selon l'axe transverse (à droite).

4.4 Convection par chauffage des couches limites

4.4.1 L'idée originale de Bouillaut et al.

L'idée originale vient de V. Bouillaut, S. Lepot, S. Aumaître et B. Gallet [2; 3]. Il s'agit de reproduire en laboratoire des processus observés dans l'atmosphère où le chauffage du fluide est réalisé par rayonnement. Au lieu d'injecter l'énergie par l'intermédiaire d'une plaque horizontale chauffée, [2; 3] ont développé une expérience de RB modifiée dans laquelle l'énergie est fournie directement au sein du fluide en utilisant une lampe de forte puissance. Cette technique astucieuse permet de ne chauffer que la couche limite inférieure, ce qui pourrait faciliter sa destabilisation et la transition vers le régime ultime. Les conditions aux limites sont donc bien différentes de celles de RB : la plaque inférieure est isolée thermiquement ce qui entraîne un flux nul en $z = 0$ (voir Fig. 4.13). Le chauffage par absorption de lumière est modélisé par un terme de source variant selon une loi exponentielle :

$$q_v(z) = \frac{Q}{l} \exp\left(-\frac{z}{l}\right), \quad (4.15)$$

avec Q le flux total rayonné par la source de lumière (en W/m^2) et z la coordonnée verticale avec $z = 0$ au niveau de la plaque inférieure. La longueur caractéristique l peut être ajusté en modifiant la quantité de colorant présente dans l'eau. [2; 3]. La principale difficulté à l'interprétation de cette expérience originale vient du fait que le processus ne peut pas être stationnaire puisque de l'énergie est injectée. Il faudrait un système de refroidissement en volume équivalent au chauffage, ce qui paraît difficile à trouver. Cependant, [2; 3] ont montré qu'en considérant la différence de température (non stationnaire) entre la plaque et le fluide loin du chauffage ($z \gg l$), il y a équivalence entre leur expérience et une expérience de RB pour $l \rightarrow 0$. La modélisation théorique que j'ai proposé fait intervenir un refroidissement avec un terme source $q_v(z)$ négatif :

$$q_v(z) = -\frac{Q}{l} \exp\left(-\frac{h-z}{l}\right), \quad (4.16)$$

avec $q_v(h) = Q/l$ et $q_v(z) \rightarrow 0$ lorsque $z \ll h$. En considérant (4.15) et (4.16), le profil de q_v est tracé sur les figures 4.13 pour $l < \delta_T$ (à gauche) et $l > \delta_T$ (à droite). δ_T est l'épaisseur des couches thermiques inférieure et supérieure qui dépend du Rayleigh mais aussi de l . Contrairement à une expérience de RB, le flux thermique qui traverse le fluide ($\Phi(z)$) n'est pas constant, il s'annule au niveau de plaques. Cependant, dans le cœur de RB pour $l \ll z \ll h - l$, le flux est constant et égal à Q comme pour une cellule de RB. Le nombre de Nusselt est alors défini en utilisant Q :

$$Nu = \frac{Qh}{\lambda\Delta T}, \quad (4.17)$$

4.4.2 Modèles théoriques

J'ai étendu les différents modèles théoriques de RB au cas présenté précédemment. Le modèle simple de Malkus et Priestley (1954) [6; 7] n'a pas été très compliqué à adapter au cas du chauffage par rayonnement. J'ai alors remarqué un très bon accord entre mes prédictions théoriques et les expériences de Bouillaut et al. J'en ai tiré deux conclusions :

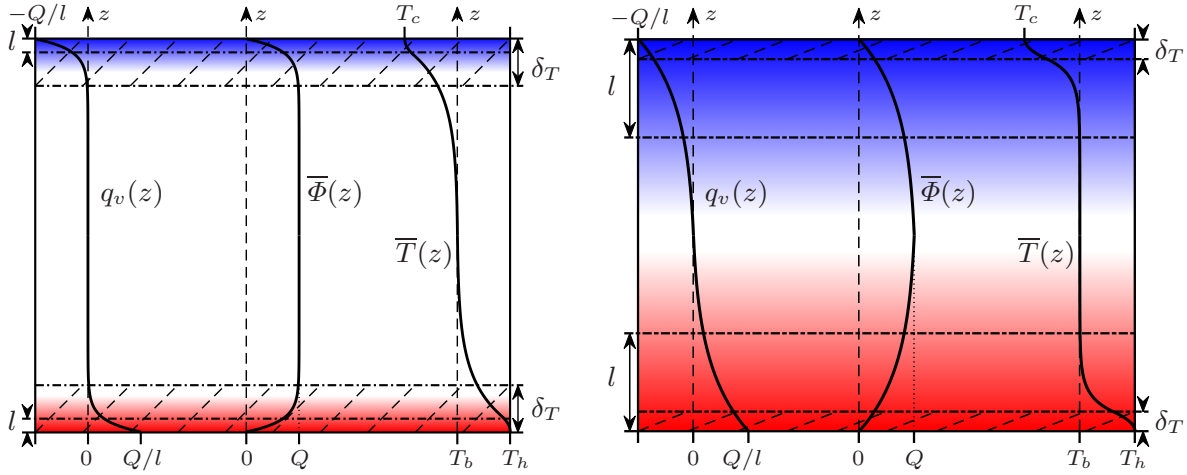


FIGURE 4.13 – Expérience de RB modifiée avec $l/\delta_T < 1$ (à gauche) et $l/\delta_T > 1$ (à droite). Le fluide est chauffé en volume (région en rouge) et refroidi en volume également (région bleue). Les 2 couches limites d'épaisseur δ_T sont représentées par les zones hachurées. Les profils de la source d'énergie positive et négative q_v , du flux thermique moyen $\bar{\Phi}$ et de la température moyenne sont également indiqués.

- Tout d'abord, les résultats de Boullaut et al. sont en parfait accord avec un modèle de convection dans un régime classique. Il est d'ailleurs raisonnable de croire que la convection produite par éclairage reste dans le régime classique. Il est en effet peu probable que cette technique permette de fournir assez d'énergie afin de faire transiter la couche limite vers le régime ultime. J'ai passé 2 ans à chercher le régime ultime avec des systèmes de chauffage beaucoup plus puissants sans succès.

- Le bon accord entre la théorie est les expériences m'ont convaincu que la méthode que j'avais développé pour étendre les théories de RB au cas de chauffage en volume était très solide. Et donc, j'ai étendu les autres théories plus compliquées, comme celles de Kraichann [8] ou encore de Grossmann et Lohse [10; 11]. Il a été ainsi plus facile de publier ces modifications de théorie en utilisant des théories plus récentes.

Je ne présente ici que la méthode pour étendre la théorie de Malkus (Eq. 4.2). Pour les autres théories, vous pouvez vous référer à : [Creysse, J. Fluid Mech., 2020](#).

L'hypothèse de base est que la convection générée est très similaire à celle observée pour RB. En particulier, l'épaisseur des couches limites est donnée par l'équation 4.1 :

$$\frac{\delta_T}{h} = \frac{1}{2Nu_0(Ra, Pr)}, \quad (4.18)$$

avec Nu_0 le Nusselt d'une expérience de RB. En régime stationnaire, l'équation de conservation de l'énergie moyennée sur une section horizontale s'écrit :

$$\frac{d(\overline{w'T'})}{dz} - \lambda \frac{d^2\bar{T}}{dz^2} = q_v(z). \quad (4.19)$$

Dans chaque couche limite, la convection est négligée et l'intégration de (4.19) donne :

$$T_h - \bar{T}(z) = \frac{Qh}{\lambda} \left\{ \frac{z}{h} - \frac{l}{h} [1 - \exp(-z/l)] \right\}. \quad (4.20)$$

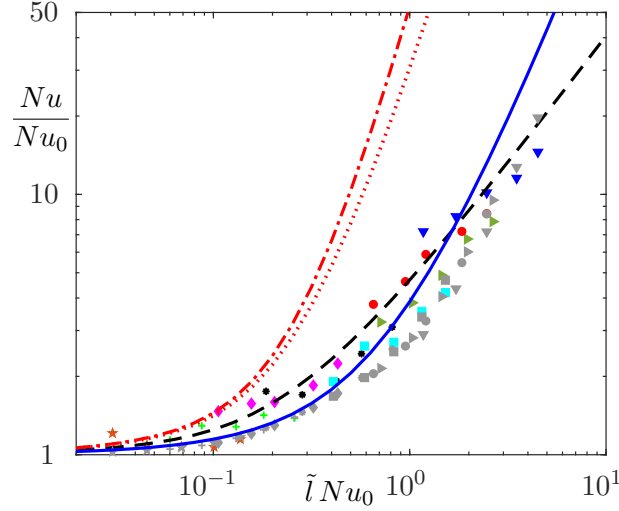


FIGURE 4.14 – Rapport des nombres de Nusselt en fonction de $\tilde{l} \times Nu_0$. Ymbolés colorés : résultats expérimentaux de [3] avec $\tilde{l} = 0.0015$ (\star), $\tilde{l} = 0.003$ ($+$), $\tilde{l} = 0.006$ (\diamond), $\tilde{l} = 0.0012$ ($*$), $\tilde{l} = 0.0024$ (\square), $\tilde{l} = 0.048$ (\triangleright), $\tilde{l} = 0.05$ (\circ), $\tilde{l} = 0.096$ (∇). Ligne noire discontinue : modèle de Malkus [6] adapté au cas du chauffage par rayonnement, Eq. (4.22), pas de paramètre ajustable. Ligne pleine bleue : modèle adapté de Grossmann et Lohse [10] pour le régime IV_u , pas de paramètre ajustable. Symboles gris : modèle adapté de Grossmann et Lohse [11] en considérant 1 mélange des 8 régimes et sous-régimes ($I_u, I_l, \dots, IV_u, IV_l$). Lignes rouges supérieures : regime proposé par Kraichnan [8], appelé régime ultime par [9], et adapté ici au cas du chauffage par rayonnement en supposant que le Reynolds est égal à $Re_0 = 1000$ (ligne en pointillés) ou $Re_0 = 10^{10}$ (ligne discontinue). Pour plus d'explications, voir Creyssels, *accepté à J. Fluid Mech.*, 2020.

Pour $z = \delta_T$ et en utilisant la définition du nombre de Nusselt (4.17), (4.31) devient :

$$\frac{1}{2Nu} = \frac{\delta_T}{h} - \frac{l}{h} [1 - \exp(-\delta_T/l)]. \quad (4.21)$$

En utilisant (4.18), (4.21) devient :

$$\frac{Nu}{Nu_0} = \frac{1}{1 - 2\tilde{l}Nu_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{l}Nu_0}\right) \right]}. \quad (4.22)$$

Dans (4.18) et (4.22), Nu_0 est le nombre de Nusselt pour une expérience classique de RB mais Nu_0 représente aussi la limite de Nu lorsque $\tilde{l} = l/h \rightarrow 0$. Même si Nu dépend des 2 paramètres \tilde{l} and Ra , (4.22) montre que le rapport des Nusselt est une fonction du seul paramètre $\tilde{l} \times Nu_0$. C'est le principal résultat de cette analyse théorique et il est bien vérifié par les résultats expérimentaux de Bouillaut et al. (voir paragraphe suivant).

4.4.3 Comparaison entre les modèles théoriques et les résultats expérimentaux

Le rapport des Nusselt Nu/Nu_0 mesuré par [3] est tracé sur la figure 4.14 accompagné des prédictions théoriques obtenues en adaptant les théories de Malkus (4.22), de Kraichnan pour le régime ultime et de Grossmann et Lohse. Un bon accord est observé entre les résultats expérimentaux et les modèles de Malkus et Grossmann et Lohse, montrant que ces expériences sont bien dans le régime classique pour lequel Nu_0 varie presque comme $Ra^{1/3}$. En revanche, les prédictions pour le régime ultime sont clairement décalés par rapport aux résultats expérimentaux.

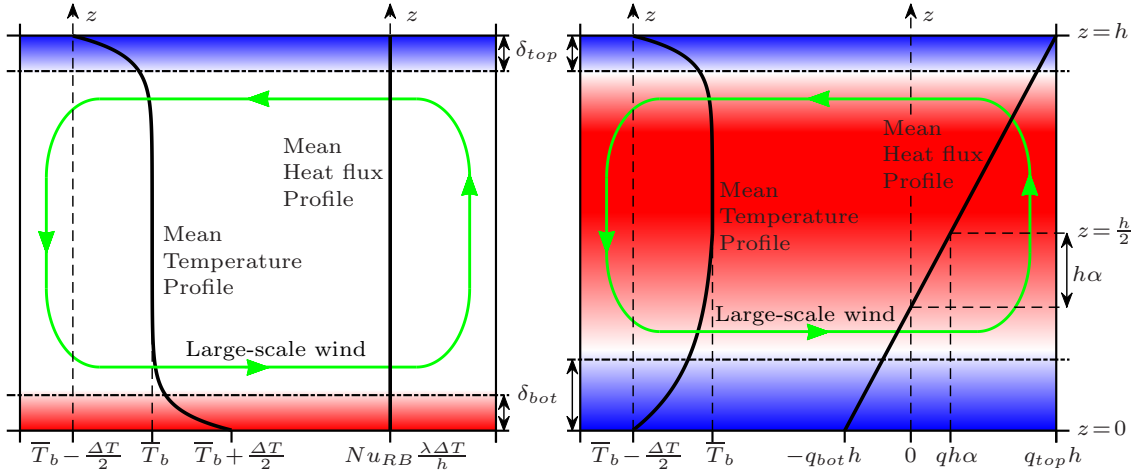


FIGURE 4.15 – Profils de température et de flux thermique observés pour une expérience de RB (à gauche), et pour une expérience de convection générée par chauffage uniforme en volume (à droite). Les couches limites inférieure et supérieure d'épaisseurs respectives δ_{bot} et δ_{top} sont aussi représentées. Pour l'expérience de chauffage en volume, $\delta_{bot} > \delta_{top}$.

4.5 Convection et stratification

4.5.1 Description de l'écoulement et lois d'échelle obtenues dans la littérature

Le succès des considérations théoriques précédentes m'a poussé à aller beaucoup plus loin dans l'application de ma méthode d'extension des modèles théoriques de RB aux systèmes de convection plus complexes. Ici, on s'éloigne un peu plus de l'expérience standard de RB car les températures des plaques inférieure et supérieure sont maintenues à température constante et égale (voir Fig. 4.15). La convection est générée en imposant une source d'énergie constante et uniforme (q) dans tout le volume du fluide. Dans ce cas, la symétrie observée pour une cellule de RB disparaît car la partie du fluide située dans la zone supérieure de la cellule est instable générant de la convection, alors que la partie du fluide située dans la zone inférieure est stratifiée. C'est un bon exemple d'expériences en laboratoire (ou de systèmes d'ingénierie) pour lesquels la convection et la stratification se supersposent et interagissent. Le fluide convectif tend à dé-stratifier le fluide inférieur et le fluide stratifié tend à ralentir le fluide supérieur, notamment l'écoulement dit de grande échelle. Etant donné qu'il n'y a pas de différence de température entre les plaques et que le paramètre de contrôle est la puissance volumique q , le nombre de Rayleigh est défini de la manière suivante dans cette situation :

$$R = \frac{g\beta q h^5}{\lambda\nu\kappa}, \quad (4.23)$$

La dissymétrie entre les deux couches limites induit également une dissymétrie entre la valeur absolue des flux thermiques (q_{bot} pour la plaque inférieure, q_{top} pour la plaque supérieure) qui s'évacuent au niveau des 2 plaques horizontales. Le profil du flux thermique en fonction de z est tracé sur la figure 4.15. On définit alors un coefficient α tel que :

$$q_{bot} = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)q \quad (4.24)$$

$$q_{top} = \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)q. \quad (4.25)$$

La conservation de l'énergie est donc vérifiée : $q_{bot} + q_{top} = q$. A chaque plaque horizontale est associé un nombre de Nusselt :

$$Nu_{bot} = \frac{q_{bot}h^2}{\lambda\Delta T}, \quad (4.26)$$

$$Nu_{top} = \frac{q_{top}h^2}{\lambda\Delta T}, \quad (4.27)$$

avec $\Delta T = 2(T_b - T_0)$. T_b est la température moyenne dans le centre de la cellule, appelé également température maximale (voir le profil de la température moyenne sur la figure 4.15). Dans la littérature, $T_b - T_0$ est prise comme différence de température caractéristique, il y a donc un facteur 2 entre les définitions des Nusselt choisies ici et celles utilisées dans la littérature. Les définitions adoptées ici permettent d'obtenir que $Nu_{bot} \rightarrow Nu_{RB}$ lorsque $R \rightarrow \infty$.

Les nombres de Nusselt Nu_{top} et Nu_{bot} ont été mesurés à l'aide d'expériences en laboratoire et de simulations numériques (voir [1] et la tableau 1 de mon article

Les modèles théoriques qui suivent sont basés sur une similitude forte entre les parties hautes de la cellule de convection générée par chauffage interne et celle de RB. Même si R est le paramètre de contrôle de la convection, un nombre de Rayleigh équivalent à une cellule de RB peut être défini :

$$Ra = \frac{g\beta\Delta Th^3}{\nu\kappa}, \quad (4.28)$$

avec toujours $\Delta T = 2(T_b - T_0)$. Cependant, Ra doit être mesuré comme les nombres de Nusselt. Les modèles qui suivent fournissent des prédictions théoriques pour Ra , Nu_{bot} , Nu_{top} et α en fonction de R et du nombre de Prandtl. En fait, seulement 2 variables sont indépendantes car les 2 Rayleigh sont liés par la relation suivante :

$$Ra = \frac{R}{Nu_{bot} + Nu_{top}}. \quad (4.29)$$

Il faut donc 2 modèles : l'un pour décrire la convection qui a lieu majoritairement dans la partie haute de la cellule, et un deuxième pour évaluer le flux thermique dans l'écoulement stratifié situé dans la partie basse de la cellule.

4.5.2 Modèle pour le Nusselt de la plaque supérieure

Ce modèle est une copie de celui obtenu dans la section 4.4. L'épaisseur de la couche limite supérieure est contrôlée par la différence de température $-T_0 = \Delta T/2$, la hauteur de la cellule et le nombre de Prandtl. Ainsi :

$$\frac{\delta_{top}}{h} = \frac{1}{2Nu_{RB}(Ra, Pr)}. \quad (4.30)$$

Dans la couche limite thermique et en régime stationnaire, l'équation de l'énergie exprime que l'apport d'énergie volumique q est évacué par conduction. Son intégration donne :

$$\bar{T}(z) - T_0 = \frac{q_{top}h^2}{\lambda} \frac{z}{h} \left[1 - \frac{z}{(1 + 2\alpha)h} \right]. \quad (4.31)$$

Pour obtenir (4.31), nous avons utilisé : $\lambda \frac{d\bar{T}}{dz} = q_{top}h$ et $\bar{T} = T_0$ for $z = 0$. En affirmant que $\bar{T}(\delta_{top}) =$ et en utilisant (4.27) et (4.30), (4.31) devient :

$$\frac{Nu_{RB}}{Nu_{top}} = 1 - \frac{1}{2(1+2\alpha)Nu_{RB}}. \quad (4.32)$$

L'équation (4.32) fournit une prédiction théorique de Nu_{top} en fonction des 2 paramètres : Nu_{RB} et α . Elle montre que Nu_{top} est proche de Nu_{RB} . En revanche, les variations de α avec Ra nécessite un deuxième modèle.

4.5.3 Modèle pour le Nusselt de la plaque inférieure

Dans la couche limite inférieure, l'intégration de l'équation de l'énergie fournit une équation similaire à (4.31) :

$$\bar{T}(z) - T_0 = \frac{q_{bot}h^2}{\lambda} \frac{z}{h} \left[1 - \frac{z}{(1-2\alpha)h} \right]. \quad (4.33)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{1}{2Nu_{bot}} = \frac{\delta_{bot}}{h} \left(1 - \frac{1}{1-2\alpha} \frac{\delta_{bot}}{h} \right). \quad (4.34)$$

Contrairement à la couche limite supérieure, la couche limite inférieure ne ressemble pas à celle de RB car le gradient de température est positif (stratification). Néanmoins, l'épaisseur de la couche limite inférieure reste contrôlée, certes indirectement, par Ra . En effet, le Rayleigh contrôle l'intensité de l'écoulement dit de grande échelle qui balaie la couche limite. Le modèle suppose ici que la couche limite ressemble à celle de la convection forcée, type Blasius. δ_{bot} se modélise donc de la manière suivante :

$$\frac{\delta_{bot}}{h} = \frac{A}{Pr^{1/3}Re^{1/2}}. \quad (4.35)$$

avec $Re(Ra, Pr)$. Une bonne approximation est de supposer que $Re = Re_{RB}$, c'est à dire le Reynolds mesuré dans le cas d'une convection de type RB. En utilisant (4.35), (4.34) devient

$$Nu_{bot} = \frac{Pr^{1/3}Re_{RB}^{1/2}}{2A \left[1 - \frac{A}{1-2\alpha} Pr^{-1/3} Re_{RB}^{-1/2} \right]}. \quad (4.36)$$

Les 3 fonctions Nu_{top} , Nu_{bot} et α ne sont pas indépendantes les unes des autres :

$$\frac{Nu_{top}}{Nu_{bot}} = \frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}. \quad (4.37)$$

En utilisant (4.32), (4.36) et (4.37), les variations de α avec Ra et Pr sont prédits :

$$2\alpha = \frac{1 - \frac{A}{Pr^{1/3}Re_{RB}^{1/2}} - \frac{Pr^{1/3}Re_{RB}^{1/2}}{2ANu_{RB}} \left(1 - \frac{1}{2Nu_{RB}} \right)}{1 + \frac{Pr^{1/3}Re_{RB}^{1/2}}{2ANu_{RB}}}. \quad (4.38)$$

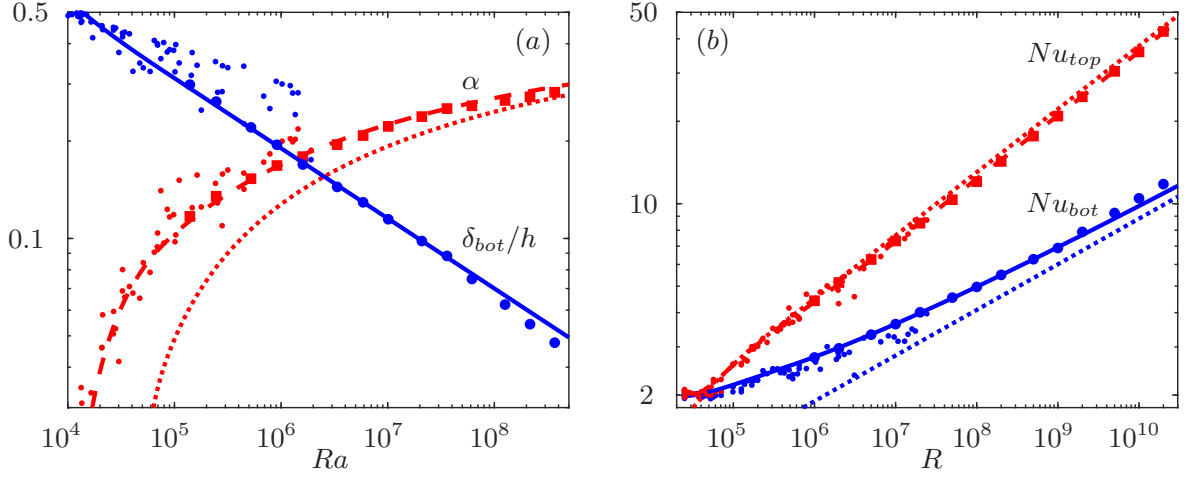


FIGURE 4.16 – Comparaison entre les 2 modèles théoriques présentés et les résultats numériques de [12] (ronds) et les résultats expérimentaux de [13] (points).

4.5.4 Comparaisons modèles/résultats de la littérature

Pour $10^5 \leq Ra \leq 10^{12}$, l'ensemble des résultats de la littérature converge vers :

$$Nu_{RB} \sim Pr^{\gamma_{RB}} Ra^{\theta_{RB}}, \quad (4.39)$$

avec $\gamma_{RB} \approx 0$ et $0.29 \leq \theta_{RB} \leq 0.33$. De plus, en écrivant que le nombre de Richardson dans le cœur de l'écoulement de RB est de l'ordre de 1, l'équation suivante est obtenue :

$$Re_{RB} \approx \frac{(Nu_{RB} Ra)^{1/3}}{Pr^{2/3}}. \quad (4.40)$$

En utilisant (4.39) et (4.40), les limites de (4.29), (4.32) et (4.36) deviennent

$$Ra \approx \frac{R}{Nu_{RB}} \sim Pr^{\frac{\gamma_{RB}}{1+\theta_{RB}}} R^{\frac{1}{1+\theta_{RB}}}, \quad (4.41)$$

$$Nu_{top} \approx Nu_{RB} \sim Pr^{\frac{\gamma_{RB}}{1+\theta_{RB}}} R^{\frac{\theta_{RB}}{1+\theta_{RB}}}, \quad (4.42)$$

$$Nu_{bot} \approx \frac{R^{1/6}}{2A} \sim R^{1/6}. \quad (4.43)$$

Ainsi : $Nu_{bot} \sim R^{1/6}$ et $Nu_{top} \sim R^{\theta_{IH}}$ avec $0.22 \leq \theta_{IH} \leq 0.25$, en bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques. La figure 4.16 présente une comparaison plus fine entre les modèles théoriques et les résultats numériques de [12] (ronds) et les résultats expérimentaux de [13] (points).

4.6 Perspectives

Les résultats de ce chapitre concernent des systèmes de convection présentant des petites différences par rapport au modèle standard de RB. Comme souligné dans le paragraphe enjeux pour l'ingénierie et l'environnement, ces systèmes présentent l'avantage de posséder un peu plus d'ingrédients physiques correspondant aux systèmes naturels ou d'ingénierie.

Les modèles théoriques développés ici s'appuient sur les connaissances de la structure de l'écoulement de RB et ils correspondent à des extensions des modèles théoriques de RB. On peut envisager une poursuite de ces travaux dans le cas de systèmes plus complexes mêlant convection turbulente, stratification, ondes internes... Une autre motivation personnelle est d'apporter une petite contribution à la compréhension du système RB en tant que tel.

4.7 Références

- [1] D. Goluskin. *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection*. Springer, 2015.
- [2] S. Lepot, S. Aumaître, and B. Gallet. Radiative heating achieves the ultimate regime of thermal convection. *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, 115 :8937–8941, 2018.
- [3] V. Bouillaut, S. Lepot, S. Aumaître, and B. Gallet. Transition to the ultimate regime in a radiatively driven convection experiment. *J. Fluid Mech.*, 861 :R5, 2019.
- [4] X. Chavanne, F. Chillà, B. Chabaud, B. Castaing, and B. Hébral. Turbulent Rayleigh-Bénard convection in gaseous and liquid He. *Phys. Fluids*, 13 :1300–1320, May 2001.
- [5] P.-E. Roche, B. Castaing, B. Chabaud, and B. Hébral. Observation of the $1/2$ power law in Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E*, 63(4) :045303, April 2001.
- [6] W. V. R. Malkus. The heat transport and spectrum of thermal turbulence. *Proc. Roy. Soc. A*, 225 :196–212, 1954.
- [7] C. H. B. Priestley. Convection from a large horizontal surface. *Aust. J. Phys.*, 7 :176–201, 1954.
- [8] R. H. Kraichnan. Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number. *Phys. Fluids*, 5(11) :1374–1389, November 1962.
- [9] X. Chavanne, F. Chillà, B. Castaing, B. Hébral, B. Chabaud, and J. Chaussy. Observation of the ultimate regime in Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :3648–3651, November 1997.
- [10] S. Grossmann and D. Lohse. Scaling in thermal convection : A unifying view. *J. Fluid Mech.*, 407 :27–56, 03 2000.
- [11] S. Grossmann and D. Lohse. Thermal convection for large Prandtl numbers. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :3316–3319, April 2001.
- [12] D. Goluskin and E. P. van der Poel. Penetrative internally heated convection in two and three dimensions. *J. Fluid Mech.*, 791 :R6, 2016.
- [13] F. A. Kulacki and R. J. Goldstein. Thermal convection in a horizontal fluid layer with uniform volumetric energy sources. *J. Fluid Mech.*, 55(2) :271–287, 1972.