



HAL
open science

Generation of block-structured quadrilateral meshes from prescribed cross-field and preserving physical characteristics of a computational scene

Kokou Michaelis Dotse

► **To cite this version:**

Kokou Michaelis Dotse. Generation of block-structured quadrilateral meshes from prescribed cross-field and preserving physical characteristics of a computational scene. Engineering Sciences [physics]. Toulouse, ISAE, 2024. English. NNT : 2024ESAE0027 . tel-04758540

HAL Id: tel-04758540

<https://hal.science/tel-04758540v1>

Submitted on 29 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Doctorat de l'Université de Toulouse

Délivré par l'ISAE-SUPAERO

Création de maillages quadrilatéraux bloc structurés
à partir de champ de croix prescrit et respectant les
caractéristiques physiques d'une scène de calcul

Thèse présentée et soutenue, le 12 juin 2024 par

Kokou Michaelis DOTSE

École doctorale

MITT - Mathématiques, informatique, télécommunications

Spécialité

Mathématiques et Applications

Unité de recherche

ISAE-ONERA MOIS Modélisation et Ingénierie des Systèmes

Thèse dirigée par

Sébastien PERNET et Vincent MOUYSSET

Composition du jury

Mme Hélène BARUCQ, Présidente, INRIA-Bordeaux
M. Vincent CHIARUTTINI, Examineur, ONERA
M. Christophe GEUZAINÉ, Rapporteur, Université de Liège
M. Franck LEDOUX, Rapporteur, CEA
M. Vincent MOUYSSET, Co-directeur de thèse, ONERA
M. Sébastien PERNET, Directeur de thèse, ONERA

Remerciements

L'achèvement de cette thèse marque un moment significatif de mon parcours académique et personnel. Ce travail n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide, le soutien et l'inspiration de nombreuses personnes, auxquelles je souhaite exprimer ma plus profonde reconnaissance.

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Sébastien Pernet, pour son encadrement, sa disponibilité, ses conseils précieux et sa bienveillance.

Je remercie également de façon particulière mon co-directeur de thèse, Vincent Mouysset. À vos côtés, j'ai acquis une grande maturité scientifique ainsi qu'une précieuse confiance en moi. Avec vous, j'ai appris à "chercher" et ça a été une expérience formidable. Merci d'avoir partagé votre expertise avec générosité et d'avoir créé un environnement propice à l'épanouissement. Des maillages à la boxe, en passant par des recettes de cuisine ou même des réflexions philosophiques, nos conversations variées ont été un véritable plaisir pour moi. Je suis profondément reconnaissant pour ces échanges enrichissants. Je garderai notre fameux "MAIS" comme un souvenir indélébile de ces moments partagés avec vous.

Je suis reconnaissant envers Franck Ledoux et Christophe Geuzaine, qui ont aimablement accepté de consacrer de leur temps afin de rapporter cette thèse. Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Hélène Barucq et Vincent Chiaruttini pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à l'ONERA pour le financement de cette thèse ainsi qu'à tous les membres de l'équipe MACI pour leur accueil chaleureux. Un merci spécial à Xavier Ferrieres pour ses visites matinales et sa bonne humeur contagieuse ainsi qu'à Claire Dabin pour sa disponibilité et sa bienveillance.

À mes chers amis et collègues rencontrés à l'ONERA : Clément, Matthias premier du nom, Alfonso (l'homme qui a compté jusqu'à ∞), Margot, Maëlys (la merveilleuse), Axel (l'homme aux punchlines), Matthias deuxième du nom (celui qui frôle la perfection), Timothé (le stylé), Nathalie (celle qui a toujours une idée derrière la tête pour mettre l'ambiance), Arthur, Gabriel (l'homme aux mille rêves), Tristan, et Benjamin. Les soirées, les discussions, les karaokés, les randonnées, et tant d'autres moments partagés ont rendu ces années inoubliables et uniques.

Enfin, à ma famille, en particulier mes parents et mon petit frère David, pour leur amour et leur soutien constants. À ma chère et tendre Jessica, merci pour ton soutien inébranlable et tes sacrifices.

À Daniel DOTSE

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Méthodes numériques pour la résolution d'EDP	1
1.1.1	Quelques schémas numériques	2
1.1.2	Influence du maillage	3
1.1.3	Intérêts des maillages quadrilatéraux	6
1.2	Maillage	10
1.2.1	Maillages à bases de triangles	11
1.2.2	Maillages à bases de quadrilatères	17
1.3	Maillages quadrilatéraux à partir de champs de croix	24
1.4	Objectif de la thèse	26
1.5	Organisation du manuscrit	27
1.6	Communications issues de la thèse	28
2	Génération de maillages quadrilatéraux à partir de champs de croix prescrits	31
2.1	Cadre théorique	32
2.1.1	Champ de croix	32
2.1.2	Indice	35
2.1.3	Théorème de Poincaré-Hopf	43
2.1.4	Ligne de champ et séparatrices	44
2.2	Méthode de partitionnement à partir d'un champ de croix	54
2.2.1	Principe de la méthode	54
2.2.2	Etude de la méthode	66
2.3	Discussions	78
2.3.1	Sur la signification pratique de l'hypothèse $0 < Card(\mathcal{S}_{\bar{u}}) < \infty$	78
2.3.2	Sur la conservation des propriétés du champ de croix initial	79
2.3.3	Sur les singularités de bord	79
2.3.4	Sur la construction du champ de correction	81
2.3.5	Sur les multi-matériaux	84
3	Discrétisation, algorithmes et exemples	87
3.1	Représentation discrète	88
3.1.1	Maillage triangulaire	88
3.1.2	Champ de croix	88
3.1.3	Points singuliers, indice et ligne de champs	91
3.1.4	Lien entre \bar{u} et \bar{u}_h	93
3.2	Partitionnement de $\partial\Omega_h$	95
3.2.1	Recherche de points singuliers	95

3.2.2	Construction des séparatrices	95
3.2.3	Assemblage des partitions	103
3.3	Génération du maillage quadrilatéral	108
3.3.1	Uniformisation	108
3.3.2	Interpolation transfinie	109
3.3.3	Maillage par tracé direct de lignes de champ dans le champ de croix	110
3.3.4	Méthode basée sur des EDP	112
3.4	Opération d'alignement	114
3.5	Analyse de convergence	118
3.6	Génération de champ de croix	121
3.6.1	L'Équation de Laplace	121
3.6.2	Une expression analytique	122
3.7	Homogeneisation	122
4	Extension aux surfaces courbes	127
4.1	Champ de croix, points singuliers, indices et séparatrices	127
4.2	Partitionnement de $\partial\Omega_h$ et maillage	130
4.3	Extension des résultats principaux du cas planaire	133
4.4	Analyse de convergence	137
4.5	Génération de champs de croix	138
4.5.1	L'Équation de Laplace	139
4.5.2	Connexions triviales	140
5	Conclusion et perspectives	143
5.1	Conclusion	143
5.2	Perspectives	144
A	Caractéristique d'Euler	153
B	Opérateur Laplacien discret	155
C	Une approche pour la discrétisation du problème d'adaptation	161
D	Algorithme de coloriage	163
	Table des figures	165
	Références	169

Chapitre 1

Introduction

Les phénomènes physiques peuvent être extrêmement variés, allant de la propagation des ondes dans un milieu, aux écoulements de fluides, à la diffusion de la chaleur, aux vibrations des structures, aux phénomènes électromagnétiques, etc. La modélisation mathématique consiste à représenter ces phénomènes sous forme de relations, en utilisant des équations et des concepts appropriés. L'objectif est de comprendre le comportement du système étudié, de prédire son évolution dans le temps et dans l'espace, et éventuellement de prendre des décisions éclairées en fonction des résultats obtenus.

La modélisation mathématique aboutit souvent à l'obtention d'équations aux dérivées partielles (EDP) qui sont un outil fondamental en mathématiques appliquées pour la modélisation des phénomènes physiques. Elles permettent de décrire et d'analyser des systèmes dynamiques complexes en prenant en compte les variations spatio-temporelles des grandeurs physiques. Ces équations aux dérivées partielles expriment les relations entre les dérivées partielles des variables impliquées, telles que la position, le temps, la température, la pression, la vitesse, etc. Elles capturent ainsi les comportements changeants des phénomènes physiques et permettent de formuler des modèles mathématiques précis pour les étudier.

La résolution des équations aux dérivées partielles peut se faire de différentes manières. Dans certains cas, il est possible d'obtenir des solutions analytiques exactes, qui fournissent une compréhension profonde du système étudié. Cependant, la plupart du temps, ces équations sont si complexes qu'il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour les résoudre de manière approximative. Ces méthodes impliquent la discrétisation de l'espace et du temps, et la transformation des équations en un système d'équations aux différences ou aux intégrales. Ces systèmes sont ensuite résolus numériquement à l'aide d'algorithmes appropriés, permettant d'obtenir des solutions numériques qui approchent la réponse du système réel.

1.1 Méthodes numériques pour la résolution d'EDP

Les méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) sont des approches mathématiques utilisées pour obtenir des approximations des solutions de ces équations sur des domaines discrétisés.

1.1.1 Quelques schémas numériques

L'une des méthodes numériques les plus couramment utilisées pour résoudre les EDP est la méthode FD pour *Finite Difference* [Forsythe et al., 1961, Smith, 1985, Stummel, 2006]. Cette méthode consiste à discrétiser l'espace et le temps, en remplaçant le domaine continu par une grille de points discrets. Les dérivées spatiales et temporelles sont ensuite approximées à l'aide d'opérateurs de différences finies. Les équations aux dérivées partielles sont transformées en un système d'équations algébriques, qui peut être résolu numériquement à l'aide de techniques d'algèbre linéaire.

Une autre méthode numérique couramment utilisée est la méthode FEM pour *Finite Element Method* [Zienkiewicz and Taylor, 2005, Norrie and De Vries, 2014]. Cette méthode repose sur la discrétisation du domaine continu en éléments finis, tels que des triangles ou des quadrilatères pour les problèmes en deux dimensions, ou des tétraèdres ou des hexaèdres pour les problèmes en trois dimensions. Les fonctions de base sont définies sur ces éléments finis, et la solution de l'EDP est approximée par une combinaison linéaire de ces fonctions de base. Le problème continu est alors transformé en un système d'équations linéaires.

Les méthodes FV pour *Finite Volume* [LeVeque, 2002, Barth and Ohlberger, 2003] constituent une autre approche couramment utilisée pour résoudre les EDP. Elles consistent à discrétiser le domaine en volumes, tels que des cellules polyédrales, et à approximer les flux à travers les interfaces des volumes. Les schémas FV se base sur une écriture sous forme conservative des équations permettant de faire apparaître le flux, par la suite discrétisé en utilisant des schémas de flux numériques, tels que le schéma de Lax-Friedrichs ou le schéma de Roe.

La méthode DG pour *Discontinuous Galerkin* [Arnold et al., 2000, Rivière, 2008] combine des aspects de la méthode des éléments finis et des méthodes de volumes finis. Elle consiste à diviser le domaine en éléments finis et à approximer la solution par des fonctions discrètes définies localement sur chaque élément. Contrairement à la méthode des éléments finis, la méthode DG permet des discontinuités de la solution entre les éléments. Les flux entre les éléments sont pris en compte par des termes de saut, qui sont intégrés dans le système d'équations. Cette méthode permet d'obtenir une montée en ordre dans les schémas FV sur le même principe que pour les FE d'ordre élevé.

Les méthodes SD pour *Spectral Difference* sont des méthodes numériques basées sur l'approximation des dérivées partielles à l'aide de fonctions de base spectrale [Liu et al., 2006, Van den Abeele et al., 2008]. Elles utilisent des polynômes ou des séries de fonctions orthogonales pour représenter la solution de manière très précise et comme pour les FD décrivent une approximation forte des EDP. Les différences spectrales offrent une convergence rapide et une haute précision pour les solutions régulières. Cependant, elles peuvent être plus complexes à mettre en œuvre et nécessitent souvent des grilles régulières pour optimiser les performances.

La méthode BEM pour *Boundary Element Method*, également connue sous le nom de méthode des éléments de frontière, est une méthode numérique qui se concentre sur la discrétisation de la frontière du domaine plutôt que sur l'intérieur [Nédélec, 2001, Wu, 2002, Kirkup, 2019]. Elle permet de réduire la dimension du problème en transformant l'EDP en une équation intégrale définie sur la frontière ensuite approchée par une représentation FE. Cette méthode se révèle particulièrement avantageuse pour les situations où la géométrie du problème est bidimensionnelle, car elle permet d'éviter la complexité liée à la discrétisation de l'intérieur du domaine. De

plus, elle est particulièrement efficace lorsque la solution est régulière le long de la frontière.

Toutes ces méthodes numériques partagent un point commun fondamental : la discrétisation du domaine de calcul. En effet, pour pouvoir effectuer des calculs numériques sur ordinateur, il est nécessaire de représenter le domaine continu par un maillage discret. La discrétisation du domaine consiste à subdiviser l'espace en un ensemble fini de points, d'éléments ou de volumes de contrôle. Cette subdivision permet de représenter le problème continu sous une forme discrète, ce qui facilite la résolution numérique. En décomposant le domaine en éléments discrets, on réduit la complexité du problème et on le transforme en un ensemble de calculs dénombrables (finis). Le maillage utilisé peut prendre différentes formes en fonction de la nature du problème et des exigences spécifiques.

1.1.2 Influence du maillage

Le choix du maillage et sa qualité ont un impact significatif sur la précision, la stabilité, l'efficacité et l'exactitude des résultats numériques obtenus. Dans cette partie, nous explorons l'influence du maillage sur les schémas numériques utilisés pour résoudre des problèmes physiques en sciences et en ingénierie.

1.1.2.1 Précision de la solution

La question de la précision des résultats dans le contexte de la modélisation numérique est étroitement liée à la qualité du maillage utilisé. Un maillage finement discretisé offre une représentation plus fidèle de la géométrie sous-jacente et des variations spatiales des phénomènes analysés. Cette approche permet de capturer de manière plus précise les gradients élevés présents dans les solutions, ce qui se traduit par des résultats numériques d'une plus grande exactitude. Par exemple, dans la simulation de fluides, un maillage fin peut mieux représenter les tourbillons et les interactions complexes entre les particules fluides. De même, dans la modélisation de structures, un maillage fin peut aider à capturer les déformations locales avec une plus grande précision.

À l'opposé, l'utilisation d'un maillage grossier peut introduire des erreurs substantielles dans les solutions numériques. En effet, les variations spatiales et les détails géométriques sont sous-représentés dans un maillage grossier, ce qui peut conduire à des estimations biaisées ou incorrectes des phénomènes étudiés. Les gradients élevés ne sont pas correctement résolus, ce qui peut aboutir à des approximations inexactes et des prédictions éloignées des véritables comportements.

1.1.2.2 Temps de calcul

Un des défis incontournables de la modélisation numérique réside dans la gestion des temps de calcul, qui est étroitement liée au nombre d'inconnues à calculer, proportionnel au nombre de cellules. En effet, la finesse du maillage peut avoir un impact significatif sur la durée nécessaire pour effectuer les simulations, en particulier pour les problèmes en trois dimensions.

Pour résoudre le dilemme entre précision et temps de calcul, une variété d'approches peuvent être envisagées. L'une de ces approches repose sur l'adaptation de maillage, consistant à accroître la résolution dans les régions d'intérêt tout en conservant un maillage moins détaillé dans les zones moins critiques. En complément, les techniques de parallélisation se montrent efficaces pour répartir la charge de calcul sur plusieurs processeurs,

entraînant une accélération du temps de résolution global. En outre, la réduction du nombre de degrés de liberté contribue à diminuer les coûts mémoire.

1.1.2.3 Adaptation du maillage

L'adaptation du maillage représente une avancée significative dans le domaine de la modélisation numérique, offrant une approche dynamique pour résoudre efficacement et précisément des problèmes complexes. Les maillages adaptatifs apportent une réponse ingénieuse aux défis posés par des phénomènes variés et hétérogènes en ajustant automatiquement la taille et la distribution des éléments du maillage en fonction des caractéristiques locales du système étudié. L'idée sous-jacente à l'adaptation du maillage est d'assigner davantage de ressources numériques là où elles sont le plus nécessaires pour capturer les détails importants du phénomène. Plutôt que d'utiliser un maillage uniforme, les maillages adaptatifs identifient les zones où des variations significatives se produisent, telles que des gradients élevés de variables physiques ou des interfaces entre différentes phases. En conséquence, les éléments du maillage sont raffinés dans ces régions d'intérêt, permettant une représentation plus fine et plus précise du phénomène, tandis que les régions moins critiques sont traitées avec des éléments plus gros, réduisant ainsi le coût global du calcul.

L'impact positif de cette approche est multiple. Tout d'abord, elle permet de réaliser des simulations plus efficaces en concentrant les ressources de calcul là où elles sont les plus nécessaires. Cela se traduit par des temps de calcul réduits, car les régions moins dynamiques ne nécessitent pas autant de détails pour obtenir une solution précise. Deuxièmement, l'adaptation du maillage améliore la qualité des résultats. Les détails locaux, tels que les chocs ou les frontières complexes, sont mieux capturés, renforçant la validité physique des simulations.

1.1.2.4 Stabilité du schéma numérique

La stabilité des schémas numériques joue un rôle crucial dans la précision des résultats obtenus lors de simulations numériques. Il convient de noter que cette notion peut être étroitement liée à la taille des éléments du maillage utilisé. Certains schémas numériques, connus sous le nom de schémas conditionnellement stables, présentent une particularité : leur stabilité dépend de la taille du pas de temps et des dimensions des éléments de maillage. Si la taille du pas de temps est choisie de manière inappropriée ou si le maillage est trop fin, cela peut conduire à des instabilités numériques, générant des résultats non convergents ou incorrects.

D'un point de vue pratique, cela signifie que même si l'utilisation d'un maillage fin puisse potentiellement permettre une capture précise des détails géométriques et des variations spatiales, il est essentiel de prendre soigneusement en compte la stabilité du schéma numérique. La forme des éléments et l'inhomogénéité du maillage ont un impact direct sur le nombre de CFL, et le choix d'un pas de temps approprié par rapport à la taille du maillage peut devenir une tâche complexe, impliquant des compromis entre la précision des résultats et la stabilité numérique.

1.1.2.5 Conservation des propriétés physiques

Généralement la modélisation numérique repose sur la préservation des lois fondamentales de la physique, telles que la conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité

de mouvement. Ces propriétés jouent un rôle crucial dans la précision et la validité des simulations numériques. Cependant, le choix d'un maillage inadéquat peut entraîner des conséquences néfastes. Des erreurs numériques peuvent surgir, altérant la conservation de ces propriétés physiques cruciales.

Considérons par exemple un fluide en mouvement dans une simulation. Si le maillage n'est pas adapté, il pourrait ne pas représenter correctement les gradients de vitesse, ce qui résulterait en une violation de la conservation de la quantité de mouvement. Cela signifierait que la simulation ne tiendrait pas compte de la manière dont le fluide interagit avec les forces extérieures et ne reproduirait pas fidèlement les comportements réels. De même si les cellules du maillage sont mal positionnées ou de tailles inégales, cela pourrait conduire à une mauvaise estimation des densités et donc à une non-conservation de la masse.

1.1.2.6 Parallélisation

La manière dont le maillage est structuré et organisé peut jouer un rôle crucial dans la parallélisation des calculs numériques, en particulier pour les méthodes qui reposent sur des maillages structurés. La parallélisation est une stratégie clé pour accélérer les simulations numériques en divisant les calculs en plusieurs tâches indépendantes pouvant être exécutées simultanément sur différents processeurs ou cœurs de calcul.

Lorsque le maillage est conçu de manière à ce que les éléments voisins partagent des caractéristiques similaires, il devient plus simple d'assigner des groupes d'éléments à différents processeurs. Cette organisation permet aux processeurs de travailler sur des parties du maillage qui sont cohérentes en termes de calculs et de communications nécessaires, minimisant ainsi les temps d'attente et les transferts de données inutiles. En revanche, si les éléments du maillage sont de tailles très différentes ou si les interactions entre éléments sont incohérentes, la répartition des tâches entre les processeurs peut devenir déséquilibrée. Certains processeurs pourraient être surchargés de calculs complexes tandis que d'autres restent inactifs, ce qui réduit l'efficacité globale de la parallélisation.

Un autre aspect important est la manière dont les données sont échangées entre les processeurs lors de la parallélisation. Un maillage bien structuré peut minimiser les besoins en communications entre les processeurs, car les éléments voisins sont susceptibles de nécessiter moins d'échanges de données. Cela réduit les goulots d'étranglement et améliore la vitesse d'exécution globale.

1.1.2.7 Intégration dans des géométries complexes

Un exemple concret de l'importance de l'intégration des problèmes numériques dans des géométries complexes se trouve dans la simulation de flux de fluides à travers des réseaux de canaux sinueux. Considérons un système de canalisations dans une installation industrielle ou un réseau de vaisseaux sanguins dans le corps humain, où les canaux peuvent avoir des formes tortueuses, des embranchements multiples et des variations géométriques importantes.

Pour résoudre numériquement le comportement des fluides dans ces canaux, il est essentiel de créer un maillage adapté qui représente fidèlement la géométrie complexe. Un maillage de qualité médiocre pourrait entraîner des inexactitudes significatives dans la prédiction des propriétés du flux, telles que la pression, la vitesse et les gradients de concentration.

La création d'un maillage approprié pour ce type de géométrie complexe peut nécessiter des techniques spécialisées, telles que la génération de maillage à l'aide de méthodes basées sur les équations d'advection-diffusion pour les canaux, ou l'utilisation de techniques de maillage adaptatif pour concentrer la résolution là où les variations du flux sont les plus importantes. De plus, la méthode des éléments finis de frontière pourrait être employée pour simplifier le maillage en ne le construisant qu'à la frontière des canaux.

Un maillage bien choisi et bien conçu est essentiel pour obtenir des résultats numériques fiables et représentatifs des phénomènes réels. En considérant les aspects de précision, de stabilité, d'efficacité et d'exactitude, ainsi que les défis liés aux géométries complexes, les scientifiques et les ingénieurs peuvent améliorer la qualité et la pertinence de leurs simulations numériques grâce à une approche réfléchie du maillage. Dans la suite, nous explorerons les avantages spécifiques des maillages quadrilatéraux qui en font un choix privilégié dans de nombreux cas.

1.1.3 Intérêts des maillages quadrilatéraux

La plupart des schémas numériques utilisés pour la simulation sont basés sur une discrétisation (le maillage) du domaine de calcul englobant la scène que l'on souhaite modéliser. Les différents schémas connus se basent alors sur un type de maillage donné présentant un intérêt propre : différences finies sur maillages cartésiens pour la simplicité et l'efficacité, éléments finis sur maillages conformes (triangles ou tétraèdres) pour la bonne représentation des objets, méthodes isoparamétriques sur maillages courbes pour le rendu près d'effets proches de parois complexes, volumes finis ou Galerkin discontinu sur maillages non-structurés et conformes pour introduire des raffinements locaux etc.

Les outils de générations de maillage pour les codes de simulation numérique se sont alors grandement développés. Pour autant, au sein d'une même famille de schémas, il est possible d'obtenir des résultats extrêmement différents, aussi bien en qualité qu'en efficacité, selon les fonctions de base choisies et donc selon les éléments utilisés. Ainsi, sur un certain nombre de schémas hautes précision (Galerkin discontinu, éléments finis d'ordre élevés, différences finies spectrales etc.) on observe que les fonctions de bases définies sur quadrilatères en 2D, ou hexaèdres en 3D, présentent d'excellentes propriétés développées ci-après.

1.1.3.1 Régularité/ Structuration

Les maillages de type quadrilatéral se caractérisent par une régularité intrinsèque qui les rapproche de structures de grilles ordonnées. Cette particularité leur confère divers avantages majeurs dans le contexte des simulations numériques fondées sur la méthode des éléments finis. Une mise en lumière excellente de plusieurs de ces avantages peut être trouvée dans la thèse de Maxence Reberol [Reberol, 2018].

L'un des atouts majeurs dans ce cadre réside dans la capacité de prévoir à l'avance la largeur de bande des matrices clairsemées employées dans les calculs. Cette propriété revêt une importance cruciale pour les systèmes linéaires intégrés aux méthodes numériques, car elle permet d'optimiser l'utilisation des ressources de calcul et de réduire les coûts de stockage. En contraste, les maillages triangulaires, en raison de leur nature fondamentalement non structurée, ne permettent pas une anticipation aussi aisée de la bande utile de la matrice. Cette complexité dans la prévision de la bande conduit à une gestion plus

délicate et à des besoins de stockage fréquemment plus élevés. De plus, il est possible de maintenir une largeur de bande constante ce qui permet d'exploiter pleinement les performances des algorithmes de produits matrices-vecteurs, tirant parti des capacités de calcul parallèle des processeurs.

Une autre qualité bénéfique des maillages quadrilatéraux structurés est liée à la gestion des informations de connectivité entre les éléments du maillage. Par le biais d'une numérotation appropriée, il devient envisageable d'éviter le stockage explicite de ces connexions, car elles peuvent être déduites de manière implicite. Cette approche entraîne des économies significatives en matière de stockage et d'accès mémoire, ce qui revêt une importance capitale pour les simulations numériques de grande envergure utilisant des maillages complexes.

1.1.3.2 \mathbb{P}_k vs \mathbb{Q}_k

Étant donné un maillage \mathcal{T}_h d'un ouvert connexe polyédrique $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k [Allaire, 2005], associée à ce maillage, est définie par l'espace discret :

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_K \in \mathbb{P}_k \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h\}$$

où \mathbb{P}_k est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k , c'est à dire que pour tout $p \in \mathbb{P}_k$,

$$p(x) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_N \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_N \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N} \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N),$$

tandis que la méthode des éléments finis \mathbb{Q}_k est définie par l'espace discret :

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_K \in \mathbb{Q}_k \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}_h\}$$

où \mathbb{Q}_k est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k **par rapport à chaque variable**, c'est à dire que pour tout $q \in \mathbb{Q}_k$,

$$q(x) = \sum_{0 \leq i_1 \leq k, \dots, 0 \leq i_N \leq k} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N} \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N).$$

Les éléments \mathbb{P}_k présentent un nombre de degrés de liberté en adéquation avec la forme des triangles, tandis que pour les éléments \mathbb{Q}_k , ce nombre s'ajuste à la géométrie des quadrilatères, comme visualisé dans les figures de la table 1.1. À l'ordre k , ces derniers comportent des termes supplémentaires capables de représenter des solutions plus complexes et de mieux rendre compte des comportements non linéaires. Cela se traduit par une meilleure approximation des fonctions lisses, comme le démontre la comparaison entre \mathbb{P}_1 et \mathbb{Q}_1 sur la figure 1.1 [Reberol, 2018].

Ainsi, les éléments \mathbb{Q}_k sur quadrangle se révèlent être un choix optimal pour aborder des problèmes exigeant une précision extrême, tels que les simulations de déformations, la modélisation géométrique avancée et l'interpolation de formes complexes. Dans des domaines fortement élastiques et plastiques, les triangles linéaires sont notoirement reconnus pour leurs performances médiocres, car le maillage ne se déforme pas autant qu'il devrait. En revanche, les quadrilatères, comme mentionné dans [Shepherd and Johnson, 2008], permettent de réduire à la fois l'erreur d'approximation et le nombre d'éléments par rapport aux triangles. Il est également intéressant de noter que les maillages quadrilatéraux

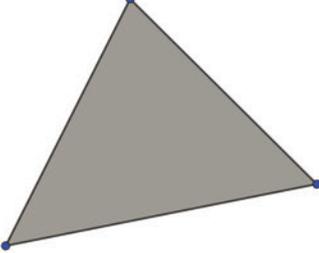
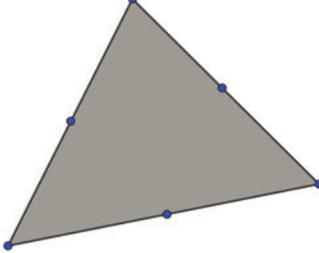
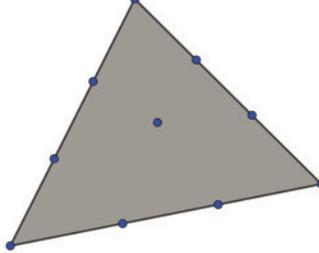
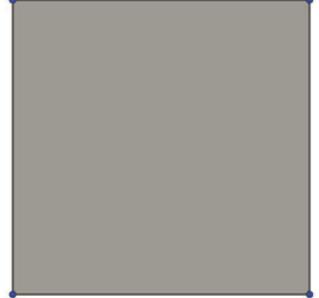
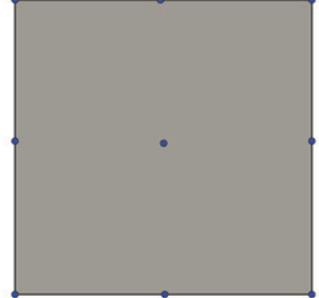
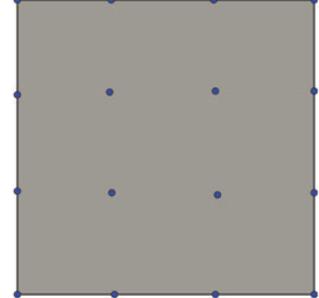
\mathbb{P}_1	\mathbb{P}_1	\mathbb{P}_3
		
\mathbb{Q}_1	\mathbb{Q}_2	\mathbb{Q}_3
		

TABLE 1.1 – Illustration des degrés de liberté sur les éléments \mathbb{P}_k et \mathbb{Q}_k avec $k \in \{1, 2, 3\}$.

ont besoin de moins d'éléments que les maillages triangulaires pour couvrir la même surface. Ces différences se révèlent significatives pour des méthodes comme la méthode de Galerkin discontinue où il faut calculer des flux entre éléments, ou encore les méthodes d'hybridation [Reberol, 2018].

Lors de la modélisation des ondes électromagnétiques par exemple, il est essentiel de prendre en compte les propriétés de continuité et de compatibilité des composantes tangentielles et normales des champs. Les éléments quadrangulaires offrent une base solide pour satisfaire à ces exigences car leurs arêtes et faces partagées permettent un alignement naturel des composantes. En conséquence, il est généralement plus simple et plus efficace de définir des fonctions de base qui préservent les propriétés de continuité et de compatibilité sur ces types de maillages. Cela se traduit par une formulation discrète plus directe des équations de Maxwell, où les termes de sauts et de sauts normaux entre les éléments adjacents peuvent être calculés plus facilement. De plus, les interpolations des champs électromagnétiques aux nœuds du maillage sont plus cohérentes, ce qui peut conduire à des résultats numériques plus précis et stables.

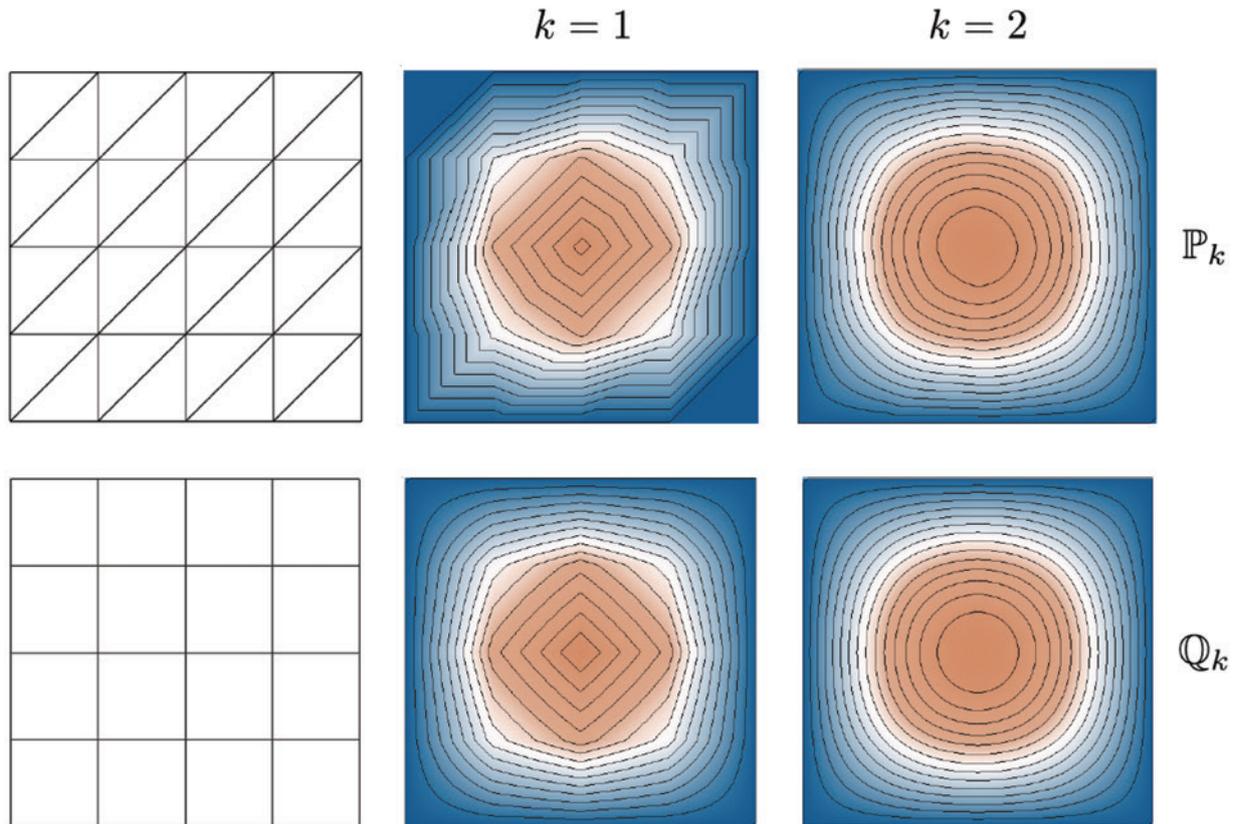


FIGURE 1.1 – Solutions éléments finis de $-\Delta u = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ dans Ω , $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Gauche : Maillage triangulaire et quadrilatéral. Milieu : Éléments d'ordre un. Droite : Éléments d'ordre deux. Source : [Reberol, 2018]

1.1.3.3 Étirement anisotropique

L'étirement anisotropique permet de contrôler la déformation d'un maillage d'une manière plus ciblée. Dans certaines situations, il est nécessaire de préserver la forme dans certaines directions tout en autorisant des déformations plus importantes dans d'autres directions. Selon la théorie de l'approximation, pour une surface donnée et une allocation de points déterminée, la manière la plus optimale d'obtenir une approximation de qualité est d'utiliser un maillage où les éléments sont agencés de manière rapprochée le long des directions principales de courbure [D'azvedo, 2000]. Par exemple, dans la modélisation de tissus biologiques ou de matériaux déformables, un étirement anisotropique peut permettre de simuler avec précision les caractéristiques de déformation du matériau. En mécanique des fluides, particulièrement pour les fluides visqueux, il est très important de modéliser avec un maillage très raffiné le comportement du fluide au contact d'un obstacle, car des variations très fortes des champs ont lieu dans cette couche limite [Reberol, 2018]. De même, il est souhaitable de comprimer les éléments dans la direction normale de l'aile d'un avion car les phénomènes physiques les plus significatifs se produisent dans la couche limite [Bommes et al., 2013].

Du fait que la couche limite tend généralement à être localement plane, avec une concentration notable dans la direction perpendiculaire à la surface, l'utilisation de maillages structurés se révèle particulièrement appropriée pour sa modélisation. Cette pertinence est renforcée par la caractéristique des hexaèdres qui peuvent présenter une

grande anisotropie tout en préservant des angles droits.

Cependant, les maillages triangulaires peuvent être modifiés localement, ce qui leur permet de s'adapter plus facilement aux particularités des solutions. Pour la mécanique, les quadrilatères/hexaèdres semblent plus intéressants, car ceux d'ordre 2 peuvent être modifiés afin d'atteindre des performances équivalentes aux tétraèdres quadratiques tout en conservant un coût de calcul bien inférieur. Pour la propagation d'ondes électromagnétiques, l'optimisation des calculs numériques semble plus simple et efficace pour les éléments quadrilatéraux/hexaédriques qui ont naturellement une structure tensorielle.

1.1.3.4 Intégration numérique

Les méthodes de quadrature sont fréquemment utilisées dans le contexte de la simulation numérique pour calculer des quantités telles que l'aire d'un quadrilatère déformé, le moment d'inertie, ou d'autres intégrales associées à des propriétés physiques. Ces quantités nécessitent souvent l'intégration de fonctions sur les éléments (triangles, quadrilatères) déformés. Les méthodes de quadrature adaptées à la géométrie et à la structure tensorielle du quadrilatère permettent d'approximer ces intégrales de manière efficace et précise.

Lorsqu'on travaille avec des maillages triangulaires, les formules d'intégration numérique doivent prendre en compte les coordonnées barycentriques. Ces coordonnées sont utilisées pour représenter un point à l'intérieur d'un triangle en fonction de ses sommets. Cela peut rendre les formules d'intégration plus complexes à définir et à calculer. Les transformations entre les coordonnées réelles et barycentriques ainsi que les calculs associés peuvent ajouter une couche de complexité. En revanche, les maillages quadrangulaires ont des avantages en termes de simplicité. Puisque les éléments sont des quadrilatères, les coordonnées barycentriques ne sont pas nécessaires pour effectuer des calculs d'intégration. Les formules d'intégration sur des quadrilatères sont plus intuitives, car vous pouvez généralement utiliser des coordonnées cartésiennes standard pour décrire les points à l'intérieur de chaque élément. Cela simplifie grandement les calculs et les rend plus compréhensibles.

Les quadrilatères peuvent être plus facilement paramétrés en utilisant des coordonnées locales qui varient de 0 à 1 dans les deux directions principales. Cette paramétrisation facilite la définition des fonctions d'intégration et réduit la complexité des transformations géométriques et les calculs de jacobienne.

Toutefois, si la génération de maillages simplextiques (triangles) est très développée depuis plus d'un demi-siècle, celle de quadrilatères ou d'hexaèdres est plus problématique. Dans le cas du maillage triangulaires, des algorithmes sont disponibles même pour des géométries très complexe. Cependant, les algorithmes de génération de maillage quadrilatéral automatisé sont disponibles pour une classe de géométries très limitée. Malgré les avancées dans la génération de maillages automatisés, la création de maillages de haute qualité reste un défi dans de nombreux cas, en particulier pour les géométries complexes. De ce fait, la génération de maillages demeure un domaine de recherche actif et important [Shepherd and Johnson, 2008].

1.2 Maillage

Un maillage est une discrétisation d'un espace ou d'un domaine en cellules élémentaires (triangle ou rectangles en 2D, tétraèdres ou hexaèdres en 3D). De manière plus générale,

un assemblage d'éléments, est considéré comme un maillage si [George and Frey, 2013] :

- l'union des éléments est une approximation de l'objet ou du domaine,
- l'intérieur de chaque élément n'est pas vide,
- l'intersection de l'intérieur de deux éléments est vide.

Dans le contexte de la résolution des équations aux dérivées partielles en deux dimensions (2D), il existe différents types de maillages utilisés pour la discrétisation du domaine. Passons en revue quelques-uns de ces types de maillages couramment utilisés.

1.2.1 Maillages à bases de triangles

Il y a diverses approches pour créer des maillages en utilisant des triangles. On peut les regrouper en trois grandes catégories : les méthodes de type Delaunay, les méthodes basées sur des fronts et les méthodes de découpe spatiale, comme évoqué dans la référence [Botella, 2016].

1.2.1.1 Méthode de Delaunay

Les méthodes de type Delaunay se basent sur le critère de Delaunay. Ce critère parfois appelé "propriété de la boule vide", stipule pour tout triangle, aucun sommet ne doit être contenu dans la boule ouverte correspondant au cercle circonscrit au triangle.

Bien que le critère de Delaunay soit connu depuis de nombreuses années, ce n'est que grâce aux travaux de Charles Lawson et Dave Watson que le critère a été largement popularisé et utilisé dans les méthodes de maillage [Owen, 1998]. La règle de Delaunay, en soi, ne constitue pas un algorithme pour générer des maillages. Elle représente plutôt un critère qui guide la manière de connecter un ensemble de points préexistants dans l'espace. Pour mettre en place un maillage, il est nécessaire de définir les emplacements des nœuds à l'intérieur de la géométrie. Une approche courante consiste d'abord à mailler la frontière de la géométrie, créant ainsi un ensemble initial de nœuds. Ensuite, les nœuds le long de cette frontière sont connectés pour former des triangles qui respectent la règle de Delaunay. À mesure que de nouveaux nœuds sont insérés itérativement dans le maillage existant, les triangles ou tétraèdres à une échelle locale sont ajustés pour maintenir en permanence la conformité à la règle de Delaunay. Ce qui distingue une méthode de génération de maillage de type Delaunay d'une autre, ce sont les algorithmes spécifiques utilisés pour déterminer les positions des nœuds à l'intérieur de la géométrie [Owen, 1998].

Maillage de Delaunay-Voronoi Dans ce processus, on détermine la disposition géométriquement optimale d'un ensemble de sommets. Pour y parvenir, on réalise un échantillonnage du modèle en plaçant les points de manière aléatoire ou en suivant une heuristique spécifique. Ensuite, la position géométrique de ces points est affinée en minimisant une fonction objectif qui reflète une distribution idéale prédéfinie [Botella, 2016]. Ensuite, les diagrammes de Voronoï de ces points sont générés :

Définition 1.1 ([Hecht, 2007], voir figure 1.2). Soit un ensemble de points $\mathcal{S} = \{x^i \in \mathbb{R}^2, i \in \llbracket 1, N_p \rrbracket\}$. Les diagrammes de Voronoï sont les polygones convexes V^i , pour $i \in$

$\llbracket 1, N_p \rrbracket$, formés par l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 qui sont plus proches de x^i que des autres points x^j . Formellement, on a :

$$V^i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x^i| \leq |x - x^j|, \forall j \in \llbracket 1, N_p \rrbracket\}. \quad (1.1)$$

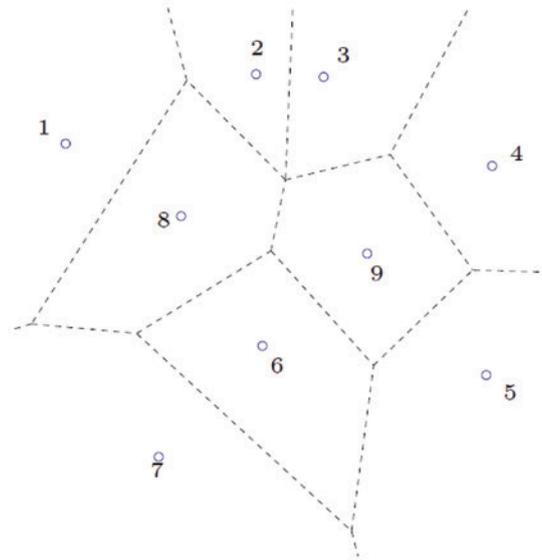


FIGURE 1.2 – Diagramme de Voronoï. Source : [Hecht, 2007].

Le maillage de Delaunay est ensuite généré en tant que maillage dual des diagrammes de Voronoï. Deux points x_i et x_j sont reliés dans ce maillage si les diagrammes de Voronoï V_i et V_j partagent un segment en commun (voir figure 1.3). Afin d'obtenir un maillage triangulaire, il suffit de diviser les polygones qui ne sont pas déjà des triangles en triangles.

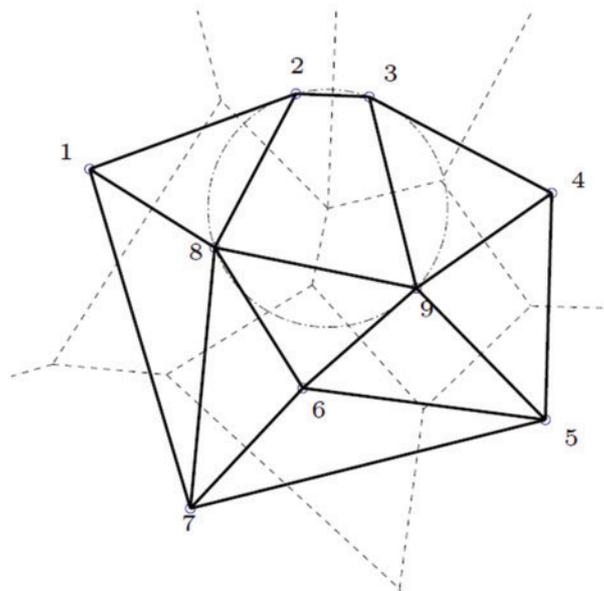


FIGURE 1.3 – Maillage de Delauney. Source : [Hecht, 2007].

L'algorithme de Bowyer-Watson construit les triangulations de Delaunay par induction [Bowyer, 1981, Watson, 1981, Ern and Guermond, 2004]. est une méthode de triangulation de Delaunay en 2D. Son objectif est de générer un maillage de triangles de

Delaunay pour un ensemble de points donné dans le plan. L'algorithme commence par créer un triangle géant qui englobe tous les points de l'ensemble. Ensuite, il ajoute chaque point un par un dans le maillage en respectant la règle de Delaunay, c'est-à-dire que le cercle circonscrit de chaque triangle du maillage doit être vide, ne contenant aucun autre point de l'ensemble. Pour ajouter un point dans le maillage, l'algorithme identifie tous les triangles du maillage qui sont affectés par l'ajout du nouveau point. Il supprime ces triangles du maillage et forme de nouveaux triangles avec le point ajouté comme sommet. Le processus se répète jusqu'à ce que tous les points soient ajoutés et que le maillage respecte la propriété de Delaunay.

Les méthodes de type Delaunay ne fournissent pas de garantie pour préserver la discrétisation des frontières du modèle. Deux stratégies sont mises en œuvre pour assurer que la discrétisation des limites soit préservée dans la triangulation de Delaunay [Botella, 2016] :

- L'ajout de sommets le long des frontières jusqu'à ce qu'elles correspondent géométriquement. Cependant, cela peut altérer la discrétisation initiale [Cohen-Steiner et al., 2002].
- Effectuer des modifications locales sur le maillage pour obtenir la discrétisation initiale des frontières. Une description détaillée de ce processus est donnée dans les ouvrages de George et Borouchaki [George and Borouchaki, 1997] ainsi que de Hecht [Hecht, 2007].

Considérons que l'arête (α, β) ne fait pas partie du maillage de Delaunay. Nous analysons les diagonales (a, c) des quadrilatères (a, b, c, d) convexes constitués de deux triangles (a, b, c) et (b, c, d) où la diagonale (a, c) coupe (α, β) . Si l'arête (b, d) ne coupe pas (α, β) , nous procédons à l'échange de diagonales. Dans le cas contraire, l'échange de diagonales est effectué de manière aléatoire. Du fait qu'il existe une solution au problème, le recours aux échanges de diagonales de manière aléatoire permet de converger, car, statistiquement, tous les maillages possibles sont parcourus et ils sont en nombre fini.

1.2.1.2 Méthode frontale

La méthode d'avancée de front [George and Seveno, 1994, Löhner, 1996, Löhner, 2014] se distingue par son approche qui débute avec une frontière préalablement définie constituée d'un ensemble d'arêtes qui reste inchangée tout au long du processus de génération du maillage. Cette frontière triangulée est considérée comme le front à partir duquel de nouveaux éléments sont progressivement ajoutés.

À chaque itération, il est décidé où positionner le prochain sommet du front. Cette décision est généralement prise en recherchant la position la plus appropriée sur la frontière, dans le but de réduire les déformations des triangles et d'assurer une qualité élevée du maillage. Cependant, dans certaines situations particulières, on peut préférer d'autres critères en fonction des besoins spécifiques de l'application. Par exemple :

- Critère de Delaunay : le sommet est sélectionné de manière à respecter le critère de Delaunay, ce qui implique que le cercle circonscrit au nouveau triangle formé ne doit pas englober d'autres points de la géométrie.
- Critère de qualité de l'élément : pour garantir que tous les triangles du maillage ont

des angles proches de 60 degrés ou satisfont d'autres propriétés de forme souhaitées

- Critère de densité : pour contrôler la taille des éléments dans différentes régions du domaine. Par exemple, on peut souhaiter avoir des éléments plus petits dans les régions où des variations importantes du champ numérique sont attendues

Les bords des triangles initiaux du front deviennent alors des faces intérieures du maillage, tandis qu'un nouveau jeu de faces de front est créé. Ce cycle continue jusqu'à ce que le maillage couvre entièrement le domaine. Ainsi, cette approche assure une discrétisation cohérente du domaine en suivant rigoureusement la frontière prescrite, et ce, de manière incrémentale [Baker, 2005].

Au fur et à mesure de l'avancement du front, il devient possible d'enrichir la qualité du maillage en procédant à des opérations de raffinement. Ces opérations englobent l'insertion de points au milieu des arêtes ainsi que l'ajustement des positions des sommets, permettant ainsi une meilleure adaptation aux courbes présentes sur la surface. Il est également envisageable de prendre en considération d'autres contraintes particulières, telles que les conditions aux limites, ou encore des critères spécifiques de qualité de maillage au sein de zones spécifiques de l'objet.

Une difficulté particulière avec cette méthode survient dans les étapes finales lorsque le front se réduit progressivement et les derniers espaces vides sont remplis par de nouveaux éléments. Cela est illustré sur la figure 1.4, où l'on peut voir une triangulation presque achevée de la région autour d'un profil d'aile, avec les arêtes du front actuel marquées en gras. Une étape d'optimisation peut alors être requise pour une disposition optimale des sommets [Botella, 2016].

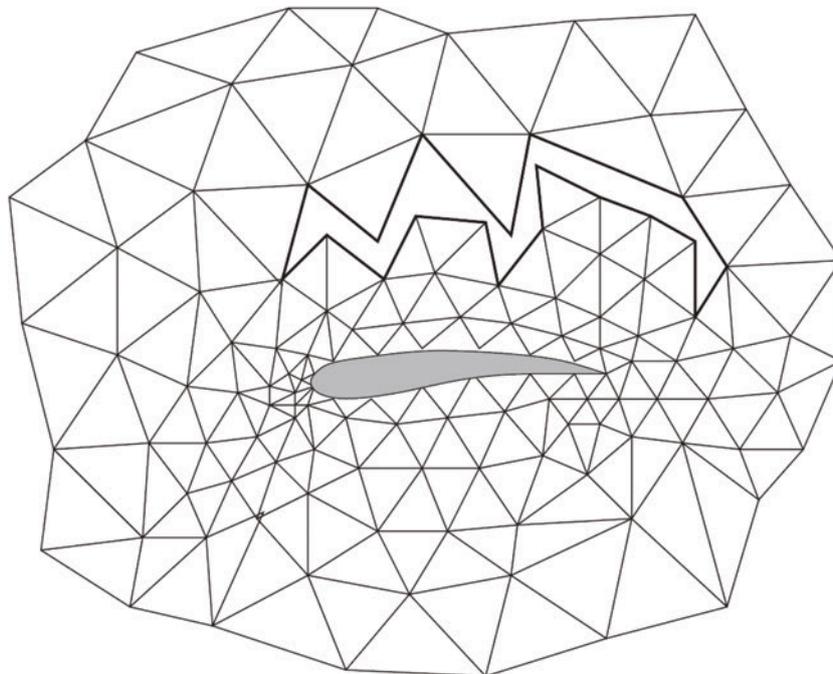


FIGURE 1.4 – Phase de fermeture de la méthode du frontale. Source : [Baker, 2005].

La méthode d'avancée de front est relativement aisée à implémenter et peut être efficace pour des géométries simples ou modérément complexes. Cependant, pour des géométries très complexes ou avec des trous, il peut être difficile de construire une frontière active

appropriée, et le maillage résultant peut contenir des triangles de mauvaise qualité.

Il existe différentes variantes de la méthode d'avancée de front qui peuvent être adaptées en fonction des caractéristiques de la géométrie à mailler et des exigences du problème. Des améliorations peuvent être apportées pour contrôler la qualité des triangles, optimiser la distribution des points, gérer les singularités ou les contours concaves, etc. En général, la méthode d'avancée de front est un outil polyvalent et largement utilisé pour la génération de maillages triangulaires dans de nombreuses applications scientifiques et d'ingénierie.

1.2.1.3 Méthode de décomposition spatiale (Quadtree)

Introduite par [Yerry and Shephard, 1983], cette procédure peut être vue comme une division du domaine en une collection de rectangles, suivie d'une division de ces rectangles en triangles [Baker, 2005].

Ces méthodes se basent sur une structure d'arbre qui est une représentation hiérarchique des différentes subdivisions de l'espace. Schématiquement, l'approche de maillage basée sur les quadtrees se compose des étapes suivantes :

1. Initialisation : on commence par définir le domaine global à mailler puis on crée un quadrilatère initial qui le représente.
2. Subdivision du quadtree : le quadrilatère initial est divisé en quatre sous-quadrants de taille égale en traçant deux lignes verticales et deux lignes horizontales pour former une grille.
3. Évaluation des critères : pour chaque sous-quadrant nouvellement créé, on évalue des critères de qualité de maillage tels que la taille des angles, la longueur des arêtes et d'autres mesures géométriques pour déterminer s'il est nécessaire de subdiviser davantage ou si le sous-quadrant est adéquat pour la triangulation.
4. Triangulation des sous-quadrants : les sous-quadrants jugés appropriés pour la triangulation sont convertis en triangles en reliant leurs coins.
5. Raffinement : si nécessaire, on effectue des opérations de raffinement, telles que l'ajout de points au milieu des arêtes ou l'ajustement des sommets pour mieux s'adapter aux caractéristiques de la surface.
6. Itérations : répétez les étapes 3 à 5 pour les sous-quadrants nouvellement créés, en continuant à subdiviser et à trianguler jusqu'à ce que les critères de qualité de maillage soient satisfaits dans toutes les zones du maillage.
7. Terminaison : on arrête le processus de subdivision et de triangulation lorsque les critères de qualité de maillage sont globalement atteints ou lorsque d'autres conditions de terminaison spécifiques sont satisfaites.
8. Fin : le processus se termine avec un maillage triangulaire satisfaisant les critères de qualité établis pour la région donnée.

Afin de ne pas avoir de trop grandes variations de taille d'éléments dans le maillage, la différence de niveaux de subdivision entre deux cellules adjacentes est limitée. Une fois la décomposition terminée, les sommets du maillage sont les coins des cellules de subdivisions et éventuellement les intersections entre les limites du modèle et les cellules. Les éléments du maillage sont alors construits en découpant les cellules [Botella, 2016].

La méthode Quadtree permet de concentrer les ressources de maillage dans les zones les plus complexes ou les plus intéressantes, tout en conservant des éléments de maillage plus simples dans les régions homogènes. Cela conduit à une utilisation efficace des ressources

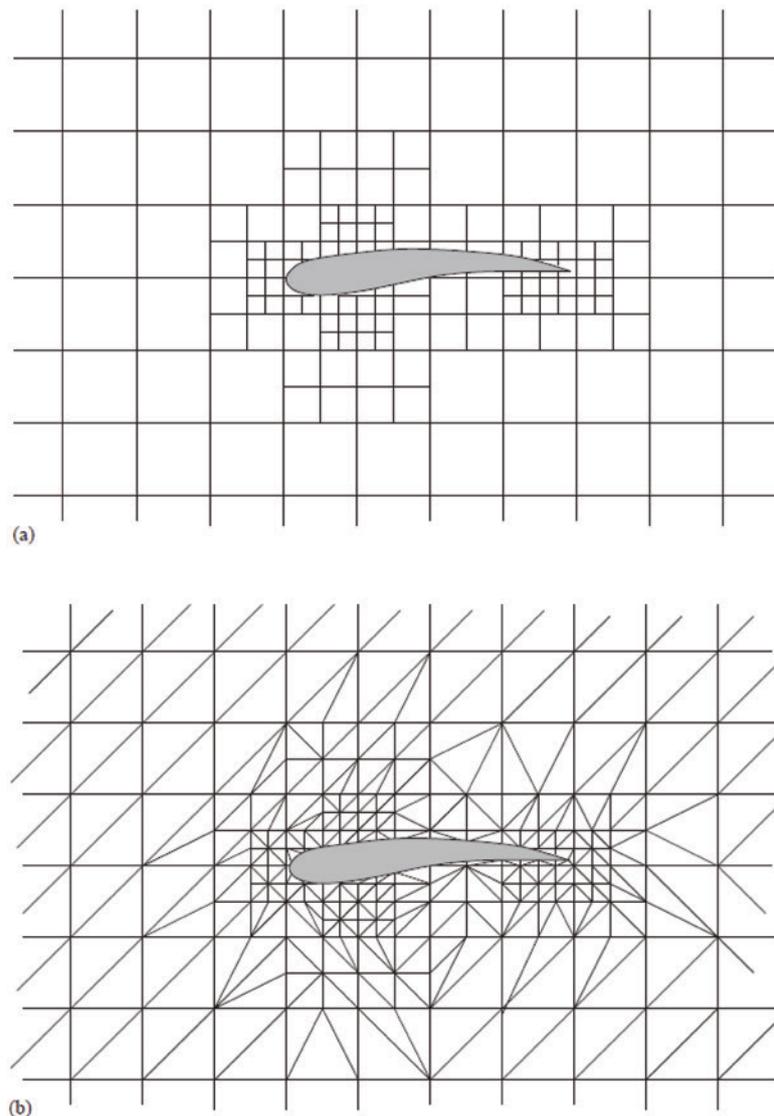


FIGURE 1.5 – (a) Décomposition en octree de la région autour d'un profil aérodynamique. (b) Conversion de la décomposition en octree en une triangulation. Source : [Baker, 2005]

de calcul et de stockage. Elle permet d'obtenir des maillages de haute résolution là où c'est nécessaire, tout en réduisant la complexité dans les zones moins critiques. Par ailleurs, elle gère efficacement les discontinuités géométriques et topologiques en adaptant la taille et la forme des éléments de maillage autour de ces régions, ce qui améliore la précision des simulations.

Cependant, la mise en œuvre de cette méthode nécessite des algorithmes sophistiqués pour gérer la subdivision récursive, la fusion de carrés et la gestion des bordures. Le choix des critères pour la subdivision et le raffinement des carrés peut être complexe et dépendant de l'application, ce qui nécessite une expertise dans le domaine concerné. Pour finir, l'adaptation du maillage près des frontières du domaine peut nécessiter une attention particulière pour éviter des problèmes de cohérence.

1.2.2 Maillages à bases de quadrilatères

Les maillages à bases de quadrilatères sont caractérisé par la nature des sommets qui les composent. Un sommet dans un tel maillage est dit *régulier* si sa *valence* topologique est égale à 4 ; sinon il est dit *irrégulier*. La valence topologique d'un sommet est le nombre de faces adjacentes à ce sommet. Avec cette propriété, les maillages quadrilatéraux peuvent être décrit en terme de régularité de la manière suivante [Bommes et al., 2013] (voir figure 1.6) :

- Maillage non-structuré : une grande partie des sommets du maillages sont des sommets irréguliers,
- Maillage à valence semi-régulière : la plupart des sommets du maillage sont des sommets réguliers,
- Maillage semi-régulière : il s'agit d'un maillage formé de plusieurs partitions. Chaque partition est un réseau de quadrilatères de sommets réguliers, et l'ensemble est assemblé de manière *conforme*, c'est-à-dire que les interfaces entre les partitions s'ajustent de manière cohérente,
- Maillage régulier : il ne contient aucun sommet irrégulier. Un maillage régulier est topologiquement équivalent à une grille régulière.

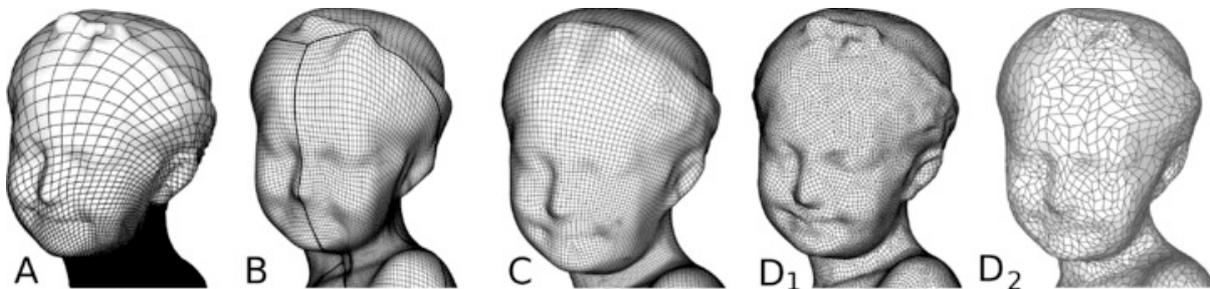


FIGURE 1.6 – Catégories de maillage quadrilatéral. A : régulier ; B : semi-régulier ; C : valence semi-régulier ; D1-D2 : non-structuré (D2 plus irrégulier que D1). Source : [Bommes et al., 2013].

Dans le contexte des simulations numériques, les caractéristiques recherchées pour les maillages quadrilatéraux revêtent une importance significative. Les attributs visés se déclinent généralement comme suit :

- Minimalité des irrégularités : il est préférable d'avoir le moins possible de points irréguliers dans les maillages puisque dans leur voisinage, les mailles s'éloignent de la forme typique carré. La minimisation de ces irrégularités contribue donc à maintenir la cohérence et la régularité du maillage, améliorant ainsi la stabilité et la précision des simulations.
- Alignement le long de la frontière : il est souhaitable que les éléments du maillage soient alignés le long des bords du domaine permettant ainsi de donné une

description fidèle du bord du domaine.

- Éléments de haute qualité : il est recommandé d'utiliser des éléments dont les contours se rapprochent au maximum de la configuration d'un carré ou d'un rectangle. En utilisant un maillage composé d'éléments qui présentent des formes régulières, on peut minimiser les risques de dégénérescence lors des transformations géométriques causées par des éléments déformés ou excessivement étirés.
- Respect des contraintes de taille : il est essentiel que les éléments du maillage satisfassent aux exigences de taille définies. Cette condition garantit que le maillage capture de manière appropriée les variations locales de la solution, en allouant davantage de détails là où c'est nécessaire, tout en maintenant une efficacité numérique globale.
- Insensible à l'orientation. La rotation ou la translation d'une géométrie donnée ne devrait pas changer la topologie du maillage résultant. Un maillage généré dans une géométrie transformée devrait être équivalent au maillage original transformé.

Générer des maillages qui incorporent simultanément chacune de ces propriétés constitue un défi ardu. Très souvent, la poursuite de l'une de ces caractéristiques entre en conflit avec la quête d'optimisation d'une autre. Plusieurs approches ont été développées pour la génération de maillages quadriatères. Ces approches varient en fonction des besoins spécifiques des applications, de la complexité de la géométrie à mailler et des contraintes de qualité du maillage requis.

1.2.2.1 Décomposition de maillages triangulaires en quadrangles

Les méthodes de conversion de maillages triangulaires en maillages quadrangulaires, également appelées *méthodes de maillage tri-to-quad*, visent à transformer des maillages constitués de triangles en maillages contenant principalement des quadrilatères (quads). Il existe plusieurs approches pour effectuer cette conversion, chacune ayant ses avantages et ses limitations. Voici quelques-unes des méthodes couramment utilisées :

Sous-division de Catmull-Clark : Une approche naïve pour convertir n'importe quel maillage polygonal en un maillage quadrangulaire consiste à appliquer la subdivision topologique de Catmull-Clark [Catmull and Clark, 1998] en divisant tous les triangles en trois quadrangles (voir figure 1.7). Le maillage quadrangulaire ainsi obtenu conserve toutes les arêtes d'origine, mais présente également plusieurs inconvénients majeurs : il augmente le nombre d'éléments et introduit de nombreux sommets irréguliers. Cette option est praticable uniquement si le maillage de départ est déjà principalement constitué de quadrangles et qu'une augmentation de la complexité est acceptable. Dans la plupart des cas, des approches plus élaborées s'avèrent nécessaires [Bommes et al., 2013].

Combinaison de triangles : il s'agit de convertir un maillage triangulaire en maillage quadrangulaire via des opérations sur la connectivité. Le mécanisme principal consiste à fusionner deux triangles originaux en un quadrilatère ; en substance, la conversion de maillage triangulaire en maillage quadrangulaire repose sur la mise en paire des triangles adjacents d'origine [Bommes et al., 2013] (voir figure 1.8). La méthode de combinaison de triangles peut être améliorée si l'on fait attention à l'ordre dans lequel les triangles sont combinés [Owen, 1998]. L'algorithme définit dans [Lo, 1998] propose plusieurs procédures

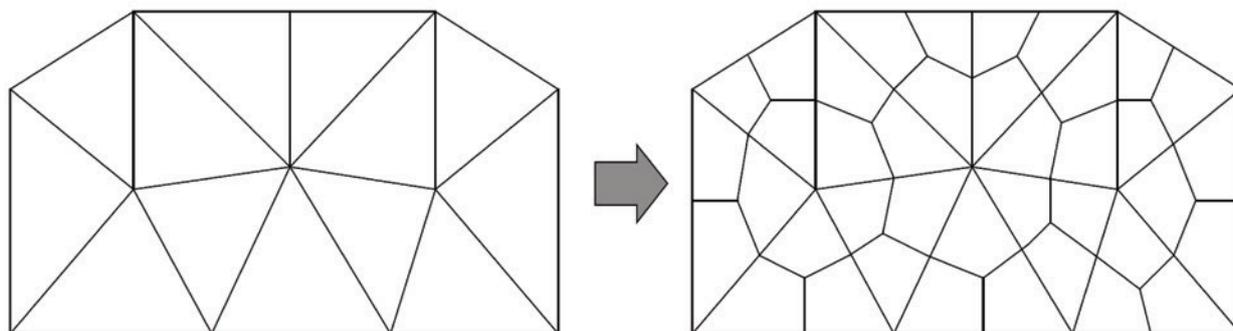


FIGURE 1.7 – Génération de maillage quadrilatéral par subdivision de chaque triangle en quatre quadrangles. Source : [Owen, 1998].

heuristiques pour l'ordre dans lequel les triangles pourraient être combinés. Il en résulte un maillage à dominante de quadrilatères contenant un nombre minimal de triangles. Dans [Owen et al., 1998], les auteurs utilisent une approche d'avancée de front pour convertir les triangles en quadrilatères, mais parvient à réduire considérablement le nombre de noeuds irréguliers dans le maillage. Des échanges locaux d'arêtes sont effectués et des noeuds supplémentaires sont introduits afin d'assurer l'alignement avec la frontière et l'orthogonalité. Un nombre quelconque de triangles peut être supprimé pour créer un seul quadrilatère.

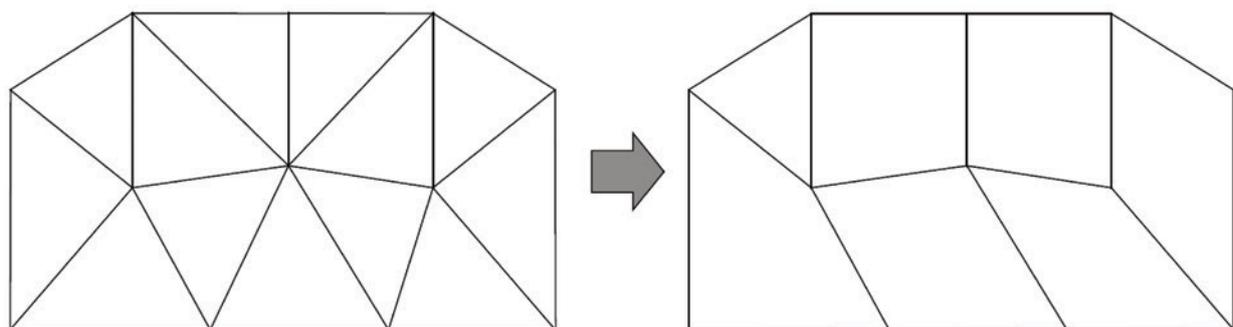


FIGURE 1.8 – Combinaison de triangles. Source : [Owen, 1998].

D'autres algorithmes sont présentés dans [Bommes et al., 2013] tel que le SQuad [Gurung et al., 2011] conçu pour améliorer la représentation interne des maillages, mais qui peut être utilisé pour définir un maillage quadrangulaire à partir d'un maillage triangulaire ou encore BlossomQuad [Remacle et al., 2012] qui exploite un algorithme d'appariement parfait issu de l'optimisation combinatoire. Cependant, sa complexité algorithmique est quadratique par rapport au nombre d'éléments. Cela rend la méthode chronophage et principalement adaptée aux cas où l'optimalité du résultat est plus importante que le temps d'exécution.

1.2.2.2 Méthodes basées sur la paramétrisation

Les méthodes de paramétrisation sont des techniques utilisées en infographie et en géométrie numérique pour générer des mappages paramétrés d'une surface donnée sur un domaine plus simple, souvent un carré ou un rectangle, qui peut ensuite être utilisé pour générer des maillages quadrilatéraux. Ce processus est couramment utilisé dans la génération de maillages à diverses fins, notamment la modélisation 3D, la simulation et le

rendu. Voici quelques méthodes de paramétrisation courantes pour générer des maillages quadrilatéraux :

Paramétrisation plane : Il s'agit de la forme la plus simple de paramétrisation où la surface est projetée sur un domaine plan, tel qu'un carré ou un rectangle. Cela implique d'attribuer des coordonnées de texture 2D aux sommets du maillage. Cette méthode convient aux surfaces qui peuvent être approximativement aplaties sans distorsion significative.

Paramétrisation harmonique : La paramétrisation harmonique vise à réduire la déformation entre une surface et le domaine paramétrique. Pour y parvenir, on résout une équation de Laplace sur la surface en imposant des conditions aux limites spécifiques basées sur le domaine paramétrique cible. Cette méthode est particulièrement efficace pour les surfaces de genre zéro (surfaces sans anses ni trous) et peut produire des paramétrisations de haute qualité. Elle a pour effet de préserver les détails de forme locaux, ce qui en fait un outil prisé dans les domaines de l'architecture et de l'ingénierie. Le processus implique les étapes suivantes :

1. Sélection de points d'ancrage sur la surface, correspondant à des sommets dans le domaine paramétrique.
2. Attribution de valeurs paramétriques fixes à ces points d'ancrage.
3. Résolution de l'équation de Laplace pour le reste de la surface, de manière à obtenir une cartographie fluide qui minimise la déformation.

1.2.2.3 Superposition de grille régulière

Ces méthodes débutent par la création d'un maillage dont la génération dans une étendue convenable autour de l'objet peut varier en complexité. L'algorithme introduit par Schneiders [Schneiders, 1996] (voir figure 1.9) déploie une grille structurée pour recouvrir une zone considérable autour de l'objet. La taille de chaque cellule dans cette grille peut être déterminée de manière arbitraire. Il ne reste plus qu'à ajuster la grille à la frontière de l'objet. Pour se faire, les éléments extérieurs à l'objet ou trop proches de sa frontière sont éliminés du maillage initial, laissant les cellules restantes pour former la structure de base du maillage. Ensuite, la zone entre la frontière de l'objet et le maillage initial est comblée en utilisant la technique d'isomorphisme. Cette technique implique que chaque nœud sur la frontière du maillage initial est associé à un nœud correspondant sur la frontière de l'objet, ce qui permet de remplir la région avec des éléments quadrilatéraux.

Dans [Taghavi, 1994, Ives, 1995] les auteurs adoptent une autre méthode appelé méthode de projection (voir figure 1.10). La grille initiale reste en place et les nœuds du maillage sont déplacés vers les arêtes de l'objet, de sorte que la frontière de l'objet soit entièrement recouverte par les arêtes du maillage. Le maillage est ensuite optimisé par un lissage laplacien.

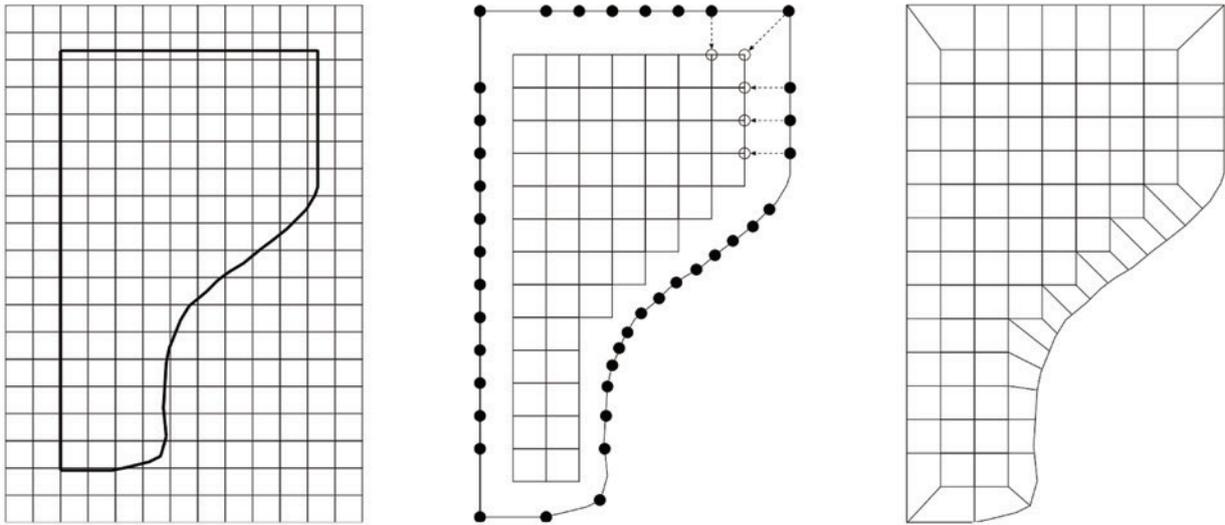


FIGURE 1.9 – Méthode de superposition d'une grille régulière. Source : [Schneiders, 1996].

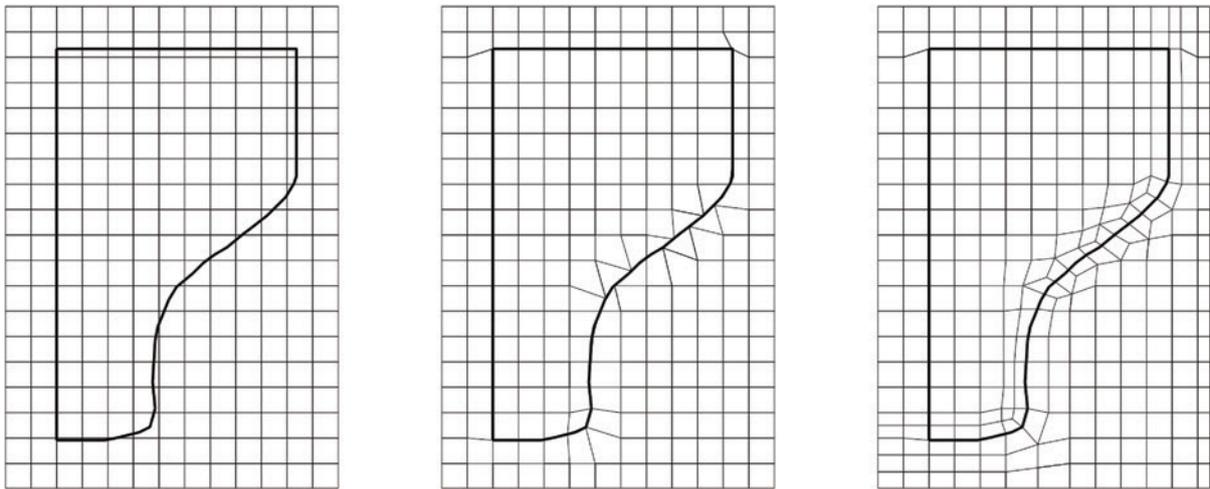


FIGURE 1.10 – Méthode de projection. Source : [Schneiders, 1996].

1.2.2.4 Méthode de l'axe médian

La méthode de l'axe médian, également connue sous le nom de méthode de squelettisation, est une technique utilisée en infographie et en géométrie numérique pour générer des maillages quadrilatéraux à partir de formes complexes. Cette méthode vise à trouver une représentation simplifiée de la forme d'entrée en identifiant le "squelette" central ou l'"axe médian" de la forme. Cette méthode a d'abord été conçue par Nackman et Srinivasan [Nackman and Srinivasan, 1989]. Ils ont remarqué que l'axe médian présentait une décomposition naturelle bien définie de la surface et l'ont utilisé sans modifications pour diviser la surface en blocs. Quelques règles supplémentaires pour fusionner les blocs produits ont été élaborées pour améliorer l'adéquation de la décomposition. Une méthode améliorée a été proposée par Tam et Armstrong [Tam, 1991] qui produit des décompositions de meilleure qualité.

Voici un aperçu de la manière dont fonctionne la méthode de l'axe médian pour la génération de maillages quadrilatéraux :

- Géométrie d'entrée : on commence avec une forme polygonale complexe et

irrégulier. Cette forme peut représenter la limite d'un objet en 2D ou la surface d'un objet en 3D.

- Diagramme de Voronoi : la première étape consiste à calculer le diagramme de Voronoi de la forme d'entrée. Le diagramme de Voronoi divise l'espace autour de chaque point (ou sommet) de la forme en régions. Chaque région contient tous les points qui sont plus proches d'un sommet particulier que de tout autre sommet de la forme. Ces régions sont appelées cellules de Voronoi.
- Squelettisation (voir Figure 1.11) : l'axe médian est essentiellement le dual du diagramme de Voronoi. Pour obtenir l'axe médian, on trouve les centres des cercles circonscrits pour chaque cellule de Voronoi. L'axe médian représente le "squelette" central de la forme d'entrée, qui capture ses principales caractéristiques et sa connectivité.
- Suppression des arêtes : dans l'axe médian, il y a souvent de nombreuses branches et arêtes qui ne sont pas pertinentes pour le maillage quadrilatéral souhaité. Ces branches superflues doivent parfois être supprimées ou élaguées pour simplifier le squelette tout en préservant les caractéristiques essentielles de la forme.
- Génération du maillage quadrilatéral : une fois que vous avez l'axe médian a été simplifié, on génère des éléments quadrilatéraux en connectant des paires de points proches sur le squelette. Ces connexions doivent former un réseau d'éléments quadrilatéraux qui approximent la forme d'entrée.
- Affinement : en fonction de la qualité et de la régularité du maillage quadrilatéral initial, on peut effectuer des étapes d'affinement. Cela peut impliquer le lissage du maillage, la redistribution des sommets ou l'optimisation de la disposition des quadrilatères pour répondre à des critères spécifiques tels que l'uniformité ou la préservation de la forme.

La méthode de l'axe médian est puissante pour la génération de maillages quadrilatéraux, en particulier pour les formes avec des limites irrégulières ou des caractéristiques complexes. Elle offre une manière de représenter la topologie de la forme de manière simplifiée et structurée. Cependant, l'efficacité de la méthode dépend de la qualité de la squelettisation initiale et des étapes ultérieures prises pour affiner et optimiser le maillage quadrilatéral. Divers algorithmes et techniques existent pour chaque étape du processus, et le choix des méthodes peut varier en fonction des exigences spécifiques de l'application.

1.2.2.5 Approches basées sur l'avancée de fronts

Ces méthodologies s'apparentent à celles abordées pour la formation de maillages triangulaires. Une première méthode débute avec un maillage triangulaire puis définit des ensembles de fronts le long des arêtes de triangles de la frontière du domaine. Les triangles sont systématiquement combinés à ces fronts, progressant vers l'intérieur de la zone. Le front agit comme une division entre les quadrilatères déjà formés et les triangles qui doivent encore être combinés. Cette technique garantit un maillage entièrement quadrilatéral, à condition que le nombre initial d'arêtes de la frontière

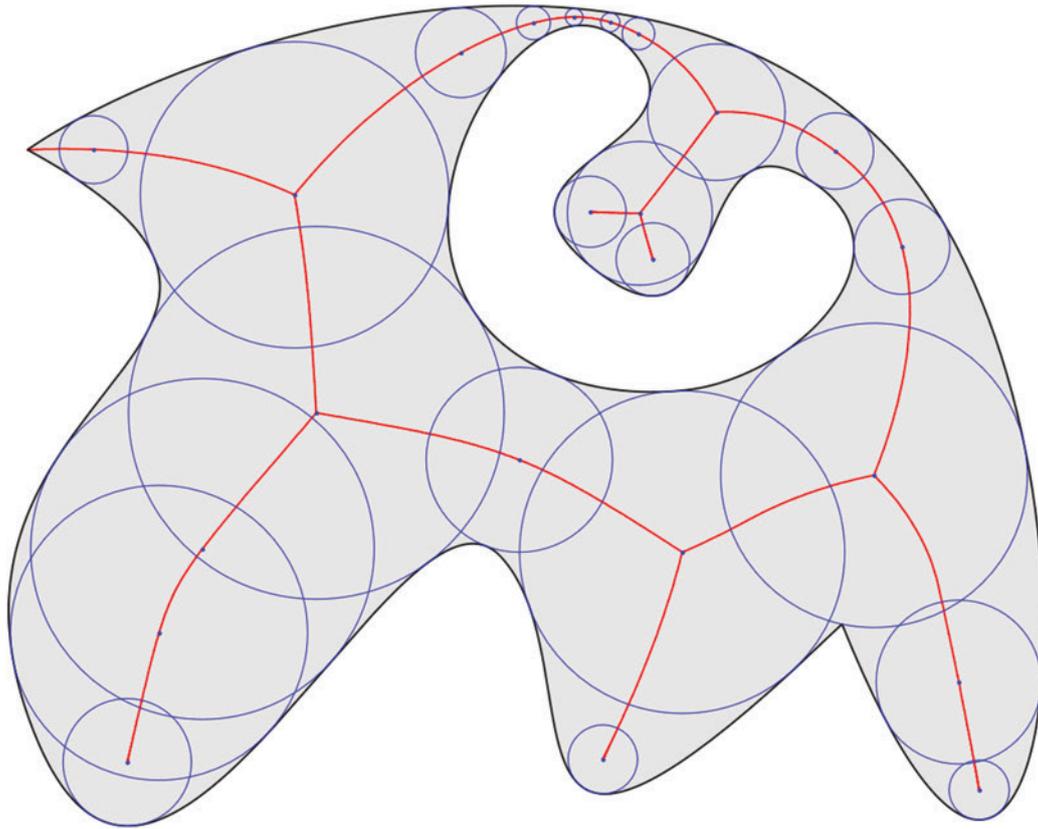


FIGURE 1.11 – Construction de l'axe médian. Source : [de Moura Pinto and Freitas, 2009]

soit pair [Owen et al., 1999]. D'autres méthodes se basent sur une approche directe. Le pavage présenté par Blacker et Stephenson [Blacker and Stephenson, 1991] consiste à former des rangées complètes d'éléments à partir de la frontière tout en progressant vers l'intérieur. White and Kinney ont avancé des améliorations à l'algorithme de pavage en préconisant l'insertion individuelle d'éléments plutôt que la création de rangées complètes [White and Kinney, 1997]. Une alternative intéressante aux méthodes de pavage traditionnelle est l'algorithme Q-Morph. Il s'agit d'une méthode indirecte donc basée sur un maillage triangulaire initial permettant de maintenir des rangées d'éléments bien alignés et de réduire le nombre de nœuds irréguliers internes. Les différentes étapes de cette méthode sont les suivantes [Owen et al., 1999] :

- Maillage initial : initialement, la surface est triangulée en utilisant n'importe quelle méthode de triangulation de surface. Ce maillage devrait intégrer toute information de dimensionnement ou d'adaptativité. Le dimensionnement local pour le maillage quadrilatéral final suivra de près celui du maillage triangulaire.
- Définition du Front : le front initial est établi à partir des arêtes de la triangulation. Toute arête qui est adjacente à un seul triangle fait partie du front initial.
- Classification des arêtes de front : chaque arête dans le front est catégorisée en fonction de son état qui détermine comment l'arête sera finalement utilisée pour former un quadrilatère. Les états des arêtes frontales sont déterminés par les angles entre les arêtes adjacentes. Ces arêtes seront mises à jour et réorganisées

au fur et à mesure que l'algorithme progresse.

- Traitement des arêtes frontales : chaque arête frontale est traitée individuellement pour construire un nouveau quadrilatère en utilisant les triangles du maillage triangulaire (voir Figure 1.12).

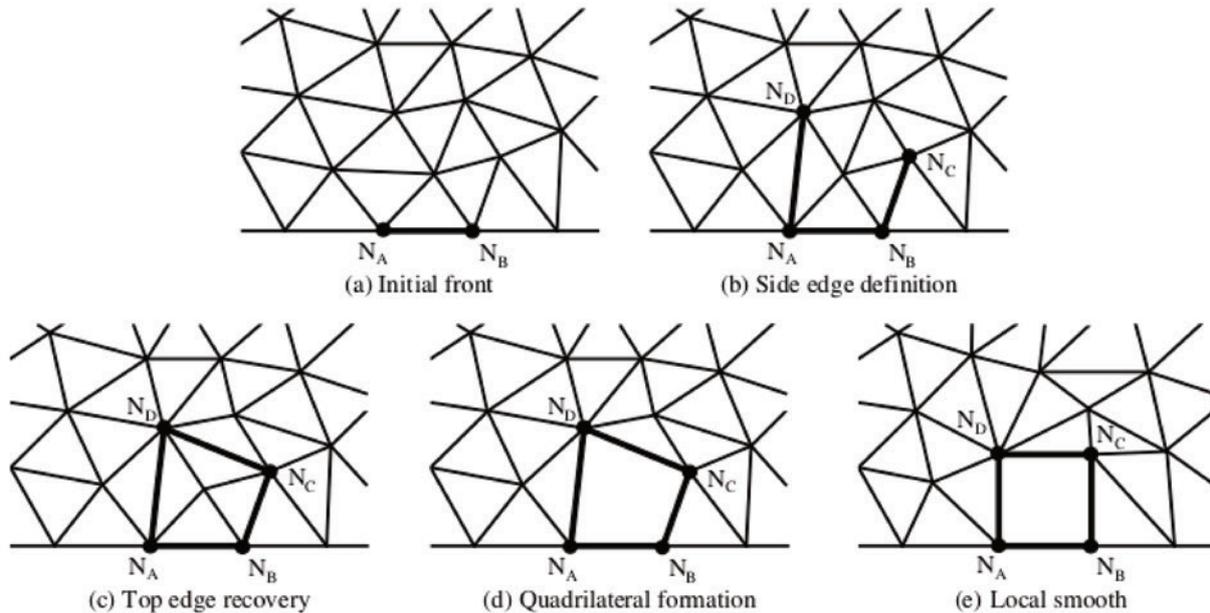


FIGURE 1.12 – Illustration du processus de génération d'un quadrilatère à partir d'une arête frontale. Source : [Owen et al., 1999].

- Nettoyage topologique : la qualité des éléments est améliorée en effectuant des transformations locales sur les quadrilatères dans le but d'améliorer les valences individuelles des arêtes au niveau des nœuds du maillage.
- Lissage : une dernière étape de lissage est réalisée pour améliorer davantage la qualité des éléments.

1.3 Maillages quadrilatéraux à partir de champs de croix

Une méthode de génération de maillages quadrilatéraux intéressante repose sur les *champs de croix*. Un champ de croix sur un domaine est une structure de champ qui attribue une *croix* à presque chaque point du domaine, où une croix est un ensemble de vecteurs du fibré tangent. Elle est constitué d'un vecteur donné et de ses rotations avec un angle de $k\frac{\pi}{2}$, où $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Les champs de croix sont utilisés pour la première fois dans les applications de graphisme informatique pour contrôler la mise en correspondance de surface pour le rendu non photoréaliste, la synthèse de textures et le ramassage [Ray et al., 2008, Bommès et al., 2009, Nieser et al., 2011].

Lien entre les champ de croix et les maillages quadrilatéraux : une astuce particulièrement ingénieuse consiste à exploiter les lignes de champ d'un vecteur pour définir les quadrilatères d'un maillage quadrilatéral sur un domaine donné. Toutefois, pour que cela fonctionne, il est impératif de garantir que ces lignes de champ ne se croisent que sous un angle de $\frac{\pi}{2}$. C'est pourquoi l'utilisation d'un champ spécifique constitué de croix en chaque point du domaine est cruciale. L'avantage des champs de croix est de pouvoir représenter les caractéristiques des quadrilatères en deux dimensions. Dans [Beaufort et al., 2017], les auteurs montrent que les sommets non réguliers d'un maillage quadrilatéral (les sommets qui ne sont pas adjacents à exactement quatre voisins) correspondent précisément aux points critiques d'un champ de croix. Ces points critiques du champ de croix peuvent également être liés à la caractéristique d'Euler de la surface maillée via la formule de Poincaré suivante :

$$\sum_i index(x_i) = \chi,$$

où $\chi = V - E + F$ désigne la caractéristique d'Euler, avec V le nombre de sommets, E le nombre d'arêtes et F le nombre de faces.

Les méthodes de génération de maillage basées sur les champs de croix se décomposent en deux étapes principales à savoir la génération du champ de croix puis la construction du maillage quadrilatéral correspondant.

Génération du champ de croix : l'idée est de calculer un champ de croix le plus lisse possible afin de minimiser les variations brusques de l'orientation des quadrangles.

Lorsqu'on aborde le cas d'une surface, l'approximation la plus optimale est obtenue en alignant les éléments selon les directions principales de courbure. Ainsi, il est préférable de générer des champs de croix qui suivent ces directions. Cette approche a été mise en œuvre dans des travaux tels que [Alliez et al., 2003, Marinov and Kobbelt, 2004, Kälberer et al., 2007]. Ce choix méthodologique présente l'avantage de créer des champs de croix attrayants qui s'harmonisent avec les propriétés inhérentes de la surface grâce à une méthode simple, ce qui a pour résultat que les singularités se forment naturellement aux points ombilicaux. Cependant, il convient de noter qu'il existe des zones étendues où la courbure normale se rapproche des valeurs de courbure principales, engendrant une définition moins précise du champ de croix [Fogg et al., 2015].

Un autre critère nécessaire pour les simulations est le respect de la frontière du domaine lors de la discrétisation. Pour se faire, il est nécessaire de prendre en compte des contraintes d'alignements par rapport aux frontières des éléments quadrangulaires. Généralement un ensemble d'arêtes d'un maillage triangulaire ou d'une géométrie de CAO est utilisé comme condition aux limites afin de générer un champ de croix aligné avec ces arêtes. c'est ce qui est mis en œuvre dans [Kowalski et al., 2013, Palacios and Zhang, 2007] où un champ vectoriel de représentation est résolu via une équation de la chaleur avec des conditions aux limites de Dirichlet donné par la normale aux bords. Cette méthode ne peut cependant pas traiter facilement les surfaces courbes et elle n'est pas adaptée pour s'ajuster aux tailles et directions d'éléments cibles [Fogg et al., 2015]. [Bommes et al., 2009] proposent une formulation d'optimisation linéaire à variables mixtes, résolue à l'aide d'un solveur adaptatif. Des contraintes directionnelles éparses permettent de déterminer automatiquement le nombre approprié, le type et la position des singularités. Dans [Bunin, 2008], Bunin résoud directement un problème de Poisson inverse avec une distribution de sources ponctuelles représentant les irrégularité du maillage. La méthode est attrayante d'un point

de vue théorique et montre des résultats impressionnants. Cependant, elle semble contenir des étapes nécessitant un réglage minutieux et des sensibilités élevées aux erreurs numériques sont rapportées pour les problèmes avec un grand nombre de singularités [Fogg et al., 2015].

Génération d'un maillage correspondant au champ de croix calculé : Une stratégie initiale pour générer des maillages quadrilatéraux à partir de champs de repères croisés consiste en la paramétrisation. Cette méthode implique la création d'une transformation du domaine à mailler vers un espace paramétrique, où l'application d'une grille régulière au domaine transformé devient possible. Inverser cette transformation permet alors de dériver un maillage quadrilatéral du domaine, aligné sur ses contours. L'avantage majeur de cette approche réside dans sa capacité à gérer des discontinuités dans la transformation, ce qui en fait une méthode adaptée pour traiter des singularités [Reberol, 2018]. Il existe des algorithmes robustes basés sur des paramétrisations globales [Ray et al., 2006, Kälberer et al., 2007, Myles et al., 2014, Campen et al., 2015]. L'élément clé de ces algorithmes est la décomposition du domaine en des cartes de forme quadrilatère en découpant le domaine le long d'un graphe en suivant par exemple les lignes de champ du champ de croix. Ainsi dans [Ray et al., 2006], les auteurs paramétrisent des surfaces de genre arbitraire avec des fonctions de potentiel périodiques guidées par deux champs vectoriels d'entrée orthogonaux. Cela conduit à une paramétrisation continue à l'exception des points singuliers sur la surface. Ces régions singulières sont détectées et reparamétrisées par la suite. L'algorithme QuadCover [Kälberer et al., 2007] calcule automatiquement une paramétrisation globale dont les lignes paramétriques sont guidées par le champ de croix. La méthode génère des maillages quadrilatéraux de bonne qualité avec des éléments de petites tailles mais gère difficilement des tailles de maillages grossières.

Outre la paramétrisation, une autre méthode consiste à générer une partition du domaine en utilisant le champ de croix. Dans [Kowalski et al., 2013], les auteurs construisent ce partitionnement en traçant des lignes de séparation à travers le champ croisé. Les champs croisés sont utilisés pour capturer les caractéristiques d'orientation des quadrilatères, permettant ainsi la génération d'une partition bien définie du domaine en sous-domaines. Il est ensuite nécessaire de résoudre un problème d'assignation d'intervalles pour le maillage quadrilatère consistant à attribuer à chaque courbe le nombre d'arêtes (intervalles) en lesquelles elle doit être subdivisée, de manière à ce que chaque surface puisse être maillée [Höhring et al., 1997, Mitchell, 2000, Mitchell, 2014]. Par exemple, mailler une surface rectangulaire avec des quadrilatères nécessite que les courbes sur les côtés opposés contiennent exactement le même nombre d'arêtes.

1.4 Objectif de la thèse

L'objectif de cette thèse est d'amener de nouvelles solutions pour gagner en performance lors de résolutions numériques d'équations aux dérivées partielles (en particulier pour l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, l'élasticité, etc.).

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la possibilité de construire un maillage quadrilatéral à partir d'un champ de croix fourni par un utilisateur. En effet, les champs de croix générés en propageant la normale extérieure à l'intérieur du domaine [Kowalski et al., 2013] produisent une distribution de singularités pouvant conduire à un partitionnement invalide ou non souhaité. Un problème notable survient dans les domaines

extrêmement étirés, tandis qu'une autre préoccupation concerne les formes de partitionnement qui entraînent des tailles de cellules très non uniformes (voir figure 1.13).

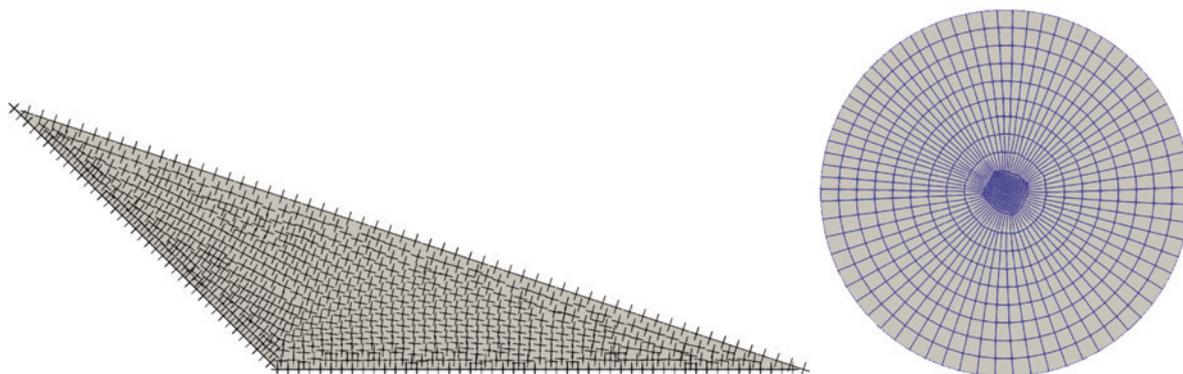


FIGURE 1.13 – Gauche : Champ de croix sur un domaine étiré ; Droite : Maillage non-homogène d'un disque.

Pour surmonter ces problèmes, il est essentiel de focaliser notre attention sur le contrôle à la fois du type et de l'emplacement des points singuliers dans le champ croisé. À cet égard, Jezdimirović et al. [Jezdimirovic et al., 2021] ont présenté un algorithme qui repose sur un modèle de singularité spécifié par l'utilisateur en entrée, pouvant inclure des singularités de grande valence. De même, Alexis Macq et al. [Macq et al., 2020] ont élaboré une formulation basée sur l'énergie de Ginzburg-Landau, qui permet d'imposer des singularités internes en les substituant par de petits trous pratiqués dans le domaine. Dans le cadre de cette thèse, nous explorons une approche qui prend racine dans la sélection d'un champ de croix répondant à un ensemble spécifique de propriétés. Ensuite, nous cherchons à aligner ce champ par rapport aux frontières du domaine de calcul. Par la suite nous élargissons cette approche aux domaines non simplement connexes, dans le but de pouvoir tenir compte des situations où le domaine est constitué de plusieurs matériaux distincts (multi-matériau).

Lors des simulations numériques, prendre en compte les conditions aux limites est une étape fondamentale. Pour ce faire, il est impératif d'introduire des points de passage dans le maillage, créant ainsi des segments de frontières qui correspondent à la localisation de ces conditions aux limites dans la structure du maillage. Dans cette optique, notre intention est d'enrichir le processus mentionné précédemment, qui concerne le champ croisé, en intégrant la prise en compte de ces points de passage, qui se manifestent sous forme de singularités de bord.

Nous étendons enfin cette approche aux surfaces courbes, et à l'instar de [Viertel and Osting, 2019], nous établissons un cadre théorique pour analyser la régularité des champs croisés, tout en présentant une série d'opérations qui facilitent leur manipulation.

1.5 Organisation du manuscrit

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le **Chapitre 2** formalise la notion de champ de croix dans le but de la comprendre en vue de l'utiliser comme point d'entrée d'une méthode de génération de

maillage quadrilatéral. Nous abordons les notions d'angles, de points singuliers, d'indice, et de ligne de champ d'un champ de croix. L'intégration d'une ligne de champ à partir d'un point singulier est soigneusement étudiée, tout comme le comportement local du champ de croix au voisinage d'un point singulier. Ensuite, nous mettons en place un processus de partitionnement ainsi que les hypothèses permettant à ce partitionnement de conduire à une décomposition d'un domaine à quatre côtés. Sur cette base, nous présentons un processus dit *d'alignement*, permettant de définir un champ de croix puis de l'adapter à un domaine en vue de générer à partir de ce dernier un maillage quadrilatéral. Ce processus est initialement présenté pour des domaines simplement connexes puis généralisé à des domaines non-simplement connexes.

Dans le **Chapitre 3**, nous abordons la discrétisation de la méthode présentée dans le 2. Pour ce faire, nous définissons une représentation discrète du champ de croix sur un maillage triangulaire. Cette représentation nous permet de retrouver une version discrète des notions présentées dans le cadre continu. Ainsi, nous pouvons mettre en œuvre une version discrète du processus de partitionnement permettant d'aboutir à une décomposition du maillage triangulaire. Nous montrons alors qu'une telle décomposition convergera lorsqu'on raffine le maillage vers une décomposition en régions de quatre côtés, qui se trouve être la décomposition du domaine continu.

Dans le **Chapitre 4**, nous étendons les approches développées au cas des surfaces courbes dans l'espace. La difficulté principale dans ce cadre réside dans l'absence de référence globale pour le domaine considéré. Nous reprenons le résultat permettant de garantir le bon fonctionnement du partitionnement, puis nous retrouvons le processus d'alignement dans le cas des domaines non simplement connexes. Une approche alternative est présentée, consistant à créer un repère global à partir de l'équation de la chaleur vectorielle. Enfin, nous abordons, comme dans le chapitre 3, l'analyse de convergence du maillage généré.

1.6 Communications issues de la thèse

Les travaux de recherche effectués ont mené aux communications suivantes :

Article en préparation

- K. Dotse, Vincent Mouysset, Sébastien Pernet : *Four-sided partitioning of a planar surface from a cross field*.

Proceeding

- Kokou Dotse, Vincent Mouysset, Sébastien Pernet : *Quadrilateral mesh of non-simply connected domain and non-planar surfaces from a given cross-field*, The SIAM International Meshing Roundtable Workshop 2023.

Communications orales dans des conférences internationales

- *Quadrilateral mesh create from a given cross field*, 10th International Conference on Curves and Surfaces, Arcachon, France, 20-24 Juin 2022.

- *Quadrilateral mesh of non-simply connected domain and non-planar surfaces from a given cross-field*, The SIAM International Meshing Roundtable Workshop 2023 (SIAM IMR 2023), Amsterdam, Netherlands, 06-09 Mars 2023.

Communications orales dans des conférences nationales

- *Génération de maillages quadrilatéraux à partir de champs de croix donnés*, Journées Ondes du Sud-Ouest 2023 (JOSO 2023), Toulouse, France, 14-16 Mars 2023.
- *Méthode de maillage en quadrilatères par résolution d'EDP*, Laboratoire de Mathématiques Appliquées à l'Aéronautique et au Spatial (LMA2S), Toulouse, France, Mars 2021.

Communications dans des séminaires doctorants

- Journée des doctorants de l'ONERA, Châtillon, France, 20 Janvier 2023
- Journée des doctorants de l'ONERA, Toulouse, France, 01 Février 2022

Logiciel

- *Hexaedral Quadrilateral Mesh (HQMesh)*

HQMesh est une bibliothèque C++ conçue pour générer des maillages quadrilatéraux à partir d'un partitionnement du domaine en régions à quatre côtés. La construction du partitionnement repose sur un champ de croix, qui peut être généré automatiquement ou guidé par les indications de l'utilisateur.

Chapitre 2

Génération de maillages quadrilatéraux à partir de champs de croix prescrits

Sommaire

2.1	Cadre théorique	32
2.1.1	Champ de croix	32
2.1.2	Indice	35
2.1.3	Théorème de Poincaré-Hopf	43
2.1.4	Ligne de champ et séparatrices	44
2.2	Méthode de partitionnement à partir d'un champ de croix	54
2.2.1	Principe de la méthode	54
2.2.2	Etude de la méthode	66
2.3	Discussions	78
2.3.1	Sur la signification pratique de l'hypothèse $0 < \text{Card}(\mathcal{S}_{\bar{v}}) < \infty$	78
2.3.2	Sur la conservation des propriétés du champ de croix initial	79
2.3.3	Sur les singularités de bord	79
2.3.4	Sur la construction du champ de correction	81
2.3.5	Sur les multi-matériaux	84

Dans le chapitre précédent, nous avons annoncé notre intention d'améliorer la topologie des maillages quadrilatéraux générés par la méthode de partitionnement basée sur les champs de croix, afin de remédier aux différentes limitations mentionnées. Il est important de noter que les champs de croix présentent les mêmes types de singularités que l'on observe dans les maillages quadrilatéraux générés. Par conséquent, la génération d'un maillage quadrilatéral très régulier ou présentant d'autres propriétés est étroitement liée à la génération d'un champ de croix possédant les propriétés souhaitées. À partir de cette observation, nous choisissons d'initier la méthode de partitionnement avec un champ de croix prédéfini, puis, au besoin, de le modifier pour qu'il puisse être utilisé dans le processus de partitionnement du domaine de calcul. Plusieurs questions se posent alors : quel champ choisir ? quelle devrait être sa régularité ? combien de singularités doit-il contenir ? et de quel type doivent-elles être ? Toutes ces questions soulignent l'importance de bien définir le concept de champ de croix et d'étudier de manière plus approfondie ses propriétés.

Dans ce chapitre, nous établissons un cadre théorique exhaustif et mettons à disposition une variété d'outils pour la manipulation des champs de croix. Nous proposons des définitions tels que l'angle d'une croix, l'indice d'un point dans un champ de croix, ainsi que de ligne de champ dans un champ de croix. Ensuite, nous abordons la méthode de partitionnement proprement dite. À cet effet, nous présentons différents algorithmes élaborés pour les géométries tant simplement connexes que non simplement connexes, ainsi que diverses opérations permettant d'ajuster un champ de croix donné en fonction du domaine à mailler. Enfin, nous exposons un ensemble de résultats qui justifient les algorithmes présentés et garantissent leur efficacité.

2.1 Cadre théorique

Dans cette section, nous présentons le concept de champ de croix défini sur un domaine donné et explorons quelques-unes de ses propriétés clés. Considérons Ω comme un domaine borné et fermé de \mathbb{R}^2 ayant une frontière $\partial\Omega$ lisse par morceaux.

2.1.1 Champ de croix

Soit \mathbb{S}^1 la sphère unité de \mathbb{R}^2 définie par $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et soit \mathcal{Q} le groupe de symétrie quadrilatérale défini comme l'ensemble des rotations d'angle $k\pi/2$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Définition 2.1 ([Beaufort et al., 2017]). Une croix \mathbf{c} est un élément de $\mathbf{C} := \mathbb{S}^1/\mathcal{Q} \cup \{0\}$.

En d'autres termes, \mathbf{c} représente une classe d'équivalence dont les éléments, nommés branches de la croix, répondent à la relation suivante (voir figure 2.1) :

$$\forall (c^1, c^2) \in \mathbf{c} \times \mathbf{c}, \exists m \in \mathbb{Z}, c^1 = \mathbf{R}\left(\frac{m\pi}{2}\right) c^2, \quad (2.1)$$

où $\mathbf{R}(\cdot)$ est l'opérateur de rotation défini par :

$$\mathbf{R}(\cdot) = \begin{pmatrix} \cos(\cdot) & -\sin(\cdot) \\ \sin(\cdot) & \cos(\cdot) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

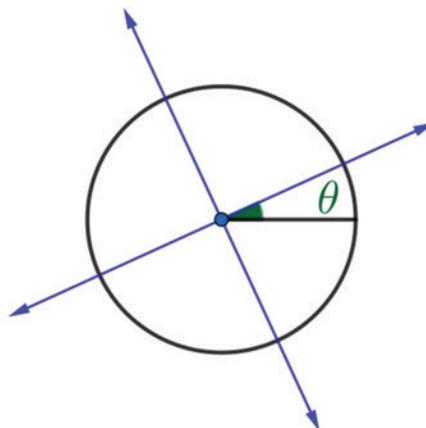


FIGURE 2.1 – Illustration d'une croix.

Un champ de croix \bar{u} défini sur Ω est une fonction qui associe à chaque point $p \in \Omega$ une croix $\bar{u}(p) \in \mathbf{C}$.

Définition 2.2. Si $\bar{u}(p) = 0$ pour $p \in \Omega$ alors on dit que p est un point singulier de \bar{u} .

Dans toute la suite, nous désignerons par $\mathcal{S}_{\bar{u}} := \bar{u}^{-1}(\{0\})$ l'ensemble des points singuliers de \bar{u} .

Définition 2.3. \bar{u} est de classe \mathcal{C}^1 en un point p s'il existe une application $\pi_{\bar{u}}$ dans un voisinage V_p de p tel que $\pi_{\bar{u}} \in \mathcal{C}^1(V_p)$ et $\pi_{\bar{u}}(q) \in \bar{u}(q)$ pour tout $q \in V_p$.

Comme toutes les composantes de \bar{u} sont obtenues par rotations d'angles $m\pi/2$, où $m \in \mathbb{Z}$, la propriété énoncée précédemment peut être reformulée en tant qu'exigence de continuité \mathcal{C}^1 pour toutes les composantes dans le voisinage de p .

Définition 2.4. \bar{u} est un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 si $\text{Card}(\mathcal{S}_{\bar{u}}) < \infty$ et si \bar{u} est de classe \mathcal{C}^1 en tout point $p \in \Omega \setminus \mathcal{S}_{\bar{u}}$ (où $\text{Card}(\mathcal{S}_{\bar{u}})$ est le cardinal de $\mathcal{S}_{\bar{u}}$).

Le résultat suivant établit la régularité des champs de croix construits à partir de fonctions de représentation [Kowalski et al., 2013, Viertel and Osting, 2019] puis définit l'opération et la régularité de la rotation d'un champ de croix par rapport à un champ d'angle (voir figure 2.2 et figure 2.3).

Proposition 2.5.

1. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^1 sauf en un nombre fini de point où f s'annule. La fonction \bar{u} définie pour tout $p \in \Omega$ par :

$$\bar{u}(p) = \begin{cases} \left\{ \mathbf{R}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \frac{f(p)}{\|f(p)\|}, m \in \mathbb{Z} \right\} & \text{si } f(p) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

est un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 sur Ω .

2. Soit \bar{u} un champ de croix sur Ω et $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur Ω . Alors l'application $\bar{v} : p \mapsto \bar{v}(p) = \mathbf{R}(\theta(p))\bar{u}(p) := \{\mathbf{R}(\theta(p))u, u \in \bar{u}(p)\}$ est un champ de croix sur Ω . De plus $\mathcal{S}_{\bar{u}} = \mathcal{S}_{\bar{v}}$ et si θ est de classe \mathcal{C}^1 en $p \in \Omega$ (resp. sur Ω) alors \bar{v} est de classe \mathcal{C}^1 en p (resp. presque- \mathcal{C}^1 sur Ω) si et seulement si \bar{u} l'est.

Preuve.

1. Pour tout $p \in \Omega$, si $\bar{u}(p) \neq 0$ alors pour tout $(u^1, u^2) \in \bar{u}(p) \times \bar{u}(p)$, il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $u_1 = \mathbf{R}\left(\frac{m_1\pi}{2}\right) \frac{f(p)}{\|f(p)\|}$ et $u_2 = \mathbf{R}\left(\frac{m_2\pi}{2}\right) \frac{f(p)}{\|f(p)\|}$. On a donc $u^1 = \mathbf{R}\left(\frac{(m_1-m_2)\pi}{2}\right)u^2$ ce qui implique que $\bar{u}(p) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Autrement, $\bar{u}(p) = 0$. Il vient donc que \bar{u} est un champ de croix.

Soit F l'ensemble des points où f s'annule. L'application $\pi_{\bar{u}} := f/\|f\|^{-1}$ définie sur $\Omega \setminus F$ est de classe \mathcal{C}^1 puisque f l'est. De plus, pour tout $p \in \Omega \setminus F$, $\pi_{\bar{u}}(p) \in \bar{u}(p)$ donc \bar{u} est de classe \mathcal{C}^1 sur $\Omega \setminus F$. Par définition on a donc $\mathcal{S}_{\bar{u}} = F$ de cardinal fini, donc \bar{u} est un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 sur Ω .

2. Soit $p \in \Omega$. Si $\bar{u}(p) = 0$ alors $\bar{v}(p) = 0$, sinon $\bar{u}(p) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ce qui implique que $\bar{v}(p) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. En effet, soit $(v^1, v^2) \in \bar{v}(p) \times \bar{v}(p)$. Par définition, il existe

$(u^1, u^2) \in \bar{u}(p) \times \bar{u}(p)$ tel que $v^1 = \mathbf{R}(\theta)u^1$ et $v^2 = \mathbf{R}(\theta)u^2$. Or $\bar{u}(p) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $u^1 = \mathbf{R}\left(\frac{m\pi}{2}\right)u^2$. Ainsi :

$$\mathbf{R}(\theta)u^1 = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}\left(\frac{m\pi}{2}\right)u^2, \text{ et donc } v^1 = \mathbf{R}\left(\frac{m\pi}{2}\right)v^2.$$

Ce qui implique que $\bar{v}(p) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Autrement dit, \bar{v} est un champ de croix sur Ω . De plus $\mathcal{S}_{\bar{u}} = \mathcal{S}_{\bar{v}}$ puisque pour tout $p \in \Omega$, on a :

$$\bar{v}(p) = \{0\} \Leftrightarrow (\forall u \in \bar{u}(p), \mathbf{R}(\theta(p))u = 0) \Leftrightarrow (\forall u \in \bar{u}(p), u = 0) \Leftrightarrow \bar{u}(p) = \{0\}.$$

Maintenant considérons que θ et \bar{u} soient de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $p \in \Omega$. Par définition, il existe une application $\pi_{\bar{u}}$ de classe \mathcal{C}^1 dans un voisinage V_p de p . θ étant de classe \mathcal{C}^1 , l'application $\pi_{\bar{v}} := \mathbf{R}(\theta)\pi_{\bar{u}}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur V_p . De plus, pour tout $q \in V_p$, $\pi_{\bar{v}}(q) = \mathbf{R}(\theta(q))\pi_{\bar{u}}(q)$ et comme $\pi_{\bar{u}}(q) \in \bar{u}(q)$ on a par définition $\pi_{\bar{v}}(q) \in \bar{v}(q)$. En conclusion, \bar{v} est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de p .

Réciproquement, si \bar{v} est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $p \in \Omega$, alors par définition il existe une application $\pi_{\bar{v}}$ de classe \mathcal{C}^1 dans un voisinage V_p de p . θ étant de classe \mathcal{C}^1 , l'application $\pi_{\bar{u}} := \mathbf{R}(-\theta)\pi_{\bar{v}}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur V_p . De plus, pour tout $q \in V_p$, $\pi_{\bar{u}}(q) = \mathbf{R}(-\theta(q))\pi_{\bar{v}}(q)$. Or $\pi_{\bar{v}}(q) \in \bar{v}(q)$ donc par définition il existe $u \in \bar{u}(q)$ tel que $\pi_{\bar{v}}(q) = \mathbf{R}(\theta(q))u$. On a donc :

$$\pi_{\bar{u}}(q) = \mathbf{R}(-\theta(q))\mathbf{R}(\theta(q))u = u \implies \pi_{\bar{u}} \in \bar{u}(q).$$

En conclusion, \bar{u} est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de p .

Pour finir, puisque $\mathcal{S}_{\bar{u}} = \mathcal{S}_{\bar{v}}$ alors \bar{u} est un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 sur Ω si et seulement si \bar{v} est un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 sur Ω . ■

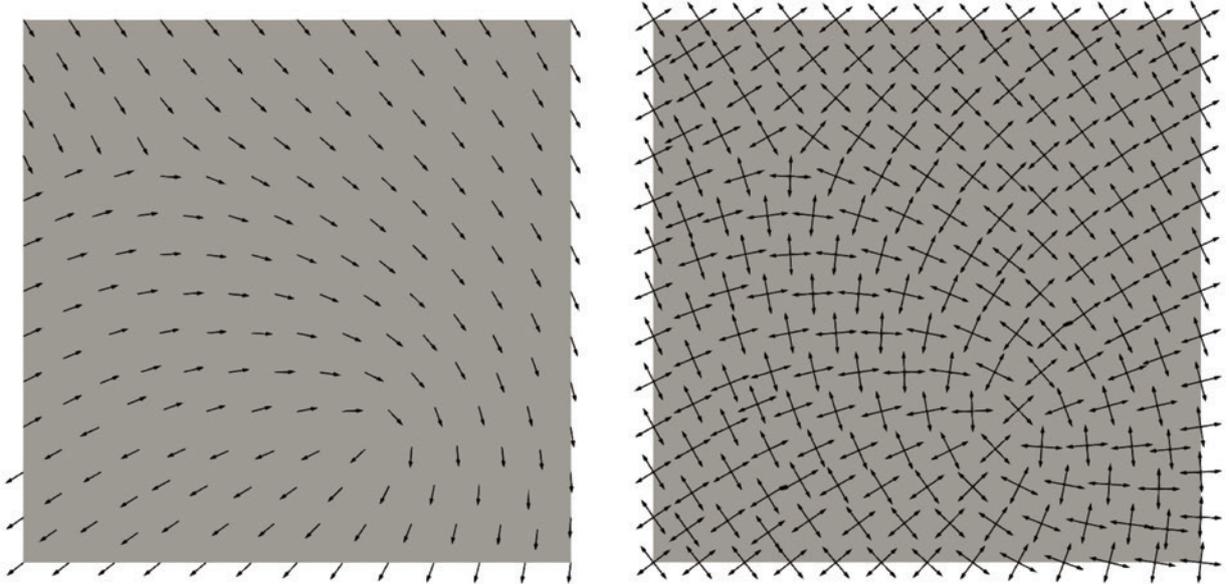


FIGURE 2.2 – Illustration d'un champ de représentation (en gauche) et du champ de croix associé (à droite).

Pour tout point p situé sur la frontière $\partial\Omega$, nous définissons $n(p)$ comme étant la normale extérieure unitaire. Lorsque la normale n'est pas définie en p , nous posons $n(p) =$

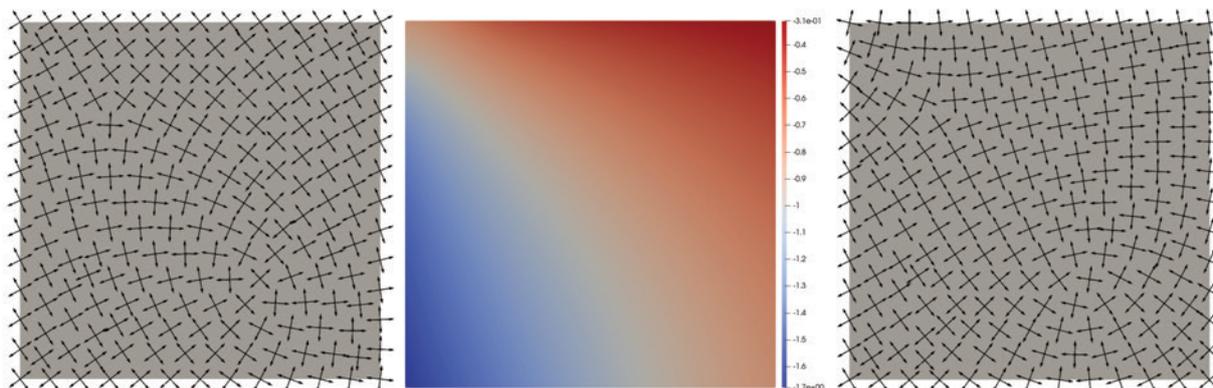


FIGURE 2.3 – Illustration de la rotation d’un champ de croix par rapport à un champ d’angle sur un domaine quelconque. À gauche : champ de croix initial, au milieu : champ d’angle (en radian), à droite : champ de croix résultant.

$(0, 0)$. En accord avec la proposition 2.5, nous introduisons un champ de croix particulier associé à la frontière de Ω , dite *champ de croix normal* et défini par :

$$\bar{n}(p) = \begin{cases} \{\mathbf{R}(\frac{m\pi}{2}) n(p), m \in \mathbb{Z}\} & \text{si } n(p) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \quad (2.4)$$

Nous pouvons alors introduire la notion d’alignement du champ de croix par la définition suivante :

Définition 2.6. *Le champ de croix \bar{u} est dit aligné par rapport à $\partial\Omega$ ou aligné sur le bord de Ω si pour tout point $p \in \partial\Omega$, $\bar{u}(p) \in \{\bar{n}(p), 0\}$.*

Nous donnons sur la figure 2.4 une illustration d’un champ de croix aligné sur le bord d’un domaine.

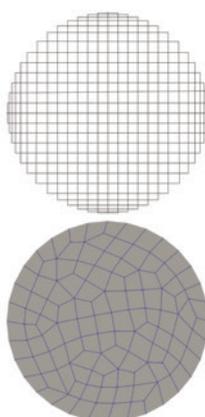


FIGURE 2.4 – Mise en évidence d’un champ de croix aligné le long du bord d’un carré, avec une annulation du champ dans les coins.

2.1.2 Indice

L’indice de Poincaré est un concept mathématique très usité dans la topologie et la géométrie différentielle. Il permet de quantifier le comportement des courbes et des champs

de vecteurs à travers leurs singularités. Dans cette partie, à l'instar du concept d'indices pour les champs de vecteurs, nous introduisons un indice spécifique pour les champs de croix. Cet indice sera plus tard relié à la notion de *séparatrices*.

Pour commencer, nous définissons la notion d'angle pour une croix. À chaque croix, nous associons une représentation angulaire. Cette approche consiste à attribuer à la croix une valeur représentant son orientation par rapport à une référence donnée.

Définition 2.7. Soit une croix $\mathbf{c} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. L'angle associé à \mathbf{c} est donné par l'unique élément de l'ensemble :

$$\{\theta_{\mathbf{c}}\} := \{\arg c, c \in \mathbf{c}\} \cap \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right],$$

où $\arg c \equiv \text{atan2}(c_y, c_x) \pmod{2\pi}$ est l'argument complexe de $c = (c_x, c_y)$ pour tout $c \in \mathbf{c}$.

Lemme 2.8. L'angle donné par la définition 2.7 est bien défini.

Preuve. Existence : L'ensemble $\{\arg c, c \in \mathbf{c}\} \cap \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ est non vide. En effet, \mathbf{c} étant une croix, par définition on a $\{\arg c, c \in \mathbf{c}\} \cap \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \neq \emptyset$ sauf si $\mathbf{c} = 0$ ce qui est exclu. Unicité : Supposons que \mathbf{c} ait deux angles $\theta_{\mathbf{c}}$ et $\theta'_{\mathbf{c}}$. Par définition il existe $m, m' \in \mathbb{Z}$ et $c, c' \in \mathbf{c}$ tel que :

$$\theta_{\mathbf{c}} - \theta'_{\mathbf{c}} = \text{atan2}(c_y, c_x) + 2m\pi - \text{atan2}(c'_y, c'_x) - 2m'\pi.$$

De plus par définition il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\text{atan2}(c'_y, c'_x) = \text{atan2}(c_y, c_x) + l\frac{\pi}{2}.$$

On a donc :

$$\theta_{\mathbf{c}} - \theta'_{\mathbf{c}} = 2m\pi - 2m'\pi - l\frac{\pi}{2} = k\frac{\pi}{2},$$

où $k = 4m - 4m' - l$. Sachant que $\theta_{\mathbf{c}}, \theta'_{\mathbf{c}} \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$, on a $\theta_{\mathbf{c}} - \theta'_{\mathbf{c}} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ce qui implique que :

$$-\frac{\pi}{2} < k\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Il vient donc que $k = 0$ puisque $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $\theta_{\mathbf{c}} = \theta'_{\mathbf{c}}$. ■

En considérant un champ de croix \bar{u} , la définition précédente nous autorise donc à attribuer à \bar{u} un champ scalaire formé par les angles des croix de \bar{u} . Ce champ est défini de la manière suivante :

Définition 2.9. Soit \bar{u} un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 sur Ω . Le champ d'angle associé à \bar{u} est l'application définie par :

$$\theta_{\bar{u}} : p \in \Omega \setminus \mathcal{S}_{\bar{u}} \longmapsto \theta_{\bar{u}}(p) := \theta_{\bar{u}(p)},$$

où $\theta_{\bar{u}(p)}$ est l'angle de la croix $\bar{u}(p)$ donné par la définition 2.7.

Nous énonçons à présent le résultat suivant, qui constitue un outil précieux pour analyser la régularité d'un champ de croix donné à partir de la régularité du champ d'angle qui lui est associé.

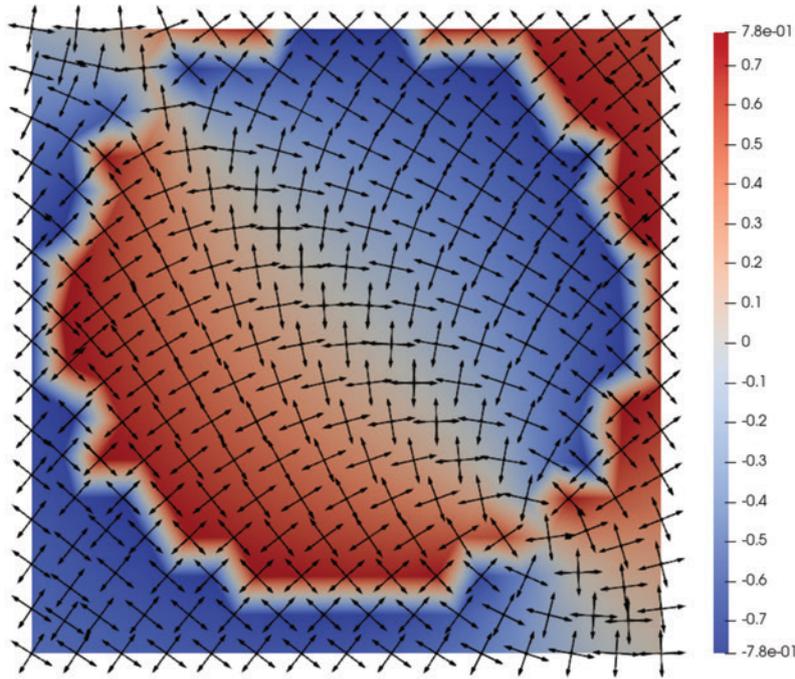


FIGURE 2.5 – Illustration d'un champ de croix et du champ d'angle (en radian) correspondant.

Proposition 2.10. *Soit \bar{u} un champ de croix sur Ω . \bar{u} est de classe \mathcal{C}^1 en un point $p \in \Omega$ si et seulement s'il existe $V_p \subset \Omega \setminus \mathcal{S}_{\bar{u}}$, un voisinage de p , et une fonction $\theta_{\bar{u}}^{V_p} : V_p \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta_{\bar{u}}^{V_p} \in \mathcal{C}^1(V_p)$ et vérifiant $\theta_{\bar{u}}^{V_p}(q) \equiv \theta_{\bar{u}}(q) \pmod{\frac{\pi}{2}}$, pour tout $q \in V_p$.*

Preuve. Supposons que \bar{u} est de classe \mathcal{C}^1 en un point $p \in \Omega$. Par définition, il existe une application $\pi_{\bar{u}}$ de classe \mathcal{C}^1 dans un voisinage V_p de p . Par conséquent, la fonction $\theta_{\bar{u}}^{V_p} := \arg \pi_{\bar{u}}$ est de classe \mathcal{C}^1 dans V_p . De plus, pour tout $q \in V_p$, $\pi_{\bar{u}}(q) \in \bar{u}(q)$ autrement dit, pour tout $q \in V_p$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg \pi_{\bar{u}}(q) = \theta_{\bar{u}}(q) + m\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\theta_{\bar{u}}^{V_p}$ vérifie $\theta_{\bar{u}}^{V_p}(q) \equiv \theta_{\bar{u}}(q) \pmod{\frac{\pi}{2}}$ pour tout $q \in V_p$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $V_p \subset \Omega \setminus \mathcal{S}_{\bar{u}}$, un voisinage de p , et une fonction $\theta_{\bar{u}}^{V_p} : V_p \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta_{\bar{u}}^{V_p} \in \mathcal{C}^1(V_p)$ et vérifiant $\theta_{\bar{u}}^{V_p}(q) \equiv \theta_{\bar{u}}(q) \pmod{\frac{\pi}{2}}$, pour tout $q \in V_p$. Il vient que l'application $\pi_{\bar{u}} := \mathbf{R}(\theta_{\bar{u}}^{V_p})(1, 0)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur V_p . De plus, pour tout $q \in V_p$, $\pi_{\bar{u}}(q) \in \bar{u}(q)$ puisqu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg \pi_{\bar{u}}(q) = \theta_{\bar{u}}(q) + m\frac{\pi}{2}$. Ainsi \bar{u} est de classe \mathcal{C}^1 en p . ■

Grâce au résultat précédent, nous pouvons déduire le corollaire suivant permettant de construire le relèvement continu de l'angle d'un champ de croix le long d'une courbe paramétrée.

Corollaire 2.11. *Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ un arc sur Ω et \bar{u} un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 défini sur Ω tel que pour tout $p \in \gamma([0, 1])$, $\bar{u}(p) \neq 0$. Alors, il existe $\theta_{\bar{u}}^\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ telle que $\theta_{\bar{u}}^\gamma(t) \equiv \theta_{\bar{u}}(\gamma(t)) \pmod{\frac{\pi}{2}}$. De plus, si $\alpha_{\bar{u}}^\gamma$ et $\beta_{\bar{u}}^\gamma$ sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 satisfaisant cette propriété, alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha_{\bar{u}}^\gamma(t) = \beta_{\bar{u}}^\gamma(t) + m\frac{\pi}{2}$ pour tout $t \in [0, 1]$.*

Preuve. Pour démontrer ce résultat, nous commençons par construire un recouvrement fini de γ . Nous construisons ensuite $\theta_{\bar{u}}^\gamma$ par morceaux sur les éléments du recouvrement.

Construction d'un recouvrement de la courbe γ : Soit $p \in \gamma([0, 1])$. D'après la proposition 2.10, il existe $V_p \subset \Omega \setminus \mathcal{S}_{\bar{u}}$ et une fonction $\theta_{\bar{u}}^{V_p} \in \mathcal{C}^1$ vérifiant $\theta_{\bar{u}}^{V_p}(q) \equiv \theta_{\bar{u}}(q) \pmod{\frac{\pi}{2}}$ pour tout $q \in V_p$. Notons maintenant \widetilde{V}_p la composante connexe de l'ensemble $V_p \cap \gamma([0, 1])$ et contenant p . Il est clair que la famille $(\widetilde{V}_p)_{p \in \gamma([0, 1])}$ recouvre $\gamma([0, 1])$ puisque $\cup_{p \in \gamma([0, 1])} \widetilde{V}_p$ contient $\gamma([0, 1])$. γ étant continu et $[0, 1]$ étant compact, on peut extraire de ce recouvrement, un sous-recouvrement fini de $\gamma([0, 1])$. Autrement dit, il existe $I \subset \mathbb{N}$ une partie finie de \mathbb{N} et une sous-famille $(V_i)_{i \in I}$ de $(\widetilde{V}_p)_{p \in \gamma([0, 1])}$ recouvrant $\gamma([0, 1])$.

Construction de $\theta_{\bar{u}}^\gamma$ par morceau : Soit $\{p_0\} = \gamma^{-1}(0)$ et $V_0 \in (V_i)_{i \in I}$ tel que $p_0 \in V_0$. On définit $\theta_{\bar{u}}^\gamma(t) := \theta_{\bar{u}}^{V_0} \circ \gamma(t)$ pour tout $t \in \gamma^{-1}(V_0 \cap \gamma([0, 1]))$. Il est clair que $\theta_{\bar{u}}^\gamma \in \mathcal{C}^1(\gamma^{-1}(V_0 \cap \gamma([0, 1])))$ et $\theta_{\bar{u}}^\gamma(t) \equiv \theta_{\bar{u}}(\gamma(t)) \pmod{\frac{\pi}{2}}$ pour tout $t \in \gamma^{-1}(V_0 \cap \gamma([0, 1]))$. À partir de là, nous itérons la construction de $\theta_{\bar{u}}^\gamma$ de la manière suivante : pour $n > 0$, on choisit le point p_n tel que $p_n \in \partial V_{n-1} \cap \gamma([0, 1])$ et $p_n \notin \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$. On choisit ensuite V_n tel que $V_n \in (V_i)_{i \in I}$, $V_n \neq V_k$, $k < n$ et $p_n \in V_n$. D'après la proposition 2.10, il existe $\theta_{\bar{u}}^{V_n} \in \mathcal{C}^1(V_n)$ et pour tout $q \in V_n$, $\theta_{\bar{u}}^{V_n}(q) \equiv \theta_{\bar{u}}(q) \pmod{\frac{\pi}{2}}$. Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_{\bar{u}}^{V_n} \circ \gamma(t) + m\frac{\pi}{2} = \theta_{\bar{u}}^\gamma(t)$ pour tout $t \in \gamma^{-1}(V_{n-1} \cap \gamma([0, 1])) \cap \gamma^{-1}(V_n \cap \gamma([0, 1]))$. On définit alors $\theta_{\bar{u}}^\gamma(t) := \theta_{\bar{u}}^{V_n} \circ \gamma(t) + m\frac{\pi}{2}$ pour tout $t \in \gamma^{-1}(V_n \cap \gamma([0, 1]))$. Il est clair que $\theta_{\bar{u}}^\gamma$ ainsi défini est de classe \mathcal{C}^1 sur $\cup_{k=0}^n \gamma^{-1}(V_k \cap \gamma([0, 1]))$ et $\theta_{\bar{u}}^\gamma(t) \equiv \theta_{\bar{u}} \circ \gamma(t) \pmod{\frac{\pi}{2}}$ pour tout $t \in \cup_{k=0}^n \gamma^{-1}(V_k \cap \gamma([0, 1]))$. On poursuit itérativement cette construction jusqu'à ce que $\cup_{k=0}^n \gamma^{-1}(V_k \cap \gamma([0, 1])) = \gamma([0, 1])$. Le nombre d'itération à faire est fini puisque $(V_i)_{i \in I}$ est un recouvrement fini de $\gamma([0, 1])$.

Supposons maintenant que $\alpha_{\bar{u}}^\gamma$ et $\beta_{\bar{u}}^\gamma$ soient deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 qui satisfont cette propriété, alors, il existe des fonctions $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ et $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $\alpha_{\bar{u}}^\gamma(t) = \theta_{\bar{u}}(\gamma(t)) + g(t)\frac{\pi}{2}$ et $\beta_{\bar{u}}^\gamma(t) = \theta_{\bar{u}}(\gamma(t)) + h(t)\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, pour tout $t \in [0, 1]$ on a :

$$\alpha_{\bar{u}}^\gamma(t) = \beta_{\bar{u}}^\gamma(t) + g(t)\frac{\pi}{2} - h(t)\frac{\pi}{2}.$$

$\alpha_{\bar{u}}^\gamma$ et $\beta_{\bar{u}}^\gamma$ étant continue sur $[0, 1]$, il vient que la fonction $g - h$ est continue sur $[0, 1]$. Autrement dit, $g - h$ est constant car continue et à valeur dans \mathbb{Z} . Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m = (g - h)(t)$, pour tout $t \in [0, 1]$, On a :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \alpha_{\bar{u}}^\gamma(t) = \beta_{\bar{u}}^\gamma(t) + m\frac{\pi}{2}.$$

■

Le relèvement continu du champ de croix le long d'une courbe paramétrée permet de quantifier le nombre de fois que le champ tourne sur lui-même le long de la courbe. Cependant, la construction du Corollaire 2.11 ne fonctionne pas si $\mathcal{S}_{\bar{u}} \cap \gamma([0, 1]) \neq \emptyset$. Dans ce cas, nous construisons le relèvement par morceaux le long de γ de la manière suivante :

Soit $I := \gamma^{-1}(\mathcal{S}_{\bar{u}} \cap \gamma([0, 1])) \cup \{0, 1\}$. On a $\text{Card}(I) < \infty$ puisque $\text{Card}(\mathcal{S}_{\bar{u}}) < \infty$. Il existe donc $(t_i)_{i \in \llbracket 1, n_I \rrbracket} \subset [0, 1]$ tel que $I = (t_i)_{i \in \llbracket 1, n_I \rrbracket}$ avec $0 = t_1 < \dots < t_{n_I} = 1$ et $n_I = \text{Card}(I)$. Par construction, il est clair que pour tout $i \in \llbracket 1, n_I - 1 \rrbracket$, on a $\mathcal{S}_{\bar{u}} \cap \gamma(]t_i, t_{i+1}[) = \emptyset$. Ainsi, à partir du Corollaire 2.11, nous pouvons construire pour tout $i \in \llbracket 1, n_I - 1 \rrbracket$ une fonction $\theta_{\bar{u}}^{\gamma_i}$ sur $]0, 1[$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ telle que $\theta_{\bar{u}}^{\gamma_i}(t) \equiv \theta_{\bar{u}}(\gamma_i(t)) \pmod{\frac{\pi}{2}}$ avec γ_i , l'arc défini sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma_i(t) = \gamma(t_i + t(t_{i+1} - t_i)).$$

Finalement, le relèvement $\theta_{\bar{u}}^\gamma$ le long de γ est donné par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n_\Gamma \rrbracket, \forall t \in]t_i, t_{i+1}[, \theta_{\bar{u}}^\gamma(t) = \theta_{\bar{u}}^{\gamma_i} \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right).$$

Grâce à cette notion, nous sommes désormais en mesure de définir l'indice d'un point dans un champ de croix.

Définition 2.12. *On appelle chemin fermé tout lacet Γ qui est $\mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}_m^1$. On appellera paramétrisation simple de Γ , toute paramétrisation $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ telle que l'ensemble $\{s \in I, \exists t \in I, s \neq t, \gamma(s) = \gamma(t)\}$ est d'intérieur vide dans \mathbb{R} .*

Dans tout ce qui suit, les paramétrisations des lacets seront supposées être des paramétrisations simple et on aura par définition l'intégrale sur Γ d'une fonction notée f par rapport au lacet γ de Γ

$$\int_\gamma f := \int_I f(\gamma(s))\gamma'(s)ds,$$

indépendante de γ . On notera V^Γ une partie de Ω délimitée par Γ . Soit $\vec{n}(q)$ la normale extérieure en q à V^Γ . On dit que γ paramétrise Γ dans le sens positif si pour tout $t \in I$, $(\gamma'(t) \wedge \vec{n}(\gamma(t))).(0, 0, 1)^t > 0$. Dans la suite, nous adoptons la notation suivante :

$$\int_\Gamma d\theta_{\bar{u}} := \int_\gamma d\theta_{\bar{u}} := \int_a^b d\theta_{\bar{u}}^\gamma.$$

Lemme 2.13. *Soit \bar{u} un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 et Γ un chemin fermé dont γ est une paramétrisation sur $[a, b]$. La fonction $F(\Gamma)$ suivante*

$$F_{\bar{u}}(\Gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_a^b d\theta_{\bar{u}}^\gamma,$$

vérifie $4F_{\bar{u}}(\Gamma) \in \mathbb{Z}$. En outre, si $(V^{\Gamma_i})_{i \in \llbracket 1, n_\Gamma \rrbracket}$ forme une partition de V^Γ telle que $\bar{u}(p) \neq 0, \forall p \in \Gamma_i, \forall i \in \llbracket 1, n_\Gamma \rrbracket$, alors on a :

$$F_{\bar{u}}(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n_\Gamma} F_{\bar{u}}(\Gamma_i). \quad (2.5)$$

Preuve. Soit $w(p) - z = e^{4i\theta_{\bar{u}}^\gamma(p)}$ si $\bar{u}(p) \neq 0$ et $w(p) - z = 0$ sinon, avec $z \in \mathbb{C}$ alors on a (comme dans [Rudin, 1998]) :

$$\int_\gamma \frac{dw}{w - z} = \int_\gamma d \ln(w - z) = \int_\gamma 4id\theta_{\bar{u}}^\gamma.$$

Il vient donc que :

$$2\pi F_{\bar{u}}(\Gamma) = \frac{1}{4} \text{Im} \left(\int_\gamma \frac{dw}{w - z} \right).$$

Montrer que $4F_{\bar{u}}(\Gamma) \in \mathbb{Z}$ revient alors à montrer que :

$$\exp \left(\int_a^b \frac{w'(\gamma(t))\gamma'(t)}{w(\gamma(t)) - z} dt \right) = 1,$$

si $w \circ \gamma(t) \neq z$ hormis un sous-ensemble discret de valeurs $t \in [a, b]$ (ce qui est le cas pour $z = 0$ avec \bar{u} n'ayant que des zéros isolés).

Posons

$$\varphi(t) := \exp\left(\int_a^t \frac{w'(\gamma(t))\gamma'(t)}{w(\gamma(t)) - z} dt\right), \quad t \in [a, b],$$

φ est de classe \mathcal{C}^1 par morceau et vérifie :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\gamma'.w' \circ \gamma}{w' \circ \gamma - z},$$

Il vient alors que la fonction $\varphi/(w \circ \gamma - z)$ est continue, dérivable presque partout ($w \in \mathcal{C}^1$ et $\gamma \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}_m^1$) de dérivée nulle donc elle est constante (presque partout, donc partout car continue) et comme $\varphi(a) = 1$, on a :

$$\varphi(t) = \frac{w(\gamma(t)) - z}{w(\gamma(a)) - z},$$

En utilisant maintenant le fait que $\gamma(a) = \gamma(b)$, il vient que $\varphi(b) = 1$ et donc finalement

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \int_a^b \frac{w'(\gamma(t))\gamma'(t)}{w(\gamma(t)) - z} dt = 2ik\pi.$$

Ainsi $4F_{\bar{u}}(\Gamma) \in \mathbb{Z}$.

Pour la propriété d'additivité de $F_{\bar{u}}$ on commence par décomposer les frontières de chaque V^{Γ_i} de la manière suivante : $\Gamma_{i,0} = \Gamma_i \cap \Gamma$ et $\Gamma_{i,j} = \Gamma_i \cap \Gamma_j$ pour $j \neq i$. Par convention on pose $\Gamma_{i,i} = \emptyset, \forall i \in \llbracket 1, n_\Gamma \rrbracket$. On a alors $\Gamma_i = \cup_{j \in \llbracket 1, n_\Gamma \rrbracket} \Gamma_{i,j}$ et $\Gamma_{i,j} = \Gamma_{j,i}$ et on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n_\Gamma} F_{\bar{u}}(\Gamma_i) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \sum_{j=0}^{n_\Gamma} \int_{\Gamma_{i,j}} d\theta_{\bar{u}}^\gamma = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \int_{\Gamma \cap \Gamma_i} d\theta_{\bar{u}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \sum_{j=1}^{n_\Gamma} \int_{\Gamma_{i,j}} d\theta_{\bar{u}}.$$

Autrement dit,

$$\sum_{i=1}^{n_\Gamma} F_{\bar{u}}(\Gamma_i) = F_{\bar{u}}(\Gamma) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \int_{\Gamma_{i,i}} d\theta_{\bar{u}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n_\Gamma} \int_{\Gamma_{i,j} \cup \Gamma_{j,i}} d\theta_{\bar{u}}.$$

Dans l'équation précédente, le second terme s'annule car $\Gamma_{i,i} = \emptyset$ et le dernier terme vaut lui aussi zéro car $\Gamma_{i,j} \cup \Gamma_{j,i}$ représente un lacet et par hypothèse \bar{u} est \mathcal{C}^1 sur $\Gamma_i \cap \Gamma_j$. D'où le résultat. ■

Lemme 2.14. *Sous les hypothèses du lemme 2.13, si \bar{u} est \mathcal{C}^1 sur un ensemble convexe $V \subset \Omega$ alors pour tout arc Γ telle que $V^\Gamma \subset V$ on a $F_{\bar{u}}(\Gamma) = 0$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que si u est de classe \mathcal{C}^1 sur V^Γ alors w' est bornée par une constante $M > 0$ sur V^Γ et donc on a :

$$\left| \int_a^b \frac{w'(\gamma(t))\gamma'(t)}{u(\gamma(t)) - z} dt \right| \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt < 2\pi,$$

pour Γ décrivant un arc de longueur inférieure à $2\pi/M$, tel que $V^\Gamma \subset V$ et donc $F_u(\Gamma) = 0$. On généralise ensuite ce résultat à un arc Γ de taille quelconque en pavant V^Γ avec des boules de rayon plus petit que $1/4\pi$ puis on conclut en utilisant le lemme 2.13. ■

Lemme 2.15. *Pour tout voisinage V^Γ de p tel que $u \in \mathcal{C}^1(V^\Gamma \setminus \{p\})$, on a pour tous chemins fermés Γ_1 et Γ_2 on a :*

$$p \in V^{\Gamma_i} \subset V^\Gamma, \forall i = 1, 2 \implies F_{\bar{u}}(\Gamma_1) = F_{\bar{u}}(\Gamma_2).$$

Preuve. Soient Γ_1 et Γ_2 deux lacets vérifiant les hypothèses du lemme. En notant $V_3 = V^{\Gamma_1} \cap V^{\Gamma_2}$ et $\Gamma_3 = \partial V^{\Gamma_3}$ qui est $\mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}_m^1$ et $(V_j^i)_{j \in [1, k_i]}$ les composantes connexes de $V^{\Gamma_i} \setminus V^3$, pour $i = 1, 2$. En notant $\Gamma_i^j = \partial V_j^i$, qui est donc $\mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}_m^1$. En appliquant (2.5), on obtient :

$$\forall i = 1, 2, F_{\bar{u}}(\Gamma_i) = \sum_{j=1, \dots, k_i} F_{\bar{u}}(\Gamma_i^j) = F_{\bar{u}}(\Gamma_3),$$

par le lemme 2.14 car u est \mathcal{C}^1 sur chaque $V_j^i \subset V^\Gamma \setminus \{p\}$. D'où le résultat. ■

En combinant les lemmes 2.13 et 2.14, on obtient alors :

Définition 2.16. *Pour un champ u n'ayant que des irrégularités isolées, on appelle indice du point p dans le champ u la valeur :*

$$id_{\bar{u}}(p) := F_{\bar{u}}(\Gamma),$$

où Γ est un chemin fermé paramétré dans le sens positif tel que $p \in V^\Gamma$ et $u \in \mathcal{C}^1(V^\Gamma \setminus \{p\})$.

Proposition 2.17. *La définition 2.16 est bien posée.*

Preuve. Il s'agit d'une conséquence directe du lemme 2.15. ■

On peut alors retrouver les propriétés principales de l'indice, résumées dans le théorème suivant :

Théorème 2.18. *L'indice du point p dans le champ u vérifie les propriétés suivantes :*

1. $id_{\bar{u}}^\gamma(p) = k/4$, $k \in \mathbb{Z}$,
2. si u est \mathcal{C}^1 en p alors $id_{\bar{u}}(p) = 0$,
3. pour tout chemin fermé Γ tel que $p \in V^\Gamma$ et que $\bar{u} \in \mathcal{C}^1(V^\Gamma \setminus \{p\})$, $id_{\bar{u}}^\gamma(p) = F_{\bar{u}}(\Gamma)$.

Preuve. Ces résultats sont respectivement des conséquences directes des lemmes 2.13, 2.14 et 2.15. ■

Par extension, en utilisant le lemme 2.13 on a :

Corollaire 2.19. *Soit V^Γ une partie de Ω délimitée par Γ . On a :*

$$F_{\bar{u}}(\Gamma) = \sum_{p \in V^\Gamma \cap \mathcal{S}_{\bar{u}}} id_{\bar{u}}(p). \quad (2.6)$$

Preuve. Il suffit de recouvrir V^Γ en utilisant des boules qui isolent tous les points $p \in V^\Gamma \cap \mathcal{S}_{\bar{u}}$. On applique ensuite le théorème 2.18 à chaque boule puis l'équation (2.6) est obtenue en utilisant le lemme 2.13. ■

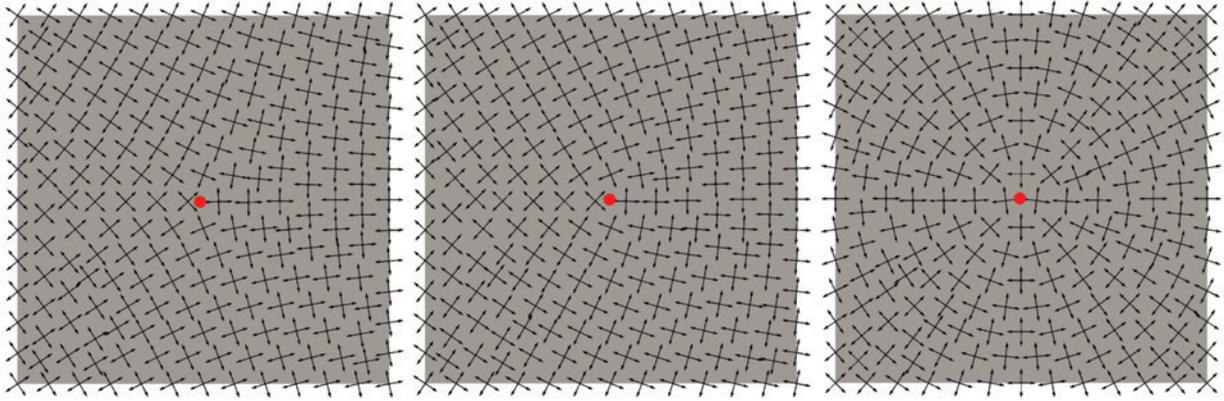


FIGURE 2.6 – Gauche : $id_{\bar{u}}(p) = -\frac{1}{4}$, milieu : $id_{\bar{u}}(p) = \frac{1}{4}$, droite : $id_{\bar{u}}(p) = 1$

De manière intuitive, l'indice d'un point dans un champ exprime combien de fois le champ semble s'enrouler autour de lui-même près de ce point (voir la figure 2.6).

Après avoir énoncé cette définition, on peut se demander comment l'indice d'un point évolue lorsqu'on effectue la rotation sur le champ de croix. Le résultat suivant fournit une réponse à cette interrogation.

Proposition 2.20. *Soit \bar{u} un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 sur Ω et $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω , alors pour tout $p \in \Omega \setminus \partial\Omega$, $id_{\bar{v}}(p) = id_{\mathbf{R}(\theta)\bar{u}}(p)$.*

Preuve. Posons $\bar{v} := \mathbf{R}(\theta)\bar{u}$. Soit $p \in \Omega \setminus \partial\Omega$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ un lacet dans Ω entourant p et n'englobant aucun autre point singulier de \bar{u} . \bar{u} étant un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 sur Ω , il existe donc $\theta_{\bar{u}}^{\gamma} \in \mathcal{C}^1(]0, 1[)$. Soit $\theta_{\bar{v}}^{\gamma} := \theta \circ \gamma + \theta_{\bar{u}}^{\gamma}$. D'une part $\theta_{\bar{v}}^{\gamma}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ puisque $\theta \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. D'autre part d'après la proposition 2.10, $\theta_{\bar{v}}^{\gamma}(t) \equiv \theta(\gamma(t)) + \theta_{\bar{u}}^{\gamma}(t) \pmod{\frac{\pi}{2}}$ et en utilisant la proposition 2.5 il vient que $\theta_{\bar{v}}^{\gamma}(t) \equiv \theta_{\bar{v}}^{\gamma}(\gamma(t)) \pmod{\frac{\pi}{2}}$. On a donc :

$$\begin{aligned} id_{\bar{v}}(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\theta_{\bar{v}}^{\gamma}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^1 d(\theta \circ \gamma) + \int_0^1 d\theta_{\bar{u}}^{\gamma} \right], \\ id_{\bar{v}}(p) &= \frac{1}{2\pi} \left[\oint_{\gamma} d\theta + \int_0^1 d\theta_{\bar{u}}^{\gamma} \right]. \end{aligned}$$

Or $\oint_{\gamma} d\theta = 0$ puisque $\theta \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Autrement dit on a :

$$id_{\bar{v}}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\theta_{\bar{u}}^{\gamma} = id_{\bar{u}}(p).$$

■

Si $p \in \partial\Omega$ et le champ de croix \bar{u} est aligné avec $\partial\Omega$, nous construisons une extension à la définition 2.16 de la manière suivante : nous choisissons un lacet $\gamma \subset \Omega$ et paramétré sur $[0, 1]$ tel que $\gamma(0) = p = \gamma(1)$ et les vecteurs $\gamma'(0)$ et $\gamma'(1)$ sont tangents à $\partial\Omega$. On suppose de plus que γ n'englobe pas d'autres points singulier de \bar{u} à par p . L'indice de p est alors donné par :

$$id_{\bar{u}}^{\partial}(p) = \frac{1}{2\pi} \left[\pi - \hat{p} + \lim_{s \rightarrow 0} \int_s^{1-s} d\theta_{\bar{u}}^{\gamma} \right], \quad (2.7)$$

où \hat{p} est la mesure de l'angle d'ouverture du bord en p .

2.1.3 Théorème de Poincaré-Hopf

Le théorème de Poincaré-Hopf constitue un résultat fondamental en topologie différentielle, établissant un lien profond entre les propriétés topologiques d'une variété différentielle compacte et les singularités d'un champ de vecteurs défini sur cette variété. Ce théorème fournit une manière précise de quantifier le nombre et le type de points singuliers d'un champ de vecteurs sur une variété compacte. En particulier, il établit une relation entre la somme des indices de ces points singuliers et la caractéristique d'Euler de la variété. Les auteurs de [Ray et al., 2008] fournissent une adaptation de ce théorème aux champs de croix. Ainsi si \bar{u} est un champ de croix presque- C^1 sur Ω et aligné avec $\partial\Omega$ alors nous avons la formule suivante :

$$\sum_i id_{\bar{u}}(s_i) = \chi(\Omega), \quad (2.8)$$

où la somme est celle des indices des points singuliers de \bar{u} et $\chi(\Omega)$ est la caractéristique d'Euler de Ω .

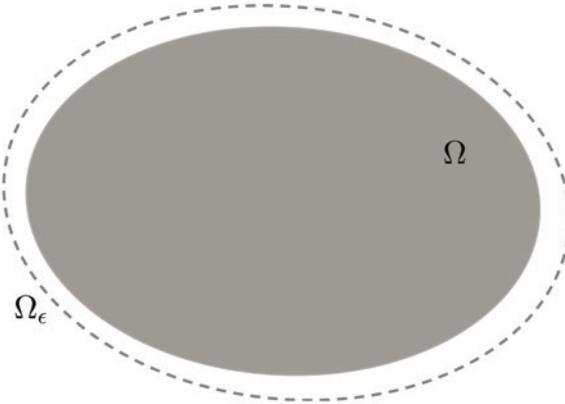


FIGURE 2.7 – Extension du domaine pour la prise en compte des points singuliers de bord dans la formule de Poincaré-Hopf.

Pour prendre en considération les champs de croix comportant des points singuliers situés sur la frontière du domaine, nous construisons un domaine Ω^ϵ (voir la figure 2.7) englobant Ω dont la frontière est une isoline de valeur ϵ obtenu via la résolution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ et tel que $\partial\Omega^\epsilon \cap \Omega = \emptyset$. On construit ensuite le champ de croix \bar{u}^ϵ pour tout $p \in \Omega^\epsilon$ par :

$$\bar{u}^\epsilon(p) = \begin{cases} \bar{u}(p) & \text{si } p \in \Omega, \\ \left\{ \mathbf{R} \left(\frac{m\pi}{2} \right) f(p), m \in \mathbb{Z} \right\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où pour tout $p \in \Omega^\epsilon \setminus \Omega$, f désigne le vecteur gradient à l'isoline en p . Par construction, \bar{u}^ϵ est aligné sur le bord de Ω^ϵ et $\mathcal{S}_{\bar{u}^\epsilon} \cap \partial\Omega^\epsilon = \emptyset$. Autrement dit, on a :

$$\sum_{p \in \mathcal{S}_{\bar{u}^\epsilon}} id_{\bar{u}^\epsilon}(p) = \chi(\Omega^\epsilon).$$

Or $\chi(\Omega^\epsilon) = \chi(\Omega)$ donc on a par le corollaire 2.19 :

$$\sum_{p \in \mathcal{S}_{\bar{u}^\epsilon} \setminus \partial\Omega} id_{\bar{u}^\epsilon}(p) + \sum_{p \in \mathcal{S}_{\bar{u}^\epsilon} \cap \partial\Omega} id_{\bar{u}^\epsilon}(p) = \chi(\Omega).$$

Sachant que pour tout $p \in \partial\Omega$ on a $id_{\bar{u}^\epsilon}(p) = id_{\bar{u}}^\partial(p)$ alors

$$\sum_{p \in \mathcal{S}_{\bar{u}^\epsilon} \setminus \partial\Omega} id_{\bar{u}^\epsilon}(p) + \sum_{p \in \mathcal{S}_{\bar{u}} \cap \partial\Omega} id_{\bar{u}}^\partial(p) = \chi(\Omega). \quad (2.9)$$

Nous posons alors l'équation (2.9) comme la généralisation de la formule de Poincaré-Hopf aux champs de croix aligné sur le bord du domaine et possédant des points singuliers de bord.

2.1.4 Ligne de champ et séparatrices

Le dernier point de cette section concerne un outil indispensable dans la technique de maillage qui est la construction de lignes de champ. En réalité, ces lignes seront les frontières des sous-régions générées par l'algorithme. Comme pour les champs vectoriels, une ligne de champ d'un champ de croix \bar{u} est définie comme une courbe continûment différentiable dans Ω . Plus précisément, nous avons la définition suivante :

Définition 2.21. Soit \bar{u} un champ croisé presque- \mathcal{C}^1 . Étant donné un point $p_0 \in \Omega \setminus \mathcal{S}_{\bar{u}}$ et une direction $\vec{u}_0 \in \bar{u}(p_0)$, une ligne de champ émanant de p_0 selon $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^2$, notée par $SL\bar{u}(p_0, \vec{u}_0)$, est la courbe S telle que :

1. il existe $\pi_{\bar{u}}^S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application telle que $\pi_{\bar{u}}^S(p_0) = \vec{u}_0$ et pour tout $p \in ImS$ il existe un voisinage V_p de p tel que :

$$\pi_{\bar{u}}^S \in \mathcal{C}^1(V_p) \text{ et } \forall q \in V_p, \pi_{\bar{u}}^S(q) \in \bar{u}(q), \quad (2.10)$$

2. S est une solution maximale dans Ω de l'équation différentielle

$$\frac{dS(t)}{dt} = \pi_{\bar{u}}^S(S(t)), t \in \mathbb{R} \text{ et } S(0) = p_0. \quad (2.11)$$

Lemme 2.22. La courbe $SL\bar{u}(p_0, \vec{u}_0)$ proposée dans la définition 2.21 est bien définie.

Preuve. Pour établir ce lemme, nous construisons d'abord l'application π restreinte au voisinage de p et procédons ensuite à la construction de la ligne de champ restreinte au voisinage de p . La ligne de champ complète est ensuite formée en étendant itérativement cette construction à chaque voisinage successif (voir figure 2.8).

Définition d'un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^1 dans un voisinage de p_0 .

D'après la proposition 2.10, il existe une application $\theta_{\bar{u}}^{V_{p_0}}$ de classe \mathcal{C}^1 dans un voisinage V_{p_0} de p_0 telle que pour tout $q \in V_{p_0}$, $\theta_{\bar{u}}^{V_{p_0}}(q) \equiv \theta_{\bar{u}}(q) \pmod{\frac{\pi}{2}}$. Il vient alors qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que l'application $\tau_{p_0} := \mathbf{R}(\theta_{\bar{u}}^{V_{p_0}} + m\frac{\pi}{2})(1, 0)$ est un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^1 sur V_{p_0} vérifiant $\tau_{p_0}(p_0) = \vec{u}_0$.

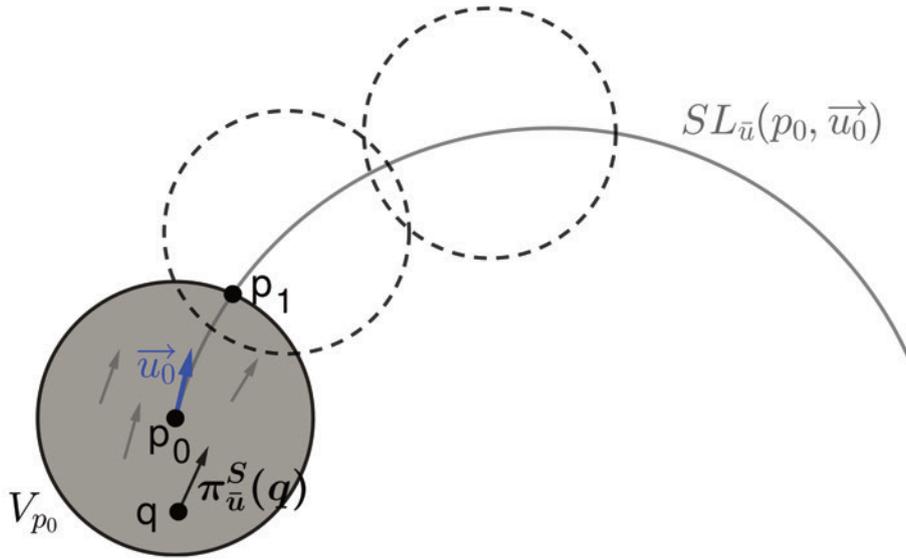


FIGURE 2.8 – Illustration de la preuve du lemme 2.22.

Construction de la restriction de $\pi_{\vec{u}}^S$ au voisinage de p_0 . Montrons que si $\pi_{\vec{u}}^S \in \mathcal{C}^1(V_{p_0})$ tel que $\pi_{\vec{u}}^S(p_0) = \vec{u}_0$ satisfaisant (2.10) et (2.11), alors $\pi_{\vec{u}} \circ S = \tau_{p_0} \circ S$ sur V_{p_0} . Supposons qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $p' = S(t) \in V_{p_0}$ et $\pi_{\vec{u}}^S \circ S(t) \neq \tau_{p_0} \circ S(t)$.

Soit $\epsilon > 0$. τ_{p_0} étant continue sur V_{p_0} , pour p assez proche de p_0 , on a :

$$|\tau_{p_0}(p) - \pi_{\vec{u}}^S(p_0)| = |\tau_{p_0}(p) - \tau_{p_0}(p_0)| \leq \epsilon.$$

Par inégalité triangulaire, il vient que :

$$|\pi_{\vec{u}}^S(p) - \pi_{\vec{u}}^S(p_0)| \geq |\tau_{p_0}(p) - \pi_{\vec{u}}^S(p)| - \epsilon.$$

Or on sait que $\pi_{\vec{u}}^S(p') \in \bar{u}(p')$, $\tau_{p_0}(p') \in \bar{u}(p')$ et $\pi_{\vec{u}}^S(p') \neq \tau_{p_0}(p')$, ce qui implique que $\pi_{\vec{u}}^S(p') = R(k\pi/2)\tau_{p_0}(p')$ où $k \in \mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z}$, et donc que $|\pi_{\vec{u}}^S(p') - \tau_{p_0}(p')| \geq \sqrt{2}$. Par conséquent, si p' est assez proche de p_0 , en l'occurrence nous prenons $p' \in \mathcal{B}(p_0, \epsilon)$ on a :

$$\epsilon \geq |p' - p_0| \geq |\pi_{\vec{u}}^S(p') - \pi_{\vec{u}}^S(p_0)| \geq |\sqrt{2} - \epsilon|,$$

puisque $\pi_{\vec{u}}^S$ est uniformément continue avec une constante de 1. Cela conduit à une contradiction en prenant $\epsilon = \sqrt{2}/4$.

Si $p' \notin \mathcal{B}(p_0, \epsilon)$, on choisit un nouveau point p_0^1 à la frontière de cette boule. Ensuite, on établit le raisonnement précédent avec ce nouveau point si $p' \in \mathcal{B}(p_0^1, \epsilon)$. Dans le cas contraire, on avance itérativement jusqu'à avoir p' dans la boule.

Construction de la restriction de la ligne de courant au voisinage de p . Selon ce qui a été établi précédemment, S satisfait l'équation suivante dans V_{p_0} :

$$\frac{dS(t)}{dt} = \tau_{p_0}(S(t)), t \in \mathbb{R} \text{ et } S(0) = p_0. \quad (2.12)$$

Nous obtenons la séparatrice S en intégrant l'équation (2.12) jusqu'à ce que $u(s(t)) = 0$ ou que $s(t) \in \partial V_{p_0}$ pour $t > 0$ (respectivement, $t < 0$). Sans perte de généralité, notons t_1 le moment auquel cela se produit et $S(t_1) = p_1$.

- Si $\bar{u}(p_1) = 0$, alors $S(t)$ est la ligne de champ construite existe et est unique,
- Sinon, nous pouvons étendre l'ensemble S en répétant la construction précédemment décrite dans un voisinage de p_1 . Cela implique de définir un champ vectoriel continu à proximité de p_1 et de construire la ligne de champ en fonction de ce champ étendu. En appliquant itérativement ce processus dans chaque voisinage, nous pouvons étendre et affiner progressivement la ligne de courant, en garantissant sa régularité dans tout le domaine. ■

Remarque 2.23. Notons que si \bar{u} est aligné avec la frontière, alors pour tout $p \in \partial\Omega \setminus \mathcal{S}_{\bar{u}}$ tel que la normale extérieure unitaire $n(p)$ au point p , est définie, nous avons $SL_{\bar{u}}(p, \mathbf{R}(\pm \frac{\pi}{2})n(p)) \subset \partial\Omega$.

Définition 2.24 (Séparatrice). Une séparatrice dans un champ de croix est une ligne de champ qui commence ou se termine en un point singulier.

Cette définition d'une séparatrice induit un problème bien connu dans les équations différentielles ordinaires : comment tracer une ligne de champ à partir d'un point singulier donné? Cette question peut être difficile étant donné que $\bar{u}(p) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{S}_{\bar{u}}$. Cependant, nous proposons le résultat suivant qui sera utilisé par la suite pour résoudre ce problème.

Proposition 2.25. Soit \bar{u} un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 et $p \in \Omega \setminus \partial\Omega$. Soit $V_p \subset \Omega$ un voisinage de p tel que le bord ∂V_p de V_p est de classe \mathcal{C}^1 et $\partial V_p \cap \mathcal{S}_{\bar{u}} = \emptyset$. On suppose de plus que V_p est étoilé par rapport à p . Alors il existe un champ de croix \bar{v} tel que :

1. \bar{v} est presque- \mathcal{C}^1 sur Ω ,
2. $\mathcal{S}_{\bar{v}} \cap V_p = \{p\}$ et $id_{\bar{v}}(p) = \sum_{q \in \mathcal{S}_{\bar{u}} \cap V_p} id_{\bar{u}}(q)$,
3. pour tout $q \in \partial V_p$ tel que $\vec{v}_q := \vec{p}\bar{q} \cdot \|\vec{p}\bar{q}\|^{-1} \in \bar{u}(q)$, le point p appartient à la ligne de champ $SL_{\bar{v}}(q, \vec{v}_q)$.

Preuve. Soit \bar{v} défini pour tout $q \in \Omega$ par :

$$\bar{v}(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q = p \\ \bar{u}(q) & \text{si } q \notin V_p, \\ \bar{u} \circ \pi(q) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.13)$$

où π est défini pour tout $q \in V_p \setminus \{p\}$ par l'intersection de la demi-droite $[pq)$ avec la courbe ∂V_p (voir la figure 2.9) :

$$\begin{cases} \pi(q) = p + \frac{\|\overrightarrow{p\pi(q)}\|}{\|\overrightarrow{pq}\|} \vec{p}\bar{q}, \\ \pi(q) \in \partial V_p. \end{cases}$$

Notons que π est bien défini. En effet, puisque V_p est étoilé et que ∂V_p est de classe \mathcal{C}^1 , alors pour tout $q \in V_p \setminus \{p\}$, il existe un unique point $\pi(q) \in \partial V_p$. Nous montrons que \bar{v} est presque continue dans Ω en démontrant cette propriété successivement dans V_p , dans $\Omega \setminus V_p$, et sur ∂V_p .

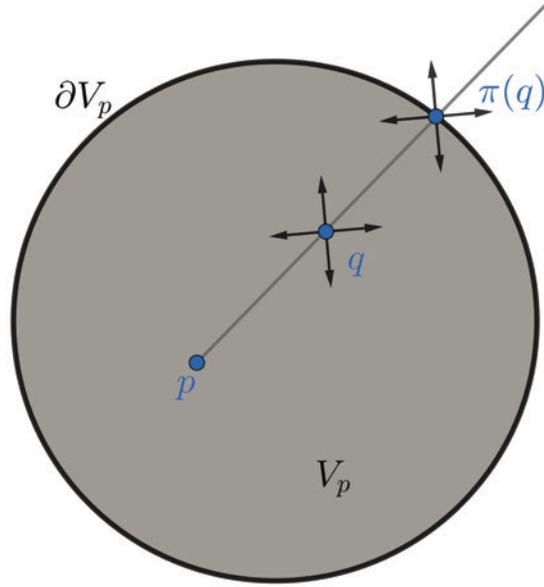
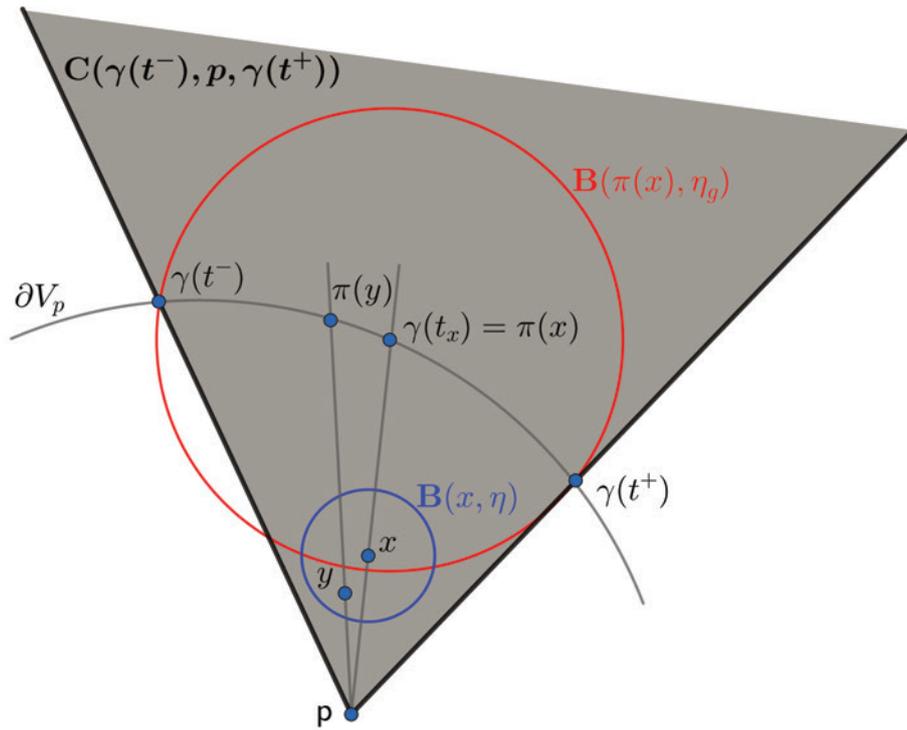


FIGURE 2.9 – Illustration de la construction du champ de croix \bar{v} dans ∂V_p .

- Dans V_p (voir Figure 2.10) : Soit $x \in V_p$ fixé et $\epsilon > 0$. Nous voulons montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in V_p$, si $|x - y| \leq \eta$, alors $|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| \leq \epsilon$. Puisque g' est continue, il existe η_g tel que pour tout $x', y' \in \partial V_p$, si $|x' - y'| \leq \eta_g$, alors $|g'(x') - g'(y')| \leq \epsilon$. Soit $t^\pm = t_x \pm \eta_g$ avec $\gamma(t_x) = \pi(x)$, et soit $\mathcal{H}_x = V_p \cap C(\gamma(t^-), p, \gamma(t^+))$, où $C(\gamma(t^-), p, \gamma(t^+))$ désigne la région du plan délimitée par les demi-droites $[p\gamma(t^-))$ et $[p\gamma(t^+))$. Puisque $p \in V_p$, nous avons $\mathcal{H}_x \neq \emptyset$. De plus, \mathcal{H}_x est ouvert par construction. Cela implique l'existence d'un certain $\eta > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, \eta) \subset \mathcal{H}_x$, et pour tout y tel que $|x - y| \leq \eta$, nous avons $|\pi(x) - \pi(y)| \leq \eta_g$. Ceci prouve la continuité de π et donc la continuité de \tilde{g} puisque \bar{u} est continue dans V_p .
- Dans $\Omega \setminus V_p$: \bar{v} est presque continue dans V_p par définition.
- Sur ∂V_p : \bar{v} est presque continue sur ∂V_p grâce à une jonction continue de deux fonctions continues.

Pour montrer que \bar{v} est presque- \mathcal{C}^1 dans $V_p \setminus \{p\}$, il suffit de montrer que π est \mathcal{C}^1 puisque \bar{u} est \mathcal{C}^1 sur ∂V_p . Pour ce faire, nous essayons de calculer la différentielle de π et

FIGURE 2.10 – Illustration of the construction of the restriction of π

de montrer qu'elle est \mathcal{C}^0 . Soit $q \in V_p$ et $h \in \mathbb{R}^2$. Calculons $\pi(q + h)$.

$$\begin{aligned}
 \pi(q + h) &= p + \frac{\overrightarrow{\|p\pi(q + h)\|}}{\overrightarrow{\|p(q + h)\|}} \overrightarrow{p(q + h)} \\
 &= p + \left(\frac{\overrightarrow{\|p\pi(q)\|}}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|}} + \frac{\langle \overrightarrow{p\pi(q)}, (\nabla\pi(q).h) \rangle}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|} \overrightarrow{\|p\pi(q)\|}} \right) \left(1 - \frac{\overrightarrow{p\vec{q}.h}}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|^2}} \right) (\overrightarrow{p\vec{q}} + h) + o(h^2) \\
 &= \pi(q) + \frac{\langle \overrightarrow{p\pi(q)}, (\nabla\pi(q).h) \rangle}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|} \overrightarrow{\|p\pi(q)\|}} \overrightarrow{p\vec{q}} - \frac{\overrightarrow{\|p\pi(q)\|}}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|}} \frac{\overrightarrow{p\vec{q}.h}}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|^2}} \overrightarrow{p\vec{q}} + \frac{\overrightarrow{\|p\pi(q)\|}}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|}} h + o(h^2) \\
 \pi(q + h) &= \pi(q) + \frac{\langle \overrightarrow{p\pi(q)}, (\nabla\pi(q).h) \rangle}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|} \overrightarrow{\|p\pi(q)\|}} \overrightarrow{p\vec{q}} + \frac{\overrightarrow{\|p\pi(q)\|}}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|}} \left(\frac{\overrightarrow{p\vec{q}.h}}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|^2}} \overrightarrow{p\vec{q}} + h \right) + o(h^2)
 \end{aligned}$$

En posant $e_q = \frac{\overrightarrow{p\vec{q}}}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|}}$ et $\lambda_q = \frac{\overrightarrow{\|p\pi(q)\|}}{\overrightarrow{\|p\vec{q}\|}}$ on obtient :

$$\pi(q + h) = \pi(q) + \langle e_q, \nabla\pi(q).h \rangle e_q + \lambda_q (-(e_q.h)e_q + h) + o(h^2).$$

Posons $L(h) = \langle e_q, \nabla\pi(q).h \rangle e_q + \lambda_q (-(e_q.h)e_q + h)$. La composante de $L(h)$ suivant \vec{e}_q^\perp est donnée par $X = L(h).e_q^\perp = \lambda_q (h.e_q^\perp)$ qui est continue en q . Nous cherchons ensuite la composante suivant \vec{e}_q : soit γ une paramétrisation de ∂V_p sur $I \subset \mathbb{R}$. Puisque $\pi(q + h), \pi(q) \in \partial V_p$, il existe $t_1, t_2 \in I$ tel que $\pi(q) = \gamma(t_1)$ et $\pi(q + h) = \gamma(t_2)$. γ étant \mathcal{C}^1 , il existe une fonction dépendant de h notée $m(h)$ telle que $\pi(q + h) - \pi(q) = m(h). \vec{t} + o(h^2)$ avec $\vec{t} = \gamma'(t_1). \|\gamma'(t_1)\|^{-1}$. Ce qui implique que $L(h)$ est colinéaire au vecteur \vec{t} . Il vient

alors que :

$$X = L(h) \cdot \vec{e}_q^\perp = \|L(h)\| \cos \alpha, \text{ avec } \cos \alpha = \vec{t} \cdot \vec{e}_q^\perp.$$

Autrement dit, la composante de $L(h)$ suivant e_q notée Y est donnée par :

$$Y = \pm \sqrt{\|L(h)\|^2 - X^2} = \frac{\pm 1}{\cos \alpha} \sqrt{X^2(1 + \cos^2 \alpha)},$$

avec $\cos \alpha \neq 0$. Si $\cos \alpha = 0$ alors on a $\vec{t} \cdot \vec{e}_q^\perp = 0$ ce qui exclut puisque V_p est étoilé par rapport à p . Finalement, on a $L(h) = X \vec{e}_q^\perp + Y \vec{e}_q$ avec X et Y linéaire en h et continue en q . Par conséquent, π est bien de classe \mathcal{C}^1 .

2. Pour tout $q \in V_p \setminus \{p\}$, $\bar{v}(q) \neq 0$ et $\bar{v}(p) = 0$. Par conséquent, $\mathcal{S}_{\bar{v}} \cap V_p = \{p\}$. Soit γ une paramétrisation de ∂V_p sur $[0, 1]$. Sachant que l'indice de p dans le champ de croix \bar{v} ne dépend pas du chemin, on peut écrire que :

$$id_{\bar{v}}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial V_p} d\theta_{\bar{v}}.$$

Or par construction, on a $\bar{v} = \bar{u}$ sur ∂V_p donc on a :

$$id_{\bar{v}}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial V_p} d\theta_{\bar{u}} = \sum_{q \in \mathcal{S}_{\bar{u}} \cap V_p} id_{\bar{u}}(q).$$

3. Soit $q \in \partial V_p$ tel que $\vec{v}_q^\perp := \vec{pq} \cdot \|\vec{pq}\|^{-1} \in \bar{u}(q)$. Alors pour tout $p' \in]pq) \cap V_p$ on a $\vec{v}_q^\perp \in \bar{v}(p')$. Par conséquent, pour tout $p' \in]pq]$ on a $p' \in SL_{\bar{v}}(q, \vec{v}_q^\perp)$. Ainsi en passant à la limite avec $p' \rightarrow p$ on a $p \in SL_{\bar{v}}(q, \vec{v}_q^\perp)$. ■

En extension de la proposition 2.25, nous introduisons la proposition suivante, qui décrit une procédure pour tracer une ligne de courant à partir d'un point singulier spécifié sur la frontière.

Proposition 2.26. *Soit \bar{u} un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 et $p \in \partial\Omega$. Considérons un voisinage $V_p \subset \Omega$ de p tel que $p \in \partial V_p$ et ∂V_p soit de classe \mathcal{C}^1 . On suppose de plus que $(\partial V_p \setminus \{p\}) \cap \mathcal{S}_{\bar{u}} = \emptyset$ et que V_p est étoilé par rapport à p . Alors, il existe un champ de croix \bar{v} tel que :*

1. \bar{v} est presque- \mathcal{C}^1 sur Ω ,
2. pour tout $q \in \partial V_p$ tel que $\vec{v}_q^\perp := \vec{pq} \cdot \|\vec{pq}\|^{-1} \in \bar{u}(q)$, le point p appartient à la ligne de champ $SL_{\bar{v}}(q, \vec{v}_q^\perp)$.

De plus, si ∂V_p est tangent à $\partial\Omega$ en p , alors on a :

3. $\mathcal{S}_{\bar{v}} \cap V_p = \{p\}$ et $id_{\bar{v}}^\partial(p) = \sum_{q \in \mathcal{S}_{\bar{u}} \cap V_p} id_{\bar{u}}(q)$.

Preuve. Soit \bar{v} défini pour tout $q \in \Omega$ par l'équation (2.13) :

1. La proposition 2.25 montre que \bar{v} est presque- \mathcal{C}^1 sur Ω .
2. Voir la preuve de la proposition 2.25.

3. Supposons maintenant que ∂V_p est tangent à ∂V_p en p . Pour tout $q \in V_p \setminus \{p\}$, $\bar{v}(q) \neq 0$ et $\bar{v}(p) = 0$. Par conséquent, $\mathcal{S}_{\bar{v}} \cap V_p = \{p\}$. Soit γ une paramétrisation de ∂V_p sur $[0, 1]$ avec $\gamma(0) = p = \gamma(1)$. Puisque ∂V_p est tangent à $\partial\Omega$ en p , les vecteurs $\gamma'(0)$ et $\gamma'(1)$ sont tangents à $\partial\Omega$. On a donc par le corollaire 2.19 :

$$id_{\bar{v}}^{\partial}(p) = \frac{1}{2\pi} \left[\pi - \hat{p} + \lim_{s \rightarrow 0} \int_s^{1-s} d\theta_{\bar{v}}^{\gamma} \right].$$

Or par construction, on a $\bar{v} = \bar{u}$ sur ∂V_p donc on a :

$$id_{\bar{v}}^{\partial}(p) = \frac{1}{2\pi} \left[\pi - \hat{p} + \lim_{s \rightarrow 0} \int_s^{1-s} d\theta_{\bar{u}}^{\gamma} \right] = \sum_{q \in \mathcal{S}_{\bar{u}} \cap V_p} id_{\bar{u}}(q).$$

■

D'après les propositions 2.25 et 2.26, pour tracer une séparatrice à partir d'un point singulier dans un champ de croix, il est nécessaire de disposer d'un vecteur dont le point d'application coïncide avec le point singulier en question et qui est aligné avec le champ de croix dans un voisinage de ce point singulier. Voisinage dans lequel le champ a préalablement été modifié grâce aux propositions 2.25 et 2.26. La question qui se pose alors est de savoir si de tels vecteurs existent, et combien de ces vecteurs sont disponibles pour chaque point singulier. Autrement dit, on cherche à déterminer combien de séparatrices peuvent être associées à un point singulier donné, ainsi que leurs orientations initiales. Nous exposons ci-après plusieurs résultats permettant de répondre à cette problématique.

Dans ce qui suit, nous adopterons les notations suivantes. Étant donné $p \in \Omega$ nous désignons par $V_p \subset \Omega$ un voisinage de p tel que le bord ∂V_p de V_p est de classe \mathcal{C}^1 et $\partial V_p \cap \mathcal{S}_{\bar{u}} = \emptyset$. Soit γ une paramétrisation sur $[0, 1]$ dans le sens positif de ∂V_p . Nous désignons par W_p^{γ} la fonction définie par :

$$W_p^{\gamma} : t \in [0, 1] \longmapsto \theta_{\bar{u}}^{\gamma}(t) - \arg \overrightarrow{p\gamma(t)}, \quad (2.14)$$

qui indique la différence angulaire relative entre le champ de croix et le champ radial au point p (où $\arg \overrightarrow{p\gamma(t)}$ désigne l'argument complexe de $\overrightarrow{p\gamma(t)}$).

Remarque 2.27. La définition de W_p^{γ} dépend du choix de $\theta_{\bar{u}}^{\gamma}$ donné par le Corollaire 2.11, qui n'est pas unique mais est défini à une constante près de $m\pi/2$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Cela signifie que différents choix de $\theta_{\bar{u}}^{\gamma}$ peuvent conduire à différentes valeurs de W_p^{γ} , mais ils diffèrent seulement d'un multiple de $\pi/2$ ce qui n'aura pas d'impact sur ce qui suit.

Le lemme suivant donne un partitionnement du voisinage d'un point dans un champ de croix en fonction de l'indice du point dans le champ.

Lemme 2.28. Soit $p \in \Omega \setminus \partial\Omega$ tel que $id_{\bar{u}}(p) = k/4$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leq 1$. Pour tout $t_0 \in [0, 1]$, il existe une suite de points $(t_i)_{i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket} \subset [0, 1]$ avec $N_s = 4 - k$ tels que $0 \leq t_1 < \dots < t_{N_s} \leq 1$ et il existe $i \in [0, 1]$ tel que $t_0 = t_i$, et pour tout $i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dW_p^{\gamma} = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{où } t_{N_s+1} := t_1.$$

Preuve. Par le théorème 2.18, on a :

$$\int_0^1 d\theta_{\bar{u}}^\gamma = k \frac{\pi}{2} \text{ avec } id_{\bar{u}}(p) = k/4.$$

Or on a $\int_0^1 d \arg \overrightarrow{p\gamma}(t) = 2\pi$ donc :

$$\int_0^1 dW_p^\gamma = (k - 4) \frac{\pi}{2} = -N_s \frac{\pi}{2} \text{ avec } N_s = 4 - k.$$

γ étant un lacet, on introduit une nouvelle paramétrisation $\gamma \circ h : [t_0, t_0 + 1[\rightarrow \partial V_p$ définie par :

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{for } t \in [t_0, 1], \\ t + 1 & \text{for } t \in [0, t_0[. \end{cases}$$

Par régularité de ∂V_p , $h \in \mathcal{C}^1([t_0, t_0 + 1[)$. Il vient alors que :

$$\int_0^1 dW_p^\gamma(t) = \int_{t_0}^{t_0+1} d(W_p^\gamma \circ h).$$

Posons $t'_1 := t_0$ et définissons la fonction f par :

$$f : \tau \mapsto \int_{t'_1}^\tau d(W_p^\gamma \circ h).$$

Comme f est continue sur $[0, 1]$, l'application du théorème des valeurs intermédiaires, conduit à l'existence de $(t'_i)_{i \in \llbracket 2, N_s \rrbracket} \subset [0, 1]$ tels que $t'_1 < t'_2 < \dots < t'_{N_s}$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$:

$$\int_{t'_i}^{t'_{i+1}} d(W_p^\gamma \circ h) = -\frac{\pi}{2},$$

où $t'_{N_s+1} := t'_1$. Enfin, nous pouvons définir $t_i = h^{-1}(t'_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$, ce qui donne une suite de $N_s = 4 - k$ points $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{N_s} \leq 1$ tels que $\exists i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$ avec $t_i = t_0$. De plus nous avons $\forall i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dW_p^\gamma = -\frac{\pi}{2}, \text{ où } t_{N_s+1} := t_1.$$

■

En se basant sur ce résultat, nous sommes en mesure d'énoncer la proposition suivante, laquelle permet de déterminer le nombre de séparatrices à attribuer à un point singulier ainsi que leurs orientations initiales.

Proposition 2.29. *Soit $p \in \Omega \setminus \partial\Omega$ tel que $id_{\bar{u}}(p) = k/4$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leq 1$. Il existe une suite de points $(t_i)_{i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket}$ tel que $N_s = 4 - k$ et $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{N_s} \leq 1$ avec $\overrightarrow{p\gamma}(t_i) \cdot \|\overrightarrow{p\gamma}(t_i)\|^{-1} \in \bar{u}(\gamma(t_i))$. De plus pour tout $i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$,*

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dW_p^\gamma = -\frac{\pi}{2}, \text{ où } t_{N_s+1} := t_1.$$

Selon la Remarque 2.27, il est en effet correct que W_p^γ ne soit pas unique et puisse être défini à une constante près de $m\pi/2$, $m \in \mathbb{Z}$. Cependant, dans le contexte du lemme 2.28, nous pouvons observer que les valeurs de t_i , $\forall i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$ données ne dépendent pas du choix spécifique de W_p^γ .

Preuve. S'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\vec{u}_0 = \overrightarrow{p\gamma(t_0)} \cdot \|\overrightarrow{p\gamma(t_0)}\|^{-1} \in \bar{u}(\gamma(t_0))$, alors selon le lemme 2.28, il existe une suite de points $(t_i)_{i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket}$ tel que $N_s = 4 - k$ et $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{N_s} \leq 1$. De plus, il existe $i \in [0, 1]$ tel que $t_i = t_0$, et pour tout $i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dW_p^\gamma = -\frac{\pi}{2}, \text{ où } t_{N_s+1} := t_1.$$

Remarquons alors que pour tout $i \in \llbracket 1, N_s \rrbracket$, nous aurons bien :

$$\vec{u}_i = \overrightarrow{p\gamma(t_i)} \cdot \|\overrightarrow{p\gamma(t_i)}\|^{-1} \in \bar{u}(\gamma(t_i)).$$

Cela peut être démontré de manière itérative comme suit : puisque $\int_{t_{i-1}}^{t_i} dW_p^\gamma = -\frac{\pi}{2}$ alors $\theta_{\vec{u}}^\gamma(t_i) = \arg \overrightarrow{p\gamma(t_i)} + \theta_{\vec{u}}^\gamma(t_{i-1}) - \arg \overrightarrow{p\gamma(t_{i-1})} - \frac{\pi}{2}$. Étant donné que $\overrightarrow{p\gamma(t_{i-1})} \cdot \|\overrightarrow{p\gamma(t_{i-1})}\|^{-1} \in \bar{u}(\gamma(t_{i-1}))$, on a $\theta_{\vec{u}}^\gamma(t_{i-1}) \equiv \arg \overrightarrow{p\gamma(t_{i-1})} \pmod{\frac{\pi}{2}}$. Par conséquent, on peut en déduire que $\theta_{\vec{u}}^\gamma(t_i) \equiv \arg \overrightarrow{p\gamma(t_i)} \pmod{\frac{\pi}{2}}$, ce qui prouve que $\overrightarrow{p\gamma(t_i)} \cdot \|\overrightarrow{p\gamma(t_i)}\|^{-1} \in \bar{u}(\gamma(t_i))$.

Pour compléter la preuve, on doit montrer qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\overrightarrow{p\gamma(t_0)} \cdot \|\overrightarrow{p\gamma(t_0)}\|^{-1} \in \bar{u}(\gamma(t_0))$. Soit $s_0 \in [0, 1]$ tel que $0 < W_p^\gamma(s_0) < \frac{\pi}{2}$. D'après le lemme 2.28, il existe $s_1 > s_0$ tel que $\int_{s_0}^{s_1} dW_p^\gamma = -\frac{\pi}{2}$, ce qui signifie que $W_p^\gamma(s_1) = W_p^\gamma(s_0) - \frac{\pi}{2} < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $t_0 \in [s_0, s_1]$ tel que $W_p^\gamma(t_0) = 0$, ce qui implique que $\arg \overrightarrow{p\gamma(t_0)} \in \bar{u}(\gamma(t_0))$. Par conséquent, $\overrightarrow{p\gamma(t_0)} \cdot \|\overrightarrow{p\gamma(t_0)}\|^{-1} \in \bar{u}(\gamma(t_0))$, ce qui complète la preuve. \blacksquare

Ce résultat peut être étendu à un point de bord de la manière suivante :

Proposition 2.30. *Soit $p \in \partial\Omega$ tel que $id_u(p) = k/4$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leq 1$. Au point p , il y a $N_s = 3 - k$ séparatrices qui convergent, incluant les frontières de Ω , divisant ainsi le voisinage de p en $2 - k$ secteurs. De plus, à l'intérieur de chaque secteur, on a :*

$$\int_0^1 W_p^\gamma(t) dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Preuve. Étant donné que $id_u(p) = k/4$, en utilisant l'équation (2.7), on a :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_s^{1-s} dW_p^\gamma &= \frac{k\pi}{2} + \hat{p} - \pi - \hat{p} \\ &= (k-2)\frac{\pi}{2} = -(N_s - 1)\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

et donc $N_s = 3 - k$.

— Si $k = 1$, alors $\lim_{s \rightarrow 0} \int_s^{1-s} dW_p^\gamma = -\frac{\pi}{2}$. En conséquence, on observe l'existence d'un seul secteur.

- Sinon, si $k < 1$, la fonction $t \mapsto \int_0^t dW_p^\gamma$ étant continue sur $[0, 1]$, selon le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $(t_i)_{i \in \llbracket 1, N_s - 2 \rrbracket} \subset [0, 1]$ tels que :

$$\int_0^1 dW_p^\gamma = \int_0^{t_1} dW_p^\gamma + \sum_{i=1}^{N_s-3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dW_p^\gamma + \int_{t_{N_s-2}}^1 dW_p^\gamma,$$

avec

$$\int_0^{t_1} dW_p^\gamma = -\frac{\pi}{2}, \int_{t_{N_s-2}}^1 dW_p^\gamma = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \int_{t_i}^{t_{i+1}} dW_p^\gamma = -\frac{\pi}{2} \text{ pour } i \in \llbracket 1, N_s - 3 \rrbracket.$$

En conséquence, on observe l'existence de $2 - k$ secteurs. ■

La figure 2.11 illustre le partitionnement du voisinages de points singulier par les séparatrices issues de ces points singuliers. En effet, en fonction de l'index du point ces séparatrices divisent le voisinage du point en un nombre fini de de secteur. Par rapport à ces secteurs, nous avons la proposition suivante :

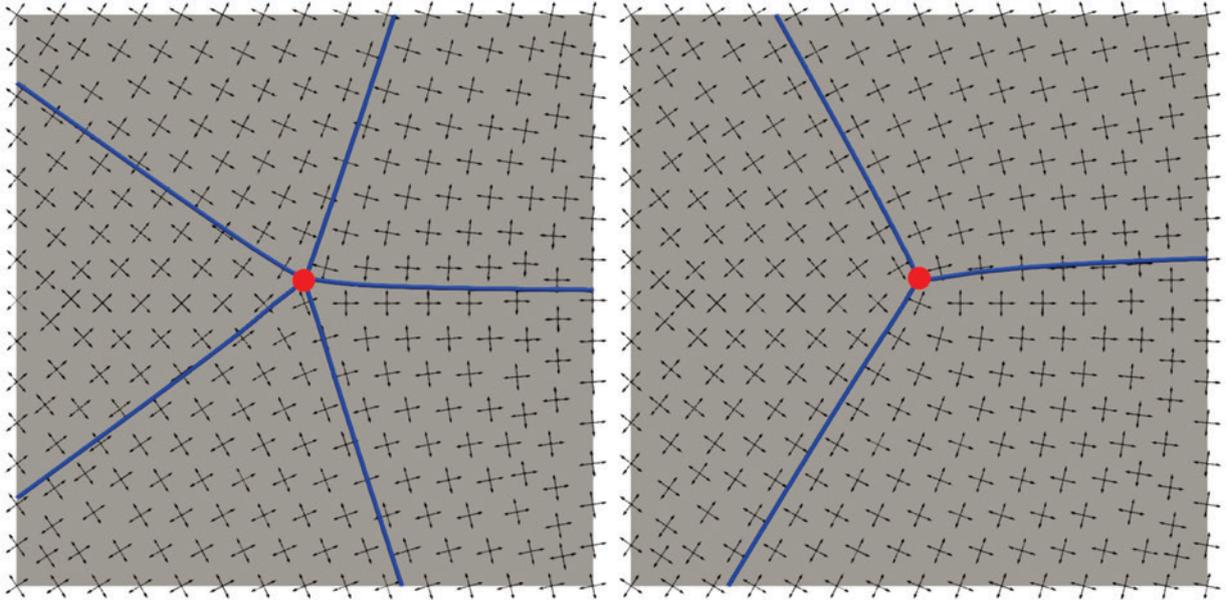


FIGURE 2.11 – Gauche : Illustration des séparatrices émanant de points singuliers d'indice $-1/4$ (à gauche) et d'indice $1/4$ (à droite).

Proposition 2.31. *Considérons un secteur tel que décrit ci-dessus. Lorsqu'il est traité comme une singularité de bord du secteur, le point p a un indice de $1/4$.*

Preuve. Supposons que le secteur soit défini par deux séparatrices avec des directions initiales $\overrightarrow{p\gamma(t_i)}$ et $\overrightarrow{p\gamma(t_{i+1})}$, qui sont alignées avec la frontière du secteur. Soit C , la paramétrisation de la courbe définie par $p\gamma(t_i)$, $p\gamma(t_{i+1})$ et la partie de γ coincé dans le

secteur. L'indice de p est alors donné par :

$$\begin{aligned}
id_u^\partial(p) &= \frac{1}{2\pi} \left[\pi - \hat{p} + \lim_{s \rightarrow 0} \int_{s-t_i}^{s-t_{i+1}} d\theta_u^\gamma \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\pi - \hat{p} + \left(\hat{p} + \lim_{s \rightarrow 0} \int_{s-t_i}^{s-t_{i+1}} dW_p^\gamma \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\pi - \frac{\pi}{2} \right] \\
id_u^\partial(p) &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

■

De manière analogue à ce qui est fait dans [Viertel and Osting, 2019], la proposition 2.31 implique que l'apparence de chaque coin d'un secteur est celle d'un angle droit par rapport au champ de croix.

2.2 Méthode de partitionnement à partir d'un champ de croix

Nous abordons maintenant le cœur de ce chapitre en présentant la méthode de partitionnement de domaine basée sur les champs de croix. Dans un premier temps, nous exposons l'algorithme de partitionnement ainsi que les différentes conditions requises sur le champ de croix, garantissant ainsi que le partitionnement obtenu résulte en un maillage quadrilatéral du domaine de départ. Par la suite, nous analysons en détail les différents algorithmes présentés et fournissons des résultats permettant de garantir leur bon fonctionnement.

2.2.1 Principe de la méthode

Considérons un domaine Ω borné et fermé dans \mathbb{R}^2 possédant une frontière $\partial\Omega$ régulière par morceaux. L'algorithme suivant permet de partitionner ce domaine en régions distincts.

Algorithme 1: Algorithme de partitionnement

Entrées: Ω un domaine borné et fermé; Un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 défini sur Ω est tel que l'indice des points dans ce champ est égal à $k/4$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leq 1$.

Sortie: Partition de Ω en ensembles de régions.

1. Identification des points singuliers du champ de croix,
 2. Détermination du nombre de séparatrices pour chaque point singulier,
 3. Intégration des lignes de champ pour construire les séparatrices,
 4. Identification des régions.
-

1. **Identification des points singuliers** : l'algorithme commence par identifier les points singuliers dans le champ de croix fourni. Ces points singuliers jouent un rôle critique dans la détermination de la structure du maillage. Ils correspondent à des points $p \in \Omega$, tels que $\bar{u}(p) = 0$ (voir la première image de la figure 2.12a).
2. **Détermination du nombre de séparatrices pour chaque point singulier** : le nombre de lignes de champ provenant de chaque point singulier est directement lié à l'indice du point dans le champ de croix. Plus précisément, si $p \in \Omega \setminus \partial\Omega$, alors $N_s(p) = 4 - 4id_{\bar{u}}(p)$, tandis que si $p \in \partial\Omega$, alors $N_s(p) = 4 - 4id_{\bar{u}}^{\partial}(p)$ où $N_s(p)$ représente le nombre de séparatrices associé au point p (voir les propositions 2.29 et 2.30).
3. **Construction des séparatrices** : les séparatrices de chaque point singulier sont initialisées selon la proposition 2.25 puis les lignes de champs sont intégrées à travers le domaine en utilisant l'équation (2.11) (voir la deuxième image de la figure 2.12b). Les directions initiales de ces séparatrices sont déterminées en cherchant des directions alignées avec le champ de croix dans le voisinage du points singuliers (voir les propositions 2.29 et 2.30).
4. **Identification des régions** : si aucune des séparatrices ne converge vers un cycle limite alors l'algorithme à converger et les séparatrices construites partitionnent avec le bord du domaine en un ensemble fini de régions.

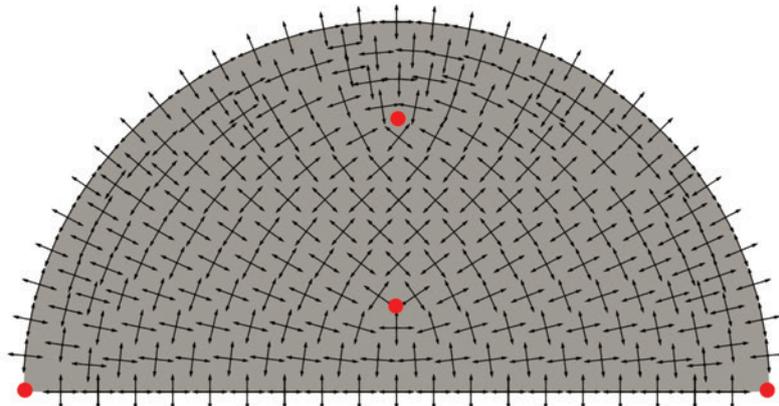
On considère que l'algorithme 1 a convergé si les constructions de séparatrices ne convergent pas vers des cycles limites. Examinons à présent les conditions sur le champ de croix qui permettent, à partir de l'algorithme présenté ci-dessus, d'obtenir un maillage quadrilatéral d'un domaine donné.

Construction à partir d'un champ de croix aligné sur le bord de Ω

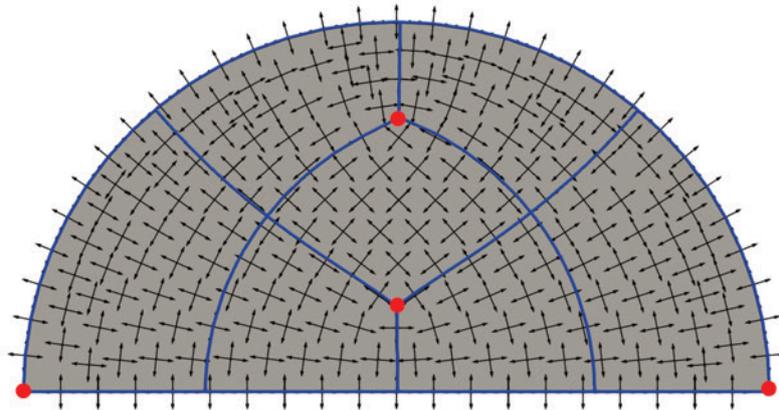
Lorsque le champ de croix est aligné par rapport à $\partial\Omega$, on peut montrer (voir le Théorème 2.34) que le partitionnement issue de l'Algorithme 1 est constitué de régions ayant 4 côtés. Chacune de ces régions peut alors être maillée en quadrilatères en utilisant une méthode de paramétrisation comme l'interpolation transfinie. Par exemple, sur la figure 2.12, nous considérons un champ de croix aligné avec le bord du domaine (voir figure 2.12a). Ce champ comporte deux points singuliers intérieurs d'indice 1/4 chacun, ainsi que deux points singuliers de bord d'indice 1/4 chacun. L'application de l'algorithme de partitionnement permet d'obtenir le partitionnement présenté sur la figure 2.12b. Chaque région est ensuite maillé sur la figure 2.12c.

Construction à partir d'un champ de croix non-aligné sur le bord de Ω

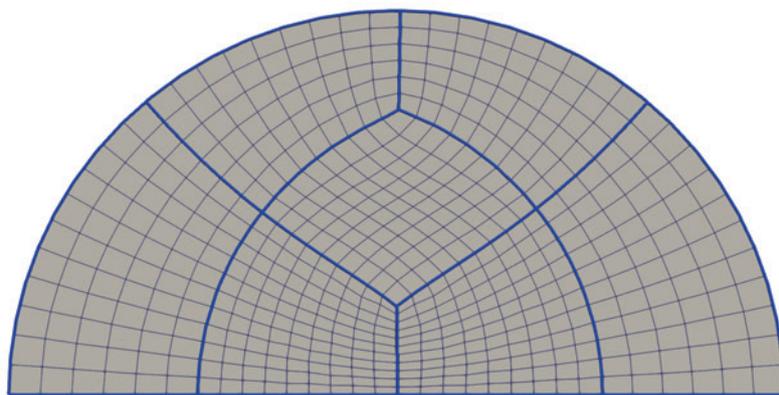
Comme indiqué dans l'introduction, notre objectif est de permettre l'utilisation de différents types de champs de croix. Par exemple, un champ de croix peut être construit en prenant le quart de l'angle des vecteurs du champ de gradient d'un mode propre particulier du Laplacien (voir la figure 2.13). La même construction peut être appliquée aux lignes de niveau.



(a) Champ de croix aligné sur le bord du domaine (points singuliers en rouge).



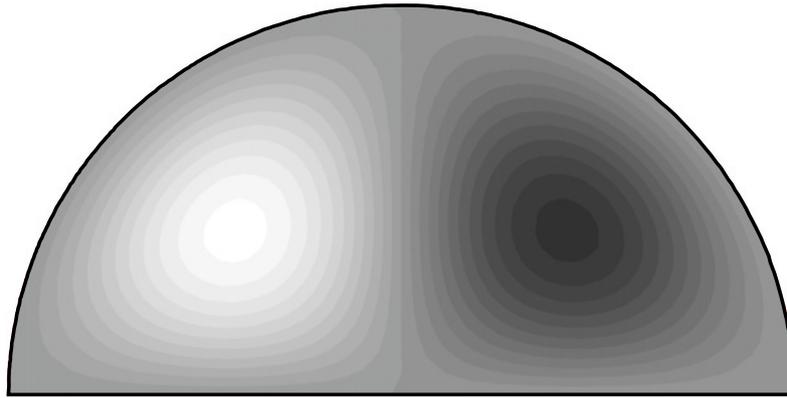
(b) Partitionnement du Domaine.



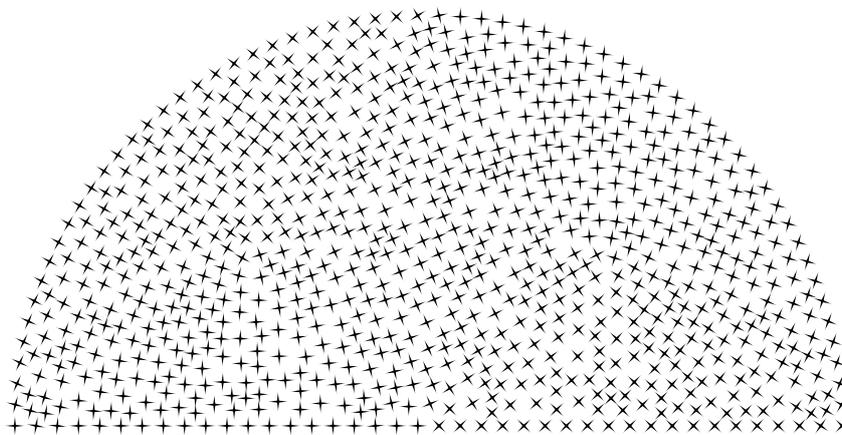
(c) Maillage quadrilatéral du domaine.

FIGURE 2.12 – Maillage quadrilatéral d'un domaine à partir d'un champ de croix aligné sur le bord du domaine.

On observe que les extrêmes du mode propre coïncident avec les points singuliers correspondants du champ de croix construit. Ces points singuliers sont donc approximativement à une distance égale les uns des autres et de la frontière. Nous visons à conserver cette caractéristique du champ de croix dans le maillage final, ce qui aboutira à une distribution plus uniforme des éléments du maillage. Plus généralement, notre motivation est



(a) Un mode propre du Laplacien sur le demi disque.



(b) Champ de croix construit à partir du mode propre.

FIGURE 2.13 – Génération d'un champ de croix à partir d'un mode propre du Laplacien.

de choisir d'autres types de champs de croix de manière à ce que le maillage quadrilatéral résultant hérite de certaines propriétés du champ de croix initialement choisi, notamment la position et la nature des points singuliers.

Cependant, lorsqu'un champ de croix, tel que décrit ci-dessus, est utilisé pour diviser le domaine (via l'Algorithme 1), on constate que certaines régions s'éloignent de la forme quadrilatérale habituelle, comme illustré dans la figure 2.14. Cette déviation est due au fait que le champ de croix n'est pas aligné correctement avec les frontières du domaine. Par conséquent, certaines partitions ne possèdent pas quatre côtés.

Pour remédier à cette difficulté, nous introduisons une opération sur le champ de croix appelée *opération d'alignement*. L'objectif est d'ajuster le champ de croix pour qu'il soit aligné avec la frontière du domaine. Pour ce faire, nous cherchons un champ scalaire avec une certaine régularité tel que la rotation du champ de croix initial par rapport à ce champ scalaire donne un nouveau champ de croix aligné avec les frontières du domaine tout en préservant certaines propriétés du champ de croix initial. Dans la suite, nous détaillerons cette opération tout en désignant par *champ d'alignement* le champ scalaire décrit ci-dessus. Pour simplifier la présentation, nous mettons en place l'opération d'alignement dans un premier temps sur un domaine simplement connexe avant de l'étendre aux domaines non-simplement connexes.

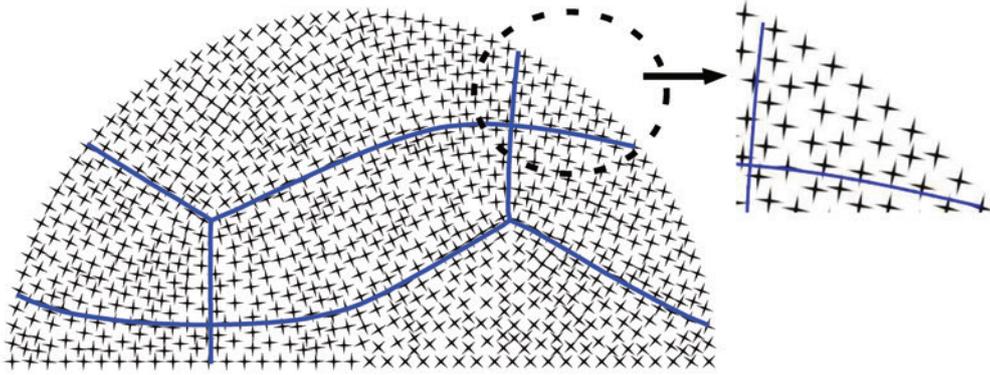


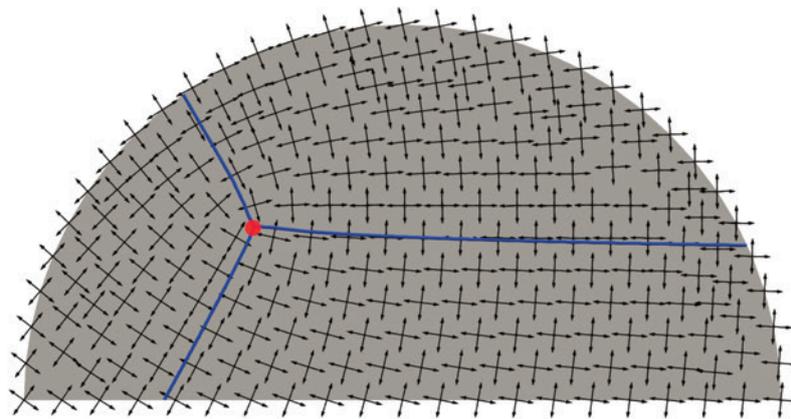
FIGURE 2.14 – Découpage invalide obtenue à partir du champ de croix de la figure 2.13.

Domaines simplement connexes : On suppose Ω simplement connexe. Soit \bar{u} un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 défini sur Ω et non-nécessairement aligné sur le bord de Ω tel que $0 < \text{Card}(\mathcal{S}_{\bar{u}}) < \infty$ et pour tout point $p \in \mathcal{S}_{\bar{u}} \setminus \partial\Omega$, $id_{\bar{u}}(p) = k/4$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leq 1$. A priori, une façon simple de réaliser l'opération d'alignement serait de calculer la différence angulaire entre le champ de croix \bar{u} et le champ de croix normal \bar{n} puis de diffuser continûment cette différence angulaire à l'intérieur du domaine. En faisant cela on construirait un champ scalaire régulier sur tout le domaine tel que la rotation du champ de croix par rapport à ce champ scalaire donnerait un champ de croix aligné sur le bord du domaine et n'affectant pas les points singuliers du champ de croix initial en vertu de la proposition 2.5. Un bon candidat pour la diffusion serait alors l'équation de Laplace donné par :

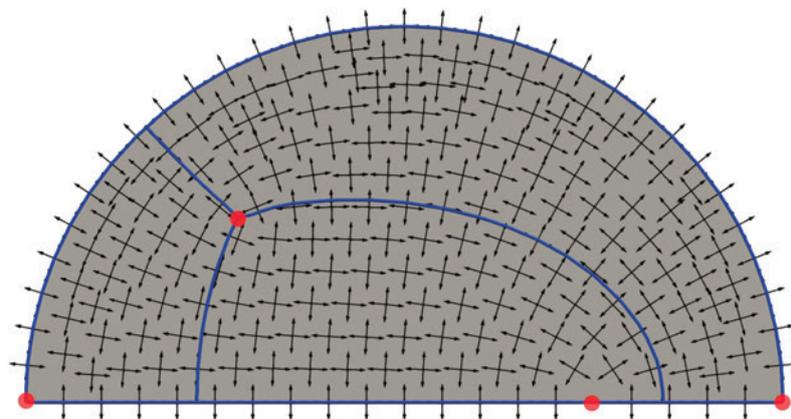
$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \phi(p) = \widehat{(\bar{n}(p); \bar{u}(p))} = \theta_{\bar{n}}(p) - \theta_{\bar{u}}(p) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.15)$$

où $\widehat{(\bar{n}(p); \bar{u}(p))}$ représente l'angle entre $\bar{n}(p)$ et $\bar{u}(p)$. En définissant $\bar{v} := \mathbf{R}(\phi)\bar{u}$, il est évident que $\bar{v} = \bar{n}$ sur $\partial\Omega$, impliquant ainsi que \bar{v} est aligné avec $\partial\Omega$. De plus, grâce à la proposition 2.20, nous savons que pour tout $p \in \Omega \setminus \partial\Omega$, $id_{\bar{v}}(p) = id_{\bar{u}}(p)$. Par conséquent, si l'algorithme de partitionnement 1 converge lorsqu'il est appliqué à \bar{v} , nous obtenons un partitionnement de Ω en régions à quatre côtés (voir le Théorème 2.34). Cependant, une question demeure en suspens : quelle est la valeur des indices des points situés sur le bord de Ω dans le champ de croix \bar{v} ? Cela va dépendre de la représentation angulaire choisie pour ϕ à un multiple de $\pi/2$ près dans la condition de bord de l'équation (2.15).

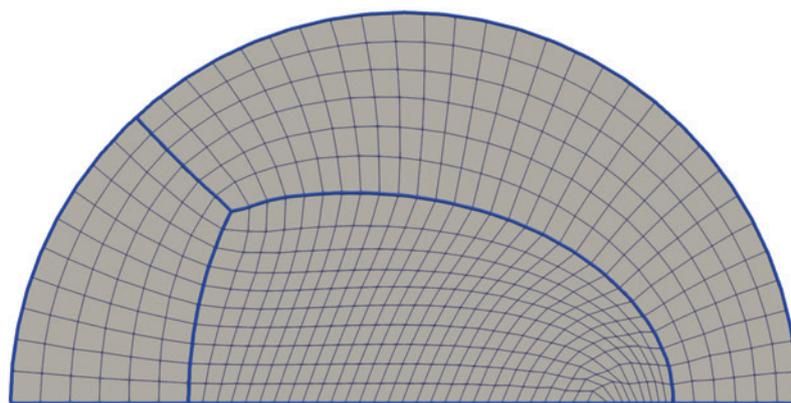
En l'état, nous n'avons donc aucun contrôle sur la régularité de cette condition de bord, ce qui entraînera des effets indésirables dans le maillage quadrilatéral construit à partir du partitionnement obtenu. Par exemple, sur la figure 2.15, nous considérons un champ de croix initial possédant une singularité d'indice 1/4 à l'intérieur du domaine (figure 2.15a). Le champ d'alignement est calculé avec l'équation (2.15), puis le champ de croix \bar{v} est construit. On observe clairement que \bar{v} est bien aligné avec le bord du domaine et conserve la singularité interne du champ de croix initial. Cependant, on remarque l'apparition de singularités de bord dans le champ de croix \bar{v} . En appliquant l'algorithme de partitionnement 1 sur \bar{v} , le partitionnement obtenu présente des régions à quatre côtés (figure 2.15b) mais, la présence de points singuliers de bord non contrôlés (en termes de positionnement et d'indice) conduit à un maillage quadrilatéral comportant des quadrangles dégénérés (figure 2.15c).



(a) Champ de croix initial avec un point singulier interne d'indice $1/4$.



(b) Alignement du champ de croix initial sur le bord du domaine et partitionnement du domaine.



(c) Maillage quadrilatéral du domaine présentant un quadrangle dégénéré.

FIGURE 2.15 – Illustration de l'opération d'alignement à partir du champ d'angle donné par l'équation (2.15).

Afin de contrôler cette situation, nous allons modifier le processus d'alignement en ajustant la condition de Dirichlet de l'équation (2.15) et en imposant des conditions sur le champ de croix initial \bar{u} .

Pour commencer, nous associons à chaque point $p \in \partial\Omega$, un paramètre I_p vérifiant :

$$I_p = \frac{k}{4} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \leq 1 \quad (2.16)$$

Ce paramètre représente l'indice désiré pour les points de bord dans le champ de croix \bar{v} (une fois l'opération d'alignement réalisée). Un critère a priori pour le choix automatique de ce paramètre sera exposé ultérieurement dans la sous-section 2.3.3. Nous définissons ensuite l'ensemble \mathcal{B} qui regroupe les points pour lesquels le paramètre $I_p \neq 0$. Ces points seront singuliers dans le champ de croix \bar{v} (une fois l'opération d'alignement réalisée). Pour finir, il est impératif que le champ de croix \bar{u} ainsi que l'ensemble \mathcal{B} satisfassent :

- $0 < \text{Card}(\mathcal{S}_{\bar{v}}) + \text{Card}(\mathcal{B}) < \infty$,
- Pour tout point $p \in \mathcal{S}_{\bar{v}}$, $id_{\bar{v}}(p) = k/4$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leq 1$,
- Soit γ une paramétrisation de $\partial\Omega$ dans le sens positif. Il existe $\theta_{\bar{u}}^\gamma$ vérifiant :

$$\theta_{\bar{u}}^\gamma(1) - \theta_{\bar{u}}^\gamma(0) = 2\pi\chi(\Omega) - 2\pi \sum_{p \in \mathcal{B}} I_p. \quad (2.17)$$

L'opération d'alignement est alors formulé de la manière suivante :

Opération d'alignement : étant donné \bar{u} , nous définissons le champ de croix \bar{v} pour tout $p \in \Omega$ par :

$$\bar{v}(p) = \begin{cases} \mathbf{R}(\phi(p))\bar{u}(p) & \text{si } p \in \Omega \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}} \cup \mathcal{S}_{\bar{u}}), \\ \bar{n}(p) & \text{si } p \in (\mathcal{S}_{\bar{u}} \cap \partial\Omega) \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}}), \\ 0 & \text{si } p \in \mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}}. \end{cases} \quad (2.18)$$

où $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est définie comme la solution de l'équation de Laplace suivante :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \phi(\gamma(t)) = \theta_{\bar{n}}^\gamma(t) + \mathcal{I}(t) - \theta_{\bar{u}}^\gamma(t) & \text{sur } \gamma^{-1}(\partial\Omega \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}} \cup \mathcal{S}_{\bar{u}})), \end{cases} \quad (2.19)$$

où la fonction \mathcal{I} est donnée pour tout $t \in \gamma^{-1}(\partial\Omega \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}} \cup \mathcal{S}_{\bar{u}}))$ par :

$$\mathcal{I}(t) = \sum_{s \in \gamma^{-1}(\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}})} \left[\left(\pi - \widehat{\gamma(s)} - 2\pi I_{\gamma(s)} \right) - \left(\lim_{r \rightarrow s^+} \theta_{\bar{n}}^\gamma(r) - \lim_{r \rightarrow s^-} \theta_{\bar{n}}^\gamma(r) \right) \right] \mathbb{1}_{[0,t]}(s),$$

avec $\widehat{\gamma(s)}$ la mesure de l'ouverture angulaire de la frontière en $\gamma(s)$.

Remarque 2.32.

1. On montre (voir le Théorème 2.36) que le champ de croix \bar{v} est aligné par rapport à $\partial\Omega$. On se ramène ainsi au cas du champ de croix aligné sur le bord de Ω et l'application l'algorithme 1 permet d'obtenir un partitionnement de Ω en régions de quatre côtés lorsque les séparatrices ne convergent pas en cycles limites.

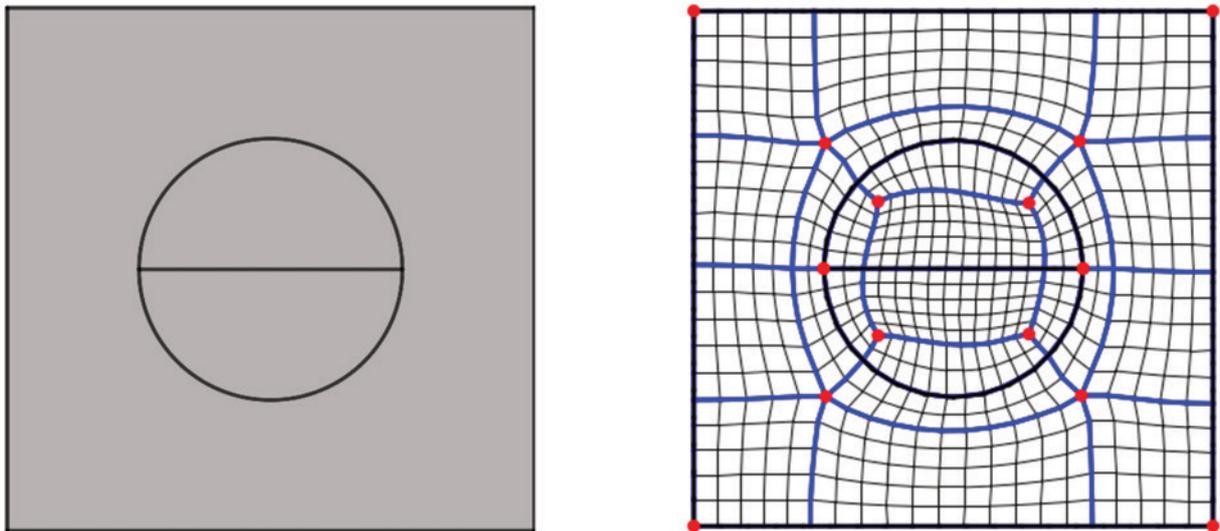


FIGURE 2.25 – Un exemple de géométrie multi-matériaux. Gauche : Domaine, droite : maillage quadrilatéral.

reste convexe, confirmant ainsi le succès du retournement d'arête. Cela nous donne les nouveaux triangles DGH et GBH inclus parmi les triangles de T_{mesh} , ainsi que l'arête GH ajoutée aux arêtes de T_{mesh} que nous cherchions à récupérer (voir figure 3.15).

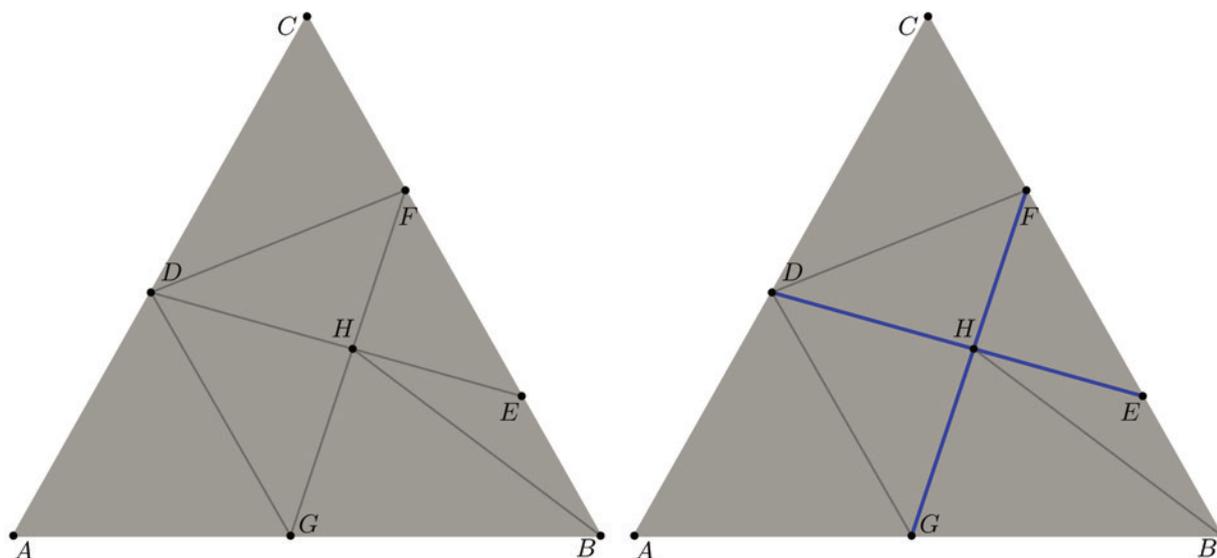


FIGURE 3.15 – Retournement d'arête suite à l'exemple de la figure 3.13.

En appliquant le processus précédemment décrit à l'exemple de la figure 3.11, on modifie localement chaque triangle traversé par une séparatrice ce qui nous donne un maillage global adapté au partitionnement effectué. Il ne reste plus qu'à récupérer chaque partition sous la forme d'un sous-maillage, ce qui peut être réalisé grâce à un algorithme de coloriage (voir Annexe D). Le résultat est illustré sur la figure 3.16.

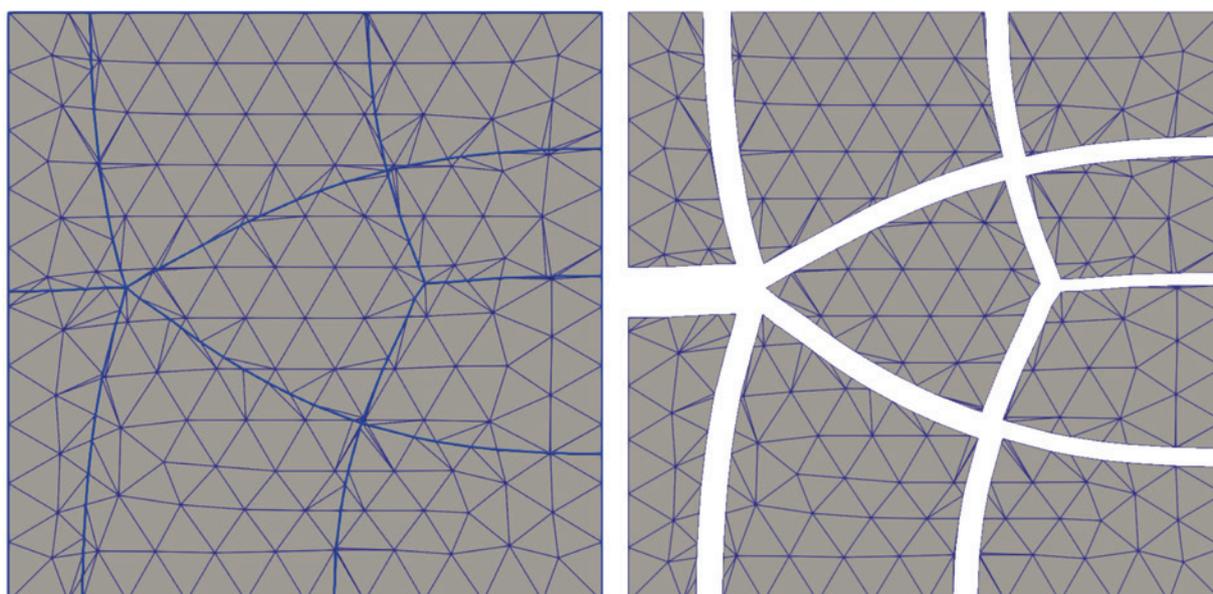


FIGURE 3.16 – Extraction des régions en tant que sous-maillages.

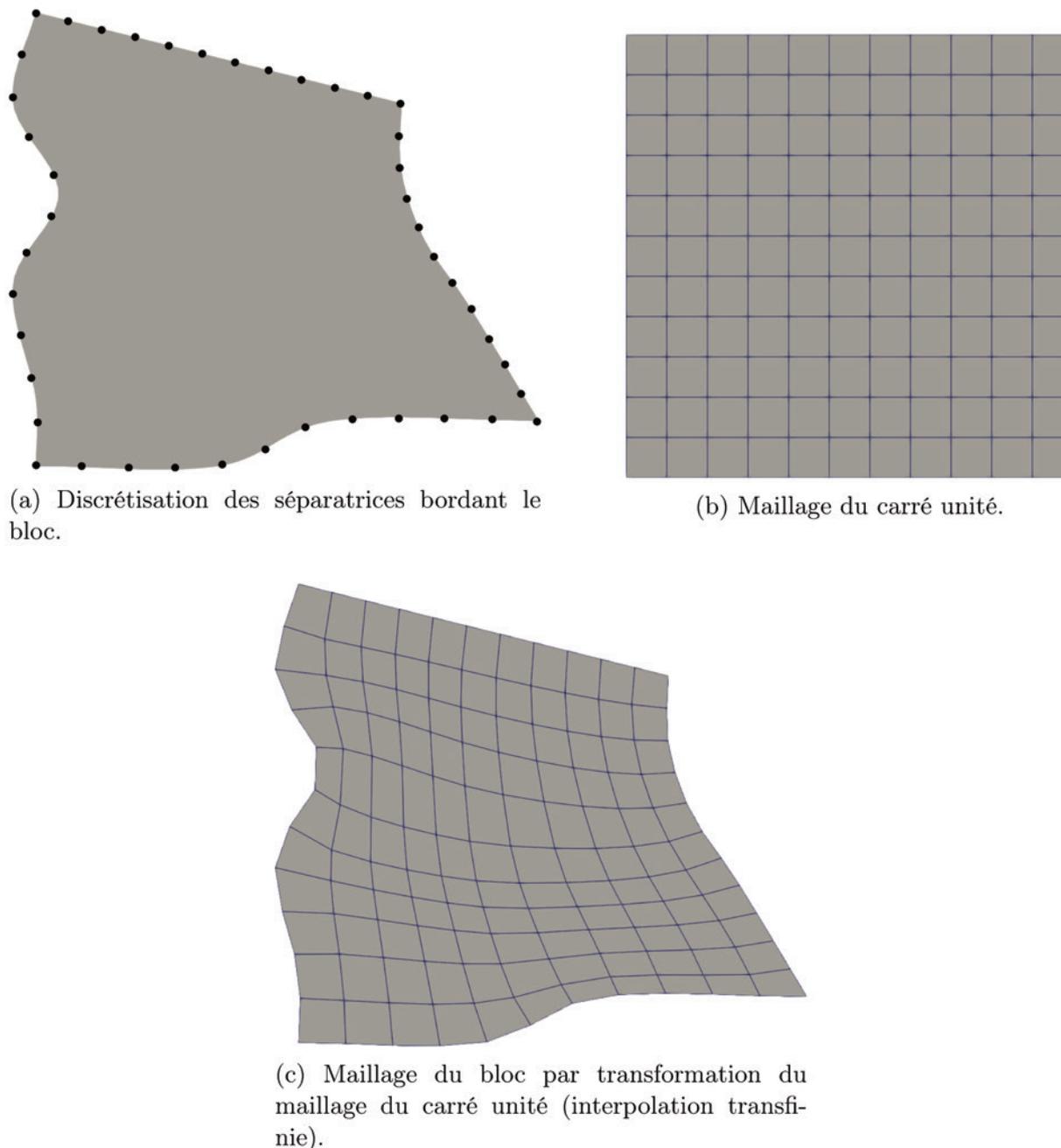
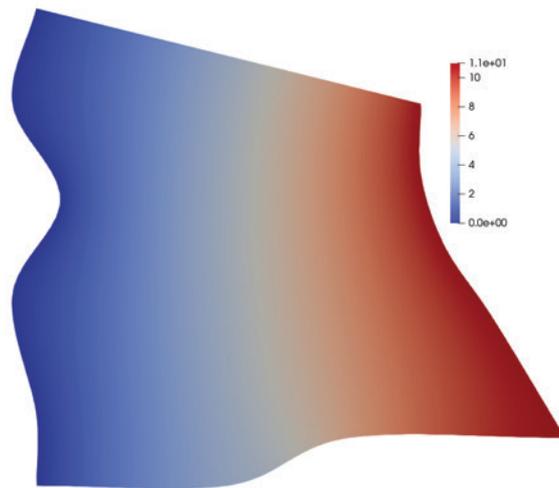
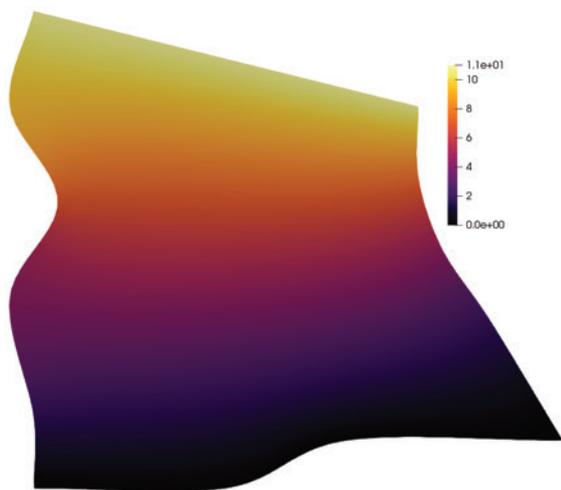


FIGURE 3.19 – Illustration du processus d'interpolation transfinie.

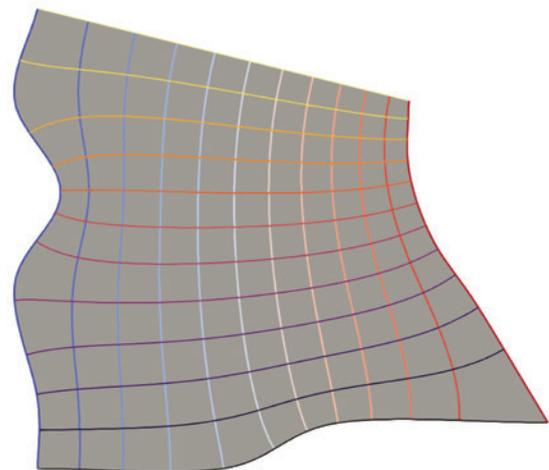
ces lignes sont considérées comme des nœuds du maillage, et les éléments du maillage sont construits en reliant ces nœuds. Deux possibilités se présentent alors : soit initier les lignes de champ à partir d'un bord et les intégrer vers le bord opposé, soit initier les lignes de champ à partir de tous les bords du bloc, puis fusionner les lignes de champs provenant de points opposés grâce à la méthode de fusion de lignes de champ présentée plus haut. Dans le premier cas, la qualité du maillage sera fortement dépendante de la qualité des lignes de champ tracées. On observe que les erreurs d'intégration font dévier la ligne de champ, et on se retrouve bien souvent avec un maillage complètement déformé et inhomogène. La deuxième approche semble plus efficace. La dépendance à l'intégration est atténuée par la fusion des lignes de champ. Nous présentons une illustration de cette méthode sur la figure 3.20.



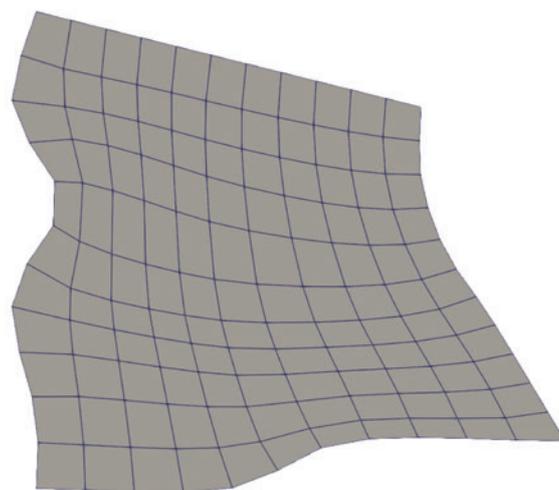
(a) Champ scalaire V .



(b) Champ scalaire U .



(c) Lignes de niveau associées aux valeurs des nœuds de discrétisation situés sur le bord.



(d) Maillage.

FIGURE 3.21 – Illustration du maillage d'un bloc par résolution d'EDP.

dans le maillage final obtenu, comme illustré dans la figure 3.24b. Dans cette section, nous proposons d’apporter des modifications au maillage résultant afin de remédier à cette problématique, tout en préservant la configuration en blocs structurés du maillage.

Nous procédons à l’optimisation du maillage quadrilatéral en recourant à une méthode appelée CVT, pour *Centroid Voronoi Tessellation* (voir [Chen, 2004]). Cet algorithme, de nature locale, vise à améliorer la qualité du maillage, notamment la régularité de la forme. Il opère en ajustant la position d’un sommet s au sein de son patch local T_s , qui englobe tous les simplex contenant s , sans altérer la connectivité. Ainsi, le sommet s se transforme en s^* , défini par :

$$s^* = \frac{1}{\sum_{T \in T_s} |T|} \left(\sum_{T \in T_s} b_T |T| \right),$$

où $b_T = \frac{\sum_{i=1}^3 s_i}{3}$ représente le barycentre du triangle T et $(s_i)_{i \in [1,3]}$ désigne les sommets de T . Cette transformation est mise en œuvre pour optimiser localement la qualité du maillage sans altérer la connectivité. La figure 3.24 illustre le processus d’optimisation appliqué au maillage initialement présenté dans la figure 3.25. Un exemple supplémentaire est proposé dans la figure 3.26.

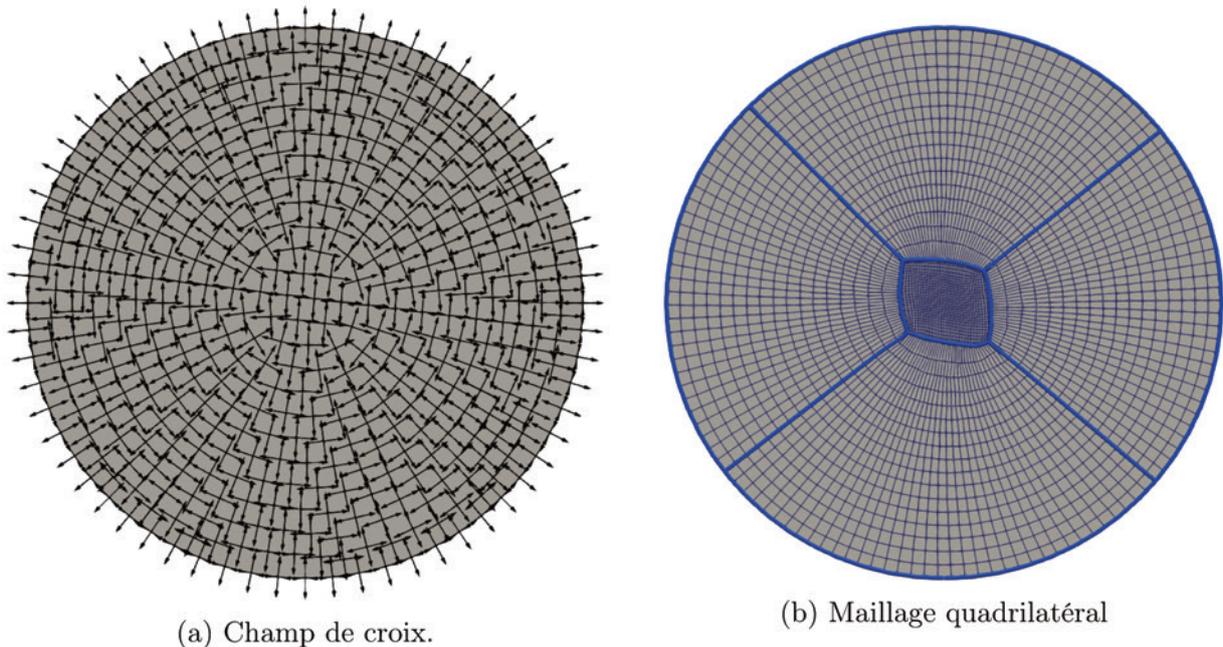


FIGURE 3.24 – Exemple d’un maillage non homogène.

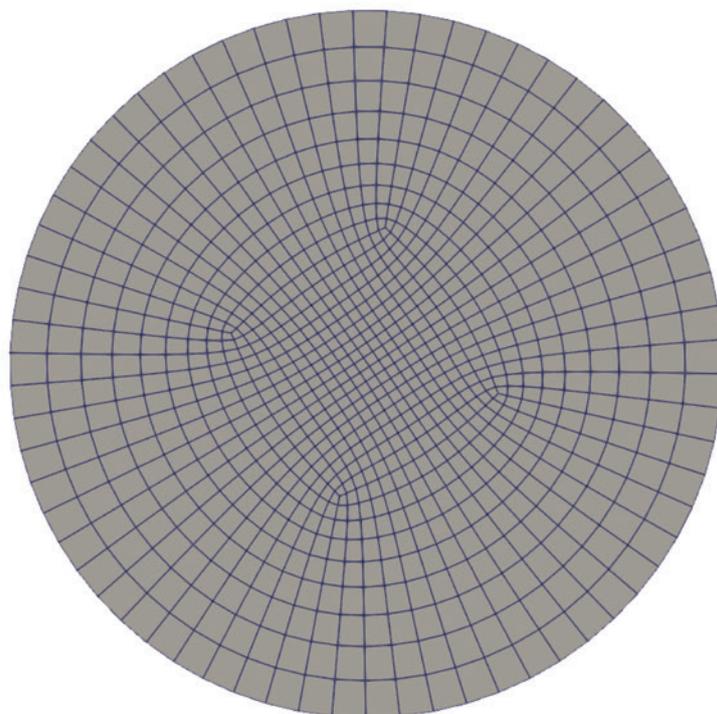
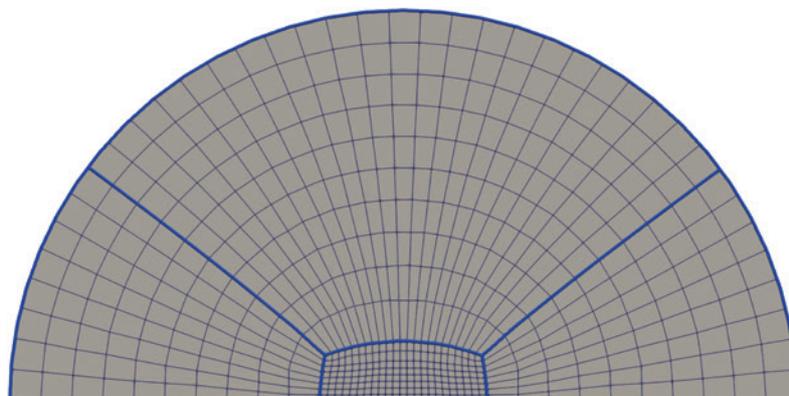
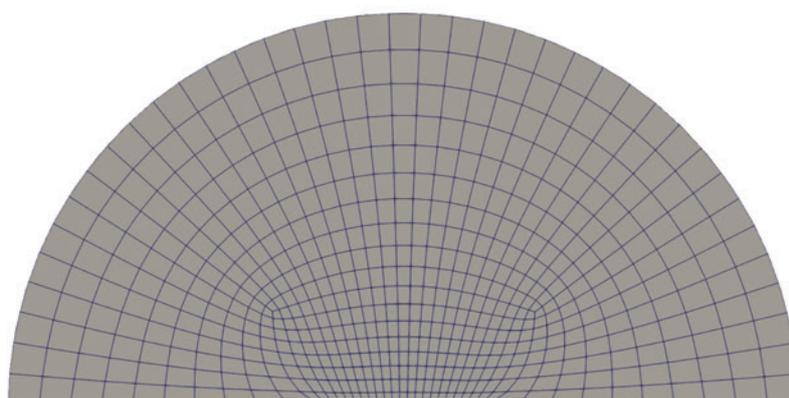


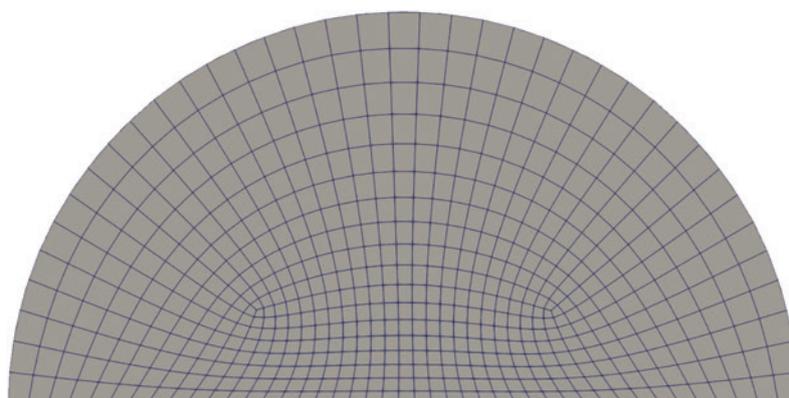
FIGURE 3.25 – Homogénéisation du maillage présenté sur la figure 3.24.



(a) Maillage non-homogène du demi disque.



(b) Homogénéisation sans prise en compte du bord.



(c) Homogénéisation complète

FIGURE 3.26 – Illustration du processus d'homogénéisation sur un autre exemple.

Chapitre 4

Extension aux surfaces courbes

Sommaire

4.1	Champ de croix, points singuliers, indices et séparatrices	127
4.2	Partitionnement de $\partial\Omega_h$ et maillage	130
4.3	Extension des résultats principaux du cas planaire	133
4.4	Analyse de convergence	137
4.5	Génération de champs de croix	138
4.5.1	L'Équation de Laplace	139
4.5.2	Connexions triviales	140

Dans ce chapitre, nous exposons une généralisation des notions abordés au deux chapitres précédents au cas des surfaces courbes dans l'espace. Plus précisément, on considère Ω comme une surface compacte orienté plongé dans \mathbb{R}^3 . Pour tout point $p \in \Omega$ nous notons $N(p)$ la normale à la surface (autrement dit le vecteur normale à l'espace tangent $T_p\Omega$).

4.1 Champ de croix, points singuliers, indices et séparatrices

Dans cette section, nous revenons sur les définitions et concepts introduits dans le chapitre 2. Un champ de croix \bar{u} défini sur Ω attribue à chaque point p de Ω une croix (voir la définition 2.1) dans l'espace tangent $T_p\Omega$. L'ensemble $\mathcal{S}_{\bar{u}}$, désignant les points singuliers de \bar{u} , est composé des points $p \in \Omega$ tels que $\bar{u}(p) = 0$. On dit que le champ de croix est presque- \mathcal{C}^1 s'il satisfait à la définition 2.4. La rotation d'une croix d'un angle donné s'effectue autour de la normale à l'espace tangent au point considéré, et elle est formulée à l'aide de la formule de Rodrigues [Trucco and Verri, 1998] appliquée à chaque branche de la croix. Ainsi, la rotation de la croix, notée \mathbf{c} , d'un angle α par rapport à un axe dirigé par le vecteur unitaire N , est donnée par :

$$\mathbf{R}_{N,\alpha}(\mathbf{c}) = \begin{cases} \{\cos(\alpha)c + (1 - \cos(\alpha))(N.c)N + \sin(\alpha)N \wedge c, c \in \mathbf{c}\} & \text{si } \mathbf{c} \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.1)$$

À la différence du cas planaire où une référence globale était disponible pour le calcul des angles des croix, dans ce contexte, nous choisissons une référence arbitraire pour chaque

espace tangent de la surface, permettant ainsi de déterminer l'angle de la croix par rapport à cette référence. Autrement dit, l'angle associé à la croix \mathbf{c} est donné par :

$$\{\theta_{\mathbf{c}}\} := \left\{ (\widehat{X, c}), c \in \mathbf{c} \right\} \cap \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$

où X représente la référence, et $(\widehat{X, c})$ désigne l'angle orienté entre X et c .

L'indice d'un point p dans un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 \bar{u} est alors défini par :

$$id_{\bar{u}}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\theta_{\bar{u}}^\gamma, \quad (4.2)$$

où γ est un chemin fermé inclus dans Ω , paramétré sur $[0, 1]$ dans le sens positif, encerclant uniquement le point p sans inclure d'autres points singuliers de \bar{u} , et tel que la partie de Ω délimitée par γ est homéomorphe à \mathbb{R}^2 . Si $p \in \partial\Omega$ alors on a :

$$id_{\bar{u}}^\partial(p) = \frac{1}{2\pi} \left[\pi - \hat{p} + \lim_{s \rightarrow 0} \int_s^{1-s} d\theta_{\bar{u}}^\gamma \right], \quad (4.3)$$

avec γ tangent à $\partial\Omega$ en p et $\gamma(0) = p = \gamma(1)$. $\theta_{\bar{u}}^\gamma$ est le relèvement continu de $\theta_{\bar{u}}$ le long de γ (voir le corollaire 2.11). Les définitions des lignes de champ pour les champs de croix sur les surfaces courbes ainsi que les propriétés des séparatrices restent applicables dans ce nouveau cadre. Cependant, il convient de noter que pour intégrer les lignes de champ à partir de points singuliers (séparatrices), le voisinage étoilé permettant de modifier localement le champ de croix pour faciliter le démarrage de la séparatrice doit être de taille suffisamment réduite. Plus précisément, ce voisinage doit être homéomorphe au plan pour mettre en œuvre l'opération de modification du champ introduite dans la proposition 2.25. À partir de là, les résultats établissant le lien entre le nombre de séparatrices associées à un point singulier et l'indice du point sont aisément retrouvés. Ainsi le nombre $Nb_s(p)$ de séparatrices associées au point p est donné par :

$$Nb_s(p) = \begin{cases} 4 - 4id_{\bar{u}}(p) & \text{si } p \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ 3 - 4id_{\bar{u}}(p) & \text{si } p \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.4)$$

Nous illustrons sur la figure 4.1 les séparatrices d'un point d'indice $1/4$ et d'un point d'indice $-1/4$.

Examinons maintenant ce que deviennent ces concepts dans un cadre discret. Soit Ω_h un maillage triangulaire de Ω vérifiant les contraintes définis dans la sous-section 3.1.1. Nous reconstruisons la normale surfacique en chaque sommet de Ω_h en prenant une somme vectorielle des normales des triangles adjacents au sommet en question pondérées par l'aire des triangles. Soit s un sommet de Ω_h . La normale reconstruite en s est donné par :

$$N(s) = \frac{1}{\sum_{T \in T_s} |T|} \left(\sum_{T \in T_s} |T| N_T \right), \quad (4.5)$$

où N_T désigne la normale au plan contenant le triangle T et T_s représente l'ensemble des triangles adjacents à s .

Nous abordons à présent la représentation \bar{u}_h sur Ω_h d'un champ de croix presque- \mathcal{C}^1 \bar{u} défini sur Ω . On suppose que des valeurs nodales de \bar{u} sont attribuées aux sommets du

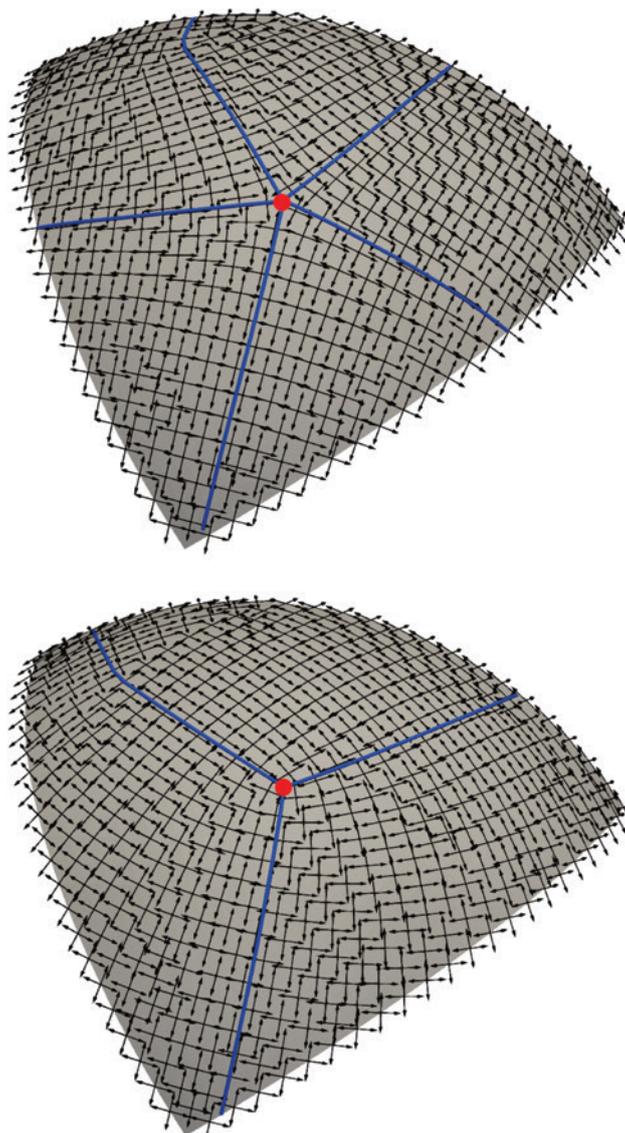


FIGURE 4.1 – Gauche : Illustration des séparatrices émanant de points singuliers d'indice $-1/4$ (en haut) et d'indice $1/4$ (en bas).

domaine Ω_h . L'évaluation des écarts d'angle de la définition d'un triangle singulier 3.2 s'effectue en projetant les crois associé aux sommets du triangle dans l'espace tangent du triangle. Ainsi la croix $\bar{u}(s)$ où s est un sommet du triangle devient :

$$Proj(\bar{u}(s), N_T) = \begin{cases} \{c - (c \cdot N_T) \cdot N_T, c \in \bar{u}(s)\} & \text{si } \bar{u}(s) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.6)$$

Ensuite, nous définissons les zones singulières comme précédemment (voir la sous-section 3.1.2), avec la contrainte supplémentaire qu'une zone singulière est réduite soit à un triangle unique, soit à deux triangles adjacents, soit aux triangles adjacents à un sommet où la valeur nodale du champ s'annule. En pratique, il sera nécessaire d'ajuster un maillage qui ne respecte pas ces contraintes. Étant donné que les points singuliers du champ croisé \bar{u} sont isolés, il est toujours possible de respecter ces contraintes en affinant localement le maillage ou en effectuant des modifications (par exemple, via des opérations

de retournement d'arêtes) sur un maillage qui ne les satisfait pas. La représentation \bar{u}_h de u est alors donnée par morceau sur chaque triangle T par :

- pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, $\bar{u}_h(s)$, où s est un sommet de T est égale à 0 si $\bar{u}(s) = 0$ sinon $\bar{u}_h(s)$ correspond à la projection de $\bar{u}(s)$ dans le plan tangent du triangle T .
- si $T \subset \Omega_h \setminus \mathbf{Z}$ alors pour tout $p \in T$, on pose :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_{\bar{u}_h}(s_1) \\ \theta_2 = \theta_1 + \delta\theta(\bar{u}_h(s_1), \bar{u}_h(s_2)) \\ \theta_3 = \theta_2 + \delta\theta(\bar{u}_h(s_2), \bar{u}_h(s_3)) \end{cases}$$

où s_1, s_2 et s_3 sont les sommets du triangle T . La croix $\bar{u}_h(p)$ est alors donnée par :

$$\begin{cases} \bar{u}_h(p) = \{ \mathbf{R}_{N_T, \theta_p + m \frac{\pi}{2}}(X_T), m \in \mathbb{Z} \}, \\ \theta_p = \sum_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket} \lambda_i \theta_i, \end{cases}$$

avec $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket}$ les coordonnées barycentriques de p dans le triangle T , N_T la normale au plan contenant le triangle T et X_T le vecteur de référence arbitrairement choisi dans cet espace tangent. Autrement dit, ils vérifient $p = \sum_{i=1}^3 \lambda_i s_i$ et $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$.

- si $T \subset \mathbf{Z}$ et que pour tout sommet s de T on a $\bar{u}(s) \neq 0$ on commence par interpoler l'angle du champ de le champ de croix le long des arêtes de T . On a alors pour tout $p \in T$:
 - si $p = S_Z$, alors $\bar{u}_h(p) = 0$.
 - sinon la croix $\bar{u}_h(p)$ est donnée par :

$$\begin{cases} \bar{u}_h(p) = \bar{u}_h(\tilde{p}), \\ \{\tilde{p}\} = [S_Z p] \cap \partial Z. \end{cases} \quad (4.7)$$

- Sinon, si $T \subset \mathbf{Z}$, alors par construction, il existe un unique sommet s de T tel que $\bar{u}_h(s) = 0$. On interpole alors l'angle du champ de croix sur l'arête de T opposée à s . Ensuite, pour tout point p appartenant à T , on utilise l'équation (4.7) pour calculer $\bar{u}_h(p)$.

4.2 Partitionnement de $\partial\Omega_h$ et maillage

Nous abordons maintenant la question du partitionnement du maillage Ω_h représentant le domaine Ω_h . De façon similaire à ce que nous avons présenté dans le cas planaire, nous nous basons sur l'algorithme 4.

Les points singuliers coïncidant exactement avec les points S_Z où $Z \subset \mathbf{Z}$ leur recherche consiste donc à retrouver ces points. Il faut ensuite déterminer le nombre de séparatrices

par points singuliers ainsi que leurs directions de départ grâce à la fonction $W_{p_0}^\gamma$ où ici p_0 désigne le point singulier et γ est une paramétrisation du bord ∂Z_{p_0} de la zone singulière Z_{p_0} contenant p_0 . On intègre ensuite les lignes de champs sur la surface triangulée. Cependant, contrairement au cas planaire les triangles ne se trouvant pas tous dans le même plan. Le passage d'une ligne de champ d'un triangle à son voisin se fait alors en projetant le vecteur d'intégration dans le plan du triangle voisin grâce à la formule de Rodrigues [Trucco and Verri, 1998]. Nous illustrons cela sur la figure 4.2.

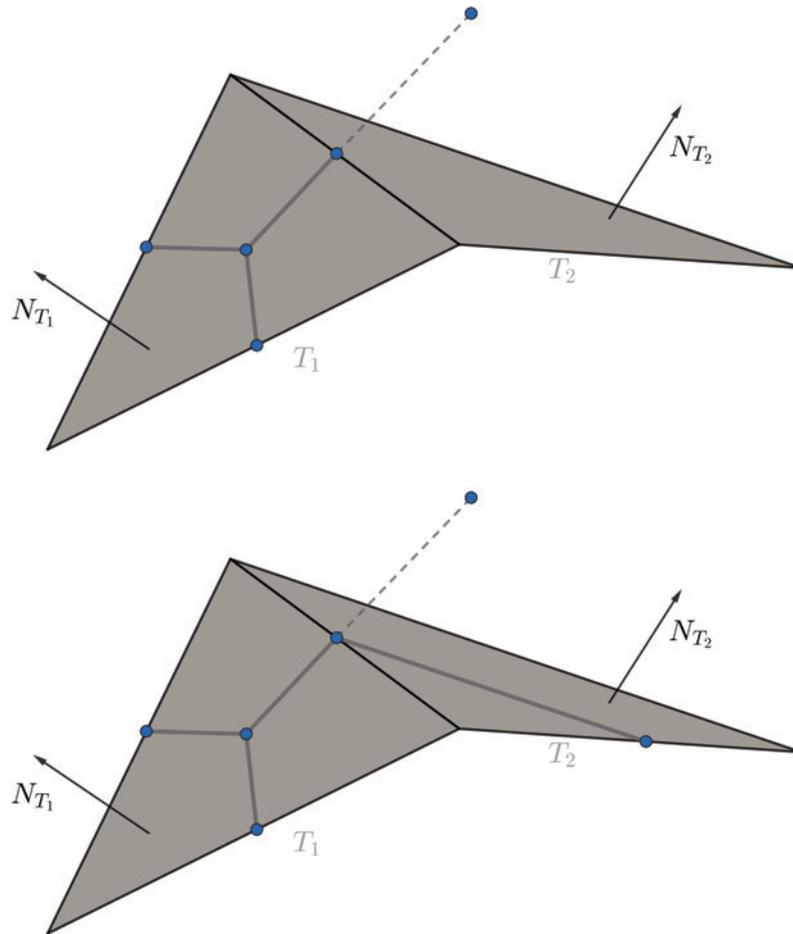


FIGURE 4.2 – Illustration du processus d'intégration d'une ligne de champ.

La traversée d'un triangle singulier (voir figure 4.3) reste équivalente à ce qui a été présenté dans le chapitre 3 de même que la fusion de séparatrices. Nous illustrons cela sur la figure 4.2.

Les séparatrices du champ de crois sont construites simultanément en incrémentant chacune d'elles progressivement, et le processus de fusion est réalisé tel que décrit dans le chapitre 3. Une illustration en est donnée sur la figure 4.4.

Les figure 4.5 et 4.6 montrent les étapes d'assemblage à savoir l'intersection de séparatrices et l'extraction des partitions en tant que sous-maillage.

Lorsque toutes les partitions obtenues comportent quatre côtés, nous générons ensuite le maillage quadrilatéral pour chaque partition en utilisant la méthode exposée dans la sous-section 3.3.4. Nous en fournissons une illustration dans la figure 4.7.

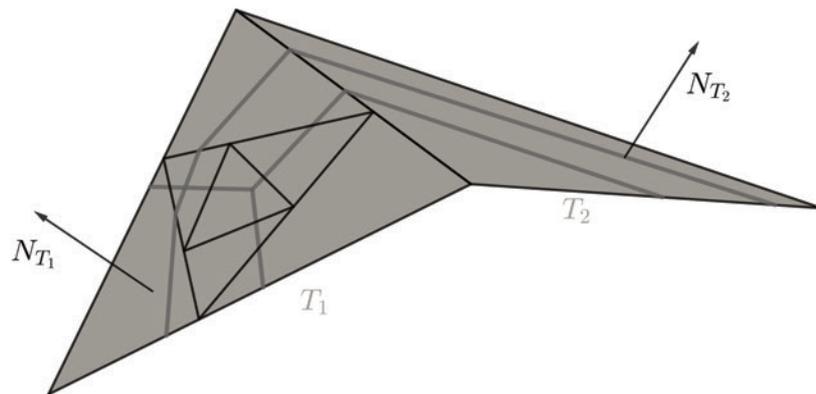
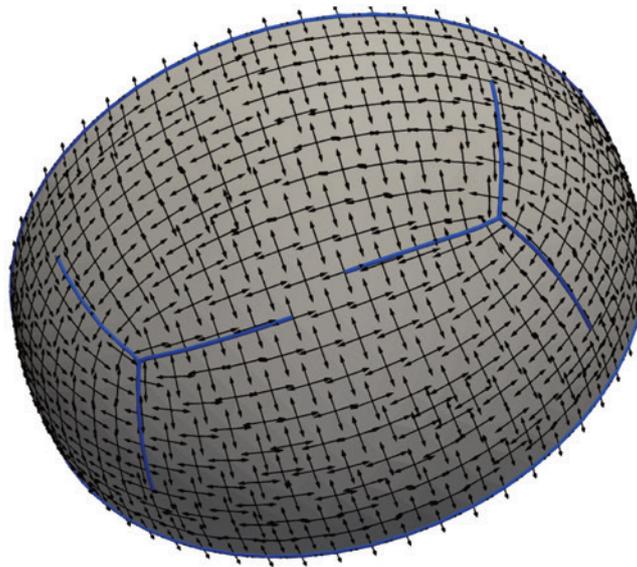
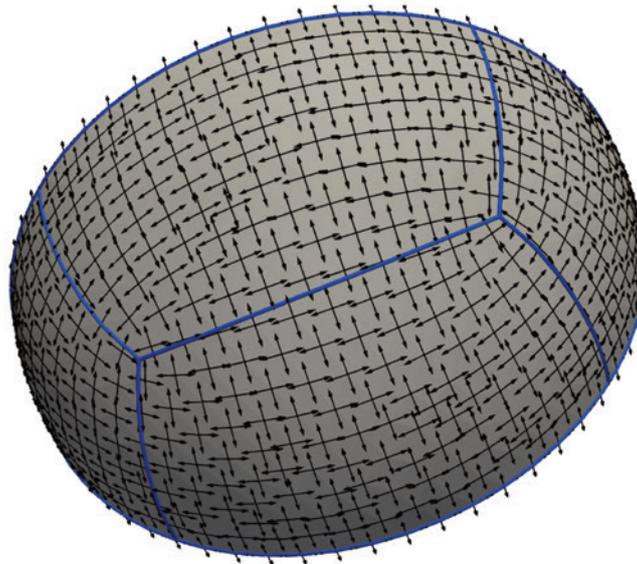


FIGURE 4.3 – Illustration de la traversé par une séparatrice d'un triangle singulier.



(a) Détection d'une fusion.



(b) Fusion.

FIGURE 4.4 – Illustration de la fusion de deux séparatrices.

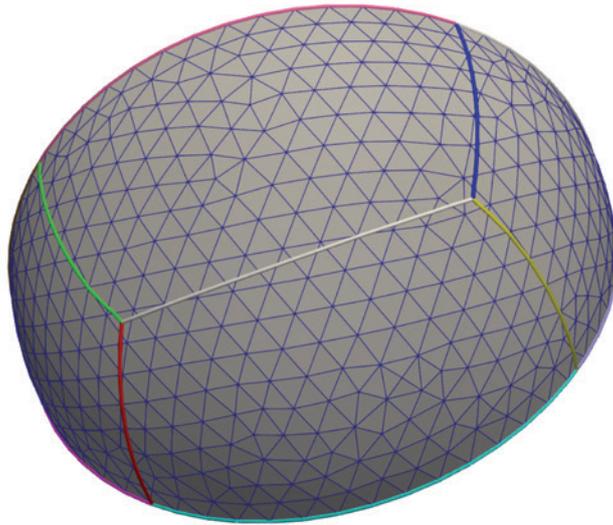


FIGURE 4.5 – Illustration de l'intersection de séparatrices.

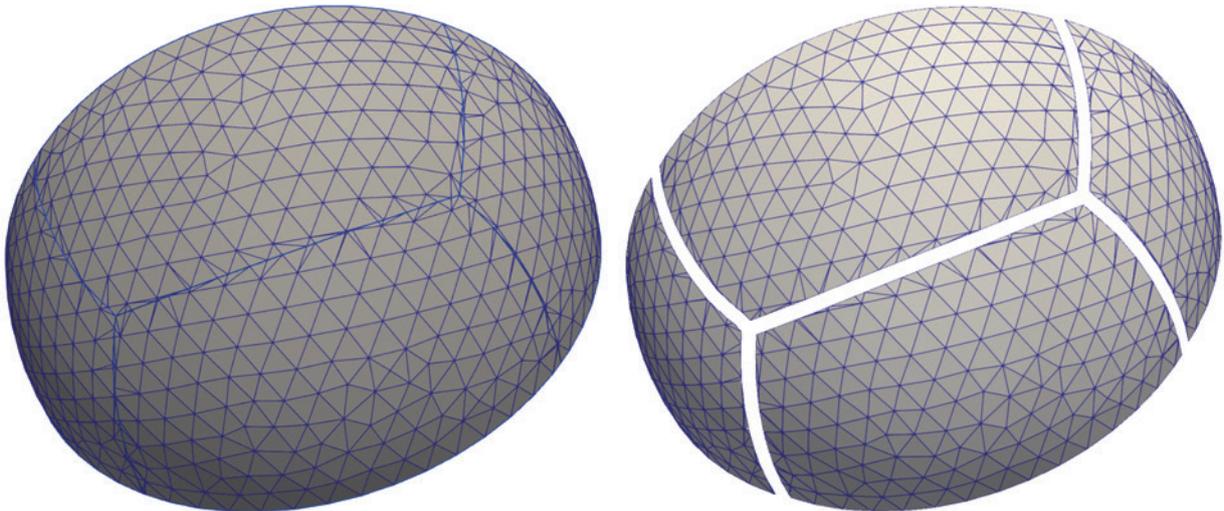


FIGURE 4.6 – Extraction des séparatrices en tant que sous-maillage.

4.3 Extension des résultats principaux du cas planaire

Le théorème ci-dessous énonce les conditions nécessaires à l'utilisation d'un champ de croix spécifié pour subdiviser une surface courbe dans l'espace en régions caractérisées par quatre côtés.

Théorème 4.1. *Considérons \bar{u} comme un champ de croix presque- C^1 défini sur Ω , aligné avec $\partial\Omega$, tel que $0 < \text{Card}(\mathcal{S}_{\bar{u}}) < \infty$. Pour tout point $p \in \Omega$, supposons que $\text{id}_{\bar{u}}(p) = k/4$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leq 1$. Si l'algorithme de partitionnement 1, appliqué à \bar{u} , converge et que chaque région \mathcal{R} du partitionnement satisfait $\chi(\mathcal{R}) = 1$, alors le partitionnement résultant constitue une décomposition de Ω en régions à quatre côtés.*

La démonstration de ce théorème suit la même logique que celle du théorème 2.34. Cependant, il est important de noter l'introduction d'une hypothèse supplémentaire concernant les régions issues du partitionnement. Cette condition spécifie qu'une région \mathcal{R} résultant du partitionnement doit satisfaire l'équation $\chi(\mathcal{R}) = 1$. Dans le contexte planaire, cette contrainte était toujours satisfaite. Cependant, dans l'espace, pour des surfaces de

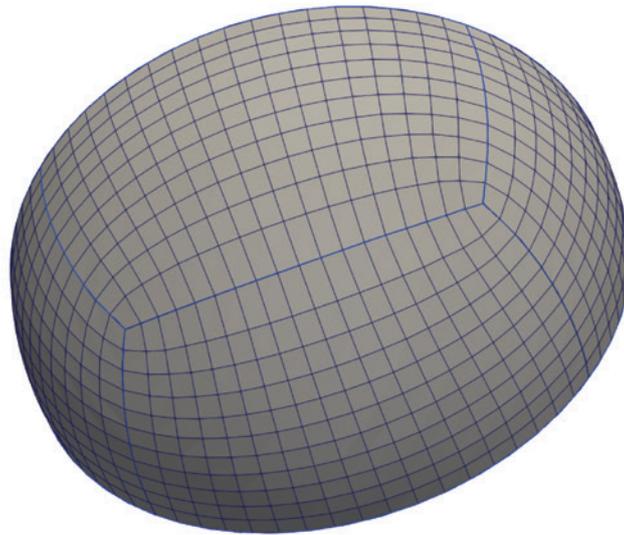
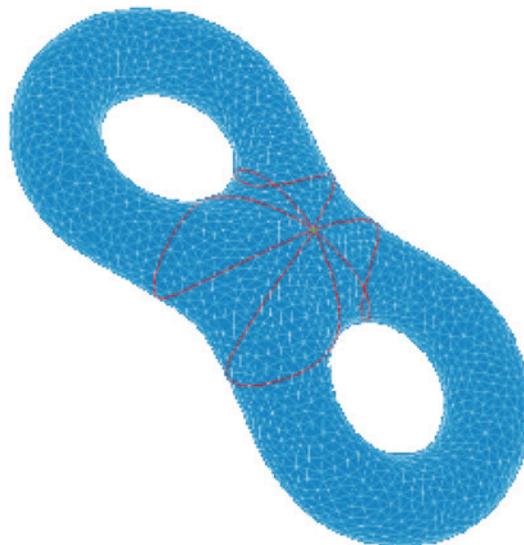


FIGURE 4.7 – Maillage de chaque partition.

genre non nul, aucune garantie préalable n'est donnée quant à la nullité du genre des partitions créées. Ainsi, l'expression $\chi(\mathcal{R}) = 2 - 2g - b$ n'est pas toujours égale à 1, où g et b représentent respectivement le genre et le nombre de composantes connexes du bord de \mathcal{R} (voir figure 4.8).

FIGURE 4.8 – Partitionnement d'un double tore à partir d'un point singulier d'indice -2 : source [Chen et al., 2018].

Une approche pour résoudre ce problème pourrait consister à introduire des points supplémentaires permettant de générer de nouvelles séparatrices dans la partition concernée. Cela pourrait conduire, par une subdivision successive, à la création de nouvelles séparatrices de genre plus faible, jusqu'à ce que l'on obtienne finalement des partitions de genre nul.

Étude de l'opération d'alignement Considérons maintenant que Ω est simplement connexe et que le champ de croix \bar{u} n'est pas nécessairement aligné sur $\partial\Omega$ mais vérifie :

- $0 < \text{Card}(\mathcal{S}_{\bar{u}}) + \text{Card}(\mathcal{B}) < \infty$,
- Pour tout point $p \in \mathcal{S}_{\bar{u}}$, $id_{\bar{u}}(p) = k/4$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leq 1$,
- Etant donné I_p définit pour tout p par :

$$I_p = \frac{k}{4} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } k \leq 1 \quad (4.8)$$

on a :

$$\sum_{p \in (\Omega \setminus \partial\Omega) \cap \mathcal{S}_{\bar{u}}} id_{\bar{u}}(p) = \chi(\Omega) - \sum_{p \in \mathcal{B}} I_p. \quad (4.9)$$

où \mathcal{B} désigne l'ensemble des points tel que $I_p \neq 0$.

L'opération d'alignement consiste alors à calculer le champ de croix \bar{v} pour tout $p \in \Omega$ défini par :

$$\bar{v}(p) = \begin{cases} \mathbf{R}(\phi(p))\bar{u}(p) & \text{si } p \in \Omega \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}} \cup \mathcal{S}_{\bar{u}}), \\ \bar{n}(p) & \text{si } p \in (\mathcal{S}_{\bar{u}} \cap \partial\Omega) \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}}), \\ 0 & \text{si } p \in \mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}}. \end{cases} \quad (4.10)$$

où $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est définie comme la solution de l'équation de Laplace suivante :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \phi(\gamma(t)) = \psi(t) - \sum_{s \in \gamma^{-1}(\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}})} 2\pi I_{\gamma(s)} & \text{sur } \gamma^{-1}(\partial\Omega \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{S}_{\bar{n}} \cup \mathcal{S}_{\bar{u}})). \end{cases} \quad (4.11)$$

Dans ce contexte, γ représente une paramétrisation de la frontière $\partial\Omega$ sur l'intervalle $[0, 1]$ dans le sens positif par rapport à l'orientation de Ω , et ψ est le relèvement continu de l'angle (\bar{n}, \bar{u}) entre le champ de croix \bar{n} et le champ de croix \bar{u} le long de γ .

La formulation de la condition de bord de l'équation 4.11 est motivée par l'absence de référence globale dans ce cas particulier (surface courbe dans l'espace). Une alternative consiste à construire un champ de croix sur Ω sans aucun point singulier et à le considérer comme une référence globale sur la surface. Nous avons adopté la méthode de la chaleur pour la diffusion, telle que présentée dans [Sharp et al., 2019]. Cette méthode propage un vecteur donné en fonction de l'équation de la chaleur, permettant ainsi la construction d'un cadre de référence global pour la surface. Cela facilite le calcul précis des angles du champ croisé et son alignement avec la frontière de la surface non-plane.

Plus précisément, nous construisons un champ de vecteurs w sur la surface en utilisant l'équation (4.12), avec des conditions aux limites de Neumann homogènes. Nous amorçons la résolution en initialisant l'équation avec un champ de vecteurs égal à un vecteur arbitraire dans l'espace tangent d'un point arbitraire et mis à zéro partout ailleurs sur la surface. En résolvant cette équation sur une très courte période de temps, nous obtenons un champ de vecteurs dépourvu de singularités. L'étape suivante consiste à générer un repère en chaque point en effectuant une rotation du champ de vecteurs obtenu.

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \nabla^2 w & \text{dans } \Omega, \\ \nabla w \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.12)$$

où n désigne la normale sortante au bord de Ω . La Figure 4.9 présente un exemple de la solution de l'équation, tandis que la Figure 4.10 illustre le repère global résultant obtenu. Nous exposons ensuite le processus d'alignement à partir d'un champ de croix non aligné avec le bord du domaine (voir Figure 4.11). Ce champ de croix est ensuite aligné grâce au processus d'alignement, où les angles sont calculés à partir du champ de référence global. On obtient alors un découpage en régions à quatre côtés, comme présenté sur la Figure 4.12. D'autres illustrations sont présentées sur la Figure 4.13.

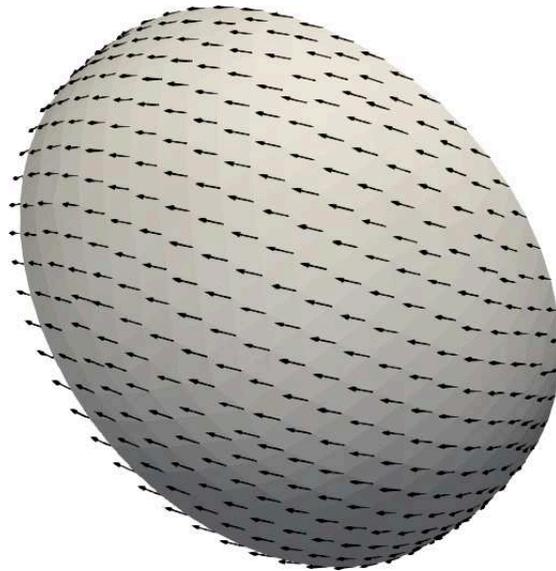


FIGURE 4.9 – Champ de vecteur obtenu par la méthode de diffusion de chaleur [Sharp et al., 2019].

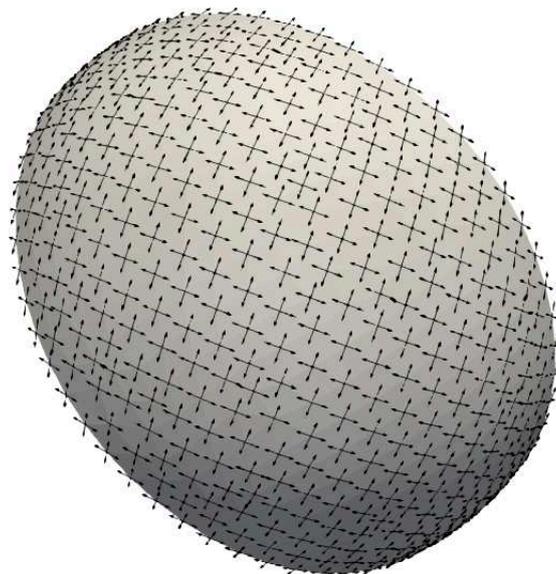


FIGURE 4.10 – Référence globale.

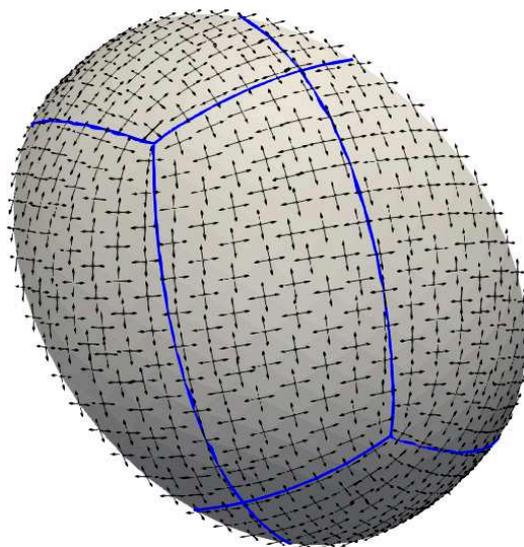


FIGURE 4.11 – Champ de croix non aligné.

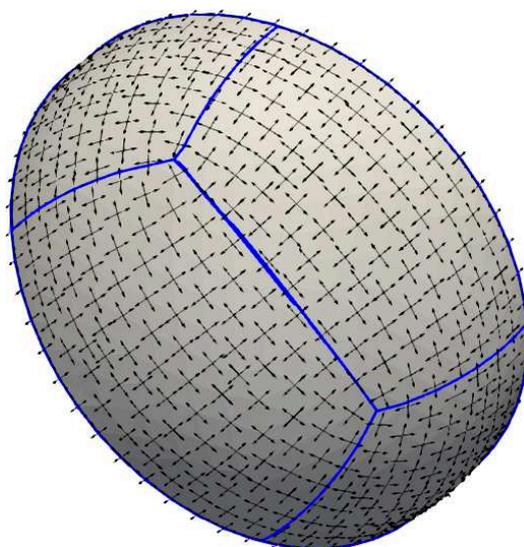


FIGURE 4.12 – Alignement du champ de croix.

4.4 Analyse de convergence

Dans cette section, de manière similaire à l'étude exposée dans la section précédente, nous nous posons la question de savoir si le maillage quadrilatéral obtenu par la méthode précédemment décrite est bien un maillage du domaine de départ Ω . Pour répondre à cette question, il suffit de montrer que le partitionnement construit sur Ω_h , que nous notons \mathcal{P}_h , converge vers un partitionnement de Ω comprenant des partitions quadrilatérales.

Notons cependant que le lift à considérer ici est un lift surfacique et dépend de toute la surface. Plus précisément, si η est une fonction définie sur Ω et η_h sa représentation élément fini définie sur Ω_h , alors le lift de η_h de Ω_h vers Ω est donné par :

$$\eta_h(p) = [\mathbf{L}_{\Omega_h}^{\Omega} \eta_h](p - d(p)N(p)) \text{ pour tout } p \in \Omega_h, \quad (4.13)$$

où $N(p)$ est la normale sortante en p . Nous supposons que Ω est représenté globalement par une fonction de distance orientée d définie sur un sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^2 tel

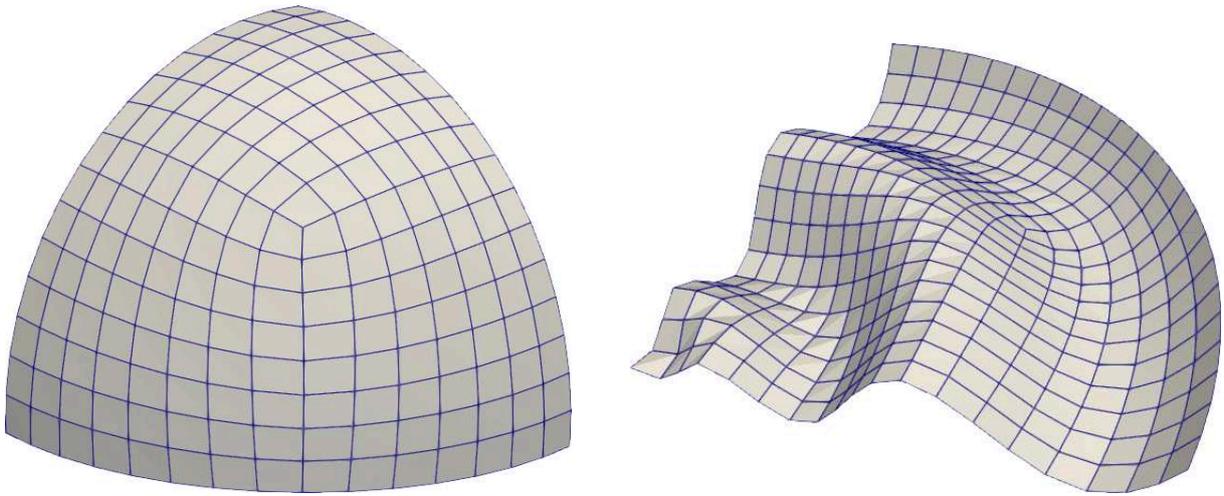


FIGURE 4.13 – Autres illustrations de maillage quadrilatéral de surfaces courbes dans l'espace.

que

$$\Omega = \{x \in U, d(x) = 0\},$$

avec d appartenant à $\mathcal{C}^{k,\alpha}(U)$, $\nabla d \neq 0$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$). Il résulte des travaux de [Dziuk, 1988] que $[\mathbf{L}_{\Omega_h}^\Omega \eta_h]$ converge vers η , et que l'erreur de représentation de la géométrie est d'ordre 2, là où l'erreur d'approximation du schéma numérique est d'ordre 1.

La suite de l'analyse est analogue à ce qui a été fait dans la sous-section 3.5. Plus précisément, en adoptant les mêmes notations, on retrouve la même inégalité entre la ligne de champ du champ \bar{v} d'origine p et de vecteur initial w (notée $I(p, w, \bar{v})$) et l'approximation d'une ligne de champ du champ \bar{v}_h de même origine avec le même vecteur initial (notée $I_h(p, w, \bar{v}_h)$) :

$$\begin{aligned} \|I(p, w, \bar{v}) - I_h(p, w, \bar{v}_h)\| &\leq \|I(p, w, \bar{v}_h) - I_h(p, w, \bar{v}_h)\| + \\ &\|I(p, w, [\mathbf{L}_{\Omega_h}^\Omega \bar{v}_h]) - I(p, w, \bar{v}_h)\| + \\ &\|I(p, w, \bar{v}) - I(p, w, [\mathbf{L}_{\Omega_h}^\Omega \bar{v}_h])\|. \end{aligned}$$

On a :

$$\|I(p, w, \bar{v}) - I_h(p, w, \bar{v}_h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

puisque chaque terme converge vers 0. Ainsi, on déduit que les séparatrices internes construites sur Ω_h convergent vers les séparatrices internes construites sur Ω et, puisque Ω_h converge vers Ω , on a la convergence des séparatrices de bord.

4.5 Génération de champs de croix

Nous présentons ici les différentes méthodes utilisées dans ce chapitre pour la génération de champs de croix initiaux qui sont le point d'entrée de notre opération d'alignement.

4.5.1 L'Équation de Laplace

Il s'agit de la version surfacique de la méthode présentée dans la sous-section 3.6.1. L'idée consiste à résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } \Omega, \\ f(p) = (\cos(4\theta_{\bar{n}}(p)), \sin(4\theta_{\bar{n}}(p))) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.14)$$

Le champ de croix \bar{u} est ensuite donné pour tout $p \in \Omega$ par :

$$\bar{u}(p) = \begin{cases} \mathbf{R}(\theta_f/4)X_p & \text{si } f \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où X_p est la référence arbitraire choisie dans l'espace tangent en p . Cette équation peut être résolue sur Ω_h par la méthode des éléments finis. Étant donné un triangle T de

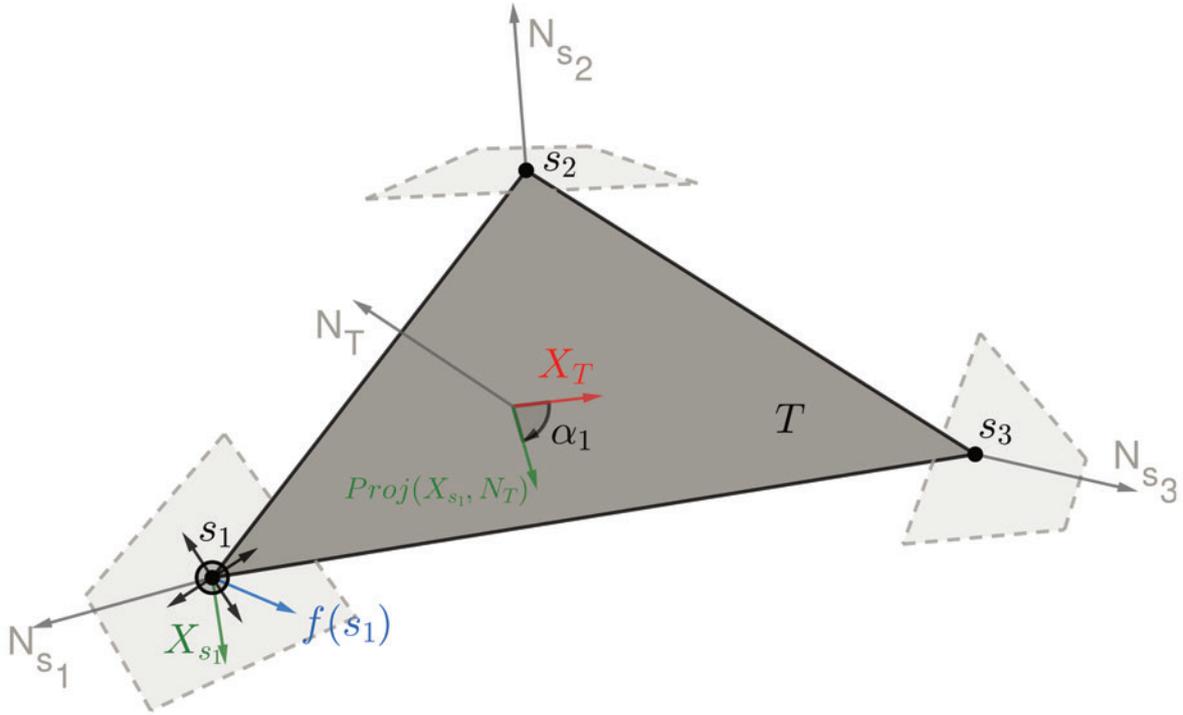


FIGURE 4.14 – Alignement du champ de croix.

sommets s_i , $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, désignons par α_i l'angle entre la projection sur le triangle T de la référence X_{s_i} de l'espace tangent en s_i et la référence choisi dans l'espace tangent associé à T noté X_T . La matrice de rigidité élémentaire est alors donnée par :

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{P},$$

où \mathbf{P} est donné par :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos(4\alpha_1) & 0 & 0 & \sin(4\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(4\alpha_2) & 0 & 0 & \sin(4\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(4\alpha_3) & 0 & 0 & \sin(4\alpha_3) \\ -\sin(4\alpha_1) & 0 & 0 & \cos(4\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(4\alpha_2) & 0 & 0 & \cos(4\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(4\alpha_3) & 0 & 0 & \cos(4\alpha_3) \end{pmatrix}$$

et \mathbf{K} est donné par :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix},$$

avec \mathbf{k} la matrice de rigidité élémentaire dans le cas scalaire que l'on calcule avec la formule cotangente du Laplacien présentée dans l'annexe B.

4.5.2 Connexions triviales

Dans [Crane et al., 2010], les auteurs présentent un algorithme simple pour construire des connexions sur des surfaces discrètes qui sont aussi lisses que possible partout, sauf sur un ensemble de singularités isolées avec un indice donné. Ces connexions sont résolues en résolvant un seul système linéaire construit à partir d'opérateurs standards. Nous exposons ici cet algorithme pour un domaine simplement connexe où les singularités sont spécifiées par rapport aux triangles.

Soit Ω_h un maillage triangulaire. Nous souhaitons construire un champ de croix \bar{u}_h sur Ω_h . Pour ce faire, nous cherchons à résoudre un ensemble d'angles d'ajustement qui indique comment faire pivoter un vecteur chaque fois qu'il se déplace le long d'une arête. Soit α ce champ d'angle d'ajustement et notons α_{ij} l'angle d'ajustement associé à l'arête $s_i s_j$ de sommets s_i et s_j . Remarquons que α est donc un vecteur de réels dont la taille est égale au nombre d'arêtes. Nous attribuons une orientation arbitraire à chaque arête, puis orientons chaque triangle dans le sens positif de la normale au triangle. Nous construisons ensuite une matrice A représentant les interactions entre les triangles et les arêtes du maillage. Il s'agit donc d'une matrice rectangulaire ayant comme nombre de lignes le nombre de triangles et comme nombre de colonnes le nombre d'arêtes, définie par :

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } i \text{ est contenue dans le triangle } j \text{ avec la même orientation,} \\ -1 & \text{si l'arête } i \text{ est contenue dans le triangle } j \text{ avec l'orientation contraire,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour contrôler le placement des singularités, nous spécifions pour chaque triangle l'indice k_i désiré, puis nous assemblons le vecteur b donné pour chaque triangle T_i par :

$$b_i = 2k_i\pi - K_i,$$

où K_i désigne le défaut d'angle (holonomie) autour du triangle T_i dû à la rotation de la normale surfacique autour du triangle. Enfin, pour calculer les angles d'ajustement, nous résolvons le problème convexe :

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_2 \quad \text{tel que} \quad A\alpha = b.$$

Dans le cas où la matrice A a un rang plein, la méthode des multiplicateurs de Lagrange donne une solution unique. Cette solution est donnée par la formule $\alpha = -A^T(AA^T)^{-1}b$. Dans ce cas, la solution est unique car la contrainte linéaire est suffisamment restrictive pour éliminer toute ambiguïté dans la solution. Une fois que nous avons le vecteur α , la construction d'un champ de croix est simple. Nous attribuons une croix arbitraire en un

point que nous propageons sur le reste des sommets du maillage. Sur une arête $s_i s_j$, pour trouver la croix au sommet s_j étant donné la croix en un sommet s_i , nous avons :

$$\bar{u}_h(s_j) = \begin{cases} \{\mathbf{R}(\beta_j + m\pi/2)X_{s_j}, & m \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\} \\ \beta_j = \beta_i - \theta_{ij} + \theta_{ji} - \alpha_{ij}, \end{cases}$$

où β_k est l'angle par rapport à la référence X_{s_k} défini au sommet s_k , et α_{ij} est l'angle d'ajustement de l'arête $s_i s_j$. Enfin, θ_{ij} et θ_{ji} sont respectivement les angles entre l'arête $s_i s_j$ et les références fixées aux sommets s_i et s_j . Les champs de croix illustrés sur les figures 4.1 et 4.11 ont été générés avec cette approche.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

L'objectif principal de cette thèse était d'étudier et de développer une méthode de génération de maillages structurés par bloc à partir de champs de croix prescrits. Le chapitre 2 du manuscrit se consacre à formaliser cet objectif dans un cadre théorique, tandis que les chapitres 3 et 4 mettent en œuvre cette approche sur des domaines planaires et des surfaces courbes dans l'espace. En conclusion de ce travail, nous résumons les résultats obtenus et esquissons certaines perspectives envisageables.

5.1 Conclusion

Nous avons entamé ce mémoire en formalisant la notion de champ de croix. L'objectif était d'acquérir une compréhension approfondie de cet objet afin de pouvoir en prescrire différents, qu'ils proviennent de divers champs des mathématiques ou de la physique, pour construire des maillages structurés par bloc.

Une première notion cruciale est l'angle formé par une croix par rapport à une référence donnée. La définition claire de cette notion nous a permis de construire un relèvement continu de cette dernière le long d'une courbe paramétrée, relèvement qui est à la base de la notion d'indice permettant d'obtenir une caractérisation qualitative des champs de croix que nous manipulons. L'étape suivante a consisté en l'exploration la notion de ligne de champ pour les champs de croix, en se penchant particulièrement sur celles qui débutent ou finissent leur trajet en des points singuliers du champ de croix. Nous avons mis en place un processus permettant de modifier localement le champ de croix afin de pouvoir trouver des directions de départ pour intégrer une ligne de champ depuis un point singulier. Par la suite, nous avons travaillé sur le nombre de lignes de champ à associer à un point singulier, mettant en évidence le comportement local du champ de croix au voisinage d'un point singulier. Ce comportement particulier, conférant un indice bien défini au point singulier vis-à-vis des secteurs créés par les lignes de champ dans son voisinage, est à la base de la preuve expliquant pourquoi le partitionnement du domaine avec les lignes de champ issues des points singuliers conduit bien à un découpage en régions de quatre côtés. Ensuite, nous avons instauré un processus d'alignement des champs de croix sur le bord du domaine au sein duquel ils sont définis. Ainsi, sous certaines conditions, nous ajustons ces champs de croix prescrits afin de les rendre compatibles avec le processus de partitionnement en régions à quatre côtés. Cette approche a d'abord été présentée pour les domaines simplement connexes, puis généralisée aux domaines non-simplement connexes. Ces développements nous ont permis de gérer les domaines constitués de plusieurs matériaux ainsi que les points singuliers du bord, d'indices arbitraires, permettant

ainsi en pratique de délimiter des portions de la frontière du domaine pour la prise en compte des conditions aux limites mixtes dans le cadre des simulations numériques.

Dans le chapitre 3, nous traitons de la discrétisation de la méthode présentée dans le chapitre 2. Ce travail commence par la mise en place d'une représentation sur une triangulation d'un champ de croix donné sur un domaine continu, permettant ainsi de prendre en compte les singularités de degré élevé. De plus, la notion de zone singulière introduite permet de traduire dans le cadre discret les conséquences des résultats obtenus dans le chapitre 2 sur l'initialisation de lignes de champ à partir de points singuliers. Par la suite, nous avons instauré la version discrète du processus de partitionnement, qui implique plusieurs étapes telles que le calcul de l'indice des points singuliers, l'approximation des lignes de champ émanant de ces points singuliers, l'extraction des régions délimitées par ces lignes de champ, et enfin, le maillage individuel de chacune de ces régions avec des mailles quadrilatérales. Une question cruciale à laquelle nous avons cherché à répondre était de savoir comment garantir que le partitionnement effectué dans le cadre discret est bien composé de quatre côtés. Nous avons résolu cette question en réalisant une analyse de convergence, identifiant un partitionnement dont les partitions sont constituées de quatre côtés sur le domaine continu, vers lequel converge le partitionnement construit sur la triangulation du domaine continu. Ainsi, nous démontrons qu'à la limite, le partitionnement construit sur la triangulation présente effectivement des partitions à quatre côtés. Il en découle que le maillage quadrilatéral construit à partir de ce partitionnement est bien un maillage du domaine d'origine (dans le sens où, en raffinant les mailles quadrilatérales, le maillage converge vers le domaine d'origine) puisque le partitionnement effectué dans le cadre discret converge vers un partitionnement de ce domaine.

Enfin, dans le chapitre 4, nous appliquons les approches développées précédemment au contexte des surfaces courbes dans l'espace. La difficulté principale dans ce cadre réside dans l'absence de référence globale pour le domaine considéré. L'angle du champ de croix est alors calculé à partir d'une référence arbitraire choisie en chaque espace tangent de la surface. Nous retrouvons ensuite les différents concepts définis dans les chapitres précédents, ainsi que la méthode de partitionnement des domaines considérés. Il est à noter que dans le cadre des surfaces courbes, une condition supplémentaire est requise pour garantir que les partitions obtenues sont bien à quatre côtés. Cela est dû à la possibilité de la présence d'anse dans les domaines étudiés. Nous établissons ensuite le processus d'alignement pour les domaines simplement connexes, puis nous procédons, comme précédemment, à l'analyse de convergence permettant de montrer que le maillage quadrilatéral construit sur la triangulation du domaine est effectivement un maillage quadrilatéral du domaine de calcul.

5.2 Perspectives

Dans cette section, nous mettons en lumière des axes de recherche potentiels qui pourraient élargir et approfondir notre compréhension du domaine, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles découvertes et à des développements passionnants. Pour amorcer cette exploration, nous revisitons d'abord le défi inhérent à l'homogénéisation du maillage. Ensuite, nous nous penchons sur plusieurs problématiques, notamment l'adaptation du maillage, la gestion des cycles limites, le traitement des domaines périodiques, et les potentialités présentées par les maillages d'ordre supérieur.

Retour sur le problème de l'homogénéisation

Ici, nous réexaminons la problématique de l'homogénéisation introduite dans le chapitre 3. L'objectif central est de déterminer comment, à partir d'un domaine donné, générer un maillage structuré par bloc avec des mailles homogènes en utilisant un champ de croix. Outre la solution présentée dans la section 3.7, une alternative pourrait impliquer l'utilisation de la méthode de génération de l'équation de Laplace, décrite dans la sous-section 3.6.1.

En principe, l'équation de Laplace génère des champs de croix en propageant la normale au bord du domaine, ce qui peut potentiellement engendrer des points singuliers très rapprochés. Cette proximité entre les points singuliers peut conduire, dans certains cas, à une distribution non homogène des partitions. Pour contrecarrer cet effet, l'idée est d'initier la propagation du champ de croix à partir de sources appropriées, autres que le bord. Introduire ces sources supplémentaires dans les conditions aux limites de l'équation vise à influencer la distribution des points singuliers finaux dans le champ de croix. Nous espérons que cette approche conduira à une dispersion plus éloignée des points singuliers les uns des autres, favorisant ainsi l'obtention d'une distribution des partitions plus homogène dans le maillage résultant. Cette approche est illustrée dans les figures 5.1 et 5.2.

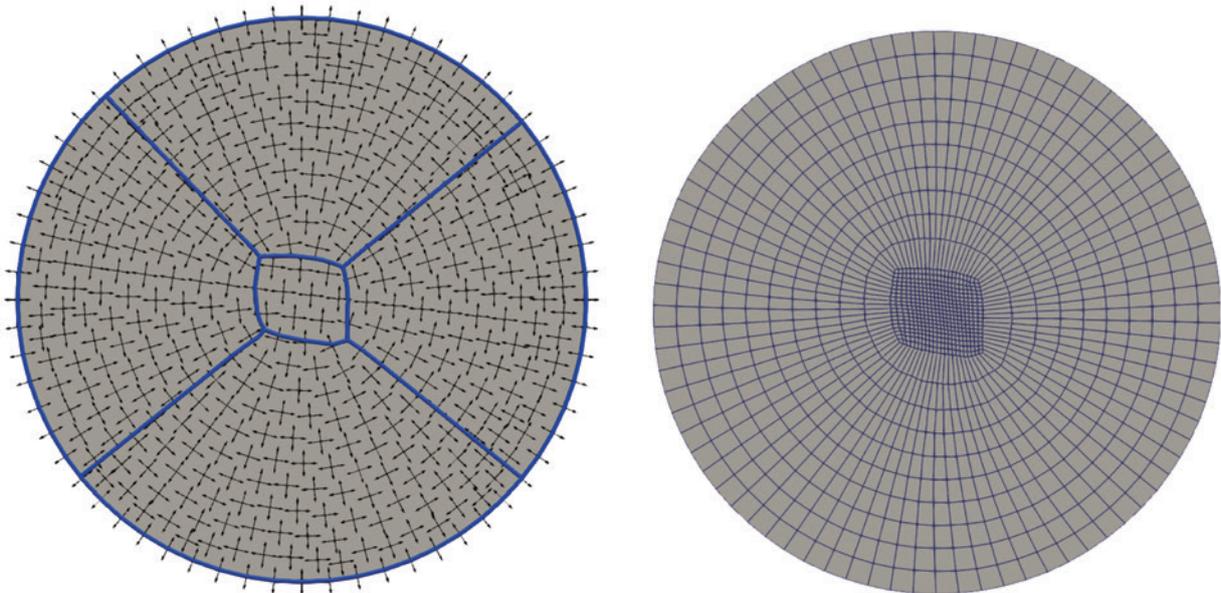


FIGURE 5.1 – Première itération.

Dans cet exemple particulier, nous commençons par générer un maillage en utilisant un champ de croix dérivé de la résolution de l'équation de Laplace, comme illustré dans la figure 5.1. Ensuite, nous identifions un point dans le domaine où la densité de maille semble plus élevée, et nous itérons le calcul du champ de croix en utilisant la même équation. Cependant, cette fois, dans les conditions aux limites, nous attribuons une croix arbitraire au point spécifié. Le résultat de cette itération est le champ de croix présenté dans la figure 5.2, qui est ensuite utilisé pour générer le maillage illustré sur la même figure. On peut observer que les points singuliers s'éloignent les uns des autres, permettant ainsi d'obtenir des partitions plus homogènes. Ce processus itératif peut être poursuivi en identifiant d'autres points dans le domaine où la densité de maille est élevée, puis en répétant l'opération décrite précédemment.

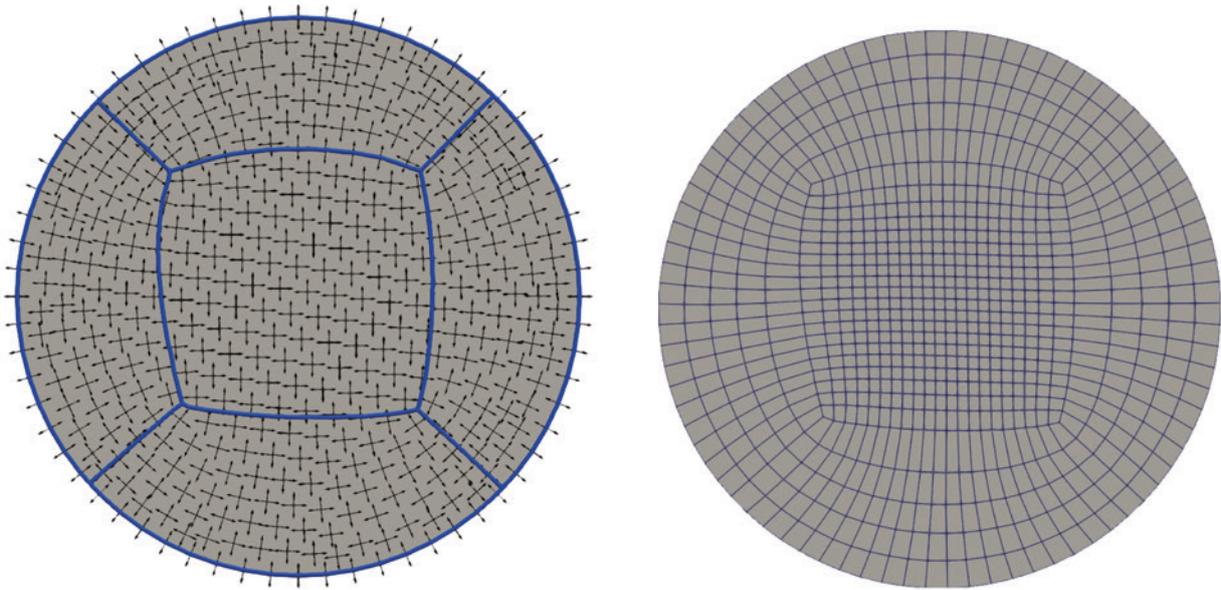


FIGURE 5.2 – Deuxième itération.

Une autre approche envisageable consiste à rechercher des points d'équilibre, où ces points sont relativement équidistants les uns des autres ainsi que des bords du domaine. En utilisant ensuite la méthode présentée dans la sous-section 3.6.1, nous générons un champ de croix sur le domaine que nous alignons ensuite sur le bord du domaine à partir de l'opération d'alignement. Une hypothèse sous-jacente est que, en garantissant une distance équidistante des points d'équilibre par rapport aux bords, le champ de croix résultant pourrait présenter des points singuliers plus uniformément répartis. Cette uniformité pourrait contribuer à obtenir un partitionnement avec des partitions plus homogènes. Pour identifier ces points d'équilibre, une approche pourrait consister, dans un premier temps, à déterminer la distance moyenne entre le bord et l'intérieur du domaine. On peut mettre en œuvre cette approche en attribuant des valeurs décroissantes aux triangles du bord vers l'intérieur du domaine, simulant ainsi une progression de front. En identifiant ensuite les sommets correspondants à la valeur moyenne des attributions des triangles, on sélectionne parmi ces sommets ceux qui sont le plus équidistants possible. Comme illustré sur la figure 5.3, un coloriage des triangles du bord vers l'intérieur du domaine permet de délimiter des zones d'équilibre, où l'on pourrait positionner les points singuliers sur la frontière.

Ces deux approches, telles qu'elles sont exposées, présentent une limitation majeure, à savoir qu'elles ne permettent pas de contrôler la répartition des séparatrices dans le domaine une fois que les points singuliers sont disposés de manière équidistante les uns par rapport aux autres. La question qui se pose est donc de savoir s'il est possible d'influencer le champ de manière à, par exemple, maintenir la connectivité des séparatrices au cours des itérations successives dans le premier cas.

Comment adapter le maillage ?

L'adaptation du maillage à un contexte physique donné représente également une problématique centrale dans les simulations numériques. Les approches de génération

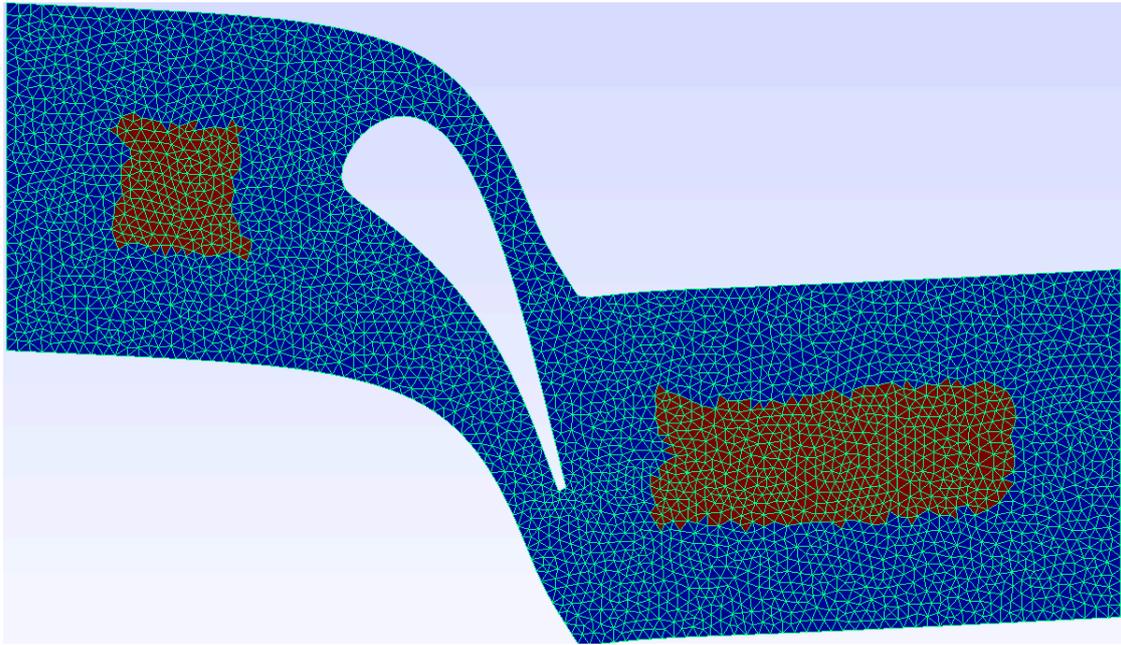


FIGURE 5.3 – Détection de zones d'équilibres.

explorées dans cette thèse ont pour objectif de converger vers cette application. En effet, l'idée de choisir un champ de croix et de le modifier pour qu'il serve à mailler un domaine découle du souhait de conserver le plus de caractéristiques possible dans le champ initial, garantissant ainsi que le maillage généré soit adapté au contexte d'où a été récupéré ce champ. Ce champ initial peut être déduit d'une estimation à posteriori.

Dans ce sens, une piste consiste à proposer un champ de croix aligné le plus possible sur une référence (C_r , d'angle θ) et respectant des contraintes issues d'un autre champ de croix (C_a , d'angle ϕ), typiquement garder le plus de caractéristiques possibles d'une estimation a posteriori et assurer l'alignement avec le bord du domaine. On cherche donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} \tilde{\theta} := \theta + \alpha\phi \in C^1(\Omega), \\ \min_{\alpha=1} \left| \theta - \tilde{\theta} \right|, \end{cases} \quad (5.1)$$

ce qui revient à résoudre au sens champ de croix (possibilité de $+k\pi/2$ sur les angles) le problème :

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in C^1(\Omega, [0,1]), \alpha=1 \text{ sur } \partial\Omega} (\|\alpha\phi\|_\infty + \lambda \|\nabla(\alpha\phi)\|_\infty).$$

En éléments finis \mathbb{P}_1 , on a :

$$\|\alpha\phi\|_{L^\infty(T)} = \max_{S \text{ sommets de } T} \left(\min_{k \in [-4,3]} |\alpha(S)\phi(S) + k\pi/2| \right), \quad (5.2)$$

$$\|\nabla(\alpha\phi)\|_{L^\infty(T)} = \min_{k \in [0,3]^3} \left\| \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha(S_i)\phi(S_i) + k_i\pi/2}{h_{T,i}} \right\|,$$

où $h_{T,i}$ est la longueur de la hauteur du triangle T issue du sommet S_i et $h_{T,i}$ la hauteur

normalisée. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\alpha\phi\|_{C^1(\Omega)} &= \max_{S \text{ sommets de } T(\Omega)} \left(\min_{k \in [0,3]} |\alpha(S)\phi(S) + k\pi/2| \right) \\ &+ \lambda \max_{T \in \mathcal{T}(\Omega)} \left(\min_{k \in [0,3]^3} \left\| \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha(S_i)\phi(S_i) + k_i\pi/2}{h_{T,i}} \right\| \right). \end{aligned}$$

Cette approche cependant ne marche pas avec les angles représenté en \mathbb{P}_1 . L'alternative consiste à trouver $\alpha \in C^1(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} \tilde{\theta} := \theta + \alpha \in C^1(\Omega), \\ \min |\theta - \tilde{\theta}|, \\ \alpha = \phi - \theta \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.3)$$

En pratique, on va chercher $\alpha_h \in \mathbb{P}_1(\Omega)$ qui approche α . Le contrôle C^1 de la solution n'est pas possible à rendre si on peut toujours supposer que α_h est une approximation nodale d'une fonction α plus régulière. En particulier, cette considération peut s'appliquer sur les nœuds d'un triangle donné en faisant par exemple passer α_h de 1 à 0 brutalement sur un/deux nœud/s du triangle, ce qui revient à dire que $\|\nabla\alpha\| \leq h^{-1}$ où h est la hauteur du triangle dans le sens de variation considéré. Il s'en suivrait alors de trop rapides variations de la fonction $\tilde{\theta}$ reconstruite (et ses lignes de champs varieraient très vite ce qui engendrerait des éléments très déformés et/ou très petits). Pour pallier ce problème, on impose une variation maximale à ne pas dépasser notée $\nu > 0$.

De plus, dans le cadre du maillage quadrilatéral, si θ représente l'angle du champ de croix aligné avec le bord, alors, pour un domaine n'étant pas à 4 côtés, on sait que θ présentera des singularités dans le domaine et donc ne sera pas $C^1(\Omega)$. Le système (5.3) n'a donc pas de solution. Toutefois, si θ est aligné avec le bord alors il va exister un voisinage V de $\partial\Omega$ privé de $\partial\Omega$ dans lequel θ sera C^1 . On peut alors essayer de résoudre (5.3) pour un α à support dans V et C^1 , $\tilde{\theta}$ sera alors l'angle du champ de croix obtenu par $R(\alpha)C_r$, qui sera un champ de croix presque- C^1 et de singularités coïncidentes avec celles de C_r . Nous présentons dans l'annexe C une approche pour discrétiser cette équation.

Une autre vision pour l'adaptation de maillage serait d'utiliser la méthode d'optimisation CVT (Centroid Voronoi Tessellation) [Chen, 2004] en tenant compte d'une densité d'erreur à posteriori permettant d'influer le déplacement des noeuds. Une telle approche cependant en opposition avec ce qui a été présenté plus haut adapte directement le maillage quadrilatéral générer au lieu d'adapté le champ de croix dont il est issu. On conserve la nature en structure par bloc du maillage ainsi que les connectivités.

Comment gérer les cycles limites ?

Un défi crucial associé à la méthode de génération de maillage quadrilatéral à partir de champs de croix réside dans la gestion des cycles limites. En effet, le contrôle sur la trajectoire des séparatrices n'est pas a priori déterminé, ce qui conduit souvent à un échec du partitionnement en présence de cycles limites, surtout dans le cas des surfaces courbes dans l'espace. Nous proposons ici une approche de solution pour ce problème.

L'idée principale consiste à arrêter l'intégration des séparatrices convergentes en cycle lorsque celles-ci interagissent avec une autre séparatrice. À la fin du processus de partitionnement, on se retrouve avec des blocs n'ayant pas nécessairement quatre côtés et qui peuvent potentiellement présenter des T-jonctions, telles que celles observées dans [Viertel and Osting, 2019]. Ces T-jonctions correspondent aux points d'arrêt des séparatrices qui convergent vers un cycle limite.

Une première approche suggère d'utiliser une subdivision de Catmull-Clark [Catmull and Clark, 1998, Kuth et al., 2023] pour subdiviser tous les blocs en des régions à quatre côtés tout en préservant la conformité entre les blocs. Cependant, cette méthode peut potentiellement générer des nœuds très irréguliers avec des valences élevées. Une autre piste, basée sur cette dernière approche, consiste à repérer les blocs qui ne sont pas à quatre côtés et à les subdiviser de manière spécifique. Supposons que toutes les partitions obtenues après le partitionnement ont au moins trois sommets. Lorsque le nombre de sommets est strictement supérieur à 4, on identifie quatre nœuds que l'on considère comme les coins du bloc. Ensuite, on associe deux à deux les sommets appartenant aux côtés non adjacents et les sommets appartenant aux côtés adjacents en utilisant un nœud singulier. À ce stade, on obtient une région qui a des sommets supplémentaires (autres que les coins choisis) uniquement sur un côté. On peut utiliser la subdivision de Catmull-Clark à cette étape. L'avantage de cette approche est la réduction du nombre de blocs à créer avec la subdivision de Catmull-Clark, diminuant ainsi la valence des points irréguliers générés. Pour les partitions de 3 et 5 côtés, on procède directement à la subdivision de Catmull-Clark. Ensuite, il est nécessaire de gérer la fusion des séparatrices d'un bloc à l'autre afin de ne pas engendrer de nouveaux cycles limites. Il est important de noter que les blocs générés avec une telle approche seront potentiellement très déformés. Cet artefact peut être résolu en optimisant le maillage généré via la méthode CVT présentée dans la section 3.7. Nous illustrons les différents cas de décompositions sur les figures 5.4, 5.5 et 5.6. Les points noirs sur les bord représentent les points d'arêts des lignes de champ convergeant en cycle limite.

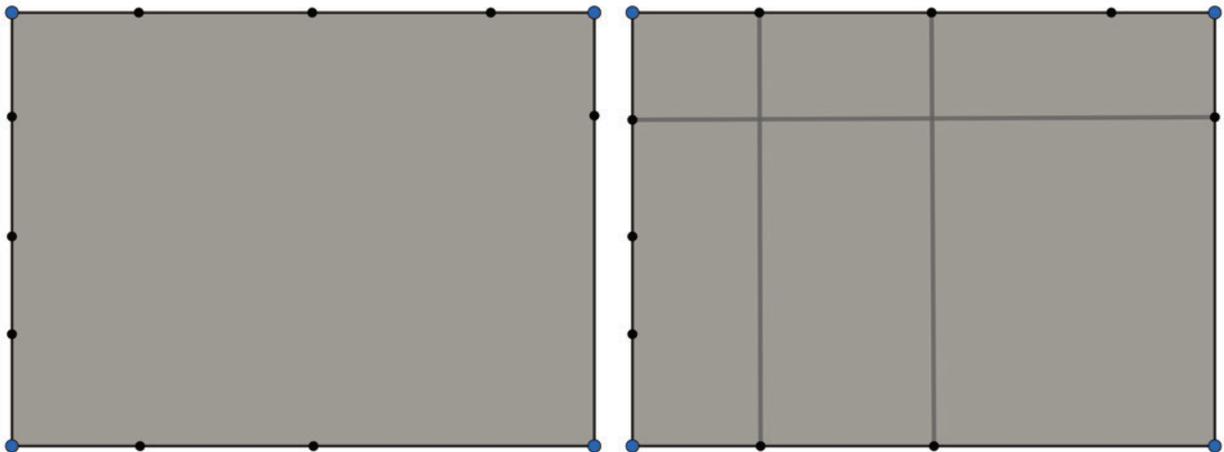


FIGURE 5.4 – Premier cas.

Face à un domaine périodique

Une autre considération importante concerne la gestion des domaines périodiques, c'est-à-dire les domaines où les conditions aux bords sont périodiques d'un bord à un

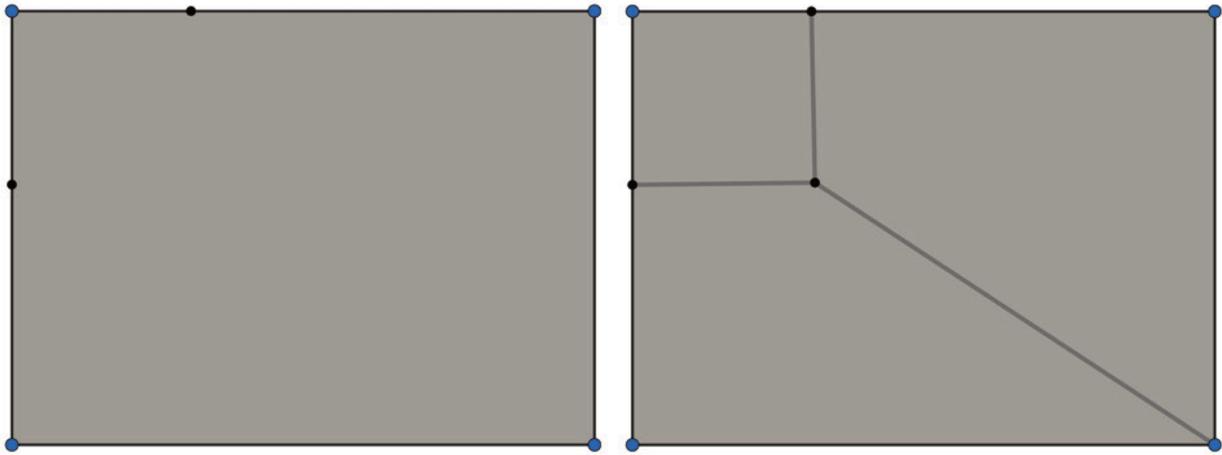


FIGURE 5.5 – Deuxième cas.

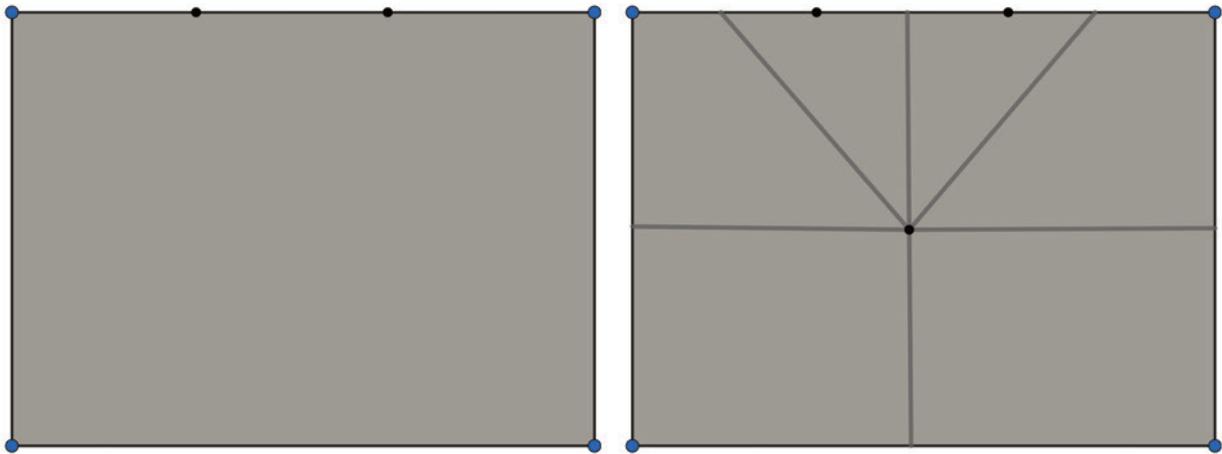


FIGURE 5.6 – Troisième cas.

autre. C'est notamment le cas du modèle LS89, détaillé dans [Gourdain et al., 2010], où, par exemple, le bord supérieur et le bord inférieur doivent être connectés par des conditions aux bords périodiques. La question qui se pose est donc de savoir comment construire un maillage structuré par blocs avec la méthode des champs de croix de manière à générer des blocs conformes périodiquement d'un bord à l'autre. Sur la figure 5.7, où le maillage en blocs structurés du LS89 est superposé, on remarque que les blocs ne sont pas périodiquement conformes, posant ainsi des défis pour exploiter la nature structurée en bloc dans un contexte périodique. Cette problématique demeure non résolue et reste à être investiguée.

Mailles d'ordre supérieur

Dans notre étude, les quadrilatères construits le long du bord du domaine ont leurs nœuds positionnés le long des arêtes du maillage triangulaire utilisé pour la construction. Cependant, dans les codes de calcul, il peut être nécessaire d'interpoler la courbure le long de la frontière du maillage quadrilatéral, surtout dans le cas de conditions limites impliquant la dérivée normale, telles que les conditions aux limites de Neumann et de Robin. Face à une telle situation, les calculs de reconstitution de la normale dépendront de la résolution obtenue pour les mailles du bord lors de la construction

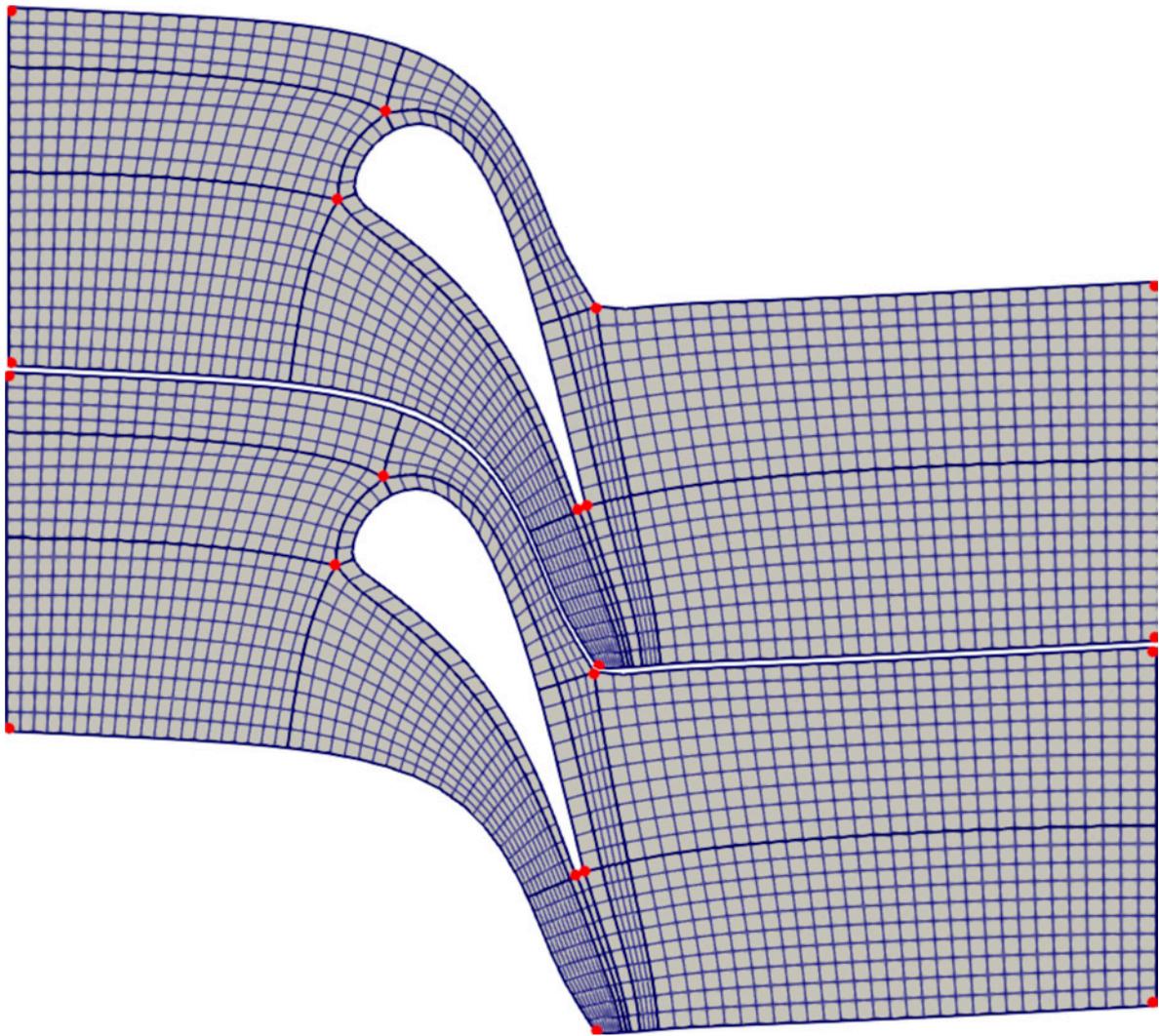


FIGURE 5.7 – Superposition du maillage du LS89.

du maillage quadrilatéral (voir la figure 5.8). Ainsi, si la finesse demandée pour le maillage quadrilatéral est supérieure à celle du maillage triangulaire servant de base à la construction, il sera impossible de récupérer de manière précise les informations avec les nœuds de bord du maillage quadrilatéral. Par conséquent, la définition explicite de $\Omega_{\tilde{h}}$ permet de se libérer des triangles de bord et de ne plus être contraint par cette dépendance.

En utilisant une interpolation d’Hermitte, on peut ainsi construire une reconstitution de régularité \mathcal{C}^1 , $\partial\Omega_h$ de $\partial\Omega_h$. Plus concrètement, soit a et b deux sommets de Ω_h . L’arête ab est remplacé par le polynôme P défini pour tout $p \in ab$ par :

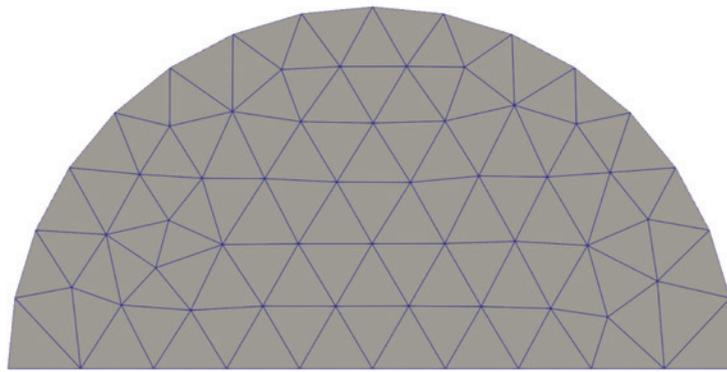
$$P(p) = q_a(p)P_a(p) + q_b(p)P_b(p),$$

où la fonction q_x , $x \in \{a, b\}$ est donné pour tout $p \in ab$ par :

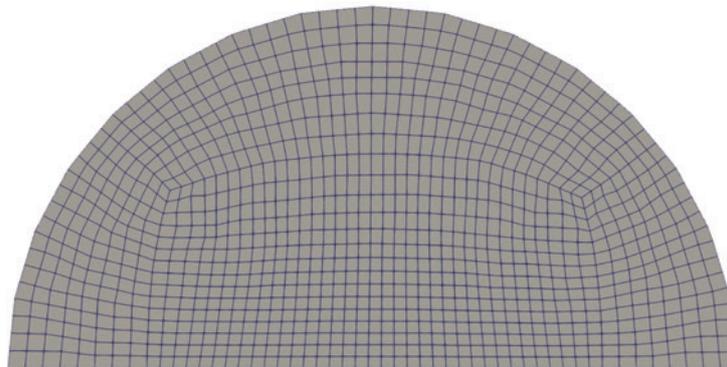
$$q_x(p) = \prod_{y \in \{a, b\}, y \neq x} \left(\frac{p - y}{x - y} \right)^2,$$

et la fonction P_x , $x \in \{a, b\}$ est donné pour tout $p \in ab$ par :

$$P_x(p) = x + (p - x)(\mathcal{N}(x) - q'_x(x)x),$$



(a) Maillage triangulaire.



(b) Maillage quadrilatéral.

FIGURE 5.8 – Illustration d’un maillage quadrilatéral plus fin que le maillage triangulaire sous-jacent.

avec

$$q_x(x) = 1, \quad q'_x(x) = \sum_{y \in \{a,b\}, y \neq x} \frac{2}{x-y}, \quad \forall j \neq i \quad q'_x(y) = q_x(y) = 0.$$

et $\mathcal{N}(x)$ est la normale sortante en x défini par l’équation (3.16).

Nous illustrons sur la figure 5.9 la reconstitution d’une arête donné par ces deux sommets

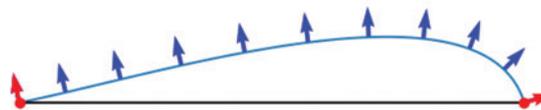


FIGURE 5.9 – Illustration de la reconstitution d’une arête de bord par le molynôme d’Hermite.

ainsi que les normales en ces sommets. On peut alors se servir de cette reconstruction pour affiner le maillage quadrilatéral en y plaçant les noeuds de bord.

Annexe A

Caractéristique d'Euler

La caractéristique d'Euler, formulée par le mathématicien suisse Leonhard Euler au XVIIIe siècle, joue un rôle central dans les domaines de la topologie et de la géométrie. Elle constitue un outil puissant permettant de décrire de manière élégante et efficace des objets géométriques complexes en utilisant des concepts mathématiques simples. Il s'agit d'un invariant topologique c'est à dire un nombre associé à une variété, qui est invariant par homéomorphisme (c'est-à-dire que la valeur de cet invariant est la même pour deux variétés homéomorphes).

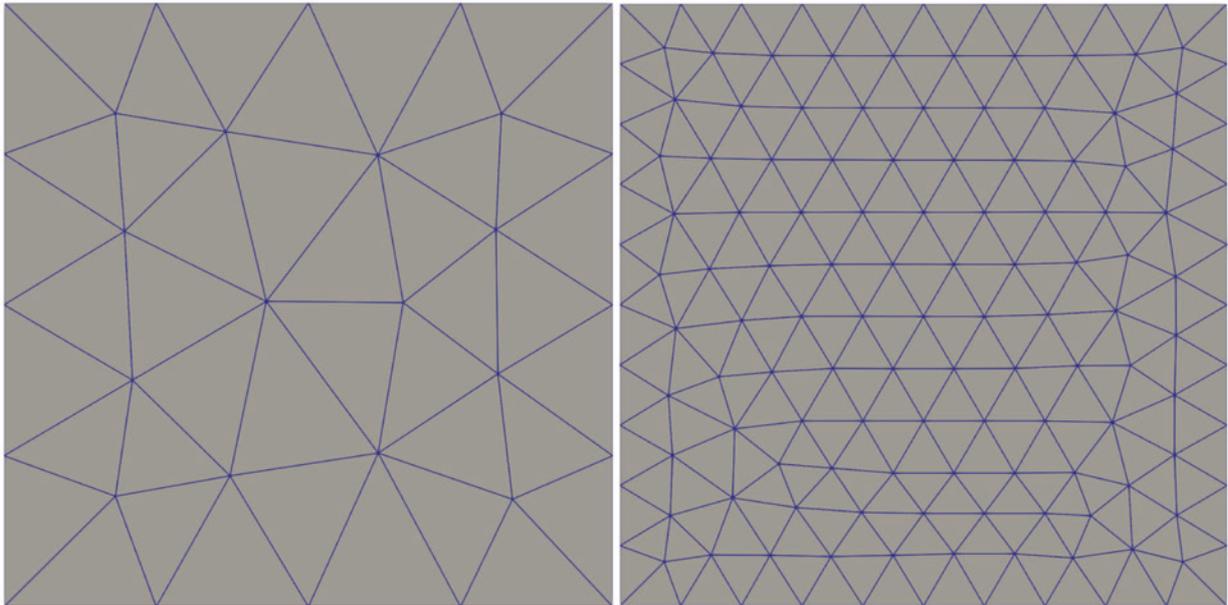


FIGURE A.1 – Illustration de l'invariance de la caractéristique d'Euler. À gauche on a une triangulation de 30 sommets, 71 arêtes et 42 triangles ($\chi(\Sigma) = 1$) et à droite, on a une triangulation de 142 sommets, 383 arêtes et 242 triangles ($\chi(\Sigma) = 1$).

Définition A.1 ([[Henri Paul, 2014](#)]). Soit Σ une surface compacte. Notons S , A et F le nombre de sommets, arêtes et faces d'une décomposition polyédrale de Σ . Alors le nombre

$$S - A + F,$$

est indépendant du choix de cette décomposition polyédrale. On l'appelle caractéristique d'Euler de Σ et on la note $\chi(\Sigma)$.

La caractéristique d'Euler d'une surface orientable Σ peut être calculée à partir de son genre g et du nombre b de composante connexe de son bord [Vallet, 2008] :

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g - b.$$

Pour les variétés riemanniennes, la caractéristique d'Euler peut également être trouvée en intégrant la courbure à partir du théorème de Gauss-Bonnet. Ainsi si Σ est une variété Riemannienne compacte alors on a [Lee, 2018] :

$$\int_{\Sigma} K dA + \int_{\partial\Sigma} k_g ds = 2\pi\chi(\Sigma)$$

Ici, $\partial\Sigma$ désigne le bord de Σ , K la courbure gaussienne de Σ et k_g la courbure géodésique de $\partial\Sigma$. dA est l'élément d'aire de la surface, et ds est l'élément de ligne le long du bord de Σ .

Nous illustrons l'invariance de la caractéristique d'Euler sur la figure A.1 avec deux triangulations différentes d'un même domaine. Dans ce cas la caractéristique d'Euler vaut 1 avec $g = 0$ et $b = 1$.

Annexe B

Opérateur Laplacien discret

L'opérateur Laplace-Beltrami Δ joue un rôle central dans les algorithmes géométriques appliqués aux domaines courbes. La formule des cotangentes, exposée dans [Tianye, , Crane, 2019], offre une approche pratique pour approximer cet opérateur sur des surfaces triangulées bidimensionnelles. Considérons la résolution de l'équation de Poisson

$$\Delta u = f,$$

sur une surface courbée Ω . Ici, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ représente une fonction source, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue, et Δ désigne l'opérateur Laplace-Beltrami associé à Ω , également appelé le laplacien. Une approche courante pour approximer la solution fait appel au concept de solution faible. Les solutions faibles pour l'équation de Poisson sont des fonctions ϕ qui satisfont à l'ensemble d'équations suivant :

$$\int_{\Omega} \phi \Delta u \, dA = \int_{\Omega} \phi f \, dA, \quad \forall \text{ fonctions tests } \phi.$$

Il est important de souligner que, selon la méthode de Galerkin, le choix des fonctions de base pour u , f , et la fonction test ϕ est essentiel. Ainsi, nous avons besoin d'un ensemble de fonctions de base sur Ω . Pour une surface triangulée, les fonctions chapeau linéaires par morceaux h_i se révèlent être le choix le plus naturel. Elles sont définies de manière à valoir un au sommet associé et zéro à tous les autres sommets. Par conséquent, si nous connaissons la valeur de $u(x)$ sur chaque sommet v_i , $u(v_i) = u_i$, nous pouvons l'approximer de la manière suivante :

$$u(x) = \sum_i u_i h_i(x).$$

De même, pour la fonction source f , nous avons :

$$f(x) = \sum_i f_i h_i(x).$$

Avec la discrétisation de u et f , en utilisant h_i comme fonctions tests, nous pouvons maintenant exprimer le problème de Poisson d'origine comme un ensemble de $|V|$ équations :

$$\int_{\Omega} h_i \Delta u \, dA = \int_{\Omega} h_i f \, dA, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |V|\},$$

où $|V|$ représente le nombre de sommets dans la triangulation. Ainsi on a :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} h_i \Delta u \, dA = - \int_{\Omega} \nabla h_i \cdot \nabla u \, dA = - \int_{\Omega} \nabla h_i \cdot \nabla \left(\sum_j u_j h_j \right) \, dA = - \sum_j u_j \int_{\Omega} \nabla h_i \cdot \nabla h_j \, dA, \\ \int_{\Omega} h_i f \, dA = \int_{\Omega} h_i \cdot \left(\sum_j b_j h_j \right) \, dA = \sum_j f_j \int_{\Omega} h_i \cdot h_j \, dA. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Soit L la matrice $L = \{L_{ij}\}^{|V| \times |V|}$, $L_{ij} = \int_{\Omega} \nabla h_i \cdot \nabla h_j \, dA$ et M la matrice $M = \{M_{ij}\}^{|V| \times |V|}$, $M_{ij} = \int_{\Omega} h_i \cdot h_j \, dA$. On a alors le problème linéaire :

$$L\mathbf{u} = M\mathbf{f},$$

avec

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{|V|} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{|V|} \end{bmatrix}.$$

Pour calculer la matrice L , nous examinons les éléments $L_{ij} = \int_{\Omega} \nabla h_i \cdot \nabla h_j \, dA$, dont l'évaluation équivaut au calcul de l'intégrale sur chaque triangle, suivi de la sommation des résultats obtenus sur l'ensemble des triangles de Ω . Étant donné que h_i est une fonction linéaire par morceau sur chaque triangle, le calcul sur un triangle donné revient à multiplier le scalaire $\nabla h_i \cdot \nabla h_j$ sur ce triangle par la surface du triangle. Nous allons maintenant examiner le gradient d'une fonction linéaire sur un triangle.

Soit g une fonction linéaire définie sur un triangle T de sommets v_1, v_2, v_3 et d'aire A avec $g(v_1) = 1, g(v_2) = g(v_3) = 0$. g étant linéaire, on a $g(x) = g(x_0) + \nabla g|_{x_0} \cdot (x - x_0)$ pour tout x appartenant au triangle. Sachant que $\nabla g \cdot (v_1 - v_3) = 1$ et $\nabla g \cdot (v_2 - v_3) = 0$, il vient que ∇g est perpendiculaire à l'arête v_2v_3 et on a d'une part :

$$\|\nabla g\| \|\overrightarrow{v_1v_3}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \|\nabla g\| \|\overrightarrow{v_1v_3}\| \sin\theta = 1,$$

où θ désigne l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{v_1v_3}$ et $\overrightarrow{v_2v_3}$. Autrement dit,

$$\|\nabla g\| = \frac{1}{h}, \quad (\text{B.2})$$

et d'autre part :

$$\nabla g = \frac{\overrightarrow{v_2v_3}^\perp}{2\mathcal{A}}, \quad (\text{B.3})$$

où $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{v_2v_3}\| h$ désigne l'aire du triangle et h est la hauteur passant par v_1 et perpendiculaire au côté v_2v_3 avec $\overrightarrow{v_2v_3}^\perp$ la rotation dans le sens anti-horaire de $\overrightarrow{v_2v_3}$ d'angle $\pi/4$.

On peut maintenant évaluer

$$\int_T \nabla h_i \cdot \nabla h_j \, dA,$$

où T désigne un triangle du maillage.

Pour $i = j$, on a :

$$\int_T \langle \nabla h_i, \nabla h_i \rangle dA = \mathcal{A} \|\nabla h_i\|^2$$

En utilisant l'équation B.2, on obtient :

$$\int_T \langle \nabla h_i, \nabla h_i \rangle dA = \mathcal{A} \frac{1}{h^2} = \frac{b}{2h}$$

où h désigne la hauteur passant par le sommet en question et b est la longueur du côté opposé à ce sommet (voir figure B.1). On se retrouve alors avec la formule :

$$\int_T \langle \nabla h_i, \nabla h_i \rangle dA = \frac{h \cot \theta_j^{ki} + h \cot \theta_k^{ij}}{2h}$$

$$\int_T \langle \nabla h_i, \nabla h_i \rangle dA = \frac{1}{2} (\cot \theta_j^{ki} + \cot \theta_k^{ij})$$

En notant α et β les angles intérieurs aux deux autres sommets du triangle (voir figure B.1).

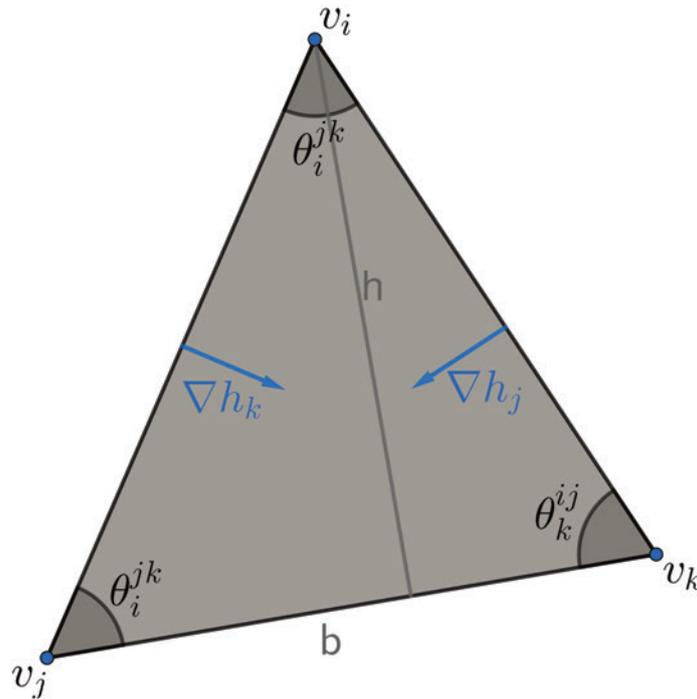


FIGURE B.1 – Cas où les sommets sont identiques.

Regardons maintenant le cas où on a $i \neq j$ avec v_i et v_j appartenant à une même arête. On a :

$$\int_T \langle \nabla h_i, \nabla h_j \rangle dA = \mathcal{A} \langle \nabla h_i, \nabla h_j \rangle$$

En utilisant l'équation B.3, on obtient :

$$\int_T \langle \nabla h_i, \nabla h_j \rangle dA = \frac{1}{4\mathcal{A}} \langle \overrightarrow{v_k v_i^\perp}, \overrightarrow{v_i v_j^\perp} \rangle$$

En adoptant les notations de la figure B.1, il vient :

$$\begin{aligned}
 \int_T \langle \nabla h_i, \nabla h_j \rangle dA &= -\frac{\|\vec{v}_k \vec{v}_i\| \|\vec{v}_i \vec{v}_j\| \cos \theta_i^{jk}}{4A} \\
 &= -\frac{(h/\sin \theta_j^{ki})(h/\sin \theta_3^{12}) \cos \theta_i^{jk}}{2bh} \\
 &= -\frac{h \cos \theta_i^{jk}}{2(h \cot \theta_j^{ki} + h \cot \theta_k^{ij}) \sin \theta_j^{ki} \sin \theta_k^{ij}} \\
 &= -\frac{\cos \theta_i^{jk}}{2(\cos \theta_j^{ki} \sin \theta_k^{ij} + \cos \theta_k^{ij} \sin \theta_j^{ki})} \\
 &= -\frac{\cos \theta_i^{jk}}{2 \sin(\theta_j^{ki} + \theta_k^{ij})} \\
 &= -\frac{\cos \theta_i^{jk}}{2 \sin \theta_i^{jk}} \\
 \int_T \langle \nabla h_i, \nabla h_j \rangle dA &= -\frac{1}{2} \cot \theta_i^{jk}
 \end{aligned}$$

Enfin lorsque $i \neq j$ et que v_i et v_j n'appartiennent pas à une même arête, on a :

$$\int_T \langle \nabla h_i, \nabla h_j \rangle dA = 0.$$

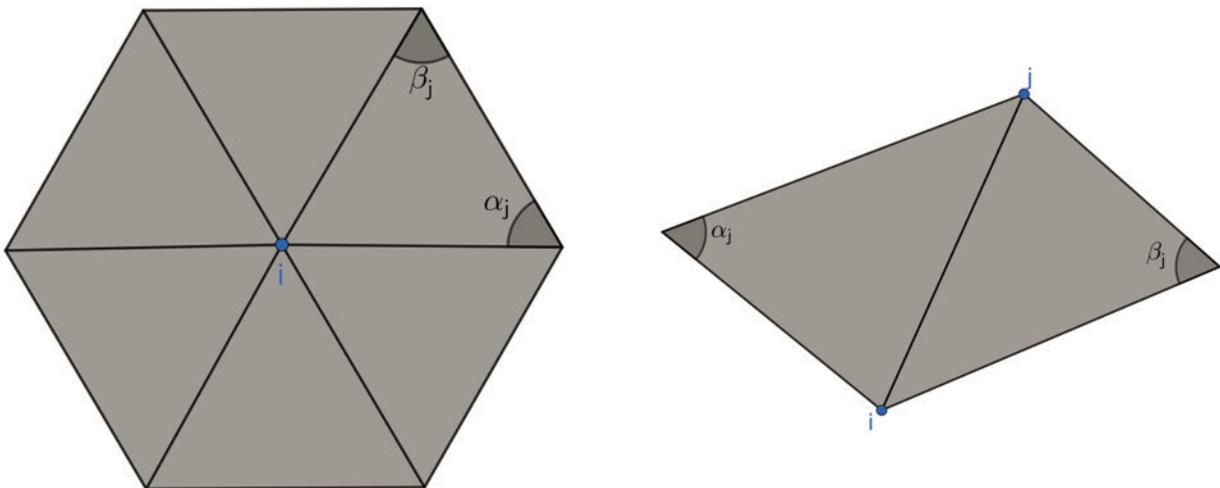


FIGURE B.2 – Somme autour des sommets.

En sommant ces résultat sur tous les triangles et en adoptant les notations de la figure

B.2, on obtient :

$$L_{ij} = \int_{\Omega} \langle \nabla h_i, \nabla h_j \rangle dA = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{k \sim i} (\cot \alpha_j + \cot \beta_j), & \text{si } i = j, \\ -\frac{1}{2} (\cot \alpha_j + \cot \beta_j), & \text{si } j \sim i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $i \sim j$ signifie que les sommets v_i et v_j sont adjacents. On se ramène ainsi à une construction simple basée juste sur les informations géométriques (les angles) du maillage.

Annexe C

Une approche pour la discrétisation du problème d'adaptation

Pour une question d'efficacité nous allons remplacer la résolution du problème d'optimisation globale (5.3) en une série d'optimisations locales. L'idée est de procéder triangle par triangle en notant que la contrainte de bord permet de définir explicitement la valeur de α . La formulation éléments finis de (5.3) avec cette contrainte revient à trouver $\alpha_h \in \mathbb{P}_1(\Omega)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\theta}_h := \theta_h + \alpha_h \in P^1(\Omega), \\ \min |\theta_h - \tilde{\theta}_h|, \\ \alpha_h = \phi_h - \theta_h, \partial\Omega, \\ \text{Supp } \alpha_h \subset V, \\ \|\nabla \alpha_h\| \leq \nu. \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

En pratique, la résolution de (C.1) peut être effectuée via la construction locale de $\tilde{\theta}_h$ sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ suivante :

1. Affectation des valeurs $\tilde{\theta}_h(S) = \phi_h(S)$ pour tous les nœuds $S \in \partial\Omega$,
2. Tant qu'il reste des triangles à traiter :
 - (a) Suppression des triangles ayant déjà $\tilde{\theta}_h$ calculé sur les 3 nœuds de la liste des triangles à traiter,
 - (b) Recherche des triangles T pour lesquels $\tilde{\theta}_h$ est définie pour 2 nœuds sur 3,
 - (c) Si les valeurs de $\tilde{\theta}_h$ pour 2 nœuds sur 3 de T sont nulles alors T est retiré de la liste à évaluer,

(d) Sur T_h on note S_1 et S_2 les nœuds pour lesquels $\tilde{\theta}_h$ a été évaluée, S_3 le troisième sommet, \vec{h}_3 la hauteur normalisée issue de S_3 , $X_h = x_h S_2 + (1 - x_h) S_1$ le pied de la hauteur et $h_3 = |X_h - S_3|$,

(e) À partir d'une valeur $\tilde{\theta}_h(S_1) \left[\frac{\pi}{2} \right]$, on calcule

$$\tilde{\theta}_h(S_2, S_1) := \arg \min_{y \in \tilde{\theta}_h(S_2) + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}} |y - \tilde{\theta}_h(S_1)|,$$

et on note $\beta = x_h \tilde{\theta}_h(S_2, S_1) + (1 - x_h) \tilde{\theta}_h(S_1)$,

(f) Calcul des variations maximales possibles pour $\theta \in [\theta^-, \theta^+]$:

$$\theta^\pm = \beta \pm |h_3| \nu \vec{h}_3.$$

(g) La solution est alors simplement obtenue par

$$\tilde{\theta}_h(S_3) = \min(\theta^+, \max(\theta^-, \theta_h(S_3))),$$

et le triangle est marqué comme traité.

La fonction $\alpha_h = \tilde{\theta}_h - \theta_h$ vérifie alors les propriétés attendues dans (C.1). Concernant le choix de ν , on prend typiquement

$$\nu = \frac{\pi}{4d} \text{ avec } d = nh,$$

où h est une grandeur caractéristique du maillage (typiquement la hauteur minimale) et $n > 0$. Cela porte le support de α_h typiquement à d de $\partial\Omega$. Le $\pi/4$ représente la valeur maximale de variation attendue sur les angles, vu qu'ils sont définis par modulo $\pi/2$.

Annexe D

Algorithme de coloriage

Nous exposons ici un algorithme qui permet l'identification des parties connexes d'un maillage en attribuant une marque (couleur) aux triangles appartenant à une même partie connexe.

Algorithme 7: Algorithme de coloriage

Entrées: Maillage

Sortie: Marquage des triangle par composante connexe

1. Marquer tous les triangle à 0

2. Soit $M=1$

tant que *tous les triangles ne sont pas marqués* **faire**

3. Soit V une liste vide

4. Stocker dans V un triangle non marqué

5. Marqué le triangle Stocké avec M

tant que V *n'est pas vide* **faire**

6. Soit $C = V$

7. Vider V

pour chaque *triangle* T **dans** C **faire**

pour chaque *arête* a **de** T **faire**

si a *n'est pas une arête de bord et que le triangle voisin à T par rapport à a n'est pas marqué* **alors**

8. Stocker dans V un triangle voisin

9. Marqué le triangle Stocké avec M

fin

fin

fin

fin

10. $M=M+1$

fin

Table des figures

1.1	Solutions éléments finis de $-\Delta u = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ dans Ω , $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Gauche : Maillage triangulaire et quadrilatéral. Milieu : Éléments d'ordre un. Droite : Éléments d'ordre deux. Source : [Reberol, 2018]	9
1.2	Diagramme de Voronoï. Source : [Hecht, 2007].	12
1.3	Maillage de Delauney. Source : [Hecht, 2007].	12
1.4	Phase de fermeture de la méthode du frontale. Source : [Baker, 2005].	14
1.5	(a) Décomposition en octree de la région autour d'un profil aérodynamique. (b) Conversion de la décomposition en octree en une triangulation. Source : [Baker, 2005]	16
1.6	Catégories de maillage quadrilatéral. A : régulier ; B : semi-régulier ; C : valence semi-régulier ; D1-D2 : non-structuré (D2 plus irrégulier que D1). Source : [Bommes et al., 2013].	17
1.7	Génération de maillage quadrilatéral par subdivision de chaque triangle en quatre quadrangles. Source : [Owen, 1998].	19
1.8	Combinaison de triangles. Source : [Owen, 1998].	19
1.9	Méthode de superposition d'une grille régulière. Source : [Schneiders, 1996].	21
1.10	Méthode de projection. Source : [Schneiders, 1996].	21
1.11	Construction de l'axe médian. Source : [de Moura Pinto and Freitas, 2009]	23
1.12	Illustration du processus de génération d'un quadrilatère à partir d'une arête frontale. Source : [Owen et al., 1999].	24
1.13	Gauche : Champ de croix sur un domaine étiré ; Droite : Maillage non-homogène d'un disque.	27
2.1	Illustration d'une croix.	32
2.2	Illustration d'un champ de représentation (en gauche) et du champ de croix associé (à droite).	34
2.3	Illustration de la rotation d'un champ de croix par rapport à un champ d'angle sur un domaine quelconque. Á gauche : champ de croix initial, au milieu : champ d'angle (en radian), à droite : champ de croix résultant.	35
2.4	Mise en évidence d'un champ de croix aligné le long du bord d'un carré, avec une annulation du champ dans les coins.	35
2.5	Illustration d'un champ de croix et du champ d'angle (en radian) correspondant.	37
2.6	Gauche : $id_{\bar{u}}(p) = -\frac{1}{4}$, milieu : $id_{\bar{u}}(p) = \frac{1}{4}$, droite : $id_{\bar{u}}(p) = 1$	42
2.7	Extension du domaine pour la prise en compte des points singuliers de bord dans la formule de Poincaré-Hopf.	43
2.8	Illustration de la preuve du lemme 2.22.	45
2.9	Illustration de la construction du champ de croix \bar{v} dans ∂V_p	47

2.10	Illustration of the construction of the restriction of π	48
2.11	Gauche : Illustration des séparatrices émanant de points singuliers d'indice $-1/4$ (à gauche) et d'indice $1/4$ (à droite).	53
2.12	Maillage quadrilatéral d'un domaine à partir d'un champ de croix aligné sur le bord du domaine.	56
2.13	Génération d'un champ de croix à partir d'un mode propre du Laplacien.	57
2.14	Découpage invalide obtenue à partir du champ de croix de la figure 2.13.	58
2.15	Illustration de l'opération d'alignement à partir du champ d'angle donné par l'équation (2.15).	59
2.16	Illustration de l'opération d'alignement à partir du champ d'angle donné par l'équation (2.19).	61
2.17	Une autre illustration de l'opération d'alignement à partir du champ d'angle donné.	63
2.18	Illustration de l'opération d'alignement sur un domaine non-simplement connexe à partir d'un champ de croix vérifiant la condition (2.20).	64
2.19	Illustration de l'opération d'alignement sur un domaine non-simplement connexe à partir d'un champ de croix vérifiant la condition (2.21).	65
2.20	Maillage du LS89 blade (géométrie détaillée dans [Gourdain et al., 2010]).	67
2.21	Illustration du maillage quadrilatéral d'un anneau à partir d'un champ de croix radial.	79
2.22	Partitionnement avec 3 points singuliers de bord d'indice $1/4$ et 1 point singulier interne d'indice $1/4$	81
2.23	Déplacement d'un des point singulier de bord du champ de croix illustré sur la figure 2.23.	82
2.24	Partitionnement avec 3 points singuliers interne d'indice $1/4$, deux points singuliers de bord d'indice $1/4$ et 1 points singuliers de bord d'indice $-1/4$	83
2.25	Un exemple de géométrie multi-matériaux. Gauche : Domaine, droite : maillage quadrilatéral.	85
3.1	Illustration de la construction des zones singulières (en bleu). En rouge, les emplacements où l'une des conditions de la définition 3.2 est vérifiée.	90
3.2	Comparaison de la localisation des points singuliers entre \bar{u} et \bar{u}_h	93
3.3	Comparaison de Ω et Ω_h	94
3.4	Illustration de l'initialisation de séparatrices à partir d'un point singulier d'indice $1/4$ et d'un point singulier d'indice $-1/4$	96
3.5	Illustration de l'initialisation de séparatrices à partir d'un point singulier de bord d'indice $-1/4$	96
3.6	Illustration des directions de sortie des séparatrices d'un point singulier d'indice $1/4$, utilisant deux méthodes distinctes.	97
3.7	Approximation d'une ligne de champ par la méthode de Heun.	99
3.8	Approche alternative pour l'intégration des lignes de champ dans un champ de croix.	100
3.9	Illustration de l'intégration d'une séparatrice dans un triangle singulier.	101
3.10	Illustration de la fusion de séparatrices.	102
3.11	Intersection de séparatrices.	103
3.12	Insertion d'un point dans un triangle.	104
3.13	Adaptation locale du triangle en fonction des points de passage des séparatrices.	105

3.14	Forçage par retournement. Source : [George, 1991].	106
3.15	Retournement d'arête suite à l'exemple de la figure 3.13.	107
3.16	Extraction des régions en tant que sous-maillages.	107
3.17	Echec du Partitionnement. Toutes les partitions n'ont pas 4 côtés.	108
3.18	Exemple d'identification de séparatrices parallèles : les séparatrices de même couleur sont parallèles.	109
3.19	Illustration du processus d'interpolation transfinie.	111
3.20	Maillage par tracé direct de lignes de champ dans le champ de croix.	112
3.21	Illustration du maillage d'un bloc par résolution d'EDP.	115
3.22	Illustration du maillage des blocs résultant du partitionnement de l'exemple présenté à la figure 3.18.	116
3.23	Illustration du processus d'alignement dans un cadre discret.	118
3.24	Exemple d'un maillage non homogène.	123
3.25	Homogénéisation du maillage présenté sur la figure 3.24.	124
3.26	Illustration du processus d'homogénéisation sur un autre exemple.	125
4.1	Gauche : Illustration des séparatrices émanant de points singuliers d'indice $-1/4$ (en haut) et d'indice $1/4$ (en bas).	129
4.2	Illustration du processus d'intégration d'une ligne de champ.	131
4.3	Illustration de la traversé par une séparatrice d'un triangle singulier.	132
4.4	Illustration de la fusion de deux séparatrices.	132
4.5	Illustration de l'intersection de séparatrices.	133
4.6	Extraction des séparatrices en tant que sous-maillage.	133
4.7	Maillage de chaque partition.	134
4.8	Partitionnement d'un double tore à partir d'un point singulier d'indice -2 : source [Chen et al., 2018].	134
4.9	Champ de vecteur obtenu par la méthode de diffusion de chaleur [Sharp et al., 2019].	136
4.10	Référence globale.	136
4.11	Champ de croix non aligné.	137
4.12	Alignement du champ de croix.	137
4.13	Autres illustrations de maillage quadrilatéral de surfaces courbes dans l'espace.	138
4.14	Alignement du champ de croix.	139
5.1	Première itération.	145
5.2	Deuxième itération.	146
5.3	Détection de zones d'équilibres.	147
5.4	Premier cas.	149
5.5	Deuxième cas.	150
5.6	Troisième cas.	150
5.7	Superposition du maillage du LS89.	151
5.8	Illustration d'un maillage quadrilatéral plus fin que le maillage triangulaire sous-jacent.	152
5.9	Illustration de la reconstitution d'une arête de bord par le molynôme d'Hermite.	152

A.1	Illustration de l'invariance de la caractéristique d'Euler. A gauche on a une triangulation de 30 sommets, 71 arêtes et 42 triangles ($\chi(\Sigma) = 1$) et à droite, on a une triangulation de 142 sommets, 383 arêtes et 242 triangles ($\chi(\Sigma) = 1$).	153
B.1	Cas où les sommets sont identiques.	157
B.2	Somme autour des sommets.	158

Références

- [Allaire, 2005] Allaire, G. (2005). Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. *Editions Ecole Polytechnique*, 22.
- [Alliez et al., 2003] Alliez, P., Cohen-Steiner, D., Devillers, O., Lévy, B., and Desbrun, M. (2003). Anisotropic polygonal remeshing. In *ACM SIGGRAPH 2003 Papers*, pages 485–493.
- [Arnold et al., 2000] Arnold, D. N., Brezzi, F., Cockburn, B., and Marini, D. (2000). Discontinuous galerkin methods for elliptic problems. In *Discontinuous Galerkin Methods : Theory, Computation and Applications*, pages 89–101. Springer.
- [Ascher and Petzold, 1998] Ascher, U. M. and Petzold, L. R. (1998). *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*, volume 61. Siam.
- [Baker, 2005] Baker, T. J. (2005). Mesh generation : Art or science ? *Progress in Aerospace Sciences*, 41(1) :29–63.
- [Barth and Ohlberger, 2003] Barth, T. and Ohlberger, M. (2003). Finite volume methods : foundation and analysis.
- [Beaufort et al., 2017] Beaufort, P.-A., Lambrechts, J., Henrotte, F., Geuzaine, C., and Remacle, J.-F. (2017). Computing cross fields a pde approach based on the ginzburg-landau theory. *Procedia engineering*, 203 :219–231.
- [Belkin et al., 2008] Belkin, M., Sun, J., and Wang, Y. (2008). Discrete laplace operator on meshed surfaces. In *Proceedings of the twenty-fourth annual symposium on Computational geometry*, pages 278–287.
- [Bethuel et al., 1994] Bethuel, F., Brezis, H., Hélein, F., et al. (1994). *Ginzburg-landau vortices*, volume 13. Springer.
- [Blacker and Stephenson, 1991] Blacker, T. D. and Stephenson, M. B. (1991). Paving : A new approach to automated quadrilateral mesh generation. *International journal for numerical methods in engineering*, 32(4) :811–847.
- [Bommes et al., 2013] Bommes, D., Lévy, B., Pietroni, N., Puppo, E., Silva, C., Tarini, M., and Zorin, D. (2013). Quad-mesh generation and processing : A survey. In *Computer graphics forum*, volume 32, pages 51–76. Wiley Online Library.
- [Bommes et al., 2009] Bommes, D., Zimmer, H., and Kobbelt, L. (2009). Mixed-integer quadrangulation. *ACM Transactions On Graphics (TOG)*, 28(3) :1–10.
- [Botella, 2016] Botella, A. (2016). *Génération de maillages non structurés volumiques de modèles géologiques pour la simulation de phénomènes physiques*. PhD thesis, Université de Lorraine.
- [Bowyer, 1981] Bowyer, A. (1981). Computing dirichlet tessellations. *The computer journal*, 24(2) :162–166.

- [Bunin, 2008] Bunin, G. (2008). Towards unstructured mesh generation using the inverse poisson problem. *arXiv preprint arXiv :0802.2399*.
- [Campen et al., 2015] Campen, M., Bommers, D., and Kobbelt, L. (2015). Quantized global parametrization. *Acm Transactions On Graphics (tog)*, 34(6) :1–12.
- [Catmull and Clark, 1998] Catmull, E. and Clark, J. (1998). Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. In *Seminal graphics : pioneering efforts that shaped the field*, pages 183–188.
- [Chen, 2004] Chen, L. (2004). Mesh smoothing schemes based on optimal delaunay triangulations. In *IMR*, pages 109–120. Citeseer.
- [Chen et al., 2018] Chen, W., Zheng, X., Ke, J., Lei, N., Luo, Z., and Gu, X. (2018). Metric based quadrilateral mesh generation. *arXiv preprint arXiv :1811.12604*.
- [Cohen-Steiner et al., 2002] Cohen-Steiner, D., De Verdiere, E. C., and Yvinec, M. (2002). Conforming delaunay triangulations in 3d. In *Proceedings of the eighteenth annual symposium on Computational geometry*, pages 199–208.
- [Cook, 1974] Cook, W. A. (1974). Body oriented (natural) co-ordinates for generating three-dimensional meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8(1) :27–43.
- [Crane, 2019] Crane, K. (2019). The n-dimensional cotangent formula. *Online note*. URL : <https://www.cs.cmu.edu/~kmc Crane/Projects/Other/nDCotanFormula.pdf>, pages 11–32.
- [Crane et al., 2010] Crane, K., Desbrun, M., and Schröder, P. (2010). Trivial connections on discrete surfaces. In *Computer Graphics Forum*, volume 29, pages 1525–1533. Wiley Online Library.
- [D’azevedo, 2000] D’azevedo, E. F. (2000). Are bilinear quadrilaterals better than linear triangles? *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(1) :198–217.
- [de Moura Pinto and Freitas, 2009] de Moura Pinto, F. and Freitas, C. M. D. S. (2009). Fast medial axis transform for planar domains with general boundaries. In *2009 XXII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, pages 96–103. IEEE.
- [Dziuk, 1988] Dziuk, G. (1988). *Finite elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces*. Springer.
- [Ern and Guermond, 2004] Ern, A. and Guermond, J.-L. (2004). *Theory and practice of finite elements*, volume 159. Springer.
- [Fogg et al., 2015] Fogg, H. J., Armstrong, C. G., and Robinson, T. T. (2015). Automatic generation of multiblock decompositions of surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(13) :965–991.
- [Forsythe et al., 1961] Forsythe, G. E., Wasow, W. R., and Nachbar, W. (1961). Finite-difference methods for partial differential equations.
- [George, 1991] George, P. L. (1991). Génération de maillages par une méthode de type voronoï. *Rapports de recherche- INRIA*.
- [George and Borouchaki, 1997] George, P. L. and Borouchaki, H. (1997). *Triangulation de Delaunay et maillage : applications aux éléments finis*. Hermes.
- [George and Frey, 2013] George, P. L. and Frey, P. (2013). *Mesh generation : application to finite elements*. John Wiley & Sons.

- [George and Seveno, 1994] George, P. L. and Seveno, É. (1994). The advancing-front mesh generation method revisited. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(21) :3605–3619.
- [Gourdain et al., 2010] Gourdain, N., Duchaine, F., Gicquel, L. Y., and Collado, E. (2010). Advanced numerical simulation dedicated to the prediction of heat transfer in a highly loaded turbine guide vane. In *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, volume 44021, pages 807–820.
- [Gurung et al., 2011] Gurung, T., Laney, D., Lindstrom, P., and Rossignac, J. (2011). Squad : Compact representation for triangle meshes. In *Computer Graphics Forum*, volume 30, pages 355–364. Wiley Online Library.
- [Hecht, 2007] Hecht, F. (2007). Maillage 2d, 3d, adaptation.
- [Henri Paul, 2014] Henri Paul, d. S.-G. (2014). Un invariant topologique : la caractéristique d’euler-poincaré d’une surface fermée. <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/Un-invariant-topologique-la-caracteristique-d-Euler-Poincare-d-une-surface-fermee.html>.
- [Höhring et al., 1997] Höhring, R. H., Müller-Hannemann, M., and Wiehe, K. (1997). Mesh refinement via bidirected flows : Modeling, complexity, and computational results. *Journal of the ACM (JACM)*, 44(3) :395–426.
- [Hopf, 1935] Hopf, H. (1935). Über die drehung der tangente und sehnens ebener kurven. *Compositio mathematica*, 2 :50–62.
- [Ives, 1995] Ives, D. (1995). Geometric grid generation. surface modeling, grid generation, and related issues in computational fluid dynamic (cfd) solutions. In *Proceedings NASA-conference, Cleveland, Ohio, NASA CP-3291*.
- [Jezdimirovic et al., 2021] Jezdimirovic, J., Chemin, A., Reberol, M., Henrotte, F., and Remacle, J.-F. (2021). Quad layouts with high valence singularities for flexible quad meshing. *Proceedings of the 29th Meshing Roundtable*.
- [Kälberer et al., 2007] Kälberer, F., Nieser, M., and Polthier, K. (2007). Quadcover-surface parameterization using branched coverings. In *Computer graphics forum*, volume 26, pages 375–384. Wiley Online Library.
- [Kirkup, 2019] Kirkup, S. (2019). The boundary element method in acoustics : A survey. *Applied Sciences*, 9(8) :1642.
- [Kowalski et al., 2013] Kowalski, N., Ledoux, F., and Frey, P. (2013). A pde based approach to multidomain partitioning and quadrilateral meshing. In *Proceedings of the 21st international meshing roundtable*, pages 137–154. Springer.
- [Kuth et al., 2023] Kuth, B., Oberberger, M., Chajdas, M., and Meyer, Q. (2023). Edgefriend : Fast and deterministic catmull-clark subdivision surfaces. In *Computer Graphics Forum*, volume 42, page e14863. Wiley Online Library.
- [Lee, 2018] Lee, J. M. (2018). *Introduction to Riemannian manifolds*, volume 2. Springer.
- [LeVeque, 2002] LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press.
- [Liu et al., 2006] Liu, Y., Vinokur, M., and Wang, Z. J. (2006). Spectral difference method for unstructured grids i : Basic formulation. *Journal of Computational Physics*, 216(2) :780–801.
- [Lo, 1989] Lo, S. (1989). Generating quadrilateral elements on plane and over curved surfaces. *Computers & structures*, 31(3) :421–426.

- [Löhner, 1996] Löhner, R. (1996). Progress in grid generation via the advancing front technique. *Engineering with computers*, 12 :186–210.
- [Löhner, 2014] Löhner, R. (2014). Recent advances in parallel advancing front grid generation. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 21 :127–140.
- [Macq et al., 2020] Macq, A., Reberol, M., Henrotte, F., Beaufort, P.-A., Chemin, A., Remacle, J.-F., and Van Schaftingen, J. (2020). Ginzburg-landau energy and placement of singularities in generated cross fields. *arXiv preprint arXiv :2010.16381*.
- [Marcon et al., 2019] Marcon, J., Kopriva, D. A., Sherwin, S. J., and Peiró, J. (2019). A high resolution pde approach to quadrilateral mesh generation. *Journal of Computational Physics*, 399 :108918.
- [Marinov and Kobbelt, 2004] Marinov, M. and Kobbelt, L. (2004). Direct anisotropic quad-dominant remeshing. In *12th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, 2004. PG 2004. Proceedings.*, pages 207–216. IEEE.
- [Mitchell, 2000] Mitchell, S. A. (2000). High fidelity interval assignment. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 10(04) :399–415.
- [Mitchell, 2014] Mitchell, S. A. (2014). Simple and fast interval assignment using nonlinear and piecewise linear objectives. In *Proceedings of the 22nd International Meshing Roundtable*, pages 203–221. Springer.
- [Myles et al., 2014] Myles, A., Pietroni, N., and Zorin, D. (2014). Robust field-aligned global parameterization. *ACM Trans. Graph.*, 33(4) :135–1.
- [Nackman and Srinivasan, 1989] Nackman, L. R. and Srinivasan, V. (1989). Method of generating finite elements using the symmetric axis transform. US Patent 4,797,842.
- [Nealen et al., 2006] Nealen, A., Igarashi, T., Sorkine, O., and Alexa, M. (2006). Laplacian mesh optimization. In *Proceedings of the 4th international conference on Computer graphics and interactive techniques in Australasia and Southeast Asia*, pages 381–389.
- [Nédélec, 2001] Nédélec, J.-C. (2001). *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*, volume 144. Springer.
- [Nieser et al., 2011] Nieser, M., Reitebuch, U., and Polthier, K. (2011). Cubecover-parameterization of 3d volumes. In *Computer graphics forum*, volume 30, pages 1397–1406. Wiley Online Library.
- [Norrie and De Vries, 2014] Norrie, D. H. and De Vries, G. (2014). *The finite element method : fundamentals and applications*. Academic Press.
- [Owen, 1998] Owen, S. J. (1998). A survey of unstructured mesh generation technology. *IMR*, 239(267) :15.
- [Owen et al., 1998] Owen, S. J., Staten, M. L., Canann, S. A., and Saigal, S. (1998). Quad-morphing : advancing front quad meshing using triangle transformations. *Proceedings 7th International Meshing Roundtable, Dearborn, MI*.
- [Owen et al., 1999] Owen, S. J., Staten, M. L., Canann, S. A., and Saigal, S. (1999). Q-morph : an indirect approach to advancing front quad meshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 44(9) :1317–1340.
- [Palacios and Zhang, 2007] Palacios, J. and Zhang, E. (2007). Rotational symmetry field design on surfaces. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 26(3) :55–es.
- [Ray et al., 2006] Ray, N., Li, W. C., Lévy, B., Sheffer, A., and Alliez, P. (2006). Periodic global parameterization. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 25(4) :1460–1485.

- [Ray et al., 2008] Ray, N., Vallet, B., Li, W. C., and Lévy, B. (2008). N-symmetry direction field design. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 27(2) :1–13.
- [Reberol, 2018] Reberol, M. (2018). *Maillages hex-dominants : génération, simulation et évaluation*. PhD thesis, Phd Thesis). Université de Lorraine.
- [Remacle et al., 2012] Remacle, J.-F., Lambrechts, J., Seny, B., Marchandise, E., Johnen, A., and Geuzainet, C. (2012). Blossom-quad : A non-uniform quadrilateral mesh generator using a minimum-cost perfect-matching algorithm. *International journal for numerical methods in engineering*, 89(9) :1102–1119.
- [Rivière, 2008] Rivière, B. (2008). *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations : theory and implementation*. SIAM.
- [Rotskoff, 2010] Rotskoff, G. (2010). *The Gauss-Bonnet Theorem*. PhD thesis, Master thesis, University of Chicago.
- [Rudin, 1998] Rudin, W. (1998). *Analyse réelle et complexe : cours et exercices*. Dunod.
- [Schneiders, 1996] Schneiders, R. (1996). A grid-based algorithm for the generation of hexahedral element meshes. *Engineering with computers*, 12 :168–177.
- [Sharp et al., 2019] Sharp, N., Soliman, Y., and Crane, K. (2019). The vector heat method. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 38(3) :1–19.
- [Shepherd and Johnson, 2008] Shepherd, J. F. and Johnson, C. R. (2008). Hexahedral mesh generation constraints. *Engineering with Computers*, 24(3) :195–213.
- [Smith, 1985] Smith, G. D. (1985). *Numerical solution of partial differential equations : finite difference methods*. Oxford university press.
- [Solomon et al., 2014] Solomon, J., Crane, K., and Vouga, E. (2014). Laplace-beltrami : The swiss army knife of geometry processing. In *Symposium on Geometry Processing Graduate School (Cardiff, UK, 2014)*, volume 2.
- [Stummel, 2006] Stummel, F. (2006). Difference methods for linear initial value problems. In *Numerische Behandlung nichtlinearer Integrodifferential-und Differentialgleichungen : Vorträge einer Tagung im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, 2. 12.-7. 12. 1973*, pages 123–135. Springer.
- [Taghavi, 1994] Taghavi, R. (1994). Automatic parallel and fault tolerant mesh generation from cad on cray research super computers. In *Proc. CUG Conference, Tours, France*.
- [Tam, 1991] Tam, T. (1991). 2d finite element mesh generation by medial axis subdivision. *Advances in engineering software and workstations*, 13(5-6) :313–324.
- [Tianye,] Tianye, L. Lecture 12 : Discrete laplacian.
- [Trucco and Verri, 1998] Trucco, E. and Verri, A. (1998). *Introductory techniques for 3-D computer vision*, volume 201. Prentice Hall Englewood Cliffs.
- [Vallet, 2008] Vallet, B. (2008). *Bases de fonctions sur les variétés*. Theses, Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL.
- [Van den Abeele et al., 2008] Van den Abeele, K., Lacor, C., and Wang, Z. J. (2008). On the stability and accuracy of the spectral difference method. *Journal of Scientific Computing*, 37 :162–188.
- [Viertel and Osting, 2019] Viertel, R. and Osting, B. (2019). An approach to quad meshing based on harmonic cross-valued maps and the ginzburg-landau theory. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 41(1) :A452–A479.

- [Watson, 1981] Watson, D. F. (1981). Computing the n-dimensional delaunay tessellation with application to voronoi polytopes. *The computer journal*, 24(2) :167–172.
- [White and Kinney, 1997] White, D. R. and Kinney, P. (1997). Redesign of the paving algorithm : Robustness enhancements through element by element meshing. In *6th international meshing roundtable*, volume 10, page 830.
- [Wu, 2002] Wu, T. (2002). Boundary element acoustics fundamentals and computer codes.
- [Yerry and Shephard, 1983] Yerry, M. and Shephard, M. (1983). Finite element mesh generation based on a modified-quadtrees approach. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 3(1) :36–46.
- [Zienkiewicz and Taylor, 2005] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier.

Résumé — L’objectif de cette thèse est d’apporter de nouvelles solutions pour améliorer les performances lors de la résolution numérique d’équations aux dérivées partielles en étudiant une méthode de génération de maillages quadrilatéraux basée sur des champs de croix.

Notre approche repose sur l’alignement d’un champ de croix donné par rapport au bord du domaine de calcul, suivi du partitionnement de ce dernier en régions à quatre côtés que l’on maillera ensuite en quadrilatères. Cela nous permet de générer un maillage structuré par bloc tout en préservant la position des singularités du champ de croix initial. Pour ce faire, nous mettons en place une étude théorique des champs de croix nous permettant d’identifier les conditions sous lesquelles un champ de croix donné permet effectivement de partitionner et de mailler le domaine sur lequel il est défini.

Cette méthode est d’abord présentée pour les domaines simplement connexes, puis généralisée aux domaines non-simplement connexes. Elle nous permet de gérer les domaines constitués de plusieurs matériaux ainsi que les points singuliers de bord qui, en pratique, permettent de délimiter des portions de la frontière du domaine pour prendre en compte des conditions aux limites mixtes dans le cadre des simulations numériques. Enfin, nous mettons en place la discrétisation de la méthode sur des maillages triangulaires, puis nous proposons une généralisation à des surfaces courbes dans l’espace.

Mots clés : Champ de croix, maillage quadrilatéral, maillage en blocs structurés, énergie de Ginzburg Landau.

Abstract — The objective of this thesis is to provide new solutions to improve performance in the numerical solution of partial differential equations by studying a method for generating quadrilateral meshes based on cross-field techniques.

Our approach relies on aligning a given cross field with the boundary of the computational domain, followed by partitioning the domain into four-sided regions which are then meshed into quadrilaterals. This allows us to generate a structured block mesh while preserving the positions of the singularities of the initial cross field. To achieve this, we conduct a theoretical study of cross fields to identify the conditions under which a given cross field effectively partitions and meshes the domain on which it is defined.

This method is initially presented for simply connected domains and then extended to non-simply connected domains. It allows us to handle domains consisting of multiple materials as well as boundary singular points, which in practice delineate portions of the domain boundary to account for mixed boundary conditions in numerical simulations. Finally, we discretize the method on triangular meshes and propose a generalization to curved surfaces in space.

Keywords : Cross field, quadrilateral mesh, structured block mesh, Ginzburg Landau energy.
