



HAL
open science

Quelques outils pour l'étude des sous-variétés lagrangiennes dans les fibrés cotangents avec structure lcs

Adrien Currier

► **To cite this version:**

Adrien Currier. Quelques outils pour l'étude des sous-variétés lagrangiennes dans les fibrés cotangents avec structure lcs. Mathématiques [math]. Nantes Université, 2024. Français. NNT : 2024NANU4021 . tel-04752188v2

HAL Id: tel-04752188

<https://hal.science/tel-04752188v2>

Submitted on 4 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 641
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Adrien CURRIER

**Quelques outils pour l'étude des sous-variétés lagrangiennes
dans les fibrés cotangents avec structure lc_s**

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 25/09/2024
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématique Jean Leray

Rapporteurs avant soutenance :

Mélanie BERTELSON Professeure à l'Université Libre de Bruxelles
Vincent HUMILIERE Professeur à Sorbonne Université

Composition du Jury :

Président :	Marie-Claude ARNAUD	Professeure à l'Université Paris Cité
Examineurs :	Jean-François BARRAUD	Professeur à l'Université de Toulouse
	Mélanie BERTELSON	Professeure à l'Université Libre de Bruxelles
	Vincent HUMILIERE	Professeur à Sorbonne Université
Dir. de thèse :	François LAUDENBACH	Professeur Emérite à Nantes Université
	Baptiste CHANTRAINE	Maître de Conférences à Nantes Université

REMERCIEMENTS

Salut, et encore merci pour le poisson !

Si les noms d'auteurs apparaissent par ordre alphabétique indépendamment de leur contribution totale, je ne vois aucune raison de déroger à cette pratique. Je tiens donc à remercier :

A

- Marie-Claude Arnaud, pour avoir accepté d'être membre du jury.
- Stéphane Attal, sans qui ma réorientation en mathématiques n'aurait pas été possible.

B

- Jean-François Barraud, pour avoir accepté d'être membre de mon CSI et de mon jury. En particulier, pour avoir été patient lors des comptes-rendus CSI qui avaient tendance à largement dépasser la limite de temps.
- Stéphanie Benoît, dont l'aide au niveau administratif a été inestimable.
- Mélanie Bertelson, pour avoir accepté d'être rapporteur et sa lecture attentive. En particulier, pour ses nombreux retours sur la rédaction du manuscrit.
- Erwan Brugallé, en particulier pour son rôle d'intermédiaire de l'ED compte tenu des relations parfois tendues.

C

- Le Café, pour sa contribution substantielle tant à la démonstration des théorèmes qu'à la rédaction du manuscrit.
- Baptiste Chantraine, pour son accompagnement et conseils le long de cette thèse et, en particulier, pour son aide avec la rédaction du chapitre 3. Plus précisément,

merci pour toutes les mathématiques que tu m'as appris et pour ta patience malgré, par moments, mon entêtement.

- Octav Cornea, pour son accueil à l'UdeM.
- Philipp, Vivy et Orion Currier. Quelques lignes sont bien trop courtes pour rendre justice à l'importance de leur appui sur le plan personnel.

E

- Said El Mamouni, pour son aide au niveau informatique.

G

- Fabio Gironella, pour les discussions mathématiques, son accueil à Budapest durant mon stage de recherche et l'organisation du séminaire TGA.
- Anais Goulain, pour son aide administrative.
- Stéphane Guillermou, pour les discussions, en particulier autour de la théorie des faisceaux. Aussi, pour l'organisation du thé du mardi et du séminaire TGA (par ordre d'importance, bien entendu).
- Marco Golla, pour les discussions mathématiques et avoir été organisateur du séminaire TGA (aussi, pizza + crème + lardons = pizza carbonara).

H

- Béatrice Havet, pour son aide administrative (en particulier en ce qui concerne les déplacements et la migraine qu'est la nouvelle plateforme).
- Vincent Humilière pour avoir accepté d'être rapporteur et ses retours sur la rédaction.

L

- François Laudenbach, pour les discussions mathématiques (en particulier autour de la théorie de Morse et de Morse-Novikov), ainsi que pour ses très nombreux retours concernant le manuscrit, le rendant substantiellement plus lisible.
- Eric Le Douaran, aussi pour son aide informatique.

- Lisa Lokteva, för stödet på ett mer personligt plan och speciellt för sällskapet när jag hade fastnat och satt och jobbade vid tretiden. Återigen kan ett par rader inte tillräckligt förmedla hennes betydelse.

M

- Mme. Mai, dont le prénom sera toujours, pour moi, Mme. La qualité des ses cours ont fortement contribué à mon appréciation des mathématiques.
- André Magne, dont sa qualité en tant qu'enseignant a grandement contribué à ma réorientation en maths.

N

- Caroline Nizet pour son aide administrative et l'organisation des soirées du labo. P.S. : on attend toujours la fontaine.

S

- Egor Shelukhin pour les discussions lors de mon séjour à l'UdeM.
- András Stipsicz une des deux personnes qui m'ont le plus motivé à poursuivre en topologie algébrique.

T

- Samuel Tapie pour avoir été membre de mon CSI malgré les longues réunions sur un sujet qui n'est pas ton sujet de prédilection.

W

- Jean-Yves Welschinger, la deuxième personne qui m'a motivé à poursuivre en topologie algébrique.

Divers

- toutes les personnes m'ayant enseigné des mathématiques. J'ai eu la chance de n'avoir que peu de mauvais enseignants de maths.
- l'équipe TGA en générale pour être la meilleure équipe du labo (je suis biaisé).

-
- les membres du LMJL en général et le personnel administratif attaché. En particulier pour la bonne atmosphère et la vie d'équipe active, entretenu par de nombreux actes d'organisation d'évènements (qui sont plus ou moins populaires, mais toujours les bienvenus).
 - le corps des doctorants, en général, pour le support mutuel et aussi un très bon esprit d'équipe soutenu par l'organisation de nombreuses activités. A 30 doctorants cette année, ainsi que tous les anciens doctorants, vous citer tous plus que doublerait la liste actuelle. A défaut, je tiens à vous remercier en tant que groupe. Et plus particulièrement, je tiens à vous remercier pour les choses suivantes sans ordre particulier (les intéressé(e)s se reconnaîtront) : les bars, les soirées/après-midi jeux et les soirées en général, les conversations et jeux du midi (toujours d'une durée très raisonnable), les pauses (idem), cthulhu (que ce soit le JDR ou le jeu de société), les midis piscine, rager contre l'ED, les problèmes et énigmes, les discussions de math en général et l'organisation du séminaire. Aussi, plus spécifique aux anciens doctorants : merci de votre accueil (entre le covid et la réaction de la thèse ça n'a pas pu être facile) et de m'avoir tant appris sur le fonctionnement d'une thèse.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction (English)	9
I.1 Presentation of locally conformally symplectic geometry	9
I.2 Presentation of the manuscript	11
I.2.1 Chapter 1	11
I.2.2 Chapter 2	11
I.2.3 Chapter 3	14
I.3 A short conclusion	16
I.4 Note	17
Introduction	19
I.1 Présentation de la géométrie localement conformément symplectique	19
I.2 Présentation du manuscrit	21
I.2.1 Chapitre 1	21
I.2.2 Chapitre 2	22
I.2.3 Chapitre 3	24
I.3 Quelques conséquences	27
1 La géométrie localement conformément symplectique	29
1.1 Contexte	29
1.1.1 La géométrie symplectique	29
1.1.2 La géométrie localement conformément symplectique	30
1.1.3 Un exemple d'application du formalisme lcs	31
1.2 Définitions	33
1.2.1 La différentielle de Lichnerowicz	33
1.2.2 Premières définitions	33
1.3 Rappels sur la géométrie symplectique	41
1.3.1 Propriétés fondamentales	41
1.3.2 Les fibrés cotangents et leurs lagrangiennes exactes	43
1.4 Rappels sur la géométrie localement conformément symplectique	45

TABLE DES MATIÈRES

1.4.1	Propriétés fondamentales	46
1.4.2	Avancées et parallèles avec la géométrie symplectique	46
1.5	Quelques enjeux	50
1.5.1	Liens avec la géométrie de contact	50
1.5.2	Liens avec la géométrie kählérienne	53
1.6	Conclusion	54
2	Sur la projection des lagrangiennes	55
2.1	Quelques nouveaux exemples en géométrie lcs	56
2.2	La topologie de la classe de Lee	61
2.3	Un théorème d'extension	66
2.4	Preuve du théorème 2.3.2	69
2.4.1	Restriction à des voisinages d'un "polyèdre"	69
2.4.2	Fin de la preuve du théorème 2.3.2	75
2.5	Sur la projection de Lagrangiennes	77
2.5.1	Quelques corollaires	77
2.5.2	Cordes de Liouville et cordes de Reeb	81
2.6	Discussion et perspectives	84
3	Autour des fonctions génératrices	89
3.1	L'homologie de Morse-Novikov	89
3.2	Vers une théorie de Morse pour la géométrie lcs	94
3.2.1	Quelques inégalités de rang	96
3.2.2	Sur le relevé de fonctions	102
3.2.3	Une minoration pour $\#Crit_\beta(f)$	106
3.3	Une généralisation aux fonctions génératrices quadratiques à l'infini	107
3.4	Non-existence de fonctions génératrices	109
3.5	Discussion et perspectives	113
3.5.1	Vers une amélioration du théorème 3.2.3	113
3.5.2	Vers une deuxième preuve du théorème 3.2.3	115
3.5.3	Une théorie des faisceaux pour la géométrie lcs	117
	Conclusion	121
	Bibliography	127

INTRODUCTION

I.1 Presentation of locally conformally symplectic geometry

Locally conformally symplectic (**lcs**) geometry was named as such by I. Vaisman in 1976 in his paper [Vai76]. It is a generalization of symplectic geometry that was first considered by H.-C. Lee as early as 1943 ([Lee43]). In **lcs** geometry, the general form of Hamilton's equations are preserved (see [Vai85]), allowing the study of dynamics. More precisely, transition maps preserve the canonical symplectic form on \mathbb{R}^n up to some positive constant factor. Some examples of such manifolds can be found in [Ban07]. What transpires from such a definition is that local behaviors are identical to those of symplectic geometry. As such, any locally defined structure in symplectic geometry has a **lcs** counterpart (there are, for example, Lagrangians, Hamiltonian flows, etc.). Moreover, some more globally defined structures, such as exact symplectic manifolds or exact Lagrangians, also have **lcs** counterparts. In the rest of the document, we will be especially interested in exact **lcs** manifolds and exact Lagrangians. Note that any 2-form on a manifold of dimension 2 is closed, and as such, the behavior of 2-dimensional **lcs** manifolds and symplectic surfaces is largely the same : as such, we will ask our manifolds to be of dimension at least 4.

The study of **lcs** manifolds can (mostly) be broadly divided in two categories. First, the existence of **lcs** structures with various properties, and second, the adaptation of properties (and proofs) of symplectic geometry to this new setting.

For example, Y. Eliashberg and E. Murphy found that any closed almost symplectic manifold with non-zero first Betti number can be endowed with an **lcs** structure (see [EM20] for more details, or [BM21] for a generalization). This illustrates, amongst other things, that **lcs** geometry is somewhat less rigid than symplectic geometry. A version of this theorem was proven for open manifold by Fernandes and Frejlich in [FF12]. Examples of **lcs** structures satisfying a plethora of other properties can be found in [BM14], [ABP17] and [BM18]. In particular, the second paper gives examples of manifolds admitting a **lcs**

structure but no symplectic structure.

Despite those difference, as stated above, some theorems and constructions of symplectic geometry can transposed to this setting. For example, Banyaga shows a **lcs** version of Moser's trick in [Ban02], Otiman and Stanciu show that Weinstein's tubular neighborhood theorem holds in **lcs** geometry in [OS17], and Haller and Ribicky show that Banyaga's symplectic fragmentation lemma holds (under some conditions) in [HR99]. The problem of symplectic reduction has also been tackled ([HR99], [MTP10] and [Nod04]), as well as the question of (**lcs**) Hamiltonian dynamics and the difference of behavior when compared to (symplectic) Hamiltonian dynamics (see [AA22]). More recently, the question of product of **lcs** manifolds was studied in [CS24].

As illustrated here, most of the papers studying **lcs** geometry use techniques coming from dynamics, and few use the tools specifically developed for the study of rigidity in symplectic geometry. A few notable counterexamples are, first, the paper of B. Chantraine and E. Murphy ([CM16]) in which they use Morse(-Novikov) theory to derive a result reminiscent of the Laudenbach-Sikorav theorem in symplectic geometry, and the paper of Y.-G. Oh and Y. Savelyev ([OS23]), in which they show that Floer theory can be carried out in the **lcs**-isation (**lcs** version of the symplectisation) of closed contact manifolds. However, Chantraine and Murphy raised a point about the adaptation of Floer theory to **lcs** geometry in a more general setting : naive adaptations of Floer theory will run afoul of Gromov's compactness for families of pseudo-holomorphic curves, and it is unclear how to fix the problem in a general setting. This deprives us of one of the most powerful tools of symplectic geometry, making it more difficult to study **lcs** topology.

The aim of this thesis is to provide tools for the study of rigidity phenomena, using the adaptation of Abouzaid-Kragh's theorem ([AK18], see theorem 1.3.8 for the theorem) as a guideline. "Adaptation" here is to take in the loosest of senses : it should be interpreted as "looks like the theorem if one squints hard enough".

As such, the first chapter will give the basic definitions that will be needed going forward, then the second chapter will focus on showing some differences between symplectic and **lcs** topology when it comes to Lagrangians, and this chapter will showcase new methods for studying exact Lagrangians (of **lcs** type) using generating functions and Morse-Novikov homology. Finally, the fourth chapter will introduce a new tool for the study of those exact Lagrangians ; this tool will take the shape of a category of derived

sheaves.

I.2 Presentation of the manuscript

The goal of this thesis was to discover tools allowing for the study of exact Lagrangians (of \mathbf{lcs} type) in cotangent bundles of closed manifolds. Given a manifold M , exact Lagrangians of \mathbf{lcs} type in the cotangent bundle involve the choice of some closed $\beta \in \Omega^1(M)$, that can be understood as some gluing data. As such exact Lagrangians (of \mathbf{lcs} type) for some β will be called β -exact Lagrangians.

More specifically, those tools should help the adaptation of classical theorem and proofs of symplectic geometry to \mathbf{lcs} geometry. As stated above, Abouzaid-Kragh's theorem will be used as a guideline. It states that the projection induces a (simple) homotopy equivalence between 0-exact Lagrangians (aka. the "classical" exact Lagrangians from symplectic geometry) in the cotangent bundles of closed manifolds and the 0-section of those cotangent bundles.

Notation. Whenever β does not matter or is implicit, β -exact Lagrangians will be referred to as exact Lagrangians.

I.2.1 Chapter 1

Results in this chapter will not stem from the author's work, contrary to the subsequent chapters (unless otherwise specified).

This chapter will begin with important definitions in \mathbf{lcs} geometry, followed by a reminder on various results in symplectic geometry. This reminder should be kept in mind as a point of comparison with the adaptation of those results to \mathbf{lcs} geometry, which will be the topic after said reminder. After a short explanation of the problems encountered when trying to adapt Floer geometry, the chapter will conclude with some of the links of \mathbf{lcs} geometry with other areas of geometry.

I.2.2 Chapter 2

This chapter will focus on the projection of exact Lagrangians.

A couple of new examples. The aim of this section is to showcase the difficulties of an adaptation of Abouzaid-Kragh's theorem.

We will begin chapter 2 by constructing explicit examples of exact Lagrangians, using a modification of the process of **lcs**-ification. This will lead to two related constructions, the first of which takes a Legendrian Λ in J^1M with the canonical contact form, and yields an exact "**lcs**" lagrangian diffeomorphic to $\Lambda \times \mathbb{S}^1$ in $T^*(M \times \mathbb{S}^1)$. As will be readily apparent, the projection does not necessarily induce an isomorphism between the homology of those Lagrangians and that of the 0-section. In particular, we will see that there is (at least) one exact Lagrangian (of **lcs** type) $L \in T^*M$ whose projection on M has degree 0, giving a negative answer to an **lcs** version of one of Viterbo's conjectures (see [Vit95]). Those examples illustrate the fact that, even though β -exact Lagrangians share local properties with 0-exact Lagrangians, their global behavior can nonetheless be vastly different.

We will then give two generalizations of those examples. Using those generalizations, we will prove the following proposition :

Proposition I.2.1

*There are some exact Lagrangians (in the **lcs** sense) in cotangent bundles of closed manifolds whose Morse-Novikov homology is not that of the basis.*

This illustrates that there is no naive adaptation of the Abouzaid-Kragh theorem to **lcs** geometry.

Topology of the Lee class. As we will see in chapter 1, the topology of the Lee class is often more important than the choice of a specific representative. Moreover, if we wish to adapt Abouzaid-Kragh's theorem, it is primordial to understand the behavior of the various pullbacks of the Lee class.

Theorem I.2.2

*Let M be a closed manifold, $\beta \in \Omega^1(M)$ be closed and λ be the canonical Liouville form on T^*M . We will denote by β the various pullbacks of β . Let L be a closed manifold and $i : L \rightarrow T^*M$ be an embedding such that $i^*\lambda = d_\beta f$ for some $f \in C^\infty(L)$. Then,*

$$[\beta] \neq 0 \in H^1(M, \mathbb{R}) \implies i^*[\beta] \neq 0 \in H^1(L, \mathbb{R}).$$

Keep in mind that in this statement, $d_\beta f$ does indeed mean $d_{i^*\beta} f$; this writing convention will be used all throughout this manuscript. This theorem implies, among other things,

that exact Lagrangians cannot be spheres (except, of course, if the base manifold is a sphere itself). Various corollaries of this result will also be given.

On the projection of exact Lagrangians. As seen in the first section of this chapter, the projection will not necessarily induce an homotopy equivalence between an exact Lagrangian and the base manifold. However, the later can still happen in specific cases (e.g. graphs of functions). Therefore, we will endeavor to answer to the second immediate question : when is the projection a homotopy equivalence ?

Using differential methods, we will see that there is a capacity-like quantity that, if lower than some constant, insures that the projection induces a simple homotopy equivalence between the exact Lagrangian and the base manifold

Theorem I.2.3

Let M be a closed manifold, $\beta \in \Omega^1(M)$ be closed and λ be the canonical Liouville form on T^*M . We will denote by β the various pullbacks of β . Let L be a closed manifold of dimension $\dim(M)$ and $i : L \rightarrow T^*M$ be an embedding such that $i^*\lambda = d_\beta f$ for some strictly positive $f \in C^\infty(L)$. If, for any pair of points $(q, p), (q, tp) \in i(L)$ for some $t > 0$, we have

$$\frac{\ln(f(q, tp)) - \ln(f(q, p))}{\ln(t)} < 1,$$

then, under a couple of genericity hypotheses on i , the projection induces a simple homotopy equivalence between L and M .

As we will see at the end of the chapter, this implies that those pairs of points (call them Liouville chords, as they both are in the same orbit of the Liouville vector field) share some of the behaviors of Reeb chords in contact geometry. More explicitly, in the first of the constructions of this chapter, we will see that the Liouville chords of $\Lambda \times \mathbb{S}^1$ will correspond to the Reeb chords of Λ in J^1M endowed with some "twisted" contact form. As we will note, those twisted contact forms grow closer to the canonical one when Λ is pushed via the Reeb flow. This offers a new venue of research not only for those twisted contact forms, but also for the Reeb chords of the canonical contact form. Indeed, "lcs" Hamiltonian isotopies are not, in general, merely the lift of Legendrian isotopies, and, conversely, Legendrian isotopies do not necessarily lift to "lcs" Hamiltonian isotopies.

I.2.3 Chapter 3

In the previous chapter, we have seen that even if some exact Lagrangians respect the conclusions of Abouzaid-Kragh's theorem, it is far from being the case for all of them. It is therefore apparent that a new version of this theorem is needed for **lcs** geometry. Given all the problems of an adaptation of Floer theory, and given the successful use of generating functions in [CM16], we will instead turn ourselves towards sheaf theory. This strategy has been successfully employed in symplectic geometry to re-prove classical results without using Floer geometry (see, for example, S. Guillermou's work, [Gui19]).

The first step toward a sheaf theory for the study of (**lcs**) Lagrangians, and the subject of this chapter, is a good Morse theory (here, more specifically, Morse-Novikov), which we will use for inspiration. Indeed, several fundamental theorems of sheaf theory reflect classical theorems of Morse theory. After a short introduction to Morse-Novikov homology, the main matter of this chapter will begin.

Towards a Morse theory for lcs geometry. We will begin the main matter of this chapter by giving a lower bound for the number of β -critical points of a " β -Morse" function.

Definition I.2.4

Let M be a manifold, $\beta \in \Omega^1(M)$ be closed and consider $f \in C^\infty(M)$. Assume that $d_\beta f$ intersects the 0-section transversely. Then f is said to be β -Morse and $Crit^\beta(f) := \{x \in X : d_\beta f_x = 0\}$ is a discreet set. The β -critical points of index i will be the elements of $Crit_i^\beta(f) := \{x \in Crit^\beta(f) : index(e^{-g_x} f) = i\}$, where the various functions g_x are a local primitives of β defined on some neighbourhood of $x \in Crit^\beta(f)$.

Remarque I.2.1

Let F be the lift of f to the integral covering space of β and g be a primitive of β on the covering space. Then f is β -Morse if and only if $e^{-g}F$ is Morse. Moreover, the index of a β -critical point x of f is equal to the index a critical point of $e^{-g}F$ in the fiber over x .

Note that being β -Morse is a generic condition.

Theorem I.2.5

Let M be a closed manifold, $\beta \in \Omega^1(M)$ be closed, and $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ be β -Morse. Then,

$$\#Crit_i^\beta(f) \geq rk(HN_i(M, \beta)).$$

By $HN_*(M, \beta)$, we denote the Morse-Novikov homology of M with respect to β .

To show this theorem, we will compare the Morse-Novikov homology of the pair (M, β) to the homology of a "good" compact exhaustion $(W_k)_k$ of \tilde{M}_β , which is the integral cover of β .

Generalization to generating functions. As a corollary of the proof of the previous theorem, we get the following theorem, which is a somewhat more precise version of the theorem 1.3 of [CM16].

Theorem I.2.6

Let M be a closed manifold, $\beta \in \Omega^1(M \times \mathbb{R}^k)$ be the pullback of a closed 1-form on M , and $F : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ be a β -Morse function that is equal to a quadratic function $Q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ outside of some compact set of $M \times \mathbb{R}^k$. Let E_- be the vector subspace on which F negative definite at infinity. Then

$$\#Crit_i^\beta(F) \geq rk(HN_{i-\dim(E_-)}(M, \beta)).$$

By $HN_*(M, \beta)$, we denote the Morse-Novikov homology of M with respect to β .

This theorem should be compared to the classical Morse theorem for generating functions, which, when combined with the Laudenbach-Sikorav theorem (see [LS85] and [Sik87b]), offers a partial answer to the Arnold-Givental conjecture in cotangent bundles.

Note that this implies Chantraine and Murphy's result, which state that :

$$\#Crit^\beta(F) \geq \sum_i rk(HN_i(M, \beta)),$$

Therefore, we obtain the following theorem as a corollary :

Theorem I.2.7 (Chantraine-Murphy, [CM16])

Let M be a closed manifold, $\beta \in \Omega^1(M)$ be closed, and L be a β -exact Lagrangian of (T^*M, λ, β) . If L has a generating function (or is the image of the 0-section by a hamiltonian isotopy) and intersects M transversely, then :

$$\#L \pitchfork M \geq \sum_i rk(HN_i(M, \beta)).$$

Non-existence of generating functions. We will then explain the limitations of this last theorem. As will be shown in chapter 2, some exact Lagrangians will not be Hamiltonian isotopic to the 0-section. However, it gets a bit worse :

Proposition I.2.8

There are some cotangent bundles of closed manifolds in which there are some exact Lagrangians which do not admit a generating function.

The proof of this proposition uses one of the generalizations of the construction shown in chapter 2. In this generalization, an exact Lagrangian will be shown to have a generating function if and only if the Legendrian from which it is build has itself a generating function.

Do take note that the existence of a generating function remains an open question for 0-exact Lagrangians.

I.3 A short conclusion

In this section, we will very succinctly review some consequences of the previous theorems. A more detailed account of those consequences can be found at the end of the relevant chapters.

First, the theorem I.2.3 indicates that the Liouville chords are the **lcs** versions of the Reeb chords. However, those considerations go further. Indeed, as we will see in chapter 2, this theorem allows for the study of a larger set of deformations (larger than that of Legendrian isotopies) of Legendrian submanifolds in (J^1M, α) , where α belongs to a family of contact forms, and may not be the canonical one.

Then, the ideas used for the proof of theorem I.2.6 can be translated to a more general setting. Indeed, two of the main ingredients of the proof are the following :

1. First is the obvious but nonetheless important observation that the complex C giving the singular homology of the cover \tilde{M}_β is invariant under the action of the deck transformations. That is to say that for any subset S of \tilde{M}_β and any deck transformation α , $\alpha_*(C_*(S)) = C_*(\alpha(S))$. In the course of the proof, we will be using the CW chain complex for a good CW decomposition of \tilde{M}_β , but this will mainly be for ease of use, as the proof with singular homology carries through with exactly the same arguments.
2. There is a good compact exhaustion $(W_k)_k$ of \tilde{M}_β such that W_k will have a "negative

boundary" $\partial_- W_k$ and such that

$$\frac{rk(H_i(W_k, \partial_- W_k))}{(2k+1)^r} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} rk(HN_i(M, \beta)).$$

Here, r is the dimension of the group of deck transformations, viewed as a free \mathbb{Z} -module.

A translation of those ideas to, e.g. sheaf theory, indicates that the good sheaves to study are the sheaves on \tilde{M}_β invariant under the action of deck transformations. The second point shows that we shouldn't be looking at the Betti numbers of those sheaves, but at their "asymptotic Betti numbers" (call it the Novikov numbers) : it's the asymptotic behavior that matters.

These ideas could enable us to create a Lagrangian and/or Hamiltonian Floer theory for **lcs** geometry (at least for cotangent bundles) and/or to adapt some of the classical theorems of symplectic geometry (e.g. the Abouzaid-Kragh theorem). Indeed, Viterbo explains the links between sheaf theory and Fukaya categories in [Vit19], and Guillermou shows how to get a (somewhat weaker) version of the Abouzaid-Kragh theorem, relying only on sheaf theory.

I.4 Note

An English version of this manuscript can be made available by the author upon request.

INTRODUCTION

I.1 Présentation de la géométrie localement conformément symplectique

La géométrie localement conformément symplectique (\mathbf{lcs}), nommée par I. Vaisman en 1976 (voir [Vai76]), est une généralisation de la géométrie symplectique. Considérée par H.-C. Lee dès 1943 ([Lee43]), il s'agit d'une généralisation dans laquelle la forme générale des équations Hamilton est préservée (voir [Vai85]). Plus précisément, les opérations de changement de carte d'une variété \mathbf{lcs} préservent la forme symplectique canonique de \mathbb{R}^n à un facteur strictement positif constant près (voir [Ban07] pour des exemples). Ainsi, toutes les structures de la géométrie symplectiques dont la définition est basée sur des critères locaux (lagrangiennes, flots hamiltoniens, etc.) se transpose dans ce formalisme. Par ailleurs, certaines structures globales possèdent aussi un équivalent en géométrie \mathbf{lcs} . Ainsi, nous avons, par exemple, des variétés \mathbf{elcs} (comprendre, \mathbf{lcs} "exacte") et des lagrangiennes exactes, auxquelles nous nous intéresserons par la suite. Notons que, sur toute variété de dimension 2, toute 2-forme est fermée, et donc les propriétés des 2-variétés \mathbf{lcs} et celles des variétés symplectiques sont largement identiques. Nous nous intéresserons donc aux variétés de dimension au moins 4.

L'étude des variétés \mathbf{lcs} se décline majoritairement en deux catégories : l'existence de structures \mathbf{lcs} vérifiant diverses propriétés, et l'adaptation de théorèmes et preuves classiques de la géométrie symplectique à ce nouveau cadre.

Ainsi, il a été établi par Y. Eliashberg et E. Murphy ([EM20], ou [BM21] pour une généralisation), que toute variété fermée presque symplectique de premier nombre de Betti non-nul admet une structure \mathbf{lcs} . Ceci illustre, entre autres, que la géométrie \mathbf{lcs} est quelque peu moins rigide que la géométrie symplectique. Une version de ce théorème pour des variétés ouvertes a été prouvé par Fernandes et Frejlich dans [FF12]. Des exemples de structures \mathbf{lcs} satisfaisant certaines propriétés peuvent être trouvées dans [BM14], [ABP17] et [BM18]. En particulier, le deuxième papier donne des exemples de variétés fermées avec

structure \mathbf{lcs} mais sans structure symplectique.

Malgré ces différences, comme souligné plus haut, certains théorèmes de la géométrie symplectique peuvent être adaptés. Par exemple, Banyaga ([Ban02]) montre que l'astuce de Moser possède une version \mathbf{lcs} , Otiman et Stanciu ([OS17]) montrent que le théorème des voisinages de Weinstein reste vrai dans le cas \mathbf{lcs} , ou encore Haller et Rybicki ([HR99]), qui montrent que le lemme de fragmentation symplectique peut être adapté (sous certaines conditions) à la géométrie \mathbf{lcs} . Le problème de la réduction symplectique a aussi été étudié ([HR99], [MTP10] et [Nod04]). La dynamique des flots hamiltoniens (\mathbf{lcs}) et leurs différences avec les flots hamiltoniens (symplectiques) a aussi été étudiée (voir [AA22]). Plus récemment, la question du produit de variétés \mathbf{lcs} a été étudiée dans [CS24].

Comme illustré ici, la majorité des papiers utilisent des techniques issues de la dynamique, et peu aux phénomènes de rigidités. Quelques exemples notoires dans l'étude des phénomènes de rigidités sont les travaux de Chantraine et Murphy ([CM16]), donnant une version \mathbf{lcs} du résultat de Laudenbach-Sikorav, et les travaux de Oh et Savelyev ([OS23]), qui donne une homologie instanton-Floer pour la \mathbf{lcs} -isation (version \mathbf{lcs} de la symplectisation) des variétés de contact. Toutefois, comme souligné par Chantraine et Murphy, il existe des obstacles à la généralisation des homologies de type Floer à la géométrie \mathbf{lcs} (essentiellement dû à des problèmes liés à la compacité de Gromov pour les courbes pseudo-holomorphes). Ceci nous prive d'un des outils les plus puissants pour l'étude de la géométrie symplectique, rendant difficile l'étude de la topologie \mathbf{lcs} .

Le but de cette thèse est de fournir des outils adaptés à l'étude des phénomènes de rigidité, avec pour fil conducteur l'adaptation du théorème d'Abouzaid-Kragh ([AK18]). Ici, "adaptation" est laissé intentionnellement vague et doit être compris comme "ressemble de loin au théorème".

Ainsi, nous commencerons par donner les définitions essentielles de la géométrie \mathbf{lcs} dans le chapitre 1, puis nous verrons quelques difficultés liées à l'étude des phénomènes de rigidité dans le chapitre 2 et le chapitre 3 sera consacré à l'étude de phénomènes de rigidités via l'homologie de Morse-Novikov. Enfin, dans le dernier chapitre, nous introduirons un nouvel outil adapté à l'étude des phénomènes de rigidité ; cet outil prendra la forme d'une bonne catégorie de faisceaux dérivés.

I.2 Présentation du manuscrit

Le but de cette thèse était de découvrir des outils permettant d'étudier les lagrangiennes exactes (sous-entendu : "de type $\mathbf{lc\mathfrak{s}}$ ") dans les fibrés cotangents de variétés fermées. Étant donné une variété M , la définition de ces lagrangiennes fera intervenir un choix d'une forme fermée $\beta \in \Omega^1(M)$ qui est à interpréter comme étant une donnée de recollement. On parlera donc de lagrangiennes β -exacte.

Plus précisément, ces outils devraient permettre d'adapter les théorèmes et preuves classiques de la géométrie symplectique à la géométrie $\mathbf{lc\mathfrak{s}}$. Un fil conducteur durant ces années de thèse était d'essayer d'adapter le théorème d'Abouzaid-Kragh. Ce théorème affirme que pour toute lagrangienne fermée L qui est "0"-exacte (c'est-à-dire une lagrangienne exacte pour la géométrie symplectique standard) dans le cotangent T^*M d'une variété fermée M muni de la forme de Liouville canonique la projection $\pi : T^*M \rightarrow M$ sur la variété de base induit une équivalence d'homotopie simple entre L et M . Les tentatives d'adaptation de ce théorème se déclineront essentiellement en trois groupes :

1. le premier consiste à trouver les conditions pour lesquelles cet énoncé reste vrai lorsqu'on remplace "0-exacte" par " β -exacte". Souvent, par souci de simplicité, nous remplacerons aussi "équivalence d'homotopie simple" par "équivalence d'homotopie".
2. le deuxième consiste à trouver les conditions pour lesquelles cet énoncé reste vrai lorsqu'on remplace "0-exacte" par " β -exacte" et "simplement homotopiquement équivalent" par "homotopiquement équivalent" et "équivalence d'homotopie" par "pour π la projection sur M , $\pi|_{L*}$ est un quasi-isomorphisme".
3. le troisième consiste à trouver les conditions pour lesquelles cet énoncé reste vrai lorsqu'on remplace "0-exacte" par " β -exacte" et "simplement homotopiquement équivalent" par "homotopiquement équivalent" et "équivalence d'homotopie" par "pour π la projection sur M , $\pi|_{L*} : HN_*(L, \beta) \rightarrow HN_*(M, \beta)$ est un isomorphisme".

Notation. Lorsque la forme β n'a pas d'importance ou est implicite, nous écrirons lagrangiennes exactes au lieu de β -exacte.

I.2.1 Chapitre 1 : la géométrie $\mathbf{lc\mathfrak{s}}$

Les résultats de ce chapitre ne sont pas dû à l'auteur, tandis que les résultats dans le reste seront dûs à l'auteur de ce manuscrit sauf lorsque explicitement précisé.

Après une brève description de quelques motivations venant de la physique, ce chapitre commencera avec les définitions importantes de la géométrie **lcs**, suivi d'un rappel sur différents résultats importants en géométrie symplectique, en particulier autour des questions portant sur les lagrangiennes 0-exactes dans les cotangents de variétés fermées. Le reste de ce chapitre sera ensuite essentiellement consacré à la présentation de résultats classiques en géométrie **lcs**. Ces résultats seront à comparer avec les résultats classiques de la géométrie symplectique. En effet, le lecteur averti remarquera que les résultats basés sur des propriétés locales sont largement similaires. Le chapitre conclura avec quelques enjeux de la géométrie **lcs**.

I.2.2 Chapitre 2 : Sur la projection des lagrangiennes

Ce chapitre porte sur l'étude de la projection des lagrangiennes exactes.

Quelques nouveaux exemples. Le but de cette section est de montrer les difficultés liées à une adaptation du théorème de d'Abouzaid-Kragh.

Nous commencerons le chapitre 2 en construisant des exemples de lagrangiennes exactes **lcs**, en utilisant une modification du procédé de **lcs**-ification (voir définition 1.5.4). Il sera apparent que la projection n'induit pas un isomorphisme entre l'homologie de ces lagrangiennes et l'homologie de la section nulle. En particulier, nous verrons qu'il existe (au moins) une lagrangienne exacte ("de type **lcs**") $L \subset T^*M$ telle que la projection de L sur M est de degré 0, répondant ainsi négativement à une version **lcs** d'une conjecture de Viterbo, qui peut être trouvée dans [Vit95]. Ceci illustrera que même si le comportement local des lagrangiennes β -exactes des variétés **elcs** (T^*M, λ, β) (où λ est la forme de Liouville standard et β est le tiré en arrière d'une 1-forme fermée sur M) est largement le même indépendamment de la classe de β , le comportement global est néanmoins différent.

Nous donnerons ensuite deux généralisations de cette construction : partant d'une legendrienne Λ dans J^1M muni de la forme de contact canonique, nous construirons des lagrangiennes exactes "**lcs**" dans $T^*(M \times \mathbb{S}^1)$. Pour la première de ces deux constructions, la lagrangienne exacte obtenue est diffeomorphe à $\Lambda \times \mathbb{S}^1$. Utilisant ces généralisations, nous montrerons la proposition suivante :

Proposition I.2.1

Certaines lagrangiennes exactes ont une homologie de Morse-Novikov différente de l'homologie de Morse-Novikov de la variété de base.

Ceci illustre qu'il n'y a pas d'adaptation naïve du théorème d'Abouzaid-Kragh.

La topologie de la classe de Lee. Comme nous verrons par la suite, la classe de Lee $[\beta] \in H_{dR}^1(T^*M)$ est plus importante que son représentant pour une structure **lcs**. Si nous souhaitons avoir une version **lcs** du théorème d'Abouzaid-Kragh, la première question à laquelle il faut répondre porte donc sur l'annulation potentielle du tiré en arrière de cette classe.

Théorème I.2.2

Soit M une variété connexe fermée, $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée et λ la forme de Liouville canonique sur T^*M . Nous dénoterons par β les différents tirés en arrière de β . Prenons L une variété connexe fermée et $i : L \rightarrow T^*M$ un plongement tel que $i^*\lambda = d_\beta f$ pour un $f \in C^\infty(L)$. Alors

$$[\beta] \neq 0 \in H^1(M, \mathbb{R}) \implies i^*[\beta] \neq 0 \in H^1(L, \mathbb{R}).$$

Notons ici que $d_\beta f$ dénote $d_\beta f$; cette convention sera utilisée dans le reste du manuscrit. Ce théorème implique, par exemple, que les lagrangiennes exactes ne peuvent pas être de sphères (sauf, bien sûr, si la variété de base est une sphère). Différents autres corollaires de ce résultat seront aussi donnés.

Sur la projection de certaines lagrangiennes exactes. Comme nous verrons avec les exemples précédents, la projection n'induit pas nécessairement une équivalence d'homotopie entre une lagrangienne exacte et la variété de base. Toutefois ceci peut se produire dans certains cas (e.g. les graphes la dérivée de Lichnerowicz de fonctions). Ainsi, la deuxième question que à laquelle nous nous intéresserons porte sur les conditions sous lesquelles le théorème d'Abouzaid-Kragh reste vrai en géométrie **lcs**.

A ces fins, en utilisant des méthodes plus différentielles, nous allons voir une quantité de type capacité qui nous indique que (si une inégalité est vérifiée) la projection induit une équivalence d'homotopie simple entre une lagrangienne exacte et la variété de base.

Théorème I.2.3

Soit M une variété connexe fermée, $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée et λ la forme de Liouville canonique sur T^*M . Nous dénoterons par β les différents tirés en arrière de β . Prenons L une variété connexe fermée de dimension $\dim(M)$ et $i : L \rightarrow T^*M$ un plongement tel que $i^*\lambda = d_\beta f$ pour une application strictement positive $f \in C^\infty(L)$. Supposons

que pour toutes paires de points (q, p) et (q, tp) , tous deux dans $i(L)$ avec $t > 0$,

$$\frac{\ln(f(q, tp)) - \ln(f(q, p))}{\ln(t)} < 1.$$

Alors, sous quelques hypothèses de généralité sur i , la projection induit une équivalence d'homotopie simple entre L et M .

Les paires de points pour lesquelles l'inégalité ci-dessus n'est pas vérifiée (appelons-les cordes de Liouville essentielles, puisque ces points sont dans la même orbites du champ de Liouville) semblent être une complexité supplémentaire qui apparaît lors du passage de la géométrie de contact à la géométrie **lcs**, ce qui n'est pas sans rappeler les cordes de Reeb, qui apparaissent comme complexité supplémentaire lorsqu'on passe de la géométrie symplectique à la géométrie de contact.

En effet, comme nous verrons à la fin du chapitre, les cordes de Liouville ont des comportements similaires à ceux des champs de Reeb. Plus précisément, nous verrons que, pour la première des deux constructions que nous donnerons dans le début du chapitre, ces paires de points dans $\Lambda \times \mathbb{S}^1$ "correspondent" à des cordes de Reeb de Λ dans J^1M pour une variété M , muni d'une forme de contact qui n'est pas la forme de contact standard. Comme nous remarquerons, pousser Λ via le flot de Reeb rapprochera ces formes de contact de la forme de contact canonique. Ceci offre une nouvelle direction non seulement pour l'étude de ces formes de contact, mais aussi pour l'étude des cordes de Reeb pour le forme de contact standard. En effet, les isotopies hamiltonienne "**lcs**" ne seront pas, en général, simplement le relevé d'isotopies legendriennes, et inversement, les isotopies legendriennes ne se relèvent pas toutes en isotopies hamiltoniennes "**lcs**".

Précisons ici que, malgré la nomenclature, les cordes de Liouville ne sont pas nécessairement isolées les unes des autres.

I.2.3 Chapitre 3 : Autour des fonctions génératrices

Le chapitre précédent rend clair que, même si certaines lagrangiennes exactes respectent la conclusion de théorème d'Abouzaid-Kragh, ce n'est pas le cas pour toutes ces lagrangiennes. Il est donc apparent qu'une nouvelle version de ce théorème est nécessaire pour la géométrie **lcs**. Face aux problèmes liés à la théorie de Floer, nous nous tournerons vers la théorie des faisceaux. Cette approche a été employée avec succès en géométrie symplectique pour re-démontrer des résultats sans théorie de Floer (voir par exemple les

travaux de Guillermou, comme [Gui19]).

La première étape vers une théorie des faisceaux adaptés à l'étude des lagrangiennes lcs , objet de ce chapitre, est une bonne théorie de Morse (ici, plus précisément, Morse-Novikov), dont on pourra ensuite s'inspirer. En effet, plusieurs théorèmes importants pour une bonne théorie des faisceaux reflètent des théorèmes classiques sur les fonctions de Morse.

Vers une théorie de Morse pour la géométrie lcs . Nous commencerons ce chapitre en fournissant une borne inférieure au nombre de points β -critiques d'une fonction " β -Morse".

Définition I.2.4

Soit M une variété connexe fermée, $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée et $f \in C^\infty(X)$. Supposons que la section $d_\beta f$ intersecte la section nulle M transversalement. Alors f est appelée être β -Morse et $\text{Crit}^\beta(f) := \{x \in X : d_\beta f_x = 0\}$ est un ensemble discret. Les points β -critiques d'indice i seront les éléments de $\text{Crit}_i^\beta(f) := \{x \in \text{Crit}^\beta(f) : \text{index}(e^{-g_x} f) = i\}$, où chaque g_x une primitive locale β définie sur un voisinage d'un point $x \in \text{Crit}^\beta(f)$.

Remarque I.2.5

Posons F le relevé de f au revêtement intégral de β et prenons g une primitive de β sur le revêtement, alors f est β -Morse si et seulement si $e^{-g}F$ est Morse. De plus, l'indice d'un point β -critique x de f est égal à l'indice d'un point critique de $e^{-g}F$ dans la fibre au-dessus de x .

Notons qu'être β -Morse est une condition générique.

Théoreme I.2.6

Soit M une variété connexe fermée, $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée, et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui est β -Morse. Alors

$$\#\text{Crit}_i^\beta(f) \geq \text{rk}(\text{HN}_i(M, \beta)).$$

Par $\text{HN}_*(M, \beta)$, nous dénotons l'homologie de Morse-Novikov de M par rapport à β .

Pour prouver ce théorème, nous comparerons l'homologie de Morse-Novikov du couple (M, β) à l'homologie d'une "bonne" exhaustion compacte $(W_k)_k$ de \tilde{M}_β , qui est le revêtement intégral de β .

Généralisation aux fonctions quadratiques à l’infini. Grâce à une légère modification de la preuve du théorème précédent, et après une étude de l’isomorphisme de Thom, nous obtenons le théorème suivant, qui est une version quelque peu plus précise du théorème 1.3 du papier [CM16] de B. Chantraine et E. Murphy.

Théorème I.2.7

Soit M une variété connexe fermée, $\beta \in \Omega^1(M \times \mathbb{R}^k)$ le tiré en arrière d’une 1-forme fermée sur M , et $F : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ qui est β -Morse et quadratique hors d’un compact. Soit E_- le sous-espace vectoriel sur lequel F est définie négative à l’infini. Alors

$$\#Crit_i^\beta(F) \geq rk(HN_{i-\dim(E_-)}(M, \beta)).$$

Ce théorème est à comparer au théorème de Morse classique pour les fonctions génératrices qui, combiné avec le théorème de Laudenbach-Sikorav (voir [LS85] et [Sik87b]), donne une réponse partielle à la conjecture d’Arnold-Givental pour les fibrés cotangents.

Notons que comme souligné précédemment, ce théorème implique l’inégalité

$$\#Crit^\beta(F) \geq \sum_i rk(HN_i(M, \beta)),$$

dû à Chantraine et Murphy.

Ainsi, comme conséquence du théorème précédent, nous obtenons :

Théorème I.2.8 (Chantraine-Murphy, [CM16])

Soit M une variété fermée, $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée et L une lagrangienne β -exacte de (T^*M, λ, β) . Si L admet une fonction génératrice de type \mathfrak{ics} (ou est l’image de la section nulle par une isotopie hamiltonienne) et intersecte transversalement M , alors :

$$\#L \pitchfork M \geq \sum_i rk(HN_i(M, \beta)).$$

Par $HN_*(M, \beta)$, nous dénotons l’homologie de Morse-Novikov de M par rapport à β .

Non-existence de fonctions génératrices. Nous expliquerons ensuite les limites du théorème de Chantraine-Murphy en montrant la proposition suivante :

Proposition I.2.9

Il existe des cotangents de variétés connexes fermées tels que certaines sous-variétés

lagrangiennes exactes ("de type \mathbf{lcs} ") connexes fermées n'admettent pas de fonctions génératrices (de type \mathbf{lcs}).

La preuve de cette proposition passe par une des généralisations de la construction donnée au début du chapitre 2. Pour cette généralisation, une lagrangienne exacte possède une fonction génératrice (de type \mathbf{lcs}) si et seulement si la legendrienne utilisée pour la construction possède elle aussi une fonction génératrice.

Notons que la question de l'existence d'une fonction génératrice reste ouverte dans le cas particulier des lagrangiennes 0-exactes.

I.3 Quelques conséquences

Dans cette section, nous allons nous intéresser à quelques conséquences des théorèmes et des propriétés énoncées dans la section précédente. Un compte-rendu plus détaillé sera donné dans les différents chapitres.

Tout d'abord, le théorème I.2.3 indique que les cordes de Liouville sont la version \mathbf{lcs} des cordes de Reeb. Toutefois, ces considérations vont plus loin. En effet, comme nous verrons dans le chapitre 2, ce théorème permet l'étude d'une classe de déformations (plus large que celle des isotopies legendriennes) de Legendriennes dans (J^1M, α) , où α appartient à une famille de formes de contact qui ne sont pas la forme de contact canonique.

Ensuite, les stratégies développées pour la preuve de théorème I.2.6 peuvent être traduites dans des cadres plus généraux. En effet, deux des ingrédients principaux de la preuve sont les suivant :

1. Commençons par l'observation évidente mais néanmoins importante que le complexe de chaînes donnant l'homologie singulière du revêtement \tilde{M}_β invariant sous l'action des automorphismes de revêtement. C'est-à-dire que pour tout $S \subset \tilde{M}_\beta$ et tout automorphisme de revêtement α , $\alpha_*(C_*(S)) = C_*(\alpha(S))$. Au cours de la preuve, nous utiliserons l'homologie CW par souci de clarté, mais les mêmes arguments sont utilisables avec l'homologie singulière.
2. Du fait que la famille $(W_k)_k$ est une bonne exhaustion compacte, chaque W_k admet

un "bord négatif" $\partial_- W_k$ de sorte que

$$\frac{rk(H_i(W_k, \partial_- W_k))}{(2k+1)^r} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} rk(HN_i(M, \beta))$$

ici, r est la dimensions du groupe des automorphismes de revêtement de \tilde{M}_β vu comme un \mathbb{Z} -module libre

Une traduction de ces idées à, par exemple, la théorie des faisceaux nous indique que les bons faisceaux à étudier sont les faisceaux F de \tilde{M}_β invariant sous l'action des automorphismes du revêtement. Le deuxième point indique qu'il ne faut pas regarder le nombre de Betti du faisceau, mais plutôt son "nombre de Betti asymptotique" (appelons-le nombre de Novikov).

A terme, ces idées pourraient permettre l'élaboration d'une théorie de Floer lagrangienne et/ou hamiltonienne **lcs** (du moins pour les fibrés cotangents) et/ou l'adaptation de théorèmes classiques de la géométrie symplectique (par exemple, le théorème d'Abouzaid-Kragh). En effet, Viterbo montre les liens entre théorie des faisceaux et catégories de Fukaya dans [Vit19], et d'un autre côté Guillermou illustre comment montrer une version (quelque peu plus plus faible) du théorème d'Abouzaid-Kragh en s'appuyant seulement sur la théorie des faisceaux.

LA GÉOMÉTRIE LOCALEMENT CONFORMÉMENT SYMPLECTIQUE

1.1 Contexte

1.1.1 La géométrie symplectique

Introduite pour la première fois par H.-C. Lee dans [Lee43], l'étude des variétés symplectiques (nom dû à H. Weyl en 1939, voir [Wey66]) au sens classique a été historiquement motivée par la physique et, notamment, par certaines symétries dans les équations de la formulation hamiltonienne de la mécanique classique. Pour une particule de masse 1 dans \mathbb{R}^3 évoluant dans un potentiel $V(q_1, q_2, q_3)$, nous avons une fonction de \mathbb{R}^6 dans \mathbb{R} , nommée l'hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(q_1, q_2, q_3).$$

L'énergie associée à une position et une vitesse est donnée par H , et les trajectoires le long desquelles l'énergie est constante et l'énergie potentielle, V , décroît le plus rapidement possible, sont :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}. \end{aligned}$$

Ces équation peuvent s'écrire :

$$\left(\frac{dq_1}{dt} \cdots \frac{dp_3}{dt} \right) \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix} = dH.$$

La géométrie symplectique s'intéresse aux variétés sur lesquelles de tels systèmes peuvent être définis. Plus précisément, la géométrie symplectique s'intéresse aux variétés dont

les (différentielles des) opérations de changement de carte sont des transformations dites symplectiques, c'est-à-dire qu'elles préservent les symétries du système. Concrètement, cette condition peut être résumée en demandant que les différentielles des opérations de changement de carte sont des éléments du groupe symplectique.

Dans cette théorie géométrique, les sous-variétés lagrangiennes sont les sous-variétés L de dimension maximale telles que localement, tout système de coordonnées locales (q_1, q_2, q_3) sur L s'étend en un système de coordonnées locales $\phi = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ sur la variété ambiante telle que pour tout difféomorphisme ψ de l'atlas, $D(\phi \circ \psi^{-1})$ soit symplectique. Ces sous-variétés apparaissent à de nombreux endroits. Par exemple, ces sous-variétés apparaissent lorsque nous essayons de répondre à la question suivante : étant donné une particule à la position q sur une variété M , se déplaçant sous l'action d'un hamiltonien H , existe-t-il une vitesse p telle que notre particule passe par la position q' fixée ? Ceci revient à demander si la lagrangienne T_q^*M intersecte la lagrangienne $T_{q'}^*M$ sous l'action de du flot du champ de vecteur $(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})$.

De façon générale, la physique classique est décrite par un feuilletage de l'espace-temps de sorte que l'espace tangent de chaque tranche de type espace soit représenté par une variété symplectique, avec l'évolution temporelle donnée par un hamiltonien sur cette variété. Pour une introduction plus détaillée aux relations avec la physique classique, voir [Arn74].

Cette approche de la mécanique continue d'avoir du succès de nos jours avec, par exemple, des adaptations à la physique quantique. Plusieurs procédés de "quantisation" existent, ayant pour but d'adapter les outils de la physique classique à la physique quantique. Une première approche est de conserver le feuilletage de l'espace-temps, mais de prendre la transformée de Wigner-Weyl des hamiltoniens (voir [Gos06], par exemple).

1.1.2 La géométrie localement conformément symplectique

Comme indiqué en introduction, les variétés localement conformément symplectiques sont une généralisation des variétés symplectiques qui ont aussi été considérées par H.-C. Lee dans [Lee43], mais l'étude des variétés localement conformément symplectiques a néanmoins été plus lente. Dans cette généralisation, les changements de cartes locales sont des transformations conformément (c'est-à-dire à un facteur positif près) symplectiques. Cette généralisation nous permet de doter une classe plus large de variétés d'une structure ayant des propriétés locales similaires à celles des structures symplectiques. Par exemple, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$, bien que n'ayant pas de structure symplectique, possède une structure localement

conformément symplectique.

Dans ce nouveau cadre, il est aussi possible de définir des sous-variétés "localement conformément" lagrangiennes.

Cette généralisation, apparaissant comme un cadre plus général pour la formulation de la dynamique hamiltonienne sur les variétés, a des applications en physique (voir [Vai85]). Outre ceci, la géométrie localement conformément symplectique offre, par exemple, un cadre à l'utilisation de champ de vecteurs conformément hamiltoniens (voir [WL98] ou encore [Mar10] pour deux exemples d'application différentes).

1.1.3 Un exemple d'application du formalisme lcs

Par exemple, la géométrie localement conformément symplectique intervient dans [WL98] de la façon suivante :

Dans \mathbb{R}^n , soit U un potentiel et E le champ de forces associé. Supposons que l'évolution d'une particule de position q et de vitesse p dans le système est décrite par les équations :

$$\frac{dq}{dt} = p \tag{1.1}$$

$$\frac{dp}{dt} = E(q) - \frac{\langle E(q), p \rangle}{\langle p, p \rangle} p. \tag{1.2}$$

Ce système d'équations décrit un système dit isokinétique au sens où :

$$\frac{d \langle p, p \rangle}{dt} = 2 \langle \frac{dp}{dt}, p \rangle = 0.$$

Les hypersurfaces de vitesse constante ($\langle p, p \rangle = c$) peuvent ensuite être décrites en utilisant des variétés localement conformément symplectiques. Comme nous allons voir, les équations des trajectoires le long d'une hypersurface de vitesse constante peuvent être vues comme la restriction d'un système d'équations "localement conformément symplectique" à l'hypersurface. Fixons-nous une hypersurface d'intérêt, disons $M_c = \{\langle p, p \rangle = c\}$, dans laquelle nous allons étudier les trajectoires. Dans ce qui suit, nous noterons la dérivée temporelle par un point (par exemple, $\dot{q}_i := \frac{dq_i}{dt}$).

Les équations 1.1 et 1.2 impliquent que, sur M_c :

$$\begin{aligned} \dot{p}_j &= -\partial_j U + \frac{\sum_k p_k \partial_k U}{c} p_j = \frac{1}{2}(\langle p, p \rangle - c) \partial_j U - \frac{\sum_k p_k^2}{c} \partial_j U + \frac{\sum_k \dot{q}_k \partial_k U}{c} p_j \\ &= \frac{1}{2}(\langle p, p \rangle - c) \frac{\partial_j U}{c} - \frac{\sum_k p_k \dot{q}_k}{c} \partial_j U + \frac{\sum_k \dot{q}_k \partial_k U}{c} p_j \end{aligned}$$

Notons que la deuxième inégalité utilise le fait que $\langle p, p \rangle - c = 0$ et que $\frac{\sum_k p_k^2}{c} = 1$. Ceci est équivalent à l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\langle p, p \rangle - c) \frac{\partial_j U}{c} &= \dot{p}_j + \frac{\sum_k p_k \dot{q}_k}{c} \partial_j U - \frac{\sum_k \dot{q}_k \partial_k U}{c} p_j \\ \iff \frac{1}{2}(\langle p, p \rangle - c) \frac{\partial_j U}{c} dq_j &= \iota_{\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{p} \end{pmatrix}} dp_j \wedge dq_j - \frac{\partial_j U}{c} \iota_{\begin{pmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{pmatrix}} \sum_k dq_j \wedge dq_k - p_j \iota_{\begin{pmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{pmatrix}} \sum_k dp_k \wedge dp_j. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $H = \frac{1}{2}(\langle p, p \rangle - c)$, le long de l'hypersurface de M_c , nous obtenons l'égalité :

$$-(dH - H \frac{dU}{c}) = \iota_{\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}} \left(\sum_i dp_i \wedge dq_i - \frac{dU}{c} \wedge \sum_i p_i dq_i \right).$$

Ainsi, multiplier termes par $e^{-\frac{U}{c}}$ nous donne que l'équation des trajectoires dans M_c est définie par la restriction à M_c de l'équation suivantes :

$$-de^{-\frac{U}{c}} H = \iota_{\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}} \left(d \sum_i e^{-\frac{U}{c}} p_i dq_i \right).$$

Lorsqu'on renormalise les vitesses par ce facteur, nous retrouvons les équations de la géométrie symplectique. Remarquons que cette égalité se traduit par

$$-(dH - H\beta) = \iota_{\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}} (d\lambda - \beta \wedge \lambda)$$

où $\lambda = \sum_i p_i dq_i$ et $\beta = d\frac{U}{c}$. Cette formulation spécifique des équations de la mécanique hamiltonienne sera reconsidérer plus tard, à la lumière des définitions 1.2.13 et 1.2.20 (les définitions 1.2.1 et 1.2.3 seront utiles à la compréhension des définitions susmentionnées, et la courte discussion après la définition 1.2.20 sera, elle aussi, d'intérêt).

1.2 Définitions

1.2.1 La différentielle de Lichnerowicz

Commençons d'abord par définir un outil pratique pour donner les définitions nécessaires à la géométrie localement conformément symplectique : la différentielle de Lichnerowicz.

Définition 1.2.1

Soient M une variété et $\beta \in \Omega^1(M)$ une 1-forme fermée. La différentielle de Lichnerowicz par rapport à β est un opérateur :

$$\begin{aligned} d_\beta : \Omega^*(M) &\rightarrow \Omega^{*+1}(M) \\ \alpha &\mapsto d\alpha - \beta \wedge \alpha \end{aligned}$$

Ceci est bien une différentielle, au sens où $(d_\beta)^2 = 0$. Ainsi, $(\Omega^*(M), d_\beta)$ est un complexe de chaînes, appelé le complexe de Lichnerowicz, dont la cohomologie est appelée la cohomologie de Lichnerowicz et est notée $H_\beta^*(M)$.

Cette différentielle a été étudiée pour la première fois par A. Lichnerowicz dans [Lic77] dans le contexte des variétés de Poisson. Par la suite, cette différentielle a notamment été utilisée par I. Vaisman pour étudier les variétés localement conformément symplectique ([Vai80], [Vai82] et [Vai85]). D'autres utilisations de cette différentielle incluent les déformations de Witten, que E. Witten a introduites dans son papier [Wit82], ou encore l'étude des variétés localement conformément Kähler, comme L. Ornea et M. Verbitsky l'ont faite dans [OV09]. Finalement, citons [Oti16] pour une application de la cohomologie de Lichnerowicz à l'étude des variétés localement conformément symplectiques.

1.2.2 Premières définitions

Nous allons ici donner les définitions fondamentales à la géométrie localement conformément symplectique. Par souci de lisibilité, "Localement Conformément Symplectique" sera abrégé par "lcs".

Les deux définitions suivantes sont équivalentes :

Définition 1.2.2

Soit M une variété de dimension $2n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et soit (U_i, ϕ_i) un atlas de

M tel que $(\phi_i \circ \phi_j^{-1})^* \omega_{\mathbb{R}^{2n}} = c_{i,j} \omega_{\mathbb{R}^{2n}}$ pour tout i, j , pour un certain $c_{i,j} \in \mathbb{R}_+^*$ dépendant seulement de i et j .

Soit $(g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R})_i$ une famille de fonctions lisses telles que $e^{g_i - g_j} = c_{i,j}$. Posons $\beta \in \Omega^1(M)$ (fermée) telle que $\beta = dg_i$ sur chaque U_i , et $\omega \in \Omega^2(M)$ telle que $\omega = e^{g_i} \phi_i^* \omega_{\mathbb{R}^{2n}}$ sur chaque ouvert U_i . Alors, la 2-forme ω est appelée forme **lcs**. La 1-forme β est appelée forme de Lee. Le couple (ω, β) est appelé une "paire **lcs**". Le triplet (M, ω, β) est appelée variété **lcs**.

Définition 1.2.3

Soit M une variété de dimension $2n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et soit $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée. Supposons qu'il existe $\omega \in \Omega^2(M)$ une 2-forme non-dégénérée (ou, de façon équivalente, telle que $\omega^{\wedge n}$ soit une forme volume) telle que $d_\beta \omega = 0$. Alors ω est appelée forme **lcs**. La 1-forme β est appelée forme de Lee. Le couple (ω, β) est appelé une "paire **lcs**". Le triplet (M, ω, β) est appelée variété **lcs**.

Ces deux définitions sont équivalentes. En effet, la première est trivialement un cas particulier de la deuxième. Inversement, dans la deuxième définition, β est localement la différentielle d'une fonction, disons g . Ceci implique que localement, $d_{dg} \omega = 0 = e^{-g} d_{dg} \omega = de^{-g} \omega$. Gardant à l'esprit que $e^{-g} \omega$ est non-dégénérée (car ω est non-dégénérée) et que $de^{-g} \omega = 0$, nous en concluons que $e^{-g} \omega$ est (localement) une forme symplectique. Ainsi, par le théorème de Darboux (qui sera rappelé dans la section 1.3), il est possible de trouver un atlas pour lequel le tiré en arrière de $\omega_{\mathbb{R}^{2n}}$ est, localement, $e^{-g} \omega$. De plus, deux primitives locales g et g' de β diffèrent par une constante, i.e. $e^{g-g'} = c$.

Remarque 1.2.4

Dans ce qui suit, toutes les variétés **lcs** seront supposées connexes sauf mention du contraire.

Notons que dans la première définition, le choix d'une paire **lcs** repose sur le choix arbitraire d'un élément de $\check{C}^1(\{U_i\}_i)$ (cohomologie de Čech) de différentielle nulle. Il existe toutefois une façon de lever le caractère arbitraire de ce choix en considérant les paires **lcs** modulo une certaine relation d'équivalence.

Définition 1.2.5

Soient M une variété. Une structure **lcs** sur M est un choix d'une famille de paires **lcs**

équivalentes, pour la relation d'équivalence :

$$(\omega_1, \beta_1) \sim (\omega_2, \beta_2) \iff \exists g \in C^\infty(M) / (\omega_1, \beta_1) = (e^g \omega_2, \beta_2 + dg).$$

Il est aussi possible de définir une structure **lcs** sans faire appel à un représentant d'une de ces classes d'équivalence :

Définition 1.2.6

Soit E un fibré trivial en demi-droites réelles, c.-à-d. de fibre \mathbb{R}_0^+ , au-dessus de M . Une structure **lcs** est un couple (ω, ∇) consistant en une 2-forme $\omega \in \Omega^2(M, E)$ non-dégénérée à valeur dans E et en une connexion de Koszul plate ∇ sur E , tels que $d^\nabla \omega = 0$, pour d^∇ la dérivée extérieure définie par ∇ .

Notons que ω peut être représenté par $\tilde{\omega} \otimes \sigma$ pour un $\tilde{\omega} \in \Omega^2(M)$ et σ une section de E . Avec cette écriture, nous avons que $d^\nabla \omega = (d\tilde{\omega}) \otimes \sigma + (\nabla \sigma \wedge \tilde{\omega})$.

Soient (ω', β) et $(e^g \omega', \beta + dg)$ deux structures **lcs**. Définissons, pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$, $\nabla_{(\cdot)}^\beta f \sigma = \beta(\cdot) \otimes \sigma + df(\cdot) \otimes \sigma$ (où σ est la section de E qui a été au préalable choisie), qui est bien une connexion de Koszul plate sur E . Remarquons que $\nabla^{\beta+dg} f \sigma = \nabla^\beta (f+g) \sigma$. Ainsi, $(\omega' \otimes \sigma, \nabla^\beta) = ((e^{-g} \omega') \otimes (e^g \sigma), \nabla^\beta)$.

Inversement, pour une structure **lcs** (ω, ∇) , nous pouvons lui associer une paire **lcs** (ω', β) . En effet, fixons σ une section non-nulle de E . Alors $\nabla \sigma = \beta \otimes \sigma$ pour une certaine 1-forme β , qui est fermée car ∇ est plate. Similairement, $\omega = \omega' \otimes \sigma$ pour une certaine 2-forme ω' , qui est non-dégénérée car ω est non-dégénérée. Alors, par définition de différentielle associée à une connexion de Koszul, $d^\nabla \omega = d^\nabla(\omega' \otimes \sigma) = (d\omega') \otimes \sigma - (\nabla \sigma) \wedge \omega' = (d\omega') \otimes \sigma - (\beta \wedge \omega') \otimes \sigma = (d_\beta \omega') \otimes \sigma = 0$ implique que $d_\beta \omega' = 0$ car σ est non-nulle.

Remarque 1.2.7

Le lecteur averti remarquera que la différence entre variété **lcs** et structure **lcs** est similaire à la différence entre variété avec forme de contact et avec structure de contact (champ non-intégrable d'hyperplans).

Définition 1.2.8

Toute variété **lcs** du type $(M, \omega, 0)$ sera appelée variété symplectique, et sera simplement notée (M, ω) .

Remarque 1.2.9

Soit $(M, \omega, 0)$ une variété **lcs**, alors les opérations de changement de cartes conservent

la forme symplectique canonique sur \mathbb{R}^{2n} (et pas seulement à un facteur strictement positif près).

Soulignons ici qu'il existe une autre façon de visualiser les variétés **lcs**.

Remarque 1.2.10

Soit (M, ω, β) une variété **lcs** et \tilde{M}_β le revêtement intégral de β . Posons $\pi : \tilde{M}_\beta \rightarrow M$ la projection canonique et prenons g une primitive de β sur \tilde{M}_β . Alors $(\tilde{M}_\beta, e^{-g}\pi^*\omega)$ est une variété symplectique.

Mutatis mutandis, toutes les définitions et propriétés qui vont suivre seront valides pour les structures **lcs** (c.-à-d. à équivalence près) sauf mention du contraire.

Les morphismes qui préservent les structures **lcs** sont appelés des symplectomorphismes conformes :

Définition 1.2.11

Soient (M_1, ω_1, β_1) et (M_2, ω_2, β_2) deux variétés **lcs** et soit $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ un difféomorphisme. Si $(\phi^*\omega_2, \phi^*\beta_2) \sim (\omega_1, \beta_1)$, alors ϕ est appelé symplectomorphisme conforme. Le groupe des symplectomorphismes conformes de M_1 dans M_1 sera noté $Symp_{\text{lcs}}(M_1, \omega_1, \beta_1)$.

Si $(\phi^*\omega_2, \phi^*\beta_2) = (\omega_1, \beta_1)$, alors ϕ est appelé symplectomorphisme.

Étant donné une sous-variété L de (M, ω, β) , nous pouvons regarder son orthogonal par rapport à ω , c'est-à-dire le sous-fibré vectoriel maximal $T^{\perp\omega}L$ (au sens de l'inclusion) de TM au-dessus de L tel que, pour tout vecteur $X \in TL$ et tout vecteur $Y \in T^{\perp\omega}L$, nous avons $\omega(X, Y) = 0$. Ceci nous permet de dégager trois familles de sous-variétés d'intérêt (vis-à-vis de cet "orthogonal") : les sous-variétés isotropes ($TL \subset T^{\perp\omega}L$), les sous-variétés co-isotropes ($TL \supset T^{\perp\omega}L$) et les sous-variétés **lcs** ($TL \cap T^{\perp\omega}L = 0_L$, la section nulle au-dessus de L). Le nom de ces dernières vient du fait que les tirés en arrières ω et β confèrent à ces sous-variétés une structure **lcs**.

Observons que, puisque ω est non-dégénérée, la dimension des fibres de $T^{\perp\omega}L$ est égale à $\dim(M) - \dim(L)$. Ainsi les sous-variétés isotropes de dimension maximal (de dimension $\dim(M)/2$) sont des sous-variétés co-isotropes de dimension minimal (et vice-versa). Ces sous-variétés sont appelées sous-variétés lagrangiennes.

Définition 1.2.12

Soient (M, ω, β) une variété **lcs** de dimension $2n$, L une variété de dimension n et $i : L \rightarrow M$ un plongement (resp. immersion). Si $i^*\omega = 0$, alors $i(L)$ est appelée

sous-variété (resp. immersion) lagrangienne (ou, simplement, lagrangienne).

Notons que puisque les symplectomorphismes conformes préservent la structure \mathbf{lcs} , ils préservent donc "l'orthogonalité". Ainsi, l'image d'une sous-variété lagrangienne (resp. isotrope, co-isotrope, symplectique) par un symplectomorphisme conforme est aussi une sous-variété lagrangienne (resp. isotrope, co-isotrope, symplectique).

Dans certaines variétés \mathbf{lcs} , la forme \mathbf{lcs} est non-seulement d_β -fermée ($d_\beta\omega = 0$), mais aussi d_β -exacte (il existe $\lambda \in \Omega^1(M)$ telle que $d_\beta\lambda = \omega$). C'est le cas, par exemple, de la plupart des variétés symplectiques venant de la physique (par exemple les fibrés (co)tangents). Cette 1-forme offre une structure additionnelle rendant l'étude de ces variétés quelque peu plus facile et permet d'obtenir des résultats qui ne seraient pas, en général, vrais dans une variété \mathbf{lcs} quelconque

Définition 1.2.13

Soient M une variété de dimension $2n$ et $\beta \in \Omega^1(M)$ une 1-forme fermée. S'il existe $\lambda \in \Omega^1(M)$ telle que $d_\beta\lambda$ est non-dégénérée, alors $(M, d_\beta\lambda, \beta)$ est une variété \mathbf{lcs} et (M, λ, β) est appelée variété \mathbf{elcs} (pour Localement Conformément Symplectique d_β -Exacte). Par ailleurs, λ sera appelée forme \mathbf{elcs} et (λ, β) sera appelée paire \mathbf{elcs} .

Notons que toute variété \mathbf{elcs} du type $(M, \lambda, 0)$ (souvent juste écrite (M, λ)) est appelée variété symplectique exacte.

Notons que puisque $d_\beta^2 = 0$, $d_\beta\lambda$ est bien une forme \mathbf{lcs} lorsque $d_\beta\lambda$ est non-dégénérée. Le premier exemple de variété \mathbf{elcs} , et objet de cette thèse, sont les fibrés cotangents. Pour une variété M , posons $\pi : T^*M \rightarrow M$ la projection canonique. Alors tout point $p \in T^*M$ est une application linéaire de $T_{\pi(p)}M$ dans \mathbb{R} . Ainsi, la section λ de T^*T^*M définie par $\lambda_p = p \circ (D\pi)_p$, où $(D\pi)_p$ est la différentielle de π en p , pour $p \in T_q^*M$ avec $q \in M$. C'est une 1-forme sur T^*M appelée forme de Liouville. Soit β une 1-forme fermée sur M , et appelons β sa tirée en arrière sur T^*M , alors (T^*M, λ, β) est une variété \mathbf{elcs} .

Remarque 1.2.14

Afin d'alléger l'écriture, les différents tirés en arrière de β seront aussi notés β lorsque le contexte est clair. Sinon, le tiré en arrière sera précisé.

Définition 1.2.15

Une structure \mathbf{elcs} sur une variété M est une classe d'équivalence de paires \mathbf{elcs} donnée

par :

$$(\lambda_1, \beta_1) \sim (\lambda_2, \beta_2) \iff \exists g, h \in C^\infty(M) / (\lambda_1, \beta_1) = (e^g(\lambda_2 + d_{\beta_2}h), \beta_2 + dg).$$

Remarquons toutefois que cette structure additionnelle n'est pas préservée par les symplectomorphismes conformes (ni par les symplectomorphismes). Nous devons donc nous restreindre à la sous-classe des symplectomorphismes conformes qui préservent cette structure.

Définition 1.2.16

Un *difféomorphisme conformément de Liouville* est un symplectomorphisme conforme $\phi : (M_1, \lambda_1, \beta_1) \rightarrow (M_2, \lambda_2, \beta_2)$ tel que $\phi^*\lambda_2 = e^g(\lambda_1 + d_{\beta_1}h)$ et $\phi^*\beta_2 = \beta_1 - dg$, pour une certaine paire de fonctions lisses g et h de M_1 dans \mathbb{R} . Dans le cas particulier où $g = 0$, ϕ sera appelé *difféomorphisme de Liouville*.

Observons que le tiré en arrière de $d_\beta\lambda$ sur une sous-variété lagrangienne L est égal à 0, ce qui signifie que le tiré en arrière de λ est d_β -fermé. Ainsi, certaines lagrangiennes particulières vérifient la propriété supplémentaire que les tirés en arrière de λ sont d_β -exactes. Plus précisément, nous nous intéresserons aux sous-variétés lagrangiennes dites exactes.

Définition 1.2.17

Soit (M, λ, β) une variété de **elcs**. Soit $i : L \rightarrow M$ telle que $i(L)$ est une sous-variété (resp. immersion) lagrangienne de $(M, d_\beta\lambda, \beta)$. S'il existe $f \in C^\infty(L)$ telle que $i^*\lambda = d_\beta f$, alors $i(L)$ est appelée sous-variété (resp. immergée) lagrangienne β -exacte. Lorsque le choix d'une forme de Lee n'influence pas la véracité d'une assertion à λ fixé, nous dirons simplement que $i(L)$ est une sous-variété (resp. immergée) lagrangienne exacte.

Remarque 1.2.18

Dans ce qui suit, toutes les sous-variétés lagrangiennes seront supposées connexes sauf mention du contraire.

Le premier exemple de lagrangienne exacte **lcs** sont des graphes de dérivées de Lichnerowicz de fonctions dans les cotangents. Plus précisément, la sous-variété $\Gamma_\beta(f)$ est lagrangienne, où $\Gamma_\beta(f)$ est l'image de la section $x \mapsto (x, d_\beta f_x)$ pour un certain $f \in C^\infty(M)$.

Définition 1.2.19

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $F : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Prenons β une 1-forme fermée sur

M et appelons β le tiré en arrière de β sur $M \times \mathbb{R}^k$. Définissons

$$V_F = \Gamma_\beta(F) \cap \left((T^*M) \times \mathbb{R}^k \times \{0\}^k \right) \subset T^*(M \times \mathbb{R}^k).$$

Ici, $\mathbb{R}^k \times \{0\}^k$ est identifié à la section nulle de $T^*\mathbb{R}^k$. Pour un F générique, le projeté de V_F sur T^*M définit une immersion lagrangienne. Si F est quadratique définie à l'infini, F est appelée fonction génératrice de cette lagrangienne.

Dans ce manuscrit, nous allons nous intéresser aux phénomènes de rigidité qui apparaissent sur des variétés **lcs**. Ainsi, nous avons besoin de bien comprendre leurs déformations. Ces déformations sont les symplectomorphismes conformes qui sont homotopes à l'identité via une homotopie qui est un symplectomorphisme conforme en tout temps. Parmi ces déformations, une classe de difféomorphismes se distingue comme étant particulièrement facile à engendrer. Ces difféomorphismes, qui nous viennent de la physique, s'inspirent de la formulation Hamiltonienne de la dynamique.

Définition 1.2.20

Soit (M, ω, β) une variété **lcs**, alors :

- Pour toute fonction $h : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de vecteurs X_h^t dépendant du temps, qui est déterminé par l'égalité

$$\iota_{X_h^t} \omega_x = -d_\beta h_{(x,t)}$$

est appelé champ de vecteurs hamiltonien associé à l'hamiltonien h_t .

- Le champ de vecteurs X_h^t engendre un flot $\phi_h = (\phi_h^t)_t$ vérifiant

$$\frac{d}{dt} \phi_h^t = X_h^t \text{ et } \phi_0 = id$$

Lorsque ϕ_h^t est un difféomorphisme défini sur M en tout temps, ϕ_h est appelé flot hamiltonien associé à h , et les ϕ_h^t sont appelés des difféomorphismes hamiltoniens.

Observons que nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((\phi_h^t)^* \omega \right)_{|(t,x)} &= \left((\phi_h^t)^* \mathcal{L}_{X_h^t} \omega \right)_{|x} = \left((\phi_h^t)^* (-dd_\beta h_t + \iota_{X_h^t} d\omega) \right)_{|x} \\ &= \left((\phi_h^t)^* (dh_t \wedge \beta + \iota_{X_h^t} \beta \wedge \omega) \right)_{|x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left((\phi_h^t)^*(dh_t \wedge \beta + \beta(X_h^t)\omega + \beta \wedge d_\beta h_t) \right)_{|x} \\
 &= \left((\phi_h^t)^*(dh_t \wedge \beta + \beta(X_h^t)\omega + \beta \wedge dh_t - h_t \beta \wedge \beta) \right)_{|x} \\
 &= \left((\phi_h^t)^*(\beta(X_h^t)\omega) \right)_{|x}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour la forme de Lee, nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left((\phi_h^t)^* \beta \right)_{|(t,x)} = \left((\phi_h^t)^* \mathcal{L}_{X_h^t} \beta \right)_{|x} = \left((\phi_h^t)^* d(\beta(X_h^t)) \right)_{|x}.$$

Ainsi, il existe un hamiltonien f_t vérifiant les deux égalités suivantes en tout temps t_0 :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left((\phi_h^t)^* \omega \right)_{|t_0} &= (\phi_h^{t_0})^*(f_{t_0} \omega) = (\phi_h^{t_0})^* f_{t_0} \times (\phi_h^{t_0})^* \omega \\
 \frac{d}{dt} \left((\phi_h^t)^* \beta \right)_{|t_0} &= (\phi_h^{t_0})^* df_{t_0}.
 \end{aligned}$$

Ceci implique que les difféomorphismes hamiltoniens sont bien des symplectomorphismes conformes. En effet, posant $\omega_t = (\phi_h^t)^* \omega$, puis en résolvant l'équation $\partial_t \omega_t = (\phi_h^t)^* f_t \times \omega_t$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (\phi_h^{t_0})^* \omega &= \exp \left(\int_0^{t_0} (\phi_{X_h}^t)^* f_t dt \right) \omega \\
 (\phi_h^{t_0})^* \beta - \beta &= d \left(\int_0^{t_0} (\phi_{X_h}^t)^* f_t dt \right).
 \end{aligned}$$

Dans le cas des variétés **elcs**, nous avons aussi que :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left((\phi_h^t)^* \lambda \right)_{|(t,x)} &= \left((\phi_h^t)^* \mathcal{L}_{X_h^t} \lambda \right)_{|x} = \left((\phi_h^t)^* (d(\lambda(X_h^t)) + \iota_{X_h^t} d\lambda) \right)_{|x} \\
 &= \left((\phi_h^t)^* (d(\lambda(X_h^t)) + \iota_{X_h^t} \omega + \iota_{X_h^t} \beta \wedge \lambda) \right)_{|x} \\
 &= \left((\phi_h^t)^* (d(\lambda(X_h^t)) - d_\beta h_t + \beta(X_h^t)\lambda - \lambda(X_h^t)\beta) \right)_{|x} \\
 &= \left((\phi_h^t)^* (d_\beta(\lambda(X_h^t)) - h_t) + \beta(X_h^t)\lambda \right)_{|x}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un hamiltonien g_t tel que, en tout temps t_0 , nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left((\phi_h^t)^* \lambda \right)_{|t_0} = (\phi_h^{t_0})^* (f_{t_0} \lambda + d_\beta g_{t_0}).$$

Gardant à l'esprit que $(\phi_h^{t_0})^* \beta - \beta = d(\int_0^{t_0} (\phi_h^t)^* f_t dt)$, on en conclut donc qu'il existe des

fonctions $F_{t_0} = \int_0^{t_0} (\phi_h^t)^* f_t dt$ et $G_{t_0} = \int_0^{t_0} e^{-F_t} (\phi_h^t)^* g_t dt$ telles que le tiré en arrière de λ par le flot hamiltonien soit égal à $e^{F_{t_0}} (\lambda + d_\beta G_{t_0}) = e^{F_{t_0}} \lambda + d_{\beta - dF_{t_0}} e^{F_{t_0}} G_{t_0}$. En effet, il suffit de poser $\lambda_t = (\phi_h^{t_0})^* \lambda$, puis en résolvant l'équation via la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_t &= (\partial_t F_t) \times \lambda_t + d((\phi_h^t)^* g_t) - ((\phi_h^t)^* g_t)(\phi_h^t)^* \beta \\ &= (\partial_t F_t) \times \lambda_t + d((\phi_h^t)^* g_t) - ((\phi_h^t)^* g_t)(\beta + dF_t) \end{aligned}$$

Pour $\lambda_t = e^{F_t} \Lambda_t$, ceci donne :

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_t &= (\partial_t F_t) \times \lambda_t + e^{F_t} \partial_t \Lambda_t \\ \implies \partial_t \Lambda_t &= e^{-F_t} d((\phi_h^t)^* g_t) - e^{-F_t} (\phi_h^t)^* g_t \beta + (\phi_h^t)^* g_t d e^{-F_t} \\ &= d_\beta \partial_t G_t = \partial_t d_\beta G_t. \end{aligned}$$

Notamment, l'image d'une lagrangienne β -exacte par un flot hamiltonien est, au temps t_0 , une lagrangienne $(\beta + dF_{t_0})$ -exacte.

1.3 Rappels sur la géométrie symplectique

Dans cette section, nous nous concentrerons avant tout sur des rappels concernant la géométrie symplectique. Le contenu de cette section sera à comparer aux propriétés données par la suite pour la géométrie localement conformément symplectique. Notons que pour cette section, toute mention de lagrangienne exacte désigne plus précisément des lagrangiennes 0-exactes.

1.3.1 Propriétés fondamentales

Tout d'abord, remarquons que le groupe (de Lie) symplectique

$$Sp_n(\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) : {}^t A \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

admet le groupe unitaire $U(n)$ comme sous-groupe compact maximal, et donc l'ensemble des classes à gauche $Sp_n(\mathbb{R})/U(n)$ est un espace euclidien (voir [Ant11] par exemple pour un énoncé quelque peu plus général). Soit (M, ω) une variété symplectique avec pour

atlas $(U_i, \phi_i)_i$. Puisque les différentielles des opérations de changement de carte sont dans $Sp_n(\mathbb{R})$, ces différentielles peuvent être utilisées pour construire un $Sp_n(\mathbb{R})$ -fibré principal au-dessus de la variété, dans lequel les opérations de changement de carte sont :

$$g_{i,j} = (\phi_i \circ \phi_j^{-1}, D\phi_i \circ \phi_j^{-1}) : \phi_j(U_i \cap U_j) \times Sp_n(\mathbb{R}) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) \times Sp_n(\mathbb{R}).$$

Notons que cette structure est "intégrable" au sens où l'opération de changement de carte sur les fibres est juste la différentielle de l'opération de changement de carte sur la base. Maintenant, prenons H_t la rétraction de $Sp_n(\mathbb{R})/U_n$ sur l'identité, et utilisons-la pour définir les opérations de changement de carte suivantes :

$$g'_{i,j} = (\phi_i \circ \phi_j^{-1}, H_1(D\phi_i \circ \phi_j^{-1})) : \phi_j(U_i \cap U_j) \times Sp_n(\mathbb{R}) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) \times Sp_n(\mathbb{R}).$$

Notons $H_1(D\phi_i \circ \phi_j^{-1})$ est bien défini car $Sp_n(\mathbb{R})$ est difféomorphe au produit cartésien $(Sp_n(\mathbb{R})/U(n)) \times U(n)$. Ceci nous permet de définir un $U(n)$ fibré principal sur M . Notons toutefois que cette structure n'est pas "intégrable". Ces considérations nous amènent à la proposition suivante :

Proposition 1.3.1

Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors M admet une structure presque hermitienne (J, g) compatible avec ω .

Rappelons rapidement la définition des termes utilisés dans la proposition.

Définition 1.3.2

Une structure presque hermitienne (J, g) est la donnée de :

- J , un difféomorphisme de TM commutant avec la projection canonique sur M et tel que $J^2 = -id$. Un tel difféomorphisme est appelé structure presque complexe.
- g est une métrique riemannienne telle que $g(\cdot, J\cdot)$ est une forme symplectique

Par compatible, nous signifions que $\omega(\cdot, J\cdot) = g$.

Remarquons aussi que les variétés symplectiques sont localement toutes les mêmes et par conséquent ne possèdent pas d'invariants locaux. En effet, nous avons le théorème suivant :

Théoreme 1.3.3 (Darboux, [Dar82])

Soit λ une 1-forme et soit p le plus grand entier tel que $(d\lambda)^{\wedge p}$ n'est pas identiquement

nul, supposant que $\lambda \wedge (d\lambda)^{\wedge p} = 0$ partout, alors il existe un système de coordonnées locales $(q_i, p_i)_i$ tel que $\lambda = \sum p_i dq_i$.

Puisque ω est fermé, ω est localement la différentielle d'une 1-forme λ . Puisque $\omega^{\wedge n}$ est une forme volume, le théorème de Darboux indique qu'il existe toujours un système de coordonnées locales $(q_i, p_i)_i$ dans lequel $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Il en va de même pour les sous-variétés lagrangiennes. En effet, le résultat suivant généralise le théorème précédent :

Théorème 1.3.4 (de Weinstein, [Wei71])

Soient ω_0 et ω_1 deux formes symplectiques sur une variété M . Soit $i : N \rightarrow M$ une sous-variété lagrangienne (pour ω_1 et ω_2) compacte de M . Alors il existe deux voisinages V_0 et V_1 de $i(N)$ dans M et un difféomorphisme $f : V_0 \rightarrow V_1$ vérifiant $f|_N = id_N$ et $f^*\omega_1 = \omega_0$.

Pour une lagrangienne L de (M, ω) , le théorème des voisinages tubulaires nous permet de comparer la forme symplectique canonique de T^*L au tiré en arrière de ω sur un voisinage de L dans T^*L .

Pour prouver ce théorème, ainsi que le théorème précédent, nous pouvons faire appel à un outil fondamental de la géométrie symplectique :

Théorème 1.3.5 (astuce de Moser, [Mos65] et [MS95], lem. 3.2.1)

Soit $(\omega_t)_{t \in [0,1]}$ une famille de formes symplectiques sur une variété M compacte vérifiant $\frac{d}{dt}\omega_t = d\sigma_t$ pour une famille $(\sigma_t)_{t \in [0,1]}$ de 1-formes sur M . Alors il existe une famille $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$ de difféomorphismes de M tels que $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$.

L'astuce consiste à trouver un champ de vecteurs X_t tel que $\mathcal{L}_{X_t}\omega = -\partial_t\omega$. Dans le cas où M n'est pas compact, l'astuce fonctionne également à condition de s'assurer que le flot associé à ce champ de vecteurs est bien défini en tout temps $t \in [0, 1]$, comme indiqué dans [MS95] (p.108).

1.3.2 Les fibrés cotangents et leurs lagrangiennes exactes

Remarquons que lorsqu'une lagrangienne est le graphe de la différentielle d'une fonction f , alors cette fonction permet de définir un hamiltonien $f \circ \pi$, pour $\pi : T^*M \rightarrow M$ la projection canonique, dont le flot hamiltonien associé envoie le graphe de df sur la section nulle au temps 1.

Inversement, nous avons la proposition suivante, démontrée pour la première fois par F. Laudenbach et J.-C. Sikorav dans [LS85] pour une variété M compacte. Nous citons ici une version un peu plus générale, obtenue comme corollaire d'un théorème de Chekanov sur la persistance des fonctions génératrices (au sens legendrien).

Théoreme 1.3.6 ([Che96])

Soit L une lagrangienne de T^*M (M pas nécessairement compacte) qui est isotope à la zéro-section M via une isotopie hamiltonienne à support compact, alors L possède une fonction génératrice (quadratique à l'infini) $F : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ pour un certain k .

Par théorie de Morse classique, ceci implique le résultat suivant :

Théoreme 1.3.7 ([LS85])

Soit ϕ_t une isotopie hamiltonienne de T^*M , où M est une variété compacte. Supposons que $\phi_1(M)$ intersecte M transversalement (l'intersection transverse sera noté $\phi_1(M) \pitchfork M$). Alors

$$\#\phi_1(M) \pitchfork M \geq \sum_j b_j(M).$$

Plus précisément, le résultat montré par F. Laudenbach et J.-C. Sikorav est un peu plus fort : lorsque l'intersection est transverse, le nombre de points d'intersections est au moins le nombre minimal de points critiques d'une fonction de Morse stable (i.e. d'une fonction génératrice quelque peu plus générale que ce qui a été donné en définition, et qui est une fonction de Morse) sur M .

Ceci nous amène donc à la série de conjectures suivante :

Conjecture 1.1

Soit M une variété compacte :

(Arnold) toute lagrangienne exacte de T^*M est l'image de M par un difféomorphisme hamiltonien ;

(Arnold, bis) toute lagrangienne exacte admet une fonction génératrice ;

(Arnold-Givental, forte) toute lagrangienne exacte de T^*M transverse à M possède au moins $\sum_j b_j(H_*(M))$ points d'intersections avec M .

Ici, chaque conjecture est une version plus faible de la conjecture précédente. La première conjecture implique la deuxième par le théorème de Chekanov cité auparavant, et la seconde implique la troisième grâce au papier de F. Laudenbach et J.-C. Sikorav dans [LS85] et à l'isomorphisme de Thom. Notons que la troisième conjecture est démontrée.

En effet, une première version apparaît dans le papier de K. Fukaya, P. Seidel et I. Smith ([FSS07]). Dans cette version, certaines restrictions sont imposées sur M et sur les lagrangiennes considérées. Toutefois, M. Abouzaid et T. Kragh montrent dans [AK18] que ces restrictions peuvent être levées.

Comme indiqué, la version donnée de la conjecture d'Arnold-Givental est une version forte. De façon plus générale, la conjecture d'Arnold-Givental est la conjecture suivante :

Conjecture 1.2 (*Arnold-Givental*)

Soit $L \subset (M, \omega)$ une lagrangienne et ϕ_t une isotopie hamiltonienne générique. Alors nous avons $\#\phi_1(L) \cap L \geq \sum_i b_i(L)$.

Observons que la conjecture d'Arnold possède une autre conséquence évidente : si L est l'image de M par un difféomorphisme hamiltonien, alors la projection canonique de L sur M est une équivalence d'homotopie. En fait, un résultat plus fort résulte des travaux de M. Abouzaid et T. Kragh, dans la direction des travaux de Fukaya, Seidel et Smith dans [FSS07].

Théoreme 1.3.8 ([AK18])

Soit L une sous-variété lagrangienne 0-exacte fermée de T^*M , pour M une variété fermée. Alors la restriction à L de la projection canonique $\pi : T^*M \rightarrow M$ est une équivalence d'homotopie simple.

Les travaux de Abouzaid, Fukaya, Kragh, Seidel et Smith s'appuient fortement sur les catégories de Fukaya (notamment, les catégories de Fukaya enroulées) pour prouver ce résultat. Toutefois, mentionnons ici qu'une preuve alternative, due à S. Guillermou (voir [Gui19]), obtient que la restriction de π à L est une équivalence d'homotopie. Cette preuve alternative s'appuie uniquement sur la théorie des faisceaux et notamment des faisceaux dérivés, comme présentée par M. Kashiwara et P. Shapira dans leur livre [KS90].

1.4 Rappels sur la géométrie localement conformément symplectique

Cette section est organisée comme un miroir **lcs** de la section précédente. Nous ferons un détour par l'homologie de Morse-Novikov afin d'expliquer le résultat de B. Chantraine et E. Murphy.

1.4.1 Propriétés fondamentales

Grâce aux mêmes observations qu’au début de 1.3.1, nous avons la propriété suivante :

Proposition 1.4.1

Soit (M, ω, β) une variété **lcs**. Alors M admet une structure presque hermitienne (J, g) compatible avec ω .

Du fait que, localement, une variété **lcs** (M, ω, β) est symplectique (à un facteur conforme près), ces variétés ont de nombreuses propriétés en commun avec les variétés symplectiques.

Proposition 1.4.2

Soit (M, ω, β) une variété **lcs**. Alors il existe toujours un système de coordonnées locales $(q_i, p_i)_i$ dans lequel $\omega = e^g \sum dp_i \wedge dq_i$ pour une certaine fonction g définie localement.

Nous avons aussi une généralisation directe du théorème de Weinstein.

Théorème 1.4.3 (de Weinstein lcs, [OS17])

Soient (ω_0, β_0) et (ω_1, β_1) deux paires **lcs** sur une variété M . Soit $i : N \rightarrow M$ une sous-variété compacte de M vérifiant $\omega_{0|i(N)} = \omega_{1|i(N)}$ et $i^*\beta_0 = i^*\beta_1$. Alors il existe deux voisinages V_0 et V_1 de $i(N)$ dans M et un difféomorphisme $f : V_0 \rightarrow V_1$ vérifiant $f|_N = id_N$ et $(f^*\omega_1, f^*\beta_1) \sim (\omega_0, \beta_0)$.

Notons que $\omega_{0|i(N)}$ n’est pas le tiré en arrière de ω_0 à $i(N)$ mais sa restriction à $T^*M|_{i(N)}$. En particulier, $\omega_{0|i(N)}$ voit le fibré cotangent à N .

En effet, l’astuce de Moser est adaptable à la géométrie **lcs**.

Proposition 1.4.4 (astuce de Moser lcs, [Ban02] et [BK09])

Soit $(\omega_t, \beta)_{t \in [0,1]}$ une famille de paires **lcs** sur une variété M compacte vérifiant $\omega_t - \omega_0 = d_\beta \sigma_t$ pour une famille $(\sigma_t)_{t \in [0,1]}$ de 1-formes sur M . Alors il existe une isotopie $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$ de M telle que $(\psi_t^*\omega_t, \psi_t^*\beta) \sim (\omega_0, \beta)$.

1.4.2 Avancées et parallèles avec la géométrie symplectique

Compte tenu de la multitude de points communs avec la géométrie symplectique, il est nécessaire de souligner que, même si les propriétés locales sont similaires, les propriétés globales des deux géométries sont néanmoins différentes.

Par exemple, nous pouvons observer qu'il existe des variétés possédant des structures **lcs**, mais pas de structure symplectique. En effet, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ est la "**lcs**-isation" de \mathbb{S}^3 , mais ne possède pas de structure symplectique. Pour voir ceci, notons que $H^2(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1) = 0$, et donc s'il existait une forme symplectique ω sur $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$, alors il existerait une 1-forme fermée λ telle que $d\lambda = \omega$. Posant X le champ de vecteur tel que $\omega(X, \cdot) = \lambda$, alors la dérivée de Lie de ω le long de X serait $\mathcal{L}_X \omega = \omega$, ce qui impliquerait que $(\phi_X^t)^* \omega = e^t \omega$. Soit $x \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$, prenons y dans l'adhérence de l'orbite de x sous l'action de X , alors ω devrait vérifier $\omega_y = e^{t_0} \omega_x$ pour un t_0 arbitrairement grand (absurde).

Ainsi, les théorèmes de rigidité, plus globaux que les théorèmes de la sous-section précédente, peuvent être difficiles à obtenir. Dans le reste de cette section, nous allons donc nous intéresser aux différentes adaptations des stratégies de preuve pour les conjectures d'Arnold **lcs**. Comme nous verrons dans le chapitre 2 (resp. chapitre 3), la conjecture d'Arnold (resp. Arnold, bis) est fautive en géométrie **lcs**. Il est néanmoins intéressant de comprendre quelles stratégies de preuve fonctionnent lorsque nous rajoutons des hypothèses), et pourquoi les stratégies de preuves classiques de la géométrie symplectique ne sont pas ici applicables.

Sur la conjecture d'Arnold-Givental

Pour toute lagrangienne exacte qui est hamiltonniennement isotope à la section nulle et qui lui est transverse, le théorème suivant, dû à B. Chantraine et E. Murphy, offre une version **lcs** du théorème de Laudendbach-Sikorav. De façon plus générale, la conclusion du théorème reste applicable pour toute lagrangienne donnée par une fonction génératrice générique.

Pour une présentation de l'homologie de Morse-Novikov, le lecteur pourra se référer au chapitre 3. Pour une exposition détaillée de cette homologie, se référer au livre de Farber, [Far04].

Théorème 1.4.5 ([CM16])

Soit M une variété compacte et ϕ_t une isotopie hamiltonnienne de (T^*M, λ, β) . Si $\phi_1(M)$ est transverse à M , alors

$$\#\phi_1(M) \cap M \geq \sum_j \text{rank}(HN_j(M, \beta) \otimes \mathbb{F}),$$

où \mathbb{F} est un corps quelconque vu comme un \mathbb{Z} -module (ou $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ si M n'est pas

orientable), et HN_* est l'homologie de Morse-Novikov.

Démonstration (idée de preuve) :

La première pièce de la preuve de ce théorème est le théorème de Chekanov, faisant appel à la notion de fonction génératrice pour une legendrienne (voir la prochaine section pour la définition de legendrienne, voir chapitre 3 section 3.4 pour la définition d'une fonction génératrice pour une legendrienne).

Théoreme 1.4.6 ([Che96], voir aussi [Cha95] et [The96])

Soit $(L_t)_{t \in [0,1]}$ une famille lisse de sous-variétés legendriennes de J^1M obtenue via une isotopie préservant la structure de contact. Si L_0 est donnée par une fonction génératrice, alors L_1 est donnée par une fonction génératrice.

En effet, une isotopie hamiltonienne d'une lagrangienne exacte de T^*M donne une famille lisse de legendriennes dans J^1M via le relevé standard (relevé donné dans la sous-section 1.5.1). De plus, si le relevé standard d'une lagrangienne exacte L est donnée par une fonction génératrice, alors L possède une fonction génératrice.

La deuxième, et principale, pièce de cette preuve est l'étude de l'homologie de Morse-Novikov. Soit $F : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse, alors la lagrangienne associée à cette fonction génératrice intersecte la zéro-section lorsque $(d_\beta F)_{(x,\xi)} = 0$ pour $(x, \xi) \in M \times \mathbb{R}^k$. Lorsque $d_\beta F$ intersecte transversalement la zéro-section, $d_\beta F$ est localement la différentielle d'une fonction de Morse : on peut donc attribuer un indice aux points d'intersection. Posons $Crit_i^\beta(F) = \{x : d_\beta F|_x = 0, index(d_\beta F|_x) = i\}$. Si F est strictement positive, alors $d_\beta F = -F(\beta - d \ln(F))$ et puisque $[\beta - d \ln(F)] = [\beta]$, nous pouvons ensuite conclure par les inégalités de Morse-Novikov. L'idée est donc de découper $M \times \mathbb{R}^k$ en deux morceaux : un voisinage X_0 de $F^{-1}(\{0\})$ et $X_\pm = M \times \mathbb{R}^k - X_0$. Soit G une fonction lisse de $M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $G|_{X_\pm} = |F|_{X_\pm}$. Une étude de cas montre ensuite que $\sum_i rank(HN_i(M \times \mathbb{R}^k, \beta)) \leq \sum_i rank(H_i(X_\pm, \partial X_\pm, \mathcal{L}_\beta))$, où \mathcal{L}_β est le système local défini par l'anneau de Novikov associé à β . Rappelons que $rank(H_i(X_\pm, \partial X_\pm, \mathcal{L}_\beta)) \leq \#Crit_i^\beta(G|_{X_\pm})$. Du moment que $Crit_i^\beta(F) \cap X_0 = \emptyset$, alors $\#Crit_i^\beta(G|_{X_\pm}) \leq \#Crit_i^\beta(F)$. ■

Cette preuve indique que la théorie de Morse-Novikov fournit bien des résultats en géométrie **lcs**. En particulier, cette preuve indique que nous avons une version de la théorie de Morse pour l'homologie de Morse-Novikov (la théorie de Morse-Novikov concerne les 1-formes fermées, et non les dérivées de Lichnerowicz de fonctions). Ceci indique aussi que la théorie des faisceaux peut fonctionner, puisque les théorèmes classiques de la théorie des

faisceaux dérivés reflètent les théorèmes que l'on trouve en théorie de Morse. Toutefois, le fait que certaines lagrangiennes exactes n'ont pas la même homologie de Morse-Novikov que la base (chapitre 2) et que certaines lagrangiennes exactes n'ont pas de fonctions génératrices (chapitre 3) indique qu'il est possible que certaines lagrangiennes β -exactes ne puissent pas être étudiées via la théorie des faisceaux. Notons que S. Guillermou a montré que les lagrangiennes 0-exactes peuvent toutes être étudiées, c.-à-d. elles sont "quantisables".

Notons toutefois que pour une bonne théorie des faisceaux, nous avons besoin d'une bonne théorie de Morse(-Novikov). Et remarquons que la preuve précédente ne donne qu'une borne pour le nombre total de points critiques, et non une borne pour le nombre de points critiques de chaque indice. Ainsi, la preuve de ce théorème ne fournit pas de stratégie de preuve directement adaptable à la théorie des faisceaux. Nous remédierons à ceci dans le chapitre 3.

Sur l'homologie de Floer

Comme indiqué dans l'introduction, le fil conducteur de ce manuscrit est l'adaptation du théorème d'Abouzaid-Kragh à la géométrie \mathbf{lcs} . Reposant fortement sur les travaux de Fukaya, Seidel et Smith ([FSS07]), la preuve de ce théorème fait usage des catégories de Fukaya (enroulées). Cette machinerie utilise l'homologie de Floer, qui compte les disques pseudo-holomorphes (aussi connus sous le nom de bandes de Whitney) entre les points d'intersection de (certaines) lagrangiennes transverses.

La preuve que la différentielle de l'homologie de Floer est bien définie repose sur le théorème de compacité de Gromov ([Gro85], voir aussi [MS95] et [MS04]). Pour x et y deux points d'intersection de deux lagrangiennes 0-exactes transverses, ceci permet à la fois de prouver (sous certaines hypothèses de généricité) que l'espace des bandes de Whitney pseudo-holomorphes de x à y (d'indice de Maslov 1, et à "choix de coordonnées" près) est une variété compacte (pas nécessairement toujours vrai en pratique, mais certaines techniques classiques y remédient) et que $\partial^2 = 0$. Dans le cas où L et L' sont deux lagrangiennes 0-exactes de T^*M , le théorème de Stokes implique que l'énergie d'une bande de Whitney de $\mathcal{M}(x, y)$ ne dépend que de la paire (x, y) .

Passons au monde \mathbf{lcs} , et prenons (T^*M, λ, β) une variété \mathbf{elcs} et (J, g) une structure presque hermitienne compatible avec $d_\beta \lambda$. Remarquons qu'il n'y a pas de théorème de Stokes pour d_β et donc les bandes de Whitney ne possèdent pas de borne sur leur énergie.

Une autre solution serait de ne considérer que les structures presque hermitiennes compatibles avec $d\lambda$. Prenons donc $i : L \rightarrow T^*M$ une lagrangienne exacte telle que $i^*\lambda = d_\beta f$ et considérons ses intersections (transverses) avec la zéro-section M . Alors le théorème de Stokes implique que l'énergie d'une bande de Whitney Δ est donnée par $f(y) - f(x) - \int_{\partial\Delta \cap L} f\beta$. Cette dernière intégrale n'est pas bornée.

Ainsi, nous n'avons pas d'adaptation naïve de la théorie de Floer. L'auteur de cette thèse tient ici à pointer que cette difficulté vis-à-vis de l'énergie persiste avec des approches moins naïves. Notons que dans le cas spécifique où la variété est $Q \times \mathbb{S}_\theta^1$ et $\beta = d\theta$ (voir prochaine section pour détails sur le procédé de **lcs**-isation), quelques avancées ont été faites récemment par Y.-G. Oh et Y. Savelyev dans leur papier [OS23].

Toutefois, une bonne théorie des faisceaux pour la géométrie **lcs** pourrait inspirer une théorie de Floer adaptée à l'étude des lagrangiennes exactes (dans des variétés **lcs**), en indiquant quelles conditions nous devons rajouter à la dérivée. En effet, la théorie des faisceaux et la théorie de Floer sont étroitement liés. Citons par exemple [Nad09] et [Vit19], illustrant la correspondance entre théorie de Floer et théorie des faisceaux.

1.5 Quelques enjeux

Maintenant que nous avons vu les difficultés liés à l'étude de phénomènes globaux sur les variétés **lcs**, il convient de répondre à la question : pourquoi les étudier ?

Outre les applications à la physique, dont celles que nous avons mentionnées dans les sous-section 1.1.2 et 1.1.3, la géométrie **lcs** pourrait éclairer d'autres domaines de la géométrie.

1.5.1 Liens avec la géométrie de contact

La géométrie de contact est souvent décrite comme le pendant de la géométrie symplectique en dimension impaire. Nous essayerons ici d'argumenter que, sous certains aspects, la géométrie **lcs** mérite plus cette distinction.

Définition 1.5.1

Soit M une variété de dimension $2n + 1$ et α une 1-forme sur M telle que $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume. Alors α est appelée forme de contact et le champ d'hyper-

plans $\ker(\alpha)$ est appelé structure de contact. Une variété de contact est la donnée $(M, \ker(\alpha))$, toutefois, par abus, nous dirons que (M, α) est une variété de contact et préciserons "structure de contact" lorsque le choix d'une forme de contact α donnant la structure n'a pas d'importance.

Soit $i : L \rightarrow M$ une sous-variété de dimension n et α une forme de contact sur M . Si $i^*\alpha = 0$, alors L est appelée sous-variété legendrienne de (M, α) .

Un premier exemple de variété de contact est $(\mathbb{R}^3, dz - xdy)$. Un exemple de variété de contact compacte est \mathbb{S}^3 avec pour forme de contact $i^*\lambda$ pour $i : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'inclusion et λ la forme de Liouville canonique.

Remarque 1.5.2

Soient α_1 et α_2 deux formes de contact sur une variété M . Supposons que $\ker(\alpha_1) = \ker(\alpha_2)$. Alors, il existe $g \in C^\infty(M)$ telle que $e^g\alpha_1 = \pm\alpha_2$.

La définition suivante nous donne le lien avec la géométrie symplectique :

Définition 1.5.3

Soit (M, α) une variété de contact, alors $(M \times \mathbb{R}_z, e^{-z}\alpha)$ est une variété symplectique exacte appelé la symplectisation de (M, α) . En effet, $(de^{-z}\alpha)^{\wedge n+1} = e^{-z}(d\alpha - dz \wedge \alpha)^{\wedge n+1} = -(n+1)e^{-z}d\alpha^{\wedge n} \wedge \alpha \wedge dz$, qui est non-dégénérée car $d\alpha^{\wedge n} \wedge \alpha$ est non-dégénérée.

Soit (M, λ) une variété symplectique exacte, alors $(M \times \mathbb{R}_z, dz - \lambda)$ est une variété de contact appelée contactisation de (M, λ) . La projection $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nous donne la variété $(M \times \mathbb{S}_\theta^1, d\theta - \lambda)$ est appelée contactisation circulaire de (M, λ) . Soit $i : L \rightarrow M$ une sous-variété lagrangienne exacte telle que $i^*\lambda = df$, alors son relevé canonique est

$$r : L \rightarrow M \times \mathbb{S}_\theta^1$$

$$l \mapsto (i(l), p(-f))$$

Notons que deux formes de contact différentes définissant la même structure de contact peuvent se relever à des variétés symplectiques exactes différentes, c'est-à-dire à des variétés $(M \times \mathbb{R}_z, e^{-z}\alpha_1)$ et $(M \times \mathbb{R}_z, e^{-z}\alpha_2)$ avec $e^{-z}\alpha_1$ et $e^{-z}\alpha_2$ dans deux classes de cohomologie différentes. Ainsi, le procédé de symplectisation n'est pas adapté au relèvement des structures de contact.

Une première tentative d'adaptation du procédé de symplectisation aux structures de contact (avec orientation) serait de considérer les structures symplectiques à transforma-

tion conformément symplectique près.

Une deuxième observation est que la projection $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ne permet pas de définir une "symplectisation circulaire" du fait d'une différence d'un facteur e^{-1} . Ceci contraste avec la contactisation circulaire.

Remarquons donc que $de^{-z}\alpha = e^{-z}d_{dz}\alpha$, ce qui nous amène à la définition suivante :

Définition 1.5.4

Soit (M, α) une variété de contact et $\mathbb{S}_\theta^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, alors $(M \times \mathbb{S}_\theta^1, \alpha, d\theta)$ est une variété **elcs** appelée **lcs-isation** de (M, α) .

Soit (M, λ, β) une variété **elcs**, alors la variété $(M \times \mathbb{R}_z, (dz - z\beta) - \lambda)$ est appelée **contactisation** de (M, λ, β) . Soit $i : L \rightarrow M$ une sous-variété lagrangienne exacte telle que $i^*\lambda = d_\beta f$, alors son relevé legendrien canonique est :

$$\begin{aligned} r : L &\rightarrow M \times \mathbb{R}_z \\ l &\mapsto (i(l), f) \end{aligned}$$

Notons ici que dans un fibré cotangent, le relevé legendrien canonique relève une lagrangienne exacte à une legendrienne dans J^1M équipée d'une forme de contact "tordue" (c.-à-d. qui n'est pas la forme de contact canonique). Toutefois, dans le cas des cotangents, nous pouvons définir un autre relevé naturel : le relevé legendrien standard (qui n'est pas le relevé canonique.)

Définition 1.5.5

Soit (T^*M, λ, β) une variété **elcs** et $i : L \rightarrow T^*M$ une sous-variété lagrangienne exacte telle que $i^*\lambda = d_\beta f$. Alors son relevé legendrien standard est :

$$\begin{aligned} r' : L &\rightarrow T^*M \times \mathbb{R}_z = J^1M \\ l &\mapsto (i(l) - f(l)\beta, f(l)) \end{aligned}$$

et $r'^*(dz - \lambda) = 0$.

Le relevé standard et le relevé canonique sont similaires. En effet, le morphisme évident $(q, p, z) \mapsto (q, p + z\beta, z)$ permet de passer de la variété de contact $(J^1M, dz - z\beta - \lambda)$ à $(J^1M, dz - \lambda)$.

Comme nous le verrons dans le troisième chapitre, le procédé de **lcs-isation** circulaire

peut être modifié de sorte qu'une legendrienne dans un espace de jet possède une fonction génératrice si et seulement si sa \mathbf{lcs} -isation possède une fonction génératrice.

En résumé, la géométrie de contact, avec la procédé de contactisation circulaire, est la version $(2n + 1)$ -dimensionnelle de la géométrie symplectique en dimension $2n$. Et la géométrie \mathbf{lcs} est la version $(2n+2)$ -dimensionnelle de la géométrie de contact en dimension $2n + 1$.

Ainsi, l'étude des variétés \mathbf{lcs} pourrait offrir de nouvelles perspectives pour l'étude des variétés de contact. Notons que les variétés \mathbf{lcs} peuvent apparaître d'autres façons dans les variétés de contact : par exemple, les structures \mathbf{lcs} apparaissent comme structures sur certains cobordismes presque symplectiques entres variétés de contact ou encore, comme fibration de variétés de contact (voir théorèmes B et C dans [BM21] pour plus de détails).

1.5.2 Liens avec la géométrie kählérienne

Une variété kählérienne (aussi dite de Kähler) est une variété symplectique (M, ω) muni d'une structure presque hermitienne (J, g) compatible et telle que J est intégrable. C'est-à-dire que J est induite par une structure complexe sur M . Ces variétés apparaissent tant en physique qu'en géométrie algébrique.

La géométrie localement conformément kählérienne (\mathbf{lcsK}) est une généralisation de la géométrie kählérienne dans laquelle la variété (M, ω) n'est plus symplectique, mais \mathbf{lcs} (voir le livre de Dragomir et Ornea, [DO98], pour plus de détails sur le sujet). Les structures \mathbf{lcsK} offrent donc une structure supplémentaire sur certaines variétés complexes n'ayant pas de structure kählérienne (par exemple, les variétés de Hopf, diffeomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1}$, voir [Boo54] pour plus de détails pour le cas $n = 1$).

La géométrie \mathbf{lcsK} est un domaine de recherche actif et cette structure supplémentaire est étudiée tant par les physiciens (e.g. [Sha15]) que par les mathématiciens (notons que l'article donnant son nom à la géométrie \mathbf{lcs} , [Vai76], ne mentionne pas la géométrie \mathbf{lcs} dans son titre, mais la géométrie \mathbf{lcsK} ; d'autres exemples sont [PV10], [GMO13], ou encore [AD23]).

Ainsi, toute avancée en géométrie \mathbf{lcs} est directement applicable à la géométrie \mathbf{lcsK} , qui à son tour, pourrait inspirer de nouvelles stratégies de preuve en géométrie \mathbf{lcs} .

1.6 Conclusion

Notons que l'absence d'une théorie de Floer pour la géométrie $\mathbf{lc\mathfrak{s}}$ empêche l'adaptation des arguments d'Abouzaid et Kragh. Ainsi, malgré les similitudes entre géométrie symplectique et géométrie $\mathbf{lc\mathfrak{s}}$, il n'y a pas de raison a priori pour que la conclusion de leur théorème reste vraie dans cette généralisation de la géométrie symplectique. Nous allons en effet voir dans le prochain chapitre que ce n'est pas le cas. Nous verrons aussi certaines conditions sous lesquelles la conclusion du-dit théorème reste vraie. Le dernier chapitre sera consacré à des idées qui pourront peut-être (à terme) permettre de montrer une version $\mathbf{lc\mathfrak{s}}$ du théorème.

SUR LA PROJECTION DES LAGRANGIENNES EXACTES

Soit M une variété fermée de dimension n , soit β une 1-forme fermée sur M et soit λ la forme de Liouville canonique de T^*M . Comme vu précédemment, (T^*M, λ, β) est une variété **elcs**.

Dans l'esprit du papier d'Abouzaid-Kragh, nous souhaitons comprendre l'application $H_*(L) \rightarrow H_*(M)$ induite par la projection $T^*M \rightarrow M$ sur une lagrangienne exacte L .

Ainsi, dans la première section, nous verrons que cette application n'est pas un isomorphisme pour certaines lagrangiennes exactes. En particulier, ceci implique que la conjecture d'Arnold est fautive en géométrie **elcs** ou, du moins, doit être adaptée.

Dans la deuxième section, nous verrons que si β est homologiquement non-nulle, ses tirés en arrière aux lagrangiennes exactes sont aussi non-nuls en cohomologie. Ceci implique que l'application $H_*(L) \rightarrow H_*(M)$ n'est jamais l'application nulle (sauf si $H_*(M) = 0$).

Toutefois, comme expliqué dans l'introduction, non-seulement il existe des problèmes pour adapter l'homologie de Floer aux variétés **elcs**, mais les exemples donnés montrent que le théorème 1.3.8 ne peut pas directement s'adapter (*mutatis mutandis*) aux lagrangiennes exactes. Nous souhaitons donc comprendre, avec des méthodes ne reposant pas sur l'homologie de Floer, quelles sont les conditions que nous devons imposer à nos lagrangiennes exactes pour que $L \rightarrow M$ soit une équivalence simple d'homotopie, ou du moins induit un quasi-isomorphisme en homologie. La troisième section sera donc consacrée à l'étude d'une quantité de type capacité l ayant la propriété que la projection canonique $L \rightarrow M$ est une équivalence simple d'homotopie (et donc un quasi-isomorphisme) lorsque l est suffisamment petite.

2.1 Quelques nouveaux exemples en géométrie lcs

Nous avons vu dans le chapitre précédent que certaines variétés possèdent une structure lcs mais ne possèdent pas de structure symplectique.

Toutefois, même lorsque une variété possède une structure symplectique et une forme lcs qui lui est localement égale à un facteur conforme près, ces deux structures peuvent présenter des comportements globaux différents. Gardant à l'esprit le théorème 1.3.8, donnons quelques exemples pour étayer cette observation.

Comme nous allons l'illustrer au travers des prochains exemples, il existe un procédé similaire à la lcs-isation de variétés de contact qui nous permet de construire plusieurs exemples de lagrangiennes exactes dans des fibrés cotangents de variétés fermées.

Exemple 1 :

$$i : \mathbb{T}^2 \rightarrow T^*\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$(\theta, \phi) \mapsto (2\theta, \phi, \frac{1}{2} \cos(\theta), -\sin(\theta))$$

Ce plongement "enroule" deux fois le tore dans son cotangent. Nous pouvons vérifier que $i^*\lambda = \frac{1}{2} \cos(\theta)d2\theta - \sin(\theta)d\phi = d\sin(\theta) - \sin(\theta)d\phi = d_{d\phi} \sin(\theta)$.

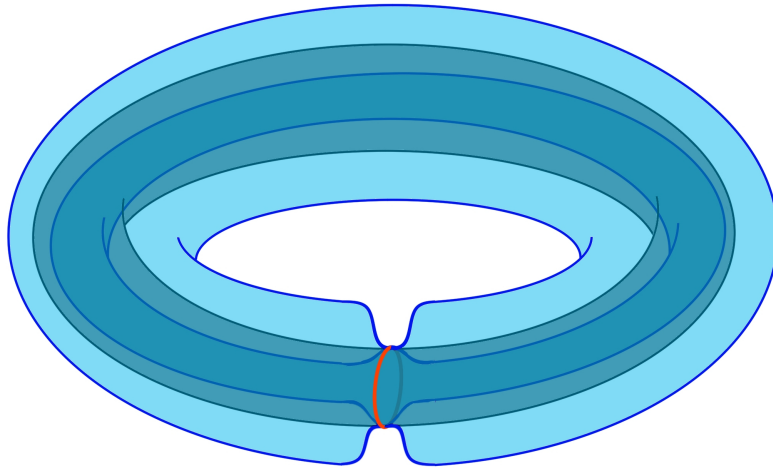


FIGURE 2.1 – Illustration de l'exemple 1

Notons que nous pouvons remplacer le facteur 2 par un facteur entier $k > 0$ quelconque. Ce premier exemple montre donc que la projection d'une lagrangienne exacte sur la section nulle peut être de degré non-nul arbitraire.

Exemple 2 :

$$j : \mathbb{T}^2 \rightarrow T^*\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$(\theta, \phi) \mapsto (\cos(\theta), \phi, 3 \sin(\theta) \cos(\theta), \sin(\theta)^3)$$

Il s'agit ici du produit du nœud trivial legendrien dans $J^1\mathbb{S}^1$ par \mathbb{S}^1 . Nous avons $j^*\lambda = 3 \sin(\theta) \cos(\theta) d \cos(\theta) + \sin(\theta)^3 d\phi = d(-\sin(\theta)^3) + \sin(\theta)^3 d\phi$.

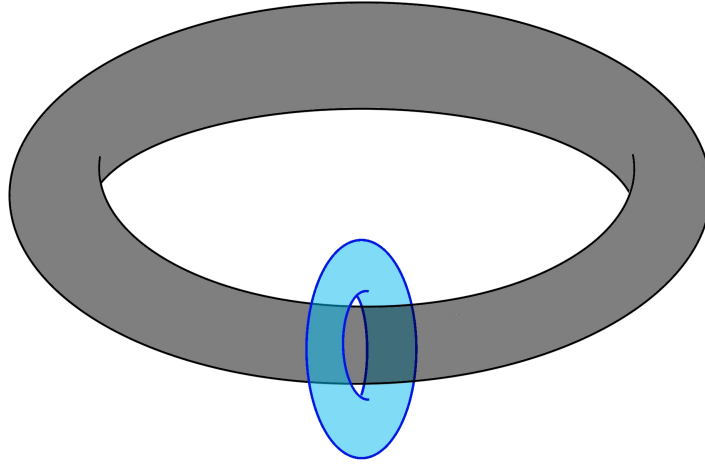


FIGURE 2.2 – Illustration de l'exemple 2

Ce deuxième exemple est à contraster avec l'exemple précédent, et illustre que la projection peut être de degré zéro.

Il est immédiatement apparent que la projection $H_*(L) \rightarrow H_*(M)$ peut très bien n'être ni injective, ni surjective : la conclusion du théorème d'Abouzaid-Kragh n'est pas vraie dans cette généralisation. Ces deux exemples peuvent être généralisés par la construction suivante :

Construction 2.1

Soit λ_M la forme de Liouville canonique sur T^*M et un plongement legendrien $i : \Lambda \rightarrow (J^1M \simeq T^*M \times \mathbb{R}_z, dz - \lambda_M)$. Notons $f \in C^\infty(\Lambda)$ la fonction $f = i^*z$. Posant, pour $l \in \Lambda$, $i_M(l)$ la projection de $i(l)$ sur T^*M , nous pouvons définir :

$$j : \Lambda \times \mathbb{S}^1 \rightarrow T^*(M \times \mathbb{S}^1) = T^*M \times T^*\mathbb{S}^1$$

$$(l, \theta) \mapsto (i_M(l), \theta, -f).$$

Ceci est un plongement lagrangien $d\theta$ -exact dans $(T^*(M \times \mathbb{S}^1), \lambda_{M \times \mathbb{S}^1}, d\theta)$, avec $j^*\lambda_{M \times \mathbb{S}^1} =$

$$\underline{df - fd\theta = d_{d\theta}f.}$$

Remarque 2.1.1

Remarquons que la **lcs**-isation de $(J^1M, dz - \lambda_M)$ est $(T^*(M \times \mathbb{S}^1), dz - \lambda_M, d\theta)$ alors que $\lambda_{M \times \mathbb{S}^1} = zd\theta + \lambda_M = \lambda_M + dz - d_{d\theta}z$. Ainsi l'application :

$$\begin{aligned} g : T^*(M \times \mathbb{S}^1) &\rightarrow J^1M \times \mathbb{S}^1 \\ (q, p, \theta, z) &\mapsto (q, -p, \theta, z) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de Liouville entre la **lcs**-isation de J^1M et $T^*(M \times \mathbb{S}^1)$ puisque $g^*(dz - \lambda_M) = \lambda_{M \times \mathbb{S}^1} + d_{d\theta}z$.

Il existe d'autres directions de généralisation de la construction donnée dans les exemples. La première généralisation est de prendre une autre variété que \mathbb{S}^1 .

Construction 2.2

Soit Q une variété fermée sur laquelle il existe une 1-forme β fermée sans zéro. Posons λ_M la forme de Liouville canonique sur T^*M et prenons un plongement legendrien $i : \Lambda \rightarrow (J^1M, dz - \lambda_M)$. Ainsi, il existe une fonction $f \in C^\infty(\Lambda)$ telle que $i^*\lambda_M = df = i^*dz$. Soit $i_M(l)$ la projection de $i(l)$ sur T^*M , nous pouvons définir :

$$\begin{aligned} j : \Lambda \times Q &\rightarrow T^*(M \times Q) = T^*M \times T^*Q \\ (l, q) &\mapsto (i_M(l), q, -f(l)\beta_q) \end{aligned}$$

Ceci est un plongement lagrangien β -exact dans $(T^*(M \times Q), \lambda, \beta)$ pour λ la forme de Liouville canonique sur $T^*(M \times Q)$. En effet, $j^*\lambda = df - f\beta = d_\beta f$.

Une autre généralisation, par exemple, passe par les lagrangiennes 0-exactes de $J^1M \times \mathbb{R}$.

Construction 2.3

Soit Λ une legendrienne de $(J^1M, \alpha = dz - \lambda_M)$. Soit L une lagrangienne 0-exacte dans la symplectisation $(J^1M \times \mathbb{R}, e^{-t}\alpha)$ tel que le tiré en arrière de $e^{-t}\alpha$ sur L soit égal à df pour un certain $f \in C^\infty(L)$. Fixons les conditions suivantes

1. pour t_0 assez grand, il existe $\epsilon > 0$, tel que :

$$L \cap J^1M \times (]-\infty, \epsilon] \cup [t_0 - \epsilon, +\infty[) = \Lambda \times (]-\infty, \epsilon] \cup [t_0 - \epsilon, +\infty[).$$

2. $e^t df = d_{dt}(e^t f)$ possède une primitive (pour la dérivée d_{dt}) F telle que $F|_{L \cap J^1 M \times \{0\}} = F|_{L \cap J^1 M \times \{t_0\}}$.

Notons que L est une lagrangienne dt -exacte dans la lcs-isation canonique $(J^1 M \times \mathbb{R}, \alpha, dt)$.

Si la première condition est vérifiée, comme le tiré en arrière de α sur Λ est égal à 0 sur $L \cap J^1 M \times (]-\infty; \epsilon] \cup [t_0 - \epsilon, +\infty[)$, nous pouvons couper les extrémités $t < 0$ et $t > t_0$ et nous pouvons recoller $L \cap J^1 M \times \{0\}$ à $L \cap J^1 M \times \{t_0\}$, puis appliquer l'application g de la remarque 2.1.1 pour donner une lagrangienne \tilde{L} dans $(T^*(M \times \mathbb{S}^1), \lambda, d\theta)$, avec $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/(t_0\mathbb{Z})$. Si, de plus, la deuxième condition est vérifiée, alors \tilde{L} est une lagrangienne $d\theta$ -exacte. Ceci est même un si et seulement si.

Quelques assertions dans cette construction méritent toutefois des preuves.

Démonstration : Premièrement, il faut montrer que \tilde{L} est bien une lagrangienne, ou autrement dit, que la forme lcs se restreint bien à 0 sur \tilde{L} . Si le tiré en arrière de $e^{-t}\alpha$ sur L est df , alors le tiré en arrière de α est $e^t df = d_{dt}(e^t f)$. Posant $\tilde{\Lambda}$ le projeté de L dans $(J^1 M \times \mathbb{S}^1, \alpha, d\theta)$, le tiré en arrière de $d_{d\theta}\alpha$ sur $\tilde{\Lambda}$ est donc localement égal à $d_{dt}^2 e^t f = 0$. Puisque g est un difféomorphisme de Liouville, $\tilde{L} = g(\tilde{\Lambda})$ est aussi une lagrangienne.

Deuxièmement, il faut montrer que \tilde{L} est $d\theta$ -exacte dans les conditions énoncées. Notons que si $d_{dt}(e^t f)$ possède une telle primitive F , alors il existe une constante c telle que

$$(e^t(f + c))|_{L \cap J^1 M \times \{0\}} = (e^t(f + c))|_{L \cap J^1 M \times \{t_0\}}.$$

Puisque le tiré en arrière de α sur Λ est 0, la fonction f est constante lorsque restreinte aux temps $t = 0$ et $t = t_0$. Ainsi, la condition peut être résumée à (pour L connexe) :

$$\exists l \in \Lambda, \exists c \in \mathbb{R}/f_0(l) + c = e^{t_0}(f_{t_0}(l) + c).$$

En particulier, nous pouvons faire passer $e^t f$ au quotient. Ainsi $\tilde{\Lambda}$ et $\tilde{L} = g(\tilde{\Lambda})$ sont des lagrangiennes exactes. ■

Les conditions pour que \tilde{L} soit exacte peuvent paraître restrictive ; toutefois, notons que nous avons la propriété suivante :

Proposition 2.1.2

Soit L comme dans la construction 2.3 et vérifiant la première condition. Alors il existe une isotopie hamiltonienne ϕ de $J^1 M \times \mathbb{R}$ telle que $\phi_1(L)$ respecte les deux conditions énoncées dans la construction 2.3 et telle que ϕ respecte les fibres de $J^1 M \times \mathbb{R} \simeq$

$T^*(M \times \mathbb{R})$ au sens où, pour tout t et tout $x \in M \times \mathbb{R}$, $\phi_t(T_x^*(M \times \mathbb{R})) = T_x^*(M \times \mathbb{R})$.

Démonstration : Soit $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse qui vaut 0 hors de $]t_0 - \frac{3\epsilon}{4}, t_0 - \frac{\epsilon}{4}[$ et d'intégrale $e^{-t_0} f_0(l) - f_{t_0}(l)$ pour n'importe quel $l \in L$. Ceci peut être fait, par exemple, en prenant une approximation de l'unité (aussi connue sous le nom de suite régularisante, il s'agit d'une suite de fonctions tests positives $(\phi_i)_i$ d'intégrale 1 et convergeant vers un dirac au sens où $\forall \delta > 0$, $\int_{|x|>\delta} \phi_i(x) dx \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0$) à support arbitrairement petit, puis en la multipliant par la constante souhaitée. Appelons h une primitive de h' telle que $h(0) = 0$ et, par abus, appelons h le tiré en arrière de h sur $M \times \mathbb{R}$ via la projection sur le deuxième facteur. Posons ϕ_s le flot du champ hamiltonien associé à $-h$ à sur $(J^1M \times \mathbb{R}, e^{-t}\alpha)$. Remarquons que le champ de vecteurs hamiltonien X_{-h} associé à $-h$ vérifie

$$e^{-t}\iota_{X_{-h}}d\alpha + e^{-t}\iota_{X_{-h}}(\alpha \wedge dt) = dh,$$

avec dh qui est colinéaire à dt . Ceci implique que $e^{-t}\iota_{X_{-h}}d\alpha + e^{-t}\alpha(X_{-h})dt - e^{-t}dt(X_{-h})\alpha$ est colinéaire à dt et donc $e^{-t}\iota_{X_{-h}}d\alpha - e^{-t}dt(X_{-h})\alpha = 0$. Puisque $d\alpha$ est une 2-forme non-dégénérée sur $\ker(\alpha)$, α et $\iota_{X_{-h}}d\alpha$ sont non-colinéaires et donc $\iota_{X_{-h}}d\alpha = 0$ et $dt(X_{-h})\alpha = 0$. Ainsi, X_{-h} ne possède pas de coordonnées dans la direction ∂_t . Le flot ϕ_s descend donc en une famille de flots $(\phi_s^t)_t$ sur J^1M . Posons :

$$L' = \{(\phi_1^t(q, p, z), t) : (q, p, z, t) \in L, (q, p) \in T_q^*M, t \in \mathbb{R}\}.$$

Alors L' est isotope à L via l'isotopie hamiltonienne ϕ_s . Par ailleurs, le tiré en arrière de $e^{-t}\alpha$ par ϕ_s pour $s = 1$ est égal à $e^{-t}\alpha + dh$ (voir les calculs faits dans le chapitre précédent à la suite de la définition 1.2.20). Ainsi, le tiré en arrière de $e^{-t}\alpha$ sur L' est $df + dh = d(f + h)$, et par définition de h , $f_0 + h_0 = e^{t_0}(f_{t_0} + h_{t_0})$. Ainsi, L' descend en une lagrangienne exacte \tilde{L} dans $(T^*(M \times \mathbb{R}), \lambda_{M \times \mathbb{R}}, d\theta)$.

Lorsque \tilde{L} est une lagrangienne exacte, utilisant g le difféomorphisme de Liouville que l'on a donné dans la remarque 2.1.1, $g(\tilde{L})$ est une lagrangienne $d\theta$ -exacte dans $(T^*(M \times \mathbb{S}^1), \lambda_{M \times \mathbb{S}^1}, d\theta)$. ■

Notons que cette construction généralise la première construction 2.1 (celle de $\Lambda \times \mathbb{S}^1$). En effet, dans la construction précédente, la legendrienne Λ se relève en une lagrangienne dt -exacte $\Lambda \times \mathbb{R}$ de $(T^*(M \times \mathbb{R}), \alpha, dt)$, où le tiré en arrière de α est 0, qui est égal à $d_{at}f$ pour une fonction $f = 0$ (la fonction nulle) ne dépendant pas du temps t . Il suffit ensuite de vérifier que la fonction nulle vérifie bien les conditions de la construction 2.3.

Proposition 2.1.3

Il existe des lagrangiennes exactes dans certains espaces cotangents dont l'homologie de Morse-Novikov (voir prochain chapitre pour définition) n'est pas l'homologie de Morse-Novikov de la base.

Démonstration : En effet, prenons, par exemple, un cobordisme lagrangien 0-exact non-orientable de genre au moins 2 d'une stabilisation du nœud trivial (voir [CST16] pour les détails).

Alors, refermer le cobordisme lagrangien sur lui-même fait augmenter son genre de 1 et donc la caractéristique d'Euler du cobordisme refermé sur lui-même est non-nulle. Puisque la somme alternée des rangs des groupes d'homologie de Morse-Novikov est égal à la caractéristique d'Euler (voir proposition 1.40 dans [Far04]), nous obtenons que l'homologie de Morse-Novikov de cette lagrangienne exacte est non-nulle. En particulier, notons que le tiré en arrière de $d\theta$ doit donc s'annuler au moins une fois (voir proposition 3.1.5, originellement thm 2.4 dans [Far04]).

D'un autre côté, l'homologie de Morse-Novikov de $M \times \mathbb{S}^1$ pour la 1-forme $d\theta$ est 0 puisque $d\theta$ ne s'annule jamais (voir proposition 3.1.5, originellement thm 2.4 dans [Far04]). ■

Remarque 2.1.4

Cette preuve est généralisable à des dimensions plus grandes (sauf peut-être 2), en prenant le produit le nœud trivial (et le cobordisme) par \mathbb{S}^{n-1} pour $\dim(M) = n$ impair et par $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^{n-3}$ pour $n \neq 2$ pair

Ceci indique qu'une adaptation de l'énoncé du théorème d'Abouzaid-Kragh ne consistera pas simplement à remplacer l'homologie singulière par l'homologie de Morse-Novikov.

2.2 La topologie de la classe de Lee

Notons que même si une adaptation naïve du théorème d'Abouzaid-Kragh est impossible, ceci ne veut pas dire que la topologie de la section nulle n'impose pas des restrictions sur la topologie des lagrangiennes exactes.

Théoreme 2.2.1

*Soient M une variété fermée, $\delta \in \Omega^1(M)$ une 1-forme fermée, λ la forme de Liouville canonique de T^*M et β le tiré en arrière de δ dans le fibré cotangent.*

Soient L une variété fermée et $i : L \rightarrow T^*M$ un plongement lagrangien β -exact.
 Alors $[\delta] \neq 0 \in H^1(M, \mathbb{R}) \implies i^*[\beta] \neq 0 \in H^1(L, \mathbb{R})$.

Soulignons que, bien entendu, ce théorème implique directement qu'il n'y a pas d'homotopie ambiante contractant $i(L)$ en un point. Si $[\delta] = 0$, alors ceci est une conséquence directe du théorème 1.3.8. Si $[\delta] \neq 0$, alors $H_1(L) \neq 0$ et donc L ne peut pas, a fortiori, être contracté en un point.

Démonstration : Par contradiction. Supposons que $H_1 : "i^*[\beta] = 0$ et $[\delta] \neq 0"$ est vraie.

Puisque i est un plongement lagrangien β -exact, il existe $f \in C^\infty(L)$ tel que $i^*\lambda = d_\beta f$.

Premièrement, supposons que $[\delta] \in H^1(M, \mathbb{Z})$.

Soient \tilde{M}_δ le revêtement intégral de δ et $p_{\tilde{M}_\delta} : \tilde{M}_\delta \rightarrow M$ la projection associée. Puisque $i^*[\beta] = 0$, il existe $j : L \rightarrow T^*\tilde{M}_\delta$ un plongement tel que $i = \tilde{D}p_{\tilde{M}_\delta} \circ j$, où $\tilde{D}p_{\tilde{M}_\delta} : T^*\tilde{M}_\delta \rightarrow T^*M$ qui peut être définie en via la projection canonique $Dp_{\tilde{M}_\delta} : T\tilde{M}_\delta \rightarrow TM$ et une métrique Riemannienne quelconque sur M , que l'on tire en arrière sur \tilde{M}_δ .

Soit $b : \tilde{M}_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de $p_{\tilde{M}_\delta}^* \delta$ sur \tilde{M}_δ . Par compacité de L , il existe deux valeurs régulières $x, y \in \mathbb{R}$ de b , deux hypersurfaces $S_1 = b^{-1}(x)$ et $S_2 = b^{-1}(y)$ et un morphisme de revêtement h vérifiant $h(S_1) = S_2$ et $x < \inf_{l \in L}(b \circ i(l)) < \sup_{l \in L}(b \circ i(l)) < y$.

Collons les deux bords de $b^{-1}([x, y])$ afin d'obtenir \tilde{M}' un revêtement fini de M . Ceci permet de définir $T^*\tilde{M}'$, un revêtement fini de T^*M . Il est à nouveau possible de définir $j' : L \rightarrow T^*\tilde{M}'$ un plongement dont la composition avec la projection $\tilde{D}p_{\tilde{M}'} : T^*\tilde{M}' \rightarrow T^*M$ donne i .

Par hypothèse, $i^*\beta = dg$ pour une certaine fonction lisse g . Étant donné deux points $(q, p_1), (q, p_2) \in T_q^*\tilde{M}' \cap j'(L)$, et étant donné un chemin γ dans L entre ces deux points, nous avons $g(q, p_1) - g(q, p_2) = \int_\gamma (Dp_{\tilde{M}'} \circ j')^* \beta = \int_{Dp_{\tilde{M}'} \circ j' \circ \gamma} \beta = 0$. En effet, $j' \circ \gamma$ ne traverse pas l'hypersurface de $T^*\tilde{M}'$ correspondant aux bords de $b^{-1}([x, y])$. Ce lacet est donc relevable en un lacet dans $T^*\tilde{M}_\delta$ et l'intégrale de db le long d'un lacet est toujours nulle.

Ainsi, il existe une fonction $G \in C^\infty(M)$ telle que $G \circ \pi \circ i = g$ où π est la projection canonique de $T\zeta^*M$ sur M . Nous pouvons maintenant définir le difféomorphisme

$$s : T^*\tilde{M}' \rightarrow T^*\tilde{M}'$$

$$(q, p) \mapsto (q, e^{-G \circ p_{\tilde{M}'}}(q)p).$$

Notons que $(s \circ j')^* \lambda = j'^*(e^{-G \circ p_{\tilde{M}'}} \lambda) = e^{-G \circ p_{\tilde{M}'}} \circ j' d_{dg} f = d(e^{-g} f)$ puisque $G \circ p_{\tilde{M}'} \circ j' = G \circ i = g$ avec $dg = i^* \beta$. Ceci implique que $s \circ j'(L)$ une lagrangienne 0-exacte de $T^*\tilde{M}'$ dont la projection sur \tilde{M}' n'est pas une équivalence d'homotopie (par H_1). Absurde par

le théorème 1.3.8.

Abordons maintenant le cas plus général où $[\delta] \in H^1(M, \mathbb{R})$. Dans ce cas, il est possible d'écrire (preuve donnée après cette démonstration) :

Assertion : (voir [Far04]) $[\beta] = \sum_{i=1}^r b_i [\beta_i]$ avec $[\beta_i] \in H^1(T^*M, \mathbb{Z})$ linéairement indépendants, et $b_i \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur \mathbb{Z} .

Or, $i^*[\beta] = 0$ si et seulement si pour tout i , $i^*[\beta_i] = 0$. Ainsi, en répétant la construction précédente pour chaque β_i , nous concluons que, à un difféomorphisme préservant les fibres près, L est une lagrangienne 0-exacte d'un revêtement fini de T^*M , ce qui est absurde par le théorème cité ci-dessus.

Ceci prouve le théorème. ■

Démonstration de l'assertion : Soit $r = \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\text{coim}(\langle [\beta], \cdot \rangle_{|_{H_1(M, \mathbb{Z})}}))$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{|_{H_1(M, \mathbb{Z})}}$ est la restriction à $H^1(M, \mathbb{R}) \otimes H_1(M, \mathbb{Z})$ de $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^1(M, \mathbb{R}) \otimes H_1(M, \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$, le crochet de dualité homologie-cohomologie.

Ainsi, dans $H_1(M, \mathbb{Z})$, il existe une famille libre $([\alpha_1], \dots, [\alpha_r])$ d'éléments dont la projection sur la coimage est une base pour le sous-module libre maximal de la coimage. Soulignons que $([\alpha_1], \dots, [\alpha_r])$ forme aussi une famille libre de $H_1(M, \mathbb{Q})$. En effet, si nous avons une famille d'éléments $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ telle que $\sum_i \lambda_i [\alpha_i] = 0$, alors nous pouvons multiplier tous les λ_i par le produit des dénominateurs des λ_i , ce qui nous donne une famille $a_i \in \mathbb{Z}$ telle que $\sum_i a_i [\alpha_i] = 0$. Pour tout $i = 1, \dots, r$, définissons $[\beta_i]$ le dual de $[\alpha_i]$ pour l'identification $H^1(M, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ donnée par le théorème des coefficients universels. Cette même identification nous permet de définir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ comme un produit scalaire dans $H^1(M, \mathbb{Q})$ et, ainsi, quitte à utiliser le procédé de Gram-Schmidt, nous pouvons supposer que la base $(\beta_i)_i$ est une base orthogonal dans $H^1(M, \mathbb{Q})$. Quitte à renormaliser la base $(\beta_i)_i$, nous pouvons supposer qu'il s'agit d'une base orthogonale

de vecteurs de $H^1(M, \mathbb{Z})$. En effet, nous pouvons poser

$$\begin{aligned}\beta'_1 &= \beta_1 \\ \beta'_2 &= \beta_2 - \frac{\langle \beta_3, \beta'_1 \rangle}{\langle \beta'_1, \beta'_1 \rangle} \beta'_1 \\ \beta'_3 &= \beta_3 - \frac{\langle \beta_3, \beta'_1 \rangle}{\langle \beta'_1, \beta'_1 \rangle} \beta'_1 - \frac{\langle \beta_3, \beta'_2 \rangle}{\langle \beta'_2, \beta'_2 \rangle} \beta'_2 \\ &\dots,\end{aligned}$$

Puisque chaque β'_i est dans $H^1(M, \mathbb{Q})$, et que $H^1(M, \mathbb{Q})$ possède une base dans $H^1(M, \mathbb{Z})$ (dont la partie sans torsion peut être vu comme un réseau dans $H^1(M, \mathbb{Q})$), chaque β'_i est une combinaison linéaire d'éléments de $H^1(M, \mathbb{Z})$ avec des coefficients dans \mathbb{Q} . Il suffit ensuite de multiplier les coefficients de chaque β'_i par leur PPCM. Posons $(\alpha'_i)_i$ le dual de cette base orthogonale

Finalement, définissons $b_i = \frac{\langle [\beta], [\alpha'_i] \rangle}{\langle [\beta_i], [\alpha'_i] \rangle}$ et donc $[\beta] = \sum_i b_i [\beta_i]$.

Montrons maintenant que ces quantités sont linéairement indépendantes.

Supposons qu'il existe des $a_i \in \mathbb{Z}$ pour i allant de 1 à r tels que $\sum_i a_i b_i = 0$. Alors, pour $[\alpha] = \sum a_i (\prod_{j \neq i} \langle [\beta_j], [\alpha'_j] \rangle) [\alpha'_i]$, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_i b_i \langle [\beta_i], [\alpha] \rangle &= \sum_i \left(b_i \sum_k a_k \left(\prod_{j \neq k} \langle [\beta_j], [\alpha'_j] \rangle \right) \langle [\beta_i], [\alpha'_k] \rangle \right) \\ &= \sum_i b_i a_i \left(\prod_{j \neq i} \langle [\beta_j], [\alpha'_j] \rangle \right) \langle [\beta_i], [\alpha'_i] \rangle \\ &= \left(\prod_j \langle [\beta_j], [\alpha'_j] \rangle \right) \sum_i b_i a_i = 0,\end{aligned}$$

où la deuxième égalité est obtenue en se rappelant que les $[\beta_i]$ sont orthogonaux et que les α'_i sont les duaux des β_i . Ceci implique que $[\alpha] \in \ker \langle [\beta], \cdot \rangle$ et donc $\langle [\beta_i], [\alpha] \rangle = 0$ pour tout i . Par la définition de α , ceci est seulement possible si $a_i = 0$ pour tout i puisque $(\alpha'_i)_i$ est une famille libre. Les b_i sont donc linéairement indépendants sur \mathbb{Z} .

Finalement, la famille $([\beta_i])_i$ est libre car orthogonale dans $H^1(M, \mathbb{Q})$ et donc dans $H^1(M, \mathbb{R})$. ■

Ce théorème implique directement le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.2

Soit L une lagrangienne exacte dans T^*M et $\pi : T^*M \rightarrow M$ la projection canonique.

Alors l'application $\pi_* : H_1(L, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})$ induite par la projection n'est jamais l'application nulle si le premier nombre de Betti de M n'est pas nul.

Et donc :

Corollaire 2.2.3

Une lagrangienne exacte fermée dans le cotangent d'une variété fermée n'est jamais contractile.

Par ailleurs, nous avons aussi le corollaire suivant

Corollaire 2.2.4

Soient M et L des variétés fermées de même dimension, $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée non-exacte et $i : L \rightarrow T^*M$ un plongement lagrangien tel que $i^*\lambda = d_\beta f$. Si $d_\beta f = d_\beta g$ pour une certaine fonction $g \in C^\infty(L)$, alors $f = g$.

Démonstration : Puisque le tiré en arrière de β sur L est non-exact, on a $H_\beta^0(L) = \{0\}$, où H_β désigne la cohomologie de Lichnerowicz associé à β . Montrons que $H_\beta^0(L) = \{0\}$, prenons $h \in C^\infty(L)$ telle que $d_{i^*\beta}h = dh - hi^*\beta = 0$, alors, hors de $h = 0$, nous avons $d \ln(|h|) = i^*\beta$. Si h est non-nulle sur un ouvert $V = \{h \neq 0\}$, alors soit $V = \emptyset$, soit $\partial V = \emptyset$ (absurde car $i^*\beta$ n'est pas exacte par le théorème 2.2.1), soit $d \ln(|h|) = \beta$ tend vers l'infini proche de $\partial V \neq \emptyset$ (absurde car β est bien définie sur L). Donc $V = \emptyset$. ■

Un autre exemple de conséquence passe par la proposition suivante, due à S. Allais et M.-C. Arnaud :

Proposition 2.2.5 (corollaire 4, [AA24])

Soit L une sous-variété connexe d'une variété lcs (X, ω, β) . Si le tiré en arrière de β sur L n'est pas exact, et si une fonction $H \in C^\infty(X)$ telle que $TL \subset \ker(d_\beta H)$, alors $L \subset \{H = 0\}$.

Avec le théorème 2.2.1, ceci a pour conséquence immédiate :

Corollaire 2.2.6

Soit L une sous-variété lagrangienne β -exacte (connexe) fermée de T^*M (β le tiré en arrière d'une 1-forme fermée non-exacte sur M). Soit une fonction $H \in C^\infty(T^*M)$ telle que $TL \subset \ker(d_\beta H)$, alors $L \subset \{H = 0\}$.

2.3 Un théorème d'extension

Soit M une variété fermée, δ une 1-forme fermée sur M et β son tiré en arrière à T^*M , qui est doté de la forme de Liouville canonique λ . Soit L une lagrangienne exacte fermée telle que le tiré en arrière de λ à L vérifie $i^*\lambda = d_\beta f$ pour une certaine fonction $f \in C^\infty(L)$. Remarquons que si l'équation avait été $i^*\lambda = df - \beta$, alors une simple translation de la lagrangienne par β nous aurait permis de récupérer une lagrangienne 0-exacte. Ainsi, si $f > 0$, pour peu que f admette une extension $F > 0$ à T^*M telle que $\frac{1}{F}\lambda$ soit une forme de Liouville (i.e. $d\frac{1}{F}\lambda$ est une forme symplectique), alors L peut être vue (à translation près) comme une lagrangienne 0-exacte de $(T^*M, \frac{1}{F}\lambda)$. En prenant l'interpolation linéaire entre $\frac{1}{F}\lambda$ et λ , l'astuce de Moser indique ensuite que L est, à difféomorphisme près, une lagrangienne 0-exacte de (T^*M, λ) (voir lemme 2.5.2 pour plus de détails à ce sujet).

Nous considérerons donc les fonctions $g : T^*M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ telles que :

1. $\frac{1}{g}\lambda$ est une 1-forme de Liouville, (2.1)

2. $i^*\left(\frac{1}{g}\lambda\right) = dh - \eta$ pour $h \in C^\infty(L)$ et $\eta \in \Omega^1(L)$ fermée. (2.2)

Analyse, première partie Un calcul rapide donne l'égalité :

$$d\left(\frac{1}{g}\lambda\right)^{\wedge n} = \left(\frac{1}{g}\right)^n \omega^{\wedge n} + n \left(\left(d\frac{1}{g}\right) \wedge \lambda \right) \wedge \left(\left(\frac{1}{g}\right)^{n-1} \omega^{\wedge n-1} \right) \quad (2.3)$$

Nous pouvons ici remarquer que considérer $\frac{1}{g}\lambda$ et non $G\lambda$ (c'est-à-dire qu'on autorise pas la fonction à s'annuler), pour une certaine fonction $G \in C^\infty(T^*M)$, n'entraîne pas de perte de généralité. En effet si $G(x) = 0$, alors $d(G\lambda)_x = (dG \wedge \lambda + Gd\lambda)_x = (dG \wedge \lambda)_x$. Nous allons donc supposer, sans perte de généralité, que $g > 0$.

La première égalité de cette analyse (2.3) implique que $d\left(\frac{1}{g}\lambda\right)$ est non-dégénérée si et seulement si, en coordonnées locales $(q, p) \in T_q^*M$:

$$\frac{n!}{g} \times \bigwedge_j dp_j \wedge dq_j \neq -n! \sum_i p_i \partial_{p_i} \left(\frac{1}{g}\right) \bigwedge_j dp_j \wedge dq_j$$

Cette condition peut donc se résumer à l'inégalité :

$$1 \neq g \times \frac{dg}{g^2}(Z_\lambda) = d \ln(g)(Z_\lambda)$$

où Z_λ est le champ de Liouville associé à λ . c'est-à-dire que Z_λ est l'unique champ de vecteurs tel que $\iota_{Z_\lambda} d\lambda = \lambda$. Puisque $d \ln(g)(Z_\lambda)|_{(q,0)} = 0$, nous obtenons finalement l'inégalité :

$$d \ln(g)(Z_\lambda) < 1.$$

Analyse, seconde partie Étant donné une fonction $h : L \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\frac{df}{h} - \frac{f}{h} i^* \beta = dH - i^* \beta$ pour un certain $H \in C^\infty(L)$, nous souhaitons comprendre sous quelles conditions nous pouvons étendre cette fonction à une fonction $g : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ remplissant les conditions 2.1 et 2.2. De la conclusion de la première analyse, nous voyons que le théorème des accroissements finis est un obstacle. Ceci n'est pas une obstruction seulement si (en coordonnées locales) :

$$\frac{\ln(h(q, tp)) - \ln(h(q, p))}{\ln(t)} < 1,$$

où $(q, p), (q, tp) \in T_q^*M \cap i(L)$, avec $t \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$. Pour $t = 0$, cette équation est toujours vérifiée.

Nous dirons que le TAF (pour théorème des accroissements finis) obstrue l'extension si cette inégalité n'est pas vérifiée pour au moins une paire de tels points. Par la suite, nous montrerons que ceci est la seule obstruction à l'extension.

A partir de maintenant, nous supposons que nos lagrangiennes exactes sont en position générique, au sens décrit ci-dessous.

Hypothèses 2.1

Soient M, L deux variétés connexes fermées, $\beta \in \Omega^1(M)$ fermé et $i : L \rightarrow T^*M$ un plongement lagrangien β -exact. Nous supposons que L satisfait les propriétés suivantes :

- 1) $i(L)$ est transverse à la zéro-section M . Appelons $\{q_1, \dots, q_k\}$ les points d'intersection entre $i(L)$ et M .
- 2) Les projections de $Di(TL)$ et VT^*M dans $\mathbb{P}T(T^*M)$ n'ont que des intersections transverses, où VT^*M est le fibré vertical de T^*M . Appelons I la projection

*de l'intersection dans T^*M .*
 3) *I et M ne s'intersectent pas.*

Expliquons un peu l'hypothèse 2. Nous souhaitons que les "points de rebroussement" de L (c'est-à-dire les points où L est tangent à la verticale) soient en position générique, puisque dans ce cas, ils sont contenu dans un ensemble de codimension au moins 1. Justifions rapidement ce dernier point et pourquoi nous faisons appel au projectivisé. Soit x un point de L tel que L possède au moins une "direction" tangente au fibré vertical, c'est-à-dire $Di(T_x L) \cap V_x T^*M \neq \{0\}$. Dans ce cas, cette l'intersection est en général égale à un sous-espace vectoriel de dimension k . Nous souhaitons nous intéresser à ces espaces vectoriels. Ainsi, la première chose que nous faisons est de "projectiviser" tout ceci puisque pour récupérer les "directions" dans lesquelles L est tangent aux fibres de T^*M (vu comme fibré au-dessus de M) : nous nous intéressons donc à la projection de $Di(TL)$ et VT^*M dans $\mathbb{P}T(T^*M)$, le $\mathbb{R}P$ -fibré au-dessus de M obtenu en projectivant les fibres de $T(T^*M)$. Ici le projeté de $Di(TL)$ dans $\mathbb{P}T(T^*M)$ est de dimension $n + (n - 1) = 2n - 1$ et le projeté de VT^*M dans $\mathbb{P}T(T^*M)$ est de dimension $2n + n - 1 = 3n - 1$ tandis que l'espace total est de dimension $4n - 1$. Par transversalité de Thom pour les 1-jets (que nous expliciterons ensuite), l'intersection des deux est génériquement de $2n - 1 + 3n - 1 - (4n - 1) = n - 1$.

Nous allons maintenant expliquer en plus en détails la transversalité de Thom pour les 1-jets dans l'espace $J^1(L, T^*M)$. Ceci nous amènera à montrer la proposition suivante :

Proposition 2.3.1

*L'hypothèse 2 est vérifiée pour une sous-variété générique de dimension n de T^*M .*

L'espace $J^1(L, T^*M)$ est, localement, l'espace $L \times T^*M \times \mathcal{M}(n, 2n)$ où $\mathcal{M}(n, 2n)$ est l'espace des matrices de \mathbb{R}^n à \mathbb{R}^{2n} . Remarquons que \mathbb{R}^{2n} est décomposable en $\mathbb{R}_1^n \oplus \mathbb{R}_2^n$ où \mathbb{R}_1^n correspond au fibré horizontal et \mathbb{R}_2^n correspond au fibré vertical. Considérons W la sous-variété de $J^1(L, T^*M)$ qui localement peut s'écrire $L \times T^*M \times \mathcal{M}_1(n, 2n)$ où $\mathcal{M}_1(n, 2n)$ est l'espace des matrices de $\mathcal{M}(n, 2n)$ dont la projection de l'image sur \mathbb{R}_1^n n'est pas surjective (c'est l'espace des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ où $A, B \in \mathcal{M}(n, n)$ où $rank(A) < n$). Or l'espace des matrices de $\mathcal{M}(n, n)$ de rang r est une sous-variété de dimension $rn + (n - r)r$. Ainsi, W est une collection de sous-variétés deux à deux disjointes $(W_r)_{r=1, \dots, n}$ de dimensions respectives $n + 2n + rn + (n - r)r + n^2 = 3n + 2n^2 - (n - r)^2$, et de dimension maximale $2n^2 + 3n - 1$. D'un autre côté, la dimension de $J^1(L, T^*M)$ est $n + 2n + 2n^2 = 2n^2 + 3n$, tandis que l'image d'un $i \in C^\infty(L, T^*M)$ dans $J^1(L, T^*M)$ est de dimension n , ainsi la dimension de l'intersection de j^1i et W est génériquement une

(collection de) sous-variété(s) de dimension(s) au plus $n - 1$. Notons que puisque Di est de rang maximal (i.e. $\dim(L)$) et L est un espace compact, toute petite perturbation de i est aussi de rang maximal. Par ailleurs, si j^1i (avec Di qui est de rang maximal) intersecte W en j^1i_l pour un certain $l \in L$, alors il existe $X \in T_lL$ tel que $Di_l(X) \in V_{i(l)}T^*M$ car, pour réitérer, Di_l est de rang maximal. Ainsi, l'intersection des deux projections dans $\mathbb{P}T(T^*M)$ est génériquement une variété de dimension $n - 1$, appelée \tilde{I} .

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.3.2

*Soit M une variété fermée, λ la forme de Liouville canonique de T^*M et L une sous-variété fermée de T^*M satisfaisant les conditions de généricité ci-dessus. Soit V un voisinage de L .*

Alors, pour toute fonction $h \in C^\infty(V)$ telle que $h|_L$ n'est pas obstruée par le TAF et qui vérifie

$$d \ln(h)(Z_\lambda) < 1,$$

*il existe une fonction $g \in C^\infty(T^*M)$ égale à h sur un voisinage de L et égale à 1 hors d'un compact, qui vérifie :*

$$d \ln(g)(Z_\lambda) < 1$$

La preuve du théorème 2.3.2 occupera les prochaines pages et sera suivie de quelques corollaires. La preuve s'articulera essentiellement en deux parties. Dans un premier temps, un lemme nous permettra de restreindre le problème de l'extension à une famille de voisinage d'un bon "polyèdre" de dimension $n + 1$ dans T^*M (suivant les idées du h -principe). Ensuite, nous étendrons la fonction h (comme décrite dans le théorème) à un voisinage du-dit "polyèdre".

2.4 Preuve du théorème 2.3.2

2.4.1 Restriction à des voisinages d'un "polyèdre"

Nous allons tout d'abord adopter une technique classique (voir, par exemple, [EM02]) consistant à nous restreindre à un voisinage d'un polyèdre de codimension au moins 1. Commençons donc par rappeler la définition d'une âme d'une variété comme utilisée lorsqu'on cherche à appliquer le h -principe.

Définition 2.4.1

Soit une variété ouverte V , $K \subset V$ est appelée l'âme de la variété si K est un polyèdre de codimension non-nulle et, pour tout voisinage U de K , il existe une isotopie $\phi_t : V \rightarrow V$ telle que $\phi_t|_K = id|_K$ et $\phi_1(V) \subset U$.

Remarque 2.4.2

Ici, nous n'avons pas besoin du fait que l'âme est un polyèdre et ainsi nous continuerons d'utiliser cette terminologie même dans le cas où K n'est pas un polyèdre.

Choisissons une métrique riemannienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur T^*M et définissons \mathbb{B}_r^*M , le sous-fibré en boules de rayon r de T^*M . Supposons r assez grand pour que $i(L) \subset \mathbb{B}_r^*M$.

Définition 2.4.3

Soit K l'ensemble :

$$K := \{(q, tp) \in T^*M : (q, p) \in i(L), 0 \leq t \leq 1\} \cup M$$

Pour tout $q \in M$, nous appellerons $K \cap T_q^*M$ une étoile (au-dessus de q).

Pour tout $(q, p) \in i(L)$, $\{(q, tp) : 0 \leq t \leq 1\}$ sera une branche de l'étoile au-dessus de q .

Lemme 2.4.4

Avec les mêmes conventions que précédemment, l'ensemble K est une âme pour la variété \mathbb{B}_r^*M .

Démonstration : Soit U un voisinage de K . Prenons un recouvrement de \mathbb{B}_r^*M par des ouverts $(\Omega_i)_{i \in I}$ suffisamment petits pour que $\cup_{\{i: \Omega_i \cap K \neq \emptyset\}} \Omega_i \subset U$. Prenons $(\psi_i)_{i \in I}$ une partition lisse de l'unité subordonnée à $(\Omega_i)_{i \in I}$ et définissons :

$$d : (q, p) \in T^*M \mapsto \sum_{\{i: (q,p) \in \Omega_i, \Omega_i \cap K = \emptyset\}} \psi_i(q, p) \in \mathbb{R}$$

Cette fonction est lisse, vaut 0 proche de K et 1 hors d'un voisinage arbitrairement petit de K .

Nous pouvons maintenant définir le champ de vecteurs :

$$\tilde{Z}_\lambda : (q, p) \in T^*M \mapsto -d(q, p) \times (Z_\lambda)_{(q,p)} \in TT^*M$$

Le flot $\phi_{\tilde{Z}_\lambda}^t$ de ce champ de vecteurs définit l'isotopie demandée. En effet, prenons V un voisinage fermé arbitrairement petit de la section nulle, de sorte que son enveloppe

convexe (dans T_q^*M , pour chaque $q \in M$) avec K soit dans U . Appelons l'enveloppe C . Nous pouvons supposer que $\cup_{\{i: \Omega_i \cap K = \emptyset\}} \Omega_i \subset T^*M \setminus C$.

Remarquons que chaque ligne de flot de $-Z_\lambda$ intersecte C exactement une fois. Ainsi, $\phi_{Z_\lambda}^t$ transporte chaque point de \mathbb{B}_r^*M dans un voisinage arbitrairement petit de K en temps fini. Notons que le flot ne peut que se rapprocher de C lorsque t grandit. Par compacité de \mathbb{B}_r^*M , ces temps sont globalement majorés. Ainsi, quitte à multiplier \tilde{Z}_λ par un facteur strictement positif, nous pouvons supposer que le majorant global des temps est 1. ■

Toutefois, cette isotopie ne permet pas, en général, de tirer en arrière une solution en une autre solution. Par ceci nous entendons que si nous trouvons une fonction h qui vérifie les conditions du théorème 2.3.2 sur un voisinage U de K , alors son tiré en arrière par l'isotopie précédente ne donnera pas nécessairement une solution sur \mathbb{B}_r^*M .

Proposition 2.4.5

Avec les mêmes conventions que précédemment :

- Il existe une base décroissante de voisinages, $U_i \supset U_{i+1}$, de K tels que pour tout $q \in M$ et pour tout $(q, p) \in T_q^*M - \{(q, 0)\}$, $\{(q, tp) : t \in \mathbb{R}\}$ et $\partial(U_i \cap T_q^*M)$ sont transverses et s'intersectent exactement soit deux fois, soit zéro fois.
- Pour chaque U_i , il existe un difféomorphisme ϕ_i de \mathbb{B}_r^*M dans U_i de classe C^1 tel que $\phi_i|_K = id$ et tel que si $d \ln(g)(Z_\lambda) < 1$ pour $g : U_i \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\phi_i^* d \ln(g)(Z_\lambda) < 1$.

La preuve de la proposition 2.4.5 est séparée en deux parties, une pour chaque point. La seconde partie sera elle-même divisée en une analyse et une synthèse. Durant l'analyse, nous supposerons que les ϕ_i sont arbitrairement proche de certaines fonctions, puis nous dégagerons des conditions sur ces fonctions pour que les ϕ_i répondent à la conclusion de la proposition. Durant la synthèse, nous construirons des fonction répondant aux conditions trouvées durant l'analyse.

Démonstration : *Première partie :* Soit $r' > 0$ le plus petit rayon d'injectivité pour l'application exponentielle au-dessus d'un point de K . Pour chaque point $(q, p) \in K$ et tout $i > 0$, on considère l'ouvert

$$V_{(q,p)}^i = \left\{ x \in T^*M : dist(x, (q, p)) < \frac{D}{\|(q, p)\| + i} r' \right\}$$

où D est la longueur de la branche sur laquelle est (q, p) et $dist$ est la distance induite par la métrique. Nous définissons donc $U_i = \cup_{(q,p) \in K} V_{(q,p)}^i$. Ces ouverts répondent aux

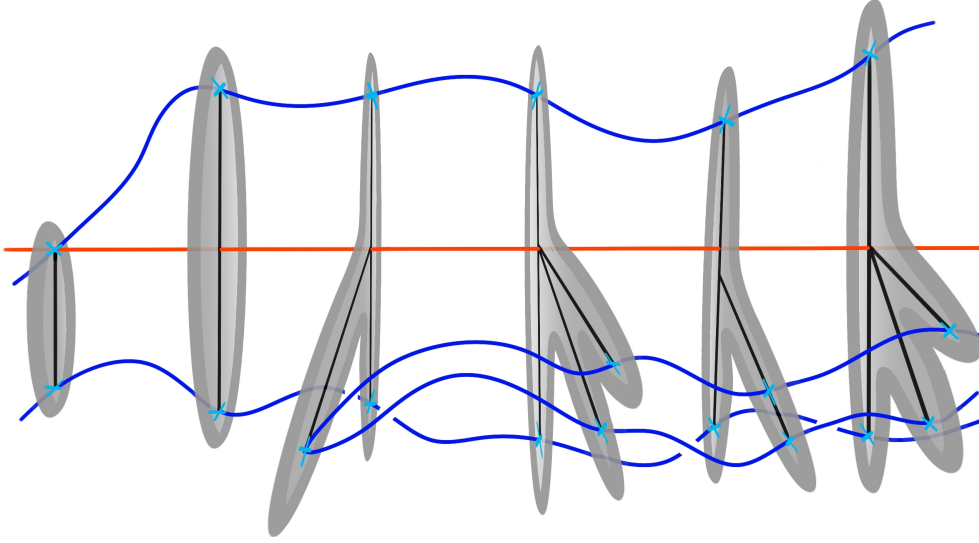


FIGURE 2.3 – Exemples de voisinages

conditions demandées.

Seconde partie, analyse :

Soit X un élément de \mathbb{S}^*M où \mathbb{S}^*M est le fibré en sphère de T^*M défini par la métrique. En s'inspirant de la preuve du lemme précédent, supposons que $\phi(tX) = \alpha_X(t) \times tX$ pour une certaine fonction positive $\alpha : \mathbb{S}^*M \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Prenons $(q, p) \in T^*M$ tels que $p \neq 0$. On définit $v = (q, \frac{p}{\|p\|})$, $t' = \|p\|$ et $w = \frac{Z_\lambda}{\|Z_\lambda\|}$. Remarquons que $(q, p) = t'v$ et $(Z_\lambda)_{(q,p)} = t'w_{(q,p)}$. Soit g une fonction définie sur U_i telle que $d \ln(g)(Z_\lambda) < 1$. Pour clarifier les calculs, posons $s = \ln(g)$ et $S = d \ln(g)$. Notons pour le reste de cette analyse-synthèse, nous nous intéresserons principalement à l'évaluation de S contre Z_λ . Pour $t = t'$ et w^* le dual de w pour la métrique riemannienne choisie, nous avons le calcul suivant :

$$\phi_i^* S_{tv}(w \otimes dw) = S_{\phi_i(tv)}(\alpha_v(t)w \otimes w^*) + S_{\phi_i(tv)}(t\alpha'_v(t)w \otimes w^*)$$

Or, par hypothèse sur $\sigma = (s, S)$, nous avons

$$1 > S_{\phi_i(tv)} \left[(\alpha_v(t)w \otimes w^*)_{tv}(Z_{\lambda|tv}) \right]$$

où $(\alpha_v(t)w \otimes w^*)_{tv}(Z_{\lambda|tv}) \in T_{(q, \alpha_v(t)tv)}^* T^*M$. En effet, le transport parallèle de $Z_{\lambda|tv}$ à $\phi_i(tv)$ donne l'égalité suivante $\alpha_v(t)Z_{\lambda|tv} = Z_{\lambda|\alpha_v(t)tv}$.

Pour alléger les calculs, supposons que α est C^1 -proche de la fonction $(\frac{r}{r_0+\epsilon})^{-h(t)}$ où

$r_0 = \text{dist}(0, \partial U_{i+k} \cap \text{Vect}^+(v))$ pour k assez grand et ϵ suffisamment petit, de sorte que $(r_0 + \epsilon)v \in U_i$. La fonction $h : [r_0, r] \rightarrow [0, 1]$ est définie de sorte que h ait une dérivée positive. Dans ce qui suit, nous étudierons h afin de déterminer les propriétés que cette fonction doit remplir.

D'après les hypothèses sur α , $S(t\alpha'_v(t)w \otimes w^*)$ est C^0 -proche de :

$$S\left(-t \ln\left(\frac{r}{r_0 + \epsilon}\right) h'(t) \alpha_v(t) w \otimes w^*\right).$$

Ceci nous donne :

$$\phi_i^* S_{tv}(Z_\lambda) = S_{\phi_i(tv)} [(\alpha_v(t)w \otimes w^* + t\alpha'_v(t)w \otimes w^*)_{tv}(Z_\lambda)] \approx$$

$$\left[1 - th'(t) \ln\left(\frac{r}{r_0 + \epsilon}\right)\right] \times S_{\phi_i(tv)} [(\alpha_v(t)w \otimes w^*)_{tv}(Z_\lambda)] < \left[1 - th'(t) \ln\left(\frac{r}{r_0 + \epsilon}\right)\right]$$

Ainsi, h doit vérifier l'inégalité $1 > 1 - th'(t) \ln\left(\frac{r}{r_0 + \epsilon}\right) > 0$, ce qui implique que

$$0 < h'(t) < \frac{1}{t \ln\left(\frac{r}{r_0 + \epsilon}\right)}.$$

Synthèse :

Le choix de h suivant remplit les conditions demandées :

$$h(t) = \frac{\ln\left(\frac{t}{r_0}\right) + \left(\frac{t-r_0}{r-r_0}\right) \ln\left(\frac{r_0}{r_0 + \epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{r}{r_0 + \epsilon}\right)}$$

En effet, pour $t' = t \in [r_0, r]$, nous avons $\ln(1 + \epsilon/r_0) < (r - r_0)/r$ pour ϵ suffisamment petit. Avec ce choix, $\phi_i(tv) = r_0 \left(\frac{r_0 + \epsilon}{r_0}\right)^{\frac{t-r_0}{r-r_0}} v$ et

$$\partial_t \phi_i(tv) = \frac{r_0}{r - r_0} \ln\left(\frac{r_0 + \epsilon}{r_0}\right) \left(\frac{r_0 + \epsilon}{r_0}\right)^{\frac{t-r_0}{r-r_0}} v$$

Pour $0 \leq t < r_0 - \epsilon$, posons $\phi_i(tv) = tv$.

Pour $r_0 - \epsilon \leq t < r_0$, nous pouvons prendre une interpolation de ϕ_i telle que $\phi_i((r_0 - \epsilon)v) = (r_0 - \epsilon)v$ et $\partial_t \phi_i((r_0 - \epsilon)v) = (r_0 - \epsilon)v$, avec $\phi_i(r_0v) = r_0v$ et $\partial_t \phi_i(r_0v) =$

$\frac{r_0}{r-r_0} \ln\left(\frac{r_0+\epsilon}{r_0}\right) v$. Nous pouvons aussi faire ce choix ϕ_i de sorte que sa dérivée directionnelle dans la direction ∂_t soit au plus $1 + \epsilon'$ avec ϵ' arbitrairement proche de 0.

Par exemple, nous pouvons prendre $\phi_i(tv) = \alpha_v(t)v$ où :

$$\alpha_v(t) = H\left(\frac{t-r_0+\epsilon}{\epsilon}\right) \left(r_0 + (t-r_0) \frac{r_0^2}{r-r_0} \ln\left(\frac{r_0+\epsilon}{r_0}\right) \right) + \left(1 - H\left(\frac{t-r_0+\epsilon}{\epsilon}\right) \right) t$$

où H est la primitive de $t \in]0, 1[\mapsto be^{-\frac{a}{t} + \frac{a}{t-1}}$, prolongée en 0 et 1 par continuation et choisie de sorte que $H(0) = 0$, avec $a \in \mathbb{R}_0^+$ et b choisi de sorte que $H(1) = 1$.

La dérivée (en fonction de t) de l'application α_v est :

$$H\left(\frac{t-r_0+\epsilon}{\epsilon}\right) \frac{r_0^2}{r-r_0} \ln\left(\frac{r_0+\epsilon}{r_0}\right) + \left(1 - H\left(\frac{t-r_0+\epsilon}{\epsilon}\right) \right) + (\partial_t H)\left(\frac{t-r_0+\epsilon}{\epsilon}\right) \frac{t-r_0}{\epsilon} \left(\frac{r_0^2}{r-r_0} \ln\left(\frac{r_0+\epsilon}{r_0}\right) - 1 \right)$$

La première ligne de cette équation répond aux conditions demandées pour la dérivée de ϕ_i .

La deuxième ligne de cette somme est égale à

$$be^{-\frac{a\epsilon}{t-r_0+\epsilon} + \frac{a\epsilon}{t-r_0}} \frac{r_0-t}{\epsilon} \left(1 - \frac{r_0^2}{r-r_0} \ln\left(\frac{r_0+\epsilon}{r_0}\right) \right).$$

Le maximum de cette fonction est atteint pour $t = r_0 - \epsilon + \frac{a\epsilon^3}{2a\epsilon^2+1}$. La fonction est donc majorée par

$$be^{-\frac{a}{a\epsilon^2+1} - \frac{1}{\epsilon^2}} \times \epsilon \left(\frac{1-a\epsilon^2}{1+2a\epsilon^2} \right) \times \left(1 - \frac{r_0^2}{r-r_0} \ln\left(\frac{r_0+\epsilon}{r_0}\right) \right),$$

qui tend vers 0 pour $\epsilon \rightarrow 0$. Ainsi, pour ϵ assez petit, l'interpolation vérifie les conditions souhaitées.

Finalement, $r_0, \epsilon : \mathbb{S}^*M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sont des fonctions continues. Nous pouvons les remplacer par des approximations lisses sans changer la démonstration.

Ceci donne une définition satisfaisante de ϕ_i de classe C^1 . ■

2.4.2 Fin de la preuve du théorème 2.3.2

Dans la section précédente, nous avons vu comment nous pouvons restreindre le problème à un voisinage de K . Montrons donc qu'il existe une fonction g définie sur un voisinage de K et qui satisfait $d\ln(g)(Z_\lambda) < 1$.

Assertion 1 : Toute fonction h définie comme dans le théorème 2.3.2, et respectant les conditions du théorème 2.3.2, peut être étendue à un voisinage de la zéro-section de telle sorte que l'extension ne soit pas obstruée par le TAF.

En effet, il suffit de prendre l'extension de h par la fonction constante égale à $\max(h)$ sur M , loin des points d'intersection avec L . Nous pouvons étendre cela en une fonction constante sur un voisinage de M dans T^*M , loin des points d'intersection avec M .

Autour des points d'intersection, il suffit de prendre une interpolation C^1 entre $\max(h)$ et h . Appelons cette extension H . Quitte à prendre une légère perturbation loin de L , H peut être supposée C^∞ .

Assertion 2 : l'extension de h de l'assertion précédente peut être étendue à une fonction G définie dans un voisinage de K de sorte que $d\ln(G)(Z_\lambda) < 1$.

Fixons-nous une métrique quelconque sur T^*M . Soit $q \in M$. Considérons $T_q^*M \cap U$ où U est un voisinage de $L \cup M$ qui est l'union d'un voisinage tubulaire lisse de L et d'un voisinage tubulaire lisse de M . Alors les trajectoires Z_λ de ∂U à ∂U forment collection de segments. Pour un tel segment, appelons l (resp. l') la distance maximale (resp. minimale) de ce segment à la section nulle. Finalement, notons que l'union de U et de ces trajectoires forme un voisinage de K .

Pour chaque $q \in M$, restreignons-nous à des voisinages ouverts V_q arbitrairement petits tels que T^*V_q possède une système local de coordonnées définissant une isométrie de T^*V_q à un ouvert de \mathbb{R}^{2n} . Pour chaque segment susmentionné, considérons les interpolations :

$$\tilde{G} : t \in [l', l] \mapsto \exp\left(\frac{\ln(l/t)}{\ln(l/l')} \ln(H(q, l'p)) + \frac{\ln(t/l')}{\ln(l/l')} \ln(H(q, lp))\right),$$

avec $\|p\| = 1$, et $(q, l'p)$ et (q, lp) dans le domaine de définition de H . En recollant les interpolations à H le long de ∂U , nous obtenons une fonction C^1 par morceaux qui sera aussi nommée \tilde{G} .

Prenons χ_n une approximation de l'unité positive de \mathbb{R}^{2n} dont le support est compact et est arbitrairement petit, alors $\chi_n * \tilde{G}$ est lisse et, autour de chaque point $(q', p') \in T^*V_q$, il existe un voisinage arbitrairement petit V_{ois} tel que :

$$\|Z_\lambda\| \partial_w \ln(\chi_n * \tilde{G}) \leq \frac{\sup_{V_{ois}}(d\tilde{G}(Z_\lambda))}{\inf_{V_{ois}}(\tilde{G})} < 1$$

lorsque le support est assez petit (rappelons que $w = \frac{Z_\lambda}{\|Z_\lambda\|}$). En effet,

$$\sup_{V_{ois}}(d\tilde{G}(Z_\lambda)) \leq \max \left(\sup_{V_{ois}} \left(\frac{\ln(H(q, lp)) - \ln(H(q, l'p))}{\ln(l/l')} \right) \times \sup_{V_{ois}}(\tilde{G}), \sup_{V_{ois}}(dH(Z_\lambda)) \right).$$

Remarquons que $\chi_n * \tilde{G}|_{LUM} \neq h|_{LUM}$. Nous devons donc ensuite faire une nouvelle interpolation au voisinage de $M \cup L$. Il suffit pour cela de prendre l'interpolation entre les développements de Taylor de H et de $\chi_n * \tilde{G}$. Puisque ces deux fonctions sont C^1 -proches, l'interpolation est aussi C^1 -proche.

Rappelons que nous sommes dans le cotangent d'un voisinage $V_q \subset M$ d'un point $q \in M$. Puisque M est supposée fermée, prenons un sous-recouvrement fini de $(V_q)_{q \in M}$ et une partition de l'unité lisse subordonnée à ce recouvrement. Cette partition peut s'étendre le long du recouvrement T^*V_q de façon constante le long des fibres (pour des coordonnées locales (q, p) , avec $q \in M$, l'extension de la partition est une partition de l'unité subordonnée à T^*V_q telle que la valeur de chaque fonction de cette partition ne dépende que de q). En utilisant cette partition de l'unité et les différents $\chi_n * \tilde{G}$ qui ont été définis localement, nous pouvons donc définir globalement une fonction G répondant au théorème dans un voisinage de K .

Assertion 3 : la fonction G peut être étendue sur tout T^*M .

Il suffit en effet de combiner l'assertion 2 et la proposition 2.4.5. Ceci définit l'extension G' sur un fibré en boules arbitrairement large \mathbb{B}_r^*M . Il suffit ensuite de prendre un R arbitrairement grand par rapport à r et de prendre une interpolation lisse entre notre fonction sur \mathbb{B}_r^*M et la fonction constante égale à $\inf(G)$ sur $T^*M \setminus \mathbb{B}_R^*M$. Par exemple, nous pouvons prendre l'interpolation

$$G''(q, p) = d(q, p)G'(q, p) + (1 - d(q, p))\inf(G)$$

où d est une fonction dépendant uniquement de la distance à la section nulle, décroissante,

valant 1 sur \mathbb{B}_r^*M et 0 hors de \mathbb{B}_R^*M . Similairement, nous pouvons prendre $R' \gg R$ et $R'' \gg R'$, puis définir une fonction qui est égale à G'' sur $\mathbb{B}_{R'}^*M$, à 1 sur $T^*M \setminus \mathbb{B}_{R''}^*M$ et vérifie les conditions du théorème 2.3.2.

2.5 Sur la projection de Lagrangiennes

2.5.1 Quelques corollaires

Le théorème précédent possède quelques corollaires qui sont d'intérêt particulier pour l'étude des lagrangiennes exactes. Le premier corollaire, et le plus général, est le suivant :

Corollaire 2.5.1

Soient M et L deux variétés fermées de même dimension, λ la forme de Liouville canonique de T^*M , $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée et $i : L \rightarrow T^*M$ un plongement lagrangien β -exact, vérifiant les conditions du théorème 2.3.2, et tel que $i^*\lambda = d_\beta f$ pour une fonction $f \in C^\infty(L)$. Soit V un voisinage de $i(L)$.

Supposons qu'il existe une fonction $h \in C^\infty(V, \mathbb{R}_0^+)$, vérifiant les conditions du théorème 2.3.2, telle que :

$$\frac{df}{i^*h} - \frac{f}{i^*h} i^*\beta = dH - \eta$$

pour H une fonction lisse sur L et $\eta \in \Omega^1(L)$ une forme fermée.

Alors, il existe une isotopie $\phi : T^*M \times [0, 1] \rightarrow T^*M$ tel que $\phi_0 = id$, $\phi_1(i(L))$ est une lagrangienne de $(T^*M, \lambda, 0)$ et pour tout $q \in M$ et tout $t \in [0, 1]$, $\phi_t(T_q^*M) = T_q^*M$.

Démonstration : Remarquons que si $g_0\lambda$ est une forme de Liouville ($dg_0\lambda$ est symplectique), alors $\lambda_t = (tg_0 + 1 - t)\lambda$ est une forme de Liouville pour tout $t \in [0, 1]$. En effet, comme indiqué plus haut, λ_t est une forme de Liouville si et seulement si $-d \ln(tg_0 + 1 - t)(Z_\lambda) < 1$, c'est-à-dire $\frac{tdg_0(Z_\lambda)}{tg_0 + 1 - t} > -1$. Or $\partial_t \frac{tdg_0(Z_\lambda)}{tg_0 + 1 - t} = \frac{dg_0(Z_\lambda)}{(tg_0 + 1 - t)^2}$, dont le signe ne dépend pas de t . Ainsi, si $dg_0(Z_\lambda) \geq 0$, alors en prenant $t = 0$, nous avons $\frac{tdg_0(Z_\lambda)}{tg_0 + 1 - t} \geq 0$, et si $dg_0(Z_\lambda) \leq 0$, alors en prenant $t = 1$, nous avons $\frac{tdg_0(Z_\lambda)}{tg_0 + 1 - t} \geq \frac{dg_0(Z_\lambda)}{g_0}$. Ceci implique que

$$\left(\frac{tdg_0(Z_\lambda)}{tg_0 + 1 - t} \right)_{|x} \geq \min(d \ln(g_0)(Z_\lambda), 0) \geq -1$$

car $g_0\lambda$ est une forme de Liouville (et donc vérifie $d \ln(g_0)(Z_\lambda) \geq -1$).

Ceci nous permet de montrer le lemme suivant :

Lemme 2.5.2

Soit ω la forme symplectique canonique sur T^*M . Si $\omega' = d_g^\lambda$ est une forme symplectique,

pour une fonction strictement positive g qui est égale à 1 hors d'un compact, alors il existe une isotopie $\phi : T^*M \times [0, 1] \rightarrow T^*M$ tel que $\phi_0 = id$ et ϕ_1 est un difféomorphisme de Liouville de (T^*M, ω') à (T^*M, ω) , et tel que pour tout $q \in M$, la restriction de ϕ_t sur T_q^*M est un difféomorphisme dans T_q^*M .

Démonstration : Soit g_t un fonction de T^*M dans \mathbb{R} dépendant du temps. Supposons que pour tout t , $dg_t\lambda$ est symplectique, alors nous pouvons utiliser l'astuce de Moser pour $dg_t\lambda =: \omega_t$.

Trouvons donc un champ de vecteurs (dépendant du temps) X_t tel que $\partial_t\omega_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t = 0$. Tout champ de vecteurs satisfaisant cette égalité doit donc vérifier les égalités suivantes :

$$0 = \partial_t\omega_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t = \partial_t dg_t\lambda + d(\omega_t(X_t, \cdot)) = d(\partial_t g_t\lambda + \omega_t(X_t, \cdot))$$

Ainsi, il suffit que X_t vérifie $\omega_t(X_t, \cdot) = \partial_t g_t\lambda$. Cette équation a toujours une solution puisque ω_t est une famille lisse de formes symplectiques.

Remarquons que $g_t\lambda$ est bien la primitive d'une forme symplectique dès que $d\ln(1/g_t)(Z_\lambda) < 1$, c'est-à-dire que $d\ln(g_t)(Z_\lambda) > -1$. Soit Y_t une solution de $\omega_t(Y_t, \cdot) = \lambda$. Remarquons que ceci est équivalent à $g_t\omega(Y_t, \cdot) = \lambda - \iota_{Y_t}dg_t \wedge \lambda$. Supposant que Y_t est colinéaire à Z_λ (i.e. $Y_t = \alpha_t Z_\lambda$ pour une certaine fonction α_t), nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha_t g_t \lambda &= \lambda - \alpha_t dg_t(Z_\lambda)\lambda \\ \implies \alpha_t &= \frac{1}{g_t + dg_t(Z_\lambda)} \end{aligned}$$

Puisque $g_t\lambda$ est toujours la primitive d'une forme symplectique, nous avons toujours que $dg_t(Z_\lambda) > -g_t$, et ainsi α_t est bien définie en tout temps.

$$\text{Ceci implique que } X_t = \alpha_t \partial_t g_t Z_\lambda = \frac{\partial_t g_t}{g_t + dg_t(Z_\lambda)} Z_\lambda.$$

Si g_t est la fonction constante égale à 1 hors d'un compact, alors le flot de X_t est défini en tout temps. ■

Nous pouvons donc prendre $g_0 = \frac{1}{g}$ et $g_t = tg_0 + (1-t)$, puis appliquer le lemme précédent à la preuve du corollaire : le lemme nous indique qu'il existe une isotopie ϕ respectant les fibres de T^*M telle que $\phi_1^*\lambda = \frac{\lambda}{h}$. En particulier, $d((\phi_1 \circ i)^*\lambda) = d(dH + d\tilde{H} - \eta) = 0$, où H et η sont tels que définis dans le corollaire, et \tilde{H} est une fonction lisse sur L . Ainsi, nous pouvons composer l'isotopie ϕ_t avec l'isotopie $(q, p) \mapsto (q, p - t\eta)$ pour trouver l'isotopie

de la conclusion du corollaire. ■

En particulier, le corollaire 2.5.1 et le théorème 1.3.8 ont pour conséquence :

Corollaire 2.5.3

Sous les mêmes conditions que le corollaire 2.5.1, supposons que $\eta = i^\tilde{\eta}$ pour $\tilde{\eta} \in \Omega^1(T^*M)$ une forme fermée.*

*Alors la projection canonique $\pi : T^*M \rightarrow M$ induit une équivalence d'homotopie simple entre $i(L)$ et M .*

Démonstration : Observons aussi que pour tout $\eta \in \Omega^1(M)$, il y a une isotopie de T^*M préservant les fibres donnée par $((q, p), t) \mapsto (q, p + t\eta)$. Pour $t = 1$, le difféomorphisme correspondant sera appelé translation par η .

Ainsi, nous avons une isotopie entre L et une sous variété lagrangienne 0-exacte qui respecte les fibres de T^*M . Or π induit une équivalence d'homotopie simple entre cette lagrangienne 0-exacte et M d'après le théorème 1.3.8 ([AK18]). Ceci implique que π induit une équivalence d'homotopie simple entre L et M . ■

Ceci implique que :

Corollaire 2.5.4

Sous les mêmes conditions que le corollaire 2.5.1, si f est strictement positive et n'est pas obstruée par le TAF, alors π induit une équivalence d'homotopie simple entre $i(L)$ et M .

Avant de prouver ce corollaire, observons le fait suivant :

Remarque 2.5.5

*Notons que si $L \subset T^*M$ est une lagrangienne β -exacte fermée telle que la forme de Liouville se restreint à $d_\beta f$ sur L , alors $L'_t := \{(q, p + t\beta) \in T^*M : (q, p) \in L\}$ est une lagrangienne β -exacte telle sur laquelle la forme de Liouville se restreint à $d_\beta(f - t)$. Ceci nous permet d'utiliser le corollaire précédent pour étudier les Lagrangiennes exactes même lorsque f n'est pas strictement positif.*

Passons maintenant à la preuve du corollaire 2.5.4. Il nous suffit de montrer que si f est strictement positive, alors il existe une extension de f à un voisinage de $i(L)$ telle que qui vérifie les conditions des corollaires 2.5.1 et 2.5.3.

Lemme 2.5.6

Dans les mêmes conditions que le corollaire 2.5.4, supposons que f est strictement

positive, alors il existe une extension h de f à un voisinage de $i(L)$ satisfaisant les conditions du théorème 2.3.2.

Démonstration : Par le théorème du voisinage tubulaire, un voisinage V_1 de L dans TL est difféomorphe à un voisinage de $i(L)$ dans T^*M . Appelons ϕ ce difféomorphisme. Nous pouvons donc tirer Z_λ en arrière pour définir un champ de vecteurs $D\phi^{-1}(Z_\lambda)$ sur V_1 . Puisque $d_\beta f(Di^{-1}(Z_\lambda)) = df(Di^{-1}(Z_\lambda)) - fi^*\beta(Di^{-1}(Z_\lambda)) = df(Di^{-1}(Z_\lambda)) = i^*\lambda(Di^{-1}(Z_\lambda)) = 0$, toute extension h' de f à V_1 satisfera $d\ln(h')(Di^{-1}(Z_\lambda)) < 1$ dans un voisinage suffisamment proche de L , et proche des points où $Z_\lambda \in Di(TL)$.

Montrons donc que h' peut être globalement définie de sorte que $d\ln(h')(D\phi^{-1}(Z_\lambda)) < 1$. Posons $X = D\phi^{-1}(Z_\lambda)$, et appelons respectivement X_V et X_H ses composantes verticales et horizontales. Prenons une métrique quelconque sur T^*M , alors pour tout champ de vecteurs V appartenant au fibré vertical, nous pouvons poser :

$$h'(e_{(q,0)}^V) = -df_q(X_{H|(q,0)}) \left\langle \frac{X_V}{\|X_V\|}, V \right\rangle_{(q,0)} + f(q)$$

avec e l'application exponentielle induite par la métrique. Notons que cette fonction est bien définie lorsque $X_V = 0$ car alors $df(X_H) = 0$. Remarquons, finalement, que cette fonction vérifie $d\ln(h')(X)_{(q,0)} < 1$. Notons toutefois que cette fonction n'est pas nécessairement différentiable en (q, p) lorsque $p \neq 0$ et $Z_\lambda \in Di(T_qL)$, même si la différentielle dans les directions verticales existe bien et est continue. Ainsi, nous pouvons simplement interpoler entre la série de Taylor de h et la fonction constante $(q, p) \in T_qL \mapsto f(q)$ dans un voisinage de T_qL , de sorte que la dérivée soit C^1 -proche de h' le long de L . Notons que pour ceci nous devons utiliser l'hypothèse 2 et plus particulièrement le fait que l'ensemble de ces points problématiques sont contenus dans une sous-variété (stratifiée) de codimension au moins 1. Appelons aussi cette interpolation h' .

Ainsi, quitte à restreindre le voisinage V_1 , $d\ln(h')(Z_\lambda) \simeq 0 < 1$. Il suffit donc ensuite de poser $h = h' \circ \phi^{-1}$. ■

Remarque 2.5.7

Notons que dans la preuve, nous montrons en particulier que si $(Z_\lambda)_x \in T_x i(L)$, alors $d\ln(f)(Z_\lambda)_x = 0$.

Le corollaire 2.5.4 est ensuite prouvé directement par le lemme précédent et le corollaire 2.5.3.

Le corollaire 2.5.3 implique aussi :

Corollaire 2.5.8

(reprenant les notations du corollaire 2.5.1) Soit L une lagrangienne exacte remplissant les mêmes conditions que dans le corollaire 2.5.3. Si la projection n'induit pas une équivalence d'homotopie entre L et M , alors pour toute isotopie hamiltonienne ϕ_t , le tiré en arrière de λ sur $\phi_t(L)$ n'admet pas de fonction h satisfaisant les conditions des corollaires 2.5.1 et 2.5.3.

Pour un dernier rappel à la réalité, faisons la remarque suivante :

Remarque 2.5.9

Pour une lagrangienne 0-exacte, nous sommes libres de sélectionner une primitive de la forme de Liouville à une constante près. Cette liberté nous permet toujours de trouver une primitive qui n'est pas TAF-obstruée. Toutefois, dans le cas des lagrangiennes β -exacte (β non-exacte), nous n'avons pas cette liberté par le corollaire 2.2.4.

2.5.2 Cordes de Liouville et cordes de Reeb

Dans cette sous-section, nous nous concentrerons sur les legendriennes de $(J^1M, dz - \lambda)$ sur lesquelles dz se restreint à une fonction strictement positive.

Définition 2.5.10

Soit M une variété. Un chemin γ d'une lagrangienne à elle-même dans T^*M tel que $\partial_t \gamma = Z_\lambda$ est appelé corde de Liouville.

Appliquons maintenant les théorèmes et corollaires de la sous-section précédente à la première section de ce chapitre. En commençons avec la remarque suivante :

Remarque 2.5.11

Dans la construction 2.1 donnée dans la première section de ce chapitre, nous pouvons pousser les legendriennes à l'infini via le flot de Reeb (champs de vecteurs R tel que $\alpha(R) = 1$ et $R \in \ker(d\alpha)$, pour α la forme de contact sur J^1M). Ainsi, les cordes de Liouville dans $T^*(M \times \mathbb{S}_\theta^1)$ le long desquelles nous devons vérifier le TAF se rapprochent des relevés des cordes de Reeb (le relevé du flot de Reeb donnée par le flot de ∂_θ). En effet, les cordes de Liouville sont données par le flot de $p\partial_p + s\partial_s \approx s\partial_s$ lorsque $s \gg p$, pour $p \in T_q^*M$ et $s \in T_\theta^*\mathbb{S}^1$.

Remarque 2.5.12

Étant donné une legendrienne de $(J^1M, dz - \lambda)$, pousser la legendrienne par le flot

de Reeb puis prendre le relevé à $T^*(M \times \mathbb{S}^1)$ revient à relever la legendrienne, puis à pousser le relevé par le flot de ∂_θ .

Ainsi, en corollaire, nous ré-obtenons le résultat classique suivant :

Corollaire 2.5.13

Soit L une legendrienne de J^1M et $L \times \mathbb{S}^1$ son relevé standard dans $T^*(M \times \mathbb{S}^1)$. Si L n'a pas de cordes de Reeb, alors la projection canonique de $L \times \mathbb{S}^1$ sur M est une équivalence d'homotopie entre $L \times \mathbb{S}^1$ et $M \times \mathbb{S}^1$. En particulier la projection de J^1M sur M induit une équivalence d'homotopie entre L et M .

Toutefois, les résultats précédents ne permettent pas d'améliorer ce corollaire. En effet :

Remarque 2.5.14

Soit $\alpha = dz - \lambda_M$ la forme de contact canonique sur J^1M . Supposons que le tiré en arrière de dz sur L soit égal à df . Alors f ne respecte jamais le TAF le long des cordes de Reeb.

Notons que les deux corollaires (et la remarque) précédents ont une conséquence intéressante : si la projection n'induit pas une équivalence d'homotopie simple entre la legendrienne et la section nulle, alors son relevé Lagrangien doit toujours avoir une corde de Liouville le long de laquelle l'inégalité donnée dans le corollaire 2.5.4 n'est pas respectée (qualifions ces cordes de Liouville d'*essentiels*). Ainsi, pour toute isotopie hamiltonienne (et pour tout relevé d'isotopie legendrienne), au moins certaines cordes de Liouville essentielles doivent survivre. Par ailleurs, puisque les cordes de Reeb sont presque des cordes de Liouville, des traces de certaines des cordes de Reeb doivent survivre aux isotopies hamiltoniennes. Il semble donc que les cordes de Liouville (essentielles) soient une version **lcs** des cordes de Reeb de la géométrie de contact.

Notons toutefois que nous avons aussi le fait suivant :

Proposition 2.5.15

Soit Λ une Lagrangienne et $\Lambda \times \mathbb{S}^1$ son relevé comme donné en construction 2.1. Alors toutes les cordes de Liouville de $\Lambda \times \mathbb{S}^1$ sont essentielles.

Démonstration : Pour que le relevé de deux points l et l' de Λ soient sur la même corde de Liouville, il faut que pour un certain t , $tf(l')\partial_\theta + ti_M(l') = f(l)\partial_\theta + i_M(l)$. Toutefois ceci implique que l'inégalité donnée dans le corollaire 2.5.4 n'est pas respectée car le quotient $\frac{\ln(f(l)) - \ln(f(l'))}{\ln(t)}$ vaut 1. ■

Ainsi, il n'est pas nécessaire de pousser la legendrienne par le flot de Reeb pour obtenir des cordes de Liouville essentielles.

Une autre façon de considérer ces cordes de Liouville provient de la remarque suivante :

Remarque 2.5.16

Soit $\Lambda \times \mathbb{S}^1$ le relevé d'une legendrienne, comme donné par la construction 2.1. Alors $\Lambda \times \mathbb{S}^1$ possède une corde de Liouville de $(x, \sigma, s) \in (T^*M \times T_\sigma^*\mathbb{R})$ à $(x', \sigma, s') \in (T^*M \times T_{\sigma'}^*\mathbb{R})$ si et seulement si $(x, -s) \in J^1M$ et $(x', -s') \in J^1M$ sont sur la même orbite du flot de $p\partial_p + s\partial_s$ dans J^1M . Notons aussi que $(x, -s)$ et $(x', -s')$ sont dans Λ .

Ceci nous conduit au lemme :

Lemme 2.5.17

Soit Λ une legendrienne de (J^1M, α) où α est la forme de contact canonique. Supposons que Λ soit entièrement contenue dans $T^*M \times [\epsilon; +\infty[$ pour un réel $\epsilon > 0$ quelconque, et appelons s la coordonnée en \mathbb{R} . Alors pour toute forme de contact α' se restreignant à $\frac{\alpha}{s}$ sur $T^*M \times [\epsilon; +\infty[$, Λ est une legendrienne de (J^1M, α') et Λ possède une corde de Reeb (pour la forme de contact α') de (x, s) à (x', s') si et seulement si le relevé lagrangien $\text{ics } \Lambda \times \mathbb{S}^1$ donné en construction 2.1 possède une corde de Liouville (essentielle) de $(x, \theta, -s)$ à $(x', \theta, -s')$. Et ce pour n'importe quel θ .

Démonstration : A la lumière de la remarque précédent, il suffit de vérifier que $R := p\partial_p + s\partial_s$ est un champ de Reeb pour $\frac{\alpha}{s}$. Nous avons immédiatement que $\frac{\alpha}{s}(R) = 1$. Par ailleurs, $d\frac{\alpha}{s} = d\frac{ds}{s} - d\frac{pdq}{s} = \frac{pds \wedge dq}{s^2} - \frac{dp \wedge dq}{s}$, impliquant que $\iota_R d\frac{\alpha}{s} = 0$. ■

Ainsi, ceci nous permet d'étudier les legendriennes d'une famille de formes de contact sur J^1M . En effet, étant donné une forme de contact α' respectant les conditions du lemme précédent, et une legendrienne Λ de (J^1M, α') , nous pouvons étudier la persistance des cordes de Reeb de Λ en trouvant d'abord une isotopie legendrienne ϕ_t telle que $\phi_t(\Lambda)$ respecte les conditions du lemme précédent, puis en étudiant la persistance des cordes de Liouville du relevé de $\phi_t(\Lambda)$. Soulignons par ailleurs que les isotopies hamiltoniennes (**ics**) ne sont pas en général le relevé d'isotopies legendriennes, et vice-versa. Ceci ouvre donc la voie à l'étude de la persistance des cordes de Reeb/Liouville sous l'action une classe plus grandes de déformations.

2.6 Discussion et perspectives

Notons que les lagrangiennes 0-exactes fermées ne sont jamais obstruées par le TAF au sens suivant : si f est une primitive de la tirée en arrière de λ sur une lagrangienne 0-exacte L , alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f + c$ est aussi une primitive ; observons que pour c assez grand, $f + c$ vérifie $f + c > 0$ et

$$\frac{\ln(f(q, tp) + c) - \ln(f(q, p) + c)}{\ln(t)} < 1$$

pour tout (q, p) et (q, tp) dans la lagrangienne, avec $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 2.6.1

Soient M et L deux variétés connexes fermées, $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée et $i : L \rightarrow T^*M$ un plongement lagrangien β -exact tel que $i^*\lambda = d_\beta f$ pour un certain $f \in C^\infty(M)$. Posons

$$c(f) = \sup \left(\frac{\ln(f(q, tp)) - \ln(f(q, p))}{\ln(t)} \right)$$

où le sup est pris sur les paire $(q, p), (q, tp) \in i(L)$ pour un $t > 0$ tel que $t \neq 1$. Alors nous avons la quantité :

$$c(L) = \inf_{\{f: i^*\lambda = d_\beta f\}} (c(f))$$

La quantité $c(L)$ (resp. $c(f)$) sera appelée l'obstruction TAF et nous dirons que L (resp. f) est obstruée par le TAF si $c(L) \geq 1$ (resp. $c(f) \geq 1$).

Remarque 2.6.2

Rappelons que si β n'est pas exacte dans M , alors il existe une unique fonction $f \in C^\infty(M)$ tel que $d_\beta f = i^*\lambda$.

Toutefois, le comportement de l'obstruction TAF via isotopies hamiltoniennes n'est pas idéal. Prenons par exemple $i : L \rightarrow T^*M$ un plongement lagrangien β -exact (pour $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée mais pas exacte) tel que $i^*\lambda = d_\beta f$, pour un f qui n'est pas obstrué par le TAF. Soit F une extension de f à T^*M telle que $d_{\frac{\lambda}{F}}$ soit symplectique, alors. Gardant à l'esprit les calculs donnés après la définition 1.2.20, nous allons chercher à comprendre les obstructions à l'application du corollaire 2.5.4 après une isotopie hamiltonienne.

1. Soit ϕ_1 un difféomorphisme hamiltonien de $(T^*M, \frac{\lambda}{F}, 0)$, alors $(\phi_1 \circ i)^* \frac{\lambda}{F} = dh - i^*\beta$ pour un certain h . Ainsi, à translation près $\phi_1 \circ i(L)$ bien une lagrangienne exacte de $(T^*M, \frac{\lambda}{F}, 0)$

2. Similairement, prenant ϕ_2 un difféomorphisme hamiltonien de $(T^*M, \lambda, 0)$, alors $(\phi_2 \circ i)^*\lambda = d(f + h) + fi^*\beta$. Ainsi, il devient nécessaire de s'assurer que $f \circ (\phi_2 \circ i)|_{\phi_2 \circ i(L)}^{-1}$ n'est pas obstruée par le TAF. En effet, $F \circ \phi_2^{-1}$ pourrait ne pas respecter $d \ln(F \circ \phi_2^{-1})(Z_\lambda) = \frac{dF \circ \phi_2^{-1}}{F \circ \phi_2^{-1}}(D\phi_2^{-1}(Z_\lambda)) < 1$.
3. Finalement, le cas qui nous concerne le plus, prenons ϕ_3 une isotopie hamiltonienne de (T^*M, λ, β) . Similairement à ce que l'on voit avec les points 1. et 2., nous pouvons considérer l'action de ϕ_3 sur $\frac{\lambda}{F}$. Posons ϕ_t l'isotopie hamiltonienne associée à l'hamiltonien h_t telle que $\Phi_1 = \phi_3$, alors

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\Phi^* \frac{\lambda}{F} \right) |_{(t,x)} &= \left((\Phi_t)^* \mathcal{L}_{X_h^t} \frac{\lambda}{F} \right) |_x \\
 &= \left((\Phi_t)^* \left(d \frac{\lambda(X_h^t)}{F} + \iota_{X_h^t} \frac{d\lambda}{F} - \iota_{X_h^t} \frac{dF \wedge \lambda}{F^2} \right) \right) |_x \\
 &= \left((\Phi_t)^* \left(d \frac{\lambda(X_h^t)}{F} - \frac{d_\beta h_t}{F} + \iota_{X_h^t} \frac{\beta \wedge \lambda}{F} - \frac{dF(X_h^t)\lambda}{F^2} + \frac{\lambda(X_h^t)dF}{F^2} \right) \right) |_x \\
 &= \left((\Phi_t)^* \left(d \frac{\lambda(X_h^t)}{F} - d_{\beta - d \ln(F)} \frac{h_t}{F} - \frac{\lambda(X_h^t)}{F} \beta + \beta(X_h^t) \frac{\lambda}{F} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{dF(X_h^t)\lambda}{F} + \frac{\lambda(X_h^t)dF}{F} \right) \right) |_x \\
 &= \left((\Phi_t)^* \left(d_{\beta - d \ln(F)} (\lambda(X_h^t) - h_t) + (\beta - d \ln(F))(X_h^t) \frac{\lambda}{F} \right) \right) |_x
 \end{aligned}$$

Posons $H_t = \int_0^t (\Phi_s)^* (\beta - d \ln(F))(X_h^s) ds$ et $H = H_1$. Posant $\Phi_1^* \frac{\lambda}{F} = e^H \alpha$, par variation de la constante, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \alpha' &= e^{-H_t} (\Phi_t)^* \left(d_{\beta - d \ln(F)} (\lambda(X_h^t) - h_t) \right) \\
 &= d \left(e^{-H} (\Phi_t)^* (\lambda(X_h^t) - h_t) \right) - \left(e^{-H} (\Phi_t)^* (\lambda(X_h^t) - h_t) \right) \left((\Phi_t)^* (\beta - d \ln(F)) - dH \right)
 \end{aligned}$$

Or, nous avons que :

$$\begin{aligned}
 dH_t &= \int_0^t d \left((\Phi_s)^* (\beta - d \ln(F))(X_h^s) \right) ds = \int_0^t (\Phi_s)^* d \left((\beta - d \ln(F))(X_h^s) \right) ds \\
 &= \int_0^t (\Phi_s)^* \mathcal{L}_{X_h^s} \left((\beta - d \ln(F)) \right) ds = \int_0^t \frac{d}{ds} (\Phi_s)^* (\beta - d \ln(F)) ds \\
 &= (\Phi_s)^* (\beta - d \ln(F)) - (\beta - d \ln(F))
 \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $G = \int_0^1 e^{-H_s} (\Phi_s)^* (\lambda(X_h^s) - h_s) ds$, on en déduit donc que

$$\phi_3^* \frac{\lambda}{F} = e^H \left(\frac{\lambda}{F} + d_{\beta - d \ln(F)} G \right)$$

Cette nouvelle égalité implique que :

$$\begin{aligned} i^* \phi_3^* \frac{\lambda}{F} &= e^H \left((d \ln(f) - \beta + dG - G\beta + Gd \ln(f)) \right) \\ &= e^H \left((d(G+1) - (G+1)(\beta - d \ln(f))) \right) \\ &= e^H d_{\beta - d \ln(F)} (G+1) \end{aligned}$$

En particulier, il faut vérifier que $(e^H(G+1)F \circ \phi_3) \circ (\phi_3 \circ i)_{|\phi_3 \circ i(L)}^{-1}$ n'est pas obstrué par le TAF. Il existe toutefois certains cas dans lesquels ceci est plus facile à établir. En effet, remarquons que :

$$(\phi_3^{-1})^* d \ln(e^H(G+1)F \circ \phi_3^{-1})(Z_\lambda) = (\phi_3^{-1})^* dH(Z_\lambda) + (\phi_3^{-1})^* \frac{dG(Z_\lambda)}{G+1} + \frac{dF(Z_\lambda)}{F}$$

Ainsi, $(\phi_3^{-1})^* dH(Z_\lambda) = -d \ln(F)(Z_\lambda) - (\phi_3^{-1})^* (\beta - d \ln(F))(Z_\lambda)$ et

$$\begin{aligned} (\phi_3^{-1})^* dG(Z_\lambda) &= \int_0^1 -(\phi_3^{-1})^* e^{-H_s} (\Phi_{s-1})^* (\lambda(X_h^s) - h_s) (\phi_3^{-1})^* dH_s(Z_\lambda) ds \\ &\quad + \int_0^1 (\phi_3^{-1})^* e^{-H_s} (\Phi_{s-1})^* d(\lambda(X_h^s) - h_s)(Z_\lambda) ds \end{aligned}$$

Ainsi, si h_t est le tiré en arrière d'une fonction définie sur M , alors

$$\begin{aligned} (\phi_3^{-1})^* d \ln(e^H(G+1)F \circ \phi_3^{-1})(Z_\lambda) &= (\phi_3^{-1})^* d \ln(F)(Z_\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{G \circ \phi_3^{-1} + 1} \int_0^1 -e^{H_s \circ \phi_3^{-1}} (\Phi_{s-1})^* (\lambda(X_h^s) - h_s) ((\Phi_{s-1})^* d \ln(F) - d \ln(F))(Z_\lambda) ds \end{aligned}$$

En supposant, par exemple, que $\mathcal{L}_{X_h^t} d \ln(F)(Z_\lambda) = 0$, alors $(\phi_3^{-1})^* d \ln(e^H(G+1)F \circ \phi_3^{-1})(Z_\lambda) < 1$. Cette dernière condition

4. En appliquant le calcul du point précédent pour $F = 1$, il existe deux fonctions H et G telles que $(\phi_3 \circ i)^* \lambda = e^H d_\beta(f + G)$. Pour une application directe du corollaire 2.5.4, nous devons vérifier que $(e^H(f + G)) \circ (\phi_3 \circ i)_{|\phi_3 \circ i(L)}^{-1}$ n'est pas obstruée par le TAF. Similairement au point précédent, il existe certains cas dans lesquels la

non-obstruction TAF est plus simple à établir. Remarquons que

$$(\phi_3^{-1})^* d \ln(e^H(G + F) \circ \phi_3^{-1})(Z_\lambda) = (\phi_3^{-1})^* dH(Z_\lambda) + (\phi_3^{-1})^* \frac{(dF + dG)(Z_\lambda)}{G + F}$$

Comme précédemment, nous avons l'égalité suivante : $(\phi_3^{-1})^* dH(Z_\lambda) = -\phi_3^{-1} \beta(Z_\lambda)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (\phi_3^{-1})^* dG(Z_\lambda) &= \int_0^1 e^{-H_s \circ \phi_3^{-1}} (\Phi_{s-1})^* (\lambda(X_h^s) - h_s) (\Phi_{s-1})^* \beta(Z_\lambda) ds \\ &\quad + \int_0^1 e^{-H_s \circ \phi_3^{-1}} (\Phi_{s-1})^* d(\lambda(X_h^s) - h_s)(Z_\lambda) ds \end{aligned}$$

En supposant que h_t est le tiré en arrière d'une fonction sur M , alors les deux quantités calculés ci-dessus, ainsi que H_t , sont égales à 0. Ceci implique donc que

$$(\phi_3^{-1})^* G = \int_0^1 -(\Phi_{s-1})^* h_s ds$$

De plus, si h_s est suffisamment proche d'une fonction constante, alors l'inégalité $\frac{(\phi_3^{-1})^* dF(Z_\lambda)}{F \circ \phi_3^{-1} + G \circ \phi_3^{-1}} < 1$ est vérifiée sur un compact arbitrairement grand, et nous pouvons utiliser la proposition 2.4.5 pour obtenir l'extension souhaité. Notons que l'hamiltonien h_t et l'hamiltonien $h_t + c$ pour un $c \in \mathbb{R}^*$ ne donnent pas la même isotopie hamiltonienne dans (T^*M, λ, β) lorsque $\beta \neq 0$.

Toutefois, il n'est pas clair quelles conditions doivent être imposée à une lagrangienne exacte pour garantir l'existence d'une fonction h comme décrite dans le corollaire 2.5.1.

Finalement, il n'est pas clair que l'existence d'une fonction h sur L vérifiant les conditions du corollaire 2.5.1 implique l'existence d'une fonction h' sur $\phi_t(L)$ vérifiant les conditions du corollaire 2.5.1, pour une isotopie hamiltonienne générique ϕ_t .

AUTOUR DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Comme indiqué en introduction, une bonne théorie de Morse est primordiale pour une théorie des faisceaux dérivés à la Kashiwara-Shapira. En particulier, ce qui nous intéresse ici sont des idées permettant de montrer une version du théorème de Morse microlocal adapté à la géométrie **lcs**. Ce chapitre est donc consacré à l'étude des points critiques de fonctions. Commençons par quelques rappels sur l'homologie de Morse-Novikov.

3.1 L'homologie de Morse-Novikov

Cette homologie, introduite par S. Novikov dans les années 80 (cf. [Nov81] et [Nov82]) est une théorie homologique qui est "presque" (dans un certain sens) le dual de la cohomologie de Lichnerowicz (cohomologie du complexe de de Rham muni de la différentielle de Lichnerowicz). Notons ici que dans la littérature, la cohomologie de Lichnerowicz est souvent appelée cohomologie de Morse-Novikov, mais n'est pas toujours égale à la cohomologie du complexe de Morse-Novikov. Toutefois, l'homologie de Lichnerowicz est "presque" le dual de l'homologie de Morse-Novikov.

La description de cette homologie sera basée sur l'ouvrage de M. Farber, [Far04].

Définition 3.1.1

Soit Γ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. L'anneau de Novikov est l'anneau :

$$Nov(\Gamma) = \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} a_{\gamma} t^{\gamma} : \text{avec } a_{\gamma} \in \mathbb{Z}, \text{ et tel que } \exists c \in \mathbb{R} \text{ vérifiant } \forall \gamma > c, a_{\gamma} = 0 \right\}.$$

Soient $\sum_{\alpha \in \Gamma} a_{\alpha} t^{\alpha}$ et $\sum_{\beta \in \Gamma} b_{\beta} t^{\beta}$ deux éléments de $Nov(\Gamma)$, alors la somme est donnée par :

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} a_{\alpha} t^{\alpha} + \sum_{\beta \in \Gamma} b_{\beta} t^{\beta} = \sum_{\alpha \in \Gamma} (a_{\alpha} + b_{\alpha}) t^{\alpha}$$

et le produit est donné par :

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} a_{\alpha} t^{\alpha} \times \sum_{\beta \in \Gamma} b_{\beta} t^{\beta} = \sum_{\alpha, \beta \in \Gamma} (a_{\alpha} \times b_{\beta}) t^{\alpha + \beta}$$

Cet anneau nous permet de définir une homologie à coefficients locaux :

Définition 3.1.2

Soit M une variété et $\beta \in \Omega^1(M)$ une 1-forme fermée. Soit

$$\Gamma_{\beta} := \{ \langle [\beta], h(\gamma) \rangle = \int_{\gamma} \beta : \gamma \in \pi_1(M) \}$$

où $[\beta]$ est la classe de cohomologie de β et h est le morphisme de Hurewicz. Le morphisme de \mathbb{Z} -modules :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}[\pi_1(M)] &\rightarrow \text{Nov}(\Gamma_{\beta}) \\ \gamma &\mapsto t^{-\int_{\gamma} \beta} \end{aligned}$$

définit un système local \mathcal{L}_{β} .

Le complexe de chaînes de Morse-Novikov est le complexe $C_*(M, \mathcal{L}_{\beta})$. L'homologie de ce complexe est l'homologie de Morse-Novikov $H_*(M, \mathcal{L}_{\beta})$, noté $HN_*(M, \beta)$.

Remarque 3.1.3

Notons que cette définition est quelque peu différente de celle donnée par Farber dans [Far04] page 17, où l'anneau considéré est $\text{Nov}(\mathbb{R})$. Toutefois, en vertu du lemme 1.12 de [Far04], il suffit de tensoriser $HN_*(M, \beta)$ par $\text{Nov}(\mathbb{R})$ pour retrouver la définition usuelle. Notons que ce produit tensoriel n'affecte pas la torsion. En effet, les différents anneaux de Novikov sont des anneaux principaux, et donc les différents groupes de torsion peuvent être notés $\text{Nov}(\Gamma_{\beta})/(P)$ pour un certain $P \in \text{Nov}(\Gamma_{\beta})$: ceci s'annule après le produit tensoriel si et seulement si il existe $Q \in \text{Nov}(\Gamma_{\beta})$ divisible par P , et qui est inversible dans $\text{Nov}(\mathbb{R})$. Cependant, le lemme 1.9 de [Far04] montre que le critère d'inversibilité est le même dans $\text{Nov}(\mathbb{R})$ que dans $\text{Nov}(\Gamma_{\beta})$: Q est inversible dans $\text{Nov}(\mathbb{R})$ implique que Q est inversible dans $\text{Nov}(\Gamma_{\beta})$ implique que $\text{Nov}(\Gamma_{\beta})/(P) = 0$.

Remarquons que la définition de Γ_{β} ne dépend pas du représentant de la classe de $[\beta]$.

En effet, comme conséquence immédiate des définitions données par Farber en page 17 de [Far04], nous avons :

Proposition 3.1.4 ([Far04])

Soit β et β' deux 1-formes fermées de M telles que $[\beta] = [\beta']$, alors

$$HN_*(M, \beta) = HN_*(M, \beta').$$

En particulier, si $g \in C^\infty(M)$, alors

$$HN_*(M, dg) = H_*(M, \mathbb{Z}).$$

Enfin, citons deux propriétés utiles de l'homologie de Morse-Novikov :

Proposition 3.1.5 ([Far04], cor 1.39, thm 2.4)

Soit β une 1-forme fermée de M , alors :

$$\text{rank}(HN_i(M, \beta)) \leq \text{rank}(H_i(M, \mathbb{Z})).$$

De plus, supposons que β , vue comme section de T^*M , intersecte transversalement la zéro-section. Comme β est localement la différentielle d'une fonction f , nous pouvons définir l'indice d'une intersection de β avec la zéro-section comme l'indice du point critique de f correspondant. Alors, posant $\text{Crit}_i(\beta)$ l'ensemble des intersections d'indice i , nous avons l'inégalité

$$\#\text{Crit}_i(\beta) \geq \sum_i \text{rank}(HN_i(M, \beta)) + q_i(M, \beta) + q_{i-1}(M, \beta),$$

où $q_i(M, \beta)$ est le nombre minimal de générateurs du groupe de torsion de $\text{rank}(HN_i(M, \beta))$.

Précisons maintenant ce que nous entendons par "presque" le dual. Le lien entre cette homologie et la cohomologie de Morse-Novikov est donné par théorème suivant de A. V. Pazhitnov :

Théoreme 3.1.6 ([Paz87])

Supposons que les périodes de β sont commensurables ($\exists t \in \mathbb{R}^* / [t\beta] \in H^1(M, \mathbb{Z})$). Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ suffisamment grand et pour tout i ,

$$\dim(H_{t\beta}^i(M)) = \text{rank}_{\text{Nov}(\Gamma_\beta)}(HN^i(M, \beta)).$$

Notons que nous utilisons la cohomologie de Morse-Novikov.

Lorsque cette égalité n'est pas vérifiée, la différence entre le membre de gauche et le membre de droite est majorée par la somme des nombres des sous-groupes de torsion des $\mathbb{Q}[\mathcal{H}]$ -modules $H_k(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Q})$ et $H_{k-1}(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Q})$, avec \mathcal{H} le groupe des automorphismes de revêtement. Ici, \tilde{M}_β est le revêtement intégral de β .

Comme il est montré dans [MP21], si les périodes de β ne sont pas commensurables, il existe des cas où ce théorème n'est pas vérifiée.

Le théorème 3.1.6 est une conséquence d'une observation plus générale qui peut aussi être trouvée dans [Paz87] :

Théorème 3.1.7 ([Paz87])

Notons que pour ce théorème, nous n'avons pas besoin de supposer que M est fermée. La cohomologie de Lichnerowicz associée à $-\beta$ est isomorphe à la cohomologie à coefficients locaux dont le système local est donné par le morphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}[\pi_1(M)] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma \in \pi_1(M) &\mapsto e^{-\langle [\beta], h(\gamma) \rangle} \end{aligned}$$

Toutefois, malgré l'apparente similarité des définitions, l'homologie (ou la cohomologie) de Morse-Novikov reste plus adaptée à la détection de points critiques. Illustrons cette assertion par une remarque suivie d'un exemple.

Remarque 3.1.8

Soit M une variété, pas nécessairement fermée et prenons un $\beta \in \Omega^1(M)$ fermé tel que $[\beta] \in H_{dR}^1(M) \cap H^1(M, \mathbb{Z})$. Prenons \tilde{M}_β le revêtement intégral de β (c.-à-d. la plus petit revêtement sur lequel le tiré en arrière de β est exact). Alors, l'homologie de Morse-Novikov est l'homologie de $C_*(\tilde{M}_\beta) \otimes_{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]} \mathbb{Z}[[t]]$ tandis que la cohomologie de Lichnerowicz est isomorphe à la cohomologie de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]}(C_*(\tilde{M}_\beta, \mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Soit $S = \{t^r + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k < r} a_k t^k : r \in \mathbb{R} \text{ et } \forall k, a_k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ l'ensemble des polynômes de Laurent de facteur directeur 1. Par propriétés générales de $R = S^{-1}\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ (voir chapitre 1 section 3 et proposition 1.29 de [Far04]), l'homologie de Morse-Novikov calcule $S^{-1}H_*(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Z}) \simeq H_*(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Z}) \otimes R$ (au sens où le rang et le nombre de torsion sont les mêmes).

Puisque e est transcendant, $\mathbb{Z}\langle e^g : g \in \Gamma_\beta \rangle$ est en effet isomorphe à $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ et

son corps des fraction Q est un sous-corps de \mathbb{R} , et \mathbb{R} est un Q -module injectif. Ainsi, la cohomologie de Lichnerowicz calcule $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]}(H_*(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$.

Par propriétés générales de la localisation de modules finiment présentés,

$$S^{-1}\text{Hom}_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]}(H_*(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \simeq \text{Hom}_{S^{-1}\mathbb{Z}[t,t^{-1}]}(S^{-1}H_*(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Z}), R).$$

Ainsi, la partie sans torsion de $S^{-1}H_*(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Z})$ a le même rang (comme R -module) que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]}(H_*(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ (comme $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module). Ceci implique que la différence principale entre les cohomologies de Morse-Novikov et de Lichnerowicz vient de

$$\text{Ext}_1^R(S^{-1}H_{*-1}(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Z}), R) \simeq S^{-1}\text{Ext}_1^{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]}(H_{*-1}(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}[t, t^{-1}]),$$

qui nous donne le sous-module de torsion de $S^{-1}H_{*-1}(\tilde{M}_\beta, \mathbb{Z})$.

Nous pouvons illustrer la remarque précédente avec un exemple concret montrant que l'homologie de Morse-Novikov rend mieux compte des points critiques.

Exemple 3.1

Soit Σ_2 une surface de genre 2, et prenons une base pour son premier groupe de cohomologie. Prenons $[d\theta]$ un élément de la base et $d\theta$ une 1-forme le représentant. Appelons β le tiré en arrière de $d\theta$ à $M = \mathbb{R}P^3 \times \Sigma_2$. Alors le premier groupe de cohomologie de \tilde{M}_β is isomorphe à $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[t, t^{-1}]$, et donc le premier groupe de la cohomologie de Lichnerowicz est de rang 1 (sans torsion, bien entendu), tandis que le premier groupe de l'homologie de Morse-Novikov est de rang 1, mais a un nombre de torsion venant de $S^{-1}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, qui est généré par un élément.

La définition de l'homologie de Morse-Novikov n'est pas sans rappeler l'homologie de Novikov-Sikorav, introduite par J.-Cl. Sikorav dans [Sik87a], qui a été le premier à généraliser les idées de Novikov au cadre non-abélien. Les deux homologies sont décrites comme l'homologie de complexes de chaînes $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(M)]} C_*(\tilde{M})$ pour \tilde{M} le revêtement universel de M , un anneau \mathcal{R} et un morphisme $\rho : \mathbb{Z}[\pi_1(M)] \rightarrow \mathcal{R}$ tel que, pour toute matrice carrée A dont les entrées $\gamma_{i,j} \in \mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ vérifient $\langle [\beta], \gamma_{i,j} \rangle < 0$, $\rho(Id + A)$ est inversible. L'anneau utilisé par Sikorav est $\widehat{\mathbb{Z}\pi_\beta} = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \{ \sum n_i \gamma_i : \gamma_i \in \pi_1(M), n_i \in \mathbb{Z}, \langle [\beta], \gamma_i \rangle < c \}$. Ces deux anneaux, bien que similaires, ont quelques points de différences. Par exemple, l'anneau de Sikorav n'est pas abélien. Tous les deux sont des cas particulier du complexe de chaînes universel de Farber décrit pour la première fois dans [Far99] (voir [Far04] pour plus de détails).

Depuis sa première formulation, l'homologie de Morse-Novikov a été étudiée à de multiples fins, allant de l'étude des points fixes de symplectomorphismes (cf. [VÔ95]), à la théorie des nœuds (cf. [WPR02]). Une utilisation notable pour l'étude de la géométrie **lcs** provient du papier de B. Chantraine et E. Murphy ([CM16]), dans lequel ils prouvent que pour toute sous-variété lagrangienne exacte L qui est donnée par une fonction génératrice générique, le nombre de points d'intersection est au moins $\sum_i \text{rank}(HN_i(M, \beta))$. Ce résultat repose majoritairement sur la preuve que pour toute fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, lorsque $\{x \in M : d_\beta f|_x = 0\}$ est fini, le cardinal de cet ensemble est au moins $\sum_i \text{rank}(HN_i(M, \beta))$. Ce résultat est à comparer avec ceux obtenus par F. Laudenbach et J.-Cl. Sikorav dans [LS85] (voir le théorème 1.3.7). En se rappelant la proposition 3.1.5, nous remarquerons qu'avant les travaux de Chantraine et Murphy les meilleurs résultats trouvés dans la littérature étaient que $\# \text{Crit}(f) \geq \sum_i \text{rank}(HN_i(M, \beta))$ et $\#\{x \in M : d_\beta \text{cst}|_x = 0\} \geq \sum_i \text{rank}(HN_i(M, \beta))$.

Notons aussi que l'homologie de Morse-Novikov a inspiré des invariants plus fins. Par exemple, l'homologie de Floer-Novikov qui a été définie par M. Damian (voir, par exemple son HDR [Dam10]).

3.2 Vers une théorie de Morse pour la géométrie **lcs**

Définition 3.2.1

Soit M une variété, β une 1-forme fermée sur M de primitive g dans son revêtement intégral et soit $f \in C^\infty(M)$. Nous dirons que la fonction f est β -Morse si $d_\beta f$ est transverse à la section nulle de T^*M .

Pour une fonction f qui est β -morse, définissons $\text{Crit}^\beta(f) = \{x \in M : d_\beta f = 0\}$ et, pour $\pi : \tilde{M}_\beta \rightarrow M$ la projection,

$$\text{Crit}_i^\beta(f) = \{x \in \text{Crit}^\beta(f) : \forall y \in \pi^{-1}(x), \text{index}_y(e^{-g} f \circ \pi) = i\}.$$

Remarque 3.2.2

f est β -Morse si et seulement si $e^{-g} f$ est Morse.

Alors, nous avons le raffinement suivant de l'inégalité obtenue par B. Chantraine et E. Murphy pour la borne inférieure du nombre de points β -critiques d'une fonction génératrice. Le point de départ de ce raffinement est le théorème suivant :

Théorème 3.2.3

Soit M une variété (connexe) fermée, β une 1-forme fermée sur M et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction β -Morse, alors

$$\#Crit_i^\beta(f) \geq rank(HN_i(M, \beta)).$$

En effet, comme nous verrons dans la section 3.3 (voir théorème 3.3.1 pour un énoncé précis), ce théorème peut être adapté aux fonctions génératrices et par conséquent, nous obtenons l'inégalité suivante (prouvée dans [CM16]) :

$$\# \sum_i Crit_i^\beta(F) \geq \sum_i rank(HN_i(M, \beta)).$$

Ici, F est une fonction génératrice. Rappelons la définition suivante :

Définition 3.2.4

Une fonction génératrice sur M est une fonction lisse $F : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une fonction quadratique définie $Q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et un compact $K \subset M \times \mathbb{R}^k$ de sorte que $F|_{M \times \mathbb{R}^k \setminus K} = (Q \circ p)|_{M \times \mathbb{R}^k \setminus K}$ où p est la projection sur \mathbb{R}^k .

L'ingrédient principal pour la preuve du théorème 3.2.3 est une proposition (que l'on peut trouver dans le livre de Farber), qui nous permet de simplifier quelque peu l'anneau définissant notre système local.

Proposition 3.2.5 ([Far04], prop 1.30)

Soit β une 1-forme fermée sur une variété quelconque M et \tilde{M}_β le revêtement intégral de β . Posons

$$L_\beta = \mathbb{R}[H_1(M)/ker(\langle [\beta], \cdot \rangle)]$$

et Q_β l'anneau des fractions de L_β .

Alors, pour tout i , nous avons

$$rank(HN_i(M, \beta)) = rank(Q_\beta \otimes_{L_\beta} H_i(\tilde{M}_\beta, \mathbb{R})).$$

Ultimement, nous souhaitons "quantifier" les lagrangiennes exactes par des faisceaux afin de les étudier. Cette stratégie a été adoptée avec succès dans le monde symplectique par divers auteurs, comme Kashiwara et Shapira ([KS90]) ou encore Guillermou ([Gui19], par exemple). La stratégie de preuve exposée dans ce qui suit suggèrera une catégorie de

faisceaux adaptés à l'étude des lagrangiennes.

Avec les quantités définies dans le théorème 3.2.3, appelons \tilde{M}_β le revêtement intégral de β et f le tiré en arrière de f à \tilde{M}_β par la projection canonique. La définition 3.2.1 implique que β -critiques de f correspondent aux points critiques de $e^{-g}f$ à automorphisme de revêtement près. Toutefois, la non-compacité de \tilde{M}_β et le fait chaque point β -critique de f correspond à une infinité de points critiques de $e^{-g}f$ rend l'étude des points β -critiques difficile par l'intermédiaire de $e^{-g}f$. Ainsi, nous souhaitons nous restreindre à une "bonne" exhaustion compact $(W_k)_k$ de \tilde{M}_β de sorte à pouvoir étudier les points critiques de $(e^{-g}f)_{W_k}$.

La preuve de ce théorème (théorème 3.2.3) se fera donc en trois étapes. Premièrement, nous allons étudier comment L_β agit sur le revêtement, donnant ultimement une borne inférieure sur le comportement asymptotique de l'homologie d'une suite croissante de compacts. Après un petit rappel sur la théorie de Morse pour cobordismes à bords, nous allons voir comment étendre une fonction sur cette suite croissante compacts pour pouvoir l'étudier via l'homologie de Morse. Cette construction rajoutera un certain nombre de points critiques, qui sera asymptotiquement négligeable. Finalement, nous recollerons les morceaux pour obtenir le théorème.

3.2.1 Quelques inégalités de rang

Reprenons le début de la construction du complexe de chaînes universel de Farber, comme décrit dans [Far04].

Remarque 3.2.6

(voir l'assertion dans la preuve du théorème 2.2.1) Soit β une 1-forme fermée sur M , alors il existe un $r \in \mathbb{N}$ et une famille d'applications lisses (pour i allant de 0 à r) :

$$\psi_i : M \rightarrow \mathbb{S}^1$$

telle que $[\beta] = \sum_i a_i \psi_i^*[d\theta]$ où $d\theta$ est le générateur canonique de $H^1(\mathbb{S}^1)$, les $\psi_i^*[d\theta]$ sont linéairement indépendants et les a_i sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} .

De plus, nous avons le fait suivant :

Remarque 3.2.7

Pour un β générique et des éléments $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{S}^1$ génériques, et pour tout i , les

$\psi_i^{-1}(\{c_i\})$ sont des sous-variétés qui s'intersectent transversalement.

Nous pouvons donc donner les définitions suivantes :

Définition 3.2.8

Soit $V = M - \bigcup_i \psi_i^{-1}(\{c_i\})$, posons \tilde{V}_β une préimage de V dans \tilde{M}_β qui soit entièrement contenue dans un domaine fondamental connexe (à bord et coins).

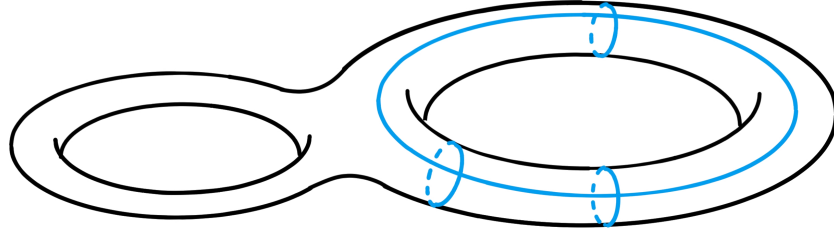


FIGURE 3.1 – Exemple de V pour une surface de genre 2.

Remarque 3.2.9

Remarquons que $\overline{\tilde{V}_\beta}$, l'adhérence de \tilde{V}_β dans \tilde{M}_β , est un domaine fondamental (à bord et coins), modulo les bords. Par ailleurs, si g est une primitive de β dans \tilde{M}_β , alors $\overline{\tilde{V}_\beta}$ possède un bord négatif (∇g rentrant pour une métrique riemannienne quelconque) $\partial_- \overline{\tilde{V}_\beta}$ et un bord positif (∇g sortant) $\partial_+ \overline{\tilde{V}_\beta}$ qui s'intersectent en un coin. Finalement, observons que la projection de $\partial \overline{\tilde{V}_\beta}$ dans M est contenue dans $\bigcup_i \psi_i^{-1}(\{c_i\})$, plus particulièrement, notons que, pour un i donné, exactement deux facettes de $\overline{\tilde{V}_\beta}$ se projettent sur $\psi_i^{-1}(\{c_i\})$. Ici, par facette nous désignons les composantes connexes de $\partial \overline{\tilde{V}_\beta} - \partial \partial \overline{\tilde{V}_\beta}$.

Remarque 3.2.10

La construction des objets précédents suit celle donnée Farber dans [Far04], chapitre 3.

Dotons \tilde{M}_β d'une structure CW telle que \mathcal{H} , le groupe des automorphismes de \tilde{M}_β , agisse sur la structure (c.-à-d. que pour tout automorphisme du revêtement α , et toute cellule c , $\alpha(c)$ est aussi une cellule) et que $\overline{\tilde{V}_\beta}$ soit un sous-complexe. Puisque $C_*^{CW}(\tilde{M}_\beta, \mathbb{R})$ est un L_β -module libre, nous avons les égalités suivantes, en partie données par le théorème des coefficients universels (se référer au théorème 3.6.1 dans [Wei94]) :

$$\begin{aligned} \text{rank}(Q_\beta \otimes_{L_\beta} H_i(\tilde{M}_\beta, \mathbb{R})) &= \text{rank}(H_i(Q_\beta \otimes_{L_\beta} C_*^{CW}(\tilde{M}_\beta, \mathbb{R}))) \\ &= \text{rank}(H_i(L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{\tilde{V}_\beta}, \partial_- \overline{\tilde{V}_\beta}, \hat{\delta}))). \end{aligned}$$

La dérivée $\hat{\delta}$ n'est pas la dérivée usuelle. En effet, elle se comporte comme la dérivée usuelle pour les cellules dans l'intérieur de $\overline{\tilde{V}_\beta}$, mais identifie les faces c dans $\partial_- \overline{\tilde{V}_\beta}$ aux faces $\alpha^{-1} \otimes_{\mathbb{R}} \alpha(c) \in Q_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{\tilde{V}_\beta}, \partial_- \overline{\tilde{V}_\beta})$, avec $\alpha(c)$ dans $\partial_+ \overline{\tilde{V}_\beta}$ via l'action de \mathcal{H} . Ainsi, la dérivée $\hat{\delta}$ peut être écrite $\partial + \partial'$ où ∂ est la dérivée usuelle et ∂' vaut zéro sur les faces qui ne sont pas dans $\partial_- \overline{\tilde{V}_\beta}$, et vaut $\alpha^{-1} \otimes \alpha(c)$ sinon, avec $\alpha(c) \subset \partial_+ \overline{\tilde{V}_\beta}$. Par ailleurs, le degré des polynômes dans L_β induit une filtration sur $L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{\tilde{V}_\beta}, \partial_- \overline{\tilde{V}_\beta})$. Cette filtration induit à son tour une suite spectrale dont la page E_2 est $L_\beta \otimes H_i(\overline{\tilde{V}_\beta}, \partial_- \overline{\tilde{V}_\beta})$ et la page E_3 est $H_i(L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{\tilde{V}_\beta}, \partial_- \overline{\tilde{V}_\beta}), \hat{\delta})$. En particulier,

$$\text{rank}(H_i(\overline{\tilde{V}_\beta}, \partial_- \overline{\tilde{V}_\beta})) = \text{rank}(L_\beta \otimes H_i(\overline{\tilde{V}_\beta}, \partial_- \overline{\tilde{V}_\beta})) \geq \text{rank}(H_i(L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{\tilde{V}_\beta}, \partial_- \overline{\tilde{V}_\beta}), \hat{\delta})).$$

Nous allons maintenant généraliser ce résultat. Commençons par quelques définitions.

Définition 3.2.11 (Notations)

Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_r)$ une base de $\mathcal{H} \simeq H_1(M)/\ker(\langle [\beta], \cdot \rangle)$ telle que $\langle \beta, \alpha_i \rangle \geq 0$ pour tout i :

- Posons $\mathcal{H}_k = \{\sum_{i=0}^r \lambda_i \alpha_i : \forall i, \lambda_i \in \{-k, \dots, k\}\}$.
- Posons $W_k = \cup_{\alpha \in \mathcal{H}_k} \alpha(\overline{\tilde{V}_\beta})$.
- Posons $\partial_- \mathcal{H}_k = \{\{\sum_{i=0}^r \lambda_i \alpha_i \in \mathcal{H}_k : \exists i/\lambda_i = k\}\}$ et $\partial_+ \mathcal{H}_k = \{\{\sum_{i=0}^r \lambda_i \alpha_i \in \mathcal{H}_k : \exists i/\lambda_i = -k\}\}$. Notons que ces deux ensembles ne sont pas nécessairement disjoints.

Remarque 3.2.12

Remarquons que W_k possède une bord négatif (dg est rentrant) $\partial_- W_k$ et un bord positif (dg sortant) $\partial_+ W_k$ qui s'intersectent en un coin.

$$\text{Ainsi } \partial_- W_k \subset \cup_{\alpha \in \partial_- \mathcal{H}_k} \alpha(\partial_- \overline{\tilde{V}_\beta}) \text{ et } \partial_+ W_k \subset \cup_{\alpha \in \partial_+ \mathcal{H}_k} \alpha(\partial_+ \overline{\tilde{V}_\beta}).$$

Il est toutefois pratique de se restreindre au automorphismes "négatifs".

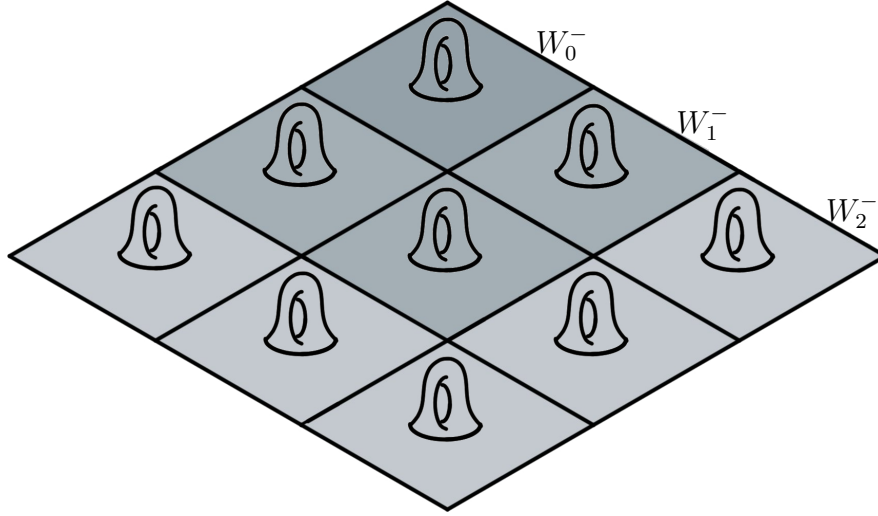
Définition 3.2.13 (Notations)

Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_r)$ la base de la définition précédente.

- Posons $\mathcal{H}^- = \{\sum_{i=0}^r \lambda_i \alpha_i \in \mathcal{H} : \lambda_i \leq 0\}$ et $\mathcal{H}_k^- = \mathcal{H}_k \cap \mathcal{H}^-$.
- Posons $W_k^- = \cup_{\alpha \in \mathcal{H}_k^-} \alpha(\overline{\tilde{V}_\beta})$.
- Posons $\partial_- \mathcal{H}_k^- = \{\sum_{i=0}^r \lambda_i \alpha_i \in \mathcal{H}_k^- : \exists i/\lambda_i = -k\}$.
- $L_\beta^- := \mathbb{R}[\mathcal{H}^-]$ et $L_\beta^k := \mathbb{R}[\mathcal{H}^-] / \langle \mathcal{H}^- - \mathcal{H}_k = 0 \rangle$.

Remarque 3.2.14

¹ De façon équivalente, $L_\beta^k := \mathbb{R}[\mathcal{H}^-] / I$ où I est l'idéal dans $\mathbb{R}[\mathcal{H}^-]$ engendré par les


 FIGURE 3.2 – Exemple de W_0^- , W_1^- et W_2^- .

éléments de $\partial_- \mathcal{H}_{k+1}^-$.

Remarque 3.2.15

Similairement à W_k , nous pouvons définir $\partial_- W_k^-$ et $\partial_+ W_k^-$. Ainsi $\partial_- W_k^- \subset \cup_{\alpha \in \partial_- \mathcal{H}_k^-} \overline{\alpha(\partial_- \tilde{V}_\beta)}$.
Ainsi, nous pouvons observer que $C_*^{CW}(W_k^-, \partial_- W_k^-)$ est un L_β^k -module libre égal à $L_\beta^k \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\tilde{V}_\beta, \partial_- \tilde{V}_\beta)$ muni de la dérivée $\hat{\delta}$.

Nous pouvons maintenant énoncer la généralisation suivante :

Proposition 3.2.16

$(k+1)^{r+1} \text{rank}(HN_i(M, \beta)) \leq \text{rank}(H_i(W_k^-, \partial_- W_k^-))$, avec $r+1 = \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H})$.

Le reste de la sous-section sera essentiellement consacrée à la démonstration de cette proposition.

Démonstration : Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.2.17

Soit $([c_i])_{i=1, \dots, p}$ une famille libre du L_β^k -module $H_i(L_\beta^k \otimes_{L_\beta^k} C_*^{CW}(W_k^-, \partial_- W_k^-))$, alors $\dim_{\mathbb{R}}(L_\beta^k) \times p \leq \dim_{\mathbb{R}}(H_i(W_k^-, \partial_- W_k^-))$

Démonstration : Soit $\psi : L_\beta^k \otimes_{L_\beta^k} C_*^{CW}(W_k^-, \partial_- W_k^-) \rightarrow C_*^{CW}(W_k^-, \partial_- W_k^-)$ l'isomorphisme canonique. Remarquons que ψ commute avec la différentielle, et donc ψ est un isomorphisme de complexes de chaînes et induit donc un isomorphisme en homologie. En particulier, puisque ψ est un morphisme de \mathbb{R} -modules, pour toute famille libre $([c_i])_i$ d'éléments $[c_i] \in H_i(L_\beta^k \otimes_{L_\beta^k} C_*^{CW}(W_k^-, \partial_- W_k^-))$, $(\psi([c_i]))_i$

est une famille libre. Prenons P_i une famille d'éléments non-nuls de L_β^k , alors $\psi([P_i \times c_i]) = [P_i \psi(c_i)]$ donnée par l'action de P_i sur $\psi(c_i)$, et $[P_i c_i]$ est aussi une famille libre. Ainsi, $(\psi([P_i \times c_i]))_i$ est une famille libre. ■

En particulier, ceci implique l'inégalité suivante :

$$\dim_{\mathbb{R}}(L_\beta^k) \text{rank}_{L_\beta^k}(H_i(L_\beta^k \otimes_{L_\beta^k} C_*^{CW}(W_k^-, \partial_- W_k^-))) \leq \dim_{\mathbb{R}}(H_i(W_k^-, \partial_- W_k^-)) \quad (3.1)$$

Or le théorème des coefficients universels implique qu'il y a une injection

$$L_\beta^k \otimes_{L_\beta^-} H_i(L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta}) \hookrightarrow H_i(L_\beta^k \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta}),$$

ce qui signifie que nous avons les inégalités de rangs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{rank}_{L_\beta^-}(H_i(L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})) &\leq \text{rank}_{L_\beta^k}(L_\beta^k \otimes_{L_\beta^-} H_i(L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})) \\ &\leq \text{rank}_{L_\beta^k}(H_i(L_\beta^k \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})) \\ &\leq \text{rank}_{L_\beta^k}(H_i(L_\beta^k \otimes_{L_\beta^k} C_*^{CW}(W_k^-, \partial_- W_k^-))) \end{aligned} \quad (3.2)$$

où ma dernière inégalité est due au fait que $(L_\beta^k \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})$ et $C_*^{CW}(W_k^-, \partial_- W_k^-)$ sont égaux en tant que complexes de chaînes de L_β^k -modules (voir remarque 3.2.15)

Ainsi, les inégalités (3.1) et (3.2) impliquent que :

$$\dim_{\mathbb{R}}(L_\beta^k) \text{rank}_{L_\beta^-}(H_i(L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})) \leq \dim_{\mathbb{R}}(H_i(W_k^-, \partial_- W_k^-)) \quad (3.3)$$

Le lien entre cette inégalité et l'homologie de Morse-Novikov est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.2.18

$$\text{rank}_{L_\beta}(H_i(L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})) = \text{rank}_{L_\beta^-}(H_i(L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta}))$$

Démonstration : Remarquons que L_β et L_β^- ont le même corps des fractions Q_β .

Ainsi, par le théorème des coefficients universels, il existe des isomorphismes :

$$Q_\beta \otimes_{L_\beta^-} H_i(L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta}) \rightarrow H_i(Q_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta});$$

et

$$Q_\beta \otimes_{L_\beta} H_i(L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta}) \rightarrow H_i(Q_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta});$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \dim(H_i(Q_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})) &= \text{rank}_{L_\beta^-}(H_i(L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})) \\ &= \text{rank}_{L_\beta}(H_i(L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})). \end{aligned}$$

■

En effet, par le théorème des coefficients universels :

$$\begin{aligned} \dim_{\text{Nov}(\Gamma_\beta)}(HN_i(M, \beta)) &= \dim_{Q_\beta}(H_i(Q_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})) \\ &= \text{rank}_{L_\beta}(H_i(L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\bar{V}_\beta, \partial_- \bar{V}_\beta), \hat{\delta})) \end{aligned}$$

Ainsi, le lemme précédent et l'inégalité (3.3) impliquent que :

$$\dim_{\mathbb{R}}(L_\beta^k) \dim_{\text{Nov}(\Gamma_\beta)}(HN_i(M, \beta)) \leq \dim_{\mathbb{R}}(H_i(W_k^-, \partial_- W_k^-))$$

Finalemnt, observons que $\dim_{\mathbb{R}}(L_\beta^k) = (k+1)^{r+1}$ (le nombre d'éléments dans \mathcal{H}_k , ou encore le volume d'un hypercube de dimension $r+1$ et de côté $k+1$), ce qui prouve la proposition. ■

Observons que $W_{2k+1}^- = \alpha_0^{-k} \circ \dots \circ \alpha_r^{-k}(W_k)$. Ceci nous amène au corollaire suivante :

Corollaire 3.2.19

$$(2k+1)^{r+1} \text{rank}(HN_i(M, \beta)) \leq \text{rank}(H_i(W_k, \partial_- W_k))$$

Démonstration : Par les deux lemmes précédents,

$$\text{rank}(HN_i(M, \beta)) \leq \text{rank}_{L_\beta^{2k+1}}(H_i(L_\beta^{2k+1} \otimes_{L_\beta^{2k+1}} C_*^{CW}(W_{2k+1}^-, \partial_- W_{2k+1}^-)))$$

et

$$(2k+1)^{r+1} \text{rank}_{L_\beta^{2k+1}}(H_i(L_\beta^{2k+1} \otimes_{L_\beta^{2k+1}} C_*^{CW}(W_{2k+1}^-, \partial_- W_{2k+1}^-))) \leq \text{rank}_{\mathbb{R}}(H_i(W_{2k+1}^-, \partial_- W_{2k+1}^-)).$$

Nous pouvons enfin conclure en remarquant que $H_i(W_{2k+1}^-, \partial_- W_{2k+1}^-) = H_i(W_k, \partial_- W_k)$. ■

3.2.2 Sur le relevé de fonctions

Maintenant que nous avons étudié le comportement asymptotique de l'homologie de W_k , nous allons utiliser le corollaire 3.2.19 pour étudier le comportement asymptotique des points critiques de $(e-gf)|_{W_k}$, où f est une fonction définie sur M et g est une primitive de β sur \tilde{M}_β . Avant ceci, toutefois, donnons un petit rappel sur la théorie de Morse pour les cobordismes.

Rappels sur la théorie de Morse

Soient N_1, N_2 deux variétés compactes tel que ∂N_1 est difféomorphe à ∂N_2 . Nous noterons ainsi ∂N le bord. Soit C un cobordisme de N_1 à N_2 tel que $\partial C = (N_1 \times \{0\}) \cup (N_2 \times \{1\}) \cup (\partial N \times [0, 1])$.

Nous considèrerons une fonctions de Morse f telle que :

1. $\forall x \in C - N_1 \times \{0\}, f(x) > \inf(f)$,
2. $\forall x \in C - N_2 \times \{1\}, f(x) < \sup(f)$,
3. $f|_{N_1 \times \{0\}} = \inf(f), f|_{N_2 \times \{1\}} = \sup(f)$.

Nous supposerons aussi que df est non-nulle sur le bord de C et que le gradient de f est tangent à $(\partial N) \times [0, 1]$ pour une métrique riemannienne quelconque.

Recollons C à lui-même le long de $\partial N \times [0, 1] \subset \partial C$ pour former un cobordisme C' de $N_1 \cup_{\partial N} N_1$ à $N_2 \cup_{\partial N} N_2$. Prenons f' l'extension évidente de f à C' , qui consiste à dédoubler la fonction. Alors, par la théorie de Morse classique sur les cobordismes ([Mil65]), pour tout i , $\#Crit_i(f') = 2\#Crit_i(f) \geq \text{rank}(H_i(C', (M \cup_{\partial M} M) \times \{0\}))$.

Par ailleurs, nous avons la suite de Mayer-Vietoris :

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{-1} H_j(\partial N \times [0, 1], \partial N \times \{0\}) &\rightarrow H_j(C, N_1 \times \{0\}) + H_j(C, N_1 \times \{0\}) \\ &\rightarrow H_j(C', (N_1 \cup_{\partial N} N_1) \times \{0\}) \xrightarrow{-1} \dots \end{aligned}$$

Nous avons donc $2\text{rank}(H_j(C, N_1 \times \{0\})) = \text{rank}(H_j(C', (N_1 \cup_{\partial N} N_1) \times \{0\}))$ et ainsi,

$$\#Crit_j(f) \geq \text{rank}(H_j(C, N_1 \times \{0\})).$$

Une petite construction

Soit f une fonction sur une variété fermée M , β une 1-forme fermée sur M et \tilde{M}_β le revêtement intégral de β . Définissons $\tilde{V}_\beta, W_k, \mathcal{H}$ et \mathcal{H}_k comme dans la section précédente.

Supposons que f est β -Morse et ne possède pas de point β -critique sur $\pi(\overline{\partial\tilde{V}_\beta})$, pour $\pi : \tilde{M}_\beta \rightarrow M$ la projection canonique. Prenons g une primitive de β sur \tilde{M}_β .

Appelons f le relevé de f à \tilde{M}_β . Étudier les points β -critiques de f revient à étudier les points critiques de $e^{-g}f$ à automorphisme de revêtement près. Toutefois, la non-compacité de \tilde{M}_β et le fait chaque point β -critique de f correspond à une infinité de points critiques de $e^{-g}f$ rend l'étude difficile. Nous pouvons éviter cette difficulté en remarquant que chaque point β -critique de f correspond à $\#\mathcal{H}_k = (2k+1)^{r+1}$ points critiques de $(e^{-g}f)|_{W_k}$: il suffit donc d'étudier les points critiques de $(e^{-g}f)|_{W_k}$. Remarquons que W_k est essentiellement un cobordisme de ∂_-W_k à $\partial_+W_k \simeq \partial_-W_k$, et que les coins de W_k sont les bords du cobordisme. Toutefois, $(e^{-g}f)|_{W_k}$ ne se comporte pas "bien" sur ∂W_k , au sens où $(e^{-g}f)|_{W_k}$ ne satisfait pas les conditions du paragraphe précédent, ce qui pose un obstacle à son étude via théorie de Morse.

Ainsi, nous allons étendre $(e^{-g}f)|_{W_k}$ (resp. W_k) en une fonction de Morse F_k (resp. cobordisme C_k) afin que F_k et C_k remplissent les conditions de la sous-section précédente et que le nombre de point critiques de F_k soit égal au nombre de points critiques de $(e^{-g}f)|_{W_k}$ plus, éventuellement, $O_{+\infty}((2k+1)^r)$, où $(2k+1)^r$ est égal à $\#\partial\mathcal{H}_k$. Plus précisément, F_k et C_k vérifieront :

- a) $\partial C_k = ((\partial N) \times [0, 1]) \cup (N \times \partial[0, 1])$.
- b) F_k atteint son minimum sur $N \times \{0\}$ et seulement sur $N \times \{0\}$. F_k atteint son maximum sur $N \times \{1\}$ et seulement sur $N \times \{1\}$. F_k est constante sur $N \times \partial[0, 1] \subset \partial C_k$. De plus dF est non-nulle sur $N \times \partial[0, 1]$.
- c) F_k possède un gradient (pour une certaine métrique) qui est tangent à $(\partial N) \times [0, 1] \subset \partial C_k$. De plus dF est non-nulle sur $(\partial N) \times [0, 1]$.
- d) Pour tout i , $Crit_i(F_k) = Crit_i((e^{-g}f)|_{W_k}) + I_k^i + J_k^i$, où I_k^i est un ensemble de point dont le cardinal est proportionnel à la taille de ∂W_k et J_k^i est un ensemble de point dont le cardinal est proportionnel à la taille de $\partial\partial W_k$.

L'extension se fait de la façon suivante :

- 1) Nous faisons apparaître I_k , mais à cette étape, nous ne respectons pas encore b) ou c).
- 2&3) Nous faisons quelques modifications pour respecter b) sans changer I_k . Nous ne respectons pas c).
- 4) Nous réglons le problème de c), et nous faisons apparaître J_k .

Notons que le nombre de points critiques de $(e^{-g}f)|_{W_k}$ est proportionnel à $\#\mathcal{H}_k$.

Nous nous concentrerons sur l'extension le long de ∂_-W_k , mais l'extension le long de ∂_+W_k sera essentiellement la même (mutatis mutandis).

Extension 1. Soit $x_0 \in \partial_- \widetilde{V}_\beta$ tel que $f(x_0) = \inf(f|_{\partial_- \widetilde{V}_\beta})$ et $\alpha \in \mathcal{H}$ tel que $\alpha \neq id$. Sur $\alpha(\partial_- \widetilde{V}_\beta)$, définissons

$$h_\alpha^-(y) = e^{-\int_\gamma dg} e^{-\int_\alpha \beta} e^{-g(x_0)} f(x_0) = e^{-g(y)+g(x_0)} e^{-g(x_0)} f(x_0) = e^{-g(y)} f(x_0)$$

avec γ un chemin quelconque de $\alpha \cdot x_0$ à $y \in \alpha(\partial_- \widetilde{V}_\beta)$. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction à support dans $[0, 1]$ de dérivée positive telle que $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ et $\phi'|_{t=0} = \phi'|_{t=1} = 0$. Prenons l'interpolation C^1 (via développement de Taylor à l'ordre 1)

$$H_\alpha^-(y, t) = \phi(t)(f(y) - (1-t)df|_y(\partial_t)) + (1-\phi(t))(h_\alpha^-(y) + t),$$

où H_α^- est définie sur $\alpha(\partial_- \widetilde{V}_\beta) \times [0, 1]$. Remarquons que H_α^- est C^1 et que les endroits où la différentielle de H_α^- est 0 ne dépendent pas de α .

Notons que la différentielle de H_α^- est rentrante le long de $\alpha(\partial_- \widetilde{V}_\beta) \times \{0\}$. Similairement, nous pouvons définir H_α^+ en échangeant inf pour sup afin d'étendre f le long de $\alpha(\partial_+ \widetilde{V}_\beta)$ de sorte que la différentielle H_α^+ soit sortante le long de $\partial_+ \widetilde{V}_\beta \times \{1\}$. Recollant les H_α^\pm à $(e^{-g}f)|_{W_k}$ le long de ∂W_k , nous obtenons notre première extension, H , définie sur

$$(\partial_-W_k \times [0, 1]) \cup_{\partial_-W_k \times \{1\}} W_k \cup_{\partial_+W_k \times \{0\}} (\partial_+W_k \times [0, 1]).$$

L'extension H est C^1 sur son domaine de définition (ceci est une conséquence du fait que nous avons pris l'interpolation entre les développement de Taylor d'ordre 1) et C^2 par morceaux : elle est C^2 sur

$$(\partial_-W_k \times [0, 1]) \sqcup \text{int}(W_k) \sqcup (\partial_+W_k \times]0, 1]),$$

où int désigne l'intérieur. Comme tous les points critiques de H sont situés là où H est C^2 , nous pouvons supposer que H est une fonction de Morse (H peut être approximé par une fonction de Morse dont les points critiques sont les mêmes que ceux de H).

Le nombre de points critiques rajoutés par cette étape est un multiple du nombre de copies de \widetilde{V}_α sont dans le bord de W_k .

Extension 2. Maintenant, prenons la fonction :

$$g_\alpha^-(y) = e^{-\int_\gamma dg} e^{-\int_\alpha \beta} \inf(e^{-g}|_{\partial_- \tilde{V}_\beta}) f(x_0).$$

Effectuons la même interpolation qu'au-dessus, entre H et g_α^- , pour donner une extension G_α^- . Notons que cette extension n'ajoute pas de points critiques puisque la différentielle de H_α^- est rentrante le long de $\partial_- \tilde{V}_\beta \times \{0\}$. Similairement, nous pouvons définir G_α^+ en échangeant inf par sup. Appelons G l'extension totale définie sur

$$(\partial_- W_k \times [0, 1]) \cup_{\partial_- W_k \times \{1\}} W_k \cup_{\partial_+ W_k \times \{0\}} (\partial_+ W_k \times [0, 1]).$$

Extension 3. Maintenant, prenons la fonction :

$$m_k(y) = \inf_{\alpha \in \mathcal{H}_k, y \in \alpha(\partial_- \tilde{V}_\beta)} (g_\alpha^-(y)) \times \inf(e^{-g}|_{\partial_- \tilde{V}_\beta}) f(x_0) - 1,$$

Effectuons la même extension qu'au-dessus, entre G et m pour obtenir l'extension l^- . Notons que cette extension n'ajoute pas de points critiques. Similairement, nous pouvons définir l_α^+ en échangeant inf et -1 par sup et $+1$. Appelons L l'extension totale de $e^{-g}f$ obtenue à cette étape. Notons qu'elle est définie sur

$$(\partial_- W_k \times [0, 1]) \cup_{\partial_- W_k \times \{1\}} W_k \cup_{\partial_+ W_k \times \{0\}} (\partial_+ W_k \times [0, 1]).$$

Extension 4. Notons que, pour l'instant, L répond presque aux conditions de la sous-section précédente. Toutefois, il pourrait y avoir des problèmes le long des bords du cobordisme.

Sur $(\partial_- W_k \cap \partial_+ W_k) \times [0, 1] =: \partial \partial W_k \times [0, 1]$, prenons

$$c(t) = (1 - t)(\inf(L) - 1 + t) + t(\sup(L) + t),$$

puis faisons une interpolation (au moins C^1) entre c et L le long de $\partial \partial W_k \times [0, 1]$ comme fait précédemment. Cette interpolation peut elle-aussi rajouter un nombre de point critique qui est indépendant du coin considéré. Ainsi, le nombre de points critiques rajoutés ici est un multiple du nombre de copies de \tilde{V}_α qui sont dans les coins de W_k .

Appelons F_k l'extension totale de $e^{-g}f|_{W_k}$, et appelons \tilde{F}_k la partie de l'extension qui

n'est pas égale à $e^{-g}f$. La fonction F_k est définie sur

$$C_k := \left[(\partial_- W_k \times [0, 1]) \cup_{\partial_- W_k \times \{1\}} W_k \cup_{\partial_+ W_k \times \{0\}} (\partial_+ W_k \times [0, 1]) \right] \\ \cup_{\{1\} \times (\partial \partial W_k) \times [0, 1]} \left[[0, 1] \times (\partial \partial W_k) \times [0, 1] \right],$$

tandis que \tilde{F}_k est définie sur $C_k - W_k$. Notons que $\partial C_k = ((\partial N) \times [0, 1]) \cup (N \times \partial[0, 1])$ pour $N \simeq \partial_- W_k \cup_{\{1\} \times (\partial \partial_- W_k)} [0, 1] \times (\partial \partial_- W_k)$.

Dernière observation. Remarquons que \mathcal{H}_k est un hypercube de dimension $2k + 1$ et de côté de longueur $r + 1$. Ainsi, il existe deux constantes K_1^i et K_2^i ne dépendant que de i (et f) telles que (gardant à l'esprit la sous-section précédente) :

$$\begin{aligned} \text{Crit}_i(F_k) &= \#\text{Crit}_i(e^{-g}f|_{W_k}) + \#\text{Crit}_i(\tilde{F}_k) \\ &\leq \#\text{Crit}_i(e^{-g}f|_{W_k}) + 2(r + 1)(2k + 1)^r K_1^i + 2r(r + 1)(2k + 1)^{r-1} K_2^i \\ &= \#\text{Crit}_i(e^{-g}f|_{W_k}) + O_{k \rightarrow +\infty}((2k + 1)^r) \end{aligned}$$

3.2.3 Une minoration pour $\#\text{Crit}_\beta(f)$

La sous-section précédente, avec le corollaire 3.2.19, donne les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Crit}_i(F_k) &= \#\text{Crit}_i(e^{-g}f|_{W_k}) + O_{k \rightarrow +\infty}((2k + 1)^r) \\ &= (2k + 1)^{r+1} \#\text{Crit}_i(e^{-g}f|_{W_0}) + O_{k \rightarrow +\infty}((2k + 1)^r) \\ &\geq \text{rank}(H_i(W_k, \partial_- W_k)) \\ &\geq (2k + 1)^{r+1} \text{rank}(HN_i(M, \beta)) \end{aligned}$$

D'où

$$\#\text{Crit}_i(e^{-g}f|_{W_0}) + O_{k \rightarrow +\infty}((2k + 1)^{-1}) \geq \text{rank}(HN_i(M, \beta)),$$

Et, pour $k \rightarrow +\infty$, nous obtenons,

$$\#\text{Crit}_i(\phi_0) \geq \text{rank}(HN_i(M, \beta)).$$

Les points critiques de $e^{-g}f|_{W_0}$ d'indice i sont précisément les éléments de $Crit_i^\beta(f)$. Ceci conclue la preuve du théorème 3.2.3.

3.3 Une généralisation aux fonctions génératrices quadratiques à l'infini

Énonçons maintenant une conséquence de la preuve du théorème 3.2.3.

Théorème 3.3.1

Soit M une variété (connexe) fermée, β une 1-forme fermée sur M et, pour un $m \in \mathbb{N}$, $F : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse quadratique à l'infini. Notons β le tiré en arrière de β sur $M \times \mathbb{R}^m$ et p la dimension du sous-espace vectoriel sur lequel F est négative définie à l'infini. Supposons que F est β -Morse, alors nous avons que

$$\#Crit_i^\beta(F) \geq \text{rank}(HN_{i-p}(M, \beta))$$

lorsque $d_\beta F$ est transverse à la $M \times \mathbb{R}^m$.

Démonstration : Soit Q la forme quadratique égale à F hors d'un compact. Prenons a suffisamment grand et b suffisamment petit de sorte que :

$$\{(x, \xi) \in M \times \mathbb{R}^m : b < F(x, \xi) < a\} = M \times \{\xi \in \mathbb{R}^m : b < Q(\xi) < a\}.$$

Posons $E_b^a = \{\xi \in \mathbb{R}^m : b < Q(\xi) < a\}$. Par abus, nous dénoterons les relevés à $\tilde{M}_\beta \times \mathbb{R}^m$ seront dénotés similairement. Remarquons qu'en posant,

1. $\partial_+(W_k \times E_b^a) = (\partial_+ W_k) \times E_b^a \cup W_k \times \{\xi \in \mathbb{R}^m : Q(\xi) = a\}$,
2. $\partial_-(W_k \times E_b^a) = (\partial_- W_k) \times E_b^a \cup W_k \times \{\xi \in \mathbb{R}^m : Q(\xi) = b\}$,
3. $\partial_+(W_k \times E_b^a) \cap \partial_-(W_k \times E_b^a) = (\partial_+ W_k \cap \partial_- W_k) \times E_b^a$,

nous pouvons appliquer la construction de la sous-sous-section 3.2.2 à $e^{-g}F$, où g est une primitive de β sur $\tilde{M}_\beta \times \mathbb{R}^m$. Puisque $de^{-g}Q$ est rentrant le long de $W_k \times \{\xi \in \mathbb{R}^m : Q(\xi) = b\}$ et sortant le long de $W_k \times \{\xi \in \mathbb{R}^m : Q(\xi) = a\}$, alors, comme précédemment, la construction rajoute un nombre de point critiques qui est au plus $O_{k \rightarrow +\infty}(k^r)$ pour $r + 1 = \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H})$.

Nous avons donc, par la sous-sous-section 3.2.2, que :

$$\text{Crit}_i(e^{-g}F|_{W_k \times \mathbb{R}^m}) + O_{+\infty}(k^r) \geq \text{rank}(H_i(W_k \times E_b^a, \partial_-(W_k \times E_b^a))).$$

Notons H le sous-espace vectoriel sur lequel Q est définie négative, et $H_b^a = H \cap E_b^a$. Nous pouvons remarquer que, par le théorème d'excision,

$$\begin{aligned} H_i(W_k \times E_b^a, \partial_-(W_k \times E_b^a)) &= H_i(W_k \times E_b^a, (\partial_-W_k) \times E_b^a \cup W_k \times Q^{-1}(\{b\})) \\ &\simeq H_i(W_k \times H_b^a, (\partial_-W_k) \times H_{-\infty}^a \cup W_k \times (H \cap Q^{-1}(\{b\}))) \\ &\simeq H_i(W_k \times H, (\partial_-W_k) \times H \cup W_k \times H_{-\infty}^b) \end{aligned}$$

Posons $A_i = H_i((\partial_-W_k) \times H, (\partial_-W_k) \times H_{-\infty}^b)$, $B_i = H_i(W_k \times H, W_k \times H_{-\infty}^b)$ et $C_i = H_i(W_k \times H, (\partial_-W_k) \times H \cup W_k \times H_{-\infty}^b)$.

Nous avons donc le diagramme suivant, avec $\dim(H) = p$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{-1} & A_i & \longrightarrow & B_i & \longrightarrow & C_i \xrightarrow{-1} \cdots \\ & & \downarrow | \mathcal{R} & \circlearrowleft & \downarrow | \mathcal{R} & & \\ \cdots & \xrightarrow{-1} & H_{i-p}(\partial_-W_k) & \longrightarrow & H_{i-p}(W_k) & \longrightarrow & H_{i-p}(W_k, \partial_-W_k) \xrightarrow{-1} \cdots \end{array}$$

où les deux isomorphismes sont donnés par l'isomorphisme de Thom, puisque $H_{-\infty}^b$ est le complémentaire d'une boule dans H . Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{rank}\left(H_i\left(W_k \times H, (\partial_-W_k) \times H \cup W_k \times H_{-\infty}^b\right)\right) &= \text{rank}(H_{i-p}(W_k, \partial_-W_k)) \\ &\geq (2k+1)^{r+1} \text{rank}(HN_{i-p}(M, \beta)) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc diviser par $(2k+1)^{r+1}$ et faire tendre k vers $+\infty$, ce qui nous donne

$$\#\text{Crit}_i^\beta(F) + o_{+\infty}(1) \geq \text{rank}(HN_{i-p}(M, \beta)).$$

■

Un corollaire directe de ce théorème est l'inégalité de Chantraine-Murphy :

Corollaire 3.3.2 ([CM16])

Soit M une variété fermée, β une 1-forme fermée sur M et, pour un $m \in \mathbb{N}$, $F : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse quadratique à l'infini. Notant β le tiré en arrière de

β sur $M \times \mathbb{R}^m$ nous avons que

$$\#Crit^\beta(F) \geq \sum_i rank(HN_i(M, \beta))$$

lorsque $d_\beta F$ est transverse à la $M \times \mathbb{R}^m$.

Nous récupérons donc le théorème suivant :

Théoreme 3.3.3 ([CM16])

Soit M une variété fermée, β une 1-forme fermée sur M . Notons β le tiré en arrière de β sur T^*M . Soit L une lagrangienne β -exacte donnée par une fonction génératrice F . Supposons que L intersecte M transversalement. Alors,

$$\#L \pitchfork M \geq \sum_i rank(HN_i(M, \beta)).$$

Il suffit donc ensuite d'utiliser le théorème de Chekanov (théorème 1.4.6), pour retrouver le théorème de Chantraine-Murphy :

Théoreme 3.3.4

([CM16]) Soit M une variété fermée, β une 1-forme fermée sur M . Notons β le tiré en arrière de β sur T^*M . Soit ϕ_t un flot hamiltonien dans (T^*M, λ, β) tel que pour un certain $t > 0$, $\phi_t(M)$ soit transverse à M . Alors,

$$\#\phi_t(M) \pitchfork M \geq \sum_i rank(HN_i(M, \beta)).$$

Démonstration : Le théorème de Chekanov implique que $\phi_t(M)$ possède une fonction génératrice $F : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Notant β le tiré en arrière de β sur $M \times \mathbb{R}^m$ nous avons que $\phi_t(M)$ intersecte M précisément lorsque $d_\beta F = 0$. Nous pouvons donc utiliser le corollaire précédent pour conclure. ■

3.4 Non-existence de fonctions génératrices

Nous allons ici voir que certaines lagrangiennes exactes n'ont pas de fonctions génératrices. Pour rappel :

Définition 3.4.1

Soit L une legendrienne de J^1M . Alors on dit que L possède une fonction génératrice s'il existe un $k \in \mathbb{N}$ et une fonction $F : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ qui est quadratique définie hors d'un compact tels que

$$L = \left\{ (q, p, z) \in T^*M \times \mathbb{R}_z : \exists \xi \in \mathbb{R}^k / D_q F|_{(q,\xi)} = p, D_\xi F|_{(q,\xi)} = 0 \text{ et } F(q, \xi) = -z \right\}$$

Lemme 3.4.2

Soit L une legendrienne de J^1M et $L \times \mathbb{S}^1$ son relevé standard (voir la première section du chapitre 1). Si L possède une fonction génératrice, alors $L \times \mathbb{S}^1$ possède une fonction génératrice.

Supposons que L admette une fonction génératrice, alors il existe une fonction F comme décrite plus haut telle que

$$L \times \mathbb{S}^1 = \left\{ (q, p, z) \in T^*M \times \mathbb{R}_z : \exists \xi \in \mathbb{R}^k / D_q F|_{(q,\xi)} = p, D_\xi F|_{(q,\xi)} = 0 \text{ et } F(q, \xi) = z \right\}.$$

Il suffit ensuite de vérifier que

$$L \times \mathbb{S}^1 = \left\{ (q, p, \theta, z) \in T^*M \times T^*\mathbb{S}^1 : \exists \xi \in \mathbb{R}^k / D_q F|_{(q,\xi)} - Fd\theta = p + zd\theta, D_\xi F|_{(q,\xi)} = 0 \right\}$$

Puisque $d_{d\theta}F = dF - Fd\theta = D_q F + D_\xi F - Fd\theta$, la fonction

$$\begin{aligned} G : M \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, \theta, \xi) &\rightarrow F(q, \xi) \end{aligned}$$

génère bien $L \times \mathbb{S}^1$.

Nous avons aussi le lemme suivant :

Lemme 3.4.3

Soit L une legendrienne de J^1M et prenons $L \times \mathbb{S}^1$ son relevé en lagrangienne exacte. Si $L \times \mathbb{S}^1$ possède une fonction génératrice, alors L possède une fonction génératrice.

Une fonction $G : M \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ se relève à une fonction $F : M \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Remarquons que

$$L \times \mathbb{S}^1 = \left\{ (q, p, \theta, z) \in T^*M \times T^*\mathbb{S}^1 : \exists \xi \in \mathbb{R}^k / D_{(q,\theta)} G|_{(q,\theta,\xi)} - Gd\theta = p + zd\theta, D_\xi G|_{(q,\theta,\xi)} = 0 \right\}$$

Définissons $V_G = \{(q, \theta, \xi) : D_\xi G|_{(q, \theta, \xi)} = 0\}$. Notons que, sur V_G , la valeur de $D_\xi G$ est constante, impliquant que $D_\xi \partial_\theta G|_{(q, \theta, \xi)} = \partial_\theta D_\xi G|_{(q, \theta, \xi)} = 0$, et donc que la valeur de $\partial_\theta G$ ne dépend pas de ξ après restriction à V_G et, inversement, la valeur de $D_\xi G$ ne dépend pas de θ . gardant à l'esprit que on multiplie par -1 la coordonnée en z pour passer de L à $L \times \mathbb{S}^1$, fixons le point $(q, p, -z) \in (J^1 M) \cap L$, qui est relevé à (q, p, θ, z) dans $L \times \mathbb{S}^1$. Nous allons considérer $V_{(q, p, z)}$ l'ensemble des points (θ, ξ) tels que $D_{(q, \theta)} G|_{(q, \theta, \xi)} - G d\theta = p + z d\theta$ et $D_\xi G|_{(q, \theta, \xi)} = 0$. Observons que $z = \partial_\theta G - G$ sur $V_{(q, p, z)}$. Ainsi, restreignant G à $V_{(q, p, z)}$, nous observons que $\partial_\theta^2 G = \partial_\theta G$. Puisque la valeur de $\partial_\theta G$ ne dépend pas de ξ sur $V_{(q, p, z)} \subset V_G$, nous en concluons que localement autour de tout $\theta_0 \in \mathbb{S}^1$, $\partial_\theta G = h(q) e^\theta$ sur $V_{(q, p, z)}$, pour un $h \in C^\infty(M)$. Finalement, notons que pour $(q, p) \in T^* M$ et $z \in \mathbb{R}$, si $V_{(q, p, z)} \neq \emptyset$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, il existe ξ tel que $(q, \theta, \xi) \in V_{(q, p, z)}$. Si $h(q) \neq 0$, ceci implique que, après un tour complet de \mathbb{S}^1 , nous avons deux valeurs possible pour $\partial_\theta G$ qui diffèrent d'un facteur non-nul (absurde) : lorsque nous restreignons G à $V_{(q, p, z)}$, $\partial_\theta G = 0$. Étant donné que $\cup_{q, p, z} V_{(q, p, z)} = V_G$, nous en concluons que $\partial_\theta G$ est nul sur V_G . Ceci implique que $z = -G$.

Ainsi,

$$L = \left\{ (q, p, z) \in T^* M \times \mathbb{R}_z : \exists \xi \in \mathbb{R}^k / D_q F|_{(q, \xi)} = p, D_\xi F|_{(q, \xi)} = 0 \text{ et } F(q, \xi) = z \right\}.$$

Ces deux lemmes impliquent la proposition suivante :

Proposition 3.4.4

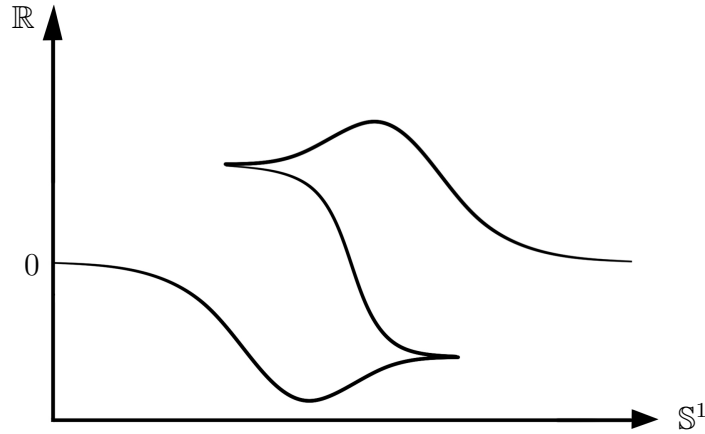
Soit L une legendrienne de $J^1 M$, alors L possède une fonction génératrice si et seulement si $L \times \mathbb{S}^1$ possède une fonction génératrice.

Ceci nous amène à l'observation suivante :

Corollaire 3.4.5

Certaines lagrangiennes exactes connexes fermées ne possèdent pas de fonctions génératrices.

Certaines legendriennes n'ont pas de fonctions génératrices. C'est le cas, par exemple, pour les stabilisation du nœud trivial dans $J^1 \mathbb{S}^1$.


 FIGURE 3.3 – Exemple de legendrienne dans $J^1\mathbb{S}^1$ sans fonction génératrice

Comme indiqué dans [Gir90], cette legendrienne possède un fonction génératrice si et seulement si son indice de Maslov est 0. Contant le nombre de cusps, l'indice de Maslov de cette legendrienne est 2.

Notons toutefois que les relevés de legendriennes ne sont pas les seules lagrangiennes exactes à ne pas avoir de fonction génératrice. Par exemple, dans la construction 2.3, nous expliquons comment un cobordisme lagrangien d'une legendrienne de J^1M à elle-même donne une lagrangienne $d\theta$ -exacte dans $T^*(M \times \mathbb{S}_\theta^1)$, muni de la forme de Liouville canonique et de la forme de Lee $d\theta$. Nous utilisons ensuite un tel cobordisme pour montrer que certaines lagrangiennes exactes ont une homologie de Morse-Novikov non-nulle (contrairement à la l'homologie de Morse-Novikov de la variété de base). Finalement, nous remarquons que ceci implique que le tiré en arrière de $d\theta$ doit s'annuler au moins une fois. Montrons que ceci implique qu'une telle lagrangienne $d\theta$ -exacte, choisie génériquement, ne peut pas avoir de fonction génératrice.

Supposons que la lagrangienne $d\theta$ -exacte possède une fonction génératrice $F : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $-F$ définit une isotopie hamiltonienne ϕ_t entre la section nulle et le graphe $\Gamma_{d\theta}(F) = \{(q, d_{d\theta}F_q) : q \in M\}$. Par ailleurs, puisque $d_\beta F \in \Omega^1(M \times \mathbb{R}^k)$, le flot respecte les fibres de $T^*M \times \mathbb{R}^k$ au sens où $\phi_t(T_q^*M \times \mathbb{R}^k) \subset T_q^*M \times \mathbb{R}^k$. En particulier, ceci implique que ϕ_t est une isotopie entre $\Gamma_{d\theta}(F)$ et sa projection sur $M \times \mathbb{R}^k$, qui est égale à $M \times \mathbb{R}^k$. Ainsi, $d\theta$ se tire en arrière en une forme jamais nulle sur le graphe.

Rappelons finalement que la lagrangienne est donnée par la projection de $d_{d\theta}F \pitchfork (T^*M) \times \mathbb{R}^k$ sur T^*M . Ainsi le tiré en arrière de $d\theta$ à la lagrangienne vaut zéro en un point si et seulement si le tiré en arrière de $d\theta$ sur $d_{d\theta}F \pitchfork (T^*M) \times \mathbb{R}^k$ vaut 0 au-dessus

de la préimage du point. Ceci contredit le fait que $d_{d\theta}F$ est transverse à $(T^*M) \times \mathbb{R}^k$.

3.5 Discussion et perspectives

3.5.1 Vers une amélioration du théorème 3.2.3

Prenons M une variété fermée et $\beta \in \Omega^1(M)$ fermée. Par théorie de Morse classique, toute fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a un nombre de points critiques d'indice i minoré par le rang de $H_i(M)$, plus le nombre minimal de générateurs pour les sous-groupes de torsion de $H_i(M)$ et $H_{i-1}(M)$. Une question pertinente ici serait de savoir si nous pourrions avoir une minoration pour $Crit_i^\beta(f)$.

Une première idée serait de minorer par le nombre de torsion de $H_i(L_\beta \otimes C_*^{CW}(\tilde{M}_\beta))$. Toutefois, l'adaptation du lemme 3.2.17 n'est pas si directe. En effet, prenons c un élément de $L_\beta^k \otimes C_*(W_k^-, \partial_- W_k^-)$ tel que $[c]$ soit de torsion, alors il est possible que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $t \times c$ ne soit pas nul en homologie (e.g. $\mathbb{Z}[X]/(X^3)$ a de la torsion en tant que $(\mathbb{Z}[X]/(X^3))$ -module mais pas en tant que \mathbb{Z} -module). Il est donc possible que $H_i(L_\beta \otimes C_*^{CW}(\tilde{M}_\beta))$ ait plus de torsion que $H_i(W_k^-, \partial_- W_k^-)$. Pour lever ce problème, nous pourrions tensoriser par \mathbb{Q} et comparer la torsion et le rang de $H_i(\mathbb{Q} \otimes L_\beta^k \otimes C_*^{CW}(W_k^-, \partial_- W_k^-))$ à $rank(\mathbb{Q} \otimes H_i(W_k^-, \partial_- W_k^-))$. Cependant, notons que en général $\mathbb{Q} \otimes L_\beta$ n'est pas un anneau principal, et donc $H_i(\mathbb{Q} \otimes L_\beta \otimes C_*^{CW}(\tilde{M}_\beta))$ ne peut pas en général s'écrire comme module libre plus torsion (notons que $Nov(\Gamma_\beta)$ étant principal, ce problème ne se pose pas pour cet anneau). Ainsi, il faudrait considérer le nombre minimal de générateurs de $H_i(\mathbb{Q} \otimes L_\beta \otimes C_*^{CW}(\tilde{M}_\beta))$: il est possible que pour c et c' des représentants de deux de ces générateurs (tels que $[c] \neq [c']$), on ait $[Pc] - [P'c'] = 0$, avec P et P' dans $\mathbb{Q} \otimes L_\beta^k$, sans que ni $[Pc]$ ni $[P'c']$ soit égal à zéro.

Une seconde idée serait donc d'essayer d'utiliser l'homologie de Morse-Novikov de (M, β) . Après tout, nous pouvons déjà minorer $Crit_i^\beta(f)$ par le rang de $HN_i(M, \beta)$. Toutefois, la stratégie de preuve adoptée ici n'est pas parfaitement adaptée à répondre à cette question.

En effet, supposons par soucis de simplicité que $[\beta] \in H^1(M, \mathbb{Z})$ et voyons L_β comme $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ le module des polynômes de Laurent au-dessus de \mathbb{Z} , avec $L_\beta^- = \mathbb{Z}[X^{-1}]$ et $L_\beta^k = \mathbb{Z}[X]/\langle \forall m < -k, X^m = 0 \rangle$. Posons S' l'ensemble des polynômes de L_β^- de la forme

$\pm(1+P(X))$ avec $\deg(P) < 0$ et S l'ensemble des polynômes de L_β^- de la forme $\pm X^m(1+P(X))$ avec $\pm(1+P(X)) \in S'$ et $m \in \mathbb{Z}$. Nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.5.1

(Proposition 1.30, dans [Far04]) Le nombre minimal de générateurs du groupe de torsion de $HN_i(M, \beta)$ est égal au nombre minimal de générateurs du groupe de torsion de la localisation $S^{-1}L_\beta \otimes H_i(\tilde{M}_\beta)$.

Remarquons que la localisation $S^{-1}L_\beta$ est isomorphe à

$$\{Q(X)X^{-m} \sum_i (-P(X))^i \in \mathbb{Z}[[X]] : Q(X) \in \mathbb{Z}[X^{\pm 1}], X^m(1+P(X)) \in S\},$$

Ce dernier peut être réécrit

$$\{Q(X)X^{-m} \sum_i (-P(X))^i \in \mathbb{Z}[[X]] : Q(X)X^{-m} \in \mathbb{Z}[X^{\pm 1}], (1+P(X)) \in S'\},$$

qui est la localisation $S'^{-1}L_\beta$. Ceci implique que $S'^{-1}L_\beta = S^{-1}L_\beta$ (le lecteur avertit verra que S est trivialement dans la saturation de S' , donnant le résultat). Voyant L_β^- comme le quotient de $\mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ par $X\mathbb{Z}[X]$, nous avons une structure de L_β -module sur L_β^- . Ainsi, la suite exacte courte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow L_\beta^- \otimes_{L_\beta} H_i(L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}) \rightarrow H_i(L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}) \\ \rightarrow \text{Tor}^{L_\beta}(H_{i-1}(L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}), L_\beta^-) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

qui passe à la localisation, donnant :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S'^{-1}L_\beta^- \otimes_{S'^{-1}L_\beta} H_i(S'^{-1}L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}) \rightarrow H_i(S'^{-1}L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}) \\ \rightarrow \text{Tor}^{S'^{-1}L_\beta}(H_{i-1}(S'^{-1}L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}), S'^{-1}L_\beta^-) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

La projection évidente de $S'^{-1}L_\beta^- = \{Q \sum_i (-P)^i \in \mathbb{Z}[X^{-1}]] : Q \in \mathbb{Z}[X^{-1}], 1+P \in S'\}$ sur L_β^k en fait un $S'^{-1}L_\beta^-$ -module. Puisque la localisation préserve les modules plats, nous avons aussi la suite exacte courte suivante (voir théorème 3.6.1 dans [Wei94]) :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow L_\beta^k \otimes_{S'^{-1}L_\beta^-} H_i(S'^{-1}L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}) \rightarrow H_i(L_\beta^k \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}) \\ \rightarrow \text{Tor}^{S'^{-1}L_\beta^-}(H_{i-1}(S'^{-1}L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}), L_\beta^k) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Remarquons que ces suites exactes ne sont pas a priori "split", ce qui rend difficile leurs étude (même dans le cas simple où $[\beta] \in H^1(M, \mathbb{Z})$). Notons aussi que, comme souligné auparavant, l'étude directe de la torsion de $H_i(L_\beta^k \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta})$ ne permet pas d'effectuer de comparaison. Si néanmoins l'étude de ces deux dernières suites exactes courtes est possible, l'utilisation d'un lemme du type du lemme 3.2.17 pourrait nous permettre de conclure. En effet, dans le meilleur cas (tout est split), nous aurions l'égalité de $S'^{-1}L_\beta^-$ -modules suivante :

$$\begin{aligned} H_i(L_\beta^k \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}) &\simeq L_\beta^k \otimes S'^{-1}L_\beta^- \otimes_{S'^{-1}L_\beta} H_i(S'^{-1}L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}) \\ &\quad \oplus L_\beta^k \otimes \text{Tor}^{S'^{-1}L_\beta}(H_{i-1}(S'^{-1}L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}), S'^{-1}L_\beta^-) \\ &\quad \oplus \text{Tor}^{S'^{-1}L_\beta^-}(H_{i-1}(S'^{-1}L_\beta^- \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta}), L_\beta^k) \end{aligned}$$

Ainsi, nous devons nous concentrer sur le sous-module donné par le groupe de torsion de $H_i(S'^{-1}L_\beta \otimes_{\mathbb{R}} C_*^{CW}(\overline{V}_\beta, \partial_- \overline{V}_\beta), \hat{\delta})$.

3.5.2 Vers une deuxième preuve du théorème 3.2.3

Ici, nous allons voir une autre idée pour une stratégie de preuve pour prouver le théorème 3.2.3. Cette nouvelle stratégie aura pour intérêt principal de potentiellement permettre de plus facilement voir comment récupérer certains groupes de torsion.

Supposons que l'on ai $(W^k)_k$ une exhaustion compact de \tilde{M}_β dont les bords sont des sous-ensembles de $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{H}} \alpha(\partial_\pm \overline{V}_\beta)$.

Posons $\phi^k = (e^{-g}f)|_{W^k}$. Soit $\text{Crit}_i(\phi^k)$ l'ensemble des points critiques de ϕ^k et $N_i(\phi^k)$ l'ensemble des points critiques d'indice i de $\phi^k|_{\partial W^k}$ tels $d\phi^k$ est transverse rentrant au bord.

Alors, par la théorie de Morse pour variétés à bord élaborée dans [Lau11] (voir aussi [KM08]), pour tout k , nous avons un complexe de chaînes de \mathbb{R} -espaces vectoriels librement engendré par $\text{Crit}_*(\phi^k) \cup N_*(\phi^k)$ dont l'homologie est $H_*(W^k, \mathbb{R})$. En particulier, nous avons un morphisme $\mathbb{R}[\text{Crit}_i(\phi^k)] \oplus \mathbb{R}[N_i(\phi^k)] \rightarrow H_i(W^k, \mathbb{R})$.

Supposons que pour tout k nous avons un morphisme

$$p : \mathbb{R}[\text{Crit}_i(\phi^k)] \oplus \mathbb{R}[N_i(\phi^k)] \rightarrow \mathbb{R}[\text{Crit}_i(\phi^{k+1})] \oplus \mathbb{R}[N_i(\phi^{k+1})]$$

qui est l'inclusion sur $\mathbb{R}[\text{Crit}_i(\phi^k)] \subset \mathbb{R}[\text{Crit}_i(\phi^{k+1})]$ et qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}[Crit_i(\phi^k)] \oplus \mathbb{R}[N_i(\phi^k)] & \rightarrow & H_i(W^k, \mathbb{R}) \\
 \downarrow p & & \downarrow i \\
 \mathbb{R}[Crit_i(\phi^{k+1})] \oplus \mathbb{R}[N_i(\phi^{k+1})] & \rightarrow & H_i(W^{k+1}, \mathbb{R})
 \end{array}$$

où i est donné par l'inclusion.

2. Pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$, et tout $x \in N_i(\phi^0)$ tels que $\alpha(x) \in N_i(\phi^k)$ pour un certain k , alors $p(\alpha(x)) = \alpha(p(x))$.

Si p rempli ces conditions alors $\varinjlim(\mathbb{R}[Crit_i(\phi^k)] \oplus \mathbb{R}[N_i(\phi^k)])$ peut être doté d'une structure de L_β -module et nous avons la projection

$$Q_\beta \otimes_{L_\beta} \varinjlim(\mathbb{R}[Crit_i(\phi^k)] \oplus \mathbb{R}[N_i(\phi^k)]) \rightarrow Q_\beta \otimes_{L_\beta} H_i(\tilde{M}_\beta, \mathbb{R})$$

Premièrement, lors du passage à la limite, nous avons

$$\mathbb{R}[Crit_i(\phi)] = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{H}} \mathbb{R}[\alpha(Crit_i(\phi^0))]$$

et donc

$$Q_\beta \otimes_{L_\beta} \mathbb{R}[Crit_i(\phi)] = Q_\beta \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[Crit_i(\phi^0)],$$

qui est de dimension $\#Crit_i(\phi^0)$.

Deuxièmement, considérons un point de $a_0 \in N_i(\phi^k)$, alors $p(a_0) = P_0 a_0 + \sum_{m=1}^n P_m a_m$ où P_m sont des polynômes non-nuls (pour $m > 0$) dans L_β et a_m des points de $Crit_i(\phi^k) \cup N_i(\phi^k)$ différents de a_0 . Ainsi, dans la limite, $a_0 \sim P_0 a_0 + \sum_{m=1}^n P_m a_m$, et ainsi $[a_0] = [P_0 a_0 + \sum_{m=1}^n P_m a_m] = P_0 [a_0] + \sum_{m=1}^n P_m [a_m]$ et donc $[a_0] = \frac{1}{1-P_0} \sum_{m=1}^n P_m [a_m]$. Supposant que $a_1 \in N_i(\phi^k)$, nous pouvons ensuite utiliser cette égalité pour exprimer $p(a_1)$ comme combinaison linéaire d'éléments dans $Crit_i(\phi^k) \cup N_i(\phi^k) - \{a_0\}$ avec coefficients dans L_β . Répéter ce procédé jusqu'à exhaustion des éléments dans $N_i(\phi^k)$ nous permet d'établir que pour le dernier élément $b \in N_i(\phi^k)$ et un certain polynôme Q , $(1-Q)[b]$ est combinaison linéaire de classes d'éléments de $Crit_i(\phi^k)$, ou est égal à zéro. Parcourir les égalités établies dans le sens inverse nous donne ensuite que pour tout élément $a \in N_i(\phi^k)$, soit $[a]$ est combinaison linéaire de classes d'éléments de $Crit_i(\phi^{k+1})$, ou est égal à zéro.

Ainsi,

$$Q_\beta \otimes_{L_\beta} \varinjlim(\mathbb{R}[Crit_i(\phi^k)] \oplus \mathbb{R}[N_i(\phi^k)]) = Q_\beta \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[Crit_i(\phi^0)] \rightarrow Q_\beta \otimes_{L_\beta} H_i(\tilde{M}_\beta, \mathbb{R})$$

En particulier, le nombre d'éléments dans $Crit_i(\phi^0)$ est plus grand que la dimension de $Q_\beta \otimes_{L_\beta} H_i(\tilde{M}_\beta, \mathbb{R})$.

Une première application pour $[\beta] \in H^1(M, \mathbb{Z})$

Comme annoncé, supposons que $[\beta] \in H^1(M, \mathbb{Z})$. Prenons W_k l'exhaustion utilisé dans 3. Ainsi, $\mathbb{Z}[\mathcal{H}] = \mathbb{Z}[\alpha]$ avec $\langle [\beta], \alpha \rangle > 0$. Prenons X un champ de vecteurs sur W_0 qui est un pseudo-gradient pour ϕ_0 loin des points critiques de $\phi_0|_{\partial W_0}$, qui vaut 0 au-dessus des points critiques de $\phi_0|_{\partial W_0}$, et qui est tangent au bord. Soit $\psi : \partial_- W_0 \rightarrow \partial_+ W_0$ le difféomorphisme canonique, et supposons que $D\phi(X) = X$. Finalement, supposons que le flot de X est Morse sur l'intérieur de W_0 et sur le bord. Le flot de X détermine une différentielle sur le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par les points critiques et les points critiques de Neumann, dont l'homologie est l'homologie de W_0 .

Du fait que $e^{-g}f$ est quasi-périodique, un point critique de Neumann x de ϕ_0 correspond à un point critique (de Dirichlet) y de X sur le bord opposé. Posons donc $p(x) = \alpha^{-1}(\partial y)$ si $x \in \partial_- W_0$, et $p(x) = \alpha(\partial y)$ si $x \in \partial_+ W_0$. Un tel p vérifie les conditions données plus haut, et ainsi, nous pouvons retrouver le théorème 3.2.3 dans ce cas.

Notons que la deuxième condition sur p peut poser problème dans le cas plus général $[\beta] \in H^1(M, \mathbb{R})$.

3.5.3 Une théorie des faisceaux pour la géométrie lcs

Comme noté en introduction, les idées de ce chapitre sont adaptables à une théorie des faisceaux pour la géométrie lcs. Rappelons les deux ingrédients algébriques principaux de la preuve du théorème 3.2.3.

1. Le complexe de chaînes donnant l'homologie singulière du revêtement \tilde{M}_β est invariant sous l'action des automorphismes de revêtement. C'est-à-dire que pour tout $S \subset \tilde{M}_\beta$ et tout automorphisme de revêtement α , $\alpha_*(C_*(S)) = C_*(\alpha(S))$.
2. L'homologie singulière vérifie :

$$\frac{rk(H_i(W_k, \partial_- W_k))}{(2k+1)^{r+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} rk(HN_i(M, \beta))$$

pour $r+1$ la dimensions du groupe des automorphismes de revêtement de \tilde{M}_β vu comme un \mathbb{Z} -module libre.

Le premier point peut être traduit par la définition suivante :

Définition 3.5.2

Supposons que $\overline{\tilde{V}_\beta}$ est subanalytique (ce qui est vérifié pour un β générique dans la même classe de cohomologie). Soit A un anneau abélien et F un faisceau sur \tilde{M}_β tel que $F \in D^b(A_{\tilde{M}_\beta})$ soit \mathbb{R} -constructible. Nous appellerons F un β -faisceau si pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$, $F \simeq \alpha^* F$.

Remarquons que par théorie générale sur les faisceaux équivariants, un tel faisceau est simplement le tiré en arrière d'un faisceau dans $D^b(M)$ par la projection de \tilde{M}_β sur M (voir, par exemple, proposition 8.1.1 dans [BL94]).

Notons que le deuxième point indique que la notion de nombre de Betti n'est pas adapté : il nous faut une "nombre de Betti asymptotique".

Définition 3.5.3

Nous appellerons le j -ème nombre de Novikov de F la quantité

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_j(F_{W_k \setminus \partial_- W_k})}{(2k+1)^{r+1}} =: c_j(F),$$

où $r+1$ est le rang de la coimage de $\langle [\beta], \cdot \rangle$

Rappelons que $b_j(F_{W_k \setminus \partial_- W_k})$ est le rang du j -ème groupe de cohomologie de $\Gamma(\tilde{M}_\beta, F_{W_k \setminus \partial_- W_k})$, soit-dit le rang de $R\Gamma^j(\tilde{M}_\beta, F_{W_k \setminus \partial_- W_k})$.

Cette notion de nombre de Novikov a le bon goût d'être bien définie, au sens de la propriété suivante :

Proposition 3.5.4

Soit F un β -faisceau. Alors $c_j(F)$ ne dépend pas des choix arbitraires faits lors du choix de \tilde{V}_β .

Démonstration (idée) : Tous les ensembles seront choisis de sorte à être subanalytiques.

Afin d'alléger les indices, notons $G_{W_k}(F) := F_{W_k \setminus \partial_- W_k}$.

Soit $F \in D^b(A_{\tilde{M}_\beta})$ un β -faisceau. Soient V_1 et V_2 deux résultats possibles de cette construction. On peut toujours supposer que $\text{int}(V_1) \cap \text{int}(V_2) \neq \emptyset$ car F est un β -faisceau. Notons respectivement W_k^1 et W_k^2 les ensembles W_k construits à partir de V_1 et V_2 . Puisque ces ensembles sont subanalytiques et que F est \mathbb{R} -constructible, $G_{W_k^1}(F)$ et $G_{W_k^2}(F)$ sont \mathbb{R} -constructibles.

Supposons dans un premier temps que $W_k^1 \subset \text{int}(W_{k+1}^2)$ et $W_k^2 \subset \text{int}(W_{k+1}^1)$. Prenons l'inclusion $W_k^2 \hookrightarrow W_{k+1}^1$, alors il y a un morphisme injectif de $i_* G_{W_k^2}(F)$ dans $G_{W_{k+1}^1}(F)$, qui est une bijection lorsqu'on restreint les faisceaux à $\text{int}(W_k^2)$. Prenons V^k un voisinage

arbitrairement petit de $(W_{k+1}^1 - W_k^2)$ dans W_{k+1}^1 , alors nous avons une suite exacte longue de Mayer-Vietoris :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow R\Gamma(W_{k+1}^1, i_*G_{W_k^2}(F)) &\rightarrow R\Gamma(V^k, i_*G_{W_k^2}(F)) \oplus R\Gamma(\text{int}(W_k^2), i_*G_{W_k^2}(F)) \\ &\rightarrow R\Gamma(V^k \cap \text{int}(W_k^2), i_*G_{W_k^2}(F)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Similairement, nous avons

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow R\Gamma(W_{k+1}^1, G_{W_{k+1}^1}(F)) &\rightarrow R\Gamma(V^k, G_{W_{k+1}^1}(F)) \oplus R\Gamma(\text{int}(W_k^2), G_{W_{k+1}^1}(F)) \\ &\rightarrow R\Gamma(V^k \cap \text{int}(W_k^2), G_{W_{k+1}^1}(F)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Or, nous avons les isomorphismes $R\Gamma(\text{int}(W_k^2), G_{W_{k+1}^1}(F)) \simeq R\Gamma(\text{int}(W_k^2), i_*G_{W_k^2}(F))$ et $R\Gamma(V^k \cap \text{int}(W_k^2), G_{W_{k+1}^1}(F)) \simeq R\Gamma(V^k \cap \text{int}(W_k^2), i_*G_{W_k^2}(F))$.

Remarquons qu'en prenant un recouvrement ouvert de V^k suffisamment régulier sous l'action de \mathcal{H} , nous avons que le rang de $R\Gamma(V^k, G_{W_{k+1}^1}(F))$ est au plus $O_\infty((2k+1)^r)$. Précisons quelque peu cet argument. Pour chaque $\alpha \in \partial_- \mathcal{H}_{k+1} \cup \partial_+ \mathcal{H}_{k+1} =: \partial \mathcal{H}_{k+1}$, prenons U_α un petit voisinage ouvert de $\alpha(\tilde{V}_\beta)$. Commençons par décrire les voisinages dans les "coins". Rappelons que \mathcal{H} est un \mathbb{Z} -module libre de base $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ et que \mathcal{H}_{k+1} est un hypercube. Fixons-nous $(X_i)_i$ le squelette de $\partial \mathcal{H}_{k+1}$, où X_i est l'union des faces de dimension au plus i . Par induction sur le squelette pour $\alpha \in X_i$ à distance au moins 2 de X_{i-1} pour la norme $\|\cdot\|_\infty$,

$$\hat{U}_\alpha = \cup_{\{\alpha' \in \mathcal{H}_{k+1} : \|\alpha' - \alpha\|_\infty \leq 1\}} U_{\alpha'}.$$

Finalement, prenons K un fermé arbitrairement grand de $\text{int}(W_k^2)$ et pour chaque \hat{U}_α défini, posons $V_\alpha = \hat{U}_\alpha - K$. Alors la réunion de tous ces V_α forme un recouvrement ouvert de V^k . Par ailleurs, effectuer une répétition de suites de Mayer-Vietoris utilisant ces voisinages montre que le rang de $R\Gamma(V^k, G_{W_{k+1}^1}(F))$, pour $k \geq 5$, est au plus une constante fois le nombre de voisinages V_α avec $\alpha \in X_r$, d'où le $O_\infty((2k+1)^r)$. Notons que l'existence de la constante est donnée par le fait que les V_α sont des sous-ensembles ouverts subanalytiques relativement compacts et que $G_{W_{k+1}^1}(F)$ est \mathbb{R} -constructible.

Pour $R\Gamma(V^k, i_*G_{W_k^2}(F))$, le même résultat peut être obtenu avec un bon recouvrement de $V^k \cap W_k^2$. Ainsi, la différence entre les rangs de $R\Gamma(V^k, G_{W_{k+1}^1}(F))$ et $R\Gamma(V^k, i_*G_{W_k^2}(F))$ est au plus $O_\infty((2k+1)^r)$.

Ainsi, nous avons les égalités suivantes :

$$b_j(G_{W_{k+1}^1}(F)) = b_j(i_*G_{W_k^2}(F)) + O_{+\infty}((2k+1)^r) = b_j(G_{W_k^2}(F)) + O_{+\infty}((2k+1)^r)$$

Diviser par $(2k + 1)^{r+1}$ et passer à la limite donne le résultat.

Si nous ne supposons pas que $W_k^1 \subset \text{int}(W_{k+1}^2)$ et $W_k^2 \subset \text{int}(W_{k+1}^1)$, le résultat peut être déduit en passant par l'intermédiaire d'une suite finie de domaines fondamentaux V_i , et leurs suites $(W_k^i)_k$ associés tels que, pour tout i , $(W_k^i)_k$ et $(W_k^{i+1})_k$ vérifient l'hypothèse. ■

CONCLUSION

La géométrie \mathbf{lcs} est une généralisation de la géométrie symplectique qui, bien qu'ayant des propriétés locales identiques, possède des comportements globaux radicalement différents. Cette thèse s'inscrit dans la lignée des travaux de B. Chantraine et E. Murphy, et est une exploration des différents outils adaptés à l'étude des variétés \mathbf{lcs} , et plus particulièrement à l'étude des lagrangiennes exactes dans les fibrés cotangents des variétés fermées. Il en ressort plusieurs axes d'étude possibles.

Comme mis en évidence dans le second chapitre, une étude plus dynamique des sous-variétés lagrangiennes exactes est possible. En effet, sous des conditions de type capacité, les lagrangiennes exactes sont homotopiquement équivalentes à des lagrangiennes 0-exactes.

Dans le troisième chapitre, nous nous concentrons plus sur l'aspect topologie algébrique du problème. Nous mettons en évidence que l'inégalité de Chantraine-Murphy peut être améliorée pour être plus similaire aux inégalités de Morse classiques.

Le principal impact de ce manuscrit est de dégager des axes de recherche pertinent pour l'étude des lagrangiennes exactes en géométrie \mathbf{lcs} . Explicitons quelque peu ces axes et les séparant en deux catégories : l'amélioration des résultats de ce papier, et la poursuite de nouveaux résultats inspirés des idées présentées dans ce manuscrit.

Amélioration des résultats

Pour la partie dynamique, nous avons les axes de recherches suivants :

- L'utilisation des techniques exposés dans cette thèse pour trouver plus d'isotopies entre lagrangiennes exactes et lagrangiennes 0-exactes.
- L'étude des conditions sous lesquelles nous pouvons garantir l'existence d'une application h comme décrite dans le corollaire 2.5.1.
- L'étude de l'existence d'une fonction h sur L vérifiant les conditions du corollaire 2.5.1 sous l'action d'une isotopie hamiltonienne générique ϕ_t .

L'intérêt du premier point est de comprendre sous quelles conditions les lagrangiennes

exactes se comportent différemment des lagrangiennes 0-exactes. Les deux points suivants nous intéressent pour la construction d'une véritable capacité lagrangiennes exacte.

Pour la partie topologie algébrique, nous avons les axes de recherche suivants :

- L'élaboration d'autres méthodes de preuves pour les inégalités de Chantraine-Murphy.
- L'amélioration des inégalités de Chantraine-Murphy pour les amener plus en ligne avec les inégalités de Morse, notamment en ce qui concerne la torsion.

L'intérêt du premier point est principalement d'éclairer la recherche sur les deux points suivants. L'amélioration des inégalités de Chantraine-Murphy pour inclure la torsion nous permettrait d'avoir de meilleures bornes minimales pour le nombre d'intersections transverses entre deux lagrangiennes exactes qui sont des déformations de l'une et de l'autre via une isotopie hamiltonienne. Par ailleurs, de nouvelles méthodes de preuves pourraient dégager de nouvelles catégories de faisceaux adaptées à l'étude de la géométrie \mathbf{lcS} (différentes de celle donnée dans la conclusion du chapitre).

Vers de nouveaux résultats

Le sujet de recherche le plus évident consiste à mieux comprendre la notion de β -faisceau et de nombre de Novikov expliqué dans la conclusion du chapitre 3, et une meilleure compréhension passe par une adaptation des travaux de Guillermou, Kashiwara et Shapira en utilisant ces notions. S'il existe déjà de très bonnes pistes pour une version "faisceutique" de la preuve du théorème 1.4.5 en utilisant les idées développées dans le chapitre 3 ainsi que [GKS12] (résultat qui devrait bientôt être publié), une adaptation du théorème d'Abouzaid-Kragh reste néanmoins (pour l'instant) hors de portée. En effet, une telle adaptation demanderait une notion de "quantisation" des lagrangiennes \mathbf{lcS} similaire à celle que Guillermou utilise dans [Gui19]. Toutefois, le début du chapitre 2 indique qu'il pourrait bien y avoir des obstacles à une telle notion.

Un autre axe de recherche serait d'utiliser les idées du chapitre 3 pour essayer de récupérer la théorie de Floer, au moins dans le cadre des fibrés cotangents de variétés fermées. Une direction plus spéculative serait, par exemple, d'essayer de combiner les idées de ce chapitre et les travaux existant sur l'homologie de Floer hamiltonienne pour les variétés ouvertes (voir [Gro15], par exemple). Encore plus spéculatif serait d'essayer d'utiliser les correspondances entre théorie des faisceaux et homologie de Floer lagrangienne (voir

[Nad09], ou encore [Vit19]) pour récupérer une théorie de Floer lagrangienne pour les variétés **lc**.

GLOSSAIRE

- âme d'une variété, 70
- anneau de Novikov, 89
- branche, 70
- champ
 - de Liouville, 67
 - hamiltonien, 39
- cohomologie de Lichnerowicz, 33
- difféomorphisme
 - conformément de Liouville, 38
 - de Liouville, 38
 - hamiltonien, 39
- différentielle de Lichnerowicz, 33
- étoile, 70
- flot hamiltonien, 39
- fonction génératrice, 39, 110
- forme
 - eics**, 37
 - ics**, 34
 - de Lee, 34
- homologie de Morse-Novikov, 90
- lagrangienne, 37
 - β -exacte, 38
 - exacte, 38
- legendrienne, 51
- nombre de Novikov, 118
- paire
 - eics**, 37
 - ics**, 34
- points β -critiques, 94
- structure
 - eics**, 37
 - ics**, 34
- symplectomorphisme, 36
 - conforme, 36
- TAF, 67
- variété
 - eics**, 37
 - ics**, 34
 - de contact, 51

BIBLIOGRAPHIE

- [AA22] Simon ALLAIS et Marie-Claude ARNAUD, « The dynamics of conformal Hamiltonian flows : dissipativity and conservativity », in : *Revista Matemática Iberoamericana* (2022), À paraître dans *Revista Matemática Iberoamericana*.
- [AA24] Simon ALLAIS et Marie-Claude ARNAUD, « The dynamics of conformal Hamiltonian flows : dissipativity and conservativity », in : *Revista Matemática Iberoamericana* (jan. 2024), 28 pages, 1 figure, DOI : 10.4171/RMI/1456.
- [ABP17] Daniele ANGELLA, Giovanni BAZZONI et Maurizio PARTON, « Structure of locally conformally symplectic Lie algebras and solvmanifolds », in : *Annali Scuola Normale Superiore - Classe di Scienze* (2017), URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119308496>.
- [AD23] Vestislav APOSTOLOV et Georges DLOUSSKY, « Twisted differentials and Lee classes of locally conformally symplectic complex surfaces », in : *Mathematische Zeitschrift* 303 (2023), p. 1-33.
- [AK18] Mohammed ABOUZAIID et Thomas KRAGH, « Simple homotopy equivalence of nearby Lagrangians », in : *Acta Mathematica* 220.2 (2018), p. 207 -237, DOI : 10.4310/ACTA.2018.v220.n2.a1.
- [Ant11] Sergey A. ANTONYAN, « Characterizing maximal compact subgroups », in : *Archiv der Mathematik* 98 (2011), p. 555-560.
- [Arn74] Vladimir I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 1974.
- [Ban02] Augustin BANYAGA, « Some properties of locally conformal symplectic structures », in : *Commentarii Mathematici Helvetici* 77 (2002), p. 383-398.
- [Ban07] Augustin BANYAGA, « Examples of non d-omega-exact locally conformal symplectic forms », in : *Journal of Geometry* (2007), DOI : 10.1007/s00022-006-1849-8.
- [BK09] G. BANDE et D. KOTSCHICK, « Moser Stability for Locally Conformally Symplectic Structures », in : *Proceedings of the American Mathematical Society* 137.7 (2009), p. 2419-2424, ISSN : 00029939, 10886826.

-
- [BL94] Joseph BERNSTEIN et Valery LUNTS, « Equivariant sheaves and Functors », in : 1994.
- [BM14] Giovanni BAZZONI et Juan Carlos MARRERO, « Locally conformal symplectic nilmanifolds with no locally conformal Kähler metrics », in : *Complex Manifolds* 4 (2014), p. 172 -178.
- [BM18] Giovanni BAZZONI et Juan Carlos MARRERO, « On locally conformal symplectic manifolds of the first kind », in : *Bulletin des Sciences Mathématiques* 143 (2018), p. 1-57, ISSN : 0007-4497, DOI : <https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2017.10.001>.
- [BM21] Melanie BERTELSON et Gael MEIGNIEZ, « Conformal Symplectic Structures, Foliations and Contact Structures. », in : *HAL* (2021).
- [Boo54] William M. BOOTHBY, « Some Fundamental Formulas for Hermitian Manifolds with Non-Vanishing Torsion », in : *American Journal of Mathematics* 76.3 (1954), p. 509-534, ISSN : 00029327, 10806377, (visité le 09/03/2024).
- [Cha95] Marc CHAPERON, « On generating families », in : 1995.
- [Che96] Y.V. CHEKANOV, « Critical points of quasi-functions and generating families of Legendrian manifolds », in : *Functional Analysis and Its Applications* 30 (1996), 118–128.
- [CM16] Baptiste CHANTRAINE et Emmy MURPHY, « Conformal symplectic geometry of cotangent bundles », in : *Journal of Symplectic Geometry* (2016).
- [CS24] Baptiste CHANTRAINE et Kevin SACKEL, « Products of locally conformal symplectic manifolds », in : (2024), arXiv : 2401.14918 [math.SG].
- [CST16] Orsola CAPOVILLA-SEARLE et Lisa TRAYNOR, « Non-Orientable Lagrangian Cobordisms between Legendrian Knots », in : *Pacific Journal of Mathematics* 285 (2016), p. 319-334.
- [Dam10] Mihai DAMIAN, « Sur la topologie des sous-variétés lagrangiennes », thèse de doct., Université de Strasbourg, 2010.
- [Dar82] G. DARBOUX, « Sur le problème de Pfaff », in : *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* 6.1 (1882), p. 14-36.
- [DO98] Sorin DRAGOMIR et Liviu ORNEA, *Locally conformal Kähler geometry*, t. 155, 1998.

-
- [EM02] Yakov ELIASHBERG et Nikolai M. MISHACHEV, « Introduction to the h-Principle », in : 2002.
- [EM20] Yakov ELIASHBERG et Emmy MURPHY, « Making cobordisms symplectic », in : *arXiv* (2020).
- [Far04] Michael FARBER, « Topology of closed one-forms », in : 2004.
- [Far99] M. FARBER, « Morse–Novikov critical point theory, Cohn localisation and Dirichlet units », in : *Communications in Contemporary Mathematics* 01.04 (1999), p. 467-495, DOI : 10.1142/S0219199799000171.
- [FF12] Rui Loja FERNANDES et Pedro FREJLICH, « A h-principle for symplectic foliations », in : *International Mathematics Research Notices* 2012 (2012).
- [FSS07] Kenji FUKAYA, Paul SEIDEL et Ivan SMITH, « Exact Lagrangian submanifolds in simply-connected cotangent bundles », in : *Inventiones mathematicae* 172 (2007), p. 1-27.
- [Gir90] Emmanuel GIROUX, « Formes generatrices d’immersions lagrangiennes dans un espace cotangent », in : *Géométrie Symplectique et Mécanique : Colloque International La Grande Motte, France, 23–28 Mai, 1988*, sous la dir. de Claude ALBERT, Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1990, p. 139-145, ISBN : 978-3-540-46920-9, DOI : 10.1007/BFb0097468.
- [GKS12] Stéphane GUILLERMOU, Masaki KASHIWARA et Pierre SCHAPIRA, « Sheaf quantization of Hamiltonian isotopies and applications to nondisplaceability problems », in : *Duke Mathematical Journal* 161.2 (2012), p. 201 -245, DOI : 10.1215/00127094-1507367.
- [GMO13] Paul GAUDUCHON, Andrei MOROIANU et Liviu ORNEA, « Compact homogeneous lcK manifolds are Vaisman », in : *Mathematische Annalen* 361 (2013), p. 1043-1048.
- [Gos06] Maurice A. de GOSSON, *Symplectic Geometry and Quantum Mechanics*, 2006.
- [Gro15] Yoel GROMAN, « Floer theory and reduced cohomology on open manifolds », in : *Geometry & Topology* (2015).
- [Gro85] Mikhael GROMOV, « Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds », in : *Inventiones mathematicae* 82 (1985), p. 307-347.

-
- [Gui19] Stéphane GUILLERMOU, « Sheaves and symplectic geometry of cotangent bundles », in : *Astérisque* (2019).
- [HR99] Stefan HALLER et Tomasz RYBICKI, « On the Group of Diffeomorphisms Preserving a Locally Conformal Symplectic Structure », in : *Annals of Global Analysis and Geometry* 17 (1999), p. 475-502, DOI : 10.1023/A:1006650124434.
- [KM08] Peter B. KRONHEIMER et Tomasz S. MROWKA, « Monopoles and Three-Manifolds », in : 2008.
- [KS90] Masaki KASHIWARA et Pierre SCHAPIRA, *Sheaves on Manifolds*, 1990.
- [Lau11] François LAUDENBACH, « A Morse complex on manifolds with boundary », in : *Geometriae Dedicata* (2011).
- [Lee43] Hwa-Chung LEE, « A Kind of Even-Dimensional Differential Geometry and Its Application to Exterior Calculus », in : *American Journal of Mathematics* 65 (1943), p. 433.
- [Lic77] André LICHNEROWICZ, « Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées », in : *Journal of Differential Geometry* 12 (1977), p. 253-300.
- [LS85] François LAUDENBACH et Jean-Claude SIKORAV, « Persistance d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent », in : *Inventiones mathematicae* 82 (1985), p. 349-357.
- [Mar10] Charles-Michel MARLE, « A property of conformally Hamiltonian vector fields ; Application to the Kepler problem », in : *Journal of Geometric Mechanics* 4 (nov. 2010), DOI : 10.3934/jgm.2012.4.181.
- [Mil65] John W. MILNOR, « Lectures on the h-cobordism theorem », in : 1965.
- [Mos65] J. K. MOSER, « On the volume elements on a manifold », in : *Transactions of the American Mathematical Society* 120 (1965), p. 286-294.
- [MP21] Andrei MOROIANU et Mihaela PILCA, « Closed 1-Forms and Twisted Cohomology », in : *The Journal of Geometric Analysis* (2021), DOI : 10.1007/s12220-020-00595-9.
- [MS04] Dusa MCDUFF et Dietmar A. SALAMON, « J-Holomorphic Curves and Symplectic Topology », in : 2004.
- [MS95] Dusa MCDUFF et Dietmar A. SALAMON, « Introduction to Symplectic Topology », in : 1995.

-
- [MTP10] Juan Carlos MARRERO, David Martínez TORRES et Edith PADRÓN, « Universal models via embedding and reduction for locally conformal symplectic structures », in : *Annals of Global Analysis and Geometry* 40 (2010), p. 311-337.
- [Nad09] David NADLER, « Microlocal branes are constructible sheaves », in : *Selecta Math.* (2009).
- [Nod04] Tomonori NODA, « Reduction of locally conformally symplectic manifolds with examples of non-Kähler manifolds », in : *Tsukuba Journal of Mathematics* 28.1 (2004), p. 127-136, ISSN : 03874982, (visité le 07/03/2024).
- [Nov81] Sergei NOVIKOV, « Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory », in : 1981.
- [Nov82] Sergei NOVIKOV, « The Hamiltonian formalism and a many-valued analogue of Morse theory », in : *Russian Mathematical Surveys* 37 (1982), p. 1-56.
- [OS17] Alexandra OTIMAN et Miron STANCIU, « Darboux–Weinstein theorem for locally conformally symplectic manifolds », in : *Journal of Geometry and Physics* 111 (2017), p. 1-5, ISSN : 0393-0440, DOI : <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.10.006>.
- [OS23] Yong-Geun OH et Yasha SAVELYEV, « Pseudoholomorphic curves on the LCS-ification of contact manifolds », in : *Advances in Geometry* 23 (2023).
- [Oti16] Alexandra OTIMAN, « Morse–Novikov cohomology of closed one-forms of rank 1 », in : *arXiv : Differential Geometry* (2016).
- [OV09] Liviu ORNEA et Misha VERBITSKY, « Morse–Novikov cohomology of locally conformally Kähler manifolds », in : *Journal of Geometry and Physics* 59.3 (2009), p. 295-305, ISSN : 0393-0440, DOI : <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.11.003>.
- [Paz87] Andrei PAZHITNOV, « An analytic proof of the real part of Novikov’s inequalities », in : *Doklady Mathematics* 293 (1987), p. 456-457.
- [PV10] Maurizio PARTON et Victor VULETESCU, « Examples of non-trivial rank in locally conformal Kähler geometry », in : *Mathematische Zeitschrift* 270 (2010), p. 179-187.
- [Sha15] C. S. SHAHBAZI, « M-theory on non-Kähler eight-manifolds », in : *Journal of High Energy Physics* (2015), DOI : 10.1007/JHEP09(2015)178.

-
- [Sik87a] Jean-Claude SIKORAV, « Points fixes de difféomorphismes symplectiques, intersections de sous-variétés lagrangiennes, et singularités de une-formes fermées », thèse de doct., Université Paris-Sud, 1987.
- [Sik87b] Jean-Claude SIKORAV, « Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne », in : *Commentarii Mathematici Helvetici* 62 (1987), 62–73.
- [The96] David THERET, « Utilisation des fonctions generatrices en geometrie symplectique globale », thèse de doct., Paris Diderot, 1996.
- [Vai76] Izu VAISMAN, « On locally conformal almost Kähler manifolds », in : *Israel Journal of Mathematics* 24 (1976), p. 338-351.
- [Vai80] Izu VAISMAN, « Remarkable operators and commutation formulas on locally conformal Kähler manifolds », eng, in : *Compositio Mathematica* 40.3 (1980), p. 287-299.
- [Vai82] Izu VAISMAN, « Generalized Hopf manifolds », in : *Geometriae Dedicata* 13 (1982), p. 231-255.
- [Vai85] Izu VAISMAN, « Locally conformal symplectic manifolds. », eng, in : *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 8 (1985), p. 521-536.
- [Vit19] Claude VITERBO, « Sheaf Quantization of Lagrangians and Floer cohomology », in : *arXiv : Symplectic Geometry* (2019).
- [Vit95] Claude VITERBO, « Generating Functions, Symplectic Geometry, and Applications », in : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, sous la dir. de S. D. CHATTERJI, Basel : Birkhäuser Basel, 1995, p. 537-547.
- [VÔ95] Lê Hông VÂN et Kaoru ÔNO, « Symplectic fixed points, the Calabi invariant and Novikov homology », in : *Topology* 34 (1995), p. 155-176.
- [Wei71] Alan WEINSTEIN, « Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds », in : *Advances in Mathematics* 6.3 (1971), p. 329-346, ISSN : 0001-8708, DOI : [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(71\)90020-X](https://doi.org/10.1016/0001-8708(71)90020-X).
- [Wei94] Charles A. WEIBEL, *An Introduction to Homological Algebra*, 1994.
- [Wey66] Hermann WEYL, *The Classical Groups : Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1966, ISBN : 9780691057569, (visité le 08/01/2024).

-
- [Wit82] Edward WITTEN, « Supersymmetry and Morse theory », in : *Journal of Differential Geometry* 17 (1982), p. 661-692.
- [WL98] Maciej WOJTKOWSKI et Carlangelo LIVERANI, « Conformally Symplectic Dynamics and Symmetry of the Lyapunov Spectrum », in : *Communications in Mathematical Physics* (1998), DOI : 10.1007/s002200050347.
- [WPR02] Claude WEBER, Andrei PAJITNOV et Lee RUDOLPH, « Morse-Novikov number for knots and links », in : *St Petersburg Mathematical Journal* 13 (2002), p. 417-426.

Titre : Quelques outils pour l'étude des sous-variétés lagrangiennes dans les fibrés cotangents avec structure \mathcal{LCS}

Mot clés : géométrie, symplectique, localement conformément symplectique, lagrangienne

Résumé : La géométrie localement conformément symplectique (\mathcal{LCS}) est une généralisation de la géométrie symplectique dans laquelle une variété est munie d'une 2-forme non-dégénérée qui est localement une forme symplectique à un facteur positif près. Si les comportements locaux de telles variétés restent relativement similaires à ceux que l'on rencontre en géométrie symplectique, les comportements globaux peuvent néanmoins différer. Par exemple, nous pouvons étendre la définition des lagrangiennes à la géométrie \mathcal{LCS} , mais $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ possède une structure \mathcal{LCS} "exacte" donnée par la structure de contact canonique sur \mathbb{S}^3 . Cette "flexibilité" de la géométrie \mathcal{LCS} rend toutefois difficile l'étude de phé-

nomènes de rigidités et certains outils classiques, comme l'homologie de Floer, ne possèdent pas de version \mathcal{LCS} . Dans ce manuscrit, nous étudierons donc la rigidité des lagrangiennes exactes (\mathcal{LCS}) dans les cotangents de variétés fermés avec structure \mathcal{LCS} . Dans un premier temps, nous étudierons les limites d'une version \mathcal{LCS} du théorème d'Abouzaid-Kragh. En particulier, nous dégagerons de nouvelles stratégies pour l'étude des cordes de Reeb dans les espaces de jets. Dans un second temps, nous développerons une stratégie pour l'étude des points critiques de fonctions génératrices, aboutissant à un raffinement des inégalités de Chantraine-Murphy.

Title: A handful of tools for the study of Lagrangian submanifolds in cotangent bundles with \mathcal{LCS} structure

Keywords: geometry, symplectic, locally conformally symplectic, Lagrangian

Abstract: Locally conformally symplectic (\mathcal{LCS}) geometry is a generalization of symplectic geometry in which a manifold is endowed with a non-degenerate 2-form that is locally a symplectic form up to some positive factor. If the local behavior of such a manifold is largely identical to that of a symplectic manifold, the global behavior can nonetheless vastly differ. For example, while it is possible to define Lagrangian submanifolds in \mathcal{LCS} geometry, we also have to contend with the fact that $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ has a canonical "exact" \mathcal{LCS} structure given by the canonical contact form of \mathbb{S}^3 through a process known as circular \mathcal{LCS} -ization. However, \mathcal{LCS} geome-

try's "flexibility" makes the study of rigidity phenomena difficult and some of the classical tools, such as Floer homology, do not have a \mathcal{LCS} variant. In this manuscript, we will study the rigidity of exact (\mathcal{LCS}) Lagrangians in cotangent bundles of closed manifolds with \mathcal{LCS} structure. We will begin with the study of the limits of a \mathcal{LCS} version of the Abouzaid-Kragh theorem. In particular, we will see a new strategy for the study of Reeb chords in cotangent bundles. We will follow with a strategy for the study of critical points of generating functions, concluding with a refinement of Chantraine-Murphy's inequalities.