



HAL
open science

Contribution à l'optimisation géométrique d'engrenages cylindriques - approches analytiques et numériques

Jérôme Bruyère

► **To cite this version:**

Jérôme Bruyère. Contribution à l'optimisation géométrique d'engrenages cylindriques - approches analytiques et numériques. Génie mécanique [physics.class-ph]. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon; Université Claude Bernard Lyon 1, 2024. tel-04716864

HAL Id: tel-04716864

<https://hal.science/tel-04716864v1>

Submitted on 1 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

ET L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I

Unité de recherche Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, UMR 5259

Habilitation à diriger les recherches présentée par **Jérôme BRUYÈRE**

Soutenue le **30 mai 2024**

Discipline **Mécanique**

Contribution à l'optimisation géométrique d'engrenages cylindriques - approches analytiques et numériques

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Jean-Yves DANTAN	professeur à l'ENSAM Metz
	Jorge SEABRA	professeur à l'Université de Porto
	Olivier THOMAS	professeur à l'ENSAM Lille
<i>Examineurs</i>	Eric JACQUELIN	professeur à l'Université Claude Bernard LYON I
	Anne TANGUY	directrice de recherche à l'ONERA Palaiseau
	Philippe VELEX	professeur à l'INSA de Lyon

Cette HDR a été préparée au

Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, UMR 5259

Campus LyonTech La Doua - INSA Lyon
Bâtiment Sophie Germain
27 bis, Avenue Jean Capelle
F69621 VILLEURBANNE CEDEX

☎ +33 4 72 43 84 52
📠 +33 4 72 43 89 30
✉ lamcos@insa-lyon.fr
Site <http://lamcos.insa-lyon.fr>



Résumé

Ce document est une synthèse de mes activités de recherche au sein de l'équipe Mécanique et Système Mécanique (SMC) du Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'INSA de Lyon où je suis en poste depuis 2008. Ces travaux portent sur l'optimisation des systèmes mécaniques de transmission de puissance par engrenages et visent plus particulièrement à réduire les nuisances (bruit, vibrations, échauffements, etc.) générées par leur fonctionnement dans différentes situations. Un moyen privilégié pour atteindre cet objectif consiste à introduire des corrections de forme des dents (correction de profil et correction d'hélice sur le pignon et la roue). Il est également envisageable d'introduire des dispositifs spécifiques qui filtrent en partie les vibrations. La fluctuation de l'écart de transmission quasi-statique est un paramètre clé du comportement dynamique et ce paramètre a été particulièrement étudié.

Ces travaux s'articulent autour de deux pôles complémentaires. Le premier a pour objectif de réaliser une synthèse des corrections de forme appliquées aux dentures. Une approche analytique originale permet de relier les caractéristiques de modification de forme optimale à certains paramètres macroscopiques de l'engrenage comme le rapport de conduite ε_α et le rapport de recouvrement ε_β . Le modèle est assez détaillé pour pouvoir tenir compte de l'évolution de la raideur linéique d'engrènement le long du segment de conduite et du couplage des déplacements locaux au niveau du contact. La moyenne quadratique de l'écart de transmission s'exprime explicitement en fonction des paramètres de correction et il est possible de la minimiser. Les combinaisons de corrections optimales se synthétisent en quelques relations simples et générales. Bien que les modifications optimales soient dépendantes de la charge, on montre que l'optimisation demeure efficace sur une plage de couples pour quelques situations particulières mais non singulières. Les résultats fournis par cette approche sont en bon accord avec ceux des modèles numériques validés, dans la mesure où l'environnement de l'engrenage (arbres, paliers, etc.) n'affecte pas trop les positions relatives.

Le second pôle s'intéresse à l'analyse de systèmes mécaniques et à leur optimisation selon un ou plusieurs critères. Les démarches mises en œuvre sont essentiellement numériques. Les systèmes complets (engrènement, contact, arbres, paliers, système amortissant, etc) sont mis en équation en utilisant des modèles à paramètres discrets. Les matrices masse et raideur de l'équation du mouvement, ainsi que le second membre, sont fournis par les équations de Lagrange. Étant donné que les systèmes étudiés subissent peu d'amortissement, la matrice amortissement est en générale définie de façon à ne pas gêner la diagonalisation du système d'équations (méthode de Rayleigh, définition modale, etc.). La résolution est menée dans l'espace temporel par un schéma d'intégration implicite (généralement méthode de Newmark) associé à un algorithme complémentaire permettant de définir l'état du système physique à chaque pas de temps (algorithme de contact). Le nombre de degrés de liberté demeure raisonnable (au plus quelques milliers), les temps de calcul sont faibles et ils permettent de réaliser des études paramétriques ou des optimisations. L'approche numérique rend possible la prise en compte de davantage de phénomènes physiques spécifiques à chaque situation et l'utilisation de modèles plus fins au niveau de la description de la physique. Des approches probabilistes (robustesse, sensibilité, etc.) ont été mises en place et elles donnent un certain nombre de résultats. Cependant, elles sont limitées par le manque de connaissance des distributions des incertitudes et par les temps de calcul qui augmentent très fortement avec le nombre de paramètres aléatoires considérés.

La poursuite des travaux de synthèse de conception des modifications de forme est envisagée selon plusieurs pistes. La première consiste à augmenter progressivement le nombre paramètres du modèle. Ceux-ci peuvent concerner les corrections, la raideur d'engrènement, la définition de la zone de contact, la prise en compte des écarts de montage ou des déplacements sous

charge, etc. Une seconde piste permettra de développer d'autres critères d'optimisation tels que la dissipation par frottement au contact, l'usure, les contraintes mécaniques, le coefficient dynamique de l'effort à la denture, etc. D'autre part, la démarche actuelle propose des familles de solutions optimales mais sans hiérarchiser ses éléments. Un travail complémentaire est nécessaire pour ordonner ces solutions.

L'analyse de systèmes mécaniques de transmission de puissance, selon une approche purement numérique, sera également prolongée. De façon assez générale, l'idée directrice est d'intégrer davantage de phénomènes comme les hautes vitesses ($>40\,000$ tr/min), des incertitudes de réalisation, des comportements de matériaux différents (matériaux plastiques, etc.), l'intégration de toute la ligne de transmission (moteur, accouplement, réducteur, récepteur, etc.) afin d'augmenter la capacité prédictive des modèles. Il est également envisagé de tester de nouvelles approches de type éléments finis avec une résolution explicite, qui permet une réduction significative des temps de calcul.

Sommaire

Sommaire	vii
1 Introduction	1
Notations des principaux paramètres	3
2 Approches analytiques	7
2.1 Liminaire : écart de transmission quasi-statique	7
2.1.1 Modèles des structures	8
2.1.2 Modèle de l'engrènement	8
2.1.3 Les écarts géométriques	9
2.1.4 Paramètres calculés dans la configuration de référence	9
2.1.5 Écrasements et actions normales de contact	10
2.1.6 Équation du mouvement	13
2.1.7 Écart de transmission sous charge	13
2.2 Premier modèle analytique de l'engrènement	18
2.2.1 Paramétrage	18
2.2.2 Optimisation des corrections de profil	26
2.2.3 Éléments de validation	28
2.3 Applications	33
2.3.1 Approche multi-objectifs simplifiée d'optimisation de la correction de profil [13]	33
2.3.2 Correction de profil à 2 pentes pour dentures droites HCR [100]	42
2.3.3 Prise en compte d'un modèle de raideur linéique d'engrènement affiné	53
2.4 Modèle analytique détaillé de l'engrènement	63
2.4.1 Les corrections de forme	63
2.4.2 Interaction entre les dentures	63
2.4.3 Écarts de transmission quasi-statique	64
2.4.4 Estimation de la valeur des paramètres de réduction de longueur de contact λ et δ	69
2.4.5 Variance de l'écart de transmission	73
2.4.6 Éléments de validation	75
2.4.7 Influence de l'effet convectif et des variations de raideur dans la direction d'engrènement	81
2.4.8 Combinaison optimale d'une correction de profil et d'hélice	82
2.4.9 Synthèse de l'approche analytique	89

3	Approches numériques	91
3.1	Optimisation numérique d'un engrènement unique	91
3.1.1	Contexte	91
3.1.2	Objectifs et contraintes de conception	92
3.1.3	Optimisation des corrections de forme	93
3.1.4	Cibles d'optimisations robustes	96
3.1.5	Optimisation multi-objectifs des corrections de forme	104
3.1.6	Synthèse	107
3.2	Optimisation d'un réducteur à un étage	108
3.2.1	Cahier des charges	108
3.2.2	Objectifs de l'optimisation	110
3.2.3	Les modèles physiques	110
3.2.4	Les principaux résultats	115
3.2.5	Synthèse	118
3.3	Optimisation des dentures dans le cas de plusieurs engrènements	118
3.3.1	Contexte	118
3.3.2	Modélisation	119
3.3.3	Optimisation	121
3.3.4	Étude à couples constants	123
3.3.5	Études pour différents couples	128
3.3.6	Synthèse	131
3.4	Étouffeur de vibrations	131
3.4.1	Contexte	131
3.4.2	Modélisations	131
3.4.3	Remarques sur la résolution	136
3.4.4	Les principaux résultats	136
3.4.5	Synthèse	139
3.5	Autres travaux non détaillés	139
3.5.1	Travaux soutenus	139
3.5.2	Travaux en cours	141
4	Synthèse des activités d'enseignant-chercheur	145
4.1	Investissement pédagogique	145
4.1.1	Présentation synthétique de l'activité d'enseignement	145
4.1.2	Activités particulières	146
4.1.3	Présentation des enseignements	146
4.1.4	Recrutement des étudiants	147
4.1.5	Responsabilités pédagogiques	147
4.2	Activités liées à la recherche	148
4.2.1	Diffusion des travaux de recherche	148
4.2.2	Participations	148
4.2.3	Études scientifiques	148
4.2.4	Vie du laboratoire	149
4.2.5	Liste des publications	149
5	Conclusion et perspectives	153
	Bibliographie	157

6 Annexes	165
6.1 Intégration sur les lignes de contact	165
6.1.1 Séries de Fourier d'une fonction polynomiale par morceau	165
6.1.2 Intégrale d'une fonction sur des lignes de contact	170
6.2 Formulaire sommes et séries	176
6.2.1 Somme de suites	176
6.2.2 Limites de séries	184
6.3 Période d'un système	188
6.3.1 Période d'un système quelconque	188

Introduction

Ce rapport est une synthèse d'une grande partie des travaux de recherche que j'ai menés au sein de l'équipe Systèmes Mécaniques et Contacts du LaMCoS (UMR 5259, INSA de Lyon) depuis mon recrutement en septembre 2008 comme maître de conférences. Ils portent sur des systèmes mécaniques de transmission de puissance. Une partie de ces résultats a été obtenue par des doctorants dont j'ai suivi les travaux et l'autre partie est le fruit d'une collaboration régulière avec Philippe Velex.

L'engrenage renvoie parfois l'image un mécanisme d'un autre temps ou celle d'un système bien connu puisque largement utilisé depuis des décennies. En fait, pour les systèmes mécaniques aujourd'hui très optimisés, non seulement l'utilité de l'engrenage n'est pas remise en cause, mais les niveaux d'exigence croissants nécessitent continuellement de nouveaux travaux d'approfondissement et d'amélioration de leurs performances.

Les exigences socio-économiques qui s'appliquent aux moyens de transport et aux outils industriels évoluent depuis des années vers une moindre perturbation de l'environnement global. Les concepteurs de systèmes de transmission de puissance mécanique ont généralement de fortes contraintes sur les niveaux de pertes d'énergie mécanique, de bruit et de vibration générés (NVH : Noise, vibration and harshness). En effet, de par sa nature où les contacts sont directs et intermittents, l'engrènement est un excitateur de la ligne de transmission et des structures voisines. Les travaux présentés dans ce document sont une contribution aux efforts de réduction des excitations générées par l'engrènement de roues cylindriques. Les démarches suivies sont celles de la modélisation suivant plusieurs approches, de l'optimisation et de la synthèse.

La simulation de l'engrènement présente des difficultés spécifiques liées aux étendues des échelles dimensionnelles et temporelles de résolution du problème mécanique. En effet, elle doit être réalisée sur un intervalle de temps suffisamment long pour que les phénomènes à longue période (par exemple sur un tour de roue) puissent être capturés et le pas de l'incrément temporel doit être petit par rapport à la période d'engrènement pour une bonne prise en compte de l'évolution des zones de contact. Par ailleurs, la détermination des déplacements et des contraintes mécaniques couple le comportement global de la structure avec des phénomènes locaux de contact qui se déplacent sur les pièces au cours du temps. Cette situation rend généralement les approches par éléments finis en trois dimensions trop volumineuses en espace mémoire et trop lentes à l'exécution pour pouvoir mener des analyses de paramètres ou des optimisations.

La mise en place des modèles numériques d'engrènement utilisés dans ces travaux s'appuie

largement sur des démarches développées à sein du laboratoire à partir de la fin des années 80 [96, 70, 71, 72, 3, 98, 97]. Il s'agit de modèles dynamiques à paramètres concentrés prenant en compte les comportements des paliers, des arbres, des dentures, de la micro-géométrie du contact et des écarts de montage et de réalisation. Ils contiennent relativement peu de degrés de liberté (de quelques dizaines à quelques milliers) et leur formulation condensée leur permet des temps d'exécution très courts (moins d'une seconde par période d'engrènement), ce qui les rend compatibles avec la plupart des objectifs poursuivis.

En parallèle de cette approche numérique, une démarche analytique originale a également été suivie pour obtenir une formulation explicite de l'écart de transmission. Ce modèle un peu moins précis a l'avantage d'être général, c'est à dire qu'il englobe en une même formulation toutes les géométries de dentures cylindriques. Son exploitation permet de réaliser une synthèse des corrections de forme pour l'optimisation de l'écart cinématique de transmission.

Ce document est principalement composé d'une synthèse scientifique comportant deux volets. Le premier expose les démarches et les résultats assez généraux sur l'optimisation des corrections de forme de denture obtenus par une approche analytique. Le second volet présente des travaux menés en collaboration avec des partenaires industriels. Ils traitent de l'analyse et de l'optimisation des systèmes de transmission de puissance à partir d'une modélisation numérique détaillée.

Enfin, la dernière partie de ce document synthétise mes diverses activités d'enseignant-chercheur au sein de l'établissement (enseignement, production scientifique, valorisation, responsabilité, etc.).

Notations des principaux paramètres

Indices

0	:	indice affecté au repère fixe ou aux paramètres de l'outil de référence
1	:	indice affecté au pignon
2	:	indice affecté à la roue
n	:	caractéristique prise dans le plan normal / caractéristique de la roue virtuelle
t	:	caractéristique prise dans le plan apparent
w	:	caractéristique de fonctionnement

Minuscules

b	:	largeur de denture
c_0	:	célérité du son dans l'air
$e(M)$:	écart équivalent normal au point M
f	:	coefficient de frottement
f_c	:	fréquence critique pour le rayonnement acoustique
f_e	:	Fréquence d'engrènement
g	:	fonction caractérisant soit l'effet convectif sur les lignes de contact, soit l'évolution de la raideur d'engrènement
h_{ai}	:	coefficient de saille de la roue i
h_{fi}	:	coefficient de creux de la roue i
k_i	:	raideur de la cellule i
$\tilde{k}(M)$:	raideur linéique en M ($k_i = \tilde{k}(M_i)dM$)
\tilde{k}_{m0}	:	raideur linéique d'engrènement moyenne sans réduction de longueur de contact (sans modification de forme)
k_{m0}	:	raideur d'engrènement moyenne sans réduction de longueur de contact (sans modification de forme)
k_m	:	raideur d'engrènement moyenne effective
$\mathbf{n}_i(M)$:	vecteur unitaire sortant de la pièce i en M
\mathbf{q}	:	vecteur des degrés de liberté intervenant directement dans les déplacements relatifs à l'engrènement
$p(x_i)$:	densité de probabilité de la variable aléatoire x_i
r_i	:	rayon du cylindre primitif de taillage de la roue i
r_{bi}	:	rayon du cercle de base du pignon i
s	:	abscisse curviligne
sp	:	(exposant) paramètre de forme
t	:	le temps (seconde)
$\mathbf{u}(M, i/R)$:	vecteur déplacement au point M appartenant à la pièce i par rapport à R
\bar{x}	=	$\frac{X}{p_{bt}}$ coordonnée selon \vec{X} adimensionnée par le pas de base apparent
x_i	:	coefficient de déport de la roue i
\bar{z}	=	$\frac{Z}{b}$ coordonnée selon \vec{Z} adimensionnée par la largeur de denture
z_i	:	nombre de dents du pignon i

Majuscules

A, B, C, D, E	: points caractéristiques de la ligne d'action (ISO21771 [55])
B	: amplitude de la correction longitudinale
C_{m0}	: couple nominal
E	: profondeur de correction de profil module d'Young
$E_{max}(\tau)$: maximum des écarts équivalents normaux à l'instant τ
\mathbf{F}_0	: vecteur des forces extérieures généralisé
$F_{lc}(M)$: charge linéique au point de contact M entre les dentures
G	: dans l'expression de TE_S^* , terme lié à l'effet convectif sur la ligne de contact
$H^{V,F}(\omega)$: fonction d'influence complexe à la pulsation ω
\mathbf{K}	: matrice raideur des arbres et des paliers
$\mathbf{K}_T(\tau, \mathbf{X})$: matrice raideur totale du système modélisé
$\mathbf{K}_e(\tau, \mathbf{X})$: matrice raideur de l'engrènement
\mathbf{K}_m	: matrice raideur moyenne effective
\mathbf{K}_{m0}	: matrice raideur moyenne sans correction de forme et sans réduction de longueur de contact
L_0	: ensemble des lignes de contact potentielles
L_w	: puissance acoustique rayonnée équivalente
\mathbf{M}	: matrice masse du système modélisé
N	: nombre d'engrènements
Q_f	: flux thermique généré par l'effet du frottement entre les dentures
Q_{total}	: flux thermique généré par toutes les sources de dissipation d'énergie mécanique
TE	: écarts de transmission
TE_S	: écarts de transmission quasi-statiques
T_i	: point de tangence de la ligne d'action avec le cercle de base i
T_m	: durée d'une période d'engrènement
$\mathbf{V}(M)$: vecteur structure en M
\mathbf{V}_m	: vecteur structure effectif moyen
\mathbf{V}_{m0}	: vecteur structure moyen sans réduction de longueur de contact
\mathcal{V}	: vecteur vitesse
\mathbf{W}	: vecteur de projection
\mathbf{X}	: vecteur des ddl aux nœuds de l'ensemble du système
\mathbf{X}_{a1}	: vecteur aléatoire des paramètres de conception
\mathbf{X}_{a2}	: vecteur aléatoire des paramètres environnementaux
X_c	: rapport du couple de fonctionnement sur le couple nominal
\mathbf{X}_S	: vecteur des ddl aux nœuds de l'ensemble du système, dans la configuration quasi-statique
\mathbf{X}_0	: égal à $\mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{F}_0$, solution statique avec la matrice raideur moyenne
\mathbf{Y}	: vecteur réponse du système

Lettres grecques majuscules

Δ_l	: longueur de déphasage entre 2 engrènements
$\Delta(M)$: écrasement des surfaces en M
$\Phi_{kv}(\tau, \mathbf{X}_S)$: fonction scalaire non linéaire, inconnue
Γ	: longueur de correction de profil adimensionnée
Γ_L	: longueur de correction de profil adimensionnée courte
Λ	: fonction unitaire pour les corrections de profil

Λ_p	: fonction de perte par frottement
Π_{ac}	: puissance acoustique rayonnée
$\Omega_{i/j}$: vitesse de rotation du pignon i par rapport à j (mouvement de corps rigide)

Lettres grecques minuscules

α	: angle de pression coefficient numérique, généralement compris entre 0 et 1
β	: angle d'hélice coefficient de qualité
δ	: paramètre de réduction de la zone de contact selon la largeur de la denture
δ_0	: distance normale entre les dentures à l'état de référence
δ_m	: déflexion statique moyenne effective
δ_{m0}	: déflexion statique moyenne sans correction de surface ni réduction de longueur de contact
ϵ	: orientation de l'hélice du pignon : $\epsilon = 1$ pour une hélice à gauche sur le pignon, -1 sinon
ϵ_r	: signe de la vitesse de rotation Ω_r
ϵ	: orientation des hélices
ϵ_α	: rapport de conduite apparent
ϵ_β	: rapport de recouvrement
$\epsilon_{\beta 1}$: valeur approchée du zéro de la fonction η sur $[1,5; 2]$
λ	: coefficient de réduction de longueur de contact dans la direction \vec{X}
μ_Y	: espérance mathématique de la variable Y
ν	: coefficient de Poisson
φ	: fonction scalaire non linéaire, normalisée, caractérisant l'évolution de la raideur linéique en un point de contact
κ_0	: longueur AC adimensionnée : $\kappa_0 = \frac{AC}{\epsilon_\alpha p_{bt}}$
π_{ac}	: puissance acoustique rayonnée
π_{ref}	: puissance acoustique de référence
ρ	: rayon d'outil divisé par le module masse volumique de l'acier
ρ_0	: masse volumique de l'air standard
σ_{rad}	: facteur de rayonnement
σ_Y	: écart-type de la variable Y
$\tau = \frac{t}{T_m}$: temps adimensionné
ϑ_G	: paramètre de l'effet convectif
\mathbf{u}	: vecteur déplacement
ζ	: orientation du plan d'action

Types de grandeurs adimensionnées

$$A^\star = \frac{A}{\delta_{m0}}$$

$$\hat{A} = \frac{A}{F_S}$$

$$A^\dagger = \frac{A}{k_{m0}}$$

$$A_\alpha = \frac{A}{T_1 T_2}$$

$$A^\nabla = \frac{A}{\sigma_0} \text{ où } \sigma_0 \text{ est une contrainte de référence en pied de dent}$$

$$A^\diamond = \frac{A}{\delta_{mC0}} \text{ où } \delta_{mC0} \text{ est la déflexion statique au couple de référence}$$

Fonctions

cov	: covariance
E	: espérance mathématique
inv	: fonction involute : $\text{inv}(x) = \tan(x) - x$
H	: fonction de Heaviside
π	: fonction porte qui vaut 1 ou 0
var	: variance
∇_α	: moyenne du RMS de TE_S sur une plage de couple et fonction d'un paramètre α
Sinc	: sinus cardinal $\text{Sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
$\text{mod}(x, y)$: le reste de la division euclidienne de x par y
$\langle \bullet \rangle_S$: moyenne spatiale
\bullet	: la moyenne temporelle
A^*	: complexe conjugué de A
\mathbf{V}^T	: transposé de \mathbf{V}

Acronymes

ERP	: Equivalent Radiated Power
HCR	: High Contact Ratio
LCR	: Low Contact Ratio
LDP	: Load Distribution Program (logiciel Gearlab, The Ohio State University)
NLTE	: No Load Transmission Error
NVH	: Noise, vibration and harshness
PPPCM	: Plus Petite Période Commune Multiple
PPCM	: Plus Petit Commun Multiple
RMS	: Root Mean Square
TE	: Transmission Error
VSA	: nom générique des logiciels de simulation de l'engrènement développés au LaMCoS, suivant l'approche proposée par Philippe Velez

Approches analytiques

La modélisation et les méthodes numériques sont des outils efficaces pour l'analyse et l'optimisation des réducteurs à engrenages de façon à minimiser les nuisances engendrées. La contrepartie de la grande précision de ces modèles est la forte dépendance des résultats à l'architecture et aux macro-paramètres de la transmission. Ce chapitre propose une démarche plus globale où les caractéristiques des dentures n'ont pas besoin d'être spécifiées. Elle apporte des résultats généraux sur les corrections de profil et d'hélice qui dépendent principalement du rapport de conduite de profil ε_α et du rapport de recouvrement ε_β .

2.1 Liminaire : écart de transmission quasi-statique

L'objet de ce préambule est de rappeler de façon synthétique la démarche de modélisation de l'engrènement développée par Philippe Velex et ses collaborateurs. Cette approche, tout d'abord numérique, a montré ses performances dans l'analyse du comportement statique et dynamique de réducteurs à engrenages cylindriques. L'approche analytique s'appuie sur les mêmes concepts et, moyennant quelques hypothèses qui seront précisées, permet d'obtenir une expression directe de la variance de l'écart de transmission quasi-statique sous charge et sa minimisation.

L'écart de transmission quasi-statique est une grandeur clef du comportement d'un réducteur. Son évolution temporelle est le reflet des déplacements élastiques sous charge et de quasiment tous les écarts géométriques. On montre que la minimisation des fluctuations de cette grandeur à faible vitesse améliore également le comportement dynamique, sur le plan des vibrations [98] et, dans une certaine mesure, au niveau acoustique [10].

Une approche purement cinématique de l'engrènement permet de définir les *surfaces théoriques* des dents, parfaitement conjuguées dans un mouvement exactement homocinétique, ignorant tout des écarts et des déformations d'un système réel. La famille de surfaces réglées dont la trace dans tout plan apparent est une développante de cercle, est une hélicoïde développable [48, 62, 23, 65]. Bien d'autres familles de surfaces existent mais elles sont peu employées car possédant moins d'avantages. La *surface de référence* est la surface nominale définie à partir de la surface théorique et à laquelle des corrections de forme ont été ajoutées.

La prise en compte d'écarts de réalisation et de montage dans le fonctionnement de l'engrènement indéformable permet de définir son *état de référence*. Chaque roue tourne autour d'un axe fixe et les dentures sont en permanence en contact.

La configuration du système de transmission *déformé* par les différentes actions mécaniques

externes et internes est définie par un certain nombre de degrés de liberté qui caractérisent de « petits » déplacements de translation et rotation (HPP) au voisinage de l'état de référence et se superposent à ce dernier. Cette approche permet d'introduire des déplacements élastiques au niveau de la denture, les déformations des arbres, des paliers, etc.

Le choix des différents modèles est fait de façon à avoir un compromis entre leur coût et leur précision vis à vis des quantités d'intérêt : déflexions locales au voisinage du contact, déflexions structurelles (arbres, paliers, ...), etc.

2.1.1 Modèles des structures

Les arbres qui portent les dentures sont modélisés par des éléments finis de poutre de Timoshenko à 12 degrés de liberté (ddl) infinitésimaux. Les paliers qui les supportent sont pris en compte par l'intermédiaire de rigidités pour les déplacements axiaux et radiaux, supposées constantes au voisinage du point de chargement nominal (figure 2.1). Des couplages entre les déplacements infinitésimaux sont possibles.

Les corps des roues dentées peuvent être assimilés à deux cylindres rigides possédant chacun 6 ddl ou bien modélisés par des éléments de poutres de Timoshenko à 2 nœuds et 6 ddl par nœud pour les dentures plutôt longues ($\frac{b}{m_n} > 10$, [4]). Dans les cas de géométries plus complexes ou particulièrement souples (aéronautique), un modèle de sous-structure peut être utilisé [11, 44, 21]. Il n'y a pas de restriction dans le raffinement du modèle en termes de nombre de degrés de liberté.

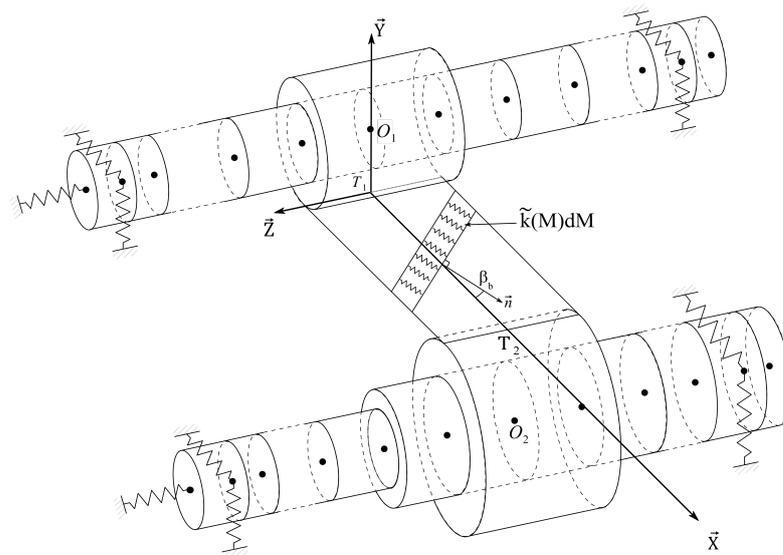


FIGURE 2.1 – Représentation générique d'un engrenement et de son environnement

2.1.2 Modèle de l'engrenement

Les zones de contact entre les dentures sont assimilées à des lignes toutes contenues dans le plan d'engrenement. Celles-ci sont discrétisées en cellules de longueur dM . Le contact élastique est représenté par une distribution de raideurs indépendantes le long des lignes de contact théoriques (fondation de Winkler [73]) [3, 102]. En notant M un point de contact potentiel au

centre d'une de ces cellules, la raideur de cet élément est $\tilde{k}(M)dM$ (figure 2.2) où \tilde{k} est la raideur linéique.

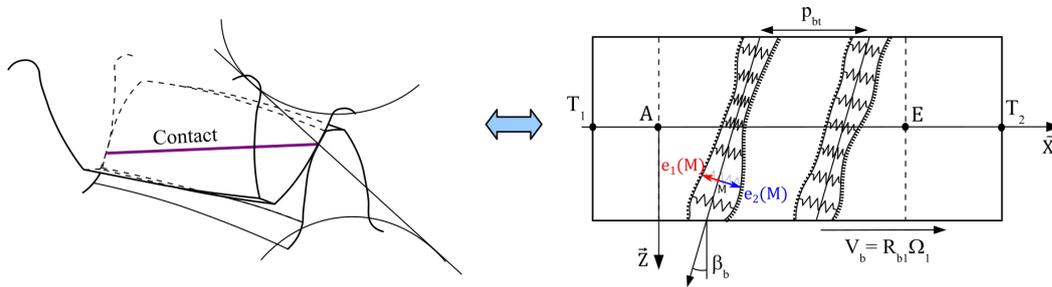


FIGURE 2.2 – Modélisation de l'élasticité de l'engrènement par une fondation de Winkler non linéaire et évoluant avec le temps

La raideur linéique dépend des géométries des dentures, des rayons de courbure au contact, de la charge (dépendance non linéaire), des matériaux, etc. Différents modèles permettent de fixer sa valeur. Pour la norme ISO6336 :2019, cette raideur est constante et ne dépend que des paramètres macro-géométriques pour des dentures en acier. D'autres méthodes la décomposent en une série de raideurs découplées : contact, flexion de la dent, encastrement de la dent sur la jante, déformation de la jante, etc ([4, 86]).

2.1.3 Les écarts géométriques

Des écarts géométriques peuvent avoir des origines diverses :

- modification de la forme des flancs des dents par le concepteur : correction de profil, correction suivant l'hélice, correction topographique, etc
- écarts de fabrication : défauts de forme des surfaces actives (orientation, ondulations, ...), erreur de pas, faux-rond, etc
- écarts de montage : position et orientation des axes de rotation, excentration, etc
- déplacements sous charge : les déformations élastiques des paliers, des axes de rotation, des corps des roues et des dentures conduisent à des déplacements des surfaces qui peuvent entrer en contact.

En un point M de la surface d'un flanc actif du pignon, l'écart $e_1(M)$ correspond à la distance entre la surface théorique (hélicoïde développable) et la surface considérée de la dent suivant la normale à la surface parfaite (figure 2.2). Par convention, le signe de $e_1(M)$ est positif dans le cas d'un excès de matière et négatif dans le cas d'un enlèvement de matière. En chaque point de contact potentiel, c'est la somme des écarts normaux du pignon et de la roue, ou *écart normal équivalent*, qui est significatif pour l'engrènement : $e(M) = e_1(M) + e_2(M)$ [102].

2.1.4 Paramètres calculés dans la configuration de référence

Pour rendre l'étude indépendante de la vitesse de rotation (très faible en quasi-statique), la variable temporelle du modèle τ est égale au temps physique t divisé par la période d'engrènement T_m .

Pour un fonctionnement sans charge, et à chaque instant, le contact va avoir lieu dans le plan d'engrènement, là où l'écart normal équivalent est maximum :

$$E_{max}(\tau) = \underset{M \in L_0(\tau)}{\text{Max}} (e(M)) \quad (2.1)$$

avec $L_0(\tau)$ l'ensemble des lignes de contact potentielles à l'instant τ .

Dans l'état de référence, on appelle \mathbf{n} le vecteur normal aux surfaces en tout point de contact (constant, indépendant de l'instant et du point) et $\mathcal{V}(M, 1/2)$ la vitesse relative en M . La condition d'engrènement ($\mathbf{n} \cdot \mathcal{V}(M, 1/2) = 0$) perturbée par les écarts géométriques devient :

$$(r_{b1}\Omega_1 + r_{b2}\Omega_2) \cos \beta_b + \frac{dE_{max}}{d\tau} = 0 \quad (2.2)$$

Avec r_{bi} et Ω_i les rayons de base et la vitesse de rotation de corps indéformable de la roue i .

L'écart de transmission sans charge (No Load Transmission Error : NLTE) se déduit de la relation (2.2) :

$$NLTE(\tau) = -\frac{E_{max}(\tau)}{\cos \beta_b} \quad (2.3)$$

En un point de contact potentiel M , la distance entre les surfaces des dents est notée $\delta_0(M)$. Elle est définie par :

$$\delta_0(M) = E_{max}(\tau) - e(M) \quad (2.4)$$

2.1.5 Écrasements et actions normales de contact

Sous charge, les pièces du systèmes se déforment et il en résulte de petits déplacements des surfaces au voisinage des points potentiels de contact M . Le rapprochement des surfaces suivant la normale de référence est donné par :

$$\delta(M) = \mathbf{u}(M, 1/R) \cdot \mathbf{n}_1(M) + \mathbf{u}(M, 2/R) \cdot \mathbf{n}_2(M) \quad (2.5)$$

avec $\mathbf{u}(M, i/R)$ le vecteur déplacement du point M appartenant à la pièce i par rapport au repère R et $\mathbf{n}_i(M)$ le vecteur unitaire sortant de la surface de la pièce i en M . Les surfaces de contact étant supposées régulières, on a $\mathbf{n}_1(M) = -\mathbf{n}_2(M)$. Les écarts normaux équivalents étant très petits devant les dimensions des surfaces, les normales retenues sont les normales aux surfaces théoriques. Ainsi, dans le plan d'engrènement, toutes les normales sont colinéaires.

Dans le cas où les corps des roues sont rigides et animés de petits mouvements au voisinage de la position de référence, celui-ci peut être modélisé par un torseur de petits déplacements :

$$\{D_{i/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{i/R} = \phi_i \vec{S} + \psi_i \vec{T} + \theta_i \vec{Z} \\ \mathbf{u}(O_i, i/R) = v_i \vec{S} + w_i \vec{T} + u_i \vec{Z} \end{array} \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (2.6)$$

ou bien :

$$\{D_{i/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{i/R} = \phi_i \vec{X} + \psi_i \vec{Y} + \theta_i \vec{Z} \\ \mathbf{u}(O_i, i/R) = v_i \vec{X} + w_i \vec{Y} + u_i \vec{Z} \end{array} \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (2.7)$$

Le rapprochement des surfaces se met sous forme matricielle :

$$\delta(M) = \mathbf{V}^T(M) \cdot \mathbf{q} \quad (2.8)$$

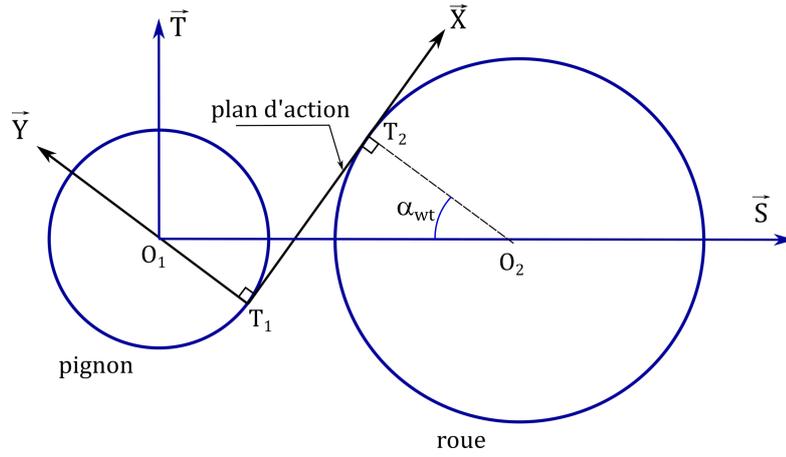


FIGURE 2.3 – Les repères utilisés

où $\mathbf{q}^T = [\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2]$ sont les degrés de liberté définis au centre des mobiles, suivant les directions du repère. Deux repères sont principalement utilisés : $\{\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\}$ et $\{\vec{S}, \vec{T}, \vec{Z}\}$, définis figure 2.3. Suivant la base retenue, le vecteur structure $\mathbf{V}(M)$ a pour expression :

$$\mathbf{V}(M) = \begin{bmatrix} \cos \beta_b \\ 0 \\ \varepsilon \sin \beta_b \\ -\zeta \varepsilon r_{b1} \sin \beta_b \\ \eta - \varepsilon p_1 \sin \beta_b \\ \zeta r_{b1} \cos \beta_b \\ -\cos \beta_b \\ 0 \\ -\varepsilon \sin \beta_b \\ -\zeta \varepsilon r_{b2} \sin \beta_b \\ -(\eta + \varepsilon p_2 \sin \beta_b) \\ \zeta r_{b2} \cos \beta_b \end{bmatrix}_{\{\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\}} \quad \text{ou bien } \mathbf{V}(M) = \begin{bmatrix} \cos \beta_b \sin \alpha_{wt} \\ \zeta \cos \beta_b \cos \alpha_{wt} \\ \varepsilon \sin \beta_b \\ -\zeta \varepsilon r_{b1} \sin \beta_b \sin \alpha_{wt} - \zeta (\eta - \varepsilon p_1 \sin \beta_b) \cos \alpha_{wt} \\ -\varepsilon r_{b1} \sin \beta_b \cos \alpha_{wt} + (\eta - \varepsilon p_1 \sin \beta_b) \sin \alpha_{wt} \\ \zeta r_{b1} \cos \beta_b \\ -\cos \beta_b \sin \alpha_{wt} \\ -\zeta \cos \beta_b \cos \alpha_{wt} \\ -\varepsilon \sin \beta_b \\ -\zeta \varepsilon r_{b2} \sin \beta_b \sin \alpha_{wt} + \zeta (\eta + \varepsilon p_2 \sin \beta_b) \cos \alpha_{wt} \\ -\varepsilon r_{b2} \sin \beta_b \cos \alpha_{wt} - (\eta + \varepsilon p_2 \sin \beta_b) \sin \alpha_{wt} \\ \zeta r_{b2} \cos \beta_b \end{bmatrix}_{\{\vec{S}, \vec{T}, \vec{Z}\}} \quad (2.9)$$

avec les notations :

- ε : orientation des hélices, = 1 si le pignon à une denture à gauche, = -1 si la denture est à droite
- ζ : orientation du plan d'action, = 1 si le plan d'action est orienté comme sur la figure 2.3, = -1 si le plan d'action est selon l'autre tangente commune aux cercles de base
- p_1, p_2, η : paramètres d'un point de contact M dans le plan d'engrènement (figure 2.4)

L'écrasement des surfaces en chaque point de contact potentiel M est défini par la relation :

$$\Delta(M) = \mathbf{u}(M, 1/R) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}(M, 2/R) \cdot \mathbf{n}_1 - \delta_0(M) \quad (2.10)$$

Dans le cas où les corps des roues dentées sont indéformables :

$$\Delta(M) = \mathbf{V}^T(M) \cdot \mathbf{q} - \delta_0(M) \quad (2.11)$$

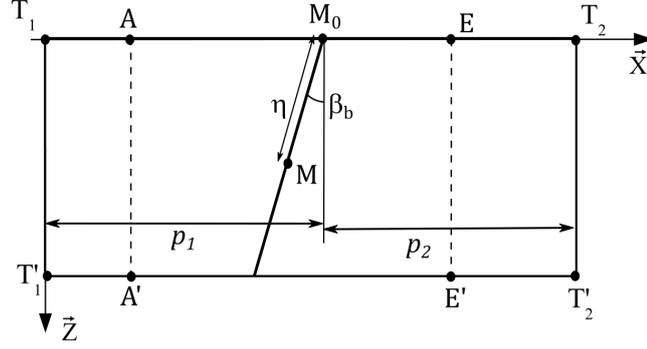


FIGURE 2.4 – Paramétrage d'un point de contact dans le plan d'action

L'action mécanique transmise d'une denture à l'autre au niveau de chaque cellule de contact est un glisseur élémentaire défini au centre de la cellule et dont la résultante est :

$$d\mathbf{F}_{1/2} = \tilde{k}(M) \Delta(M) H(\Delta(M)) dM \mathbf{n}_1 \quad (2.12)$$

où H est la fonction de Heaviside.

Le torseur complet de l'action mécanique du pignon sur la roue est donc

$$\{F_{1/2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{1/2} = \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M) \Delta(M) H(\Delta(M)) dM \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{M}_{1/2}(O_2) = \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M) \Delta(M) H(\Delta(M)) \mathbf{O}_2 \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}_1 dM \end{array} \right\}^{O_2} \quad (2.13)$$

Finalement, pour des corps de roues infiniment rigides, l'interaction entre les dentures peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} F_M &= \left\{ \begin{array}{l} \{F_{1/2}\}^{O_2} \\ \{F_{2/1}\}^{O_1} \end{array} \right\} \\ &= - \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M) H(\Delta(M)) \mathbf{V}(M) \mathbf{V}^T(M) dM \cdot \mathbf{q} + \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M) H(\Delta(M)) \delta_0(M) \mathbf{V}(M) dM \\ &= -\mathbf{K}_e(\tau) \cdot \mathbf{q} + \mathbf{F}_e(\tau) \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec

- $\mathbf{K}_e(\tau)$ la matrice de raideur de l'engrènement, qui évolue avec le temps et avec les conditions de contact.
- $\mathbf{F}_e(\tau)$ se comporte comme un vecteur d'excitation (dépendance au temps) et ce vecteur est fonction des modifications des surfaces en contact et des écarts géométriques.

Numériquement, la détermination de ces deux termes nécessite, à chaque pas de temps τ , de connaître quelles cellules sont en contact ($\Delta(M) > 0$) et lesquelles ne le sont pas ($\Delta(M) < 0$). Les écrasements dépendent des degrés de libertés de l'engrenage \mathbf{q} à l'instant τ . Cette résolution est donc itérative, elle est souvent appelée *algorithme de contact*.

Pour des corps de roues déformables, l'expression de l'interaction entre les dentures est plus complexe mais se formalise de façon assez semblable (voir par exemple [4]).

2.1.6 Équation du mouvement

L'équation globale du mouvement est obtenue par assemblage des matrices raideurs et masses élémentaires issues des équations de Lagrange pour chaque partie du système : engrenage, arbres et palier [102, 97]. Des raideurs, masses et inerties additionnelles peuvent également être prises en compte. On retrouve la forme générale des équations de mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_T(\tau, \mathbf{X})\mathbf{X} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{g1} + \mathbf{F}_{g2} \quad (2.15)$$

avec :

- \mathbf{X} est le vecteur de tous les degrés de liberté de la structure
- \mathbf{K}_T est la matrice raideur totale du système modélisé
- \mathbf{M} est la matrice masse du système modélisé
- \mathbf{F}_0 est le vecteur des forces extérieures généralisé
- \mathbf{F}_{g1} caractérise les excitations liées à l'état de référence : excentration, écarts de transmission sans charge et ses dérivées, ...
- \mathbf{F}_{g2} est une extension du vecteur \mathbf{F}_e de l'équation (2.14). Cette excitation dépend du temps et du vecteur solution \mathbf{X} .

L'expression de la matrice d'amortissement \mathbf{C} est toujours délicate à justifier. Son rôle dans la modélisation est néanmoins indiscutable puisqu'elle contrôle en partie la stabilité et le comportement dynamique du système. Dans le cadre des réducteurs à engrenages en acier, les sources de dissipation de type « visqueuse » sont limitées :

- Le cisaillement et l'écrasement du lubrifiant entre les dentures. D'après M. Ankouni [8], cette dissipation pour les engrenages cylindriques demeure faible, particulièrement pour les dentures hélicoïdales et pour un fonctionnement sans perte de contact.
- Le cisaillement du fluide dans les paliers hydrodynamique ou hydrostatique. Toujours d'après les travaux de M. Ankouni, la dissipation qui en résulte n'est pas forcément plus importante que celle obtenue dans un palier à roulement.
- Les pertes par brassage de fluides : ventilation, piégeage et barbotage [34]. Ces effets sur le comportement dynamique sont généralement très faibles tant que la vitesse périphérique n'atteint pas plusieurs dizaines de mètres par seconde.
- L'amortissement structural

Dans la majorité des réducteurs mécaniques, l'amortissement global est faible et son influence sur les vitesses critiques peut être ignorée. L'analyse modale du système est réalisée avec les matrices moyennes de masse et de raideur. Puis, en pratique, la matrice d'amortissement est construite avec un ou plusieurs facteurs d'amortissement modaux [99].

L'équation du mouvement est alors intégrée par une méthode numérique implicite (Newmark, Hilbert-Hughes-Taylor [50], ...). Des conditions de stabilité existent théoriquement [96, 2] mais, en pratique, aucune instabilité de l'algorithme n'a été rencontrée.

2.1.7 Écart de transmission sous charge

Une caractéristique importante de l'engrenage déformable sous charge est l'*écart de transmission*, notée *TE* (Transmission Error), fonction du temps. Harris [46] a sans doute été le premier à proposer cette notion pour caractériser le comportement d'un engrenage. Philippe Vexé [98, 101] a fait évoluer la définition de cette caractéristique pour l'adapter aux modèles à plusieurs nœuds et six degrés de liberté par nœud : sur un nœud I de l'arbre du pignon et sur un nœud II de l'arbre de la roue, on place des capteurs virtuels qui permettent de connaître les positions angulaires absolues suivant les axes de rotation. Ces positions angulaires sont composées d'un

mouvement de corps rigide de référence et d'un écart angulaire de torsion (θ_I et θ_{II}) par rapport au modèle de référence (équation 2.16).

$$\begin{aligned} TE(\tau) &= r_{b1} \left[\int_0^\tau \Omega_{1/0} d\zeta + \theta_I \right] + r_{b2} \left[\int_0^\tau \Omega_{2/0} d\zeta + \theta_{II} \right] \\ &= r_{b1} \theta_I + r_{b2} \theta_{II} + NLTE(\tau) \end{aligned} \quad (2.16)$$

En utilisant le vecteur de projection \mathbf{W} constant [98], l'équation (2.16) se réécrit :

$$TE(\tau) = \mathbf{W}^T \mathbf{X} - \frac{E_{max}}{\cos \beta_b} \quad (2.17)$$

Loin des vitesses critiques de torsion, la valeur moyenne de l'écart de transmission dépend du choix des nœuds I et II. La fluctuation de $TE(\tau)$ représente les variations de positions angulaires mesurées sur la ligne d'engrènement. Elle est donc représentative de l'excitation générée par celui-ci.

Trois contributions participent à la fluctuation de TE : les écarts de forme et de montage, des variations de raideur d'engrènement au cours du temps et des effets dynamiques. Ces derniers résultent du comportement de la structure soumise aux différentes excitations et ils ne sont qu'indirectement impactés par les choix de conception. A vitesses de rotations très basses, les effets dynamiques sont négligeables et l'écart de transmission quasi-statique (TE_S) est une bonne image de l'excitation interne du système. Dans les approches où l'écart de transmission est un résultat estimé par le modèle, le problème de minimisation des vibrations générées par l'engrènement est très largement remplacé par celui de la minimisation de la fluctuation de TE_S .

Les auteurs d'analyses expérimentales ne sont pas unanimes sur ce point (il faut reconnaître la difficulté de réalisation ; voir par exemple l'analyse bibliographique réalisée par Mats ÅKerblom [6]), mais la grande majorité des études met en évidence la forte corrélation entre le niveau vibratoire et la fluctuation de l'écart de transmission quasi-statique d'une transmission par engrènement. En revanche, ce résultat ne se transpose pas aussi directement au niveau acoustique car celui-ci dépend également du rayonnement des carters, de la transmissibilité des roulements, etc.

En quasi-statique, l'équation d'équilibre du système peut se mettre sous la forme (voir l'article [98], équation (25)) :

$$\left[\mathbf{K} + \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M, \mathbf{X}_S) \mathbf{V}(M) \mathbf{V}^T(M) dM \right] \mathbf{X}_S = \mathbf{F}_0 + \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M, \mathbf{X}_S) \delta_e(M) \mathbf{V}(M) dM \quad (2.18)$$

avec :

- \mathbf{X}_S le vecteur des ddl qui représente la solution quasi-statique, dépendant du temps τ ;
- \mathbf{K} la matrice raideur du système excepté l'engrènement (arbres, paliers, éventuels couplages, etc.) ;
- \tilde{k} est la raideur linéique de contact, a priori non linéaire par rapport au vecteur \mathbf{X}_S et nulle en l'absence de contact ;
- $L_0(\tau)$ est l'ensemble des lignes de contact potentielles à l'instant τ .

Dans la base $\{\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\}$, seules 2 composantes du vecteur structure évoluent avec la position du point de contact M_i . Dans le cas où la largeur de denture est faible par rapport aux rayons de base ($\frac{b}{m_n} < 10$) et pour un angle d'hélice pas trop important, les fluctuations du vecteur \mathbf{V} sont négligées et il est remplacé dans l'équation (2.18) par sa valeur moyenne sur une période \mathbf{V}_{m0} ,

prise sur l'ensemble des lignes de contact potentielles.

$$\left[\mathbf{K} + k(\tau, \mathbf{X}_S) \mathbf{V}_{m0} \mathbf{V}_{m0}^T \right] \mathbf{X}_S \cong \mathbf{F}_0 + \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M, \mathbf{X}_S) \delta_e(M) dM \mathbf{V}_{m0} \quad (2.19)$$

La raideur d'engrènement k est décomposée en faisant apparaître la raideur moyenne sans correction ni réduction de longueur de contact k_{m0} :

$$k(\tau) = k_{m0} \left(1 + \alpha g(\tau, \mathbf{X}_S) \right) \quad (2.20)$$

Avec g une fonction scalaire normée qui n'est pas déterminée à ce niveau du développement et α , un paramètre qui indique le poids de la fonction g par rapport à 1. En notant également $\mathbf{K}_{m0} = \mathbf{K} + k_{m0} \mathbf{V}_{m0} \mathbf{V}_{m0}^T$ la matrice raideur totale moyenne (inversible), l'équation (2.19) devient

$$\left[\mathbf{K}_{m0} + \alpha k_{m0} g(\tau, \mathbf{X}_S) \mathbf{V}_{m0} \mathbf{V}_{m0}^T \right] \mathbf{X}_S \cong \mathbf{F}_0 + \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M, \mathbf{X}_S) \delta_e(M) dM \mathbf{V}_{m0} \quad (2.21)$$

Qui se réécrit :

$$\mathbf{X}_S \cong \mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{F}_0 + \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M, \mathbf{X}_S) \delta_e(M) dM \mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{V}_{m0} - \alpha g(\tau, \mathbf{X}_S) k_{m0} \mathbf{V}_{m0}^T \mathbf{X}_S \mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{V}_{m0} \quad (2.22)$$

En notant $\mathbf{X}_0 = \mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{F}_0$, \mathbf{X}_S est donc de la forme :

$$\mathbf{X}_S = \mathbf{X}_0 + \Phi_{kv}(\tau, \mathbf{X}_S) \mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{V}_{m0} \quad (2.23)$$

avec $\Phi_{kv}(\tau, \mathbf{X}_S)$ une fonction scalaire dépendante du temps, a priori non linéaire par rapport au vecteur solution quasi-statique.

En introduisant l'équation (2.23) dans l'équation d'équilibre (2.21), on obtient le système suivant :

$$\left[\alpha k_{m0} g(\tau, \mathbf{X}_S) \mathbf{V}_{m0}^T \mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{F}_0 + \Phi_{kv}(\tau, \mathbf{X}_S) + \alpha k_{m0} g(\tau, \mathbf{X}_S) \Phi_{kv}(\tau, \mathbf{X}_S) \mathbf{V}_{m0}^T \mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{V}_{m0} \right] \mathbf{V}_{m0} = \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M, \mathbf{X}_S) \delta_e(M) dM \mathbf{V}_{m0} \quad (2.24)$$

Il est important de noter que cette équation peut être réduite à une simple expression scalaire puisque le vecteur \mathbf{V}_{m0} est un facteur commun aux deux membres de l'équation (2.24).

En utilisant l'expression de l'écart de transmission (2.17) quasi-statique, on peut exprimer Φ_{kv} en fonction de l'écart de transmission quasi-statique :

$$\Phi_{kv}(\tau, \mathbf{X}_S) = \frac{TE_S(\tau) - \mathbf{W}^T \mathbf{X}_0 + \frac{E_{max}}{\cos \beta_b}}{\mathbf{W}^T \mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{V}_{m0}} \quad (2.25)$$

Cette relation est réinjectée dans (2.24). En suivant la même démarche que celle suivie par

MM. Vex et Ajmi [98], cette dernière relation se simplifie avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}^T \mathbf{X}_0 = \frac{\delta_{m0}}{\cos \beta_b} \\ \mathbf{V}_{m0}^T \mathbf{X}_0 = \delta_{m0} \\ \mathbf{V}_{m0}^T \mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{V}_{m0} = \frac{1}{k_{m0}} \\ \mathbf{W}^T \mathbf{K}_{m0}^{-1} \mathbf{V}_{m0} = \frac{1}{k_{m0} \cos \beta_b} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

où δ_{m0} est la déflexion statique moyenne sans correction ni réduction de longueur de contact. Finalement, on obtient l'expression de TE_S :

$$TE_S(\tau) \cos \beta_b = \frac{\delta_{m0} k_{m0} - \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}(M, \mathbf{X}_S) e(M) dM}{k(\tau, \mathbf{X}_S)} \quad (2.27)$$

La déflexion statique moyenne δ_{m0} et la raideur moyenne d'engrènement k_{m0} étant indépendantes des modifications de forme portées par les dentures $e(M)$, ces paramètres sont bien adaptés pour adimensionner l'écart de transmission quasi-statique en vue de l'optimisation des corrections de surface.

$$TE_S^*(\tau) \cos \beta_b = \frac{1 - \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}^\dagger(M, \mathbf{X}_S) e^*(M) dM}{k^\dagger(\tau, \mathbf{X}_S)} = \frac{1 - \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}^\dagger(M, \mathbf{X}_S) e^*(M) dM}{\int_{L_0(\tau)} \tilde{k}^\dagger(M, \mathbf{X}_S) dM} \quad (2.28)$$

où $A^* = \frac{A}{\delta_{m0}}$ et $A^\dagger = \frac{A}{k_{m0}}$, quelque soit le paramètre A .

L'écart de transmission quasi-statique ainsi exprimé est l'équation pivot des développements analytiques présentés dans la suite du document.

Le calcul des deux intégrales de (2.28) est à réaliser sur un domaine formé de lignes d'engrènement qui évoluent de façon périodique au cours du temps.

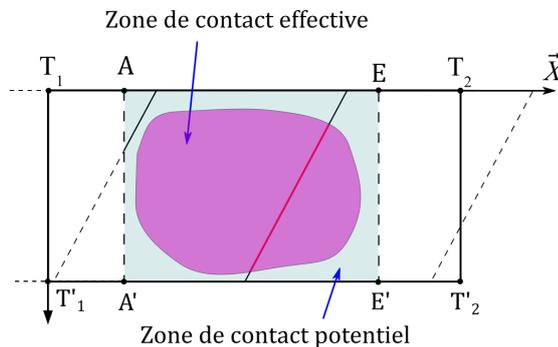


FIGURE 2.5 – Position des lignes de contact dans le plan de base

La figure 2.5 représente les lignes de contact virtuelles dans le plan d'engrènement et la zone de contact potentiel qui est limitée par la ligne d'engagement théorique AA' et la ligne de retrait théorique EE' . Toutes les lignes de contact virtuelles sont parallèles entre elles et distantes du pas de base normal p_{bn} . En supposant la vitesse de rotation du pignon (état de référence) Ω_1 uniforme, l'ensemble des lignes virtuelles de contact se translate dans la direction \vec{X} à la vitesse $\Omega_1 r_{b1}$.

En présence de corrections de dentures et/ou de défauts géométriques (positionnement, orientation, forme des pièces, ...) et suivant le chargement, le rapprochement des surfaces peut ne pas être suffisant pour que le contact s'établisse sur l'ensemble des lignes de la zone de contact potentiel. Les lignes de contact effectives peuvent être sensiblement plus courtes. Les pertes de contact partielles apparaissent généralement plutôt aux bords de la zone d'engrènement. Leur détermination est une étape importante et nécessaire pour obtenir une estimation réaliste de l'écart de transmission quasi-statique.

Suivant l'approche numérique (logiciel de type VSA), les lignes de contact complètes sont divisées en N cellules de longueur $\frac{b}{N \cos \beta_b}$ et le centre de chaque cellule est notée M_{ij} (figure 2.6). Le premier indice (i) fait référence au numéro de la ligne et le second (j) au numéro de la cellule. La raideur k_{ij} d'une cellule de la zone de contact potentiel est nulle si l'écrasement $\Delta(M_{ij})$ est négatif. Dans l'autre cas, le contact est effectif sur cette cellule et la raideur est estimée.

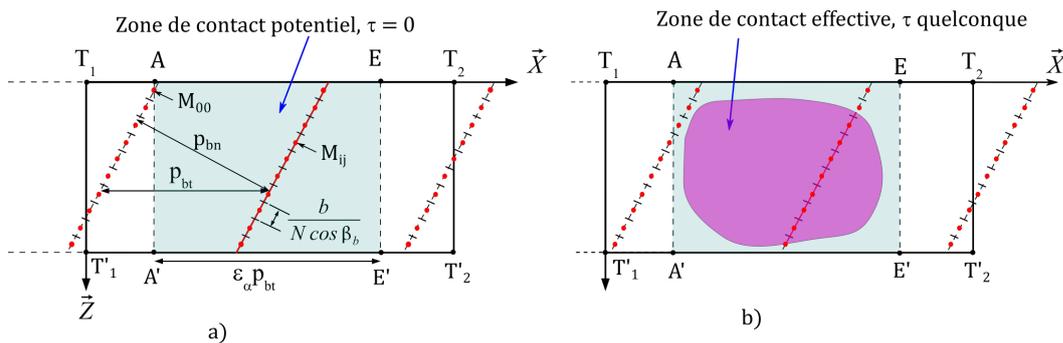


FIGURE 2.6 – Position des lignes de contact dans le plan de base

L'approche analytique utilise la propriété de périodicité de chaque intégrande de la relation 2.28 pour des conditions de fonctionnement stationnaires et exploite leur décomposition en séries de Fourier. Moyennant une approximation sur les intégrales qui consiste à les remplacer par des sommes de Riemann, non seulement les calculs sont possibles mais des simplifications importantes s'opèrent et rendent l'approche analytique intéressante pour la minimisation des fluctuations de l'écart de transmission quasi-statique. La section suivante présente un certain nombre de résultats obtenus en considérant des modèles simples de corrections de forme et de raideur d'engrènement. La dernière partie est consacrée à une situation plus réaliste et plus complexe, ce qui permettra d'exposer quelques résultats plus généraux.

Les résultats présentés dans ce qui suit sont le fruit de mes travaux personnels, supervisés par Philippe Velex.

2.2 Premier modèle analytique de l'engrènement

On suppose dans cette partie que les effets des écarts de position, d'orientation et de forme des dents sur l'engrènement sont négligeables. Le modèle développé représente l'engrènement de deux roues élastiques et dans le cas d'une correction de profil linéaire et symétrique (longueur et profondeur identiques sur les deux dents). La raideur linéique d'engrènement est supposée constante. Les vitesses de rotation sont faibles et tous les effets dynamiques sont négligés.

2.2.1 Paramétrage

Écart normal équivalent

L'écart normal équivalent adimensionné est constitué uniquement des corrections de profil du pignon et de la roue $e_E^*(M)$. Pour illustrer la forme de cette fonction, suivons le point de contact M_{00} qui se trouve sur la ligne d'engagement théorique AA' à l'instant $\tau = 0$ (figure 2.7 a). Au cours du temps, la ligne de contact 0 se déplace suivant \vec{X} et la figure 2.7 b) illustre l'écart normal équivalent en M_{00} au cours de ce déplacement. Cette évolution est symétrique par rapport à $\tau = \frac{\varepsilon_\alpha}{2}$ et elle est linéaire par morceaux. Elle peut être réalisée par des corrections de profil en tête de dents du pignon et de la roue, de même profondeur adimensionnée E^* et sur une fraction Γ identique du segment de conduite $p_{bt}\varepsilon_\alpha$. Au bout d'un certain temps $\tau = P$, la même ligne contact va se former à nouveau entre les mêmes dents du pignon et de la roue. Cet écart est ainsi P-périodique. L'expression mathématique sur la première période est donnée par équation (2.29).

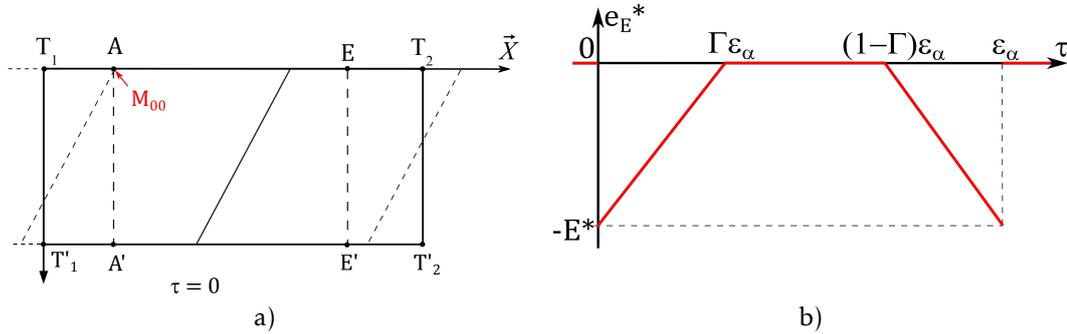


FIGURE 2.7 – Évolution de la correction de profil au point de contact M_{00} sur le segment de conduite

$$\text{Pour } \tau \in [0, P]: \begin{cases} e_E^*(M_{00}, \tau) = E^* \left(\frac{\tau}{\Gamma\varepsilon_\alpha} - 1 \right) & \text{pour } \tau \in [0, \Gamma\varepsilon_\alpha] \\ e_E^*(M_{00}, \tau) = 0 & \text{pour } \tau \in [\Gamma\varepsilon_\alpha, (1-\Gamma)\varepsilon_\alpha] \\ e_E^*(M_{00}, \tau) = \frac{E^*}{\Gamma} \left(1 - \Gamma - \frac{\tau}{\varepsilon_\alpha} \right) & \text{pour } \tau \in [(1-\Gamma)\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha] \\ e_E^*(M_{00}, \tau) = 0 & \text{pour } \tau \in [\varepsilon_\alpha, P[\end{cases} \quad (2.29)$$

Pour un autre point M_{0i} situé sur la même ligne et à une distance $\frac{Z}{\cos \beta_b}$ de M_{00} , l'évolution de e_E^* aura la même allure mais sera décalée dans le temps de $\varepsilon \frac{Z \tan \beta_b}{p_{bt}} = \varepsilon \bar{z} \varepsilon_\beta$ avec $\bar{z} = \frac{Z}{b}$. De

même, pour un point de contact situé sur la i -ème ligne de contact, l'écart normal sera translaté dans le temps de la valeur de i .

$$e_E^*(M_{ij}, \tau) = e_E^*(M_{00}, \tau - \epsilon \bar{z} \epsilon_\beta - i) \quad (2.30)$$

Raideur linéique d'engrènement

Dans cette approche simplifiée, la raideur linéique d'engrènement est supposée constante \tilde{k}_0 . Les éventuels aspects non linéaires liés à l'intensité de la charge, à l'effet convectif de contact, aux effets de bord, ... ne sont pas pris en compte. La valeur de cette raideur linéique peut être déterminée par la norme ISO 6336 [56].

En repartant de l'équation (2.27), l'expression de l'écart de transmission se réécrit :

$$TE_S(\tau) \cos \beta_b = \frac{\delta_{m0} \frac{\tilde{k}_0 b \epsilon_\alpha}{\cos \beta_b} + \int_{L_0(\tau)} \tilde{k}_0 e_E(M) dM}{\int_{L_0(\tau)} \tilde{k}_0 dM} \quad (2.31)$$

En limitant les intégrales aux zones de contact effectif $L(\tau, \mathbf{X}_S)$ et en adimensionnant par δ_{m0} :

$$TE_S^*(\tau) \cos \beta_b = \frac{1 + \frac{\cos \beta_b}{b \epsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X}_S)} e_E^*(M) dM}{\frac{\cos \beta_b}{b \epsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X}_S)} dM} \quad (2.32)$$

Réduction de la zone de contact effective

Si la profondeur de correction de profil est supérieure à la déflexion statique moyenne, les dents peuvent ne pas entrer en contact au niveau de l'engagement théorique AA' mais un peu après. Le même phénomène se produit dans la zone de retrait (EE'). Le retard à l'engagement et l'avance au retrait sont supposés uniformes dans la direction \vec{Z} du plan d'engrènement. En raison de la symétrie de la correction de profil et de la raideur linéique constante, ces décalages sont identiques. Les éventuelles réductions de la zone de contact effective sont paramétrées par un unique coefficient λ : le décalage de la ligne de contact effective est notée $\lambda p_{bt} \epsilon_\alpha$ dans la direction \vec{X} (figure 2.8).

Calcul des intégrales

Dans cette situation, l'estimation des intégrales peut être approchée par une série de fonctions [70]. Le développement du calcul est montré avec une fonction f définie sur les lignes de contact $L(\tau)$ et qui ne dépend que de l'abscisse X des points de contact. Elle est nulle en dehors de la fenêtre d'engrènement. Cette fonction est périodique, de période P , et la série de Fourier qui lui est associée s'écrit :

$$f(X) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left[\frac{2\pi n}{P} X\right] + b_n \sin\left[\frac{2\pi n}{P} X\right] \right) \quad (2.33)$$

Soit I une grandeur définie à tout instant par

$$I(\tau) = \frac{\cos \beta_b}{b \epsilon_\alpha} \int_{L(\tau)} f(M) dM \quad (2.34)$$

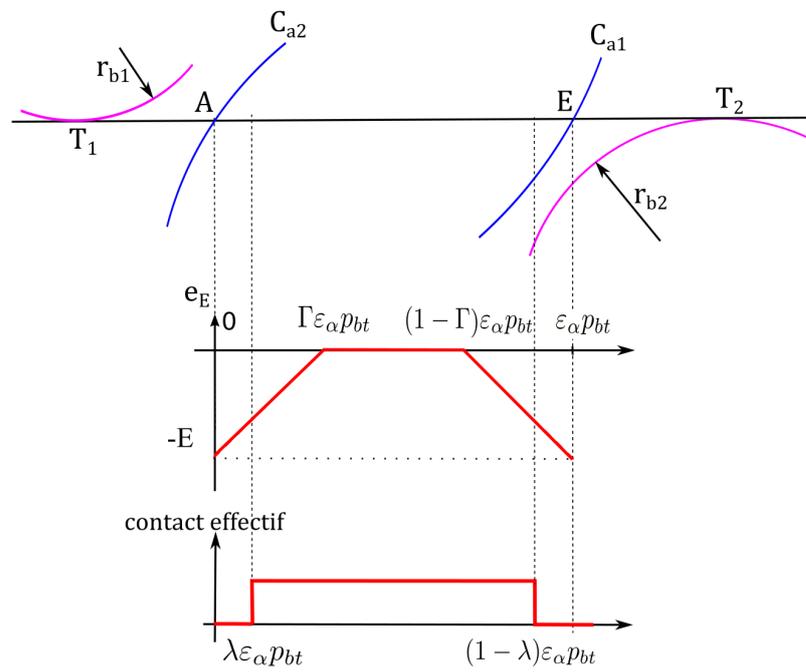


FIGURE 2.8 – Zone de contact effective

La fonction f étant nulle pour les points en dehors de la fenêtre d'engrènement, on peut étendre le domaine d'intégration à l'ensemble des lignes de contacts indépendantes d'une période :

$$I(\tau) = \frac{\cos \beta b}{b \varepsilon_\alpha} \sum_{i=0}^{P-1} \int_{L_i(\tau)} f(M) dM \quad (2.35)$$

Une valeur approchée de I est obtenue en remplaçant l'intégrale par une somme de Riemann :

$$I(\tau) \cong \frac{1}{\varepsilon_\alpha N} \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(M_{ij}) \quad (2.36)$$

avec $dM = \frac{b}{N \cos \beta_b}$. Il vient donc :

$$I(\tau) \cong \frac{1}{\varepsilon_\alpha N} \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left[\frac{2\pi n}{P} X_{ij} \right] + b_n \sin \left[\frac{2\pi n}{P} X_{ij} \right] \right) \right\} \quad (2.37)$$

Or l'abscisse X_{ij} du j ème point de la i ème ligne se déduit de celle du point M_{00} par la relation (voir (2.30)) :

$$X_{ij} = X_{00} - i - j \varepsilon \frac{\varepsilon \beta}{N}$$

Pour simplifier la notation, on pose $\tau = X_{00}$, l'abscisse du point M_{00} . Ce paramètre s'identifie au temps adimensionné à partir duquel ce point entre dans la fenêtre d'engrènement potentielle.

Le sinus et le cosinus des sommes sont développés, faisant apparaître des termes de la forme :

$$\sum_{l=0}^{P-1} \cos[Al] \quad \text{et} \quad \sum_{l=0}^{P-1} \sin[Al]$$

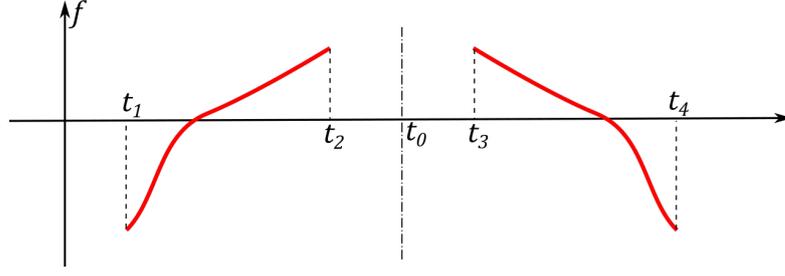
$$\text{avec } (A, l) \in \left\{ \left(i, \frac{2\pi n}{P} \right), \left(j, \frac{2\pi n \varepsilon \beta}{PN} \right) \right\}$$

En utilisant les identités de l'annexe 6.2.1 page 176, l'expression se simplifie pour devenir :

$$I(\tau) = \frac{Pa_0}{\varepsilon_\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k \varepsilon \beta}{\pi k \varepsilon_\alpha \varepsilon \beta} \left(Pa_{kP} \cos[\pi k(2\tau - \varepsilon \beta)] + Pb_{kP} \sin[\pi k(2\tau - \varepsilon \beta)] \right) \quad (2.38)$$

Dans les cas qui nous intéressent, les particularités des fonctions à intégrer sont exploitées pour simplifier cette expression (voir annexe 6.1 page 165). Si f est une fonction de période P , polynomiale définie par morceaux et symétrique par rapport $\tau = t_0$, alors sa décomposition en série de Fourier peut se mettre sous la forme :

$$f(M) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \cos \frac{2\pi n(t_0 - \tau)}{P} [C_{s1}^n, C_{s2}^n, C_{s3}^n, C_{s4}^n, \dots] \mathbf{V}_{s0} \quad (2.39)$$

FIGURE 2.9 – Allure d'une fonction définie par morceaux et symétrique par rapport à t_0

avec

$$\mathbf{V}_{s0} = \begin{Bmatrix} \sin \frac{2\pi n(t_1-t_0)}{p} \\ \cos \frac{2\pi n(t_1-t_0)}{p} \\ \sin \frac{2\pi n(t_2-t_0)}{p} \\ \cos \frac{2\pi n(t_2-t_0)}{p} \\ \vdots \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{V}_s = \begin{Bmatrix} \sin[2\pi k(t_1-t_0)] \\ \cos[2\pi k(t_1-t_0)] \\ \sin[2\pi k(t_2-t_0)] \\ \cos[2\pi k(t_2-t_0)] \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

où t_1, t_2, \dots sont les points remarquables pour les limites d'intégration (figure 2.9).

Dans ce cas, l'intégrale sur les lignes de contact de cette fonction peut se mettre sous la forme suivante :

$$I(\tau) = \frac{Pa_0}{\varepsilon_\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin \pi k \varepsilon_\beta}{\pi^2 k^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \cos[\pi k(2\tau - \varepsilon_\beta - 2t_0)] [C_{s1}^{kP}, C_{s2}^{kP}, C_{s3}^{kP}, C_{s4}^{kP}, \dots] \mathbf{V}_s \quad (2.40)$$

En appliquant cette relation aux deux intégrales de l'expression de l'écart de transmission (2.28), on obtient :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L_0(\tau)} \pi(M) dM = (1 - 2\lambda) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(k, \lambda, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) \cos[\pi k(2\tau - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)] \right) \quad (2.41)$$

avec

$$\Omega_k(k, \lambda, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = \text{Sinc}[k\varepsilon_\alpha(1 - 2\lambda)] \text{Sinc}(k\varepsilon_\beta) \quad (2.42)$$

La fonction Sinc est le sinus cardinal : $\text{Sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

De même :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau)} e^*(M) \pi(M) dM = -\frac{E^*(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{kE}(k, \Gamma, \lambda, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) \cos[\pi k(2\tau - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)] \right) \quad (2.43)$$

avec

$$\Omega_{kE}(k, \Gamma, \lambda, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = \frac{2}{\Gamma - \lambda} \text{Sinc}[k\varepsilon_\beta] \left[(2\lambda - 1) \text{Sinc}[k(1 - 2\lambda)\varepsilon_\alpha] + (1 - \Gamma - \lambda) \text{Sinc}[k(\Gamma - \lambda)\varepsilon_\alpha] \text{Sinc}[k(1 - \Gamma - \lambda)\varepsilon_\alpha] \right] \quad (2.44)$$

L'expression analytique de l'écart de transmission quasi-statique (2.28) se met finalement sous la forme :

$$TE_S^*(\tau) \cos \beta_b = \frac{1 + \frac{E^*(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{kE}(k, \Gamma, \lambda, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) \cos[\pi k(2\tau - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)] \right)}{(1 - 2\lambda) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(k, \lambda, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) \cos[\pi k(2\tau - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)] \right)} \quad (2.45)$$

Ainsi, l'écart de transmission quasi-statique adimensionné ne dépend dans ce cas que du rapport de conduite ε_α , du rapport de recouvrement ε_β , des paramètres de la correction de profil E^* et Γ et du paramètre de réduction de la longueur de contact λ . Ce dernier n'est pas connu a priori, il doit être estimé par le modèle.

Détermination du paramètre λ

La détermination de la réduction de longueur de contact nécessite une équation supplémentaire qui traduise autant que possible le phénomène de retard à l'engagement (et son symétrique au retrait). Pour modéliser ce phénomène, l'approche proposée s'appuie sur la force linéique de contact F_{lc} qui passe d'une valeur nulle à une valeur positive lorsque le contact devient effectif.

$$F_{lc}(M) = \begin{cases} \tilde{k}_0 [\mathbf{V}^T \mathbf{X}_S(M) - \delta_0(M)] & \text{si } \mathbf{V}^T \mathbf{X}_S(M) - \delta_0(M) > 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{V}^T \mathbf{X}_S(M) - \delta_0(M) < 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

En manipulant les termes (voir [98]), on montre que $\mathbf{V}^T \mathbf{X}_S(M) - \delta_0(M) \cong \delta_{m0} \left(\cos \beta_b TE_S^*(\tau) + e^*(M) \right)$. A la limite du contact ($F_{lc}(M_{00}) = 0$), l'abscisse du point M_{00} est $X_{00} = \tau = \lambda \varepsilon_\alpha$. La valeur de λ est la solution du système ;

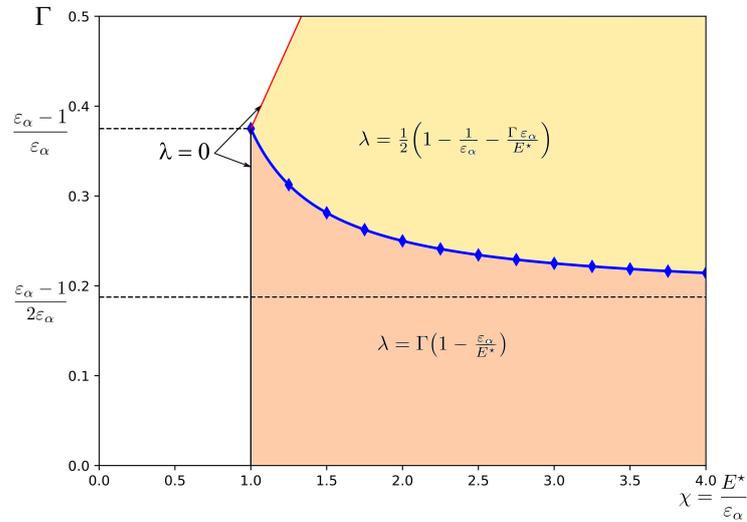
$$\begin{cases} \cos \beta_b TE_S^*(\lambda \varepsilon_\alpha) + e_E^*(\lambda \varepsilon_\alpha) = 0 \\ 0 \leq \lambda < \Gamma \end{cases} \quad (2.47)$$

Si cette solution n'existe pas, il n'y a pas de réduction de longueur de contact et on prend $\lambda = 0$. Cette solution particulière pour le point M_{00} est conservée pour l'ensemble du problème.

L'équation à résoudre (2.47) se développe sous la forme :

$$\Gamma + E^*(\Gamma - \lambda)(\Gamma + \lambda - 1) = \frac{2E^*}{\pi^3 \varepsilon_\alpha^2 \varepsilon_\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[\pi k(2\tau - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)]}{k^3} \sin[\pi k \varepsilon_\beta] \sin[\pi k \varepsilon_\alpha (\Gamma - \lambda)] \sin[\pi k \varepsilon_\alpha (1 - \Gamma - \lambda)] \quad (2.48)$$

Après avoir remplacé le produit de fonctions trigonométriques dans la série par une somme, on peut identifier les séries par des expressions de leurs limites connues (6.134). Dans un cas quelconque, aucune expression analytique simple n'apparaît. En revanche, pour une denture

FIGURE 2.10 – Coefficient λ pour une denture droite LCR ($\varepsilon_\alpha < 2$)

droite, le paramètre λ s'exprime sans trop de difficulté [100] :

$$\lambda = \frac{1}{\alpha - 2\beta + \gamma} \left\{ \frac{\Gamma \varepsilon_\alpha}{E^*} + \alpha \Gamma - \beta + \gamma(1 - \Gamma) - \frac{1}{2\varepsilon_\alpha} (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \alpha - \beta + \gamma) \right\} \quad (2.49)$$

avec α , β et γ , les parties entières de, respectivement, $\varepsilon_\alpha(\Gamma - \lambda)$, $\varepsilon_\alpha(1 - 2\lambda)$ et $\varepsilon_\alpha(1 - \Gamma - \lambda)$.

Pour une denture droite et pour d'une part $\varepsilon_\alpha < 2$ (dentures LCR) et, d'autre part $\varepsilon_\alpha > 2$ (dentures HCR), les expressions du coefficient λ en fonction des paramètres de correction de profil sont représentées respectivement sur les figures 2.10 et 2.11.

Dans le cas général, le membre de droite de l'équation (2.48) prend des valeurs faibles et s'annule lorsque ε_β est entier positif. Une valeur approchée de ce paramètre est prise en négligeant la série :

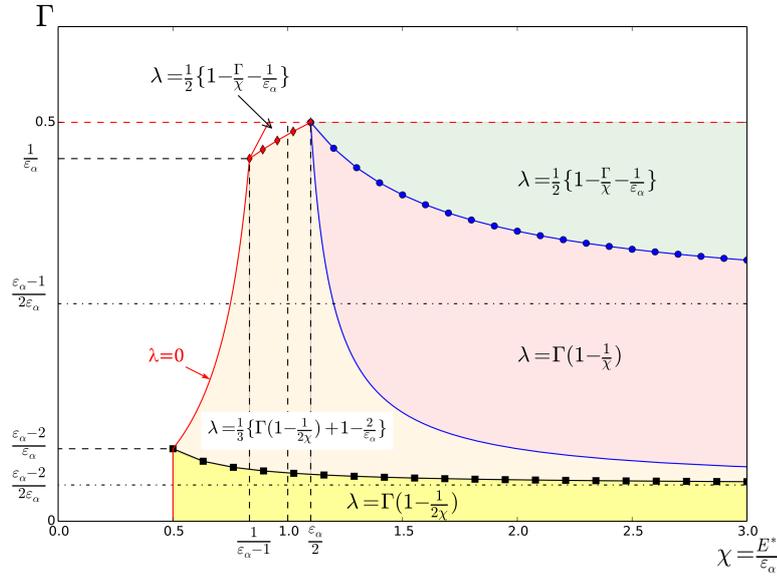
$$\lambda \cong \frac{1 - \sqrt{1 - 4\Gamma(1 - \Gamma - 1/E^*)}}{2} \quad (2.50)$$

RMS de l'écart de transmission

Dans l'objectif de réduire les excitations générées par l'engrènement, c'est la moyenne quadratique (aussi appelée valeur efficace ou Root Mean Square) qui est retenue comme paramètre indicateur du niveau de fluctuation de TE_S^* . Le carré de la moyenne quadratique est la variance $var(f)$ d'un signal périodique f et en notant $E(f)$ l'espérance mathématique, la variance est définie par :

$$var(f) = RMS^2(f) = E(f^2) - E(f)^2 \quad (2.51)$$

Pour une fonction f dont l'expression en série de Fourier est de la forme $f(\tau) = a_0 +$

FIGURE 2.11 – Coefficient λ pour une denture droite HCR ($\varepsilon_\alpha > 2$)

$\sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{f,k} \cos[\pi k(2\tau - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)]$, la variance s'écrit simplement :

$$var(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{f,k}^2 \quad (2.52)$$

L'écart de transmission est défini par un rapport de séries de Fourier. En changeant les notations pour plus de facilité, on l'écrit sous la forme :

$$TE_S^* = \frac{1 - I_{kE}}{\cos \beta_b I_k} = \frac{1 - I_{kE0} - \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{kE} \cos[k\pi(2\tau - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)]}{\cos \beta_b (I_{k0} + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \cos[k\pi(2\tau - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)])}$$

En considérant que TE_S^* est une fonction des deux objets I_{kE} et I_k , on réalise un développement limité au premier ordre au voisinage des valeurs moyennes :

$$TE_S^*(I_{kE}, I_k) = TE_S^*(I_{kE0}, I_{k0}) + \Delta I_k \left[\frac{\partial TE_S^*}{\partial I_k} \right]_{(I_{k0}, I_{kE0})} + \Delta I_{kE} \left[\frac{\partial TE_S^*}{\partial I_{kE}} \right]_{(I_{k0}, I_{kE0})} \quad (2.53)$$

D'après (2.52), la variance de cette fonction est la suivante :

$$\cos^2 \beta_b var(TE_S^*) = \frac{(1 - I_{kE0})^2}{I_{k0}^4} E(\Delta I_k^2) + \frac{1}{I_{k0}^2} E(\Delta I_{kE}^2) + 2 \frac{1 - I_{kE0}}{I_{k0}^3} E(\Delta I_k \Delta I_{kE}) \quad (2.54)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_{kE0} &= E(I_{kE}) \quad ; \quad I_{k0} = E(I_k) \\ E(\Delta I_{kE}^2) &= var(I_{kE}) \quad ; \quad E(\Delta I_k^2) = var(I_k) \\ E(\Delta I_k \Delta I_{kE}) &= cov(I_{kE}, I_k) \end{aligned}$$

Finalement, une valeur approchée de la variance de TE_S^* se met sous la forme :

$$\cos^2 \beta_b var(TE_S^*) = \frac{1}{2I_{k0}^4} \sum_{k=1}^{\infty} \{I_{k0}\Omega_{kE} + (1 - I_{kE0})\Omega_k\}^2 \quad (2.55)$$

La variance de l'écart de transmission dépend de seulement de 4 paramètres : ε_α , ε_β , E^* et Γ .

2.2.2 Optimisation des corrections de profil

A partir des expressions précédentes, il est possible de déterminer des familles de corrections de profil qui rendent l'écart de transmission quasi-statique sous charge constante au cours de l'engrènement. A partir de l'équation (2.45) et en posant la condition $TE_S^* = TE_0^* = \text{constante}$, on en déduit par identification :

$$0 = \cos \beta_b TE_0^* - 1 - E^* \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma} \quad \text{pour les valeurs moyennes} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - 2\lambda) \left(\cos \beta_b TE_0^* - E^* \frac{\Gamma - \lambda}{\Gamma} \right) \text{Sinc}[k\varepsilon_\alpha(1 - 2\lambda)] \\ &\quad + (1 - \Gamma - \lambda) \text{Sinc}[k\varepsilon_\alpha(\Gamma - \lambda)] \text{Sinc}[k\varepsilon_\alpha(1 - \Gamma - \lambda)] \quad \forall k \end{aligned} \quad (2.57)$$

La solution de la seconde équation doit vérifier :

$$\cos \beta_b TE_0^* - E^* \frac{\Gamma - \lambda}{\Gamma} = 0 \quad (2.58)$$

$$\text{et } \varepsilon_\alpha(\Gamma - \lambda) = M \quad \text{ou} \quad \varepsilon_\alpha(1 - \Gamma - \lambda) = N \quad (2.59)$$

où M et N sont des entiers relatifs.

En faisant disparaître TE_0^* des relations (2.56) et (2.58), on obtient

$$E^* = \frac{\Gamma}{(\Gamma - \lambda)(1 - \Gamma - \lambda)} \quad (2.60)$$

Les relations (2.59) se réécrivent :

$$\Gamma = 1 - \lambda - \frac{L}{\varepsilon_\alpha} \quad \text{ou} \quad \Gamma = \lambda + \frac{N}{\varepsilon_\alpha} \quad (2.61)$$

Les solutions possibles qui conduisent à des valeurs réalistes de $\Gamma \in [0 ; 0,5]$ et $\lambda \in [0 ; \Gamma]$ se réduisent à :

— Pour $\varepsilon_\alpha \in [1 ; 2[$:

$$\Gamma = 1 - \lambda - \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \quad (2.62)$$

ε_α	Profondeur de correction	Condition	λ
$\varepsilon_\alpha < 2$	$E^* = \frac{\Gamma \varepsilon_\alpha}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}}$	$\Gamma \in]\frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha} ; \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{\varepsilon_\alpha}]$	$\lambda = 1 - \Gamma - \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$
$\varepsilon_\alpha \geq 2$	$E^* = \frac{\Gamma \varepsilon_\alpha}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}}$	$\Gamma \in]\frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha} ; \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{\varepsilon_\alpha}]$	$\lambda = 1 - \Gamma - \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$
	$E^* = \frac{\Gamma \varepsilon_\alpha}{2(2\Gamma - 1 + \frac{2}{\varepsilon_\alpha})}$	$\Gamma \in]\frac{\varepsilon_\alpha - 2}{2\varepsilon_\alpha} ; \frac{\varepsilon_\alpha - 2}{\varepsilon_\alpha}]$	$\lambda = 1 - \Gamma - \frac{2}{\varepsilon_\alpha}$
	$E^* = \frac{\Gamma \varepsilon_\alpha}{1 - 2\Gamma + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}}$	$\Gamma \geq \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$	$\lambda = \Gamma - \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$

TABLEAU 2.1 – Corrections de profil optimales

— Pour $\varepsilon_\alpha \in]2 ; 3[$:

$$\Gamma = 1 - \lambda - \frac{2}{\varepsilon_\alpha} \quad ; \quad \Gamma = \lambda + \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \quad ; \quad \Gamma = 1 - \lambda - \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \quad (2.63)$$

Les valeurs de λ sont extraites des relations (2.61) et (2.62) et elles sont réinjectées dans l'équation (2.60). En synthèse, les corrections de profil qui rendent l'écart de transmission quasi-statique constante sont définies dans la tableau 2.1. Les lieux de ces combinaisons sont représentés sur les figures 2.10 et 2.11 par les courbes qui portent des symboles.

L'angle d'hélice et le rapport de recouvrement n'apparaissent pas explicitement dans les corrections de profil optimales proposées. Leur influence passe par la valeur de la déflexion statique δ_{m0} qui conditionne la valeur de la profondeur de correction réelle.

Dans le cadre des hypothèses formulées pour expliciter l'écart de transmission dans cette section, une famille de corrections pour les dentures LCR et 3 familles de corrections pour les dentures HCR rendent l'écart de transmission constant au cours du temps. Sous forme adimensionnée, les résultats sont indépendants de la raideur d'engrènement et du paramètre de réduction de la longueur de contact. Le modèle de la raideur d'engrènement étant assez simple, ce modèle fournit une première approximation de corrections optimales à une charge donnée. Une variation de charge induira une fluctuation de E^* dans le sens opposé, via la déflexion statique δ_{m0} . En conséquence, les corrections «longues» ($\Gamma \approx \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{\varepsilon_\alpha}$) sont plus sensibles à la

variation de charge que des corrections plus courtes (Γ un peu supérieur à $\frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha}$). Enfin, on remarque que les profondeurs de corrections proposées sont toutes largement supérieures à 1, ce qui devrait garantir d'éviter l'interférence à l'engagement.

2.2.3 Éléments de validation

La démarche de validation consiste à comparer les résultats obtenus grâce aux développements analytiques (RMS de TE_S^* et lieu des minima des fluctuations) à ceux obtenus avec différents modèles numériques reconnus. Afin de montrer quelques résultats sur diverses valeurs de ε_α et ε_β , quatre géométries (repérées de A à D) définies par le tableau 2.2 sont utilisées.

	A	B	C	D
module normal (mm)	10	10	2,78	10
angle de pression (°)	20	20	22,21	20
angle d'hélice [°]	0	0	28,9	20
nombre de dents	20-60	20-60	25-31	20-60
largeur (mm)	100	100	31,75	250
coef. de déport	0-0	0-0	0-0	0-0
coef. de saillie	1,0-1,0	1,5-1,2	1,065-1,065	1,0-1,0
coef. de creux	1,25-1,30	1,5-1,8	1,43-1,43	1,25-1,30
entraxe (mm)	400	400	88,9	425,67
ε_α	1,67	2,14	1,37	1,53
ε_β	0	0	1,76	2,72
couple sur le pignon (Nm)	6000	6000	550	6000

TABLEAU 2.2 – Paramètres géométriques des pignons A, B, C et D

Modèles à paramètres concentrés

Le principe d'un modèle à paramètres concentrés a été présenté dans le paragraphe 2.1 page 7 et des comparaisons avec des résultats expérimentaux les ont largement validés [4, 9, 103]. Deux modèles de raideur d'engrènement sont utilisés pour ces comparaisons :

1. Une raideur linéique constante, indépendante de la position du point de contact. C'est l'hypothèse retenue dans les développements analytiques (paragraphe 2.2 page 18).
2. Une approche plus détaillée où la déflexion statique suivant la normale au contact résulte de différentes contributions :
 - (a) la déformation de contact linéique, modélisée par exemple suivant les travaux de Lundberg [67];
 - (b) la déformation due à la flexion de la dent et son enracinement dans la jante qui n'est pas infiniment rigide : modèle de Weber [107]

Il en résulte une raideur linéique non linéaire vis à vis de la charge et sensible à la position du point de contact. Celle-ci est un peu plus faible à l'engagement et au retrait.

Les figures 2.12 à 2.15 montrent l'évolution (lignes de niveaux) du RMS de TE_{ξ}^* sur une plage de valeurs des paramètres de correction adimensionnés. La valeur du RMS est estimée à partir de l'évolution temporelle de TE_{ξ}^* sur un nombre entier de périodes. Les lieux des paramètres optimum vis à vis de la fluctuation de l'écart de transmission, suivant les relations du tableau 2.2, sont représentés par une succession de petits cercles.

Sur les figures 2.12 et 2.13, sont disposés en vis à vis les résultats obtenus avec le modèle analytique (a. et c.) et avec un modèle numérique à paramètres concentrés dans lequel la raideur linéique est constante (b. et d.). Pour la figure 2.12, les dentures sont droites avec un rapport de conduite inférieur (engrenage A, a. et b.) et supérieur à 2 (engrenage B, c. et d.) et pour la figure 2.13, les dentures sont hélicoïdales et correspondent aux engrenages B et C. Sur toute l'étendue du balayage, on note une grande proximité entre ces résultats, tant sur la forme des surfaces que sur leurs niveaux. La localisation des minima de fluctuation prédite par le tableau 2.2 en denture LCR (1 seule courbe) et HCR (3 courbes) correspond effectivement avec les creux des vallées. Les hypothèses fortes dans les deux modèles étant semblables, ces résultats montrent la pertinence de l'utilisation de séries de Fourier pour l'estimation de l'écart de transmission. Pour le modèle analytique, le RMS de TE_{ξ}^* peut être calculé soit à partir de l'évolution temporelle de l'écart de transmission adimensionné, soit directement avec la relation (2.55). Les résultats sont très proches. Par ailleurs, l'invariance de ces résultats adimensionnés avec la déflexion statique moyenne sans correction a été vérifiée pour différents niveaux de charge.

Les résultats obtenus avec le modèle numérique à paramètres concentrés utilisant les modèles de Weber-Banaschek et de Lundberg pour la raideur linéique d'engrènement sont représentés sur la figure 2.14. Les formes globales des surfaces obtenues sont proches des résultats précédents. Les lieux des corrections optimales sont légèrement décalés par rapport au fond des vallées estimées à partir des lignes de niveaux. Cela est dû au modèle de raideur non constant (forme globalement parabolique sur le segment de conduite) et légèrement non linéaire par rapport à la charge. Dans ce cas également, la stabilité des résultats adimensionnés vis à vis de la charge a été validée. Les écarts observés sont faibles par rapport à la valeur médiane du RMS de TE_{ξ}^* , ce qui montre la représentativité de ces diagrammes sur une large plage de couples de fonctionnement. On notera cependant que ce modèle de raideur s'appuie sur un découpage en *tranches minces* de la dent et que, par conséquent, l'effet de contrefort des dentures hélicoïdales n'est pas pris en compte.

Les derniers résultats ont été obtenus avec le logiciel *Load Distribution Program* (LDP), distribué par le laboratoire Gearlab (<https://mae.osu.edu/gearlab>) qui fait partie de The Ohio State University. LDP est largement répandu et permet de calculer les chargements, les contraintes et les déplacements dans les dentures. Le modèle élastique utilisé pour une dent est celui d'une plaque d'épaisseur variable. Le problème du contact est traité par la méthode du Simplex développée initialement par Conry et Seireg [24, 25]. Les écarts de transmission obtenus ont la réputation d'avoir une bonne corrélation avec des mesures expérimentales [52, 105]. Le modèle de contact entre les dentures est basé sur une approche par coefficients d'influence élastique entre les zones chargées et le déplacement normal des surfaces actives. La procédure de dissociation en tranches minces indépendantes des dents est évitée, ce qui permet la prise en compte des déplacements dus à l'ensemble des zones de chargement (au voisinage des contacts et par interactions avec les dents adjacentes chargées). La figure 2.15 présente des comparaisons obtenues avec le modèle analytique (colonne de droite) et avec LPD. Le format de données de LDP impose que le niveau de fluctuation de TE_{ξ}^* soit exprimé en amplitude et que la longueur

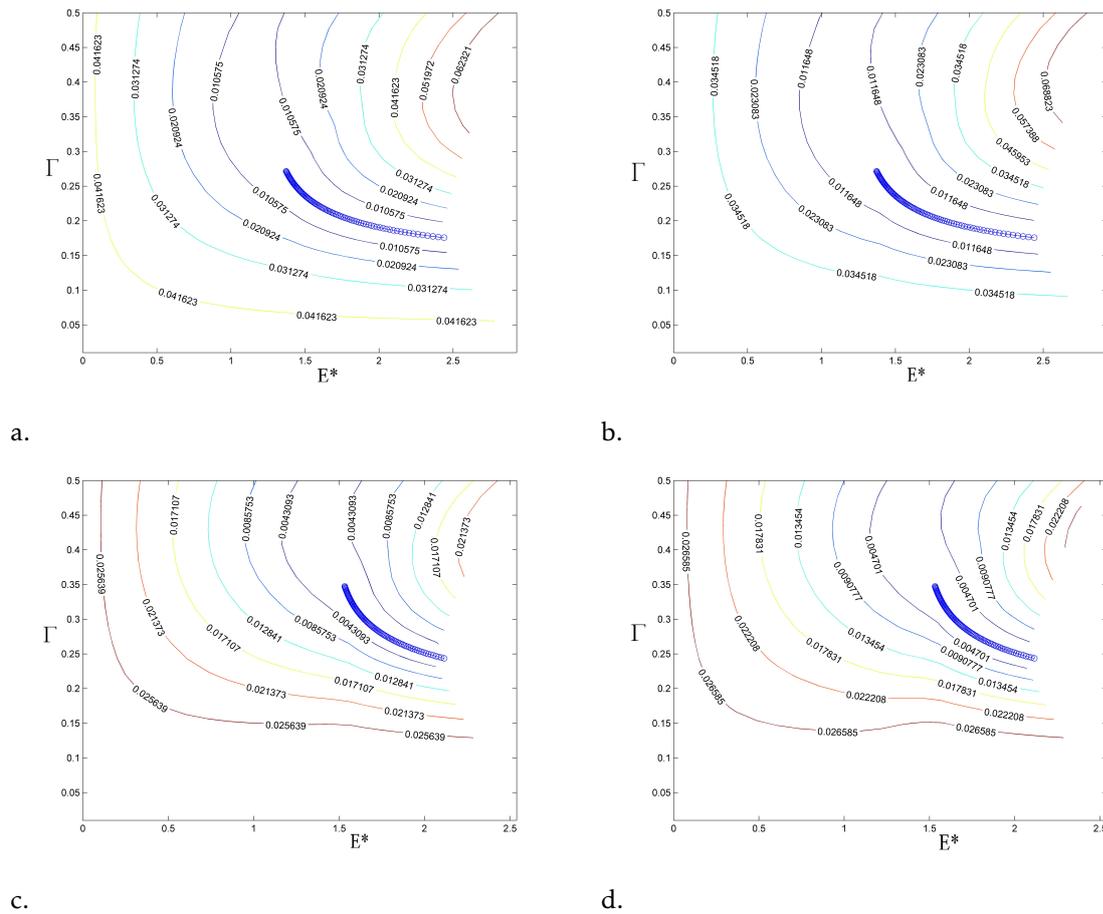


FIGURE 2.13 – Comparaison du RMS et TE_S^* obtenu avec le modèle analytique (a. et c.) et le modèle numérique à paramètres concentrés (raideur linéique constante) pour les géométries hélicoïdales C et D

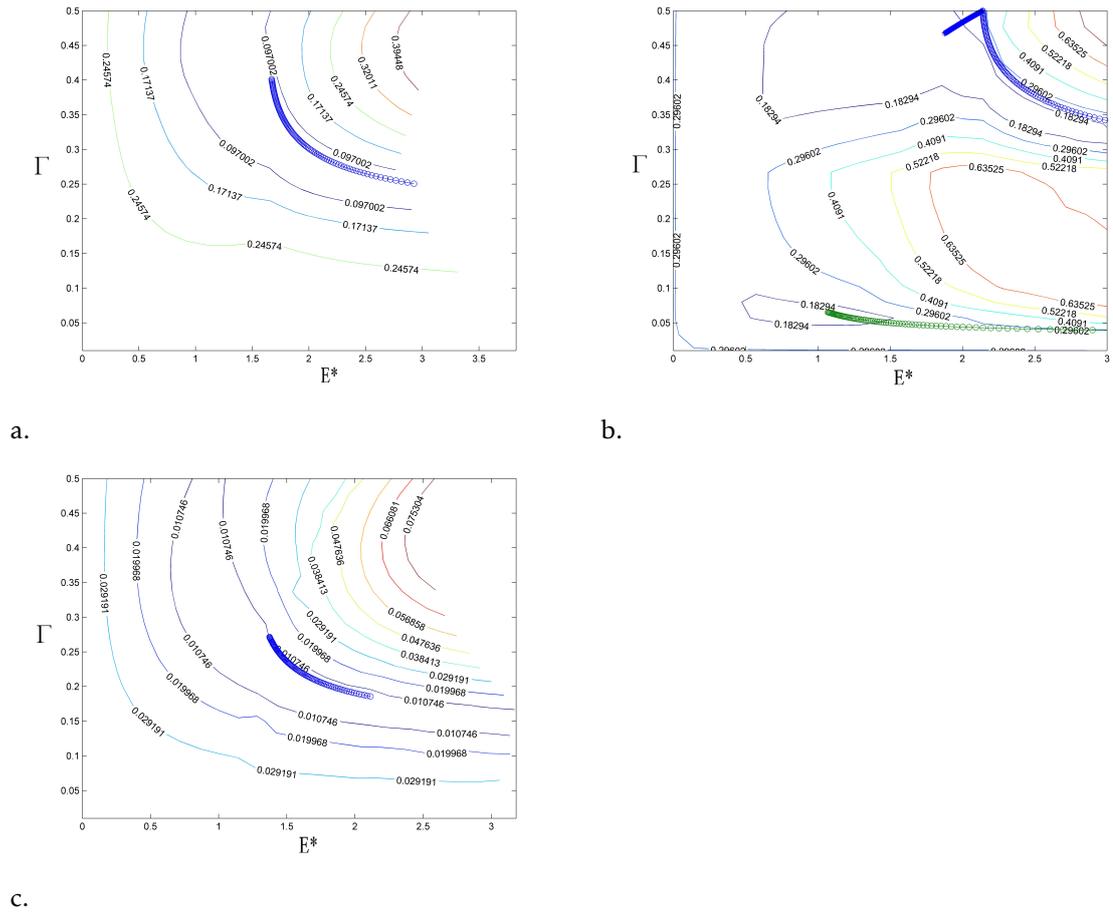


FIGURE 2.14 – RMS de TE_S^* obtenus avec les formules de Weber-Banaschek et de Lundberg pour la raideur linéique d'engrènement pour les géométries A, B et C respectivement

de correction soit définie en *Roll angle*. Un bon accord entre les résultats est observé, notamment pour les dentures droites, en termes d'amplitudes et de position des corrections optimales. Les écarts plus marqués entre les deux modèles pour les dentures hélicoïdales sont certainement liés aux restrictions du modèle de raideur analytique déjà citées.

2.3 Applications

2.3.1 Approche multi-objectifs simplifiée d'optimisation de la correction de profil [13]

La conception d'un engrenage et des corrections de ses surfaces actives est généralement synonyme de compromis entre plusieurs critères de performance. Moyennant quelques hypothèses restrictives (faible largeur de denture, charge transmise fixée, raideur linéique d'engrènement constante, ...), la minimisation des fluctuations de l'écart de transmission via une correction de profil linéaire a été présentée au paragraphe précédent. Pour les engrenages ayant un rapport de conduite inférieur à 2, une famille de corrections rend l'écart de transmission (quasi-) constante et d'autres critères sont nécessaires pour définir une seule correction optimale. Des estimations simplifiées de la contrainte en pied de dent, de la pression maximale de contact et des pertes par frottement sont présentées dans ce paragraphe pour apporter un éclairage complémentaire au problème de conception.

Effort linéique d'engrènement

En fonctionnement quasi-statique, en tout point M du plan de base, la charge linéique d'engrènement s'exprime par :

$$F_{lc}(M) = \pi(M)\tilde{k}_0 \left[\mathbf{V}^T \mathbf{X}_S - E_{max}(\tau) + e_E(M) \right] \quad (2.64)$$

où $\pi(M)$ est une fonction porte qui vaut 1 si $F_{lc}(M) > 0$ et 0 sinon.

En adimensionnant cet effort par l'effort linéique moyen $\tilde{k}_0 \delta_{m0}$ et en faisant apparaître l'écart de transmission, on obtient :

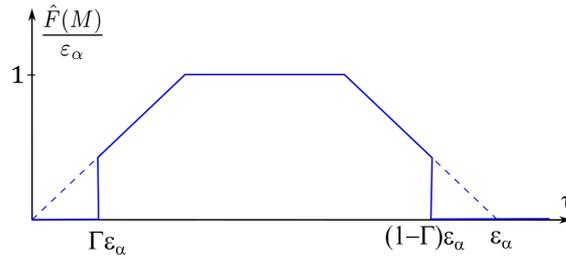
$$\hat{F}(M) = \pi(M) \left[\cos \beta_b T E_S^*(\tau) + e_E^*(M) \right] \quad (2.65)$$

En restreignant les corrections aux corrections de profils optimales pour $\varepsilon_\alpha < 2$ (tableau 2.1 et equation (2.58)), la charge linéique adimensionnée devient :

$$\hat{F}(M) = \pi(M) \left[\varepsilon_\alpha + e_E^*(M) \right] \quad (2.66)$$

où $\pi(M)$ est égal à l'unité si l'abscisse de M selon \vec{X} est compris entre $\lambda \varepsilon_\alpha$ et $(1 - \lambda) \varepsilon_\alpha$. La figure 2.16 illustre l'évolution de cette fonction pour le point M_{00} .

Un des principaux objectifs de l'utilisation de corrections de profil est d'éviter les interférences de fonctionnement induites par les déplacements élastiques des dentures chargées. Dans le modèle simplifié utilisé, cela se traduit par une charge à l'engagement nulle (critère utilisé pour la détermination du paramètre de réduction de longueur de contact λ). En présence d'écarts géométriques (écarts de pas par exemple), le point d'engagement peut éventuellement varier d'une dent à l'autre mais la charge linéique demeure nulle en ce point tant que l'engagement n'a pas lieu sur la ligne théorique AA' (figure 2.6).

FIGURE 2.16 – Évolution de la charge linéique adimensionnée $\hat{F}(M_{00})$

Pression maximale de contact

Les zones de contact entre les surfaces théoriques sont des lignes. En pratique, avec les différents écarts géométriques et les corrections de surface, les zones de contact sous charge sont plutôt des ellipses très allongées, parfois tronquées. Leurs surfaces très faibles induisent des niveaux de pression élevés et des contraintes de cisaillement importantes en sous-couche (profondeur voisine de 0,4 fois la largeur de contact) susceptibles de favoriser l'apparition et la propagation de fissures. En raison de la très faible épaisseur de lubrifiant dans les zones de contact et de vitesses de cisaillement généralement assez faibles, les modèles développés pour les contacts secs (Hertz [49], Johnson [58], Kalker [59], Lundberg [66], ...) sont largement utilisés dans ce contexte.

Les normes (ISO [56], AGMA [1], ...) utilisent comme critère de dimensionnement la pression maximale lorsque le contact est situé sur le cercle primitif de fonctionnement dont l'expression est de la forme :

$$\sigma_{Hmax} \cong K_H k_H \sqrt{\frac{\hat{F}(M)}{\rho_\alpha(M)}} \quad (2.67)$$

où $k_H = \sqrt{E_{eq} F_T \bar{k}_0}$ est constant pour une géométrie et un couple transmis fixés ; $\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$ est le module d'Young équivalent ; $F_T = F_S \cos \beta_b$ est la composante tangentielle de l'effort d'engrènement ; $\rho_\alpha(M) = x_\alpha(M)(1-x_\alpha(M))$ représente le rayon de courbure équivalent dimensionné ; $x_\alpha(M) = \frac{X(M)}{T_1 T_2}$ est l'abscisse du point de contact M sur l'axe \vec{X} (figure 2.4) dimensionné par la longueur du segment $T_1 T_2$. K est une constante regroupant les effets des conditions de fonctionnement, de la qualité de réalisation et de diverses sensibilités.

Dans le cas de corrections de profil optimales, l'expression de la pression maximale de contact se simplifie et cette fonction est monotone par morceaux : $\sigma_{Hmax}(M_{00}, \tau)$ est nulle pour $\tau = \lambda \epsilon_\alpha$, croissante pour $\tau \in [\lambda \epsilon_\alpha ; \Gamma \epsilon_\alpha]$, légèrement décroissante sur $[\Gamma \epsilon_\alpha ; \tau_{1/2}]$ ($\tau_{1/2}$ est l'abscisse où $x_\alpha(M) = 1/2$), à nouveau croissante sur $[\tau_{1/2} ; (1-\Gamma)\epsilon_\alpha]$ puis décroissante sur $[(1-\Gamma)\epsilon_\alpha ; (1-\lambda)\epsilon_\alpha]$ où elle finit à une valeur nulle. On en déduit que la valeur maximale est atteinte en

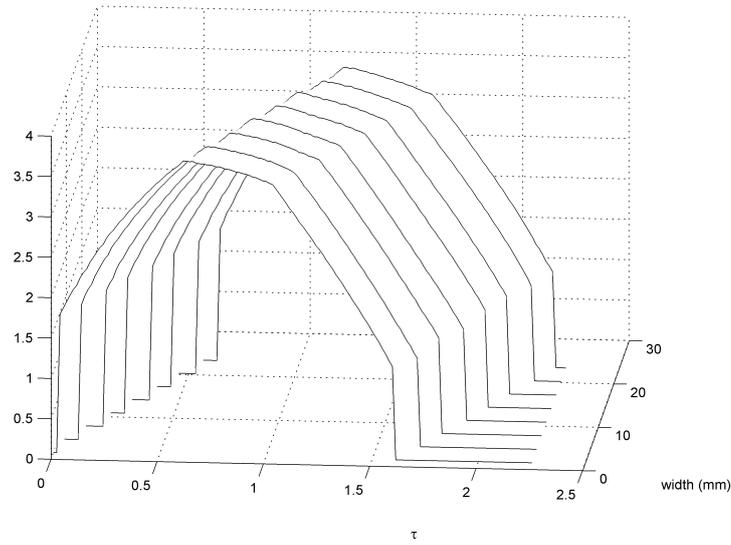


FIGURE 2.17 – Distribution de la pression maximale de contact sur le plan d’engrènement avec $\lambda = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \Gamma \varepsilon_\alpha \quad \text{si} \quad \frac{z_1 \left[1 + 2 \frac{\cos \beta}{z_1} (h_{a1} + x_1) \right]^2 - \cos^2 \alpha_t}{z_2 \left[1 + 2 \frac{\cos \beta}{z_2} (h_{a2} + x_2) \right]^2 - \cos^2 \alpha_t} < 1 \\ \tau = (1 - \Gamma) \varepsilon_\alpha \quad \text{sinon} \end{array} \right. \quad (2.68)$$

Si la valeur de $\tau_{1/2}$ n’est pas dans l’intervalle $[\Gamma \varepsilon_\alpha ; (1 - \Gamma) \varepsilon_\alpha]$, l’évolution est en trois parties. De plus, si l’indice 1 fait référence à la roue qui a le moins de dents ($z_1 < z_2$), c’est généralement le premier cas de l’équation (2.68) qui est rencontré en pratique. Un exemple de distribution de la pression maximale sur le plan d’engrènement est montré figure 2.17.

Contraintes en pied de dent

La limitation de la contrainte maximale de flexion en pied de dent est également un critère central des normes de vérification du dimensionnement des engrenages cylindriques. Selon la norme ISO6336, une approximation de cette contrainte est :

$$\sigma_F \cong \frac{F_T}{b m_n} Y_S Y_F K_F \quad (2.69)$$

où Y_S est un facteur de concentration de contrainte, dépendant de la géométrie mais pas du chargement, et Y_F et un facteur de forme, fonction de la position de la charge considérée sur le flanc de la dent. En première approximation, les autres facteurs regroupés dans le terme K_F (chargement, qualité de réalisation, etc.) sont supposés constants et n’influencent pas l’étude comparative de différentes corrections de surface.

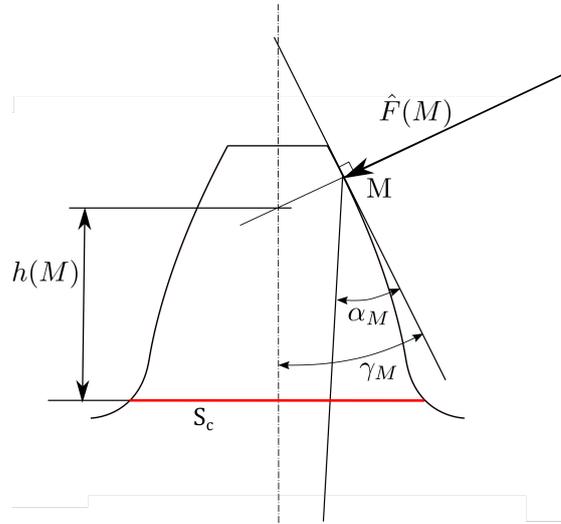


FIGURE 2.18 – Paramètres pour le calcul de contrainte en pied de dent (denture droite équivalente)

Pour une géométrie donnée, une forme locale pour chaque tranche mince peut être déduite de (2.69). En s'appuyant sur les résultats de J. Dufailly [37], la contrainte adimensionnée en pied de dent peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma_F^{\nabla} = \frac{\sigma_F}{\sigma_{F0}} = \hat{F}(M) \frac{h(M)}{m_n} \cos \gamma_M \quad (2.70)$$

où $h(M)$ est la longueur du bras de levier utilisé pour calculer le moment de flexion dans la section d'encastrement S_c de la dent ; γ_M est un angle dépendant de la position du point M d'application du chargement, il est défini figure 2.18 ; enfin, $\sigma_0 = 6Y_S \left(\frac{m_n}{S_c} \right)^2 \frac{F_S \tilde{k}_0}{m_n}$.

La contrainte maximale de flexion en pied de dent peut ensuite se développer de la façon suivante :

$$\sigma_F^{\nabla} = \hat{F}(M) \left[\frac{z_{n1} \cos \alpha_0}{2 \cos \left(\alpha_M - \left(\frac{s_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_M \right) \right)} - \frac{S_c}{2m_n} \tan \frac{\pi}{6} - \frac{z_{n1} \sin \psi}{2 \cos \frac{\pi}{6}} \right] \cos \left(\alpha_M - \left(\frac{s_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_M \right) \right) \quad (2.71)$$

où inv désigne la fonction *involute* ($\text{inv}(x) = \tan(x) - x$). L'angle ψ est défini dans la norme ISO6336-3 et apparaît dans l'expression de la section d'encastrement où est estimée la contrainte maximale. L'angle α_M est l'angle d'incidence (figure 2.18) qui s'obtient avec la relation :

$$\cos \alpha_M = \frac{r_{bn1}}{\sqrt{r_{bn1}^2 + \left(\frac{T_1 M}{\cos \beta_b} \right)^2}} \quad (2.72)$$

Suivant la norme ISO21771 [55], sur la ligne d'engrènement, le point A marque le début de l'engrènement et le point C est le point de roulement sans glissement. Pour alléger les écritures,

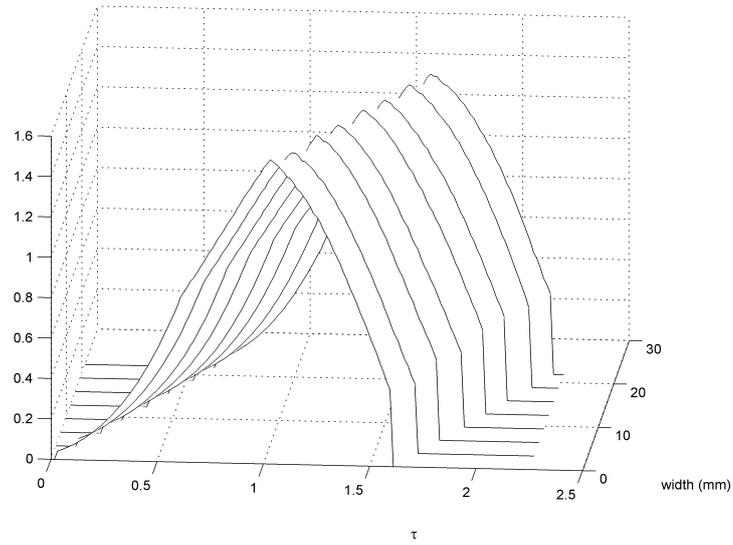


FIGURE 2.19 – Évolution de la contrainte maximale en pied de dent sur le plan d'action; $\lambda = 0$

nous notons $AC = \kappa_0 \varepsilon_\alpha p_{bt}$ et $AM_{00} = \tau p_{bt}$. De plus, on note respectivement z_{n1} et r_{bn1} le nombre de dents de la roue à denture droite virtuelle et son rayon de base.

La contrainte adimensionnée maximale est donnée par la relation :

$$\sigma_{F_{max}}^\nabla = \varepsilon_\alpha \left\{ \frac{z_1 \cos \alpha_0}{2 \cos^3 \beta} - K_1 \frac{\cos K_2 + K_3 \sin K_2}{\sqrt{1 + K_3^2}} \right\} \quad (2.73)$$

avec

$$\begin{cases} K_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{S_c}{2m_n} + z_{n1} \sin \psi \right] \\ K_2 &= \frac{s_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_M \\ K_3 &= \cos \beta_b \left[\tan \alpha_{wt} + \frac{2\pi}{z_1} (\tau - \kappa_0 \varepsilon_\alpha) \right] \\ \alpha_M &= \text{Arccos} \frac{1}{1 + K_3^2} \end{cases}$$

La figure 2.19 montre l'évolution de la contrainte maximale en pied sur le plan d'engrènement, avec $\lambda = 0$.

Puissance mécanique dissipée par frottement

Pour des vitesses périphériques pas trop élevées (< 60 m/s), le frottement entre les dentures est la source principale de perte de puissance mécanique transmise au niveau des dentures.

Selon Velex et Ville [104], la puissance transformée par les contacts glissants s'écrit :

$$P_f = f \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} \frac{\pi \varepsilon_\alpha}{\cos \beta_b} \Lambda \quad (2.74)$$

avec f le coefficient de frottement moyen et Λ un coefficient de perte dépendant de la position du point de roulement sans glissement (C) sur le segment de conduite AE, du rapport de conduite apparent ε_α et des corrections de profil E^* et Γ .

En considérant des paramètres de modification optimaux de profil (tableau 2.1) et suivant les développements proposés dans [97], une approximation analytique de Λ est obtenue en supposant que $f \ll 1$ sous la forme :

$$\Lambda \cong \frac{1 + 2(\kappa_0(\kappa_0 - 1) + \lambda(\lambda - 1)) - \frac{2E^*}{\Gamma \varepsilon_\alpha \left[\Gamma^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\Gamma}{3} \right) + \lambda \left(-\frac{2\lambda^2}{3} + \lambda\Gamma + \frac{\lambda}{2} - \Gamma \right) \right]}}{1 - \Gamma - \lambda} \quad (2.75)$$

Pour les corrections de profil optimales définies pour $\varepsilon_\alpha < 2$ par le tableau 2.1, ce coefficient ne dépend plus que de ε_α , Γ et κ_0 :

$$\Lambda \cong \varepsilon_\alpha \left[1 + 2 \left(\kappa_0(\kappa_0 - 1) - \left(\Gamma + \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \right) \left(1 - \Gamma - \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \right) \right) - \frac{2}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \left[\Gamma^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\Gamma}{3} \right) + \left(1 - \Gamma - \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \right) \left(\frac{-2}{3} \left(1 - \Gamma - \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \right)^2 - \Gamma \left(\Gamma + \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \right) \right) \right] \right] \quad (2.76)$$

Les valeurs limites du coefficient de perte pour une correction longue ($\Gamma \rightarrow \Gamma_L = \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{\varepsilon_\alpha}$) et courte ($\Gamma \rightarrow \Gamma_S = \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha}$) sont respectivement :

$$\Lambda_L \cong \varepsilon_\alpha \left[1 + 2\kappa_0(\kappa_0 - 1) - \frac{1}{3\varepsilon_\alpha^2} (\varepsilon_\alpha - 1)(\varepsilon_\alpha + 2) \right] \quad (2.77)$$

$$\Lambda_S \cong \varepsilon_\alpha \left[1 + 2\kappa_0(\kappa_0 - 1) - \frac{1}{2\varepsilon_\alpha^2} (\varepsilon_\alpha - 1)(\varepsilon_\alpha + 1) \right] \quad (2.78)$$

La différence de ces deux valeurs ne dépend que du rapport de conduite et garde un signe constant :

$$\Lambda_L - \Lambda_S = \frac{(\varepsilon_\alpha - 1)^2}{6\varepsilon_\alpha} > 0 \quad (2.79)$$

Ainsi, la quantité d'énergie transformée en chaleur par frottement avec une correction optimale longue est toujours supérieure à celle dégagée par une correction courte. De la même façon, les coefficients de perte Λ_L et Λ_S peuvent être comparés à celui obtenu par la formule classique de Niemann-Winter Λ_{NW} [80] établie sans modification des dents :

$$\Lambda_{NW} - \Lambda_L = \frac{(\varepsilon_\alpha - 1)^2}{3\varepsilon_\alpha} > 0 \quad (2.80)$$

Il est donc clair que l'introduction d'une correction de profil optimale est toujours bénéfique

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α_0 (°)	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
β (°)	0	25,648	0	20	20	0	0	0	21,538	15	8	11,38
z_1	32	17	26	26	14	33	25	33	29	44	26	24
z_2	32	71	157	157	87	75	33	50	56	44	141	53
b_1 (mm)	12,7	25	25	24,5	95	95	95	39,5	50	158	22	
b_2 (mm)	24	25	25	20	90	90	90	38	50	150	18	
h_{a1}/m_0	1	1,15	1	1	1,05	1	1	1	0,983	1	1	1
h_{a2}/m_0	1	1,13	1	1	1	1	1	1	0,983	1	1	1
h_{f1}/m_0	1,25	1,65	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,35	1,45	1,45	1,25
h_{f2}/m_0	1,25	1,62	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,2	1,45	1,45	1,25
ρ	0,24	0,25	0,24	0,24	0,2	0,4	0,4	0,4	0,25	0,3	0,35	0,4
ε_α	1,66	1,72	1,76	1,58	1,35	1,72	1,59	1,68	1,49	1,58	1,67	1,64
ε_β	0	1,03	0	0,68	1,09	0	0	0	1,27	1,03	1,33	0,41
Couple(Nm)	361	230	200	200	25	13 200	10 000	6600	2150	2000	4580	23

TABLEAU 2.3 – Macro-géométries

pour le rendement du système comparée à une transmission sans correction.

Éléments de validation

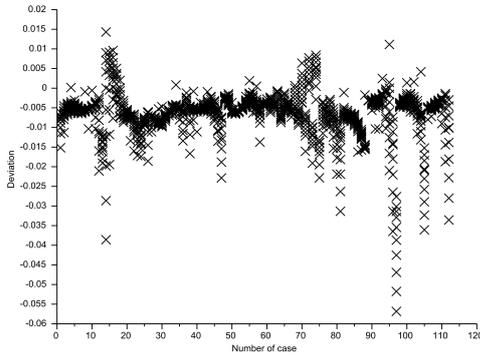
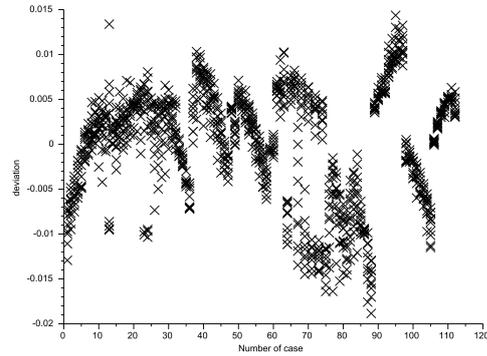
Pour avoir une idée de la qualité des indicateurs de performances analytiques définis précédemment, une série de comparaisons intensives est menée avec les résultats issus d'un modèle de simulation numérique. Ce modèle numérique comporte 36 degrés de liberté et il a été initialement conçu pour simuler la dynamique de l'engrènement prenant en compte des pertes mécaniques par frottement [102, 104]. Pour respecter au mieux les hypothèses du modèle analytique, les conditions de fonctionnement sont les suivantes :

- La vitesse de rotation du pignon est très faible afin de rendre négligeables les effets dynamiques ;
- La raideur linéique d'engrènement est constante. Elle est définie par la norme ISO6336 ;
- Le coefficient de frottement (modèle de Coulomb) est pris constant, indépendant de la charge, de la vitesse de glissement et autres paramètres de contact.

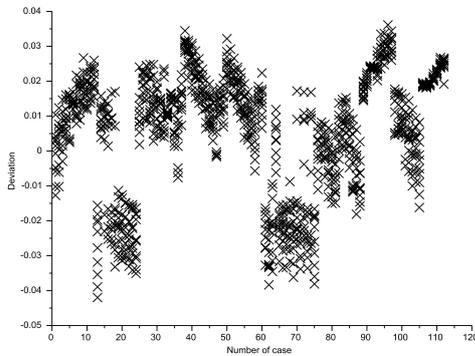
Afin de mener ce point de l'étude sur une diversité de macro-paramètres, 12 macro-géométries d'engrenages ont été définies (tableau 2.3). Pour chacune, plusieurs coefficients de déport ont été retenus sur un intervalle réaliste (respect des interférences, de l'épaisseur de dent minimale requise, ...) afin de diversifier les valeurs du paramètre κ_0 , soit au total 112 géométries différentes. Enfin, pour chaque jeu de paramètres, 10 corrections de profils optimum (tableau 2.1) ont été définies, générant 1120 cas de calcul.

Pour chacun des 1120 cas, les écarts relatifs entre les résultats issus du modèle numérique et ceux du modèle analytique sont estimés selon la formule :

$$\text{déviation} = \frac{\text{valeur numérique}}{\text{valeur analytique}} - 1 \quad (2.81)$$

a. Déviation sur le coefficient de perte Λ 

b. Déviation sur la pression maximale au contact



c. Déviation sur la contrainte en pied de dent

FIGURE 2.20 – Écarts (déviations) entre le modèle analytique et le modèle numérique

La figure 2.20 synthétise les dispersions des déviations pour le coefficient de perte Λ , la pression de contact maximale et la contrainte en pied de dent maximale. En valeur absolue, les déviations ne dépassent pas 6%, ce qui montre la pertinence du modèle analytique vis à vis du modèle numérique.

Diagramme de performance pour les corrections de profil optimales

La figure 2.21 représente sur un même graphe, en fonction de la longueur de correction optimale, les évolutions relatives du coefficient de perte par frottement, de la pression maximale, de la contrainte en pied de dent et $1 - \lambda$, chaque grandeur étant rapportée à sa valeur maximale.

Il est donc possible de tirer rapidement des conclusions générales (pour $\varepsilon_\alpha < 2$) de l'impact de la longueur de correction de profil minimisant les fluctuations de TE_S^* sur 3 autres critères de dimensionnement de l'engrenage. A partir d'une correction longue ($\Gamma = \Gamma_S$, $E^* = \varepsilon_\alpha$, $\lambda = 0$), une diminution de la longueur de contact optimale (augmentation de la profondeur de correction E^*) amène une réduction de la longueur de contact, une augmentation des contraintes et une baisse du coefficient de perte.

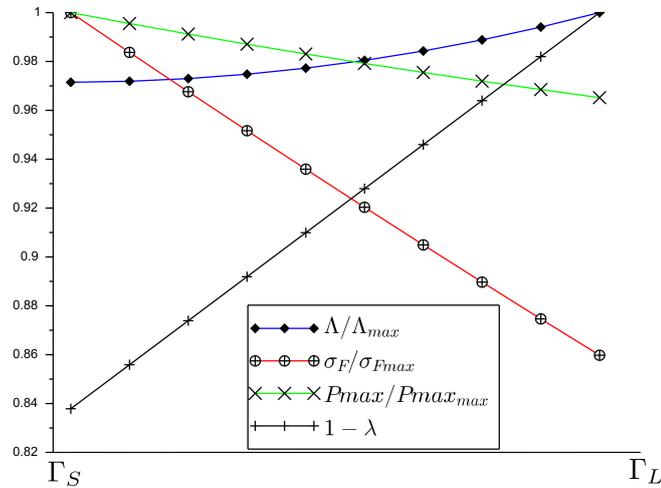


FIGURE 2.21 – Diagramme de performances

En conclusion, la formulation analytique de l'engrènement élastique quasi-statique de deux roues cylindriques permet la détermination explicite d'une famille de correction de profil qui rendent l'écart de transmission constant au cours du temps, limitant ainsi drastiquement la génération de vibration et de bruit. Étant donné que l'approche suivie permet également d'estimer à moindre coût 3 autres critères de dimensionnement, il est aisé de mettre en place les éléments d'une optimisation multi-critères. Ainsi, parmi les modifications qui optimisent l'écart de transmission, les corrections longues sont plus favorables aux contraintes et les corrections courtes conduisent à un meilleur rendement. Ces relations analytiques constituent des outils efficaces pour le pré-dimensionnement de transmissions.

2.3.2 Correction de profil à 2 pentes pour dentures droites HCR [100]

Contexte

Les engrenages droits fonctionnant avec un rapport de conduite de profil supérieur à 2 ($\varepsilon_\alpha > 2$) sont appelés *engrenages HCR* pour High Contact Ratio et ils ont la particularité d'avoir en permanence au moins 2 lignes de contact. Cette caractéristique est très favorable à la réduction des fluctuations des écarts de transmission et à la résistance mécanique des dentures. En contrepartie, ils présentent des vitesses de glissement plus importantes et ils sont également plus sensibles aux écarts géométriques [7, 60].

Les corrections de profil sur les dentures hautes sont tout aussi importantes que sur les dentures LCR (Low Contact Ratio) pour éviter l'interférence à l'engagement sous charge et réduire la valeur de la moyenne quadratique de l'écart de transmission. Les études portant sur cette géométrie particulière sont moins nombreuses. La répartition de la charge statique a été étudiée par Rosen et Flint [85], Elkholy [39], Wang et Howard [106] et l'analyse spécifique de l'influence de la modifications de profil a été examinée par Lee et al. [60], Lin et al. [64], Yildirim et Munro [111, 110], Tsai et Tsai [95], Ajmi et Vexel [5]. Les modifications de profil linéaires pour les engrenages "classiques" ($\varepsilon_\alpha < 2$) sont habituellement limitées à des corrections dites

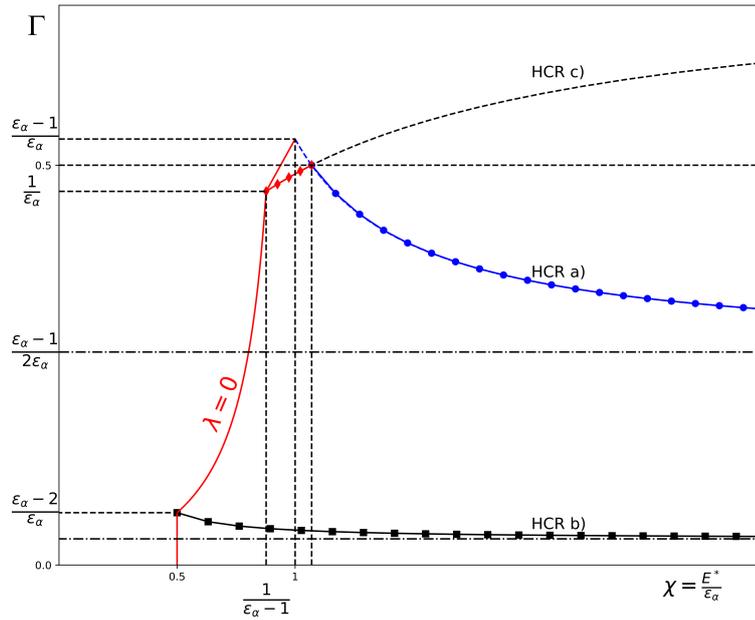


FIGURE 2.22 – 3 familles de corrections optimales pour les denture HCR droites

longues et courtes. En revanche, pour les dentures droites HCR, Yildirim et Munro [110], Yildirim [108, 109] proposent un nouveau type de double correction de profil, qui peut être vu comme la superposition d'une correction courte avec une correction longue, combinant les avantages des deux.

En utilisant les résultats de l'approche analytique (paragraphe 2.2 page 18), les résultats initialement montrés par Yildirim et Munro par d'autres approches, sont retrouvés. Mieux encore, une formulation explicite des corrections de profil à double pente est obtenue, fournissant un outil efficace de définition de telles modifications, pour une minimisation des fluctuations de TE_S^* sur une plage de couple donnée.

La figure 2.22 et le tableau 2.4 rappellent les familles de corrections de profil qui rendent l'écart de transmission constant vis à vis du temps pour les dentures HCR. Les trois familles de solutions sont notées a), b) et c).

Les évolutions temporelles de l'écart de transmission quasi-statique obtenues par les relations analytiques pour différentes charges montrent de nombreux points de similitude avec les relevés expérimentaux de Yildirim et Munro [111] (figure 2.23).

Correction linéaire à plusieurs pentes

D'après les résultats précédents, on distingue trois familles de correction de profil linéaires qui rendent l'écart de transmission constante :

$$TE_{S0}^{*(i)} = \frac{b\varepsilon_\alpha - \int_{L^{(i)}(\tau, \mathbf{X}_S)} e_{opt}^{*(i)}(M) dM}{L^{(i)}(\tau, \mathbf{X}_S)} \quad (2.82)$$

où l'exposant i fait référence aux 3 familles de correction optimale (tableau 2.4).

E^*	Domaine	λ	TE_{S0}^*
$E_a^* = \frac{\Gamma_a \varepsilon_\alpha}{2\Gamma_a - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}}$	$\Gamma_a \in]\frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha} ; \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{\varepsilon_\alpha}]$	$\lambda_a = 1 - \Gamma_a - \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$	$(\Gamma_a - \frac{\lambda_a}{\Gamma_a})E_a^*$
$E_b^* = \frac{\Gamma_b \varepsilon_\alpha}{2(2\Gamma_b - 1 + \frac{2}{\varepsilon_\alpha})}$	$\Gamma_b \in]\frac{\varepsilon_\alpha - 2}{2\varepsilon_\alpha} ; \frac{\varepsilon_\alpha - 2}{\varepsilon_\alpha}]$	$\lambda_b = 1 - \Gamma_b - \frac{2}{\varepsilon_\alpha}$	$(\Gamma_b - \frac{\lambda_b}{\Gamma_b})E_b^*$
$E_c^* = \frac{\Gamma_c \varepsilon_\alpha}{1 - 2\Gamma_c + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}}$	$\Gamma_c \in [\frac{1}{\varepsilon_\alpha} ; \frac{1}{2}]$	$\lambda_c = \Gamma_c - \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$	$(\Gamma_c - \frac{\lambda_c}{\Gamma_c})E_c^*$

TABLEAU 2.4 – Corrections de profil optimales pour les dentures HCR

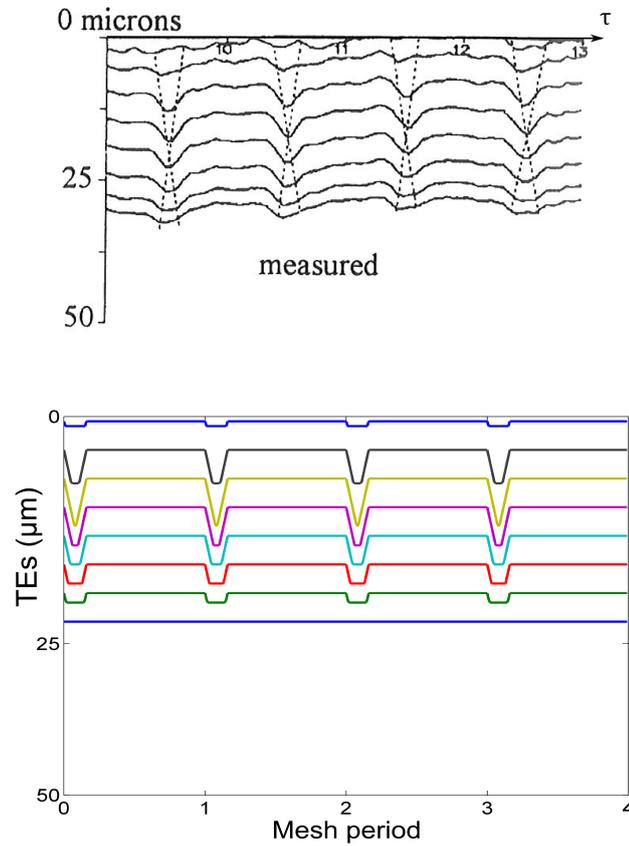


FIGURE 2.23 – Pour plusieurs charges, évolutions temporelles de l'écart de transmission quasi-statique mesurées [111] et prédites par les relations analytiques

Une sommation pondérée de ces équations s'écrit :

$$\sum_i \alpha_i TE_{S0}^{\star(i)} = \sum_i \alpha_i \left[\frac{b\varepsilon_\alpha - \int_{L^{(i)}(\tau, \mathbf{X}_S)} e_{opt}^{\star(i)}(M) dM}{L^{(i)}(\tau, \mathbf{X}_S)} \right] \quad (2.83)$$

En supposant que les zones de contact effectives sont les mêmes pour chaque équation, i.e; $L^{(i)}(\tau, \mathbf{X}_S) = L(\tau, \mathbf{X}_S)$ et en prenant $\sum_i \alpha_i = 1$, l'équation (2.83) se transforme en :

$$TE_{\Sigma S0}^{\star} = \frac{b\varepsilon_\alpha - \int_{L(\tau, \mathbf{X}_S)} \sum_i \alpha_i e_{opt}^{\star(i)}(M) dM}{L(\tau, \mathbf{X}_S)} \quad (2.84)$$

qui montre qu'une combinaison linéaire des corrections de profil optimales $\sum_i \alpha_i e_{opt}^{\star(i)}(M)$ conduit également à un écart de transmission quasi-statique constant $TE_{\Sigma S0}^{\star} = \sum_i \alpha_i TE_{S0}^{\star(i)}$. A noter que l'adimensionnement est réalisé avec la déflexion de référence δ_{m0} qui est unique pour une charge donnée.

Des zones de contact identiques imposent des coefficients de réduction de longueur de contact $\lambda^{(i)}$ semblables pour chaque modification prise individuellement. La charge correspondant au cas limite où le coefficient λ est nul, est retenue comme chargement nominal C_{m0} . Dans cette situation ($\lambda = 0$), les 3 longueurs de correction optimale (tableau 2.4) potentielles sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_a = 1 - \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \\ \Gamma_b = 1 - \frac{2}{\varepsilon_\alpha} \\ \Gamma_c = \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \end{array} \right. \quad (2.85)$$

Du point de vue de la conception, les longueurs de correction symétriques adimensionnées sont limitées à 0,5. Cette limite conduit à corriger l'ensemble de la zone potentielle de contact. Avec des corrections plus longues encore, il y aurait une zone de recouvrement et elles seraient équivalentes, à un mouvement de corps indéformable près, à une correction de profil de longueur 0,5 et le profondeur réduite par rapport aux valeurs de conception.

Pour les dentures HCR ($\varepsilon_\alpha > 2$), cela conduit à exclure la solution Γ_a . La correction retenue est une combinaison des deux autres, association d'une correction courte et d'une longue (figure 2.24) :

$$e_{opt}^{\star}(M) = \alpha e_{opt}^{\star(b)}(M) + (1 - \alpha) e_{opt}^{\star(c)}(M) \quad (2.86)$$

Les résultats en terme d'écart de transmission obtenus avec le modèle analytique sont comparés avec les mesures expérimentales de Yildirim et Munro [110] (figure 2.25) qui ont testé un engrenage droit à denture HCR, possédant une correction de profil à 2 pentes. Dans ce cas, le coefficient de pondération α est estimé à 0,83. A nouveau, les deux familles de signaux montrent une bonne similitude, le modèle mis en place apparaît efficace.

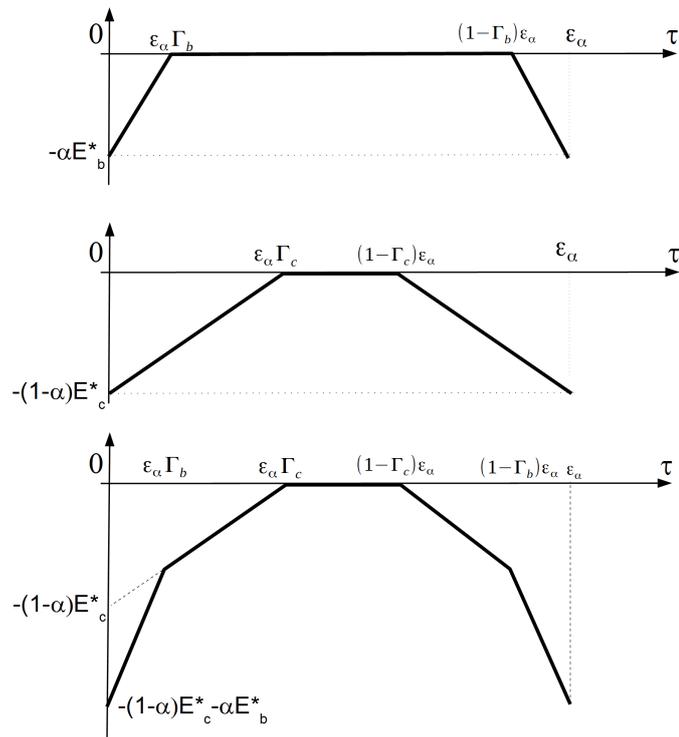


FIGURE 2.24 – Combinaison d’une correction longue et d’une correction courte pour former une correction à 2 pentes

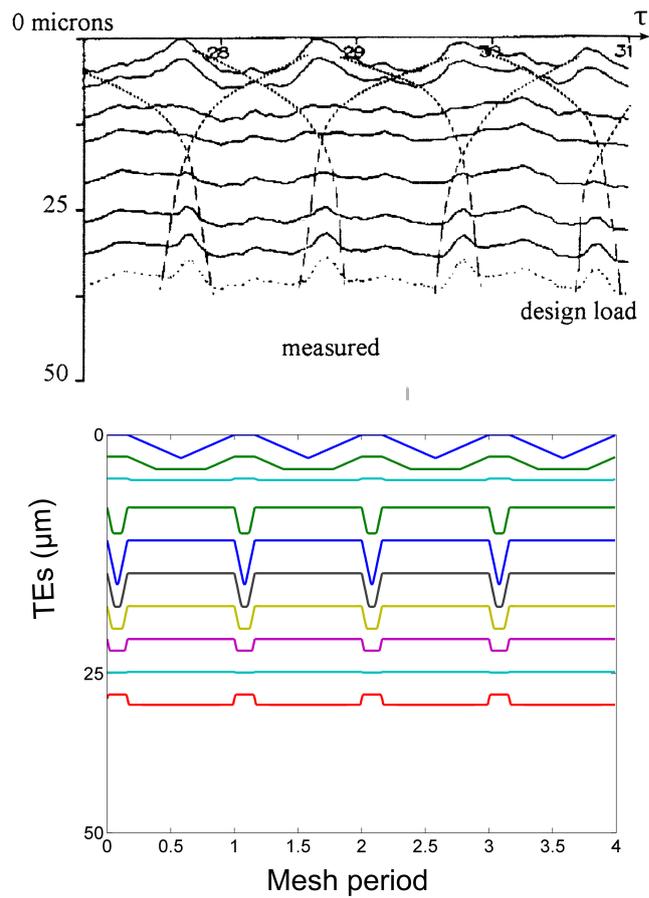


FIGURE 2.25 – Écarts de transmission quasi-statique mesurés [110] et simulés pour différentes charges, denture HCR, correction de profil symétrique à double pente

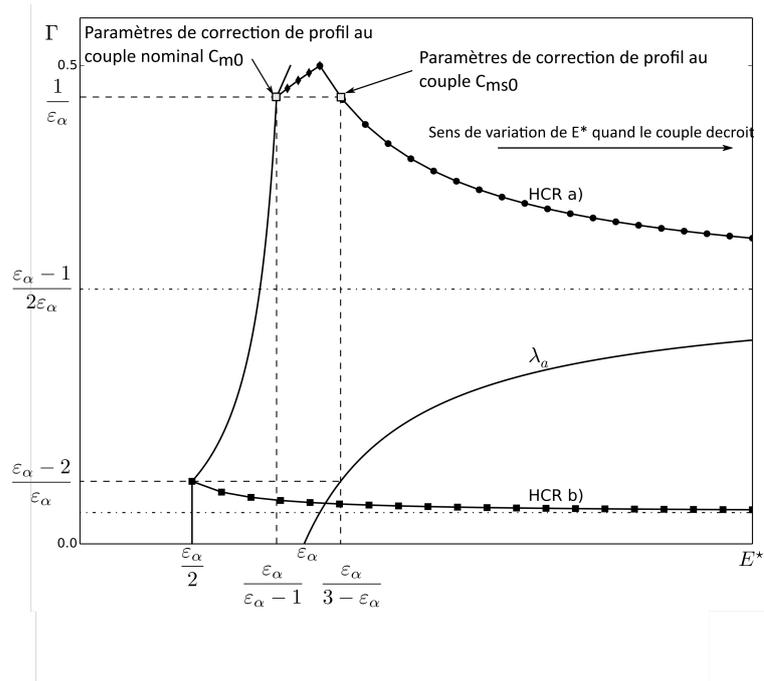


FIGURE 2.26 – Positionnement des deux charges optimales

Profondeur de correction et second optimum

Pour le couple nominal C_{m0} et selon les hypothèses du présent modèle, les profondeurs (dimensionnelles) des corrections optimales de base sont les suivantes :

$$E_b = \frac{C_{m0}}{2\bar{k}_0 b r_{b1}} \quad \text{et} \quad E_c = \frac{C_{m0}}{(\varepsilon_\alpha - 1)\bar{k}_0 b r_{b1}} \quad (2.87)$$

Sur le graphe (E^*, Γ) figure 2.26 où sont représentées les familles de corrections optimales adimensionnées, une modification de profil réelle (E, Γ) , sous un chargement donné, correspond à un point. Une augmentation du couple transmis engendre un accroissement de la déflexion statique δ_{m0} et ainsi, un déplacement horizontal vers la gauche (plus petites valeurs de E^*) du point représentatif de la même correction physique. Comme cela est illustré sur la figure 2.26, la correction longue $(E_c^*, \Gamma_c, \lambda_c = 0)$ définie au couple nominal, annule les fluctuations de TE_S^* . Lorsque le couple diminue, ce point se déplace vers la droite et vient couper le lieu des corrections optimales de la famille «a». Un second optimum pour le RMS de TE_S^* existe donc pour un couple plus faible, noté C_{ms0} . Dans cet état, la réduction de longueur de contact est suffisante pour effacer totalement l'influence de la correction courte : $\lambda_a = \Gamma_b = 1 - \frac{2}{\varepsilon_\alpha}$. Puisque l'abscisse de ce point sur le diagramme adimensionné est $E^* = \frac{\varepsilon_\alpha}{3 - \varepsilon_\alpha}$, l'amplitude d'enlèvement de matière est :

$$(1 - \alpha)E_c^*(C_{ms0}) = \frac{\varepsilon_\alpha}{3 - \varepsilon_\alpha} = E_a^*(C_{m0}) \quad (2.88)$$

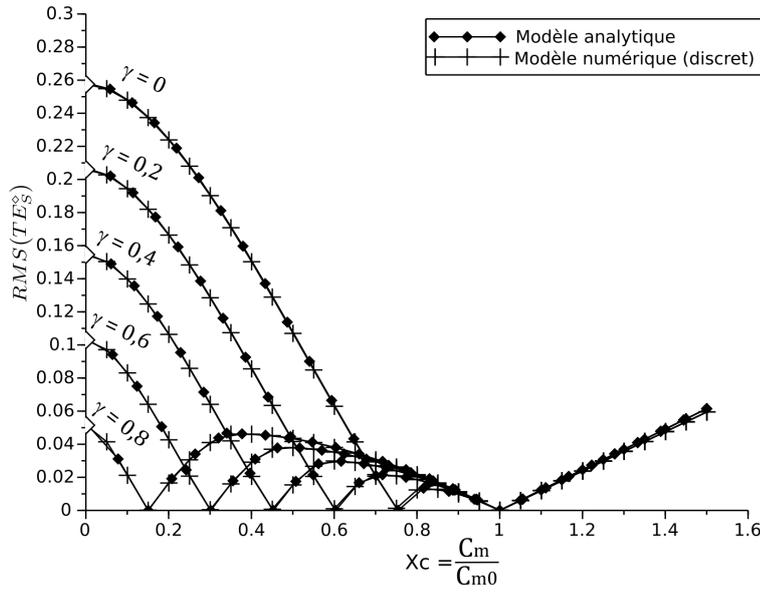


FIGURE 2.27 – RMS de TE_s en fonction du couple et du paramètre de pondération α

On peut en déduire le rapport entre les deux couples qui annulent les fluctuations de l'écart de transmission :

$$\frac{C_{mS0}}{C_{m0}} = (1 - \alpha) \frac{3 - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha - 1} \quad (2.89)$$

Évolution de la moyenne quadratique de TE_s en fonction de la charge

Pour des charges très faibles, la déflexion statique prend également des valeurs très petites et les grandeurs adimensionnées par ce paramètre prennent des proportions qui n'ont plus de sens physique. Pour cette raison, l'adimensionnement de l'écart de transmission évolue : la déflexion statique de référence est prise à la charge nominale C_{m0} :

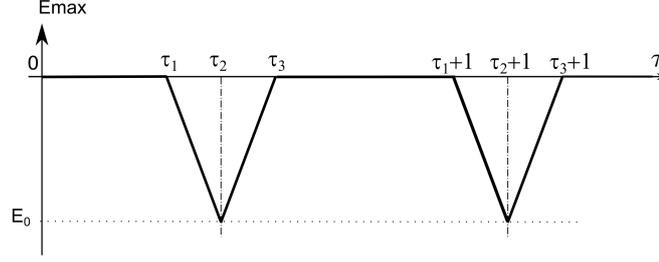
$$\delta_{mC0} = \frac{C_{m0}}{r_{b1} \bar{k}_0 b \varepsilon_\alpha} \quad (2.90)$$

Les objets adimensionnés par ce paramètre sont notés avec le symbole « \diamond » en exposant :

$$A^\diamond = \frac{A}{\delta_{mC0}} = X_c A^\star \quad (2.91)$$

avec $X_c = \frac{C_m}{C_{m0}}$

La figure 2.27 montre les évolutions du RMS de TE_s^\diamond pour plusieurs valeurs du coefficient de pondération α et pour une charge de fonctionnement C_m variant de 0 à 1,6 fois la charge nominale. Les marques en forme de losanges noirs positionnent les points calculés à partir de la formulation analytique et les marques en forme de plus, correspondent aux résultats estimés avec un modèle numérique (raideur linéique constante). L'accord entre ces résultats est excellent et l'existence de deux chargements optimum vis à vis des fluctuations de l'écart de transmission

FIGURE 2.28 – Évolution de E_{max}

quasi-statique est confirmée. Le rapport de ces couples vérifie la relation (2.89). A noter que la prise en compte d'une raideur d'engrènement plus réaliste a tendance à effacer le second optimum pour de faibles valeurs de α mais sa présence est bien marquée pour des valeurs plus fortes [15, 100].

Lorsque la charge tend à s'annuler, la déflexion statique moyenne δ_{m0} tend vers zéro et l'écart de transmission quasi-statique se rapproche de l'écart de transmission sans charge (NLTE). En denture droite, elle est confondue avec la valeur de E_{max} (équation (2.3)). Son évolution au cours du temps est représentée figure 2.28 avec $\tau_1 = (1 - \Gamma_c)\varepsilon_\alpha$, $\tau_2 = \frac{\varepsilon_\alpha + 1}{2}$, $\tau_3 - \tau_2 = \tau_2 - \tau_1$ et $E_0 = E\left(\frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\Gamma_c\varepsilon_\alpha} - 1\right)$. Celle-ci est non uniformément nulle pour $\tau_1 < \tau_2$ i.e. $(1 - 2\Gamma_c)\varepsilon_\alpha < 1$, condition toujours satisfaite pour $\Gamma_c = \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$. La fonction E_{max} étant périodique, de période 1, elle peut s'exprimer sous forme d'une série de Fourier :

$$E_{max}(\tau) = E_0 \left[\Delta + \frac{2}{\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n \Delta)}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n (2\tau - \varepsilon_\alpha - 1)) \right] \quad (2.92)$$

avec $\Delta = \tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_\alpha(2\Gamma_c - 1) + 1) = \frac{3\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha}$

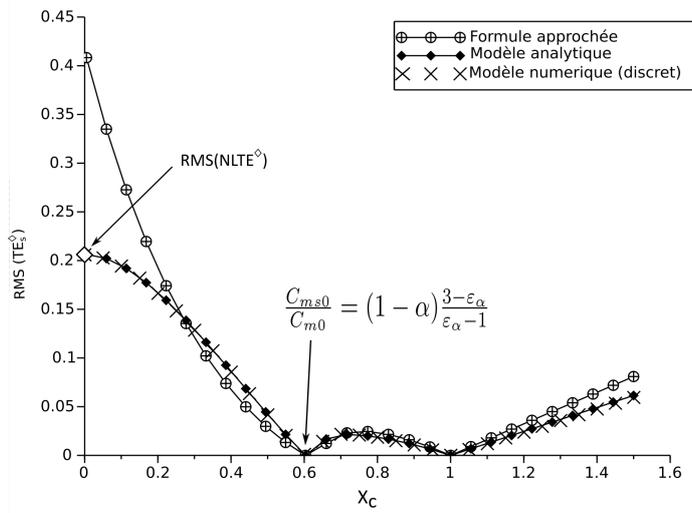
En utilisant la relation (2.52) pour estimer le RMS de E_{max} , puis la relation (6.152) pour exprimer la limite de la série, on obtient finalement :

$$RMS(E_{max}) = RMS(NLTE) = (1 - \alpha)E_c \frac{3 - \varepsilon_\alpha}{4} \sqrt{\frac{(3 - \varepsilon_\alpha)(3\varepsilon_\alpha - 5)}{3}} \quad (2.93)$$

Sur la figure 2.27, les valeurs du RMS de E_{max} estimées selon l'équation (2.91) sont représentées par des losanges blancs en $X_c = 0$.

Expressions approchées du RMS de TE_5^*

Afin de simplifier les équations et les manipulations (calcul du RMS pour chaque jeu de paramètres ...) et rendre ces résultats directement utilisables par un concepteur, une expression approchée du RMS de l'écart de transmission quasi-statique est proposée. En suivant la démarche décrite en 2.2.1 page 24 et pour une denture droite HCR munie d'une correction de profil à

FIGURE 2.29 – RMS de TE_s^\diamond en fonction de la charge, avec $\alpha = 0,2$

double pente, le carré du moment quadratique de TE_S^\star est approché par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 RMS^2(TE_S^\star) = & \frac{2}{(1-2\lambda)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(1-2\lambda)] + \right. \\
 & \alpha \frac{E_b^\star}{\Gamma_b} (\Gamma_b - \lambda)(1 - \Gamma_b - \lambda) \left[\text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(1-2\lambda)] - \text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(\Gamma_b - \lambda)] \text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(1 - \Gamma_b - \lambda)] \right] \\
 & \left. + (1-\alpha) \frac{E_c^\star}{\Gamma_c} \frac{C_{m0}}{C_m} (\Gamma_c - \lambda)(1 - \Gamma_c - \lambda) \left[\text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(1-2\lambda)] - \text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(\Gamma_c - \lambda)] \text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(1 - \Gamma_c - \lambda)] \right] \right\}^2
 \end{aligned} \quad (2.94)$$

Pour une étude avec un chargement variable, l'adimensionnement est réalisé avec la déflexion statique δ_{m0} associée au couple nominal C_{m0} . Selon (2.91), le RMS de l'écart de transmission devient :

$$\begin{aligned}
 RMS^2(TE_s^\diamond) = & \frac{2X_c^2}{(1-2\lambda)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(1-2\lambda)] + \right. \\
 & \alpha \frac{E_b^\diamond}{X_c \Gamma_b} (\Gamma_b - \lambda)(1 - \Gamma_b - \lambda) \left[\text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(1-2\lambda)] - \text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(\Gamma_b - \lambda)] \text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(1 - \Gamma_b - \lambda)] \right] \\
 & \left. + (1-\alpha) \frac{E_c^\diamond}{X_c \Gamma_c} \frac{C_{m0}}{C_m} (\Gamma_c - \lambda)(1 - \Gamma_c - \lambda) \left[\text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(1-2\lambda)] - \text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(\Gamma_c - \lambda)] \text{Sinc}[k\epsilon_\alpha(1 - \Gamma_c - \lambda)] \right] \right\}^2
 \end{aligned} \quad (2.95)$$

Sur la figure 2.29, on peut voir les évolutions du RMS de l'écart de transmission suivant le

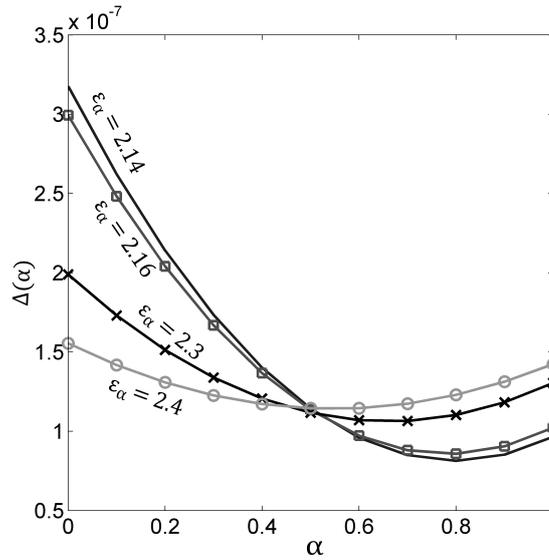


FIGURE 2.30 – RMS moyen sur une plage de couple, pour différentes valeurs du rapport de conduite

modèle analytique de base (2.82), la forme approchée (2.95) et le modèle numérique. L'équation approchée prédit correctement les deux minima mais n'est plus aussi efficace pour de très faibles couples.

Paramètre de pondération α

Sachant que pour la plupart des applications industrielles, la correction de profil doit optimiser le fonctionnement de la transmission sur une plage de couples de fonctionnement, le choix du paramètre α peut correspondre à une optimisation sur cette plage, en fonctionnement quasi-statique. Un premier critère de sélection proposé est la moyenne du RMS sur l'intervalle de couple :

$$\nabla_{\alpha} = \frac{1}{C_{m0} - C_{min}} \int_{C_{min}}^{C_{m0}} RMS(TE_s) dC_m \quad (2.96)$$

La figure 2.30 montre les évolutions du RMS moyen ∇_{α} sur un intervalle où $C_{min} \approx 0$ et pour différentes valeurs du rapport de conduite. Ce graphique illustre la possibilité de choisir la valeur du paramètre de pondération qui minimise la sensibilité du RMS. A priori, cette valeur dépend du rapport de conduite et de la plage de couple de fonctionnement.

Un autre critère couramment employé est la charge maximum appliquée sur une dent au cours de l'engrènement. Cette caractéristique est fonction du pourcentage de correction longue et courte (figure 2.31) et, dans une moindre mesure, du rapport de conduite.

Comme attendu, les corrections courtes (α proche de 1) amènent à un chargement maximum plus faible sur les dents.

En conclusion de ces développements concernant uniquement les dentures droites HCR ayant une raideur linéique constante, une famille de corrections de profil à deux pentes est

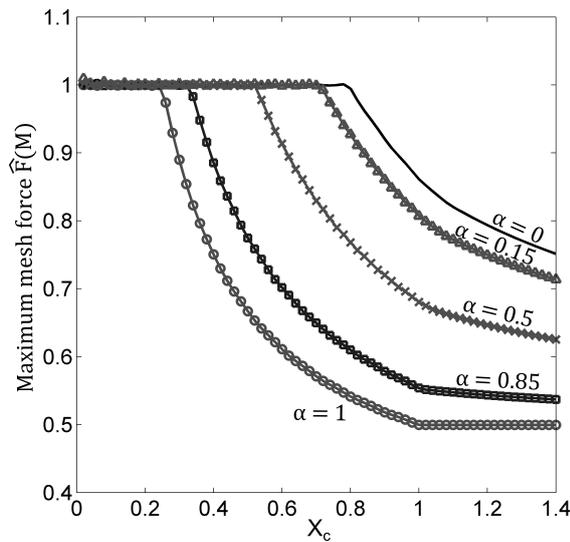


FIGURE 2.31 – Effort adimensionné d’engrènement sur une dent, fonction de la valeur de α et du rapport de charge X_c

construite en combinant une correction longue avec une correction courte. Les caractéristiques principales de l’écart de transmission obtenu pour cette géométrie sont les suivantes :

- Au couple nominal C_{m0} , les fluctuations de l’écart de transmission sont minimales ;
- Il existe un couple $C_{ms0} < C_{m0}$ (2.89) pour lequel le RMS de TE_s présente un second minimum. La valeur relative de cette charge par rapport à C_{m0} dépend du coefficient de pondération α et du rapport de conduite ε_α ;
- Pour déterminer la valeur du paramètre α , deux autres critères simples peuvent être utilisés : i) la moyenne du RMS de TE_s sur une plage de couple (2.95) ou la charge maximale supportée par une dent.

Les résultats analytiques montrent une bonne corrélation avec ceux obtenus sur la base de modèles numériques et avec la bibliographie dans la mesure où les déplacements élastiques des corps des roues sont négligeables. Les définitions des corrections optimales sont obtenues très rapidement et constituent un outil efficace de préconception de modification de profil pour dentures HCR.

2.3.3 Prise en compte d’un modèle de raideur linéique d’engrènement affiné

Une des hypothèses restrictives du modèle présenté en 2.2 page 18 est de considérer la raideur linéique l’engrènement constante. Ce choix permet de simplifier l’expression de TE_s^* au point de pouvoir déterminer des corrections de profil qui rendent l’écart de transmission invariant au cours du temps. En fait, il est encore possible de déterminer une correction de profil optimale vis à vis des fluctuations de l’écart de transmission en relâchant un peu cette hypothèse [14]. De nombreux modèles numériques [12, 86, 87, 42, 18, 22, 27, 30, 68, 75] mettent en évidence un assouplissement du contact entre dents à l’engagement et au retrait (plus grande souplesse de la dent au voisinage de son sommet). Suivant ces constatations, la raideur par unité de longueur adimensionnée est prise sous la forme :

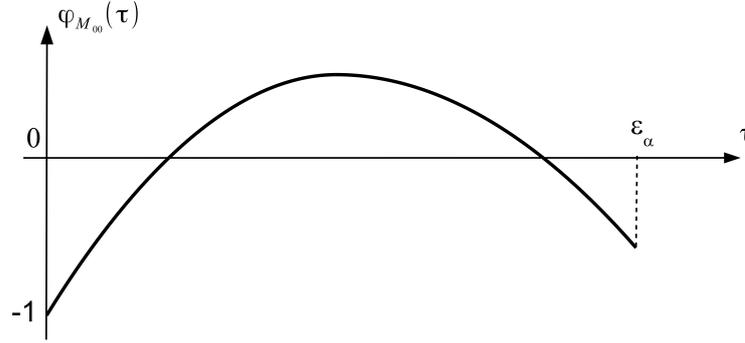


FIGURE 2.32 – Forme de la fonction φ_M qui caractérise l'évolution de la raideur au point de contact M_{00} au cours de l'engrènement

$$\tilde{k}(M_{00}) = \tilde{k}_{m0}(1 + \alpha\varphi_M(\tau)) \quad (2.97)$$

où \tilde{k}_{m0} est la valeur moyenne de \tilde{k} sans réduction de longueur de contact, α est un paramètre numérique compris entre 0 et 1, la fonction $\varphi_M(\tau)$ porte l'évolution de la raideur linéique en fonction du temps ou de la position du point M_{00} dans le plan de base. Cette fonction est normalisée de la façon suivante : $\max_{\tau \in [0; \epsilon_\alpha]} |\varphi_M(\tau)| = 1$. Elle est représentée figure 2.32. L'impact des modifications de forme (micrométriques) est supposé du second ordre sur la raideur d'engrènement locale.

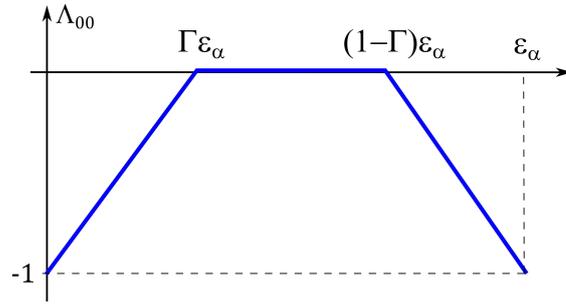
Optimisation du profil par la méthode des perturbations

Elle peut être vue comme une méthode mathématique heuristique permettant d'obtenir une solution approchée d'une équation [51]. La solution est recherchée sous la forme de la somme d'une série de fonctions, chacune multipliée par une puissance d'un «petit» paramètre α compris entre 0 et 1. Le premier terme de la décomposition est la solution de l'équation de départ tronquée. Les termes suivants apportent des corrections à la solution initiale plongée dans l'équation complète. Techniquement, en écrivant que la somme des termes de la même puissance α^n est nulle, on obtient une série de relations qui permettent de déterminer les composantes de la fonction approchée de façon itérative.

Dans l'expression de la raideur linéique (2.97), le paramètre α est retenu comme «petit» paramètre intervenant dans la solution approchée de (2.28) qui se réécrit :

$$TE_S^*(\tau) \cos \beta_b = \frac{1 + \frac{\cos \beta_b}{b \epsilon_\alpha} \int_{L(\tau, X_s)} (1 + \alpha \varphi_M(\tau)) e^*(M) dM}{\frac{\cos \beta_b}{b \epsilon_\alpha} \int_{L(\tau, X_s)} (1 + \alpha \varphi_M(\tau)) dM} \quad (2.98)$$

Le problème est de trouver une correction de profil e^* qui minimise les fluctuations de TE_S^* , pour une évolution de la raideur linéique donnée. On suppose que la solution recherchée demeure au voisinage de celle obtenue pour une raideur linéique constante e_0^* (2.29) et que la réponse en écart de transmission s'écarte peu de la fonction définie en (2.32) ($\alpha = 0$). Ces deux fonctions sont recherchées sous les formes suivantes :

FIGURE 2.33 – Fonction unitaire $\Lambda_{00}(\tau)$ associée à la correction de profil e_0^*

$$TE_S^*(\tau) = TE_{S_0}^*(\tau) + \alpha TE_{S_1}^*(\tau) + \alpha^2 TE_{S_2}^*(\tau) + \dots \quad (2.99)$$

$$e^*(M) = e_0^*(M) + \alpha e_1^*(M) + \alpha^2 e_2^*(M) + \dots \quad (2.100)$$

En injectant les relations (2.99) et (2.100) dans l'expression de l'écart de transmission (2.98), puis en écrivant que la somme des termes de même puissance en α est nulle, on obtient le système :

Ordre zéro :

$$TE_{S_0}^*(\tau) \cos \beta_b \frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X}_s)} dM = 1 - \frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X}_s)} e_0^*(M) dM \quad (2.101)$$

Ordre $n > 1$:

$$\int_{L(\tau, \mathbf{X}_s)} \left[TE_{S_n}^*(\tau) \cos \beta_b + e_n^*(M) + \varphi_M(\tau) \left(TE_{S_{n-1}}^*(\tau) \cos \beta_b + e_{n-1}^*(M) \right) \right] dM = 0 \quad (2.102)$$

La relation (2.101) est, par construction, la solution du paragraphe 2.2 page 18. Dans ce cas, l'écart de transmission est constant et sa valeur est (2.58) :

$$\cos \beta_b TE_{S_0}^* = \frac{\Gamma - \lambda}{\Gamma} E_0^* \quad (2.103)$$

Afin d'alléger les notations, la correction en tête linéaire et symétrique est notée

$$e_0^*(M_{00}) = E_0^* \Lambda_{00}(\tau) \quad (2.104)$$

avec la fonction unitaire $\Lambda_{00}(\tau)$ représentée figure 2.33.

Les équations du type (2.102) doivent être vérifiées à tout instant, quelque soit le domaine d'intégration $L(\tau, \mathbf{X}_s)$. La fonction intégrée étant régulière, cela implique que l'intégrande est identiquement nul :

$$\forall M \in L(\tau, \mathbf{X}_s) \quad TE_{S_n}^*(\tau) \cos \beta_b + e_n^*(M) + \varphi_M(\tau) \left(TE_{S_{n-1}}^*(\tau) \cos \beta_b + e_{n-1}^*(M) \right) = 0 \quad (2.105)$$

La condition pour que l'écart de transmission total soit constant implique que tous les termes de sa décomposition (2.99) soient également invariants. De plus, la relation (2.105) fournit un moyen récurrent pour améliorer la forme de la correction de profil afin de tendre vers une transmission sans fluctuation d'écart. En exprimant la condition pour $n = 1$ et en suivant le point M_{00} (pas de déphasage entre $e_n^*(M)$, $\varphi_M(\tau)$ et $e_{n-1}^*(M)$) :

$$e_1^*(M_{00}) = -\varphi_M(\tau) \left(\cos \beta_b T E_0^* + e_0^*(M_{00}) \right) - \cos \beta_b T E_{S1}^* \quad (2.106)$$

Avec les deux premiers termes, la correction de profil totale est donc :

$$e_{01}^*(M_{00}) = e_0^*(M_{00}) + \alpha e_1^*(M_{00}) = E_0^*(\tau) \left[\Lambda_{00}(\tau) - \alpha \varphi_M(\tau) \left(\frac{\Gamma - \lambda}{\Gamma} + \Lambda_{00}(\tau) \right) \right] + C \quad (2.107)$$

Cette modification est connue à une constante près ($C = -\alpha \cos \beta_b T E_{S1}^*$). Étant donnée qu'elle touche uniformément toutes les surfaces, de cette partie de la correction va découler un mouvement de solide indéformable (décalage de la valeur moyenne) mais cela ne va pas influencer les fluctuations de l'écart de transmission. Pour cette raison, cette constante sera considérée nulle.

Les nouvelles corrections définies par la relation (2.107) sont basées sur les corrections optimales définies dans le tableau 2.1, elles suivent donc les mêmes conditions. Pour un rapport de conduite inférieur à 2, l'allure de la nouvelle correction de profil est montrée figure 2.34. Ce profil théorique présente deux points anguleux mais il faut noter une grande différence d'échelle entre des deux axes de la représentation. En supposant que l'on soit capable de réaliser une telle correction, le rodage atténuerait rapidement ces zones de discontinuité des tangentes.

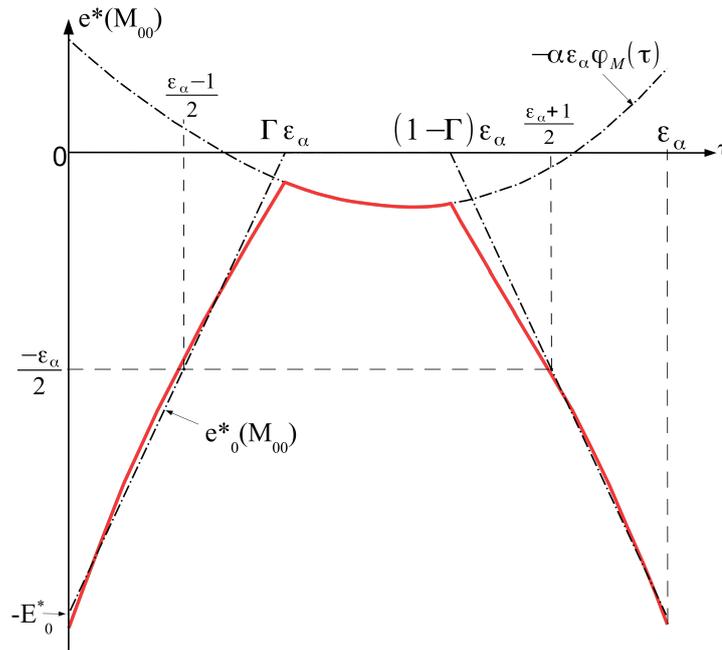


FIGURE 2.34 – Allure de la correction définie équation (2.106)

Pour une denture LCR, la nouvelle correction de profil peut se mettre sous la forme explicite suivante :

$$e_{01}^*(M_{00}) = \begin{cases} \frac{1}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \left[\tau - \Gamma\varepsilon_\alpha - \alpha(\tau - \varepsilon_\alpha(1 - \Gamma) + 1) \right] \varphi_M(\tau) & \text{pour } \tau \in [0 ; \Gamma\varepsilon_\alpha] \\ -\alpha\varepsilon_\alpha \varphi_M(\tau) & \text{pour } \tau \in [\Gamma\varepsilon_\alpha ; (1 - \Gamma)\varepsilon_\alpha] \\ \frac{-1}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \left[\tau - \varepsilon_\alpha(1 - \Gamma) + \alpha(\varepsilon_\alpha\Gamma + 1 - \tau) \right] \varphi_M(\tau) & \text{pour } \tau \in [(1 - \Gamma)\varepsilon_\alpha ; \varepsilon_\alpha] \end{cases} \quad (2.108)$$

Il est intéressant de noter que la famille de corrections définie par la relation (2.108) possède 2 points fixes, indépendants de la longueur de correction Γ , correspondant à la correction dite *courte* :

$$e_{01}^*\left(\frac{\varepsilon_\alpha \pm 1}{2}\right) = -\frac{\varepsilon_\alpha}{2} \left[1 + \alpha \varphi_M\left(\frac{\varepsilon_\alpha \pm 1}{2}\right) \right] \quad (2.109)$$

Ainsi, des corrections plus courtes ne peuvent pas minimiser le RMS de l'écart de transmission.

Le profil de correction ainsi établi présente une grande similarité avec les résultats de Cai et Hayashi [17] conduisant à minimiser la réponse dynamique d'un modèle de transmission à un seul degré de liberté torsionnel ($\varepsilon_\alpha < 2$).

Évaluation du nouveau profil

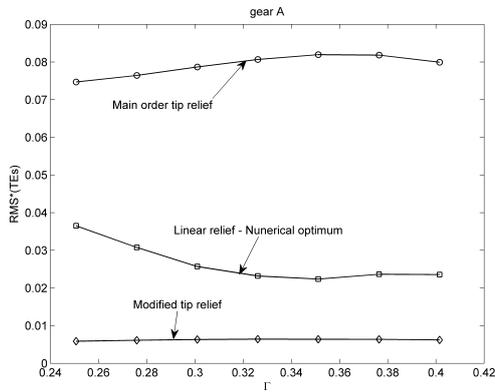
La pertinence de la nouvelle correction est évaluée en utilisant un modèle numérique de simulation de l'engrènement dans lequel la raideur linéique d'engrènement est estimée selon les modèles non linéaires de Weber et Banaschek [107]. Quatre géométries, dont les paramètres sont précisés dans le tableau 2.5, sont utilisées et permettent de traiter un cas de denture droite LCR (géométrie A), un cas de denture HCR avec les 3 familles de corrections optimales (géométrie B) et deux cas de dentures hélicoïdales avec des rapports de recouvrement plus ou moins importants (géométrie C et D).

Pour la première série de tests, les calculs sont menés à une vitesse faible et les comparaisons portent sur la valeur du RMS de l'écart de transmission. Pour chaque géométrie, une série de valeurs de longueur de correction est prise dans l'intervalle de définition pour les trois types de correction :

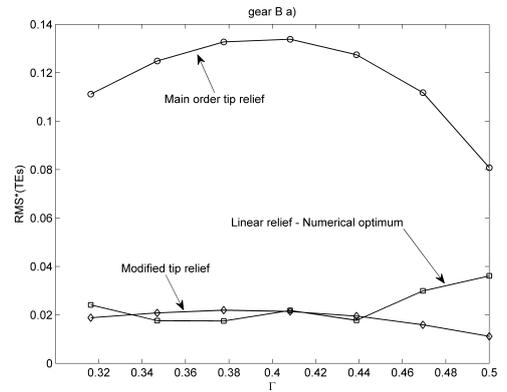
- La correction linéaire symétrique définie dans le tableau 2.1, correspondant au premier terme de la suite 2.100;
- La correction linéaire symétrique qui permet de minimiser les fluctuations de TE_S^* (obtenu numériquement après un balayage sur les valeurs de la profondeur de correction);
- La correction d'ordre supérieur, définie par (2.109).

Les synthèses graphiques de ces comparaisons sont illustrées dans la figure 2.35. Quelque soit la géométrie et le niveau de la longueur de correction, la correction proposée conduit à une fluctuation moindre de l'écart de transmission et le gain est assez significatif.

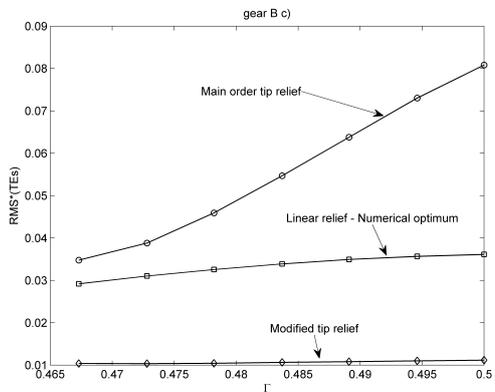
Un second ensemble de résultats permet de comparer les comportements dynamiques suivant les types de correction. Un balayage en vitesse de rotation du pignon est mis en place entre 0,1 et 1600,1 rad/s avec un pas de 10 rad/s et la charge est maintenue à sa valeur nominale. Des simulations sont réalisées pour 3 corrections optimales (longueur de correction maxi, mini et



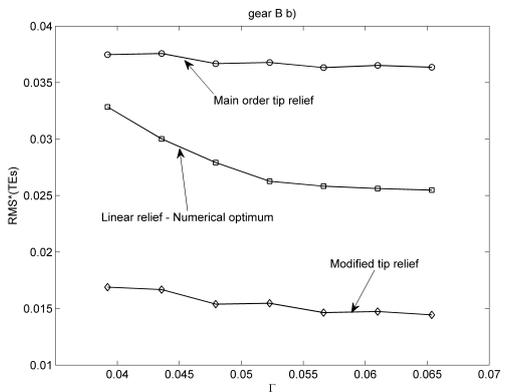
a. Engrenage A, denture droite LRC



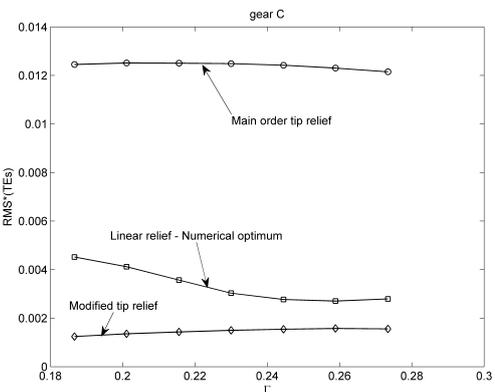
b. Engrenage B, denture droite HCR, correction a)



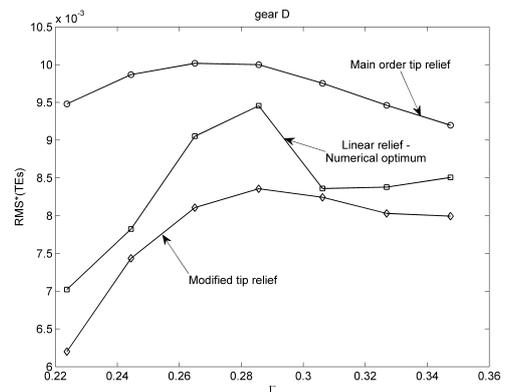
c. Engrenage B, denture droite HCR, correction b)



d. Engrenage B, denture droite HCR, correction c)



e. Engrenage C, denture hélicoïdale



f. Engrenage D, denture hélicoïdale

FIGURE 2.35 – RMS de l'écart de transmission quasi-statique, suivant la longueur de correction adimensionnée optimale

	A	B	C	D
m_0	10 mm	10 mm	2,78 mm	10 mm
α_0	20 °	20 °	22,21 °	20 °
β	0	0	28,9°	20 °
$z_1 ; z_2$	20 ; 60	20 ; 60	25 ; 31	20 ; 60
$b_1 ; b_2$	100 mm	100 mm	31,75 mm	250 mm
$x_1 ; x_2$	0 ; 0	0 ; 0	0 ; 0	0 ; 0
a_w	400 mm	400 mm	88,9	425,67
ε_α	1,67	2,14	1,37	1,53
ε_β	0	0	1,76	2,72
Couple	6 000 Nm	6 000 Nm	550 Nm	6 000 Nm
$h_{a1}^* ; h_{a2}^*$	1 ; 1	1,5 ; 1,2	1,065 ; 1,065	1,0 ; 1,0
$h_{f1}^* ; h_{f2}^*$	1,25 ; 1,30	1,35 ; 1,7	1,43 ; 1,43	1,25 ; 1,30
ρ^*	0,33	0,33	0,33	0,33

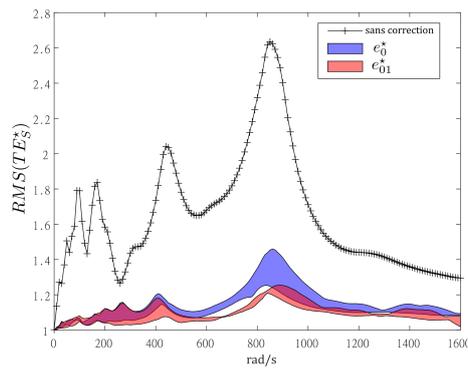
TABLEAU 2.5 – Paramètres des géométries utilisées pour la comparaison de l'efficacité des corrections de profil

moyenne). Sur la figure 2.36 les domaines colorés en bleu correspondent aux zones de réponse pour la correction linéaire seule e_0^* et les domaines rouges correspondent aux zones de réponse pour la correction totale e_{01}^* . La réponse sans correction est représentée en noir avec le marqueur «+». Pour ces simulations, on constate que le comportement dynamique avec les corrections e_0^* et e_{01}^* réduit significativement l'amplitude du RMS de l'écart de transmission pour pratiquement toutes les pulsations angulaires.

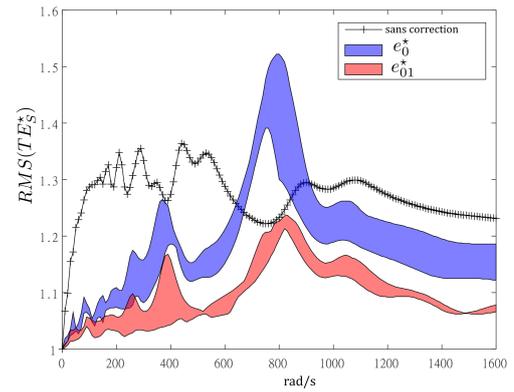
En synthèse de ces résultats, on peut noter que pour un modèle d'engrènement sans hypothèse particulière sur la raideur linéique au contact, cette approche mathématique originale des modifications de surface conduit à des formules quasi-analytiques minimisant les fluctuations de l'écart de transmission. Non seulement les caractéristiques quasi-statiques sont meilleures mais on vérifie également que le comportement dynamique présente des oscillations atténuées.

Approximation par une correction linéaire

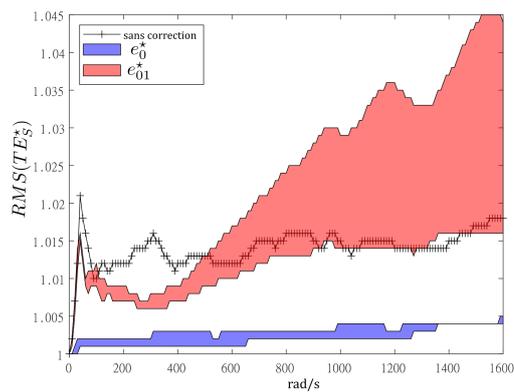
La correction optimale présentée figure 2.34 et définie par la relation (2.109) pourrait être utilisée en conception moyennant le calcul préalable de la forme de la raideur d'engrènement ($\alpha\varphi_M$). En revanche, sa réalisation précise paraît difficilement conciliable avec des coûts de production raisonnables. Une étude de sensibilité serait à mener pour avoir une estimation chiffrée mais il est fort probable que les zones de tolérance nécessaires pour maintenir ces avantages soient incompatibles avec les moyens de production «standards». En revanche, il est possible de rechercher la correction de profil linéaire et symétrique qui approche au mieux la correction optimale. La longueur de la correction semble plutôt bien identifiée et ne pose pas de problème au premier ordre. L'optimisation porte donc sur la profondeur de correction linéaire



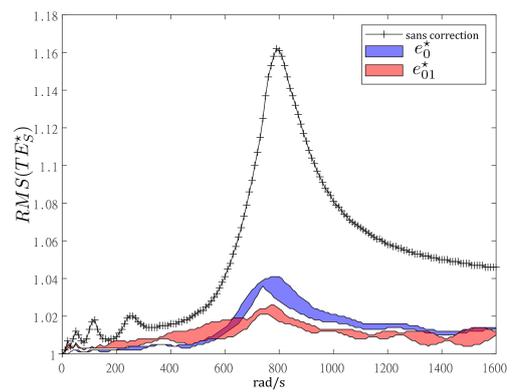
a. Engrenage A, denture droite LRC



b. Engrenage B, denture droite HCR, correction a)



c. Engrenage C, denture hélicoïdale



d. Engrenage D, denture hélicoïdale

FIGURE 2.36 – Évolution du coefficient dynamique à la denture en fonction de la vitesse de rotation du pignon sans correction, avec la correction linéaire seule, avec la correction optimale

optimale $E_{lin\ opt}^*$ tel que $E_{lin\ opt}^* \Lambda(\tau)$ approche au mieux la fonction (2.109). Deux critères ont été employés pour cette recherche [12] :

- a) une approche locale basée sur la pente de la correction optimale en $\tau = \Gamma \varepsilon_\alpha$ qui donne l'orientation de la correction de profil linéaire recherchée ;
- b) une approche globale minimisant l'écart entre la correction optimale e^{*01} et $E_{lin\ opt}^* \Lambda(\tau)$ sur l'intervalle $[\lambda \varepsilon_\alpha ; (1 - \lambda) \varepsilon_\alpha]$

En supposant que la fonction de forme φ_M est parabolique et symétrique sur la fenêtre d'engrènement potentiel, on obtient les résultats suivants [41] :

$$e^* = E_0^* \left(1 - \alpha (a \Gamma^2 + b \Gamma + c - 1) \right) \Lambda(\tau) \quad (2.110)$$

Avec, pour l'approximation locale :

$$a = -30 \quad ; \quad b = 12\Gamma_L + 18 \quad ; \quad c = -6\Gamma_L \quad (2.111)$$

et, pour l'approximation globale :

$$a = -8,4 \quad ; \quad b = -0,6\Gamma_L + 9 \quad ; \quad c = (0,9\Gamma_L - 1,5)\Gamma_L \quad (2.112)$$

L'évaluation du paramètre α dans l'expression de la raideur linéique nécessite un calcul numérique précis de la raideur d'engrènement pour un segment de la ligne de contact, de l'engagement jusqu'au retrait. En accord avec les modèles de la littérature et nos propres constatations, une valeur moyenne de $\alpha \cong 0,3$ semble être une valeur réaliste pour une grande variété de géométries.

Les corrections de profil modifiées, définies par les relations (2.110), (2.111) et (2.112) conduisent à des enlèvements de matière un peu moins profonds que la correction initiale $e_{00}^*(\tau) = E_0^* \Lambda(\tau)$. Pour comparer les efficacités de ces prédictions, des balayages sur la profondeur et la longueur de correction sont réalisés avec le modèle numérique présenté plus haut et avec le logiciel LDP. Sur chaque représentation des courbes de niveau du RMS de TE_S^* , les familles de corrections optimales sont représentées avec la convention suivante : la courbe avec des marques en forme de croix (x) correspond aux corrections initiales, celle avec des diamants (\diamond) correspond à l'approximation locale et les petits cercles (\circ) sont pour l'approximation globale. La figure 2.37 présente les résultats pour l'engrenage E de la table 2.35.

D'autres géométries ont été testées (voir [12]) et les conclusions que l'on peut tirer de ces approximations sont les suivantes :

1. Il y a un très bon accord entre les résultats numériques et analytiques en terme de profondeur et d'étendue de la correction linéaire symétrique optimale sur toutes les géométries étudiées. Les courbes représentant les corrections optimales (\diamond et \circ) sont toujours localisées dans le fond des vallées de la surface réponse en termes de RMS de l'écart de transmission. Sur les exemples traités, l'approximation locale semble légèrement meilleure que l'approximation globale.
2. Les deux logiciels de simulation de l'engrènement utilisés donnent des positions des corrections optimales très proches bien qu'ils soient basés sur des approches théoriques différentes.
3. Des différences plus sensibles entre les prédictions analytiques et les résultats numériques apparaissent aux extrémités des courbes optimales, notamment dans le cas de dentures hélicoïdales. Néanmoins, les propositions (2.110), (2.111) et (2.112) sont de bonnes ap-

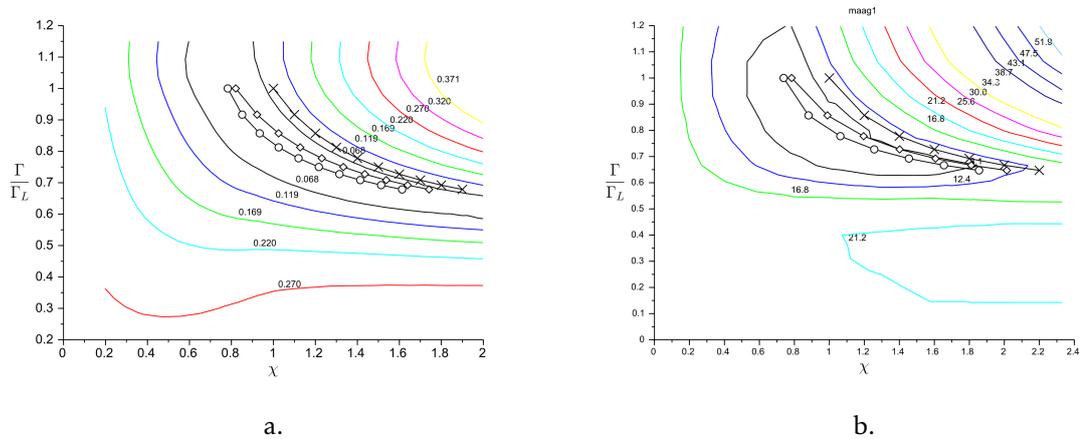


FIGURE 2.37 – Courbes de niveaux du RMS de l'écart de transmission obtenues avec le modèle numérique VSA (a.) et le code LDP (b.), où sont superposées les corrections optimales \times : (2.104); \diamond : (2.110) et (2.111); \circ : (2.110) et (2.112)

proximations des fonds des vallées et il faut noter que le RMS de l'écart de transmission n'y est certainement pas constant.

4. Il a été confirmé que ces approximations adimensionnées qui minimisent les fluctuations de l'écart de transmission sont valides sur une large plage de couples.
5. La réduction significative du RMS de TE_S^* engendre également une importante baisse du facteur dynamique (ratio entre l'effort d'engrènement dynamique maximum et l'effort d'engrènement statique maximum) comme cela est montré en [12] et non repris dans ce document.

Synthèse

L'approche analytique proposée dans cette section permet de réaliser l'optimisation des corrections de profils linéaires et symétriques dans le cas du modèle de raideur linéique d'engrènement constante. Les solutions trouvées sont pertinentes et permettent de prédire des optimum peu intuitifs comme par exemple, en denture droite HCR, les deux minimum du RMS de l'écart de transmission pour un couple variable. En utilisant un modèle de raideur plus fin (raideur linéique variable en fonction de l'abscisse suivant \vec{X}), il est nécessaire de corriger les modifications de profils trouvées dans le premier cas. Les définitions des modifications de profil sont simples à calculer et peuvent être facilement utilisées en avant-projet. Les performances obtenues en terme de RMS de l'écart de transmission quasi-statique ou dynamique ainsi que de coefficient dynamique sont excellentes pour des dentures étroites et quasiment sans désalignement.

En pratique, une correction longitudinale est très souvent imposée aux flancs d'au moins une des roues de façon à éviter des chargement trop forts en bord de dent, même en présence de légers écarts d'orientation. La démarche analytique suivie en 2.2 page 18 se prête naturellement à l'introduction de cette modification.

2.4 Modèle analytique détaillé de l'engrènement

Le second modèle présenté procède de la même démarche que le premier. En plus de la correction de profil, il permet d'introduire :

- une correction longitudinale,
- une raideur linéique d'engrènement non constante
- une interaction de proximité au niveau du contact qui induit un déplacement de la surface à proximité de ce dernier (illustration figure 2.39). Ce phénomène est appelé «effet convectif» au niveau du contact entre les dentures.

La zone de contact effective est toujours supposée contenue dans le plan d'engrènement, de forme rectangulaire et, éventuellement, de taille réduite par rapport à la zone de contact potentielle. Les corrections de surfaces qui minimisent les fluctuations de l'écart de transmission sont recherchées numériquement et analytiquement.

2.4.1 Les corrections de forme

Dans les développements qui suivent, la correction de profil demeure linéaire et symétrique, aucun changement n'est apporté par rapport au premier modèle. La correction longitudinale utilisée est prise de forme parabolique et symétrique par rapport à la demi largeur de la denture. La profondeur maximale de l'enlèvement de matière est notée B et elle est située aux bords de la denture (figure 2.38).

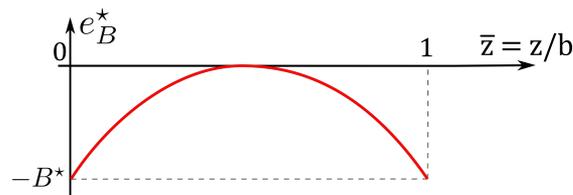


FIGURE 2.38 – Forme de la correction longitudinale

Son expression adimensionnée est la suivante :

$$e_B^*(\bar{z}) = -B^*(1 - 2\bar{z})^2 \quad (2.113)$$

Avec $\bar{z} = \frac{z}{b}$

2.4.2 Interaction entre les dentures

Seule la composante normale de l'action mécanique entre les dentures est introduite. Le modèle prend en compte le couplage local des déplacements élastiques suivant la normale à la surface, comme illustré par la figure 2.39. Ce phénomène est appelé «effet convectif» par D. L. Seager [89]. Sur une ligne de contact, ce couplage est introduit par le bief d'un terme en dérivée seconde dans l'expression de la charge linéique (modèle de fondation de Pasternak [73]) :

$$p(M) = \left\{ \tilde{k} \Delta(M) - g(M) \frac{d^2 \Delta(M)}{ds^2} \right\} H(\Delta(M)) \quad (2.114)$$

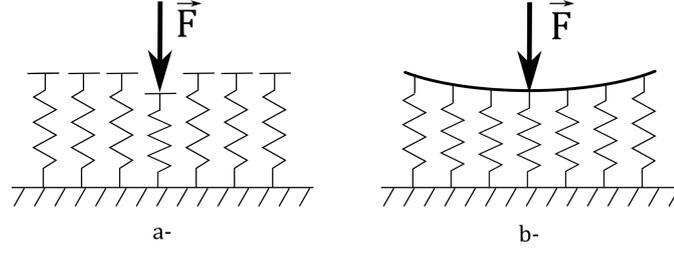


FIGURE 2.39 – Déflexion avec un modèle de fondation de Winkler (a-) et de Pasternak (b-)

avec $\Delta(M) = \mathbf{u}(M, 1/R) \cdot \mathbf{n}_1 - \mathbf{u}(M, 2/R) \cdot \mathbf{n}_1 - E_{max} + e(M)$

où la fonction g est positive qui caractérise l'effet convectif, s est l'abscisse curviligne d'une ligne de contact potentiel et $e(M)$ la somme des corrections de forme. Le paramètre \tilde{k} s'identifie à la raideur linéique de l'engrènement qui évolue en fonction de l'abscisse x (selon \vec{X}) du point de contact considéré. La forme adimensionnée utilisée est $\bar{x} = \frac{x}{p_{bt}}$. L'allure de cette fonction a déjà été présentée et, dans le but de limiter le nombre de paramètres de l'étude, la forme de celle-ci est fixée de la façon suivante :

1. $\tilde{k}(M) = \tilde{k}_0(1 + \alpha\varphi(\bar{x}))$ (suivant la même expression que (2.97))
2. En l'absence de réduction de longueur de contact, la fonction φ est de moyenne nulle sur $[0; \varepsilon_\alpha]$
3. La fonction φ est une parabole symétrique par rapport à $\frac{\varepsilon_\alpha}{2}$ et prend la valeur -1 en 0 et ε_α

Ces contraintes conduisent à l'expression suivante unique :

$$\varphi(\bar{x}) = -1 + 6 \frac{\bar{x}}{\varepsilon_\alpha} \left(1 - \frac{\bar{x}}{\varepsilon_\alpha}\right) \quad (2.115)$$

2.4.3 Écarts de transmission quasi-statique

Expression analytique

A partir des équations d'équilibre, des hypothèses précédentes et en suivant un raisonnement identique à 2.1.7 page 13, l'écart de transmission adimensionné s'écrit en fonction du temps :

$$TE_s^*(\tau) \cos \beta_b = \frac{1 - \int_{L(\mathbf{x}_s, \tau)} \tilde{k}^\dagger(M) e^*(M) dM + \frac{1}{k_{m0}} \int_{L(\mathbf{x}_s, \tau)} g(M) \frac{d^2 e^*}{ds^2} ds}{\int_{L(\mathbf{x}_s, \tau)} \tilde{k}^\dagger(M) dM} \quad (2.116)$$

$$\text{Avec } k_{m0} = \tilde{k}_0 \varepsilon_\alpha \frac{b}{\cos \beta_b} \text{ et } \tilde{k}^\dagger(M) = \frac{\tilde{k}_0}{k_{m0}} (1 + \alpha \varphi(M))$$

$$TE_s^*(\tau) \cos \beta_b = \frac{1 - \frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\mathbf{x}_s, \tau)} (1 + \alpha \varphi(M)) e^*(M) dM + \frac{\cos \beta_b}{\tilde{k}_0 b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\mathbf{x}_s, \tau)} g(M) \frac{d^2 e^*}{ds^2} ds}{\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\mathbf{x}_s, \tau)} (1 + \alpha \varphi(M)) dM} \quad (2.117)$$

Avec le changement de variable $ds = \frac{b}{\cos \beta_b} \bar{z}$ et avec la correction d'hélice parabolique définie en (2.113) : $\frac{d^2 e^*}{d\bar{z}^2} \cong \frac{d^2 e_B^*}{d\bar{z}^2} = -8B^*$

$$TE_s^*(\tau) \cos \beta_b = \frac{1 - \frac{\cos \beta_b}{b\varepsilon_\alpha} \int_{L(\mathbf{x}_{S,\tau})} (1 + \alpha\varphi(M)) e^*(M) dM}{\frac{\cos \beta_b}{b\varepsilon_\alpha} \int_{L(\mathbf{x}_{S,\tau})} (1 + \alpha\varphi(M)) dM} - \frac{8B^* \cos^2 \beta_b}{\tilde{k}_0 b^2} \frac{\int_{L(\mathbf{x}_{S,\tau})} g(M) d\bar{z}}{\int_{L(\mathbf{x}_{S,\tau})} (1 + \alpha\varphi(M)) dM} \quad (2.118)$$

Le dernier terme représente le rapport de la moyenne de la fonction de couplage sur la moyenne de la fonction de forme de la raideur linéique. D'après les travaux expérimentaux de D.L. Seager [89] sur les engrenages hélicoïdaux, le terme : $\frac{1}{\cos \beta_b} \sqrt{\frac{\int_{L(\mathbf{x}_{S,\tau})} g(M) d\bar{z}}{\int_{L(\mathbf{x}_{S,\tau})} \tilde{k}_0 (1 + \alpha\varphi(M)) dM}}$ peut être considéré approximativement constant et proportionnel au module normal :

$$\frac{\int_{L(\mathbf{x}_{S,\tau})} g(M) d\bar{z}}{\int_{L(\mathbf{x}_{S,\tau})} \tilde{k}_0 (1 + \alpha\varphi(M)) dM} \cong (\vartheta_G \cos \beta_b m_n)^2 \quad (2.119)$$

où le paramètre ϑ_G est un scalaire qui, d'après les données expérimentales, peut varier dans l'intervalle $[1; 2]$.

On obtient finalement :

$$TE_s^* \cos \beta_b = \frac{1 - \frac{\cos \beta_b}{b\varepsilon_\alpha} \int_{L(\mathbf{x}_{S,\tau})} (1 + \alpha\varphi(M)) e^*(M) d\eta}{\frac{\cos \beta_b}{b\varepsilon_\alpha} \int_{L(\mathbf{x}_{S,\tau})} (1 + \alpha\varphi(M)) dM} - B^* G \quad (2.120)$$

avec

$$G = \frac{8\vartheta_G^2 m_n^2 \cos^4 \beta_b}{b^2}$$

De plus, les paramètres β_b , m_n , b et G sont liés par la relation géométrique suivante :

$$\beta_b = \arcsin \left[\varepsilon_\beta \pi \frac{m_n}{b} \cos \alpha_n \right] \quad (2.121)$$

Calcul des intégrales

Les intégrales de l'équation (2.120) sont à estimer sur les lignes de contact effectives à chaque instant de l'engrènement. En présence de corrections de profil et d'hélice, une réduction de longueur de contact peut advenir à l'engagement, au retrait et sur les bords de la denture. La zone de contact effective du plan d'engrènement est supposée rectangulaire (figure 2.40) et les réductions de longueur de contact sont supposées symétriques à l'engagement et au retrait d'une part et sur les bords de la denture d'autre part. Les paramètres de réduction de longueur de contact sont notés $\lambda\varepsilon_\alpha$ dans la direction \vec{X} et δ dans la direction \vec{Z} .

Comme précédemment (2.2.1 page 19), les intégrales sont remplacées par des sommes de Riemann et les limites des séries sont recherchées lorsque le nombre de segments des lignes de contact discrétisées tend vers l'infini. Dans cette nouvelle formulation, les fonctions à intégrer dépendent des coordonnées \bar{x} et \bar{z} du point M considéré et le calcul des séries nécessite des

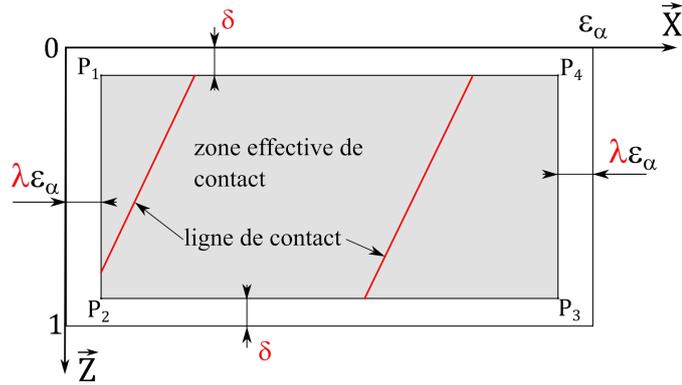


FIGURE 2.40 – Zone de contact effective en présence de correction de forme

développements complémentaires. Pour une dépendance en \bar{z} de forme polynomiale d'ordre 2 et une forme périodique quelconque pour f , l'intégrale sur les lignes de contact effectives se met sous la forme (6.32) :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X})} (a + b\bar{z} + c\bar{z}^2) f(M) dM = \frac{a_0 P}{\varepsilon_\alpha} (1 - 2\delta) \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} (1 - \delta + \delta^2) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P}{2\pi k \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \left[\begin{array}{c} \sin [2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta (1 - \delta))] \\ \cos [2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta (1 - \delta))] \\ \sin [2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta \delta)] \\ \cos [2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta \delta)] \end{array} \right] \quad (2.122)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{b + 2c(1 - \delta)}{2\pi k \varepsilon_\beta} \\ M_2 &= -a - b(1 - \delta) - c(1 - \delta)^2 + \frac{c}{2(\pi k \varepsilon_\beta)^2} \\ M_3 &= -\frac{b + 2c\delta}{2\pi k \varepsilon_\beta} \\ M_4 &= a + b\delta + c\delta^2 - \frac{c}{2(\pi k \varepsilon_\beta)^2} \end{aligned}$$

Cette expression se simplifie en faisant les hypothèses suivantes :

— Le polynôme $h(\bar{z}) = a + b\bar{z} + c\bar{z}^2$ est symétrique par rapport à $1/2$:

$$h(1 - \bar{z}) = h(\bar{z}) \quad \Leftrightarrow \quad h(\bar{z}) = a + b\bar{z}(1 - \bar{z})$$

— La fonction f est polynomiale par morceaux et elle est symétrique par rapport à $\tau = \frac{\varepsilon_\alpha}{2}$

L'expression (2.122) devient alors (voir annexe 6.1) :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X})} (a + b \bar{z}(1 - \bar{z})) f(M) dM = \frac{a_0 P}{\varepsilon_\alpha} (1 - 2\delta) \left(a + \frac{b}{6} (1 + 2\delta - 2\delta^2) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \mathbf{C}_s^{kP} \cdot \mathbf{V}_s^{kP}}{\pi^2 k^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \cos[\pi k (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau)]$$

$$\left[N_1 \cos[\pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)] + N_2 \sin[\pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)] \right] \quad (2.123)$$

avec :

$$N_1 = -\frac{b(1 - 2\delta)}{2\pi k \varepsilon_\alpha}$$

$$N_2 = -a - b\delta(1 - \delta) - \frac{b}{2(\pi k \varepsilon_\alpha)^2}$$

Appliquée à la relation 2.120, l'expression de l'écart de transmission devient :

$$\cos \beta_b T E s^* = -B^* G +$$

$$\frac{1 - A_0 - 2(1 - 2\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \cos[\pi k (2\tau - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)] \text{Sinc}[k \varepsilon'_\beta] \left[\frac{E^* \Phi_k}{\pi k \varepsilon_\alpha} + B^* \Lambda_k (1 - 2\lambda) (1 - 2\delta)^2 \text{Sinc}[k \varepsilon'_\alpha] \left(2\eta(k \varepsilon'_\beta) - \frac{1}{3} \right) \right]}{(1 - 2\lambda)(1 - 2\delta) \left[1 + \alpha \kappa_B + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos[\pi k (2\tau - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)] \text{Sinc}[k \varepsilon'_\alpha] \text{Sinc}[k \varepsilon'_\beta] \Lambda_k \right]} \quad (2.124)$$

avec :

$$\varepsilon'_\alpha = \varepsilon_\alpha (1 - 2\lambda) \quad (2.125)$$

$$\varepsilon'_\beta = \varepsilon_\beta (1 - 2\delta) \quad (2.126)$$

$$\kappa_B = 2\lambda(1 - \lambda) \quad (2.127)$$

$$\kappa_E = -\Gamma(\Gamma + 2\lambda - 2) - (1 - \lambda)(1 - 3\lambda) \quad (2.128)$$

$$A_0 = -(1 - 2\delta) \left\{ E^* \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma} (1 + \alpha \kappa_E) + \frac{B^*}{3} (1 - 2\lambda) (1 - 2\delta)^2 (1 + \alpha \kappa_B) \right\} \quad (2.129)$$

$$\Phi_k = \left(\frac{\lambda - \Gamma}{\Gamma} - \alpha C_{1k} \right) \sin[\pi k \varepsilon'_\alpha] + \left(\frac{-1}{2\pi k \varepsilon_\alpha \Gamma} + \alpha C_{k2} \right) \cos[\pi k \varepsilon'_\alpha] - \alpha C_{3k} \sin[\pi k \varepsilon_\alpha (1 - 2\Gamma)]$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi k \varepsilon_\alpha \Gamma} + \alpha C_{4k} \right) \cos[\pi k \varepsilon_\alpha (1 - 2\Gamma)] \quad (2.130)$$

$$\Lambda_k = 1 + \alpha \left(-1 + 6\lambda(1 - \lambda) + 3(1 - 2\lambda)^2 \left(\eta(k \varepsilon'_\alpha) + \frac{1}{3} \right) \right) \quad (2.131)$$

$$C_{1k} = -1 + \lambda(6 - 6\lambda + \frac{1}{\Gamma}) - 6\frac{\lambda^2}{\Gamma}(1 - \lambda) + \frac{3}{(\pi k \varepsilon_\alpha)^2}(\frac{1}{\Gamma} + 1 - 3\frac{\lambda}{\Gamma}) \quad (2.132)$$

$$C_{2k} = \frac{1}{\pi \varepsilon_\alpha k} \left[\frac{1}{2\Gamma} + 3 - 6\lambda(1 + \frac{1}{\Gamma}) + 9(\frac{\lambda^2}{\Gamma} - \frac{1}{2\Gamma(\pi k \varepsilon_\alpha)^2}) \right] \quad (2.133)$$

$$C_{3k} = \frac{3(2 - \frac{1}{\Gamma})}{(\pi k \varepsilon_\alpha)^2} \quad (2.134)$$

$$C_{4k} = \frac{1}{\varepsilon_\alpha k \pi} \left[3(1 - \Gamma) - \frac{1}{2\Gamma} + \frac{9}{2\Gamma(k \varepsilon_\alpha \pi)^2} \right] \quad (2.135)$$

$$\eta(x) = \frac{1}{(\pi x)^2} - \frac{1}{\pi x \tan[\pi x]} - \frac{1}{3} \quad (2.136)$$

L'évolution de la fonction $\eta(x)$ est représentée figure 2.41.

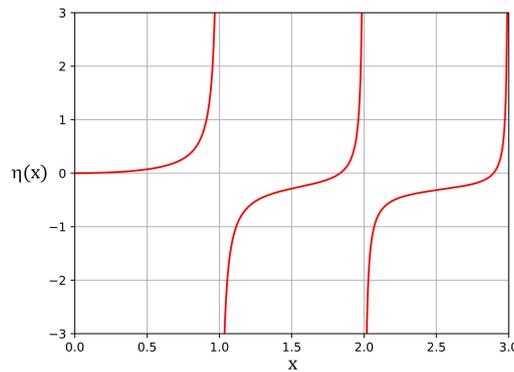


FIGURE 2.41 – Évolution de la fonction $\eta(x)$

On peut noter à propos de cette fonction η les points suivants :

— sa valeur est nulle en 0 car un développement limité au voisinage de l'origine s'écrit :

$$[\eta(x)]_{x \rightarrow 0} = \frac{(\pi x)^2}{45} + o(x^2)$$

— une valeur approchée du second zéro de la fonction η sur $[0, 2[$ est donnée par :

$$\varepsilon_{\beta 1} = 1 - \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{22^2\pi^2 - 132\pi\sqrt{3} - 105}}{22\pi} \cong 1,835\dots \quad (2.137)$$

Valeur numérique : $\eta(\varepsilon_{\beta 1}) = 3,48e - 5$

2.4.4 Estimation de la valeur des paramètres de réduction de longueur de contact λ et δ

L'estimation de ces paramètres s'appuie sur la force linéique de contact adimensionnée $\hat{F}(M, \tau)$ qui est définie en tout point de contact effectif M par [13] :

$$\hat{F}(M, \tau) = \cos \beta_b TE_S^*(\tau) + e^*(M)$$

Cette fonction est à valeur positive ou nulle. Le domaine de définition de $\hat{F}(M, \tau)$ est étendu à l'ensemble de la zone de contact potentiel en introduisant la fonction de Heaviside H :

$$\hat{F}_e(M, \tau) = H(\cos \beta_b TE_S^*(\tau) + e^*(M)) [\cos \beta_b TE_S^*(\tau) + e^*(M)]$$

Pour tout point N de la zone potentielle de contact, il existe un instant τ_N tel que ce point est coïncidant avec un point M_N des lignes de contact potentiel. Le motif des lignes de contact étant 1-périodique par rapport au temps, τ_N est défini à un entier relatif près. Au point N , on associe la fonction \hat{T} telle que :

$$\hat{T}(N) = \cos \beta_b TE_S^*(\tau_N) + e^*(M_N) \quad (2.138)$$

La fonction \hat{T} est définie en tout point de la fenêtre d'engrènement nominale, sa partie positive représente l'enveloppe de la fonction $\hat{F}(M, \tau)$ au cours du temps. Le domaine où $T(N)$ est strictement positive est noté (Σ_1) et le lieu où elle est négative, s'il existe, est noté (Σ_2) . La frontière entre (Σ_1) et (Σ_2) est a priori inconnue.

On introduit ensuite les fonctions J_δ et J_λ définies par :

$$J_\delta(P_1, P_4) = \frac{1}{P_1 P_4} \int_{\text{ligne } P_1 P_4} \hat{T}(\bar{x}, \delta) d\bar{x} \quad \text{et} \quad J_\lambda(P_1, P_2) = \frac{1}{P_1 P_2} \int_{\text{ligne } P_1 P_2} \hat{T}(\lambda \varepsilon_\alpha, \bar{z}) d\bar{z}$$

Les points P_1, P_2, P_3 et P_4 sont les sommets d'un rectangle pris comme approximation de la fenêtre d'engrènement effective (figure 2.40).

$J_\delta(P_1, P_2)$ et $J_\lambda(P_1, P_4)$ représentent les moyennes de la nappe \hat{T} sur les lignes $P_1 P_2$ d'abscisse $\lambda \varepsilon_\alpha$ et $P_1 P_4$ d'abscisse δ . En fonction de λ et δ , ces relations deviennent :

$$\begin{cases} J_\delta(\lambda, \delta) = \frac{1}{\varepsilon_\alpha (1 - 2\lambda)} \int_{\lambda \varepsilon_\alpha}^{(1-\lambda)\varepsilon_\alpha} \hat{T}(\bar{x}, \delta) d\bar{x} \\ J_\lambda(\lambda, \delta) = \frac{1}{1 - 2\delta} \int_\delta^{1-\delta} \hat{T}(\lambda \varepsilon_\alpha, \bar{z}) d\bar{z} \end{cases} \quad (2.139)$$

Les valeurs des paramètres sont définis suivant les cas de figure suivants :

Cas A : $J_\delta(0, 0) \geq 0$ et $J_\lambda(0, 0) \geq 0$: les pressions sont importantes sur les frontières de la zone d'engrènement. Il n'y a pas de réduction de la zone de contact et $\lambda = \delta = 0$.

Cas B : $J_\delta(0, 0) \geq 0$ et $J_\lambda(0, 0) \leq 0$: il y a un déchargement à l'engagement et au retrait mais pas sur les bords ($\delta = 0$). Il faut dans ce cas résoudre $J_\lambda(\lambda \varepsilon_\alpha, 0) = 0$ pour connaître λ .

Cas C : $J_\delta(0, 0) \leq 0$ et $J_\lambda(0, 0) \leq 0$: le pourtour de la zone théorique d'engrènement est déchargé. Il

faut estimer λ et δ en résolvant :

$$\begin{cases} J_\lambda(\lambda, \delta) = 0 \\ J_\delta(\lambda, \delta) = 0 \end{cases}$$

Seules les solutions positives sont acceptables.

Cas D : $J_\delta(0, 0) \leq 0$ et $J_\lambda(0, 0) \geq 0$: le bombé est fort par rapport à la déflexion statique moyenne, les bords sont déchargés mais pas les zones d'engagement et de retrait ($\lambda = 0$). Pour déterminer δ , il faut résoudre $J_\delta(0, \delta) = 0$.

En développant (2.139), il vient :

$$\begin{cases} J_\delta(\lambda, \delta) = \frac{1}{\varepsilon_\alpha(1-2\lambda)} \left[\int_{\lambda\varepsilon_\alpha}^{(1-\lambda)\varepsilon_\alpha} \cos \beta_b T E s^*(\bar{x}, \delta) d\bar{x} - \frac{E^* \varepsilon_\alpha}{\Gamma} (\Gamma - \lambda)^2 - B^* \varepsilon_\alpha (1-2\lambda)(1-2\delta)^2 \right] \\ J_\lambda(\lambda, \delta) = \frac{1}{1-2\delta} \left[\int_\delta^{1-\delta} \cos \beta_b T E s^*(\lambda\varepsilon_\alpha, \bar{z}) d\bar{z} + E^*(1-2\delta) \left(\frac{\lambda}{\Gamma} - 1 \right) - \frac{B^*}{3} (1-2\delta)^3 \right] \end{cases} \quad (2.140)$$

En ne conservant que les termes d'ordre 0 des séries de l'écart de transmission :

$$\begin{aligned} J_\delta(\lambda, \delta) = & \frac{\varepsilon_\alpha}{(1-2\delta)(1+2\alpha\lambda(1-\lambda))} \left[1 - B^*(1-2\lambda)(1-2\delta) \left(\frac{2}{3}(1-2\delta)^2 + G \right) \right. \\ & \left. + \alpha \left\{ A_1 - B_1 \left(\frac{E^*(\Gamma-\lambda)^2}{\Gamma(1-2\lambda)} + B^*((1-2\delta)^2 + G) \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned} J_\lambda(\lambda, \delta) = & \frac{1}{(1-2\lambda)(1+2\alpha\lambda(1-\lambda))} \left[1 + \frac{E^*}{\Gamma} (\Gamma - \lambda)(1-2\delta)(\Gamma + \lambda - 1) - B^* G (1-2\lambda)(1-2\delta) \right. \\ & \left. + \alpha \left\{ A_1 - B_1 \left(\frac{E^*(\Gamma-\lambda)}{\Gamma} + B^* \left(\frac{(1-2\delta)^2}{3} + G \right) \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$A_1 = (1-2\delta) \left[-E^*(\Gamma-\lambda)^2 \left(\Gamma + 2\lambda - 2 + \frac{(1-\lambda)(1-3\lambda)}{\Gamma} \right) + B^* \frac{2B_1}{3} (1-2\delta) \right] \quad (2.143)$$

$$B_1 = 2\lambda(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-2\delta) \quad (2.144)$$

Les 4 cas mentionnés plus haut correspondent à 4 partitions de l'espace des paramètres de correction (figure 2.42). Sur le domaine A, il n'y a pas de réduction de longueur de contact ($\delta = 0$ et $\lambda = 0$) et il se caractérise par :

$$\begin{cases} E^* \leq \frac{2}{(1-\Gamma)(2+3G+2\alpha\Gamma(1-\Gamma))} \\ B^* \leq \frac{3}{2+3G+2\alpha\Gamma(1-\Gamma)} \end{cases} \quad (2.145)$$

Sur le domaine B, $\delta = 0$ et $\lambda > 0$, le système suivant est vérifié :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\delta(\lambda, 0) > 0 \Leftrightarrow 1 - (1 - 2\lambda)B^* \left(\frac{2}{3} + G \right) + \alpha \left\{ A_1 - B_1 \left(B^* (1 + G) + \frac{E^*(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} \right) \right\} > 0 \\ J_\lambda(\lambda, 0) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{E^*}{\Gamma} (\Gamma - \lambda)(\Gamma + \lambda - 1) - B^* G (1 - 2\lambda) \\ \quad + \alpha \left\{ A_1 - B_1 \left(\frac{E^*(\Gamma - \lambda)}{\Gamma} + B^* \left(\frac{1}{3} + G \right) \right) \right\} = 0 \\ A_1 = -E^*(\Gamma - \lambda)^2 \left(\Gamma + 2\lambda - 2 + \frac{(1 - \lambda)(1 - 3\lambda)}{\Gamma} \right) + B^* \frac{2\lambda}{3} (1 - \lambda)(1 - 2\lambda) \\ B_1 = 2\lambda(1 - \lambda)(1 - 2\lambda) \end{array} \right. \quad (2.146)$$

Le domaine C correspond au cas où $\lambda > 0$ et $\delta > 0$. Il est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\delta(\lambda, \delta) = 0 \Leftrightarrow 1 - B^*(1 - 2\lambda)(1 - 2\delta) \left(\frac{2(1 - 2\delta)^2}{3} + G \right) \\ \quad + \alpha \left\{ A_1 - B_1 \left(\frac{E^*(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)} + B^* \left((1 - 2\delta)^2 + G \right) \right) \right\} = 0 \\ J_\lambda(\lambda, \delta) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{E^*}{\Gamma} (\Gamma - \lambda)(1 - 2\delta)(\Gamma + \lambda - 1) - B^* G (1 - 2\lambda)(1 - 2\delta) \\ \quad + \alpha \left\{ A_1 - B_1 \left(\frac{E^*(\Gamma - \lambda)}{\Gamma} + B^* \left(\frac{(1 - 2\delta)^2}{3} + G \right) \right) \right\} = 0 \\ A_1 = (1 - 2\delta) \left[-E^*(\Gamma - \lambda)^2 \left(\Gamma + 2\lambda - 2 + \frac{(1 - \lambda)(1 - 3\lambda)}{\Gamma} \right) + B^* \frac{2\lambda}{3} (1 - \lambda)(1 - 2\lambda)(1 - 2\delta)^2 \right] \\ B_1 = 2\lambda(1 - \lambda)(1 - 2\lambda)(1 - 2\delta) \end{array} \right. \quad (2.147)$$

Sur le domaine D, on a $\lambda = 0$ et $\delta > 0$, ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_\delta(0, \delta) = 0 \Leftrightarrow 1 - B^*(1 - 2\delta) \left(\frac{2(1 - 2\delta)^2}{3} + G \right) + \alpha A_1 = 0 \\ G_\lambda(0, \delta) > 0 \Leftrightarrow 1 + E^*(1 - 2\delta)(\Gamma - 1) - B^* G (1 - 2\delta) + \alpha A_1 > 0 \\ A_1 = -E^*(1 - 2\delta)\Gamma(1 - \Gamma)^2 \\ B_1 = 0 \end{array} \right. \quad (2.148)$$

Frontière entre les domaines C et D (λ tend vers 0 et $\delta \geq 0$)

Elle se caractérise par :

$$\begin{cases} J_\delta(0, \delta) = 0 & \Leftrightarrow & 0 = 1 - \frac{2B^*}{3}(1-2\delta)^3 - B^*G(1-2\delta) - \alpha(1-2\delta)E^*\Gamma(\Gamma-1)^2 \\ J_\lambda(0, \delta) = 0 & \Leftrightarrow & 0 = 1 + E^*(1-2\delta)(\Gamma-1) - B^*G(1-2\delta) - \alpha(1-2\delta)E^*\Gamma(\Gamma-1)^2 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} E^* & = & \frac{2B^*(1-2\delta)^2}{3(1-\Gamma)} \\ \Delta_\delta & = & \frac{1}{(1+\alpha\Gamma(1-\Gamma))^2} \left[\left(\frac{3}{2B^*} \right)^2 + \frac{G^3}{2(1+\alpha\Gamma(1-\Gamma))} \right] \\ \delta & = & \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4B^*(1+\alpha\Gamma(1-\Gamma))} - \frac{\sqrt{\Delta_\delta}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4B^*(1+\alpha\Gamma(1-\Gamma))} + \frac{\sqrt{\Delta_\delta}}{2}} \right) \end{cases} \quad (2.149)$$

Frontière entre les zones B et C : ($\lambda \geq 0$ et δ tend vers 0)

$$\begin{cases} J_\delta = 0 & \Leftrightarrow & 0 = 1 - B^*(1-2\lambda)\left(\frac{2}{3} + G\right) + \alpha \left\{ A_1 - B_1 \left(B^*(1+G) + \frac{E^*(\Gamma-\lambda)^2}{\Gamma(1-2\lambda)} \right) \right\} \\ J_\lambda = 0 & \Leftrightarrow & 0 = 1 + \frac{E^*}{\Gamma}(\Gamma-\lambda)(\Gamma+\lambda-1) - B^*G(1-2\lambda) + \alpha \left\{ A_1 - B_1 \left(B^*\left(\frac{1}{3} + G\right) + \frac{E^*(\Gamma-\lambda)}{\Gamma} \right) \right\} \\ A_1 & = & -E^*(\Gamma-\lambda)^2 \left(\Gamma + 2\lambda - 2 + \frac{(1-\lambda)(1-3\lambda)}{\Gamma} \right) + B^* \frac{2\lambda}{3} (1-\lambda)(1-2\lambda) \\ B_1 & = & 2\lambda(1-\lambda)(1-2\lambda) \end{cases}$$

Aucune expression explicite n'a été trouvée pour cette frontière dans le cas général.

En supposant maintenant $\alpha = 0$ (raideur linéique constante), le système devient :

$$\begin{cases} 0 & = & 1 - B^*(1-2\lambda)\left(\frac{2}{3} + G\right) \\ 0 & = & 1 + \frac{E^*}{\Gamma}(\Gamma-\lambda)(\Gamma+\lambda-1) - B^*G(1-2\lambda) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta & = & \frac{E^{*2}}{\Gamma^2} + 4\frac{E^*}{\Gamma} \left(1 + E^*(\Gamma-1) - \frac{G}{\frac{2}{3} + G} \right) \\ \lambda & = & \frac{1}{2} - \frac{\Gamma}{2E^*} \sqrt{\Delta} \\ B^* & = & \frac{1}{(1-2\lambda)\left(\frac{2}{3} + G\right)} \end{cases} \quad (2.150)$$

Influence des paramètres α et G

Dans le cas où la raideur linéique est constante ($\alpha = 0$) et que l'effet convectif est négligé ($G = 0$), les limites des domaines s'expriment simplement et la figure 2.42 les représente pour une valeur de Γ fixée à 0,3. Dans ce cas, il est intéressant de noter que pour $B^* < \frac{3}{2}$, il n'y a pas de réduction de la zone de contact effective selon la largeur.

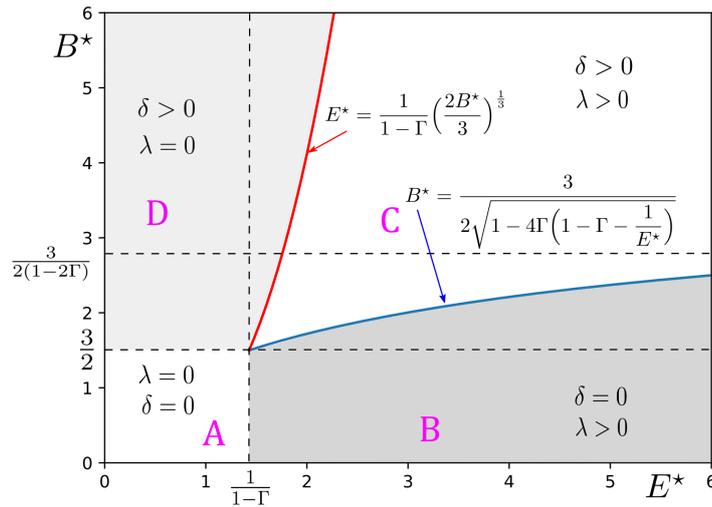


FIGURE 2.42 – Les 4 domaines particuliers pour λ et δ , avec $\Gamma = 0,3$, $\alpha = G = 0$

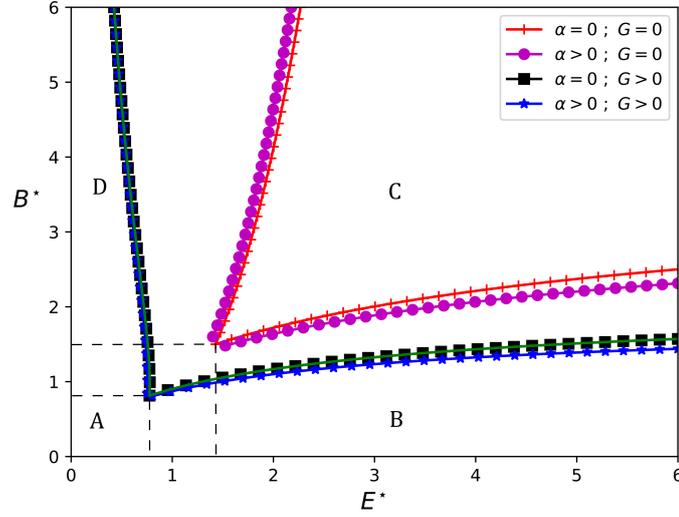
La prise en compte de l'effet convectif sur la ligne de contact induit une réduction de la force de contact linéique (équations (2.124) et (2.138)) par le terme constant GB^* , proportionnel à l'amplitude de la correction d'hélice. En conséquence, la zone de contact est plus étendue, les paramètres de réduction de la zone de contact diminuent.

L'impact de l'amplitude de la fonction de raideur sur les limites de ces zones est assez faible, contrairement à l'effet convectif dont la prise en compte les déplace sensiblement. La figure 2.43 montre le positionnement de ces frontières pour $\alpha \in \{0 ; 0,3\}$, $\vartheta_G \in \{0 ; 2\}$, $\Gamma = 0,3$, $\frac{b}{m_n} = 6$. On remarque également sur cette figure que la limite entre les domaines C et D estimée avec $\alpha = 0$ n'est pas très éloignée de la frontière avec $\alpha = 0,3$. La forme explicite approchée (2.150) est une estimation convenable de cette limite.

Pour un ensemble de paramètres de correction $\{E^*, \Gamma, B^*\}$, la valeur des paramètres de réduction de longueur de contact $\{\lambda, \delta\}$ est celle qui vérifie l'ensemble des équations et inéquations d'un des quatre domaines A, B, C et D. L'unicité de la solution n'est pas démontrée mais constatée en pratique sur les nombreux cas traités.

2.4.5 Variance de l'écart de transmission

En suivant la même démarche que celle exposée au paragraphe 2.2.1 page 24, la variance (identique au carré du RMS) de l'écart de transmission prenant en compte l'effet convectif, la correction linéaire de profil, le bombé longitudinal et les réductions de la zone de contact effectif (paramètres λ et δ) a pour expression au premier ordre :

FIGURE 2.43 – Évolution des domaines en fonction de α et G

$$\cos^2(\beta_b)V(TEs^*) = \frac{2}{(1 + \alpha\kappa_B)^4} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Sinc}^2[k\varepsilon'_\beta] \left\{ E^* \frac{(1 + \alpha\kappa_B)\Phi_k}{\pi k \varepsilon'_\alpha} \right. \\ \left. + \Lambda_k \text{Sinc}[k\varepsilon'_\alpha] \left[2B^*(1 - 2\delta)^2(1 + \alpha\kappa_B)\eta(k\varepsilon'_\beta) \right. \right. \\ \left. \left. + E^* \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)}(1 + \alpha\kappa_E) + \frac{1}{(1 - 2\lambda)(1 - 2\delta)} \right] \right\}^2 \quad (2.151)$$

L'effet convectif n'apparaît plus explicitement dans cette expression mais son action transparaît dans les valeurs des paramètres λ et δ .

En denture droite, l'expression se simplifie de la façon suivante :

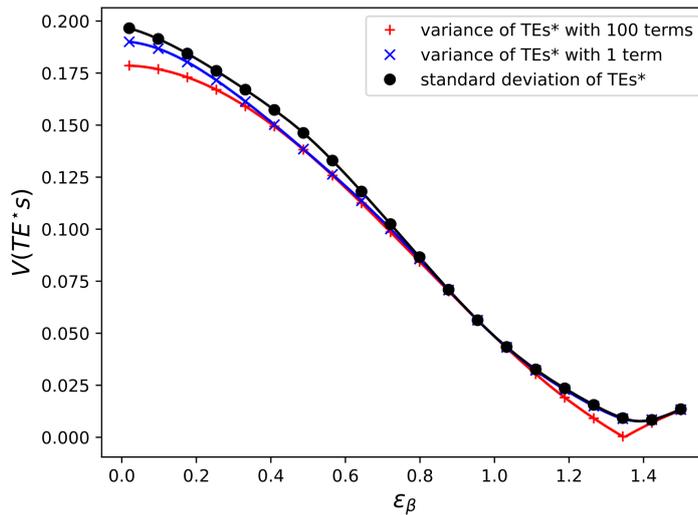
$$V(TEs^*) = \frac{2}{(1 + \alpha\kappa_B)^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ E^* \frac{(1 + \alpha\kappa_B)\Phi_k}{\pi k \varepsilon'_\alpha} \right. \\ \left. + \Lambda_k \text{Sinc}[k\varepsilon'_\alpha] \left[E^* \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)}(1 + \alpha\kappa_E) + \frac{1}{(1 - 2\lambda)(1 - 2\delta)} \right] \right\}^2 \quad (2.152)$$

La valeur de la correction longitudinale (B^*) disparaît de l'expression. Son influence est sensiblement réduite et n'impacte plus que la valeur du paramètre δ .

Dans les séries des expressions (2.151) et (2.152), les contributions des harmoniques supérieures ($k > 1$) décroissent très rapidement (respectivement en k^{-4} et k^{-2}). Pour cette raison et dans la plupart des cas, il est suffisant de garder seulement le premier terme ($k=1$) pour la

recherche des paramètres qui minimisent la variance de l'écart de transmission. Les figures 2.44 et 2.45 illustrent la validité des approximations (2.151) et (2.153). La courbe «exacte» correspond à la variance de l'évolution temporelle de l'écart de transmission estimée par (2.124). Pour ces deux situations (et de nombreuses autres analysées) l'approximation de la variance de l'écart de transmission par la relation (2.153) où un seul terme est conservé, semble plutôt meilleure que celle donnée par la relation (2.151) où plus de termes sont gardés. Ce point à rebours des comportements habituels des séries mériterait une analyse plus fine mais qui n'a pas encore pu être réalisée.

$$\cos^2(\beta_b)V(TEs^*) = \frac{2}{(1 + \alpha\kappa_B)^4} \text{Sinc}^2[\varepsilon'_\beta] \left\{ E^* \frac{(1 + \alpha\kappa_B)\Phi_1}{\pi\varepsilon'_\alpha} + \Lambda_1 \text{Sinc}[\varepsilon'_\alpha] \right. \\ \left. \left[2B^*(1 - 2\delta)^2(1 + \alpha\kappa_B)\eta(\varepsilon'_\beta) + E^* \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma(1 - 2\lambda)}(1 + \alpha\kappa_E) + \frac{1}{(1 - 2\lambda)(1 - 2\delta)} \right] \right\}^2 \quad (2.153)$$



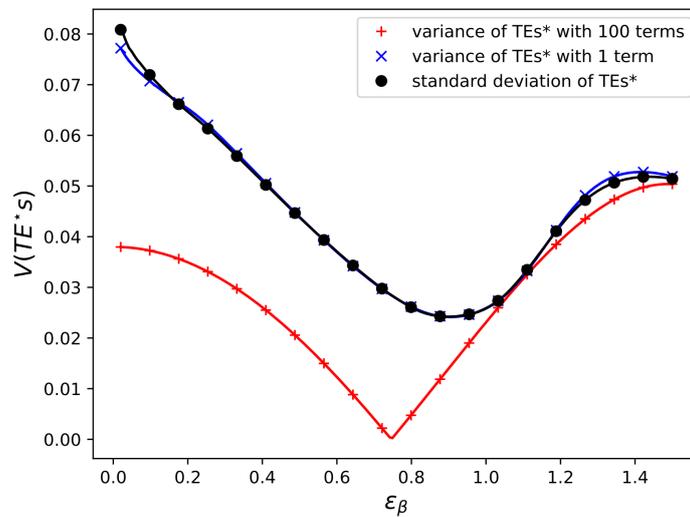
Conditions : $\varepsilon_\alpha = 1,6$; $\Gamma = 0,2$; $E^* = 1$; $B^* = 1$; $\alpha = 0,3$; $\vartheta_G = 1,3$; $\alpha_n = \frac{\pi}{9} rd$; $\frac{b}{m_n} = 7$

FIGURE 2.44 – Variances de l'écart de transmission en fonction de ε_β pour une faible influence de l'effet convectif

2.4.6 Éléments de validation

Estimation de la zone effective de contact

La détermination de la zone de contact effective est une étape clé pour l'efficacité et la précision du modèle analytique ci-dessus. Les paramètres λ et δ de réduction de la zone d'engrènement définissent un domaine rectangulaire. Celui-ci peut alors être mis en regard d'une



Conditions : $\varepsilon_\alpha = 1,4$; $\Gamma = 0,2$; $E^* = 2$; $B^* = 2$; $\alpha = 0,3$; $\vartheta_G = 1,3$; $\alpha_n = \frac{\pi}{9} rd$; $\frac{b}{m_n} = 7$

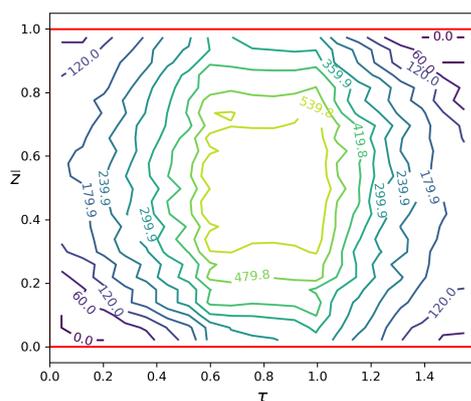
FIGURE 2.45 – Variance de l'écart de transmission en fonction de ε_β pour une forte influence de l'effet convectif

approximation de cette zone obtenue avec un modèle numérique (engrènement discrétisé) plus précis. La figure 2.46 montre les lignes iso-chargement sur la fenêtre d'engrènement théorique pour quatre couples de valeur des profondeurs de correction E^* et B^* . Ces résultats sont obtenus avec le logiciel LDP développé à l'université d'état de l'Ohio [53, 91]. La zone de contact considérée par l'approche analytique est représentée par un rectangle rouge. Les caractéristiques de l'engrènement correspondent à la ligne «Gear 1» 1 du tableau 2.6.

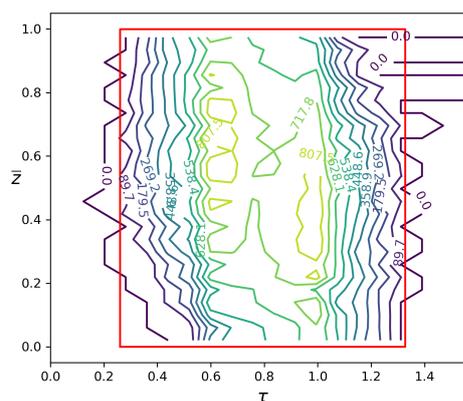
	z_1	z_2	x_1	x_2	h_{a1}	h_{a2}	m_n	b	α_n	β	a_w	ε_α	ε_β
							[mm]	[mm]	[°]	[°]	[mm]		
Gear 1	25	33	0,136	0,034	1,1	1,1	12	90	20	19,6	371,7	1,59	0,80
Gear 2	25	33	0,136	0,034	1,1	1,1	12	146,2	20	19,6	371,7	1,59	1,30
Gear 3	26	141	0,25	-0,251	1,0	1,0	5	45,12	20	8	421,95	1,60	0,42

TABLEAU 2.6 – Paramètres macro-géométriques de 3 engrenages

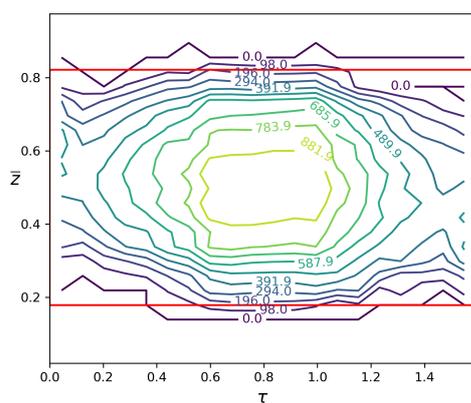
On peut observer que les limites analytiques de la zone d'engrènement effectif correspondent raisonnablement bien avec la zone chargée obtenue par simulations numériques. La taille du domaine analytique varie légèrement avec la valeur du coefficient d'effet convectif. Le tableau 2.7 illustre cette dépendance. Une augmentation de ce coefficient conduit à une réduction de la zone de contact en présence d'un bombé suffisant.



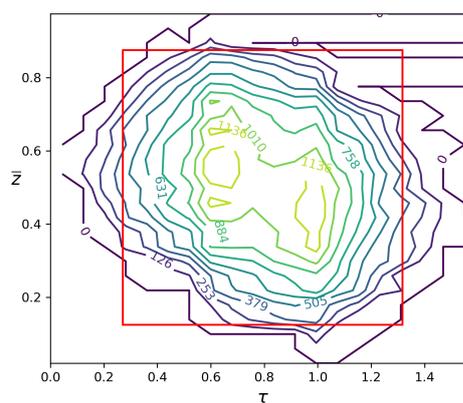
$$E^* = 1, B^* = 0,5$$



$$E^* = 3, B^* = 0,5$$



$$E^* = 1, B^* = 3$$



$$E^* = 3, B^* = 3$$

FIGURE 2.46 – Approximations de la zone de contact dans le plan d'engrènement en présence de différentes valeurs de profondeur de correction de profil et d'hélice (Gear 1 de la table 2.6, $\Gamma = 0,37$, $\alpha=0,3$, $\vartheta_G=1,3$)

E^*	B^*	ϑ_G	λ	δ
1	0,5	1,3	0	0
		2,0	0	0
3	0,5	1,3	0,16	0
		2,0	0,18	0
3	3	1,3	0,17	0,12
		2,0	0,22	0,17
1	3	1,3	0	0,18
		2,0	0,06	0,24

TABLEAU 2.7 – Valeurs des paramètres λ et δ pour différents triplets (E^*, B^*, ϑ_G) , dans les mêmes conditions que pour la figure 2.46

Modifications de profil optimales

On considère les 3 situations d'engrènement définies par le tableau 2.6. Pour un bombé longitudinal B^* fixé, un balayage est réalisé sur la profondeur de la correction de profil E^* et sur sa longueur Γ (correction symétrique). Les résultats sont obtenus avec le code LDP (modèle de plaque) et les figures 2.47, 2.48 et 2.49 montrent les évolutions du RMS de l'écart de transmission. Sont superposés à ces lignes de niveaux, les résultats analytiques correspondant à l'annulation de l'approximation de la variance définie par l'équation (2.153) pour 3 valeurs différentes du coefficient d'effet convectif : $\vartheta_G \in \{1 ; 1,5 ; 2\}$.

Pour cet exemple et pour les 3 niveaux de correction longitudinale, les zones de correction de profil optimales obtenues analytiquement correspondent bien avec les résultats numériques. On observe que pour $\varepsilon_\beta < 1$ (Gear 1 et 3), le bombé a une influence limitée sur les corrections de profil optimales alors que cette influence devient plus marquée pour $\varepsilon_\beta > 1$ (Gear 2). Dans ce cas, à l'augmentation du bombé, correspond un décalage de la courbe des corrections de profil optimales vers des corrections plus courtes, jusqu'à disparaître totalement pour $B^* \geq 2$.

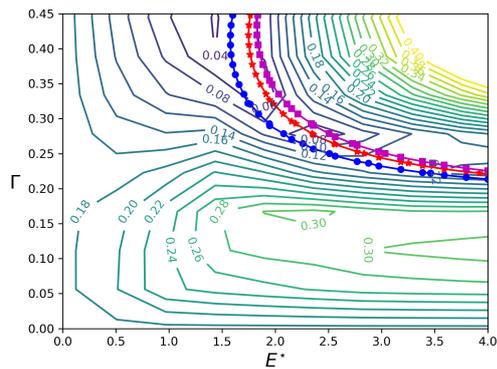
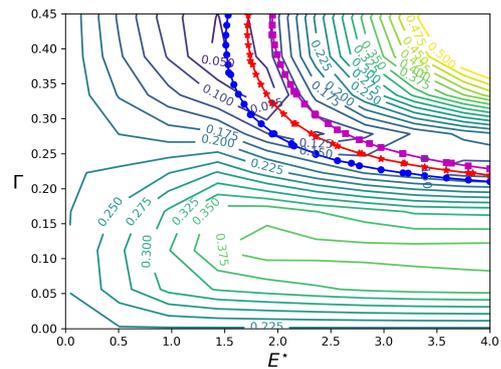
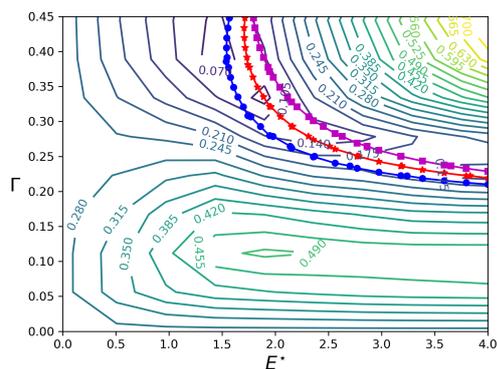
a- Résultats avec $B^* = 1$ b- Résultats avec $B^* = 1,5$ c- Résultats avec $B^* = 2$

FIGURE 2.47 – Combinaisons optimales de corrections de profil et d'un bombé d'hélice pour l'engrènement Gear1 (tableau 2.6), comparaison des résultats numériques obtenus avec LDP et des résultats analytiques pour 3 valeurs du coefficient d'effet convectif ϑ_G : ■ pour $\vartheta_G=1,0$; ★ pour $\vartheta_G=1,5$; ● pour $\vartheta_G=2,0$

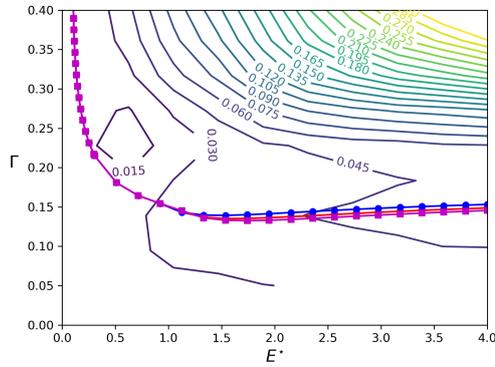
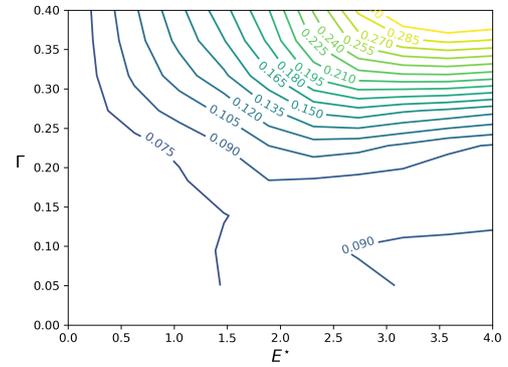
a- Résultats avec $B^* = 1$ b- Résultats avec $B^* = 2$: pas de correction optimale

FIGURE 2.48 – Combinaisons optimales de corrections de profil et d'un bombé d'hélice pour l'engrenage Gear 2 (tableau 2.6), comparaison des résultats numériques obtenus avec LDP et des résultats analytiques pour 3 valeurs du coefficient d'effet convectif ϑ_G : \blacksquare pour $\vartheta_G=1,0$; \blacklozenge pour $\vartheta_G=1,5$; \bullet pour $\vartheta_G=2,0$

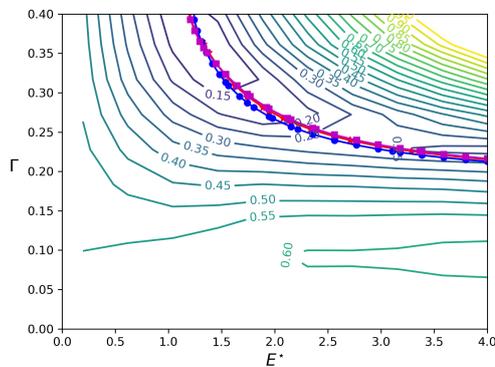
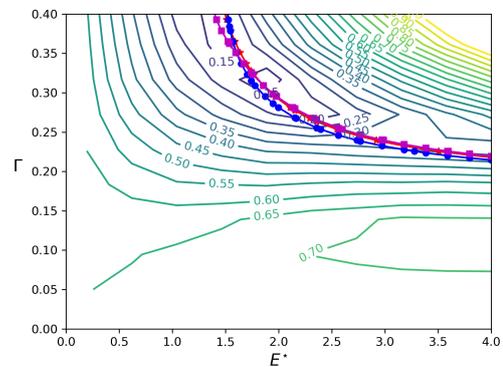
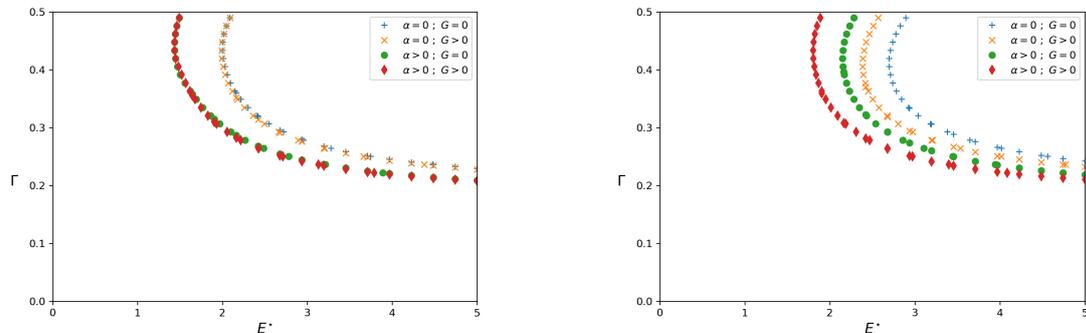
a- Résultats avec $B^* = 1$ b- Résultats avec $B^* = 2$

FIGURE 2.49 – Combinaisons optimales de corrections de profil et d'un bombé d'hélice pour l'engrenage Gear 3 (tableau 2.6), comparaison des résultats numériques obtenus avec LDP et des résultats analytiques pour 3 valeurs du coefficient d'effet convectif ϑ_G : \blacksquare pour $\vartheta_G=1,0$; \blacklozenge pour $\vartheta_G=1,5$; \bullet pour $\vartheta_G=2,0$

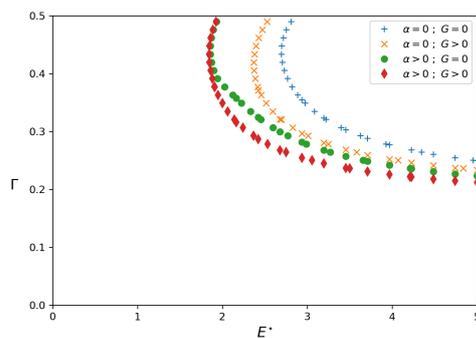
2.4.7 Influence de l'effet convectif et des variations de raideur dans la direction d'engrènement

Pour de faibles bombés ($B^* < 1$), l'effet convectif n'a pratiquement aucune influence sur les caractéristiques de modification des surfaces actives qui minimisent les variations de l'écart de transmission. En revanche, le paramètre α qui caractérise l'amplitude de la variation de raideur linéique sur le segment de conduite déplace le lieu des optimum de correction de profil vers de plus faibles profondeurs E^* . La figure 2.50 a) représente ce décalage et cette évolution a déjà été relevée en [16].

La situation est plus nuancée pour de plus forts bombés adimensionnels (ou des charges plus faibles pour une correction longitudinale donnée) comme le montrent les figures 2.50 b) et c). L'effet convectif a une influence nette sur les corrections optimales et contribue à déplacer ce lieu vers des corrections de profil moins profondes. Cela montre l'importance de la prise en compte de ce phénomène lorsque $B^* > 1,5$ et que les lignes de contact ne s'étendent pas jusqu'aux bords des dents.



a- Amplitude du bombé adimensionné : $B^* = 0,5$ b- Amplitude du bombé adimensionné : $B^* = 1,5$



c- Amplitude du bombé adimensionné : $B^* = 3$

FIGURE 2.50 – Influence du paramètre α d'amplitude de la variation de la raideur linéique d'engrènement et du paramètre ϑ_G de l'effet convectif sur la position de la courbe des corrections de profil optimales pour différentes valeurs du bombé adimensionné

2.4.8 Combinaison optimale d'une correction de profil et d'hélice

Paramètres de référence

Les résultats analytiques obtenus dans la section précédente rendent possible des calculs massifs sur une large plage de valeurs des paramètres macro et micro géométriques pour un effort et un coup de calcul très raisonnables. Suivant une approche similaire à celle des articles [101, 14, 13, 16], la possibilité de mettre les résultats de corrections de profil et d'hélice optimum vis à vis de la fluctuation des écarts de transmission sous une forme générale et synthétique est recherchée. Les diagrammes de performances qui permettent d'atteindre au mieux cet objectif et qui seront présentés dans la suite, font intervenir les couples de grandeurs sans dimension suivantes :

1. B^* versus $\frac{E^*}{E_0^*}$ pour les graphes où $\varepsilon_\beta < 1$;
2. $\frac{B^*}{B_0^*}$ versus $\frac{E^*}{E_0^*}$ pour les graphes où $\varepsilon_\beta > 1$

où E_0^* et B_0^* sont des paramètres de références définis de la façon suivante.

Valeur de E_0^*

Pour une longueur de correction de profil Γ donnée, la profondeur de correction de référence (E_0^*) correspond à la valeur qui annule le premier terme de la variance de l'écart de transmission avec $B^* = 0$ (équation : (2.151) et (2.146)).

La valeur de E_0^* ne dépend que de ε_α , α et Γ .

Pour obtenir une valeur approchée facile d'utilisation, on suppose dans un premier temps que $\alpha = 0$. L'annulation du premier terme du RMS de TE_s^* , l'équation permettant de déterminer λ et le fait que $E^* \neq 0$, permettent finalement d'obtenir la solution suivante :

$$E_1^* = \frac{\Gamma \varepsilon_\alpha}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \quad (2.154)$$

Dans un second temps, pour tenir compte de l'évolution parabolique de la raideur selon la direction de l'engrènement, on utilise le coefficient C_s [12, 41, 16], ce qui conduit à la définition de E_0^* :

$$E_0^* = \frac{\Gamma \varepsilon_\alpha}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}} (1 - \alpha C_s) = \frac{\Gamma \varepsilon_\alpha}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \left(1 - \alpha \left(-30\Gamma^2 + (18 + 12\Gamma_L)\Gamma - 6\Gamma_L - 1 \right) \right) \quad (2.155)$$

Valeur de B_0^*

La grandeur normative B_0^* utilisée pour un rapport de recouvrement supérieur à 1, correspond à la valeur du bombé adimensionné qui annule le premier terme du RMS de TE_s^* lorsqu'il n'y a pas de modification de profil. Avec $\alpha = 0$, la détermination du paramètre δ est donnée par :

$$B_0^* = \frac{-1}{2(1 - 2\delta_0)^3 \eta (\varepsilon_\beta (1 - 2\delta_0))} \quad (2.156)$$

Il est important de noter que $\eta(\varepsilon_\beta(1 - 2\delta_0)) < 0$ pour $1 < \varepsilon_\beta(1 - 2\delta_0) < \varepsilon_{\beta 1} \cong 1,8\dots$. Ainsi, l'expression de B_0^* n'existe approximativement que sur cette plage de valeurs.

Dans le cas où $\delta_0 = 0$ (cas A dans le partitionnement des solutions), la solution est directe et

$$B_0^* = \frac{-1}{2\eta(\varepsilon_\beta)} \quad (2.157)$$

Dans le cas où $\delta_0 > 0$ (cas D), l'équation pour la détermination de δ_0 est :

$$1 - \frac{2B_1^*}{3}(1 - 2\delta_0)^3 - B_1^*G(1 - 2\delta_0) = 0 \quad (2.158)$$

On combine les relations (2.156) et (2.158) de façon à faire disparaître B^* :

$$\eta(\varepsilon_\beta(1 - 2\delta_0)) = -\frac{1}{3} - \frac{G}{2(1 - 2\delta_0)^2} \quad (2.159)$$

Approximation :

On suppose que le terme $\frac{G}{2}$ prend de petites valeurs numériques par rapport à $\frac{1}{3}$ et on utilise un développement limité au voisinage de $\eta(x) = -\frac{1}{3}$. On appelle $\varepsilon_{\eta 0}$ la valeur particulière de $x \in [1, 2]$ telle que $\eta(x) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{inv}(\pi x) = 0$. Numériquement, on trouve $\varepsilon_{\eta 0} = 1,43029665\dots$. Le développement limité au premier ordre au voisinage de $\varepsilon_{\eta 0}$ s'écrit :

$$\eta(\varepsilon_{\eta 0} + \gamma) \cong \eta(\varepsilon_{\eta 0}) + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} = -\frac{1}{3} + \gamma \left(1 - \frac{2}{(\pi \varepsilon_{\eta 0})^2}\right) \quad (2.160)$$

Après quelques manipulations, on obtient :

$$\delta_{0a} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_{\eta 0}}{4\varepsilon_\beta} \left(3 + \sqrt{1 - \frac{4G\varepsilon_\alpha^2}{\varepsilon_{\eta 0}^3 - \frac{2\varepsilon_{\eta 0}}{\pi^2}}} \right) \right] \quad (2.161)$$

Bien entendu, on ne retient finalement pour δ_{0a} que la partie positive de l'expression (2.161).

De plus, sans effet convectif, la valeur de δ est approximée par la valeur calculée :

$$\delta_{0b} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_{\eta 0}}{2\varepsilon_\beta}$$

Les écarts entre $B_0^*(\varepsilon_\beta, \delta_{0a})$ et $B_0^*(\varepsilon_\beta, \delta_{0b})$ sont inférieurs à 0,3% (figure 2.51) sur une large plage de b/m_n et ε_β

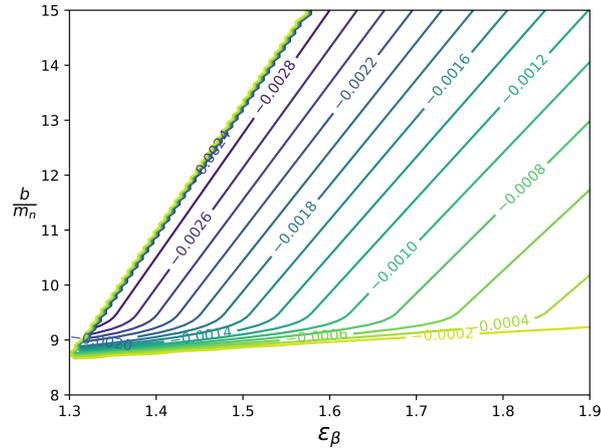


FIGURE 2.51 – Différences entre $B_0^*(\epsilon_\beta, \delta_{0a})$ et $B_0^*(\epsilon_\beta, \delta_{0b})$

Diagramme de performance pour $\epsilon_\beta < 1$

La figure 2.52 représente les combinaisons de paramètres B^* et $\frac{E^*}{E_0^*}$ conduisant à $V(TE^*) \cong 0$ pour une série de valeurs réalistes de ϵ_α et ϵ_β . Chaque graphe correspond à des longueurs de correction de profil adimensionnées Γ différentes. Les segments continus représentent les solutions analytiques établies en [16] en supposant aucune réduction de la zone effective de contact suivant la largeur ($\delta = 0$).

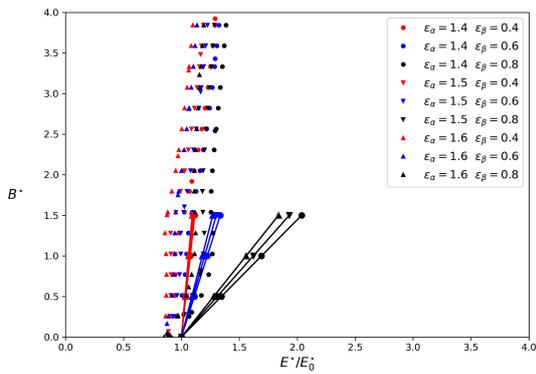
Diagramme de performance pour $\epsilon_\beta > 1$

Pour un rapport de recouvrement supérieur à l'unité, les combinaisons de modifications de profil et d'hélice qui minimisent les fluctuations de l'écart de transmission sont représentées figure 2.53 (graphe $\frac{B^*}{B_0^*}$ versus $\frac{E^*}{E_0^*}$). Quels que soient les jeux de paramètres, l'étendue de la correction de profil (Γ) a une très faible influence sur cette représentation : les deux familles de solutions apparaissent toujours de la même façon. Les graphes 2.53-a-b-c-d montrent les solutions du modèle analytique constitué de la relation (2.151) et d'un des systèmes (2.145), (2.146), (2.147) ou (2.148) permettant d'estimer la zone de contact effective. Les approximations qui conduisent à des expressions explicites pour de faibles valeurs de bombé [16] sont représentées figure 2.53-e-f.

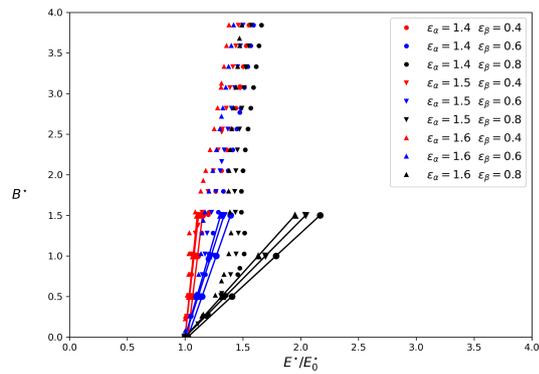
Analyse et synthèse

Les figures 2.52 et 2.53 sont représentatives des combinaisons de corrections optimales vis à vis de la variance de l'écart de transmission pour une large variété de géométries d'engrenages cylindriques qui ont été testées. Des tendances générales peuvent être observées puisque les nombreux cas peuvent se ramener à quelques courbes caractéristiques :

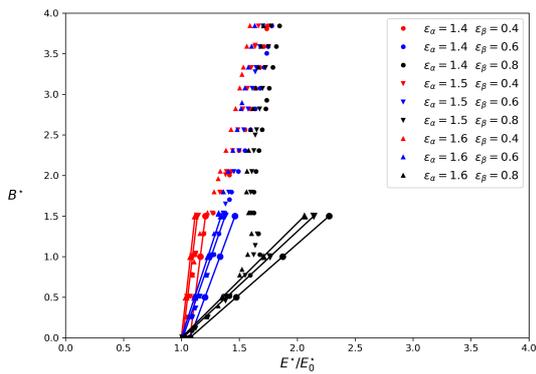
1. Tant que la zone de contact effectif ne subit pas de réduction selon la largeur de la denture



a- Longueur de modification de profil adimensionné : $\Gamma = 0,25$

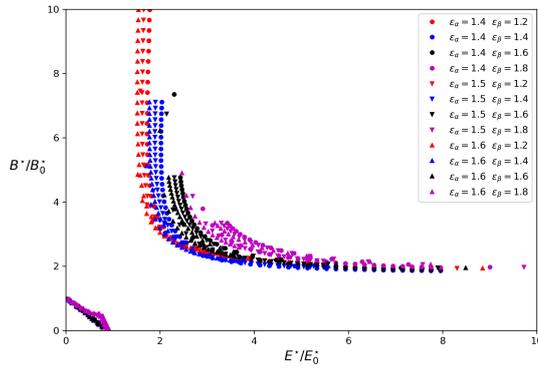


b- Longueur de modification de profil adimensionné : $\Gamma = 0,30$

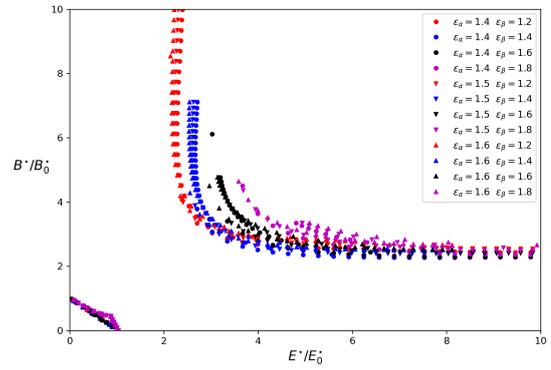


c- Longueur de modification de profil adimensionné : $\Gamma = 0,35$

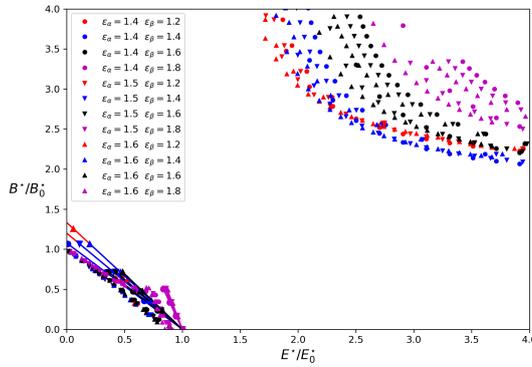
FIGURE 2.52 – Modifications optimales de profil et d'hélice pour $\epsilon_\beta < 1$ ($\Gamma = 0,25, 0,3, 0,35$). Les segments continus représentent les approximations analytiques (2.162) et (2.163)



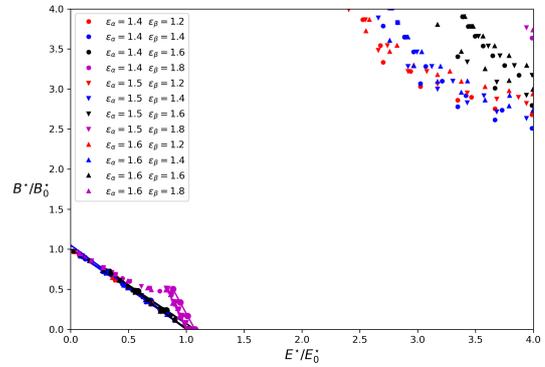
a- Combinaisons optimales sur un domaine étendu pour $\Gamma = 0,25$



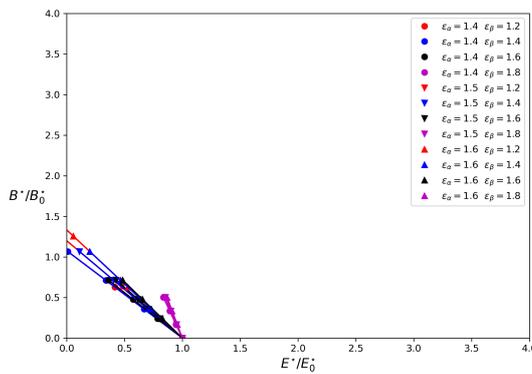
b- Combinaisons optimales sur un domaine étendu pour $\Gamma = 0,35$



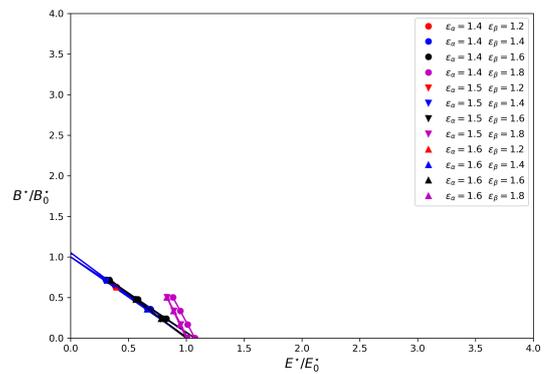
c- Détail du graphe a- sur un domaine identique à ceux de la figure 2.52



d- Détail du graphe b- sur un domaine identique à ceux de la figure 2.52



e- Résultats analytiques correspondant aux relations (2.162) et (2.163)



f- Résultats analytiques correspondant aux relations (2.162) et (2.163)

FIGURE 2.53 – Modifications optimales de profil et d'hélice pour $\epsilon_\beta > 1$ ($\Gamma = 0,25$ et $0,35$)

($\frac{B^*}{B_0^*} < 1$ ou $\delta = 0$), les relations explicites proposées dans l'article [16] sont valides :

— S'il y a réduction de la longueur de contact dans le sens de l'engrènement ($\lambda > 0$) :

$$E^* \cong \frac{\Gamma \varepsilon_\alpha}{2\Gamma - 1 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha}} (1 - 0,3C_{f1}) \left[1 + 2B^* \eta(\varepsilon_\beta) \left(2\Gamma - 1 + \frac{2}{\varepsilon_\alpha} \right) \right] \quad (2.162)$$

Avec $C_{f1} = 6\Gamma(-5\Gamma + 2\Gamma_L) + 6(3\Gamma - \Gamma_L) - 1$ pour $\Gamma \in \left[\frac{\Gamma_L}{2}; \Gamma_L \right]$

— Sans réduction de longueur de contact dans le sens de l'engrènement ($\lambda = 0$) :

$$E^* = \frac{1 + 2B^* \eta(\varepsilon_\beta)}{(1 - \Gamma) \left[\text{Sinc}[\eta(1 - \Gamma)] \text{Sinc}[\varepsilon_\alpha \Gamma] / \text{Sinc}[\varepsilon_\alpha] \right]} (1 - 0,3C_{f2}) \quad (2.163)$$

Avec $C_{f2} = -18\Gamma_L^2 + 12\Gamma_L - 1$ pour $\Gamma > \Gamma_L$ et $C_{f2} = C_{f1}$ pour $\Gamma \in \left[\frac{\Gamma_L}{2}; \Gamma_L \right]$

Les comparaisons des figures 2.52 et 2.53 attestent une bonne concordance entre ces relations et les solutions numériques du problème plus complet même si certains écarts sont à noter pour une correction courte ($\Gamma = 0,25$) et avec $\varepsilon_\beta < 1$ (figure 2.52-a).

2. Dans le cas d'une réduction de la largeur de contact effectif ($\delta > 0$), les résultats diffèrent suivant la valeur du rapport de recouvrement :

(a) Pour $\varepsilon_\beta < 1$, les combinaisons de correction optimales correspondent approximativement à des courbes qui ont une allure verticale dans le plan ($\frac{E^*}{E_0^*}, B^*$). Suivant cette représentation et pour un large éventail de paramètres de l'engrènement ($\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \beta_b, \frac{b}{m_n}, \vartheta_G$), le lieu des optimums se situe au voisinage d'une droite de forte pente (positive) qui coupe l'axe $\frac{E^*}{E_0^*}$ aux environs de l'unité. Cela montre que la valeur de la correction longitudinale a un impact nettement plus faible que la modification de profil pour la minimisation des fluctuations de l'écart de profil tant que les valeurs de ces modifications sont du même ordre de grandeur. Cette influence est un peu plus forte pour des longueurs de correction de profil plus importantes. Pour un ensemble de paramètres géométriques fixés (micro et macro) et pour un bombé qui n'est pas trop fort par rapport à la profondeur de correction de profil, il existe une charge optimale (voir ci-après).

(b) Pour $\varepsilon_\beta > 1$, la correction longitudinale devient sensiblement plus influente et elle peut même réduire fortement les fluctuations de l'écart de transmission en l'absence de modification de profil. L'étendue Γ de cette dernière est de seconde importance.

Dans le plan ($\frac{E^*}{E_0^*}, \frac{B^*}{B_0^*}$), on observe deux zones de combinaisons optimales :

— la première famille de solutions est remarquablement proche de la droite d'équation :

$$\frac{B^*}{B_0^*} = 1 - \frac{E^*}{E_0^*} \quad (2.164)$$

— La seconde famille est plus dispersée. Les courbes ont l'allure d'hyperboles pour des valeurs plus élevées de $\frac{E^*}{E_0^*}$ et de $\frac{B^*}{B_0^*}$ (fonctionnement à faibles charges).

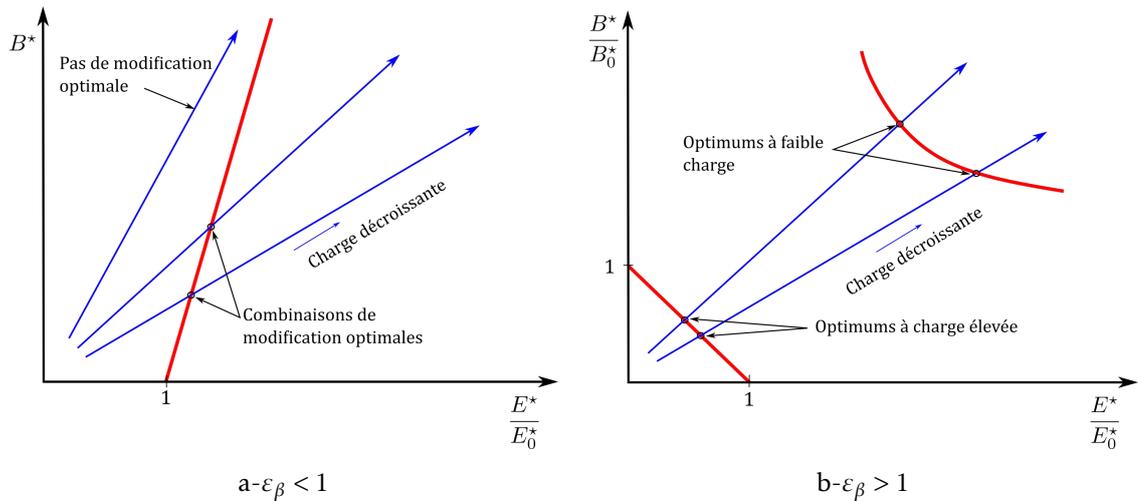


FIGURE 2.54 – Configuration schématique des lieux des optimums avec ε_β plus petit ou plus grand que 1

3. Pour une géométrie d'engrenage et des modifications des surfaces actives données, une variation de charge induit une homothétie de E^* et B^* puisqu'ils sont adimensionnés par la déflexion statique moyenne, quasiment proportionnelle au chargement. Dans les deux plans d'observations des modifications optimales définis ci-dessus, une évolution de la résultante de l'effort d'engrènement engendre un déplacement du point caractéristique suivant une droite passant par l'origine (figure 2.54).

- Pour $\varepsilon_\beta < 1$ (figure 2.54 a-), quelque soit la valeur du bombé B inférieure ou égale à environ $2E$, il existe une profondeur de correction de profil qui minimise la variance de l'écart de transmission. Une correction longitudinale seule ne peut pas réaliser l'optimisation. Lorsque la charge varie, il y a au plus une combinaison optimale.
- Pour $\varepsilon_\beta > 1$, (figure 2.54 b-), il existe une zone pour $E^* > E_0^*$ et $B^* > B_0^*$ où aucune combinaison optimale n'est présente. Une unique correction, soit de profil soit d'hélice, peut permettre la minimisation de la variance de l'écart de transmission ($E^* = E_0^*$ ou $B^* = B_0^*$). Dans ce cas, la solution est définie pour seulement un chargement.

Pour une combinaison de corrections dont les profondeurs sont du même ordre de grandeur, il est intéressant de noter qu'il existe deux chargements optimums et que l'amplitude des variations de l'écart de transmission pour les couples intermédiaires demeure limitée. Cette propriété peut avantageusement être utilisée dans le cas d'un chargement variable (très fréquent en pratique ...).

La figure 2.55 (Gear 2 du tableau 2.6) montre, selon le modèle analytique, l'évolution du RMS de l'écart de transmission adimensionné en fonction de la charge transmise pour une combinaison de corrections fixée. Les différentes courbes correspondent à plusieurs couples de valeurs des paramètres α et ϑ_G de la raideur d'engrènement, prises sur toute leur plage de variation. On constate que les comportements sont largement influencés par ces paramètres à faible charge et que cette sensibilité s'estompe lorsque la transmission est plus chargée. Il s'ensuit que la position de l'optimum à bas couple dépend des paramètres (α , ϑ_G), contrairement au second optimum, légèrement dépendant de α et pratiquement pas de ϑ_G . Les résultats de la figure 2.55 sont assez

semblables à ceux obtenus expérimentalement ou numériquement présents dans la littérature (voir [84, 45] par exemple).

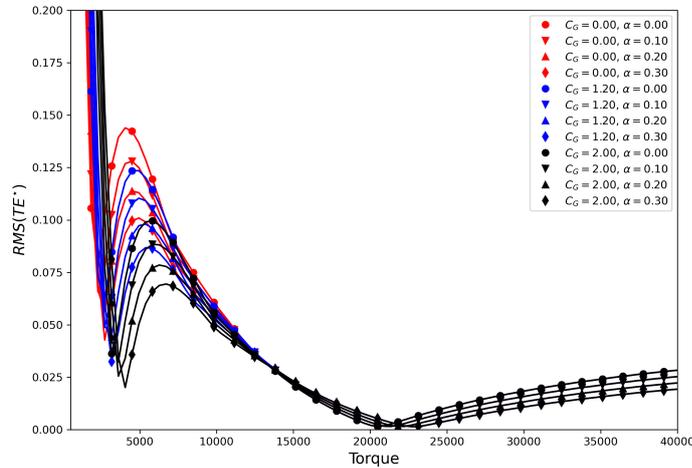


FIGURE 2.55 – RMS de l'écart de transmission en fonction du couple - Gear 2, $\Gamma=0,3$; $E = B=23\mu\text{m}$

2.4.9 Synthèse de l'approche analytique

Le modèle analytique de l'engrènement présenté dans cette partie se concentre sur l'évaluation des fluctuations de l'écart de transmission quasi-statique. Il est particulièrement adapté aux dentures étroites pour lesquelles les écarts d'orientation relatifs sont faibles. Cette approche est très générique et inclut avec peu de paramètres les influences suivantes :

- les caractéristiques essentielles de la macro-géométrie nominale : rapport de conduite ε_α et rapport de recouvrement ε_β ;
- une correction de profil linéaire et symétrique vis-à-vis de l'abscisse de la ligne de pression, caractérisée par une profondeur E et une étendue Γ ;
- une correction longitudinale intégrale, de forme parabolique, d'amplitude B ;
- une évolution spatiale de la raideur linéique d'engrènement en un point de contact, caractérisée par le paramètre α ;
- un effet convectif au niveau du contact, évalué dans le cas de l'engrènement par le paramètre G .

L'originalité de ce travail peut se résumer en deux points principaux. Tout d'abord, cette formulation rend possible dans le cas général la prédiction des corrections optimales vis-à-vis des fluctuations de l'écart de transmission. Ensuite, non seulement le modèle relie fortement ces résultats avec le niveau de charge transmis (en accord avec la communauté scientifique) mais il permet d'aller un peu plus loin en montrant que pour certaines géométries (dentures HCR, $\varepsilon_\beta > 1$), une même correction conduit à de faibles fluctuations de l'écart de transmission sur une plage de couples transmis. Ce comportement, déjà observé dans la littérature, est mieux compris et les conditions de son apparition sont définies.

De plus, le temps d'exécution de ce modèle est assez réduit par rapport à celui d'une simulation numérique de l'engrènement (modèle de type VSA). Cela offre des possibilités de calculs statistiques (sensibilité, robustesse, analyse et synthèse de tolérances, etc.) qui sont aujourd'hui très embryonnaires ...

Une limitation du modèle tient à la prise en compte un peu grossière de la zone de contact effective. En effet, celle-ci est supposée de forme simple (rectangulaire) et la comparaison de signaux temporels avec des résultats d'un modèle VSA plus fin à ce niveau, montre des écarts parfois significatifs. Cependant, les RMS des fluctuations sont relativement peu sensibles à cette approximation et toutes les comparaisons analytiques / numériques sont excellentes.

Les hypothèses de symétrie de la fonction de raideur d'engrènement (φ) et de la correction de profil sont importantes pour réduire le nombre de paramètres mais elles impactent inévitablement les solutions. Il serait intéressant d'analyser le comportement à partir d'évolutions de la raideur obtenues avec des modèles plus fins et en élargissant les possibilités des corrections de profil. De même, d'autres phénomènes tels qu'une dépendance de la raideur linéique selon la position du point de contact suivant la largeur, des écarts de montage ou des déviations en fonctionnement sous charge pourraient être ajoutés et rendre ainsi le modèle plus réaliste. Il serait également utile de diversifier les critères d'évaluation comme le travail des forces de frottement, niveau de contraintes, etc.

Approches numériques

Les modèles numériques de simulation de l'engrènement sont complémentaires de la démarche analytique présentée dans la première partie. Non seulement ils permettent de vérifier rapidement les développements sur quelques cas mais leur adaptabilité et leur efficacité en font des outils remarquables d'analyse et d'optimisation en phase de conception. Ils autorisent un large éventail de modèles détaillés et des optimisations plus poussées. Les travaux présentés dans cette partie ont été développés par des étudiants durant la préparation de leur thèse.

3.1 Optimisation numérique d'un engrènement unique

3.1.1 Contexte

Les résultats présentés dans cette section s'appuient principalement sur les travaux de thèse de Dhafer Ghribi [43]. Cette thèse, dirigée par Philippe Vexex, a été préparée en cotutelle entre l'INSA de Lyon et l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS), dans le cadre d'une coopération entre le LaMCoS et l'Unité de Mécanique, Modélisation et Productique (U2MP) de l'ENIS, dirigée par le Professeur Mohamed Haddar. De plus, cette thèse a été réalisée en collaboration avec le pôle Mécatronique, transmissions et Capteurs du Centre technique des industries mécaniques (CETIM) sous la responsabilité de Monsieur Christophe Augé. Le CETIM a financé ces travaux.

Le modèle numérique d'engrènement utilisé est de type VSA [102, 71, 3, 98] développé au LaMCoS. La raideur des cellules des lignes de contact est évaluée à chaque pas de temps (modèle de Weber et Banachek [107] et Lundberg [67]) et les corrections de profil et d'hélice sont uniquement limitées par les formes mathématiques qu'on peut leur donner. La simulation fournit les évolutions temporelles des degrés de liberté du système et l'écart de transmission sans charge (NLTE). Ces résultats permettent la construction de l'écart de transmission quasi-statique TE_s (2.17) et de sa variance.

A l'époque de ces travaux, les développements analytiques sur la réduction des fluctuations de l'écart de transmission ne portaient que sur la modification de profil et le principal résultat était la connaissance de la courbe maîtresse pour une raideur linéique constante [101].

3.1.2 Objectifs et contraintes de conception

Ces travaux s'inscrivent dans le contexte général de la conception des engrenages cylindriques à profil de denture en développante de cercle et plus précisément à la détermination des corrections de forme de dents (micro-géométrie) pour un seul engrènement. Ces modifications impactent en premier lieu le bruit, les vibrations et les pertes d'énergie mécanique de l'engrènement.

Les axes particulièrement explorés sont les suivants :

1. Optimisation des corrections de profil pour la minimisation des fluctuations (RMS) temporelles de l'écart de transmission quasi-statique. Ces modifications ne sont à priori ni linéaires ni symétriques. La présence d'un bombé d'hélice est un paramètre de l'étude.
2. Conception robuste d'une combinaison de modifications suivant l'hélice et le profil. La variation de certains paramètres géométriques ou de fonctionnement est prise en compte pour la minimisation du RMS de TE_S^* .
3. Optimisation des corrections qui réalisent un compromis entre plusieurs critères mais pas de façon unique (optimisation multiobjectif).

Pour les différentes optimisations, des contraintes de conception spécifiques ont été mises en place et systématiquement vérifiées, sans que cela soit rappelé dans la suite de ce document. Une contrainte de conception est une condition de validité de la démarche de conception, sans faire l'objet d'une optimisation. Elle prend généralement la forme d'une inéquation où une grandeur estimée ne doit pas dépasser une certaine valeur. Cette limite n'est pas toujours connue avec précision et elle peut être sujette à discussion.

A contrario, une cible d'optimisation est un scalaire ou un vecteur qui se trouve au cœur du processus de conception, c'est l'élément qui permet de discriminer ou de classer les solutions envisageables.

Pour éviter une dégradation prématurée (voire brutale) du système, les conditions suivantes doivent être simultanément vérifiées :

- Limitation de la pression maximale de contact :

Au cours de l'engrènement, les zones de contact entre dentures sont étroites et l'intensité de l'interaction mécanique peut être à l'origine de détériorations des surfaces (défaillance par écaillage). La norme ISO-6336 [56] propose, en se basant sur la théorie de Hertz, une condition à respecter de la forme :

$$\sigma_{Hmax} < \sigma_{Hlim} \quad (3.1)$$

Cette relation prend en compte les principales conditions de fonctionnement, la répartition de charge, la qualité de réalisation, différentes sensibilités du matériau etc. La micro-géométrie n'intervient pas dans cette expression normalisée et son impact est supposée être du second ordre.

Cependant, le modèle numérique permet de connaître la charge effective sur chaque cellule des lignes d'engrènement au cours du temps et ainsi, pression et cisaillement maximum. La condition normalisée est adaptée à la simulation numérique et elle est vérifiée en tout point et à tout instant.

- Limitation de la contrainte maximale de flexion en pied de dent :

En fonctionnement sous charge, la denture et la jante de chaque roue subissent des contraintes mécaniques alternées qui peuvent être responsables de phénomènes de fatigue et de propagation de fissures. Le volume de matière le plus sollicité se trouvant sous la

trochoïde de raccordement et il est nécessaire de vérifier que la contrainte maximale dite de traction en pied de dent ne dépasse pas une valeur admissible [56] :

$$\sigma_{Fmax} < \sigma_{Flim} \quad (3.2)$$

Comme pour la limitation de la pression maximale de contact, des facteurs relatifs à l'environnement, au fonctionnement, à la géométrie et au matériau modulent cette relation et les modifications de forme ne sont pas prises en compte. Au prix parfois d'une extrapolation du coefficient de concentration de contrainte, la simulation numérique alerte sur le non-respect de cette contrainte pour chaque «tranche mince» de l'engrènement.

— Évitement de chocs à l'engagement :

Les déplacements élastiques des dentures chargées perturbent la propriété de conjugaison des surfaces hélicoïdes développables, ce qui peut générer des chocs à l'engagement. Pour l'éviter, on s'impose que l'écart de forme à l'engagement adimensionné par la déflexion statique moyenne soit supérieur au rapport de conduite de profil :

$$E^* + B^* > \varepsilon_\alpha \quad (3.3)$$

3.1.3 Optimisation des corrections de forme

Les corrections de profil en tête de dent sont indépendantes sur le pignon et la roue. Leur profondeur et leur étendue adimensionnées par le segment de conduite sont notées respectivement E_i et Γ_i . La forme de la correction est définie par une loi en puissance caractérisée par l'exposant sp_i (figure 3.1). En un point M du segment de conduite, d'abscisse adimensionnée $\bar{x} \in [0 ; \varepsilon_\alpha]$, l'expression de ces corrections est donnée par :

$$e(M) = \begin{cases} -E_1 \left(\frac{-\bar{x}}{\Gamma_1 \varepsilon_\alpha} + 1 \right)^{sp_1} & \text{pour } 0 \leq \bar{x} \leq \Gamma_1 \varepsilon_\alpha \\ -E_2 \left(\frac{\bar{x}}{\Gamma_2 \varepsilon_\alpha} - \frac{1}{\Gamma_2} + 1 \right)^{sp_2} & \text{pour } (1 - \Gamma_2) \varepsilon_\alpha \leq \bar{x} \leq \varepsilon_\alpha \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.4)$$

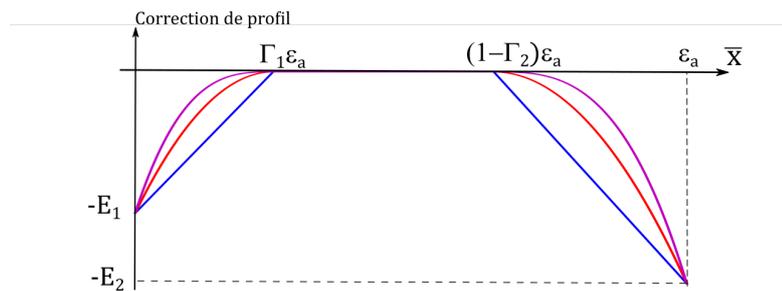


FIGURE 3.1 – Corrections de profil pour $sp_i \in 1 ; 2 ; 3$

De plus, un bombé longitudinal parabolique et symétrique est ajouté. La profondeur de cette correction est notée B (figure 3.2).

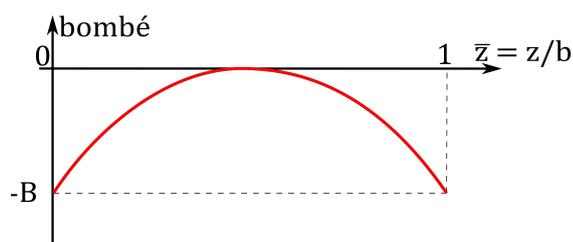


FIGURE 3.2 – Bombé longitudinal

	cas 1	cas 2	cas 3
	hélicoïdal	droit	droit HCR
nombre de dents	28-56	28-56	28-56
largeur [mm]	40-40	40-40	40-40
angle de pression [°]	20	20	20
angle d'hélice [°]	25	0	0
module normal [mm]	4	4	4
coef. de déport	0-0	0-0	0-0
coef. de saillie	1,0-1,0	1,0-1,0	1,3-1,3
coef. de creux	1,4-1,4	1,4-1,4	1,4-1,4
entraxe [mm]	168	168	168
ε_α	1,48	1,7	2,2
ε_β	1,34	0	0
couple nominal [Nm]	850	850	850
déflexion statique moyenne [μm]	20	16	13

TABLEAU 3.1 – Paramètres géométriques des engrenages utilisés

Les optimisations sont menées pour des valeurs de bombé fixées avec les engrenages définis par le tableau 3.1. Il s'agit alors de déterminer les valeurs des 6 paramètres des corrections de profil qui minimisent le RMS de l'écart de transmission (E_1^* , E_2^* , Γ_1 , Γ_2 , sp_1 , sp_2). Vu le nombre de paramètres et la difficulté d'estimer le gradient de la fonction objectif, la méthode retenue pour cette recherche est un algorithme génétique mono-objectif. Après les mises au point (nombre d'individus, nombre de générations, etc) et les validations d'usages, cet algorithme est utilisé pour un panel de géométries. Deux exemples de résultats obtenus sont synthétisés sur les figures 3.3 (dentures droites) et 3.4 (dentures hélicoïdales). Ce sont des diagrammes de type «radar» qui permettent de comparer les solutions pour différentes valeurs de bombé. Le paramètre V_{min} correspond à la valeur minimale obtenue par la fonction objectif.

Les optimisations menées permettent d'établir les constatations suivantes :

- Pour le cas de l'engrenage hélicoïdal la valeur minimale du RMS(TEs) croit légèrement avec la valeur du bombé introduit tandis que le bombé n'a quasiment aucune influence

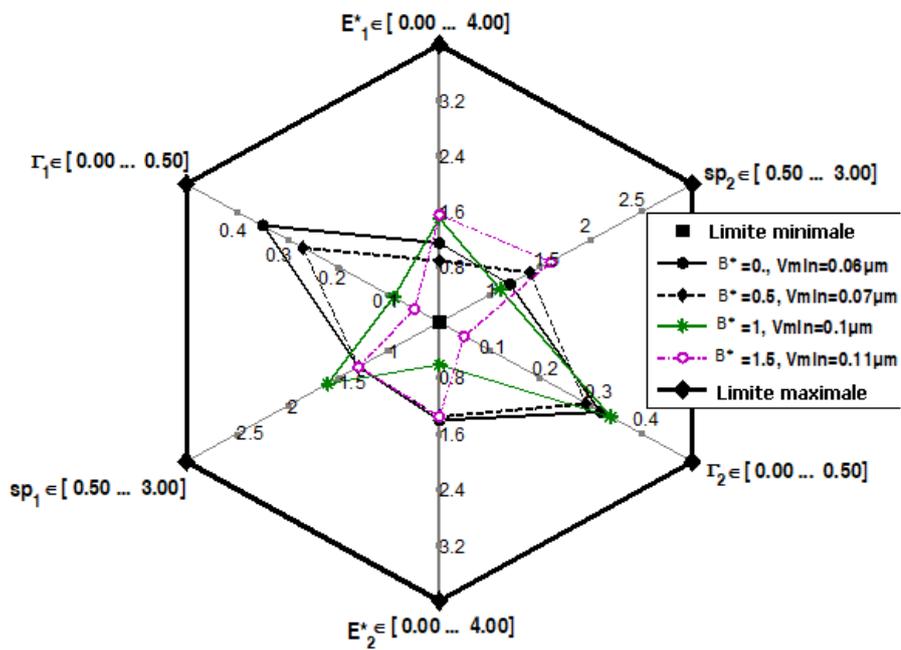


FIGURE 3.3 – Combinaisons optimales des corrections de profil pour différentes valeurs du bombé - Dentures hélicoïdales

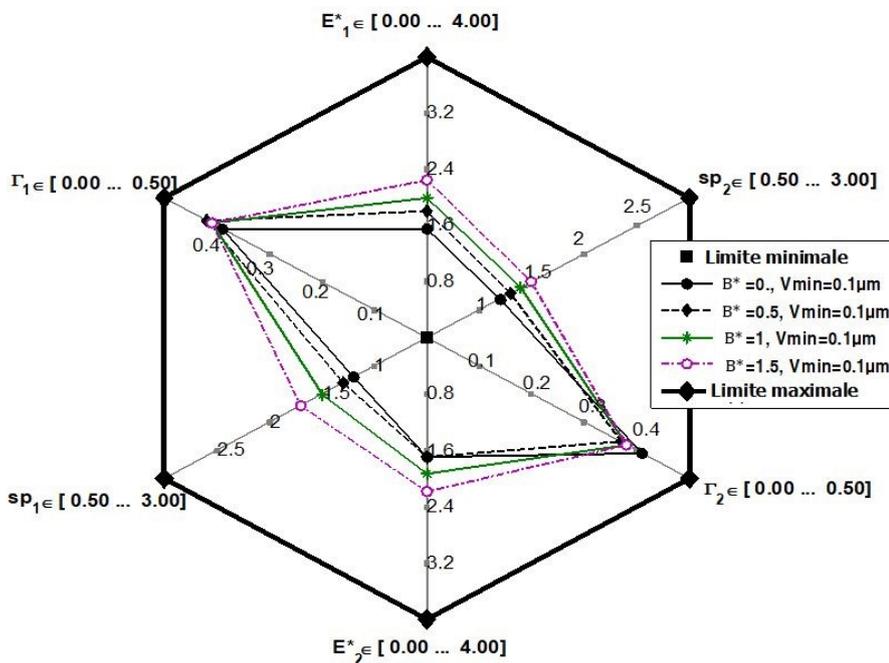


FIGURE 3.4 – Combinaisons optimales des corrections de profil pour différentes valeurs du bombé - Dentures droites

dans le cas de l'engrenage droit.

- Pour l'engrenage hélicoïdal, la valeur du bombé joue un rôle prépondérant dans la définition des paramètres de correction de profil optimaux. Pour certaines valeurs du bombé, les corrections de profil deviennent presque inutiles dans la procédure d'optimisation (voir figure 3.3 où pour $B^* = 1,5$, les solutions optimales s'orientent vers des corrections très courtes).
- Pour les dents droites (figure 3.4) et hélicoïdales (figure 3.3), les corrections de profil optimales correspondent à un coefficient de forme sp non entier, compris entre 1 et 2, et ce quelque soit l'amplitude du bombé.
- Les corrections de profil symétriques conduisent globalement à de très bonnes solutions. Les minimums du RMS de TE_s^* sont toutefois obtenus avec des corrections de profil plus ou moins asymétriques, suivant la macro-géométrie.
- On étudie la sensibilité de la localisation des solutions en recherchant le domaine des paramètres qui conduisent à un niveau de $RMS(TE_s^*)$ inférieur à un seuil V_s égal à 1,1 fois la valeur minimale obtenue lors de la procédure d'optimisation par l'algorithme génétique (figures 3.5 et 3.6). On note alors que les dents droites présentent une plus forte sensibilité par rapport aux paramètres de correction (bande optimale plus étroite). Les dents hélicoïdales sont plutôt moins sensibles à la forme de la correction (paramètre sp).

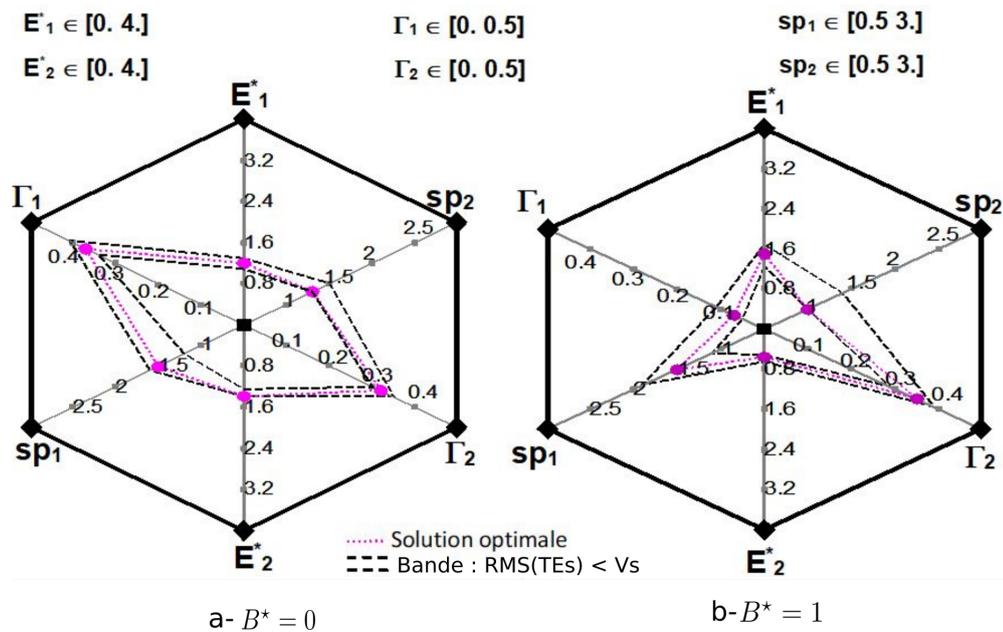


FIGURE 3.5 – Zone optimale ($RMS(TE_s^*) < V_s$) des corrections de profil pour deux valeurs du bombé - Dentures hélicoïdales

3.1.4 Cibles d'optimisations robustes

L'approche stochastique est un moyen de caractériser le comportement du système en présence de variations non contrôlées de certaines grandeurs caractéristiques (géométriques, matériau, fonctionnement, ...). Les étendues de ces dispersions peuvent être assez faibles par rapport

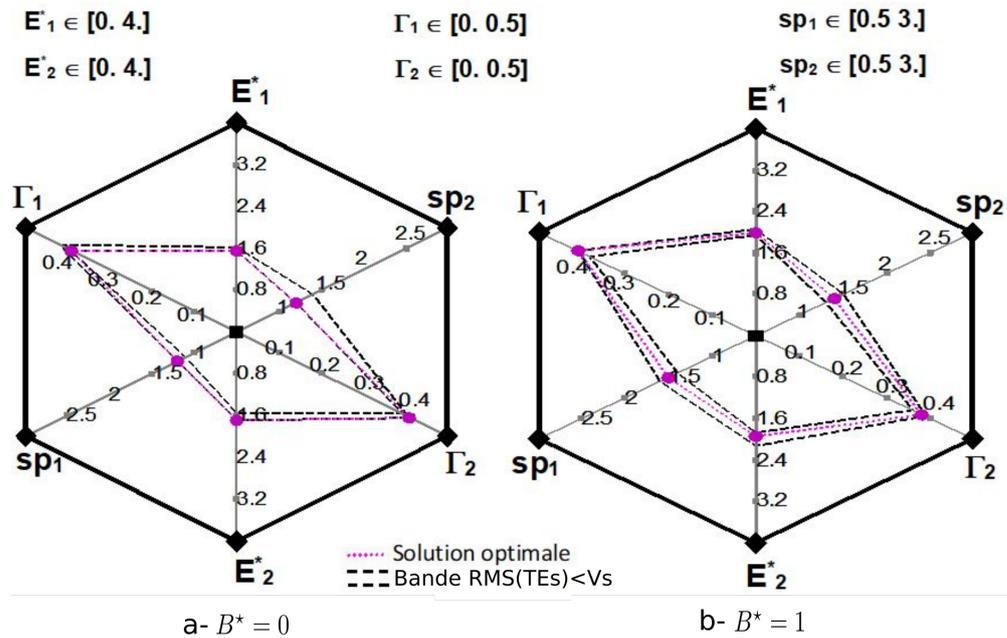


FIGURE 3.6 – Zone optimale ($RMS(TE_s^*) < V_s$) des corrections de profil pour deux valeurs du bombé - Dentures droites

aux valeurs nominales (tolérancement dimensionnel par exemple) ou du même ordre de grandeur (variation du couple transmis). Les lois de probabilité de chaque paramètre au voisinage de sa valeur moyenne sont supposées connues. L'ensemble des variables aléatoires se compose de 2 catégories :

- Les paramètres de conception dont on cherche à déterminer la valeur moyenne par une méthode d'optimisation. Ils sont regroupés dans le vecteur \mathbf{X}_{a1} .
- Les paramètres environnementaux (matériaux, charge, écarts de montages, ...) qui influencent la conception (vecteur \mathbf{X}_{a2}).

Toutes les composantes des vecteurs aléatoires \mathbf{X}_{a1} et \mathbf{X}_{a2} sont supposées indépendantes. Dans le cas général, la réponse du système se caractérise par un vecteur aléatoire \mathbf{Y} dont on peut déterminer la valeur moyenne μ_Y et l'écart type σ_Y .

Dans le cadre de ce travail, seul le RMS de l'écart de transmission est suivi ($Y = RMS(TE_s^*)$), l'optimisation est mono-objectif. On trouve dans la littérature différents critères d'optimisation [93, 94, 90, 92]. D. Ghribi a retenu une combinaison de la valeur moyenne et de l'écart-type comme grandeur d'intérêt pour l'optimisation robuste :

$$F_{rob}(\mathbf{X}_{a1}, \mathbf{X}_{a2}) = \mu_Y + \beta \sigma_Y \quad (3.5)$$

avec β un coefficient de qualité.

Un coefficient de qualité faible permet de privilégier la performance et une valeur élevée met l'accent sur la robustesse. Étant donné que dans cette étude les valeurs de l'écart-type sont de l'ordre du dixième de celles de la valeur moyenne, la valeur du coefficient de qualité a été fixée à 2.

Estimation des paramètres statistiques

L'espérance mathématique $\mu_Y(\mathbf{X})$ et l'écart-type $\sigma_Y(\mathbf{X})$ de la fonction objectif Y sont classiquement définis par les relations :

$$\mu_Y = \int_{\Omega} Y(\mathbf{X}) \prod_{i=1}^n p_i(x_i) dx_i \quad (3.6)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\int_{\Omega} (Y(\mathbf{X}) - \mu_Y)^2 \prod_{i=1}^n p_i(x_i) dx_i} \quad (3.7)$$

où $p(x_i)$ est la densité de probabilité de la variable x_i .

Deux méthodes numériques ont été utilisées pour estimer ces formes intégrales : méthode de simulation de Monte Carlo et les formules de quadrature de Gauss.

1. Méthode de simulation de Monte Carlo :

Le principe est que toute intégrale peut se ramener par un changement de variable, à une intégrale sur l'intervalle $[0; 1]$ [88] :

$$I = \int_0^1 g(t) dt \quad (3.8)$$

Or la forme I correspond à l'espérance de $g(u)$ où u est une variable uniforme sur $[0; 1]$. A partir d'un échantillon $\{u_i\}$ de la loi uniforme, la valeur de I est estimée par :

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(u_i) \quad (3.9)$$

Cette démarche étendue aux intégrales multiples est une méthode numérique d'intégration robuste. Le temps de calcul est toujours assez important car l'erreur évolue en $n^{-1/2}$ mais ce dernier augmente moins vite avec le nombre de paramètres aléatoires que d'autres méthodes.

2. Méthode de quadrature de Gauss :

Le principe est d'estimer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_a^b \omega(x) f(x) dx$ où ω est une fonction poids positive, par une combinaison linéaire de valeurs discrètes de f :

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) \quad (3.10)$$

Les formules de type Gauss utilisent une position optimisée des x_i . D'Errico et Zaino [29] ainsi que Duffy et al. [38] proposent des techniques basées sur un plan factoriel complet, qui consistent à prendre en compte des combinaisons particulières des valeurs associées aux différentes variables de conception. En supposant les variables indépendantes, la méthode permet de déterminer dans un premier temps les points de calcul (ou points de Gauss), puis les poids de Gauss (a_i) associés et enfin, une approximation des

paramètres statistiques :

$$\mu_Y \cong \sum_{k=1}^N \left(\prod_{j=1}^n \omega_{kj} \right) Y(\mathbf{X}_k) \quad (3.11)$$

$$\sigma_Y^2 \cong \sum_{k=1}^N \left(\prod_{j=1}^n \omega_{kj} \right) \left[Y(\mathbf{X}_k) - \mu_Y \right]^2 \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

avec :

- ω_{kj} : le poids associé au $k^{\text{ème}}$ point de Gauss et pour la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur \mathbf{X}
- n : nombre de variables aléatoires
- $N = H^n$: nombre total de points
- H : nombre de points de Gauss retenu pour chaque intégration (usuellement H est compris entre 3 et 5)

Le choix des points et des poids de Gauss ne dépend que de la probabilité conjointe du paramètre de conception. Pour les distributions normales, la formule de quadrature de Gauss-Hermite est employée [79] alors que pour des distributions uniformes, c'est la formule de quadrature de Gauss-Legendre avec changement de variable.

Par cette méthode, le nombre d'estimations de la fonction f est réduit tant que le nombre de variables aléatoires est petit. Ceci conduit à une réduction conséquente du temps de calcul nécessaire pour évaluer les intégrales multi-variables par rapport à la méthode de Monte Carlo.

Résultats des optimisations stochastiques

Pour limiter le nombre de variables, les corrections de profil sont identiques sur le pignon et la roue, de profondeur E et de longueur Γ . Leur forme est prise selon une loi en puissance (paramètre de forme sp).

La fonctionnelle robuste (3.5) est estimée en utilisant la méthode de Quadrature de Gauss ((3.11) et (3.12)) à 4 points ($H=4$).

Différentes stratégies sont mises en œuvres de façon à obtenir des résultats les plus précis possibles pour un temps de calcul raisonnable.

1. Corrections de profil robustes :

Une première étude consiste à définir les modifications de profil linéaires robustes en combinant des résultats analytiques et numériques pour réduire le domaine de recherche :

- (a) Les premiers résultats du modèle analytique avec une raideur linéique d'engrènement constante (paragraphe 2.2 page 18) montrent qu'en l'absence de bombé, les fluctuations de l'écart de transmission sont minimisées pour une famille de solutions de corrections de profil. Pour une macro-géométrie donnée, l'ensemble de ces solutions se représente par une courbe dans le plan (E^*, Γ) dénommée «courbe maîtresse initiale».
- (b) Un modèle numérique plus réaliste de l'engrènement (VSA) est ensuite utilisé pour rechercher une nouvelle courbe optimale en utilisant la méthode du gradient dans la direction de la profondeur de correction uniquement, initiée à l'aide des résultats précédents. Ainsi, on obtient un lieu plus précis pour les optimums déterministes. Cette courbe est appelée «courbe maîtresse modifiée».

- (c) Enfin, la fonction robuste est estimée pour une grille de points, sur une plage réduite de paramètres de modification de profil centrée sur la courbe maîtresse modifiée. En agissant ainsi, le coût de calcul est limité puisque seule une partie de l'espace de conception est explorée. Le balayage de tout un domaine est conservé afin de pouvoir délimiter une zone robuste et pas seulement un point dans l'espace des paramètres.

Le choix de la loi de probabilité, sa symétrie, les étendues des zones de tolérance influent sur la position et l'étendue de la zone où la fonction robuste est inférieure à un certain seuil. Les figures 3.7 et 3.8 illustrent ces différents comportements pour quelques cas et avec un seuil fixé à $0,3 \mu m$.

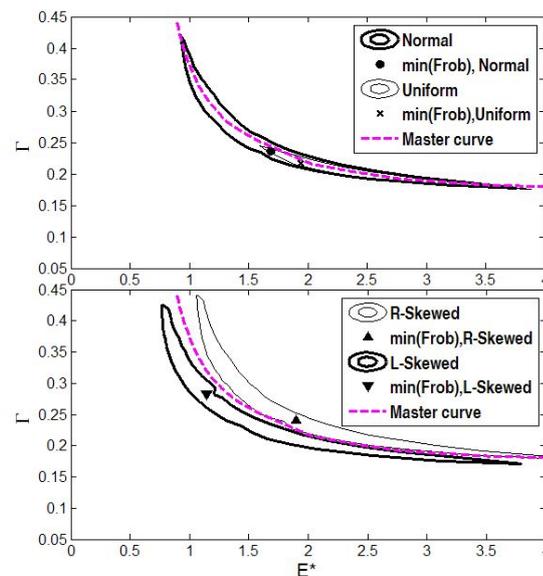


FIGURE 3.7 – Zone de corrections robustes de profil pour différentes lois de probabilité, dents hélicoïdales [43]

La figure 3.9 montre l'évolution du domaine de correction robuste lorsque un couple variable est pris en compte dans la transmission.

La synthèse de ces résultats fait apparaître les points suivants :

- Une distribution uniforme est plus sévère dans le sens où elle conduit à des zones de corrections robustes plus restreintes correspondant, pour la plupart, à une correction de profil dite « courte » ($\Gamma < 0,25$).
- Les distributions de probabilité symétriques conduisent à des zones robustes centrées sur la courbe maîtresse modifiée. Cette courbe représente alors une bonne approximation de la zone robuste, dont la taille est commandée par la forme de la distribution, les variations des paramètres environnementaux et l'iso-valeur de la fonction robuste représentée.
- Il n'est pas possible de prédire a priori, pour une dégradation de la qualité de réalisation des corrections, quelle correction sur la courbe maîtresse sera la plus robuste.

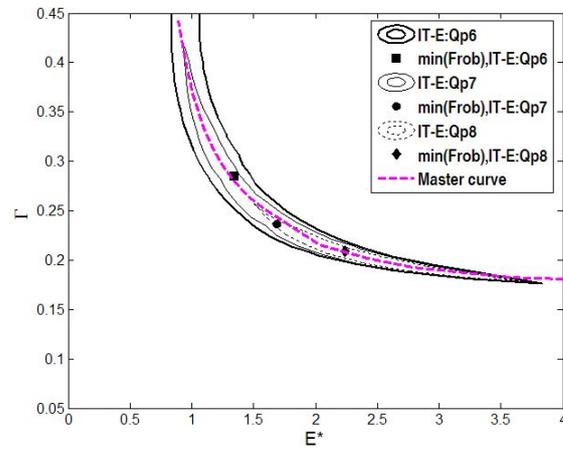


FIGURE 3.8 – Zone de corrections robustes de profil pour différents intervalles de tolérance sur E, dentures hélicoïdales [43]

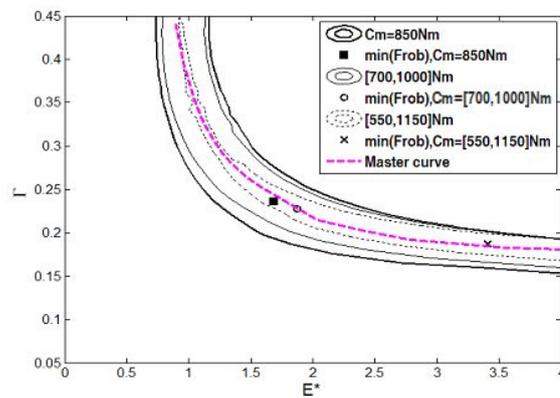


FIGURE 3.9 – Zone de corrections robuste de profil en présence de couples variables centrés sur la valeur nominale, dentures hélicoïdales [43]

2. Corrections combinées robustes :

La seconde étude concerne l'optimisation robuste de la correction de profil combinée à un bombé d'hélice parabolique, symétrique sur la largeur et d'amplitude B . La méthode de quadrature de Gauss est conservée pour l'estimation des paramètres statistiques de la réponse. Par contre, l'augmentation du nombre de paramètres de conception nécessite le recours à une méthode plus agile et le choix s'est porté sur un algorithme génétique. A l'issue de la procédure d'optimisation, celui-ci fournit un ensemble d'individus (les meilleures solutions) répartis sous forme d'un nuage de points dans l'espace de recherche. Dans les différentes représentations, seule la frontière de cet ensemble est représentée.

Les paramètres de modification de forme (B , Γ , E et sp) sont des grandeurs aléatoires auxquelles sont attribuées une valeur nominale et une distribution normale dans un intervalle de tolérance donné (longueur de l'intervalle égale à 6 fois l'écart type). La norme NF-ISO 1328 [54] définit les intervalles pour E et B en fonction de la classe de qualité mais reste muette au sujet de l'étendue de la correction de profil. Aussi, la tolérance de ce paramètre a-t-elle été choisie en pourcentage de la longueur du segment de conduite. Le tableau 3.2 résume les valeurs utilisées.

Classe de qualité	IT-E [μm]	IT- Γ [% AE]	IT-B [μm]
Q6	10	1,12	0,425
Q7	15	2,5	0,6
Q8	21	5	0,85

TABLEAU 3.2 – Valeurs des intervalles de tolérance

Pour ces 3 paramètres aléatoires et avec une modification de profil linéaire ($sp = 1$), les figures 3.10 et 3.11 montrent les limites des zones pour lesquelles la fonction robuste (F_{rob}) est inférieure à un seuil V_s donné, pour les 3 niveaux de qualité définis tableau 3.2. L'emplacement des zones robustes demeure très proche et leur étendue augmente en considérant des classes de qualité supérieures. Pour l'engrenage hélicoïdal, on peut observer que, quelque soit le niveau de qualité, la robustesse des corrections dépend essentiellement de l'amplitude du bombé et de la longueur de correction. La profondeur de la modification de profil a peu d'influence. Dans le cas d'engrenage droit, la zone robuste demeure centrée sur la courbe maîtresse dans le plan (E^* , Γ) définie précédemment. L'amplitude du bombé adimensionnée B^* est d'une importance secondaire dans ce cas.

Plusieurs séries d'optimisations ont été conduites avec la prise en compte de différents paramètres d'environnement modélisés par des variables aléatoires de loi normale (écarts de montage) ou uniforme (variation du couple). Il ressort de ces simulations que, contrairement à son étendue, les centres des zones robustes varient assez peu avec la liste des paramètres d'environnement pris en compte et avec les intervalles (classe de qualité) choisis. La faible sensibilité des dentures droites à la valeur du bombé est confirmée (figure 3.11). La zone robuste demeure au voisinage de la courbe maîtresse modifiée et les corrections courtes sont globalement les plus robustes. A titre d'exemple, les figures 3.12 et 3.13 illustrent les domaines robustes avec un écart de déviation entre les axes (défaut d'orientation le plus sensible) dans le cas d'un engrenage hélicoïdal et droit.

Variabilité entre des dents

Jusqu'à présent, les paramètres de correction sont supposés identiques sur toutes les dents d'une roue dentée. Un modèle plus précis devrait permettre de tenir compte de leur évolution

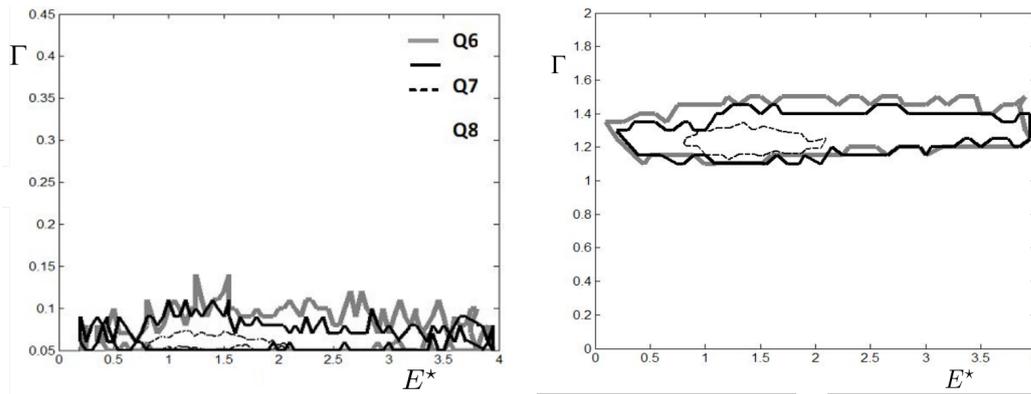


FIGURE 3.10 – Projection des zones de correction robustes; engrenage hélicoïdal, $F_{rob} < 0,125 \mu\text{m}$, $C_m = 850 \text{ Nm}$

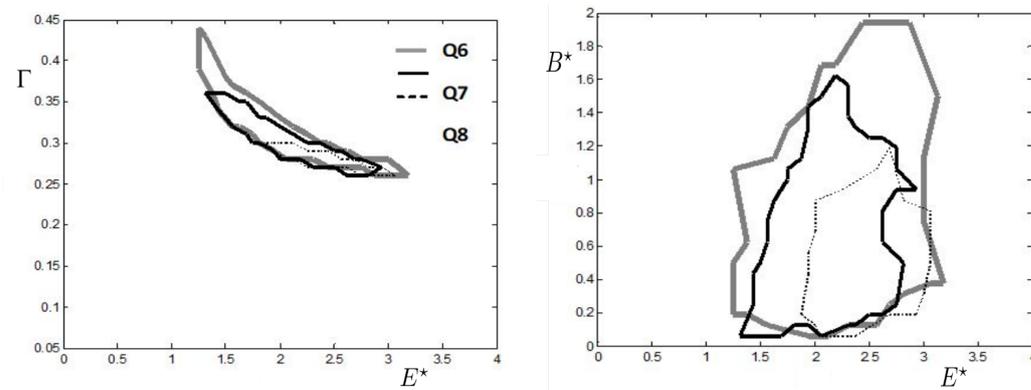


FIGURE 3.11 – Projection des zones de correction robustes; engrenage droit, $F_{rob} < 0,5 \mu\text{m}$, $C_m = 850 \text{ Nm}$

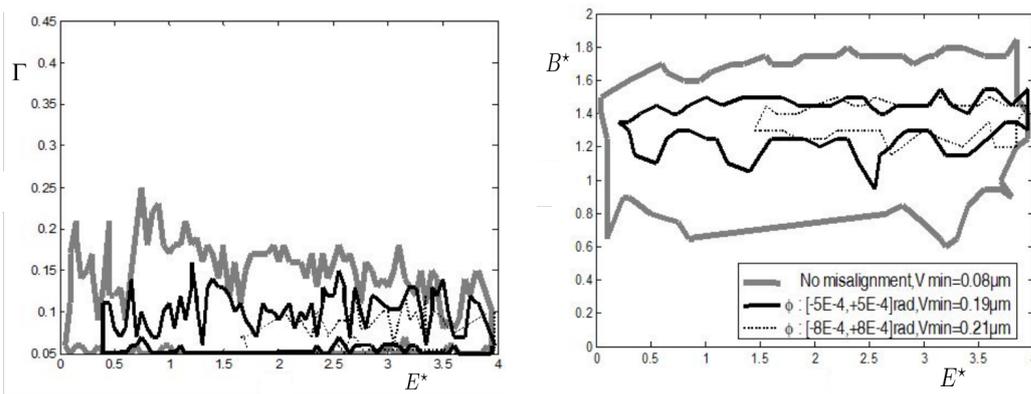


FIGURE 3.12 – Projection des zones de correction robustes; engrenage hélicoïdal, $F_{rob} < 0,25 \mu\text{m}$, $C_m = 850 \text{ Nm}$, Qualité 7, présence d'un défaut de déviation

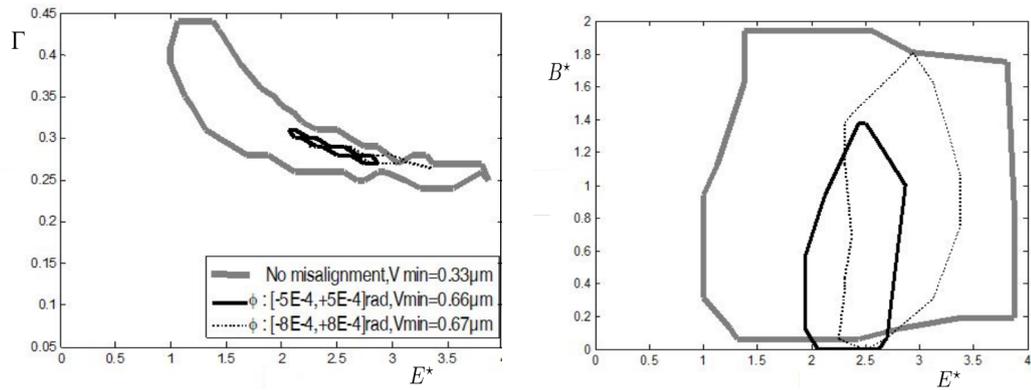


FIGURE 3.13 – Projection des zones de correction robustes; engrenage droit, $F_{rob} < 0,85 \mu\text{m}$, $Cm=850 \text{ Nm}$, Qualité 7, présence d'un défaut de déviation

aléatoire d'une dent à une autre. Les différentes phases de réalisation des dentures concernant à chaque fois l'ensemble des dents, les paramètres de correction entre dents voisines ne sont certainement pas totalement indépendants. Malheureusement, les relations statistiques qui les relient (covariance, copules [35], etc.) sont généralement inconnues. De plus, l'explosion du nombre de paramètres aléatoires conduit à des temps de calcul très importants, difficilement compatibles avec les outils actuels.

Néanmoins, une première tentative a été réalisée en ce sens. Les paramètres aléatoires considérés sont soit la profondeur de correction de profil linéaire (E), soit la longueur Γ de cette modification sur les dentures du pignon seulement. La grandeur aléatoire choisie est supposée indépendante d'une dent à l'autre (autant de tirages que de nombre de dents).

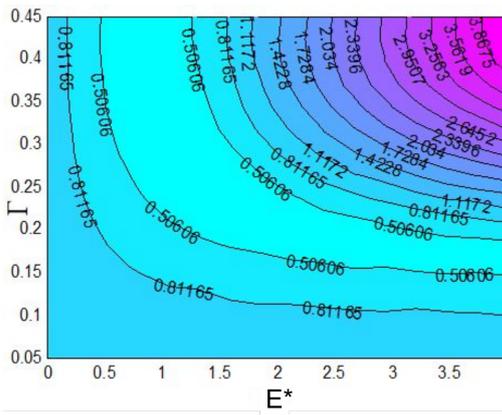
La figure 3.14 montre l'évolution du RMS de l'écart de transmission quasi-statique ($sp = 1$) a) dans le cas déterministe (pas de variabilité), b) pour un intervalle de tolérance de 5% de la longueur du segment de conduite sur la longueur de correction et c) avec un intervalle de tolérance de $20 \mu\text{m}$ ($IT-E^* = 1$) sur la profondeur de correction. On constate que la variabilité introduite entre les dents du pignon sur la longueur Γ est sans influence sur la localisation des corrections optimales. De même son impact sur l'amplitude de la fonction objectif (RMS(TEs)) est très peu marqué. Cependant, la variabilité de E entraîne une orientation de la zone optimale vers des corrections plus courtes.

3.1.5 Optimisation multi-objectifs des corrections de forme

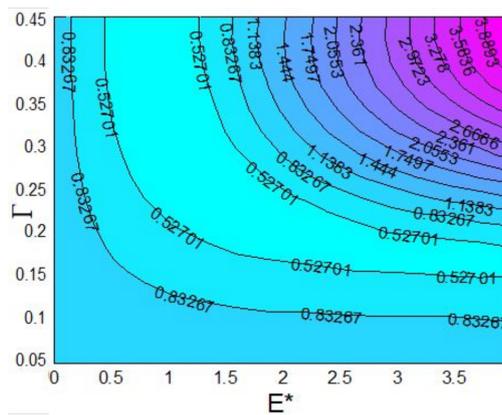
La performance d'un engrenement est évaluée de façon pluri-factorielle et le processus de conception permet généralement de définir une solution qui réalise, autant que faire se peut, un bon compromis entre les différents critères antagonistes. L'objectif est ici de proposer un outil qui permet de construire simultanément des optimisations partielles de la conception suivant plusieurs critères.

Notions principales

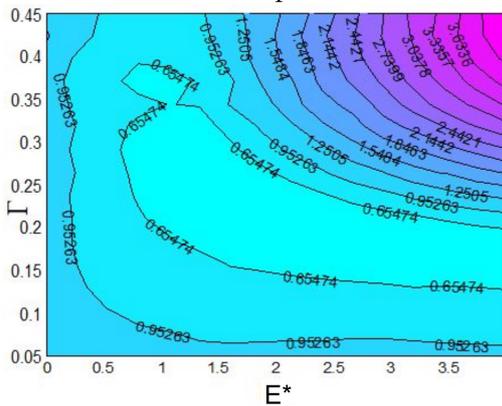
On suppose que la réponse du système est maintenant caractérisée par un vecteur \mathbf{Y} de dimension p , dépendant d'un vecteur \mathbf{X} de n paramètres de conception que l'on cherche à déterminer. La formulation du problème peut se mettre sous la forme :



a) Balayage déterministe, pas de variabilité des paramètres



b) IT- Γ =5% AE, IT-E = 0



c) IT- Γ =0, IT-E = 20 μ m

FIGURE 3.14 – RMS de l'écart de transmission quasi-statique (μ m), denture hélicoïdale

$$\text{Minimiser } \mathbf{Y}(\mathbf{X}) = [Y_1(\mathbf{X}), Y_2(\mathbf{X}), \dots, Y_p(\mathbf{X})]^T \text{ pour } \mathbf{X} \in D \quad (3.14)$$

De plus, la solution doit satisfaire a un certain nombre de contraintes d'origine mécanique, technologique, ou autre, qui se traduisent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} g_i(\mathbf{X}) \leq 0 \text{ pour } i = 1, \dots \\ h_j(\mathbf{X}) = 0 \text{ pour } j = 1, \dots \end{cases} \quad (3.15)$$

Parmi toutes les méthodes d'optimisation sous contrainte, Dhafer Ghribi a retenu la méthode NSGA-II (Non Dominated Sorting Genetic Algorithm II) [31]. Sa particularité est d'utiliser les deux caractéristiques suivantes pour classer les solutions (figure 3.15) :

1. **Le rang** : les solutions du front de Pareto sont toutes de rang 1. Si on les retire, les solutions du nouveau front de Pareto sont de rang 2. Et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement des solutions.
2. **La crowding distance** (ou distance d'étalement) : pour les individus de même rang, elle caractérise l'éloignement des 2 plus proches voisins.

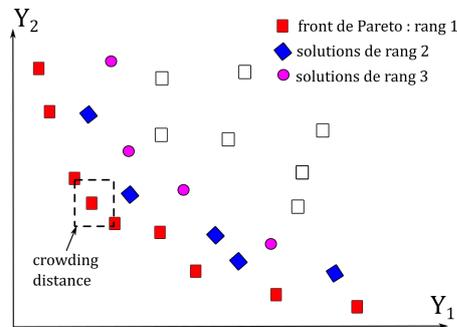


FIGURE 3.15 – Illustration du rang et la «crowding distance»

Lors de la génération d'une nouvelle population, les individus de haut rang et de «crowding distance» élevées sont favorisés afin d'obtenir un bon étalement des solutions sur le front de Pareto.

Optimisations multicritères

L'algorithme NSGA-II nécessite des populations importantes et l'évaluation des performances d'un individu prend plusieurs secondes. Aussi, pour réduire le temps calcul, une parallélisation de l'exécution du code a été mise en œuvre avec openMP.

Plusieurs problématiques avec deux ou trois fonctions à optimiser ont été traitées avec comme paramètres d'optimisation les corrections de forme E^* , Γ et parfois B^* . La minimisation du RMS de l'écart de transmission permet de retrouver des corrections de profil très proches de la courbe maîtresse. La minimisation des pertes d'énergie mécanique par frottement à la denture conduit à des corrections de profil longues et profondes. La minimisation du ratio pression de contact maximale sur pression moyenne conduit à des corrections de profil peu profondes ($E^* \in [0,6 ; 1,5]$ environ) d'étendue intermédiaire ($\Gamma \in [0,25 ; 0,32]$) et à un bombé faible ($B^* \in [0 ; 0,2]$) sur les exemples traités. Il faut noter une difficulté de représentation du front de Pareto dans le cas où plus de 2 critères sont utilisés, ce qui rend moins aisée l'analyse

des résultats. Les graphes de la figure 3.16 représentent des projections de celui-ci dans les plans $(\text{RMS}(TE_s), \Lambda_p)$ et $(\text{RMS}(TE_s), \max(pV))$ et la figure 3.17 représentent les paramètres des meilleures correction de profil. Les solutions entourées sur cette figure ont pour image les zones entourées sur la figure 3.16. Il y a également correspondance du dégradé de couleur. Le paramètre Λ_p est le facteur de perte par frottement défini par Velex et Ville dans [104].

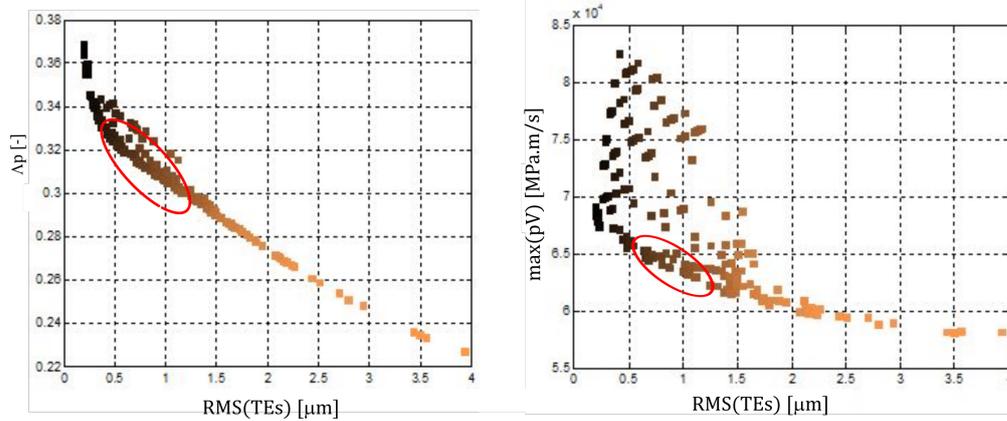


FIGURE 3.16 – Projection du front de Pareto

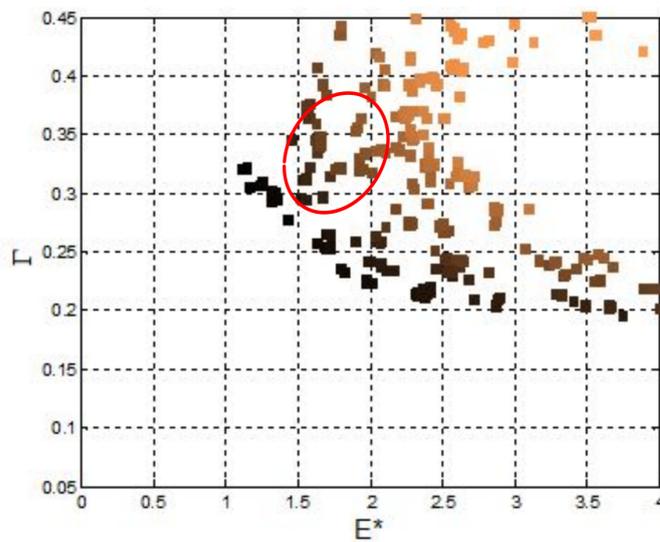


FIGURE 3.17 – Solutions associées au front de Pareto

3.1.6 Synthèse

Le travail mené par Dhafer Ghribi durant sa thèse concerne l'optimisation d'un unique engrènement entre roues cylindriques. Ses travaux ont montré qu'en utilisant un modèle d'engrènement assez fin, la forme des corrections de profil optimales n'est ni linéaire, ni symétrique. Cependant, l'intégration de ces hypothèses (linéaire et symétrique) est peu pénalisante en termes

de résultats et permet de limiter le nombre de paramètres. En prenant en compte des variations aléatoires des paramètres de correction ou de l'environnement, la robustesse des corrections a été testée. Il en ressort que les corrections de profil robustes, sans bombé, demeurent à proximité de la courbe maîtresse modifiée. La présence d'un bombé a généralement une forte influence sur la correction optimale en dentures hélicoïdales mais, en dentures droites, sa présence est quasiment sans effet. L'optimisation multi-objectifs mise en place (algorithme génétique NSGA-II) permet de déterminer le front de Pareto pour une situation donnée. Il est difficile d'en retirer des informations générales sur les corrections optimales.

Le principal point de blocage pour faire de l'optimisation multi-critères, robuste, avec un jeu de paramètres par dent, voire de réaliser des synthèses (allocation) de tolérances avec ces outils réside dans le temps de calcul nécessaire. Avec les outils actuels, ces objectifs sont totalement hors de portée. Il s'agira de trouver d'autres méthodes ou d'autres raisonnements pour atteindre ce niveau de conception.

Un autre axe de développement, plus accessible, consiste à une meilleure prise en compte de l'environnement de l'engrènement et des éventuelles interactions.

3.2 Optimisation d'un réducteur à un étage

Les modèles utilisés pour l'optimisation des dentures prennent en compte plus ou moins de composants au voisinage de l'engrènement (arbres, paliers, carter...). Ces choix peuvent entraîner une limitation de leur capacité à rendre compte de certains couplages entre l'engrènement et son environnement, notamment sur le plan thermique et acoustique. Dans ses travaux de doctorat soutenus en 2021 ([10]), Emna Ben Younes s'est intéressée à l'importance de ces effets réciproques sur les résultats de l'optimisation de la conception d'un engrènement. Ce projet financé par l'institut Carnot Ingénierie@Lyon fut l'occasion d'une collaboration inter-laboratoires entre le LabECAM de l'ECAM-La Salle (Christophe Changenet, directeur de thèse), le LTDS de l'École Centrale de Lyon (Emmanuel Rigaud, co-encadrant) et le LaMCoS de l'INSA de Lyon.

3.2.1 Cahier des charges

Un certain nombre de paramètres ont été fixés dès le début de façon à limiter le périmètre de la conception et de pouvoir approfondir l'optimisation des dentures pour différents objectifs.

Le réducteur étudié est à axes parallèles, simple étage et à dentures hélicoïdales. Le tableau 3.3 liste les paramètres figés et ceux qui font l'objet de l'optimisation.

La figure 3.18 a) illustre l'architecture et les principales dimensions du réducteur. Le carter est en acier de forme parallélépipédique rectangle d'une épaisseur moyenne égale à 10 mm. L'arbre primaire est relié au moteur et l'arbre secondaire est lié à la charge. Tous deux sont guidés par des roulements à billes à gorge profonde.

Le réducteur est lubrifié par barbotage et le niveau d'huile est fixé à 15 mm en dessous de l'axe des arbres (voir Figure 3.18 b)). Le régime de fonctionnement correspond à un couple moteur égal à $C = 500 Nm$ et une vitesse d'entrée égale à $\omega_e = 3000 tr\ min^{-1}$.

Les variables d'optimisation sont choisies parmi l'ensemble $\{\alpha_0 ; \beta ; E_1 ; E_2 ; \Gamma_1 ; \Gamma_2\}$, suivant les cas.

Les contraintes de conception à respecter sont les suivantes :

- le rapport de conduite total est supérieur à 1,2;
- pas d'interférence de taillage sur les deux roues;
- pas d'interférence théorique en fonctionnement;

			Pignon	roue
Nombre de dents	z		29	80
Module normal	m_0	mm	variable	
Largeur de denture	b	mm	30	
Angle de pression normal	α_0	$^\circ$	variable	
Angle d'hélice	β	$^\circ$	variable	
Sens de l'hélice			droite	gauche
Coefficient de déport	x		0,2	-0,2
Coefficient de saillie	x_a		1,2	0,8
Coefficient de creux	x_f		1,05	1,05
Entraxe de fonctionnement	a_w	mm	174	
Valeur du bombé longitudinal	B	μm	10	0
Longueur de la correction de profil	Γ		variable	
Profondeur de la correction de profil	E	μm	variable	

TABLEAU 3.3 – Paramètres géométriques des dentures

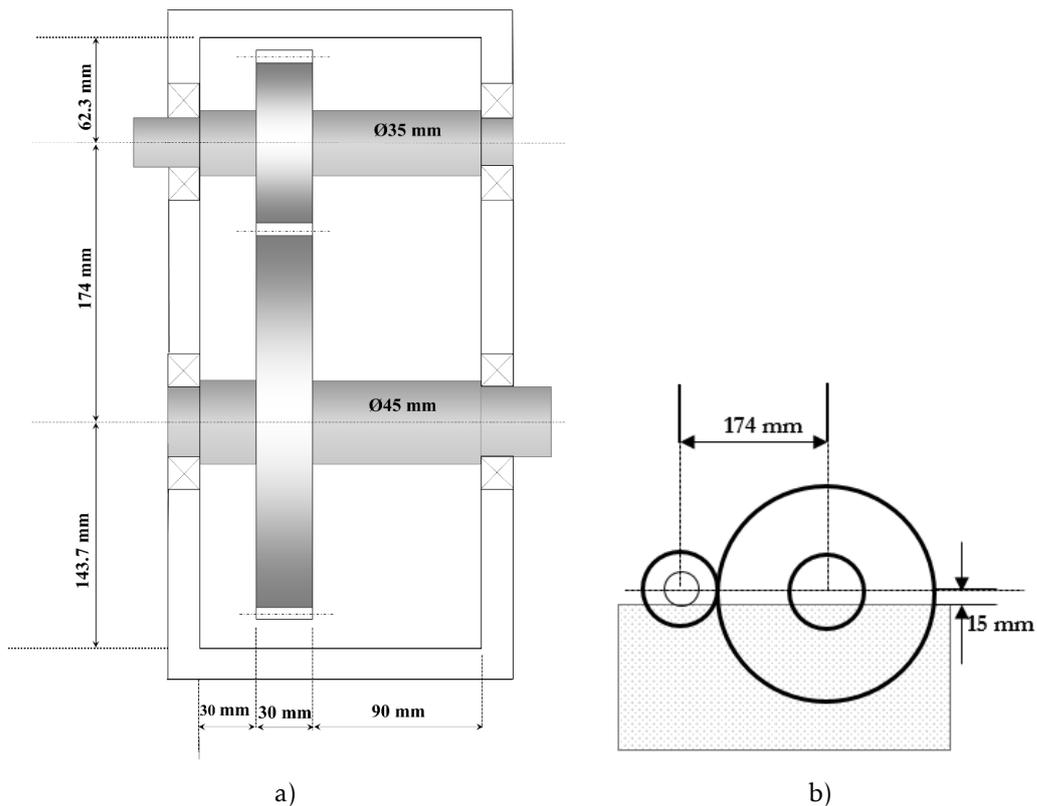


FIGURE 3.18 – Schéma d'architecture du réducteur a) et niveau d'huile au repos b)

- épaisseur minimale des dents supérieure à $0,1m_0$;
- la contrainte maximale en flexion demeure inférieure à $500MPa$;
- la pression maximale de contact reste inférieure à $1200MPa$

3.2.2 Objectifs de l'optimisation

Suivant les cas d'étude, les fonctionnelles à minimiser peuvent être :

1. $RMS(TE_s^*)$: la valeur efficace des fluctuations de l'écart de transmission quasi-statique obtenue à partir de l'intégration temporelle de l'équation du mouvement ;
2. L_w : la puissance acoustique rayonnée équivalente des parois du carter ;
3. Q_f : la puissance mécanique dissipée par frottement entre les dentures ;
4. Q_{total} : ensemble des puissances mécaniques perdues par le système. Les différentes contributions prises en compte sont la dissipation à l'engrènement, les pertes aux roulements, aux joints et par barbotage.

La première fonction ne dépend que des caractéristiques de la chaîne de transmission et les suivantes sont liées au carter et à la lubrification.

3.2.3 Les modèles physiques

Modèle de la chaîne de transmission

L'action mécanique entre les dentures est modélisée avec frottement, suivant la relation de Coulomb. La présence d'une composante tangentielle dans l'action de contact modifie les relations d'équilibre entre les roues dentées [34]. Un terme supplémentaire apparaît dans la matrice raideur et un terme exciteur est ajouté au second membre :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \left[\mathbf{K} + \sum_{i,j} k_{ij} (\mathbf{V}_{ij} - f_{ij}\epsilon_{ij}\mathbf{W}_{ij}) \mathbf{V}_{ij}^T \right] \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{g1} + \mathbf{F}_{g2} + \mathbf{F}_f \quad (3.16)$$

avec :

- f_{ij} : le coefficient de frottement au niveau de la j-ième cellule de la ligne i ;
- ϵ_{ij} : prend la valeur 1 ou -1, suivant le sens de la vitesse de glissement
- \mathbf{F}_f : terme d'excitation dû aux composantes tangentielles des forces de contact
- les autres notations sont identiques à celles de l'équation (2.15)

Le coefficient de frottement dépend de la nature du contact (contact entre les aspérités, portance du film d'huile, etc.), de la température locale, de la vitesse de glissement, voire de la pression ... En première approximation et pour une estimation moyenne des pertes au cours du temps, Y. Diab [34] a montré qu'un coefficient constant permettait d'obtenir une bonne approximation.

La puissance mécanique dissipée à l'engrènement (Q_f) est la moyenne (nombre de périodes du système entier) des puissances transformées par frottement à chaque instant par les cellules en contact. Cette valeur est ensuite fournie au modèle thermique.

La résolution numérique du modèle d'engrènement défini par la relation 3.16 est réalisée par un programme de type VSA modifié. Il fournit les évolutions temporelles des degrés de liberté du système et l'écart de transmission sans charge (NLTE). Ces résultats permettent la construction de l'écart de transmission quasi-statique TE_s (2.17) et de sa variance.

nœud	composant
1	Air ambiant
2	Carter bas
3	Carter latéral
4	Carter haut
5	Huile
6	Roulement primaire gauche
7	Roulement primaire droit
8	Roulement secondaire gauche
9	Roulement secondaire droit
10	Arbre primaire
11	Arbre secondaire
12	Pignon
13	Roue
14	Zone d'engrènement

TABLEAU 3.4 – Désignation des nœuds du réseau thermique

Modèle thermique

L'ensemble du réducteur est modélisé du point de vue thermique, selon la méthode des réseaux thermiques [57, 19]. En régime permanent, la température moyenne de la transmission (assimilée à celle du bain d'huile) dépend de l'équilibre entre le flux de chaleur généré par les pertes d'énergie mécanique (Q_{total}) et le flux de chaleur évacué par la transmission avec l'air ambiant par convection et rayonnement.

Les pertes aux roulements sont calculées à partir de la formulation proposée par Harris issue des travaux de Palmgren [47]. Ces pertes sont la superposition d'une contribution dépendante de la charge, due aux déformations élastiques et à des mouvements de glissement qui se produisent dans les zones de contact, et d'une part indépendante de la charge affectée par les pertes hydrodynamiques dans le lubrifiant. Les pertes aux joints sont estimées à travers une formulation expérimentale proposée par R. C. Martins et al. [77], valable pour un joint à lèvres. Les formules de Changenet et al. [20] sont utilisées pour estimer les pertes d'énergie mécanique par barbotage.

Pour appliquer la méthode des réseaux thermiques, le réducteur et son environnement sont divisés en 14 éléments (nœuds) isothermes (tableau 3.4) et chaque échange entre nœuds est modélisé par une résistance thermique (figure 3.19).

Le premier principe de la thermodynamique est appliqué à chaque nœud et seul le régime permanent est recherché. Certaines résistances thermiques et les propriétés rhéologiques du lubrifiant sont dépendantes des températures, ce qui nécessite une résolution itérative du système matriciel.

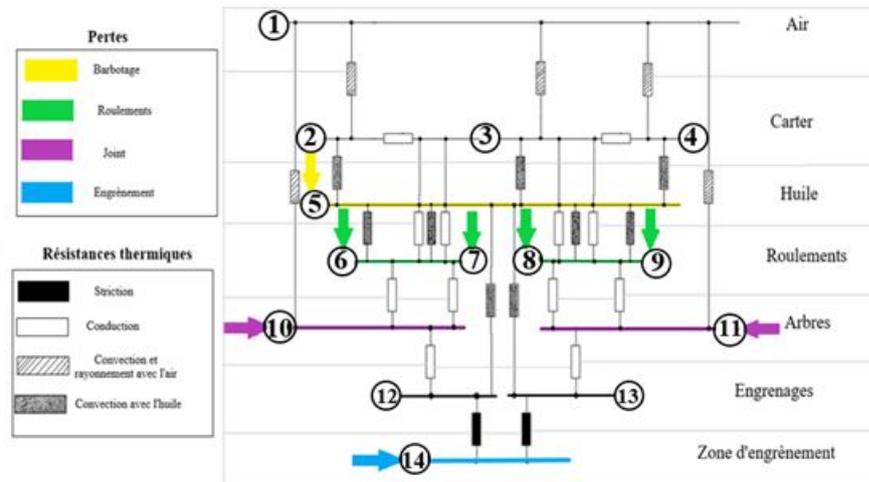


FIGURE 3.19 – Réseau thermique du réducteur

Modèle vibro-acoustique

Le modèle vibro-acoustique¹ a pour but la détermination de la puissance acoustique rayonnée équivalente L_w en décibels

La prédiction du champ de pression acoustique rayonné par le carter de la transmission en tout point de l'environnement fluide nécessite la mise en œuvre d'outils de calcul complexes, même dans le domaine des basses fréquences ou en l'absence d'un couplage fort entre la structure et le fluide. Si l'on considère la puissance acoustique rayonnée d'une structure vibrante immergée dans un fluide léger tel que l'air, elle peut être calculée à partir de l'état vibratoire de son enveloppe dans le vide, et nécessite de ce fait l'estimation préalable d'une part de la vitesse pariétale normale aux surfaces et, d'autre part, du facteur de rayonnement.

Tout d'abord, un modèle dynamique de la structure permet d'estimer le comportement vibratoire du carter. Comme la zone d'intérêt se situe dans le domaine des basses fréquences pour la partie structure, une description modale est suffisante pour accéder au champ vibratoire. Pour ce faire, on considère une analyse du système complet par la méthode des éléments finis (réalisé au moyen du code éléments finis ANSYS). Comme le montre la figure 3.20, le carter est discrétisé par des éléments classiques élastiques linéaires (éléments volumiques et éléments de plaques de Kirchhoff-Love). Des conditions d'encastrement sont imposées à sa base. La chaîne de transmission (paliers, arbres et roues dentées) est également modélisée mais le pignon et la roue ne sont pas en prise [36]. Les raideurs des roulements sont connectées simplement au carter. Le calcul de la base modale permet d'identifier 280 modes propres pour la transmission complète entre 0 et 20 kHz (environ 14 fois la fréquence d'engrènement). La réponse dynamique est alors directement déterminée à partir de cette décomposition modale au travers du code ANSYS en imposant la force de denture (action et réaction) sur les centres du pignon et de la roue (données d'entrée).

Connaissant l'état vibratoire (description en vitesse) in vacuo du carter $\underline{V}(M, t)$, la puissance acoustique rayonnée, Π_{ac} , de la transmission immergée dans un fluide léger (tel que l'air) s'exprime, en régime harmonique, selon l'expression suivante :

1. La mise en place des modèles physiques de cette partie ont été pilotés par nos collègues du LTDS E. Rigaud et J. Perret-Liaudet.

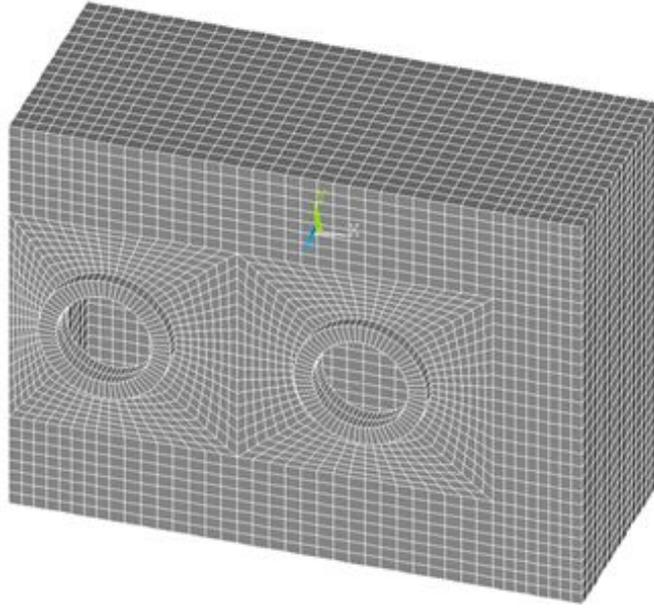


FIGURE 3.20 – Maillage du carter de la transmission

$$\Pi_{ac} = \rho_0 c_0 \sigma_{rad} \iint_S \overline{V_n(M, t)^2} dS = \rho_0 c_0 \sigma_{rad} S \langle \overline{V_n(M, t)^2} \rangle_S \quad (3.17)$$

ρ_0 et c_0 étant respectivement la masse volumique et la célérité du son du milieu fluide environnant (air sec, température ambiante), S représente l'aire totale de la surface du carter qui rayonne, σ_{rad} est le facteur de rayonnement, V_n est la composante normale du vecteur vitesse pariétale et les opérateurs $\langle \bullet \rangle_S$ et $\overline{\bullet}$ représentent la moyenne spatiale et la moyenne temporelle sur la surface immergée dans le fluide environnant.

Ensuite, il est nécessaire d'avoir une estimation du facteur de rayonnement σ_{rad} qui est, par définition, le rapport entre la puissance acoustique rayonnée par la surface étudiée et celle d'un piston rigide, bafflé, d'aire équivalente, vibrant à la moyenne spatiale de la vitesse efficace normale à la surface rayonnante. Il traduit l'efficacité de rayonnement de l'objet vibrant en fonction de la pulsation ω . Son estimation est complexe et nécessite généralement un calcul acoustique (équation de Helmholtz). C'est pourquoi, sous couvert d'hypothèses simplificatrices, on tente généralement d'en fournir une approximation plus ou moins simple. Dans notre cas d'étude, et comme le montre les travaux de Ducret [36], on suppose que les couplages acoustiques entre les différentes faces du carter parallélépipédique sont négligeables. Par conséquent, la puissance acoustique est évaluée comme la somme des puissances acoustiques rayonnées par chacune des faces prises indépendamment. La seconde hypothèse est basée sur la connaissance de la fréquence f_c dite fréquence critique associée au rayonnement acoustique d'ondes de flexion d'une plaque mince infinie immergée en fluide léger et définie par [63, 81] :

$$f_c = \frac{c_0^2}{2\pi} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh_p^2}} \quad (3.18)$$

avec ρ la masse volumique de la plaque et h_p son épaisseur.

Si l'on considère une plaque de dimension finie de type rectangulaire simplement supportée, bafflée et de caractéristiques constantes (E, ν, ρ, h_p), plusieurs auteurs comme Maidanik [74] ont proposé des formulations approchées en identifiant notamment la notion de modes de bord et de modes de coin. Pour le carter étudié et chacune de ses faces, et sans nuire à la généralité du processus d'optimisation, on suppose que le facteur de rayonnement est égal à 1 au-delà de la fréquence critique, et que la plaque ne rayonne pas en deçà de la fréquence critique. En effet, l'atténuation du facteur de rayonnement pour des fréquences décroissantes en dessous de la fréquence critique est de l'ordre 15 dB/octave.

La fréquence critique calculée pour le carter en acier d'épaisseur $h_p = 10 \text{ mm}$ est égale à $f_c = 1175 \text{ Hz}$, inférieure à l'ensemble des fréquences excitatrices (fréquence d'engrènement : $f_e = 1450 \text{ Hz}$). Par conséquent, on prend $\sigma_{rad}(f) = 1$ dans ce cas, la puissance acoustique rayonnée est égale à la puissance acoustique équivalente notée ERP (Equivalent Radiated Power) dont l'expression est basée sur l'hypothèse d'onde plane acoustique rayonnée, soit :

$$\Pi_{ac} \cong ERP = \rho_0 c_0 S \overline{\langle V_n^2(M, t) \rangle_S} \quad (3.19)$$

Par la suite, on retient l'ERP comme indicateur du comportement vibro-acoustique de la transmission. Pour l'évaluer, il reste donc à calculer l'expression de la vitesse en fonction de la force de denture.

On appelle $H^{V,F}(M, f)$ la fonction d'influence complexe à la fréquence f entre un effort harmonique de denture et la vitesse pariétale normale au point M . La moyenne temporelle et spatiale de la vitesse pariétale quadratique s'écrit :

$$\overline{\langle V_n^2(f, M) \rangle_S} = \frac{1}{2S} \iint_S H^{V,F}(M, f) H^{V,F*}(M, f) F(f) F^*(f) dS \quad (3.20)$$

$$\overline{\langle V_n^2(f, M) \rangle_S} = \frac{1}{2S} |F(f)|^2 \iint_S |H^{V,F}(M, f)|^2 dS \quad (3.21)$$

L'intégrale de surface $J(f) = \iint_S |H^{V,F}(M, f)|^2 dS$ est estimée au préalable par la méthode des éléments finis. Pour cela, un effort harmonique unitaire est appliqué entre les dents des roues désaccouplées et les vitesses normales sont calculées sur chaque élément de la surface extérieure du carter. Avec s_j la surface de l'élément j , l'intégrale est estimée par :

$$J(f) \cong \sum_{j=1}^N s_j |H^{V,F}(M_j, f)|^2 \quad (3.22)$$

Si l'effort à la denture est périodique, la puissance acoustique rayonnée équivalente est égale à la somme des puissances associées à chaque fréquence.

Le calcul de la réponse dynamique de la chaîne cinématique permet de déterminer l'évolution temporelle de l'effort dynamique à la denture. La transformée de Fourier permet de déterminer les amplitudes des harmoniques du spectre de la fluctuation de l'effort. En pratique, on retient les 5 premiers harmoniques de la fréquence d'engrènement $F(k f_e)$ ($k=1$ à 5) et on calcule la

puissance acoustique rayonnée équivalente totale :

$$ERP = \rho_0 c_0 \sum_{k=1}^5 |F(k f_e)|^2 J(k f_e) \quad (3.23)$$

La puissance acoustique en décibels est égale à :

$$L_w = 10 \log_{10} \left(\frac{ERP}{\Pi_{ref}} \right) \quad (3.24)$$

où la puissance acoustique de référence est $\Pi_{ref} = 10^{-12} W$.

En pratique, l'intégrale de surface $J(f)$ dépend de l'angle de pression normal α_n et de l'angle d'hélice de taillage β qui sont susceptibles de varier durant l'optimisation. Pour limiter le temps de calcul, ce terme est calculé pour un nombre discret de couples de valeurs (α_n, β) couvrant l'ensemble de l'espace de recherche et pour chaque doublet intermédiaire, on réalise une interpolation bilinéaire à partir des valeurs discrètes calculées.

3.2.4 Les principaux résultats

Les recherches de solutions optimales de chaque problématique étudiée sont réalisées grâce à l'algorithme NSGA-II déjà présenté dans les travaux de Dhafer Ghribi.

Étude de la denture

La figure 3.21 résume les résultats obtenus en se focalisant uniquement sur la denture : les fonctions à optimiser sont le RMS de l'écart de transmission et les pertes de puissance mécanique dues au frottement entre les dentures.

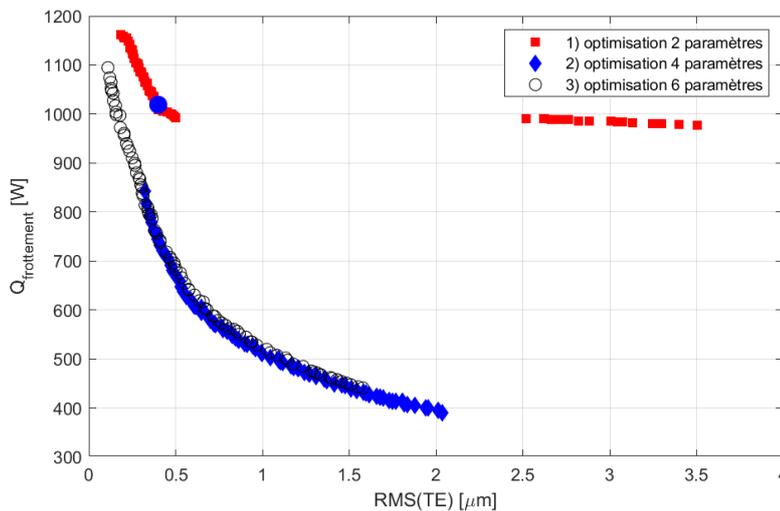


FIGURE 3.21 – Fronts de Pareto des optimisations de la denture seule

Les fronts de Pareto de 3 études différentes sont superposés :

1. La première vise à optimiser 2 variables de décision macro-géométriques : α_n et β
2. La seconde étude porte sur les 4 paramètres de correction de profil : E_1, E_2, Γ_1 et Γ_2 . Les valeurs des angles (α_n, β) sont prises sur le premier front de Pareto (point bleu).
3. Dans le dernier cas, les paramètres d'optimisation sont les 6 variables précédentes ($\alpha_n, \beta, E_1, E_2, \Gamma_1, \Gamma_2$) prises simultanément.

Le front de Pareto obtenu par l'optimisation macro puis micro-géométrique (front 2) et celui de l'optimisation simultanée des paramètres micro et macro-géométrique (front 3) sont assez proches sur une zone centrale. Le premier permet d'atteindre des pertes par frottement plus faibles et le second des niveaux du RMS de l'écart de transmission plus bas. Pour un paramétrage identique de l'algorithme NSGA-II, les 2 méthodes ne sont donc pas tout à fait équivalentes.

Il est intéressant de remarquer que les minimums de pertes par frottement correspondent à un rapport de conduite et à un angle d'hélice faibles, ainsi qu'à de fortes corrections de profil. Ces résultats sont en cohérence avec les approches analytiques des pertes par frottement [104]. Quant aux fluctuations de l'écart de transmission, elles sont faibles lorsque le rapport de recouvrement est proche de l'unité, confirmant les résultats analytiques obtenus précédemment. Néanmoins, il faut noter à nouveau que chacune des corrections de profil optimales pour ce critère correspond à des modifications assez différentes sur les deux mobiles en terme de longueur et de profondeur.

Étude du système global

La modélisation complète du réducteur permet la prise en compte d'interactions entre phénomènes physiques qui étaient ignorées dans l'optimisation précédente et qui impactent les conceptions optimales :

- Une baisse de l'échauffement à la denture entraîne une température d'huile plus basse, une viscosité de l'huile plus élevée et ainsi une augmentation des pertes dans les roulements et dans les joints ;
- Une augmentation de l'angle d'hélice implique d'une part, un accroissement de la surface immergée et donc des pertes par barbotage, et d'autre part, une charge équivalente appliquée aux roulements plus forte et ainsi des couples résistants dans ceux-ci plus importants ;
- La valeur de la puissance acoustique rayonnée équivalente (L_w) dépend des fonctions d'influence $H^{V,F}(f)$ et du contenu harmonique de l'effort dynamique à la denture. Les fonctions d'influence dépendent des angles α_n et β et quant au spectre de l'effort dynamique, il dépend a priori de tous les paramètres.

La figure 3.22 représente les solutions non dominées du problème d'optimisation avec 3 fonctions objectifs : RMS(TEs), Q_{total} et L_w . Le nuage de points est projeté suivant les 3 plans. Il est clair que l'efficacité énergétique et les performances vibro-acoustiques sont des objectifs antagonistes. On remarque que pour les pertes globales les plus faibles (losanges bleus, jusqu'à 1400 W), le RMS(TEs) et L_w sont quasiment proportionnels. A contrario, pour les valeurs les plus basses du critère acoustique et des fluctuations de l'écart de transmission (losanges rouges), ces deux fonctions sont indépendantes sur le front de Pareto et leurs minimums ne correspondent pas. Pour une optimisation NVH fine, il est donc nécessaire de différencier ces deux critères.

Sur la figure 3.23 sont représentées les valeurs des paramètres des solutions optimales. L'angle d'hélice varie assez peu et correspond à un rapport de recouvrement compris entre 0,8 et 0,9. Quant aux corrections de profil, comme attendu, les meilleurs résultats énergétiques sont obtenus pour les enlèvements de matière les plus importants. On remarque également que

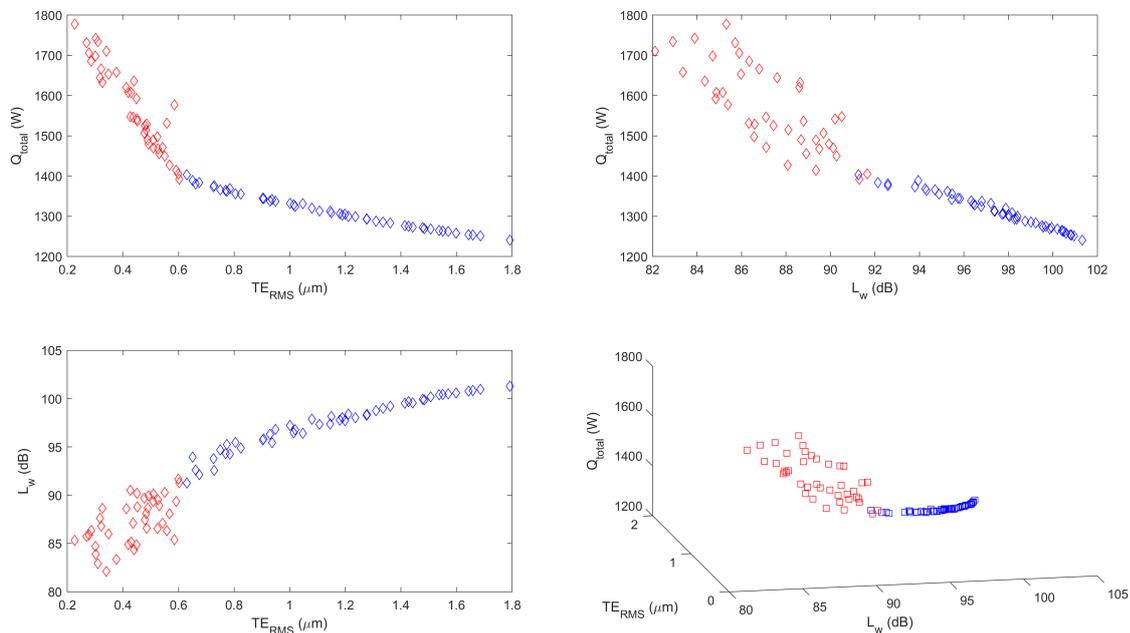


FIGURE 3.22 – Front de Pareto pour 3 fonctions objectifs

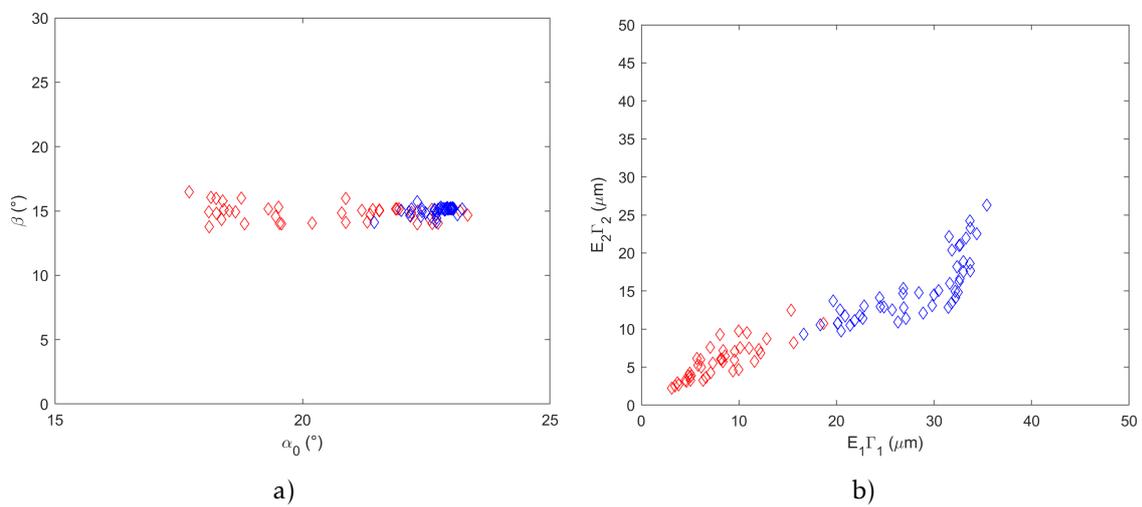


FIGURE 3.23 – Solutions associées au front de Pareto pour 3 fonctions objectifs

les faibles valeurs du RMS des écarts de transmission ne correspondent pas en général à des corrections symétriques.

3.2.5 Synthèse

La modélisation du réducteur complet permet la prise en compte des interactions de l'engrènement avec son environnement et elle est nécessaire pour l'estimation de la puissance acoustique rayonnée. En ce qui concerne les pertes d'énergie mécanique, ce couplage est plutôt faible. Le traitement du problème à trois fonctions objectifs permet de revenir sur le lien entre $\text{RMS}(TE_S^*)$ et L_w . Dans la littérature scientifique, on trouve aussi bien des auteurs qui considèrent une certaine équivalence entre ces 2 critères et d'autres qui les distinguent nettement. Les résultats d'Emna Ben Younes montrent que pour des niveaux élevés de ces 2 paramètres, ils varient de façon quasi-proportionnelle et pour des niveaux NVH faibles, il n'y a plus de corrélation entre eux. Il est également intéressant de remarquer que les corrections de profil optimales ne sont pas symétriques et que les solutions du front de Pareto correspondent à des engrenages possédant un rapport de recouvrement compris entre 0,8 et 0,9, ce qui ne correspond pas à un résultat attendu.

Dans cette situation également, le temps nécessaire aux calculs est un frein à la prise en charge de davantage de paramètres, de l'analyse de la robustesse, de la prise en compte de l'usure des dents, etc.

3.3 Optimisation des dentures dans le cas de plusieurs engrènements

Dans ses travaux de thèse réalisés en collaboration avec la société Hispano-Suiza (SAFRAN Transmission Systems aujourd'hui), Hassan Fackhfack [40] s'est particulièrement penché sur la modélisation et l'optimisation de réducteurs aéronautiques comportant plusieurs cascades d'engrènements situés dans des plans décalés (figure 3.24). La soutenance a eu lieu en 2016, le directeur de ces travaux était Philippe Velez et je les ai co-encadrés.

3.3.1 Contexte

Au terme de la synthèse bibliographique, il est apparu que la grande majorité des analyses dynamiques et vibratoires sur les engrenages porte sur des systèmes à un seul engrènement et que les travaux relatifs aux systèmes à plusieurs étages de réduction (ou de multiplication) sont très largement minoritaires. Les sources d'excitation recensées comprennent principalement les fluctuations de raideurs d'engrènement, particulièrement pour des engrenages à dentures droites, les écarts de montage et de réalisation. Ces phénomènes se traduisent dans les variations de l'écart de transmission quasi-statique sous charge. Si cette notion d'écart de transmission est bien établie dans le cas d'un couple pignon-roue, elle perd de sa clarté pour des systèmes à plusieurs engrènements. Ces systèmes présentent des caractéristiques particulières comme la possibilité de posséder plusieurs entrées et sorties de puissance. De fait, la question du partage de puissance entre les différents engrenages doit être traitée, rendant plus complexe la détermination des écarts cinématiques propres à chaque engrènement. La problématique de l'optimisation des corrections de forme dans les systèmes à plusieurs engrènements est également spécifique. De nombreux résultats sont disponibles pour des systèmes à un engrenage et il semble pertinent de s'interroger sur les possibilités de les extrapoler ou non à des trains multi-engrènements.

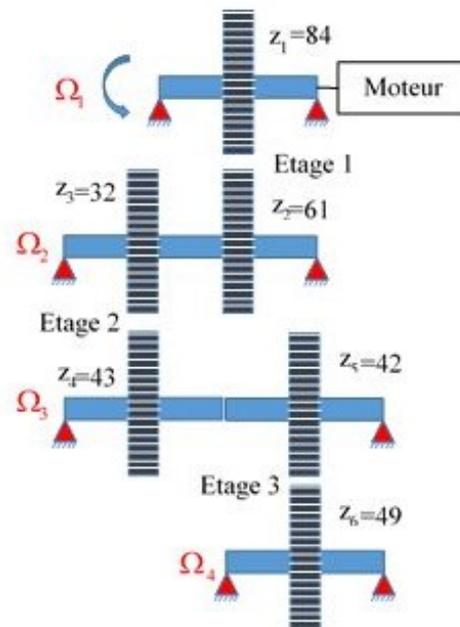


FIGURE 3.24 – Système d’engrènements à 3 étages décalés

3.3.2 Modélisation

L’étude dynamique et vibratoire d’un réducteur comportant plusieurs cascades d’engrènement positionnées dans des plans décalés nécessite le passage d’un système physique à un modèle numérique assurant le couplage entre les différents éléments d’excitations extérieures (moteur, différents accessoires), le mécanisme de transmission de puissance (engrenages, arbres, accouplements) et la structure de support (paliers, carter). Ainsi, dans cette modélisation, on passe par plusieurs étapes importantes qui conditionnent le comportement dynamique du système d’engrènement. En premier lieu, on définit l’état de fonctionnement dans les conditions de corps infiniment rigides en présence de défauts de forme et d’écarts géométriques qui perturbent le fonctionnement cinématique et dynamique. Ensuite, l’état déformé est recherché à chaque pas de temps en tenant compte des fonctions raideurs d’engrènement, des déphasages relatifs et les écarts géométriques. L’analyse des conditions de contact entre dentures est abordée suivant une approche identique à celle utilisée dans les logiciels de type VSA, ainsi que la modélisation des arbres et des paliers. Dans la suite de cette section, seuls les points spécifiques à la modélisation de multiples engrènements sont présentés.

Système indéformable

En présence d’écarts géométriques, la relation liant les vitesses des roues r et $r + 1$ de l’engrènement m , résulte de la relation de non pénétration normale et de maintien du contact au point M_m^* de deux solides infiniment rigides [69, 65] :

$$\underline{V}(M_m^*, r + 1/r) \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad (3.25)$$

On en déduit que la dérivée par rapport au temps de l’écart de transmission sans charge

s'écrit :

$$\frac{dNLTE_m}{dt} = r_{br+1}\Omega_{r+1}(t) + r_{br}\Omega_r(t) = -\epsilon_r \frac{\dot{\epsilon}_{tot,m}(M^*)}{\cos \beta_b} \quad (3.26)$$

où ϵ_r est le signe de Ω_r , $\dot{\epsilon}_{tot,m}(M^*)$ est la dérivée par rapport au temps de l'écart normal total maximum au point M_m^* entre les roues r et $r+1$. Dans le cas d'une cascade d'engrènements, la relation (3.26) est valable pour chaque étage. Par conséquent, les écarts de transmission sans charge se répercutent sur toutes les vitesses de rotation des roues situées en aval. Autrement dit, la vitesse de chaque roue dépend des perturbations cinématiques de chaque étage d'engrènement qui la précède.

Pour définir la durée du phénomène simulé, il est nécessaire de connaître la période de fonctionnement du système complet. Celle-ci est définie par la plus petite période multiple (PPPM, voir annexe 6.3.1) des périodes des étages qui le compose, si elle existe. En général, celle-ci est très grande.

La période de fonctionnement d'un étage d'engrènement dépend des excitations externes (variations du couple, ...) et internes au système. L'évolution des surfaces en contact au cours du temps constitue la source principale des excitations internes. Suivant si toutes les dents sont identiques (raideur et géométrie) ou pas, et suivant des écarts de montage (excentrations, ...), la période des phénomènes internes peut varier de façon importante. Si elle existe, la période de fonctionnement d'un étage est donnée par :

$$T_{\text{étage}} = PPPM(T_{int}, T_{ext}) \quad (3.27)$$

Lors de la résolution numérique, le pas de temps est fixé et il est commun à l'ensemble des éléments du système. Pour éviter des modulations de fréquence, le pas de temps choisi doit diviser exactement les différentes périodes T_1, T_2, \dots, T_{sys} . Cette contrainte combinée à celle sur la période du système peut conduire à des temps d'exécution du programme considérables.

Le déphasage entre les différents engrènements est un paramètre clé car il gère les combinaisons des excitations paramétriques dans tout le système. Le problème de déphasage existe dès lors que le système est constitué d'au moins deux étages d'engrènements successifs. Dans le cas d'un réducteur à 2 étages de réduction, trois configurations peuvent être rencontrées [83] :

1. Deux engrènements successifs appartiennent à des cascades différentes : sur l'arbre commun, le positionnement angulaire des 2 roues dentées est arbitraire. Dans ce cas, le déphasage relatif est non déterminé et il ne dépend pas des caractéristiques géométriques.
2. Deux engrènements successifs sont en cascade et la roue motrice est à l'une des extrémités : les engrènements portent sur les flancs droits et gauches de la roue intermédiaire. Le reste de la division entre la distance entre les deux points d'engagement sur la courroie virtuelle qui s'enroule sur les cercles de base et se superpose aux lignes de pression est noté κ_l . Le déphasage, exprimé en longueur sur la ligne de pression, s'écrit alors en fonction de $s(r_{bi})$ l'épaisseur curviligne sur le cercle de base des dents de la roue intermédiaire et du pas de base apparent p_{bt} :

$$\Delta_l = \begin{cases} s(r_{bi}) - \kappa_l p_{bt} & \text{si } \kappa_l p_{bt} \leq s(r_{bi}) \\ s(r_{bi}) - (1 - \kappa_l) p_{bt} & \text{si } \kappa_l p_{bt} > s(r_{bi}) \end{cases} \quad (3.28)$$

3. Deux engrènements successifs sont en cascade et la roue motrice est située au centre.

Dans cette configuration, les flancs d'un même coté des dents de la roue intermédiaire entrent en contact avec les deux autres roues dentées. La distance considérée est cette fois-ci la longueur $L_{A_1A_2}$ de l'arc du cercle de base de la roue intermédiaire entre les pieds des développantes virtuelles qui passent par les points d'engagement.

$$\Delta l = 1 - \text{mod}(L_{A_1A_2}, p_{bt}) \quad (3.29)$$

où l'opérateur «mod» désigne le reste de la division euclidienne.

Système déformable

Les N roues du modèle 3D sont assimilées à des cylindres rigides connectés entre eux par des distributions de raideurs élémentaires variables dans le temps. Ces roues sont portées par des éléments d'arbre qui, à leur tour, sont liés au carter par l'intermédiaire de paliers à roulements. Chaque arbre est discrétisé en un certain nombre de segments, eux-mêmes associés à un élément fini d'arbre (figure 3.25). Les extrémités de ces segments sont des nœuds à 6 degrés de liberté dont les déplacements, les vitesses et les accélérations sont recherchés. L'intégration des équations de la dynamique est réalisée par un schéma implicite de Newmark couplé à un algorithme de contact normal unilatéral.

3.3.3 Optimisation

L'ensemble des études menées dans ce travail de thèse porte sur l'optimisation des corrections de profil. Celles-ci sont supposées linéaires et symétriques pour chaque engrènement. Les caractéristiques observées du système modélisé sont les suivantes :

1. Le premier critère considéré est la moyenne des RMS des écarts de transmission quasi-statique :

$$P1 = \text{moy}_{1 \leq m \leq N} (RMS(TE_{sm}^*)) \quad (3.30)$$

où $TE_{s_m}^*$ est l'écart de transmission de l'engrènement m :

$$TE_{s_m}^* = \mathbf{W}_m^T \mathbf{X}_S + NLTE_m \quad (3.31)$$

Le vecteur de projection \mathbf{W}_m^T contient des zéros sauf aux rangs correspondant aux degrés de rotation suivant les axes des roues concernées.

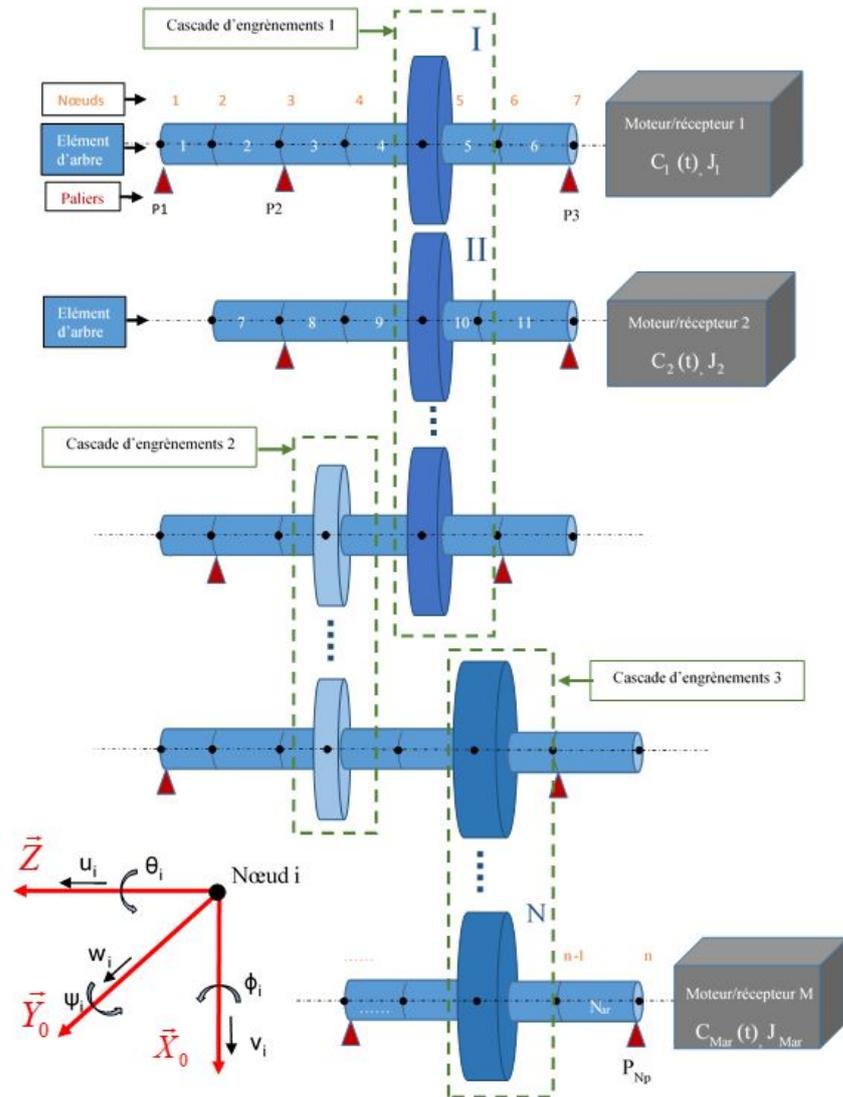
2. Le second critère caractérise les effets dynamiques en terme d'effort à la denture, il est défini par la moyenne des coefficients dynamiques sur tous les étages et pour une série de vitesses de rotation :

$$P2 = \text{moy}_{1 \leq m \leq N} (R_{mj}) \quad (3.32)$$

$$\Omega_{min} \leq \Omega_j \leq \Omega_{max}$$

avec R_{mj} le rapport de l'effort dynamique maximum à la denture de l'étage m et à la vitesse Ω_j , et de l'effort statique à cet étage.

$$R_{mj} = \max_{\tau} \left(\frac{F_{dyn}(\tau)_{mj}}{F_{statique m}} \right) \quad (3.33)$$

FIGURE 3.25 – Schéma d'un système 3D à N engrenements en cascade et/ou décalés

Le temps de calcul nécessaire à l'estimation de ce critère est nettement plus élevé que pour le premier puisqu'il impose des simulations de l'engrènement pour une série de vitesses de rotation.

3.3.4 Étude à couples constants

Si pour un système à deux étages une approche exhaustive par balayage des valeurs est encore envisageable pour le critère quasi-statique P1, les temps de calculs deviennent prohibitifs pour le critère P2 avec un nombre d'étages supérieur. La recherche de corrections optimales est alors menée avec un algorithme génétique (AG) mono-objectif (suivant P1 ou P2). Dans le but d'élargir l'ensemble des solutions proposées, l'optimisation est lancée sur trois sous-espaces de recherche correspondant à des domaines de profondeurs de correction différents (figure 3.26). Lors d'une recherche, le type de domaine (correction peu profonde, profondeur moyenne et profondeur importante) est le même pour chaque étage.

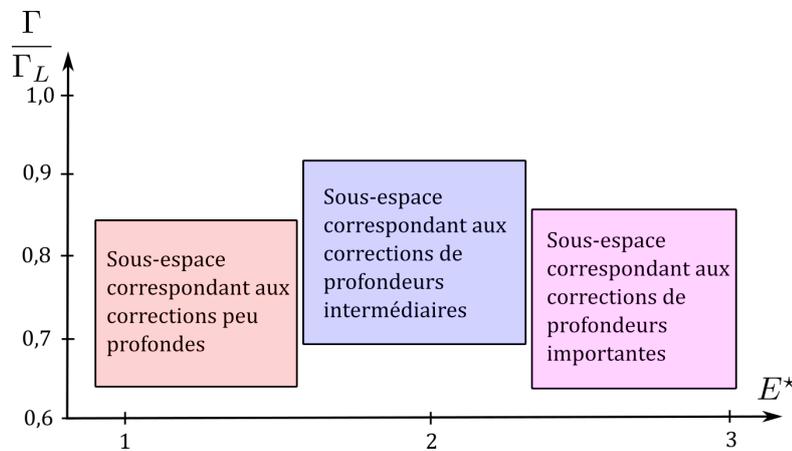


FIGURE 3.26 – Sous-espaces de recherche pour l'AG

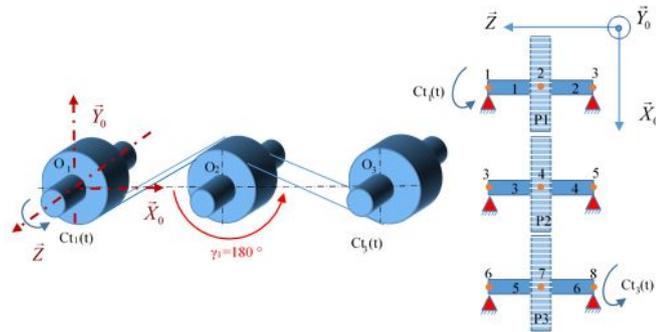
Les premières optimisations sont réalisées sur des réducteurs à deux étages. Le premier cas d'étude (transmission A) possède 3 roues dentées et les deux engrènements sont en cascade (voir figure 3.27 a-) et la seconde configuration (transmission B) est constituée de 4 roues et les deux engrènements sont décalés (figure 3.27 b-).

L'examen des résultats obtenus à couple constant montre que les solutions optimales d'une part pour le critère P1 et, d'autre part pour le critère P2, sont toutes localisées au voisinage immédiat des courbes maîtresses modifiées de chaque étage d'engrènement. Les corrections optimales pour chacun des critères pris séparément sont très proches.

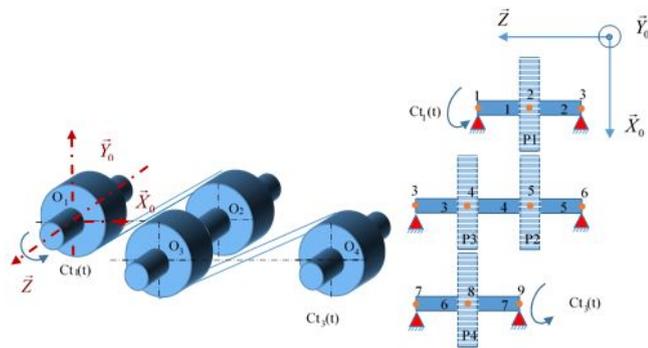
Ces résultats attestent de la robustesse de la courbe maîtresse modifiée pour le choix de corrections de profil qui atténuent les variations des écarts de transmission quasi-statiques, que les engrènements soient en cascade ou décalés. Ceci correspond à une réduction des excitations et par conséquent à un comportement dynamique adouci.

Les systèmes choisis pour les optimisations suivantes comportent un nombre d'engrènements plus élevé :

- Transmission C : 4 étages de réduction en une seule cascade (figure 3.28)



a- Transmission A : deux engrenements en cascade



b- Transmission B : deux engrenements décalés

FIGURE 3.27 – Réducteurs à 2 étages

- Transmission D : version simplifiée de l'Accessoy Gearbox AGB Trent XWB. Cette boîte de transmission est constituée de 9 roues dentées réparties sur 3 cascades. Il y a en tout 6 engrènements. (figure 3.29).

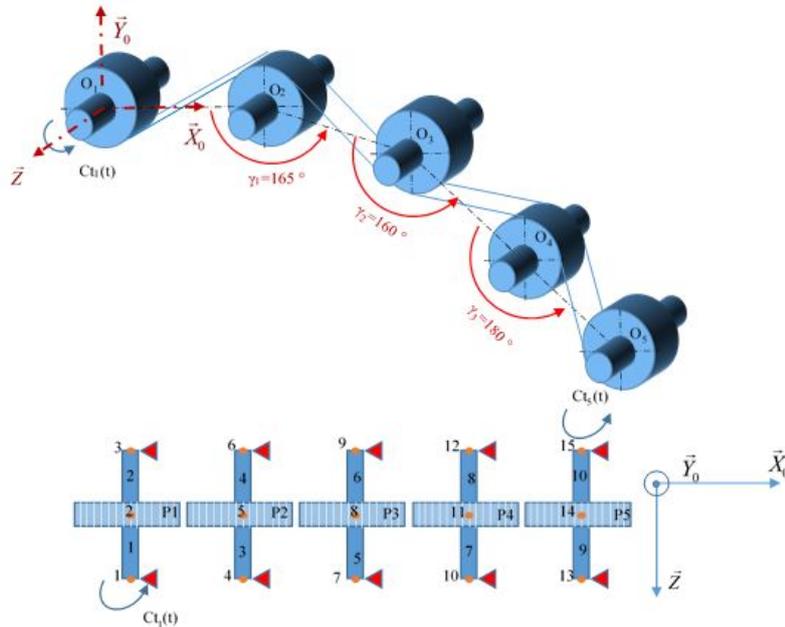


FIGURE 3.28 – Transmission C à 4 engrènements

Dans le cas d'un fonctionnement sans correction, les simulations des réponses dynamiques de ces systèmes montrent que les amplitudes des efforts dynamiques de certains étages peuvent dépasser deux fois la valeur de l'effort statique correspondant. Ceci engendre des pertes de contact entre dentures et, par conséquent, des vibrations importantes dans tout le système. Ce type de fonctionnement est à éviter et cela nécessite la détermination de corrections de profil adéquats. La recherche directe des meilleures corrections vis-à-vis du critère P2 en utilisant un algorithme génétique conduit à des temps de calcul prohibitifs. Considérant que le critère P1 est beaucoup plus rapide à estimer, une autre stratégie consiste à utiliser les résultats obtenus pour les réducteurs à 2 étages :

1. On suppose que les corrections qui minimisent le critère P2, minimisent également le critère P1.
2. On recherche les corrections qui minimisent le RMS des erreurs de transmission quasi-statiques locales (critère P1 3.22).
3. On vérifie que le niveau du critère P2 pour les corrections obtenues à l'étape précédente est largement inférieur à 2.

La figure 3.30 illustre la réduction du coefficient dynamique pour la transmission D par rapport au cas sans correction, sur une plage étendue de la vitesse de rotation de l'axe moteur.

L'ensemble des études menées à couples extérieurs constants mettent en évidence les points suivants :

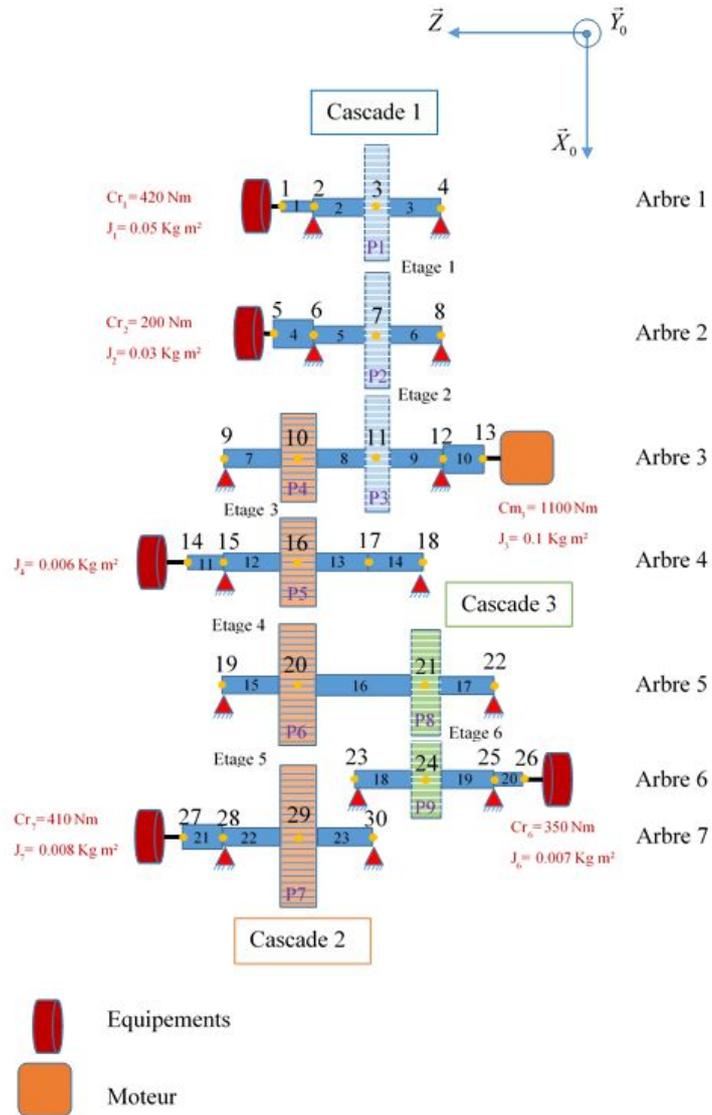


FIGURE 3.29 – Transmission D : AGB Trent XWB

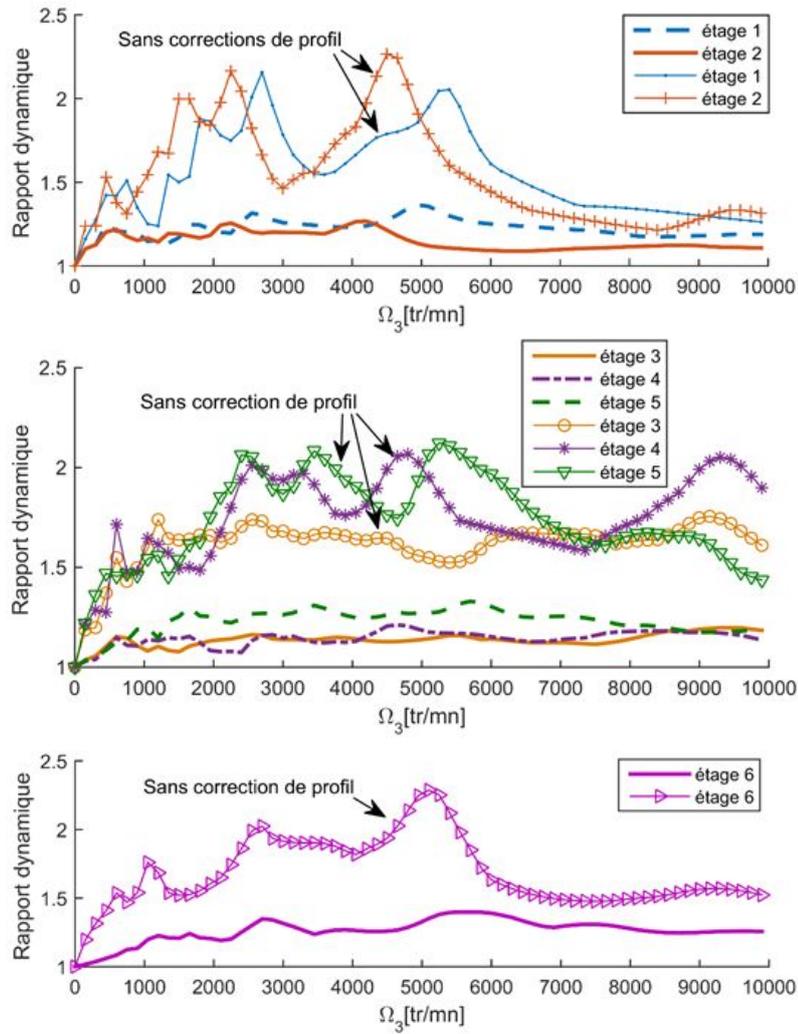


FIGURE 3.30 – Évolutions des coefficients dynamiques en présence de corrections de profils optimales courtes

- l'optimisation du $\text{RMS}(TE_S^*)$ de chaque étage conduit à l'optimisation globale selon le critère P1 ;
- les corrections optimales du point de vue des écarts de transmission améliore significativement le comportement dynamique (critère P2) sur toute la plage de vitesses ;
- le type de correction (longue, moyenne, courte) a peu d'influence sur les niveaux des critères P1 et P2 ;
- les corrections qui minimisent P1 sont très proches de la courbe maîtresse modifiée.

3.3.5 Études pour différents couples

Dans les applications réelles, la puissance totale qui traverse la boîte de transmission est distribuée aux différents accessoires tels que pompes, générateurs, moteurs ... Suivant les phases de vol et de fonctionnement du système auquel chaque élément participe, les appels de puissance évoluent dans le temps. La vitesse de rotation des turbopropulseurs étant assez stable, les variations de puissance se traduisent essentiellement par des variations de couples. Ceci implique que, quelle que soit la correction de profil retenue, elle ne pourra être adaptée à l'ensemble des cas de fonctionnement. Pour affiner le choix des corrections, des simulations complémentaires ont été réalisées avec des couples extérieurs s'écartant des valeurs nominales.

Couple moteur variable dans le temps

Pour la transmission C, le couple d'entraînement C_m évolue de façon sinusoïdale en fonction du temps, centré sur le couple nominal :

$$C_m(t) = C_N + \Delta C \sin(k\Omega_1 t) \quad k \text{ entier} < z_1 \quad (3.34)$$

La vitesse de rotation de l'arbre d'entrée est supposée constante et le couple résistant de sortie est calculé en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

Sans correction des dentures, la comparaison des courbes de réponses du coefficient dynamique montre que l'introduction d'un couple moteur variable engendre une augmentation des efforts maximum à la denture et l'apparition de pics au voisinage de la vitesse critique ω_c (figure 3.31). Cet effet est présent sur tous les étages d'engrènement. Son apparition traduit un phénomène d'interaction entre les étages d'engrènement. A cette vitesse d'entrée, les spectres des efforts dynamiques des 4 étages exhibent un contenu fréquentiel composé des harmoniques de la fréquence d'engrènement et des bandes latérales liées à la fréquence du couple variable.

Pour une période du couple largement supérieure à celle de l'engrènement, les déflexions quasi-statiques moyennes sur chaque période d'engrènement évoluent au cours du temps. Les corrections de profil définies précédemment à partir du couple nominal sont donc a priori mal adaptées dans ce cas. Cependant, la moyenne des déflexions statiques est inchangée sur un multiple de la période de chargement. Pour cette raison, la correction définie par le couple nominal est testé avec un couple variable. Pour les trois types de corrections de profil optimales appliquées, l'analyse des résultats montre une amélioration du comportement dynamique des 4 étages d'engrènement sur toute la plage de vitesses de rotation de l'arbre moteur (figure 3.32). Cependant, au voisinage de la vitesse critique ω_c le comportement se dégrade légèrement. Ceci montre que les modifications de profil proposées, définies à partir des déflexions statiques moyennes sur la période du chargement, sont globalement efficaces pour la réduction des excitations d'engrènement sauf au voisinage de la vitesse critique générée par la combinaison des excitations extérieures.

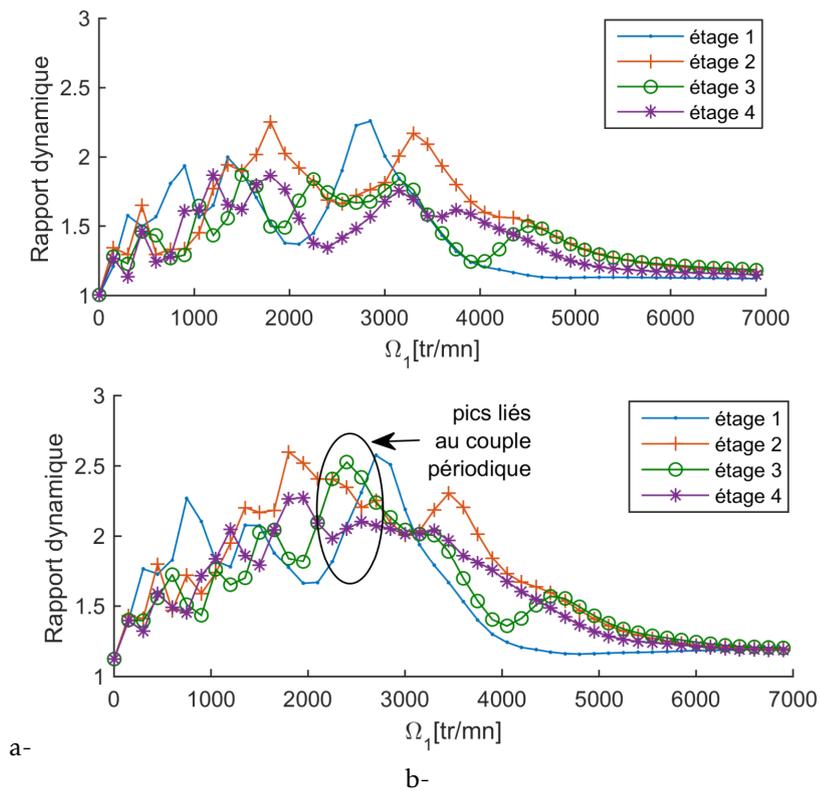


FIGURE 3.31 – Évolutions des coefficients dynamiques des 4 étages d'engrènement sans correction de profil en présence de a- un couple moteur constant et b- un couple moteur variable dans la temps

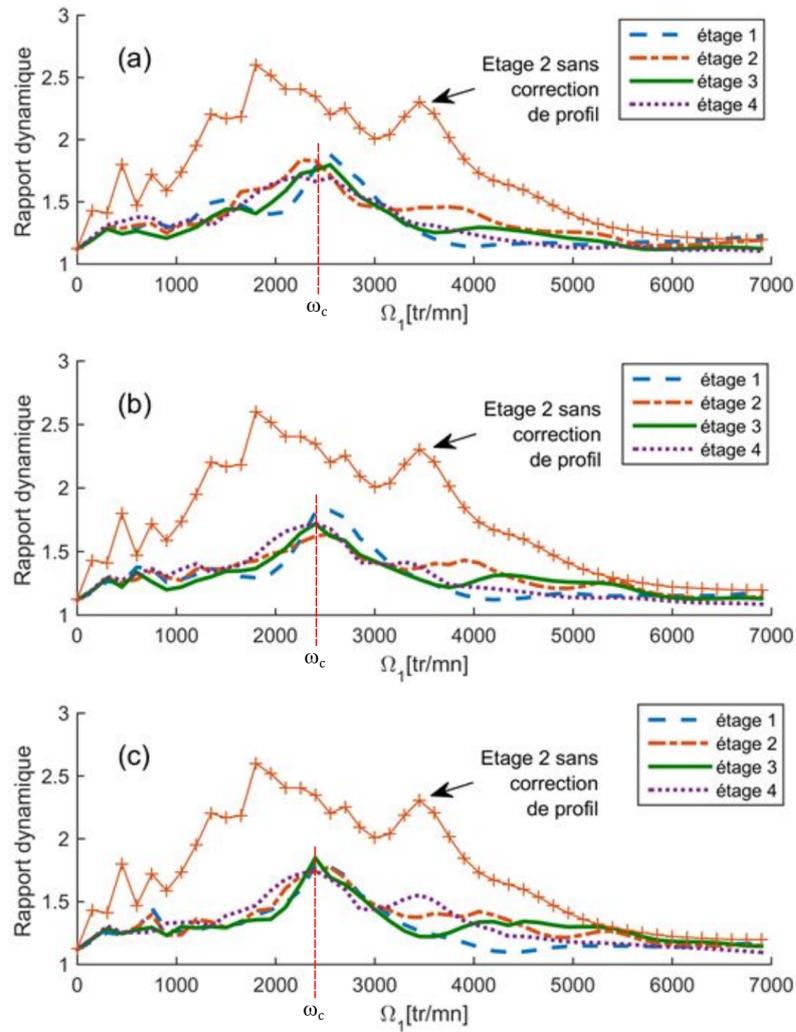


FIGURE 3.32 – Évolutions des coefficients dynamiques en présence du couple moteur variable Ct_1 et des corrections de profil optimales a) courtes, b) moyennes et c) longues

3.3.6 Synthèse

Les corrections de profil linéaires et symétriques efficaces pour réduire les fluctuations de l'écart de transmission, le sont également pour atténuer le comportement dynamique sur une large plage de vitesses. Les profondeurs et longueurs de modifications de profil optimales se trouvent systématiquement à proximité de la courbe maîtresse modifiée. Le type de correction (courte, moyenne ou longue) sur cette courbe a peu d'influence sur le niveau de fluctuation du comportement dynamique. En présence de couples extérieurs ayant une composante alternée, l'emploi de corrections de profil définies à partir des couples moyens demeure un moyen sûr de limiter les coefficients dynamiques estimés sur les engrènements.

Initialement, la courbe maîtresse modifiée est définie pour un unique engrènement et à un couple transmis donné. Son utilisation est également pertinente dans certains cas courants où un pignon engreène avec plusieurs roues :

- les pignons intermédiaires (pignons fous) : les géométries des engrènements sont différentes mais les contacts sont réalisés sur des flancs différents ce qui rend les corrections de chaque flanc indépendantes ;
- les planétaires de trains épicycloïdaux : le même flanc des dents entre en contact successivement avec les différents satellites mais les géométries sont sensiblement les mêmes et on peut raisonnablement estimer que le partage de charge se fait équitablement.

3.4 Étouffeur de vibrations

3.4.1 Contexte

Dans les navires de forts tonnages, les couples importants transitant dans la ligne de propulsion imposent aux engrenages d'avoir des roues de grands diamètres (supérieur à $2m$). Pour les contraintes de masse, les corps de ces roues sont généralement creux, réalisés par un assemblage mécano-soudé de plaques et de cylindres. Ces cavités rendent la structure plus flexible et elle devient le siège de diverses vibrations. Une idée simple consiste à utiliser l'espace des cavités pour y installer des dispositifs passifs permettant d'étouffer les vibrations de l'engrènement et de la structure.

La société Naval Group s'est intéressée à ce type de dispositif et a financé un contrat de collaboration CIFRE avec le LaMCoS. Cyril Chevrel-Fraux a bénéficié de ce financement et il a mené ses travaux de thèse [21] sur l'évaluation des performances théoriques d'un engrenage où les cavités de la roue sont remplies d'un matériau aux propriétés dissipatives plus importantes que l'amortissement structural. Ces travaux ont été soutenus en 2020 et l'encadrement académique a été réalisé par Philippe Velez (directeur) et moi-même. Bien que des matériaux visco-élastiques soient de bons candidats à cette fonction absorbante, les travaux se sont plutôt orientés sur des matériaux élasto-plastiques.

Du côté de la littérature, la majorité des études traitant de la réduction des vibrations générées par l'engrènement s'intéressent aux modifications des dentures (corrections de profil et d'hélice). L'ajout d'un système dissipatif à proximité du plan d'engrènement est un axe encore peu exploré.

3.4.2 Modélisations

La modélisation retenue d'un réducteur avec une roue flexible contenant un matériau dissipatif est un assemblage de trois modèles :

- un modèle d'engrènement à paramètres concentrés ;

- un modèle de la roue flexible qui se déforme et vibre sous les actions dynamiques de l'engrènement et des paliers;
 - un modèle de comportement du matériau qui va absorber des vibrations.
- Les interfaces entre ces trois parties sont particulièrement importantes.

Modèle de l'engrènement

L'approche présentée 2.1 page 7, développée au LaMCoS au sein de l'équipe de P. Velez, est très efficace pour la modélisation de l'engrènement. Le nombre de degrés de liberté est réduit par rapport à la méthode des éléments finis, ce qui lui permet de traiter des configurations dynamiques en des temps très raisonnables (de l'ordre de la minute pour une trentaine de périodes d'engrènement). Les approches analytiques des déplacements des dents participent significativement à ces performances. Les modèles des corps des roues dentées permettent seulement de tenir compte d'un champ de déformation nul ou bien celui d'une poutre de Timoshenko. Ils sont inadaptés pour rendre compte du comportement statique et dynamique d'une roue possédant une structure complexe. Pour ces raisons, la structure du code est globalement conservée et seuls la raideur de fondation des dents de la roue et le modèle de déformation du corps de roue sont remplacés.

Modèle de roue flexible

Une modélisation plus fine du comportement mécanique de la roue est basée sur la méthode des éléments finis. Le logiciel commercial ABAQUS a été retenu pour la mise en œuvre.

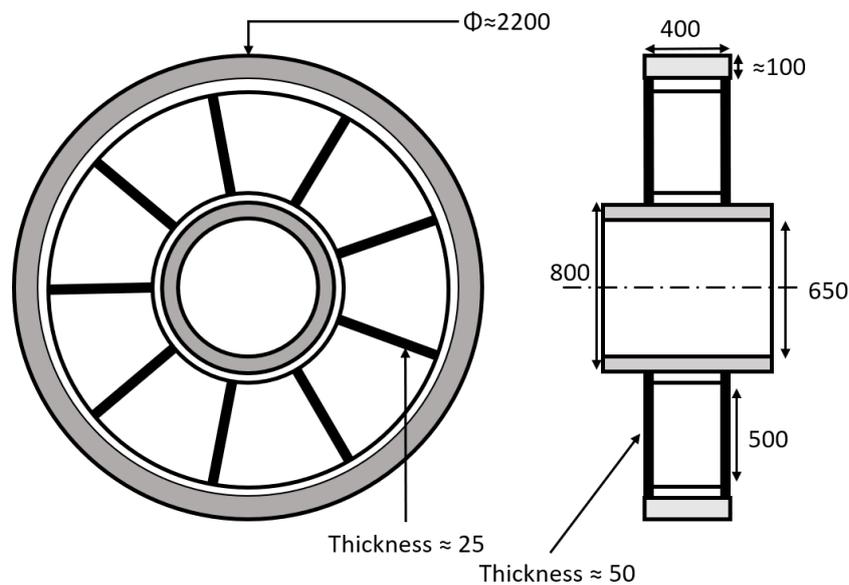


FIGURE 3.33 – Géométrie de la roue

La géométrie de la roue considérée est représentée sur la figure 3.33. Elle est composée de voiles dont l'épaisseur peut varier entre 5 et 50 *mm*, petite par rapport aux autres dimensions. Ils sont modélisés par des éléments de coque. La jante et l'arbre sont plus épais et ils sont maillés par des briques à 20 nœuds. Conformément aux travaux de Bettaieb [11], Cooley [26] et Guilbert

[44], les dents ne sont pas introduites dans la sous-structure de la roue qui est maillée jusqu'au rayon de pied. Le maillage compte environ 25 000 nœuds et 90 000 degrés de liberté, ce qui est beaucoup trop pour être utilisé directement avec le modèle d'engrènement.

Une méthode de sous-structuration est utilisée pour réduire significativement le nombre de nœuds tout en gardant les premiers modes de la structure complète. Ces techniques ne sont utilisables que pour des problèmes linéaires, il n'est donc pas possible d'y inclure directement un comportement dissipatif du matériau. La méthode à interface libre de Craig-Chang [28] est utilisée dans le cas présent.

Le choix des nœuds conservés (nœuds *maîtres*) est fondamental pour l'intégration de la sous-structure dans son environnement. La roue déformable étant au cœur du système, ce sont ses interactions qui guident le choix des nœuds maîtres :

- La roue est positionnée dans le bâti par des paliers à roulements, supposés élastiques et linéaires. Étant donné qu'on souhaite conserver la possibilité d'une transmission de moments, un nœud à 6 ddl est ajouté au centre de chaque palier (points B1 et B2 sur la figure 3.34). Ils ne correspondent pas à des points du maillage et ils sont connectés, via une liaison rigide, à une partie de l'alésage.
- La denture de la roue sera reliée au cylindre de pied par l'intermédiaire des nœuds de cette surface. L'intégralité de ceux-ci est donc conservée.
- Les parois des cavités sont en contact avec le matériau dissipatif et ce sont les déplacements de celles-ci qui mettent en œuvre la transformation d'énergie. Il faut donc maintenir dans la sous-structuration à minima un nœud au centre de chacune des faces (figure 3.34).

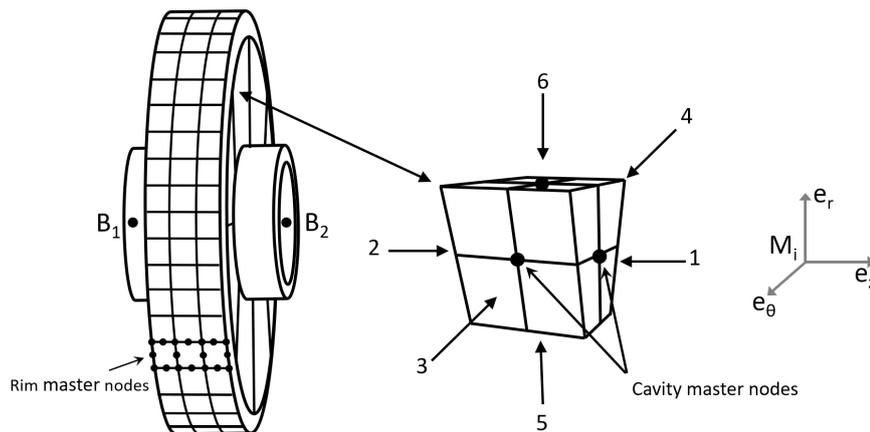


FIGURE 3.34 – Positionnement des nœuds maîtres sur la roue déformable

À l'issue de la phase de condensation, le modèle compte environ 2 700 degrés de liberté auxquels il faut ajouter les degrés de liberté provenant de la base modale.

Modèle du matériau de remplissage

Le matériau est contenu dans une enceinte fermée qui, dans le cadre des HPP, peut se déformer et dont les parois peuvent vibrer. Le chargement est a priori cyclique au cours du temps. Le cahier des charges des travaux menés par C. Chevrel-Fraux impose un comportement élasto-plastique. Cela signifie qu'il faut définir une surface de charge et un écrouissage capable

de rendre compte de l'effet Bauschinger. Ce phénomène, d'après Lemaitre et Chaboche [61] entraîne une dissipation d'énergie mécanique pour une sollicitation cyclique (figure 3.35).

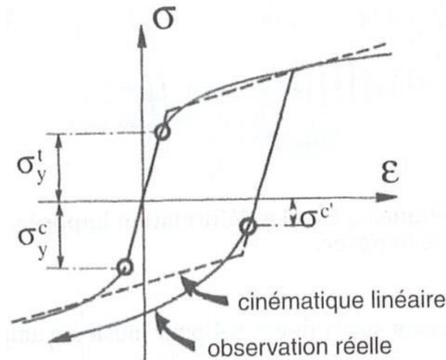


FIGURE 3.35 – L'effet Bauschinger [61]

La littérature sur les modèles élasto-plastiques est assez fournie. Pour un premier travail sur le sujet et pour une plus facile intégration avec les autres modèles, nous avons opté pour un modèle à paramètres concentrés. Le modèle de Masing [78] (figure 3.36) est le plus simple trouvé dans la littérature. C'est un modèle à deux pentes réglées par les valeurs des raideurs k_1 et k_2 . Le frotteur associé à la raideur k_2 permet de simuler une surface de charge (en une dimension) et l'écroutissage.

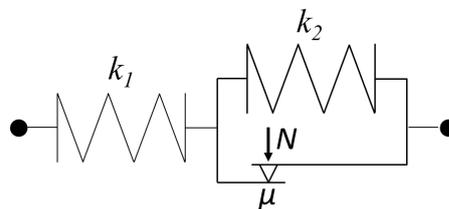


FIGURE 3.36 – Modèle de Masing

Pour simuler le comportement macroscopique du caisson rempli au sein de la roue, une masse ponctuelle M possédant 3 degrés de liberté de translation est introduite au centre géométrique de la cavité. Elle est reliée à chaque nœud maître des parois par l'intermédiaire de trois modèles de Masing disposés selon des directions orthogonales. Sur la figure 3.37, seuls 4 systèmes disposés selon les directions normales aux faces sont représentés mais le modèle en compte 18 par caisson.

Une dernière précaution est à prendre afin de vérifier que pour un mouvement de corps rigide de la roue, les systèmes de Masing ne produisent pas de travail. Pour cela, le champ de déplacement des nœuds maîtres du caisson est décomposé en un déplacement de corps parfaitement rigide (torseur des petits déplacements) et un champ lié à la déformation du caisson. Les systèmes de Masing sont soumis seulement à ce dernier.

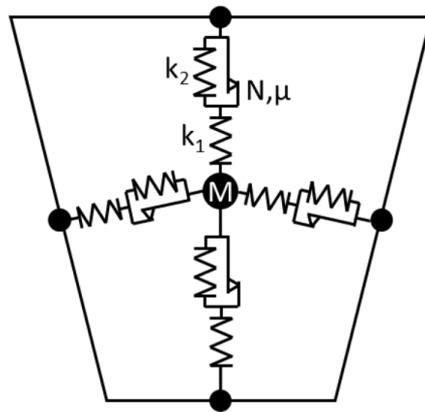


FIGURE 3.37 – Systèmes de Masing entre la masse centrale et les nœud maîtres des parois d'un caisson

Interfaces entre les modèles

Physiquement, le matériau de remplissage est en contact sur toute la surface des parois métalliques des caissons. Pour améliorer la représentativité de cette interaction dans le modèle à paramètres concentrés, le nœud maître situé au centre des faces n'est pas un nœud du maillage mais un point construit de telle sorte que son déplacement est défini par une moyenne pondérée des déplacements des nœuds de la zone de contact en question. Différents types de pondération sont proposés et la distribution uniforme est la plus satisfaisante. Les modèles de Masing sont connectés à ces nœuds possédant une cinématique particulière.

Le modèle d'engrènement utilise les déplacements dans la direction normale au contact alors que le modèle sous-structuré du corps de la roue détermine les translations dans les 3 directions du repère des nœuds du maillage. Aussi, une adaptation cinématique est nécessaire pour rendre les déplacements des deux modèles compatibles. Cette interface est reprise des travaux de Bettaieb [11] et de Guilbert [44].

Identifications des paramètres de Masing

La définition des valeurs des paramètres du modèle de matériau dépend de la situation. En phase d'étude paramétrique, le concepteur peut librement fixer les valeurs dans un intervalle plausible. Si les propriétés du matériau de remplissage sont connues, une étape d'identification est nécessaire pour les paramètres concentrés du modèle de Masing.

La valeur de la masse centrale M est simplement prise égale à la masse du matériau de remplissage. L'identification des paramètres des modèles de Masing passe par un modèle éléments finis du matériau de remplissage d'un demi caisson (la masse centrale est supposée immobile). Les déplacements de 5 faces du modèle sont bloquées et les déplacements des nœuds de la face étudiée sont liés à celui d'un nœud maître situé au centre. Comme à l'étape de la sous-structuration, le lien établit que les déplacements du nœud maître sont des moyennes pondérées de ceux de tous les nœuds de la face. Pour obtenir les caractéristiques, le modèle est piloté en effort sur le nœud virtuel suivant les directions normales ou tangentielles et le déplacement résultant est relevé. A partir d'un ensemble de couples de valeur d'effort-déplacement dans une direction donnée, les caractéristiques du modèle de Masing sont identifiées (figure 3.38).

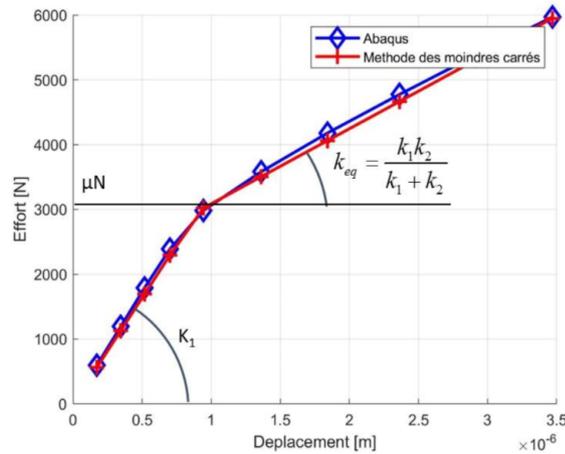


FIGURE 3.38 – Comportement du matériau de remplissage : Résultats MEF et identification pour le modèle de Masing

3.4.3 Remarques sur la résolution

Globalement, la résolution du système utilise un schéma numérique de Newmark pour l'intégration temporelle, couplé à un algorithme de contact pour l'engrènement. M. Chevrel-Fraux a dû apporter deux modifications importantes à l'algorithme usuellement mis en œuvre dans les codes de calcul de type VSA :

- Étant donné que la grande majorité des degrés de liberté sont ceux de la roue, il est plus rapide de résoudre les équations du mouvement dans le repère de la roue plutôt que de rester dans celui du bâti. Le nombre de changements de repère est réduit.
- Un paramètre d'écroûissage intervient dans chaque modèle de Masing et sa valeur est susceptible d'évoluer à chaque pas de temps. Sa détermination est implicite, ce qui impose une boucle supplémentaire dans l'algorithme, assurant la convergence de ces paramètres.

D'autre part, l'augmentation significative du nombre de degrés de liberté par rapport à un modèle d'engrènement à corps rigide, la taille de la roue (~ 230 dents) et la prise en compte de la non linéarité du matériau de remplissage conduit à des temps de calcul nettement plus élevés (de l'ordre de la journée) pour une période complète du système.

3.4.4 Les principaux résultats

Après avoir vérifié que la modélisation du matériau de remplissage donnait les résultats attendus dans le cas d'un comportement linéaire, diverses études paramétriques ont été réalisées avec un matériau élasto-plastique.

Balayage en vitesse

Afin d'avoir un premier aperçu de l'influence du matériau de remplissage sur le comportement dynamique de l'engrènement, le maximum du coefficient dynamique à la denture et le RMS des déplacements aux paliers sont tracés sur la figure 3.39 pour un balayage en vitesse. Dans ce cas, les caractéristiques physiques du matériau de remplissage sont proches de celles

Module d'Young	: 2 GPa
Masse volumique	: 1000 kg m^{-3}
Coefficient de Poisson	: 0,2
Module tangent élasto-plastique	: 0,3 GPa
Limite d'élasticité initiale	: 1,25 kPa

TABLEAU 3.5 – Paramètres physique du matériau de remplissage

d'un sable et elles sont définies dans le tableau 3.5. La transmission étudiée est à denture chevron et ses paramètres sont définis par le tableau 3.6

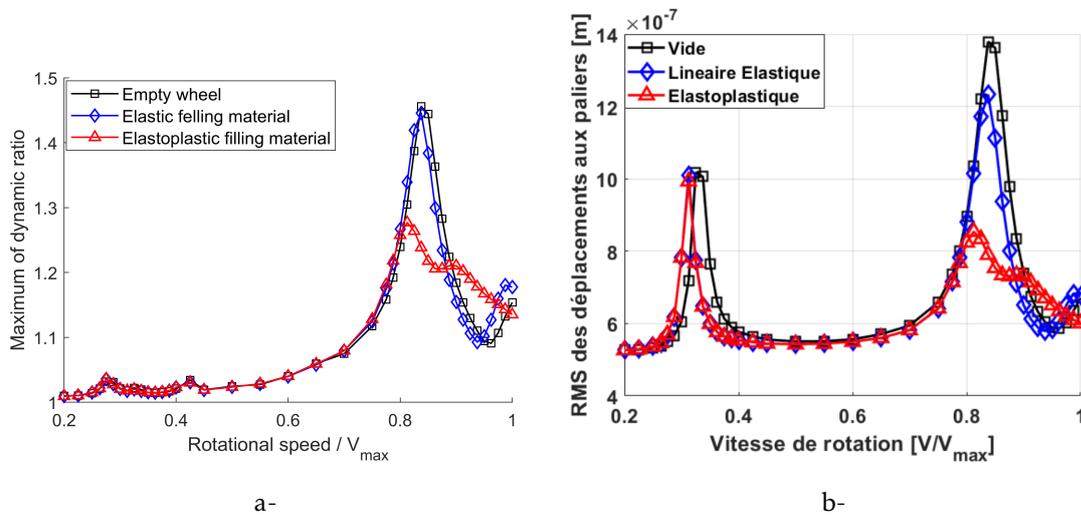


FIGURE 3.39 – Coefficient dynamique (a-) et RMS des déplacements aux paliers (b-) en fonction de la vitesse de rotation

A faibles vitesses et jusqu'à $0,8 V_{max}$, la présence d'un matériau de remplissage n'est pas très sensible, si ce n'est le décalage fréquentiel provoqué par l'ajout de masse. Pour les vitesses plus élevées, les valeurs maximales du coefficient dynamique et du RMS des déplacements aux paliers atteignent des valeurs nettement plus faibles dans le cas d'un matériau élasto-plastique. Malgré l'existence d'une courte zone où les caractéristiques sont légèrement dégradées, l'emploi de ce type de matériau permet de limiter les valeurs maximales des caractéristiques observées.

En complément, la figure 3.40 présente l'évolution de l'énergie mécanique dissipée dans l'ensemble des caissons pour un tour de roue en fonction de la vitesse de rotation.

Ce résultat confirme la zone d'efficacité du dispositif au delà de $0,8 V_{max}$. Il est intéressant de noter que dans cette zone, la quantité d'énergie transformée est relativement faible par rapport à celle qui transite par l'engrenage.

Le système est actif et améliore sensiblement le comportement dynamique dans des domaines de fonctionnement où la transmission sans dispositif de dissipation présente un coefficient dynamique important, lié à des battements des parois des caissons plus forts. Seulement, le comportement du matériau de remplissage étant introduit avec une loi à seuil, les excitations doivent atteindre un certain niveau pour enclencher le mécanisme de dissipation. Ce niveau

		Pignon	Roue
Module normal [mm]	m_n	9	
Nombre de dents	z	47	239
Angle de pression normal [°]	α_n	20	
Angle d'hélice [°]	β	-15	15
Largeur de denture [mm]	b	175	175

TABLEAU 3.6 – Caractéristiques des dentures

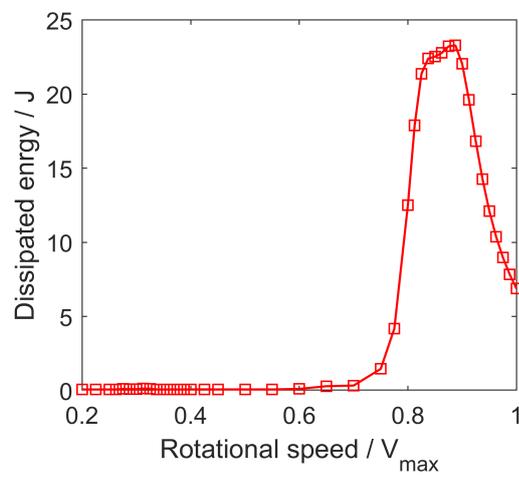


FIGURE 3.40 – Énergie dissipée en fonction de la vitesse de rotation

minimum est fonction de la structure de la roue (nombre de caisson, épaisseur des parois, ...) et des caractéristiques du matériau. Les principaux résultats de l'étude paramétrique réalisée par C. Chevrel-Fraux sont les suivants :

- La masse volumique et le module d'Young dans la zone de comportement élastique du matériau de remplissage ont une faible influence sur l'efficacité du système ;
- Une limite d'élasticité peu élevée et un module d'Young élasto-plastique faible favorisent la dissipation d'énergie mécanique et réduisent l'amplitude du coefficient dynamique et du RMS des déplacements aux paliers ;
- L'augmentation du nombre de caissons tend à rigidifier la roue, à diminuer les amplitudes de battement des parois et, globalement, à réduire l'effet amortissant.

3.4.5 Synthèse

L'introduction d'un matériau de remplissage dans le corps de la roue modifie sa masse, son inertie et sa rigidité. Les valeurs de certaines vitesses critiques, comme la vitesse critique d'engrènement, sont légèrement affectées alors que d'autres, comme celles associées à des modes de la structure, sont plus fortement impactées.

Le bénéfice de ce dispositif apparaît essentiellement lorsque les vibrations sont importantes, en particulier au voisinage de la fréquence critique d'engrènement. La loi retenue pour le comportement étant une loi à seuil, seules les vibrations conduisant à un niveau de contrainte supérieur au seuil engendrent une dissipation, réduisant l'intensité de celles-ci. La quantité d'énergie dissipée est relativement faible mais cette transformation est très efficace sur les grandeurs macroscopiques telles que le coefficient dynamique à l'engrènement ou le RMS des déplacements aux paliers. Le niveau de vibration permettant le déclenchement du mécanisme de dissipation dépend de la structure, de son amortissement structural et des caractéristiques physiques du matériau de remplissage.

Cette technique pourrait être employée en complément de corrections de forme, de façon à élargir le domaine de fonctionnement où les vibrations sont faibles. Une première étude où le couple résistant évolue de façon quadratique avec la vitesse de rotation, donne de premiers résultats encourageants.

Bien entendu, le modèle élasto-plastique et la prise en compte du matériau de remplissage pourraient être largement enrichis pour aller vers un véritable comportement tri-dimensionnel. Un autre point qui pourrait être développé est celui de l'interaction entre le matériau et les parois. Cyril Chevrel-Fraux a supposé une adhérence parfaite mais est-ce réaliste ? Cette interface est-elle dissipative (frottement, ...) ? Dans l'affirmative, le poids du paramètre «nombre de caissons» devrait augmenter.

3.5 Autres travaux non détaillés

Mon activité de recherche m'a également conduit à participer à l'encadrement d'autres travaux de thèses, soutenus ou en cours, qui ne sont pas détaillés dans ce document pour en limiter la longueur. J'en fais ici un rapide résumé.

3.5.1 Travaux soutenus

Thèse d'Ahmed Jawad Qureshi

Les travaux de thèse d'Ahmed Jawad Qureshi ont été conclus en juin 2011 et ils sont intitulés «Contributions à la maîtrise de la robustesse des produits : Formalisation par logique formelle,

applications à la conception ensembliste et au tolérancement». Ils ont été financés par une bourse du gouvernement pakistanais obtenue par concours et ils se sont déroulés au sein du Laboratoire de Conception Fabrication et Commande au campus Arts et Métiers de Metz. Le directeur de thèse était Jean-Yves Dantan.

Les travaux portent sur la formalisation du problème de conception mécanique et le développement d'outils numériques associés dans le but d'intégrer des incertitudes au plus tôt dans la phase de conception d'un produit mécanique. Ces incertitudes sont à prendre au sens large car elles concernent aussi bien les caractéristiques matérielles, que géométriques, qu'environnementales. Ce travail s'intègre dans la mise en œuvre de l'ingénierie concourante au sens où il tente d'en faciliter l'application. Deux problèmes essentiels de la définition d'un produit sont traités : la conception (optimisation) robuste de l'architecture du produit et de son tolérancement.

L'objectif est, d'une part, de fournir un cadre général de description de tels problèmes et d'autre part, de proposer des modèles, des méthodes et des outils permettant une démarche globale de la définition du produit et de ses tolérances des méthodes de résolution conduisant à un ensemble de solutions robustes.

Thèse de Tommy Pinel

En 2020, Tommy Pinel a soutenu sa thèse [82] intitulée «Modélisation 3D dynamique d'un réducteur compact à fort rapport avec profil de denture en développante de cercle». Ce travail fut financé par une CIFRE avec la société Moving Magnet Technologies (MMT), basée à Besançon, qui est spécialisée dans la conception de solutions électromagnétiques appliquées à la mécatronique pour les mobilités. Philippe Vexel était le directeur de thèse.

Les moteurs électriques ont généralement une efficacité élevée sur une plage de fonctionnement peu adaptée aux diverses applications et l'utilisation d'un réducteur de vitesse est nécessaire. Les architectures et les technologies rencontrées dans la réalisation de ces systèmes sont extrêmement diverses. Ce travail de recherche se focalise sur une famille de réducteurs caractérisés par un fort rapport de réduction (>20), un faible encombrement et des profils de dents en développante de cercle. Le pignon, entraîné par un excentrique, engrène à l'intérieur d'une couronne fixe et le mouvement de sortie est récupéré à l'aide de pines en contact avec des alésages du pignon (figure 3.41).

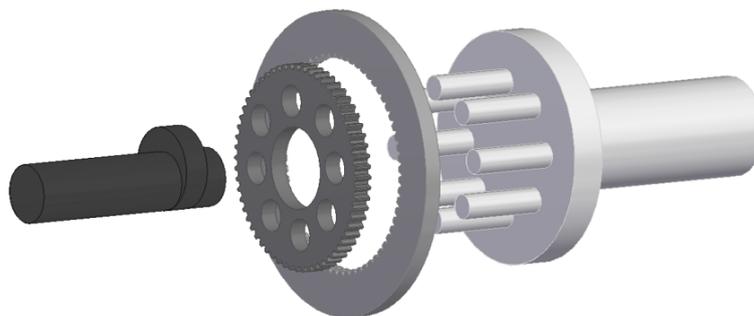


FIGURE 3.41 – Réducteur cycloidal

Une première étude, menée en considérant les pièces parfaitement rigides, permet de définir une géométrie nominale exempte d'interférence. Ensuite, les comportements quasi-statique et

dynamique du système sont analysés en utilisant un modèle où les différentes pièces sont animées de 6 degrés de liberté supplémentaires et où toutes les liaisons sont élastiques. L'introduction de ce comportement déformable modifie de façon très sensible les zones de contact et améliore la répartition du chargement. Le rapport de conduite, inférieur à l'unité dans le premier modèle, peut devenir supérieur à 3 dans le cas où la couronne possède une dent de plus que le pignon. De plus, le modèle permet de détecter des cas de fonctionnements pathologiques où un contact isolé entre les dentures apparaît à l'extrémité de la zone de contact potentiel.

Enfin, une démarche de conception est proposée où l'outil développé occupe une place centrale. L'introduction de certains écarts de réalisation permet notamment de tester les choix de conception au voisinage des valeurs nominales et de vérifier la robustesse de l'ensemble.

3.5.2 Travaux en cours

Thèse d'Elias Rechreche

Depuis juillet 2021, Elias Rechreche effectue des travaux de recherche sur les accouplements élastiques à ressorts (figure 3.42) dans le cadre d'une CIFRE avec la société CMDgears (Cambrai). Le directeur de thèse est Philippe Velex.



FIGURE 3.42 – Accouplement élastique à ressorts

La flexibilité de ces composants permet de compenser de légers écarts de position et d'orientation des arbres des éléments principaux d'une chaîne de transmission de puissance. Pour la gamme d'accouplements proposés, les couples transmis s'étendent de $10^3 Nm$ à $10^6 Nm$. Bien que cette technologie existe depuis plus d'une centaine d'années, les documents scientifiques portant sur sa conception sont très peu nombreux. Notamment, il est connu que leur comportement non linéaire permet de filtrer certaines vibrations mais aucune précision sur la nature et la fréquence de ces perturbations n'a été trouvée.

Elias Rechreche a entrepris un important travail de modélisation et les premiers résultats montrent les points suivants :

- Le comportement quasi-statique du modèle sur une plage étendue de couple est cohérente avec les mesures réalisées ;

- Les écarts de transmission sous charge sont faibles, même en présence d'écarts de position et d'orientation des axes;
- En dynamique, pour une fluctuation de couple faible par rapport à sa valeur moyenne, le comportement est quasiment celui d'un système linéaire. Lorsque les fluctuations sont plus fortes, des effets non linéaires atténuent la réponse dynamique. En réduisant le modèle aux degrés de liberté torsionnels, le comportement est proche d'un oscillateur de Duffing.
- La prise en compte de contacts frottants (modèle de Coulomb régularisé) montre que les pertes aux contacts ressort-moyeux sont très faibles et n'impactent pas de façon sensible le comportement dynamique de l'accouplement.

Un banc d'essais dynamique est en cours de réalisation et nous espérons pouvoir confronter les résultats numériques aux constatations expérimentales. Un travail de synthèse sera également mené de façon à mieux relier conception et comportement dynamique.

Thèse de Julien Finot

Julien Finot travaille sur le problème de l'apparition des raies fantômes dans le spectre fréquentiel des réducteurs de véhicules électriques. Ce travail fait l'objet d'une convention CIFRE avec STELLANTIS et a débuté en mars 2022. Philippe Velex est le directeur de cette thèse, elle est co-dirigée par François Girardin et moi-même.

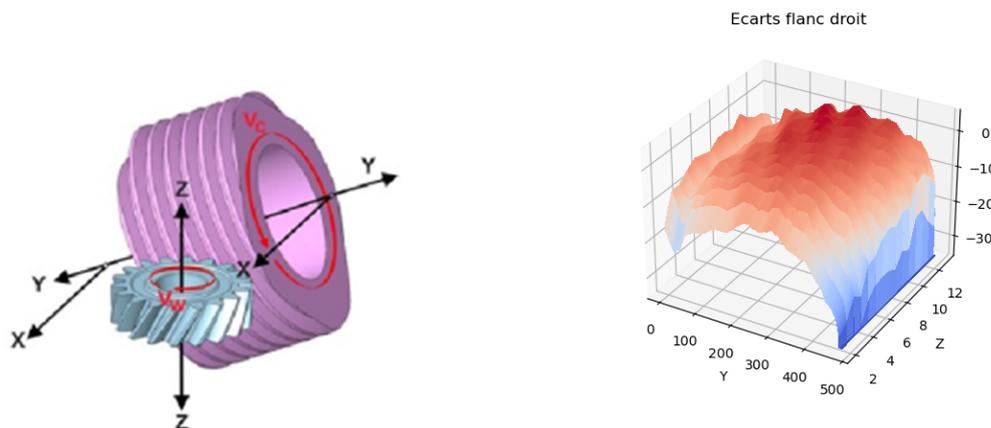


FIGURE 3.43 – Principe de finition par meule-mère et écarts mesurés

Dans les véhicules à propulsion électrique, le bruit d'engrènement généré par la transmission n'est plus couvert par celui du moteur thermique. Le comportement NVH du réducteur est donc particulièrement scruté par les constructeurs et les qualités géométriques des dentures sont sensiblement améliorées en passant d'un procédé de finition par rasage à une finition par rectification. Dans certaines conditions, des pièces conformes génèrent, une fois montées dans le réducteur, une tonalité audible non corrélée aux fréquences d'engrènement, d'où la qualification de fantôme. Il est à peu près certain que ce phénomène est dû à la présence d'une ondulation continue sur toutes les dents d'une des roues, d'amplitude de l'ordre du micromètre et ayant une longueur d'onde de quelques millimètres (2 ou 3 ondulations par flanc de dent). Elle résulte d'un léger défaut dans le processus de finition qui s'imprime sur la denture et c'est sa régularité qui pose problème.

D'un point de vue industriel, il est important de détecter cette cause de nuisance le plus tôt possible à un coût raisonnable et de connaître les différentes actions correctrices possibles.

Un premier travail d'analyse des fichiers de mesures a été réalisé et il conduit à l'identification des ondulations suspectes. Un modèle de simulation de la rectification permet la prise en compte d'écarts de position et d'écarts cinématiques durant la phase de réalisation. Il donne une approximation de la surface obtenue. Les écarts de transmission sous charge avec des surfaces proches des mesures ou des simulations sont obtenus avec un code de simulation de l'engrènement.

Thèse de Wassim Ramdane

Wassim Ramdane a débuté une thèse en convention CIFRE avec la société REDEX en décembre 2022 (directeur de thèse : Christophe Changenet, LabECAM, ECAM Lyon). Parmi différentes activités, cette société conçoit, fabrique et commercialise des réducteurs pour des machines-outils constitués d'un renvoi d'angle et d'un train épicycloïdal (figure 3.44).

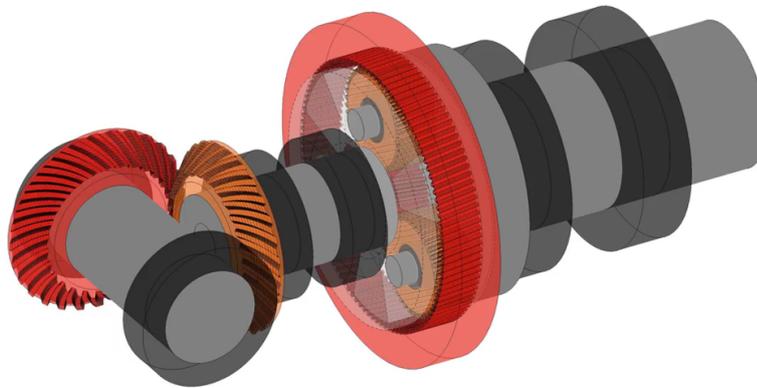


FIGURE 3.44 – Architecture d'un réducteur REDEX constitué d'un renvoi d'angle et d'un réducteur épicycloïdal

Dans certaines configurations d'utilisation sévère, la température du boîtier peut atteindre des niveaux dangereux pour l'intégrité du système. L'objectif des travaux de recherche de Wassim Ramdane est d'explorer les possibilités d'optimisation du renvoi d'angle en terme de pertes par frottement à la denture et de fluctuation de l'écart de transmission sous charge. Les dentures spiro-coniques sont très dépendantes des machines outils qui les réalisent (dentures spirales Gleason, Oerlikon, Klingelnberg), ce qui rend l'optimisation de leurs géométries plus complexe.

Un premier modèle est consacré à la modélisation de l'engrènement dynamique du couple spiro-conique. Une approche par coefficients d'influence est utilisée pour l'introduction de l'élasticité des contacts et des dentures. Un modèle en déplacements de type VSA est mis en œuvre pour obtenir le comportement dynamique. Un second modèle traite l'aspect thermique du réducteur et détermine notamment la température et la viscosité du lubrifiant qui impacte directement le niveau de pertes par frottement dans l'engrènement. Il y a un couplage entre des deux modèles et la résolution est itérative.

Synthèse des activités d'enseignant-chercheur

4.1 Investissement pédagogique

4.1.1 Présentation synthétique de l'activité d'enseignement

1997-1998 : Enseignant stagiaire au lycée Jean Perrin de Marseille
~200h Conception mécanique en classe de première d'adaptation (élèves venant d'un BEP)

1998-2008 : PRAG à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Metz

Principaux enseignements :

- ~ 220h/an CM, TD et TP Mécanique des fluides, 1ère année ENSAM
- ~ 90h/an CM, TD et TP Turbomachines, 2de année ENSAM
- ~ 80h/an CM et TD Transmission de puissance mécanique et transformation de mouvement, 1ère année ENSAM
- ~ 50h/an de projets, sur les 3 années de formation

2008-2016 : Maître de Conférences au département Génie Mécanique Développement de l'INSA de Lyon.

Principaux enseignements :

- ~ 80h/an CM, TD et TP Mécanique des solides déformables, 3ème année INSA
- ~ 50h/an CM et TD Conception mécanique, 1ère année INSA
- ~ 50h/an TD et TP Résistance des matériaux, 3ème année INSA
- ~ 60h/an Projets, 3ème, 4ème et 5ème année INSA

2016- : Maître de Conférences au département Génie Mécanique de l'INSA de Lyon
En septembre 2016, les 2 départements de mécanique (Génie Mécanique Conception et Génie Mécanique Développement) de l'INSA de Lyon ont fusionné.

Principaux enseignements :

- ~ 80h/an CM, TD et TP Mécanique des solides déformables, 3ème année INSA
- ~ 70h/an CM et TD Transmission de puissance mécanique, 4ème année INSA
- ~ 70h/an TD et TP Dimensionnement et analyse de mécanisme, 3ème et 4ème année INSA
- ~ 50h/an Projets 3ème et 5ème année INSA

4.1.2 Activités particulières

- En 2016, la fusion des 2 départements de génie mécanique de l'INSA de Lyon a nécessité une remise en cause profonde des enseignements. J'ai participé activement au projet et je me suis concentré plus particulièrement sur la mise en place de l'enseignement de mécanique des solides déformables en 3ème année et sur l'enseignement de la cinématique et des systèmes de transmission de puissance en 4ème année.
- En 2020, la crise sanitaire nous a obligés à adapter fortement nos méthodes d'enseignement et d'évaluation.
- Depuis 2018, je suis enseignant référent pour une centaine d'étudiants de 3ème année. Mon rôle est d'écouter les étudiants qui rencontrent des difficultés (scolaires, financières, familiales, sanitaires, etc) et de les orienter vers des structures qui peuvent leur apporter une aide (service social des étudiants, bourses et aides financières, tutorat, mentorat, service de médecine préventive des étudiants, cellule d'écoute et d'accompagnement contre les discriminations, harcèlement et violences sexiste et sexuelles, etc.)

4.1.3 Présentation des enseignements

Formation initiale

Lorsque j'occupais un poste de PRAG à l'ENSAM (1998-2008), mon enseignement était principalement orienté sur la mécanique des fluides, les turbomachines et la construction mécanique, à un niveau de formation qui correspond à L3 et M1. Les promotions que j'accueillais en cours magistral étaient de 75 à 90 étudiants, divisée en 3 ou 4 groupes de TD. Chaque année, le périmètre de mes enseignements évoluait au gré des circonstances et des besoins.

Depuis mon recrutement sur un poste de Maître de Conférences, la grande majorité de mes enseignements font partie de la formation initiale des ingénieurs INSA. Ils sont réalisés en présentiel, sous forme de cours magistraux (80 à 100 étudiants), de travaux dirigés, de travaux pratiques et de projets. J'interviens principalement en 3ème et 4ème année de formation INSA (L3 et M1).

Enseignements à distance : Mars 2020 – juin 2021

La crise sanitaire a bouleversé nos pratiques pédagogiques et les modalités de l'enseignement à distance ont constamment évolué. Les principaux points de vigilance ont été les suivants :

- susciter l'intérêt de nos étudiants ;
- veiller à ce qu'il n'y ait pas de décrochage ;
- être attentifs aux conditions matérielles de chacun et tenter de trouver des solutions en cas de difficultés.

Formation continue

Sur la thématique de la transmission de puissance mécanique, des formations spécifiques ont été mises en place pour répondre à des besoins d'industriels identifiés. Elles ont été organisées

par l'intermédiaire d'INSAVALOR, la filiale de R&D, de valorisation et de formation continue de l'INSA de Lyon. Leur volume horaire est d'une vingtaine d'heures, modulable. Les entreprises ayant sollicité cette formation sont :

- Hispano-Suiza,
- Volvo,
- Getinge,
- Moving Magnet Technologies

4.1.4 Recrutement des étudiants

- 2000-2015 : membre du jury du concours de recrutement des étudiants de l'ENSAM et de l'ENS de Cachan (épreuve orale de sciences de l'ingénieur)
- 2009-2019 : membre de jurys des entretiens de recrutement pour les INSA (en 1ère ou en 3ème année, à Lyon ou à Paris)
- 2020-... Analyse des dossiers des étudiants en CPGE ATS, postulant au département Génie Mécanique de l'INSA de Lyon (environ 90 dossiers /an)

4.1.5 Responsabilités pédagogiques

Enseignements

- 1998 :** Étant le premier enseignant permanent en mécanique des fluide et turbomachines, j'ai mis en place les documents pédagogiques nécessaires aux cours magistraux (24h + 12h), travaux dirigés (24h + 12h) et travaux pratiques (6 + 3 bancs pédagogiques).
- 2004-2008 :** Responsable du département d'enseignement « Énergétique » à l'ENSAM de Metz :
- 2 permanents, entre 1 et 4 vacataires (pas de personnel technique)
 - 2 salles de TP (~ 18 bancs pédagogiques)
- 2010-2020 :** Responsable de l'EC Mécanique des solides déformables :
- Recomposition des enseignements après la fusion des départements GMC et GMD.
 - 23 intervenants, 300 étudiants, 540h de formation
 - Élaboration d'un polycopié pour le cours et les TD
 - Mise en place de 6 TP
- 2016- :** Responsable d'un, puis deux, enseignement dans les parcours de 4ème année de Transmissions de puissance mécanique (M1, ~ 24h) : mise en place de ces enseignements, réalisation de supports de cours et de TD différenciés.
- 2015- :** Responsable et animateur d'un module de formation continue (~ 20h) sur les transmissions de puissance.
- 2019- :** Responsable de la plateforme de TP de mécanique des solides déformables
- 20 bancs pédagogiques
 - Renouvellement de tous les PC en 2021
 - Création d'un nouveau TP mettant en œuvre de la corrélation d'images pour visualiser des champs de déplacements et de déformations, en lien avec des simulations obtenues par la méthode des éléments finis
 - Budget entre 6 et 9 k€
 - Un ingénieur affecté à la plateforme, participation à son entretien annuel.

Responsabilités connexes

- Animation de la cellule chargée de l'évaluation de tous les enseignements du département GMD de 2011 à 2016 (3 promotions de 90 étudiants)
- Participation à l'élaboration du nouveau cursus GM (2014-2107)
- Animation de l'équipe pédagogique intervenant en Mécanique des solides déformables (2015-2020)
- Suivi des étudiants de 3ème année en difficulté (2018-)
- Participation à la mise en place de la nouvelle maquette pédagogique qui sera mise en place en septembre 2024

4.2 Activités liées à la recherche

4.2.1 Diffusion des travaux de recherche

Relecture d'articles scientifiques avant publication dans des revues internationales :

- 12 pour Mechanism and Machine Theory (Elsevier),
- 11 pour Journal of Mechanical Design (ASME),
- 4 pour Part C : Journal of Mechanical Engineering Science (SAGE)
- 4 pour Mechanics & Industry (EDP sciences),
- 3 pour Tribology Transaction (Taylor & Francis Online)
- 3 pour Journal of Vibration and Acoustics (ASME)
- 8 pour divers autres journaux

4.2.2 Participations

Membre du CIRTRANS (<https://cirtrans-experts.com>), groupement d'industriels et d'universitaires qui travaillent de façon collaborative sur des problématiques de transmission de puissance (conception et fabrication).

Membre du comité scientifique des thèses de :

- Carl Landet : Optimisation des architectures et carters de réducteurs par engrenages hélicoïdaux vis à vis du bruit de sirène ; préparée à l'Ecole Centrale de Lyon, LTDS, sous la direction de J. Perret-Liaudet, financée par le CIRTRANS, soutenue en novembre 2021
- Eddy Abboud, Vibration in Gear Systems, HESAM Université, thèse CIFRE avec Valéo et le LISPEN (Arts et Métiers, Lille), soutenue en avril 2022

Participation à l'organisation :

- 2^e Journées Transmissions Mécaniques ; Lyon ; 11-12-juillet 2011 (~ 60 personnes)
- International Gear Conference ; Lyon ; 26-28 Août 2014 (~ 320 personnes)
- 3^e Journées Transmissions Mécaniques ; Lyon ; 11-12-juillet 2016 (~ 90 participants)
- International Gear Conference ; Lyon, 27-29 Août 2018 (~ 300 personnes)
- 4^e Journées Transmissions Mécaniques ; Lyon ; 11-12-juillet 2023 (~ 100 personnes)

4.2.3 Études scientifiques

- Étude de comparaison des dentures HCR et Chevron pour Hispano-Suiza (groupe SAFRAN), 2011.
- Analyse de la géométrie de denture sur la raideur d'engrènement pour la société ADIXEN, 2013.

- Amélioration du logiciel de simulation de l'engrènement « VSA », pour Hispano-Suiza (groupe SAFRAN), 2013.
- Étude pour PSA sur les caractéristiques de fabrication conduisant à la génération de « raies fantômes » lors de l'engrènement de pignons rectifiés. En collaboration avec François Girardin du LVA (INSA), 2020-2021.

4.2.4 Vie du laboratoire

Membre du conseil de laboratoire de 2010 à 2015

4.2.5 Liste des publications

Revue internationale à comité de lecture

- J. Bruyère, J.-Y. Dantan, R. Bigot, P. Martin, Statistical tolerance analysis of bevel gear by tooth contact analysis and Monte Carlo simulation, *Mechanism and Machine Theory*, Volume 42, Issue 10, October 2007, doi : 10.1016/j.mechmachtheory.2006.11.003
- J.-Y. Dantan, J. Bruyère, J.-P. Vincent, R. Bigot, Vectorial tolerance allocation of bevel gear by discrete optimization, *Mechanism and Machine Theory*, Volume 43, Issue 11, November 2008, doi : <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.11.002>
- J. Qureschi, J.-Y. Dantan, J. Bruyère, R. Bigot, Set based robust design of mechanical systems using the quantifier constraint satisfaction algorithm, *Engineering Applications of Artificial Intelligence* (23), 2010. doi : 10.1016/j.engappai.2010.02.003
- P. Velex, J. Bruyère, D. R. Houser, Some Analytical Results on Transmission Errors in Narrow-Faced Spur and Helical Gears : Influence of Profile Modifications, *Journal of Mechanical Design*, March 2011, Vol. 133, // doi : <https://doi-org.docelec.insa-lyon.fr/10.1115/1.4003578>
- D. Ghribi, J. Bruyère, P. Velex, M. Ocrue, M. Haddar, A Contribution to the Design of Robust Profile Modifications in Spur and Helical Gears by Combining Analytical Results and Numerical Simulations, *Journal of Mechanical Design* 134, 6, 2012, doi : <https://doi-org.docelec.insa-lyon.fr/10.1115/1.4006740>
- J. Bruyère, P. Velex, Derivation of optimum profile modifications in narrow-faced spur and helical gears using a perturbation method, *ASME Journal of Mechanical Design* 135, 7, 2013, doi : <https://doi-org.docelec.insa-lyon.fr/10.1115/1.4006740>
- J. Qureshi, J.-Y. Dantan, J. Bruyère, R. Bigot, Set-based design of mechanical systems with design robustness integrated, *Int. J. Product Development*, Vol. 19, No. Y1/2/3, 2014, doi : 10.1504/IJPD.2014.060037
- J. Bruyère, P. Velex, A simplified multi-objective analysis of optimum profile modifications in spur and helical gears, *Mechanism and Machine Theory*, 80 (1), 2014, doi : 10.1016/j.mechmachtheory.2014.04.015
- P. Velex, J. Bruyère and X. Gu, An alternative approach to the definition of profile modification in High-contact-ratio spur gears, *Journal of mechanical Design*, March 2015, Vol. 137, doi : 10.1115/1.4029321
- X. Gu, P. Velex, P. Sainsot, J. Bruyère, Analytical Investigations on the Mesh Stiffness Function of Solid Spur and Helical Gears, *Journal of mechanical Design J. Mech. Des.* 2015; 137(6) :063301-063301-7. MD-14-1762, doi : 10.1115/1.4030272
- J. Bruyère, X. Gu, P. Velex, On the analytical definition of profile modifications minimising transmission error variations in narrow-faced spur and helical gears, *Mechanism and Machine Theory* 92 (2015) pp 257-272, doi : 10.1016/j.mechmachtheory.2015.06.001
- P. Velex, J. Bruyère, M. Chapron, S. Becquerelle, Optimization of profile modifications

- with regard to dynamic tooth loads in single and double-helical planetary gears with flexible ring-gears, *Journal of Mechanical Design* 138(2), 2015, doi : 10.1115/1.4031939
- H. Fakhfakh, J. Bruyère, P. Velex, S. Becquerelle, A torsional model of multi-stage gears - Influence of external excitations and tooth shape modifications, *Mechanics & Industry* 17, 413 (2016), doi : 10.1051/meca/2015105
 - P. Velex, M. Chapron, H. Fakhfakh, J. Bruyère, S. Becquerelle, On transmission errors and profile modifications minimizing tooth loads in multi-mesh gears, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 379, 29 September 2016, doi :10.1016/j.jsv.2016.05.044
 - J. Bruyère, P. Velex, B. Guilbert, D.R. Houser, An analytical study on the combination of profile relief and lead crown minimizing transmission error in narrow-faced helical gears, *Mechanism and Machine Theory*, 136 (2019), <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.03.005>
 - E. Ben Younes, C. Changenet, J. Bruyère, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, Multi-objective optimization of gear unit design to improve efficiency and transmission error, *Mechanism and Machine Theory*, 167 (2022), doi : 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104499
 - J. Bruyère, P. Velex, Towards general performance diagrams to define optimum profile and lead modifications with regard to transmission error in spur and helical gears, *Mechanism and Machine Theory*, 176, (2022), doi : 10.1016/j.mechmachtheory.2022.105021
 - E. Ben Younes, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, J. Bruyère, C. Changenet, Optimization of energy efficiency and NVH behaviour of a helical gear unit, *Mechanics & Industry*, 25, 1 (2024), doi : <https://doi.org/10.1051/meca/2023042>

Conférences, congrès et colloques à communication (Conférences internationales à comité de lecture et actes publiées)

- L. Berviller, R. Bigot, J. Bruyère, Conception intégrée de produits « net shape », Proceedings, IDMME, mai 2002, Clermont Ferrand
- J.Y. Dantan, J. Bruyère, R. Bigot, P. Martin, Spécification géométrique fonctionnelle des engrenages par frontière virtuelle, Proceedings of 3ème colloque international Conception et Production intégrées, octobre 2003, Meknes, Maroc
- R. Bigot, L. Berviller, J. Bruyère, C. Baudouin, J.Y. Dantan, La conception de produits forgés « net shape » ; Congrès français de mécanique, 2005, Troyes
- J. Bruyère, J.Y. Dantan, Analyse statistique des tolérances des engrenages, Congrès français de mécanique, 2005, Troyes
- J.P. Vincent, J. Bruyère, J.Y. Dantan, Synthèse de la géométrie et analyse des tolérances des engrenages de Wildhaber-Novikov à axes concourants, AIP-PRIMECA, La Plagne, 2005
- J. Bruyère, J.P. Vincent, J.Y. Dantan, R. Bigot, Intégration des déformées dans l'analyse des tolérances des engrenages ; intégration d'un modèle simple d'estimation des déformées, Proceedings of 4ème colloque international Conception et Production intégrées, Novembre 2005, Casablanca, Maroc
- J. Bruyère, J.Y. Dantan, F. Wu, R. Bigot, Optimization of gear tolerances by statistical tolerances analysis and genetic algorithm, 6rd IDMME Seminar, Grenoble, 2006
- J.Y. Dantan, J. Bruyère, C. Baudouin, L. Mathieu, Geometrical Specification Model for Gear - Expression, Metrology and Analysis, CIRP Annals - Manufacturing Technology, Volume 56, Issue 1, 2007, Pages 517-520
- J. Qureshi, J.-Y. Dantan, J. Bruyère, R. Bigot., Parametric and robust design using the quantifier notion, International Conference on Computers & Industrial Engineering ; Troyes ; 6-9 July 2009 ; Digital Object Identifier : 10.1109/ICCIE.2009.5223830
- J. Qureshi, J.-Y. Dantan, J. Bruyère, R. Bigot, Set Based Robust Design of Systems – Application to Flange Coupling, 11th CIRP International Conference on Computer Aided

- Tolerancing; Annecy, France, Mach 26th-27th 2009
- D. Ghribi, J. Bruyère, P. Velex, M. Octrue, M. Haddar, Robust optimization of gear tooth modifications using a genetic algorithm, Condition Monitoring of Machinery in Non-Stationary Operations; Hammamet (Tunisia), 26-28 March 2012
 - D. Ghribi, J. Bruyère, P. Velex, M. Octrue, M. Haddar, Definition of Optimum Profile and Lead Modifications in Spur and Helical Gears Using a Genetic Algorithm, International Conference on Gears; October 7th to 9th, 2013, TUM, Munich
 - J. Bruyère; P. Velex, Some original analytical results on spur and helical gear tooth relief in relation to transmission error variations – Main and first order approximate profile modifications, International Conference on Gears; October 7th to 9th, 2013, TUM, Munich
 - J. Bruyère, P. Velex, Multi-objective optimization of profile modifications in spur and helical gears – an analytical approach, International Gear Conference, 26th to 28th August 2014, Lyon
 - H. Fakhfakh, J. Bruyère, P. Velex, S. Becquerelle, A torsional dynamic model of multi-stage geared systems submitted to internal and external excitations, International Gear Conference, 26th to 28th August 2014, Lyon
 - H. Fakhfakh, J. Bruyère, P. Velex, S. Becquerelle, Simulation of the dynamic behavior of a multi-stage geared systems with tooth shape deviations and external excitations, Multiphysics Modeling and Simulation for Systems Design, December 17-19, 2014; Sousse, Tunisia
 - J. Bruyère, P. Velex, Static and dynamic analysis of double-slope profile relief on high-contact-ratio spur gears, International Conference on Gears 2015 (VDI), Munich 5th-7th October 2015
 - M. Chapron, J. Bruyère, P. Velex and S. Becquerelle, On optimum tooth profile modifications to minimize dynamic mesh forces in planetary gears, International Conference on Gears 2015 (VDI), Munich, 5th-7th October 2015
 - J. Bruyère, P. Velex, Some analytical guidelines to define optimum profile relief in narrow-faced spur and helical gears, MPT, Kyoto, February 28- March 3, 2017
 - H. Fakhfakh, P. Velex, J. Bruyère, S. Becquerelle, Analysis of the dynamic behavior of multi-mesh spur and helical gears – Application to the definition of optimum profile reliefs in aeronautical transmissions; MPT, Kyoto, February 28- March 3, 2017
 - T. Pinel, J. Bruyère, P. Velex, L. Billet, Off-line of action contacts in internal gears, International Gear Conference, 27th to 29th August 2018, Lyon
 - C. Chevrel-Fraux, J. Bruyère, P. Velex, R. Fargère, Modelling of power geared transmissions with dissipative elements, International Gear Conference, 27th to 29th August 2018, Lyon
 - T. Pinel, J. Bruyère, P. Velex, L. Billet, Parametric Study of a 3D trochoidal reducer model with involute profile, VDI Munich, 20/09/2019.
 - T. Pinel, J. Bruyère, P. Velex, L. Billet, Dynamic response of a cycloid reducer with involute profiles, ASME VIB Conference- Los Angeles, 08/20/2019
 - C. Chevrel-Fraux, J. Bruyère, P. Velex, R. Fargère, Modelling high-power geared transmission introduction of a filling material, VDI Munich, 20/09/2019.
 - C. Chevrel-Fraux, J. Bruyère, P. Velex, R. Fargère, Modelling of embodied dissipative elements in high-power gears, AMSE PTG Conference - Los Angeles, 08/20/2019.
 - J. Bruyère, P. Velex, Correction de profil à double pente pour les engrenages droits HCR, Congrès Français de Mécanique, 2019, Brest.

Conclusion et perspectives

La modélisation de l'engrènement s'intéresse aux interactions physiques entre des phénomènes se déroulant à des échelles de longueur et de temps très différentes. La diversité des modèles rencontrés dans la littérature témoigne que cet exercice est encore du domaine de la recherche et chaque modèle répond plus ou moins bien à des besoins spécifiques mis en avant par les auteurs. Les travaux de recherche que j'ai réalisés ou accompagnés au LaMCoS s'intéressent principalement à la réduction des nuisances dynamiques. Pour cela, on cherche à minimiser les fluctuations de l'écart de transmission quasi-statique car elles reflètent les principales sources d'excitation du système.

Ces travaux s'articulent autour de deux pôles qui se complètent. Le premier a pour objectif de réaliser une synthèse des corrections de forme appliquées aux dentures. Une approche analytique originale permet de relier les caractéristiques de modification de forme optimale à certains paramètres macroscopiques de l'engrenage comme le rapport de conduite ε_α et le rapport de recouvrement ε_β .

Actuellement, cette démarche n'a été appliquée qu'aux roues cylindriques à profil en développante de cercle et pour deux types de corrections parmi les plus rencontrées. Le modèle est assez détaillé pour pouvoir tenir compte de l'évolution de la raideur linéique d'engrènement le long du segment de conduite et de l'effet convectif au contact. La moyenne quadratique de l'écart de transmission s'exprime explicitement en fonction des corrections et il est alors possible de la minimiser. Les combinaisons de corrections optimales se synthétisent en quelques relations simples. Il est intéressant de noter que les modifications optimales sont dépendantes de la charge mais dans le cas où $\varepsilon_\alpha > 2$ ou $\varepsilon_\beta > 1$, on montre que l'optimisation demeure efficace sur une plage de couples.

Les résultats fournis par cette approche sont en bon accord avec ceux des modèles numériques validés, dans la mesure où l'environnement de l'engrenage (arbres, paliers, etc.) n'affecte pas trop les positions relatives.

Le second pôle s'intéresse à l'analyse de systèmes mécaniques et à leur optimisation selon un ou plusieurs critères. Les démarches mises en œuvre sont essentiellement numériques. Les systèmes complets sont modélisés par une agrégation ordonnée de modèles élémentaires (engrènement, contact, arbres, paliers, système amortissant, etc.). Les matrices masse et raideur de l'équation du mouvement, ainsi que le second membre, sont fournis par les équations de Lagrange. La matrice amortissement demeure une composante mal définie. Étant donné que les

systèmes étudiés subissent peu d'amortissement, la matrice correspondante est définie de façon à ne pas gêner la diagonalisation du système d'équations (méthode de Rayleigh, définition modale, etc.). La résolution est menée dans l'espace temporel par un schéma d'intégration implicite (généralement Newmark) associé à un algorithme complémentaire permettant de définir l'état du système physique à chaque pas de temps. Peu de problèmes de stabilité ont été rencontrés. Le nombre de degrés de liberté demeure raisonnable (au plus quelques milliers), les temps de calcul sont faibles et ils permettent de réaliser des études paramétriques ou des optimisations. L'approche numérique rend possible la prise en compte de davantage de phénomènes spécifiques à chaque situation et l'utilisation de modèles plus fins au niveau de la description de la physique. Des approches probabilistes (robustesse, sensibilité, etc.) ont également été tentées mais elles sont limitées par le manque de connaissance des distributions des incertitudes et par les temps de calcul qui augmentent très fortement avec le nombre de paramètres aléatoires considérés.

En ce qui concerne la poursuite des travaux suivant l'approche analytique, plusieurs pistes sont envisagées. Tout d'abord, on peut élargir le modèle en reprenant les hypothèses restrictives et en recherchant une meilleure modélisation de l'environnement de l'engrenage :

- Choisir des corrections de surface prises indépendantes sur le pignon et la roue (plus de symétrie), en diversifiant les formes (pas forcément linéaire pour le profil et parabolique pour l'hélice).
- Affiner le modèle de raideur linéique d'engrènement dont l'évolution n'est pas forcément symétrique de l'engagement au retrait et peut varier selon la largeur de la denture hélicoïdale ([76]).
- Introduire des écarts de position relatifs entre les roues, dus au montage et aux déplacements sous charge.
- Affiner la zone de contact effective. Ce domaine initialement pris rectangulaire pourrait être subdivisé afin que la frontière de cette zone soit plus réaliste.

Par ailleurs, l'expression analytique explicite d'un critère d'optimisation devrait permettre de caractériser de façon assez générale les sensibilités des solutions par rapport à certaines variations (écarts de forme, de raideur, de position, ...).

D'autre part, la démarche actuelle se limite à chercher les zéros du terme de rang 1 d'une approximation de la moyenne quadratique de l'écart de transmission exprimé sous forme d'une série. Serait-il possible de classer les solutions obtenues en fonction de l'amplitude des termes restants ?

Ensuite, d'autres critères d'optimisation tels que les pertes d'énergie mécanique par frottement, le coefficient dynamique de l'effort à la denture, les contraintes maximales en pied ou au contact, etc. pourraient également être analysés et optimisés plus en détail. Une ébauche de ce travail a été réalisée et présentée dans l'article [13]. Il serait intéressant de le poursuivre et de synthétiser l'impact des corrections sur ces différents critères pris indépendamment ou en considérant plusieurs critères simultanément.

Les développements possibles des modèles numériques sont encore plus nombreux. On peut les classer en quelques catégories :

1. Les modèles d'un réducteur à un seul étage peuvent être améliorés en affinant les différents modèles locaux (engrènement, corps de roue, paliers, carter, etc.). Notamment, il serait intéressant de ne plus supposer l'appartenance de tous les points de contact au

plan d'engrènement et que l'algorithme les détermine «librement» sur les surfaces des dents. Les problèmes d'interférence sous charge pourraient ainsi être directement traités. L'analyse de l'engrènement pourrait alors certainement s'étendre aux engrenages coniques droits, spiro-coniques et hypoïdes. Avec l'augmentation actuelle des vitesses de rotation des moteurs, des modèles robustes à hautes vitesses (plusieurs dizaines de milliers de tours par minute) doivent être développés, comprenant des modèles évolués de contact (EHD) et de dissipation (ventilation, piégeage, etc.). Le laboratoire vient de s'équiper d'un banc grande vitesse et cette thématique sera fédératrice. D'autres phénomènes physiques tels que l'usure, la fatigue, l'échauffement du système, etc. pourraient également enrichir les modèles.

2. La frontière du système modélisé peut être étendue afin d'inclure des accouplements élastiques, différents étages de réduction, voire le moteur et tout ou partie de l'application qui utilise la puissance transmise. Ce type d'approche plus globale permettra une meilleure analyse du comportement d'une chaîne de transmission de puissance, à condition que chaque maillon soit bien maîtrisé et que les modèles soient cohérents. Cette démarche sera nécessairement interdisciplinaire.
3. La plupart des modèles développés au laboratoire et rencontrés dans la littérature, portent sur des roues dont le comportement du matériau est supposé suivre une loi élastique et linéaire. Cependant, cette hypothèse n'est pas adaptée aux roues en matière plastique pour lesquelles l'aspect viscoélastique, entre autres, n'est pas forcément négligeable. Étant donné l'importance de la production de roues dentées en polymère et que les géométries sont généralement plus libres que celles des dentures taillées, il y a un véritable intérêt scientifique et industriel à se pencher sur ce type d'engrenage.
4. Les différentes modélisations évoquées supposent la géométrie des dentures et de leur environnement connus et l'utilisent comme donnée d'entrée des simulations. Cependant, de nombreux problèmes de conception nécessitent la prise en compte du processus mis en œuvre pour obtenir les pièces afin d'anticiper des caractéristiques matériaux (dureté, contraintes résiduelles, etc.) ou de tenir compte de géométries réalisables ou encore de mieux anticiper certains types d'écarts géométriques. Ce travail d'intégration des procédés de réalisation dans la définition des pièces est actuellement développé dans les thèses de Julien Finot et Wassim Ramdane et il pourrait être largement étendu.
5. L'émergence de méthodes numériques explicites [32, 33] fournissant des résultats dynamiques en des temps de calcul très raisonnables, amène à reconsidérer la pertinence de méthodes de type éléments finis appliquées à la transmission de puissance. Une collaboration avec des collègues du laboratoire développant ces schémas numériques apporterait un nouvel éclairage et de nouveaux outils pour cette modélisation. Plusieurs points cités plus haut pourraient bénéficier de cette approche.

Bibliographie

- [1] A.G.M.A. Standard 2001–D04. *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, American Gear Manufacturers Association. 2001.
- [2] Eddy ABBOUD. « Simulation, mastering and reduction of vibrations and noises in electric car gearbox transmission systems ». Thèse de doct. HESAM Université, 2022. 260 p.
- [3] Monder AJMI et Philippe VELEX. « A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears ». In : *Mechanism and Machine Theory*. T. 40. Issue : 2 ISSN : 0094114X. 2005, p. 173-190. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2003.06.001.
- [4] Mondher AJMI. « Introduction des couplages élastiques dans la modélisation du comportement statique et dynamique d'engrenages à dentures larges ». Thèse de doct. Université de Lyon, INSA, 2000. 151 p.
- [5] Mondher AJMI et Philippe VELEX. « Multi-Criterion Design of Tooth Modifications on High-Contact-Ratio Spur Gears ». In : *Proceedings of the International Conference on Gear, VDI, Munchen, Germany*. Sous la dir. de VDI. Munchen, 2002, p. 737-749.
- [6] Mats AKERBLOM. « Gear Noise and Vibration A Literature Survey ». In : (2001). URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:30452553> (visité le 10/01/2024).
- [7] N. E. ANDERSON et S. H. LOEWENTHAL. « Efficiency of Nonstandard and High Contact Ratio Involute Spur Gears ». In : *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* 108.1 (mars 1986), p. 119-126. ISSN : 0738-0666. DOI : 10.1115/1.3260774. URL : <https://doi.org/10.1115/1.3260774>.
- [8] Mouhamad ANKOUNI. « Modeling of damping in elastohydrodynamic lubricated contacts : Application to gear dynamics Mouhamad Ankouni To cite this version : HAL Id : tel-02005648 Modeling of damping in elastohydrodynamic lubricated contacts . Application to gear dynamics . » Thèse de doct. Univerité de Lyon, 2016. 155 p.
- [9] Sébastien BAUD et Philippe VELEX. « Static and dynamic tooth loading in spur and helical geared systems-experiments and model validation ». In : *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 124.2 (2002), p. 334-346. ISSN : 10500472. DOI : 10.1115/1.1462044.
- [10] Emna BEN YOUNES. « Optimisation durable et multicritères de dentures d'engrenages cylindriques Introduction : Contexte ». Thèse de doct. Univeristé de Lyon, 2021. 160 p.
- [11] Mohamed Nizar BETTAIEB. « Modélisation du comportement mécanique d'engrenages - Couplages entre engrenement et éléments de structures flexibles ». Thèse de doct. Université de Lyon, 2006. 165 p.

- [12] Jérôme BRUYÈRE, Xiaoyu GU et Philippe VELEX. « On the analytical definition of profile modifications minimising transmission error variations in narrow-faced spur helical gears ». In : *Mechanism and Machine Theory* 92 (2015), p. 257-272. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2015.06.001.
- [13] Jérôme BRUYÈRE et Philippe VELEX. « A simplified multi-objective analysis of optimum profile modifications in spur and helical gears ». In : *Mechanism and Machine Theory* 80 (2014), p. 70-83. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2014.04.015. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.04.015>.
- [14] Jérôme BRUYÈRE et Philippe VELEX. « Derivation of optimum profile modifications in narrow-faced spur and helical gears using a perturbation method ». In : *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 135 (7 2013), p. 1-8. ISSN : 10500472. DOI : 10.1115/1.4024374.
- [15] Jérôme BRUYÈRE et Philippe VELEX. « Static and dynamic analysis of double-slope profile relief on high-contact-ratio spur gears. » In : 2015.
- [16] Jérôme BRUYÈRE, Philippe VELEX, Bérengère GUILBERT et Donald R. HOUSER. « An analytical study on the combination of profile relief and lead crown minimizing transmission error in narrow-faced helical gears ». In : *Mechanism and Machine Theory* 136 (2019), p. 224-243. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2019.03.005. URL : <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.03.005>.
- [17] Y. CAI et T. HAYASHI. « The Optimum Modification of Tooth Profile for a Pair of Spur Gears to Make its Rotational Vibration Equal Zero ». In : *Proceedings of the 6th ASME International Power Transmission and Gearing Conference*. Phoenix, 1992, p. 453-460.
- [18] Niccolò CAPPELLINI et al. « Semi-analytic contact technique in a non-linear parametric model order reduction method for gear simulations ». In : *Meccanica* 53.1 (2018), p. 49-75. ISSN : 15729648. DOI : 10.1007/s11012-017-0710-5.
- [19] Christophe CHANGENET. « Modélisation du comportement thermique des transmissions par engrenages. » Thèse de doct. 2006. 170 p.
- [20] Christophe CHANGENET, Gauthier LEPRINCE, Fabrice VILLE et Philippe VELEX. « A Note on Flow Regimes and Churning Loss Modeling ». In : *Journal of Mechanical Design* 133.12 (2011). ISSN : 1050-0472. DOI : 10.1115/1.4005330. URL : <https://doi.org/10.1115/1.4005330>.
- [21] Cyril CHEVREL-FRAUX. « Modélisation de transmissions de forte puissance : Prise en compte d'amortissements variables ». Thèse de doct. Université de lyon, 2020.
- [22] Woo Jin CHUNG et al. « Improved analytical model for calculating mesh stiffness and transmission error of helical gears considering trochoidal root profile ». In : *Mechanism and Machine Theory* 163 (2021). Publisher : Elsevier Ltd, p. 104386. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104386. URL : <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104386>.
- [23] J. R. COLBOURNE. *The Geometry of Involute Gears*. Springer-Verlag, 2019, p. 1-19. ISBN : 9781461291466. DOI : 10.1007/978-1-4612-4764-7e-[SBN-13].
- [24] T.F. CONRY et A. SEIREG. « A Mathematical Programming Method for Design for Elastic Bodies in Contact ». In : *ASME J. Appl. Mech.* 38 (1971), p. 1293-1307.
- [25] T.F. CONRY et A. SEIREG. « A Mathematical Programming Technique for the Evaluation of Load Distribution and Optimal Modifications for Gear Systems ». In : *ASME J. Eng. Ind.* 95 (1973), p. 1115-1122.

- [26] C. G. COOLEY et R. G. PARKER. « Limitations of an extensible model for the vibration of high speed rotating elastic rings with attached space fixed discrete stiffness ». In : *European journal of Mechanic A/Solid* 54 (2015), p. 187-197.
- [27] Christopher G. COOLEY, Chunguang LIU, Xiang DAI et Robert G. PARKER. « Gear tooth mesh stiffness : A comparison of calculation approaches ». In : *Mechanism and Machine Theory* 105 (2016). Publisher : Elsevier Ltd, p. 540-553. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2016.07.021. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.07.021>.
- [28] R. CRAIG et C.-J. CHANG. « Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis ». In : *AIAA Journal* 14.11 (1976), p. 1633-1635.
- [29] John R. D'ERRICO et Nicholas A. ZAINO. « Statistical tolerancing using a modification of taguchi's method ». In : *Technometrics* 30.4 (1988), p. 397-405. ISSN : 15372723. DOI : 10.1080/00401706.1988.10488434.
- [30] He DAI, Xinhua LONG, Feng CHEN et Chao XUN. « An improved analytical model for gear mesh stiffness calculation ». In : *Mechanism and Machine Theory* 159 (2021). Publisher : Elsevier Ltd, p. 104262. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104262. URL : <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104262>.
- [31] K. DEB, A. PRATAP, S. AGARWAL et T. MEYARIVAN. « A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : NSGA-II ». In : *IEEE transactions on evolutionary computation* 6.2 (2002), p. 182-197.
- [32] Jean DI STASIO. « The CD-Lagrange scheme, a robust explicit time-integrator for impact dynamics : A new singular mass formulation, and an extension to deformable-deformable contact ». Issue : 2021LYSEI029. Thèse de doct. Université de Lyon, 2021. URL : <https://theses.hal.science/te1-03368135>.
- [33] Jean DI STASIO, David DUREISSEIX, Anthony GRAVOUIL, Gabriel GEORGES et Thomas HOMOLLE. « Benchmark cases for robust explicit time integrators in non-smooth transient dynamics ». In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences. Towards new paradigms for time integrators in computational dynamics* 6.1 (2019). DOI : 10.1186/s40323-019-0126-y. URL : <https://hal.science/hal-02063069>.
- [34] Yasser DIAB. « Analyse des pertes de puissance dans les transmissions par engrenages - Applications aux réducteurs industriels et aux machines textiles ». Thèse de doct. Université de Lyon, 2005. 156 p.
- [35] Sylvain DUBREUIL. « Superposition modale probabiliste : application au dimensionnement des structures spatiales ». Thèse de doct. Université de Toulouse, 2014.
- [36] Philippe DUCRET. « Prédiction du bruit rayonné par les carters des transmissions à engrenages ». Thèse de doct. 1997. 1-167.
- [37] Jacques DUFALLY. *Calcul de la capacité de charge des engrenages cylindriques de transmission de puissance. Présentation et analyse des méthodes I.S.O. 6336*. 1998, p. 252. ISBN : 2-7298-9810-7.
- [38] Jeff DUFFY, Songquan LIU, Herbert MOSKOWITZ, Robert PLANTE et Paul V. PRECKEL. « Assessing multivariate process/product yield via discrete point approximation ». In : *IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers)* 30.6 (1998), p. 535-543. ISSN : 15458830. DOI : 10.1080/07408179808966493.
- [39] A.H. ELKHOLY. « Tooth load sharing in high-contact ratio spur gears ». In : *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 107.1 (1985), p. 11-16. ISSN : 10500472. DOI : 10.1115/1.3258674.

- [40] Hassen FAKHFAKH. « Etude du comportement dynamique d'un système multi-étages à engrenements en cascade et décalés à dentures droites et hélicoïdales - Optimisation des corrections de profil ». Thèse de doct. Université de Lyon, 2016. 192 p.
- [41] Hassen FAKHFAKH, Philippe VELEX, Jérôme BRUYÈRE et Samuel BECQUERELLE. « Analysis of the Dynamic Behaviour of Multi-Mesh Spur and Helical Gears - Application To the Definition of Optimum Profile Reliefs in Aeronautical Transmissions ». In : *The Proceedings of the JSME international conference on motion and power transmissions*. T. 2017. Issue : 0. Kyoto, 2017, p. 04-06. DOI : 10.1299/jsmeimpt.2017.04-06.
- [42] A. FERNANDEZ DEL RINCON et al. « A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions ». In : *Mechanism and Machine Theory* 61 (2013). Publisher : Elsevier Ltd, p. 30-58. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2012.10.008. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.10.008>.
- [43] Dhafer GHRIBI. « Optimisation des corrections de forme dans les engrenages droits et hélicoïdaux - Approches déterministes et probabilistes ». Thèse de doct. Uniscerité de Lyon, 2013. 200 p.
- [44] Bérengère GUILBERT. « Hybrid modular models for the dynamic study of high-speed thin-rimmed / -webbed gears ». Thèse de doct. 2017.
- [45] G. HAN, B. YUAN et G. QIAO. « Tooth surface modification for helical gear pairs considering misalignment tolerance ». In : *Shock Vib.* 13 (2021). URL : <https://doi.org/10.1155/2021/5563648>.
- [46] Stephen L. HARRIS. « Dynamic loads on the teeth of spur gears ». In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 172. 1958, p. 87-112.
- [47] T. A. HARRIS. *Rolling Bearing Analysis*. th Edition. John Wiley & Sons, 1991.
- [48] Georges HENRIOT. *Engrenages : conception, fabrication, mise en œuvre*. ISBN : 2-10-003903-2. Ed. DUNOD, 1999.
- [49] H. HERTZ. *Le mémoire de HERTZ sur les contacts ponctuels*. Publication scientifique et technique Numéro 20 - ENSAM. 1987.
- [50] H. M. HILBERT, T. J. R. HUGHES et R. L. TAYLOR. « No TitleImproved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics ». In : *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 5 (1977), p. 237-292.
- [51] E. J. HINCH et D. H. PEREGRINE. « Perturbation Methods ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 245 (1992), p. 724-725. ISSN : 0022-1120. DOI : DOI : 10.1017/S0022112092220644. URL : <https://www.cambridge.org/core/article/perturbation-methods-by-e-j-hinch-cambridge-university-press-1991-160-pp-1295/1B8851F717597641AB794F80A3E2F9C0>.
- [52] D. R. HOUSER, V. M. BOLZE et J. M. GRABER. « Static and Dynamic Transmission Error Measurements and Predictions for Spur and Helical Gear Sets ». In : *Proceedings of the Seventh ASME International Power Transmission and Gearing Conference*. San Diego, 1996, p. 365-372.
- [53] D. R. HOUSER, J. HARIANTO, N. IYER, J. JOSEPHSON et B. CHANDRASEKAREN. « A multi-variable approach to determining the 'best' gear design ». In : *Proceedings of 8th ASME International Power Transmission and Gearing Conference*. Baltimore, 2000, p. 8.
- [54] ISO1328-1. « Cylindrical gears - ISO System of Flank Tolerance Classification - Part 1 : Definitions and Allowable Values of Deviations Relevant to Flanks of Gear Teeth ». In : 20 (1999).

- [55] ISO21771. « Gears - Cylindrical involute gears and gear pairs - Concepts and geometry ». In : (2007).
- [56] ISO6336 :2019. « Calcul de la capacité de charge des engrenages cylindriques à dentures droite et hélicoïdale ». In : (2019).
- [57] F. JAN et P. NORMAND. « Transferts énergétiques dans une transmission à trains planétaires ». In : *Bulletin de l'IET* 79 (1982).
- [58] K.L. JOHNSON. *Contact Mechanics*. ISBN : 0-521-34796-3. Cambridge University Press, 1999.
- [59] J.J. KALKER. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. ISBN : 0-7923-0712-7. Klumer academic publishers, 1990.
- [60] Chinwai LEE, Hsiang Hsi LIN, Fred B. OSWALD et Dennis P. TOWNSEND. « Influence of Linear Profile Modification and Loading Conditions on The Dynamic Tooth Load and Stress of High-Contact-Ratio Spur Gears ». In : *Journal of Mechanical Design* 113.4 (déc. 1991), p. 473-480. ISSN : 1050-0472. DOI : 10.1115/1.2912807. URL : <https://doi.org/10.1115/1.2912807>.
- [61] J. LEMAITRE, J.-L. CHABOCHE, A. BENALLAL et R. DESMORAT. *Mécanique des matériaux solides*. Sous la dir. de DUNOD. Troisième. Paris, 2009. ISBN : 978-2-10-051623-0.
- [62] R. PRUDHOMME G. LEMASSON. *Cinématique*. Dunod, 1966.
- [63] C. LESUEUR. *Rayonnement acoustique des structures*. Paris, France : Eyrolles, 1988.
- [64] Hsiang Hsi LIN, Chinwai LEE, F B OSWALD et D P TOWNSEND. « Computer-Aided Design of High-Contact-Ratio Gears for Minimum Dynamic Load and Stress ». In : *Journal of Mechanical Design* 115.1 (mars 1993), p. 171-178. ISSN : 1050-0472. DOI : 10.1115/1.2919315. URL : <https://doi.org/10.1115/1.2919315>.
- [65] F. L. LITVIN et A. FUENTES. *Gear Geometry and Applied Theory*. ISBN : 0 521 81517 7. Cambridge University Press, 2004.
- [66] G. LUNDBERG. « Cylinder compressed between two plane bodies ». In : *SKF Aktiebolaget Svenska Kullagerfabriken Goteborg, (by courtesy of SKF, Luton)* 4134 (1949).
- [67] G. LUNDBERG. « Elastiche berührung zweier halbräume (Elastic contact of two half spaces) ». In : *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens* 10.5 (1939), p. 201-211.
- [68] Hui MA, Jin ZENG, Ranjiao FENG, Xu PANG et Bangchun WEN. « An improved analytical method for mesh stiffness calculation of spur gears with tip relief ». In : *Mechanism and Machine Theory* 98 (2016). Publisher : Elsevier Ltd, p. 64-80. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2015.11.017. URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2015.11.017>.
- [69] Mohamed MAATAR. « Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages simple étage - Influence des écarts de forme et des défauts de montages ». Thèse de doct. Université de Lyon, 1995.
- [70] Mohamed MAATAR et Philippe VELEX. « An analytical expression for the time-varying contact length in perfect cylindrical gears : Some possible applications in gear dynamics ». In : *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 118.4 (1996), p. 586-589. ISSN : 10500472. DOI : 10.1115/1.2826933.
- [71] Mohamed MAATAR et Philippe VELEX. « Quasi-static and dynamic analysis of narrow-faced helical gears with profile and lead modifications ». In : *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 119.4 (1997), p. 474-480. ISSN : 10500472. DOI : 10.1115/1.2826392.

- [72] Mohamed MAATAR, Philippe VELEX et Jean-Philippe RACLOT. « Some numerical methods for the simulation of geared transmission dynamic behavior formulation and assessment ». In : *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 119.2 (1997), p. 292-298. ISSN : 10500472. DOI : 10.1115/1.2826250.
- [73] Madhav MADHIRA, S. V. ABHISHEK et K. RAJYALAKSHMI. « Modelling ground – Foundation interactions ». In : *International Conference on Innovations in Structural Engineering*. Osmania University, Hyderabad, India, 2015, p. 91-106.
- [74] G. MAIDANIK. « Response of Ribbed Panel to Reverberant Acoustic Field ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 34.6 (1962), p. 809-826.
- [75] Pedro MARQUES, Ramiro MARTINS et Jorge SEABRA. « Analytical load sharing and mesh stiffness model for spur/helical and internal/external gears – Towards constant mesh stiffness gear design ». In : *Mechanism and Machine Theory* 113 (juill. 2017), p. 126-140. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2017.03.007. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0094114X16306486> (visité le 19/02/2024).
- [76] Pedro M.T. MARQUES, João D.M. MARAFONA, Ramiro C. MARTINS et Jorge H.O. SEABRA. « A continuous analytical solution for the load sharing and friction torque of involute spur and helical gears considering a non-uniform line stiffness and line load ». In : *Mechanism and Machine Theory* 161 (2021). Publisher : Elsevier Ltd, p. 104320. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104320. URL : <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104320>.
- [77] R. C. MARTINS, P. S. MOURA et J. O. SEABRA. « MoS₂/Ti low-friction coating for gears ». In : *Tribology International* 133.12 (2006), p. 1-5.
- [78] G. MASING. « Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing ». In : *Proc. 2nd Int. Cong. On Appl. Mech.* 1926, p. 332-335.
- [79] Henri MINEUR. *Techniques de calcul numérique*. Paris : Dunod, 1966, p. 605.
- [80] Gustav NIEMANN et Hansr WINTE. *Maschinenelemente*. 2^e éd. Springer Berlin, Heidelberg, 2003, p. XII, 376. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11873-3>.
- [81] M. P. NORTON et D. G. KARCZUB. *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*. Cambridge university press, 2003.
- [82] Tommy PINEL. « Modelisation 3d dynamique d'un reducteur compact a fort rapport avec profil de denture en developpante de cercle ». Thèse de doct. Université de Lyon, 2020. 1-253.
- [83] Jean-Pilippe RACLOT. « Analyse de la réponse dynamique de trains d'engrenages a simple et double étage de réduction avec écarts de forme par une méthode spectrale itérative ». Thèse de doct. Université de Lyon, 1997.
- [84] Emmanuel RIGAUD et Denis BARDAY. « Modelling and analysis of static transmission error. Effect of wheel body deformation and interactions between adjacent loaded teeth ». In : *Proceedings of the 4th World Congress on Gearing and Power Transmission*. Paris, France, 1999, p. 1961-1972.
- [85] Kenneth M. ROSEN et Harold K. FRINT. « Design of High Contact Ratio Gears ». In : *Journal of the American Helicopter Society* 27.4 (1982), p. 65-73. DOI : <https://doi.org/10.4050/JAHS.27.4.65>.
- [86] Philippe SAINOT et Philippe VELEX. « On contact deflection and stiffness in spur and helical gears ». In : *Mechanism and Machine Theory* 154 (2020). Publisher : Elsevier Ltd. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2020.104049.

- [87] Philippe SAINOT, Phylippe VELEX et Olivier DUVERGER. « Contribution of gear body to tooth deflections - A new bidimensional analytical formula ». In : *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 126.4 (2004), p. 748-752. ISSN : 10500472. DOI : 10.1115/1.1758252.
- [88] Gilbert SAPORTA. *Probabilité et statistique*. 2006, p. 622. ISBN : 978-2-7108-0814-5.
- [89] D. L. SEAGER. « Some Elastic Effects in Helical Gear Teeth ». Thèse de doct. University of Cambridge, 1967. 209 p.
- [90] S. SUNDARESAN, K. ISHII et D. R. HOUSER. « A procedure using manufacturing variance to design gears with minimum transmission error ». In : *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference 2.3* (1989), p. 145-151. DOI : 10.1115/DETC1989-0084.
- [91] Sivakumar SUNDARESAN, Kosure ISHII et Donald R. HOUSER. « Design optimization for robustness using performance simulation programs ». In : *Engineering Optimization* 20.3 (1992). Publisher : Taylor & Francis, p. 163-178. ISSN : 0305-215X. DOI : 10.1080/03052159208941278. URL : <https://doi.org/10.1080/03052159208941278>.
- [92] Sivakumar SUNDARESAN, Kosuke ISHLI et Donald R. HOUSER. « A robust optimization procedure with variations on design variables and constraints ». In : *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference Part F1679.1* (1993), p. 379-386. DOI : 10.1115/DETC1993-0326.
- [93] G. TAGUCHI. « Performance analysis design ». In : *International Journal of Production Research* 16.6 (1978), p. 521-530. ISSN : 1366588X. DOI : 10.1080/00207547808930043.
- [94] G. TAGUCHI et V. CARIAPA. *Taguchi on Robust Technology Development*. T. 115. 3. New York : ASME press, 1993, p. 336-337. DOI : 10.1115/1.2929538.
- [95] Ming-Haung TSAI et Ying-Chien TSAI. « Design of high-contact-ratio spur gears using quadratic parametric tooth profiles ». In : *Mechanism and Machine Theory* 33.5 (1998), p. 551-564. ISSN : 0094-114X. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(97\)00071-2](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(97)00071-2). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X97000712>.
- [96] Philippe VELEX. « Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles ». Thèse de doct. Université de Lyon, 1988. 189 p.
- [97] Philippe VELEX et Monder AJMI. « Dynamic tooth loads and quasi-static transmission errors in helical gears - Approximate dynamic factor formulae ». In : *Mechanism and Machine Theory* 42.11 (2007), p. 1512-1526. ISSN : 0094114X. DOI : 10.1016/j.mechmachtheory.2006.12.009.
- [98] Philippe VELEX et Monder AJMI. « On the modelling of excitations in geared systems by transmission errors ». In : *Journal of Sound and Vibration* 290.3 (2006), p. 882-909. ISSN : 10958568. DOI : 10.1016/j.jsv.2005.04.033.
- [99] Philippe VELEX et Daniel BERTHE. « Dynamic tooth loads on geared train ». In : *Proceedings of the 1989 ASME International Power Transmission and Gearing Conference*. 1989, p. 447-454.
- [100] Philippe VELEX, Jérôme BRUYÈRE et Xiaoyu GU. « An alternative approach to the definition of profile modifications in high-contact-ratio spur gears ». In : *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 137 (3 2015), p. 1-9. ISSN : 10500472. DOI : 10.1115/1.4029321.
- [101] Philippe VELEX, Jérôme BRUYÈRE et Donald R. HOUSER. « Some analytical results on transmission errors in narrow-faced spur and helical gears : Influence of profile modifications ». In : *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 133 (3 2011). ISSN : 10500472. DOI : 10.1115/1.4003578.

- [102] Philippe VELEX et Mohamed MAATAR. « A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour ». In : *Journal of Sound and Vibration* 191.5 (1996), p. 629-660. ISSN : 0022460X. DOI : 10.1006/jsvi.1996.0148.
- [103] Philippe VELEX, Mohamed MAATAR et Michel OCTRUE. « Loaded Transmission Error Predictions and Measurements on Spur Gears With Profile Relief ». In : *Proceedings of IMechE, Gearbox Noise, Vibration and Diagnostics International Conference*. Londres, 1995, p. 199-208.
- [104] Philippe VELEX et Fabrice VILLE. « An analytical approach to tooth friction losses in spur and helical gears-influence of profile modifications ». In : *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME* 131.10 (2009). Publisher : American Society of Mechanical Engineers(ASME), p. 1010081-10100810. ISSN : 10500472. DOI : 10.1115/1.3179156.
- [105] H. VINAYAK et D. R. HOUSER. « A Comparison of Analytical Prediction With Experimental Measurements of Transmission Error of Misaligned Loaded Gears ». In : *Proceedings of the Sixth ASME International Power Transmission and Gearing Conference*. Phoenix, 1992, p. 11-19.
- [106] Jiande WANG et Ian HOWARD. « Finite element analysis of High Contact Ratio spur gears in mesh ». In : *Journal of Tribology* 127.3 (2005), p. 469-483. ISSN : 07424787. DOI : 10.1115/1.1843154.
- [107] C. WEBER et K. BANASCHEK. « Formänderung und Profilrücknahme bei Gerad-und Schrägverzahnten Antriebstechnik ». In : *Vieweg, Braunschweig* 11 (1953).
- [108] N. YILDIRIM. « Theoretical and Experimental Research in High Contact Ratio Spur Gearing ». Thèse de doct. University of Huddersfield, Yorkshire, UK., 1994.
- [109] N. YILDIRIM, G. GASPARINI et S. SARTORI. « An improvement on helicopter transmission performance through use of high contact ratio spur gears with suitable profile modification design ». In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering* 222.8 (1^{er} août 2008). Publisher : IMECHE, p. 1193-1210. ISSN : 0954-4100. DOI : 10.1243/09544100JAER0344. URL : <https://doi.org/10.1243/09544100JAER0344>.
- [110] N. YILDIRIM et R. G. MUNRO. « A new type of profile relief for high contact ratio spur gears ». In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering* 213.6 (1999), p. 563-568. ISSN : 09544062. DOI : 10.1243/0954406991522491.
- [111] N. YILDIRIM et R. G. MUNRO. « A systematic approach to profile relief design of low and high contact ratio spur gears ». In : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering* 213.6 (1999), p. 551-562. ISSN : 09544062. DOI : 10.1243/0954406991522482.
- [112] Daniel ZWILLINGER. *Table of Integrals, Series, and Products, 8th edition*. Sous la dir. d'ELSEVIER. 2014. ISBN : 9780123849335.

Annexes

6.1 Intégration sur les lignes de contact

6.1.1 Séries de Fourier d'une fonction polynomiale par morceau

Rappel de la forme générale

L'expression la série de Fourier d'une fonction P-périodique est de forme :

$$f(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n\tau}{P} + b_n \sin \frac{2\pi n\tau}{P} \right) \quad (6.1)$$

où les coefficients a_0 , a_n et b_n sont définis par

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P f(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cos \frac{2\pi nx}{P} dx, \quad b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \sin \frac{2\pi nx}{P} dx \quad (6.2)$$

Fonction polynomiale par morceau

Les intégrations par partie des coefficients a_n et b_n de la série de Fourier d'une fonction polynomiale définie par morceau se de mettent sous la forme :

$$\begin{cases} a_n &= \frac{1}{\pi n} \mathbf{C}^n \cdot \mathbf{V}_0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi n} \mathbf{S}^n \cdot \mathbf{V}_0 \end{cases} \quad (6.3)$$

où $\mathbf{C}^n = [C_1^n, C_2^n, C_3^n, C_4^n, \dots]$ et $\mathbf{S}^n = [S_1^n, S_2^n, S_3^n, S_4^n, \dots]$ sont des vecteurs lignes de coefficients et \mathbf{V}_0 est défini par :

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} \sin \frac{2\pi n t_1}{P} \\ \cos \frac{2\pi n t_1}{P} \\ \sin \frac{2\pi n t_2}{P} \\ \cos \frac{2\pi n t_2}{P} \\ \dots \end{bmatrix};$$

t_1, t_2, \dots sont des bornes d'intégration qui apparaissent lors du calcul des coefficients de la série.
La série de Fourier devient :

$$f(M) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \left\{ \mathbf{C}^n \cos \frac{2\pi n \tau}{P} + \mathbf{S}^n \sin \frac{2\pi n \tau}{P} \right\} \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.4)$$

Coefficients pour les premiers ordres Ordre 0 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} [-1; 0; 1; 0] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.5)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} [0; 1; 0; -1] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.6)$$

Ordre 1 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[-t_1; \frac{-P}{2\pi n}; t_2; \frac{P}{2\pi n} \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.7)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[\frac{-P}{2\pi n}; t_1; \frac{P}{2\pi n}; -t_2 \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.8)$$

Ordre 2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^2 \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[-t_1^2 + \frac{P^2}{2\pi^2 n^2}; \frac{-Pt_1}{\pi n}; t_2^2 - \frac{P^2}{2\pi^2 n^2}; \frac{Pt_2}{\pi n} \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.9)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^2 \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[\frac{-Pt_1}{\pi n}; t_1^2 - \frac{P^2}{2\pi^2 n^2}; \frac{Pt_2}{\pi n}; -t_2^2 + \frac{P^2}{2\pi^2 n^2} \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.10)$$

Ordre 3 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^3 \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[-t_1^3 + \frac{3P^2 t_1}{2\pi^2 n^2}; \frac{-3Pt_1^2}{2\pi n} + \frac{3P^3}{4\pi^3 n^3}; t_2^3 - \frac{3P^2 t_2}{2\pi^2 n^2}; \frac{3Pt_2^2}{2\pi n} - \frac{3P^3}{4\pi^3 n^3} \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.11)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^3 \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[\frac{-3Pt_1^2}{2\pi n} + \frac{3P^3}{4\pi^3 n^3}; t_1^3 - \frac{3P^2 t_1}{2\pi^2 n^2}; \frac{3Pt_2^2}{2\pi n} - \frac{3P^3}{4\pi^3 n^3}; -t_2^3 + \frac{3P^2 t_2}{2\pi^2 n^2} \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.12)$$

Ordre 4 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^4 \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[-t_1^4 - \frac{3P^2}{\pi^2 n^2} \left(-t_1^2 + \frac{P^2}{2\pi^2 n^2} \right); \frac{2Pt_1}{\pi n} \left(-t_1^2 + \frac{3P^2}{2\pi^2 n^2} \right); \right. \\ \left. t_2^4 - \frac{3P^2}{\pi^2 n^2} \left(t_2^2 - \frac{P^2}{2\pi^2 n^2} \right); \frac{2Pt_2}{\pi n} \left(t_2^2 - \frac{3P^2}{2\pi^2 n^2} \right) \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.13)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^4 \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[\frac{2Pt_1}{\pi n} \left(-t_1^2 + \frac{3P^2}{2\pi^2 n^2} \right); t_1^4 + \frac{3P^2}{\pi^2 n^2} \left(-t_1^2 + \frac{P^2}{2\pi^2 n^2} \right); \right. \\ \left. \frac{2Pt_2}{\pi n} \left(t_2^2 - \frac{3P^2}{2\pi^2 n^2} \right); -t_2^4 + \frac{3P^2}{\pi^2 n^2} \left(t_2^2 - \frac{P^2}{2\pi^2 n^2} \right) \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.14)$$

Coefficients pour un ordre quelconque A l'ordre k , les coefficients sont de la forme :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^k \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} [A_k ; B_k ; C_k ; D_k] \cdot \mathbf{V}_0$$

et

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^k \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} [E_k ; F_k ; G_k ; H_k] \cdot \mathbf{V}_0$$

alors, une intégration par partie permet d'obtenir

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^{k+1} \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[-t_1^{k+1} - \frac{P(k+1)E_k}{2\pi n}; \frac{-P(k+1)F_k}{2\pi n}; t_2^{k+1} - \frac{P(k+1)G_k}{2\pi n}; \frac{-P(k+1)H_k}{2\pi n} \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.15)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^{k+1} \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[\frac{P(k+1)A_k}{2\pi n}; t_1^{k+1} + \frac{P(k+1)B_k}{2\pi n}; \frac{P(k+1)C_k}{2\pi n}; -t_2^{k+1} + \frac{P(k+1)D_k}{2\pi n} \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.16)$$

équivalent à :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^{k+1} \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = (k+1) \left(\frac{P}{2\pi n} \right)^2 \left[-t_1^{k+1} \frac{2\pi n}{P(k+1)} - E_k; -F_k; t_2^{k+1} \frac{2\pi n}{P(k+1)} - G_k; -H_k \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.17)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^{k+1} \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = (k+1) \left(\frac{P}{2\pi n} \right)^2 \left[A_k; t_1^{k+1} \frac{2\pi n}{P(k+1)} + B_k; C_k; -t_2^{k+1} \frac{2\pi n}{P(k+1)} + D_k \right] \cdot \mathbf{V}_0 \quad (6.18)$$

Forme réduite des coefficients de la série de Fourier Pour les premières valeurs de k , on remarque que si

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^k \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} [A_k; B_k; C_k; D_k] \mathbf{V}_0 \quad (6.19)$$

alors

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^k \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} [B_k; -A_k; D_k; -C_k] \mathbf{V}_0 \quad (6.20)$$

D'après la relation (6.17) et (6.18) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^{k+1} \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[-t_1^{k+1} - \frac{P(k+1)B_k}{2\pi n}; \frac{P(k+1)A_k}{2\pi n}; t_2^{k+1} - \frac{P(k+1)D_k}{2\pi n}; \frac{P(k+1)C_k}{2\pi n} \right] \mathbf{V}_0 \quad (6.21)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau^{k+1} \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{P}{2\pi n} \left[\frac{P(k+1)A_k}{2\pi n}; t_1^{k+1} + \frac{P(k+1)B_k}{2\pi n}; \frac{P(k+1)C_k}{2\pi n}; -t_2^{k+1} + \frac{P(k+1)D_k}{2\pi n} \right] \mathbf{V}_0 \quad (6.22)$$

Ainsi, quelque soit la valeur de k , la relation (6.20) est vraie. La démonstration sur les monômes d'ordre quelconque peut être étendue à toute fonction polynomiale définie par morceau.

Ainsi, pour toute fonction périodique f , polynomiale par morceau, les coefficients de la série de Fourier équivalente sont liés par les relations suivantes :

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) \cos \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{1}{\pi n} [A; B; C; D] \mathbf{V}_0 \quad (6.23)$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) \sin \frac{2\pi n \tau}{P} d\tau = \frac{1}{\pi n} [B; -A; D; -C] \mathbf{V}_0 \quad (6.24)$$

Des relations (6.23) et (6.24), découle un réarrangement de l'expression de la série de Fourier :

$$f(M) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \mathbf{C}^n \cdot \mathbf{V}_1 \quad (6.25)$$

avec

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} \sin \frac{2\pi n}{P} (t_1 - \tau) \\ \cos \frac{2\pi n}{P} (t_1 - \tau) \\ \sin \frac{2\pi n}{P} (t_2 - \tau) \\ \cos \frac{2\pi n}{P} (t_2 - \tau) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Fonction f périodique, polynomiale par morceau et symétrique

Symétrie La fonction f est symétrique par rapport à une abscisse t_0 (modulo P) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + P) \quad \text{et} \quad f(x) = f(2t_0 - x)$$

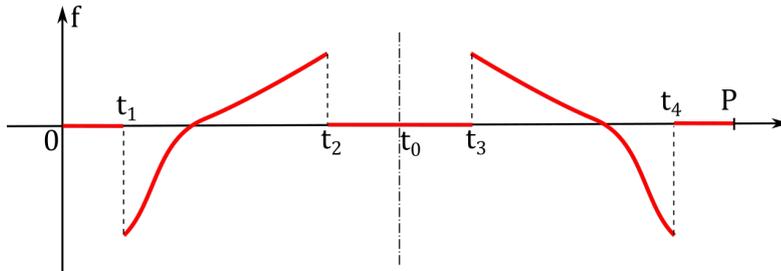


FIGURE 6.1 – fonction périodique et symétrique

Relation entre les coefficients de la série de Fourier Pour simplifier le développement, supposons que la fonction f est nulle en dehors des intervalles $[t_1; t_2]$ et $[t_3; t_4]$ sur une période (figure 6.1). On définit

$$I_{1n} = \frac{2}{P} \int_{t_1}^{t_2} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{P} dx = \frac{1}{\pi n} [C_{s1}^n, C_{s2}^n, C_{s3}^n, C_{s4}^n] \mathbf{V}_0 \quad (6.27)$$

$$J_{1n} = \frac{2}{P} \int_{t_1}^{t_2} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{P} dx = \frac{1}{\pi n} [S_{s1}^n, S_{s2}^n, S_{s3}^n, S_{s4}^n] \mathbf{V}_0 \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2}{P} \int_{t_3}^{t_4} f(y) \cos \frac{2\pi ny}{P} dy \\ &= \cos \frac{4\pi nt_0}{P} \frac{2}{P} \int_{t_1}^{t_2} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{P} dx + \sin \frac{4\pi nt_0}{P} \frac{2}{P} \int_{t_1}^{t_2} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{P} dx \end{aligned} \quad (6.29)$$

avec $y = 2t_0 - x$

$$\begin{aligned} J_{2n} &= \frac{2}{P} \int_{t_3}^{t_4} f(y) \sin \frac{2\pi ny}{P} dy \\ &= \sin \frac{4\pi nt_0}{P} \frac{2}{P} \int_{t_1}^{t_2} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{P} dx - \cos \frac{4\pi nt_0}{P} \frac{2}{P} \int_{t_1}^{t_2} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{P} dx \end{aligned} \quad (6.30)$$

Pour f polynomiale par morceau :

$$a_n = I_{1n} + I_{2n} = \frac{2}{\pi n} \cos \frac{2\pi n t_0}{P} \left\{ C_{s1}^n \sin \frac{2\pi n(t_1 - t_0)}{P} + C_{s2}^n \cos \frac{2\pi n(t_1 - t_0)}{P} + C_{s3}^n \sin \frac{2\pi n(t_2 - t_0)}{P} + C_{s4}^n \cos \frac{2\pi n(t_2 - t_0)}{P} \right\} \quad (6.31)$$

$$b_n = J_{1n} + J_{2n} = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{2\pi n t_0}{P} \left\{ C_{s1}^n \sin \frac{2\pi n(t_1 - t_0)}{P} + C_{s2}^n \cos \frac{2\pi n(t_1 - t_0)}{P} + C_{s3}^n \sin \frac{2\pi n(t_2 - t_0)}{P} + C_{s4}^n \cos \frac{2\pi n(t_2 - t_0)}{P} \right\} \quad (6.32)$$

Forme réduite En utilisant les relations (6.32) et (6.31), la série de Fourier se met sous la forme :

$$f(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \cos \frac{2\pi n(t_0 - \tau)}{P} \mathbf{C}_s^n \cdot \mathbf{V}_s^n \quad (6.33)$$

Avec

$$\mathbf{V}_s^n = \begin{bmatrix} \sin \frac{2\pi n(t_1 - t_0)}{P} \\ \cos \frac{2\pi n(t_1 - t_0)}{P} \\ \sin \frac{2\pi n(t_2 - t_0)}{P} \\ \cos \frac{2\pi n(t_2 - t_0)}{P} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_s^n = [C_{s1}^n, C_{s2}^n, C_{s3}^n, C_{s4}^n, \dots]$$

6.1.2 Intégrale d'une fonction sur des lignes de contact

Domaine et intégrande

f est une fonction initialement définie pour le point M_{00} de coordonnées dans le plan de base $x = \tau$ et $\bar{z} = 0$, sur la ligne de contact zéro. En un point de contact potentiel M de coordonnée (x, \bar{z}) appartenant à la i -ème ligne de contact, la valeur de la fonction est obtenue en faisant un changement de variable correspondant à l'écart des abscisses selon \vec{X} entre les points M et M_{00} : τ est remplacé par $x = \tau - i - \bar{z}\varepsilon_\beta$.

La configuration des lignes de contact étant périodique dans le temps, la fonction f l'est également. Sa période est notée P et elle se développe en série de Fourier suivant (6.1).

Dans les cas qui nous intéressent, l'intégrande est constitué du produit de la fonction f et d'une fonction g de $\bar{z} \in [0 ; 1]$:

$$F(\tau) = \frac{\cos \beta_b}{b\varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{x})} g(\bar{z}) f(M) dM \quad (6.34)$$

Les lignes de contact effectives se déplacent sur une fenêtre d'engrènement réduite par

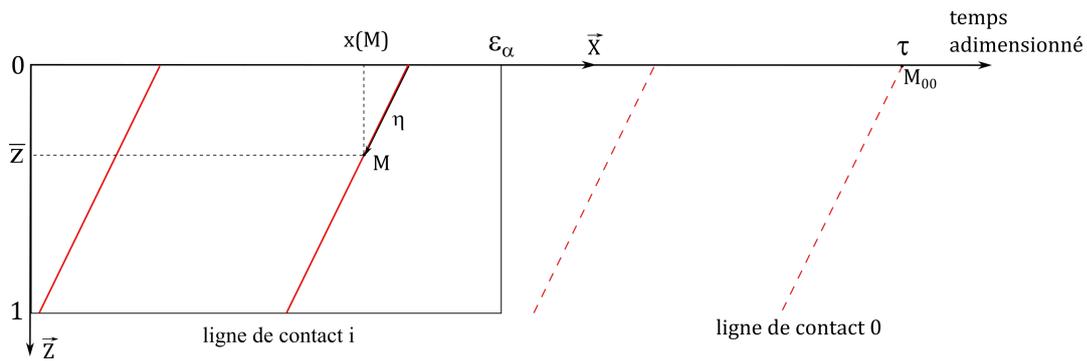


FIGURE 6.2 – Paramétrage d'un point de contact M

rapport à la zone potentiel de contact. La réduction à l'engagement et au retrait est uniforme et elle vaut $\lambda \epsilon_\alpha$. La réduction dans la direction \vec{Z} est identique sur les deux bords, constante, égale à δ (voir figure 6.3).

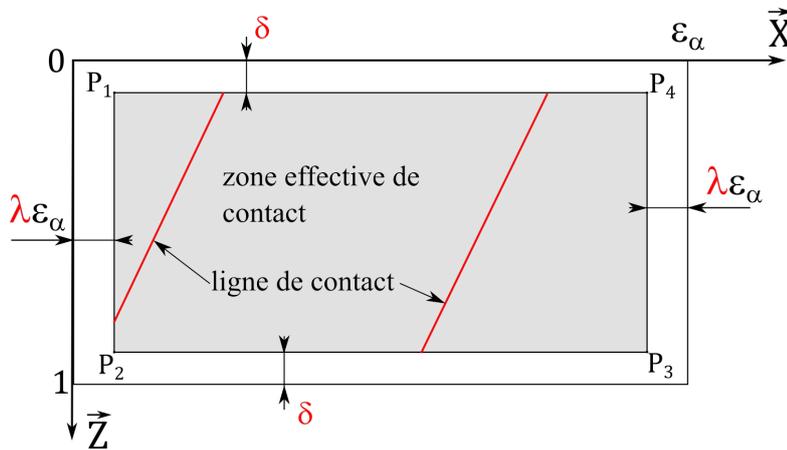


FIGURE 6.3 – Zone de contact effective

Cas général avec $g(\bar{z}) = 1$

Les lignes de contact potentielles sont discrétisées en N cellules et en remplaçant l'intégrale par deux sommes de Riemann, 6.34 se réécrit :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \epsilon_\alpha} \int_{L(\tau, X)} f(M) dM \cong \frac{1}{N \epsilon_\alpha} \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-o-1} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left[\frac{2\pi n}{P} \left(\tau - i - j \frac{\epsilon_\beta}{N} \right) \right] + b_n \sin \left[\frac{2\pi n}{P} \left(\tau - i - j \frac{\epsilon_\beta}{N} \right) \right] \right) \right\} \quad (6.35)$$

où o est une borne pour le calcul de la somme en j , dépendante de N et telle que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{o}{N} = \delta$.

En simplifiant, puis en identifiant les limites lorsque N tend vers l'infini, on obtient le résultat suivant pour f P -périodique quelconque :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, X)} f(M) dM = \frac{P a_0 (1 - 2\delta)}{\varepsilon_\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P \sin \pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)}{\pi k \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} (a_{kP} \cos[\pi k (2\tau - \varepsilon_\beta)] + b_{kP} \sin[\pi k (2\tau - \varepsilon_\beta)]) \quad (6.36)$$

Fonction f polynomiale par morceau et $g(\bar{z}) = 1$

L'expression de l'intégrale de la fonction f sur les lignes de contact est la suivante :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, X)} f(M) dM = \frac{P a_0 (1 - 2\delta)}{\varepsilon_\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)}{\pi^2 k^2 \varepsilon_\beta \varepsilon_\alpha} \mathbf{C}^{kP} \cdot \mathbf{V}_2 \quad (6.37)$$

avec

$$\mathbf{C}^{kP} = [C_1^{kP}, C_2^{kP}, C_3^{kP}, C_4^{kP}, \dots] \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} \sin \pi k (2t_1 - 2\tau + \varepsilon_\beta) \\ \cos \pi k (2t_1 - 2\tau + \varepsilon_\beta) \\ \sin \pi k (2t_2 - 2\tau + \varepsilon_\beta) \\ \cos \pi k (2t_2 - 2\tau + \varepsilon_\beta) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Fonction f polynomiale par morceau et symétrique, $g(\bar{z}) = 1$

Pour fonction f présentant une symétrie par rapport à t_0 :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, X)} f(M) dM = \frac{P a_0}{\varepsilon_\alpha} (1 - 2\delta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin[\pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)]}{\pi^2 k^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \cos \pi k (2\tau - \varepsilon_\beta - 2t_0) \mathbf{C}_s^{kP} \cdot \mathbf{V}_S^{kP} \quad (6.38)$$

$$\mathbf{V}_S^{kP} = \begin{pmatrix} \sin 2\pi k (t_1 - t_0) \\ \cos 2\pi k (t_1 - t_0) \\ \sin 2\pi k (t_2 - t_0) \\ \cos 2\pi k (t_2 - t_0) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_s^{kP} = [C_{s1}^{kP}, C_{s2}^{kP}, C_{s3}^{kP}, C_{s4}^{kP}, \dots]$$

Variance Si f est symétrique par rapport à t_0 et polynomial par morceau :

$$\text{var}(F) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2 \sin[\pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)]}{\pi^2 k^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \mathbf{C}_s^{kP} \mathbf{V}_S^{kP} \right\}^2 \quad (6.39)$$

Fonction f périodique et $g(\bar{z})$ polynomiale d'ordre 2

La fonction g est prise sous la forme :

$$g(\bar{z}) = a + b\bar{z} + c\bar{z}^2 \quad \bar{z} \in [0, 1]$$

L'intégrale sur les lignes de contact à l'instant τ s'écrit :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X})} (a + b\bar{z} + c\bar{z}^2) f(M) dM \cong \frac{1}{N \varepsilon_\alpha} \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{N-i-1} \left(a + b \frac{j}{N} + c \frac{j^2}{N^2} \right) f\left(\tau - i - j \frac{\varepsilon_\beta}{N}\right) \quad (6.40)$$

Après simplifications :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X})} (a + bz + cz^2) f(M) dM = & \frac{a_0 P}{\varepsilon_\alpha} (1 - 2\delta) \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} (1 - \delta + \delta^2) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P}{2\pi k \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \left\{ \right. \\ & 2 \left[a_{Pk} \cos[\pi k (2\tau - \varepsilon_\beta)] + b_{Pk} \sin[\pi k (2\tau - \varepsilon_\beta)] \right] \\ & \left(\sin[\pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)] \left(1 + c\delta^2 - \frac{2c}{(2\pi k \varepsilon_\beta)^2} \right) - \frac{c\delta}{\pi k \varepsilon_\beta} \cos[\pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)] \right) \\ & + 2b \left[a_{Pk} \sin[\pi k (2\tau - \varepsilon_\beta)] - b_{Pk} \cos[\pi k (2\tau - \varepsilon_\beta)] \right] \left[\frac{\sin[\pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)]}{2\pi k \varepsilon_\beta} + \delta \cos[\pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)] \right) \\ & - (b + c(1 - 2\delta)) \left[a_{Pk} \sin[2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta (1 - \delta))] - b_{Pk} \cos[2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta (1 - \delta))] \right] \\ & \left. + \frac{c}{\pi k \varepsilon_\beta} \left[a_{Pk} \cos[2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta (1 - \delta))] + b_{Pk} \sin[2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta (1 - \delta))] \right] \right\} \quad (6.41) \end{aligned}$$

Autre écriture :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X})} (a + b\bar{z} + c\bar{z}^2) f(M) dM = & \frac{a_0 P}{\varepsilon_\alpha} (1 - 2\delta) \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} (1 - \delta + \delta^2) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P}{2\pi k \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \\ & \left[a_{kP} \begin{bmatrix} M_2, M_1, M_4, M_3 \end{bmatrix} + b_{kP} \begin{bmatrix} M_1, -M_2, M_3, -M_4 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \sin[2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta (1 - \delta))] \\ \cos[2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta (1 - \delta))] \\ \sin[2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta \delta)] \\ \cos[2\pi k (\tau - \varepsilon_\beta \delta)] \end{bmatrix} \quad (6.42) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{b + 2c(1 - \delta)}{2\pi k \varepsilon_\beta} \\ M_2 &= -a - b(1 - \delta) - c(1 - \delta)^2 + \frac{c}{2(\pi k \varepsilon_\beta)^2} \\ M_3 &= -\frac{b + 2c\delta}{2\pi k \varepsilon_\beta} \\ M_4 &= a + b\delta + c\delta^2 - \frac{c}{2(\pi k \varepsilon_\beta)^2} \end{aligned}$$

Fonction f polynomiale par morceau et $g(\bar{z})$ polynomiale d'ordre 2

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X})} (a+b\bar{z}+c\bar{z}^2) f(M) dM = \frac{a_0 P}{\varepsilon_\alpha} (1-2\delta) \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} (1-\delta+\delta^2) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} [C_1^{Pk}, C_2^{Pk}, C_3^{Pk}, C_4^{Pk}, \dots]$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -M_2 & M_1 & -M_4 & M_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_2 & M_1 & -M_4 & M_3 & \dots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin[2\pi k(\varepsilon_\beta(1-\delta)+t_1-\tau)] \\ \cos[2\pi k(\varepsilon_\beta(1-\delta)+t_1-\tau)] \\ \sin[2\pi k(\varepsilon_\beta\delta+t_1-\tau)] \\ \cos[2\pi k(\varepsilon_\beta\delta+t_1-\tau)] \\ \sin[2\pi k(\varepsilon_\beta(1-\delta)+t_2-\tau)] \\ \cos[2\pi k(\varepsilon_\beta(1-\delta)+t_2-\tau)] \\ \sin[2\pi k(\varepsilon_\beta\delta+t_2-\tau)] \\ \cos[2\pi k(\varepsilon_\beta\delta+t_2-\tau)] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Fonction f polynomiale par morceau, fonction $g(\bar{z})$ polynomiale d'ordre 2 et symétrique

On suppose de la fonction g de \bar{z} est symétrique par rapport à $\bar{z} = \frac{1}{2}$:

$$g(\bar{z}) = g(1-\bar{z})$$

On en déduit

$$g(\bar{z}) = a + b\bar{z}(1-\bar{z})$$

D'après (6.43) :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X})} (a+b\bar{z}(1-\bar{z})) f(M) dM = \frac{a_0 P}{\varepsilon_\alpha} (1-2\delta) \left(a + \frac{b}{6} (1+2\delta-2\delta^2) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} [C_1^{Pk}, C_2^{Pk}, C_3^{Pk}, C_4^{Pk}, \dots]$$

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_1 & -N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -N_2 & N_1 & N_2 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_1 & -N_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_2 & N_1 & N_2 & N_1 & \dots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin[2\pi k(\varepsilon_\beta(1-\delta)+t_1-\tau)] \\ \cos[2\pi k(\varepsilon_\beta(1-\delta)+t_1-\tau)] \\ \sin[2\pi k(\varepsilon_\beta\delta+t_1-\tau)] \\ \cos[2\pi k(\varepsilon_\beta\delta+t_1-\tau)] \\ \sin[2\pi k(\varepsilon_\beta(1-\delta)+t_2-\tau)] \\ \cos[2\pi k(\varepsilon_\beta(1-\delta)+t_2-\tau)] \\ \sin[2\pi k(\varepsilon_\beta\delta+t_2-\tau)] \\ \cos[2\pi k(\varepsilon_\beta\delta+t_2-\tau)] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

avec :

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{b(1-2\delta)}{2\pi k \varepsilon_\alpha} \\ N_2 &= -a - b\delta(1-\delta) - \frac{b}{2(\pi k \varepsilon_\alpha)^2} \end{aligned}$$

qui se simplifie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X})} (a + b\bar{z} - b\bar{z}^2) f(M) dM &= \frac{a_0 P}{\varepsilon_\alpha} (1-2\delta) \left(a + \frac{b}{6} (1+2\delta-2\delta^2) \right) + \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{C}^{kP} \cdot \mathbf{V}_2}{\pi^2 k^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \left(N_1 \cos[\pi k \varepsilon_\beta (1-2\delta)] - N_2 \sin[\pi k \varepsilon_\beta (1-2\delta)] \right) \quad (6.45) \end{aligned}$$

Fonction f polynomiale par morceau, fonction $g(\bar{z})$ polynomiale d'ordre 2 et symétrique

Avec :

$$\begin{cases} f(M_{00}) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \mathbf{C}_s^n \cdot \mathbf{V}_s^n \cos \frac{2\pi n(t_0 - \tau)}{P} \\ g(\bar{z}) &= a + b\bar{z} + c\bar{z}^2 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X})} (a + b\bar{z} + c\bar{z}^2) f(M) dM &= \frac{a_0 P}{\varepsilon_\alpha} (1-2\delta) \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} (1-\delta + \delta^2) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{C}_s^{kP} \cdot \mathbf{V}_s^{kP}}{\pi^2 k^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \\ &[-M_2, M_1, -M_4, M_3] \cdot \begin{bmatrix} \sin[2\pi k(\varepsilon_\beta(1-\delta) + t_0 - \tau)] \\ \cos[2\pi k(\varepsilon_\beta(1-\delta) + t_0 - \tau)] \\ \sin[2\pi k(\varepsilon_\beta \delta + t_0 - \tau)] \\ \cos[2\pi k(\varepsilon_\beta \delta + t_0 - \tau)] \end{bmatrix} \quad (6.46) \end{aligned}$$

Fonction f polynomiale par morceau et symétrique, fonction $g(\bar{z})$ polynomiale et symétrique

Avec ses hypothèses :

$$\begin{cases} f(M_{00}) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \mathbf{C}_s^n \cdot \mathbf{V}_s^n \cos \frac{2\pi n(t_0 - \tau)}{P} \\ g(\bar{z}) &= a + b\bar{z}(1-\bar{z}) \end{cases}$$

l'intégrale sur les lignes de contact effectives à un instant donné devient :

$$\frac{\cos \beta_b}{b \varepsilon_\alpha} \int_{L(\tau, \mathbf{X})} (a + b \bar{z}(1 - \bar{z})) f(M) dM = \frac{a_0 P}{\varepsilon_\alpha} (1 - 2\delta) \left(a + \frac{b}{6} (1 + 2\delta - 2\delta^2) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \mathbf{C}_s^{kP} \cdot \mathbf{V}_s^{kP}}{\pi^2 k^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \cos [\pi k (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\tau)] \\ [N_1 \cos[\pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)] - N_2 \sin[\pi k \varepsilon_\beta (1 - 2\delta)]] \quad (6.47)$$

6.2 Formulaire sommes et séries

6.2.1 Somme des suites

Somme des N premiers termes

$$\sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{(N-1)N}{2} \quad (6.48)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} j^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} \quad (6.49)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} j^3 = \frac{(N-1)^2 N^2}{4} \quad (6.50)$$

Pour $A \neq 2\pi k$; k entier relatif :

$$\sum_{j=0}^{N-1} \cos(Aj) = \frac{\cos(A \frac{(N-1)}{2}) \sin(\frac{AN}{2})}{\sin(\frac{A}{2})} \quad (6.51)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sin(Aj) = \frac{\sin(A \frac{(N-1)}{2}) \sin(\frac{AN}{2})}{\sin(\frac{A}{2})} \quad (6.52)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \cos(Aj + B) = \cos(B + A \frac{(N-1)}{2}) \frac{\sin(\frac{AN}{2})}{\sin(\frac{A}{2})} \quad (6.53)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sin(Aj + B) = \sin(B + A \frac{(N-1)}{2}) \frac{\sin(\frac{AN}{2})}{\sin(\frac{A}{2})} \quad (6.54)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} j \cos(Aj) = \frac{1 - \cos((N-1)A)}{-4 \sin^2(\frac{A}{2})} + \frac{(N-1) \sin(A(N - \frac{1}{2}))}{2 \sin(\frac{A}{2})} \quad (6.55)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} j \sin(Aj) = \frac{\sin((N-1)A)}{4 \sin^2(\frac{A}{2})} - \frac{(N-1) \cos(A(N - \frac{1}{2}))}{2 \sin(\frac{A}{2})} \quad (6.56)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} j \sin(Aj + B) = \frac{\sin\left((N-1)\frac{A}{2}\right)\cos\left((N-1)\frac{A}{2} + B\right)}{2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} - \frac{(N-1)\cos\left(A\left(N-\frac{1}{2}\right) + B\right)}{2\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad (6.57)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} j \cos(Aj + B) = \frac{\sin\left((N-1)\frac{A}{2}\right)\sin\left((N-1)\frac{A}{2} + B\right)}{-2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} + \frac{(N-1)\sin\left(A\left(N-\frac{1}{2}\right) + B\right)}{2\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} j^2 \cos(Aj) &= -\frac{\sin\left(\frac{A(N-1)}{2}\right)\cos\left(A\left(\frac{N}{2}-1\right)\right)}{2\sin^3\left(\frac{A}{2}\right)} \\ &+ \frac{(2N-3)\cos\left(A(N-1)\right) + 1}{4\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} \\ &+ \frac{(N-1)^2 \sin\left(A\left(N-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} j^2 \sin(Aj) &= -\frac{\sin\left(\frac{A(N-1)}{2}\right)\sin\left(A\left(\frac{N}{2}-1\right)\right)}{2\sin^3\left(\frac{A}{2}\right)} \\ &+ \frac{(2N-3)\sin\left(A(N-1)\right)}{4\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} \\ &- \frac{(N-1)^2 \cos\left(A\left(N-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} j^2 \cos(Aj + B) &= -\frac{\sin\left(\frac{A(N-1)}{2}\right)\cos\left(A\left(\frac{N}{2}-1\right) + B\right)}{2\sin^3\left(\frac{A}{2}\right)} \\ &+ \frac{(2N-3)\cos\left(A(N-1) + B\right) + \cos(B)}{4\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} \\ &+ \frac{(N-1)^2 \sin\left(A\left(N-\frac{1}{2}\right) + B\right)}{2\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} j^2 \sin(Aj + B) &= -\frac{\sin\left(\frac{A(N-1)}{2}\right) \sin\left(A\left(\frac{N}{2}-1\right) + B\right)}{2 \sin^3\left(\frac{A}{2}\right)} \\
&+ \frac{(2N-3) \sin\left(A(N-1) + B\right) + \sin(B)}{4 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} \\
&- \frac{(N-1)^2 \cos\left(A\left(N-\frac{1}{2}\right) + B\right)}{2 \sin\left(\frac{A}{2}\right)} \tag{6.62}
\end{aligned}$$

Sommes partielles

o est une borne pour le calcul de la somme, dépendante de N et telle que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{o}{N} = \delta \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{j=0}^{N-o-1} 1 = N - 2o - 1 \tag{6.63}$$

$$\sum_{j=0}^{N-o-1} j = \frac{N(N-2o-1) + 2o}{2} \tag{6.64}$$

$$\sum_{j=0}^{N-o-1} j^2 = \frac{(N-o-1)(N-o)(2N-2o-1)}{6} - \frac{o(o-1)(2o-1)}{6} \tag{6.65}$$

$$\sum_{j=0}^{N-o-1} \cos(Aj) = \frac{\cos\frac{A}{2}(N-o-1) \sin\frac{A}{2}(N-o) - \cos\frac{A}{2}(o-1) \sin\frac{A}{2}o}{\sin\frac{A}{2}} \tag{6.66}$$

$$\sum_{j=0}^{N-o-1} \sin(Aj) = \frac{\sin\frac{A}{2}(N-o-1) \sin\frac{A}{2}(N-o) - \sin\frac{A}{2}(o-1) \sin\frac{A}{2}o}{\sin\frac{A}{2}} \tag{6.67}$$

$$\sum_{j=0}^{N-o-1} \cos(Aj + B) = \frac{\cos\left[\frac{A}{2}(N-o-1) + B\right] \sin\frac{A}{2}(N-o) - \cos\left[\frac{A}{2}(o-1) + B\right] \sin\frac{A}{2}o}{\sin\frac{A}{2}} \tag{6.68}$$

$$\sum_{j=0}^{N-o-1} \sin(Aj + B) = \frac{\sin\left[\frac{A}{2}(N-o-1) + B\right] \sin\frac{A}{2}(N-o) - \sin\left[\frac{A}{2}(o-1) + B\right] \sin\frac{A}{2}o}{\sin\frac{A}{2}} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-o-1} j \cos(Aj + B) &= \frac{\cos[A(N-o-1) + B] - \cos[A(o-1) + B]}{4 \sin^2\frac{A}{2}} \\
&+ \frac{(N-o-1) \sin\left[A\left(N-o-\frac{1}{2}\right) + B\right] - (o-1) \sin\left[A\left(o-\frac{1}{2}\right) + B\right]}{2 \sin\frac{A}{2}} \tag{6.70}
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^{N-o-1} j \sin(Aj + B) = \frac{\sin[A(N-o-1) + B] - \sin[A(o-1) + B]}{4 \sin^2 \frac{A}{2}} - \frac{(N-o-1) \cos[A(N-o-\frac{1}{2}) + B] - (o-1) \cos[A(o-\frac{1}{2}) + B]}{2 \sin \frac{A}{2}} \quad (6.71)$$

$$\sum_{j=0}^{N-o-1} j^2 \cos(Aj + B) = \frac{-\sin[A(N-o-\frac{3}{2}) + B] + \sin[A(o-\frac{3}{2}) + B]}{4 \sin^3 \frac{A}{2}} + \frac{(2N-2o-3) \cos[A(N-o-1) + B] - (2o-3) \cos[A(o-1) + B]}{4 \sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{(N-o-1)^2 \sin[A(N-o-\frac{1}{2}) + B] - (o-1)^2 \sin[A(o-\frac{1}{2}) + B]}{2 \sin \frac{A}{2}} \quad (6.72)$$

$$\sum_{j=0}^{N-o-1} j^2 \sin(Aj + B) = \frac{\cos[A(N-o-\frac{3}{2}) + B] - \cos[A(o-\frac{3}{2}) + B]}{4 \sin^3 \frac{A}{2}} + \frac{(2N-2o-3) \sin[A(N-o-1) + B] - (2o-3) \sin[A(o-1) + B]}{4 \sin^2 \frac{A}{2}} - \frac{(N-o-1)^2 \cos[A(N-o-\frac{1}{2}) + B] - (o-1)^2 \cos[A(o-\frac{1}{2}) + B]}{2 \sin \frac{A}{2}} \quad (6.73)$$

Valeur limite des sommes lorsque N tend vers l'infini

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{A}{N}j\right) \rightarrow \frac{1 - \cos(A)}{A} \quad (6.74)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \cos\left(\frac{A}{N}j\right) \rightarrow \frac{\sin(A)}{A} \quad (6.75)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \cos\left(\frac{A}{N}j + B\right) \rightarrow \cos\left(B + \frac{A}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\frac{A}{2}} \quad (6.76)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{A}{N}j + B\right) \rightarrow \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\frac{A}{2}} \quad (6.77)$$

$$\frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} j \cos\left(\frac{A}{N}j\right) \rightarrow \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\frac{A}{2}} \left(-\frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{A} + \cos\left(\frac{A}{2}\right) \right) = -\frac{1 - \cos(A)}{A^2} + \frac{\sin(A)}{A} \quad (6.78)$$

$$\frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} j \sin\left(\frac{A}{N}j\right) \rightarrow \frac{\sin(A)}{A^2} - \frac{\cos(A)}{A} \quad (6.79)$$

$$\frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} j \cos\left(\frac{A}{N}j + B\right) \rightarrow -2 \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{A}{2} + B\right)}{A^2} + \frac{\sin(A + B)}{A} \quad (6.80)$$

$$\frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} j \sin\left(\frac{A}{N}j + B\right) \rightarrow 2 \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2} + B\right)}{A^2} - \frac{\cos(A + B)}{A} \quad (6.81)$$

$$\frac{1}{N^3} \sum_{j=0}^{N-1} j^2 \cos\left(\frac{A}{N}j\right) \rightarrow -\frac{2 \sin(A)}{A^3} + \frac{2 \cos(A)}{A^2} + \frac{\sin(A)}{A} \quad (6.82)$$

$$\frac{1}{N^3} \sum_{j=0}^{N-1} j^2 \sin\left(\frac{A}{N}j\right) \rightarrow -\frac{4 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{A^3} + \frac{2 \sin(A)}{A^2} - \frac{\cos(A)}{A} = -2 \frac{1 - \cos(A)}{A^3} + \frac{2 \sin(A)}{A^2} - \frac{\cos(A)}{A} \quad (6.83)$$

$$\frac{1}{N^3} \sum_{j=0}^{N-1} j^2 \cos\left(\frac{A}{N}j + B\right) \rightarrow -4 \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2} + B\right)}{A^3} + \frac{2 \cos(A + B)}{A^2} + \frac{\sin(A + B)}{A} \quad (6.84)$$

$$\frac{1}{N^3} \sum_{j=0}^{N-1} j^2 \sin\left(\frac{A}{N}j + B\right) \rightarrow -\frac{4 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{A}{2} + B\right)}{A^3} + \frac{2 \sin(A + B)}{A^2} - \frac{\cos(A + B)}{A} \quad (6.85)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kA)}{k^2} \rightarrow \frac{(\pi - \hat{A})^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \quad (6.86)$$

avec $\hat{A} = \text{modulo}(A, 2\pi) / 0 \leq \hat{A} \leq 2\pi$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-\sigma-1} 1 \rightarrow 1 - 2\delta \quad (6.87)$$

$$\frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-\sigma-1} j \rightarrow \frac{1}{2} - \delta \quad (6.88)$$

$$\frac{1}{N^3} \sum_{j=0}^{N-\sigma-1} j^2 \rightarrow \frac{1}{3} (1 - 2\delta)(1 - \delta + \delta^2) \quad (6.89)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-o-1} \cos \frac{A}{N} j \rightarrow \frac{2}{A} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} (1-2\delta) \quad (6.90)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-o-1} \sin \frac{A}{N} j \rightarrow \frac{2}{A} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} (1-2\delta) \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-o-1} \cos\left(\frac{A}{N}j + B\right) &\rightarrow \frac{\cos\left[\frac{A}{2}(1-\delta) + B\right] \sin \frac{A}{2}(1-\delta) - \cos\left[\frac{A}{2}\delta + B\right] \sin \frac{A}{2}\delta}{\frac{A}{2}} \quad (6.92) \\ &\rightarrow \frac{\sin[A(1-\delta) + B] - \sin[A\delta + B]}{A} \\ &\rightarrow \frac{2}{A} \cos\left[\frac{A}{2} + B\right] \sin\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \\ &\rightarrow \frac{1}{A} [1, 0, -1, 0] \begin{bmatrix} \sin[A(1-\delta) + B] \\ \cos[A(1-\delta) + B] \\ \sin[A\delta + B] \\ \cos[A\delta + B] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-o-1} \sin\left(\frac{A}{N}j + B\right) &\rightarrow \frac{\sin\left[\frac{A}{2}(1-\delta) + B\right] \sin \frac{A}{2}(1-\delta) - \sin\left[\frac{A}{2}\delta + B\right] \sin \frac{A}{2}\delta}{\frac{A}{2}} \quad (6.93) \\ &\rightarrow \frac{\cos[A\delta + B] - \cos[A(1-\delta) + B]}{A} \\ &\rightarrow \frac{2}{A} \sin\left[\frac{A}{2} + B\right] \sin\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \\ &\rightarrow \frac{1}{A} [0, -1, 0, 1] \begin{bmatrix} \sin[A(1-\delta) + B] \\ \cos[A(1-\delta) + B] \\ \sin[A\delta + B] \\ \cos[A\delta + B] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-o-1} j \cos\left(\frac{A}{N}j + B\right) &\rightarrow \frac{\cos[A(1-\delta) + B] - \cos[A\delta + B]}{A^2} \\
&+ \frac{(1-\delta)\sin[A(1-\delta) + B] - \delta\sin[A\delta + B]}{A} \tag{6.94} \\
&\rightarrow \frac{-2}{A^2} \sin\left[\frac{A}{2} + B\right] \sin\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \\
&+ \frac{1}{A} \left[\sin[A(1-\delta) + B] - 2\delta \sin\left[\frac{A}{2} + B\right] \cos\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \right] \\
&\rightarrow \frac{1}{A} \left[1 - \delta, \frac{1}{A}, -\delta, -\frac{1}{A} \right] \begin{bmatrix} \sin[A(1-\delta) + B] \\ \cos[A(1-\delta) + B] \\ \sin[A\delta + B] \\ \cos[A\delta + B] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-o-1} j \sin\left(\frac{A}{N}j + B\right) &\rightarrow \frac{\sin[A(1-\delta) + B] - \sin[A\delta + B]}{A^2} \\
&- \frac{(1-\delta)\cos[A(1-\delta) + B] - \delta\cos[A\delta + B]}{A} \tag{6.95} \\
&\rightarrow \frac{2}{A^2} \cos\left[\frac{A}{2} + B\right] \sin\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \\
&- \frac{1}{A} \left[\cos[A(1-\delta) + B] - 2\delta \cos\left[\frac{A}{2} + B\right] \cos\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \right] \\
&\rightarrow \frac{1}{A} \left[\frac{1}{A}, \delta - 1, -\frac{1}{A}, \delta \right] \begin{bmatrix} \sin[A(1-\delta) + B] \\ \cos[A(1-\delta) + B] \\ \sin[A\delta + B] \\ \cos[A\delta + B] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N^3} \sum_{j=0}^{N-\sigma-1} j^2 \cos\left(\frac{A}{N}j + B\right) &\rightarrow \frac{-\sin[A(1-\delta) + B] + \sin[A\delta + B]}{\frac{A^3}{2}} \\
&+ \frac{(1-\delta)\cos[A(1-\delta) + B] - \delta\cos[A\delta + B]}{\frac{A^2}{2}} \\
&+ \frac{(1-\delta)^2\sin[A(1-\delta) + B] - \delta^2\sin[A\delta + B]}{A} \tag{6.96} \\
&\rightarrow \frac{-4}{A^3} \cos\left[\frac{A}{2} + B\right] \sin\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \\
&+ \frac{2}{A^2} \left[\cos[A(1-\delta) + B] - 2\delta\cos\left[\frac{A}{2} + B\right] \cos\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \right] \\
&+ \frac{1}{A} \left[(1-2\delta)\sin[A(1-\delta) + B] + 2\delta^2\cos\left[\frac{A}{2} + B\right] \sin\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \right] \\
&\rightarrow \frac{1}{A} \left[(1-\delta)^2 - \frac{2}{A^2}, \frac{2(1-\delta)}{A}, -\delta^2 + \frac{2}{A^2}, \frac{-2\delta}{A} \right] \begin{bmatrix} \sin[A(1-\delta) + B] \\ \cos[A(1-\delta) + B] \\ \sin[A\delta + B] \\ \cos[A\delta + B] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N^3} \sum_{j=0}^{N-\sigma-1} j^2 \sin\left(\frac{A}{N}j + B\right) &\rightarrow \frac{\cos[A(1-\delta) + B] - \cos[A\delta + B]}{\frac{A^3}{2}} \\
&+ \frac{(1-\delta)\sin[A(1-\delta) + B] - \delta\sin[A\delta + B]}{\frac{A^2}{2}} \\
&- \frac{(1-\delta)^2\cos[A(1-\delta) + B] - \delta^2\cos[A\delta + B]}{A} \tag{6.97} \\
&\rightarrow \frac{-4}{A^3} \sin\left[\frac{A}{2} + B\right] \sin\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \\
&+ \frac{2}{A^2} \left[\sin[A(1-\delta) + B] - 2\delta\sin\left[\frac{A}{2} + B\right] \cos\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \right] \\
&- \frac{1}{A} \left[(1-2\delta)\cos[A(1-\delta) + B] - 2\delta^2\sin\left[\frac{A}{2} + B\right] \sin\left[\frac{A}{2}(1-2\delta)\right] \right] \\
&\rightarrow \frac{1}{A} \left[\frac{2(1-\delta)}{A}, -(1-\delta)^2 + \frac{2}{A^2}, -\frac{2\delta}{A}, \delta^2 - \frac{2}{A^2} \right] \begin{bmatrix} \sin[A(1-\delta) + B] \\ \cos[A(1-\delta) + B] \\ \sin[A\delta + B] \\ \cos[A\delta + B] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

6.2.2 Limites de séries

Séries de fraction

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (6.98)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} \quad (6.99)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (6.100)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad (6.101)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \quad (6.102)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad (6.103)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad (6.104)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \quad (6.105)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^4}{960} \quad (6.106)$$

Séries trigonométriques

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \quad (6.107)$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \quad (6.108)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{r^2 - 2r \cos x + 1} \quad \text{pour } |r| < 1, x \in \mathbb{R} \quad (6.109)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1-r \cos x}{r^2 - 2r \cos x + 1} \quad \text{pour } |r| < 1, x \in \mathbb{R} \quad (6.110)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{r \cos x - r^2}{r^2 - 2r \cos x + 1} \quad \text{pour } |r| < 1, x \in \mathbb{R} \quad (6.111)$$

$$(6.112)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(nx) = \frac{r \sin x}{r^2 - 2r \cos x + 1} \quad \text{pour } |r| < 1, x \in \mathbb{R} \quad (6.113)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{r^2 - 2r \cos x + 1} \quad \text{pour } |r| < 1, x \in \mathbb{R} \quad (6.114)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin(nx)}{n} = \arctan \frac{r \sin x}{1 - r \cos x} \quad \text{pour } |r| < 1, x \in \mathbb{R} \quad (6.115)$$

$$(6.116)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = \ln \frac{1}{|2 \sin(x/2)|} \quad x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z} \quad (6.117)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n} = \ln(2 \cos(x/2)) \quad x \in]-\pi, \pi[\quad (6.118)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1} = -\frac{1}{2} \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad x \in]0, \pi[\quad (6.119)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad (6.120)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad (6.121)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad x \in]0, 2\pi[\quad (6.122)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{4} \text{signe}(x) \quad x \in]-\pi, \pi[\quad (6.123)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \quad x \in]0, \pi[\quad (6.124)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2} \quad x \in]-\pi, \pi[\quad (6.125)$$

$$(6.126)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad x \in]0, 2\pi[\quad (6.127)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} \quad x \in]0, \pi[\quad (6.128)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{6x^2 - 6\pi x + \pi^2}{24} \quad x \in]0, \pi[\quad (6.129)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3x^2}{12} \quad x \in]-\pi, \pi[\quad (6.130)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2-x} \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right) dt \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad (6.131)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3 - 4\pi x^2}{32} \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad (6.132)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} = -\int_0^x \ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) dt \quad x \in [0, 2\pi] \quad (6.133)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} \quad x \in [0, 2\pi] \quad (6.134)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \frac{\pi^2 x - \pi x^2}{8} \quad x \in [0, \pi] \quad (6.135)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \frac{2x^3 - 3\pi x^2 + \pi^2 x}{24} \quad x \in [0, 2\pi] \quad (6.136)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{\sin(nx)}{n^2} = -\frac{1}{2} \int_0^x \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right) dt \quad x \in [0, \pi] \quad (6.137)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{\sin(nx)}{n^2} = -\frac{1}{2} \int_0^x \ln\left(2 \sin t\right) dt \quad x \in [0, \pi] \quad (6.138)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n^2} = \int_0^x \ln\left(2 \cos \frac{t}{2}\right) dt \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (6.139)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi x}{4} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (6.140)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Sinc}^2 k(\varepsilon_\alpha - 2) = \frac{3 - \varepsilon_\alpha}{2(\varepsilon_\alpha - 2)} \quad \varepsilon_\alpha \in]2, 3[\quad (6.141)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{k+1} \text{Sinc} k(\varepsilon_\alpha - 2) \text{Sinc} k(\varepsilon_\alpha - 1) = \frac{-1 + (2\varepsilon_\alpha - 5)^2}{4(\varepsilon_\alpha - 2)(\varepsilon_\alpha - 1)} \quad \varepsilon_\alpha \in]2, 3[\quad (6.142)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Sinc} k(\varepsilon_\alpha - 1) = \frac{2 - \varepsilon_\alpha}{2(\varepsilon_\alpha - 1)} \quad \varepsilon_\alpha \in]2, 3[\quad (6.143)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Sinc}^2 k(\varepsilon_\alpha - 1) = \frac{(\varepsilon_\alpha - 2)(3 - \varepsilon_\alpha)}{2(\varepsilon_\alpha - 1)^2} \quad \varepsilon_\alpha \in]2, 3[\quad (6.144)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4} = \frac{1}{12} \left(-\frac{x^4}{4} + \pi x^3 - \pi^2 x^2 \right) + \frac{\pi^4}{90} \quad x \in [0, 2\pi[\quad (6.145)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^5} = \frac{1}{12} \left(\frac{x^5}{20} - \frac{\pi x^4}{20} + \frac{\pi^2 x^3}{3} \right) + \frac{\pi^4 x}{90} \quad x \in [0, 2\pi[\quad (6.146)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^6} = \frac{1}{12} \left(\frac{x^6}{120} - \frac{\pi x^5}{20} + \frac{\pi^2 x^4}{12} - \frac{\pi^4 x^2}{15} \right) + \frac{\pi^6}{945} \quad x \in [0, 2\pi[\quad (6.147)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{\pi x - x^2}{2} \quad \text{sur } [0; \pi] \quad (6.148)$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{\pi x}{4} \quad \text{sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (6.149)$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{\pi x - 2x^2}{4} \quad \text{sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (6.150)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(nx)}{n^2} = \frac{\pi x}{4} \quad \text{sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (6.151)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(nx)}{n^4} = \frac{2\pi x^3 - 3x^4}{6} \quad \text{sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (6.152)$$

Voir également [112]

6.3 Période d'un système

6.3.1 Période d'un système quelconque

On s'intéresse à la période globale (T_{sys}) d'un système quelconque où interviennent deux phénomènes physiques périodiques (périodes T_1 et T_2) qui peuvent interagir (par exemple, un réducteur à 2 étages qui ne sont pas en cascade). Le système est soumis aux excitations de fréquences $\frac{1}{T_1}$ et $\frac{1}{T_2}$, ce qui laissera une signature temporelle et fréquentielle sur les caractéristiques observées en sortie.

L'existence et l'expression de la période globale du système dépend des valeurs de T_1 et T_2 :

- Si T_1 et T_2 sont des entiers alors T_{sys} existe et sa valeur est le Plus Petit Multiple Commun des 2 périodes :

$$T_{sys} = PPCM(T_1, T_2) \quad (6.153)$$

- Si T_1 et T_2 sont des rationnelles, alors leur Plus Petite Période Commune Multiple (PPPCM) existe et elle est donnée par :

$$T_{sys} = PPPCM(T_1, T_2) = PPPCM\left(\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}\right) \quad (6.154)$$

Où $\frac{u_1}{v_1}$ et $\frac{u_2}{v_2}$ sont les représentations irréductibles des périodes et avec $\{u_1, v_1, u_2, v_2\} \in \mathbb{N}$.

On en déduit :

$$T_{sys} = \frac{1}{v_1 v_2} PPCM(u_1 v_2, u_2 v_1) \quad (6.155)$$

- Si les 2 périodes T_1 et T_2 s'expriment comme le produit d'un même irrationnelle (π) et d'un rationnel, alors la période du système existe et son expression est donnée par :

$$T_{sys} = PPCM(T_1, T_2) = \pi \frac{\pi}{v_1 v_2} PPCM(u_1 v_2, u_2 v_1) \quad (6.156)$$

- Dans les autres cas, il n'y a pas de période de fonctionnement du système complet.