



HAL
open science

Turbulence, transport et thermoélectricité dans les métaux liquides

Marlone Vernet

► **To cite this version:**

Marlone Vernet. Turbulence, transport et thermoélectricité dans les métaux liquides. Physique [physics]. École Normale Supérieure (Paris), 2023. Français. NNT: . tel-04714108

HAL Id: tel-04714108

<https://hal.science/tel-04714108v1>

Submitted on 30 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée au Laboratoire de Physique de l'ENS

Turbulence, transport et thermoélectricité dans les métaux liquides

Soutenue par

Marlone VERNET

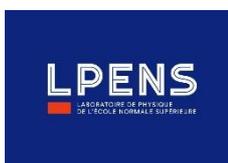
27 Octobre 2023

Ecole doctorale n° 564

Physique en île-de-France

Spécialité

Physique



Composition du jury :

Thierry, ALBOUSSIÈRE
DR CNRS, UCB Lyon

Rapporteur

Patrice, LE GAL
DR CNRS, IRPHE-CNRS

Rapporteur

Sébastien, AUMAITRE
Ingénieur de Recherche,
SPEC

Examineur

Laurette, TUCKERMAN
DR CNRS, PMMH-CNRS

Examineur

Peter, DAVIDSON
Pr, Dept. Engineering,
Cambridge Univ.

Invité

Christophe, GISSINGER
Maître de Conférence, ENS
Département de Physique

Directeur de thèse

RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur l'étude expérimentale de l'écoulement de métaux liquides en présence de forçage électromagnétique, c'est-à-dire soumis à la fois à un champ magnétique et à des courants électriques. Elle explore en particulier deux nouvelles limites de la magnétohydrodynamique. Le premier aspect est lié à la génération de turbulence képlérienne en présence de courants électriques particulièrement intenses, tandis que la seconde partie s'intéresse pour la première fois à la génération d'un effet thermoélectrique à l'interface entre deux métaux liquides. Ces deux aspects ont des applications à la fois industrielles et fondamentales.

La première partie de la thèse se concentre sur l'expérience KEPLER, constituée d'un disque fin soumis à une combinaison de champ magnétique vertical et de courants électriques radiaux intenses. Ce dispositif nous permet de mettre en évidence un nouveau régime caractérisé par un écoulement turbulent associé à un profil de rotation képlérienne. Dans ce régime, l'écoulement présente des propriétés de turbulence quasi 2D intéressantes et fournit par ailleurs une modélisation expérimentale des disques d'accrétion. Nous avons ainsi mis en évidence l'existence d'un mécanisme de transport non-dissipatif du moment cinétique par la turbulence, permettant d'expliquer les taux d'accrétion observés dans les disques astrophysiques.

Dans une seconde partie, on s'intéresse à la génération d'un effet thermoélectrique dans les métaux liquides. Le dispositif expérimental GALLIMERT implique un mélange diphasique de Mercure et de Gallium. Un courant électrique est engendré lorsque l'interface entre les deux métaux liquides est soumise à un gradient de température, et en présence d'un champ magnétique, ces courants produisent un pompage des fluides. Pour certains paramètres, une instabilité donnant lieu à un régime oscillant est observée. Ces nouveaux résultats présentent des applications directes pour les batteries à métaux liquides.

MOTS CLÉS

Magnétohydrodynamique, turbulence, transport de moment cinétique, disque d'accrétion, effet Seebeck, métal liquide, propagation de vortex

ABSTRACT

This thesis focuses on the experimental study of the flow of liquid metals in the presence of electromagnetic forcing, i.e. subjected to both a magnetic field and electric currents. In particular, it explores two new limits of magnetohydrodynamics. The first aspect relates to the generation of Keplerian turbulence in the presence of particularly intense electric currents, while the second part looks for the first time at the generation of a thermoelectric effect at the interface between two liquid metals. These two aspects have both industrial and fundamental applications.

The first part of the thesis focuses on the KEPLER experiment, which consists of a thin disc subjected to a combination of a vertical magnetic field and intense radial electric currents. This device enables us to demonstrate a new regime characterised by turbulent flow associated with a Keplerian rotation profile. In this regime, the flow exhibits interesting quasi-2D turbulence properties and also provides an experimental model of the accretion discs. We have thus demonstrated the existence of a mechanism for the non-dissipative transport of angular momentum by turbulence, making it possible to explain the accretion rates observed in astrophysical discs.

The second part looks at the generation of a thermoelectric effect in liquid metals. The GALLIMERT experimental device involves a two-phase mixture of Mercury and Gallium. An electric current is generated when the interface between the two liquid metals is subjected to a temperature gradient, and in the presence of a magnetic field, these currents produce pumping of the fluids. For certain parameters, an instability giving rise to an oscillating regime is observed. These new results have direct applications for liquid metal batteries.

KEYWORDS

Magnetohydrodynamics, turbulence, angular momentum transport, accretion disks, Seebeck effect, liquid metal, vortex travelling



Table des matières

1 Introduction	8
1.1 Introduction à la magnétohydrodynamique	8
1.2 Les équations de la MHD	12
1.2.1 Modèle à deux fluides	12
1.2.2 Équation d'induction	15
1.2.3 Électro-neutralité	17
1.3 Les nombres sans dimension en MHD	18
1.4 Interaction écoulement - champ magnétique	19
1.4.1 L'approximation quasi-statique	19
1.4.2 Pression et tension magnétique	21
1.5 Magnétohydrodynamique de laboratoire	23
1.5.1 Couches limites de Hartmann	23
1.5.2 Couches limites de Shercliff	26
1.5.3 Les gradients de courant électrique : source de vorticité	28
1.5.4 Boucles de recirculation	29
1.5.5 Recirculation des courants électriques	31
1.6 Méthode de mesure	32
1.6.1 Les sondes Doppler	33
1.6.2 Les sondes potentiel	35
1.6.3 Les sondes à effet Hall	37
1.6.4 Le bruit électromagnétique	37
1.6.5 Les métaux liquides	42
2 Turbulence engendrée par un forçage électromagnétique	43
2.1 Présentation du dispositif expérimental	45
2.2 Techniques de mesures	46
2.2.1 Mesure de pression	47
2.3 Cartographie des différents régimes d'écoulement	47
2.4 Transition entre les différents régimes	54

2.4.1	Bifurcation à la turbulence pour le régime fortement magnétisé	55
2.4.2	Bifurcation à la turbulence du régime Inertiel-Résistif	58
2.4.3	Bifurcation du régime Inertiel-Résistif au régime fortement ma-	
	gnétisé	59
2.5	Turbulence Képlerienne	60
2.5.1	Densité spectrale de puissance	61
2.5.2	Fonction de structure d'ordre 3	63
2.6	Bilan d'énergie du pompage électromagnétique	64
2.6.1	Transfert d'énergie dans les différents régimes	65
2.7	Oscillation basse fréquence en régime fortement magnétisé	67
2.8	Conclusion	68
3	Transport : considérations théoriques et applications astrophysiques	71
3.1	Transport de la Chaleur dans les fluides	71
3.1.1	Introduction	73
3.1.2	Transport de chaleur	73
3.1.3	Nombre de Nusselt	75
3.1.4	Bilan d'énergie	77
3.1.5	Importance des couches limites	79
3.1.6	Le régime <i>ultime</i> de convection thermique	79
3.2	Transport de Moment cinétique : Expérience de Taylor-Couette	84
3.3	Transport de moment cinétique : Expérience KEPLER	88
3.3.1	Équation pour le transport de moment cinétique	88
3.3.2	Transport du moment cinétique et loi d'échelle pour le Nusselt	90
3.3.3	Bilan d'énergie dans l'expérience KEPLER	93
3.3.4	Transport turbulent de moment cinétique	95
3.3.5	Loi d'échelle pour le transport turbulent	96
3.4	Transport et disques d'accrétion	99
3.4.1	Modèle hydrodynamique d'un disque d'accrétion	102
3.4.2	Transport de moment cinétique dans un disque	105
3.4.3	Comparaison avec les observations astrophysiques	107
4	La thermoélectricité en MHD	112
4.1	Introduction à la thermoélectricité	112
4.2	Thermodynamique proche de l'équilibre	113
4.3	Relations d'Onsager pour l'effet thermoélectrique	116
4.4	Illustration de l'effet thermoélectrique	118
4.5	Thermoélectricité en MHD	125

4.5.1	Équation d'induction	125
4.5.2	Forçage thermoélectrique	126
4.5.3	Équation de la température	127
5	Dispositif expérimental GALLIMERT	129
5.1	Dispositif expérimental GalliMerT	130
5.1.1	Mesure et contrôle de la température	133
5.1.2	Mesure du flux de chaleur	134
5.1.3	Mesure de potentiel	134
5.2	Système diphasique	137
5.2.1	Propriétés physiques du corps pur	137
5.2.2	Mélange Binaire Gallium-Mercure	138
5.2.3	Effet Soret	140
5.3	Gradient thermique et convection	140
5.4	Effet thermoélectrique dans GALLIMERT	142
5.5	Courant thermoélectrique dans GALLIMERT	146
5.6	Pompage thermoélectrique	148
5.6.1	Écoulement moyen	149
5.6.2	Fluctuations de vitesse	153
5.7	Mesure du flux de chaleur	153
5.7.1	Transport de chaleur dans les Tokamaks	156
5.8	Applications aux batteries à métaux liquides	159
5.8.1	Fonctionnement d'une batterie à métaux liquides	159
5.8.2	Instabilités MHD	161
5.8.3	Effet thermoélectrique	162
5.9	Conclusion	165
6	Instabilité, oscillation et vortex	166
6.1	Oscillation basse fréquence	166
6.2	Propagation azimuthale de vortex	168
6.3	Bifurcation en fonction de la température à champ magnétique constant	173
6.4	Bifurcation en fonction du champ magnétique à température constante	180
6.5	Régime oscillant à grand nombre de Hartmann	184
6.5.1	Limite quasi-2D en MHD	187
7	Annexes	195
7.1	Invariance de Galilée de la MHD	195
7.1.1	Transformation des champs électrique et magnétique	195

7.1.2	Transformation de Lorentz du quadri-vecteur courant	197
7.1.3	Invariance de l'équation d'induction	198
7.2	Coefficients de transport	198
7.3	Thermoélectricité en présence d'un pseudo-vecteur	202
7.4	Bilan d'énergie en TE-MHD	205
7.4.1	Bilan d'énergie cinétique	206
7.4.2	Bilan d'énergie magnétique	207
7.4.3	Bilan d'énergie interne	208
7.4.4	Bilan d'entropie en TE-MHD	211
7.4.5	Équation pour la température en TE-MHD	212
7.5	Dérive en température des sondes de champ magnétique	214

Remerciements

Je remercie chaleureusement mes rapporteurs, Thierry Alboussière et Patrice Le Gal pour le temps passé à examiner ce travail, leur recul bienvenu ainsi que leurs remarques pertinentes. Je remercie également mes examinateurs, Laurette Tuckerman, Sebastien Aumaître et Peter Davidson pour leur regard avisé sur ce travail. Je remercie enfin l'ensemble des membres du jury pour avoir accepté d'en être membre ainsi que de leur gentillesse lors de nos échanges.

Je tiens ensuite à remercier mon directeur de thèse, Christophe Gissinger, pour l'encadrement luxueux qu'il m'a été donné la chance d'avoir et à travers lequel j'ai eu le loisir de travailler. L'adjectif "luxueux", pouvant paraître ronflant de prime abord, il exprime pourtant parfaitement la qualité de l'enseignement scientifique, la pédagogie et l'abnégation avec laquelle Christophe s'occupe de ses étudiants. J'ai énormément appris lors de nos très nombreuses discussions sur les divers domaines concomitant à mon travail de thèse, que ce soit en physique non-linéaire, en MHD, en turbulence et en astrophysique. Ces quelques lignes résument donc assez maladroitement le soutien scientifique, technique et humain sur lequel j'ai pu me reposer et ce toujours dans une humeur joyeuse empreint d'une motivation sans faille. J'ai également pu apercevoir une face plus cachée, littéraire, lors de la rédaction du présent manuscrit dont les nombreuses relectures et remarques ont indéniablement augmenté la qualité de cette thèse (en tempérant notamment mon indéfectible amour des parenthèses).

Je remercie tout particulièrement Stéphan Fauve pour m'avoir permis de pénétrer dans le monde de la MHD expérimentale, d'avoir toujours su répondre avec sagacité à mes questionnements. Il faut dire que Stéphan réfléchit, notamment aux idées de manipes, comme le font les meilleurs joueurs d'échec, c'est-à-dire toujours avec plusieurs coups d'avance. Je remercie également Stéphan et le reste de l'équipe permanente pour l'incroyable accumulation de matériel qui permet la réalisation d'expériences dans un luxe certain.

Dans la droite ligne de ces remerciements vient l'inévitable François Pétrélis, le Michael Scott de l'équipe, de par sa joie et son côté perturbateur mais qui est un atout scientifique redoutable. Certains ont notamment pu faire les frais de ses arguments

de symétrie lors des séminaires de groupe¹. Je te remercie enfin pour nos nombreuses discussions autour du premier café de la journée.

Je remercie enfin le maître Jedi de la turbulence de l'équipe, Alexandros Alexakis avec lequel j'ai eu le plaisir régulier de discuter. Je remercie également son entrain et sa motivation particulière lors des séminaires de groupe.

Je remercie les membres de mon comité de thèse, Basile Gallet et Emmanuel Baudin, pour leur nombreuses questions pertinentes ainsi que leur précieux conseils techniques et scientifiques, notamment sur la thermoélectricité dont les premières phases expérimentales se sont avérées particulièrement rotor.

Je remercie mes petits potes de D24, Valentin Mouet pour notre collaboration intense dans l'enseignement autant des TD d'hydro que des TP mais également pour nos nombreuses discussions sur le bruit électromagnétique inhérent à la S11. Je remercie mes co-bureaux, Florentin Daniel pour sa curiosité insatiable des sujets qui animent les expérimentateurs et pour son enseignement du numérique, au même titre que Nicolas Muller. Je remercie dans le même temps les agrégés-taires de S11, Guillaume Bermudez, pour notre collaboration enrichissante, Martin Caelen, pour nos nombreuses discussions sur le covid ou les punaises de lit, et enfin Baptiste Correge, merci pour votre bonne humeur ainsi que votre infatigable bouillonnement intellectuel qui contribue à animer la vie scientifique (mais pas que!) de l'équipe. Comme il y a bien souvent quelque chose de continu dans ce genre de dynamique, et qu'une thèse est également un moment de transition entre une époque et une autre, je remercie pour les mêmes raisons les anciens de l'équipe que j'ai eu le plaisir de rencontrer à savoir, Gaurav Prabhudeshai, Adrian van Khan, Stéphane Perrard, Maxime Lanoy, Aliénor Riviere, Alexis Bres, et Michael Pereira.

L'aventure expérimentale au département de physique ne serait se passer du puissant levier technique. A ce titre je remercie les membres passés et présents du bureau d'étude, Nabil Garoum, Arnaud Leclercq, Damien Lebaron ; de l'atelier, Mathieu Sardin, Jose Da Silva Quintas, mais aussi Laurent Bonnet et Philippe Pace du service électronique. Je remercie également l'équipe de Didier Courtiade et Catherine Gripe pour leur incroyable efficacité.

Une expérience ne saurait se monter sans financement et je ne peux que remercier chaleureusement l'aide fournie par le service des gestionnaires, Annie Ribaudeau, Benoit Paulet, Dephine Rolland, Christine Chambon et bien d'autres.

J'ai également énormément appris de mon expérience de monitorat auprès de Fré-

1. Séminaire de groupe : à l'opposé des réunions d'équipe qui structurent souvent les groupes de recherche, le séminaire de groupe de physique Non-Linéaire est avant tout un lieu où, dans la droite ligne de l'esprit critique, l'abattage est régulièrement pratiqué. Si celui-ci peut apparaître quelque peu barbare à l'œil néophyte, il est incontestablement moteur de progrès scientifique pour celui qui si soumet, et plaisant pour celui qui si adonne.

déric Moisy pour les TD d'hydrodynamique et je suis heureux d'avoir rencontré Eric Guineveu et Jakob Reichel lors du re-lancement des TP à Montrouge. Je remercie ainsi les nombreux élèves avec qui j'ai eu la chance d'interagir pour leur motivation et leur curiosité insatiable.

Je remercie ma famille, mes oncles et tantes, mes cousins, cousines, Mathieu, Doris et Maïlys pour tous ces moments partagés au ski et pour animer nos réunions de famille, ma cousine Maud pour nous avoir gardé petits, mon frère et moi, malgré notre intérêt précoce pour la turbulence, ma Tatie pour tous ces doux moments passés à Lyon, Miche et Lulu pour nous avoir fait découvrir tant de belles choses. Enfin je vous remercie tous pour tous ces moments passés ensemble qui participent à structurer un cercle fort sur lequel se reposer.

Je remercie mes parents, qui au-delà de m'avoir toujours soutenu, notamment en nous offrant ce petit havre de paix et de paradis dans nos montagnes ou à la mer, entre les fondues et les pierrades qui ont bercé notre enfance, ont fortement participé à éveiller ma curiosité scientifique dès mon plus jeune âge. Je ne serais pas ce que je suis sans vous.

Je remercie mon frère, Melvin, pour être ce complice éternel au sens de l'humour infatigable. Merci pour ta présence généreuse, même dans les moments difficiles.

Je remercie mes amis d'enfance de Morzine qui participent à ce que je me sente chez moi à chaque retour à la montagne (même si mes retours se sont faits plus rares dernièrement). Je remercie mes amis de prépa et de l'ENS pour m'avoir apporté un cadre nourrissant au-delà du monde scientifique tout en supportant mes nombreuses dérivés. Je n'oublierai jamais nos nombreuses soirées autant que les escapades qui nous a été données de vivre aux quatre coins de la France.

Le plus fort de ces remerciements va à Morgane, au-delà de m'avoir quotidiennement soutenu, a été d'un grand secours lors de la fin de la thèse. Sans toi, je serais probablement mort de faim, sale, les cheveux au niveau des épaules et le poil dru, durant la rédaction. Merci également pour ta vaillante relecture du manuscrit (ainsi que ce des remerciements!). Ayant la double particularité d'être daltonien et dyslexique, tu m'as permis d'éviter les fautes de goût, les colormap mauve-violet ainsi que de drastiquement contenir mon indéniable créativité orthographique.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction à la magnétohydrodynamique

Les premières observations expérimentales de la force de Laplace furent réalisées par Ørsted et Ampère en 1820 [1], suivies par une description théorique obtenue par Lorentz 1895 [2]. Faraday tenta dès 1832 de réaliser des mesures dans la Tamise de la force électromotrice engendrée par l'écoulement d'eau faiblement salée et réalisa ainsi le premier générateur MHD [3]. Cependant, il fallu attendre le début du XXe siècle pour voir émerger le premier travail expérimental sérieux sur les pompes électromagnétiques. En 1918, Hartmann réalise la première ébauche de son dispositif et mène une première étude. Ses résultats théoriques complets comme expérimentaux ne seront publiés qu'en 1937 [4]. La Figure 1.1 montre le schéma de son dispositif. Des bobines fixées sur un entrefer génèrent un champ magnétique $H = B/\mu$ stationnaire canalisé dans le fer doux. Une partie du circuit magnétique est retirée et constitue le canal où le liquide conducteur, ici du mercure liquide, est acheminé par le circuit hydraulique R . Les parois verticales sont isolées électriquement. N et S désignent les "pôles" du champ magnétique. La faible épaisseur du canal garantit l'homogénéité du champ magnétique. Deux électrodes E_1 et E_2 font office de parois horizontales et la différence de potentiel appliquée à leur borne impose un courant électrique I vertical. La loi de Laplace indique que le conducteur subit une force orthogonale au plan contenant H et I , notée F sur le schéma. Depuis la réalisation de ce dispositif, les pompes électromagnétiques peuvent être classées en deux catégories distinctes :

- Les premières suivent le principe d'Hartmann. Le forçage électromagnétique résulte de l'application d'un champ magnétique et d'une densité de courant tous deux stationnaires. L'ordre de grandeur du courant et du champ magnétique varient d'un dispositif à l'autre mais les courants électriques sont généralement plutôt faibles $I < 100 A$, tandis que le champ magnétique est plutôt intense $B \geq 1 T$,

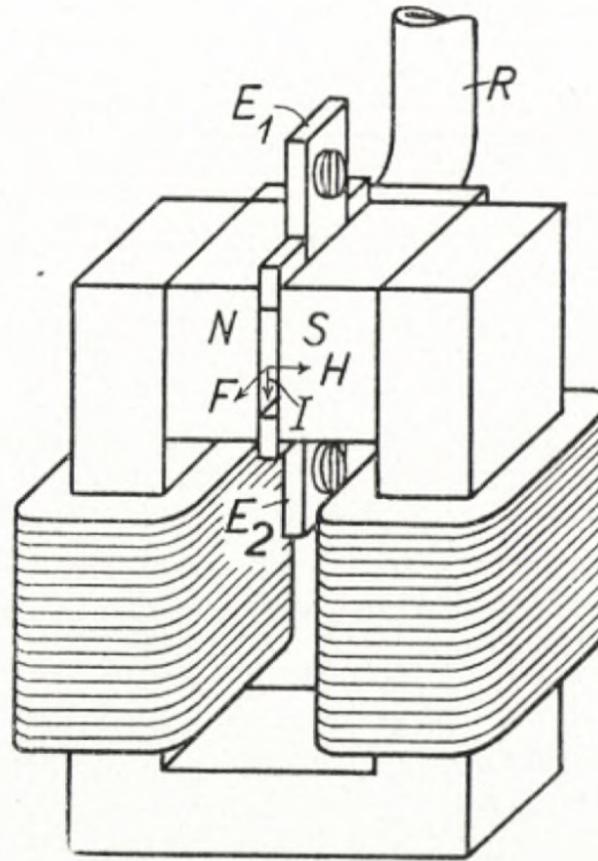


FIGURE 1.1 – Schéma de la première pompe électromagnétique réalisée par Hartmann. N, S "pôles" du champ magnétique. H champ magnétique. R circuit hydraulique. E_1, E_2 électrodes. I courant électrique. F force (de Laplace) [5].

comme dans le dispositif de [6].

- Les secondes suivent le principe du moteur à induction linéaire et portent parfois le nom de pompe d'Einstein-Szilard. Un champ magnétique oscillant se propage proche de la surface du métal liquide. Les courants induits engendrés dans le métal liquide se couplent à l'onde magnétique progressive pour mettre le fluide en mouvement, suivant la loi de Lenz. Ces dernières ont notamment été l'objet d'étude de la thèse de doctorat de M. Pereira [7] et ne seront pas davantage développées ici.

Dans les deux cas, les pompes électromagnétiques ont fait l'objet d'un intérêt certain étant donné leurs avantages intrinsèques : l'absence de pièce mécanique évite les contraintes mécaniques et donc les risques de casse. Cela simplifie leur entretien car elles n'ont pas besoin d'être graissées régulièrement. Les axes traversants, cauchemar des ingénieurs d'étude pour les pompes hydrauliques, sont d'importants risques de fuite qui disparaissent avec les pompes électromagnétiques.

Après le travail d'Hartmann [4], les premières études expérimentales impliquant un

forçage stationnaire se concentrent sur l'évolution de l'écoulement moyen en fonction du forçage. Les expériences de Baylis [8, 9] portent sur un système que l'on pourrait qualifier de moderne dans le sens où un écoulement axisymétrique est engendré dans une cuve cylindrique, comme le montre la Figure 1.2. Les parois horizontales sont isolantes électriques tandis que les cylindres interne et externe sont conducteurs et permettent d'imposer une distribution radiale de courant. Le dispositif est plongé dans un champ magnétique vertical isotrope et homogène. Le forçage est orthogonal aux plans de symétrie vertical et l'écoulement est donc azimuthal. Les couches limites sur les parois orthogonales aux lignes de champ magnétique portent le nom de couches limites d'Hartmann. Les couches limites parallèles aux lignes de champ magnétique portent le nom de couche limite de Shercliff. Leurs importances respectives pour les expériences de MHD nécessitent qu'elles soient développées en détail dans la section 1.5. Bien que le

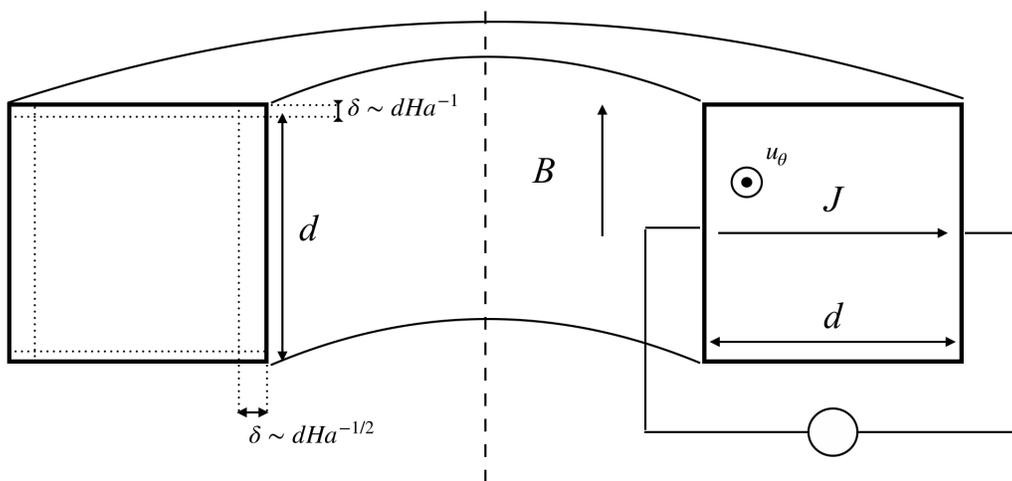


FIGURE 1.2 – Schéma du dispositif expérimental rapporté dans [8, 9].

système décrit par la Figure 1.2 semble simple, l'axisymétrie rend le système prompt au développement d'instabilités. La présence de parois horizontales implique notamment pour les écoulements azimuthaux, la présence de boucles de recirculation, comme les vortex de Dean [10-13]. Pour ces systèmes il est possible de définir le nombre de Dean, $De = Re\sqrt{D/2R_c}$, avec Re le nombre de Reynolds, D le diamètre de la conduite et R_c le rayon de courbure. Bien que les différentes propriétés des conduites courbées influencent la transition à la turbulence, une dynamique générale reste présente. Au dessus de $De > 40$, le système transite d'un écoulement laminaire à la présence de deux vortex, de polarités opposées et qui peuvent osciller. Au delà de $De > 60-70$, ces vortex se stabilisent, indice d'une seconde bifurcation. Pour $De > 75-200$, les vortex peuvent onduler, se mélanger voire se scinder en plus petits vortex. Enfin, pour $De > 300-400$, ces boucles de recirculation transitent vers un régime chaotique et turbulent. Ce n'est que récemment que la question de la stabilité des couches limites dans ces systèmes

fût plus amplement étudiée. Il a d’abord été montré que la déstabilisation des écoulements fortement magnétisés peut avoir lieu à travers une déstabilisation de la couche limite d’Hartmann [14]¹, ou dans certains cas, par une déstabilisation des couches limites de Shercliff [15]². Des instabilités centrifuges ont également été observées [16, 17]. Dans les cuves cylindriques de hauteur plus grande que l’écart entre les cylindres, il a parallèlement été montré que les termes d’inertie pouvaient forcer l’apparition d’ondes propagatives [18, 19]. Plus récemment, l’apparition d’instabilité de Kelvin-Helmholtz en présence de couches de cisaillement a fait l’objet de travaux expérimentaux récents [20, 21].

Au regard de la littérature, la bifurcation à la turbulence de ces systèmes semble encore peu étudiée, tout comme les régimes où le forçage est dominé par l’injection de courant, en présence de champ magnétique faible $B < 1 T$. Le chapitre 2 s’attache ainsi à décrire les différents régimes d’écoulement obtenus dans une expérience MHD à grand rapport d’aspect, l’expérience KEPLER, forcée électromagnétiquement, à l’aide de courants électriques injectés importants. La transition entre les différents régimes et la bifurcation à la turbulence est également étudiée. Le chapitre 3 étudie à travers le même montage expérimental l’efficacité du transport de moment cinétique par la turbulence, avec une application directe aux disques d’accrétion en astrophysique. Il se trouve que l’expérience KEPLER permet d’obtenir des régimes qui dépendent finalement peu du forçage puisqu’ils existent également pour des expériences où les courants électriques sont produit de façon différente, comme lorsque les courants sont d’origine thermoélectrique. Le chapitre 4 vise donc à introduire un nouveau type de forçage peu connu en MHD basé sur l’effet thermoélectrique entre deux fluides. Le chapitre 5 porte sur un dispositif basé sur ce principe, l’expérience GALLIMERT. Ce forçage particulier présente notamment des applications industrielles dans les systèmes de refroidissement des Tokamaks ainsi que dans les batteries à métaux liquides. Enfin, le chapitre 6 présente tout d’abords une instabilité obtenue dans l’expérience GALLIMERT puis une discussion qui lie les régimes obtenus à grand champ magnétique dans les expériences KEPLER et GALLIMERT aux écoulements géostrophiques.

Un soin particulier sera toujours attaché à l’obtention de lois d’échelle en vue de pouvoir directement appliquer nos résultats à des systèmes industriels ou des objets astrophysiques. Pour commencer, le chapitre qui suit consiste en une introduction des équations de la MHD, de ses nombres sans dimension ainsi que certains phénomènes propres aux écoulements magnétisés, comme les couches limites de Hartmann et de Shercliff. Pour une introduction plus complète de la MHD, voir les livres de P. Roberts [22] ou de P. Davidson [23].

1. couche limite orthogonale aux lignes de champ magnétique
 2. couches limites parallèles aux lignes de champ magnétique

1.2 Les équations de la MHD

1.2.1 Modèle à deux fluides

Les équations de la magnétohydrodynamique constituent une approximation dans laquelle les particules de fluide sont supposées neutres d'un point de vue électrostatique, leur densité de charge est quasi-nulle. L'expression de ces équations peut s'obtenir à l'aide de l'approximation à deux fluides détaillée dans ce paragraphe. Le fluide est supposé contenir deux espèces, les ions et les électrons. Les grandeurs relatives à chaque espèce sont notées à l'aide d'un indice i pour les ions et e pour les électrons. L'hypothèse quasi-neutre stipule que la densité de particules n est approximativement la même pour les ions et pour les électrons. Dans le cas où les ions sont supposés simplement ionisés, donc de charge $Z = +1$ il vient que $n_i \simeq n_e \simeq n$. Les propriétés thermodynamiques des ions et des électrons sont supposées homogènes sur des longueurs typiques grandes devant le libre parcours moyen de sorte qu'il est possible de définir des quantités telles que la pression p_i, p_e et la température T_i, T_e , pour les deux espèces. Les particules de fluide pour les ions et les électrons, suivent les équations de Navier-Stokes :

$$nm_i \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = -\nabla p_i + nm_i \nu \nabla^2 \mathbf{u}_i + ne(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) + nm_i \nu_{ei}(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \quad (1.1)$$

$$nm_e \frac{D\mathbf{u}_e}{Dt} = -\nabla p_e - ne(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) + nm_e \nu_{ie}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e), \quad (1.2)$$

où D/Dt désigne la dérivée particulière, \mathbf{u}_i le champ de vitesse des ions, \mathbf{u}_e le champ de vitesse des électrons, \mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{B} le champ magnétique et enfin ν_{ei} et ν_{ie} ont la dimension inverse d'une fréquence et interviennent dans le terme d'échange de quantité de mouvement entre espèces. Ces termes de transferts de quantité de mouvement sont volontairement simplifiés mais peuvent être pris de façon générale [24]. L'important est de vérifier la troisième loi de Newton qui stipule que la quantité de mouvement d'une particule de fluide contenant ions et électrons est conservée. La somme de ces deux termes doit donc être nulle :

$$nm_i \nu_{ei}(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) + nm_e \nu_{ie}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = 0. \quad (1.3)$$

Il est possible d'obtenir à l'aide de ces deux équations, l'équation bilan de quantité de mouvement pour une particule fluide électriquement neutre et la loi d'Ohm. À proprement parler, les électrons suivent une équation d'Euler puisque l'équation pour les électrons ne fait pas intervenir de viscosité. La cause en est que l'échange de quantité de mouvement avec les ions domine complètement l'échange de quantité de mouvement

électron-électron :

$$nm_e \frac{D\mathbf{u}_e}{Dt} = -\nabla p_e - ne(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) + nm_e \nu_{ie}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e), \quad (1.4)$$

La fréquence des électrons étant très élevée, $\nu_{ie} \sim 10^{14} - 10^{15} Hz$, pour un métal, le terme d'inertie peut être négligé dans l'équation pour les électrons, pour des temps grands devant $1/\nu_{ie}$:

$$0 \simeq -\nabla p_e - ne(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) + nm_e \nu_{ie}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \quad (1.5)$$

Cette équation peut se réécrire afin de déterminer le champ électrique en fonction des autres variables :

$$\mathbf{E} = \frac{m_e \nu_{ie}}{e}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) - \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne} \nabla p_e, \quad (1.6)$$

Il est possible ensuite de faire apparaître la densité de courant électrique $\mathbf{j} = ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$:

$$\mathbf{E} = \frac{m_e \nu_{ie}}{ne^2} \mathbf{j} - \frac{ne}{ne}(\mathbf{u}_e + \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i) \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne} \nabla p_e. \quad (1.7)$$

Il est possible d'identifier le terme en facteur de \mathbf{j} dans le membre de droite à l'inverse de la conductivité électrique $\sigma = ne^2/m_e \nu_{ie}$, comme dans le modèle de Drude. De plus, le terme en facteur de \mathbf{B} contient la différence $\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$, proportionnelle à \mathbf{j} et un terme en \mathbf{u}_i . Comme le rapport $m_e/m_i < 10^{-3}$, la vitesse d'une particule de fluide est approximativement égale à la vitesse d'une particule de fluide composée d'ions, à la même position et au même instant, de sorte que :

$$\mathbf{u} = \frac{m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e}{m_i + m_e} \simeq \mathbf{u}_i. \quad (1.8)$$

En remplaçant \mathbf{u}_i par \mathbf{u} et en injectant l'expression des courants dans l'équation (1.7), il est possible d'obtenir la loi d'Ohm généralisée dans les fluides conducteurs :

$$\boxed{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} + \frac{1}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne} \nabla p_e.} \quad (1.9)$$

Le deuxième terme du membre de droite correspond au freinage des électrons par effet Hall, effet négligeable dans les métaux puisque la fréquence des collision ν_{ie} est grande devant la pulsation cyclotron (ou fréquence de Larmor) ω_c . Il est possible de définir un

nombre sans dimension, le paramètre de Hall, H_l , tel que :

$$H_l = \frac{\sigma |\mathbf{j} \times \mathbf{B}|}{|ne\mathbf{j}|} = \frac{\omega_c}{\nu_{ie}}, \quad (1.10)$$

avec $\omega_c = eB/m_e$. En ordre de grandeur, pour un métal $\nu_{ie} \sim 10^{15} \text{ Hz}$ et $\omega_c \sim 10^{10} \text{ Hz}$, pour un champ magnétique de 0.1 T et $H_l \sim 10^{-5}$. Ce terme pourra donc être négligé par la suite :

$$\boxed{\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\sigma}{ne} \nabla p_e.} \quad (1.11)$$

Le dernier terme, correspond au gradient de pression électronique, est négligé dans la quasi-totalité des travaux portant sur la MHD dans les métaux liquides. Il sera cependant montré dans les derniers chapitres que ce terme peut jouer un rôle important, voire même être responsable de la dynamique. Une démonstration plus rigoureuse de ce terme sera réalisée en conséquence dans le chapitre sur la thermoélectricité [4]. Dans les plasmas froids, une hypothèse simple est de poser que les électrons suivent la loi des gaz parfaits de sorte que $p_e = nk_B T_e$, avec k_B la constante de Boltzmann. Excepté pour les chapitres sur la thermoélectricité et l'expérience GALLIMERT, ce terme pourra être négligé dans la loi d'Ohm. Enfin, cette équation est bien la loi d'Ohm locale dans le référentiel du fluide en mouvement. Comme les équations de Navier-Stokes sont invariantes sous l'effet de la transformation de Galilée, la loi d'Ohm obtenue vérifie également cette symétrie. Dans le référentiel du fluide en mouvement, les champs \mathbf{E}' et \mathbf{B}' , sont donnés en fonction des champ \mathbf{E} et \mathbf{B} , dans le référentiel du laboratoire par la transformation :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}. \quad (1.13)$$

Ces relations se retrouvent grâce à la transformation de Lorentz appliquée aux champs électrique et magnétique, dans la limite $u/c \rightarrow 0$. La démonstration générale est laissée en Annexe [7.1]. Afin d'obtenir l'équation pour le champ de vitesse \mathbf{u} , injecter l'expression pour le champ électrique donné par (1.6) dans l'équation de Navier-Stokes pour les ions donne :

$$nm_i \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + nm_i \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (1.14)$$

où a été injectée la conservation locale de quantité de mouvement dans une particule fluide pour le couple électron-ion et où la pression totale se note $p = p_i + p_e$. En notant

$\rho = nm_i$, la densité locale de particule, l'équation le champ de vitesse \mathbf{u} devient :

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}}, \quad (1.15)$$

$$(1.16)$$

L'équation de Navier-Stokes fait maintenant intervenir la force de Laplace. Lorsqu'en l'absence de champ magnétique et d'écoulement, un champ électrique est appliqué à un métal liquide, le différentiel de masse ion/électron produit une mise en mouvement des électrons, ce qui génère une distribution de courant \mathbf{j} . Lorsque par la suite, un champ magnétique est appliqué, les électrons sont légèrement déviés. Du fait de la quasi-neutralité, les ions subissent alors une force proportionnelle à l'écart de vitesse entre les ions et les électrons, ce qui met le fluide en mouvement.

1.2.2 Équation d'induction

La dynamique des fluides conducteurs de l'électricité est liée à l'électromagnétisme à travers la présence de la force de Laplace et de la présence des champs électrique et magnétique.

Il est donc naturel de réintroduire les équations qui régissent l'électrodynamique. La densité de charge électrique locale se note $\rho_e = n_i - n_e$, ϵ_0 est la permittivité diélectrique et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. Les métaux liquides utilisés ne sont pas ferromagnétiques et dans toute la suite $\mu_r \simeq 1$. Le champ électrique \mathbf{E} et le champ magnétique \mathbf{B} obéissent aux équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (\text{Maxwell-Gauss}) \quad (1.17)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (\text{Maxwell-Faraday}) \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{Maxwell-Thomson}) \quad (1.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}. \quad (\text{Maxwell-Ampère}) \quad (1.20)$$

L'équation de Navier-Stokes faisant directement intervenir le champ magnétique et la distribution de courant, il est naturel de chercher une équation pour le champ magnétique afin de fermer le système d'équation. Injecter la loi d'Ohm dans l'équation de

3. En électrodynamique des milieux continus on appelle le champ magnétique la grandeur $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$, avec \mathbf{M} l'aimantation. \mathbf{B} porte alors le nom d'induction magnétique ou densité de flux magnétique. En pratique, comme dans toute la suite les métaux, liquides ou solides, ne sont pas ferromagnétiques, \mathbf{H} et \mathbf{B} sont égaux à une constante près et on identifiera toujours \mathbf{B} au champ magnétique.

Maxwell-Ampère conduit à :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}, \quad (1.21)$$

où $c = 1/(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$, est la vitesse de la lumière. Le rotationnel de cette équation permet d'obtenir à l'aide de la relation de Maxwell-Faraday une équation sur le champ magnétique uniquement :

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \sigma \partial_t \mathbf{B} + \sigma \mu_0 \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.22)$$

qui est l'équation d'évolution pour le champ magnétique. En pratique, comme les vitesses considérées sont toujours faibles devant la vitesse de la lumière⁴, la dynamique ne sera jamais relativiste et le premier terme du membre de gauche de l'équation est négligeable. Cette simplification revient à négliger les ondes électromagnétiques, ce qui est raisonnable car les fluides conducteurs agissent comme des filtres passe-bas sur les ondes électromagnétiques. Les ondes électromagnétiques ne peuvent pas se propager dans les métaux au-delà de la longueur de peau, d'épaisseur typique $\delta \sim \sqrt{2/\mu_0 \sigma \omega}$ où ω est la pulsation de l'onde⁵. Lorsque les ondes électromagnétiques sont négligées, l'équation pour le champ magnétique devient :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (1.23)$$

Cette équation porte le nom d'équation d'induction car elle ne décrit pas seulement le champ magnétique dans les fluides en mouvement mais dans n'importe quel conducteur, y compris les conducteurs solides. Cette équation est analogue à l'équation pour la vorticité, où ici $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$ est la diffusivité magnétique, de dimension $L^2.T^{-1}$. Enfin, bien que les ondes électromagnétiques soient négligées, cette équation n'interdit cependant pas le couplage sous forme d'onde avec le champ de vitesse comme les ondes d'Alfvén ou les ondes magn tosoniques mais ces ondes sont des modes hydromagn tiques. Bien que les équations de l'électrodynamique soient invariantes sous la transformation de Lorentz, l'équation d'induction, qui ferme le système d'équations de la MHD, est bien invariante sous l'effet de la transformation de Galilée.

4. Elles sont même faibles devant la vitesse du son pour ce qui est des métaux liquides en laboratoire.

5. Il est possible de s'en convaincre en injectant dans l'équation pour le champ magnétique une onde plane progressive $e^{i(\omega t - kx)}$ avec k complexe.

1.2.3 Électro-neutralité

La dérivation des équations de la MHD basée sur le modèle à deux fluides repose notamment sur l'hypothèse de quasi-neutralité des particules de fluide, hypothèse qu'il est possible de vérifier *a posteriori*. En effet, la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère donne l'équation de conservation de la charge :

$$\partial_t \rho_e + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (1.24)$$

dans laquelle on peut injecter l'expression pour la distribution de courant donnée par la loi d'Ohm. On obtient une équation pour la densité de charge ρ_e :

$$\partial_t \rho_e + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho_e = -\sigma \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.25)$$

où σ/ϵ_0 est homogène à une fréquence et est de l'ordre de $10^{17} - 10^{18} \text{ Hz}$. Son inverse est un temps correspondant au temps typique de décharge d'un conducteur sous l'effet de la répulsion électrostatique. Si un conducteur présente une densité de charge en volume non-nulle, les forces électrostatiques vont expulser les charges à la surface de celui-ci. Ce phénomène est extrêmement court, bien inférieur à l'ensemble des temps caractéristiques en MHD, y compris au temps entre deux chocs électron-ion, de l'ordre de 10^{-15} s . Il est donc possible de considérer que la densité de charge évolue de façon quasi-statique avec l'écoulement :

$$\rho_e = -\epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (1.26)$$

La présence d'une densité de charge non nulle demande donc de comparer la force électrodynamique qui en résulte dans Navier-Stokes à $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$:

$$\frac{|\rho_e \mathbf{E}|}{|\mathbf{j} \times \mathbf{B}|} \sim \frac{\epsilon_0 U B_0}{l} \frac{E}{j B_0} \quad (1.27)$$

$$\sim \frac{\epsilon_0 U \sigma E}{\sigma l j} \quad (1.28)$$

$$\ll 1, \quad (1.29)$$

où B_0 et E sont des ordres de grandeur typiques de champ magnétique et de champ électrique, U et l sont des ordres de grandeur pour l'écoulement, le rapport $\epsilon_0 U/\sigma l$ est donc nécessairement petit et l'approximation de quasi-neutralité pour la MHD dans les métaux liquides est bien vérifiée.

1.3 Les nombres sans dimension en MHD

Comme souvent en mécanique des fluides, la MHD présente une grande variété de dynamiques, de forces et de temps caractéristiques dont les comparaisons mutuelles entraînent l'utilisation d'un certain nombre de quantités sans dimension dont les principales sont rappelées ici. Les chapitres sur le transport de moment cinétique et la thermoélectricité seront également l'occasion d'introduire d'autres nombres plus spécifiques.

- **Nombre de Reynolds** : est le nombre qui quantifie le rapport entre l'inertie et la dissipation visqueuse dans Navier-Stokes :

$$Re = \frac{|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|} = \frac{UL}{\nu}, \quad (1.30)$$

où U et L sont respectivement une vitesse et une longueur typique et ν est la viscosité cinématique.

- **Nombre de Hartmann** : il quantifie le rapport entre la partie inductive de la force de Laplace et la dissipation visqueuse dans Navier-Stokes :

$$Ha^2 = \frac{|\sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|}{|\rho \nu \nabla^2 \mathbf{u}|} = B_0^2 L^2 \frac{\sigma}{\rho \nu}, \quad (1.31)$$

où B_0 est une grandeur typique de champ magnétique, ρ la densité et σ la conductivité électrique.

- **Nombre de Stuart** (paramètre d'interaction) : il représente le rapport entre la partie inductive de la force de Laplace et l'inertie :

$$N = \frac{|\sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|}{|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|} = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}. \quad (1.32)$$

- **Nombre de Prandtl magnétique** : est le nombre qui quantifie le rapport entre les temps de diffusion du champ de vitesse et du champ magnétique. C'est un rapport de diffusivité moléculaire :

$$Pm = \frac{\nu}{\eta} = \mu_0 \sigma \nu, \quad (1.33)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

- **Nombre de Reynolds magnétique** : est l'équivalent du nombre de Reynolds pour l'équation d'induction puisqu'il compare le terme de transport du champ

magnétique et le terme d'induction sur le terme de diffusion :

$$Rm = \frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{B}|} = \frac{UL}{\eta} = PmRe. \quad (1.34)$$

- **Nombre d'Alfven** (Mach Alfvénique) : c'est le nombre de Mach basé sur la vitesse d'Alfven $v_A = B_0 \sqrt{\rho \mu_0}$. Les ondes d'Alfven correspondent à la propagation de modes transverses de vitesse et de champ magnétique le long des lignes de champ magnétique :

$$Al = \frac{u}{v_A} = \frac{U \sqrt{\rho \mu_0}}{B}. \quad (1.35)$$

D'un point de vue purement dimensionnel il correspond au rapport de l'inertie sur le tenseur de Maxwell.

- **Nombre Magnétique** : Ce nombre n'est pas souvent défini dans les problèmes de MHD car tous les systèmes MHD n'impliquent pas forcément l'utilisation de courants électriques injectés depuis l'extérieur du système. Il mesure l'intensité de la force de Laplace qu'exercent les courants injectés en présence de champ magnétique :

$$H = \frac{I_0 B_0 l}{\rho \nu^2}, \quad (1.36)$$

où I_0 correspond à l'injection de courant électrique dans le système. Par ailleurs, le produit $[I_0 B_0] = M.T^{-2}$ a la dimension d'une énergie surfacique (ou d'une force linéique, comme la tension de surface).

1.4 Interaction écoulement - champ magnétique

1.4.1 L'approximation quasi-statique

L'équation d'induction qui décrit l'évolution du champ magnétique est :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (1.37)$$

Si les évolutions temporelles de champ magnétique se produisent sur un temps visqueux L^2/ν , elles seront négligeables devant la diffusion magnétique. En effet, $|\partial_t \mathbf{B}|/|\eta \nabla^2 \mathbf{B}| \sim Pm \ll 1$ pour un métal. De même, si le temps typique de variation temporelle de \mathbf{B}

est déterminé par un temps de retournement, alors :

$$\frac{|\partial_t \mathbf{B}|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{B}|} \sim \frac{UL^2}{L\eta} \quad (1.38)$$

$$\sim Rm, \quad (1.39)$$

Pour un métal liquide, en général $Pm \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, et comme $Rm = PmRe$, il faut atteindre de très grands nombres de Reynolds pour avoir des Rm de l'ordre de l'unité. Dans toutes les expériences qui vont suivre, $Re < 10^6$ et donc $Rm < 1$, les variations temporelles de champ magnétique sont donc plus rapides que les variations du champ de vitesse et le champ magnétique a toujours le temps de relaxer les perturbations dues au champ de vitesse. Autrement dit, les variations de champ magnétique suivent de façon "instantanée" les variations du champ de vitesse et le champ magnétique peut se décomposer en deux contributions : $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{b}$, où B_0 est constant et selon l'axe \mathbf{e}_z et correspond au champ magnétique imposé depuis l'extérieur tandis que \mathbf{b} est le champ induit, supposé petit. L'équation d'induction s'écrit sous forme linéarisée au premier ordre en $O(b)$:

$$0 = B_0 \partial_z \mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{b}. \quad (1.40)$$

Cette relation donne en ordre de grandeur $b \sim Rm B_0$, la limite bas Rm indique donc que les champs magnétiques induits sont petits devant le champ magnétique imposé et que les phénomènes d'instabilité tels que l'effet dynamo sont proscrits [25]. Une autre conséquence de l'approximation quasi-statique est la génération de champ magnétique induit par la présence d'un écoulement, même stationnaire, comme le montre la Figure 1.3. Si en l'absence de diffusion et de cisaillement, les lignes de champ sont simplement advectées, la présence de cisaillement dans l'écoulement en présence d'un champ magnétique transverse B_s induit nécessairement la génération de champ magnétique dans la direction de l'écoulement b_n . En dynamique stellaire et plus généralement dans les systèmes présentant de la rotation différentielle ce mécanisme porte parfois le nom d'effet *omega*, (*ω effect*). Cet effet est plus général et ne nécessite pas l'approximation quasi-statique mais il est important de noter qu'il a lieu également à bas Rm .

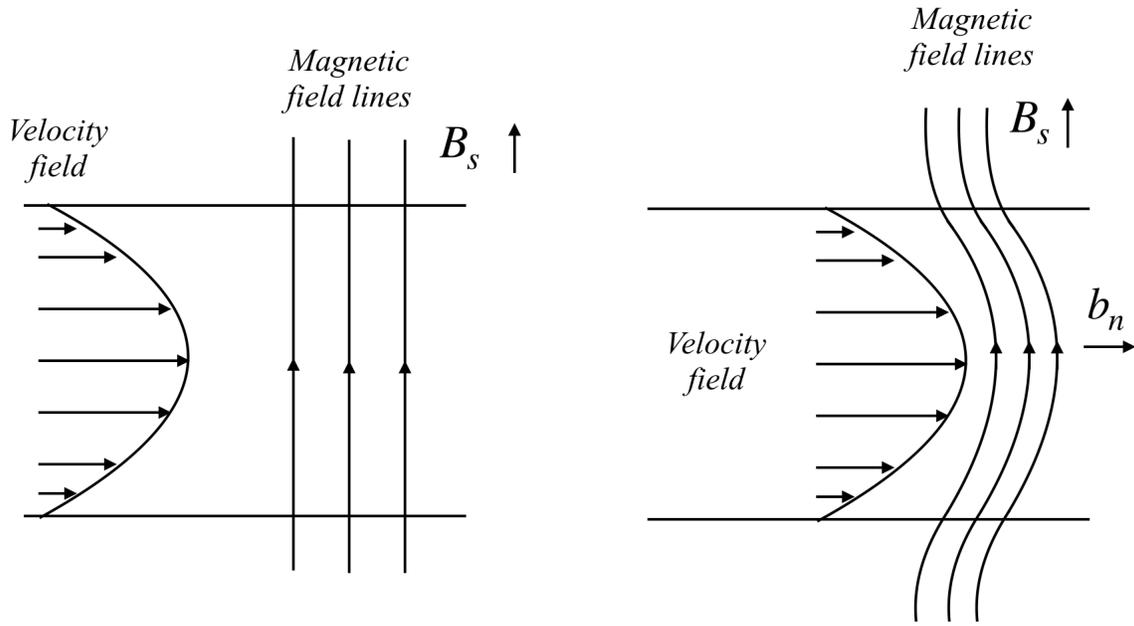


FIGURE 1.3 – Déformation des lignes de champ magnétique par la présence d'un écoulement stationnaire orthogonal aux lignes de champ.

1.4.2 Pression et tension magnétique

Le forçage électromagnétique dans l'équation de Navier-Stokes peut se réécrire en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère et la formule de Bernoulli :

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B})}{\mu_0} \times \mathbf{B} \quad (1.41)$$

$$= -\nabla \underbrace{\left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)}_{\text{Pression magnétique}} + \underbrace{\mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right)}_{\text{Tension magnétique}}, \quad (1.42)$$

Le terme $B^2/2\mu_0$ appelé *pression magnétique* agit comme un terme de pression additionnel dans l'équation de Navier-Stokes, tandis que le second terme porte le nom de *tension magnétique*. En effet, ce terme s'interprète comme une réponse élastique à la déformation des lignes de champ par l'écoulement. En coordonnées curvilignes ce terme se développe usuellement :

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \mathbf{B} = \partial_s \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{e}_s - \frac{B^2}{\mu_0 \mathbf{R}} \mathbf{e}_n, \quad (1.43)$$

où s désigne la coordonnée curviligne le long des lignes de champ magnétique, \mathbf{e}_s le vecteur unitaire tangent, \mathbf{e}_n le vecteur normal et \mathbf{R} le rayon de courbure du cercle osculateur. La situation, analogue à l'effet ω , présentée dans la section précédente est alors considérée : un écoulement, sous l'effet du cisaillement, déforme les lignes de champ

magnétique transverses à la conduite. Le champ magnétique présente alors une composante normale, dans la direction de l'écoulement, voir Figure 1.4. La partie normale de

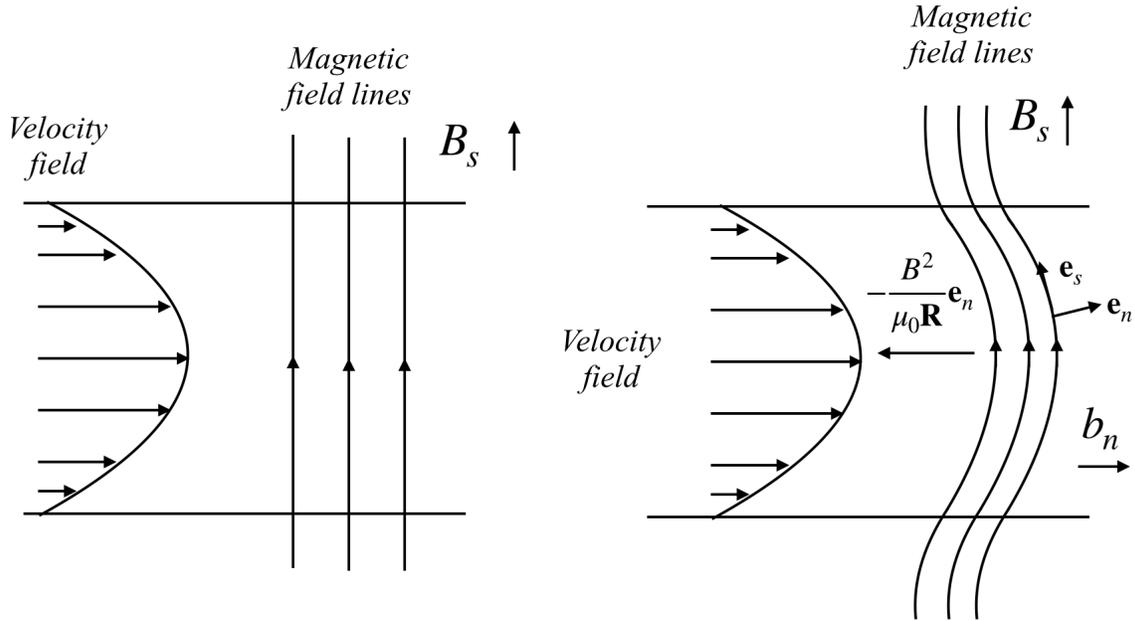


FIGURE 1.4 – La tension magnétique tend à freiner le fluide et ainsi à diminuer la cause de la déformation des lignes de champ.

la tension magnétique s'oppose à la déformation des lignes de champ par l'écoulement et agit comme une force de friction sur le fluide. Dans la limite quasi-statique, la tension magnétique se réécrit en fonction de B_0 et \mathbf{b} , et donc du champ de vitesse :

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \partial_z \mathbf{b} = -\sigma B_0^2 \partial_z^2 \nabla^{-2} \mathbf{u}, \quad (1.44)$$

où l'opérateur ∇^{-2} désigne l'inverse de l'opérateur Laplacien. Dans l'espace de Fourier, cette force de frottement supplémentaire s'écrit :

$$\hat{f} = -\sigma B_0^2 \frac{k_z^2}{|\mathbf{k}|^2} \hat{\mathbf{u}}, \quad (1.45)$$

de sorte que cette force de friction tend à réduire les gradients de vitesse le long des lignes de champ magnétique et joue donc le rôle d'une force de frottement anisotrope. Cet effet est analogue au théorème de Taylor-Proudman pour les écoulements en rotation. Les paragraphes suivants s'attachent à étudier le rôle de cette force de friction magnétique pour les couches limites en MHD.

1.5 Magnétohydrodynamique de laboratoire

La présence de couches limites est inhérente à la majorité des expériences MHD de laboratoire sur les métaux liquides. Les expériences KEPLER et GALLIMERT développées aux chapitres 2,3 et 5, présentent toutes deux des forçages axisymétriques, et donc des effets de courbure. Il est donc naturel de revenir sur quelques principes simples relatifs notamment aux différents types de couches limites et de recirculations qui apparaissent dans ces systèmes.

1.5.1 Couches limites de Hartmann

La particularité de la MHD est le lien étroit qui existe entre les couches limites et la distribution des courants électriques notamment à grand champ magnétique. En effet, lorsque le nombre d'Hartmann est important et que les effets inertiels sont négligeables, l'équation de Navier-Stokes peut se réduire à l'équation suivante :

$$0 = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \rho\nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right), \quad (1.46)$$

En prenant deux fois le rotationnel de l'équation (1.46), dans lequel est injectée l'expression pour le Laplacien de \mathbf{b} donné par l'équation (1.40), il vient :

$$\nabla^2\nabla^2\mathbf{u} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho\nu}\partial_z^2\mathbf{u} = 0. \quad (1.47)$$

En notant l la longueur typique dans la direction du champ B_0 , et U l'ordre de grandeur de la vitesse, cette équation s'adimensionne et donne :

$$\boxed{\nabla^2\nabla^2\mathbf{u} - Ha^2\partial_s^2\mathbf{u} = 0}, \quad (1.48)$$

où Ha est le nombre d'Hartmann et s la coordonnée le long de l'axe du champ magnétique. Pour les couches limites sur les parois orthogonales au champ magnétique, le bi-laplacien va être dominé par les dérivées selon s . En ordre de grandeur, l'équilibre donné par l'équation précédente implique :

$$\partial_s^4\mathbf{u} \sim Ha^2\partial_s^2\mathbf{u}. \quad (1.49)$$

En ordre de grandeur, la taille typique des couches limites d'Hartmann, $\partial_s \sim \delta^{-1}$ suit donc la loi d'échelle $\delta/l \sim Ha^{-1}$. C'est également à travers ces couches que passent les courants qui circulent dans les plans orthogonaux aux lignes de champ magnétique. En

effet, l'équation (1.46) peut se réécrire dans l'approximation quasi-statique :

$$0 = -\nabla \left(p + \frac{b^2}{2\mu_0} \right) + \rho\nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{b}}{\mu_0} \right), \quad (1.50)$$

équation qui s'inverse pour obtenir \mathbf{u} en fonction des autres variables du problème. Injecter \mathbf{u} dans l'équation pour l'approximation quasi-statique (1.40) donne :

$$\frac{B_0}{\rho\nu}\partial_z\nabla^{-2} \left(\nabla \left(p + \frac{b^2}{\mu_0} \right) - \frac{B_0}{\mu_0}\partial_z\mathbf{b} \right) + \eta\nabla^2\mathbf{b} = 0, \quad (1.51)$$

où ∇^{-2} désigne l'inverse du laplacien. Le Laplacien de cette équation donne l'équation pour le champ magnétique induit \mathbf{b} :

$$\frac{B_0}{\rho\nu}\partial_z \left(\nabla \left(p + \frac{b^2}{\mu_0} \right) - \frac{B_0}{\mu_0}\partial_z\mathbf{b} \right) + \eta\nabla^2\nabla^2\mathbf{b} = 0. \quad (1.52)$$

Le rotationnel de cette équation donne l'équation pour la distribution de courant électrique \mathbf{j} où la pression et la pression magnétique disparaissent :

$$\nabla^2\nabla^2\mathbf{j} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho\nu}\partial_z^2\mathbf{j} = 0. \quad (1.53)$$

Cette équation devient sous forme adimensionnée :

$$\boxed{\nabla^2\nabla^2\mathbf{j} - Ha^2\partial_s^2\mathbf{j} = 0.} \quad (1.54)$$

Cette équation est la même que pour la vitesse donnée par (1.48). Si l'on considère une distribution de courant parallèle à une paroi isolante électrique et orthogonale aux lignes de champ magnétique, alors les courants électriques seront contraints de circuler dans une nappe le long de la paroi d'épaisseur δ_{Ha} . En effet, l'équation pour les courants électriques est la même que pour le champ de vitesse et l'estimation (1.49) reste valide. Physiquement cela provient du fait que dans le coeur de l'écoulement, les courants induits s'opposent aux courants injectés et $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \simeq 0$. Loin des parois, la viscosité et l'inertie sont négligeables dans ce régime et l'équilibre est magnéto-statique [26, 27]⁶ mais pas sans écoulement :

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0. \quad (1.55)$$

6. Cet équilibre est analogue à l'équilibre géostrophique. Pour les écoulements géostrophiques, les isobares sont confondues aux lignes de courants. Pour l'équilibre magnéto-statique, les isobares sont confondues aux lignes b_z constant lorsque la distribution de courant est comprise dans des plans orthogonaux à B_0 .

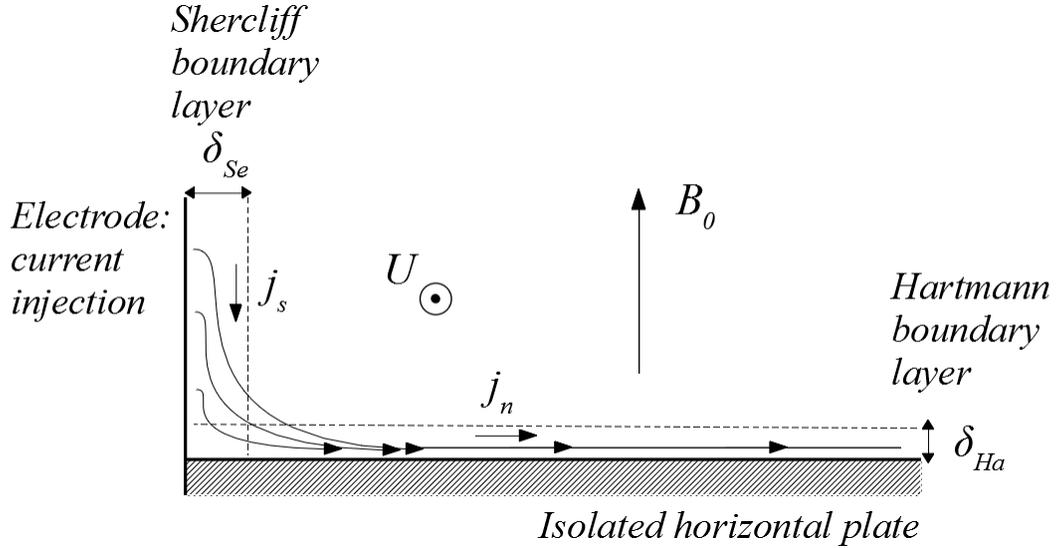


FIGURE 1.5 – Schéma des différents types de couches limites en MHD à grand nombre de Hartmann. Couche limite de Shercliff au niveau de l’injection des courants électriques sur l’électrode parallèle au champ magnétique. Couche limite de Hartmann sur la paroi horizontale, isolante électrique.

Le problème est alors inversé, l’équation de Navier-Stokes détermine les courants tandis que le champ de vitesse est donné par la loi d’Ohm. Si la distribution de courant est imposée par un potentiel électrique ϕ et que le champ magnétique est constant dans le volume, la loi d’Ohm donne une relation pour u_n , la vitesse normale au champ magnétique.

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \phi + \sigma \mathbf{u}_n \times \mathbf{B}_0. \quad (1.56)$$

Le rotationnel de cette relation donne :

$$\partial_n j_s - \partial_s j_n = \sigma B_0 \partial_s u_n, \quad (1.57)$$

où les indices s et n sont, respectivement, les coordonnées parallèle et orthogonal aux lignes de champ magnétique. Dérivée cette équation par rapport à s et injecter la conservation de la charge, implique que $\partial_s j_s + \partial_n j_n = 0$, ce qui donne :

$$-\nabla^2 j_n = \sigma B_0 \partial_s^2 u_n. \quad (1.58)$$

Cette équation peut s’écrire dans l’espace de Fourier :

$$\tilde{u}_n = \frac{-1}{\sigma B_0} \frac{k_s^2 + k_n^2}{k_s^2} \tilde{j}_n. \quad (1.59)$$

Loin des parois verticales et de l’injection des courants, les courants induits s’opposent aux courants injectés, ce qui donne lieu à la présence d’un écoulement. Par conservation de la charge, les courants électriques passent donc là où le champ de vitesse disparaît, c’est-à-dire au niveau des couches limites sur les parois horizontales, comme le montre la Figure [1.5](#).

1.5.2 Couches limites de Shercliff

La Figure [1.5](#) montre que, à grand Hartmann, les parois parallèles aux lignes de champ magnétique présentent également des couches limites qui suivent une loi d’échelle en fonction de Ha différente des couches limites de Hartmann. Cette section vise à démontrer cette loi d’échelle à travers un exemple différent de celui représenté sur la Figure [1.5](#).

En 1953, Shercliff [\[28\]](#) réalise le premier calcul du profil de vitesse pour un écoulement de Hartmann rectiligne engendré par un gradient de pression constant et soumis à un champ magnétique transverse dans un canal de section rectangulaire. Sa solution fait apparaître des couches limites parallèles aux lignes de champ magnétique sur les parois, de taille supérieure aux couches limites d’Hartmann. Braginskii [\[29\]](#) remarque que ces couches limites peuvent également apparaître au niveau de couches de cisaillement libres et Shercliff en fait l’un des points de sa *review* de 1971 [\[27\]](#). Les couches limites de Shercliff sont donc les couches limites colinéaires aux lignes de champ magnétique. L’étude de la distribution des courants électriques à travers ces couches a suscité de nombreux travaux théoriques [\[9, 30, 31\]](#). Leurs tailles typiques évoluent comme $\delta_{se} \sim lHa^{-1/2}$ et sont présentes dans tous les dispositifs MHD expérimentaux. Pour le rôle des couches de Shercliff de type cisaillement libre dans la transition à la turbulence 2D on pourra notamment se référer au travail expérimental de Messadek & Moreau [\[6\]](#). Enfin, il a été montré récemment que dans les dispositifs de Taylor-Couette soumis à un champ magnétique, les couches limites de Shercliff libres se déstabilisent à travers le mécanisme de Kelvin-Helmoltz [\[32, 33\]](#). À titre d’exemple, ce paragraphe reproduit l’argument donné par Shercliff [\[27\]](#) pour la taille typique d’une couche de cisaillement libre. Un schéma de cette situation est représenté sur la Figure [1.6](#) : Le point C sur la Figure [1.6](#) représente une ligne conductrice, orthogonale au plan de la Figure, insérée sur une plaque isolante, placée à un potentiel plus faible que le potentiel de la plaque supérieure, conductrice. Le courant \mathbf{j} se décompose en une composante normale aux lignes de champs B_0 , j_n , qui va être responsable d’un écoulement dans la direction orthogonale au plan, et une composante j_s , collinéaire à B_0 . La conservation de la

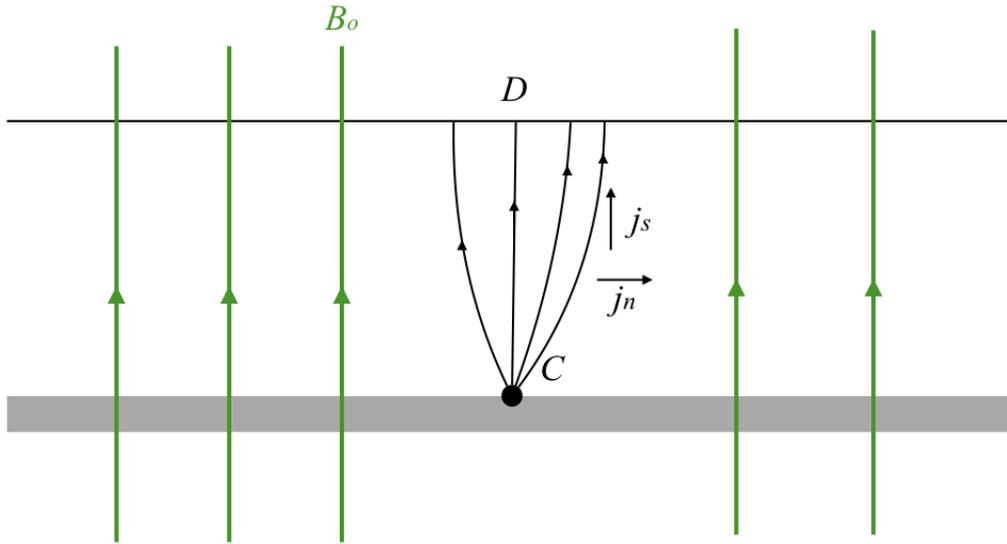


FIGURE 1.6 – Couche limite de Shercliff pour un cas simple.

charge implique, par invariance par translation dans la troisième direction :

$$\partial_s j_s + \partial_n j_n = 0. \quad (1.60)$$

Cela implique qu'en ordre de grandeur $j_n \sim (\delta/l)j_s$, où l est la distance entre les plaques et δ la couche limite de Shercliff. Dans tout le reste du fluide, excepté proche des parois, la densité de courant imposée est exactement compensée par les courants induits, excepté dans une couche de largeur δ proche de la ligne $C - D$. Dans cette couche, la force de Laplace $|\mathbf{j} \times \mathbf{B}| \sim j_n B_0$, est compensée par la dissipation visqueuse où le Laplacien est dominé par la taille typique δ :

$$u \sim \frac{\delta^3}{l} \frac{j_s B_0}{\rho \nu}. \quad (1.61)$$

La loi d'Ohm locale donne $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B}$. En supposant un état stationnaire où

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$, le rotationnel de la loi d'Ohm implique :

$$\partial_n j_s - \partial_s j_n = -\sigma \partial_s (uB), \quad (1.62)$$

$$\text{i.e } \partial_n^2 j_s - \partial_{ss}^2 j_s = -\sigma \partial_{sn}^2 (uB) \quad (1.63)$$

$$(1.64)$$

En ordre de grandeur, $j_s/\delta \sim \sigma u B_0/l$. Injecter l'expression de la vitesse obtenue précédemment implique en simplifiant par j_s :

$$\frac{l^2}{\delta^4} \sim \frac{\sigma B_0^2}{\rho\nu}. \quad (1.65)$$

L'expression finale pour δ_{Se} est donc :

$$\boxed{\delta_{Se} \sim \frac{l}{Ha^{1/2}}}. \quad (1.66)$$

Pour ce qui est des parois solides parallèles aux lignes de champ comme présentée sur la Figure 1.5, il existe un argument similaire à celui développé pour les couches limites de Hartmann en utilisant l'équation (1.48). Le bilaplacien étant dominé par les dérivées normales aux lignes de champ, l'équilibre devient :

$$\partial_n^4 \mathbf{u} \sim Ha^2 \partial_s^2 \mathbf{u}, \quad (1.67)$$

qui implique en ordre de grandeur que $\delta_{Se} \sim lHa^{-1/2}$. Il est à noter que dans certains contextes, les couches de cisaillement peuvent suivre une loi d'échelle en $Ha^{-1/4}$ mais celles-ci ne seront pas développées ici [34].

1.5.3 Les gradients de courant électrique : source de vorticité

Lorsque l'inertie est négligeable et que le nombre de Hartmann est grand, l'approximation quasi-statique réduit l'équation de Navier-Stokes à l'équation suivante :

$$0 = -\nabla \left(p + \frac{b^2}{2\mu_0} \right) + \rho\nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{b}}{\mu_0} \right). \quad (1.68)$$

Le rotationnel de cette équation donne alors une équation qui relie la vorticité $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ aux courants électriques :

$$\rho\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + B_0 \partial_s \mathbf{j} = 0, \quad (1.69)$$

Cette équation, projetée le long des lignes de champ, devient :

$$\rho\nu\nabla^2\omega_s + B_0\partial_s j_s = 0, \quad (1.70)$$

La conservation de la charge $\partial_s j_s + \partial_n j_n = 0$, permet alors d'obtenir :

$$\rho\nu\nabla^2\omega_s = B_0\partial_n j_n. \quad (1.71)$$

Reprenons le cas représenté par la Figure [1.5](#). Le champ magnétique est vertical et les courants électriques sont injectés par une électrode parallèle aux lignes de champ. Il existe donc un fort gradient normal pour la distribution horizontale de courant. En effet, les courants sont redéployés verticalement sur une échelle $lHa^{-1/2}$. D'après l'équation [\(1.71\)](#), ces fortes variations de j_n sont une source locale de vorticité (vorticité alignée avec les lignes de champ). Pour un champ magnétique donné, si la densité de courant injectée augmente, il existe une valeur seuil au delà de laquelle la dissipation ne sera pas assez grande pour contenir la vorticité à l'échelle δ_{Se} et le système basculera vers de la turbulence 2D. De la même façon, l'équation pour la vorticité [\(1.69\)](#) peut se projeter dans les plans normaux aux lignes de champ :

$$\rho\nu\nabla^2\omega_n + B_0\partial_s j_n = 0, \quad (1.72)$$

les gradients verticaux de distribution horizontale de courant sont alors une source de vorticité (cette fois orthogonale aux lignes de champ). De forts gradients de courants horizontaux dans la direction des lignes de champ peuvent donc rendre un écoulement tridimensionnel à travers une déstabilisation des couches limites d'Hartmann.

1.5.4 Boucles de recirculation

Les chapitres suivants présentent des expériences dont le forçage est axisymétrique. La présence de couvercles induit donc la génération de boucle de recirculation. Il est donc utile de revenir sur le lien entre les couches limites hydrodynamiques et la présence de recirculation dans ces écoulements. On prête souvent à Einstein la résolution du paradoxe des feuilles de thé. Ce paradoxe serait parvenu au père de la relativité de la manière suivante. De passage à Berlin, Einstein rend visite à Shr dinger. Sa femme, Mme Shr dinger en profite pour lui poser le dilemme suivant : lorsqu'elle agite le thé dans sa tasse à l'aide d'une cuillère ( coulement azimuthal), les feuilles de thé, lourdes restent au fond mais ne sont pas expulsées à l'extérieur, trompant son intuition. Ne comprenant pas pourquoi les feuilles de thé se concentrent au centre, elle pose la question à son mari. Shr dinger, ne sachant répondre se serait tourné vers Einstein. Celui-ci

en donne l'explication suivante : l'inertie du fluide lors de la rotation n'est pas égale sur toute la hauteur du fait de la friction qui existe au fond de la tasse. Ce déséquilibre amène le liquide lorsqu'il est en rotation, à présenter un deuxième écoulement sous forme de boucles poloïdales de recirculation. Einstein en profite par la suite pour publier sa réponse dans un article au *Die Naturwissenschaften* (en 1926). On arrête bien trop souvent l'anecdote à ce point de l'histoire, pourtant, c'est bien la suite qui nous donne une bonne indication des connaissances en mécanique des fluides des physiciens théoriciens de l'époque. En effet, l'article ne manque pas d'être lu par Ludwig Prandtl, le père des couches limites. Celui-ci s'empresse de répondre au journal que l'explication basée sur la présence de recirculation pour les écoulements en rotation est en fait bien connue, citant plusieurs articles de la fin du XIXe. En effet, la résolution du paradoxe des feuilles de thé est en réalité due au frère de Lord Kelvin, James Thomson, explication publiée dans un article de 1857. Bien que le principe de couche limite soit inconnu à l'époque, Thomson a l'intuition selon laquelle des "frottements" au niveau de la surface sont à l'origine de la recirculation et fait le lien avec la circulation atmosphérique [35]. Une analyse similaire pour l'écoulement dans une conduite est produite par Boussinesq en 1868 dans son *Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides* (page 419). Il conclut notamment que le mouvement curviligne d'un fluide dans un canal torique est nécessairement accompagné par un mouvement transverse formant deux tourbillons de circulations opposées, symétriques vis-à-vis du plan médian [36]. Pour les conduites courbées, Dean observe expérimentalement la présence de ces vortex en 1927 [10, 11]. Par la suite, pour les écoulements axisymétriques, Bödewadt montre que la présence d'un écoulement rotationnel au dessus d'une plaque fixe engendre des couches limites de taille typique $\delta_B \sim (\nu/\Omega)^{1/2}$ et la présence de recirculation sous la forme de spirale logarithmique, fortement analogue à la spirale d'Ekman [37]. L'origine de la recirculation poloïdale provient de l'équilibre dans le coeur de l'écoulement entre le gradient radial de pression $\partial_r p$ et le terme de courbure de l'inertie $\rho u_\theta^2/r = \rho r \Omega^2$. Au niveau des couches limites, la vitesse tend vers zéro, l'inertie devient négligeable et la viscosité ne permet pas de maintenir cet équilibre. Le gradient de pression pousse alors le fluide vers l'intérieur. Par conservation de la masse, le fluide est alors éjecté vers l'extérieur dans le coeur de l'écoulement, comme le montre la Figure 1.7. La recirculation de Bödewadt est donc particulièrement analogue à la recirculation d'Ekman. Cependant, la recirculation d'Ekman se produit à bas nombre de Rossby, lorsque l'inertie est négligée devant la force de Coriolis, en conséquence, l'équilibre est géostrophique : le gradient de pression s'équilibre avec la force de Coriolis, linéaire en Ω . La recirculation de Bödewadt est quant à elle un effet non-linéaire puisqu'elle provient de l'équilibre entre le gradient de pression et l'inertie. L'effet produit sur la dynamique globale est tout de

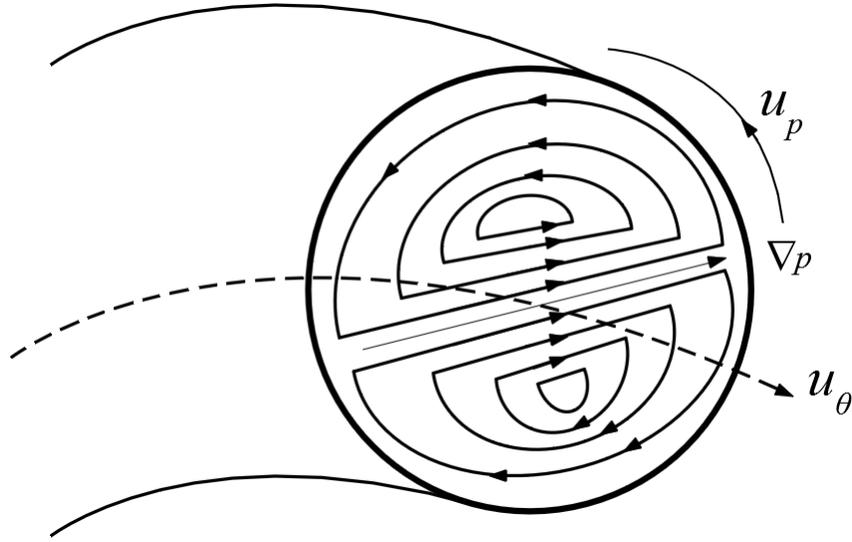


FIGURE 1.7 – Boucle de recirculation poloïdale u_p dans une conduite torique en présence d'un écoulement azimuthal (toroïdal) imposé u_θ .

même équivalent, la recirculation poloïdale va engendrer une force d'inertie $-\rho\Omega\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{e}_r$ qui va tendre à freiner l'écoulement azimuthal. C'est notamment ce couple qui freine rapidement l'écoulement dans une tasse de thé lorsque l'agitation est supprimée [38].

1.5.5 Recirculation des courants électriques

En MHD, un phénomène équivalent à la recirculation poloïdale pour les écoulements rotationnels existe pour les courants électriques. En effet, lorsque qu'un champ magnétique transverse est appliqué à un écoulement rectiligne U dans un canal en présence de parois isolantes, un potentiel électrique $\mathbf{U} \times \mathbf{B}_0$ apparaît dans le coeur de l'écoulement, comme le montre la Figure 1.8. Cette force électromotrice n'est pas compensée au niveau des bords puisque la vitesse y tend vers zéro. Ce déséquilibre induit une différence de potentiel qui entraîne l'apparition de boucles de courant [39]. La section précédente a montré que la recirculation de Bödewadt engendre une force de Coriolis qui tend à freiner l'écoulement rotationnel. De même, les boucles de recirculation des courants entraînent une force de Laplace dans le coeur de l'écoulement qui tend à freiner l'écoulement. À la différence de Bödewadt, ce mécanisme, qui suit la loi de Lenz, ne dépend pas de la courbure et est présent dans tous les écoulements MHD en présence de parois solides et de champ magnétique imposé depuis l'extérieur.

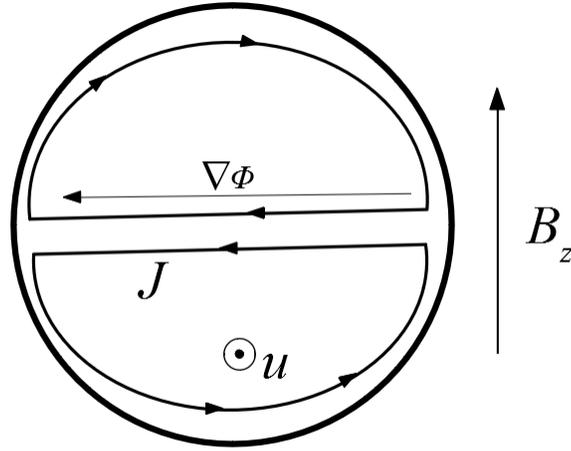


FIGURE 1.8 – Boucle de recirculation des courants électriques par la présence d'un champ magnétique transverse à un écoulement rectiligne.

Couche limite de Bödewadt-Hartmann

Lorsque l'on considère des écoulements MHD rotationnels en présence de champ magnétique transverse, les différents phénomènes présentés plus haut sont présents et leur poids dans la dynamique est paramétré par un nombre sans dimension [38]. Lorsque le champ magnétique est très intense, les couches limites d'Hartmann sont plus petites que les couches limites de Bödewadt : l'écoulement présente un profil de Hartmann et la "viscosité" magnétique tend à rendre l'écoulement 2D. À l'inverse, lorsque les couches limites de Bödewadt sont plus petites que les couches limites d'Hartmann, les boucles de recirculation poloïdales rendent l'écoulement 3D. Le nombre d'Elsasser est défini comme le rapport entre ces deux tailles caractéristiques :

$$\Lambda = \frac{\delta_B^2}{\delta_{Ha}^2} = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \Omega}. \quad (1.73)$$

La transition entre le régime de Hartmann et le régime de Bödewadt se produit donc pour Λ proche de l'unité. Pour la stabilité de ce type de couche limite on pourra notamment se rapporter au travail de Moresco & Alboussière [40]. Du point de vue expérimental, on reviendra sur le rôle de la couche limite de Bödewadt-Hartmann pour la transition à la turbulence dans le chapitre sur KEPLER.

1.6 Méthode de mesure

Cette dernière partie introductive vise à présenter différentes méthodes de mesure qui ont été utilisées pour les expériences présentées dans la suite.

1.6.1 Les sondes Doppler

Certaines mesures de vitesse présentées dans cette thèse sont basées sur l'effet Doppler. Les sondes Doppler sont constituées d'un transducteur piezo-électrique et leur utilisation est illustrée Figure 1.9. Elles permettent d'envoyer des pulses ultra-sonores

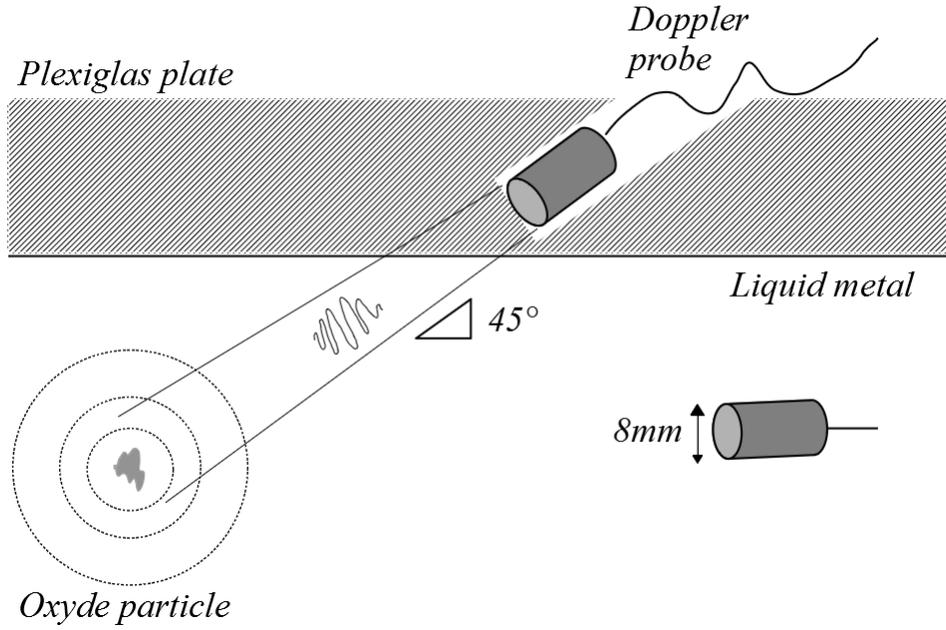


FIGURE 1.9 – Schéma d'utilisation des sondes Doppler, encastrées dans la plaque de Plexiglas à un angle de 45°.

d'une fréquence élevée dans le liquide : 2, 4 ou 8 MHz , en fonction des sondes à notre disposition. Les pulses sont ensuite réfléchis par de petites particules. La sonde émettrice peut alors être utilisée comme récepteur, mais la réception peut également être réalisée par une ou plusieurs autres sondes. L'inconvénient de cette méthode est qu'il n'existe pas à ma connaissance de particules simples d'utilisation à mettre dans un métal liquide. Comme la densité des métaux liquides est élevée, les micro-particules usuelles flottent donc à la surface. Cette méthode fonctionne donc grâce à la présence de micro-particules d'oxyde dans le métal liquide. Ce sont elles qui jouent le rôle de réflecteur pour les pulses ultra-sons. Prenons le cas d'une particule qui se déplace sur la ligne de visée de la sonde. À l'instant t_1 , un pulse est émis. Il atteint la particule à l'instant t_2 . Si la particule est de taille plus petite que la longueur d'onde, qui est de 675 μm pour le Gallium ou le Galinstan à 4 MHz , alors une très faible énergie est renvoyée vers le transducteur, il s'agit du *back scattering* ou rétro-diffusion. Cet écho est mesuré par le capteur à l'instant t_3 . La distance d de la particule au capteur est donc $d = c/2(t_3 - t_1)$ ou c désigne la vitesse du son dans le milieu. La mesure est ensuite réalisée à intervalles réguliers. Chaque point sur la ligne de visée correspond donc à

un instant d'échantillonnage différent. Autrement dit, après qu'un pulse soit émis, le capteur reçoit une série d'échos à des instants différents qui correspondent à des profondeurs différentes. La profondeur maximale explorée est donc fixée par l'intervalle de temps entre chaque pulse. Cet intervalle de temps est noté T_{PRF} , pour *Pulse Repetition Frequency*.

Ensuite, chaque pulse est constitué d'un train d'onde, de fréquence ultra-sonore, f_e . Supposons qu'un premier écho détecte après un temps T_1 une particule à la distance d_1 . L'écho suivant détecte après un temps T_2 la même particule à la position d_2 . La distance parcourue par la particule correspond donc à $\Delta d = c(T_2 - T_1)/2 = c\Delta T/2$. Le déphasage entre les deux signaux vaut $\Delta\phi = 2\pi f_e \Delta T$. De plus, entre les deux échos, la particule parcourt la distance Δd à la vitesse $v \cos \theta$ de sorte que $\Delta d = d_2 - d_1 = v \cos \theta T_{PRF}$, où θ désigne l'angle entre la vitesse et l'axe de la sonde. Les deux relations pour Δd donnent donc :

$$v \cos \theta T_{PRF} = c \frac{\Delta T}{2}. \quad (1.74)$$

Comme le vélocimètre a accès au déphasage $\Delta\phi$, il est utile d'injecter l'expression de ΔT en fonction de celui-ci :

$$v = \frac{c\Delta\phi}{4\pi f_e T_{PRF} \cos \theta}. \quad (1.75)$$

Les limites de cette méthode sont de plusieurs types. Tout d'abord, l'émission pulsée implique que le théorème de Nyquist limite la fréquence maximum mesurable à $f_{max} = f_{PRF}/2$ avec $f_{PRF} = 1/T_{PRF}$. Si une particule a une vitesse trop rapide, le déphasage $\Delta\phi$ peut donc sortir de l'intervalle $[-\pi, \pi]$. En conséquence $|\Delta\phi| < \pi$ et la vitesse maximum mesurable des particules est donc v_{max} :

$$v_{max} = \frac{c}{4f_e T_{PRF} \cos \theta}. \quad (1.76)$$

Comme il existe également une profondeur maximale $d_{max} = cT_{PRF}/2$, le produit de ces deux relations donne une expression indépendante de T_{PRF} :

$$v_{max} d_{max} = \frac{c^2}{8f_e \cos \theta}. \quad (1.77)$$

Autrement dit, pour une profondeur de ligne de visée fixée, il existe une vitesse maximale mesurable et *vice versa*. Pour une fréquence $f_e = 4 \text{ MHz}$, dans le Galinstan, $c \sim 2750 \text{ m.s}^{-1}$, une vitesse maximum de 2 m.s^{-1} et un angle de $\theta = 45^\circ$, cela donne une

profondeur maximale de $\sim 17 \text{ cm}$, ce qui ne sera pas limitant dans nos expériences⁷. Il existe de plus, proche du transducteur, une région appelée zone de Fresnel, où l'énergie du faisceau varie fortement en espace, ce qui fausse les mesures. Cette zone s'étale sur une distance L donnée par $D^2 f_e / 4c$, avec D le diamètre de la sonde. Les sondes utilisées ont un diamètre de 8 mm mais le diamètre du piézo est de 5 mm , la taille typique du champ proche est donc de $L \sim 9 \text{ mm}$. Enfin, si la taille des particules d'oxyde dépasse la longueur d'onde, alors les pulses ultra-sons ne peuvent pas se propager et le signal sature.

En pratique comme il y a énormément de particules et de réflexion, le vélocimètre doit traiter un grand nombre d'échos. Heureusement, les échos successifs émis par une même particule présentent une certaine cohérence dont les algorithmes tirent parti. Le signal est donc traité par un vélocimètre, *Doppler Signal Processing SA DOP3010* ou *DOP4000*.

1.6.2 Les sondes potentiel

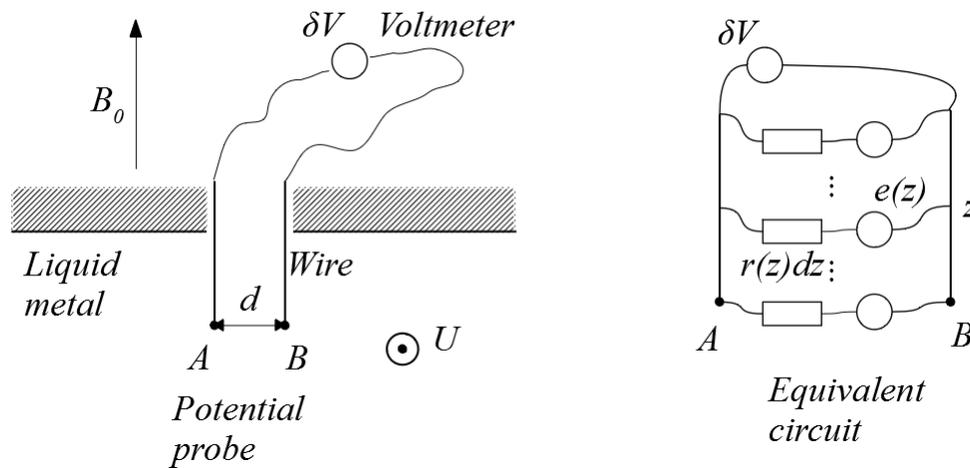


FIGURE 1.10 – Schéma de principe et circuit équivalent de la mesure de vitesse à l'aide de sonde potentielle.

Les mesures à l'aide des sondes potentiel tirent parti de la loi d'Ohm locale en MHD. En effet, celle-ci s'écrit $\mathbf{j} = -\sigma \nabla \phi + \sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ où \mathbf{j} est la densité de courant, σ la conductivité du fluide, \mathbf{u} le champ de vitesse de l'écoulement et \mathbf{B} est le champ magnétique. Lorsque l'on plonge deux broches distantes l'une de l'autre d'une distance d dans un métal liquide en mouvement (voir Figure 1.10) et que l'on mesure la différence de potentielle $\delta \phi$ on obtient, (dans le cas où seule la pointe des broches est conductrice) $\delta \phi = \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \mathbf{j} / \sigma) \cdot d\mathbf{l}$. Lorsqu'en plus, un courant électrique est imposé, le courant \mathbf{j}

7. Le même ordre de grandeur dans l'eau donne à peine 5 cm .

présente deux composantes : une composante est imposée par la génératrice de courant DC et peut être retranchée, la seconde correspond aux courants induits et peut-être considérée comme négligeable à bas Rm .

Si les électrodes sont suffisamment proches, les valeurs de U et B_0 peuvent être supposées constantes et dans ce cas $U \simeq \delta\phi/dB_0$ correspond à la vitesse moyennée sur la longueur de la broche. En pratique les plongeurs utilisés doivent avoir une bonne rigidité mécanique afin de ne pas bouger sous l'effet de l'écoulement. Leur diamètre ne doit cependant pas être trop important afin de ne pas perturber l'écoulement. Comme ils sont au contact direct du métal liquide, ils doivent résister à la corrosion et à cette fin on utilise du fil de Nickel de 1 mm de diamètre. Dans le cas où toute la longueur du fil est conductrice et non plus seulement la pointe, la mesure donne le flux de \mathbf{u} à travers l'aire qui sépare les électrodes. Un circuit électrique équivalent des deux broches permet de réaliser le petit modèle suivant. Pour chaque altitude z le long des broches, le métal liquide est modélisé par un générateur de Thévenin, muni d'une résistance linéique r , supposée constante, et une source idéale de tension $e(z)$:

$$e(z) = dzB_0 \int_0^d u(x, z)dx, \quad (1.78)$$

où $B_z \simeq B_0$, ce qui est raisonnable dans la mesure où les champs magnétiques induits sont faibles, limite bas Rm . Le théorème de Millman s'applique à l'ensemble des générateurs de Thévenin en parallèle, ce qui nous donne la tension mesurée par le voltmètre :

$$\delta V = \frac{\sum \frac{e(z)}{rdz}}{\frac{1}{rdz}}. \quad (1.79)$$

Dans l'approximation où toutes les résistances sont égales et constantes le long de z , et où la somme tend vers une intégrale pour $dz \rightarrow 0$, il vient :

$$\delta V = B_0 \int_0^d \int_0^l u(x, z)dx dz, \quad (1.80)$$

avec l la longueur des plongeurs. La tension aux bornes du voltmètre est bien proportionnelle au flux de vitesse à travers la surface délimitée par les broches. Du point de vue instrumental, les mesures de potentielles sont traitées différemment suivant que l'on veuille accéder aux fluctuations de vitesse ou à l'écoulement moyen (moyenne temporelle). Pour l'écoulement moyen, le signal est amplifié et filtré par un ampli *Standford Research Systems Model SR560* puis traité par un Nanovoltmètre *Keithley model 182*. Le signal des fluctuations de vitesse, quant à lui passe dans un ampli-filtre *Princeton Applied Research Low Noise Amplifier model 1900*. Dans les deux cas l'acquisition se

fait à l'aide d'une carte d'acquisition *National Instruments NI USB-6212*. L'amplification est nécessaire car le bruit d'entrée de la carte est de l'ordre de plusieurs mV . En ordre de grandeur, un écoulement de 1 cm.s^{-1} pour un champ magnétique de 50 mT et une distance inter-sonde $d = 1 \text{ cm}$, donne des tensions de l'ordre de $5 \mu V$. La précision de la mesure dépend fortement de l'amplitude du champ magnétique. D'autres types de sondes se passent de cette dépendance, les sondes Vives, qui font intervenir proche du fluide un petit aimant de plusieurs milliers de Gauss (10^{-1} T), leur précision est plus grande et ne dépend plus du champ magnétique extérieur mais elles présentent l'inconvénient majeur de modifier très fortement le champ de vitesse à l'endroit de la mesure. Leur utilisation est donc restreinte pour des systèmes présentant un écoulement très fort (de l'ordre du m.s^{-1}) et/ou lorsqu'il n'y a pas de champ magnétique extérieur.

1.6.3 Les sondes à effet Hall

Pour réaliser des mesures de champ magnétique, les sondes à effet Hall mettent à profit l'effet éponyme basé sur la loi d'Ohm généralisée (1.9). Cet effet est d'autant plus faible que la densité d'électrons libres est grande et est négligeable dans les métaux mais pas dans les semi-conducteurs. Ces sondes consistent donc en une pièce semi-conductrice parcourue par un faible courant électrique. Ce courant est freiné par la présence d'un champ magnétique, ce qui génère un champ électrique dans la direction normale au plan contenant \mathbf{j} et \mathbf{B} . Ce champ est mesuré par le Teslamètre grâce à une mesure de tension. Connaissant la valeur du courant appliqué, il est possible de remonter au champ magnétique normal à la plaque semi-conductrice utilisée, voir Figure 1.11. En pratique, la miniaturisation des semi-conducteurs permet d'avoir des sondes capables de mesurer le champ magnétique dans les trois directions d'espace. Le Teslamètre utilisé est un *F.W. Bell Model 7030*.

1.6.4 Le bruit électromagnétique

Dans le cas de l'expérience KEPLER comme pour l'expérience GALLIMERT, la gestion du bruit électromagnétique est une part essentielle de toute mesure expérimentale, notamment les mesures de potentielles, les mesures de pression et les mesures de potentiel thermoélectrique. La recherche de réduction de bruit m'a conduit à certaines erreurs classiques comme recouvrir les câbles coaxiaux de papier d'aluminium, voir Figure 1.12. La seconde est d'avoir mis un certain nombre de circuits électriques à la masse du secteur. Ce paragraphe vise donc à comprendre pourquoi d'une part ces tentatives se sont avérées infructueuses ainsi que quelques méthodes simples pour y remédier. Pour une introduction plus complète, voir le livre de H. Ott, *Noise Reduction Techniques in*

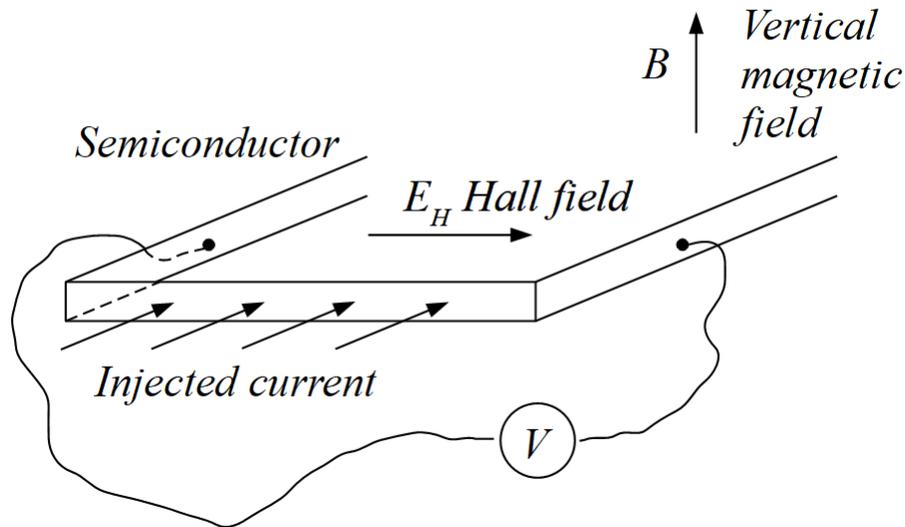


FIGURE 1.11 – Principe de la mesure du champ de Hall engendré par la présence d’une distribution de courant et d’un champ magnétique.



FIGURE 1.12 – Câble coaxial recouvert de feuilles d’aluminium, maintenues au câble à l’aide de scotch.

Electronic Systems [41]. Il existe en pratique trois grands types de bruit :

- Le bruit électromagnétique : désigne le bruit en tension ou courant généré par des sources lointaines, souvent dans le domaine radio-fréquence.
- Le bruit électrique : est dû au couplage capacitif entre les circuits et leur environnement direct, et engendre notamment des fuites de courants.
- Le bruit magnétique : est dû au couplage inductif entre les circuits et leur environnement direct.

La différence entre couplage inductif/capacitif et le bruit électromagnétique est plus terminologique que physique et prend surtout pour critère la distance à la source de bruit. Si celle-ci est lointaine, et donc souvent d’origine inconnue, on parlera plutôt de bruit électromagnétique.

Les câbles coaxiaux :

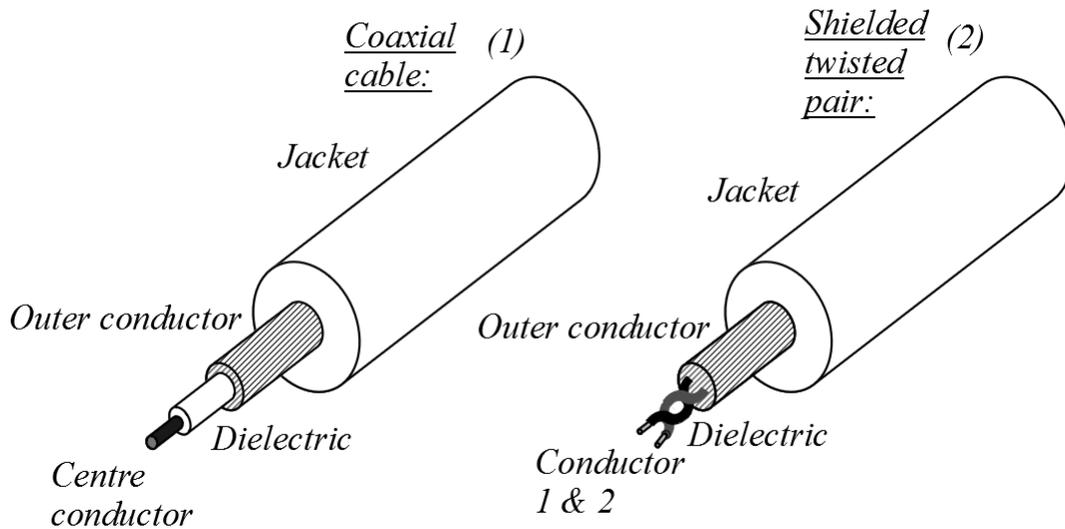


FIGURE 1.13 – Schéma de principe du câble coaxial et du bifilaire tressé blindé.

Le câble coaxial a été inventé par Heavyside en 1880 dans le cadre des communications radio transatlantiques. Son principe est rudimentaire et illustré sur la Figure 1.13 : il est constitué d'une âme conductrice centrale encastrée dans un diélectrique lui-même enroulé dans un conducteur externe que l'on appelle le blindage et qui assure le retour électrique. Leurs faibles pertes en ligne et l'harmonisation de l'usage des prises BNC ont rapidement rendu ces câbles omniprésents, notamment en physique. Si dans la majorité des cas ils ne présentent pas d'inconvénient majeur, ils sont cependant peu recommandés pour les mesures basse fréquence des petites tensions. En effet, ils sont soumis au bruit électromagnétique et d'induction de la manière suivante. Pour les fréquences au-delà du MHz, l'effet de peau isole le signal électrique qui circule sur la partie intérieure du blindage. Le signal est donc physiquement isolé du bruit magnétique de fréquence élevée qui est lui confiné par l'effet de peau, à l'extérieur de la gaine du blindage et ne vient donc pas perturber le signal. Tout se passe donc comme s'il y avait trois conducteurs : l'âme centrale, la face intérieure du blindage, retour électrique, et la face extérieure du blindage où circule le bruit électromagnétique. En revanche, pour les fréquences plus basses que le MHz, le blindage est transparent aux ondes électromagnétiques de BF et aux phénomènes d'induction. Lorsque l'on mesure de faibles tensions à des fréquences plus basses que le MHz il est donc préférable d'utiliser du câble bifilaire tressé, blindé⁸. Ces câbles se présentent sous la forme de deux conduc-

8. Il existe en fait une alternative au bifilaire, le câble triaxial, qui ressemble au câble coaxial mais qui comporte un conducteur concentrique supplémentaire. Il est cependant beaucoup plus cher et peu commode d'utilisation. Pour les mesures physiques, son usage est réservé aux mesures des petits courants. En effet, lorsque le courant mesuré $I \sim 1 \text{ nA}$, les courants de fuite dus à la résistance entre

teurs tressés en hélice afin de limiter l'aire entre les câbles et donc l'amplitude du bruit magnétique engendré par induction. La présence du blindage permet de limiter le bruit haute fréquence et le couplage capacitif avec l'environnement. En résumé :

- **BNC, signal d'intérêt HF** Pour un signal de fréquence supérieure à 1 MHz , le blindage du câble BNC suffit à isoler le signal du bruit électromagnétique haute-fréquence, bruit de fréquence $> 1\text{ MHz}$, mais le signal n'est pas isolé du bruit inductif BF, $< 1\text{ MHz}$.
- **BNC, signal d'intérêt BF** Pour un signal de fréquence inférieure à 1 MHz , le blindage du câble ne suffit à isoler le signal du bruit électromagnétique HF, i.e $> 1\text{ MHz}$. En effet, le signal n'est plus confiné à sur la face intérieure du retour électrique. Une idée possible consiste alors à enrouler le câble dans de la feuille d'aluminium commerciale. Le premier défaut de cette pratique est que la feuille d'aluminium est transparente au bruit inductif BF. En théorie, ceci permet cependant d'arrêter le bruit électromagnétique HF. En pratique, les feuilles d'aluminium alimentaires trouvées dans le commerce sont extrêmement fines, 0.02 mm et ne coupent que les fréquences supérieures à 100 MHz .
- **Bifilaire torsadé, blindé, BF** Pour les signaux BF, $< 1\text{ MHz}$, il est donc intéressant d'utiliser des câbles bifilaires torsadés, blindés. Leur torsion permet d'éviter le couplage avec le bruit inductif BF et leur blindage en aluminium d'une épaisseur de 0.2 mm permet de couper les fréquences plus grandes que 1 MHz .
- **Bifilaire torsadé, blindé, HF** Pour les signaux HF, le bifilaire torsadé blindé présente des pertes en ligne plus importantes que les câbles coaxiaux. Pour les faibles distances cependant, il présente l'intérêt d'être moins susceptible au bruit inductif basse fréquence que ces derniers.

Boucle de masse :

Les boucles de masse apparaissent dans les circuits qui sont connectés à des masses différentes entre lesquelles il existe des différences de potentiel non nulles. Ceci est vrai notamment entre les masses du secteur. Du bruit de courant circule alors dans les retours électriques et peut engendrer du bruit dans les mesures. Une façon simple de supprimer les boucles de masse est de limiter le nombre de masses qui interviennent dans un circuit, en préférant les masses instrumentales. Les mesures potentielles en constituent un bon exemple : le potentiel électrique est mesuré entre deux broches immergées dans un métal

l'âme et le blindage du coaxial ou entre les deux conducteurs du bifilaire ne sont plus négligeables et faussent les mesures. Le câble triaxial est alors l'unique solution. Ils nécessitent de plus une boucle d'asservissement de la tension du conducteur intermédiaire pour maintenir la différence de tension entre ce conducteur et le conducteur interne nul et éviter ainsi les courants de fuite.

liquide en mouvement. Les broches sont reliées au Nano-voltmètre lui même connecté à la carte d'acquisition, alimentée par l'ordinateur. La masse du Nano-voltmètre étant différente de celle de la carte d'acquisition, s'il existe une différence de potentiel entre ces masses, du bruit électrique perturbera la mesure en ajoutant une source aléatoire de tension. Une façon simple de supprimer cette boucle de masse est de régler la masse de la carte d'acquisition en flottant, ce qui isole le circuit électrique de mesure, de la masse de l'ordinateur. De façon générale, il est donc important de veiller à ce que les circuits électriques de mesure ne fassent intervenir si possible qu'une seule masse.

Mise à la masse des câbles

La mise à la masse des câbles suit de la même façon un certain nombre de règles. De la même façon qu'il peut exister des boucles de masse dans les circuits, il peut également exister des boucles de masse pour les câbles. En effet, à basse fréquence $< 1 MHz$, les câbles coaxiaux comme les bifilaires blindés ne doivent être mis qu'à une seule masse. Comme indiqué précédemment, pour les câbles coaxiaux, il est possible d'utiliser les masses flottantes des divers appareils. Quand ceux-ci ne le permettent pas, il est possible d'utiliser des transformateurs d'isolement. C'est notamment le rôle des amplificateurs bas bruit *Princeton Applied Research Low Noise Amplifier model 1900*, utilisés pour les mesures de fluctuations de vitesse. Ces transformateurs d'isolement sont purement passifs et ne nécessitent pas d'alimentation. Ils offrent un large gain, d'un facteur 10, 100 ou 1000 mais présentent l'inconvénient de couper la composante continue. Pour les câbles bifilaires blindés, il faut mettre le blindage à une seule masse, afin d'éviter que du bruit de courant ne circule à la surface de celui-ci et n'engendre un couplage inductif ou capacitif avec les conducteurs internes. L'absence totale de masse pour les câbles n'est pas bénéfique non plus car des courants induits peuvent circuler à la surface du retour électrique ou du blindage et engendrer du bruit de mesure par couplage inductif ou capacitif avec l'âme conductrice. En résumé, pour les câbles :

- Pour les câbles coaxiaux, le retour électrique doit être mis à une seule masse pour éviter que du courant ne boucle à travers les diverses masses et le retour électrique.
- Pour les câbles coaxiaux, enroulés dans de l'aluminium, l'aluminium doit être mis à une seule masse, tout comme le retour électrique.
- Pour les câbles bifilaires torsadés, blindés, le signal électrique de mesure passe par les deux conducteurs internes. Si cette tension n'est pas très élevée, il est alors conseillé de ne mettre aucun de ces conducteurs à la masse. Le blindage extérieur quant à lui doit être mis à une seule masse. Plusieurs masses engendrent le problème des boucles de masse tandis que l'absence de masse implique que des courants inductifs peuvent circuler à la surface de celui-ci, ce qui peut engendrer

du bruit de mesure, dans les conducteurs internes, par couplage capacitif. Dans le cas où un signal de forte tension parcourt les conducteurs internes, il est conseillé de mettre le retour électrique à la masse pour éviter les risques d'électrocution.

1.6.5 Les métaux liquides

Les métaux liquides tels que le Mercure, le Gallium, ou le Galinstan, demandent certaines précaution d'usage notamment parce qu'ils ont la tendance à former des alliages au contact d'autres métaux comme le Cuivre ou l'Aluminium. Ces amalgames ont souvent des propriétés mécaniques moins bonnes que les métaux d'origines : moins bonne résistance à la traction, flexion... Ceci peut causer des dommages importants sur le matériel de laboratoire. À titre d'exemple, la Figure 1.14 [42] montre la vitesse de pénétration de plusieurs couples de métaux. Le Gallium liquide sur l'Aluminium ainsi que le Mercure liquide sur le Cuivre. En pratique il faut donc éviter de faire usage du

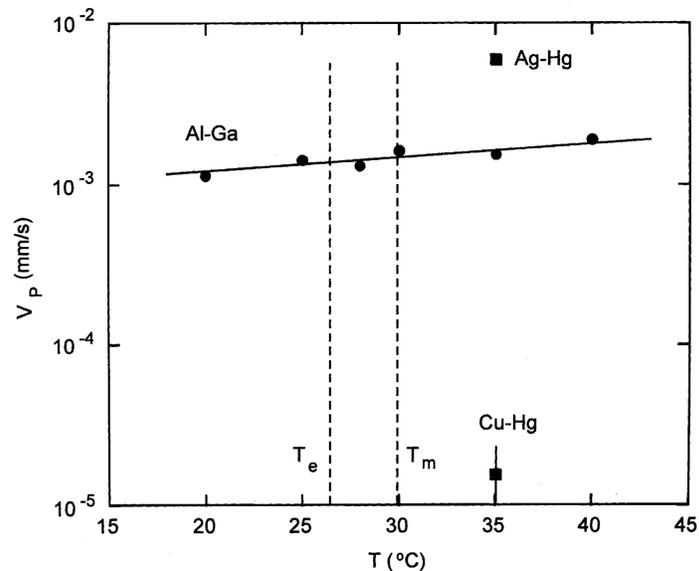


FIGURE 1.14 – Graphique montrant la vitesse de pénétration de plusieurs couples de métaux en fonction de la température. Figure issue du travail expérimental réalisé par Ina *et al.* [42].

profilé d'aluminium, autant attaqué par le Gallium que par le Galinstan ou le Mercure et les pièces en Laiton ou en Cuivre doivent être protégées, par de la résine ou une couche de nickelage. Le Nickel étant résistant à l'ensemble de ces trois métaux liquides il est également employé pour les broches. L'acier inoxydable est également résistant aux métaux liquides.

Chapitre 2

Turbulence engendrée par un forçage électromagnétique

Introduction L'expérience KEPLER est un dispositif expérimental de Taylor-Couette électromagnétique à grand rapport d'aspect. Son principe est, d'une part de reproduire expérimentalement certaines des propriétés inhérentes aux disques d'accrétion en astrophysique, voir Figure 2.1 et d'autre part d'offrir un dispositif expérimental permettant d'explorer les écoulements turbulents en magnétohydrodynamique à grand forçage.



FIGURE 2.1 – Image d'artiste d'un disque d'accrétion autour d'un objet massif, ici un trou noir. Crédit image : *Nasa/JPL-Caltech*.

Motivation astrophysique Les disques d'accrétion sont des disques de matière : gaz, poussières, roches en rotation autour d'objets massifs comme les trous noirs, les étoiles ou les planètes en formation. Comme ils sont présent à la naissance des étoiles, des planètes et des trous noirs, il s'agit de l'un des objets les plus communs de l'univers. Le principe fondamental de la dynamique, ici l'équation d'Euler, qui décrit le gaz dans ce système implique un équilibre entre l'inertie et l'attraction gravitationnelle de l'objet central avec le disque. L'interaction gravitationnelle du disque avec lui-même est faible et donc négligée. Il est possible de montrer que le gradient de pression est négligeable

devant le terme de courbure de l'inertie. En régime stationnaire, le champ de vitesse azimuthale v_θ , en coordonnées cylindriques, est donné par l'équilibre entre le terme de courbure de l'inertie et la force gravitationnelle, suffisamment loin de l'objet central :

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} \sim -G \frac{\rho M}{r^2} \quad (2.1)$$

Un équilibre similaire, donné par le principe fondamental de la dynamique, existe pour les particules et les roches. Le profil de vitesse qui en découle, $v_\theta \sim \sqrt{GM/r}$, porte le nom de Képlérien. En plus de cette vitesse azimuthale, les observations astrophysiques de ces disques montrent que d'énormes quantités de matière tombent sur l'objet central en spiralant. Ce phénomène s'appelle l'accrétion. Comme le moment cinétique total du disque est conservé, les particules et le gaz, en s'effondrant sur l'objet central, perdent du moment cinétique, qu'elles doivent transférer à d'autres particules. Il existe donc dans ces objets, un flux de moment cinétique vers l'extérieur. Ce flux de moment cinétique ne peut pas être expliqué par les valeurs des coefficients moléculaires de diffusion et implique la recherche d'autres mécanismes. Une possibilité est que le fort transport de moment cinétique soit lié à du transport turbulent. Les questions relatives au transport de moment cinétique seront développées au chapitre 3. Pour explorer expérimentalement ces questions, il est cependant nécessaire de pouvoir réaliser en laboratoire un profil de rotation Képlérien, dans un régime turbulent. Une question hydrodynamique intéressante est donc la reproduction expérimentale du profil de rotation Képlérien. En effet, les dispositifs de Taylor-Couette (TC) présentent un profil moyen de rotation laminaire :

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r}, \quad (2.2)$$

avec A et B des constantes déterminées par les conditions aux limites :

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad (2.3)$$

où Ω_i est la vitesse angulaire du cylindre i situé au rayon R_i . En conséquence, il est possible de reproduire approximativement un profil Képlérien en jouant sur les paramètres A et B . Ces profils s'appellent des profils quasi-Képlériens. Seulement, ces profils sont obtenus dans des régimes très peu turbulents. Dans le régime turbulent, le profil de rotation a cependant tendance à s'aplatir. L'expérience KEPLER explore donc la possibilité d'engendrer un profil de rotation Képlérien dans un régime pleinement turbulent.

Motivation hydrodynamique D'un point de vue hydrodynamique, les expériences MHD, axisymétriques, dans les métaux liquides, présentent souvent des rapports d'aspect carrés [8, 9, 43]. De plus, les expériences à grand forçage ont essentiellement été explorées par l'usage de champ magnétique intense [6, 14, 43]. Or, à grand champ magnétique, la turbulence est anisotrope à cause de la friction magnétique. L'expérience KEPLER offre tout d'abord la possibilité d'explorer différents régimes MHD dans une expérience dont la section présente un grand rapport d'aspect. Elle permet également d'explorer des nouveaux régimes à grand forçage en utilisant des courants électriques importants, $I_{max} \sim 3 \text{ kA}$. Cette expérience permet enfin d'étudier comment ces deux facteurs changent les propriétés de la turbulence.

2.1 Présentation du dispositif expérimental

Le montage expérimental KEPLER a été développé par Michael Pereira durant la dernière partie de sa thèse sous la direction de Stéphan Fauve et Christophe Gissinger. Plus de détails sur le dispositif lui-même sont donc disponibles dans son manuscrit [7]. Le dispositif consiste en une cuve cylindrique de hauteur $h = 1.5 \text{ cm}$ et d'écart entre les cylindres interne R_1 et externe R_2 , $\Delta r = 13 \text{ cm}$. La section est donc rectangulaire et présente un grand rapport d'aspect $\Gamma = \Delta r/h \sim 8.7$. Les plaques inférieure et supérieure sont en Plexiglas, un bon isolant électrique tandis que les cylindres interne et externe sont en laiton nickelé et jouent le rôle d'électrode. Elles sont reliées à une alimentation stabilisée *Power TEN P66 Series 53000* pouvant fournir jusqu'à 3000 A . La cuve est remplie de Galinstan, un métal liquide à température ambiante. Le Galinstan est un eutectique constitué de l'amalgame de Gallium, d'Indium et d'Étain dont les propriétés sont rappelées Tableau 2.1. La cuve est ensuite placée dans un champ magnétique

Nom	Galinstan MCP11
Composition	68.5% (Ga), 21.5% (In), 10% (Sn)
Température de fusion T_c [$^{\circ}\text{C}$]	-19
Conductivité électrique σ [S.m^{-1}]	$3.46 \cdot 10^6$
Masse volumique ρ [kg.m^{-3}]	$6.44 \cdot 10^3$
Viscosité cinématique ν [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$]	$3.7 \cdot 10^{-7}$
Nbre d'Hartmann Ha	$Ha \sim 0.572 \cdot B_0[\text{mT}]$

TABLE 2.1 – Caption

vertical homogène, généré par deux bobines de Helmholtz. Les bobines sont alimentées par deux générateurs de courant *Ametek RS 20 V – 250 A*. Le champ magnétique maximum généré atteint 110 mT . La distribution radiale de courant couplée au champ magnétique vertical engendre une force de Laplace qui pompe le fluide dans la direction

azimuthale.

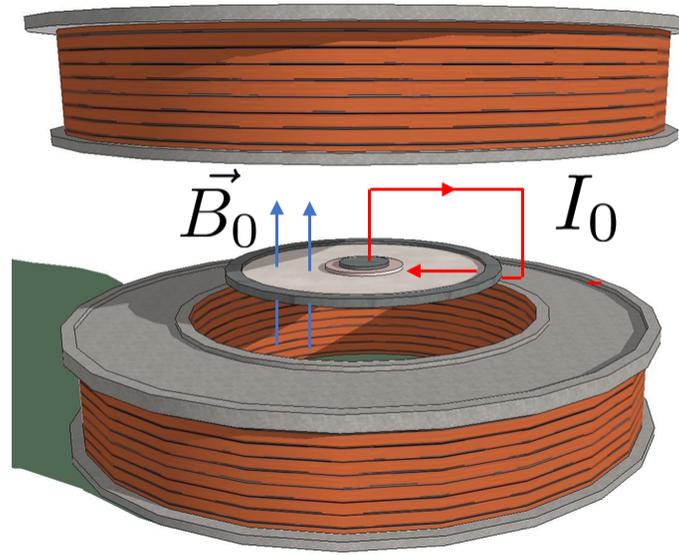


FIGURE 2.2 – Dispositif expérimental KEPLER, en présence d’un champ magnétique vertical \vec{B}_0 généré par deux bobines de Helmholtz et une distribution radiale de courants I_0 .

2.2 Techniques de mesures

Différentes mesures ont été réalisées sur ce montage :

- Mesure de vitesse : sondes potentielles et sondes Doppler
- Mesure de pression : capteur de pression piezo-électrique et amplificateur de charge
- Mesure de champ magnétique : capteur à effet Hall

Les mesures de vitesse sont réalisées à la fois avec des sondes Doppler et des sondes potentielles. Les sondes Doppler sont encastrées dans la plaque supérieure en Plexiglas à un angle de 45° dans la direction azimuthale. Les mesures sont donc une combinaison linéaire des composantes verticales et azimuthales de vitesse. En pratique, la vitesse azimuthale est un ordre de grandeur plus élevé que la vitesse verticale et l’effet de la vitesse vertical est négligeable. Un canal est également creusé le long d’un rayon, permettant de déplacer la sonde continûment et d’obtenir un profil radial de vitesse plus précis. Pour les mesures dans le canal, la sonde est encastrée dans un triangle en plexiglas, lui même fixé sur un wagon qui glisse sur un rail en acier trempé. Les sondes potentielles sont alignées le long d’un rayon, espacées chacune de 10 mm . Un trou traversant taraudé est situé au rayon moyen, $r = (R_1 + R_2)/2$. Il permet d’accéder

au métal liquide et de réaliser différentes mesures, notamment des mesures potentiel, permettant de mesurer localement u_r , u_θ et $\Omega = u_\theta/r$.

2.2.1 Mesure de pression

Les mesures de pression sont réalisées grâce à un capteur piézo-électrique *Kistler Type701A* de sensibilité $82.24 \text{ pC.bar}^{-1}$. Le capteur mesure les fluctuations de pression et est placé au contact du métal liquide au niveau de la plaque supérieure, près du cylindre central. Le signal est amplifié par un amplificateur de charge *Kistler Type5018*.

2.3 Cartographie des différents régimes d'écoulement

Les métaux liquides étant des fluides conducteurs de l'électricité, ils obéissent aux équation de la MHD. Dans cette limite, la dynamique du fluide est fortement influencée par la présence de courants électriques et de champ magnétique au travers de la force de Laplace. L'équation de Navier-Stokes et l'équation d'induction sont :

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.4)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.6)$$

Avec ρ la densité du fluide supposée homogène, \mathbf{u} le champ de vitesse du fluide supposé incompressible, ν est la viscosité du fluide, j la densité de courant électrique et \mathbf{B} le champ magnétique. η est la diffusivité magnétique et vaut $1/\mu_0\sigma$ dans les métaux. Pour rappel, les différents nombres sans dimension pour ce système sont : le nombre de Reynolds $Re = Ur_m/\nu$, avec $r_m = (R_1 + R_2)/2$ le rayon moyen et U la vitesse azimuthale caractéristique. Il y a également deux paramètres géométriques $\Gamma = \Delta r/h$ et h/r_m [1]. De plus, ce système expérimental est décrit par trois nombres sans dimension supplémentaires, courants en MHD, que sont le nombre de Prandtl magnétique Pm , le nombre de Reynolds magnétique Rm ainsi que le nombre d'Hartmann Ha [22] :

$$Pm = \frac{\nu}{\eta}, \quad Rm = \frac{Ur_m}{\eta}, \quad Ha = B_0 h \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}. \quad (2.7)$$

1. En pratique ces deux paramètres sont quasiment égaux car $\Delta r/r_m \sim 1$.

Il est enfin possible de définir un nombre sans dimension supplémentaire utile à l'analyse, le paramètre d'interaction modifié :

$$N_t = \frac{\sigma B_0^2 h}{\rho U} \left(\frac{\Delta r}{h} \right)^2 = \frac{Ha^2}{Re} \left(\frac{\Delta r}{h} \right)^3 \quad (2.8)$$

Le paramètre d'interaction ou nombre de Stuart est le rapport entre la force de Laplace engendrée par les courants induits et l'inertie. Ce paramètre est multiplié par le rapport $\Delta r/h$ lorsque le rapport d'aspect n'est plus carré [44, 45]. La présence d'un courant électrique radial et d'un champ magnétique vertical engendre un forçage et donc un écoulement dans la direction azimuthale. L'écoulement dépend donc de deux paramètres de contrôle, l'amplitude du courant appliqué entre les électrodes I_0 et l'amplitude du champ magnétique B_0 imposé par les bobines. La Figure 2.3 montre une carte des différents régimes d'écoulement obtenus en fonction de ces deux paramètres. La couleur correspond au logarithme de la vitesse. Comme le montre cette Figure, il

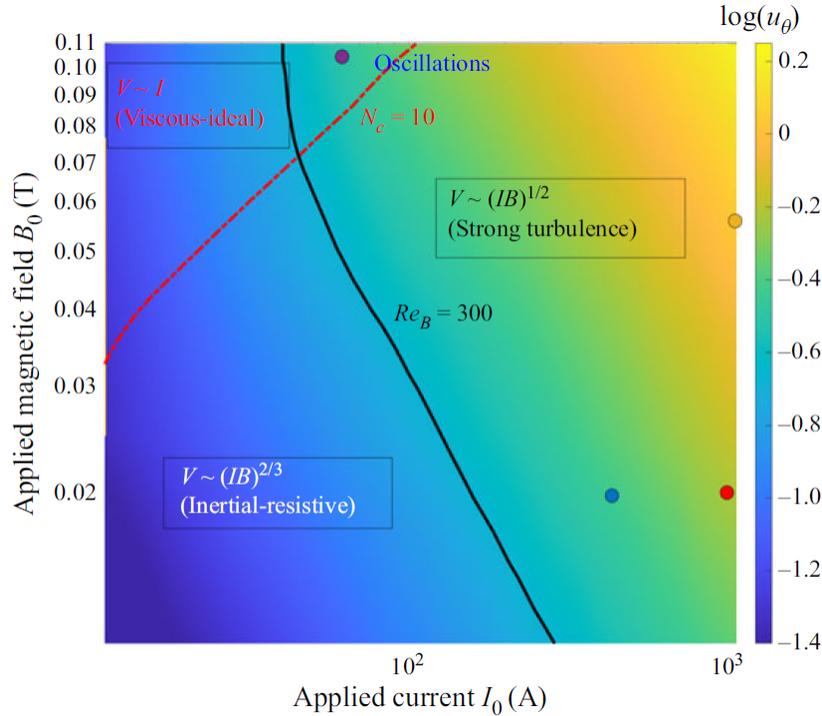


FIGURE 2.3 – Carte de l'amplitude de la vitesse moyenne azimuthale, en échelle \log , en fonction du courant appliqué entre les électrodes $I_0[A]$ et du champ magnétique imposé $B_0[T]$. Figure issue de Vernet *et al.* [46].

existe trois régimes principaux d'écoulement. À petit forçage, la présence de boucles polaires de recirculation engendre un écoulement tridimensionnel et la vitesse moyenne est proportionnelle à $(I_0 B_0)^{2/3}$. À grand champ magnétique mais petit courant, l'écoulement est bidimensionnel. Le nombre de Stuart est plus grand que 1, il s'agit de la

zone délimitée par la ligne en tiret-pointillée rouge. Dans cette région de l'espace des paramètres, la vitesse de l'écoulement est proportionnelle au courant électrique mais ne dépend plus du champ magnétique. Enfin, à grand champ magnétique et grand courant électrique, le système est dans un régime de turbulence pleinement développée et la vitesse moyenne de l'écoulement est proportionnelle à $\sqrt{I_0 B_0}$. Cette région est située à droite de la ligne noire et de la ligne en tiret-pointillé rouge. Les sections suivantes sont une description plus détaillée de chacun de ces trois régimes d'écoulement présents dans l'expérience KEPLER.

Le régime Inertiel-Resistif

Le régime **Inertiel-Resistif** se situe à bas forçage (bas I_0 et bas B_0) et correspond au régime de Bödewadt où l'écoulement azimuthal moyen est accompagné de boucles de recirculation poloïdales. Dans ce régime, les courants sont distribués dans le coeur de l'écoulement où la force de Laplace s'équilibre avec l'inertie :

$$\frac{u_r u_\theta}{r} \sim \frac{I_0 B_0}{2\pi \rho r h} f\left(\frac{\Delta r}{r}\right), \quad (2.9)$$

où la fonction f tient compte du fait qu'il est difficile de discriminer entre le terme $u_r u_\theta / r$ et le terme $u_r \partial_r u_\theta$ dans l'inertie. Il vient :

$$u_\theta \sim \frac{I_0 B_0}{2\pi \rho u_r h} f\left(\frac{\Delta r}{r}\right). \quad (2.10)$$

De plus, la composante radiale de Navier-Stokes indique un équilibre entre inertie et gradient de pression. En supposant que l'écoulement moyen u_r n'est pas trop grand, $\overline{u_r} \ll \overline{u_\theta}$, ce qui est bien vérifié expérimentalement :

$$\partial_r p \sim \rho \frac{u_\theta^2}{r} \quad \text{et} \quad \rho \nu \frac{u_r^{CL}}{\delta_B^2} \sim \partial_r p, \quad (2.11)$$

où il est supposé que le gradient de pression s'imprime dans la couche limite, d'épaisseur typique $\delta_B = r_m / Re^{1/2}$, l'indice CL indique Couche Limite. Autrement dit, dans la couche limite, le gradient de pression s'équilibre avec la dissipation visqueuse et des boucles de recirculation poloïdales, analogues aux vortex de Dean, apparaissent. Ces deux relations se combinent et donnent :

$$u_r^{CL} \sim \frac{\delta_B^2 u_\theta^2}{\nu r}. \quad (2.12)$$

L'incompressibilité implique que l'écoulement radial dans le plan médian orienté vers l'extérieur, est compensé, par conservation de la masse, par un écoulement radial, dans

la couche limite, orienté vers l'intérieur et donc $\int_0^h u_r dz \approx 0$. Ce qui donne en ordre de grandeur $hu_r \sim 2\delta_B u_r^{CL}$. En combinant ce résultat avec les relations (2.10) et (2.12), il vient :

$$u_\theta \sim \left(\frac{I_0 B_0}{4\pi\rho\sqrt{\nu}} \right)^{2/3} r^{-1/3} f\left(\frac{\Delta r}{r}\right). \quad (2.13)$$

Cette dépendance en $u_\theta \propto (I_0 B_0)^{2/3}$ provient donc d'un équilibre entre la recirculation due aux couches limites de Bödewadt et la force de Laplace. Cette loi d'échelle a été observée expérimentalement [8] et numériquement dans des systèmes différents [47, 48] et [49] (voir également la section 5.5.2, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, P.A. Davidson, [23]). Lorsque le forçage augmente et que le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de la couche limite de Bödewadt $Re_B = U\delta_B/\nu$ passe une valeur critique, représentée par la ligne noire sur la Figure 2.3, la couche limite se déstabilise et l'écoulement bifurque vers le régime de turbulence pleinement développée.

Le régime fortement magnétisé

Le régime "**Viscous-ideal**" ou régime fortement magnétisé, se situe à grand $B_0 > 50 mT$ et faible courant $I_0 < 100 A$. En effet, lorsque le paramètre d'interaction N_t dépasse une certaine valeur critique, représentée par la ligne en tiret-pointillé rouge sur la Figure 2.3, le champ magnétique est suffisamment fort pour agir comme une source de dissipation anisotrope, dans la direction des lignes de champ, qui va tendre à réduire les gradients de vitesse selon l'axe e_z et rend bidimensionnel l'écoulement [44]. Il est enfin connu que la transition entre un régime 2D fortement magnétisé et un régime inertiel 3D est liée aux boucles de recirculation [50, 51]. Dans le régime fortement magnétisé, les courants électriques sont confinés dans une couche limite d'épaisseur $\delta_{Ha} \sim h/Ha$, couche limite d'Hartmann [22]. L'écoulement moyen évolue alors en $u_\theta \propto I_0$ [8]. En effet, dans le coeur de l'écoulement, les courants induits s'opposent aux courants injectés, de sorte que :

$$u_\theta \sim \frac{j_r}{\sigma B_0}. \quad (2.14)$$

Les courants sont essentiellement distribués sur l'épaisseur δ_{Ha} . La conservation de la charge implique en ordre de grandeur que $j_r \sim I_0/2\pi r(2\delta_{Ha})$. Cette relation s'injecte dans l'expression pour la vitesse (2.14). La présence de deux couches limites d'Hartmann au niveau des plaques supérieure et inférieure, introduit un facteur 1/2 pour la densité

de courant :

$$\boxed{u_\theta \sim \frac{I_0}{4\pi r \sqrt{\sigma \rho \nu}}} \quad (2.15)$$

Cette prédiction est intéressante car elle ne présente pas de dépendance en B_0 ni en h . Ceci est attendu pour le régime fortement magnétisé car dans ce régime le coeur de l'écoulement est 2D. L'absence de variations le long de l'axe vertical rend le problème indépendant de h . L'absence de dépendance en B_0 pour l'écoulement moyen est plus subtile et dépend de la géométrie des courants. C'est parce que les courants sont horizontaux et qu'ils sont confinés dans les couches limites de Hartmann que la dépendance en B_0 se simplifie. En pratique, près des plaques, la condition de raccordement implique que la vitesse est nulle à la paroi, ce qui réintroduit la dépendance en B_0 et h . La même loi d'échelle s'obtient en faisant un équilibre des forces dans la couche limite entre dissipation visqueuse $\rho \nu u_\theta / \delta_{Ha}^2$ et forçage $j_r B_0$. Il sera montré plus loin que dans ce régime, la génération d'une oscillation basse fréquence liée à la présence de vortex 2D qui se déplacent dans la direction de l'écoulement est également observée. Lorsque I_0 augmente et que le nombre de Reynolds basé sur la couche limite d'Hartmann $Re_H = U \delta_{Ha} / \nu$ dépasse une valeur seuil, la couche limite d'Hartmann se déstabilise et l'écoulement bifurque vers le régime de turbulence pleinement développé. L'oscillation basse fréquence, comme la transition vers la turbulence sont des points développés plus loin dans ce chapitre.

Le régime de turbulence pleinement développée

Le régime "**Strong Turbulence**" ou régime de turbulence pleinement développée se situe à grand B_0 et à grand I_0 . À grand forçage, la force de Laplace s'équilibre avec le tenseur de Reynolds :

$$2\rho \frac{(u^*)^2}{\delta} \sim \frac{I_0 B_0}{2\pi r \delta} \quad (2.16)$$

où u^* correspond aux fluctuations de vitesse et δ est l'épaisseur typique à travers laquelle passe les courants électriques. Cet équilibre conduit à la prédiction :

$$u^* \sim \sqrt{\frac{I_0 B_0}{4\pi \rho r}} \quad (2.17)$$

Cette loi d'échelle n'a pas été prédite numériquement et est bien vérifiée expérimentalement comme le montre la Figure [2.4](#). Comme la bifurcation à la turbulence se produit à travers une instabilité de couche limite dans les deux cas, il est possible de supposer

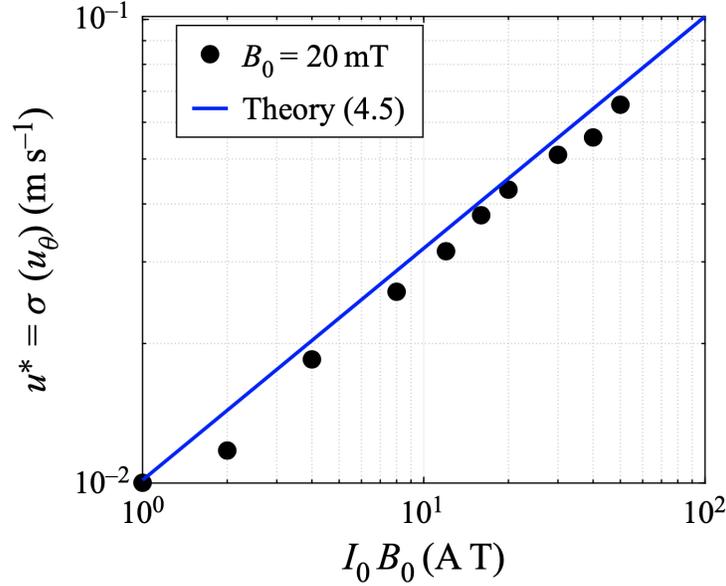


FIGURE 2.4 – Fluctuations de vitesse u^* en fonction du produit $I_0 B_0$ pour une valeur de champ magnétique $B_0 = 20mT$. La droite en bleu représente la prédiction théorique. Figure issue de Vernet *et al.* [46].

un profil logarithmique pour la couche limite de type loi *log of the wall*. Cette loi phénoménologique a été étudiée pour les écoulements MHD plans expérimentalement [52, 53] et numériquement [54, 55]. Si l’esprit de la loi log persiste, il semble que le nombre d’Hartmann puisse influencer les divers paramètres d’ajustement pris dans les modèles. La situation est cependant différente ici puisque l’on ne considère pas un écoulement plan homogène de vitesse U_∞ loin de la paroi. L’écoulement ici est azimuthal mais il est tout de même possible de faire l’hypothèse que l’écoulement moyen suit un profil logarithmique :

$$\frac{\bar{u}_\theta}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u^* z}{\nu} \right) + C. \quad (2.18)$$

avec $C \approx 5$ et où $\kappa \simeq 0.4$ est la constante de Von Kármán. La prédiction obtenue pour la vitesse moyenne azimuthale dans le régime de turbulence pleinement développée est donc :

$$\bar{u}_\theta = \alpha \frac{\ln(Re_h)}{\kappa} \sqrt{\frac{I_0 B_0}{4\pi \rho r}} \quad (2.19)$$

où $\alpha \simeq 1.5$ est une constante de proportionnalité obtenue expérimentalement et $Re_h = Uh/\nu$ est le nombre de Reynolds basé sur la hauteur h . La dépendance en $(I_0 B_0)^{1/2}$ avec la correction log est très bien vérifiée par la courbe bleue sur la Figure 2.5. Un régime

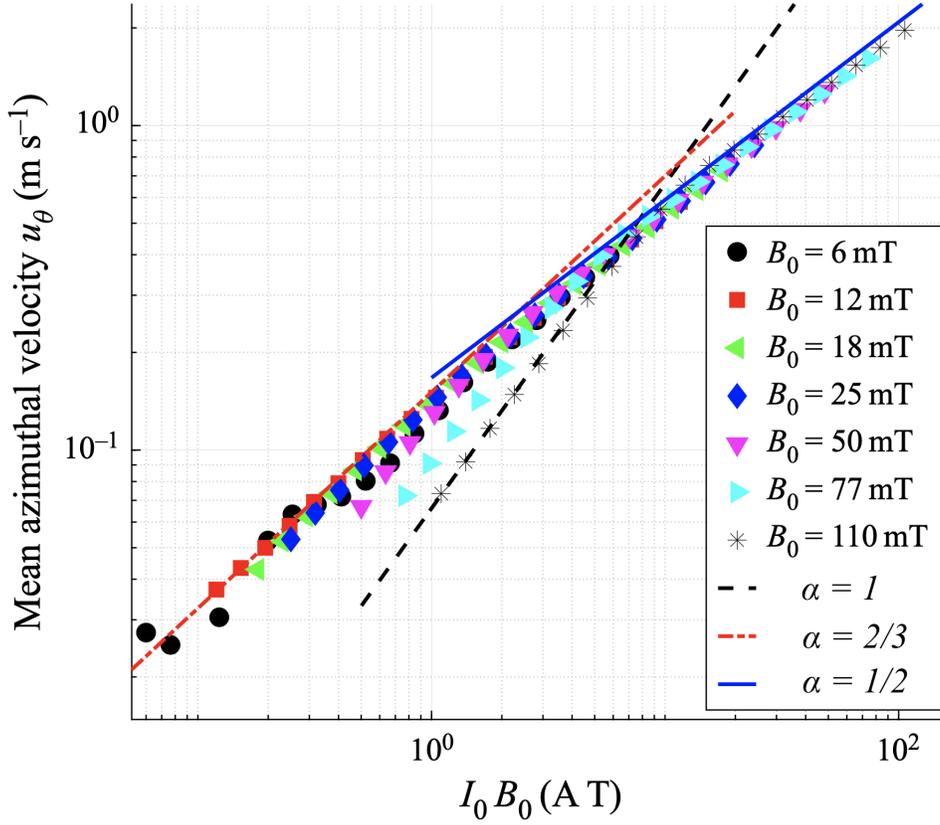


FIGURE 2.5 – Vitesse moyenne azimuthale en fonction du produit $I_0 B_0$ pour différentes valeurs de champ magnétique. La droite en bleu correspond à la prédiction donnée par la relation (2.19). Figure issue de Vernet *et al.* [46].

où l'écoulement moyen azimuthal suit une loi d'échelle $u_\theta \propto (I_0 B_0)^{1/2}$ sans correction logarithmique, a également été observé par Boisson *et al.* [18, 19]. Leurs expériences présentent cependant un rapport d'aspect très différent de l'expérience KEPLER puisque $h/\Delta R \sim 10$ et $h/\Delta R \sim 4$, suivant les dispositifs. Leur loi d'échelle s'explique également par un équilibre entre l'inertie et la force de Laplace.

Enfin, l'intérêt du régime de turbulence pleinement développée est multiple. Il constitue tout d'abord une bonne vérification de la *log of the wall* dans le cas d'un écoulement en rotation. Il présente une prédiction en $\sqrt{I_0 B_0}$ pour les fluctuations et pour l'écoulement moyen, en présence d'une correction logarithmique. Il présente une dépendance en $1/r^{1/2}$ qui est donc différente des profils obtenus dans les systèmes de TC. Enfin, comme ce profil de rotation est Képlerien, il est intéressant de comprendre le régime de turbulence qu'il présente, ce qui sera étudié dans la suite. Enfin, ce régime permet de réaliser une analogie intéressante entre cette expérience de laboratoire et les disques d'accrétion. Cette analogie sera développée au chapitre 3. La Figure 2.6 montre différents profils de vitesse angulaire Ω , défini par $\Omega(r) = \bar{u}_\theta(r)/r$ en fonction de la coordonnée radiale r pour différentes valeurs de courant [200 – 1000]A avec un champ

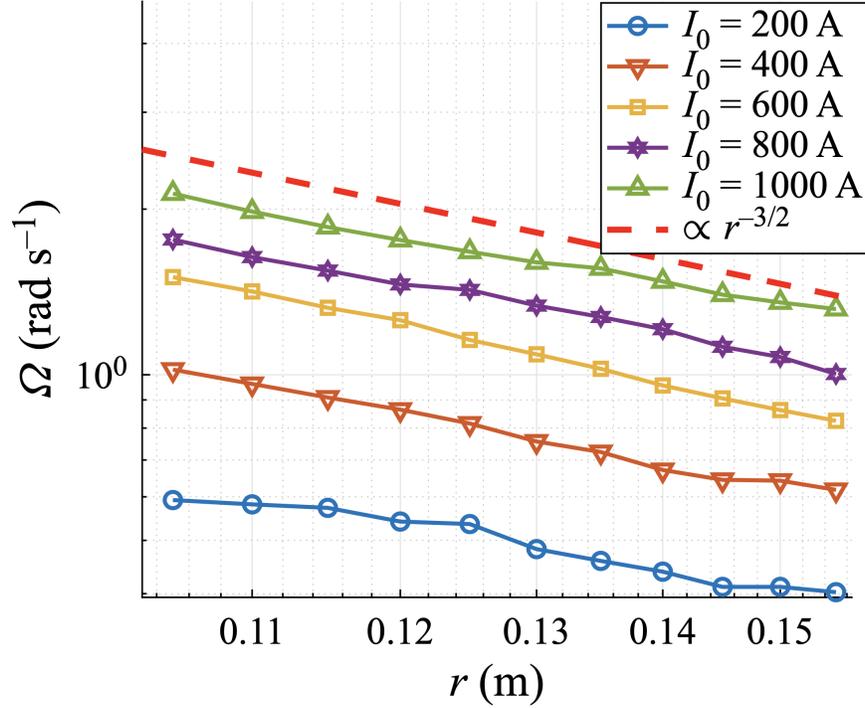


FIGURE 2.6 – Profil de vitesse angulaire en fonction du rayon à un champ magnétique fixé $B_0 = 80 \text{ mT}$ pour différentes valeurs de courant $I_0 \in [200, 400, 600, 800, 1000] \text{ A}$. La ligne en pointillée rouge indique la pente pour un profil Képlerien à savoir $\Omega \propto r^{-3/2}$. Figure issue de Vernet *et al.* [46].

magnétique fixé à $B_0 = 80 \text{ mT}$, $Ha \sim 0.57B_0$. Cette figure montre qu'à grand forçage, le régime de turbulence pleinement développé vérifie bien un profil de vitesse Képlerien.

2.4 Transition entre les différents régimes

Afin de suivre la transition entre les différents régimes d'écoulement, il est possible de suivre l'exposant $\alpha = d \ln u_\theta / d \ln I_0$, qui indique la dépendance de l'écoulement sur le courant. $I_0 \in [0, 1]$ et la Figure 2.7 est une carte de α en fonction des paramètres I_0 et B_0 . La région rouge correspond au régime fortement magnétisé (*Viscous-ideal*, $\alpha = 1$), la région bleu foncée au régime de turbulence pleinement développée (*Strong turbulence*, $\alpha = 1/2$) et la région jaune/verte correspond au régime inertiel-résistif ($\alpha = 2/3$). $u_{\theta, \alpha}$ désigne la prédiction pour le régime dans lequel la vitesse azimuthale présente une dépendance en puissance α du courant injecté (avec $\alpha \in \{1, 2/3, 1/2\}$) et on résume les différentes prédictions dans le Tableau 2.2. Grâce aux prédictions pour les lois d'échelle sur la vitesse, il est possible de déterminer le seuil de bifurcation à la turbulence pour les différents régimes en fonction des paramètres de contrôle.

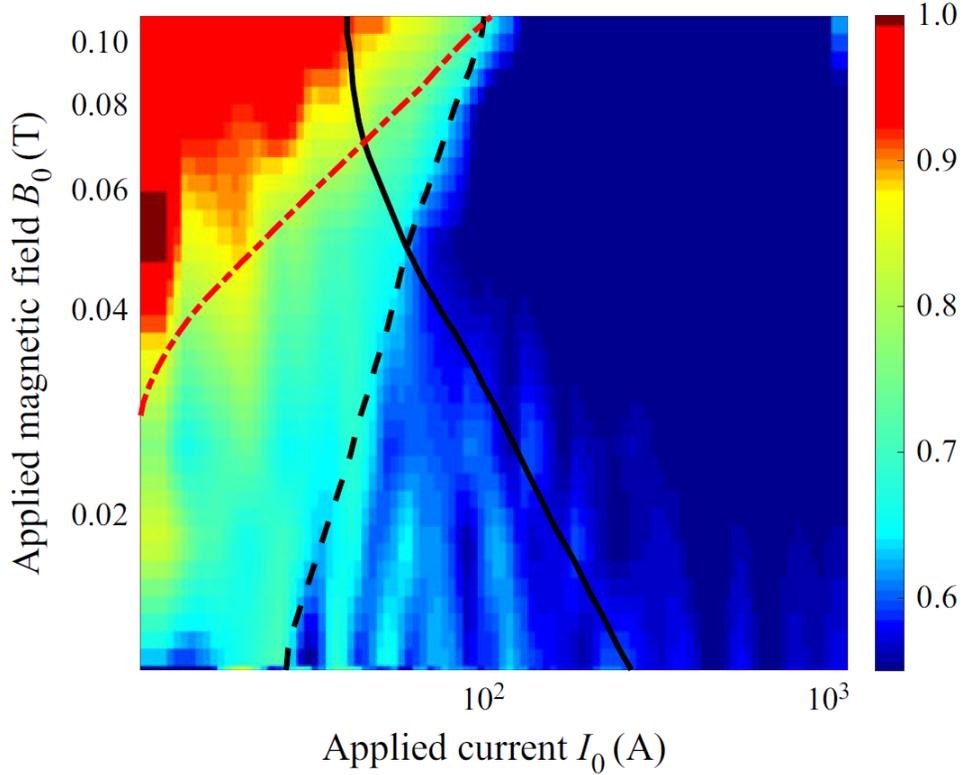


FIGURE 2.7 – Carte de l’exposant α (où $u_\theta \propto I_0^\alpha$) en fonction du courant électrique injecté I_0 et du champ magnétique imposé B_0 . Figure issue de Vernet *et al.* [46].

Régime	$u_{\theta,\alpha}$	α
Régime fortement magnétisé	$\frac{I_0}{4\pi r \sqrt{\rho\nu\sigma}}$	1
Régime inertiel-résistif	$\left(\frac{I_0 B_0}{4\pi\rho\sqrt{\nu}}\right)^{2/3} r^{-1/3} f\left(\frac{\Delta r}{r}\right)$	2/3
Régime fortement turbulent	$\frac{\ln Re_h}{\kappa} \sqrt{\frac{I_0 B_0}{4\pi\rho r}}$	1/2

TABLE 2.2 – Prédictions d’écoulement pour les différents régimes dans le dispositif expérimental KEPLER.

2.4.1 Bifurcation à la turbulence pour le régime fortement magnétisé

Il est possible de chercher une relation entre les différents paramètres pour lesquels le régime fortement magnétisé bifurque vers un régime turbulent. I_c désigne le courant critique au seuil de l’instabilité. Les paramètres du problème sont le courant critique I_c , le champ magnétique imposé B_0 , les longueurs typiques h et r , les coefficients de transport ν et σ ainsi que la masse volumique ρ et la perméabilité du vide μ_0 . L’analyse dimensionnelle indique que le problème dépend de 8 grandeurs physiques comportant 4

unités : masse, courant, longueur et temps, ce qui implique 4 nombres sans dimension qu'il est possible de choisir tels que :

$$Pm = \nu\sigma\mu_0, \quad Ha = B_0h\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}, \quad \frac{h}{r}, \quad H_c = \frac{j_c B_0 h^3}{\rho\nu^2}, \quad (2.20)$$

Le nombre H_c , qui rend compte du forçage, correspond en présence d'induction $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$, au carré du nombre d'Hartmann. Ce nombre apparaît à plusieurs reprises dans la suite puisque les écoulements sont dû à de courants imposés. Il est possible de prendre la densité de courant critique $j_c = I_c/2\pi r h$ plutôt que I_c , ce qui permet de trouver un seuil indépendant du rayon. L'analyse dimensionnelle permet de déterminer que le seuil de stabilité de la couche limite d'Hartmann, dans notre problème, est donné par une relation du type :

$$H_c = \mathcal{F}\left(Pm, Ha, \frac{h}{r}\right). \quad (2.21)$$

où \mathcal{F} est une fonction inconnue. En général, les équations de la MHD sont invariantes par la transformation $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$. Cependant, ici, l'écoulement change de signe sous l'effet de la transformation $B_0 \rightarrow -B_0$. Pour que le problème reste inchangé, il faut donc également opérer la transformation $j_c \rightarrow -j_c$. Le problème se réduit donc, en supposant l'exposant le plus bas pour B_0 à :

$$H_c \sim Ha^2 \mathcal{F}(Pm). \quad (2.22)$$

En pratique, les métaux liquides ont tous un nombre de Prandtl magnétique petit $Pm \ll 1$. Retirer Pm du problème revient à ignorer le paramètre μ_0 , ce qui ne pose pas de problème. En effet, dans le système d'unités CGS, $\mu_0 = 4\pi$, ce paramètre sort du problème, mais les équations de l'électromagnétisme font alors intervenir un autre paramètre, la célérité de la lumière. Du point de vue de l'analyse dimensionnelle, il est donc possible de remplacer Pm par un nombre ridiculement petit, $P = \nu/hc$ et il semble raisonnable de supposer que dans cette limite, $\mathcal{F}(P)$ tend vers une constante. Cette limite est donc équivalente à faire l'hypothèse que $\mathcal{F}(Pm)$ tend vers une constante à bas Pm . Cet argument implique pour le seuil d'instabilité de la couche limite d'Hartmann :

$$\boxed{H_c \sim Ha^2}. \quad (2.23)$$

Cette prédiction indique que le courant critique de l'instabilité de la couche limite d'Hartmann croît linéairement avec le champ magnétique imposé. Cette prédiction peut également s'obtenir grâce aux lois d'échelle pour la vitesse dans chacun des deux

régimes. Au seuil, en faisant l'hypothèse que la vitesse est continue en fonction des paramètres de contrôle, il vient :

$$u_{\theta,\alpha=1} \sim u_{\theta,\alpha=1/2}. \quad (2.24)$$

Puisque cette équivalence aura lieu au niveau de la couche limite en $z = \delta$, on prend $u_{\theta,\alpha=1/2} = u^*$ donné par la relation (2.17), ce qui donne :

$$\frac{I_c}{4\pi r \sqrt{\rho\nu\sigma}} \sim \sqrt{\frac{I_c B_0}{4\pi \rho r}}. \quad (2.25)$$

Introduire la densité de courant critique $j_c = I_c/2\pi r h$ dans le carré de cette expression fait disparaître r du problème. La courbe de stabilité marginale est donnée par :

$$B_0 \sim \frac{j_c h}{2\nu\sigma}, \quad (2.26)$$

$$\text{i.e. } \frac{j_c B_0 h^3}{\rho\nu^2} \sim \frac{B_0^2 h^2 \sigma}{\rho\nu}. \quad (2.27)$$

Le terme du membre de droite correspond au carré du nombre d'Hartmann tandis que le membre de gauche est la définition du nombre magnétique H . La courbe de stabilité marginale pour la bifurcation à la turbulence pour le régime fortement magnétisé suit donc la loi d'échelle :

$$\boxed{H_c = c_1 H a^2}, \quad (2.28)$$

où c_1 est un facteur numérique. Cette relation est bien identique à celle obtenue par analyse dimensionnelle. Il existe enfin une façon empirique pour contraindre la constante c_1 . La bifurcation à la turbulence se fait à travers une instabilité de la couche limite d'Hartmann. Il est donc possible de définir un nombre de Reynolds $Re_H = U\delta_{Ha}/\nu$ basé sur l'épaisseur typique de cette couche limite. La ligne en pointillé noir sur la Figure 2.7 correspond à $Re_H = 400$ et délimite la frontière entre un écoulement de Hartmann et un écoulement turbulent. En posant $U = u_{\theta,\alpha=1}$, qui est la prédiction pour le régime fortement magnétisé, l'expression de Re_H donne la relation (2.28), avec $c_1 \simeq 400$. Cette prédiction stipule que le courant critique augmente linéairement avec le champ magnétique, i.e. $j_c \propto B_0$. Cette dépendance du seuil sur Ha semble raisonnable car plus Ha est grand et plus l'écoulement est magnétisé donc plus les couches limites d'Hartmann sont stables. Enfin, Moresco & Alboussière [14] obtiennent la transition à la turbulence pour l'écoulement de Hartmann dans une conduite cylindrique de section carré pour $Re_H = 380$. Des mesures plus anciennes [56] (1953) ont obtenu $150 < Re_H < 250$, pour

des expériences présentant des rapports d'aspect et des formes de sections différentes. Ceci suggère une légère dépendance sur les paramètres géométriques. Enfin, selon Murgatroyd [56], Lundquist (1952) aurait suggéré que le seuil de la transition ne dépend pas de Pm . Les expériences de Murgatroyd [56] comme celles de Moresco & Alboussière [14], ont été réalisées avec du Mercure tandis que du Galinstan a été utilisé dans l'expérience KEPLER. Le rapport de Pm entre le Galinstan et le Mercure est ~ 11 . Or le seuil pour KEPLER est proche de celui obtenu par Moresco & Alboussière [14], la dépendance en Pm du seuil ne doit donc pas être très importante, bien qu'il faudrait réaliser d'autres expériences avec des métaux liquides différents pour conclure.

2.4.2 Bifurcation à la turbulence du régime Inertiel-Résistif

L'analyse dimensionnelle de la section précédente semble indiquer :

$$H_c = \mathcal{F}(Ha), \quad (2.29)$$

relation qui repose sur l'hypothèse que la fonction $\mathcal{F}(Pm)$ tend vers une constante à bas Pm . Comme le problème ne doit pas dépendre du signe du produit $j_c B_0$, et que l'on cherche une solution pour \mathcal{F} dans la limite $Ha \rightarrow 0$, il vient $\mathcal{F} \rightarrow const$. En conséquence, le courant critique pour le déclenchement de l'instabilité diminue avec le champ magnétique, $j_c \propto 1/B_0$. Il est également possible d'utiliser les mêmes méthodes que précédemment et de réaliser un équilibre entre les lois d'échelle pour les vitesses proches du seuil. Cette hypothèse de continuité de la vitesse en fonction des paramètres de contrôle implique :

$$u_{\theta, \alpha=2/3} \sim u_{\theta, \alpha=1/2}. \quad (2.30)$$

En injectant les prédictions respectives, il vient après quelques lignes de calculs :

$$\frac{I_c B_0 r}{4\pi \rho \nu^2} \sim const. \quad (2.31)$$

Expression dans laquelle il est possible d'injecter la définition du nombre magnétique $H_c = j_c B_0 h^3 / \rho \nu$:

$$\boxed{H_c = c_2 \left(\frac{h}{r}\right)^2}. \quad (2.32)$$

Pour parvenir à ce résultat il a fallu omettre la fonction $f(\Delta r/r)$ qui peut modifier la dépendance en r de ce résultat. Comme dans le cas précédent, la constante c_2 peut

être contrainte empiriquement. La bifurcation à la turbulence du régime Inertiel-Résistif passe par une instabilité de la couche limite de Bödewadt, de taille typique $\delta_B \sim \sqrt{\nu/\Omega}$. La courbe noire correspond à $Re_B \sim 400$ avec $Re_B = U\delta_B/\nu$ le nombre de Reynolds basé sur δ_B . Comme dans le cas précédent, la prédiction pour le régime inertiel-résistif donne $U = u_{\theta,\alpha=2/3}$ ce qui implique la relation (2.31). Cette relation contraint la constante de proportionnalité $c_2 = 400^3$.

2.4.3 Bifurcation du régime Inertiel-Résistif au régime fortement magnétisé

Là encore, même s'il ne s'agit pas d'une transition à la turbulence, la bifurcation entre le régime Inertiel-Résistif et le régime fortement magnétisé est contrôlée par le même ensemble de nombres sans dimension et il existe donc une relation pour le seuil du type :

$$H_c = \mathcal{F} \left(Pm, Ha, \frac{h}{r} \right), \quad (2.33)$$

correspondant au seuil où le champ magnétique est suffisamment intense pour dissiper la recirculation poloïdale et rendre l'écoulement bidimensionnel. L'analyse dimensionnelle semble cette fois plus difficile à mener. En revanche, cette transition s'opère pour $u_{\theta,\alpha=2/3} \sim u_{\theta,\alpha=1}$, d'où :

$$\sigma B_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} \sim \frac{j_c h}{r\nu}. \quad (2.34)$$

Cet équilibre ne semble cependant pas vérifier l'invariance par changement de signe $(j_c, B_0) \rightarrow (-j_c, -B_0)$. En pratique, c'est que l'expression pour $u_{\theta,\alpha=1}$ change également de signe avec cette transformation. Ceci ne posait pas de problème pour la transition à la turbulence du régime fortement magnétisé, parce que l'on prenait le carré de l'équivalent de cette expression. La raison est que la taille de la couche limite d'Hartmann est $\delta_{Ha} = l/|Ha|$, car une longueur est toujours une quantité positive. Pour que l'expression de $u_{\theta,\alpha=1}$ reste inchangée sous cette transformation il faut donc la multiplier par $sign(B_0)$, qui donne le signe de B_0 . Cette subtilité a été omise plus haut. En forçant l'apparition de H_c dans le membre de droite, il vient :

$$\boxed{H_c \sim \frac{r}{h} |Ha|^3}. \quad (2.35)$$

Là encore, le nombre magnétique H_c est déterminé par le nombre d'Hartmann Ha . Il est également possible d'obtenir ce résultat d'une manière différente. En partant de la

relation (2.34) et en forçant l'apparition de $u_{\theta,\alpha=1}$ dans le membre de droite, on obtient :

$$\frac{\sigma B_0^2 r}{\rho u_{\theta,\alpha=1}} \simeq 1. \quad (2.36)$$

Ce nombre sans dimension noté Λ est le nombre d'Elsasser :

$$\Lambda = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \Omega} = \frac{\delta_B^2}{\delta_{Ha}^2}. \quad (2.37)$$

La transition entre ces deux régimes se fait donc pour $\Lambda_c = 1$, qui correspond à la ligne en pointillés rouges sur la Figure 2.7. En conclusion, la transition entre les régimes Inertiel-Résistif et le régime fortement magnétisé se produit lorsque la taille typique de la couche limite de Bödewadt est du même ordre de grandeur que celle de la couche limite d'Hartmann. Le rôle du nombre d'Elsasser pour la transition entre ces deux régimes est bien connu, voir [38]. Il a également été montré qu'à grand nombre d'Elsasser, le seuil linéaire de la transition à la turbulence est abaissé par la présence de rotation, même pour $\Lambda > 1$ Moresco & Alboussière [40]. En effet, l'analyse de stabilité linéaire des couches limites de Bödewadt-Hartmann donne une valeur du nombre de Reynolds critique bien supérieure aux valeurs obtenues expérimentalement. Le seuil donné par l'analyse de stabilité linéaire est $Re_c > 20000$. Pour KEPLER, $Re_B \sim 300$ et $Re_H \sim 400$. Ceci provient de la non-normalité de l'opérateur obtenu lors de l'analyse de stabilité linéaire. La présence de rotation permettrait notamment à des modes dont la croissance est transitoire de déclencher la transition à la turbulence de façon non-linéaire. Ce phénomène réduit considérablement le seuil de la transition.

2.5 Turbulence Képlérienne

La turbulence MHD a fait l'objet de nombreux travaux. Lorsque l'énergie magnétique est du même ordre que l'énergie cinétique (turbulence forte), en l'absence de champ magnétique moyen, l'équipartition contraint le spectre du champ magnétique et du champ de vitesse à suivre une loi d'échelle $\propto k^{-3/2}$ (Iroshnikov [57], Kraichnan [58])². Le cas de la turbulence MHD, isotrope, sans champ magnétique moyen s'applique notamment au vent solaire. Dans cette limite, une autre loi d'échelle $\propto k^{-5/3}$ a été obtenue par Marsch [59]. En présence de champ magnétique moyen non nul, la turbulence est anisotrope et il faut donc distinguer k_{\parallel} et k_{\perp} , qui sont les modes parallèles et orthogonaux

2. Cette prédiction porte sur la turbulence d'onde d'Alfvén et s'appelle parfois *weak turbulence*. Elle concerne des interactions à trois modes.

aux lignes de champ magnétique. Pour la turbulence forte³, Goldreich & Sridhar [60] obtiennent une loi d'échelle $\propto k_{\perp}^{-5/3}$. Dans le cas des dispositifs expérimentaux, la situation est complètement différente. La limite quasi-statique, bas Pm , implique que les fluctuations de champ magnétique obéissent aux fluctuations de vitesse. Il existe alors plusieurs limites. Dans le cas $Rm > 1$, l'expérience VKS, qui consiste en un dispositif de Von Kármán au sodium liquide, donc en présence d'un forçage mécanique, montre que les fluctuations de vitesse suivent la prédiction de Kolmogorov [61]. Ces fluctuations turbulentes engendrent un champ magnétique par effet dynamo [62]. La densité spectrale de puissance des fluctuations de champ magnétique présentent alors une loi d'échelle $\propto k^{-11/3}$. Cette loi de puissance est déterminée par l'approximation quasi-statique pour les fluctuations de champ magnétique, relation (1.40). La majorité des expériences de MHD dans les métaux liquides se situent cependant dans la limite $Rm < 1$. Dans cette limite, le champ magnétique moyen n'est pas produit par l'écoulement mais imposé depuis l'extérieur. Il existe là encore plusieurs régimes. Lorsque le champ magnétique est suffisamment intense, $Ha \gg 1$, la friction magnétique est suffisante pour fortement dissiper les gradients de vitesse le long des lignes de champ magnétique. L'écoulement est alors 2D et le spectre du champ de vitesse suit une loi d'échelle en $\propto k_{\perp}^{-3}$ [63]. Cette prédiction a été vérifiée expérimentalement [6] et correspond à une cascade inverse d'énergie. Lorsque le champ magnétique n'est pas assez intense, la turbulence est tridimensionnelle et le spectre du champ de vitesse suit une loi d'échelle $\propto k^{-5/3}$ [45, 63].

2.5.1 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance (*PSD* : *Power Spectral Density*) pour un signal temporel $u(t)$ est définie par :

$$PSD[u](f) = \lim_{\Delta T \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} |u(t)e^{2\pi ift}|^2 dt \quad (2.38)$$

La Figure 2.8 montre la densité spectrale de puissance (*PSD*) en fonction du vecteur d'onde k pour différentes valeurs de forçage (couple $I_0 B_0$). Dans l'hypothèse de Taylor, le nombre d'onde est donné par $k = 2\pi f / \bar{u}_{\theta}$ où \bar{u}_{θ} est la moyenne temporelle de la vitesse azimuthale. À grand forçage, le spectre converge vers une loi de puissance d'exposant $k^{-5/3}$, dont la pente est symbolisée par la droite en noir sur la Figure. Ce résultat est compatible avec la théorie [45, 63] puisque ce régime se situe au-delà des instabilités de couches limites. La démonstration de la prédiction (2.19) part de l'hypothèse que le

3. Là encore il s'agit de turbulence d'ondes d'Alfvén en présence de cisaillement et d'interaction à quatre modes.

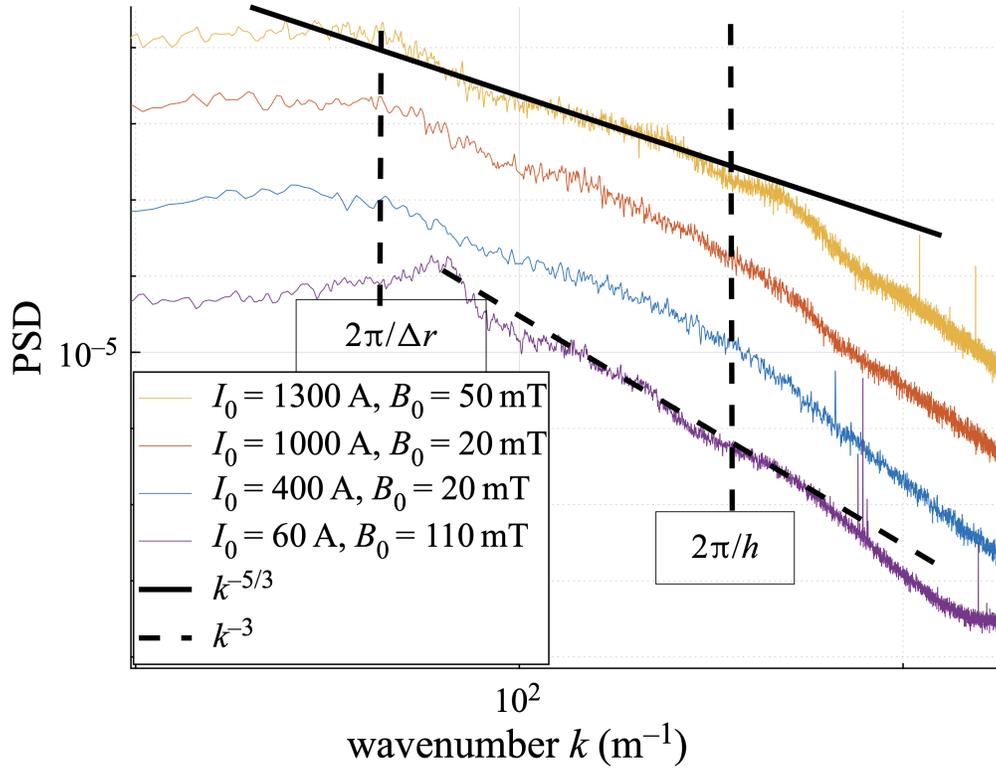


FIGURE 2.8 – Densité spectrale de puissance de la composante azimuthale du champ de vitesse pour diverses valeurs de forçage (champ magnétique et courant électrique imposés).

régime est pleinement turbulent ce qui permet un équilibre entre le tenseur de Reynolds et la force de Laplace. Cette hypothèse est donc bien justifiée par l'étude du spectre des fluctuations de vitesse. Enfin, à bas courant mais grand champ magnétique, le spectre suit une pente $\propto k^{-3}$. Pourtant les nombres d'Hartmann dans l'expérience KEPLER ne sont pas suffisants pour atteindre le régime 2D de la théorie de Sommeria & Moreau [45, 63]. Selon cette théorie, dans la limite où $Ha \gg 1$, le spectre est contraint par un équilibre entre le temps caractéristique de dissipation Ohmique $\tau_H \sim (h/B_0)\sqrt{\rho/\sigma\nu}$ et le temps caractéristique de transfert d'énergie à travers les échelles, $\tau_u \sim 1/(k^3 E(k))$ où $E(k) = PSD[u](k)$. Cet équilibre implique que la force de Laplace dissipe l'énergie dans la zone inertielle en présence d'une cascade inverse d'énergie. Il est donc intéressant de calculer les fonctions de structure d'ordre 3, qui permettent de remonter au signe du flux d'énergie. Ceci va permettre de savoir si le spectre en k^{-3} observé dans l'expérience KEPLER correspond à une telle cascade d'énergie.

2.5.2 Fonction de structure d'ordre 3

La définition des incréments de vitesse et des fonctions de structure d'ordre p est rappelée ci-dessous :

$$\delta \mathbf{u}(x, r) = \mathbf{u}(x + r) - \mathbf{u}(x), \quad (2.39)$$

$$S_p(r) = \langle (\delta u)^p \rangle_x. \quad (2.40)$$

La Figure 2.9 montre les fonctions de structures d'ordre 3 en fonction de $l = 2\pi/k$. Dans le cas $I_0 = 1300A$ et $B_0 = 50mT$, la région associée à une pente du spectre en $k^{-5/3}$ présente une fonction de structure S_3 positive, ce qui implique une cascade inverse d'énergie vers les grandes échelles. Ces résultats sont directement induits par

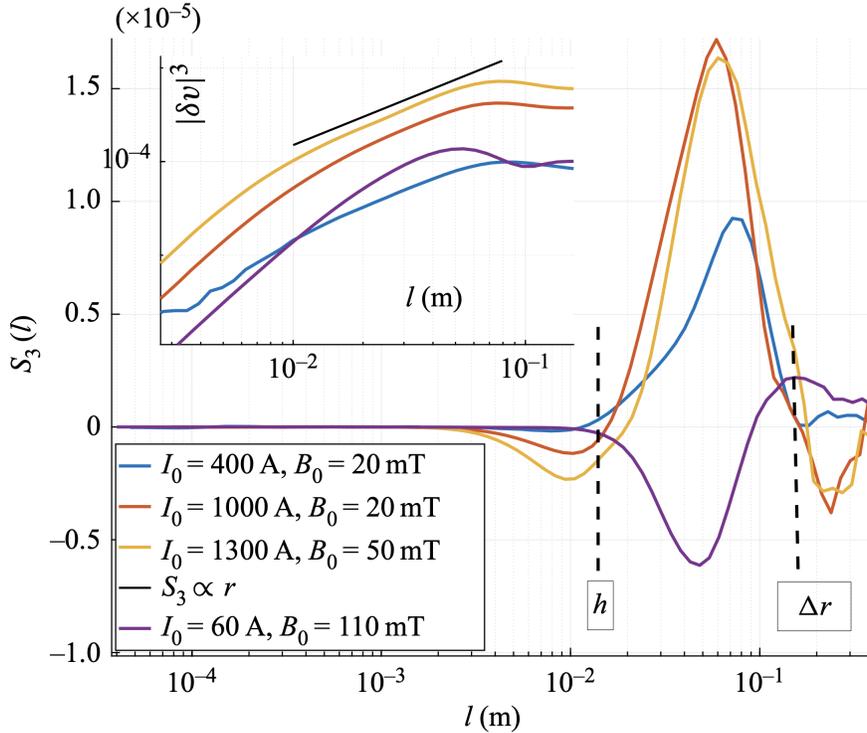


FIGURE 2.9 – Fonction de structure d'ordre 3 de la composante azimuthale du champ de vitesse pour diverses valeurs de forçage (champ magnétique et courant électrique imposés). Figure issue de Vernet *et al.* [46].

la géométrie de l'expérience KEPLER où la longueur intégrale (l'échelle d'injection de l'énergie) est fixée par l'épaisseur du disque h . Dans ce régime, la turbulence est quasi-2D avec une cascade inverse d'énergie pour les échelles plus grandes que h et une cascade directe d'énergie pour les échelles plus petites que h . Les deux cascades présentent une pente en $k^{-5/3}$ [64]. Ici, l'écartement des broches des sondes potentielles ne permet pas la séparation d'échelle avec h nécessaire qui permettrait de mesurer la cascade directe

d'énergie. Les fonctions de structure changent cependant de signe pour $l = h$, indiquant clairement la séparation entre une cascade inverse et une cascade directe. Ces mesures justifient donc la dénomination de régime de turbulence pleinement développée quasi-2D. Ce régime est donc le régime bien connu de turbulence en couche mince (hauteur finie) [64].

De façon plus surprenante, le régime fortement magnétisé (bas I_0 mais B_0 large) présente des spectres avec une pente en k^{-3} . Les fonctions de structures quant à elles sont négatives, indiquant un transfert direct d'énergie. Cette situation est donc différente de celle rapportée expérimentalement par Messadek *et al.* [6] où la présence d'un spectre en k^{-3} est associée à une cascade inverse d'énergie. Ici, c'est la présence du condensat d'énergie à basse-fréquence, responsable des oscillations périodiques du champ de vitesse, qui redresse le spectre. Cette différence s'explique par les grandes valeurs de $Ha \gg 100$ obtenues chez Messadek *et al.* [65] là ou pour l'expérience KEPLER $Ha < 60$. Dans le cas de l'expérience KEPLER, la présence de ce condensat d'énergie est associée, comme il sera montré dans la suite, à la présence de vortex qui se propagent dans la direction azimuthale.

2.6 Bilan d'énergie du pompage électromagnétique

Une question central pour les dispositifs de pompage MHD industriels est la question du rendement. Afin d'augmenter le rendement du pompage électromagnétique, il est important de comprendre comment l'énergie est injectée ainsi que d'identifier les sources de dissipation. Il est possible à cette fin de réaliser un bilan d'énergie global pour ce type de dispositif MHD. En l'absence de forçage mécanique, le produit scalaire de l'équation de l'équation de Navier-Stokes (2.4) avec \mathbf{u} donne le bilan d'énergie cinétique. De même, le produit scalaire de l'équation d'induction (2.5) avec \mathbf{B}/μ_0 , donne le bilan d'énergie magnétique :

$$\frac{dE_u}{dt} = T - D_\nu, \quad (2.41)$$

$$\frac{dE_b}{dt} = -T - D_\eta + F. \quad (2.42)$$

E_u désigne l'énergie cinétique moyennée sur le volume total Ω . De même, E_b désigne l'énergie magnétique totale. Sur les parois, la condition de non glissement implique pour la vitesse que $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$. Le terme D_ν correspond à la dissipation visqueuse d'énergie

cinétique. Le terme D_η correspond à la dissipation Ohmique d'énergie magnétique.

$$E_u = \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} dV, \quad E_b = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV, \quad (2.43)$$

$$D_\nu = \rho\nu \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV, \quad D_\eta = \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \mathbf{j}^2 dV, \quad (2.44)$$

$$F = \eta \oint_{\partial\Omega} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{j}. \quad (2.45)$$

L'équation pour l'énergie magnétique correspond au théorème de Poynting dans la limite où l'énergie électrique disparaît à cause de l'absence de charge et d'onde électromagnétique. Le terme F rend alors compte de l'injection d'énergie électromagnétique dans le système, injection qui a lieu dans l'équation de l'énergie magnétique. Le terme T correspond au transfert d'énergie magnétique en énergie cinétique (et inversement) et s'écrit :

$$T = -\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} : \nabla \otimes \mathbf{u} dV = - \int_{\Omega} \mathbf{M} : \nabla \otimes \mathbf{u} dV, \quad (2.46)$$

$$= \int_{\Omega} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} dV = - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{j} dV, \quad (2.47)$$

où $M = 1/\mu_0(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \mathbb{I}\mathbf{B}^2/2)$ est la partie magnétique du tenseur de Maxwell et où l'incompressibilité implique l'égalité entre les deux premières intégrales. \otimes désigne le produit tensoriel et \mathbb{I} la matrice identité. En régime stationnaire, il vient :

$$T = D_\nu, \quad (2.48)$$

$$F = T + D_\eta. \quad (2.49)$$

Le rendement de la transformation MHD d'énergie magnétique en énergie cinétique est défini par le rapport γ entre l'énergie magnétique transférée en énergie cinétique sur l'énergie fournie au système $\gamma = T/F$ d'où $\gamma = D_\nu/(D_\nu + D_\eta)$.

2.6.1 Transfert d'énergie dans les différents régimes

Le bilan d'énergie dans le régime fortement magnétisé apporte une première conséquence intéressante. Les courants électriques sont circonscrits aux couches limites d'Hartmann sur les plaques supérieure et inférieure. La densité de courant est donnée par la conservation de la charge $j_r \sim I_0/4\pi r \delta_{Ha}$. Dans ce régime, les gradients de vitesse sont contenus dans la couche limite d'Hartmann. La prédiction $u_{\theta,\alpha=1}$ pour ce régime

implique :

$$D_\nu = \rho\nu \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV, \quad (2.50)$$

$$\sim \frac{I_0^2}{(4\pi)^2(\rho\nu\sigma)} \int_0^h dz \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^{2\pi} r d\theta \frac{1}{r^2}, \quad (2.51)$$

$$\sim \rho\nu \frac{I_0^2}{(4\pi)^2(\rho\nu\sigma)} \frac{S2\delta_{Ha}}{\delta_{Ha}^2}, \quad (2.52)$$

$$\sim \frac{I_0^2}{\sigma\delta_{Ha}} S, \quad (2.53)$$

où $S = 2\ln(R_2/R_1)/8\pi$ désigne un facteur géométrique. Il est possible d'estimer D_η de la même façon :

$$D_\eta = \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} \mathbf{j}^2 dV, \quad (2.54)$$

$$\sim \frac{I_0^2}{\sigma\delta_{Ha}} S, \quad (2.55)$$

$$= D_\nu. \quad (2.56)$$

Dans ce régime il y a l'égalité $D_\nu = D_\eta$ qui implique pour le rendement $\gamma = 1/(1 + D_\eta/D_\nu) = 1/2$. Ce rendement est en fait identique au rendement obtenu pour un écoulement de Hartmann dans une géométrie cartésienne. Ce rendement a également été obtenu pour les pompes électromagnétiques d'Einstein-Szilard [\[66\]](#).

De la même façon, il est possible d'obtenir une loi d'échelle pour le rendement dans le régime de turbulence pleinement développée. La dissipation ohmique est similaire au cas précédent en prenant δ la taille typique des gradients de vitesse et donc la taille de la couche limite à travers laquelle les courants sont distribués :

$$D_\eta = \frac{I_0^2}{(4\pi)^2\sigma} \frac{2S}{\delta}. \quad (2.57)$$

La dissipation visqueuse devient alors (en négligeant la correction logarithmique) :

$$D_\nu \sim \rho\nu \int_{R_1}^{R_2} dr \frac{I_0 B_0}{4\pi\rho r} \frac{2\pi\delta r}{\delta^2}, \quad (2.58)$$

$$\sim S \frac{I_0 B_0 \Delta R \nu}{2\delta}. \quad (2.59)$$

Le rapport D_η/D_ν vaut donc :

$$\frac{D_\eta}{D_\nu} \sim \frac{2I_0 S}{(4\pi)^2 \sigma \nu B_0 \Delta R}, \quad (2.60)$$

$$\sim \frac{1}{4\pi^2} \frac{H}{Ha^2}, \quad (2.61)$$

où $H = j_0 B_0 h^3 / \rho \nu^2$ est le nombre *magnétique* défini plus haut. Pour $I_0 = 3 \text{ kA}$ et $B_0 = 0.1 \text{ T}$, $H \sim 10^9$ et $Ha \sim 10^2$, et il vient $D_\eta/D_\nu \sim 10^5$ soit un rendement $\gamma \sim 10^{-5}$. En d'autres termes, la bifurcation à la turbulence ferait dramatiquement diminuer le rendement du pompage électromagnétique. En pratique, cette estimation est peut-être trop violente. Cette estimation est particulièrement basse parce qu'elle est proportionnelle à Pm :

$$\frac{D_\eta}{D_\nu} \sim \frac{j_0 h}{2B_0 \nu \sigma}, \quad (2.62)$$

$$\sim \frac{h}{l_I} \frac{B_I}{B_0} \frac{1}{Pm}, \quad (2.63)$$

où la loi de Maxwell-Ampère a été utilisée pour estimer $j_0 = |\nabla \times \mathbf{B}_I| \sim B_I / \mu_0 l_I$ où B_I est l'ordre de grandeur du champ magnétique lié aux courants imposés. Si, à place des ν et σ , les viscosité et conductivité turbulentes sont utilisées avec $\nu_{turb} \sim \sigma_{turb} \sim UL$, alors $Pm \sim 1$, ce qui augmente grandement le rendement de la pompe électromagnétique.

Enfin, l'estimation du rendement pour le régime inertiel-résistif est quant à elle plus ardue du fait de la structure plus complexe de l'écoulement.

2.7 Oscillation basse fréquence en régime fortement magnétisé

Dans le régime fortement magnétisé, il existe un domaine de paramètres (I_0, B_0) pour lequel le système transite vers un régime oscillant, sans bifurquer vers le régime de turbulence pleinement développée. La Figure [2.10](#) montre le signal temporel des composantes u_r et u_θ du champ de vitesse. La fréquence de cette oscillation est proche de quelques Hz , $f \sim 1 - 6 \text{ Hz}$. Cette oscillation apparaît pour des valeurs élevées de champ magnétique, $B_0 > 90 \text{ mT}$, soit $Ha > 52$. Cette oscillation est cohérente avec la présence d'un condensat d'énergie à basse fréquence. Ce condensat est constitué de vortex qui se propagent dans la direction azimuthale. La Figure [2.11](#) montre l'évolution du mode basse fréquence ainsi que l'écart-type des fluctuations de vitesse en fonction du courant pour un champ magnétique $B_0 = 110 \text{ mT}$ soit $Ha \sim 63$. Pour $I_0 < 100 \text{ A}$, l'écart-type des fluctuations suit l'évolution du mode basse fréquence. Pour $I_0 > 100 \text{ A}$,

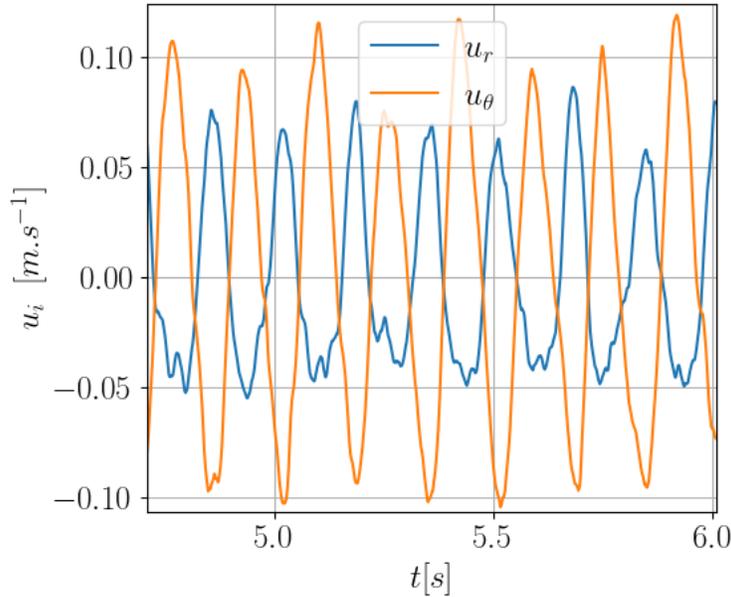


FIGURE 2.10 – Oscillations des composantes azimuthales et radiales de vitesse après la bifurcation. Le champ magnétique imposé est $B_0 = 110 \text{ mT}$.

le mode basse fréquence disparaît tandis que les fluctuations de vitesse augmente à nouveau avec la transition à la turbulence. L'oscillation basse fréquence est donc présente pour de faibles amplitudes de courant $10 \text{ A} < I_0 < 80 \text{ A}$. Cette oscillation basse fréquence ressemble au résultat obtenu par Messadek & Moreau [65]. Excepté que dans leur dispositif, l'oscillation est produite par une instabilité de la couche de Shercliff libre engendrée par l'injection de courant. Dans l'expérience KEPLER, il est probable que l'oscillation soit produite par une instabilité de la couche limite de Shercliff située sur les cylindres. En effet, le nombre de Reynolds basé sur $\delta_{Se} \sim h/\sqrt{Ha}$, est relativement grand $Re_{Se} = U\delta_{Se}/\nu > 10^3$. Cette instabilité conduit à des structures quasi-2D, alignées avec les lignes de champ magnétique. En ce sens, cette instabilité est donc différentes des ondes obtenues numériquement [16, 17, 67] et expérimentalement [18, 19] dans des systèmes présentant un rapport d'aspect opposé, $h \gg \Delta R$. Cette instabilité a également été obtenu dans la seconde expérience présentée dans ce travail de thèse et sera développée au chapitre 6.

2.8 Conclusion

En conclusion, l'expérience KEPLER permet d'explorer dans une seule expérience plusieurs régimes MHD différents. Certains de ces régimes, comme le régime de Hartmann, ont été observés dans d'autres dispositifs expérimentaux [4, 5, 8, 9]. Le régime

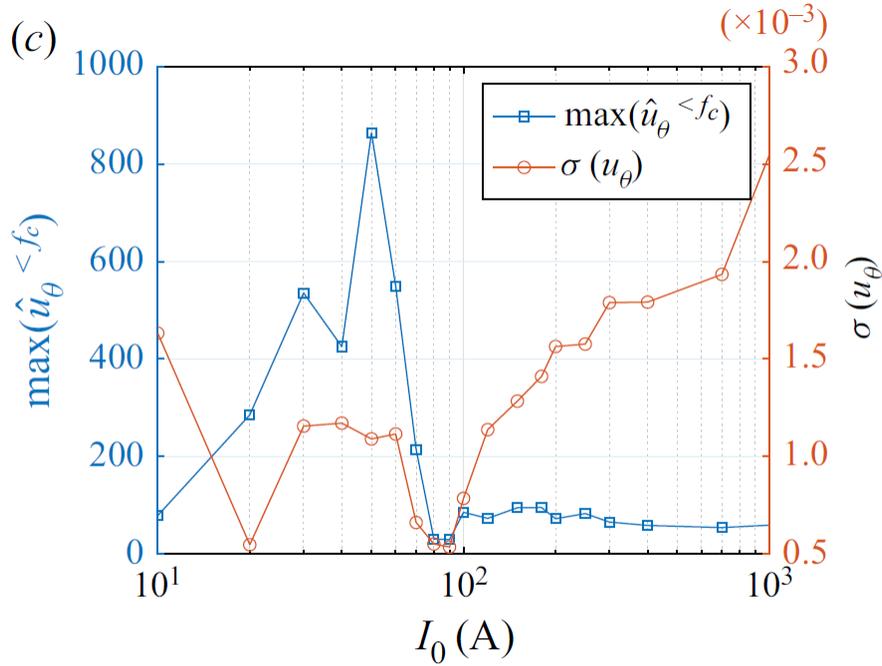


FIGURE 2.11 – Amplitude du mode basse fréquence en fonction du courant imposé I_0 . $\hat{u}_\theta < f_c$ désigne la transformée de Fourier du signal temporel u_θ pour des fréquences plus basses que $f_c \sim 10$ Hz, échelle de gauche, unité arbitraire. $\sigma(u_\theta)$ désigne l'écart-type des fluctuations de vitesse, unité arbitraire. Figure issue de Vernet *et al.* [46].

fortement magnétisé présente une première transition vers un régime oscillant avec la présence de tourbillons se propageant dans la direction azimuthale, situation analogue aux expériences sur les instabilités des couches limites de Shercliff libres [65, 68]. L'expérience KEPLER se distingue des autres expériences MHD axisymétriques de par sa section de grand rapport d'aspect, $\Delta R/h \sim 9$ et la possibilité d'injecter des courants électriques importants, $I_0 \sim 3$ kA, là où d'autres études numériques [16, 17, 47, 67] ou expérimentales [18, 19] présentaient des rapport d'aspect carré ou $h \gg \Delta R$. Ces deux caractéristiques permettent notamment d'accéder à un nouveau régime où le profil de rotation est Képlerien, $u_\theta \propto r^{-1/2}$, en présence de turbulence quasi-2D. Enfin, la présence de deux paramètres de contrôle donne une meilleure compréhension de la transition entre les différents régimes. La transition entre les régimes inertiel-résistif et fortement magnétisé se produit pour $\Lambda_c \sim 1$. La transition à la turbulence pour le régime fortement magnétisé se produit pour $Re_H \sim 400$. Ce seuil pour l'instabilité de la couche limite d'Hartmann est proche d'autres résultats expérimentaux [14, 56]. Le long de cette ligne marginale de stabilité, le courant électrique critique croît lorsque le champ magnétique augmente, $j_c \propto B_0$. La transition à la turbulence pour le régime inertiel-résistif se produit pour $Re_B \sim 300$. Le long de cette courbe marginale de stabilité, le courant électrique critique décroît lorsque le champ magnétique augmente, $j_c \propto 1/B_0$.

Enfin, les faibles valeurs des nombres de Reynolds critiques pour la transition à la turbulence Re_H et Re_B sont en bon accord avec l'analyse numérique [40].

Chapitre 3

Transport : considérations théoriques et applications astrophysiques

Une question générale en mécanique des fluides est la question du transport de quantités physiques comme les scalaires passifs, la température, le champ magnétique ou encore le moment cinétique. Ces questions sont d'une importance capitale pour comprendre une grande variabilité de phénomènes qui va de la dynamique stellaire à la convection dans les cuves des centrales nucléaires. Par ailleurs, il existe un lien étroit entre le problème du transport de chaleur dans l'expérience de Rayleigh-Bénard et le transport de moment cinétique dans le dispositif de Taylor-Couette. Après une brève introduction de l'analogie bien connue qui existe entre ces systèmes, il sera plus aisé d'introduire la question du transport de moment cinétique par la turbulence dans l'expérience KEPLER (présentée au chapitre 2). La fin de ce chapitre sera ensuite consacrée à la connexion qu'il existe entre les expériences Taylor-Couette, l'expérience KEPLER et le transport de moment cinétique dans les disques d'accrétion, question qui continue d'intéresser les astrophysiciens.

3.1 Transport de la Chaleur dans les fluides

L'expérience classique de Rayleigh-Bénard consiste en une nappe de liquide située entre deux plaques horizontales. La plaque inférieure est maintenue à une température constante, supérieure à la température de la plaque supérieure, elle aussi maintenue constante, voir Figure 3.1. Henry Bénard, lorsqu'il réalise son expérience en 1900, observe la formation d'un pavage de la surface libre et comprend que de petites cellules convectives, organisées en réseaux, en sont à l'origine [69]. À la différence de la diffusion thermique, il note que les surfaces isobares ne sont plus des plans horizontaux. Lord Rayleigh propose la première description théorique et calcule le seuil linéaire de

l'instabilité en 1916 [70]. Du point de vue de la théorie des systèmes dynamiques, le

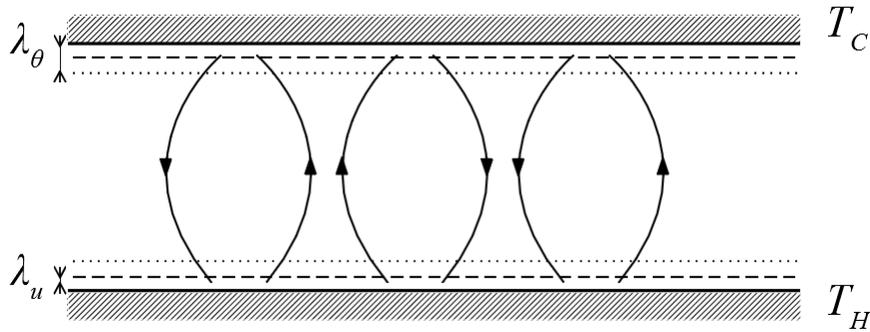


FIGURE 3.1 – Rouleaux de convection après le seuil de l’instabilité de Rayleigh-Bénard. Un liquide est maintenu entre deux plaques horizontales. La plaque inférieure est chauffée à une température T_H supérieure à la température T_C de la plaque supérieure. Les longueurs λ_θ et λ_u symbolisent respectivement les épaisseurs typiques des couches limites thermiques et visqueuses.

système de Rayleigh-Bénard (RB) a joué un rôle central. L’instabilité de RB est enseignée dans tous les cours d’instabilité linéaire car le calcul est simple et direct [71, 72]. RB est également un outil pour étudier la formation de motifs (*pattern*) avec la présence d’écoulements cellulaires au-dessus du seuil. RB est également un bon exemple pour étudier le lien entre mode neutre et instabilité secondaire : au-dessus du seuil d’instabilité, l’apparition de rouleaux brise la symétrie par translation dans la direction orthogonale aux rouleaux. Cependant, les rouleaux sont eux invariants par translation (principe de Curie), l’amplitude est définie à une phase près (symétrie $U(1)$)¹ ce qui revient à traduire l’origine de l’axe perpendiculaire aux rouleaux. Cette opération ne coûte pas d’énergie au système et est donc un mode neutre² de la structure périodique, c’est un mode de Goldstone. Le système RB est intéressant parce qu’il présente des instabilités secondaires qui obéissent à ce principe [73]. Il a également joué un rôle dans l’étude du chaos spatio-temporel [74, 75]. Loin du seuil, ce dispositif a permis de mieux appréhender un grand nombre de systèmes à des échelles très différentes. Sur Terre, la convection thermique est connue pour jouer un rôle dans le noyau [76] et le manteau terrestre [77], dans les océans [78] ainsi que dans l’atmosphère [79]. En astrophysique, la convection thermique est présente dans les étoiles [80] et pourrait jouer un rôle dans le transport de moment cinétique dans les disques d’accrétion [81]. La convection thermique dans les objets géo- et astrophysiques, tout comme nombre de dispositifs industriels, présentent souvent une grande séparation d’échelle qui rend difficile leur modélisation grâce à l’analyse numérique. La découverte de lois d’échelle est donc toujours un progrès pour réaliser des prédictions sur ces systèmes. Ce chapitre

1. Le groupe $U(1)$ est isomorphe aux nombres complexes de module 1.

2. Le taux de croissance d’un mode neutre est nul.

aborde donc les questions du transport de chaleur et de moment cinétique sous cet angle.

3.1.1 Introduction

Une question invariable à toutes ces configurations est la question de l'efficacité et du régime de transport de chaleur par la convection. Dans la suite on se propose de revenir brièvement sur les équations et les nombres sans dimension qui caractérisent le problème. On pose ν la viscosité cinématique du fluide, g l'accélération de pesanteur, α le coefficient de dilatation thermique, ΔT l'écart de température entre les plaques, qui sont par ailleurs distantes l'une de l'autre d'une longueur d . L'hypothèse de Boussinesq implique le fait de considérer que les variations de densité n'interviennent que dans la force de flottaison. Dans ce cadre, l'équation de Navier-Stokes et l'équation de la chaleur s'écrivent [82] :

$$\rho_0(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho_0 \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho_0 \alpha g \theta \mathbf{e}_z, \quad (3.1)$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta + \frac{\Delta T}{d} u_z, \quad (3.2)$$

où le champ de vitesse est à divergence nulle, $\kappa = \lambda / \rho c_p$ est la diffusivité thermique, la température T a été séparée entre profil diffusif $T_0(z)$, qui vérifie $\nabla^2 T_0 = 0$ et fluctuations de température θ , et où la pression p est définie de sorte qu'elle prend en compte la pression hydrostatique. L'axe Oz désigne l'axe vertical et la gravité est supposée homogène et pointe dans la direction $-\mathbf{e}_z$.

3.1.2 Transport de chaleur

Afin de quantifier le transport de chaleur dans RB, on peut procéder de la manière suivante : le champ de température diffusif (absence de convection) vaut en régime stationnaire $T_0 = -\frac{\Delta T}{d}z + T_H + \theta$ où $\Delta T = T_H - T_C$, conséquence des conditions aux limites due à l'écart de températures entre les plaques chaude, T_H et froide T_C . En régime stationnaire, l'équation de la chaleur pour les fluctuations devient :

$$-\overline{u_z} \frac{\Delta T}{d} = \nabla \cdot (\kappa \nabla \bar{\theta} - \overline{\mathbf{u} \theta}), \quad (3.3)$$

où $\overline{(\cdot)}$ désigne la moyenne temporelle. La moyenne surfacique sur un plan d'altitude z est définie par $\langle \dots \rangle_z = \int_{S(z)} dS$. La moyenne $\langle \dots \rangle_z$ appliquée sur l'équation (3.3) donne :

$$-\langle \overline{u_z} \rangle_z \frac{\Delta T}{d} = \partial_z \langle \kappa \partial_z \bar{\theta} - \overline{u_z \theta} \rangle_z. \quad (3.4)$$

La divergence se réduit à la dérivée selon z , car la moyenne dans le plan $S(z)$ des dérivées selon x et y est nulle par définition de la moyenne³. Montrons, en utilisant l'incompressibilité, que le membre de gauche de l'équation (3.4) est nul. Le volume de contrôle Ω est délimité par les plans horizontaux situés en $z = 0$ et z . La condition d'incompressibilité, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, intégrée sur Ω implique, en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{S(z=0)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S(z)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} d\Omega \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (3.5)$$

$$= 0. \quad (3.6)$$

La première intégrale surfacique est nulle par non pénétrabilité de la plaque en $z = d$. La seconde intégrale surfacique est donc nulle, où $d\mathbf{S} = \pm dS \mathbf{e}_z$ suivant le plan. La densité de flux de température se note $j_\theta = -\kappa \partial_z \bar{\theta} + \overline{u_z \theta}$. Ce flux moyenné sur n'importe quel plan $\langle j_\theta \rangle_z$ est donc conservé le long de l'axe z :

$$\boxed{\partial_z \langle j_\theta \rangle_z = 0}. \quad (3.7)$$

Le transport de chaleur convectif est dû au terme $\langle \overline{u_z \theta} \rangle_z$. En l'absence de convection ou pour un solide, le problème est linéaire : le flux de température est défini en fonction des gradients de température et pour des géométries simples tout peut se calculer analytiquement. À l'inverse, pour un fluide, la présence de chaleur transportée par le fluide complique l'analyse de la dynamique. En effet, le champ de vitesse et de température u_z et θ peuvent se développer comme la somme de leur valeur moyenne sur le plan $S(z)$ et de leurs fluctuations spatiales vis-à-vis de ce plan :

$$u_z = \langle u_z \rangle_z + \tilde{u}_z, \quad (3.8)$$

$$\theta = \langle \theta \rangle_z + \tilde{\theta}. \quad (3.9)$$

L'incompressibilité implique que $\langle u_z \rangle_z = 0$. Montrons que le transport convectif est dû aux fluctuations spatiales des champs u_z et θ :

$$\langle \overline{u_z \theta} \rangle_z = \langle \overline{u_z} \rangle_z \langle \overline{\theta} \rangle_z + \langle \overline{\tilde{u}_z \tilde{\theta}} \rangle_z, \quad (3.10)$$

$$= \langle \overline{\tilde{u}_z \tilde{\theta}} \rangle_z, \quad (3.11)$$

$$= \langle \overline{\tilde{u}_z \tilde{\theta}} \rangle_z + \langle \overline{\tilde{u}'_z \tilde{\theta}'} \rangle_z, \quad (3.12)$$

3. En effet, $S(z)$ est un plan infini, rigoureusement, $\langle \dots \rangle_z = \lim_{(\Delta X, \Delta Y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{1}{\Delta X \Delta Y} \iint_{\Delta X, \Delta Y} (\dots) dx dy$. Comme le contenu de la divergence est borné, l'intégrale surfacique de la divergence de la composante coplanaire du vecteur est finie et sa moyenne tend donc vers zéro.

où les fluctuations spatiales sont décomposées en la somme de la valeur moyenne temporelle et des fluctuations temporelles $\tilde{u}_z = \overline{\tilde{u}_z} + \tilde{u}'_z$ (de même pour θ). Le transport convectif comporte donc deux contributions, la première due aux corrélations entre les fluctuations spatiales des moyennes temporelles des champs u_z et θ , présentes par exemple dans le cas d'un écoulement laminaire transportant la chaleur. La seconde contribution provient des corrélations entre les fluctuations spatio-temporelles générées par la turbulence. La première contribution est bornée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $\Delta_z u_z$ et $\Delta_z \theta$ l'écart-type des fluctuations spatiales :

$$\langle \overline{\tilde{u}_z \tilde{\theta}} \rangle_z \leq \Delta_z u_z \Delta_z \theta, \quad (3.13)$$

avec :

$$\Delta_z u_z = \left(\int_{S(z)} dS |\overline{\tilde{u}_z}|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.14)$$

$$\Delta_z \theta = \left(\int_{S(z)} dS |\overline{\tilde{\theta}}|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Par conséquent, l'écoulement moyen⁴ transporte la chaleur uniquement s'il présente des fluctuations spatiales.

3.1.3 Nombre de Nusselt

En physique, les lois d'échelle sont indissociables des grandeurs sans dimension à travers le théorème π car elles en sont un cas particulier relativement simple⁵. Ce paragraphe vise à faire le lien entre la question du transport de chaleur et le rôle des divers nombres sans dimension du problème. Dans l'approximation de Boussinesq, le problème du transport de chaleur dépend des grandeurs suivantes, tableau 3.1 : où ϕ

Grandeur	d	ν	κ	αg	ΔT	λ	ϕ
Dimension	L	$L^2.T^{-1}$	$L^2.T^{-1}$	$L.T^{-2}.K^{-1}$	K	$M.L.T^{-3}.K^{-1}$	$M.L^2.T^{-3}$

TABLE 3.1 – Tableau des différentes grandeurs physiques intervenant dans le problème du transport de la chaleur.

est la densité de flux de chaleur et M , L , T et K sont respectivement les unités de masse, de longueur, de temps et de température, ce qui fait quatre unités. Le théorème

4. Moyenne temporelle.

5. La réciproque est évidemment fautive à savoir qu'une relation entre nombres sans dimension n'est pas forcément une loi d'échelle.

π nous indique qu'il existe trois nombres sans dimension qui régissent ce problème :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ra = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\kappa\nu}, \quad Nu = \frac{\phi d}{\lambda\Delta T}. \quad (3.16)$$

où Pr désigne le nombre de Prandtl, ratio des diffusivités. Ra désigne le nombre de Rayleigh, qui caractérise le forçage de l'écoulement via la force de flottaison et Nu est le nombre de Nusselt, ratio entre le flux de chaleur total sur le flux de chaleur conductif. Les équations (3.2) ne font pas explicitement intervenir λ qui est caché dans κ et il est donc curieux de le faire intervenir dans l'analyse dimensionnelle, sans faire intervenir c_p ou ρ_0 . En pratique, ρ_0 peut être absorbé dans la définition de la pression et les équations (3.2) ne font alors intervenir ni ρ_0 , ni c_p ou λ . Par contre, la section précédente montre qu'il existe une quantité, la densité de flux de température, j_θ . Il est donc possible de retirer λ de l'analyse dimensionnelle et remplacer ϕ par j_θ . Le résultat de l'analyse dimensionnelle est inchangé car cette opération supprime un paramètre mais également une dimension. Le flux de chaleur et le flux de température sont reliés par la relation $\phi = \rho_0 c_p j_\theta$ et le nombre de Nusselt devient :

$$Nu = \frac{j_\theta d}{\kappa\Delta T}. \quad (3.17)$$

Il est alors possible d'adimensionner l'équation de Navier-Stokes en prenant la grandeur typique de vitesse $U = \kappa/d$:

$$\frac{1}{Pr} (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + Ra\theta \mathbf{e}_z, \quad (3.18)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T, \quad (3.19)$$

où T le champ de température, θ les fluctuations de température par rapport au gradient vertical et \mathbf{u} sont maintenant des champs adimensionnés. Les équations précédentes impliquent par le biais du théorème π qu'il existe une relation du type :

$$Nu = \mathcal{F}(Pr, Ra). \quad (3.20)$$

De plus, comme l'écoulement est une réponse du système au-delà du seuil de l'instabilité, la vitesse n'apparaît pas directement dans le problème. Cependant, en présence de convection forcée (avec une hélice et moteur par exemple), le problème doit faire intervenir une grandeur supplémentaire, U et un nombre sans dimension judicieux, le nombre de Reynolds $Re = Ud/\nu$ ou le nombre de Péclet, $Pe = Ud/\kappa$. Il peut cependant du point de vue numérique ou expérimental être intéressant de regarder l'évolution de u_z par exemple ou de ses fluctuations. Du point de vue de l'analyse dimensionnelle

cela revient à dire que $Re = \mathcal{G}(Ra, Pr)$ ce qui laisse la relation $Nu = \mathcal{F}(Ra, Pr)$ inchangée. Autrement dit, le problème est toujours décrit par un jeu de trois nombres sans dimension. L'expérience indique que le dispositif de RB semble présenter certaines lois d'échelle. La section suivante vise à introduire certaines relations exactes ainsi que certaines de ces lois d'échelle.

3.1.4 Bilan d'énergie

Dans certains régimes de convection il est possible d'obtenir des lois d'échelle pour le transport de chaleur à partir de relations liant le type de dissipation à des arguments sur les tailles de couche limite [83]. Pour ce faire, il faut tout d'abord réaliser le bilan d'énergie cinétique et "thermique" en partant des équations de Boussinesq sans dimension (3.19) [84, 85] afin de relier le taux de dissipation d'énergie cinétique ϵ_ν et le taux de dissipation thermique ϵ_κ aux nombres sans dimension Pr , Ra et Nu :

$$\tilde{\epsilon}_\nu = \langle (\nabla \times \mathbf{u})^2 \rangle_V, \quad (3.21)$$

$$\tilde{\epsilon}_\kappa = \langle (\nabla T)^2 \rangle_V. \quad (3.22)$$

Ces relations sont dimensionnées :

$$\epsilon_\nu = \frac{\nu^3}{d^4} \langle (\nabla \times \mathbf{u})^2 \rangle_V, \quad (3.23)$$

$$\epsilon_\kappa = \frac{\kappa \Delta T^2}{d^2} \langle (\nabla T)^2 \rangle_V. \quad (3.24)$$

Ces quantités sont sans dimension et $\langle \dots \rangle_V$ désigne la moyenne sur le volume total entre les plaques :

$$\langle \dots \rangle_V = \int_S dS \int_0^1 dz (\dots) = \int_0^1 dz \langle \dots \rangle_S. \quad (3.25)$$

La relation pour ϵ_κ est la plus simple à obtenir. En dimensionné, la température en $z = 0$ peut se noter $T_H = T_0$ et la température de la plaque supérieure $T_C = T_0 - \Delta T$. Ainsi, dans le cas sans dimension, les conditions aux limites pour la température sont $T(0) = 0$ et $T(1) = -1$. Pour obtenir une équation sur la variance de la température, il faut multiplier par T l'équation pour la température (3.19) :

$$\partial_t \left(\frac{T^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \frac{T^2}{2} \right) = \nabla \cdot (T \nabla T) - (\nabla T)^2. \quad (3.26)$$

Il faut ensuite appliquer la moyenne $\langle \dots \rangle_V$ à cette équation. Il apparaît, en utilisant les conditions aux limites pour la vitesse, le tout dans le régime stationnaire, que les deux

termes du membre de gauche de cette équation sont nuls :

$$0 = \int_0^1 dz \partial_z \langle T \partial_z T \rangle_S - \langle (\nabla T)^2 \rangle_V. \quad (3.27)$$

Les conditions aux limites pour la température impliquent :

$$\langle -\partial_z T \rangle_{S(1)} = Nu = \langle (\nabla T)^2 \rangle_V = \tilde{\epsilon}_\kappa. \quad (3.28)$$

Ce bilan se comprend de la façon suivante, la variance des gradients de température, appelée parfois par abus de langage, taux de dissipation de la température, s'équilibre en régime stationnaire avec le flux de chaleur qui traverse le dispositif. Il est possible d'obtenir une relation analogue à l'aide d'un bilan d'énergie cinétique, en prenant le produit scalaire de l'équation de Navier-Stokes sans dimension avec \mathbf{u} :

$$\partial_t \left(\frac{u^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \frac{u^2}{2} \right) = -Pr \nabla \cdot (p\mathbf{u}) + Pr \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - Pr (\nabla \mathbf{u})^2 + Pr Ra \theta u_z. \quad (3.29)$$

En régime stationnaire, la moyenne sur le volume $\langle \dots \rangle_V$ appliquée à cette équation donne, en utilisant les conditions aux limites pour la vitesse :

$$\langle (\nabla \mathbf{u})^2 \rangle_V = Ra \langle \theta u_z \rangle_V, \quad (3.30)$$

$$= Ra \int_0^1 dz \langle \theta u_z \rangle_S, \quad (3.31)$$

$$= Ra \int_0^1 dz \langle \theta u_z - \partial_z \theta \rangle_S + Ra \int_0^1 dz \langle \partial_z \theta \rangle_S, \quad (3.32)$$

$$= Ra(Nu - 1). \quad (3.33)$$

Ce bilan implique que le taux de dissipation de l'énergie cinétique s'équilibre avec l'injection d'énergie due à la force de flottaison. Ces relations peuvent s'écrire avec ϵ_ν et ϵ_κ dimensionnés :

$$\boxed{\epsilon_\nu = \frac{\nu^3}{d^4} (Nu - 1) Ra Pr^{-2}}, \quad (3.34)$$

et :

$$\boxed{\epsilon_\kappa = \kappa \frac{\Delta T^2}{d^2} Nu.} \quad (3.35)$$

Dans tout système réel, ϵ_i présente deux contributions différentes en distinguant la dissipation ayant lieu majoritairement dans les couches limites de celle se produisant dans le coeur de l'écoulement :

$$\epsilon_i = \epsilon_i^C + \epsilon_i^{CL}, \quad (3.36)$$

où l'exposant C indique *coeur* de l'écoulement et CL fait référence aux *couches limites*. Afin de déterminer ϵ_i^{CL} il est important d'estimer l'épaisseur de la couche limite visqueuse λ_ν et de la couche limite thermique λ_κ .

3.1.5 Importance des couches limites

En principe, la taille typique des couches limites visqueuses et thermiques dépend aussi de Pr . Ainsi, suivant si $Pr > 1$ ou $Pr < 1$, les régimes pour le transport de chaleur ne sont pas les mêmes, ce qui multiplie le nombre de régime possible pour le transport de la chaleur. Il existe cependant une relation entre le nombre de Nusselt et la taille typique des couches limites thermiques qui sera utile dans la suite. La conservation du flux de chaleur total (3.7) implique au niveau de la couche limite thermique λ_κ , que les deux termes du flux sont du même ordre :

$$\langle u_z \theta \rangle \sim -\kappa \partial_z \langle \theta \rangle. \quad (3.37)$$

Donc, en ordre de grandeur (le saut de température entre chaque couche limite est de l'ordre de $\Delta T/2$)⁶ :

$$\langle j_\theta \rangle \sim \frac{2\kappa \Delta T}{2\lambda_\kappa}. \quad (3.38)$$

Cette équation peut être multipliée par $d/\kappa \Delta T$ afin de faire apparaître le nombre de Nusselt, ce qui donne l'ordre de grandeur pour λ_κ :

$$\boxed{\lambda_\kappa \sim \frac{d}{Nu}}. \quad (3.39)$$

3.1.6 Le régime *ultime* de convection thermique

Le régime *ultime* de convection thermique, prédit par Kraichnan en 1962 [86], a fait l'objet d'une recherche intensive (pour une revue sur le sujet voir par exemple Ahlers *et al.* [87]). Dans ce régime, l'intégralité du transport de chaleur est due à la turbulence et ne dépend donc plus des coefficients de transport moléculaires ν et κ .

6. On suppose ainsi que le profil de température est quasiment plat dans le coeur de l'écoulement.

Dans ce régime, pour un écoulement turbulent, la dissipation se produit dans le coeur de l'écoulement. En première approximation, le taux de dissipation s'écrit grâce à un argument de couche de mélange avec $\nu_{turb} \sim \kappa_{turb} \sim Ud$ où U désigne la vitesse typique des structures turbulentes et donc $\epsilon_\nu^C \sim U^3/d$, et $\epsilon_\kappa^C \sim Ud\Delta T^2/d^2$. Ces relations, combinées aux équations (3.34) et (3.35), dans le cas $Nu \gg 1$, donnent [83] :

$$\frac{U^3}{d} \sim \frac{\nu^3}{d^4} Nu Ra Pr^{-2}, \quad (3.40)$$

$$\text{i.e } Re^3 \sim Nu Ra Pr^{-2}. \quad (3.41)$$

Et :

$$\sim Ud \frac{\Delta T^2}{d^2} \sim \kappa \frac{\Delta T^2}{d^2} Nu, \quad (3.42)$$

$$\text{i.e } Re Pr \sim Nu, \quad (3.43)$$

$$\text{i.e } Re \sim \frac{Nu}{Pr}. \quad (3.44)$$

Il est possible de combiner ces deux résultats pour obtenir une relation sur Nu :

$$\left(\frac{Nu}{Pr}\right)^3 \sim Nu Ra Pr^{-2}, \quad (3.45)$$

$$\text{i.e } Nu^2 \sim Ra Pr, \quad (3.46)$$

$$\text{i.e } Nu \sim Ra^{1/2} Pr^{1/2}, \quad (3.47)$$

ce qui constitue la prédiction pour le régime ultime. Ce régime implique bien que le transport total de chaleur ne dépend plus de ν ni de κ . En effet, le flux de chaleur s'écrit :

$$\langle j_\theta \rangle = Nu \frac{\kappa \Delta T}{d}, \quad (3.48)$$

$$\sim \kappa \frac{\Delta T}{d} Ra^{1/2} Pr^{1/2}. \quad (3.49)$$

Or le produit $(Ra Pr)^{1/2}$ est indépendant de ν et est proportionnel à $1/\kappa$. Le flux de chaleur $\langle j_\theta \rangle$ est donc bien indépendant des coefficients moléculaires. Un résultat identique peut-être obtenu par analyse dimensionnelle. Le flux de chaleur $\langle j_\theta \rangle$ doit être indépendant du coefficient moléculaire ν . Comme $\langle j_\theta \rangle = \kappa \Delta T Nu/d$, le nombre sans dimension Nu ne doit plus faire intervenir ν et donc $Nu = \mathcal{G}(Ra Pr)$, où le produit $Ra Pr$ est directement considéré. Enfin, pour que $\langle j_\theta \rangle$ soit indépendant de κ , il faut que Nu soit proportionnel à κ , ce qui implique nécessairement que $Nu \sim (Ra Pr)^{1/2}$. En pratique, Kraichnan dérivait sa prédiction en passant par un argument de couche

limite turbulente, ce qui introduisit une correction logarithmique pour la loi d'échelle du Nusselt [86] :

$$Nu \sim Ra^{1/2} Pr^{1/2} \ln Ra^{-3/2}. \quad (3.50)$$

Cette correction logarithmique rend sous efficace le transport de chaleur pour la prédiction du régime ultime de Kraichnan. La prédiction du régime *ultime* peut être étendu pour le nombre de Reynolds *Wind* Re en injectant l'expression du Nusselt (3.44) dans l'équation (3.41) :

$$\boxed{Re \sim Ra^{1/2} Pr^{-1/2}}. \quad (3.51)$$

La loi d'échelle pour le nombre de Reynolds *Wind*⁷ obtenue par Kraichnan [86] est légèrement différente puisqu'elle fait apparaître une correction logarithmique, $Re \sim Ra^{1/2} \log^{-1/2} Ra$. Plus récemment, Grossmann & Lohse [88] ont tenté de réviser la théorie de Kraichnan. Leur prédiction ne fait pas intervenir de correction logarithmique pour la loi d'échelle pour le nombre de Reynolds mais fait apparaître une fonction logarithmique dans la prédiction pour le nombre de Nusselt :

$$Re \sim Ra Pr^{-1/2}, \quad (3.52)$$

$$Nu \sim Ra^{1/2} Pr^{1/2} \mathcal{L}(Re), \quad (3.53)$$

où la fonction \mathcal{L} est définie de façon implicite et reflète l'influence de la loi *log* du mur pour la couche limite turbulente⁸. La vérification de la prédiction de Lohse est peu commode car elle dépend d'une façon compliquée de Re . Comme on le verra dans la suite, du point de vue expérimental, des exposants proches de 1/3 ont été obtenus pour la loi d'échelle du Nu en fonction du Ra . Une multitude d'autres prédictions ont été proposées, avec des lois d'échelle différentes pour le transport, $Nu \propto Ra^q$ avec (par ordre croissant) :

$$q \in \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right\},$$

ont été dérivées [83, 87]. Mais toutes ne correspondent pas à des prédictions asymptotiques. Par exemple, le régime en $Nu \propto Ra^{1/4} f(Pr)$ s'obtient en imposant que l'en-

7. Le terme *Wind* fait référence à la composante verticale de la vitesse.

8. $\mathcal{L}(Re) = \ln Re u^*/U$, avec u^* la grandeur typique des fluctuations turbulentes. Le ratio $u^*/U = \tilde{\kappa}/W(Re\tilde{\kappa}/b)$, où $\tilde{\kappa}$ est la constante de Von Karman, b un coefficient géométrique et W la fonction W de Lambert est définie de façon implicite par la relation $x = W(x) \exp W(x)$ pour la branche principale, i.e pour $x > -1/e$. Cette fonction n'est pas aisée à utiliser car elle ne présente pas d'expression explicite autrement que sous la forme d'une expansion continue de fractions.

semble de la dissipation visqueuse se produit dans la couche limite visqueuse, et implique un équilibre entre l'advection et la diffusion pour la chaleur, au niveau de la couche limite thermique. Ce régime ne peut donc pas être un régime de turbulence pleinement développée et n'est donc pas asymptotique. Il existe une prédiction plus ancienne que celle de Kraichnan, due à Malkus (1954) [89] pour le régime *ultime*. La dissipation thermique ayant lieu essentiellement dans la couche limite thermique implique que la diffusivité thermique turbulente κ_{turb} est diminuée d'un facteur $\lambda_\kappa/\lambda_\nu < 1$ ⁹. Le bilan pour l'énergie thermique (3.35) devient :

$$\epsilon_\kappa \sim \frac{\lambda_\kappa}{\lambda_\nu} U d \frac{\Delta T}{d^2} \sim \kappa \frac{\Delta T^2}{d^2} Nu, \quad (3.54)$$

$$\text{i.e. } \frac{dNu^{-1}}{dRe^{-1/2}} \frac{U d \nu}{\nu \kappa} \sim Nu, \quad (3.55)$$

$$\text{i.e. } Nu^2 \sim Re^{3/2} Pr. \quad (3.56)$$

Au contraire de la dissipation thermique, la dissipation visqueuse a lieu dans le coeur de l'écoulement. Cette expression injectée dans l'équation (3.41) devient :

$$Nu \sim Ra^{1/3}, \quad (3.57)$$

$$Re \sim Ra^{4/9} Pr^{-2/3}, \quad (3.58)$$

qui implique une dépendance à la puissance 0 en Pr pour le Nusselt. Ce second régime s'obtient également par des arguments d'analyse dimensionnelle [89]. Le Rayleigh critique Ra_c , au-delà duquel l'instabilité apparaît, se définit comme le nombre de Rayleigh basé sur l'épaisseur de la couche limite thermique λ_κ lorsqu'elle se déstabilise :

$$Ra_c = \frac{g\alpha\Delta T\lambda_\kappa^3}{\kappa\nu}, \quad (3.59)$$

ce qui implique, en injectant la relation $\lambda_\kappa \sim dNu^{-1}$:

$$Nu \sim \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^{1/3}, \quad (3.60)$$

argument qui ne donne *a priori* pas d'information sur la dépendance en Pr , du Nusselt¹⁰. Cette loi d'échelle est également intéressante car elle retire le paramètre d du problème. De façon générale, un grand nombre d'expériences de convection ont mesuré des lois d'échelle avec $q \sim 0.31$ (pour $Ra > 10^{11}$) [90-95] i.e proche de la prédiction

9. ce raisonnement se place donc dans la limite $Pr > 1$

10. Comme tous les arguments loin du seuil, Ra_c n'est pas considéré comme un nombre sans dimension mais comme un paramètre numérique ayant une valeur fixe.

en $Ra^{1/3}$. L'écart à la prédiction théorique a cependant conduit à chercher d'autres arguments. Il est par exemple possible d'ajouter des corrections logarithmiques aux prédictions ce qui explique ces exposants effectifs [88]. Ces arguments reposent sur le fait de considérer que la transition à la turbulence dans Rayleigh-Bénard passe par une déstabilisation de la couche limite. La loi *log of the wall* permet de corriger l'estimation de la dissipation visqueuse dans le coeur de l'écoulement, ce qui introduit des corrections logarithmiques dans les prédictions [88]. Enfin, des expériences dans l'Hélium liquide [96] semblent montrer une transition entre un régime en $2/7$ [11] et un régime au delà de $Ra \sim 10^{11}$, avec $Nu \sim Ra^{0.375}$. Ce dernier est imputé au régime *ultime* de Kraichnan avec une correction logarithmique [12]. Comme il semble particulièrement difficile d'atteindre le régime *ultime* dans les dispositifs classiques, essentiellement trois voies de recherche se sont ouvertes :

- Le chauffage interne ou radiatif afin d'outre-passer les couches limites
- L'effet déstabilisateur de la rugosité sur les couches limites et donc l'amélioration du transport
- Le régime prédit par Kraichnan pourrait se trouver à des nombres de Rayleigh fantastiques de l'ordre de $Ra \sim 10^{21}$, difficiles à obtenir expérimentalement. Or RB est analogue au dispositif de Taylor-Couette, ce qui a conduit certaines équipes à chercher le régime *ultime* dans ce dispositif. Ceci fera l'objet de la section suivante [3.2]

Le dispositif classique RB présente des parois lisses et certaines expériences ont montré que la présence de rugosité, avec une paroi dentelée par exemple, permettrait d'atteindre le régime ultime [97]. Il a été montré par la suite numériquement que ce régime *ultime* n'est que transitoire. Lorsque la sous-couche visqueuse atteint une taille typique inférieure à la rugosité local, le système ne "voit" plus l'effet du relief, son rôle déstabilisant s'arrête, et la loi d'échelle retombe sur le régime proche de $1/3$, observé dans le cas parois lisses [98-100].

Les configurations chauffage interne et chauffage radiatif bien que proches sont en pratique assez différentes. La limitation principale au chauffage interne [13] provient du fait que le transport de la chaleur est toujours limité par les couches limites aux parois qui extraient la chaleur du système [101]. À l'inverse, dans le cas du chauffage radiatif, le transport de chaleur s'affranchit des couches limites car le refroidissement se fait également en volume avec une dérive linéaire du profil moyen de température. Un régime

11. Il est particulièrement difficile de départager les prédictions $1/3$ et $2/7$ car elles sont proches numériquement : $1/3 \simeq 0.33$ tandis que $2/7 \simeq 0.285$.

12. À noter que le Pr de l'Hélium liquide aux basses température est < 1 puisque $Pr \simeq 0.7$.

13. Expérimentalement, le chauffage interne correspond par exemple à de la dissipation joule dans un liquide mauvais conducteur [101].

ultime peut alors être atteint [102][104], où le transport de chaleur est bien indépendant des coefficients moléculaires. C'est cette situation expérimentale qui se rapproche le plus des simulations numériques où le profil de température est imposé numériquement et où l'on retrouve aisément la loi d'échelle en $1/2$ [105].

3.2 Transport de Moment cinétique : Expérience de Taylor-Couette

Le dispositif de Taylor-Couette (Figure 3.2) consiste en une cuve cylindrique où le fluide est confiné entre un cylindre central et un cylindre externe. Chacun des cylindres tourne à une vitesse de rotation donnée par rapport au référentiel du laboratoire. Dans la limite de cylindre infini et *gap* fin, c'est-à-dire distance entre les cylindres d petite devant le rayon moyen, $\bar{R} = (R_{in} + R_{ext})/2$ (où R_{in} et R_{ext} désignent les rayons des cylindres interne et externe), il existe une analogie formelle entre l'instabilité de Rayleigh-Bénard (RB) et l'instabilité de Taylor-Couette [106]. La différence de rotation

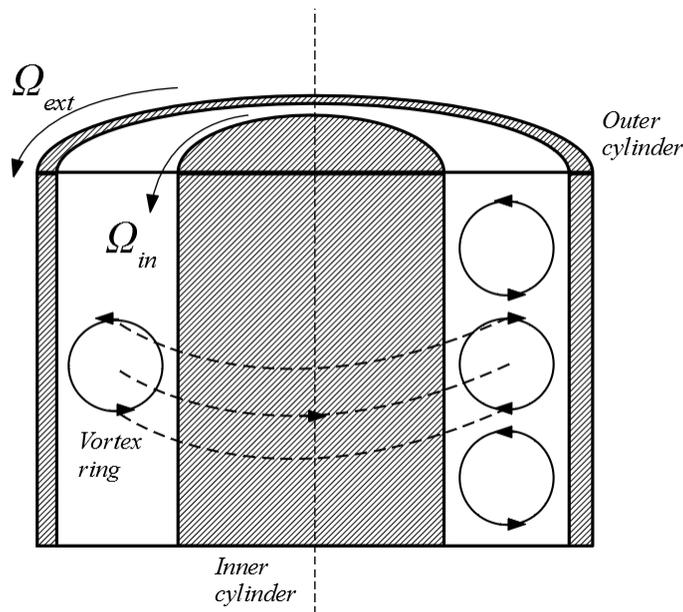


FIGURE 3.2 – Schéma d'un dispositif de Taylor-Couette, où les cylindres interne et externe tournent aux vitesses Ω_{in} et Ω_{ext} . Au seuil de l'instabilité de Taylor, des vortex toroïdaux apparaissent.

entre les cylindres dans TC joue le rôle de la différence de température dans RB et le transport de moment cinétique est équivalent au transport de chaleur. Proche du seuil,

les équations linéarisées s'écrivent :

$$(TC) \begin{cases} (\partial_t - \nu \nabla^2) u_r = -\frac{1}{\rho} \partial_r p + 2\Omega u_\theta, \\ (\partial_t - \nu \nabla^2) u_\theta = -2A u_r, \end{cases} \quad (3.61)$$

avec $U(r) = Ar + B/r$, la solution laminaire autour de laquelle le développement et la linéarisation sont réalisés et $\Omega(r) = U(r)/r$. Pour rappel, $A = (R_{in}^2 \Omega_{in} - R_{ext}^2 \Omega_{ext}) / (R_{in}^2 - R_{ext}^2)$ et fait donc directement apparaître le moment cinétique au bord $R_i^2 \Omega_i$. De même, dans RB, les équations linéarisées sont :

$$(RB) \begin{cases} (\partial_t - \nu \nabla^2) u_z = -\frac{1}{\rho} \partial_z p + \alpha g \theta, \\ (\partial_t - \kappa \nabla^2) \theta = -\partial_z T_0 u_z, \end{cases} \quad (3.62)$$

En conséquence, dans TC, l'analogie de l'équation de la température pour RB est l'équation de Navier-Stokes pour la vitesse azimuthale tandis que la vitesse verticale dans RB correspond à la vitesse radiale dans TC. Le gradient $\partial_z T_0$ du profil de température moyen avant le seuil, responsable de l'instabilité est donc l'équivalent du terme A , dans TC.

Comme dans le cas de RB, il peut être utile de raisonner par analyse dimensionnelle pour le transport de moment cinétique. Le problème présente 5 paramètres. La différence de rotation entre les cylindres $\Delta\Omega$, la distance entre les cylindres d , le rayon moyen \bar{R} , la viscosité cinématique ν , le flux total de moment cinétique ϕ_Ω . Ces paramètres ont des unités de longueur et de temps, le théorème π indique qu'il existe donc trois nombres sans dimension : le rapport d'aspect Γ , le nombre de Taylor Ta et le nombre de Nusselt Nu_Ω :

$$\Gamma = \frac{d}{\bar{R}}, \quad Ta = \frac{\Delta\Omega d^4}{\nu^2}, \quad Nu_\Omega = \frac{\phi_\Omega d}{\nu \Delta\Omega}. \quad (3.63)$$

Dans la limite $d \ll \bar{R}$, le problème ne dépend plus de Γ ($\Gamma \rightarrow 0$). De plus, la viscosité joue également le rôle de la diffusivité thermique pour le transport visqueux de moment cinétique. En conséquence, dans TC $Pr^{TC} = \nu/\nu \equiv 1$, autrement dit, TC n'a pas le degré de liberté donné par le nombre de Prandtl dans RB. En pratique, Eckhardt *et al.* [107] ont obtenu, dans leur bilan du transport de moment cinétique, un analogue géométrique du nombre de Prandtl. Ce nombre est une fonction du rapport entre les rayons interne et externe $\gamma = R_{in}/R_{ext}$. Cependant, modifier le Pr dans RB en changeant de fluide par exemple n'a pas le même effet que de changer le rapport γ dans TC. Il n'y a pas dans TC de différence entre les tailles typiques de couche limite pour

les variables u_θ et u_r . Enfin, le nombre de Taylor joue un rôle analogue au nombre de Rayleigh et la question du transport de moment cinétique se résume à comprendre la relation entre Nu_Ω et Ta :

$$Nu_\Omega = \mathcal{F}(Ta), \quad (3.64)$$

où \mathcal{F} est une fonction inconnue. À bas nombre de Taylor Ta , l'écoulement est laminaire et le transport de moment cinétique est visqueux. Ce régime est analogue au transport conductif de la chaleur par la loi de Fourier. Lorsque le système dépasse un certain nombre de Taylor critique Ta_c le système bifurque vers un état où des rouleaux toroïdaux apparaissent, brisant la symétrie par translation le long de l'axe z . Le premier calcul du seuil par une analyse de stabilité linéaire pour RB a été produit par Rayleigh en Décembre 1916 [70]. La même année et le même mois, Rayleigh publie également son travail sur le critère non-visqueux pour l'instabilité centrifuge : un écoulement azimuthal non visqueux, dont le profil de rotation vérifie $d(ru_\theta)dr > 0$ est linéairement stable vis-à-vis de l'instabilité centrifuge. Il fait également l'analogie entre ce critère et le critère de stabilité pour un fluide soumis à un gradient stable de densité. Le calcul du seuil linéaire pour l'instabilité de Taylor-Couette est réalisé en 1923 par G.I. Taylor [108]. L'équivalence entre les équations au seuil pour les deux systèmes est rapportée de façon explicite dans l'article de Jeffrey [109], où il remercie explicitement G.I. Taylor et A.R. Major pour lui avoir suggéré l'analogie. Ce lien entre les dispositifs RB et TC a naturellement conduit à s'interroger sur le transport de moment cinétique, analogue au transport de chaleur. La géométrie cylindrique rend le calcul de la conservation du flux de moment cinétique plus fastidieux que dans le cas de RB. Il n'a d'ailleurs été réalisé que récemment, en 2007 voir Eckhardt *et al.* [107]. Dans le dispositif de TC le flux de vitesse angulaire ϕ_Ω est conservé radialement :

$$\partial_r \phi_\Omega = 0 \text{ avec } \phi_\Omega = r^3 \langle \overline{u_r \Omega} - \nu \partial_r \overline{\Omega} \rangle_{C(r)}, \quad (3.65)$$

où u_r désigne la composante radiale de la vitesse, Ω la vitesse angulaire est définie par $\Omega = u_\theta/r$ et u_θ désigne la composante azimuthale de la vitesse. $\overline{(\cdot)}$ désigne toujours la moyenne temporelle et $\langle \cdot \rangle_{C(r)} = \int_{C(r)} \frac{rd\theta dz}{S} (\cdot)$ désigne la moyenne spatiale prise sur un cylindre situé à la coordonnée radiale r (cylindre de surface total S). Comme le flux est basé sur la vitesse angulaire, Ω apparaît de façon explicite, la question du transport de Ω est donc analogue à la question du transport de la température. Cependant, comme dans RB, la grandeur macroscopique qui est conservée est la chaleur. Le moment cinétique est donc analogue à la chaleur. Il est donc correct de parler de transport de moment cinétique l . l et Ω sont par ailleurs directement liés puisque $l = \rho r u_\theta = \rho r^2 \Omega$. L'analogie

entre les systèmes RB et TC peut se résumer avec le tableau suivant :

Système	Rayleigh-Bénard	Taylor-Couette
Moteur de l'instabilité	force de flottaison	force centrifuge
Forçage/Dissipation	$Ra = \frac{\rho g \beta \Delta T d^3}{\kappa \nu}$	$Ta = \frac{4\Omega_0 A}{\nu^2}$ avec $A = \frac{R_{in}^2 \Omega_{in} - R_{ext}^2 \Omega_{ext}}{R_{in}^2 - R_{ext}^2}$
Seuil linéaire de l'instabilité	$Ra_c = 1708$	$Ta_c = 1708$
Grandeur transportée	θ	Ω
Reynolds <i>Wind</i>	$Re_W = \frac{du'_z}{\nu}$	$Re_W = \frac{du'_r}{\nu}$
Rapport des temps de dissipation	Pr	$Pr^{TC} = g(\gamma)$ avec $\gamma = R_{in}/R_{ext}$
Transport conductif	$\phi_\kappa = \kappa \frac{\Delta T}{d}$	$\phi_\nu = 2\nu R_{in}^2 R_{ext}^2 \frac{\Delta \Omega}{R_{ext}^2 - R_{in}^2}$
Transport total	$\phi_{total} = \langle \overline{u_z \theta} - \kappa \partial_z \bar{\theta} \rangle$	$\phi_\Omega = r^3 \langle \overline{u_r \Omega} - \nu \partial_r \bar{\Omega} \rangle$
Régime <i>ultime</i>	$Re_w \sim Ra^{1/2} Pr^{-1/2}$	$Re_w \sim Ta^{1/2}$
Régime <i>ultime</i>	$Nu \sim Ra^{1/2} Pr^{1/2}$	$Nu_\Omega \sim Ta^{1/2}$

TABLE 3.2 – Analogie entre les systèmes de Rayleigh-Bénard et de Taylor-Couette

Comme indiqué précédemment, la question du transport de moment cinétique se résume à la question de l'évolution du nombre de Nusselt avec le nombre de Taylor.

$$Nu_\Omega = \mathcal{F}(Ta), \quad (3.66)$$

Dans le régime de turbulence pleinement développée, le flux de moment cinétique ne doit pas dépendre du coefficient moléculaire ν . De la même manière que pour RB, trouver la loi d'échelle pour le transport de moment cinétique dans le régime *ultime* implique d'écrire :

$$\phi_\Omega = \frac{\nu \Delta \Omega}{d} Nu, \quad (3.67)$$

$$\sim \frac{\nu \Delta \Omega}{d} \mathcal{F}(Ta). \quad (3.68)$$

Si l'on cherche \mathcal{F} sous la forme d'une loi de puissance, alors nécessairement $\mathcal{F} = \sqrt{(\cdot)}$ de sorte que ϕ_Ω ne dépende plus de ν . Ainsi, le régime *ultime* de transport du moment cinétique dans TC implique :

$$\boxed{Nu_\Omega \sim Ta^{1/2}}. \quad (3.69)$$

Pour une *review* sur le transport de moment cinétique, voir [110]. Expérimentalement,

dans le régime laminaire pour des nombres de Taylor Ta compris entre 10^4 et $\sim 10^7$, $Nu_\Omega \sim Ta^{1/3}$. Cette loi d'échelle est donc proche de celle obtenue à grand Ra dans RB. En revanche, le dispositif de TC permet d'atteindre des nombres de Taylor très grands, et donc d'explorer des régimes difficiles à obtenir dans RB. Pour $10^{11} < Ta < 10^{13}$, la couche limite visqueuse se déstabilise et la loi d'échelle présente un exposant effectif proche de 0.38 ou 0.39 en fonction des dispositifs expérimentaux. Cet exposant est plus petit que 1/2 et a également conduit à s'interroger sur la présence de correction logarithmique. Cet exposant effectif semble également avoir été observé dans une expérience de RB, sur une demi-décade pour $Ra > 10^{14}$ [111]. Comme dans le cas de RB, la présence de rugosité au niveau des parois semble avoir un rôle déstabilisateur pour les couches limites et permet également d'obtenir un régime où $Nu_\Omega \sim Ta^{1/2}$ [112]. La question de savoir si ce régime est un régime asymptotique n'est cependant pas tranché par les auteurs.

3.3 Transport de moment cinétique : Expérience KEPLER

Le dispositif expérimental KEPLER peut se voir comme un Taylor-Couette muni d'un forçage électromagnétique, il est donc naturel de réfléchir à la façon dont le problème du transport de moment cinétique peut se décrire dans ce système. Les paragraphes suivants visent tout d'abord à obtenir des relations analogues à celles obtenues dans TC [107], puis de présenter et de discuter les résultats expérimentaux au regard de cette méthode.

3.3.1 Équation pour le transport de moment cinétique

Cette section vise à obtenir l'équation de conservation du moment cinétique adaptée à l'expérience KEPLER, équivalente à la relation (3.65) pour TC. Rappelons qu'en présence de force de Laplace, l'équation de Navier-Stokes et l'équation d'induction pour le champ magnétique, sont :

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.70)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}. \quad (3.71)$$

Dans l'expérience KEPLER, le champ magnétique B_0 généré par les bobines est très intense. Il est donc possible de décomposer le champ magnétique entre le champ moyen

B_0 et les fluctuations temporelles \mathbf{b} , dues aux mouvements du fluide :

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{b}. \quad (3.72)$$

Dans cette limite, l'équation d'induction linéarisée donne, équation :

$$B_0 \partial_z \mathbf{u} = -\eta \Delta \mathbf{b}. \quad (3.73)$$

Le transport de moment cinétique, donc de vitesse angulaire, implique uniquement la composante azimuthale de l'équation de Navier-Stokes qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \partial_t u_\theta + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \rho \frac{u_r u_\theta}{r} = & -\frac{1}{r} \partial_\theta p + \rho \nu \left(\partial_r^2 u_\theta + \frac{1}{r} \partial_r u_\theta + \partial_z^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \\ & + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta, \end{aligned}$$

où u_r et u_θ désignent les composantes radiale et azimuthale du champ de vitesse. En supposant que la densité radiale de courant est donnée par la conservation de la charge, $j_r \sim I_0/2\pi r h$ où I_0 est la quantité totale de courant injectée à travers les électrodes et h la hauteur de la cuve, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho \partial_t u_\theta + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \rho \frac{u_r u_\theta}{r} = & -\frac{1}{r} \partial_\theta \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \rho \nu \left(\partial_r^2 u_\theta + \frac{1}{r} \partial_r u_\theta + \partial_z^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \\ & + \frac{I_0 B_0}{2\pi r h} + \frac{1}{\mu_0} B_0 \partial_z b_\theta. \end{aligned}$$

L'hypothèse (forte) que l'écoulement et les perturbations de champ magnétique sont axisymétriques, permet de simplifier la condition d'incompressibilité :

$$\partial_z u_z = -\frac{1}{r} \partial_r (r u_r), \quad (3.74)$$

ainsi que de réécrire le Laplacien sous la forme :

$$\partial_r^2 u_\theta + \frac{1}{r} \partial_r u_\theta = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_\theta), \quad (3.75)$$

en injectant ces expressions dans l'équation de Navier-Stokes et en utilisant l'équation donnée par l'approximation quasi-statique (3.73), l'équation Navier-Stokes devient :

$$0 = \partial_r \left(-r^2 \overline{u_r u_\theta} + \nu r^3 \partial_r \left(\frac{\overline{u_\theta}}{r} \right) \right) - r^2 \partial_z (\overline{u_z u_\theta}) + r^2 \nu \partial_z^2 \overline{u_\theta} + \frac{I_0 B_0}{2\pi \rho h} r - r^2 \sigma B_0^2 \Delta^{-1} \partial_z^2 \overline{u_\theta}. \quad (3.76)$$

L'opérateur $\overline{(\cdot)}$ désigne la moyenne temporelle afin d'appliquer aisément nos résultats aux expériences^[14]. Le fait de pas utiliser de moyenne sur des surfaces cylindriques implique de devoir utiliser les hypothèses d'axisymétrie et de turbulence quasi-2D. Le premier terme du membre de droite correspond au flux radial de moment cinétique en posant $u_\theta = r\Omega$. Il a été montré partie [2.5](#), que lorsque le forçage est suffisamment intense, le système atteint un régime de turbulence quasi-2D en couche mince. La présence d'une cascade inverse d'énergie implique que l'écoulement est purement 2D pour les échelles plus grandes que la hauteur de la cuve. Il est donc possible de négliger les dérivées selon l'axe vertical dans l'équation précédente et obtenir une équation pour le transport de moment cinétique :

$$\partial_r \overline{J_\Omega} - \frac{I_0 B_0}{2\pi \rho h} r = 0, \quad (3.77)$$

avec le flux de moment cinétique J_Ω , défini comme dans [\[107\]](#) :

$$\overline{J_\Omega} = r^3 (\overline{u_r \Omega} - \nu \partial_r \overline{\Omega}). \quad (3.78)$$

L'équation de conservation du flux de moment cinétique [\(3.77\)](#) fait apparaître un terme source qui correspond à l'injection en volume de moment cinétique par la force de Lorentz. Ceci constitue une distinction majeure entre l'expérience KEPLER et TC. L'injection de moment cinétique ne se fait donc plus par les parois à travers les couches limites. En effet, le transport de moment cinétique dans TC est limité par les couches limites car lorsque les parois sont lisses, la turbulence reste confinée proche des parois. Lorsque les parois sont rugueuses, le régime en $Nu_\Omega \sim Ta^{1/2}$ peut être atteint parce que la turbulence envahit complètement le coeur de l'écoulement, ce qui optimise le transport [\[112\]](#). L'injection volumique de moment cinétique permet de contourner le problème de l'injection de moment cinétique et est analogue au chauffage radiatif dans RB où une injection volumique de chaleur permet d'obtenir le régime *ultime* [\[102, 103\]](#).

3.3.2 Transport du moment cinétique et loi d'échelle pour le Nusselt

Dans les expériences de Taylor-Couette, le problème du transport de moment cinétique se résume à trouver la relation qui lie le nombre de Nusselt au nombre de Taylor. Pour l'expérience KEPLER, la conservation du moment cinétique implique la présence

14. Dans TC, il est possible de prendre également la moyenne le long des cylindres ce qui simplifie le problème. En revanche, expérimentalement cela force à utiliser des méthodes comme la PIV afin d'obtenir le champ de vitesse dans les plans verticaux.

d'injection volumique de moment cinétique à travers la force de Laplace. Cette injection volumique de moment cinétique implique de faire appel à un troisième nombre sans dimension, noté H . Comme pour TC, les définitions du nombre de Nusselt et de Taylor sont :

$$Nu_\Omega = \frac{\overline{J_\Omega}}{J_{lam}}, \quad Ta = \frac{4r^2\overline{u_\theta}^2}{\nu^2}, \quad (3.79)$$

avec J_{lam} le flux de moment cinétique transporté par diffusion, par l'écoulement laminaire pour un profil de vitesse $\overline{u_\theta}$ donné : $J_{lam} = 2\nu r \overline{u_\theta}$. La présence de la force de Lorentz ajoute un troisième paramètre, parfois appelé *nombre magnétique* :

$$H = \frac{I_0 B_0 r}{\rho \nu^2}, \quad (3.80)$$

et qui rend compte de l'intensité du forçage électromagnétique. La limite $Pm \ll 1$ et $Rm \ll 1$ permet de supposer que le problème ne dépend plus de η . L'analyse dimensionnelle implique :

$$Nu_\Omega = \mathcal{F}(Ta, H), \quad (3.81)$$

où \mathcal{F} est une fonction inconnue. Comme Ta et H font apparaître tous deux ν , il est plus difficile d'obtenir un argument simple pour le régime *ultime* comme dans le cas de RB ou de TC. N'importe quelle fonction \mathcal{F} sous la forme d'une loi de puissance qui vérifie $Nu_\Omega \sim Ta^{\alpha+1/2} H^{-\alpha} g(Ta/H)$ implique pour $\alpha \in \mathbb{R}$ que le flux total de moment cinétique est indépendant de ν ¹⁵. Pour conclure sur la loi d'échelle pour le régime *ultime* dans l'expérience KEPLER, il faut donc utiliser d'autres arguments. Une première méthode est de prendre en compte l'équation de conservation du moment cinétique (3.77) ainsi que la prédiction pour la moyenne temporelle de la vitesse azimuthale prise à mi-hauteur, donnée par l'équation (2.19). En mettant ces deux relations sous forme adimensionnée, il vient :

$$\partial_r \overline{J_\Omega} - \frac{I_0 B_0}{2\pi \rho h} r = 0 \Rightarrow Nu_\Omega \propto \frac{H}{Ta^{1/2}}, \quad (3.82)$$

$$\overline{u_\theta} = \frac{\log Re}{\kappa} \sqrt{\frac{I_0 B_0}{4\pi \rho r}} \Rightarrow Ta^{1/2} \propto H^{1/2} \log H^{1/2}. \quad (3.83)$$

La première implication s'obtient par un équilibre en ordre de grandeur entre les deux termes du membre de gauche de la première équation. La seconde expression permet d'exprimer H et de l'injecter dans la première équation pour obtenir la prédiction pour

15. Ceci est vrai y compris pour $\alpha = -\beta - 1/2$ avec $\beta \in \mathbb{R}$

le régime *ultime* dans l'expérience KEPLER :

$$Nu_{\Omega} \propto Ta^{1/2} \log^{-2}(Ta^{1/2}). \quad (3.84)$$

La Figure 3.3 présente l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Taylor. La prédiction (3.84) correspond à la droite en tiret-pointillé bleu tandis que la droite en tiret rouge correspond à une loi d'échelle en $\propto Ta^{1/2}$. Si la loi de puissance de la prédiction (3.84) est bien respectée, la correction logarithmique donne une prédiction sous-efficace par rapport au régime *ultime*. De plus, à champ magnétique plus faible, les données s'écartent de la loi d'échelle en $Ta^{1/2}$. Ceci est dû au fait qu'à grand I_0 mais faible B_0 , le système passe dans le régime inertiel-résistif, régime dominé par les boucles poloïdales de recirculation. Lorsque le champ magnétique augmente, le nombre de Nusselt semble tendre vers la loi d'échelle en $1/2$.

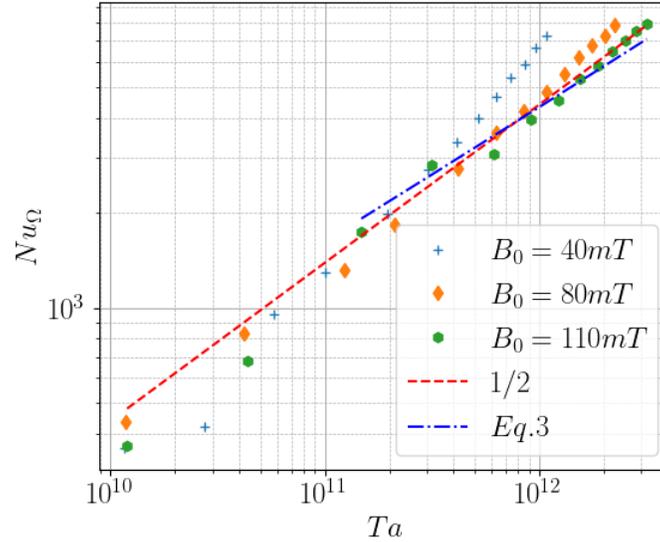


FIGURE 3.3 – Loi d'échelle Nu_{Ω} versus Ta . La ligne en pointillée rouge représente la loi d'échelle en $Ta^{1/2}$ et la ligne en tirets-pointillés bleu représente la prédiction 3.84. Figure issue de Vernet *et al.* [113].

En pratique, l'expérience KEPLER reste un système expérimental, les boucles de recirculation subsistent y compris dans le régime pleinement turbulent. La définition du nombre de Nusselt basée sur l'expression pour \bar{J}_{Ω} pose donc un problème : le transport de moment cinétique par les fluctuations turbulentes n'est pas différencié du transport de moment cinétique par l'écoulement moyen, à savoir les boucles de recirculation poloïdales.

Puisque même dans le régime de turbulence pleinement développée, les boucles de recirculation continuent de transporter du moment cinétique, il est nécessaire de définir une mesure du transport turbulent de moment cinétique, analogue à la définition de Ji *et*

al. [114]. Une façon simple pour éviter de prendre en compte ce transport additionnel pour le Nusselt est de séparer ces deux contributions :

$$u_r = \overline{u_r} + u_r^*, \quad (3.85)$$

$$\Omega = \overline{\Omega} + \Omega^*, \quad (3.86)$$

où les quantités $(\cdot)^*$ représentent les fluctuations temporelles. Comme la moyenne du produit des vitesses se développe : $\overline{u_r \Omega} = \overline{u_r} \overline{\Omega} + \overline{u_r^* \Omega^*}$, il est possible de construire un flux turbulent de moment cinétique $\overline{J_\Omega^*}$ en ne conservant que le tenseur de Reynolds pour le transport :

$$\overline{J_\Omega^*} = \overline{J_\Omega} - r^3 \overline{u_r} \overline{\Omega}. \quad (3.87)$$

D'un point de vue expérimental, afin de garder une grande précision sur les mesures, les quantités $\overline{u_r} \overline{\Omega}$ et $\overline{u_r^* \Omega^*}$ ont été mesurées en utilisant des méthodes différentes : des amplificateurs bas bruit *Low Noise Amplifier Princeton Applied Research Model 1900* ont notamment été utilisés pour les mesures des fluctuations. Il est enfin possible de construire un nombre de Nusselt turbulent $Nu_\Omega^* = \overline{J_\Omega^*} / J_{lam}$. L'équation pour la conservation du flux de vitesse angulaire (3.77) devient :

$$\partial_r \overline{J_\Omega^*} + r^3 \overline{u_r} \overline{\Omega} - \frac{I_0 B_0}{2\pi \rho h} r = 0. \quad (3.88)$$

Cette équation fait intervenir trois termes, et ne peut plus être utilisée pour établir une prédiction pour le nombre de Nusselt Nu_Ω^* . Il est plus intéressant de passer par un bilan d'énergie, analogue à la relation obtenue dans RB (3.34). La section suivante vise à obtenir cette relation dans le cas de l'expérience KEPLER.

3.3.3 Bilan d'énergie dans l'expérience KEPLER

La première relation (3.34) [85] est un bilan énergétique qui stipule simplement que l'injection d'énergie par la force de flottaison est compensée par la dissipation visqueuse. Une équation similaire peut être dérivée dans le cas de l'expérience KEPLER qui correspond alors à l'équilibre entre l'injection d'énergie par la force de Lorentz et la dissipation visqueuse. La conservation de l'énergie cinétique dans le cas MHD, stationnaire implique, en l'absence de forçage mécanique (2.42) :

$$T = D_\nu, \quad (3.89)$$

avec :

$$D_\nu = \rho\nu \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV, \quad T = \int_{\Omega} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} dV. \quad (3.90)$$

Le terme de transfert d'énergie magnétique en énergie cinétique T peut s'écrire en fonction du flux de vitesse angulaire J_Ω donné par l'équation (3.77). Ce terme peut se simplifier en utilisant les approximations selon lesquelles l'écoulement est stationnaire, quasi-2D, donc sans dépendance en z et axisymétrique. Le terme T est alors dominé par le produit scalaire entre la vitesse azimuthale moyenne $\overline{u_\theta}$ et la force de Laplace induite par le courant radial imposé :

$$T = \int_{\Omega} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} dV, \quad (3.91)$$

$$\simeq \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^h -j_r B_0 (-u_\theta) r d\theta dr dz, \quad (3.92)$$

$$\simeq 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} \frac{I_0 B_0}{2\pi r h} \overline{u_\theta} r dr, \quad (3.93)$$

$$\simeq I_0 B_0 A [2r^{1/2}]_{R_1}^{R_2}, \quad (3.94)$$

$$\simeq I_0 B_0 A \delta_r, \quad (3.95)$$

avec $\overline{u_\theta} = Ar^{-1/2}$ et $\delta_r = 2(\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1})$. Enfin, il est possible d'intégrer la relation (3.77) entre R_1 et r ¹⁶ :

$$\overline{J_\Omega} = \frac{I_0 B_0}{4\pi \rho h} r^2 + const, \quad (3.96)$$

Sa valeur en \bar{r} peut être introduite dans l'expression de T pour obtenir le bilan d'énergie cinétique :

$$D_\nu \rho\nu \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV, \quad (3.97)$$

$$\simeq \rho \frac{4\pi h \delta_r}{\bar{r}^{3/2}} \overline{u_\theta} \overline{J_\Omega}. \quad (3.98)$$

Le taux de dissipation d'énergie cinétique se définit par $\epsilon = D_\nu / \rho V$, avec V le volume total. En suivant [107], il est possible de définir la dissipation *Wind*, $\epsilon_w = \epsilon - \epsilon_{lam}$, qui correspond au taux de dissipation total auquel est retranché la dissipation dite laminaire, qui correspond au transport purement diffusif de moment cinétique.

$$\epsilon_w = \frac{4\pi h \delta_r}{V \bar{r}^{3/2}} (\overline{J_\Omega} - J_{lam}), \quad (3.99)$$

16. Comme pour $r > R_1$, $R_1^2 \ll r^2$, cette constante est négligée dans la suite.

avec J_{lam} le flux de moment cinétique transporté par diffusion, par l'écoulement laminaire pour un profil de vitesse \bar{u}_θ donné : $J_{lam} = 2\nu r \bar{u}_\theta$. Cette relation peut être introduite dans l'équation précédente ce qui donne pour l'expérience KEPLER, l'équivalent pour le bilan d'énergie cinétique obtenu dans RB, équation (3.34) [85] :

$$\boxed{\epsilon_w = \tilde{\Gamma} \frac{\nu^3}{\bar{r}^4} Ta(Nu_\Omega - 1)}, \quad (3.100)$$

où $\tilde{\Gamma}$ est un facteur géométrique $\tilde{\Gamma} = 2\pi h \delta_r \bar{r}^{3/2} / V$. Cette relation est particulièrement utile car elle lie les différents nombres sans dimension du problème.

3.3.4 Transport turbulent de moment cinétique

Il est possible de décomposer la dissipation d'énergie cinétique en deux composantes $\epsilon_w = \bar{\epsilon}_w + \epsilon_w^*$, où $\bar{\epsilon}_w$ correspond à la dissipation due à la recirculation et ϵ_w^* correspond à la dissipation purement turbulente. Il est possible d'introduire la décomposition $\bar{J}_\Omega = r^3 \bar{u}_r \bar{\Omega} + \bar{J}_\Omega^*$ dans l'équation (3.99) :

$$\epsilon_w = \frac{4\pi h \delta_r}{V \bar{r}^{3/2}} (r^3 \bar{u}_r \bar{\Omega} + \bar{J}_\Omega^* - J_{lam}), \quad (3.101)$$

Sous forme sans dimension, le bilan d'énergie (3.100) devient alors, en identifiant $\bar{\epsilon}_w$ au transport dû à l'écoulement moyen $r^3 \bar{u}_r \bar{\Omega}$:

$$\epsilon_w^* = \tilde{\Gamma} \frac{\nu^3}{\bar{r}^4} Ta(Nu_\Omega^* - 1). \quad (3.102)$$

Afin de ramener cette équation à une relation entre nombres sans dimension, une estimation turbulente de type longueur de mélange peut être utilisée pour la dissipation Wind, avec $\epsilon_w^* \sim u_r^{*3} / \bar{r}$, où u_r^* désigne les fluctuations de vitesse radiale. L'équation précédente devient donc :

$$Re_w^3 \sim Ta(Nu_\Omega^* - 1). \quad (3.103)$$

Ici, Re_w désigne le Reynolds *Wind*, qui n'est pas un paramètre du problème mais bien une réponse du système, et qui par analyse dimensionnelle dépend lui aussi des nombres sans dimension Ta et H tel que $Re_w = \mathcal{F}(Ta, H)$. La relation (3.103) indique donc que connaître la loi d'échelle de Re_w en fonction de Ta donne une loi d'échelle pour Nu_Ω^* . Le paragraphe suivant s'intéresse donc à la mesure expérimentale de Re_w en fonction de Ta .

3.3.5 Loi d'échelle pour le transport turbulent

Comme pour le nombre de Nusselt, il existe plusieurs prédictions pour la relation $Re_w \sim \mathcal{F}(Ta)$ pour TC. Kraichnan [86] obtient dans le cadre de la convection thermique $Re_w \sim Ta^{1/2} \log^{-1/2} Ta$, où l'équivalence entre Ra et Ta a été utilisée. En revanche, Grossmann & Lohse [88] obtiennent une prédiction différente, sans correction logarithmique, à l'aide d'arguments qui prennent en compte la présence des couches limites turbulentes et la loi log du mur, $Re_w \sim Ta^{1/2}$. Cette seconde prédiction est bien observée expérimentalement puisque $Re_w \sim Ta^{0.495}$ [115]. Dans l'expérience KEPLER, le nombre de Reynolds Wind suit bien une loi d'échelle en $1/2$, comme le montre la Figure 3.4. La droite en trait plein représente la loi d'échelle en $Ta^{1/2}$, la droite en tirets correspond à la prédiction de Kraichnan [86] et la droite en tirets-pointillés suit une loi de puissance d'exposant effectif $\alpha \simeq 0.53$. Si $Re_w \sim \sqrt{Ta}$, alors Le bilan d'énergie

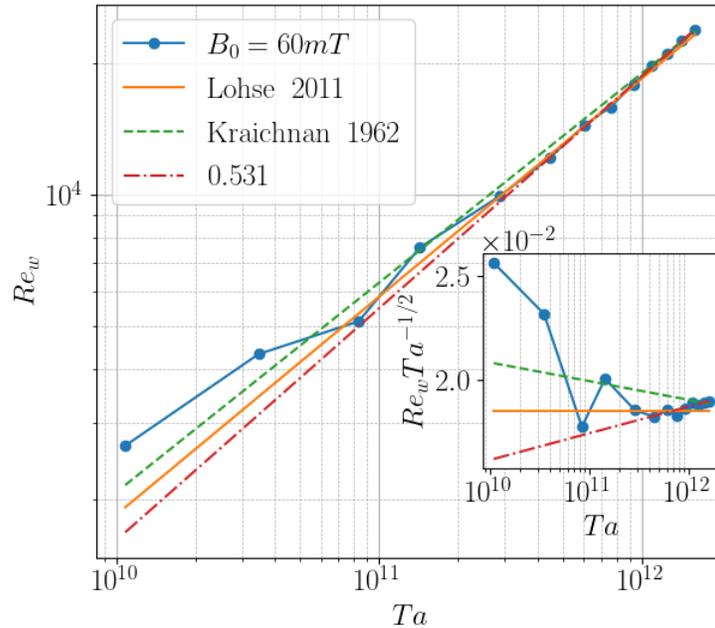


FIGURE 3.4 – Reynolds *Wind* basé sur les fluctuations de la composante radiale de vitesse en fonction du nombre de Taylor pour un champ magnétique imposé $B_0 = 60 \text{ mT}$. Figure issue de Vernet *et al.* [113].

cinétique pour les fluctuations (équation (3.103) implique, lorsque $Nu_\Omega \gg 1$:

$$Nu_\Omega \sim Ta^{1/2} \quad (3.104)$$

Ceci est une conséquence de l'hypothèse de longueur de mélange. Les mesures expérimentales dans TC, bien que confirmant la relation $Re_w \sim Ta^{1/2}$, ne confirment pas cette seconde prédiction, comme le rapporte la section sur le transport de moment cinétique dans Taylor-Couette. L'exposant effectif est proche de $Nu_\Omega \sim Ta^{0.39}$. Grossmann

& Lohse [88] expliquent cette différence par le fait que donner une estimation pour ϵ_w à l'aide d'un argument de longueur de mélange est trop violente, et qu'il faut plutôt intégrer localement la dissipation en prenant en compte la couche limite logarithmique, ce qui introduit les corrections logarithmiques, déjà rencontrées dans RB. Dans l'expérience KEPLER en revanche, il semble qu'un tel argument ne soit pas nécessaire. La Figure 3.5 montre l'évolution du nombre de Nusselt turbulent Nu_{Ω}^* en fonction du nombre de Taylor pour différentes valeurs du champ magnétique. À grand forçage, la loi

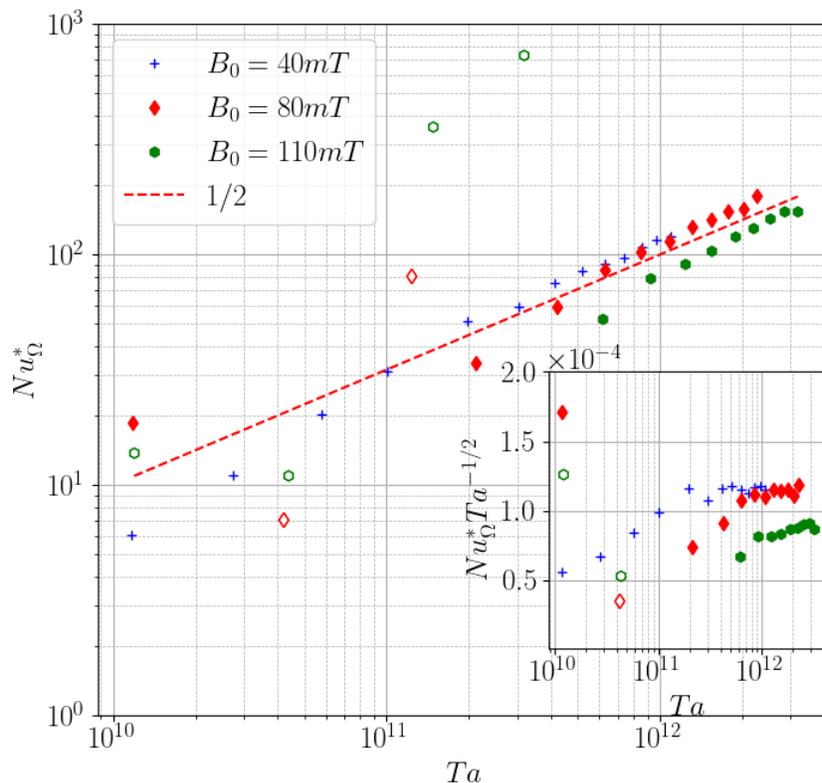


FIGURE 3.5 – Loi d'échelle du Nusselt turbulent Nu_{Ω}^* versus le nombre de Taylor Ta pour différentes valeurs de champ magnétique. La droite en pointillés rouges correspond à la loi d'échelle $Ta^{1/2}$. Figure issue de Vernet *et al.* [113].

d'échelle attendue pour le régime *ultime* dans TC à savoir $Nu_{\Omega}^* \sim \sqrt{Ta}$ est bien vérifiée. Le fait qu'à grand forçage, Nu_{Ω}^* ne dépende plus du champ magnétique donc de H est tout à fait frappant. Du point de vue de l'analyse dimensionnelle, cela implique que, pour $B_0 = 40 \text{ mT}$ et $I = 200 \text{ A}$ qui correspondent au début du régime ultime, $H > 10^9$ et est suffisamment grand pour ne plus intervenir dans le problème. Ceci indique que dans ce régime, $Nu_{\Omega}^* = \mathcal{F}(Ta)$, qui est contraint par l'analyse dimensionnelle. Les fluctuations turbulentes transportent alors de manière optimale le moment cinétique et $\overline{J_{\Omega}^*}$

ne dépend plus des coefficients moléculaires. Ces mesures représentent donc la première observation expérimentale du régime *ultime* pour le transport de moment cinétique. La partie du graphique qui présente des symboles vides et qui sont particulièrement éloignés de la prédiction correspondent à l'oscillation basse fréquence du régime complètement magnétisé (paragraphe 2.7). La présence de ces oscillations induit une très forte corrélation entre u_r^* et Ω^* et induit donc des valeurs de $\overline{J_\Omega^*}$ très grandes. Les valeurs numériques de Nu_Ω^* sont également plus basses que celles obtenues pour Nu_Ω , ce qui implique que le transport de moment cinétique par les boucles poloïdales de recirculation domine le transport purement turbulent.

Les lois d'échelle pour le nombre de Nusselt Nu_Ω^* et le nombre de Reynolds Wind Re_w en $Ta^{1/2}$ est un résultat cohérent avec la relation (3.103). Ce résultat est également cohérent avec un transport optimal du moment cinétique par les structures turbulentes. Si toutes ces questions ont été traitées en suivant l'analogie entre les systèmes de TC et RB, en définissant les nombres de Taylor, Nusselt etc, il est en fait possible de réfléchir à ces questions du point de vue de la turbulence. En effet la loi d'échelle $Re_w \sim Ta^{1/2}$ signifie que le rapport $u_r^*/\overline{u_\theta}$ est indépendant du nombre de Reynolds $Re^2 = Ta$ et du nombre magnétique H . De même, la loi d'échelle $Nu_\Omega^* \sim Ta^{1/2}$ implique que le rapport du tenseur de Reynolds sur l'énergie cinétique moyenne $\overline{u_r^*u_\theta^*}/\overline{u_\theta^2}$ est également indépendant du Reynolds et du forçage. Ces résultats sont en fait des résultats attendus pour les écoulements turbulents. En effet, dans un écoulement turbulent, si u^* dénote les fluctuations turbulentes et U l'écoulement moyen, l une longueur typique du forçage comme la longueur intégrale, alors le théorème π indique qu'il existe une relation du type $u^*/U = \mathcal{F}(Re)$. Lorsque Re devient arbitrairement grand, \mathcal{F} tend vers une constante. Le raisonnement est identique pour le tenseur de Reynolds. Ceci explique pourquoi le régime *ultime* est associé au régime de turbulence pleinement développée. Au-delà de la question du lien entre la turbulence et le transport de moment cinétique pour les dispositifs axisymétriques comme TC ou l'expérience KEPLER, la question du transport de moment cinétique présente un intérêt tout particulier en astrophysique, notamment pour les disques d'accrétion. Historiquement, J.P. Zahn eut un rôle déterminant en motivant la communauté du non linéaire à réaliser des expériences d'astrophysique en laboratoire [116]. Les deux sections suivantes visent à illustrer le problème lié au transport de moment cinétique dans les disques d'accrétion et le lien avec l'expérience KEPLER.

3.4 Transport et disques d'accrétion

Cette section vise à introduire ces structures astrophysiques que l'on appelle "disque d'accrétion" ainsi que les problématiques de transport de moment cinétique qu'elles recèlent. Les disques d'accrétion sont des structures astrophysiques composées d'un mélange de particules de tailles micro- et macroscopiques ainsi que du gaz en rotation autour d'un objet central massif, comme un trou noir, une étoile à neutrons, ou une étoile en formation. La propriété principale de ces objets est que leur masse totale diminue au cours du temps à cause du flux de matière vers l'objet central. Le taux d'accrétion se définit alors comme la quantité de matière par unité de temps qui quitte le disque pour gagner l'objet central. Par conservation du moment cinétique total du disque, ce flux de matière vers l'objet central est nécessairement accompagné d'un flux de moment cinétique vers l'extérieur du disque, voir Figure 3.6. Quantifier les propriétés de ce transport est fondamental pour mieux comprendre la naissance et l'évolution des étoiles et des planètes. Ce paragraphe a pour objet d'introduire le problème du transport de moment cinétique dans les disques d'accrétion à l'aide d'un modèle hydrodynamique.

Les disques d'accrétion concentrent une grande diversité d'objets.

Leurs caractéristiques typiques, telles que leur rayon, leur luminosité, leur épaisseur, ou le type d'objet central autour duquel ils gravitent, la présence ou non de jet au niveau des pôles, de convection, de zone de chocs *et cetera...*, rendent particulièrement vaste cette catégorie d'objets. Un certain nombre de *review* existent donc sur le sujet. La *review* d'Abramowicz & Fragile [117] porte sur les disques d'accrétion autour des trous noirs ainsi que les effets relativistes proches de ces objets. La *review* de Fromang & Lesur [116] présente les disques d'accrétion sous l'angle de l'hydrodynamique avec un volet expérimental. Pour une *review* plus générale sur les disques proto-planétaires, voir Williams & Cieza [118]. Enfin pour une *review* récente sur les disques proto-stellaires, voir Zhao *et al.* [119].

Dans la suite, la discussion se restreint aux disques fins, dont le rayon typique R est grand devant l'épaisseur typique H , avec $R \gg H$. Les effets relativistes sont négligés, ce qui est raisonnable loin de la surface des objets très massifs comme les trous noirs. Ces disques sont parfois appelés sous-critiques. Cette dénomination implique que leur luminosité apparente est faible devant la luminosité d'Eddington qui est la luminosité maximum pour un fluide astrophysique en équilibre hydrostatique. Au-delà de cette luminosité, la pression de radiation dépasse l'attraction gravitationnelle et de la matière est évacuée de l'objet par transfert de quantité de mouvement entre le rayonnement électromagnétique et les particules. En astrophysique, les mesures d'accrétion sont essentiellement des mesures optiques qui tendent à relier la luminosité du disque L à l'accrétion \dot{M} . Si l'observation des disques est ardue parce que les capteurs des téles-

copies sont bien souvent saturés par la luminosité émise par l'objet central, les méthodes modernes permettent de bien remonter aux caractéristiques principales des disques. Ces disques sont des structures complexes qui présentent plusieurs propriétés importantes :

- Grand rapport d'aspect $R \gg H$, avec $R \sim 10^9 - 10^{11} km$ (pour les disques proto-stellaires)
- Écoulement fortement turbulent $Re \sim 10^{13}$
- Compressible
- Écoulement azimuthal supersonique
- Stratification verticale stable
- Taux d'accrétion important : $\dot{M} \sim 10^{-8} - 10^{-4}$ "masse solaire" par an (la masse du soleil étant $2 \cdot 10^{30} kg$)
- Profil de rotation Képlerien : $U_\theta \propto r^{-1/2}$

Il existe deux grandes questions en astrophysique autour de ces objets :

- Le profil radial de vitesse azimuthale des disques d'accrétion est proche de $1/r^{1/2}$ et donc linéairement stable vis-à-vis de l'instabilité centrifuge. En effet, le critère de Rayleigh indique qu'un écoulement non-visqueux est stable si son profil de rotation vérifie $d(r^2\Omega)/dr > 0$. Comment alors se produit la transition à la turbulence dans les disques d'accrétion ? Cette question a tout d'abord motivé la communauté astrophysique à trouver d'autres types d'instabilité responsables de la transition à la turbulence. Une instabilité particulièrement prometteuse a été popularisée dans la communauté astrophysique par Balbus [120] : la *Magneto-Rotational Instability* (MRI). Découverte indépendamment par Velikhov en 1959 [121] et par Chandrasekhar en 1960 [122], elle fut par la suite appliquée au problème du transport de moment cinétique dans les disques d'accrétion par Balbus & Hawley [123]. Cette instabilité a tout d'abord suscité un engouement certain car elle ne nécessite pas un grand nombre de conditions et qu'elle génère dans le fluide un régime de turbulence pleinement développée qui permet d'expliquer en ordre de grandeur les observations pour le transport de moment cinétique. Un premier problème de la MRI est qu'il s'agit d'une instabilité MHD : les lignes de champ magnétique verticales agissent comme des ressorts qui couplent les particules de fluide entre elles. Lorsqu'elles sont situées à des rayons différents, ce couplage permet aux particules de fluide d'échanger massivement du moment cinétique. Pour ce faire, le fluide doit être conducteur. Or, les disques proto-planétaires, c'est-à-dire les disques d'accrétion autour des planètes en formation, sont très peu magnétisés, et la turbulence MHD engendrée par la MRI ne pénètre donc pas le coeur du disque, là où l'essentiel du transport de moment cinétique a lieu. D'autres effets tels

que la diffusion ambipolaire¹⁷ ainsi que l'effet Hall sont également présents dans ces disques ce qui complique l'analyse. Ces problématiques ont incité à chercher d'autres mécanismes ou instabilités à l'origine de la transition à la turbulence.

Les disques pourraient être instables à cause d'effets de stratification couplés à de la rotation globale, engendrant de la convection. Les disques pourraient également être sujets à l'instabilité gravitationnelle et donc s'effondrer sous l'effet de leur propre masse. L'instabilité *Zombie-Vortex* et l'instabilité strato-rotationnel engendrent également de la turbulence. Ces instabilités sont des instabilités de type cisaillement en présence de stratification. Un autre type de mécanisme, notamment porté par J.P. Zahn, est la transition sous-critique à la turbulence, comme l'écoulement de Couette plan ou le l'écoulement de Poiseuille dans une conduite. Linéairement stable, ces écoulements bifurquent vers un régime turbulent à grand nombre de Reynolds. La question de la transition sous-critique à la turbulence a également été explorée expérimentalement sans succès. En effet, il a été montré numériquement que la transition à la turbulence dans TC est toujours due aux couches limites au niveau des couvercles [124]. Pour finir, du point de vue expérimental, la quête de la MRI s'approche du succès puisque l'instabilité a été obtenue récemment par l'équipe de Princeton [125]. Comme la transition à la turbulence dans l'expérience KEPLER est due à une instabilité de couche limite, la transition à la turbulence pour les écoulement Képlériens ne sera pas abordée dans la suite.

- Les observations astrophysiques rapportent des taux d'accrétions très élevés qui ne peuvent pas être expliqués par des mécanismes diffusifs au vu des trop faibles valeurs des coefficients moléculaires : viscosité cinématique, diffusivité thermique, diffusivité magnétique. La seconde question importante en astrophysique est de pouvoir quantifier l'efficacité de la turbulence pour le transport de moment cinétique et de comprendre si la turbulence permet d'expliquer à elle seule le transport de moment cinétique dans les disques d'accrétion. La question de l'efficacité de la turbulence pour expliquer le transport de moment cinétique est donc débattue depuis de nombreuses années [120, 126, 127]. Depuis le travail pionnier de Richard & Zahn en 1999 [128], cette question a également conduit à de nombreuses expériences dans les dispositifs de Taylor-Couette [114, 129, 130]. L'objet des sections suivantes est donc également de discuter les résultats pour le transport de moment cinétique dans l'expérience KEPLER dans le but de les comparer aux expériences précédentes ainsi qu'au disques d'accrétion.

17. La diffusion ambipolaire correspond à la force de friction exercée par les ions sur les particules neutres dans les plasmas faiblement ionisés soumis à des champs magnétiques.

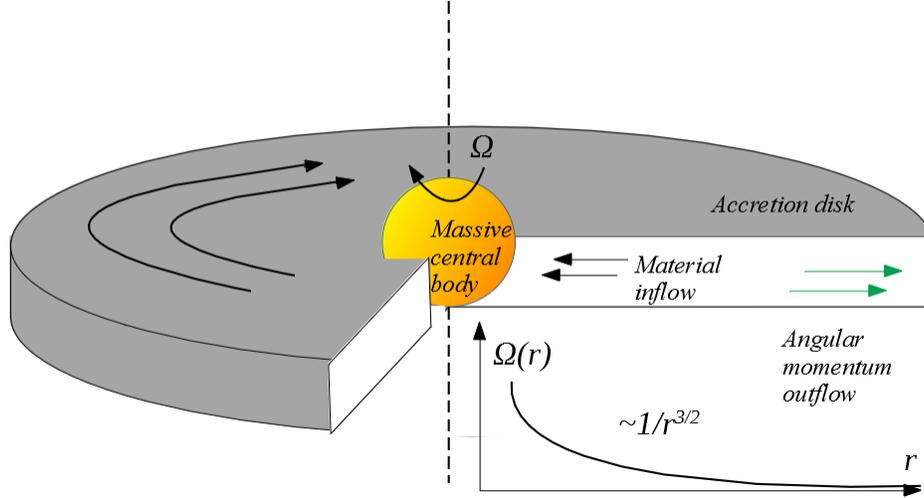


FIGURE 3.6 – Modèle simplifié d’un disque d’accrétion

3.4.1 Modèle hydrodynamique d’un disque d’accrétion

Richard & Zahn en 1999 [128], suivis par Hersant *et al.* [127], ont les premiers obtenu une relation qui permet de relier le transport de moment cinétique dans les expériences de TC aux disques d’accrétion. Pour réaliser la correspondance entre les systèmes expérimentaux pour le transport de moment cinétique dans TC ou l’expérience KEPLER et les disques d’accrétion, il est nécessaire de pouvoir calculer une quantité qui trouve son équivalent dans chacun de ces systèmes. Ce travail a été réalisé pour la correspondance entre les disques d’accrétion et TC et peut être directement étendu à l’expérience KEPLER. Les disques d’accrétions sont des objets MHD ou Hall-MHD et le transport de moment cinétique est donc en partie réalisé par le tenseur de Maxwell et la *review* de Balbus & Hawley [120] développe cet aspect. Dans la suite, la relation qui lie le transport de moment cinétique à l’accrétion est obtenue à l’aide d’un modèle hydrodynamique. Cette relation n’est cependant pas explicite dans la revue de Balbus & Hawley [120] mais provient de Hersant *et al.* [127] dans le cas de TC. Un modèle hydrodynamique d’un disque d’accrétion consiste à considérer un fluide compressible, soumis au potentiel de pesanteur ϕ_M de l’objet central, de masse M , tel que $\phi_M = -GM/(r^2 + z^2)^{1/2}$, où G la constante universelle de gravitation, le tout en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . L’interaction gravitationnelle du disque avec lui-même, supposée faible, est négligée. Le disque est supposé stablement stratifié dans la direction z et en équilibre hydrostatique avec le champ gravitationnel ϕ_M :

$$\partial_z p = -\frac{GM\rho}{r^3}z, \quad (3.105)$$

où l'approximation disque fin, $H \ll R$ permet la simplification $|\mathbf{r}| = (r^2 + z^2)^{1/2} \simeq r$. Les perturbations de pression sont supposées être associées à des variations adiabatiques de densité telles que $p\rho^{-\gamma} = \text{const.}$ où γ est l'indice de Laplace. Le gradient de pression peut donc s'écrire sous la forme d'un gradient de densité :

$$c_s^2 \partial_z \rho = -\frac{GM\rho}{r^3} z, \quad (3.106)$$

où la vitesse du son s'écrit $c_s^2 = \gamma p/\rho$. Cette équation s'intègre facilement et une distribution gaussienne pour la densité :

$$\rho = \rho_0 \exp -\frac{GM}{2rc_s^2} \left(\frac{z}{r}\right)^2. \quad (3.107)$$

Puisque les disques d'accrétion sont des structures dont la hauteur typique H est très grande devant le rayon typique R , il est possible de s'intéresser uniquement aux quantités moyennées sur la hauteur H , en définissant la moyenne $\langle A \rangle = \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho A dz$ avec $\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho dz$, la densité moyennée sur la hauteur. Cette moyenne porte parfois le nom de moyenne de Favre. Comme la densité ρ est donnée par une gaussienne, Σ peut être calculée directement :

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho_0 \exp -\frac{GM}{2rc_s^2} \left(\frac{z}{r}\right)^2 = \rho_0 \left(\frac{2\pi r^3 c_s^2}{GM}\right)^{1/2}. \quad (3.108)$$

Cette expression fournit un ordre de grandeur pour la vitesse du son :

$$c_s^2 \sim \frac{GM \Sigma^2}{r^3 \rho_0^2}, \quad (3.109)$$

$$\sim \frac{GMH^2}{r^3}. \quad (3.110)$$

En supposant un écoulement axisymétrique en régime stationnaire, et en négligeant la viscosité, faible pour ces objets, il est possible d'écrire la conservation de la masse et la composante radiale de Navier-Stokes :

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \rho u_r) = 0, \quad (3.111)$$

$$u_r \partial_r u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \partial_r p - \frac{GM}{r^2}. \quad (3.112)$$

La moyenne de Favre appliquée à la conservation de la masse donne :

$$\partial_r (r \Sigma \langle u_r \rangle) = 0. \quad (3.113)$$

Cette relation s'intègre en r , ce qui implique que $\langle u_r \rangle = -\dot{M}/r\Sigma$ où \dot{M} est le taux d'accrétion. Il est alors nécessaire de remarquer que cet écoulement moyen radial, directement lié à l'accrétion est complètement différent de l'écoulement radial moyen qui apparaît dans les dispositifs expérimentaux comme l'expérience KEPLER ou TC. Dans les expériences de laboratoire, la présence de parois solides engendre nécessairement, par le biais des couches limites, la présence de boucles de recirculation et donc d'un écoulement radial moyen. C'est pour cela qu'il est nécessaire dans l'expérience KEPLER, de retrancher le transport de moment cinétique dû à l'écoulement moyen.

Il est ensuite possible d'évaluer le rapport de certains termes de la composante radiale de Navier-Stokes, ainsi :

$$\frac{|u_r \partial_r u_r|}{u_\theta^2/r} \ll 1. \quad (3.114)$$

En effet, les disques d'accrétion sont des structures circulaires et les observations indiquent que l'écoulement azimuthal est dominant. Le terme de courbure domine donc l'inertie, dans le membre de gauche de la composante radiale de Navier-Stokes. De plus,

$$\frac{|r^2 \partial_r p / \rho|}{GM} \sim \frac{rc_s^2}{GM} \quad (3.115)$$

$$\sim \frac{H^2}{r^2} \ll 1, \quad (3.116)$$

où la vitesse du son est donnée par l'expression (3.110). Le gradient radial de pression est donc négligeable devant l'interaction gravitationnelle et conduit au régime de rotation Képlérienne, qui est un équilibre inertie-gravité :

$$u_\theta \sim \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (3.117)$$

La présence du gradient de pression et de la viscosité rend le calcul plus fastidieux et implique un profil légèrement sous-Képlérien [127], sans pour autant changer fondamentalement la discussion. Il est possible enfin de réécrire la relation (3.110) de manière à faire apparaître le nombre de Mach Ma :

$$c_s^2 \sim u_\theta^2 \frac{H^2}{r^2} \quad (3.118)$$

$$\text{i.e } Ma \sim \frac{r}{H} \gg 1, \quad (3.119)$$

avec $Ma = u_\theta/c_s$. L'écoulement azimuthal est donc systématiquement dans un régime supersonique.

3.4.2 Transport de moment cinétique dans un disque

Cette section porte sur le transport de moment cinétique dans les disques. Comme la plupart des disques d'accrétion sont magnétisés, il est possible de rendre explicite le transport de moment cinétique par le champ magnétique en introduisant le tenseur de Maxwell dans les équations. La présence de ce tenseur ne change pas la discussion sur le profil de rotation de la partie précédente. De plus, les valeurs de viscosité étant très faibles, il est possible de négliger les termes de transport visqueux dans la composante azimuthale de l'équation de Navier-Stokes. En multipliant cette équation par r , il vient l'équation pour la conservation du moment cinétique $l = ru_\theta = r^2\Omega$:

$$\partial_t(\rho ru_\theta) + \nabla \cdot \left(\rho ru_r \mathbf{u} - r \frac{B_\theta \mathbf{B}}{\mu_0} + r \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{e}_\theta \right) = 0. \quad (3.120)$$

En régime stationnaire, axisymétrique, la moyenne de Favre de cette expression implique que le flux total de moment cinétique est conservé radialement. La présence d'un écoulement azimuthal fort permet de décomposer le champ de vitesse total en un profil moyen plus une perturbation $\mathbf{u} = (u_r, r\Omega + u_\theta)$:

$$\Sigma r(r\Omega \langle u_r \rangle + r \langle u_\theta u_r \rangle - r \langle v_{A,\theta} v_{A,r} \rangle) = Cste, \quad (3.121)$$

où l'on note $v_{A,i} = B_i / \sqrt{\rho\mu_0}$, la vitesse d'Alfvén pour la composante i du champ magnétique. Ces perturbations peuvent être non-axisymétriques ou turbulentes mais pas supersoniques. En effet, toute perturbation supersonique sera fortement dissipée par la présence d'onde de choc. Dans le cas où les ondes de chocs subsistent et transportent du moment cinétique, le modèle hydrodynamique simple présenté ici s'écroule. Le flux de moment cinétique $W_{r\theta} = \langle u_\theta u_r \rangle - \langle v_{A,\theta} v_{A,r} \rangle$ présente deux composantes : la composante hydrodynamique est due au tenseur de Reynolds tandis que la partie magnétique est due au tenseur de Maxwell. La conservation de la masse implique $\dot{M} = -r\Sigma \langle u_r \rangle$, autrement dit, le taux d'accrétion reste constant le long d'un rayon. Cette relation peut s'injecter dans l'équation (3.121) :

$$-\dot{M}r\Omega + \Sigma r W_{r\theta} = -\frac{\dot{M}}{r} r_0^2 \Omega_0, \quad (3.122)$$

où les grandeurs avec un indice 0 sont à l'interface avec l'objet central. Puisque $\Omega_0 = \sqrt{GM/r^3}$, le flux de moment cinétique s'exprime en fonction du taux d'accrétion (120) :

$$W_{r\theta} = \frac{\dot{M}\Omega}{\Sigma} \left(1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} \right). \quad (3.123)$$

Cette expression lie directement le taux d'accrétion d'un disque au flux de moment cinétique. Loin de l'objet central, $r \gg r_0$, et donc pour un rayon r moyen, noté \bar{r} , il vient, en ordre de grandeur :

$$\overline{W_{r\theta}} \sim \frac{\dot{M}\bar{\Omega}}{\Sigma}. \quad (3.124)$$

Cette expression devient, sous forme adimensionnée, en définissant un nombre de Reynolds sur la vitesse azimuthale moyenne $Re = \bar{r}^2\bar{\Omega}/\nu$:

$$\frac{\bar{r}^2\overline{W_{r\theta}}}{\nu^2 Re^2} \sim \frac{\dot{M}}{\bar{r}^2\Sigma\bar{\Omega}}. \quad (3.125)$$

Par analogie avec l'étude des écoulements turbulents autour d'objets solides, il est possible d'introduire un couple sans dimension $G = \nu^{-2}\bar{r}^2\overline{W_{r\theta}}$ et un taux d'accrétion normalisé $\dot{M}_0 = \bar{r}^2\Sigma\bar{\Omega}$, qui ne dépend que des propriétés intrinsèques du disque telles que sa densité moyennée Σ , ainsi que son rayon et sa vitesse angulaire moyenne [127], ce qui donne :

$$\boxed{\frac{G}{Re^2} \sim \frac{\dot{M}}{\dot{M}_0}}. \quad (3.126)$$

Le rapport G/Re^2 correspond donc à un coefficient de traînée sans dimension. À noter que ce résultat est obtenu dans Hersant *et al.* [127] d'une manière différente avec un nombre de Reynolds défini par $\bar{H}^2\bar{\Omega}/\nu$. Par conséquent, un terme supplémentaire $(\bar{H}/\bar{r})^4$ rentre dans le produit qui définit \dot{M}_0 , que l'on note \dot{M}_0^H pour *Hersant*, tel que :

$$\frac{G}{Re_H^2} \sim \frac{\dot{M}}{\dot{M}_0^H}, \quad (3.127)$$

avec $Re_H = \bar{H}^2 Re/\bar{r}^2$. L'équation (3.126) est de première importance pour comparer le transport de moment cinétique dans un dispositif expérimental tel que TC ou KEPLER. En effet, $\bar{r}^2\overline{W_{r\theta}} = \overline{J_\Omega}$, ce qui permet de calculer G et Re dans un système expérimental. Les valeurs de \dot{M} et \dot{M}_0 , quant à elles, peuvent être obtenues grâce aux observations astrophysiques¹⁸, via notamment la luminosité des disques $L = GM\dot{M}/\bar{r}$. Le coefficient de traînée sans dimension (3.127) est également directement lié aux modèles dit *alpha-disks* pour lesquels un modèle de fermeture type viscosité turbulente est utilisé,

18. Cette expression s'obtient dans ce modèle à l'aide d'un bilan d'énergie qui tient compte dans l'équation de conservation de l'énergie, du flux d'énergie émis par le rayonnement électromagnétique.

Shakura & Sunyaev (1973) [131].

$$\overline{W_{r\theta}} \sim \nu_{turb} \overline{\Omega} \quad (3.128)$$

$$\sim \alpha \overline{H}^2 \overline{\Omega}^2, \quad (3.129)$$

où ν_{turb} est la viscosité turbulente et α un paramètre libre compris entre 0 (absence d'accrétion) et 1. Ce modèle dit de Shakura & Sunyaev est basé sur le principe de la couche de mélange où les structures turbulentes qui transportent le moment cinétique sont de taille typique \overline{H} et la vitesse du son est prise comme vitesse caractéristique. L'équation (3.110) donne bien $c_s \sim \overline{H} \overline{\Omega}$. En injectant cette expression dans la relation (3.127), il vient :

$$\frac{G}{Re^2} \left(\frac{\overline{r}}{\overline{H}} \right)^4 \sim \alpha \frac{\overline{r}^2 \overline{H}^2 \overline{\Omega}^2}{\nu^2 Re^2} \left(\frac{\overline{r}}{\overline{H}} \right)^4 \quad (3.130)$$

$$\sim \alpha \left(\frac{\overline{r}}{\overline{H}} \right)^2. \quad (3.131)$$

En conséquence, le paramètre α vaut :

$$\alpha \sim \frac{G}{Re^2} \left(\frac{\overline{r}}{\overline{H}} \right)^2. \quad (3.132)$$

Dans la suite, afin de ne pas surestimer la viscosité turbulente à cause d'un facteur purement géométrique, la viscosité turbulente sera déterminée par le rapport G/Re^2 , avec le nombre de Reynolds basé sur \overline{r} .

3.4.3 Comparaison avec les observations astrophysiques

Les quantités intéressantes pour réaliser la comparaison avec le transport de moment cinétique dans les disques d'accrétion implique le couple sans dimension G ainsi que le taux de dissipation sans dimension G/Re^2 . Dans l'expérience KEPLER, comme le nombre de Taylor est basé sur la vitesse moyenne au rayon \overline{r} , il vient directement que $Re^2 = Ta$. Le rapport G/Re^2 est défini comme un coefficient de traînée sans dimension. Pour l'expérience KEPLER, lorsque le système atteint le régime *ultime*, le taux de dissipation de l'énergie est constant et donc $G/Re^2 \sim const$. De la même façon que les boucles de recirculation influencent le transport de moment cinétique, il est possible de définir $G^* = \overline{J}_\Omega^*/\nu^2$ le couple turbulent sans dimension. La Figure 3.7 montre à la fois les courbes pour G/Re^2 et G^*/Re^2 , les dernières étant repérées par les symboles avec un astérisque *. Pour les grandes valeurs de Re , le taux de dissipation turbulent G^*/Re^2 tend effectivement vers un plateau, en accord avec les prédictions pour le régime *ultime*.

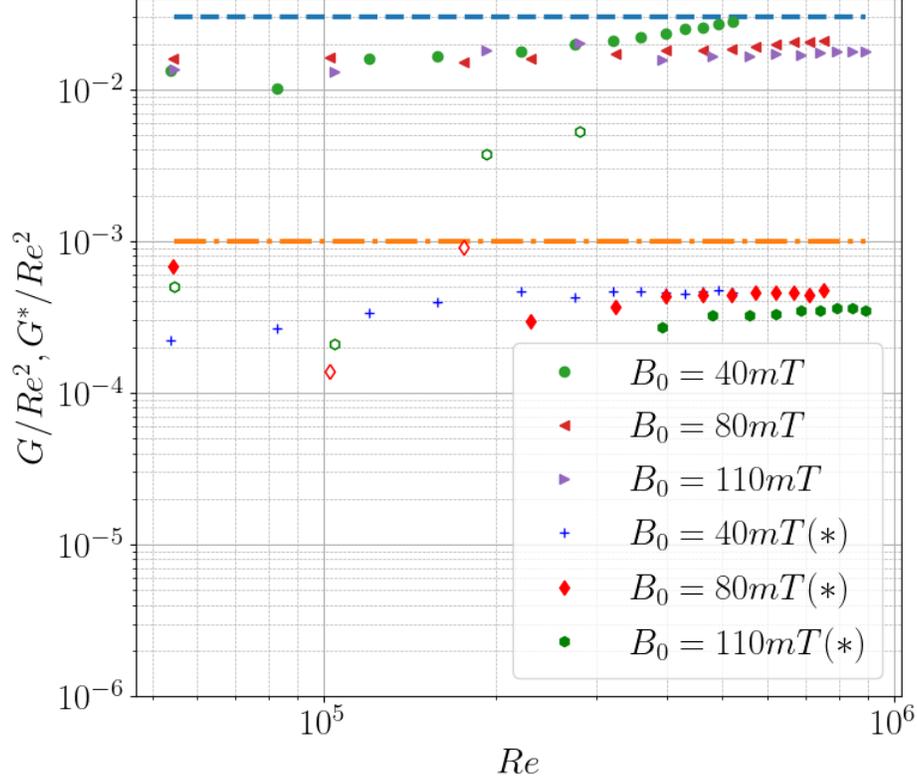


FIGURE 3.7 – Taux de dissipation sans dimension G/Re^2 et G^*/Re^2 , symboles repérés par un *, en fonction du nombre de Reynolds avec $Re = \sqrt{Ta}$, pour différentes valeurs de champ magnétique. Figure issue de Vernet *et al.* [113].

En effet, la loi d'échelle pour le nombre de Nusselt turbulent $Nu_{\Omega}^* \sim Ta^{1/2}$, implique que $\bar{J}_{\Omega}^* \sim 2\nu r \bar{u}_{\theta} Ta^{1/2}$. Injecter cette relation dans l'expression de G permet d'obtenir que $G^* \sim Ta$. Dans le régime *ultime*, le rapport G^*/Re^2 tend bien vers une constante. Toute déviation de ce plateau représente par conséquent une influence de la viscosité à travers les couches limites notamment. En outre, l'inégalité $G \gg G^*$ est cohérente avec le fait que, dans l'expérience KEPLER, les boucles de recirculation poloïdales transportent beaucoup plus le moment cinétique que la turbulence.

Les mesures expérimentales de transport de moment cinétique qui ont été réalisées sur des TC par différentes équipes ont suscité de vives controverses entre les équipes du Maryland et de Twente [129, 130] d'une part et Princeton [114, 132] d'autre part. En résumé, l'équipe du Maryland obtient, dans le régime quasi-Képlérien, des valeurs de transport de moment cinétique comparables à celles des disques d'accrétion. Les droites en tirets et en tirets-pointillés Figure 3.9 représentent à cet effet l'intervalle de valeurs de taux de dissipation obtenu en TC rapporté dans Paoletti *et al.* [130]. La borne supérieure correspond au taux de dissipation en contra-rotation, régime particulièrement

turbulent mais avec le défaut de présenter un profil plat, très loin du champ de vitesse Képlerien, $G/Re^2 \sim 3 \cdot 10^{-2}$. La borne inférieure présente un profil quasi-Képlerien, le transport de moment cinétique est alors moins efficace et $G/Re^2 \sim 10^{-3}$. Les valeurs obtenues dans le TC de Princeton sont plus basses d'environ un ou deux ordres de grandeur [114, 132]. Cette seconde équipe en conclut donc que le transport de moment cinétique dans les disques ne peut pas être un effet de turbulence hydrodynamique en régime Képlerien. Du point de vue expérimental, le dispositif de Princeton mesure les fluctuations de vitesse locales et calcule le tenseur de Reynolds. L'équipe du Maryland, quant à elle, réalise des mesures de couples. Pour éviter les effets de couches limites au niveau des couvercles, le couple n'est pas mesuré sur toute la hauteur du cylindre, comme le montre la Figure 3.8, mais sur une hauteur intermédiaire, $L_{mid} \sim 40 \text{ cm}$, tandis que la hauteur totale du TC fait 70 cm . Cette mesure, qui peut sembler judicieuse,

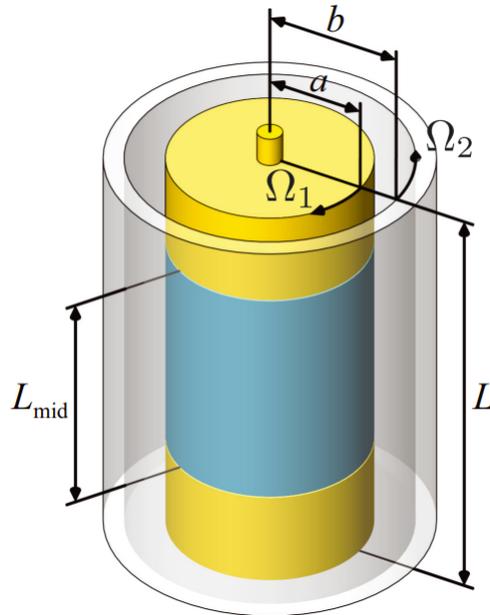


FIGURE 3.8 – Schéma du TC de l'équipe du Maryland [130]. La partie grisée correspond au couple-mètre, sur une longueur L_{mid} .

est néanmoins critiquable. Les couches limites engendrent en effet de la recirculation jusque dans le coeur de l'écoulement et donc un écoulement moyen $\langle u_r \rangle$ dont la moyenne verticale totale est nulle. Cependant, réaliser une mesure de couple sur une hauteur partielle implique nécessairement que la mesure est faussée par le transport additionnel de moment cinétique dû à cet écoulement moyen. De plus, le *rescaling* de leurs données pour obtenir des valeurs de transport fait intervenir une fonction de *fit* dont le paramétrage est arbitraire. Dans l'expérience KEPLER, en prenant en compte le transport de moment cinétique dû aux boucles de recirculation, les valeurs de taux de dissipation obtenues se rapprochent de celles obtenues pour TC en contra-rotation, tandis que

le transport purement turbulent est légèrement plus faible que pour le régime quasi-Képlerien de TC [130]. Dans le régime de turbulence pleinement développée, le profil de rotation est Képlerien. Un intérêt de l'expérience KEPLER est donc, dans ce régime, de présenter des valeurs intéressantes de taux de dissipation, donc de transport de moment cinétique. De plus, la méthode de mesure est similaire à la méthode employée par Ji *et al.* [114, 132].

Une propriété intéressante du régime ultime est qu'une fois atteint, le nombre de Reynolds peut devenir arbitrairement grand, le transport de moment cinétique reste constant. Les résultats obtenus dans l'expérience KEPLER donnent donc un ordre de grandeur de viscosité turbulente qui peut être directement comparé aux valeurs observées en astrophysique. La Figure 3.9 représente la dissipation d'énergie sans dimension

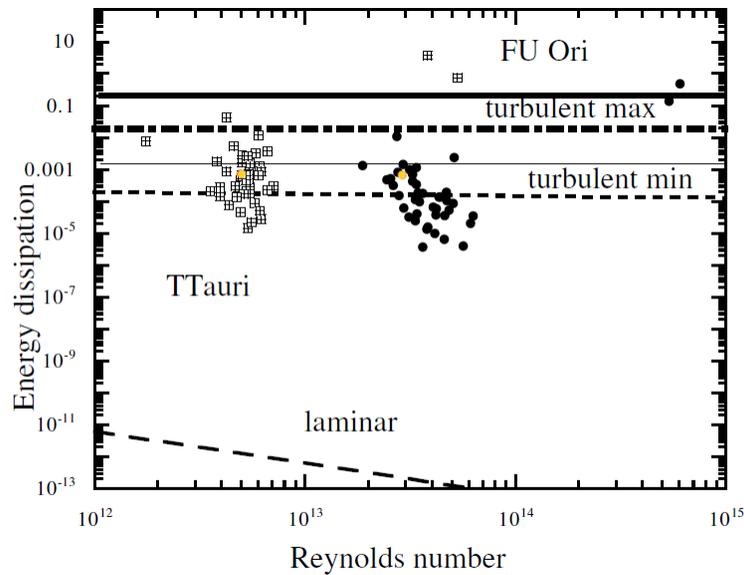


FIGURE 3.9 – Viscosité turbulente mesuré pour les disques autour des étoiles T-Tauri en fonction du nombre de Reynolds [127]. Les deux nuages de points correspondent à des définitions de Re différentes suivant si c'est le rayon de co-rotation (carrés blancs) ou le rayon moyen (ronds noirs), ce qui modifie également le rapport G/Re^2 . Les points jaunes correspondent au taux d'accrétion mesuré pour l'expérience KEPLER.

G/Re^2 en fonction du nombre de Reynolds, figure extraite de [127], sur laquelle a été rajouté le taux d'accrétion prédit par l'expérience KEPLER (points jaunes sur la Figure). Il est particulièrement surprenant que le résultat expérimental obtenu dans l'expérience KEPLER se rapproche autant de ces observations au vu de l'énorme séparation d'échelle qui existe entre l'expérience KEPLER dont le diamètre est d'environ $0.5 m$ et un disque d'accrétion, $R \sim 10^{14} m$. De surcroît, la Figure 3.9 montre que les valeurs de viscosité turbulente présentent de la dispersion sur au moins deux ordres de grandeur, ce qui invite à chercher d'autres *rescaling*. Les disques d'accrétion présentent des régions où le fluide est partiellement ionisé près de l'objet central. Le régime *ultime* de transport

de moment cinétique peut donc dépendre d'autres nombres sans dimension tels que le nombre de Mach Alfvénique, $Ma_A = u/v_A$ avec la vitesse d'Alfvén, $v_A = B/\sqrt{\rho\mu_0}$, ou le rapport entre la rotation et la fréquence de Brunt-Väisälä N/Ω ¹⁹. Ces nombres, en plus de Ma , ne font pas intervenir de coefficient de transport mais peuvent expliquer la dispersion. La comparaison entre les taux de transport de moment cinétique dans l'expérience KEPLER et dans les disques tire parti de l'auto-similarité du régime *ultimate* vis-à-vis du nombre de Reynolds. Il est bien entendu évident que ce régime est un régime quasi-asymptotique qui reste vrai dans la limite où $Rm = Pm \cdot Re < 1$, sans quoi la limite quasi-statique n'est plus respectée pour le champ magnétique, des instabilités dynamo peuvent apparaître et le tenseur de Maxwell se met à transporter du moment cinétique (d'où une dépendance en Ma_A). En conclusion, ce que permet d'ajouter l'expérience KEPLER, c'est que les taux de transport de moment cinétique observés dans les disques d'accrétion peuvent s'expliquer par du transport turbulent. En revanche, cette expérience n'apporte pas d'information sur l'origine de la turbulence dans les disques ni sur le poids relatif du transport de moment cinétique par rapport au tenseur de Maxwell.

19. La fréquence de Brunt-Väisälä N est définie par $N = \sqrt{g \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dz} - \frac{d \ln \rho}{dz} \right)}$

Chapitre 4

La thermoélectricité en MHD

4.1 Introduction à la thermoélectricité

La thermoélectricité est le domaine de l'électrodynamique qui s'intéresse à la génération de tension et de courant électrique par un flux de chaleur ou un gradient de température et *vice versa*. La thermoélectricité comprend essentiellement deux phénomènes :

- **Effet Seebeck** : il s'agit de la génération de courants électriques sous l'effet d'un gradient de température en présence de métaux différents.
- **Effet Peltier** : il correspond au transport de chaleur engendré par la présence d'un courant électrique dans un conducteur.

Dans tous les cas, ces effets proviennent en réalité du transport d'entropie par les porteurs de charge, donc les électrons dans les conducteurs. Le paragraphe suivant réalise un bref historique de la découverte de la thermoélectricité et de l'implication de ses différents effets.

Effet Seebeck

En 1820, Seebeck réalise l'expérience suivante, voir la Figure [4.1](#). Deux métaux différents forment un circuit électrique fermé, entourant un compas qui indique le pôle nord magnétique. Une flamme chauffe une des deux jonctions et impose un gradient de température entre les points A et B . Seebeck observe alors que le compas est dévié et en déduit qu'il existe une relation entre le magnétisme et la température. Il cherche tout d'abord à appliquer son observation à l'effet du volcanisme sur le magnétisme terrestre. L'interprétation de Seebeck est également motivée par la découverte d'Ørsted qui observe la même année que la présence de courants électriques dévie les compas. Il faudra attendre la découverte de la loi d'Ampère en 1861, pour comprendre que dans

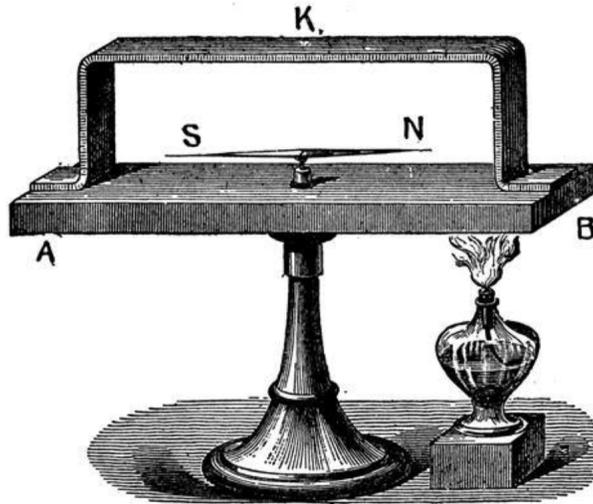


FIGURE 4.1 – Schéma du dispositif expérimental de Seebeck. Une différence de température est maintenue entre les points A et B . Un compas qui indique le Nord (N) est dévié par le champ magnétique généré par la boucle de courant thermoélectrique qui circule à l'intérieur des deux métaux. Crédit image : © 2020 University of South Florida.

l'expérience de Seebeck, la déviation du compas est bien due au champ magnétique généré par la circulation d'un courant thermoélectrique.

Effet Peltier

Dans son article, "Nouvelles expériences sur la caloricité des courants électriques" de 1834, Peltier publie son travail sur la baisse locale de température d'une jonction réalisée à l'aide de deux fils conducteurs lorsque celle-ci est soumise à la présence d'un courant électrique. Il remarque rapidement que cet effet dépend du signe du courant appliqué, à la différence de l'effet Joule. Le signe du flux de chaleur à la jonction dépend du signe du courant. Peltier remarque qu'il s'agit d'un transport réversible de chaleur.

4.2 Thermodynamique proche de l'équilibre

La formulation moderne de la thermoélectricité est due à Onsager [133, 134] et à son développement de la thermodynamique proche de l'équilibre. En thermodynamique, si $S(E_i)$ désigne l'entropie en fonction de variables extensives E_i , alors la différentielle totale de l'entropie est définie en fonction des variables intensives associées, I_i telles

que :

$$dS = \sum_k I_k dE_k, \quad I_k = \left(\frac{\partial S}{\partial E_k} \right)_{E_j \neq E_k}. \quad (4.1)$$

Onsager définit à l'aide de ces variables intensives les *Affinités* \mathbf{F}_j telles que $\mathbf{F}_j = \nabla I_j$ où les termes \mathbf{F}_i sont parfois appelés *forces généralisées*, par exemple ∇T ou $\nabla \phi$ dans le cas de la thermoélectricité. Les flux J_i des quantités extensives E_i peuvent alors se décomposer à l'aide des affinités :

$$\mathbf{J}_i = \sum_j L_{ij} \mathbf{F}_j, \quad (4.2)$$

$$= \sum_j L_{ij} \nabla I_j. \quad (4.3)$$

La loi d'Ohm suppose que le courant électrique est proportionnel au gradient de potentiel. De même, la loi de Fourier implique que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. La décomposition précédente indique qu'il est possible pour ces flux de dépendre à la fois des gradients de température et des gradients de potentiel à travers les termes non diagonaux de la matrice L_{ij} . La matrice définie par les coefficients L_{ij} porte le nom de matrice d'Onsager. Les variables extensives étant des quantités conservées, elles obéissent à des équations de conservation :

$$\partial_t E_i + \nabla \cdot \mathbf{J}_i = 0. \quad (4.4)$$

Pour la température, il s'agit de la conservation de l'énergie et pour le potentiel il s'agit de la conservation de la charge. De même l'entropie suit une équation de continuité avec un terme source :

$$\partial_t S + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \sigma_S, \quad (4.5)$$

où σ_S est le taux de création d'entropie. La définition de la dérivée totale de l'entropie, donnée par la relation (4.1), peut être injectée dans l'équation de continuité de l'entropie :

$$\sum_i I_i \partial_t E_i + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \sigma_S. \quad (4.6)$$

Les dérivées temporelles des variables extensives sont données par les équations de conservation :

$$-\sum_i I_i \nabla \cdot \left(\sum_j L_{ij} \nabla I_j \right) + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \sigma_S, \quad (4.7)$$

où les expressions des flux des variables extensives J_j ont été injectées. En utilisant la règle de dérivation d'un produit, il est possible de transformer le premier terme du membre de gauche de cette équation en une divergence :

$$-\nabla \cdot \left(\sum_{ij} L_{ij} I_i \nabla I_j \right) + \sum_{ij} L_{ij} \nabla I_i \cdot \nabla I_j + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \sigma_S. \quad (4.8)$$

L'expression dans la divergence du premier terme du membre de gauche de cette équation s'identifie au flux d'entropie \mathbf{J}_s et le second terme au taux de production d'entropie :

$$\mathbf{J}_s = \sum_{ij} L_{ij} I_i \nabla I_j, \quad (4.9)$$

$$\sigma_S = \sum_{ij} L_{ij} \nabla I_i \cdot \nabla I_j. \quad (4.10)$$

La première conséquence de l'expression du taux de création d'entropie σ_S est que, celui-ci étant positif ou nul, la matrice des coefficients d'Onsager (L_{ij}) est positive semi-définie^[1]. Le résultat intéressant d'Onsager publié dans son deuxième article [\[134\]](#) est d'avoir démontré que cette matrice est symétrique $L_{ij} = L_{ji}$ dans le cas où les interactions microscopiques sont symétriques par renversement du temps. Ceci constitue l'hypothèse de micro-réversibilité. Cette hypothèse, centrale dans la théorie d'Onsager, lui permet de considérer que proche de l'équilibre, les fluctuations suivent une statistique Gaussienne^[2]. La symétrie des coefficients d'Onsager n'est cependant valable qu'en l'absence de pseudo-vecteur. Lorsque le système est soumis à un champ magnétique \mathbf{B} et/ou à de la rotation $\boldsymbol{\omega}$, la relation liant les coefficients non diagonaux a été généralisée par Casimir, et date de 1945 [\[134\]](#), [\[135\]](#) :

$$L_{ij}(\mathbf{B}, \boldsymbol{\omega}) = \epsilon_i \epsilon_j L_{ji}(-\mathbf{B}, -\boldsymbol{\omega}), \quad (4.11)$$

1. Ce résultat avait en fait déjà été obtenu par Boltzmann sous une forme légèrement différente [\[133\]](#)

2. En effet, si l'on note x_i les grandeurs macroscopiques, proche de l'équilibre (que l'on fixe égal à 0), $\hat{x}_i = -\sum_{ij} \lambda_{ij} x_j$. Or, proche de l'équilibre l'entropie est maximale. Si l'on note l'entropie $S(x_1, \dots, x_n)$, alors on peut réaliser le développement perturbatif proche de l'équilibre, $S \simeq S^* - \sum_{ij} \beta_{ij} x_i x_j$. La distribution de probabilité est donnée par un argument à la Boltzmann, $\mathbb{P} \propto e^{S/k_B}$. Les fluctuations des grandeurs x_i suivent donc une pdf Gaussienne.

où ϵ_i, ϵ_j valent respectivement $+1$ si la variable extensive correspondante est invariante par retournement du temps et -1 sinon.

L'absence de pseudo-vecteur, champ magnétique où rotation globale, est supposée dans la suite de cette introduction. Puisque l'objectif est d'introduire les équations décrivant le flux de chaleur et le courant électrique en présence d'effets thermoélectriques, le paragraphe suivant développe les relations d'Onsager pour la thermoélectricité.

4.3 Relations d'Onsager pour l'effet thermoélectrique

On considère un solide indéformable, conducteur de l'électricité. La première identité thermodynamique donne la variation d'énergie interne u pour les porteurs de charge, donc les électrons dans le solide :

$$du = Tds + \mu dn, \quad (4.12)$$

où u est l'énergie interne par unité de volume, T la température, n la densité de particules, et μ le potentiel électrochimique des particules tel que $\mu = (\partial u / \partial n)_s$. Cette relation permet d'exprimer la différentielle totale de l'entropie par unité de masse s :

$$ds = \frac{1}{T} du - \frac{\mu}{T} dn. \quad (4.13)$$

Cette relation fait apparaître les grandeurs intensives. Ainsi, l'énergie interne, grandeur extensive, u est liée à la grandeur intensive $1/T$. De même, la densité de particule³, grandeur extensive, est reliée à la grandeur intensive μ/T . D'après Onsager, les flux des grandeurs extensives sont donnés par les gradients des grandeurs intensives. Ainsi, les flux d'énergie \mathbf{J}_u et de particules \mathbf{J}_n sont donnés par les relations :

$$\mathbf{J}_u = L_{uu} \nabla \left(\frac{1}{T} \right) - L_{un} \nabla \left(\frac{\mu}{T} \right), \quad (4.14)$$

$$\mathbf{J}_n = L_{nu} \nabla \left(\frac{1}{T} \right) - L_{nn} \nabla \left(\frac{\mu}{T} \right). \quad (4.15)$$

où $L_{un} = L_{nu}$. Comme le potentiel électrochimique vaut $\mu = \tilde{\mu} - e\phi$ avec $\tilde{\mu}$ le potentiel chimique, e la charge de l'électron et ϕ le potentiel électrique, et que celui-ci est défini à une constante près, il est toujours possible de redéfinir le potentiel électrique afin d'exprimer les flux en fonction de T et ϕ , ce qui donne une perspective plus électrodynamique. En remarquant que la densité de courant électrique \mathbf{j} s'écrit en fonction du

3. La densité de particule est à proprement parler intensive, mais le nombre de particules total N est bien extensif, ici $n = N/V$, où V est le volume total, maintenu constant.

flux de particules $\mathbf{j} = -e\mathbf{J}_n$, il vient que la densité de courant électrique en présence de gradient thermique est :

$$\mathbf{j} = -eL_{nu}\nabla\left(\frac{1}{T}\right) - e^2L_{nn}\nabla\left(\frac{\phi}{T}\right). \quad (4.16)$$

De même, la première identité thermodynamique implique $Tds = du + e\phi dn$, de sorte que le flux de chaleur $\mathbf{j}_Q = T\mathbf{J}_s$ satisfait :

$$\mathbf{j}_Q = \mathbf{J}_u + e\phi\mathbf{J}_n, \quad (4.17)$$

$$= \mathbf{J}_u - \phi\mathbf{j}. \quad (4.18)$$

En présence de gradient thermique, la loi d'Ohm est modifiée pour faire apparaître un terme proportionnel au gradient de température. De la même façon, le flux de chaleur est modifié par la présence du potentiel électrique puisque la présence de courant électrique induit un transport de chaleur. Il est enfin possible d'exprimer les flux avec les coefficients de transport usuels en prenant certains cas limites :

- La loi d'Ohm usuelle s'exprime, en l'absence de gradient thermique, $\mathbf{j} = -\sigma\nabla\phi$. En imposant $\nabla T = 0$, l'équation (4.16) donne l'expression de la conductivité électrique $\sigma = e^2L_{nn}/T$.
- Pour un conducteur homogène, la présence d'un gradient thermique engendre un gradient de potentiel, sans générer de courant électrique. Le coefficient Seebeck S (à ne pas confondre avec l'entropie s) se définit alors par $S = -|\nabla\phi|/|\nabla T|$. En imposant $\mathbf{j} = 0$ dans l'équation (4.16), la définition de S implique $S = -(L_{nu} + e\phi L_{nn})/eTL_{nn}$.
- À l'inverse, l'effet Peltier correspond au transfert de chaleur dû à la présence d'un courant électrique. Cet effet peut exister en l'absence de gradient thermique. En imposant $\nabla T = 0$, l'équation (4.18) permet d'exprimer \mathbf{j}_Q en fonction de $\nabla\phi$ et donc \mathbf{j} . Historiquement, le coefficient Peltier a été défini par la relation $\mathbf{j}_Q = \Pi\mathbf{j}$. La relation précédente permet d'obtenir l'expression pour Π . Cette relation est contrainte par la relation d'Onsager sur les coefficients non-diagonaux, et $\Pi = TS$ ⁴.
- Enfin, la loi de Fourier s'obtient en l'absence de courant électrique. Dans ce cas, la relation (4.18) implique $\mathbf{j}_Q = \mathbf{J}_u$. L'absence de courant électrique implique que le potentiel est déterminé par le gradient thermique par la relation $\nabla\phi = -S\nabla T$. Cette équation peut être injectée dans la relation (4.18). En cherchant une expression de la forme $\mathbf{j}_Q = -\lambda\nabla T$, il vient $\lambda = (L_{nn}L_{uu} - L_{nu}L_{un})/T^2L_{nn} =$

4. Cette relation porte également le nom de première relation de Kelvin.

$det(L)/T^2 L_{nn}$ où $det(L)$ désigne le déterminant de la matrice L .

Le problème majeur de la théorie d'Onsager, bien que très générale et applicable à un grand nombre de situations, est qu'elle n'apporte pas d'indication sur la valeur des coefficients de transport associés au gradient des variables intensives : les coefficients L_{ij} restent donc à déterminer expérimentalement, ou à l'aide d'un modèle spécifique à la situation étudiée. Le calcul des coefficients de transport grâce à un modèle statistique semi-classique basé sur une équation de Boltzmann pour les électrons dans un métal est laissé en Annexe [7.2](#)⁹

4.4 Illustration de l'effet thermoélectrique

Cette section vise à illustrer physiquement la génération de potentiel électrique et de courant par l'effet thermoélectrique. Les relations précédentes permettent d'exprimer la densité de courant électrique et le flux de chaleur sous une forme plus simple, en fonction des coefficients de transport usuels :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} - \sigma S \nabla T, \quad (4.19)$$

et :

$$\mathbf{j}_Q = \Pi \mathbf{j} - \lambda \nabla T, \quad (4.20)$$

où dans un souci de généralité le gradient de potentiel a été remplacé par le champ électrique.

Champ d'arrêt, $\mathbf{j} = 0$

Il est intéressant de noter que l'expression pour la densité de courant [\(7.53\)](#) se rapproche de celle obtenue pour le modèle à deux fluides de la MHD :

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = \mathbf{E} + \frac{1}{ne} \nabla p_e, \quad (4.21)$$

avec n la densité électronique et p_e la pression électronique. En effet, cette expression permet une compréhension plus intuitive de l'effet Seebeck. Lorsqu'un conducteur est soumis à un gradient thermique, comme sur la Figure [4.2](#) les électrons qui sont soumis à une température plus élevée sont plus énergétiques. Leur libre parcours moyen est donc

5. Une méthode perturbative permet d'obtenir des expressions pour les coefficients de transport où la seule inconnue est le temps caractéristique que met la fonction de distribution pour revenir à l'équilibre. Ce temps caractéristique correspond au temps entre deux collisions pour un électron diffusant dans le métal.

plus grand et la pression électronique est plus faible. Cette différence de température engendre un champ électrique, sans engendrer de courant électrique, $\mathbf{j} = 0$. Le champ électrique $\mathbf{E} = -S\nabla T$ s'appelle champ d'arrêt. En égalisant les deux expressions pour

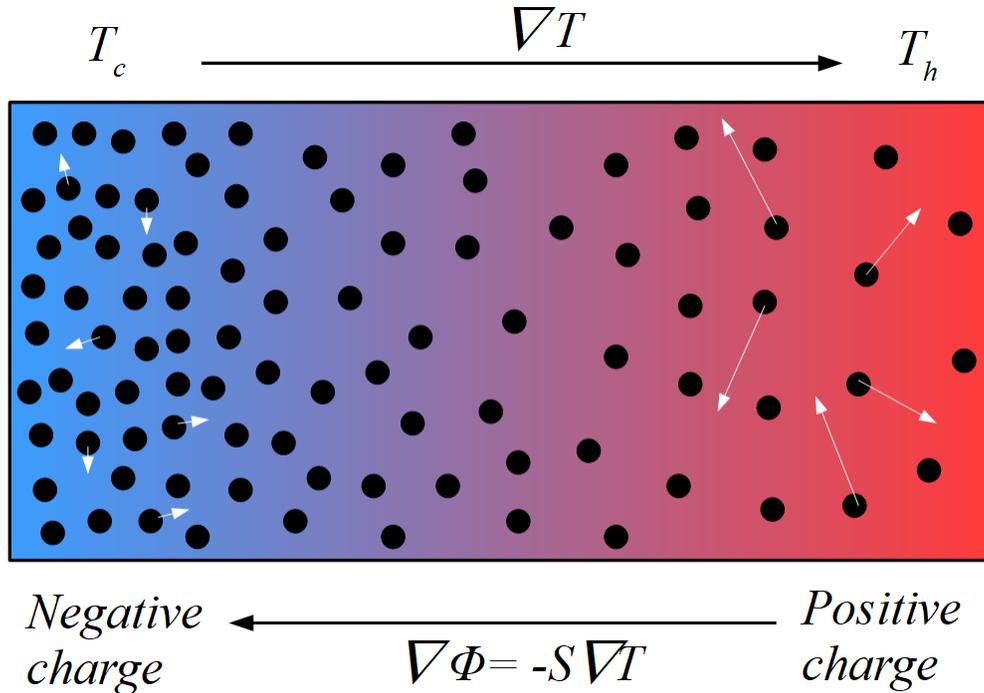


FIGURE 4.2 – Schéma explicatif du champ d'arrêt engendré par l'effet thermoélectrique en présence d'un gradient thermique.

la densité de courant \mathbf{j} , il vient $S\nabla T = -\nabla p_e / ne$. L'hypothèse (forte) que l'équation d'état pour la pression électronique est l'équation des gaz parfait $p_e = nk_B T$ ⁶, implique, pour n constant, que $S = -k_B / e$ ⁷. En pratique, cet ordre de grandeur pour S est surévalué. Notamment parce que les électrons dans un métal ne suivent pas une distribution de Boltzmann mais une distribution de Fermi due au principe d'exclusion de Pauli.

Coefficient Seebeck et analyse dimensionnelle

Il est également possible de retrouver le coefficient thermoélectrique par analyse dimensionnelle. L'effet thermoélectrique étant lié à la température, le problème dépend naturellement de T et k_B de sorte que $k_B T$ soit homogène à une énergie. Cet effet rend compte de la différence de potentiel créée par la différence de densité n du gaz

6. Ceci suppose également que la température des électrons T_e est la température locale du métal, T . Ceci est raisonnable dans la limite où les interactions ion-électrons dominent et où les chocs thermalisent les électrons à la température des ions.

7. Le signe moins provient du signe de la charge de l'électron.

d'électrons dans le métal en fonction de la température. La densité n est directement liée au vecteur d'onde de Fermi k_F par $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$ et m_e désigne la masse des électrons. Il est nécessaire de faire apparaître \hbar dans le problème car les électrons obéissent à un potentiel quantique. Il est donc possible de chercher l'expression du coefficient Seebeck en fonction de ces paramètres ainsi que de la charge de l'électron e . Il y a donc 7 grandeurs physiques, voir le Tableau 4.1 et 5 dimensions qui sont les unités de masse M , de longueur L , de temps T , de courant électrique A et de température K . Le problème ne fait pas intervenir ϵ_0 car les variations de densités électronique⁸

S	T	k_B	k_F	m_e	\hbar	e
$M.L^2.T^{-3}.A^{-1}.K^{-1}$	K	$M.L^2.T^{-2}.K^{-1}$	L^{-1}	M	$M.L^2.T^{-1}$	$A.T$

TABLE 4.1 – Pouvoir thermoélectrique - analyse dimensionnelle

ne sont pas suffisamment fortes pour que les électrons interagissent entre eux de façon Coulombienne. De même, le libre parcours moyen n'intervient que lorsque les électrons subissent une dérive dans le métal. Le théorème π indique que le problème se réduit à 2 nombres sans dimension (π_1, π_2) reliés par une fonction inconnue \mathcal{F} . Seul S et e font intervenir des ampères, le produit SeT est donc homogène à une énergie tout comme le produit $k_B T$. On pose donc $\pi_1 = Se/k_B$. De la même façon, le rapport $\hbar^2 k_F^2 / 2m_e = \epsilon_F$ est également homogène à une énergie, il s'agit de l'énergie du niveau de Fermi. La relation précédente s'inverse pour s'écrire :

$$S = \frac{k_B}{e} \mathcal{F} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right). \quad (4.22)$$

En toute rigueur, l'analyse dimensionnelle ne permet pas de conclure au-delà de cette relation. Cependant, les matériaux supra-conducteurs ne présentent pas d'effet thermoélectrique. En conséquence, puisque les métaux deviennent supra-conducteurs à basse température, $S \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow 0$. De plus, $\epsilon_F = k_B T_F$, et comme à température ambiante $T \ll T_F$, en supposant que la fonction \mathcal{F} est continue, il est possible de réaliser un développement limité de \mathcal{F} en $T = 0$:

$$\mathcal{F} \left(\frac{T}{T_F} \right) = \mathcal{F}(0) + \frac{T}{T_F} \mathcal{F}'(0) + \dots, \quad (4.23)$$

avec $\mathcal{F}(0) = 0$:

$$\boxed{S \propto \frac{k_B}{e} \frac{T}{T_F}}. \quad (4.24)$$

8. Par rapport à la densité des ions $\rho = e(n_i - n_e)$.

Ce résultat est très proche de celui obtenu à l'aide de la méthode semi-classique (Annexe [7.2](#)) :

$$S = \frac{\pi^2 k_B T}{3 e T_F}. \quad (4.25)$$

Chaque métal, ayant des structures de bandes et des densités électroniques différentes, présente des températures de Fermi différentes. Ceci explique la dispersion des valeurs des coefficients Seebeck parmi les métaux. De plus, pour un métal, la température de Fermi est de l'ordre de $T_F \sim 10^4 - 10^5$. Le facteur T/T_F réduit donc de façon significative l'ordre de grandeur de S . En effet, $k_B/e \simeq 86 \mu V.K^{-1}$ tandis que les métaux ont des coefficients Seebeck tous inférieurs à $10 - 15 \mu V.K^{-1}$.

Courant thermoélectrique

Les sections précédentes ont montré qu'en présence d'un gradient de température dans un métal, un champ électrique apparaît et empêche les électrons de dériver et d'engendrer un courant. En pratique, la conductivité électrique et le coefficient Seebeck sont des coefficients de transport et dépendent donc de la température. Cette dépendance ne permet cependant pas d'engendrer des courants thermoélectriques. La loi d'Ohm en présence de l'effet thermoélectrique s'écrit :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} - \sigma S \nabla T, \quad (4.26)$$

Le rotationnel de cette équation donne, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$, l'équation vérifiée par le champ magnétique :

$$\partial_t \mathbf{B} = \eta \Delta \mathbf{B} + \frac{\eta}{\sigma} \nabla \sigma \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla S \times \nabla T. \quad (4.27)$$

Le dernier terme du membre de droite de l'équation correspond à la génération de champ magnétique par l'effet thermoélectrique. Lorsque $S = S(T)$, alors les gradients de coefficient Seebeck sont collinéaires aux gradients thermiques et ce terme est nul. Pour que l'effet thermoélectrique engendre du champ magnétique et donc des courants, il est impératif que les variations de coefficient Seebeck ne soient pas collinéaires aux variations de température. Expérimentalement, il est possible d'obtenir des gradients de coefficient Seebeck qui ne soient pas alignés aux gradients thermiques en utilisant des jonctions, entre des métaux différents, portées à des températures différentes. La Figure [4.3](#) montre une telle situation : deux métaux différents notés A et B sont en contact électrique au niveau des jonctions x et y . La loi d'Ohm,

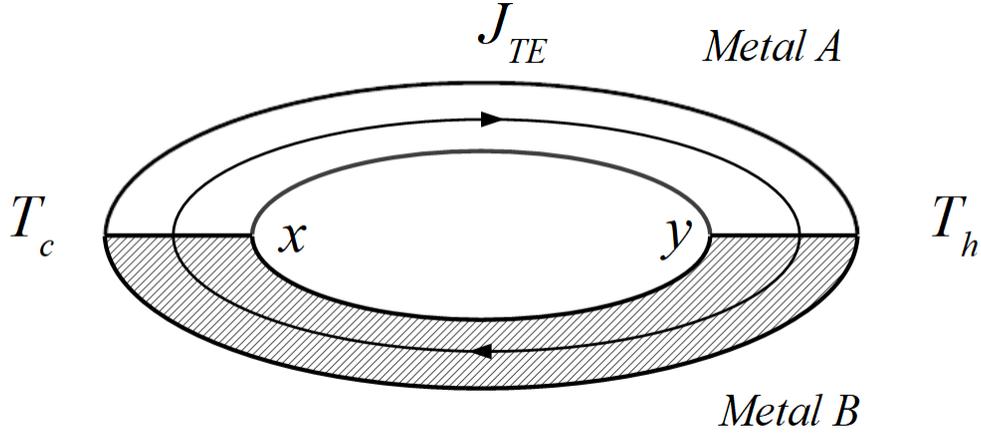


FIGURE 4.3 – Schéma d'une boucle de courant thermoélectrique engendrée par une différence de température entre les jonctions de deux métaux.

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = \mathbf{E} - S \nabla T, \quad (4.28)$$

peut alors être intégrée le long d'une courbe fermée \mathcal{C} , passant par chacune des deux jonctions :

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{\mathcal{C}} S \nabla T \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.29)$$

L'intégrale sur un contour fermé de \mathbf{E} est nulle en régime stationnaire, en effet :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma}, \\ &= - \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \\ &= - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma(\mathcal{C})} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

où $\Sigma(\mathcal{C})$ désigne la surface contenue par la courbe \mathcal{C} . Cette intégrale correspond à la variation du flux de champ magnétique à travers cette surface, qui est nulle en régime stationnaire. L'intégrale sur le contour fermé \mathcal{C} du terme thermoélectrique peut se décomposer en deux intégrales, correspondant au parcours le long de \mathcal{C} dans chaque métal. Le coefficient Seebeck de chaque métal est noté S_A et S_B , de même la conductivité électrique est notée σ_A et σ_B .

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} S \nabla T \cdot d\mathbf{l} &= \int_x^y S_A \nabla T \cdot d\mathbf{l} + \int_y^x S_B \nabla T \cdot d\mathbf{l}, \\ &\simeq \Delta S \Delta T, \end{aligned}$$

car $\int_x^y \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \int_x^y dT = T_h - T_c = \Delta T$ et $\Delta S = S_A - S_B$ ⁹. Dans un cas limite où les dimensions transverses des deux conducteurs sont faibles, la densité de courant \mathbf{j} est constante. En notant l la longueur de chacune des portions de métal, il vient :

$$\oint_C \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} \simeq \frac{j l}{\sigma_A} + \frac{j l}{\sigma_B},$$

$$\simeq j l \frac{\sigma_A + \sigma_B}{\sigma_A \sigma_B}.$$

Finalement, l'intégrale sur le contour fermé de la densité de courant électrique s'obtient grâce aux expressions précédentes :

$$j \simeq - \frac{\Delta S \Delta T}{l} \frac{\sigma_A \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}, \quad (4.30)$$

Cette relation montre la présence d'un courant thermoélectrique lorsque deux jonctions en contact électrique sont portées à des températures différentes. Cette relation sera particulièrement utile lorsqu'il s'agira d'estimer en ordre de grandeur des densités de courant thermoélectrique.

Boucle de courant en présence d'une interface continue

La situation précédente montre qu'en présence de deux jonctions, un courant thermoélectrique peut circuler. En pratique, il n'est pas nécessaire que les deux jonctions soient séparées. En effet, la présence d'une interface continue soumise à un gradient de température parallèle à l'interface suffit. La géométrie des courants thermoélectriques est alors plus complexe, mais il est possible d'en avoir une intuition en prenant la situation suivante, représentée sur la Figure 4.4. Les points x et y sont portés aux températures T_c et T_h , de sorte que l'interface est soumise à un gradient de température horizontal. Chaque contour fermé \mathcal{C}_i traverse l'interface aux points x_i et y_i , qui sont eux-mêmes aux températures $T_{x,i}$ et $T_{y,i}$. Comme dans le cas précédent, en régime stationnaire, le flux de champ magnétique est constant et l'intégrale de \mathbf{E} le long de n'importe quel contour fermé est nulle. En conséquence, il vient :

$$\oint_{\mathcal{C}_i} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} \simeq -\Delta S \Delta T_i, \quad (4.31)$$

où la différence de température entre les points x_i et y_i est notée $\Delta T_i = T_{y,i} - T_{x,i} < \Delta T$. La densité de courant, projetée le long de \mathcal{C}_i dépend donc fortement de l'évolution de la température le long de l'interface. En effet, si la température est relativement constante,

9. Ce calcul ne tient pas compte de la dépendance en T de S , approximation valable tant que $\Delta T/T_{ambient} \ll 1$.

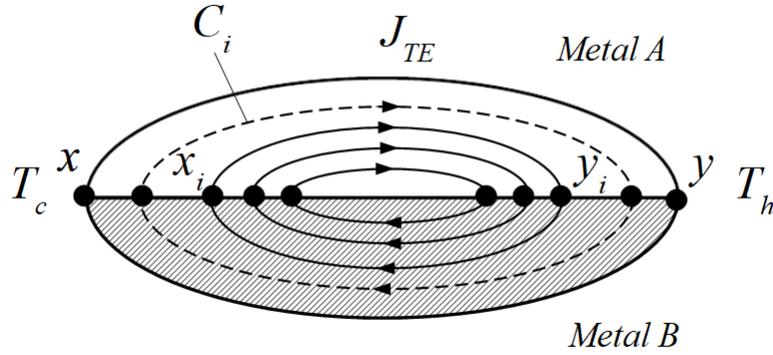


FIGURE 4.4 – Distribution des courants thermoélectriques en présence d’une interface soumise à un gradient thermique dans le même plan.

exceptée proche des points x et y où les gradients thermiques sont forts, alors $\oint_{C_i} \frac{j}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} \simeq 0$ pour les couples de points (x_i, y_i) situés loin de x et y . Autrement dit, loin de x et y les courants sont essentiellement horizontaux, et re-bouclent uniquement proche de x et de y . La Figure 4.5 illustre cet effet. Deux plaques conductrices sont en contact électrique et l’on suppose qu’il existe un moyen pour générer le profil de température présenté ci-contre. Comme il sera montré dans la suite, ce profil est proche de celui obtenu à l’interface entre deux fluides conducteurs comme dans l’expérience GALLIMERT. En x_h , la température vaut T_h . La température diminue ensuite fortement jusqu’à T_m en x_0 . Pour tous les $x_0 < x < x_5$, la température est constante et vaut T_m . Puis la température diminue à nouveau jusqu’à atteindre T_c en x_c . Quatre contours fermés C_i sont considérés. $\Gamma_i = \oint_{C_i} \frac{j}{\sigma} \cdot d\mathbf{l}$, désigne la circulation des courants le long du contour fermé i correspondant.

- Le contour fermé C_1 passe par les points x_h et x_1 qui sont aux températures T_h et T_m . La circulation des courants le long de cette boucle est donc $\Gamma_1 = -\Delta S(T_h - T_m)$. L’intensité des courants le long de cette boucle est donc élevée. Elle sera d’autant plus élevée que la longueur totale $\mathcal{L}_1 = \oint_{C_1} dl$, est faible.
- Le contour fermé C_2 passe par les points x_2 et x_3 qui sont tous les deux à la température T_m , Donc $\Gamma_2 = 0$. Ceci implique que le contour C_2 est très éloigné d’une boucle de courant réelle et qu’il n’existe pas de boucle de courant qui re-boucle entre x_0 et x_5 .
- Le contour fermé C_3 passe par les points x_h et x_4 , qui sont aux températures T_h et T_m . Il vient donc que $\Gamma_3 = -\Delta S(T_h - T_m) = \Gamma_1$. Cependant, le long de ce contour, les courants sont moins intenses que le long de C_1 car $\mathcal{L}_3 > \mathcal{L}_1$ ¹⁰.

10. Ceci est vrai dans la limite où les contours fermés C_i ne sont pas trop éloigné des boucles de

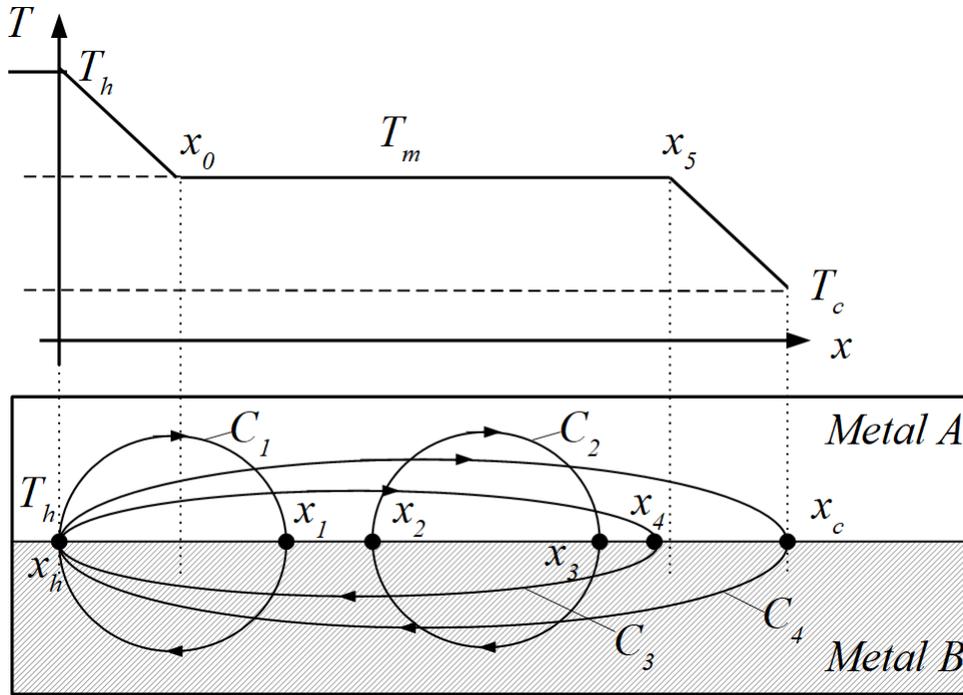


FIGURE 4.5 – Boucle de courant thermoélectrique en présence de gradients thermiques localisés.

- Le contour fermé \mathcal{C}_4 passe par les points x_h et x_c qui sont aux températures T_h et T_c . La circulation vaut alors $\Gamma_3 = -\Delta S(T_h - T_c)$. Comme $T_h - T_c > T_h - T_m$, il est possible de conclure que la circulation des courants est plus grande le long de ce contour que le long des contours \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_3 . Dans un tel dispositif, la majorité des courants vont donc circuler entre les points chaud x_h et froid x_c .

4.5 Thermoélectricité en MHD

4.5.1 Équation d'induction

La thermoélectricité en MHD repose sur le fait que les particules de fluide obéissent à la loi d'Ohm en présence de l'effet Seebeck donnée par l'équation (7.53), qui dans le référentiel du fluide donne :

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - S \nabla T, \quad (4.32)$$

En principe, la présence du champ magnétique influence également les propriétés de transport. L'expression complète des courants thermoélectriques dans ce cas est laissée en Annexe 7.3. En pratique, de même que l'effet Hall est négligeable dans les métaux, courant le long desquelles \mathbf{j} est constante.

la correction de l'effet thermoélectrique par le champ magnétique est négligeable. Le rotationnel de cette équation donne en utilisant la loi de Maxwell-Ampère, $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$, l'équation d'induction dans le cas où le coefficient Seebeck S et la conductivité électrique σ sont des fonctions de l'espace :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} + \frac{\eta}{\sigma} \nabla \sigma \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla S \times \nabla T, \quad (4.33)$$

Si les deux premiers membres de droite correspondent à l'équation d'induction avec S, σ constants, le troisième terme joue un rôle dans les dynamos à conductivité variable (ce terme étant proportionnel à \mathbf{B}). Le dernier terme correspond toujours au terme source de champ magnétique dû à l'effet thermoélectrique. Comme l'équation pour le champ magnétique est analogue à l'équation pour la vorticité, l'effet thermoélectrique est d'une certaine manière un effet "non-barotrope". Le théorème de transport de Reynolds pour le flux d'un vecteur \mathbf{F} à travers une surface Σ_t qui se déplace avec l'écoulement \mathbf{u} est [136] :

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma_t} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_t} \partial_t \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_t} \nabla \cdot \mathbf{F} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} - \oint_{\partial \Sigma_t} (\mathbf{u} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.34)$$

En remplaçant \mathbf{F} par \mathbf{B} dans cette expression, il est possible de démontrer l'équivalent du théorème de Kelvin pour la conservation du flux de \mathbf{B} à travers Σ_t :

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{\partial \Sigma_t} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\Sigma_t} \nabla S \times \nabla T \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.35)$$

Dans le cas MHD idéal, $\sigma \rightarrow +\infty$ et sans thermoélectricité, ce résultat correspond au théorème d'Alfvén [11]. Lorsque le conducteur n'est plus idéal, le flux de champ magnétique n'est plus conservé à cause de la présence de courants électriques et donc de dissipation Ohmique. Cette équation montre également que la présence d'effets thermoélectriques induit des variations de flux magnétique.

4.5.2 Forçage thermoélectrique

Dans le cas classique, un conducteur parcouru par un courant électrique et soumis à un champ magnétique subit une densité de force de Laplace $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. De même, deux conducteurs en contact électrique, soumis à un gradient de température et   un champ magnétique, subissent une densité de force de Laplace de direction opposée, comme le montre la Figure [4.6]. Cette force ne nécessite pas que les conducteurs soient à l' tat

11. Dans cette limite la topologie du champ magnétique ne peut pas évoluer. Au contraire, lorsque la dissipation Ohmique est permise, σ fini, le flux de \mathbf{B} n'est plus conservé et de la reconnection magnétique se produit dans les feuilles de courant.

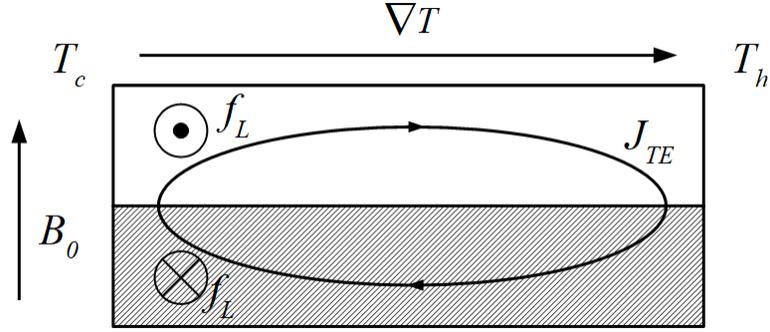


FIGURE 4.6 – Force de Laplace due à la présence d'un gradient de température et d'un champ magnétique.

liquide ou solide. Si le solide du bas est maintenu fixé et que la phase supérieure est un métal liquide, alors celui-ci est mis en mouvement. Ce type de forçage porte le nom de pompage thermoélectrique ou TE-MHD et sera mis en pratique dans l'expérience GALLIMERT dans les chapitres suivants.

4.5.3 Équation de la température

L'effet thermoélectrique nécessite la présence de gradient thermique et donc d'une équation pour la température. L'équation d'induction (4.33) permet d'obtenir une équation bilan pour l'énergie magnétique. Les relations thermodynamiques permettent d'établir le bilan d'entropie et donc l'équation de température. La démonstration est lourde et est donc laissée en Annexe 7.4. Dans l'approximation de Boussinesq, l'équation vérifiée par la température T est donc [137] :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_Q + \nabla \mathbf{u} : \boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla S \times \nabla T), \quad (4.36)$$

Les expressions pour \mathbf{j}_Q et \mathbf{j} sont données par les relations d'Onsager. Le second terme du membre de droite est le terme classique de dissipation visqueuse avec $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes. Le troisième terme du membre de droite correspond à la dissipation Ohmique. Enfin, la présence de la thermoélectricité implique l'apparition d'un quatrième terme dans le membre de droite. Ce terme correspond au flux d'énergie interne transformé en énergie magnétique par l'effet thermoélectrique et *vice versa*. Dans un problème où les gradients de coefficient Seebeck sont localisés à l'interface, ce terme est nul dans le coeur de l'écoulement. Les variations de température dues à la dissipation visqueuse sont en général négligeables tout comme celles dues à la dissipation Ohmique.

La divergence du flux de chaleur fait intervenir trois termes :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_Q = \Pi \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{j}}_{=0} + S \nabla T \cdot \mathbf{j} - \lambda \nabla^2 T, \quad (4.37)$$

Le premier terme du membre de droite est nul par conservation de la charge. Le second terme est négligeable devant la diffusion thermique :

$$\begin{aligned} \frac{|S \nabla T \cdot \mathbf{j}|}{\rho c_p \kappa \nabla^2 T} &\sim \frac{S \Delta T \Delta S \Delta T \tilde{\sigma} l^2}{\rho c_p \kappa \Delta T l^2}, \\ &\sim 10^{-5} \Delta T, \end{aligned}$$

où $\tilde{\sigma} = \sigma_A \sigma_B / (\sigma_A + \sigma_B)$ du couple de métaux utilisés. La distribution de courant a été estimée à l'aide de la relation (4.30). L'équation de température se réduit donc à l'équation classique d'advection-diffusion :

$$\boxed{\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T.} \quad (4.38)$$

Chapitre 5

Dispositif expérimental GALLIMERT

Le nom GALLIMERT provient de l'acronyme GALLium-MERcure-Thermoélectricité et résume les éléments principaux de ce dispositif expérimental à savoir la génération du courant thermoélectrique dans un système diphasique de Gallium-Mercure. Si le chapitre précédent consiste en une analyse très générale de la thermoélectricité (TE), ce chapitre décrit l'interaction entre la TE et la MHD. La possibilité que des courants électriques générés par des gradients de température puissent jouer un rôle en MHD a tout d'abord été explorée théoriquement par Shercliff en 1979 [137] avec notamment pour application un nouveau mode de pompage des *blanket* de métal liquide¹ sur les parois internes des réacteurs à fusion nucléaire [138] (où règnent d'importantes différences de température et des champs magnétiques intenses). Shercliff développe ensuite son idée à travers plusieurs articles théoriques. Il calcule notamment le gradient de pression engendré par la force de Lorentz due au courant thermoélectrique dans une enceinte fermée [139] ainsi que l'écoulement dans une conduite [140, 141]. Cependant l'idée selon laquelle il est possible d'engendrer un pompage à l'aide d'un couplage TE-MHD n'est pas nouvelle comme l'atteste le dépôt de plusieurs brevets dès les années 50 [142, 145]. Présentant l'avantage de ne pas utiliser de pièce mécanique, un système équivalent est breveté et installé sur le satellite *SNAP-10A* Figure 5.1a [146]. Ce satellite expérimental est le premier (et unique) satellite envoyé par l'US Air Force à embarquer un réacteur nucléaire en orbite. Le petit réacteur d'une puissance de 500 W chauffe le métal liquide ici du NaK (un eutectic de Sodium-Potassium) à une température de 550 °C, dans une boucle fermée. La pompe est constituée d'une pièce semi-conductrice, permettant d'avoir un coefficient Seebeck élevé, et d'ailettes de refroidissement facilement visibles sur la Figure 5.1b. Le champ magnétique nécessaire au forçage est fourni à l'aide d'aimants. Comme le montre la Figure 5.1a, la pompe TE-MHD est placée à l'avant du satellite, proche du réacteur nucléaire et est donc soumise à un intense flux de neutrons.

1. Liquid Metal Blanket (LMB), en anglais, à ne pas confondre avec Liquid Metal Battery (LMB).

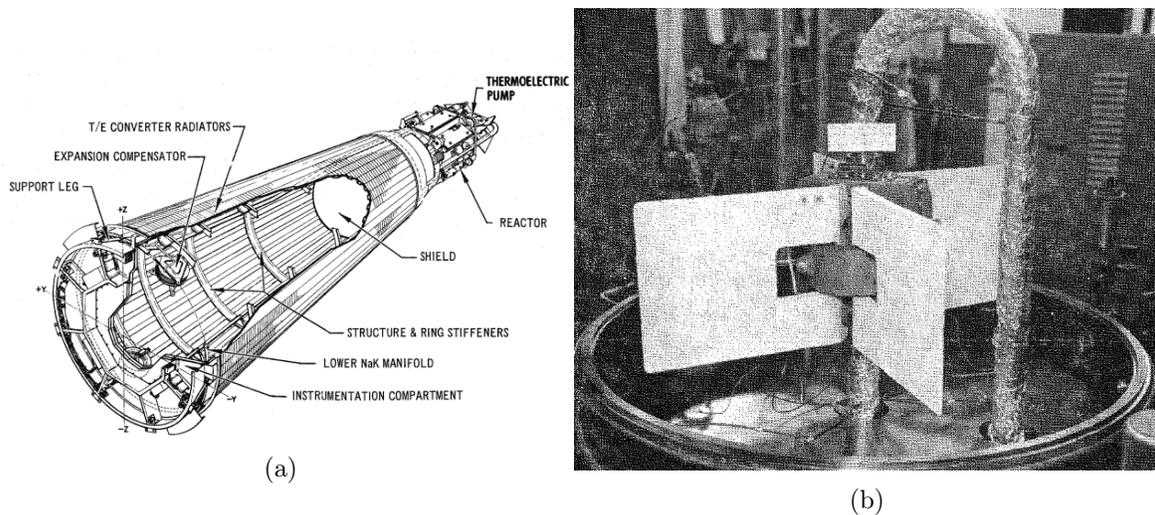


FIGURE 5.1 – (a) Satellite expérimental nucléaire SNAP-10A, muni d’une pompe TE-MHD. (b) Pompe TE-MHD sur sa boucle d’essai et reliée à une cuve thermalisée contenant du NaK. Les ailettes blanches servent à évacuer le flux de chaleur apporté par le fluide [146].

L’avantage d’une pompe basée sur l’effet thermoélectrique est donc de se passer de tout système électronique de commande, de moteur, *et cetera...*, systèmes qui résistent mal au flux important de neutrons.

Même si un certain nombre de brevets a été déposé, très peu d’études ont porté sur la mesure expérimentale de ce type d’écoulement. Une seule expérience, rapportée par Jaworski *et al.* [147] présente des mesures de vitesse de l’ordre de 20 cm.s^{-1} , dans une cuve de Lithium liquide chauffée à l’aide d’un faisceau d’électrons, sans obtenir clairement de loi d’échelle.

La vitesse du fluide étant reliée au gradient thermique et à l’intensité du champ magnétique, une question naturelle est d’évaluer l’évolution du champ de vitesse de l’écoulement en fonction de ces paramètres. De plus, aucune étude n’a été réalisée sur un système diphasique liquide-liquide et GALLIMERT est donc la première expérience de ce type. Enfin, les différents systèmes expérimentaux réalisés ont été obtenus dans des conditions de température qui rendent difficile l’étude de l’écoulement en laboratoire. Les faibles températures de fusion du Gallium et du Mercure permettent de réaliser des expériences de laboratoire mieux contrôlées ce qui rend un certain nombre de mesures possibles.

5.1 Dispositif expérimental GalliMerT

Le dispositif GALLIMERT consiste en une cuve cylindrique en cuivre de hauteur $h = 5 \text{ cm}$, constituée d’un cylindre interne et d’un cylindre externe. Les parois horizontales

sont en PEEK et sont isolantes électriques. Les parois des cylindres sont également isolées électriquement à l'aide d'une couche de résine bi-composant d'épaisseur 1 mm . Cette résine présente une grande résistivité électrique $10^{15}\ \Omega\cdot\text{cm}$ tout en conservant une conductivité thermique correcte de $1.87\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Le rayon interne est noté

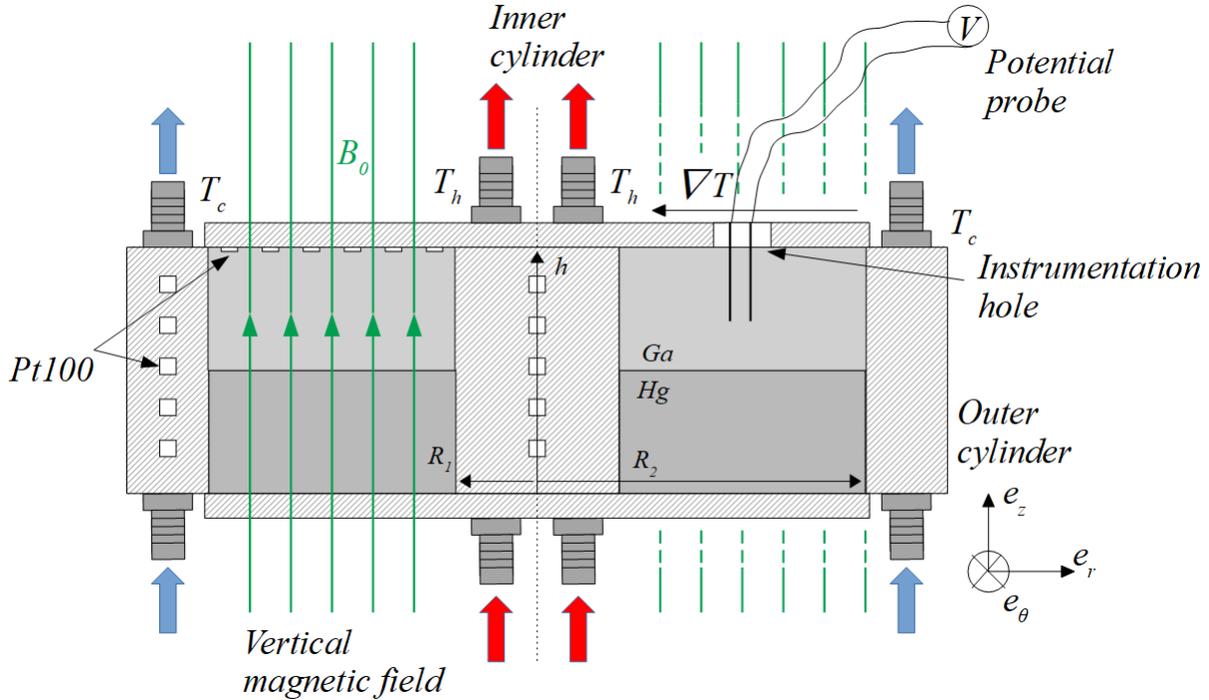


FIGURE 5.2 – Schéma du dispositif TE-MHD GALLIMERT.

$R_1 = 37\text{ mm}$ et le rayon externe $R_2 = 100\text{ mm}$ pour un gap $\Delta R = R_2 - R_1 = 63\text{ mm}$. L'épaisseur du cylindre externe est de 37.5 mm et le rapport d'aspect est proche de 1 à savoir $\Gamma = (R_2 - R_1)/h = \Delta R/h \simeq 1.26$. Un gradient radial de température est imposé en chauffant le cylindre interne et en refroidissant le cylindre externe. Le cylindre interne est à cet effet percé de quatre trous traversant le cylindre dans toute sa hauteur. Il est relié à une boucle d'eau alimentée par un bain thermostaté *Lauda 1848* d'une puissance thermique de chauffe de 3.5 kW . Afin d'être refroidi, le cylindre externe est percé de huit trous traversant et est relié à une boucle d'huile silicone alimentée par bain thermostaté *Lauda T10000* d'une puissance de refroidissement de 10 kW (au maximum). Une partie du système de refroidissement était à l'origine constituée de tuyau en Exacanal. Il se trouve que l'Exacanal est une forme de silicone qui se dissout dans l'huile (de silicone), ce qui a engendré de nombreuses fuites au début de l'expérience. À terme, des tuyaux en PVC armés furent installés pour le système de refroidissement. La cuve est remplie à part égale de Mercure liquide et de Gallium liquide. Le Gallium ayant une température de fusion de $29.7\text{ }^\circ\text{C}$, le thermostat est maintenu à $T = 35\text{ }^\circ\text{C}$ afin d'éviter le gel du Gallium. En effet, celui-ci ayant une densité plus faible à l'état solide que liquide,

le gel lorsque la cuve est pleine peut engendrer la rupture de la cuve et une fuite du Mercure liquide (dont le point de fusion est beaucoup plus bas, $-38.8\text{ }^{\circ}\text{C}$). Les deux bains thermostatés sont contrôlés en *RS232* avec *Python*. La cuve est ensuite placée à l'intérieur de deux bobines de Helmholtz, les mêmes que celles utilisées pour l'expérience KEPLER, chapitre 2. Les bobines sont alimentées en parallèle à l'aide d'une alimentation stabilisée en courant *ITECH IT6015D 80V-450A*. Le champ magnétique maximum et stable dans le temps est de l'ordre de $B_0 \sim 80\text{ mT}$. Pour des champs magnétiques plus grands que 80 mT , la boucle froide ne parvient pas à refroidir les bobines et une lente dérive du champ magnétique est observable². Cette configuration



FIGURE 5.3 – Photographie du montage GALLIMERT pour les tests en eau à l'extérieur des bobines de Helmholtz.

cylindrique axisymétrique avec deux métaux liquides superposés l'un sur l'autre est

2. En chauffant, la conductivité du cuivre des bobines diminue, ce qui augmente la résistance électrique.

notamment motivée par l'étude des batteries à métaux liquides. Ces batteries reposent sur des métaux qui sont liquides à des températures très élevées, plusieurs centaines de degrés, ce qui rend leur étude complexe. En effet, un certain nombre de sondes ne résiste pas à ces températures et ces systèmes sont en général difficile à bien contrôler. L'usage du Gallium et du Mercure facilite l'étude en laboratoire de ces systèmes et permet donc de réaliser des mesures difficilement accessibles dans les batteries à métaux liquides (LMB)³. La présence d'effets thermoélectriques dans les LMB sera notamment discuté à la fin du chapitre.

5.1.1 Mesure et contrôle de la température

La mesure locale de température est réalisée à l'aide de sondes à résistance de Platine Pt100. Trois lignes de capteurs sont installées comme le montre le schéma Figure 5.2. Une ligne le long d'une hauteur dans chacun des cylindres interne et externe permet de vérifier l'homogénéisation de la température le long de l'axe vertical. Enfin, une ligne de sondes collées sur la plaque supérieure permet d'accéder au profil radial de température. Comme les trous dans les cylindres pour les Pt100 sont relativement fins, 5 mm de diamètre, il a fallu installer les Pt100 sur un montage spécialement conçu à cette occasion. Les Pt100 sont soudées à un circuit imprimé lui-même fixé à une tige héli-cylindrique en cuivre, comme le montre la Figure 5.4. Cette tige permet de renforcer l'ensemble face aux contraintes mécaniques. Le cuivre permet également d'avoir une bonne conductivité thermique avec le reste du cylindre. L'ensemble est plongé dans une pâte thermique avant d'être inséré dans les cylindres. Chaque circuit



FIGURE 5.4 – Photographie du montage des Pt100 sur le circuit imprimé, vissé sur la fixation en cuivre, l'ensemble ne devant pas faire plus de 5 mm de diamètre. L'extrémité en forme de pelle correspondait aux branchements et était à l'extérieur des cylindres.

présente donc cinq sondes Pt100, espacées de 5 mm de distance. Les Pt100 utilisées sont des *F2020-100-A* de petite dimension $2.1 \times 2.3 \times 0.9$ mm. Pour le profil radial,

3. Liquid Metal Battery

le long de 60 *mm* de rayon, 14 sondes Pt100 sont alignées. Ces sondes Pt100 sont directement collées à la paroi à l'aide d'une résine epoxy et vernies à l'aide d'un spray pour être protégées du métal liquide. L'un des avantages des sondes de température Pt100 est qu'elles ne sont pas perturbées par la présence de champ magnétique, même intense $\sim 16 T$ [148]. Toutes les mesures de température sont réalisées à travers des mesures de résistance par un voltmètre multiplexé *Keithley 3706A multimeter signal switching*. L'ensemble des 24 mesures prend environ 1 *s* et la fréquence d'acquisition est fixée à 0.1 *Hz*. Les mesures sont continûment traitées par ordinateur à l'aide d'un script *Python*. Comme la boucle chaude est alimentée en eau à pression atmosphérique, la température maximale pour le cylindre interne est d'environ 100 °C. En pratique, pour des températures au-delà de 85 °C, le refroidisseur travaille quasiment à puissance maximale de sorte qu'augmenter la température du cylindre interne augmente peu le gradient de température.

5.1.2 Mesure du flux de chaleur

Afin de réaliser des mesures du flux de chaleur qui traverse l'expérience GALLIMERT, deux capteurs de flux thermique *HFS-5* sont disposés contre les parois des cylindres interne et externe. Leur surface de mesure est carrée et de dimension 2.5 *cm* par 2.5 *cm*. Le positionnement des fils et la taille totale du capteur contraignent leur orientation de sorte que la surface de mesure est plongée uniquement dans le Mercure. Le capteur est une thermopile à température différentielle : constitué de thermocouples en série, il utilise l'effet thermoélectrique pour produire une différence de potentiel en fonction du flux de chaleur qui le traverse. Deux nanovoltmètres *Keysight 34420A* sont ainsi utilisés pour les mesures de flux thermique. Comme le capteur utilise l'effet Seebeck et que le coefficient Seebeck évolue avec la température, il est important de prendre en compte cette dérive. Le flux de chaleur Q est donc donné en fonction de la différence de potentiel mesurée δV :

$$Q = \frac{\delta V}{A \cdot (3.34 \cdot T[^\circ C] + 0.917)} \quad (5.1)$$

La constante A est calibrée pour chaque capteur. En pratique, pour les cylindres interne et externe $A_{in} = 1.3 \mu V.W^{-1}.m^2$ et $A_{ex} = 1.27 \mu V.W^{-1}.m^2$.

5.1.3 Mesure de potentiel

Afin de mesurer la vitesse d'un écoulement dans un métal liquide, en présence d'un champ magnétique, il suffit en principe de mesurer la différence de potentiel entre deux

broches conductrices, principe déjà introduit. En pratique, la présence d'un gradient de température modifie cette mesure. Afin de comprendre comment une différence de température modifie une mesure de tension il est important de réaliser un circuit équivalent du champ d'arrêt produit par l'effet Seebeck.

Circuit équivalent au champ d'arrêt

En l'absence de courant électrique, dans le cas d'un seul métal et en l'absence d'induction, la loi d'Ohm en présence de l'effet thermoélectrique, est donnée par l'équation (7.53) :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (5.2)$$

$$\nabla\phi = -S\nabla T. \quad (5.3)$$

Ainsi, le gradient de potentiel engendré par le gradient de température entre les points x et $x + dx$, voir la Figure 5.5, est $e(x) = -SdT/dx$. Les grandeurs σ et S sont supposées constantes au premier ordre. Un tronçon de métal soumis à un gradient thermique peut donc être modélisé par un générateur de Thévenin. Il apparaît donc une force

Material property σ, S

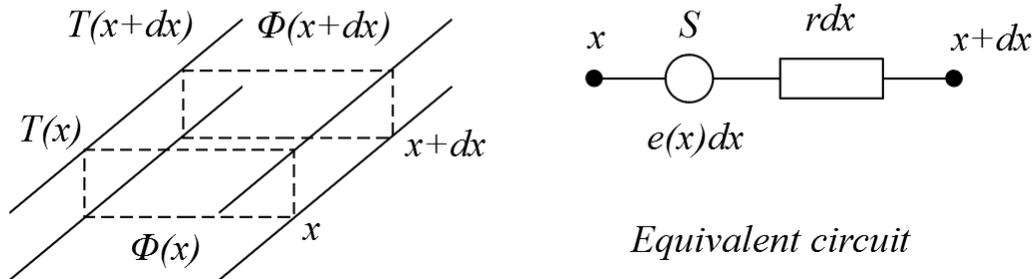


FIGURE 5.5 – Circuit équivalent à un tronçon de conducteur soumis à un gradient de température entre les points x et $x + dx$, où r est la résistance linéique et $e(x)$ le gradient de potentiel.

électromotrice $e(x)dx$ entre les points x et $x + dx$. Cette modélisation simple permet de mieux comprendre comment réaliser une mesure de vitesse à l'aide d'une sonde de potentiel en présence d'un gradient de température.

Mesure de vitesse

Dans l'expérience GALLIMERT, deux broches en Nickel sont plongées en $\bar{r} = (R_1 + R_2)/2$ et éloignées l'une de l'autre d'une distance $d = 8 \text{ mm}$. La présence d'un gradient

radial de température induit naturellement la présence d'une différence de potentiel entre les deux broches, comme le montre la Figure 5.6. Seule la pointe des broches est

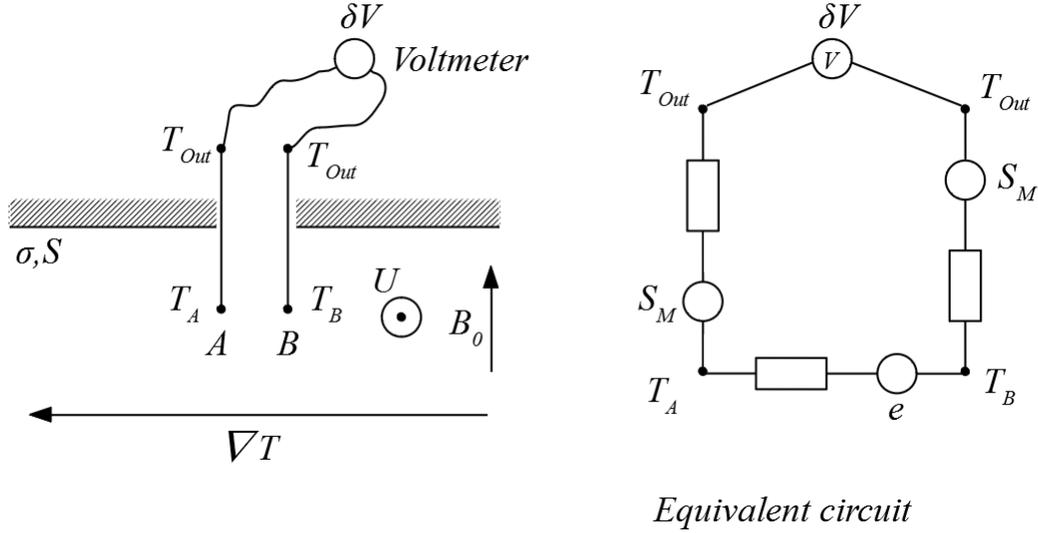


FIGURE 5.6 – Circuit équivalent d'une sonde de potentiel plongée dans un métal liquide en mouvement. Le coefficient Seebeck du métal liquide est noté S , tandis que les deux broches sont faites d'un autre métal, dont le coefficient Seebeck est noté S_M .

conductrice et le coefficient Seebeck du Nickel est noté S_M . La conductivité électrique et le coefficient Seebeck du métal liquide sont notés σ et S . La différence de potentiel est mesurée entre les points A et B . La température aux points de mesure est notée T_A et T_B . Le voltmètre mesure une différence de tension δV et est connecté aux deux broches depuis l'extérieur de la cuve où il règne une température T_{Out} , supposée égale pour les deux jonctions. Cette hypothèse est raisonnable dans la mesure où ces deux jonctions sont relativement proches. La chute de tension entre les points A et B est directement donnée par la loi d'Ohm intégrée sur la distance entre les broches, d :

$$e = \int_A^B -S \left(\nabla T + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right) \cdot d\mathbf{l}, \quad (5.4)$$

$$= -S(T_B - T_A) + dUB_0, \quad (5.5)$$

où les courants induits sont négligés (bas Rm). La différence de potentiel δV , mesurée par un nanovoltmètre *Keysight 34420A* aux bornes des broches est donc :

$$\delta V = -S_M(T_A - T_{Out}) - S(T_B - T_A) - S_M(T_{Out} - T_B) + dUB_0, \quad (5.6)$$

$$= (S_M - S)(T_B - T_A) + dUB_0. \quad (5.7)$$

La différence entre le coefficient Seebeck du Nickel pour les broches du métal liquide, ici le Gallium, induit nécessairement une erreur sur la mesure de vitesse. La différence

de coefficient Seebeck entre le Nickel et le Gallium est d'environ $\Delta S = 10 \mu V.K^{-1}$. L'effet thermoélectrique introduit une erreur sur la vitesse $\delta U = \Delta S \delta T / dB_0$, où δT est la différence de température entre les broches. En ordre de grandeur, pour $B_0 \sim 50 mT$, $\delta U \sim 2.5 \cdot \delta T [K] cm.s^{-1}$. Une différence de température de l'ordre de quelques dixièmes de degrés introduit donc des erreurs dans les mesures de vitesse de l'ordre du $mm.s^{-1}$. En pratique, les mesures de vitesse sont toujours réalisées en maintenant le gradient de température constant. L'*offset* dû à l'effet thermoélectrique peut ainsi être soustrait. En théorie, la présence de l'écoulement augmente le transfert de chaleur ce qui peut modifier le profil de température. Cet effet peut introduire un biais même si la différence de température imposée entre les cylindres est maintenue constante. En pratique, cet effet est si faible qu'il peut être négligé.

5.2 Système diphasique

5.2.1 Propriétés physiques du corps pur

L'expérience GALLIMERT repose sur la superposition de deux métaux liquides à température ambiante, le Gallium (Ga) et le Mercure (Hg). Les principales caractéristiques physiques de ces métaux sont rappelées dans le Tableau 5.1. Les valeurs sont prises à leur température respective de fusion et varient peu sur la plage de température explorée ici. Excepté pour les coefficients thermoélectriques et les coefficients d'expansion thermique, les données numériques sont issues de *The Physical Properties of Liquid Metals* [149]. Les coefficients Seebeck ne peuvent être mesurés de façon abso-

Métal (l)	Gallium	Mercure
Température de fusion T_c [$^{\circ}C$]	29.7	-38.842
Densité ρ [$kg.m^{-3}$]	$6.1 \cdot 10^3$	$13.69 \cdot 10^3$
Viscosité ν [$m^2.s^{-1}$]	$3.18 \cdot 10^{-7}$	$1.49 \cdot 10^{-7}$
Conductivité él. σ [$S.m^{-1}$]	$3.87 \cdot 10^6$	$1.1 \cdot 10^6$
Conductivité th. λ [$W.m^{-1}.K^{-1}$]	30	10
Capacité thermique molaire C_p [$J.mol^{-1}.K^{-1}$]	26.36	30.38
Capacité thermique massique c_p [$J.kg^{-1}.K^{-1}$]	376	150
Coefficient d'expansion thermique α_L [$\mu m.m^{-1}.K^{-1}$]	18.3	61
Diffusivité th. κ [$m^2.s^{-1}$]	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$4.9 \cdot 10^{-6}$
Vitesse du son c [$m.s^{-1}$]	$2.873 \cdot 10^3$	$1.480 \cdot 10^3$
Coefficient Seebeck (à $100^{\circ}C$) S [$V.K^{-1}$]	$6 \cdot 10^{-7}$	$-7 \cdot 10^{-6}$

TABLE 5.1 – Tableau des principales caractéristiques physiques du Gallium et du Mercure à leur température de fusion [149].

lue qu'à l'aide de broches supraconductrices⁴, ce qui rend les mesures peu aisées. En

4. Les supraconducteurs ont un coefficient Seebeck nul.

pratique, les valeurs des coefficients Seebeck sont donc toujours mesurées à l'aide d'un métal de référence, souvent le Platine ou l'Hafnium, de sorte que leur valeur dépend de la valeur de référence du métal utilisé pour la mesure. À ma connaissance peu d'articles ont mesuré avec les mêmes méthodes et des conditions expérimentales identiques les valeurs des coefficients Seebeck du Gallium et du Mercure à l'état liquide. À ce titre, les valeurs des coefficients Seebeck du Tableau 5.1 sont issues du travail expérimental de Bradley [150]. Celui-ci a notamment mesuré l'évolution du coefficient Seebeck pour ces métaux à pression et à volume constant. Les valeurs des coefficients d'expansion thermique proviennent du Handbook *Metals Reference Book* [151] et sont données pour la plage 0 – 100 °C. Ces coefficients sont les coefficients linéiques $\alpha_L = \left(\frac{1}{L} \frac{dL}{dT}\right)_p$ mais ce sont les coefficients volumétriques $\alpha_V = \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{dT}\right)_p$ qui sont utiles en physique. Pour les matériaux isotropes, $\alpha_V = 3\alpha_L$ [5]. Comme pour le Galinstan, le Gallium et le Mercure présentent des nombres de Prandtl et de Prandtl magnétique plus petits que l'unité, leur valeurs sont présentées dans le Tableau 5.2 :

Métal (l)	Gallium	Mercure
Pr	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$
Pm	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$

TABLE 5.2 – Tableau des rapports des différentes diffusivités. Pour rappel, $Pr = \nu/\kappa$ et $Pm = \nu/\eta = \mu_0\sigma\nu$.

5.2.2 Mélange Binaire Gallium-Mercure

Au-delà des propriétés physiques des corps purs, dans l'expérience GALLIMERT, ces deux métaux sont en contact direct et leur non-miscibilité est donc un critère important pour une bonne réalisation expérimentale. Il se trouve que ces métaux sont en réalité très légèrement miscibles et qu'une faible portion de chaque métal migre dans la phase voisine, comme l'indique le diagramme binaire [152] Figure 5.7. Un tel diagramme se lit de la manière suivante, à une température donnée sur l'axe des ordonnées, il faut tracer une ligne horizontale. Cette droite est différente des *solidus* pour les deux métaux. L'intersection de cette droite avec la courbe en forme de cloche donne en abscisse le pourcentage de masse de Mercure contenu dans la dite phase. De bas en haut :

- En dessous de -38.7° , les deux métaux sont solides, il y a donc 0% de Mercure dans le Gallium et *vice versa*.

5. Si les ingénieurs tabulent les coefficients linéiques, c'est essentiellement dû aux conditions expérimentales de mesures. La différence entre α_L et α_V explique les différences de valeurs parfois rencontrées dans la bibliographie car ces deux grandeurs sont toujours homogènes à l'inverse d'une température.

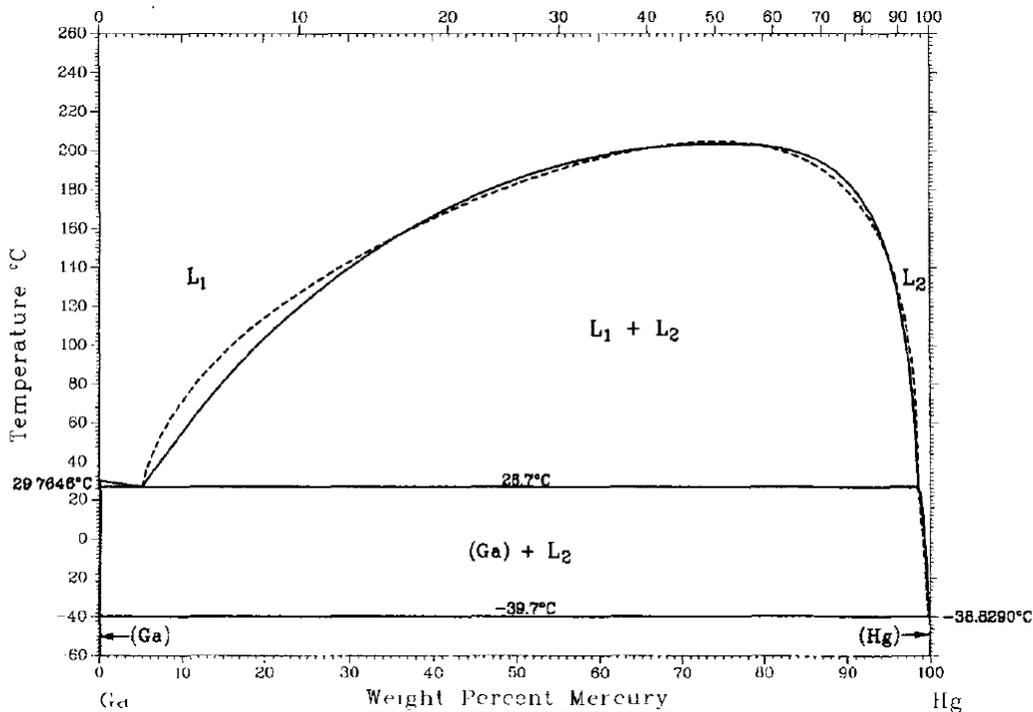


FIGURE 5.7 – Diagramme binaire du système Gallium-Mercure, en pourcentage de masse de Mercure.

- Entre $-38.7\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $29.7\text{ }^{\circ}\text{C}$, le Gallium est en phase solide et ne contient pas de Mercure, tandis que le Mercure est en phase liquide, notée L_2 et contient déjà un léger pourcentage de Gallium.
- Au-delà de $29.7\text{ }^{\circ}\text{C}$, le système est diphasique liquide-liquide. Les phases sont respectivement notées L_1 et L_2 . Par exemple, à $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, le liquide L_1 est composé majoritairement de Gallium et contient 18% en masse de Mercure. De même le liquide L_2 est composé majoritairement de Mercure et contient 4% en masse de Gallium.
- Au delà de $203\text{ }^{\circ}\text{C}$, le Gallium et le Mercure sont totalement miscibles et forment alors un alliage liquide.

L'expérience GALLIMERT explore des températures comprises entre $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ et se situe donc dans la zone $L_1 + L_2$. Dans cet intervalle, le pourcentage en masse du Mercure dans le Gallium évolue de 5% à 18% ce qui n'est pas négligeable. Ceci est notamment dû à la différence de densité entre le Gallium et le Mercure. En effet, il y a un facteur $\sim \rho_{\text{Hg}}/\rho_{\text{Ga}} \simeq 2$ entre les pourcentages atomiques et les pourcentages en masse. En pratique, du Gallium contenant 18% en masse de Mercure, contient donc seulement 9% d'atomes de Mercure.

5.2.3 Effet Soret

En pratique, l'expérience GALLIMERT est soumise à un gradient de température et donc à de la convection. La distribution de Gallium dans la phase L_2 et la distribution de Mercure dans la phase L_1 sont donc sensibles à ces phénomènes. La modification de cette distribution par les gradients de température s'appelle l'effet Soret ou thermophorèse et est analogue à la thermoélectricité. Notamment, si c_i désigne la concentration du composant i dans la phase $j \neq i$, il est possible d'utiliser la théorie d'Onsager pour obtenir l'équation de conservation de cette quantité :

$$\mathbf{j}_i = -D_{ij}\nabla c_i - D_{ij}S_T c_i(1 - c_i)\nabla T, \quad (5.8)$$

$$\partial_t c_i + \mathbf{u} \cdot \nabla c_i + \nabla \cdot \mathbf{j}_i = 0. \quad (5.9)$$

Le flux de matière de l'élément i est noté \mathbf{j}_i , D_{ij} est le coefficient de diffusion de l'élément i dans la phase j (loi de Fick) et S_T est le coefficient de Soret, équivalent au coefficient Seebeck pour la thermoélectricité. La seconde équation est donc l'équation de conservation pour la concentration en élément i et fait donc intervenir l'advection par le champ de vitesse local \mathbf{u} . Dans le cas où l'écoulement est faible et le gradient de température uniquement horizontal (selon x par exemple), la concentration, en régime stationnaire et dans la limite des faibles concentrations $1 - c_i \simeq 1$ suivra une loi du type :

$$c_i(x) = c_0 e^{-S_T T(x)}, \quad (5.10)$$

dans la limite où S_T est uniforme. En pratique la convection et la présence d'un écoulement modifie ce profil. Ces effets ont notamment pour conséquence de modifier localement les propriétés physiques des phases L_1 et L_2 en introduisant des déviations par rapport aux corps purs. Comme il est à la fois difficile de prendre en compte ces déviations et qu'elles sont relativement faibles, dans la suite les propriétés de la phase L_1 sont assimilées à celle du Gallium, et de même les propriétés de la phase L_2 sont assimilées celle du Mercure.

5.3 Gradient thermique et convection

Dans les expériences classiques de Rayleigh-Bénard, le gradient de température est orienté dans la direction de la gravité. La convection est donc déclenchée uniquement lorsque le seuil est dépassé. En revanche, dans l'expérience GALLIMERT, le gradient de température est horizontal et maintenu par les parois verticales. La convection est

alors sans seuil et une différence de température engendre de la recirculation. La Figure 5.8, montre le profil radial de température en fonction du rayon pour différentes valeurs d'écart de température imposé ΔT . Les valeurs des températures (moyennées en z) pour les cylindres interne et externe sont également affichées pour $r = R_1$ et $r = R_2$ respectivement (même si ce ne sont pas les coordonnées radiales exactes où elles ont été mesurées). Cela permet d'illustrer le saut de température à travers la couche limite thermique au niveau des parois verticales. Comme il est habituellement observé en

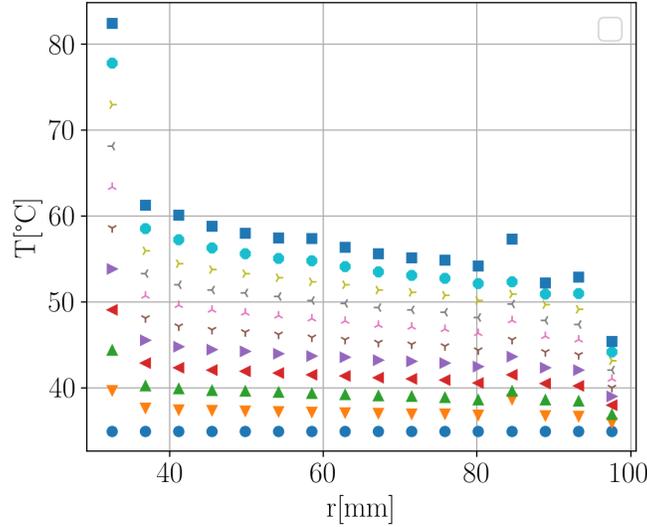


FIGURE 5.8 – Profil radial de température en fonction du rayon pour différents ΔT imposés.

convection, les fortes variations de température sont confinées dans les couches limites thermiques. La convection tend à aplatir le profil de température dans le centre de la cuve. Cependant, puisque les sondes sont installées le long de la paroi horizontale supérieure, elles mesurent l'évolution de la température à travers une couche limite. Il est possible de définir une mesure du gradient de température dans la cuve en prenant la différence $\Delta T_{Bulk} = T_1 - T_{14}$. La sonde T_1 est la sonde située sur le couvercle qui est la plus proche du cylindre interne. La sonde T_{14} est la sonde située sur le couvercle qui est la plus proche du cylindre externe. La Figure 5.9 montre l'évolution de ΔT_{Bulk} en fonction de ΔT . La différence de température dans la cuve atteint au maximum $\Delta T_{Bulk} \simeq 8 K$ pour un gradient imposé de l'ordre de $\Delta T \simeq 38 K$. La convection dans ce système n'est cependant pas très vigoureuse puisque les nombres de Rayleigh sont relativement bas. Le nombre de Rayleigh pour la phase Gallium vaut $Ra \sim 1949\Delta T[K]$. Le Rayleigh maximum atteint vaut donc $Ra \sim 7.2 \cdot 10^4$. En pratique, l'expérience GALLIMERT n'atteint pas des nombres Rayleigh particulièrement grands notamment parce que la couche de fluide employée est faible $h = 2.5 cm$.

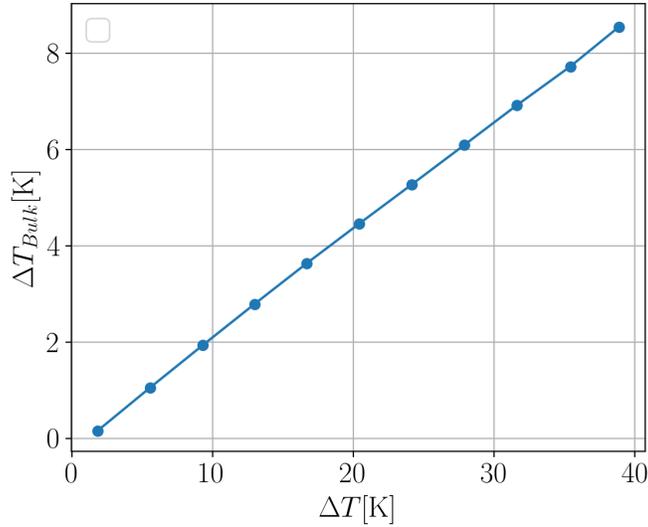


FIGURE 5.9 – Évolution de la différence de température dans la cuve en fonction de la différence de température imposée.

Il a été montré dans le chapitre 4 que les courants thermoélectriques sont engendrés par le gradient de température le long de l’interface. Une question naturelle est donc de savoir quelle différence de température fixe l’amplitude des courants thermoélectriques, ΔT ou ΔT_{Bulk} . La question de la mesure du potentiel thermoélectrique et de la génération de courant est donc traitée dans la section suivante.

5.4 Effet thermoélectrique dans GALLIMERT

La section précédente montre que lorsqu’une différence de température est imposée entre les deux cylindres, le profil de température est déterminé par la convection et permet de quantifier l’amplitude de la différence de température dans le coeur de l’écoulement ΔT_{Bulk} . La couche limite thermique proche du cylindre interne constitue donc une jonction chaude tandis que la couche limite thermique sur le cylindre externe constitue une jonction froide. La circulation Γ des courants électriques entre ces deux régions est donc non nulle :

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} \simeq -\Delta S \Delta T, \quad (5.11)$$

où le contour fermé \mathcal{C} traverse l’interface au niveau de ces deux couches limites. La différence de température ΔT sera donc à déterminer. Une boucle de courant est représentée schématiquement sur la Figure 5.10. En principe, rien n’interdit aux courants de re-boucler dans le coeur de l’écoulement en formant des boucles proches des couches

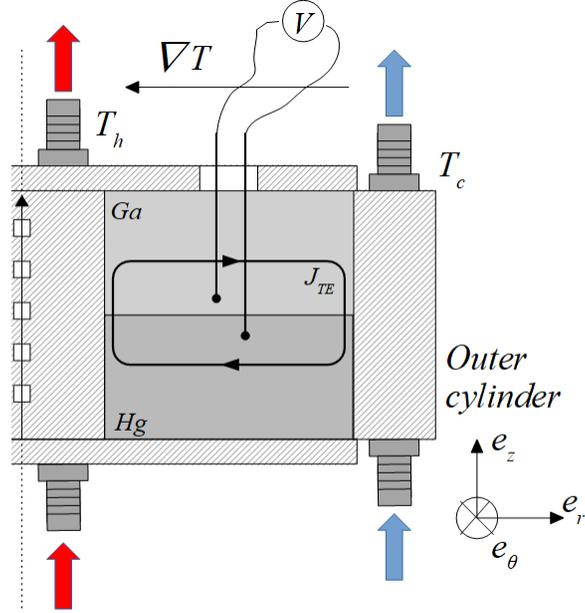


FIGURE 5.10 – Dispositif de mesure du potentiel thermoélectrique.

limites. Cependant, comme dans un conducteur les courants sont distribués sur l'ensemble du métal à cause de la conservation de la charge, $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, dans le coeur, les courants électriques sont majoritairement horizontaux et ne re-bouclent que proche des couches limites. Une façon de mesurer la présence de l'effet thermoélectrique est d'introduire deux broches dont seules les pointes sont conductrices. La première broche plonge dans le Gallium et la seconde traverse l'interface pour être en contact électrique avec le Mercure. Cette situation est représentée sur la Figure 5.10. Les deux broches sont connectées à un nanovoltmètre. La loi d'Ohm s'écrit en présence de l'effet thermoélectrique :

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = -\nabla\phi - S\nabla T, \quad (5.12)$$

où l'on suppose que la condition $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ permet d'écrire le champ électrique sous la forme d'un potentiel. La différence de potentiel $\delta\phi$ mesurée au nanovoltmètre s'écrit donc :

$$\delta\phi = \int_A^B d\phi, \quad (5.13)$$

$$= - \int_A^B \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} + S\nabla T \right) \cdot d\mathbf{l}. \quad (5.14)$$

Comme ϕ est un potentiel, il peut-être calculé sur n'importe quel chemin C qui part de A jusqu'à B où A désigne la pointe de la broche plongeant dans le Mercure et B

la pointe de la broche plongeant dans le Gallium. Il est donc possible de considérer par exemple le chemin C_1 , illustré par la Figure 5.11. Comme le Gallium et le Mercure sont

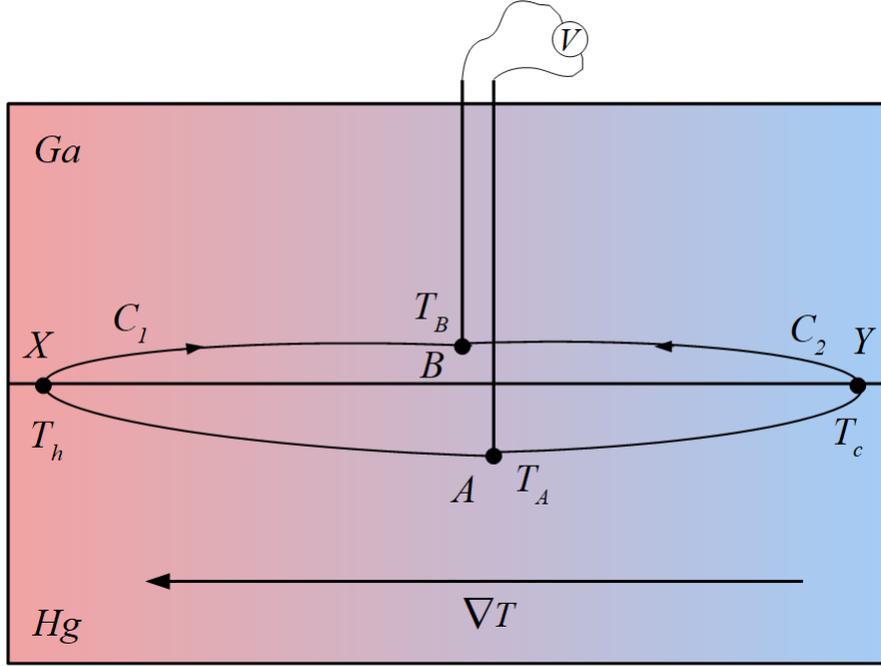


FIGURE 5.11 – Schéma de la mesure du potentiel thermoélectrique entre les deux métaux.

en contact électrique au point chaud et au point froid, le circuit électrique est fermé et le courant électrique circule. Il est possible d'estimer la densité de courant électrique le long de ce chemin grâce (voir chapitre 4) :

$$j \sim -\frac{\Delta S \Delta T \tilde{\sigma}}{l} \quad (5.15)$$

où l désigne la longueur du chemin entre X et Y et $\Delta S = S_{Hg} - S_{Ga}$. Il est possible d'injecter cette expression dans l'équation pour $\delta\phi$:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \int_A^B -\frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} - \int_A^B S \nabla T \cdot d\mathbf{l}, \\ &= -\int_A^X \frac{\mathbf{j}}{\sigma_{Hg}} \cdot d\mathbf{l} - \int_X^B \frac{\mathbf{j}}{\sigma_{Ga}} \cdot d\mathbf{l} - S_{Hg}(T_h - T_A) - S_{Ga}(T_B - T_h), \\ &\simeq \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{Hg}} \frac{\Delta S \Delta T l}{2} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{Ga}} \frac{\Delta S \Delta T l}{2} - S_{Hg}(T_h - T_A) - S_{Ga}(T_B - T_h), \\ &\simeq \frac{\Delta S(-T_h - T_c)}{2} + S_{Hg}T_A - S_{Ga}T_B \end{aligned}$$

Les points A et B ne sont pas forcément à la même température et δT désigne l'écart de température entre ces deux points :

$$T_A = T_0 + \frac{\delta T}{2}, \quad (5.16)$$

$$T_B = T_0 - \frac{\delta T}{2}, \quad (5.17)$$

avec $T_0 = (T_A + T_B)/2$, la température moyenne entre les points A et B . La mesure de potentiel donne donc, en fonction de δT et T_0 :

$$\delta\phi \simeq \frac{\Delta S}{2}(2T_0 - T_h - T_c) + \frac{(S_{Hg} + S_{Ga})\delta T}{2}. \quad (5.18)$$

Expérimentalement, les deux pointes des broches étaient éloignées de quelques millimètres de part et d'autre de l'interface et l'écart de température δT est faible. La

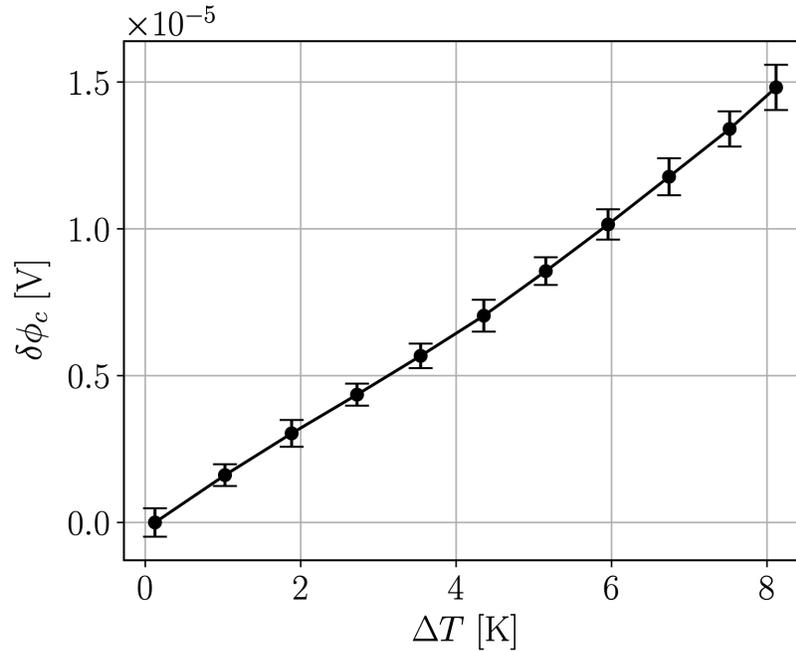


FIGURE 5.12 – Potentiel mesuré entre le Gallium et le Mercure en fonction du gradient de température à l'intérieur de la cuve.

Figure 5.12 montre l'évolution de la différence de potentiel en fonction de la différence de température mesurée à l'intérieur de la cuve, ΔT_{Bulk} . Pour $\Delta T_{Bulk} \simeq 8 K$, ce qui correspond à l'écart de température imposé maximal, $\delta\phi \simeq 15 \mu V$. La valeur attendue pour la différence de coefficient Seebeck entre le Gallium et le Mercure est $|\Delta S| \sim 8 \mu V.K^{-1}$ [150]. Prendre pour T_h et T_c les températures imposées dans les cylindres interne et externe et la valeur issue de la littérature pour ΔS , surestime largement la valeur de

$T_0 \sim 70 \text{ }^\circ\text{C}$. À l'inverse, en prenant les valeurs de T_h , T_0 et T_c au niveau du couvercle supérieur, donne une différence de température $2T_0 - T_h - T_c$ au maximum de 3 K et donc une valeur expérimentale de $\Delta S \simeq 10 \text{ } \mu\text{V.K}^{-1}$, qui est proche de la valeur obtenue par Bradley [150]. Proche de l'interface, T_h , T_0 et T_c sont probablement légèrement plus élevé, ce qui peut expliquer cette différence.

En conséquence, il semble que ce soit bien le gradient de température en dehors des couches limites qui engendre les courants thermoélectrique dans l'expérience GALLIMERT. Ceci se justifie peut-être par le fait que dans les couches limites, une partie des courants thermoélectrique peut directement re-boucler puisque l'interface est tout du long conductrice. Ceci justifie de présenter l'évolution de $\delta\phi$ en fonction de ΔT_{Bulk} .

L'évolution du potentiel thermoélectrique est linéaire en fonction de l'écart de température dans la cuve ΔT_{Bulk} . Comme l'a montré la section précédente, le gradient de température dans la cuve ΔT_{Bulk} est lui-même linéaire en fonction de l'écart de température imposé ΔT .

En l'absence de phénomène thermoélectrique, deux métaux en contact électrique sont au même potentiel. La courbe Figure 5.12 confirme donc la présence d'un effet thermoélectrique entre le Gallium et le Mercure en présence d'un gradient thermique. Enfin, un dernier effet confirmant la nature thermoélectrique de ce potentiel est que celui-ci disparaît lorsque l'expérience est "sale". En effet, le Gallium s'oxyde très facilement à l'air et en contact de l'humidité. Au-delà d'un certain seuil qu'il est difficile à déterminer, le Gallium présente d'importantes concentrations d'oxyde. L'effet thermoélectrique disparaît dans ce cas⁶.

5.5 Courant thermoélectrique dans GALLIMERT

Il est possible d'estimer plus précisément la densité de courant thermoélectrique en faisant l'hypothèse qu'ils sont principalement horizontaux dans le coeur :

$$j_r = \frac{K}{r}, \quad (5.19)$$

où K est une constante déterminée par l'effet thermoélectrique. En supposant que la distribution de courant est axisymétrique, la dépendance en $1/r$ de la densité de courant permet de vérifier la conservation de la charge $\nabla \cdot \mathbf{j} = \partial_r(rj_r)/r = 0$. Loin des parois verticales où les courants re-bouclent, le courant thermoélectrique total I_{TE} , intégré sur

6. Afin de pouvoir réaliser des mesures correctes, il est donc nécessaire de régulièrement nettoyer le Gallium.

une surface cylindrique dans un seul métal liquide, est indépendant du rayon :

$$I_{TE} = \int_0^{h/2} \int_0^{2\pi} j_r r d\theta dz, \quad (5.20)$$

$$\sim h\pi K. \quad (5.21)$$

Il est possible de considérer que les deux phases de métal liquide forment deux résistances en série, parcourues par le courant total I_{TE} . À chacune des phases est appliquée le potentiel $\delta V \sim \Delta S \Delta T_{Bulk}$ et $\delta V = I_{TE}(R_{Ga} + R_{Hg})$. La résistance pour une phase de métal liquide soumise à un courant radial se calcule facilement et vaut $R_i = \ln(R_2/R_1)/\pi h \sigma_i$ avec R_1 et R_2 les rayons des cylindres interne et externe. Ainsi, le courant total I_{TE} vaut :

$$I_{TE} \sim \frac{\pi h \Delta S \Delta T_{Bulk}}{\ln(R_2/R_1)} \tilde{\sigma}, \quad (5.22)$$

avec $\tilde{\sigma} = \sigma_{Ga} \sigma_{Hg} / (\sigma_{Ga} + \sigma_{Hg})$. Comme $K = I_{TE}/\pi h$, il vient que la densité radiale de courant thermoélectrique est :

$$j_r \sim \frac{\Delta S \Delta T_{Bulk}}{r \ln(R_2/R_1)} \tilde{\sigma}. \quad (5.23)$$

De plus, la présence de boucles poloïdales de courant engendre un champ magnétique orthogonal aux plans de symétrie. L'expérience GALLIMERT étant axisymétrique, les plans de symétrie sont les plans verticaux formés par \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_z . Le champ magnétique produit est donc toroïdal et selon \mathbf{e}_θ . Il est donc possible en théorie de mesurer le champ magnétique produit par l'effet thermoélectrique. En pratique, la dérive en température des sondes à effet Hall et du capteur de flux magnétique n'a pas permis de réaliser cette mesure. La dérive en température pour ces sondes est donc laissée en Annexe [7.5](#). Une façon d'éviter que la sonde de champ magnétique ne dérive avec la température est de la placer en dehors de l'expérience. Cependant, de la même façon que le champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde infini est nul, le champ magnétique engendré par une feuille de courant torique est toroïdal et confiné à l'intérieur de la feuille de courant, comme le montre la Figure [5.13](#). Si le champ magnétique est nul à l'extérieur, il est possible que le potentiel vecteur ne le soit pas. Dans le cas où ce solénoïde parfait engendre bien un potentiel vecteur non nul à l'extérieur, un dispositif analogue peut alors être utilisé pour mesurer expérimentalement l'effet Aharonov-Bohm : des particules expérimentent un déphasage lors du passage dans des régions où le potentiel vecteur \mathbf{A} est non nul et ce même si \mathbf{B} est nul. À ma connaissance, il s'agit du seul dispositif expérimental qui permette cela sans effet de bord ou de contact asymétrique pour introduire les courants.

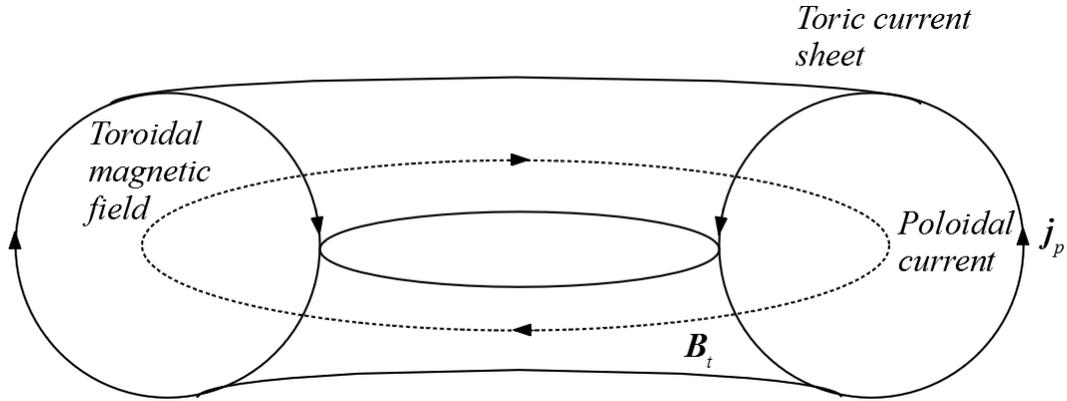


FIGURE 5.13 – Champ magnétique toroïdal confiné à l’intérieur d’une feuille de courant torique. Les boucles poloïdales de courant ne génèrent pas de champ magnétique à l’extérieur, situation analogue au solénoïde infini.

5.6 Pompage thermoélectrique

Comme le montre la Figure 5.14, le gradient de température entre les deux cylindres engendre, à l’interface entre les deux métaux liquides, des boucles poloïdales de courant à l’intérieur de la cuve. Les bobines de Helmotlz engendrent un champ magnétique vertical et une force de Lorentz azimuthale est donc appliquée, dans des directions opposées, dans chacun des fluides. Ce forçage pompe les deux fluides en contra-rotation. Comme pour l’expérience KEPLER, la présence du champ magnétique va contraindre

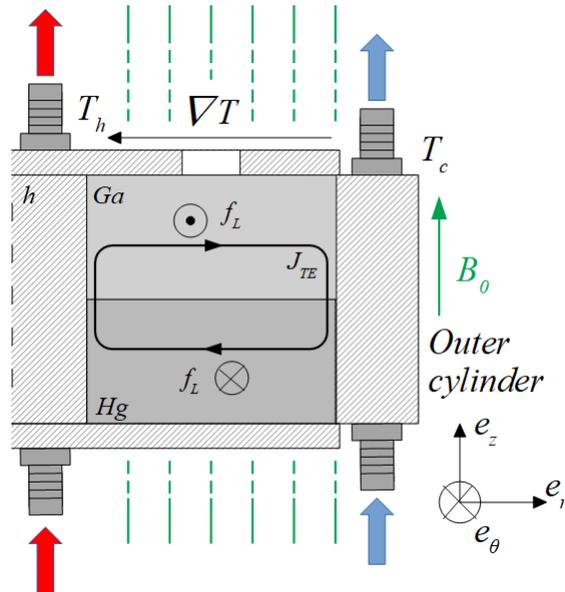


FIGURE 5.14 – Force de Lorentz due à la présence de boucles de courant thermoélectrique poloïdales et d’un champ magnétique vertical.

la géométrie des courants électriques dans certains cas. Le nombre sans dimension qui

contrôle cet effet est le nombre d'Hartmann. La couche de métal liquide est de hauteur $h/2 = 2.5 \cdot 10^{-2} m$, et en ordre de grandeur il vient $Ha \simeq B_0[T] \cdot 1012$, i.e $Ha \sim B_0[mT]$. De plus $Ha(Hg) \sim Ha(Ga)/\sqrt{2}$, et les nombres de Hartmann sont relativement proches dans les deux liquides.

5.6.1 Écoulement moyen

La Figure 5.15 montre l'évolution de la moyenne temporelle de la composante azimuthale de la vitesse en fonction du nombre de Hartmann. La mesure de la vitesse est obtenue par une mesure de potentiel. L'écoulement moyen a également été confirmé visuellement par des mesures en surface libre, détaillées dans le chapitre 6. La vitesse croit en fonction du champ magnétique jusqu'à atteindre un plateau autour de $Ha \sim 40$. Les vitesses maximales atteintes sont d'environ $10 - 12 cm.s^{-1}$, ce qui est élevé comparé à la différence de température imposée, au maximum $37 K$. Ces résultats impliquent également que l'écoulement azimuthal domine la convection horizontale. En comparaison, la vitesse typique de "freefall" des particules de fluide due à la convection thermique vaut en ordre de grandeur $U_{ff} \sim (gh\alpha\Delta T)^{1/2} \sim 2.5 cm.s^{-1}$, pour le Gallium. Ce plateau peut

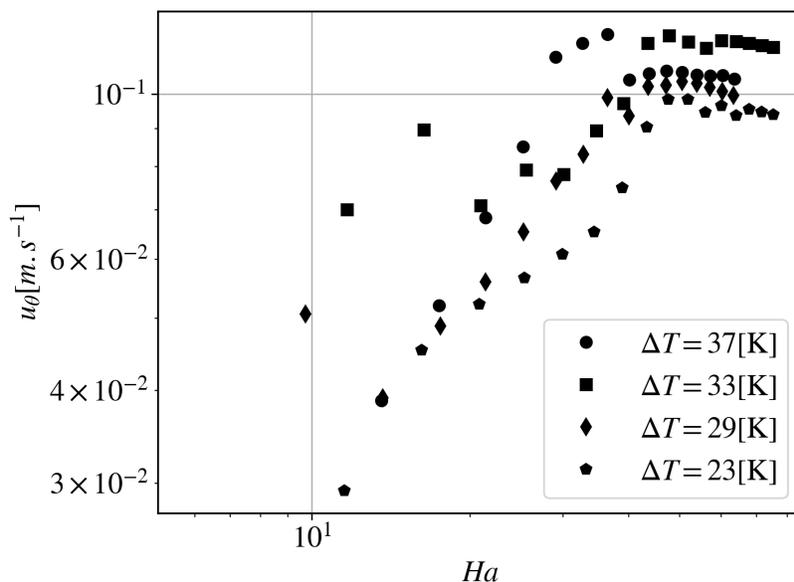


FIGURE 5.15 – Moyenne temporelle de la composante azimuthale de la vitesse en fonction du nombre de Hartmann.

s'interpréter comme un régime fortement magnétisé où la vitesse moyenne devient indépendante du champ magnétique. En effet, lorsque le champ magnétique est important, dans le coeur de l'écoulement, les courants induits s'opposent aux courants thermo-électriques. Comme dans le régime fortement magnétisé dans l'expérience KEPLER 2,

les courants thermoélectriques sont alors confinés aux couches limites d'Hartmann au niveau des parois horizontales $\delta_{Ha} \sim h/2Ha$ et dans les couches limites de Shercliff $\delta_{Se} \sim h/2\sqrt{Ha}$ au niveau des cylindres. La Figure 5.16 montre de manière schématique

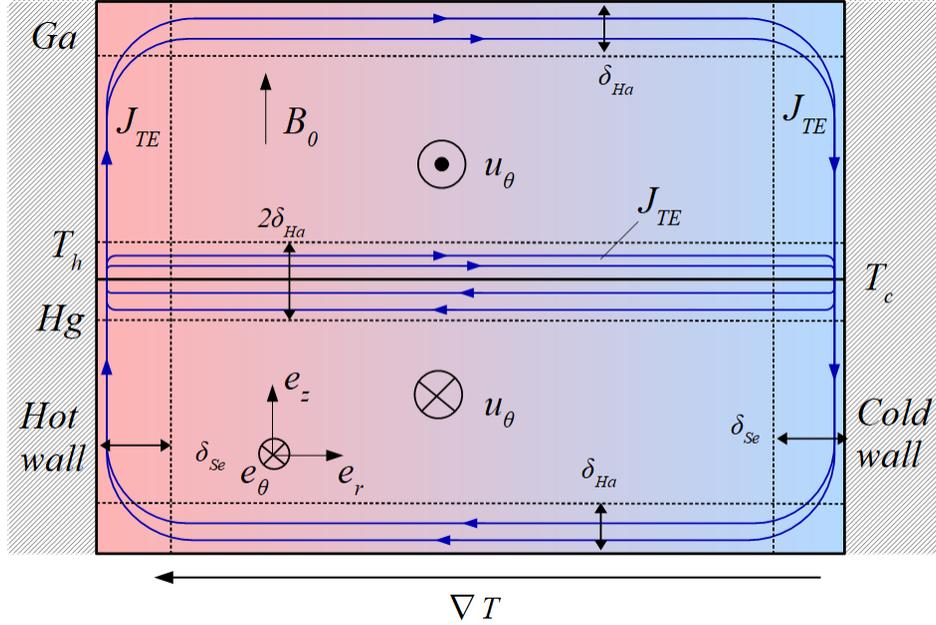


FIGURE 5.16 – Distribution des courants thermoélectriques à grand nombre de Hartmann dans l'expérience GALLIMERT.

cet effet. Les lignes des courants thermoélectriques sont tracées en bleu foncé. La densité radiale de courant s'exprime donc en fonction du courant total I_{TE} donné par la relation (5.22) :

$$j_r \sim \frac{I_{TE}}{2\pi r 2\delta_{Ha}}, \quad (5.24)$$

Le facteur 1/2 tient compte du fait que les courants sont confinés dans deux couches limites. Dans le coeur de l'écoulement, les courants induits s'opposent aux courants thermoélectriques ce qui donne l'équilibre :

$$u_\theta \sim \frac{j_r}{\sigma B_0}. \quad (5.25)$$

Il est possible d'injecter l'expression de j_r dans cette relation pour obtenir une prédiction pour la vitesse azimuthale :

$$u_\theta = \frac{h}{4r} \frac{\Delta S \Delta T_{Bulk}}{(\rho\nu\sigma)^{1/2} \ln(R_2/R_1)} \frac{\sigma_{Ga}\sigma_{Hg}}{\sigma_{Ga} + \sigma_{Hg}}. \quad (5.26)$$

Un facteur $1/2$. La différence de coefficient Seebeck est donnée par les coefficients pour les corps purs $\Delta S = S_{Hg}^{pur} - S_{Ga}^{pur} \simeq 6.4 \mu V.K^{-1}$. L'application numérique donne $u_\theta \sim 1.23 \cdot 10^{-2} \Delta T_{Bulk} [K] [cm.s^{-1}]$. Pour une différence de température dans le coeur de $\sim 8 K$, la vitesse azimuthale moyenne est de $10 cm.s^{-1}$. L'expression (5.26) donne donc un ordre de grandeur correct pour la vitesse moyenne et peut donc être employée pour estimer l'écoulement généré par la thermoélectricité en présence de champ magnétique fort. En dessous de $Ha < 40$, la vitesse azimuthale dépend du champ magnétique. Comme le forçage dépend du produit $B_0 \Delta T_{Bulk}$, il est intéressant de tracer les courbes de vitesse en fonction du produit $B_0 \Delta T$, comme le montre la Figure 5.17. Les deux

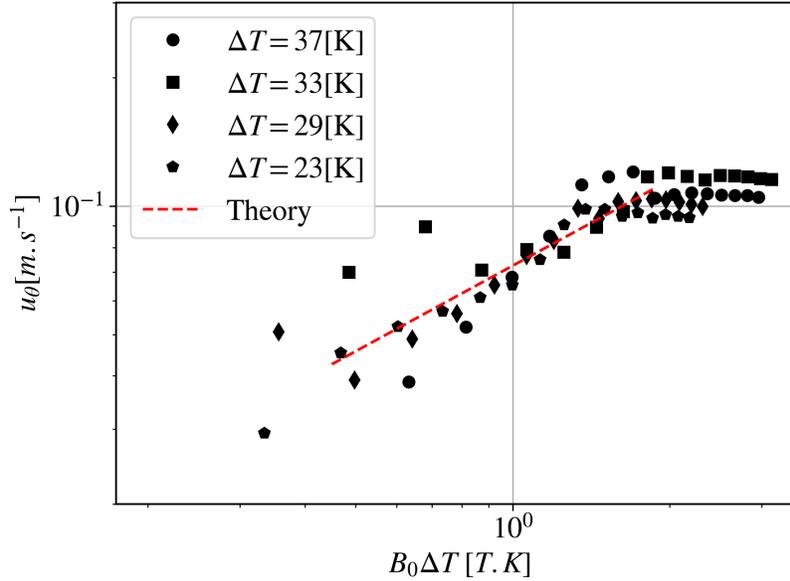


FIGURE 5.17 – Moyenne temporelle de la composante azimuthale de la vitesse en fonction du produit $B_0 \Delta T$ imposé.

régimes sont toujours clairement visibles mais le *rescaling* permet de mieux *collapser* les courbes. À bas champ magnétique et bas courant imposé, il existe une prédiction laminaire observée numériquement pour les écoulements MHD [47]. Dans ce régime, la vitesse de l'écoulement est proportionnelle au forçage et $u_\theta \propto IB$. Cependant, ce régime est présent à bas nombre de Reynolds et correspond à un équilibre dans le coeur de l'écoulement entre la force de Lorentz et la dissipation visqueuse. L'écoulement correspondant est donc laminaire[7]. Dans GALLIMERT, le nombre de Reynolds $Re = U\bar{r}/\nu$ pour $u_\theta \sim 3 cm.s^{-1}$ est déjà grand, $Re > 6000$. Il est donc peu probable qu'il s'agisse du régime observé. Comme il a été montré pour l'expérience KEPLER dans le chapitre [2], à bas champ magnétique et courant électrique imposé, le champ de vitesse est décrit par le régime Inertiel-résistif. Ce régime correspond à l'équilibre entre la force

de Lorentz et le terme de courbure de l'inertie. Cet équilibre conduit à une loi d'échelle $u_\theta \propto (I_0 B_0)^{2/3}$ [46-48]. Dans l'expérience GALLIMERT, le courant thermoélectrique total I_{TE} s'estime à l'aide de la relation (5.22). Dans ce régime, le champ magnétique n'est pas très intense et les courants thermoélectriques sont donc distribués sur toute la hauteur $h/2$. La conservation de la charge implique, $j_r \sim I_{TE}/\pi r h$ et l'équilibre entre l'inertie et la force de Lorentz donne :

$$\rho \frac{u_r^C u_\theta}{r} \sim \frac{I_{TE} B_0}{\pi r h}, \quad (5.27)$$

où u_r^C désigne la composante radiale de la vitesse dans le coeur de l'écoulement. En injectant l'expression de I_{TE} , relation (5.22), il vient :

$$u_r^C \sim \frac{B_0}{\rho u_\theta} \frac{\Delta S \Delta T \tilde{\sigma}}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (5.28)$$

La composante radiale de Navier-Stokes est quant à elle dominée par un équilibre entre le gradient de pression et le terme de courbure de l'inertie :

$$-\rho \frac{u_\theta^2}{r} \sim -\partial_r p. \quad (5.29)$$

Le gradient de pression s'imprime dans la couche et implique l'équilibre :

$$\frac{u_\theta^2}{r} \sim \nu \frac{u_r^{CL}}{\delta_B^2}, \quad (5.30)$$

avec $\delta_B \sim \sqrt{\nu/\Omega}$ l'épaisseur typique de la couche limite de Bödewadt et u_r^{CL} la composante radiale de la vitesse dans la couche limite. Ici $\Omega = u_\theta/r$ désigne la vitesse angulaire. La conservation de la masse implique, loin des parois verticales, que $\int_0^{h/2} u_r dz \simeq 0$ et donc $h u_r^C \sim 4 \delta_B u_r^{CL}$. Cette expression peut être injectée dans la relation précédente :

$$u_\theta^2 \sim \frac{\nu r h}{4 \delta_B^3} u_r^C. \quad (5.31)$$

Il est ensuite possible d'injecter l'expression de u_r^C dans cette relation, ce qui donne une estimation pour la composante azimuthale de la vitesse dans le régime Inertiel-résistif en TE-MHD :

$$u_\theta \sim c \left(\frac{B_0 h}{4 \rho} \frac{\Delta S \Delta T \tilde{\sigma}}{\ln(R_2/R_1)} \right)^{2/3} \frac{1}{(\nu r)^{1/3}}. \quad (5.32)$$

Cette prédiction correspond à la droite en tirets rouges sur la Figure 5.15 où le facteur $c \sim 1$ a été déterminé empiriquement. Même s'il est difficile de confirmer qu'il s'agit

bien de la bonne loi de puissance, puisqu'il n'y a pas une décade, il est intéressant de noter que cette prédiction donne un ordre de grandeur raisonnable pour la vitesse.

Dans l'expérience KEPLER, la transition entre ce régime et le régime fortement magnétisé se produit lorsque le nombre d'Elsasser Λ est proche de 1, avec :

$$\Lambda = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \Omega}. \quad (5.33)$$

La transition dans l'expérience GALLIMERT se produit pour $Ha \sim 40 - 45$. À la transition, ce nombre vaut en ordre de grandeur $\Lambda_c \simeq 0.9$, ce qui est cohérent avec la transition entre le régime inertiel-résistif et le régime fortement magnétisé. La transition entre ces deux régimes est également accompagnée par une transition de l'évolution des fluctuations en fonction du nombre d'Hartmann, comme le montre le paragraphe suivant.

5.6.2 Fluctuations de vitesse

Comme les acquisitions sont longues et que la fréquence d'acquisition est de l'ordre de 10 Hz , le nanovoltmètre permet également d'accéder aux fluctuations de vitesse pour des fréquences plus basses que celle-ci. La Figure 5.18 montre l'évolution de ces fluctuations en fonction du nombre de Hartmann. Les lois de puissance sont indicatives et servent surtout à montrer la rupture de pente vers $Ha \simeq 45$. Ce seuil est également celui observé pour l'apparition du plateau pour l'écoulement moyen. Au-delà de cette valeur, les fluctuations diminuent très rapidement en fonction du champ magnétique, et perdent un ordre de grandeur entre $Ha \sim 45$ et $Ha \sim 80$. Cette forte diminution est cohérente avec ce qui est attendu pour le régime d'Hartmann.

5.7 Mesure du flux de chaleur

Comme cette expérience présente à la fois un écoulement azimuthal et de la convection horizontale il est naturel de s'interroger sur les propriétés du transport de chaleur. Pour rappel, un problème classique de convection se réduit à la nature de la relation entre le nombre de Nusselt Nu et les nombres de Rayleigh Ra et de Prandtl thermique Pr , définis par :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ra = \frac{g\alpha\Delta TL^3}{\kappa\nu}, \quad Nu = \frac{\Phi d}{\kappa\Delta T}, \quad (5.34)$$

avec, Φ le flux de chaleur et L la hauteur typique de *freefall* des particules, à savoir $h/2$. Dans l'expérience GALLIMERT, le problème du transport de chaleur dépend des

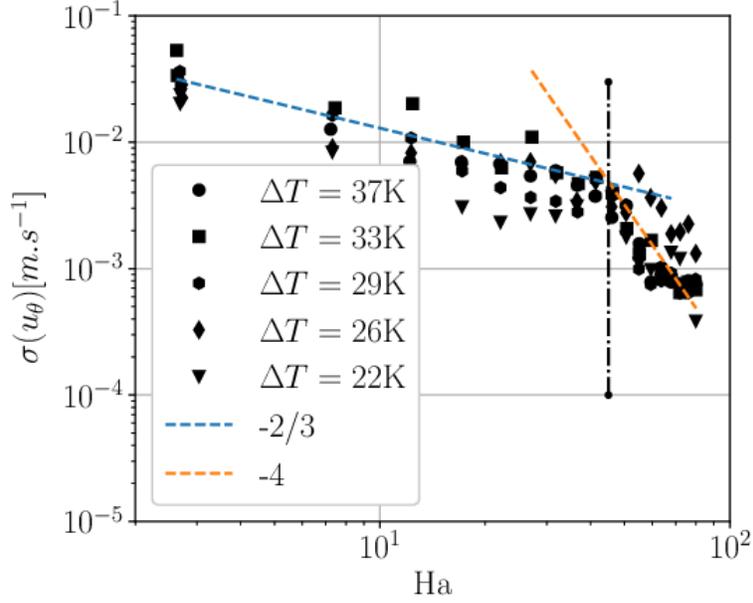


FIGURE 5.18 – Fluctuations de la composante azimuthale de vitesse en fonction du nombre de Hartmann pour différentes valeurs de ΔT imposés.

12 paramètres suivants : ΔT , l'écart de température, ΔS , la différence de coefficient Seebeck, ΔR la distance entre les rayons interne et externe, $h/2$ la hauteur, μ_0 la perméabilité magnétique, B_0 le champ magnétique externe, les coefficients de transport moléculaires κ , σ et ν , la densité ρ ; la force de flottaison fait apparaître le produit $g\alpha$ avec α le coefficient de dilatation thermique et g l'intensité de pesanteur et enfin le flux de chaleur. Toutes ces grandeurs font intervenir seulement 4 dimensions : température K , longueur L , masse M et temps T . Le théorème π indique donc que le problème est paramétré par huit nombres sans dimension qu'il est possible de choisir, en plus de Pr, Ra et Nu :

$$Pm = \mu_0 \sigma \nu, \quad \zeta = \mu_0 \sigma \kappa, \quad \Gamma = \frac{2\Delta R}{h}, \quad (5.35)$$

$$Ha = B_0 \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma}{\rho \nu} \right)^{1/2}, \quad Te = \mu_0 \sigma \Delta S \Delta T \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma}{\rho \nu} \right)^{1/2}, \quad (5.36)$$

où ζ est le rapport des diffusivités thermique et magnétique, parfois rencontré en magnéto-convection et Te est le nombre thermoélectrique. Te peut notamment être vu comme un nombre de Hartmann, basé sur le champ magnétique dû à l'effet thermoélectrique, ce qui explique la forme donnée ci-dessus. En pratique, seulement deux paramètres de contrôle sont accessibles expérimentalement, la différence de température et le champ magnétique. Comme les nombres de Rayleigh ne sont pas très élevés, $Ra \sim 7 \cdot 10^4$, la convection horizontale n'est pas très vigoureuse. Afin de caractériser

comment le flux de chaleur évolue en fonction du champ magnétique, il peut être utile de définir un nombre de Nusselt modifié \tilde{Nu} :

$$\tilde{Nu} = \frac{Nu(Ra, Te, Ha)}{Nu(Ra, Te, Ha = 0)}. \quad (5.37)$$

Comme Pr et Pm restent fixés pour l'ensemble des expériences, leur dépendance n'est pas écrite de façon explicite.

Le champ magnétique ne change pas de façon significative le profil de température ce qui permet d'étudier l'évolution du flux de chaleur en fonction du champ magnétique. Les Figures 5.19 et 5.20 montrent l'évolution du nombre de Nusselt \tilde{Nu} en fonction du nombre de Hartmann, mesuré sur les cylindres externe et interne. Après une brève

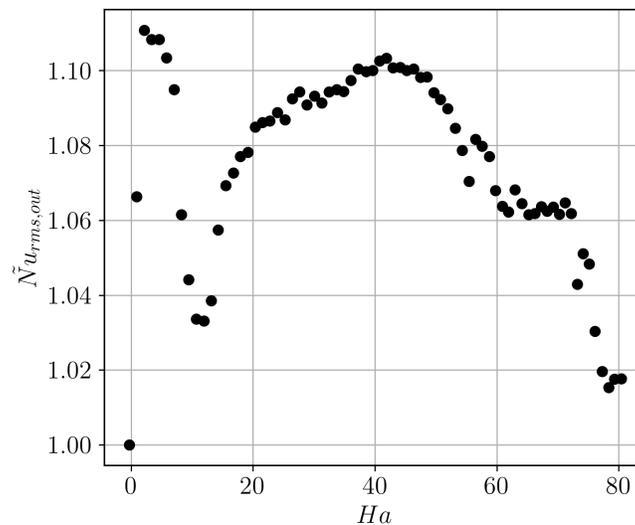


FIGURE 5.19 – Nombre de Nusselt modifié en fonction du nombre de Hartmann mesuré sur le cylindre externe.

décroissance, le nombre de Nusselt \tilde{Nu} mesuré sur le cylindre externe croit jusqu'à $Ha \sim 40$ avant de décroître avec le nombre de Hartmann. Le nombre de Nusselt \tilde{Nu} mesuré sur le cylindre interne commence par décroître jusqu'à ce que le nombre de Hartmann soit proche de 10, puis le flux de chaleur est à nouveau augmenté transitoirement, puis après $Ha = 20$, le flux de chaleur est à nouveau diminué. Il est possible de comprendre ce sursaut du flux de chaleur par le transport engendré par l'écoulement azimuthal. Mais même avant que le régime de Hartmann ne soit atteint, le transport de chaleur additionnel engendré par l'écoulement azimuthal ne suffit pas à contrer l'effet de la friction magnétique. Il est en effet connu que la friction magnétique, à grand nombre

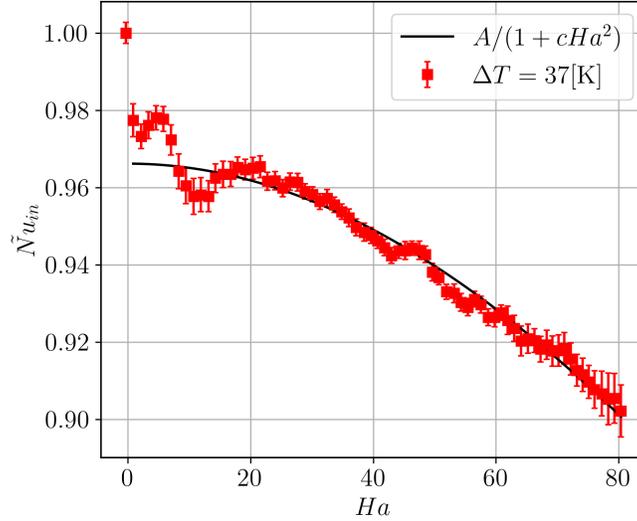


FIGURE 5.20 – Nombre de Nusselt modifié en fonction du nombre de Hartmann mesuré sur le cylindre interne.

de Hartmann, diminue le transport de chaleur [71, 153], de sorte que :

$$\tilde{Nu} \propto \frac{1}{Ha^2}, \quad (5.38)$$

la dépendance en carré du nombre de Hartmann permet au flux de chaleur respecter la symétrie $B_0 \rightarrow -B_0$. Changer le signe du champ magnétique imposé ne change pas la friction magnétique. Le flux de chaleur ne doit donc pas changer de signe. Cette évolution en Ha^{-2} est par ailleurs très forte. Même si la plage de champ magnétique explorée n'est pas très large, les nombres de Nusselt diminuent de presque 10%. L'étude du flux de chaleur en fonction du champ magnétique pour les pompes thermoélectriques présente une application directe pour les systèmes de refroidissement des réacteurs à fusion nucléaire. Cet intérêt est développé dans le paragraphe suivant.

5.7.1 Transport de chaleur dans les Tokamaks

La question du transport de chaleur par les écoulements TE-MHD a une application directe pour les systèmes de couverture ou "*blanket*" de métal liquide dans les réacteurs à fusion nucléaire par confinement magnétique ou Tokamak [154]. Les Tokamak se présentent sous la forme d'une cuve toroïdale où un gaz de faible pression est ionisé et fortement chauffé $T > 10^8$ °C à l'aide de courants électriques, de rayons X ou de jets de particules. Les particules chargées électriquement s'enroulent autour des lignes de champ magnétique toroïdal. Des bobines toroïdales engendrent un champ magnétique poloïdal pour un meilleur contrôle de la forme du plasma. Les champs magnétiques

permettent donc de contrôler le plasma et d'éviter ainsi qu'il ne touche les parois de l'enceinte, ce qui engendrerait des dommages importants par ablation. Les réactions nucléaires engendrent un surplus de chaleur et des déchets nucléaires en continu qu'il est important d'évacuer du réacteur. De plus, pour que les réactions nucléaires se maintiennent il est nécessaire d'apporter du combustible. La partie inférieure des Tokamak, appelée *divertor*, voir Figure 5.21, permet de remplir ces diverses fonctionnalités. Une possibilité technologique pour les *divertor* est d'employer du Lithium liquide ou un amalgame Lithium-Plomb. Le Lithium, sous l'effet du flux de neutrons, se décompose suivant la réaction nucléaire :



où ${}^4\text{He}$ désigne l'Hélium, stable, et ${}^3\text{H}$ désigne le tritium, qui est un isotope instable de l'Hydrogène et qui sert de combustible pour les réactions de fusion nucléaire. Comme le métal liquide est soumis à un flux de chaleur important, d'importants gradients thermiques apparaissent. Le métal liquide est également soumis au fort champ magnétique toroïdal, $B_T > 1 T$, l'idée de pomper le fluide à l'aide de l'effet thermoélectrique n'est pas nouvelle puisque Shercliff la mentionne en 1980 [138]. Une équipe de l'Illinois a notamment montré expérimentalement dans un petit Tokamak, qu'en plus de ces propriétés, ce type de *divertor* contribue à stabiliser le plasma et permet de rallonger les temps de décharge [155]. Cette même équipe a également réalisé plusieurs expériences de MHD dans une cuve de Lithium liquide chauffée à l'aide d'un faisceau d'électrons orthogonal à la surface du métal liquide. Leur observation montre qu'un tel flux d'électrons engendre un flux de chaleur et des gradients thermiques qui lorsque le contact électrique avec la cuve en acier est permis, engendrent des courants thermoélectriques. En présence de champ magnétique, un forçage de Laplace pompe alors le fluide [147]. Le champ magnétique maximum dans leur expérience est de l'ordre de $80 mT$ et l'écoulement obtenu présente des vitesses de l'ordre de $u_\theta \sim 15 - 20 cm.s^{-1}$. Bien, que le flux de chaleur soit très important $0.7 MW.m^{-2}$, il semble que les gradients thermiques horizontaux, dans le fond de la cuve, à l'interface entre le Lithium liquide et l'acier, ne soient pas si importants. En effet, l'écoulement engendré n'est guère plus rapide que celui mesuré dans l'expérience GALLIMERT. Comme le *divertor* doit extraire une partie du flux de chaleur de l'enceinte, la question du transport de chaleur par ces écoulements est fondamentale. La même équipe a donc tenté de réaliser des expériences ainsi que des simulations numériques pour évaluer le transfert thermique associé à cet écoulement [156, 157]. Enfin, la collaboration internationale ITER mise sur la compétition expérimentale entre de nombreuses technologies et la recherche sur les *divertor* ne fait pas exception. Le Tokamak COMPASS, situé à Prague, est en cours de modification :

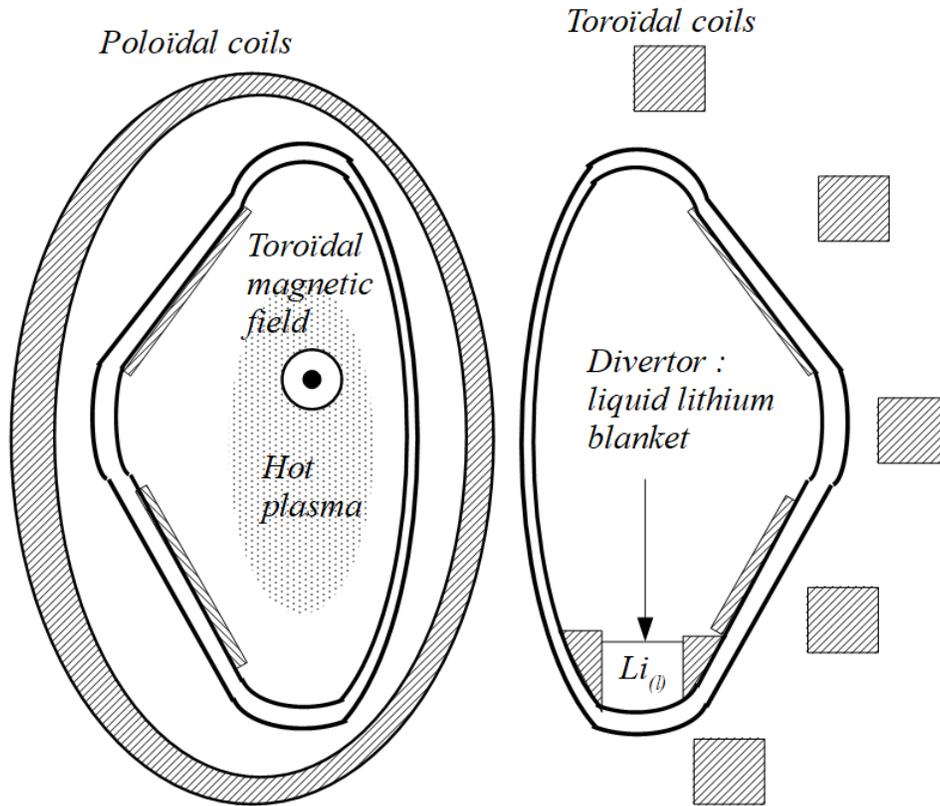


FIGURE 5.21 – Schéma de la section d'un réacteur à fusion nucléaire de type Tokamak. L'enceinte est axisymétrique et la combinaison du champ magnétique toroïdal et poloïdal confine les particules ionisées à suivre des trajectoires le long des lignes de champ solénoïdales. Le plasma est contrôlé de sorte à diriger une importante partie de son flux de chaleur sur le *divertor*, situé en bas de l'enceinte.

sa version ultérieure, COMPASS-U, permettra notamment de tester des technologies de *divertor* au Lithium liquide [154, 158].

L'écoulement dans un *divertor* est bien entendu différent de celui dans GALLIMERT, notamment parce que la direction du champ magnétique et la géométrie de la cuve sont différentes. Cependant, GALLIMERT permet de réaliser des mesures de vitesse et de flux de chaleur dans un système plus facile à contrôler et soumis à un champ magnétique du même ordre que celui présenté par [147]. Comme le champ magnétique des Tokamaks est très intense, $B_T > 1 - 5 T$ les nombres d'Hartmann sont très vite assez grand. Si l'écoulement est dans un régime fortement magnétisé, la relation 5.26 permet notamment d'estimer directement la vitesse de l'écoulement lorsque le gradient de température est connu. Dans ce régime, la section précédente a également montré que le flux de chaleur diminue avec le champ magnétique. En effet, dans ce régime, puisque la vitesse de l'écoulement n'évolue plus avec Ha , seule la friction magnétique augmente, ce qui diminue le flux de chaleur. En conséquence, pour qu'un *divertor* fonctionnant

au métal liquide soit efficace à des champs magnétiques très intenses, il est important que l'écoulement ne soit pas dans un régime fortement magnétisé. Autrement dit, il faut veiller à ce que le courant thermoélectrique, dans un tel dispositif, soit plus important que le courant électrique critique de la transition à la turbulence pour le régime fortement magnétisé ou alors considérer une géométrie où le forçage ne se produit pas à travers des couches limites d'Hartmann. S'il s'agit d'un écoulement d'Hartmann, le critère pour la transition à la turbulence est basé sur le nombre de Reynolds, pris dans la couche limite de Hartmann, $Re_H = U\delta_{Ha}/\nu$, donne la transition pour l'expérience KEPLER à $Re_H \sim 400$ et $Re_H \sim 380$ dans l'expérience de Moresco & Alboussière [14] (pour une section carrée dans du Mercure liquide). Une valeur critique de $Re_c \sim 400$ semble donc raisonnable. En utilisant l'expression (5.26) pour la vitesse, cette relation donne un critère sur la différence de température pour les courants thermoélectriques, pour la transition à la turbulence du régime fortement magnétisé, dans GALLIMERT :

$$\Delta T > \frac{4r\sigma\nu B_0}{\Delta S\tilde{\sigma}h} Re_c. \quad (5.40)$$

Pour Re_c et $B_0 \sim 80 \text{ mT}$, cela donne un $\Delta T \sim 185 \text{ K}$ pour la transition, ce qui est élevé, sachant que le gradient thermique le long de l'interface est de l'ordre de 10 K dans l'expérience GALLIMERT. Cependant, dans un Tokamak, le champ magnétique est beaucoup plus intense. Pour $B_0 \sim 5 \text{ T}$, cela donne $\Delta T > 11000 \text{ K}$, or la température de vaporisation du Lithium liquide est de l'ordre de $1300 \text{ }^\circ\text{C}$. Une manière astucieuse pour contourner ce problème est donc de réaliser un *divertor* où le forçage n'a pas lieu à travers une couche limite d'Hartmann.

5.8 Applications aux batteries à métaux liquides

5.8.1 Fonctionnement d'une batterie à métaux liquides

Les batteries à métaux liquide ou LMB (*Liquid Metal Batteries*) représentent une voie prometteuse pour le stockage à grande échelle de l'électricité intermittente produite par les énergies renouvelables : parc éolien, ferme à panneaux solaires [159].

Leur principe est le suivant : trois couches de liquides conducteurs sont superposées l'une sur l'autre. Un premier métal liquide, par exemple du Lithium, sert d'électrode négative. Ce métal liquide est fournisseur d'ions et est superposé sur une couche d'électrolyte, un sel fondu, par cohérence, du $LiCl - KCl$, perméable aux ions Li^+ . En pratique, un rapport de concentration typique pour ce sel fondu est 59% de Chlorure de Lithium et 41% de Chlorure de Potassium. L'ensemble est superposé sur une troisième couche d'un métal liquide plus dense, par exemple un alliage Plomb-Bismuth,

$Pb - Bi$, qui fait office d'électrode positive. Lorsque la pile se décharge, des électrons

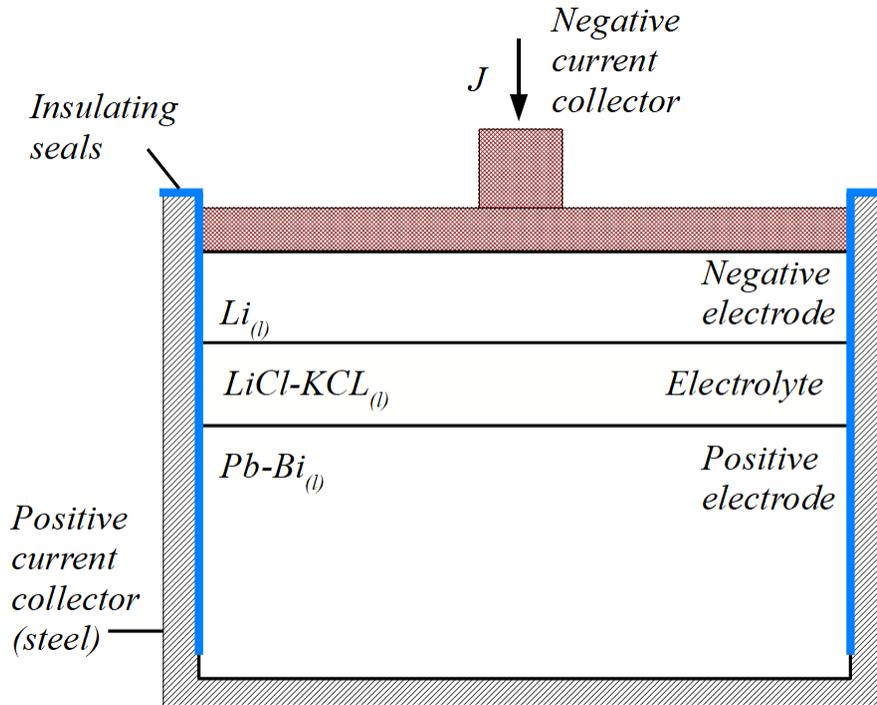
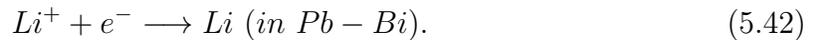


FIGURE 5.22 – Schéma d'une batterie à métaux liquides.

sont prélevés à l'électrode négative suivant la demi-réaction [160] :



tandis que, par conservation de la charge, un nombre identique d'électrons est apporté à l'électrode positive et induit la demi-réaction suivante :



Les ions Li^+ migrent à travers le sel fondu sous l'effet de la variation d'enthalpie libre de Gibbs G :

$$\Delta G = G_{Li} - G_{Li \text{ (in } Pb-Bi)} \quad (5.43)$$

où l'enthalpie libre de demi-réaction est donnée par :

$$G_{Li} = G_{Li(l)}^\circ + RT \ln a(Li_{(l)}), \quad (5.44)$$

$$G_{Li \text{ (in } Pb-Bi)} = G_{Li(l)}^\circ + RT \ln a(Li \text{ (in } Pb - Bi)), \quad (5.45)$$

avec $G_{Li(l)}^\circ$, l'enthalpie libre standard⁸ du Lithium liquide. L'activité $a(Li_{(l)})$ du corps pur Lithium à l'état liquide vaut 1 et son enthalpie est donc identique à son enthalpie standard. Dans la limite des grandes dilutions de Lithium dans la phase $Pb - Bi$, l'activité chimique $a(Li \text{ (in } Pb - Bi))$ peut simplement s'estimer par la concentration de Lithium dans la phase Plomb-Bismuth. De façon générale en revanche, $a(Li \text{ (in } Pb - Bi))$ est une fonction non triviale de la température et de la concentration en Lithium dans la phase $Pb - Bi$, pour laquelle il existe peu de mesures expérimentales. Ceci est vrai pour l'ensemble des couples possibles utilisés dans les LMB. La différence d'enthalpie libre est donc donnée par l'activité chimique du Lithium dans la phase $Pb - Bi$:

$$\Delta G = RT \ln a(Li \text{ (in } Pb - Bi)). \quad (5.46)$$

Enfin, la variation d'enthalpie libre est directement reliée à la différence de tension E mesurée aux bornes de la batterie en circuit ouvert, loi de Nernst :

$$\Delta G = -nFE, \quad (5.47)$$

avec $n = 1$ qui est le nombre d'électron échangé par réaction, $F = \mathcal{N}_A e$ ⁹, la constante de Faraday, \mathcal{N}_A la constante d'Avogadro¹⁰, e la charge électrique. Lorsque la batterie se charge ou se décharge, la dynamique des ions Li^+ aux interfaces avec l'électrolyte est importante pour assurer l'efficacité des transferts de charges électriques.

5.8.2 Instabilités MHD

Pour *review* récente sur les effets hydrodynamique et MHD présents dans les LMB voir le travail de Kelly & Weier [161]. Les batteries à métaux liquides, bien que prometteuses, restent limitées à des unités de taille inférieure au mètre, à cause de la présence d'instabilités MHD. Lors des phases de charge et de décharge, de forts courants électriques traversent les batteries ce qui engendre des champs magnétiques¹¹ de l'ordre de quelques Gauss [48]. En effet, lorsque la couche de sel fondu est inférieure à une certaine hauteur, une perturbation de la hauteur de fluide entraîne directement une redistribution des courants électriques, du fait de la faible conductivité électrique de l'électrolyte. Cette redistribution des courants se couple avec le champ magnétique induit par les

8. L'état standard se définit généralement pour un corps pur à la pression $P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ et est souvent donné pour $T = 298 \text{ K}$. À l'état standard, le potentiel chimique μ égale le potentiel chimique standard μ° et correspond donc à une activité chimique a identique à 1, puisque $\mu = \mu^\circ + RT \ln a$.

9. La constante de Faraday s'exprime en Coulomb par mol et vaut $F \simeq 96485 \text{ C.mol}^{-1}$.

10. La constante d'Avogadro vaut $\mathcal{N}_A \simeq 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

11. Ces champs magnétiques peuvent être verticaux ou azimutaux suivant la géométrie des courants à l'extérieur de la batterie.

courants ce qui déstabilise d'avantage l'interface¹². Cette instabilité est connue sous le nom de *metal pad roll instability* [163]. Pour les systèmes présentant une électrode négative sous la forme d'une matrice solide, la présence de composante horizontale du courant électrique est la source d'écoulement de l'ordre du millimètre par seconde [48]. Pour des batteries de taille suffisamment grande, les LMB pourraient également être sujettes à l'instabilité de Taylor [164-166]. Cette instabilité, bien connue en physique des plasmas, correspond à la déstabilisation du champ magnétique azimuthal présent via l'injection de forts courants verticaux. D'autres études numériques montrent la présence possible d'effets convectifs, notamment dans la couche de sel fondu qui, étant faiblement conductrice $\sigma < 10^3 \text{ S.m}^{-1}$, concentre la majorité de la dissipation Ohmique [167, 168]. Lorsque la couche de sel fondu est suffisamment fine, la convection de Bénard-Marangoni peut également être à l'oeuvre [169, 170]. Ces deux types de convections pourraient entraîner des variations horizontales de température de l'ordre de plusieurs degrés. La présence de ces écoulements n'est cependant pas toujours un effet négatif puisqu'ils peuvent également être responsables d'une augmentation des phénomènes de transport d'ions dans la couche de sel fondu, et donc d'une plus grande efficacité de la cinétique chimique [170, 171].

5.8.3 Effet thermoélectrique

Les batteries à métaux liquides fonctionnent à des températures élevées à cause de l'usage de métaux liquides et de sels fondus, qui sont pour la plupart à l'état solide à température ambiante. Le Lithium a une température de fusion de $180 \text{ }^\circ\text{C}$ et le sel fondu LiCl-KCl, fond à $355 \text{ }^\circ\text{C}$ [172]. Ces températures importantes rendent les expériences particulièrement difficiles ce qui renforce la motivation pour réaliser des expériences comme GALLIMERT. Le Tableau 5.3 répertorie quelques propriétés physiques typiques de la batterie $\text{Li}||\text{LiCl} - \text{KCl}||\text{Pb} - \text{Bi}$, présentée plus haut. Comme

Propriété	Li	LiCl-KCl	Pb-Bi
Densité $\rho \text{ [kg.m}^{-3}\text{]}$	484.7	1597.9	$\sim 10^4$
Viscosité $\nu \text{ [m}^2.\text{s}^{-1}\text{]}$	$6.64 \cdot 10^{-7}$	$1.38 \cdot 10^{-6}$	$1.29 \cdot 10^{-7}$
Conductivité $\sigma \text{ [S.m}^{-1}\text{]}$	$3 \cdot 10^6$	187.1	$7.85 \cdot 10^5$

TABLE 5.3 – Différentes propriétés physiques des couches d'une LMB de type $\text{Li}||\text{LiCl} - \text{KCl}||\text{Pb} - \text{Bi}$ [169, 173].

ces systèmes fonctionnent à des températures typiques de l'ordre de $500 \text{ }^\circ\text{C}$ ou plus, des variations de températures horizontales de l'ordre de quelques degrés, dues à de la convection sont tout à fait envisageables [167-170]. Les sections précédentes ont montré

12. Cette instabilité est également présente dans les cellules de réduction de l'Aluminium [162].

que la présence de fluides conducteurs superposés, en contact électrique et en présence de gradients horizontaux de température, engendre des boucles de courant thermo-électrique, comme le montre la Figure 5.23. Ces systèmes sont également toujours en

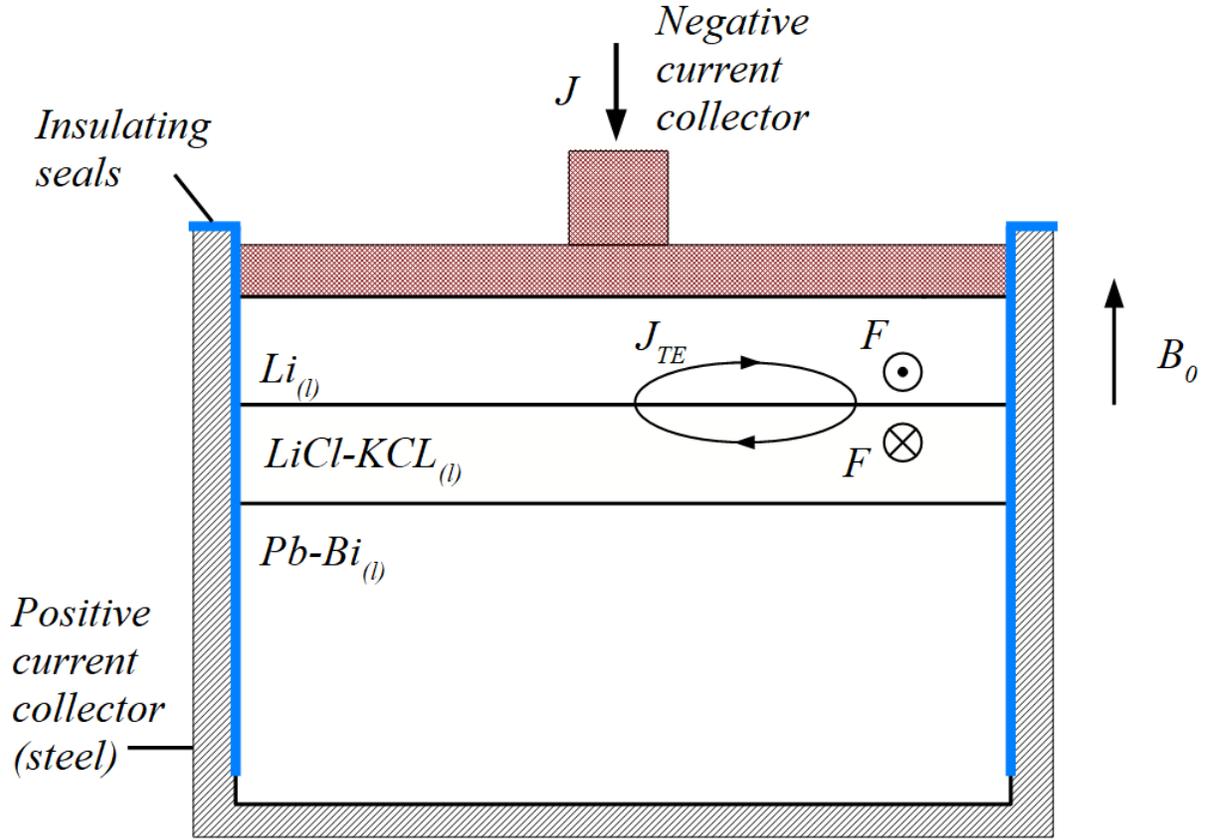


FIGURE 5.23 – Schéma d’une boucle de courant thermoélectrique due à une variation de température le long de l’interface entre le Lithium et le sel fondu. En présence d’un champ magnétique extérieur, une force apparaît de direction contraire dans chacune des phases.

présence de champ magnétique faible, de l’ordre de quelques Gauss, dû au retour électrique des courants, ou simplement à cause du champ magnétique terrestre, de l’ordre de $B_0 = 0.5 \text{ G}$ [48]. Lorsqu’une boucle de courant thermoélectrique apparaît en présence d’un champ magnétique externe, vertical, une force de Lorentz apparaît dans le fluide, de direction contraire dans chaque phase. Puisque le champ magnétique extérieur est faible, la vitesse suit une loi d’échelle pour le régime inertiel-résistif, rencontrée plus haut, qui donne lorsque le système est axisymétrique :

$$u_\theta \sim \left(\frac{B_0 h}{4\rho} \frac{\Delta S \Delta T \tilde{\sigma}}{\ln(R_2/R_1)} \right)^{2/3} \frac{1}{(\nu r)^{1/3}}. \quad (5.48)$$

Le terme $\tilde{\sigma}$ est toujours dominé par la conductivité électrique du sel fondu et donc $\tilde{\sigma} \sim 187 \text{ S.m}^{-1}$, ici. Le coefficient thermoélectrique d'un sel fondu est une question complexe en soi car il varie avec le temps. Il dépend également de la proportion de chacun des ions dans le mélange puisque les porteurs de charge sont les ions. Il dépend également du type de réactions chimiques se produisant à l'interface avec les deux autres métaux liquides et en pratique il varie donc de 0 à plusieurs mV.K^{-1} . En pratique, il est tout de même possible d'obtenir une estimation basse du coefficient thermoélectrique pour le couple en utilisant la valeur pour la phase Lithium, $S_{Li} \simeq 26 \text{ } \mu\text{V.K}^{-1}$ [174]. En utilisant un rapport d'aspect carré $h \sim r \sim 15 \text{ cm}$:

$$u_\theta \sim \Delta(T[K] \cdot B_0[T])^{2/3} \cdot 1.1 \cdot 10^{-2} [\text{m.s}^{-1}], \quad (5.49)$$

Les batteries à métaux liquides sont également des systèmes portés à des températures élevées et contiennent probablement des différences de température horizontales entre les zones proches des parois et le centre des cuves. De plus, même pour des systèmes idéalement thermostatés, il a été montré numériquement que la couche de sel fondu est le siège de phénomènes convectifs, engendrant des gradients thermiques horizontaux de quelques degrés. L'estimation précédente implique, pour une différence de température de seulement 3 K , des vitesses de l'ordre de 1 mm.s^{-1} et ce, en présence d'un champ magnétique de 10 mT . À l'inverse, une estimation faible pour le champ magnétique est de l'ordre de 1 G , dans ce cas, des gradients importants de température sont nécessaires pour produire un écoulement. Une différence de 100 K produit une vitesse de $u_\theta \sim 0.5 \text{ mm.s}^{-1}$. En comparaison, les instabilités de Bénard-Marangoni présentent des écoulements de l'ordre de $0.4 - 8 \text{ mm.s}^{-1}$. Pour des écoulements purement MHD dû à la géométrie particulière des courants, Davidson [et al.] [48] obtiennent (simulations numériques) sur la plage $0.1 - 2 \text{ G}$ des écoulements de l'ordre de $2 - 10 \text{ mm.s}^{-1}$. En principe, les effets thermoélectrique peuvent donc engendrer des écoulements en ordre de grandeur similaire à ceux déjà observé numériquement. De plus, il est important de souligner que cet ordre de grandeur sous-estime probablement le coefficient Seebeck de la couche de sel fondu.

Comme d'autres types d'instabilités déjà présentes dans les cellules de Hall-Héroult, les phénomènes thermoélectriques pourraient donc engendrer des écoulements dans les batteries à métaux liquides. Comme ces écoulements semblent faibles, ils peuvent être intéressants pour assurer des bonnes constantes cinétiques de réactions chimiques aux interfaces, en optimisant le transport des ions Li^+ dans la phase électrolytique par exemple. Comme l'effet thermoélectrique n'est pas une instabilité, ses effets sont également plus simple à contrôler. En présence de grands courants et de champ magnétique important, ils peuvent participer à la déstabilisation de ces systèmes et donc à rendre

impraticable leur usage. Enfin, ces distributions de courant thermoélectrique interdisent la stabilisation de ces systèmes à l'aide d'un champ magnétique vertical puisqu'ils transformeraient la batterie à métaux liquides en véritable pompe thermoélectrique!

5.9 Conclusion

GALLIMERT constitue un premier pas vers d'autres expériences de thermoélectricité appliquées aux métaux liquides. Elle permet d'explorer certains régimes bien connus en MHD standard comme le régime fortement magnétisé et le régime inertiel-résistif. La transition entre ces deux régimes se produit, comme dans KEPLER pour $\Lambda_c \sim 1$. Il ressort également qu'une estimation de la vitesse raisonnable en ordre de grandeur peut être obtenue en utilisant les méthodes relatives à la MHD standard en remplaçant l'expression de la densité de courant par son expression thermoélectrique. Les lois d'échelle obtenues pour ces deux régimes permettent d'appliquer les concepts de la TEMHD présentés pour GALLIMERT à d'autres situations plus complexes comme les écoulements rencontrés dans les *divertor* au Lithium des Tokamak ou la stabilité des batteries à métaux liquides.

Chapitre 6

Instabilité, oscillation et vortex

6.1 Oscillation basse fréquence

Il se trouve que d'une manière analogue à l'expérience KEPLER, le régime fortement magnétisé de l'expérience GALLIMERT présente une transition vers un régime oscillant lorsque le champ magnétique est suffisamment fort. La Figure 6.1 montre par exemple la série temporelle de l'écart à la valeur moyenne des signaux de température. Les différentes sondes sont situées le long d'un rayon. Une oscillation est clairement visible et les différents signaux oscillent en phase. L'amplitude de l'oscillation est de l'ordre de

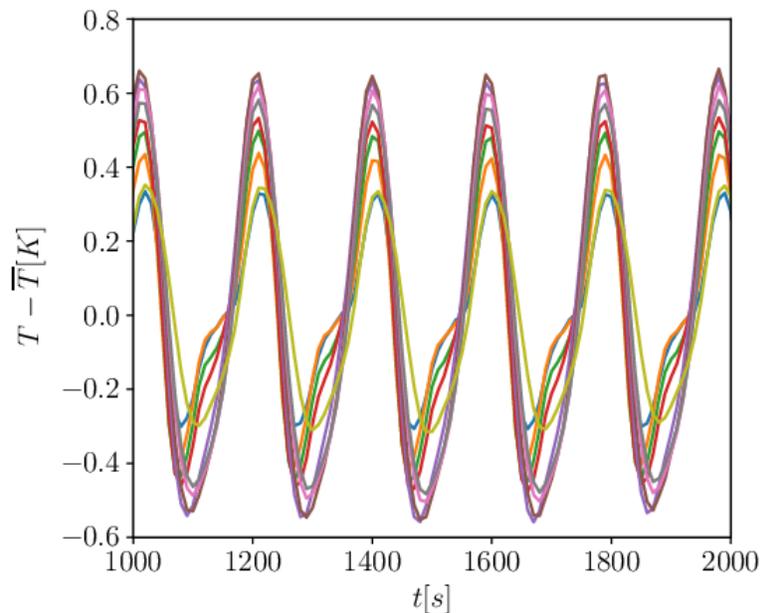


FIGURE 6.1 – Signal temporel de plusieurs sondes de température le long d'un rayon en fonction du temps. Le gradient de température imposé est $\Delta T = 37 K$ et $Ha \sim 60$.

$\sim 1 K$ mais évolue avec le rayon. La fréquence de l'oscillation est relativement basse

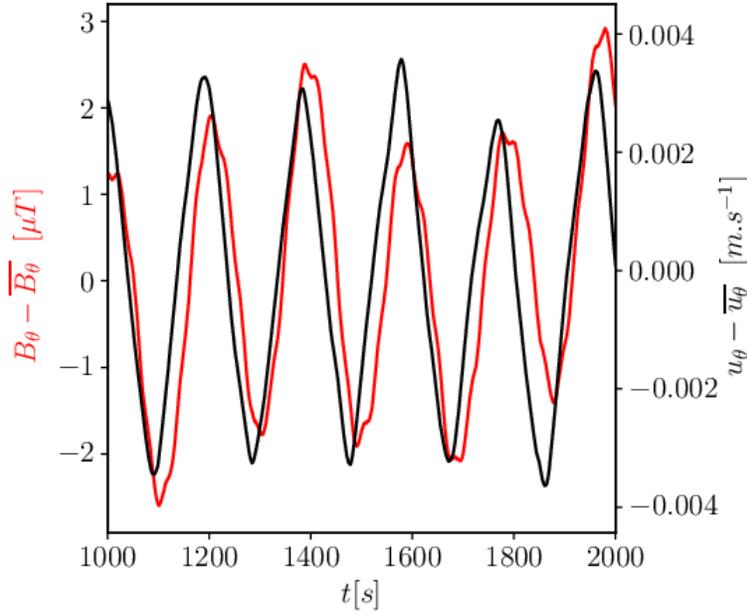


FIGURE 6.2 – Signal temporel des composantes azimuthales du champ de vitesse et du champ magnétique (sur le même intervalle de temps que pour le signal de vitesse). Le gradient de température imposé est $\Delta T = 37 K$ et $Ha \sim 60$.

$f_T \sim 5 mHz$. La Figure 6.2 montre l'oscillation des composantes azimuthales du champ de vitesse et du champ magnétique. Les sondes de vitesse et de champ magnétique sont situées au milieu du gap, mais à des positions différentes. Cette oscillation¹ peut avoir deux origines : l'écoulement azimuthal oscille ce qui entraîne par induction une oscillation du champ magnétique azimuthal, ou l'oscillation du profil de température entraîne une contre-réaction sur les boucles poloïdales de courant thermoélectrique, ce qui engendre une oscillation du champ magnétique toroïdal. La seconde hypothèse semble peu probable car les variations de champ magnétique d'origine thermoélectrique sont plus faibles que le champ moyen. Or ce dernier ne s'est pas avéré mesurable. En revanche, l'oscillation du signal de vitesse est proche en amplitude du bruit thermoélectrique dû à l'oscillation thermique au niveau des broches²

1. La sonde de champ magnétique présente une dérive en température faible mais de l'ordre de $25 nT.K^{-1}$. L'oscillation du champ magnétique pourrait donc être un artefact instrumental. La Figure 6.2 montre que l'amplitude de l'oscillation est supérieure à $2 \mu T$. En conséquence, s'il s'agit d'un artefact, il faut que l'oscillation de température correspondante soit plus grande que $100 \text{ }^\circ C$, ce qui est exclu.

2. La vitesse est obtenue à l'aide d'une mesure de potentiel $\delta V \simeq (S_M - S)\delta T + dB_0 U$ avec δT la différence de température entre les broches. L'amplitude de l'oscillation de vitesse est de l'ordre de $U \sim 4 \cdot 10^{-3} m.s^{-1}$ et correspond à une oscillation du potentiel de $\delta V_u \sim 2 \mu V$. La différence de température entre les broches due à l'oscillation thermique est de l'ordre de $0.03 \text{ }^\circ C$. Comme $S_{Ni} - S_{Ga} \simeq 14 \mu V.K^{-1}$, cela donne $\delta V_{TE} \sim 0.5 \mu V$. En ordre de grandeur, les variations de potentiel sont donc très faibles et proches du bruit thermoélectrique de mesure. D'autres mesures permettent cependant de conclure que l'écoulement présente également une oscillation.

La Figure 6.3 représente la déviation standard de la température en fonction du rayon pour $\Delta T = 37 K$ et $Ha \sim 60$. L'amplitude de l'oscillation est plus grande au centre du gap que sur les bords. La déviation standard retire la valeur moyenne,

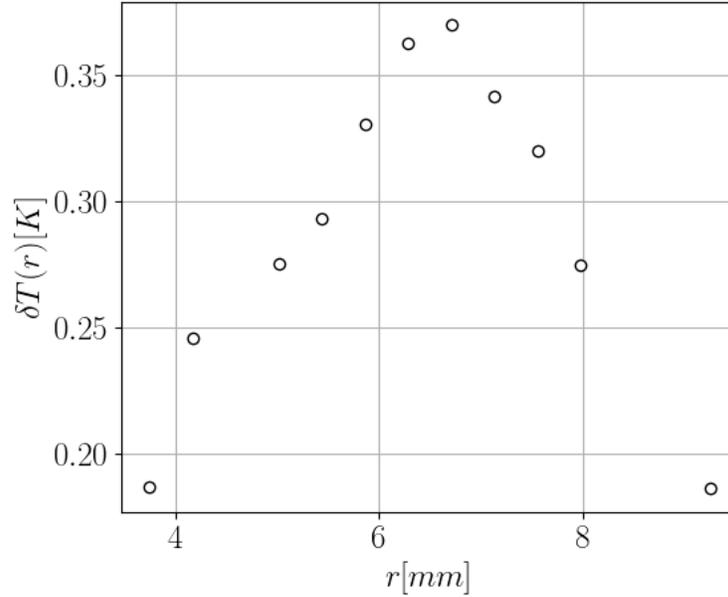


FIGURE 6.3 – Déviation standard de l'amplitude de température en fonction du rayon. Le gradient de température imposé est $\Delta T = 37 K$ et $Ha \sim 60$.

$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))}$, donc le profil moyen de température décroît bien selon r . Enfin il est également intéressant d'observer comment la présence de cette oscillation modifie le flux de chaleur. La Figure 6.4 montre un signal temporel du nombre de Nusselt modifié \tilde{Nu} auquel il a été retranché la valeur moyenne. L'oscillation du profil de vitesse et du champ de température est donc également accompagnée d'une oscillation du flux de chaleur sur les parois des cylindres interne et externe. La section suivante montre que ce profil radial de température pour l'oscillation est cohérent avec la propagation azimuthale de vortex qui advectent sur leur passage le champ de température.

6.2 Propagation azimuthale de vortex

Afin de réaliser une autre confirmation expérimentale de la présence de l'écoulement et de l'oscillation, des mesures en surface libre ont été réalisées. Á cet effet, une hauteur de 5 mm de Gallium est retirée et remplacée par quelques mm d'acide Chlorhydrique à 3%³ afin d'empêcher l'oxydation. Lors de ces mesures, une partie du flux de chaleur radial s'échappe à cause de l'absence de couvercle. Aux grandes températures, une

3. Concentration en volume.

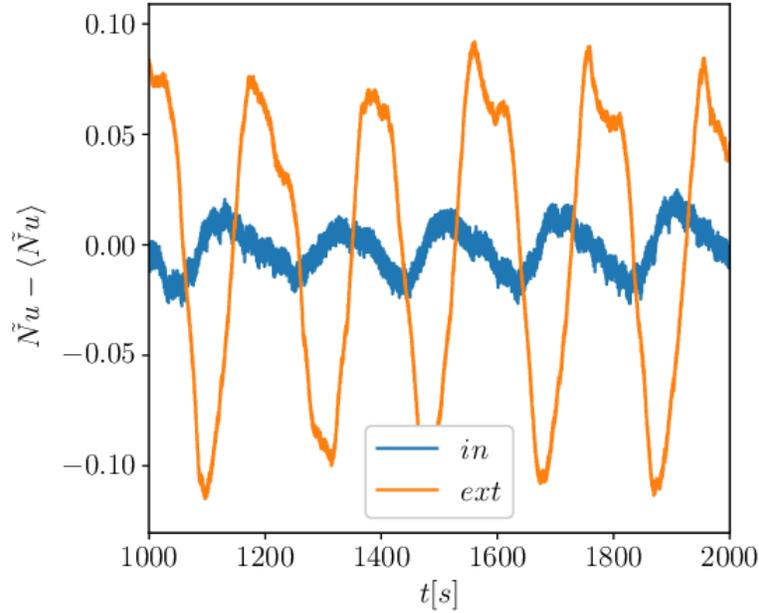


FIGURE 6.4 – Flux de chaleur en fonction du temps, pour $Ha \sim 77$.

partie de la couche d'acide s'évapore, ce qui rend difficile les mesures expérimentales. De plus, l'expérimentateur doit porter un masque à cartouche avec visière intégrée pour se protéger des vapeurs d'acide car l'ensemble de l'expérience est bien trop encombrante pour être installée sous une ventilation de laboratoire. Ceci rajoute donc d'importantes contraintes de temps pour réaliser les mesures. Même si les conditions aux limites pour l'expérience sont dans ce cas modifiées, notamment parce qu'une large partie du flux de chaleur s'échappe au niveau de la surface libre, cette étape permet de vérifier la présence de l'écoulement azimuthal de plusieurs $cm.s^{-1}$, et la présence de *pattern*. Des mesures à la caméra thermique ont notamment pu être réalisées. La diffusivité thermique de l'eau est faible devant celle du Gallium, $\kappa(\text{eau}) = 1.4 \cdot 10^{-7}$ et donc $\kappa(Ga)/\kappa(\text{eau}) \sim 92$. Sur des temps courts devant le temps de diffusion thermique à travers la couche d'acide ($\delta h \sim 3 \text{ mm}$), $\tau_{diff} \sim \delta h^2/\kappa(\text{eau}) \sim 1 \text{ min}$, la chaleur est essentiellement transportée par l'écoulement. Le transport de chaleur par l'écoulement peut donc être observé à la caméra thermique, comme le montre la Figure 6.5. La caméra thermique est positionnée au dessus de la surface libre. Les tuyaux centraux qui amènent la chaleur au cylindre central sont clairement visibles en rouge (température proche de $85 \text{ }^\circ\text{C}$). Une partie du cylindre externe à droite se discerne par sa faible température, en bleu foncé. L'image est prise après le seuil d'apparition de l'oscillation. Les lignes de température suivent un motif plutôt triangulaire délimité par la présence de trois vortex, mode azimuthal $m = 3$. Le motif se déplace lentement comme le montre les différents *snapshots* t_1 à t_5 . L'intervalle de temps entre *snapshots* est d'environ 5 s . Il est possible de mesurer la

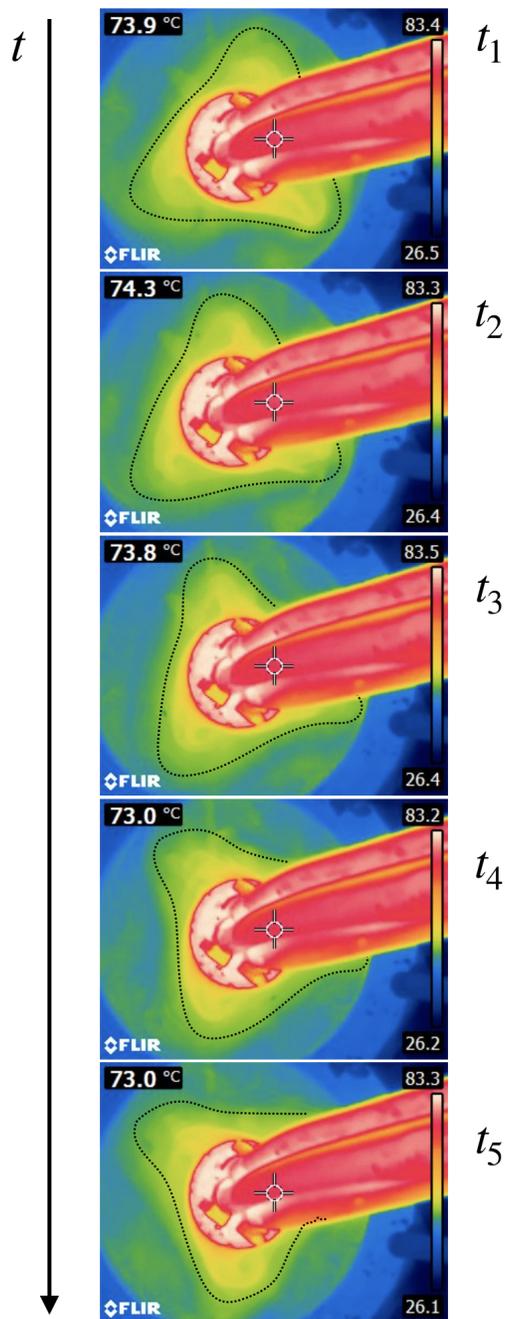


FIGURE 6.5 – Évolution du mode $m = 3$ avec le temps.

vitesse de déplacement du motif par une mesure directe à l'aide de vidéo. Ceci permet de vérifier que le motif se déplace à une vitesse plus faible que l'écoulement moyen. De plus, la fréquence de l'oscillation des signaux temporels est également liée à la célérité du motif par la relation :

$$c = \frac{2\pi f_T \bar{R}}{m}, \quad (6.1)$$

avec $m = 3$, $f_T \sim 5 \text{ mHz}$ et $\bar{R} \sim 7 \text{ cm}$ il vient $c \sim 0.7 \text{ mm.s}^{-1}$. La Figure 6.6 montre,

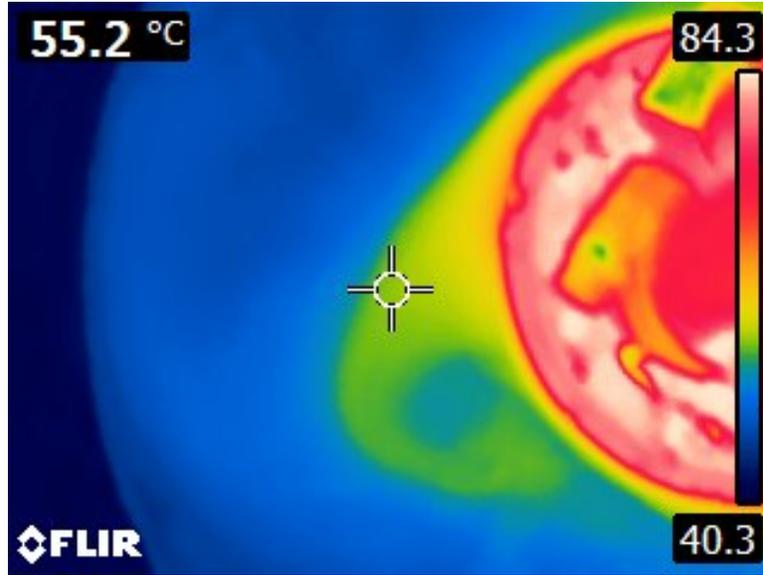


FIGURE 6.6 – Capture à la caméra thermique du passage d’un vortex qui advecte la température. Le cylindre central (chaud, couleur rouge) est à droite, tandis que le cylindre externe (froid, couleur bleu foncé) est à gauche.

toujours à la caméra thermique, le passage d’un vortex qui advecte la température. De façon tout à fait qualitative, le profil radial de l’oscillation de température donné par la Figure 6.3 s’interprète de la façon suivante. Lorsqu’un vortex passe, du flux de chaleur est retiré du cylindre central et est transporté dans le coeur de l’écoulement. L’écoulement au niveau des bords du vortex est plus élevé qu’en son centre, de sorte que la température a moins de temps pour diffuser et les particules de fluide sont donc à des températures plus élevées au bord du vortex. Il se trouve que l’extrémité du vortex se situe proche du centre du gap, ce qui explique le profil de température radial de l’oscillation. Il est possible de montrer, voir chapitre 4, que la température dans le coeur de l’écoulement obéit à une équation d’advection-diffusion :

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T, \quad (6.2)$$

Dans GALLIMERT, la question de savoir si la dynamique en surface libre est proche de celle une fois le couvercle supérieur en place est directement liée à la question du régime. En effet, le champ magnétique dans le régime de Hartmann tend à bidimensionnaliser l’écoulement. Comme l’oscillation basse fréquence se produit dans le régime de Hartmann, il semble raisonnable que les mêmes structures tourbillonnaires 2D, observées en surface libre, soient responsables de l’oscillation où les vortex sont alignés avec le champ magnétique. L’oscillation basse fréquence présente dans l’expérience GALLIMERT est donc liée à la présence de tourbillons qui se propagent dans la direction de l’écou-

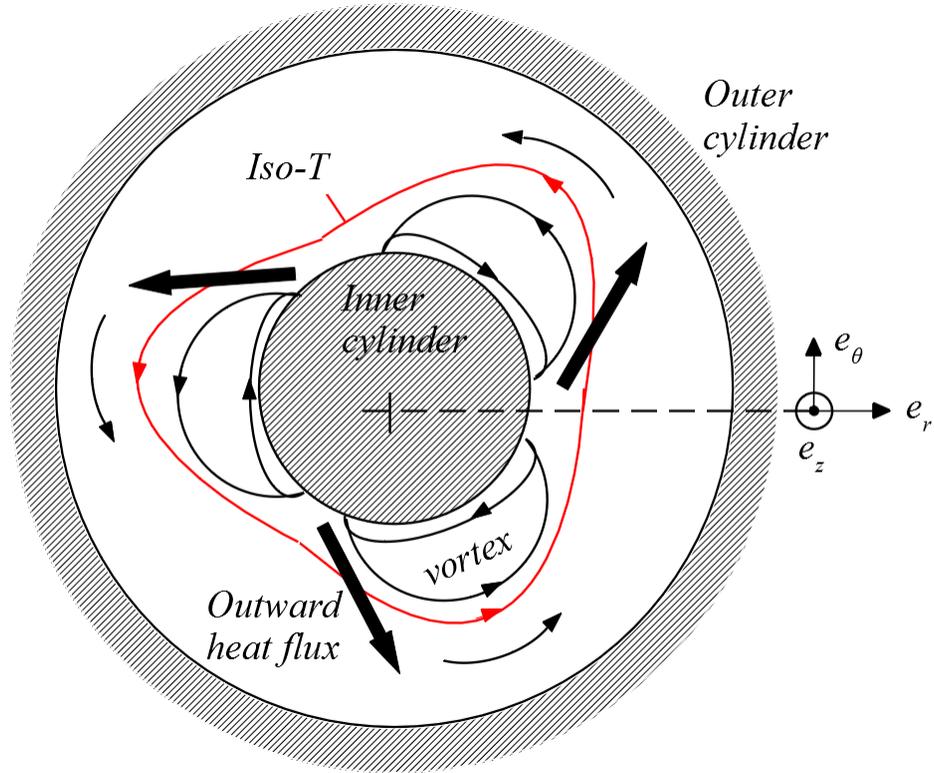


FIGURE 6.7 – Schéma illustratif du mode $m = 3$ au niveau de la surface libre. Le contour en rouge correspond à une ligne de température constante.

lement, à une vitesse c beaucoup plus faible que l'écoulement moyen et qui forme un mode $m = 3$. Ce motif est représenté schématiquement sur la Figure 6.7. Ces tourbillons advectent la température et sont donc responsables de l'oscillation de température. En l'absence d'oscillation, les lignes iso-thermes décrivent, dans les plans transverses au champ magnétique, des cercles concentriques. Dans le régime oscillant, les tourbillons décalent ces lignes sur leur passage. En supposant $\kappa \equiv 0$, la température est seulement advectée par l'écoulement, qui est principalement 2D :

$$\frac{dT}{dt} = \partial_t T + J(T, \psi) = 0, \quad (6.3)$$

où ψ est la fonction courant associée à l'écoulement $\mathbf{u} = \nabla \times (\psi \mathbf{e}_z)$, et $J(A, B) = 1/r(\partial_r A \partial_\theta B - \partial_r B \partial_\theta A)$, est la jacobienne. En régime stationnaire, cette équation donne $J(T, \psi) = \nabla T \times \nabla \psi = 0$. Ce qui implique que $T = f(\psi)$, autrement dit, T est constante le long des lignes de courant. En pratique, la diffusion thermique est bien entendu non nulle. L'ordre de grandeur de l'oscillation de vitesse est $\delta U \sim 4 \text{ mm.s}^{-1}$ et la taille typique des vortex est $l \sim \Delta R/2 \sim 3 \text{ cm}$, le nombre de Péclet typique pour l'oscillation est $Pe = \delta U l / \kappa \sim 10$, ce qui n'est pas très grand. La diffusion thermique joue donc son rôle et les gradients de température s'écartent des gradients de ψ . Enfin, la Figure 6.6

montre que le centre du vortex est plus froid que ses bords, par conséquent, pour une sonde située à un rayon fixé, lorsqu'un vortex passe, il y a un premier pic de température dû au début du vortex, suivi d'un minimum de température qui correspond au coeur du vortex, puis l'arrière du vortex, qui advecte également la température, est alors associé à un second pic. Le champ magnétique toroïdal oscille également par induction. Il est naturel de se demander comment le système transite d'un écoulement de Hartmann à un écoulement en présence de tourbillons en fonction des différents paramètres de contrôle ΔT et B_0 . La transition au régime oscillant fait donc l'objet des deux sections suivantes.

6.3 Bifurcation en fonction de la température à champ magnétique constant

Le premier cas considéré est l'évolution du système lorsque le champ magnétique est imposé fixe et où le paramètre de contrôle est le gradient de température imposé ΔT . Comme toujours pour les diagrammes de bifurcation expérimentaux, il est particulièrement difficile de trouver l'amplitude des incréments du paramètre de contrôle à utiliser pour réaliser le diagramme. Si l'écart entre chaque valeur du paramètre de contrôle est trop important, l'évolution proche du seuil est mal résolue. Inversement, si l'écart entre chaque valeur du paramètre de contrôle est trop faible, il est difficile expérimentalement de mesurer la transition sur des des temps raisonnables. En effet, le système doit atteindre un état stationnaire pour chaque incrément. Ceci est particulièrement vrai dans les expériences qui présentent comme ici des temps thermiques qui sont très longs. L'oscillation ayant une période relativement longue, $T \sim 200$ s, chaque point sur les Figures suivantes représente 1 h d'acquisition. L'intégralité de la rampe demande donc 3 jours de mesure en continue, automatisée via *Python*. La Figure [6.8](#) montre le carré de la déviation standard du signal de température pour une sonde Pt100 au milieu du gap, en fonction de la différence de température imposée ΔT et pour un nombre de Hartmann $Ha \sim 67$. Les symboles carrés noir correspondent à une rampe montante tandis que les symboles ronds rouge correspondent à une rampe descendante. La Figure [6.8](#) montre que la transition vers le régime oscillant est une bifurcation super-critique. La bifurcation ne présente pas de signe visible d'hystérésis et le carré de l'amplitude de l'oscillation croît linéairement avec l'écart au seuil. L'écart de température critique à partir duquel croît l'instabilité est $\Delta T_c \simeq 12K$. Comme le forçage est thermoélectrique, le vrai paramètre de contrôle est le courant. Pour $\Delta T = 12$ K la différence de température dans le bulk est $\Delta T_{Bulk} = 2.6$ K ce qui donne, d'après la relation [\(5.22\)](#), $I_{TE,c} \sim 2.5$ A. La bifurcation vers un régime oscillant rappelle évidemment l'expérience

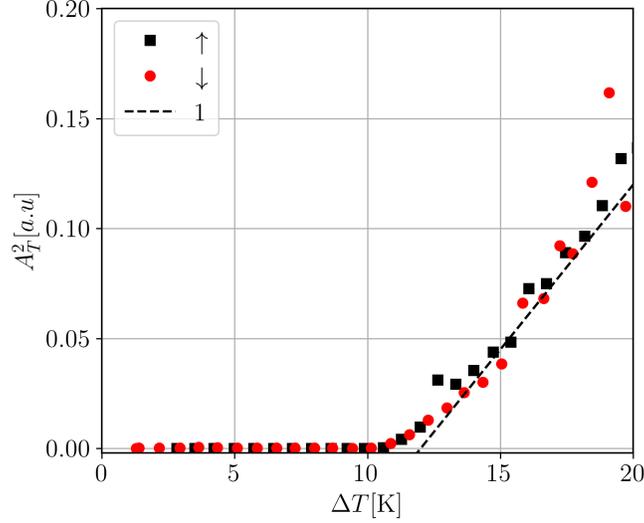


FIGURE 6.8 – Carré de la déviation standard du signal d’une sonde de température (milieu du gap) en fonction de la différence de température imposée ΔT , pour un champ magnétique de $Ha \sim 67$.

KEPLER, observé au chapitre 2. Lorsque le champ magnétique est intense, $Ha > 50$, le champ de vitesse se met à osciller lorsque le courant imposé dépasse une valeur critique. Pour l’expérience KEPLER, le nombre sans dimension $H = I_0 B_0 h / \rho \nu^2$ prend en compte le forçage et est important pour les transitions entre les différents régimes. Pour les dispositifs thermoélectriques, ce nombre s’exprime en fonction de I_{TE} :

$$H_{TE} = \frac{\tilde{\sigma} \pi h^2 B_0 \Delta S \Delta T}{4 \ln(R_2/R_1) \rho \nu^2}, \quad (6.4)$$

avec $\tilde{\sigma} = \sigma_{Ga} \sigma_{Hg} / (\sigma_{Ga} + \sigma_{Hg})$. Pour $I_{TE,c} \sim 2.5$ A, le nombre magnétique critique est de l’ordre de $H_c \sim 6.5 \cdot 10^6$, qui est relativement proche de la valeur obtenue dans l’expérience KEPLER $H_c \sim 20 \cdot 10^6$ pour la transition vers le régime oscillant. Comme l’oscillation correspond à la propagation de vortex dans la direction azimuthale et donc à l’apparition d’un *pattern*, la bifurcation est décrite par une équation d’amplitude complexe A .

Proche du point critique, $\dot{A} = F(A)$ se développe sous la forme d’un développement de Taylor⁴ :

$$\dot{A} = \epsilon + (\delta + i\omega_0)A + \beta A^\dagger A - \alpha |A|^2 A, \quad (6.5)$$

où le complexe conjugué de A est noté A^\dagger et le module $|A|^2 = A^\dagger A$. Avant la bifurcation,

4. Tous les modes stables sont amortis exponentiellement tandis que le mode critique a une dynamique suffisamment lente.

l'écoulement est axisymétrique et donc invariant par rotation autour de l'axe (Oz). L'apparition de l'instabilité brise la symétrie par rotation $\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$. Cependant, si $T(r, \theta, t)$ est solution, alors $T(r, \theta + \delta\theta, t)$ l'est également et l'équation d'amplitude doit donc vérifier la symétrie $A \rightarrow Ae^{im\delta\theta}$. L'équation (6.5) est donc invariante par rotation dans le plan complexe et les coefficients ϵ et β sont nuls. Pour assurer la saturation, α doit avoir une partie réelle strictement positive. δ correspond au paramètre de contrôle et $\omega_0 \in \mathbb{R}$. L'axisymétrie implique donc que l'amplitude suit la forme normale d'une bifurcation de Hopf super-critique :

$$\dot{A} = (\delta + i\omega_0)A - \alpha|A|^2A. \quad (6.6)$$

Les solutions de cette équation peuvent s'écrire sous la forme $A(t) = \rho(t)e^{i\phi(t)}$, avec ρ et ϕ des fonctions réelles. La solution stationnaire $\dot{A} = 0$ est vérifiée par le couple $(\rho^*, \dot{\phi}^*)$. Pour $\delta > 0$, le système bifurque vers un cycle limite décrit par $\rho^* = \sqrt{\delta/\alpha_r}$, avec $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$. L'amplitude du motif croît comme la racine de l'écart au seuil comme le montre la Figure 6.8. Dans le cas $\alpha_i \neq 0$, l'équation pour la phase donne $\dot{\phi}^* = \omega_0 - \alpha_i\delta/\alpha_r$. L'oscillation apparaît proche du seuil à fréquence finie ω_0 . La direction préférentielle de propagation du motif est la direction de l'écoulement. En effet, l'écoulement brise la symétrie miroir $\theta \rightarrow -\theta$ et induit une direction préférentielle.

Lorsque le paramètre de contrôle ΔT dépasse $20 K$, le système présente une seconde bifurcation, comme le montre la Figures 6.9, où le diagramme de bifurcation est prolongé jusqu'au ΔT maximum. Au-delà de $\Delta T \simeq 20^\circ C$, un léger plateau apparaît suivi d'une seconde amplification de l'amplitude de l'oscillation. Les valeurs sont également plus dispersées avec la présence d'une légère hystérésis pour la bifurcation secondaire. Cette seconde bifurcation s'observe également sur l'évolution de la fréquence de l'oscillation. Les Figures 6.11 et 6.10 montrent les densités spectrales de puissance du même signal de température en fonction de ΔT , toujours pour $Ha = 67$. La première bifurcation apparaît bien à fréquence finie. Les résonances de ce mode sont également visibles sur la partie supérieure du spectre. La fréquence est environ constante jusqu'à $\Delta T = 20 K$ et vaut $f_0 \sim 5 - 6 mHz$ ce qui implique que $\alpha_i = 0$. Au delà de $\Delta T = 20 K$, l'apparition d'un second mode sous-harmonique $f_0/2 \sim 2.5 mHz$ est particulièrement visible pour la rampe montante. Au-dessus de ce second point critique, la fréquence de chacun des modes f_0 et $f_0/2$ diminue avec le paramètre de contrôle. La seconde transition est également accompagnée d'un shift de la fréquence $f_0 \rightarrow f_0 + \epsilon$ juste après le second point critique. L'apparition de ce second mode à la fréquence $f_0/2$ est également visible sur les signaux temporels, comme le montre le signal d'une sonde Pt100, sur la Figure 6.12. Ce second mode est surtout visible pour les sondes situées à des rayons plus grands que le rayon moyen. Une explication possible pour ce mode à la fréquence moitié est

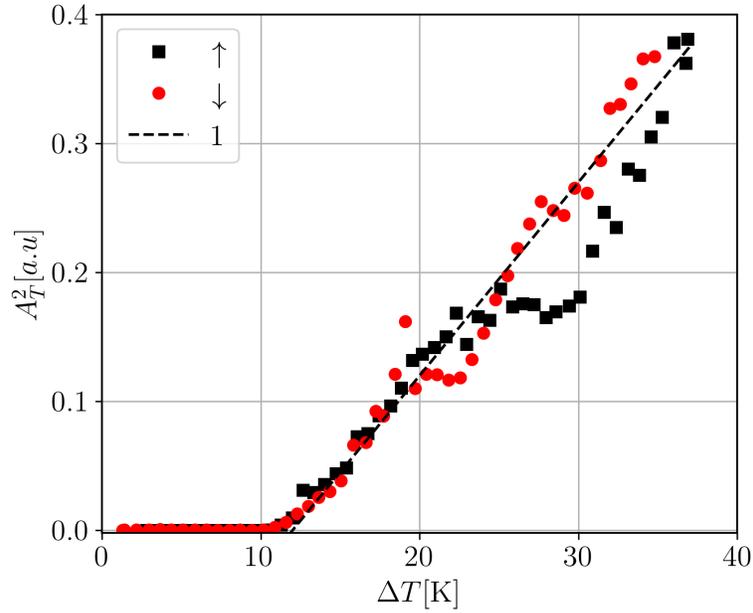


FIGURE 6.9 – Carré de la déviation standard du signal d’une sonde de température (milieu du gap) en fonction de la différence de température imposée ΔT , pour un champ magnétique de $Ha \sim 67$. Carrés noirs : rampe montante. Ronds rouges : rampe descendante.

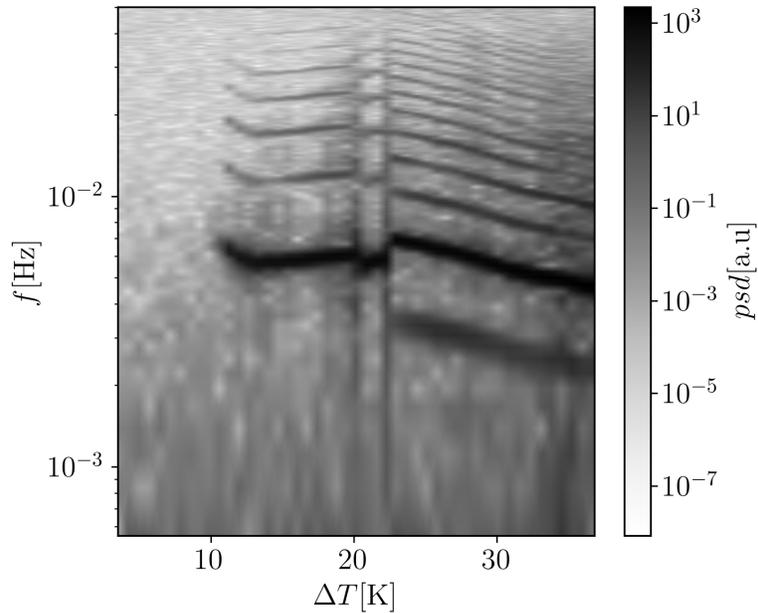


FIGURE 6.10 – Nuance de gris de la densité spectrale du signal de température en fonction de la différence de température imposée $\Delta T [K]$, pour la rampe montante.

qu’au-delà d’une certaine valeur de ΔT , les vortex se dissymétrisent. Lorsqu’un vortex passe, l’avant du vortex qui transporte de la chaleur vers le cylindre interne engendre

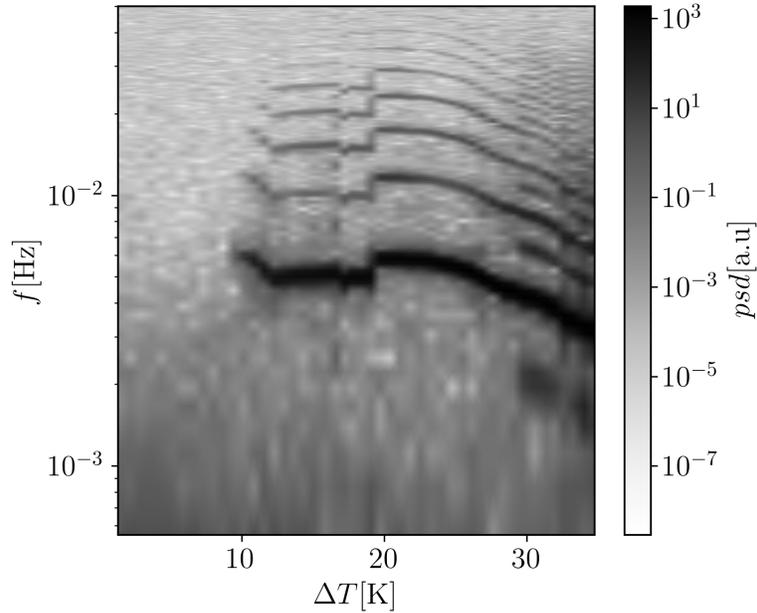


FIGURE 6.11 – Nuance de gris de la densité spectrale du signal de température en fonction de la différence de température imposée $\Delta T[K]$, pour la rampe descendante.

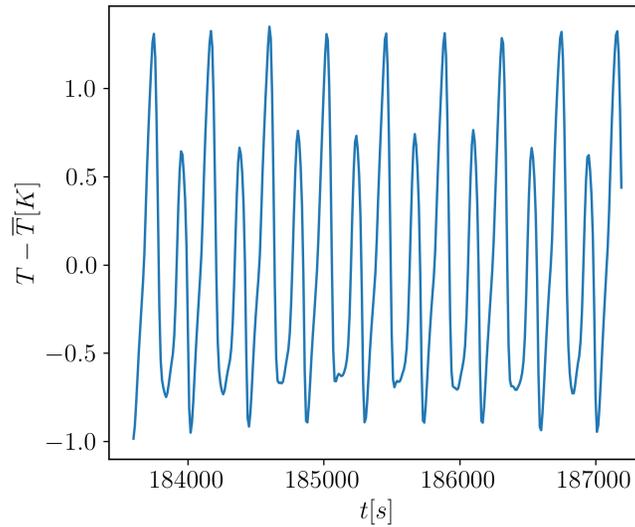


FIGURE 6.12 – Signal de température situé au milieu du gap (Pt100 située en $r = 80 \text{ mm}$), pour $Ha = 67$ et $\Delta T = 35 \text{ K}$.

le premier pic, point *A* sur la Figure [6.13](#). Le centre du vortex, plus froid engendre le premier creux, point *B*, puis le second pic, plus élevé, point *C*, correspond à l'arrière du vortex qui extrait de la chaleur du cylindre interne pour la transporter jusque dans le coeur de l'écoulement. Cet effet est renforcé pour les sondes à grand r car les vortex apparaissent le long du cylindre interne et leur taille ne recouvre pas l'ensemble du gap.

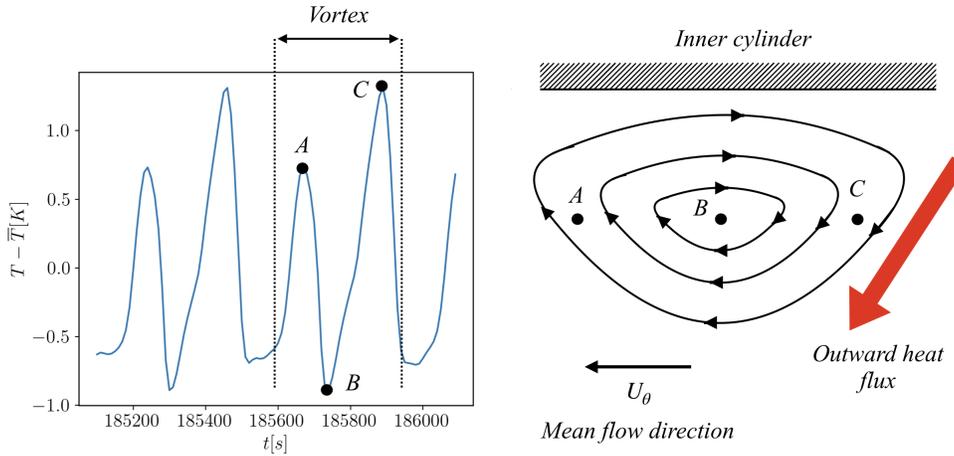


FIGURE 6.13 – Signal de température par rapport au temps (gauche). Schéma du passage d'un vortex devant une sonde de température (droite).

Le second pic qui correspond à un fort flux de chaleur dans le coeur de l'écoulement induit donc une amplitude plus importante pour la température.

Du point de vue des instabilités, cette bifurcation secondaire peut faire penser aux instabilités de type *drift* qui apparaissent pour les ondes stationnaires forcées de manière paramétrique [175] : dans ces systèmes, une première bifurcation brise la symétrie par translation, avec l'apparition d'un *pattern* en espace puis une seconde instabilité brise la symétrie par réflexion et le système bifurque vers un état où le mode d'espace se met à dériver, choisissant préférentiellement une direction. Physiquement, cette seconde instabilité se comprend de la façon suivante : la formation d'un motif stationnaire correspond à la somme de deux ondes contra-propagatives. Un nouveau paramètre d'ordre apparaît : la différence d'amplitude entre les deux modes. Lorsque ce paramètre devient non nul, il brise la symétrie par réflexion et le motif se propage. Ici cependant la symétrie par réflexion est déjà brisée par l'écoulement moyen et la bifurcation secondaire ne peut donc pas être liée à la brisure de cette symétrie.

Enfin, les Figures 6.14 et 6.15 montrent l'évolution du carré de l'écart-type, autrement dit la variance, du flux de chaleur mesuré sur les cylindres interne et externe, en fonction de l'écart de température imposé. Ces mesures ont été effectuées pour la même bifurcation, avec $Ha \sim 67$. Les fluctuations du flux de chaleur sur le cylindre interne ne suivent pas une bifurcation aussi nette que pour la température mais présentent tout de même une augmentation après le seuil, $\Delta T \simeq 15 \text{ }^\circ\text{C}$. En revanche, les fluctuations du flux de chaleur mesurées sur le cylindre externe subissent de façon très nette une bifurcation super-critique après le seuil $\Delta T \simeq 10 \text{ }^\circ\text{C}$. Pour $\Delta T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, les fluctuations présentent une bifurcation secondaire avec une loi d'échelle linéaire pour la variance [5].

5. La déviation standard évolue en racine de l'écart au seuil.

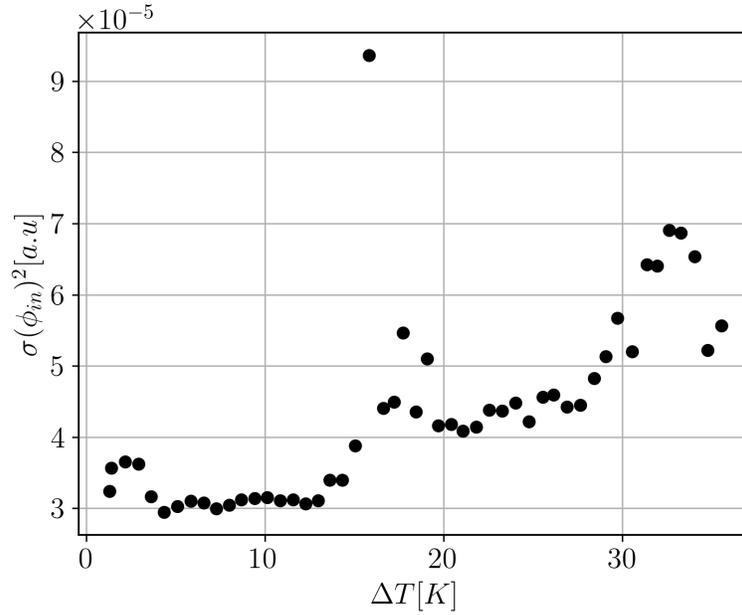


FIGURE 6.14 – Carré de l'écart-type des fluctuations du flux de chaleur mesurées sur le cylindre interne en fonction de l'écart de température imposé pour $Ha = 67$.

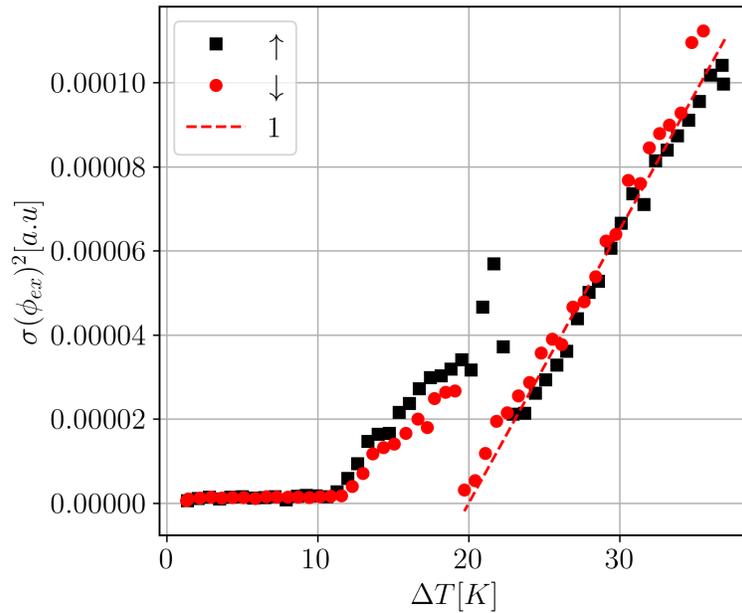


FIGURE 6.15 – Carré de l'écart-type des fluctuations du flux de chaleur mesurées sur le cylindre externe en fonction de l'écart de température imposé pour $Ha = 67$.

symbolisée par la droite en pointillés rouges. Ces évolutions distinctes indiquent bien qu'au niveau du cylindre externe, les fluctuations du transport de chaleur sont dominées par l'écoulement arrière du vortex, qui extrait de la chaleur du cylindre interne. En

pratique, même si la variance semble descendre à zéro⁶ avant de croître à nouveau au second point critique $\Delta T = 20 K$, sur les signaux temporels, l'oscillation ne disparaît pas complètement. Il s'agit donc peut-être d'un artefact dû au transitoire plus long proche du point critique.

6.4 Bifurcation en fonction du champ magnétique à température constante

Le second paramètre de contrôle est le champ magnétique B_0 . En pratique, comme l'écart de température entre les cylindres est maintenu constant, l'instabilité modifie peu le profil radial de température et il est possible en plus des mesures de température, de réaliser des mesures de champ magnétique et de vitesse. Cependant, la nature de la transition au régime oscillant est assez différente de celle à champ magnétique constant. La Figure 6.16 montre le signal de température pour trois sondes situées proche du cy-

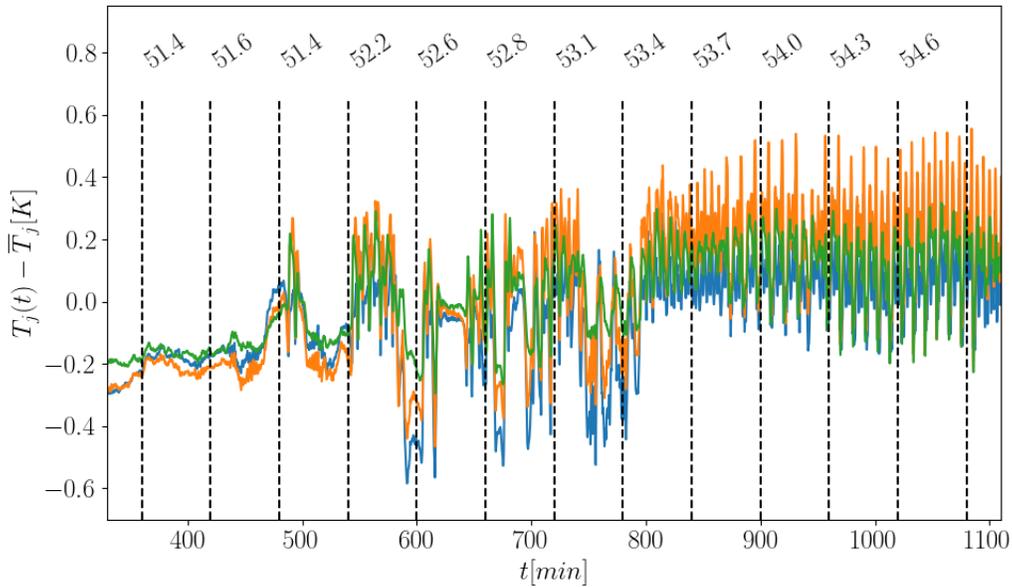


FIGURE 6.16 – Signaux temporels de trois sondes de température situées en $r = 40 mm$, $r = 70 mm$ et $r = 100 mm$. La rampe est montante en Ha .

lindre interne, $r = 40 mm$, au milieu du gap, $r = 70 mm$ et proche du cylindre externe, $r = 100 mm$. Les traits verticaux en pointillés noirs correspondent aux paliers à Hartmann constant et la valeur de Ha est affichée au sommet de la ligne. Proche du seuil entre $Ha = 51.5$ et $Ha = 53.4$, le signal de température converge difficilement vers

6. La variance est définie par $\mathbb{V}(X) = \sigma(X)^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$, relation qui retire la moyenne. Le flux de chaleur moyen lui ne retombe pas à zéro en $\Delta T = 20 K$.

le régime oscillant. Le seuil de la transition est difficile à déterminer pour la rampe montante à cause de la présence d'une zone intermittente. Pour la rampe descendante,

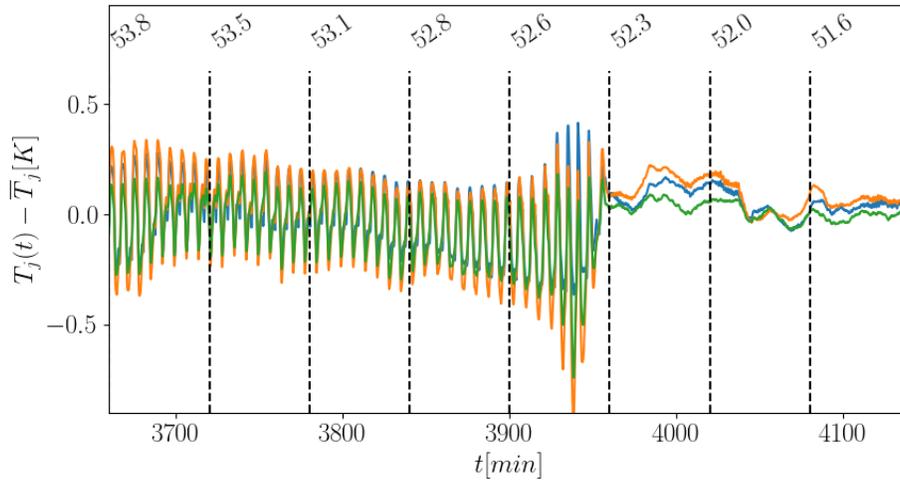


FIGURE 6.17 – Signaux temporels de trois sondes de température situées en $r = 40 \text{ mm}$, $r = 70 \text{ mm}$ et $r = 100 \text{ mm}$. La rampe est descendante en Ha .

la Figure [6.17](#), montre que la disparition de l'oscillation est plus brutale mais le seuil est $Ha = 52.3$, donc quasiment identique à la rampe montante. La différence de comportement proche du seuil indique une légère zone hystérétique. En effet, l'oscillation se maintient mieux que pour la rampe montante.

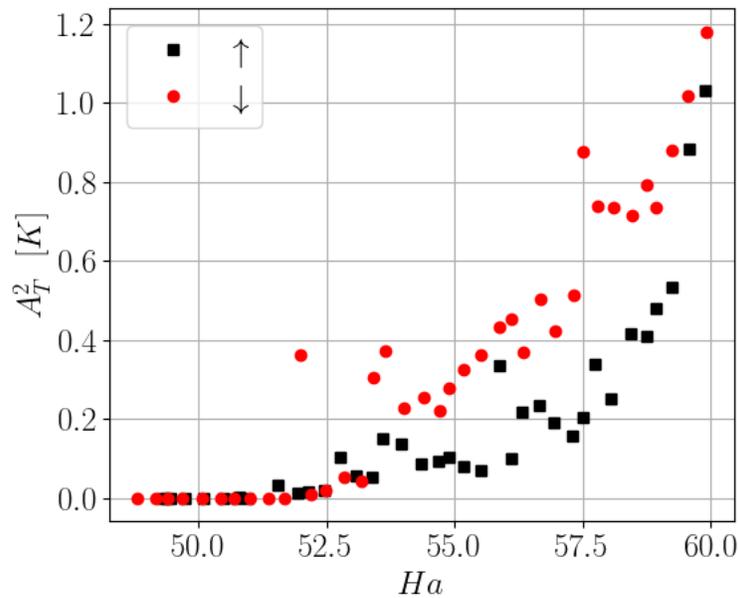


FIGURE 6.18 – Carré de l'amplitude de l'oscillation basse fréquence en fonction du nombre de Hartmann pour $\Delta T \simeq 37 \text{ K}$.

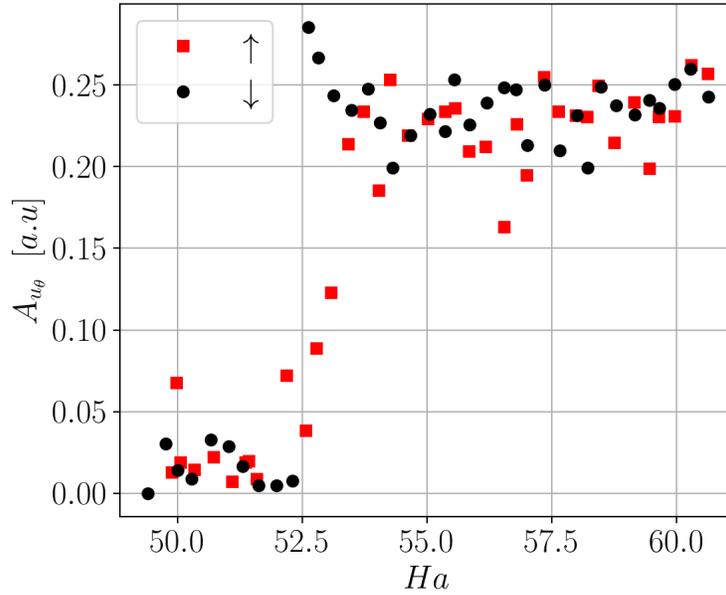


FIGURE 6.19 – Amplitude de l’oscillation de la composante azimuthale de la vitesse, unité arbitraire, en fonction du champ magnétique. $\Delta T \simeq 37 K$. Carrés rouges, rampe montante, ronds noirs rampe descendante.

La Figure [6.18](#), montre le carré de l’amplitude de l’oscillation de la température en fonction du nombre de Hartmann, à ΔT fixé. Comme le seuil est cependant très proche pour les rampes montante et descendante, il est difficile de parler de transition sous-critique. Ces résultats indiquent que la transition est moins claire que pour la bifurcation avec le paramètre de contrôle ΔT .

La transition pour l’amplitude de l’oscillation de vitesse et de champ magnétique est également moins claire. Après le seuil, l’amplitude atteint un plateau et reste stationnaire en fonction du paramètre de contrôle, voir Figure [6.19](#) et Figure [6.20](#). Cette évolution suggère que l’amplitude de l’oscillation du champ magnétique et l’amplitude de la vitesse obéissent à une équation où le paramètre de contrôle est également en facteur du terme de saturation⁷:

$$\dot{R} = \alpha R(1 - R^2), \quad (6.7)$$

où R désigne la partie réelle de l’amplitude et α le paramètre de contrôle. Ce type de bifurcation peut être dû au paramètre de contrôle, le nombre de Hartmann, qui n’est peut-être pas le paramètre de contrôle adéquat pour la bifurcation vers le régime oscillant. En effet, l’écoulement de Hartmann est indépendant du champ magnétique, par

7. Ce type d’équation d’amplitude est commun pour les instabilités dynamos, où l’amplitude de la vitesse reste constante après le seuil [\[176\]](#).

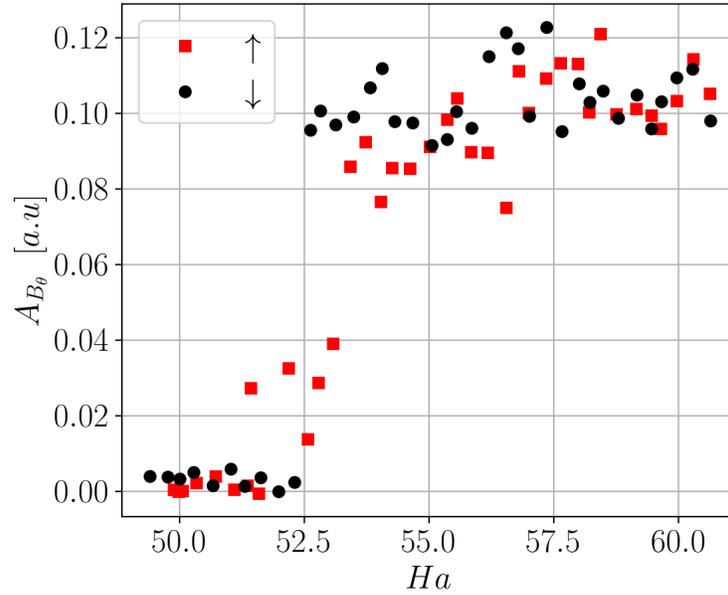


FIGURE 6.20 – Amplitude de l’oscillation de la composante azimuthale du champ magnétique, unité arbitraire, en fonction du champ magnétique. $\Delta T \simeq 37 K$. Carrés rouges, rampe montante, ronds noirs rampe descendante.

conséquent, lorsque le nombre de Hartmann est augmenté, le système passe d’un écoulement 3D à un écoulement anisotrope. Le chapitre 5 a notamment montré que cette transition a lieu pour l’expérience GALLIMERT pour $Ha \sim 40 - 45$. La transition vers l’oscillation est donc déclenchée après l’arrivée dans le régime 2D. Afin d’obtenir plus d’informations sur la transition, il est possible de suivre l’évolution de la fréquence de l’oscillation. La Figure 6.21 montre l’évolution de la fréquence de l’oscillation pour les signaux de température, de vitesse et de champ magnétique. Avant le seuil de l’instabilité, l’oscillation n’est pas présente et la fréquence n’est donc pas définie ce qui correspond à la zone grise sur la Figure. Après le seuil, la fréquence de l’oscillation est clairement identique pour les trois modes. Ceci est cohérent avec le fait que les isothermes se confondent avec les lignes de courant et que le champ magnétique est bien dû à un effet inductif. La fréquence de l’oscillation croît de façon linéaire avec le paramètre de contrôle. L’oscillation arrive relativement proche du seuil de la transition entre le régime Inertiel-résistif et le régime d’Hartmann, puisqu’elle apparaît autour de $Ha \sim 52$. Il semble donc naturel de se demander dans quelle mesure cette oscillation est liée à la bidimensionnalisation de l’écoulement par le champ magnétique. En effet, ce régime semble particulièrement analogue au régime oscillant présent dans l’expérience KEPLER. Le lien entre le régime d’oscillation basse fréquence dans les expériences KEPLER et GALLIMERT à grand champ magnétique est développé dans la section suivante qui explore notamment l’analogie entre écoulements et les écoulements

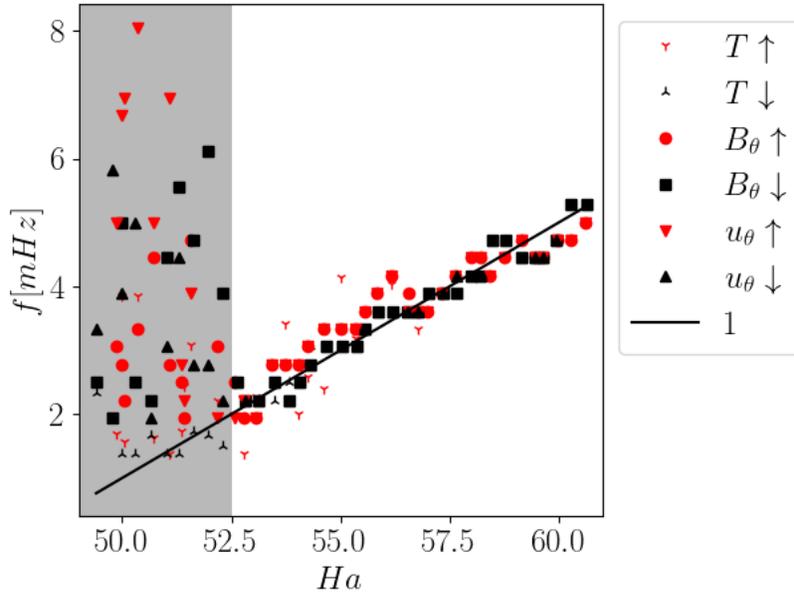


FIGURE 6.21 – Fréquence de l’oscillation pour les modes de température, de vitesse et de champ magnétique.

quasi-géostrophiques.

6.5 Régime oscillant à grand nombre de Hartmann

L’émergence d’oscillations du champ de vitesse associées à la propagation de tourbillons, à grand nombre de Hartmann, a été observée dans un certain nombre d’expériences. Si le champ magnétique semble être un moyen efficace pour stabiliser certains types d’écoulement par le biais de la "viscosité" magnétique [177] ⁸, l’augmentation du champ magnétique est également source d’instabilité. Lehnert en donne une première preuve expérimentale en 1955 [178]. Le dispositif de Lehnert consiste en une nappe de 6 mm de Mercure liquide disposée au fond d’une cuve cylindrique, en surface libre. Le forçage, au fond de la cuve, comprend un anneau de rayon intermédiaire qui tourne à une vitesse angulaire fixée, générant une bande circulaire de cisaillement, tandis que le reste de la cuve est fixe. Lehnert remarque que l’écoulement laminaire se déstabilise en présence d’un champ magnétique normal à la surface libre. Il observe que cette instabilité de la couche de cisaillement libre conduit à l’apparition de vortex lorsque le champ magnétique continue d’être augmenté. Un résultat semblable mais dans un dispositif différent est obtenu par Malcolm (1970) [179]. Le dispositif de Malcolm présente un forçage électromagnétique : une nappe de Mercure baigne dans une cuve dont les pa-

8. En réduisant la turbulence dans la direction du champ magnétique notamment.

rois sont diélectriques. La cuve est transpercée de part en part, verticalement par une barre cylindrique conductrice, traversée par un courant électrique. Le cylindre étant en contact électrique avec le métal liquide, une partie des courants électriques passent donc de la barre au métal liquide, proche de la paroi inférieure. À l'inverse, proche de la paroi supérieure, les courants électriques quittent le métal liquide et rejoignent la barre conductrice. La composante du courant normale au cylindre se couple à un champ magnétique vertical pour engendrer un forçage azimuthal. La composante normale du courant change de signe en fonction de la hauteur. En conséquence, le forçage change également de signe et l'écoulement azimuthal est cisailé. Lorsque le champ magnétique

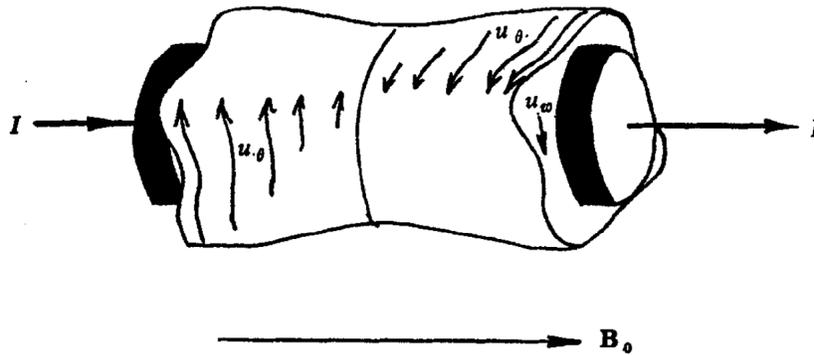


FIGURE 6.22 – Oscillation du profil azimuthal de vitesse dans le dispositif de Malcolm. Schéma extrait de son article [179].

dépasse une valeur critique, $Ha > 300$, l'écoulement se met à osciller suivant un motif périodique dans la direction azimuthale, comme le montre la Figure 6.22. Malcolm ne développe cependant pas la question de l'effet du cisaillement sur l'apparition de l'instabilité. L'étude de la transition à la turbulence à travers une instabilité d'une couche de cisaillement libre, menant à l'apparition d'une allée de tourbillons ainsi qu'à de la turbulence 2D, a également été menée par Alboussière *et al.* [68]. Leur dispositif consiste en une cuve cylindrique où un gradient de température horizontal est maintenu entre le fond de la cuve (au centre) et le cylindre externe. Le forçage est électromagnétique : l'expérience est installée dans un champ magnétique vertical homogène et une série de broches, installées le long d'un cercle à un rayon intermédiaire fixé, introduit un courant électrique radial. Le cylindre externe fait office de seconde électrode. Ce système présente donc une couche de cisaillement libre au niveau de l'injection des courants. Le fluide obéit donc à une force azimuthale dans les régions de grand rayon, ce qui entraîne le reste du fluide⁹. Là encore, l'écoulement d'Hartmann se déstabilise avec la présence d'une oscillation du champ de vitesse azimuthale et la propagation de vortex, comme le montre la Figure Figure 6.23 [68]. La turbulence dans ces systèmes étant rapidement 2D

9. L'entraînement étant directement lié au transport de moment cinétique.

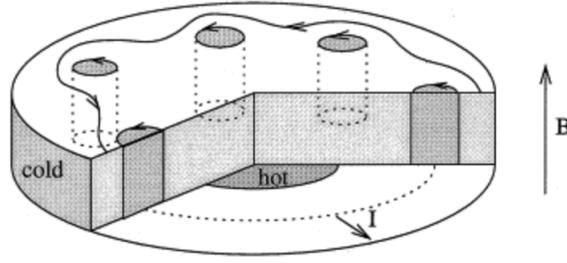


FIGURE 6.23 – Schéma des vortex obtenu dans le dispositif d'Alboussière [68].

à cause du champ magnétique, une question naturelle est de comprendre si ces systèmes expriment la phénoménologie classique de la turbulence $2D$: pour les petits nombres d'onde, une cascade inverse d'énergie implique un spectre en $k^{-5/3}$ tandis que pour les grands nombres d'onde, une cascade d'enstrophie induit un spectre en k^{-3} . Messadek & Moreau [65] ont montré expérimentalement qu'à grand nombre de Hartmann, la turbulence MHD $2D$ présente un spectre en k^{-3} , différent de la cascade d'enstrophie pour la phénoménologie classique. Ce spectre en k^{-3} est directement associé à la forte dissipation due au champ magnétique, ce qui confirme la théorie de Sommeria & Moreau [44, 63]. Du point de vue expérimental, ce régime semble atteint pour des nombres de Hartmann assez grands, $Ha \gg 100$. Tandis que pour les expériences KEPLER et GALLIMERT $Ha < 100$. Le modèle de Sommeria & Moreau apporte tout de même un élément utile à la suite de la discussion puisqu'il permet de rendre compte facilement de la friction due au champ magnétique, comme il sera montré dans la suite.

Plus récemment, les expériences et les simulations numériques menées par Stelzer *et al.* [20, 21] dans une cuve cylindrique de section carrée avec une injection des courants sur les cylindres par des lignes conductrices situées dans le plan médian, ont également montré la transition vers un régime oscillant. Les nombres de Hartmann atteints sont relativement grands, $Ha \sim 2000$. Comme Alboussière *et al.* [68], ils observent que le mode azimuthal m croît avec le champ magnétique. La fréquence de l'oscillation dans l'expérience GALLIMERT croît également avec le champ magnétique, évolution illustrée par la Figure 6.21. Cependant, $f = mc/2\pi\bar{R}$ et cette évolution peut également s'expliquer par la croissance de c avec Ha . En effet, les mesures en surface libre ont montré que le mode $m = 3$ était relativement robuste sur la plage de champ magnétique étudiée. De plus, ils observent également que le mode décroît avec Re . Cependant, les expériences de Stelzer *et al.* [20, 21] présentent une déstabilisation des couches limites de Shercliff qui sont contre la paroi du cylindre interne à la différence des expériences d'Alboussière *et al.* [68] ou de Messadek & Moreau [65] où la couche de Shercliff est libre. Cette situation est donc plus proche de celle des expériences de KEPLER et de GALLIMERT.

Enfin, un travail expérimental récent a mis en lumière l'effet de courant thermoélectrique dans une expérience de convection de Rayleigh-Bénard soumise à un champ magnétique vertical de 120 mT [180]. Lorsque les parois horizontales sont électriquement conductrices, des légères variations de température horizontales produisent des boucles de courant thermoélectrique. En présence d'un champ magnétique, la force de Laplace qui en résulte cisailent les rouleaux de convection. Sous l'effet de cette force, les rouleaux précèdent ce qui introduit une oscillation basse fréquence de la température. Cette oscillation est donc très différente de l'oscillation obtenue dans l'expérience GALLIMERT.

Au vu de cet état des connaissances, il semble donc intéressant de comprendre ce qui permet la transition vers un régime où des tourbillons se propagent dans la direction de l'écoulement. À cette fin, la section suivante explore une analogie qui permet de mieux comprendre ces écoulements.

6.5.1 Limite quasi-2D en MHD

Les écoulements MHD à bas nombre de Reynolds magnétique Rm et petit Pm sont décrits, dans l'approximation quasi-statique pour le champ magnétique par l'équation :

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \nu \Delta \mathbf{u} - \sigma B_0^2 \partial_z^2 \Delta^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (6.8)$$

où \mathbf{f} correspond au forçage externe, électromagnétique dans le cas des expériences KEPLER et GALLIMERT. L'induction induit dans le fluide une force de freinage, qui rend l'écoulement anisotrope. En pratique ce terme se décompose en Fourier :

$$\partial_z^2 \Delta^{-1} = \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2}. \quad (6.9)$$

Dans la limite de grand paramètre d'interaction $N = \sigma B_0^2 l_{\perp} / \rho U \gg 1$ [10], Sommeria & Moreau [50] ont montré que les structures turbulentes cessent d'être 3D. Lorsque le rapport d'aspect $\Gamma = l_{\perp} / l_{\parallel}$ [11] n'est pas carré, Γ modifie ce critère : $\sigma B_0^2 l_{\perp} \Gamma^2 / \rho U \gg 1$ [44, 45]. Le champ magnétique bidimensionnalise l'écoulement. Ce critère est très bien vérifié dans le régime fortement magnétisé de l'expérience KEPLER grâce au grand rapport d'aspect. Dans l'expérience GALLIMERT, $N \sim 1$ et le rapport d'aspect permet de vérifier ce critère puisque $\sigma B_0^2 l_{\perp} \Gamma^2 / \rho U \sim 7$. Ce critère permet de moyennner selon z [12] l'équation pour la vitesse. Le terme de dissipation magnétique peut alors s'estimer

10. l_{\perp} désigne la longueur caractéristique des structures horizontales.

11. Dans le cas des expériences KEPLER et GALLIMERT ce rapport s'écrit $\Delta R/h$

12. La direction z est la direction du champ magnétique.

grossièrement comme la friction à la parois $\int_0^{h/2} dz \sigma B_0^2 \partial_z^2 \Delta^{-1} \mathbf{u} \sim 2\delta_{Ha} \sigma B_0^2 \mathbf{u}_\perp$, avec un facteur 2 à cause de la présence de deux couches limites d'Hartmann et \mathbf{u}_\perp désigne la vitesse dans les plans orthogonaux aux lignes de champ magnétique. La moyenne verticale du reste de l'équation fait apparaître un facteur $h/2$ [44].

$$\rho \partial_t \mathbf{u}_\perp + \rho \mathbf{u}_\perp \cdot \nabla \mathbf{u}_\perp = -\nabla_\perp p + \rho \nu \Delta \mathbf{u}_\perp - 2 \frac{\delta_{Ha}}{h} \sigma B_0^2 \mathbf{u}_\perp + \mathbf{f}_\perp. \quad (6.10)$$

Le rotationnel de l'équation (6.10) donne :

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\mathbf{u}_\perp \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla_\perp^2 \boldsymbol{\omega} - 2 \frac{\lambda \delta_{Ha}}{h} \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{f}, \quad (6.11)$$

avec $\lambda = \sigma B_0^2 / \rho$, homogène à l'inverse d'un temps. La bidimensionnalisation de l'écoulement par le champ magnétique permet de ne conserver que la composante horizontale de l'écoulement avec $\mathbf{u}_\perp(r, \theta) = \nabla \times (\psi(r, \theta) \mathbf{e}_z)$ et $\boldsymbol{\omega} = -\nabla_\perp^2 \psi$:

$$(\partial_t - \nu \nabla_\perp^2) \nabla_\perp^2 \psi + \mathcal{J}(\psi, \nabla_\perp^2 \psi) + 2 \frac{\lambda \delta_{Ha}}{h} \nabla_\perp^2 \psi = \nabla \times \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_z. \quad (6.12)$$

Dans les expériences KEPLER ou GALLIMERT, le forçage électromagnétique induit un écoulement moyen azimuthal. Il est donc possible de décomposer le champ de vitesse comme $\mathbf{u}_\perp = \mathbf{u}'_\perp + U_0(r) \mathbf{e}_\theta$. La solution U_0 est la solution à l'ordre 0 qui résulte de l'équilibre entre les courants induits et les courants imposés dans le coeur de l'écoulement. Autrement dit, comme les courants électriques passent dans les couches limites, le forçage \mathbf{f} est lui aussi confiné dans les couches limites. Ceci implique que les fluctuations \mathbf{u}_\perp autour de cette solution obéissent à une équation de la forme :

$$(\partial_t - \nu \nabla_\perp^2) \nabla_\perp^2 \psi + \mathcal{J}(\psi, \nabla_\perp^2 \psi) + \frac{\beta}{r} \partial_\theta \psi + 2 \frac{\lambda \delta_{Ha}}{h} \nabla_\perp^2 \psi = 0, \quad (6.13)$$

où les ' ont été omis et où $\beta = \partial_r \omega_0$ avec $\omega_0 = \partial_r(rU_0(r))/r$. Le terme β provient des termes de courbure dans l'inertie, de plus, en notant $U_0(r) = \frac{A}{r} + f(r)$:

$$\omega_0 = \frac{1}{r} \partial_r(rU_0(r)), \quad (6.14)$$

$$= \frac{U_0}{r} + \partial_r U_0, \quad (6.15)$$

$$= \frac{A}{r^2} + \frac{f(r)}{r} - \frac{A}{r^2} + \partial_r f, \quad (6.16)$$

en conséquence, le profil radial marginalement stable $U_0 \propto 1/r$ conduit à $\beta = 0$ et est donc linéairement stable pour des perturbations infinitésimales, ce qui semble être une application du critère de Rayleigh pour des écoulements 2D. Du point de vue de

l'analyse dimensionnelle, cette équation fait apparaître cinq paramètres λ , ν , U , U_0 et l_\perp pour deux dimensions, ce qui implique trois nombres sans dimension :

$$\tilde{Ro} = \frac{U}{U_0}, \quad \tilde{E} = \frac{\nu}{l_\perp U_0}, \quad \tilde{E}_\lambda = 2 \frac{\lambda l_\perp}{U_0} \frac{\lambda \delta_{Ha}}{h}. \quad (6.17)$$

L'équation devient alors :

$$\boxed{(\tilde{Ro} \partial_t - \tilde{E} \nabla_\perp^2) \nabla_\perp^2 \psi + \tilde{Ro} \mathcal{J}(\psi, \nabla_\perp^2 \psi) + \frac{\beta}{r} \partial_\theta \psi + \tilde{E}_\lambda \nabla_\perp^2 \psi = 0.} \quad (6.18)$$

Le paramètre \tilde{E}_λ lié au freinage magnétique est également responsable de la dissipation des structures grandes échelles et permet donc d'évaluer la taille typique des tourbillons. En effet, les vortex apparaissent proche du cylindre interne et sont donc liés à une instabilité de la couche limite de Shercliff δ_{Se} . Il est donc possible de prendre δ_{Se} pour estimer la longueur typique d'injection de l'énergie vers les grandes échelles. La turbulence $2D$ implique que les grandes échelles, donc la taille des tourbillons D , peuvent être estimées à l'aide de \tilde{E}_λ . Ce nombre joue le rôle de l'inverse d'un nombre de Reynolds [181] :

$$D \sim \tilde{E}_\lambda^{-3/4} \delta_{Se}, \quad (6.19)$$

Dans le cas de GALLIMERT, pour $Ha = 50$, $\delta_{Ha} \sim 0.5 \text{ mm}$ et $\delta_{Se} \sim 3.5 \text{ mm}$. Ce qui donne $3.8 \cdot 10^{-2}$ et $D \sim 4 \text{ cm}$. Cette estimation de la taille des tourbillons est cohérente en ordre de grandeur avec les observations réalisées en surface libre. De manière peut être plus intuitive, la taille des tourbillon est fixé par un équilibre entre le temps typique de retournement pour un vortex est $\tau \sim D/u_{BF}$, avec $u_{BF} \sim 3 \text{ mm.s}^{-1}$ la vitesse typique de l'oscillation basse fréquence, et le temps typique lié au freinage magnétique $\tau_{Ha} \sim h/2\delta_{Ha}\lambda$. Toujours pour $Ha \sim 50$, cela donne $D \sim 4.7 \text{ cm}$, ce qui surestime légèrement la taille des vortex par rapport à la précédente estimation mais reste raisonnable en ordre de grandeur.

Il est important de remarquer que l'équation (6.18) est identique à l'équation de Charney-Obukhov (en GFD), dans la limite *shallow water* des écoulements en présence de rotation globale et d'un *beta plane*. Dans cette limite, l'équation de Charney-Obukhov est [182] :

$$(Ro \partial_t - E \nabla_\perp^2) \nabla_\perp^2 \psi + Ro \mathcal{J}(\psi, \nabla_\perp^2 \psi) + \frac{\beta}{r} \partial_\theta \psi + E_\lambda \nabla_\perp^2 \psi = 0. \quad (6.20)$$

avec $E = \nu/\Omega l_\perp^2$ le nombre d'Ekman, $Ro = U/l_\perp \Omega$ le nombre de Rossby et $E_\lambda = \delta_E/h$ le nombre d'Ekman basé sur la couche d'Ekman. Ce dernier nombre sans dimension est devant le terme de friction du fond (*bottom friction*). Ces équations sont donc identiques,

\tilde{Ro} est analogue à Ro , \tilde{E} est analogue à E et \tilde{E}_λ est analogue à E_λ . En résumé :

- La friction du fond (*bottom friction*), dans les écoulements *shallow water* est équivalente à la friction du champ magnétique.
- Le *beta plane* engendré expérimentalement par un fond de cuve pentu ou par la rotation différentielle dans les écoulements planétaires est analogue au profil de vitesse de l'écoulement moyen U_0 .
- Le nombre de Rossby dans la limite des équations quasi-géostrophiques est petit devant l'unité. En MHD, ce nombre correspond au rapport des fluctuations de vitesse par rapport à l'écoulement moyen.

Il existe donc une analogie entre les systèmes MHD axisymétriques à grand nombre de Hartmann et bas Rm et les écoulements en présence de rotation globale, d'un *beta plane* et dans la limite eau peu profonde.

À très grand champ magnétique, lorsque les effets non linéaires sont négligeables, l'analogie entre les écoulements de Hartmann et les écoulements géostrophiques a récemment été explorée par Alboussière (2004) [34]. Dans cette limite où l'inertie disparaît du problème, il existe une analogie formelle entre les différents types de couches limites présentes dans chacun de ces problèmes.

Dans l'atmosphère, les écoulements dont les échelles typiques sont supérieures à l'échelle synoptique $\sim 1000 \text{ km}$ sont relativement bien décrits par l'approximation quasi-géostrophique. Du point de vue expérimental, la rotation différentielle est peu aisée à réaliser. Par contre, dans l'approximation eau peu profonde, il est possible de montrer que des variations topographiques du fond de la cuve engendrent un terme source dans l'équation du même type que l'effet β . L'analogie entre les écoulements en rotation, dans la limite eau peu profonde, et en présence d'un plan β avec les écoulements planétaires aux échelles plus grandes que l'échelle synoptique est quant à elle bien connue [182, 183].

Enfin, l'analogie présentée dans cette section est différente d'une autre analogie qui existe entre écoulement MHD (dans les électrolytes) et écoulement quasi-géostrophiques. En effet, une situation intermédiaire à ces deux systèmes a également été explorée expérimentalement. Dans la limite eau peu profonde, il est possible d'utiliser, à la place de l'eau, des solutions électrolytiques faiblement conductrices¹³. Il est alors possible d'utiliser dans ces systèmes un forçage de type MHD en imposant une distribution radiale de courant et un champ magnétique vertical. Dans ce cas, l'usage d'un plan β n'est pas utile. Le profil de l'écoulement moyen fait office d'effet β . Lorsque le forçage est suffisant, l'écoulement bifurque vers un régime oscillant avec l'apparition de tourbillons qui se propagent dans la direction azimuthale. Au-delà d'une certaine valeur critique

13. Grâce par exemple à la dissolution de sulfate de cuivre.

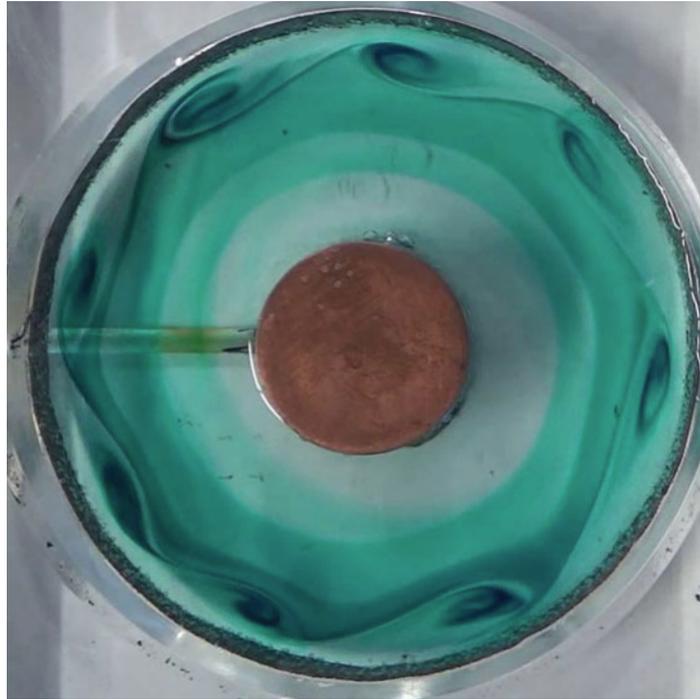


FIGURE 6.24 – Photographie du montage issue du travail de Suslov *et al.* [187]. Une fine couche de solution aqueuse est parcourue par une distribution radiale de courant. Le cylindre central est un aimant et le forçage électromagnétique pompe le fluide dans la direction azimuthale. Du colorant a été introduit afin de rendre visible les vortex.

du forçage, ces systèmes sont prompts à se déstabiliser [184-186]. Plus récemment, ces résultats ont été reproduits par Suslov *et al.* [187] comme l'illustre la photographie en Figure 6.24. En conclusion, il existe donc une très forte analogie entre les écoulements planétaires décrits par l'approximation quasi-géostrophique et :

- Les expériences qui présentent un *beta plane* à l'aide d'un fond incliné et qui vérifient l'approximation *shallow water* en présence de rotation globale.
- Les expériences qui présentent un forçage MHD dans les électrolytes (analogue au plan β) dans la limite *shallow water* [181].
- Les expériences de MHD dans les métaux liquides où le forçage MHD joue le rôle du plan β et où le freinage magnétique est l'analogue de la friction du fond, induite par l'approximation *shallow water*.

L'intérêt de cette analogie réside dans l'étude du transport de certaines quantités telles que le moment cinétique ou la chaleur. En effet, le rôle des écoulements géostrophiques dans le transport de chaleur est important notamment pour les modèles de climat. GALLIMERT montre par exemple que la présence de ces tourbillons entraîne une oscillation du flux de chaleur.

Conclusion

Les expériences KEPLER et GALLIMERT permettent d’explorer des écoulements engendrés par des forçages électromagnétiques dans des limites peu explorées jusqu’alors. Dans l’expérience KEPLER, la présence de courants électriques intenses, jusqu’à 3 kA , et d’un grand rapport d’aspect $\Delta R/h \gg 1$ permet notamment d’obtenir un nouveau régime où l’écoulement radial est $\propto \sqrt{I_0 B_0/r}$. Dans ce régime, la turbulence est quasi-2D et ce régime produit un transport optimal de moment cinétique qui obéit à la prédiction pour le régime *ultime*. Les lois d’échelle pour le transport de moment cinétique dans ce régime permettent de réaliser des prédictions pour les disques d’accrétion en astrophysique. Ceci permet ainsi de montrer que les valeurs de taux d’accrétion observées en astrophysique sont compatibles avec du transport turbulent de moment cinétique.

D’autres régimes ont également pu être explorés, comme le régime inertiel-résistif, dominé par les boucles de recirculation poloïdales où l’écoulement obéit à une loi d’échelle $u_\theta \propto (I_0 B_0)^{2/3}$. Ce régime a déjà été étudié numériquement [47] et expérimentalement [49] dans des expériences avec des forçages ou des rapports d’aspect différents. Ce régime pourrait par exemple se produire dans les batteries à métaux liquides comme l’ont récemment montré des simulations numériques [48]. Le régime fortement magnétisé dans l’expérience KEPLER a également été étudié expérimentalement [8, 9, 20] et numériquement [21]. Ce régime est connu pour présenter une instabilité vers un régime oscillant où des tourbillons se propagent dans la direction de l’écoulement [21, 65, 68].

L’expérience GALLIMERT, quant à elle explore également un autre type de forçage très peu étudié, où les courants électriques sont engendrés par l’effet Seebeck. Si plusieurs expériences et brevets ont été déposés sur ce type de pompage MHD, GALLIMERT est la première expérience à démontrer ce phénomène pour un système diphasique où les deux métaux sont liquides, et où l’écoulement est en contra-rotation. Dans cette expérience, deux régimes ont été observés, analogues aux régimes inertiel-résistif et fortement magnétisé de l’expérience KEPLER. Le régime fortement magnétisé présente lui aussi une transition vers un régime oscillant, associé à la propagation de tourbillons

dans la direction azimuthale. Lorsque le paramètre de contrôle est la différence de température, la transition est une bifurcation de Hopf, tandis que la transition avec le champ magnétique est plus difficile à décrire car le paramètre de contrôle intervient dans le mécanisme de saturation de l'instabilité.

Pour chacune de ces expériences, des lois d'échelles ont pu être obtenues notamment pour les écoulements moyens. Ces lois d'échelles permettent par exemple de réaliser des prédictions pour des systèmes réels comme les batteries à métaux liquides ou les *divertor* au Lithium liquide des Tokamaks.

Enfin, le mode oscillant présent dans les régimes fortement magnétisés des expériences KEPLER et GALLIMERT met en exergue l'analogie qui existe entre les systèmes MHD axisymétriques à grand champ magnétique et les écoulements quasi-géostrophiques. Cette analogie, déjà développée par Alboussière [34] lorsque l'inertie est négligée, peut donc s'étendre à la dynamique non-linéaire des tourbillons.

Perspectives

Du point de vue expérimental, il existe beaucoup de perspectives pour ces expériences. Les questions relatives au transport de moment cinétique dans les disques d'accrétion sont également associées à la question de l'origine de la turbulence dans les disques. En effet, le profil de vitesse képlerien étant linéairement stable par rapport à l'instabilité centrifuge, la question de la transition à la turbulence dans ces systèmes est une question encore ouverte. Cette question est directement associée à la MRI (Magneto-Rotational Instability). Une équipe de Princeton a récemment réussi à obtenir cette instabilité expérimentalement dans une expérience de Taylor-Couette [125]. Cette instabilité se produit pour des nombres de Reynolds magnétique plus grands que l'unité. Il serait donc intéressant à cet effet de construire une expérience de type KEPLER, avec un plus grand diamètre. Comme $Rm = \mu_0 \sigma UL$, utiliser du Sodium liquide serait plus intéressant car le Sodium liquide a une meilleure conductivité électrique que le Galinstan. L'objectif d'une telle expérience serait, au-delà d'obtenir l'instabilité MRI, de réussir à mesurer le transport de moment cinétique dû au tenseur de Maxwell et de le comparer, dans ce régime, au transport turbulent.

Une expérience à mi-chemin entre les expériences GALLIMERT et KEPLER serait bien entendu de réaliser une expérience de type KEPLER en utilisant cette fois-ci comme métal liquide non-plus du Galinstan mais le mélange diphasique Mercure-Gallium. Une telle expérience permettrait de réaliser des études des modes de ballonnement, dans une expérience avec un grand rapport d'aspect. Elle permettrait également d'étudier le rendement et la dissipation d'énergie dans un système diphasique MHD.

Enfin, dans la limite eau peu profonde, une telle expérience permettrait d'explorer les instabilités inter-faciales déclenchées par un écoulement super-sonique, c'est-à-dire un écoulement plus rapide que la vitesse des ondes de surface à l'interface Gallium-Mercure.

Comme les expériences KEPLER et GALLIMERT ont montré qu'elles étaient promptes à se déstabiliser dans le régime fortement magnétisé, pour engendrer un écoulement présentant des tourbillons qui se déplacent dans la direction de l'écoulement, il serait tout particulièrement intéressant de développer l'analogie qui existe entre ces systèmes et les écoulements géostrophiques. Par exemple, il existe peut-être un régime dans une expérience de type KEPLER qui permettrait de mieux comprendre les vortex au pôle de Jupiter.

Le caractère thermoélectrique du forçage de GALLIMERT est également un point à fortement développer. La structure du champ magnétique dans les Tokamaks implique, dans l'optique de l'utilisation de *divertor* TEMHD, de développer des expériences où le forçage de l'écoulement se produit au niveau des couches limites de Shercliff. L'objectif d'une telle expérience serait bien entendu de mesurer l'efficacité du transport de chaleur par ces écoulements. En effet, les expériences de Jaworski *et al.* [147] comme l'expérience GALLIMERT présentent un forçage qui se produit dans les couches limites de Hartmann. Dans la limite fortement magnétisé, un tel écoulement n'évolue plus avec le champ magnétique, tandis que le flux de chaleur diminue drastiquement avec le champ magnétique. Un forçage basé sur les couches limites de Shercliff permettrait peut-être (suivant la géométrie) de dépasser cette limite.

Enfin, GALLIMERT montre que la thermoélectricité peut jouer un rôle dans la production d'écoulement dans les batteries à métaux liquides. Le forçage TEMHD dans une telle expérience produit naturellement de la contra-rotation. Cependant, aucune instabilité de l'interface n'a été observée dans l'expérience GALLIMERT. Il serait donc intéressant à ce titre de reproduire l'expérience GALLIMERT, dans un rapport d'aspect différent, avec notamment un meilleur contrôle de l'épaisseur de Gallium et de Mercure afin d'explorer dans quel régime cet écoulement peut engendrer une déstabilisation de l'interface.

Chapitre 7

Annexes

7.1 Invariance de Galilée de la MHD

7.1.1 Transformation des champs électrique et magnétique

En relativité restreinte, la transformation de Lorentz désigne la transformation entre deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , où le second référentiel se déplace à une vitesse relative v par rapport au premier, qui laisse invariant les équations de l'électrodynamique. La transformation de Lorentz Λ est définie par :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

où γ , le facteur de Lorentz, et β sont tous deux définis en fonction de la vitesse v entre les deux référentiels et la vitesse de la lumière c :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (7.2)$$

Cette transformation préserve l'orientation des repères et donc $\det(\Lambda) = 1$. En relativité restreinte, les phénomènes physiques se produisent dans un espace de type Minkowski décrit par la métrique de Monkowski $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ et on peut voir la transformation de Lorentz comme une rotation hyperbolique dans cet espace. Les champs électrique et magnétique n'ont pas de représentation sous forme de quadri-vecteur¹, ils peuvent cependant être intégrés à travers un objet mathématique nommé bi-vecteur, qui est un tenseur de rang 2, anti-symétrique, appelé tenseur de Faraday. Ce tenseur

1. Tout comme le moment cinétique.

électromagnétique, noté F s'écrit en fonction des composantes de \mathbf{E} et \mathbf{B} :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

F étant un bi-vecteur, le changement de référentiel pour F est donné par² :

$$F' = \Lambda F \Lambda^T, \quad (7.4)$$

Ce double produit matriciel donne pour les champs \mathbf{E}' et \mathbf{B}' dans le nouveau référentiel :

$$E'_x = E_x, \quad (7.5)$$

$$E'_y = \gamma(E_y - c\beta B_z), \quad (7.6)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + c\beta B_y), \quad (7.7)$$

et :

$$B'_x = B_x, \quad (7.8)$$

$$B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right), \quad (7.9)$$

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right), \quad (7.10)$$

ce qui donne en notant avec l'indice \parallel et \perp les composantes parallèles et orthogonales des champs aux champs de vitesse :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_{\parallel} + \gamma \mathbf{E}_{\perp} + c\gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}, \quad (7.11)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}_{\parallel} + \gamma \mathbf{B}_{\perp} - \frac{\gamma}{c} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}, \quad (7.12)$$

où $\boldsymbol{\beta}$ est une quantité vectorielle collinéaire à \mathbf{v} . En conséquence, si dans le référentiel fixe il n'y a pas de champ électrique mais seulement un champ magnétique, un observateur dans le référentiel en mouvement observera la présence d'un champ électrique correspondant au dernier terme de l'équation pour \mathbf{E}' . Á l'inverse, si dans le référentiel au repos il y a seulement un champ électrique, l'observateur dans le référentiel en mouvement verra en plus la présence d'un champ magnétique correspondant au se-

2. La norme $(.,.)$ d'un quadri-vecteur X est donc $(X, X) = X^T \eta X$. Formellement il s'agit d'une pseudo-norme. Cette pseudo-norme est préservée par la transformation de Lorentz, donc Λ est pseudo-orthogonal.

cond terme de la dernière expression. Enfin, lorsque la vitesse relative entre les deux référentiels est faible devant celle de la lumière, le facteur de Lorentz tend vers 1 et $\beta \rightarrow 0$:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (7.13)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}. \quad (7.14)$$

Le champ magnétique est donc invariant sous l'effet de la transformation de Galilée.

7.1.2 Transformation de Lorentz du quadri-vecteur courant

En électrodynamique relativiste, la densité de charge ρ et la densité de courant électrique \mathbf{j} s'inscrivent dans le même objet, le quadri-vecteur courant, défini par $(j^\mu)_\mu = J = (c\rho, \mathbf{j})$. Le changement de référentiel \mathcal{R}_1 à \mathcal{R}_2 , est donné par la transformation de Lorentz :

$$J' = \Lambda J, \quad (7.15)$$

ce qui donne pour les composantes classiques ρ' et \mathbf{j}' :

$$\rho' = \gamma\rho - \frac{\gamma}{c^2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}, \quad (7.16)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}_\perp + \gamma\mathbf{j}_\parallel - \rho\gamma\mathbf{v}, \quad (7.17)$$

ce qui donne dans la limite $\beta \rightarrow 0$ et $\gamma \rightarrow 1$:

$$\rho' = \rho, \quad (7.18)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho\mathbf{v}. \quad (7.19)$$

Comme en MHD il n'y a pas de densité local de charge, hypothèse de quasi-neutralité, $\rho \simeq 0$ et \mathbf{j} est également conservé par le *boost* de Galilée. Ceci aurait pu directement se montrer à l'aide de la relation de Maxwell-Ampère en l'absence de courant de déplacement, cette équation doit être invariante sous l'effet de la transformation de Galilée, ce qui implique que $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$.

Les différentes relations de passage sont donc :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (7.20)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad (7.21)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}. \quad (7.22)$$

Enfin, la loi d'Ohm dans le référentiel du fluide lie directement \mathbf{j}' à \mathbf{E}' , en supposant que les coefficients de transport ne soient pas modifiés par le mouvement subi par le fluide, s'énonce $\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$, dans le référentiel \mathcal{R}_2 . Dans le référentiel du laboratoire, \mathcal{R}_1 , au repos, la loi d'Ohm devient, en prenant en compte les différentes relations précédentes :

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}', \quad (7.23)$$

$$\text{i.e } \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.24)$$

7.1.3 Invariance de l'équation d'induction

Montrons enfin que l'équation d'induction est invariante sous l'effet du *boost* de Galilée :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t, \quad (7.25)$$

$$t' = t \quad (7.26)$$

Il vient naturellement que $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{V}$. L'équation d'induction se réécrit :

$$\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial \mathbf{x}'} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{B}' \cdot \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla'^2 \mathbf{B}', \quad (7.27)$$

avec $\partial x'_i / \partial x_j = \delta_{ij}$, $\partial t' / \partial t = 1$ et $\partial \mathbf{x}' / \partial t = -\mathbf{V}$. Puisque \mathbf{V} ne dépend pas de l'espace, $\mathbf{B}' \cdot \nabla' \mathbf{u} = \mathbf{B}' \cdot \nabla' \mathbf{u}'$ et :

$$\partial'_t \mathbf{B}' = \nabla' \times (\mathbf{u}' \times \mathbf{B}') + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla'^2 \mathbf{B}', \quad (7.28)$$

l'équation d'induction est donc bien inchangée sous l'effet d'une transformation Galiléenne et les équations de la MHD sont donc bien invariantes par transformation Galiléenne.

7.2 Coefficients de transport

Dans le cas de la thermoélectricité, il est possible d'obtenir l'expression des flux et des coefficients de transport associés, par une méthode statistique à l'aide d'un modèle semi-classique³.

La statistique des électrons dans un métal est décrite par la fonction de distribution pour les électrons $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, avec \mathbf{r} la position et \mathbf{p} la quantité de mouvement. f suit

3. Pour plus de détail, une description plus complète des propriétés de transport des électrons dans un métal peut se trouver dans le livre *Physical kinetics* de Lifshitz & Pitaevski [188](#)

une équation type Boltzmann où $\mathcal{C}[f]$ désigne l'intégrale de collision qui tient compte des interactions entre particules. ϵ désigne l'énergie cinétique des particules. Pour des raisons de simplicité les indices i sont omis pour les grandeurs $\mathbf{r}, \mathbf{p} \dots$ où i serait l'indice de la particule i :

$$\partial_t f + \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \mathcal{C}[f]. \quad (7.29)$$

À l'équilibre, les électrons suivent une distribution de Fermi $f_0 = 1/(1+e^{-(\epsilon-\mu)/k_B T})$ avec μ le potentiel chimique et k_B la constante de Boltzmann. Cette distribution donne une intégrale collisionnelle nulle et $\mathcal{C}[f_0] = 0$. À l'équilibre, entre les chocs, les électrons sont dans un régime balistique, et sont décrits par les équations d'Hamilton, qui prennent uniquement en compte les forces extérieures au système :

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{r}} \quad (7.30)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}}, \quad (7.31)$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m_e$, désigne la vitesse de l'électron et $\dot{(\)} = \partial_t(\)$. Dans la suite, le système est considéré proche de l'équilibre et en présence d'un champ électrique \mathbf{E} et d'un gradient de température ∇T . Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron donne $\dot{\mathbf{p}} = -e\mathbf{E}$. Proche de l'équilibre, l'approximation de la réponse linéaire, permet de développer la fonction de distribution comme $f = f_0 + \delta f$. Il est donc possible de linéariser l'équation de transport (7.29) où l'intégrale de collision $\mathcal{C}[f]$ est donnée par un développement de Taylor. En régime stationnaire, il vient :

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = \mathcal{C}[f_0] + \left(\frac{d\mathcal{C}}{dt} \right)_{f=f_0} \delta f, \quad (7.32)$$

où la règle de la chaîne a été utilisée :

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}. \quad (7.33)$$

La température est une fonction de l'espace $T(\mathbf{r})$, par conséquent :

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} = \nabla T \frac{\partial f_0}{\partial T} \quad (7.34)$$

$$= \nabla T \frac{\epsilon - \mu}{k_B T^2} e^{-\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} f_0^2 \quad (7.35)$$

$$= -\nabla T \frac{\epsilon - \mu}{T} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}. \quad (7.36)$$

Comme pour le modèle de Drude de l'électron, les interactions entre les électrons et les ions se font sur un temps typique $\tau(\epsilon)$, l'équation (7.32) devient :

$$-\left(e\mathbf{E} + \frac{\epsilon - \mu}{T}\nabla T\right) \cdot \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = -\frac{\delta f}{\tau(\epsilon)}. \quad (7.37)$$

Les flux sont définis comme les intégrales des quantités statistiques pondérées par la distribution de probabilité δf , ainsi :

$$\mathbf{j} = -e \int \mathbf{v} \delta f \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (7.38)$$

$$\mathbf{j}_Q = \int (\epsilon - \mu) \mathbf{v} \delta f \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (7.39)$$

où \hbar est la constante de Planck réduite et le facteur 2 dans la densité d'état correspond au nombre de spin. Il est possible de développer les expressions pour \mathbf{j} et \mathbf{j}_Q . Comme les champs \mathbf{E} et ∇T ne dépendent pas de \mathbf{v} ou ϵ , il est possible de les sortir de l'intégrale :

$$\mathbf{j} = e \int \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \left(e\mathbf{E} + \frac{\epsilon - \mu}{T}\nabla T\right) \tau(\epsilon) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\right) \quad (7.40)$$

$$= \sigma \mathbf{E} - \sigma S \nabla T, \quad (7.41)$$

et :

$$\mathbf{j}_Q = \int \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \left((\epsilon - \mu)e\mathbf{E} + \frac{(\epsilon - \mu)^2}{T}\nabla T\right) \tau(\epsilon) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\right) \quad (7.42)$$

$$= \sigma S T \mathbf{E} - \kappa \nabla T, \quad (7.43)$$

où il est supposé, dans la seconde ligne, que les coefficients de transport sont isotropes, et où σ désigne la conductivité électrique, S le coefficient Seebeck et κ le coefficient de transport de chaleur dû aux électrons :

$$\sigma = \frac{e^2}{3} \int \frac{8\pi^2 \hbar p dp}{(2\pi\hbar)^3} v^2 \tau(\epsilon) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\right), \quad (7.44)$$

$$\sigma S = -\frac{e}{3T} \int \frac{8\pi^2 \hbar p dp}{(2\pi\hbar)^3} v^2 (\epsilon - \mu) \tau(\epsilon) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\right), \quad (7.45)$$

$$\lambda = -\frac{1}{3T} \int \frac{8\pi^2 \hbar p dp}{(2\pi\hbar)^3} v^2 (\epsilon - \mu)^2 \tau(\epsilon) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\right). \quad (7.46)$$

le facteur 1/3 vient de l'isotropie et l'égalité $p^2/2m_e = \epsilon$ peut se différencier pour obtenir $p dp = m_e d\epsilon$. Les coefficients de transport correspondent donc aux différents moments associés à la distribution de probabilité de loi $v^2 \tau(\epsilon) (-\partial f_0/\partial \epsilon)$. De plus, dans un métal,

les électrons responsables des phénomènes de conduction sont essentiellement ceux pris dans la couche de Fermi. Dans la limite où $k_B T \ll \epsilon_F$, où ϵ_F est le niveau d'énergie de Fermi, il est donc possible de réaliser une expansion de Sommerfield. La conductivité électrique :

$$\sigma = \frac{e^2}{3} \int \frac{m_e d\epsilon}{\pi \hbar^2} v^2 \tau(\epsilon) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right), \quad (7.47)$$

est dans cette limite :

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau(\epsilon_F)}{m_e} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{(k_B T)^2}{\epsilon_F^2} + \dots \right). \quad (7.48)$$

où $v_F = \hbar k_F / m_e$ désigne la vitesse de Fermi et k_F le mode de Fermi donné par $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m_e$. La densité d'électrons qui participent à la conduction est reliée à k_F par $n \sim (k_F / \sqrt{3}\pi)^3$.

Il s'agit, à un facteur multiplicatif près, de l'expression de la conductivité électrique dans le modèle de Drude. En effet, le passage par une équation de transport n'apporte pas spécialement de modification par rapport à un modèle simple d'électrons dans un solide. Elle permet cependant d'obtenir les expressions des flux en présence de gradient de température et de calculer les coefficients de transport associés. Les autres coefficients de transport sont également donnés par un développement de Sommerfield :

$$\sigma S = -\sigma_0 \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2 T}{e \epsilon_F}, \quad (7.49)$$

$$\kappa = \frac{\pi^2}{3} \frac{n \tau(\epsilon_F)}{m_e} k_B^2 T, \quad (7.50)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} \sigma_0 \frac{k_B^2 T}{e^2} \quad (7.51)$$

où la température de Fermi est donnée par $k_B T_F = \epsilon_F$ et $\sigma_0 = n e^2 \tau(\epsilon_F) / m_e$. L'ordre de grandeur classique pour le coefficient thermoélectrique, à savoir k_B / e , apparaît alors avec une correction due à la distribution de Fermi, d'ordre T / T_F . Cette correction n'est pas négligeable, en effet, $k_B / e \sim 8.625 \cdot 10^{-5} \text{V.K}^{-1}$ et pour les métaux usuels, $T_F \sim 10^4 - 10^5$. À température ambiante, $T / T_F \sim 3 \cdot 10^{-2} - 10^{-3}$, ce qui donne un coefficient Seebeck de quelques microvolts. Ceci est dû au fait que le coefficient Seebeck reflète la symétrie électrons-trous qui est élevée dans les métaux. Ceci explique la recherche de matériaux à coefficients Seebeck élevés par exemple à l'aide de semi-conducteurs pour lesquels le dopage permet de contrôler cette asymétrie. Les expressions des coefficients permettent également de vérifier la loi de Wiedemann-Franz qui stipule

que le rapport $\kappa/\sigma T$ est une constante :

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2. \quad (7.52)$$

En thermodynamique proche de l'équilibre, la densité de courant et le flux de chaleur s'écrivent donc finalement :

$$\boxed{\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} - \sigma S \nabla T}, \quad (7.53)$$

et :

$$\boxed{\mathbf{j}_Q = \sigma S T \mathbf{E} - \kappa \nabla T}. \quad (7.54)$$

7.3 Thermoélectricité en présence d'un pseudo-vecteur

En MHD, l'usage de champ magnétique externe est omniprésent et il est donc raisonnable de s'interroger sur la modification de l'effet thermoélectrique par le champ magnétique. En théorie, la présence d'un champ magnétique modifie la description précédente en brisant la symétrie du système. Le système n'étant plus isotrope, les coefficients de transport deviennent des matrices et sont fonctions de B . Si le champ magnétique n'est pas trop fort, il est possible, à la place de passer par une description statistique, de développer les coefficients de transport au premier ordre en $O(\mathbf{B})$:

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \rho \delta_{\alpha\beta} + \nu \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B^\gamma, \quad (7.55)$$

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = S \delta_{\alpha\beta} + \zeta \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B^\gamma, \quad (7.56)$$

où ρ est la résistivité du métal. Le champ électrique devient alors :

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} + \nu \mathbf{j} \times \mathbf{B} + S \nabla T + \zeta \nabla T \times \mathbf{B}. \quad (7.57)$$

Cette équation peut également s'obtenir de la même façon qu'en l'absence de champ magnétique à l'aide d'une méthode statistique et de l'approximation du temps de relaxation [188]. Le calcul est cependant plus fastidieux et ne sera pas présenté ici. Il est par contre possible de retrouver les coefficients ν et ζ seulement par analyse dimensionnelle. Le second terme est en fait bien connu en Hall-MHD et rend compte de la résistance additionnelle due au champ magnétique. Le dernier terme qui apparaît dans le membre de droite de l'équation (7.57) correspond à l'effet Nernst. Il s'agit du champ électrique engendré par un gradient de température et soumis à un champ magnétique.

En pratique, sans champ magnétique et en présence de gradient de température, les courants électriques proviennent de l'effet Seebeck. Il vient donc $\zeta \sim \nu S/\rho$, en d'autres termes l'effet Nernst est un effet magnétorésistif dû au couplage entre effet Seebeck et effet Hall.

Enfin, cette expression décrit le champ électrique en fonction du courant. Or en MHD, le forçage sur le fluide étant dû à la force de Laplace, il est intéressant d'obtenir grâce à l'équation (7.57) une expression pour la densité de courant \mathbf{j} en fonction des autres variables. Pour ce faire, le produit scalaire et le produit vectoriel de l'équation (7.57) avec \mathbf{B} donnent :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \rho \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} + S \nabla T \cdot \mathbf{B}, \quad (7.58)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \rho \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + S \nabla T \times \mathbf{B} + \frac{\nu S}{\rho} (\nabla T \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (7.59)$$

En utilisant l'expression du double produit vectoriel, on obtient les expressions suivantes :

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{j} \mathbf{B} - B^2 \mathbf{j}, \quad (7.60)$$

$$(\nabla T \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla T \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} - B^2 \nabla T. \quad (7.61)$$

Le produit de ρ avec la première équation auquel on additionne le produit de S avec la seconde équation permet d'obtenir :

$$\rho (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + S (\nabla T \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \underbrace{(\rho \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} + S \nabla T \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}_{=\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B}} - \rho B^2 \mathbf{j} - S B^2 \nabla T. \quad (7.62)$$

Le produit de l'équation (7.62) par ν/ρ dans lequel est injecté le produit vectoriel entre $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, relation (7.59) donne :

$$\underbrace{\nu (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{\nu S}{\rho} (\nabla T \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}_{=\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \rho \mathbf{j} \times \mathbf{B} - S \nabla T \times \mathbf{B}} = \frac{\nu}{\rho} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} - \nu B^2 \mathbf{j} - \frac{\nu S}{\rho} B^2 \nabla T. \quad (7.63)$$

Cette équation fait toujours intervenir des produits vectoriels de \mathbf{j} et ∇T avec \mathbf{B} . Il est possible de les remplacer en utilisant l'équation (7.57) multipliée par un facteur ρ/ν . Ceci donne pour finir l'expression de la densité de courant électrique :

$$\boxed{\mathbf{j} = \frac{1}{1 + \frac{\nu^2}{\rho^2} B^2} \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{E} - \frac{S}{\rho} \nabla T - \frac{\nu}{\rho^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \frac{\nu^2}{\rho^3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{\nu^2 S}{\rho^3} B^2 \nabla T \right)}. \quad (7.64)$$

Lorsque que $B^2 \rightarrow 0$, cette expression redevient l'expression du courant thermoélec-

trique donné par l'équation (7.53) avec $\sigma = 1/\rho$. Afin de quantifier l'effet du champ magnétique sur la loi d'Ohm il faut donc évaluer le paramètre de Hall $\beta = \nu B/\rho$.

Il est possible d'évaluer ν par analyse dimensionnelle. ν a la dimension $L^3.T^{-1}.A^{-1}$. En prenant les mêmes grandeurs physiques que pour le coefficient Seebeck, voir Tableau 4.1 chapitre 4, c'est-à-dire 7 grandeurs physiques et 5 unités, le théorème π indique que le problème dépend de deux nombres sans dimension. Seuls ν et e font intervenir des ampères. Le produit $\pi_1 = \nu e k_F^3$ et le rapport $\pi_2 = k_B T/\epsilon_F$ sont donc sans dimension. Il existe donc une fonction \mathcal{G} telle que :

$$\nu = \frac{1}{k_F^3 e} \mathcal{G} \left(\frac{T}{T_F} \right). \quad (7.65)$$

A la différence du coefficient thermoélectrique, l'effet Hall ne disparaît pas lorsque $T \rightarrow 0$, dans la limite $T \ll T_F$ la fonction \mathcal{G} doit donc tendre vers une constante et :

$$\boxed{\nu \sim \frac{1}{ne}}, \quad (7.66)$$

où n est la densité d'électrons dans le métal $n \sim k_F^3$. Le paramètre de Hall peut donc être évalué pour un métal :

$$\beta = \frac{\nu B}{\rho} = \nu \sigma B, \quad (7.67)$$

$$\sim \frac{\sigma B}{ne}, \quad (7.68)$$

$$\sim 10^{-4} \ll 1, \quad (7.69)$$

où la densité d'électrons libre dans un métal est en ordre de grandeur, $n \sim 10^{28} m^{-3}$ donc $\nu \sim 6 \cdot 10^{-10} m^3.s^{-1}.A^{-1}$, et $\sigma \sim 3 \cdot 10^6 S.m^{-1}$. Une valeur typique de champ magnétique pour une expérience est $B \sim 5 \cdot 10^{-2} T$. Ce résultat était attendu du fait que la fréquence de collision des électrons avec le réseau est grande devant la fréquence cyclotron. À l'inverse, par exemple, ce n'est pas le cas pour les plasmas basse (ou bi-)température⁴ qui sont de mauvais conducteurs mais où la fréquence typique de collision entre particules chargées peut être faible devant la fréquence cyclotron. Les électrons ont alors le temps entre deux chocs d'être déviés significativement par le champ magnétique.

4. Les plasmas bi-température sont des gaz ionisés où la température des électrons est très grandes $10^3 - 10^4 K$ devant la température des ions, qui peuvent être à température ambiante.

Thermoélectricité en présence de rotation

D'après la théorie d'Onsager, les pseudo-vecteurs modifient les coefficients de transport, comme en présence de champ magnétique avec l'effet Hall présenté plus haut. La rotation globale étant également un pseudo-vecteur, l'analyse précédente peut être réalisée de la même façon. En particulier, le tenseur de résistivité électrique se développe :

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\omega}) = \rho\delta_{\alpha\beta} + \xi\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma. \quad (7.70)$$

Cet effet, parfois appelé galvano-gyroscopique [189], correspond à la déviation des lignes de courant en présence de rotation et donc à une forme de freinage. L'équivalent du paramètre de Hall est le nombre sans dimension $Co = \sigma\xi\omega$. La même analyse dimensionnelle en remplaçant B par Ω indique pour ν :

$$\xi = \frac{m_e}{ne^2} \mathcal{F} \left(\frac{T}{T_F} \right). \quad (7.71)$$

Le nombre sans dimension se simplifie, $Co \sim \omega\tau$, dans la limite où $T \ll T_F$ et donc où l'influence de la fonction \mathcal{F} est négligée. Pour un métal, $\xi \sim 10^{-20}$, les corrections dues à l'effet galvano-gyroscopique sont négligeables en pratique. Comme pour l'effet Hall, il existe peut-être des situations pour lesquelles ces effets deviennent mesurables, par exemple dans le cas des plasmas faiblement conducteurs qui présentent des valeurs de densité électronique n bien plus faibles que les métaux.

7.4 Bilan d'énergie en TE-MHD

Cette section est dédiée aux équations pour le bilan global d'énergie ainsi qu'à l'équation pour la température. On considère à cet effet un écoulement compressible afin d'obtenir les équations avec un certain niveau de généralité. Les équations de départ sont l'équation pour la conservation de la masse, l'équation de Navier-Stokes et l'équation d'induction :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (7.72)$$

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathcal{M}) + \rho \mathbf{g}, \quad (7.73)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} + \frac{\eta}{\sigma} \nabla \sigma \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla S \times \nabla T, \quad (7.74)$$

avec $\tau_{ij} = \rho\nu(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \mu\partial_i u_i$ le tenseur des contraintes de cisaillement, μ la seconde viscosité et $\mathcal{M}_{ij} = \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{B^2}{2\mu_0} \delta_{ij}$, la partie magnétique du tenseur de Maxwell. Comme le fluide est considéré comme compressible, il faut ajouter à cela les identités

thermodynamiques, valables pour les particules de fluides. Pour obtenir l'équation de la température, il faut tout d'abord réaliser un bilan d'énergie pour l'énergie cinétique, l'énergie magnétique et l'énergie interne.

7.4.1 Bilan d'énergie cinétique

Le produit scalaire entre le champ de vitesse et l'équation de Navier-Stokes, en utilisant la conservation de la masse, donne :

$$\partial_t \left(\rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathcal{M}) \right) = -\nabla \mathbf{u} : (\boldsymbol{\tau} + \mathcal{M}) + p \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}, \quad (7.75)$$

où le terme dans la divergence, dans le membre de gauche, fait apparaître le flux d'énergie cinétique. Comme dans le cas classique, intégrer l'équation (7.75) sur le volume total Ω , avec la condition aux limites pour la vitesse $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$, donne le bilan total d'énergie cinétique, dans le cas incompressible :

$$\frac{dE_c}{dt} = T + T_B - D_\nu \quad (7.76)$$

où :

$$E_c = \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} dV, \quad (7.77)$$

$$D_\nu = \int_{\Omega} \rho \nu (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV, \quad (7.78)$$

$$T = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \mathcal{M} dV, \quad (7.79)$$

$$T_B = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV. \quad (7.80)$$

avec E_c l'énergie cinétique totale, homogène à une énergie, D_ν la dissipation visqueuse, T le terme de transfert d'énergie magnétique en énergie cinétique et T_B la puissance délivrée par la force de flottaison. Le terme T_B ne disparaît pas dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Les termes du membre de droite sont homogènes à une puissance. Dans le cas incompressible, la conservation de l'énergie cinétique pour la TEMHD est identique à celle du cas MHD classique : en l'absence de forçage mécanique, le transfert d'énergie magnétique en énergie cinétique est le seul terme d'injection.

7.4.2 Bilan d'énergie magnétique

Le produit scalaire entre le champ magnétique \mathbf{B}/μ_0 et l'équation d'induction donne :

$$\partial_t \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right)}_{\textcircled{1}} = \underbrace{\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u})}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})}_{\textcircled{3}} + \frac{\eta}{\sigma} \mathbf{B} \cdot (\nabla \sigma \times \mathbf{j}) - \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla S \times \nabla T).$$

Afin de faire apparaître une équation de conservation, il faut obtenir la divergence du flux d'énergie électromagnétique. Pour ce faire, les termes numérotés $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ et $\textcircled{3}$ deviennent :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) - \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \textcircled{2} &= \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}{\mu_0} : \nabla \mathbf{u}, \\ &= \mathcal{M} : \nabla \mathbf{u} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \textcircled{3} &= \eta \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{j}, \\ &= \nabla \cdot (\eta \mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \cdot \nabla \times (\eta \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Après avoir injecté les expressions précédentes et réarrangé les termes, le bilan d'énergie magnétique devient :

$$\partial_t \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \eta \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) = \mathcal{M} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \times (\eta \mathbf{B}) \cdot \mathbf{j} + \frac{\eta}{\sigma} \mathbf{B} \cdot (\nabla \sigma \times \mathbf{j}) + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla S \times \nabla T),$$

où, dans le membre de droite, le deuxième et le troisième terme se simplifient, ce qui donne :

$$\partial_t \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \eta \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) = \mathcal{M} : \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla S \times \nabla T). \quad (7.81)$$

De la même façon, intégrer cette équation pour le volume total Ω donne, dans le cas incompressible :

$$\frac{dE_B}{dt} = F - D_\eta - T + T_{TE} \quad (7.82)$$

avec :

$$E_B = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV, \quad (7.83)$$

$$F = - \oint_{\partial\Omega} \eta \mathbf{j} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (7.84)$$

$$D_\eta = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} dV, \quad (7.85)$$

$$T_{TE} = - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla S \times \nabla T), \quad (7.86)$$

E_B est l'énergie magnétique totale, F le flux d'énergie électromagnétique injecté dans le système à travers le vecteur de Poynting, D_η est la dissipation Ohmique. La présence de variations spatiales de σ n'entraîne pas de modification de l'équation pour l'énergie magnétique. En revanche, la présence d'un gradient de coefficient Seebeck non aligné au gradient de température fait apparaître un nouveau terme, T_{TE} , qui correspond au transfert d'énergie interne (température) en énergie magnétique.

7.4.3 Bilan d'énergie interne

La production d'énergie interne étant directement liée à la production d'entropie, pour obtenir l'équation du bilan local d'énergie interne, il faut au préalable obtenir l'équation locale pour l'énergie total e :

$$\partial_t e_{tot} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{tot} = 0, \quad (7.87)$$

$$e_{tot} = \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \rho e, \quad (7.88)$$

avec \mathbf{j}_e le flux total d'énergie. La densité d'énergie interne suit de la même façon une équation de conservation :

$$\partial_t(\rho e) + \nabla \cdot (\mathbf{j}_Q + \rho \mathbf{u}e) = L, \quad (7.89)$$

avec \mathbf{j}_Q est le flux de chaleur, donné par les relations d'Onsager. Pour obtenir le terme source L et la densité de flux d'énergie total \mathbf{j}_{tot} , il faut additionner les bilans d'énergie

cinétique (7.75), d'énergie magnétique (7.81) et d'énergie interne (7.91), ce qui donne :

$$\mathbf{j}_{tot} = \rho \mathbf{u} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + h + \frac{\mathbf{B}^2}{2\rho\mu_0} \right) + \eta \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathcal{M}) + \mathbf{j}_Q, \quad (7.90)$$

où $h = e + p/\rho$, la densité locale d'enthalpie. Le terme source L est :

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho e) + \nabla \cdot (\mathbf{j}_Q + \rho \mathbf{u} e) = & - \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} \\ & + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla S \times \nabla T), \end{aligned}$$

De la même façon, intégrer cette équation sur le volume Ω , dans le cas incompressible, avec les conditions aux limites $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$, l'équation pour l'énergie interne totale E_{in} est :

$$\frac{dE_{in}}{dt} = \Phi + D_\nu + D_\eta - T_{TE} - T_B, \quad (7.91)$$

avec :

$$E_{in} = \int_{\Omega} \rho e dV, \quad (7.92)$$

$$\Phi = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S}, \quad (7.93)$$

où Φ est le flux total de chaleur à travers le système. En conséquence, les dissipations visqueuse et ohmique sont des termes sources pour l'énergie interne, comme le flux de chaleur. Le terme T_{TE} correspond donc bien à un terme de transfert de l'énergie interne en énergie magnétique. Enfin, en régime stationnaire, les équations de bilan global deviennent :

$$0 = T + T_B - D_\nu, \quad (7.94)$$

$$0 = F + T_{TE} - T - D_\eta, \quad (7.95)$$

$$0 = \Phi + D_\nu + D_\eta - T_{TE} - T_B. \quad (7.96)$$

Pour l'expérience GALLIMERT, aucune puissance mécanique n'est introduite $P_{in} = 0$ ou n'est extraite $P_{ex} = 0$ du système. De même, aucune puissance électromagnétique n'est introduite F_{in} ou n'est extraite F_{ex} du système, donc $F_{in} = F_{ex} = 0$, donc $F = F_{in} + F_{ex} = 0$. En conséquence, le premier principe implique que $\Phi = \Phi_{in} + \Phi_{ex} = 0$, c'est-à-dire que le flux de chaleur qui pénètre l'expérience est identique au flux de chaleur

qui en sort, $\Phi_{in} = -\Phi_{ex}$, voir Figure 7.1. Le bilan devient donc :

$$T_B + T_{TE} = D_\nu + D_\eta. \quad (7.97)$$

L'énergie interne transférée en énergie magnétique et cinétique par les termes T_B, T_{TE}

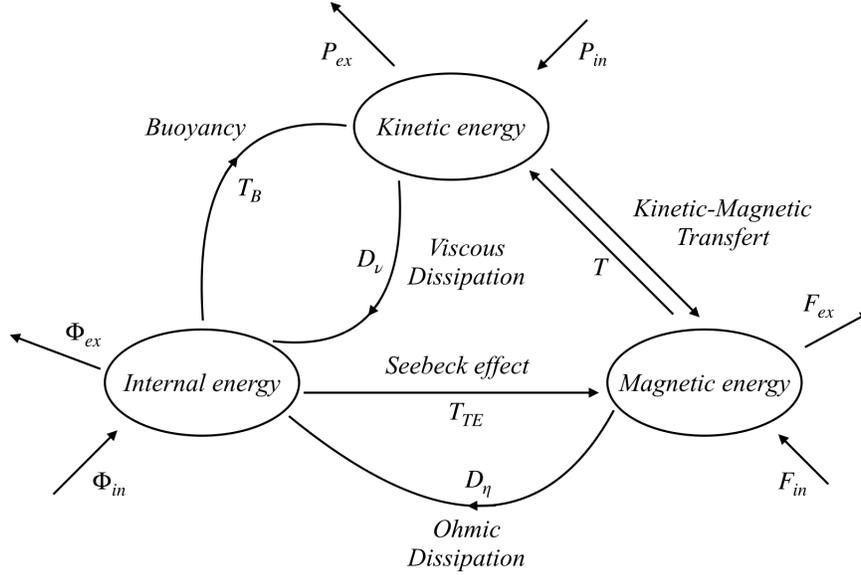


FIGURE 7.1 – Schéma des différents transferts d'énergie en TE-MHD. P_{in} est la puissance mécanique fournie au système, P_{ex} est la puissance mécanique extraite, Φ_{in} est le flux de chaleur entrant dans le système et Φ_{ex} est le flux de chaleur sortant, F_{in} est la puissance électromagnétique fournie au système et F_{ex} est la puissance électromagnétique extraite.

et T est donc par la suite dissipée par les effets visqueux et Joule. Pour l'expérience GALLIMERT, l'écoulement azimuthal est généré par le pompage TE-MHD à travers le terme T_{TE} , qui fait directement apparaître les gradients de température, sensibles à la convection. Contrairement à l'expérience KEPLER, le rendement de la pompe TE-MHD est donc modifié par l'efficacité de la convection horizontale. Pour un système où le gradient thermique serait vertical, stablement stratifié, le rendement γ de la pompe TE-MHD prend la même forme que pour l'expérience KEPLER :

$$\gamma = \frac{D_\nu}{T_{TE}}, \quad (7.98)$$

$$= \frac{D_\nu}{D_\nu + D_\eta}, \quad (7.99)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{D_\eta}{D_\nu}}. \quad (7.100)$$

Cette approximation semble valable pour l'expérience GALLIMERT car les nombres de Rayleigh atteints ne sont pas très grands, $7 \cdot 10^4$ et l'écoulement dû à la convection est donc relativement faible. Dans le régime fortement magnétisé, la prédiction pour l'écoulement proportionnel à I_{TE} , le courant thermoélectrique et indépendant de B_0 :

$$\bar{u}_\theta \sim \frac{I_{TE}}{4\pi r(\rho\sigma\nu)^{1/2}} \frac{\sigma_{Hg}\sigma_{Ga}}{\sigma_{Hg} + \sigma_{Ga}}, \quad (7.101)$$

donne, comme dans l'expérience KEPLER, un rendement $\gamma \sim 1/2$. Le bilan d'énergie interne permet également d'accéder à l'équation pour la température dans les problèmes de TE-MHD, équation obtenue dans les sections suivantes.

7.4.4 Bilan d'entropie en TE-MHD

Pour obtenir l'équation de la température il faut tout d'abord obtenir l'équation pour la conservation de l'entropie en TE-MHD. La première identité thermodynamique, pour l'énergie interne est :

$$de = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho, \quad (7.102)$$

avec s l'entropie par unité de masse. Puisque cette relation porte sur la dérivée totale, elle implique :

$$\partial_t e = T\partial_t s + \frac{p}{\rho^2}\partial_t \rho, \quad (7.103)$$

$$\nabla e = T\nabla s + \frac{p}{\rho^2}\nabla \rho. \quad (7.104)$$

Ces relations s'injectent dans l'équation pour la conservation locale de l'énergie interne (7.91) :

$$\underbrace{\rho\partial_t e + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla e + p\nabla \cdot \mathbf{u}}_{\textcircled{i}} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_Q - \left(\frac{B^2}{\mu_0}\right) \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla S \times \nabla T).$$

Le terme \textcircled{i} , devient, grâce à la première identité thermodynamique :

$$\textcircled{i} = \rho T\partial_t s + \frac{p}{\rho}\partial_t \rho + \rho\mathbf{u} \cdot \left(T\nabla s + \frac{p}{\rho}\nabla \rho\right) + p\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (7.105)$$

$$= \rho T\partial_t s + \rho T\mathbf{u} \cdot \nabla s, \quad (7.106)$$

où la conservation de la masse a été injectée pour obtenir la dernière ligne. Le bilan d'entropie s'écrit donc en TE-MHD :

$$\boxed{\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_Q - \left(\frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho g z \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla S \times \nabla T).}$$
(7.107)

7.4.5 Équation pour la température en TE-MHD

Pour obtenir l'équation pour la température en TE-MHD, il faut développer la différentielle totale de l'entropie à l'aide des coefficients calorimétriques :

$$T ds = c_p dT + \beta dp, \quad (7.108)$$

avec $c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$ la capacité calorifique massique à pression constante et $\beta = T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T$ le coefficient de compression massique isotherme. Comme il s'agit d'une différentielle totale, elle s'applique à la dérivée particulaire, de sorte que cette relation s'injecte dans l'équation (7.107) :

$$\boxed{\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\rho \beta \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{j}_Q - \left(\frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla S \times \nabla T).}$$
(7.109)

Dans l'approximation de Boussinesq, les variations de pression sont négligeables, et $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, l'équation pour la température (7.109) se simplifie donc :

$$\boxed{\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_Q + \nabla \mathbf{u} : \boldsymbol{\tau} - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot (\nabla S \times \nabla T),}$$
(7.110)

avec les expressions pour la densité de courant électrique et le flux de chaleur :

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \sigma S \nabla T, \quad (7.111)$$

$$\mathbf{j}_Q = \sigma S T (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \lambda \nabla T, \quad (7.112)$$

avec λ la conductivité thermique. L'équation de température est donc singulière au niveau de la ligne de contact entre les deux métaux liquides du fait du saut des coefficients σ, S et λ . Dans chaque phase l'équation pour la température se simplifie, en supposant

les coefficients de transport homogènes :

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{DT}{Dt} = & -\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} - \sigma S \nabla \cdot (T \mathbf{E} + T \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 T + \nabla \mathbf{u} : \tau \\ & + \sigma ((\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})^2 - S \nabla T \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + S^2 (\nabla T)^2), \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite correspond au gradient de température adiabatique. Ce gradient de température correspond à la diminution de la température avec l'altitude et est négligeable dans une expérience de laboratoire. En effet, $dT/dz = -g/c_p$, ce qui donne en ordre de grandeur, $\Delta T \sim gh/c_p$ avec $h = 2.5 \cdot 10^{-2} m$ de l'ordre de $\Delta T \sim 0.66 mK$ dans le Gallium et $\Delta T \sim 1.66 mK$ dans le Mercure. Ce terme est donc négligeable. Comme les courants thermoélectriques vérifient la conservation de la charge, $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = S \nabla^2 T, \quad (7.113)$$

le second terme de l'équation pour la température peut donc être simplifié en insérant l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{DT}{Dt} = & (\lambda - \sigma S^2 T) \nabla^2 T + \nabla \mathbf{u} : \tau \\ & + \sigma ((\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})^2 - 2S \nabla T \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \sigma S^2 (\nabla T)^2). \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite de cette équation montre que la thermoélectricité induit notamment un transport diffusif de la température avec une diffusivité effective $\kappa_{TE} = \frac{\sigma S^2 T}{\rho c_p}$. Afin de comparer ce terme à la diffusion thermique classique, il est possible de définir un nombre de Prandtl thermoélectrique Pr_{TE} tel que :

$$Pr_{TE} = \frac{\sigma S^2 T}{\lambda}, \quad (7.114)$$

le coefficient Seebeck étant petit dans les métaux, on s'attend à ce que $Pr_{TE} \ll 1$. En ordre de grandeur, dans le Gallium $Pr_{TE} \sim 3 \cdot 10^{-5}$ et dans le Mercure $Pr_{TE} \sim 4 \cdot 10^{-3}$. Cette diffusivité thermoélectrique additionnelle est donc négligeable en comparaison de la diffusivité thermique classique. Enfin, il est plus utile de laisser l'équation pour la température en fonction des courants :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + \nabla \mathbf{u} : \tau - \sigma S \nabla T \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}. \quad (7.115)$$

Cette équation peut encore se simplifier dans la limite grand champ magnétique, $Ha \gg 1$. Dans cette limite, les courants électriques sont confinés dans les couches limites

d'Hartmann et de Shercliff. Par conséquent, dans le coeur de l'écoulement, $\mathbf{j} \simeq 0$ et $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{E} \simeq S\nabla T$. En conséquence, pour $Ha \gg 1$, dans le coeur de l'écoulement, l'équation de température devient :

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T - \kappa_{TE} \frac{(\nabla T)^2}{T}, \quad (7.116)$$

qui est une équation non linéaire en T . Le terme $\nabla \mathbf{u} : \tau$, qui correspond à la dissipation visqueuse, a également été négligé puisque celle-ci a majoritairement lieu dans les couches limites. Enfin, le dernier terme de cet équation peut également être négligé puisque $Pr_{TE} \ll 1$. En conclusion, dans la limite $Ha \gg 1$, l'équation de la température, dans le coeur de l'écoulement suit classiquement l'équation d'advection-diffusion.

7.5 Dérive en température des sondes de champ magnétique

Afin de mesurer la présence de courant thermoélectrique, il semble naturel de réaliser des mesures de champ magnétique. Les boucles de courant thermoélectriques poloidales engendrent un champ magnétique toroïdal. Pour ce faire, un Teslamètre *F. W. Bell 7030* a été utilisé. Il se trouve qu'en pratique, les mesures de champ magnétique de la thermoélectricité se sont avérées peu fructueuses. Les fortes variations de température à l'intérieur de la cuve induisent une dérive de la mesure de champ magnétique en amplitude plus importante que le champ magnétique d'origine thermoélectrique. Un exemple de mesure concerne le protocole suivant. La cuve est tout d'abord thermalisée pendant plusieurs heures à $38^\circ C$, puis le cylindre interne est porté à une température plus élevée, de l'ordre de $85^\circ C$, pendant environ 120 mins . Un dernier transitoire est mesuré lorsque le cylindre interne est refroidi à sa température d'origine. Comme il est plus difficile de refroidir, le cylindre externe dérive en température jusqu'à atteindre une température d'environ $48^\circ C$, comme le montre la Figure [7.2a](#). La sonde à effet Hall est plongée à mi-hauteur dans le Gallium. Le signal temporel des composantes du champ magnétique est représenté sur la Figure [7.3](#). L'effet thermoélectrique produit une composante azimuthale pour le champ magnétique. Or, les composantes selon B_r et B_z évoluent de manière similaire à B_θ et sont du même ordre de grandeur. Une rotation de 180° de la sonde doit faire changer de signe la composante B_θ , mais ce n'est pas ce qui est observé expérimentalement. Enfin, des mesures test de champ magnétique avec la sonde plongée dans un récipient d'eau, chauffé à l'aide d'un plateau agitateur magnétique/chauffant, montrent une dérive d'environ $1\ \mu T$ pour une variation de température de l'ordre de $40^\circ C$. Ceci correspond à une dérive d'environ $25\ nT.K^{-1}$ et est

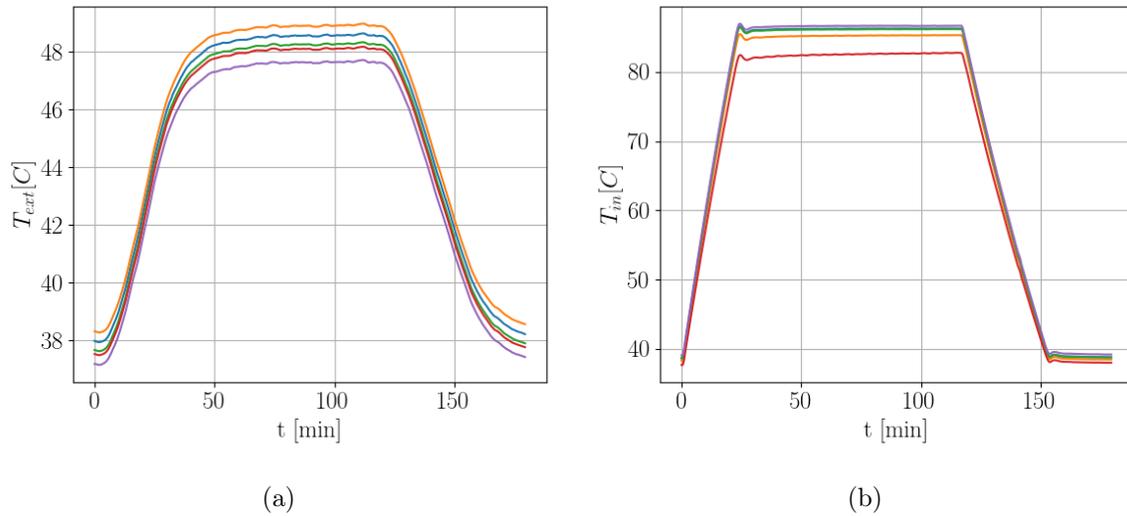


FIGURE 7.2 – Température en fonction du temps à l’intérieur des cylindres externe (a) et interne (b).

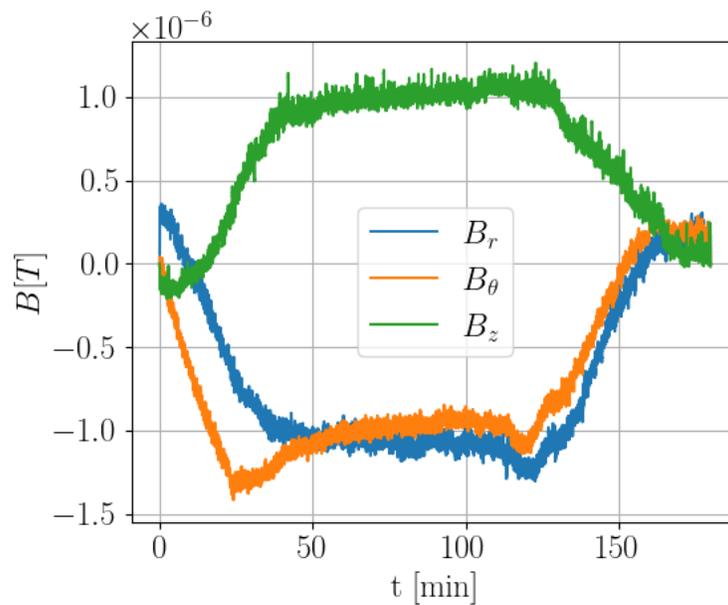


FIGURE 7.3 – Différentes composantes du champ magnétique en fonction du temps.

donc relativement faible pour les applications courantes mais rend difficile les mesures de champ magnétique d’origine thermoélectrique dans cette expérience. Des mesures de champ magnétique grâce à un capteur de flux magnétique *FLUXMASTER Stefan Mayer Instruments* d’une précision de 5 nT ⁵ ont également été réalisées. Ce choix était motivé par la dérive en température indiquée par le constructeur censée être inférieure à 0.1 nT.K^{-1} . Des tests en eau identiques à ceux menés pour la sonde à effet Hall

5. Le Teslamètre a une précision de l’ordre de $0.1 \text{ } \mu\text{T}$.

ont révélé une dérive en température moins forte mais du même ordre de grandeur, environ 10 nT.K^{-1} . Outre la dérive, le capteur est axial et de dimensions importantes (diamètre : 10 mm , longueur : 40 mm). Ceci rend son utilisation à l'intérieur de la cuve peu aisée.

Bibliographie

- [1] O. DARRIGOL, *Oxford University Press*. **2000**, ISBN 0-19-850593-0, p9-25.
- [2] H. A. LORENTZ, **1895**.
- [3] M. FARADAY, *Londres* **1895**, vol. 1, ISBN 978-1296021634, p55.
- [4] J. HARTMANN, F. LAZARUS, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.* **1937**, 15(7), 1-45.
- [5] J. HARTMANN, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.* **1937**, 15(6), 1-28.
- [6] K. MESSADEK, R. MOREAU, *J. Fluid Mech.* **2002**, 456, 137-159.
- [7] M. PEREIRA, Theses, Sorbonne Université, **2018**.
- [8] J. A. BAYLIS, *J. Fluid Mech.* **1971**, 48, 417-422.
- [9] J. A. BAYLIS, J. C. R. HUNT, *J. Fluid Mech.* **1971**, 48, 423-428.
- [10] W. R. DEAN, *The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **1927**, 4, 208-223.
- [11] W. R. DEAN, *The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **1928**, 5, 673-695.
- [12] A. KALPAKLI, thèse de doct., KTH Royal Institute of Technology, **2012**.
- [13] L. RIGO, D. BIAU, X. GLOERFELT, *Physical Review Fluids* **2021**, 6, 024101.
- [14] P. MORESCO, T. ALBOUSSIÈRE, *J. Fluid Mech.* **2004**, 504, 167-181.
- [15] A. POTHERAT, *Physics of Fluids* **2007**, 19(7), 074104.
- [16] Y. ZHAO, O. ZIKANOV, D. KRASNOV, *Physics of Fluids* **2011**, 23(8), 084103.
- [17] Y. ZHAO, O. ZIKANOV, D. KRASNOV, *Journ. Fluids Mech.* **2012**, 692, 288-316.
- [18] J. BOISSON, A. KLOCHKO, F. DAVIAUD, V. PADILLA, S. AUMAITRE, *Physics of Fluids* **2012**, 24(4), 044101.
- [19] J. BOISSON, R. MONCHAUX, S. AUMAÎTRE, *Journal of Fluid Mechanics* **2017**, 813, 860-881.

- [20] Z. STELZER, D. CEBRON, S. MIRALLES, S. VANTIEGHEM, J. NOIR, P. SCARFE, A. JACKSON, *Physics of Fluids* **2015**, *27(7)*, 077101.
- [21] Z. STELZER, S. MIRALLES, D. CEBRON, J. NOIR, S. VANTIEGHEM, A. JACKSON, *Physics of Fluids* **2015**, *27(8)*, 084108.
- [22] P. H. ROBERTS in Elsevier Ltd., **1967**, p. 144-168.
- [23] P. A. DAVIDSON in Cambridge University Press, **2001**, p. 139-145.
- [24] L. SPITZER, *Physics of fully ionized gases*, **1965**.
- [25] S. FAUVE in *Chaos : Poincaré Seminar 2010*, (éd. : B. DUPLANTIER, S. NONNENMACHER, V. RIVASSEAU), Springer Basel, Basel, **2013**, p. 55-95.
- [26] A. G. KULIKOVSKII, *Fluid Dyn* **1968**, *3*, 1-5.
- [27] J. C. R. HUNT, J. A. SHERCLIFF, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **1971**, *3*, 37-62.
- [28] J. A. SHERCLIFF, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **1953**, *49*, 136-144.
- [29] S. I. BRAGINSKII, *Sov. Phys. JETP* **1960**, *107*, 1005-1014.
- [30] J. C. R. HUNT, *Journal of Fluid Mechanics* **1965**, *21*, 577-590.
- [31] J. C. R. HUNT, K. STEWARTSON, *Journal of Fluid Mechanics* **1965**, *23*, 563-581.
- [32] C. GISSINGER, H. JI, J. GOODMAN, *Physical Review E* **2011**, *84*, 026308.
- [33] A. H. ROACH, E. J. SPENCE, C. GISSINGER, E. M. EDLUND, P. SLOBODA, J. GOODMAN, H. JI, *Physical review letters* **2012**, *108*, 154502.
- [34] T. ALBOUSSIÈRE, *Journal of Fluid Mechanics* **2004**, *521*, 125-154.
- [35] J. THOMSON, *Collected Papers in Physics and Engineering 1912*, 2^e sér. **1857**, *13*, 144-148.
- [36] J. BOUSSINESQ, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2^e sér. **1868**, *13*.
- [37] U. T. BÖDEWADT, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **1940**, *20*, 241-253.
- [38] P. A. DAVIDSON, A. POTHÉRAT, *European Journal of Mechanics - B/Fluids* **2002**, *21*, 545-559.
- [39] J. A. SHERCLIFF, *Journal of Fluid Mechanics* **1962**, *13*, 513-518.
- [40] P. MORESCO, T. ALBOUSSIÈRE, *European Journal of Mechanics-B/Fluids* **2004**, *23*, 851-859.
- [41] H. W. OTT in *Noise Reduction Techniques in Electronic Systems*, Wiley, **1988**.

- [42] K. INA, H. KOIZUMI, *Materials Science and Engineering : A* **2004**, 387-389, 13th International Conference on the Strength of Materials, 390-394.
- [43] C. B. REED, B. F. PICOLOGLOU, *Fusion Technology* **1989**, 15, 705-715.
- [44] A. POTHÉRAT, J. SOMMERIA, R. MOREAU, *Journal of Fluid Mechanics* **2000**, 424, 75-100.
- [45] A. POTHÉRAT, R. KLEIN, *Journal of Fluid Mechanics* **2014**, 761, 168-205.
- [46] M. VERNET, M. PEREIRA, S. FAUVE, C. GISSINGER, *Journal of Fluid Mechanics* **2021**, 924, A29.
- [47] A. POYE, O. AGULLO, N. PLIHON, W. J. T. BOS, V. DESANGLES, G. BOUSSELIN, *Phys. Rev. Fluids* **2020**, 5, 043701-22.
- [48] P. A. DAVIDSON, O. WONG, J. W. ATKINSON, A. RANJAN, *Phys. Rev. Fluids* **2022**, 7, 074701.
- [49] P. A. DAVIDSON, *Journal of Fluid Mechanics* **1992**, 245, 669-699.
- [50] J. SOMMERIA, R. MOREAU, *J. Fluid Mech.* **1982**, 118, 507-518.
- [51] A. POTHERAT, *Europhysics Letters* **2012**, 98(6), 64003.
- [52] E. C. BROUILLETTE, P. S. LYKOURIS, *Phys. Fluids* **1967**, 10, 995.
- [53] P. S. LYKOURIS, E. C. BROUILLETTE, *Phys. Fluids* **1967**, 10, 1002.
- [54] T. ALBOUSSIÈRE, R. J. LINGWOOD, *Phys. Fluids* **2000**, 12, 1535.
- [55] T. BOECK, D. KRASNOV, E. ZIENICKE, *Journal of Fluid Mechanics* **2007**, 572, 179-188.
- [56] W. MURGATROYD, *The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **1953**, 44, 1348-1354.
- [57] P. S. IROSHNIKOV, *Soviet Astronomy Vol. 7 p. 566* **1964**, 7, 566.
- [58] R. H. KRAICHNAN, *The Physics of Fluids* **1965**, 8, 1385-1387.
- [59] E. MARSCH, *Reviews in Modern Astronomy* **1991**, 145-156.
- [60] P. GOLDREICH, S. SRIDHAR, *Astrophysical Journal Part 1 (ISSN 0004-637X) vol. 438 no. 2 p. 763-775* **1995**, 438, 763-775.
- [61] A. N. KOLMOGOROV, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences* **1991**, 434, 9-13.
- [62] R. MONCHAUX, M. BERHANU, S. AUMAITRE, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, F. RAVELET, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS et al., *Physics of Fluids* **2009**, 21.

- [63] J. SOMMERIA, R. MOREAU, *Journal of Fluid Mechanics* **1982**, *118*, 507-518.
- [64] A. ALEXAKIS, L. BIFERALE, *Physics Reports* **2018**, *767*, 1-101.
- [65] K. MESSADEK, R. MOREAU, *Journal of Fluid Mechanics* **2002**, *456*, 137-159.
- [66] K. S. REDDY, S. FAUVE, C. GISSINGER, *Physical Review Fluids* **2018**, *3*, 063703.
- [67] P. TABELING, J. P. CHABRERIE, *The Physics of Fluids* **1981**, *24*, 406-412.
- [68] T. ALBOUSSIÈRE, V. USPENSKI, R. MOREAU, *Experimental Thermal and Fluid Science* **1999**, *20*, 19-24.
- [69] H. BÉNARD, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées* **1900**, *11*, 1261-1271, 1309-1328.
- [70] L. RAYLEIGH, *Philosophical Magazine. 6th series.* **1916**, *32 (192)*, 529-546.
- [71] S. CHANDRASEKHAR, *Dover New York* **1981**.
- [72] P. DRAZIN, W. H. REID, *Cambridge University Press Cambridge England* **1981**.
- [73] S. FAUVE, *Woods Hole Oceanog. Inst. Tech. Rept* **1991**.
- [74] A. V. GETLING, *World Scientific Singapore* **1998**.
- [75] E. B. W. PESCH, G. AHLERS, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **2000**, *32*, 709-778.
- [76] P. CARDIN, P. OLSON, *Phys. Earth Planet. Inter.* **1994**, *82*, 235-259.
- [77] D. P. M. J. M. ROBERTS, N. O. WEISS, *J. Fluid Mech.* **1974**, *62*, 465-538.
- [78] J. MARSHALL, F. SCHOTT, *Rev. Geophys.* **1999**, *37*, 1-64.
- [79] D. L. H. L. A. MOY, Q. FU, *J. Clim.* **2001**, *14*, 4495-4511.
- [80] F. C. T. EMONET, N. WEISS, *Astrophys. J.* **2003**, *588*, 1183-1198.
- [81] G. LESUR, G. I. OGILVIE, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters* **2010**, *404*, L64-L68.
- [82] E. A. SPIEGEL, G. VERONIS, *The Astrophysical Journal* **1960**, *131*, 4425.
- [83] S. GROSSMANN, D. LOHSE, *Journal of Fluid Mechanics* **2000**, *407*, 27-56.
- [84] B. I. SHRAIMAN, E. D. SIGGIA, *Phys. Rev. A* **1990**, *42*, 3650-3653.
- [85] E. D. SIGGIA, *Annual Review of Fluid Mechanics* **1994**, *26*, 137-168.
- [86] R. H. KRAICHNAN, *The Physics of Fluids* **1962**, *5*, 1374.
- [87] G. AHLERS, S. GROSSMANN, D. LOHSE, *Rev. Mod. Phys.* **2009**, *81*, 503-537.
- [88] S. GROSSMANN, D. LOHSE, *Physics of Fluids* **2011**, *23*, 045108.
- [89] W. V. R. MALKUS, *Proc. R. Soc. Lond. A* **1954**, *225*, 196-212.

- [90] J. J. NIEMELA, L. SKRBK, K. R. SREENIVASAN, R. J. DONNELLY, *Nature* **2000**, *404*, 837-840.
- [91] J. J. NIEMELA, K. R. SREENIVASAN, *Journal of Fluid Mechanics* **2003**, *481*, 355-384.
- [92] A. NIKOLAENKO, G. AHLERS, *Phys. Rev. Lett.* **2003**, *91*, 084501.
- [93] C. SUN, L.-Y. REN, H. SONG, R.-Q. XIA, *Journal of Fluid Mechanics* **2005**, *542*, 165-174.
- [94] G. AHLERS, D. FUNFSCHILLING, E. BODENSCHATZ, *New Journal of Physics* **2009**, *11*, 123001.
- [95] J. J. NIEMELA, K. R. SREENIVASAN, *Journal of Fluid Mechanics* **2006**, *557*, 411-422.
- [96] X. CHAVANNE, F. CHILLA, B. CHABAUD, B. CASTAING, B. HEBRAL, *Physics of Fluids* **2001**, *13*, 1300-1320.
- [97] P. E. ROCHE, B. CASTAING, B. CHABAUD, B. HÉBRAL, *Phys. Rev. E* **2001**, *63*, 045303.
- [98] M. MACDONALD, N. HUTCHINS, D. LOHSE, D. CHUNG, *Phys. Rev. Fluids* **2019**, *4*, 071501.
- [99] X. ZHU, R. J. A. M. STEVENS, R. VERZICCO, D. LOHSE, *Phys. Rev. Lett.* **2017**, *119*, 154501.
- [100] X. ZHU, R. J. A. M. STEVENS, O. SHISHKINA, R. VERZICCO, D. LOHSE, *Journal of Fluid Mechanics* **2019**, *869*, R4.
- [101] F. A. KULACKI, R. J. GOLDSTEIN, *Journal of Fluid Mechanics* **1972**, *55*, 271-287.
- [102] S. LEPOT, S. AUMAÎTRE, B. GALLET, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **2018**, *115*, 8937-8941.
- [103] V. BOUILLAUT, S. LEPOT, S. AUMAITRE, B. GALLET, *Journal of Fluid Mechanics* **2019**, *861*, R5.
- [104] B. MIQUEL, S. LEPOT, V. BOUILLAUT, B. GALLET, *Physical Review Fluids* **2019**, *4*, 121501.
- [105] D. LOHSE, F. TOSCHI, *Phys. Rev. Lett.* **2003**, *90*, 034502.
- [106] A. PRIGENT, B. DUBRULLE, O. DAUCHOT, I. MUTABAZI in *Dynamics of Spatio-Temporal Cellular Structures : Henri Bénard Centenary Review*, (éd. : I. MUTABAZI, J. E. WESFREID, E. GUYON), Springer New York, New York, NY, **2006**, p. 225-242.

- [107] B. ECKHARDT, S. GROSSMANN, D. LOHSE, *Journal of Fluid Mechanics* **2007**, *581*, 221-250.
- [108] G. I. TAYLOR, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **1923**, *223*, 289-343.
- [109] H. JEFFREYS, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **1928**, *118*, 195-208.
- [110] S. GROSSMANN, D. LOHSE, C. SUN, *Annual review of fluid mechanics* **2016**, *48*, 53-80.
- [111] X. HE, D. FUNFSCHILLING, H. NOBACH, E. BODENSCHATZ, G. AHLERS, *Physical review letters* **2012**, *108*, 024502.
- [112] X. ZHU, R. A. VERSCHOOF, D. BAKHUIS, S. G. HUISMAN, R. VERZICCO, C. SUN, D. LOHSE, *Nature physics* **2018**, *14*, 417-423.
- [113] M. VERNET, S. FAUVE, C. GISSINGER, *Phys. Rev. Lett.* **2022**, *129*, 074501.
- [114] H. JI, M. BURIN, E. SCHATMAN, J. GOODMAN, *Nature* **2006**, *444*, 343-346.
- [115] S. G. HUISMAN, D. P. M. van GILS, S. GROSSMANN, C. SUN, D. LOHSE, *Phys. Rev. Lett.* **2012**, *108*, 024501.
- [116] S. FROMANG, G. LESUR, *EAS Publications Series* **2019**, *82*, 391-413.
- [117] M. A. ABRAMOWICZ, P. C. FRAGILE, *Living Rev. Relativity* **2013**, *16*, 1.
- [118] J. P. WILLIAMS, L. A. CIEZA, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **2011**, *49*, 67-117.
- [119] B. ZHAO, K. TOMIDA, P. HENNEBELLE, J. J. TOBIN, A. MAURY, T. HIROTA, A. SÁNCHEZ-MONGE, R. KUIPER, A. ROSEN, A. BHANDARE et al., *Space Science Reviews* **2020**, *216*, 1-48.
- [120] S. A. BALBUS, J. F. HAWLEY, *Rev. Mod. Phys.* **1998**, *70*, 1-53.
- [121] E. P. VELIKHOV, *Sov. Phys. JETP* **1959**, *36*, 995-998.
- [122] S. CHANDRASEKHAR, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **1960**, *46*, 253-257.
- [123] S. A. BALBUS, J. F. HAWLEY, *Astrophysical Journal Part 1 (ISSN 0004-637X) vol. 376 July 20 1991 p. 214-233.* **1991**, *376*, 214-233.
- [124] M. AVILA, *Physical review letters* **2012**, *108*, 124501.
- [125] Y. WANG, E. P. GILSON, F. EBRAHIMI, J. GOODMAN, H. JI, *Physical review letters* **2022**, *129*, 115001.

- [126] B. DUBRULLE, *Astron. Astrophys.* **1992**, *266*, 592-604.
- [127] F. HERSANT, B. DUBRULLE, J.-M. HURÉ, *A&A* **2005**, *429*, 531-542.
- [128] D. RICHARD, J. P. ZAHN, *Astronomy and Astrophysics* **1999**, *347*, 734-738.
- [129] M. S. PAOLETTI, D. P. LATHROP, *Physical Review Letters* **2011**, *106*, 024501.
- [130] M. S. PAOLETTI, D. P. M. van GILS, B. DUBRULLE, C. SUN, D. LOHSE, D. P. LATHROP, *A&A* **2012**, *547*, A64.
- [131] N. I. SHAKURA, R. A. SUNYAEV, *A&A* **1973**, *24*, 337-355.
- [132] E. SCHARTMAN, H. JI, M. J. BURIN, *Review of Scientific Instruments* **2009**, *80*.
- [133] L. ONSAGER, *Phys. Rev.* **1931**, *37*, 405-426.
- [134] L. ONSAGER, *Phys. Rev.* **1931**, *38*, 2265-2279.
- [135] H. B. G. CASIMIR, *Rev. Mod. Phys.* **1945**, *17*, 343-350.
- [136] H. FLANDERS, *The American Mathematical Monthly* **1973**, *80*, 615-627.
- [137] J. A. SHERCLIFF, *J. Fluid Mech.* **1979**, *91*, 231-251.
- [138] J. A. SHERCLIFF, *Pergamon Press Oxford 11. symposium on fusion technology* **1980**, 171-175.
- [139] J. A. SHERCLIFF, *Phys. Fluids* **1979**, *22*, 635-640.
- [140] J. A. SHERCLIFF, *Z. Angew. Math. Phys.* **1980**, *31*, pages94-112.
- [141] J. A. SHERCLIFF, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **1980**, *23*, 1219-1228.
- [142] K. F. SCHOCH, **1956**.
- [143] W. MURGATROYD, *UK patent appl* **1951**, *20911*, 51.
- [144] S. ROCKLIN, Thermoelectric pump, US Patent 3,116,693, **1964**.
- [145] J. OSTERLE, S. ANGRIST, *Journal of Heat Transfer* **1964**, *86*, 166-168.
- [146] K. A. DAVIS, *Atomics International Canoga Park Calif.* **1966**.
- [147] M. JAWORSKI, T. GRAY, M. ANTONELLI, J. KIM, C. LAU, M. LEE, M. NEUMANN, W. XU, D. RUZIC, *Physical review letters* **2010**, *104*, 094503.
- [148] Y. WANG, D. C. YIN, Y. M. LIU, J. Z. SHI, H. M. LU, Z. H. SHI, A. R. QIAN, P. SHANG, *Rev. Sci. Instrum.* **2011**, *82*, 034705.
- [149] T. IIDA, R. I. L. GUTHRIE in *The Physical Properties of Liquid Metals*, Oxford science publications, **1988**.
- [150] C. C. BRADLEY, *Philosophical Magazine* **1963**, *8 :93*, 1535-1542.

- [151] C. J. SMITHELLS, *Metals reference book*, Elsevier, **2013**.
- [152] C. GUMINSKI, L. ZABDYR, *JPE* **1993**, *14*, 719-725.
- [153] S. CIONI, S. CHAUMAT, J. SOMMERIA, *Physical Review E* **2000**, *62*, R4520.
- [154] J. HORACEK, S. ENTLER, P. VONDRACEK, J. ADAMEK, D. SESTAK, M. HRON, R. PANEK, R. DEJARNAC, V. WEINZETTL, K. KOVARIK et al., *Plasma Physics Reports* **2018**, *44*, 652-656.
- [155] R. KAITA, R. MAJESKI, T. GRAY, H. KUGEL, D. MANSFIELD, J. SPALETA, J. TIMBERLAKE, L. ZAKHAROV, R. DOERNER, T. LYNCH et al., *Physics of Plasmas* **2007**, *14*.
- [156] W. XU, D. CURRELI, D. ANDRUCZYK, T. MUI, R. SWITTS, D. RUZIC, *Journal of Nuclear Materials* **2013**, *438*, S422-S425.
- [157] W. XU, V. SURLA, M. JAWORSKI, M. LEE, T. MUI, M. NEUMANN, D. RUZIC, *Journal of nuclear materials* **2011**, *415*, S981-S984.
- [158] J. HORACEK, J. CECRDLE, D. TSKHAKAYA, R. DEJARNAC, J. SCHWARTZ, M. KOMM, J. CAVALIER, J. ADAMEK, S. LUKES, V. VESELOVSKY et al., *Physica Scripta* **2021**, *96*, 124013.
- [159] K. WANG, K. JIANG, B. CHUNG, T. OUCHI, P. J. BURKE, D. A. BOYSEN, D. J. BRADWELL, H. KIM, U. MUECKE, D. R. SADOWAY, *Nature* **2014**, *514*, 348-350.
- [160] H. KIM, D. A. BOYSEN, J. M. NEWHOUSE, B. L. SPATOCCO, B. CHUNG, P. J. BURKE, D. J. BRADWELL, K. JIANG, A. A. TOMASZOWSKA, K. WANG et al., *Chemical reviews* **2013**, *113*, 2075-2099.
- [161] D. H. KELLEY, T. WEIER, *Applied Mechanics Reviews* **2018**, *70*, 020801.
- [162] P. A. DAVIDSON, R. LINDSAY, *Journal of Fluid Mechanics* **1998**, *362*, 273-295.
- [163] N. WEBER, P. BECKSTEIN, V. GALINDO, W. HERREMAN, C. NORE, F. STEFANI, T. WEIER, *Magnetohydrodynamics* **2017**, *53*, 129-140.
- [164] F. STEFANI, T. WEIER, T. GUNDRUM, G. GERBETH, *Energy conversion and management* **2011**, *52*, 2982-2986.
- [165] N. WEBER, V. GALINDO, F. STEFANI, T. WEIER, T. WONDRAK, *New Journal of Physics* **2013**, *15*, 043034.
- [166] W. HERREMAN, C. NORE, L. CAPPANERA, J.-L. GUERMOND, *Journal of Fluid Mechanics* **2015**, *771*, 79-114.
- [167] Y. SHEN, O. ZIKANOV, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **2016**, *30*, 275-294.

- [168] P. PERSONNETTAZ, P. BECKSTEIN, S. LANDGRAF, T. KÖLLNER, M. NIMTZ, N. WEBER, T. WEIER, *Journal of Power Sources* **2018**, *401*, 362-374.
- [169] T. KÖLLNER, T. BOECK, J. SCHUMACHER, *Phys. Rev. E* **2017**, *95*, 053114.
- [170] N. WEBER, M. NIMTZ, P. PERSONNETTAZ, A. SALAS, T. WEIER, *Applied Thermal Engineering* **2018**, *143*, 293-301.
- [171] N. WEBER, M. NIMTZ, P. PERSONNETTAZ, T. WEIER, D. SADOWAY, *Journal of Power Sources Advances* **2020**, *1*, 100004.
- [172] D. F. WILLIAMS, Assessment of candidate molten salt coolants for the NGNP/NHI heat-transfer loop, rapp. tech., Oak Ridge National Lab.(ORNL), Oak Ridge, TN (United States), **2006**.
- [173] E. R. V. ARTSDALEN, I. S. YAFFE, *The Journal of Physical Chemistry* **1955**, *59*, 118-127.
- [174] C. V. der MAREL, W. V. der LUGT, *Le Journal de Physique Colloques* **1980**, *41*, C8-524.
- [175] S. FAUVE, *Comptes Rendus. Mécanique* **2020**, *348*, 475-487.
- [176] H. K. MOFFATT, *Cambridge University Press Cambridge London New York Melbourne* **1978**, *2*, 5-1.
- [177] H. K. MOFFATT, *Journal of fluid Mechanics* **1967**, *28*, 571-592.
- [178] B. LEHNERT, *Proc. Roy. Soc. A* **1955**, *233*, 299-302.
- [179] D. G. MALCOLM, *Journal of Fluid Mechanics* **1970**, *41*, 531-544.
- [180] Y. XU, S. HORN, J. M. AURNOU, *Journal of Fluid Mechanics* **2022**, *930*, A8.
- [181] F. V. DOLZHANSKII, V. A. KRYMOV, D. Y. MANIN, *Journal of Fluid Mechanics* **1992**, *241*, 705-722.
- [182] F. V. DOLZHANSKY, *Fundamentals of geophysical hydrodynamics*, Springer, **2013**.
- [183] F. V. DOLZHANSKIĬ, V. A. KRYMOV, D. Y. MANIN, *Soviet Physics Uspekhi* **1990**, *33*, 495.
- [184] V. A. DOVZHENKO, I. V. NOVIKOV, A. M. OBUKHOV, *Akademiia Nauk SSSR Fizika Atmosfery i Okeana* **1979**, *15*, 1199-1202.
- [185] V. A. DOVZHENKO, A. M. OBUKHOV, V. M. PONOMAREV, *Fluid Dyn* **1981**, *16*, 510-518.
- [186] V. A. KRYMOV, *Fluid Dyn* **1989**, *24*, 170-176.
- [187] S. A. SUSLOV, J. PÉREZ-BARRERA, S. CUEVAS, *Journal of Fluid Mechanics* **2017**, *828*, 573-600.

- [188] E. M. LIFSHITZ, L. P. PITAEVSKI in *Physical Kinetics*, Elsevier Ltd., **1981**, p. 329-390.
- [189] B. J. AHMEDOV, M. J. ERMAMATOV, *Found. Phys. Lett.* **2002**, *15*, 305-309.