



HAL
open science

Hyperplans arithmétiques : connexité, reconnaissance & transformations

Bastien Laboureix

► **To cite this version:**

Bastien Laboureix. Hyperplans arithmétiques : connexité, reconnaissance & transformations. Informatique [cs]. Université de Lorraine, 2024. Français. NNT : 2024LORR0040 . tel-04650526

HAL Id: tel-04650526

<https://hal.science/tel-04650526v1>

Submitted on 16 Jul 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Hyperplans arithmétiques : connexité, reconnaissance & transformations

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 19 juin 2024

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine
(mention informatique)

par

Bastien Laboureix

Composition du jury

- Président* : M. Emmanuel Jeandel, professeur à l'Université de Lorraine
- Rapporteurs* : M. Jacques-Olivier Lachaud, professeur à l'Université Savoie Mont-Blanc
M. Yan Gérard, Maître de Conférences à l'Université Clermont-Auvergne
- Examinatrice* : Mme Emilie Charlier, chargée de cours à l'Université de Liège
- Invités* : M. Eric Andres, professeur à l'Université de Poitiers
M. Laurent Vuillon, professeur à l'Université Savoie Mont-Blanc
- Encadrants* : Mme Isabelle Debled-Rennesson, professeure à l'Université de Lorraine
M. Eric Domenjoud, chargé de recherche CNRS au LORIA (Université de Lorraine)

Mis en page avec la classe thesul.

A Blandine,

*A mes enseignants,
qui m'ont donné le goût des sciences,*

Remerciements

Faire des remerciements, c'est prendre le risque de trop s'étaler, mais aussi et surtout commettre l'affront d'oublier bon nombre de personnes qui les auraient mérités... Je tiens donc tout d'abord à remercier tous ceux qui seront, par erreur, oubliés dans ces quelques paragraphes et leur présente mes plus plates excuses. Pour la concision, cette thèse et mes études sont pour moi l'aboutissement de longues années de travail, effectuées grâce au soutien de très nombreuses personnes : j'invite donc les personnes intéressées davantage par mon travail de recherche à passer dès à présent à l'introduction.

Une thèse dans un cadre chaleureux et exceptionnel...

Je tiens tout d'abord à remercier les membres de mon jury qui ont accepté de relire mon travail de thèse :

- mes rapporteurs, Jacques-Olivier Lachaud et Yan Gérard, qui ont donné de leur temps pour s'intéresser au contenu de mon manuscrit, même dans ses passages les plus techniques ;
- Emilie Charlier, pour son expertise sur les systèmes de numération ;
- Emmanuel Jeandel, pour avoir accepté d'être président de mon jury et pour avoir suivi le déroulé de ma thèse ;
- Eric Andres et Laurent Vuillon, pour le travail que nous avons effectué ensemble en recherche et pour être venus à ce titre à ma soutenance.

Un immense merci à mes directeurs de thèse, Isabelle et Eric, pour leur suivi et leur bonne humeur durant ces 3 années. Nous avons pu échanger sur de nombreux sujets, sur le plan scientifique ou humain, autour d'un café ou d'un tableau. Leurs conseils m'auront appris à mieux présenter mes travaux, de manière moins aride et moins bourbakiste, et à accorder une place particulière à la partie expérimentale et aux figures (le lecteur pourra constater que j'ai encore beaucoup à apprendre...). Ils m'ont également octroyé une grande liberté. J'ai ainsi pu explorer les thèmes d'autres domaines de recherche, en partant régulièrement dans des séminaires aux quatre coins de la France. J'ai pu vivre ma passion pour la diffusion des maths (enseignement, clubs maths, médiation...), en participant à de nombreux événements, clubs et ateliers. Enfin, ces trois années ont été l'occasion de toucher à diverses questions de géométrie discrète, même non prévues dans le sujet initial. Peu de doctorants ont la chance d'explorer autant de choses durant leur thèse, et je tiens à remercier mes encadrants pour cela.

Au-delà de mes directeurs de thèse, l'équipe ADAGIO s'est montrée très accueillante avec moi. Nous avons passé de nombreux moments sympathiques ensemble avec les rires de Phuc, le calme de Philippe et la bonne humeur d'Hugo. Merci également à mes collègues de bureau, Aude, Dorian et Florian, de m'avoir supporté durant ces années, malgré mon caractère de rhinocéros. Avant eux, merci à Aurore et Maira qui ont partagé le bureau du jeune doctorant que j'étais, et m'ont réservé le meilleur accueil. Plus généralement, j'ai eu la chance de découvrir les communautés GDMM et SDA2. Au-delà des discussions scientifiques passionnantes que nous avons eues, j'ai rencontré des personnes pleines d'humour et de générosité, qui m'ont accueilli chaleureusement dans leur communauté, autour d'un exposé, d'une pièce de viande ou d'une bière.

En ce qui concerne le LORIA, j'ai eu la chance de vivre ces 3 années de thèse dans un cadre exceptionnel, avec des personnes d'une grande convivialité. Ce laboratoire est une grande

famille dans laquelle s'organisent de nombreux événements et moments de retrouvailles en tous genres. Un grand merci à l'équipe de la cantine du LORIA, qui égaye nos journées avec de la nourriture, du café et de la bonne humeur ! Le retour dans un RU sera difficile... Mais le LORIA ne serait rien sans les activités proposées aux doctorants. Je tiens, à ce titre, à remercier Marie et Mariana pour toute l'organisation de ces événements ! Nous avons pu travailler ensemble, avec les membres du Bureau Des Doctorants, pour relancer le Café Doctorant, le Séminaire Pizza et le Week-End d'Intégration, autant de moments qui nous ont permis de créer un groupe uni de doctorants dans ce laboratoire. Merci à la direction du LORIA, Jean-Yves puis Yannick, d'avoir aidé à la mise en place de ces événements. Enfin, au vu des nombreuses missions que j'ai effectuées (on approche de la trentaine...), je tiens à remercier toutes les assistantes d'équipe qui ont traité mes dossiers administratifs. Parmi tous nos collègues chercheurs, nous sommes rares à avoir le privilège d'une prise en charge de nos demandes administratives, par des collègues disponibles et souriants, et cela constitue un véritable atout de notre laboratoire.

En dehors de la recherche, j'ai eu le plaisir d'enseigner à l'IUT Nancy-Charlemagne et de découvrir le monde du BUT. Je tiens tout d'abord à remercier les collègues avec qui j'ai pu travailler : Tristan, Blandine, Thomas et Slim. Nous avons pu avoir des échanges pédagogiques très sympathiques à la pause café, avec un ton plaisant et enjoué entre collègues. Merci également à la direction du département informatique, Nadia, Philippe et Cathy, pour leur accueil et leurs conseils. Merci à Françoise et Blandine pour les démarches administratives, et aux autres collègues de l'IUT pour les discussions sympathiques que nous avons pu avoir autour d'un café. Et sans les oublier, car ce sont eux qui font vivre l'IUT, merci aux étudiants qui ont subi mes cours, remplis d'ornithorynques et de pachydermes, et vidés de calculatrices.

Finalement, je tiens à remercier tous les collègues que j'ai rencontrés dans le cadre de la diffusion des maths, qu'il s'agisse d'ateliers Math.en.Jeans ou de médiation scientifique. En plus de l'investissement des enseignants, c'est aussi le travail de ces personnes qui fait vivre les maths, l'informatique et plus généralement les sciences dans les établissements scolaires. Un grand merci également à l'équipe Pinte de Sciences pour l'organisation de ce très beau festival de médiation scientifique, et notamment à Thibaud et PH les organisateurs. Enfin, je tiens à remercier tous les membres du club maths, Damien, Yann, Nathan, Valentin et Régine, qui permettent à des jeunes de découvrir de belles notions de mathématiques, et de jouer ensemble chaque mercredi après-midi. J'y ai vécu des moments mémorables et y ai rencontré de jeunes mathématiciens sympathiques et talentueux.

Grâce à une formation solide dans un environnement familial...

J'ai eu la chance de rencontrer toute ma scolarité puis toutes mes études bon nombre d'enseignants qui m'ont donné le goût du travail, de la connaissance et de la compréhension. Toutes matières confondues, la formation qu'ils m'ont donnée s'est révélée cruciale à de nombreuses étapes de ma vie. Au-delà des matières scientifiques, mes instituteurs et professeurs de lettres m'ont permis de développer une bonne maîtrise du français (j'espère que les fautes d'orthographe de ce manuscrit ne me feront pas trop mentir...), une petite culture en histoire-géographie et un intérêt certain pour l'allemand. Je tiens d'ailleurs à remercier tout particulièrement Mme Mélen et M. Rinck qui, par leur rigueur, leur investissement et leur patience, m'ont donné les clés pour avoir une note honorable au concours de l'ENS en allemand, ce qui a sauvé mon admission.

Mais parlons plutôt de mes matières phares : les sciences et plus particulièrement de la plus belle de toutes : les mathématiques. Je tiens à remercier M. Jacob, M. Bedet et M. Mallet pour l'intérêt particulier qu'ils portaient à leur matière, leur rigueur et pour avoir attisé ma

soif de savoir. Mon professeur de maths de première/terminale, M. Guillemart, mérite quant à lui des remerciements particuliers. En me proposant des exercices plus difficiles, des énigmes intéressantes et en me montrant des concepts hors programme, il a énormément éclairé ma vision des mathématiques et ma maîtrise de celles-ci. Il s'est également avéré de très bon conseil pour me permettre de m'améliorer et de m'orienter vers des études qui me convenaient.

J'ai ensuite découvert les études supérieures, en commençant par une formation scientifique d'exception : la classe prépa à Poinca. Exigeante et familiale, la CPGE de Poincaré à Nancy s'est révélée un cadre fantastique pour mes 2 premières années d'étude. J'y ai appris l'efficacité au travail, la rigueur scientifique ainsi que les fondements des mathématiques, de la physique et de l'informatique. M. Vix m'aura appris à écrire une preuve, de la manière la plus COCORICO possible (COrrecte, COncise, RIgoureuse, COmpréhensible). La prépa fut également mon premier contact avec l'informatique, science qui m'a ensuite guidé toutes mes études et que j'ai découverte grâce à l'extraordinaire pédagogie de M. Aubert. Il m'a ensuite beaucoup guidé pour mon orientation et je tiens à l'en remercier particulièrement. Mon professeur de seconde année, M. Guelfi, m'a permis d'intégrer l'ENS par son exigence et sa vision exceptionnelle des mathématiques. Son ressenti de l'algèbre et de la topologie, l'heuristique et l'argument aérien, ont guidé mes pas durant toute la suite de mon parcours. Enfin, bien que j'aie, à regret, fourni moins d'efforts dans cette matière, mes professeurs de physique, Mme Mulard et M. Senger, m'ont montré que la richesse des sciences vient de leur coexistence et à quel point l'apprentissage de la physique est une étape importante dans la formation d'un mathématicien. Pour finir, Poinca ne serait rien sans l'ambiance de l'internat. Je souhaite donc remercier Mme Fizelet, maman des internes, qui a veillé sur nous pendant ces 2 années, avec des pains au chocolat chaque dimanche matin.

Après la prépa vint la vie de normalien, à l'ENS Cachan. J'ai ainsi eu la chance de suivre cette belle formation, à cheval entre informatique et mathématiques. Mes professeurs d'ENS, par leur exigence, leur passion et leur expertise, m'ont offert une excellente culture mathématique et informatique. Cette formation à la recherche, par la recherche, pour la recherche, m'a en effet fourni le niveau requis pour faire un doctorat et pour comprendre bon nombre d'exposés, même au-delà de mon domaine de recherche. Peu de formations en informatique proposent une telle richesse disciplinaire et je suis très heureux que l'ENS Cachan maintienne cette politique : les maths et l'info ne peuvent vivre l'une sans l'autre, et il serait mentir que d'enseigner l'une en omettant l'autre. Remerciements particuliers à Serge Haddad, idole des jeunes et directeur de département, pour son investissement pour ses étudiants. Ne faisant pas comme les autres (ou plutôt, faisant comme une grande partie de mes camarades), j'ai souhaité suivre une formation à l'enseignement, par l'enseignement et surtout pour l'enseignement. Je tiens donc à remercier particulièrement l'équipe de la préparation à l'agrégation, et son directeur Frédéric Pascal, pour m'avoir formé à ce concours avec l'exigence requise. Ces années m'ont permis d'obtenir un bagage solide en maths/info, au niveau requis pour le concours et, en prime, un sésame pour un poste de professeur. Les mathématiques et l'informatique sont les 2 branches d'un même arbre, et mes années à l'ENS Cachan m'ont permis de me former dans les 2 et de cultiver les liens entre ces 2 sciences.

Entouré de proches qui m'ont toujours soutenu.

Evidemment, il n'y a pas dans ma vie que le monde scolaire et professionnel, ayant la chance d'être entouré de ma famille et de mes amis. Mes premiers remerciements vont à mes parents, qui m'ont supporté durant 26 ans, dont près de 18 sous le même toit. Etant, contrairement à eux, d'un piètre niveau en lettres et en arts, encore plus en bricolage, ils ont tout de même réussi à m'inculquer certaines de leurs qualités et quelques-uns de leurs défauts : de la ponctualité

(et une grande impatience), de l'organisation (et me lancer dans trop de trucs), des facilités à prendre la parole (en ne sachant pas toujours me taire) et de la curiosité pour plein de choses. J'ai également récupéré de mes 2 grands-mères une grande attirance pour le jeu (les maths et l'info ne sont-elles pas des jeux géants?) et une bonne capacité de travail et d'investissement : merci à elles ! Ayant de trop nombreux oncles/tantes/cousins/cousines pour tous les remercier un par un, je me contenterai de les remercier pour tout ce qu'ils ont pu m'apporter et pour les conversations que nous avons pu avoir. Merci en particulier à mon propriétaire Arnaud pour m'avoir logé durant 3 ans, à JB pour m'avoir offert de nombreux livres de maths, à Etienne et Paul pour avoir forgé mon caractère et à Caroline pour m'avoir logé durant mes oraux de concours.

Durant ma scolarité et mes études, j'ai eu l'occasion de rencontrer bon nombre de personnes avec qui je suis resté proche. Merci à eux tous. Notamment, merci à Louise et Marine d'avoir toujours eu une oreille attentive à mon égard, ainsi que pour toutes les expositions, randonnées, et visites culturelles en tous genres que nous avons pu faire. Merci à Manon et Louis de m'avoir soutenu dans les moments difficiles, et pour toutes les discussions très intéressantes que nous avons pu avoir. Merci à Blaise pour toutes les soirées que nous avons passées ensemble, pour m'avoir permis d'enseigner l'informatique fondamentale chaque semaine impaire et pour m'avoir donné des cours d'analyse chaque semaine paire. Enfin, merci beaucoup à Blandine qui a toujours été là pour moi et avec qui j'ai pu découvrir de magnifiques endroits de France et d'Europe, des films d'auteur captivants, des expositions et tant d'autres choses.

Cette thèse, et de manière générale mes études, n'auraient pas été possibles si je n'avais pas été entouré de toutes ces belles personnes : merci à elles.

Table des matières

Résumé	1
--------	---

Introduction

Chapitre 1

Droites et hyperplans arithmétiques
--

1.1 Droites discrètes	7
1.2 Segments discrets	10
1.3 Hyperplans arithmétiques	11

Chapitre 2

Connexité par faces des hyperplans arithmétiques

2.1 Le cas de la dimension 2	14
2.2 Epaisseur de connexité	14
2.3 Δ -numération	18
2.3.1 Un nouveau système de numération	19
2.3.2 Expansions et réductions	20
2.3.3 Le cas ultimement périodique	22
2.4 Connexité à l'épaisseur critique	23
2.4.1 Clôture palindromique	24
2.4.2 Clôture palindromique décalée	25

2.4.3	Motifs intérieurs minimaux	27
2.5	Le cas ultimement périodique	28
2.5.1	Reconnaissabilité par un automate de Büchi	28
2.5.2	Probabilité que le plan $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$ soit connexe	29
2.6	Connexité par faces en dimension infinie	30
2.6.1	Extension algébrique	30
2.6.2	Le cas analytique	31
2.7	Annexe : preuve de la rationalité des \mathcal{L}_p	33
2.7.1	Construction de l'automate infini	34
2.7.2	Préfixes inutiles	34
2.7.3	Majoration de k	36
2.7.4	Etude géométrique des S_n	37
2.7.5	Majoration finale sur $ w $	40
2.8	Bilan & perspectives	40

<p>Chapitre 3</p> <p>Le problème général de la connexité : approche combinatoire</p>
--

3.1	Epaisseur de connexité	45
3.1.1	Existence de l'épaisseur	45
3.1.2	Vecteurs pathologiques	47
3.1.3	Dépendance au décalage	50
3.2	Voisinage utile	51
3.2.1	Utilité et inutilité	51
3.2.2	Un cas de réduction à la connexité par faces	55

3.2.3	Des bornes sur Ω	56
3.2.4	D'autres bornes	58
3.3	Algorithme de Yan Gérard	59
3.4	Bilan et perspectives	61

Chapitre 4

Approche analytique du problème de la connexité

4.1	Quelques analyses graphiques	64
4.2	Théorème de majoration des chemins	65
4.3	Semi-continuité	69
4.4	Continuité relative	70
4.4.1	Majoration uniforme des chemins	70
4.4.2	Algorithme de calcul de l'épaisseur	72
4.4.3	Continuité uniforme et conjecture de prolongement	73
4.5	Formes périodiques et réductions	75
4.6	Annexe : preuves des propriétés de Ω	80
4.6.1	Preuve de la majoration irrationnelle des chemins	80
4.6.2	Preuve de la majoration rationnelle des chemins	80
4.6.3	Preuve de semi-continuité	81
4.6.4	Preuve de la majoration uniforme des chemins	84
4.7	Bilan & perspectives	86

Chapitre 5

Reconnaissance d'hyperplans arithmétiques

5.1	Quelques méthodes de reconnaissance de segments discrets	87
-----	--	----

Table des matières

5.2 Reconnaissance de segments par l'arbre de Stern-Brocot 89

5.2.1 Arbre de Stern-Brocot 89

5.2.2 Algorithme naïf 90

5.2.3 Algorithme incrémental 95

5.3 Le problème de reconnaissance de morceaux d'hyperplans 98

5.4 Arbre de Stern-Brocot étendu et algorithme de reconnaissance 101

5.5 Algorithme de reconnaissance de morceau d'hyperplans arithmétiques 104

5.6 Bilan & perspectives 108

Chapitre 6 Transformations douces
--

6.1 Transformations douces de segments discrets 110

6.1.1 Points déplaçables 111

6.1.2 Rotation douce de segment 113

6.1.3 Translation douce de segment 114

6.1.4 Extension aux segments standard 119

6.2 Translation douce de graphes discrets 122

6.2.1 Translation d'arbres discrets 123

6.2.2 Translation par double bascule 125

6.2.3 Translation douce de graphes discrets 128

6.3 Extension aux morceaux d'hyperplans arithmétiques 130

6.4 Bilan & perspectives 134

Chapitre 7 Δ-numération
--

7.1	Ensemble de Kraaikamp-Meester	135
7.2	Définition de la Δ -numération	137
7.3	Expansions et réductions	139
7.4	Le cas ultimement périodique	142
7.5	Bilan & perspectives	146

Conclusion

Bibliographie	151
----------------------	------------

Table des matières

Résumé

Le monde numérique est parsemé de structures mathématiques discrètes, destinées à être facilement manipulables par un ordinateur tout en donnant à notre cerveau l'impression d'être de belles formes réelles continues. Les images numériques peuvent ainsi être vues comme des sous-ensembles de \mathbb{Z}^2 . En géométrie discrète, nous nous intéressons aux structures de \mathbb{Z}^d et cherchons à établir des propriétés géométriques ou topologiques sur ces objets. Si les questions que nous nous posons sont relativement simples en géométrie euclidienne, elles deviennent beaucoup plus difficiles en géométrie discrète : plus de division, adieu les limites, tout n'est plus qu'arithmétique. Cette thèse est également l'occasion de jongler avec de nombreuses notions élémentaires de mathématiques et d'informatique (algèbre linéaire, anneaux, automates, analyse réelle, arithmétique, combinatoire) pour résoudre des questions de géométrie discrète.

Nous nous intéressons à des structures fondamentales de cette géométrie : les hyperplans arithmétiques. Ceux-ci ont en effet une définition très simple et purement arithmétique : un hyperplan arithmétique est l'ensemble des points entiers situés entre deux hyperplans (réels) affines parallèles. Nous parlons dans cette thèse de trois problèmes portant sur les hyperplans arithmétiques

- la connexité : un hyperplan arithmétique est-il composé d'un seul morceau ou de plusieurs ? Apport principal de ce manuscrit, nous étendons des résultats déjà connus pour la connexité par faces pour des voisinages quelconques. Si certains phénomènes demeurent dans le cas général, l'explosion combinatoire rend difficile l'adaptation des algorithmes connus pour résoudre le problème. Nous adoptons donc une approche analytique et prouvons des propriétés de connexité en étudiant la régularité d'une fonction.
- la reconnaissance : comment connaître les caractéristiques d'un hyperplan arithmétique ? Problème plus classique de géométrie discrète, avec une littérature très riche, nous proposons pour le résoudre un algorithme de reconnaissance reposant sur l'arbre de Stern-Brocot généralisé. Nous introduisons notamment la notion de corde séparante qui caractérise géométriquement les zones auxquelles appartiennent les paramètres d'un hyperplan arithmétique.
- les transformations douces : comment transformer continûment un hyperplan arithmétique via des translations ou rotations ? Approche discrète des transformations homotopiques, nous caractérisons les mouvements de pixels possibles dans une structure discrète tout en préservant ses propriétés géométriques.

Au-delà de l'étude de ces problèmes et des résultats que nous avons pu obtenir, cette thèse montre l'intérêt d'utiliser des réels, et notamment de l'analyse réelle, pour mieux comprendre les hyperplans arithmétiques. Ces derniers sont en effet caractérisés en grande partie par leur vecteur normal, souvent considéré entier pour obtenir des propriétés de périodicité. Considérer des vecteurs normaux réels quelconques permet de gagner en souplesse, et de faire disparaître les phénomènes de bruit induits par les relations arithmétiques du vecteur. S'ouvrir de nouveau au réel est enfin un moyen de créer des ponts vers d'autres branches des mathématiques, comme la combinatoire des mots ou les systèmes de numération.

Mots-clés: hyperplan arithmétique, droite discrète, connexité, continuité relative, reconnaissance, transformations douces

Introduction

Lorsque nous regardons un écran d'ordinateur, nous avons parfois tendance à oublier la nature de l'objet que nous observons. Une photo numérique, aussi belle paraisse-t-elle, n'est en réalité qu'un ensemble rangé de carrés de couleur, des pixels organisés sur une grille rectangulaire qui donnent à notre œil l'impression de voir une forme continue (voir Figure 1). Pour décrire la géométrie des images numériques, il est donc nécessaire de laisser de côté la géométrie euclidienne et ses réels pour se diriger vers un monde de carrés et de pixels : la géométrie discrète.

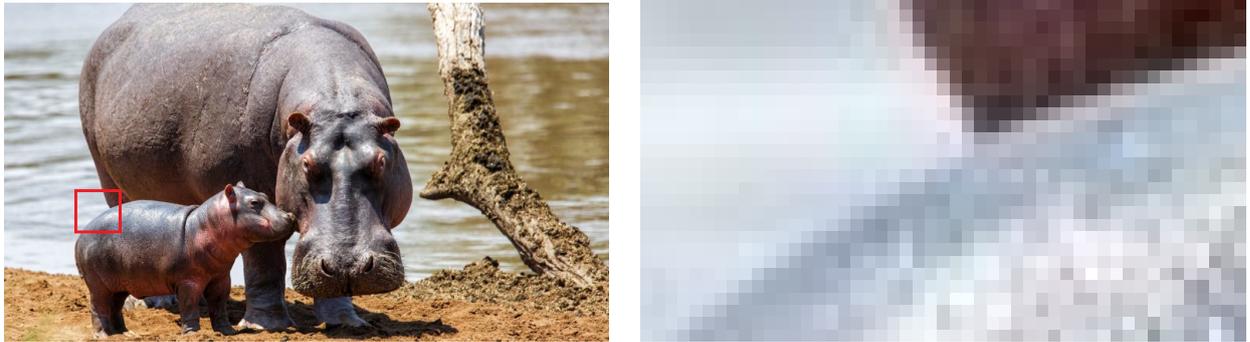


FIGURE 1 – Une photo d'hippopotame et un agrandissement où l'on peut observer les pixels

Il existe de nombreux domaines étudiant le monde discret. On peut par exemple décrire un objet à partir de complexes cellulaires ou polytopaux. Il est également possible de regarder sa surface grâce à des maillages. En ce qui concerne les images finies, celles-ci peuvent être regardées d'un point de vue matriciel, que l'on peut ensuite manipuler via divers opérateurs. Cette thèse s'intéresse davantage au domaine de la géométrie discrète qui étudie les objets de \mathbb{Z}^d , et notamment leurs propriétés géométriques et topologiques. Si les définitions des objets classiques de cette géométrie ressemblent pour beaucoup à celles de leurs cousins euclidiens, leurs propriétés diffèrent énormément. Des questions triviales en géométrie euclidienne peuvent alors devenir de véritables sujets de recherche lorsqu'ils sont traduits dans le monde discret. Cette thèse s'intéresse plus particulièrement aux hyperplans arithmétiques (voir Figure 2) et à leurs propriétés. Correspondant à des espaces affines réels de dimension $d - 1$, les hyperplans arithmétiques recouvrent ainsi les droites discrètes en dimension 2 (d'après [49]) et les plans discrets en dimension 3 (d'après [3]).

Le premier chapitre s'intéresse à la définition de droite discrète et plus généralement à celle d'hyperplan arithmétique. Commenant par le cas 2D, nous utilisons la définition de droite discrète de J.-P. Réveillès [49] et parlons des propriétés de certaines droites particulières : naïves et standard. Un parallèle est alors nécessaire avec la dynamique symbolique où les droites discrètes peuvent être interprétées de multiples manières, notamment via la combinatoire des mots (voir [43] pour l'article fondateur). Nous parlons également de la généralisation de ces

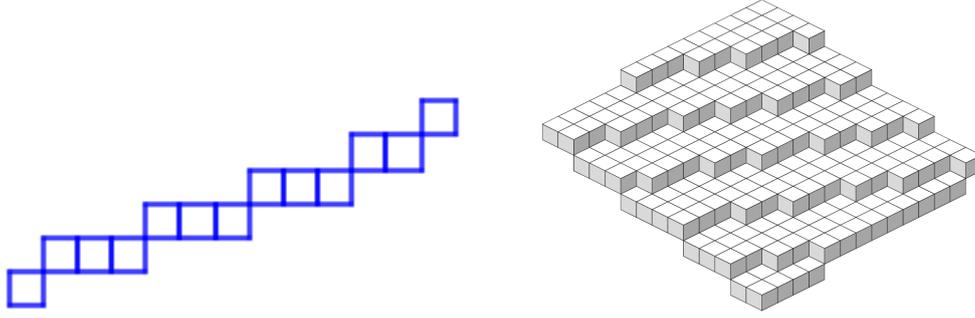


FIGURE 2 – Une droite discrète (gauche) et un plan discret (droite)

droites en dimension finie quelconque : les hyperplans arithmétiques, et de leur interprétation en combinatoire des mots (voir par exemple [6]). Un hyperplan est défini dans [3] à partir d'un vecteur normal $v \in \mathbb{R}^d$, d'un décalage $\mu \in \mathbb{R}$ et d'une épaisseur $\omega \in \mathbb{R}$ via

$$\mathbb{P}(v, \mu, \omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\}$$

Les chapitres 2 à 4 s'intéressent au problème de la connexité des hyperplans arithmétiques. Si les hyperplans affines euclidiens sont toujours connexes car convexes, il est à noter que l'implication classique « convexe \Rightarrow connexe » est fautive en géométrie discrète. Décider si un hyperplan est ou non connexe est un problème difficile, proposé par E. Andres au début des années 2000. Cette thèse propose un état de l'art des travaux de ces 20 dernières années sur la question, ainsi que de nombreux nouveaux résultats.

Le chapitre 2 porte sur le problème de la connexité par faces, où deux cubes sont considérés comme voisins ssi ils se touchent au niveau des faces. Un hyperplan arithmétique peut alors être transformé en graphe : les sommets sont les cubes et il existe une arête entre 2 sommets ssi ceux-ci sont voisins par faces (voir Figure 3). E. Domenjoud, D. Jamet et J.-L. Toutant ont notamment montré dans [21] que pour un vecteur normal v fixé, la propriété de connexité suit un phénomène de percolation par rapport à l'épaisseur ω . L'ensemble des épaisseurs ω rendant l'hyperplan connexe est ainsi un intervalle non borné de \mathbb{R}_+ dont la borne inférieure $\Omega(v)$ est appelée épaisseur de connexité. Cette thèse revient sur l'algorithme de calcul de $\Omega(v)$ ainsi que sur le comportement à l'épaisseur de connexité présenté dans [23, 22]. Ces deux derniers articles utilisent un système de numération appelé Δ -numération, présenté plus en profondeur dans le chapitre 7. Nous parlons des méthodes de calcul dans ce système et du lien avec la connexité par faces.

Le chapitre 3 généralise le problème de la connexité pour des voisinages quelconques. On peut ainsi définir le voisinage par arêtes, par sommets voire par cavalier. Ce chapitre reprend alors les différents résultats déjà connus pour la connexité par faces et les étend dans le cas général lorsque cela est possible. Nous prouvons notamment l'existence d'une épaisseur critique de connexité pour tout voisinage et lui offrons des bornes analogues à celles obtenues pour la connexité par faces. Malheureusement, l'algorithme de calcul de l'épaisseur de connexité ne se généralise pas pour tout voisinage, notamment du fait de la complexité combinatoire des réseaux induits. Nous proposons toutefois dans ce chapitre des méthodes arithmétiques permettant de résoudre le problème de connexité pour certains voisinages particuliers comme les voisinages par facettes en dimensions 3 et 4.

Le chapitre 4 utilise une approche analytique pour résoudre le problème de la connexité. Nous

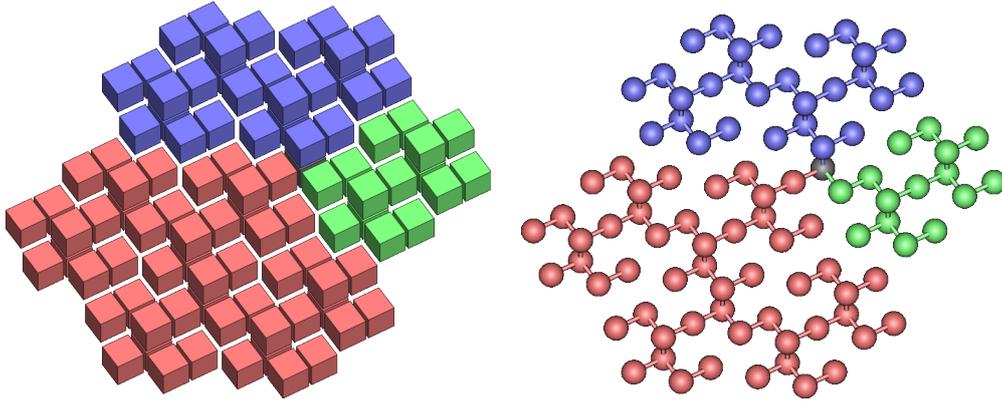


FIGURE 3 – Un morceau d’hyperplan arithmétique et son graphe induit

regardons alors $v \mapsto \Omega(v)$ en tant que fonction et objet analytique. Nous traçons notamment le graphe de la fonction Ω en nous appuyant sur l’algorithme de Y. Gérard [28] qui décide la connexité des hyperplans de vecteurs normaux entiers. Bien que le graphe semble extrêmement chaotique au premier abord, parsemé de pics de discontinuité, une forme fractale continue se dessine en dessous (voir Figure 4). Un résultat majeur de la thèse est le théorème de continuité relative qui donne une condition suffisante simple sur une suite de vecteurs $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers v pour que $(\Omega(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\Omega(v)$. Dans le cas où les coordonnées de v sont indépendantes sur \mathbb{Q} (cas totalement irrationnel), cette condition est toujours vérifiée, ce qui permet d’affirmer que Ω est continue en tout vecteur totalement irrationnel. Ce théorème donne un algorithme de calcul de l’épaisseur de connexité. La forme fractale sous-jacente au graphe Ω possède également un lien étroit avec l’algorithme de calcul de Ω , ce qui nous a permis d’explicitier entièrement Ω pour des voisinages particuliers comme celui du cavalier.

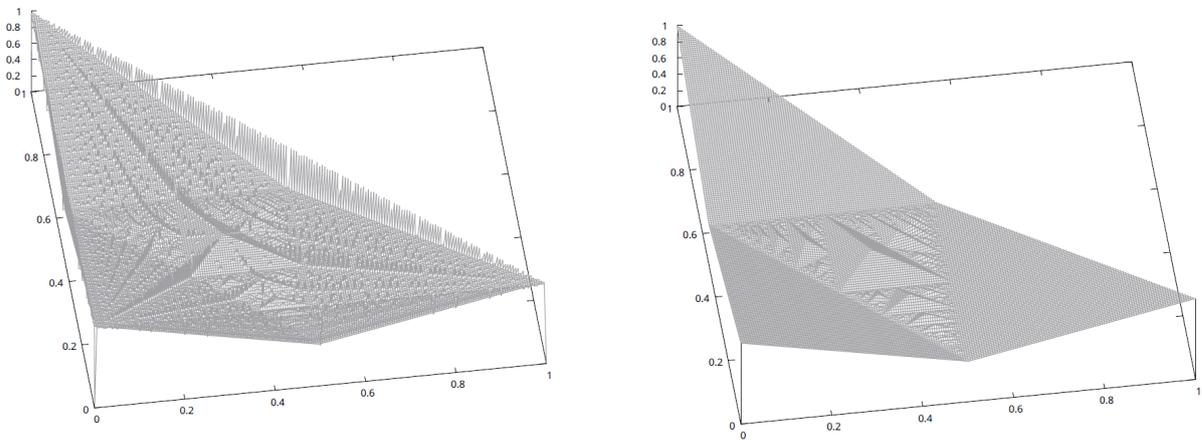


FIGURE 4 – Le graphe de la fonction Ω (à gauche) et la forme fractale continue sous-jacente (à droite)

Le chapitre 5 s’intéresse à un problème indépendant des résultats exposés sur la connexité : la reconnaissance de morceaux d’hyperplans. La question est de déterminer, étant donnée une partie finie $S \subset \mathbb{Z}^d$, si S est une partie d’hyperplan et, si oui, quels sont les paramètres possibles d’un hyperplan contenant S . En géométrie euclidienne, d points indépendants suffisent à caractériser entièrement un hyperplan affine en dimension d . En géométrie discrète, la question est plus délicate car il existe une infinité de solutions possibles, et trouver une solution entière minimale en norme est a priori un problème combinatoire plus complexe. Nous commençons par donner un état de l’art de la reconnaissance d’hyperplans arithmétiques. Nous présentons

ensuite une nouvelle méthode reposant sur l'arbre de Stern-Brocot généralisé en dimension d par H. Lennerstad dans [40]. En dimension 2, notre algorithme reconnaît les segments discrets à partir de l'arbre de Stern-Brocot classique, en temps linéaire et de manière incrémentale, ce qui égale donc l'état de l'art. Notre algorithme s'étend en toute dimension finie, grâce notamment au concept de corde séparante. L'algorithme en dimensions 3 et supérieures se heurte toutefois à des problèmes lorsque le morceau S considéré est trop petit et la version actuelle présentée dans cette thèse mérite quelques améliorations.

Le chapitre 6 porte enfin sur un troisième problème, indépendant des 2 précédents. Les transformations douces permettent de transformer des objets discrets, pixel par pixel, en conservant leurs propriétés géométriques, comme présenté dans [32]. Après avoir caractérisé les points déplaçables d'un segment (points que l'on peut déplacer en conservant la propriété de segment), nous proposons des algorithmes simples pour effectuer une rotation ou une translation de segment discret naïf ou standard. Ces algorithmes sont ensuite étendus à des formes plus complexes, comme les arbres discrets ou les graphes discrets, où des conflits peuvent apparaître aux extrémités. Enfin, les résultats de transformations sont généralisés en dimension finie quelconque aux morceaux d'hyperplans arithmétiques.

Enfin, le chapitre 7 est consacré à un système de numération appelé Δ -numération et présenté dans [23, 22]. Ce système, introduit au chapitre 2 via l'algorithme totalement soustractif pour résoudre des problèmes de connexité d'hyperplans arithmétiques, est ici étudié du point de vue des systèmes de numération. Nous reprenons tout d'abord un certain nombre de définitions rencontrées au chapitre 2, de telle sorte que le chapitre 7 peut être lu indépendamment du reste de ce manuscrit. Nous établissons ensuite un lien entre la Δ -numération et les bases de Cantor alternées étudiées par E. Charlier dans [16, 15]. Après avoir présenté les propriétés de normalisation et les méthodes de calcul en Δ -numération, nous nous intéressons au cas où le mot Δ considéré est ultimement périodique. L'algorithme totalement soustractif fait alors apparaître un réel β inverse d'un nombre de Pisot. Nous montrons alors que calculer avec des mots finis ou ultimement périodiques en Δ -numération revient à faire des calculs dans $\mathbb{Q}[\beta]$, nous permettant ainsi de multiplier ou de diviser facilement.

Certaines preuves des chapitres 2 et 4, relativement techniques, sont présentées en 2 versions. Une idée de preuve est tout d'abord présentée dans le corps de la thèse, reprenant les arguments essentiels et les intuitions de la preuve. Une démonstration formelle contenant tous les détails techniques est ensuite disponible en annexe.

1

Droites et hyperplans arithmétiques

Le but de ce chapitre est de définir les objets étudiés dans cette thèse et d'en donner quelques propriétés élémentaires. On travaille dans l'espace euclidien \mathbb{R}^d ($d \geq 2$) muni de son produit scalaire canonique. La géométrie discrète s'intéresse en particulier aux structures de \mathbb{Z}^d . Tout comme dans le cas euclidien, les sous-espaces affines font partie des objets fondamentaux de cette partie. Si l'on peut définir des sous-espaces affines généraux via le modèle standard d'Eric Andres (voir [2]), nous nous intéressons ici seulement aux sous-espaces de dimension $d - 1$ qui ont une définition plus élémentaire.

1.1 Droites discrètes

En 1991, J.-P. Réveillès définit dans [49] la notion de droite discrète en dimension 2 comme étant l'ensemble des points à coordonnées entières entre 2 droites parallèles.

Définition 1.1.1 (Droite discrète, voir Figure 1.1). *Soient $a, b, \mu, \omega \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. La droite discrète de vecteur normal (a, b) , de décalage μ et d'épaisseur ω est l'ensemble*

$$\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq ax + by + \mu < \omega\}$$

Chaque point (x, y) de \mathbb{Z}^2 peut être représenté par un carré de côté 1 centré en ce point dit pixel, à savoir par le carré $\left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right] \times \left[y - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}\right]$. Les paramètres a, b définissent la pente des droites parallèles considérées, μ est un décalage par rapport à l'origine, et ω est la distance entre les 2 droites parallèles. Remarquons que, pour la dimension 2, on peut également parler du vecteur directeur de la droite $(-b, a)$, la pente étant alors $\frac{-b}{a}$ (en considérant $\frac{1}{0}$ comme une pente verticale). Enfin, notons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega) = \mathcal{D}(\lambda a, \lambda b, \lambda \mu, \lambda \omega)$. Ainsi, les paramètres des droites seront souvent considérés à un facteur scalaire près.

Certaines droites discrètes ont des propriétés topologiques particulières, notamment en terme de connexité. On s'intéresse majoritairement à 2 types de connexité en dimension 2.

Définition 1.1.2 (4-voisinage et 8-voisinage, Figure 1.2). *On dit que 2 points $p, q \in \mathbb{Z}^2$ sont 4-voisins ou voisins par arêtes ssi $\|p - q\|_1 = 1$.*

On dit que p, q sont 8-voisins ou voisins par sommets ssi $\|p - q\|_\infty = 1$.

Une partie $A \subset \mathbb{Z}^2$ est alors 4-connexe (resp. 8-connexe) ssi toute paire de points de A est reliée par un chemin pour le 4-voisinage (resp. le 8-voisinage).

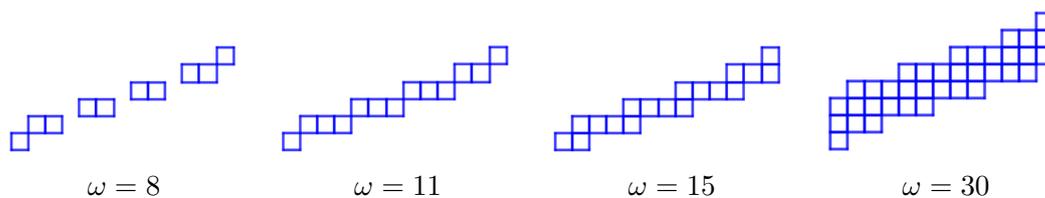


FIGURE 1.1 – Droites discrètes de paramètres $(a, b, \mu) = (4, 11, 7)$ et d'épaisseurs ω variables.

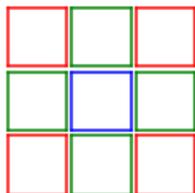


FIGURE 1.2 – Voisinage d'un point. Les 4-voisins du carré bleu sont les carrés verts. Les 8-voisins du carré bleu sont les carrés verts et rouges.

Définition 1.1.3 (Droites naïves et standard). Soit $D \subset \mathbb{Z}^d$. On dit que D est une droite naïve ssi il existe (a, b, μ) tels que $D = \mathcal{D}(a, b, \mu, \|a, b\|_\infty)$. On note alors $D = \mathcal{D}(a, b, \mu)$. On dit que D est une droite standard ssi il existe (a, b, μ) tels que $D = \mathcal{D}(a, b, \mu, \|a, b\|_1)$. On note alors $D = \mathcal{D}'(a, b, \mu)$.

Proposition 1.1.4 ([49]). Les droites naïves sont les droites 8-connexes de plus faible épaisseur. Les droites standard sont les droites 4-connexes de plus faible épaisseur.

Dans la Figure 1.1, la deuxième droite est naïve alors que la troisième droite est standard. Nous reviendrons dans le chapitre 2 sur les propriétés exactes de 4- et 8-connexité de ces droites. Les droites naïves ont également l'intérêt d'avoir une définition fonctionnelle, qui dépend de l'octant (voir Figure 1.3) dans lequel elles vivent (dépendant des signes de a et b , et de l'ordre de $|a|$ et $|b|$). Regardons par exemple une droite naïve $D = \mathcal{D}(a, b, \mu, b)$ du premier octant, ie vérifiant $0 \leq a \leq -b$. Pour $(x, y) \in D$, $0 \leq ax + by + \mu < -b$ donc, en divisant par $-b$, $0 \leq -\frac{ax+\mu}{b} + y < 1$, et, en passant à la partie entière $y = -\left\lfloor -\frac{ax+\mu}{b} \right\rfloor = \left\lceil \frac{ax+\mu}{b} \right\rceil$. On a ainsi une relation fonctionnelle entre x et y .

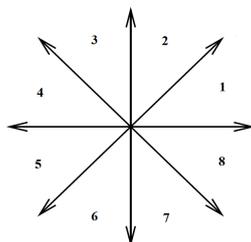


FIGURE 1.3 – Les 8 octants

Au-delà de leurs propriétés de connexité, les droites naïves et standard peuvent également être étudiées en dynamique symbolique du point de vue de la combinatoire des mots, comme exposé dans [43]. Bien que cette thèse utilise un point de vue de géométrie discrète, il est intéressant de regarder les mêmes objets du point de vue de la dynamique symbolique pour

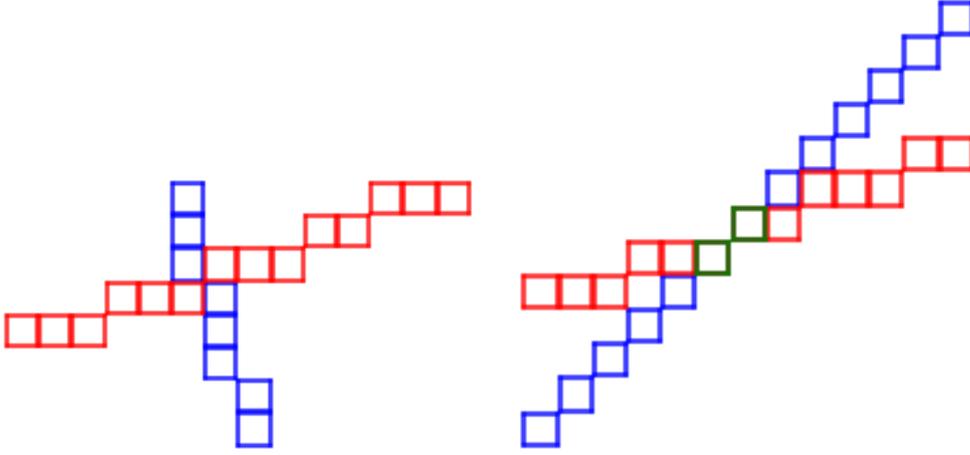


FIGURE 1.4 – Un des multiples exemples des difficultés de la géométrie discrète : l'intersection de droites. En géométrie euclidienne du plan, l'intersection de 2 droites est soit vide, soit un point, soit une droite. En géométrie discrète, l'intersection peut être vide pour des droites non parallèles (voir à gauche), ou de taille arbitraire (voir à droite).

faire un parallèle entre les articles des deux domaines. Regardons le cas des droites standard, la démarche étant analogue pour les droites naïves. Étant donné une droite discrète standard $D = \mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$ dans le premier quartant (ie vérifiant $b \leq 0 \leq a$), D forme un unique 4-chemin bi-infini. Un déplacement vers la droite dans ce chemin est encodé par la lettre 0, un déplacement vers le haut est encodé par la lettre 1. Le chemin bi-infini dans la droite est alors encodé par un mot bi-infini de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, appelé code de Freeman de la droite et présenté dans [27]. Cette relation entre droites et mots est représentée en Figure 1.5. Les mots obtenus ont des propriétés particulières et ont été énormément étudiés en dynamique symbolique.

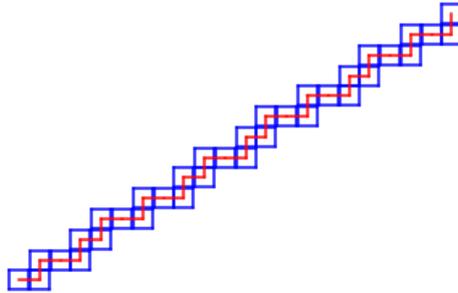


FIGURE 1.5 – Un morceau de droite discrète correspondant au mot 01001010010010100101001001001

Définition 1.1.5 (Complexité en facteurs). Soit $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

On note $F_w(n)$ l'ensemble des facteurs de w de taille n , ie $\{(w_i w_{i+1} \dots w_{i+n-1})\}_{i \in \mathbb{N}}$.

La complexité en facteurs de w est la fonction $\rho_w : n \mapsto \text{card}(F_w(n))$.

Théorème 1.1.6 ([43]). Soit $D = \mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$ une droite naïve et w un mot représentant D .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- la pente $\frac{-b}{a}$ de D est rationnelle (une pente verticale étant considérée comme rationnelle) ;
- ρ_w est bornée ;
- w est périodique

Les propositions suivantes sont également équivalentes :

- la pente $\frac{-b}{a}$ de D est irrationnelle (une pente verticale étant considérée comme rationnelle) ;

— $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_w(n) = n + 1$ et w est non ultimement périodique ;

Dans le premier cas, le mot w est dit de Christoffel.

Dans le second cas, le mot w est dit sturmien.

Observons par exemple la droite $D \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{D}(1, -2, 0, 3)$ de pente rationnelle $1/2$ et partons du point $(0, 0)$. Le mot représentant D est alors $(001)^{\mathbb{Z}}$ qui est bien périodique. Intéressons-nous maintenant au mot de Fibonacci défini à partir de la suite de Fibonacci. On pose $F_0 \stackrel{\text{déf}}{=} 1$, $F_1 \stackrel{\text{déf}}{=} 0$ et on définit par récurrence sur $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1}F_{n-2}$. Ainsi, $F_2 = 01$, $F_3 = 010$, $F_4 = 01001$, etc. La suite de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'ordre préfixe donc on peut considérer sa limite $F = 0100101001001010010100101001001\dots$ pour la topologie du Cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. F correspond alors à une demi-droite de pente irrationnelle $\frac{1}{\varphi}$ où $\varphi \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. On peut également obtenir une droite en considérant la limite des $(F_{2n+1} \cdot F_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge également pour la topologie produit de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

1.2 Segments discrets

Tout comme en géométrie euclidienne, on peut s'intéresser à des morceaux finis de droites appelés segments. Nous nous intéressons ici uniquement aux segments discrets naïfs et standard, que nous étudions dans les chapitres 5 et 6.

Définition 1.2.1 (Segment discret naïf/standard). *Un segment discret naïf est une partie bornée 8-connexe de droite naïve.*

Un segment discret standard est une partie bornée 4-connexe de droite standard.

Notons que, contrairement à la géométrie euclidienne, un segment peut être prolongé d'une infinité de manière en une droite. Etant donné un segment naïf S , il existe donc une infinité de paramètres a, b, μ tels que $S \subset \mathcal{D}(a, b, \mu, \|(a, b)\|_{\infty})$. On peut toutefois donner à ce segment des paramètres canoniques, en exigeant que $a, b, \mu \in \mathbb{Z}$ et que $\|(a, b)\|_{\infty}$ soit minimale parmi l'ensemble des solutions possibles. Dans le cas de paramètres minimaux (a, b, μ) , on a dès lors $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Les segments discrets peuvent également être caractérisés par leurs points d'appui, comme utilisé pour la reconnaissance de segments discrets dans [19].

Définition 1.2.2 (Points d'appui [19], Figure 1.6). *Soient S un segment discret de paramètres minimaux a, b, μ, ω et $p = (x, y)$ un point de S . On dit que p est un point d'appui supérieur ssi $ax + by + \mu = 0$. On dit que p est un point d'appui inférieur ssi $ax + by + \mu = \omega - 1$.*

Nous avons choisi la définition de point d'appui inférieur et supérieur de sorte à ce que les points d'appui supérieurs soient situés au-dessus du segment pour les vecteurs du premier octant. Toutefois, pour les autres octants, il est possible que les points d'appui inférieurs soient situés au-dessus du segment et les points d'appui supérieurs en dessous. De manière générale, les segments sont considérés par symétrie dans le premier octant, ce qui évite ce type de problème.

Du point de vue de la combinatoire des mots, les segments naïfs ou standard peuvent également être représentés comme des mots finis sur l'alphabet $\{0, 1\}$, par le même procédé que pour les droites. Les points d'appui peuvent alors être vus comme les points de Lyndon du mot obtenu, comme exposé dans [41]. Cette vision de la géométrie discrète par la dynamique symbolique permet notamment de résoudre des problèmes a priori purement géométriques en

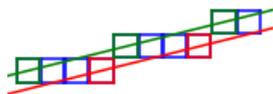


FIGURE 1.6 – Un segment de pente $1/4$. Les points d'appui inférieurs sont en rouge et les points d'appui supérieurs en vert.

passant par la théorie des langages. C'est ainsi que les ω -automates permettent par exemple de résoudre des problèmes de concaténation de segments discrets comme dans [7]. Un panorama des parallèles entre géométrie discrète et dynamique symbolique peut également être trouvé dans [10].

1.3 Hyperplans arithmétiques

La définition de droite discrète se généralise aisément en toute dimension finie, comme l'ensemble des points de \mathbb{Z}^d entre 2 hyperplans affines parallèles.

Définition 1.3.1 (Hyperplan arithmétique [3]). *Soient $v \in \mathbb{R}^d$ non nul et $\omega, \mu \in \mathbb{R}$. L'hyperplan arithmétique de vecteur normal v , de décalage μ et d'épaisseur ω est l'ensemble*

$$\mathbb{P}(v, \mu, \omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\}$$

Le vecteur v définit l'inclinaison des hyperplans réels support, le décalage μ permet de les translater, et ω est la distance entre les deux hyperplans. Une représentation d'un plan discret est donné en Figure 1.7. Remarquons que, comme pour les droites, les paramètres des hyperplans sont définis à un facteur scalaire près. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(\lambda v, \lambda \mu, \lambda \omega) = \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Les points de \mathbb{Z}^d sont représentés par des hypercubes, x étant ainsi représenté par $\overline{\mathcal{B}}_\infty(x, \frac{1}{2})$.

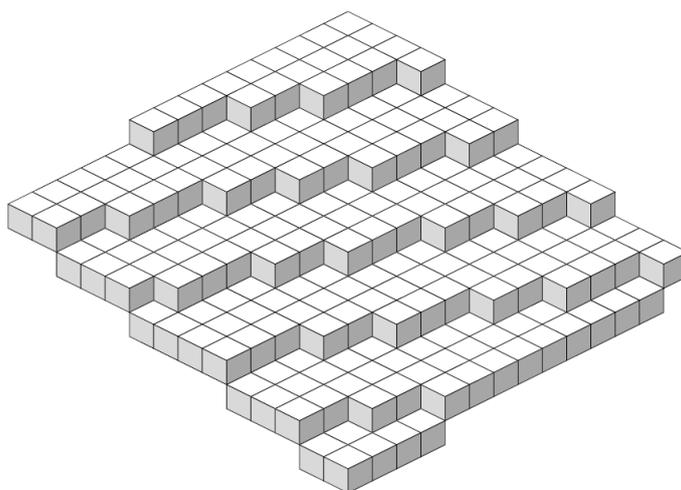


FIGURE 1.7 – Un plan discret

Définition 1.3.2 (Hyperplan naïf/standard). *Un hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est dit naïf ssi $\omega = \|v\|_\infty$. Il est dit standard ssi $\omega = \|v\|_1$.*

Les hyperplans naïfs et standard ont malheureusement de moins bonnes propriétés que les droites naïves et standard, notamment en ce qui concerne la connexité, comme traité dans les chapitres 2 à 4. On peut toutefois remarquer que l'on garde le caractère fonctionnel des hyperplans naïfs. Du point de vue de la dynamique symbolique, des généralisations des mots sturmiens ont permis de créer un lien entre hyperplans standard de \mathbb{Z}^d et configurations de $[[0, d - 1]]$ de dimension $d - 1$, via la description de la surface de l'hyperplan. On pourra entre autres regarder les travaux suivants : [30, 26, 6].

Si, dans le cas des droites discrètes, il existe une différence forte entre pente rationnelle et pente irrationnelle, le comportement des hyperplans arithmétiques en dimensions supérieures est plus complexe.

Définition 1.3.3 (pgcd d'un vecteur). *Etant donné un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ non nul, on appelle $\text{pgcd}(v)$ le plus grand réel α , s'il existe, tel que $\frac{v}{\alpha} \in \mathbb{Z}^d$. Sinon, on prend $\text{pgcd}(v) = 0$. On notera également $a \wedge b$ le pgcd de a et b .*

Définition 1.3.4 (Dimension sur \mathbb{Q}). *Soit $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$. La dimension sur \mathbb{Q} de v , notée $\text{dim}_{\mathbb{Q}}(v)$ est la dimension du \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les coordonnées de v . Autrement dit, $\text{dim}_{\mathbb{Q}}(v) = \text{rg}_{\mathbb{Q}}(v_1, v_2, \dots, v_d)$ où l'on travaille dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} .*

Définition 1.3.5 (Vecteur rationnel, irrationnel, totalement irrationnel). *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ non nul.*

- *v est dit rationnel ssi $\text{dim}_{\mathbb{Q}}(v) = 1$ (ssi $\text{pgcd}(v) > 0$)*
- *v est dit irrationnel ssi $\text{dim}_{\mathbb{Q}}(v) > 1$ (ssi $\text{pgcd}(v) = 0$)*
- *v est dit totalement irrationnel ssi $\text{dim}_{\mathbb{Q}}(v) = d$, ie ssi les coordonnées de v sont indépendantes sur \mathbb{Q} .*

Exemple 1.3.6.

- *$(1, 2, 4)$ est un vecteur rationnel de pgcd 1 ;*
- *$(3\pi, 5\pi, 7\pi)$ est un vecteur rationnel de pgcd π ;*
- *$(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ est un vecteur irrationnel mais pas totalement irrationnel ;*
- *$(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est un vecteur totalement irrationnel.*

Les hyperplans arithmétiques ont un comportement très différent selon la dimension sur \mathbb{Q} de leur vecteur normal v . Regardons notamment la fonction linéaire $f \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \mathbb{Z}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \langle x, v \rangle \end{cases}$

L'ensemble des périodes du plan est alors $\text{Ker}(f)$. Dans le cas où v est rationnel, par le théorème de Bézout, $\text{Im}(f) = \text{pgcd}(v)\mathbb{Z}$, qui est un sous-groupe monogène de \mathbb{R} . L'hyperplan est alors caractérisé par un ensemble fini répété périodiquement dans tout l'espace. Dans le cas irrationnel, $\text{Im}(f)$ est un sous-groupe dense de \mathbb{R} . Dans le cas où v est totalement irrationnel, on sait de plus que f est injective et que le plan n'admet donc aucune période. Ce cas est d'ailleurs le plus utilisé en dynamique symbolique car c'est celui qui permet de généraliser les mots sturmiens en toute dimension (voir [6] pour une généralisation possible).

La disjonction de cas rationnel/irrationnel sera très fréquente dans la suite de ce manuscrit. Les preuves dans le cas rationnel reposent souvent sur l'arithmétique et le théorème de Bézout quand le cas irrationnel utilise principalement des arguments de densité et donc d'analyse. Il est d'ailleurs important de constater que les hyperplans totalement irrationnels ont souvent un comportement nettement plus régulier que les hyperplans rationnels, ceci étant notamment dû à la disparition de l'arithmétique et des pgcd.

2

Connexité par faces des hyperplans arithmétiques

Ce chapitre reprend l'état de l'art sur la question de la connexité par faces, généralisation de la 4-connexité en toute dimension finie. Il est essentiellement constitué d'un état de l'art sur le sujet, afin d'introduire les recherches développées durant la thèse sur la connexité générale (chapitres 3 et 4). Le contenu est notamment fortement inspiré de [21, 23, 22]. Ont également été ajoutés à ce chapitre des compléments de l'article [22] sur la connexité à l'épaisseur critique, notamment sur les méthodes de calcul dans les systèmes de numération introduites par l'article. Nous ajoutons également quelques mots sur la connexité par faces en dimension infinie.

Définition 2.0.1 (Voisinage par faces). *Deux points $x, y \in \mathbb{Z}^d$ sont voisins par faces ssi $\|x - y\|_\infty = 1$.*

Les points x de \mathbb{Z}^d peuvent être représentés par des hypercubes, à savoir des boules $\mathcal{B}_\infty\left(x, \frac{1}{2}\right)$. Ainsi, les points de \mathbb{Z}^2 peuvent être représentés par des carrés et les points de \mathbb{Z}^3 par des cubes. Deux hypercubes sont dits voisins ssi ils se touchent au niveau des faces. Etant donné un objet $X \subset \mathbb{Z}^d$, on peut ainsi considérer le graphe de X induit par le voisinage par faces : $G_X = (X, A_X)$ où $\forall x, y \in X, \{x, y\} \in A_X \Leftrightarrow x$ et y sont voisins par faces. Il est alors possible de s'intéresser aux diverses propriétés de G_X , en particulier à sa connexité.

Définition 2.0.2 (Connexité par faces). *Soit X un objet de \mathbb{Z}^d . On dit que X est connexe par faces ssi le graphe G_X est connexe et non vide.*

Remarquons que nous parlons de « connexe » pour dire « connexe et non vide », ce qui nous permet d'énoncer plus facilement les propriétés de connexité dans le cas des hyperplans arithmétiques. Nous nous intéressons donc au problème suivant :

Problème 2.0.3. *Etant donnés v, μ, ω , l'hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est-il connexe par faces ?*

Par abus de langage, on omettra souvent dans ce chapitre le qualificatif « par faces » en parlant de connexité ou de voisins.

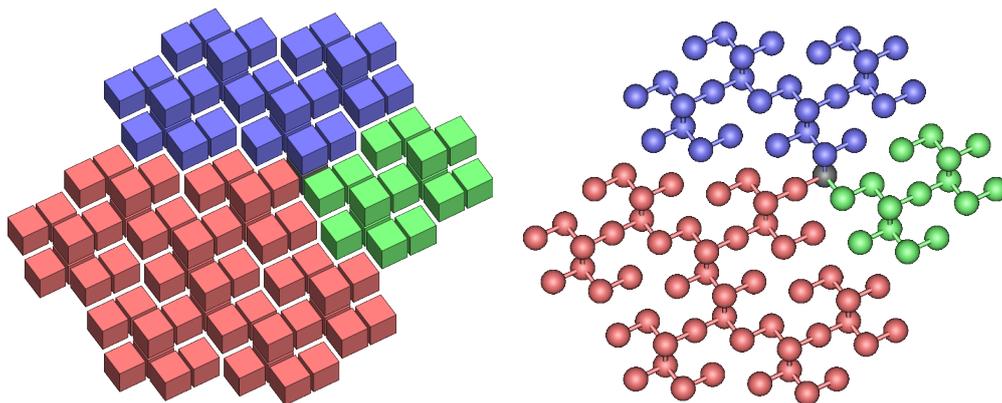


FIGURE 2.1 – Un morceau d’hyperplan arithmétique et son graphe induit. On peut remarquer que le graphe induit est ici un arbre dont les branches sont représentées par 3 couleurs différentes.

2.1 Le cas de la dimension 2

La dimension 2 offre un cas très simple d’étude de connexité par faces (également appelée dans ce cas 4-connexité). Les droites standard, de la forme $\mathcal{D}(a, b, \mu, \|(a, b)\|_1)$, sont alors des droites particulières pour la connexité par faces. La propriété de caractérisation de la 4-connexité, énoncée dans [49] pour des droites à paramètres entiers, mérite quelques précisions supplémentaires. Notamment, il est nécessaire de distinguer le cas rationnel du cas irrationnel.

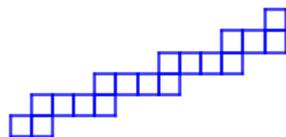


FIGURE 2.2 – Une droite standard

Théorème 2.1.1 (Connexité par faces des droites discrètes [21]). *Soient $a, b, \mu, \omega \in \mathbb{R}$ tels que a, b soient non tous deux nuls.*

- *si a et b sont rationnellement indépendants (ie $\dim_{\mathbb{Q}}(a, b) = 2$) alors $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$ est connexe par faces ssi $\omega \geq \|(a, b)\|_1$.*
- *si a et b sont rationnellement liés (ie $\dim_{\mathbb{Q}}(a, b) = 1$) alors $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$ est connexe par faces ssi $\omega > \|(a, b)\|_1 - \text{pgcd}(a, b) + (\mu \bmod \text{pgcd}(a, b))$.*

Ce théorème, bien qu’il puisse se démontrer facilement manu militari, est un cas particulier de théorèmes bien plus généraux sur la connexité par faces en dimension finie quelconque.

2.2 Epaisseur de connexité

La connexité par faces des hyperplans arithmétiques suit un phénomène de percolation. Il a en effet été démontré dans [21] que pour v, μ fixés, l’ensemble des épaisseurs rendant le plan connexe est un intervalle non borné de \mathbb{R}_+ .

Théorème 2.2.1 (Epaisseur de connexité [21]). *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ non nul et $\mu \in \mathbb{R}$. Il existe une épaisseur critique $\Omega(v, \mu)$ telle que :*

$\forall \omega < \Omega(v, \mu), \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ n'est pas connexe par faces.

$\forall \omega > \Omega(v, \mu), \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe par faces.

On appelle alors $\Omega(v, \mu)$ l'épaisseur de connexité de v, μ . En dimension 2, ce phénomène peut s'observer sur la Figure 2.3. La droite standard correspond alors à la frontière $\Omega(v, \mu)$ à partir de laquelle la droite devient connexe. Une fois l'existence de l'épaisseur de connexité prouvée, deux questions se posent encore :

- comment calculer $\Omega(v, \mu)$?
- que se passe-t-il lorsque $\omega = \Omega(v, \mu)$? (comportement à l'épaisseur critique)

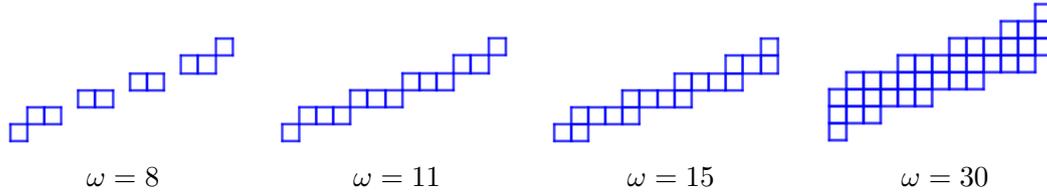


FIGURE 2.3 – Droites discrètes de paramètres $(a, b, \mu) = (4, 11, 7)$ et d'épaisseurs variables. Les droites deviennent alors connexes par faces à partir de la troisième qui a pour épaisseur 15.

Parlons tout d'abord du calcul de $\Omega(v, \mu)$. Les propriétés suivantes, qui permettent de simplifier le problème, proviennent de [21]. Elles montrent notamment que la dépendance de Ω en μ est faible et donnent un certain nombre de symétries sur la fonction Ω .

Proposition 2.2.2 (Dépendance au décalage [21]). *Soient $v \in \mathbb{R}^d$ non nul et $\mu \in \mathbb{R}$.*

- si v est irrationnel alors $\Omega(v, \mu) = \Omega(v, 0)$.
- si v est rationnel alors $\Omega(v, \mu) = \Omega(v, 0) + (\mu \bmod \text{pgcd}(v))$.

On s'intéresse alors maintenant exclusivement à $\Omega(v, 0)$ que l'on note par abus $\Omega(v)$.

Proposition 2.2.3 ([21]). *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ avec au moins 2 coordonnées non nulles. On pose $\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \min(\{|v_i| \mid i \in \llbracket 1, d \rrbracket, v_i \neq 0\})$.*

Alors $\|v\|_\infty \leq \Omega(v) \leq \|v\|_\infty + \lambda$.

De plus, ces bornes sont optimales.

Proposition 2.2.4 ([21]). *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ non nul. Alors $\Omega(v) = \Omega(|v|)$ où $|v| \stackrel{\text{déf}}{=} (|v_i|)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$.*

On peut donc se restreindre au cas des vecteurs positifs. Dès lors, le théorème suivant permet de calculer récursivement Ω à partir d'un algorithme de pgcd : l'algorithme totalement sous-tractif, introduit dans [51] en tant qu'algorithme de fractions continues multidimensionnelles.

Théorème 2.2.5 (Réduction [21]). *Soit v un vecteur positif non nul de \mathbb{R}^d . On note π_i la projection orthogonale parallèlement à la i -ième coordonnée et $\mathbf{1} \stackrel{\text{déf}}{=} (1, 1, \dots, 1)$.*

- si $d = 1$ alors $\Omega(v) = 0$.
- si v a une coordonnée nulle v_i alors $\Omega(v) = \Omega(\pi_i(v))$.
- si v est à coordonnées strictement positives et si v_i est une des coordonnées minimales de v alors $\Omega(v) = \Omega(v - v_i(\mathbf{1} - e_i)) + v_i$.

Regardons par exemple le déroulé de l'algorithme sur le vecteur $(16, 7, 10, 7)$ en Figure 2.4. A chaque étape on modifie le vecteur et on incrémente l'épaisseur Ω à partir du théorème de réduction. Lorsqu'une coordonnée est nulle (en rouge), on la supprime. Sinon, on prend une coordonnée minimale et on la soustrait aux autres coordonnées comme pour un algorithme de pgcd.

v	Ω
$(16,7,10,7)$	0
$(9,7,3,0)$	7
$(9,7,3)$	7
$(6,4,3)$	10
$(3,1,3)$	13
$(2,1,2)$	14
$(1,1,1)$	15
$(1,0,0)$	16
$(1,0)$	16
(1)	16

FIGURE 2.4 – Déroulé de l’algorithme totalement soustractif sur l’exemple $(16, 7, 10, 7)$. Finalement, l’épaisseur de connexité est 16.

Proposition 2.2.6 ([21]). *L’algorithme de réduction associé à l’algorithme totalement soustractif termine ssi v est rationnel. Dans le cas irrationnel, en notant $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\Omega^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des vecteurs et épaisseurs considérés, ces deux suites convergent respectivement vers un vecteur $v^{(\infty)}$ et un réel $\Omega^{(\infty)}$. De plus $\Omega(v) = \Omega^{(\infty)} + \|v^{(\infty)}\|_\infty$*

On peut toutefois ajouter un critère d’arrêt à l’algorithme lui permettant de s’arrêter pour presque tout vecteur. Ce critère est une version forte de celui exposé dans [23].

Théorème 2.2.7. *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ non nul. On suppose qu’il existe $I \subset \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que :*

- $|I| \geq 2$;
- $(v_i)_{i \in I}$ est irrationnel ;
- $\Omega((v_i)_{i \in I}) \leq \|v\|_\infty$.

Alors $\Omega(v) = \|v\|_\infty$.

Démonstration. L’épaisseur de connexité étant invariante par permutation des coordonnées, on peut supposer sans perte de généralités $I = \llbracket 1, r \rrbracket$ avec $r \geq 2$. On appelle π_A la projection orthogonale de \mathbb{R}^d sur $A \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ et π_B la projection orthogonale de \mathbb{R}^d sur $B \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_d)$. En considérant $v_A \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_A(v)$ et $v_B \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_B(v)$, on a alors $v = v_A + v_B$. Prenons $\omega > \|v\|_\infty$ et montrons que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est connexe. Soient $x, y \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. On note, pour $\alpha \in \{A, B\}$, $x_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_\alpha(x)$ et $y_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_\alpha(y)$. On considère $N \stackrel{\text{déf}}{=} \|y_B - x_B\|_1 \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur N qu’il existe un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$.

Si $N = 0$ alors $x_B = y_B$. Notre but est d’utiliser $\omega > \Omega(v_A)$ pour créer un chemin de x_A à y_A dans $\mathbb{P}(v_A, \mu, \omega)$ pour un μ bien choisi et de le relever en un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. On pose pour cela $\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \langle x_B, v_B \rangle = \langle y_B, v_B \rangle$. Remarquons que, comme $\langle x, v \rangle = \langle x_A, v_A \rangle + \langle x_B, v_B \rangle$, $x_A \in \mathbb{P}(v_A, \mu, \omega)$. De même, $y_A \in \mathbb{P}(v_A, \mu, \omega)$. Or, $\Omega(v_A) \leq \|v\|_\infty < \omega$ donc il existe un chemin z_0, \dots, z_k de x_A à y_A dans $\mathbb{P}(v_A, \mu, \omega)$. Ce chemin peut alors être relevé dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ en le chemin $z_0 + x_B, z_1 + x_B, \dots, z_k + x_B$. Or $z_0 + x_B = x_A + x_B = x$ et $z_k + x_B = y_A + x_B = y_A + y_B = y$. Donc il existe bien un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$.

Si $N > 0$, $y_B - x_B$ admet une coordonnée non nulle. Sans perte de généralités, supposons qu’il s’agit de la coordonnée selon e_d et supposons $y_d - x_d > 0$. Nous proposons d’utiliser les vecteurs e_1, \dots, e_r pour nous déplacer dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ jusqu’à un point z tel que z et $z + e_j$ appartiennent à $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Ceci est possible du fait que $\omega > \|v\|_\infty$ et par densité car v_A est irrationnel. On pourra alors effectuer le déplacement e_d puis conclure par hypothèse de récurrence.

On pose $z_B \stackrel{\text{déf}}{=} y_B - e_d$. Comme v_A est irrationnel, par densité, il existe $z_A \in A$ tel que $-\langle z_B, v_B \rangle \leq \langle z_A, v_A \rangle < \omega - \|v\|_\infty - \langle z_B, v_B \rangle$. Considérons $z \stackrel{\text{déf}}{=} z_A + z_B$. $\langle z, v \rangle = \langle z_A, v_A \rangle + \langle z_B, v_B \rangle \in [0, \omega - \|v\|_\infty[$. De plus, $w \stackrel{\text{déf}}{=} z + e_d$ vérifie $\langle w, v \rangle = \langle z, v \rangle + v_d \in [0, \omega[$ car $0 \leq v_d \leq \|v\|_\infty$. Donc $w, z \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ et z et w sont voisins par faces via e_d . Or $\|z_B - x_B\|_1 = \|y_B - x_B\| - 1 = N - 1$ donc, par hypothèse de récurrence, il existe un chemin de x à z dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. De plus, $\|y_B - w_B\| = 0$ donc, grâce au cas $N = 0$, il existe un chemin de w à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. En concaténant les chemins, il existe un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. \square

Corollaire 2.2.8. *Soit v un vecteur positif non nul de \mathbb{R}^d . On suppose que v admet 2 coordonnées v_j et v_k rationnellement indépendantes et que $v_j + v_k \leq \|v\|_\infty$. Alors $\Omega(v) = \|v\|_\infty$.*

On obtient alors l'algorithme 1 pour calculer l'épaisseur de connexité.

Algorithme : Algorithme totalement soustractif 1[51, 21]

Entrée : v un vecteur non nul

Sortie : $\Omega(v)$

$d \leftarrow$ nombre de coordonnées de v ;

$v \leftarrow |v|$;

$\Omega \leftarrow 0$;

tant que $d > 1$ **faire**

si il existe deux coordonnées v_j et v_k rationnellement indépendantes et telles que

$v_j + v_k \leq \|v\|_\infty$ **alors**

 | Renvoyer $\|v\|_\infty + \Omega$

si v admet une coordonnée nulle v_i **alors**

 | $v \leftarrow \pi_i(v)$;

 | $d \leftarrow d - 1$

sinon

 | $i \leftarrow$ indice d'une coordonnée minimale de v ;

 | $v \leftarrow v - v_i(\mathbf{1} - e_i)$ où $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$;

 | $\Omega \leftarrow \Omega + v_i$

Renvoyer Ω

Définition 2.2.9 (Ensemble de Kraaikamp-Meester [31]). *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ tel que l'algorithme totalement soustractif ne termine pas sur l'entrée v ni n'effectue de projection. On note $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des vecteurs considérés par l'algorithme. On dit que v vérifie la propriété de Kraaikamp-Meester ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|v^{(n)}\|_\infty < \frac{\|v^{(n)}\|_1}{d-1}$. On note \mathcal{K}_d l'ensemble des vecteurs vérifiant la propriété de Kraaikamp-Meester de dimension d .*

L'ensemble \mathcal{K}_d a été introduit par C. Kraaikamp et R. Meester dans un tout autre contexte que celui de la géométrie discrète. Il s'agit de l'ensemble des vecteurs pour lesquels l'algorithme totalement soustractif ne termine pas ni n'effectue de projection, à une petite exception technique près. En effet, les vecteurs de la forme $v = (v'_1, v'_2, \dots, v'_i, \Omega(v'), \dots, \Omega(v'))$ pour $v' \in \mathcal{K}_i$ et $i < d$ ne sont pas dans \mathcal{K}_d . En dehors de cette exception facheuse, on peut, en première lecture, retenir que les vecteurs de \mathcal{K}_d sont ceux pour lesquels l'algorithme totalement soustractif ne termine pas ni n'effectue de projection. Une représentation normalisée (en imposant $\|v\|_1 = 1$) de l'ensemble \mathcal{K}_3 est donnée en Figure 2.5 (issue de l'article [4] où \mathcal{K}_3 correspond au joint de Rauzy). Cet ensemble a été montré Lebesgue-négligeable pour $d \geq 3$ dans le même article [31]. Cela signifie notamment que l'algorithme entièrement soustractif termine pour presque tout vecteur (lorsque $d \geq 3$).

Proposition 2.2.10 ([23]). *Soit v un vecteur de \mathcal{K}_d . Alors $\Omega(v) = \frac{\|v\|_1}{d-1}$.*

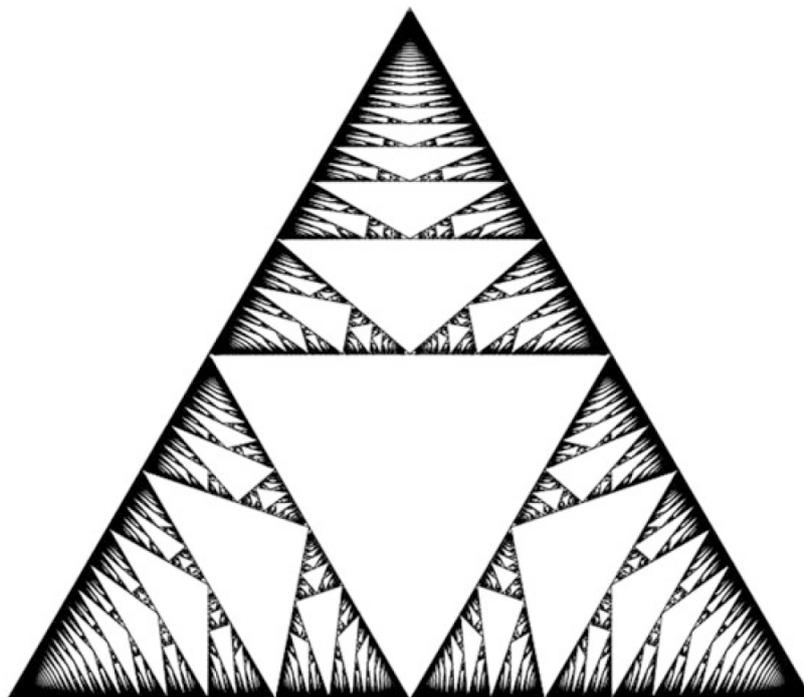


FIGURE 2.5 – Une représentation normalisée de l'ensemble \mathcal{K}_3

Notons que, en dimension 2, l'ensemble \mathcal{K}_2 est constitué des vecteurs irrationnels : on retrouve alors que $\Omega(v) = \frac{\|v\|_1}{2-1} = \|v\|_1$. Dans le cas rationnel, l'algorithme totalement soustractif étant un algorithme de pgcd, on peut démontrer (voir [21]) que $\Omega(v) = \|v\|_1 - \text{pgcd}(v)$. Finalement, pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a $\Omega(v) = \|v\|_1 - \text{pgcd}(v)$ (rappelons que le pgcd d'un vecteur irrationnel vaut 0).

2.3 Δ -numération

L'étude de la connexité à l'épaisseur de connexité nécessite de considérer le décalage μ du plan. Pour cela, nous encodons le réel μ dans un système de numération issu de l'algorithme totalement soustractif et défini dans [22] : la Δ -numération. Un court chapitre sur les propriétés de la Δ -numération est proposé à la fin de ce manuscrit. Nous ne parlons donc ici que des propriétés de ce système qui nous sont nécessaires pour étudier la connexité des hyperplans arithmétiques. Les propriétés propres à la Δ -numération sont exposées dans le chapitre 7. Restreignons-nous tout d'abord aux vecteurs de l'ensemble \mathcal{K}_d de Kraaikamp-Meester. Etudier les autres vecteurs n'est en effet pas utile, d'après le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 ([23]). *Soient $v \in \mathbb{R}^d$ non nul et $\mu \in \mathbb{R}$. On suppose que l'algorithme totalement soustractif termine sur v . Alors $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega(v, \mu))$ n'est pas connexe par faces.*

Observons le déroulé de l'algorithme totalement soustractif sur un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$. Si l'algorithme termine, on conclut par le théorème précédent que le plan n'est jamais connexe à l'épaisseur de connexité. Sinon, l'algorithme aboutit en un nombre fini d'étapes à un vecteur $v' \in \mathcal{K}_{d'}$ pour $d' \leq d$, après $d - d'$ projections. Le comportement à l'épaisseur de connexité est alors le même pour v et v' , à savoir que $\forall \mu \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(v, \mu, \Omega(v))$ est connexe ssi $\mathbb{P}(v', \mu, \Omega(v'))$ est

connexe. On peut donc restreindre l'étude de la connexité à l'épaisseur critique aux vecteurs de Kraaikamp-Meester.

2.3.1 Un nouveau système de numération

On se donne pour cette partie un vecteur v de \mathcal{K}_d et on regarde le déroulé infini de l'algorithme totalement soustractif sur v .

On note alors :

- $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des vecteurs considérés par l'algorithme (avec $v^{(1)} = v$) ;
- $\Delta = (\delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des indices des coordonnées minimales des $v^{(n)}$ (ainsi $\delta_n \in \llbracket 1, d \rrbracket$) ;
- $\theta = (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des coordonnées minimales des v^n (ainsi $\theta_n = v_{\delta_n}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^*$).

Par la suite, on nommera $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$, Δ et θ en parlant des « suites associées à v ». Remarquons que, comme $v \in \mathcal{K}_d$, le déroulé de l'algorithme totalement soustractif n'effectue aucune projection. Ainsi, les $v^{(n)}$ sont tous des vecteurs de \mathbb{R}^d . De plus, les suites Δ et θ sont bien définies car il y a toujours unicité de la coordonnée minimale. Dans le cas contraire, l'étape suivante de l'algorithme mènerait à l'annulation d'une coordonnée et donc à une projection (ce qui est exclu pour les éléments de \mathcal{K}_d).

Définition 2.3.2 (Δ -numération [24]). *Soit un vecteur $v \in \mathcal{K}_d$. Soient $\Delta \in \llbracket 1, d \rrbracket^\omega$ et $\theta \in (\mathbb{R}_+^*)^\mathbb{N}$ les suites associées à v . Prenons enfin $\sigma \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ un mot infini sur l'alphabet \mathbb{Z} . On dit alors que le mot σ représente, s'il existe, le réel $\varphi^v(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n \theta_n$.*

Un cas simple de convergence de la somme $\varphi^v(\sigma)$ est celui où le mot σ est fini, ie se termine par une infinité de 0. Dès lors, la somme $\varphi^v(\sigma)$ est finie donc converge. De même, comme θ est sommable, $\varphi^v(\sigma)$ existe pour tout mot σ borné.

Proposition 2.3.3 ([23]). $\varphi^v(1^\omega) = \Omega(v)$

En 2014, V. Berthé, E. Domenjoud, D. Jamet et X. Provençal se sont intéressés au cas de Tribonacci dans [11]. On appelle α l'unique racine réelle du polynôme $X^3 + X^2 + X - 1$. On considère le vecteur $v \stackrel{\text{déf}}{=} (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ et on regarde en Figure 2.6 le déroulé de l'algorithme totalement soustractif sur v . On obtient alors $\Delta = (123)^\omega$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \theta_n = \alpha^n$.

$$\begin{array}{r|l|l}
 v_n & \delta_n & \theta_n \\
 v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1) & 1 & \alpha \\
 (\alpha, \alpha^2, 1 - \alpha) & 2 & \alpha^2 \\
 (\alpha - \alpha^2, \alpha^2, \alpha^3) & 3 & \alpha^3 \\
 (\alpha^4, \alpha^4 + \alpha^5, \alpha^3) = \alpha^3 v & 1 & \alpha^4 \\
 \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

FIGURE 2.6 – Déroulé de l'algorithme totalement soustractif sur le vecteur $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α vérifie $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = 1$.

2.3.2 Expansions et réductions

Le mot Δ obtenu à partir de l'algorithme totalement soustractif caractérise tout le système de numération (à un facteur multiplicatif près). Les occurrences des différentes lettres de $\llbracket 1, d \rrbracket$ permettent notamment de calculer en Δ -numération à partir de 2 opérations : la réduction et l'expansion. Tous les résultats sur ce système de numération sont donnés dans [22].

Théorème 2.3.4 ([31]). *Soit $v \in \mathcal{K}_d$. Alors $\dim_{\mathbb{Q}}(v) = d$, ie v est totalement irrationnel.*

Théorème 2.3.5 ([23]). *Soit $\Delta \in \llbracket 1, d \rrbracket^{\omega}$. Alors Δ est issu de l'algorithme totalement soustractif ssi toutes les lettres de $\llbracket 1, d \rrbracket$ apparaissent une infinité de fois dans Δ . Dans ce cas, il existe un unique vecteur v (à un facteur multiplicatif près) associé à Δ .*

Considérons Δ un mot infini où chaque lettre admet un nombre infini d'occurrences. On pourra pour cela observer la Figure 2.7. Pour obtenir constructivement un vecteur v permettant d'obtenir Δ , on peut procéder par des découpages successifs de l'espace \mathbb{R}^d . Tout d'abord, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $v \in \mathcal{K}_d$, v et λv permettent d'obtenir le même mot infini. On cherche ainsi v positif à un facteur multiplicatif près et on peut donc imposer $\|v\|_1 = 1$. Cela réduit notre recherche à $\{v \in \mathbb{R}^d \mid v \geq 0 \text{ et } \|v\|_1 = 1\}$ qui est un $(d-1)$ -simplexe (un triangle dans la figure). Chaque lettre de Δ va alors poser une contrainte supplémentaire nous permettant de découper cet espace au fur et à mesure. Par exemple, si $\delta_1 = k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ alors k est la composante minimale de v : on découpe donc le simplexe en d parties (les 3 sous-triangles sur la figure). En fonction de la lettre δ_1 , on se dirige donc, depuis le centre dans la direction bleue, rouge ou verte. Le polytope obtenu sera à son tour découpé en d parties selon la valeur de δ_2 , etc (les sous-triangles des sous-triangles). La suite des polytopes obtenus converge alors vers un unique point qui est le vecteur v recherché. Sur la figure, les points noirs représentent ainsi les points limites de ce processus, à savoir les éléments de \mathcal{K}_d .

Théorème 2.3.6 (liaison [22]). *Soit $v \in \mathcal{K}_d$ et Δ associé à v . Soit $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$*

1) *Si la lettre k a sa première occurrence dans Δ en position n alors $v_k = \sum_{i=1}^n \theta_i$.*

2) *Si la lettre k possède 2 occurrences successives dans Δ en positions m et n alors $\theta_m = \sum_{i=m+1}^n \theta_i$.*

Ce théorème permet d'explicitier les relations de liaison entre les différents termes de la suite θ . Il permet également de définir des opérations de réduction et d'expansion pour mener des calculs en Δ -numération.

Définition 2.3.7 (Réduction/Expansion [23]). *Soit un mot infini $\Delta \in \llbracket 1, d \rrbracket^{\omega}$ et un mot $a \in \mathbb{Z}^{\omega}$. On suppose que la lettre $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ possède 2 occurrences successives en positions m et n . On appelle alors réduction la transformation de a consistant à incrémenter a_m et décrémenter les a_i pour $i \in \llbracket m+1, n \rrbracket$ pour obtenir un nouveau mot a' . L'opération inverse est appelée expansion.*

$$\begin{array}{cccccccc}
 \Delta & \cdots & k & (\neq k) & (\neq k) & (\neq k) & k & \cdots \\
 \text{Réduction : } a & \cdots & a_m & a_{m+1}+1 & a_{m+2}+1 & \cdots & a_n+1 & \cdots \\
 a' & \cdots & a_m+1 & a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_n & \cdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 \Delta & \cdots & k & (\neq k) & (\neq k) & (\neq k) & k & \cdots \\
 \text{Expansion : } a & \cdots & a_m+1 & a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_n & \cdots \\
 a' & \cdots & a_m & a_{m+1}+1 & a_{m+2}+1 & \cdots & a_n+1 & \cdots
 \end{array}$$

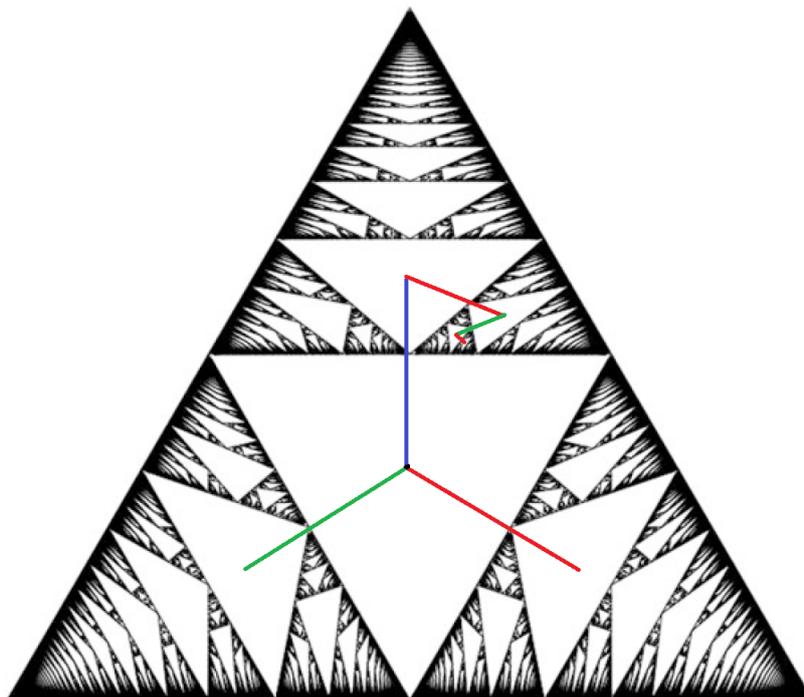


FIGURE 2.7 – Une représentation normalisée de l'ensemble \mathcal{K}_3 (le point de coordonnées (x, y) représente le vecteur $(x, y, 1 - x - y)$). Les couleurs bleue, rouge et verte correspondent aux déplacements induits par les lettres de Δ . Un exemple est donné avec le chemin $BRVR$ partant du centre qui correspond aux 4 premières lettres de $\Delta = 2131\dots$

Remarquons que les définitions de réduction et d'expansion reposent sur le théorème de liaison qui assure $\theta_m = \sum_{i=m+1}^n \theta_i$. Ainsi, si ces réels existent, $\varphi^v(a) = \varphi^v(a')$. De manière générale, on travaille avec des mots a à valeurs dans \mathbb{N} . On autorise alors seulement les réductions vers un $a_m = 0$ et les expansions depuis un nombre $a_m + 1 \geq 2$. On peut alors chercher, étant donné a et Δ , à calculer une forme normale pour a dans le système de Δ -numération. Un exemple de normalisation est donné en Figure 2.8. Les opérations d'expansion et réduction possèdent alors de très bonnes propriétés du point de vue des systèmes de numération.

	1	2	1	3	2	3	1	3	\dots
0	0	4	0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	1	1	1	1	0	0	
0	1	2	0	0	1	1	0	0	
0	1	1	1	1	2	2	0	0	
1	0	0	1	1	2	2	0	0	
1	0	1	0	0	1	1	0	0	

FIGURE 2.8 – Réduction de $a \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 004$ dans le syst\u00e8me de Δ -num\u00e9ration pour $\Delta \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 12132313\dots$. Les positions d'expansion sont not\u00e9es en rouge, celles de r\u00e9duction en bleu. On obtient alors un mot $a' = 101001100$ qui repr\u00e9sente la m\u00eame valeur que a et sur lequel on ne peut plus faire ni r\u00e9duction ni expansion.

Pour \u00eatre complet dans les op\u00e9rations de ce syst\u00e8me de num\u00e9ration, il nous faut parler du cas des retenues \u00e0 l'infini. Dans la num\u00e9ration d\u00e9cimale classique, $1 = 0,99999999999999\dots$. De mani\u00e8re g\u00e9n\u00e9rale, tout nombre d\u00e9cimal admet une \u00e9criture impropre. On observe une propri\u00e9t\u00e9

analogue pour les mots finis en Δ -numération.

Définition 2.3.8 (Ecriture impropre). *Soit $a \in \{0, 1\}^\omega$. On dit que a est une écriture impropre ssi il existe $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que, pour tout n suffisamment grand, $a_n = 0 \Leftrightarrow \delta_n = k$.*

Considérons par exemple $\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} 12131231\dots$ et $a' = 1$. On peut alors faire des expansions successives comme en Figure 2.9 pour construire à la limite un mot infini a équivalent à a' . Le mot a obtenu est une écriture impropre et $\varphi^v(a) = \varphi^v(a')$. De manière générale, tout mot a possédant une écriture impropre admet un mot a' fini qui lui est équivalent. Considérons en effet un mot $a = uw$ sous écriture impropre où u est un mot fini et $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = 0 \Leftrightarrow \delta_{n+|u|} = k$ avec $w_1 = 0$. Le mot $a' \stackrel{\text{déf}}{=} u1$ est un mot fini équivalent à a . La transformation $uw \rightarrow u1$ est alors appelée règle de retenue à l'infini et est un équivalent du $1 = 0,999999999\dots$ en numération décimale.

	1	2	1	3	1	2	3	1	\dots
1	0	0	0	0	0	0	0	0	\dots
0	1	1	0	0	0	0	0	0	\dots
0	1	0	1	1	0	0	0	0	\dots
0	1	0	1	0	1	1	1	\dots	\dots

FIGURE 2.9 – Construction de l'écriture impropre d'un mot à partir d'un mot fini

Théorème 2.3.9 ([23]). *Le système d'expansion/réduction/retenue à l'infini est confluent. De plus, si $a \in \mathbb{N}^\omega$ est tel que $\varphi^v(a) \in [0, \Omega(v)]$ alors a admet une forme normale pour ce système.*

Proposition 2.3.10 (Comparaison [22]). *Soient a et a' des mots de $\{0, 1\}^\omega$ sous formes normales. Alors $\varphi^v(a) < \varphi^v(a')$ ssi a est strictement plus petit que a' pour l'ordre lexicographique.*

Pour la comparaison, on normalise donc les 2 mots à comparer puis on les compare pour l'ordre lexicographique. Pour l'addition, si a, a' sont deux mots de $\{0, 1\}^\omega$ tels que $\varphi^v(a) + \varphi^v(a') < \Omega(v)$, on additionne a et a' terme à terme. On obtient alors un mot de $\{0, 1, 2\}^\omega$ que l'on normalise. Remarquons que la condition $\varphi^v(a) + \varphi^v(a') < \Omega(v)$ n'est pas si restrictive, quitte à prolonger Δ vers la gauche.

2.3.3 Le cas ultimement périodique

Un cas particulier intéressant de Δ -numération est le cas où Δ est ultimement périodique de période p . De nombreuses nouvelles propriétés apparaissent alors pour notre système de numération, ce qui nous permet d'y effectuer des opérations plus complexes. Le cas ultimement périodique de la Δ -numération a été traité dans [22] en tant qu'outil pour décider la connexité des hyperplans à l'épaisseur critique. Remarquons que l'on peut toujours se ramener au cas où Δ est périodique. Si v est un vecteur associé à $\Delta = \Delta_0\pi^\omega$, il suffit d'appliquer $|\Delta_0|$ étapes de l'algorithme totalement soustractif à v pour aboutir à un vecteur v' de mot associé π^ω .

Afin de parler du déroulé de l'algorithme totalement soustractif, on pose, pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\gamma_i \stackrel{\text{déf}}{=} x \mapsto x - (\mathbf{1} - e_i)x_i$.

Proposition 2.3.11 ([22, 5]). *Supposons Δ ultimement périodique de période $\pi \in \llbracket 1, d \rrbracket^*$ et prenons $p \stackrel{\text{déf}}{=} |\pi|$.*

- il existe un réel β tel que, pour tout n assez grand $\theta_{n+p} = \beta\theta_n$;
- $\frac{1}{\beta}$ est un nombre de Pisot de degré d , ie β est de module < 1 et tous ses conjugués sont de module > 1 ;
- le polynôme minimal de β , noté μ_β , est le polynôme minimal (et caractéristique) de la matrice $\gamma_{\pi_p} \circ \dots \circ \gamma_{\pi_1}$.

Il est ainsi possible de retrouver facilement les vecteurs v associés à des mots Δ ultimement périodiques. Si $\Delta = \delta\pi^\omega$ avec $|\delta| = k$ et $|\pi| = p$, observons alors l'application $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \gamma_{\pi_p} \circ \gamma_{\pi_{p-1}} \circ \dots \circ \gamma_{\pi_1}$. Le nombre β est alors une valeur propre de Γ associée à un vecteur propre v_0 . Dès lors, le vecteur v recherché vérifie $(\gamma_{\delta_k} \circ \gamma_{\delta_{k-1}} \circ \dots \circ \gamma_{\delta_1})(v) = v_0$. Les γ_i étant inversibles, on peut ainsi retrouver v .

Dans le cas où $\Delta = (123)^\omega$, le vecteur v peut ainsi être trouvé comme vecteur propre de $\gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1$ qui a pour matrice associée $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour unique valeur propre réelle α^3 (qui est l'inverse d'un nombre de Pisot) où α est l'unique racine réelle de $X^3 + X^2 + X - 1$ et un vecteur propre associé est $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$. On retrouve alors bien le vecteur de Tribonacci étudié dans [11].

2.4 Connexité à l'épaisseur critique

Avant de conclure sur la connexité des hyperplans arithmétiques, faisons un bref rappel des propriétés exposées dans [21] et exposées précédemment.

L'épaisseur de connexité $\Omega(v, \mu)$ permet de caractériser la connexité des plans arithmétiques via un phénomène de percolation :

- $\forall \omega < \Omega(v, \mu), \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ n'est pas connexe ;
- $\forall \omega > \Omega(v, \mu), \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe.

Cette épaisseur Ω a une faible dépendance en μ , ce qui nous pousse à nous intéresser à $\Omega(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega(v, 0)$. Il est enfin aisé de calculer $\Omega(v)$ grâce à l'algorithme totalement soustractif qui termine pour presque tout vecteur. Pour les autres vecteurs, on peut se ramener à l'étude de l'ensemble \mathcal{K}_d de Kraaikamp-Meester (voir [31]). La question restante est alors de décider la connexité des plans à l'épaisseur critique Ω : étant donné v, μ , comment décider si $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega(v, \mu))$ est connexe ?

Théorème 2.4.1. *2.3.1 Soit $v \in \mathbb{R}^d$. On suppose que l'algorithme totalement soustractif termine sur v . Alors $\forall \mu \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(v, \mu, \Omega(v, \mu))$ est non connexe.*

Lorsque l'algorithme totalement soustractif ne termine pas sur v , on peut de plus se ramener au cas où est v de Kraaikamp-Meester. Ainsi, on peut considérer les suites $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}, (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\Delta = (\delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ produites par l'algorithme totalement soustractif et travailler en Δ -numération pour résoudre le problème. L'idée utilisée dans [23] est de proposer une construction incrémentale du plan à l'épaisseur critique à partir de l'algorithme.

2.4.1 Clôture palindromique

Comme $v \in \mathcal{K}_d$ est totalement irrationnel et les θ_n vivent dans le groupe engendré par v_1, \dots, v_d , il existe un unique $T_n \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle v, T_n \rangle = \theta_n$. On peut également calculer explicitement les T_n à partir de l'algorithme totalement soustractif. En effet, en considérant les fonction $\gamma_i \stackrel{\text{déf}}{=} x \mapsto x - (\mathbf{1} - e_i)x_i$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \theta_n = \langle v^{(n)}, e_{\delta_n} \rangle = \langle (\gamma_{\delta_{n-1}} \circ \dots \circ \gamma_{\delta_1})(v), e_{\delta_n} \rangle = \langle v, ({}^t\gamma_{\delta_1} \circ \dots \circ {}^t\gamma_{\delta_{n-1}})(e_{\delta_n}) \rangle$. Ainsi, $T_n = ({}^t\gamma_{\delta_1} \circ \dots \circ {}^t\gamma_{\delta_{n-1}})(e_{\delta_n})$. Remarquons que la définition de T_n ne dépend alors que du mot Δ et pas du vecteur v . La différence tient au fait que Δ permet de connaître la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à un facteur multiplicatif près, facteur donné par le vecteur v . La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne dépend quant à elle pas de ce facteur multiplicatif.

On peut noter que comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \langle v, T_n \rangle = \theta_n$ et comme v est totalement irrationnel, les T_n vérifient les mêmes relations de liaisons que les θ_n .

Proposition 2.4.2 ([23]). *Soit $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$.*

1. *Si la lettre k a sa première occurrence dans Δ en position n alors $e_k = \sum_{i=1}^n T_i$.*
2. *Si la lettre k possède 2 occurrences successives dans Δ en positions m et n alors $T_m = \sum_{i=m+1}^n T_i$.*

On peut ainsi utiliser le système de Δ -numération pour représenter les vecteurs de \mathbb{Z}^d à partir de mots finis. On considère en effet l'application $\psi^\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \mathbb{Z}^* & \rightarrow \mathbb{Z}^d \\ \sigma & \mapsto \sum_{n=1}^{|\sigma|} \sigma_n T_n \end{cases}$ où \mathbb{Z}^* désigne l'ensemble des mots finis sur l'alphabet \mathbb{Z} . Les règles d'expansion et réduction laissent alors invariantes les valeurs de ψ^Δ .

Définition 2.4.3 (Clôture palindromique [25], voir Figure 2.10). *On définit par récurrence la suites d'ensembles $(S_n^\Delta)_{n \in \mathbb{N}}$ (on omettra en général Δ pour plus de lisibilité) par :*

- $S_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{0\}$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n \cup (S_n + T_n)$;

Ainsi, $S_n = \left\{ \sum_{i \in I} T_i \mid I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \right\} \subset \mathbb{Z}^d$.

La clôture palindromique de Δ est alors l'ensemble $S_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$

Théorème 2.4.4 ([23, 24]). $\forall n \in \mathbb{N}, S_n$ est connexe et sans cycle. Dès lors, S_∞ est également connexe et sans cycle.

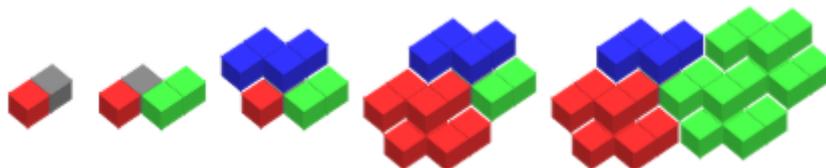


FIGURE 2.10 – Premières étapes de la construction de la clôture palindromique pour $\Delta = (123)^\omega$

Le lien profond entre clôture palindromique et hyperplans arithmétiques apparaît alors :

Théorème 2.4.5 ([23, 24]). $\mathbb{P}(v, 0, \Omega(v)) = S_\infty$.

Corollaire 2.4.6 ([23]). $\mathbb{P}(v, 0, \Omega)$ est connexe et $\mathbb{P}(v, \Omega(v), \Omega(v))$ ne l'est pas. De plus $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est un arbre.

2.4.2 Clôture palindromique décalée

Si le plan est connexe pour un décalage nul, la connexité du plan à l'épaisseur de connexité dépend du décalage μ . Dans [22], nous présentons une méthode pour une construction incrémentale du plan pour des décalages quelconques. On pose $\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega(v, \mu)$ et on s'intéresse à l'ensemble $\bar{\mathbb{P}}(v, \mu, \Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu \leq \Omega\}$. Notons que $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega) \neq \bar{\mathbb{P}}(v, \mu, \Omega)$ ssi il existe $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle x_0, v \rangle + \mu = \Omega$. Dès lors, $\bar{\mathbb{P}}(v, \mu, \Omega) = \mathbb{P}(v, \Omega, \Omega) - x_0$ qui est non connexe. On peut donc écarter ces cas particuliers et confondre allégrement $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$ et $\bar{\mathbb{P}}(v, \mu, \Omega)$. Enfin, quitte à translater $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$, on peut toujours se ramener au cas où $\mu \in [0, \Omega[$. Ainsi, μ peut être représenté en Δ -numération par un mot infini $\bar{\mu} = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{0, 1\}^\omega$ tel que $\mu = \varphi^v(\bar{\mu})$. Cet encodage permet notamment de définir la clôture palindromique translattée à partir des μ_n .

Définition 2.4.7 (Clôture palindromique décalée). On définit par récurrence la suite d'ensembles $(S_n^{\Delta, \bar{\mu}})$ (on omettra en général Δ pour plus de lisibilité) par :

$$\begin{aligned} - S_0^{\bar{\mu}} &\stackrel{\text{déf}}{=} \{0\}; \\ - \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1}^{\bar{\mu}} &\stackrel{\text{déf}}{=} S_n^{\bar{\mu}} \cup (S_n^{\bar{\mu}} + (1 - 2\mu_n)T_n) = \begin{cases} S_n^{\bar{\mu}} \cup (S_n^{\bar{\mu}} + T_n) & \text{si } \mu_n = 0 \\ S_n^{\bar{\mu}} \cup (S_n^{\bar{\mu}} - T_n) & \text{si } \mu_n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'après [22], on a $S_n^{\bar{\mu}} = S_n - \sum_{i=1}^n \mu_i T_i = S_n - \psi^\Delta(\mu_1 \dots \mu_n)$.

On appelle clôture palindromique décalée de μ l'ensemble $S_\infty^{\bar{\mu}} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^{\bar{\mu}}$.

Remarquons que, les $S_n^{\bar{\mu}}$ étant des translattés de S_n , ils héritent des mêmes propriétés topologiques. Seule change la position de l'origine dans les $S_n^{\bar{\mu}}$ (voir Figure 2.11). Notons toutefois que $S_\infty^{\bar{\mu}}$ n'est pas un translatté de S_∞ mais hérite néanmoins des propriétés topologiques des $S_n^{\bar{\mu}}$ qui passent à la limite.

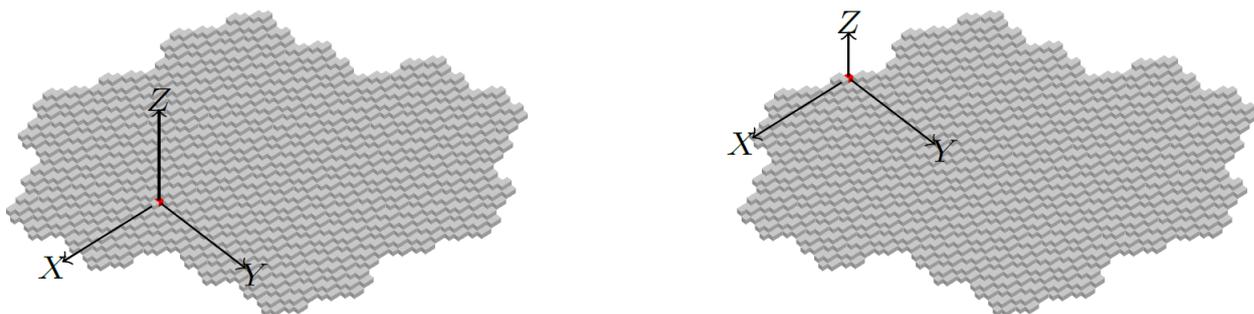


FIGURE 2.11 – Une étape de construction de la clôture palindromique pour 2 valeurs différentes de μ .

Proposition 2.4.8 ([22]). $\forall n \in \mathbb{N}, S_n^{\bar{\mu}}$ est connexe et sans cycle. $S_\infty^{\bar{\mu}}$ est connexe et sans cycle.

Certains mots $\bar{\mu}$ ont un caractère pathologique particulier nous empêchant de faire le lien entre $S_\infty^{\bar{\mu}}$ et $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$. Nous pouvons heureusement les écarter de notre étude. Si $\bar{\mu}$ est un mot fini alors il existe $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle x_0, v \rangle = \mu$. Donc $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega) = x_0 + \mathbb{P}(v, 0, \Omega)$ qui est connexe. Si $1^\omega - \bar{\mu}$ (mot obtenu en remplaçant tous les 0 de $\bar{\mu}$ par des 1 et les 1 par des 0) est un mot

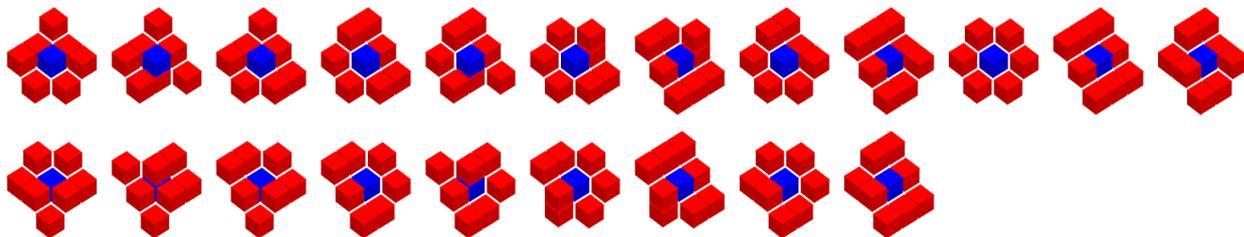


FIGURE 2.12 – Configurations intérieures minimales lorsque le vecteur est positif croissant.

fini alors il existe $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle x_0, v \rangle = \Omega - \mu$ donc $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega) = \mathbb{P}(v, \Omega, \Omega) - x_0$ qui est non connexe.

Définition 2.4.9 (Mot bi-admissible). *On dit que $\bar{\mu}$ est bi-admissible ssi $\bar{\mu}$ n'est pas une écriture impropre et $1^\omega - \bar{\mu}$ non plus.*

Les mots $\bar{\mu}$ non admissibles posent un certain nombre de problèmes dans les preuves, du fait qu'ils sont sous écriture impropre. Toutefois, comme tout mot sous écriture impropre est équivalent à un mot fini, on peut exclure les mots ayant une écriture impropre de notre étude. De même, si $1^\omega - \bar{\mu}$ est sous écriture impropre, $1^\omega - \bar{\mu}$ est équivalent à un mot w fini. Dès lors, $\bar{\mu}$ est équivalent au mot $1^\omega - w$, qui est bi-admissible. On peut donc toujours considérer des mots bi-admissibles par la suite.

Théorème 2.4.10 ([22]). *On suppose que $\bar{\mu}$ est bi-admissible. Alors $S_\infty^{\bar{\mu}}$ est la composante connexe de 0 dans $\bar{\mathbb{P}}(v, \mu, \Omega)$.*

Pour conclure, il faut donc réussir à décider si $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega) = S_\infty^{\bar{\mu}}$. Cette propriété peut se lire en projetant orthogonalement $S_\infty^{\bar{\mu}}$ sur $\mathbf{1}^\perp$. Si $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega) = S_\infty^{\bar{\mu}}$ alors cette projection recouvrera tout l'espace. Sinon, 0 sera à distance finie du bord dans $S_\infty^{\bar{\mu}}$. Posons $B \stackrel{\text{déf}}{=} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$ et Π^1 la projection orthogonale parallèlement à $\mathbf{1} \stackrel{\text{déf}}{=} (1, \dots, 1)$.

Proposition 2.4.11 ([22]). *$\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$ est connexe ssi $\partial\Pi^1(S_\infty^{\bar{\mu}} + B)$ est vide (où $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ désigne la frontière de A dans $\mathbf{1}^\perp$).*

Définition 2.4.12 (Points intérieurs [22]). *Soient $A \subset \mathbb{Z}^d$ et $B \stackrel{\text{déf}}{=} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$. Soit $x \in A$.*

- *On dit que x est intérieur à A ssi $\Pi^1(x + B)$ est inclus dans l'intérieur de $\Pi^1(A + B)$;*
- *sinon on dit que x est sur le bord de A .*

Dans la Figure 2.11 à gauche, le point rouge correspondant à l'origine est intérieur à l'ensemble gris. En revanche, à droite, le point rouge est sur le bord de l'ensemble gris. Les points intérieurs vont alors nous permettre de caractériser la connexité des plans. Dans le cas des hyperplans, il est possible d'énumérer l'ensemble des configurations minimales autour d'un point le rendant intérieur. Celles-ci sont au nombre de 64 en dimension 3 dont 21 si l'on se restreint aux plans de vecteur normal positif croissant. Elles sont représentées en Figure 2.12.

Théorème 2.4.13 ([22]). *Soit $\bar{\mu}$ bi-admissible. On pose $\Delta^m \stackrel{\text{déf}}{=} (\delta_n)_{n \geq m}$. Dès lors, $\bar{\mathbb{P}}(v, \mu, \Omega)$ est connexe ssi $\forall m \geq 1, \exists n \geq m, \psi^\Delta(\mu_m \dots \mu_n)$ est intérieur dans $S_{n-m+1}^{\Delta^m}$.*

Une idée intuitive de ce théorème, démontré formellement dans [22], est la suivante. Le point 0 dans $S_n^{\bar{\mu}}$ a la même position que $\psi^\Delta(\mu_1 \dots \mu_n)$ dans S_n . Ainsi, 0 est intérieur dans $S_n^{\bar{\mu}}$ ssi

$\psi^\Delta(\mu_1 \dots \mu_n)$ est intérieur dans S_n . Chaque $\psi^\Delta(\mu_m \dots \mu_n)$ intérieur à $S_{n-m+1}^{\Delta^m}$ fait rentrer davantage 0 dans $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$. Si un tel phénomène arrive un nombre fini de fois, 0 est à distance bornée du bord des S_n^μ . Donc $\Pi^1(S_\infty^\mu)$ a un bord d'où la non connexité du plan. Réciproquement, si ces motifs apparaissent une infinité de fois, 0 sera à une distance arbitrairement grande du bord des S_n^μ , ce qui impose que le bord de S_∞^μ est vide et que le plan est connexe. Afin d'identifier les cas où $\psi^{\Delta^m}(\mu_m \dots \mu_n)$ est intérieur à $S_{n-m+1}^{\Delta^m, \bar{\mu}}$, il est pertinent d'attaquer le problème par la théorie des langages.

2.4.3 Motifs intérieurs minimaux

S'intéressant à la fois à $\Delta \in \llbracket 1, d \rrbracket^\omega$ et à $\bar{\mu} \in \{0, 1\}^\omega$, on travaille sur l'alphabet $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \llbracket 1, d \rrbracket \times \{0, 1\}$. Remarquons qu'un mot $\gamma_1 \dots \gamma_n \in \Gamma^*$ où $\gamma_i = (\delta_i, \mu_i)$ peut également être vu comme le couple (δ, σ) avec $\delta = \delta_1 \dots \delta_n$ et $\sigma = \mu_1 \dots \mu_n$.

On souhaite caractériser les facteurs finis de $(\Delta, \bar{\mu})$ qui permettent de faire rentrer davantage 0 dans le plan. De tels facteurs (δ, σ) , appelés motifs intérieurs, sont caractérisés par le fait que 0 est intérieur dans $S_{|\sigma|}^{\delta, \sigma}$. En regardant dans la clôture palindromique sans décalage, on obtient que $\psi^\delta(\sigma)$ doit être intérieur dans $S_{|\sigma|}^\delta$. Afin de savoir si un motif est intérieur, on regarde l'ensemble des configurations minimales \mathcal{C} . Un motif (δ, σ) est intérieur ssi il existe une configuration C de \mathcal{C} telle que tout point p de C est dans $S_{|\sigma|}^{\delta, \bar{\mu}}$, ce qui est équivalent à $\psi^\delta(\sigma) + p \in S_{|\sigma|}^\delta$. Nous définissons, à partir de ce constat, le langage des motifs intérieurs.

Définition 2.4.14 (Langage des motifs intérieurs). *Soit $p \in \mathbb{Z}^d$. On pose $\mathcal{L}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \{(\delta, \sigma) \mid \delta \text{ est un facteur de } \Delta \text{ et } \psi^\delta(\sigma) + p \in S_{|\sigma|}^\delta\}$. On note \mathcal{C} l'ensemble des configurations intérieures minimales. Le langage des motifs intérieurs est alors $\mathcal{L} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{c \in \mathcal{C}} \bigcap_{p \in c} \mathcal{L}_p$.*

Lemme 2.4.15 ([22]). *1a) $\forall p \in \mathbb{Z}^d, \mathcal{L}_{-p} = \{(\delta, \tilde{\sigma}) \mid (\delta, \sigma) \in \mathcal{L}_p\}$ où $\tilde{\sigma} \stackrel{\text{déf}}{=} 1^{|\sigma|} - \sigma$ désigne le mot σ où chaque 0 est remplacé par un 1 et chaque 1 par un 0.*
1b) De plus, \mathcal{L}_p est non vide ssi p ou $-p$ est dans $\bar{\mathbb{P}}(v, 0, \Omega)$.
2) Soient $\gamma = (\delta, \sigma) \in \mathcal{L}$ et $\gamma_1 = (\delta_1, \sigma_1), \gamma_2 = (\delta_2, \sigma_2) \in \Gamma^$. Si $\delta_1 \delta \delta_2$ est un facteur de Δ alors $\gamma_1 \gamma \gamma_2 \in \mathcal{L}$.*

La partie 1a) du lemme précédent indique que l'on peut se restreindre à l'étude des \mathcal{L}_p pour $p \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle p, v \rangle \geq 0$. La partie 1b) permet alors de se restreindre aux p de $\mathbb{P}(v, 0, \Omega)$. Ainsi, p admet un code fini via ψ^Δ et on peut considérer $\pi \in \{0, 1\}^*$ tel que $p = \psi^\Delta(\pi)$. La partie 2) du lemme montre quant à elle que \mathcal{L} est clos par le haut pour l'ordre des facteurs. On peut donc s'intéresser aux éléments minimaux de \mathcal{L} pour cet ordre, qui caractérisent entièrement le langage \mathcal{L} .

Définition 2.4.16 (Langage des motifs intérieurs minimaux). *On appelle langage des motifs intérieurs minimaux l'ensemble $\mathcal{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\gamma \in \mathcal{L} \mid \text{aucun facteur propre de } \gamma \text{ n'est dans } \mathcal{L}\}$.*

Comme \mathcal{L} est clos par le haut, on peut aussi écrire $\mathcal{M} = \mathcal{L} \setminus \bigcup_{c \in \Gamma} c\mathcal{L} \cup \mathcal{L}c$.

Théorème 2.4.17 ([22]). *Soit $\bar{\mu}$ bi-admissible. Alors $\bar{\mathbb{P}}(v, \mu, \Omega)$ est connexe ssi $(\Delta, \bar{\mu})$ contient une infinité de motifs intérieurs minimaux.*

2.5 Le cas ultimement périodique

Lorsque Δ est un mot ultimement périodique, nous montrons que le langage \mathcal{M} des motifs intérieurs minimaux est rationnel. On peut alors en déduire de bonnes propriétés pour l'ensemble des μ rendant le plan connexe. Remarquons dès maintenant que l'on peut toujours ramener le cas ultimement périodique au cas périodique. En effet, si v possède un mot $\Delta = u\delta^\omega$ associé ultimement périodique, il suffit d'effectuer $|u|$ étapes initiales de l'algorithme totalement soustractif à v . On obtient alors un vecteur $v' \in \mathcal{K}_d$ de mot associé $\Delta' = \delta^\omega$ qui est périodique. Les mots Δ considérés sont donc par la suite tous considérés périodiques.

2.5.1 Reconnaissabilité par un automate de Büchi

Théorème 2.5.1 (Rationnalité des motifs intérieurs). *Si Δ est ultimement périodique alors les \mathcal{L}_p sont des langages rationnels. Il en résulte que \mathcal{L} et \mathcal{M} sont également des langages rationnels.*

Idée de la preuve : La preuve formelle est en annexe 2.7. On considère $\pi \in \{0,1\}^*$ tel que $p = \psi^\Delta(\pi)$. On construit alors un automate qui simule le calcul $\sigma + \pi$ en Δ -numération et conclut lorsque la forme normale de $\sigma + \pi$ a au plus $|\sigma|$ lettres. Pour cela, on choisit des états de la forme (n, k, w) où :

- w , sous forme normale, est le mot courant considéré. w est initialisé à π et on ajoute progressivement, via les transitions de l'automate, les lettres de σ ;
- n représente le décalage dans Δ ;
- k représente la position d'insertion dans w .

Le nombre d'états considérés par cette méthode est malheureusement infini. Nous introduisons donc la notion de préfixe inutile qui permet de supprimer des préfixes de w qui ne participent pas au calcul de la forme normale. En notant p la période de Δ , nous pouvons borner n par p grâce à la périodicité. En étudiant les préfixes possibles, nous montrons ensuite $k \leq p + 2$. Borner la taille des mots w considérés est plus complexe. Ce contrôle passe par une étude géométrique des S_n . Nous prouvons notamment que les S_n peuvent être efficacement encadrés par des ellipsoïdes. Nous en déduisons alors l'existence d'une constante κ_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (S_n + S_n) \cap S_\infty \subset S_{n+\kappa_0}$. En revenant aux mots, cela signifie que, en prenant $w_1, w_2 \in \{0,1\}^n$ tels que $w_1 + w_2$ admet une forme normale (ie $\varphi^v(w_1 + w_2) \leq \Omega$), nous obtenons que cette forme normale est de taille au plus $n + \kappa_0$. Nous arrivons ensuite à en conclure, grâce à la majoration $k \leq p + 2$, que les mots w considérés sont de longueur bornée.

Lemme 2.5.2. *Soit L un langage rationnel sur l'alphabet Σ . Alors le langage $L_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \{w \in \Sigma^\omega \mid w \text{ contient une infinité de facteurs disjoints éléments de } L\}$ est reconnaissable par un automate de Büchi non déterministe.*

Démonstration. $L_\infty = (\Sigma^*L)^\omega$ donc est ω -rationnel. Il est alors reconnu par un automate de Büchi non déterministe. \square

Lemme 2.5.3. *Soient A, B deux alphabets et $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} A \times B$. Soit $L \subset \Gamma^\omega$ un langage reconnaissable par un automate de Büchi non déterministe. Soit $u \in A^\omega$ ultimement périodique. Alors $\{v \in B^\omega \mid (u, v) \in L\}$ est reconnaissable par un automate de Büchi.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (\Gamma, Q, \Delta, q_0, F)$ un automate de Büchi reconnaissant L . L'idée est d'encoder les lettres de u dans les états de l'automate \mathcal{A} , ce que l'on peut faire car u est

ultimement périodique. Comme u est ultimement périodique, il existe $u_0, u_1 \in A^*$ tel que $u = u_0 u_1^\omega$. On écrit alors $u_0 = a_0 \dots a_{n-1}$ et $u_1 = a'_0 \dots a'_{p-1}$. et on considère l'automate de Büchi

$\mathcal{A}' \stackrel{\text{déf}}{=} (B, Q_0 \sqcup Q_1, \Delta_0 \sqcup \Delta_1, q'_0, F_1)$ où :

- $Q_0 \stackrel{\text{déf}}{=} Q \times \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Q_1 \stackrel{\text{déf}}{=} Q \times \llbracket n, n+p-1 \rrbracket$;
- $q'_0 \stackrel{\text{déf}}{=} (q_0, 1)$.
- $F_1 \stackrel{\text{déf}}{=} F \times \llbracket n, n+p-1 \rrbracket$
- $\Delta_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{((q, i), b, (q', i+1)) \mid (q, (a_i, b), q') \in \Delta, i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ encode les transitions pour u_0
- $\Delta_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{((q, n+i), b, (q', n + ((i+1) \bmod p))) \mid (q, (a'_i, b), q') \in \Delta, i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket\}$ encode les transitions pour u_1^ω .

Ainsi, le langage reconnu par \mathcal{A}' est bien $\{v \in B^\omega \mid (u, v) \in L\}$. \square

Théorème 2.5.4. *Soient $v \in \mathcal{K}_d$ et Δ son mot associé. On considère le langage $\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \{\bar{\mu} \in \{0, 1\}^\omega \mid \mathbb{P}(v, \mu, \Omega) \text{ est connexe}\}$. Si Δ est ultimement périodique alors Λ est reconnaissable par un automate de Büchi non déterministe.*

Démonstration. On sait tout d'abord qu'un mot infini $\bar{\mu}$ est dans Λ ssi $(\Delta, \bar{\mu})$ contient une infinité de motifs intérieurs minimaux (éléments de \mathcal{M}). Comme Δ est périodique, \mathcal{M} est rationnel.

On regarde $\mathcal{M}_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \{(\Delta, \bar{\mu}) \in \Gamma^\omega \mid (\Delta, \bar{\mu}) \text{ contient une infinité de facteurs éléments de } \mathcal{M}\}$ et rappelons que $\Lambda = \{\bar{\mu} \in \{0, 1\}^\omega \mid (\Delta, \bar{\mu}) \text{ contient une infinité de facteurs éléments de } \mathcal{M}\}$. Par le lemme 2.5.2, le langage \mathcal{M}_∞ est reconnaissable par un automate de Büchi non déterministe. Comme Δ est ultimement périodique, par le lemme 2.5.3, Λ est également reconnaissable par un automate de Büchi non déterministe. \square

2.5.2 Probabilité que le plan $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$ soit connexe

Pour qu'un décalage μ rende le plan connexe, il faut et il suffit que $(\Delta, \bar{\mu})$ contienne un nombre infini de motifs intérieurs minimaux. On peut alors montrer qu'un tel événement arrive avec probabilité 1 en utilisant le lemme de Borel-Cantelli. On munit pour cela $\{0, 1\}^\omega$ de la tribu engendrée par les cylindres $C_{i,a} \stackrel{\text{déf}}{=} \{w \in \{0, 1\}^\omega \mid w_i = a\}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \{0, 1\}$. On munit cet espace de la probabilité usuelle P telle que $P(C_{i,a}) = \frac{1}{2}$. Notons que P est alors la probabilité produit d'une infinité de probabilités uniformes sur $\{0, 1\}$.

Théorème 2.5.5. *Soit $v \in \mathcal{K}_d$ de mot Δ associé périodique. Alors $\bar{\mu}$ rend le plan $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$ connexe P -presque sûrement.*

Démonstration. Soit (δ, σ) un motif intérieur minimal. Appelons p la période de Δ . L'idée est de découper $\bar{\mu}$ en blocs de taille kp . Le motif intérieur (δ, σ) apparaît avec une probabilité strictement positive dans chaque bloc ce qui permet de conclure par Borel-Cantelli. Comme δ est un facteur de Δ , il existe $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\delta = \Delta[i, i+n]$. Considérons alors k tel que $i+n \leq kp$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on considère l'événement $A_m \stackrel{\text{déf}}{=} \{\bar{\mu} \in \{0, 1\}^\omega \mid \bar{\mu}[i+mp, i+n+mp] = \sigma\}$, qui correspond à dire que le motif (δ, σ) apparaît en position $(i+mp, i+n+mp)$ dans $(\Delta, \bar{\mu})$. Dès lors, $P(A_m) = \frac{1}{2^{n+1}}$. De plus, les A_m sont indépendants pour la probabilité produit P car portent sur des blocs disjoints. Comme $(P(A_m))_{m \in \mathbb{N}}$ est un terme général de série divergente, par le lemme de Borel-Cantelli, $P(\limsup_{m \rightarrow +\infty} A_m) = 1$. Donc $\bar{\mu}$ admet une infinité de motifs (δ, σ) P -presque sûrement. Donc $\bar{\mu}$ rend le plan $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$ connexe P -presque sûrement. \square

Conjecture 2.5.6. *Soit $v \in \mathcal{K}_d$ de mot Δ associé périodique. Alors $\{\mu \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(v, \mu, \Omega) \text{ est connexe}\}$ est Lebesgue-négligeable.*

Cette conjecture, énoncée dans [22], semble être une conséquence immédiate du théorème 2.5.5. Si $\bar{\mu}$ rend le plan $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$ connexe P -presque sûrement, il est pourtant non trivial d'en conclure directement que $\mathbb{P}(v, \mu, \Omega)$ est connexe pour presque tout μ vis-à-vis de la mesure de Lebesgue. Afin de saisir la complexité du problème, observons le cas de Fibonacci où $\Delta = (12)^\omega$. Dans cette base, tout facteur 100 est équivalent à 011. Dès lors, le mot $\bar{\mu} = (100)^\omega$ admet comme écritures possibles tous les $\prod_{n \in \mathbb{N}} u_n$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{100, 011\}^{\mathbb{N}}$. Le décalage μ admet ainsi un ensemble d'antécédents par φ^v qui a la puissance du continu et qui a une structure topologique proche de l'ensemble triadique de Cantor. De manière générale, les ensembles d'antécédents de singletons pour φ^v ont une structure complexe, malgré la mesurabilité de φ^v . La P -négligeabilité dans $\{0, 1\}^\omega$ ne se transfère donc pas si facilement en λ -négligeabilité dans $[0, \Omega]$.

2.6 Connexité par faces en dimension infinie

Nous proposons ici une extension des résultats sur la connexité par faces à la dimension infinie. On considère ici deux approches pour définir les hyperplans arithmétiques en dimension infinie : l'une algébrique et l'autre plus analytique. Les caractérisations de la connexité obtenues ici sont d'une étonnante simplicité. Dans le cas algébrique, on se ramène immédiatement à la dimension finie. Dans le cas analytique, deux situations se présentent :

- soit on se ramène à la dimension finie ;
- soit $\Omega(v) = \|v\|_\infty$ (et le plan n'est pas connexe à l'épaisseur de connexité).

2.6.1 Extension algébrique

Soit I un ensemble et $E \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R}^{(I)}$ l'espace vectoriel libre sur I (ie l'ensemble des fonctions de I dans \mathbb{R} à support fini) muni de son produit scalaire canonique. On note $(e_i)_{i \in I}$ la base canonique de E .

Définition 2.6.1 (Hyperplan arithmétique en dimension infinie algébrique). *Pour un vecteur $v \in E$ non nul et $\mu, \omega \in \mathbb{R}$, on définit l'hyperplan arithmétique de vecteur normal v , de décalage μ et d'épaisseur ω par $\mathbb{P}(v, \mu, \omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^{(I)} \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\}$.*

Proposition 2.6.2. *Soit $v \in E$. Il existe alors $J \subset I$ fini tel que $v = \sum_{j \in J} v_j e_j$. On pose $v' = (v_j)_{j \in J}$. L'hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ de $\mathbb{Z}^{(I)}$ est connexe par faces ssi l'hyperplan $\mathbb{P}(v', \mu, \omega)$ de \mathbb{Z}^J l'est.*

Démonstration. On note $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}^J$ la projection orthogonale de E sur \mathbb{R}^J . Tout point de \mathbb{Z}^J est ainsi une projection d'un point de $\mathbb{Z}^{(I)}$. Notamment, $v' = \pi(v)$ et $\forall x \in \mathbb{Z}^{(I)}, \langle x, v \rangle = \langle \pi(x), v' \rangle$.

\Rightarrow : supposons que l'hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ de $\mathbb{Z}^{(I)}$ est connexe par faces. L'idée est ici de projeter les chemins de l'hyperplan de $\mathbb{Z}^{(I)}$ dans l'hyperplan de \mathbb{Z}^J . Soient $\pi(x), \pi(y) \in \mathbb{P}(v', \mu, \omega)$. Ainsi $\langle \pi(x), v' \rangle = \langle x, v \rangle$ et $\langle \pi(y), v' \rangle = \langle y, v \rangle$. Dès lors $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Donc il existe un chemin

x_0, \dots, x_n de x à y dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Ainsi, $\pi(x_0), \dots, \pi(x_n)$ est un chemin de $\pi(x)$ à $\pi(y)$ dans $\mathbb{P}(v', \mu, \omega)$.

\Leftarrow : supposons que l'hyperplan $\mathbb{P}(v', \mu, \omega)$ de \mathbb{Z}^J est connexe. L'idée est ici de relever les chemins de l'hyperplan de \mathbb{Z}^J dans l'hyperplan de \mathbb{Z}^I , ce qui se fait sans difficulté du fait que $\forall i \notin J, v_i = 0$. Soient $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Ainsi $\langle \pi(x), v' \rangle = \langle x, v \rangle$ et $\langle \pi(y), v' \rangle = \langle y, v \rangle$. Dès lors $\pi(x), \pi(y) \in \mathbb{P}(v', \mu, \omega)$. Donc il existe un chemin $\pi(x_0), \dots, \pi(x_n)$ de $\pi(x)$ à $\pi(y)$ dans $\mathbb{P}(v', \mu, \omega)$ avec $x_0 = x$ et $x_n = y$. Montrons alors qu'il existe un chemin de x_i à x_{i+1} dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. On propose le chemin suivant : $x_i \rightarrow^* \pi(x_i) \rightarrow \pi(x_{i+1}) \rightarrow^* x_{i+1}$. Pour montrer $x_i \rightarrow^* \pi(x_i)$, il suffit de remarquer que $x_i - \pi(x_i) \in \text{Vect}((e_j)_{j \in I \setminus J})$, ce qui donne un chemin naturel de x_i à $\pi(x_i)$ via des vecteurs de voisinages orthogonaux à v . \square

Le problème de la connexité des plans en dimension infinie se ramène donc ici au cas de la dimension finie.

2.6.2 Le cas analytique

Bien que naturel, le cas des hyperplans arithmétiques vus sous l'angle purement algébrique ne révèle pas toute la puissance des espaces de dimensions infinies. On propose donc de regarder le cas des espaces de Hilbert séparables. A isomorphisme près, il existe un unique tel espace qui est $E = l^2(\mathbb{N})$, l'espace des suites réelles de carré sommable. On note $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base de Hilbert canonique de E . Rappelons tout d'abord que, étant donnée deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le produit scalaire $\langle u, v \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ n'est pas toujours défini car il est nécessaire que la série converge. Afin d'éviter tout problème d'ordre de sommation, nous demandons de plus que la série converge absolument, ie que $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit sommable.

Définition 2.6.3 (Hyperplan arithmétique en dimension infinie analytique). *Soient $v \in E$ non nul et $\mu, \omega \in \mathbb{R}$. L'hyperplan arithmétique de vecteur normal v , de décalage μ et d'épaisseur ω est l'ensemble $\mathbb{P}(v, \mu, \omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \mid (x_n v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est sommable et } 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\}$.*

Il est toutefois nécessaire ici de revoir notre notion de chemin pour la connexité. En effet, étant donnés $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$, il est possible que $y - x$ ait une infinité de coordonnées non nulles, et qu'il soit donc impossible de relier x à y avec les chemins définis jusqu'à présent. Il est notamment nécessaire d'autoriser les passages à la limite dans les chemins.

Définition 2.6.4 (ω -chemin). *Soient $x, y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Un ω -chemin de x à y est une suite $(z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :*

1. $z^{(0)} = x$;
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \left\| z^{(k+1)} - z^{(k)} \right\|_1 \leq 1$;
3. z converge faiblement vers y , ie $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle z^{(k)}, e_n \rangle = \langle y, e_n \rangle$.

On dit alors qu'un ensemble A est connexe ssi pour tout $x, y \in A$, il existe un ω -chemin de x à y dans A .

Pour toute la suite, on fixe un vecteur $v \in E$ à support infini, ie $\{n \in \mathbb{N} \mid v_n \neq 0\}$ est infini. Dans le cas où v est à support fini, on se ramène comme dans la partie précédente à un problème de connexité par faces en dimension finie. On remarquera que, comme $v \in l^2(\mathbb{N})$, v converge vers 0 donc est bornée. Enfin, on peut sans perte de généralités supposer v positif.

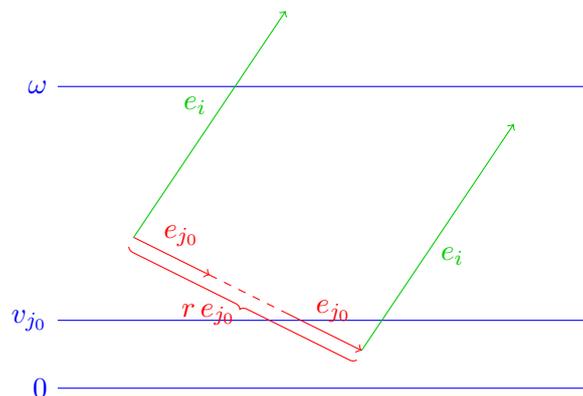


FIGURE 2.13 – Illustration de la preuve de la borne supérieure. Pour effectuer le déplacement e_i , on se ramène dans la strate $[0, v_{j_0}[$ grâce au vecteur e_{j_0} .

Lemme 2.6.5. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tel que $\langle x, v \rangle$ existe. Alors pour tout k suffisamment grand, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tels que $x + n e_k \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. En particulier, $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est non vide.

Démonstration. Comme $\omega > 0$ et v converge vers 0, pour tout k assez grand $0 \leq v_k < \omega$. Donc la suite $(n v_k)_{n \in \mathbb{Z}}$ intersecte tout intervalle de taille ω . Ainsi il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n v_k \in [-\langle x, v \rangle - \mu, \omega - \langle x, v \rangle - \mu[$. On en déduit donc que $0 \leq \langle x + n e_k, v \rangle + \mu < \omega$. Donc $x + n e_k \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. \square

Proposition 2.6.6 (Borne inf). Soient $\mu, \omega \in \mathbb{R}$ tels que $\omega \leq \|v\|_{\infty}$. Alors $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ n'est pas connexe.

Idée de la preuve : Comme $\omega \leq \|v\|_{\infty}$, il existe un déplacement e_j qui n'est pas faisable dans le plan. Il suffit donc d'exposer x et y dans le plan qui diffèrent sur leur j -ième coordonnée. On y arrive par densité en utilisant que la suite v tend vers 0.

Démonstration. Si $\omega \leq 0$, le plan est vide donc considéré comme non connexe. On considère donc désormais $\omega > 0$. Sans perte de généralités, on considère que $v_0 = \|v\|_{\infty}$. Comme $\omega > 0$, par le lemme $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est non vide. Soit $x \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. On considère $x + e_0$ qui admet un produit scalaire avec v . Il existe donc $k > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $y \stackrel{\text{déf}}{=} x + e_0 + n e_k \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Or, comme $\langle e_0, v \rangle = \|v\|_{\infty} \geq \omega$ et $y - x$ a une composante 1 selon e_0 , x et y ne sont pas reliables dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Donc $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ n'est pas connexe. \square

Définition 2.6.7. Valuation Soit $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. On appelle valuation de x , notée $\text{val}(x)$ l'entier $\min(\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq 0\})$. On rappelle que, si $x = 0$, $\text{val}(x) = \min(\emptyset) = \infty$.

Proposition 2.6.8 (Borne sup). Soient $\mu, \omega \in \mathbb{R}$ et $j_0 \in \mathbb{N}$ tels que $v_{j_0} > 0$ et $\omega > \|v\|_{\infty} + v_{j_0}$. Alors $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe.

Idée de la preuve : Pour faire un ω -chemin entre deux points du plan x et y , on va égaliser une par une les coordonnées de x et y . On a suffisamment de jeu (voir Figure 2.13) avec l'épaisseur pour se déplacer de x à un vecteur $x^{(0)}$ qui a même première coordonnée que y , puis vers un vecteur $x^{(1)}$ qui a ses 2 premières coordonnées communes avec y , etc.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Prenons $z^{(0)} \stackrel{\text{déf}}{=} x$. On construit ensuite un ω -chemin $(z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de x à y par récurrence sur $\text{val}(y - x)$.

On suppose avoir construit un chemin $(z^{(k)})_{k \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ de x à $x^{(i)}$ où $\text{val}(y - x^{(i)}) \geq i$. On considère $q \stackrel{\text{déf}}{=} \langle y - x^{(i)}, e_i \rangle$. On construit alors par récurrence sur q un chemin $(z^{(k)})_{k \in \llbracket m, n \rrbracket}$ de $x^{(i)}$ à un vecteur $x^{(i+1)}$ tel que $\text{val}(y - x^{(i+1)}) \geq i + 1$ et $\forall k \in \llbracket m, n \rrbracket, \text{val}(y - z^{(k)}) \geq i$. Si $q = 0$, on prend $x^{(i+1)} = x^{(i)}$, $n = m + 1$ et $z^{(m+1)} = z^{(m)}$. Sinon, on peut supposer par symétrie $\langle y - x^{(i)}, e_i \rangle > 0$.

Si $v_i = 0$, on peut alors effectuer le déplacement $x^{(i)} \rightarrow x^{(i)} + e_i$. En posant $z^{(m+1)} = x^{(i)} + e_i$, on obtient alors $\langle y - z^{(m+1)}, e_i \rangle = q - 1$ ce qui conclut par hypothèse de récurrence.

Si $v_i \neq 0$, il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq \langle x^{(i)} + r e_{j_0}, v \rangle + \mu < v_{j_0}$, où j_0 est l'entier de l'énoncé. Dès lors, $0 \leq v_i \leq \langle x^{(i)} + r e_{j_0} + e_i, v \rangle + \mu < v_{j_0} + v_i \leq v_{j_0} + \|v\|_\infty$. Donc $x^{(i)} \rightarrow^* x^{(i)} + r e_{j_0} \rightarrow x^{(i)} + r e_{j_0} + e_i$ est un chemin de $x^{(i)}$ à un point $z^{(m+|r|+1)}$ vérifiant $\langle y - z^{(m+|r|+1)}, e_i \rangle = q - 1$. Cela conclut donc par hypothèse de récurrence.

On a ainsi construit un ω -chemin partant de x . Reste à prouver qu'il converge faiblement vers y . Soit $i \in \mathbb{N}$. A partir du point $x^{(i+1)}$, le chemin z ne parcourt que des points $z^{(k)}$ tel que $\text{val}(y - z^{(k)}) \geq i + 1$. Donc notamment $\langle y - z^{(k)}, e_i \rangle = 0$. On a donc bien convergence faible de z vers y . Donc le plan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe. \square

Théorème 2.6.9. *Soit v un vecteur à support infini et $\mu, \omega \in \mathbb{R}$.*

- 1) *Si $\omega \leq \|v\|_\infty$ alors $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est non connexe.*
- 2) *Si $\omega > \|v\|_\infty$ alors $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe.*

Démonstration. 1) est la proposition de la borne inf 2.6.6.

2) On considère sans perte de généralités v positif. Si $\omega > \|v\|_\infty$, comme v converge vers 0 et est à support infini, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 < v_{j_0}$ et $\omega > \|v\|_\infty + v_{j_0}$. Dès lors, par la proposition de la borne sup 2.6.8, $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe. \square

Ce théorème permet ainsi d'obtenir un résultat simple sur la connexité par faces en dimension infinie.

Corollaire 2.6.10. *Soit $v \in l^2(\mathbb{N})$ non nul et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors v, μ admettent une épaisseur de connexité $\Omega(v, \mu)$:*

- *si v est à support fini alors $\Omega(v, \mu) = \Omega(\pi(v), \mu)$ où π est la projection de v sur ses composantes non nulles et Ω désigne l'épaisseur de connexité par faces en dimension finie.*
- *si v est à support infini alors $\Omega(v, \mu) = \|v\|_\infty$ et le plan n'est jamais connexe à l'épaisseur de connexité.*

2.7 Annexe : preuve de la rationalité des \mathcal{L}_p

Théorème : [Rationalité du langage des motifs intérieurs 2.5.1] Si Δ est périodique alors les \mathcal{L}_p sont des langages rationnels. Il en résulte que \mathcal{L} et \mathcal{M} sont également des langages rationnels.

La preuve de ce théorème est décomposée en plusieurs parties. Nous construisons tout d'abord un automate infini reconnaissant le langage \mathcal{L}_p dont les états auront la forme (n, k, w) avec $n \in \mathbb{N}$ (que l'on peut borner par périodicité de Δ), $k \in \mathbb{N}$ et $w \in \{0, 1\}^*$. Nous proposons ensuite un écrémage des états de l'automate grâce à la notion de préfixe inutile qui nous permet de supprimer des préfixes dans les mots w considérés. Cette notion nous permet dans un premier temps de borner facilement k . Nous bornons enfin $|w|$ grâce à une étude géométrique des S_n .

2.7.1 Construction de l'automate infini

Nous avons vu précédemment que nous pouvions nous restreindre au cas où $p \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Ainsi, il existe $\pi \in \{0, 1\}^*$ tel que $p = \psi^\Delta(\pi)$. On s'intéresse ainsi au langage $L \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{L}_{\psi^\Delta(\pi)} = \{\sigma \in \{0, 1\}^* \mid \psi^\Delta(\sigma + \pi) \in S_{|\sigma|}\}$: les mots ainsi construits vivent donc avant réduction dans $\{0, 1, 2\}^*$. L'idée est donc de calculer la somme $\sigma + \pi$ à l'aide d'un automate, en réduisant dans notre système de numération au fur et à mesure que les lettres de σ sont lues.

Quelques notations :

- $\sigma[i, j]$ désigne le facteur $(\sigma_k)_{k \in \llbracket i, j \rrbracket}$ de σ ;
- $\sigma \downarrow$ désigne la forme normale de σ ;
- les congruences considérées ici, notées mod, sont à valeurs dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ au lieu de $\llbracket 0, p - 1 \rrbracket$;
- on munit $\{0, 1\}^\omega$ du pré-ordre total noté \leq_Δ défini par $u \leq_\Delta w$ ssi $\varphi^v(u) \leq \varphi^v(w)$. Remarquons que ce pré-ordre est un ordre si on le restreint aux mots sous forme normale.

Les états de l'automate ont la forme (n, k, w) où :

- w désigne le mot courant ;
- n désigne le décalage dans Δ : lorsque l'on considère un décalage de n , on travaille avec $\delta_n \delta_{n+1} \dots$ au lieu de Δ ;
- k désigne la position courante d'insertion dans w : si l'on insère la lettre a en position k dans w , on regarde le mot $w + 0^{k-1}a$;

Par exemple, pour $\Delta = (123)^\omega$, lorsque l'on se trouve dans l'état (n, k, w) avec $n = 1, k = 2$ et $w = 011$, insérer la lettre 1 en position dans w permet d'obtenir le mot $w' = w + 0^{k-1}1 = 0(1+1)1 = 021$ qui peut ensuite être remis sous forme normale dans notre système de numération.

Le but de l'automate étant de simuler l'addition du mot σ à π , on insère successivement les lettres de σ dans π . L'état initial de l'automate est $(1, 1, \pi)$. Pour les transitions, étant donné une lettre $a \in \{0, 1\}$, on passe en lisant a de l'état (n, k, w) à l'état $(n, k + 1, (w + 0^{k-1}a) \downarrow)$ si $w + 0^{k-1}a$ admet une forme normale, à un état Poubelle sinon. Cette transition revient à ajouter la lettre a à la position k dans w . Dans le cas où cette opération aboutit à un mot sans forme normale, cela signifie que $\varphi^v(w + 0^{k-1}a) > \Omega$ et que le point considéré est en dehors du plan, d'où le rejet. Pour savoir si $w + 0^{k-1}a$ admet une forme normale, on vérifie simplement que $\varphi^v(w + 0^{k-1}a) \leq \Omega$. Les états finaux de l'automate sont enfin les (n, k, w) tels que $k > |w|$ et ces états finaux sont des puits de l'automate. En effet, si $k > |w|$, insérer de nouvelles lettres dans w mènera toujours à des mots plus petits que 1^ω .

2.7.2 Préfixes inutiles

Remarquons que, en l'état, notre méthode engendre un automate infini. On peut toutefois éviter ce problème en réduisant l'ensemble des états. Tout d'abord, dans le cas où Δ est périodique, on prend $\Delta = (\delta_1 \dots \delta_p)^\omega$ et on peut considérer n à valeurs dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Pour éviter

de stocker tout le mot w courant, on peut également constater que certains préfixes de w sont inutiles. Imaginons par exemple que w commence par 1. Peu importe la suite de lettres insérée dans w , ce 1 ne pourra jamais être transformé en 0. Le préfixe 1 de w est donc inutile et on peut dans ce cas réduire la taille de w . Dans un cas légèrement plus complexe, prenons $\Delta = (123)^\omega$, $n = 1$, $w = 010001$ et $k = 4$. Quelque soit la suite de lettres insérée dans w , le préfixe 01 sera inchangé. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder le pire cas où 1^ω est inséré en position 4 dans w . On obtient alors 0101121^ω qui se réduit en $01101(001)^\omega$ via la suite de réduction commençant par :

1	2	3	1	2	3	1	2	...
0	1	0	1	1	2	1	1	...
0	1	1	0	0	1	1	1	...
0	1	1	0	1	0	0	0	...

On remarque alors que le préfixe 01 de w n'a pas changé. Il s'agit donc d'un préfixe inutile que l'on peut retirer. Enfin, un dernier exemple intéressant est celui où w est de la forme w_10w_2 avec $\Delta = \delta (\neq \delta) \delta (\neq \delta) \delta \dots \delta$ ie $w_1[j] = 0$ ssi $\Delta[j] = \delta$. Le préfixe w_1 est alors appelé préfixe saturé de w . Si une insertion de lettre permet d'amener un 1 derrière w_1 dans $w = w_10w_2$, on peut appliquer une réduction en cascade qui ramène un 1 en tête de w . Prenons l'exemple, dans le cas de Tribonacci où $\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} (123)^\omega$, du mot $w = 011011011011011001$. Avec les notations précédentes, on a $w_1 = (011)^5$ et $w_2 = 01$. Si l'on insère la lettre 1 en position $k = 16$, on obtient un mot $w' = (011)^5101$ qui peut se réduire en $10^{16}1$ de la manière suivante :

1	2	3															
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Bien que le préfixe de w puisse changer via une insertion de lettre, il n'est pas toujours nécessaire de garder tous les blocs 011 dans w . Dans le pire des cas, on insère le mot 1^ω en position 16 dans w . Or, $w' \stackrel{\text{déf}}{=} w + 0^{15}1^\omega < 1001$. Donc w' commence par 1000 qui s'étend en 0111. On peut donc supprimer le préfixe saturé 011. Plus généralement, l'information de tous les blocs 011 est redondante, et peut ici être réduite à un seul bloc de ce type sans perdre d'information sur w . On peut donc considérer le préfixe $(011)^4$ comme un préfixe saturé inutile de w et le retirer.

Résumons les cas pouvant mener à un préfixe inutile, définis comme suit :

- si w admet un préfixe u tel que $(w + 0^{k-1}1^\omega) \downarrow$ existe et admet u comme préfixe alors on dit que u est un préfixe inutile de w ;
- si w est de la forme w_10w_2 avec $\Delta = \delta (\neq \delta) \delta (\neq \delta) \delta \dots \delta$ (ie $w_1[j] = 0$ ssi $\Delta[j] = \delta$) alors w_10 est appelé préfixe saturé et w'_1 est considéré comme inutile dès lors que $w + 0^{k-1}1^\omega < 10^{|w_1|-1}1$.

Enlever un préfixe inutile n'influera pas sur la forme normale finale du mot, car les retenues ne pourront pas se propager dans ce préfixe. Notons que si $w = w_1w_2$ avec w_1 un préfixe inutile de taille maximale $i < k$, on transforme l'état (n, k, w) en $((n - i) \bmod p, k - i, w_2)$. Notons en particulier que le préfixe 1 est toujours inutile.

Reste à montrer désormais que le nombre d'états considérés est fini. n est dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ qui est fini. Il suffit donc désormais de montrer que k et w vivent chacun dans un ensemble fini. On commence par borner k à partir de la proposition suivante, avant de s'attaquer à w .

2.7.3 Majoration de k

Avant de majorer k , nous avons besoin d'un petit lemme technique sur les systèmes de numération, qui est une version légèrement plus forte d'un lemme de [23].

Lemme 2.7.1. *Soit $v \in \mathcal{K}_d$ pour $d \geq 3$ et Δ son associé. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $1 \leq 0^n 1^\omega$ ssi il existe $\delta \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $\Delta[1, n] = \delta^n$.*

Démonstration. On note θ la suite associée à v . Rappelons que $\Omega = \varphi^v(1^\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n$.

\Leftarrow : s'il existe $\delta \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $\Delta[1, n] = \delta^n$ alors $v_\delta = \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n$. De plus, $0^n 1^\omega$ se réduit en $0^{n-1} 1 0^j 1^\omega$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$. Donc $0^n 1^\omega \geq 0^{n-1} 1$. Comme $\varphi^v(0^{n-1} 1) = \theta_n = \theta_1$, on en déduit que $1 \leq 0^n 1^\omega$.

\Rightarrow : par contraposée, supposons que $\Delta[1, n]$ contient 2 lettres distinctes δ et δ' . Sans perte de généralités, on peut écrire $\Delta = \delta^j \delta' \Delta_0$ pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta_0 \in \llbracket 1, d \rrbracket^\omega$. Quitte à effectuer $j - 1$ étapes de l'algorithme totalement soustractif sur v , on peut supposer $j = 1$. Dès lors, $\Delta = \delta \delta' \Delta_0$. En ajoutant 1^n , on a l'équivalence $1 > 0^n 1^\omega \Leftrightarrow 21^{n-1} > 1^\omega$. Il suffit pour conclure de montrer que $21 > 1^\omega$. On a $\varphi^v(21) = \theta_1 + (\theta_1 + \theta_2) = v_\delta + v_{\delta'} > \Omega = \varphi^v(1^\omega)$, l'inégalité $v_\delta + v_{\delta'} > \Omega$ venant du fait que $v \in \mathcal{K}_d$ et que $d \geq 3$. \square

Proposition 2.7.2. $k \leq p + 2$.

Démonstration. Supposons que $k \geq p + 2$ et montrons que $k = p + 2$. Notre but est notamment de trouver des préfixes inutiles lorsque $k > p + 2$. Soit w sous forme normale sans préfixe inutile. On en déduit notamment que w commence par un 0. Si $|w| < k$ alors l'état considéré est final et boucle sur lui-même. Ainsi $|w| \geq k$. Posons $\delta \stackrel{\text{déf}}{=} \Delta[1]$. Comme $k \geq p + 2$, il existe une autre occurrence de δ à une position strictement inférieure à k . On peut ainsi écrire

$$\begin{array}{cccc|c} \Delta & = & \delta & \Delta' & \delta & | & k \\ w & = & 0 & \sigma & x & \sigma' & | & u \end{array}$$

où Δ' ne contient pas la lettre δ . Ainsi $w = 0\sigma x \sigma' u <_{\Delta} 1$ car w est sous forme normale. On distingue alors 2 cas : un cas non pathologique où l'on prouve $k \leq p + 1$ et un cas pathologique où l'on prouve $k = p + 2$.

Cas pathologique : supposons $w <_{\Delta} 01^{|\sigma|}$. Comme w est sans préfixe inutile, le 0 en tête de w peut ainsi être transformé en 1 par l'insertion de nouvelles lettres dans w . Donc $1 \leq_{\Delta} w + 0^{2+|\sigma|+|\sigma'|} 1^\omega <_{\Delta} 01^{|\sigma|} + 0^{2+|\sigma|+|\sigma'|} 1^\omega = 01^{|\sigma|} 0^{1+|\sigma'|} 1^\omega$. De plus, $1 =_{\Delta} 01^{|\sigma|+1}$ par réduction, d'où $01^{|\sigma|+1} <_{\Delta} 01^{|\sigma|} 0^{1+|\sigma'|} 1^\omega$. En éliminant le préfixe commun, $1 <_{\Delta_0} 0^{1+|\sigma'|} 1^\omega$ où

Δ_0 est Δ translaté de $1 + |\sigma|$.

Or, par le lemme 2.7.1, on ne peut ramener de 1 en première position dans $0^{1+|\sigma'|}1^\omega$ qu'à la condition d'avoir une plage de δ , à savoir :

$$\begin{array}{cccc|c} \Delta & = & \delta & \Delta' & \delta & \delta^{|\sigma'|} & | & k \\ w & = & 0 & \sigma & x & \sigma' & | & u \end{array}$$

Montrons maintenant que $k = p + 2$ en utilisant la périodicité de Δ . Posons $m \stackrel{\text{déf}}{=} |\sigma'| + 1$. Ainsi, $\Delta[1, k - 1] = \delta \Delta' \delta^m$ où Δ' ne contient pas de δ . De plus, Δ' est non vide car sinon, on aurait $\Delta = \delta^\omega$ ce qui est impossible car Δ contient une infinité d'occurrences de chaque lettre. Donc $\delta \neq \Delta'[1] = \Delta[2] = \Delta[p + 2]$. Si par l'absurde $k > p + 2$, la position $p + 2$ de Δ se trouve dans $\Delta[1, k - 1] = \delta \Delta' \delta^m$. Comme $\Delta[p + 2] \neq \delta$, la position $p + 2$ de Δ est dans Δ' . La condition $\Delta[p + 1] = \delta$ contredit alors la périodicité de Δ .

Cas non pathologique : supposons maintenant $w \geq_{\Delta} 01^{|\sigma|}$. Rappelons que nous avons initialement dans la preuve fait l'hypothèse $k \geq p + 2$. On cherche alors à aboutir à une contradiction pour en conclure $k \leq p + 1$. Comme $w \geq_{\Delta} 01^{|\sigma|}$, w possède un préfixe saturé. Montrons maintenant qu'il est possible d'enlever ce préfixe saturé, à savoir que $w + 0^{2+|\sigma|+|\sigma'|}1^\omega <_{\Delta} 10^{|\sigma|}1$. $w + 0^{2+|\sigma|+|\sigma'|}1^\omega <_{\Delta} 1 + 0^{2+|\sigma|+|\sigma'|}1^\omega = 10^{|\sigma|}0^{1+|\sigma'|}1^\omega$. Or, comme l'on n'est pas dans le cas pathologique, $00^{|\sigma'|}1^\omega <_{\Delta_0} 1$ où Δ_0 est Δ translaté de $|\sigma| + 1$. Donc $10^{\sigma}0^{1+|\sigma'|}1^\omega <_{\Delta} 10^{|\sigma|}1$ et $w + 0^{2+|\sigma|+|\sigma'|}1^\omega <_{\Delta} 10^{|\sigma|}1$. On peut ainsi enlever le préfixe saturé de w , ce qui est contradictoire. Ainsi, $k \leq p + 1$.

2.7.4 Etude géométrique des S_n

On souhaite désormais montrer que w vit dans un ensemble fini. Le but est pour cela de trouver, pour tout mot w de longueur inférieure à L , un entier m tel que la simulation de m étapes de l'algorithme sur w aboutisse toujours sur un mot de longueur $\leq L$. La longueur d'un mot w représentant le plus petit n tel que $\psi^\Delta(w) \in S_n$ (étape n de la clôture palindromique), nous faisons tout d'abord une étude géométrique de S_n en montrant que S_n est encadré par deux ellipsoïdes.

On pose $\gamma_i \stackrel{\text{déf}}{=} x \mapsto x - x_i(\mathbf{1} - e_i)$ et $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t\gamma_{\delta_1} \dots {}^t\gamma_{\delta_p}$. On sait que Γ est diagonalisable et que son polynôme caractéristique χ_Γ est scindé à racines simples. De plus, en ordonnant les valeurs propres $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ de Γ par module croissant, on sait que $\beta \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha_1$ est l'inverse d'un nombre de Pisot de polynôme minimal $\mu_\beta = \chi_\Gamma$. Cela signifie que $|\beta| < 1$ et que $\forall i \in \llbracket 2, d \rrbracket, |\alpha_i| > 1$. On sait également que ${}^t\Gamma v = \beta v$. En notant X_i le vecteur propre de Γ associé à la valeur propre α_i , on peut décomposer tout vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ dans la base des vecteurs propres de Γ : $x = \sum_{i=1}^d \bar{x}_i X_i$.

On associe également à cette base une norme $\|\cdot\|_\Gamma$ telle que $\left\| \sum_{i=1}^d \bar{x}_i X_i \right\|_\Gamma = \sum_{i=1}^d |\bar{x}_i|$. On notera alors $\bar{B}_\Gamma(a, r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r associée à cette norme.

On définit, pour $i \in \llbracket 2, d \rrbracket$ et $L \in \mathbb{N}$, $H_L^i \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d \mid |\bar{x}_i| \leq |\alpha_i|^L\}$. On considère enfin l'ellipsoïde $H_L \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{i=2}^d H_L^i$. Notre but est d'encadrer S_n par $H_{L'}$ et H_L afin de montrer qu'il existe une constante κ_0 tel que $(S_m + S_m) \cap S_\infty \subset S_{m+\kappa_0}$ pour tout m . On utilisera énormément le lemme de composition suivant :

Lemme 2.7.3 (Composition [22]). $S_{n+p} = S_p + \Gamma(S_n)$

Lemme 2.7.4. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in S_\infty, |\bar{x}_1| \leq M$.

Démonstration. Commençons par montrer que $X_2 \dots X_d \in v^\perp$.

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \beta \langle v, X_i \rangle = \langle {}^t \Gamma v, X_i \rangle = \langle v, \Gamma X_i \rangle = \alpha_i \langle v, X_i \rangle$$

Dès lors que $i \neq 1$, on a $\beta \neq \alpha_i$ donc $X_i \in v^\perp$. De plus, comme $v \neq 0$, $\langle X_1, v \rangle \neq 0$. Soit $x \in S_\infty = \mathbb{P}(v, 0, \Omega)$. $\Omega \geq |\langle x, v \rangle| = |\bar{x}_1 \langle X_1, v \rangle|$. Donc $|\bar{x}_1| \leq \frac{\Omega}{|\langle X_1, v \rangle|}$. $M \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\Omega}{|\langle X_1, v \rangle|}$ convient donc. \square

Lemme 2.7.5. Pour tout $L \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H_L \cap S_\infty \subset S_n$.

Démonstration. D'après le lemme 2.7.4, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in S_\infty, |\bar{x}_1| \leq M$. Ainsi,

$$\forall x \in H_L \cap S_\infty, \|x\|_\Gamma = \sum_{i=1}^d |\bar{x}_i| \leq M + \sum_{i=2}^d |\alpha_i|^L$$

Donc $H_L \cap S_\infty$ est borné donc fini car à valeurs dans \mathbb{Z}^d . Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H_L \cap S_\infty \subset S_n$. \square

Lemme 2.7.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $L \in \mathbb{N}$ tel que $S_n \subset H_L$.

Démonstration. S_n étant fini et du fait que $|\alpha_i| > 1$, il existe un entier L tel que $\forall x \in S_n, \forall i \in \llbracket 2, d \rrbracket, |\bar{x}_i| \leq |\alpha_i|^L$. Cet entier convient alors. \square

On considère, pour $i \in \llbracket 2, d \rrbracket$, le réel $r_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\max_{z \in S_p} |\bar{z}_i|}{|\alpha_i| - 1}$. On se donne désormais un entier L' tel que $\forall i \in \llbracket 2, d \rrbracket, |\alpha_i|^{L'} - r_i \geq |\alpha_i|^{L'-1}$. Cet entier existe car $|\alpha_i| > 1$. Remarquons que, dès lors, $\forall i \in \llbracket 2, d \rrbracket, |\alpha_i|^{L'} + r_i \leq |\alpha_i|^{L'+1}$. On remarquera de plus que tout entier supérieur à L' vérifie cette propriété. D'après le lemme 2.7.5, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H_{L'} \cap S_\infty \subset S_{np}$. D'après le lemme 2.7.6, il existe un entier $L \geq L'$ tel que $S_{np} \subset H_L$. Les entiers L et L' vont nous permettre d'encadrer les clôtures palindromiques $S_{(n+k)p}$ entre deux ellipsoïdes.

Théorème 2.7.7. $\forall k \in \mathbb{N}, H_{L'+k-1} \cap S_\infty \subset S_{(n+k)p} \subset H_{L+k+1}$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in S_{(n+k)p}$ et $i \in \llbracket 2, d \rrbracket$. D'après le lemme de composition 2.7.3, $S_{(n+k)p} = \sum_{j=0}^{k-1} \Gamma^j(S_p) + \Gamma^k(S_{np})$. Donc il existe $y \in S_{np}$ et $z^{(0)}, \dots, z^{(k-1)} \in S_p$ tels que

$$x = \sum_{j=0}^{k-1} \Gamma^j z^{(j)} + \Gamma^k y.$$

Ainsi, en décomposant sur la base (X_1, \dots, X_d) , $\bar{x}_i = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_i^j \bar{z}_i^{(j)} + \alpha_i^k \bar{y}_i$.

De plus, $y \in H_L$ donc $|\bar{y}_i| \leq |\alpha_i|^L$ et $z^{(j)} \in S_p$ donc $|\bar{z}_i^{(j)}| \leq r'_i$ où $r'_i \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{z \in S_p} |\bar{z}_i|$. Donc :

$$\begin{aligned}
 |\bar{x}_i| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_i|^j |\bar{z}_i^{(j)}| + |\alpha_i|^k |\bar{y}_i| \\
 &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_i|^j r'_i + |\alpha_i|^k |\alpha_i|^L \\
 &= r'_i \frac{|\alpha_i|^k - 1}{|\alpha_i| - 1} + |\alpha_i|^{L+k} \\
 &\leq r'_i \frac{|\alpha_i|^k}{|\alpha_i| - 1} + |\alpha_i|^{L+k} \\
 &= |\alpha_i|^k (r_i + |\alpha_i|^L) \\
 &\leq |\alpha_i|^{L+k+1}
 \end{aligned}$$

Donc $x \in H_{L+k+1}$. On a ainsi montré que $S_{(n+k)p} \subset H_{L+k+1}$.

Soit $x \in S_\infty \setminus S_{(n+k)p}$. Dès lors, $x \in S_{(n+k')p} \setminus S_{(n+k)p}$ pour un certain $k' > k$. Il existe donc $y \in S_{(n+k'-k)p}$ et $z^{(0)}, \dots, z^{(k-1)} \in S_p$ tels que $x = \sum_{j=0}^{k-1} \Gamma^j z^{(j)} + \Gamma^k y$. Ainsi, $\bar{x}_i = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_i^j \bar{z}_i^{(j)} + \alpha_i^k \bar{y}_i$. De plus, $x \notin S_{(n+k)p}$ donc $y \notin S_{np}$. Comme $y \in S_\infty \setminus S_{np}$, $y \in (H_{L'})^C$ d'où l'existence d'un $i \in \llbracket 2, d \rrbracket$ tel que $|\bar{y}_i| > |\alpha_i|^{L'}$. De plus, $z^{(j)} \in S_p$ donc $|\bar{z}_i^{(j)}| \leq r'_i$. Donc :

$$\begin{aligned}
 |\bar{x}_i| &\geq |\alpha_i|^k |\bar{y}_i| - \sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_i|^j |\bar{z}_i^{(j)}| \\
 &> |\alpha_i|^k |\alpha_i|^{L'} - \sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_i|^j r'_i \\
 &= |\alpha_i|^{L'+k} - r'_i \frac{|\alpha_i|^k - 1}{|\alpha_i| - 1} \\
 &\geq |\alpha_i|^{L'+k} - r'_i \frac{|\alpha_i|^k}{|\alpha_i| - 1} \\
 &= |\alpha_i|^k (|\alpha_i|^{L'} - r_i) \\
 &\geq |\alpha_i|^{L'+k-1}
 \end{aligned}$$

Donc $x \notin H_{L'+k-1}$. On a ainsi montré que $S_\infty \setminus S_{(n+k)p} \subset S_\infty \setminus H_{L'+k-1}$. On en déduit que $H_{L'+k-1} \cap S_\infty \subset S_{(n+k)p}$. \square

En prenant la notation $q \stackrel{\text{déf}}{=} L - L'$, on obtient donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, H_{L-q+k-1} \subset S_{(n+k)p} \subset H_{L+k+1}$$

Lemme 2.7.8. *Il existe $\xi \in \mathbb{N}$ tel que $\forall L \in \mathbb{N}, H_L + H_L \subset H_{L+\xi}$.*

Démonstration. On pose $\xi \stackrel{\text{déf}}{=} \lceil \max_{i \in \llbracket 2, d \rrbracket} \log_{|\alpha_i|}(2) \rceil$. Soit $x \in H_L + H_L$. Il existe $y, z \in H_L$ tel que $x = y + z$. On a $|\bar{x}_i| \leq |\bar{y}_i| + |\bar{z}_i| \leq 2|\alpha_i|^L \leq |\alpha_i|^{L+\xi}$. Donc $x \in H_{L+\xi}$. \square

Théorème 2.7.9. *Il existe $\kappa_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \in \mathbb{N}, (S_m + S_m) \cap S_\infty \subset S_{m+\kappa_0}$.*

Démonstration. Commençons par montrer le résultat pour $m \geq np$. Il suffit de le montrer dans le cas où m est un multiple de la période. On prend donc $m = (n+k)p$ pour $k \in \mathbb{N}$. D'après le théorème 2.7.7, $S_m + S_m \subset H_{L+k+1} + H_{L+k+1}$. D'après le lemme 2.7.8, $H_{L+k+1} + H_{L+k+1} \subset H_{L+k+1+\xi}$. D'après le théorème 2.7.7, $H_{L+k+1+\xi} \cap S_\infty \subset S_{(n+k+q+\xi+2)p}$. Donc $(S_m + S_m) \cap S_\infty \subset (H_{L+k+1} + H_{L+k+1}) \cap S_\infty \subset H_{L+k+1+\xi} \cap S_\infty \subset S_{(n+k+q+\xi+2)p} = S_{m+(q+\xi+2)p}$. En posant $\kappa_0 = (q+\xi+2)p$ (qui ne dépend pas de m), on a donc bien montré que $\forall m \geq np, (S_m + S_m) \cap S_\infty \subset S_{m+\kappa_0}$. np étant un entier fixé, on peut modifier κ_0 pour que la propriété soit vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$ et non plus seulement pour tout $m \geq np$. \square

2.7.5 Majoration finale sur $|w|$

Théorème 2.7.10. *L'ensemble des mots w considérés dans les états de l'automate est fini*

Démonstration. On se sert ici du théorème 2.7.9, à savoir qu'il existe $\kappa_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \in \mathbb{N}, S_m + S_m \subset S_{m+\kappa_0}$$

On pose $M \stackrel{\text{déf}}{=} \kappa_0 + p + 1$. Soit w un mot de $\{0, 1\}^*$. Montrons que l'on peut se ramener en un certain nombre m d'étapes de l'algorithme à un mot de longueur inférieure ou égale à M . On pose $L \stackrel{\text{déf}}{=} |w|$. Quitte à compléter w par des zéros, on peut supposer $L \geq M$. On note k la position d'insertion qui, d'après la proposition 2.7.2, vérifie $k \leq p + 2$. On pose enfin $m \stackrel{\text{déf}}{=} L - k + 1$. Considérons que $w = xu$ où $|x| = k - 1$ et $|u| = L - k + 1 = m$. Comme $m + k - 1 = L$, on peut simuler m étapes de l'algorithme par l'ajout d'un mot $u' \in \{0, 1\}^m$ à u tel que $\psi^\Delta(x(u + u')) \in S_\infty$. On cherche à majorer la longueur de la forme normale de $w' \stackrel{\text{déf}}{=} x(u + u')$. Comme $\psi^\Delta(xu) \in S_L$ et $\psi^\Delta(0^{k-1}u') \in S_L$, $\psi^\Delta(w') \in S_L + S_L \subset S_{L+\kappa_0}$. Donc $|w' \downarrow| \leq L + \kappa_0$. On appelle alors τ le préfixe qui va être coupé dans $w' \downarrow$. Comme la nouvelle position d'insertion k' vérifie $k' \leq p + 2$, on a $k + m - |\tau| \leq p + 2$. Donc $|\tau| \geq m + k - p - 2 = L - p - 1$. Le nouveau mot considéré par l'automate, appelé w'' , vérifie alors $|w''| = |w' \downarrow| - |\tau| \leq (L + \kappa_0) - (L - p - 1) = \kappa_0 + p + 1 = M$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de mots dans $\{0, 1\}^{\leq M}$, l'ensemble des mots w considérés dans les états de l'automate est fini. \square

Ayant montré que n , k et w vivent dans des ensembles finis, nous pouvons conclure à la finitude de notre automate et donc à la rationalité de \mathcal{L}_p . La classe des langages rationnels étant stable par union, intersection, concaténation et complémentaire, on en déduit également que \mathcal{L} et \mathcal{M} sont rationnels.

2.8 Bilan & perspectives

L'étude de la connexité par faces des hyperplans arithmétiques a permis de mettre au jour un certain nombre de phénomènes et de créer des liens inattendus avec d'autres communautés. Pour décider de la connexité de $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$, on commence par calculer l'épaisseur de connexité $\Omega(v, \mu)$. Celle-ci est une fonction simple de μ et $\Omega(v, 0)$ qui se calcule via un algorithme de pgcd :

l'algorithme totalement soustractif. L'hyperplan est alors connexe si $\omega > \Omega(v, \mu)$, non connexe si $\omega < \Omega(v, \mu)$. Dans le cas où l'algorithme totalement soustractif termine, l'hyperplan n'est jamais connexe pour $\omega = \Omega(v, \mu)$. Sinon, cas qui se produit uniquement pour un ensemble Lebesgue-négligeable de vecteurs, on se ramène à l'étude d'un ensemble appelé \mathcal{K}_d . La connexité dépend alors du décalage μ . Le déroulé infini de l'algorithme totalement soustractif sur les vecteurs de l'ensemble \mathcal{K}_d permet de créer un mot infini Δ . A partir du mot Δ , on peut alors créer un système de numération, appelé Δ -numération, qui a de bonnes propriétés de normalisation. Il est ainsi possible d'encoder μ dans ce système de numération via un mot infini $\bar{\mu}$. L'hyperplan est alors connexe ssi $\bar{\mu}$ contient une infinité d'éléments d'un langage \mathcal{M} , langage des motifs intérieurs minimaux. Dans le cas où Δ est ultimement périodique, le langage \mathcal{M} est rationnel et le langage des codes des décalages rendant le plan connexe est alors reconnaissable par un automate de Büchi non déterministe.

L'étude des plans à l'épaisseur de connexité (notamment avec décalage nul) a permis de mettre au jour un lien entre Δ -numération et clôture palindromique géométrique. Les points du plan sont alors représentés par les mots finis sur $\{0, 1\}$. Notre travail sur les plans avec décalage nous a amené à étudier au langage \mathcal{M} des motifs intérieurs minimaux. Dans le cas où Δ est ultimement périodique, nous avons vu que ce langage était rationnel. Il serait alors intéressant de regarder ce langage pour d'autres mots Δ . On pourrait également étudier le langage de tous les motifs intérieurs minimaux, en rendant Δ variable.

Enfin, la montée en dimension des propriétés de la connexité par faces a permis de montrer que la difficulté du problème se concentre sur la dimension finie. L'étude de la connexité par faces en dimension infinie est en effet très simple :

- soit le problème se ramène à la dimension finie ;
- soit il existe une épaisseur de connexité qui vaut $\Omega(v) = \|v\|_\infty$ et le plan n'est jamais connexe à cette épaisseur.

On peut toutefois chercher à généraliser autrement les propriétés observées pour la connexité par faces. En 2D, de nombreux travaux s'intéressent aux droites naïves et à la 8-connexité, aussi appelée connexité par sommets. Rien n'empêche alors d'étudier les connexités par arêtes et par sommets en 3D (qui, nous le verrons, se ramènent à la connexité par faces), ou de manière générale les connexités par facettes en dimension finie quelconque. Il est également possible d'étudier d'autres connexités plus exotiques, comme celle du pas de cavalier. La résolution du problème de la connexité pour des voisinages généraux est l'un des objectifs de cette thèse. Les travaux et résultats sur le sujet sont l'objet des chapitres 3 et 4.

3

Le problème général de la connexité : approche combinatoire

Ce chapitre propose une étude de la connexité générale, dans le but d'étendre les résultats connus pour la connexité par faces à d'autres voisinages. Dans son article définissant les hyperplans arithmétiques [3], E. Andres définit les connexités par facettes en dimension finie quelconque. Il est également possible de regarder d'autres voisinages, non nécessairement représentables par des boules. La combinatoire peut alors très vite exploser, qu'il s'agisse des relations de liaisons entre les vecteurs de voisinage ou de la complexité des chemins. Après avoir défini la notion de voisinage, nous démontrons l'existence d'une épaisseur de connexité pour tout voisinage. Nous montrons que celle-ci possède une faible dépendance en μ et des bornes similaires à l'épaisseur pour la connexité par faces. Nous remarquons également que certains vecteurs, appelés inutiles, ne participent pas à la connexité. Nous créons ainsi la notion de voisinage utile, qui permet de limiter le nombre de vecteurs considérés et dans certains cas de se ramener à la connexité par faces. Nous présentons enfin l'algorithme de Y. Gérard présenté dans [28] qui décide de la connexité des plans dans le cas rationnel. Nous utilisons alors un algorithme similaire pour décider de l'utilité d'un vecteur dans le cas rationnel.

Définition 3.0.1 (Voisinages par facettes ou k -voisinages [3]). *Soit $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $x, y \in \mathbb{Z}^d$. On dit que x, y sont k -voisins ssi $\|y - x\|_\infty = 1$ et $\|y - x\|_\infty \leq d - k$.*

Rappelons qu'un point x de \mathbb{Z}^d peut être représenté par l'hypercube $\overline{\mathcal{B}}\left(x, \frac{1}{2}\right)$. Les points de \mathbb{Z}^2 peuvent ainsi être représentés par des carrés et ceux de \mathbb{Z}^3 par des cubes. Deux hypercubes sont alors k -voisins ssi ils se touchent au niveau d'une facette de dimension au moins $d - k$:

- le $(d - 1)$ -voisinage est le voisinage par faces ;
- le 0-voisinage est le voisinage par sommets ;
- en dimension 3, le 1-voisinage est le voisinage par arêtes.

Notons que les notions de 4-connexité et 8-connexité utilisées en 2D (pour les connexités par arêtes et par sommets) ne sont pas à confondre avec les notions de k -connexité présentées ici. Les notions de 4-connexité ou de 8-connexité sont relatives à la taille du voisinage considérés quand la notion de k -connexité est relative à la dimension des facettes dans le voisinage.

On peut définir d'autres voisinages plus exotiques que les connexités par facettes.

Définition 3.0.2 (Voisinage). *Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{Z}^d$. On dit que \mathcal{V} est un voisinage ssi :*

- \mathcal{V} est fini ;

- \mathcal{V} est symétrique, ie $\forall u \in \mathcal{V}, -u \in \mathcal{V}$;
- \mathcal{V} engendre \mathbb{Z}^d en tant que groupe

Définition 3.0.3 (\mathcal{V} -voisins, \mathcal{V} -connexité). Soit \mathcal{V} un voisinage de \mathbb{Z}^d . Deux points $x, y \in \mathbb{Z}^d$ sont dits \mathcal{V} -voisins ssi $y-x \in \mathcal{V}$. On le note alors $x \leftrightarrow_{\mathcal{V}} y$. En appelant dans ce cas $u \stackrel{\text{déf}}{=} y-x \in \mathcal{V}$, on dit également que u est un déplacement de x à y . Un \mathcal{V} -chemin de x à y est une suite finie $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^d$ telle que :

- $x_0 = x$;
- $x_n = y$;
- $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_i \leftrightarrow_{\mathcal{V}} x_{i+1}$.

S'il existe un \mathcal{V} -chemin de x à y , on note alors $x \leftrightarrow_{\mathcal{V}}^* y$. Une partie $A \subset \mathbb{Z}^d$ est dite \mathcal{V} -connexe ssi A est non vide et $\forall x, y \in A$, il existe un \mathcal{V} -chemin de x à y dans A .

Commentons ces quelques restrictions sur la notion de voisinage. Le caractère fini de \mathcal{V} permet de simplifier la notion et facilite l'élaboration d'algorithmes pour décider la \mathcal{V} -connexité. La symétrie du voisinage permet de travailler avec des graphes non orientés : nous souhaitons en effet que x soit voisin de y ssi y est voisin de x . Enfin, exiger que \mathcal{V} engendre \mathbb{Z}^d en tant que groupe permet à l'espace entier d'être connexe. Dans le cas contraire, les plans sont rarement connexes. En dehors de ces quelques restrictions raisonnables, les voisinages \mathcal{V} considérés peuvent être tout à fait quelconques. Remarquons enfin que, comme pour la connexité par faces, l'ensemble vide est considéré ici comme non connexe. Enfin, par abus, nous parlons par la suite de voisins, chemins ou connexité sans nécessairement préciser le voisinage \mathcal{V} considéré lorsque celui-ci est clair.

Exemple 3.0.4.

- $\mathcal{V}_f \stackrel{\text{déf}}{=} \{\pm e_i\}_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$ est le voisinage par faces ;
- $\mathcal{V}_s \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{\mathcal{B}}_{\infty}(0, 1) \cap \mathbb{Z}^d$ est le voisinage par sommets ;
- $\mathcal{V}_c \stackrel{\text{déf}}{=} \{\pm(1, 2), \pm(1, -2), \pm(2, 1), \pm(2, -1)\}$ est le voisinage par pas de cavalier en dimension 2 (2 points sont voisins ssi on peut aller de l'un à l'autre par un pas de cavalier aux échecs).

On souhaite alors résoudre le problème suivant, plus général que le problème de la connexité par faces résolu dans le chapitre 2.

Problème 3.0.5. Etant donnés $\mathcal{V}, v, \mu, \omega$, l'hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est-il \mathcal{V} -connexe ?

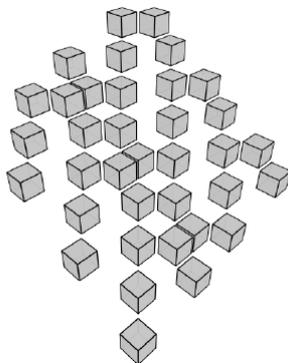


FIGURE 3.1 – Un plan connexe par sommets

On peut remarquer, en observant le plan connexe par sommets en Figure 3.1 qu'un plan n'est pas nécessairement séparant. Ainsi, le plan présenté, bien que parsemé de trous,

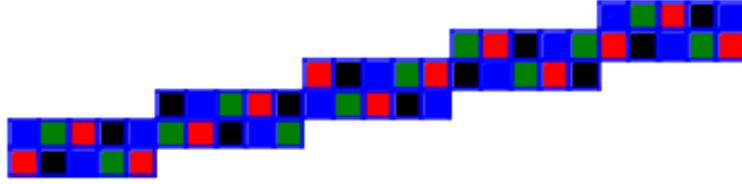


FIGURE 3.2 – Une droite connexe par pas de cavalier

est bien connexe par sommets. Dans le cas du voisinage par pas de cavalier présenté dans la Figure 3.2, on regarde un exemple avec la droite discrète de pente $1/5$ et de décalage nul. Les couleurs correspondent aux 4 composantes connexes obtenues pour l'ensemble de sauts $\{\pm(2, 1), \pm(2, -1)\}$. En rajoutant le saut $\pm(1, 2)$, on peut lier les composantes rouge et noire, verte et rouge, bleue et verte, noire et bleue. Donc la droite est \mathcal{V}_c -connexe. On remarquera au passage que l'on n'a pas utilisé le saut $\pm(-1, 2)$ pour montrer la connexité, ce qui signifie intuitivement que celui-ci est inutile au voisinage. Nous reparlons plus en profondeur de la notion d'inutilité dans la section concernée.

Nous commençons par étendre quelques résultats connus pour la connexité par faces : existence de l'épaisseur, bornes sur celle-ci, dépendance au décalage, réduction. Cette généralisation demande toutefois quelques hypothèses ou modifications supplémentaires, souvent dues à la complexité du réseau induit par \mathcal{V} . Avant de montrer l'existence d'une épaisseur de connexité pour des voisinages quelconques, nous introduisons la notion très utile de fibre ainsi qu'une caractérisation de l'irrationalité d'un vecteur par les fibres du plan.

Définition 3.0.6. *Fibre* La fibre de niveau $\alpha \in [0, \omega[$ d'un plan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est $\{x \in \mathbb{Z}^d \mid \langle x, v \rangle + \mu = \alpha\}$.

Proposition 3.0.7. *Soient $v \in \mathbb{R}^d$ non nul, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$. Alors $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ contient un nombre fini de fibres non vides ssi v est rationnel.*

Démonstration. \Rightarrow : supposons v rationnel et posons $\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \text{pgcd}(v) > 0$. Si $x \in \mathbb{Z}^d$ alors $\langle x, v \rangle + \mu \in \mu + \alpha\mathbb{Z}$. Comme $[0, \omega[\cap (\mu + \alpha\mathbb{Z})$ est fini, $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ admet un nombre fini de fibres non vides.

\Leftarrow : par contraposée, supposons v irrationnel. Dès lors, $\{\langle x, v \rangle\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ est dense dans \mathbb{R} donc l'ensemble des niveaux de fibres non vides de $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est dense dans $[0, \omega[$. Donc $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ possède un nombre infini de fibres non vides. \square

3.1 Épaisseur de connexité

3.1.1 Existence de l'épaisseur

Un premier contre-exemple à l'existence d'une épaisseur de connexité apparaît immédiatement (voir Figure 3.3) lorsque l'on regarde le voisinage \mathcal{V}_c du pas de cavalier pour le vecteur $v = (2, 1)$ (et $\mu = 0$). À l'épaisseur 1 (figure de gauche), la droite est connexe par pas de cavalier. En revanche, à l'épaisseur 2 (figure de droite), on observe 2 composantes connexes distinctes. Cela contredit donc l'existence d'un phénomène de percolation pour la connexité pour v : de tels vecteurs sont appelés pathologiques. On peut toutefois caractériser facilement les vecteurs pathologiques et on montre qu'ils sont en nombre fini (à un facteur multiplicatif près). Le cas

pathologique apparaît en effet uniquement lorsque, pour des $\omega > 0$ suffisamment petit, le plan ne contient qu'une seule fibre connexe. Cela n'est possible que dans le cas où v est rationnel et où la fibre de niveau μ , à savoir $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ est connexe. Augmenter l'épaisseur fait alors apparaître une nouvelle fibre qui n'est pas nécessairement reliée à la précédente.

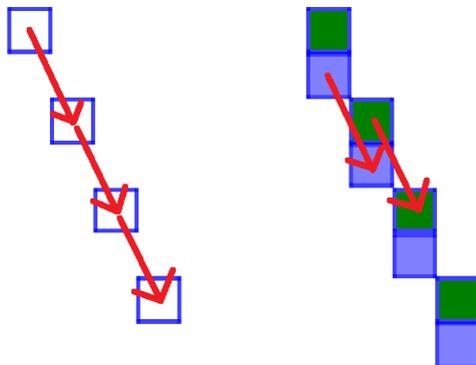


FIGURE 3.3 – Une droite sans épaisseur de connexité

Définition 3.1.1. *Vecteur pathologique* Soit \mathcal{V} un voisinage et $v \in \mathbb{R}^d$ un vecteur non nul. On dit que v est \mathcal{V} -pathologique ssi v est rationnel et $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ est \mathcal{V} -connexe.

Exemple 3.1.2. 1) Dans l'exemple présenté ci-dessus pour $v = (2, 1)$ et le voisinage \mathcal{V}_c du pas de cavalier, $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d = \text{Vect}_{\mathbb{Z}}((1, -2))$ qui est \mathcal{V}_c -connexe. Donc $(2, 1)$ est \mathcal{V}_c -pathologique.
2) En connexité par faces, les e_i sont pathologiques.

Afin de prouver l'existence d'une épaisseur de \mathcal{V} -connexité dans le cas non pathologique, nous avons besoin de quelques petits résultats intermédiaires.

Définition 3.1.3 (Norme de voisinage). Soit \mathcal{V} un voisinage et $v \in \mathbb{R}^d$ non nul. On pose $\mathcal{V}^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{u \in \mathcal{V} \mid \langle u, v \rangle > 0\}$. On définit alors $\lambda_{\mathcal{V}}(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \min_{u \in \mathcal{V}^+} \langle u, v \rangle$ et $\|v\|_{\mathcal{V}} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{u \in \mathcal{V}} |\langle u, v \rangle|$.

On remarquera que, comme \mathcal{V} engendre \mathbb{Z}^d , $\lambda_{\mathcal{V}}(v)$ est bien défini pour tout vecteur non nul et que $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ est une norme sur \mathbb{R}^d . On retrouve alors, dans le cas de la connexité par faces, $\|\cdot\|_{\mathcal{V}} = \|\cdot\|_{\infty}$ et $\lambda_{\mathcal{V}}(v)$ qui est le minimum des valeurs absolues des coordonnées non nulles.

Lemme 3.1.4. Soient \mathcal{V} un voisinage et $v \in \mathbb{R}^d$ un vecteur non pathologique. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe. Alors $\omega > \lambda_{\mathcal{V}}(v)$.

Démonstration. On pose $\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda_{\mathcal{V}}(v)$. Supposons par l'absurde $\omega \leq \lambda$. Nous allons montrer que $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ contient exactement une fibre non vide. Intuitivement, cela provient du fait qu'il est impossible de se déplacer dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ en utilisant des $u \in \mathcal{V}$ tels que $\langle u, v \rangle \neq 0$. Prenons en effet $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ voisins. Il existe alors $u \in \mathcal{V}$ tel que $y = x + u$. Comme $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$, $\lambda \geq \omega > |\langle y - x, v \rangle| = |\langle u, v \rangle|$. Ceci impose, par définition de λ , $\langle u, v \rangle = 0$ d'où $\langle x, v \rangle = \langle y, v \rangle$.

On note G le graphe induit par la relation de \mathcal{V} -voisinage sur $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Comme $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est \mathcal{V} -connexe, G est aussi connexe. De plus, $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est non vide donc contient un élément x_0 . Par connexité, tout point x de G est à une distance finie de x_0 dans le graphe, que l'on note $d_G(x_0, x)$. Rappelons de plus que $\forall x, y \in G$, si x et y sont voisins alors $\langle x, v \rangle = \langle y, v \rangle$. On peut ainsi aisément montrer par récurrence sur $d_G(x_0, x)$ que pour tout $x \in G$, on a $\langle x, v \rangle = \langle x_0, v \rangle$, et ainsi $x - x_0 \in v^\perp$.

On a ainsi montré que $\mathbb{P}(v, \mu, \omega) \subset (x_0 + v^\perp) \cap \mathbb{Z}^d$. L'inclusion réciproque est triviale, donc $\mathbb{P}(v, \mu, \omega) = (x_0 + v^\perp) \cap \mathbb{Z}^d$. Comme $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe, $(x_0 + v^\perp) \cap \mathbb{Z}^d$ aussi donc $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ aussi. Enfin, $\mathbb{P}(v, \mu, \omega) = x_0 + (v^\perp \cap \mathbb{Z}^d)$ comporte une seule fibre non vide donc v est rationnel. Cela contredit donc le caractère non pathologique de v . \square

Lemme 3.1.5 (d'inclusion). *Soient $\mu_1, \omega_1, \mu_2, \omega_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(v, \mu_1, \omega_1) \subset \mathbb{P}(v, \mu_2, \omega_2)$. On suppose de plus que $\mathbb{P}(v, \mu_1, \omega_1)$ est connexe et que $\omega_1 > \lambda$. Alors $\mathbb{P}(v, \mu_2, \omega_2)$ est connexe.*

Démonstration. On pose $\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda_{\mathcal{V}}(v)$. Il existe u_0 tel que $\langle u_0, v \rangle = \lambda$. Soient $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu_2, \omega_2)$. Il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $\langle x, v \rangle + \mu_1 - k\lambda \in [0, \lambda[$ et $\langle y, v \rangle + \mu_1 - \ell\lambda \in [0, \lambda[$. Ainsi, en posant $x_0 \stackrel{\text{déf}}{=} x - ku_0$ et $y_0 \stackrel{\text{déf}}{=} y - \ell u_0$, comme $\lambda < \omega_1$, on obtient que $x_0, y_0 \in \mathbb{P}(v, \mu_1, \omega_1)$ (et au passage que $x_0, y_0 \in \mathbb{P}(v, \mu_2, \omega_2)$). Comme $\mathbb{P}(v, \mu_1, \omega_1)$ est connexe, il existe un chemin de x_0 à y_0 dans $\mathbb{P}(v, \mu_1, \omega_1)$ donc dans $\mathbb{P}(v, \mu_2, \omega_2)$ (par inclusion). De plus, $x \leftrightarrow^* x_0$ et $y_0 \leftrightarrow^* y$ dans $\mathbb{P}(v, \mu_2, \omega_2)$. On a ainsi construit un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, \mu_2, \omega_2)$. Donc $\mathbb{P}(v, \mu_2, \omega_2)$ est connexe. \square

Proposition 3.1.6. *Soient $v \in \mathbb{R}^d$ non pathologique et $\omega \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ soit \mathcal{V} -connexe. Soit $\omega' \geq \omega$. Alors $\mathbb{P}(v, \mu, \omega')$ est \mathcal{V} -connexe.*

Démonstration. Comme v est non pathologique et $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe, $\omega > \lambda$. On applique alors le lemme d'inclusion. En effet, on a $\mathbb{P}(v, \mu, \omega) \subset \mathbb{P}(v, \mu, \omega')$ donc la connexité de $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ implique celle de $\mathbb{P}(v, \mu, \omega')$. \square

On obtient ainsi que l'ensemble $I \stackrel{\text{déf}}{=} \{\omega \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbb{P}(v, \mu, \omega) \text{ est connexe}\}$ est un intervalle non borné de \mathbb{R}_+ . Ainsi, en posant $\Omega(v, \mu) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf(I)$, on obtient l'existence de l'épaisseur de connexité :

Théorème 3.1.7. *Soit \mathcal{V} un voisinage et v un vecteur non pathologique. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Alors (v, μ) admet une épaisseur de connexité $\Omega_{\mathcal{V}}(v, \mu)$, ie :*

- $\forall \omega < \Omega_{\mathcal{V}}(v, \mu), \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ n'est pas \mathcal{V} -connexe ;
- $\forall \omega > \Omega_{\mathcal{V}}(v, \mu), \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est \mathcal{V} -connexe.

En dehors des cas pathologiques, nous retrouvons donc le phénomène de percolation observé pour la connexité par faces. Le cas des vecteurs pathologiques est abordé dans la partie suivante. Le but du reste de ce chapitre est d'obtenir des propriétés sur $v \mapsto \Omega_{\mathcal{V}}(v, 0)$ et de parvenir à calculer cette fonction. En effet, nous verrons dans une section consacrée que la dépendance de $\Omega_{\mathcal{V}}$ en μ est très faible et que l'on peut se ramener à étudier le cas $\mu = 0$.

3.1.2 Vecteurs pathologiques

Intéressons-nous ici au cas des vecteurs pathologiques pour un voisinage \mathcal{V} donné. Rappelons qu'un vecteur v est dit pathologique ssi v est rationnel et $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ est \mathcal{V} -connexe. Comme $\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(v, \mu, \omega) = \mathbb{P}(\alpha v, \alpha \mu, \alpha \omega)$, on peut se ramener au cas où les vecteurs pathologiques étudiés ont un pgcd 1 (donc sont entiers).

Proposition 3.1.8. *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ non nul. Alors v est pathologique ssi il existe $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ de rang $d - 1$ tel que $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d = \text{Vect}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_0)$.*

Démonstration. \Rightarrow : supposons v pathologique. Quitte à multiplier v par un scalaire, on peut supposer $\text{pgcd}(v) = 1$. Comme v est rationnel, $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ est un réseau de dimension $d - 1$. Considérons $\mathcal{V}_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{V} \cap v^\perp$. Dès lors, $\text{Vect}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_0) \subset v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$. Or, $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ est \mathcal{V} -connexe. De plus, aucun déplacement par un vecteur dans $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0$ n'est possible dans $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$. Donc $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ est \mathcal{V}_0 -connexe. Ainsi, $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d \subset \text{Vect}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_0)$, ce qui conclut.

\Leftarrow : supposons qu'il existe $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ de rang $d - 1$ tel que $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d = \text{Vect}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_0)$. Comme \mathcal{V}_0 est de rang $d - 1$, il en est de même pour $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ donc v est rationnel. De plus, $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d = \text{Vect}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_0)$ est \mathcal{V}_0 -connexe donc \mathcal{V} -connexe. Donc v est pathologique. \square

La proposition précédente permet ainsi de caractériser algébriquement les vecteurs pathologiques : ce sont les produits vectoriels des $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ de rang $d - 1$. On obtient ainsi que les vecteurs pathologiques sont, à multiplication par un scalaire près, en nombre fini.

Proposition 3.1.9. *Soit v un vecteur pathologique de $\text{pgcd} 1$. Alors v admet une épaisseur de connexité ssi il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $\langle u, v \rangle = 1$. Dans ce cas (nommé cas semi-pathologique), $\Omega_{\mathcal{V}}(v, 0) = 0$. (le cas $\mu \neq 0$ est traité ultérieurement).*

Démonstration. \Rightarrow : supposons que v admet une épaisseur de connexité. Alors, comme $\mathbb{P}(v, 0, 1) = v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ est \mathcal{V} -connexe, $\mathbb{P}(v, 0, 2)$ est aussi \mathcal{V} -connexe. Donc les fibres de niveau 0 et de niveau 1 de $\mathbb{P}(v, 0, 2)$ sont connectées. Comme $\mathbb{P}(v, 0, 2)$ contient uniquement 2 fibres non vides, cela impose l'existence d'un $u \in \mathcal{V}$ tel que $\langle u, v \rangle = 1$.

\Leftarrow : supposons qu'il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $\langle u, v \rangle = 1$. Soit $\omega > 0$. Le plan $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ contient un nombre fini de fibres non vides. La fibre de niveau 0, $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ est \mathcal{V} -connexe car v est pathologique. Les fibres de niveau n étant des translatées de la fibre de niveau 0, elles sont également connexes. Enfin, pour tout n , u connecte la fibre de niveau n à la fibre de niveau $n + 1$. Donc $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est connexe et v admet une épaisseur de connexité.

On a ainsi montré que $\forall \omega > 0, \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est \mathcal{V} -connexe. Donc $\Omega(v, 0) = 0$. \square

Théorème 3.1.10. *Soit v un vecteur pathologique.*

Alors $I_v \stackrel{\text{déf}}{=} \{\omega > 0 \mid \mathbb{P}(v, 0, \omega) \text{ n'est pas connexe}\}$ est un intervalle.

Démonstration. Dans le cas où il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $\langle u, v \rangle = 1$, par la proposition précédente, $I_v = \emptyset$ d'où le résultat.

Sinon (cas totalement pathologique), on pose $\lambda = \lambda_{\mathcal{V}}(v)$. Comme $\forall u \in \mathcal{V}, \langle u, v \rangle \neq 1, \lambda > 1$. Soit $\omega \in]1, \lambda]$. $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ contient au moins 2 fibres non vides (celle de niveau 0 et celle de niveau 1) et 2 fibres du plan sont toujours déconnectées lorsque $\omega \leq \lambda$ (en effet, aucun déplacement par un vecteur u tel que $\langle u, v \rangle \neq 0$ n'est possible dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$). Donc $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est non connexe et $]1, \lambda] \subset I_v$. Pour $] \lambda, +\infty[$, le lemme d'inclusion 3.1.5 permet de montrer qu'il existe $\Omega(v, 0) \geq \lambda$ tel que :

- $\forall \omega \in] \lambda, \Omega(v, 0)[, \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ n'est pas connexe ($\omega \in I_v$) ;
- $\forall \omega > \Omega(v, 0, \omega), \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est connexe ($\omega \notin I_v$).

Ajoutons, pour traiter le cas $\omega = \Omega(v, 0)$ de plus que $\mathbb{P}(v, 0, \Omega(v, 0)) = \mathbb{P}\left(v, 0, \Omega(v, 0) - \frac{\text{pgcd}(v)}{2}\right)$ est non connexe. Donc $I_v =]1, \Omega(v, 0)]$ qui est bien un intervalle. \square

Définition 3.1.11. Dans le cas des vecteurs pathologiques v , on pose donc $\Omega(v, 0) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup(I_v) = \sup(\{\omega > 0 \mid \mathbb{P}(v, 0, \omega) \text{ n'est pas connexe.}\})$, ce qui étend la notion d'épaisseur de connexité dans le cas pathologique.

On peut observer en Figure 3.4 un résumé des 3 différents cas possibles :

- le vecteur est non pathologique. Alors on observe un phénomène de percolation : le plan est non connexe, puis connexe au-delà de $\Omega(v, 0)$ (avec éventuelle dissertation sur la connexité à l'épaisseur critique $\Omega(v, 0)$) ;
- le vecteur est pathologique et $\exists u \in \mathcal{V}, \langle u, v \rangle = 1$ (cas semi-pathologique). Le plan est alors toujours connexe ;
- le vecteur est pathologique et $\forall u \in \mathcal{V}, \langle u, v \rangle \neq 1$ (cas totalement pathologique). Le plan est non connexe sur l'intervalle $]\text{pgcd}(v), \Omega(v, 0)]$ et connexe ailleurs.

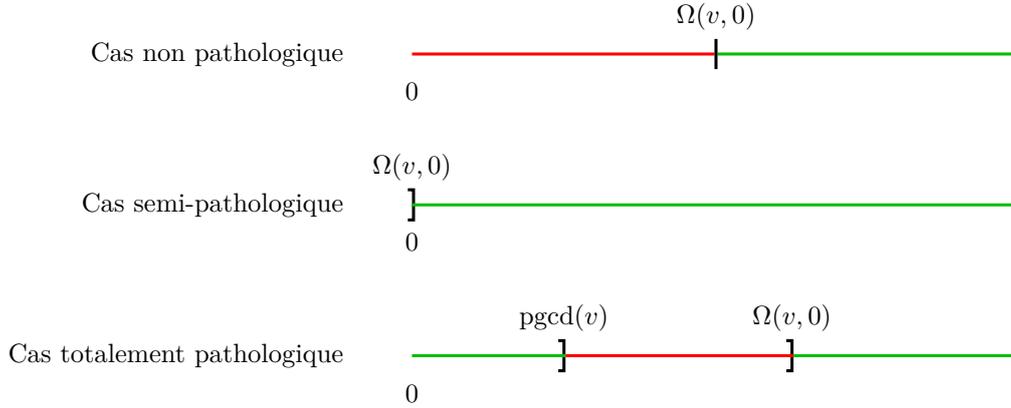


FIGURE 3.4 – Les différents cas d'existence de l'épaisseur de connexité $\Omega(v, 0)$. L'intervalle vert correspond à la partie connexe, le rouge à la partie non connexe.

Le cas totalement pathologique n'apparaît jamais dans le cas de la connexité par faces. En effet, la condition $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d = \text{Vect}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_0)$ impose que v ait une seule coordonnée non nulle, d'où $v = \alpha e_i$. Dès lors, $|\langle e_i, v \rangle| = |\alpha| = \text{pgcd}(v)$: on est donc dans le cas semi-pathologique.

De manière générale, étant donné un voisinage \mathcal{V} , on peut facilement décider s'il fera apparaître des vecteurs totalement pathologiques. Il suffit pour cela de calculer, pour $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ de taille $d - 1$, le produit vectoriel v des éléments des \mathcal{V}_0 . On teste ensuite s'il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $\langle u, v \rangle = 1$ pour conclure. Il serait intéressant de caractériser une classe de voisinages n'ayant aucun vecteur totalement pathologique. Nous avons par exemple pu montrer que les voisinages par facettes n'admettent aucun vecteur pathologique en toute dimension inférieure à 7. Les calculs en dimension supérieures commencent malheureusement à devenir très longs. Nous pensons toutefois que le résultat est vrai en toute dimension.

Conjecture 3.1.12. Soit \mathcal{V} un voisinage par facettes. Alors \mathcal{V} n'admet aucun vecteur totalement pathologique.

Nous pensons également que tout voisinage convexe n'admettait aucun vecteur totalement pathologique. On dit qu'un voisinage \mathcal{V} est convexe ssi $\text{Conv}(\mathcal{V}) \cap \mathbb{Z}^d = \mathcal{V} \cup \{0\}$. Ce résultat est malheureusement faux, comme le montre l'exemple, en dimension 4, de $\mathcal{V} \stackrel{\text{déf}}{=} \pm\{e_1, e_2, e_3, (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3)\}$ qui admet e_4 comme vecteur totalement pathologique, malgré la convexité de \mathcal{V} .

3.1.3 Dépendance au décalage

On souhaite ici étudier la dépendance en μ de Ω . Deux cas se présentent à nous : le cas rationnel et le cas irrationnel. La preuve pour les vecteurs rationnels repose sur le théorème de Bézout alors que celle pour les vecteurs irrationnels utilise un résultat de densité.

Proposition 3.1.13. *Soit v un vecteur rationnel de pgcd 1 et $\mu_0 = \mu \bmod 1$. Alors $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe ssi $\mathbb{P}(v, 0, \omega - \mu_0)$ est connexe.*

Démonstration. Par le théorème de Bézout, il existe $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle x_0, v \rangle = 1$. Par division euclidienne, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\mu_0 \in [0, 1[$ tel que $\mu = k + \mu_0$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(v, \mu, \omega) &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + k + \mu_0 < \omega\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x + kx_0, v \rangle + \mu_0 < \omega\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid -\mu_0 \leq \langle x + kx_0, v \rangle < \omega - \mu_0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid -\mu_0 \leq \langle x, v \rangle < \omega - \mu_0\} - kx_0 \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle < \omega - \mu_0\} - kx_0 \text{ car } \mu_0 \in [0, 1[\\
 &= \mathbb{P}(v, 0, \omega - \mu_0) - kx_0
 \end{aligned}$$

Donc, par translation, $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe ssi $\mathbb{P}(v, 0, \omega - \mu_0)$ est connexe. \square

Proposition 3.1.14. *Soit v un vecteur irrationnel. Alors $\Omega(v, \mu) = \Omega(v, 0)$.*

Démonstration. On montre que $\mu \mapsto \Omega(v, \mu)$ est une fonction constante. Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$. On suppose que $\mathbb{P}(v, \mu_1, \omega)$ est connexe et montrons que $\mathbb{P}(v, \mu_2, \omega + \varepsilon)$ l'est également. Comme v est irrationnel, $(\langle x, v \rangle)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ est dense dans \mathbb{R} . Il existe donc $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\mu_2 = \langle x_0, v \rangle + \mu_1 + \gamma$ où $\gamma \in [0, \varepsilon[$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(v, \mu_2, \omega + \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu_2 < \omega + \varepsilon\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \langle x_0, v \rangle + \mu_1 + \gamma < \omega + \varepsilon\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x + x_0, v \rangle + \mu_1 + \gamma < \omega + \varepsilon\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu_1 + \gamma < \omega + \varepsilon\} - x_0 \\
 &= \mathbb{P}(v, \mu_1 + \gamma, \omega + \varepsilon) - x_0
 \end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(v, \mu_1, \omega) \subset \mathbb{P}(v, \mu_1 + \gamma, \omega + \varepsilon)$. En effet, si $0 \leq \langle x, v \rangle + \mu_1 < \omega$ alors $0 \leq \gamma \leq \langle x, v \rangle + \mu_1 + \gamma < \omega + \gamma < \omega + \varepsilon$. Comme $\mathbb{P}(v, \mu_1, \omega)$ est connexe, on en déduit, par le lemme d'inclusion 3.1.5, que $\mathbb{P}(v, \mu_1 + \gamma, \omega + \varepsilon)$ l'est aussi.

Donc, par translation, $\mathbb{P}(v, \mu_2, \omega + \varepsilon)$ est connexe. Donc $\Omega(v, \mu_2) \leq \Omega(v, \mu_1) + \varepsilon$. Ainsi, en passant à l'inf, on obtient $\Omega(v, \mu_2) \leq \Omega(v, \mu_1)$, ce qui conclut. \square

Des deux propositions précédentes, on déduit le théorème suivant :

Théorème 3.1.15. Soit $v \in \mathbb{R}^d$ non nul et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors } \Omega(v, \mu) = \begin{cases} \Omega(v, 0) + (\mu \bmod \text{pgcd}(v)) & \text{si } v \text{ est rationnel} \\ \Omega(v, 0) & \text{si } v \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

Etant donnée la dépendance affine par morceaux au décalage μ , on peut se restreindre à l'étude de $\Omega(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega(v, 0)$.

3.2 Voisinage utile

3.2.1 Utilité et inutilité

Dans le cas du pas de cavalier, nous avons pu constater que certains vecteurs ne servaient pas à la connexité. Généralement, même pour de grands voisinages \mathcal{V} , lorsque le vecteur v est fixé, il est rare que l'on utilise tous les sauts $u \in \mathcal{V}$ autorisés pour montrer la connexité. Par exemple, le voisinage par sommets en dimension d compte $3^d - 1$ vecteurs mais le nombre de vecteurs utilisés semble en pratique être en $O(d)$. Nous introduisons dans cette partie la notion de vecteur utile ou inutile, ainsi que la notion de voisinage utile. Nous montrons notamment que l'utilité permet, entre autres :

- de réduire la taille des voisinages considérés ;
- de se ramener au cas bien connu de la connexité par faces, si le voisinage utile est suffisamment petit ;
- de donner des bornes optimales sur l'épaisseur de connexité, analogues aux bornes obtenues par la connexité par faces ;

On fixe un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ pour toute cette partie.

Définition 3.2.1. Vecteur inutile Soit \mathcal{V} un voisinage. On dit qu'une paire de vecteurs $\{-u, u\}$ de \mathcal{V} est inutile ssi, pour $u' = u$ ou $u' = -u$, il existe $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{V} \setminus \{-u, u\}$ (les u_i ne sont pas forcément distincts) tels que :

1. $u' = \sum_{i=1}^k u_i$;
2. $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, 0 \leq \sum_{i=1}^j \langle u_i, v \rangle \leq \langle u', v \rangle$.

Les vecteurs de voisinage u fonctionnant par paire $\{-u, u\}$, on dit par abus que u est inutile ssi la paire $\{-u, u\}$ est inutile. Enfin, un vecteur est dit utile ssi il n'est pas inutile.

Une représentation de la propriété d'inutilité est disponible en Figure 3.5. Le vecteur rouge est exprimable comme combinaison des vecteurs verts, en respectant des contraintes de produit scalaire tout au long du chemin. A gauche, on s'intéresse au vecteur $v = (-1, 4)$ pour la connexité par sommets et au saut e_2 . Si ce saut est possible dans la droite, il peut toutefois être décomposé en 2 sauts $e_2 = (e_2 + e_1) - e_1$ avec des produits scalaires plus petits. Donc le saut e_2 est inutile. A droite, on s'intéresse au vecteur $v = (1, 2)$ pour le pas de cavalier et au saut de cavalier $u = (1, 2)$.

On peut alors montrer l'inutilité de u grâce à la relation suivante (la première ligne représente la relation d'inutilité de u et la seconde calcule les produits scalaires au fur et à mesure du chemin) :

$$\begin{array}{cccccc} (1, 2) & = & (2, 1) & + & (1, -2) & + & (2, 1) & + & (-2, 1) & + & (-2, 1) \\ 5 & | & 4 & & 1 & & 5 & & 5 & & 5 \end{array}$$

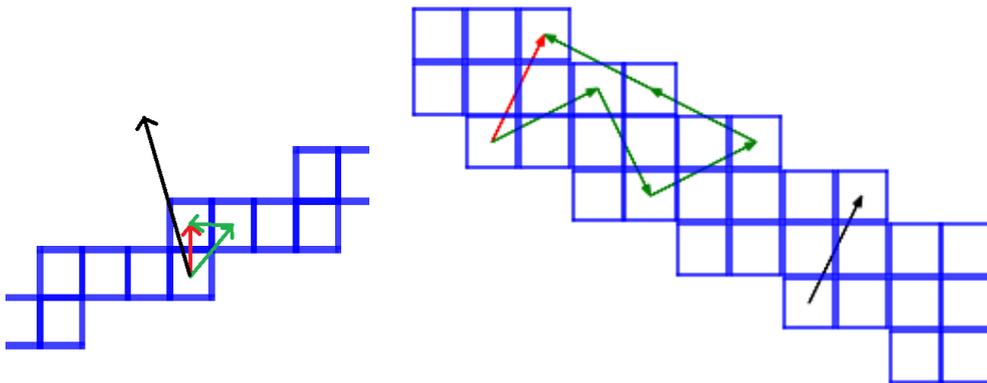


FIGURE 3.5 – Deux exemples de vecteurs inutiles (en rouge). A gauche en connexité par sommets, à droite en connexité par pas de cavalier. Le vecteur normal est représenté en noir.

On peut également exprimer la notion d'inutilité à l'aide de chemins. Si \mathcal{V} est un voisinage, $u \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}' \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{V} \setminus \{-u, u\}$, la définition de l'inutilité de u est équivalente à dire qu'il existe un \mathcal{V}' -chemin de 0 à u dans $\mathbb{P}(v, 0, \langle u, v \rangle)$ où $\mathbb{P}(v, \mu, \omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu \leq \omega\}$. Notons au passage que la notion d'utilité dépend du vecteur v considéré. Pour la connexité par sommets en dimension 2, les vecteurs inutiles dépendent ainsi de l'octant dans lequel se trouve v . Montrons maintenant que les vecteurs inutiles portent bien leur nom.

Proposition 3.2.2. *Soit \mathcal{V} un voisinage et $u \in \mathcal{V}$ un vecteur inutile. Alors $\forall \mu, \omega, \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est \mathcal{V} -connexe ssi il est \mathcal{V}' -connexe, où $\mathcal{V}' \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{V} \setminus \{-u, u\}$.*

Démonstration. L'implication \Leftarrow est triviale car $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$. Pour \Rightarrow , considérons $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Il existe un \mathcal{V} -chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Reste à trouver un \mathcal{V}' -chemin. Par récurrence immédiate sur la longueur du chemin, il suffit de montrer le résultat pour le cas $x \leftrightarrow_{\mathcal{V}} y$. Les autres cas étant triviaux, il suffit de montrer le résultat lorsque $y - x \in \{-u, u\}$. Enfin, quitte à échanger x et y , on peut supposer $y = x + u$. Comme u est inutile, il existe $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{V}'$ tels que :

1. $u = \sum_{i=1}^k u_i$.
2. $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, 0 \leq \sum_{i=1}^j \langle u_i, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.

On pose alors, pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket, x_j = x + \sum_{i=1}^j u_i$. Ainsi :

- $x = x_0$.
- $y = x_k$ par 1)
- $\forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, x_j \leftrightarrow_{\mathcal{V}'} x_{j+1}$ car $u_{j+1} \in \mathcal{V}'$
- $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu \leq \langle x_j, v \rangle + \mu \leq \langle y, v \rangle + \mu < \omega$ par 2)

On a ainsi trouvé un \mathcal{V}' -chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. Donc $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est \mathcal{V}' -connexe. \square

Corollaire 3.2.3. *Soit \mathcal{V} un voisinage et $u \in \mathcal{V}$ un vecteur inutile. On pose $\mathcal{V}' \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{V} \setminus \{-u, u\}$. Alors $\Omega_{\mathcal{V}}(v) = \Omega_{\mathcal{V}'}(v)$.*

La relation $\Omega_{\mathcal{V}}(v) = \Omega_{\mathcal{V}'}(v)$ nous laisse à penser qu'un vecteur u est inutile ssi $\Omega_{\mathcal{V}}(v) = \Omega_{\mathcal{V}'}(v)$. L'implication directe vient d'être prouvée mais la réciproque est malheureusement

fausse. Lorsque $\Omega_{\mathcal{V}}(v) = \Omega_{\mathcal{V}'}(v)$, on parle alors de vecteur inutile à l'épaisseur de connexité. Considérons par exemple les voisinages $\mathcal{V} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \pm\{e_1, e_2, e_3, u\}$ et $\mathcal{V}' \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \pm\{e_1, e_2, e_3\}$ en dimension 3 où $u \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (-1, -1, 2)$, avec le vecteur $v \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (-15, 16, 9)$. On a $\Omega_{\mathcal{V}}(v) = 21 = \Omega_{\mathcal{V}'}(v)$. Pourtant, le vecteur u n'est pas inutile. Notons toutefois que la notion d'inutilit\u00e9 \u00e0 l'\u00e9paisseur de connexit\u00e9 est extr\u00eamement glissante et peut pousser \u00e0 de fausses id\u00e9es. Nous ne l'utilisons donc pas dans ce manuscrit.

D\u00e9finition 3.2.4. *Voisinage utile* Un voisinage \mathcal{V} est dit utile ssi tous ses vecteurs sont utiles.

Pour le voisinage par sommets en dimension 2, le voisinage utile est constitu\u00e9 des 2×2 vecteurs qui ont le plus petit produit scalaire en valeur absolue. Pour le voisinage par pas de cavalier, le voisinage utile est constitu\u00e9 des 2×3 vecteurs qui ont le plus petit produit scalaire en valeur absolue. Par exemple, pour un vecteur $v = (a, b)$ tel que $0 \leq a \leq b$, le vecteur $\pm(1, 2)$ est inutile et les 3 vecteurs restants sont utiles. Consid\u00e9rer un sous-voisinage permet parfois de r\u00e9duire drastiquement le nombre de vecteurs dans le voisinage. Ainsi, pour le voisinage par sommets en dimension 4, le voisinage \mathcal{V} est de taille 80 mais tout vecteur admet un voisinage utile de taille 8.

Le calcul d'un sous-voisinage utile de \mathcal{V} n'est toutefois pas toujours imm\u00e9diat dans le cas g\u00e9n\u00e9ral car il s'agit d'un probl\u00e8me d'accessibilit\u00e9 dans un graphe infini. Notamment, d\u00e9terminer les zones de l'espace o\u00f9 un vecteur est utile peut \u00eatre tr\u00e8s compliqu\u00e9. Les zones en question ne sont pas toujours de gentils polytopes et peuvent m\u00eame parfois rev\u00eatir une structure complexe (voir Figure 3.6). Un algorithme d\u00e9cidant l'utilit\u00e9 d'un vecteur dans le cas rationnel est propos\u00e9 dans une section ult\u00e9rieure sur l'algorithme de Y. G\u00e9rard. Une fois connue une m\u00e9thode pour d\u00e9cider l'utilit\u00e9 d'un vecteur, on peut alors simplement retirer les vecteurs inutiles un \u00e0 un jusqu'\u00e0 obtenir un sous-voisinage utile.

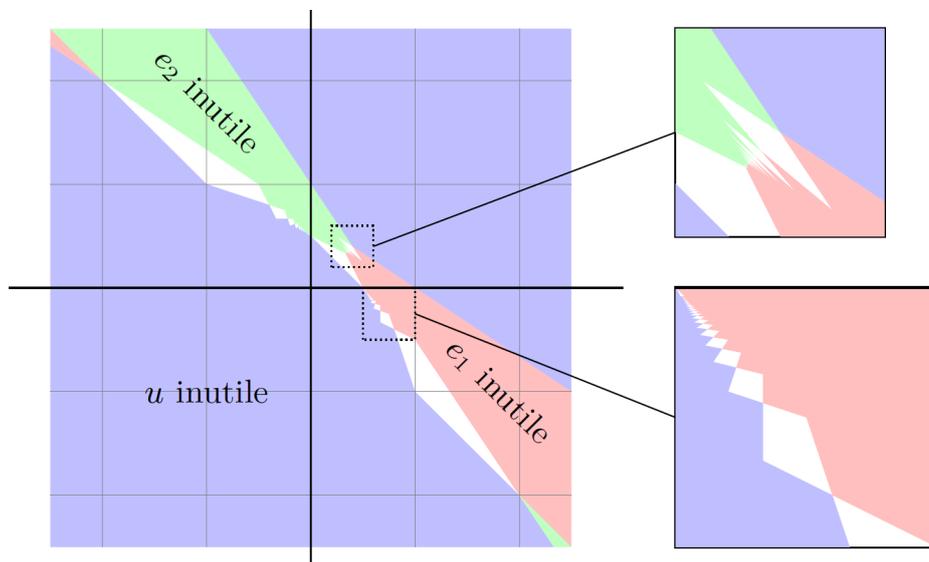


FIGURE 3.6 – Un exemple de forme de zone o\u00f9 un vecteur u est inutile. On consid\u00e8re le voisinage $\mathcal{V} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm u\}$ o\u00f9 $u \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (-1, -1, 2)$ en dimension 3. Le point de coordonn\u00e9e (x, y) sur la Figure symbolise le vecteur $(x, y, 1 - x - y)$. Les zones rouges/vertes/bleues correspondent respectivement aux zones o\u00f9 $e_1/e_2/u$ est inutile. Dans les zones blanches, les 4 vecteurs sont utiles. Notons que e_3 n'est jamais inutile.

Remarquons au passage qu'il n'y a pas unicit\u00e9 d'un sous-voisinage utile pour v . Consid\u00e9rons par exemple le voisinage \mathcal{V} de la connexit\u00e9 par sommets en 2D et $v = (1, 0)$. Un sous-voisinage

utile de v peut être $\{\pm e_2, \pm e_1\}$ ou $\{\pm e_2, \pm(e_2 + e_1)\}$ ou encore $\{\pm e_2, \pm(e_2 - e_1)\}$.

Même la taille d'un tel sous-voisinage n'est pas unique. Prenons par exemple le vecteur $v = (1, 2)$ et le voisinage $\mathcal{V} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\pm e_1, \pm e_2, \pm u_1, \pm u_2\}$ où $u_1 \stackrel{\text{déf}}{=} (-4, 3)$ et $u_2 \stackrel{\text{déf}}{=} (-2, 2)$. Ainsi, $\langle e_1, v \rangle = 1$ et e_2, u_1, u_2 ont un produit scalaire 2 avec v .

D'une part :

- $u_1 = e_2 - e_1 - e_1 + e_2 - e_1 - e_1 + e_2$ donc u_1 est inutile ;
- $u_2 = e_2 - e_1 - e_1 + e_2$ donc u_2 est inutile ;
- (e_1, e_2) est libre.

Donc $\{\pm e_1, \pm e_2\}$ est un sous-voisinage utile de \mathcal{V} .

D'autre part :

- $e_2 = u_2 - u_1 + e_1 + e_1$ donc e_2 est inutile ;
- (e_1, u_1, u_2) est génératrice minimale, au sens où retirer un vecteur de cette famille empêche d'engendrer \mathbb{Z}^2 en tant que groupe. En effet, (e_1, u_1) (resp. (e_1, u_2)) engendre des vecteurs dont la deuxième coordonnée est toujours un multiple de 3 (resp. 2). De plus, (u_1, u_2) engendre des vecteurs dont la première composante est toujours paire.

Donc $\{\pm e_1, \pm u_1, \pm u_2\}$ est un sous-voisinage utile de \mathcal{V} . On a ainsi trouvé 2 sous-voisinages utiles de \mathcal{V} , l'un de taille 2 et l'autre de taille 3.

Malgré ces contre-exemples, nous obtenons toutefois deux résultats d'unicité. Le premier concerne le cas totalement irrationnel où le voisinage utile est unique. Les contre-exemples construits ci-dessus s'appuient en effet sur l'égalité de certains produits scalaires, cas qui n'est pas possible lorsque v est totalement irrationnel. Le second porte sur l'unicité de la norme de voisinage utile (définie plus loin), quantité qui ne dépend pas du sous-voisinage utile choisi et qui apparaît dans les bornes sur l'épaisseur de connexité.

Lemme 3.2.5. *Soient $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ deux sous-voisinages utiles d'un voisinage \mathcal{V} . Soient $u \in \mathcal{U}_1$ tel que $\langle u, v \rangle \geq 0$ et $\mathcal{U}'_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \{u' \in \mathcal{U}_2 \mid |\langle u', v \rangle| \leq \langle u, v \rangle\}$. Alors il existe un \mathcal{U}'_2 -chemin de 0 à u dans $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \langle u, v \rangle)$.*

Démonstration. Comme $u \in \mathcal{V}$ et comme \mathcal{U}_2 est un sous-voisinage utile de v , il existe un \mathcal{U}_2 -chemin de 0 à u dans $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \langle u, v \rangle)$. Notons $u'_1 \dots u'_k \in \mathcal{U}_2$ les vecteurs de voisinage de ce chemin.

Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Alors $0 \leq \sum_{i=1}^{j-1} \langle u'_i, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$ et $0 \leq \sum_{i=1}^j \langle u'_i, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$. Ainsi, $|\langle u_j, v \rangle| =$

$$\left| \sum_{i=1}^j \langle u'_i, v \rangle - \sum_{i=1}^{j-1} \langle u'_i, v \rangle \right| \leq \langle u, v \rangle. \text{ Donc } u_j \in \mathcal{U}'_2. \text{ Donc le } \mathcal{U}_2\text{-chemin considéré est un } \mathcal{U}'_2\text{-chemin.}$$

□

Proposition 3.2.6. *Soit v un vecteur totalement irrationnel et \mathcal{V} un voisinage. Alors il existe une unique sous-voisinage utile de v dans \mathcal{V} .*

Démonstration. Nous avons déjà exposé une méthode de calcul (modulo un oracle décidant si un vecteur est utile) pour déterminer un sous-voisinage utile, d'où l'existence. Pour l'unicité, prenons \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 des sous-voisinages utiles de v et supposons par l'absurde $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$. Remarquons alors que, dans le cas totalement irrationnel, $u \in \mathbb{Z}^d \mapsto \langle u, v \rangle$ est injective. La famille $(\langle u, v \rangle)_{u \in \mathcal{V}}$ est donc muni d'un ordre total strict. En notant Δ la différence symétrique, comme $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, on a $\mathcal{U}_1 \Delta \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$. Prenons $u \in \mathcal{U}_1 \Delta \mathcal{U}_2$ tel que $\langle u, v \rangle = \min_{u' \in \mathcal{U}_1 \Delta \mathcal{U}_2} |\langle u', v \rangle|$. Sans perte de généralité, on peut supposer $u \in \mathcal{U}_1$. Dès lors, $u \notin \mathcal{U}_2$. Comme \mathcal{U}_2 est utile, par le lemme 3.2.5, il existe un \mathcal{U}'_2 -chemin de 0 à u dans $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \langle u, v \rangle)$ où $\mathcal{U}'_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \{u' \in \mathcal{U}_2 \mid |\langle u', v \rangle| \leq \langle u, v \rangle\}$. Soit $u' \in \mathcal{U}'_2$. Comme $u \notin \mathcal{U}_2$ et \mathcal{V} est muni d'un ordre strict, $|\langle u', v \rangle| < \langle u, v \rangle$. Par minimalité de u , on en

déduit donc que $u' \notin \mathcal{U}_1 \Delta \mathcal{U}_2$. Comme $u' \in \mathcal{U}_2$, $u' \in \mathcal{U}_1$. Donc $\mathcal{U}'_2 \subset \mathcal{U}_1 \setminus \{-u, u\}$ et il existe un $(\mathcal{U}_1 \setminus \{-u, u\})$ -chemin de 0 à u dans $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \langle u, v \rangle)$. Donc u est inutile dans \mathcal{U}_1 ce qui contredit l'utilité de u . On a ainsi unicité du sous-voisinage utile. \square

Définition 3.1.3 (Norme de voisinage) : soit \mathcal{V} un voisinage et $v \in \mathbb{R}^d$ non nul. On pose $\mathcal{V}^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{u \in \mathcal{V} \mid \langle u, v \rangle > 0\}$. On définit alors $\lambda_{\mathcal{V}}(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \min_{u \in \mathcal{V}^+} \langle u, v \rangle$ et $\|v\|_{\mathcal{V}} \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{u \in \mathcal{V}} |\langle u, v \rangle|$.

Proposition 3.2.7. Soient $v \in \mathbb{R}^d$ non nul, \mathcal{V} un voisinage et $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ des sous-voisinages utiles de \mathcal{V} . Alors $\|v\|_{\mathcal{U}_1} = \|v\|_{\mathcal{U}_2}$.

Démonstration. Supposons par l'absurde $\|v\|_{\mathcal{U}_1} \neq \|v\|_{\mathcal{U}_2}$. Sans perte de généralité, $\|v\|_{\mathcal{U}_2} < \|v\|_{\mathcal{U}_1}$. Considérons un $u \in \mathcal{U}_1$ tel que $\langle u, v \rangle = \|v\|_{\mathcal{U}_1}$. Soit $u' \in \mathcal{U}_2$ tel que $\langle u', v \rangle \geq 0$. Comme \mathcal{U}_1 est utile, par le lemme 3.2.5, il existe un \mathcal{U}'_1 -chemin de 0 à u' dans $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \langle u', v \rangle)$ où $\mathcal{U}'_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{u_1 \in \mathcal{U}_1 \mid |\langle u_1, v \rangle| \leq \langle u', v \rangle\}$. Remarquons que $\mathcal{U}'_1 \subset \mathcal{U}_1 \setminus \{-u, u\}$. Ainsi, pour tout $u' \in \mathcal{U}_2$, il existe un $(\mathcal{U}_1 \setminus \{-u, u\})$ -chemin de 0 à u' dans $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \langle u', v \rangle)$. Enfin, comme \mathcal{U}_2 est utile, il existe un \mathcal{U}_2 -chemin de 0 à u dans $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \langle u, v \rangle)$. Chaque vecteur de ce \mathcal{U}_2 -chemin pouvant être décomposé en un $(\mathcal{U}_1 \setminus \{-u, u\})$ -chemin, on en déduit qu'il existe un $(\mathcal{U}_1 \setminus \{-u, u\})$ -chemin de 0 à u dans $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \langle u, v \rangle)$. Donc u est inutile dans \mathcal{U}_1 ce qui est contradictoire. Ainsi, $\|v\|_{\mathcal{U}_1} = \|v\|_{\mathcal{U}_2}$. \square

Définition 3.2.8 (Norme de voisinage utile). Soit \mathcal{V} un voisinage. On appelle norme de voisinage utile de \mathcal{V} la fonction $\|\cdot\|_{\mathcal{V}, ut}$ telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ non nul, $\|v\|_{\mathcal{V}, ut} \stackrel{\text{déf}}{=} \|v\|_{\mathcal{U}}$ où \mathcal{U} est un sous-voisinage utile de v pour \mathcal{V} .

Remarquons que la définition a un sens par unicité de la norme d'un sous-voisinage utile de \mathcal{V} pour v . Toutefois, il est important de noter que $\|\cdot\|_{\mathcal{V}, ut}$ n'est pas une norme. Considérons en effet le voisinage du pas de cavalier $\mathcal{V}_c \stackrel{\text{déf}}{=} \{\pm(1, 2), \pm(1, -2), \pm(2, 1), \pm(2, -1)\}$ et les vecteurs $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (2, 1)$. Le tableau suivant récapitule les produits scalaires obtenus en valeur absolue pour chaque vecteur de voisinage. En ligne $\pm u$ et en colonne v , on donne ainsi $|\langle u, v \rangle|$. La dernière colonne donne la norme de voisinage utile : on remarque alors ici que $\|v_1\|_{\mathcal{V}, ut} + \|v_2\|_{\mathcal{V}, ut} < \|v_1 + v_2\|_{\mathcal{V}, ut}$ ce qui contredit l'inégalité triangulaire.

	v_1	v_2	$v_1 + v_2$
$\pm(1, 2)$	5	4	9
$\pm(1, -2)$	3	0	3
$\pm(2, 1)$	4	5	9
$\pm(2, -1)$	0	3	3
$\ \cdot\ _{\mathcal{V}, ut}$	4	4	9

3.2.2 Un cas de réduction à la connexité par faces

Un cas facile d'étude de la connexité est celui où le vecteur v admet un voisinage utile de taille $2d$, on peut alors se ramener au cas de la connexité par faces.

Théorème 3.2.9. Soit $\mathcal{V} = \{\pm u_i\}_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$ un voisinage de taille $2d$. On considère

$$\varphi \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ w & \mapsto & (\langle u_i, w \rangle)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \end{cases}$$

Alors $\forall \omega, \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est \mathcal{V} -connexe ssi $\mathbb{P}(\varphi(v), 0, \omega)$ est connexe par faces.

Remarquons que la véracité du théorème ne change pas selon que l'on choisit u_i ou $-u_i$ dans la définition de φ , la connexité par faces étant invariante par changement de signe des coordonnées.

Démonstration. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+$. Comme $\mathcal{V} \stackrel{\text{déf}}{=} \{u_1, \dots, u_d\}$ est de taille d et engendre \mathbb{Z}^d , \mathcal{V}' est une base de \mathbb{Z}^d donc $\varphi \in GL_d(\mathbb{Z})$. On pose $f \stackrel{\text{déf}}{=} {}^t\varphi^{-1}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\langle f(x), \varphi(v) \rangle = \langle {}^t\varphi^{-1}(x), \varphi(v) \rangle = \langle x, v \rangle$. Donc $x \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ ssi $f(x) \in \mathbb{P}(\varphi(v), 0, \omega)$. Donc f est une bijection de $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ dans $\mathbb{P}(\varphi(v), 0, \omega)$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$, x et y sont \mathcal{V} -voisins ssi $f(x)$ et $f(y)$ sont $(d-1)$ -voisins. Cela provient du fait que ${}^t\varphi(e_i) = u_i$ donc $f(u_i) = e_i$. \square

La procédure est donc la suivante. Etant donné un vecteur v et un voisinage \mathcal{V} , on commence par calculer un voisinage utile \mathcal{U} pour v . Si \mathcal{U} est de taille $2d$ alors on se ramène à un problème de connexité par faces qui est déjà résolu. Cette méthode permet de traiter quelques voisinages :

- la $(d-2)$ -connexité en dimension d
- les k -connexités en dimensions 3 et 4

Toutefois, cette méthode ne fonctionne que dans certains cas particuliers, même lorsque l'on s'intéresse aux connexités par facettes. Considérons par exemple la 2-connexité en dimension 5 et $v = (4, 6, 12, 14, 23)$. Le voisinage utile de v est alors $\{\pm u_i\}_{i \in [1,6]}$ où $u_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, -1, 1, 0)$, $u_3 = (-1, -1, 1, 0, 0)$, $u_4 = (1, 0, 1, -1, 0)$, $u_5 = (0, -1, 0, -1, 1)$ et $u_6 = (0, 0, 1, 1, -1)$. \mathcal{V} est de taille 2×6 . On ne peut donc pas conclure en se ramenant à la connexité par faces.

Le voisinage du pas de cavalier \mathcal{V}_c est encore plus caractéristique des problèmes qui peuvent se poser en connexité générale. En effet, 2 vecteurs de \mathcal{V}_c n'engendrent jamais \mathbb{Z}^2 . Il est donc nécessaire d'avoir au moins 3 déplacements autorisés pour engendrer \mathbb{Z}^2 . Le dernier vecteur de voisinage étant de plus inutile, les voisinages utiles d'un vecteur pour le pas de cavalier sont toujours de taille 2×3 . Le pas de cavalier ne peut donc jamais se ramener à la connexité par faces par la méthode exposée.

3.2.3 Des bornes sur Ω

Nous proposons ici de montrer quelques bornes sur Ω , analogues à celles connues pour la connexité par faces. Rappelons que $\|v\|_{\mathcal{V}} = \max_{u \in \mathcal{V}} |\langle u, v \rangle|$ et que $\lambda_{\mathcal{V}}(v) = \min_{u \in \mathcal{V}, \langle u, v \rangle > 0} \langle u, v \rangle$. Il existe alors $u_0 \in \mathcal{V}$ tel que $\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda_{\mathcal{V}}(v) = \langle u_0, v \rangle$.

Proposition 3.2.10. *Soit $\omega \geq \|v\|_{\mathcal{V}} + \lambda$. Alors $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est \mathcal{V} -connexe.*

Idée de la preuve : Soient $x, y \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Comme \mathcal{V} est générateur, il existe un chemin u_1, \dots, u_n de x à y dans \mathbb{Z}^d . Pour ajouter u_i (voir Figure 3.7), si cela mène à sortir de $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$, on se ramène via des sauts de u_0 à une fibre de $\mathbb{P}(v, 0, \lambda)$. Le saut u_i devient alors autorisé. Une fois tous les sauts u_i effectués, on se ramène à y via u_0 .

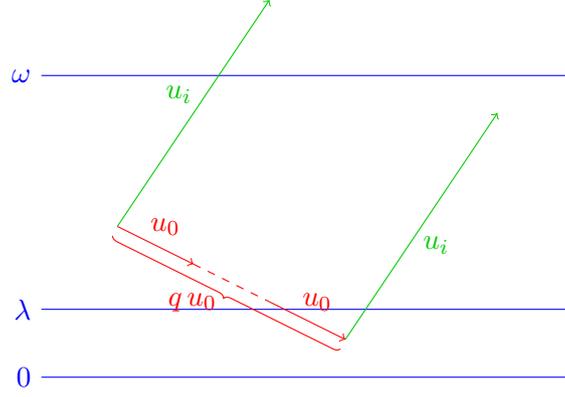


FIGURE 3.7 – Illustration de la preuve de la borne supérieure. Pour effectuer le déplacement u_i , on se ramène dans la strate $[0, \lambda[$ grâce au vecteur u_0 .

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Comme \mathcal{V} engendre l'espace \mathbb{Z}^d , il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{V}$ tels que $y - x = \sum_{i=1}^n u_i$. Quitte à réordonner les u_i , on peut supposer qu'il existe $M(y - x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_i \in \{-u_0, u_0\} \Leftrightarrow i > M(y - x)$$

Autrement dit, on place les vecteurs u_0 et $-u_0$ à la fin de la somme. Montrons que x et y sont \mathcal{V} -reliés dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ par récurrence sur $M(y - x)$. Si $M(y - x) = 0$ alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $y - x = qu_0$. Quitte à échanger les rôles de x et y , on peut supposer $q \in \mathbb{N}$. On pose alors, pour $j \in \llbracket 0, q \rrbracket$, $x_j \stackrel{\text{déf}}{=} x + ju_0$. Dès lors, les x_j forment un \mathcal{V} -chemin de x à y . De plus, $\forall j \in \llbracket 0, q \rrbracket, 0 \leq \langle x, v \rangle \leq \langle x_j, v \rangle \leq \langle y, v \rangle < \omega$ donc ce chemin est bien dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$.

Si $M(y - x) > 0$ alors $u_1 \notin \{-u_0, u_0\}$. Quitte à échanger x et y , on peut supposer $\langle v, u_1 \rangle \geq 0$. Pour effectuer le déplacement u_1 , on commence par aller de x à un vecteur $x' \in \mathbb{P}(v, 0, \lambda)$ en se déplaçant avec u_0 . On montre ensuite qu'il est possible d'aller de x' à $x' + u_1$ et de conclure par hypothèse de récurrence.

Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\langle x, v \rangle - q\lambda \in [0, \lambda[$. Par conséquent, en posant $x' \stackrel{\text{déf}}{=} x - qu_0$, $x' \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ (car $\lambda \leq \omega$) et est \mathcal{V} -relié à x dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. De plus, en posant $x'' \stackrel{\text{déf}}{=} x' + u_1$, on a $\langle x'', v \rangle = \langle x', v \rangle + \langle u_1, v \rangle$. Comme

$$0 \leq \langle x', v \rangle \leq \langle x', v \rangle + \langle u_1, v \rangle < \lambda + \langle u_1, v \rangle \leq \lambda + \|v\|_{\mathcal{V}} \leq \omega$$

on a $x'' \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. De plus, x'' est \mathcal{V} -relié à x' dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$, donc à x par transitivité. Or $y - x'' = \sum_{i=2}^n u_i + qu_0$ donc $M(y - x'') = M(y - x) - 1$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que x'' et y sont reliés dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. C'est donc également le cas pour x et y . Ainsi, $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est \mathcal{V} -connexe. \square

On déduit de ce résultat que $\Omega(v) \leq \|v\|_{\mathcal{V}} + \lambda_{\mathcal{V}}(v)$. L'hypothèse d'utilité de \mathcal{V} n'est pas nécessaire pour cette preuve de la borne supérieure. La présence de vecteurs inutiles ne fait qu'accroître (inutilement) la norme $\|v\|_{\mathcal{V}}$. Se restreindre à un voisinage utile permet donc d'améliorer la borne supérieure sur $\Omega(v)$.

Proposition 3.2.11. *Soit $u \in \mathcal{V}$ tel que $\Omega(v) < \langle u, v \rangle$. On suppose de plus que v n'est pas semi-pathologique. Alors u est inutile.*

Démonstration. On pose $\omega \stackrel{\text{déf}}{=} \langle u, v \rangle$. Comme v n'est pas semi-pathologique, $\lambda \leq \Omega(v) < \omega$. Comme $\omega = \langle u, v \rangle > 0$, $0 \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ et $u \notin \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Pour montrer l'inutilité de u , on souhaite construire un \mathcal{V}' -chemin (avec $\mathcal{V}' \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{V} \setminus \{-u, u\}$) de 0 à u dans $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \langle u, v \rangle)$. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\langle u, v \rangle - q\lambda \in [0, \lambda[$. On pose alors $u' \stackrel{\text{déf}}{=} u - qu_0$. Comme v est non pathologique, $\lambda \leq \Omega(v) < \omega$, d'où $u' \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. On utilise maintenant la \mathcal{V} -connexité de $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ pour créer un \mathcal{V} -chemin de 0 à u' dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$, composé de vecteurs $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{V}$.

Montrons que la contrainte $\omega = \langle u, v \rangle$ implique que les u_i sont dans \mathcal{V}' . Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. En posant $x \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{i-1} u_j$ et $y \stackrel{\text{déf}}{=} x + u_i$, on remarque que $x, y \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Donc $0 \leq \langle x, v \rangle < \omega$ et $0 \leq \langle x, v \rangle + \langle u_i, v \rangle < \omega$. Par conséquent, $|\langle u_i, v \rangle| < \omega = \langle u, v \rangle$, ce qui implique $u_i \in \mathcal{V}'$.

Montrons enfin que u est inutile, en reprenant les points 1) et 2) de la définition d'inutilité 3.2.1. Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $u_i \in \mathcal{V}' \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{V} \setminus \{-u, u\}$.

$$\text{— 1) } u = u' + qu_0 = \sum_{i=1}^k u_i + qu_0.$$

$$\text{— 2a) } \text{Pour } j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \text{ comme } \sum_{i=1}^j u_i \in \mathbb{P}(v, 0, \omega), 0 \leq \sum_{i=1}^j \langle u_i, v \rangle < \omega = \langle u, v \rangle.$$

$$\text{— 2b) } \text{Pour } j \in \llbracket 0, q \rrbracket, 0 \leq \sum_{i=1}^k \langle u_i, v \rangle + j \langle u_0, v \rangle = \langle u', v \rangle + j \langle u_0, v \rangle \leq \langle u', v \rangle + q \langle u_0, v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Donc u est inutile. □

De cette proposition, on déduit que, si \mathcal{V} est utile alors $\Omega(v) \geq \langle u, v \rangle$. Par passage au max, $\Omega(v) \geq \|v\|_{\mathcal{V}}$. On a ainsi pu démontrer les théorèmes suivants.

Théorème 3.2.12. *Soit \mathcal{V} un voisinage utile et v un vecteur non semi-pathologique. Alors*

$$\|v\|_{\mathcal{V}} \leq \Omega(v) \leq \|v\|_{\mathcal{V}} + \lambda_{\mathcal{V}}(v)$$

Corollaire 3.2.13. *Soit \mathcal{V} un voisinage et v un vecteur non semi-pathologique. Alors*

$$\|v\|_{\mathcal{V}, ut} \leq \Omega(v) \leq \|v\|_{\mathcal{V}, ut} + \lambda_{\mathcal{V}}(v)$$

On retrouve ainsi des bornes similaires à celles obtenues pour la connexité par faces. Ces bornes sont au passage optimales, comme le montre le cas de connexité par faces.

3.2.4 D'autres bornes

Même si les bornes obtenues précédemment sont assez satisfaisantes, on observe expérimentalement, dans les zones où les voisinages utiles sont de taille $> 2d$, que l'épaisseur est souvent proche de $2\lambda_{\mathcal{V}}(v)$. Cette observation nous a poussés à trouver une borne faisant apparaître la quantité $2\lambda_{\mathcal{V}}(v)$ qui sera par la suite utile dans les preuves. L'idée est que l'épaisseur $2\lambda_{\mathcal{V}}(v)$ correspond au cas où aucun point du plan n'est isolé.

Proposition 3.2.14. *Soient v un vecteur irrationnel et \mathcal{V} un voisinage. Soit $\omega < 2\lambda_{\mathcal{V}}(v)$. Alors $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ contient une fibre isolée pour \mathcal{V} (au sens où cette fibre n'est reliée à aucune autre fibre du plan).*

Démonstration. On considère $\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda_{\mathcal{V}}(v)$ et on pose $I \stackrel{\text{déf}}{=}]\omega - \lambda, \lambda[$ qui est un ouvert non vide car $\omega < 2\lambda$. Comme v est irrationnel, par densité des $(\langle x, v \rangle)_{x \in \mathbb{Z}^d}$, il existe $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle x, v \rangle \in I$. Ainsi, $x \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Montrons que tout point de la fibre de x n'est voisin d'aucun point d'une autre fibre. Soit $u \in \mathcal{V}$ tel que $\langle u, v \rangle > 0$.

- $\langle x + u, v \rangle = \langle x, v \rangle + \langle u, v \rangle > (\omega - \lambda) + \lambda = \omega$;
- $\langle x - u, v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle u, v \rangle < \lambda - \lambda = 0$.

Donc $x + u, x - u \notin \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Ainsi, la fibre de x est isolée dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. \square

Proposition 3.2.15. *Soient v un vecteur rationnel de pgcd 1 et \mathcal{V} un voisinage. Soit $\omega < 2\lambda_{\mathcal{V}}(v) - 1$. Alors $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ contient une fibre isolée pour \mathcal{V} .*

Démonstration. On considère $\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda_{\mathcal{V}}(v)$ et on regarde la fibre de niveau $\lambda - 1$. Elle est non vide par le théorème de Bézout. Soit x un point de cette fibre. $x \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Soit $u \in \mathcal{V}$ tel que $\langle u, v \rangle > 0$.

- $\langle x + u, v \rangle = \langle x, v \rangle + \langle u, v \rangle \geq (\lambda - 1) + \lambda = 2\lambda - 1 > \omega$;
- $\langle x - u, v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle u, v \rangle \leq (\lambda - 1) - \lambda = -1 < 0$.

Donc $x + u, x - u \notin \mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Ainsi, la fibre de x est isolée dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. \square

En dehors du cas semi-pathologique (où le plan $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ peut contenir une seule fibre non vide pour $\omega > \Omega(v)$), on obtient donc une autre borne inférieure sur Ω . Nous revenons sur la borne inférieure $2\lambda_{\mathcal{V}}(v) - \text{pgcd}(v)$ dans une partie consacrée à la taille k des composantes connexes de l'hyperplan. Cette borne inférieure est alors l'épaisseur à partir de laquelle toutes les composantes ont une taille au moins 2 dans l'hyperplan.

Théorème 3.2.16. *Soit v un vecteur non semi-pathologique et \mathcal{V} un voisinage. Alors*

$$\Omega(v) \geq 2\lambda_{\mathcal{V}}(v) - \text{pgcd}(v)$$

3.3 Algorithme de Yan Gérard

Dans son article [28] de 2002, Y. Gérard montre la décidabilité du problème de connexité des hyperplans rationnels pour un voisinage quelconque. Nous donnons ici une brève description de l'algorithme dans le cas qui nous intéresse. L'idée est de faire un parcours en largeur de $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ dont les fibres sont représentées par un graphe G . Lorsque l'on trouve x, y qui sont sur la même fibre, on ajoute $y - x \in v^\perp$ à un ensemble H qui est un générateur des vecteurs atteignables de v^\perp . On conclut à la connexité ssi toutes les fibres non vides sont atteintes par un élément de G et $\text{Vect}_{\mathbb{Z}}(H) = v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$.

L'algorithme de Y. Gérard nous a été très utile à plusieurs titres, notamment pour l'étude analytique qui est l'objet du chapitre 4. Une adaptation simple de l'algorithme nous permet notamment de décider, dans le cas où v est rationnel, de l'utilité d'un vecteur de voisinage pour v .

Algorithme : Algorithme de Yan Gérard [28]

Entrée : v un vecteur non nul, \mathcal{V} un voisinage, $\omega > 0$

Sortie : une description du graphe de la composante connexe de 0 et un booléen indiquant si $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est connexe ou non.

$G \leftarrow$ graphe vide ;

$li \leftarrow [0]$ (file des sommets à visiter) ;

$H \leftarrow \emptyset$ (générateur des vecteurs de v^\perp atteignables) ;

tant que $li \neq []$ **faire**

 Extraire le premier élément x de li ;

si il existe $y \in G$ tel que $y - x \in v^\perp$ (la fibre de x a déjà été visitée) **alors**

si $y - x$ est engendré par H **alors**

 | Ne rien faire (x est déjà compté dans la composante connexe de 0) ;

sinon

 | Ajouter $y - x$ à H ;

sinon

 | (la fibre de x est nouvelle) ;

 Ajouter x à G et le relier aux autres sommets selon la relation \mathcal{V} ;

pour $u \in \mathcal{V}$ **faire**

si $\langle x + u, v \rangle \in [0, \omega[$ **alors**

 | Ajouter $x + u$ à la fin de li

$b_1 \leftarrow |G| = \text{nombre de fibres dans } \mathbb{P}(v, 0, \omega)$;

$b_2 \leftarrow "H \text{ engendre } v^\perp \cap \mathbb{Z}^d"$;

Renvoyer $G, H, b_1 \wedge b_2$

La composante connexe de 0 est alors renvoyée sous la forme G, H où G est un ensemble de représentants des fibres atteignables et où H est un générateur des vecteurs de $v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ dans la composante connexe de 0. Ainsi, un vecteur $x \in \mathbb{Z}^d$ est dans la composante connexe de 0 ssi x peut s'écrire $y + h$ où $y \in G$ et h est dans le sous-groupe de \mathbb{Z}^d engendré par H .

Remarquons que cet algorithme, initialement écrit pour les vecteurs rationnels, termine uniquement pour ces vecteurs. Pour les vecteurs irrationnels, le nombre de fibres non vides est infini. Comme il s'agit d'un parcours en largeur, les ensembles G et H obtenus à la limite permettent de conclure à la connexité, mais ne sont pas calculables en temps fini.

Cet algorithme peut être facilement adapté pour décider si un vecteur u est ou non inutile pour v avec le voisinage \mathcal{V} . On définit pour cela $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle \leq \omega\}$. Dès lors, u est inutile ssi u est accessible depuis 0 dans $\overline{\mathbb{P}}(v, 0, \langle u, v \rangle)$ avec le voisinage $\mathcal{V} \setminus \{-u, u\}$. Etant donné le graphe G et l'ensemble H renvoyés par l'algorithme de Yan Gérard, u est inutile ssi la fibre de u apparaît dans G via un point x et si $u - x$ est engendré par H . On peut donc calculer un voisinage utile d'un vecteur dans le cas rationnel (le cas irrationnel demandant un passage à la limite dans l'algorithme).

Algorithme : Algorithme de Yan Gérard pour l'utilité

Entrée : v un vecteur non nul, \mathcal{V} un voisinage, $u \in \mathcal{V}$

Sortie : Le booléen « u est inutile »

$\omega \leftarrow \langle u, v \rangle$;

$\mathcal{V}' \leftarrow \mathcal{V} \setminus \{-u, u\}$;

$G, H \leftarrow$ représentation de la composante connexe de 0 renvoyée par l'algorithme de Y.

Gérard pour $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ et \mathcal{V}' ;

pour $x \in G$ **faire**

si $\langle x, v \rangle = \langle u, v \rangle$ **alors**

$h \leftarrow u - x$;

si h est dans le groupe engendré par H **alors**

 Renvoyer VRAI ;

Renvoyer FAUX

Théorème 3.3.1. *Le problème d'inutilité d'un vecteur est décidable dans le cas où v est rationnel. On peut donc calculer un voisinage utile d'un vecteur rationnel.*

3.4 Bilan et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étendu la notion de connexité par faces à des voisinages quelconques. La connexité générale couvre le cas usuel des connexités par facettes mais autorise également de très nombreux autres voisinages \mathcal{V} sans propriété topologique apparente. Nous avons notamment étendu le théorème d'existence de l'épaisseur de connexité $\Omega_{\mathcal{V}}(v, \mu)$: l'hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ n'est pas \mathcal{V} -connexe si $\omega < \Omega_{\mathcal{V}}(v, \mu)$ et l'est si $\omega > \Omega_{\mathcal{V}}(v, \mu)$. Quelques vecteurs rationnels, en nombre fini, résistent toutefois à ce théorème : on les appelle vecteurs pathologiques. Nous avons alors donné un critère simple pour décider si un vecteur est pathologique et décrit les différents comportements de la connexité en fonction de l'épaisseur ω .

Nous avons également généralisé un certain nombre de propriétés connues pour l'épaisseur de connexité par faces pour des voisinages quelconques. La dépendance au décalage ainsi que les bornes obtenues sont analogues à celles présentées dans le chapitre 2. Nous avons enfin introduit la notion de vecteur de voisinage utile ou inutile, qui permet de réduire la taille du voisinage étudié. Dans le cas où le voisinage utile obtenu est de taille $2d$, nous avons prouvé qu'il est possible de se ramener à la connexité par faces. Toutefois, de nombreux voisinages ne nous permettent pas de nous ramener à la connexité par faces et n'offrent donc pour le moment pas de méthode pour calculer Ω . Les vecteurs utiles peuvent être détectées dans le cas rationnel grâce à une adaptation de l'algorithme de Y. Gérard. Les zones de l'espace où un vecteur u est inutile restent toutefois difficiles à caractériser car peuvent être non élémentaires.

Si nous avons prouvé l'existence d'une épaisseur de connexité Ω pour tout voisinage, les résultats du chapitre 3 ne nous donnent pas un algorithme de calcul de Ω pour des voisinages généraux. Une fois un tel algorithme connu, reste encore à s'intéresser au cas critique $\omega = \Omega(v, \mu)$. L'espoir initial était de trouver un algorithme inspiré de celui pour la connexité par faces, permettant ainsi de trouver un nouveau système de numération pour étudier la connexité à l'épaisseur. Malheureusement, la combinatoire engendrée par les relations de liaisons dans \mathcal{V} ne nous a pas permis de trouver un tel algorithme. Nous avons donc laissé de côté la question de la connexité à l'épaisseur critique dans le cas général et nous sommes concentrés dans le chapitre 4 sur une étude analytique de Ω . Le chapitre 4 nous permet notamment d'exposer un algorithme de calcul de l'épaisseur de connexité pour tout voisinage.

4

Approche analytique du problème de la connexité

Dans le cadre des voisinages généraux, des relations de liaisons apparaissent entre les vecteurs de voisinage. Cette combinatoire complexe rend l'étude de la connexité difficile pour de nombreux voisinages, comme le pas de cavalier dans le plan ou la 2-connexité en dimension 5. Nous avons prouvé dans le chapitre précédent qu'il existait une épaisseur de connexité pour tout voisinage \mathcal{V} et pour tout vecteur v non pathologique.

Théorème 3.1.7 : soient \mathcal{V} un voisinage, v un vecteur non pathologique et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\Omega_{\mathcal{V}}(v, \mu) \in \mathbb{R}$ tel que :

- $\forall \omega < \Omega_{\mathcal{V}}(v, \mu)$, $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ n'est pas \mathcal{V} -connexe ;
- $\forall \omega > \Omega_{\mathcal{V}}(v, \mu)$, $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est \mathcal{V} -connexe.

Nous avons également prouvé que la dépendance de Ω en μ est simple et qu'il suffit donc de s'intéresser à $\Omega_{\mathcal{V}}(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega_{\mathcal{V}}(v, 0)$. Contrairement au cas de la connexité par faces, nous n'avons pas pu trouver d'algorithme de réduction général permettant de calculer $\Omega_{\mathcal{V}}$, comme l'algorithme totalement soustractif calcule l'épaisseur de connexité par faces. Nous avons donc choisi d'étudier $v \mapsto \Omega_{\mathcal{V}}(v)$ d'un point de vue analytique. Si cette fonction semble extrêmement irrégulière au premier abord, on observe graphiquement une structure sous-jacente continue et présentant des périodicités. Une partie importante du chapitre est consacrée à la preuve du théorème de continuité relative séquentielle qui explique la présence de cette structure continue.

Théorème 4.4.8 (continuité relative séquentielle) : soit \mathcal{V} un voisinage, v un vecteur non pathologique et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs convergeant vers v . Si $\forall n \in \mathbb{N}, v^\perp \cap \mathbb{Z}^d \subset v_n^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ alors $(\Omega_{\mathcal{V}}(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\Omega_{\mathcal{V}}(v)$.

Dans le cas où v est totalement irrationnel, la condition $\forall n \in \mathbb{N}, v^\perp \cap \mathbb{Z}^d \subset v_n^\perp \cap \mathbb{Z}^d$ est toujours vérifiée, ce qui permet de prouver que $\Omega_{\mathcal{V}}$ est continue en tout vecteur totalement irrationnel. Nous parlons ensuite des conséquences de ce théorème, grâce auquel nous pouvons notamment exposer un algorithme de calcul de $\Omega_{\mathcal{V}}$. Enfin, nous donnons des pistes de réflexion sur les liens entre algorithme de réduction et structure continue sous-jacente, en analysant le cas du pas de cavalier.

4.1 Quelques analyses graphiques

Afin de représenter plus facilement les fonctions Ω_v considérées, nous utilisons la propriété d'homogénéité de $\Omega : \forall \lambda > 0, \forall v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \Omega(\lambda v) = \lambda \Omega(v)$. On peut ainsi restreindre l'étude de Ω à la sphère unité pour une norme bien choisie. Nous avons fait le choix de projeter l'ensemble de définition de la fonction sur l'hyperplan affine $\sum_{i=1}^d v_i = 1$ ou $v_d = 1$. Nous perdons alors les points v vérifiant $\sum_{i=1}^d v_i = 0$ ou $v_d = 0$ que nous pouvons par ailleurs observer via d'autres projections.

Pour calculer le graphe de la fonction Ω , nous utilisons l'algorithme de Y. Gérard (voir [28] ou la partie consacrée dans le chapitre 3) pour échantillonner l'ensemble de départ avec des vecteurs rationnels, seuls vecteurs pour lesquels nous possédons un algorithme de calcul de l'épaisseur de connexité. Connaissant des bornes fines sur l'épaisseur de connexité et l'algorithme de Y. Gérard décidant de la connexité pour une épaisseur donnée, on procède par dichotomie. On trace alors le graphe obtenu à partir de l'échantillon. La Figure 4.1 donne l'exemple en 2D des graphes des fonctions $x \mapsto \Omega(x, 1)$ pour la connexité par faces et le pas de cavalier.

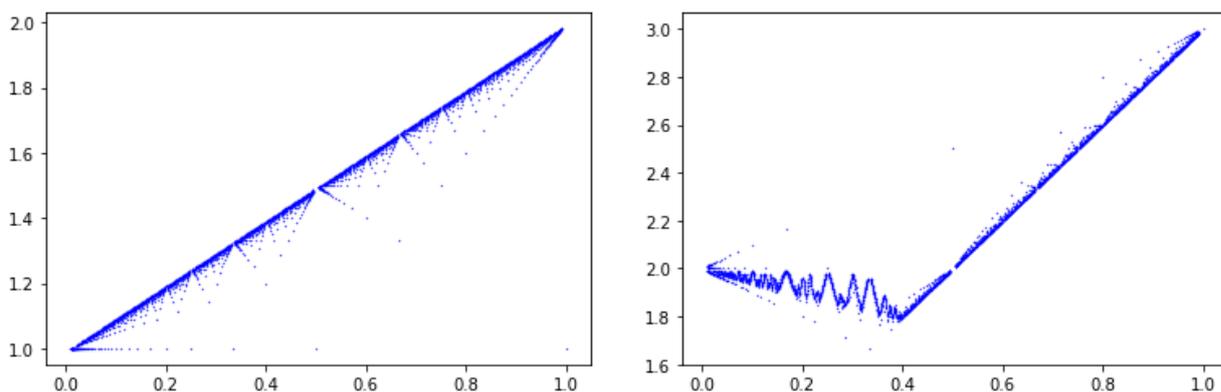


FIGURE 4.1 – Graphe de $x \mapsto \Omega(x, 1)$ pour le voisinage par faces et par pas de cavalier

On remarque sur les graphes de la Figure 4.1 bon nombre de discontinuités. Il est donc, à première vue, difficile de proposer une étude analytique de cette fonction. Toutefois, dans le cas de la connexité par faces en 2D, nous connaissons une expression explicite de $\Omega : \Omega((x, y)) = |x| + |y| - \text{pgcd}(x, y)$. Les discontinuités proviennent ainsi de la fonction pgcd , et peuvent être évitées en restreignant Ω aux vecteurs irrationnels. En effet, si x et y sont indépendants sur \mathbb{Q} alors $\Omega(x, y) = |x| + |y|$. De manière intuitive, les discontinuités semblent provenir de la composante arithmétique des vecteurs, représentée par des pgcd de combinaisons linéaires des coefficients. Pour les vecteurs totalement irrationnels, cette composante arithmétique est toujours nulle, ce qui explique la continuité de la fonction lorsqu'elle est restreinte aux vecteurs totalement irrationnels. On voit alors apparaître une fonction continue sous-jacente au graphe de Ω , comme représenté en Figure 4.2.

La « méthode » pour obtenir cette structure est assez artisanale. Pour certains voisinages comme celui de la connexité par faces, nous possédons un algorithme général et pouvons donc calculer l'épaisseur en chaque irrationnel. Dans le cas du pas de cavalier, nous ne possédons a priori pas de tels algorithmes. Il nous faut ainsi réussir à calculer la fonction visible sous le graphe de la fonction en n'ayant accès à sa valeur en aucun point. Pour estimer, en un vecteur entier v , la valeur de $\overline{\Omega}(v)$ de la fonction sous-jacente au graphe de Ω , on calcule les valeurs de Ω sur un

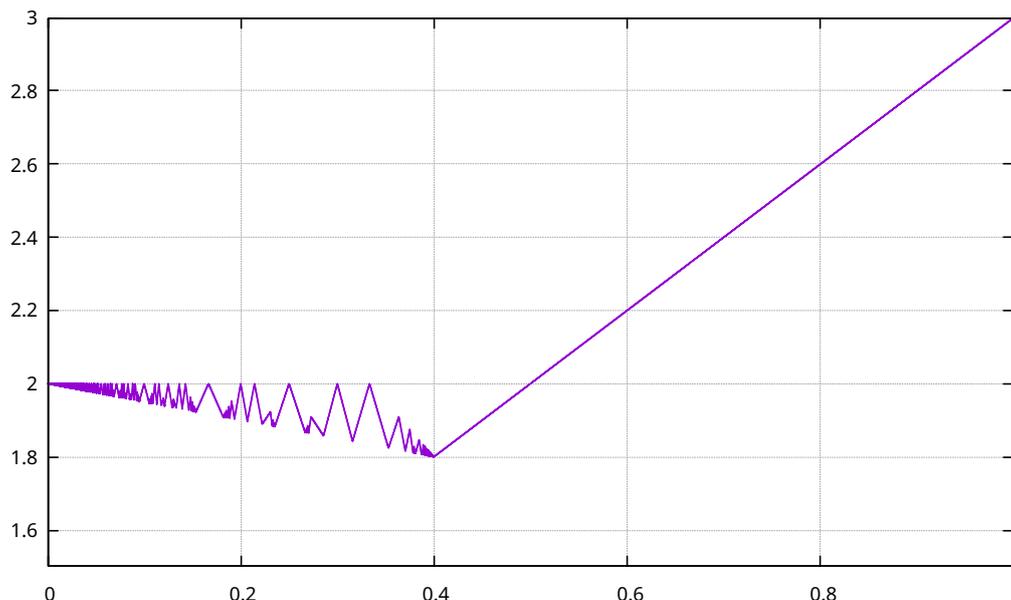


FIGURE 4.2 – Structure sous-jacente au graphe de $x \mapsto \Omega(x, 1)$ pour le voisinage du pas de cavalier

petit voisinage de v . On prend enfin l'entier le plus proche de la moyenne des valeurs obtenues. La façon de procéder est totalement expérimentale et ne prouve en rien que le résultat renvoyé est bien le graphe de la fonction à considérer. Elle nous permet toutefois de faire de l'analyse graphique et d'émettre des conjectures qui peuvent ensuite être démontrées formellement. Ainsi, pour le cas du pas de cavalier, nous prouvons que la courbe obtenue par cette méthode est bien la structure sous-jacente à la courbe de Ω et proposons un algorithme pour calculer l'épaisseur de connexité par pas de cavalier. Bien que cette méthode reste purement expérimentale, elle permet toutefois de trouver graphiquement des propriétés de Ω qui peuvent par la suite être prouvées, malheureusement pour un voisinage étudié en particulier et pas pour tout voisinage.

4.2 Théorème de majoration des chemins

Démontrer des propriétés de régularité sur la fonction Ω peut être relativement complexe. En effet, Ω est l'épaisseur limite à partir de laquelle une propriété du second ordre (la connexité) est vérifiée. Nous n'avons a priori d'autres choix que de revenir à la définition de continuité en un point v ($\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v' \in \mathbb{R}^d, \|v - v'\| < \eta \Rightarrow |\Omega(v) - \Omega(v')| < \varepsilon$). Remarquons toutefois que, malheureusement, la proposition $|\Omega(v) - \Omega(v')| < \varepsilon$ est elle-même une phrase quantifiée :

- $\Omega(v) - \Omega(v') > -\varepsilon$ signifie que $\mathbb{P}(v', 0, \Omega(v) + \varepsilon)$ est connexe, à savoir que pour tout $x, y \in \mathbb{P}(v', 0, \Omega(v) + \varepsilon)$, il existe un chemin de x à y tel que tout point z du chemin est dans $\mathbb{P}(v', 0, \Omega(v) + \varepsilon)$;
- $\Omega(v) - \Omega(v') < \varepsilon$ signifie que $\mathbb{P}(v', 0, \Omega(v) - \varepsilon)$ est non connexe, à savoir il existe $x, y \in \mathbb{P}(v', 0, \Omega(v) - \varepsilon)$ tel que, pour tout chemin de x à y , il existe un point z du chemin qui n'est pas dans $\mathbb{P}(v', 0, \Omega(v) - \varepsilon)$.

Ce que nous cherchons à prouver est donc une phrase de 5 ou 6 quantificateurs dont un au second ordre avec la quantification sur les chemins. Il nous faut pour réussir avoir un contrôle précis sur chaque objet, dont ces fameux chemins. Le but de cette partie est de contrôler la longueur des chemins dans un plan connexe.

Etant donnés 2 points $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$, on peut s'intéresser au lien entre leur distance euclidienne $\|y - x\|_2$ et leur distance $d(x, y)$ dans le graphe induit par le plan et le voisinage \mathcal{V} . On peut tout d'abord remarquer que $\|y - x\|_2 \leq Cd(x, y)$ pour une constante C indépendante de x et y . On utilise simplement pour cela une inégalité triangulaire : si $y = x + \sum_{i=1}^k u_i$ où $k = d(x, y)$ pour $u_i \in \mathcal{V}$ alors $\|y - x\|_2 \leq kR$ où $R = \max_{u \in \mathcal{V}} \|u\|_2$: « si 2 points sont proches dans le graphe alors ils sont proches en distance euclidienne » .

Toutefois, la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple de la Figure 4.3. Le plan considéré ici est un arbre, il existe dès lors un seul et unique chemin entre 2 points x et y . En retirant le point 0 du plan, on obtient 3 composantes connexes au plan. Les chemins entre 2 points x et y qui sont dans 2 composantes connexes différentes passe donc nécessairement par 0. Or, on peut trouver de tels points x, y à distance euclidienne $\sqrt{2}$ et $d(x, y) = d(x, 0) + d(y, 0)$ est non bornée. On ne peut donc a priori pas contrôler la longueur des chemins dans le plan avec la norme euclidienne.

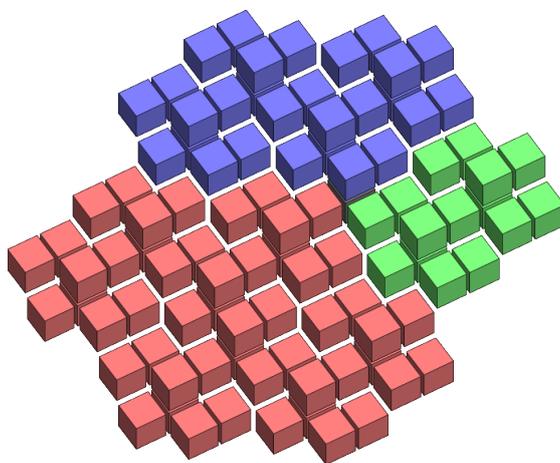


FIGURE 4.3 – Un hyperplan connexe. Les différentes couleurs sont les composantes connexes de $\mathbb{P} \setminus \{0\}$

On peut toutefois résoudre ce problème en faisant croître très légèrement l'épaisseur (voir Figure 4.4). Intuitivement, augmenter l'épaisseur d'un plan connexe revient à rajouter des cubes (en rouge) pour éviter de faire de longs chemins. Si le plan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe, on peut alors borner la longueur des chemins entre 2 points proches en distance euclidienne dans le plan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega + \varepsilon)$: on évite ainsi des cas critiques comme celui de la Figure 4.3 ou de la 4.4 à gauche. On dit alors que les chemins sont majorés. Le but de cette partie est l'étude de la majoration des chemins.

Définition 4.2.1 (Majoration des chemins). *Soit v un vecteur non nul de \mathbb{R}^d . Soit $\omega, r, \varepsilon > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On dit qu'un entier M majore les chemins pour $v, \mu, \omega, r, \varepsilon$ ssi*

$\forall x, y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$, si $\|y - x\|_2 \leq r$ alors il existe un chemin de x à y de longueur inférieure à M dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega + \varepsilon)$

On note en particulier $M(v, \mu, \omega, r, \varepsilon)$ le plus petit entier vérifiant cette propriété (s'il existe, sinon on prendra $M(v, \mu, \omega, r, \varepsilon) = \infty$).

La propriété de majoration des chemins permet ainsi d'assurer que « si deux points sont proches en distance euclidienne alors ils sont proches dans le graphe induit par le plan » . Cette

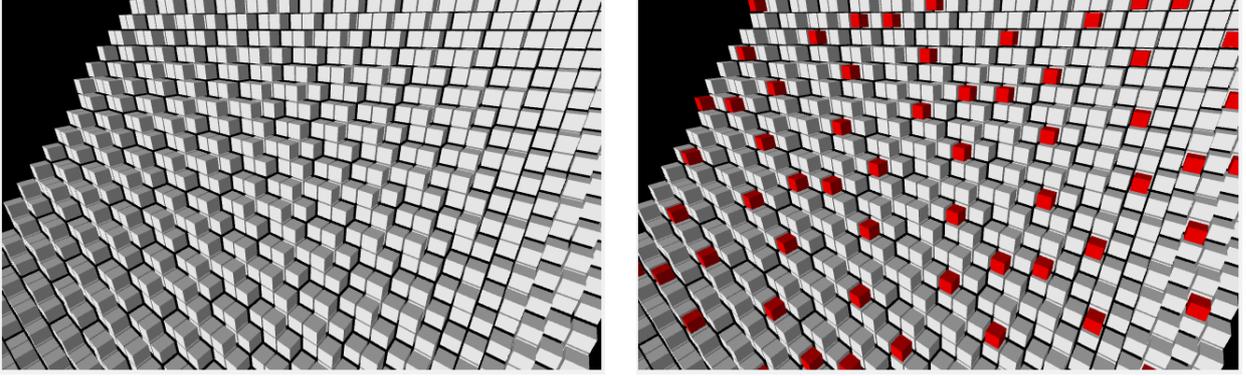


FIGURE 4.4 – Plan de Tribonacci à l'épaisseur de connexité (gauche) puis à une épaisseur plus grande (droite). Les cubes ajoutés en rouge permettent de raccourcir les chemins dans le plan.

propriété est essentielle pour prouver des propriétés de régularité sur Ω car permet d'avoir un contrôle sur la longueur des chemins dans un plan connexe.

Remarquons que la dépendance en ω de M n'est pas nécessaire car un cas intéressant est celui où $\omega = \Omega(v, \mu)$ (le plan à l'épaisseur n'est pas toujours connexe, mais ce problème disparaît lorsque l'on y ajoute ε). Comme r sera souvent fixé par la suite, on se permettra également de l'omettre dans l'expression de M . On se permettra donc l'abus d'écrire $M(v, \mu, \varepsilon)$.

Une disjonction de cas se pose entre les plans irrationnels et rationnels. Dans le premier cas, on utilise des résultats de densité pour conclure, dans le second le théorème de Bézout. Les 2 preuves sont toutefois analogues, on remplace simplement les ε par $\text{pgcd}(v)$. Dans les 2 cas, on montre tout d'abord que les chemins sont majorés dans le cas du décalage nul, avant de montrer que cela est vrai pour tout décalage, et que M ne dépend pas de μ .

Proposition 4.2.2 (Majoration irrationnelle des chemins). *Soit v un vecteur irrationnel et $\omega > 0$ tels que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ soit connexe. Soit $\varepsilon > 0$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ qui majore les chemins pour $v, (\mu = 0), \omega, r, \varepsilon$.*

Idée de la preuve : la preuve formelle et complète est en annexe 4.6.1. Pour montrer le théorème, on découpe l'intervalle $[0, \omega[$ en strates de taille ε (voir Figure 4.5). On prend ensuite, par densité, $x_1 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle x_1, v \rangle = \varepsilon$. La strate $[i\varepsilon, (i+1)\varepsilon[$ est représentée par le point $x_i \stackrel{\text{déf}}{=} ix_1$. On trouve alors une borne pour les x_i car cet ensemble de points est fini. On veut ensuite se ramener à cet ensemble de point pour un $x \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ quelconque. On prend i tel que $\langle x_i, v \rangle = i\varepsilon \leq \langle x, v \rangle < (i+1)\varepsilon$. Le chemin de x à y correspond alors à un chemin de x_i à y_i qui, lui, est borné. La division en strates assure de plus que le chemin de x à y ne sort pas du plan $\mathbb{P}(v, 0, \omega + \varepsilon)$.

Ce résultat se généralise pour tout décalage.

Proposition 4.2.3. *Soit v un vecteur irrationnel et $\mu, \omega > 0$ tels que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ soit connexe. Soit $\varepsilon > 0$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Alors il existe M majorant les chemins pour $v, \mu, \omega, r, \varepsilon$. De plus, $M(v, 0, \frac{\varepsilon}{2}) \geq M(v, \mu, \varepsilon)$.*

Démonstration. Commençons par nous ramener au cas $\mu \in]0, \frac{\varepsilon}{2}[$. Comme v est irrationnel, par densité, il existe $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle x_0, v \rangle \in]\mu - \frac{\varepsilon}{2}, \mu[$. En posant $\mu' \stackrel{\text{déf}}{=} \mu - \langle x_0, v \rangle \in]0, \frac{\varepsilon}{2}[$, on

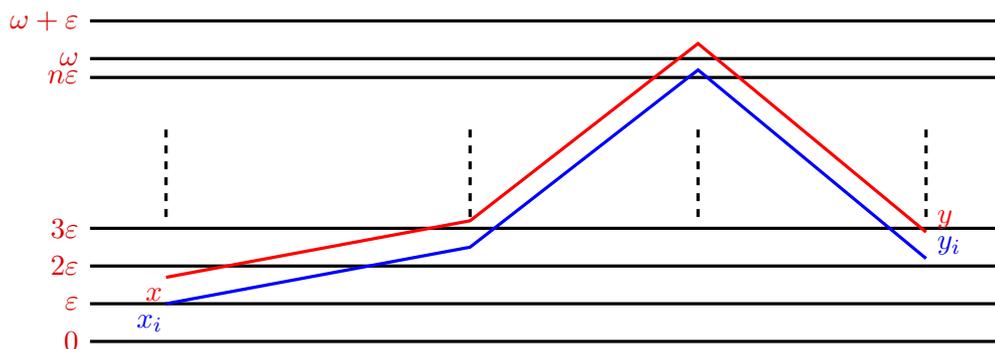


FIGURE 4.5 – Illustration de la preuve par strates. L'axe des abscisses représente l'avancée dans le chemin, l'axe des ordonnées l'évolution du produit scalaire avec v . Les points du chemin rouge sont toujours positionnés de la même manière par rapport à ceux du chemin bleu car les 2 chemins suivent les mêmes vecteurs de voisinage.

obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(v, \mu, \omega) &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \omega\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \langle x_0, v \rangle + \mu' < \omega\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x + x_0, v \rangle + \mu' < \omega\} \\
 &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu' < \omega\} + x_0 \\
 &= \mathbb{P}(v, \mu', \omega) + x_0
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ et $\mathbb{P}(v, \mu', \omega)$ étant des translats l'un de l'autre, ils ont les mêmes propriétés de connexité. Quitte à remplacer μ par μ' , on peut donc supposer sans perte de généralités $\mu \in]0, \frac{\varepsilon}{2}[$. Comme $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ est connexe et v est irrationnel, $\mathbb{P}(v, 0, \omega + \frac{\varepsilon}{4})$ est aussi connexe par le lemme d'inclusion 3.1.5. Donc, par majoration irrationnelle des chemins (décalage nul), il existe M tel que :

$\forall x, y \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$, si $\|y - x\|_2 \leq r$ alors il existe un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega + \frac{\varepsilon}{2})$ de longueur inférieure à M

On remarque au passage que M ne dépend pas de μ . Il suffit de remarquer que $\mathbb{P}(v, \mu, \omega) \subset \mathbb{P}(v, 0, \omega + \frac{\varepsilon}{2}) \subset \mathbb{P}(v, \mu, \omega + \varepsilon)$ pour conclure. \square

Dans le cas rationnel, les preuves sont les mêmes que dans le cas irrationnel, en remplaçant les arguments de densité par Bézout et en gérant convenablement les décalages. On peut donc se référer à la Figure 4.5 en remplaçant les ε par $\text{pgcd}(v)$ pour obtenir les mêmes arguments.

Proposition 4.2.4 (Majoration rationnelle des chemins). *Soit v un vecteur rationnel et $\omega > 0$ tels que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ soit connexe. Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Alors il existe M majorant les chemins pour $v, (\mu = 0), \omega, r, (\varepsilon = 0)$.*

Démonstration. en annexe 4.6.2.

Proposition 4.2.5. *Soit v un vecteur rationnel et $\mu, \omega > 0$ tels que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ soit connexe. Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Alors il existe M majorant les chemins pour $v, \mu, \omega, r, (\varepsilon = \bar{\mu})$ avec $\bar{\mu} \stackrel{\text{déf}}{=} \mu \pmod{\text{pgcd}(v)}$. De plus, $M(v, 0, 0) \geq M(v, \mu, \bar{\mu})$.*

Démonstration. On pose $\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda_{\mathcal{V}}(v)$ (voir Définition 3.1.3) et on prend $u_0 \in \mathcal{V}$ tel que $\lambda = \langle u_0, v \rangle$. Comme v est rationnel, $\mathbb{P}(v, \bar{\mu}, \omega)$ est un translaté de $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. On peut donc supposer $0 \leq \mu < \text{pgcd}(v)$. Comme $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est connexe, par le théorème de majoration des chemins (décalage nul) 4.2.4, il existe M tel que :

$\forall x, y \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$, si $\|y - x\|_2 \leq r$ alors il existe un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ de longueur inférieure à M .

On remarque au passage que M ne dépend pas de μ . On conclut en remarquant que $\mathbb{P}(v, \mu, \omega + \mu) = \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ car $0 \leq \mu < \text{pgcd}(v)$. \square

De toutes ces propositions, on peut conclure, dans les 2 cas, à un théorème général de majoration des chemins.

Théorème 4.2.6. *Soit v un vecteur non nul et $\mu, \omega > 0$ tels que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ soit connexe. Soient $r, \varepsilon > 0$. Alors il existe M indépendant de μ et majorant les chemins pour $v, \mu, \omega, r, (\text{pgcd}(v) + \varepsilon)$.*

4.3 Semi-continuité

Avant de démontrer des propriétés de continuité sur Ω , nous nous intéressons à une propriété de semi-continuité. Rappelons qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue en $x \in I$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$. La phrase $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ est alors une double inégalité $-\varepsilon < f(y) - f(x) < \varepsilon$. Dans le cas où seulement l'une des 2 inégalités est vérifiée, on parle alors de semi-continuité supérieure ou inférieure. De telles fonctions sont représentées en Figure 4.6. Une fonction est dite semi-continue inférieurement ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |y - x| < \eta \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f(y)$. Ainsi, lorsque y est proche de x , $f(y)$ ne peut être trop en dessous de $f(x)$. Une fonction est dite semi-continue supérieurement ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |y - x| < \eta \Rightarrow f(y) < f(x) + \varepsilon$. Ainsi, lorsque y est proche de x , $f(y)$ ne peut être trop au-dessus de $f(x)$.

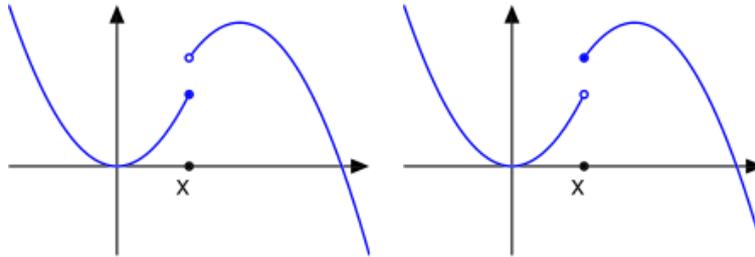


FIGURE 4.6 – Représentations graphiques de fonctions semi-continue inférieurement et supérieurement. Le point $(x, f(x))$ est représenté en bleu.

Nous cherchons dans cette partie à montrer un théorème de semi-continuité supérieure pour Ω , faisant toutefois intervenir le pgcd .

Théorème 4.3.1 (semi-continuité). *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ non nul et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall v' \in \mathbb{R}^d, \|v - v'\|_2 \leq \eta \Rightarrow \Omega(v') \leq \Omega(v) + \text{pgcd}(v) + 16\varepsilon$.*

Idée de la preuve : la preuve formelle et complète se trouve en annexe 4.6.3. On suppose par l'absurde, pour v' proche de v , que $\Omega(v') > \Omega(v) + 16\varepsilon + \text{pgcd}(v)$ et on se place à une épaisseur $\omega_0 \in]\Omega(v) + 16\varepsilon + \text{pgcd}(v), \Omega(v')[$ pour montrer que $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ est connexe (et ainsi aboutir à une contradiction). Comme $\omega_0 < \Omega(v')$, $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ est non connexe et on peut, via un lemme,

trouver deux points x et y de $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ proches en distance euclidienne mais non reliés dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$. On cherche ensuite à superposer (comme en Figure 4.7), pour un μ bien choisi, l'hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$ (qui est connexe) sur $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ au niveau de x et y . Comme v et v' sont proches, les 2 hyperplans se confondent sur une large zone autour de x et y . La connexité de $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$ permet de trouver un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$, de longueur bornée par un certain M grâce à la majoration des chemins. On prouve enfin que ce même chemin est dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$, les hyperplans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$ et $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ étant confondus sur une large zone (de rayon plus grand que M) autour de x et y .

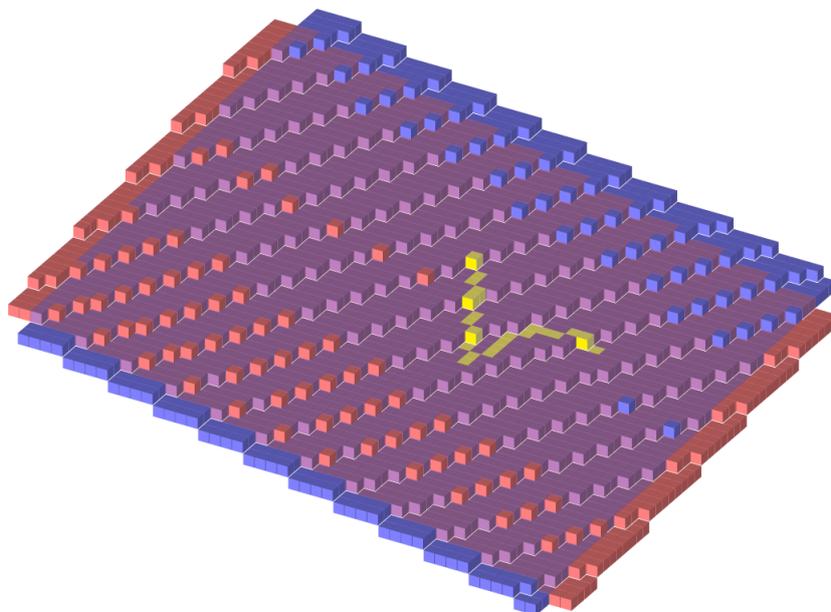


FIGURE 4.7 – Illustration de la superposition des hyperplans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$ (en bleu) et $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ (en rouge) au niveau de x et y (en jaune) qui sont donc reliés par un chemin (en jaune).

Dans le cas des vecteurs irrationnels, le théorème de semi-continuité nous offre déjà un sens de la preuve de continuité. On remarque, dans la preuve formelle, que la valeur de η ne dépend de v que via la constante M de majoration des chemins. Dans la section suivante, nous obtenons une valeur uniforme pour M (ie ne dépendant pas de v sur un compact), ce qui permet alors de trouver une valeur uniforme de η . Dès lors, on peut inverser les quantificateurs et prouver la double inégalité de continuité de Ω sur un compact.

4.4 Continuité relative

4.4.1 Majoration uniforme des chemins

On cherche ici à obtenir une majoration de M uniforme sur un compact, afin de prouver une propriété de continuité pour Ω . Cette majoration est possible, en se restreignant à certains vecteurs v' possédant les mêmes relations de liaison que v . On pourra notamment regarder la preuve dans le cas des vecteurs totalement irrationnels (ie vérifiant $\dim_{\mathbb{Q}}(v) = d$), ce qui simplifie le propos.

Définition 4.4.1. *Ensemble quotient* Soit v un vecteur irrationnel. On appelle ensemble quotient de v , l'ensemble $Q(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d \mid \langle v, x \rangle = 0\} = v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$. $Q(v)$ est l'ensemble des relations

de liaison à coefficients entiers vérifiées par v .

Exemple 4.4.2.

- $Q((1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})) = \text{Vect}_{\mathbb{Z}}((-1, -1, 1))$;
- $Q((1, \sqrt{2}, \pi)) = \{0\}$;
- $Q((1, 2, 3)) = \text{Vect}_{\mathbb{Z}}((-2, 1, 0), (-3, 0, 1))$.

Pour les théorèmes et propriétés suivantes, le cas des vecteurs v totalement irrationnels donne $Q(v) = \{0\}$. Les hypothèses sur $Q(v)$ sont alors toujours vérifiées pour les vecteurs totalement irrationnels.

Théorème 4.4.3 (Majoration uniforme des chemins). *Soit v un vecteur irrationnel. Soient $\omega > 0$ tel que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est connexe. Soit $r, \varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall v' \in \mathbb{R}^d, \text{ si } \|v - v'\|_2 \leq \eta \text{ et } Q(v) \subset Q(v') \text{ alors } M \text{ majore les chemins pour } v', (\mu = 0), \omega, r, \varepsilon$$

Idée de la preuve : la preuve complète et formelle est en annexe 4.6.4. On réutilise le même schéma que dans le théorème de majoration des chemins 4.2.6, en séparant cette fois en strates de taille $\frac{\varepsilon}{2}$. On va alors pouvoir trouver M de la même manière que précédemment. Pour montrer que M convient sur un ouvert autour de v , il faut simplement remarquer que les chemins utilisés depuis les x_i (qui sont en nombre fini) ne passent par un point x de produit scalaire nul avec v que pour des éléments x de $Q(v)$. Dès lors, en prenant v' proche de v tel que $Q(v) \subset Q(v')$, ces points resteront toujours dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega)$.

Théorème 4.4.4 (Majoration uniforme des chemins (avec décalage)). *Soit v un vecteur irrationnel. Soit $\omega > 0$ tel que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est connexe. Soit $r, \varepsilon > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\eta > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ (indépendant de μ) tels que :*

$$\forall v' \in \mathbb{R}^d, \text{ si } \|v - v'\|_2 \leq \eta \text{ et } Q(v) \subset Q(v') \text{ alors } M \text{ majore les chemins pour } v', \mu, \omega, r, \varepsilon$$

Comme M est uniforme sur un compact autour de v , la preuve du théorème de semi-continuité 4.3.1 fournit une double inégalité. On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 4.4.5 (Continuité relative). *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ irrationnel et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall v' \in \mathbb{R}^d$, si $\|v - v'\|_2 \leq \eta$ et $Q(v) \subset Q(v')$ alors $|\Omega(v) - \Omega(v')| \leq \text{pgcd}(v') + \varepsilon$.*

Ce théorème mérite un certains nombre de commentaires. Tout d'abord, dans le cas où v est rationnel, la contrainte $Q(v) \subset Q(v')$ impose que v' soit proportionnel à v . Comme Ω est homogène, $\lambda \mapsto \Omega(\lambda v) = \lambda \Omega(v)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . Le théorème de continuité relative reste donc vrai pour des vecteurs rationnels mais est alors sans aucun intérêt. Un cas plus intéressant est celui des vecteurs v totalement irrationnels. La condition $Q(v) \subset Q(v')$ est alors toujours vérifiée car $Q(v) = \{0\}$. Dans le cas où v' est irrationnel, $\text{pgcd}(v') = 0$. Le théorème de continuité relative énonce alors une propriété de continuité classique. Ainsi, en notant $\bar{\Omega}$ la restriction de Ω aux vecteurs totalement irrationnels, on obtient :

Corollaire 4.4.6. $\bar{\Omega}$ est continue (pour la topologie induite).

4.4.2 Algorithme de calcul de l'épaisseur

La propriété de continuité relative de Ω nous permet d'obtenir un algorithme de calcul de $\Omega(v)$. Il suffit pour cela de trouver une bonne suite de vecteurs rationnels convergeant vers v et de passer à la limite. Le $\text{pgcd}(v')$ apparaissant dans le théorème de continuité relative demande toutefois un lemme de précaution.

Lemme 4.4.7. *Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs convergeant vers un vecteur v irrationnel. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{pgcd}(v_n) = 0$.*

Démonstration. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \stackrel{\text{déf}}{=} \text{pgcd}(v_n)$. Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle est bornée. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = |\text{pgcd}(v_n)| \leq \|v_n\|_\infty$, u est également bornée. Montrons que la suite u admet 0 comme unique valeur d'adhérence pour conclure. Soit α une valeur d'adhérence de u . Montrons $\alpha = 0$.

Supposons par l'absurde $\alpha \neq 0$. Quitte à extraire, on peut supposer sans perte de généralités que $u_n \rightarrow \alpha$. La suite u étant ultimement strictement positive, quitte à extraire, on peut la supposer strictement positive. Considérons alors la suite $w = (\frac{v_n}{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ (qui est bien définie grâce à la remarque précédente). Cette suite est, par définition du pgcd , à valeurs dans \mathbb{Z}^d qui est fermé. De plus, w converge vers $\frac{v}{\alpha}$, donc $\frac{v}{\alpha} \in \mathbb{Z}^d$. Donc $\text{pgcd}(v) \geq \alpha > 0$ ce qui contredit l'irrationalité de v . \square

Théorème 4.4.8 (Continuité relative séquentielle). *Soit v un vecteur irrationnel. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs convergeant vers v et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(v) \subset Q(v_n)$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega(v_n) = \Omega(v)$.*

Démonstration. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers v et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(v) \subset Q(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme précédent, la suite $(\text{pgcd}(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \text{pgcd}(v_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par le théorème de continuité relative 4.4.5, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall v' \in \mathbb{R}^d, \text{ si } \|v - v'\|_2 \leq \eta \text{ et } Q(v) \subset Q(v') \text{ alors } |\Omega(v) - \Omega(v')| \leq \text{pgcd}(v') + \frac{\varepsilon}{2}$$

Par convergence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers v , il existe un rang n_1 tel que $\forall n \geq n_1, \|v - v_n\|_2 \leq \eta$. De plus, comme $\forall n, Q(v) \subset Q(v_n)$, on en déduit que $\forall n \geq n_1, |\Omega(v_n) - \Omega(v)| \leq \text{pgcd}(v_n) + \frac{\varepsilon}{2}$. En posant $N = \max(n_0, n_1)$, on obtient que $\forall n \geq N, |\Omega(v_n) - \Omega(v)| \leq \text{pgcd}(v_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega(v_n) = \Omega(v)$. \square

Corollaire 4.4.9. Ω est continue en tout vecteur totalement irrationnel.

Remarquons que, de même que précédemment, le théorème de continuité relative séquentielle reste vrai pour les vecteurs rationnels car il impose de considérer une suite de vecteurs proportionnels à v , ce qui présente toutefois peu d'intérêt. Grâce à la continuité relative séquentielle de Ω , on obtient un algorithme de calcul de l'épaisseur de connexité à partir de l'algorithme de Y. Gérard.

Algorithme : Algorithme de Yan Gérard étendu

Entrée : v un vecteur non nul

Sortie : $\Omega(v)$

Prendre une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs rationnels convergeant vers v et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q(v) \subset Q(v_n) ;$$

Calculer les $\Omega(v_n)$ avec l'algorithme de Y. Gérard ;

Renvoyer $\lim_{n \in \mathbb{N}} \Omega(v_n)$

Remarquons que cet algorithme ne termine pas car exige un passage à la limite et de lancer l'algorithme de Y. Gérard sur une infinité d'instances v_n . Toutefois, en arrêtant l'algorithme à une étape N et en renvoyant $\Omega(v_N)$, on obtient une approximation de $\Omega(v)$, au sens où $\lim_{N \rightarrow +\infty} \Omega(v_N) = \Omega(v)$. Le théorème de continuité relative assure ainsi la convergence des résultats renvoyés par l'algorithme vers la solution, mais ne permet pas de savoir à quelle vitesse. Les bornes obtenues par la preuve de continuité sont toutes constructives, exceptée celle utilisée pour la majoration des chemins. Nous ne sommes malheureusement pas encore parvenus à calculer de borne effective pour la majoration des chemins. Une telle borne permettrait notamment :

- d'avoir une vitesse de convergence pour l'algorithme de calcul de Ω ;
- de montrer, selon la borne, la continuité uniforme de $\bar{\Omega}$, restriction de Ω aux vecteurs totalement irrationnels.

Montrer la continuité uniforme de $\bar{\Omega}$ permettrait alors de prolonger $\bar{\Omega}$ en tout point de \mathbb{R}^d . On prouverait alors l'existence d'une fonction continue sous-jacente à la fonction d'épaisseur de connexité, qui coïncide avec elle en presque tout point.

4.4.3 Continuité uniforme et conjecture de prolongement

Cette partie est consacrée à la conjecture de prolongement et à quelques pistes non abouties pour essayer de la démontrer.

Conjecture 4.4.10 (prolongement). $\bar{\Omega}$ est prolongeable par continuité en tout point de \mathbb{R}^d .

Remarquons que, Ω étant homogène, on peut restreindre son étude à la sphère unité S qui est compacte. La conjecture de prolongement est donc équivalente à la continuité uniforme de $\bar{\Omega}$ sur S . Une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue en chaque irrationnel mais qui n'est prolongeable par continuité en aucun rationnel semble difficile à imaginer. On peut toutefois construire de tels contre-exemples (le graphe de la fonction est visible en Figure 4.8) :

$$f \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{0 < \frac{p}{q} < x, p, q \in \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1} \frac{1}{2^q} \end{cases}$$

Remarquons que la fonction f est bien définie car $\left(\frac{1}{2^q}\right)_{0 < p \leq q}$ est sommable. Du fait de la sommabilité de la famille, on peut montrer que f est continue en tout irrationnel de $[0, 1]$. La restriction \bar{f} de f aux irrationnels est donc continue. Néanmoins, pour tout rationnel $r \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$, \bar{f} admet une limite à gauche et une limite à droite en r qui diffèrent de $\frac{1}{2^q}$ donc \bar{f} n'est prolongeable par continuité en aucun rationnel de $[0, 1]$. Plus, généralement, le théorème de Blumberg [12] énonce que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet une restriction $\bar{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur une partie dense D et de nombreuses telles fonctions ne sont pas prolongeables par continuité à \mathbb{R} . Nous n'avons toutefois pas observé graphiquement ce type de comportement pour la fonction Ω .

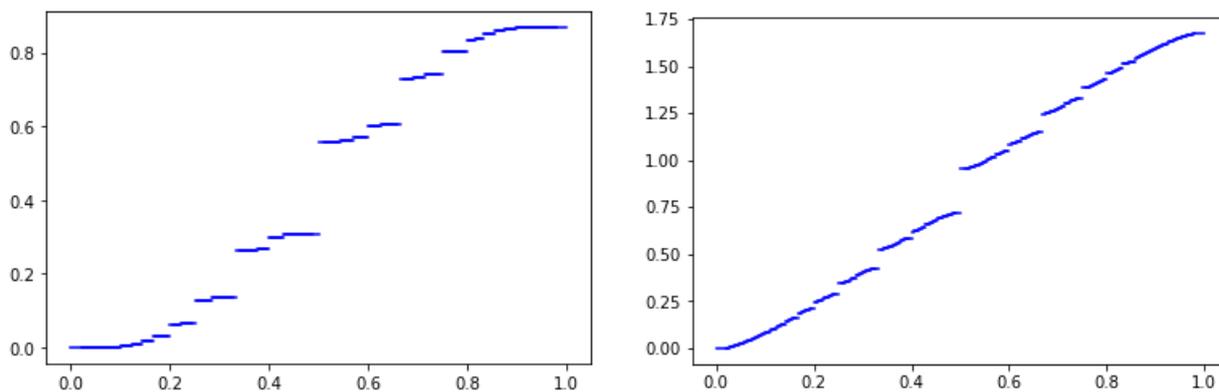


FIGURE 4.8 – Deux fonctions dont la restriction aux irrationnels est continue mais qui ne sont prolongeables par continuité en aucun rationnel. A gauche, la fonction f . A droite, une variante de f où l'on somme les $\frac{1}{q^{2,T}}$ pour rendre les sauts en tout rationnel plus visibles.

Nous avons tenté un certain nombre d'approches pour démontrer la continuité uniforme de Ω ou, ce qui est équivalent, la conjecture de prolongement. Nous citons ici quelques idées qui n'ont pas abouti à l'établissement du résultat.

Une première idée, en dimension 2, est de restreindre l'ensemble des points à considérer. Prolonger $\bar{\Omega}$ en tout vecteur rationnel revient en réalité à prouver que les fonctions $\bar{\Omega}_{\mathcal{V}}$, pour tout voisinage \mathcal{V} , sont prolongeables par continuité en e_2 . En effet, si $\varphi \in GL_2(\mathbb{Z})$, on peut montrer que $\Omega_{\mathcal{V}}(\varphi(v)) = \Omega_{\varphi(\mathcal{V})}(v)$. Si v est rationnel de pgcd 1, on peut alors trouver φ tel que $\varphi(v) = e_2$. L'intuition est alors que des droites de vecteurs normaux irrationnels v' très proches de e_2 , à savoir des droites irrationnelles quasi horizontales avec des paliers très longs, ont peu de chances d'avoir des épaisseurs éloignées. Cette intuition reste malheureusement à ce jour une intuition.

Une deuxième idée est de chercher une majoration explicite des chemins. Les points ajoutés lorsque l'on grossit très légèrement l'épaisseur permettent, sur les exemples observés, de créer des ponts bien répartis sur tout le plan, et raccourcissent drastiquement les chemins. Nous pensons donc qu'il est possible de majorer les chemins en fonction de la variation d'épaisseur ε . Nous avons notamment essayé d'obtenir un tel résultat en passant par la densité des rationnels. Grâce au graphe construit par l'algorithme de Y. Gérard, nous sommes en mesure d'exposer une borne explicite (largement optimisable) de majoration des chemins pour les vecteurs rationnels en $O\left(\left(\frac{\|v\|_2}{\text{pgcd}(v)}\right)^d\right)$. Cette majoration est toutefois trop forte pour se ramener aux irrationnels par densité. Nous avons uniquement réussi à majorer explicitement les chemins pour les nombres de Liouville et souhaitons utiliser le lemme de Baire pour conclure par densité mais cela n'a pas abouti.

Une troisième idée était de se détacher de la topologie usuelle de \mathbb{R}^d et de s'intéresser à celle induite par les fractions continues. On peut notamment consulter [26] pour les liens entre géométrie discrète et fractions continues. En 2D, la pente d'une droite discrète admet un développement en fraction continue qui peut être interprété géométriquement. Le premier entier correspond ainsi à la longueur des paliers de la droite discrète. On peut alors munir l'ensemble des mots infinis sur l'alphabet \mathbb{N}^* de la topologie produit. La convergence d'une suite de pentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers une pente a peut alors être vue comme une convergence de mots. Bien que très intéressante, nous ne sommes toutefois pas parvenus à conclure par cette approche.

Enfin, une dernière idée repose sur les épaisseur de composantes et épaisseurs de cycles. On peut montrer qu'il existe des épaisseurs Ω_k telles que :

- $\forall \omega \leq \Omega_k(v)$, la composante \mathcal{V} -connexe de 0 dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est de taille $< k$;
- $\forall \omega > \Omega_k(v)$, la composante \mathcal{V} -connexe de 0 dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est de taille $\geq k$.

Nous avons montré que les fonctions Ω_k sont continues, linéaires par morceaux et calculables. De plus, $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et bornée de fonctions donc converge vers une fonction Ω_∞ , de sorte que :

- $\forall \omega < \Omega_\infty(v)$, la composante \mathcal{V} -connexe de 0 dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est finie ;
- $\forall \omega > \Omega_\infty(v)$, la composante \mathcal{V} -connexe de 0 dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est infinie.

Les fonctions Ω_k représentent une possible approche de Ω par le bas. Nous avons également considéré une possible approche de Ω par le haut. L'idée est inspirée du comportement des plans à l'épaisseur critique en connexité par faces. Le plan, lorsqu'il est connexe, est alors un arbre. Augmenter l'épaisseur crée alors des cycles, de plus en plus petits au fur et à mesure que l'épaisseur croît. Nous avons ainsi regardé la notion d'épaisseur de cycles via les fonctions Γ_k :

- $\forall \omega \leq \Gamma_k(v)$, la composante \mathcal{V} -connexe de 0 dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ ne contient pas de cycle de taille inférieure à k ;
- $\forall \omega > \Gamma_k(v)$, la composante \mathcal{V} -connexe de 0 dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ contient un cycle de taille inférieure à k .

Les fonctions Γ_k sont également continues, linéaires par morceaux et calculables. De plus, $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et bornée de fonctions donc converge vers une fonction Γ_∞ , de sorte que :

- $\forall \omega < \Gamma_\infty(v)$, la composante \mathcal{V} -connexe de 0 ne contient pas de cycle ;
- $\forall \omega > \Gamma_\infty(v)$, la composante \mathcal{V} -connexe de 0 dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ contient un cycle.

Nous pensons que les fonctions Ω_k et Γ_k permettent d'approcher la fonction Ω par le bas et par le haut. Ne nous étant pas penché très longtemps sur la question, les conjectures qui suivent possèdent possiblement des contre-exemples immédiats. Dans les 2 conjectures suivantes, le sens \geq est immédiat, seul le sens \leq mérite réflexion.

Conjecture 4.4.11. *Si v est totalement irrationnel alors $\Omega(v) = \max(\|v\|_\infty, \Omega_\infty(v))$.*

Conjecture 4.4.12. *Si v est totalement irrationnel alors $\Omega(v) = \max(\|v\|_\infty, \Gamma_\infty(v))$.*

4.5 Formes périodiques et réductions

Dans le cas de la connexité par faces, nous sommes parvenus à établir un lien entre la structure sous-jacente à la fonction Ω et l'algorithme totalement soustractif de calcul de Ω . Les Figures 4.9 représentent respectivement le graphe des fonctions Ω et $\bar{\Omega}$ pour la connexité par faces en 3D. Nous normalisons en traçant la fonction $(x, y) \mapsto \Omega(x, y, 1 - x - y)$.

Pour tracer la fonction $\bar{\Omega}$ pour la connexité par faces, nous utilisons l'algorithme totalement soustractif et retirons la partie arithmétique, à savoir les pgcd.

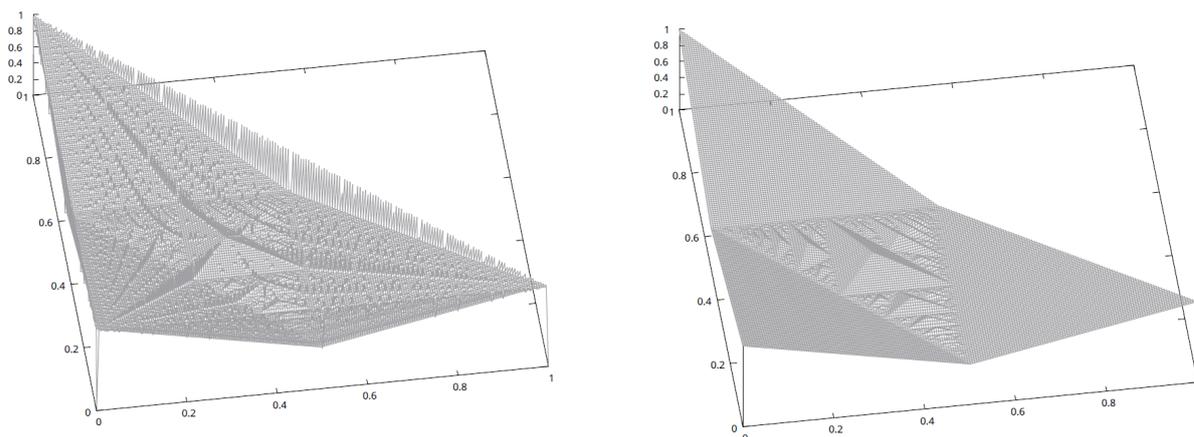


FIGURE 4.9 – Représentations graphiques de $(x, y) \mapsto \Omega(x, y, 1 - x - y)$ et $(x, y) \mapsto \overline{\Omega}(x, y, 1 - x - y)$ pour la connexité par faces

Algorithme : Algorithme totalement soustractif irrationnel

Entrée : v un vecteur non nul

Sortie : $\overline{\Omega}(v)$

$v \leftarrow |v|$;

$\Omega \leftarrow 0$;

tant que VRAI faire

si il existe deux coordonnées v_j et v_k telles que $v_j + v_k \leq \|v\|_\infty$ **alors**

 Renvoyer $\|v\|_\infty + \Omega$

sinon

$i \leftarrow$ indice d'une coordonnée minimale de v ;

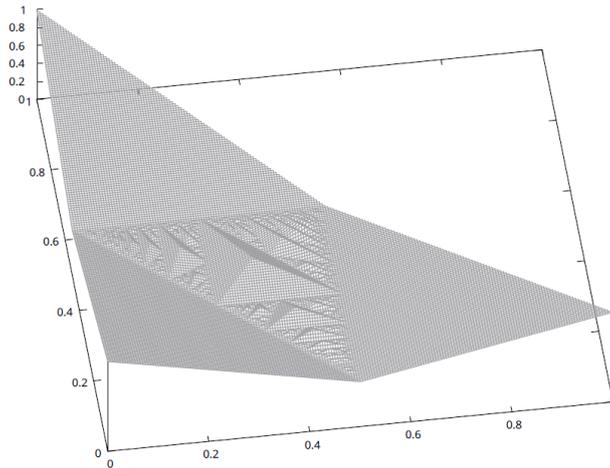
$v \leftarrow v - v_i(\mathbf{1} - e_i)$ où $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$;

$\Omega \leftarrow \Omega + v_i$

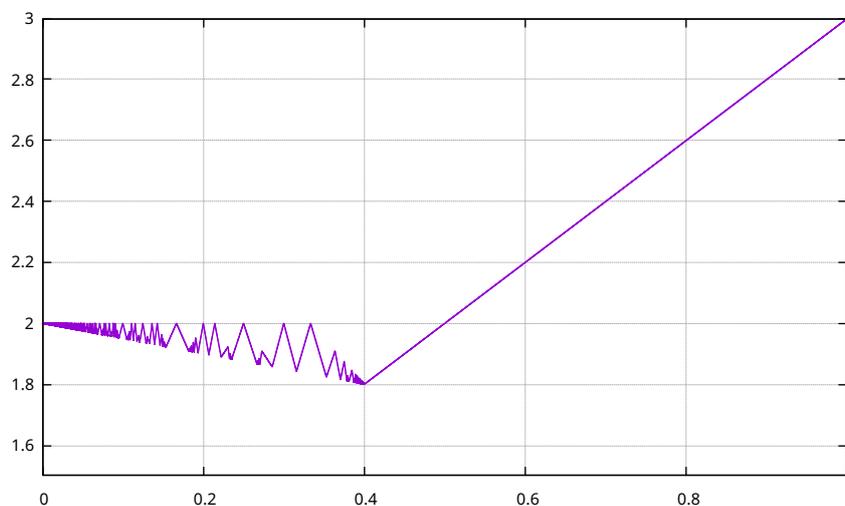
On peut alors observer dans le graphe de $\overline{\Omega}$ (voir Figure 4.10) le déroulé de l'algorithme totalement soustractif. Les grandes zones planes sont celles où l'algorithme conclut directement. On observe ensuite une structure constituée de pyramides qui forment un triangle de Sierpinski. La pyramide centrale est divisée en 3 zones, selon l'indice de la coordonnée minimale. Appliquer une étape de l'algorithme totalement soustractif envoie alors chacune des zones sur l'une des zones planes où l'algorithme conclut directement. La pyramide centrale est ainsi la zone des vecteurs où l'on conclut en 1 étape. Les 3 pyramides intermédiaires autour de la pyramide centrale, représentant chacune un indice possible de la coordonnée minimale, se ramènent à celle-ci en une étape de l'algorithme : ce sont les zones où l'algorithme conclut en 2 étapes. Les points limites de la structure correspondent alors aux vecteurs de Kraaikamp-Meester. Le mot Δ des indices des coordonnées minimales dans le déroulé de l'algorithme permet alors de retrouver les vecteurs de Kraaikamp-Meester via un chemin infini dans la structure.

Remarquons que l'algorithme de calcul de $\overline{\Omega}$ est correct sur les vecteurs v totalement irrationnels car, dans ce cas, $\Omega(v) = \overline{\Omega}(v)$. On obtient ensuite le graphe de $\overline{\Omega}$ sur tout \mathbb{R}^d en prolongeant la fonction par continuité. On peut en effet prolonger $\overline{\Omega}$ par continuité sur chacune des zones planes de son graphe, prolongement qui correspond au renvoi de l'algorithme. L'algorithme de calcul de $\overline{\Omega}$ sur \mathbb{R}^d est ainsi correct.

Nous observons des zones périodiques identiques à ces pyramides pour d'autres voisinages \mathcal{V} .

FIGURE 4.10 – Graphe de la fonction $\bar{\Omega}$

En calculant les transformations linéaires permettant de passer d'une pyramide à une pyramide plus grosse, on peut alors déduire, expérimentalement, une méthode de calcul de l'épaisseur de connexité Ω_γ dans certaines zones de l'espace. Nous proposons ici d'illustrer sur l'exemple du pas de cavalier la méthode expérimentale mise en place pour déduire du graphe de Ω (en Figure 4.11) un algorithme de calcul de l'épaisseur par pas de cavalier.

FIGURE 4.11 – Représentation graphique de $x \mapsto \bar{\Omega}(x, 1)$ pour la connexité par pas de cavalier

Nous recherchons dans le graphe de la fonction des symétries ou des points limites α de comportements périodiques. Par exemple, observons que $\alpha = 0$ semble graphiquement être la limite d'un procédé périodique à sa droite. Nous avons expérimentalement observé que ce processus s'explique par la présence de motifs dans la droite discrète considérée. Le lien entre répétitions de motifs et fractions continues nous a alors poussés à chercher une période à la fonction $f : X \mapsto X \left(\Omega(\alpha + \frac{1}{X}, 1) \right) - \bar{\Omega}(\alpha, 1)$. Nous obtenons alors le graphe de f en Figure 4.12. Nous remarquons graphiquement que f semble admettre une période $T = 4$ à partir de la

borne $M = 2$. Ainsi, en obtenant graphiquement $\bar{\Omega}(\alpha, 1) = 2$,

$$\begin{aligned} \forall X \geq M + T, F(X) &= F(X - T) \\ &= (X - T)\Omega(\alpha + 1/(X - T), 1) - (X - T)\bar{\Omega}(\alpha, 1) \\ &= \Omega(\alpha(X - T) + 1, X - T) + (X - T)\bar{\Omega}(\alpha, 1) \end{aligned}$$

Donc, en divisant par X (rappelons que $X > 0$),

$$\forall X \geq M + T, \Omega(\alpha + 1/X, 1) = \Omega(\alpha(1 - T/X) + 1/X, 1 - T/X) + (1 - T/X)\bar{\Omega}(\alpha, 1)$$

En posant $x \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha + 1/X$, on obtient

$$\forall x \in \left] \alpha, \alpha + \frac{1}{M + T} \right], \Omega(x, 1) = \Omega(\alpha(1 - T(x - \alpha)) + (x - \alpha), 1 - T(x - \alpha)) + T(x - \alpha)\bar{\Omega}(\alpha, 1)$$

Dans le cas $\alpha = 0$, on obtient en remplaçant par les données trouvées graphiquement,

$$\forall x \in \left] 0, \frac{1}{6} \right], \Omega(x, 1) = \Omega(x, 1 - 4x) + 8x$$

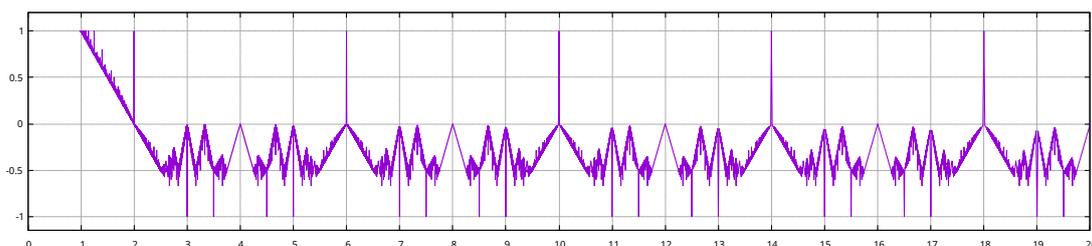


FIGURE 4.12 – Graphe de la fonction f pour $\alpha = 0$. On obtient graphiquement $\bar{\Omega}(\alpha, 1) = 2$, $T = 4$ et $M = 2$.

Pour certains points limites comme $\alpha = \frac{2}{5}$, le procédé périodique se situe à gauche du point limite. Dès lors, la fonction f vérifie $\forall X \leq -M, f(X) = f(X - T)$. On peut alors reconvertir cette équation de la même manière en

$$\forall x \in \left[\alpha - \frac{1}{M + T}, \alpha \right[, \Omega(x, 1) = \Omega(x - \alpha T(\alpha - x), 1 - T(\alpha - x)) + T(\alpha - x)\bar{\Omega}(\alpha, 1)$$

Enfin, dans le cas du pas de cavalier, on peut observer un axe de symétrie dans le graphe de f en $X = 2n$. On en déduit

$$\forall n \geq 2, \forall t \in [2 - 2n, 2n - 2], \Omega(2n + t, 1) = \Omega(2n - t, 1) + 4t$$

Les réductions ainsi trouvées graphiquement, si elles sont ensuite prouvées formellement, permettent de trouver un algorithme récursif pour calculer l'épaisseur de connexité Ω du pas de cavalier. Enfin, certaines zones planes dans la fonction, comme la zone $\left[\frac{2}{5}, 1 \right]$ permettent de terminer l'algorithme. On peut trouver en figure 4.13 le tableau exhaustif des réductions trouvées pour le pas de cavalier, qui couvrent tout l'intervalle $[0, 1]$.

Cette méthode expérimentale, bien que portant ses fruits, pose toutefois un certain nombre de problèmes :

Départ	Réduction	Arrivée
$0, \frac{1}{6}$	$\Omega(x, 1) = \Omega(x, 1 - 4x) + 8x$	$\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$
$\frac{1}{6}, \frac{1}{4}$	$\Omega(x, 1) = \Omega(x, 8x - 1) + 4(1 - 4x)$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}, \frac{4}{15}$	$\Omega(x, 1) = 4 - 8x$	
$\frac{4}{15}, \frac{10}{37}$	$\Omega(x, 1) = \Omega(x - 4(15x - 4), 1 - 15(15x - 4)) + 28(15x - 4)$	$\frac{10}{37}, \frac{2}{7}$
$\frac{10}{37}, \frac{3}{11}$	$\Omega(x, 1) = 18x - 3 - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{3}{11}, \frac{2}{7}$	$\Omega(x, 1) = 3 - 4x - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{2}{7}, \frac{3}{10}$	$\Omega(x, 1) = 10x - 1 - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{3}{10}, \frac{6}{19}$	$\Omega(x, 1) = 5 - 10x - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{6}{19}, \frac{1}{3}$	$\Omega(x, 1) = 9x - 1 - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{1}{3}, \frac{6}{17}$	$\Omega(x, 1) = 5 - 9x - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{6}{17}, \frac{4}{11}$	$\Omega(x, 1) = 8x - 1 - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{4}{11}, \frac{10}{27}$	$\Omega(x, 1) = 7 - 14x - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{10}{27}, \frac{3}{8}$	$\Omega(x, 1) = 13x - 3 - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{3}{8}, \frac{14}{37}$	$\Omega(x, 1) = 9 - 19x - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{14}{37}, \frac{11}{29}$	$\Omega(x, 1) = 18x - 5 - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{11}{29}, \frac{8}{21}$	$\Omega(x, 1) = \Omega(x + 8(21x - 8), 1 + 21(21x - 8)) - 38(21x - 8)$	$\frac{3}{8}, \frac{11}{29}$
$\frac{8}{21}, \frac{5}{13}$	$\Omega(x, 1) = 10x - 2$	
$\frac{5}{13}, \frac{12}{31}$	$\Omega(x, 1) = 8 - 16x$	
$\frac{12}{31}, \frac{19}{49}$	$\Omega(x, 1) = \Omega(x - 12(31x - 12), 1 - 31(31x - 12)) + 56(31x - 12)$	$\frac{19}{49}, \frac{7}{18}$
$\frac{19}{49}, \frac{26}{67}$	$\Omega(x, 1) = 15 - 34x - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{26}{67}, \frac{7}{18}$	$\Omega(x, 1) = 33x - 11 - \text{pgcd}(x, 1)$	
$\frac{7}{18}, \frac{2}{5}$	$\Omega(x, 1) = \Omega(x - 6(2 - 5x), 1 - 15(2 - 5x)) + 27(2 - 5x)$	$\frac{1}{3}, \frac{7}{18}$
$\left[\frac{2}{5}, 1\right]$	$\Omega(x, 1) = 2x + 1 + \begin{cases} \text{pgcd}(x, 1) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ et } 3 \mid (x + 1)/\text{pgcd}(x, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	

FIGURE 4.13 – Table de réduction pour le pas de cavalier

- elle ne permet de traiter la question de la connexité que voisinage par voisinage et n'offre pas de résultat général pour tout voisinage ;
- l'analyse graphique pour trouver les différents points limites de la structure à considérer, les pentes, périodes et autres caractéristiques est extrêmement chronophage ;
- une telle analyse graphique peut de plus être non exhaustive car il est possible de ne pas remarquer certaines fines oscillations ;
- les résultats obtenus expérimentalement doivent ensuite être prouvés ce qui est également extrêmement chronophage ;
- une fois l'analyse graphique terminée et prouvée, rappelons que seul un voisinage particulier a été traité et que cela n'offre aucunement une indication pour d'autres voisinages

Nous conjecturons que cette méthode graphique est fonctionnelle pour tout voisinage mais n'avons pour autant pas encore trouvé de méthode générale.

4.6 Annexe : preuves des propriétés de Ω

4.6.1 Preuve de la majoration irrationnelle des chemins

Proposition 4.2.2 (Majoration irrationnelle des chemins) : soit v un vecteur irrationnel et $\omega > 0$ tels que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ soit connexe. Soit $\varepsilon > 0$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ qui majore les chemins pour $v, (\mu = 0), \omega, r, \varepsilon$.

Démonstration. Nous invitons le lecteur à se référer à la Figure 4.14 pour suivre plus facilement la preuve. Soit v, ω tels que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est connexe. Soit $\varepsilon > 0$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Par densité de $(\langle x, v \rangle)_{x \in \mathbb{Z}^d}$, il existe $x_1 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $0 < \langle x_1, v \rangle \leq \varepsilon$. Quitte à prendre un ε plus petit, on peut supposer sans perte de généralité $\langle x_1, v \rangle = \varepsilon$. On pose alors, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i \stackrel{\text{déf}}{=} i x_1$ avec $n \stackrel{\text{déf}}{=} \lceil \frac{\omega}{\varepsilon} \rceil - 1$. Ainsi $\langle x_i, v \rangle = i\varepsilon$. L'idée est de trouver une majoration des chemins pour l'ensemble fini $\{x_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ (ce qui relativement aisé, par finitude) puis de se ramener aux x_i pour tout x dans l'hyperplan.

Commençons par exposer un M majorant les chemins pour $\{x_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose $A_i \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{P}(v, 0, \omega) \cap \mathcal{B}(x_i, r)$ qui est fini. Prenons $y \in A_i$. Par connexité de $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$, il existe un chemin de x_i à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Notons $l(y)$ la longueur d'icelui. On pose alors $M_i \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{y \in A_i} l(y)$ et $M \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} M_i$.

Montrons désormais que M convient. Soient $x, y \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ tels que $\|y - x\|_2 \leq r$. On pose $i \stackrel{\text{déf}}{=} \lfloor \frac{\langle x, v \rangle}{\varepsilon} \rfloor \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On veut ramener le problème de majoration des chemins en partant de x à celui en partant de x_i . Par définition de i , $\langle x_i, v \rangle \leq \langle x, v \rangle < \langle x_{i+1}, v \rangle = \langle x_i, v \rangle + \varepsilon$. On pose $z \stackrel{\text{déf}}{=} y - x$ et $y_i \stackrel{\text{déf}}{=} x_i + z$. Dès lors, $\|y_i - x_i\|_2 = \|y - x\|_2 \leq r$. Donc, par définition de M , il existe un chemin de x_i à y_i à valeurs dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ et de longueur inférieure à M . Appelons u_1, \dots, u_k la suite des vecteurs de voisinage constituant ce chemin (ainsi $k \leq M$). On montre alors que cette suite u_1, \dots, u_k forme également un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega + \varepsilon)$. $\sum_{j=1}^k u_j = y_i - x_i = z = y - x$ donc le chemin va bien de x à y . De plus, pour $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \left\langle x + \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle &= \langle x, v \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle \geq \langle x_i, v \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle = \left\langle x_i + \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle \geq 0 \\ \left\langle x + \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle &= \langle x, v \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle \leq \varepsilon + \langle x_i, v \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle = \left\langle x_i + \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle < \varepsilon + \omega \end{aligned}$$

On a bien trouvé un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega + \varepsilon)$ de longueur inférieure à M . \square

4.6.2 Preuve de la majoration rationnelle des chemins

Proposition 4.2.4 (Majoration rationnelle des chemins) : soit v un vecteur rationnel et $\omega > 0$ tels que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ soit connexe. Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Alors il existe M majorant les chemins pour $v, (\mu = 0), \omega, r, (\varepsilon = 0)$.

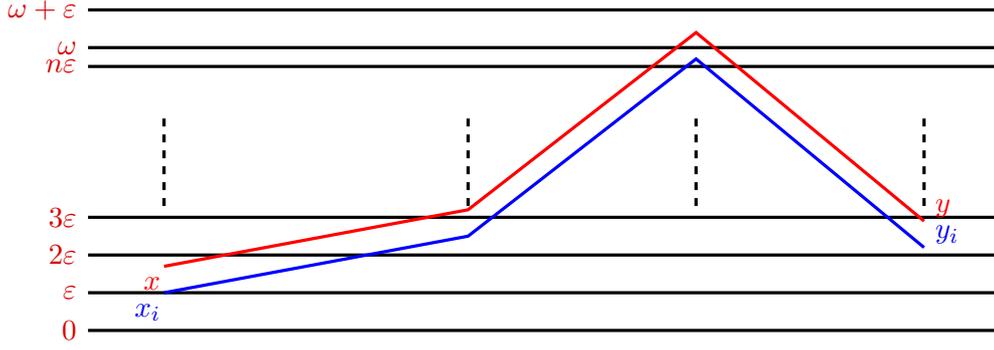


FIGURE 4.14 – Illustration de la preuve par strates. L'axe des abscisses représente l'avancée dans le chemin, l'axe des ordonnées l'évolution du produit scalaire avec v . Les points du chemin rouge sont toujours positionnés de la même manière par rapport à ceux du chemin bleu car les 2 chemins suivent les mêmes vecteurs de voisinage.

Démonstration. La preuve ressemble énormément à la majoration irrationnelle des chemins et s'inspire également de la Figure 4.14. Soit v, ω tels que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ soit connexe. On peut supposer sans perte de généralités $\text{pgcd}(v) = 1$. On peut également supposer $\omega \in \mathbb{N}$. Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Par Bézout, il existe $x_1 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle x_1, v \rangle = 1$. On pose alors, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i \stackrel{\text{déf}}{=} i x_1$ avec $n \stackrel{\text{déf}}{=} \omega - 1$. Ainsi $\langle x_i, v \rangle = i$. L'idée est de trouver une majoration des chemins pour l'ensemble fini $\{x_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ (ce qui relativement aisé, par finitude) puis de se ramener aux x_i pour tout x dans l'hyperplan.

Commençons par exposer un M majorant les chemins pour $\{x_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose $A_i \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{P}(v, 0, \omega) \cap \mathcal{B}(x_i, r)$ qui est fini. Prenons $y \in A_i$. Par connexité de $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$, il existe un chemin de x_i à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. Notons $l(y)$ la longueur d'icelui. On pose alors $M_i \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{y \in A_i} l(y)$ et $M \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} M_i$. Montrons désormais que M convient.

Soient $x, y \in \mathbb{P}(v, 0, \omega)$ tels que $\|y - x\|_2 \leq r$. On pose $i \stackrel{\text{déf}}{=} \langle x, v \rangle \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On veut ramener le problème de majoration des chemins en partant de x à celui en partant de x_i . Par définition de i , $\langle x_i, v \rangle = \langle x, v \rangle$. On pose $z \stackrel{\text{déf}}{=} y - x$ et $y_i \stackrel{\text{déf}}{=} x_i + z$. Dès lors, $\|y_i - x_i\|_2 = \|y - x\|_2 \leq r$. Donc, par définition de M , il existe un chemin de x_i à y_i à valeurs dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ et de longueur inférieure à M . Appelons u_1, \dots, u_k la suite des vecteurs de voisinage constituant ce chemin (ainsi $k \leq M$). On montre alors que cette suite u_1, \dots, u_k forme également un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega + \varepsilon)$. $\sum_{j=1}^k u_j = y_i - x_i = z = y - x$ donc le chemin va bien de x à y . De plus, pour $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$,

$$\left\langle x + \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle = \langle x, v \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle = \langle x_i, v \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle = \left\langle x + \sum_{j=1}^p u_j, v \right\rangle \in [0, n] \subset [0, \omega[$$

On a bien trouvé un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ de longueur inférieure à M . \square

4.6.3 Preuve de semi-continuité

La preuve du théorème de semi-continuité commence par un lemme technique caractérisant le passage de la non connexité à la connexité en faisant varier l'épaisseur.

Lemme 4.6.1. Soit v' un vecteur et $\varepsilon, \omega_0 > 0$ tels que $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ est non connexe et $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + \varepsilon)$ est connexe. On suppose de plus que $\varepsilon < \lambda(v')$ (voir la Définition 3.1.3). Alors il existe $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que :

- 1) $x, y \in \mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$
- 1bis) on a même $x, y \in \mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + \varepsilon - \lambda(v'))$;
- 2) x et y ne sont pas connectés dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$.
- 3) x et y sont à distance 2 dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + \varepsilon)$.

Démonstration. Comme $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ est non connexe et non vide, il existe 2 points x' et y' non connectés dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$. On note C la composante connexe de x' dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$. Comme $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + \varepsilon)$ est connexe, il existe un chemin $x' = x_0 \leftrightarrow x_1 \dots \leftrightarrow x_k = y'$ dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + \varepsilon)$. Les vecteurs de $\mathcal{V} \cap v'^\perp$ pouvant par la suite mener à quelques difficultés dans la preuve, on suppose que ces vecteurs sont tous situés au début du chemin de x' à y' . Cette opération est licite car effectuer un déplacement de $u \in \mathcal{V} \cap v'^\perp$ ne change pas le produit scalaire. On peut donc placer les vecteurs de $\mathcal{V} \cap v'^\perp$ n'importe où dans le chemin.

Prenons i maximal tel que $x_{i-1} \in C$. Ainsi $\forall j \geq i, x_j \notin C$. Comme $x_{i-1} \in C$ et $x_{i-1} \leftrightarrow x_i$, on a obligatoirement $x_i \notin \mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ (sinon, on pourrait en déduire $x_i \in C$). On en déduit alors que $0 < i < k$. On pose $x \stackrel{\text{déf}}{=} x_{i-1}$ et $y \stackrel{\text{déf}}{=} x_{i+1}$. Vérifions que x et y conviennent :

- 2) x et y ne sont pas connectés dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ car $y = x_{i+1} \notin C$ qui est la composante connexe de x et x' dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$;
- 3) x et y sont à distance 2 dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + \varepsilon)$ car $x = x_{i-1} \leftrightarrow x_i \leftrightarrow x_{i+1} = y$;
- 1) montrons $y \in \mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + \varepsilon - \lambda(v'))$, la preuve sera la même pour x .

Pour montrer $y \in \mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + \varepsilon - \lambda(v'))$, on utilise le fait que y est de la forme $x_i + u$ pour un u dans \mathcal{V} . Ajoutons de plus que, comme $x_i - x_{i-1} \notin v'^\perp$, $u \notin v'^\perp$, les déplacements de v'^\perp ayant été placés au début du chemin. Donc $|\langle u, v' \rangle| \geq \lambda(v')$. Or $\langle x_i, v' \rangle \in [\omega_0, \omega_0 + \varepsilon[$ et $\langle y, v' \rangle \in [0, \omega_0 + \varepsilon[$. Donc $\langle y, v' \rangle \in [0, \omega_0 + \varepsilon - \lambda(v')[\subset [0, \omega_0[$. \square

Théorème 4.3.1 (semi-continuité) : soit $v \in \mathbb{R}^d$ non nul et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall v' \in \mathbb{R}^d, \|v - v'\|_2 \leq \eta \Rightarrow \Omega(v') \leq \Omega(v) + \text{pgcd}(v) + 16\varepsilon$.

Idée de la preuve : on suppose par l'absurde, pour v' proche de v , que $\Omega(v') > \Omega(v) + 16\varepsilon + \text{pgcd}(v)$ et on se place à une épaisseur $\omega_0 \in]\Omega(v) + 15\varepsilon + \text{pgcd}(v), \Omega(v')[$ pour montrer que $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ est connexe (et ainsi aboutir à une contradiction). Comme $\omega_0 < \Omega(v')$, $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ est non connexe et on peut, via le lemme 4.6.1, trouver deux points x et y de $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ proches en distance euclidienne mais non reliés dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$. On cherche ensuite à superposer (comme en Figure 4.15), pour un μ bien choisi, l'hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$ (qui est connexe) sur $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ au niveau de x et y . Comme v et v' sont proches, les 2 hyperplans se confondent sur une large zone autour de x et y . La connexité de $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$ permet de trouver un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$, de longueur bornée par un certain M grâce à la majoration des chemins. On prouve enfin que ce même chemin est dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$, les hyperplans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$ et $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ étant confondus sur une large zone (de rayon plus grand que M) autour de x et y .

Démonstration. Soit v un vecteur non nul. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\omega \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega(v)$. On pose $r \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{u, u' \in \mathcal{V}} \|u + u'\|_2$.

On commence par obtenir une majoration des chemins pour v , qui nous est nécessaire dans la définition du module de continuité η . Comme $6\varepsilon < 8\varepsilon$, par le théorème de majoration des chemins, il existe M (indépendant de μ) tel que :

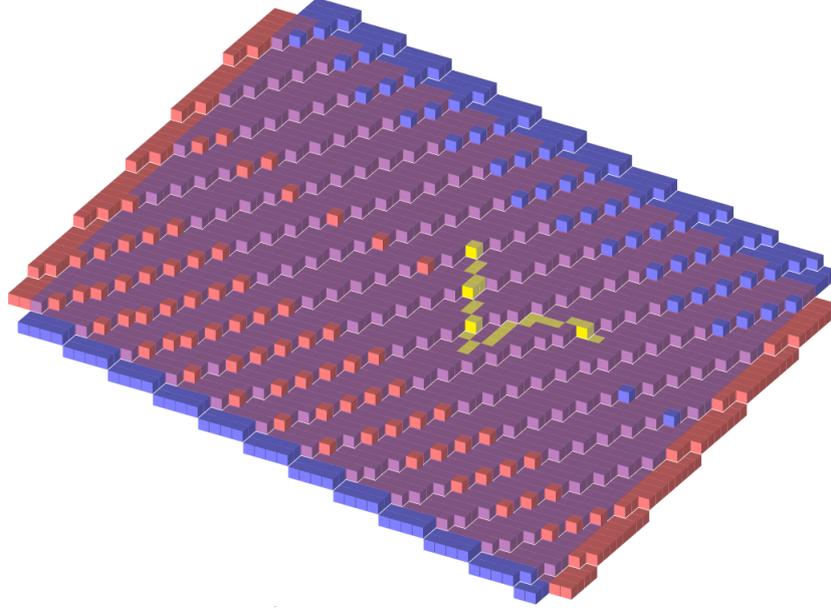


FIGURE 4.15 – Illustration de la superposition des hyperplans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$ (en bleu) et $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ (en rouge) au niveau de x et y (en jaune) qui sont donc reliés par un chemin (en jaune).

$\forall \mu, \forall x, y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega + 6\varepsilon)$, si $\|y - x\|_2 \leq r$ alors il existe un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega + \bar{\mu} + 8\varepsilon)$ de longueur inférieure à M (où $\bar{\mu} \stackrel{\text{déf}}{=} \mu \bmod \text{pgcd}(v)$ si v est rationnel et 0 sinon).

On pose $\eta \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\varepsilon}{M \max_{u \in \mathcal{V}} \|u\|_2}$. Soit $v' \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|v - v'\|_2 \leq \eta$. Quitte à prendre η plus petit,

on peut également supposer que $|\|v\|_{\mathcal{V}} - \|v'\|_{\mathcal{V}}| \leq \varepsilon$. On pose $\omega' \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega(v')$. On pose également $\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda(v)$ et $\lambda' \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda(v')$.

Supposons par l'absurde $\omega' > \omega + \text{pgcd}(v) + 16\varepsilon$. On cherche alors ω_0 nous permettant d'appliquer le lemme 4.6.1. On pose pour cela $\omega_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \omega' - \varepsilon$. Donc $\omega < \omega_0 < \omega' < \omega_0 + 2\varepsilon$. Ainsi, $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ est non connexe et $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + 2\varepsilon)$ et $\mathbb{P}(v, 0, \omega_0)$ sont connexes.

Par le lemme 4.6.1, il existe $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que :

1. $x, y \in \mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + 2\varepsilon - \lambda')$.
2. x et y ne sont pas connectés dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$.
3. x et y sont à distance 2 dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + 2\varepsilon)$.

On souhaite maintenant superposer, pour un μ bien choisi l'hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0)$, qui est connexe, sur l'hyperplan $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ au niveau de x et y , afin de trouver un chemin de x à y . On prend pour cela μ tel que $\langle x, v \rangle + \mu - 2\varepsilon = \langle x, v' \rangle$. Ainsi, $x \in \mathbb{P}(v, \mu - 2\varepsilon, \omega_0 + 2\varepsilon - \lambda')$. On considère enfin $u_1, u_2 \in \mathcal{V}$ tels que $y = x + u_1 + u_2$. Majorons alors $|(\langle y, v \rangle + \mu - \langle y, v' \rangle)|$ afin

de montrer que les plans se superposent bien au niveau de y .

$$\begin{aligned}
 |(\langle y, v \rangle + \mu - \langle y, v' \rangle) - 2\varepsilon| &\leq |\langle x, v \rangle + \mu - 2\varepsilon - \langle x, v' \rangle| + |\langle u_1 + u_2, v \rangle - \langle u_1 + u_2, v' \rangle| \\
 &= |\langle u_1 + u_2, v - v' \rangle| \\
 &\leq \|u_1 + u_2\|_2 \eta \\
 &\leq 2\eta \max_{u \in \mathcal{V}} \|u\|_2 \\
 &= \frac{2\varepsilon}{M} \\
 &\leq \varepsilon \text{ quitte à supposer } M \geq 2
 \end{aligned}$$

Comme $y \in \mathbb{P}(v', 0, \omega_0 + 2\varepsilon - \lambda')$, $y \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega_0 + 5\varepsilon - \lambda')$. On remarque également que $x \in \mathbb{P}(v, \mu - 2\varepsilon, \omega_0 + 2\varepsilon - \lambda') \subset \mathbb{P}(v, \mu, \omega_0 + 5\varepsilon - \lambda')$.

Le but est maintenant d'utiliser, pour un bon α , la connexité de l'hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu, \omega + \alpha)$ pour trouver un chemin de x à y de longueur faible et reproduire le même chemin dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$. Notons que, comme $\omega \geq \|v\|_{\mathcal{V}}$ et $\omega' \leq \|v'\|_{\mathcal{V}} + \lambda'$, on a $\omega' - \omega \leq \varepsilon + \lambda'$. De plus, $\|y - x\|_2 = \|u_1 + u_2\|_2 \leq r$. On remarque que $\omega_0 + 5\varepsilon - \lambda' \leq \omega + 6\varepsilon$ car $\omega_0 - \omega - \lambda' = (\omega' - \omega - \lambda') - \varepsilon \leq 0 \leq \varepsilon$. Donc, comme $\mathbb{P}(v, \mu, \omega_0 + 5\varepsilon - \lambda') \subset \mathbb{P}(v, \mu, \omega + 6\varepsilon)$, il existe un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v, \mu, \omega + \bar{\mu} + 8\varepsilon)$ de longueur inférieure à M . On note $x = x_0 \leftrightarrow x_1 \dots \leftrightarrow x_k = y$ ce chemin ($k \leq M$) et on pose $u'_i \stackrel{\text{déf}}{=} x_i - x_{i-1}$. Montrons maintenant que ce même chemin convient dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ en majorant $|(\langle x_i, v \rangle + \mu - \langle x_i, v' \rangle) - 2\varepsilon|$.

$$\begin{aligned}
 |(\langle x_i, v \rangle + \mu - \langle x_i, v' \rangle) - 2\varepsilon| &\leq |\langle x, v \rangle + \mu - 2\varepsilon - \langle x, v' \rangle| + \left| \left\langle \sum_{j=1}^i u'_j, v - v' \right\rangle \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^i |\langle u'_j, v - v' \rangle| \\
 &\leq \sum_{j=1}^i \|u'_j\|_2 \eta \\
 &\leq \eta M \max_{u \in \mathcal{V}} \|u\|_2 \\
 &\leq \varepsilon
 \end{aligned}$$

Remarquons que $\omega + \bar{\mu} + 10\varepsilon \leq \omega + \text{pgcd}(v) + 15\varepsilon \leq \omega' - \varepsilon = \omega_0$. Donc, comme $x_i \in \mathbb{P}(v, \mu, \omega + \bar{\mu} + 8\varepsilon)$, on en déduit que $x_i \in \mathbb{P}(v', 0, \omega + \bar{\mu} + 10\varepsilon) \subset \mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$. On a exposé un chemin de x à y dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega_0)$ ce qui est absurde. Ceci prouve donc bien $\Omega(v') \leq \Omega(v) + \text{pgcd}(v) + 16\varepsilon$. \square

4.6.4 Preuve de la majoration uniforme des chemins

Définition 4.4.1 : Soit v un vecteur irrationnel. On appelle ensemble quotient de v , l'ensemble $Q(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d \mid \langle v, x \rangle = 0\} = v^\perp \cap \mathbb{Z}^d$.

Théorème 4.4.3 (Majoration uniforme des chemins) : Soit v un vecteur irrationnel. Soit $\omega > 0$ tel que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est connexe. Soit $r, \varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall v' \in \mathbb{R}^d, \text{ si } \|v - v'\|_2 \leq \eta \text{ et } Q(v) \subset Q(v') \text{ alors } M \text{ majore les chemins pour } v', \mu = 0, \omega, r, \varepsilon$$

Démonstration. Cette preuve reprend le même principe que la preuve du théorème de majoration des chemins 4.6.1. Soit v un vecteur irrationnel et $\omega, r, \varepsilon > 0$ tels que $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ est connexe.

On commence par séparer le plan en strates de taille $\frac{\varepsilon}{2}$ via des vecteurs x_i . Par densité, il existe $x_1 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle x_1, v \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Quitte à prendre ε plus petit, on peut supposer $\langle x_1, v \rangle = \frac{\varepsilon}{2}$. On pose alors, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $n \stackrel{\text{déf}}{=} \left\lceil \frac{\omega}{\varepsilon/2} \right\rceil - 1$, $x_i \stackrel{\text{déf}}{=} i x_1$.

Comme l'ensemble $\{x_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est fini, on peut majorer les chemins pour cet ensemble. On pose pour cela $A_i \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{P}(v, 0, \omega) \cap \mathcal{B}(x_i, r)$. Soit $y \in A_i$. Par connexité de $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$, il existe un chemin $C(x_i, y)$ de x_i à y dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$. On pose $M = \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \max_{y \in A_i} l(C(x_i, y))$ où l désigne la longueur du chemin.

On montre maintenant que cette majoration des chemins est uniforme sur une boule compacte de rayon η autour de v . Prenons $S \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{y \in A_i} C(x_i, y)$ où l'on voit les $C(x_i, y)$ comme des ensembles. On pose également $\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \min_{x \in S \setminus Q(v)} \langle x, v \rangle$ qui est strictement positif par définition de $Q(v)$. On remarque alors que $\alpha \leq \langle x_1, v \rangle = \frac{\varepsilon}{2}$. On pose enfin $\eta \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\alpha}{3 \max_{x \in S} \|x\|_2}$. Soit $v' \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|v - v'\|_2 \leq \eta$ et $Q(v) \subset Q(v')$. Soit $x \in S$. En majorant $|\langle x, v \rangle - \langle x, v' \rangle|$, on pourra montrer une majoration uniforme des chemins depuis x pour v' .

$$\begin{aligned} |\langle x, v \rangle - \langle x, v' \rangle| &= |\langle x, v - v' \rangle| \\ &\leq \|x\|_2 \|v - v'\|_2 \\ &\leq \|x\|_2 \eta \\ &\leq \frac{\alpha}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, si $x \notin Q(v)$, $0 \leq \langle x, v \rangle - \frac{\alpha}{3} \leq \langle x, v' \rangle \leq \langle x, v \rangle + \frac{\alpha}{3} < \omega + \frac{\alpha}{3}$. Donc $x \in \mathbb{P}(v', 0, \omega + \frac{\alpha}{3})$. Si $x \in Q(v)$, $\langle x, v' \rangle = 0$ car $Q(v) \subset Q(v')$ donc $x \in \mathbb{P}(v', 0, \omega + \frac{\alpha}{3})$. Donc $S \subset \mathbb{P}(v', 0, \omega + \frac{\alpha}{3})$.

De plus, $\langle x_i, v' \rangle \leq \langle x_i, v \rangle + \frac{\alpha}{3} \leq \langle x_i, v \rangle + \frac{\varepsilon}{6} < \langle x_{i+1}, v \rangle - \frac{\varepsilon}{6} \leq \langle x_{i+1}, v \rangle - \frac{\alpha}{3} \leq \langle x_{i+1}, v' \rangle$. Donc la suite des $(\langle x_i, v' \rangle)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est strictement croissante. De plus, comme $x_1 \in S$,

$$\langle x_{i+1} - x_i, v' \rangle = \langle x_1, v' \rangle = \langle x_1, v \rangle + \langle x_1, v' - v \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\alpha}{3}$$

Montrons alors que M convient pour v' . Soient $x, y \in \mathbb{P}(v', 0, \omega)$ tels que $\|x - y\|_2 \leq r$. On ramène alors le problème autour des x_i . On considère pour cela $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\langle x_i, v' \rangle \leq \langle x, v' \rangle < \langle x_{i+1}, v' \rangle$. On pose $z \stackrel{\text{déf}}{=} x - x_i$ et $y_i \stackrel{\text{déf}}{=} y - z$. Ainsi, $\langle z, v' \rangle = \langle x - x_i, v' \rangle \in [0, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\alpha}{3}[$.

Dès lors, $\|y_i - x_i\|_2 = \|y - x\|_2 \leq r$ donc $C(x_i, y_i)$ est un chemin de x_i à y_i dans $\mathbb{P}(v, 0, \omega)$ de longueur inférieure à M . Ce chemin est constitué d'éléments de S donc est également à valeurs dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega + \frac{\alpha}{3})$. On appelle u_1, \dots, u_k les vecteurs de voisinage utilisés dans ce chemin. Soit $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \left\langle x + \sum_{j=1}^p u_j, v' \right\rangle &= \left\langle x_i + \sum_{j=1}^p u_j, v' \right\rangle + \langle z, v' \rangle \\ &\leq \omega + \frac{\alpha}{3} + \langle z, v' \rangle \\ &< \omega + \frac{\varepsilon}{2} + \alpha \\ &\leq \omega + \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc trouvé un chemin de x à y de longueur inférieure à M dans $\mathbb{P}(v', 0, \omega + \varepsilon)$. \square

4.7 Bilan & perspectives

S'intéresser aux propriétés analytiques de Ω a permis de démontrer que cette fonction comprend un certain nombre de régularités. Le résultat principal de cette partie est le théorème de continuité relative 4.4.8 (version séquentielle) : lorsqu'une suite de vecteurs $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur v et si les v_n vérifient au moins les mêmes relations arithmétiques que v alors $(\Omega(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\Omega(v)$. Cette propriété nous permet notamment d'étendre l'algorithme de Y. Gérard pour calculer l'épaisseur de connexité de tout vecteur réel. La continuité relative a également pour conséquence le fait que la restriction $\bar{\Omega}$ de Ω aux vecteurs totalement irrationnels est continue. Parmi les outils utilisés dans cette partie, les théorèmes de majoration des chemins ont un intérêt particulier. Ils permettent en effet de borner la longueur des chemins entre 2 points proches en distance euclidienne, pour des épaisseurs $\omega > \Omega(v)$, permettant ainsi d'avoir un contrôle sur la propriété de connexité.

Notre algorithme souffre toutefois de l'absence d'une vitesse de convergence explicite. Si la suite des réels considérés converge vers $\Omega(v)$, il n'est en revanche pas possible de savoir à quelle vitesse. Les théorèmes de majoration des chemins mériteraient une preuve constructive de leurs bornes qui permettrait d'avoir un algorithme d'approximation explicite. Une telle borne permettrait également de prouver la continuité uniforme de $\bar{\Omega}$ et donc de prolonger cette fonction par continuité en tout vecteur réel. On prouverait ainsi totalement l'existence d'une structure sous-jacente au graphe de la fonction Ω .

L'observation expérimentale du graphe de Ω et de sa structure sous-jacente permet d'en extraire des propriétés de réduction. La structure et l'algorithme de calcul de l'épaisseur semblent ainsi intimement liés. Nous avons mis au point une méthode expérimentale pour connaître les caractéristiques de la structure et en déduire des propriétés de réduction sur Ω . Bien que non prouvées formellement, ces observations permettent toutefois d'obtenir des conjectures sur les relations vérifiées par Ω pour pouvoir ensuite les prouver formellement. Nous avons ainsi pu trouver un algorithme général de calcul de l'épaisseur par pas de cavalier. Bien que fastidieuse, cette méthode fonctionne pour tous les voisinages que nous avons testés. Rien ne prouve toutefois que de telles structures apparaissent toujours, et qu'il nous sera possible d'en extraire un algorithme de calcul de l'épaisseur.

Reconnaissance d'hyperplans arithmétiques

Après nous être penchés sur les nombreuses propriétés de la connexité des hyperplans arithmétiques, nous nous intéressons dans ce chapitre à leur reconnaissance. Nous cherchons ainsi, étant donné un ensemble fini $S \subset \mathbb{Z}^d$, à savoir s'il existe un hyperplan arithmétique $\mathbb{P}(v, \mu, \omega)$ tel que $S \subset \mathbb{P}(v, \mu, \omega)$. La réponse à cette question est toujours positive car on peut choisir des valeurs de ω arbitrairement grandes. Nous avons ainsi choisi de nous restreindre aux hyperplans naïfs, pour lesquels $\omega = \|v\|_\infty$.

Définition 5.0.1 (Hyperplan naïf). *L'hyperplan naïf de vecteur normal v et de décalage μ est l'ensemble*

$$\mathbb{P}(v, \mu) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \|v\|_\infty\}$$

Nous parlons tout d'abord de l'algorithme classique de reconnaissance de segments discrets d'I. Debled-Rennesson et J.-P. Réveill\u00e8s, pr\u00e9sent\u00e9 dans [19] et reposant sur la notion de point d'appui. Il existe \u00e9galement, du c\u00f4t\u00e9 de la dynamique symbolique, des algorithmes de reconnaissance de facteurs de mots sturmiens. De notre c\u00f4t\u00e9, nous pr\u00e9sentons un algorithme lin\u00e9aire et incr\u00e9mental de reconnaissance de segments na\u00effs, en nous basant sur l'arbre de Stern-Brocot. Nous nous int\u00e9ressons \u00e9galement au probl\u00e8me de reconnaissance de morceaux d'hyperplans en dimensions sup\u00e9rieures, qui devient alors nettement plus difficile. Nous pr\u00e9sentons tout d'abord un \u00e9tat de l'art des m\u00e9thodes existantes, notamment leurs atouts et leurs faiblesses. Nous exposons enfin une extension en toute dimension de notre algorithme \u00e0 l'aide de l'arbre de Stern-Brocot. Si l'approche est int\u00e9ressante, l'algorithme obtenu poss\u00e8de toutefois un certain nombre de limites. Le travail pr\u00e9sent\u00e9 est donc partiel mais ouvre des voies int\u00e9ressantes, notamment sur la notion de corde s\u00e9parante. La majorit\u00e9 des r\u00e9sultats nouveaux de ce chapitre sont pr\u00e9sent\u00e9s dans [33].

5.1 Quelques m\u00e9thodes de reconnaissance de segments discrets

Dans sa th\u00e8se [19], I. Debled-Rennesson pr\u00e9sente un certain nombre de m\u00e9thodes utilis\u00e9es en dynamique symbolique et en g\u00e9om\u00e9trie discr\u00e8te pour d\u00e9cider si un ensemble S est un segment na\u00eff. Le probl\u00e8me se traduit, du point de vue de la dynamique symbolique, par d\u00e9cider si un mot w est un facteur de mot sturmien. Parmi les algorithmes connus travaillant sur le code

de H. Freeman [27], on peut notamment citer l'algorithme de L.-D. Wu, présenté dans [54] qui a une complexité en $\Omega(n^2)$. Dans les années 1990, J. Berstel propose dans [8, 9] une méthode permettant de décider en temps linéaire si un mot est facteur d'un sturmien. Il est également possible d'obtenir une telle complexité en utilisant des processus de désubstitution, comme présenté par exemple dans la thèse de T. Fernique [26]. Toutefois, les algorithmes présentés ne sont pas incrémentaux : ils ne permettent en effet pas, après avoir décidé si w est facteur d'un sturmien, de décider si wa est facteur d'un sturmien en $O(1)$. Pour décider si wa est facteur d'un sturmien, il faut alors relancer l'algorithme de J. Berstel ou de désubstitution pour conclure en $O(n)$. Nous utilisons dans ce chapitre une variante de la définition de droites naïves, utilisant un vecteur directeur au lieu d'un vecteur normal. Cela permet notamment de parler plus facilement de la pente de la droite. Notons que jongler entre les définitions de droite par vecteur directeur et celle par vecteur normal peut être très glissant, notamment lorsque l'on parle de pente ou de point d'appui.

Définition 5.1.1 (Droite naïve). Soient $a, b, \mu \in \mathbb{R}$ avec a, b non tous 2 nuls. La droite naïve de paramètres a, b, μ est alors l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq ax - by + \mu < \|(a, b)\|_\infty\}$$

Problème 5.1.2 (Reconnaissance de segment). Etant donné $S \subset \mathbb{Z}^2$, on cherche à savoir si S est un segment naïf. Si oui, on cherche également à connaître ses paramètres entiers a, b, μ minimaux, ie minimisant $\|(a, b)\|_\infty$.

L'algorithme de reconnaissance de segments discrets d'I. Debled-Rennesson et de J.-P. Réveillé, présenté dans [19], permet de reconnaître un segment de manière linéaire et incrémentale. Notons que, pour un segment donné, il existe une infinité de paramètres a, b, μ possibles, dont certains entiers. L'algorithme d'I. Debled-Rennesson permet notamment d'obtenir les paramètres minimaux du segment, à savoir des entiers a, b, μ avec $\|(a, b)\|_\infty$ minimale tel que $S \subset \mathbb{P}(a, b, \mu)$. Le caractère incrémental permet notamment d'utiliser efficacement cet algorithme pour des polygonalisations de courbes. L'idée majeure est de garder en mémoire des informations sur les points d'appui du segment, points qui caractérisent sa géométrie. La notion de point d'appui dépendant de la portion de plan considérée, on exige par la suite $a, b \geq 0$, cas auquel on peut toujours se ramener par symétrie.

Définition 5.1.3 (Points d'appui[19], Figure 5.1). Soient S un segment naïf de paramètres minimaux a, b, μ et $p = (x, y)$ un point de S . On dit que p est un point d'appui supérieur ssi $ax - by + \mu = 0$. On dit que p est un point d'appui inférieur ssi $ax - by + \mu = \|(a, b)\|_\infty - 1$.

Nous avons choisi la définition de point d'appui inférieur et supérieur de sorte à ce que les points d'appui supérieurs soient situés au-dessus du segment pour les vecteurs du premier octant. Toutefois, pour les autres octants, il est possible que les points d'appui inférieurs soient situés au-dessus du segment et les points d'appui supérieurs en dessous. De manière générale, les segments sont considérés par symétrie dans le premier octant, ce qui évite ce type de problème.

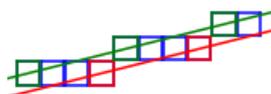


FIGURE 5.1 – Un segment de pente $1/4$. Les points d'appui inférieurs sont en rouge et les points d'appui supérieurs en vert.

L'idée de l'algorithme incrémental est alors la suivante. On suppose connaître les paramètres minimaux a, b, μ du segment courant S ainsi que l'ensemble de ses points d'appui A_{inf} et A_{sup} .

On ajoute alors un point $p = (x, y)$ à droite de S et on souhaite savoir si $S \cup \{p\}$ est un segment naïf et, dans ce cas, connaître ses paramètres minimaux. On s'intéresse alors à la quantité $R \stackrel{\text{déf}}{=} ax - by + \mu$:

- si $0 \leq R < \|(a, b)\|_\infty$ alors p appartient à la droite naïve de paramètres a, b, μ , les paramètres du segment $S \cup \{p\}$ sont donc les mêmes que ceux de S ;
- si $R < -1$ ou $R > \|(a, b)\|_\infty$ alors le point p est dit fortement extérieur et $S \cup \{p\}$ n'est pas un segment naïf;
- sinon, $R = -1$ ou $R = \|(a, b)\|_\infty$, le point p est alors dit faiblement extérieur. Dès lors, $S \cup \{p\}$ est un segment de paramètres minimaux (a', b', μ') que l'on peut calculer en $O(1)$ à partir des ensembles A_{inf} et A_{sup} , comme décrit ci-après.

Appelons S_0 et I_0 les points d'appui supérieur et inférieur les plus éloignés de p . Si $R = -1$, les nouveaux paramètres a', b' correspondent à la pente de la droite (S_0p) , S_0 et p deviennent les nouveaux points d'appui supérieurs d'où $\mu' = a'x - b'y$ et le nouveau point d'appui inférieur est $I_0 \stackrel{\text{déf}}{=} p - (b, a + 1)$. Un exemple de ce cas de figure est donné en Figure 5.2. Si $R = \|(a, b)\|_\infty$, les nouveaux paramètres a', b' correspondent à la pente de la droite (I_0p) , I_0 et p deviennent les nouveaux points d'appui inférieurs d'où $\mu' = a'x - b'y - \|(a, b)\|_\infty + 1$ et le nouveau point d'appui supérieur est $S_0 \stackrel{\text{déf}}{=} p - (b, a - 1)$.

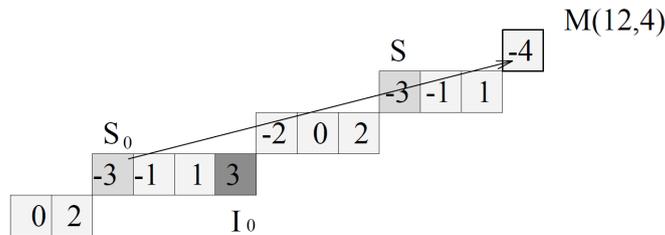


FIGURE 5.2 – Un exemple d'ajout d'un point M au bout d'un segment de paramètres $(2, 7, 3)$. Les restes $R - \mu$ sont représentés dans les pixels correspondant. Le point M est faiblement extérieur car $R - \mu = -4$ d'où $R = -1$. S_0 et M deviennent alors les nouveaux points d'appui supérieurs, I_0 devient point d'appui inférieur. Les nouveaux paramètres du segment sont enfin $(3, 10, -4)$.

Cet algorithme de reconnaissance de segment est alors linéaire et incrémental (l'ajout de chaque point s'effectue en $O(1)$). Son déroulé peut être interprété d'un point de vue combinatoire comme une descente dans l'arbre de Stern-Brocot, comme présenté dans [18]. Nous proposons dans la partie suivante un algorithme de reconnaissance de segment reposant entièrement sur l'arbre de Stern-Brocot.

5.2 Reconnaissance de segments par l'arbre de Stern-Brocot

5.2.1 Arbre de Stern-Brocot

Notre algorithme de reconnaissance de segment, présenté dans [33], recherche la pente du segment dans l'arbre de Stern-Brocot. Cet arbre a été défini indépendamment par M. Stern ([52]) et A. Brocot ([14]) au milieu du XIXe siècle. Il énumère toutes les fractions irréductibles positives et les présente sous forme d'arbre (voir Figure 5.3).

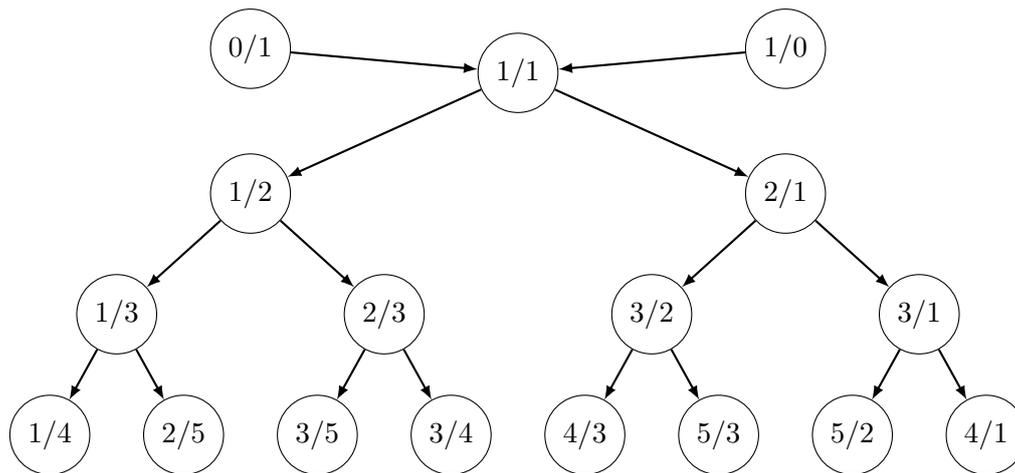


FIGURE 5.3 – Arbre de Stern-Brocot

On définit l'arbre B_n de Stern-Brocot tronqué à l'étage n par récurrence sur n :

- B_0 est constitué de 2 noeuds étiquetés $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ appelés entrées (on conviendra que la fraction $\frac{1}{0}$ correspond à une pente verticale) ;
- étant donné l'arbre tronqué B_n , on liste toutes les fractions qu'il contient par le parcours en profondeur pour l'ordre préfixe. Entre 2 fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on insère dans l'arbre la fraction $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{a+c}{b+d}$.

L'arbre B de Stern-Brocot est alors l'arbre obtenu en prenant l'union des arbres tronqués $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

L'addition \oplus de fractions, si chère à mes élèves et définie par $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{a+c}{b+d}$, correspond en réalité à l'addition des couples (a, b) et (c, d) . Ainsi, la somme \oplus des pentes correspond en réalité à une somme dans l'espace des vecteurs directeurs des droites. On confondra donc par la suite allégrement la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ et le couple (a, b) .

Théorème 5.2.1 (Stern-Brocot [52, 14]). *L'arbre de Stern-Brocot B obtenu par l'union des $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient exactement une fois chaque fraction irréductible de \mathbb{Q}_+ .*

Remarquons que l'on peut voir les irrationnels positifs dans l'arbre de Stern-Brocot, en considérant les descentes infinies dans l'arbre. Chaque irrationnel x correspond en effet exactement à un chemin infini dans l'arbre de Stern-Brocot, issu des comparaisons de x avec les différents sommets visités lors de la descente.

5.2.2 Algorithme naïf

Le principe de notre algorithme est alors de trouver la pente $\frac{a}{b}$ du segment S dans l'arbre de Stern-Brocot. Par symétrie et translation, on peut toujours supposer que S se situe dans le premier octant (ie vérifie $0 \leq a \leq b$) et a pour extrémité gauche $(0, 0)$, à savoir que $(0, 0)$ est le point de S avec l'abscisse la plus faible. Remarquons que, dès lors, les abscisses des points de S sont indicées sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ où $n \stackrel{\text{déf}}{=} |S|$. Nous proposons tout d'abord une version naïve de l'algorithme, avant de l'optimiser. Si le segment n'est ni horizontal ni diagonal (cas extrêmes), on commence par la pente $1/2$. A chaque étape de l'algorithme, on regarde des points p_{\min} et p_{\max} de produits scalaires minimum et maximum pour la pente a/b considérée,

et $\delta = (x, y) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} p_{\max} - p_{\min}$. Si $ax - by < b$, l'\u00e9cart entre le produit scalaire maximum et le minimum est suffisamment faible : la pente convient donc et on calcule le d\u00e9calage \u00e0 l'aide de p_{\min} . Sinon, pour savoir si la pente est trop faible ou trop forte, on regarde le signe des coordonn\u00e9es de δ . Si celui-ci est positif, p_{\max} est \u00e0 droite de p_{\min} : diminuer l'\u00e9cart de produit scalaire entre p_{\min} et p_{\max} demande donc de diminuer la pente, ce qui se fait par une descente \u00e0 gauche dans Stern-Brocot. De m\u00eame, si le signe des coordonn\u00e9es de δ est n\u00e9gatif, p_{\max} est \u00e0 gauche de p_{\min} donc on augmente la pente en allant \u00e0 droite dans l'arbre de Stern-Brocot. Remarquons que les coordonn\u00e9es de δ ont le m\u00eame signe, du fait que le segment est situ\u00e9 dans le premier octant.

Algorithme : Reconnaissance na\u00efve de segment

Entr\u00e9e : $S \subset \mathbb{Z}^2$

Sortie : D\u00e9cide si S est un segment du premier octant d'extr\u00e9mit\u00e9 $(0, 0)$ et renvoie le cas \u00e9ch\u00e2nt ses param\u00e8tres minimaux (a, b, μ) .

Reconnaissance-na\u00efve(S) :

si S est horizontal (resp. diagonal) **alors**

 | Renvoyer $(0, 1, 0)$ (resp. $(1, 1, 0)$) ;

$n \leftarrow |S|$;

si les abscisses de S ne sont pas indic\u00e9es par $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ **alors**

 | Renvoyer "Pas un segment" ;

 pente_{inf} $\leftarrow \frac{0}{1}$ (limite inf\u00e9rieure) ;

 pente_{sup} $\leftarrow \frac{1}{1}$ (limite sup\u00e9rieure) ;

$\frac{a}{b} \leftarrow \text{pente}_{\text{inf}} \oplus \text{pente}_{\text{sup}}$ (pente courante valant initialement $1/2$) ;

tant que $b < n$ **faire**

$p_{\min}, p_{\max} \leftarrow \text{Restes-extr\u00eames}(S, a, b)$ (points des restes minimaux et maximaux pour la pente a/b) ;

$\delta \leftarrow p_{\max} - p_{\min}$;

si $\langle \delta, (a, -b) \rangle < b$ (la pente a/b convient) **alors**

 | $\mu \leftarrow -\langle p_{\min}, (a, -b) \rangle$;

 | Renvoyer a, b, μ

si δ a une abscisse > 0 (la pente actuelle est trop forte) **alors**

 | pente_{sup} $\leftarrow \frac{a}{b}$;

si δ a une abscisse < 0 (la pente actuelle est trop faible) **alors**

 | pente_{inf} $\leftarrow \frac{a}{b}$;

$\frac{a}{b} \leftarrow \text{pente}_{\text{inf}} \oplus \text{pente}_{\text{sup}}$ (nouvelle pente courante) ;

Renvoyer "Pas un segment" ;

Algorithme : Restes extr\u00eames

Entr\u00e9e : $S \subset \mathbb{Z}^2$, a, b param\u00e8tres de la pente test\u00e9e

Sortie : p_{\min}, p_{\max} points de S ayant les restes minimaux et maximaux avec la pente $\frac{a}{b}$

Restes-extr\u00eames(S, a, b) :

$p_{\min}, p_{\max} \leftarrow S[0], S[0]$;

pour i allant de 1 \u00e0 $n - 1$ **faire**

$p \leftarrow S[i]$;

si $\langle p, (a, -b) \rangle < \langle p_{\min}, (a, -b) \rangle$ **alors**

 | $p_{\min} \leftarrow p$;

si $\langle p, (a, -b) \rangle > \langle p_{\max}, (a, -b) \rangle$ **alors**

 | $p_{\max} \leftarrow p$;

Renvoyer p_{\min}, p_{\max} ;

Regardons par exemple le déroulé de l'algorithme naïf (voir Figure 5.4) sur le segment de paramètres $(5, 8, 3)$ et de longueur 11. L'algorithme commence tout d'abord par la pente $\frac{1}{2}$ dans l'arbre de Stern-Brocot. Le reste minimal de -3 est obtenu en $(9, 6)$ et le reste maximal de 0 est obtenu en $(0, 0)$. Donc $\delta = (-9, -6)$. La différence de restes est de 3 qui est plus grand que 2 donc la pente ne convient pas. Comme δ est à coordonnées négatives, on augmente la pente en descendant à droite dans l'arbre pour arriver à une pente $\frac{2}{3}$. Pour la pente $\frac{2}{3}$, $\delta = (3, 1)$. La pente ne convient toujours pas (la différence de restes est de 3 qui est ≥ 3) et δ est positif donc la pente est trop forte : on descend à gauche dans l'arbre vers $\frac{3}{5}$. Pour cette nouvelle pente, $\delta = (-5, -4)$, la différence de restes est de 5 qui est ≥ 5 . Comme δ est négatif, on augmente la pente en descendant à droite vers $\frac{5}{8}$. Enfin, pour $\frac{5}{8}$, la différence de restes est de 7 qui est strictement plus petit que 8 donc la pente convient. Le décalage est alors l'opposé du reste minimal, donc les paramètres du segment sont $(5, 8, 3)$.

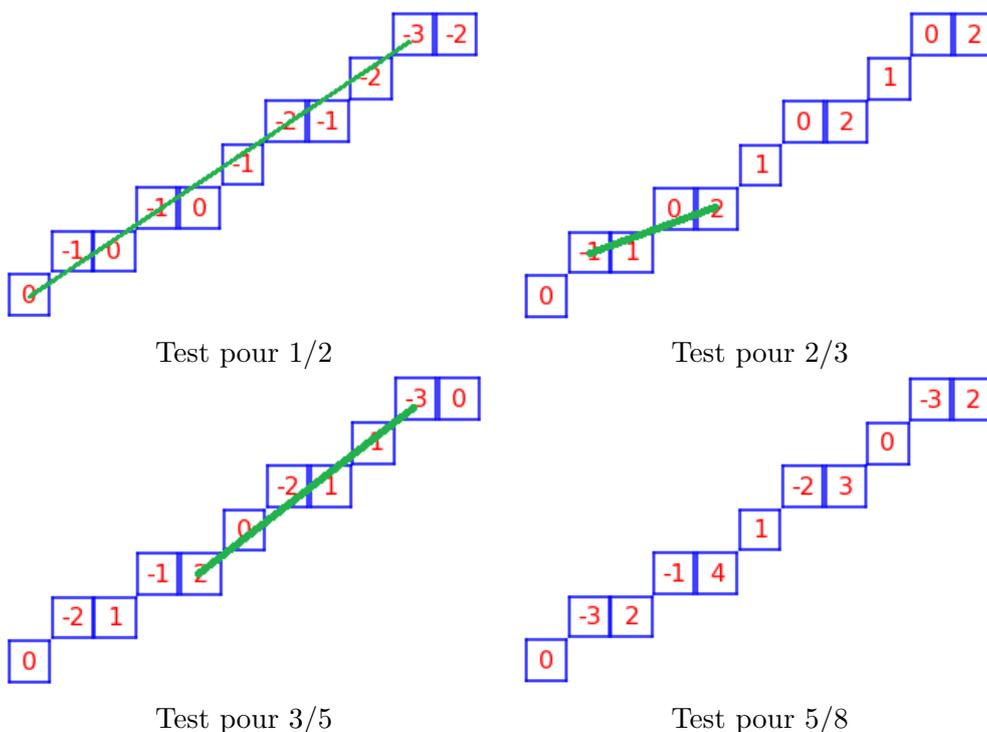


FIGURE 5.4 – Déroulé de l'algorithme naïf sur le segment de paramètres $(5, 8, 3)$ et de longueur 11

L'algorithme naïf de reconnaissance de segment est en réalité un cas particulier d'un algorithme plus général qui décide si un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^2$ est un morceau de droite naïve (à savoir un sous-ensemble fini de droite naïve). Remarquons que l'on n'exige pas ici que S soit connexe : S peut ainsi être n'importe quel ensemble fini de points. On se restreint au cas où S est inclus dans le premier octant et a $(0, 0)$, les autres cas s'en déduisant par symétrie et translation.

Algorithme : Reconnaissance de morceau de droite

Entrée : $S \subset \mathbb{Z}^2$ dans le premier octant

Sortie : Décide si S est un morceau de droite du premier octant d'extrémité $(0, 0)$ et renvoie le cas échéant ses paramètres minimaux (a, b, μ) .

Reconnaissance-naïve(S) :

Trier S par abscisses croissantes ;

si S a 2 points de même abscisse **alors**

 | Renvoyer "Morceau non conforme" ;

si S est horizontal (resp. diagonal) **alors**

 | Renvoyer $(0, 1, 0)$ (resp. $(1, 1, 0)$) ;

$n \leftarrow |S|$;

$D \leftarrow$ abscisse de $S[n - 1]$ (taille de la boîte englobante) ;

$\text{pente}_{\text{inf}} \leftarrow \frac{0}{1}$ (limite inférieure) ;

$\text{pente}_{\text{sup}} \leftarrow \frac{1}{1}$ (limite supérieure) ;

$\frac{a}{b} \leftarrow \text{pente}_{\text{inf}} \oplus \text{pente}_{\text{sup}}$ (pente courante valant initialement $1/2$) ;

tant que $b < D$ **faire**

 | $p_{\min}, p_{\max} \leftarrow$ Restes-extrémaux(S, a, b) (points des restes minimaux et maximaux pour la pente a/b) ;

 | $\delta \leftarrow p_{\max} - p_{\min}$;

 | **si** $\langle \delta, (a, -b) \rangle < b$ (la pente a/b convient) **alors**

 | $\mu \leftarrow -\langle p_{\min}, (a, -b) \rangle$;

 | Renvoyer a, b, μ

 | **si** δ a une abscisse > 0 (la pente actuelle est trop forte) **alors**

 | $\text{pente}_{\text{sup}} \leftarrow \frac{a}{b}$;

 | **si** δ a une abscisse < 0 (la pente actuelle est trop faible) **alors**

 | $\text{pente}_{\text{inf}} \leftarrow \frac{a}{b}$;

 | $\frac{a}{b} \leftarrow \text{pente}_{\text{inf}} \oplus \text{pente}_{\text{sup}}$ (nouvelle pente courante) ;

Renvoyer "Morceau non conforme" ;

Algorithme : Restes extrémaux

Entrée : $S \subset \mathbb{Z}^2$, a, b paramètres de la pente testée

Sortie : p_{\min}, p_{\max} points de S de restes minimaux et maximaux avec la pente $\frac{a}{b}$

Restes-extrémaux(S, a, b) :

$p_{\min}, p_{\max} \leftarrow S[0], S[0]$;

pour i allant de 1 à $n - 1$ **faire**

 | $p \leftarrow S[i]$;

 | **si** $\langle p, (a, -b) \rangle < \langle p_{\min}, (a, -b) \rangle$ **alors**

 | $p_{\min} \leftarrow p$;

 | **si** $\langle p, (a, -b) \rangle > \langle p_{\max}, (a, -b) \rangle$ **alors**

 | $p_{\max} \leftarrow p$;

Renvoyer p_{\min}, p_{\max} ;

Théorème 5.2.2. *L'algorithme de reconnaissance de morceau de droite décide si un ensemble fini S du premier octant est un morceau de droite d'extrémité $(0, 0)$, renvoie le cas échéant ses paramètres minimaux, et termine en $O(n(\ln(n) + h))$ où $n = |S|$ et h est la hauteur des paramètres de S dans l'arbre de Stern-Brocot.*

Corollaire 5.2.3. *L'algorithme naïf de reconnaissance de segment décide si un ensemble fini S du premier octant est un segment naïf d'extrémité $(0, 0)$, renvoie le cas échéant ses paramètres minimaux, et termine en $O(nh)$ où $n = |S|$ et h est la hauteur des paramètres de S dans l'arbre de Stern-Brocot.*

Démonstration. **l'algorithme termine** car $D - b$ est un variant strictement décroissant à valeurs positives.

Correction des paramètres renvoyés : montrons tout d'abord que si l'algorithme renvoie (a, b, μ) alors (a, b, μ) sont des paramètres du morceau de droite S . Si $b = 1$ alors l'algorithme a conclu sur un morceau horizontal ou diagonal d'où le résultat. Sinon, appelons p_{\min}, p_{\max} la sortie de Restes-extrémaux(S, a, b). On a dès lors $\langle p_{\max} - p_{\min}, (a, -b) \rangle < b$ et $\mu = -\langle p_{\min}, (a, -b) \rangle$. Soit p un point de S . Par correction évidente de Restes-extrémaux, $\langle p_{\min}, (a, -b) \rangle \leq \langle p, (a, -b) \rangle \leq \langle p_{\max}, (a, -b) \rangle$. Donc $0 \leq \langle p, (a, -b) \rangle - \langle p_{\min}, (a, -b) \rangle \leq \langle p_{\max}, (a, -b) \rangle - \langle p_{\min}, (a, -b) \rangle < b$. Donc $0 \leq \langle p, (a, -b) \rangle + \mu < \|(a, b)\|_{\infty}$, ce qui prouve bien que S est un morceau de droite de paramètres (a, b, μ) . Notamment, si S n'est pas un morceau de droite, l'algorithme renvoie bien "Pas un segment".

Reste à montrer que si S est un morceau de droite alors l'algorithme renvoie ses paramètres (a_S, b_S, μ_S) minimaux. Si S est horizontal ou diagonal, le résultat est trivial. Sinon, on montre l'**invariant** suivant : $\text{pente}_{\text{inf}} < \frac{a_S}{b_S} < \text{pente}_{\text{sup}}$. L'invariant est vrai initialement car S est dans le premier octant et n'est ni horizontal ni diagonal. Supposons l'invariant vérifié et effectuons une boucle supplémentaire pour la pente courante $\frac{a}{b}$. Notons p_{\min}, p_{\max} la sortie de Restes-extrémaux(S, a, b) et posons $\delta = (x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} p_{\max} - p_{\min}$. Notons tout d'abord que, comme S est dans le premier octant, l'abscisse x de δ est non nulle. Comme $p_{\min} = (x_{\min}, y_{\min})$ et $p_{\max} = (x_{\max}, y_{\max})$ sont des points de S , $0 \leq a_S x_{\min} - b_S y_{\min} + \mu_S < b_S$ et $0 \leq a_S x_{\max} - b_S y_{\max} + \mu_S < b_S$. En soustrayant les 2 identités, on en déduit donc $-b_S < a_S x - b_S y < b_S$. Donc $\frac{a_S}{b_S} x - y < 1$. De plus, $\langle \delta, (a, -b) \rangle \geq b$ donc $ax - by \geq b$ d'où $\frac{a}{b} x - y \geq 1 > \frac{a_S}{b_S} x - y$. Donc $\frac{a}{b} > \frac{a_S}{b_S}$. Si $x > 0$ alors $\frac{a}{b} > \frac{a_S}{b_S}$ donc $\frac{a_{\text{inf}}}{b_{\text{inf}}} < \frac{a_S}{b_S} < \frac{a}{b}$ ce qui prouve l'invariant. Si $x < 0$ alors $\frac{a}{b} < \frac{a_S}{b_S}$ donc $\frac{a}{b} < \frac{a_S}{b_S} < \frac{a_{\text{sup}}}{b_{\text{sup}}}$ ce qui prouve l'invariant.

Fin de la preuve de correction : l'invariant prouvé, remarquons que $b_S < D$. En effet, d'après [19], la pente $\frac{a_S}{b_S}$ est caractérisée à partir de la pente entre 2 points d'appui inférieurs (ou supérieurs) du segment recouvrant S et d'abscisses dans $\llbracket 0, D - 1 \rrbracket$. Le dénominateur b_S de cette pente ne peut donc excéder la plus grande différence d'abscisse dans le segment, à savoir D . Donc la fraction $\frac{a_S}{b_S}$ apparaît dans l'arbre de Stern-Brocot. La fraction $\frac{a_S}{b_S}$ sera donc, par l'invariant, nécessairement visitée et l'algorithme conclura alors.

Minimalité : enfin, montrons que les paramètres (a, b, μ) renvoyés sont bien les paramètres minimaux (a_S, b_S, μ_S) du morceau de droite. Soit $\frac{a'}{b'}$ l'ancêtre commun de $\frac{a}{b}$ et $\frac{a_S}{b_S}$ dans l'arbre de Stern-Brocot. $\frac{a'}{b'}$ est donc combinaison convexe de $\frac{a}{b}$ et $\frac{a_S}{b_S}$, ie $\frac{a'}{b'} = \lambda_1 \frac{a}{b} + \lambda_2 \frac{a_S}{b_S}$ (avec $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$). Soit $(x, y) \in S$. $0 \leq \frac{a}{b} x + \frac{\mu}{b} - y < 1$ et $0 \leq \frac{a_S}{b_S} x + \frac{\mu_S}{b_S} - y < 1$. En prenant la combinaison convexe des 2 équations, on obtient $0 \leq \left(\lambda_1 \frac{a}{b} + \lambda_2 \frac{a_S}{b_S} \right) x + \left(\lambda_1 \frac{\mu}{b} + \lambda_2 \frac{\mu_S}{b_S} \right) - y < 1$. Ainsi, en posant $\mu' \stackrel{\text{déf}}{=} b' \left(\lambda_1 \frac{\mu}{b} + \lambda_2 \frac{\mu_S}{b_S} \right)$, on obtient $0 \leq \frac{a'}{b'} x + \frac{\mu'}{b'} - y < 1$. Donc (a', b', μ') sont des paramètres pour S . Or ces paramètres ont été visités par l'algorithme donc $(a, b, \mu) = (a', b', \mu')$. De plus, comme (a', b', μ') est un ancêtre de (a_S, b_S, μ_S) , $b' \leq b_S$ donc, par minimalité, $(a_S, b_S, \mu_S) = (a', b', \mu')$. Donc les paramètres renvoyés par l'algorithme sont bien minimaux.

Complexité : l'algorithme descend dans l'arbre de Stern-Brocot à chaque itération de boucle. Le nombre d'itérations de boucle est donc de $O(h)$. Dans une boucle, la seule partie coûteuse est l'appel à la fonction Restes-extrémaux qui est un parcours de tableau d'où un coût en $O(n)$. L'algorithme demande donc $O(nh)$ opérations pour la descente dans l'arbre, et $O(n \ln(n))$ opérations pour le tri initial. On obtient donc une complexité totale en $O(n(\ln(n) + h))$.

La complexité annoncée en $O(n(\ln(n) + h))$ mérite quelques commentaires. Tout d'abord, en pire cas, il existe des fractions $\frac{p}{q}$ à profondeur $O(q)$ dans l'arbre de Stern-Brocot. Par exemple, la fraction $\frac{1}{q}$ se situe à profondeur q dans l'arbre, et est obtenue en se déplaçant toujours à gauche dans l'arbre. L'algorithme a donc une complexité en pire cas en $O(nD)$ où $n = |S|$ et D est la taille de la plus petite boîte englobante. Toutefois, de nombreuses fractions $\frac{p}{q}$ sont beaucoup moins profondes dans l'arbre de Stern-Brocot. Par exemple, en considérant la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la fraction $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ se trouve à profondeur n . Cette fraction est obtenue en alternant les descentes à gauche et à droite dans l'arbre. La profondeur moyenne d'une fraction $\frac{p}{q}$ dans l'arbre de Stern-Brocot, où l'on prend $1 \leq p < q \leq N$ uniformément avec $p \wedge q = 1$, est en $O(N \ln^2(N))$, comme démontré via l'algorithme d'Euclide soustractif dans [55]. La complexité en moyenne de notre algorithme est donc en $O(n \ln^2(D))$ où $n = |S|$ et où D est la taille de la plus petite boîte englobant S . \square

5.2.3 Algorithme incrémental

La version naïve de l'algorithme de reconnaissance de segment n'est pas particulièrement intéressante en terme de complexité et n'est de plus pas une méthode incrémentale. Elle s'optimise toutefois relativement bien à partir des observations suivantes :

- on peut ajouter les points du segment un à un et calculer les paramètres du nouveau segment en repartant des anciens paramètres dans l'arbre de Stern-Brocot : la méthode devient alors incrémentale ;
- rien ne sert de calculer les restes pour tous les points du segment. Il suffit en effet de s'intéresser aux points d'appui extrémaux : un point d'appui inférieur (resp. supérieur) est dit extrémal ssi il est d'abscisse minimale ou maximale parmi les points d'appui inférieurs (resp. supérieurs). Les restes associés aux points d'appui inférieurs et supérieurs extrémaux (que l'on peut calculer en temps constant à partir des paramètres courants) suffisent en effet à garantir qu'une équation est satisfaite pour tous les points du segment (par correction de l'algorithme d'I. Debled-Rennesson [19]). Il faut donc au plus calculer un nombre constant de restes dans la fonction Restes-extrémaux : l'appel se fait donc en $O(1)$. La complexité chute donc à $O(n + h) = O(n)$.

Algorithme : Algorithme incrémental

Entrée : $S \subset \mathbb{Z}^2$, ensemble de points indicés de 0 à $n - 1$ dans le premier octant

Sortie : Décide si S est un segment et renvoie le cas échéant ses paramètres minimaux (a, b, μ) .

Reconnaissance-incrémentale(S) :

$i \leftarrow 0$ (indice maximal des points considérés) ;

tant que $i < n$ et $S[0, i]$ est horizontal ou diagonal **faire**

$i \leftarrow i + 1$;

si $i = n$ **alors**

 Renvoyer $(0, 1, 0)$ ou $(1, 1, 0)$ selon que le morceau considéré est horizontal ou diagonal ;

sinon

$test \leftarrow \{(0, 0), (i - 1, 0)\}$ ou $\{(0, 0), (i - 1, i - 1)\}$ selon le cas horizontal ou diagonal ;

$pente_{inf} \leftarrow \frac{0}{1}$ (limite inférieure) ;

$pente_{sup} \leftarrow \frac{1}{1}$ (limite supérieure) ;

$\frac{a}{b} \leftarrow pente_{inf} \oplus pente_{sup}$ (pente courante valant initialement 1/2) ;

$\mu \leftarrow 0$;

tant que $i < n$ (on n'a pas encore considéré tout le segment) **faire**

$correct \leftarrow$ FAUX (indique si la pente actuelle convient) ;

tant que $b < n$ et non correct **faire**

$p_{min}, p_{max} \leftarrow$ Restes-extrémaux($a, b, test \cup \{S[i]\}$) (points des restes minimaux et maximaux pour la pente a/b) ;

$\delta \leftarrow p_{max} - p_{min}$;

si $\langle \delta, (a, -b) \rangle < b$ (la pente a/b convient) **alors**

$\mu \leftarrow -\langle p_{min}, (a, -b) \rangle$;

$test \leftarrow$ ensemble des points d'appui extrémaux de $S[0, i]$;

$i \leftarrow i + 1$ (la pente convient, on passe au point suivant) ;

$correct \leftarrow$ VRAI ;

si non correct alors

si δ a une abscisse > 0 (la pente actuelle est trop forte) **alors**

$pente_{sup} \leftarrow \frac{a}{b}$;

si δ a une abscisse < 0 (la pente actuelle est trop faible) **alors**

$pente_{inf} \leftarrow \frac{a}{b}$;

$\frac{a}{b} \leftarrow pente_{inf} \oplus pente_{sup}$ (nouvelle pente courante) ;

si non correct et $b \geq n$ **alors**

 Renvoyer "Pas un segment"

Renvoyer a, b, μ

Algorithme : Restes-extrémaux

Entrée : a, b paramètres de la pente testée, $test$ ensemble des points à tester

Sortie : p_{min}, p_{max} points de $test$ ayant les restes minimaux et maximaux avec la pente $\frac{a}{b}$

Restes-extrémaux($test, a, b$) :

$p_{min}, p_{max} \leftarrow$ premier élément de $test$;

pour p dans $test$ **faire**

si $\langle p, (a, -b) \rangle < \langle p_{min}, (a, -b) \rangle$ **alors**

$p_{min} \leftarrow p$;

si $\langle p, (a, -b) \rangle > \langle p_{max}, (a, -b) \rangle$ **alors**

$p_{max} \leftarrow p$;

Renvoyer p_{min}, p_{max} ;

Regardons le déroulé de l'algorithme sur un exemple en Figure 5.5. Les nombres correspondent aux produits scalaires avec la pente mais seuls les restes des points d'appui extrêmes (en rouge et vert) sont considérés par l'algorithme. Le point magenta correspond au point courant qui est ajouté incrémentalement au segment.

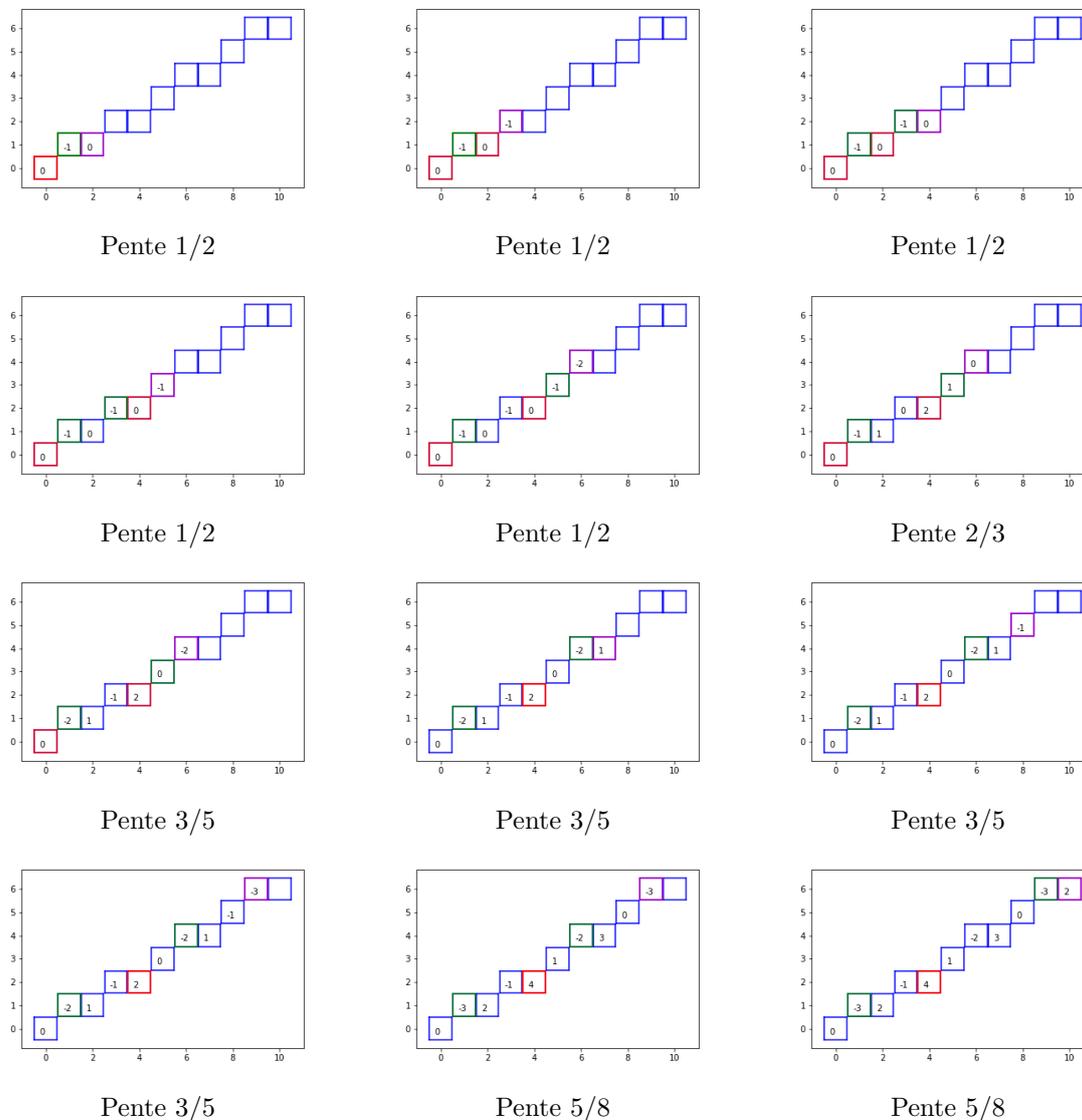


FIGURE 5.5 – Déroulé de l'algorithme incrémental sur le segment de paramètres $(5, 8, 3)$ et de longueur 11.

Théorème 5.2.4. *L'algorithme incrémental de reconnaissance décide si un ensemble fini S du premier octant est un segment, renvoie le cas échéant ses paramètres minimaux, et termine alors en $O(n + h)$ où $n = |S|$ et h est la hauteur des paramètres de S dans l'arbre de Stern-Brocot.*

Remarquons enfin que, dans le cas d'une droite de pente irrationnelle (donc d'un objet infini), notre algorithme emprunte dans l'arbre de Stern-Brocot le chemin infini menant à cet irrationnel.

5.3 Le problème de reconnaissance de morceaux d'hyperplans

Notre algorithme de reconnaissance de segment naïfs égale les algorithmes de l'état de l'art. Nous cherchons maintenant à généraliser notre algorithme en toute dimension finie. Le problème de reconnaissance de plans ou d'hyperplans est toutefois nettement plus complexe. Le passage à la dimension 3 crée une explosion combinatoire dans l'ensemble des motifs observables et de nombreux arguments disparaissent :

- il n'y a plus d'ordre canonique pour le traitement des points d'un morceau de plan ;
- l'ensemble des points d'appui inférieurs (ou supérieurs) a une structure plus complexe (voir Figure 5.6) ;
- la représentation par vecteur directeur demande de considérer 2 vecteurs, et la notion de minimalité qui en résulte (concernant l'aire de la maille du réseau) est plus complexe ;

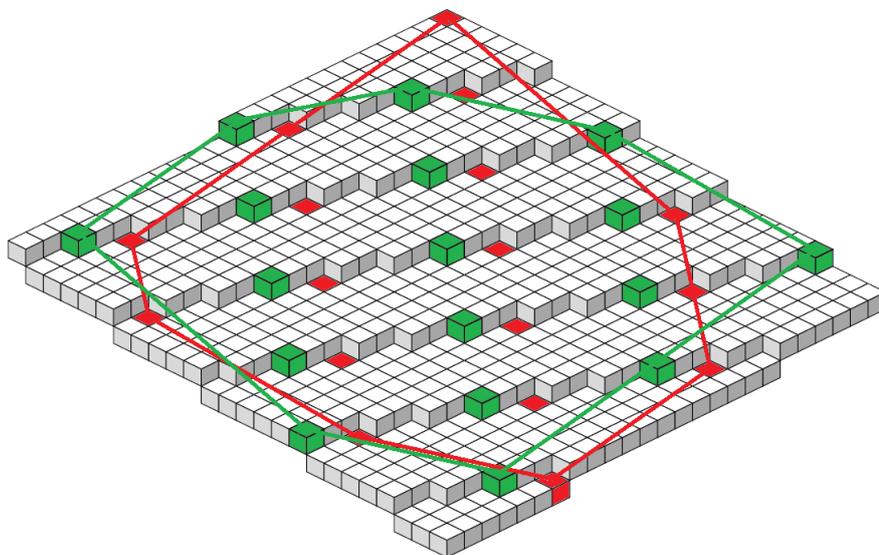


FIGURE 5.6 – Représentation des points d'appui d'un morceau de plan en 3D. Les points d'appui supérieurs (resp. inférieurs) sont en vert (resp. en rouge). Les 2 polygones représentés représentent les enveloppes convexes des points d'appui inférieurs et supérieurs.

De manière plus générale, la dimension 3 représente souvent un mur difficile à franchir en géométrie discrète. Dans le cas de la connexité, nous avons vu au chapitre 2 que savoir si un hyperplan est connexe par faces est nettement plus complexe en dimension 3 qu'en dimension 2. Ce mur de la dimension 3 est d'ailleurs très souvent la dernière marche à franchir pour contempler le comportement des hyperplans en toute dimension finie. On notera toutefois quelques rares exemples d'exceptions à cette règle :

- les connexités par facettes (voir chapitre 3), où un autre mur se dresse à la dimension 5 ;
- la notion de quasi- r -régularité présentée dans [47], et utilisée notamment dans l'étude des transformations rigides (voir notamment [44]), ne passe pas le mur de la dimension 4.

Problème 5.3.1 (Reconnaissance). *Etant donné un ensemble $S \subset \mathbb{Z}^d$ fini, on souhaite décider si S est un morceau d'hyperplan, ie s'il existe v, μ tel que $S \subset \mathbb{P}(v, \mu)$. Le cas échéant, on souhaite calculer de tels v, μ entiers avec $\|v\|_\infty$ minimale.*

De nombreux algorithmes ont été mis au point pour reconnaître des morceaux d'hyperplans en dimension quelconque. Les articles cités présentent en général, par souci de simplicité, une

solution pour la dimension 3. Toutefois, ces algorithmes s'étendent naturellement en dimension finie quelconque. Nous parlons ici, en quelques lignes et de manière non exhaustive, de certains de ces algorithmes. Un panorama plus large est présenté dans [13].

L'algorithme d'I. Debled-Rennesson et de J.-P. Réveillès admet une extension en 3D, présentée dans [20, 42]. Cette généralisation de 1994 reprend l'idée d'un algorithme incrémental reposant sur les points d'appui d'un morceau d'hyperplan rectangulaire : en considérant un morceau S d'un plan naïf $\mathbb{P}(v, \mu)$ et $x \in S$, on dit que x est un point d'appui inférieur (resp. supérieur) ssi $\langle x, v \rangle + \mu = 0$ (resp. $= \|v\|_\infty - 1$). Notons que la notion de point d'appui inférieur et supérieur change ici par rapport à la définition 2D du fait que nous considérons un vecteur normal et plus un vecteur directeur. Une représentation des points d'appui est donnée en Figure 5.6. Toutefois, le nombre de possibilités à étudier est plus grand. En dimension 2, la droite est caractérisée par :

- soit 2 points d'appui supérieurs et 1 point d'appui inférieur ;
- soit 1 point d'appui supérieurs et 2 points d'appui inférieurs.

Ces deux cas sont symétriques et se résolvent de la même manière. De plus, la donnée de 2 points d'appui supérieurs ou de 2 points d'appui inférieurs permet de définir la droite support. En dimension 3, un morceau de plan est caractérisé par :

- soit 3 points d'appui supérieurs et 1 point d'appui inférieur ;
- soit 2 points d'appui supérieurs et 2 points d'appui inférieurs ;
- soit 1 point d'appui supérieur et 3 points d'appui inférieurs ;

avec des contraintes de non colinéarités. Les cas (3, 1) et (1, 3) permettent de définir directement le plan support. Le cas (2, 2) est plus subtil car chaque ensemble de 2 points d'appui donne une droite support. Ajoutons de plus qu'en 3D, il est possible qu'un point fortement extérieur puisse être ajouté au plan, ce qui n'est pas le cas en 2D, comme signalé dans [19]. Cet algorithme s'étend malheureusement difficilement en dimensions supérieures : il faudrait en effet traiter à la main les divers cas de figure, déjà complexes en dimension 3. De plus, l'algorithme ne convient que pour des morceaux de plans rectangulaires.

En 2005, Y. Gérard, I. Debled-Rennesson et P. Zimmermann ont proposé dans [29] un algorithme de reconnaissance de morceaux d'hyperplans basé sur la notion de corde. Une corde de S y est défini comme un élément de $S - S$, à savoir un vecteur $\delta = y - x$ pour $x, y \in S$. Nous réutilisons d'ailleurs cette notion de corde dans notre algorithme étendu de reconnaissance par Stern-Brocot. L'article caractérise alors les morceaux d'hyperplans naïfs par leur épaisseur géométrique : on s'intéresse au polytope $P \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Conv}(S - S)$ (voir Figure 5.7 issue de [29]) et on note H le point de $\text{Vect}(e_d) \cap P$ de plus grande coordonnée selon e_d ; l'épaisseur géométrique de S est alors $\tau_d(S) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle H, e_d \rangle$. Un résultat majeur de l'article énonce que $\tau_d(S) < 1$ ssi S est un morceau d'hyperplan de vecteur normal v vérifiant $v_d = \|v\|_\infty$. Il est ensuite possible de calculer des caractéristiques de l'hyperplan en retrouvant la face du polytope P contenant le point H . Cet algorithme a l'avantage de pouvoir traiter des ensembles finis quelconques en dimension finie quelconque. Les caractéristiques renvoyées par l'algorithme ne sont toutefois pas minimales. De plus, l'algorithme a une complexité en $O(n^7)$ pour la 3D, et en $O(n^{2d+1})$ en dimension quelconque.

En 2008, E. Charrier et L. Buzer ont proposé dans [17] un algorithme efficace de reconnaissance fondé sur l'optimisation linéaire. Décider si un ensemble fini $S \subset \mathbb{Z}^d$ est un morceau d'hyperplan naïf peut s'exprimer via un ensemble de contraintes affines. On cherche ainsi $\mu \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $\forall x \in S, 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \|v\|_\infty$. On peut également normaliser le problème en exigeant par exemple $\|v\|_\infty = 1$. Bien que l'on puisse utiliser l'algorithme du simplexe sur ce système de contraintes (on aurait alors une complexité exponentielle), l'article propose une étude de l'ensemble des solutions qui permet de faire chuter la complexité à $O(n \ln(D))$ où

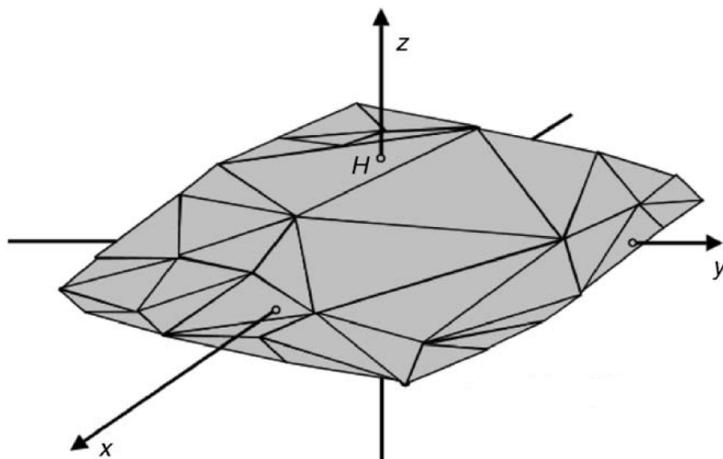


FIGURE 5.7 – Enveloppe convexe P de l'ensemble des cordes. Le point H est le point de $(Oz) \cap P$ de plus grande coordonnée selon z .

$n \stackrel{\text{déf}}{=} |S|$ et où D désigne la taille de la plus petite boîte englobant S . Cet algorithme possède ainsi une complexité extrêmement basse mais ne permet malheureusement pas de connaître les paramètres minimaux du morceau d'hyperplan considéré.

Enfin, une série d'articles sur le sondage de plan a été initiée en 2015 par J.-O. Lachaud, X. Provençal et T. Roussillon dans [37]. On s'intéresse à un hyperplan naïf $\mathbb{P}(v, \mu)$ avec v, μ entiers. L'algorithme considère un oracle décidant, étant donné un point $x \in \mathbb{Z}^d$, si x est ou non dans $\mathbb{P}(v, \mu)$. À partir de cet oracle, et d'une borne M sur $\|v\|_\infty$, l'algorithme sonde certains points de l'espace et maintient un tétraèdre qui permet de calculer une approximation de la normale de l'hyperplan (voir Figure 5.8). À la fin de l'exécution, l'algorithme renvoie un tétraèdre caractérisant totalement le plan. Le sondage de plans a l'avantage d'opérer de manière locale, d'avoir une complexité en $O(\|v\|_\infty \ln(M))$ et d'avoir un déroulé nous informant sur les caractéristiques géométriques locales de l'hyperplan. L'algorithme permet également de reconnaître des morceaux d'hyperplans non naïfs. Remarquons que, sans la borne M donnant le critère d'arrêt, l'algorithme converge à l'infini vers la normale, même dans le cas irrationnel. Toutefois, si l'on considère un morceau de plan fini, l'algorithme sonde ultimement des points hors de la zone du morceau et n'aboutit donc qu'à une approximation de la solution. Cette méthode ne permet notamment pas de conclure lorsque l'entrée donnée n'est pas un morceau d'hyperplan. Une version améliorée, utilisant un parallélépipède au lieu d'un tétraèdre, a été proposée en 2020 dans [35]. Enfin, de nombreuses autres versions des algorithmes de sondage de plans ont été écrites, utilisant des tétraèdres avec un sommet fixe (voir par exemple [36]). Ces versions ont toutefois l'inconvénient d'exiger que le sommet de départ soit un point d'appui inférieur. Un tel point n'est malheureusement pas trouvable dans un plan infini sans connaître a priori quelques informations sur ses caractéristiques (on peut notamment y arriver si on suppose $\mu = 0$). L'algorithme que nous proposons possède quelques inconvénients en commun avec l'algorithme originel de sondage de plans, notamment celui de dépassement de morceau de plan dont nous parlons dans la section concernée.

Enfin, notons qu'il existe également des algorithmes de reconnaissance de configurations sturmiennes de dimension quelconques en dynamique symbolique. Par exemple, l'étude des configurations sturmiennes en dimension finie quelconque de S. Barbieri et S. Labbé dans [6], permet de déduire un algorithme de reconnaissance des motifs finis sturmiens. On peut également noter le travail de T. Fernique, présenté dans sa thèse [26]. L'idée est principalement

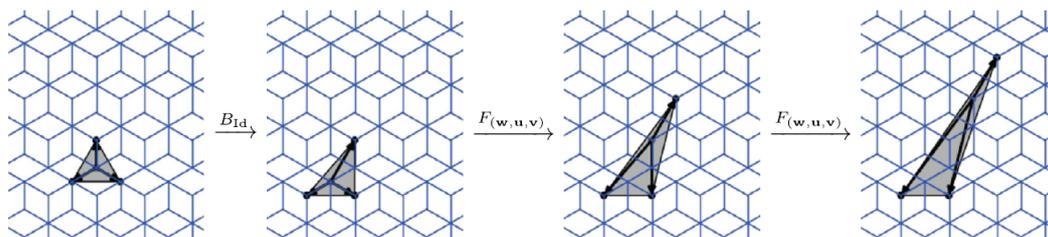


FIGURE 5.8 – Un déroulé de l’algorithme original de sondage de plan, d’après [36]

d’utiliser la notion de substitution pour des configurations en dimension finie quelconque afin de trouver, par désubstitution, l’équation de l’hyperplan.

5.4 Arbre de Stern-Brocot étendu et algorithme de reconnaissance

Afin de généraliser notre algorithme de reconnaissance en toute dimension finie, il est nécessaire de disposer d’un arbre de Stern-Brocot adapté à la dimension d . Un tel arbre a été obtenu en 2012 par H. Lennerstad dans [40]. L’arbre présenté énumère ainsi les d -uplets d’entiers naturels premiers entre eux dans leur ensemble. Au lieu d’utiliser 2 points extrémités comme précédemment, on en utilise d . Ces points sont représentés en forme de $(d - 1)$ -simplexe comme suit (une illustration d’une étape de construction de l’arbre de Stern-Brocot en 3D est donnée en Figure 5.9) :

- initialement, les d extrémités sont les points e_i de la base canonique de \mathbb{Z}^d ;
- étant données d points d’extrémités p_1, \dots, p_d (affinement indépendants dans \mathbb{R}^{d-1} par induction sur l’arbre), on construit le $(d - 1)$ -simplexe Γ d’extrémités p_1, \dots, p_d ;
- étant donnée une permutation σ de \mathfrak{S}_d , on considère le simplexe $\Gamma[\sigma]$ formé des points q_1, \dots, q_d où $q_j \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^j p_{\sigma(i)}$;
- Les fils du simplexe Γ dans l’arbre sont alors les simplexes $\Gamma[\sigma]$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_d$.

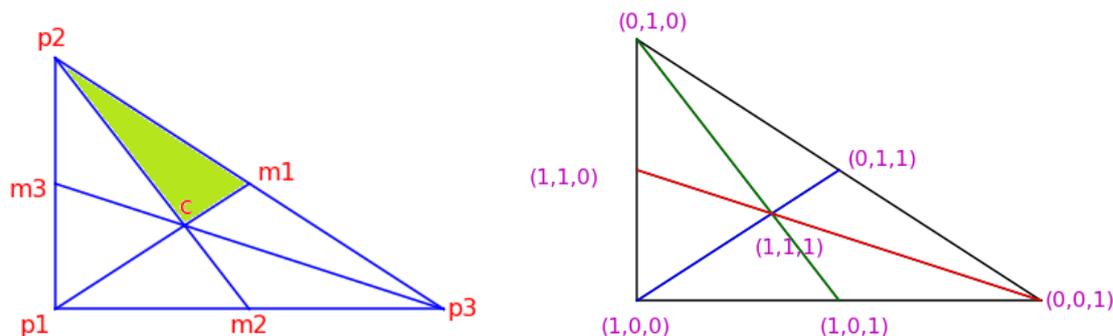


FIGURE 5.9 – À gauche : une étape de la construction de l’arbre en dimension 3. Les points p_1, p_2, p_3 sont les extrémités du simplexe. Les points m_i représentent les points $p_{i+1} + p_{i+2}$ (où les indices sont pris modulo 3). Le point c représente $p_1 + p_2 + p_3$. La permutation σ telle que $\sigma(i) = (i + 1) \bmod 3$ permet alors d’obtenir le simplexe d’extrémités $p_{\sigma(1)} = p_2$, $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} = p_2 + p_3 = m_1$ et $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} + p_{\sigma(3)} = c$, à savoir le triangle p_2, m_1, c colorié dans la figure.

À droite : un exemple avec l’initialisation à $p_i = e_i$.

Le premier étage de l'arbre de Stern-Brocot est représenté en Figure 5.9 et par la suite sous forme normalisée. Comme deux vecteurs normaux colinéaires représentent le même plan, on peut projeter les vecteurs v en exigeant $\|v\|_1 = 1$. Faire la somme d'un groupe de vecteurs revient alors géométriquement à considérer leur barycentre.

Par symétrie, on peut supposer que le vecteur normal v du morceau d'hyperplan étudié est à coordonnées positives. Les d extrémités initiales de l'arbre de Stern-Brocot sont alors les vecteurs e_i de la base canonique. Maintenant que l'arbre de Stern-Brocot nous offre une structure d'exploration adaptée pour chercher les paramètres de nos plans, la question est de savoir y descendre. En effet, étant données d extrémités de l'arbre, il nous faut décider dans lequel des $d!$ sous-arbres se rendre. Par exemple, initialement, la permutation à choisir est la permutation de tri des coordonnées. Dans le cas de la dimension 2, le critère de descente s'appuyait sur une corde δ de la structure. Nous avons toutefois pu remarquer que cette information n'était pas suffisante dans le cas général. En effet, il nous faut choisir parmi $d!$ fils, et s'intéresser à une unique corde ne suffit alors pas. Nous proposons ici et dans [33] une méthode reposant sur la notion de séparation par les cordes dont une définition est donnée ci-après. Une séparation est un couple de cordes (δ^-, δ^+) qui permet de diviser le simplexe en 2 zones : la première contient la corde δ^- , la seconde contient la corde δ^+ . La frontière entre les 2 zones ne contient alors aucune des 2 cordes. En utilisant plusieurs séparations, nous arrivons ainsi à déterminer dans quel sous-simplexe nous devons descendre pour poursuivre l'algorithme de reconnaissance.

Pour définir la notion de corde et de séparation, nous nous plaçons essentiellement dans le cas particulier de la dimension 3, afin de simplifier le propos. Les définitions et résultats obtenus se généralisent toutefois naturellement en toute dimension finie.

Définition 5.4.1 (Corde). *Une corde est un vecteur δ de \mathbb{Z}^d . Soient $v \in \mathbb{Z}^d$ et $\mu \in \mathbb{Z}$. On dit que la corde δ apparaît (voir Figure 5.10) dans le plan $\mathbb{P}(v, \mu)$ ssi il existe $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu)$ tel que $\delta = y - x$.*

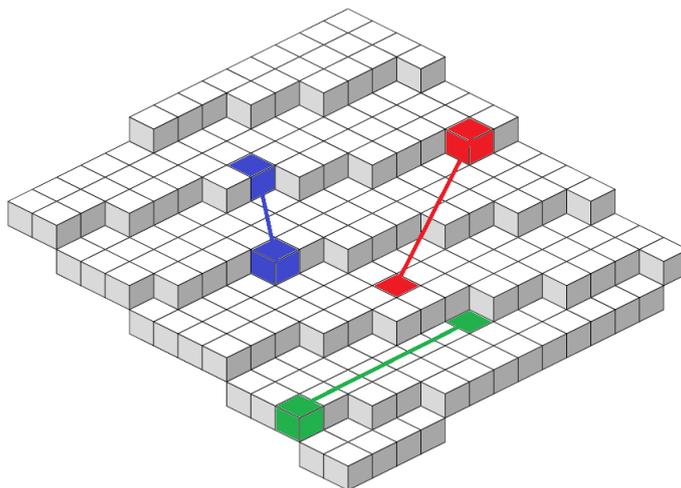


FIGURE 5.10 – Cordes dans le plan de vecteur normal $(7, 17, 57)$. Le plan contient, entre autres, les cordes $(7, 0, 0)$ (en vert), $(2, 3, -1)$ (en bleu) et $(6, 4, -2)$ (en rouge). En revanche, le plan ne contient pas les cordes $(0, 0, 1)$ ou $(0, 4, 0)$.

On remarquera que l'apparition d'une corde dans un plan ne dépend pas du décalage μ considéré. Cela tient au fait que l'ensemble des parties finies de l'hyperplan est indépendant du décalage. Un argument plus pédestre repose, dans le cas rationnel, sur le théorème de Bézout

et, dans le cas irrationnel, sur la densité. En effet, si la corde δ apparaît dans $\mathbb{P}(v, \mu)$, il existe $x, y \in \mathbb{P}(v, \mu)$ tels que $\delta = y - x$. Dans le cas rationnel, on se ramène au cas où v et μ sont entiers avec v de pgcd 1. Par le théorème de Bézout, il existe $z \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle v, z \rangle = 1$. En considérant $x - \mu z$ et $y - \mu z$ qui sont des points de $\mathbb{P}(v, 0)$, on obtient que $\delta = (y - \mu z) - (x - \mu z)$ est une corde de $\mathbb{P}(v, 0)$. Dans le cas où v est irrationnel, on suppose sans perte de généralités $\langle x, v \rangle \leq \langle y, v \rangle$. On pose $\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \min(\|v\|_\infty - \mu - \langle y, v \rangle, \|v\|_\infty) > 0$ car $y \in \mathbb{P}(v, \mu)$. Comme v est irrationnel, il existe, par densité, $z \in \mathbb{Z}^d$ tel que $0 < \langle z, v \rangle < \varepsilon$. Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq \langle x + kz, v \rangle < \varepsilon$. Dès lors, $\langle y + kz, v \rangle = \langle y - x, v \rangle + \langle x + kz, v \rangle \geq 0$. De plus, $\langle y + kz, v \rangle = \langle y, v \rangle - \langle x, v \rangle + \langle x + kz, v \rangle < \langle y, v \rangle + \mu + \varepsilon < \|v\|_\infty$. Donc $x + kz$ et $y + kz$ sont dans $\mathbb{P}(v, 0)$ et $\delta = (y + kz) - (x + kz)$ est une corde de $\mathbb{P}(v, 0)$.

Remarquons également qu'une corde δ apparaît dans un plan de vecteur normal v ssi il existe $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\delta = y - x$ et

$$\begin{cases} 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \|v\|_\infty \\ 0 \leq \langle y, v \rangle + \mu < \|v\|_\infty \end{cases}$$

Ainsi, en soustrayant, δ apparaît dans un plan de vecteur normal v ssi

$$|\langle \delta, v \rangle| < \|v\|_\infty$$

Nous utilisons les cordes du morceau de plan S pour obtenir des informations sur celui-ci. En considérant une corde δ , on peut séparer l'espace d'étude dans l'arbre en 2 parties : la zone des vecteurs normaux v tels que δ apparaît dans $\mathbb{P}(v, 0)$ et le complémentaire où cette corde n'apparaît pas. Nous choisissons un ensemble de cordes qui permettent de découper l'espace d'étude en $d!$ zones correspondant aux sous-arbres de l'arbre de Stern-Brocot : nous parlons alors de cordes séparantes.

Définition 5.4.2 (Séparation (par cordes)). *Soient $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}^3$ des points extrémités de Stern-Brocot. On dit qu'un couple $(\delta_-^{(i)}, \delta_+^{(i)})$ est une séparation (voir Figure 5.11 à gauche) pour (p_1, p_2, p_3) selon p_i ssi pour tout $v \in \mathcal{C}(p_1, p_2, p_3)$ (cône convexe engendré par p_1, p_2, p_3) :*

- la corde $\delta_-^{(i)}$ apparaît dans $\mathbb{P}(v, \mu)$ ssi $v \in \mathcal{C}(p_i, m_i, p_{i-1}) \setminus \mathcal{C}(p_i, m_i)$ (triangle p_i, m_i, p_{i-1} privé du segment p_i, m_i).
- la corde $\delta_+^{(i)}$ apparaît dans $\mathbb{P}(v, \mu)$ ssi $v \in \mathcal{C}(p_i, m_i, p_{i+1}) \setminus \mathcal{C}(p_i, m_i)$.

Les cordes $\delta_-^{(i)}$ et $\delta_+^{(i)}$ sont alors dites séparantes.

On peut calculer explicitement des cordes séparantes à chaque étape de la descente dans l'arbre de Stern-Brocot, via un simple système linéaire. Par symétrie, on se place dans le cas où le vecteur v est à coordonnées positives croissantes. Ainsi, la corde δ apparaît dans le plan de vecteur normal v ssi $|\langle v, \delta \rangle| < \|v\|_\infty = v_3$. Etant données des extrémités p_1, p_2, p_3 , afin de trouver une séparation pour p_i , il suffit de poser les contraintes suivantes sur $(\delta_-^{(i)}, \delta_+^{(i)})$:

$$\begin{cases} \langle p_i, \delta_-^{(i)} \rangle = \langle p_i, e_3 \rangle \\ \langle m_i, \delta_-^{(i)} \rangle = \langle m_i, e_3 \rangle \\ \langle p_{i-1}, \delta_-^{(i)} \rangle = \langle p_{i-1}, e_3 \rangle - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \langle p_i, \delta_+^{(i)} \rangle = \langle p_i, e_3 \rangle \\ \langle m_i, \delta_+^{(i)} \rangle = \langle m_i, e_3 \rangle \\ \langle p_{i+1}, \delta_+^{(i)} \rangle = \langle p_{i+1}, e_3 \rangle - 1 \end{cases}$$

Les deux premières conditions de chaque système assurent que la limite d'apparition des cordes $\delta_-^{(i)}$ et $\delta_+^{(i)}$ est la droite verte passant par p_i et m_i (voir Figure 5.11 (gauche)). La dernière condition assure que $\delta_-^{(i)}$ apparaît dans le plan de vecteur normal p_{i-1} (resp. $\delta_+^{(i)}$ dans le plan de vecteur normal p_{i+1}). La caractérisation par équivalence de la séparation $(\delta_-^{(i)}, \delta_+^{(i)})$

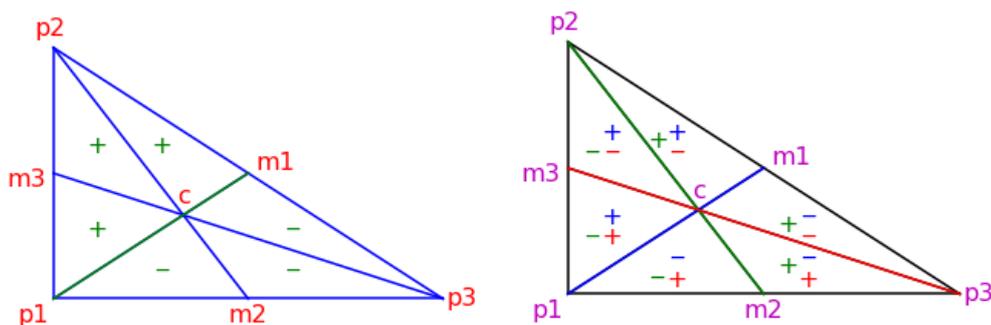


FIGURE 5.11 – A gauche : illustration d’une séparation selon p_1 . Dans les sous-triangles marqués $-$, le plan contient la corde $\delta_-^{(1)}$ mais pas la corde $\delta_+^{(1)}$. Respectivement, dans les triangles marqués $+$, le plan contient la corde $\delta_+^{(1)}$ mais pas la corde $\delta_-^{(1)}$. Sur la droite séparante en vert, aucune des deux cordes n’apparaît.

A droite : partition du triangle en fonction des cordes apparaissant dans les plans. En vert, bleu et rouge, les droites frontières. Les signes correspondent ensuite aux cordes apparaissant dans les plans de chaque sous-zone.

découle ensuite de ces observations immédiatement par convexité. Ajoutons enfin que les 2 systèmes admettent chacun une unique solution car ils ont déterminant ± 1 (par induction sur l’arbre). En séparant ainsi les zones selon chaque p_i , on obtient une partition du triangle p_1, p_2, p_3 en 6 sous-triangles (voir Figure 5.11 à droite). Remarquons que la condition $\langle p_{i+1}, \delta_+^{(i)} \rangle = \langle p_{i+1}, e_3 \rangle - 1$ peut être remplacée par $\langle p_{i+1}, \delta_+^{(i)} \rangle = \xi$ pour n’importe quel ξ dans l’intervalle $\llbracket -(\langle p_{i+1}, e_3 \rangle - 1), \langle p_{i+1}, e_3 \rangle - 1 \rrbracket$. Le choix $\xi = \langle p_{i+1}, e_3 \rangle - 1$ permet toutefois d’obtenir a priori des cordes séparantes plus petites et donc en général plus pertinentes.

Les séparations permettent ainsi de caractériser l’appartenance des plans à certains cônes. Par exemple, on peut regarder la séparation pour l’arbre de Stern-Brocot en dimension 2, avec extrémités 0 et $1/2$ et centre $1/3$. Après résolution du système, on obtient $\delta_- = (3, 0)$ et $\delta_+ = (3, 2)$. Les droites dont la pente est entre 0 et $1/2$ sont donc :

- dans l’intervalle $[0, 1/3[$ ssi elles possèdent la corde $(3, 0)$, ie un palier de taille au moins 4.
- dans l’intervalle $]1/3, 1/2]$ ssi elles possèdent la corde $(3, 2)$, ie un palier de taille exactement 2
- la pente $1/3$ est la seule à ne posséder aucune des 2 cordes : les paliers sont tous de taille exactement 3.

On peut dès lors reprendre l’arbre de Stern-Brocot en dimension 2 avec les séparations obtenues pour l’intervalle $[0, 1]$, comme dans la Figure 5.12 :

5.5 Algorithme de reconnaissance de morceau d’hyperplans arithmétiques

En utilisant les séparations par les cordes, nous sommes désormais capables de descendre dans l’arbre de Stern-Brocot. Nous en déduisons ainsi un algorithme de reconnaissance de morceaux d’hyperplans en toute dimension. L’algorithme ci-après est présenté en dimension 3 pour simplifier la compréhension mais s’étend sans difficulté en toute dimension finie.

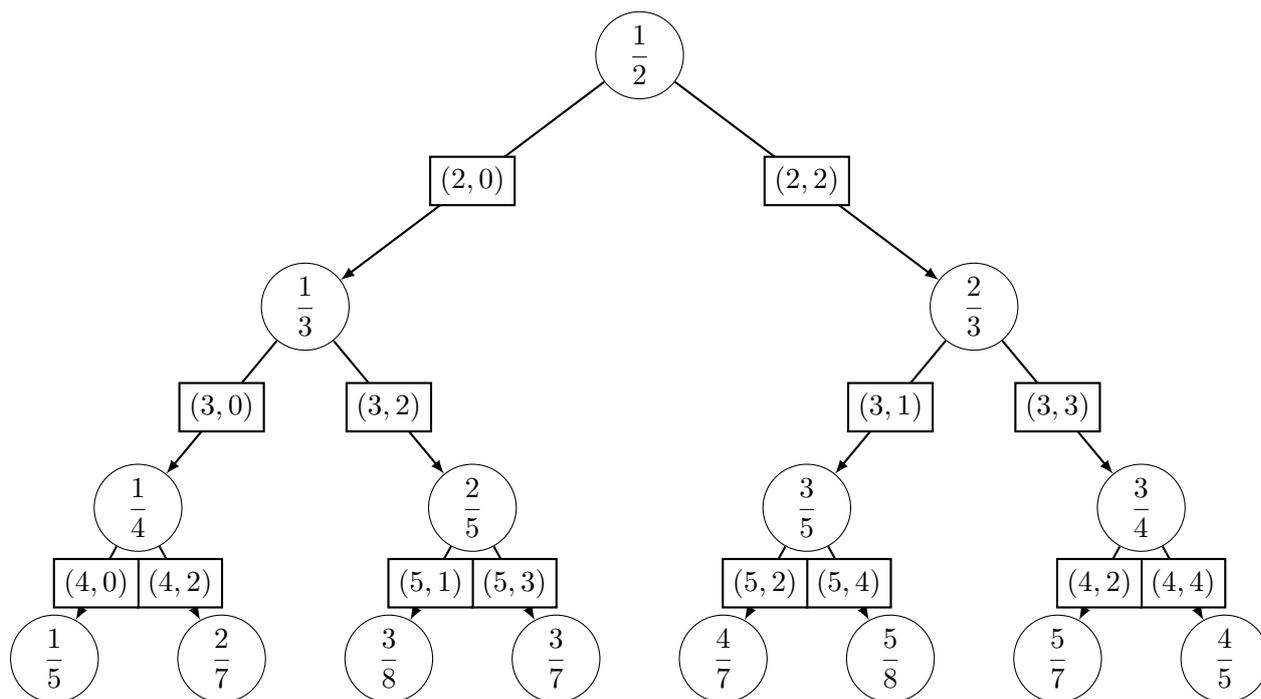


FIGURE 5.12 – Arbre de Stern-Brocot étiqueté par les séparations

Algorithme : Reconnaissance plan

Entrée : $S \subset \mathbb{Z}^3$ fini dans le premier 48e d'espace

Sortie : Décide si S est un morceau de plan discret et, le cas échéant, renvoie des paramètres correspondant à un plan le contenant

Reconnaissance-plan(S) :

$p_1, p_2, p_3 \leftarrow (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$ (extrémités) ;

tant que VRAI faire

$m_1, m_2, m_3, c \leftarrow p_2 + p_3, p_1 + p_3, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3$ (points milieux et central) ;

pour $v \in \{m_1, m_2, m_3, c\}$ (test des différents points du triangle) **faire**

$(p_{\min}, p_{\max}) \leftarrow \text{Restes-extrémaux}(S, v)$;

si $\langle p_{\max} - p_{\min}, v \rangle < \|v\|_{\infty}$ **alors**

$\mu \leftarrow -\langle p_{\min}, v \rangle$;

Renvoyer v, μ

Calculer les séparations $(\delta_-^{(i)}, \delta_+^{(i)})$ selon chacun des p_i ;

Regarder quelles cordes apparaissent dans S ;

si les cordes observées sont incohérentes (selon la Figure 5.11 (droite)) **alors**

Renvoyer "Incohérence dans les cordes"

Choisir le sous-triangle correspondant aux cordes observées (selon la Figure 5.11

(droite)) et mettre à jour p_1, p_2, p_3 ;

Algorithme : Restes-extrémaux

Entrée : $S \subset \mathbb{Z}^3$ fini, $v \in \mathbb{Z}^3$

Sortie : Calcule les restes minimaux et maximaux des points de S selon v

$p_{\min}, p_{\max} \leftarrow$ premier élément de S ;

pour p dans S **faire**

si $\langle p, v \rangle < \langle p_{\min}, v \rangle$ **alors**

$p_{\min} \leftarrow p$;

si $\langle p, v \rangle > \langle p_{\max}, v \rangle$ **alors**

$p_{\max} \leftarrow p$;

Renvoyer p_{\min}, p_{\max} ;

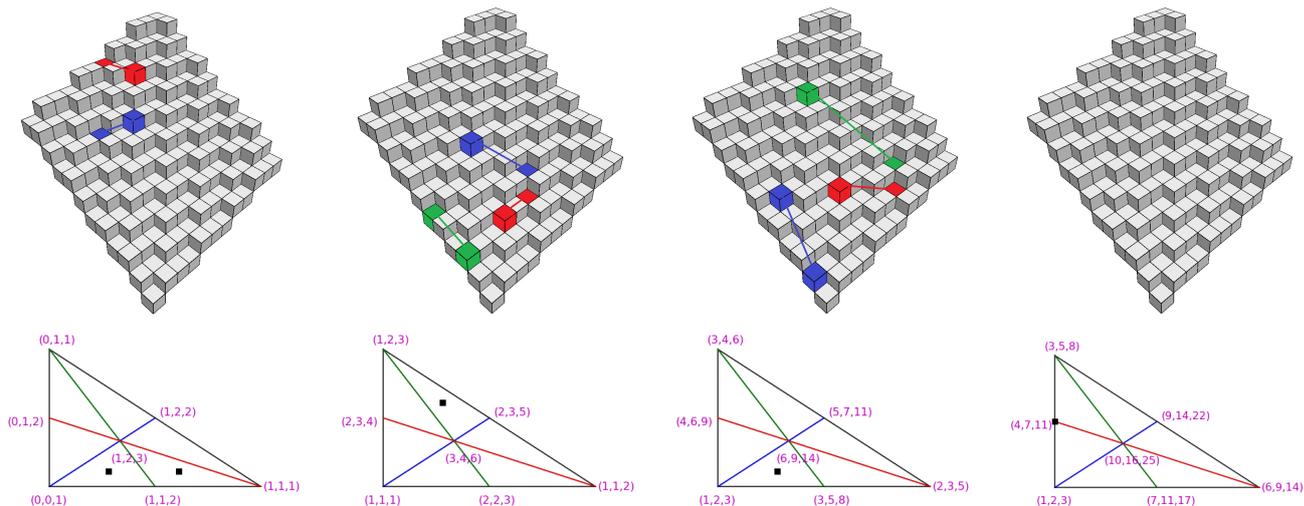


FIGURE 5.13 – Déroulé de l’algorithme sur le morceau de plan carré de vecteur normal $(4, 7, 11)$, de décalage 2 et de taille 12. L’algorithme renvoie bien le bon résultat.

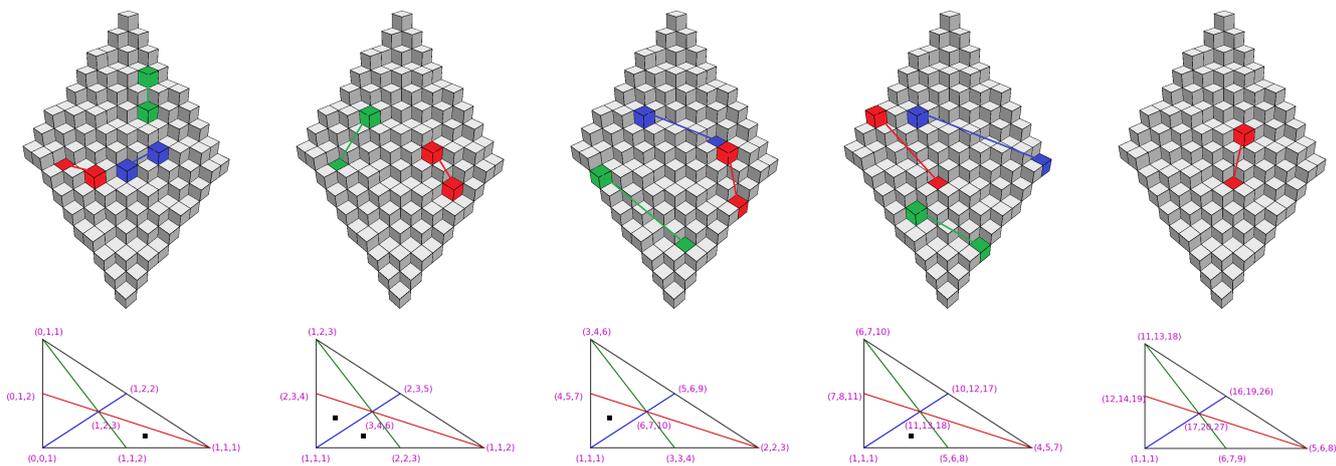


FIGURE 5.14 – Déroulé de l’algorithme sur le morceau de plan carré de vecteur normal $(7, 8, 10)$, de décalage 2 et de taille 10. L’algorithme détecte une incohérence dans les cordes car le morceau considéré est trop petit.

Avant de s’intéresser aux points délicats de l’algorithme (en rouge), observons 2 exécutions de celui-ci sur les morceaux de plans carrés de paramètres $v = (4, 7, 11)$, $\mu = 2$, taille = 12 et $v = (7, 8, 10)$, $\mu = 8$, taille = 10 en Figure 5.13 et 5.14. Remarquons que l’algorithme s’applique également sur des morceaux de plans quelconques, non nécessairement rectangulaires. Les cordes détectées sont indiquées dans le plan. Le sous-triangle où descendre est indiqué par un point dans celui-ci. Dans le second exemple, les cordes $(7, -10, 4)$ et $(9, -9, 0)$ appartiennent au plan $\mathbb{P}(v, \mu)$ entier mais pas au morceau présenté qui est trop petit pour cela. L’algorithme aboutit donc à un échec et renvoie "Incohérence dans les cordes" alors que le morceau est bien celui d’un plan. Il arrive enfin que l’algorithme ne détecte que 2 cordes et pas de troisième : cela signifie que l’on se trouve sur une ligne de séparation et qu’il y a 2 sous-triangles possibles. L’algorithme ici présenté choisit alors l’un des 2 triangles, mais il serait également possible d’en écrire une version qui exécute un Stern-Brocot en dimension 2 sur la ligne considérée.

Notre algorithme possède quelques points délicats qu’il est nécessaire de détailler.

Dans sa version actuelle, l'algorithme s'arrête nécessairement, soit car il arrive sur les paramètres du plan considéré, soit car les cordes séparantes qu'il doit traiter mènent à une incohérence. Il arrive malheureusement que les cordes considérées soient tellement grandes qu'elles sortent du morceau de plan considéré. La condition d'arrêt du "Tant que" mériterait une borne simple sur les coordonnées de v . En dimension 2, l'algorithme de reconnaissance de segments d'I. Debled-Rennesson permet de montrer que $\|v\|_\infty \leq |S|$. En dimension 3, l'algorithme des points d'appui présenté dans [42] permet d'obtenir une borne pour des morceaux de plan rectangulaires. Enfin, l'algorithme du simplexe utilisé dans [17] permet d'obtenir une borne dans le cas général mais beaucoup plus grande. Cette partie de notre algorithme est donc facilement modifiable, en ajoutant une borne sur $\|v\|_\infty$.

La détection des cordes dans un ensemble fini est largement plus problématique. Tout d'abord, la méthode naïve est tout sauf optimale (on teste tous les couples de points). On peut toutefois améliorer cette étape en ne tenant compte que des points d'appuis de chaque palier (zone de hauteur z constante), nous ramenant ainsi à un nombre constant de points par palier. Néanmoins, les cordes considérées obligent, à partir d'une certaine étape, à sortir du sous-ensemble S considéré. Nous observons donc le même problème que les algorithmes de sondage de plan (voir [37] pour la première version). De manière générale, plus l'algorithme plonge profondément dans l'arbre de Stern-Brocot, plus les cordes séparantes deviennent grandes et risquent donc de sortir de l'espace d'étude. Lorsque l'algorithme renvoie "Incohérence dans les cordes", deux cas de figure se présentent :

- le morceau considéré n'est pas un morceau de plan. Une telle entrée amène inévitablement à ce que l'ensemble des cordes séparantes qui apparaissent dans le plan n'ait pas de sous-triangle associé (voir Figure 5.11 (droite)), d'où l'incohérence.
- le morceau considéré est bien un morceau de plan mais qui est trop petit pour que certaines cordes séparantes apparaissent sur le morceau. L'incohérence de cordes détectée signifie alors simplement que l'algorithme ne peut conclure sans considérer plus de points.

Remarquons que, sur un morceau de plan suffisamment grand (a fortiori sur un plan infini), le second cas évoqué ne peut arriver. Dès lors, le renvoi "Incohérence dans les cordes" implique que l'entrée n'est pas un plan.

L'ensemble des paramètres solutions du problème forme un convexe. En dimension 2, cette propriété permet de démontrer que l'arrêt de l'algorithme s'effectuera nécessairement sur les paramètres minimaux, et qu'il y a unicité de la branche de descente dans l'algorithme. En dimension 3, un convexe peut ne croiser aucun point remarquable du triangle et être à cheval sur plusieurs zones. Il existe donc des configurations où la zone à choisir pour la descente n'est pas unique. Ce problème est illustrée en Figure 5.15. On considère pour cela l'ensemble de points $S \stackrel{\text{déf}}{=} \{(0, 0, 0), (-2, -1, 2), (0, -2, 2), (3, 4, -2)\}$. L'ensemble des vecteurs admissibles pour S est indiqué par un petit triangle bleu à cheval sur 3 zones. On remarquera toutefois que l'ensemble S considéré n'est pas un morceau de plan des plus sympathiques. Il serait alors intéressant de trouver un critère sur S permettant d'éviter ce genre de problèmes, ou de trouver comment modifier l'algorithme pour prendre en compte ce type de cas de figures.

Remarquons enfin que, dans le cas d'un plan infini de vecteur normal irrationnel v , l'algorithme emprunte dans l'arbre le chemin infini menant à v .

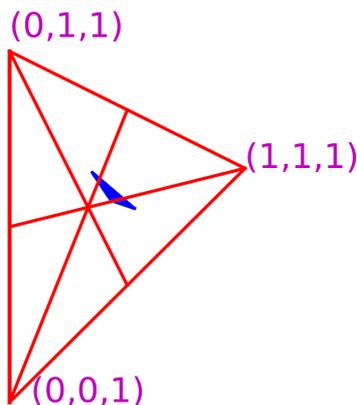


FIGURE 5.15 – Exemple de cas où plusieurs branches peuvent être choisies dans l'arbre de Stern-Brocot. L'ensemble des vecteurs v admissibles pour l'ensemble $S \stackrel{\text{déf}}{=} \{(0,0,0), (-2,-1,2), (0,-2,2), (3,4,-2)\}$ est le triangle ouvert bleu.

5.6 Bilan & perspectives

Nous avons présenté dans ce chapitre plusieurs algorithmes de reconnaissance de morceaux d'hyperplans reposant sur l'arbre de Stern-Brocot. En dimension 2, l'algorithme cherche la pente du segment à reconnaître en descendant dans l'arbre, avec un critère simple à chaque étape pour décider s'il faut descendre à gauche ou à droite. Ce procédé est linéaire et incrémental, comme l'algorithme de reconnaissance de segment d'I. Debled-Renneson. Nous proposons également un algorithme pour reconnaître un morceau de droite quelconque, sans aucune contrainte de connexité sur l'entrée.

Il est possible d'étendre notre algorithme en toute dimension finie, afin de reconnaître des morceaux d'hyperplans arithmétiques. L'idée repose sur l'extension de l'arbre de Stern-Brocot en toute dimension proposée dans [40] et sur la notion de cordes séparantes. La présence de cordes séparantes dans le morceau d'hyperplan permet de diviser un simplexe de Stern-Brocot en plusieurs sous-simplexes, et de choisir dans quel sous-simplexe descendre. Toutefois, notre algorithme possède un certain nombre de limites, notamment en ce qui concerne les problèmes de dépassement. Il arrive en effet que les cordes considérées deviennent trop grandes pour être détectées dans le morceau étudié. La détection des cordes est une étape clef de l'algorithme qui mérite d'être optimisée, par exemple en considérant les points d'appui de chaque palier de plan.

Enfin, les cordes séparantes utilisées dans notre algorithme de reconnaissance caractérisent la zone dans laquelle vit le vecteur normal v de l'hyperplan dans l'arbre de Stern-Brocot. Ces cordes ont ainsi un intérêt géométrique dans la structure de l'hyperplan qui pourrait être davantage creusé. L'étude des cordes pourrait notamment permettre de les détecter plus facilement dans un morceau de plan, et de mieux comprendre les propriétés combinatoires des hyperplans arithmétiques.

6

Transformations douces

Ce chapitre porte sur la notion de transformations douces, introduite dans [32] et issue d'une collaboration avec E. Andres. Nous cherchons à appliquer des transformations f simples à des objets X de l'espace, mais nous intéressons davantage au processus de transformation qu'à la valeur finale $f(X)$. Nous nous focalisons notamment sur les translations et parlons rapidement de rotations. Dans le cas euclidien, on peut par exemple regarder la fonction de \mathbb{R}^d , $f \stackrel{\text{déf}}{=} x \mapsto x + p$ où p est un point de \mathbb{R}^d . Regardons le triangle rouge T de la Figure 6.1, dont l'image par la translation est le triangle bleu $T + p$. Si l'on s'intéresse au processus de transformation, on regarde les triangles $T + hp$ pour $h \in [0, 1]$. La transformation est alors davantage vue comme une homotopie que comme une simple fonction. Remarquons également que les triangles intermédiaires $T + hp$ pour $h \in [0, 1]$ possèdent les mêmes propriétés géométriques et topologiques que T du fait que $(h, x) \mapsto x + hp$ est une isométrie affine.

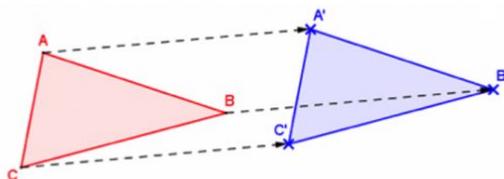


FIGURE 6.1 – Translation d'un triangle dans \mathbb{R}^2

Le but de ce chapitre est de construire de telles homotopies dans le cadre de la géométrie discrète. Bien que cette construction soit évidente dans le cas euclidien, l'analogue discret demande davantage de travail. Nous commençons tout d'abord par définir les transformations douces, équivalentes des homotopies en géométrie discrète, par le fait qu'un seul point de la figure est déplacé à chaque étape du processus de transformation. Une étude d'un processus proche des transformations douces a également été menée dans [53] pour les transformations de formes convexes. Les auteurs utilisent principalement des résultats de combinatoire des mots sur les mots de Lyndon pour effectuer ces transformations en conservant la convexité. L'article expose notamment un critère simple sur les transformations locales qui conservent la convexité, à partir de la notion de point de Lyndon. Nous obtenons parallèlement dans [32] un critère caractérisant

les points que l'on peut bouger dans un segment discret tout en conservant la propriété d'être un segment.

Nous proposons ici un certain nombre d'algorithmes, reposant sur notre critère pour déplacer les points d'un segment, et permettant d'effectuer des rotations douces de segments discrets ainsi que des translations douces de divers objets : segments, arbres, graphes, formes pleines. Notre travail porte ainsi essentiellement sur les translations. Cette restriction provient notamment de la difficulté à caractériser les transformations bijectives de \mathbb{Z}^d . S'il est immédiat que les rotations de \mathbb{R}^d sont isométriques, la simple bijectivité dans \mathbb{Z}^d est une question complexe. Le travail d'E. Andres dans [1] a toutefois permis de caractériser les rotations bijectives de \mathbb{Z}^2 à l'aide des triplets pythagoriciens. Une étude des transformations préservant les propriétés topologiques de l'objet a également été menée par P. Ngo, N. Passat, Y. Kenmochi et I. Debled-Renesson dans [45]. Néanmoins, les travaux sur ces transformations appelées rigides ne s'intéressent pas aux étapes de la transformation.

Ce chapitre propose d'apporter un peu de douceur dans toute cette rigidité en regardant comment transformer, étape par étape, un objet X en un objet $f(X)$ tout en conservant les propriétés géométriques et topologiques de X . Une partie des définitions et propriétés sur les segments naïfs et arbres discrets sont exposées dans [32]. Nous étendons également les résultats de cet article aux segments standard, aux graphes discrets, ainsi qu'aux morceaux d'hyperplans arithmétiques en dimension finie quelconque.

6.1 Transformations douces de segments discrets

Nous travaillons essentiellement dans cette partie sur les segments naïfs et étendons ensuite nos résultats au cas standard. Afin de parler plus facilement de pente, nous utilisons une définition de droite naïve utilisant un vecteur directeur plutôt qu'un vecteur normal. On rappelle également la notion de segment naïf.

Définition 6.1.1 (Droite naïve). *Soient $a, b, \mu \in \mathbb{R}$ avec a, b non tous deux nuls. La droite naïve de vecteur directeur (a, b) et de décalage μ est l'ensemble*

$$\mathcal{D}(a, b, \mu) \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq ax - by + \mu < \|(a, b)\|_\infty\}$$

Définition 6.1.2 (Segment naïf). *Un segment naïf est une partie 8-connexe et bornée de droite naïve.*

Notons que, étant donné un segment naïf S , il n'y a pas unicité des paramètres a, b, μ d'une droite telle que $S \subset \mathcal{D}(a, b, \mu)$. Il existe en réalité une infinité de paramètres possibles (ayant la puissance du continu). On peut toutefois donner à un segment des paramètres minimaux comme dans le chapitre 5. On exige pour cela que les paramètres a, b, μ soient entiers et que $\|(a, b)\|_\infty$ soit minimale parmi tous les paramètres entiers possibles pour S . Rappelons enfin que l'algorithme de reconnaissance de segment d'I. Debled-Renesson, présenté dans [19], permet de calculer les paramètres minimaux d'un segment en $O(|S|)$, à partir de la notion de point d'appui. Cette notion dépendant de la portion de plan considérée, on exige par la suite $a, b \geq 0$, cas auquel on peut toujours se ramener par symétries.

Définition 6.1.3 (Points d'appui[19]). *Soient S un segment naïf de paramètres minimaux a, b, μ et $p = (x, y)$ un point de S . On dit que p est un point d'appui supérieur ssi $ax - by + \mu = 0$. On dit que p est un point d'appui inférieur ssi $ax - by + \mu = \|(a, b)\|_\infty - 1$ (voir Figure 6.2).*

Nous avons choisi la définition de point d'appui inférieur et supérieur de sorte à ce que les points d'appui supérieurs soient situés au-dessus du segment pour les vecteurs du premier octant. Toutefois, pour les autres octants, il est possible que les points d'appui inférieurs soient situés au-dessus du segment et les points d'appui supérieurs en dessous. De manière générale, les segments sont considérés par symétrie dans le premier octant, ce qui évite ce type de problème.

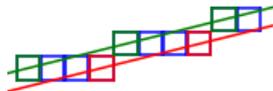


FIGURE 6.2 – Un segment de pente 1/4. Les points d'appui inférieurs sont en rouge et les points d'appui supérieurs en vert.

Nous souhaitons ici appliquer des transformations homotopiques aux segments naïfs et utilisons pour cela le concept de transformations douces introduit dans [32]. La notion de continuité usuellement utilisée pour l'homotopie semble toutefois ne pas être adaptée au monde discret. Dans le cas euclidien usuel, une transformation homotopique est paramétrée par un réel t de $[0, 1]$. Dans le monde discret, une transformation douce sera paramétrée par un entier $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ pour un certain N . Les étapes de transformation sont donc discrètes, ce qui exige de préciser ce que signifie « de manière continue » dans notre cas. On définit cela par le changement d'un unique pixel dans le segment. De plus, dans le but de préserver la structure géométrique de l'objet, l'objet considéré à chaque étape doit être un segment. On définit tout d'abord la notion de segments voisins par le fait que 2 segments voisins diffèrent d'un seul pixel.

Définition 6.1.4 (Segments voisins, voir Figure 6.3). *Deux segments naïfs S et S' sont dits voisins ssi ils peuvent s'écrire $X \cup \{p\}$ et $X \cup \{q\}$ où $p, q \in \mathbb{Z}^2$ sont 4-voisins. On note alors $S \leftrightarrow S'$.*

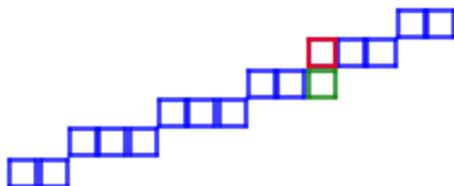


FIGURE 6.3 – Deux segments voisins. Le premier est composé des pixels bleus et du pixel rouge, le second est composé des pixels bleus et du pixel vert.

Définition 6.1.5 (Transformation douce). *Etant donné un segment naïf S et une fonction $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ bijective, une transformation douce de S en $f(S)$ est une suite finie $S_0 \dots S_N$ de segments discrets telle que :*

- $S_0 = S$
- $S_N = f(S)$
- $\forall i, S_i \leftrightarrow S_{i+1}$.

6.1.1 Points déplaçables

Notre but est de proposer des transformations douces pour des fonctions f simples. Notre travail commence tout d'abord par une caractérisation de la relation de voisinage entre 2 segments. On cherche notamment les points déplaçables d'un segment S , à savoir les points que l'on peut déplacer dans le segment tout en gardant un segment à l'arrivée.

Définition 6.1.6 (Point montable/descendable). Soient S un segment discret naïf et p un point de S . On pose $S[p \uparrow] \stackrel{\text{déf}}{=} S \setminus \{p\} \cup \{p + e_2\}$ et $S[p \downarrow] \stackrel{\text{déf}}{=} S \setminus \{p\} \cup \{p - e_2\}$. Un point $p \in S$ est dit montable (resp. descendable) ssi $S[p \uparrow]$ (resp. $S[p \downarrow]$) est un segment.

Remarquons que l'on peut également définir, de manière analogue, la notion de point déplaçable à gauche ou à droite et des ensembles $S[p \leftarrow]$ ou $S[p \rightarrow]$. Par symétrie, on s'intéressera uniquement aux points montables et descendables d'un segment. Caractérisons tout d'abord les points montables d'un segment exemple S du premier octant de pente $\frac{1}{4}$ comme exposé en Figure 6.4 (a). Le point rouge en (b) n'est pas montable. Plus généralement, un point qui n'est pas un point d'appui inférieur n'est pas montable, grâce à un argument de convexité. Le point rouge en (c) est un point d'appui inférieur qui n'est toutefois pas montable. Ceci vient du fait qu'il est situé entre 2 autres points d'appui inférieurs. La convexité d'un segment discret impose donc que les points d'appui inférieurs considérés soient extrémaux, à savoir d'abscisse extrême dans l'ensemble des points d'appui inférieurs. Enfin, les 2 points d'appuis inférieurs extrémaux en (d) sont tous les 2 montables, et ce sont les seuls points montables du segment. Les conclusions que nous tirons de cet exemple se généralisent en réalité pour tout segment.

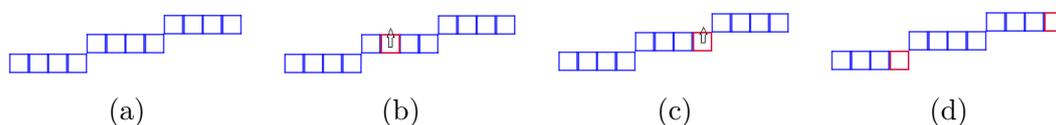


FIGURE 6.4 – Caractérisation des points montables d'un segment présenté en (a).

(b) Le point n'est pas montable car ce n'est pas un point d'appui inférieur.

(c) Le point n'est pas montable car il n'est pas extrême.

(d) Ensemble des points montables du segment.

Théorème 6.1.7 (Points montables/descendables [32]). Soit S un segment discret naïf de paramètres (a, b, μ) minimaux tel que S est dans le premier octant, ie $0 \leq a \leq b$. Un point I de S est montable (resp. descendable) ssi I est un point d'appui inférieur (resp. supérieur) extrême de S , ie d'abscisse extrême dans l'ensemble des points d'appui inférieurs (resp. supérieurs).

Démonstration. Nous faisons ici une preuve pour les points montables, la preuve pour les points descendables étant analogues. Soit un segment S d'extrémités notées E et E' et d'équation $0 \leq ax - by + \mu < b$ (avec a, b, μ minimaux). Soit $I \stackrel{\text{déf}}{=} (x_I, y_I)$ un point de S . On pose alors $S' \stackrel{\text{déf}}{=} S[I \uparrow] = S \cup \{I + e_2\} \setminus \{I\}$. Montrons alors que S' est un segment ssi I est un point d'appui inférieur extrême de S .

\Rightarrow : on raisonne par l'absurde. Deux cas se présentent alors à nous.

Cas 1 : supposons que I n'est pas un point d'appui inférieur. Dès lors, $ax_I - by_I + \mu \leq b - 2$. Donc $ax_I - b(y_I + 1) + \mu \leq -2$. Cela veut dire, d'après la thèse d'I. Debled-Rennesson [19], que $I + e_2$ est fortement extérieur à S et que S' n'est pas un segment.

Cas 2 : supposons que I est un point d'appui inférieur non extrême. On note A et B les points d'appui inférieurs extrémaux de S . Ainsi I est un point du segment continu $[AB]$. Comme $A, B \in S'$, par convexité, $I \in S'$ ce qui n'est pas.

\Leftarrow : nous invitons le lecteur à regarder la figure 6.5 qui illustre la preuve. Le segment S y est représenté en bleu. Commençons par prolonger le segment S jusqu'à un point d'appui supérieur $P \stackrel{\text{déf}}{=} (x_P, y_P)$ tel que $\|P - I\|_\infty \geq b$ (partie verte du segment) : on obtient alors un

sur-segment de S que l'on note S_0 . Comme P est un point d'appui supérieur et une extrémité de S_0 , par le théorème d'Isabelle Debled-Rennesson [19], $P - e_2$ est faiblement extérieur donc $S'_0 \stackrel{\text{déf}}{=} S_0[P \downarrow] = S_0 \cup \{P - e_2\} \setminus \{P\}$ est un segment. De plus, S'_0 admet pour points d'appui inférieurs extrémaux I et $P - e_2$. On note a', b', μ' les paramètres de S'_0 . On note enfin Π (resp. Π') la restriction de S_0 (resp. S'_0) à l'intervalle d'abscisses $[x_P, x_I - 1]$. Ainsi Π et Π' forment respectivement une période de S_0 et de S'_0 . On peut alors prolonger Π' jusqu'à E' par périodicité (car $\|P - I\|_\infty \geq b$) en un sur-segment de S . De même, on peut prolonger Π jusqu'à E' en un sur-segment contenant S' . Donc S' est un segment. \square

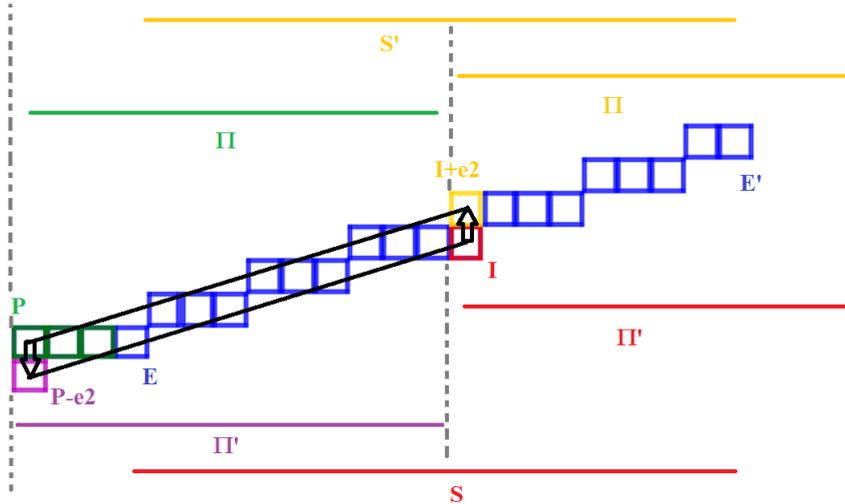


FIGURE 6.5 – Montée du point d'appui inférieur I

Le théorème des points montables est généralisé en toute dimension dans une partie sur les transformations douces de morceaux d'hyperplans arithmétiques. La preuve que nous utilisons est alors d'une nature différente de celle-ci, ne se reposant notamment pas sur les propriétés connues des algorithmes de reconnaissance de segments.

6.1.2 Rotation douce de segment

Le théorème des points montables nous permet de traiter un premier exemple de transformation douce : la rotation de segment. Le but est ici de transformer le segment plat $S_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(i, 0)\}_{i \in [0, n]}$ au segment diagonal $S_N \stackrel{\text{déf}}{=} \{(i, i)\}_{i \in [0, n]}$. Remarquons que cette définition de rotation ne correspond pas à une rotation du segment réelle dans la boule euclidienne $\mathcal{B}_2(0, n)$ mais à une rotation de segment dans la boule $\mathcal{B}_\infty(0, n)$. Le nombre de points dans le segment est donc conservé mais pas la longueur du segment.

Grâce au théorème des points montables, on sait, à chaque étape, quels points du segment courant peuvent être montés. Toutefois, la caractérisation des points montables par les points d'appui inférieurs nécessite de connaître les paramètres minimaux du segment considéré. S'ils sont connus initialement, monter un point au milieu du segment modifie ses paramètres. On peut alors imaginer recalculer les nouveaux paramètres du segment par reconnaissance mais cette opération induit un coût en $O(n)$ à chaque étape de l'algorithme. L'algorithme de reconnaissance

d'I. Debled-Rennesson et J.-P. Réveillès présenté dans [19], bien qu'incrémental, ne permet en effet de calculer ces nouveaux paramètres que lorsque le point monté est une extrémité du segment. Il existe heureusement des algorithmes en $O(\ln(n))$, comme ceux exposés dans [38, 46], permettant de calculer les paramètres minimaux du nouveau segment en $O(\ln(n))$. On obtient alors l'algorithme de rotation douce suivant.

Algorithme : Rotation douce

Entrée : $n \in \mathbb{N}$

Sortie : Effectue la rotation douce du segment plat S_0 au segment diagonal S_N de longueur n

$S \leftarrow S_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{(0, i)\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$;

tant que $S \neq S_N$ **faire**

$p \leftarrow$ point d'appui inférieur le plus à droite de S ;
 Incrémenter p dans S ;

L'algorithme de rotation douce effectue $O(n^2)$ étapes de déplacement de pixel, chaque étape coûtant $O(\ln(n))$. La complexité totale de l'algorithme est donc en $O(n^2 \ln(n))$. Ce petit exemple jouet est utilisé dans la suite de ce chapitre pour les transformations douces de graphes. Une vidéo de rotation douce est disponible en Figure 6.6 pour la version PDF de ce manuscrit. Attention : tous les lecteurs PDF ne permettent pas de lire la vidéo ; on pourra notamment utiliser Acrobat Reader pour la lecture de celle-ci. Les diverses flèches permettent de lire la vidéo, de passer à l'image suivante ou de se déplacer à la toute fin de la vidéo. A chaque étape, le point à monter, à savoir le point d'appui inférieur le plus à droite, est indiqué en rouge.

FIGURE 6.6 – Vidéo de rotation douce pour un segment de longueur 11

6.1.3 Translation douce de segment

Nous nous intéressons désormais à un premier problème de translation douce, celui de la translation douce de segment. On cherche ainsi à appliquer la transformation douce $f : x \mapsto x+p$ à un segment S , pour $p \in \mathbb{Z}^2$. Par composition et symétrie, il suffit de traiter le cas $p = e_2$ pour

les segments du premier quart de plan. On considère alors 2 cas de figure : le cas des segments de pente ≤ 1 (premier octant) et le cas des segments de pente ≥ 1 (second octant).

Problème 6.1.8. *Etant donné un segment naïf S et $p \in \mathbb{Z}^2$, comment traduire doucement S pour obtenir $S + p$?*

Commençons d'abord par les segments de pente ≤ 1 . L'idée est alors de trouver des paramètres (a, b, μ) du segment S à traduire de telle sorte que $(x, y) \in S \mapsto ax - by + \mu$ soit injective. Ceci permet notamment d'avoir un unique point d'appui inférieur à chaque étape de l'algorithme. De plus, le nouveau segment est alors obtenu simplement en augmentant le décalage μ mais sans changer la pente $\frac{a}{b}$. On utilise pour cela la notion de segment primitif, pour

lesquels la fonction $\begin{cases} S & \rightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \\ (x, y) & \mapsto ax - by + \mu \end{cases}$ est bijective.

Définition 6.1.9 (Segment primitif). *Soit S un segment naïf de paramètres a, b, μ (avec $a \wedge b = 1$) et de longueur n . On dit alors que S est primitif ssi $\|(a, b)\|_\infty = n$.*

Dans le cas des segments S primitifs, il existe un unique point d'appui inférieur dans S à chaque étape. L'algorithme de translation douce revient donc essentiellement à effectuer des calculs élémentaires dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ pour calculer ce point d'appui. On cherche en effet x, y tel que $ax - by + \mu = -1$ dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, dont on déduit $x = a^{-1}(-1 - \mu)$. De plus, une fois le point p d'abscisse x monté, le segment $S[p \uparrow]$ a pour nouveaux paramètres $(a, b, \mu + 1)$. La Figure 6.7 présente la translation douce du segment primitif d'équation $0 \leq 4x - 11y + 3 < 11$ et de longueur 11. Remarquons qu'il est toujours possible de prendre des paramètres a, b, μ (pas forcément minimaux) d'un segment S tels que $\begin{cases} S & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto ax - by + \mu \end{cases}$ soit injective. Il suffit en effet de prendre un vecteur (a, b) irrationnel. Dès lors, la translation douce de segment discret avec paramètres irrationnels est relativement simple à effectuer. Nous reparlons de cette vision dans la section consacrée aux translations douces d'hyperplans arithmétiques. Toutefois, cette approche présente ses limites lorsque l'on considère des formes discrètes plus complexes, comme des graphes discrets, où les cycles du graphe induisent des relations de liaison dans les coordonnées des vecteurs considérés.

FIGURE 6.7 – Vidéo de translation douce pour un segment primitif de longueur 11

Nous venons d'exposer une méthode de translation douce pour les segments non primitifs. Toutefois, tous les segments ne sont pas primitifs, comme par exemple le segment S présenté en Figure 6.8. En effet, si S était primitif de paramètres (a, b, μ) , la droite naïve de mêmes paramètres aurait S comme période. Or S possède un palier de taille 1 et un palier de taille 3 donc ne être période d'une droite discrète (les longueurs de 2 paliers d'une droite naïve différant d'au plus 1). On se ramène toutefois au cas primitif en montrant que tout segment est inclus dans un sur-segment primitif.

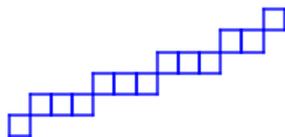


FIGURE 6.8 – Segment non primitif

Proposition 6.1.10 (Sur-segment primitif). *Tout segment S de longueur n est inclus dans un segment primitif S' de longueur $\leq 3n$.*

Démonstration. Considérons une équation de S de la forme $0 \leq ax - by + \mu < b$ avec $b < n$. On cherche alors des paramètres a', b' premiers entre eux tels que $\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb'}$ avec $b' \in \llbracket 2n, 3n \rrbracket$. Un tel couple (a', b') existe du fait que $\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{a'b - ab'}{bb'}$. On prend en effet $b' \in \llbracket 2n, 3n \rrbracket$ tel que $ab' \equiv -1 \pmod{b}$ (qui existe car $a \wedge b = 1$) puis a' tel que $a'b - ab' = 1$. Ainsi, $\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb'}$. On prend également μ' tel que $\frac{\mu}{b} \leq \frac{\mu'}{b'} < \frac{\mu}{b} + \frac{1}{b'}$. On appelle alors S' le segment d'équation $0 \leq a'x - b'y + \mu' < b'$ de longueur b' .

Reste alors à montrer que $S \subset S'$. Soit $(x, y) \in S$. Alors $y = \left\lfloor \frac{ax + \mu}{b} \right\rfloor$. La quantité $\frac{a'x + \mu'}{b'} - \frac{ax + \mu}{b} = x \left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \right) + \frac{\mu'}{b'} - \frac{\mu}{b}$ est positive et inférieure à $\frac{x}{bb'} + \frac{1}{b'} \leq \frac{x}{2bn} + \frac{1}{2n} < \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} = \frac{1}{b}$. Ainsi, $y \leq \frac{ax + \mu}{b} \leq \frac{a'x + \mu'}{b'} < \frac{ax + \mu + 1}{b} \leq y + 1$. En passant à la partie entière, on obtient $y = \left\lfloor \frac{a'x + \mu'}{b'} \right\rfloor$ donc $(x, y) \in S'$. \square

Notons que la borne de $3n$ dans la proposition 6.1.10 est a priori perfectible, l'important étant toutefois d'obtenir une borne en $O(n)$ afin de garantir une complexité linéaire pour l'algorithme de translation douce. La preuve de la proposition est de plus constructive, ce qui permet de calculer effectivement les paramètres a', b', μ' d'un sur-segment primitif. Ce calcul s'effectue alors en $O(\ln(n))$ via des opérations simples dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, comme démontré dans la preuve.

Afin de translater doucement un segment S , on commence donc par calculer un sur-segment primitif S' de S de longueur inférieure à $3n$. On applique ensuite la translation douce de segment primitif à S' . Les étapes de la translation douce de S sont alors les mêmes que celles de S' , en ignorant les points de $S' \setminus S$.

Algorithme : Translation douce de segment (pente ≤ 1)

Entrée : S dans le premier octant ayant $(0, 0)$ pour extrémité

Sortie : Effectue les étapes de la translation douce de S

$n \leftarrow |S|$;

$S' \leftarrow$ un sur-segment primitif de S de taille $n' \leq 3n$ via la preuve de la Proposition 6.1.10 ;

$a', b', \mu' \leftarrow$ paramètres de l'équation de S' ;

Calculer a'^{-1} dans $\mathbb{Z}/b'\mathbb{Z}$;

pour j allant de 0 à $n' - 1$ **faire**

$k \leftarrow -a'^{-1}(\mu' + j + 1)$ dans $\mathbb{Z}/b'\mathbb{Z}$;

si $k < n$ **alors**

 | Incrémenter le point d'abscisse k dans S ;

L'algorithme de translation douce de segment possède une complexité en $O(n)$. Le calcul initial de S' demande $O(\ln(n))$ étapes. Effectuer la translation douce du sur-segment primitif S' demande ensuite $O(n') = O(n)$ étapes, d'où une complexité totale linéaire.

On s'intéresse désormais aux segments de pente ≥ 1 . Une première difficulté apparaît sur un exemple simple de segment vertical, comme présenté en Figure 6.9. On remarque alors que les opérations autorisées dans les transformations douces ne permettent pas de translater doucement ce segment. Aucun des points du segment ne peut en effet être incrémenté sans perdre la connexité, exceptée l'extrémité basse $(1, 2)$. Toutefois, incrémenter l'extrémité basse n'est pas non plus satisfaisant car crée un double-pixel. On propose alors la solution suivante :

- ajouter un point au-dessus de l'extrémité haute ;
- supprimer l'extrémité basse.

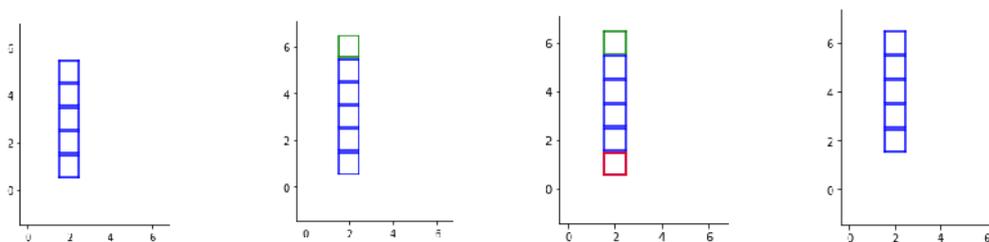


FIGURE 6.9 – Étapes de la translation douce d'un segment vertical

Nous autorisons ainsi désormais deux nouvelles opérations pour la translation de segments :

- retirer l'extrémité basse, ie celle de plus faible ordonnée.
- ajouter un point au-dessus de l'extrémité haute, ie celle de plus haute ordonnée.

Ces nouvelles opérations autorisées, on s'intéresse aux points du segment qui doivent être déplacés, ajoutés ou supprimés (voir Figure 6.10) :

- l'extrémité basse (en rouge) est supprimée ;
- un point est ajouté au-dessus de l'extrémité haute (en vert) ;
- les points du bas de chaque palier vertical (appelés ci-après points pilier et représentés en magenta) sont déplacés vers la gauche ;
- les autres points sont invariants.

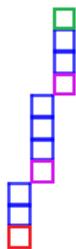


FIGURE 6.10 – Opérations effectuées sur un segment du second octant pour le translater vers le haut.

Définition 6.1.11. *Point pilier* Soit S un segment du deuxième octant admettant un sur-segment primitif S' d'équation $0 \leq a'x - b'y + \mu' < a'$. On dit alors que $(x, y) \in S$ est un point pilier de S ssi $a' - b' \leq a'x - b'y + \mu' < a'$.

Notre algorithme de translation douce consiste à déplacer vers la gauche l'ensemble des points piliers, par $a'x - b'y$ décroissant (ce qui est autorisé par le théorème des points montables 6.1.7), et de gérer les extrémités via les opérations d'ajout et de suppression. On déplace ainsi à chaque étape des points d'appui inférieurs extrémaux du segment.

Algorithme : Translation douce de segment (pente ≥ 1)

Entrée : S segment du deuxième octant

Sortie : Effectue la translation douce de S

$S' \leftarrow$ un sur-segment primitif de S de taille $\leq 3n$;

$a', b', \mu' \leftarrow$ paramètres de S' obtenus via la preuve de la Proposition 6.1.10 ;

$P \leftarrow$ ensemble des points piliers de S ordonnés par $a'x - b'y$ décroissant ;

tant que P est non vide **faire**

$p \leftarrow$ élément de P de plus grand $a'x - b'y$;

si p n'est pas une extrémité **alors**

 | Translater p vers la gauche ;

si p est l'extrémité basse **alors**

 | Supprimer l'extrémité basse ;

si p est l'extrémité haute **alors**

 | Supprimer l'extrémité basse (si ce n'est déjà fait) ;

 | Ajouter un point au-dessus de l'extrémité haute ;

 | Translater l'extrémité haute vers la gauche ;

Supprimer l'extrémité basse (si ce n'est déjà fait) ;

Ajouter un point au-dessus de l'extrémité haute (si ce n'est déjà fait) ;

Cet algorithme de translation douce permet alors de translater un segment du deuxième octant en temps $O(n)$. En effet, le calcul d'un sur-segment primitif s'effectue en $O(\ln(n))$. Le calcul de l'ensemble trié des points piliers s'effectue alors via la résolution de $O(b')$ équations dans $\mathbb{Z}/a'\mathbb{Z}$, d'où une complexité en $O(b') = O(n)$. Enfin, déplacer chaque point pilier s'effectue en $O(|P|) = O(n)$. Une exécution de l'algorithme est présentée en Figure 6.11. Les points piliers sont bougés un à un jusqu'au moment où l'extrémité basse est supprimée pour rajouter un point au-dessus de l'extrémité haute. Remarquons toutefois que, dans la méthode de translation proposée, le nombre de points dans le segment n'est malheureusement pas constant.

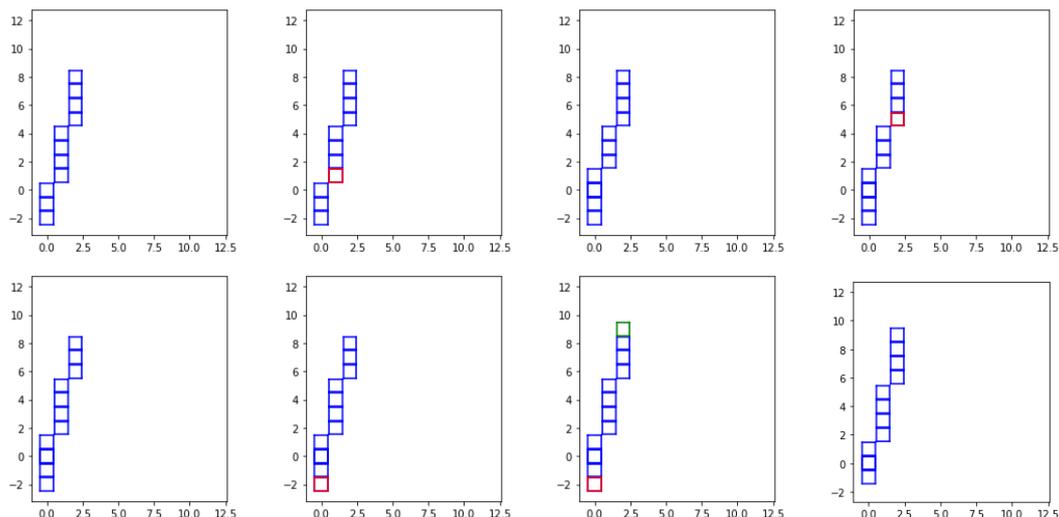


FIGURE 6.11 – Translation douce d'un segment du deuxième octant.

6.1.4 Extension aux segments standard

Nous étendons ici les résultats obtenus pour les transformations douces de segments naïfs au cas des segments standard. Nous utilisons pour cela des transformations affines qui permettent de nous ramener au cas naïf. Rappelons tout d'abord les définitions de droite et de segment standard.

Définition 6.1.12 (Droite standard). *Soient $a, b, \mu \in \mathbb{R}$ avec a, b non tous deux nuls. La droite standard de vecteur directeur (a, b) et de décalage μ est l'ensemble*

$$\mathcal{D}'(a, b, \mu) \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq ax - by + \mu < \|(a, b)\|_1\}$$

Définition 6.1.13 (Segment standard, voir Figure 6.12). *Un segment standard est une partie 4-connexe et bornée de droite standard.*

Dans le premier octant, on peut passer du cas standard au cas naïf via l'automorphisme $\xi_1 \stackrel{\text{déf}}{=} (x, y) \mapsto (x + y, y)$ (voir Figure 6.12), comme montré dans [49]. Ainsi, S est un segment standard ssi $\xi_1(S)$ est un segment naïf. De plus, ξ_1 conserve les points d'appui. Ainsi p est un point d'appui inférieur (resp. supérieur) de S ssi $\xi_1(p)$ est un point d'appui inférieur (resp. supérieur) de $\xi_1(S)$. Des résultats similaires existent naturellement dans les autres octants, pour d'autres transformations ξ . Par exemple, pour le second octant, on considère l'automorphisme $\xi_2 : (x, y) \mapsto (x, y + x)$.

On peut ainsi adapter la méthode de transformation douce du cadre naïf vers le cadre standard. Monter un point de e_2 en naïf revient ainsi à le translater de $\xi_1^{-1}(e_2) = e_2 - e_1$ en standard (voir Figure 6.12). Toutefois, quelques problèmes peuvent apparaître dans ce changement de base : en effet, une translation verticale de e_2 en naïf devient alors une translation de $\xi_1^{-1}(e_2) = e_2 - e_1$ en standard. Il nous faut donc adapter la notion de transformation douce, en s'autorisant notamment à rajouter ou enlever des points, ou encore à déplacer des points en diagonale. On peut alors, par l'intermédiaire des segments naïfs, exposer une version du théorème des points déplaçables pour le cas standard. Commençons tout d'abord par étendre les définitions du cas naïf au cas standard.

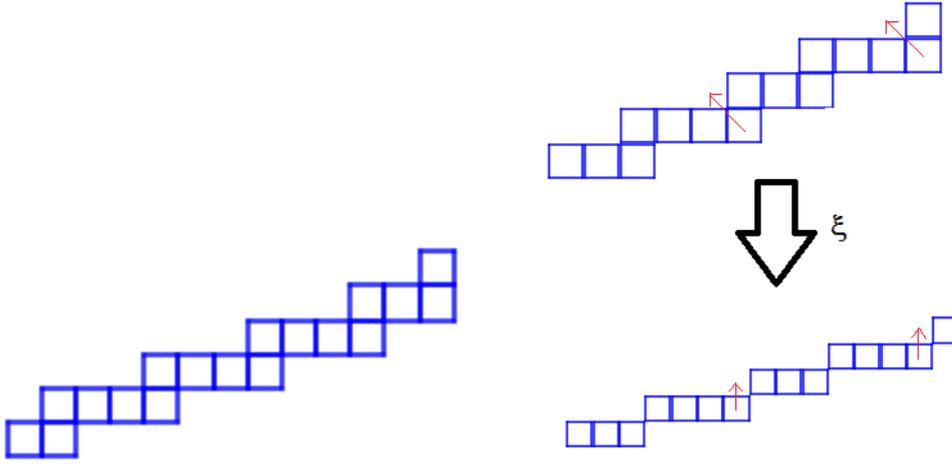


FIGURE 6.12 – Segment standard et transformation en segment naïf. Les flèches rouges correspondent à des montées de points en naïf qui correspondent en standard à des déplacements de $e_2 - e_1$.

Définition 6.1.14 (Segments standard voisins). *Deux segments standard S et S' sont dits voisins ssi l'une des 3 conditions suivantes est vérifiée :*

- ils peuvent s'écrire sous la forme $S = X \cup \{p\}$ et $S' = X \cup \{q\}$ où X est un ensemble et où p, q sont des points 8-voisins.
- $S' = S \setminus \{e\}$ où e est une extrémité de S .
- $S = S' \setminus \{e'\}$ où e' est une extrémité de S' .

On note alors $S \leftrightarrow S'$.

Définition 6.1.15. *Transformation douce Etant donnée une fonction $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, une transformation douce de S en $f(S)$ est une suite de segments $S_0 \dots S_N$ telle que :*

- $S_0 = S$
- $S_N = f(S)$
- $\forall i \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket, S_i \leftrightarrow S_{i+1}$

Définition 6.1.16 (Point montable/descendable). *Soit S un segment standard et p un point de S . On pose $S[p \nearrow] \stackrel{\text{déf}}{=} S \setminus \{p\} \cup \{p + e_2 - e_1\}$ et $S[p \searrow] \stackrel{\text{déf}}{=} S \setminus \{p\} \cup \{p + e_2 - e_1\}$. Le point p est alors dit montable (resp. descendable) ssi $S[p \nearrow]$ (resp. $S[p \searrow]$) est un segment standard.*

Théorème 6.1.17 (Points montables/descendables). *Soit S un segment standard et p un point de S .*

Alors p est montable (resp. descendable) ssi p est un point d'appui inférieur (resp. supérieur) extrémal de S .

Démonstration. On pose $S' \stackrel{\text{déf}}{=} S[p \nearrow]$. Repassons au naïf : $\xi_1(S)$ est un segment naïf et $\xi_1(S') = \xi_1(S)[\xi_1(p) \uparrow]$. Ainsi, par le théorème des points montables 6.1.7 (version naïve),

$$\begin{aligned}
 S' \text{ est un segment standard} &\Leftrightarrow \xi_1(S') \text{ est un segment naïf} \\
 &\Leftrightarrow \xi_1(p) \text{ est un point d'appui inférieur extrémal de } \xi_1(S) \\
 &\Leftrightarrow p \text{ est un point d'appui inférieur extrémal de } S
 \end{aligned}$$

□

On souhaite maintenant effectuer la transformation douce $x \mapsto x + p$ pour $p \in \mathbb{Z}^2$ sur un segment standard S . De la même manière que dans le cas naïf, on peut se ramener par symétrie et composition au cas $p = e_2$. L'idée est alors d'utiliser les algorithmes obtenus dans le cas naïf sur $\xi(S)$. Si S est un segment standard du deuxième octant, appliquer l'algorithme de translation au segment naïf $\xi_2(S)$ revient à traduire S de $\xi_2^{-1}(e_2) = e_2$. L'algorithme de translation est donc le même que dans le cas naïf. En revanche, si S est dans le premier octant, appliquer l'algorithme de translation au segment naïf $\xi_1(S)$ revient à traduire S de $\xi_1^{-1}(e_2) = e_2 - e_1$: on n'obtient donc pas le résultat souhaité (voir la Figure 6.13). On remarque alors trois types de différences entre le résultat recherché $S + e_2$ et le résultat obtenu $S + e_2 - e_1$.

- l'extrémité basse (croix à gauche) n'est pas dans $S + e_2$;
- l'extrémité haute (point vert à droite) est dans $S + e_2$;
- les couples centraux croix/point indiquent des points qui ont été traduits alors qu'ils étaient dans $S + e_2$.

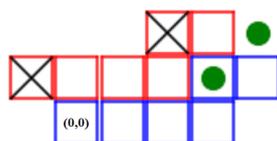


FIGURE 6.13 – Translation du segment standard de paramètres 1,4,0 et de longueur 6 via la méthode de translation des segments naïfs. Le segment de base est en bleu, le segment d'arrivée en rouge. Les croix symbolisent les pixels à enlever et les points verts les pixels à ajouter.

Pour les couples croix-points à l'intérieur du segment, on peut tout simplement arrêter l'algorithme plus tôt, ces erreurs étant rajoutées à la toute fin, lorsque l'on essaye de traduire des points (x, y) tels que $ax - by + \mu < a$. On peut ainsi adapter les algorithmes de translation douce de segment naïf au cas standard via l'algorithme suivant (dont on peut voir un déroulé sur l'exemple de la Figure 6.14) :

Algorithme : Translation douce de segment standard

Entrée : un segment standard S du premier octant

Sortie : Effectue la translation douce du segment standard S

$a, b, \mu, n \leftarrow$ paramètres de S ;

$S' \leftarrow \xi_1(S)$ (segment naïf associé) $E \leftarrow \{(x, y) \in S \mid ax - by + \mu \geq a\}$ (ensemble des points à bouger) ;

tant que $E \neq \emptyset$ **faire**

$p' \leftarrow$ prochain point à bouger dans S' ;

$p \leftarrow \xi_1^{-1}(p')$;

si p est l'extrémité basse de S **alors**

 Supprimer p dans S ;

 Supprimer p' dans S' ;

si p est l'extrémité haute de S **alors**

 Ajouter $p + e_2$ dans S ;

 Ajouter $p' + e_2 + e_1$ dans S' ;

 Bouger p de $e_2 - e_1$ dans S ;

 Monter p' de e_2 dans S' ;

sinon

 Bouger p de $e_2 - e_1$ dans S ;

 Monter p' de e_2 dans S' ;

$E \leftarrow E \setminus \{p\}$;

si l'extrémité haute de S n'a pas été bougée **alors**

 Ajouter $p + e_2$ dans S ;

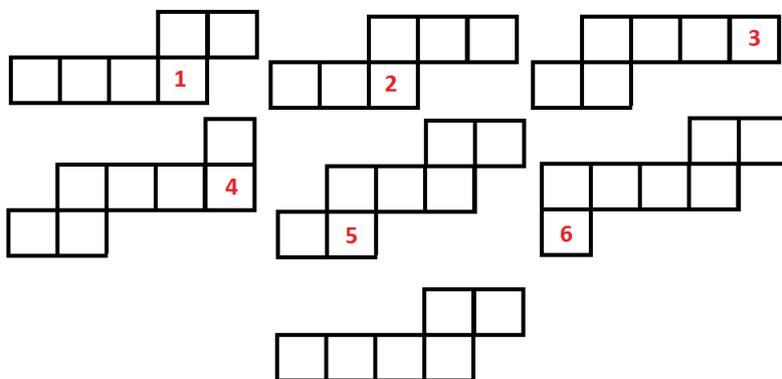


FIGURE 6.14 – Déroulé des étapes de l'algorithme sur un segment standard. Les numéros correspondent à l'ordre de traitement des points par l'algorithme

6.2 Translation douce de graphes discrets

Nous sommes désormais capables d'effectuer des translations douces de segments naïfs et standard. La géométrie discrète offre toutefois des structures légèrement plus complexes que des segments, comme des courbes, des polygones ou des formes pleines. Nous proposons ici des algorithmes pour effectuer des transformations douces de graphes discrets. Un graphe discret peut être vu comme un plongement d'un graphe G dans \mathbb{Z}^2 où chaque arête est un segment discret. Notre but est alors de traduire doucement ce plongement tout en préservant à chaque étape la structure de graphe du plongement. Nous traitons tout d'abord le cas des arbres grâce

à une simple utilisation de la translation douce de segments. Les graphes généraux demandent néanmoins une adaptation de notre algorithme de translation douce de segment pour être utilisé dans le cas des graphes. Enfin, nous parlons rapidement des translations douces d'images quelconques et faisons le lien avec un travail proche sur les transformations de formes convexes présenté dans [53].

Définition 6.2.1 (Graphe discret, voir Figure 6.15). Soit $G = (\Sigma, A)$ un graphe non orienté. Un graphe discret $\Gamma = (G, \rho)$ est la donnée d'un plongement ρ de G dans \mathbb{Z}^2 .

- $\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{Z}^2$ est une fonction injective.
- $\rho : A \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$ est une fonction qui à chaque arête associe un segment naïf.
- ρ respecte les extrémités des arêtes, au sens où, pour $a = \{s, t\} \in A$, $\rho(a)$ est un segment ayant pour extrémités $\rho(s)$ et $\rho(t)$.

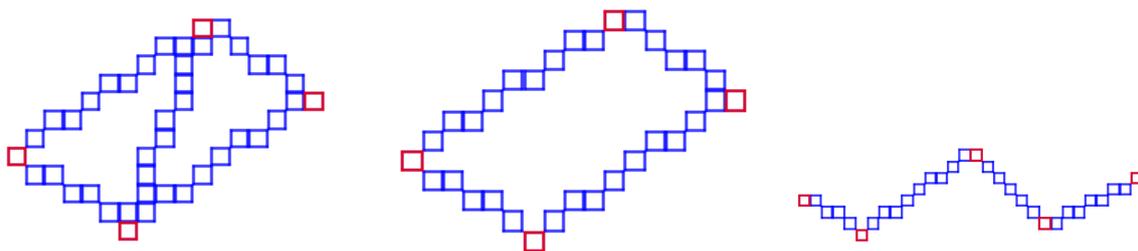


FIGURE 6.15 – Des graphes discrets. Les sommets du graphe sont représentés en rouge et les arêtes en bleu

Notons que, dans la définition actuelle de graphe discret, nous n'exigeons pas que le plongement considéré soit planaire. Cela peut notamment mener à considérer des pixels doubles, triples voire multiples qui appartiennent à plusieurs arêtes en même temps. Nous voyons par abus un graphe discret Γ comme un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 , en veillant à distinguer les points issus des sommets des autres points, et en comptant les pixels avec une éventuelle multiplicité. On peut alors définir la notion de graphes discrets voisins et la translation douce de graphes discrets.

Définition 6.2.2 (Graphes discrets voisins). Soient $\Gamma = (G, \rho)$ et $\Gamma' = (G', \rho')$ deux graphes discrets. On dit que Γ et Γ' sont voisins ssi $G = G'$ et Γ, Γ' peuvent s'écrire sous la forme $X \cup \{p\}$ et $X \cup \{q\}$ où $p, q \in \mathbb{Z}^2$ sont 4-voisins. On note alors $\Gamma \leftrightarrow \Gamma'$.

Définition 6.2.3. Transformation douce de graphes Etant donné un graphe discret Γ et une fonction $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ bijective, une transformation douce de Γ en $f(\Gamma)$ est une suite finie $\Gamma_0 \dots \Gamma_N$ de graphes discrets telle que :

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_N = f(\Gamma)$
- $\forall i, \Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_{i+1}$.

Problème 6.2.4. Etant donné un graphe discret Γ et $p \in \mathbb{Z}^2$, comment traduire doucement Γ pour obtenir $\Gamma + p$?

6.2.1 Translation d'arbres discrets

Un premier sous-problème simple est celui de la translation des arbres discrets. L'idée est essentiellement d'appliquer l'algorithme de translation de segments à chacune des arêtes de l'arbre. Le seul point d'attention porte sur le moment où l'on bouge un sommet s du graphe. Si toutes les arêtes incidentes à s comptent s parmi leurs sommets montables, on peut monter s .

Sinon, il faut attendre en montant des points sur d'autres segments jusqu'à ce que la situation en s se débloque. Par un argument de lemme des tiroirs, nous prouvons la terminaison de cet algorithme dans le cas des arbres. Un exemple est donné en Figure 6.16. Dans la Figure présentée, le point étiqueté 26 tout en bas a 2 segments adjacents. Il est initialement montable pour le segment à sa gauche, mais pas pour le segment à sa droite. La montée de ce point doit donc attendre que le segment de droite ait été traité pour avoir lieu.

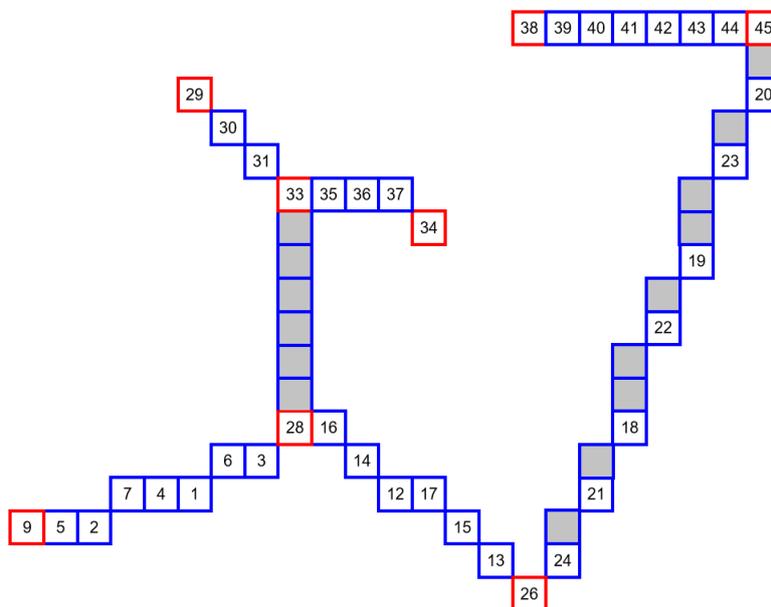


FIGURE 6.16 – Déroulé de l'algorithme sur un arbre discret. Les extrémités sont en rouge, les points immobiles en gris. Les nombres correspondent à l'ordre de translation des points de chaque segment.

Algorithme : Translation douce d'arbre discret

Entrée : un graphe discret Γ dont le graphe est un arbre

Sortie : Effectue la translation douce de Γ

$\Sigma, A, \rho \leftarrow$ graphe et plongement de Γ ;

tant que Γ n'a pas été totalement translaté **faire**

pour $S \in \rho(A)$ non totalement translaté **faire**

$p \leftarrow$ prochain point de S à bouger ;

si p n'est pas une extrémité de S **alors**

 | Bouger p ;

sinon

 | $V(p) \leftarrow \{S \in \rho(A) \mid p \text{ est une extrémité de } S\}$;

 | **si** $\forall S \in V$, le prochain point à bouger dans S est p **alors**

 | Bouger p ;

Théorème 6.2.5. Si Γ est un arbre discret possédant au moins 2 sommets alors l'algorithme de translation d'arbre discret termine, est correct et a une complexité linéaire en $|\Gamma| \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{S \in \rho(A)} |S|$.

Avant de démontrer le théorème de correction, remarquons que l'algorithme ne translate pas correctement l'arbre dégénéré à un unique sommet. En effet, si $G = (\{s\}, \emptyset)$ alors $\rho(A) = \emptyset$ donc l'algorithme ne fait rien. Notons toutefois que, dans ce cas très particulier, il existe un algorithme trivial qui translate doucement $\{p\}$.

Démonstration. La correction partielle de l'algorithme découle de la correction des algorithmes de translation. On prouve la terminaison par récurrence sur $|\Sigma|$. Si G possède 2 sommets alors Γ est un segment discret donc l'algorithme est celui de translation de segment, qui termine. Supposons $|\Sigma| \geq 3$. G admet une feuille s rattachée à G par une arête $a = \{s, s'\}$. On pose $q \stackrel{\text{déf}}{=} \rho(s)$ et $q' \stackrel{\text{déf}}{=} \rho(s')$. On pose enfin $S \stackrel{\text{déf}}{=} \rho(A)$ qui a ainsi pour extrémités q et q' . Supposons par l'absurde que l'algorithme ne termine pas et considérons l'état dans lequel il est bloqué. Soit p le prochain point à bouger pour le segment S . Comme le point p ne peut être monté, p est nécessairement une extrémité de S . De plus, $p \neq q$ car $V(q) = \{S\}$ donc pour tout $S_0 \in V(q)$, p est le prochain point à bouger de S_0 . Donc $p = q'$. Cela démontre donc que l'algorithme ne termine pas sur le graphe discret induit par $\Sigma \setminus \{s\}$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence. \square

L'algorithme de translation d'arbre discret peut également être utilisé sur des graphes discrets quelconques mais ne termine pas toujours en l'état. On peut par exemple observer la Figure 6.17 qui est un cycle discret. Pour chacune des arêtes du cycle, le prochain sommet à monter pour l'algorithme de translation douce de segment est l'extrémité qui suit le segment lorsqu'on tourne dans le sens trigonométrique. Ainsi, l'algorithme demande de monter le sommet Est dans le segment Sud-Est, le sommet Nord dans le segment Nord-Est, le sommet Ouest dans le segment Nord-Ouest et le sommet Sud dans le segment Sud-Ouest. On aboutit ainsi à un conflit irrésoluble, à l'image du paradoxe des philosophes. Chaque segment attend, pour monter son sommet, que les autres segments incidents au sommet soient prêt à le monter.

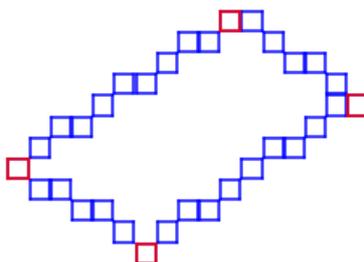


FIGURE 6.17 – Un cas de blocage de l'algorithme de translation de graphe discret

On remarque toutefois qu'il existe des points montables dans la Figure 6.17 au milieu des segments : il existe donc un moyen de modifier notre algorithme de translation douce pour sortir du blocage. Le principal problème de la méthode présentée pour les arbres est que l'algorithme de translation de segments ne nous permet pas de savoir quelle extrémité bougera en premier. Nous proposons ainsi une variante de la translation de segments assurant que l'extrémité la plus basse e_b monte toujours avant l'extrémité haute e_h .

6.2.2 Translation par double bascule

Remarquons tout d'abord que la translation douce de segment de pente ≥ 1 fait toujours monter l'extrémité basse (en la supprimant) avant l'extrémité haute (en l'ajoutant). Ce n'est malheureusement pas le cas de l'algorithme pour les segments de pente ≤ 1 qui utilise un sur-segment primitif. Afin de trouver un algorithme de translation douce qui assure que l'extrémité basse e_b monte avant l'extrémité haute e_h , on utilise l'algorithme de rotation douce. On effectue ainsi une rotation douce de centre e_h et dans le sens trigonométrique inverse, tant que cela est possible. On effectue ensuite une rotation douce de centre e_b dans le sens trigonométrique, jusqu'à avoir monté tous les points du segment. On parle alors de translation par double bascule.

Algorithme : Translation par double bascule

Entrée : un segment naïf S du premier octant

Sortie : Effectue une translation douce de S à $S + e_2$ en montant l'extrémité basse avant l'extrémité haute

$T \leftarrow S$ (ensemble des points à bouger) ;

$e_b \leftarrow$ extrémité basse de S ;

$e_h \leftarrow$ extrémité haute de S ;

$p \leftarrow$ prochain point à bouger pour la rotation indirecte de centre e_h ;

tant que $p \notin T$ **faire**

 Monter le point p ;

 Retirer p de T ;

$p \leftarrow$ prochain point à bouger pour la rotation indirecte de centre e_h ;

tant que $T \neq \emptyset$ **faire**

$I \leftarrow$ ensemble des points d'appui inférieurs de S ;

 Choisir un élément p de $T \cap \{\min(I), \max(I)\}$;

 Monter le point p ;

 Retirer p de T ;

Afin de voir la différence entre les 2 algorithmes de translation douce, observons en exemple le segment de la Figure 6.18 de paramètres 4,9,2. L'ordre de mouvement des points dans l'algorithme de translation douce est l'ordre décroissant des restes $4x - 9y + 2$. On commence donc par le point numéroté 8, puis 7, etc. L'extrémité haute, étiquetée 7, monte ainsi avant l'extrémité basse, étiquetée 2. En Figure 6.19, on représente le déroulé de l'algorithme de translation par double bascule sur ce même segment. On commence tout d'abord par monter les points pour la rotation inverse de centre e_h (2 premières lignes de la Figure) : on monte ainsi à chaque étape le point d'appui inférieur le plus à gauche. Dans cette phase, l'extrémité basse monte mais pas l'extrémité haute. Après l'étape 6 (début de la dernière ligne de la Figure), le nouveau point à monter est le point d'abscisse 1 qui a déjà été monté. On arrête donc la première phase et on effectue désormais une rotation directe de centre e_b : on monte ainsi, à chaque étape, le point d'appui inférieur le plus à droite. L'extrémité haute est alors montée lors de cette seconde phase de l'algorithme. Finalement, le segment a été translaté de e_2 et l'extrémité basse a été montée avant l'extrémité haute.

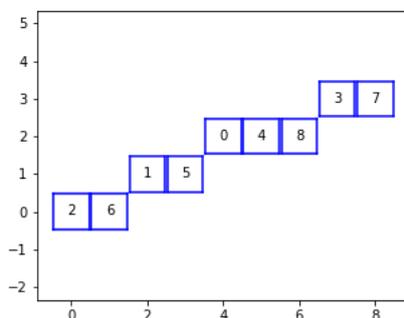


FIGURE 6.18 – Segment primitif d'équation $0 \leq 4x - 9y + 2 < 9$. Dans chaque carré (x, y) est écrit le nombre $4x - 9y + 2$.

Théorème 6.2.6. *L'algorithme de double bascule termine et calcule la translation douce d'un segment en montant l'extrémité basse e_b avant l'extrémité haute e_h .*

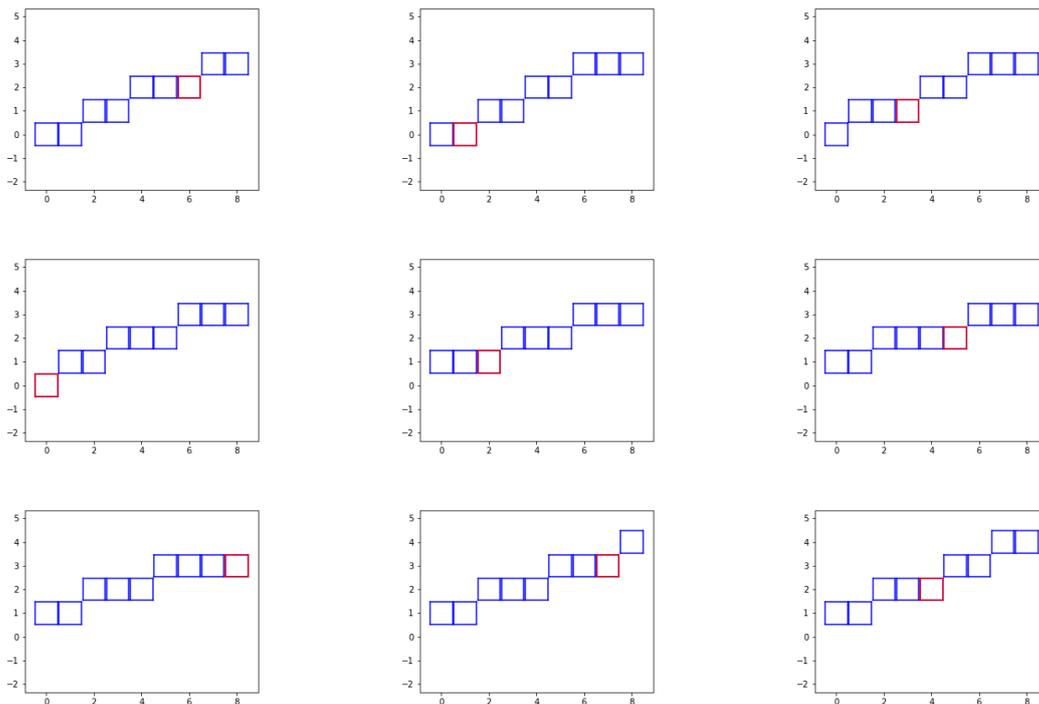


FIGURE 6.19 – Déroulé de l’algorithme de translation douce par double bascule

Démonstration. La correction partielle découle du théorème des points montables et du fait qu’aucun point n’est monté 2 fois. En notant S le segment courant, de valeur initiale S_0 et d’équation initiale $0 \leq ax - by + \mu < b$, on montre aisément l’invariant suivant sur $(x, y) \in S$:

- $(x, y) \in T$ ssi $0 \leq ax - by + \mu < b$ (un point reste à monter ssi il est dans S_0) ;
- $(x, y) \notin T$ ssi $0 \leq ax - by + \mu + b < b$ (un point est déjà monté ssi il est dans $S_0 + e_2$).

Pour la terminaison de la première boucle Tant que, il suffit de constater que $|T|$ est un variant positif strictement décroissant. Pour la terminaison de la seconde boucle Tant que, on suppose par contraposée que les points d’appui inférieurs extrémaux ne sont pas dans T . Alors ces points d’appui inférieurs extrémaux vérifient $0 \leq ax - by + \mu + b < b$ par l’invariant. Donc, par convexité de I , tous les points de I vérifient $0 \leq ax - by + \mu + b < b$. Donc, par l’invariant, $I \cap T = \emptyset$ d’où $I \subset S_0 + e_2$. Les points de S étant situés au-dessus de la droite formée par les éléments de I , on en déduit que $S \subset S_0 + e_2$ d’où $T = \emptyset$.

Enfin, reste à démontrer que l’extrémité basse $e_b = (0, 0)$ bouge effectivement avant l’extrémité haute e_h . On remarque que e_h ne bouge pas lors de la première boucle (qui est une rotation de centre e_h), il suffit donc de montrer que e_b monte lors de cette étape. Considérons le point $p = (x_p, y_p)$ donné à la fin de la première boucle : ainsi, p est le point d’appui inférieur minimal de S , d’équation $0 \leq a'x - b'y + \mu' < b'$ avec $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$. Donc $a'x_p - b'y_p + \mu' = b' - 1$. Comme la première boucle est terminée, $p \notin T$ donc, par l’invariant $0 \leq ax_p - by_p + \mu + b < b$ donc $ax_p - by_p + \mu < 0$. Comme $e_b \in S_0$, $0 \leq \mu$ donc $ax_p - by_p < 0$. Ainsi, $y_p > \frac{a}{b}x_p$. Supposons par l’absurde que $e_b \in S$. Alors $\mu' < b'$ donc $\mu' \leq b' - 1$. Donc $b' - 1 = a'x_p - b'y_p + \mu' \leq a'x_p - b'y_p + b' - 1$. Donc $y_p \leq \frac{a'}{b'}x_p < \frac{a}{b}x_p \leq y_p$, ce qui est absurde. \square

L’algorithme de translation par double bascule calcule la translation douce en $O(n \ln(n))$. En effet, chaque étape coûte $O(\ln(n))$ pour calculer les nouveaux paramètres du segment et n étapes sont nécessaires pour monter totalement le segment. Remarquons également que cet algorithme ne conserve pas les pentes des segments. Les différentes pentes obtenues lors de

l'algorithme restent toutefois comprises, après calcul, dans un intervalle de taille $\frac{1}{n}$.

6.2.3 Translation douce de graphes discrets

En utilisant l'algorithme de translation par double bascule, on peut désormais assurer qu'il n'y a pas de situation de blocage lors de la translation du graphe discret Γ . La preuve repose en effet sur le fait que l'ordre de montée de chaque extrémité est contrôlé par le théorème 6.2.6 de correction de l'algorithme de double bascule. On reprend donc l'algorithme de translation segment par segment en utilisant désormais la double bascule.

Algorithme : Translation douce de graphe discret

Entrée : un graphe discret Γ

Sortie : Effectue la translation douce de Γ à $\Gamma + e_2$

$(\Sigma, A), \rho \leftarrow$ graphe et plongement de Γ ;

tant que Γ n'a pas été totalement translaté **faire**

pour $S \in \rho(A)$ non totalement translaté **faire**

$p \leftarrow$ prochain point de S à bouger pour la translation par double bascule ;

si p n'est pas une extrémité de S **alors**

 Bouger p ;

sinon

$V(p) \leftarrow \{S \in \rho(A) \mid p \text{ est une extrémité de } S\}$;

si $\forall S \in V(p)$, le prochain point à bouger dans S est p **alors**

 Bouger p ;

Un exemple de translation douce de graphe discret obtenu via notre algorithme est disponible en Figure 6.20. Remarquons toutefois que la définition donnée de transformation douce ne garantit en rien la conservation des propriétés topologiques du graphe discret Γ translaté. Seul le graphe sous-jacent et le fait que chaque arête est un segment est conservé. Ainsi, lorsque l'on regarde la Figure 6.21, le sommet central peut être monté par notre algorithme. Cette opération ne brise pas le graphe sous-jacent ni le fait que chaque arête est un segment, donc l'opération est valide du point de vue de la définition de transformation douce. Toutefois, cette opération ne conserve pas les propriétés topologiques de l'objet. En effet, l'objet résultant de cette opération contient un trou pour la 4-connexité, ce qui n'était pas le cas de l'objet initial. Pour un panorama des outils utilisés pour conserver les propriétés géométriques ou topologiques des objets, on pourra notamment consulter [39].

FIGURE 6.20 – Vidéo de translation douce d'un graphe discret

La translation de graphes discrets permet en particulier de translater doucement des formes 8-connexes quelconques. Il suffit pour cela d'utiliser un algorithme de polygonalisation, comme

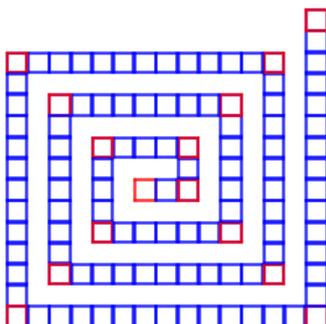


FIGURE 6.21 – Un graphe discret en forme de spirale

par exemple celui présenté par I. Debled-Rennesson dans [19]. Le contour de la forme est alors un graphe discret et peut être traduit via notre algorithme. Un exemple de graphe induit par une structure discrète est donné en Figure 6.22.

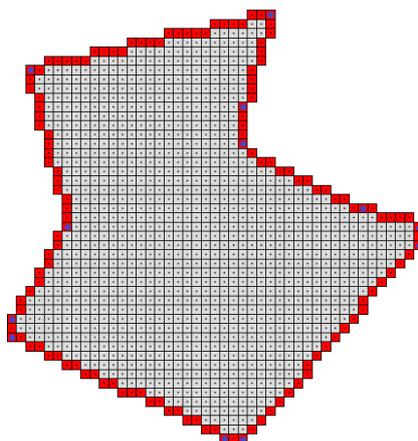


FIGURE 6.22 – Un graphe possible (en rouge) pour une forme discrète polygonale. Les sommets du graphe sont représentés par un point bleu.

Des algorithmes de transformations de formes discrètes apparaissent également dans [53], où le problème est attaqué par la combinatoire des mots. L'article s'intéresse en particulier aux formes convexes : un objet $X \subset \mathbb{Z}^2$ est dit convexe ssi $X = \text{Conv}(X) \cap \mathbb{Z}^2$ (notons qu'il existe d'autres définitions possibles de la convexité en géométrie discrète, comme présenté dans [34]). La frontière d'un objet convexe et 4-connexe peut être représentée par un mot en $\{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}$ dont les lettres encodent les directions de déplacement dans la forme (voir Figure 6.23).

La question posée dans l'article de L. Tarsisi et al [53], est de trouver une transformation d'un objet convexe connexe X en un objet convexe connexe Y en ajoutant ou supprimant au plus un pixel à chaque étape et en conservant les propriétés de convexité et de connexité. Les théorèmes présentés permettent notamment de savoir quels pixels peuvent être rajoutés ou enlevés à la forme tout en préservant ces propriétés. La combinatoire des mots caractérise alors ces pixels comme étant les points de Lyndon du mot frontière, ce qui correspond géométriquement aux points d'appui extrémaux. On retrouve alors des résultats analogues au théorème des points montables, mais démontrés dans un contexte légèrement différent et par la combinatoire des mots.

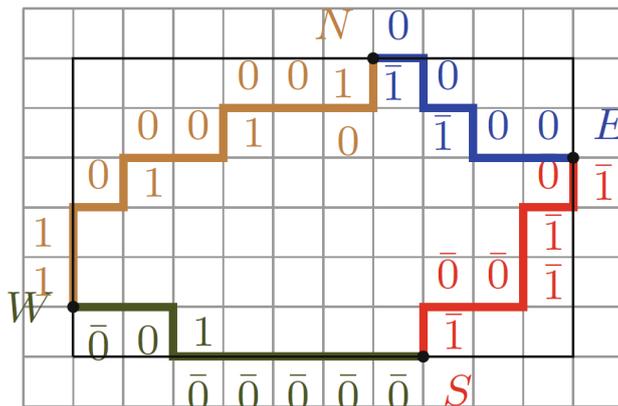


FIGURE 6.23 – Une forme convexe et son mot frontière

6.3 Extension aux morceaux d’hyperplans arithmétiques

Nous proposons, dans cette ultime partie, une extension de nos résultats sur la translation douce en toute dimension finie. Nous considérons ici des hyperplans arithmétiques naïfs dont la combinatoire est nettement plus complexe que celle des droites. Notamment, l’ensemble des points d’appui d’un morceau d’hyperplan arithmétique possède une structure plus compliquée que dans le cas des droites discrètes. La notion de point d’appui extrémal offre en particulier davantage de possibilités. Nous étendons ici une partie de nos résultats sur les segments à des morceaux d’hyperplans arithmétiques en dimension finie quelconque :

- une condition suffisante pour être un point montable, semblable à celle du théorème des points montables 6.1.7 ;
- l’algorithme de translation douce d’un morceau d’hyperplan arithmétique (à savoir une partie finie quelconque d’hyperplan arithmétique).

Commençons tout d’abord par étendre la notion de transformation douce à des morceaux d’hyperplans arithmétiques.

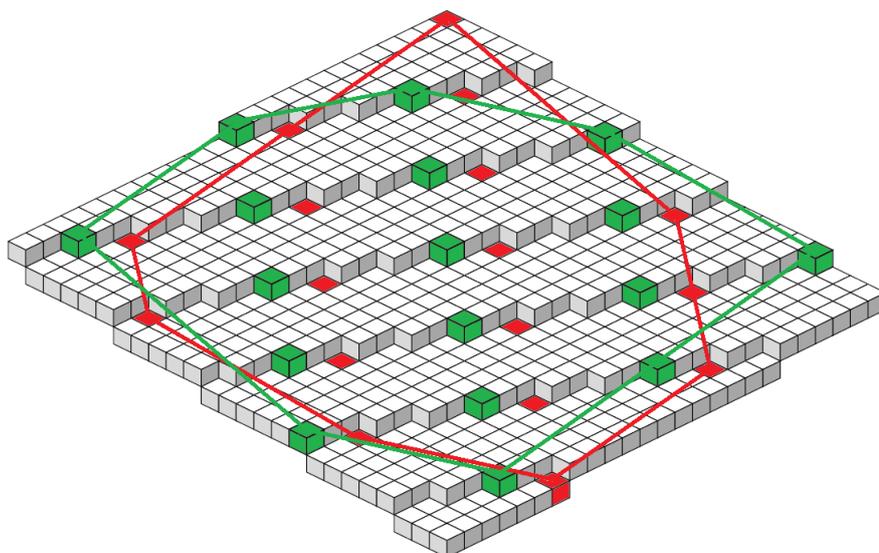


FIGURE 6.24 – Points d’appui inférieurs (en rouge) et supérieurs (en vert) d’un morceau de plan discret

Définition 6.3.1 (Hyperplan naïf). Soit $v \in \mathbb{R}^d$ non nul et $\mu \in \mathbb{R}$. L'hyperplan arithmétique naïf de vecteur normal v et de décalage μ est l'ensemble

$$\mathbb{P}(v, \mu) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle x, v \rangle + \mu < \|v\|_\infty\}$$

Définition 6.3.2. Hyperplans voisins Soient P, Q deux morceaux finis d'hyperplans. On dit que P et Q sont voisins ssi ils peuvent s'écrire $X \cup \{p\}$ et $X \cup \{q\}$ où $\|p - q\|_1 = 1$. On note alors $P \leftrightarrow Q$.

Définition 6.3.3 (Transformation douce d'hyperplan). Soit P un morceau fini d'hyperplan et $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ bijective. Une transformation douce de P en $f(P)$ est une suite de morceaux d'hyperplans P_0, \dots, P_N tels que :

- $P_0 = P$
- $P_N = f(P)$
- $\forall i, P_i \leftrightarrow P_{i+1}$

Problème 6.3.4. Comment, étant donné un morceau d'hyperplan P , effectuer une translation douce $x \mapsto x + u$ de P ?

On peut se ramener, par composition et symétrie, au problème de translater de e_i un hyperplan de vecteur normal positif et trié. De même qu'il était nécessaire de distinguer la translation de e_1 et de e_2 dans le cas des segments, la translation de vecteur e_d utilisera un algorithme différent des translations de vecteurs e_i pour $i < d$. On étend enfin la notion de point d'appui en 2D par la notion de point minimal ou maximal. Bien qu'il soit possible de parler de point d'appui en toute dimension finie, la notion de point maximal ou minimal que nous présentons ici est plus adaptée à notre problème.

Définition 6.3.5 (Points minimaux et maximaux). Soit $v \in \mathbb{R}^d$ non nul et $\mu \in \mathbb{R}$. Soit P un morceau de l'hyperplan $\mathbb{P}(v, \mu)$. On dit que $p \in P$ est un point minimal (resp. maximal) de $\mathbb{P}(v, \mu)$ ssi p a un produit scalaire minimal (resp. maximal) avec v parmi les éléments de P . On note alors $\Pi_{\min}(P, v)$ (resp. $\Pi_{\max}(P, v)$) l'ensemble de points minimaux (resp. maximaux) de P .

Notons que la notion de point minimal est très proche de la notion de point d'appui inférieur, mais qu'il existe toutefois une différence importante. La notion de point d'appui inférieur ne dépend que de P , le vecteur v normal à P étant le vecteur entier minimal tel que $P \subset \mathbb{P}(v, \mu)$. Pour la notion de point minimal, il est possible de considérer d'autres vecteurs v , et ce changement peut mener à une modification de l'ensemble $\Pi_{\min}(P, v)$. Grâce à la notion de point minimal, on peut exhiber une condition suffisante pour qu'un point soit montable dans P .

Théorème 6.3.6 (points montables). Soit P un morceau d'hyperplan de vecteur normal v positif croissant et p un point extrémal de $\Pi_{\min}(P, v)$ (ie non contenu dans l'enveloppe convexe des autres points de $\Pi_{\min}(P, v)$). Alors p est montable, ie $P[p \uparrow] \stackrel{\text{déf}}{=} P \cup \{p + e_d\} \setminus \{p\}$ est un morceau d'hyperplan naïf.

Idée de la preuve : dans le cas où $\Pi_{\min}(P, v)$ est réduit à un singleton, le résultat est obtenu simplement en faisant varier le décalage. Sinon, on fait légèrement vibrer le vecteur normal à l'hyperplan pour obtenir un nouveau vecteur normal v_ε , changeant ainsi très légèrement les produits scalaires, et nous ramenant au cas précédent.

Démonstration. Démontrons tout d'abord le résultat dans le cas où $\Pi_{\min}(P, v)$ est réduit à un singleton $\{p\}$. Soit $q \in \Pi_{\min}(P \setminus \{p\}, v)$. Considérons alors $P' \stackrel{\text{déf}}{=} P \cup \{p + e_d\} \setminus \{p\}$ et montrons

que $P' \subset \mathbb{P}(v, -\langle q, v \rangle)$. Soit $x \in P'$. Si $x = p + e_d$ alors $\langle p + e_d, v \rangle - \langle q, v \rangle = \langle p - q, v \rangle + v_d < v_d$ car $p \in \Pi_{\min}(P, v)$. De plus, $\langle p + e_d, v \rangle - \langle q, v \rangle = \langle p - q, v \rangle + v_d \geq 0$ car $|\langle p - q, v \rangle| < v_d$ du fait que p et q sont dans un même plan naïf de vecteur normal v . Donc $x \in \mathbb{P}(v, -\langle q, v \rangle)$. Si $x \neq p + e_d$ alors $x \in P \setminus \{p\}$ d'où $\langle x, v \rangle - \langle q, v \rangle \geq 0$ par minimalité de q . De plus, $\langle x, v \rangle - \langle q, v \rangle < \langle p + e_d \rangle - \langle q, v \rangle < v_d$ car $x \in P$. Donc $x \in \mathbb{P}(v, -\langle q, v \rangle)$. Ainsi, P' est un morceau de plan naïf et p est montable dans P .

Etudions désormais le cas où $\Pi_{\min}(P, v)$ n'est pas réduit à un singleton et ramenons-nous au cas précédent. On considère C l'enveloppe convexe de $\Pi_{\min}(P \setminus \{p\}, v)$. C est donc un convexe fermé disjoint de $\{p\}$. Par le théorème de Hahn-Banach géométrique (voir Figure 6.25), il existe un hyperplan H séparant p de C . Soit alors u le vecteur normal à cet hyperplan de norme euclidienne 1 et orienté dans le sens de p . L'hyperplan étant séparant, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\langle p, u \rangle > c$ et $\forall q \in \Pi(P \setminus \{p\}, v), \langle q, u \rangle < c$. Donc, en soustrayant, $\forall q \in \Pi(P, v), \langle p, u \rangle \geq \langle q, u \rangle$ avec égalité ssi $p = q$. Considérons désormais, pour $v' \in \mathbb{R}^d$, le réel $\delta(v') \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{x \in P} \langle x, v' \rangle - \min_{x \in P} \langle x, v' \rangle$ la différence entre les produits scalaires maximaux et minimaux dans P . Le vecteur v' est admissible pour le morceau de plan P (ie $\exists \mu' \in \mathbb{R}, P \subset \mathbb{P}(v', \mu')$) ssi $\delta(v') < \|v'\|_\infty$. Notamment, $\delta(v) < \|v\|_\infty$ car v est admissible pour P . De plus, considérons $\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \min_{x \in P \setminus \Pi(P, v)} \langle x, v \rangle$ l'avant-dernier produit scalaire selon v . On pose enfin $\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \min \left(\frac{\|v\|_\infty - \delta(v)}{2(R\sqrt{d} + 1)}, \frac{\lambda - \langle p, v \rangle}{2(R\sqrt{d} + 1)} \right) > 0$ où $R \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{x \in P} \|x\|_2$, et regardons $v' \stackrel{\text{déf}}{=} v - \varepsilon u$.

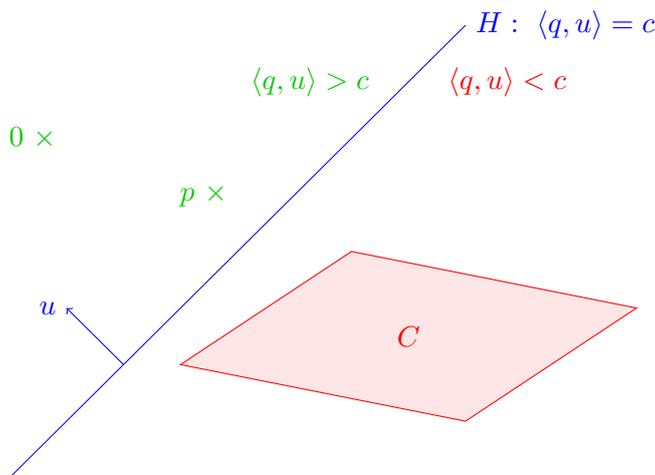


FIGURE 6.25 – Illustration de l'utilisation du théorème de Hahn-Banach. L'hyperplan H sépare les convexes fermés C et $\{p\}$.

Soit $x \in P$. Par Cauchy-Schwarz, $|\langle x, v \rangle - \langle x, v' \rangle| = \varepsilon |\langle x, u \rangle| \leq \varepsilon \|x\|_2 \|u\|_2 \leq \varepsilon R\sqrt{d} \|u\|_\infty = \varepsilon R\sqrt{d}$. Ainsi, $\delta(v') \leq \delta(v) + 2R\varepsilon\sqrt{d} < \|v\|_\infty - \varepsilon$ par définition de ε . Or $\|v'\|_\infty = \|v - \varepsilon u\|_\infty \geq \|v\| - \varepsilon$. Donc $\delta(v') < \|v'\|_\infty$ ce qui prouve l'admissibilité de v' .

Montrons enfin que $\Pi_{\min}(P, v') = \{p\}$. Soit $x \in P$. Si $x \in \Pi_{\min}(P, v)$ alors $\langle x, v \rangle = \langle p, v \rangle$. Donc $\langle x, v' \rangle - \langle p, v' \rangle = \varepsilon(\langle p, u \rangle - \langle x, u \rangle) > 0$ par définition de u . Si $x \notin \Pi_{\min}(P, v)$ alors $\langle x, v \rangle \geq \lambda$ donc $\langle x, v' \rangle - \langle p, v' \rangle \geq \lambda - \langle p, v \rangle - 2R\varepsilon\sqrt{d} > 0$ par définition de ε . On a donc bien $\Pi_{\min}(P, v') = \{p\}$ ce qui nous ramène au cas du singleton. \square

Dès la dimension 3, le théorème des points montables n'est plus une équivalence. Le problème vient de l'existence de points fortement extérieurs à un morceau de plan P qui peuvent toutefois

être ajoutés à P en conservant la propriété d'être un morceau de plan. Un tel problème est exposé dans [19] avec le plan $\mathbb{P}(3, 6, 10, 0)$ restreint aux points de coordonnées $(x, y) \in \llbracket 0, 12 \rrbracket \times \llbracket 0, 1 \rrbracket$. Le point $M \stackrel{\text{déf}}{=} (0, 2, 0)$ admet alors un produit scalaire 12 avec $(3, 6, 10)$ donc est fortement extérieur mais peut toutefois être ajouté à P pour obtenir un plan de paramètres $(6, 9, 19, 0)$.

Le théorème des points montables nous permet de traiter le cas simple de la translation de e_d d'un morceau d'hyperplan. On peut toutefois remarquer que monter un point dans un morceau de plan modifie potentiellement le vecteur normal considéré. Celui-ci peut être recalculé à chaque étape mais cela induit un énorme coût de calcul à chaque montée, l'utilisation d'un algorithme de reconnaissance d'hyperplan n'étant pas gratuit. Une manière de contourner le problème est de trouver un vecteur v' normal à P ayant des coordonnées indépendantes sur \mathbb{Q} . Les points de P auront dès lors des produits scalaires avec v' 2 à 2 distincts, ce qui permet d'enchaîner les transformations de plan sans changer de vecteur normal. L'ordre des produits scalaires donne de plus l'ordre de modification des points.

Algorithme : Translation douce de morceau d'hyperplan dans la direction e_d

Entrée : Un morceau d'hyperplan P de vecteur normal positif croissant

Sortie : Effectue la translation douce de P à $P + e_d$

tant que le plan n'est pas totalement translaté **faire**

- | Prendre un point minimal extrémal p de P ;
- | Monter p dans P ;

Dans le cas des translations de e_i pour $i \neq d$, il est nécessaire d'autoriser des ajouts et suppressions de points, comme dans le cas des segments (voir Figure 6.26). Les points à supprimer (en rouge) sont les points en bout de palier, ie de coordonnée minimale selon e_i , les points à ajouter (au niveau des points verts) ceux à l'autre bout du palier, ie les p tels que $p - e_i$ sont de coordonnée maximale selon e_i . Les points à monter (en bleu) sont, quant à eux, les limites de palier, ie les $x \in P$ tels que $\langle x, v \rangle + \mu < v_1$. On utilise ensuite le même théorème que précédemment pour monter les points un à un.

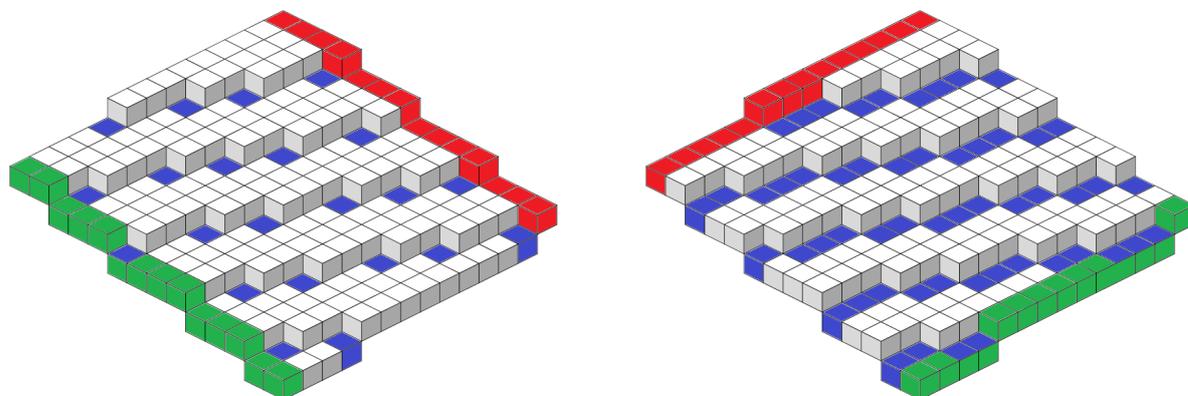


FIGURE 6.26 – Points à modifier pour la translation de vecteur e_1 (à gauche) et e_2 (à droite). Les points à supprimer sont en rouge, les points à monter sont en bleu. Les points p en vert se voient ajouter un point en $p + e_i$.

Algorithme : Translation douce de morceau de plan dans la direction e_i
Entrée : Un morceau d'hyperplan P de vecteur normal positif croissant et un indice de coordonnée i
Sortie : Effectue la translation douce de P à $P + e_i$
 $M \leftarrow$ ensemble des points à monter ;
 $S \leftarrow$ ensemble des points à supprimer ;
 $A \leftarrow$ ensemble des points à ajouter ;
tant que $M \neq \emptyset$ **faire**
 Prendre un point minimal p de P ;
 si $p \in S$ **alors**
 | Supprimer p ;
 sinon
 | Monter p
 Retirer p de M ;
pour p dans S **faire**
 | Supprimer p ;
pour p dans A **faire**
 | Ajouter p ;

De même que pour la translation dans la direction e_d , recalculer les points minimaux à chaque étape demande l'appel à un algorithme de reconnaissance de plan. Considérer un vecteur normal v' à coordonnées indépendantes sur \mathbb{Q} permet alors de simplifier drastiquement le problème, en demandant initialement un appel à un algorithme de tri.

6.4 Bilan & perspectives

Ce chapitre définit la notion de transformation douce d'objets discrets, analogue des homotopies dans le cas continu. Nous proposons notamment des algorithmes simples et efficaces pour la translation de diverses structures discrètes : segments, arbres, graphes, formes pleines et morceaux d'hyperplans arithmétiques. Ces algorithmes reposent sur le théorème des points montables 6.1.7 qui caractérise les points d'un segment qui peuvent être déplacés sans changer ses propriétés géométriques. Ce théorème fait également écho à la caractérisation donnée dans [53] des points insérables et supprimables dans des formes convexes connexes de \mathbb{Z}^2 .

Il serait désormais pertinent de s'intéresser à des transformations douces plus complexes en 2D, telles que les rotations. Le problème semble toutefois nettement plus difficile, les rotations de \mathbb{Z}^2 n'étant pas bijectives en général, et ne conservant souvent pas les propriétés géométriques et topologiques des objets. Enfin, la généralisation naturelle des graphes en dimension 3 et supérieures passe par la notion de complexe simplicial. Le problème de translation douce de complexes simpliciaux paraît toutefois nettement plus ardu que celle des graphes en 2D. En effet, les points de conflit à considérer, qui étaient des sommets en dimension 2, deviennent des arêtes et des sommets en dimension 3. Il n'est donc pas sûr qu'un simple algorithme de double bascule suffise à régler les conflits qui règnent au sein des complexes simpliciaux.

Δ -numération

Ce chapitre porte sur un système de numération introduit dans [22] pour étudier la connexité des hyperplans arithmétiques : la Δ -numération. Nous proposons ici une brève étude de ce système et de ses propriétés. Nous faisons notamment le parallèle avec les bases réelles de Cantor, étudiées dans [16, 15]. Ce chapitre contient un certain nombre de propriétés et définitions redondantes avec celles données dans le chapitre 2, le but étant qu'il puisse être lu indépendamment du reste du manuscrit.

7.1 Ensemble de Kraaikamp-Meester

Le système de numération étudié est créé à partir du déroulé d'un algorithme appelé Algorithme Totalement Soustractif et introduit dans [51] pour l'étude des fractions continues multi-dimensionnelles. Nous nous intéressons alors uniquement au déroulé de l'algorithme et non à sa sortie. Nous notons donc simplement « Terminer » pour signaler la fin de l'exécution. On note π_i la projection orthogonale parallèlement à e_i et $\mathbf{1}$ le vecteur $(1, \dots, 1)$ de \mathbb{R}^d .

Algorithme : Algorithme totalement soustractif [51, 21]

Entrée : v un vecteur positif non nul

$d \leftarrow$ nombre de coordonnées de v ;

tant que $d > 1$ **faire**

si *il existe deux coordonnées* v_j *et* v_k *rationnellement indépendantes et telles que*

$v_j + v_k \leq \|v\|_\infty$ **alors**

 Terminer ;

fin

si v *admet une coordonnée nulle* v_i **alors**

$v \leftarrow \pi_i(v)$;

$d \leftarrow d - 1$

fin

sinon

$i \leftarrow$ indice d'une coordonnée minimale de v ;

$v \leftarrow v - v_i(\mathbf{1} - e_i)$;

fin

fin

La dynamique de cet algorithme a été étudiée dans [31] par C. Kraaikamp et R. Meester dans un cadre initialement totalement différent de celui des fractions continues. Ils montrent notamment une propriété de Lebesgue-négligeabilité sur l'ensemble des vecteurs pour lesquels l'algorithme ne termine pas (pour $d \geq 3$).

$$\begin{array}{c}
 v \\
 (16,7,10,7) \\
 (9,7,3,0) \\
 (9,7,3) \\
 (6,4,3) \\
 (3,1,3) \\
 (2,1,2) \\
 (1,1,1) \\
 (1,0,0) \\
 (1,0) \\
 (1)
 \end{array}$$

FIGURE 7.1 – Déroulé de l'algorithme totalement soustractif sur l'exemple $(16, 7, 10, 7)$.

$$\begin{array}{c}
 v \\
 (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}) \\
 (1, -1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{3}) \\
 (2 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, -\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\
 (2 - \sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3}, -\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\
 \text{Terminaison car } v_1 \geq v_2 + v_3 \text{ et } \frac{v_2}{v_3} \notin \mathbb{Q}
 \end{array}$$

FIGURE 7.2 – Déroulé de l'algorithme totalement soustractif sur l'exemple $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Définition 7.1.1 (Ensemble de Kraaikamp-Meester [31]). *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ tel que l'algorithme totalement soustractif ne termine pas sur l'entrée v ni n'effectue de projection. On note $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des vecteurs considérés par l'algorithme. On dit que v vérifie la propriété de Kraaikamp-Meester ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|v^{(n)}\|_\infty < \frac{\|v^{(n)}\|_1}{d-1}$. On note \mathcal{K}_d l'ensemble des vecteurs vérifiant la propriété Kraaikamp-Meester de dimension d .*

L'ensemble \mathcal{K}_d a été introduit par C. Kraaikamp et R. Meester dans un tout autre contexte que celui de la géométrie discrète. Il s'agit de l'ensemble des vecteurs pour lesquels l'algorithme totalement soustractif ne termine pas ni n'effectue de projection, à une petite exception technique près. En effet, les vecteurs de la forme $v = (v'_1, v'_2, \dots, v'_i, \frac{\|v'\|_1}{i-1}, \dots, \frac{\|v'\|_1}{i-1})$ pour $v' \in \mathcal{K}_i$ et $i < d$ ne sont pas dans \mathcal{K}_d . En dehors de cette exception fâcheuse, on peut, en première lecture, retenir que les vecteurs de \mathcal{K}_d sont ceux pour lesquels l'algorithme totalement soustractif ne termine pas ni n'effectue de projection. Une représentation normalisée (en imposant $\|v\|_1 = 1$) de l'ensemble \mathcal{K}_3 est donnée en Figure 2.5 (issue de l'article [4] où \mathcal{K}_3 correspond au joint de Rauzy). L'ensemble \mathcal{K}_3 , correspondant au joint de Rauzy étudié dans [4]. Cet ensemble a été montré Lebesgue-négligeable pour $d \geq 3$ dans le même article [31]. Cela signifie notamment que l'algorithme entièrement soustractif termine pour presque tout vecteur (lorsque $d \geq 3$).

Théorème 7.1.2 ([31]). *Si $d \geq 3$ alors \mathcal{K}_d est Lebesgue-négligeable.*

Dans le cas de la dimension 2, \mathcal{K}_2 est l'ensemble des vecteurs irrationnels de \mathbb{R}^2 , ie l'ensemble des vecteurs $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tels que $\frac{a}{b}$ est irrationnel. Les vecteurs de l'ensemble \mathcal{K}_d nous permettent alors de définir un nouveau système de numération.

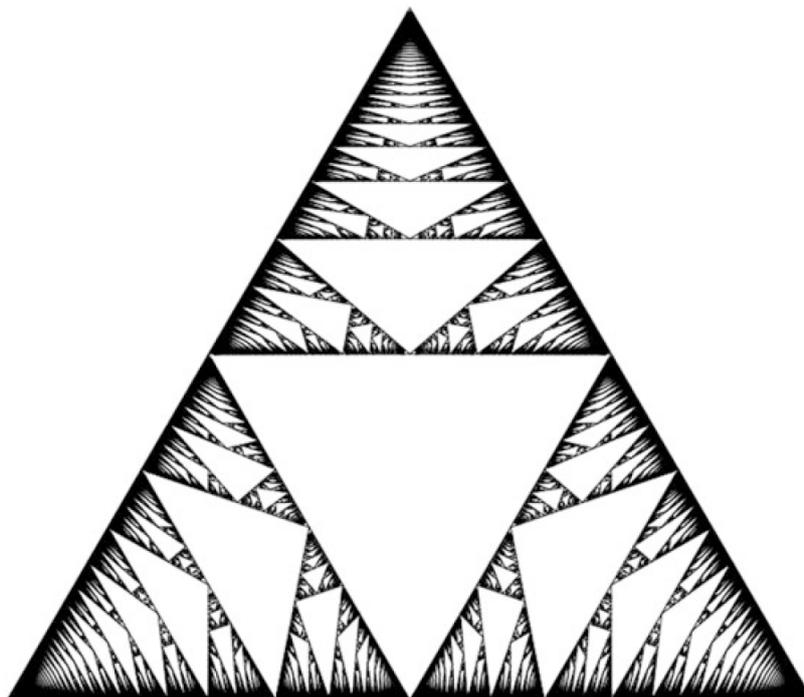


FIGURE 7.3 – Une représentation normalisée de l'ensemble \mathcal{K}_3 (le point de coordonnées (x, y) représente le vecteur $(x, y, 1 - x - y)$)

7.2 Définition de la Δ -numération

On se donne pour cette partie un vecteur v de \mathcal{K}_d et on regarde le déroulé infini de l'algorithme totalement soustractif sur v .

On note alors :

- $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des vecteurs considérés par l'algorithme (avec $v^{(1)} = v$);
- $\Delta = (\delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des indices des coordonnées minimales des v^n (ainsi $\delta_n \in \llbracket 1, d \rrbracket$);
- $\theta = (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des coordonnées minimales des v^n (ainsi $\theta_n = v_{\delta_n}^n \in \mathbb{R}_+^*$).

Pour le reste de ce chapitre, on appelle ces suites les « suites associées à v ». Notamment, Δ est appelé mot associé à v . Remarquons que les suites Δ et θ sont bien définies car il y a toujours unicité de la coordonnée minimale. Dans le cas contraire, l'étape suivante de l'algorithme mènerait à l'annulation d'une coordonnée et donc à une projection (ce qui est exclu pour les éléments de \mathcal{K}_d).

Définition 7.2.1 (Δ -numération [24]). *Soit un vecteur $v \in \mathcal{K}_d$. Soient $\Delta \in \llbracket 1, d \rrbracket^\omega$ et $\theta \in (\mathbb{R}_+^*)^\mathbb{N}$ les suites associées à v . Prenons enfin $\sigma \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ un mot infini sur l'alphabet \mathbb{Z} . On dit alors que le mot σ représente, s'il existe, le réel $\varphi^v(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n \theta_n$.*

Proposition 7.2.2 ([31]). *Si $v \in \mathcal{K}_d$ alors la suite θ associée à v est positive, décroissante et converge vers 0. De plus, la série de terme général θ converge vers le réel $\Omega(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\|v\|_1}{d-1}$.*

En 2014, V. Berthé, E. Domènjoud, D. Jamet et X. Provençal se sont intéressés au cas de Tribonacci dans [11]. On appelle α l'unique racine réelle du polynôme $X^3 + X^2 + X - 1$. On considère alors le vecteur $v \stackrel{\text{déf}}{=} (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$. On peut regarder en Figure 7.4 le déroulé de

l'algorithme totalement soustractif sur v . On obtient alors $\Delta = (123)^\omega$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \theta_n = \alpha^n$. Le système de Δ -numération est donc un simple système de β -numération classique en base $\frac{1}{\alpha}$ (pour une définition de la β -numération, on peut par exemple consulter [48]).

$$\begin{array}{r|l|l}
 v_n & \delta_n & \theta_n \\
 \hline
 v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1) & 1 & \alpha \\
 (\alpha, \alpha^2, 1 - \alpha) & 2 & \alpha^2 \\
 (\alpha - \alpha^2, \alpha^2, \alpha^3) & 3 & \alpha^3 \\
 (\alpha^4, \alpha^4 + \alpha^5, \alpha^3) = \alpha^3 v & 1 & \alpha^4 \\
 \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

FIGURE 7.4 – Déroulé de l'algorithme totalement soustractif sur le vecteur $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$ où α vérifie $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = 1$.

La Δ -numération est en réalité un cas particulier d'un système de numération beaucoup plus général, introduit quelques années plus tard par E. Charlier et C. Cisternino dans [16]. Nous restreignons ces systèmes de numération au cas où la suite σ considérée est à valeurs dans \mathbb{N} au lieu de considérer des suite de réels positifs quelconques. Pour un panorama sur les systèmes de numération, on peut, entre autres, consulter [50].

Définition 7.2.3 (Bases de Cantor réelles). *Soit $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement plus grands que 1. Soit $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$ un mot infini sur l'alphabet \mathbb{N} . Le mot σ représente alors, s'il existe, le réel $val_\beta(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sigma_n}{\prod_{k=1}^n \beta_k}$.*

Pour faire un parallèle entre la Δ -numération et les bases de Cantor, il suffit alors d'assurer $\theta_n = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \beta_k}$. Dès lors, $\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \beta_k}{\prod_{k=1}^n \beta_k} = \beta_{n+1}$. Ainsi, étant donnée une suite θ donnée par

l'algorithme entièrement soustractif, il suffit de poser $\beta_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\theta_1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \beta_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}$ pour calculer en Δ -numération avec les bases réelles de Cantor.

Notons toutefois que la réciproque est malheureusement fautive. Etant donnée une suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels strictement plus grands que 1, on peut bien définir $\theta_n = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \beta_k}$. Néanmoins,

la suite θ ainsi obtenue, bien que convergeant vers 0, n'est pas nécessairement associé à un vecteur v . En effet, on montre facilement par récurrence que les θ_n sont dans le groupe engendré par v_1, \dots, v_d . Les termes de la suite θ vivent donc tous dans un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{Q} , ce qui n'est pas nécessairement le cas des $\frac{1}{\prod_{k=1}^n \beta_k}$. Prenons par exemple pour β

la suite constante égale à π . Dès lors, il faudrait imposer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \theta_n = \frac{1}{\pi^{n+1}}$. Or, π étant transcendant, les termes de cette suite engendrent un espace de dimension infinie sur \mathbb{Q} . On ne peut donc pas représenter la base réelle de Cantor $(\pi)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en Δ -numération. La Δ -numération est un sous-ensemble strict des systèmes de numération en bases réelles de Cantor. Elle possède toutefois de meilleures propriétés de normalisation.

7.3 Expansions et réductions

Le mot Δ obtenu à partir de l'algorithme totalement soustractif caractérise tout le système de numération (à un facteur multiplicatif près). Les occurrences des différentes lettres de $\llbracket 1, d \rrbracket$ permettent notamment de calculer en Δ -numération à partir de 2 opérations : la réduction et l'expansion. Tous les résultats sur ce système de numération sont donnés dans [22].

Théorème 7.3.1 ([31]). *Soit $v \in \mathcal{K}_d$. Alors $\dim_{\mathbb{Q}}(v) = d$, ie v est totalement irrationnel.*

Théorème 7.3.2 ([23]). *Soit $\Delta \in \llbracket 1, d \rrbracket^{\omega}$. Alors Δ est associé à un vecteur $v \in \mathcal{K}_d$ ssi toutes les lettres de $\llbracket 1, d \rrbracket$ apparaissent une infinité de fois dans Δ . Dans ce cas, il existe un unique vecteur v (à un facteur multiplicatif près) associé à Δ .*

Considérons Δ un mot infini où chaque lettre admet un nombre infini d'occurrences. On pourra pour cela observer la Figure 7.5. Pour obtenir constructivement un vecteur v permettant d'obtenir Δ , on peut procéder par des découpages successifs de l'espace \mathbb{R}^d . Tout d'abord, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $v \in \mathcal{K}_d$, v et λv permettent d'obtenir le même mot infini. On cherche ainsi v positif à un facteur multiplicatif près et on peut donc imposer $\|v\|_1 = 1$. Cela réduit notre recherche à $\{v \in \mathbb{R}^d \mid v \geq 0 \text{ et } \|v\|_1 = 1\}$ qui est un $(d-1)$ -simplexe (un triangle dans la figure). Chaque lettre de Δ va alors poser une contrainte supplémentaire nous permettant de découper cet espace au fur et à mesure. Par exemple, si $\delta_1 = k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ alors k est l'indice de la composante minimale de v : on découpe donc le simplexe en d parties (les 3 sous-triangles sur la figure). En fonction de la lettre δ_1 , on se dirige donc, depuis le centre dans la direction bleue, rouge ou verte. Le polytope obtenu sera à son tour découpé en d parties selon la valeur de δ_2 , etc (les sous-triangles des sous-triangles). La suite des polytopes obtenus converge alors vers un unique point qui est le vecteur v recherché. Sur la figure, les points noirs représentent ainsi les points limites de ce processus, à savoir les éléments de \mathcal{K}_d .

Théorème 7.3.3 (liaison [22]). *Soit $v \in \mathcal{K}_d$ et Δ le mot infini associé à v . Soit $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$.*

1) *Si la lettre k a sa première occurrence dans Δ en position n alors $v_k = \sum_{i=1}^n \theta_i$.*

2) *Si la lettre k possède 2 occurrences successives dans Δ en positions m et n alors $\theta_m = \sum_{i=m+1}^n \theta_i$.*

Ce théorème permet d'expliciter les relations de liaison entre les différents termes de la suite θ . Il permet également de définir des opérations de réduction et d'expansion pour mener des calculs en Δ -numération.

Définition 7.3.4 (Réduction/Expansion [23]). *Soit un mot infini $\Delta \in \llbracket 1, d \rrbracket^{\omega}$ et un mot $a \in \mathbb{Z}^{\omega}$. On suppose que la lettre $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ possède 2 occurrences successives en positions m et n . On appelle alors réduction la transformation de a consistant à incrémenter a_m et décrémenter les a_i pour $i \in \llbracket m+1, n \rrbracket$ pour obtenir un nouveau mot a' . L'opération inverse est appelée expansion.*

Réduction :

Δ	...	k	$(\neq k)$	$(\neq k)$	$(\neq k)$	k	...
a	...	a_m	$a_{m+1}+1$	$a_{m+2}+1$...	a_n+1	...
a'	...	a_m+1	a_{m+1}	a_{m+2}	...	a_n	...

Expansion :

Δ	...	k	$(\neq k)$	$(\neq k)$	$(\neq k)$	k	...
a	...	a_m+1	a_{m+1}	a_{m+2}	...	a_n	...
a'	...	a_m	$a_{m+1}+1$	$a_{m+2}+1$...	a_n+1	...

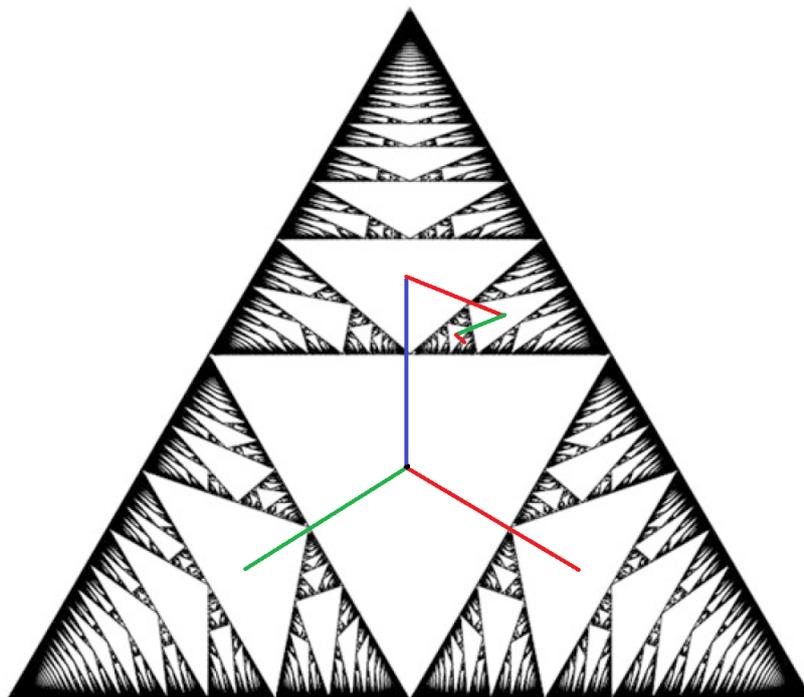


FIGURE 7.5 – Une représentation normalisée de l'ensemble \mathcal{K}_3 (le point de coordonnées (x, y) représente le vecteur $(x, y, 1 - x - y)$). Les couleurs bleue, rouge et verte correspondent aux déplacements induits par les lettres de Δ . Un exemple est donné avec le chemin $BRVR$ partant du centre qui correspond aux 4 premières lettres de $\Delta = 2131\dots$

Remarquons que les définitions de réduction et d'expansion reposent sur le théorème de liaison qui assure $\theta_m = \sum_{i=m+1}^n \theta_i$. Ainsi, si ces réels existent, $\varphi^v(a) = \varphi^v(a')$. De manière générale, on travaille avec des mots a à valeurs dans \mathbb{N} . On autorise alors seulement les réductions vers un $a_m = 0$ et les expansions depuis un nombre $a_m + 1 \geq 2$. On peut alors chercher, étant donné a et Δ , à calculer une forme normale pour a dans le système de Δ -numération. Un exemple de normalisation est donné en Figure 7.6. Les opérations d'expansion et réduction possèdent alors de très bonnes propriétés du point de vue des systèmes de numération.

	1	2	1	3	2	3	1	3	\dots
0	0	4	0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	1	1	1	1	0	0	
0	1	2	0	0	1	1	0	0	
0	1	1	1	1	2	2	0	0	
1	0	0	1	1	2	2	0	0	
1	0	1	0	0	1	1	0	0	

FIGURE 7.6 – Réduction de $a \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 004$ dans le syst\u00e8me de Δ -num\u00e9ration pour $\Delta \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 12132313\dots$. Les positions d'expansion sont not\u00e9es en rouge, celles de r\u00e9duction en bleu. On obtient alors un mot $a' = 101001100$ qui repr\u00e9sente la m\u00eame valeur que a et sur lequel on ne peut plus faire ni r\u00e9duction ni expansion.

Pour \u00eatre complet dans les op\u00e9rations de ce syst\u00e8me de num\u00e9ration, il nous faut parler du cas des retenues \u00e0 l'infini. Dans la num\u00e9ration d\u00e9cimale classique, $1 = 0,99999999999999\dots$. De mani\u00e8re g\u00e9n\u00e9rale, tout nombre d\u00e9cimal admet une \u00e9criture impropre. On observe une propri\u00e9t\u00e9

analogue pour les mots finis en Δ -numération.

Définition 7.3.5 (Ecriture impropre). *Soit $a \in \{0, 1\}^\omega$. On dit que a est une écriture impropre ssi il existe $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que, pour tout n suffisamment grand, $a_n = 0 \Leftrightarrow \delta_n = k$.*

Considérons par exemple $\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} 12131231\dots$ et $a' = 1$. On peut alors faire des expansions successives comme en Figure 7.7 pour construire à la limite un mot infini a équivalent à a' . Le mot a obtenu est une écriture impropre et $\varphi^v(a) = \varphi^v(a')$. De manière générale, tout mot a possédant une écriture impropre admet un mot a' fini qui lui est équivalent, et réciproquement tout mot fini admet une écriture impropre. Considérons en effet un mot $a = uw$ sous écriture impropre où u est un mot fini et $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = 0 \Leftrightarrow \delta_{n+|u|} = k$ avec $w_1 = 0$. Le mot $a' \stackrel{\text{déf}}{=} u1$ est un mot fini équivalent à a . La transformation $uw \rightarrow u1$ est alors appelée règle de retenue à l'infini et est un équivalent du $1 = 0,99999999\dots$ en numération décimale.

1	2	1	3	1	2	3	1	\dots
1	0	0	0	0	0	0	0	\dots
0	1	1	0	0	0	0	0	\dots
0	1	0	1	1	0	0	0	\dots
0	1	0	1	0	1	1	1	\dots

FIGURE 7.7 – Construction de l'écriture impropre d'un mot à partir d'un mot fini

Théorème 7.3.6 ([23]). *Le système d'expansion/réduction/retenue à l'infini est confluent. De plus, si $a \in \mathbb{N}^\omega$ est tel que $\varphi^v(a) \in [0, \Omega(v)]$ alors a admet une forme normale pour ce système.*

Cette propriété de normalisation de la Δ -numération est très forte et ne se retrouve pas dans le cas des bases réelles de Cantor. Toutefois, la normalisation provient des relations de liaisons très simples qui existent sur les θ_n , qui imposent donc des contraintes très fortes à la base de Cantor. Remarquons enfin que la contrainte d'appartenance à $[0, \Omega(v)]$ pour la normalisation peut être levée simplement en prolongeant le mot Δ vers la gauche.

Comme les réductions et expansions forment un système normalisant, il est relativement simple de s'en servir pour comparer, additionner et soustraire des mots dans ce système (que Δ soit périodique ou non).

Proposition 7.3.7 (Comparaison [22]). *Soient a et a' des mots de $\{0, 1\}^\omega$ sous formes normales. Alors $\varphi^v(a) < \varphi^v(a')$ ssi a est strictement plus petit que a' pour l'ordre lexicographique.*

Pour la comparaison, on normalise donc les 2 mots à comparer puis on les compare pour l'ordre lexicographique. Pour l'addition, si a, a' sont deux mots de $\{0, 1\}^\omega$ tels que $\varphi^v(a) + \varphi^v(a') < \Omega(v)$, on additionne a et a' terme à terme. On obtient alors un mot de $\{0, 1, 2\}^\omega$ que l'on normalise. Remarquons que la condition $\varphi^v(a) + \varphi^v(a') < \Omega(v)$ n'est pas si restrictive, quitte à prolonger Δ vers la gauche.

La soustraction reste relativement simple. Si a, a' sont deux mots de $\{0, 1\}^\omega$ tels que $\varphi^v(a) \geq \varphi^v(a')$, on peut soustraire a et a' terme à terme. On obtient alors un mot de $\{-1, 0, 1\}^\omega$. Pour normaliser ce mot, il est toutefois nécessaire d'autoriser des réductions vers une lettre -1 et d'autoriser des expansions depuis des lettres 1 dans le but de supprimer des -1. Remarquons que le choix des 1 sur lesquels faire des expansions est parfois non trivial.

7.4 Le cas ultimement périodique

Un cas particulier intéressant de Δ -numération est le cas où Δ est ultimement périodique de période p . De nombreuses nouvelles propriétés apparaissent alors pour notre système de numération, ce qui nous permet d'y effectuer des opérations plus complexes. Les diverses propriétés ci-dessous ont également été démontrées quelques années plus tard dans le cadre plus général des bases de Cantor alternées dans [15].

Afin de parler du déroulé de l'algorithme totalement soustractif, on pose, pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\gamma_i \stackrel{\text{déf}}{=} x \mapsto x - (\mathbf{1} - e_i)x_i$. Remarquons dès maintenant que l'on peut toujours ramener le cas ultimement périodique au cas périodique. En effet, si v possède un mot $\Delta = u\delta^\omega$ associé ultimement périodique, il suffit d'appliquer $|u|$ étapes de l'algorithme totalement soustractif à v . On obtient alors un vecteur $v' \in \mathcal{K}_d$ de mot associé $\Delta' = \delta^\omega$ qui est périodique. Les mots Δ considérés sont donc par la suite tous considérés périodiques.

Proposition 7.4.1 ([22, 5]). *Supposons Δ périodique de période $\pi \in \llbracket 1, d \rrbracket^*$ et prenons $p \stackrel{\text{déf}}{=} |\pi|$. Alors :*

- *il existe un réel β tel que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_{n+p} = \beta\theta_n$;*
- *$\frac{1}{\beta}$ est un nombre de Pisot de degré d , ie β est de module < 1 et tous ses conjugués sont de module > 1 ;*
- *le polynôme minimal de β , noté μ_β , est le polynôme minimal (et caractéristique) de la matrice $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \gamma_{\pi_p} \circ \dots \circ \gamma_{\pi_1}$.*

Il est ainsi possible de retrouver facilement les vecteurs v associés à des mots Δ périodiques. Si $\Delta = \pi^\omega$ et $p \stackrel{\text{déf}}{=} |\pi|$, observons l'application $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \gamma_{\pi_p} \circ \gamma_{\pi_{p-1}} \circ \dots \circ \gamma_{\pi_1}$. Le nombre β est alors une valeur propre de Γ associée à un vecteur propre proportionnel à v .

Dans le cas où $\Delta = (123)^\omega$, le vecteur v peut être trouvé comme vecteur propre de $\gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1$ qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour unique valeur propre réelle α^3 (qui est l'inverse d'un nombre de Pisot) où α est l'unique racine réelle de $X^3 + X^2 + X - 1$ et un vecteur propre associé est $v = (\alpha, \alpha + \alpha^2, 1)$. On retrouve alors bien le vecteur de Tribonacci étudié dans [11].

Dans le cas où $\Delta = (1213)^\omega$, exemple que nous reprenons par la suite, le vecteur v peut être trouvé comme vecteur propre de $\gamma_3 \circ \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1$ qui a pour matrice $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour polynôme caractéristique $X^3 - 7X^2 + 11X - 1$ qui admet 3 racines réelles. Une et une seule d'entre elles a un module < 1 , que l'on nomme β . Notamment $\beta \approx 0,09678807$ est l'inverse d'un nombre de Pisot. Un vecteur propre v associé à la valeur propre β est $(2, -\beta^2 + 4\beta + 3, \beta^2 - 6\beta + 5)$.

Une dernière propriété nous permet de calculer facilement en Δ -numération dans le cas périodique. Du fait que v est un vecteur propre de Γ associé à un inverse de Pisot β et comme les θ_n sont combinaisons linéaires des composantes de v , on obtient la proposition suivante.

Proposition 7.4.2 ([22]). *Soit v un vecteur associé au mot périodique Δ . Soit β l'inverse du nombre de Pisot associé à Δ . $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $v_i \in v_1\mathbb{Q}[\beta]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n \in v_1\mathbb{Q}[\beta]$.*

Si les comparaisons, additions et soustractions peuvent s'effectuer pour des mots Δ quelconques, le caractère périodique de Δ nous a été nécessaire pour effectuer des multiplications et divisions. Le cas périodique nous permet alors de travailler exclusivement dans $\mathbb{Q}[\beta]$.

Théorème 7.4.3. *Soit $\Delta \in \llbracket 1, d \rrbracket^\omega$ périodique et β son inverse de Pisot associé. On pose $U \stackrel{\text{déf}}{=} \{ \sigma \in \mathbb{Z}^\omega \mid \sigma \text{ est ultimement périodique} \}$. Alors $\varphi^v(U) = v_1 \mathbb{Q}[\beta]$.*

Démonstration. Commençons par montrer que $\varphi^v(U) \subset v_1 \mathbb{Q}[\beta]$. Rappelons que $v_1 \mathbb{Q}[\beta]$ est stable par somme et par produit par un élément de $\mathbb{Q}[\beta]$. Comme β est algébrique, on a de plus que $\mathbb{Q}[\beta]$ est un corps. Comme tous les θ_n vivent dans $v_1 \mathbb{Q}[\beta]$ et $v_1 \mathbb{Q}[\beta]$ est clos par somme, tout mot fini a son image par φ^v dans $\mathbb{Q}[\beta]$. Intéressons-nous maintenant aux mots ultimement périodiques en général. Appelons p la période de Δ et prenons $\sigma \in U$. Comme σ est ultimement périodique, il existe $u, w \in \{0, 1\}^*$ tels que $\sigma = uw^\omega$. Quitte à augmenter les tailles de u et w , on peut sans perte de généralité supposer que $|u|$ et $|w|$ sont des multiples de p . Prenons ainsi k et n tels que $|u| = kp$ et $|w| = np$. Notons enfin que σ est ultimement périodique donc borné, et que $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable donc $\varphi^v(\sigma)$ existe. Ainsi, comme $\varphi^v(u)$ et $\varphi^v(w)$ sont dans $v_1 \mathbb{Q}[\beta]$,

$$\begin{aligned} \varphi^v(\sigma) &= \varphi^v(u) + \beta^k \varphi^v(w^\omega) \\ &= \varphi^v(u) + \beta^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi^v(w) \beta^{jn} \right) \\ &= \varphi^v(u) + \frac{\beta^k}{1 - \beta^n} \varphi^v(w) \in v_1 \mathbb{Q}[\beta] \end{aligned}$$

Montrons désormais que tout élément de $v_1 \mathbb{Q}[\beta]$ est image d'un élément de U . Remarquons que U est stable par somme donc $\varphi^v(U)$ également. Comme U est stable par décalage, $\varphi^v(U)$ est stable par multiplication par β . Reste donc à démontrer que les $(\frac{v_1}{b})$ pour $b \in \mathbb{N}^*$ sont représentables par des mots de U . Raisonnons par analyse-synthèse. On cherche $\lambda \in \mathbb{Z}^\omega$ périodique de période np tel que (notons que la famille $(\lambda_k \beta^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est sommable car λ est périodique donc bornée)

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \beta^k \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{np-1} \lambda_{mnp+q} \beta^{np+q} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \beta^{mnp} \sum_{q=0}^{np-1} \lambda_q \beta^q \\ &= \frac{P(\beta)}{1 - \beta^{np}} \quad \text{où } P(\beta) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q=0}^{np-1} \lambda_q \beta^q \in \mathbb{Z}[\beta] \end{aligned}$$

Dès lors, on souhaite trouver $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 - \beta^{np} = bP(\beta)$. Plaçons nous dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$, quotienté par l'idéal engendré par μ_β et b . Prenons ainsi $A \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}[X]/(\mu_\beta, b)$. A est un anneau fini. En effet, comme μ_β est unitaire, on a les isomorphismes de groupes $\mathbb{Z}[X]/(\mu_\beta, b) \simeq \mathbb{Z}_{d-1}[X]/(b) \simeq (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})_{d-1}[X]$ qui est fini. Rappelons alors que μ_β est le polynôme caractéristique d'une matrice produit de $\gamma_i \stackrel{\text{déf}}{=} x \mapsto x - (1 - e_i)x_i$. Comme $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\det(\gamma_i) = 1$, le coefficient constant de μ_β est alors $(-1)^d$. Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\mu_\beta = XQ + (-1)^d$. Donc, en passant au quotient dans A , on obtient $0 = XQ + (-1)^d$ d'où $X((-1)^{d+1}Q) = 1$. X est

donc inversible dans A . Comme le groupe multiplicatif A^\times est fini, par le théorème de Lagrange, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X^n = 1$ dans A , d'où $X^{np} = 1$ dans A . Ainsi, il existe $P, R \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $X^{np} = 1 + R\mu_\beta - bP$. En évaluant en β , on trouve alors $\beta^{np} = 1 - bP(\beta)$ donc $1 - \beta^{np} = bP(\beta)$ qui était l'égalité recherchée.

Les $\frac{v_1}{b}$ sont donc représentables par des mots de U , et comme $\varphi^v(U)$ est clos par somme et par produit par β , on en déduit l'inclusion réciproque $v_1\mathbb{Q}[\beta] \subset \varphi^v(U)$. \square

Illustrons la preuve à partir de l'exemple de $\Delta = (1213)^\omega$. Le mot Δ a pour inverse de Pisot associé $\beta \approx 0,09678807$ qui est racine du polynôme $\mu_\beta = X^3 - 7X^2 + 11X - 1$. On obtient alors $v \stackrel{\text{déf}}{=} (2, -\beta^2 + 4\beta + 3, \beta^2 - 6\beta + 5)$ comme vecteur associé à Δ . On peut alors calculer la suite θ par le théorème de liaison 7.3.3,

$$\begin{cases} \theta_1 = & v_1 & = & 2 \\ \theta_2 = & v_2 - \theta_1 & = & -\beta^2 + 4\beta + 1 \\ \theta_3 = & \theta_1 - \theta_2 & = & \beta^2 - 4\beta + 1 \\ \theta_4 = & v_3 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 & = & \beta^2 - 6\beta + 1 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \theta_{n+4} = \beta\theta_n$$

Prenons l'exemple $\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} 10(1201)^\omega \in U$. On commence par écrire σ par blocs de période 4 comme dans la preuve du théorème précédent : $\sigma = u w^\omega$ avec $u \stackrel{\text{déf}}{=} 1012$ et $w \stackrel{\text{déf}}{=} 0112$. Ainsi,

$$\begin{cases} \varphi^v(u) = \theta_1 + \theta_3 + 2\theta_4 = 3\beta^2 - 16\beta + 5 \\ \varphi^v(w) = \theta_1 + 2\theta_2 + \theta_4 = -\beta^2 + 2\beta + 5 \end{cases}$$

Donc

$$\varphi^v(\sigma) = \varphi^v(u) + \frac{\beta}{1 - \beta} \varphi^v(w) = \frac{13\beta^2 - 102\beta + 21}{4} \in \mathbb{Q}[\beta]$$

Pour obtenir tous les polynômes en β comme éléments de $\varphi^v(U)$, commençons par remarquer que $v_1 = 2$. Ainsi, $\varphi^v(1) = 2$ et $\varphi^v(0^{4n}1) = 2\beta^n$. On a donc déjà $2\mathbb{Z}[\beta] \subset \varphi^v(U)$. Pour obtenir $\mathbb{Q}[\beta] \subset \varphi^v(U)$, reste à obtenir des codes pour les $\frac{2}{b}$ avec $b \in \mathbb{N}^*$. Prenons par exemple $b = 2$. On se place dans $A \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}[X]/(\mu_\beta, 2)$ et on regarde l'ordre de X dans A^\times . Par définition de A , $0 = X^3 - 7X^2 + 11X - 1 = X^3 + X^2 + X + 1$. Ainsi, $X^3 = X^2 + X + 1$ et $X^4 = X^3 + X^2 + X = 1$ donc X est d'ordre 4 dans A^\times . On effectue alors la division euclidienne de $X^4 - 1$ par μ_β : $X^4 - 1 = Q\mu_\beta + 2(31X^2 - 85X + 4)$ donc $\beta^4 - 1 = 2(19\beta^2 - 38\beta + 3)$ et, en posant $P \stackrel{\text{déf}}{=} -19X^2 + 38X - 3$, on obtient :

$$\frac{1}{2} = \frac{P(\beta)}{1 - \beta^4} = P(\beta) \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{4k}$$

On peut ainsi coder $\frac{2}{2}$ par le mot $((-3)000(38)000(-19)000000)^\omega$ que l'on peut ensuite normaliser en $(0011001000001101)^\omega$. On obtient donc que le code normalisé de $\frac{2}{2}$ est $(0011001000001101)^\omega$.

On souhaite maintenant pouvoir choisir v_1 de sorte à pouvoir effectuer facilement des produits et quotients en Δ -numération.

Proposition 7.4.4. *Pour qu'un produit de mots ultimement périodiques admette une représentation ultimement périodique, il est nécessaire que $v_1 \in \mathbb{Q}[\beta]$.*

Démonstration. rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \theta_n \in v_1 \mathbb{Q}[\beta]$. Supposons que $\theta_i \theta_j$ admet un code ultimement périodique. Il existe $Q_i, Q_j \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $\theta_i = v_1 Q_i(\beta)$ et $\theta_j = v_1 Q_j(\beta)$. Comme $v \in \mathcal{K}_d$, θ est une suite strictement positive. Notamment, $Q_i(\beta)$ et $Q_j(\beta)$ sont non nuls. Comme $\theta_i \theta_j$ admet une représentation ultimement périodique, $\theta_i \theta_j \in v_1 \mathbb{Q}[\beta]$ donc il existe $Q \in \mathbb{Q}[\beta]$ tels que $v_1 Q(\beta) = \theta_i \theta_j = v_1^2 Q_i(\beta) Q_j(\beta)$. Donc, comme $v_1, Q_i(\beta)$ et $Q_j(\beta)$ sont non nuls, $v_1 = \frac{Q(\beta)}{Q_i(\beta) Q_j(\beta)} \in \mathbb{Q}[\beta]$ car β est algébrique. \square

On demande donc désormais $v_1 \in \mathbb{Q}[\beta]$. Dès lors, les mots ultimement périodiques représentent exactement les éléments de $\mathbb{Q}[\beta]$. Pour effectuer un produit en Δ -numération, on peut donc convertir les mots ultimement périodiques en éléments de $\mathbb{Q}[\beta]$, effectuer le produit dans $\mathbb{Q}[\beta]$ puis revenir dans l'espace des mots. On peut en plus demander à ce qu'un produit de mots finis donne un mot fini. Comme l'addition conserve déjà l'espace des mots finis, il suffit que le résultat de la multiplication $\theta_i \theta_j$ soit représentable par un mot fini pour conclure. Considérons pour cela $R_1, \dots, R_d \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]$ tels que $v_i = v_1 R_i(\beta)$.

Lemme 7.4.5. (R_1, \dots, R_d) est une base de $\mathbb{Q}_{d-1}[X]$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{Q}^d$ tel que $0 = \sum \lambda_i R_i$. Alors, en évaluant en β , $0 = \sum \lambda_i R_i(\beta)$. Donc, en multipliant par v_1 , $0 = \sum_{i=1}^d \lambda_i v_i$. Comme v est totalement irrationnel, (v_1, \dots, v_d) est libre d'où $\lambda = 0$. Ainsi (R_1, \dots, R_d) est libre. Donc, grâce à la dimension finie, (R_1, \dots, R_d) est bien une base de $\mathbb{Q}_{d-1}[X]$. \square

Proposition 7.4.6. Il existe $v_1 \in \mathbb{Q}[\beta]$ tel que $\forall i, j \in \mathbb{N}, \theta_i \theta_j$ admet un code fini en Δ -numération.

Démonstration. La principale difficulté de la preuve est de réussir à travailler dans $\mathbb{Z}_{d-1}[X]$ au lieu de $\mathbb{Q}_{d-1}[X]$. On multiplie pour cela les polynômes considérés par des coefficients entiers bien choisis.

Soit $j \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$. Comme $X^j \in \mathbb{Q}_{d-1}[X]$, il s'exprime comme combinaison linéaire des R_i . Il existe donc $\gamma_k \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma_k X^k$ s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients entiers des R_i . On pose alors $\gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \text{ppcm}(\{\gamma_k\}_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket})$. Remarquons également qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, m R_i \in \mathbb{Z}[X]$. En fixant $v_1 = m^2 \gamma$, on a $v_i = m \gamma P_i(\beta)$ pour $P_i \stackrel{\text{déf}}{=} m R_i \in \mathbb{Z}[X]$. Comme les θ_n sont combinaisons linéaires à coefficients entiers des v_i , il existe des polynômes $Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \theta_n = m \gamma Q_n(\beta)$.

Dès lors, $\theta_i \theta_j = m^2 \gamma^2 Q_i(\beta) Q_j(\beta)$. On pose alors $\Pi_{i,j} \stackrel{\text{déf}}{=} (Q_i Q_j) \bmod \mu_\beta$. Remarquons que, comme μ_β est unitaire, $\Pi_{i,j} \in \mathbb{Z}_{d-1}[X]$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\Pi_{i,j} = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k X^k$. Ainsi $\theta_i \theta_j = P(\beta)$ où $P \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{d-1} m^2 \gamma^2 \lambda_k X^k = m \gamma \left(\sum_{k=0}^{d-1} \frac{\gamma}{\gamma_k} \lambda_k (m \gamma_k X^k) \right)$. Or les $m \gamma_k X^k$ sont combinaisons linéaires à coefficients entiers des $m R_k = P_k$. De plus, $\frac{\gamma}{\gamma_k} \in \mathbb{Z}$ par définition de γ . Donc $\theta_i \theta_j$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des $m \gamma_k P_k(\beta) = v_k$. Donc $\theta_i \theta_j$ admet un code fini en Δ -numération. \square

Ainsi, il existe un choix de v_1 permettant d'assurer que le produit de 2 mots finis en Δ -numération est représentable par un mot fini.

Illustrons notre propos, toujours avec l'exemple de $\Delta = (1213)^\omega$ de vecteur associé $v \stackrel{\text{déf}}{=} (2, -\beta^2 + 4\beta + 3, \beta^2 - 6\beta + 5)$ avec β racine de $X^3 - 7X^2 + 11X - 1$. Les polynômes R_i tels que $v_i = v_1 R_i(\beta)$ sont :

$$\begin{cases} R_1 &= 1 \\ R_2 &= \frac{-X^2 + 4X + 3}{2} \\ R_3 &= \frac{X^2 - 6X + 5}{2} \end{cases}$$

On obtient les combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{cases} 1 &= R_1 \\ X &= 4R_1 - R_2 + R_3 \\ X^2 &= 19R_1 - 6R_2 + 4R_3 \end{cases}$$

Ainsi, $\gamma = 1$ et $m = 2$ donc il suffit de prendre $v_1 = m^2 \gamma = 4$ pour que les produits de mots finis restent finis. Cela revient à considérer le vecteur $v \stackrel{\text{déf}}{=} (4, -2\beta^2 + 8\beta + 6, 2\beta^2 - 12\beta + 10)$. Prenons par exemple $w_1 \stackrel{\text{déf}}{=} 0011$ et $w_2 \stackrel{\text{déf}}{=} 0001$. Dans ce cas, $\varphi^v(w_1) = \theta_3 + \theta_4 = 4\beta^2 - 20\beta + 4$ et $\varphi^v(w_2) = \theta_4 = 2\beta^2 - 12\beta + 2$. En réutilisant l'expression des X^k dans la base des R_i , on obtient

$$\varphi^v(w_1)\varphi^v(w_2) = -56\beta^2 + 272\beta - 24 = 64R_2(\beta) - 48R_3(\beta)$$

Le code de $R_2(\beta)$ est 11 et celui de $R_3(\beta)$ est 1111. Un code pour $\varphi^v(w_1)\varphi^v(w_2)$ est ainsi (16)(16)(-48)(-48) qui se normalise en un code fini 1010111000111000010111.

Remarquons toutefois que, même sur les exemples traités dans le cas particulier $\Delta = (1213)^\omega$, notre méthode, bien qu'effective, mène rapidement à des calculs complexes. La multiplication et la division en Δ -numération est ainsi possible dans le cas périodique mais possède toutefois un coût certain.

7.5 Bilan & perspectives

L'étude de la Δ -numération a permis de faire des liens avec les bases réelles de Cantor. La Δ -numération en reste toutefois un cas très particulier, du fait des fortes relations de liaison dans la suite θ considérée. Ces relations permettent alors d'exposer des opérations de réduction et d'expansion qui ont de bonnes propriétés de normalisation et permettent d'effectuer facilement des comparaisons, additions et soustractions.

Dans le cas où Δ est ultimement périodique, l'algorithme totalement soustractif fait apparaître une matrice Γ . Le polynôme caractéristique de Γ est alors le polynôme minimal d'un nombre β qui est l'inverse d'un Pisot. Nous prouvons que les mots ultimement périodique dans le système de Δ -numération représentent exactement les éléments de $\mathbb{Q}[\beta]$, ce qui permet d'effectuer facilement des multiplications et divisions. Bien que la méthode soit simple, les calculs de multiplications et divisions restent toutefois coûteux en pratique.

Une piste intéressante serait de regarder les systèmes de Δ -numération pour des Δ non ultimement périodiques, comme les mots issus de processus de substitution par exemple. Considérer des mots à fossés bornés (la distance entre 2 occurrences de la même lettre est borné) permettrait alors de contrôler les relations de liaisons sur la suite θ et peut-être d'en déduire de bonnes propriétés du système de numération.

Conclusion

Ce manuscrit regroupe un certain nombre de résultats sur les hyperplans arithmétiques. Au-delà d'une compréhension fine des propriétés de ces objets fondamentaux de la géométrie discrète, ce travail a été l'occasion de faire des ponts avec d'autres domaines de l'informatique et des mathématiques comme la combinatoire des mots et les systèmes de numération. Les outils utilisés, bien qu'élémentaires, représentent également de nombreux domaines des mathématiques (algèbre linéaire et générale, automates, arithmétique, analyse réelle, graphes, etc). Cette thèse aura aussi été l'occasion de montrer toute la puissance du continu. L'utilisation des réels permet en effet de simplifier bon nombre de questions et d'aborder les problèmes de géométrie discrète sous un nouvel angle, en retirant certaines contraintes arithmétiques complexes.

Après avoir rappelé les droites discrètes et hyperplans arithmétiques (définis à partir d'un vecteur normal, d'un décalage et d'une épaisseur), nous nous sommes intéressées à trois problèmes sur ces objets : la connexité (chapitres 2 à 4), la reconnaissance (chapitre 5) et les transformations (chapitre 6).

Le problème de la connexité des hyperplans arithmétiques avait été longuement étudié dans le cas de la connexité par faces, présentée dans le chapitre 2. Après avoir rappelé l'état de l'art, nous avons parlé plus en détail du problème de la connexité à l'épaisseur critique pour des décalages non nuls. Le travail que nous avons mené sur le sujet laisse alors apparaître un nouveau système de numération, appelé Δ -numération. Nous avons notamment encodé les décalages de l'hyperplan dans ce système de numération et nous sommes intéressés aux codes des décalages rendant le plan connexe. La connexité se caractérise par la présence de motifs intérieurs minimaux dans les codes des décalages. Dans un cas particulier (le cas ultimement périodique), nous avons montré que les motifs intérieurs minimaux formaient un langage rationnel et que l'ensemble des codes rendant l'hyperplan connexe était reconnaissable par un automate de Büchi. Les résultats des articles de ces 20 dernières années permettent ainsi de conclure sur le problème de la connexité par faces en dimensions quelconques. La notion de motifs intérieurs minimaux mériterait toutefois d'être étudiée plus en détail, afin de caractériser le langage des motifs intérieurs minimaux dans le cas général.

Nous nous sommes par la suite intéressés au problème général de la connexité, en considérant des voisinages quelconques. Le chapitre 3 est ainsi consacré à la définition de ce problème et à la généralisation d'une partie des résultats connus en connexité par faces pour toute connexité. Nous avons retrouvé alors un phénomène de percolation similaire au comportement observé pour la connexité par faces, à un nombre fini de vecteurs près (les vecteurs pathologiques). Nous avons ainsi montré l'existence d'une épaisseur critique de connexité Ω . Strictement en dessous de cette épaisseur, l'hyperplan est non connexe. Strictement au-dessus, l'hyperplan est connexe. Nous avons également défini la notion de vecteur inutile, permettant de réduire drastiquement la taille des voisinages étudiés. Toutefois, en dehors de cas particuliers, nous ne sommes pas parvenus

à trouver un algorithme de calcul de Ω similaire à celui connu en connexité par faces. Le cas particulier de la connexité par faces, et l'algorithme totalement soustractif qui lui était attaché, ont en effet des propriétés bien trop particulières pour que celles-ci se généralisent facilement.

Trouver un algorithme de calcul de l'épaisseur critique Ω a été l'objet du chapitre 4 qui proposait une approche analytique nouvelle dans le domaine de la géométrie discrète. L'idée était d'étudier Ω , non comme un objet combinatoire, mais comme une fonction vectorielle. Les premiers graphes tracés pour représenter la fonction Ω ont malheureusement montré des comportements très irréguliers. Nous avons toutefois pu expliquer ces irrégularités par la partie arithmétique du vecteur, à savoir les relations de liaison arithmétiques entre les composantes de celui-ci. Pour les vecteurs v totalement irrationnels, cette composante arithmétique disparaît et nous avons alors montré la continuité de Ω en v . Nous avons ainsi montré que sous le graphe irrégulier de la fonction Ω se cache une belle structure continue sous-jacente. L'étude expérimentale de cette structure nous a notamment permis d'exhiber un algorithme de calcul pour l'épaisseur de connexité du pas de cavalier. La méthode mise en œuvre, bien qu'artisanale, semble pouvoir se généraliser pour tout voisinage. Un futur travail consisterait à étudier plus en profondeur ces structures sous-jacentes au graphe de Ω pour trouver des algorithmes généraux de calcul de l'épaisseur de connexité. Reste également, une fois ces algorithmes exposés, à nous intéresser au comportement à l'épaisseur critique et, qui sait, trouver de nouveaux systèmes de numération associés. Enfin, une piste intéressante portant sur les épaisseurs de taille de composantes et épaisseurs de cycles mériterait d'être creusée.

Dans un tout autre registre, nous nous sommes penchés dans le chapitre 5 sur le problème de la reconnaissance d'hyperplans arithmétiques, également étudié depuis de nombreuses années. Nous avons proposé un algorithme de reconnaissance de segments, et de morceaux de droites quelconques, reposant sur l'arbre de Stern-Brocot. Notre algorithme égale les algorithmes de l'état de l'art sur le sujet. L'arbre de Stern-Brocot ayant l'avantage de se généraliser en toute dimension finie, nous avons également trouvé un algorithme de reconnaissance de morceaux d'hyperplans arithmétiques. L'état de l'art sur le sujet, sur lequel nous sommes revenus, est très riche, chaque algorithme ayant des avantages et inconvénients. Les dimensions supérieures à 3 présentent en effet souvent de grande difficulté car les bonnes propriétés de la dimension 2 s'y étendent rarement. Notre algorithme descend dans l'arbre de Stern-Brocot grâce à notre définition de corde séparante. L'algorithme présenté permet ainsi de reconnaître un morceau d'hyperplan mais est encore largement perfectible. Nous pensons notamment que la notion de corde séparante, caractérisation des zones de l'espace dans lesquelles se trouve le vecteur normal, mériterait d'être davantage étudiée. Cette étude permettrait notamment de mieux comprendre la structure géométrique des hyperplans arithmétiques, et potentiellement d'améliorer notre algorithme. Enfin, certains algorithmes de reconnaissance d'hyperplans utilisant une approche locale, comme les algorithmes de sondages de d'hyperplans, ont un déroulé sûrement interprétable comme une descente dans l'arbre de Stern-Brocot. Il serait alors intéressant de classer ces algorithmes selon leur processus de descente dans l'arbre.

Un dernier problème sur les hyperplans arithmétiques est présenté dans le chapitre 6 : les transformations douces d'hyperplans. Une transformation douce est le pendant discret des transformations homotopiques dans \mathbb{R}^d . La contrainte est de déplacer une structure discrète, point par point, en conservant ses propriétés géométriques. Nous avons tout d'abord caractérisé les points déplaçables dans un segment discret naïf ou standard. Cette caractérisation nous a notamment permis d'effectuer des translations et rotations douces de segments discrets. Nous avons ensuite étendu nos résultats au cas des arbres et graphes discrets quelconques, avec une précaution particulière pour les cycles des graphes discrets qui peuvent créer des conflits aux sommets. La transformation des graphes discrets nous a notamment permis de translater

doucement des formes discrètes quelconques, en conservant les structures géométriques de leurs couvertures tangentielles. Enfin, nous avons généralisé notre résultat sur les points déplaçables en toute dimension finie et avons ainsi proposé un algorithme de translation douce de morceaux d'hyperplans arithmétiques. Par la suite, nous pourrions nous pencher sur d'autres types de transformations douces, en étendant nos résultats à des transformations plus complexes. Il serait également intéressant d'étendre nos résultats sur les graphes discrets en toute dimension finie, avec des complexes simpliciaux discrets.

Enfin, un ultime chapitre porte sur la Δ -numération. Ce système de numération, défini comme un simple outil dans le chapitre 2, est étudié dans le chapitre 7 pour lui-même. Nous avons notamment fait le lien entre la Δ -numération et les bases réelles de Cantor, en montrant qu'il s'agit d'un sous-ensemble strict de ces bases. La Δ -numération possède toutefois de très bonnes propriétés de normalisation qui rendent les calculs dans ce système relativement simples. Nous avons notamment montré, dans le cas où Δ est ultimement périodique, qu'il est possible de faire facilement des multiplications et divisions dans ce système de numération, en faisant le lien avec un anneau $\mathbb{Q}[\beta]$. Le cas où Δ est à fossés bornés semble conserver certaines bonnes propriétés du point de vue des systèmes de numération et peut faire l'objet d'un travail ultérieur.

D'un agrandissement sur une photo d'hippopotame, nous avons pu explorer quelques problèmes du monde de la géométrie discrète. L'une des structures fondamentales de ce monde, les hyperplans arithmétiques, nous ont permis de toucher à de nombreux domaines de l'informatique et des mathématiques. Bien plus que les applications pratiques, c'est ainsi avant tout la richesse et la variété des raisonnements utilisés qui font tout l'intérêt de la géométrie discrète.

Conclusion

Bibliographie

- [1] Eric ANDRES : The quasi-shear rotation. *In DCGI'96*, volume 1176 de *LNCS*, pages 307–314. Springer, 1996.
- [2] Eric ANDRES : Discrete linear objects in dimension n : the standard model. *Graphical models*, 65(1-3):92–111, 2003.
- [3] Eric ANDRES, Raj ACHARYA et Claudio SIBATA : Discrete analytical hyperplanes. *Graphical Models and Image Processing*, 59(5):302–309, 1997.
- [4] Pierre ARNOUX et Štěpán STAROSTA : The rauzy gasket. *In Further developments in fractals and related fields : Mathematical foundations and connections*, pages 1–23. Springer, 2013.
- [5] Artur AVILA et Vincent DELECROIX : Some monoids of pisot matrices. *In New Trends in One-Dimensional Dynamics : In Honour of Welington de Melo on the Occasion of His 70th Birthday IMPA 2016, Rio de Janeiro, Brazil, November 14–17*, pages 21–30. Springer, 2019.
- [6] Sebastián BARBIERI et Sébastien LABBÉ : Indistinguishable asymptotic pairs and multidimensional sturmian configurations. *arXiv preprint arXiv :2204.06413*, 2022.
- [7] Pierre BÉAUR et Benjamin HELLOUIN DE MENIBUS : Sturmian and infinitely desubstitutable words accepted by an ω -automaton. *In International Conference on Combinatorics on Words*, pages 104–116. Springer, 2023.
- [8] Jean BERSTEL : Tracé de droites, fractions continues et morphismes itérés. *M. Lothaire, Mélanges, Hermes, Paris*, pages 298–309, 1990.
- [9] Jean BERSTEL et Michel POCCHIOLA : Random generation of finite sturmian words. *Discrete Mathematics*, 153(1-3):29–39, 1996.
- [10] Valérie BERTHÉ : Discrete geometry and symbolic dynamics. *In The Kiselmanfest : An International Symposium in Complex Analysis and Digital Geometry*, 2006.
- [11] Valérie BERTHÉ, Éric DOMENJOUR, Damien JAMET et Xavier PROVENÇAL : Fully subtractive algorithm, tribonacci numeration and connectedness of discrete planes (numeration and substitution 2012). 46:159–174, 2014.
- [12] Henry BLUMBERG : New properties of all real functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 8(10):283–288, 1922.
- [13] Valentin BRIMKOV, David COEURJOLLY et Reinhard KLETTE : Digital planarity - A review. *Discret. Appl. Math.*, 155(4):468–495, 2007.
- [14] Achille BROCOT : *Calcul des rouages par approximation : nouvelle méthode*. A. Brocot, 1862.
- [15] Émilie CHARLIER : Alternate base numeration systems. *In International Conference on Combinatorics on Words*, pages 14–34. Springer, 2023.

- [16] Émilie CHARLIER et Célia CISTERNINO : Expansions in cantor real bases. *Monatshefte für Mathematik*, 195(4):585–610, 2021.
- [17] Émilie CHARRIER et Lilian BUZER : An efficient and quasi linear worst-case time algorithm for digital plane recognition. *In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 346–357. Springer, 2008.
- [18] Francois DE VIELLEVILLE et Jacques-Olivier LACHAUD : Revisiting digital straight segment recognition. *In Discrete Geometry for Computer Imagery : 13th International Conference, DGCI 2006, Szeged, Hungary, October 25-27, 2006. Proceedings 13*, pages 355–366. Springer, 2006.
- [19] Isabelle DEBLED-RENNESON : *Etude et reconnaissance des droites et plans discrets*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg)(1971-2008), 1995.
- [20] Isabelle DEBLED-RENNESON et Jean-Pierre REVEILLÈS : An incremental algorithm for digital plane recognition. *In 4th International Conference DGCI'94*, 1994.
- [21] Eric DOMENJOUR, Damien JAMET et Jean-Luc TOUTANT : On the connecting thickness of arithmetical discrete planes. *In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 362–372. Springer, 2009.
- [22] Eric DOMENJOUR, Bastien LABOUREIX et Laurent VUILLON : Facet connectedness of arithmetic discrete hyperplanes with non-zero shift. *In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 38–50. Springer, 2019.
- [23] Eric DOMENJOUR, Xavier PROVENÇAL et Laurent VUILLON : Facet connectedness of discrete hyperplanes with zero intercept : The general case. *In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 1–12. Springer, 2014.
- [24] Eric DOMENJOUR, Xavier PROVENÇAL et Laurent VUILLON : Palindromic language of thin discrete planes. *Theoretical Computer Science*, 624:101–108, 2016.
- [25] Eric DOMENJOUR et Laurent VUILLON : Geometric palindromic closure. *Uniform distribution theory*, 7(2):109–140, 2012.
- [26] Thomas FERNIQUE : *Pavages, fractions continues et géométrie discrète*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2007.
- [27] Herbert FREEMAN : Boundary encoding and processing. *Picture processing and psychopictorics*, pages 241–263, 1970.
- [28] Yan GÉRARD : Periodic graphs and connectivity of the rational digital hyperplanes. *Theoretical computer science*, 283(1):171–182, 2002.
- [29] Yan GÉRARD, Isabelle DEBLED-RENNESON et Paul ZIMMERMANN : An elementary digital plane recognition algorithm. *Discrete Applied Mathematics*, 151(1-3):169–183, 2005.
- [30] Damien JAMET : *Géométrie discrète : une approche par la combinatoire des mots*. Thèse de doctorat, PhD thesis, Univ. Montpellier II, 2005.
- [31] Cor KRAAIKAMP et Ronald MEESTER : Ergodic properties of a dynamical system arising from percolation theory. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 15(4):653–661, 1995.
- [32] Bastien LABOUREIX, Eric ANDRES et Isabelle DEBLED-RENNESON : Introduction to discrete soft transforms. *In International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology*, pages 422–435. Springer, 2022.
- [33] Bastien LABOUREIX et Isabelle DEBLED-RENNESON : Recognition of arithmetic line segments and hyperplanes using the stern-brocot tree. *In International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology*. Springer (accepté, en cours de publication), 2024.
- [34] Jacques-Olivier LACHAUD : An alternative definition for digital convexity. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 64(7):718–735, 2022.

- [35] Jacques-Olivier LACHAUD, Jocelyn MEYRON et Tristan ROUSSILLON : An optimized framework for plane-probing algorithms. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 62(5):718–736, 2020.
- [36] Jacques-Olivier LACHAUD, Xavier PROVENÇAL et Tristan ROUSSILLON : Computation of the normal vector to a digital plane by sampling significant points. *In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 194–205. Springer, 2016.
- [37] Jacques-Olivier LACHAUD, Xavier PROVENÇAL et Tristan ROUSSILLON : An output-sensitive algorithm to compute the normal vector of a digital plane. *Theoretical Computer Science*, 624:73–88, 2016.
- [38] Jacques-Olivier LACHAUD et Mouhammad SAID : Two efficient algorithms for computing the characteristics of a subsegment of a digital straight line. *Discret. Appl. Math.*, 161(15): 2293–2315, 2013.
- [39] Étienne LE QUENTREC, Étienne BAUDRIER et Clément JACQUOT : A survey on 2d euclidean curves with new results. *In International Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology (DGMM), Florence, Italy, 2024.*
- [40] Håkan LENNERSTAD : The n-dimensional stern–brocot tree. *International Journal of Number Theory*, 15(06):1219–1236, 2019.
- [41] Roger C LYNDON : On burnside’s problem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 77(2):202–215, 1954.
- [42] Mohammed Mostefa MESMOUDI : A simplified recognition algorithm of digital planes pieces. *In Discrete Geometry for Computer Imagery : 10th International Conference*, volume 2301 de *LNCS*, pages 404–416, 2002.
- [43] Marston MORSE et Gustav A HEDLUND : Symbolic dynamics ii. sturmian trajectories. *American Journal of Mathematics*, 62(1):1–42, 1940.
- [44] Phuc NGO, Yukiko KENMOCHI, Nicolas PASSAT et Hugues TALBOT : Topology-preserving conditions for 2d digital images under rigid transformations. *Journal of mathematical imaging and vision*, 49(2):418–433, 2014.
- [45] Phuc NGO, Nicolas PASSAT, Yukiko KENMOCHI et Isabelle DEBLEL-RENNESON : Geometric preservation of 2d digital objects under rigid motions. *J. Math. Imaging Vis.*, 61(2):204–223, 2019.
- [46] Jean Serge Dimitri OUATTARA, Eric ANDRES, Gaëlle LARGETEAU-SKAPIN, Rita ZROUR et Théodore Marie-Yves TAPSOBA : Remainder approach for the computation of digital straight line subsegment characteristics. *Discrete Applied Mathematics*, 183:90–101, 2015.
- [47] Nicolas PASSAT, Yukiko KENMOCHI, Phuc NGO et Kacper PLUTA : Rigid motions in the cubic grid : A discussion on topological issues. *In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 127–140. Springer, 2019.
- [48] Alfréd RÉNYI : Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 8(3-4):477–493, 1957.
- [49] Jean-Pierre REVEILLÈS : *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, 1991.
- [50] Michel RIGO : Numeration systems : a link between number theory and formal language theory. *In International Conference on Developments in Language Theory*, pages 33–53. Springer, 2010.
- [51] Fritz SCHWEIGER : *Multidimensional continued fractions*. Oxford University Press, USA, 2000.
- [52] Moritz STERN : Über eine zahlentheoretische funktion. 1858.

Bibliographie

- [53] Lama TARSISSI, Yukiko KENMOCHI, Hadjer DJERROUMI, David COEURJOLLY, Pascal ROMON et Jean-Pierre BOREL : Algorithms for pixelwise shape deformations preserving digital convexity. *In Discrete Geometry and Mathematical Morphology : Second International Joint Conference, DGMM 2022, Strasbourg, France, October 24–27, 2022, Proceedings*, pages 84–97. Springer, 2022.
- [54] Li-De WU : On the chain code of a line. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, (3):347–353, 1982.
- [55] Andrew C YAO et Donald E KNUTH : Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72(12):4720–4722, 1975.