



HAL
open science

Contribution à la synthèse de lois de commande pour les systèmes de type Takagi-Sugeno et/ou hybrides interconnectés

Dalel Jabri

► **To cite this version:**

Dalel Jabri. Contribution à la synthèse de lois de commande pour les systèmes de type Takagi-Sugeno et/ou hybrides interconnectés. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université de Reims - Champagne Ardenne; Université de Gabès, 2011. Français. NNT: . tel-04646381

HAL Id: tel-04646381

<https://hal.science/tel-04646381>

Submitted on 12 Jul 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Reims Champagne Ardenne

Spécialité : Génie informatique, Automatique et Traitement du Signal

Docteur de l'Université de Gabès

Spécialité : Génie électrique Automatique

Par

Mme. Dalel JABRI

**Contribution à la synthèse de lois de commande pour
les systèmes de type Takagi-Sugeno et/ou hybrides
interconnectés**

Soutenance prévue à l'Université de Reims Champagne Ardenne le 01/12/2011
devant le jury composé de :

Rapporteurs :

Pr. Mohamed Chaabane
Pr. Michel Dambrine

Ecole Nationale d'Ingénieur de Sfax-Tunisie (UCPI)
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (LAMIH)

Examineurs :

Pr. Mohamed Naceur Abdelkrim
Dr. (HDR) Kamel Abderhim
Dr. (HDR) Kevin Guelton
Pr. Noureddine Manamanni
Pr. Bernard Riera (invité)

Ecole Nationale d'Ingénieur de Gabès-Tunisie (MACS)
Ecole Nationale d'Ingénieur de Gabès-Tunisie (CONPRI)
Université de Reims Champagne Ardenne (CReSTIC)
Université de Reims Champagne Ardenne (CReSTIC)
Université de Reims Champagne Ardenne (CReSTIC)

Remerciement

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse a été effectué en cotutelle entre l'université de Reims Champagne Ardenne-France et l'université de Gabès-Tunisie. Ce travail a été, ainsi, élaboré au centre de recherche STIC de Reims, sous la direction de Monsieur Noureddine Manamanni et de Monsieur Kevin Guelton, et au sein l'unité de Recherche MACS, sous la direction de Monsieur Mohamed Naceur Abdelkrim. Je voudrais tout d'abord leur témoigner toute ma gratitude pour m'avoir accueilli dans leurs équipes, pour leurs aides et leurs confiances qu'ils m'ont accordé. Les judicieux conseils qu'ils m'ont prodigués tout au long de ces trois années de thèse m'ont permis de progresser dans mes études et d'achever ce travail dans les meilleures conditions.

J'adresse mes profonds remerciements à Monsieur Michel Dambrine, Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (LAMIH), et à Monsieur Mohamed Chaabane, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Sfax-Tunisie (UCPI), pour avoir accepté de rapporter sur ce travail.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur Kamel Abderhim, Docteur à l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Gabès-Tunisie (CONPRI) pour avoir accepté d'examiner mon travail, et à Monsieur Bernard Riera, Professeur à l'Université de Reims Champagne-Ardenne pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

J'associe aussi à ces remerciements, l'ensemble des chercheurs, doctorants, permanents, techniciens et secrétaires des deux laboratoires.

Je tiens aussi à remercier ma famille, ma belle-famille et mes amis pour leurs encouragements. Et, bien sûr, je remercie mon mari pour sa patience et son accompagnement si précieux.

Enfin, mes remerciements vont à tous ceux qui m'ont soutenu ou qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Table de matière

Bibliographie personnelle	i
Introduction générale	1
Chapitre 1 Notions préliminaires.....	7
1.1. Introduction	9
1.2. Systèmes de grandes dimensions et commande décentralisée	10
1.2.1. <i>Systèmes de grandes dimensions : définition</i>	10
1.2.2. <i>Structure générique des systèmes de grandes dimensions</i>	12
1.2.3. <i>Commande centralisée vs commande décentralisée</i>	14
1.3. Concepts élémentaires sur les multi-modèles de type Takagi Sugeno.....	17
1.3.1. <i>Qu'est-ce qu'un multi-modèle de type Takagi Sugeno ?</i>	18
1.3.2. <i>Obtention des multi-modèles Takagi Sugeno</i>	19
1.3.3. <i>Stabilité et Stabilisation des multi-modèles TS</i>	22
1.3.4. <i>Extension des résultats à la classe des multi-modèles descripteurs TS</i>	25
1.3.5. <i>Discussion sur le conservatisme des conditions LMI</i>	30
1.4. Notions élémentaires sur les systèmes dynamiques hybrides	34
1.4.1. <i>Principaux types de phénomènes hybrides</i>	35
1.4.2. <i>Principales classes de systèmes hybrides</i>	36
1.4.3. <i>Notions élémentaires sur la stabilisation des systèmes à commutations</i>	38
1.5. Conclusion.....	49

Chapitre 2 Stabilisation des descripteurs interconnectés multi-modèles de type TS51

2.1.	Introduction	53
2.2.	Descripteurs interconnectés de type TS	54
2.3.	Stabilisation décentralisée par retour d'état	55
2.3.1.	<i>Synthèse non quadratique de contrôleurs décentralisés par retour d'état</i>	<i>57</i>
2.3.2.	<i>Synthèse non quadratique H^∞ de contrôleurs décentralisés par retour d'état</i>	<i>68</i>
2.4.	Stabilisation par retour de sortie.....	78
2.4.1.	<i>Synthèse de contrôleurs non quadratiques par retour de sortie</i>	<i>79</i>
2.4.2.	<i>Exemple numérique</i>	<i>85</i>
2.5.	Conclusion.....	88

Chapitre 3 Stabilisation de systèmes linéaires interconnectés à commutations91

3.1.	Introduction	93
3.2.	Description et commande des systèmes linéaires à commutations interconnectés ..	93
3.2.1.	<i>Discussion sur le choix de la fonction de Lyapunov</i>	<i>96</i>
3.2.2.	<i>Conditions LMI pour la stabilisation décentralisée des systèmes linéaires à commutations interconnectés</i>	<i>100</i>
3.2.3.	<i>Exemple numérique</i>	<i>103</i>
3.3.	Stabilisation décentralisée des descripteurs linéaires à commutations interconnectés	108
3.3.1.	<i>Synthèse LMI de contrôleurs décentralisés pour les descripteurs linéaires à commutations interconnectés</i>	<i>109</i>
3.3.2.	<i>Exemple numérique</i>	<i>114</i>
3.4.	Conclusion.....	119

Chapitre 4 Stabilisation des systèmes Takagi-Sugeno à commutations interconnectés	121
4.1. Introduction	123
4.2. Approches de modélisation des systèmes non linéaires à commutations à base de multi-modèles TS	124
4.2.1. <i>Systèmes non linéaires représentés par un modèle TS à commutations</i>	124
4.2.2. <i>Systèmes non linéaires à commutations</i>	127
4.3. Stabilisation de systèmes non linéaires à commutations interconnectés.....	128
4.3.1. <i>Conditions LMI de synthèse de lois de commande décentralisées</i>	130
4.3.2. <i>Exemple numérique</i>	134
4.4. Conclusion.....	141
 Conclusion générale.....	143
 Bibliographie	149
 Annexe A : Outils mathématiques	165
 Annexe B : Synthèse de contrôleurs décentralisés par retour de sortie pour les systèmes standards interconnectés TS	167
 Annexe C : Stabilisation de systèmes en temps discret interconnectés à commutations	177
 Annexe D : Stabilisation d'un système non linéaire incertain et perturbé	185

Table des Figures

Figure.1.1. Commande centralisée.	14
Figure 1.2. Commande décentralisée.	16
Figure.1.3. Comparaison des domaines de faisabilité des approches quadratiques et non quadratiques.	33
Figure.1.4. Système à saut.	36
Figure.1.5. Système affine par morceaux.	37
Figure.1.6. Système à commutations.	38
Figure.1.7. Trajectoire de phase des deux systèmes stables.	40
Figure.1.8. Trajectoire de phase des deux systèmes à commutations.	41
Figure.1.9. Fonctions quadratique de Lyapunov.	45
Figure.1.10. Fonctions multiples de Lyapunov (Peleties & DeCarlo, 2001).	46
Figure.1.11. Pseudo fonctions de Lyapunov.	47
Figure. 2.1. Structure de commande décentralisée de descripteurs TS interconnectés.	55
Figure.2.2. Dynamique des descripteurs TS interconnectés (x_{11}, x_{21}, x_{31}) trait plein, (x_{12}, x_{22}, x_{32}) trait pointillé.	67
Figure.2.3. Évolution des dérivées des fonctions d'appartenance.	67
Figure.2.4. Comparaison des domaines de faisabilité : théorème 2.2 (°) vs (Jabri & al., 2009b) (■).	75
Figure.2.5. Évolution temporelle du vecteur d'état des descripteurs TS interconnectés (x_{11}, x_{21}, x_{31} en pointillés et x_{12}, x_{22}, x_{32} en ligne plein).	77
Figure 2.6. Évolution temporelle des dérivées des fonctions d'appartenance.	77
Figure.2.7. Réponses du descripteur global TS interconnecté en boucle fermée.	86
Figure .2.8. Évolution des lois de commande.	87
Figure .2.9. Évolution des fonctions d'appartenance.	88
Figure. 3.1. Diagramme de systèmes linéaires à commutations interconnectés.	94

Figure. 3.2. Allure d'une fonction multiple de Lyapunov pour $\mu_{i_j, j_i^*} < 1$	98
Figure. 3.3. Allure d'une fonction multiple de Lyapunov avec la condition (3.12).....	99
Figure.3.4. Frontière de commutation.....	105
Figure.3.5. Dynamiques des états du système interconnecté à commutations en boucle fermée.	106
Figure.3.6. Évolution des modes actifs de commutations.....	107
Figure.3.7. Évolution des signaux de commande.....	107
Figure. 3.8. Comparaison du domaine de Faisabilité du théorème 3.3(•), corollaire 3.1(+), corollaire 3.2(×).....	116
Figure. 3.9. Dynamiques des états des descripteurs interconnectés à commutations en boucle fermée.....	117
Figure. 3.10. Évolution des lois de commande et de commutations.....	118
Figure. 3.11. Évolution temporelle de la fonction multiple de Lyapunov.	119
Figure. 4.1. Fonctions d'appartenance de deux régions R_1 et R_2	126
Figure. 4.2. Diagramme d'un système à commutations à base de multi-modèles TS.....	128
Figure. 4.3. Dynamique de sous-systèmes interconnectés à commutations à base de multi- modèles TS.....	138
Figure. 4.4. Evolution temporelle des signaux de commande.	139
Figure. 4.5. Evolution temporelle de la fonction multiple de Lyapunov.	140
Figure. 4.6. Evolution temporelle de dérivés des fonctions d'appartenance.....	141
Figure.C.1. Dynamique du système en boucle fermée.....	175
Figure.C.2: Evolution temporelle des signaux de sortie.	176
Figure. C.3 Evolution temporelle des dérivées des fonctions d'appartenance.....	176
Figure D.1. La dynamique de système global interconnecté autonome à commutations.	183
Figure D.2. Dynamiques des états du système interconnecté à commutations en boucle fermée.	184
Figure D.3. Evolution des signaux de commande et des modes de commutations.....	184
Figure E.1 Partitionnement d'un espace d'état à deux dimensions.....	186
Figure E.2. Comportement du système global en boucle fermée.....	193

Bibliographie personnelle

Revues (1+1)

- [R1] S. Bel Hadj Ali Naoui, **D. Jabri**, M. Benrejeb, *Neural Internal model control of a mobile robot*, J. Automation & Systems Engineering (JASE), vol(2), 2008.
- [RS2] **D. Jabri**, Kevin Guelton, Nouredine Manamanni, *A multiple switched Lyapunov approach for decentralized stabilization of continuous time large scale switched linear*, soumise en deuxième lecture au journal Nonlinear Analysis Hybrid Systems.

Communication internationale avec acte(10)

- [CI1] **D. Jabri**, K. Guelton, N. Manamanni, *Decentralized stabilization of continuous time large scale switched descriptors*, 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC 2011), Milan, Italy, août 2011.
- [CI2] **D. Jabri**, K. Guelton, N. Manamanni, *Decentralized control of large scale switched Takagi-Sugeno systems*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2011), Taipei, Taiwan 2011a.
- [CI3] **D. Jabri**, K. Guelton, N. Manamanni, *Decentralized Static Output Feedback Control of Interconnected Fuzzy Descriptors*, IEEE Multi-conference on Systems and Control, Yokohama, Japan, septembre 2010.
- [CI4] K. Guelton, N. Manamanni, **D. Jabri**, *Decentralized static output feedback controller design with H^∞ analysis for large scale Takagi-Sugeno systems*, IEEE World Congress on Computational Intelligence / International Conference on Fuzzy Systems (WCCI2008/FUZZ-IEEE), Barcelona, Spain, juillet 2010.

- [CI5] D. **Jabri**, K. Guelton, N. Manamanni, M. Abdelkrim, *Decentralized stabilization of discrete-time large scale switched systems*, 18th Mediterranean Conference on Control and Automation (IEEE MED 2010), Marrakech, Morocco, juin 2010.
- [CI6] D. **Jabri**, K. Guelton, N. Manamanni, M. Abdelkrim, *Decentralized stabilization of interconnected Takagi-Sugeno descriptors under external disturbances*, 10th international Conference on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering (STA'2009), Hammamet, Tunisia, décembre 2009.
- [CI7] D. **Jabri**, K. Guelton, N. Manamanni, M. Abdelkrim, *H_∞ based decentralized fuzzy Lyapunov controller design for Takagi-Sugeno interconnected descriptors*, 2nd IFAC International Conference on Intelligent Control Systems and Signal Processing (ICONS'09), Istanbul, Turkey, septembre 2009.
- [CI8] D. **Jabri**, K. Guelton, N. Manamanni, M. Abdelkrim, *Fuzzy Lyapunov Decentralized Control of Takagi-Sugeno Interconnected Descriptors*, IEEE Symposium Series on Computational Intelligence/Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation (IEEE SSCI/CICA 2009), Nashville, Tennessee, USA, mars 2009.
- [CI9] F. Rouissi, D. **Jabri**, R. Harrabi, S. Bel Hadj Ali Naoui, *Fuzzy Logic Control of autonomous vehicle, obstacle avoidance problem*, 9th international Conference on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering (STA'2008), Sousse, Tunisia, décembre 2008.
- [CI10] S. Bel Hadj Ali Naoui, D. **Jabri**, M. Benrejeb, *Neural Internal model control of a mobile robot*, ICEEDT'07 International Conference on Electrical Engineering Design and Technologies (ICEEDT'07), Hammamet, Tunisie, novembre 2007.

Communication nationale avec acte(4)

- [CN1] D. **Jabri**, A. Jaadari, K. Guelton, N. Manamanni, *Stabilisation robuste des systèmes Takagi-Sugeno par lois de commande à commutations*, 6ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2010), Nancy, juin 2010.
- [CN2] D. **Jabri**, K. Guelton, N. Manamanni, M. Abdelkrim, *Synthèse non quadratique H_∞ de contrôleurs décentralisés pour un ensemble de descripteurs flous T-S interconnectés*,
-

Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2009), Cépaduès-Paris, Annecy, novembre 2009.

[CN3] D. **Jabri**, K. Guelton, N. Manamanni, M. Abdelkrim, *Stabilisation des systèmes descripteurs interconnectés de type Takagi-Sugeno*, Workshop du GIS Surveillance, Sécurité et Sécurité des Grands Systèmes (GIS 3SGS'09), Nancy, juin 2009.

[CN4] D. **Jabri**, S. Bel Hadj Ali Naoui, M. N. Abdelkrim, *Commande par Modèle Interne Neuro-Floue d'un Robot Mobile Fuzzy Logic Control of autonomous vehicle, obstacle avoidance problem*”, 6ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2008), Bucarest, Roumanie, septembre 2008

Communication sans acte (2)

[SA1] K. Guelton, D. **Jabri**, N. Manamanni, *Commande décentralisée par retours de sorties statiques pour systèmes Takagi-Sugeno de grande taille et/ou interconnectés*, Réunion COSMOS2 du GIS 3SGS, Paris, mai 2010. .

[SA2] D. **Jabri**, K. Guelton, N. Manamanni, M. Abdelkrim, *Stabilisation des systèmes descripteurs interconnectés de type Takagi-Sugeno*, 1ère Journée scientifique International Recherche pour l'innovation Technologique et la création Industrielle, RICATI 20101, Gabès, juin 2010.

Introduction générale

L'étude des systèmes dynamiques constitue, depuis longtemps, une préoccupation majeure du monde de la recherche en Automatique. En effet, la maîtrise du comportement d'un système passe par une phase essentielle de modélisation. Cette phase permet d'établir un modèle dont l'objectif est de reproduire, le plus fidèlement possible, le comportement naturel d'un système. L'analyse du comportement du système ou de son modèle permet alors de déterminer le caractère de son évolution temporelle. Celui-ci peut être stable, instable ou encore présenter de faibles performances vis-à-vis d'objectifs qui lui seraient imposés par un cahier des charges. Dès lors, afin de répondre à ces objectifs, la conduite d'un système répondant aux exigences de l'utilisateur peut être effectuée en introduisant une loi de commande qu'il convient de synthétiser. La modélisation fidèle d'un système physique représente, de ce fait, un véritable enjeu. Cependant, en augmentant la finesse de représentation d'un modèle, la complexité de celui-ci augmente et peut mener à l'utilisation d'outils mathématiques complexes (systèmes non linéaires, de dimension infinie...). Néanmoins, la complexité de l'étude des modèles non linéaires ainsi que l'insuffisance des moyens de simulation disponibles conduisent à effectuer des hypothèses de modélisation qui peuvent s'avérer restrictives. Par exemple, en se basant sur des hypothèses de linéarité entre les entrées et les sorties d'un système, une première approximation peut être de considérer un modèle linéaire. Ce type d'approximation s'avère efficace si le degré de non linéarité du système reste faible ou si le système demeure au voisinage d'un point de fonctionnement particulier. Dans ce cadre, de nombreux outils d'analyse et de synthèse en automatique, émanant de l'algèbre linéaire, ont été développés pour la classe des systèmes linéaires.

De manière usuelle, les systèmes linéaires sont représentés par un ensemble d'équations différentielles ordinaires. Néanmoins, celles-ci ne permettent pas de représenter l'ensemble des systèmes physiques. En effet, dans certains cas, la description de l'évolution d'un système peut nécessiter la prise en compte de phénomènes dynamiques associés à des équations statiques (lois de maillage, contraintes physiques, lois de comportement, etc). Dans ce cas, les systèmes sont décrits par un ensemble d'équations algébro-différentielles, on parle alors, par extension du terme anglais « descriptor », de systèmes descripteurs. Cette classe de systèmes constitue par conséquent une généralisation des systèmes dynamiques linéaires usuels et offre la possibilité de conserver la signification physique des variables d'état ainsi que de modéliser des processus présentant des comportements impulsifs ou singuliers (Cobb, 1981 ; Cobb, 1983 ; Masubuchi & al., 1997).

Par ailleurs, la commande des systèmes linéaires, qu'ils soient standards ou descripteurs, relève de techniques qui sont à ce jour bien maîtrisées. Toutefois, il existe de nombreux cas où les non-linéarités d'un système physique ne sont pas négligeables. Par exemple lorsque, pour une raison ou une autre, l'on souhaite s'éloigner d'un point de fonctionnement particulier. Dans ce cas, d'autres solutions peuvent être envisagées pour modéliser et commander ces systèmes de manière fiable sur des régions plus large de leurs espaces d'état. Une alternative consiste à représenter le système non linéaire par un ensemble fini de modèles linéaires. Ainsi, le problème complexe est fragmenté en sous problèmes plus simples à résoudre. Le comportement global du système non linéaire est reconstitué par un ensemble de modèles locaux, valables dans des régions définies, reliés entre eux par des mécanismes d'interpolation ou de commutation. On parle alors ici d'approches multi-modèles. Deux grandes familles peuvent dans ce cas être définies en fonction de la nature des relations entre modèles locaux :

- Lorsque la relation entre les différents modèles locaux est décrite par une fonction abrupte, on parle de systèmes hybrides, ou plus précisément de systèmes à commutations (Branicky, 1998 ; Van der schaft & Schumacher 2001 ; Zaytoon 2001 ; Liberzon, 2003 ; Sun & al., 2005) sur lequel porte une partie de notre étude.
- Lorsque les liaisons entre les sous-modèles sont assurées par des mécanismes d'interpolations ou des fonctions poids, on parle de représentation polytopique d'un système non linéaire (LPV, Quasi-LPV, Takagi-Sugeno...). Plus précisément, dans la suite nous nous intéresserons à l'étude des multi-modèles de type Takagi-Sugeno (Takagi & Sugeno, 1985 ; Tanaka & al., 1998 ; Tanaka & al., 2001).

De manière générale, l'expression hybride signifie "hétérogène en nature ou en composition". La notion de "systèmes hybrides" a été développée pour indiquer des systèmes possédant un comportement défini par des entités ou des processus de différents types, notamment pour prendre en compte aussi bien l'aspect continu que l'aspect événementiel dans l'ensemble de la chaîne de contrôle. Ces deux aspects sont rencontrés dans n'importe quel système dynamique. Contrairement aux systèmes dits "classiques" qui sont représentés par des modèles continus ou par des modèles à événements discrets, les systèmes hybrides nécessitent la combinaison de ces deux aspects. Nombreux sont les domaines d'application des systèmes hybrides. On peut citer à titre d'exemple, l'informatique (Matveev & al., 2000), l'industrie automobile (Bemporad & al., 2003), la robotique (Bak & al., 2003), le contrôle du trafic aérien (Tomlin & al., 2007), la biologie (Belta & al 2001), etc. Les approches polytopiques, quant à elles, constituent des outils efficaces de modélisation des systèmes non linéaires sur une large plage de fonctionnement. Parmi ces approches, les multi-modèles de type Takagi et Sugeno (TS) ont montré leur intérêt en automatique non linéaire. En effet, ils permettent de représenter, de manière exacte, les systèmes non linéaires affines en la commande sur un espace compact de leurs variables d'état (Tanaka & Wang, 2001 ; Morère, 2001). Les multi-modèles TS sont constitués de sous-modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires convexes. Cette particularité permet d'étendre certains concepts relatifs aux systèmes linéaires dans le cas non linéaire (commande, diagnostic...). Ils offrent ainsi un excellent compromis entre complexité, précision et flexibilité de modélisation (Tanaka & al., 2001). Plusieurs travaux ont porté sur l'étude de cette classe de système. Citons à titre d'exemple, la modélisation et la commande d'un moteur thermique (Khiar, 2007), la robotique (Schulte & Guelton, 2009 ; Guechi & al., 2010), le domaine médical (Seddiki, 2009), etc. Par extension de ces deux méthodologies de modélisation (hybride pour les systèmes à commutation et non linéaire pour les multi-modèles TS), des travaux ont été menés afin de combiner les aspects hybrides et non linéaires afin de reproduire le plus fidèlement possible le comportement de certains systèmes (Tanaka & al., 2001a, Jia & al., 2005 ; Yang & al., 2006 ; Yang & al., 2007 ; Yang & Zhao, 2007a ; Liu & al., 2008 ; Ojleska & al., 2008, Tanaka & al., 2008 ; Zouari & al., 2010).

D'autre part, avec la complexité croissante des systèmes réels et des processus industriels, l'obtention d'un modèle mathématique est de plus en plus délicate et conduit, de surcroît, à l'augmentation des difficultés relatives à l'analyse ou encore à la synthèse de lois de commande ou d'observateur. En effet, la dynamique d'un système complexe peut être

composée d'un grand nombre de variables d'état, d'entrées-sorties, ou encore, elle peut être composée d'un ensemble de sous-systèmes plus ou moins fortement interconnectés. On parle alors de systèmes de grandes dimensions. Dans ces cas, des hypothèses de modélisation restrictives peuvent conduire à la dégradation des performances souhaitées. Une alternative à ces problèmes de modélisation et de commande des systèmes de grandes dimensions consiste à décomposer le système global en un ensemble fini des sous-systèmes interconnectés. Ceux-ci peuvent alors être étudiés, avec des outils adaptés, séparément les uns des autres, tout en tenant compte des interconnexions. On se place alors dans une approche dite "décentralisée" au regard des approches classiques qui consistent à étudier un système dans sa globalité. Nombreux sont les travaux qui se sont intéressés à l'étude des systèmes de grandes dimensions, par exemple pour les systèmes linéaires (Mesarovic , 1970 ; Pearson, 1971 ; Singh, 1980, Šiljak , 1991, Zhu & Pagilla, 2007), pour les systèmes TS, (Hsiao & al., 2000 ; Tseng, 2001; Akar & Özgüner, 2001;Chiang & Kuo, 2002 ; Taniguchi & al., 2007 ; Tseng, 2008), pour les descripteurs TS (Wang & Lin., 2005), pour les systèmes à commutations (Mahmoud & al., 2010 ; Chiou, 2006).

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude de la stabilisation décentralisée des systèmes (standards ou descripteurs) de grandes dimensions, non linéaires et/ou hybrides. L'enjeu consiste donc à proposer des conditions permettant la synthèse de lois de commande décentralisées qui assureront la stabilité des systèmes considérés en boucle fermée. En effet, la stabilité en boucle fermée d'un système est essentielle pour garantir un fonctionnement sûr. Nous aborderons dans un premier temps des études sur les systèmes non linéaires représentés par des multi-modèles TS, puis les systèmes linéaires à commutations avant de combiner ces approches pour aboutir à des conditions de synthèse de lois de commande décentralisées pour une large classe de systèmes non linéaires et hybrides.

Ce mémoire, composé de quatre chapitres, est organisé de la façon suivante :

Le **premier chapitre** introduit les concepts fondamentaux relatifs aux classes de systèmes traitées dans cette thèse. Nous présenterons, en premier lieu, un aperçu des structures et des problématiques liées aux systèmes de grandes dimensions. Ensuite, en nous basant sur la théorie de Lyapunov (Liapunov, 1907), nous introduirons les notions préliminaires, présentes dans la littérature, sur la stabilisation des multi-modèles TS et des systèmes hybrides.

Après avoir abordé les notions préliminaires, nous présenterons, dans le **deuxième chapitre**, nos contributions sur la stabilisation décentralisée des descripteurs interconnectés de type TS. Deux approches seront traitées : la commande par retour d'état et la commande par retour de sortie.

Dans le **troisième chapitre**, nous abordons le problème de la stabilisation décentralisée d'une autre classe de systèmes de grandes dimensions. Il s'agit des systèmes linéaires hybrides à grandes dimensions, composés d'un ensemble de sous-systèmes linéaires à commutations interconnectés. Ainsi, sur la base de la théorie de Lyapunov, la synthèse de lois de commandes à commutations décentralisées sera proposée pour assurer la stabilité en boucle fermée des systèmes hybrides de grandes dimensions. L'extension de ces résultats aux cas des descripteurs linéaires à commutations interconnectés sera ensuite abordée.

Enfin, dans le **quatrième chapitre**, nous combinerons les résultats proposés aux chapitres précédents pour traiter le cas de systèmes non linéaires à commutations de grandes dimensions.

Une conclusion générale agrémentée des perspectives des travaux proposées terminera ce manuscrit.

Chapitre 1 Notions préliminaires

1.1.	Introduction	9
1.2.	Systèmes de grandes dimensions et commande décentralisée	10
1.2.1.	<i>Système de grandes dimensions : définition</i>	10
1.2.2.	<i>Structure générique des systèmes de grandes dimensions</i>	12
1.2.3.	<i>Commande centralisée vs commande décentralisée</i>	14
1.3.	Concepts élémentaires sur les multi-modèles de type Takagi Sugeno.....	17
1.3.1.	<i>Qu'est-ce qu'un multi-modèle de type Takagi Sugeno ?</i>	18
1.3.2.	<i>Obtention des multi-modèles Takagi Sugeno</i>	19
1.3.3.	<i>Stabilité et Stabilisation des multi-modèles TS</i>	22
1.3.4.	<i>Extension des résultats à la classe des multi-modèles descripteurs TS</i>	25
1.3.5.	<i>Discussion sur le conservatisme des conditions LMI</i>	30
1.4.	Notions élémentaires sur les systèmes dynamiques hybrides	33
1.4.1.	<i>Principaux types de phénomènes hybrides</i>	35
1.4.2.	<i>Principales classes de systèmes hybrides</i>	36
1.4.3.	<i>Notions élémentaires sur la stabilisation des systèmes à commutations</i>	38
1.5.	Conclusion.....	49

Notions préliminaires

1.1.Introduction

Les méthodes classiques de commande sont fondées sur la synthèse d'un régulateur unique pour garantir la stabilité d'un système. Ce régulateur regroupe la totalité des informations issues des capteurs et génère les signaux de commande adéquats pour l'ensemble des actionneurs dont est pourvu le système. Cependant, en tenant compte de la recherche de performances accrues ainsi que de la complexification croissante des processus industriels, il devient de plus en plus clair que ce type de contrôleurs ne peut être (ou difficilement) applicables dans plusieurs cas de systèmes. C'est le cas, par exemple, des systèmes de grandes dimensions tels que les systèmes électriques interconnectés, les systèmes spatiaux soumis à de nombreux signaux externes, les structures spatiales de grande souplesse, les systèmes en réseau etc. Malgré les avancées technologiques qu'ont connues les calculateurs numériques (rapidité et taille de mémoire), la résolution des problèmes liés aux systèmes de grandes dimensions nécessite de nouvelles approches de modélisation et de synthèse de régulateurs, même si, l'intérêt de la communauté automatique pour la modélisation, la commande et l'analyse des "grands systèmes" remonte déjà aux années 1970 (Mesarovic & al., 1970 ; Pearson, 1971 ; Singh, 1980, Sandell, 1987).

Ce chapitre présente les concepts fondamentaux des différentes classes de systèmes traités dans cette thèse. En effet, les contributions que nous développerons dans ce manuscrit concernent, en particulier, la stabilisation des systèmes non linéaires et/ou hybride de grandes dimensions réécrits sous forme de systèmes interconnectés. Vu la quantité considérable de travaux relatifs à ces thématiques, nous nous contentons, dans ce chapitre, de présenter les préliminaires qui nous semblent pertinents pour la compréhension de notre travail.

Ainsi, nous commencerons, dans ce chapitre, par présenter les difficultés d'analyse et de commande des systèmes de grandes dimensions. Ensuite, des résultats élémentaires significatifs en matière de stabilité et de stabilisation des systèmes non linéaires et /ou hybrides (de dimension classique) seront passés en revue. Nous étudierons notamment les

multi-modèles de type Takagi-Sugeno (Takagi & Sugeno, 1985) pour tenir compte du caractère non linéaire d'un système. Puis nous nous intéresserons aux systèmes linéaires à commutations (Liberzon & Morse, 1999 ; Branicky 1985) pour tenir compte de phénomènes hybrides.

1.2.Systèmes de grandes dimensions et commande décentralisée

Dans les premiers travaux consacrés à l'étude des systèmes de grandes dimensions (Mesarovic , 1970 ; Pearson, 1971 ; Singh, 1980), les auteurs ont proposé différentes définitions influencées par les contextes et les terminologies particulières de leurs communautés et ont cherché à appliquer des techniques de décomposition et de résolution de problèmes numériques complexes, développées en mathématiques appliquées, directement à la commande de ce type de systèmes. Parallèlement à ces solutions, certains automaticiens ont lancé le thème de la commande décentralisée (Sandell , 1978). L'idée consiste à décomposer le système global, selon des considérations physiques, en sous-systèmes de dimensions acceptables. Ensuite, le problème de synthèse d'un contrôleur est décomposé, parallèlement, en sous-problèmes moins complexes. Ainsi, au lieu de concevoir un contrôleur unique pour le système global, le contrôleur conçu dans ce cas est composé d'un ensemble de contrôleurs locaux indépendants tel que à chaque contrôleur local est associé un sous-système.

1.2.1. Systèmes de grandes dimensions : définition

Les "systèmes complexes", les "systèmes interconnectés", les "systèmes structurés", sont des termes employés dans les premiers ouvrages (Šiljak , 1978 ; Bernussou & Titli, 1982 ; Šiljak , 1991) pour désigner les systèmes de grandes dimensions. Tous ces termes semblent indiquer une dynamique complexe avec un grand nombre de variables d'état, d'entrées et de sorties et/ou des sous-systèmes plus ou moins fortement interconnectés. Notons que les définitions formulées dans la littérature sont rares, souvent imprécises et parfois avec des points de vue différents (Claveau , 2005). Ainsi, après une présentation non exhaustive des définitions dans la littérature de ces systèmes, nous proposerons notre propre point de vue qui servira de base dans la suite de ce manuscrit.

Définition 1.1 : *Grand système* (Šiljak, 1978)

Un “grand système” est un système nécessitant pour des raisons conceptuelles ou numériques une décomposition en un nombre fini de sous-systèmes interconnectés.

Définition 1.2 : *Système complexe* (Bernussou & Titli, 1982)

Un “système complexe” se caractérise principalement par sa difficulté à être modéliser à l'aide d'outils mathématiques classiques, ou bien par la complexité de son modèle souvent obtenu via des considérations physiques ou analytiques. Ces systèmes sont donc fréquemment modélisés par des équations aux dérivées partielles, des équations fortement non linéaires, ou encore en utilisant les concepts de la logique floue.

Définition 1.3 : *Système complexe* (Šiljak, 1996) :

Un système est dit “complexe” s’il présente les caractéristiques suivantes

- Sa manipulation en analyse et en commande est délicate,
- Il est de grande dimension : le nombre d'entrées / sorties / états est suffisamment grand,
- Il présente des incertitudes et des contraintes sur la structure des flux d'information.

Définition 1.4 : *Système interconnecté* (Scorletti, 1997)

Un “système interconnecté” est un système pouvant être décomposé en un ensemble de N systèmes élémentaires S_i , $i = 1, \dots, N$ et une unique interconnection I reliant l'ensemble des systèmes S_i .

D’après les définitions précédentes, il apparaît que selon la situation, les chercheurs n’adoptent pas la même description pour définir les systèmes de grandes dimensions. Cette différence de point de vue peut être profonde. Afin d’élaborer une loi de commande, Šiljak suggère, dans la définition 1.1, de passer via une transformation le menant à l’état du “système interconnecté”. Mais parle-t-on du même concept de “système interconnecté” que celui proposé par Scorletti dans la définition 1.4? Dans les faits, la définition 1.1, qui apparaît d’origine purement mathématique, mène à décomposer le système global en un ensemble de sous-systèmes. La définition 1.2, inspirée également d’un point de vue mathématique, restreint le sujet à une problématique de modélisation. Dans la définition 1.3, Šiljak considère les interconnexions comme des incertitudes. La définition 1.4, quant à elle, suppose que tous les sous-systèmes sont liés par une seule interconnection. Ces suggestions suffisent à mettre

en avant la difficulté de définir rigoureusement les systèmes de grandes dimensions et l'on constate qu'une unification de leur définition, sachant la grande diversité de ces systèmes, paraît utopique. Ainsi, dans la suite, nous proposons de nous restreindre à la définition suivante des systèmes interconnectés.

Définition 1.5 : *Système interconnecté*

Un "système interconnecté" est un système pouvant être décomposé selon des considérations physiques ou mathématiques en un ensemble de N sous-systèmes S_i , $i = 1, \dots, N$, autonomes ou commandés et interconnectés entre eux.

1.2.2. Structure générique des systèmes de grandes dimensions

Afin d'illustrer la définition 1.5, nous proposons dans cette section, de montrer comment, à partir d'un système de grande dimension, exprimé sous la forme d'une représentation d'état générale, on peut obtenir un système interconnecté composé de N sous-systèmes interconnectés.

Considérons un système S , éventuellement non linéaire ou hybride, de grande dimension et donné sous la forme de la représentation d'état suivante :

$$S \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état du système, $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de la commande et $\tilde{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ le vecteur de sortie à l'instant t . $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sont les matrices, comportant éventuellement des termes non linéaires, décrivant la dynamique du système.

On note a_{ij} , b_{ij} et c_{ij} , respectivement les éléments des matrices \tilde{A} , \tilde{B} et \tilde{C} et où i et j désignent les positions en ligne et colonne au sein des matrices.

Considérons maintenant une décomposition des vecteurs d'état $\tilde{x}(t)$, d'entrée $\tilde{u}(t)$ et de sorties $\tilde{y}(t)$ en N composantes; c'est-à-dire $\tilde{x}(t) \triangleq [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T$ avec $x_i(t) \in \mathbb{R}^{\eta_i}$ et

$$\eta = \sum_{i=1}^N \eta_i \quad , \quad \tilde{u}(t) \triangleq [u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_N^T]^T \quad \text{avec} \quad u_i(t) \in \mathbb{R}^{\vartheta_i} \quad \text{et} \quad \vartheta = \sum_{i=1}^N \vartheta_i \quad ,$$

$\tilde{y}(t) \triangleq [y_1^T \quad y_2^T \quad \cdots \quad y_N^T]$ avec $y_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ et $q = \sum_{i=1}^N q_i$. La représentation d'état (1.1) du système S peut alors être réécrite sous la forme d'un ensemble de N systèmes interconnectés tels que :

Pour $1 \leq i \leq N$:

$$S_i := \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_{ii}u_i(t) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N (A_{i\alpha}x_\alpha(t) + B_{i\alpha}u_\alpha(t)), \\ y_i(t) = C_{ii}x_i(t) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N C_{i\alpha}x_\alpha(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

telles que $A_{ii} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_i}$, $B_{ii} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \nu_i}$ et $C_{ii} \in \mathbb{R}^{q_i \times \eta_i}$ sont les matrices définissant la partie nominale du sous système S_i , $A_{i\alpha} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_\alpha}$, $B_{i\alpha} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \nu_\alpha}$ et $C_{i\alpha} \in \mathbb{R}^{q_i \times \eta_\alpha}$ sont les matrices d'interconnexions (couplages) entre sous-systèmes. Ces matrices correspondent aux blocs diagonaux et anti-diagonaux des matrices \tilde{A} , \tilde{B} et \tilde{C} telles que :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1i} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ii} & \cdots & A_{iN} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{Ni} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1i} & \cdots & B_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ B_{i1} & \cdots & B_{ii} & \cdots & B_{iN} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & \cdots & B_{Ni} & \cdots & B_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1i} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ C_{i1} & \cdots & C_{ii} & \cdots & C_{iN} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & C_{Ni} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}.$$

Notons que les systèmes représentés par l'équation (1.2) comportent de nombreux termes d'interconnexions relatifs aux structures des matrices du système de grande dimension (1.1) considéré. Dans ce cas, la définition d'une loi de commande adéquate reste difficile dans la mesure où il subsiste des interconnexions entre les différents signaux de commande. En d'autres termes, chaque sous-système reste affecté par l'ensemble des signaux de commande (Steward, 1962, Claveau, 2005). Afin de remédier à ce problème et de proposer des structures de commande décentralisées, c'est-à-dire avec une loi de commande indépendantes pour chacun des sous-systèmes, il est nécessaire d'effectuer des transformations

(difféomorphisme...) ou encore des hypothèses de modélisation (simplifications, approximations...) permettant de découpler les éléments de la matrice d'entrée, c'est-à-dire obtenir une matrice \tilde{B} diagonale par blocs. Le même constat peut être établi pour l'équation de sortie et, dans ce cas, la classe des systèmes interconnectés étudiés est décrite par les représentations d'état suivantes :

Pour $1 \leq i \leq N$:

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_{ii}u_i(t) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N A_{i\alpha}x_\alpha(t) \\ y_i(t) = C_{ii}x_i(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Rappelons que les matrices des systèmes décrits par (1.3) sont données de manière génériques et peuvent contenir des termes non linéaires où encore faire intervenir des phénomènes hybrides. Notre objectif dans la suite est d'étudier la stabilisation de systèmes de grandes dimensions non linéaires ou/et hybrides par l'emploi de lois de commande décentralisées.

1.2.3. Commande centralisée vs commande décentralisée

Dans la majeure partie des approches de commande employées en automatique, l'ensemble des informations issues des capteurs et des commandes générées vers les actionneurs est centralisé dans une structure de contrôle unique. On peut alors parler de commande centralisée, représenté par la figure 1.1.

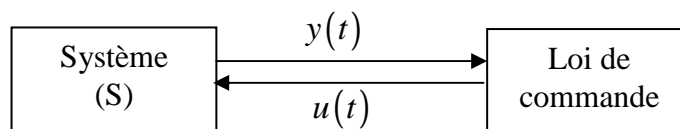


Figure.1.1. Commande centralisée.

Afin d'étayer nos propos, considérons le cas classique de la commande par retour d'état d'un système régi en boucle ouverte par l'équation d'état suivante $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ où $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ est le vecteur d'entrée et A et B sont les matrices décrivant la dynamique du système. Considérons maintenant la loi de commande par retour d'état donnée par :

$$u(t) = Kx(t) \quad (1.4)$$

où K est une matrice de gains (paramètres du contrôleur) qu'il convient de synthétiser. Dans ce cas, la dynamique en boucle fermée peut-être exprimée par :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (1.5)$$

Ainsi, la synthèse du correcteur (1.4) peut être effectuée en étudiant la stabilité du système en boucle fermée (1.5). En d'autres termes, il s'agit de trouver K de telle manière que (1.5) soit stable.

Néanmoins, ce type d'approche (centralisée) s'avère difficile dans le cas des systèmes de grandes dimensions. En effet, dans ce cas nous pouvons avoir à faire face à des difficultés d'ordre conceptuel mais aussi numérique (Claveau, 2005). Les difficultés d'ordre conceptuel sont liées à la formulation du problème de commande, c'est-à-dire :

- la difficulté de définir un critère unique agrégeant l'ensemble des objectifs de commande.
- la difficulté de modéliser les systèmes de grandes dimensions.

Les difficultés d'ordre numérique sont liées à la synthèse du correcteur et plus particulièrement à :

- la manipulation de problèmes numériques de grandes tailles nécessitant des temps de calcul et / ou des espaces mémoires importants.
- la cohabitation de dynamiques différentes au sein d'un même système; par exemple lors de la combinaison de dynamiques lentes et rapides, ou encore de dynamiques continues et discrètes.

Afin de palier à ces difficultés, nous nous intéressons à la commande décentralisée de la classe des systèmes interconnectés représentés par (1.3). La notion de décentralisation de la commande se rapproche de l'idée de co-localisation c'est-à-dire que le contrôle décentralisé partitionne l'information de mesure et élabore une loi de commande locale et indépendante pour chaque sous-système (Bakule, 2008). Une structure de commande décentralisée est représentée par la figure 1.2.

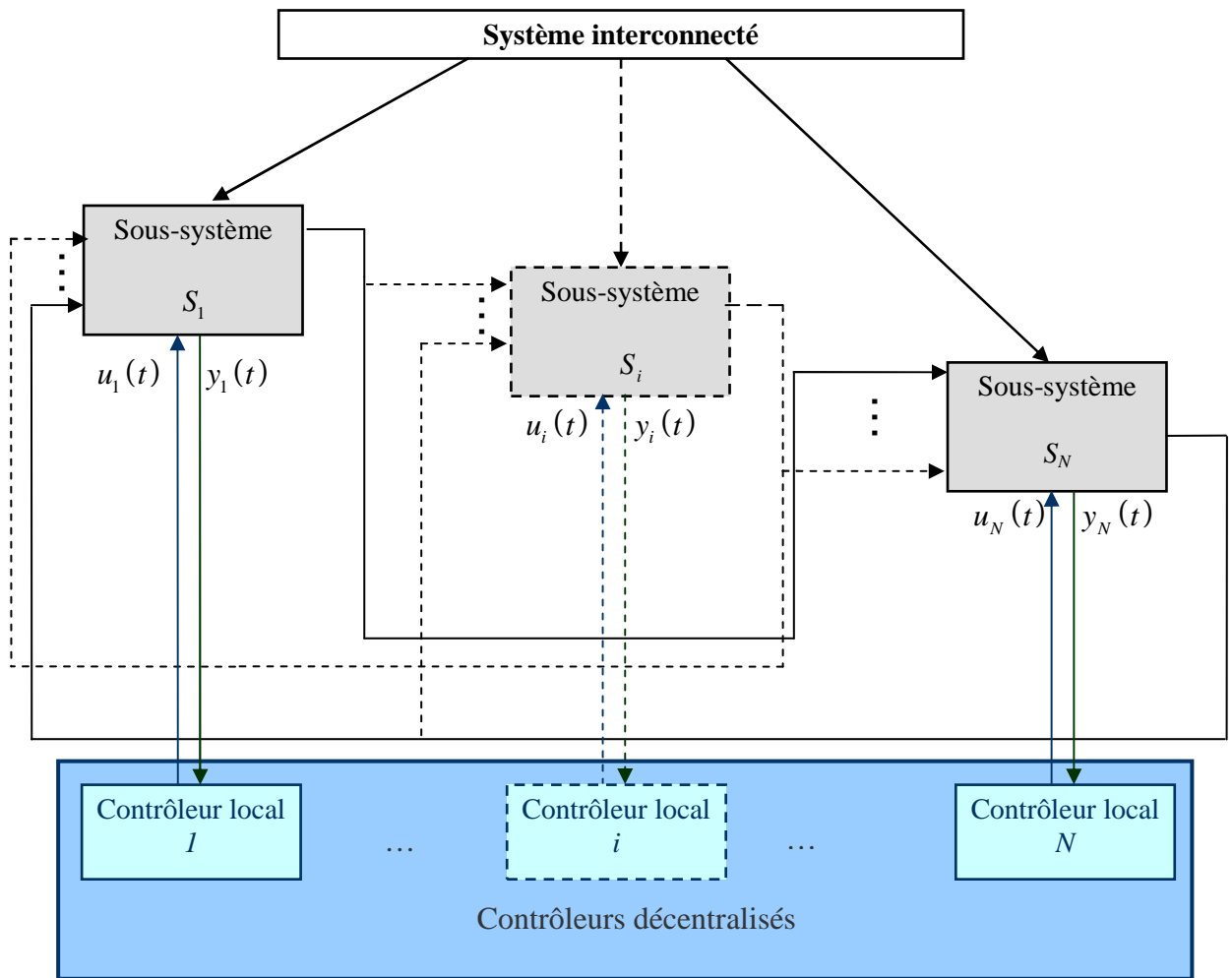


Figure 1.2. Commande décentralisée.

La méthodologie de commande décentralisée est en effet susceptible de faciliter la synthèse de lois de commande dans le cas des systèmes de grandes dimensions. En effet, chaque loi de commande peut être conçue en se basant sur la nature du sous-système auquel elle est associée (linéaire, non linéaire, incertain, perturbé). Afin d'étayer ces propos, considérons un ensemble de lois de commande décentralisées par retour d'état d'un système interconnecté décrit par (1.3). Cet ensemble est donné par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$u_i(t) = K_i x_i \quad (1.6)$$

où les matrices K_i représentent les gains de chaque lois de commande associées à chaque sous-systèmes S_i .

Ainsi, la représentation d'état du système interconnecté en boucle fermée peut être exprimée par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = (A_{ii} + B_{ii}K_i)x_i(t) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N A_{i\alpha}x_\alpha(t) \\ y_i(t) = C_{ii}x_i(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

De même que pour les systèmes classiques (non interconnectés), la synthèse du correcteur décentralisé consiste ici à déterminer l'ensemble des gains K_i qui garantiront que l'ensemble du système S soit stable en boucle fermée.

Dans la suite de ce manuscrit, nous nous intéresserons plus particulièrement à la synthèse de contrôleurs décentralisés pour un ensemble de systèmes interconnectés non linéaires et/ou hybrides. Afin de mieux appréhender les contributions proposées, nous commencerons, dans la suite de ce chapitre, par présenter les concepts et principes généraux des classes de systèmes étudiés, à savoir que :

- Afin de tenir compte du caractère non linéaire, nous nous intéresserons aux multi-modèles de type Takagi-Sugeno (Takagi & Sugeno, 1985).
- Afin de tenir compte du caractère hybride, nous nous intéresserons à l'étude des systèmes à commutations (Branicky 1985 ; Liberzon & Morse, 1999 ; Lin & Antsaklis, 2008).

1.3. Concepts élémentaires sur les multi-modèles de type Takagi Sugeno

Les modèles Takagi-Sugeno (TS) ont fait l'objet de nombreuses études depuis leur introduction en 1985 (Takagi & Sugeno, 1985). Ceux-ci appartiennent à la classe des systèmes polytopiques convexes et permettent d'étendre certains concepts de la commande des systèmes linéaires au cas des systèmes non linéaires affines en la commande. Historiquement basées sur le formalisme flou, les méthodes d'obtention les plus récentes des modèles TS, telles que la décomposition en secteurs non linéaires (Morère, 2001, Tanaka & Wang, 2001), permettent de représenter exactement un système non linéaire sur un espace compact de ses variables d'état. Il en résulte qu'un modèle TS s'écrit, de manière équivalente à

un modèle Quasi-LPV (Linéaire à Paramètres Variants), sous la forme d'une collection de dynamiques linéaires (polytopes) interpolées par un ensemble de fonctions non linéaires (vérifiant les propriétés de somme convexe). De nombreux travaux de recherche s'intéressent à cette classe de système. Par exemple, ceux-ci traitent de la stabilité et de la stabilisation des systèmes TS standards (Takagi & Sugeno, 1985 ; Yoneyama & al., 2001 ; Zerar & al., 2008 ; Guerra & al., 2009a ; Mozelli & al., 2009), de la stabilisation des descripteurs TS (Yoneyama & al., 1999; Taniguchi & al., 1999 ; Lin & al., 1999 ; Wang & al., 2004; Tian & al., 2007 ; Lin & al., 2008 ; Bouarar, 2009) ; ou encore du diagnostic et l'observation (Guelton, 2003 ; Xiaodong & Qingling, 2003 ; Mansouri, 2005 ; Orjula, 2008 ; Ichalal, 2009; Nagy, 2010).

Dans cette section, nous proposons une présentation de la structure des multi-modèles TS, ainsi qu'une présentation de leurs méthodes d'obtention les plus fréquentes. Ensuite, les premiers résultats, base de nombreux travaux de la littérature, sur la stabilité et la synthèse de lois de commande pour cette classe de système seront présentés.

1.3.1. Qu'est-ce qu'un multi-modèle de type Takagi Sugeno ?

Un multi-modèle TS est constitué d'un ensemble de modèles linéaires liés par une structure d'interpolation représentée par des fonctions d'appartenance non linéaires. En effet, en 1985, sur la base du formalisme flou, Takagi et Sugeno ont proposé une approche de modélisation des systèmes non linéaires basée sur un ensemble de règles floues de type « Si ... Alors » dont les conclusions représentent un ensemble de dynamiques linéaires. Ainsi, si l'on note r le nombre de règles floues décrivant un modèle TS, la $i^{\text{ème}}$ règle R^i est donnée par :

$$\begin{aligned}
 R^i : & \text{SI } z_1 \text{ est } F_1^i(z_1(t)) \text{ ET } z_2 \text{ est } F_2^i(z_2(t)) \dots z_p \text{ est } F_p^i(z_p(t)) \\
 \text{ALORS } & \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

où, pour $j=1, \dots, p$, $F_j^i(z_j(t))$ sont des sous ensemble flous réalisant une partition exacte de l'univers du discours, $z_j(t)$ sont les variables de prémisses dépendantes des entrées et/ou de l'état du système. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie, A_i , B_i et C_i sont les matrices décrivant la dynamique du système.

Pour chaque règle floue R^i , une fonction de poids $w_i(z_j(t))$ peut-être attribuée, déterminant la contribution de chacune des dynamiques linéaires composant le multi-modèle dans sa globalité. Cette fonction de poids dépend du degré d'appartenance des variables de prémisses $z_j(t)$ aux sous-ensembles flous $F_j^i(z_j(t))$ et du choix de l'opérateur ET , telles que :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z_j(t)) \text{ pour } i = 1, \dots, r. \quad (1.9)$$

avec $\forall t, w_i(z(t)) \geq 0$.

On pose :

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1.10)$$

La fonction d'activation $h_i(z(t))$ de la $i^{\text{ème}}$ règle du modèle flou vérifie les propriétés de sommes convexes : $0 < h_i(z(t)) < 1$ et $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$.

Ainsi, après défuzzification, la représentation d'état d'un multi-modèles TS, vu dans sa globalité, peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (1.11)$$

1.3.2. Obtention des multi-modèles Takagi Sugeno

Plusieurs approches, présentes dans la littérature, permettent d'obtenir un multi-modèle TS. Lorsqu'un modèle de connaissance non linéaire du système à commander est disponible, des techniques d'obtentions systématiques des modèles TS peuvent être utilisées.

- Une première approche consiste à linéariser le modèle non linéaire autour de plusieurs points de fonctionnement et d'agréger l'ensemble à l'aide de fonction d'appartenance

floues (triangulaires, trapézoïdales...) (Ma & al., 1998). Il en résulte que le modèle TS obtenu consiste en une approximation du modèle non linéaire puisque, dans ce cas, les fonctions d'appartenance choisies ne permettent pas forcément de caractériser, de manière exacte, les mécanismes d'interpolations non linéaires entre sous-systèmes.

- Une seconde approche permet, par le biais de transformations polytopiques convexes, d'obtenir un multi-modèle TS représentant exactement un modèle non linéaire sur un espace compact de ses variables d'états. Parmi les transformations polytopiques convexes, la plus utilisée pour l'obtention des modèles TS est la « décomposition en secteurs non linéaires » (Tanaka & Wang, 2001 ; Morère 2001).

Dans le cas où un modèle de connaissance analytique du système à commander n'est pas disponible, l'identification d'un modèle TS peut-être envisagé selon la méthodologie proposée dans (Gasso, 2000). Ainsi, en se basant sur l'acquisition de mesures des entrées et sorties du système réel, les modèles locaux ainsi que les fonctions d'activation sont identifiées autour de différents points de fonctionnement préalablement définis.

Notons que le travail présenté dans la suite de ce manuscrit utilise majoritairement l'approche de décomposition en secteurs non linéaires. Cette approche repose sur le principe que toute fonction non linéaire peut être bornée sur tout ou partie de son espace de validité. Une méthode systématique de découpage en secteur non linéaire repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.1 : (Morère, 2001)

Si $\forall x \in [-b, a]$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, la fonction $f(x(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur $[-b, a]$, il existe toujours deux fonctions $w_1(x(t))$ et $w_2(x(t))$ ainsi que, deux scalaires α et β tels que :

$$f(x(t)) = \alpha \times w_1(x(t)) + \beta \times w_2(x(t))$$

avec : $w_1(x(t)) + w_2(x(t)) = 1$, $w_1(x(t)) \geq 0$ et $w_2(x(t)) \geq 0$.

Preuve

Soient les scalaires α et β tels que $\alpha \leq f(x(t)) \leq \beta$, on peut toujours écrire :

$$f(x(t)) = \alpha \times w_1(x(t)) + \beta \times w_2(x(t)) \tag{1.12}$$

avec $\alpha = \max(f(x(t)))$, $\beta = \min(f(x(t)))$, $w_1(x(t)) = \frac{f(x(t)) - \beta}{\alpha - \beta}$ et

$$w_2(x(t)) = \frac{\alpha - f(x(t))}{\alpha - \beta} . \quad \blacksquare$$

Afin d'illustrer la méthode d'obtention par décomposition en secteurs non linéaires des modèles TS, nous proposons l'exemple suivant.

Exemple 1.1

Considérons un système non linéaire autonome donné par :

$$\dot{x}(t) = x(t) \cos(x(t)) \tag{1.13}$$

Le terme non linéaire $f(x(t)) = \cos(x(t))$ est continu et borné par $[-1 \ 1]$, d'après le lemme 1.1, nous pouvons écrire :

$$\cos(x(t)) = \underbrace{\frac{\cos(x(t)) + 1}{2}}_{h_1(x(t))} \times 1 + \underbrace{\frac{1 - \cos(x(t))}{2}}_{h_2(x(t))} \times (-1)$$

Le système non linéaire (1.13) peut, par conséquent, être réécrit sous la forme d'un multi-modèles TS données par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) a_i x(t) \tag{1.14}$$

où $a_1 = 1$ et $a_2 = -1$.

Remarque 1.1

Les modèles TS obtenus via une transformation polytopique convexe dépendent directement du nombre des non-linéarités à découper au sein du modèle de connaissance non linéaire du système à représenter. Ainsi, pour un système contenant nl termes non linéaires, le modèle TS est constitué de 2^{nl} règles floues.

Après avoir présenté les modèles TS, nous proposons dans la section suivante les premiers résultats sur l'analyse de leur stabilité et leur stabilisation.

1.3.3. Stabilité et Stabilisation des multi-modèles TS

Rappelons que les systèmes TS sont composés des modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires. Cette structure particulière permet d'étendre certains concepts relatifs aux systèmes linéaires au cas des systèmes non linéaires, notamment l'analyse de la stabilité et la stabilisation. Afin de mieux appréhender les contributions qui seront présentées dans les chapitres suivants, les premiers résultats significatifs, origines de nombreux travaux sur la stabilité et la stabilisation des systèmes TS, sont présentés ci-dessous.

1.3.3.1. Analyse quadratique de la stabilité des multi-modèles TS

Cette section est dédiée à la présentation des conditions élémentaires garantissant la stabilité des systèmes autonomes multi-modèles TS en se basant sur la théorie de Lyapunov.

Considérons le multi-modèles TS donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (1.15)$$

et la fonction quadratique de Lyapunov candidate donnée par :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (1.16)$$

Notons que pour $x(0) = 0$, $V(x(0)) = 0$. La fonction (1.16) est dite de Lyapunov et le système (1.15) est stable si il existe une matrice P vérifiant, $\forall x(t) \neq 0$:

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) > 0 \quad (1.17)$$

et

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \quad (1.18)$$

De manière évidente, l'inégalité (1.17) est vérifiée si $P = P^T > 0$. De plus, en considérant (1.15), l'inégalité (1.18) s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i^T P + PA_i) \right) x(t) < 0\end{aligned}\quad (1.19)$$

L'inégalité (1.19) est vérifiée, $\forall x(t) \neq 0$ si :

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i^T P + PA_i) < 0 \quad (1.20)$$

Les fonctions d'appartenance $h_i(z(t))$ vérifiant les propriétés de somme convexe et notamment $h_i(z(t)) > 0$, (1.20) est vérifiée si tout les termes de la somme sont négatifs. De ce fait, les première conditions de stabilité, basées sur la fonction quadratique de Lyapunov candidate sont exprimées sous la forme d'un problème de résolution d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMI) (Boyd & al., 1994) exprimé par le théorème suivant.

Théorème 1.1 : (Tanaka & Sugeno, 1992)

Le système multi-modèle de TS autonome (1.15) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, telles que les LMI suivantes sont vérifiées pour tout $i = 1, \dots, r$:

$$A_i^T P + PA_i < 0 \quad (1.21)$$

1.3.3.2. Stabilisation quadratique des multi-modèles TS par retour d'état

Dans le cas des systèmes TS commandés, il s'avère primordial de synthétiser une loi de commande adéquate pour assurer la stabilité du système considéré en boucle fermée. Parmi les lois de commande proposées dans la littérature, les lois de commande de type compensation parallèle distribuée (PDC, Parallel Distributed Compensation) sont considérées comme les plus appropriées dans le cadre de la stabilisation des multi-modèles TS (Tanaka & al., 1992). En effet, l'idée est d'utiliser la même structure d'interconnection floue du multi-modèle TS à commander dans la conception d'une loi de commande. Le contrôleur conçu partage, ainsi, la même base de règle que le système multi-modèle TS.

Considérons un système TS non autonome donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (1.22)$$

et la loi de commande PDC par retour d'état donnée par :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \quad (1.23)$$

où $K_i \in \mathbb{R}^{\theta \times \eta}$ sont les matrices des gains de retour d'état à déterminer.

La dynamique en boucle fermée peut être décrite par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - B_i K_j) \quad (1.24)$$

La synthèse de la loi de commande (1.23) consiste donc à trouver les matrices de gain K_i qui assureront la stabilité du système en boucle fermée (1.24). Pour se faire, de manière similaire à l'étude de stabilité présentée dans la section précédente, on considère une fonction candidate de Lyapunov quadratique (1.16). Le système (1.22) est donc stabilisé par la loi de commande PDC (1.23) s'il existe les matrices $P = P^T > 0$ et K_i vérifiant, $\forall x(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \\ &= x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i^T P + P A_i - K_j^T B_i^T P - P B_i K_j) \right) x(t) < 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

L'inégalité (1.25) est trivialement vérifiée $\forall x(t) \neq 0$ si :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i^T P + P A_i - K_j^T B_i^T P - P B_i K_j) < 0 \quad (1.26)$$

Notons que l'inégalité (1.26) ne peut conduire en l'état à des conditions LMI du fait des termes bilinéaires $K_j^T B_i^T P$ et $P B_i K_j$. Afin de remédier à ce problème, (Wang & al., 1996) propose de réaliser les changements de variables bijectifs $X = P^{-1}$ et $K_j = F_j X$. Ensuite, en multipliant l'inégalité (1.26) à gauche et à droite par X , on aboutit aux conditions LMI présentées dans le théorème suivant.

Théorème 1.2 : (Wang & al., 1996)

Le multi-modèle TS (1.22) est asymptotiquement stabilisé via la loi de commande PDC (1.23), s'il existe les matrices $X = X^T > 0$ et F_j , telles que les LMI suivantes sont vérifiées:

$$\Upsilon^{ii} < 0, \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (1.27)$$

$$\Upsilon^{ij} + \Upsilon^{ji} < 0, \text{ pour } i, j = 1, \dots, r \text{ et } i < j \quad (1.28)$$

$$\text{avec } \Upsilon^{ij} = XA_i^T + A_iX - F_j^T B_i^T - B_i F_j < 0.$$

Dans ce cas, les gains de la loi de commande (1.23) sont obtenus par $K_j = F_j X$.

Remarque 1.2

Notons que, afin de réduire le conservatisme des conditions LMI, les termes dominants et croisés des sommes (1.26) ont été séparés pour obtenir les conditions (1.27) et (1.28). Cette notion de conservatisme s'avère cruciale dans les problèmes d'optimisation et de synthèse de lois de commande à base de LMI et fera l'objet d'une discussion plus détaillée dans la suite de ce chapitre.

1.3.4. Extension des résultats à la classe des multi-modèles descripteurs TS

Dans la suite, nos contributions concerneront la stabilisation décentralisée d'une classe de systèmes de grande dimension plus élargie que les systèmes standards (représentés par un ensemble d'équations différentielles ordinaires) présentés précédemment. Il s'agit donc ici de présenter les travaux préliminaires relatifs à cette nouvelle classe de systèmes, à savoir, les systèmes descripteurs de type TS. En effet, les descripteurs élargissent la classe des systèmes non linéaires classiquement étudiés aux cas des systèmes algébro-différentiels (représentés par un ensemble d'équations différentielles algébriques) de la forme :

$$f(\dot{x}(t), x(t), u(t)) = 0 \quad (1.29)$$

Ce type de système offrent la possibilité de représenter les systèmes singuliers mais aussi d'associer des contraintes statiques et dynamiques au sein d'une même représentation d'état (Luenberger, 1977 ; Dai, 1989). De manière usuelle, un système descripteur non linéaire affine est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} E(x(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = C(x(t)) \end{cases} \quad (1.30)$$

où $E(x(t)) \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$ est éventuellement singulière (non inversible), $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$, $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{\eta \times \nu}$ et $C(x(t)) \in \mathbb{R}^{q \times \eta}$.

Remarque 1.3

Notons que la classe des descripteurs (1.30) permet de représenter les systèmes non linéaires singuliers lorsque $E(x(t))$ est non inversible mais aussi de nombreux systèmes réels tels que, par exemple, les systèmes mécaniques à inertie variable (Guelton & al., 2008). Dans ce dernier cas, l'avantage consiste à éviter d'éventuels problèmes de conditionnement lors de l'inversion de la matrice d'inertie pour l'obtention d'un modèle standard.

De même que pour l'obtention des multi-modèles standards présentée précédemment, un modèle descripteur TS peut être obtenu par le biais d'une décomposition en secteurs non linéaires de (1.30). Dans ce cas, afin de réduire le nombre polytopes les membres gauches et droits de l'équation d'état peuvent être décomposés indépendamment (Taniguchi & al., 2000 ; Guelton, 2003 ; Guelton & al., 2008). Ainsi, la représentation d'état d'un descripteur multi-modèles de type TS est donnée par :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^l v_k(z(t)) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (1.31)$$

où $z_j(t)$ sont les variables de prémisses dépendantes des entrées et/ou de l'état du système. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie, $v_i(z(t))$ et $h_i(z(t))$ sont les fonctions d'appartenance (vérifiant les propriétés de sommes convexes) associées respectivement au membre gauche et au membre droit du descripteur, E_k , A_i , B_i et C_i sont les matrices décrivant les polytopes du système.

La synthèse de loi de commande pour les descripteurs multi-modèles TS a retenue l'attention de plusieurs chercheurs, par exemple (Taniguchi & al., 2000 ; Bouarar & al., 2007). Dans cette partie, nous rappelons les résultats élémentaires proposant des conditions quadratiques de stabilisation des descripteurs TS décrit par (1.31). En se basant sur le principe PDC, une loi de commande appelée PDC modifiée a été proposée pour la stabilisation des descripteurs TS (Taniguchi & al., 2000). Cette loi de commande tient compte, en sus de la commande PDC standard, de la structure d'interconnexions relative à la partie gauche du

descripteur à commander afin de compenser la dynamique globale. Ainsi la loi de commande PDC modifiée est valable pour l'ensemble des polytopes décrivant le descripteur à stabiliser. Cette loi de commande est donnée par :

$$u(t) = -\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j(z(t)) v_k(z(t)) K_{jk} x(t) \quad (1.32)$$

où $K_{jk} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sont les matrices des gains de retour d'état.

Dès lors, sur la base d'une fonction candidate de Lyapunov quadratique, des conditions LMI permettant la synthèse d'une loi de commande (1.32) sont résumées par le théorème suivant.

Théorème 1.3 : (Taniguchi & al., 2000)

Le descripteur TS continu (1.31) est asymptotiquement stabilisé via la loi de commande PDC modifiée (1.23), s'il existe les matrices $X_1 = X_1^T > 0$, X_3 , X_4 , et Y_{jk} , telles que les LMI suivantes sont vérifiées :

Pour $i = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, l$:

$$\begin{bmatrix} -X_3 - (X_3)^T & (*) \\ (X_4)^T + A_i X_1 - B_i Y_{ik} + E_k X_3 & -E_k X_4 - (X_4)^T (E_k)^T \end{bmatrix} < 0, \quad (1.33)$$

Pour $1 \leq i < j \leq r$, $k = 1, \dots, l$:

$$\begin{bmatrix} -2X_3 - 2(X_3)^T & (*) \\ 2(X_4)^T + A_i X_1 + A_j X_1 - B_i Y_{jk} - B_j Y_{ik} + 2E_k X_3 & -2E_k X_4 - 2(X_4)^T (E_k)^T \end{bmatrix} < 0, \quad (1.34)$$

Les matrices des gains de retour d'état sont obtenues par $K_{jk} = Y_{jk} X_1^{-1}$.

Preuve

Dans un premier temps, et de manière usuelle pour les descripteurs TS, on considère le vecteur d'état augmenté $\tilde{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$. La dynamique du descripteur TS en boucle fermée peut être exprimée par :

$$\tilde{E} \dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) h_j(z(t)) v_k(z(t)) (\tilde{A}_{ik} - \tilde{B}_i \tilde{K}_{jk}) \tilde{x}(t) \quad (1.35)$$

$$\text{avec } \tilde{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i & -E_k \end{bmatrix}, \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{K}_{jk} = \begin{bmatrix} K_{jk} & 0 \end{bmatrix}.$$

Considérons la fonction candidate de Lyapunov quadratique :

$$V(x(t)) = \tilde{x}^T(t) \tilde{E} \tilde{P} \tilde{x}(t) \quad (1.36)$$

Le descripteur (1.35) est stable si, $\forall x(t) \neq 0$, $V(x(t)) > 0$ et $\dot{V}(x(t)) < 0$, c'est-à-dire si :

$$\tilde{E} \tilde{P} = \tilde{P}^T \tilde{E} > 0 \quad (1.37)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{\tilde{x}}^T(t) \tilde{E} \tilde{P} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{E} \tilde{P} \dot{\tilde{x}}(t) \\ &= \tilde{x}^T(t) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) h_j(z(t)) v_k(z(t)) \left((\tilde{A}_{ik} - \tilde{B}_i \tilde{K}_{jk})^T \tilde{P} + \tilde{P}^T (\tilde{A}_{ik} - \tilde{B}_i \tilde{K}_{jk}) \right) \tilde{x}(t) < 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Soit $\tilde{X} = \tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, la condition (1.37) est satisfaite si $X_1 = X_1^T > 0$ et $X_2 = 0$.

L'inégalité (1.38) est vérifiée si :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) h_j(z(t)) v_k(z(t)) \left((\tilde{A}_{ik} - \tilde{B}_i \tilde{K}_{jk})^T \tilde{P} + \tilde{P}^T (\tilde{A}_{ik} - \tilde{B}_i \tilde{K}_{jk}) \right) < 0 \quad (1.39)$$

Rappelons que les fonctions d'appartenance $v_j(z(t))$ et $h_i(z(t))$ vérifient les propriétés de sommes convexes. De plus, de même que pour la preuve du théorème 1.2, l'inégalité (1.39) ne peut conduire en l'état à des conditions LMI du fait de la présence des termes bilinéaires $\tilde{K}_{jk}^T \tilde{B}_i^T \tilde{P}$ et $\tilde{P} \tilde{B}_i \tilde{K}_{jk}$. Afin de palier à ce problème, on réalise le changement de variables bijectifs $\tilde{X} = \tilde{P}^{-1}$ et $K_{jk} = Y_{jk} X_1^{-1}$. En multipliant l'inégalité à gauche et à droite par X , l'inégalité (1.39) est satisfaite si les conditions LMI présentées dans le théorème 1.3 le sont également. ■

Remarque 1.4

Pour les systèmes descripteurs, il est plus juste de parler d'admissibilité plutôt que de stabilité (Dai, 1989). En effet, pour les systèmes standards, la notion de régularité est toujours vérifiée, c'est-à-dire que pour toute condition initiale $x(0)$ et une commande $u(t)$ connue sur un intervalle $[0 \ t]$, la sortie $y(t)$ du système existe et est unique. En revanche, pour les

descripteurs, la notion de stabilité s'avère insuffisante dans la mesure où ils peuvent présenter un comportement impulsif. Afin d'illustrer ces propos, considérons le descripteur linéaire suivant :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.40)$$

où $E \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$ et $A \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$ sont des matrices réelles, $x(t) \in \mathbb{R}^{\eta}$ est le vecteur d'état. De plus, rappelons que la matrice $E \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$ peut être, le cas échéant, singulière, c'est-à-dire $\text{rang}(E) < \eta$.

Ainsi, il est nécessaire de vérifier que (1.40) n'est pas impulsif (non impulsif, "impulse free") ; c'est-à-dire que sa réponse temporelle reste continue pour toute condition initiale, quelque soit le signal de commande $u(t)$.

Dans le cas des descripteurs linéaires représentés par (1.40), les conditions de régularité et de non impulsivité "impulse free" sont définies ci-dessous.

Définitions 1.6 : (Dai, 1989).

- Le couple (E, A) est régulier si $\det(sE - A) \neq 0$ où s désigne l'opérateur de Laplace.
- Le couple (E, A) est dit non impulsif si $\deg(\det(sE - A)) = \text{rang}(E)$.
- Le couple (E, A) est dit stable si les pôles de $\det(sE - A) = 0$ sont à partie réelle négative.
- Le couple (E, A) est dit admissible s'il est régulier, non impulsif et stable.

Remarque 1.5 :

Dans le cadre des descripteurs TS, la recherche de conditions de non impulsivité reste, à ce jour, un problème ouvert. Toutefois, celles-ci ont été abordées dans (Marx & Ragot, 2006, Marx & Ragot, 2008).

Hypothèse 1.1

Dans la suite de ce mémoire, nous supposons que les descripteurs TS étudiés sont réguliers et non impulsifs.

1.3.5. Discussion sur le conservatisme des conditions LMI

Les résultats présentés précédemment sur la stabilité et la stabilisation des systèmes TS sont conservatifs. En effet, ceux-ci ne constituent que des conditions suffisantes mais non nécessaires. Dans cette section, des solutions significatives pour réduire le conservatisme des approches TS sont présentées. Notons que ces solutions dépendent principalement de la source de conservatisme à laquelle elles s'attaquent (Sala et Ariño, 2009 ; Sala, 2009), par exemple : la non-unicité d'un modèle TS, le choix de la fonction candidate de Lyapunov, l'indépendance des fonctions d'appartenance et structure d'interconnection des conditions LMI, coût de calcul élevé... Dans la suite, nous expliciterons quelques-unes de ces sources de conservatisme sur lesquelles notre attention s'est portée jusqu'à présent et nous présenterons les principaux résultats de la littérature permettant de les réduire.

En premier lieu, aucune information sur les fonctions d'appartenance $h_i(z(t))$ n'est prise en compte au sein des théorèmes précédents. De ce fait, les conditions de stabilité LMI présentées sont suffisantes (non nécessaires) et par conséquent conservatives. En effet, pour obtenir ces conditions, on cherche une solution à un problème d'optimisation en considérant que, pour qu'une somme soit négative, chacun des termes de cette somme doit être négatif. Or, il est évidemment possible de chercher des solutions qui autoriseraient certains termes des sommes (1.26) ou (1.39) à être positifs alors que l'ensemble resterait négatif. Dans ce cas, on obtient des conditions de stabilité dites « relâchées », c'est-à-dire moins conservatives. On parle alors de relaxation des conditions LMI. Plusieurs techniques ont été proposées afin de réduire cette source de conservatisme. Certaines se basent sur l'ajout de variables de décisions libres (Kim & Lee, 2000, Liu & al., 2004), d'autre sur des transformations de sommes (Tanaka & al., 1998 ; Tuan & al., 2001). Parmi ces schémas de relaxation, l'approche proposée par (Tuan & al., 2001) constitue un bon compromis entre conservatisme et coût de calcul.

D'autre part, le choix d'une fonction candidate de Lyapunov quadratique s'avère être également une source de conservatisme. En effet, pour les systèmes TS, ce choix nécessite la recherche d'une matrice commune à un ensemble de contraintes LMI. D'autres approches, qui considèrent des fonctions de Lyapunov continues par morceaux (piecewise Lyapunov functions), ont été proposées par (Johansson, 1999; Johansson & al., 1999; Feng et Wang, 2001; Feng, 2004). Néanmoins, celles-ci s'avèrent peu efficaces lorsqu'un représentant TS est

obtenu par découpage en secteur non linéaire. En effet, ce type de fonctions de Lyapunov ne tient pas compte de la structure d'interconnection non linéaire entre sous-modèles composant le système global. Une alternative, efficace lorsque le modèle TS est obtenu sur la base d'un modèle de connaissance non linéaire, consiste en l'utilisation des fonctions candidates non quadratiques de Lyapunov (Jadbabaie, 1999; Tanaka & al., 2001a; Tanaka & al., 2003; Guerra & Vermeiren, 2004; Rhee & Won, 2006; Feng, 2006; Tanaka & al., 2007). Parmi ces approches, on distingue celles considérant l'emploi d'une fonction candidate de Lyapunov basée sur la même structure d'interconnection floue (fonctions d'appartenance) que le système TS étudié (Jadbabaie, 1999 ; Tanaka & Wang, 2001 ; Liu & al., 2004 ; Tanaka & al., 2003 ; Feng, 2004 ; Feng, 2006). Ainsi, le système, la fonction de Lyapunov non quadratique et la loi de commande PDC, étant basés sur cette même structure, on comprend bien qu'une compensation parallèle entre ces parties facilite la recherche d'une solution aux problèmes LMI et conduit à une réduction du conservatisme.

Afin d'explicitier ce type d'approche, considérons le problème de stabilisation non quadratique du modèle TS (1.22). Soit la fonction candidate de Lyapunov non quadratique :

$$V(x(t)) = x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) P_i \right)^{-1} x(t) \quad (1.41)$$

avec $P_i = P_i^T > 0$,

et la loi de commande non-PDC donnée par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \left(\sum_{j=1}^r h_j(z(t)) P_j \right)^{-1} x(t) \quad (1.42)$$

Le système en boucle fermée s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left(A_i + B_i F_j \left(\sum_{k=1}^r h_k(z(t)) P_k \right)^{-1} \right) x(t) \quad (1.43)$$

Celui-ci est stable si et seulement si (Tanaka & al., 2003):

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left(P_j A_i^T + A_i P_j + F_j^T B_i^T + B_i F_j - \sum_{k=1}^r \dot{h}_k(z(t)) P_k \right) < 0 \quad (1.44)$$

Sachant que $\sum_{k=1}^r h_k(z(t)) = 1, \forall R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on peut écrire (Mozelli & al., 2009):

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k(z(t))R = 0 \quad (1.45)$$

d'où (1.44) devient :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left(P_j A_i^T + A_i P_j + F_j^T B_i^T + B_i F_j - \sum_{k=1}^r \dot{h}_k(z(t))(P_k + R) \right) < 0 \quad (1.46)$$

Dès lors, en supposant que $\forall t, \dot{h}_k(z(t)) \geq \phi_k$, le modèle en boucle fermée (1.22) est stabilisé si les conditions LMI présentées au théorème suivant sont vérifiées.

Théorème 1.4 : (Mozelli & al., 2009):

Soit $\forall t, \dot{h}_k(z(t)) \geq \phi_k$, le modèle TS (1.22) est globalement asymptotiquement stabilisé via la loi de commande non-PDC (1.42) s'il existe des matrices $P_k^T = P_k > 0, F_j$ et R telles que les LMI suivantes soient vérifiées pour toutes combinaisons de $i, j, k = 1, \dots, r$:

$$P_j A_i^T + A_i P_j + F_j^T B_i^T + B_i F_j - \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + R) < 0 \quad (1.47)$$

$$P_k + R \geq 0 \quad (1.48)$$

Remarque 1.6 :

Par l'introduction des matrices de décision libres R (équation (1.45)), les conditions LMI proposées au théorème 1.4 constituent une extension (moins conservative) des conditions présentées dans (Tanaka & al., 2003). Ces dernières peuvent être retrouvées directement en considérant $R = P_r$. De plus, les conditions quadratiques du théorème 1.2 sont incluses dans celles du théorème 1.4. En effet, on retrouve les conditions quadratique en considérant $P_k = P$ commune et $R = -P$.

La figure.1.3 illustre, en termes de domaines de faisabilité, la réduction du conservatisme des conditions LMI apportées par les approches non quadratiques au regard des approches quadratiques.

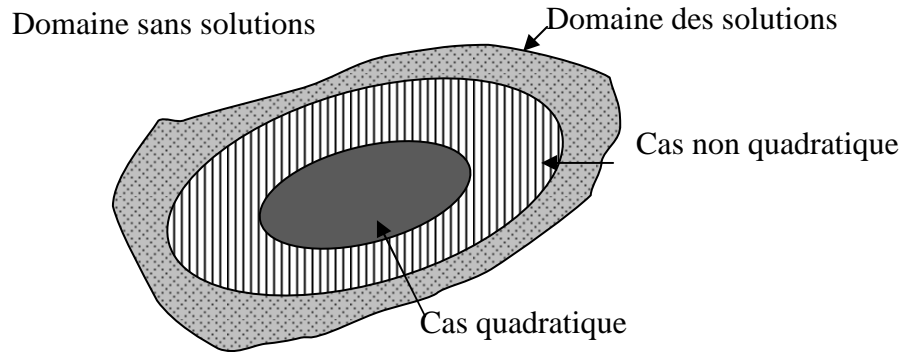


Figure.1.3. Comparaison des domaines de faisabilité des approches quadratiques et non quadratiques.

Poursuivant l'objectif de fournir des conditions LMI de moindre conservatisme, des extensions de l'approche non quadratique (théorème 1.4) à la synthèse de lois de commande pour les systèmes descripteurs de grandes dimensions sont proposées dans la suite de ce manuscrit, notamment aux chapitre 2.

Afin de conclure cette section dévolue à la présentation des concepts élémentaires relatifs à la stabilisation des multi-modèles TS, rappelons que ces modèles ont la capacité de représenter de manière exacte un système non linéaire sur un espace compact des variables d'état. De plus, la structure des systèmes multi-modèles de type TS, constituée d'un ensemble de systèmes linéaires liés par une structure d'interpolation non linéaire, permet d'étendre certaines propriétés des systèmes linéaires aux cas non linéaires ; (synthèse de commande, commande robuste...). Cependant, cette classe de système, comme la plupart des systèmes classiques, est représenté soit en temps continu, soit en temps discret (Guerra & al., 2009a) Par conséquent, elle ne permet pas de décrire les systèmes englobant des dynamiques à la fois continues et discrètes.

Une autre classe de systèmes non linéaires s'avère donc nécessaire pour représenter des systèmes combinant des dynamiques continues et discrètes : les systèmes dynamiques hybrides, dont la présentation des résultats élémentaires fera l'objet de la section suivante.

1.4. Notions élémentaires sur les systèmes dynamiques hybrides

Les innovations technologiques nécessitent aujourd'hui la prise en compte de la nature hétérogène des systèmes dynamiques mélangeant l'aspect continu et l'aspect discret, on parle alors de systèmes dynamiques hybrides (Branicky, 1994 ; Le Bail & al., 1999 ; Belta & al., 2001 ; Lygeros & al., 2002, Bak & al., 2003 ; Bemporad & al., 2003 ; Biswas & al., 2003). De nombreux travaux de recherche s'intéressent à cette classe de système. Par exemple, ceux-ci traitent de la modélisation (Braniky, 1998a; Champagnat, 1998; Ye & al., 1998; Goebel & al., 2009), de la stabilité (Branicky, 1994; Branicky, 1998; Liberzon & Morse, 1999; Liberzon, 2003; Hien & al., 2009 ; Zhai & Xu, 2009 ; Zhai & Xu, 2010) et de la stabilisation (Manon, 2001; Liberzon, 2003; Pettersson, 2003; Chaieb & al., 2006 ; Bourdais & al., 2007) ou encore du diagnostic (McIlraith & al., 2000; Narasimhan & Biswas, 2007; Yan & al., 2009; Meseguer & al., 2010; Daigle & al., 2010; Mohammadi & al., 2009, Belkhiat & al., 2011) et l'observation (Hamdi, 2010 ; De Santis & al., 2003).

Une présentation exhaustive de l'ensemble des travaux traitant des différents problèmes relatifs aux systèmes dynamiques hybrides s'avère difficile. Par conséquent, et puisque nous nous intéresserons, dans le troisième chapitre de cette thèse, à la stabilisation pour la classe spécifique des systèmes interconnectés à commutations, nous nous limiterons, dans cette section, à une présentation générale des systèmes dynamiques hybrides suivie par les résultats élémentaires sur l'analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes à commutations.

Différentes définitions des systèmes dynamiques hybrides ont été suggérées dans la littérature. Ces définitions sont influencées par les contextes et les terminologies particulières des communautés d'automaticiens s'intéressant d'une part aux systèmes continus et d'autre part aux systèmes à événement discrets. De manière générale, un système dynamique hybride est défini, selon (Manon, 2001), comme étant "un système dynamique qui comporte plusieurs dynamiques de natures différentes". De plus, selon (Valette, 1997), un système est dit hybride s'il possède deux types de variables d'état (continues et discrètes). Ces définitions permettent de représenter une large classe de systèmes caractérisés par de fortes interactions entre des dynamiques continues et des dynamiques discrètes. Afin de mieux appréhender ces interactions, nous présentons, dans la suite, les causes de déclenchements des phénomènes hybrides ainsi que leurs effets sur le système global.

1.4.1. Principaux types de phénomènes hybrides

Les systèmes dynamiques hybrides sont composés de deux parties : une partie continue et une partie discrète. L'interaction entre ces deux parties est appelée "phénomène hybride". Ceux-ci peuvent être déclenchés de manières différentes:

- Une ou des variables continues atteignent certains seuils spécifiques. Ces variables peuvent être dépendantes de l'état $x(t)$ du système et/ou directement du temps.
- Une ou des entrées externes $p(t)$ influencent l'évolution de la dynamique discrète d'un système.

Lors du déclenchement d'un phénomène hybride, une transition correspondant à un changement de modalité de l'état discret s'effectue. Deux cas peuvent alors se produire :

- Lorsqu'une transition agit sur la dynamique continue en la substituant par une nouvelle dynamique, on parle de *commutation*.
- Lorsqu'une transition produit une discontinuité du vecteur d'état continu, on parle alors du *saut*.

Par ailleurs, d'après (Branicky, 1995), quatre types de phénomènes hybrides peuvent être distingués selon leur action et selon la manière dont ils sont déclenchés. On distingue ainsi :

- les *commutations autonomes*. Le système global passe d'un mode de fonctionnement (une dynamique) à un autre, d'une manière autonome quand certaines variables continues atteignent des seuils spécifiques. Dans la pratique, l'exemple du changement de la configuration d'un circuit électrique contenant une diode illustre ce phénomène. Ainsi, lorsque la tension d'une diode dépasse sa tension de seuil, le système commute.
- les *commutations contrôlées*. La dynamique du système global passe d'un mode de fonctionnement à un autre sous l'influence d'une action externe. A titre d'exemple, ce type de commutation peut être rencontré dans un système hydraulique. En effet, si on considère deux actions "remplissage" et "vidange" qui correspond aux états discrets, le système peut commuter entre ces deux états par le biais d'un événement externe déclenchée par l'opérateur humain.
- les *sauts autonomes*. Le système global passe d'un point de l'espace d'état à un autre de manière autonome en restant dans le même mode de fonctionnement. Par exemple, ce phénomène peut être illustré par le mouvement d'une balle rebondissante.

- les *sauts contrôlés*. Le système global passe d'un point de l'espace d'état à un autre sous l'influence d'une variable externe en restant dans le même mode de fonctionnement. Par exemple, ce phénomène peut être représenté par le rôle d'un commutateur commandé dans un circuit électrique.

Soulignons qu'un système dynamique hybride peut posséder plusieurs types de phénomènes hybrides. En outre, une classification des systèmes hybrides peut être obtenue en se basant sur la nature de ces phénomènes. Dans la suite, nous décrivons quelques classes de systèmes hybrides.

1.4.2. Principales classes de systèmes hybrides

Le formalisme des systèmes dynamiques hybrides est très général. Selon les phénomènes hybrides rencontrés, on peut distinguer plusieurs classes de systèmes dynamiques hybrides. Parmi ces classes, les plus répandues dans la littérature sont décrites ci-dessous.

- *Systèmes à saut (Jump Linear System, JLS)*

Un JLS décrit l'évolution d'un état continue $x(t)$ régi par un ensemble d'équations différentielles sous contraintes (Samoilenko & Perestyuk, 1995). Lorsque la variable $x(t)$ vérifie certaines contraintes, des phénomènes de discontinuités (*sauts*) se produisent et l'état passe instantanément de sa valeur courante à une nouvelle valeur. Parmi l'ensemble des systèmes dynamiques hybrides, les JLS correspondent aux systèmes à un seul mode, cf. figure 1.4. Parmi les exemples de JLS les plus rencontrés dans la littérature, on peut citer celui de la balle rebondissante (Johansson, 1999).

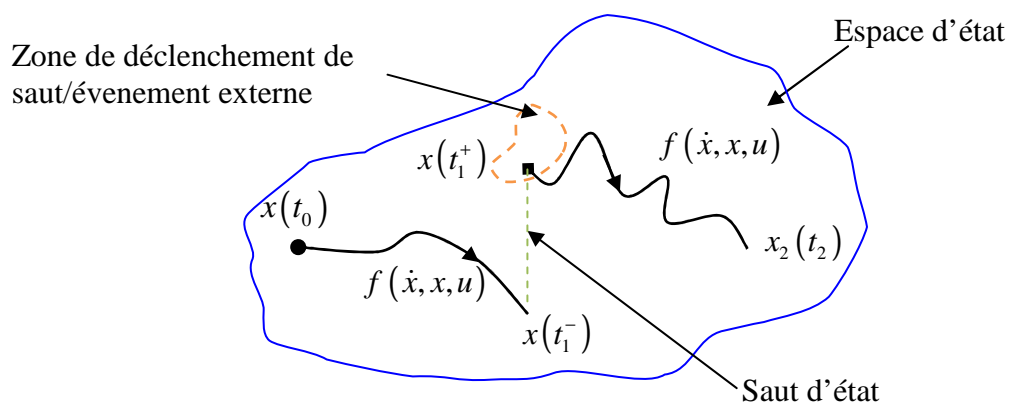


Figure.1.4. Système à saut.

- *Systèmes affines par morceaux (PieceWise Affine systems - PWA)*

Similairement aux autres types de systèmes dynamiques hybrides, le vecteur d'état des PWA contient des composantes continues et discrètes. L'évolution de l'état continu est régie par un système dynamique linéaire par morceaux et l'évolution de l'état discret est régie par des transitions autonomes. Ces systèmes ont la particularité de partager l'espace d'état D en un nombre fini de régions non vides disjointes deux à deux. De plus, pour chaque région, on associe une dynamique différente (Bemporad & al., 2000 ; Johanson, 2003). Notons que les transitions des PWA sont provoquées par le franchissement de frontières séparant des domaines adjacents, cf. figure 1.5. Notons que les PWA sont utilisés pour la modélisation de nombreux systèmes physiques, notamment en électronique où les modèles de composants sont souvent linéaires par morceaux (Girard, 2004, Andronov, 1966).

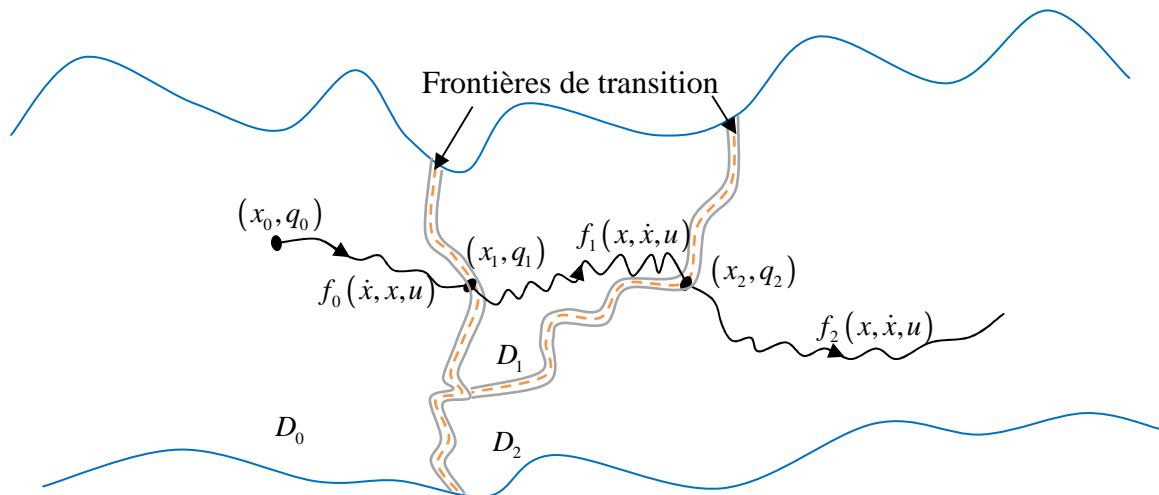


Figure.1.5. Système affine par morceaux.

- *Systèmes à commutations (Switched System SS)*

Pour le cas des systèmes à commutations, l'état continu évolue sur un intervalle de temps selon une certaine dynamique (parmi un ensemble de dynamiques) puis selon une autre sur l'intervalle de temps suivant (figure 1.6).

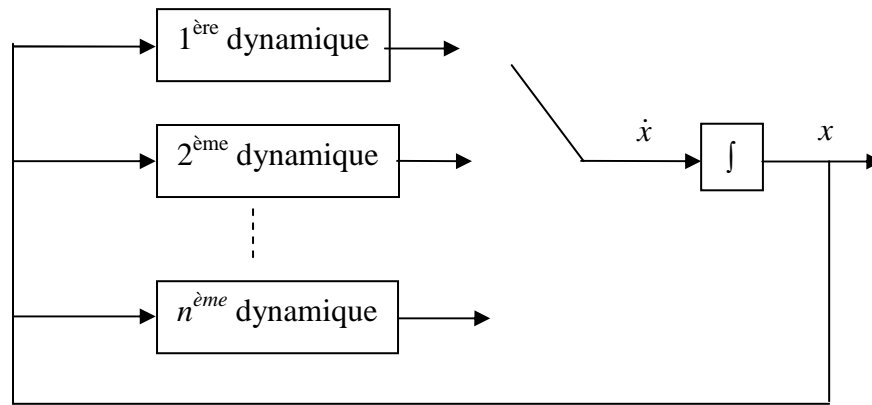


Figure.1.6. Système à commutations.

Cette classe de système hybride se caractérise par sa simplicité structurelle et par la complexité des phénomènes qu'elle peut décrire. Ainsi, dans le cadre de ces travaux de thèse, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à cette classe de systèmes, et notamment à la stabilisation décentralisée des systèmes à commutations de grande dimension qui fera l'objet du troisième chapitre. Afin d'appréhender les contributions qui y seront détaillées, nous proposons dans la suite de cette section la présentation des résultats élémentaires relatifs à la commande de ce type de systèmes.

1.4.3. Notions élémentaires sur la stabilisation des systèmes à commutations

Dans cette sous-section, nous nous attacherons à rappeler, du moins brièvement, les définitions élémentaires des systèmes à commutations en terme de modélisation et de commande.

1.4.3.1. Qu'est-ce qu'un système linéaire à commutations ?

Un système linéaire à commutations est composé d'une famille de sous-systèmes dynamiques linéaires commutant les uns par rapport aux autres selon une loi de commutation. Formellement, cette classe de système peut être décrite par l'équation suivante (Branicky & al., 1998):

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)) \quad (1.49)$$

où $\sigma(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow I = \{1, 2, \dots, m\}$ est une fonction constante par morceaux nommée loi de commutation, qui prend ses valeurs dans sous ensemble I de l'ensemble des entiers naturels

\mathbb{N} . Notons que les éléments de I dénotent l'ensemble des modes (dynamiques) que peuvent comporter le système à commutations, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de commande et $f_i(\cdot)$ sont les champs de vecteurs décrivant les différents régimes de fonctionnement (modes) du système considéré.

Il est à souligner que pour la classe de systèmes représentés par (1.49), seul un mode de fonctionnement est actif à un instant donné. Comme pour tout système hybride, le choix du mode actif, régi par la loi de commutation $\sigma(t)$, peut être lié à un critère temporel ou événementiel, à des régions ou surfaces déterminées dans l'espace d'état, ou encore à un paramètre extérieur. De ce fait, la classe de systèmes (1.49) est très générale au regard des phénomènes hybrides dont ces systèmes peuvent tenir compte. Dans la suite nous nous intéressons à l'analyse de la stabilité et la stabilisation de ces systèmes.

1.4.3.2. Stabilité et stabilisation des systèmes à commutations

Dans cette section, nous passons en revue les spécificités liées à l'analyse de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à commutations. En effet, le problème de stabilité des systèmes à commutations est à la fois délicat et intéressant. Pour illustrer la complexité de ce problème, nous proposons l'exemple classique de deux sous-systèmes asymptotiquement stables qui, lorsqu'ils commutent entre eux, donnent lieu à un comportement global instable (Branicky, 1998).

Exemple 1.2

Considérons le système linéaire à commutations S , composé de deux sous-systèmes, $S_1 : \dot{x}(t) = A_1 x(t)$ et $S_2 : \dot{x}(t) = A_2 x(t)$ tels que $A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4 \\ 3 & -0.5 \end{bmatrix}$ et $A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & -3 \\ 0.4 & -0.5 \end{bmatrix}$. Les valeurs propres de A_1 et A_2 sont toutes à parties réelles négatives. Par conséquent, chacun des deux sous-systèmes est asymptotiquement stable (dans leurs réalisations indépendantes) comme le montre les trajectoires de phases présentés à la figure 1.7.

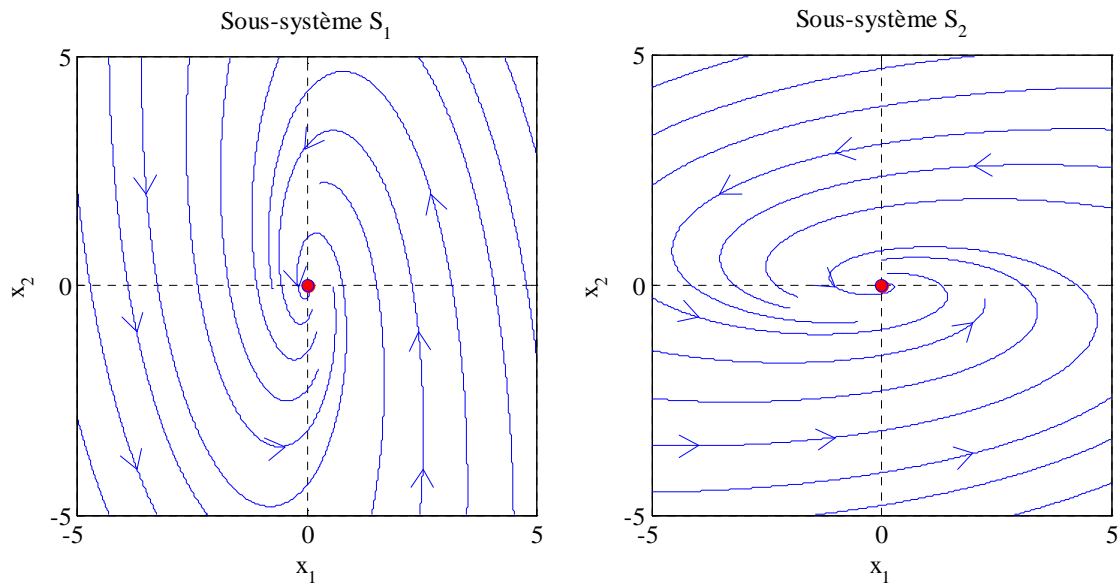


Figure.1.7. Trajectoire de phase des deux systèmes stables.

Considérons maintenant deux lois de commutations distinctes :

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 x_2 \geq 0 \\ 2 & \text{si } x_1 x_2 < 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

et

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 x_2 \leq 0 \\ 2 & \text{si } x_1 x_2 > 0 \end{cases} \quad (1.51)$$

Comme le montre la figure 1.8, la stabilité globale du système à commutations S dépend de la loi de commutation considérée. En effet, les trajectoires générées, selon la loi de commutation (1.50) montrent un comportement instable du système global S (figure 1.8a). D'autre part, les trajectoires générées, selon la loi de commutation (1.51) montrent un comportement stable du système global S (figure 1.8b). De manière similaire, d'autres exemples tout aussi remarquables, illustrent le cas des systèmes linéaires instables qui, grâce à une loi de commutation particulière, donnerait lieu à un comportement stable (Branicky, 1998).

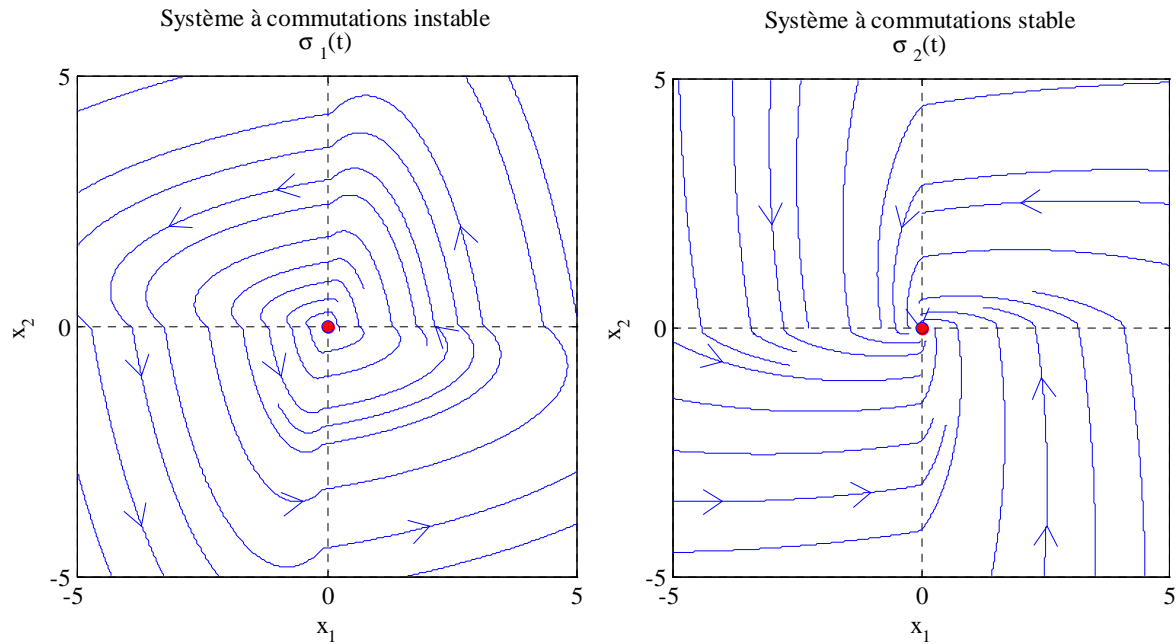


Figure.1.8. Trajectoire de phase des deux systèmes à commutations.

Dès lors, on constate que la stabilité asymptotique de chacun des sous-systèmes ne suffit pas à garantir la stabilité asymptotique d'un système à commutations. En effet, le choix de la loi de commutation influe considérablement sur la stabilité des systèmes à commutations. Dans (Liberzon & Morse, 1999), la stabilité asymptotique des systèmes autonomes à commutations a été étudiée. Ainsi, deux types de solutions ont été proposés pour vérifier la stabilité d'un système autonome à commutations :

- Identifier ou concevoir des classes de lois de commutation stabilisantes.
- Etablir des conditions de stabilité indépendantes de cette loi de commutations.

Une classification de la stabilité des systèmes à commutations (qu'il soit autonome ou non) peut être, dans ce cas, définie par rapport à la loi de commutation. En effet, afin d'étudier la stabilité des systèmes à commutations, il faut premièrement préciser, si on s'intéresse à la stabilité du système pour une séquence de commutation donnée, il s'agit dans ce cas d'une *stabilité conditionnelle* (identifier de lois de commutations ou notion de temps de séjour dans les sous-systèmes), ou pour toutes les séquences possibles, on parle dans ce cas d'une *stabilité uniforme*.

Notons que dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons particulièrement à la stabilité uniforme au sens de Lyapunov. De ce fait, cette étude bibliographique sera orientée dans ce contexte.

Similairement aux systèmes non linéaires à base de multi-modèles TS, les premières études traitant de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes à commutations ont employées une fonction candidate de Lyapunov quadratique commune à tous les sous-systèmes (Liberzon & Morse, 1999). Dans ce cas, la stabilisation asymptotique du système global est assuré indépendamment de loi de commutation. En effet, une condition suffisante de stabilité des systèmes à commutations est qu'il existe une fonction de Lyapunov commune pour l'ensemble de sous-systèmes. Afin de présenter ce résultat, considérons un système linéaire à commutations régit en boucle ouverte par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \quad (1.52)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et de commande, $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ sont des matrices à coefficients constants représentant la dynamique de chacun des modes selon la loi de commutation $\sigma(t) = \{1, \dots, m\}$.

Rappelons que nous nous intéressons la stabilité uniforme des systèmes à commutations, ainsi la loi de commutation $\sigma(t)$ peut évoluer arbitrairement dans l'ensemble I . De ce fait, une autre représentation du système (1.52) peut être obtenu en décomposant la loi de commutation $\sigma(t)$ en un ensemble de m fonctions d'activations $\xi_j(t) = \{0, 1\}$ qui permettront d'indiquer l'unique mode actif à un instant donné. Cette représentation est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^m \xi_j(t) (A_j x(t) + B_j u(t)) \quad (1.53)$$

Dans ce cas, si le système (1.53) est actif dans le mode l , la fonction d'activation $\xi_l(t)$ est égale à 1, sinon, elle est égale à 0. C'est-à-dire, pour $j = 1, \dots, m$ on a :

$$\begin{cases} \xi_j(t) = 1 & \text{si } j = l \\ \xi_j(t) = 0 & \text{si } j \neq l \end{cases} \quad (1.54)$$

Remarque 1.7 :

La représentation d'un système linéaire à commutations sous la forme (1.53) permet de constater une analogie structurelle avec les multi-modèles TS présentés précédemment. En effet, un système à commutation peut être vu ici comme un système polytopique convexe,

c'est-à-dire constitué d'un ensemble de dynamiques linéaires sélectionnées par des fonctions d'activations $\xi_j(t)$. Néanmoins la différence fondamentale entre les multi-modèles TS et les systèmes à commutations résulte dans le fait qu'ici, les fonctions d'activations sont discrètes (à valeurs dans $\{0;1\}$) et ne peuvent être actives simultanément. A contrario, pour un modèle TS, les fonctions d'activations sont continues (à valeurs dans $[0 \ 1]$) et un mélange des dynamiques existe entre sous modèles. De part cette analogie structurelle, nous verrons dans la suite que l'obtention des conditions de stabilité et de synthèse de lois de commande pour les systèmes à commutations présentent des similarités avec celles obtenus pour les systèmes TS.

Considérons maintenant une loi de commande par retour d'état composée d'un ensemble de m lois locales associées à chaque dynamique du système à commutations (1.52). Cette loi de commande est donnée par :

$$u(t) = \sum_{j=1}^m \xi_j(t) K_j x(t) \quad (1.55)$$

où $K_j \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sont les matrices des gains de retour d'état à déterminer.

Rappelons qu'un seul mode ne peut être actif à un instant donné, ainsi la dynamique du système à commutations en boucle fermée peut être décrite par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^m \xi_j(t) (A_j + B_j K_j(t)) x(t) \quad (1.56)$$

Le but est maintenant de synthétiser les matrices de gains K_j afin de garantir la stabilité du système en boucle fermée (1.56). Pour se faire, on considère une fonction candidate de Lyapunov quadratique (commune à l'ensemble des sous-systèmes) décrite par :

$$V(x(t), t) = x^T(t) P x(t) \quad (1.57)$$

Le système à commutations (1.52) est stabilisé par la loi de commande à commutations (1.55) s'il existe les matrices $P = P^T > 0$ et K_j vérifiant, $\forall x(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= \dot{x}^T(t) \left(\sum_{j=1}^m \xi_j(t) (A_j^T P + K_j^T B_j^T P) + (PA_j + PB_j K_j) \right) x(t) < 0 \end{aligned} \quad (1.58)$$

L'inégalité (1.58) est vérifiée $\forall x(t) \neq 0$ si, pour tout $j = 1, \dots, m$:

$$A_j^T P + K_j^T B_j^T P + PA_j + PB_j K_j < 0 \quad (1.59)$$

Notons que l'inégalité (1.59) contient des termes bilinéaires $K_j^T B_j^T P$ et $PB_j K_j$. De même que dans le cadre de la stabilisation quadratique des multi-modèles TS (Théorème 1.2), afin d'aboutir à des conditions LMI, on réalise les changements de variables bijectifs $X = P^{-1}$ et $K_j = F_j X$. En multipliant l'inégalité (1.59) à gauche et à droite par X , on aboutit aux conditions LMI présentées dans le théorème suivant.

Théorème 1.4 : (Montagner & al., 2006)

Le système (1.52) est asymptotiquement stabilisé via la loi de commande à commutations (1.55) s'il existe les matrices $X = X^T > 0$ et F_j , telles que les LMI suivantes sont vérifiées pour tout $j = 1, \dots, m$:

$$XA_j^T + A_j X + F_j^T B_j^T + B_j F_j < 0 \quad (1.60)$$

Dans ce cas, les gains de la loi de commande (1.55) sont obtenus par $K_j = F_j X$.

1.4.3.3. Discussion sur le conservatisme des conditions LMI se basant sur une fonction de Lyapunov commune

De même que pour la stabilisation des multi-modèles TS, la recherche d'une fonction de Lyapunov commune, condition suffisante pour vérifier la stabilité des systèmes à commutations (Branicky, 1998), conduit à des résultats conservatifs, surtout si le nombre de sous-systèmes est important. En effet, cette approche nécessite la recherche d'une même variable de décision satisfaisant un ensemble de contraintes LMI. De plus, il est possible de démontrer analytiquement qu'on peut avoir des systèmes à commutations stables mais pour lesquels il n'existe pas de fonction de Lyapunov quadratique commune (Dayawansa & Martin, 1999).

Afin d'illustrer ces propos, la figure 1.9 présente l'allure d'une fonction de Lyapunov quadratique dans le cas d'un système linéaire à commutations contenant deux modes. Dans ce cas, la fonction de Lyapunov décroît continûment quelque soit les modes de fonctionnement du système et y compris aux instants de commutations t_j , c'est-à-dire $V(x(t_j^-)) = V(x(t_j^+))$.

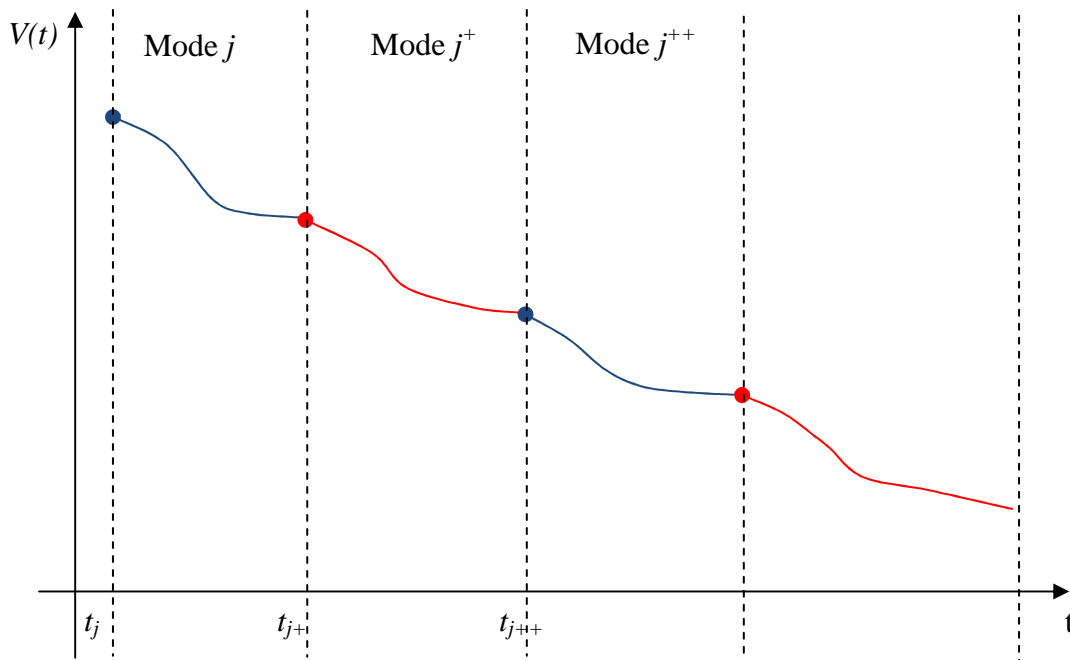


Figure.1.9. Fonctions quadratique de Lyapunov.

Afin de réduire le conservatisme, le choix d'une fonction de Lyapunov quadratique multiple peut être envisagé. Dans ce cas, l'analyse de la stabilité (également l'étude de la stabilisation) est établie en utilisant des fonctions multiples de Lyapunov (Branicky, 1998 ; Lin & Antsaklis, 2008 ; Zhai & al., 2009a ;). L'idée est de concaténer un ensemble des fonctions de Lyapunov locales $V_j(x(t))$ (correspondent à chaque sous-système ou d'une région de l'espace d'état) pour définir une "fonction de Lyapunov globale" $V(x(t)) = \sum_{j=1}^m \xi_j(t) V_j(x(t))$ pour le système à commutations. Néanmoins, dans ce cas, du fait des phénomènes hybrides, la "fonction de Lyapunov globale" peut comporter des discontinuités, aux instants de commutations, on parlera alors de pseudo-fonction de

Lyapunov qui nécessiteront l'introduction de conditions supplémentaires aux instants de commutations (Branicky, 1998 ; Decarlo & al., 2000, Peleties & DeCarlo, 2001). Sachant que la continuité de la fonction de Lyapunov globale n'est pas une condition nécessaire pour la stabilité du système, plusieurs possibilités concernant le choix de ces conditions supplémentaires sont envisageables :

- Une première alternative impose que le niveau de chacune des fonctions de Lyapunov locales V_j décroît lorsqu'elles sont activées. Les théorèmes de stabilité élaborés dans ce contexte sont fondés sur la décroissance de la fonction de Lyapunov V_j aux instants d'activations successifs d'un même sous-système, c'est-à-dire (Peleties & DeCarlo, 2001) :

$$V_j(x(t_l)) - V_j(x(t_k)) \leq -\gamma \|x(t_k)\|^2 \quad (1.61)$$

La figure 1.10 illustre l'allure d'une fonction de Lyapunov globale pour le cas d'un système linéaire à commutations à deux modes.

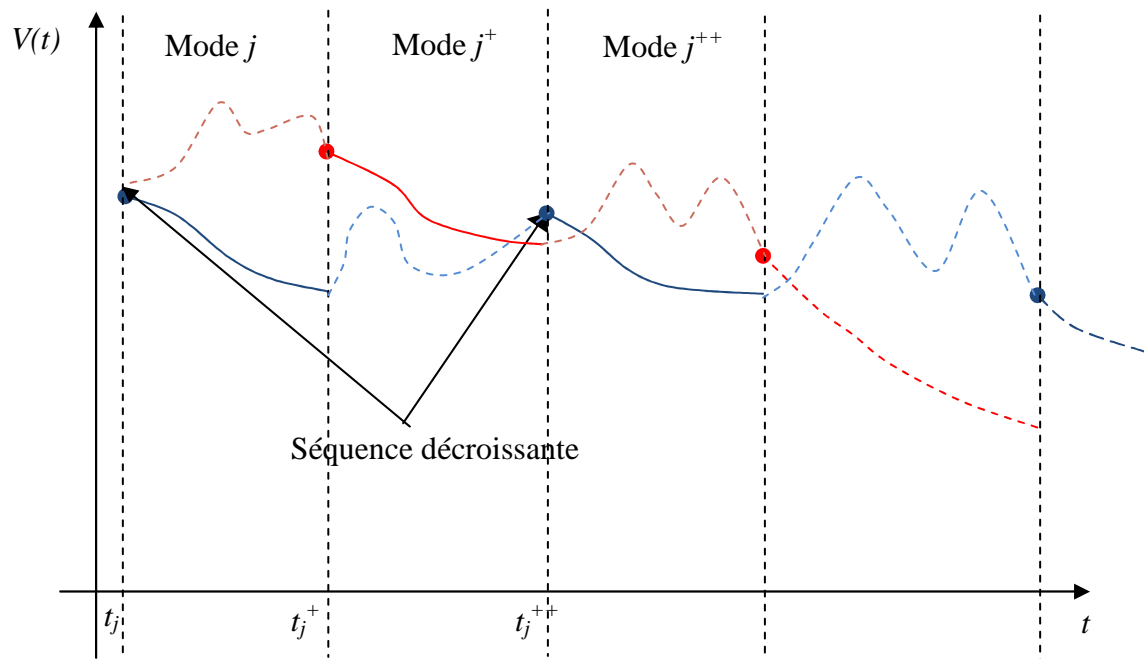


Figure.1.10. Fonctions multiples de Lyapunov (Peleties & DeCarlo, 2001).

- Une autre alternative, moins conservatrice, propose d'utiliser des pseudos fonctions de Lyapunov qui peuvent potentiellement être croissantes même lorsque le sous-système associé est actif, à condition que leur croissance soit bornée. Dans ce cas, la condition de stabilité aux instants de commutation est garantie par l'équation suivante (Ye & al., 1998) :

$$V_i(x(t)) \leq \alpha(V_j(x(t_j))), \quad t \in [t_j, t_{j++}] \quad (1.62)$$

où $[t_j, t_{j++}]$ est l'intervalle du temps durant lequel le sous-système i est actif, t_j et t_{j++} sont des instants de commutations et $\alpha: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ est une fonction qui vérifie $\alpha(0) = 0$. Une illustration de l'allure d'une fonction de Lyapunov globale, composée de deux pseudo fonctions de Lyapunov, pour un système linéaire à commutations à deux modes est proposée dans la Figure 1.11.

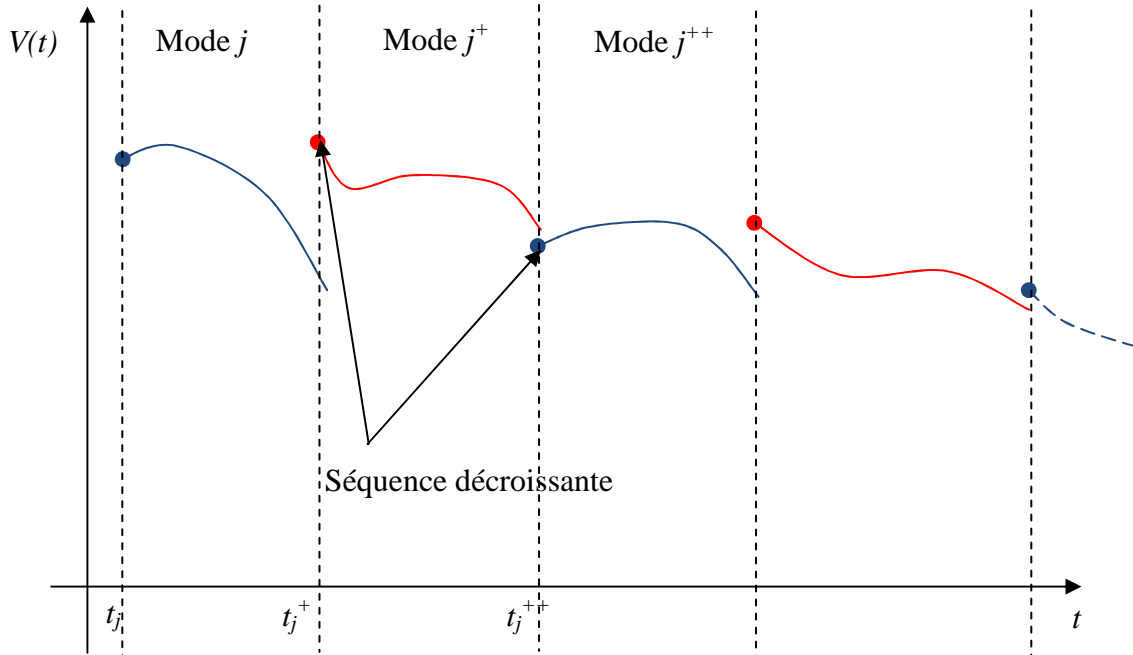


Figure.1.11. Pseudo fonctions de Lyapunov.

Remarque 1.8 :

Notons qu'à notre connaissance, la réécriture directe sous forme LMI des conditions additionnelles aux instants de commutations (1.61) et (1.62) formulée ci-dessus est délicate. En effet, des travaux ont été réalisés dans ce sens dans le cas des systèmes à commutations en temps discret (Daafouz & al., 2002 ; Jabri & al., 2010b), cependant, dans le cas des systèmes à temps continu, dans la mesure où pour garantir la stabilité il est nécessaire de connaître à priori (hors ligne) la séquence de commutation, il est difficile de transposer sous forme LMI ici ces résultats pour le cas des systèmes régis par une séquence de commutation arbitraire. Néanmoins, dans la suite de notre travail, nous avons considéré un cas particulier que nous présentons ci-dessous.

Considérons la synthèse d'une loi de commande (1.55) pour un système linéaire à commutations (1.53) par le biais d'une fonction de Lyapunov multiple donnée par :

$$V(x(t)) = \sum_{j=1}^m \xi_j(t) V_j(x(t)) \quad (1.63)$$

avec $V_j(x(t)) = x^T(t) P_j x(t)$.

Le système linéaire à commutation (1.53) est stabilisé via la loi de commande (1.55) si :

$$\forall t \neq t_j, \dot{V}(x(t)) < 0 \quad (1.64)$$

et

$$\text{pour } t = t_j, V_{j^+}(x(t)) \leq \mu_{jj^+} V_j(x(t)) \quad (1.65)$$

où t_j sont les instant de commutation et μ_{jj^+} sont des scalaires positifs relatifs aux taux de décroissances des fonctions de Lyapunov d'un mode à l'autre.

En suivant un chemin similaire à la preuve du théorème 1.4, on montre que la condition (1.64) est vérifiée s'il existe les matrices $X_j = X_j^T > 0$ et $F_j = K_j X_j^{-1}$ vérifiant les conditions LMI données par :

$$\text{Pour } j = 1, \dots, m, X_j A_j^T + A_j X_j + F_j^T B_j^T + B_j F_j < 0 \quad (1.66)$$

En ce qui concerne la condition (1.65), celle-ci est vérifiée si :

$$P_{j^+} - \mu_{jj^+} P_j < 0 \quad (1.67)$$

Dès lors, plusieurs cas peuvent être considérés selon le choix des scalaires μ_{jj^+} . En effet, si ceux-ci sont fixés a priori, la condition (1.67) est LMI et ne pose pas de réelle difficulté. Néanmoins imposer ces paramètres avant la résolution LMI s'avère conservatif. Afin de palier à ce problème, plusieurs solutions sont envisageables et feront l'objet d'une discussion dans le chapitre 3. (cf. section 3.3).

Remarque 1.9 :

De même que pour les systèmes TS vus précédemment, une extension à la classe des descripteurs linéaires à commutations peut être envisagée. Ceux-ci sont alors décrits par des représentations d'état du type :

$$E_{\sigma(t)} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t) \quad (1.68)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et de commande, $E_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ sont des matrices à coefficients constants représentant la dynamique de chacun des modes selon la loi de commutation $\sigma(t) = \{1, \dots, m\}$.

Cette classe permet de représenter notamment les systèmes linéaires singuliers à commutations. A titre d'exemple, les descripteurs à commutations peuvent être employés pour modéliser des réseaux électriques et encore des systèmes économiques (Trenn, 2008). Ainsi, dans le chapitre 3, l'extension des conditions de stabilité des systèmes linéaires à commutations de grande dimension au cas des descripteurs sera proposée.

1.5. Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire les notions et les outils nécessaires pour appréhender nos contributions qui seront développées aux chapitres suivants.

Ainsi, des définitions élémentaires concernant les systèmes de grandes dimensions ont été abordées ainsi que les difficultés rencontrées lors de la synthèse de lois de commande pour ce type de systèmes. Il en résulte que, pour la stabilisation de cette classe de systèmes, l'idée principale est de fragmenter le système global en plusieurs sous-systèmes plus simples à manipuler, par exemple en réalisant la synthèse de lois de commande décentralisées. Dans ce cas, chaque sous-système doit être traité, selon sa nature (linéaire, non linéaire, hybride,...), indépendamment des autres sous-systèmes tout en tenant compte des interconnexions. Dans la suite de cette thèse, nous nous intéresserons en particulier à la stabilisation décentralisée des systèmes interconnectés composés d'un ensemble de sous-systèmes non linéaires et hybrides. Afin de parvenir à cet objectif, nous considérons tout d'abord les systèmes non linéaires, représentés par des multi-modèles TS, puis les systèmes linéaires à commutations. Par la suite, nous combinons ces deux approches dans le but d'aborder une classe peu étudiée dans la littérature, celles des systèmes non linéaires à commutations.

Ainsi, nous considérons, dans le second chapitre, les systèmes de grandes dimensions non linéaires pouvant être représentés par un ensemble de descripteurs TS interconnectés. Dans ce cadre, afin de proposer des conditions LMI de moindre conservatisme, l'approche non quadratique sera employée dans le cas de la synthèse de lois de commande non-PDC décentralisée par retour d'état mais aussi dans le cas du retour de sortie.

Chapitre 2

Stabilisation des descripteurs interconnectés multi-modèles de type TS

2.1.	Introduction	53
2.2.	Descripteurs interconnectés de type TS	54
2.3.	Stabilisation par retour d'état	55
2.3.1.	<i>Synthèse de contrôleurs décentralisés non quadratiques par retour d'état.....</i>	<i>57</i>
2.3.2.	<i>Synthèse de contrôleurs décentralisés H^∞ non quadratiques par retour d'état..</i>	<i>68</i>
2.4.	Stabilisation par retour de sortie.....	78
2.4.1.	<i>Synthèse de contrôleurs non quadratiques par retour de sortie</i>	<i>79</i>
2.4.2.	<i>Exemple numérique</i>	<i>85</i>
2.5.	Conclusion.....	88

Stabilisation des descripteurs interconnectés multi-modèles de type TS

2.1.Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les concepts élémentaires nécessaires relatifs aux structures et aux problématiques liées aux systèmes de grandes dimensions ainsi qu'aux systèmes multi-modèles TS. Ce chapitre est dédié à l'étude de la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires de grandes dimensions. Le système global considéré est composé de N descripteurs interconnectés. Chaque descripteur est représenté par un ensemble de modèles linéaires associés par une structure d'interpolation. Il s'agit alors des descripteurs interconnectés multi-modèles de type TS.

Après une description de cette classe de systèmes considérée, on s'intéresse, dans un premier temps, à l'étude des approches basées sur des contrôleurs de type "retour d'état". Un ensemble de N contrôleurs décentralisés sera ainsi synthétisé pour garantir la stabilité du système global en boucle fermée. Les conditions de stabilité sont présentées en termes de LMI. Ensuite, dans le but d'améliorer cette première approche, nous proposons, par le biais d'un critère H_∞ , d'étudier la robustesse vis-à-vis des effets des interconnexions entre les sous-systèmes.

Par ailleurs, les contrôleurs par retour d'état nécessitent la disponibilité de toutes les variables d'état. Cette condition est souvent difficile à vérifier dans certains cas physiques, surtout pour les systèmes de grandes dimensions où le vecteur d'état peut être partiellement ou complètement non mesuré. Pour pallier ce problème, on propose d'étendre les contrôleurs de type "retour de sortie statique" (Chadli & al., 2002 ; Kau & al., 2007 ; Bouarar & al., 2009a) au cas des descripteurs interconnectés multi-modèles de type TS. En outre; dans le but de faciliter l'obtention des conditions de stabilité sous forme de LMI, une approche basée sur la redondance des descripteurs est considérée.

2.2. Descripteurs interconnectés de type TS

Dans cette partie, nous présentons la classe de systèmes non linéaires S composés de N descripteurs S_i interconnectés de type TS. La dynamique du système global S est décrite par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{l_i} v_i^j(z_i) E_i^j \dot{x}_i(t) = \sum_{k=1}^{r_i} h_i^k(z_i) \left(A_i^k x_i(t) + B_i^k u_i(t) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N F_{i\alpha}^k x_\alpha(t) \right) \\ y_i(t) = \sum_{k=1}^{r_i} h_i^k(z_i) (C_i^k x_i(t) + D_i^k u_i(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x_i(t) \in \mathbb{R}^{\eta_i}$, $u_i(t) \in \mathbb{R}^{\nu_i}$ et $y_i(t) \in \mathbb{R}^{q_i}$ sont respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du sous-système S_i , $z_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$ sont les variables de prémisse associées au sous-système S_i , $x_\alpha(t) \in \mathbb{R}^{\eta_\alpha}$ est le vecteur d'état du sous-système α , avec $\alpha = 1, \dots, N$ et $\alpha \neq i$. On note l_i , le nombre de règles floues associées au membre gauche de l'équation d'état (2.1), ainsi, pour $j = 1, \dots, l_i$, $E_i^j \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_i}$ sont des matrices à coefficients constants, le cas échéant singulières et les fonctions $v_i^j(z_i) \geq 0$ sont des fonctions d'appartenance vérifiant la propriété de somme convexe $\sum_{j=1}^{l_i} v_i^j(z_i) = 1$. De même, r_i représente le nombre de règles floues associées au membre droit de l'équation d'état (2.1), ainsi, pour $k = 1, \dots, r_i$, $A_i^k \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_i}$, $B_i^k \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \nu_i}$, $C_i^k \in \mathbb{R}^{q_i \times \eta_i}$, $D_i^k \in \mathbb{R}^{q_i \times \nu_i}$ et $F_{i\alpha}^k \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_\alpha}$ sont des matrices à coefficients constants et $h_i^k(z_i) \geq 0$ sont des fonctions d'appartenance vérifiant la propriété de somme convexe $\sum_{k=1}^{r_i} h_i^k(z_i) = 1$.

Remarque 2.1

Le terme $F_{i\alpha}^k x_\alpha(t)$ exprime l'influence du système S_α sur la dynamique du système S_i . De plus, chaque descripteur S_i est supposé défini et non impulsif (Dai, 1989). (cf. chapitre 1, Remarque 1.4).

L'étude de la stabilisation du descripteur global interconnecté multi-modèle de type TS (2.1) fera l'objet de la suite du présent chapitre. La structure globale de commande décentralisée de tels systèmes peut être illustrée par la figure 2.1. Dans ce cadre, nous proposons plusieurs approches de synthèse, qui peuvent être regroupées en deux catégories : contrôleurs décentralisés par retour d'état et contrôleurs décentralisés par retour de sortie. En effet, le contrôleur décentralisé à synthétiser est composé de N contrôleurs locaux, tel que, chaque contrôleur local est associé à un sous-système et permet de le stabiliser.

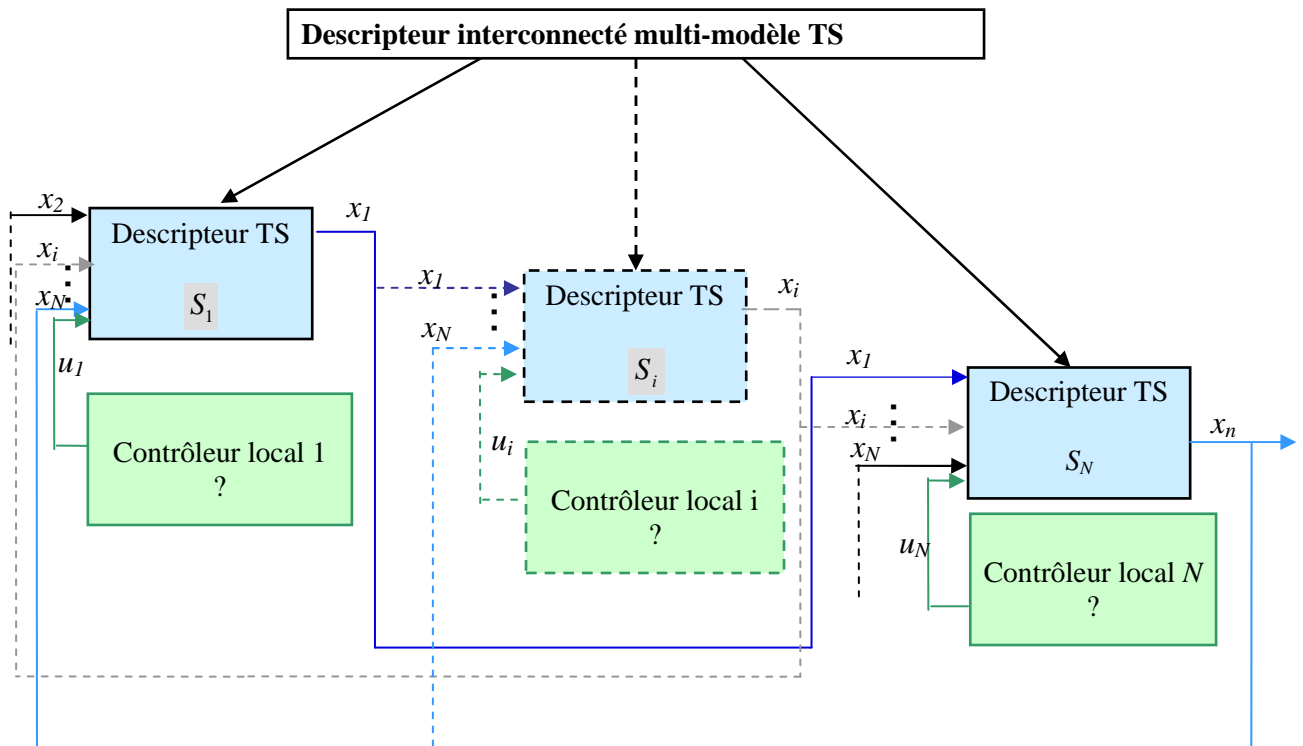


Figure. 2.1. Structure de commande décentralisée de descripteurs TS interconnectés.

2.3. Stabilisation décentralisée par retour d'état

Dans cette partie, nous nous focalisons sur la synthèse de lois de commande décentralisée par retour d'état pour la classe des descripteurs TS interconnectés décrite par (2.1). Notons que, dans le cas de retour d'état, on ne se préoccupe pas de l'équation de sortie.

Rappelons que, dans le chapitre précédent (théorème 1.1), la synthèse d'un contrôleur PDC pour un système standard multi-modèle de type TS, conduit au couplage entre des matrices de gains K_j et la variable de décision X et donc à la présence d'un terme bilinéaire

dans les conditions de stabilité. Un changement de variable bijectif $F_j = K_j X$ s'avérait alors nécessaire pour aboutir à des conditions sous forme de LMI. Dans le cas d'une commande non quadratique, une structure d'interconnection variable dans le temps est associée à la variable de décision X^s ; i.e. $\sum_{s=1}^{r_i} h_i^s(z_i(t)) X^s$. De ce fait, le couplage entre les matrices de gain et celles de variables de décision ne peut pas être résolu par un changement de variable bijectif. Pour palier ce problème, une loi de commande non quadratique, inspirée de la commande PDC, introduisant des variables de décision supplémentaires (issues de la matrices de Lyapunov), a été proposée (Jadbabai & al., 1999, Tanaka & al., 2003 ; Guerra & Vermeiren, 2004). Cette loi de commande, dite non-PDC, utilise, comme pour le cas de la commande PDC, la même structure d'interconnection du système à stabiliser. Nous proposons d'étendre l'approche non-PDC au cas des descripteurs interconnectés de type TS, par le biais d'une loi de commande décentralisée non-PDC donnée par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$u_i(t) = \left(\sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{r_i} v_i^j(z_i(t)) h_i^s(z_i(t)) K_i^{js} \right) \left(\sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{r_i} v_i^j(z_i(t)) h_i^s(z_i(t)) X_{i1}^{js} \right)^{-1} x_i(t) \quad (2.2)$$

où K_i^j et X_{i1}^{js} sont les matrices de gains à synthétiser.

La dynamique de la boucle fermée du système global S peut être exprimée, en combinant les équations (2.1) et (2.2), par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$\sum_{j=1}^{l_i} v_i^j E_i^j \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{s=1}^{r_i} v_i^j h_i^k h_i^s \left(A_i^k + B_i^k K_i^{js} \left(\sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{r_i} v_i^j h_i^s X_{i1}^{js} \right)^{-1} \right) x_i + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N F_{i\alpha}^k x_\alpha \quad (2.3)$$

La suite de cette section est dédiée à la formulation de conditions LMI garantissant la stabilité de la boucle fermée (2.3). Dans ce cadre, nous proposons deux approches de synthèse de loi de commande non-PDC par retour d'état :

- Une première approche permettra d'obtenir des conditions LMI basées sur une fonction de Lyapunov candidate non quadratique.
- Une seconde approche, introduisant un critère H_∞ , permettra de proposer des conditions de stabilité visant à minimiser l'effet des interconnections entre sous-systèmes. En effet, dans le cas où de fortes interactions existent entre les sous-systèmes, la stabilité du système

global peut être mise en péril. Notons par ailleurs que, la minimisation de l'influence des interconnexions permet également d'améliorer les performances des contrôleurs locaux.

Notations

Afin d'alléger les écritures mathématiques, dans la suite de ce chapitre, nous adoptons les notations suivantes :

Pour les matrices de dimensions appropriées E_i^j , Y_i^{sk} , R_i^{sk} , W_i^{jk} et $T_i^{j sk}$ et les fonctions scalaires $h_i^k(z(t))$ et $v_i^j(z(t))$, telles que $i=1, \dots, N$, $k=1, \dots, r_i$, $s=1, \dots, r_i$ et $j=1, \dots, l_i$, on note:

$$E_i^v = \sum_{j=1}^{l_i} v_i^j(z_i) E_i^j,$$

$$Y_i^{hh} = \sum_{s=1}^{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} h_i^s(z_i) h_i^k(z_i) Y_i^{sk},$$

$$W_i^{vh} = \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{k=1}^{r_i} v_i^j(z_i) h_i^k(z_i) W_i^{jk},$$

$$T_i^{vhh} = \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{r_i} \sum_{k=1}^{r_i} v_i^j(z_i) h_i^s(z_i) h_i^k(z_i) T_i^{j sk},$$

De plus, le symbole (*) dans une matrice à la position (i, j) désigne la transposée de l'élément de la matrice à la position (j, i) .

Enfin, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, le temps t ainsi que les variables de prémisses seront omis.

Hypothèse

Pour tout $j=1, \dots, l_i$, $k=1, \dots, r_i$, $s=1, \dots, r_i$, les fonctions d'appartenance $v_i^j(z)$ et $h_i^s(z)$ sont considérées de classe C^1 (continues et dérivables). Ceci est souvent le cas pour les systèmes multi-modèles de type TS construit à l'aide d'un découpage en secteurs non linéaires (cf. chapitre 1).

2.3.1. Synthèse de contrôleurs décentralisés non quadratiques par retour d'état

Pour stabiliser l'ensemble des descripteurs interconnectés de type TS (2.1), nous proposons de synthétiser un contrôleur décentralisé composé de N contrôleurs locaux non-

PDC donnés par (2.2). Cette approche est basée sur la recherche d'une fonction non quadratique multiple de Lyapunov. Nous entamons cette sous-section par une présentation des conditions LMI proposées, suivi d'un exemple numérique illustrant leur efficacité.

2.3.1.1. Conditions LMI pour la stabilisation décentralisée des descripteurs TS interconnectés

Les conditions de stabilité, permettant de synthétiser un contrôleur décentralisé non-PDC de la forme (2.2), sont donnée par le théorème 2.1.

Théorème 2.1

Soient, pour tout $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,l_i$ et $s=1,\dots,r_i$, $\dot{h}_i^s(z(t)) \geq \underline{\omega}_i^s$ et $\dot{v}_i^j(z(t)) \geq \lambda_i^j$, l'ensemble S des N descripteurs TS interconnectés S_i décrits par (2.1) est globalement asymptotiquement stable en boucle fermée via le réseau de N lois de commande non-PDC décentralisées défini par (2.2) s'il existe, pour toutes les combinaisons $i=1,\dots,N$, $\alpha=1,\dots,N$, $\alpha \neq i$, $j=1,\dots,l_i$, $k=1,\dots,r_i$, $s=1,\dots,r_i$, les matrices $X_{i1}^{js} = (X_{i1}^{js})^T > 0$, $W_{i1} = (W_{i1})^T$, $W_{i2} = (W_{i2})^T$, X_{i3}^{ks} , X_{i4}^{ks} , K_i^{js} et les scalaires $\tau_{i1} > 0$, $\tau_{2i} > 0$, ..., $\tau_{Ni} > 0$ (privé de τ_{ii} qui n'existe pas) vérifiant les conditions LMI données par :

$$X_{i1}^{js} + W_{i1} > 0 \quad (2.4)$$

$$X_{i1}^{js} + W_{i2} > 0 \quad (2.5)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cccccc|cccccc|cc} \Gamma_{(1,1)} & (*) & & & & & & & & & & & & & (*) \\ \Gamma_{(2,1)} & \Gamma_{(2,2)} & & & & & & & & & & & & & \\ \hline X_{i1}^{js} & 0 & -\tau_{i1}I & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ X_{i3}^{ks} & X_{i4}^{ks} & 0 & -\tau_{i1}I & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ X_{i1}^{js} & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & -\tau_{i-1i}I & \ddots & & & & & & & \vdots \\ X_{i3}^{ks} & X_{i4}^{ks} & \vdots & \ddots & \ddots & -\tau_{i-1i}I & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \hline X_{i1}^{js} & 0 & \vdots & & & & \ddots & -\tau_{i+1i}I & \ddots & & & & & \vdots \\ X_{i3}^{ks} & X_{i4}^{ks} & \vdots & & & & \ddots & -\tau_{i+1i}I & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ X_{i1}^{js} & 0 & \vdots & & & & & & & \ddots & -\tau_{Ni}I & & & 0 \\ X_{i3}^{ks} & X_{i4}^{ks} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & & & -\tau_{Ni}I \end{array} \right) < 0 \quad (2.6)$$

$$\text{avec } \Gamma_{(1,1)} = \left(X_{i3}^{ks} \right)^T + X_{i3}^{ks} - \sum_{\psi=1}^{f_i} \bar{\omega}_i^\psi \left(X_{i1}^{\psi s} + W_{i1} \right) + \sum_{\xi=1}^{l_i} \lambda_i^\xi \left(X_{i1}^{j\xi} + W_{i2} \right),$$

$$\Gamma_{(2,1)} = \left(X_{i4}^{ks} \right)^T + A_i^k X_{i1}^{js} + B_i^s K_i^{jk} - E_i^j X_{i3}^{ks} \text{ et } \Gamma_{(2,2)} = - \left(X_{i4}^{ks} \right)^T \left(E_i^j \right)^T - E_i^j X_{i4}^{ks} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \rho_{i\alpha} F_{i\alpha}^k \left(F_{i\alpha}^k \right)^T$$

Remarque 2.2

Dans (2.6), la ligne et la colonne correspondant à ρ_{ii} n'existe pas dans la mesure où celle-ci représenterait l'interaction du sous-système i avec lui-même et n'a donc pas lieu d'être.

Preuve

De manière usuelle pour les descripteurs TS (cf. chapitre 1, section 1.3.4), on considère le vecteur d'état augmenté $\tilde{x}_i = [x_i \quad \dot{x}_i]^T$, pour tout $i = 1, \dots, N$. Selon les notations proposées ci-dessus, les descripteurs TS interconnectés (2.1), peuvent être réécrits sous la forme :

Pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\tilde{E} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{A}_i^{vhh} \tilde{x}_i + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tilde{F}_{i\alpha}^h \tilde{x}_\alpha \quad (2.7)$$

$$\text{avec } \tilde{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_i^{vhh} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i^h + B_i^h K_i^{vh} \left(X_{i1}^{vh} \right)^{-1} & -E_i^v \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{F}_{i\alpha}^h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F_{i\alpha}^h & 0 \end{bmatrix}.$$

Afin d'assurer la stabilité de (2.7), nous considérons la fonction non quadratique multiple de Lyapunov candidate, composée d'un ensemble de N sous fonctions non quadratiques donnée par :

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^N V_i(x_i(t)) \geq 0 \quad (2.8)$$

$$\text{avec } V_i(x_i(t)) = \tilde{x}_i^T(t) \tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \tilde{x}_i(t) \geq 0 \quad (2.9)$$

$$\text{et } \tilde{X}_i^{vhh} = \begin{bmatrix} X_{i1}^{vh} & X_{i2}^{hh} \\ X_{i3}^{hh} & X_{i4}^{hh} \end{bmatrix}.$$

Remarquons ici que chaque variable de décision de la matrice \tilde{X}_i^{vhh} possède une structure d'interconnection variable dans le temps. Rappelons que ceci est fondamental dans le cadre de

la fonction non quadratique de Lyapunov (cf. chapitre 1, section 1.3.5). La symétrie des éléments de (2.9) est vérifiée si :

Pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} = \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{E} \geq 0 \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) est satisfaite si $X_{i1}^{vh} = \left(X_{i1}^{vh} \right)^T > 0$ et $X_{i2}^{hh} = 0$.

Le descripteur TS interconnecté (2.7) est stable en boucle fermée si :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\tilde{x}}_i^T \tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \tilde{x}_i + \tilde{x}_i^T \tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \dot{\tilde{x}}_i + \tilde{x}_i^T \overbrace{\tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1}}^{\dot{\tilde{x}}_i} \tilde{x}_i \right) < 0 \quad (2.11)$$

En substituant la dynamique du système (2.7) dans l'équation (2.11), cette dernière devient:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^T \left(\left(\tilde{A}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{A}_i^{vhh} + \overbrace{\tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1}}^{\dot{\tilde{x}}_i} \right) \tilde{x}_i \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\tilde{x}_i^T \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \tilde{x}_\alpha + \tilde{x}_\alpha^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{F}_{i\alpha}^h \tilde{x}_i \right) < 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

La condition (2.12) ne peut être écrite directement sous forme de LMI en raison de la présence des termes non linéaires $\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\tilde{x}_i^T \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \tilde{x}_\alpha + \tilde{x}_\alpha^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{F}_{i\alpha}^h \tilde{x}_i \right)$ et

$$\sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^T \overbrace{\tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1}}^{\dot{\tilde{x}}_i} \tilde{x}_i.$$

Dans un premier temps, nous proposons de majorer le terme qui tient compte des interconnexions à l'aide du lemme A.2 (cf. *Annexe A*). Dans ce cas, l'inégalité (2.12) est vérifiée si:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^T \left(\left(\tilde{A}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{A}_i^{vhh} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} \tilde{F}_{i\alpha}^h \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \overbrace{\tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1}}^{\dot{\tilde{x}}_i} \right) \tilde{x}_i \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha}^{-1} \tilde{x}_\alpha^T \tilde{x}_\alpha < 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Notons que $\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha}^{-1} \tilde{x}_\alpha^T \tilde{x}_\alpha = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{\alpha i}^{-1} \tilde{x}_i^T \tilde{x}_i$ est vérifiée. Ainsi, l'équation (2.13) peut être

réécrite telle que:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^T \left(\left(\tilde{A}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{A}_i^{vhh} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} \tilde{F}_{i\alpha}^h \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \right) \tilde{x}_i \\ & + \sum_{p=1}^N \tilde{x}_p^T \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^N \tau_{ip}^{-1} \right) \tilde{x}_p < 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

ou encore :

$$\sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^T \left(\begin{aligned} & \left(\tilde{A}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{A}_i^{vhh} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} \tilde{F}_{i\alpha}^h \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \\ & + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^N \tau_{pi}^{-1} I + \tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \end{aligned} \right) \tilde{x}_i < 0 \quad (2.15)$$

L'inégalité (2.15) est vérifiée si chaque terme de la somme est négatif, i.e. si :

Pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\left(\tilde{A}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{A}_i^{vhh} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} \tilde{F}_{i\alpha}^h \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^N \tau_{pi}^{-1} I + \tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} < 0 \quad (2.16)$$

Multiplions l'inégalité (2.16) à gauche et à droite respectivement par $\left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^T$ et \tilde{X}_i^{vhh} , nous obtenons :

Pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{A}_i^{vhh} \right)^T + \tilde{A}_i^{vhh} \tilde{X}_i^{vhh} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} \tilde{F}_{i\alpha}^h \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^T \left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^N \tau_{pi}^{-1} I \right) \tilde{X}_i^{vhh} + \tilde{E} \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \tilde{X}_i^{vhh} < 0 \quad (2.17)$$

Dans un second temps, considérons maintenant le dernier terme de (2.17). Notons que :

$$\begin{aligned}
 -\overline{\left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1}} &= \frac{d}{dt} \left\{ \left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1} \tilde{X}_i^{vhh} \right\} \left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1} - \overline{\left(\left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1}\right)} \\
 &= \overline{\left(\left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1}\right)} \tilde{X}_i^{vhh} \left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1} + \left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1} \dot{\tilde{X}}_i^{vhh} \left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1} - \overline{\left(\left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1}\right)}, \\
 &= \left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1} \dot{\tilde{X}}_i^{vhh} \left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

L'inégalité (2.17) peut donc être réécrite sous la forme:

Pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^T \left(\tilde{A}_i^{vhh}\right)^T + \tilde{A}_i^{vhh} \tilde{X}_i^{vhh} - \tilde{E} \dot{\tilde{X}}_i^{vhh} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} \tilde{F}_{i\alpha}^h \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h\right)^T + \left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^T \left(\sum_{p=1}^N \tau_{pi}^{-1}\right) \tilde{X}_i^{vhh} < 0 \tag{2.19}$$

En appliquant le complément de Schur (cf. *Annexe A*), l'inégalité (2.19) est équivalente à :

Pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} \psi_i^{hhv} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (*) \\ \hline \tilde{X}_i^{vhh} & -\tau_{ii} I & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \tilde{X}_i^{vhh} & \vdots & \ddots & -\tau_{i-1i} I & \ddots & & \vdots \\ \tilde{X}_i^{vhh} & \vdots & & \ddots & -\tau_{i+1i} I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \tilde{X}_i^{vhh} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\tau_{Ni}^{-1} I \end{array} \right) < 0 \tag{2.20}$$

$$\text{avec } \psi_i^{hhv} = \left(\left(\tilde{X}_i^{vhh}\right)^T \left(\tilde{A}_i^{vhh}\right)^T + \tilde{A}_i^{vhh} \tilde{X}_i^{vhh} \right) - \tilde{E} \dot{\tilde{X}}_i^{vhh} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} \tilde{F}_{i\alpha}^h \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h\right)^T < 0.$$

Le terme ψ_i^{hhv} peut être écrit sous la forme étendue, en utilisant les matrices définies dans (2.7)

et les contraintes issues de la condition de symétrie (2.10), tel que :

$$\psi_i^{vhh} = \left(\begin{array}{c|c} \left(X_{i3}^{hh}\right)^T + X_{i3}^{hh} - \dot{X}_{i1}^{vh} & (*) \\ \hline \left(X_{i4}^{hh}\right)^T + A_i^h X_{i1}^{vh} + B_i^h K_i^{vh} - E_i^v X_{i3}^{hh} & -\left(X_{i4}^{hh}\right)^T E_i^{vT} - E_i^v X_{i4}^{hh} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} F_{i\alpha}^h F_{i\alpha}^{hT} \end{array} \right) \tag{2.21}$$

Intéressons nous maintenant au terme $-\dot{X}_{i1}^{vh}$ de l'équation (2.21). En prenant en compte de la structure d'interconnection variable dans le temps associée à la variable de décision

$X_{i1}^{vh} = \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{r_i} v_i^j h_i^s X_{i1}^{js}$, la dérivée \dot{X}_{i1}^{vh} entraîne l'apparition des dérivées des fonctions

d'appartenance \dot{h}_i^s et \dot{v}_i^j . Afin d'aboutir à des conditions de faible conservatisme sous forme

LMI, on utilise les propriétés de somme convexe $\sum_{j=1}^{l_i} v_i^j = 1$ et $\sum_{s=1}^{r_i} h_i^s = 1$. Ainsi, pour toutes

matrices positives W_{i1} et W_{i2} indépendantes de j et s , les égalités suivantes sont vérifiées :

$\sum_{j=1}^{l_i} \dot{v}_i^j = \sum_{j=1}^{l_i} \dot{v}_i^j W_{i1} = 0$ et $\sum_{s=1}^{r_i} \dot{h}_i^s = \sum_{s=1}^{r_i} \dot{h}_i^s W_{i2} = 0$ (cf. chapitre 1, section 1.3.5). On pose $\bar{\omega}_i^s < \dot{h}_i^s$ et

$\lambda_i^j < \dot{v}_i^j$ les bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance. Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$-\dot{X}_{i1}^{vh} \leq -\Phi_{hv} \quad (2.22)$$

avec $\Phi_{hv} = \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{r_i} v_i^j h_i^s \left\{ \sum_{\psi=1}^{r_i} \bar{\omega}_i^\psi (X_{i1}^{\psi s} + W_{i1}) + \sum_{\xi=1}^{l_i} \lambda_i^\xi (X_{i1}^{j\xi} + W_{i2}) \right\}$ et où, pour tout $i = 1, \dots, N$,

$s = 1, \dots, r_i$, $\psi = 1, \dots, r_i$, $\xi = 1, \dots, l_i$ et $j = 1, \dots, l_i$, les conditions LMI $X_{i1}^{\psi s} + W_{i1} > 0$ et $X_{i1}^{j\xi} + W_{i2} > 0$ doivent être vérifiées.

Dès lors, en considérant (2.22), l'inégalité (2.20) peut être majorée et elle est vérifiée si les conditions LMI proposées au théorème 2.1 le sont. ■

Remarque 2.3

Les conditions LMI proposées dans le théorème 2.1 dépendent des bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance $\dot{v}_i^j(z)$ et $\dot{h}_i^s(z)$ pour tout $j = 1, \dots, l_i$, $s = 1, \dots, r_i$. Ceci représente un inconvénient des approches à base des fonctions non quadratique de Lyapunov puisque ces paramètres peuvent être difficiles à choisir en pratique. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, nous avons choisi de borner les dérivées des fonctions d'appartenance en s'inspirant des travaux proposés dans (Mozelli & al., 2009). Notons que les conditions établis dans (Mozelli & al., 2009), sont actuellement considérées parmi les approches les moins conservatives de la littérature en termes de LMI. En effet, malgré qu'elles nécessitent, tout comme les autres approches non quadratiques (Tanaka & al., 2003), la connaissance des bornes inférieures de fonctions d'appartenance, ces conditions introduisent de nouvelles variables de décisions libres permettant de réduire le conservatisme. Notons que, dans l'optique de s'affranchir de la connaissance des bornes des dérivées des

fonctions d'appartenance, une nouvelle méthodologie, basée sur l'étude de la stabilité locale des systèmes TS, a été proposée (Guerra et Bernal, 2009 ; Bernal & Guerra, 2009). Néanmoins, ces conditions sont quelque peu complexes et, à ce jour, leur transposition à des problèmes de commande avancée, telles que la commande décentralisée, reste un problème ouvert.

Soulignons également que, pour les descripteurs TS interconnectés, une première approche de synthèse de lois de commande décentralisée a été proposée par (Wang & al. 2005). Néanmoins, celle-ci se base sur une fonction de Lyapunov quadratique (conservative). De plus, des hypothèses réduisant considérablement l'étendue de la classe des systèmes étudié ont été effectuées, notamment le choix d'un membre gauche du descripteur invariant dans le temps ($E\dot{x}(t) = \dots$ au lieu du cas général $\sum_{k=1}^{l_i} v_k E^k \dot{x}(t) = \dots$).

Remarque 2.4

Les conditions présentées aux théorème 2.1 tiennent compte du schéma de relaxation proposé par (Mozelli & al., 2009). Des conditions LMI ne tenant pas compte de ce schéma de relaxation, dans la mesure où il ne nous était pas encore connu, ont été publiées dans (Jabri & al., 2009a, Jabri & al., 2009c).

2.3.1.2.Exemple Numérique

Il s'agit ici de tester, sur un exemple numérique, la faisabilité de l'approche non quadratique proposée précédemment dans le théorème 2.1.

Considérons un système non linéaire descripteur TS interconnecté composé de trois sous systèmes S_1 , S_2 et S_3 décrits par:

- $S_1 : \sum_{j=1}^2 v_1^j (x_1(t)) E_1^j \dot{x}_1(t) = \sum_{k=1}^2 h_1^k (x_1(t)) (A_1^k x_1(t) + B_1^k u_1(t) + F_{12}^k x_2(t) + F_{13}^k x_3(t))$ (2.23)

avec les matrices de la partie gauche $E_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $E_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, les matrices de la

partie droite $A_1^1 = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -3 & 0.1 \end{bmatrix}$, $B_1^1 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 1.2 \end{bmatrix}$, $F_{12}^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$, $F_{13}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$,

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \quad F_{12}^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad F_{13}^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \text{et les fonctions}$$

$$\text{d'appartenance} \quad v_1^1(x_1(t)) = \left(\frac{1 - \cos(x_{12})}{2} \right) \quad \text{et} \quad v_1^2(x_1(t)) = \left(\frac{1 + \cos(x_{12})}{2} \right),$$

$$h_1^1(x_1(t)) = \sin^2(x_{11}(t)), \quad h_1^2(x_1(t)) = \cos^2(x_{11}(t)).$$

$$\bullet \quad S_2 : \sum_{j=1}^2 v_2^j(x_2(t)) E_2^j \dot{x}_2(t) = \sum_{k=1}^2 h_2^k(x_2(t)) (A_2^k x_2(t) + B_2^k u_2(t) + F_{21}^k x_1(t) + F_{23}^k x_3(t)) \quad (2.24)$$

$$\text{avec les matrices de la partie gauche} \quad E_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{les matrices de la partie}$$

$$\text{droite} \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2^1 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad B_2^2 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad F_{21}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$F_{21}^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad F_{23}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad F_{23}^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{et les fonctions d'appartenance}$$

$$v_2^1(x_2(t)) = \cos^2(x_{21}(t)) \quad , \quad v_2^2(x_2(t)) = \sin^2(x_{21}(t)) \quad , \quad h_2^1(x_2(t)) = \sin^2(x_{21}(t)) \quad ,$$

$$h_2^2(x_2(t)) = \cos^2(x_{21}(t)).$$

$$\bullet \quad S_3 : \sum_{j=1}^2 v_3^j(x_3(t)) E_3^j \dot{x}_3(t) = \sum_{k=1}^2 h_3^k(x_3(t)) (A_3^k x_3(t) + B_3^k u_3(t) + F_{31}^k x_1(t) + F_{32}^k x_2(t)) \quad (2.25)$$

$$\text{avec} \quad E_3^1 = \begin{bmatrix} 2 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{les matrices de la partie gauche}, \quad A_3^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_3^1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad B_3^2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad F_{31}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad F_{31}^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$F_{32}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad F_{32}^2 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{les matrices de la partie droite et les fonctions}$$

$$\text{d'appartenance} \quad v_3^1(x_3(t)) = \frac{(1 - \cos^2(x_{31}(t)))}{2} \quad , \quad v_3^2(x_3(t)) = \frac{(1 + \cos^2(x_{31}(t)))}{2} \quad ,$$

$$h_3^1(x_3(t)) = \sin^2(x_{31}(t)), \quad h_3^2(x_3(t)) = \cos^2(x_{31}(t)).$$

Afin de stabiliser le descripteur TS interconnecté global, l'objectif est de synthétiser un contrôleur décentralisé, composé de trois contrôleurs non quadratiques locaux de la forme (2.2). Le but est donc de rechercher les matrices de gains et les variables de décision vérifiant

les conditions du théorème 2.1. Ces conditions de stabilité ont été résolues à l'aide de l'outil *LMI Toolbox* de *Matlab* (Gahinet & al., 1995). Pour ce faire, les bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance ont été fixées à la valeur (-2). Le résultat est donné par les matrices suivantes :

- $K_1^{11} = [1.15 \quad -0.46]$, $K_1^{12} = [1.1 \quad -0.46]$, $K_1^{21} = [1.31 \quad -0.42]$ et $K_1^{22} = [1.34 \quad -0.39]$ et $X_{11}^{11} = \begin{bmatrix} 5.25 & 0.01 \\ 0.01 & 0.49 \end{bmatrix}$, $X_{11}^{12} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.01 \\ 0.01 & 0.45 \end{bmatrix}$, $X_{11}^{21} = \begin{bmatrix} 0.27 & 0.06 \\ 0.06 & 0.45 \end{bmatrix}$ et $X_{11}^{22} = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.07 \\ 0.07 & 0.5 \end{bmatrix}$

constituant le 1^{er} contrôleur local.

- $K_2^{11} = [-1.77 \quad -1.03]$, $K_2^{12} = [-1.76 \quad -1.11]$, $K_2^{21} = [-1.27 \quad -1]$ et $K_2^{22} = [-1.22 \quad -0.97]$ et $X_{21}^{11} = \begin{bmatrix} 0.41 & -0.02 \\ -0.02 & 0.55 \end{bmatrix}$, $X_{21}^{12} = \begin{bmatrix} 0.41 & -0.03 \\ -0.03 & 0.5 \end{bmatrix}$, $X_{21}^{21} = \begin{bmatrix} 0.44 & -0.03 \\ -0.03 & 0.51 \end{bmatrix}$ et

$X_{21}^{22} = \begin{bmatrix} 0.45 & -0.02 \\ -0.02 & 0.55 \end{bmatrix}$ constituant le 2^{ème} contrôleur local.

- $K_3^{11} = [-1.62 \quad -6.09]$, $K_3^{12} = [-0.92 \quad -9.58]$, $K_3^{21} = [-1.48 \quad -5.6]$ et $K_3^{22} = [-0.91 \quad -10.3]$ et $X_{31}^{11} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.05 \\ -0.05 & 0.57 \end{bmatrix}$, $X_{31}^{12} = \begin{bmatrix} 0.55 & -0.08 \\ -0.08 & 0.19 \end{bmatrix}$, $X_{31}^{21} = \begin{bmatrix} 0.49 & -0.01 \\ -0.01 & 0.68 \end{bmatrix}$ et

$X_{31}^{22} = \begin{bmatrix} 0.54 & -0.17 \\ -0.17 & 0.06 \end{bmatrix}$ constituant le 3^{ème} contrôleur local.

La figure 2.2 présente la simulation du système global en boucle fermée, pour les états initiaux $x_1(0) = [-1 \quad 1]^T$, $x_2(0) = [-2 \quad 1]^T$ et $x_3(0) = [-2 \quad 1]^T$. Nous constatons que le contrôleur décentralisé non quadratique stabilise l'ensemble des descripteurs interconnectés.

La figure 2.3 montre l'évolution temporelle des dérivées des fonctions d'appartenance liées à chaque sous-système. Celle-ci permet de montrer que les paramètres fixés pour borner les dérivées des fonctions d'appartenance sont vérifiées en simulation. En effet, ces dérivées sont toujours supérieurs à (-2). Notons que le choix d'une valeur inappropriée de ces bornes peut provoquer l'instabilité du système global.

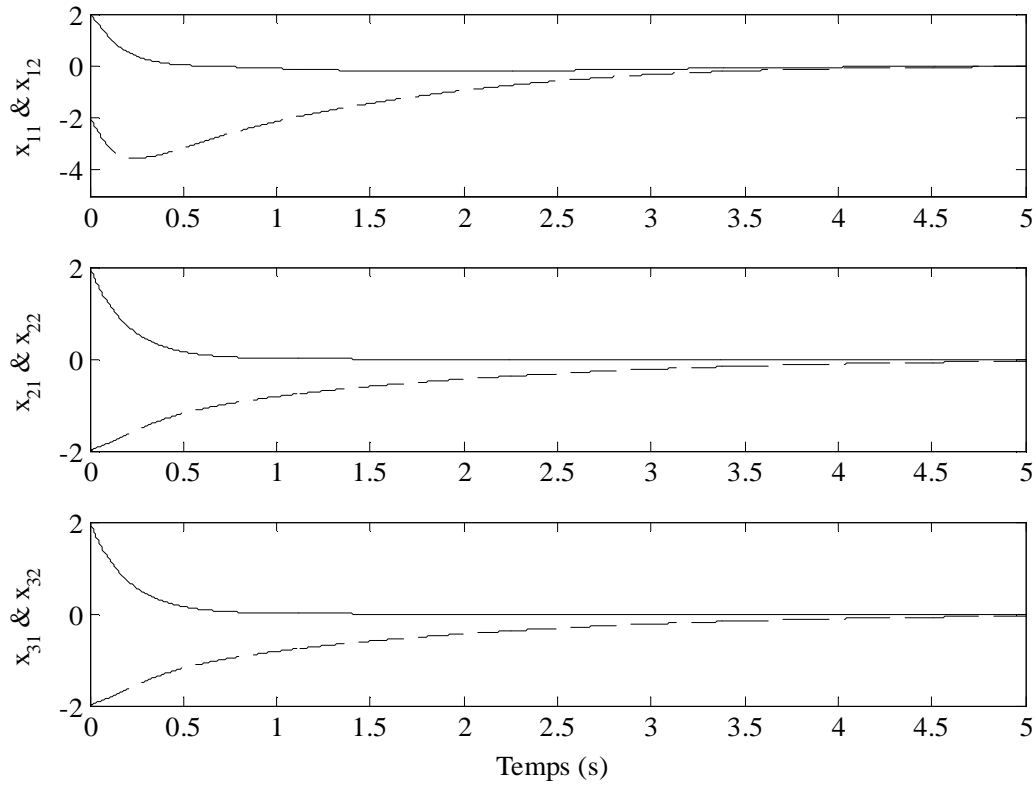


Figure.2.2. Dynamique des descripteurs TS interconnectés
 (x_{11}, x_{21}, x_{31}) trait plein, (x_{12}, x_{22}, x_{32}) trait pointillé.

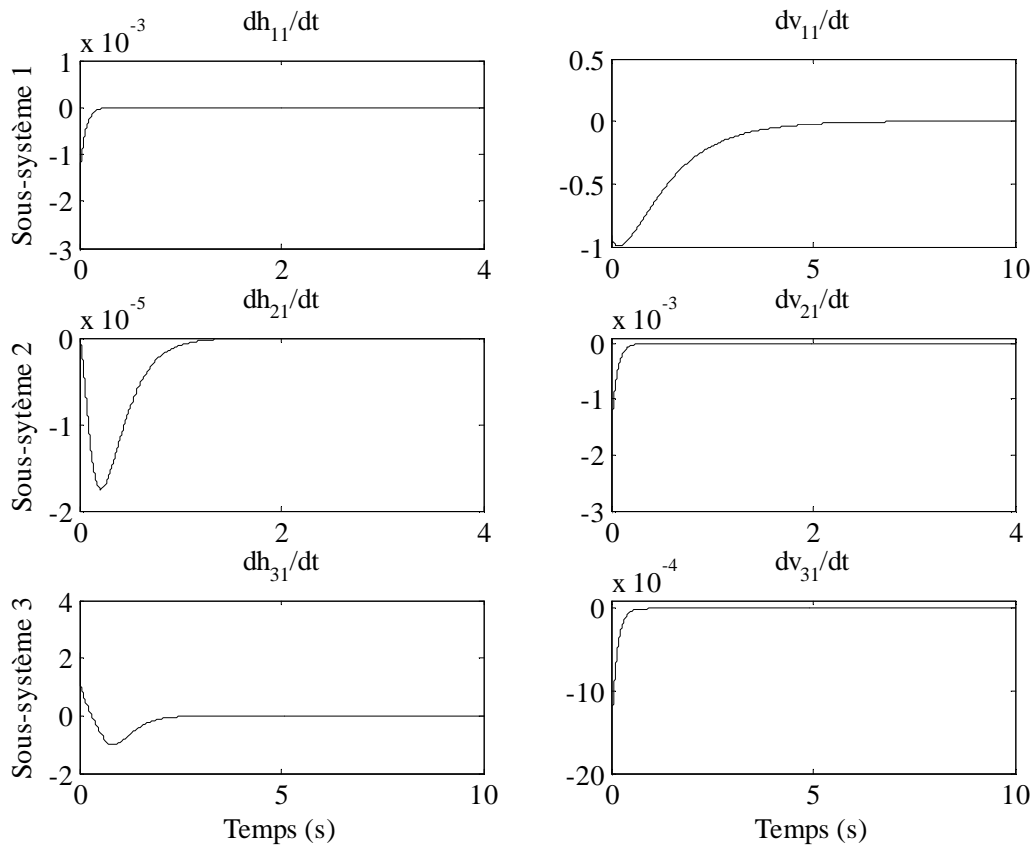


Figure.2.3. Évolution des dérivées des fonctions d'appartenance.

En substance, nous avons proposé dans cette partie une méthodologie de synthèse non quadratique de lois de commande décentralisées pour les descripteurs TS interconnectés. Notons que, dans cette approche, aucun critère de performance n'a été employé pour la synthèse des correcteurs. Dans cette optique, nous nous intéressons, dans la partie suivante, à l'étude de la synthèse de contrôleurs H_∞ minimisant les influences des interconnexions entre sous-systèmes.

2.3.2. Synthèse de contrôleurs décentralisés H_∞ non quadratiques par retour d'état

Les systèmes étant interconnectés, chaque sous-système i , est alors influencé par les autres sous-systèmes $\alpha = 1, \dots, N$, $\alpha \neq i$. Dans certains cas, lorsque les interactions entre sous-systèmes sont trop importantes, celles-ci peuvent menacer la stabilisation du système global. Ainsi, notre objectif dans cette section est de fournir une méthodologie de synthèse de lois de commande décentralisées robustes permettant à la fois la stabilisation intrinsèque de chacun des descripteurs TS interconnectés et de réduire l'effet des interconnexions entre sous-systèmes. Pour ce faire, nous nous basons sur un critère H_∞ permettant de minimiser l'influence des α descripteurs ($\alpha = 1, \dots, N$ et $\alpha \neq i$) sur le $i^{\text{ème}}$ descripteur. Ce critère est donné par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$\int_{t_0}^{t_f} x_i^T x_i dt \leq \rho_i^2 \int_{t_0}^{t_f} \varphi_i^T \varphi_i dt \quad (2.26)$$

$$\text{où } \varphi_i(z_i) = \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N h_i^k F_{i\alpha}^k x_\alpha .$$

Notons qu'ici, le vecteur $\varphi_i(z_i) = \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N h_i^k F_{i\alpha}^k x_\alpha$ traduit l'influence du $\alpha^{\text{ème}}$ descripteur sur

le $i^{\text{ème}}$ et, ρ_i sont, dans ce cas, les taux de performance H_∞ qu'il conviendra de minimiser.

L'approche non quadratique garantissant simultanément la stabilisation du système (2.1), via le contrôleur décentralisé (2.2) et l'atténuation des effets des interconnexions entre sous-systèmes est résumée dans le théorème suivant.

Théorème 2.2

Soient, pour tout $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,l_i$ et $s=1,\dots,r_i$, les scalaires $\bar{\omega}_i^s$ et λ_i^j tels que $\dot{h}_i^s(z(t)) \geq \bar{\omega}_i^s$ et $\dot{v}_i^j(z(t)) \geq \lambda_i^j$. L'ensemble S des N descripteurs TS interconnectés S_i décrits par (2.1) est globalement asymptotiquement stabilisé en boucle fermée via le réseau de N lois de commande non-PDC décentralisées défini par (2.2), au regard du critère H_∞ décrit par (2.26), s'il existe les matrices $X_{i1}^{js} = (X_{i1}^{js})^T > 0$, $W_{i1} = (W_{i1})^T$, $W_{i2} = (W_{i2})^T$, X_{i3}^{ks} , X_{i4}^{ks} , K_i^{js} et les scalaires $\delta_i = \rho_i^2$ pour toutes les combinaisons $i=1,\dots,N$, $\alpha=1,\dots,N$, $\alpha \neq i$, $j=1,\dots,l_i$, $k=1,\dots,r_i$, $s=1,\dots,r_i$, vérifiant les conditions LMI données par :

Minimiser ρ_i tel que:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{i(1,1)}^{jks} & & & & & & (*) \\ \Gamma_{i(2,1)}^{jks} & -\frac{1}{(N-1)}(E_i^j X_{i4}^{ks} + (E_i^j)^T (X_{i4}^{ks})^T) & & & & & \\ 0 & (N-1)(F_{i\alpha}^k)^T & & -\delta_i(N-1)(2N-3)(F_{i\alpha}^k)^T F_{i\alpha}^k & & & \\ (X_{i1}^{js})^T & 0 & & 0 & & & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

$$X_{i1}^{js} + W_{i1} > 0 \quad (2.28)$$

$$X_{i1}^{js} + W_{i2} > 0 \quad (2.29)$$

$$\text{avec } \Gamma_{i(1,1)}^{jks} = \frac{1}{N-1} \left(X_{i3}^{ks} + (X_{i3}^{ks})^T - \sum_{\zeta=1}^{r_i} \bar{\omega}_i^\zeta (X_{i1}^{\zeta s} + W_{i1}) - \sum_{v=1}^{l_i} \lambda_i^v (X_{i1}^{jv} + W_{i2}) \right)$$

$$\text{et } \Gamma_{i(2,1)}^{jks} = \frac{1}{N-1} \left(A_i^k X_{i1}^{js} + B_i^k K_i^{js} - E_i^j X_{i3}^{ks} + (X_{i4}^{ks})^T \right)$$

Preuve

Considérons, pour $i=1,\dots,N$, les vecteurs d'états augmentés $\tilde{x}_i = [x_i \quad \dot{x}_i]^T$, le critère H_∞ (2.26) peut être réécrit sous la forme:

Pour $i = 1, \dots, N$

$$\int_{t_0}^{t_f} \tilde{x}_i^T \tilde{E} \tilde{x}_i dt < \rho_i^2 \int_{t_0}^{t_f} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left((N-1) \left(x_\alpha^T (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h x_\alpha \right) + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i \\ \beta \neq \alpha}}^N \left(x_\beta^T (\tilde{F}_{i\beta}^h)^T \tilde{F}_{i\beta}^h x_\beta \right) \right) dt \quad (2.30)$$

$$\text{où } \tilde{F}_{i\alpha}^h = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{i\alpha}^h \end{bmatrix}.$$

La dynamique du système globale en boucle fermée peut être réécrite sous la forme étendue :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$\tilde{E} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{A}_i^{vhh} \tilde{x}_i + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tilde{F}_{i\alpha}^h x_\alpha \quad (2.31)$$

$$\text{avec } \tilde{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{F}_{i\alpha}^h = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{i\alpha}^h \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{A}_i^{vhh} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i^h + B_i^h K_i^{vh} (X_{i1}^{vh})^{-1} & -E_i^v \end{bmatrix}.$$

Reprenons la fonction candidate multiple non quadratique de Lyapunov donnée par (2.8) et (2.9) :

$$V(t) = \sum_{i=1}^N V_i(x_i(t)) \geq 0 \quad (2.32)$$

$$\text{avec } V_i(x_i(t)) = \tilde{x}_i^T(t) \tilde{E} (\tilde{X}_i^{vhh})^{-1} \tilde{x}_i(t) \geq 0$$

Similairement à la preuve du théorème 2.1, la condition de symétrie conduit à choisir

$$\tilde{X}_i^{vhh} = \begin{bmatrix} X_{i1}^{vh} & 0 \\ X_{i3}^{hh} & X_{i4}^{hh} \end{bmatrix} \text{ avec } X_{i1}^{vh} = (X_{i1}^{vh})^T > 0.$$

Le système (2.31) est stable en boucle fermée selon le critère H_∞ , si:

$$\sum_{i=1}^N \left(\dot{V}_i(t) + \tilde{x}_i^T \tilde{Q}_i \tilde{x}_i - \rho_i^2 \varphi_i(z_i)^T \varphi_i(z_i) \right) < 0 \quad (2.33)$$

C'est-à-dire, si:

$$\sum_{i=1}^N \left(\begin{array}{c} \tilde{x}_i^T \left(\left(\tilde{A}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{A}_i^{vhh} + \tilde{E} + \tilde{E} \overline{\left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1}} \right) \tilde{x}_i \\ + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\tilde{x}_\alpha^T \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \tilde{x}_i + \tilde{x}_i^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{F}_{i\alpha}^h \tilde{x}_\alpha \right) \\ - \rho_i^2 \left((N-1) \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tilde{x}_\alpha^T \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h \tilde{x}_\alpha + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i \\ \beta \neq \alpha}}^N \tilde{x}_\beta^T \left(\tilde{F}_{i\beta}^h \right)^T \tilde{F}_{i\beta}^h \tilde{x}_\beta \right) \end{array} \right) < 0 \quad (2.34)$$

L'objectif est maintenant de réécrire l'inégalité (2.34) en termes de LMI. On s'intéresse, en

premier lieu au terme $\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tilde{x}_\alpha^T \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h \tilde{x}_\alpha + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i \\ \beta \neq \alpha}}^N \tilde{x}_\beta^T \left(\tilde{F}_{i\beta}^h \right)^T \tilde{F}_{i\beta}^h \tilde{x}_\beta$.

Notons que $\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\Psi_{i\alpha} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i \\ \beta \neq \alpha}}^N \Psi_{i\beta} \right) = (N+1) \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \Psi_{i\alpha}$, l'inégalité (2.34) devient:

$$\sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^T \left(\left(\tilde{A}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{A}_i^{vhh} + \tilde{E} + \tilde{E} \overline{\left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1}} \right) \tilde{x}_i \quad (2.35)$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\tilde{x}_\alpha^T \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \tilde{x}_i + \tilde{x}_i^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{F}_{i\alpha}^h \tilde{x}_\alpha - \rho_i^2 (2N-3) \tilde{x}_\alpha^T \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h \tilde{x}_\alpha \right) < 0$$

L'inégalité (2.35) peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_i \\ x_\alpha \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \frac{1}{N-1} \left(\left(\tilde{A}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{A}_i^{vhh} + \tilde{E} + \tilde{E} \overline{\left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1}} \right) \\ \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \end{array} \right] \begin{array}{c} (*) \\ -\rho_i^2 (2N-3) \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h \end{array} \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_i \\ x_\alpha \end{array} \right] < 0 \quad (2.36)$$

qui est vérifiée $\forall \tilde{x}_i$ et $\forall \tilde{x}_\alpha$ si, pour tout $i=1, \dots, N$, $\alpha=1, \dots, N$, $\alpha \neq i$:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{N-1} \left(\left(\tilde{A}_i^{vhh} \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} + \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-T} \tilde{A}_i^{vhh} + \tilde{E} + \tilde{E} \overline{\left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1}} \right) \\ \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{X}_i^{vhh} \right)^{-1} \end{array} \right] \begin{array}{c} (*) \\ -\rho_i^2 (2N-3) \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h \end{array} < 0 \quad (2.37)$$

En multipliant l'inégalité (2.37) à gauche et à droite respectivement par $\begin{bmatrix} (\tilde{X}_i^{vhh})^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ et sa

transposée, nous obtenons, pour tout $i = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, \dots, N$, $\alpha \neq i$:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{N-1} \left((\tilde{X}_i^{vhh})^T (\tilde{A}_i^{vhh})^T + \tilde{A}_i^{vhh} \tilde{X}_i^{vhh} + (\tilde{X}_i^{vhh})^T \left(\tilde{E} + \tilde{E} \overline{(\tilde{X}_i^{vhh})^{-1}} \right) \tilde{X}_i^{vhh} \right) \\ (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \end{array} \quad \begin{array}{c} (*) \\ -\rho_i^2 (2N-3) (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h \end{array} \right] < 0 \quad (2.38)$$

Rappelons que $\overline{(\tilde{X}_i^{vhh})^{-1}} = -(\tilde{X}_i^{vhh})^{-1} \dot{\tilde{X}}_i^{vhh} (\tilde{X}_i^{vhh})^{-1}$. De manière identique à la preuve du théorème 2.1, la dérivée de la variable de décision \dot{X}_{i1}^{vh} peut-être majorée tel que :

$$-\dot{X}_{i1}^{vh} \leq -\Phi_{vh} \quad (2.39)$$

avec $\Phi_{vh} = \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{r_i} v_i^j h_i^s \left\{ \sum_{\psi=1}^{r_i} \varpi_i^\psi (X_{i1}^{\psi s} + W_{i1}) + \sum_{\xi=1}^{l_i} \lambda_i^\xi (X_{i1}^{j\xi} + W_{i2}) \right\}$, où ϖ_i^ψ et λ_i^ξ sont

respectivement les bornes inférieurs des dérivées de fonctions d'appartenance v_i^j et h_i^s . et où, pour tout $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, r_i$, $\psi = 1, \dots, r_i$, $\xi = 1, \dots, l_i$ et $j = 1, \dots, l_i$, les conditions LMI $X_{i1}^{\psi s} + W_{i1} > 0$ et $X_{i1}^{j\xi} + W_{i2} > 0$ doivent être vérifiées.

En tenant compte de (2.39), l'inégalité (2.38) peut être majorée et l'on obtient, sous la forme étendue :

$$\left[\begin{array}{c} \Omega_{i(1,1)}^{jks} \\ \Gamma_{i(2,1)}^{jks} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} -\frac{1}{(N-1)} \left(E_i^j X_{i4}^{ks} + (E_i^j)^T (X_{i4}^{ks})^T \right) \\ (N-1) (F_{i\alpha}^k)^T \\ -\delta_i (N-1) (2N-3) (F_{i\alpha}^k)^T F_{i\alpha}^k \end{array} \right] < 0 \quad (2.40)$$

avec $\Omega_{i(1,1)}^{jks} = \frac{1}{N-1} \left(X_{i3}^{ks} + (X_{i3}^{ks})^T - \sum_{\zeta=1}^{r_i} \varpi_i^\zeta (X_{i1}^{\zeta s} + W_{i1}) - \sum_{\nu=1}^{l_i} \lambda_i^\nu (X_{i1}^{j\nu} + W_{i2}) + (X_{i1}^{js})^T X_{i1}^{js} \right)$

et $\Gamma_{i(2,1)}^{jks} = \frac{1}{N-1} \left(A_i^k X_{i1}^{js} + B_i^k K_i^{js} - E_i^j X_{i3}^{ks} + (X_{i4}^{ks})^T \right)$

Appliquons enfin le complément de Schur, sachant que v_i^j et h_i^s vérifient les propriétés de sommes convexes, l'inégalité (2.40) est vérifiée s'il existe une solution aux LMI proposées dans le théorème 2.2. ■

Remarque 2.5

De même que pour le théorème 2.1, les conditions présentées au théorème 2.2 tiennent compte du schéma de relaxation proposé par (Mozelli & al., 2009). Notons également dans ce cas, que des conditions LMI ne tenant pas compte de ce schéma de relaxation, dans la mesure où il ne nous est pas encore connu, ont été publiées dans (Jabri & al., 2009b, Jabri & al., 2009c). Ces dernières peuvent être déduites directement du théorème 2.2 en considérant :

$$\Gamma_{(1,1)} = \left(X_{i3}^{ks} \right)^T + X_{i3}^{ks} - (N-1) \left(\sum_{s=1}^{r_i-1} \omega_i^s (X_{i1}^{js} - X_{i1}^{j_{r_i}}) + \sum_{j=1}^{l_i-1} \lambda_i^j (X_{i1}^{js} - X_{i1}^{l_i^s}) \right)$$

et en remplaçant les conditions (2.28) et (2.29) respectivement par $X_{i1}^{js} - X_{i1}^{l_i^s} > 0$ et $X_{i1}^{js} - X_{i1}^{j_{r_i}} > 0$.

2.3.2.1. Exemple numérique

Considérons un système non linéaire interconnecté composé de trois descripteurs TS S_1 , S_2 et S_3 donnés par :

- $S_1 : \left| \sum_{j=1}^2 v_1^j(x_1(t)) E_1^j \dot{x}_1(t) = \sum_{k=1}^2 h_1^k(x_1(t)) \{ A_1^k x_1(t) + B_1^k u_1(t) + F_{12}^k x_2(t) + F_{13}^k x_3(t) \} \right. \quad (2.41)$

avec $E_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $E_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ les matrices de la partie gauche, $A_1^1 = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ -6 & 0.1 \end{bmatrix}$,

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1^1 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \quad B_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \quad F_{12}^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad F_{12}^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$F_{13}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_{13}^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{les matrices de la partie droite et}$$

$$v_1^1(x_1(t)) = \left(\frac{1 - \cos(x_{12})}{2} \right), \quad v_1^2(x_1(t)) = \left(\frac{1 + \cos(x_{12})}{2} \right), \quad h_1^1(x_1(t)) = \sin^2(x_{11}(t)) \quad \text{et}$$

$h_1^2(x_1(t)) = \cos^2(x_{11}(t))$ sont les fonctions d'appartenance.

- $S_2 : \left| \sum_{j=1}^2 v_2^j(x_2(t)) E_2^j \dot{x}_2(t) = \sum_{k=1}^2 h_2^k(x_2(t)) \{ A_2^k x_2(t) + B_2^k u_2(t) + F_{21}^k x_1(t) + F_{23}^k x_3(t) \} \right. \quad (2.42)$

avec $E_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$ et $E_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ les matrices de la partie gauche, $A_2^1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
 $A_2^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B_2^1 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ b \end{bmatrix}$, $B_2^2 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.8 \end{bmatrix}$, $F_{21}^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$, $F_{21}^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$,
 $F_{23}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$, $F_{23}^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ les matrices de la partie droite et
 $v_2^1(x_2(t)) = \cos^2(x_{21}(t))$, $v_2^2(x_2(t)) = \sin^2(x_{21}(t))$, $h_2^1(x_2(t)) = \sin^2(x_{21}(t))$,
 $h_2^2(x_2(t)) = \cos^2(x_{21}(t))$ les fonctions d'appartenance.

- $S_3 : \left\{ \sum_{j=1}^2 v_3^j(x_3(t)) E_3^j \dot{x}_3(t) = \sum_{k=1}^2 h_3^k(x_3(t)) \{ A_3^k x_3(t) + B_3^k u_3(t) + F_{31}^k x_1(t) + F_{32}^k x_2(t) \} \right.$ (2.43)

avec $E_3^1 = \begin{bmatrix} 2 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $E_3^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ les matrices de la partie gauche, $A_3^1 = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}$,
 $A_3^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.2 & -2 \end{bmatrix}$, $B_3^1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$, $B_3^2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix}$, $F_{31}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$, $F_{31}^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$,
 $F_{32}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $F_{32}^2 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ les matrices de la partie droite et
 $v_3^1(x_3(t)) = \frac{(1 - \cos^2(x_{31}(t)))}{2}$, $v_3^2(x_3(t)) = \frac{(1 - \cos(x_{32}(t)))}{2}$, $h_3^1(x_3(t)) = \sin^2(x_{31}(t))$ et
 $h_3^2(x_3(t)) = \cos^2(x_{31}(t))$ les fonctions d'appartenance.

Remarque 2.6

Les scalaires a et b sont introduits dans les éléments des matrices A_3^1 et B_2^1 afin de proposer une comparaison du conservatisme des conditions du théorème 2.2 au regard des conditions proposées dans (Jabri & al., 2009b), cf. remarque 2.5. A l'aide de la *LMI Toolbox* de Matlab, nous avons testé la faisabilité des deux approches de synthèse de lois de commande décentralisées non quadratique, en variant les valeurs de a et b respectivement dans les intervalles $[-0.89 \quad -0.75]$ et $[0.3 \quad 1]$. Pour ce faire, les bornes des fonctions d'appartenance ont été choisies égales à -2 . Le domaine de faisabilité de chaque approche est présenté dans la figure 2.4. Nous remarquons que le domaine de faisabilité de l'approche présentée par le théorème 2.2 est plus large que le domaine de l'approche (Jabri & al., 2009b). Ceci confirme la réduction du conservatisme apportée par les conditions du théorème 2.2.

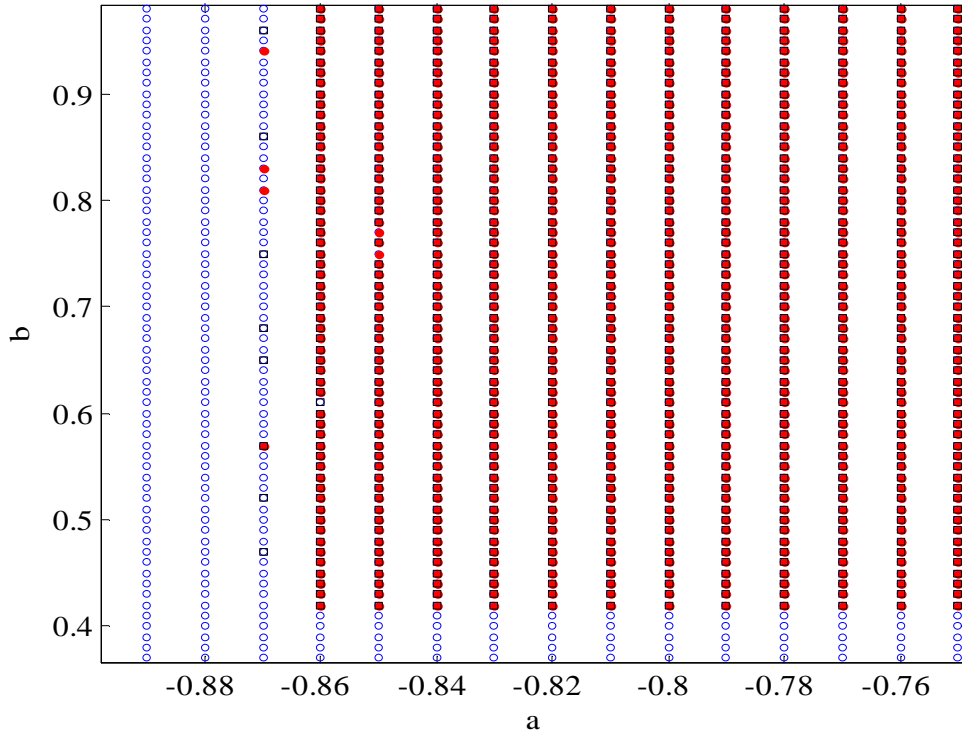


Figure.2.4. Comparaison des domaines de faisabilité :
théorème 2.2 (°) vs (Jabri & al., 2009b) (■).

L'objectif est maintenant de tester l'efficacité de l'approche non quadratique proposée dans le théorème 2.2. En effet, cette approche permet de synthétiser un contrôleur décentralisé capable de stabiliser l'ensemble des descripteurs interconnectés TS et de minimiser l'effet des interconnexions entre les sous-systèmes en se basant sur le critère H_∞ (2.26). Dans cet exemple, le contrôleur est composé de trois lois de commande non PDC locales de la forme (2.2). Les matrices de gains et les variables de décisions sont obtenues en résolvant les conditions du théorème 2.2 à l'aide de l'outil *LMI Toolbox* de *Matlab* pour $a = -0,7$ et $b = 0,4$. De plus, les bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance ont été fixées à -2 . Le résultat obtenu est donné par les matrices de gains suivantes :

- $K_1^{11} = [1.09 \quad -0.43]$, $K_1^{12} = [1.1 \quad -0.44]$, $K_1^{21} = [1.23 \quad -0.39]$ et $K_1^{22} = [1.27 \quad -0.37]$,
 $X_{11}^{11} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.01 \\ 0.01 & 0.46 \end{bmatrix}$, $X_{11}^{12} = \begin{bmatrix} 0.23 & 0.01 \\ 0.01 & 0.42 \end{bmatrix}$, $X_{11}^{21} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.06 \\ 0.06 & 0.43 \end{bmatrix}$ et $X_{11}^{22} = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.06 \\ 0.06 & 0.48 \end{bmatrix}$

constituent le 1^{er} contrôleur local.

- $K_2^{11} = [-1.66 \ -0.96]$, $K_2^{12} = [-1.65 \ -1.02]$, $K_2^{21} = [-1.18 \ -0.92]$ et $K_2^{22} = [-1.14 \ -0.89]$,

$$X_{21}^{11} = \begin{bmatrix} 0.39 & -0.02 \\ -0.02 & 0.53 \end{bmatrix}, \quad X_{21}^{12} = \begin{bmatrix} 0.39 & -0.02 \\ -0.02 & 0.48 \end{bmatrix}, \quad X_{21}^{21} = \begin{bmatrix} 0.42 & -0.03 \\ -0.03 & 0.49 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$X_{21}^{22} = \begin{bmatrix} 0.42 & -0.02 \\ -0.02 & 0.52 \end{bmatrix} \text{ constituent le 2}^{\text{ème}} \text{ contrôleur local.}$$

- $K_3^{11} = [-1.13 \ -5.6]$, $K_3^{12} = [-0.67 \ -8.63]$, $K_3^{21} = [-1.01 \ -5.15]$, $K_3^{22} = [-0.68 \ -9.37]$,

$$X_{31}^{11} = \begin{bmatrix} 0.49 & -0.04 \\ -0.04 & 0.53 \end{bmatrix}, \quad X_{31}^{12} = \begin{bmatrix} 0.52 & -0.07 \\ -0.07 & 0.21 \end{bmatrix}, \quad X_{31}^{21} = \begin{bmatrix} 0.47 & -0.007 \\ -0.007 & 0.64 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$X_{31}^{22} = \begin{bmatrix} 0.52 & -0.15 \\ -0.15 & 0.06 \end{bmatrix} \text{ constituent le 3}^{\text{ème}} \text{ contrôleur local.}$$

Ainsi que les performances H_∞ obtenues :

- $\rho_{11} = 1.58$, $\rho_{12} = 1.09$ pour le premier sous-système,
- $\rho_{21} = 1.73$, $\rho_{23} = 1.09$ pour le deuxième sous-système,
- $\rho_{31} = 1.73$, $\rho_{32} = 1.09$ pour le troisième sous-système.

La figure 2.5 présente la simulation du système global en boucle fermée, pour les états initiaux $x_1(0) = [2 \ 2]^T$, $x_2(0) = [2 \ -7]^T$ et $x_3(0) = [2 \ -7]^T$. Nous constatons que le contrôleur décentralisé non quadratique stabilise l'ensemble des descripteurs interconnectés.

La figure 2.6 montre l'évolution temporelle des dérivées des fonctions d'appartenance liées à chaque sous-système. Celle-ci permet de montrer qu'une fois de plus, les paramètres fixés pour borner les dérivées des fonctions d'appartenance sont vérifiées en simulation.

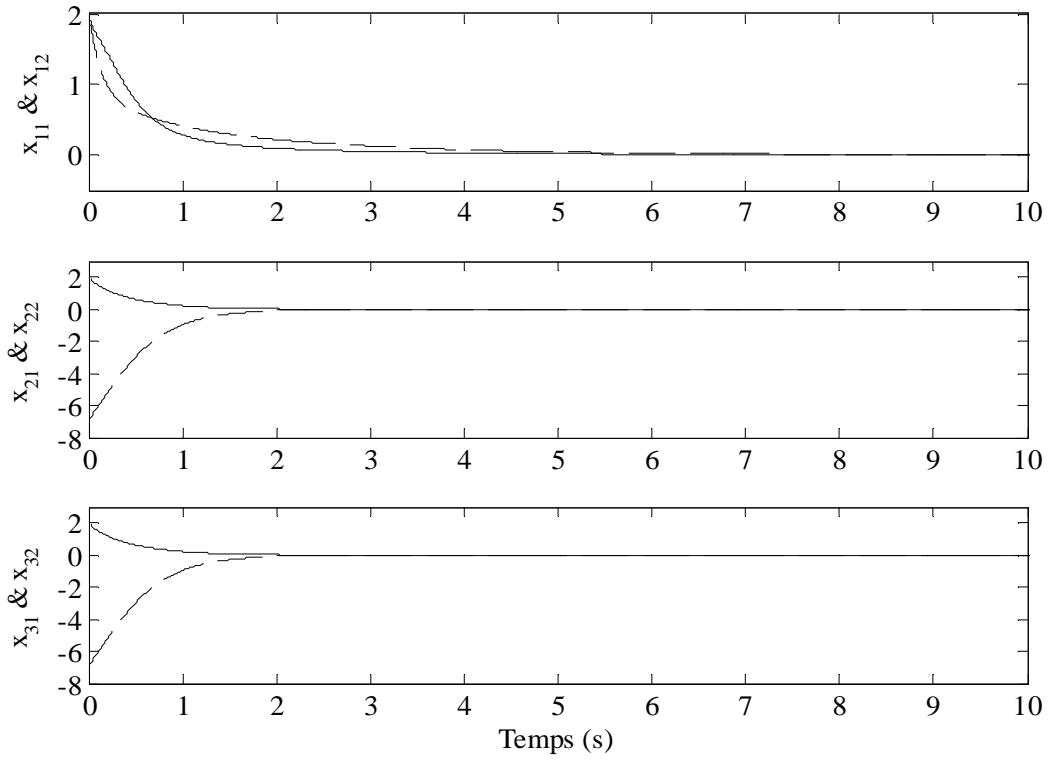


Figure.2.5. Évolution temporelle du vecteur d'état des descripteurs TS interconnectés (x_{11} , x_{21} , x_{31} en pointillés et x_{12} , x_{22} , x_{32} en ligne plein).

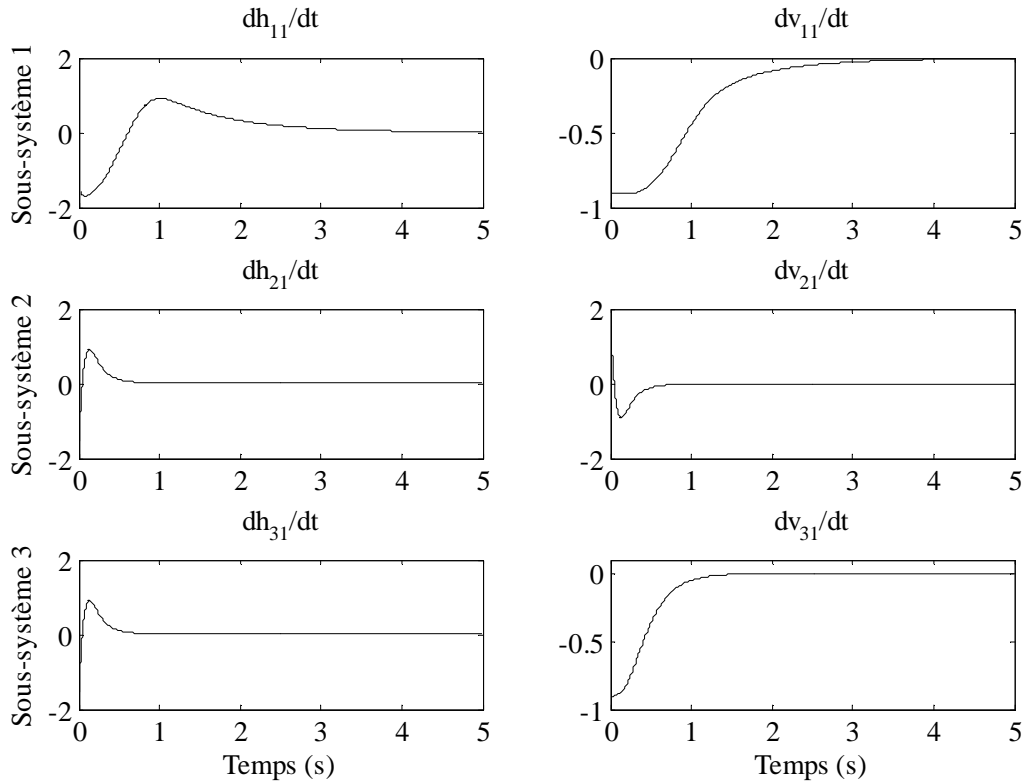


Figure 2.6. Évolution temporelle des dérivées des fonctions d'appartenance.

Afin d'assurer la stabilisation des descripteurs interconnectés TS, le choix d'une commande adéquate est indispensable. Dans cette section, nous avons proposé des approches basées sur une loi de commande décentralisée non-PDC par retour d'état. La synthèse de ces lois de commande nécessite la disponibilité à tout moment de toutes les variables d'état, ce qui n'est pas toujours le cas. Afin de pallier ce problème, d'autres types de commandes, telles que la commande par retour de sortie, peuvent être envisageables. Dans la section suivante, nous proposons une méthodologie de synthèse de lois de commande décentralisées par retour de sortie pour les descripteurs TS interconnectés.

2.4. Stabilisation par retour de sortie

La commande par retour d'état suppose la disponibilité de toutes les variables d'états du système. Cependant, "pour la commande d'un processus réel, particulièrement dans le cas des systèmes de grandes dimensions, cette hypothèse n'est pas toujours réaliste. En effet, il peut être très coûteux voire impossible de mesurer toutes les variables d'état du procédé. De ce fait, seules des informations partielles issues des sorties mesurables peuvent être considérées. Dans ce cadre, plusieurs approches de commandes par retour de sortie pour les systèmes classiques (de petite dimension) ont été proposées :

- Une première approche de commande par retour de sortie consiste à introduire un observateur permettant d'obtenir une estimation complète de l'état sur la base de la mesure des variables d'entrée et de sortie du système (Tanaka & Wang, 2001 ; Yoneyama & al., 2001 ; Mansouri & al., 2009). Dans ce cas, une loi de commande par retour d'état estimé peut être employée. Bien que cette méthode soit intéressante dans la pratique, elle entraîne une augmentation du coût de calcul en ligne (temps réel) du fait de la présence de l'observateur.
- D'autres types d'approches consistent à synthétiser des contrôleurs utilisant les seules informations disponibles du vecteur de sortie. Dans ce cadre, deux types de lois de commande peuvent être considérées: la commande par retour de sortie statique (Chadli & al., 2002 ; Kau & al., 2007 ; Bouarar & al., 2009a) et la commande par retour de sortie dynamique (Tanaka & al., 2001 ; Yoneyama & al., 2001 ; Zerar & al., 2008 ; Guelton & al., 2009). La commande par retour de sortie dynamique est souvent utilisée dans le cadre de la commande robuste. Cependant, elle ne permet pas de réduire le coût de calcul dans la mesure où la résolution en ligne d'un système ODE reste nécessaire. De plus, la synthèse de ce type de contrôleur peut être délicate dans le cadre des systèmes de grandes

dimensions. En effet, cela nécessiterait la synthèse d'un contrôleur dynamique d'ordre élevé. A contrario, la commande par retour de sortie statique est considérée parmi les plus faciles à mettre en œuvre en pratique puisque ses gains sont calculés hors ligne et qu'elle ne nécessite aucune résolution d'équation différentielle en ligne (Syrmos & al., 1997 ; Chadli & al., 2002 ; Chang & al., 2004 ; Huang & Nguang, 2007 ; Bouarar & al., 2009a). De ce fait, ce type de lois de commande nous apparaît adéquat pour les systèmes de grandes dimensions.

La synthèse de lois de commande décentralisée par retour de sortie des systèmes linéaires interconnectés a fait l'objet de quelques travaux (Zhu & al., 2007 ; Stanković, 2009). Nous proposons ici d'étudier la stabilisation décentralisée par retour de sortie statique des descripteurs non linéaires (TS) interconnectés. Notons que, dans la majeure partie des travaux dévolus à la synthèse de lois de commande par retour de sortie pour les multi-modèles TS, l'obtention de conditions LMI impose de réaliser des hypothèses de modélisation restrictives (matrice C de l'équation de sortie commune et de rang plein) du fait du couplage entrée-sortie (Chadli & al., 2002 ; Chang & al., 2004 ; Huang & al., 2007). De plus, ces approches ne permettent pas l'obtention de conditions LMI non quadratiques. Afin de palier à ces problèmes, des études récentes ont considéré une réécriture de la dynamique en boucle fermée sous forme d'un système descripteur (Guelton & al. 2009 ; Bouarar & al., 2009a), on parle alors d'approches redondantes. Sur ce même principe, nous proposons ici d'étendre ces conditions à la synthèse non quadratique de lois de commande décentralisées par retour de sortie statique pour les descripteurs TS interconnectés.

2.4.1. Synthèse de contrôleurs non quadratiques par retour de sortie

Afin d'assurer la stabilisation du système global décrit en (2.1), considérons un ensemble de lois de commande non-PDC par retour de sortie statique décentralisées donné par :

Pour $i = 1, \dots, N$:

$$u_i(t) = \left(\sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{r_i} v_i^j(z_i) h_i^s(z_i) K_i^{js} \right) \left(\sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{r_i} v_i^j(z_i) h_i^s(z_i) W_{11i}^{js} \right)^{-1} y_i(t) \quad (2.44)$$

où K_i^{js} et W_{11i}^{js} sont les matrices de gain à synthétiser.

Afin de faciliter l'obtention de conditions LMI, nous nous basons sur la redondance analytique des descripteurs telle que proposée dans (Guelton & al., 2009 ; Bouarar & al.,

2009a). L'idée est d'introduire au sein des équations statiques du système (équation de sortie et loi de commande) des dynamiques virtuelles afin d'exprimer la dynamique en boucle fermée sous forme des descripteurs. Pour ce faire, on réécrit l'équation de sortie de (2.1) et les lois de commande (2.44), telles que :

Pour $i = 1, \dots, N$:

$$0 = -y_i(t) + C_i^h x_i(t) + D_i^h u_i(t) \quad (2.45)$$

et

$$0 = -u_i(t) + (K_i^{hv})(W_{11i}^{hv})^{-1} y_i(t) \quad (2.46)$$

En considérant (2.1), (2.45) et (2.46), la dynamique en boucle fermée peut être exprimée sous la forme d'un descripteur avec les vecteurs d'états augmentés

$$\dot{\tilde{x}}_i = \begin{bmatrix} x_i^T & \dot{x}_i^T & y_i^T & u_i^T \end{bmatrix}^T, \text{ telle que :}$$

Pour $i = 1, \dots, N$:

$$\tilde{E}_i \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{G}_i^{hvh} \tilde{x}_i + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tilde{F}_i^h \tilde{x}_\alpha \quad (2.47)$$

$$\text{où } \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{F}_{i\alpha}^h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{i\alpha}^h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{G}_i^{hvh} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ A_i^h & -E_i^v & 0 & B_i^h \\ C_i^h & 0 & -I & D_i^h \\ 0 & 0 & K_i^{hv} (W_{11i}^{hv})^{-1} & -I \end{bmatrix}.$$

L'objectif est maintenant de proposer une méthodologie de synthèse des gains K_i^{hv} et W_{11i}^{hv} du contrôleur décentralisé par retour de sortie assurant la stabilité de la dynamique en boucle fermée exprimée par (2.47). Le résultat est résumé dans le théorème suivant.

Théorème 2.3 (Jabri & al. 2011a)

Supposons que, pour tous $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, l_i$ et $s = 1, \dots, r_i$, $\dot{h}_i^s(z(t)) \geq \bar{\omega}_i^s$ et $\dot{v}_i^j(z(t)) \geq \lambda_i^j$. L'ensemble S des N descripteurs TS interconnectés S_i décrits par (2.1) est globalement asymptotiquement stabilisé en boucle fermée via le réseau de N lois de

Preuve

Soit la fonction candidate multiple de Lyapunov:

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^N V_i(x_i(t)) = \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^T \tilde{E}_i (\tilde{W}_i^{hhv})^{-1} \tilde{x}_i \geq 0 \quad (2.49)$$

avec la condition de symétrie :

$$\tilde{E}_i (\tilde{W}_i^{hhv})^{-1} = (\tilde{W}_i^{hhv})^{-T} \tilde{E}_i \geq 0 \quad (2.50)$$

qui conduit à la structuration de la matrice de Lyapunov, selon la taille des vecteurs d'états

augmentés $\dot{\tilde{x}}_i = \begin{bmatrix} x_i^T & \dot{x}_i^T & y_i^T & u_i^T \end{bmatrix}^T$, telle que :

$$\tilde{W}_i^{hhv} = \begin{bmatrix} W_{1i}^{hv} & 0 & 0 & 0 \\ W_{5i}^{hh} & W_{6i}^{hh} & W_{7i}^{hh} & W_{8i}^{hh} \\ W_{9i}^{hh} & W_{10i}^{hh} & W_{11i}^{hh} & W_{12i}^{hh} \\ W_{13i}^{hv} & W_{14i}^{hv} & W_{15i}^{hv} & W_{16i}^{hv} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

avec $(W_{1i}^{hv})^T = W_{1i}^{hv} > 0$.

Le système (2.47) est stable en boucle fermée, si:

$$\sum_{i=1}^N \left(\dot{\tilde{x}}_i^T \tilde{E}_i (\tilde{W}_i^{hhv})^{-1} \tilde{x}_i + \tilde{x}_i^T \tilde{E}_i (\tilde{W}_i^{hhv})^{-1} \dot{\tilde{x}}_i + \tilde{x}_i^T \tilde{E}_i (\dot{\tilde{W}}_i^{hhv})^{-1} \tilde{x}_i \right) < 0 \quad (2.52)$$

En substituant l'équation (2.47) dans (2.52), l'inégalité (2.52) devient:

$$\sum_{i=1}^N \left(\tilde{x}_i^T \left((\tilde{G}_i^{hhv})^T (\tilde{W}_i^{hhv})^{-1} + (\tilde{W}_i^{hhv})^{-T} \tilde{G}_i^{hhv} + \tilde{E}_i (\dot{\tilde{W}}_i^{hhv})^{-1} \right) \tilde{x}_i \right. \\ \left. + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tilde{x}_\alpha^T (\tilde{F}_i^h)^T (\tilde{W}_i^{hhv})^{-1} \tilde{x}_i + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tilde{x}_i^T (\tilde{W}_i^{hhv})^{-T} \tilde{F}_i^h \tilde{x}_\alpha \right) < 0 \quad (2.53)$$

De même que pour la preuve du théorème 2.1, on s'intéresse, dans un premier temps, à la majoration des interconnexions entre les sous-systèmes afin de faciliter l'obtention des conditions de stabilité en termes de LMI.

En utilisant le lemme A.2 (Annexe A), l'inégalité (2.53) est vérifiée si :

$$\sum_{i=1}^N \left(\tilde{x}_i^T \left((\tilde{G}_i^{hhv})^T (\tilde{W}_i^{hhv})^{-1} + (\tilde{W}_i^{hhv})^{-T} \tilde{G}_i^{hhv} + \tilde{E}_i (\dot{\tilde{W}}_i^{hhv})^{-1} \right) \tilde{x}_i \right) \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\tau_{i\alpha} \tilde{x}_i^T (\tilde{W}_i^{hhv})^{-T} \tilde{F}_i^h (\tilde{F}_i^h)^T (\tilde{W}_i^{hhv})^{-1} \tilde{x}_i + \tau_{\alpha i}^{-1} \tilde{x}_\alpha^T \tilde{x}_\alpha \right) < 0 \quad (2.54)$$

Rappelons que $\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha}^{-1} \tilde{x}_\alpha^T \tilde{x}_\alpha = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{\alpha i} \tilde{x}_i^T \tilde{x}_i$, l'inégalité (2.54) est vérifiée $\forall \tilde{x}_i$ si:

Pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\left(\tilde{G}_i^{hhv} \right)^T \left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^{-1} + \left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^{-T} \tilde{G}_i^{hhv} + \tilde{E}_i \left(\dot{\tilde{W}}_i^{hhv} \right)^{-1} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\tau_{i\alpha} \left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^{-T} \tilde{F}_{i\alpha}^h \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^{-1} + \tau_{\alpha i}^{-1} I \right) < 0 \quad (2.55)$$

En multipliant (2.55) à droite et à gauche respectivement par $\left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^T$ et \tilde{W}_i^{hhv} , on obtient :

Pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^T \left(\tilde{G}_i^{hhv} \right)^T + \tilde{G}_i^{hhv} \tilde{W}_i^{hhv} + \tilde{E}_i \left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^T \left(\dot{\tilde{W}}_i^{hhv} \right)^{-1} \tilde{W}_i^{hhv} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\tau_{i\alpha} \tilde{F}_{i\alpha}^h \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \right) + \left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^T \left(\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{\alpha i}^{-1} \right) \tilde{W}_i^{hhv} < 0 \quad (2.56)$$

Rappelons que $-\overline{\left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^{-1}} = \left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^{-1} \dot{\tilde{W}}_i^{hhv} \left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^{-1}$ en appliquant maintenant le complément de Schur, l'inégalité (2.56) devient :

Pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} \psi_i^{hhv} & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (*) \\ \hline \tilde{W}_i^{hhv} & -\tau_{1i} I & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & -\tau_{2i} I & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -\tau_{i-1i} I & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & -\tau_{i+1i} I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline \tilde{W}_i^{hhv} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\tau_{ni} I \end{array} \right) < 0 \quad (2.57)$$

avec

$$\psi_i^{hhv} = \left(\tilde{W}_i^{hhv} \right)^T \left(\tilde{G}_i^{hhv} \right)^T + \tilde{G}_i^{hhv} \left(\tilde{W}_i^{hhv} \right) - \tilde{E}_i \left(\dot{\tilde{W}}_i^{hhv} \right) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} \tilde{F}_{i\alpha}^h \left(\tilde{F}_{i\alpha}^h \right)^T \quad (2.58)$$

En utilisant les matrices définies en (2.47) et (2.50), l'équation (2.58) peut être écrite sous la forme étendue:

$$\psi_i^{hhv} = \left[\begin{array}{cccc} \left(W_{5i}^{hh} \right)^T + W_{5i}^{hh} - \dot{W}_{1i}^{hv} & & & (*) \\ \left(W_{6i}^{hh} \right)^T + A_i^h W_{1i}^{hv} - E_i^v W_{5i}^{hh} + B_i^h W_{13i}^{hv} & \Pi_{22} & & \\ \left(W_{7i}^{hh} \right)^T + C_i^h W_{1i}^{hv} - W_{9i}^{hh} + D_i^h W_{13i}^{hv} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & \\ & \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{43} \quad \Pi_{44} \end{array} \right] \quad (2.59)$$

$$\text{avec } \Pi_{22} = -\left(W_{6i}^{hh}\right)^T \left(E_i^v\right)^T + \left(W_{14i}^{hv}\right)^T \left(B_i^h\right)^T - E_i^v W_{6i}^{hh} + B_i^h W_{14i}^{hv} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} F_{i\alpha}^h \left(F_{i\alpha}^h\right)^T,$$

$$\Pi_{32} = -\left(W_{7i}^{hh}\right)^T \left(E_i^v\right)^T + \left(W_{15i}^{hv}\right)^T \left(B_i^h\right)^T - W_{10i}^{hh} + D_i^h W_{14i}^{hv},$$

$$\Pi_{33} = -\left(W_{11i}^{hv}\right)^T - W_{11i}^{hv} + \left(W_{15i}^{hv}\right)^T \left(D_i^h\right)^T + D_i^h W_{15i}^{hv},$$

$$\Pi_{41} = \left(W_{8i}^{hh}\right)^T + K_i^{hv} \left(W_{11i}^{hv}\right)^{-1} W_{9i}^{hh} - W_{13i}^{hv}$$

$$\Pi_{42} = -\left(W_{8i}^{hh}\right)^T \left(E_i^v\right)^T + \left(W_{16i}^{hv}\right)^T \left(B_i^h\right)^T + K_i^{hv} \left(W_{11i}^{hv}\right)^{-1} W_{10i}^{hh} - W_{14i}^{hv},$$

$$\Pi_{43} = -\left(W_{12i}^{hh}\right)^T + \left(W_{16i}^{hv}\right)^T \left(D_i^h\right)^T + K_i^{hv} \left(W_{11i}^{hv}\right)^{-1} W_{11i}^{hv} - W_{15i}^{hv}$$

$$\text{et } \Pi_{44} = \left(W_{12i}^{hv}\right)^T \left(W_{11i}^{hv}\right)^{-T} \left(K_i^{hv}\right)^T + K_i^{hv} \left(W_{11i}^{hv}\right)^{-1} W_{12i}^{hh} - \left(W_{16i}^{hv}\right)^T - W_{16i}^{hv}.$$

Notons qu'il existe, dans les expressions Π_{41} , Π_{42} , Π_{43} et Π_{44} , des termes non linéaires liées aux matrices W_{9i}^{hh} , W_{10i}^{hh} , W_{11i}^{hv} et W_{12i}^{hh} qui sont des variables de décisions libres. Afin d'aboutir à des conditions de stabilité en termes de LMI, nous proposons de choisir $W_{9i}^{hh} = 0$, $W_{10i}^{hh} = 0$ et $W_{12i}^{hh} = 0$.

Dans ce cas, la matrice de Lyapunov devient :

$$\tilde{W}_i^{hvh} = \begin{bmatrix} W_{1i}^{hv} & 0 & 0 & 0 \\ W_{5i}^{hh} & W_{6i}^{hh} & W_{7i}^{hh} & W_{8i}^{hh} \\ 0 & 0 & W_{11i}^{hv} & 0 \\ W_{13i}^{hv} & W_{14i}^{hv} & W_{15i}^{hv} & W_{16i}^{hv} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Concentrons nous maintenant sur le terme introduisant des fonctions d'appartenance dans l'équation (2.59). Supposons que, pour $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, l_i$ et $s = 1, \dots, r_i$, les scalaires λ_i^j et ϖ_i^s sont les bornes inférieures respectivement de $\dot{v}_i^j(z)$ et $\dot{h}_i^s(z)$. De manière similaire aux preuves des théorèmes précédents, en se basant sur les propriétés de sommes convexes, le terme \dot{W}_{1i}^{hv} peut être minoré par

$$\dot{W}_{1i}^{hv} \geq \Phi_{i1}^{vh} = \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{r_i} v_i^j h_i^s \left(\sum_{s=1}^{r_i-1} \varpi_i^s (W_{i1}^{js} - \Omega_{i1}) + \sum_{j=1}^{l_i-1} \lambda_i^j (W_{i1}^{js} - \Xi_{i1}) \right) \quad (2.61)$$

où Ω_{i1} et Ξ_{i1} sont des matrices de relaxation vérifiant $W_{i1}^{js} - \Omega_{i1} > 0$ et $W_{i1}^{js} - \Xi_{i1} > 0$ (Mozelli & al. 2009).

Enfin, (2.58) est vérifiée s'il existe une solution aux conditions LMI du théorème 2.4. ■

2.4.2. Exemple numérique

Considérons deux descripteurs TS interconnectés S_1 et S_2 donnés par :

$$\bullet \quad S_1 : \begin{cases} \sum_{j=1}^2 v_1^j(x_1(t)) E_1^j \dot{x}_1(t) = \sum_{k=1}^2 h_1^k(x_1(t)) (A_1^k x_1(t) + B_1^k u_1(t) + F_{12}^k x_2(t)) \\ y_1(t) = \sum_{k=1}^2 h_1^k(z_1(t)) (C_1^k x_1(t) + D_1^k u_1(t)) \end{cases} \quad (2.62)$$

où $E_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $E_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $A_1^2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B_1^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix}$, $B_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
 $F_{12}^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.01 \end{bmatrix}$, $F_{12}^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.02 & 0.01 \end{bmatrix}$, $C_1^1 = [0.01 \quad -0.01]$, $C_1^2 = [0.05 \quad 0.01]$, $D_1^1 = 0.04$,
 $D_1^2 = 0.06$, $v_1^1(x_1(t)) = \sin^2(y_{11})$, $v_1^2(x_1(t)) = \cos^2(y_{11})$, $h_1^1(x_1(t)) = \cos^2(y_{11}(t))$ et
 $h_1^2(x_1(t)) = \sin^2(y_{11}(t))$.

$$\bullet \quad S_2 : \begin{cases} \sum_{j=1}^2 v_2^j(x_2(t)) E_2^j \dot{x}_2(t) = \sum_{k=1}^2 h_2^k(x_2(t)) (A_2^k x_2(t) + B_2^k u_2(t) + F_{21}^k x_1(t)) \\ y_2(t) = \sum_{k=1}^2 h_2^k(z_2(t)) (C_2^k x_2(t) + D_2^k u_2(t)) \end{cases} \quad (2.63)$$

où $E_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $A_2^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B_2^1 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 1 \end{bmatrix}$,
 $B_2^2 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.8 \end{bmatrix}$, $C_2^1 = [0.01 \quad 0.01]$, $C_2^2 = [0.01 \quad 0.02]$, $D_2^1 = 0.02$, $D_2^2 = 0.01$,
 $F_{21}^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.03 & 0.01 \end{bmatrix}$ et $F_{21}^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.01 \end{bmatrix}$ $v_2^1(x_2(t)) = \cos^2(y_{21}(t))$,
 $v_2^2(x_2(t)) = \sin^2(y_{21}(t))$, $h_2^1(x_2(t)) = \sin^2(y_{21}(t))$ et $h_2^2(x_2(t)) = \cos^2(y_{21}(t))$.

Afin d'implémenter le contrôleur décentralisé non-PDC par retour de sortie, les conditions de stabilité développées dans le théorème 2.3 ont été résolues à l'aide de *Matlab LMI toolbox* en considérant que les bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance sont égales à (-1.5) . Le résultat obtenu conduit à la synthèse de deux contrôleurs locaux non-PDC par retour de sortie statique de la forme (2.44). Les résultats sont donnés par :

- $K_1^{11} = 6.5212$, $K_1^{12} = 1.9346$, $K_1^{21} = 4.3395$, $K_1^{22} = 0.4142$, $W_{111}^{11} = 19.3895$, $W_{111}^{12} = 8.5683$,
 $W_{111}^{21} = 8.6327$ et $W_{111}^{22} = 7.9659$ pour le 1^{er} contrôleur local.
- $K_2^{11} = -0.5997$, $K_2^{12} = -0.2508$, $K_2^{21} = -0.6354$, $K_2^{22} = -0.2474$, $W_{112}^{11} = 7.829$, $W_{112}^{12} = 7.8339$,
 $W_{112}^{21} = 7.8279$ et $W_{112}^{22} = 7.8338$ pour le 2^{ème} contrôleur local.

La dynamique en boucle fermée de chaque sous-système ainsi que l'évolution des lois de commande sont données respectivement par les figures 2.7 et 2.8 (simulées respectivement avec les conditions initiales $x_1(0) = [-1 \ 3]^T$ et $x_2(0) = [-2 \ 1]^T$). Ces résultats montrent l'efficacité de l'approche proposée dans la mesure où les descripteurs sont correctement stabilisés par l'ensemble des deux lois de commande décentralisées par retour de sortie. De plus, on constate à la figure 2.9 que les hypothèses réalisées sur la dynamique des fonctions d'appartenance (\dot{v}_i^j et $\dot{h}_i^k < -1.5$) sont vérifiées en simulations.

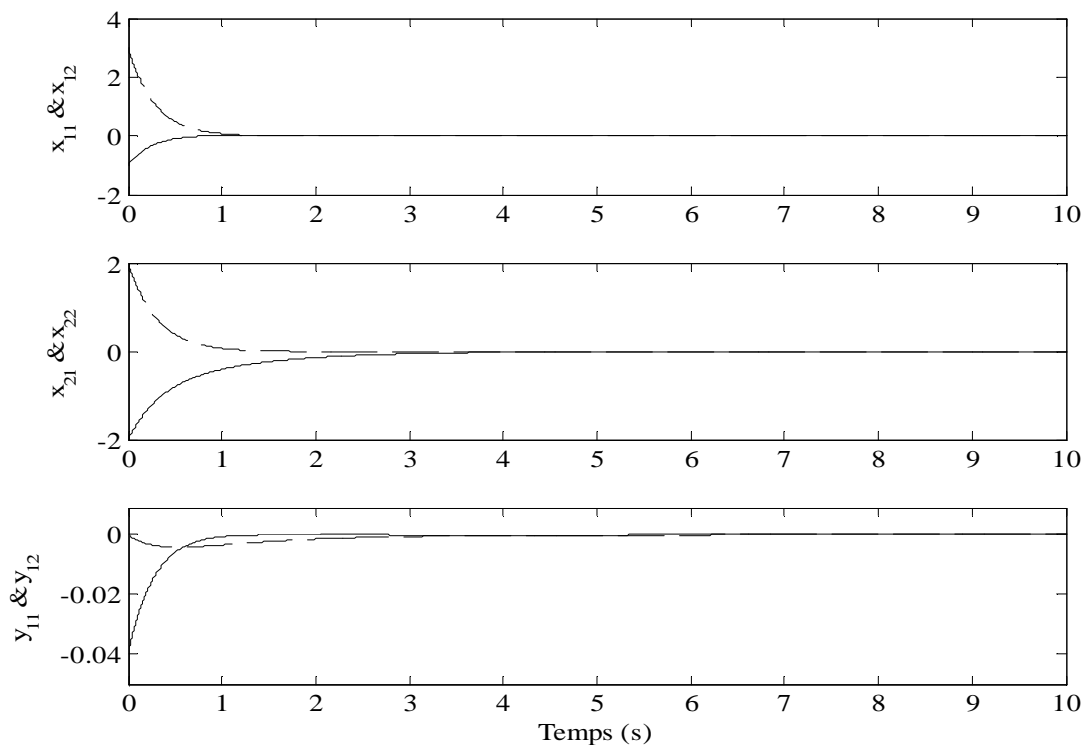


Figure.2.7. Réponses du descripteur global TS interconnecté en boucle fermée (x_{11}, x_{21}) pointillé, (x_{12}, x_{22}) continu.

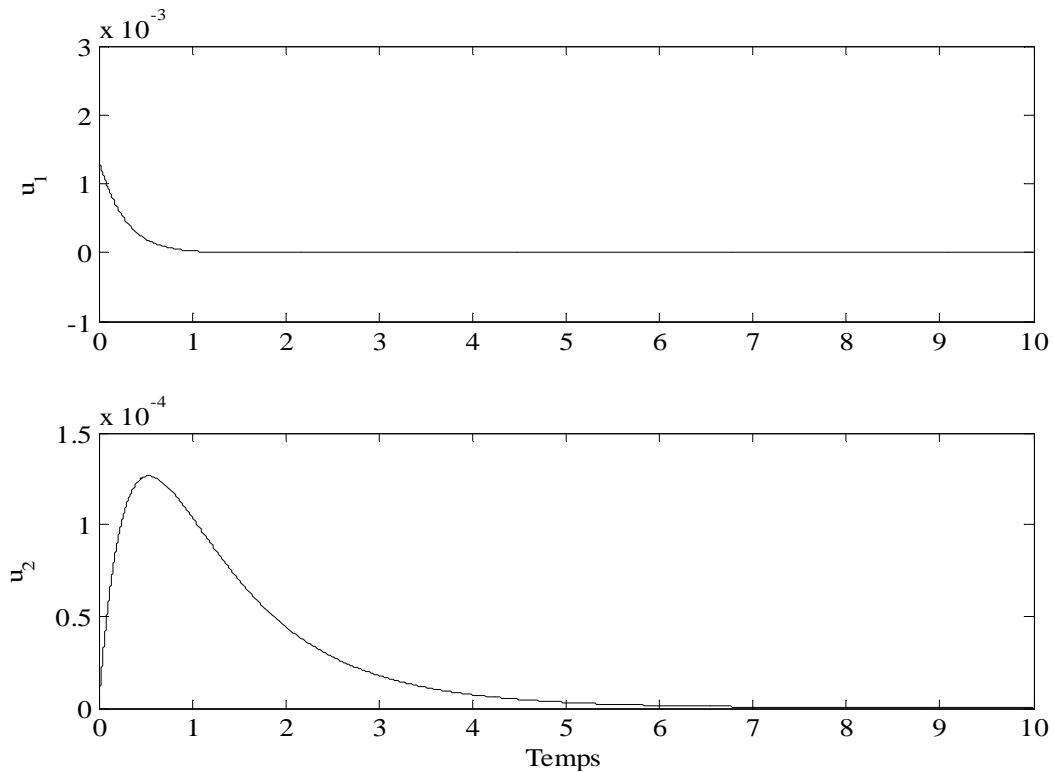


Figure .2.8. Évolution des lois de commande.

Remarque 2.7

La synthèse de lois de commande par retour de sortie statique décentralisée des descripteurs TS interconnectés a été étudiée dans cette section. Notons que dans le but d'améliorer la robustesse de la loi de commande proposée vis-à-vis des interconnexions entre les sous-systèmes, un critère H_∞ peut être considéré de manière similaire aux résultats en commande par retour d'état proposés à la section 2.3. Cependant, à ce jour, ce travail n'a pas été réalisé pour la classe de descripteurs TS interconnectés. En revanche, une approche préliminaire, présentée dans l'*Annexe B*, a été établie pour stabiliser un ensemble de systèmes TS standards interconnectés tout en atténuant l'influence des interconnexions entre les systèmes (Guelton & al. 2010)

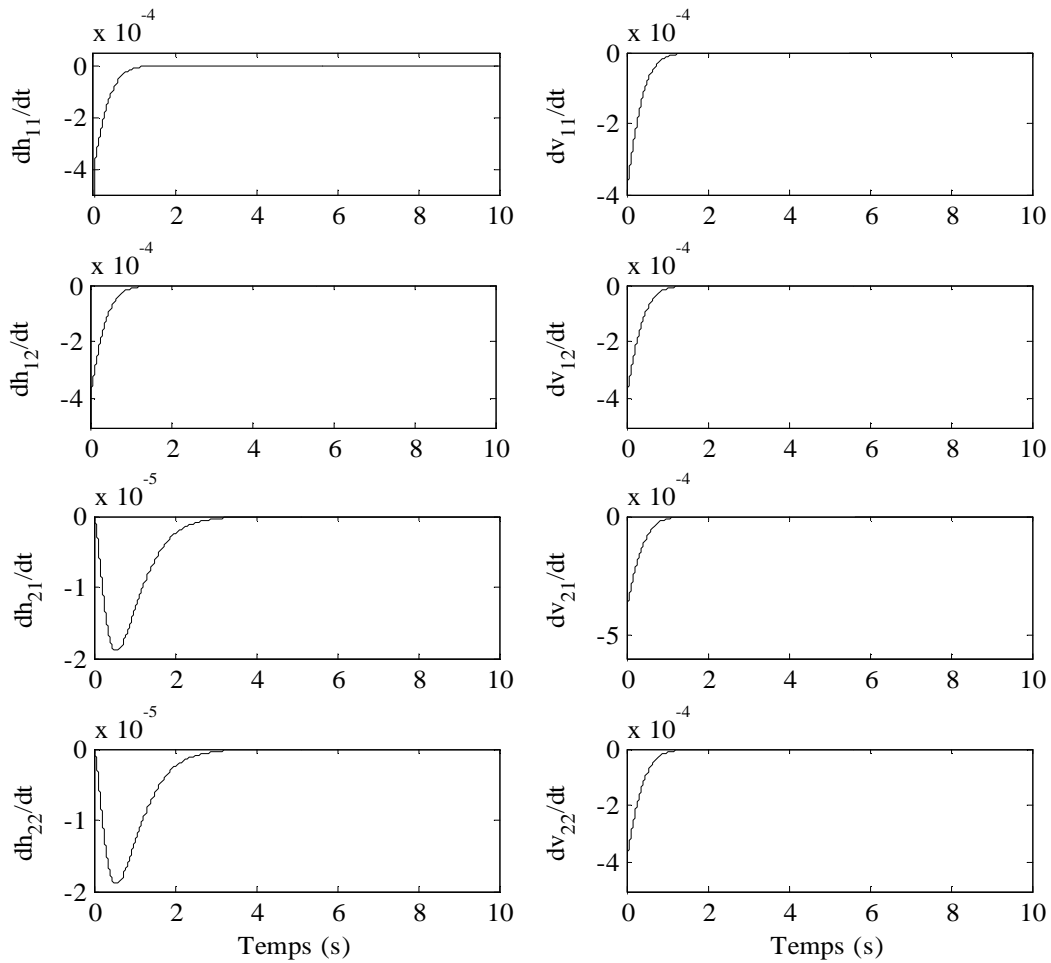


Figure .2.9. Évolution des fonctions d'appartenance.

2.5. Conclusion

La stabilisation décentralisée d'une classe générique de descripteurs TS interconnectés a été abordée dans ce chapitre.

En premier lieu, nous avons étudié la stabilisation des descripteurs interconnectés de type TS en utilisant une loi de commande non-PDC décentralisée par retour d'état. Des conditions de stabilité LMI ont été établies en se basant sur une fonction multiple non quadratique de Lyapunov. Ces approches permettent de stabiliser l'ensemble des descripteurs TS interconnectés en tenant compte de leurs interconnexions. Notons que ces interconnexions influent sur la stabilité du système dans sa globalité. Afin de garantir les performances des contrôleurs locaux, nous avons proposé de minimiser l'effet des interconnexions entre les sous-systèmes par le biais d'un critère H_∞ .

D'autre part, tenant compte du fait qu'il n'est pas toujours possible d'avoir accès à toutes les variables d'état, nous avons proposé de nouvelles conditions de stabilité permettant la synthèse de lois de commande non-PDC par retour de sortie décentralisées. Ces dernières ont été obtenues par le biais d'une expression redondante de la dynamique en boucle fermée.

Rappelons que l'objectif ultime de ces travaux de thèse est de proposer des conditions permettant la synthèse de lois de commande décentralisées pour les systèmes interconnectés non linéaires et hybrides. Afin de parvenir à cet objectif, nous avons proposé dans ce chapitre l'étude des descripteurs non linéaires de grande dimension par le biais d'une modélisation TS. Poursuivant cet objectif, nous proposons dans le chapitre suivant de considérer la stabilisation décentralisée pour la classe de systèmes dynamiques hybrides décrit par un ensemble de systèmes linéaires à commutations interconnectés.

Chapitre 3

Stabilisation de systèmes linéaires interconnectés à commutations

3.1.	Introduction	93
3.2.	Description et commande des systèmes linéaires à commutations interconnectés ..	93
3.2.1.	<i>Discussion sur le choix de la fonction de Lyapunov</i>	96
3.2.2.	<i>Conditions LMI pour la stabilisation décentralisée des systèmes linéaires à commutations interconnectés</i>	100
3.2.3.	<i>Exemple numérique</i>	103
3.3.	Stabilisation décentralisée des descripteurs linéaires à commutations interconnectés	108
3.3.1.	<i>Synthèse LMI de contrôleurs décentralisée pour les descripteurs linéaires à commutations interconnectés</i>	109
3.3.2.	<i>Exemple numérique</i>	114
3.4.	Conclusion.....	119

Stabilité des systèmes linéaires interconnectés à commutations

3.1.Introduction

Nous abordons dans ce chapitre le problème de la synthèse de loi de commande pour la classe de systèmes linéaires interconnectés à commutations de grandes dimensions. Peu de travaux, traitant de cette problématique, ont été proposés dans la littérature. Un premier résultat a été présenté sous forme LMI (Mahmoud & AL-Sunni, 2010). Cependant, dans cette étude, les phénomènes déstabilisants engendrés par les commutations n'ont pas été pris en compte (cf. chapitre 1 section 1.2.3.4). Dans la suite, nous proposons des conditions LMI tenant compte des contraintes dues aux conditions nécessaires de stabilité aux instants de commutation.

Dans un premier temps, nous introduisons la classe des systèmes à commutations interconnectés considérée. Ensuite, notre contribution sur la stabilisation d'un ensemble de systèmes standard linéaires à commutations interconnectés sera développée. Des conditions LMI basées sur l'emploi d'une fonction candidate de Lyapunov multiple seront proposées et discutées afin de réduire le conservatisme (cf. chapitre 1, section 1.4.3). Enfin, dans l'optique de fournir des conditions de synthèse de lois de commande pour une plus large classe de systèmes, les résultats seront étendus au cas des descripteurs linéaires à commutations interconnectés.

3.2.Description et commande des systèmes linéaires à commutations interconnectés

Dans cette partie, nous présentons la classe de systèmes hybrides S de grandes dimensions considérée. Dans la même optique que les travaux présentés au chapitre 2, elle est composée de N systèmes linéaires à commutations interconnectés S_i , illustrée par la figure 3.1.

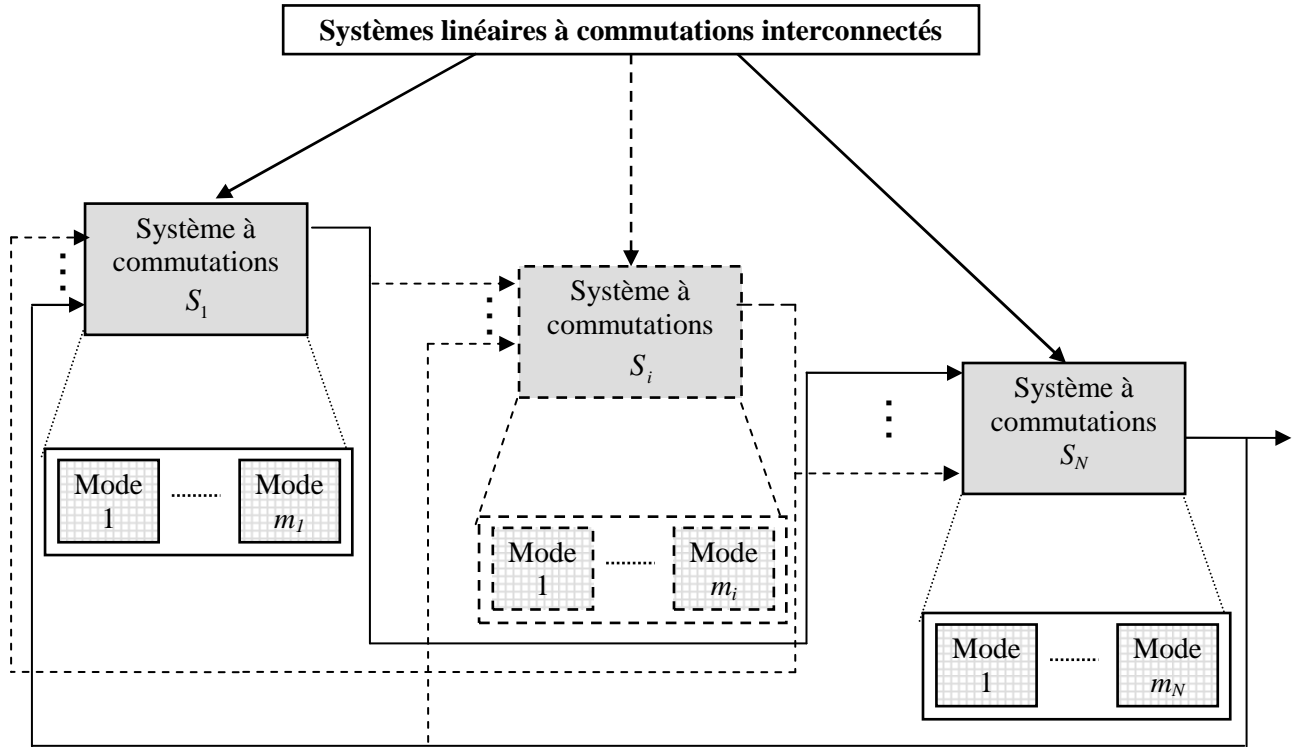


Figure. 3.1. Diagramme de systèmes linéaires à commutations interconnectés.

La dynamique d'un ensemble de systèmes linéaires à commutations interconnectés est décrite par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i}(t) \left(A_{ij_i} x_i(t) + B_{ij_i} u_i(t) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N F_{i\alpha j_i} x_\alpha(t) \right) \quad (3.1)$$

où $x_i(t) \in \mathbb{R}^{\eta_i}$ et $u_i(t) \in \mathbb{R}^{\nu_i}$ sont respectivement les vecteurs d'état et de commande associés au $i^{\text{ème}}$ système linéaire à commutations, $x_\alpha(t) \in \mathbb{R}^{\eta_\alpha}$ est le vecteur d'état du $\alpha^{\text{ème}}$ système avec $\alpha = 1, \dots, N$ et $\alpha \neq i$, $A_{ij_i} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_i}$, $B_{ij_i} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \nu_i}$ et $F_{i\alpha j_i} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_\alpha}$ sont des matrices à coefficients constants. Notons que le terme $F_{i\alpha j_i} x_\alpha(t)$ exprime l'influence du système α sur la dynamique du système i . $\xi_{ij_i}(t)$ représentent les fonctions d'activation du mode de fonctionnement actif du sous-système S_i à l'instant t . Notons que chaque sous-système S_i évolue selon m_i dynamiques indépendamment des autres sous-systèmes, ainsi pour chaque instant t , une seule dynamique (j_i) est active. Rappelons que si le $i^{\text{ème}}$ système est actif dans

le mode l , la fonction d'activation de ce dernier $\xi_{il}(t)$ est égale à 1, sinon, elle est égale à 0, cf. chapitre 1, équation 1.55). Ainsi, pour les systèmes interconnectés, nous avons:

$$\begin{cases} \xi_{ij_i}(t) = 1 & \text{si } j_i = l \\ \xi_{ij_i}(t) = 0 & \text{si } j_i \neq l \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas où les lois de commutation sont supposées arbitraires (stabilité uniforme). C'est-à-dire que nous ne tenons pas compte, pour la synthèse de loi de commande, de séquences de commutations prédéfinies. En effet, dans le cas général des systèmes dynamiques hybrides, il n'est pas toujours possible de prédire le comportement discret (passage d'un mode à l'autre) avant d'avoir synthétisé la boucle fermée (cf. chapitre 1 section 1.4.3.1). Cependant, pour des raisons pratiques d'implémentation des lois de commande, nous supposons que l'ensemble des modes de fonctionnement sont détectables en ligne, c'est-à-dire que les valeurs des fonctions d'activations $\xi_{ij_i}(t)$ sont connues à tout instant.

Remarque 3.1

Soulignons qu'afin de réduire la difficulté d'analyse, certains travaux considèrent des contraintes issues de la connaissance a priori d'une séquence de commutation pour un système donné, on parle alors de stabilité conditionnelle introduisant notamment les notions de temps de séjour (Hamdi, 2010 ; Pettersson, 2006). Ces approches, bien qu'intéressantes, ne seront pas traitées dans cette thèse dans la mesure où elles ne sont pas conciliables avec la notion de stabilité uniforme. Cependant, pour plus d'informations sur la stabilisation conditionnelle décentralisée des systèmes linéaires à commutations interconnectés, le lecteur pourra se référer aux résultats proposés par (Chiou, 2006).

Afin de stabiliser les systèmes linéaires à commutations interconnectés (3.1), nous proposons un ensemble de lois de commande à commutations par retour d'état décentralisées. De manière similaire aux approches développées au cours des chapitres précédents, l'idée est de synthétiser un contrôleur global composé de N contrôleurs locaux à commutation. Dans ce cas, le $i^{\text{ème}}$ contrôleur local permet d'assurer la stabilité du sous-système S_i en tenant compte des interconnexions avec les autres sous-systèmes. Cet ensemble de lois de commande à commutations par retour d'état décentralisées est donné par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$u_i(t) = \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i}(t) K_{ij_i} x_i(t) \quad (3.3)$$

où $K_{ij_i} \in \mathbb{R}^{q_i \times n_i}$ sont les matrices de gains à synthétiser.

Notons que les lois de commande (3.3) se basent sur la même structure de commutations que les sous-systèmes à stabiliser auxquels elles sont associées. En substituant (3.3) dans (3.1), la dynamique du système global en boucle fermée peut être exprimée sous la forme :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i}(t) \left((A_{ij_i} + B_{ij_i} K_{ij_i}) x_i(t) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N F_{i\alpha j_i} x_\alpha(t) \right) \quad (3.4)$$

Il s'agit maintenant, de proposer une méthodologie de synthèse permettant de déterminer les matrices de gains K_{ij_i} qui garantiront la stabilité du système global en boucle fermée (3.4). Dans la suite, avant de présenter les résultats sous la forme LMI, nous estimons qu'une discussion sur le choix des contraintes de stabilité, aux instants de commutations, relatives à l'emploi d'une fonction de Lyapunov multiple s'impose (cf. chapitre 1, remarque 1.8).

3.2.1. Discussion sur le choix de la fonction de Lyapunov

Rappelons que, à notre connaissance, la réécriture directe sous forme LMI des conditions de stabilité aux instants de commutations est délicate (cf. chapitre 1, remarque 1.8). Afin de parvenir à l'obtention de ces conditions pour la stabilisation de la classe des systèmes linéaires à commutations interconnectés (3.1), on considère la fonction candidate de Lyapunov multiple donnée par :

$$V(t, x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i} V_{ij_i}(x_i(t)) \quad (3.5)$$

où $V_{ij_i}(x_i) = x_i^T (X_{ij_i})^{-1} x_i$ et $X_{ij_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$.

La stabilité de la dynamique en boucle fermée (3.4) est garantie si :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_N) \geq 0, \quad (3.6)$$

$$\forall t \neq t_{j_i \rightarrow j_i^+}, \dot{V}(x_1, x_2, \dots, x_N) \leq 0, \quad (3.7)$$

$$\text{pour } t = t_{j_i \rightarrow j_i^+}, V_{j_i^+}(t_i^s) \leq \mu_{j_i, j_i^+} V_{j_i}(t_i^s) \quad (3.8)$$

où $t_{j_i \rightarrow j_i^+}$ représente les instants de commutation de chaque sous système i de son mode j_i au j_i^+ , μ_{j_i, j_i^+} sont des scalaires positifs exprimant dans la fonction de Lyapunov un taux de décroissance d'un mode à l'autre, c'est-à-dire du mode j_i vers le mode j_i^+ .

Rappelons que, pour les systèmes linéaires, des conditions analogues aux inégalités (3.6) et (3.7) suffisent pour garantir la stabilité. Cependant, dans le cas des systèmes à commutations, ces conditions sont insuffisantes à cause de la présence des phénomènes hybrides (Branicky, 1995 ; Liberzon & Morse, 1999). Ainsi, l'ajout de la condition (3.8), assurant la décroissance de la fonction de Lyapunov globale aux instants de commutations, est nécessaire. En effet, en l'absence de cette condition, la stabilité en boucle fermée peut être menacée (cf. chapitre 1, section 1.4.3.2). Cependant, afin d'obtenir des conditions LMI à partir de (3.8), nous proposons d'étudier les trois cas suivants :

- *Premier cas* : On choisi, pour tout i, j_i et j_i^+ , $\mu_{j_i, j_i^+} = 1$, la condition (3.8) est donc restreinte à :

$$V_{j_i^+}(t_{j_i \rightarrow j_i^+}) = V_{j_i}(t_{j_i \rightarrow j_i^+}) \quad (3.9)$$

avec $t_{j_i \rightarrow j_i^+}$ les instants de commutations des sous-systèmes S_i .

Nous retrouvons donc ici le cas quadratique (cf. chapitre 1, section 1.4.3.2) dans la mesure où les fonctions de Lyapunov $V_{j_i^+}$ et V_{j_i} sont égales aux instants de commutation. En effet, ceci implique que les variables de décision $X_i \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_i}$ soient communes quelque soit j_i . Bien entendu, dans ce cas, on perd le bénéfice en termes de réduction de conservatisme due à l'emploi d'une fonction de Lyapunov multiple (3.5).

- *Deuxième cas* : On choisi, pour tout i, j_i et j_i^+ , $\mu_{j_i, j_i^+} < 1$. Dans ce cas, la fonction de Lyapunov obtenue est forcée à avoir un comportement décroissant tout au long de sa trajectoire même aux instants de commutation. Ce point est illustré par la figure 3.3 où

l'allure d'une fonction de Lyapunov multiple est donnée pour un système à commutations composé de deux modes de fonctionnement.

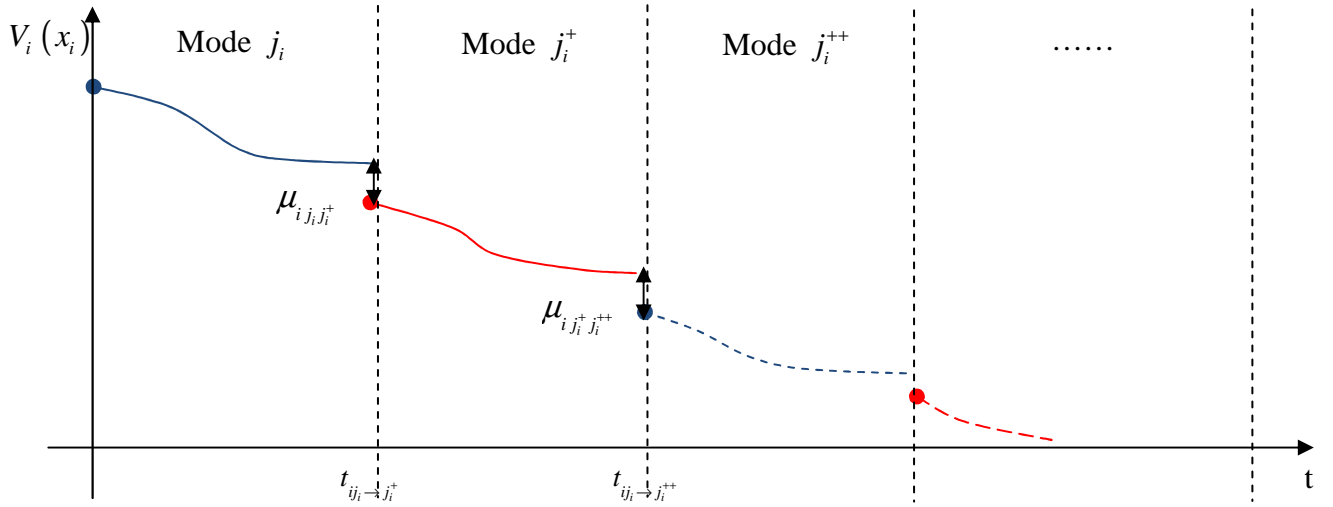


Figure. 3.2. Allure d'une fonction multiple de Lyapunov pour $\mu_{i,j_i,j_i^+} < 1$.

- *Troisième cas* : On considère la condition (3.8) à deux instants de commutations successifs notés respectivement $t_{j_i \rightarrow j_i^+}$ et $t_{j_i^+ \rightarrow j_i^{++}}$, c'est-à-dire :

$$V_{j_i^+}(t_{j_i \rightarrow j_i^+}) \leq \mu_{j_i, j_i^+} V_{j_i}(t_{j_i \rightarrow j_i^+}) \quad (3.10)$$

et

$$V_{j_i^{++}}(t_{j_i^+ \rightarrow j_i^{++}}) \leq \mu_{j_i^+, j_i^{++}} V_{j_i^+}(t_{j_i^+ \rightarrow j_i^{++}}) \quad (3.11)$$

où j_i^{++} dénote le mode atteint à la suite du mode j_i^+ .

Une condition suffisante pour assurer la stabilité globale d'un système à commutation est de considérer que le taux de décroissance résiduel de la fonction de Lyapunov multiple après deux instants de commutations successifs, c'est-à-dire ici le taux résiduel entre les modes j_i et j_i^{++} est inférieurs à 1. Ce point est illustré par l'allure de la fonction de Lyapunov multiple proposée à la figure 3.3. Dans ce cas, une condition suffisante lorsqu'on ne connaît pas à priori la séquence d'activation (stabilité uniforme) est de vérifier, deux à deux, la condition suivante, pour tout $i = 1, \dots, N$, $j_i, j_i^+, j_i^{++} = 1, \dots, m_i$ avec $j_i^+ \neq j_i$ et $j_i^{++} \neq j_i^+$:

$$\mu_{j_i, j_i^+} \mu_{j_i^+, j_i^{++}} \leq 1 \quad (3.12)$$

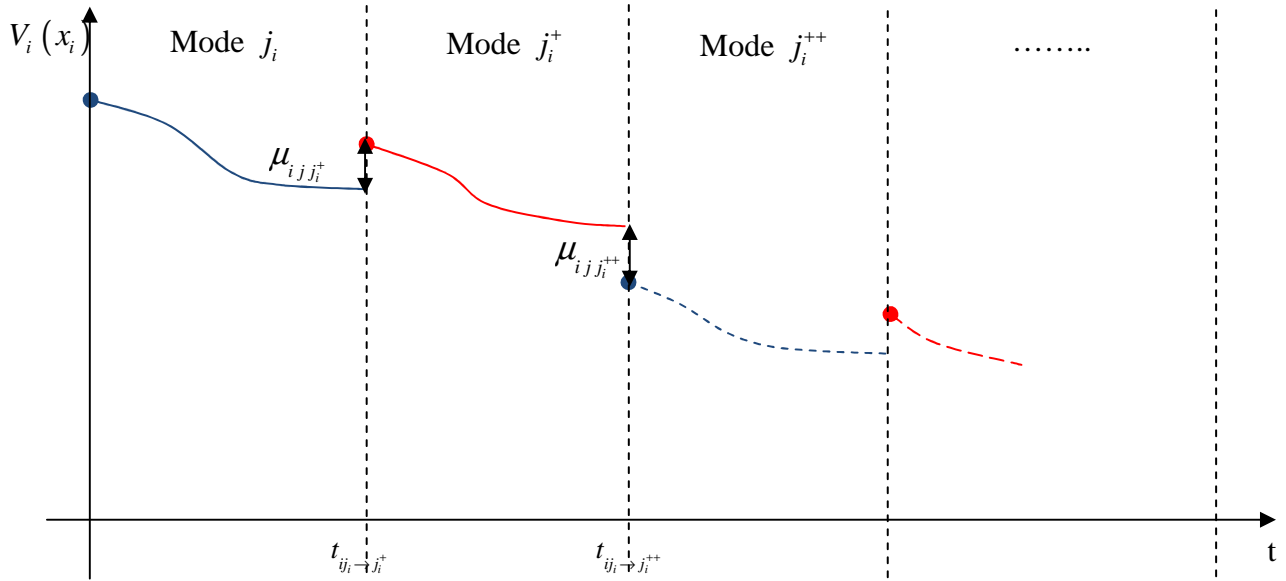


Figure. 3.3. Allure d'une fonction multiple de Lyapunov avec la condition (3.12).

Remarque 3.2

Rappelons que la condition (3.12) est valable dans le cas où l'on ne connaît pas a priori la séquence d'activation. Celle-ci nous permet alors d'obtenir des conditions de stabilité uniforme pour les systèmes à commutations. Néanmoins, un cas plus général au sens de la fonction de Lyapunov peut être considéré si et seulement si la séquence de commutation $\sigma(t)$ est supposée connue. En effet, dans ce cas, on peut considérer que l'ensemble des modes successifs par lequel passe les trajectoires du système conduit à un taux de décroissance résiduel entre le premier mode et le dernier inférieur à 1. Cette condition nécessaire et suffisante peut être exprimée par :

Pour $i = 1, \dots, N$:

$$\prod_{\sigma(t)}^{m_i} \mu_{ij, j_i^+} \leq 1 \quad (3.13)$$

Remarque 3.3

En théorie, parmi les cas présentés ci-dessus, le troisième s'avère le moins conservatif. Néanmoins, du fait du produit entre taux de décroissance, ceux-ci ne pourront être considérés comme des variables de décisions libres au sein des conditions LMI. Dans ce cas, il sera donc nécessaire d'effectuer un choix, à priori des taux de décroissance en respectant les conditions (3.12). A contrario, dans le deuxième cas, qui semble pourtant plus conservatif, les taux de

décroissances peuvent être considérés comme des variables de décisions libre au sein des LMI s'ils vérifient $\mu_{\dot{j}_i, j_i^+} < 1$. Ce point fera l'objet d'une comparaison dans l'approche dévolue à la stabilisation décentralisée des systèmes descripteurs à commutations interconnectés présentée dans la section 3.3 de ce chapitre.

3.2.2. Conditions LMI pour la stabilisation décentralisée des systèmes linéaires à commutations interconnectés

L'objectif de cette section est de proposer une méthodologie de synthèse de lois de commande décentralisée (3.3) permettant de stabiliser les systèmes linéaires à commutations interconnectés représentés par (3.1). Afin de proposer des conditions LMI, nous considérons ici une fonction candidate multiple de Lyapunov donnée par (3.5) et les conditions aux instants de commutations $\mu_{\dot{j}_i, j_i^+} < 1$ (deuxième cas). Les conditions LMI obtenues sont résumées par le théorème suivant :

Théorème 3.1

Soit un système S composé de N sous-systèmes à commutations interconnectés décrits par (3.1). Supposons que, pour tout sous-système i , le mode actif est noté par j_i et le mode successeur est noté par j_i^+ . Le système global est stabilisé par un contrôleur décentralisé à commutations décrit par (3.4) s'il existe, pour toutes les combinaisons de $i=1, \dots, N$, $\alpha=1, \dots, N$, $\alpha \neq i$, $j_i=1, \dots, m_i$ et $j_i^+=1, \dots, m_i$, les matrices $X_{\dot{j}_i} = X_{\dot{j}_i}^T > 0$, $Q_{\dot{j}_i, j_i^+}$ et $Y_{\dot{j}_i}$, et les réels positifs $\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{i-1i}, \delta_{i+1i}, \dots, \delta_{Ni}$, (privés de δ_{ii} qui n'existent pas) satisfaisant les conditions LMI suivantes :

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} X_{\dot{j}_i} A_{\dot{j}_i}^T + Y_{\dot{j}_i}^T B_{\dot{j}_i}^T + A_{\dot{j}_i} X_{\dot{j}_i} + B_{\dot{j}_i} Y_{\dot{j}_i} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \delta_{i\alpha} F_{i\alpha j_i} F_{i\alpha j_i}^T & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & (*) \\ \hline & X_{\dot{j}_i} & & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & X_{\dot{j}_i} & & & & & \end{array} \begin{array}{l} -\delta_{1i} I \\ 0 \\ \vdots \\ -\delta_{i-1i} I \\ -\delta_{i+1i} I \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) < 0 \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} -X_{ij} & Q_{\dot{u}_i, j_i^+} \\ Q_{\dot{u}_i, j_i^+} & -X_{ij^+} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.15)$$

$$X_{ij}^1 - Q_{\dot{u}_i, j_i^+} \leq 0 \quad (3.16)$$

$$Q_{\dot{u}_i, j_i^+} - \lambda X_{ij}^1 \leq 0 \quad (3.17)$$

avec le scalaire $\lambda \geq 1$

Les matrices de gains du contrôleur sont obtenues par le changement de variable

$$K_{\dot{u}_i^+} = Y_{\dot{u}_i^+} X_{\dot{u}_i^+}^{-1} \text{ et les taux de décroissances } \mu_{\dot{u}_i, j_i^+} \text{ sont donnés par les valeurs propres de } Q_{\dot{u}_i, j_i^+}^{-1} X_{\dot{u}_i}.$$

Preuve

On considère la fonction candidate multiple de Lyapunov (3.5). Supposons que, pour le sous-système S_i , le mode actif, à l'instant de commutation $t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+}$ est j_i et le mode successeur est

j_i^+ , on a:

$$\begin{cases} \xi_{\dot{u}_i} (t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+}) = 1 \\ \xi_{\dot{u}_i^+} (t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+}) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \xi_{\dot{u}_i} (t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+})^+ = 0 \\ \xi_{\dot{u}_i^+} (t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+})^+ = 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

On note $t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+}$ l'instant de commutation entre le mode j_i et le mode j_i^+ du sous-système S_i .

Le système à commutations interconnecté, exprimé en boucle fermée par (3.4), est stable si les conditions (3.6), (3.7) et (3.8) sont satisfaites. La condition (3.6) est vérifiée, pour tout i , j_i et $\forall x_i$, si $X_{\dot{u}_i} > 0$. La condition (3.7), en considérant (3.4), peut être réécrite sous la forme :

$$\forall t \neq t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+},$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \left(\dot{x}_i^T(t) (X_{ij_i})^{-1} x_i(t) + x_i^T(t) (X_{ij_i})^{-1} \dot{x}_i(t) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\frac{1}{(N-1)} x_i^T \left(\tilde{A}_{ij_i}^T (X_{ij_i})^{-1} + (X_{ij_i})^{-1} \tilde{A}_{ij_i} \right) x_i + x_i^T F_{i\alpha j_i}^T (X_{ij_i})^{-1} x_i + x_i^T (X_{ij_i})^{-1} F_{i\alpha j_i} x_\alpha \right) < 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

avec $\tilde{A}_{ij_i} = A_{ij_i} + B_{ij_i} K_{ij_i}$.

En utilisant le lemme A.2 (cf. *Annexe A*), l'inégalité (3.19) peut être majorée par:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(x_i^T \frac{1}{(N-1)} \left(\tilde{A}_{ij_i}^T (X_{ij_i})^{-1} + (X_{ij_i})^{-1} \tilde{A}_{ij_i} \right) x_i + \rho_{i\alpha}^{-1} x_i^T (X_{ij_i})^{-1} F_{i\alpha j_i} F_{i\alpha j_i}^T (X_{ij_i})^{-1} x_i + \rho_{i\alpha} x_\alpha^T x_\alpha \right) < 0 \tag{3.20}$$

avec les scalaires $\rho_{i\alpha} > 0$, pour tout $i = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, \dots, N$ et $\alpha \neq i$.

Rappelons que l'interaction d'un système avec lui-même est nulle, c'est-à-dire $\rho_{ii} = 0$. Dans

ce cas, on peut écrire $\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \rho_{i\alpha} x_\alpha^T x_\alpha = \sum_{p=1}^N \rho_{ip} x_p^T x_p$ et l'inégalité (3.20) devient:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N x_i^T \left(\tilde{A}_{ij_i}^T (X_{ij_i})^{-1} + (X_{ij_i})^{-1} \tilde{A}_{ij_i} + (X_{ij_i})^{-1} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \rho_{i\alpha}^{-1} F_{i\alpha j_i} F_{i\alpha j_i}^T (X_{ij_i})^{-1} \right) x_i + \sum_{p=1}^N x_p^T \left(\sum_{i=1}^N \rho_{ip} \right) x_p \\
 &= \sum_{i=1}^N x_i^T \left(\tilde{A}_{ij_i}^T (X_{ij_i})^{-1} + (X_{ij_i})^{-1} \tilde{A}_{ij_i} + (X_{ij_i})^{-1} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \rho_{i\alpha}^{-1} F_{i\alpha j_i} F_{i\alpha j_i}^T (X_{ij_i})^{-1} + \sum_{p=1}^N \rho_{pi} I \right) x_i < 0
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

L'inégalité (3.21) est vérifiée, $\forall x_i(t) \neq x_i(t_{ij_i \rightarrow j_i^+})$, $t_{ij_i \rightarrow j_i^+}$ étant les instants de commutations,

pour $i = 1, \dots, N$, si:

$$\tilde{A}_{ij_i}^T (X_{ij_i})^{-1} + (X_{ij_i})^{-1} \tilde{A}_{ij_i} + (X_{ij_i})^{-1} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \rho_{i\alpha}^{-1} F_{i\alpha j_i} F_{i\alpha j_i}^T (X_{ij_i})^{-1} + \sum_{p=1}^N \rho_{pi} I < 0 \tag{3.22}$$

Multiplions ensuite la partie gauche et droite de l'inégalité (3.22) par X_{ij_i} , on obtient,

$$X_{ij_i} \tilde{A}_{ij_i}^T + \tilde{A}_{ij_i} X_{ij_i} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \rho_{i\alpha}^{-1} F_{i\alpha j_i} F_{i\alpha j_i}^T + \sum_{p=1}^N \rho_{pi} X_{ij_i} X_{ij_i} < 0 \tag{3.23}$$

En appliquant le complément de Schur et en effectuant le changement de variable $\delta_{i\alpha} = \rho_{i\alpha}^{-1}$, on obtient la conditions LMI (3.14).

Focalisons nous maintenant sur la condition (3.8) qui garantie la stabilisation des sous-systèmes S_i aux instants de commutations. Celle-ci est vérifiée si, pour tout $i=1, \dots, N$ et $\forall x_i(t)$:

$$\frac{1}{\mu_{i_j_i j_i^+}} X_{ij_i}^{-1} - X_{ij_i}^{-1} < 0 \quad (3.24)$$

En appliquant le complément de Schur, puis en multipliant à gauche et à droite par $\begin{bmatrix} X_{ij_i} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

et en posant $Q_{ij_i j_i^+} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{ij_i j_i^+}}} X_{ij_i}$, (3.24) est satisfaite si les conditions (3.15) sont vérifiées. ■

3.2.3. Exemple numérique

Afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée, dans le théorème 3.1, considérons le système hybride S composé de trois sous-systèmes interconnectés à commutations S_1 , S_2 et S_3 , possédant chacun deux modes de fonctionnement. Ceux-ci sont donnés par :

$$\bullet \quad \dot{x}_1(t) = \sum_{j_i=1}^2 \xi_{1j_i}(t) (A_{1j_i} x_1(t) + B_{1j_i} u_1(t) + F_{12j_i} x_2(t) + F_{13j_i} x_3(t)) \quad (3.25)$$

avec les matrices $A_{11} = \begin{bmatrix} -1.3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B_{11} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $F_{121} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $F_{131} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$

définissent la dynamique du sous-système S_1 dans son premier mode de fonctionnement et

les matrices $A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}$, $B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_{122} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $F_{132} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.02 & 0.1 \end{bmatrix}$

définissent la dynamique du sous-système S_1 dans son deuxième mode de fonctionnement.

$$\bullet \quad \dot{x}_2(t) = \sum_{j_2=1}^2 \xi_{2j_2}(t) (A_{2j_2} x_2(t) + B_{2j_2} u_2(t) + F_{21j_2} x_1(t) + F_{23j_2} x_3(t)) \quad (3.26)$$

avec les matrices $A_{21} = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.5 \\ 0.6 & 4 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_{211} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.01 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $F_{231} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}$

définissent la dynamique du sous-système S_2 dans son premier mode de fonctionnement et

les matrices $A_{22} = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.8 \\ 0.5 & -0.3 \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_{212} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $F_{232} = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$

définissent la dynamique du sous-système S_2 dans son deuxième mode de fonctionnement.

$$\bullet \quad \dot{x}_3(t) = \sum_{j_3=1}^2 \xi_{3j_3}(t) (A_{3j_3} x_3(t) + B_{3j_3} u_3(t) + F_{31j_3} x_1(t) + F_{32j_3} x_2(t)) \quad (3.27)$$

avec les matrices $A_{31} = \begin{bmatrix} -1.2 & -1.6 \\ -1.6 & 4 \end{bmatrix}$, $B_{31} = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_{311} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$ et

$F_{321} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}$ définissent la dynamique du sous-système S_3 dans son premier mode

de fonctionnement et les matrices $A_{32} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.8 \\ 0.5 & -0.3 \end{bmatrix}$, $B_{32} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_{312} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$ et

$F_{322} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$, définissent la dynamique du sous-système S_3 dans son deuxième mode

de fonctionnement.

Supposons que les sous-systèmes commutent selon les lois de commutation définies par :

$$\bullet \quad \begin{cases} \xi_{11}(t) = 1 & \text{si } (\{-x_{11} + 2x_{12} > 0\} \text{ et } \{x_{11} + x_{12} > 0\}) \text{ ou } (\{-x_{11} + 2x_{12} < 0\} \text{ et } \{x_{11} + x_{12} < 0\}) \\ \xi_{11}(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\xi_{12}(t) = 1 - \xi_{11}(t)$ pour le premier sous système,

$$\bullet \quad \begin{cases} \xi_{21}(t) = 1 & \text{si } (\{-x_{21} + 2x_{22} > 0\} \text{ et } \{x_{21} + x_{22} > 0\}) \text{ ou } (\{-x_{21} + 2x_{22} < 0\} \text{ et } \{x_{21} + x_{22} < 0\}) \\ \xi_{21}(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\xi_{22}(t) = 1 - \xi_{21}(t)$ pour le deuxième sous système,

- $$\begin{cases} \xi_{31}(t) = 1 & \text{si } (\{-x_{31} + 3x_{32} > 0\} \text{ et } \{x_{31} + x_{32} > 0\}) \text{ ou } (\{-x_{31} + 3x_{32} < 0\} \text{ et } \{x_{31} + x_{32} < 0\}) \\ \xi_{31}(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et}$$

$\xi_{32}(t) = 1 - \xi_{31}(t)$ pour le troisième sous système,

Remarque 3.4

Notons qu'à cause de problèmes de résolution numérique, on ne peut pas simuler un système avec des frontières strictes (par exemple les équations de droites $D_{11} : \{-x_{11} + 2x_{12} = 0\}$, etc). Afin de palier ce problème, une solution classique consiste à considérer la commutation au voisinage de ces fonctions ($-\varepsilon_i < D_{ij} < \varepsilon_i$), voir figure 3.4.

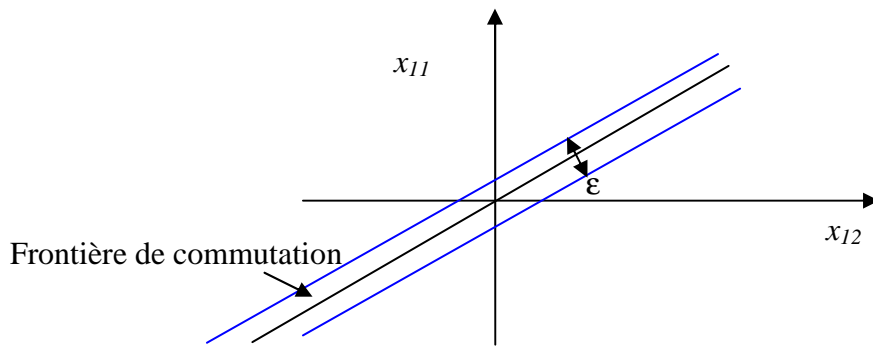


Figure.3.4. Frontière de commutation.

Afin de le stabiliser, nous appliquons l'approche proposée au théorème 3.1. Chaque contrôleur local est associé à un sous-système et dispose de deux modes de fonctionnement (le même nombre que son sous-système associé). Pour ce faire, nous résolvons simultanément, à l'aide de *Matlab LMI Toolbox*, les conditions de stabilité (3.14) et (3.15), pour chaque sous-système. Le résultat est donné par les matrices de gains suivantes:

- $K_{11} = [-1316.7 \quad -143.4]$ et $K_{12} = [-88.18 \quad -543.20]$, pour le 1^{er} contrôleur local,
- $K_{21} = [2104.6 \quad -2688.2]$ et $K_{22} = [-730.62 \quad -526.34]$, pour le 2^{ème} contrôleur local,
- et $K_{31} = [866.5 \quad -1409.8]$ et $K_{32} = [-777.72 \quad -887.55]$, pour le 3^{ème} contrôleur local.

et les taux de décroissance donnés par :

- $\mu_{112} = 0.03$ et $\mu_{121} = 0.6$, pour le 1^{er} sous-système,
- $\mu_{212} = 0.8$ et $\mu_{221} = 0.35$, pour le 2^{ème} sous-système,
- et $\mu_{312} = 0.5$ et $\mu_{321} = 0.02$, pour le 3^{ème} sous-système.

La figure 3.5 présente la simulation du système interconnecté considéré en boucle fermée avec les conditions initiales $x_1(0)=[1 \ 7]^T$, $x_2(0)=[-5 \ 3]^T$ et $x_3(0)=[3 \ 2]^T$. Nous constatons que l'ensemble des contrôleurs décentralisés synthétisés stabilise le système global interconnecté à commutations S après un temps moyen de convergence de près de 4.5s (Tandis que chaque sous-système possède son propre temps de convergence). L'évolution des modes de fonctionnements actifs et des signaux de commande est illustrée respectivement dans les figures 3.6 et 3.7. Nous remarquons que les évolutions des modes de fonctionnement entre les différents sous-systèmes S_1 , S_2 et S_3 sont indépendantes. En effet, à titre d'exemple, à l'instant 1.5s, nous remarquons dans la figure 3.6 un changement du mode de fonctionnement du sous-système S_1 (du mode 1 vers le mode 2). Ainsi, la dynamique de sous-système S_1 change d'une manière souple (sans présence de phénomène de saut, cf. 1.4.2) comme le montre la figure 3.5. En revanche, l'absence de phénomène de saut dans l'état du système se traduit par des variations abruptes des signaux de commande. (figure 3.7)

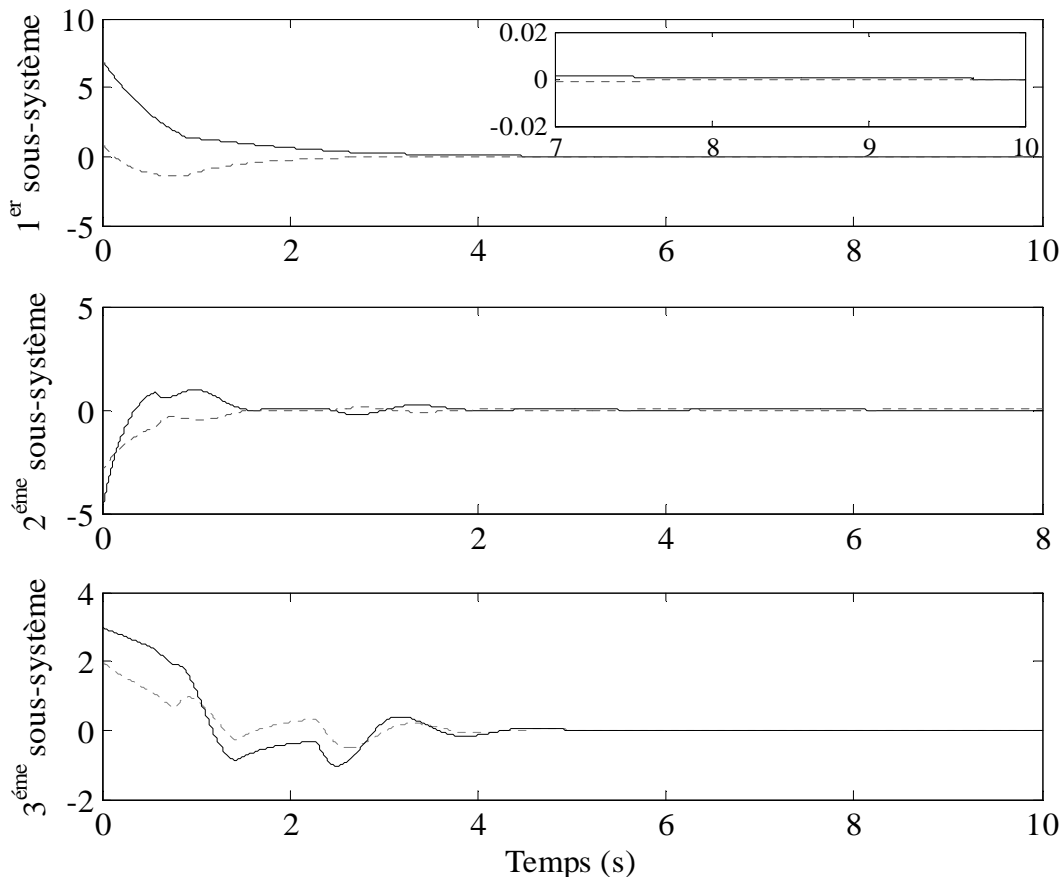


Figure.3.5. Dynamiques des états du système interconnecté à commutations en boucle fermée.

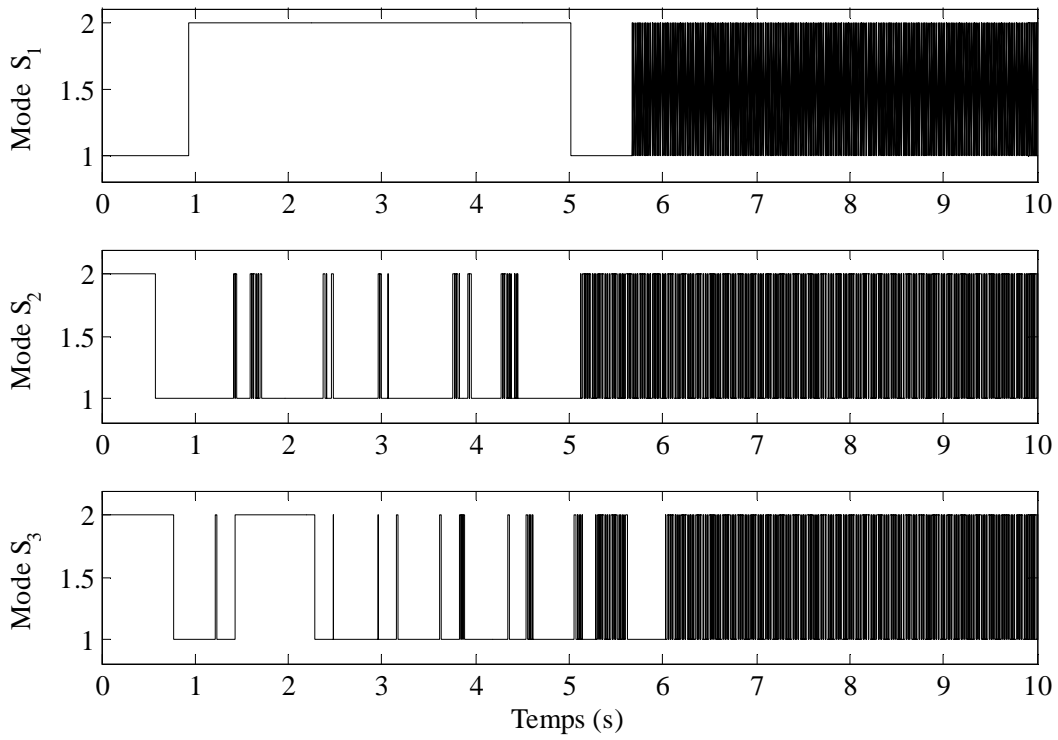


Figure.3.6. Évolution des modes actifs de commutations.

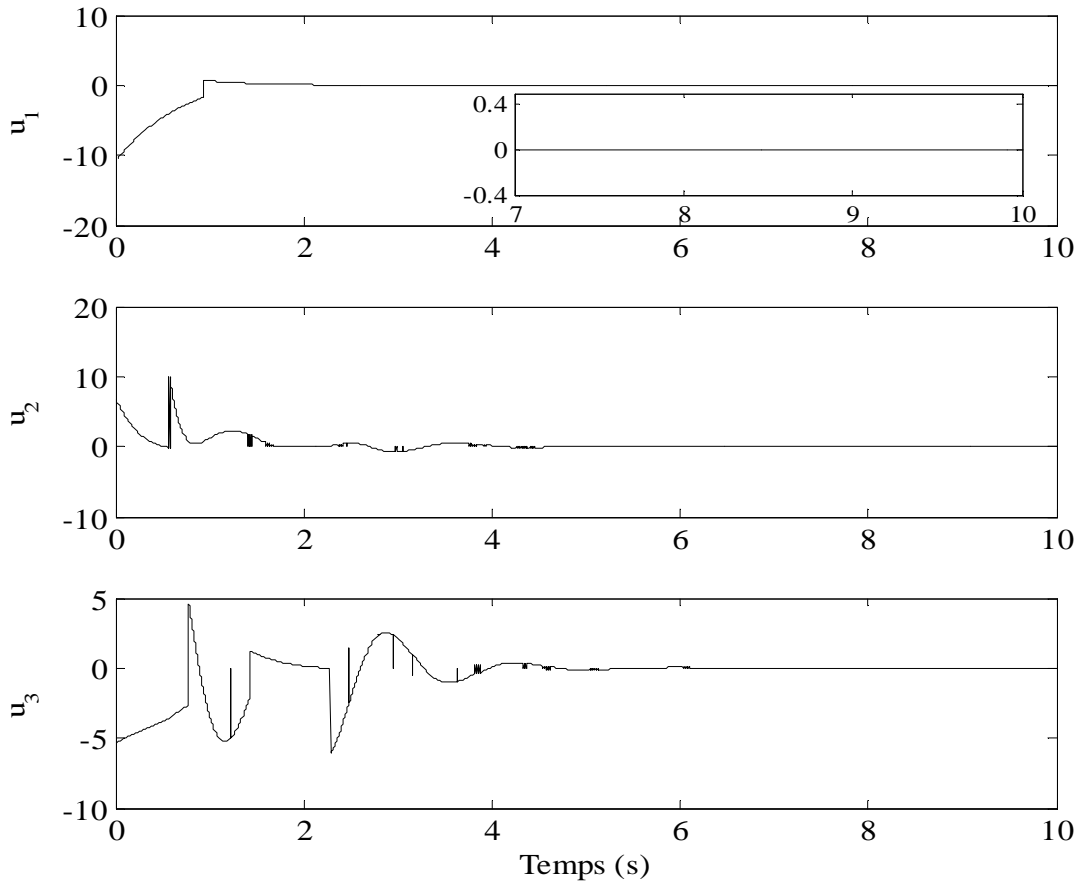


Figure.3.7. Évolution des signaux de commande.

Nous constatons, de plus, l'existence de changements extrêmement rapides de mode de fonctionnement (figure 3.6). Ces commutations rapides sont dues aux problèmes de résolution numérique rencontrés lors des simulations (cf. remarque 3.4). En effet, si les paramètres de simulation ε_i sont choisis assez grands (c'est-à-dire si les frontières sont suffisamment larges), la trajectoire des sous-systèmes peut se situer à l'intérieur des frontières de commutations. Dans ce cas, une série de changement de mode de fonctionnement rapide (du mode 1 vers le mode 2 et vis versa) peut se produire (figure 3.8-b-). Pour limiter la présence de ce phénomène, une possibilité serait de diminuer les valeurs des paramètres de simulation ε_i et d'augmenter le pas d'intégration au détriment de la qualité des résultats de simulation obtenus. Notons enfin que ce phénomène s'amplifie lorsque le système s'approche de son point d'équilibre. Ceci est dû au fait que les frontières de commutation passent par l'origine et donc, lorsque le système converge, il se trouve à l'intérieur de ces frontières.

A ce stade, la stabilisation des systèmes standards linéaires à commutations interconnectés a été étudiée via la synthèse de contrôleurs décentralisés à commutations. Pour ce faire, des conditions LMI ont été proposées sur la base de l'emploi d'une fonction de Lyapunov multiple. Dans la section suivante, nous proposons d'étendre ces résultats pour la classe des descripteurs linéaires interconnectés à commutations.

3.3. Stabilisation décentralisée des descripteurs linéaires à commutations interconnectés

Dans cette partie, nous proposons d'étendre les approches présentées précédemment au cas des descripteurs linéaires à commutations interconnectés décrits par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$\sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i}(t) E_{ij_i} \dot{x}_i(t) = \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i}(t) \left(A_{ij_i} x_i(t) + B_{ij_i} u_i(t) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N F_{i\alpha j_i} x_\alpha(t) \right) \quad (3.28)$$

où $x_i(t) \in \mathbb{R}^{\eta_i}$ et $u_i(t) \in \mathbb{R}^{\nu_i}$ sont respectivement les vecteurs d'état et de commande associés au $i^{\text{ème}}$ modèle, $x_\alpha(t) \in \mathbb{R}^{\eta_\alpha}$ est le vecteur d'état du $\alpha^{\text{ème}}$ modèle avec $\alpha = 1, \dots, N$ et $\alpha \neq i$, $A_{ij_i} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_i}$, $B_{ij_i} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \nu_i}$, $F_{i\alpha j_i} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_\alpha}$ et $E_{ij_i} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_i}$ sont des matrices à coefficients constants définissant les dynamiques des sous systèmes. Notons que le terme $F_{i\alpha j_i} x_\alpha(t)$ exprime l'influence du système α sur la dynamique du système i . $\xi_{ij_i}(t)$ représentent les fonctions

d'activation du descripteur actif à l'instant t . De même que pour les systèmes présentés précédemment, si le $i^{\text{ème}}$ descripteur est actif dans le mode l , la fonction d'activation $\xi_{il}(t)$ est égale à 1, sinon, elle est égale à 0, cf. équation (3.2).

Afin de stabiliser les systèmes décrits par (3.28), nous proposons l'emploi de contrôleurs décentralisés (3.29) à commutations décrits par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$u_i(t) = \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i}(t) K_{ij_i} x_i(t) \quad (3.29)$$

où $K_{ij_i} \in \mathbb{R}^{\vartheta_i \times n_i}$ sont les matrices de gains à synthétiser.

Soit $\tilde{x}_i = [x_i^T \quad \dot{x}_i^T]^T$, $i = 1, \dots, N$, les vecteurs d'état augmentés, la dynamique en boucle fermée peut être exprimée sous la forme :

Pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\tilde{E}_i \dot{\tilde{x}}_i = \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i} \left(\tilde{A}_{ij_i} \tilde{x}_i + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tilde{F}_{i\alpha j_i} \tilde{x}_\alpha \right) \quad (3.30)$$

$$\text{où } \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{ij_i} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{ij_i} + B_{ij_i} K_{ij_i} & -E_{ij_i} \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{F}_{i\alpha j_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F_{i\alpha j_i} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, s'il peut être établi que (3.30) est stable, alors (3.28) est stabilisé par (3.29).

Comme nous l'avons précisé dans la section 3.1, l'étude de stabilité des systèmes à commutations nécessite la vérification de deux conditions : la stabilité du système dans chaque mode de fonctionnement ainsi que sa stabilité aux instants de commutations. Ainsi, dans cette étude, nous proposons d'établir des conditions de stabilisation pour la classe des systèmes (3.28) selon les trois approches discutées dans la section 3.1.2.

3.3.1. Synthèse LMI de contrôleurs décentralisés pour les descripteurs linéaires à commutations interconnectés

En se basant sur une fonction candidate de Lyapunov multiple, décrite par l'équation (3.6), le but de cette section est de proposer des conditions LMI pour la synthèse de lois de

commandes décentralisées (3.29) capables de stabiliser les descripteurs à commutations interconnectés décrits par (3.28). Pour ce faire, afin de proposer des conditions de moindre conservatisme, nous proposons de nous placer dans le troisième cas discuté au paragraphe 3.1.2, c'est-à-dire dans le cas où l'on considère la condition (3.12) aux instants de commutations. Le résultat est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.2 (Jabri & al., 2011b) :

Considérons le système hybride S composé de N descripteurs S_i à commutations interconnectés et décrits par (3.28). Supposons que, pour tout sous-système i , le mode actif est noté par j_i et le mode suivant est noté par j_i^+ . De plus, considérons des taux de décroissance μ_{j_i, j_i^+} satisfaisant les conditions (3.12). Le système global est stable en boucle fermée via le contrôleur décentralisé à commutations décrit par (3.29) s'il existe, pour toutes les combinaisons $i=1, \dots, N$, $\alpha=1, \dots, N$, $\alpha \neq i$, $j_i=1, \dots, m_i$ et $j_i^+=1, \dots, m_i$, les matrices $X_{j_i}^1 = (X_{j_i}^1)^T > 0$, $X_{j_i}^3, X_{j_i}^4, Y_{j_i}$ et les réels positifs $\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{i-1i}, \delta_{i+1i}, \dots, \delta_{Ni}$ (privés de δ_{ii} qui n'existe pas), satisfaisant les conditions suivantes :

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} \Psi_{j_i} & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & (*) \\ \hline X_{j_i}^1 & -\delta_{1i}I & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\delta_{i-1i}I & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -\delta_{i+1i}I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline X_{j_i}^1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\delta_{Ni}I \end{array} \right) < 0 \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} -X_{j_i}^1 & X_{j_i}^1 \\ X_{j_i}^1 & -\mu_{j_i, j_i^+} X_{j_i^+}^1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.32)$$

$$\text{avec } X_{j_i} = \begin{bmatrix} X_{j_i}^1 & 0 \\ X_{j_i}^3 & X_{j_i}^4 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Psi_{j_i} = \left[\begin{array}{c|c} (X_{j_i}^3)^T + X_{j_i}^3 & (*) \\ \hline (X_{j_i}^4)^T + A_{j_i} X_{j_i}^1 + B_{j_i} Y_{j_i} - E_{j_i} X_{j_i}^3 & -(X_{j_i}^4)^T (E_{j_i})^T - E_{j_i} X_{j_i}^4 + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N (\delta_{i\alpha} F_{i\alpha j_i} (F_{i\alpha j_i})^T) \end{array} \right]$$

Les matrices de gains sont obtenues par le changement de variable $K_{ij_i} = Y_{ij_i} (X_i^1)^{-1}$

Preuve

Soit la fonction candidate de Lyapunov multiple donnée, dans le cas des descripteurs, par :

$$V(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i} \tilde{x}_i^T \tilde{E}(X_{ij_i})^{-1} \tilde{x}_i \quad (3.33)$$

avec la condition de symétrie $\tilde{E}(X_{ij_i})^{-1} = (X_{ij_i})^{-T} \tilde{E}$ qui conduit au conditionnement de la

matrice de Lyapunov tel que : $X_{ij_i} = \begin{bmatrix} X_{ij_i}^1 & 0 \\ X_{ij_i}^3 & X_{ij_i}^4 \end{bmatrix}$ et $X_{ij_i}^1 = (X_{ij_i}^1)^T$.

Le descripteur à commutations interconnecté, exprimé en boucle fermée par (3.30), est stable si les conditions (3.6), (3.7) et (3.8) sont satisfaites. La condition (3.6) est vérifiée, pour tout i ,

j_i et $\forall x_i$, si $X_{ij_i}^1 = (X_{ij_i}^1)^T > 0$. La condition (3.7), en considérant (3.30), peut être réécrite

sous la forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i} \left(\tilde{x}_i^T \tilde{E}(X_{ij_i})^{-1} \tilde{x}_i + \tilde{x}_i^T (X_{ij_i})^{-1} \tilde{E} \tilde{x}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\frac{1}{(N-1)} \tilde{x}_i^T \left(\tilde{A}_{ij_i}^T (X_{ij_i})^{-1} + (X_{ij_i})^{-1} \tilde{A}_{ij_i} \right) \tilde{x}_i + \tilde{x}_\alpha^T \tilde{F}_{i\alpha j_i}^T (X_{ij_i})^{-1} \tilde{x}_i + \tilde{x}_i^T (X_{ij_i})^{-1} \tilde{F}_{i\alpha j_i} \tilde{x}_\alpha \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

En utilisant le lemme A.2 (cf. *Annexe A*), l'inégalité (3.34) peut être majorée par:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left(\frac{1}{(N-1)} \tilde{x}_i^T \left(\tilde{A}_{ij_i}^T (X_{ij_i})^{-1} + (X_{ij_i})^{-1} \tilde{A}_{ij_i} \right) \tilde{x}_i + \tau_{i\alpha}^{-1} \tilde{x}_i^T (X_{ij_i})^{-1} \tilde{F}_{i\alpha j_i} \tilde{F}_{i\alpha j_i}^T (X_{ij_i})^{-1} \tilde{x}_i + \tau_{i\alpha} \tilde{x}_\alpha^T \tilde{x}_\alpha \right) < 0 \quad (3.35)$$

avec $\tau_{i\alpha} > 0$.

On rappelle que, pour tout $i=1, \dots, N$, $\tau_{ii} = 0$ et $\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} \tilde{x}_\alpha^T \tilde{x}_\alpha = \sum_{p=1}^N \tau_{ip} \tilde{x}_p^T \tilde{x}_p$, l'inégalité (3.35)

est vérifiée, $\forall x_i(t) \neq x_i(t_{ij_i \rightarrow j_i^+})$, si :

Pour $i = 1, \dots, N$ et $j_i = 1, \dots, m_i$,

$$\tilde{A}_{ij_i}^T (X_{ij_i})^{-1} + (X_{ij_i})^{-1} \tilde{A}_{ij_i} + (X_{ij_i})^{-1} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N (\tau_{i\alpha}^{-1} \tilde{F}_{i\alpha j_i} \tilde{F}_{i\alpha j_i}^T) (X_{ij_i})^{-1} + \sum_{p=1}^N \tau_{pi} I < 0 \quad (3.36)$$

Multiplions ensuite l'inégalité (3.36) à gauche et à droite par X_{ij_i} , on obtient :

Pour $i = 1, \dots, N$ et $j_i = 1, \dots, m_i$,

$$X_{ij_i} \tilde{A}_{ij_i}^T + \tilde{A}_{ij_i} X_{ij_i} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha}^{-1} \tilde{F}_{i\alpha j_i} \tilde{F}_{i\alpha j_i}^T + \sum_{p=1}^N \tau_{pi} X_{ij_i} X_{ij_i} < 0 \quad (3.37)$$

En appliquant le complément de Schur et en utilisant les matrices étendues définies en (3.30), l'inégalité (3.37) est vérifiée si les conditions (3.31) le sont.

Concentrons-nous maintenant sur l'inégalité (3.8). Celle-ci est satisfaite si :

Pour $i = 1, \dots, N$, $j_i = 1, \dots, m_i$ et $j_i^+ = 1, \dots, m_i$,

$$\frac{1}{\mu_{ij_i j_i^+}} (X_{ij_i^+}^1)^{-1} - (X_{ij_i}^1)^{-1} < 0 \quad (3.38)$$

Sachant que les taux de décroissance sont choisis en vérifiant l'inégalité (3.12), on peut appliquer directement le complément de Schur sur (3.38). Puis en multipliant à gauche et à

droite par $\begin{bmatrix} X_{ij_i}^1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, on obtient les conditions (3.32). ■

Rappelons que les conditions proposées au théorème 3.2 ont été obtenues en considérant la condition (3.12), c'est-à-dire le troisième cas, supposé le moins conservatif, discuté au paragraphe 3.1.2. Sur la base du théorème 3.2, nous proposons, dans la suite, deux corollaires traitant respectivement du deuxième et du premier cas discutés au paragraphe 3.1.2, c'est-à-dire le cas où l'on suppose les taux de décroissance $\mu_{ij_i j_i^+} < 1$ aux instants de commutations et enfin le cas quadratique (la fonction de Lyapunov quadratique commune).

Corollaire 3.1 ($\mu_{ij_i j_i^+} < 1$)

Considérons le système hybride S composé de N descripteurs S_i à commutations interconnectés et décrit par (3.28). Supposons que, pour tout sous-système i , le mode actif est

noté par j_i et le mode suivant est noté par j_i^+ . De plus, on considère un scalaire λ tel que $0 < \frac{1}{\lambda} < \mu_{ij_i j_i^+}$. Le système global est stable en boucle fermée via le contrôleur décentralisé à commutations décrit par (3.29) s'il existe, pour toutes les combinaisons $i=1, \dots, N$, $\alpha=1, \dots, N$, $\alpha \neq i$, $j_i=1, \dots, m_i$ et $j_i^+=1, \dots, m_i$, les matrices $X_{ij_i}^1 = (X_{ij_i}^1)^T > 0$, $X_{ij_i}^3, X_{ij_i}^4, Y_{ij_i}$, $Q_{ij_i j_i^+}$ et les réels positifs $\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{i-1i}, \delta_{i+1i}, \dots, \delta_{Ni}$ (privés de δ_{ii} qui n'existe pas), satisfaisant (3.31) et les conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix} -X_{ij_i}^1 & Q_{ij_i j_i^+} \\ Q_{ij_i j_i^+} & -X_{ij_i^+}^1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.39)$$

$$X_{ij_i}^1 - Q_{ij_i j_i^+} \leq 0 \quad (3.40)$$

$$Q_{ij_i j_i^+} - \lambda X_{ij_i}^1 \leq 0 \quad (3.41)$$

avec le scalaire $\lambda \geq 1$

Les matrices de gains sont obtenues par le changement de variable $K_{ij_i} = Y_{ij_i} (X_{ij_i}^1)^{-1}$ et les taux de décroissances $\mu_{ij_i j_i^+}$ sont donnés par les valeurs propres de $Q_{ij_i j_i^+}^{-1} X_{ij_i}^1$.

Preuve

La preuve de ce corollaire suit les mêmes étapes que la preuve du théorème 3.2 jusqu'à

l'inégalité (3.38). Soit le changement de variable $Q_{ij_i j_i^+} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{ij_i j_i^+}}} X_{ij_i}^1$, on applique le

complément de Schur sur l'inégalité (3.38) que l'on multiplie ensuite à gauche et à droite par

$$\begin{bmatrix} X_{ij_i}^1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ nous obtenons :}$$

$$\begin{bmatrix} -X_{ij_i}^1 & Q_{ij_i j_i^+} \\ Q_{ij_i j_i^+} & -X_{ij_i^+}^1 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.42)$$

Afin de vérifier les conditions $\mu_{ij_i j_i^+} < 1$ (deuxième cas), on considère un scalaire λ tel que $0 < \frac{1}{\lambda} < \mu_{ij_i j_i^+}$. Ainsi, les matrices $Q_{ij_i j_i^+}$ peuvent être majorées par les conditions (3.40) et (3.41). ■

Corollaire 3.2 (cas quadratique)

Considérons le système hybride S composé de N descripteurs S_i à commutations interconnectés et décrit par (3.28). Supposons que, pour tout sous-système i , le mode actif est noté par j_i et le mode suivant est noté par j_i^+ . Le système global est stable en boucle fermée via le contrôleur décentralisé à commutations décrit par (3.29) s'il existe, pour toutes les combinaisons $i=1, \dots, N$, $\alpha=1, \dots, N$, $\alpha \neq i$, $j_i=1, \dots, m_i$ et $j_i^+=1, \dots, m_i$, les matrices $X_i^1 = (X_i^1)^T > 0$ (commune à l'intérieur de chaque sous-système S_i), $X_{ij_i}^3, X_{ij_i}^4, Y_{ij_i}, Q_{ij_i j_i^+}$ et les réels positifs $\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{i-1i}, \delta_{i+1i}, \dots, \delta_{Ni}$ (privés de δ_{ii} qui n'existe pas), satisfaisant (3.31).

La preuve du corollaire 3.2 est triviale, cf. premier cas discuté au paragraphe 3.1.2.

3.3.2. Exemple numérique

Dans le but de mettre en exergue l'efficacité des approches proposées aux théorèmes 3.2 et aux corollaires 3.1 et 3.2, nous considérons un système hybride composé de deux descripteurs linéaires interconnectés à commutations S_1 et S_2 décrits par :

$$\bullet \sum_{j_1=1}^2 \xi_{1j_1}(t) E_{1j_1} \dot{x}_1(t) = \sum_{j_1=1}^2 \xi_{1j_1}(t) (A_{1j_1} x_1(t) + B_{1j_1} u_1(t) + F_{12j_1} x_2(t)) \quad (3.43)$$

$$\text{avec les matrices } E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, F_{121} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0.1 \\ 0.01 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

représentant la dynamique du descripteur S_1 dans son premier mode de fonctionnement et les

$$\text{matrices } E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.03 & 1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -0.1 & -2 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, F_{122} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ dans}$$

son deuxième mode de fonctionnement.

$$\bullet \sum_{j_2=1}^2 \xi_{2j_2}(t) E_{2j_2} \dot{x}_1(t) = \sum_{j_2=1}^2 \xi_{2j_2}(t) (A_{2j_2} x_1(t) + B_{2j_2} u_1(t) + F_{12j_2} x_2(t)) \quad (3.44)$$

avec les matrices $E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 1 & -0.01 \\ 0.1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & a \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$,

$F_{211} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$ représentant la dynamique du descripteur S_2 dans son premier mode

de fonctionnement et les matrices $E_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.01 \\ 0 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0 \\ b & -2 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 \end{bmatrix}$,

$B_{22} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}$, $F_{212} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$ dans son deuxième mode de fonctionnement.

Notons que a et b sont des paramètres à valeurs dans \mathbb{R} dédiés à la comparaison des domaines de faisabilité des conditions LMI proposées au théorème 3.2 et aux corollaires 3.1 et 3.2. Ainsi, pour $a \in [-10 \ 10]$ et $b \in [-15 \ 15]$, le domaine de faisabilité de chaque approche est présenté par la figure 3.8. Nous remarquons que le domaine de faisabilité de l'approche présentée par le théorème 3.3 inclus le domaine de l'approche du corollaire 3.1 qui est lui-même inclus l'approche proposée au corollaire 3.2. Ceci confirme donc nos propos discutés au paragraphe 3.1.2.

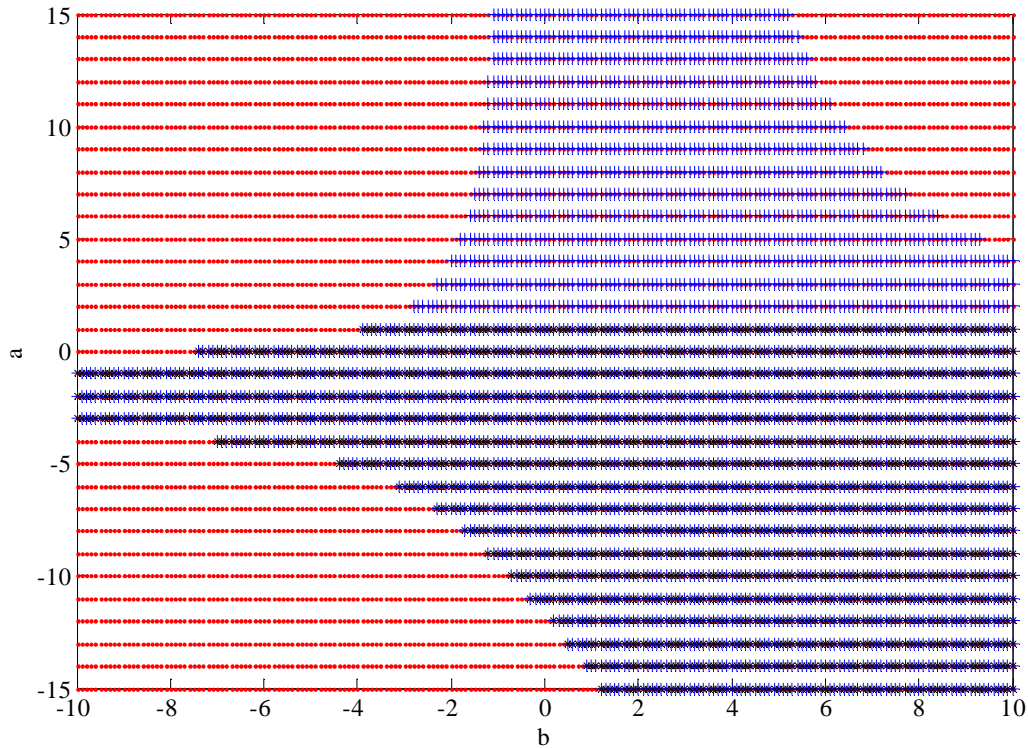


Figure. 3.8. Comparaison du domaine de faisabilité du théorème 3.3(•), corollaire 3.1(+), corollaire 3.2(x).

Plaçons nous, maintenant, dans le cas $a=0$ et $b=1$. Afin de synthétiser une loi de commande décentralisée à l'aide des conditions LMI du théorèmes 3.2., on choisi les valeurs des taux de décroissance telles que $\mu_{112} = 0.4$, $\mu_{121} = 2.5$, $\mu_{212} = 0.5$ et $\mu_{221} = 2$ de manière à vérifier les conditions (3.12). Les résultats sont obtenus via l'outil *Matlab LMI Toolbox*. Le contrôleur décentralisé à commutations, composé de deux contrôleurs locaux, est donné par les matrices des gains suivantes :

- $K_{11} = [1.56 \quad -7.83]$ et $K_{12} = [0.56 \quad 0.73]$, pour le 1^{er} contrôleur local
- $K_{21} = [0.95 \quad -7.23 \quad -4.08]$ et $K_{22} = [-10.69 \quad -6.35 \quad -0.38]$, pour le 2^{ème} contrôleur local.

Afin de réaliser une simulation de la dynamique du système, on considère les lois de commutation données par :

$$\bullet \begin{cases} \xi_{11}(t) = 1 & \text{si } (\{0.9x_{11} + x_{12} > 0\} \text{ et } \{-0.2x_{11} + 9x_{12} > 0\}) \text{ ou } (\{0.9x_{11} + x_{12} < 0\} \text{ et } \{-0.2x_{11} + 9x_{12} < 0\}) \\ \xi_{11}(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\xi_{21}(t) = 1 - \xi_{11}(t)$ pour le premier sous système,

$$\bullet \begin{cases} \xi_{11}(t) = 1 & \text{si } (\{-x_{21} + x_{22} > 0\} \text{ et } \{x_{21} - 2x_{22} > 0\}) \text{ ou } (\{-x_{21} + x_{22} < 0\} \text{ et } \{x_{21} - 2x_{22} < 0\}) \\ \xi_{11}(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\xi_{21}(t) = 1 - \xi_{11}(t)$ pour le premier sous système,

L'évolution temporelle du descripteur interconnecté à commutations en boucle fermée est représentée dans la figure 3.9 pour les états initiaux $x_1(0) = [2 \ 2]^T$ et $x_2(0) = [-1 \ 1.5 \ -1]^T$. La figure 3.10 montre l'évolution des signaux de commande et des lois de commutation. Nous constatons que le descripteur interconnecté à commutations S est stabilisé par le contrôleur synthétisé (3.29) après un temps moyen de convergence de l'ordre de 5s.

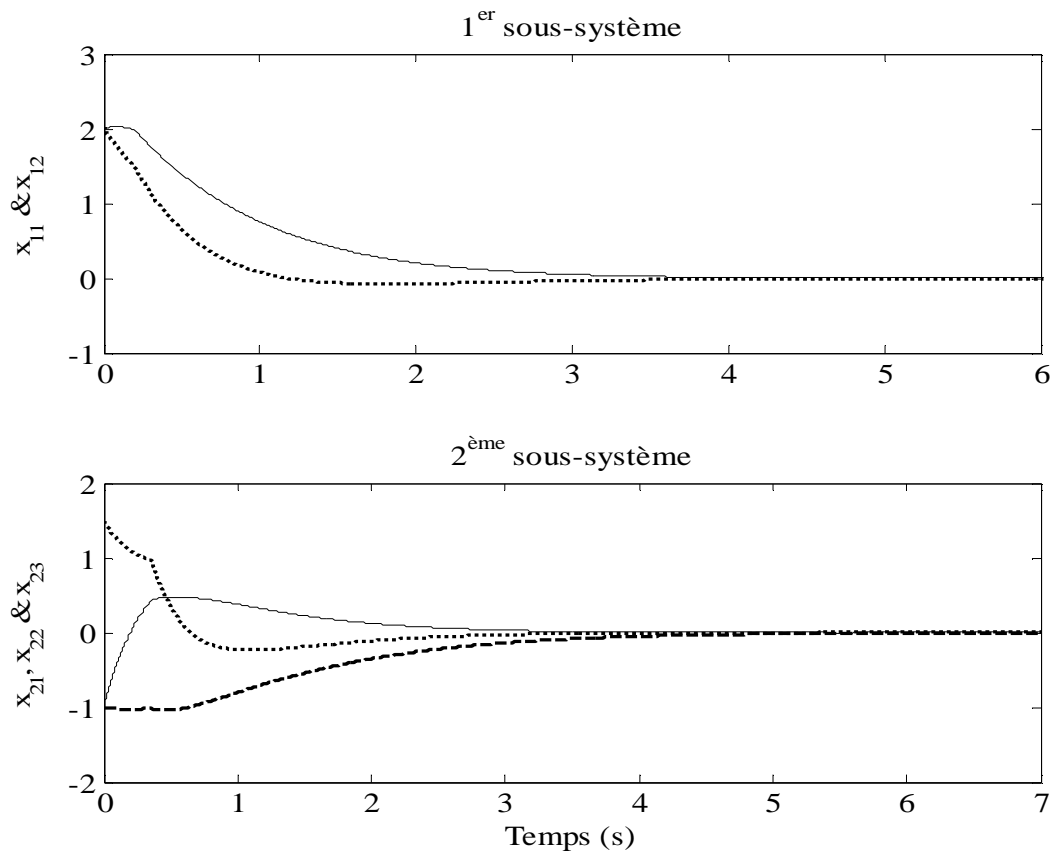


Figure. 3.9. Dynamiques des états des descripteurs interconnectés à commutations en boucle fermée.

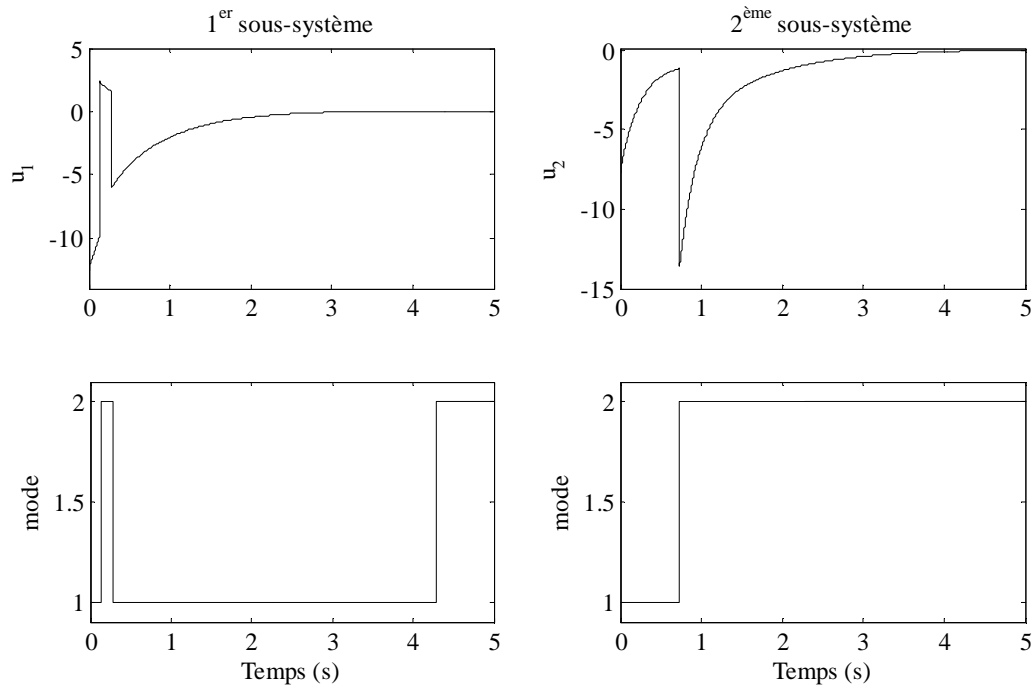


Figure. 3.10. Évolution des lois de commande et de commutations.

La figure 3.11 montre que la fonctions de Lyapunov $V(x_1, x_2)$ admet un comportement décroissant par morceau, c'est-à-dire décroissant $\forall t \neq t_{i_j \rightarrow j_i^+}$ et un comportement aux instants de commutations $t_{i_j \rightarrow j_i^+}$ vérifiant les conditions (3.12), cf. paragraphe 3.2.1. Ceci confirme la validité pour un conservatisme réduit des conditions LMI proposées dans ce chapitre.

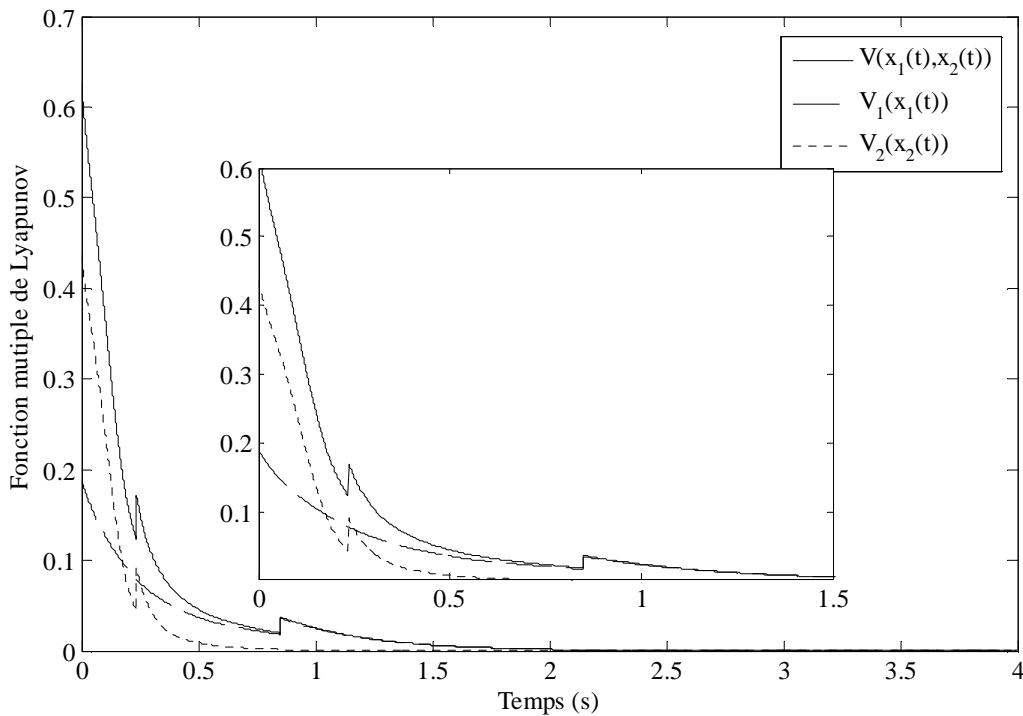


Figure. 3.11. Évolution temporelle de la fonction multiple de Lyapunov.

3.4. Conclusion

Dans ce chapitre, la stabilisation des systèmes linéaires interconnectés à commutations a été étudiée. Deux parties essentielles ont été abordées : la stabilisation des systèmes linéaires standards interconnectés à commutations et l'extension des résultats obtenus au cas descripteur. Des exemples numériques ont été proposés pour illustrer l'efficacité des approches proposées.

A ce stade, des conditions de synthèse de lois de commande décentralisées pour les systèmes non linéaires interconnectés ont été proposées, via une modélisation Takagi-Sugeno, dans le second chapitre. Dans le présent chapitre, des conditions de synthèse de lois de commande décentralisées pour une classe de systèmes hybrides (systèmes linéaires à commutations interconnectés) ont été proposées.

Dès lors, tirant parti des contributions du deuxième et troisième chapitre, des conditions garantissant la stabilisation décentralisée des systèmes non linéaires et hybrides, où chaque dynamique non linéaire sera représentée par un modèle TS, peuvent être abordées au chapitre suivant.

Chapitre 4

Stabilisation des systèmes Takagi-Sugeno à commutations interconnectés

4.1.	Introduction	123
4.2.	Approches de modélisation des systèmes non linéaires à commutations à base de multi-modèles TS	124
4.2.1.	<i>Systèmes non linéaires représentés par un modèle TS à commutations</i>	124
4.2.2.	<i>Systèmes non linéaires à commutations</i>	127
4.3.	Stabilisation de systèmes non linéaires à commutations interconnectés.....	128
4.3.1.	<i>Conditions LMI de synthèse de lois de commande décentralisées</i>	130
4.3.2.	<i>Exemple numérique</i>	134
4.4.	Conclusion.....	141

Stabilisation des systèmes Takagi Sugeno à commutations interconnectés

4.1.Introduction

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié la stabilisation décentralisée de deux types de systèmes de grandes dimensions. Le principe de la stabilisation décentralisée consiste à fragmenter le système global en un ensemble fini de sous-systèmes et de synthétiser des contrôleurs indépendants, pour chacun des sous systèmes, tout en assurant la stabilité du système de grandes dimensions considéré dans sa globalité. Selon la nature des sous-systèmes, nous nous sommes intéressés aux systèmes non linéaires de grandes dimensions, par le biais de la modélisation Takagi-Sugeno, mais aussi à la classe des systèmes hybrides représentés par les systèmes linéaires à commutations interconnectés.

Tirant parti des travaux présentés précédemment, nous nous intéressons, dans le présent chapitre, à la stabilisation des systèmes non linéaires hybrides de grandes dimensions. Ainsi, nous nous étudierons plus particulièrement la classe des systèmes non linéaires à commutations interconnectés où les composantes non linéaires pourront être modélisées par l'approche TS. De ce fait, cette classe de systèmes hérite de la capacité des systèmes hybrides à combiner des dynamiques continues et discrètes mais aussi de la capacité des multi-modèles TS à représenter fidèlement des non linéarités.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : Tout d'abord, nous proposons une discussion sur les différentes approches de modélisation permettant d'obtenir un système non linéaire à commutations. Ensuite, nous proposerons une description de la classe de système que nous considérerons suivi par une présentation de la structure des contrôleurs décentralisés proposés pour assurer leur stabilisation. Ensuite, nous développons les conditions de stabilité LMI, basée sur une fonction candidate de Lyapunov multiple non quadratique à commutations. Enfin, nous finirons ce chapitre par un exemple illustratif.

4.2.Approches de modélisation des systèmes non linéaires à commutations à base de multi-modèles TS

Dans la littérature, une confusion entre deux types de classes de systèmes à commutations à base de multi-modèles TS peut être constatée. Même si à première vue, ces deux classes semblent similaires, elles comportent des différences fondamentales. En effet, la première classe est employée pour représenter un système non linéaire sous forme d'un modèle TS à commutations. Dans ce cas, le phénomène de commutation est introduit dans le but de réduire le conservatisme de l'approche TS classique (Tanaka & al., 2001b, Palm & Drankov, 1998). Quant à la deuxième classe, le phénomène de commutation provient d'une propriété intrinsèque d'un système hybride commutant selon plusieurs dynamiques non linéaires où les sous-systèmes sont modélisés par des modèles TS (Yang & al., 2006 ; Lam, 2009).

Afin de sensibiliser davantage le lecteur aux particularités de chaque classe de système, nous présentons en détails, dans la suite de cette section, la structure ainsi que les problématiques liés à chacune de ces classes.

4.2.1. Systèmes non linéaires représentés par un modèle TS à commutations

Les systèmes à commutations à base de multi-modèles TS ont été introduits pour la première fois dans (Palm & Driankov, 1998). Ce dernier a proposé d'écrire, dans le cas continu, le système global non linéaire sous la forme d'une combinaison entre les systèmes hybrides et les systèmes multi-modèles TS. Le système considéré est stabilisé ensuite par une loi de commande PDC à commutation.

Dans le même sillage, (Tanaka & al., 2001b) a introduit une nouvelle réécriture des systèmes non linéaires par des systèmes multi-modèles TS à commutations. Cette représentation permet de modéliser une classe des systèmes réels complexes contenant plusieurs non linéarités tout en diminuant le nombre de règles floues par rapport à la modélisation à base de multi-modèles TS ordinaire. En effet, dans le cas d'un multi-modèles TS ordinaire, le nombre de règles floues croît exponentiellement par rapport à la complexité du système ; c'est-à-dire par rapport au nombre des non linéarités du système. De ce fait, la complexité de la modélisation TS influe sur la difficulté à réaliser la synthèse d'un contrôleur (Tanaka & al., 2008). Ce dernier point peut, par conséquent, être considéré comme une source de conservatisme. Afin de réduire ce conservatisme, les systèmes multi-modèles TS à commutations sont présentés comme une alternative appropriée pour la synthèse de lois de

commande de certains systèmes complexes. Cette approche consiste à modéliser le système non linéaire considéré par un représentant multi-modèles TS à commutations en partitionnant son espace d'état en plusieurs régions. Dans ce cas, le système considéré est décrit hiérarchiquement par une structure à deux niveaux : Le niveau "haut" correspond au niveau des régions de commutations et le niveau "bas" correspond au niveau des règles floues locales. Ainsi, les phénomènes de commutations interviennent entre deux niveaux « bas » de différentes régions (R_j et R_{j+1}) par le biais des variables de prémisse de la région à l'origine de cette commutation (R_j). Par conséquent, cette commutation est "fictive" au regard de la dynamique du système non linéaire considéré.

Pour mieux comprendre cette approche de modélisation, considérons l'exemple proposé dans (Tanaka & al., 2001b).

On considère un système multi-modèles TS à commutations divisé en deux régions. Chaque région comporte deux règles floues. Les fonctions d'appartenance de chaque régions R_1 et R_2 sont représentés par la figure 4.1. La dynamique du système est décrite par :

Règle de la 1^{ère} région R_1 : si $x_2 \geq 1$

1^{ère} Règle floue locale : si x_2 est $h_{11}(x_2(t))$ alors $\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + B_{11}u(t)$

2^{ème} Règle floue locale : si x_2 est $h_{12}(x_2(t))$ alors $\dot{x}(t) = A_{12}x(t) + B_{12}u(t)$

Règle de la 2^{ème} région R_2 : si $x_1 < 1$

1^{ère} Règle floue locale : si x_2 est $h_{21}(x_2(t))$ alors $\dot{x}(t) = A_{21}x(t) + B_{21}u(t)$

2^{ème} Règle floue locale : si x_2 est $h_{22}(x_2(t))$ alors $\dot{x}(t) = A_{22}x(t) + B_{22}u(t)$

avec $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ le vecteur d'état. $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et

$B_{11} = B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont les matrices d'état dans la première région R_1 et $A_{21} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$,

$A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sont les matrices d'état dans la

deuxième région R_2 .

Les fonctions d'appartenance de chaque système local multi-modèles TS sont données par :

$$h_{11}(x_2(t)) = \begin{cases} \frac{x_2(t)-1}{4}, & 1 < x_2(t) \leq 5 \\ 1, & x_2(t) > 5 \end{cases}, \quad h_{12}(x_2(t)) = \begin{cases} \frac{-x_2(t)+5}{4}, & 1 < x_2(t) \leq 5 \\ 0, & x_2(t) > 5 \end{cases} \quad \text{pour la}$$

première région R_1 ;

$$\text{et } h_{21}(x_2(t)) = \begin{cases} \frac{x_2(t)+3}{4}, & -3 \leq x_2(t) < 1 \\ 1, & x_2(t) < -3 \end{cases} \quad \text{et } h_{22}(x_2(t)) = \begin{cases} \frac{-x_2(t)+1}{4}, & -3 \leq x_2(t) < 1 \\ 1, & x_2(t) < -3 \end{cases} \quad \text{pour la}$$

deuxième région R_2 .

D'après la figure 4.1, nous remarquons que la surface de commutation entre les deux régions R_1 et R_2 est décrite par la deuxième règle floue locale de la première région et de la première règle floue locale de la deuxième région. Cette surface de liaison entre les deux règles floues locales entraîne l'ajout de conditions supplémentaires lors de l'étude de la stabilisation de ce type de système.

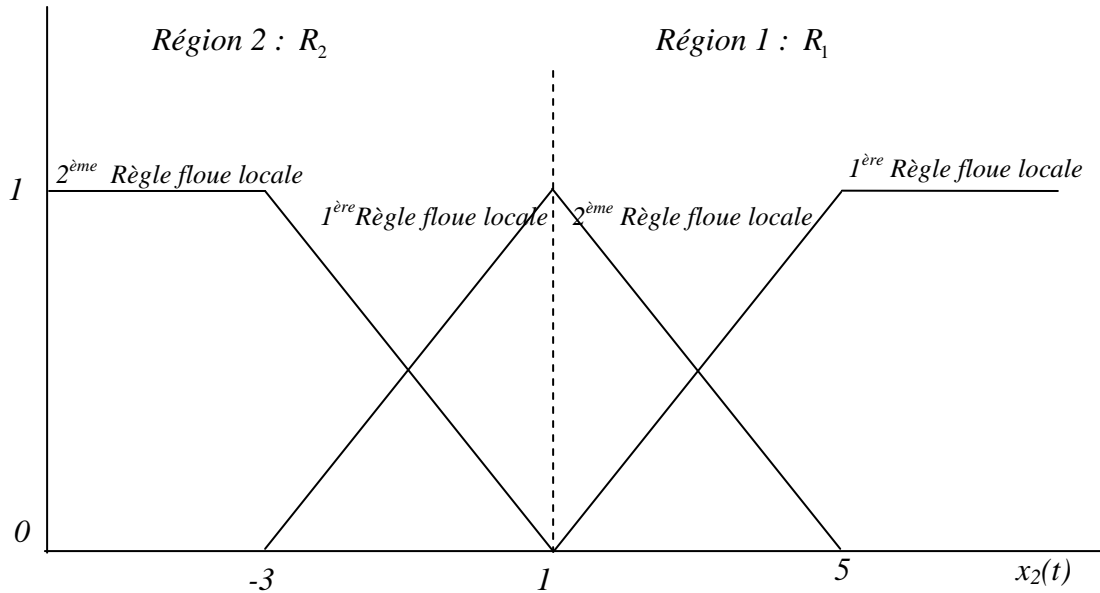


Figure. 4.1. Fonctions d'appartenance de deux régions R_1 et R_2 .

■

Sur la base de cette approche de modélisation des systèmes non linéaires, des conditions de stabilités ont été proposées en utilisant une fonction candidate de Lyapunov à

commutations spécifique aux modèles TS à commutations considérés (Ohtake & al., 2002). Récemment, l'utilisation d'un système augmenté composé du système multi-modèle TS à commutations associé à un système stable choisi arbitrairement a permis d'obtenir des conditions LMI (Ohtake & al., 2006 ; Chen & al., 2008, Ohtake & al. 2009, Ojleska & Stojanovski 2008, Ojleska & al. 2010). Soulignons que, de notre part, nous avons étendu ces conditions afin de synthétiser un contrôleur robuste pour les modèles TS à commutations incertains et perturbés (Jabri & al., 2010c). Par souci d'homogénéité du présent manuscrit, ces conditions ne seront pas développées dans la suite de ce chapitre mais font l'objet de l'*Annexe D*.

Remarque 4.1

Les travaux décrit ci-dessus ont été réalisés pour les systèmes en temps continu. Néanmoins, des études similaires ont été proposées pour les systèmes décrits en temps discret (Chio & Park, 2002 ; Chio & al., 2003 ; Chio & Park, 2004 ; Chiou & al., 2009 ; Yang & al. 2007).

4.2.2. Systèmes non linéaires à commutations

Contrairement aux systèmes présentés précédemment, qui considèrent un système non linéaire unique, les systèmes non linéaires à commutations, introduit par (Yang & al., 2006), permettent de représenter une classe de systèmes non linéaires hybrides où chacun des modes non linéaires peut être représenté par des multi-modèles TS. Cette classe de systèmes repose sur une structure illustrée par la figure 4.2 et décrite par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{s_j=1}^{r_j} \xi_j(t) h_{s_j}(z_j(t)) (A_{s_j} x(t) + B_{s_j} u(t)) \quad (4.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^d$ représentent respectivement les vecteurs d'état et de commande, m est le nombre de modes de commutations, r_j est le nombre des règles floues dans le mode j , $A_{s_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B_{s_j} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ sont les matrices décrivant la dynamique locale du représentant TS dans le mode j , $z_j(t)$ et $h_{s_j}(z_j) \geq 0$ désignent respectivement les variables de prémisses

et les fonctions d'appartenance (vérifiant les propriétés de somme convexe $\sum_{s_j=1}^{r_j} h_i^{s_j}(z_i^j(t)) = 1$)

dans le mode j et $\xi_j(t)$ représentent les fonctions d'activations des sous-système commutés, c'est-à-dire, si l'on note l le mode actif à un instant t :

$$\begin{cases} \xi_{il}(t) = 1 & \text{si } j = l \\ \xi_{ij}(t) = 0 & \text{si } j \neq l \end{cases} \quad (4.2)$$

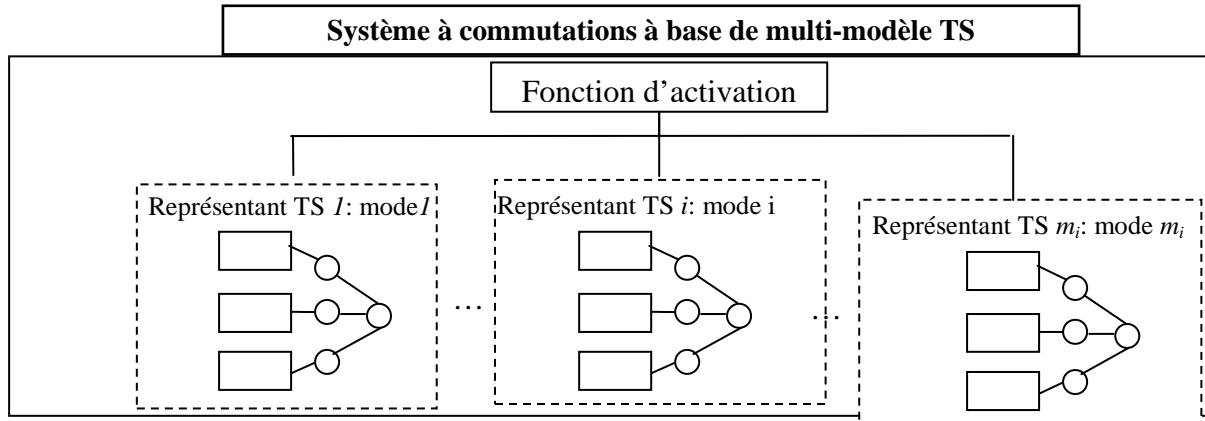


Figure. 4.2. Diagramme d'un système à commutations à base de multi-modèles TS.

Des conditions de stabilité et de synthèse de lois de commande PDC à commutations par retour d'état ont été proposées pour la classe de systèmes (4.1) (Yang & al., 2006 ; Lam, 2009 ; Chio & al., 2009). Parallèlement, le cas du retour de sortie a été proposé dans (Liu, 2008). Notons que, dans (Yang & al., 2006), les conditions ont été obtenues en considérant une séquence de commutation stabilisante (stabilité conditionnelle). De plus, ces travaux souffrent de conservatisme puisqu'ils sont basés sur une fonction de Lyapunov commune (quadratique) pour chacun des multi-modèles TS. Dans le but de diminuer le conservatisme, une nouvelle approche propose l'utilisation d'une fonction de Lyapunov multiple non quadratique à commutations (Benzaouia & al., 2011). Néanmoins cette étude a été réalisée dans le cas des systèmes décrits en temps discret, ce qui facilite grandement l'obtention de conditions non quadratique (cf. chapitre 1, paragraphe 1.3.5). Dans la suite, nous nous intéresserons à des systèmes de grandes dimensions décrits en temps continus.

4.3. Stabilisation de systèmes non linéaires à commutations interconnectés

Dans cette partie, nous considérons une classe de systèmes non linéaires hybrides de grandes dimensions notés S , composé d'un ensemble de N sous-systèmes S_i non linéaires (TS) à commutations interconnectés donné par :

Pour $i = 1, \dots, N$,

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j_i=1}^{m_i} \sum_{s_{j_i}=1}^{r_{j_i}} \xi_{ij_i}(t) h_i^{s_{j_i}}(z_i^{j_i}(t)) \left[A_i^{s_{j_i}} x_i(t) + B_i^{s_{j_i}} u_i(t) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N F_{i\alpha}^{s_{j_i}} x_\alpha(t) \right] \quad (4.3)$$

où $x_i(t) \in \mathbb{R}^{\eta_i}$, $u_i(t) \in \mathbb{R}^{\nu_i}$ représentent respectivement les vecteurs d'état et de commande du $i^{\text{ème}}$ sous-système, m_i est le nombre de modes de commutations du sous-système S_i , r_{j_i} est le nombre de règles floues associées au représentant du sous-système S_i dans le mode de j , $A_i^{s_{j_i}} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_i}$, $B_i^{s_{j_i}} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \nu_i}$ et $F_{i,\alpha}^{s_{j_i}} \in \mathbb{R}^{\eta_i \times \eta_\alpha}$ décrivent la dynamique du sous-système S_i dans son mode de fonctionnement j_i , $z_i^{j_i}(t)$ et $h_i^{s_{j_i}}(z_i^{j_i}(t)) \geq 0$ désignent respectivement les variables de prémisses et les fonctions d'appartenance vérifiant la propriété de somme convexe

$$\sum_{s_{j_i}=1}^{r_{j_i}} h_i^{s_{j_i}}(z_i^{j_i}(t)) = 1. \quad \xi_{ij_i}(t) \text{ représente la fonction d'activation du sous-système } S_i.$$

Remarque 4.2

Les commutations dans chaque sous-système S_i s'effectuent indépendamment des commutations des autres sous-systèmes. De ce fait, chaque sous-système a sa propre loi de commutation. De plus, on rappelle que nous considérons des séquences de commutations arbitraires pour étudier la stabilité uniforme des systèmes à commutations.

L'objectif de cette section étant la stabilisation des systèmes représentés par (4.3), on considère l'ensemble de lois de commande décentralisées non-PDC à commutations données par :

Pour $i = 1, \dots, N$:

$$u_i(t) = \sum_{j_i=1}^{m_i} \sum_{k_{j_i}=1}^{r_{j_i}} \xi_{ij_i}(t) h_i^{s_{j_i}}(z_i^{j_i}(t)) K_i^{k_{j_i}} \left(\sum_{s_{j_i}=1}^{r_{j_i}} h_i^{s_{j_i}}(z_i^{j_i}(t)) X_i^{s_{j_i}} \right)^{-1} x_i(t) \quad (4.4)$$

où $K_i^{k_{j_i}}$ et $X_i^{s_{j_i}} = (X_i^{s_{j_i}})^T > 0$ sont les matrices de gains à synthétiser.

Notations

Considérons des matrices $G_i^{s_{ji}}$ et $Y_i^{s_{ji}k_{ji}}$, de dimensions appropriées, ainsi que les fonctions

d'appartenance $h_i^{s_{ji}}(z_i^{j_i}(t))$, on note $G_i^{h_{ji}} = \sum_{s_{ji}=1}^{r_{ji}} h_i^{s_{ji}} G_i^{s_{ji}}$, $Y_i^{h_{ji}h_{ji}} = \sum_{s_{ji}=1}^{r_{ji}} \sum_{k_{ji}=1}^{r_{ji}} h_i^{s_{ji}} G_i^{s_{ji}k_{ji}}$,

$$\left(\Gamma_i^{h_{ji}}\right)^{-1} = \left(\sum_{s_{ji}=1}^{r_{ji}} h_i^{s_{ji}} \Gamma_i^{s_{ji}}\right)^{-1}.$$

En utilisant les notations présentées ci-dessus, la dynamique du système global en boucle fermée est obtenue en substituant (4.4) dans (4.3) et est décrite par :

Pour $i = 1, \dots, N$:

$$\dot{x}_i = \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i} \left\{ \left[A_i^{h_{ji}} + B_i^{h_{ji}} K_i^{h_{ji}} \left(X_i^{h_{ji}} \right)^{-1} \right] x_i + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N F_{i\alpha}^{h_{ji}} x_\alpha \right\} \quad (4.5)$$

Il convient donc maintenant de proposer une méthodologie de synthèse permettant de déterminer les matrices de gains qui assureront la stabilité du système en boucle fermée (4.5) dans sa globalité.

4.3.1. Conditions LMI de synthèse de lois de commande décentralisées

Nous cherchons maintenant à établir, en se basant sur la théorie de Lyapunov, des conditions LMI permettant la synthèse de lois de commande décentralisées (4.4) afin de stabiliser les systèmes de grandes dimensions représentés par (4.3). Afin d'y parvenir, nous proposons de combiner les différentes formes de fonctions candidates de Lyapunov utilisées dans les chapitres précédents. Ainsi, on considère une fonction candidate multiple de Lyapunov composée de N sous-fonctions non quadratiques donnée par :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^N \sum_{j_i=1}^{m_i} \xi_{ij_i} V_{ij_i}(x_i) \quad (4.6)$$

$$\text{avec } V_{ij_i}(x) = x_i^T \left(X_i^{h_{ji}} \right)^{-1} x_i = x_i^T \left(\sum_{s_{ji}=1}^{r_{ji}} h_i^{s_{ji}} X_i^{s_{ji}} \right)^{-1} x_i.$$

Notons que pour $x(0) = 0$, on a $V_{ij_i}(x(0)) = 0$. De même que pour les systèmes linéaires à commutations présentés dans le chapitre précédent (cf. chapitre 3, paragraphe 3.2.1), le système non linéaire à commutations interconnecté est stable si :

$$\forall t, V(x_1, x_2, \dots, x_N) \geq 0, \quad (4.7)$$

$$\forall t \neq t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+}, \dot{V}(x_1, x_2, \dots, x_N) < 0, \quad (4.8)$$

et

$$\text{Pour } t = t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+}, V_{\dot{u}_i^+} \left(t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+} \right) \leq \mu_{\dot{u}_i, j_i^+} V_{\dot{u}_i} \left(t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+} \right) \quad (4.9)$$

où $t_{\dot{u}_i \rightarrow j_i^+}$ sont les temps de commutations et $\mu_{\dot{u}_i, j_i^+}$ représentent les taux de décroissance lors des commutations dans chacun des sous-systèmes S_i .

Remarque 4.3

Rappelons que, dans le chapitre précédent, trois cas ont été discutés pour vérifier la condition aux instants de commutations (4.9), cf. chapitre 3, paragraphe 3.2.1. Parmi ces trois approches, nous avons montré que la troisième, considérant des taux de décroissances entre deux instants de commutations successifs (deux-à-deux) inférieurs à 1, est la moins conservative. C'est-à-dire, pour tout $i = 1, \dots, N$, $j_i, j_i^+, j_i^{++} = 1, \dots, m_i$ avec $j_i^+ \neq j_i$ et $j_i^{++} \neq j_i^+$:

$$\mu_{\dot{u}_i, j_i^+} \mu_{\dot{u}_i, j_i^{++}} \leq 1 \quad (4.10)$$

où le mode j_i^{++} est successeur du mode j_i^+ qui est lui-même successeur du mode j_i .

Le résultat principal de ce chapitre, donné sous forme LMI est résumé par le théorème suivant.

Théorème 4.1 (Jabri & al., 2011b)

Considérons l'ensemble des N systèmes non linéaires à commutations interconnectés décrits par (4.3). Supposons que, pour tout sous-système S_i , le mode actif est noté par j_i et le mode suivant est noté par j_i^+ , et que, pour tout $j_i = 1, \dots, m_i$ et $s_{j_i} = 1, \dots, r_{j_i}$, les bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance sont données par $\dot{h}_i^{s_{j_i}}(z(t)) \geq \lambda_i^{s_{j_i}}$. De plus, considérons des taux de décroissance $\mu_{\dot{u}_i, j_i^+}$ satisfaisant les conditions (4.10). Le système

interconnecté (4.3) est globalement asymptotiquement stabilisé en boucle fermée via un ensemble de n lois de commande non-PDC à commutations décentralisées, définies par (4.4), s'il existe, pour toutes les combinaisons $i=1,\dots,N$, $j_i=1,\dots,m_i$, $j_i^+=1,\dots,m_i$, $s_{j_i}=1,\dots,r_{j_i}$, $k_{j_i}=1,\dots,r_{j_i}$ et $l_{j_i}=1,\dots,r_{j_i}$, les matrices $X_i^{s_{j_i}} = \left(X_i^{s_{j_i}}\right)^T > 0$, $W_i^{s_{j_i}k_{j_i}}$, $K_i^{k_{j_i}}$ et les scalaires positifs $\tau_{l_i}, \dots, \tau_{i-l_i}, \tau_{i+l_i}, \dots, \tau_{N_i}$ (privés de τ_{i_i} qui n'existe pas) vérifiant les conditions LMI suivantes :

$$X_i^{k_{j_i}} - \mu_{\substack{j_i, j_i^+ \\ i, j_i^+}} X_i^{k_{j_i^+}} \leq 0 \quad (4.11)$$

$$X_i^{l_{j_i}} + W_i^{s_{j_i}k_{j_i}} > 0 \quad (4.12)$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc} \Gamma_i^{s_{j_i}k_{j_i}} & X_i^{s_{j_i}} & \dots & \dots & X_i^{s_{j_i}} & X_i^{s_{j_i}} & \dots & \dots & X_i^{s_{j_i}} \\ \hline X_i^{s_{j_i}} & -\tau_{l_i}I & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ X_i^{s_{j_i}} & 0 & \dots & 0 & -\tau_{i-l_i}I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline X_i^{s_{j_i}} & 0 & \dots & \dots & 0 & -\tau_{i+l_i}I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ X_i^{s_{j_i}} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\tau_{N_i}I \end{array} \right) < 0 \quad (4.13)$$

avec $\Gamma_i^{s_{j_i}} = X_i^{k_{j_i}} \left(A_i^{s_{j_i}}\right)^T + A_i^{s_{j_i}} X_i^{k_{j_i}} - \Phi_i^{s_{j_i}k_{j_i}} + \left(K_i^{k_{j_i}}\right)^T \left(B_i^{s_{j_i}}\right)^T + B_i^{s_{j_i}} K_i^{k_{j_i}} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n \tau_{i\alpha} F_{i\alpha}^{s_{j_i}} \left(F_{i\alpha}^{s_{j_i}}\right)^T$,

et $\Phi_i^{s_{j_i}k_{j_i}} = \sum_{l_{j_i}=1}^{r_{j_i}} \lambda_{l_{j_i}} \left(X_i^{l_{j_i}} + W_i^{s_{j_i}k_{j_i}}\right)$.

Preuve

Soit la fonction candidate de Lyapunov (4.6) et les conditions (4.7), (4.8) et (4.9). La condition est vérifiée si, pour tout $i=1,\dots,N$, si $X_i^{h_{j_i}} = \left(X_i^{h_{j_i}}\right)^T > 0$. De plus, en considérant (4.5), la condition (4.8) peut être écrite sous la forme :

$$\forall t \neq t_{\substack{j_i \\ i, j_i^+}},$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \left[\dot{x}_i^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} x_i + x_i^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \dot{x}_i + x_i^T \left(\dot{X}_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} x_i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N \left\{ x_i^T \left[\left(A_i^{h_{j_i}} \right)^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} + \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} A_i^{h_{j_i}} + \left(\dot{X}_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} + \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \left(K_i^{h_{j_i}} \right)^T \left(B_i^{h_{j_i}} \right)^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} B_i^{h_{j_i}} K_i^{h_{j_i}} \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \right] x_i + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left[\left(x_\alpha \right)^T \left(F_{i\alpha}^{h_{j_i}} \right)^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} x_i + x_i^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} F_{i\alpha}^{h_{j_i}} x_\alpha \right] \right\} < 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

En utilisant le lemme A.2 (cf. *Annexe A*), l'inégalité (4.14) peut être majorée par :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N x_i^T \left\{ \left(A_i^{h_{j_i}} \right)^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} + \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} A_i^{h_{j_i}} + \left(\dot{X}_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} + \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \left(K_i^{h_{j_i}} \right)^T \left(B_i^{h_{j_i}} \right)^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \right. \\
 & \quad \left. + \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} B_i^{h_{j_i}} K_i^{h_{j_i}} \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha} \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} F_{i\alpha}^{h_{j_i}} \left(F_{i\alpha}^{h_{j_i}} \right)^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \right\} x_i + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha}^{-1} x_\alpha^T x_\alpha < 0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Sachant que $\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{i\alpha}^{-1} x_\alpha^T x_\alpha = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \tau_{\alpha i}^{-1} x_i^T x_i$, $\forall x_i$, la condition (4.15) est vérifiée si :

Pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}
 & \left(A_i^{h_{j_i}} \right)^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} + \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} A_i^{h_{j_i}} + \left(\dot{X}_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} + \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \left(K_i^{h_{j_i}} \right)^T \left(B_i^{h_{j_i}} \right)^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} + \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} B_i^{h_{j_i}} K_i^{h_{j_i}} \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \\
 & + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left[\tau_{i\alpha} \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} F_{i\alpha}^{h_{j_i}} \left(F_{i\alpha}^{h_{j_i}} \right)^T \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} + \tau_{\alpha i}^{-1} I \right] < 0
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

En multipliant respectivement à gauche et à droite (4.16) par $X_i^{h_{j_i}}$ et sachant que

$$-\left(\dot{X}_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} = \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \dot{X}_i^{h_{j_i}} \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1}, \text{ nous obtenons :}$$

Pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$X_i^{h_{j_i}} \left(A_i^{h_{j_i}} \right)^T + A_i^{h_{j_i}} X_i^{h_{j_i}} - \dot{X}_i^{h_{j_i}} + \left(K_i^{h_{j_i}} \right)^T \left(B_i^{h_{j_i}} \right)^T + B_i^{h_{j_i}} K_i^{h_{j_i}} + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^N \left[\tau_{i\alpha} F_{i\alpha}^{h_{j_i}} \left(F_{i\alpha}^{h_{j_i}} \right)^T + \tau_{\alpha i}^{-1} X_i^{h_{j_i}} X_i^{h_{j_i}} \right] < 0$$

Considérons maintenant le terme $\dot{X}_i^{h_{j_i}}$ présent dans l'inégalité (4.17). En adoptant le schéma de relaxation proposé par (Mozelli & al., 2009) et présenté au chapitre 1 (cf. paragraphe 1.3.5), il est possible d'introduire une variable de décision libre $W_i^{h_{j_i} h_{j_i}}$ telle que :

$$\dot{X}_i^{h_{j_i}} = \sum_{l_j=1}^{r_j} h_i^{l_{j_i}} \left(X_i^{l_{j_i}} + W_i^{h_{j_i} h_{j_i}} \right) \quad (4.18)$$

Notons $\lambda_i^{s_{j_i}}$ les bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance $\dot{h}_i^{s_{j_i}}$, $\dot{X}_i^{h_{j_i}}$ peut être majorée telle que :

$$-\dot{X}_i^{h_{j_i}} \leq -\Phi_i^{h_{j_i} h_{j_i}} \quad (4.19)$$

où $\Phi_i^{h_{j_i} h_{j_i}} = \sum_{s_{j_i}=1}^{r_{j_i}} \sum_{k_{j_i}=1}^{r_{j_i}} \sum_{l_{j_i}=1}^{r_{j_i}} h_i^{s_{j_i}} h_i^{k_{j_i}} \lambda_i^{l_{j_i}} \left(X_i^{l_{j_i}} + W_i^{s_{j_i} k_{j_i}} \right)$ et :

$$X_i^{l_{j_i}} + W_i^{s_{j_i} k_{j_i}} > 0 \quad (4.20)$$

Dès lors, en considérant (4.19) et en appliquant le complément de Schur, (4.17) est vérifiée si les conditions (4.13) le sont également.

Considérons maintenant la condition (4.9) aux instants de commutations $t_{j_i \rightarrow j_i^+}$. Celle-ci est vérifiée si :

Pour tout $i = 1, \dots, N$:

$$\left(X_i^{h_{j_i^+}} \right)^{-1} \leq \mu_{j_i j_i^+} \left(X_i^{h_{j_i}} \right)^{-1} \quad (4.21)$$

Qui est vérifiée si les conditions LMI (4.11) le sont également. ■

4.3.2. Exemple numérique

Afin de tester l'efficacité de l'approche de synthèse de lois de commande décentralisée pour les systèmes non linéaires à commutations interconnectés proposée au théorème 4.1, on considère deux sous-systèmes non linéaires à commutations S_1 et S_2 , de dimensions différentes, interconnectés donnés par :

$$\bullet \quad S_1 : \dot{x}_1(t) = \sum_{j_i=1}^2 \sum_{s_{j_i}=1}^2 \xi_{1,j_i}(t) h_1^{s_{j_i}}(t) \left(A_1^{s_{j_i}} x_1(t) + B_1^{s_{j_i}} u_1(t) + F_{12}^{s_{j_i}} x_2(t) \right) \quad (4.22)$$

$$\text{avec } x_1 = [x_{11} \quad x_{12}]^T \text{ le vecteur d'état, } A_1^1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0.1 & -2.1 \end{bmatrix}, A_1^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0.1 & -1.1 \end{bmatrix}, B_1^1 = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$B_1^{2_1} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}$, $F_{12}^{1_1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.001 & 0.1 \\ 0.01 & 0.01 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $F_{12}^{2_1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.1 \\ 0.01 & 0.01 & 0.1 \end{bmatrix}$ les matrices décrivant

la dynamique dans le premier mode et $A_1^{1_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.1 & -2 \end{bmatrix}$, $A_1^{2_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.1 & -3 \end{bmatrix}$, $B_1^{1_2} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$,

$B_1^{2_2} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$, $F_{12}^{1_2} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0.07 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$, $F_{12}^{2_2} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.001 & 0.01 \\ 0.08 & 0.02 & 0.2 \end{bmatrix}$ dans le deuxième

mode, $h_1^{1_1}(x_1(t)) = \sin^2(x_{11}(t))$ et $h_1^{2_1}(x_1(t)) = 1 - h_1^{1_1}(x_1(t))$ les fonctions d'appartenance pour le premier mode, $h_1^{1_2}(x_1(t)) = \sin^2(x_{12}(t))$ et $h_1^{2_2}(x_1(t)) = 1 - h_1^{1_2}(x_1(t))$ pour le deuxième mode.

$$\bullet \quad S_2 : \dot{x}_2(t) = \sum_{j_2=1}^2 \sum_{s_{j_2}=1}^2 \xi_{2j_2}(t) h_2^{s_{j_2}}(t) \left(A_2^{s_{j_2}} x_2(t) + B_2^{s_{j_2}} u_2(t) + F_{21}^{s_{j_2}} x_1(t) \right) \quad (4.23)$$

avec $x_2 = [x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23}]^T$ le vecteur d'état, $A_2^{1_1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0.1 & -1.1 \end{bmatrix}$, $A_2^{2_1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0.1 & -2.1 \end{bmatrix}$,

$B_2^{1_1} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.5 \\ 1.1 \end{bmatrix}$, $B_2^{2_1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}$, $F_{21}^{1_1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $F_{21}^{2_1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 \\ 0.02 & 0.1 \end{bmatrix}$ les matrices décrivant

la dynamique dans le premier mode et $A_2^{1_2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1.1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2^{2_2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0.1 & -1 \end{bmatrix}$,

$B_2^{1_2} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$, $B_2^{2_2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 1.2 \end{bmatrix}$, $F_{21}^{1_2} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$ et $F_{21}^{2_2} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.5 \\ 0.1 & 0.04 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$ dans le deuxième

mode, $h_2^{1_1}(x_2(t)) = \sin^2(x_{21}(t))$, $h_2^{2_1}(x_2(t)) = 1 - h_2^{1_1}(x_2(t))$ les fonctions d'appartenance pour le premier mode et $h_2^{1_2}(x_2(t)) = \sin^2(x_{22}(t))$ et $h_2^{2_2}(x_2(t)) = 1 - h_2^{1_2}(x_2(t))$ pour le second mode.

Afin de réaliser une simulation de la dynamique du système, on considère les lois de commutations données par :

$$\bullet \begin{cases} \xi_{11_1}(t) = 1 & \text{si } (\{0.9x_{11} + x_{12} > 0\} \text{ et } \{-0.2x_{11} + 9x_{12} > 0\}) \text{ ou } (\{0.9x_{11} + x_{12} < 0\} \text{ et } \{-0.2x_{11} + 9x_{12} < 0\}) \\ \xi_{11_1}(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\xi_{21_1}(t) = 1 - \xi_{11_1}(t)$ pour le premier sous système,

$$\bullet \begin{cases} \xi_{11_1}(t) = 1 & \text{si } (\{-x_{21} + x_{22} > 0\} \text{ et } \{x_{21} - 2x_{22} > 0\}) \text{ ou } (\{-x_{21} + x_{22} < 0\} \text{ et } \{x_{21} - 2x_{22} < 0\}) \\ \xi_{11_1}(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\xi_{21_1}(t) = 1 - \xi_{11_1}(t)$ pour le premier sous système,

Afin de stabiliser le système non linéaire à commutations interconnecté décrit par (4.22) et (4.23), un contrôleur décentralisé, composé de deux contrôleurs locaux non quadratiques à commutations de la forme (4.4), est synthétisé. Chaque contrôleur local est associé à un sous-système et dispose de deux modes de fonctionnement (le même nombre que son sous-système associé). Il est appelé à garantir la stabilisation du sous-système, auquel il est associé, en présence des interconnexions avec l'autre sous-système. Ainsi, dans le but de résoudre les conditions de stabilité proposées dans le théorème 4.1, nous fixons les taux de décroissance tels que $\mu_{i1,2_i} = 0.4$ et $\mu_{i2,1_i} = 2$ de façon à ce que la condition (4.10) soit satisfaite. De plus, nous posons les bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance telles que :

- $\lambda_1^1 = \lambda_1^{2_1} = -4$, pour le premier mode de fonctionnement et $\lambda_1^{1_2} = \lambda_1^{2_2} = -1$ pour le deuxième mode de fonctionnement du sous-système S_1 ,
- $\lambda_2^1 = \lambda_2^{2_1} = -6.5$ pour le premier mode de fonctionnement et $\lambda_2^{1_2} = \lambda_2^{2_2} = -1.5$ pour le deuxième mode de fonctionnement du sous-système S_2 .

Le résultat, obtenu à l'aide de l'outil *LMI Toolbox* du *Matlab*, est donné par les matrices de gains suivantes:

$$\bullet K_1^1 = [-3.5 \quad -14.35], K_1^{2_1} = [0.78 \quad -2.68], X_1^1 = \begin{bmatrix} 22.21 & 0.38 \\ 0.38 & 15.23 \end{bmatrix}$$

$$X_1^{2_1} = \begin{bmatrix} 24.94 & -0.44 \\ -0.44 & 14.03 \end{bmatrix}, K_1^{1_2} = [3.78 \quad 4.48] \text{ et } K_1^{2_2} = [3.3 \quad 1.45], P_1^{1_2} = \begin{bmatrix} 11.1 & 0.19 \\ 0.19 & 7.61 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$P_1^{1_2} = \begin{bmatrix} 12.47 & -0.22 \\ -0.22 & 7.01 \end{bmatrix} \text{ pour le contrôleur du sous-système } S_1.$$

$$\bullet \quad K_2^{1_1} = [-0.52 \quad -5.5 \quad -5.1], \quad K_2^{2_1} = [0.82 \quad -3.41 \quad -0.47], \quad X_2^1 = \begin{bmatrix} 26.62 & -0.66 & -3.92 \\ -0.66 & 16.52 & -6 \\ -3.92 & -6 & 22.33 \end{bmatrix},$$

$$X_2^{2_1} = \begin{bmatrix} 26.57 & -0.18 & -4.04 \\ -0.18 & 15.87 & -5.96 \\ -4.04 & -5.96 & 22.39 \end{bmatrix}, \quad K_2^{1_2} = [-3.43 \quad -10.05 \quad -10.18],$$

$$K_2^{2_2} = [-1.17 \quad -4.56 \quad -3.05], \quad P_2^{2_1} = \begin{bmatrix} 13.31 & -0.33 & -1.96 \\ -0.33 & 8.26 & -3 \\ -1.96 & -3 & 11.16 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } P_2^{2_2} = \begin{bmatrix} 13.28 & -0.09 & -5.48 \\ -0.09 & 7.93 & -2.98 \\ -2.02 & -2.98 & 11.19 \end{bmatrix} \text{ pour le contrôleur du sous-système } S_2.$$

La simulation du système considéré en boucle fermée est réalisée avec les conditions initiales $x_1(0) = [2 \quad 2]^T$ et $x_2(0) = [-1 \quad 1.5 \quad -1]^T$. La figure 4.3 présente l'évolution temporelle des vecteurs d'état du système en boucle fermée. Nous constatons que le contrôleur obtenu stabilise le système avec un temps moyen de convergence de l'ordre de 4s. Nous remarquons ici que chaque sous-système possède son propre temps de convergence. Par ailleurs, nous pouvons également remarquer que la dynamique du premier sous système est plus rapide que celle du second.

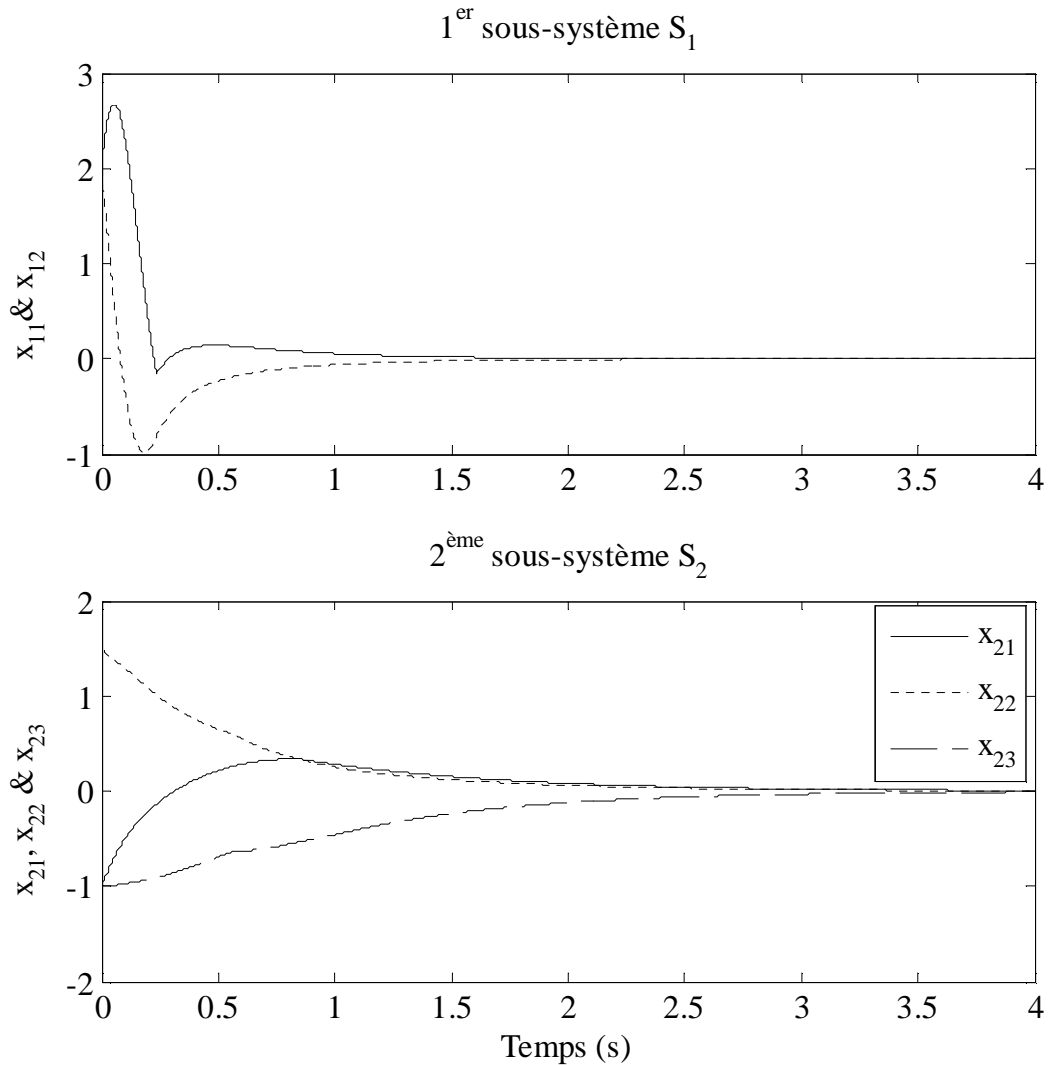


Figure. 4.3. Dynamique de sous-systèmes interconnectés à commutations à base de multi-modèles TS.

L'évolution des signaux de commande et des modes de commutations actifs est illustrée dans la figure 4.4. Nous constatons que la commutation de chaque système d'un mode à un autre se fait indépendamment de l'autre sous-système. En effet, à l'instant 0.15s, le premier sous-système S_1 commute. Ainsi, le contrôleur local associé au sous-système S_1 passe de son premier mode de fonction au deuxième. On remarque alors que ce changement de mode du sous-système S_1 n'affecte pas la stabilisation du sous-système S_2 . En effet, à cet instant de commutation (0.15s), le sous-système S_2 conserve son mode de fonctionnement (second mode) sans se déstabiliser. Ce phénomène se répète pour le sous-système S_2 durant ses commutations sans provoquer l'instabilité du système global.

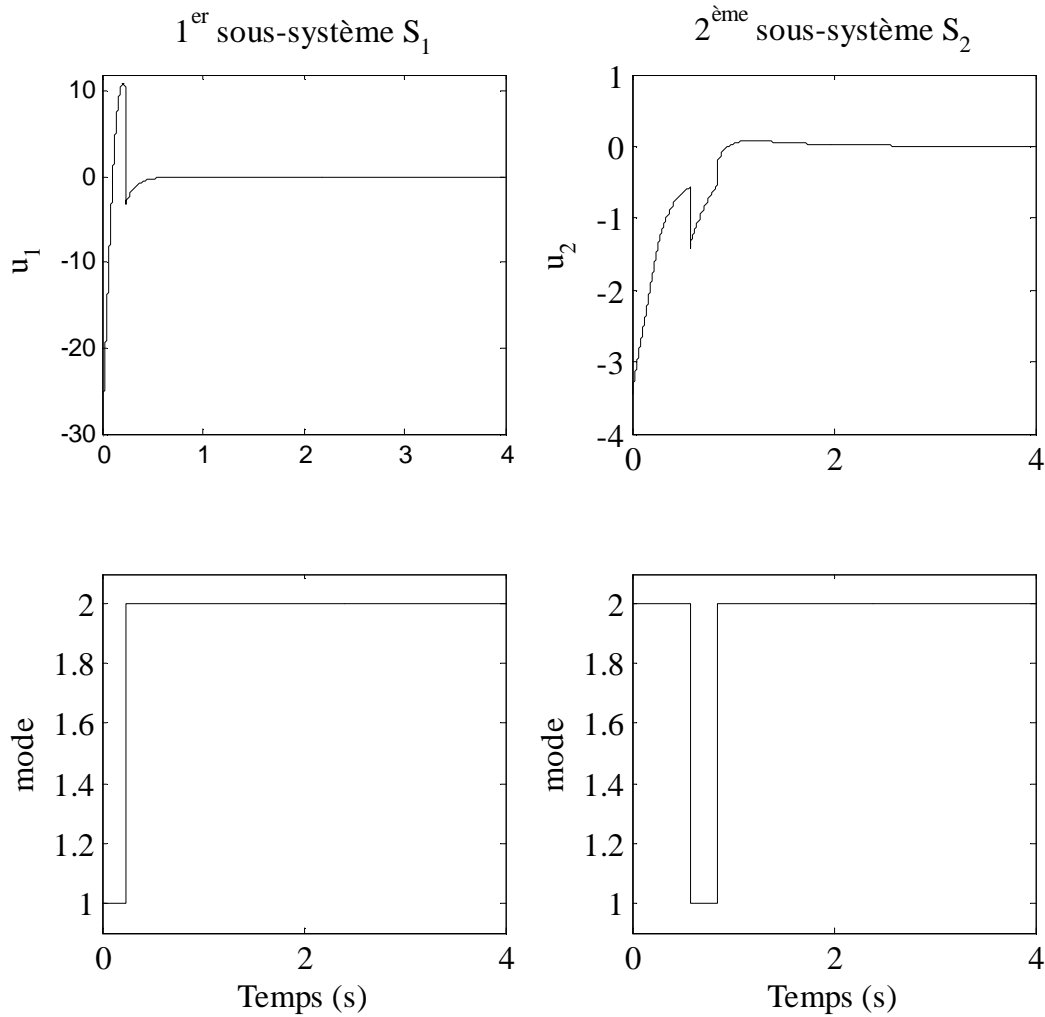


Figure. 4.4. Evolution temporelle des signaux de commande.

La figure 4.5 présente l'évolution temporelle de la fonction multiple de Lyapunov $V(x_1, x_2)$. Nous constatons que les pseudos fonctions $V_1(x_1)$ et $V_2(x_2)$ présentent un comportement décroissant au long de leurs trajectoires, sauf aux instants de commutations. En effet, la présence de saut des fonctions de Lyapunov aux instants de commutations est due au choix des taux de décroissance. Ces comportements de ces pseudos fonctions influent donc sur celui de la fonction de Lyapunov globale.

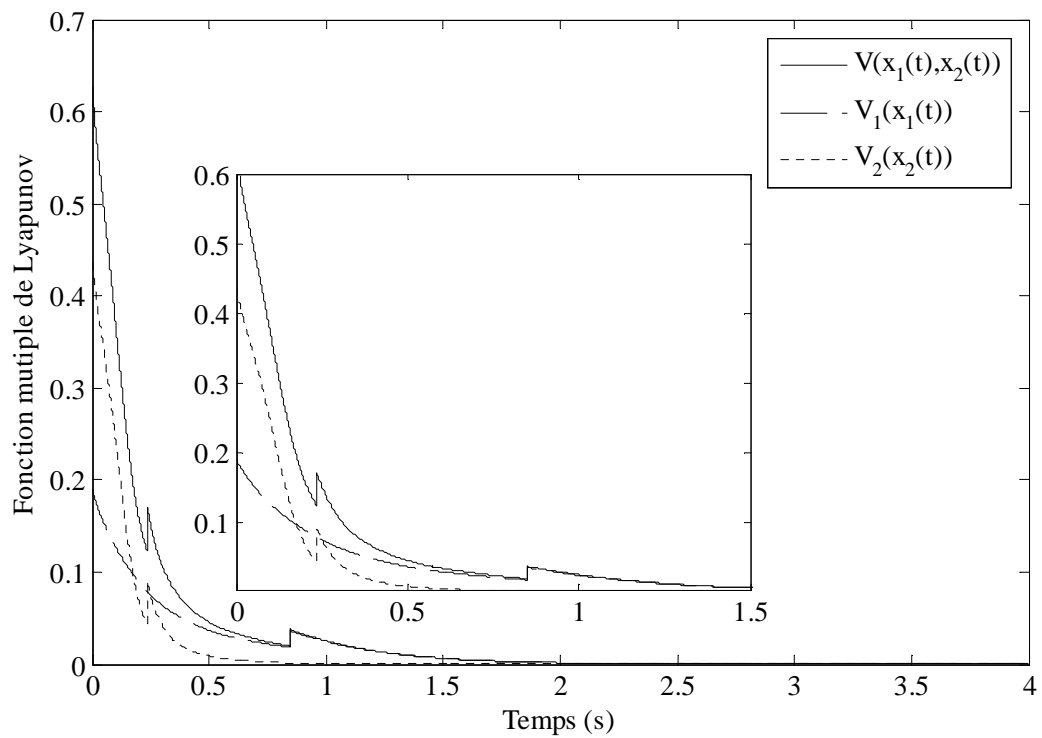


Figure. 4.5. Evolution temporelle de la fonction multiple de Lyapunov.

Afin de vérifier en simulation les hypothèses de départ, la figure 4.6 présente l'évolution temporelle des dérivées des fonctions d'appartenance. Celles-ci, sont effectivement vérifiées puisque les dérivées des fonctions d'appartenance restent toujours supérieures à leurs valeurs fixées.

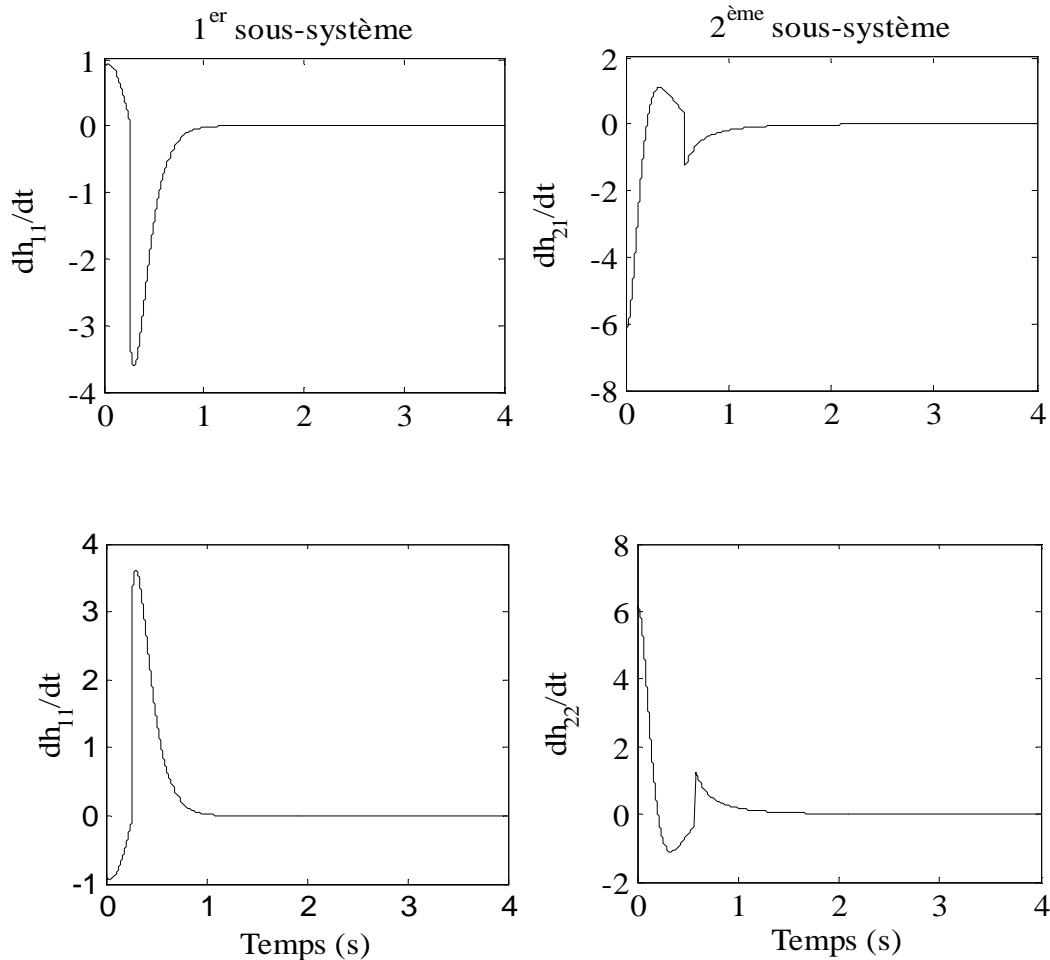


Figure. 4.6. Evolution temporelle des dérivés des fonctions d'appartenance.

4.4. Conclusion

La stabilisation d'une classe de système non linéaire et hybride de grandes dimensions a été abordée dans ce chapitre. La classe de système considérée est composée de n sous-systèmes non linéaires à commutations interconnectés. Tirant partie de la capacité des multi-modèles TS à représenter des dynamiques non linéaires, chaque mode non linéaire des sous-systèmes à commutations est réécrit par un multi-modèles TS.

Après avoir présenté la classe de système considérée ainsi que la structure de lois de commande non-PDC à commutations décentralisées, une méthodologie de synthèse, formulée en termes de LMI, a été proposée au travers d'un théorème. De plus, afin de proposer des conditions LMI de moindre conservatisme, une fonction candidate de Lyapunov multiple non quadratique à commutations a été considérée.

Conclusion générale

Les travaux abordés dans cette thèse ont été consacrés à l'étude de la stabilisation décentralisée des systèmes de grandes dimensions non linéaires. L'idée principale pour assurer la stabilité de ce type de systèmes est de le fragmenter en un ensemble fini de sous-systèmes, de dimension acceptable, interconnectés. Les sous-systèmes sont modélisés par des outils de modélisation classiques. Ensuite, ils sont commandés par le biais des contrôleurs adaptés. Ainsi, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'étude de la stabilisation des systèmes interconnectés à base des multi-modèles TS et/ou à commutations. Notons que ces deux classes de systèmes sont représentées par des structures semblables. En effet, leur concept repose sur une décomposition du système global en un ensemble de modèles locaux, valables dans des régions définies de l'espace d'état et reliés entre eux par des mécanismes d'interpolation ou de commutation. Ainsi, si le mécanisme d'interconnection est défini par des fonctions abruptes, on parle de système à commutations. A contrario, si les relations entre modèles locaux sont définies par des mécanismes d'interpolations ou des fonctions poids, on parle alors de représentations sous forme de multi-modèles TS.

Notons que les systèmes linéaires à commutations permettent de tenir compte à la fois de dynamiques continues et discrètes (à événements discrets). Par ailleurs, les multi-modèles TS représentent un outil efficace de modélisation des systèmes non linéaires dans la mesure où ils permettent de représenter ceux-ci de manière exacte sur un espace compact de leurs variables d'état. Ainsi, dans le but de profiter des atouts de chacune de ces approches de modélisation, nous nous sommes intéressés dans cette thèse à la stabilisation des systèmes interconnectés à base de multi-modèles TS et/ou à commutations en se basant sur la théorie de Lyapunov. En effet, ceux-ci permettent de représenter une large classe de systèmes réels.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit les notions élémentaires nécessaires pour appréhender nos contributions. Ainsi, dans un premier temps, nous avons présenté la structure des systèmes de grandes dimensions considérées ainsi que leurs problématiques en commande. L'objectif était alors de présenter les systèmes de grandes dimensions sous la forme de systèmes interconnectés, de manière à considérer leur commande par l'approche décentralisée. Ensuite, des premiers résultats, relatifs à la synthèse de loi de commande pour les systèmes TS mais aussi pour les systèmes linéaires à commutations ont été présentés de manière à disposer des notions élémentaires permettant d'aborder les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre, nous avons proposé une première contribution à la stabilisation d'un ensemble fini de descripteurs TS interconnectés. Cette classe de systèmes, plus large que les systèmes ordinairement étudiés, permet notamment de modéliser des systèmes dynamiques singuliers ou encore des systèmes comportant des contraintes statiques au sein de leurs représentations d'état. En premier lieu, nous avons proposé une méthodologie de synthèse de lois de commande non-PDC décentralisées par retour d'état pour assurer la stabilisation de l'ensemble de descripteurs en tenant compte de leurs interconnexions. Cette méthodologie repose sur des conditions établies en termes de LMI en considérant une fonction candidate multiple non quadratique de Lyapunov. Ensuite, nous avons proposé de minimiser l'effet des interconnexions entre les sous-systèmes. Ainsi, une méthodologie de synthèse de contrôleurs décentralisés par retour d'état a été proposée en utilisant un critère H_∞ . Cependant, il n'est pas toujours possible, notamment pour les systèmes de grandes dimensions, d'avoir un accès à toutes les variables d'état. Dans ce cas, seules des informations partielles issues des sorties mesurables peuvent être prises en compte. Pour ce faire, nous avons proposé d'étendre les résultats à une nouvelle méthodologie de synthèse de lois de commande non-PDC par retour de sortie pour les descripteurs TS interconnectés. Notons que, dans ce cadre, nous avons considéré une réécriture sous forme redondante de la dynamique en boucle fermée afin d'aboutir à des conditions LMI.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de la stabilisation décentralisée d'une autre classe de systèmes de grandes dimensions : les systèmes linéaires à commutations interconnectés. Dans un premier temps, nous avons considéré la classe des systèmes linéaires ordinaires (représenté par des équations différentielles ordinaires) puis nous avons étendu nos résultats au cas des descripteurs linéaires à commutations interconnectés. Notons que les systèmes à commutations nécessitent l'introduction de nouvelles conditions aux instants de commutations. Aussi, afin d'obtenir des conditions LMI

de moindre conservatisme, nous avons proposé une discussion sur les différents choix possibles relatifs à l'emploi d'une fonction candidate multiple de Lyapunov aux instants de commutations. Afin d'étayer nos propos, ces différents choix ont été testés en simulation.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous nous sommes intéressés aux systèmes non linéaires à commutations interconnectés. Ceux-ci sont constitués de plusieurs sous-systèmes non linéaires et hybrides où chacun des modes non linéaires est représenté par un multi-modèles TS. Ainsi, tirant parti des résultats proposés aux deux chapitres précédents, des conditions LMI permettant de réaliser la synthèse de lois de commande décentralisées pour la classe de systèmes non linéaires et hybrides de grandes dimensions considérée ont été proposées. Notons qu'ici, conformément aux résultats proposés dans les chapitres précédents, une fonction candidate de Lyapunov multiple non quadratique à commutations a été employée afin d'obtenir des conditions LMI de moindre conservatisme.

L'ensemble des travaux réalisés au cours de ces trois années de thèse ouvre la voie à plusieurs perspectives.

Des pistes évidentes peuvent être évoquées. Par exemple, nous nous sommes intéressés aux systèmes descripteurs de grandes dimensions dans le cadre non linéaire via l'approche de modélisation TS mais aussi dans le cadre des systèmes linéaires à commutations. Dans le quatrième chapitre, nous nous sommes intéressés aux systèmes non linéaires à commutations interconnectés. Néanmoins, dans le temps imparti à l'élaboration de cette thèse, nous n'avons pas pu étendre ces résultats au cas descripteurs. Notons que, de par l'expérience acquise sur ces systèmes, cette extension ne soulève pas de grandes difficultés et sera réalisée à très courts termes. De même, les techniques H_∞ , permettant de minimiser l'influence des interconnexions entre sous-systèmes, ainsi que les approches commande par retour de sorties statique proposées au deuxième chapitre, pourront être appliquées à l'ensemble des classes de systèmes étudiés dans cette thèse. Par ailleurs, notons que la majorité des travaux proposés dans cette thèse considère des systèmes dynamiques qui évoluent en temps continu. La transposition de ces résultats au cas des systèmes évoluant en temps discret, qui a fait l'objet d'une première étude proposée en *Annexe C* (Jabri & al., 2010b), pourra également être considérée à court terme.

D'autre part, à moyens termes, nous proposons d'étendre nos résultats à la commande robuste de manière à tenir compte d'incertitudes de modélisation, aussi bien dans les structures nominales des sous-systèmes considérés que dans leurs interconnexions, mais aussi de la présence éventuelle de perturbations externes. Là encore, des premiers résultats ont été

proposés dans (Jabri & al., 2009d; Jabri & al., 2010c) et pourront être généralisés aux systèmes étudiés dans ce manuscrit. De plus, notons que les systèmes interconnectés étudiés ne tiennent pas compte d'éventuels retards au sein des interconnexions. Cette piste de recherche pourrait s'avérer intéressante pour la modélisation de nombreux systèmes réels de grandes dimensions. En effet, si l'on considère l'approche décentralisée proposée, on peut imaginer que les sous-systèmes peuvent être éloignés les uns des autres dans leur réalité. Ainsi, on imagine bien que l'information émanant d'un système vers l'autre pourrait être transmise avec retard. Ceci est notamment le cas pour les systèmes en réseau. En outre, les systèmes interconnectés réels peuvent être soumis à des facteurs naturels, ce qui impacte de manière significative leur fonctionnements. Il sera donc intéressant de pouvoir établir une surveillance rigoureuse capable de détecter les défaillances.

D'autres pistes de recherche peuvent être considérées selon la nature des systèmes de grandes dimensions. Ainsi, pour les systèmes non linéaires, nous nous sommes intéressés aux multi-modèles Takagi-Sugeno en proposant des conditions LMI non quadratiques tenant compte de paramètres qui peuvent s'avérer difficiles à choisir dans la pratique (bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance). D'autres approches ont été proposées dans la littérature afin de contourner ce problème, notamment l'utilisation d'une fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne ou encore la restriction du problème de stabilité global au cas de la stabilité locale. Néanmoins, la première approche conduit à des restrictions de modélisation afin d'obtenir des conditions LMI, quant à la seconde, elle conduit à des conditions relativement complexes pour l'analyse des systèmes TS autonomes. Là encore, l'extension de ces travaux au cas de la commande décentralisée des systèmes non linéaires de grandes dimensions peut s'avérer être un défi intéressant à relever.

En ce qui concerne les approches hybrides, nous nous sommes principalement intéressés dans cette thèse au cas des systèmes à commutations. Afin d'assurer la stabilisation de ce type de systèmes nous avons considéré la synthèse de lois de commande à commutation basée sur l'emploi d'une fonction candidate de Lyapunov multiple. Celle-ci conduit à l'introduction de conditions supplémentaires nécessaires pour garantir la stabilité aux instants de commutations. Cette approche, bien qu'étant l'une des moins conservatives, soulève quelques difficultés. En effet, lorsque les séquences de commutations ne sont pas connues a priori, cette approche considère des taux de décroissance entre deux modes des fonctions de Lyapunov qui, selon le cas, ne peuvent être obtenus systématiquement via la résolution des LMI. Une piste intéressante de recherche à courts termes serait de proposer une approche permettant de s'affranchir du choix de ces paramètres dans la mesure où ce choix peut être difficile à

réaliser dans la pratique. Notons par ailleurs que, ce type d'approche implique une explosion combinatoire du nombre de conditions LMI à résoudre si le nombre de modes de commutations est important. Ceci entraîne donc une augmentation du coût de calcul ainsi qu'un conservatisme qui peut nuire à l'obtention d'une solution. Une alternative à ce problème est de connaître l'évolution de la loi de commutation. Néanmoins cela s'avère difficile a priori lorsque la synthèse de loi de commande n'a pas encore été réalisée. En effet, dans ce cas, on ne peut connaître à l'avance la dynamique en boucle fermée. Afin de contourner ce problème, une piste intéressante de recherche à plus long termes pourrait être d'introduire un observateur permettant de réaliser la détection de modes. De plus, une deuxième alternative sera de construire un signal de commutation stabilisant (notion de temps de séjour..). D'autres défis peuvent aussi être considérés, notamment la recherche de nouvelles fonctions candidates de Lyapunov relatives à ce type de systèmes. Notons par ailleurs que les conditions de stabilité pour la classe de systèmes à commutations considérés dans cette thèse ne permettent pas de prendre en compte tous les phénomènes hybrides présentés au premier chapitre 1, notamment les sauts d'état. Aussi, des travaux à plus ou moins long termes devront permettre d'étendre les théories proposées aux classes de systèmes dynamiques hybrides les plus larges possibles.

Bibliographie

A

Akar M., Özgüner Ü., *Decentralized techniques for the analysis and control of Takagi-Sugeno fuzzy systems*, IEEE Transaction Fuzzy System, 8(6), pp. 691–704, 2000.

Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E., *Theory of oscillators*, Pergamon, 1966.

B

Bakule L., *Decentralized Control: An overview*, Annual Reviews in Control, (32), pp. 87-98, 2008.

Bak T., Bendtsen J., Ravn A.P., *Hybrid control design for a wheeled mobile robot*, presented at Hybrid Systems: Computation and Control, published in Springer Lecture Notes in Computer Science, 2623, pp. 50-65, 2003.

Balluchi A., Benvenuti L., Di Benedetto M., Vincentelli L., *Design of Observers for Hybrid System*, Hybrid Systems: Computation and control, 2289, pp. 76–89, Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science, 2002.

Belta C., Schug J., Dang T., Kumar V., Mintz M., Pappas G.J., Rubin H., Dunlop P., *Stability and reachability analysis of a hybrid model of luminescence in the marine bacterium Vibrio fischeri*, IEEE Conference on Decision and Control Proceeding, pp. 869-874, 2001.

Belkhiat D. E. C., Messai N., Manamanni N., *Design of a robust fault detection based observer for linear switched systems with external disturbances*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 5(2), pp. 206-219, 2011.

Bemporad A., Ferrari-Trecate G., Morari M., *Observability and Controllability of Piecewise Affine and Hybrid Systems*, IEEE Transactions on automatic control, 45 (10), 2000.

Bemporad A., Borodani P., Manneli M., *Hybrid control of an automotive robotized gearbox for reduction of consumptions and emissions*, Hybrid Systems : Computation and Control, 2623, pp. 81-96, Lecture Notes in Computer Science Springer, 2003.

Bernussou J., Titli A., *Interconnected dynamical systems: stability, decomposition and decentralisation*, North-Holland, 1982.

Benzaouia A., El Hajjaji A., Tadeo F., *Stabilization of switching Takagi–Sugeno systems by switched Lyapunov function*, International Journal Adaptive Control Signal Processing, DOI: 10.1002/acs.1256, 2011.

Bernal M., Guerra T. M., *Non-quadratic robust stability of Takagi-Sugeno models*, 2nd IFAC International Conference on Intelligent Control Systems and Signal Processing, Istanbul, Turkey, 2009.

Bernal M., Guerra T-M., *Generalized Nonquadratic Stability of Continuous-Time Takagi-Sugeno Models*, IEEE T. Fuzzy Systems, 18 (4), pp. 815-822, 2010.

Biswas G., Simon G., Mahadevan N., Narasimhan S., Ramirez J., Karsai G., *A robust method for hybrid diagnosis of complex systems*, In Frits W. Vaandrager and Jan H. van Schuppen, editors, Proceeding of the 5th Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, pp. 1125–1131, 2003.

Bouarar T., *Contribution à la synthèse de lois de commande pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno incertains et perturbés*, Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne Ardenne, France, 2009.

Bouarar T., Guelton K., Manamanni N., *Static output feedback controller design for Takagi-Sugeno systems – A fuzzy Lyapunov LMI approach*, 48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, P.R. China, 2009a.

Bouarar T., Guelton K., Manamanni N., Billaudel P., *Stabilization of uncertain Takagi-Sugeno descriptors: a fuzzy Lyapunov approach*, 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, Ajaccio, Corsica, France, 2008.

Bouarar T., Guelton K., Mansouri B., Manamanni N., *LMI Stability Conditions for Takagi-Sugeno Uncertain Descriptors*, FUZZ-IEEE, International Conference on Fuzzy Systems, London, 2007.

Bourdais R., Hetel L., Daafouz J., Perruquetti W., *Stabilité et stabilisation d'une classe de système dynamiques hybrides*, Journal Européen des Systèmes Automatisés, 41(7-8), pp. 819–853, Hermes, 2007.

Boyd S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan V., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 15, Philadelphie, 1994.

Branicky M. S., *Stability of Switched and Hybrid System*, 33rd Conference on decision and Control Proceeding, American Control Conference, pp. 3110-3114, Baltimore, 1994.

Branicky M.S., *Studies in hybrid systems: modelling, analysing and control*, Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1995.

Branicky M.S., *Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 43(4), pp. 475–482, 1998.

Branicky M. S. *Analyzing and synthesizing hybrid control systems*. In G. Rozenberg and F. Vaandrager (eds), *Embedded Systems, Lecture Notes in Computer Science*, Berlin: Springer, pp. 74-113, 1998a.

C

Chadli M., Maquin D., Ragot J., *Static Output Feedback for Takagi-Sugeno systems: An Lmi Approach*, 10th Mediterranean Conference on Control and Automation Proceeding, Portugal, 2002.

Chaieb S., Boutat D., Benali A., Kartz F., *Dynamic control of switched linear systems : a common lyapunov function approach*, 45th IEEE Conference on Decision and Control Proceeding, San Diego, CA, USA, 2006.

Chang Y., Chen S-S., Su S-F., Lee T-T., *Static output feedback stabilization for nonlinear interval time-delay systems via fuzzy control approach*, *Fuzzy Sets and Systems*, 148(3), pp. 395–410, 2004.

Claveau F., *Contribution à l'analyse et la commande structurée des grands systèmes*, Thèse de doctorat, l'Ecole Centrale de Nantes, 2005.

Champagnat R., *Supervision de systèmes discontinus : Définition d'un modèle hybride et pilotage en temps-réel*, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1998.

Chen S.S., Chang Y-C., Wu J-L., Cheng W-C, Su S-F, *Fuzzy control design for switched nonlinear systems*, SICE Annual Conference, pp. 352 - 357, 2008.

Chiang C.C., Kuo Z. H., *Decentralized adaptive fuzzy controller design of large-scale nonlinear systems with unmatched uncertainties*, IEEE Conference Fuzzy System Proceeding, 1, pp. 668–673, 2002.

Chio J.D., Park P.G, *State Feedback Controller Design for Discrete-Time Switching Fuzzy Systems*, 41st IEEE Conference on Decision and Control Proceedings, Las Vegas, NA, 2002.

Chio J.D., Lee S.S., Park P, *Output-Feedback H_∞ Control of Discrete-Time Switching Fuzzy Systems*, 2003 IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings, The IEEE Press, Piscataway, 1, pp. 441–446, 2003.

Chio J.D., Park P.G, *Guaranteed Cost Controller Design for Discrete-time Switching Fuzzy Systems*, IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics – Part A: Systems and Humans, 34 (2), pp. 110–119, 2004.

Chiou J.S, *Stability analysis for a class of switched large-scale time delay systems via time-switched method*, IEE Proceeding of Control Theory and Application, 153(6), pp. 684-688, 2006.

Chiou J-S., Wang C-J., Cheng C-M., Wang C-C., *Stability Analysis and Controller Design of the Nonlinear Switched Systems via T-S Discrete-Time Fuzzy Model*, International Journal of Fuzzy Systems, 11(4), pp. 213-224, 2009.

Cobb D., *Feedback and pole placement in descriptor variable systems*, International Journal of Control, 33, 1135-1146, 1981.

Cobb D., *Descriptor variable systems and optimal state regulation*, IEEE Transactions on Automatic Control, 28(5), pp. 601–611, 1983.

D

Daafouz J., Riedinger P., Iung C., *Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, 47(11), pp. 1883 – 1887, 2002.

Dai L., *Singular control systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer –Verlag, pp. 12-45, 1989.

Daigle M. J., Roychoudhury I., Biswas G., Koutsoukos D. X, Patterson-Hine A., Poll S, *A comprehensive diagnosis methodology for complex hybrid systems: a case study on spacecraft power distribution systems*, IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 40(5), pp. 917-931, 2010.

Dayawansa W., Martin C., *A conserve Lyapunov theorem for a class of dynamical systems wich undergo switching*, IEEE Transaction on Automatic Control, 44(4), pp. 751-760, 1999.

DeCarlo R., M. Branicky, S. Pettersson, B. Lennartson, *Perspectives and results on the stability and stabilisability of hybrid systems*, Proceedings of the IEEE 88 (7), 1069–1082, 2000.

De Santis E., Di Benedetto M., Di Gennaro S., Pola G., *Hybrid observer design methodology*, Technical report ST-2001-32460 of european commission (Distributed control and stochastic analysis of hybrid systems supporting safety critical real-time systems design), 2003.

G

Gasso G., *Identification de systèmes dynamiques non linéaires approche multi-modèle*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), Nancy, France, 2000.

Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Mathworks Inc, 1995.

Girard A., *Analyse Algorithmique des Systèmes Hybrides*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), Grenoble, France, 2004.

Goebel R., Teel A., Sanfelice R., *Hybrid dynamical systems*, IEEE Control Systems Magazine, 2009.

Guerra T. M., Vermeiren L, *LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno's form*, Automatica, 40(5), pp. 823-829, 2004.

Guerra T. M., Bernal M., Kruszewski A., Afroun M., *A way to improve results for the stabilization of continuous-time fuzzy descriptor models*, IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, USA, 2007.

Guerra T. M., Bernal M., *A way to escape from the quadratic framework*, International Conference on Fuzzy Systems, Korea, 2009.

Guerra T-M., Kruszewski A., Lauber J. *Discrete Takagi–Sugeno models for control: Where are we?*, Annual Reviews in Control, 33 (1), pp. 37-47, 2009a.

Guechi El-H., Lauber J., Dambrine M., Klancar G., Blažic S., *PDCControl Design for Non-holonomic Wheeled Mobile Robots with Delayed Outputs*, Journal of Intelligent & Robotic Systems, 60 (3), pp. 395-414, 2010

Guelton K., *Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station debout. Mise en oeuvre d'observateurs flous sous forme descripteur*, Thèse de doctorat, LAMIH-SF, de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2003.

Guelton K., Delprat S., Guerra T. M., *An alternative to inverse dynamics joint torques estimation in human stance based on a Takagi–Sugeno unknown-inputs observer in the descriptor form*, Control Engineering Practice, 16, pp. 1414–1426, 2008.

Guelton K., Bouarar T., Manamanni N., *Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi–Sugeno systems—A descriptor redundancy approach.*, Fuzzy sets and Systems, 160(19), pp. 2796-2811, 2009.

Guelton K., Manamanni N., Jabri D., *Decentralized static output feedback controller design with H_∞ analysis for large scale Takagi-Sugeno system*, IEEE World Congress on Computational Intelligence / International Conference on Fuzzy Systems (WCCI2008/FUZZ-IEEE), Barcelona, Spain, 2010.

Guelton K., Guerra T.M, Bernal M., Bouarar T., N. Manamanni, *Comments on Fuzzy Control Systems Design via Fuzzy Lyapunov Functions*, IEEE, Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B, 40(3), pp. 970-972, 2010a.

H

Hamdi F., *Contribution à la synthèse d'observateurs pour les systèmes hybrides*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de l'ingénieur Département d'électronique, Batna, Algérie, 2010.

Hsiao F. H., Wang J.D. H, Shiao L.G., *Decentralized stabilization of fuzzy large-scale systems*, Proceeding of IEEE Conference Decision and Control, pp. 3447–3452, 2000.

Huang D., Nguang S.K., *Static output feedback controller design for fuzzy systems: An ILMI approach*, Information Sciences, 177(4), pp. 3005–3015, 2007.

I

Ichalal D., *Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2009.

J

Jabri D., Guelton K., Manamanni N., Abdelkrim M. N., *Fuzzy Lyapunov Decentralized Control of Takagi-Sugeno Interconnected Descriptors*. IEEE Symposium Series on Computational Intelligence/Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation (IEEE SSCI/CICA F). USA, 2009a.

Jabri D., Guelton K., Manamanni N., Abdelkrim M.N., *H_∞ based decentralized fuzzy Lyapunov controller design for Takagi-Sugeno interconnected descriptors*, 2nd IFAC International Conference on Intelligent Control Systems and Signal Processing (ICONS'09). Turkey, 2009b.

Jabri D., Guelton K., Manamanni N., Abdelkrim M.N., *Synthèse non quadratique H_∞ de contrôleurs décentralisés pour un ensemble de descripteurs flous TS interconnectés*, Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2009). Cépaduès-Paris, Annecy, 2009c.

Jabri D., Guelton K., Manamanni N., Abdelkrim M., *Decentralized stabilization of interconnected Takagi-Sugeno descriptors under external disturbances*, 10th international Conference on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering (STA'2009), Hammamet, Tunisia, 2009d.

Jabri D., Guelton K., Manamanni N., *Decentralized Static Output Feedback Control of Interconnected Fuzzy Descriptors*. 2010 IEEE Multi-conference on Systems and Control. IEEE, Yokohama, Japan, 2010a.

Jabri D., Guelton K., Manamanni N., Abdelkrim M., *Decentralized stabilization of discrete-time large scale switched systems*. 18th Mediterranean Conference on Control and Automation (IEEE MED 2010). IEEE, Marrakech, Morocco, 2010b.

Jabri D., Jaadari A., Guelton K., Manamanni N., *Stabilisation robuste des systèmes Takagi-Sugeno par lois de commande à commutations*, 6ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2010), Nancy, 2010c.

Jabri D., Guelton K., Manamanni N., *Decentralized control of large scale switched Takagi-Sugeno systems*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2011), Taipei, Taiwan 2011a.

Jabri D., Guelton K., Manamanni N., *Decentralized stabilization of continuous time large scale switched descriptors*, 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC 2011), Milan, Italy, 2011b.

Jadbabaie A., *A reduction in conservatism in stability and $2L$ gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities*, 14th IFAC Triennial World Congress, Beijing, China, pp. 285–289, 1999.

Jia B., Guang R., Zhihong Xiu, *Fuzzy Switching Controller for Multiple Model*, Lecture Notes in Computer Science, 3613, 1011-1014, 2005.

Johanson K.H., Lygeros J., Sastry S., Egerstedt M., *Simulation of Zeno hybrid automata*, Proceeding of IEEE Conference on Decision and Control, 1999.

Johansson M., *Piecewise linear control systems: A computational approach*; Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

K

Kau S. W., Lee H. J., Yang C. M., Lee C. H., Hong L., Fang C. H., *Robust H^∞ fuzzy static output feedback control of T-S fuzzy systems with parametric uncertainties*, Fuzzy Sets and Systems, 158, pp. 135 – 146, 2007.

Kim E., Lee H., *New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems*, Transactions on Fuzzy Systems, 8, 523-533, 2000.

L

Lam HK, *Stability analysis of sampled-data fuzzy controller for nonlinear systems based on switching T-S fuzzy model*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 3(4), pp. 418–432, 2009.

Le Bail J., Alla H., David R., *Hybrid Petri nets*, European Control Conference Grenoble, pp. 1472–1477, 1991.

Liberzon D., Morse A.S., *Basic problems in stability and design of switched systems*. IEEE Control Systems Mag., pp. 59–70, 1999.

Liberzon D., *Switching in Systems and Control*. Systems and Control: Foundation and Applications. Birkhauser. 2003.

Liapounoff A., *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 9 :203–474. (traduction en français du mémoire Russe), 1907.

Lin C., Wang Q. G., Lee T. H., *Stability and stabilization of a class of fuzzy time-delay descriptor systems*, Transactions on Fuzzy Systems, 14(4), 2006.

Lin H., Antsaklis P. J., *Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results*, IEEE Transactions on automatic control, 2008.

Lin C., Wang Q. G., Lee T. H., *H_∞ -Control for Takagi-Sugeno Fussy Descriptor Systems*, Intnational Conference on Systems Man Cybernetics, 3, pp. 28-33, Tokyo, Japan, 1999.

Liu C.H., Hwang J. D., Tsai Z. R., Twu S. H., "An LMI-Based stable T-S fuzzy model with parametric uncertainties using Multiple Lyapunov Function approach," Conference on Cybernetics and Intelligent Systems, Singapore, 2004.

Liu Y., Dimirovski GM, Zhao J. *Robust output feedback control for a class of uncertain switching fuzzy systems*, Proceedings of the 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, 2008.

Luenberger D.G., *Dynamic Equation in Descriptor Form*, Transactions Automation and Control, 22(3), pp. 312-321, 1977.

Lygeros J., Tomlin C., Sastry S., *The Art of Hybrid Systems*, Compendium of Lecture Notes for The Hybrid Systems class. 2002.

M

Ma X. J., Sun Z. Q., He Y. Y., *Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer*, Transactions on Fuzzy Systems, 6(1), pp. 41-50, 1998.

Mahmoud M.S., Shi P., Saif A.W.A., *Stabilization of Linear Switched Delay Systems: H_2 and H_∞ Methods*, Journal of Optimization Theory and Application, 142(3), pp. 583-601, 2009.

Mahmoud, M. S., AL-Sunni F.M., *Interconnected continuous-time switched systems: Robust stability and Stabilization*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 4(3), pp. 531-542, 2010.

Manon P., *Sur l'optimisation des séquences de fonctionnement des systèmes dynamique hybrides*, thèse de doctorat, Lyon université du Claude Bernard Lyon 1 (UCBL) France, 2001.

Mansouri B., *Contribution à la synthèse de lois de commandes en poursuite de trajectoire pour les systèmes flous de type Takagi-Sugeno incertains*, Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne Ardenne, France, 2005.

Mansouri B., Manamanni N., Guelon K., Kruszewski A., Guerra T.-M., *Output feedback LMI tracking control conditions with H_∞ criterion for uncertain and disturbed T-S model*, Elsevier, Information Sciences, 179(4), pp. 446-457, 2009.

Masubuchi I., Kamitane Y., Ohara A., N. Suda, *H_∞ control for descriptor Systems: a matrix inequalities approach*, Automatica, 33, pp. 669-673, 1997.

Mohammadi, R., Hashtrudi-Zad, S., Khorasani K., *Diagnosis of hybrid systems: Part 2- Residual generator selection and diagnosis in the presence of unreliable residual generators*, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, San Antonio, TX, USA, 2009.

Marx B., Ragot J., *Controller and observer designs for a class of TS descriptor systems with pole placement constraint*, 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA, 2006.

Marx B., Ragot J., *Stability and $2L$ norm bound conditions for Takagi-Sugeno descriptor systems*, IFAC World Congress, 2008.

McIlraith S., Biswas G., Clancy D., Gupta V., *Towards diagnosing hybrid systems*, In Proceedings of the Tenth International Workshop on Principles of Diagnosis (DX'99), pp. 193–203, 1999.

Mesarovic M.D., Macko D., Takahara Y., *Theory of hierarchical multi-level systems*, Academic Press, New-York, 1970.

Meseguer J., Puig V., Escobet T., *Fault diagnosis using a timed discrete-event approach based on interval observers : application to Sewer Networks*. IEEE Transaction on systems, man, and cybernetics-Part A: Systems and Humans, 40(5), pp. 900-916, 2010.

Montagner V.F., Leite V., Oliveira, R., Peres P., *State feedback control of switched linear systems: An LMI approach*; Journal of Computational and Applied Mathematics, 94(2), pp. 192–206, 2006.

Mozelli L.A., Palhares R.M., Souza F.O., Mendes E.M.A.M., *Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems* ; Automatica, 45(6), pp. 1580-1583, 2009.

N

Nagy A., *Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic, Application à une station d'épuration*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), Nancy, France, 2010.

Narasimhan S., Biswas G., *Model-based diagnosis of hybrid systems*. IEEE Transaction on systems, man, and cybernetics-Part A: Systems and Humans, 37(3), pp. 348-361, 2007.

O

Ohtake H., Tanaka K., Wang H.O., *A construction method of switching Lyapunov function for nonlinear systems*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE'02 Proceedings of the 2002, Honolulu, HI, USA, pp. 221-226, 2002.

Ohtake H., Tanaka K., Wang H.O., *Switching fuzzy controller design based on switching Lyapunov function for a class of nonlinear systems*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, 36(1), pp. 13-23, 2006.

Ohtake H., Tanaka K., Hua O., *Wang Improved Controller Design for Switching Fuzzy Model-based Control*, American Control Conference, St. Louis, MO, USA, 2009

Ojleska V., Stojanovski G., *Switched Fuzzy Systems: Overview and Perspectives*, 9th International PhD Workshop on Systems and Control: Young Generation Viewpoint, Slovenia, 2008.

Ojleska V. M., Gugulovska T. K., Dimirovski G. M., *Influence of the state space partitioning into regions when designing switched fuzzy controllers*, Automatic Control and Robotics, 9 (1), pp.103-112, 2010.

Orjula A., *Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), Nancy, France, 2008.

P

Palm R., Driankov D., *Fuzzy Switched Hybrid Systems - Modeling and Identification*, Proceeding of the IEEE ISIC/CIRA/ISAS Joint Conference, Gaithersburg, MD, pp. 130-135, 1998.

Peleties P., DeCarlo R, *Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions*, Proceeding of American Control Conference, pp. 1679–1684, 1991.

Pearson J.D., *Dynamical decomposition techniques*, in Optimisation methods for large scale systems, D.A. Wismer (editor), McGraw-Hill, 1971.

Petterson S., *Synthesis of switched linear systems*, 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii USA, 2003.

Petterson S., *Designing switched observers for switched systems using multiple Lyapunov functions and dwell-time switching*, 2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, Italy. 2006.

R

Rhee B-J., Wom S., *A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi–Sugeno fuzzy control system design*, Fuzzy set and Systems, 157(9), p.1211-1228, 2006.

S

Sala A., Ariño C., *Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem*, Fuzzy Sets and Systems, 158, pp. 2671 – 2686, 2007.

Sala A., *On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems*, Annual Reviews in Control, 33, pp. 48–58, 2009.

Samoilenko A.M., Perestyuk N.A., *Impulsive differential equations*, Series on Nonlinear Science, World Scientific, 1995.

Sandell N.R., Varaiya J.P., Athans M., Safonov M.G., *Survey of decentralized control methods for large scale systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 23(2), pp. 108-128, 1978.

Schulte H., Guelton K., *Descriptor modelling toward control of two links pneumatic robot manipulator: a T-S multimodel approach*, Elsevier, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 3(2), pp. 124-132, 2009.

Scorletti G., *Approche unifiée de l'analyse et de la commande des systèmes par formulation LMI*, Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, 1997.

Seddiki L., *Développement et commande T-S d'une machine de rééducation des membres inférieurs en chaîne musculaire fermée*, Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne Ardenne, France, 2009.

Singh M.G., *Dynamical hierarchical control*, Revised Edition (First edition 1977), North-Holland, 1980.

Šiljak D.D., *Large-scale dynamic systems: Stability and Structure*, North-Holland, New-York, 1978.

Šiljak D.D., *Decentralized control of complex systems*, Academic Press, Mathematics in Science Engineering, 184, New-York, 1991

Šiljak D.D., *Decentralized control and computations: Status and prospects*, Automatica Reviews in Control, 20, pp. 131-141, 1996.

Stanković S.S, Šiljak D.D, *Robust stabilization of nonlinear interconnected systems by decentralized dynamic output feedback*, Systems and control letters, 58(4), pp. 271-275, 2009.

Steward D.V., *On an approach to techniques for the analysis of the structure of large systems of equations*, SIAM Review, 4, pp. 321-342, 1962

Syrmos L., Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K., *Static output feedback: a survey*, Proceeding of 33rd IEEE Conference on Decision and control, USA, pp. 837-842, 1997.

T

Takagi T., Sugeno M., *Fuzzy identification of systems and its applications to modeland control*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 15, pp. 116–132, 1985.

Tanaka K., M. Sugeno, *Stability analysis and design of fuzzy control systems*, Fuzzy Sets and Systems, 45(2), pp. 135-156,1992.

Tanaka K., Sano M., *A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer*, Transactions on Fuzzy Systems, 2, pp. 119-134, 1994.

Tanaka, K., Ikeda, T., Wang, H., Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2), pp. 250– 265, 1998.

Tanaka K., Wang H.O., *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*, John Wiley & Son Eds, New York, Wiley-Inter science ISBN 0-471-32324-190000, 2001.

Tanaka K., Hori T., Wang H. O., A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design, American Control Conference, Washington, USA, 2001a.

Tanaka, K., M. Iwasaki, Wang, H. O., *Switching control of an R/C Hovercraft : stabilization and smooth switching*, IEEE Transaction System, Man, Cybernetics part B, 31, pp. 853–863, 2001b.

Tanaka K., Hori T., Wang H.O., *A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems*, Transactions on Fuzzy Systems, 11, pp. 582–589, 2003.

Tanaka K., Ohtake H., Wang H.O., *A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions*, Transaction on Fuzzy Systems, 15(3), pp. 333- 341, 2007.

Taniguchi T., Tanaka K., Yamafuji K., Wang H.O., *Fuzzy descriptor systems: stability analysis and design via LMIs*, American Control Conference San Diego, California, 1999.

Taniguchi T., Tanaka K., Wang H.O., *Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control*, Transactions on Fuzzy Systems, 8 (4), pp. 442-452, 2000.

Taniguchi T., Tanaka K., Wang H.O., *A Novel Stabilization Criterion for Large-Scale T–S Fuzzy Systems*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics, 37(4), 2007.

Tian W., Zhang H., Yang X., *Robust H^∞ control for fuzzy descriptor systems with time-varying delay and parameter uncertainties*, 3rd International conference on natural computation (ICNC), 2007.

Tomlin C., Pappas G.J., Lygeros J., Godbole D.N., Sastry S., *Hybrid control models of next generation air traffic management*, Hybrid Systems IV, 1273 in LNCS, Springer 1997.

Tuan H. D., P. Apkarian, T. Narikiyo and Y. Yamamoto, *Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control design*, Transactions on Fuzzy Systems, 9(2), pp. 324-332, 2001.

Trenn S., *Regularity of distributional differential algebraic equations*, Mathematics of control, signals, and systems, 21(3), pp. 229-264, 2008.

Tseng C.S., Chen B.S., *H^∞ Decentralized Fuzzy Model Reference Tracking Control Design for Nonlinear Interconnected Systems*, IEEE Transactions on fuzzy systems, 9(6), 2001.

Tseng C.S., *A Novel Approach on H^∞ Decentralized Fuzzy Observer-Based Fuzzy Control Design for Nonlinear Interconnected Systems*, Fuzzy Systems, IEEE Transactions, 16(5), pp. 1337 – 1350, 2008

V

Valette R., R. Champagnat, D. Andreu, H. Pingaud, *Modélisation des systèmes de production hybrides*, AGIS, colloque de recherche doctorale, Angers, France, 1997.

Van der schaft A., Schumacher H., *An introduction to the hybrid dynamic systems*, springer-verlag, London 2000.

W

Wang H. O., Tanaka K., Griffin M., *An approach to fuzzy control of non linear systems: Stability and design issues*, Transactions on Fuzzy Systems, 4, pp. 14-23, 1996.

Wang Y., Sun Z. Q., Sun F. C., *Robust fuzzy control of a class of nonlinear descriptor systems with time-varying delay*, International Journal of Control, Automation, and Systems: 2(1), 2004.

Wang W.J., Lin W., *Decentralized PDC for Large Scale TS Fuzzy Systems*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 13(6), pp. 779-786, 2005.

X

Xiaodong L., Qingling Z., *New approaches to H controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI*, Automatica, 39(9), pp.1571-1582, 2003.

Y

Yan B., Chen G., *Model-Based fault diagnosis for IEEE 802.11 Wireless LANs*, International Conference on Mobile and Ubiquitous Systems: Computing, Networking and Services (MobiQuitous), Toronto, Canada, 2009.

Yang H., Dimirovski G. M., Zhao J., *Switched fuzzy systems: representation modelling, stability analysis, and control design*, IEEE Conference on 3rd International Intelligent Systems, pp. 306 – 311, 2006.

Yang H., Liu H., Dimirovski G. M., Zhao J., *Stabilization control for a class of switched fuzzy discrete time systems*, Proceeding of the 2007 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, London, England, pp. 1345-1350, 2007.

Yang H., Zhao J., *Robust controller for a class of uncertain switched fuzzy Systems*, Front. Electr. Electron. Eng. China, 2(3), pp. 334–337, 2007a.

Yoneyama J., Ichikawa A., *H ∞ -control for Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems*, IEEE International Conference of Systems, Man, and Cybernetics, 1999.

Yoneyama J., Nishikawa M., Katayama H., Ichikawa A., *Design of output feedback controllers for Takagi–Sugeno fuzzy systems*, Fuzzy Sets and Systems, 121(1), pp. 127–148, 2001.

Ye H., Michel A.N., Hou L., *Stability theory for hybrid dynamical systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 43(4), pp. 461–474, 1998.

Z

Zaytoon J., *Systèmes dynamiques hybrides*, Hermes Science Publication, Paris, 2001.

Zhai G., Xu X., Imae J., Kobayashi T., *Stability analysis and design for switched descriptor systems*, International Journal of Control, Automation, and Systems, 7(3), pp. 349–355, 2009.

Zhai G., I. Matsune, J. Imae, T. Kobayashi *A Note on Multiple Lyapunov Functions and Stability Condition for Switched and Hybrid Systems*, Proceedings of 16th IEEE International Conference on Control Applications, Singapore, 5(5), pp. 1189-1199, 2009a.

Zhai G., Xu X., *A unified approach to analysis of switched linear descriptor systems under arbitrary switching*, International Journal of Applied Mathematics Computer and Science, 20(2), pp. 249–259, 2010.

Zerar M., Guelton K., Manamanni N., *Linear fractional transformation based H-infinity output stabilization for Takagi–Sugeno fuzzy models*, Mediterranean Journal Measurement Control, 4(3), pp. 111–121, 2008.

Zhu Y., Pagilla P.R., *Decentralized output feedback control of a class of large-scale interconnected systems*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 24, pp. 57–69, 2007.

Zhou K.P., Khargonedkar, *Robust Stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty*, System Control Letters, 10, pp. 17-20, 1988.

Zouari T., Pekpe K. M., Cocquempot V., Ksouri M., *Mode Recognition of Hybrid Dynamical Systems with Nonlinear Modes using Takagi-Sugeno Models*, Conference on Control and Fault Tolerant Systems, France, October 6-8, 2010.

Annexe A : Outils mathématiques

Lemme A.1 (Tanaka & al., 2001)

Soit une fonction $f(x(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borné, il existe toujours deux fonctions $w_1(x(t))$ et $w_2(x(t))$ ainsi que deux scalaires α et β tels que :

$$f(x(t)) = \alpha w_1(x(t)) + \beta w_2(x(t))$$

avec $w_1(x(t)) + w_2(x(t)) = 1$.

Lemme A. 2 (Zhou & al, 1988)

Soient deux matrices A et B de dimensions appropriées et un scalaire $\varepsilon > 0$:

$$A^T B + B^T A \leq \varepsilon A A + \varepsilon^{-1} B B \quad (\text{A.1})$$

Lemme A.3 (Complément de Schur ; Boyd & al., 1994)

Soient les matrices $Q = Q^T$, $R = R^T$ et S de dimensions appropriées. Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.2})$$

$$R > 0 \text{ et } Q - S R^{-1} S^T > 0 \quad (\text{A.3})$$

Lemme A.4 (Tuan & al., 2001)

Les propositions suivantes sont équivalentes :

• Pour tout $i = 1, \dots, q$ et $j = 1, \dots, q$, $\Gamma_{ij} < 0$

• Pour tout $i = 1, \dots, q$ et $j = 1, \dots, q$,

$$\begin{cases} \Gamma_{ii} < 0, \\ \frac{1}{q-1} \Gamma_{ii} + \frac{1}{2} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) < 0, j \neq i \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Annexe B :

Synthèse de contrôleurs décentralisés par retour de sortie pour les systèmes standards interconnectés TS

L'objectif est de fournir une méthodologie de synthèse de lois de commande décentralisées par retour de sortie capable de stabiliser l'ensemble des sous-systèmes interconnectés multi-modèles, et de réduire l'effet des interconnexions entre les différents sous-systèmes (Guelton & al., 2010). Notons que la classe de système considérée, dans cette partie, sera restreinte à un ensemble de systèmes standards interconnectés de type TS, décrits par :

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{r_i} h_i^k(z_i) \left\{ A_i^k x_i(t) + B_i^k u_i(t) + \sum_{j=1}^{r_i} F_{i\alpha}^k x_\alpha(t) \right\} \\ y_i(t) = \sum_{j=1}^{r_i} h_i^k(z_i) (C_i^k x_i(t) + D_i^k u_i(t)) \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Les mêmes paramètres du système décrit dans (la section 1.2 du deuxième chapitre) sont réutilisés tels que les matrices $E_i^j = I$ sont égales à l'identité, pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, l_i$.

Afin de garantir la stabilité du système global, un contrôleur décentralisé non-PDC par retour de sortie, composé de n contrôleurs locaux, est proposé. Chaque contrôleur local est associé à un sous-système S_i . Ce contrôleur local doit assurer la stabilité du sous-système pour lequel il est synthétisé en atténuant l'effet des interconnexions des autres sous-systèmes. Ainsi, pour chaque sous-système de type TS S_i , on considère la loi de commande décentralisée par retour de sortie de type non-PDC, décrite par :

$$u_i(t) = \left(\sum_{j=1}^{r_i} h_i^j(z_i(t)) K_i^j \right) \left(\sum_{j=1}^{r_i} h_i^j(z_i(t)) X_{5i}^j \right)^{-1} y_i(t) \quad (\text{C.2})$$

avec K_i^j et X_{5i}^j sont respectivement les matrices du gain non-PDC et les variables de décisions à synthétiser.

Afin de réduire l'effet des interconnexions entre les sous-systèmes, on considère le critère H_∞ suivant:

$$\int_{t_0}^{t_f} x_i^T x_i dt < \rho_i^2 \int_{t_0}^{t_f} \varphi_i^T \varphi_i dt \quad (\text{C.3})$$

avec $\varphi_i(z_i) = \sum_{k=1}^{r_i} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n h_i^k F_{i\alpha}^k x_\alpha$ et ρ_i les taux de performances H_∞ . Le vecteur $h_i^k F_{i\alpha}^k x_\alpha$ traduit

l'influence du $\alpha^{\text{ème}}$ sous-système sur le $i^{\text{ème}}$ sous-système.

Notre but est d'établir des conditions de stabilité en termes LMI afin de stabiliser le système global interconnecté en boucle fermée. Pour ce faire, nous proposons d'utiliser, de manière similaire à l'approche présentée précédemment, la propriété de redondance de descripteur. En effet, cette propriété permet d'assurer le découplage entrées-sorties et d'obtenir de manière élégante des conditions de stabilité en termes de LMI. Le résultat principal de cette partie est proposé dans le théorème suivant.

Théorème D.1 (Guelton & al., 2010)

Supposons que pour tous $i=1, \dots, n$ et $s=1, \dots, r_i$, $\dot{h}_i^s(z(t)) \geq \bar{\omega}_i^s$. L'ensemble S des n systèmes interconnectés de type TS S_i décrits par l'équation (C.1) est globalement asymptotiquement stable en boucle fermée via le réseau de n lois de commande non-PDC décentralisées par retour de sortie statique défini par (C.2), au regard du critère H_∞ décrit en (C.3), s'il existe pour toutes les combinaisons suivantes $i=1, \dots, n$, $\alpha=1, \dots, n$, $\alpha \neq i$, $j=1, \dots, r_i$, $k=1, \dots, r_i$, les matrices $X_{i1}^k = (X_{i1}^k)^T > 0$, $X_{i5}^k > 0$, X_{i7}^k , X_{i8}^k , X_{i9}^k , K_i^j ainsi que les scalaires $\lambda_i > 0$ satisfaisant les LMI suivantes :

Minimiser λ_i tel que :

$$\bullet \Gamma_{i\alpha}^{jj} < 0 \quad (C.4)$$

$$\bullet \frac{1}{r-1} \Gamma_{i\alpha}^{jj} + \frac{1}{2} (\Gamma_{i\alpha}^{jk} + \Gamma_{i\alpha}^{kj}) < 0, \quad j \neq i \quad (C.5)$$

$$\bullet X_{i1}^s - X_{i1}^r > 0, \quad s = 1, \dots, r-1 \quad (C.6)$$

avec

$$\Gamma_{i\alpha}^{jk} = \begin{bmatrix} \eta \begin{pmatrix} (X_{1i}^k)^T (A_i^j)^T + A_i^j X_{1i}^k \\ + (X_{7i}^k)^T (B_i^j)^T + B_i^j X_{7i}^k \\ - \sum_{s=1}^{r_i-1} \theta_i^s (X_{i1}^s - X_{i1}^r) \end{pmatrix} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \eta \begin{pmatrix} (X_{8i}^k)^T (B_i^j)^T \\ + C_i^j X_{1i}^k + D_i^j X_{7i}^k \end{pmatrix} & \eta \begin{pmatrix} -(X_{5i}^k)^T - X_{5i}^k \\ + (X_{8i}^k)^T (D_i^j)^T + D_i^j X_{8i}^k \end{pmatrix} & (*) & 0 & 0 \\ \eta \left((X_{9i}^k)^T (B_i^j)^T - X_{7i}^k \right) & \eta \left((X_{9i}^k)^T (D_i^j)^T + K_i^j - X_{8i}^k \right) & -\eta \left((X_{9i}^k)^T + X_{9i}^k \right) & 0 & 0 \\ (F_{i\alpha}^j)^T & 0 & 0 & -(2n-3)\lambda_i (F_{i\alpha}^j)^T F_{i\alpha}^j & 0 \\ X_{1i}^k & 0 & 0 & 0 & -(n-1)I \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \eta = \frac{1}{(n-1)}.$$

Preuve

Pour profiter des avantages de la propriété de redondance de descripteurs dans le cas d'un contrôleur par retour de sortie statique, nous établissons une dynamique virtuelle. Ainsi, les équations dynamiques du système (C.1) et de la loi de commande (C.2) peuvent être réécrites respectivement comme suit :

Pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i^h x_i(t) + B_i^h u_i(t) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n F_{i\alpha}^h x_\alpha(t) \\ 0 = -y_i(t) + C_i^h x_i(t) + D_i^h u_i(t) \end{cases} \quad (C.7)$$

et

$$\text{Pour tout } i = 1, \dots, n : 0 = u_i(t) + (K_i^h) (X_{5i}^h)^{-1} y_i(t) \quad (C.8)$$

Pour mieux comprendre le choix de la variable de décision X_{5i}^h dans la loi de commande (C.8), cette variable de décision X_{5i}^h sera remplacé par X_{7i}^h . Ainsi, la loi de commande peut être écrite comme suit :

$$\text{Pour tout } i=1,\dots,n : 0 = u_i(t) + (K_i^h)(X_{\gamma_i}^h)^{-1} y_i(t) \quad (\text{C.9})$$

Soit le vecteur d'état étendu $\tilde{x}_i = [x_i^T \ y_i^T \ u_i^T]^T$. Le système global en boucle fermée peut être reformulé sous la forme de descripteur suivante :

$$\text{Pour tout } i=1,\dots,n : \tilde{E}_i \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{G}_i^h \tilde{x}_i + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n \tilde{F}_{i\alpha}^h x_\alpha \quad (\text{C.10})$$

$$\text{avec } \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{G}_i^h = \begin{bmatrix} A_i^h & 0 & B_i^h \\ C_i^h & -I & D_i^h \\ 0 & K_i^h (X_{\gamma_i}^h)^{-1} & -I \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{F}_{i\alpha}^h = \begin{bmatrix} F_{i\alpha}^h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le critère H_∞ peut être reformulé comme suit :

Pour tout $i=1,\dots,n$:

$$\int_{t_0}^{t_f} \tilde{x}_i^T \tilde{E}_i \tilde{x}_i dt < \rho_i^2 \int_{t_0}^{t_f} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n \left((n-1) \left(x_\alpha^T (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h x_\alpha \right) + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i \\ \beta \neq \alpha}}^n \left(x_\beta^T (\tilde{F}_{i\beta}^h)^T \tilde{F}_{i\beta}^h x_\beta \right) \right) dt \quad (\text{C.11})$$

Sachant que $\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n \left(\Psi_{i\alpha} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i \\ \beta \neq \alpha}}^n \Psi_{i\beta} \right) = (n-1) \sum_{\alpha=1}^n \Psi_{i\alpha}$, on peut réécrire l'inégalité (C.11) comme

suit :

$$\text{Pour tout } i=1,\dots,n : \int_{t_0}^{t_f} \tilde{x}_i^T \tilde{E}_i \tilde{x}_i dt < (2n-3) \rho_i^2 \int_{t_0}^{t_f} \sum_{\alpha=1}^n \left(x_\alpha^T (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h x_\alpha \right) dt \quad (\text{C.12})$$

Soient la fonction candidate multiple non quadratique de Lyapunov, composée de n sous-fonctions non quadratiques, décrite par :

$$V(t) = \sum_{i=1}^n v_i(x_i(t)) \geq 0 \quad (\text{C.13})$$

avec $v_i(x_i(t)) = \tilde{x}_i^T(t) \tilde{E} (\tilde{X}_i^h)^{-1} \tilde{x}_i(t)$ tel que la condition de symétrie $\tilde{E} (\tilde{X}_i^h)^{-1} = (\tilde{X}_i^h)^{-T} \tilde{E} \geq 0$ est satisfaite. Cette condition conduit à la forme suivante de la

$$\text{matrice de Lyapunov } \tilde{X}_i^h = \begin{bmatrix} X_{1i}^h & 0 & 0 \\ X_{4i}^h & X_{5i}^h & X_{6i}^h \\ X_{7i}^h & X_{8i}^h & X_{9i}^h \end{bmatrix} \text{ avec } X_{li}^h = (X_{li}^h)^T > 0.$$

Le système global (C.10) est stable en boucle fermée, selon le critère H_∞ , si :

$$\sum_{i=1}^n \left(\dot{v}_i(t) + \tilde{x}_i^T \tilde{E}_i \tilde{x}_i - (2n-3) \rho_i^2 \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n x_\alpha^T (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h x_\alpha \right) < 0 \quad (\text{C.14})$$

Ceci est équivalent à :

$$\sum_{i=1}^n \left(\dot{\tilde{x}}_i^T \tilde{E}_i (\tilde{X}_i^h)^{-1} \tilde{x}_i + \tilde{x}_i^T \tilde{E}_i (\tilde{X}_i^h)^{-1} \dot{\tilde{x}}_i + \tilde{x}_i^T \tilde{E}_i \overline{(\tilde{X}_i^h)^{-1}} \tilde{x}_i + \tilde{x}_i^T \tilde{E}_i \tilde{x}_i - (2n-3) \rho_i^2 \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n x_\alpha^T (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h x_\alpha \right) < 0 \quad (\text{C.15})$$

Le but est maintenant de réécrire la condition de stabilité (C.15) en termes de LMI. Comme nous l'avons mentionné dans les preuves du deuxième chapitre, cette condition ne peut pas être écrite directement sous forme de LMI en raison de la présence des interconnexions entre

les sous-systèmes $\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n x_\alpha^T (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h x_\alpha$ et de la dérivée de variables de décision. Dans le but de

facilité l'obtention des conditions en termes de LMI, nous intéressons, dans un premier temps, à reformuler le terme lié aux interconnexions à l'aide des outils mathématiques usuels. Ensuite, nous proposons de borner la dérivée de la variable de décision. Ces deux points seront plus détaillés dans la suite de cette preuve.

L'inégalité (C.15) peut être réécrite sous la forme quadratique :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ x_\alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)} \left((\tilde{G}_i^h)^T (\tilde{X}_i^h)^{-1} + (\tilde{X}_i^h)^{-T} \tilde{G}_i^h + \tilde{Q}_i + \tilde{E} \overline{(\tilde{X}_i^h)^{-1}} \right) & (*) \\ (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T (\tilde{X}_i^h)^{-1} & -(2n-3) \rho_i^2 (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ x_\alpha \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{C.16})$$

Ceci est vérifié si :

Pour tout $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, n$, $\alpha \neq i$,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)} \left((\tilde{G}_i^h)^T (\tilde{X}_i^h)^{-1} + (\tilde{X}_i^h)^{-T} \tilde{G}_i^h + \tilde{Q}_i + \tilde{E} \overline{(\tilde{X}_i^h)^{-1}} \right) & (*) \\ (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T (\tilde{X}_i^h)^{-1} & -(2n-3) \rho_i^2 (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{C.17})$$

Multiplions l'inégalité (C.17) à gauche et à droite respectivement par $\begin{bmatrix} (\tilde{X}_i^h)^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ et

$\begin{bmatrix} \tilde{X}_i^h & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Puisque $-\overline{(\tilde{X}_i^h)^{-1}} = (\tilde{X}_i^h)^{-1} \dot{\tilde{X}}_i^h (\tilde{X}_i^h)^{-1}$, nous obtenons:

Pour tout $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, n$, $\alpha \neq i$,

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_i^{hh} & (*) \\ (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T & -(2n-3) \rho_i^2 (\tilde{F}_{i\alpha}^h)^T \tilde{F}_{i\alpha}^h \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{C.18})$$

Le terme $\bar{\Omega}_i^{hh}$ peut être écrit sous la forme étendue comme suit :

$$\bar{\Omega}_i^{hh} = \frac{1}{(n-1)} \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{i(1,1)}^{hh} & (*) & (*) \\ \bar{\Omega}_{i(2,1)}^{hh} & \bar{\Omega}_{i(2,2)}^{hh} & (*) \\ \bar{\Omega}_{i(3,1)}^{hh} & \bar{\Omega}_{i(3,2)}^{hh} & \bar{\Omega}_{i(3,3)}^{hh} \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

avec:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{i(1,1)}^{hh} &= (X_{1i}^h)^T (A_i^h)^T + A_i^h X_{1i}^h + (X_{7i}^h)^T (B_i^h)^T + B_i^h X_{7i}^h + (X_{1i}^h)^T X_{1i}^h - \dot{X}_{1i}^h, \\ \bar{\Omega}_{i(2,1)}^{hh} &= (X_{8i}^h)^T (B_i^h)^T + C_i^h X_{1i}^h - X_{4i}^h + D_i^h X_{7i}^h, \quad \bar{\Omega}_{i(3,1)}^{hh} = (X_{9i}^h)^T (B_i^h)^T + K_i^h (X_{\gamma i}^h)^{-1} X_{4i}^h - X_{7i}^h, \\ \bar{\Omega}_{i(2,2)}^{hh} &= -(X_{5i}^h)^T - X_{5i}^h + (X_{8i}^h)^T (D_i^h)^T + D_i^h X_{8i}^h, \\ \bar{\Omega}_{i(3,2)}^{hh} &= -(X_{6i}^h)^T + (X_{9i}^h)^T (D_i^h)^T + K_i^h (X_{\gamma i}^h)^{-1} X_{5i}^h - X_{8i}^h, \\ \bar{\Omega}_{i(3,3)}^{hh} &= (X_{6i}^h)^T (X_{\gamma i}^h)^{-T} (K_i^h)^T + K_i^h (X_{\gamma i}^h)^{-1} X_{6i}^h - (X_{9i}^h)^T - X_{9i}^h. \end{aligned}$$

Dans l'expression matricielle (C.19), il existe des termes non linéaires liés aux variables de décisions X_{4i}^h , X_{5i}^h et X_{6i}^h . Afin d'aboutir à des conditions de stabilité en termes de LMI, nous proposons de choisir les matrices suivantes X_{4i}^h et X_{6i}^h nulles et $X_{\gamma i}^h = X_{5i}^h$.

La matrice de Lyapunov \tilde{X}_i^h peut être écrit, alors, comme suit :

$$\tilde{X}_i^h = \begin{bmatrix} X_{1i}^h & 0 & 0 \\ X_{4i}^h & X_{5i}^h & X_{6i}^h \\ X_{7i}^h & X_{8i}^h & X_{9i}^h \end{bmatrix}.$$

Concentrons nous maintenant sur la dérivée de la variable de décision \dot{X}_{1i}^h . Sachant que pour tout $s = 1, \dots, r_i$, θ_i^s soit la borne inférieure de la dérivée de la fonction d'appartenance $\dot{h}_i^s(z)$, nous pouvons écrire alors :

$$-\overline{(\dot{X}_{1i}^h)} \leq -\sum_{s=1}^{r_i} \theta_i^s (X_{1i}^s - \Xi_{1i}) \quad (\text{C.20})$$

avec Ξ_{1i} une matrice positive vérifiant, pour tout $i = 1, \dots, n$ et $s = 1, \dots, r_i$, $X_{1i}^s - \Xi_{1i} > 0$.

En tenant compte du choix de variables de décision et de l'inégalité (C.20) puis en appliquant le complément de Schur, l'inégalité (C.18) est satisfaite si :

Pour tout $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, n$, $\alpha \neq i$,

$$\Gamma_{i\alpha}^{h_i h_i} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \Psi_i^{h_i h_i} & & & (*) & (*) \\ \hline (F_{i\alpha}^{h_i})^T & 0 & 0 & -(2n-3)\rho_i^2 (F_{i\alpha}^{h_i})^T F_{i\alpha}^{h_i} & 0 \\ X_{1i}^{h_i} & 0 & 0 & 0 & -(n-1)I \end{array} \right] < 0 \quad (C.21)$$

$$\text{avec } \Psi_i^{h_i h_i} = \frac{1}{(n-1)} \begin{bmatrix} \Psi_{i(1,1)}^{h_i h_i} & (*) & (*) \\ \Psi_{i(2,1)}^{h_i h_i} & \Psi_{i(2,2)}^{h_i h_i} & (*) \\ \Psi_{i(3,1)}^{h_i h_i} & \Psi_{i(3,2)}^{h_i h_i} & \Psi_{i(3,3)}^{h_i h_i} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{i(1,1)}^{h_i h_i} = (X_{1i}^{h_i})^T (A_i^{h_i})^T + A_i^{h_i} X_{1i}^{h_i} + (X_{7i}^{h_i})^T (B_i^{h_i})^T + B_i^{h_i} X_{7i}^{h_i} - \Phi_i,$$

$$\Psi_{i(2,1)}^{h_i h_i} = (X_{8i}^{h_i})^T (B_i^{h_i})^T + C_i^{h_i} X_{1i}^{h_i} + D_i^{h_i} X_{7i}^{h_i}, \quad \Psi_{i(2,2)}^{h_i h_i} = -(X_{5i}^{h_i})^T - X_{5i}^{h_i} + (X_{8i}^{h_i})^T (D_i^{h_i})^T + D_i^{h_i} X_{8i}^{h_i},$$

$$\Psi_{i(3,1)}^{h_i h_i} = (X_{9i}^{h_i})^T (B_i^{h_i})^T - X_{7i}^{h_i}, \quad \Psi_{i(3,2)}^{h_i h_i} = (X_{9i}^{h_i})^T (D_i^{h_i})^T + K_i^{h_i} - X_{8i}^{h_i}, \quad \Psi_{i(3,3)}^{h_i h_i} = -(X_{9i}^{h_i})^T - X_{9i}^{h_i} \text{ et}$$

$$\Phi_i = \sum_{s=1}^{i_i} \theta_i^s (X_{i1}^s - \Xi_{i1}). \quad \blacksquare$$

Exemple numérique

Un exemple numérique est proposé dans cette annexe pour montrer l'efficacité de la l'approche non quadratique H_∞ par retour de sortie statique développée. Nous considérons un système non linéaire interconnecté composé de deux sous-systèmes S_1 et S_2 de type TS. Les dynamiques des sous-systèmes interconnectés sont décrites comme suit :

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sum_{j=1}^2 h_1^j(x_1(t)) (A_1^j x_1(t) + B_1^j u_1(t) + F_{12}^j x_2(t)) \\ y_1(t) = \sum_{j=1}^2 h_1^j(z_1(t)) (C_1^j x_1(t) + D_1^j u_1(t)) \end{cases} \quad (C.22)$$

avec le vecteur d'état est $x_1 = [x_{11} \ x_{12} \ x_{13}]^T$. Les matrices de l'équation d'état

$$\text{sont : } A_1^1 = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 0.5 & -3 & 1 \\ 0 & 0.2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.1 & 0 \\ -0.2 & -2 & 0 \\ 0.3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F_{12}^1 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.4 \\ 0.01 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ et } F_{12}^2 = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.02 \\ 0.01 & 0.01 \\ 0.03 & 0.02 \end{bmatrix}. \text{ Les matrices de l'équation de sortie sont :}$$

$$C_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, C_1^2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, D_1^1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix} \text{ et } D_1^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}. \text{ Les}$$

fonctions d'appartenance sont : $h_1^1(x_1(t)) = \sin^2(x_{11}(t))$ et $h_1^2(x_1(t)) = \cos^2(x_{11}(t))$.

2^{ème} sous-système

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = \sum_{k=1}^2 h_2^k(x_2(t)) \{A_2^k x_2(t) + B_2^k u_2(t) + F_{21}^k x_1(t)\} \\ y_2(t) = \sum_{k=1}^2 h_2^k(z_2(t)) (C_2^k x_2(t) + D_2^k u_2(t)) \end{cases} \quad (C.23)$$

avec le vecteur d'état est $x_2 = [x_{21} \ x_{22}]^T$. Les matrices de l'équation d'état

$$\text{sont : } A_2^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_2^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, F_{21}^1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$F_{21}^2 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.01 & 0.02 \\ 0.03 & 1 & 0.01 \end{bmatrix}. \text{ Les matrices de l'équation de sortie sont : } C_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.01 \end{bmatrix}, D_2^1 = [0.01 \ 0.5] \text{ et } D_2^2 = [0.01 \ 0.2]. \text{ Les fonctions d'appartenance}$$

sont : $h_2^1(x_2(t)) = \sin^2(x_{21}(t))$ et $h_2^2(x_2(t)) = \cos^2(x_{21}(t))$.

Pour assurer la stabilité du système interconnecté choisi, un contrôleur décentralisé par retour de sortie est synthétisé. Le contrôleur proposé est composé de deux contrôleurs non-PDC locaux. Chaque contrôleur local est capable de stabiliser le système auquel il est associé, en minimisant l'effet des interconnexions avec l'autre sous-système. Ainsi, on résout les conditions de stabilité, (C.4), (C.5) et (C.6), proposées sous forme de LMI dans le théorème précédant, à l'aide *toolbox LMI* de *Matlab*. Notons que les bornes inférieures des dérivées de fonctions d'appartenance sont fixées égales à $\theta_1^1 = -1$ et $\theta_2^1 = -1.5$. Le résultat obtenu est donné par :

$$\text{Les matrices de gains non-PDC : } K_1^1 = \begin{bmatrix} -0.44 & -0.09 \\ 0.19 & -0.02 \end{bmatrix}, K_1^2 = \begin{bmatrix} -0.22 & -0.04 \\ 0.15 & -0.02 \end{bmatrix},$$

$$X_{51}^1 = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.39 \\ -0.44 & 0.54 \end{bmatrix} \text{ et } X_{51}^2 = \begin{bmatrix} 0.54 & -0.04 \\ 0.02 & 0.54 \end{bmatrix} \text{ pour le 1^{er} contrôleur local ;}$$

$$\text{Les matrices de gains non-PDC : } K_2^1 = [-0.28 \ -0.17], K_2^2 = [-0.1 \ -0.47],$$

$$X_{52}^1 = \begin{bmatrix} 0.58 & 3.5 \\ -3.74 & 0.68 \end{bmatrix} \text{ et } X_{52}^2 = \begin{bmatrix} 0.59 & 1.58 \\ -1.7 & 0.55 \end{bmatrix} \text{ pour le 2^{ème} contrôleur local.}$$

Les performances H_∞ sont données par les scalaires $\rho_1 = 3.59$ et $\rho_2 = 2.32$ respectivement pour le 1^{er} et le 2^{ème} sous-système.

Le système global est ensuite simulé en boucle fermée. Nous considérons les états initiaux : $x_1(0) = [1 \ 0.5 \ -1]^T$ pour le 1^{er} système et $x_2(0) = [2 \ -2]^T$ pour le 2^{ème} sous système. L'évolution temporelle des dynamiques des sous-systèmes ainsi que les signaux de commande sont respectivement illustrés dans les Figures C.1 et C.2. Nous constatons que le contrôleur décentralisé par retour de sortie stabilise le système global après un régime transitoire de 6s. Notons ici, que chaque sous-système possède son propre temps de convergence.

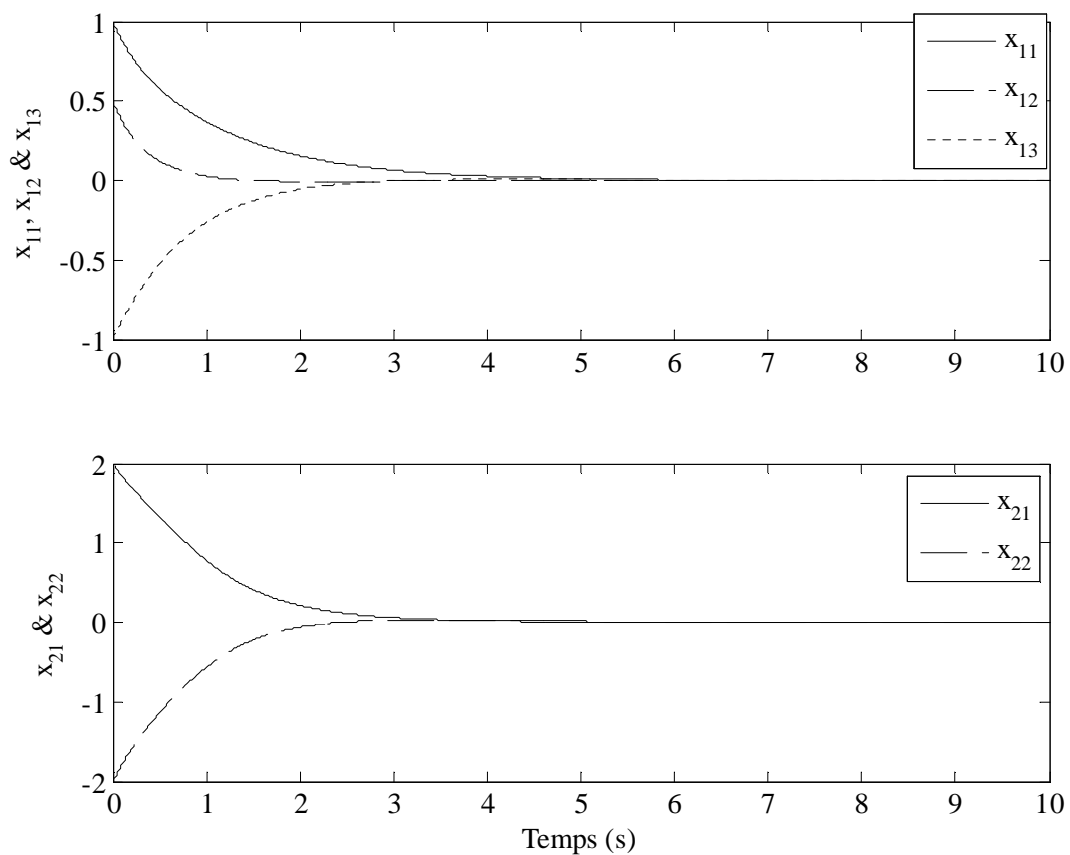


Figure.C.1. Dynamique du système en boucle fermée (x_{11}, x_{21}) en ligne solide, (x_{12}, x_{13}, x_{22}) en discontinue.

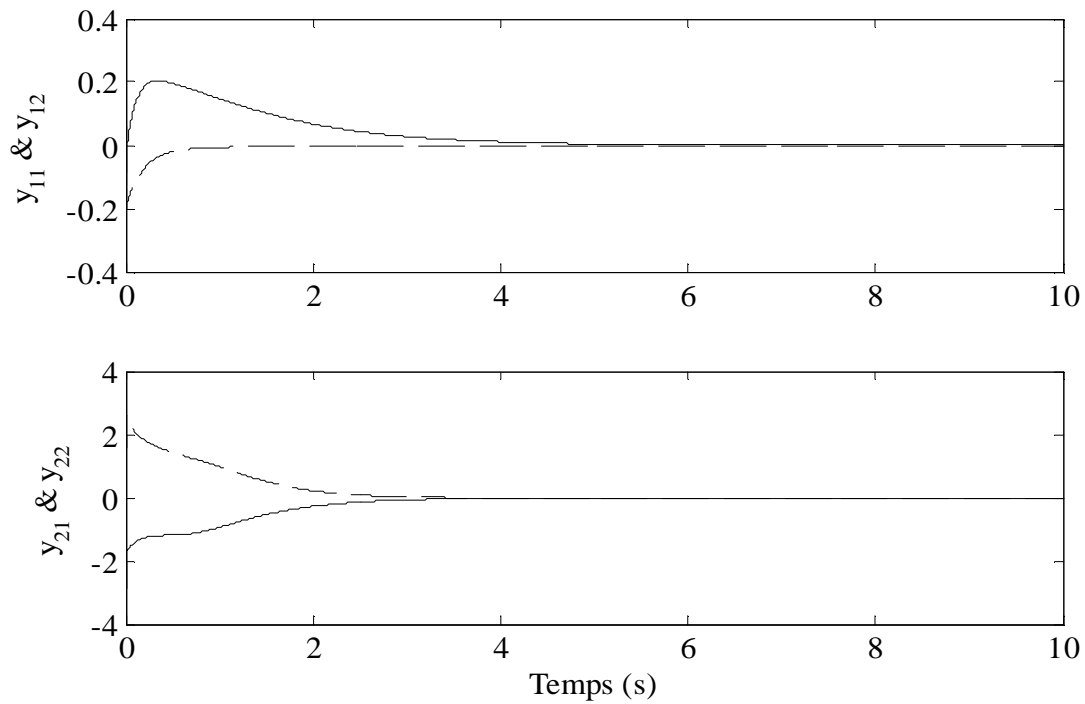


Figure.C.2: Evolution temporelle des signaux de sortie, (y_{11}, y_{21}) en ligne solide, (y_{12}, y_{22}) en discontinue.

Notons enfin, que les hypothèses initialement proposées pour borner les dérivées des fonctions d'appartenance $\dot{h}_1^1(z(t))$ et $\dot{h}_2^1(z(t))$ respectivement par $\theta_1^1 = -1$ et $\theta_2^1 = -1.5$ sont vérifiées en simulation (Figure .C.3).

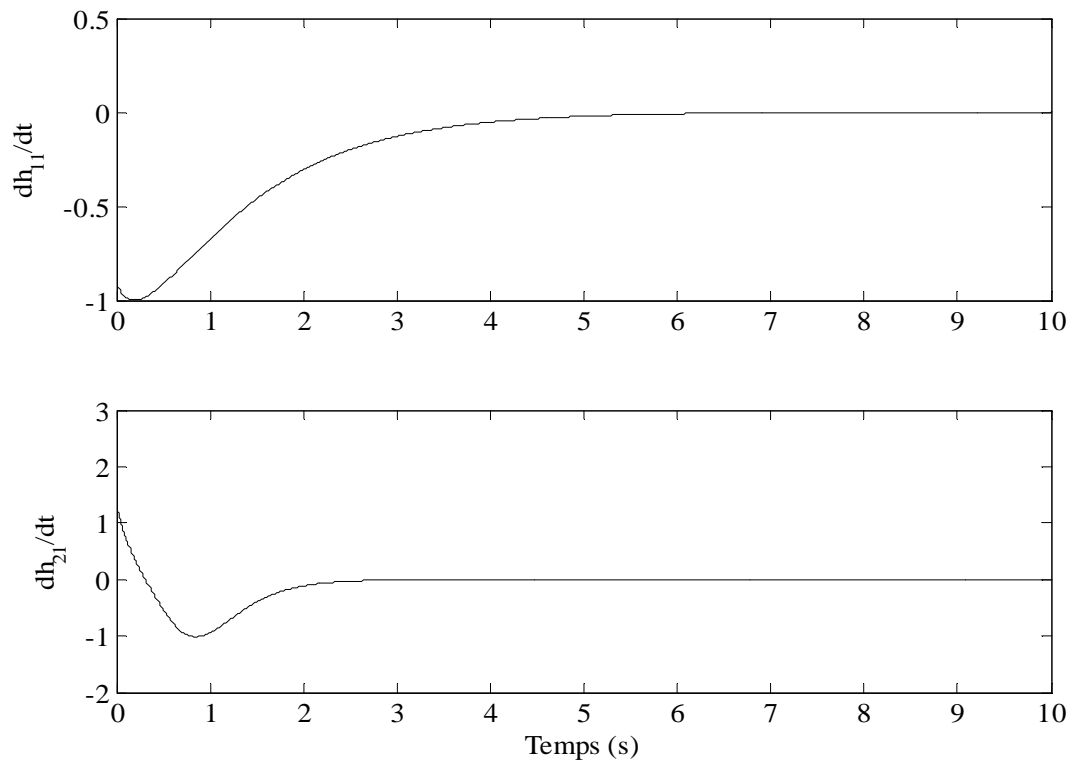


Figure. C.3 Evolution temporelle des dérivées des fonctions d'appartenance.

Annexe C : Stabilisation de systèmes en temps discret interconnectés à commutations

Dans le troisième chapitre, des conditions de stabilité sous forme de LMI ont été établies pour une classe de systèmes standards à commutations interconnectés en temps continu. Néanmoins, ces résultats ne sont pas directement applicables au cas discret. Nous proposons, dans la présente annexe, d'étudier la stabilisation de la classe de systèmes standards interconnectés à commutations en temps discret (Jabri & al., 10b). La dynamique de la classe de système considérée est donnée par :

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^{m_i} \xi_{ij}(k) \left[A_{ij}x_i(k) + B_{ij}u_i(k) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n F_{i\alpha j}x_\alpha(k) \right] \quad (D.1)$$

tel que k désigne le temps discrétisé.

Un ensemble décentralisé de n contrôleurs à commutations est considéré. Ce dernier est donné par :

Pour $i = 1, \dots, n$:

$$u_i(k) = \sum_{j=1}^{m_i} \xi_{ij}(k) K_{ij}x_i(k) \quad (D.2)$$

avec K_{ij} représentent les matrices de gain à synthétiser.

En remplaçant (D.2) dans (D.1), on obtient le système global S en boucle fermée :

Pour $i = 1, \dots, n$:

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^{m_i} \xi_{ij}(k) \left[(A_{ij} + B_{ij}K_{ij})x_i(k) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n F_{i\alpha j}x_\alpha(k) \right] \quad (D.3)$$

Tout comme pour le cas continu, l'objectif est ici de synthétiser les matrices K_{ij} pour $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_i$, afin de garantir la stabilité du système global interconnecté à commutations en boucle fermée (D.3). L'approche proposée est présentée par le théorème suivant :

Théorème E.1 (Jabri & al., 10b)

Supposons que le mode actif est dénoté par j et le mode suivant est dénoté par j^+ . Le système global S composé de n sous-systèmes discrets interconnectés à commutations S_i décrits par (D.1) est globalement asymptotiquement stable en boucle fermée via le réseau de n lois de commande décentralisées par retour d'état défini par (D.2), s'il existe pour toutes les combinaisons suivantes $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m_i$, $j^+=1,\dots,m_i$, $\alpha=1,\dots,n$ et $\alpha \neq i$, les matrices $X_{ij} = X_{ij}^T > 0$ et Y_{ij} satisfaisant les LMI sont suivantes:

$$\left[\begin{array}{cccccccc} -X_{ij} & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & (*) \\ (A_{ij} + Y_{ij}) & -\frac{1}{n} X_{ij^+} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ F_{ij} & 0 & -\frac{1}{2(n-1)} X_{1j^+} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -\frac{1}{2(n-1)} X_{i-1j^+} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & -\frac{1}{2(n-1)} X_{i+1j^+} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ F_{nij} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{2(n-1)} X_{nj^+} \end{array} \right] < 0 \quad (D.4)$$

Les matrices de gains du contrôleur sont obtenues par le changement de variable bijectif $K_{ij} = Y_{ij} X_{ij}^{-1}$.

Preuve

Comme nous l'avons mentionné dans la section 3.1, nous proposons d'utiliser des conditions plus adaptées au cas discret. En effet, un système hybride composé d'un ensemble de n sous-systèmes interconnectés à commutations est stable, s'il existe un ensemble de n fonctions de Lyapunov $v_i(k, x_i(k))$ vérifiant les conditions suivantes :

Pour $i=1,\dots,n$,

$$v_i(k, x_i(k)) > 0 \quad (D.5)$$

$$\Delta v_i = v_i(k+1, x_i(k+1)) - v_i(k, x_i(k)) < 0 \quad (D.6)$$

Considérons la fonction candidate multiple à commutations de Lyapunov suivante:

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$v_i(k, x_i(k)) = \sum_{j=1}^{m_i} \xi_{ij}(k) (x_i^T(k) P_{ij} x_i(k)) \quad (\text{D.7})$$

Le système global interconnecté à commutations (D.3) est asymptotiquement stable si:

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$\Delta v_i = v_i(k+1, x_i(k+1)) - v_i(k, x_i(k)) < 0 \quad (\text{D.8})$$

L'inégalité (D.8) peut être reformulée comme suit:

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^{m_i} \xi_{ij}(k+1) (x_i^T(k+1) P_{ij^+} x_i(k+1)) - \sum_{j=1}^{m_i} \xi_{ij}(k) (x_i^T(k) P_{ij} x_i(k)) < 0 \quad (\text{D.9})$$

Notons par j le mode actif et par j^+ le mode suivant. Ceci nous permet d'écrire:

$$\begin{cases} \xi_{il}(k+1) = 1 & \text{if } l = j^+ \\ \xi_{il}(k+1) = 0 & \text{if } l \neq j^+ \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

$$\text{et } \begin{cases} \xi_{il}(k) = 1 & \text{si } l = j \\ \xi_{il}(k) = 0 & \text{si } l \neq j \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Ainsi, l'inégalité (D.9) peut être réécrite comme suit :

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$\Delta v_i = G_{ij}^T P_{ij^+} G_{ij} - x_i^T(k) P_{ij} x_i(k) < 0 \quad (\text{D.12})$$

$$\text{avec } G_{ij} = (A_{ij} + B_{ij} K_{ij}) x_i(k) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n F_{i\alpha j} x_\alpha(k).$$

C'est-à-dire :

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$\left(\begin{aligned} & x_i^T(k) \left((A_{ij}^T + K_{ij}^T B_{ij}^T) P_{ij^+} (A_{ij} + B_{ij} K_{ij}) - P_{ij} \right) x_i(k) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n x_\alpha^T(k) F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} (A_{ij} + B_{ij} K_{ij}) x_i(k) \\ & + x_i^T(k) (A_{ij}^T + K_{ij}^T B_{ij}^T) P_{ij^+} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n F_{i\alpha j} x_\alpha(k) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n x_\alpha^T(k) F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i}}^n F_{i\beta j} x_\beta(k) \end{aligned} \right) < 0 \quad (\text{D.13})$$

Concentrons nous sur le terme $\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n x_\alpha^T(k) F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i}}^n F_{i\beta j} x_\beta(k)$ dans (D.13), on peut écrire:

$$\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n x_{\alpha}^T(k) F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i}}^n F_{i\beta j} x_{\beta}(k) = \left(\begin{array}{l} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i}}^n \left(x_{\alpha}^T(k) F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} F_{i\beta j} x_{\beta}(k) + x_{\beta}^T(k) F_{i\beta j}^T P_{ij^+} F_{i\alpha j} x_{\alpha}(k) \right) \\ + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n x_{\alpha}^T(k) F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} F_{i\alpha j} x_{\alpha}(k) \end{array} \right) \quad (\text{D.14})$$

Appliquons le lemme du carré matriciel présenté dans l'Annexe A. Puisque

$$\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n \left(\Psi_{i\alpha} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq i}}^n \Psi_{i\beta} \right) = (n-1) \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n \Psi_{i\alpha}, \text{ l'inégalité (D.13) devient:}$$

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$x_i^T(k) \left((A_{ij}^T + K_{ij}^T B_{ij}^T) P_{ij^+} (A_{ij} + B_{ij} K_{ij}) - P_{ij} \right) x_i(k) + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n \left(\begin{array}{l} x_{\alpha}^T(k) F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} (A_{ij} + B_{ij} K_{ij}) x_i(k) \\ + x_i^T(k) (A_{ij}^T + K_{ij}^T B_{ij}^T) P_{ij^+} F_{i\alpha j} x_{\alpha}(k) \\ + (2n-3) x_{\alpha}^T(k) F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} F_{i\alpha j} x_{\alpha}(k) \end{array} \right) < 0 \quad (\text{D.15})$$

Ensuite, en utilisant encore une fois le lemme du carré matriciel (Zhou & al., 1988, Annexe A, lemme A.2), l'inégalité (D.15) est satisfaite si :

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$x_i^T(k) \left(n(A_{ij}^T + K_{ij}^T B_{ij}^T) P_{ij^+} (A_{ij} + B_{ij} K_{ij}) - P_{ij} \right) x_i(k) + 2(n-1) \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq i}}^n x_{\alpha}^T(k) F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} F_{i\alpha j} x_{\alpha}(k) < 0 \quad (\text{D.16})$$

Soient pour tous $i = 1, \dots, n$ et $\alpha = 1, \dots, n$, les scalaires $\tau_{i\alpha} = 2(n-1)$ si $\alpha \neq i$ et $\tau_{i\alpha} = 0$ si $\alpha = i$ (pour $\alpha = i$, il s'agit de l'interaction entre le sous-système est lui-même, cf. chapitre 2 remarque 2.2) ; l'inégalité (D.16) peut être écrite comme suit :

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$x_i^T(k) \left(n(A_{ij}^T + K_{ij}^T B_{ij}^T) P_{ij^+} (A_{ij} + B_{ij} K_{ij}) - P_{ij} \right) x_i(k) + \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha}^T(k) \tau_{i\alpha} F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} F_{i\alpha j} x_{\alpha}(k) < 0 \quad (\text{D.17})$$

Ceci est équivalent à :

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$x_i^T(k) \sum_{\alpha=1}^n \left(\left(\frac{n}{n-1} \right) (A_{ij}^T + K_{ij}^T B_{ij}^T) P_{ij^+} (A_{ij} + B_{ij} K_{ij}) - \frac{1}{(n-1)} P_{ij} + \tau_{i\alpha} F_{i\alpha j}^T P_{ij^+} F_{i\alpha j} \right) x_i(k) < 0 \quad (\text{D.18})$$

L'inégalité (D.18) est satisfaite, $\forall x_i(k)$, si:

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$n(A_{ij}^T + K_{ij}^T B_{ij}^T)P_{ij^+}(A_{ij} + B_{ij}K_{ij}) - P_{ij} + \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i} F_{\alpha ij}^T P_{ij^+} F_{\alpha ij} < 0 \quad (\text{D.19})$$

Rappelons que les scalaires τ_{ii} indiquant l'interconnexion du système avec lui-même sont nulle ($\tau_{ii} = 0$). Appliquons alors le complément de Schur, nous obtenons:

Pour $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{bmatrix} -P_{ij} & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & (*) \\ (A_{ij} + B_{ij}K_{ij}) & -\frac{1}{n}P_{ij^+}^{-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ F_{1ij} & 0 & -\tau_{1i}^{-1}P_{1j^+}^{-1} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -\tau_{i-1i}^{-1}P_{i-1j^+}^{-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & -\tau_{i+1i}^{-1}P_{i+1j^+}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ F_{nij} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\tau_{ni}^{-1}P_{nj^+}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{D.20})$$

Multiplions l'inégalité (D.20) à droite et à gauche par $\text{diag}[P_{ij}^{-1} \ I \ \dots \ I]$. Enfin, en effectuant le changement de variables $X_{ij} = P_{ij}^{-1}$ et $Y_{ij} = K_{ij}P_{ij}^{-1}$, nous obtenons les conditions de stabilité du théorème 3.2. ■

Remarque D.1

L'analyse de stabilité d'un ensemble de sous-systèmes autonomes interconnectés à commutations en temps discret décrit par l'équation (D.1) avec $u_i(k) = 0$, peut être testé en utilisant le théorème 3.2 tout en considérant $Y_{ij} = 0$ dans les LMI (D.4).

Exemple numérique

Considérons un système hybride S composé de trois sous-systèmes à commutations interconnectés en temps discret S_1 , S_2 et S_3 . Chaque sous-système possède deux modes de fonctionnement. L'ensemble des dynamiques composant le système global est décrit par:

- $S_1 : x_1(k+1) = \sum_{j=1}^2 \xi_{1j}(k) [A_{1j}x_1(k) + B_{1j}u_1(k) + F_{12j}x_2(k) + F_{13j}x_3(k)]$ (D.21)

tels que les matrices $A_{11} = \begin{bmatrix} -1.3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $F_{121} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix}$ et

$F_{131} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}$ définissent son premier mode de fonctionnement et les matrices

$A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}$, $B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_{122} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.04 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$ et $F_{132} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.02 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$ définissent son

deuxième mode de fonctionnement.

2^{ème} sous-système

$$\bullet \quad S_2 : x_2(k+1) = \sum_{j=1}^2 \xi_{2j}(k) \left[A_{2j}x_2(k) + B_{2j}u_2(k) + F_{21j}x_1(k) + F_{23j}x_3(k) \right] \quad (\text{D.22})$$

avec les matrices $A_{21} = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.5 \\ 0.6 & 4 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_{211} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 \\ 0 & 0.06 \end{bmatrix}$, $F_{231} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.07 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$,

définissent son premier mode de fonctionnement et les matrices $A_{22} = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.8 \\ 0.5 & -0.3 \end{bmatrix}$,

$B_{22} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_{212} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}$ et $F_{232} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.05 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}$ définissent son deuxième mode

de fonctionnement.

$$\bullet \quad S_3 : x_3(k+1) = \sum_{j=1}^2 \xi_{3j}(k) \left[A_{3j}x_3(k) + B_{3j}u_3(k) + F_{31j}x_1(k) + F_{32j}x_2(k) \right] \quad (\text{D.23})$$

avec les matrices $A_{31} = \begin{bmatrix} -1.2 & -1.6 \\ -1.6 & 4 \end{bmatrix}$, $B_{31} = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_{311} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 \\ 0.03 & 0.01 \end{bmatrix}$ et

$F_{321} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 \\ 0.02 & 0.01 \end{bmatrix}$, définissent son premier mode de fonctionnement et les matrices

$A_{32} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.8 \\ 0.5 & -0.3 \end{bmatrix}$, $B_{32} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $F_{312} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$ et $F_{322} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.03 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}$ définissent son

deuxième mode de fonctionnement.

Nous considérons que les sous-systèmes commutent selon les lois de commutations suivantes :

- Pour le premier sous-système : $R_{11} = 5x_{11} + 0.2x_{12}$ et $R_{12} = 0.5x_{11} - 0.2x_{12}$,
- pour le deuxième sous-système : $R_{21} = -0.6x_{21} + 3x_{22}$ et $R_{22} = 0.01x_{21} - x_{22}$,
- et pour le troisième sous-système $R_{31} = 0.3x_{31} + 1.7x_{32}$ et $R_{32} = 1.2x_{31} - 1.2x_{32}$.

La stabilité intrinsèque du système global interconnecté à commutations S a été testée en résolvant les LMI décrites dans (D.4) et en considérant les modifications apportées dans la remarque D.1. En effet, le système global considéré est instable en boucle ouverte comme l'illustre la Figure D.1. Ceci a été confirmé par les simulations. La Figure D.1 présente les dynamiques des états du système autonome global. Elle montre le comportement instable du système pour les états initiaux suivants : $x_1(0) = [5 \ 3]^T$, $x_2(0) = [3 \ 2]^T$ et $x_3(0) = [-2 \ 2]$.

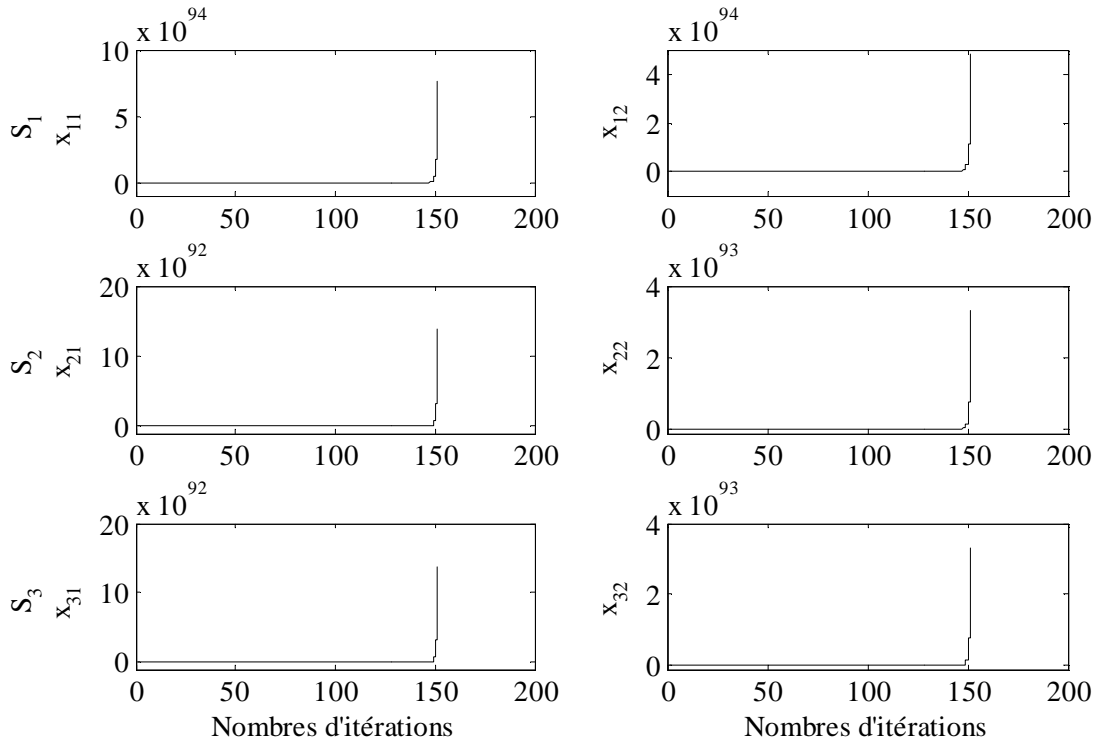


Figure D.1. La dynamique de système global interconnecté autonome à commutations.

Ensuite, en utilisant *Matlab LMI toolbox*, une solution du théorème D.1 est obtenue et conduit à la synthèse de trois contrôleurs à commutations locaux de la forme (D.2). Chaque contrôleur local possède deux modes de fonctionnement. Les résultats numériques obtenus sont donnés par les matrices de gain suivantes:

$$K_{11} = [-0.0328 \ -0.0262] \text{ et } K_{12} = [0.1578 \ 0.076], \text{ pour le 1}^{\text{er}} \text{ contrôleur local,}$$

$$K_{21} = [-0.5288 \ -0.2145] \text{ et } K_{22} = [-0.1841 \ -0.0042], \text{ pour le 2}^{\text{ème}} \text{ contrôleur local,}$$

$$K_{31} = [0.6068 \ -0.0609] \text{ et } K_{32} = [-0.1627 \ 0.0428], \text{ pour le 3}^{\text{ème}} \text{ contrôleur local.}$$

Le système global en boucle fermée est ensuite simulé en initialisant le sous-système S_1 dans le mode 1 avec l'état initial $x_1(0) = [1 \ 2]^T$, le sous-système S_2 dans le mode 2 avec l'état

initial $x_2(0) = [-3 \ -3]^T$ et le sous-système S_3 dans le mode 1 avec l'état initial $x_3(0) = [3 \ -1]$. L'évolution temporelle des états du système global est présentée par la Figure D.2. Nous constatons clairement que le système global est asymptotiquement stable après un régime transitoire de près de 48 itérations. L'évolution des signaux de commandes ainsi que celle des modes de fonctionnement sont illustrée dans la Figure D.3.

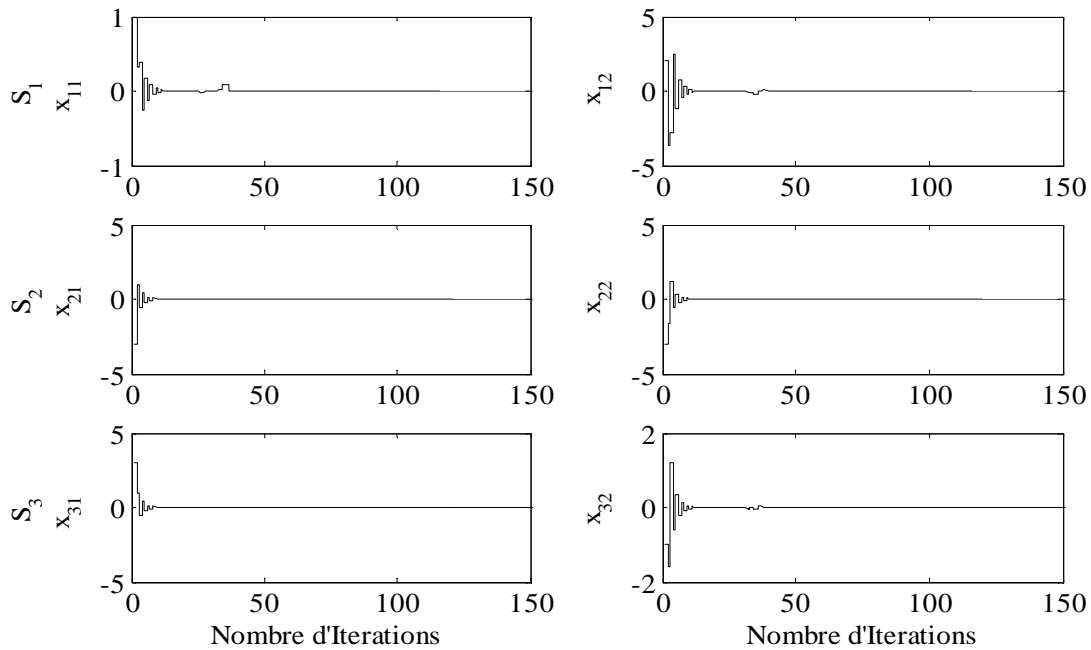


Figure D.2. Dynamiques des états du système interconnecté à commutations en boucle fermée.

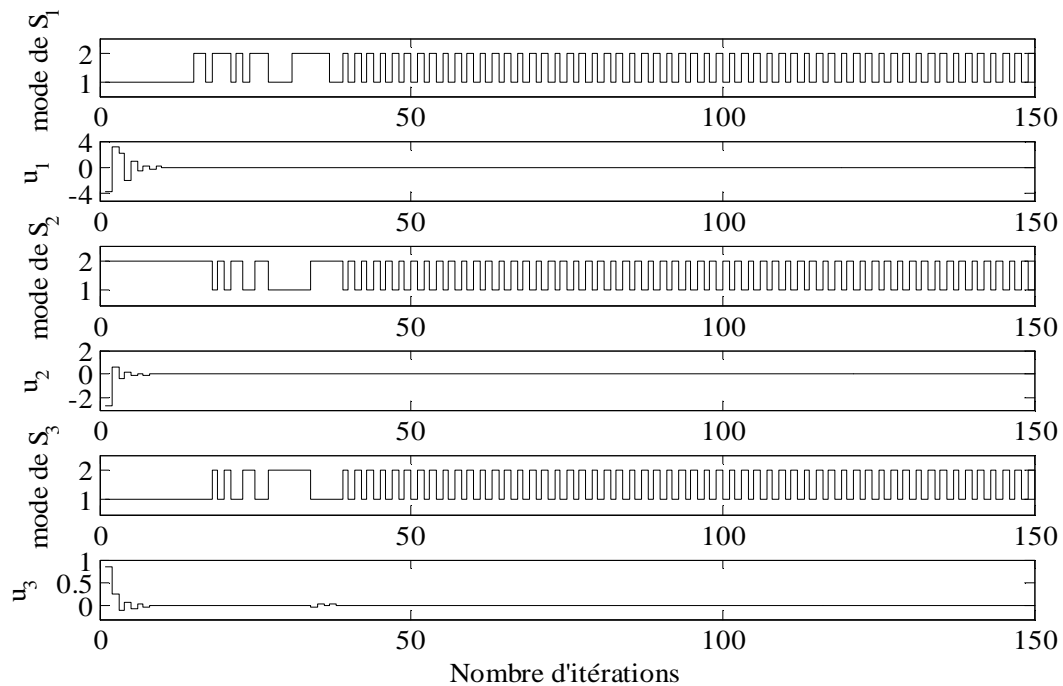


Figure D.3. Evolution des signaux de commande et des modes de commutations.

Annexe D : Stabilisation d'un système non linéaire incertain et perturbé

Dans cet Annexe, afin de réduire le conservatisme des approches TS, nous proposons de modéliser un système non linéaire incertain et perturbé sous la forme d'un ensemble des systèmes multi-modèle de type TS à commutations incertain et perturbé en se basant sur l'étude de (Othake & al., 2006). Le système global est ensuite stabilisé à l'aide d'une loi de commande PDC à commutations.

L'idée de base est de considérer des quadrants (nommés encore des régions) dans l'espace d'état du système non linéaire. Pour chacun quadrant, un représentant TS peut-être obtenu. La loi de commutation sera ensuite définie selon les trajectoires parcourues par le système dans sa globalité. En effet, le passage du système d'une région à l'autre permet de définir une loi de commutation. Cette dernière permettant à son tour de sélectionner la loi de commande associée à chaque représentant au sein d'un ensemble de lois de commande de type PDC à commutations (cf. Chapitre 4 section 4.2).

Dans un premier temps, nous présentons respectivement la classe de systèmes étudiés, la fonction de Lyapunov utilisée et la loi de commande développée. Ensuite, des conditions de stabilité sont données sous formes LMI. Enfin, un exemple numérique illustre l'applicabilité de l'approche proposée.

E.1. Stabilisation robuste d'un système non linéaire par de commande à commutations

E.1.1. Classe de systèmes considérée

Soit la classe des systèmes TS à commutations incertains et perturbés décrite par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^r \xi_q(x(t)) h_{qi}(x(t)) \left((A_{qi} + \Delta A_{qi}(t))x(t) + (B_{qi} + \Delta B_{qi}(t))u(t) + G_{qi}\varphi(t) \right) \quad (\text{E.1})$$

où $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)] \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $\varphi(t) \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et des perturbations externes.

Q et r définissent respectivement le nombre de régions considérées de l'espace d'état et le nombre de règles dans chaque région. Ainsi, pour $i=1,\dots,r$ et $q=1,\dots,Q$, $A_{qi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{qi} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $G_{qi} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ sont des matrices constantes de dimensions appropriées. $\Delta A_{qi}(t)$, $\Delta B_{qi}(t)$ sont des matrices d'incertitudes paramétriques dites Lesbegue mesurables et peuvent être réécrites sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta A_{qi}(t) = H_{aqi} F_a(t) N_{aqi} \\ \Delta B_{qi}(t) = H_{bqi} F_b(t) N_{bqi} \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

avec H_{aqi} , H_{bqi} , N_{aqi} et N_{bqi} sont des matrices réelles connues de dimensions appropriées et les fonctions incertaines $F_a(t)$ et $F_b(t)$ bornées dans le temps telles que $F_a^T(t) F_a(t) \leq I$ et $F_b^T(t) F_b(t) \leq I$. $h_{qi}(x(t))$ sont des fonctions d'appartenance vérifiant les propriétés de sommes convexes $h_{qi}(x(t)) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^r h_{qi}(x(t)) = 1$. Enfin, $\xi_q(x(t))$ est les fonctions d'activation définie par :

$$\xi_q(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(t) \in \text{la région } R_q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

où chacune des régions est désignée par $R_q(s_{1q}, s_{2q}, \dots, s_{nq})$:

$$s_{kq} = \begin{cases} 1 & x_k(t) \geq 0 \\ 0 & x_k(t) < 0 \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Pour plus de clarification, dans le cas d'un système à commutations à deux états, en tenant compte de la loi de commutation (E.3) et des variables d'états $x_1(t)$ et $x_2(t)$, l'espace d'état est divisé en quatre régions $R_1(1,1)$, $R_2(0,1)$, $R_3(1,0)$ et $R_4(0,0)$ représentées Figure E.1.

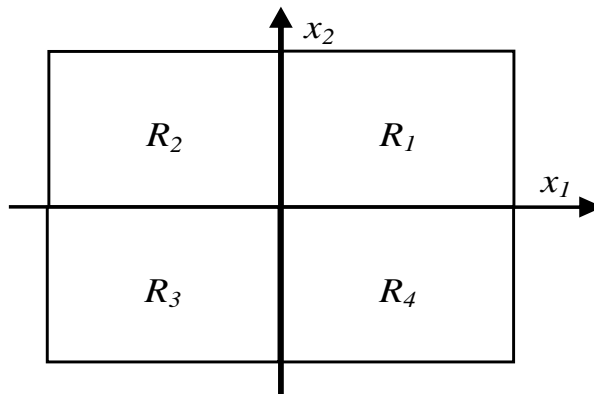


Figure E.1 Partitionnement d'un espace d'état à deux dimensions.

E.1.2. Fonction candidate de Lyapunov considérée

Afin d'analyser la stabilité des systèmes TS à commutations représentés par (E.1), on considère la fonction candidate de Lyapunov donnée par (Othake & al., 2006) :

$$V(x(t)) = \begin{cases} x^T(t) P_1 x(t), & x(t) \in R_1 \\ x^T(t) P_2 x(t), & x(t) \in R_2 \\ \vdots \\ x^T(t) P_Q x(t), & x(t) \in R_Q \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

où P_q sont des matrices définies positives.

La fonction de Lyapunov (E.5) doit garantir la continuité aux frontières des régions (E.4). De façon similaire à la proposition (Othake & al., 2006), cette condition est vérifiée si P_q vérifie la condition suivante :

$$P_q = E_q^T P E_q \quad (\text{E.6})$$

où P_q est une matrice définie positive et où E_q sont des matrices non singulières connues dont la forme a été démontrée dans (Othake & al., 2006) et présentées par

$$E_q = \begin{bmatrix} s_{1q} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-s_{1q} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_{2q} & \dots & 0 & 0 & 0 & 1-s_{2q} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{(r-1)q} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-s_{(r-1)q} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{rq} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-s_{rq} \\ 1-s_{1q} & 0 & \dots & 0 & 0 & s_{1q} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-s_{2q} & \dots & 0 & 0 & 0 & s_{2q} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-s_{(r-1)q} & 0 & 0 & 0 & \dots & s_{(r-1)q} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-s_{rq} & 0 & 0 & \dots & 0 & s_{rq} \end{bmatrix}$$

Sachant qu'une seule région peut-être active à un instant donné, (E.5) peut-être réécrite sous la forme :

$$V(x(t)) = \sum_{q=1}^Q E_q^T P E_q \quad (\text{E.7})$$

E.1.3. Contrôleur PDC à commutations

Afin d'assurer la stabilisation du système (E.1), on propose d'étendre l'approche PDC (Tanaka & al., 2001) aux systèmes à commutations. La loi de commande TS à commutations considérée dans cette étude est décrite par :

$$u(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^r \xi_q(x(t)) h_{qi}(x(t)) K_{qi} E_q x(t) \quad (\text{E.8})$$

où $K_{qi} \in R^{m \times n}$ sont les gains de retour d'état et $E_q \in R^{n \times n}$ les matrices non singulières définies précédemment.

En considérant (E.1) et (E.8), la dynamique de la boucle fermée peut être exprimée par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \xi_q h_{qi} h_{qj} \left((A_{qi} + \Delta A_{qi}(t)) + (B_{qi} + \Delta B_{qi}(t)) K_{qi} E_q \right) x(t) + G_{qi} \varphi(t) \quad (\text{E.9})$$

Dès lors, la synthèse de la loi de commande est réalisée s'il est possible de trouver les matrices de gains K_{qi} de telle sorte que (E.9) est stable.

E.2. Synthèse H_∞ de lois de commande à commutations

L'objectif est maintenant de fournir une méthodologie de synthèse de lois de commande à commutations décrites par (E.8) stabilisant les systèmes TS à commutations (E.9) tout en atténuant de l'effet des perturbations externes. Pour ce faire, on considère le critère H_∞ suivant (Boyd & al., 1994) :

$$\int_0^{tf} x(t)^T R x(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{tf} \varphi(t)^T \varphi(t) dt \quad (\text{E.10})$$

où $R > 0$ est une matrice de pondération et η désigne le taux d'atténuation des perturbations externes vis-à-vis de l'état du système.

Le résultat principal est résumé par le théorème suivant.

Théorème 5: (Jabri & al., 2010c)

Le système TS à commutations incertain et perturbé (E.1) est globalement asymptotiquement stable en boucle fermée via la loi de commande PDC à commutations (E.8) au regard du critère H_∞ (E.10) s'il existe les matrices $X = X^T > 0$, M_{qi} , les scalaires $\gamma_{qi} > 0$, $\lambda_{qi} > 0$ et le taux d'atténuation $\eta = \sqrt{\rho}$, $\rho > 0$, vérifiant les conditions LMIs, $\forall q, i, i < j$:

Minimiser ρ tel que :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{qii} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ N_{aqi} E_q^{-1} X & -\gamma_{qi} I & 0 & 0 & 0 \\ N_{bqi} M_{qi} & 0 & -\lambda_{qi} I & 0 & 0 \\ X E_q^{-T} & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ G_{qi}^T E_q^T & 0 & 0 & 0 & -\rho I \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{E.11})$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} \Psi_{qij} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ (N_{aqi} + N_{aqj})E_q^{-1}X & -(\gamma_{qi} + \gamma_{qj})I & 0 & 0 & 0 \\ N_{bqi}M_{qj} + N_{bj}M_{qi} & 0 & -(\lambda_{qi} + \lambda_{qj})I & 0 & 0 \\ 2XE_q^{-T} & 0 & 0 & -2R^{-1} & 0 \\ (G_{qi}^T + G_{qj}^T)E_q^T & 0 & 0 & 0 & -2\rho I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{E.12})$$

avec

$$\Omega_{qii} = XE_q^{-T}A_{qi}^TE_q^T + M_{qi}^TB_{qi}^TE_q^T + E_qA_{qi}E_q^{-1}X + E_qB_{qi}M_{qi} + \gamma_{qi}E_qH_{aqi}H_{aqi}^TE_q^T + \lambda_{qi}E_qH_{bqi}H_{bqi}^TE_q^T$$

et

$$\Psi_{qij} = \left(\begin{array}{l} 2(XE_q^{-T}A_{qi}^TE_q^T + M_{qj}^TB_{qi}^TE_q^T + XE_q^{-T}A_{qj}^TE_q^T + M_{qi}^TB_{qj}^TE_q^T) \\ + \gamma_{qi}E_qH_{aqi}H_{aqi}^TE_q^T + \lambda_{qi}E_qH_{bqi}H_{bqi}^TE_q^T + \gamma_{qj}E_qH_{aqj}H_{aqj}^TE_q^T + \lambda_{qj}E_qH_{bj}H_{bj}^TE_q^T \end{array} \right)$$

Dans ce cas, les gains de la lois de commande (E.8) sont obtenus par le changement de variable bijectif $K_{qi} = M_{qi}X^{-1}$.

Preuve

Sachant qu'une seule région est active à un instant donné, la fonction de Lyapunov peut être écrite sous la forme suivante

$$V(x, t) = x(t)^T E_v^T P E_v x(t) \quad (\text{E.13})$$

Le système (E.9) en boucle fermée est stable selon le critère H_∞ si:

$$\dot{V} + x^T R x - \eta \varphi^T \varphi < 0 \quad (\text{E.14})$$

En remplaçant (E.9) dans (E.14) on obtient :

$$\begin{aligned} x(t)^T \left(2(A_{vh} + \Delta A_{vh} + (B_{vh} + \Delta B_{vh})K_{vh}E_v)^T E_v^T P E_v + R \right) x(t) + 2\varphi(t)G_{vh}^T E_v^T P E_v x(t) \\ - \eta^2 \varphi^T(t)\varphi(t) < 0 \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

qui est vérifiée $\forall x(t)$ et $\forall \varphi(t)$ si :

$$\left[\begin{array}{cc} 2\left((A_{vh} + \Delta A_{vh} + (B_{vh} + \Delta B_{vh})K_{vh}E_v)^T E_v^T P E_v + R\right) & (*) \\ G_{vh}^T E_v^T P E_v & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{E.16})$$

c'est-à-dire si :

$$\left[\begin{array}{cc} E_v^T \left(2\left((A_{vh} + \Delta A_{vh})E_v^{-1} + (B_{vh} + \Delta B_{vh})K_{vh}\right)^T E_v^T P + E_v^{-T} R E_v^{-1} \right) E_v & (*) \\ G_{vh}^T E_v^T P E_v & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{E.17})$$

En multipliant (E.17) à gauche par $\begin{bmatrix} E_v^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ et à droite par $\begin{bmatrix} E_v^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc} \left(2(E_v^{-T} A_{vh}^T E_v^T P + K_{vh}^T B_{vh}^T E_v^T P + E_v^{-T} \Delta A_{vh}^T E_v^T P + K_{vh}^T \Delta B_{vh}^T E_v^T P) + E_v^{-T} R E_v^{-1} \right) & (*) & \\ G_{vh}^T E_v^T P & & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{E.18})$$

On pose $X = P^{-1}$ et $M_{vh} = K_{vh} X$, en multipliant à gauche et à droite par $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc} \left(2(X E_v^{-T} A_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T B_{vh}^T E_v^T + X E_v^{-T} \Delta A_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T \Delta B_{vh}^T E_v^T) + X E_v^{-T} R E_v^{-1} X \right) & (*) & \\ G_{vh}^T E_v^T & & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{E.19})$$

En utilisant le complément de Schur (Boyd & al., 1994, Annexe A lemme A.3), l'inégalité (E.19) peut se réécrire telle que :

$$\left[\begin{array}{ccc} 2(X E_v^{-T} A_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T B_{vh}^T E_v^T + X E_v^{-T} \Delta A_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T \Delta B_{vh}^T E_v^T) & (*) & (*) \\ X E_v^{-T} & -R^{-1} & 0 \\ G_{vh}^T E_v^T & 0 & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{E.20})$$

c'est-à-dire, en considérant l'expression (E.2) relative aux incertitudes du système :

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 \left(X E_v^{-T} A_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T B_{vh}^T E_v^T + X E_v^{-T} N_{avh}^T F_a^T(t) H_{avh}^T E_v^T \right) & (*) & (*) \\ + M_{vhh}^T N_{bvh}^T F_a^T(t) H_{bvh}^T E_v^T & & \\ X E_v^{-T} & -R^{-1} & 0 \\ G_{vh}^T E_v^T & 0 & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{E.21})$$

que l'on peut majorer à l'aide du lemme A.2 (Zhou & al., 1988) par :

$$\left[\begin{array}{ccc} \Omega_{vh} & (*) & (*) \\ X E_v^{-T} & -R^{-1} & 0 \\ G_{vh}^T E_v^T & 0 & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{E.22})$$

$$\text{avec } \Omega_{vh} = \left(2(X E_v^{-T} A_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T B_{vh}^T E_v^T) + \gamma_{vh}^{-1} X E_v^{-T} N_{avh}^T N_{avh} E_v^{-1} X + \gamma_{vh} E_v H_{avh} H_{avh}^T E_v^T \right) \\ + \lambda_{vh}^{-1} M_{vhh}^T N_{bvh}^T N_{bvh} M_{vh} + \lambda_{vh} E_v H_{bvh} H_{bvh}^T E_v^T$$

En appliquant le complément de Schur, (E.22) peut-être réécrite telle que :

$$\left[\begin{array}{ccccc} \Lambda_{vh} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ N_{avh} E_v^{-1} X & -\gamma_{vh} I & 0 & 0 & 0 \\ N_{bvh} M_{vh} & 0 & -\lambda_{vh} I & 0 & 0 \\ X E_v^{-T} & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ G_{vh}^T E_v^T & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{E.23})$$

$$\text{avec } \Lambda_{vh} = \left(2(X E_v^{-T} A_{vh}^T E_v^T + M_{vh}^T B_{vh}^T E_v^T) + \gamma_{vh} E_v H_{avh} H_{avh}^T E_v^T + \lambda_{vh} E_v H_{bvh} H_{bvh}^T E_v^T \right)$$

Enfin, afin de relâcher les conditions de stabilité obtenues, on utilise le lemme de Tuan (Annexe A, lemme A.2). On obtient ainsi les conditions LMIs proposées au théorème précédent. ■

Exemple numérique

Soit le système TS incertain et perturbé à commutations inspiré de l'exemple (sans incertitudes) proposé dans (Othake & al., 2006) :

$$\dot{x}(t) = \sum_{q=1}^4 \sum_{i=1}^4 \xi_q(x(t)) h_{qi}(x(t)) \left((A_{qi} + \Delta A_{qi}(t))x(t) + (B_{qi} + \Delta B_{qi}(t))u(t) + G_{qi}\varphi(t) \right) \quad (\text{E.24})$$

$$\text{Avec } A_{11} = A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.246 & -0.246 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = A_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -1.25 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.952 & -0.246 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = A_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.75 & -1.25 \end{bmatrix}, \quad A_{31} = A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.246 & -1.952 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = A_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$A_{41} = A_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.952 & -1.952 \end{bmatrix}, \quad A_{42} = A_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.75 & 0.75 \end{bmatrix}, \quad B_{11} = B_{12} = B_{41} = B_{42} = [0 \quad -0.45],$$

$$B_{13} = B_{14} = B_{43} = B_{44} = [0 \quad -0.7], \quad B_{21} = B_{23} = B_{31} = B_{32} = [0 \quad -0.7],$$

$$B_{22} = B_{24} = B_{33} = B_{34} = [0 \quad -0.95] \quad \text{et les perturbations définie telles que}$$

$$\Delta A_{qi}(t) = H_{aqi}F(t)N_{aqi} \quad \text{et} \quad \Delta B_{qi}(t) = H_{bqi}F(t)N_{bqi} \quad \text{avec, pour } q=1,2 \text{ et } i=1,\dots,4,$$

$$H_{aqi} = H_{bqi} = [0.2 \quad 0.15]^T \quad \text{et} \quad N_{aqi} = N_{bqi} = [0.25 \quad 0.1].$$

Les matrices E_q sont obtenues comme suit :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et les}$$

fonctions d'appartenance données par $h_{qi}(x(t)) = \Gamma_{qi} \times w_{qi}$ telles que :

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{13} = \begin{cases} \frac{f_2(x) + 1.25x_1 + 1.25x_2}{1.004x_1 + 1.004x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{14} = \begin{cases} \frac{-0.246x_1 - 0.246x_2 - f_2(x)}{1.004x_1 + 1.004x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Gamma_{21} = \Gamma_{23} = \begin{cases} \frac{f_2(x) - 0.75x_1 + 1.25x_2}{-2.702x_1 + 1.004x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Gamma_{22} = \Gamma_{24} = \begin{cases} \frac{-1.952x_1 - 0.246x_2 - f_2(x)}{-2.702x_1 + 1.004x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Gamma_{31} = \Gamma_{33} = \begin{cases} \frac{f_2(x) + 1.25x_1 - 0.75x_2}{1.004x_1 - 2.702x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Gamma_{32} = \Gamma_{34} = \begin{cases} \frac{-0.246x_1 - 1.952x_2 - f_2(x)}{1.004x_1 - 2.702x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Gamma_{41} = \Gamma_{43} = \begin{cases} \frac{f_2(x) - 0.75x_1 - 0.75x_2}{-2.702x_1 - 2.702x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Gamma_{42} = \Gamma_{44} = \begin{cases} \frac{-1.952x_1 - 1.952x_2 - f_2(x)}{-2.702x_1 - 2.702x_2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $f_2(x) = -x_1^3 - x_2^3 + 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2 - 3x_1x_2 - x_1 - x_2$, $w_{13} = w_{14} = w_{43} = w_{44} = 1 - 4x_1x_2$,

$w_{11} = w_{12} = w_{41} = w_{42} = 4x_1x_2$, $w_{21} = w_{22} = w_{31} = w_{32} = 4x_1x_2 + 1$,

$w_{23} = w_{24} = w_{33} = w_{34} = \frac{-1.4 - x_1x_2}{0.25}$.

La loi de commutation $\xi_q(x(t))$ est définie par (E.3) et la partition de l'espace d'état suit l'exemple modèle donné par la Figure F.1. La résolution des conditions de stabilité du théorème 1 est obtenue via la boîte à outils *Matlab LMI Tolbox*. Le résultat est donné par la matrice définie positive P et les gains de retour d'état K_{qi} suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 9.071 & 6.780 & 6.996 & 7.123 \\ 6.780 & 8.947 & 6.943 & 7.032 \\ 6.996 & 6.943 & 9.560 & 7.419 \\ 7.123 & 7.032 & 7.419 & 9.844 \end{bmatrix} > 0, K_{11} = [10.924 \quad 10.707 \quad 10.990 \quad 11.147],$$

$$K_{12} = [9.749 \quad 9.531 \quad 10.990 \quad 11.147], K_{13} = [7.022 \quad 7.048 \quad 6.692 \quad 6.787],$$

$$K_{14} = [5.601 \quad 5.628 \quad 6.692 \quad 6.787], K_{21} = [10.916 \quad 10.890 \quad 9.570 \quad 11.394],$$

$K_{22}=[10.916 \ 9.715 \ 12.732 \ 11.394]$, $K_{23}=[6.639 \ 7.152 \ 4.872 \ 6.927]$,
 $K_{24}=[6.639 \ 7.152 \ 4.872 \ 6.927]$, $K_{31}=[10.916 \ 10.641 \ 11.163 \ 9.522]$,
 $K_{32}=[9.741 \ 10.641 \ 11.163 \ 12.685]$, $K_{33}=[7.041 \ 6.501 \ 6.823 \ 5.045]$,
 $K_{34}=[5.620 \ 6.501 \ 6.823 \ 8.868]$, $K_{41}=[10.674 \ 10.552 \ 9.326 \ 9.474]$,
 $K_{42}=[10.674 \ 10.552 \ 12.487 \ 12.637]$, $K_{43}=[6.526 \ 6.451 \ 4.766 \ 5.018]$,
 $K_{44}=[6.526 \ 6.451 \ 8.589 \ 8.841]$ et le taux d'atténuation des perturbations externes $\eta=1.932$.

Afin d'illustrer l'efficacité de la synthèse de loi de commande proposée, une simulation du système global en boucle fermée a été réalisée avec les conditions initiales $x(0)=[-0.4 \ -0.4]^T$ et en appliquant une perturbation $\varphi(t)$ correspondant à un bruit blanc de moyenne nulle et de variance égale à 2. Les Figures E.2 présentent le comportement dynamique en boucle fermée du système, l'évolution de la fonction de Lyapunov ainsi que l'évolution du signal de commutation et du signal de commande.

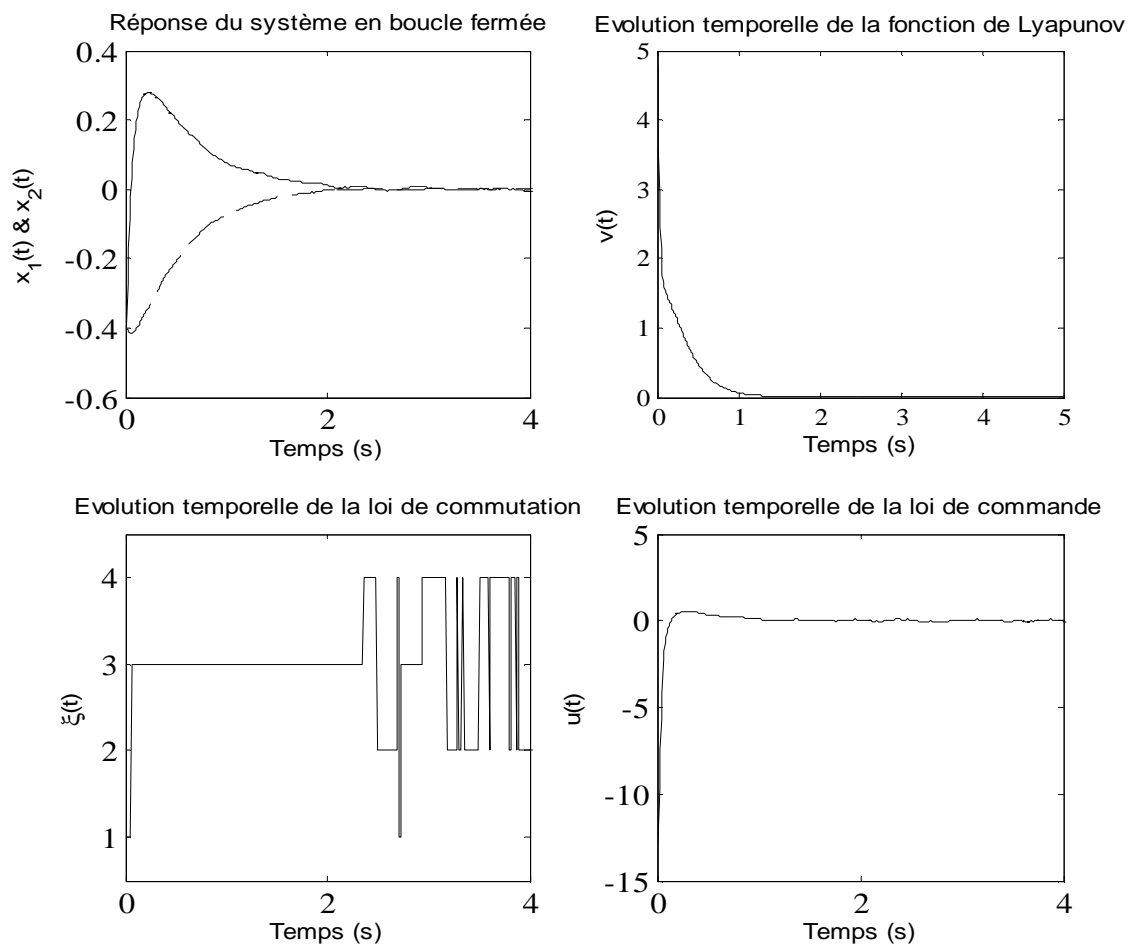


Figure E.2. Comportement du système global en boucle fermée

Contribution à la synthèse de lois de commande pour les systèmes de type Takagi-Sugeno et/ou hybrides interconnectés

Résumé : Les travaux de cette thèse portent sur la stabilisation des systèmes non linéaires à grandes dimensions. Il s'agit de décomposer le système de grandes dimensions en un ensemble de n sous-systèmes interconnectés. Ensuite, en tenant compte de la nature des sous-systèmes, un ensemble de lois de commande décentralisées, composée de n lois de commande locale, peut être synthétisé. Ainsi, chaque loi de commande locale est associée à un sous-système et permet de le stabiliser indépendamment des autres sous-systèmes. Trois classes de systèmes sont ainsi traitées dans le cadre de cette thèse : les systèmes non linéaires interconnectés et les systèmes hybrides interconnectés (linéaires ou non linéaires).

Premièrement, on s'est intéressé à l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires interconnectés représentées par des multi-modèles de type Takagi-Sugeno (TS). En effet, un multi-modèle TS permet de représenter un système non linéaire affine par un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires. Afin de réduire le conservatisme des approches quadratiques de Lyapunov existantes, de nouvelles conditions écrites sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMI) ont été proposées sur la base d'une fonction non quadratique de Lyapunov candidate. Ces conditions permettent ainsi la synthèse des contrôleurs TS décentralisés proposés. Dans le but d'étendre les résultats obtenus au cas des systèmes non linéaires et hybrides de grandes dimensions, on s'est ensuite intéressé à l'étude de la stabilisation des systèmes linéaires à commutations interconnectés via l'emploi de fonctions multiples de Lyapunov. Enfin, des conditions de stabilisation pour les systèmes non linéaires interconnectés à commutations, composés de sous-systèmes TS à commutations, ont été proposées sous forme LMI.

Mots clés : Systèmes interconnectés, systèmes Takagi-Sugeno, Systèmes à commutations, commande décentralisée, LMI.

Contribution on the control laws synthesis's of Takagi-Sugeno and/or hybrid interconnected systems

Abstract:

This thesis focuses on the stabilisation of nonlinear large scale systems. Hence, a global large scale system can be described by a set of n interconnected subsystems. Then, based on the subsystem's nature, a decentralised control law, composed of a set of n local control law is proposed. Each local control law is able to stabilize the subsystem for which it is synthesised. In this thesis, three classes of dynamical systems are considered: nonlinear interconnected systems, switched linear interconnected systems and switched nonlinear interconnected systems.

First, based on Takagi Sugeno (TS) modelling, the decentralised stabilisation of nonlinear interconnected systems has been studied. In order to relax quadratic Lyapunov approaches, one has considered non quadratic Lyapunov functions. Then, based on multiple Lyapunov switched functions, the stabilisation of large scale linear switched systems is proposed. Hence, a decentralised switched control law design methodology has been developed to ensure the stability of the proposed class of hybrid systems. Finally, the stabilisation of nonlinear switched interconnected systems as been considered such that each nonlinear subsystem is described by a TS model.

Key words: Large scale interconnected systems, Takagi-Sugeno systems, Switched systems, decentralised control, LMI.