



**HAL**  
open science

# Quelques aspects des forces hydrodynamiques et des transferts de chaleur sur une bulle sphérique

Dominique Legendre

► **To cite this version:**

Dominique Legendre. Quelques aspects des forces hydrodynamiques et des transferts de chaleur sur une bulle sphérique. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Institut National Polytechnique (Toulouse), 1996. Français. NNT : 1996INPT082H . tel-04628401

**HAL Id: tel-04628401**

**<https://hal.science/tel-04628401>**

Submitted on 28 Jun 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



*Thèse*  
*présentée pour obtenir le titre de Docteur de*  
*l'Institut National Polytechnique de Toulouse*  
*Spécialité : Mécanique des Fluides*

---

**Quelques aspects des forces hydrodynamiques  
et des transferts de chaleur sur une bulle sphérique**



**Dominique LEGENDRE**

Thèse soutenue le 22 Avril 1996 devant le jury composé de :

Mme	R. GATIGNOL	Président
M.M.	J. BOREE	
	E. BRIERE	
	J. FABRE	
	M. LANCE	Rapporteur
	J. MAGNAUDET	Directeur des travaux de recherche
	J. PANTALONI	Rapporteur
	O. SIMONIN	



N° d'ordre : 1153

10587



## Résumé

Ce travail est consacré à l'étude par simulation numérique des échanges de quantité de mouvement et d'énergie entre une bulle sphérique et un écoulement pour des nombres de Reynolds compris entre 0.1 et 500. Pour cela, les équations complètes tridimensionnelles de Navier-Stokes et d'advection-diffusion d'un scalaire sont résolues numériquement en coordonnées curvilignes orthogonales par une méthode de volumes finis. Plusieurs résultats nouveaux concernant les transferts interfaciaux et les forces liées à l'inertie de l'écoulement ont été apportés. Ainsi, il apparaît que les effets d'histoire thermique sont dans certaines situations d'écoulements instationnaires prépondérants alors que l'influence de la déformation spatiale de l'écoulement peut être considérée comme négligeable. L'étude de l'ébullition et de la condensation d'une bulle de vapeur en présence d'un écoulement uniforme, où l'échange d'énergie à l'interface gouverne l'évolution du rayon de la bulle, montre que ces deux phénomènes sont en fait très différents tant en ce qui concerne le transfert interfacial que les aspects hydrodynamiques. La force de masse ajoutée induite par l'évolution du volume de la bulle correspond en écoulement visqueux à celle obtenue pour un fluide parfait et la présence d'effets d'histoire notables est essentiellement liée aux conditions initiales du changement de phase. Une grande partie de ce travail a ensuite été consacrée à l'étude de la force de portance exercée sur une bulle par des écoulements rotationnels et/ou de déformation. Le coefficient de portance induit par un cisaillement pur est, pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, indépendant de la vorticité de l'écoulement et très proche du résultat connu en fluide parfait. Lorsque la viscosité devient prépondérante, ce coefficient dépend à la fois de la viscosité et de la vorticité de l'écoulement. L'extension de la théorie de *Saffman* a permis d'obtenir l'expression analytique de la force de portance sur une bulle à petit nombre de Reynolds qui a ensuite été confirmée par les simulations. En écoulement plus complexe (déformation plane, rotation solide) la force subie par la bulle est la superposition de la force d'inertie induite par la déformation de l'écoulement et de la force de portance liée au champ de vorticité. Enfin, l'étude de la force d'interaction résultant de la proximité d'une paroi ou de la présence d'une autre bulle a permis de montrer que lorsque le nombre de Reynolds décroît cette force devient répulsive pour des distances de l'ordre du diamètre de la bulle alors que la théorie potentielle ne prédit que des forces attractives.

Mots clés :	Bulle	Portance	Ebullition
	Simulation numérique	Interaction-paroi	Condensation
	Forces Hydrodynamiques	Transfert de chaleur	



## Avant propos

Le travail rapporté dans ce mémoire a été réalisé dans le cadre d'une bourse du ministère de la recherche et de l'enseignement supérieur puis d'un poste d'ATER. L'ensemble de cette thèse a été mené à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse et je tiens à témoigner ici toute ma gratitude à l'ensemble du personnel de ce laboratoire. Ce travail essentiellement numérique n'aurait pu aboutir sans le concours du service informatique notamment grâce à Gérard Leblanc, Gérard Cicchelerio et Pascal Lefebvre. Mesdames Barrau, Bourrel, Caen et Alquier, secrétaires à l'IMFT, m'ont permis de faire face à tous les tracas administratifs divers et variés que rencontre un thésard. L'édition de ce document a été confiée aux bons soins de Mesdames Rambouil et Domene du service de reprographie. Je ne peux achever ce travail sans adresser un clin d'oeil à tous ceux avec qui j'ai discuté de choses et autres, parfois "mécanique des fluides" mais également de temps en temps "foot". J'espère qu'un jour je pourrais me vanter d'avoir compté parmi mes collègues et amis de bureau le médaillé olympique vénézuélien de Tae kwondo Armando Blanco, le célèbre globe trotter hollandais Arjan Kamp et le vainqueur du Marathon de New York Eric Climent.

La valeur d'un travail de recherche ne prend tout son sens que par la qualité et la compétence des personnes à l'avoir jugé. C'est la raison pour laquelle je tiens à remercier l'ensemble des membres du Jury pour avoir participé à l'évaluation de ce travail, en particulier Mme R. Gatignol, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie de Paris, qui a bien voulu présider ce jury ainsi que Mr M. Lance, Professeur à l'Université Claude-Bernard de Lyon, et Mr J. Pantaloni, Professeur à l'Université de Provence de Marseille, qui ont tous deux accepté la fastidieuse tâche d'être rapporteurs.

Jean Fabre a joué un rôle important dans cette aventure car c'est lui qui m'a proposé, alors que je n'étais qu'étudiant à l'ENSEEIH, de venir effectuer ma thèse dans le groupe Interface. Je lui suis reconnaissant d'avoir orienté mon choix me permettant ainsi de réunir les deux conditions qui sont indispensables à la réussite d'une thèse : un sujet et un encadrement de qualité.

Cette thèse a été encadrée par Jacques Magnaudet. Le mot encadrement est bien trop fade pour décrire la façon dont se sont déroulées ces quelques années. Si je pouvais juste me permettre un souhait ce serait que nous puissions continuer à savourer ensemble encore de nombreuses années de travail.

Enfin, je dédie cette étude à tous ceux dans le regard de qui j'ai cru déceler un soupçon de perplexité et d'incrédulité en apprenant que durant plus de trois années de travail je n'ai fait qu'étudier une petite bulle de quelques millimètres...

## Table des matières

<b>Nomenclature</b> .....	0.4
<b>Introduction</b> .....	0.7
<b>Chapitre 1</b> Résolution numérique des équations de Navier-Stokes .....	1.1
1.1 Introduction .....	1.2
1.2 Formulation des équations .....	1.3
1.3 Méthode numérique .....	1.5
1.4 Position des variables et discrétisation spatiale .....	1.10
1.5 Calcul des grandeurs géométriques .....	1.11
1.6 Présentation du maillage .....	1.15
1.7 Conditions aux limites .....	1.17
1.8 Définitions supplémentaires : intégrations sur l'inclusion .....	1.23
1.9 Tests de validation .....	1.25
1.10 Conclusions .....	1.32
<b>Chapitre 2</b> Influence d'un écoulement accéléré sur le transfert thermique à la surface d'une bulle sphérique .....	2.1
2.1 Présentation .....	2.2
2.2 Solutions analytiques pour un écoulement potentiel .....	2.4
2.3 Ecoulement à accélération temporelle constante .....	2.11
2.4 Ecoulement oscillatoire à vitesse moyenne nulle .....	2.23
2.5 Ecoulement spatialement accéléré .....	2.32
2.6 Conclusions .....	2.38
<b>Chapitre 3</b> Ebullition et condensation d'une bulle de vapeur au sein d'un écoulement uniforme .....	3.1
3.1 Présentation .....	3.2
3.2 Méthode de résolution .....	3.6
3.3 Ebullition en milieu au repos .....	3.8
3.4 Ebullition en présence d'un écoulement uniforme .....	3.10
3.5 Condensation en milieu au repos .....	3.21
3.6 Condensation en présence d'un écoulement uniforme .....	3.26
3.7 Conclusions .....	3.34

<b>Chapitre 4</b>	<b>Force de portance sur une bulle sphérique plongée dans un cisaillement linéaire</b>	<b>4.1</b>
4.1	Introduction	4.2
4.2	Aperçu bibliographique	4.5
4.3	Calcul analytique de la force de portance à petit nombre de Reynolds	4.9
4.4	Résultats des simulations : force de traînée	4.16
4.5	Résultats des simulations : force de portance	4.18
4.6	Description de l'écoulement	4.32
4.7	Conclusions	4.47
<b>Chapitre 5</b>	<b>Effets combinés de la déformation et de la vortacité d'un écoulement sur la force de portance</b>	<b>5.1</b>
5.1	Présentation	5.2
5.2	Force de portance en écoulement de déformation pure plane	5.4
5.3	Force de portance en écoulement de rotation pure	5.23
5.4	Force de traînée	5.30
5.5	Conclusions	5.31
<b>Chapitre 6</b>	<b>Influence d'une surface imperméable sur l'écoulement autour d'une bulle</b>	<b>6.1</b>
6.1	Présentation	6.2
6.2	Présentation des simulations	6.4
6.3	Force d'interaction	6.7
6.4	Force de traînée	6.9
6.5	Description de l'écoulement	6.10
6.6	Conclusions	6.15
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>C.1</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>B.1</b>
<b>Annexes</b>		<b>A.1</b>
Annexe 1		A.2
Annexe 2	Conditions aux limites à la surface d'une bulle	A.5
Annexe 3	Calculs complémentaires	A.11
Annexe 4	Tableaux de données	A.20

## Nomenclature



Lettres romaines :

$A_c$	Nombre d'accélération
$A_d$	Distance adimensionnelle = $d/R$
$A_\omega$	Déformation ou vorticité adimensionnelle = $2R\omega/U$
$C$	Rapport de vitesses (Chapitre 3) = $\dot{R}/U$
$C_D$	Coefficient de traînée visqueuse
$C_{DS}$	Coefficient de traînée visqueuse de l'écoulement stationnaire uniforme
$C_H$	Coefficient d'histoire
$C_{IB}$	Coefficient d'inertie lié au changement de volume de la bulle
$C_{INT}$	Coefficient d'interaction bulle-paroi ou bulle-bulle
$C_L$	Coefficient de portance lié à la vorticité de l'écoulement
$C_M$	Coefficient de masse ajoutée
$C_p$	coefficient de pression
$C_n$	coefficient de contrainte normale visqueuse
$C_p$	Chaleur massique
$C_x$	Coefficient de traînée totale
$C_y$	Coefficient de portance total
$C_\Omega$	Couple adimensionnel
$d$	distance séparant les deux bulles étudiées (Chapitre 6)
$f$	Fréquence des oscillations de l'écoulement (Chapitre 2)
$F$	Résultante des forces agissant sur la bulle
$F_D$	Force de traînée visqueuse
$F_G$	Force de gravité
$F_H$	Force d'histoire
$F_I$	Force d'inertie créée par l'accélération temporelle ou spatiale de l'écoulement
$F_{IB}$	Force d'inertie créée par l'évolution temporelle du volume de la bulle
$F_{INT}$	Force d'interaction bulle-paroi ou bulle-bulle
$F_L$	Force de portance
$Ja$	Nombre de Jacob
$L$	Chaleur latente de changement de phase
$P$	Pression
$Pe$	Nombre de Peclet = $Pr Re$
$Pr$	Nombre de Prandtl = $\nu/\chi$
$Nu$	Nombre de Nusselt
$R$	Rayon de la bulle
$Re$	Nombre de Reynolds = $2R\rho(U_b - U)/\mu$

$\mathfrak{R}$	Référentiel
St	Nombre de Stroual = $2Rf/U$
t	temps
$t^+$	temps adimensionnel = $t\chi/R^2$
$\tilde{t}$	temps adimensionnel = $t U/R$
T	Température
U	Champ de vitesse de l'écoulement non perturbé
v	Ecart entre les champ de vitesse $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}_U = (\mathbf{V} - \mathbf{V}_U)/R\omega$
V	Champ de vitesse de l'écoulement autour de la bulle

Lettres grecques :

$\delta$	Epaisseur de la couche limite thermique
$\varepsilon_\rho$	Rapport des masses volumiques = $\rho_v/\rho$
$\Phi$	Potentiel des vitesses
$\Gamma$	Surface
$\gamma$	Rayon adimensionnel = $R/R_o$
$\lambda$	Conductivité thermique
$\mu$	Viscosité dynamique
$\nu$	Viscosité cinématique = $\mu/\rho$
$\rho$	Masse volumique
$\sigma$	Tension interfaciale
$\Sigma$	Tenseur des contraintes
$\tau$	Temps adimensionnel = $4Ja^2\chi/\pi R_o^2$
$\mathcal{T}$	Partie visqueuses du tenseur des contraintes
$\vartheta$	Volume de la bulle
$\chi$	Diffusivité thermique

Indices :

b	Bulle
f	Condition finale
loc	Distribution à la surface de la bulle
o	Condition initiale
sat	Condition de saturation
St	Solution de l'écoulement de Stokes
U	Solution de l'écoulement uniforme $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x$
v	Phase vapeur

Exposants :

*	Référentiel en expansion (chapitre 3)
---	---------------------------------------

## Introduction

La description et la prédiction des écoulements à bulles sont directement conditionnées par la connaissance des transferts interfaciaux de quantité de mouvement, d'énergie et de matière entre la phase continue et la phase dispersée. La modélisation de tels écoulements passe donc par une compréhension locale précise des mécanismes qui gouvernent ces transferts. Même si la connaissance des actions hydrodynamiques et du transfert thermique ou massique entre une inclusion isolée et l'écoulement environnant a considérablement progressé durant les quinze dernières années, le champ d'investigation est encore vaste et de nombreux points restent à éclaircir. Pour les préciser, examinons rapidement l'état actuel des principales connaissances du point de vue de l'hydrodynamique puis des transferts scalaires afin de mieux définir les objectifs de ce travail. Précisons dès à présent que, bien que des questions identiques existent pour les particules solides, le présent travail est exclusivement consacré aux bulles. C'est en effet pour cette classe d'inclusions que les effets d'inertie et de vorticité de l'écoulement, autour desquels s'articule ce travail, prennent toute leur importance.

### **Les actions hydrodynamiques exercées sur une bulle**

La démarche actuelle pour obtenir l'expression de la force résultante que subit une bulle isolée au sein d'un écoulement consiste à tenter d'exprimer cette force en fonction du champ de vitesse et d'accélération de l'écoulement non-perturbé. Ainsi, des expressions de la force ont été obtenues pour différents écoulements simples en s'appuyant sur des démarches analytiques, expérimentales ou même, depuis quelques années, numériques. Il est cependant nécessaire avant d'envisager l'application de ces résultats à des écoulements plus complexes, notamment turbulents, de se pencher sur les deux problèmes majeurs suivants :

- Que deviennent ces expressions en dehors des situations asymptotiques dans lesquelles la plupart ont été obtenues ?
- Comment et sous quelles conditions peut-on les superposer lorsque différentes situations déjà étudiées sont regroupées dans une configuration d'écoulement plus complexe ?

Considérons un écoulement non-borné de champ de vitesse non-perturbé  $U$ , de viscosité dynamique  $\mu$  et de masse volumique  $\rho$ . La résultante des forces  $F$  agissant sur une bulle sphérique de vitesse  $U_b$ , de volume  $\vartheta_b$ , de masse volumique  $\rho_b$  et de rayon  $R$  au sein de cet écoulement peut se décomposer en une force d'Archimède  $F_G$ , une force de traînée visqueuse  $F_D$ , une force d'inertie  $F_I$  due à l'accélération temporelle ou spatiale de l'écoulement, une force d'inertie  $F_{IB}$  causée par l'évolution temporelle du volume de la bulle, une force de portance  $F_L$

induite par la vorticité de l'écoulement non-perturbé et une force d'histoire  $F_H$  liée à la diffusion de la vorticité lorsque l'écoulement vu par la bulle est instationnaire :

$$F = F_G + F_D + F_I + F_{IB} + F_H + F_L \quad (0.1)$$

On notera par la suite  $V$  le champ de vitesse autour de la bulle,  $U_b - U$  la vitesse relative de la bulle par rapport à l'écoulement non-perturbé, également appelée vitesse de glissement, et  $Re = 2R\rho|U_b - U|/\mu$  le nombre de Reynolds construit avec cette échelle de vitesse.

Lorsque l'ensemble est soumis à un champ de gravité  $g$ , la force d'Archimède  $F_G$  exercée sur la bulle est :

$$F_G = (\rho_b - \rho) \vartheta_b g \quad (0.2)$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire et uniforme, la seule force supplémentaire qui agit sur la bulle est une force de traînée visqueuse  $F_D$  qui s'exprime par :

$$F_D = C_D \pi R^2 \frac{1}{2} \rho |U - U_b| (U - U_b) \quad (0.3)$$

Pour une bulle propre, c'est à dire non contaminée par des tensioactifs ou des impuretés, le coefficient de traînée  $C_D$ , fonction du nombre de Reynolds, est donné pour l'écoulement à grand nombre de Reynolds par la relation de *Moore* (1963) :

$$C_D = \frac{48}{Re} \left[ 1 - \frac{2.21}{\sqrt{Re}} \right] \quad (0.3.a)$$

tandis qu'en écoulement de Stokes la solution d'*Hadamard* (1911) et de *Rybczynski* (1911) s'écrit :

$$C_D = \frac{16}{Re} \quad (0.3.b)$$

Pour l'ensemble des valeurs intermédiaires du nombre de Reynolds, les simulations numériques permettent d'obtenir l'évolution de  $C_D$  en fonction de  $Re$  [*Magnaudet et al.* 1995].

Une force d'inertie  $F_I$  apparaît lorsque l'écoulement est accéléré (i. e. instationnaire et/ou non-uniforme). Elle s'écrit pour un écoulement irrotationnel et non-visqueux [Auton 1983, Auton et al. 1988] :

$$F_I = \rho \vartheta_b \left[ (1 + C_M) \frac{DU}{Dt} - C_M \frac{dU_b}{dt} \right] \quad (0.4)$$

où le coefficient de masse ajoutée  $C_M$  est égal à :

$$C_M = \frac{1}{2} \quad (0.5)$$

et la dérivée matérielle  $D/Dt$  est définie par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \quad (0.6)$$

alors que  $d/dt$  est une simple dérivée temporelle puisque la vitesse de la bulle  $U_b$  ne dépend que du temps. Les simulations numériques de *Rivero* (1991) [cf. *Magnaudet et al.* 1995] ont démontré pour des écoulements axisymétriques que l'expression de la force (0.4) est applicable en écoulement visqueux et que  $C_M$  conserve dans ce cas la valeur  $1/2$ . Le résultat  $C_M = 0.5$  a été retrouvé expérimentalement par *Naciri* (1992) tant que la forme de la bulle reste sphérique. Il est par ailleurs maintenant établi que c'est bien la dérivée eulérienne (0.6) qui intervient dans l'écriture de  $F_I$  indépendamment de l'existence ou non d'effets visqueux [*Magnaudet et al.* 1995].

Lorsque la bulle est en expansion, *Lhuillier* (1982) a calculé en fluide parfait le terme supplémentaire qui intervient dans l'expression de la force d'inertie :

$$F_{IB} = \frac{1}{2} \rho \frac{d\vartheta_b}{dt} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \quad (0.7)$$

Les simulations numériques instationnaires réalisées par *Rivero* (1991) ont montré que, dans la gamme de nombre de Reynolds [0.1 , 300], la force d'histoire  $F_H$  agissant sur la bulle est généralement négligeable devant les autres forces. Les mesures expérimentales de *Park et al.* (1995) confirment l'effet mineur de  $F_H$ . La force totale  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_D$  exercée sur la bulle en écoulement axisymétrique peut donc être écrite dans de nombreuses situations instationnaires à l'aide des relations (0.3) et (0.4).

Lorsque l'écoulement est rotationnel, *Auton* (1983,1987) a montré que, pour un écoulement de fluide parfait faiblement cisailé, la distribution azimuthale de la pression à la surface de la bulle, qui résulte du champ de vorticité  $\Omega = \nabla \times U$ , crée une force de portance  $F_L$  donnée par :

$$F_L = C_L \rho \vartheta_b (U - U_b) \times \Omega \quad (0.8)$$

où  $C_L$  est le coefficient de portance qui vérifie dans ces conditions  $C_L = 0.5$ .

*Auton et al.* (1988) ont étendu ce résultat au cas d'un écoulement de fluide parfait, instationnaire, faiblement rotationnel et non-uniforme. Ces auteurs ont montré que dans cette situation, la force résultante agissant sur la bulle est la superposition de la force d'inertie (0.4) et de la force de portance (0.8) :

$$F = F_I + F_L = \rho \vartheta_b \left[ (1 + C_M) \frac{DU}{Dt} - C_M \frac{dU_b}{dt} \right] - C_L \rho \vartheta_b (U - U_b) \times \Omega \quad (0.9)$$

Cette rapide énumération des connaissances actuelles lorsque l'inclusion considérée est une bulle "propre" montre, qu'en écoulement non-axisymétrique, les résultats connus n'ont été établis que pour un fluide parfait et en présence de faibles effets rotationnels.

### **Effets de paroi et Interactions hydrodynamiques entre bulles**

Lorsque l'écoulement est composé de plusieurs bulles, le bilan des forces exercées sur chaque bulle est modifié par la présence des autres bulles. Cette force d'interaction causée par la présence d'autres bulles est en fait, lorsqu'elle est prise en compte, calculée en sommant sur l'ensemble des bulles avoisinantes la force  $F_{INT}$  résultant de l'interaction hydrodynamique de deux bulles. De nombreuses études se sont penchées sur le calcul laborieux du potentiel des vitesses formé par la présence de deux bulles en mouvement dans un champ de vitesse uniforme. *Biesheuvel & Van Wijngaarden* (1982) ont déterminé, à la suite des travaux de *Jeffrey* (1973), le potentiel dans la situation générale instationnaire. En calculant la dissipation de cet écoulement potentiel, *Kok* (1993) a ensuite obtenu au premier ordre en Reynolds la modification induite sur la force de traînée visqueuse.

Le problème de l'influence d'une paroi ou tout au moins d'une surface imperméable sur la force subie par une bulle se ramène à celui de l'interaction mati rielle de deux bulles ayant des vitesses symétriques par rapport à cette paroi. Ce problème est important car si l'on veut par

exemple déterminer la trajectoire d'une bulle qui se déplace dans une conduite cylindrique, il est nécessaire que l'équation dynamique rende compte de cet effet de paroi.

L'expression du potentiel étant très complexe, nous donnons ici directement celle de la force d'interaction  $F_{INT}$  entre deux bulles de même vitesse  $U_b$  parallèle à celle de l'écoulement non-perturbé  $U$ , ce qui correspond également au cas d'une bulle en mouvement parallèlement à un plan de symétrie. La force d'interaction exercée sur chaque bulle s'écrit :

$$F_{INT} = 3\pi R^2 \left(\frac{R}{d}\right)^4 \rho (U - U_b)^2 \mathbf{n} + o\left(\frac{R}{d}\right)^4 \quad (0.10)$$

où  $d$  est la distance séparant les centres des deux bulles et  $\mathbf{n}$  est le vecteur directeur porté par l'axe reliant le centre des deux bulles. Cette force représente donc un effet de portance et est attractive d'après la théorie potentielle.

L'expression de la force de traînée calculée par *Kok* (1993) s'écrit alors à l'ordre  $1/Re$  :

$$F_D = 12\pi\mu R \left[ 1 + \left(\frac{R}{d}\right)^3 + o\left(\frac{R}{d}\right)^3 \right] (U - U_b) \quad (0.11)$$

L'ensemble des travaux concernant la force d'interaction entre deux bulles a été mené en écoulement potentiel afin de résoudre le problème du couplage des trajectoires de deux bulles dans un écoulement non visqueux. Seules les récentes simulations numériques de *Yuan & Prosperetti* (1994) ont calculé l'écoulement induit par le déplacement de deux bulles se suivant dans un fluide visqueux ( $20 < Re < 200$ ) et ont permis de mettre en évidence la modification de la traînée d'une bulle placée dans le sillage d'une autre bulle.

### **Le transfert thermique ou massique à la surface d'une bulle**

Le transfert thermique entre une bulle et un écoulement uniforme, stationnaire et axisymétrique, a fait l'objet de nombreuses études et est actuellement bien connu [*Legendre* 1991]. Les effets d'écoulements non-uniformes et instationnaires sur une bulle n'ont quant à eux pas été traités si ce n'est en situation asymptotique d'écoulement potentiel [*Ruckenstein* 1958]. Les lois généralement utilisées pour la modélisation du transfert thermique ou massique en écoulement complexe sont déduites des résultats stationnaires en écoulement uniforme en supposant que le comportement temporel du coefficient de transfert interfacial reste quasi-statique. Ainsi ces modèles ne tiennent pas compte des éventuels effets d'accélération liés à l'inertie de l'écoulement .



La prise en compte du transfert thermique interfacial est essentielle pour la description et la résolution des problèmes physiques complexes que sont l'ébullition et la condensation d'une bulle de vapeur au sein d'un écoulement. Les principaux résultats disponibles ne sont en fait valables que lorsque la phase liquide n'est pas animée d'un mouvement d'ensemble [*Plesset & Zwick 1954, Okhotsimskii 1988*]. En présence d'un écoulement, le transfert thermique interfacial est en général décrit en supposant l'évolution thermique quasistatique et en utilisant la solution asymptotique obtenue pour l'écoulement potentiel par *Ruckenstein (1958)*.

Il reste donc dans ce domaine de nombreuses questions à résoudre concernant :

- l'influence d'un écoulement moyen sur l'évolution du rayon de la bulle et sur celle du transfert de chaleur
- l'évolution des forces de nature inertielle et visqueuse subie par la bulle en écoulement visqueux.

### **Présentation générale du mémoire**

La démarche numérique adoptée pour cette étude est motivée par les raisons suivantes :

- Les équations résolues sont complètes ce qui permet d'obtenir des résultats en dehors des domaines de validité des solutions analytiques asymptotiques qui sont cependant les bienvenues pour s'assurer des performances de l'outil numérique.
- La simulation numérique permet d'isoler parfaitement l'inclusion étudiée et de contrôler précisément la nature et les propriétés physiques de l'écoulement ainsi que ses conditions aux limites, ce qui est beaucoup plus délicat expérimentalement.
- Elle offre également la possibilité, si la méthode numérique est adaptée, d'avoir accès directement et à tout instant aux forces et aux échanges thermiques ou massiques en chaque point de la surface de l'inclusion étudiée ainsi qu'à l'intégralité du champ dynamique et scalaire dans tout le domaine de calcul.
- La dernière génération de supers calculateurs (type CRAY C98 ou IBM SP2) et le développement de méthodes numériques adaptées et performantes offrent des possibilités de calcul tant au niveau de la rapidité d'exécution que de l'espace mémoire disponible qui permettent la résolution de problèmes physiques de plus en plus complexes.

Le premier chapitre est consacré à la description de l'outil de simulation numérique JADIM. Celui-ci résout dans des maillages curvilignes orthogonaux les équations instationnaires et tridimensionnelles de Navier-Stokes ainsi que l'équation d'advection-diffusion d'un scalaire passif.

Le deuxième chapitre présente les résultats numériques obtenus pour le transfert d'un scalaire passif à la surface d'une bulle sphérique plongée dans divers écoulements axisymétriques temporellement ou spatialement accélérés. Son objectif est de répondre aux nombreuses interrogations concernant le transfert interfacial notamment en étudiant les effets d'histoire liés à l'inertie de l'écoulement.

Le troisième chapitre aborde en détail les problèmes liés à l'ébullition et à la condensation d'une bulle de vapeur plongée dans un écoulement uniforme. La simulation numérique de ces deux phénomènes physiques nécessite le couplage, via les équations de bilan à l'interface, de la dynamique et de la thermique. L'objectif de ce chapitre est double. Le premier est d'approfondir les connaissances concernant le transfert thermique interfacial et les lois d'évolution temporelle du rayon de la bulle. Le second est d'apporter des résultats nouveaux concernant la décomposition de la force subie par la bulle lorsque son rayon varie notamment en identifiant les effets de masse ajoutée et en observant les effets d'histoire lorsque l'instantanéité de l'écoulement provient du déplacement de l'interface.

Le quatrième chapitre est entièrement consacré à l'étude des actions hydrodynamiques subies par une bulle sphérique placée dans un champ de vortacité constant. Pour cela la bulle est plongée dans un écoulement stationnaire linéairement cisailé. L'objectif principal de ce chapitre est de calculer numériquement les valeurs du coefficient de portance lorsque l'écoulement est visqueux et d'observer l'effet du cisaillement de l'écoulement sur la force de traînée de la bulle.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude de la force de portance d'une bulle sphérique plongée dans deux écoulements tridimensionnels plus complexes. Ceux-ci sont choisis de telle sorte que la force de portance soit facilement identifiable et composée d'effets liés à la déformation et à la vortacité de l'écoulement non-perturbé. La possibilité d'étendre l'expression (0.9) obtenu pour un fluide parfait faiblement rotationnel au cas général de l'écoulement visqueux et rotationnel est discutée.

Enfin, le sixième et dernier chapitre présente quelques résultats numériques obtenus sur la force de portance subie par une bulle se déplaçant parallèlement à une paroi. La force d'attraction est étudiée pour des distances bulle-paroi de quelques diamètres. La force de portance ainsi que la modification de la traînée sont comparées aux résultats (0.10) et (0.11) issus de l'analyse potentielle.

## Chapitre 1

## Chapitre 1

### Résolution numérique des équations de Navier-Stokes

- 1.1 Introduction
- 1.2 Formulation des équations
- 1.3 Méthode numérique
- 1.4 Position des variables et discrétisation spatiale
- 1.5 Calcul des grandeurs géométriques
- 1.6 Présentation du maillage
- 1.7 Conditions aux limites
- 1.8 Définitions supplémentaires : intégrations sur l'inclusion
- 1.9 Tests de validation
- 1.10 Conclusions

## 1.1 Introduction

---

Cette première partie est consacrée à la présentation du code de simulation résolvant les équations de Navier-Stokes et l'équation d'advection-diffusion d'un scalaire passif (concentration d'une espèce chimique non réactive ou température). Le travail numérique réalisé spécifiquement pour cette étude est en fait une étape supplémentaire vers l'écriture, lorsque les capacités des calculateurs le permettront, d'un code de résolution d'écoulements turbulents en présence de frontières déformables. Ce code de calcul a gentiment été baptisé JADIM en arrangeant dans un ordre phonétique acceptable les initiales des prénoms des personnes l'ayant à ce jour fait évoluer. La première étape significative dans l'élaboration de JADIM a été atteinte au cours de la thèse de *Rivero* (1991) par l'écriture d'un outil de simulation directe résolvant les équations laminares, instationnaires et axisymétriques de Navier-Stokes à l'ordre  $O(\Delta t, \Delta x^2)$ . Le travail suivant, [*Legendre*, 1991], a permis d'y ajouter la résolution, toujours en écoulement axisymétrique, de l'équation d'advection-diffusion d'un scalaire passif. A partir de cet outil numérique performant [*Magnaudet et al.*, 1995], trois développements numériques complémentaires ont été engagés. En suivant l'ordre chronologique, le premier a été la résolution d'un écoulement axisymétrique en présence d'une interface déformable. Il a été initié par la résolution numérique des équations de Navier-Stokes et de l'énergie autour d'une interface sphérique dont le rayon dépend du temps afin d'étudier les phénomènes complexes que sont l'ébullition et la condensation d'une bulle de vapeur en présence d'un écoulement. Cette étude fait l'objet du Chapitre 3. Un mailleur très performant a ensuite été écrit [*Blanco*, 1992] afin de générer un maillage orthogonal qui s'adapte à des déformations quelconques d'interface. L'association de ce mailleur avec la résolution couplée des équations de Navier-Stokes et du bilan des contraintes normales sur une interface a permis d'étudier en écoulement axisymétrique les modes d'oscillation et les mécanismes de déformation des bulles sous l'effet de la gravité [*Blanco*, 1995]. La deuxième évolution de JADIM, présentée dans ce chapitre, est la résolution des équations tridimensionnelles de Navier-Stokes et de la température à l'aide d'algorithmes d'inversion et de schémas numériques développés par *Calmet* (1995). Un soin particulier a été porté au calcul des grandeurs géométriques afin de limiter l'influence sur les résultats des maillages présentant des courbures importantes. Le dernier développement de JADIM a consisté à ajouter au code de calcul tridimensionnel ainsi obtenu la modélisation des effets de sous-maille de la turbulence. L'outil de simulation des grandes échelles ainsi obtenu a

permis dans un premier temps l'analyse de la turbulence et du transfert de masse sous des interfaces non-déformées [Calmet, 1995].

Ce chapitre présente la résolution numérique des équations tridimensionnelles de Navier-Stokes et de l'équation d'advection-diffusion d'un scalaire passif. Les principaux choix numériques initiaux qui ont permis et qui vont encore permettre de faire évoluer JADIM sont rappelés ci-après :

1- Les équations à résoudre sont écrites en coordonnées curvilignes orthogonales afin de s'adapter à des géométries variées (obstacle sphérique ou de forme axisymétrique quelconque, canal, conduite, ...). Ce choix de coordonnées permet également la résolution des équations en présence d'interfaces déformables car il donne accès directement aux grandeurs normales et tangentielles (vitesses, contraintes, pression, ...). Le fait que le système de coordonnées curvilignes soit orthogonal permet de restreindre le tenseur métrique à un tenseur diagonal ce qui simplifie considérablement l'écriture des équations, la contrepartie étant naturellement la réalisation d'un maillage orthogonal en tout point de calcul.

2- Les équations sont formulées en variables primitives vitesse-pression ce qui permet d'écrire de façon immédiate les conditions aux limites et de donner accès directement aux vitesses, à la pression, aux cisaillements, etc., sur les frontières du domaine.

3- La méthode de discrétisation choisie est la méthode des volumes finis qui est particulièrement adaptée à la préservation des propriétés de conservation des équations. Elle est associée à un algorithme de résolution semi-implicite à pas fractionnaire. La précision, initialement en  $O(\Delta t, \Delta x^2)$ , a été augmentée à  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$  afin d'assurer une meilleure description des écoulements instationnaires.

## **1.2 Formulation des équations**

---

Les équations qui régissent les problèmes physiques abordés dans cette étude sont les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Elles sont écrites dans un référentiel absolu suivant une description eulérienne de l'écoulement pour un fluide incompressible et newtonien. On considère que les caractéristiques physiques de ce fluide, à savoir sa viscosité dynamique  $\mu$ , sa masse volumique  $\rho$ , sa viscosité cinématique  $\nu = \mu/\rho$ , sa conductivité thermique  $\lambda$  et sa chaleur massique  $C_p$  sont indépendantes de sa température. Ces équations s'écrivent, sous forme conservative, en notant respectivement  $\mathbf{V}$ ,  $P$  et  $T$  le vecteur vitesse, la pression et la température :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.1.a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_e \quad (1.1.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T\mathbf{V}) = \frac{\lambda}{\rho C_p} \nabla^2 T \quad (1.1.c)$$

où

$$\boldsymbol{\tau} = \nu (\nabla \mathbf{V} + {}^t \nabla \mathbf{V}) \quad (1.2)$$

est la partie visqueuse du tenseur des contraintes

$$\boldsymbol{\Sigma} = -P \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{V} + {}^t \nabla \mathbf{V}) \quad (1.3)$$

et  $\mathbf{F}_e$  est la contribution volumique des forces extérieures. L'équation de la température (1.1.c) est écrite en considérant l'apport de chaleur provenant de la dissipation visqueuse du fluide comme négligeable. Compte tenu de cette hypothèse, l'équation d'advection-diffusion de la température et l'équation de conservation de la concentration d'un soluté non réactif sont équivalentes. Ainsi le chapitre 2 traite simultanément du transfert thermique et du transfert de masse. Par contre dans le chapitre 3, le scalaire considéré est la température car la physique des phénomènes d'ébullition et de condensation qui y est traitée est contrôlée par le transfert thermique. Afin d'homogénéiser et de simplifier la présentation des résultats, dans toute la suite de cette étude le scalaire étudié est la température  $T$  et le vocabulaire employé est celui du transfert thermique. On note  $\chi = \lambda/\rho C_p$  la diffusivité thermique.

Dans le repère cartésien  $\mathbf{e}_{xi} = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , les coordonnées du vecteur position  $\mathbf{x}$  et du vecteur vitesse  $\mathbf{V}$  sont respectivement notées  $x_i = (x, y, z)$  et  $V_{xi} = (V_x, V_y, V_z)$ . Les équations précédentes sont résolues dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales généralisées  $\xi'_i = (\xi, \eta, \phi)$  dans le repère curviligne  $\mathbf{e}_{\xi i} = (\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\phi)$ ,  $V_i = (V_\xi, V_\eta, V_\phi)$  désignant les coordonnées curvilignes du vecteur vitesse. Le système d'équation (1.1) est écrit en faisant intervenir les longueurs physiques définies par  $d\xi = h_i d\xi'_i$ , où  $h_i$  est l'élément métrique donné par :

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi'_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi'_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi'_i}\right)^2} \quad (1.4)$$



L'écriture des différents opérateurs vectoriels en coordonnées curvilignes orthogonales est rappelée dans l'annexe 1. Les équations (1.1) écrites en notation tensorielle, prennent alors la forme ( $i=1, 2, 3$  et la sommation sur  $j$  étant implicite) :

$$\frac{\partial V_j}{\partial \xi_j} = 0 \quad (1.5.a)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial(V_i V_j)}{\partial \xi_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} + \frac{\partial(\tau_{ij})}{\partial \xi_j} + H_j^i (V_j V_j - \tau_{jj}) - H_i^j (V_j V_i - \tau_{ij}) + F e_i \quad (1.5.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(T V_j)}{\partial \xi_j} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_j^2} \quad (1.5.c)$$

Les composantes du tenseur des contraintes s'écrivent en coordonnées curvilignes orthogonales :

$$\tau_{ij} = \nu \left[ \frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \xi_i} - H_j^i V_j - H_i^j V_i + 2 H_i^k V_k \delta_{ij} \right] \quad (1.6)$$

Les facteurs de courbure  $H_i^j$ , qui apparaissent dans les équations (1.5.b) et (1.6), représentent concrètement la variation suivant la coordonnée  $\xi_j$  de la grandeur métrique calculée suivant la coordonnée  $\xi_i$ . Leur calcul, présenté au paragraphe 1.5, est réalisé en vérifiant en tout noeud du maillage les théorèmes de conservation appliqués à des tenseurs particuliers définis à partir des vecteurs de la base cartésienne. Cette manière de calculer les facteurs de courbure permet de minimiser les termes sources qui pourraient découler d'une évaluation imprécise de ces grandeurs géométriques aux endroits où le maillage présente des courbures importantes.

### 1.3 Méthode numérique

---

Le système d'équations curvilignes (1.5) est résolu en utilisant la méthode des volumes finis. Elle consiste à diviser le domaine de calcul en éléments de volume  $\mathcal{V}$  délimités par une



surface  $\Gamma$  et à y intégrer les équations considérées en appliquant le théorème de la divergence. Les équations de conservation déduites du système (1.5) s'écrivent alors :

$$\int_{\Gamma} V_j n_j d\Gamma_j = 0 \quad (1.7.a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\vartheta} \frac{\partial V_i}{\partial t} d\vartheta = & - \int_{\vartheta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} d\vartheta + \int_{\Gamma} (\tau_{ij} - V_i V_j) n_j d\Gamma_j + \int_{\vartheta} F e_i d\vartheta \\ & + \int_{\vartheta} H_j^i (V_j V_j - \tau_{jj}) d\vartheta - \int_{\vartheta} H_i^j (V_j V_i - \tau_{ij}) d\vartheta \end{aligned} \quad (1.7.b)$$

$$\int_{\vartheta} \frac{\partial T}{\partial t} d\vartheta = \int_{\Gamma} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial \xi_j} - T V_j \right) n_j d\Gamma_j \quad (1.7.c)$$

Lorsque l'on résout numériquement ces équations avec une méthode à pas fractionnaires (voir plus loin), on est amené, à certaines étapes de l'algorithme, à utiliser des vitesses intermédiaires qui ne sont pas à divergence nulle. Pour cette raison, les équations (1.9) vont faire apparaître la divergence de la vitesse écrite sous forme conservative :

$$\int_{\Gamma} V_j n_j d\Gamma_j \quad (1.8)$$

On doit nécessairement en tenir compte dans la résolution numérique pour assurer la consistance et la stabilité de chaque étape intermédiaire. Le système à résoudre ainsi obtenu est écrit en séparant les termes résolus implicitement (opérateurs respectivement notés  $L$  et  $L_T$  pour la vitesse et la température) et les termes résolus explicitement (opérateurs respectivement notés  $N$  et  $N_T$ ) :

$$\int_{\Gamma} V_j n_j d\Gamma_j = 0 \quad (1.9.a)$$

$$\int_{\vartheta} \frac{\partial V_i}{\partial t} d\vartheta = - \int_{\vartheta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} d\vartheta + L[V_i] + N[V_i] \quad (1.9.b)$$

$$\int_{\vartheta} \frac{\partial T}{\partial t} d\vartheta = L_T[T] + N_T[T] \quad (1.9.c)$$

Les opérateurs  $L$ ,  $N$ ,  $L_T$  et  $N_T$  sont respectivement définis par les expressions (1.10), (1.11), (1.12) et (1.13).

$$L[V_i] = \int_{\Gamma} v \frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} n_j d\Gamma_j + \int_{\vartheta} 2v \sum_{i \neq j} (H_j^i)^2 V_i d\vartheta \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} N[V_i] = & \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial V_j}{\partial \xi_i} - V_i V_j \right) n_j d\Gamma_j + \int_{\vartheta} H_j^i (V_j V_j - \tau_{jj}^*) d\vartheta - \int_{\vartheta} H_i^j (V_j V_i - \tau_{ij}^*) d\vartheta \\ & - V_i \int_{\Gamma} V_j n_j d\Gamma_j - v \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \int_{\Gamma} V_j n_j d\Gamma_j \right) + \int_{\vartheta} Fe_i d\vartheta \end{aligned} \quad (1.11.a)$$

$$\text{avec } \tau_{ij}^* = v \left[ \frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \xi_i} - (1 - \delta_{ij}) (H_j^i V_j + H_i^j V_i) \right] \quad (1.11.b)$$

$$L_T[T] = \int_{\Gamma} \chi \frac{\partial T}{\partial \xi_j} n_j d\Gamma_j \quad (1.12)$$

$$N_T[T] = \int_{\Gamma} (-TV_j) n_j d\Gamma_j - T \int_{\Gamma} V_j n_j d\Gamma_j \quad (1.13)$$

Dans les résolutions classiques et notamment dans celle proposée par *Calmet* (1995), les termes comprenant les courbures  $H_i^j$  sont calculés de manière explicite. Cependant lorsque le maillage est axisymétrique ou fortement distordu, certains termes  $2v (H_j^i)^2 V_i$  peuvent devenir localement prépondérants et le critère nécessaire pour assurer la stabilité du schéma est alors très pénalisant. Leur résolution implicite permet de lever cette contrainte et offre en plus l'intérêt d'accroître l'importance des termes diagonaux des matrices ce qui renforce la stabilité de l'algorithme d'inversion utilisé.

La méthode de discrétisation choisie permet d'assurer une précision temporelle d'ordre 2. Pour cela les termes advectifs sont résolus par un schéma du type Runge-Kutta à trois pas de temps intermédiaires qui assure une précision  $O(\Delta t^3)$  et fournit une condition de stabilité très

avantageuse puisque le nombre CFL de ce schéma est égal à  $\sqrt{3}$  [Canuto et al., 1988]. Les termes diffusifs sont résolus par une méthode semi-implicite de type Crank-Nicolson qui assure une stabilité inconditionnelle et une précision  $O(\Delta t^2)$ . Le calcul des termes implicites est réalisé par une méthode de factorisation approchée ne nécessitant que des inversions directes de matrices tridiagonales beaucoup plus rapides que l'inversion directe d'une matrice tridimensionnelle, qui nécessiterait une place mémoire très importante. Le calcul de la pression n'est réalisé qu'après le dernier des trois pas intermédiaires et non à chacun d'eux car la précision ne s'en trouve pas affectée et reste en  $O(\Delta t^2)$  [Le & Moin, 1991]. Ainsi l'équation de Poisson n'est résolue qu'une seule fois par pas de temps en combinant une résolution directe bidimensionnelle avec une technique multigrille balayant la 3<sup>ème</sup> direction. Le schéma numérique ainsi obtenu a été mis au point par Calmet (1995) en adaptant le schéma initialement proposé par Le & Moin (1991). Il se décompose de la manière suivante :

Les trois pas de temps intermédiaires ( $t_k = t + \Delta t_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{n,k} - V_i^{n,k-1}}{\Delta t_k} \vartheta = & -(\alpha_k + \beta_k) \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^n}{\partial x_i} \vartheta + \alpha_k L[V_i^{n,k-1}] + \beta_k L[V_i^{n,k}] \\ & + \gamma_k N[V_i^{n,k-1}] + \zeta_k N[V_i^{n,k-2}] \end{aligned} \quad (1.14.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{T^{n,k} - T^{n,k-1}}{\Delta t_k} \vartheta = & \alpha_k L_T[T^{n,k-1}] + \beta_k L_T[T^{n,k}] \\ & + \gamma_k N_T[T^{n,k-1}] + \zeta_k N_T[T^{n,k-2}] \end{aligned} \quad (1.14.b)$$

Les pas de temps  $\Delta t_k$  et les valeurs respectives prises par  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  et  $\zeta_k$  à chaque pas intermédiaire  $k$  qui permettent d'assurer les précisions escomptées [Rai & Moin 1991, Calmet 1995] sont regroupés dans le tableau 1.1. A l'issue de ces trois pas de temps, le prédicteur  $V^{n,3}$  contient toute la vorticité de la vitesse  $V^{n+1}$  mais n'est pas à divergence nulle. La projection de ce prédicteur sur le sous-espace à divergence nulle est réalisé à l'aide d'un potentiel auxiliaire  $\Phi^{n+1}$ . Celui-ci est obtenu en résolvant l'équation de Poisson :

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial \xi_j} n_j d\Gamma_j = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma} V_j^{n,3} n_j d\Gamma_j \quad (1.15)$$

Enfin le calcul de la vitesse finale  $V^{n+1}$  à divergence nulle et celui de la température  $T^{n+1}$  s'effectuent en écrivant :

$$V_i^{n+1} = V_i^{n+1,0} = V_i^{n,3} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial \xi_i} \quad (1.16.a)$$

$$T^{n+1} = T^{n+1,0} = T^{n,3} \quad (1.16.b)$$

tandis que la pression  $P^{n+1}$  est donnée par (1.17). La pression  $P^{n+1}$  correspond en fait à la pression calculée à la précision  $O(\Delta t^2)$  à l'instant  $(n + 1/2)\Delta t$ .

$$P^{n+1} = P^n + \Phi^{n+1} \quad (1.17)$$

Le critère de stabilité CFL à respecter pour chaque maille du domaine de calcul est :

$$\Delta t \leq \sqrt{3} \frac{\Delta \xi_1 \Delta \xi_2 \Delta \xi_3}{U \Delta \xi_2 \Delta \xi_3 + V \Delta \xi_1 \Delta \xi_3 + W \Delta \xi_1 \Delta \xi_2} \quad (1.18)$$

et l'on choisit bien évidemment le pas de temps  $\Delta t$  minimum assurant (1.18) sur l'ensemble du domaine.

k	1	2	3
$\Delta t_k$	$\frac{8}{15} \Delta t$	$\frac{2}{3} \Delta t$	$\Delta t$
$\alpha_k = \beta_k$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{6}$
$\gamma_k$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$
$\zeta_k$	0	$-\frac{17}{60}$	$-\frac{5}{12}$

Tableau 1.1 : valeurs de  $\Delta t_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  et  $\zeta_k$  aux pas intermédiaires.

## 1.4 Position des variables et discrétisation spatiale

Le choix de la position des variables est important et conditionne en particulier la souplesse d'utilisation du code, la simplicité de l'écriture des conditions aux limites et le nombre de points nécessaires aux calculs [Rivero, 1991]. Le choix du maillage décalé (figure 1.1), qui positionne les vitesses normales sur les facettes de chaque maille de pression, permet d'assurer de manière simple les flux de masse et de quantité de mouvement sur chaque maille ainsi qu'aux frontières du domaine. Il permet aussi d'éviter d'imposer sur ces frontières des conditions aux limites sur la pression qui sont en général inconnues. La température est localisée au point de pression ce qui fait coïncider directement les vitesses qui transportent ce scalaire avec les vitesses curvilignes  $V_\xi$ ,  $V_\eta$  et  $V_\phi$ . Afin de se ramener le plus possible à des interpolations n'utilisant que deux points tout en assurant une précision spatiale à l'ordre 2, le choix le plus avantageux est de positionner les noeuds de vitesse à égale distance des noeuds de pression. Cependant pour le calcul des dérivées  $\partial V_i / \partial \xi_i$  apparaissant dans les contraintes normales aux points de pression, un développement à l'ordre 2 n'est pas possible à l'aide de deux points. Ces termes sont alors calculés par un développement utilisant quatre points, deux de part et d'autre du point de calcul, pour ne pas privilégier une direction particulière de l'écoulement.

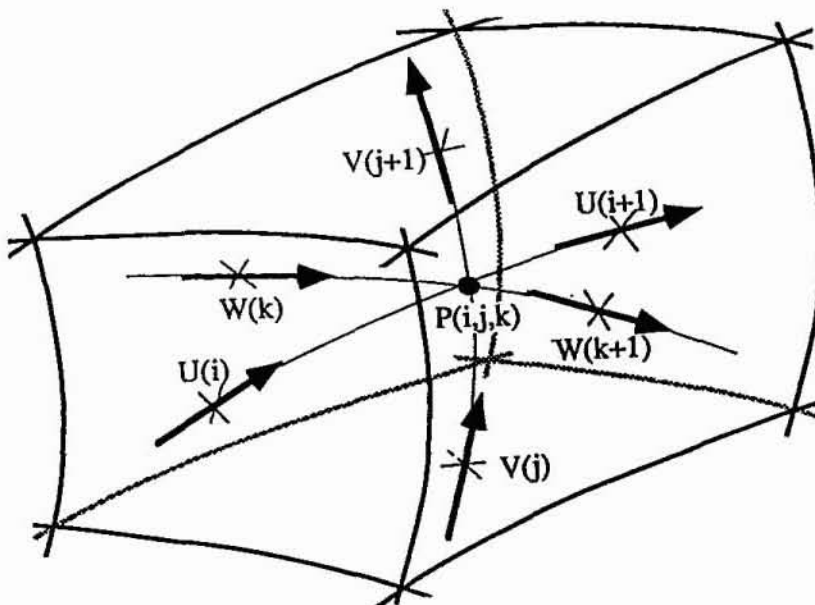


Figure 1.1 : Maillage décalé - Disposition des variables dans une maille de pression.

## 1.5 Calcul des grandeurs géométriques

Lors de l'écriture d'un code de simulation, le calcul des grandeurs géométriques est souvent occulté par le développement de l'algorithme de résolution. Cependant de mauvais choix ne respectant pas les principes même de la méthode de discrétisation peuvent nuire à la performance de l'outil numérique. Par exemple, une génération artificielle de vorticité peut perturber l'écoulement et en modifier la dynamique.

Ainsi, ayant adopté la méthode des volumes finis qui permet de résoudre les équations sous forme conservative, nous nous sommes interrogés sur la manière dont on pouvait utiliser les théorèmes de conservation pour calculer les diverses grandeurs géométriques apparaissant lors de l'écriture des équations en coordonnées curvilignes ( $H_i^j$ ) et lors de leur discrétisation ( $\mathcal{V}$ ,  $d\Gamma_i$ ,  $d\xi_i$ ,  $(d\xi_i)^2$ , etc....).

Les distances  $d\xi_i$  et les aires  $d\Gamma_i$  étant calculées de manière classique, le volume de chaque maille  $\mathcal{V}$  est déduit du flux du vecteur position  $\mathbf{x}$  (défini à partir d'un point fixe) en utilisant la relation  $\nabla \cdot \mathbf{x} = 3$  :

$$\int_{\Gamma} x_j n_j d\Gamma_j = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{x} d\mathcal{V} = 3\mathcal{V} \quad (1.19)$$

Les courbures  $H_i^j$  à calculer sont à priori au nombre de neuf ( $i = 1, 2, 3$  et  $j = 1, 2, 3$ ). Cependant les trois courbures  $H_i^i$  n'apparaissent pas dans les équations de conservation. De plus, dans sa version actuelle, le code n'utilise que des maillages plans ou axisymétriques. Ainsi, suivant la troisième direction la géométrie est invariante. Les courbures  $H_i^3$  sont donc nulles. D'après les équations (1.7.b) et (1.6), les courbures restant à calculer pour l'équation de chaque vitesse curviligne  $V_i$  sont :

- $H_1^2$ ,  $H_2^1$  et  $H_3^1$  pour  $V_\xi$ .
- $H_1^2$ ,  $H_2^1$  et  $H_3^2$  pour  $V_\eta$ .
- $H_3^1$  et  $H_3^2$  pour  $V_\phi$ .

Leur définition en coordonnées curvilignes orthogonales est la suivante :

$$H_i^j = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \xi_j} \quad (1.20)$$

Cette expression fait intervenir des dérivées secondes qui doivent être calculées avec quatre points pour assurer une précision spatiale  $O(\Delta x^2)$ . C'est pourquoi on utilise généralement un résultat intégral qui conduit à l'expression plus simple :

$$H_i^j A_{ij} = \Delta_j d\xi_i \quad (1.21)$$

où  $\Delta_j d\xi_i$  est la différence prise suivant la coordonnée  $\xi_j$  des longueurs calculées suivant la coordonnée  $\xi_i$ ,  $A_{ij}$  étant l'aire de la surface ainsi balayée. Cette méthode est performante dans les zones de faible courbure mais ne permet généralement pas de satisfaire correctement les équations de conservation. La démarche que nous avons adoptée consiste à définir un tenseur constant à partir des vecteurs de la base cartésienne et à écrire sa constance dans chaque maille de calcul.

Considérons le tenseur d'ordre deux  $\mathbf{T} = (T_{ij})$  défini à partir de  $\mathbf{e}_{xi}$  et  $\mathbf{e}_{xj}$  par :

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_{xi} \otimes \mathbf{e}_{xj} \quad (1.22)$$

Ce tenseur est constant et doit donc satisfaire dans tout l'espace :

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (1.23)$$

La relation précédente projetée dans le repère curviligne  $\mathbf{e}_{\xi_i}$  (relation A1.5, annexe 1) et intégrée suivant la méthode des volumes finis permet de définir les relations  $(R_i)$  :

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{T})_i d\mathcal{V} = \int_{\Gamma} T_{ij} n_j d\Gamma_j + \int_{\mathcal{V}} (H_i^j T_{ji} - H_j^i T_{ij}) d\mathcal{V} = 0 \quad (1.24)$$

Chaque relation  $(R_i)$  fait intervenir les mêmes courbures que l'équation de la composante curviligne  $V_i$ . Elle est alors écrite dans la maille de calcul de  $V_i$  avec autant de tenseurs différents qu'il y a de courbures à calculer et est discrétisée de la même manière que l'est l'équation de  $V_i$  ce qui lui assure ainsi la précision spatiale  $O(\Delta x^2)$  du schéma numérique utilisé. Les courbures sont obtenues en résolvant les systèmes linéaires formés des équations (1.24). Ces relations présentent en outre le double avantage de ne faire intervenir aucune dérivée et d'être utilisables quelque soit le maillage. Les figures 1.2.a et 1.2.b comparent les valeurs des facteurs de courbures  $H_1^2$  et  $H_2^1$  calculés avec la résolution de  $(R_i)$ , avec l'expression (1.21) ou de manière analytique à partir de (1.20). On constate que des écarts significatifs apparaissent uniquement dans les zones de forte courbure. Ces différences n'affectent en fait pas de manière sensible les résultats tels que la traînée totale ou le nombre de

Nusselt moyen mais perturbent localement de manière significative l'écoulement, effet que l'on retrouve par exemple sur la distribution de vorticité à l'interface.

La combinaison des relations  $(R_i)$  permet en fait d'exprimer de manière simple les courbures  $H_3^i$   $i = (1, 2)$  lorsque le maillage est invariant suivant la troisième direction ce qui est le cas dans cette étude. Pour un maillage plan, les courbures  $H_3^i$  sont nulles. Pour un maillage axisymétrique, on montre après quelques lignes de calcul que les courbures  $H_3^i$   $i = (1, 2)$  s'écrivent :

$$H_3^i = \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{\xi_i} d\xi d\eta \Delta\phi}{\vartheta} \quad (1.25)$$

où  $\mathbf{e}_r$  correspond au vecteur radial du repère cylindrique  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_x)$  résultant de la génération du maillage axisymétrique par rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_x$  d'un maillage plan (cf.    1.6). On retrouve ainsi que pour une définition classique du volume de la maille par  $\vartheta = r d\xi d\eta \Delta\phi$  où  $r$  est la distance du centre de la maille à l'axe  $\mathbf{e}_x$ , les courbures s'écrivent sous la forme  $H_3^i = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{\xi_i} / r$ .

Les facteurs de courbure calculés par (1.24) sont ceux qui interviennent dans l'équation de conservation (1.7.b). L'écriture du tenseur des contraintes en coordonnées curvilignes orthogonales (1.6) les fait également apparaître. Cependant les facteurs de courbure  $H_i^j$  sont calculés de manière différente pour les contraintes en exploitant le fait qu'un vecteur constant  $\mathbf{c}$  vérifie les relations suivantes :

$$\nabla \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (1.26.a)$$

$$\nabla \times \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (1.26.b)$$

Celles-ci sont écrites dans le repère curviligne  $\mathbf{e}_{\xi_i}$  (relations A1.2 et A1.3, annexe 1) et prennent la forme suivante en notant  $c_i$  les projections du vecteur  $\mathbf{c}$  dans ce repère :

$$(\nabla \mathbf{c})_{ij} = \frac{\partial c_i}{\partial \xi_j} - H_j^i c_j + \sum_k H_i^k c_k \delta_{ij} = 0 \quad (1.27.a)$$

$$(\nabla \times \mathbf{c})_k = \varepsilon_{kij} \left( \frac{\partial c_j}{\partial \xi_i} - H_i^j c_j \right) = 0 \quad (1.27.b)$$



Compte tenu de l'expression (1.6), chaque composante du tenseur des contraintes fait intervenir au plus deux courbures différentes ( $H_i^j$   $j \neq i$  pour  $\tau_{ii}$  et  $H_i^i$  et  $H_j^i$  pour  $\tau_{ij}$ ). Le calcul des deux courbures considérées  $H_i^j$  est réalisé en résolvant le système linéaire formé par la relation  $(\nabla c)_{ij} = 0$  issue de (1.27.a) et la relation  $(\nabla \times c)_k = 0$  ( $k \neq i, k \neq j$ ) provenant de (1.27.b).

Les choix du tenseur  $T$  et du vecteur constant  $c$  sont à priori arbitraires. Il est cependant préférable de les composer à partir de vecteurs de la base cartésienne compatibles avec la symétrie du maillage et également si possible avec celle de l'écoulement non-perturbé.

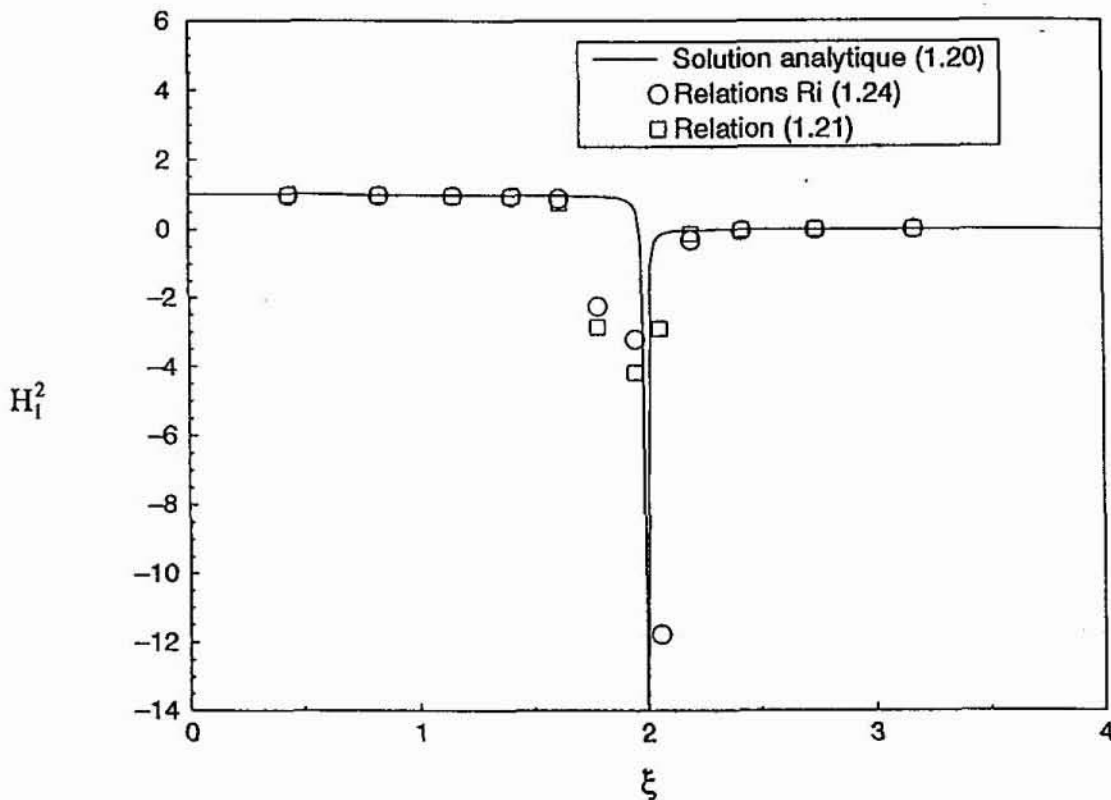


Figure 1.2.a : courbure  $H_1^2$  dans la première cellule au dessus de la sphère.

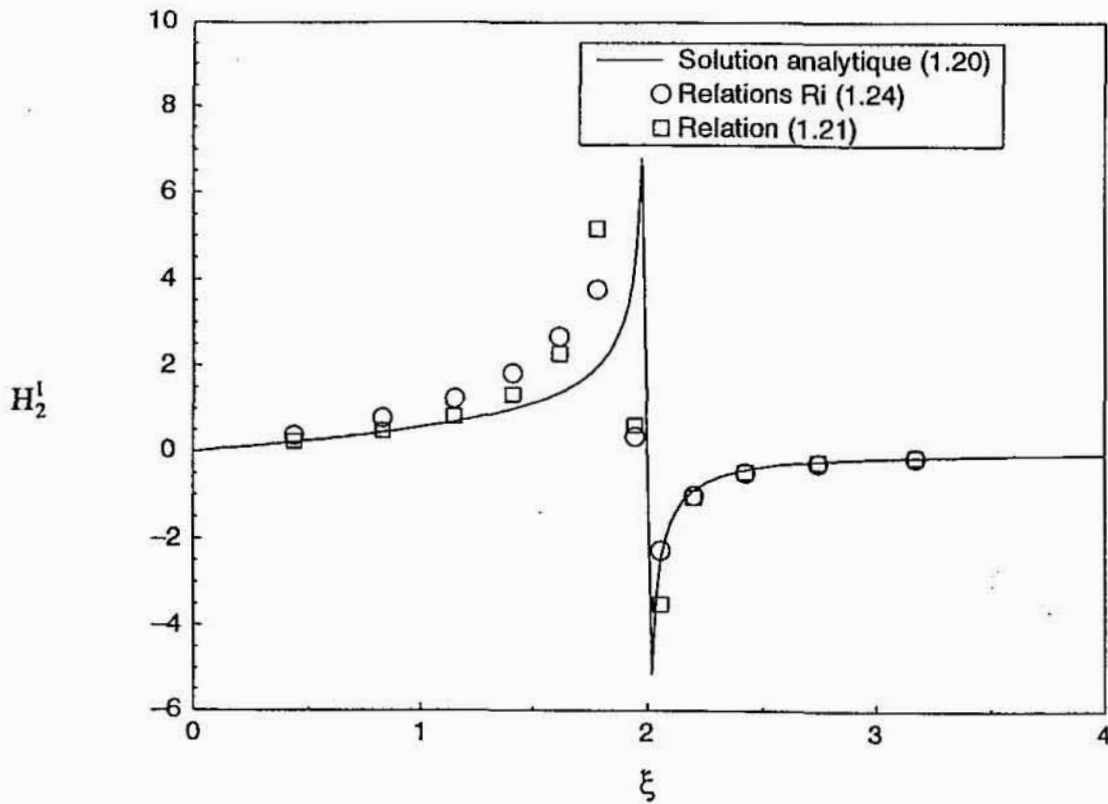


Figure 1.2.b : courbure  $H_2^1$  dans la première cellule au dessus de la sphère.

## 1.6 Présentation du maillage

Compte tenu des choix numériques le maillage doit être orthogonal et doit faire coïncider les frontières de calcul avec les lignes de coordonnées à l'aide d'une transformation bijective entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées curvilignes (figure 1.3).

Le maillage axisymétrique  $(\xi, \eta, \phi)$  choisi pour la résolution d'écoulements autour d'un obstacle sphérique est le maillage obtenu par rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $e_x$  du maillage plan  $(\xi, \eta)$  où  $\xi$  et  $\eta$  sont respectivement les lignes de courant et les équipotentielles de l'écoulement potentiel autour d'un cylindre (figure 1.4). Ce maillage, que l'on nommera par la suite LCE, offre, tout comme le maillage polaire classique, les garanties suivantes :

- Le passage de l'espace numérique à l'espace cartésien s'effectue de manière analytique directe.

- Le maillage est ainsi parfaitement orthogonal en tout point de calcul car aucune grandeur n'est évaluée aux seuls endroits où le maillage est non orthogonal qui correspondent à l'intersection de la surface de la sphère, de l'axe  $e_x$  et de la ligne de coordonnées  $\xi = \text{Cste}$ .

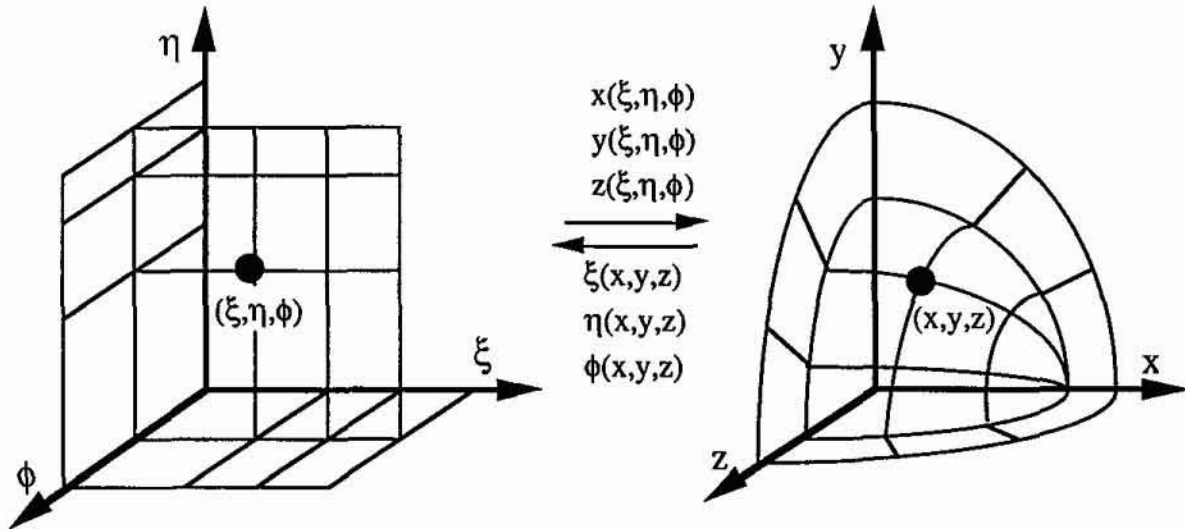


Figure 1.3 : Passage entre les coordonnées cartésiennes et curvilignes.

Le maillage LCE a été préféré au maillage polaire pour les raisons suivantes :

- Il permet une définition immédiate et précise des différentes frontières du domaine de calcul (entrée, sortie, obstacle sphérique ...).

- les lignes de coordonnées ( $\eta = \text{Cste}$ ) suivent beaucoup mieux les lignes de courant. Par conséquent les lignes de coordonnées ( $\xi = \text{Cste}$ ) qui leur sont orthogonales assurent une description optimale des flux transportés. Ces deux conditions limitent l'influence du maillage sur la résolution de l'écoulement.

Les équations de passage pour le maillage LCE entre le domaine numérique et le domaine physique sont les relations (A1.6) et (A1.7) de l'Annexe 1.

La taille du domaine de calcul, si elle n'est pas adaptée au problème physique résolu numériquement, peut influencer les résultats. Pour éviter cette influence parasite, les frontières extérieures doivent être situées suffisamment loin de l'obstacle pour ne pas perturber l'écoulement et en modifier le sillage. Cet effet de confinement est surtout observé lorsque l'écoulement est visqueux car les effets de la viscosité s'étendent très loin. L'influence de la position des frontières extérieures a été testée en simulant l'écoulement stationnaire axisymétrique autour d'une bulle sphérique aux nombres de Reynolds  $Re = 0.1$  et  $Re = 300$  pour différentes tailles de maillage. L'effet du confinement devient imperceptible à partir de soixante rayons lorsque l'écoulement est très visqueux [Rivero 1991, Blanco 1995]. Par conséquent, pour ne pas être confronté à ces effets parasites, les limites du domaine de calcul

sont positionnées pour l'ensemble des simulations de cette étude à quatre-vingt rayons soit  $x/R = \pm 80$  et  $y/R = \pm 80$ .

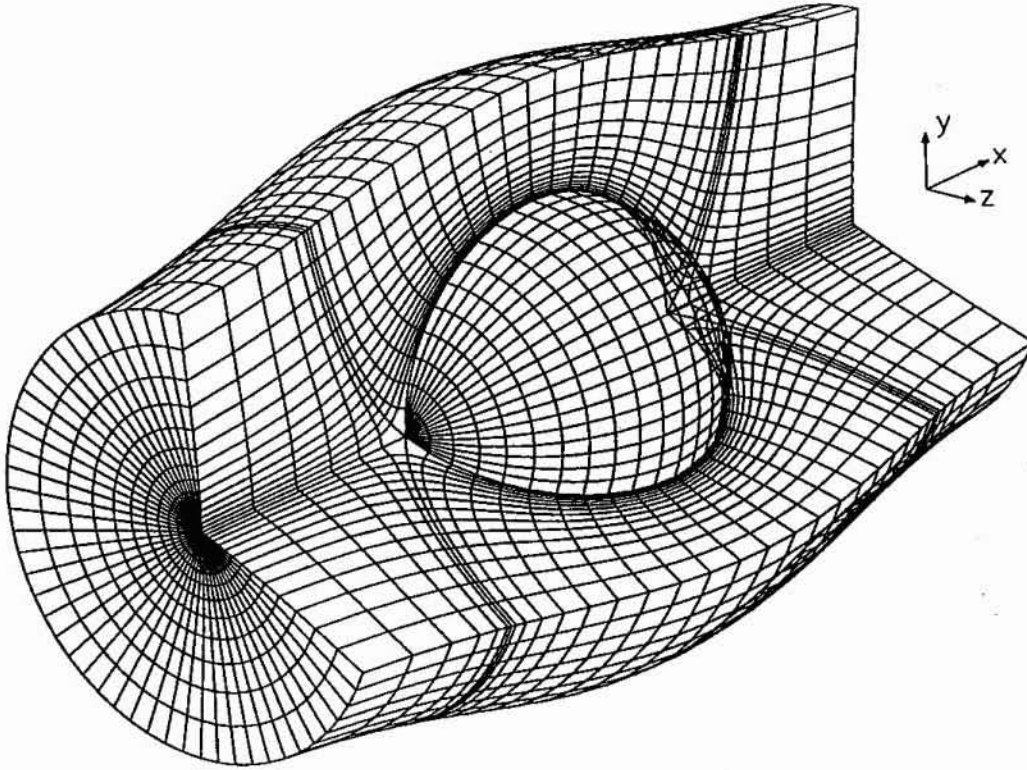


Figure 1.4 : Maillage orthogonal LCE au voisinage de l'obstacle.

## 1.7 Conditions aux limites

---

Comme nous venons de le voir, les choix de la méthode des volumes finis et de la position des variables permettent d'écrire de manière simple les conditions aux limites sur les frontières du domaine. Ces conditions sont présentées ici en notant, pour la frontière considérée,  $\mathbf{n}$  sa normale,  $\mathbf{t}_j$  ( $j=1, 2$ ) ses vecteurs tangents,  $V_{in}$  sa vitesse normale,  $V_{Ij}$  ( $j = 1, 2$ ) ses vitesses tangentielles et  $T_I$  sa température. Les composantes de la vitesse du fluide sur la normale  $\mathbf{n}$  et les tangentes  $\mathbf{t}_j$  sont respectivement notées  $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  et  $V_{ij} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_j$ .

### 1.7.1 Condition d'entrée

C'est la condition la plus simple à imposer. Elle correspond aux frontières où une condition de Dirichlet sur les vitesses et la température est connue. Néanmoins compte tenu de la discrétisation temporelle à trois pas intermédiaires, il est nécessaire d'écrire correctement à

chaque étape cette condition lorsqu'elle évolue dans le temps de manière à respecter la précision  $O(\Delta t^2)$  du schéma d'ensemble [Kim & Moin 1985, Calmet 1995]. A cet effet, les vitesses intermédiaires  $V_1^{n,k}$  de la frontière sont calculées à chaque pas intermédiaire  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) par interpolation linéaire des vitesses de la frontière entre les instants  $n$  et  $n+1$  :

$$V_1^{n,k} = V_1^n + \sum_{j=1}^k (\alpha_j + \beta_j)(V_1^{n+1} - V_1^n) \quad (1.28.a)$$

De même la condition sur la température s'écrit :

$$T_1^{n,k} = T_1^n + \sum_{j=1}^k (\alpha_j + \beta_j)(T_1^{n+1} - T_1^n) \quad (1.28.b)$$

### 1.7.2 Condition de sortie

Elle correspond aux frontières où à priori aucune condition sur la vitesse, la pression ou la température n'est connue. Une telle frontière est en général placée en aval de la zone de calcul. Son traitement est primordial car il peut avoir à la fois une influence sur les résultats et sur la stabilité des calculs. Par conséquent, il est nécessaire d'imposer sur ce type de frontière les conditions les plus faibles possibles pour les variables du problème. Nous utilisons après de nombreux tests les conditions suivantes :

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial n^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial n^2} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (1.29)$$

### 1.7.3 Condition sur une interface

Les conditions aux limites qui sont appliquées sur une interface sont obtenues en y écrivant les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement, d'énergie et d'entropie (Annexe 2). Ces bilans ont été simplifiés à l'aide des trois hypothèses suivantes :

**H1** : Il n'y a pas de masse superficielle attachée à l'interface.

**H2** : L'interface n'est pas la source d'une production d'entropie c'est à dire que les transferts moléculaires interfaciaux irréversibles sont négligeables.

**H3** : La tension interfaciale est constante c'est à dire que l'on néglige ses possibles variations avec la température ou la concentration.

Ces bilans sont rappelés ici en notant respectivement à l'aide des indices  $1$  et  $2$  la phase liquide et la phase gazeuse.

### Bilan de masse

Le bilan de masse (A2.7) s'écrit :

$$\dot{m} = \rho_1(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_I) \cdot \mathbf{n} = \rho_2(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_I) \cdot \mathbf{n} \quad (1.30)$$

Pour obtenir la condition à la limite sur la vitesse normale du liquide, l'une ou l'autre des hypothèses **H4** ou **H5** est utilisée.

**H4** : Il n'y a pas de flux de masse à l'interface  $\dot{m} = 0$ .

**H5** : Le rapport  $\varepsilon_p$  de la masse volumique du gaz et de la masse volumique du liquide vérifie  $\varepsilon_p = \rho_2/\rho_1 \ll 1$

L'hypothèse **H5** est en particulier vérifiée pour un écoulement d'eau dont la phase dispersée est soit sa phase gazeuse soit de l'air. On déduit donc de **H4** ou **H5** :

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{V}_{In} \quad (1.31)$$

### Bilan de quantité de mouvement

Les projections du bilan de quantité de mouvement à l'interface suivant sa normale et sur son plan tangent s'écrivent respectivement (cf.annexe 2, relations A2.11 et A2.12) :

$$2H\sigma + \dot{m}^2 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + p_1 - p_2 - \mathbf{n} \cdot (\rho_1 \boldsymbol{\tau}_1 - \rho_2 \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.32)$$

$$\mathbf{t}_j \cdot (\rho_1 \boldsymbol{\tau}_1 - \rho_2 \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.33)$$

où  $H$  est la courbure moyenne de l'interface.

Dans le cadre de ce travail, l'hypothèse **H6** sera toujours vérifiée :

**H6** : La bulle est sphérique, ce qui correspond à  $\sigma \rightarrow \infty$  dans (1.32).

De la sorte, nous n'utiliserons pas la projection normale du bilan de quantité de mouvement (1.32) qui permettrait de déterminer la forme de l'interface lorsque  $\sigma$  est fini et que

les actions hydrodynamiques du fluide sur l'interface ne sont pas négligeables (cf. *Blanco*, 1995).

En revanche la projection tangentielle du bilan de quantité de mouvement (1.33) permet d'exprimer la condition sur le cisaillement à l'interface pour la phase liquide lorsque l'hypothèse **H7** est vérifiée :

**H7** : Le rapport des viscosités entre le gaz et le liquide vérifie  $\mu_2/\mu_1 \ll 1$ .

Cette hypothèse permet de négliger la contribution visqueuse de la phase gazeuse  $\rho_2 \boldsymbol{\tau}_2$  devant celle de la phase liquide  $\rho_1 \boldsymbol{\tau}_1$ . La condition ainsi obtenue est en fait une condition de cisaillement nul pour le liquide à l'interface :

$$\mathbf{t}_j \cdot \rho_1 \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.34)$$

### Condition sur la température

La diffusivité thermique de la bulle  $\chi_2$  est supposée suffisamment grande pour que la température soit constante et uniforme dans toute la bulle. Le bilan d'entropie à l'interface (Annexe 2) permet d'exprimer l'égalité des températures des deux phases et de l'interface :

$$T_1 = T_1 = T_2 \quad (1.35)$$

### Bilan d'énergie

Le bilan d'énergie à l'interface n'est utilisé que pour l'étude des phénomènes physiques de changement de phase traités dans le chapitre 3. Il s'écrit, compte tenu notamment de l'hypothèse **H3** :

$$\sum_{k=1}^2 \dot{m}_k \left( h_k + \frac{\dot{m}_k^2}{\rho_k} - \frac{\mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k}{\rho_k} \right) + \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k = 0 \quad (1.36)$$

où  $h_k = e_k + p_k/\rho_k$  est la densité massique d'enthalpie et  $\mathbf{q}_k$  est le flux d'énergie thermique dans la phase  $k$  donné par la loi de Fourier :  $\mathbf{q}_k = -\lambda_k \nabla T_k$ .

La différence d'enthalpie entre l'eau et sa vapeur étant très grande, on peut considérer que l'hypothèse **H8** est largement vérifiée :

**H8** : l'énergie échangée à l'interface est telle que :

$$\sum_{k=1}^2 \dot{m}_k h_k \gg \sum_{k=1}^2 \dot{m}_k \left( \frac{\dot{m}_k^2}{\rho_k} - \frac{\mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k}{\rho_k} \right)$$

On suppose également l'hypothèse **H9** vérifiée :

**H9** : le rapport des conductivités thermiques des deux phases est tel que  $\lambda_2/\lambda_1 \ll 1$ .

Compte tenu des deux hypothèses **H8** et **H9**, le bilan d'énergie à l'interface sera utilisé dans le chapitre 3 sous la forme :

$$\dot{m} L = \lambda_1 \nabla T \cdot \mathbf{n} \quad (1.37)$$

où  $L = h_2 - h_1$  est la chaleur latente de changement de phase. La relation (1.37) montre que la quantité d'énergie thermique échangée entre la phase liquide et l'interface est entièrement utilisée pour la vaporisation où la condensation de la phase vapeur selon le sens du gradient de température.

#### 1.7.4 Condition périodique

Cette condition est utilisée, soit lorsque l'écoulement est périodique ce qui permet sa résolution sur une seule période, soit lorsqu'il se referme sur lui-même (par exemple le canal annulaire traité au paragraphe 1.8.4). Il suffit dans ces deux cas de figure de résoudre les équations de bilan sur une des deux frontières correspondant au début ou à la fin de la période et d'écrire ensuite l'égalité des vitesses sur ces frontières tout en tenant compte du gradient de pression longitudinal lorsque celui-ci existe (cas de l'écoulement établi en canal par exemple).

#### 1.7.5 Condition sur un axe de symétrie

Pour ce type de condition, il faut différencier le cas où l'axe est le lieu d'une symétrie à la fois pour la géométrie et pour l'écoulement et le cas où il est le lieu d'une symétrie pour la géométrie seule. Ceci se rencontre dès lors que l'écoulement est pleinement tridimensionnel (sillage hélicoïdal derrière une sphère, écoulement turbulent, etc....) ou lorsque les conditions aux limites ou initiales ne sont pas symétriques (écoulement cisailé, tourbillon, etc....).

#### Axe de symétrie pour l'écoulement

les conditions de symétrie s'écrivent :

$$V_n = 0 \quad \frac{\partial V_{ij}}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (1.38)$$



### Axe de symétrie uniquement pour la géométrie

Cette situation est rencontrée pour le maillage utilisé dans cette étude et défini au paragraphe 1.6. Ce maillage est généré par rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $e_x$  d'un maillage plan. Dans ce cas de figure, tous les plans  $\phi_k = \text{cste}$  se recoupent sur l'axe de symétrie  $e_x$  du maillage tridimensionnel ainsi obtenu, ce qui place en un même noeud des vitesses normales de module et de direction différents (figure 1.5). Ces vitesses se déduisent en fait les unes des autres car elles correspondent à la projection dans le plan  $\phi_k$  de la vitesse réelle prise sur l'axe suivant la relation :

$$V_n = V_y \cos\phi_k + V_z \sin\phi_k \quad (1.39)$$

Chaque vitesse  $V_n$  de cet axe, appelé aussi axe singulier, est calculée par extrapolation réalisée de manière implicite à l'aide des vitesses  $V(j)$  et  $V(j+1)$ .

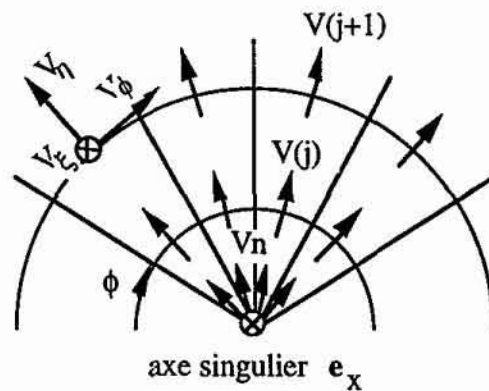


Figure 1.5 : disposition des vitesses normales sur l'axe singulier.

#### 1.7.6 Condition pour la pression

Comme on l'a vu au paragraphe 1.3, la pression est résolue par l'intermédiaire d'un potentiel auxiliaire  $\Phi$  calculé par inversion d'une équation de Poisson (équations 1.15 et 1.17). Pour les écoulements simulés dans cette étude, trois types de conditions sont rencontrés pour la pression.

- Le premier correspond à la situation où la composante de la vitesse normale à la frontière est connue. La condition sur la frontière (1.28.a) prise suivant la normale de l'interface devient :

$$V_{ln}^{n+1} = V_{ln}^{n,3} \quad (1.40)$$

Compte tenu de (1.40), l'emploi de (1.16.a) permet d'écrire la condition à imposer sur  $\Phi^{n+1}$  :

$$\frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial n} = 0 \quad (1.41)$$

- Le second cas de figure rencontré concerne la condition de sortie. Ce type de condition présenté plus en détail par *Rivero* (1991) est obtenu en supposant que la pression vérifie la condition croisée qui permet à d'éventuels gradients de pression d'exister dans la section de sortie :

$$\frac{\partial^3 P}{\partial n \partial t_1 \partial t_2} = 0 \quad (1.42)$$

- Enfin on suppose qu'aucune correction de la pression n'est nécessaire à l'intérieur d'un pas de temps dans le plan de sortie, ce qui se traduit par :

$$\Phi^{n+1} = 0 \quad (1.43)$$

Différentes conditions, notamment en utilisant des équations de transport, ont été testées par *Climent* (1996) en étudiant le passage au travers de la frontière de sortie d'un tourbillon transporté par un écoulement uniforme. La performance de la condition de sortie est déterminée en mesurant l'intensité maximale des vitesses résiduelles dans le domaine de calcul après la sortie du tourbillon. Pour les conditions sur la vitesse (1.29) et sur la pression (1.42), l'intensité maximale est de 2 % de la vitesse de référence du tourbillon ce qui constitue le meilleur résultat parmi les conditions testées.

## **1.8 Définitions supplémentaires : intégrations sur l'inclusion**

Ce paragraphe est consacré à la présentation des différentes notations intervenant dans la description des échanges de quantité de mouvement et d'énergie à la surface de l'inclusion étudiée.

Les distributions locales à la surface de la bulle sont exprimées dans le repère d'angles  $(\theta, \phi)$  où  $\theta$  est l'angle polaire dont l'origine est fixée au point d'arrêt amont de l'écoulement et  $\phi$  est défini par la rotation autour de l'axe  $e_x$  (figure 1.6). Le vecteur tangent  $e_\phi$  à la surface de

la bulle suivant l'angle  $\theta$  correspond en fait au vecteur de la base curviligne  $\mathbf{e}_\xi$ . Par conséquent, la vitesse à la surface de la bulle est décrite à l'aide de ses composantes curvilignes  $\mathbf{V}_i = (V_\xi, V_\eta, V_\phi)$ .

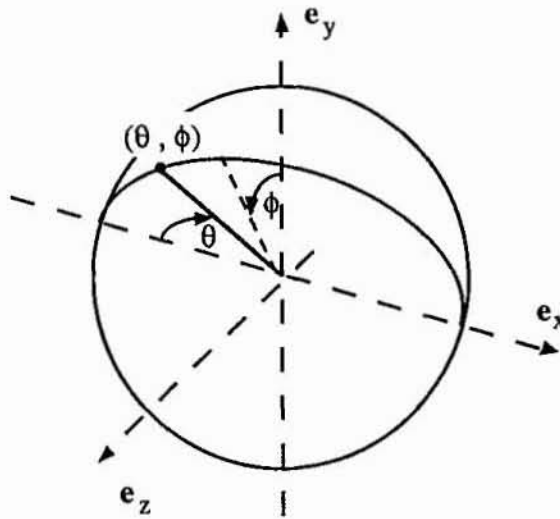


Figure 1.6 : repère local  $(\theta, \phi)$

### 1.8.a Actions hydrodynamiques

L'action hydrodynamique de l'écoulement sur la bulle est calculée par intégration directe du tenseur des contraintes (1.3) sur la surface  $\Gamma$  de la bulle :

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \Sigma_{nn} \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (1.44.a)$$

où  $\Sigma_{nn} = -P + \rho \mathcal{T}_{nn}$  et  $\mathbf{n}$  sont respectivement la contrainte normale et la normale au point considéré. La vitesse relative de l'écoulement par rapport à la bulle est, excepté au chapitre 6, dirigée suivant l'axe  $\mathbf{e}_x$  et la résultante  $\mathbf{F}$  est décomposée de la manière suivante :

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y \quad (1.44.b)$$

où  $F_x = \int_{\Gamma} \Sigma_{nn} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x \, d\Gamma$  est appelée force de traînée et  $F_y = \int_{\Gamma} \Sigma_{nn} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma$  force de portance.

On définit également les coefficients de pression  $C_p$  et de contrainte normale  $C_n$  à la surface de la bulle par :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (1.45.a)$$

$$C_n = \frac{\tau_{nn}}{\frac{1}{2} U^2} \quad (1.45.b)$$

où  $P_\infty$  et  $U$  sont respectivement une pression de référence et la vitesse de l'écoulement non-perturbé au centre d'inertie de la bulle.  $C_p$  et  $C_n$  représentent en fait les actions normales directes de l'écoulement à la surface de la bulle.

### 1.8.b Transfert thermique

Le transfert thermique interfacial est exprimé à l'aide des nombres de Nusselt instantanés local  $Nu_{loc}(\theta, \phi, t)$  et global  $Nu(t)$  définis respectivement par :

$$Nu_{loc}(\theta, \phi, t) = \frac{2 R \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R}}{\lambda (T_p - T_\infty)} \quad (1.46)$$

$$Nu(t) = \frac{\int_{\Gamma} Nu_{loc}(\theta, \phi, t) d\Gamma}{4 \pi R^2} \quad (1.47)$$

## 1.9 Tests de validation

---

De nombreux écoulements tests ont été simulés pour évaluer les performances de l'outil numérique. Ceux-ci ont été classés en deux catégories. La première regroupe les tests faisant intervenir des maillages cartésiens. La seconde rassemble les tests où l'obstacle étudié est sphérique et le maillage utilisé est le maillage LCE défini au paragraphe 1.6.

## Les maillages cartésiens

Les deux premiers cas (1.9.1 et 1.9.2) ont été étudié principalement par *Calmet* (1995). Nous en résumons ici le principe et les principaux enseignements. Le cas supplémentaire (1.9.3) a permis de tester un écoulement tridimensionnel de géométrie simple.

D'autres tests, non reportés ici car ils concernent davantage les écoulements à grands nombres de Reynolds, ont également été effectués pour s'assurer de la capacité du code à reproduire les taux de croissance de certaines instabilités ou les caractéristiques des écoulements décollés [*Calmet*, 1995].

### 1.9.1 Le tourbillon de Green-Taylor

Les précisions spatiales et temporelles ont été vérifiées en simulant le tourbillon de Green-Taylor (figure 1.7) pour lequel une solution analytique instationnaire existe :

$$\begin{aligned}
 U(x,y,t) &= -\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \exp\left(-\frac{2\pi^2 \nu t}{L^2}\right) \\
 V(x,y,t) &= \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) \exp\left(-\frac{2\pi^2 \nu t}{L^2}\right) \\
 P(x,y,t) &= -\frac{1}{4} \left[ \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \right] \exp\left(-\frac{4\pi^2 \nu t}{L^2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{1.48}$$

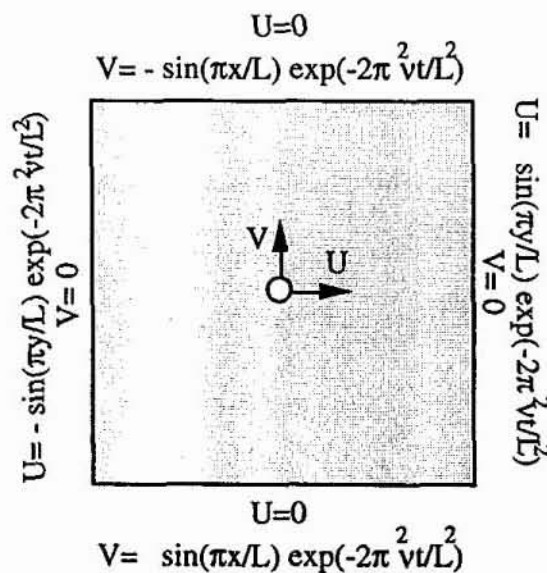


Figure 1.7 : Tourbillon de Green-Taylor.

Les calculs ont été réalisés avec des maillages plus ou moins resserrés pour tester la sensibilité spatiale puis avec des pas de temps différents pour tester la sensibilité temporelle. Ils ont permis de confirmer une précision spatiale en  $O(\Delta x^2)$  et une précision temporelle en  $O(\Delta t^2)$  [Calmet, 1995].

### 1.9.2 Ecoulement en cavité carrée

Le deuxième cas test significatif est celui de l'écoulement dans une cavité carrée bidimensionnelle dont la paroi supérieure se déplace à vitesse constante (figure 1.8). Bien que bidimensionnel cet écoulement a été traité suivant les trois plans  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  et  $(y, z)$ . Ceci a permis de constater la performance du balayage multigrille assurant l'inversion de l'équation de Poisson suivant les plans  $(x, z)$  et  $(y, z)$ . Les écoulements calculés dans ces deux plans sont identiques entre eux et également, à la précision demandée près, à l'écoulement obtenu dans le plan  $(x, y)$  où l'équation de Poisson est inversée directement.

Les résultats des simulations numériques [Calmet, 1995] pour différents maillages ( $40 \times 40$  et  $20 \times 20$ ) et pour différents nombres de Reynolds ( $Re = 400$  et  $Re = 1000$ ) sont en parfait accord avec ceux de *Ghia et al.* (1982) obtenus en utilisant les variables de Helmholtz avec un maillage ( $129 \times 129$ ).

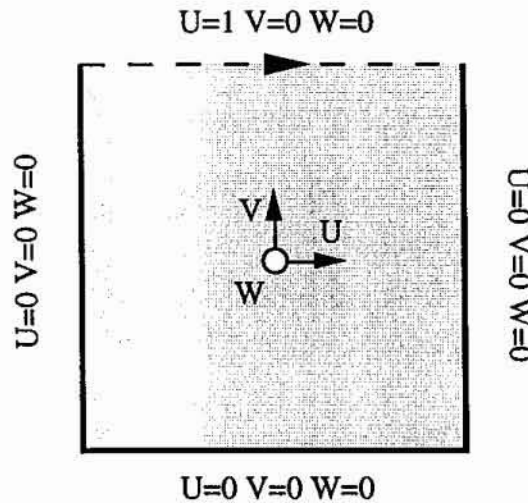


Figure 1.8 : Ecoulement en cavité carrée.

### 1.9.3 Ecoulement en canal annulaire

L'écoulement en canal annulaire entraîné par un plateau supérieur décrit par la figure 1.9 a également été simulé. Les caractéristiques de cet écoulement sont  $W$  la vitesse d'entraînement

du plateau supérieur au milieu du canal,  $H$  la hauteur du canal,  $L$  sa largeur et  $R$  la position du centre du canal par rapport à l'axe de rotation.

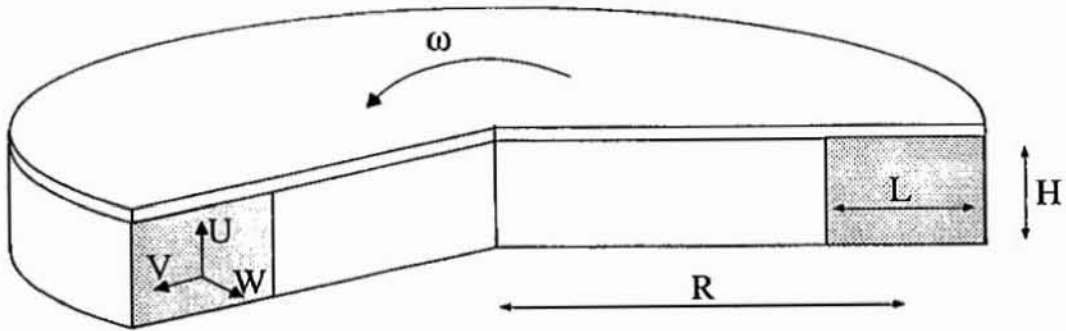


Figure 1.9 : Canal annulaire.

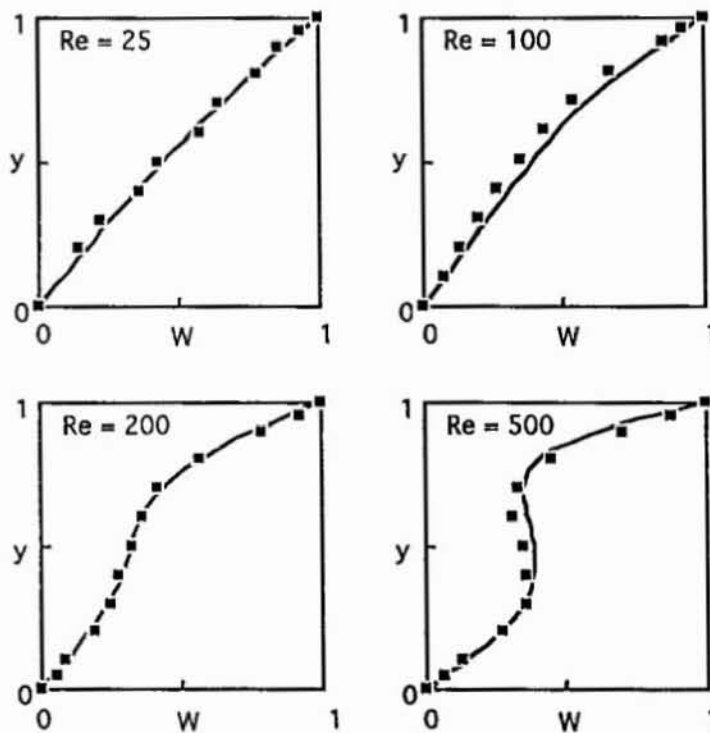


Figure 1.10 : Vitesse azimutale au centre du canal. ■ expérience, — numérique.

Il n'existe pas de solution analytique ni de résultats numériques concernant cet écoulement, mais nous disposons de récentes mesures expérimentales [Barthelet *et al.*, 1995]. Les quatre graphes de la figure 1.10 présentent le profil de la vitesse azimutale  $W$  au centre du canal à différents nombres de Reynolds  $Re = WH/\nu$  et pour des rapports d'aspect  $H/L = 1/2$  et

$R/L = 20$ . Ils montrent une très bonne concordance entre nos simulations numériques et les résultats expérimentaux, les écarts observés à  $Re = 100$  et  $Re = 500$  pouvant provenir d'une imprécision sur le nombre de Reynolds des expériences liée aux variations de viscosité avec la température.

### Le maillage LCE :

Les tests qui vont suivre ont été réalisés avec le maillage LCE utilisé dans la suite de l'étude et présenté au paragraphe 1.6 (cf. figure 1.4). Le paragraphe 1.9.4 concerne l'écoulement axisymétrique stationnaire uniforme autour d'une bulle sphérique dont les résultats serviront de référence aux calculs ultérieurs. Les deux cas suivants (§ 1.9.5) ont permis d'évaluer le comportement du code sur des écoulements tridimensionnels proches des situations qui vont être étudiées par la suite.

#### 1.9.4 Ecoulement axisymétrique autour d'une bulle sphérique

Les simulations des écoulements stationnaires axisymétriques autour d'une bulle sphérique plongée dans un écoulement uniforme ont été réalisées et comparées avec les résultats de *Magnaudet et al.* (1995) obtenus avec la version précédente axisymétrique de JADIM. Les coefficients de traînée sont regroupés dans le tableau 1.2 et sont en parfait accord avec l'ensemble des autres résultats disponibles dans la littérature.

Re	Cette étude	Magnaudet et al. (1995)	Taylor & Acrivos (1964)	Moore (1963)
0.1	162.4	161.8	162	-
1	17.50	17.44	18	-
10	2.425	2.411	5.2	1.444
100	0.373	0.369	-	0.374
300	0.140	0.138	-	0.140

Tableau 1.2 : Coefficient de traînée d'une bulle sphérique dans un écoulement uniforme.



### 1.9.5 Sphère en rotation dans un fluide visqueux

L'écoulement considéré est généré par une particule sphérique de rayon  $R$  en rotation sur elle-même avec la vitesse angulaire  $\Omega$  et plongée dans un écoulement uniforme de vitesse relative  $\mathbf{U} = U_0 \mathbf{e}_x$  (figure 1.11). L'axe de la rotation est un diamètre de la sphère et est perpendiculaire à la direction de l'écoulement  $\mathbf{e}_x$ . Les caractéristiques de cet écoulement sont les nombres de Reynolds  $Re = 2RU_0/\nu$  et  $Re_\Omega = \Omega R^2/\nu$ .



Figure 1.11 : Sphère en rotation dans un écoulement uniforme.

En régime de Stokes, cet écoulement tridimensionnel présente une solution analytique connue. Il nous a ainsi permis de tester en particulier la condition sur l'axe singulier car le bon calcul des vitesses qui le traversent est pour cet écoulement déterminant. Afin d'apprécier pleinement l'influence de la condition sur cet axe, le fluide est initialement au repos.

**Cas particulier**  $U_0 = 0$  :

Lorsque le nombre de Reynolds  $Re_\Omega$  est petit devant l'unité, la vitesse de rotation  $w(r)$  du fluide autour de l'axe de rotation de la sphère s'écrit [*Lamb*, 1932 p. 589] :

$$w(r) = \frac{\Omega R^3}{r^3} \quad (1.49)$$

Le couple  $M$  exercé par l'écoulement sur la sphère est dirigé suivant l'axe de rotation et s'exprime en fonction des caractéristiques de l'écoulement par :

$$M = -8\pi\mu R^3\Omega \quad (1.50)$$

En posant  $M = -C_\Omega \frac{\pi R^2}{2} \rho (\Omega R)^2 R$ , on définit le couple adimensionnel  $C_\Omega$  :

$$C_{\Omega} = \frac{16}{Re_{\Omega}} \quad (1.51)$$

Les résultats des simulations à  $Re_{\Omega} = 0.1$  sont présentés dans le tableau 1.3.

**Cas général**  $U_o \neq 0$  :

*Rubinow & Keller* (1961) ont calculé de manière analytique par une méthode de développements asymptotiques raccordés la solution de cet écoulement pour le régime de Stokes, c'est à dire  $Re_{\Omega} \ll 1$  et  $Re \ll 1$ . Les expressions à l'ordre  $Re$  de la force de traînée  $F_D = C_D \pi R^2/2 \rho U_o U_o$ , de la force de portance  $F_L = C_L \rho \vartheta_b U_o \times \Omega$  et du couple  $M = -C_{\Omega} \pi R^2/2 \rho (\Omega R)^2 R$  exercés sur la sphère sont utilisables dans les situations où  $U_o$  et  $R \Omega$  sont du même ordre de grandeur. Lorsque  $Re_{\Omega} \equiv Re \ll 1$ , le coefficient de traînée, le coefficient de portance et le couple adimensionnel s'expriment en reprenant les définitions introduites dans l'introduction et précédemment (1.51) par :

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{9}{2} \quad (1.52)$$

$$C_L = \frac{3}{4} \quad (1.53)$$

$$C_{\Omega} = \frac{16}{Re_{\Omega}} \quad (1.54)$$

Les résultats des simulations à  $Re = 0.1$  et  $Re_{\Omega} = 0.1$  sont présentés dans le tableau 1.3.

Re	Re <sub>Ω</sub>	C <sub>D</sub>		C <sub>L</sub>		C <sub>Ω</sub>	
		Num.	(1.52)	Num.	(1.53)	Num.	(1.54)
0.	0.1	-	-	-	-	160.5	160
0.1	0.1	247.1	245.5	0.741	0.75	161.1	160

Tableau 1.3 : Valeur des coefficients adimensionnels  $C_D$ ,  $C_L$  et  $C_{\Omega}$ .

L'ensemble des résultats ( $U_o = 0$  et  $U_o \neq 0$ ) laisse apparaître une précision sur la valeur des coefficients adimensionnels  $C_D$ ,  $C_L$  et  $C_\Omega$  meilleure que 1.5%. Ces résultats ont été obtenus avec le maillage LCE et sont d'autant plus encourageants que celui-ci n'est pas le plus adapté à une telle configuration d'écoulement pour les raisons évoquées au paragraphe 1.6. En effet, les lignes de courant sont au voisinage de la sphère pratiquement circulaires. Le maillage polaire est dans cette situation beaucoup plus performant et nous a permis d'approcher le résultat théorique avec une erreur inférieure à 0.5%.

## **1.10 Conclusions**

---

Le code de simulation numérique JADIM résolvant directement les équations tridimensionnelles de Navier-Stokes et de la température a été écrit en utilisant des méthodes numériques performantes d'inversion de systèmes tridimensionnels. De nombreux cas tests ont permis d'apprécier sa performance tant au niveau de la précision que de la stabilité. Ceci est particulièrement vrai dans les situations non-standard où les termes de courbure jouent un rôle essentiel. Ces résultats ont pu être obtenus grâce aux méthodes mises en oeuvre pour calculer de façon consistante les grandeurs géométriques et les facteurs de courbure.

Cet outil numérique a été essentiellement exploité sur le Cray C98 de l'IDRIS. Sa vectorisation a permis d'atteindre des vitesses d'exécution comprises entre 140 et 200 Mflops. La taille du maillage généralement utilisé pour les simulations autour d'un obstacle sphérique est  $90 \times 40 \times 32$  ce qui représente en considérant les cinq variables  $V_\xi$ ,  $V_\eta$ ,  $V_\phi$ ,  $P$  et  $T$  environ 580000 noeuds de calcul. La taille mémoire (10 Mmots) nécessaire au stockage de tous les tableaux est relativement modérée car une attention particulière a été portée à l'utilisation d'un minimum de matrices tridimensionnelles.

## Chapitre 2

## Chapitre 2

### Influence d'un écoulement accéléré sur le transfert thermique à la surface d'une bulle

- 2.1 Présentation
- 2.2 Solutions analytiques pour un écoulement potentiel
- 2.3 Ecoulement à accélération temporelle constante
- 2.4 Ecoulement oscillatoire à vitesse moyenne nulle
- 2.5 Ecoulement spatialement accéléré
- 2.6 Conclusions

## 2.1 Présentation

---

Les effets dynamiques des écoulements axisymétriques accélérés sur une bulle sphérique ont fait l'objet d'un nombre croissant d'études au cours de ces dernières années et leur dynamique est désormais assez bien connue [cf. *Magnaudet et al.*, 1995 et les références citées par ces auteurs]. Cette constatation est beaucoup moins vraie si l'on s'intéresse au transfert thermique ou massique entre une bulle et de tels écoulements. D'un point de vue général, seul le cas de la sphère solide a été abordé dans quelques situations instationnaires bien particulières.

Le premier cas de figure très fréquemment rencontré dans la littérature est l'établissement de la couche limite thermique d'une inclusion plongée au sein d'un écoulement subissant une brusque variation de température. Ce problème a été traité soit en considérant que la température interfaciale est constante, la loi d'établissement de la couche limite thermique évoluant alors en  $1/\sqrt{t}$ , soit en prenant en compte l'évolution temporelle de la température interfaciale en raison de l'échange thermique avec l'écoulement. L'étude de ce cas de figure réalisée par *Konopliv & Sparrow* (1971 et 1972) montre que l'établissement de la couche limite thermique s'effectue de manière quasi-statique. *Abramzon & Elata* (1984) ont repris ce problème en considérant des rapports de chaleur massique fluide/particule différents et ont montré que selon le rapport choisi d'importants effets d'histoires entrent en jeu, l'évolution temporelle de la couche limite n'étant alors plus quasi-statique. *Michaelides & Feng* (1994) ont complété l'étude de ce problème en s'intéressant, à petit nombre de Peclet, au transfert thermique lorsque le champ externe et la température interfaciale sont tous deux instationnaires. Leur calcul consiste, par une méthode de perturbation, à décomposer le champ de température en un champ non-perturbé par la sphère et un champ perturbé où l'effet advectif est négligé. Il en résulte que le transfert interfacial peut être décrit à l'aide d'une intégrale d'histoire de forme analogue à celle intervenant dans l'expression de la force de Basset que l'on rencontre en régime de Stokes instationnaire.

Le deuxième cas de figure très largement abordé, en particulier dans le cadre du génie chimique, est la réponse du transfert interfacial à la surface d'une sphère solide à un écoulement oscillatoire. D'après la synthèse bibliographique de *Al Tawel & Landau* (1976), il apparaît clairement que deux types de régime sont rencontrés. Le premier correspond à une évolution quasi-statique de la couche limite massique et est observé pour de faibles fréquences de pulsation de l'écoulement. Dans le second régime, l'intensité du transfert moyen décroît lorsque la pulsation de l'écoulement oscillatoire augmente, mettant en évidence d'importants effets d'histoire.

Plus récemment, *Brander & Brauer* (1992) ont étudié numériquement la décélération de  $Re_o = 100$  à  $Re_f = 0$  de l'écoulement autour d'une sphère solide à  $Pr = 0.73$ . Ils ont observé un comportement quasi-statique en début de décélération puis l'apparition d'importants effets d'histoire qui se traduisent notamment par un développement considérable du tourbillon derrière la sphère solide, lequel vient progressivement l'envelopper complètement.

Ainsi, lorsque la couche limite thermique d'une sphère solide est rendue instationnaire, soit par des conditions aux limites instationnaires, soit par un écoulement instationnaire, des effets d'histoire se manifestent. Ils peuvent alors modifier considérablement le transfert thermique entre la sphère et l'écoulement.

L'objectif des travaux analytiques et numériques présentés dans ce chapitre est de combler le manque d'information concernant le transfert thermique à la surface d'une bulle sphérique en étudiant différentes configurations académiques d'écoulements axisymétriques accélérés. Ces nouveaux résultats doivent permettre une meilleure compréhension et une meilleure description des transferts entre phase continue et phase dispersée dans les écoulements complexes, généralement traités en supposant un comportement thermique quasi-statique. Cette étude, qui fait suite au travail numérique de *Rivero* (1991) concernant les effets dynamiques subis par une inclusion sphérique plongée dans un écoulement axisymétrique accéléré, reprend les mêmes configurations d'écoulements. Il s'agit de deux écoulements temporellement accélérés et d'un écoulement spatialement accéléré dont les champs de vitesse non perturbés sont définis ci-après :

- écoulement axisymétrique uniformément accéléré :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = U_x(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_x = (U_o + \alpha t) \mathbf{e}_x \quad (2.1)$$

- écoulement axisymétrique oscillatoire à vitesse moyenne nulle :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = U_x(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_x = U_o \sin(2\pi f t) \mathbf{e}_x \quad (2.2)$$

- écoulement axisymétrique de déformation pure homogène :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = U_x(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_x + U_r(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_r = (U_o + \alpha x) \mathbf{e}_x - \frac{\alpha r}{2} \mathbf{e}_r \quad (2.3)$$

Les nombres adimensionnels, dépendant du temps pour les configurations (2.1) et (2.2), choisis pour décrire ces écoulements sont les suivants :

Le nombre de Reynolds : 
$$Re(t) = \frac{2 R |U_x(\mathbf{x} = \mathbf{0}, t)|}{v}$$

Le nombre de Peclet : 
$$Pe(t) = Re Pr = \frac{2 R |U_x(\mathbf{x} = \mathbf{0}, t)|}{\chi}$$

Le nombre d'accélération : 
$$Ac(t) = \frac{2 R |a_x(\mathbf{x} = \mathbf{0}, t)|}{|U_x(\mathbf{x} = \mathbf{0}, t)|^2}$$

où  $Pr = v/\chi$  est le nombre de Prandtl et  $a_x(\mathbf{x} = \mathbf{0}, t)$  est la composante suivant  $\mathbf{e}_x$  de l'accélération instantanée  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \partial\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)/\partial t + \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  de l'écoulement non perturbé évaluée au centre de l'inclusion. Dans le cas de l'écoulement oscillatoire, le nombre de Strouhal  $St = 2 R f/U_0$  sera également utilisé.

Les effets sur le transfert thermique dus à des conditions aux limites instationnaires pour la température ne sont pas abordés dans cette étude. La température loin de l'inclusion  $T_\infty$  est maintenue constante. De plus, on rappelle (chapitre 1, § 1.7.3) que la chaleur massique et la conductivité thermique de l'inclusion sont supposées être suffisamment grandes pour que sa température  $T_p$  soit constante et uniforme. Le transfert thermique interfacial est exprimé à l'aide des nombres de Nusselt instantanés  $Nu_{loc}(\theta, t)$  et  $Nu(t)$  définis au paragraphe 1.8.b. On rappelle que  $\theta$  est l'angle polaire dont l'origine est fixée au point d'arrêt amont de l'écoulement. Le nombre de Nusselt de l'écoulement stationnaire uniforme correspondant à  $Re(t)$  et  $Pr$  est noté  $Nu_s$ . Les valeurs de  $Nu_s$  utilisées comme références pour l'interprétation des résultats numériques de cette étude sont regroupées dans le tableau A4.1 de l'annexe 4.

La première partie de ce chapitre est consacrée à deux calculs analytiques du transfert thermique entre une bulle et les écoulements (2.1) et (2.3). La suite de ce chapitre présente successivement les résultats des expériences numériques concernant les trois écoulements précédemment définis.

## 2.2 Solutions analytiques pour un écoulement potentiel

Les équations de la mécanique des fluides ont l'inconvénient, mais aussi malgré tout, l'intérêt de n'offrir de solutions analytiques exactes que dans de rares configurations d'écoulement. Même lorsque la géométrie du problème est aussi simple que celle de l'écoulement autour d'un obstacle sphérique, seules les solutions correspondant à des situations



asymptotiques sont analytiquement accessibles. Ces solutions se raréfient d'autant plus que le problème dynamique devient spatialement ou temporellement non-uniforme et que l'on y adjoint de surcroît l'équation d'advection-diffusion de la température. Nous nous proposons dans cette partie de mettre en évidence par un calcul analytique les effets de tels écoulement sur le transfert thermique à la surface d'une bulle sphérique. Dans ce but les solutions des écoulements temporellement ou spatialement accélérés, respectivement (2.1) et (2.3), ont été recherchées.

Le calcul est conduit en considérant l'écoulement comme potentiel et en supposant la couche limite thermique mince, hypothèses acceptables dès lors que les nombres de Reynolds et de Peclet sont grands devant l'unité. Le principe de la méthode de résolution du champ de température  $T(r, \theta, t)$  proposé par *Ruckenstein* (1967) consiste à introduire un changement d'échelle  $\eta = (r - R)/\delta(\theta, t)$  prenant en compte l'épaisseur  $\delta(\theta, t)$  de la couche limite thermique. La résolution de l'équation aux dérivées partielles obtenues pour  $T(r, \theta, t)$  est ramenée à celle d'une équation différentielle simple du premier ordre pour  $T(\eta)$  et à celle d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour  $\delta(\theta, t)$ .

### 2.2.a Résolution du problème général

Compte tenu de l'axisymétrie de l'écoulement, l'équation d'advection-diffusion de la température s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \chi \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.6.a)$$

$V_r$  et  $V_\theta$  étant les composantes radiales et tangentielles du champ de vitesse de l'écoulement potentiel correspondant à la configuration étudiée. Les conditions aux limites et initiales du problème thermique s'écrivent :

$$\begin{aligned} T(r = R, \theta, t) &= T_p \\ T(r \rightarrow \infty, \theta, t) &= T_\infty \\ T(r, \theta, t = 0) &= T_o(r, \theta) \end{aligned} \quad (2.6.b)$$

Compte tenu de l'hypothèse de couche limite mince ( $R \gg \delta$ ), l'équation (2.6.a) est simplifiée à l'aide des relations (2.7) à l'intérieur de la couche limite thermique [*Ruckenstein*, 1958].

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &\gg \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \gg \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \\ \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} &\approx \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le système (2.6) est alors résolu en introduisant les grandeurs adimensionnelles :

$$\begin{aligned} T^* &= (T - T_\infty) / (T_p - T_\infty) \\ y &= (r - R) / R \\ t^+ &= (t \chi) / R^2 \\ Pe_r &= (2 R V_r) / (\chi y) \\ Pe_\theta &= (2 R V_\theta) / \chi \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le système adimensionnel ainsi obtenu s'écrit :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^+} + y \frac{Pe_r}{2} \frac{\partial T^*}{\partial y} + \frac{Pe_\theta}{2} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \quad (2.9.a)$$

avec les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$\begin{aligned} T^*(y=0, \theta, t^+) &= 1 \\ T^*(y \rightarrow \infty, \theta, t^+) &= 0 \\ T^*(y, \theta, t^+ = 0) &= T_o^*(y, \theta) \end{aligned} \quad (2.9.b)$$

La résolution de  $T^*(y, \theta, t^+)$  dans la couche limite s'effectue à l'aide du changement d'échelle  $\eta = y / \delta^*(\theta, t^+)$  où  $\delta^*(\theta, t^+) = \delta(\theta, t^+) / R$  est l'épaisseur de la couche limite thermique adimensionnalisée par le rayon. Le problème à l'intérieur de la couche limite thermique se décompose alors de la manière suivante :

$$\frac{d^2 T^*}{d\eta^2} + C \eta \frac{dT^*}{d\eta} = 0 \quad (2.10.a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \delta^2}{\partial t^+} + \frac{Pe_\theta}{4} \frac{\partial \delta^2}{\partial \theta} - \frac{Pe_r}{2} \delta^2 = C \quad (2.10.b)$$

en supposant à priori que le champ de vitesse vérifie :

$$\begin{aligned} Pe_r &= Pe_r(\theta, t^+) \\ Pe_\theta &= Pe_\theta(\theta, t^+) \end{aligned} \quad (2.10.c)$$

et avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} T^*(\eta = 0) &= 1 \\ T^*(\eta \rightarrow \infty) &= 0 \\ \delta^*(\theta, t^+ = 0) &= \delta_o^*(\theta) \end{aligned} \quad (2.10.d)$$

où  $\delta_o^*(\theta)$  est l'épaisseur de la couche limite thermique du champ de température initial  $T_o^*(y, \theta)$  et la constante  $C$  est obtenue en exploitant cette condition initiale. Le problème en  $\delta$  ainsi écrit n'est pas fermé car il manque une condition sur  $\theta$ . Cette condition est obtenue en prenant en compte la géométrie de l'écoulement qui est axisymétrique :

$$\left( \frac{\partial \delta^*}{\partial \theta} \right)_{\theta=0, \pi} = 0 \quad (2.10.e)$$

La résolution de (2.10.a) est immédiate et l'expression de  $T^*(\eta)$  est :

$$T^*(\eta) = 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{C}{2}} \eta \right) \quad (2.11.a)$$

où 
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2) ds \quad (2.11.b)$$

Compte tenu de (2.11.a) et en posant  $\varepsilon = \delta^2 / (C Pe_o)$  où  $Pe_o$  est le nombre de Peclet de l'écoulement à l'instant  $t^+ = 0$ , le nombre de Nusselt local s'exprime par :

$$Nu_{loc}(\theta, t^+) = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{Pe_o} \varepsilon(\theta, t^+)^{-1/2} \quad (2.12)$$

Le système (2.13) qui reste à résoudre pour  $\varepsilon$  fait intervenir  $Pe_r(\theta, t^+)$  et  $Pe_\theta(\theta, t^+)$  dont les expressions dépendent du problème dynamique envisagé :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t^+} + \frac{Pe_\theta(\theta, t^+)}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} - Pe_r(\theta, t^+) \varepsilon = 2 Pe_o \quad (2.13.a)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta, t^+ = 0) &= \varepsilon_0(\theta) \\ \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right)_{\theta=0, \pi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13.b)$$

### 2.2.b Application à l'écoulement instationnaire

Le calcul qui suit est utilisable pour tout écoulement potentiel uniforme rendu instationnaire à partir de l'écoulement stationnaire dont les nombres de Reynolds et de Peclet sont respectivement  $Re_0$  et  $Pe_0$ . L'expression du champ de vitesse instationnaire non-perturbé par la présence de la bulle s'écrit  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = U_\infty(t) \mathbf{e}_x$ . L'effet d'histoire dynamique (équivalent de la force de Basset pour une sphère solide) étant généralement négligeable à la surface d'une bulle (*Rivero, 1991*), le champ de vitesse est obtenu en considérant son évolution temporelle comme quasi-statique. Le potentiel instantané des vitesses s'écrit alors :

$$\Phi(r, \theta, t) = -r \cos \theta \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) U_\infty(t) \quad (2.14)$$

Compte tenu de l'hypothèse de couche limite mince et de l'écriture adimensionnelle choisie,  $Pe_r$  et  $Pe_\theta$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} Pe_r(\theta, t^+) &= -3 Pe(t^+) \cos \theta \\ Pe_\theta(\theta, t^+) &= \frac{3}{2} Pe(t^+) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le système (2.13) est résolu en posant  $\varepsilon(\theta, t^+) = f(\theta, t^+) / (\sin \theta)^4$ . La nouvelle équation aux dérivées partielles obtenue pour  $f$  s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t^+} + \frac{3}{4} Pe(t^+) \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} = 2 Pe_0 \sin^4 \theta \quad (2.16)$$

- Solution initiale  $f_0(\theta) = f(\theta, t^+ = 0)$  :

La solution initiale  $f_0(\theta) = f(\theta, t^+ = 0)$  correspond à la couche limite thermique de l'écoulement potentiel de nombre de Peclet  $Pe_0$ . Cette solution s'écrit [*Ruckenstein 1958*] :

$$f_o(\theta) = \frac{3}{8} \left[ \frac{2}{3} - \cos\theta + \frac{1}{3} \cos^3\theta \right] \quad (2.17)$$

- Solution  $f(\theta, t^+)$  d'un écoulement instationnaire quelconque :

La résolution de (2.16) s'effectue à l'aide du changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \zeta = \text{Ln} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{4} \int_0^{t^+} \text{Pe}(t') dt' \\ \psi = t^+ \end{cases} \quad (2.18)$$

et  $f(\zeta, \psi)$  est alors solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{2 \text{Pe}_o}{\text{ch}^4 \left[ \zeta + \frac{3}{4} \int_0^\psi \text{Pe}(t') dt' \right]} \quad (2.19)$$

L'intégration de (2.19) est réalisée en tenant compte de la condition initiale (2.17) et  $f(\theta, t^+)$  s'exprime finalement sous la forme :

$$\begin{aligned} f(\theta, t^+) = & \frac{8}{3} F_o \left[ \text{Ln} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{4} \int_0^{t^+} \text{Pe}(t') dt' \right] \\ & + 2 \text{Pe}_o \int_0^{t^+} \frac{dt''}{\text{ch}^4 \left[ \text{Ln} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \int_0^{t''} \text{Pe}(t') dt' \right]} \end{aligned} \quad (2.20.a)$$

avec

$$F_o(x) = \frac{2}{3} - \text{th}(x) + \frac{1}{3} \text{th}(x)^3 \quad (2.20.b)$$

Ainsi la solution générale du transfert thermique entre une bulle sphérique et un écoulement potentiel devenu instationnaire à partir de l'écoulement stationnaire de nombre de Reynolds  $\text{Re}_o = \text{Pe}_o/\text{Pr}$  est donnée par le nombre de Nusselt local dont l'expression est :

$$\text{Nu}_{\text{loc}}(\theta, t^+) = \frac{2\sqrt{\frac{\text{Pe}_o}{\pi}} \sin^2\theta}{\sqrt{\frac{4}{3}\text{Fo} \left[ \text{Ln} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{4} \int_0^{t^+} \text{Pe}(t') dt' \right] + \text{Pe}_o \int_0^{t^+} \frac{dt''}{\text{ch}^4 \left[ \text{Ln} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \int_0^{t''} \text{Pe}(t') dt' \right]}}} \quad (2.21)$$

Dans l'expression (2.21) apparaissent plusieurs intégrales temporelles qui montrent nettement l'effet d'histoire pour le transfert thermique généré par l'instationnarité de l'écoulement. Dans le paragraphe (2.3.a), la relation (2.21) est appliquée au cas particulier de l'écoulement uniformément accéléré. Elle y est comparée aux expériences numériques correspondant à des écoulements satisfaisant les hypothèses utilisées pour ce calcul à savoir des nombres de Reynolds et de Peclet grands devant l'unité.

### 2.2.c Application à un écoulement stationnaire spatialement accéléré

L'écoulement spatialement accéléré étudié est l'écoulement axisymétrique de déformation pure. Le potentiel des vitesses de cet écoulement stationnaire défini par (2.3) s'écrit autour d'une bulle sphérique :

$$\Phi(r, \theta) = -r \cos\theta \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) U_o + \frac{\alpha}{12} \left( \frac{3}{2} r^2 + \frac{R^5}{r^3} \right) (1 + 3\cos(2\theta)) \quad (2.22)$$

Compte tenu de l'hypothèse de couche limite mince et de l'écriture adimensionnelle choisie,  $\text{Pe}_r$  et  $\text{Pe}_\theta$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Pe}_r(\theta) &= -3 \text{Pe}_o \cos\theta + \frac{5}{8} \text{Ac} \text{Pe}_o (1 + 3\cos(2\theta)) \\ \text{Pe}_\theta(\theta) &= -\frac{3}{2} \text{Pe}_o \sin\theta - \frac{5}{4} \text{Ac} \text{Pe}_o \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Le problème étant stationnaire l'équation (2.13.a) à résoudre est une équation différentielle simple du premier ordre en  $\theta$  de la forme :

$$a(\theta) \frac{d\varepsilon}{d\theta} + b(\theta) \varepsilon = 2 \quad (2.24.a)$$

$$\text{avec } \begin{cases} a(\theta) = \frac{3}{4} \sin\theta - \frac{5}{8} \text{Ac} \sin(2\theta) \\ b(\theta) = 3 \cos\theta - \frac{5}{8} \text{Ac} (1 + 3 \cos(2\theta)) \end{cases} \quad (2.24.b)$$

La résolution de (2.24) est immédiate et la solution s'écrit :

$$\varepsilon(\theta) = \beta(\theta) \exp[\alpha(\theta)] \quad (2.25.a)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha(\theta) = -\text{Ln} \left[ (-6 + 5\text{Ac} \cos\theta)^2 \sin^4 \theta \right] \\ \beta(\theta) = k - 96 \cos\theta + 40 \text{Ac} \cos^2\theta + 32 \cos^3\theta - 20 \text{Ac} \cos^4\theta \end{cases} \quad (2.25.b)$$

L'écriture du développement limité de  $\beta(\theta)$  au voisinage de  $\theta = 0$  impose  $k = 64 - 20\text{Ac}$  pour que  $\text{Nu}_{\text{loc}}(\theta)$  ait une valeur finie en  $\theta = 0$ . Le nombre de Nusselt local s'écrit alors :

$$\text{Nu}_{\text{loc}}(\theta) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\text{Pe}_o} |-6 + 5 \text{Ac} \cos\theta| \sin^2\theta}{\sqrt{16 - 24 \cos\theta + 8 \cos^3\theta - 5 \text{Ac} \sin^4\theta}} \quad (2.26)$$

L'intégration de  $\text{Nu}_{\text{loc}}(\theta)$  sur toute la surface de la bulle aboutit au remarquable résultat :

$$\text{Nu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\text{Pe}_o} \quad (2.27)$$

Ainsi, même si localement l'effet de l'accélération spatiale se fait sentir, le transfert total à la surface de la bulle est indépendant de l'accélération spatiale et correspond à celui de l'écoulement non-perturbé au centre de la bulle. Il est également à noter qu'aucune hypothèse n'a été faite sur l'intensité de la déformation spatiale de l'écoulement.

## 2.3 Ecoulement à accélération temporelle constante

### 2.3.a Présentation des expériences numériques

L'écoulement à accélération temporelle constante est simulé en imposant comme condition de vitesse à l'entrée du domaine le profil de vitesse (2.1) :

$$U(\mathbf{x}, t) = U_x(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_x = (U_0 + \alpha t) \mathbf{e}_x$$

Les caractéristiques de cet écoulement sont le nombre de Reynolds instantané  $Re(t)$ , le nombre d'accélération instantané  $Ac(t) = 2 R \alpha / |U_x(\mathbf{x} = \mathbf{0}, t)|^2$  et le nombre de Prandtl  $Pr$ . On note également  $Re_0$  et  $Re_f$  les nombres de Reynolds initial et final ainsi que  $Ac_0$  et  $Ac_f$  les nombres d'accélération initial et final. Les champs de vitesse et de température initiaux correspondent au résultat numérique parfaitement convergé de l'écoulement stationnaire aux nombres de Prandtl  $Pr$  et de Reynolds  $Re_0$ . L'écoulement est ensuite accéléré en imposant à chaque itération la nouvelle condition de vitesse à l'entrée du domaine. Les simulations numériques réalisées sont regroupées dans le tableau 2.1. Ces différentes expériences ont été choisies de façon à observer les effets d'accélération ou de décélération d'intensités variées à différents nombres de Reynolds.

$Re_0$	$Re_f$	$Ac_0$	$Pr$
0.1	1	0.2 2 20	1
1	0.1	-0.2 -2 -20	1
10	100	0.2 2 20	1 10
100	10	-0.2 -2 -20	1 10
200	500	0.2 2 20	1
500	200	-0.2 -2 -20	1

Tableau 2.1 : simulations numériques réalisées.

### 2.3.b Résultats numériques

De manière générale l'ensemble de nos résultats montre que d'importants effets d'histoire apparaissent lorsque  $Ac(t) > 1$  et sont d'autant plus prononcés que  $Ac(t)$  est grand alors que le comportement est quasi-statique pour  $Ac(t) < 1$ . Ces effets d'histoire sont présents tant à petit qu'à grand nombre de Reynolds et se manifestent dès lors que la couche limite thermique n'a pas le temps de s'adapter à l'évolution temporelle de l'écoulement. Afin d'interpréter ces différences de comportement, considérons les temps caractéristiques de chaque phénomène



présent dans l'établissement de la couche limite thermique et comparons les avec le temps caractéristique de l'accélération de l'écoulement en nous appuyant sur le fait que plus le temps caractéristique d'un phénomène physique est court plus celui-ci s'établit rapidement. La couche limite thermique est contrôlée par l'advection et la diffusion dont les temps caractéristiques peuvent être respectivement définis par :

$$t_c = \frac{2 R}{U_x(t)} \quad (2.28.a)$$

$$t_d = \frac{(2 R)^2}{\chi} \quad (2.28.b)$$

Les temps caractéristiques  $t_c$  et  $t_d$  sont liés par la relation  $t_d = Pe(t) t_c$ . Ainsi selon la valeur de  $Pe(t)$ , la couche limite peut être essentiellement contrôlée soit par la diffusion ( $Pe(t) \ll 1$  car  $t_d \ll t_c$ ) soit par l'advection ( $Pe(t) \gg 1$  puisque  $t_d \gg t_c$ ). Le temps caractéristique de l'accélération de l'écoulement peut être défini quant à lui par :

$$t_a = \frac{U_x(t)}{a_x(t)} \quad (2.28.c)$$

Compte tenu de leur définition,  $t_c$  et  $t_d$  sont liés à  $t_a$  par les relations suivantes :

$$t_c = Ac(t) t_a \quad (2.29.a)$$

$$t_d = Ac(t) Pe(t) t_a \quad (2.29.b)$$

On constate donc que le temps caractéristique de la mise en accélération du fluide  $t_a$  est inférieur à  $t_c$  pour une accélération du fluide telle que  $Ac > 1$  et à  $t_d$  lorsque  $Ac Pe > 1$ . Dans l'une ou l'autre de ces situations ou même dans les deux réunies, la couche limite thermique n'a pas le temps de suivre complètement l'évolution temporelle imposée par la dynamique de l'écoulement et des effets d'histoire plus ou moins importants sont observés selon l'intensité de  $Ac(t)$  et selon l'influence respective de l'advection et de la diffusion dans le contrôle de la couche limite thermique. Par contre dans les situations telles que  $Ac < 1$  et  $Ac Pe < 1$ , le champ thermique a le temps de s'adapter à l'accélération de l'écoulement et son évolution est quasi-statique. Ces deux comportements distincts sont illustrés par le tracé du nombre de Nusselt instantané  $Nu(t)$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re(t)$ . Afin de mettre en évidence ces

effets d'histoire thermique,  $Nu(t)$  est comparé avec le nombre de Nusselt  $Nu_s$  de l'écoulement stationnaire correspondant (figures 2.1 à 2.4). Trois types d'évolution se dégagent en fait de nos résultats :

- Le nombre de Nusselt instantané est à chaque instant celui de l'écoulement stationnaire de même nombre de Reynolds. L'évolution temporelle est alors quasi-statique pendant toute la durée de l'accélération étudiée.

- L'écart entre  $Nu(t)$  et  $Nu_s$  ne cesse de s'accroître. L'évolution thermique présente alors des effets d'histoire de plus en plus importants et l'écart entre  $Nu(t)$  et  $Nu_s$  peut devenir considérable.

- Les deux comportements précédents sont observés successivement ce qui correspond aux situations où le nombre d'accélération passe par  $Ac = 1$ . Lorsque l'écoulement est accéléré,  $Ac(t)$  décroît et la succession de ces deux comportements est donc observée lorsque  $Ac_o > 1$  et  $Ac_f < 1$  ; les effets d'histoire interviennent alors dès le début de l'accélération et s'estompent ensuite progressivement, le comportement devenant finalement quasi-statique plus ou moins rapidement selon le retard accumulé. Lorsque l'écoulement est décéléré,  $Ac(t)$  est une fonction croissante et ce type d'évolution est observé dans les cas de figure où  $Ac_o < 1$  et  $Ac_f > 1$  ; le comportement thermique est alors initialement quasi-statique et présente ensuite des effets d'histoire croissants. Ce dernier comportement a également été observé par *Brander & Brauer* (1992) dans le cas de la sphère solide. Ces auteurs ont étudié numériquement la décélération d'un écoulement de  $Re_o = 100$  à  $Re_f = 0$  à  $Pr = 0.73$ . Dans leurs simulations, les nombres d'accélération initial et final sont respectivement  $Ac_o = 0.1$  et  $Ac_f \rightarrow \infty$  ce qui leur permet d'observer une évolution quasi-statique en début de décélération et d'importants effets d'histoire ensuite. Considérons parmi les résultats numériques obtenus un cas de figure où ce changement de comportement est très marqué. Prenons par exemple la simulation numérique correspondant à  $Re_o = 10$ ,  $Re_f = 100$  et  $Ac_o = 20$  (figure 2.2). A partir de l'instant initial où  $Re(t) = Re_o = 10$  et  $Ac(t) = Ac_o = 20$ , l'écart entre le transfert instantané et le transfert quasi-statique augmente progressivement. A un certain moment cet écart cesse de s'accroître pour diminuer jusqu'à l'instant final où  $Re(t) = Re_f = 100$  et  $Ac(t) = Ac_f = 0.2$ . Au moment où le nombre d'accélération  $Ac(t) = 1$  la vitesse de l'écoulement est :

$$U_x(t) = U_o \sqrt{\frac{Ac_o}{Ac(t)}} = U_o \sqrt{Ac_o} \quad (2.30)$$

Le nombre de Reynolds instantané correspondant est alors dans cet exemple  $Re(t) = Re_o \sqrt{Ac_o} \approx 45$ . Cette valeur correspond bien au moment où la tendance concernant

l'écart entre  $Nu(t)$  et  $Nu_s$  s'inverse. On constate qu'un léger écart entre  $Nu(t)$  et  $Nu_s$  persiste ensuite dans ce cas de figure alors que le comportement temporel devient parfaitement quasi-statique pour l'accélération entre les mêmes nombres de Reynolds mais avec  $Ac_o = 2$ . Cette différence vient du fait que pour  $Ac_o = 20$ , la diffusion thermique reste en retard tout au long de la phase d'accélération (car  $Pe_f Ac_f = 2$  c'est à dire  $t_d > t_a$ ) alors que pour  $Ac_o = 2$  la diffusion a le temps de s'adapter à l'accélération du fluide (car  $Pe_f Ac_f = 0.2$  c'est à dire  $t_d < t_a$ ) dès que la vitesse de l'écoulement vérifie :

$$U_x(t) = U_o \frac{Pe_o Ac_o}{Pe(t) Ac(t)} = U_o Pe_o Ac_o \quad (2.31)$$

c'est à dire pour  $Re(t) > Re_o Pe_o Ac_o \approx 20$  dans cet exemple. Cette valeur correspond bien au moment où (figure 2.2) le tracé de  $Nu(t)$  commence à se rapprocher de celui de  $Nu_s$ .

Ces comportements observés pour le transfert thermique global se retrouvent parfaitement sur la distribution locale du nombre de Nusselt  $Nu_{loc}(\theta, t)$  (figures 2.5 à 2.8). On constate que l'effet de l'accélération se fait sentir sur l'ensemble de la surface de la bulle mais que la forme de la distribution suivant l'angle polaire est peu affectée. On ne retrouve bien entendu pas dans le cas de la bulle le phénomène observé pour la sphère solide où la présence du tourbillon vient modifier la distribution de  $Nu_{loc}(\theta, t)$  par rapport à la situation stationnaire. En effet, lorsque l'écoulement est accéléré, le tourbillon apparaît derrière la sphère solide avec un retard dépendant de  $Ac_o$ . Inversement, en écoulement décéléré, il tarde à disparaître. Lorsque  $Ac_o$  est suffisamment grand, il enveloppe même complètement la sphère en fin de décélération [Brander & Brauer, 1992].

L'influence du nombre de Prandtl a été étudiée pour l'accélération et la décélération entre  $Re = 10$  et  $Re = 100$  pour des nombres de Prandtl  $Pr = 1$  et  $Pr = 10$ . Outre la différence d'intensité du transfert entre les deux situations la comparaison des figures 4.2 et 4.3 ne laisse apparaître aucune modification sensible du comportement déjà décrit. L'augmentation du nombre de Prandtl a pour effet de favoriser l'advection par rapport à la diffusion dans la couche limite thermique. Ainsi puisque pour  $Re > 10$  l'effet d'advection domine l'effet de la diffusion même à  $Pr = 1$ , les effets d'histoire dépendent essentiellement de la manière dont l'advection s'adapte à l'accélération de l'écoulement, ce qui explique leur indépendance par rapport à  $Pr$ .

Le tracé des isothermes à différents instants permet également d'illustrer l'effet d'histoire décrit précédemment (figures 2.9 et 2.10). On retrouve par exemple (figure 2.10) qu'en fin de décélération à  $Re_f = 10$  pour  $Ac_o = -2$  le champ thermique est beaucoup moins diffusé que dans la situation stationnaire correspondant à la condition initiale  $Re_o = 10$  pour  $Ac_o = 2$

(figure 2.9) ce qui illustre un transfert interfacial plus intense. Par contre la représentation des isothermes à  $Re_f = 100$  pour  $Ac_o = 2$  (figure 2.9) est comparable à celle de l'écoulement stationnaire correspondant à la condition initiale  $Re_o = 100$  pour la décélération (figure 2.10). Ceci laisse supposer que dans ce cas de figure le transfert interfacial est proche de celui de l'écoulement stationnaire ce qui correspond bien au comportement quasi-statique observé (figure 2.2).

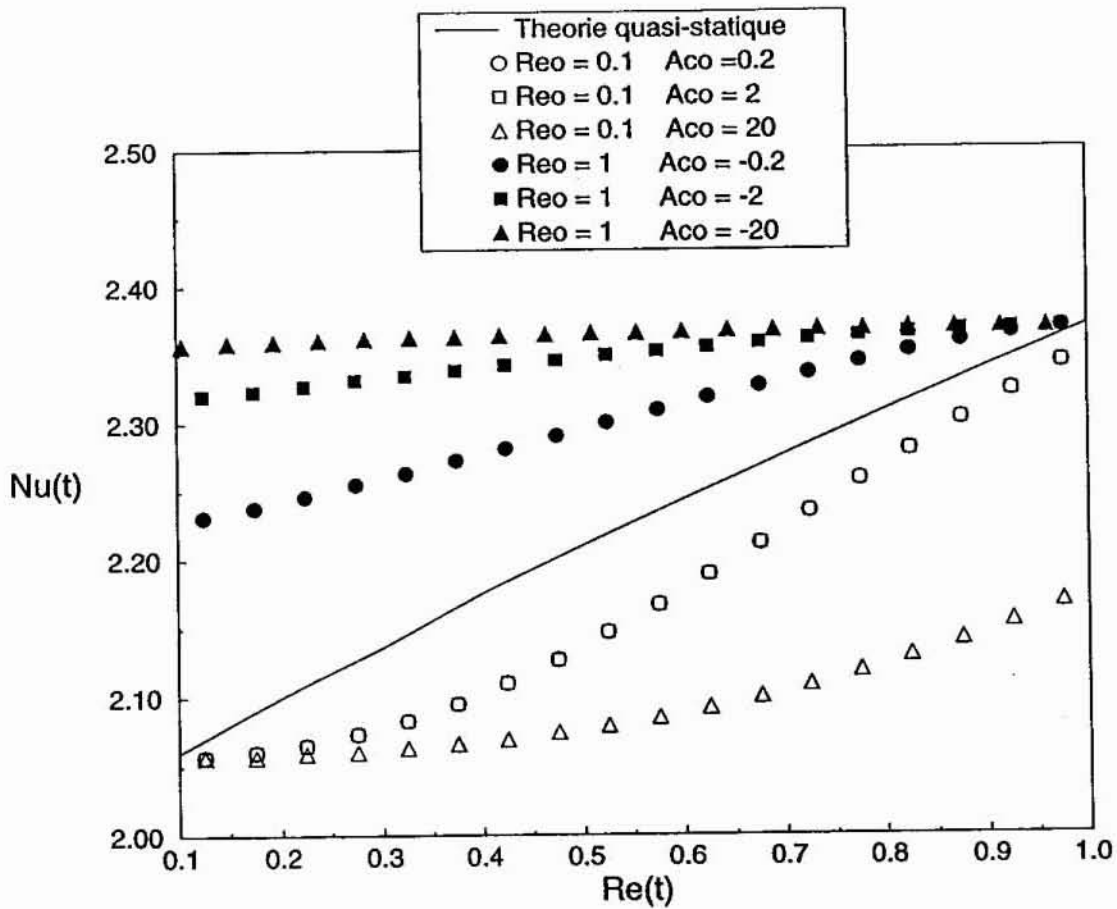
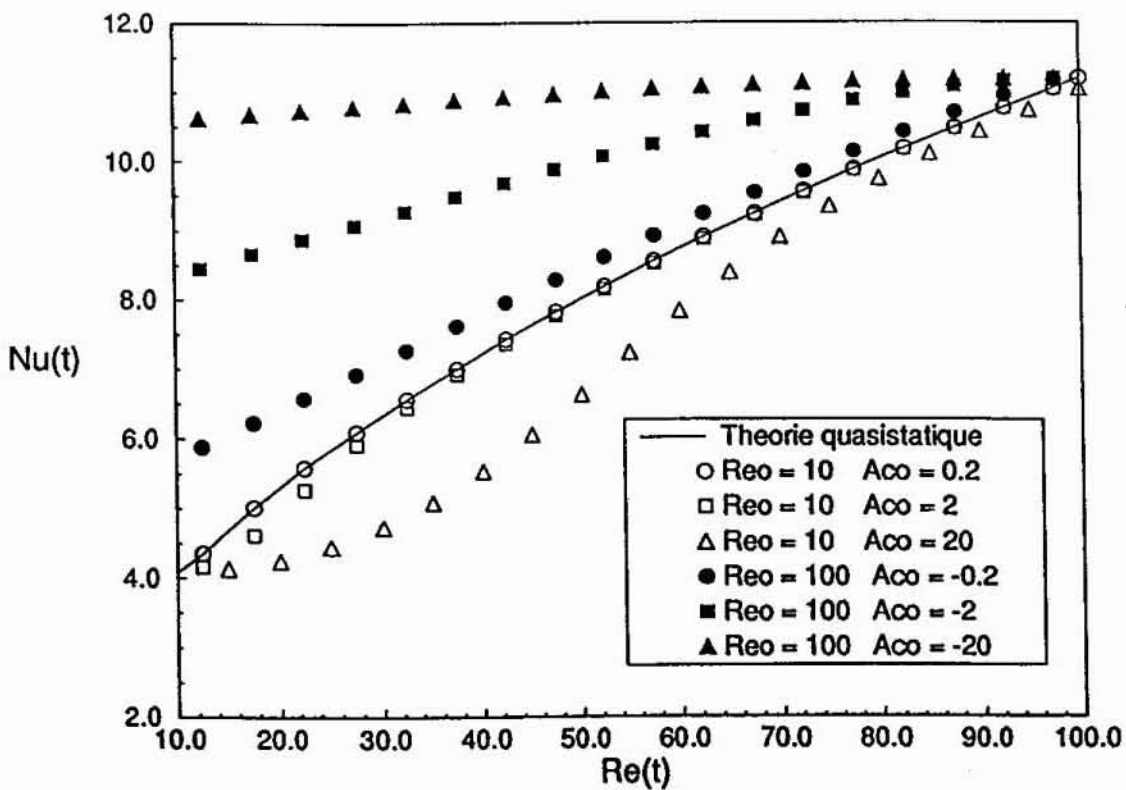
Les simulations numériques entre  $Re = 200$  et  $Re = 500$  ont été réalisées de manière à rester dans le cadre des situations physiques où la forme de la bulle peut encore être considérée comme sphérique (pour le couple de fluides eau-air) tout en se rapprochant le plus possible des conditions de l'écoulement potentiel. La solution analytique (2.21) obtenue au paragraphe (2.2) a été appliquée au cas de l'écoulement uniformément accéléré. En reprenant les notations définies au paragraphe 2.2, l'expression de  $Pe(t^+)$  est pour cet écoulement :

$$Pe(t^+) = Pe_o + \frac{1}{4} Ac_o Pe_o^2 t^+ \quad (2.32)$$

Les résultats analytiques et numériques sont en parfait accord tant pour le nombre de Nusselt instantané  $Nu(t)$  (figure 2.4) que pour la distribution locale  $Nu_{loc}(\theta, t)$  à la surface de la bulle (figures 4.7 et 4.8). Ce résultat analytique confirmé par les simulations numériques permet de montrer que l'évolution instantanée du transfert thermique dépend de l'histoire de l'écoulement au travers d'intégrales de la forme :

$$\int_0^{t^+} Pe(t') dt'$$

Ainsi les simulations numériques réalisées pour l'écoulement temporellement accéléré ont permis de mettre en évidence qu'à la surface d'une bulle, des effets d'histoire peuvent devenir prépondérants pour la thermique alors qu'ils sont négligeables pour la dynamique. Cette différence de comportement provient de la nature même des conditions aux limites existant à l'interface. La vitesse tangentielle à la surface de la bulle n'est pas imposée mais résulte de l'annulation de la contrainte de cisaillement alors que la température de l'interface est imposée. On peut ainsi faire le parallèle avec la différence de comportement observée vis à vis des effets d'histoire dynamiques entre une bulle et une sphère solide. Pour la sphère solide ces effets d'histoire ne sont pas nécessairement négligeables car la condition d'adhérence impose la nullité de la vitesse tangentielle.

Figure 2.1 : Nombre de Nusselt  $Nu(t)$  entre  $Re = 0.1$  et  $Re = 1$  à  $Pr = 1$ Figure 2.2 : Nombre de Nusselt  $Nu(t)$  entre  $Re = 10$  et  $Re = 100$  à  $Pr = 1$

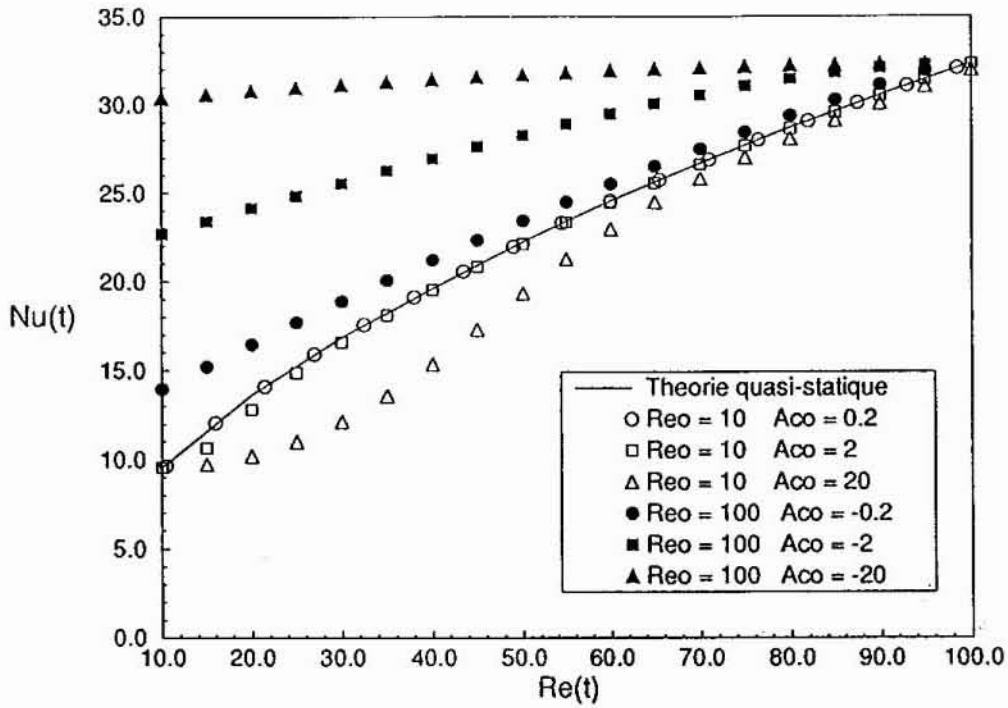


Figure 2.3 : Nombre de Nusselt  $Nu(t)$  entre  $Re = 10$  et  $Re = 100$  à  $Pr = 10$

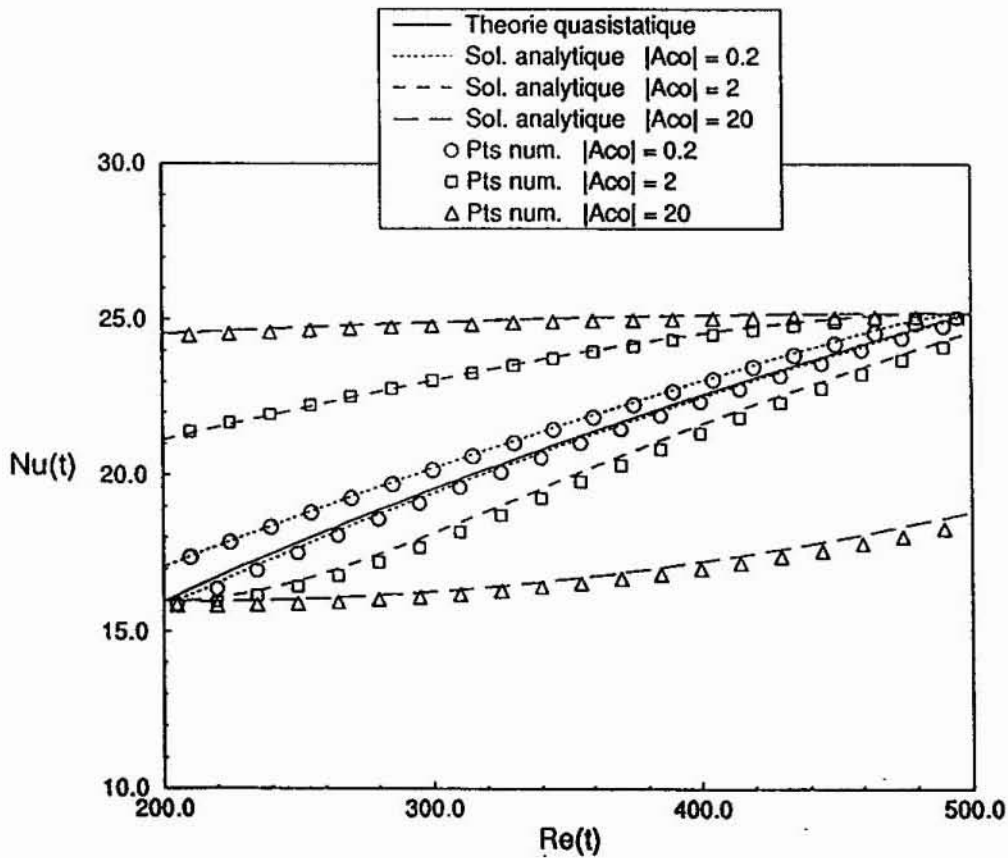


Figure 2.4 : Nombre de Nusselt  $Nu(t)$  entre  $Re = 200$  et  $Re = 500$  à  $Pr = 1$

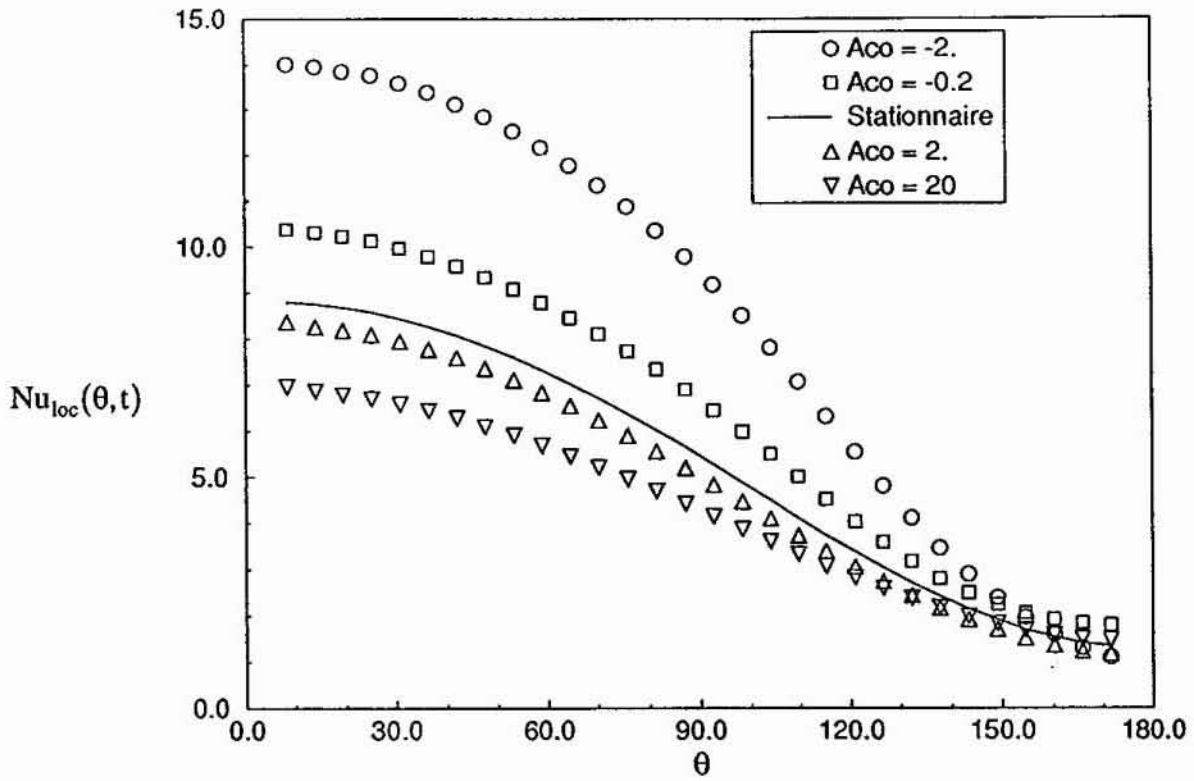


Figure 2.5 : Nombre de Nusselt local  $Nu_{loc}(\theta, t)$  à  $Re(t) = 20$  et  $Pr = 1$

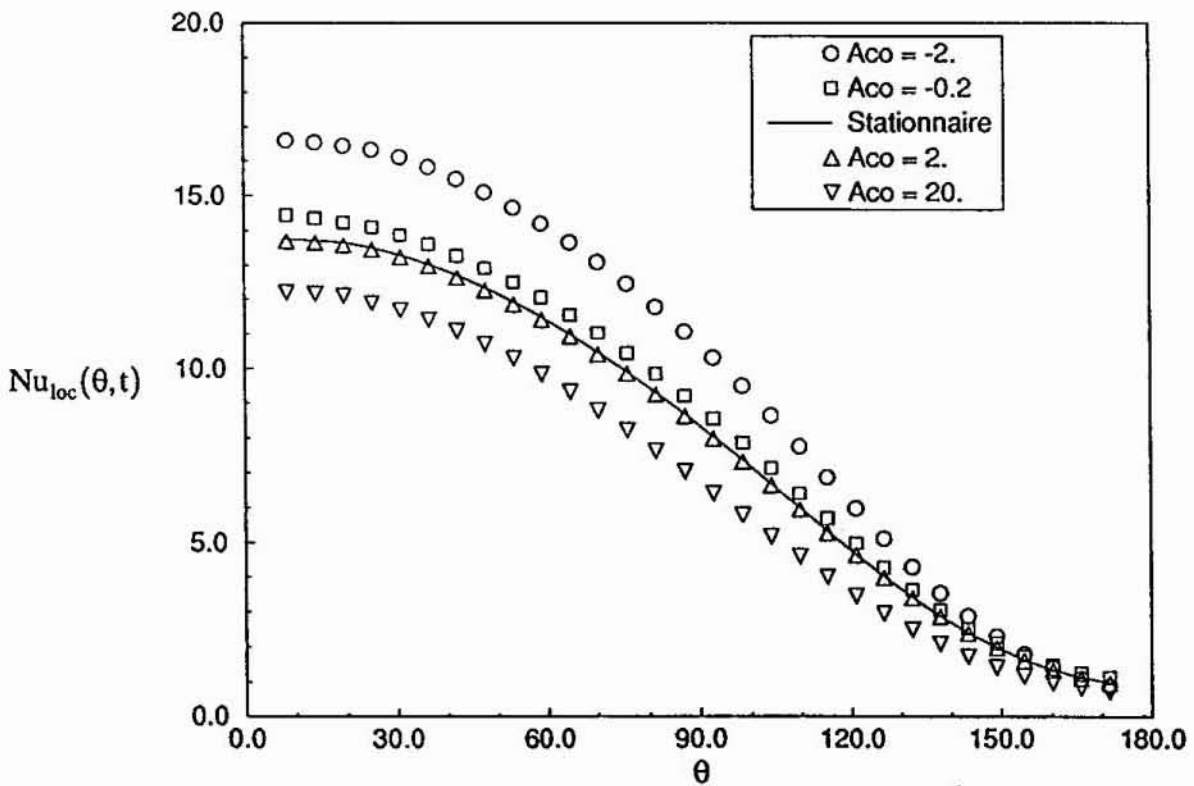


Figure 2.6 : Nombre de Nusselt local  $Nu_{loc}(\theta, t)$  à  $Re(t) = 50$  et  $Pr = 1$



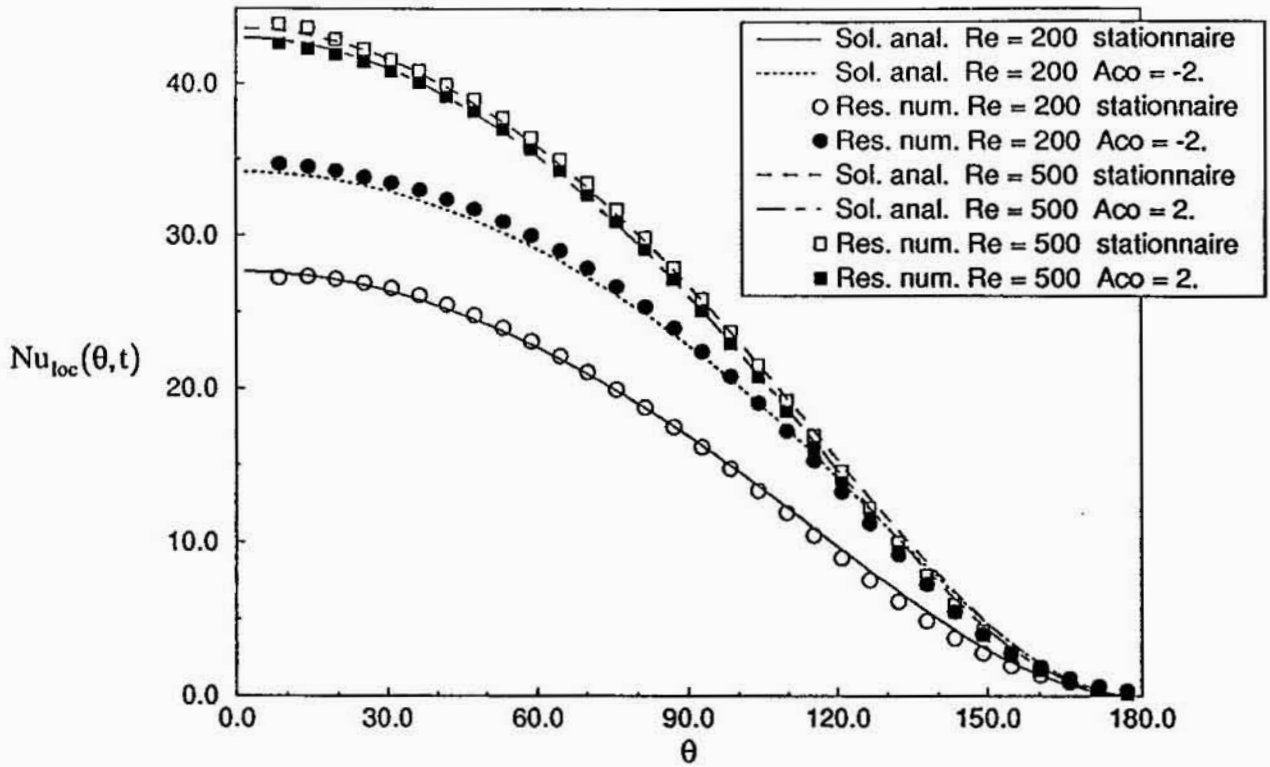


Figure 2.7 : Nombre de Nusselt local  $Nu_{loc}(\theta, t)$  à  $Re(t) = 200$ ,  $Re(t) = 500$  et  $Pr = 1$

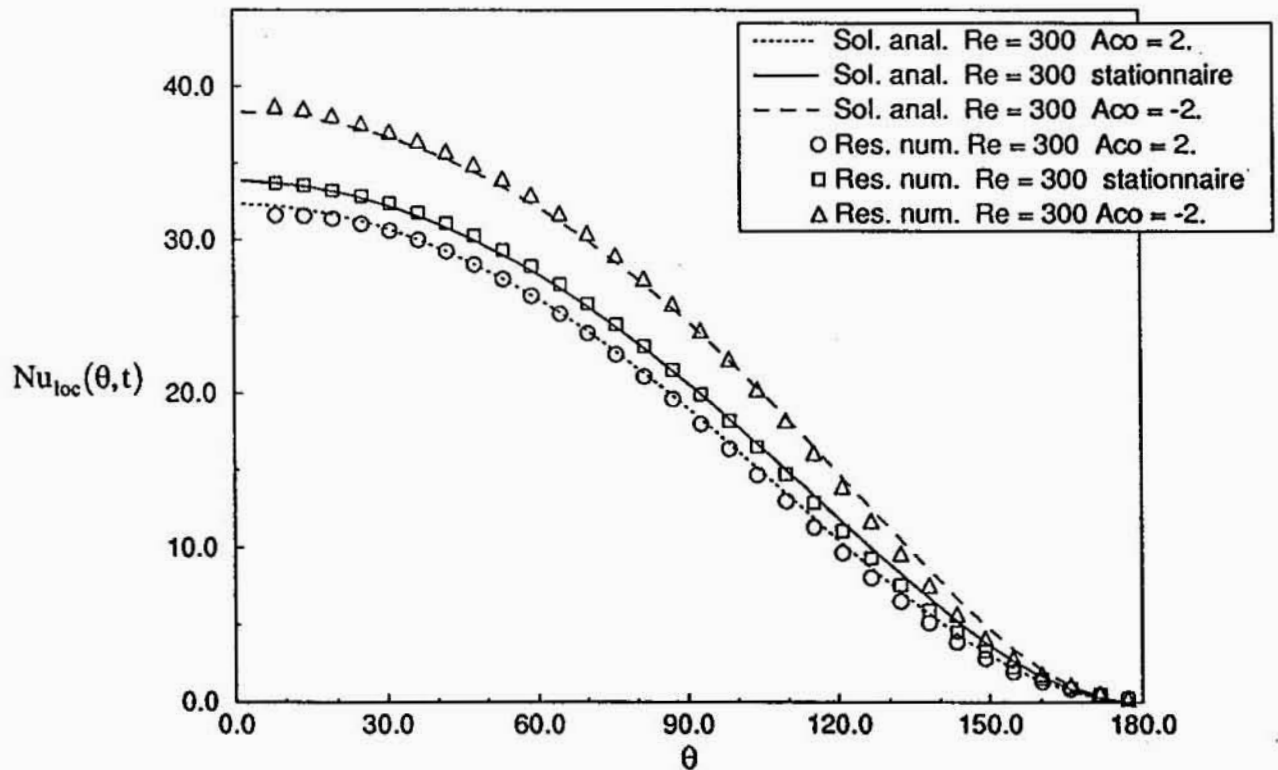


Figure 2.8 : Nombre de Nusselt local  $Nu_{loc}(\theta, t)$  à  $Re(t) = 300$  et  $Pr = 1$



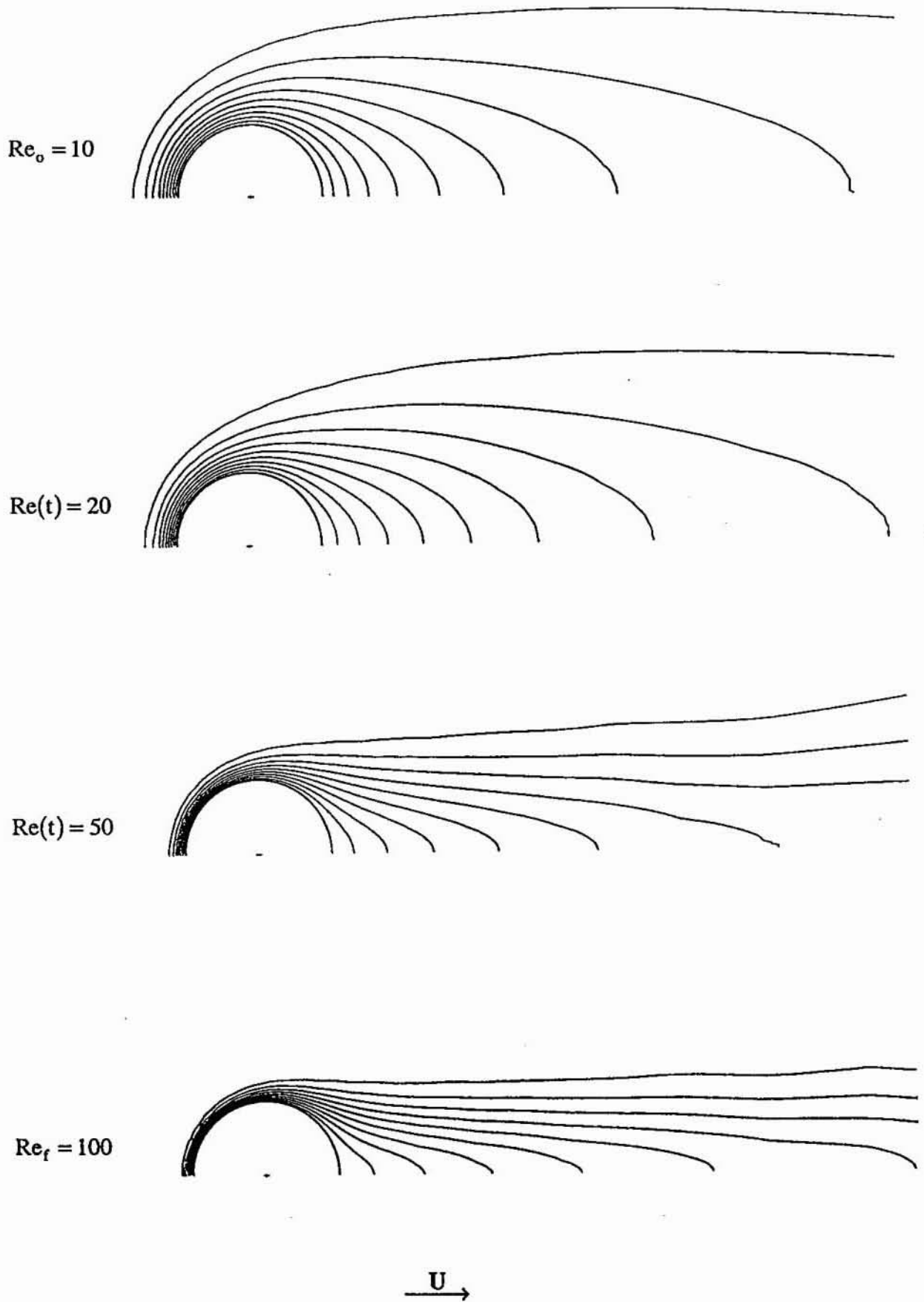


Figure 2.9 : Isothermes entre  $Re_o = 10$  et  $Re_f = 100$  pour  $Ac_o = 2$

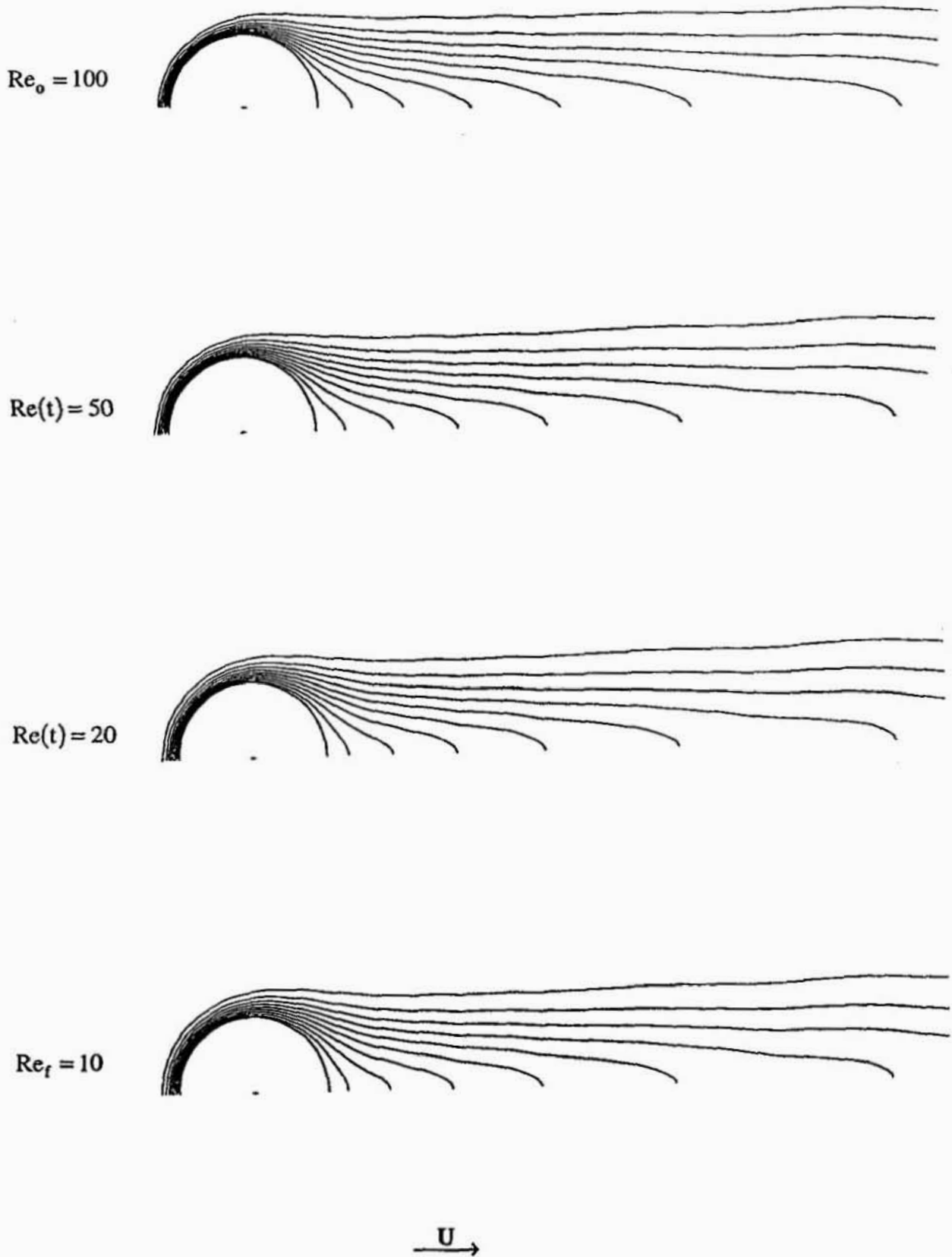


Figure 2.10 : Isothermes entre  $Re_o = 100$  et  $Re_f = 10$  pour  $Ac_o = -2$

## 2.4 Écoulement oscillatoire à vitesse moyenne nulle

---

### 2.4.a Présentation des expériences numériques

L'écoulement oscillatoire est obtenu en imposant le profil de vitesse (2.2) à l'entrée du domaine de calcul :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = U_x(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_x = U_o \sin(2\pi f t) \mathbf{e}_x$$

Les caractéristiques de cet écoulement sont les nombres de Reynolds maximal  $Re_o = (2RU_o)/\nu$ , de Strouhal  $St = 2 R f/U_o$  et de Prandtl  $Pr$ . Cet écoulement peut être décrit à chaque instant par les nombres instantanés de Reynolds  $Re(t)$  et d'accélération  $Ac(t)$  dont l'expression est :

$$Ac(t) = St \ 2\pi \frac{|\cos(2\pi f t)|}{|\sin(2\pi f t)|^2} \quad (2.33)$$

On note également  $\overline{Nu}$  le nombre de Nusselt moyen défini par :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} Nu(\tau) d\tau \quad (2.34)$$

ainsi que le champ de température moyen  $\overline{T(\mathbf{x})}$  :

$$\overline{T(\mathbf{x})} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} T(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (2.35)$$

et le champ de vitesse moyen  $\overline{V(\mathbf{x})}$  :

$$\overline{V(\mathbf{x})} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} V(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (2.36)$$

où  $T = f^{-1}$  est la période de l'écoulement non perturbé.

La condition initiale a peu d'importance pour ces simulations car seul le régime établi est étudié. Nous avons cependant pu observer que le régime transitoire est d'autant plus long que le nombre de Strouhal  $St$  est grand car, ainsi qu'il est décrit plus loin, le champ de température

moyen est en fait contrôlé par le champ de vitesse moyen dont la complexité croît avec  $St$ . Les simulations numériques réalisées sont présentées dans le tableau 2.2 où figurent également les valeurs de  $\overline{Nu}$  obtenues. Ces différentes expériences ont été choisies de façon à observer les effets de différents nombres de Strouhal  $St$  pour un nombre de Reynolds  $Re_o$  donné,  $Re_o$  étant fixé de manière à ce que l'amplitude de l'écoulement soit suffisante pour que les oscillations aient un effet appréciable sur la réponse thermique de la bulle.

St	$Re_o$	Pr	$\overline{Nu}$
0.02	100	1	6.18
0.1			3.89
1			2.69

Tableau 2.2 : valeurs de  $\overline{Nu}$  pour les simulations numériques réalisées.

#### 2.4.b Résultats numériques

De manière générale les résultats obtenus en régime établi montrent que les valeurs des nombres de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  (figure 2.11), instantané  $Nu(t)$  (figure 2.12) et local  $Nu_{loc}(\theta, t)$  (figure 2.13 et 2.14) sont fortement conditionnées par celle de la pulsation de l'écoulement c'est à dire par la valeur du nombre de Strouhal. Pour les mêmes raisons que celles évoquées pour l'écoulement uniformément accéléré, le développement du transfert interfacial dépend des rapports instantanés des temps caractéristiques (2.29.a et 2.29.b) du processus instationnaire et de chaque phénomène présent dans l'établissement de la couche limite thermique. Compte tenu de son expression pour cet écoulement (relation (2.33)),  $Ac(t)$  varie de 0 à l'infini au cours d'une période. Or plus la partie de la période correspondant à  $1 < Ac(t) < \infty$  est grande, plus long est le temps pendant lequel l'advection et la diffusion thermique ne peuvent suivre les évolutions de l'écoulement externe. Par conséquent comme d'après (2.33)  $Ac(t)$  est proportionnel à  $St$ , le retard de la thermique par rapport à la dynamique est d'autant plus important que le nombre de Strouhal est grand.

Ainsi, lorsque  $St \rightarrow \infty$ , l'évolution de la couche limite thermique n'a pas le temps de suivre l'accélération imposée par l'écoulement externe. Le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  décroît et tend alors vers le nombre de Nusselt  $Nu_D = 2$  caractéristique du régime diffusif pur (absence d'advection) tandis que le transfert local devient de moins en moins intense (figure

2.14). Par contre, lorsque  $St \rightarrow 0$ , la couche limite thermique s'adapte de plus en plus longtemps pendant une période aux évolutions temporelles de l'écoulement. Le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  tend alors vers le nombre de Nusselt  $\overline{Nu}_{QS} = 8.67$  calculé par la théorie quasi-statique à l'aide des résultats stationnaires de l'écoulement uniforme (Annexe 4).

La réponse thermique de la bulle est périodique et sa fréquence est le double de celle de l'écoulement car le transfert thermique interfacial garde toujours le même signe et ne dépend pas du sens de l'écoulement externe (figure 2.12). On constate sur cette figure que la forme de  $Nu(t)$  est proche d'une sinusoïde mais sa légère déformation fait penser à celle d'un oscillateur dont plusieurs harmoniques sont excités. De plus lorsque  $St$  augmente, outre la diminution de l'intensité du transfert interfacial, le retard de la thermique par rapport à l'évolution temporelle imposée par la dynamique se manifeste par un déphasage entre  $Nu(t)$  et  $U_x(t)$ . La décomposition de  $Nu(t)$  en série de Fourier permet de mettre en évidence les différents harmoniques présents ainsi que leur phase. La réponse thermique instantanée de la bulle  $Nu(t)$ , prise sur une période de l'écoulement, apparaît alors sous la forme :

$$Nu(t) = \overline{Nu} + \sum_{n=1}^N S_{2n} \cos(2n 2\pi f t + \varphi_{2n}) \quad (2.37)$$

où  $S_{2n}$  et  $\varphi_{2n}$  sont respectivement l'amplitude et la phase du mode  $2n$ , leur intensité étant représentées sur les figures 2.15 et 2.16. La valeur de  $N$  correspond au nombre d'harmoniques excités. Il est déterminé à l'aide du critère (2.38) appliqué à l'amplitude  $S_{2n}$  et choisi de manière à être compatible avec la précision des calculs numériques.

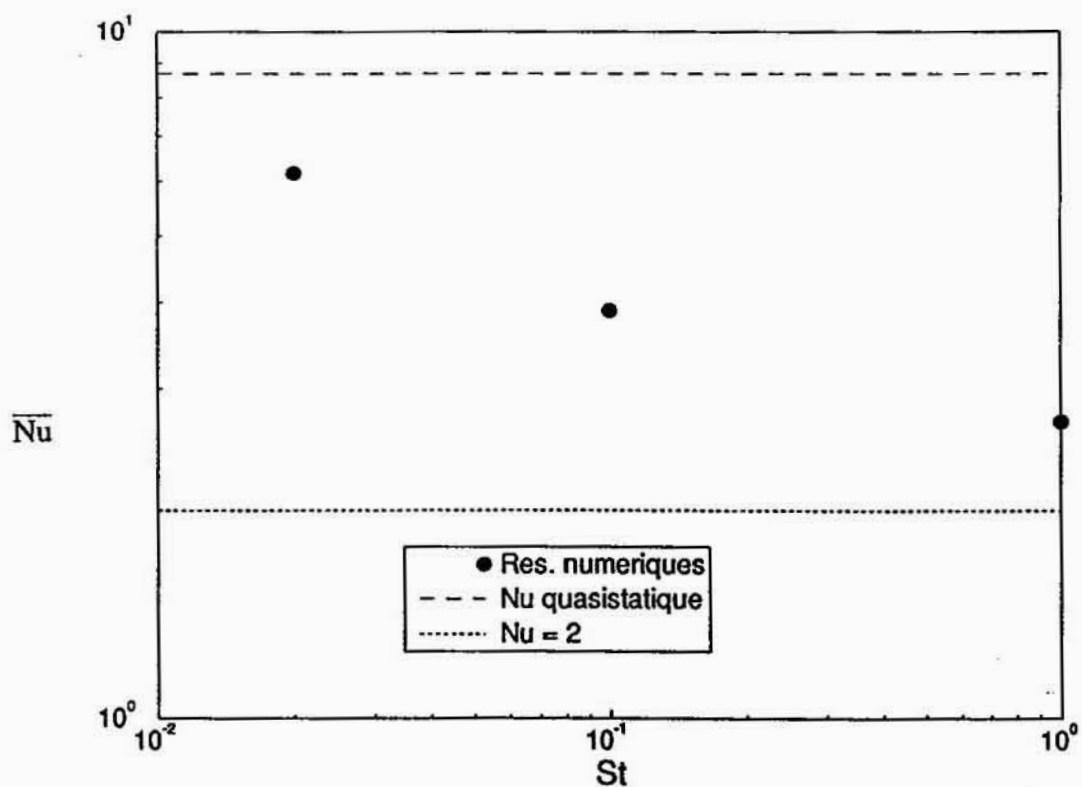
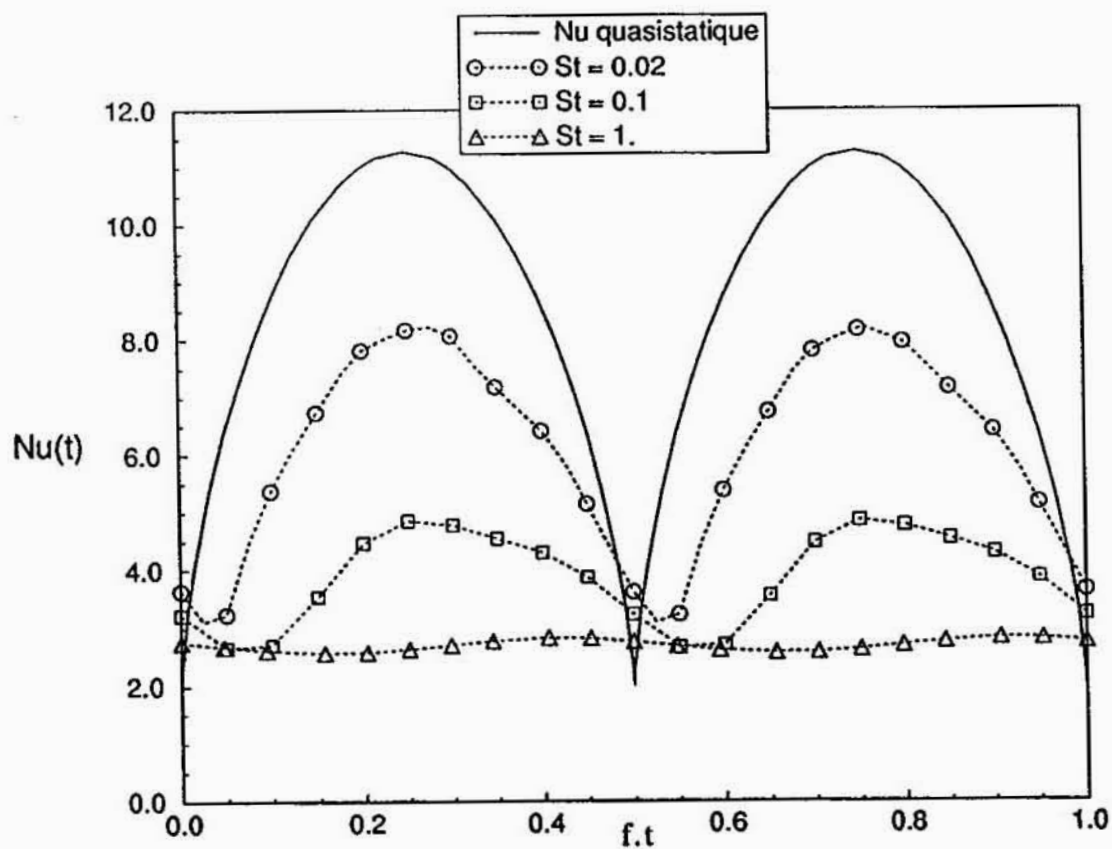
$$S_{2n} > 10^{-3} \overline{Nu} \quad (2.38)$$

La décomposition (2.37) ainsi obtenue confirme que la fréquence de  $Nu(t)$  est double de celle de l'écoulement c'est à dire que seules les harmoniques pairs sont excités. De plus on constate nettement que leur nombre  $N$  et leur amplitude  $S_{2n}$  sont inversement proportionnels au nombre de Strouhal (figure 2.15). Par exemple pour  $St = 1$  seul le premier harmonique est significatif alors que pour  $St = 0.02$  six harmoniques sont présents. On retrouve ainsi le fait que plus la fréquence des oscillations de l'écoulement est élevée moins la couche limite thermique a le temps de se développer. Les harmoniques mis en évidence semblent apparaître en cascade lorsque  $St$  diminue et sont caractérisées par une phase  $\varphi_{2n}$  dont l'amplitude est croissante avec le rang (figure 2.16). On note par ailleurs qu'à fort nombre de Strouhal le

coefficient de transfert est en avance de phase sur l'écoulement ( $\varphi_2$ ) alors qu'il est en retard lorsque  $St \ll 1$ .

On constate sur la figure 2.17 que le champ de température moyen  $\overline{T(\mathbf{x})}$  n'est pas composé d'isothermes sphériques comme on aurait pu s'y attendre. Ceci provient de l'existence d'un écoulement résiduel moyen  $\overline{\mathbf{V}(\mathbf{x})}$  autour de la bulle qualifié dans la littérature anglophone de "steady streaming". En effet, même si la moyenne temporelle du champ de vitesse non-perturbé est nulle, un écoulement moyen autour de la bulle est généré dans la couche limite dynamique : comme la vitesse tangentielle à l'extérieur de la couche limite est variable (elle est en fait proportionnelle à  $\cos(\theta) \cos(\omega t)$ ), la continuité impose l'apparition de vitesses radiales dans la couche limite. Il en résulte la création d'un flux de quantité de mouvement moyen  $\overline{UV}$  non nul qui ne peut être équilibré que par un flux visqueux de quantité de mouvement de la forme  $\nu \partial \overline{U} / \partial r$ . Cet écoulement moyen  $\overline{U}$  constitue le "steady streaming" [Batchelor 1967, p. 358]. La structure de cet écoulement moyen a été étudiée en détail pour une sphère solide par Riley (1966) et plus récemment par Chang & Maxey (1994). Selon les valeurs des nombres adimensionnels  $St$ ,  $Re_0$ ,  $M^2 = Re_0 St$  et  $Re_0/St$ , le "steady streaming" peut être composé d'un ou deux anneaux toriques de part et d'autre du plan équatorial de la sphère. Ces auteurs ont observé par exemple que, lorsque le nombre de Strouhal  $St$  augmente, une double structure apparaît et la décomposition de Fourier de la vorticité montre que le nombre d'harmoniques croît avec le nombre de Strouhal [Chang & Maxey, 1994]. Ces différentes structures de l'écoulement moyen sont également observées lorsque l'inclusion est une bulle sphérique (figure 2.18). Par contre l'effet sur le transfert interfacial est tout autre que celui observé sur la vorticité. En effet, le transfert thermique interfacial moyen semble surtout dépendre de l'intensité de l'écoulement moyen. L'intensité de l'écoulement moyen observée à  $Re_0 = 100$  est inversement proportionnelle à la valeur du nombre de Strouhal (figure 2.18) car le sillage derrière la sphère solide ou la bulle se développe d'autant plus que le nombre de Strouhal est faible. Ainsi, lorsque le nombre de Strouhal est faible, l'advection thermique moyenne autour de la bulle développe de manière plus intense le transfert thermique interfacial et par conséquent le nombre d'harmoniques excités. Le nombre de Nusselt moyen est alors d'autant plus éloigné de celui que l'on observe en diffusion pure ( $Nu_D = 2$ ), c'est à dire correspondant à l'écoulement non perturbé moyen. On retrouve ainsi l'intérêt des écoulements pulsés pour l'augmentation des rendements de transfert de masse en génie chimique par exemple. Finalement, nos résultats numériques montrent que le transfert thermique interfacial moyen correspondant au régime établi entre une bulle et un écoulement oscillatoire est essentiellement dépendant de l'intensité du "steady streaming" et non pas de sa structure.

*Drummond & Lyman* (1990) ont constaté, que pour des nombres de Strouhal plus grands que l'unité, le développement des structures de l'écoulement moyen entraîne l'accroissement du nombre de Nusselt moyen à la surface d'une sphère solide. Leurs résultats sont cependant à prendre avec précaution car le nombre de Nusselt moyen proposé par ces auteurs pour le régime établi l'est après 5 à 50 périodes ce qui compte tenu du nombre de périodes nécessaires pour obtenir le régime établi dans notre étude (à  $St = 1$  il est  $> 100$ ) apparaît comme insuffisant. Cette impression est renforcée par le tracé des lignes de courant de l'écoulement moyen proposé par ces auteurs qui est loin d'être symétrique. Nous avons alors réalisé une simulation à  $St = 10$  de l'écoulement oscillatoire autour d'une sphère solide. L'étude du régime transitoire permet de constater qu'après 20 périodes la valeur du nombre de Nusselt moyen est  $\overline{Nu} = 7.5$  ce qui correspond sensiblement à la valeur proposée par *Drummond & Lyman* (1990). Le régime établi n'est cependant pas atteint comme le montre la valeur  $\overline{Nu} = 3.50$  calculée après 150 périodes, le nombre de Nusselt moyen variant encore d'une période à l'autre de 0.2%. Cette observation nous permet de penser que les résultats proposés par *Drummond & Lyman* (1990) ne sont pas ceux correspondant au régime établi mais qu'ils permettent de conclure que pour un nombre donné d'oscillations de l'écoulement à partir de l'instant initial, le transfert thermique interfacial moyen est plus important lorsque le nombre de Strouhal augmente. Ceci montre également, comme nous l'avons observé dans cette étude, que le régime établi est alors plus long à atteindre.

Figure 2.11 : Nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$ Figure 2.12 : Nombre de Nusselt instantané  $Nu(t)$



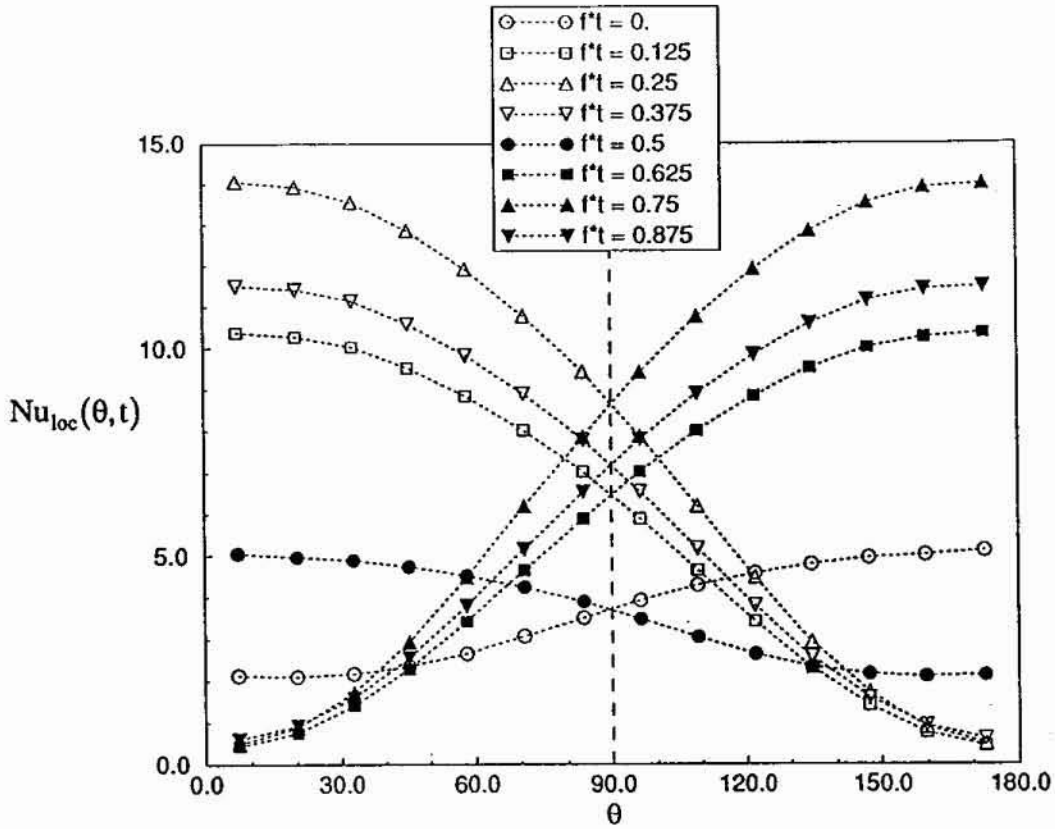


Figure 2.13 : Evolution du nombre de Nusselt local  $Nu_{loc}(\theta, t)$  à  $St = 0.02$

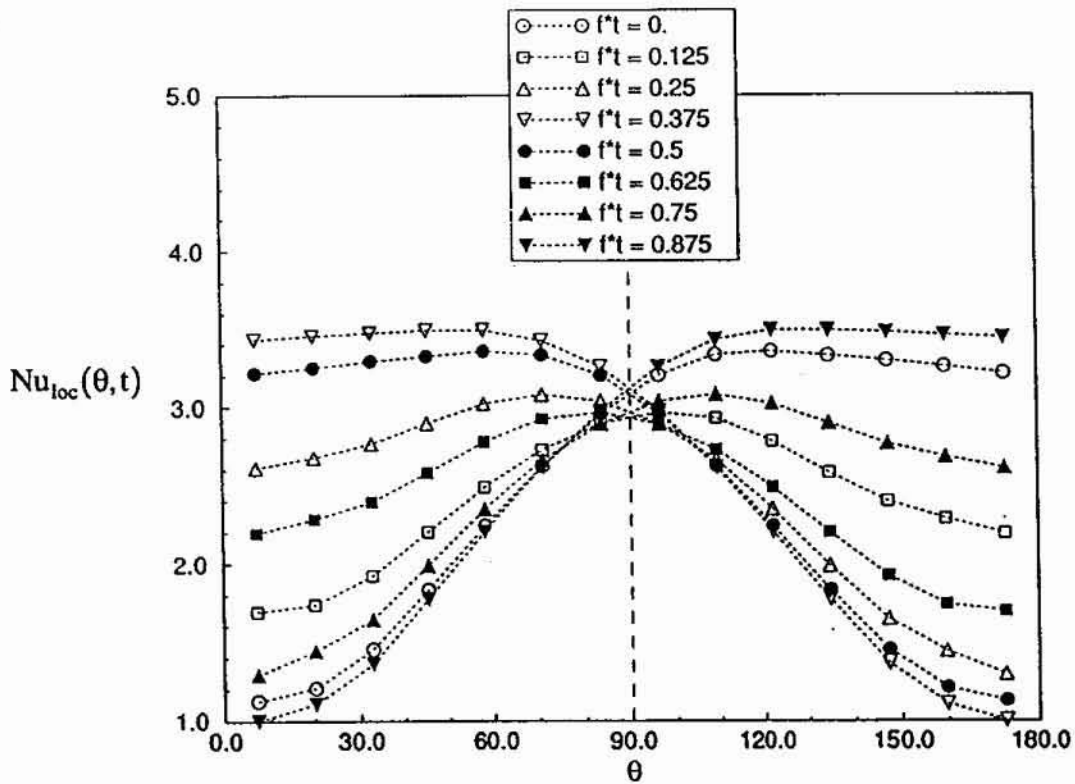
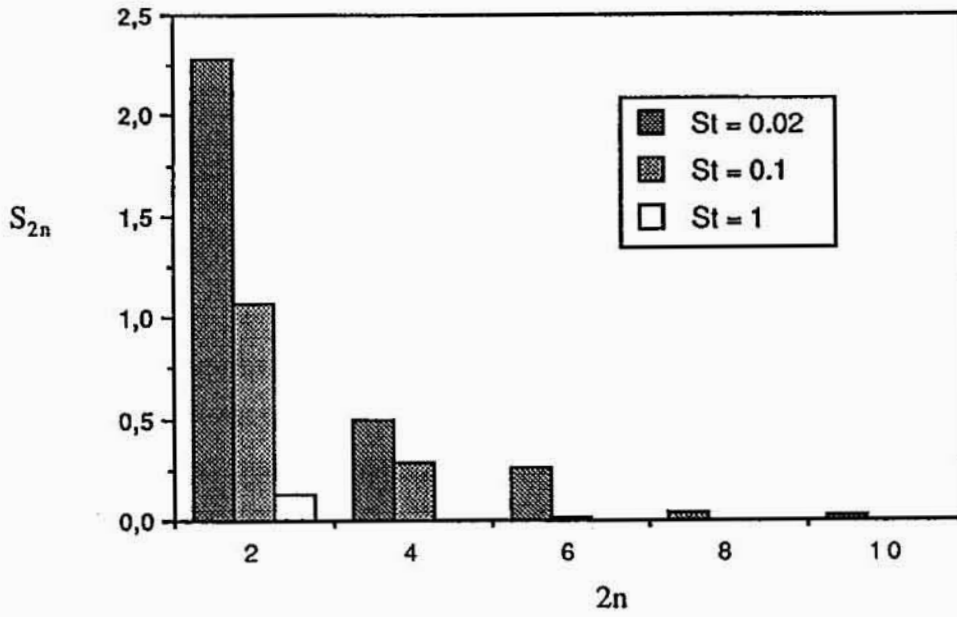
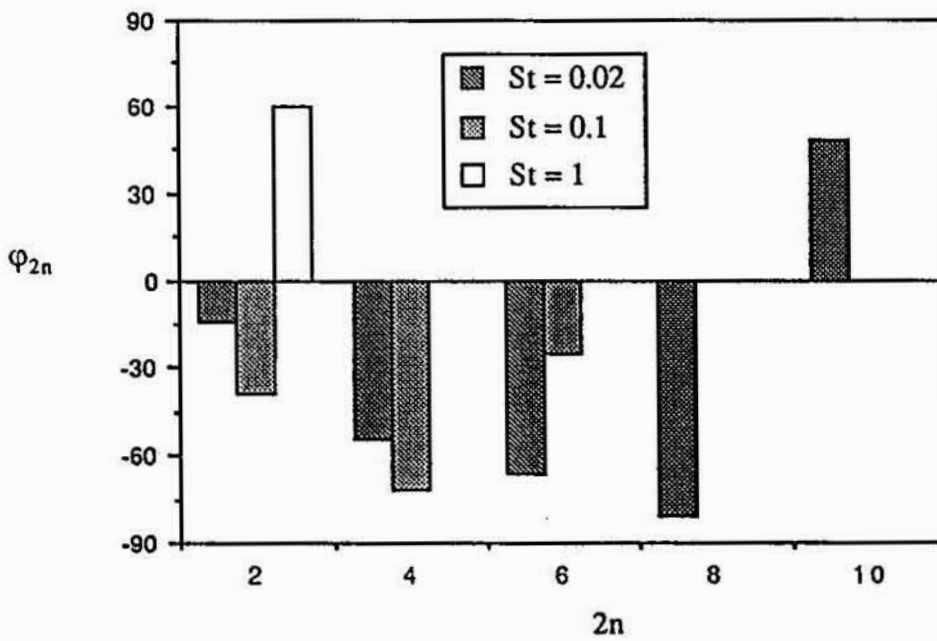


Figure 2.14 : Evolution du nombre de Nusselt local  $Nu_{loc}(\theta, t)$  à  $St = 1$

Figure 2.15 : Amplitude  $S_{2n}$  des harmoniquesFigure 2.16 : Phase  $\varphi_{2n}$  des harmoniques

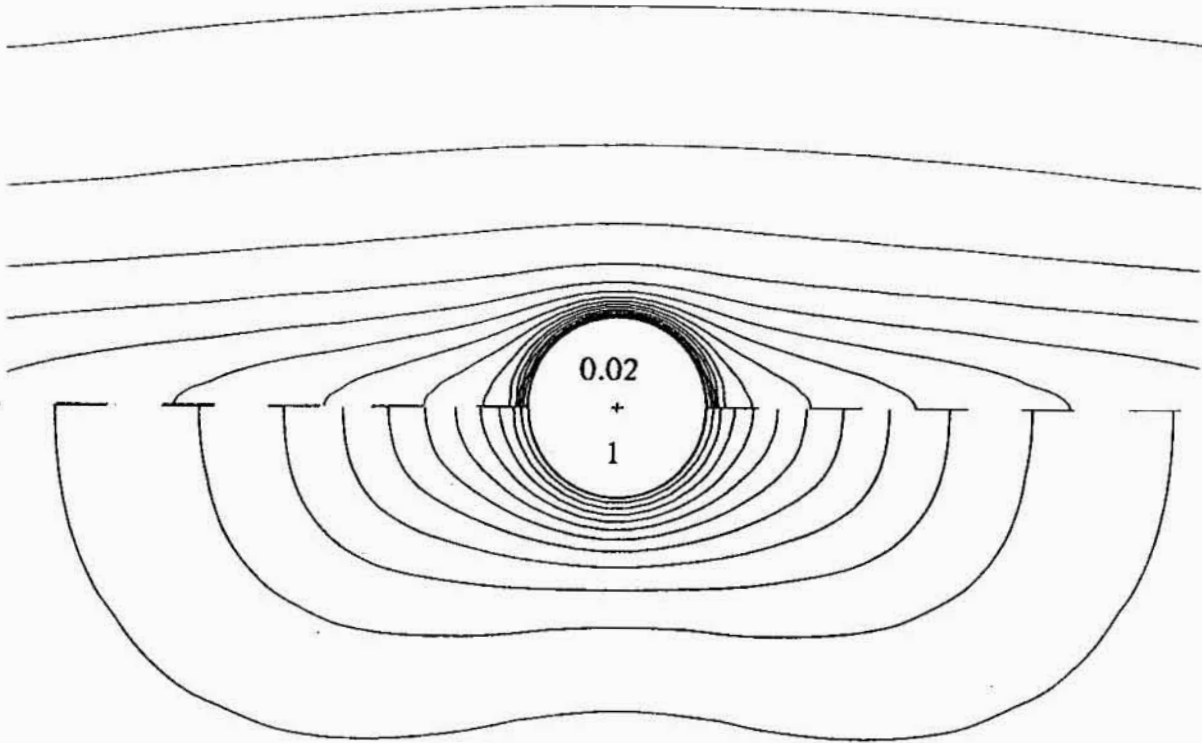


Figure 2.17 : Champ de température moyen à  $St = 1$  et  $St = 0.02$

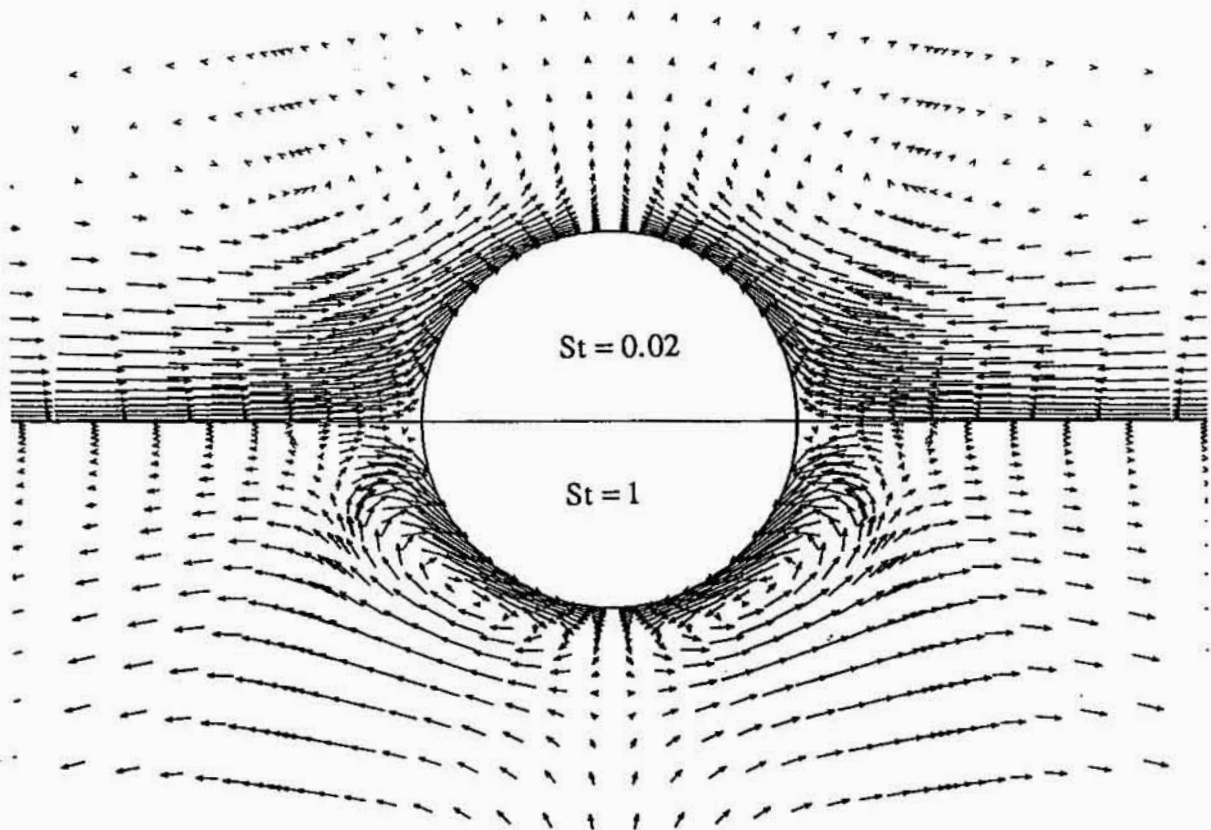


Figure 2.18 : "Steady streaming" à  $St = 1$  et  $St = 0.02$   
(Les vitesses à  $St = 1$ . sont amplifiées 5 fois)

## 2.5 Écoulement spatialement accéléré

L'écoulement axisymétrique spatialement accéléré est simulé en imposant le profil de vitesse (2.3) à l'entrée du domaine de calcul et sur sa frontière supérieure :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = U_x(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_x + U_r(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_r = (U_0 + \alpha x) \mathbf{e}_x - \frac{\alpha r}{2} \mathbf{e}_r$$

Ses caractéristiques sont le nombre de Reynolds  $Re = 2RU_0/\nu$ , le nombre d'accélération  $Ac = 2R\alpha/U_0$  et le nombre de Prandtl  $Pr$ . Les situations où  $Ac > 0$  correspondent à un écoulement convergent et les situations où  $Ac < 0$  à un écoulement divergent (figure 2.19). Dans ce dernier cas, au delà du plan  $x/R = -U_0/\alpha R = -2/Ac$  qui est situé dans le sillage de la bulle, l'écoulement remonte vers la bulle.

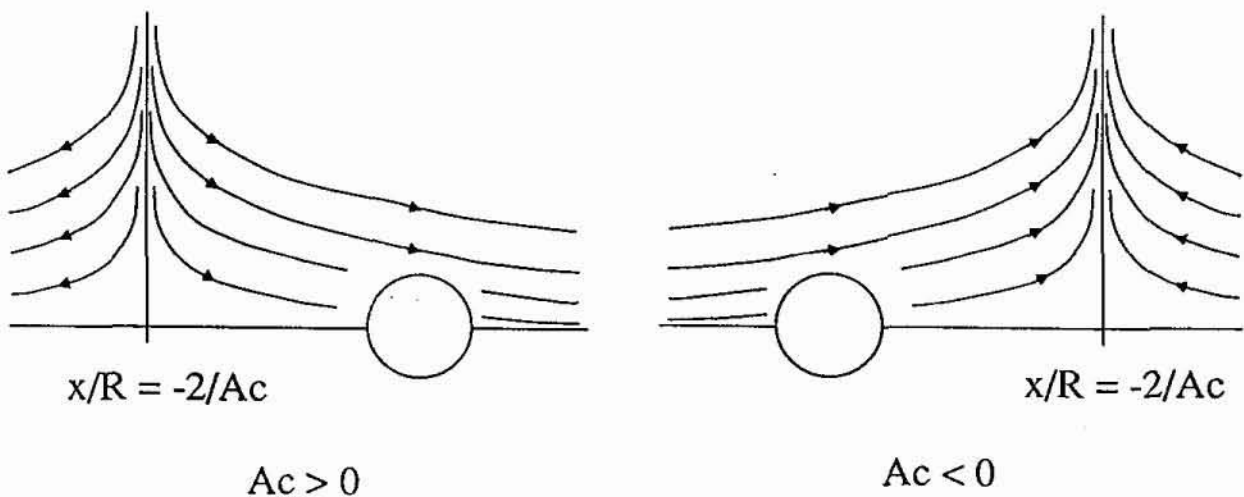


Figure 2.19 : Forme de l'écoulement spatialement accéléré selon le signe de  $Ac$ .

Les simulations numériques réalisées ont été choisies de façon à observer les effets de différentes accélérations spatiales sur une large plage de nombres de Reynolds. Les valeurs convergées obtenues pour le nombre de Nusselt moyen  $Nu$  sont comparées avec celles de l'écoulement uniforme  $Nu_s$  qui correspondent en fait à la situation où  $Ac = 0$  (tableau 2.4). Les valeurs de  $Nu$  indexées par <sup>QC</sup> (Quasiment Convergé) correspondent aux situations où, lorsque  $Ac < 0$ , l'écoulement parfaitement convergé n'a pu être atteint. Pour ces situations, le calcul, après avoir convergé sagement, devient brusquement instable lorsque la vorticité générée

à la surface de la bulle atteint une certaine intensité. Cette source d'instabilité provient de la nature même de l'écoulement. En effet, pour  $Ac < 0$ , celui-ci transporte la vorticité générée par l'inclusion en l'amplifiant car les lignes de courant s'éloignent de l'axe de l'écoulement, ce qui conduit d'après l'équation de bilan de la vorticité à une intensification de celle-ci. Sur le plan  $x/R = -2/Ac$ , l'écoulement rotationnel en provenance de la bulle rencontre l'écoulement non-perturbé (donc potentiel) qui remonte de l'infini aval. Une discontinuité de vitesse tangentielle apparaît donc dans ce plan. Ainsi lorsque la viscosité de l'écoulement n'est pas suffisante pour diffuser cette discontinuité l'écoulement devient instable. Pour de plus amples détails concernant cette particularité dynamique de l'écoulement, nous renvoyons le lecteur aux travaux de *Magnaudet et al.* (1995). Dans de telles situations ( $Re > 100$  et  $Ac < 0$ ), les résultats numériques retenus et représentés par  $^{QC}$  correspondent au moment où l'écoulement devient instable.

Re	Ac = -0.2	Ac = -0.1	Ac = 0.	Ac = 0.1	Ac = 0.2
0.1	2.081	2.070	2.060	2.066	2.077
1	2.43	2.38	2.37	2.38	2.39
10	4.22 <sup>QC</sup>	4.11	4.08	4.12	4.15
100	11.37 <sup>QC</sup>	11.21 <sup>QC</sup>	11.20	11.29	11.37
300	19.62 <sup>QC</sup>	19.58 <sup>QC</sup>	19.41	19.51	19.60
500	25.27 <sup>QC</sup>	25.11 <sup>QC</sup>	25.11	25.21	25.30

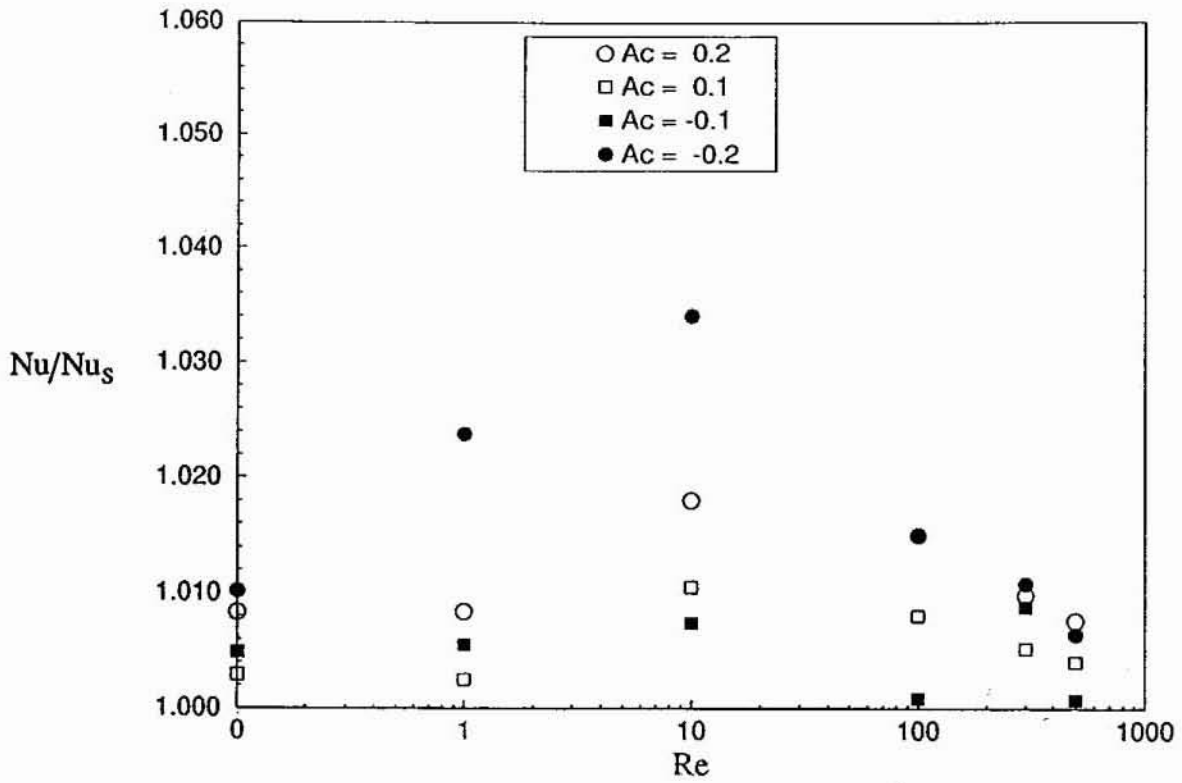
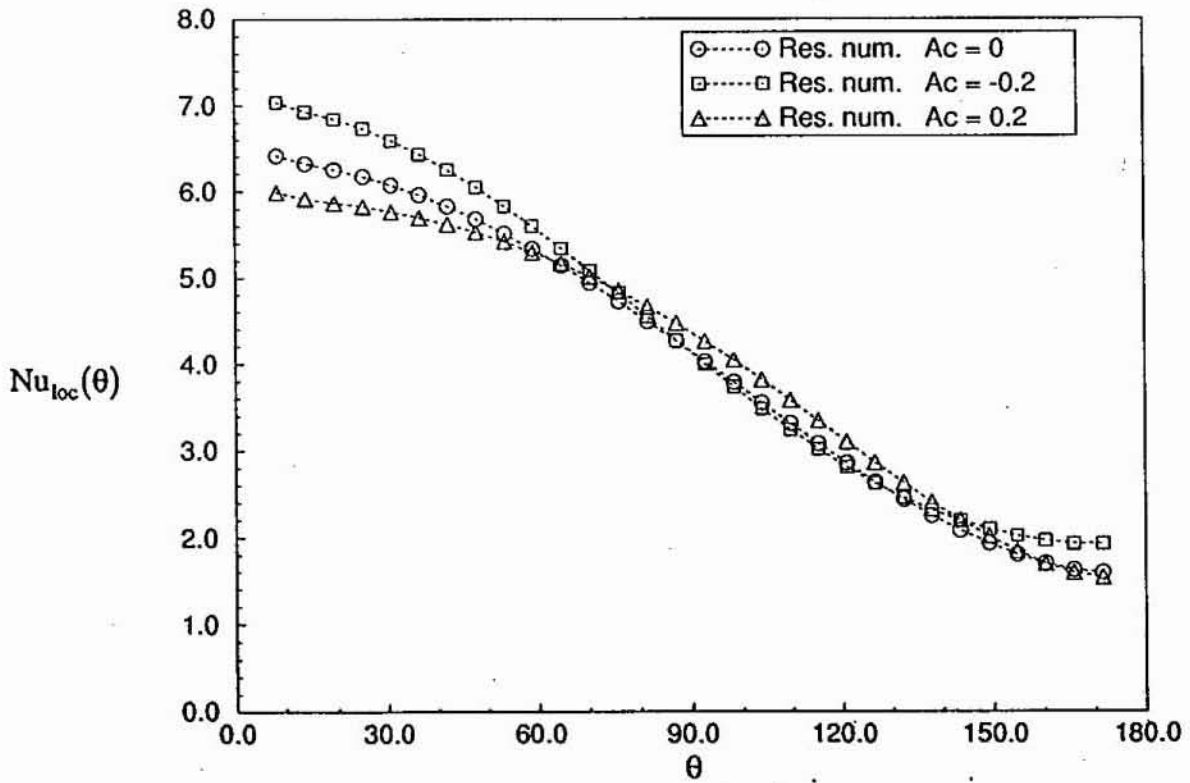
Tableau 2.4 : Nombre de Nusselt moyen Nu en écoulement de déformation pure.

L'ensemble des résultats numériques montre que, quelque soit son intensité, l'influence de l'accélération spatiale sur le transfert thermique moyen est négligeable. Ce résultat peut sembler surprenant si l'on se réfère aux effets dynamiques observés dans cet écoulement [*Rivero* 1991, *Magnaudet et al.* 1995]. En effet, en écoulement spatialement accéléré, la traînée de la bulle est considérablement modifiée, quelque soit le nombre de Reynolds, par la présence du terme de masse ajoutée. Pour le transfert thermique, on retrouve au contraire, en première

approximation et quelque soit le nombre de Reynolds, le résultat analytique obtenu pour l'écoulement potentiel (§ 2.2.c). Ce calcul montre que le transfert thermique total est celui de l'écoulement stationnaire correspondant au même nombre de Reynolds (relation 2.27). On constate cependant une légère influence de l'accélération spatiale sur le transfert interfacial comme l'illustre le tracé du rapport  $Nu/Nu_s$  (figure 2.20). Cet effet n'excède pas 4% pour les déformations étudiées ici. Il diminue lorsque l'écoulement tend vers l'écoulement potentiel, ce qui était escompté compte tenu du résultat analytique (2.27), mais également lorsque l'écoulement se rapproche du régime de Stokes. L'effet observé est en fait maximal pour  $Re \approx 10$  et est proportionnel à l'intensité de la déformation spatiale  $Ac$  sans dépendre de son signe.

La déformation spatiale de l'écoulement influence beaucoup plus nettement la distribution locale du nombre de Nusselt  $Nu_{loc}(\theta)$  (figure 2.21 et 2.22). Cette modification provient du changement de l'advection thermique autour de la bulle imposée par la déformation spatiale de l'écoulement. Par exemple lorsque  $Ac > 0$ , la vitesse de l'écoulement non-perturbé augmente avec le sens de l'écoulement. L'advection est donc diminuée par rapport au cas  $Ac = 0$  pour  $\theta < \pi/2$  et accentuée pour  $\theta > \pi/2$ , ce qui entraîne une baisse puis une augmentation de l'échange interfacial par rapport à la situation uniforme. L'augmentation du transfert est localement supérieure à la perte occasionnée puisque le nombre de Nusselt moyen est légèrement accru par rapport à celui de l'écoulement stationnaire correspondant. Cependant, le nombre de Nusselt moyen étant quasiment inchangé, la modification locale du transfert interfacial est pratiquement antisymétrique par rapport au plan équatorial  $\theta = \pi/2$ . Dans les situations proches de l'écoulement potentiel ( $Re = 500$ ), les distributions locales du coefficient de transfert sont en très bon accord avec la solution analytique (2.26) (figure 2.22) même pour la situation "Quasiment Convergé" correspondant à  $Ac = -0.2$ . Dans ces situations, la modification du nombre de Nusselt local a donc des effets parfaitement antisymétriques sur le transfert total.

L'accélération spatiale de l'écoulement modifie également le champ thermique autour de la bulle. Lorsque l'écoulement est convergent, le sillage thermique est plus plaqué sur l'axe  $e_x$  qu'en écoulement uniforme. Inversement lorsque l'écoulement est divergent le sillage thermique est plus développé comme l'illustre le tracé des isothermes pour  $Ac = -0.2$ ,  $Ac = 0$  et  $Ac = 0.2$  à  $Re = 10$  (figure 2.23).

Figure 2.20 : Rapport  $Nu/Nu_s$ Figure 2.21 : Nombre de Nusselt local  $Nu_{loc}(\theta)$  ( $Re = 10$ )

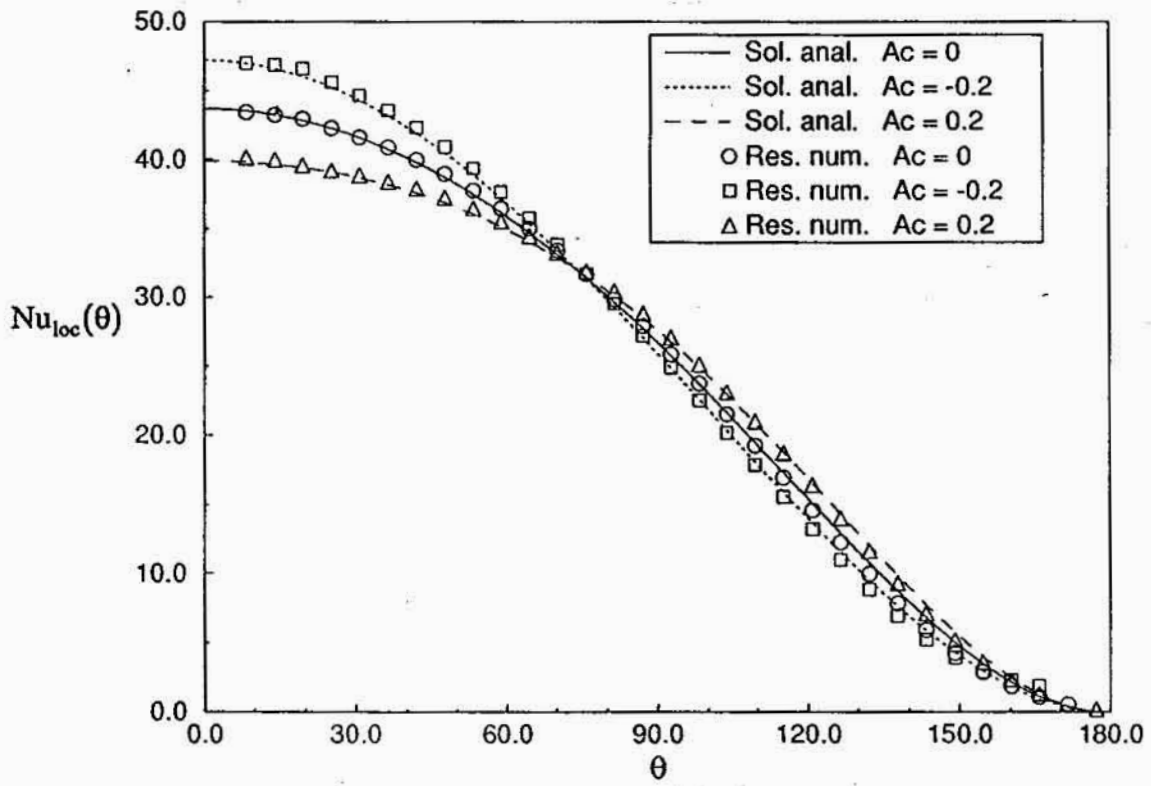


Figure 2.22 : Nombre de Nusselt local  $Nu_{loc}(\theta)$  ( $Re = 500$ )



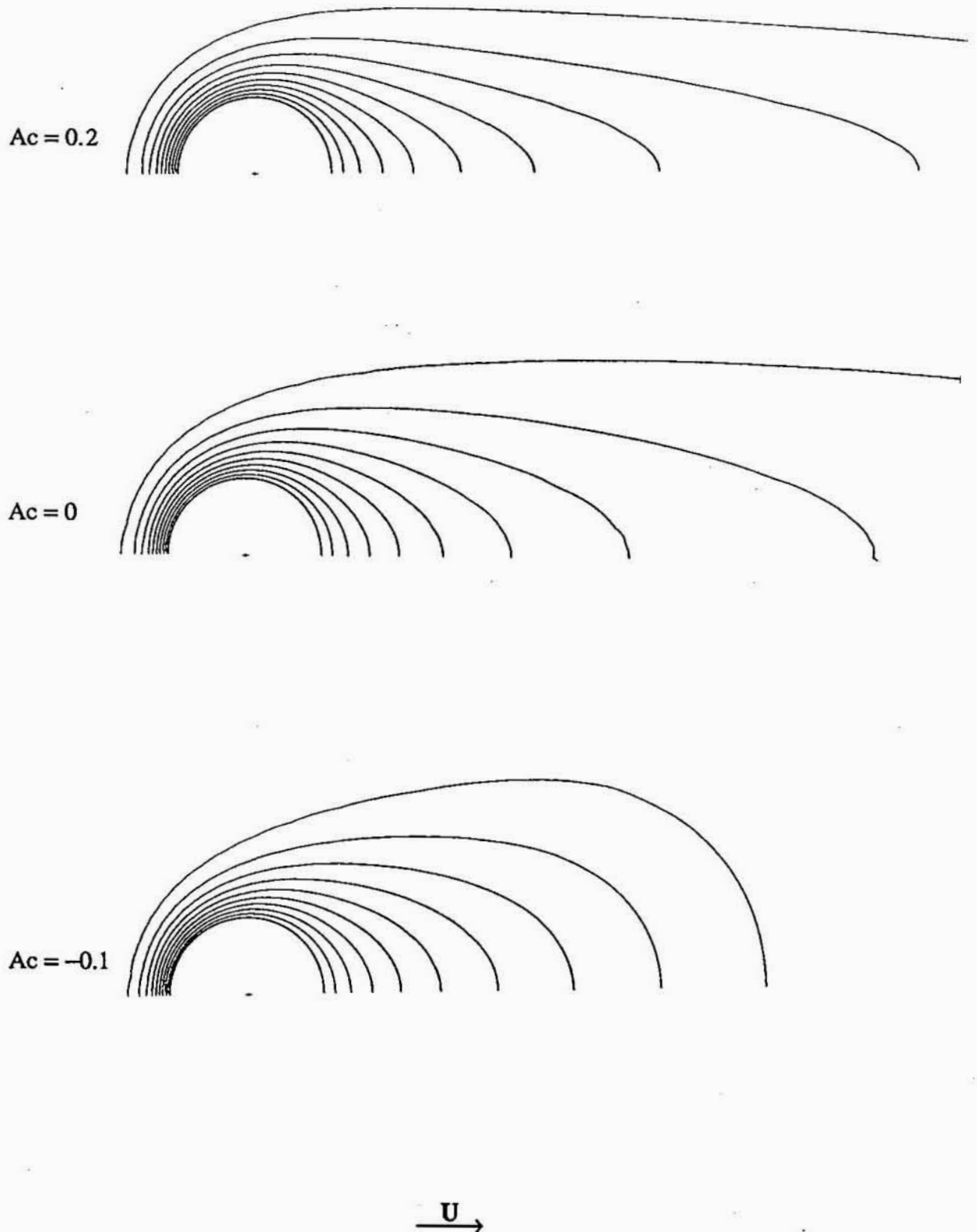


Figure 2.23 : Isothermes en écoulement spatialement accéléré ( $Re = 10$ )

## 2.6 Conclusions

---

L'étude présentée dans ce chapitre a permis d'apporter des résultats nouveaux concernant les effets d'accélération d'un écoulement sur le transfert thermique ou massique à la surface d'une bulle sphérique. Les nombreuses simulations numériques ont été complétées par deux calculs analytiques concernant l'écoulement potentiel. Il en ressort que selon la nature de l'accélération de l'écoulement le transfert à l'interface peut être considérablement perturbé.

Il apparaît clairement que les effets d'accélération spatiale sur le transfert moyen sont très faibles quelque soit l'intensité de l'accélération car la modification apporté à la ditribution locale respecte quasiment l'antisymétrie par rapport au plan équatorial de la bulle.

Par contre, lorsque l'accélération de l'écoulement est d'origine temporelle, d'importants effets d'histoire thermique apparaissent si le nombre d'accélération est suffisant. Lorsque celui-ci est supérieur à l'unité, d'importants retards thermiques viennent modifier l'intensité du transfert interfacial. Dans le cas contraire, l'évolution temporelle de la couche limite thermique peut être considérée comme quasi-statique.

## Chapitre 3

## Chapitre 3

### Ebullition et condensation d'une bulle de vapeur au sein d'un écoulement uniforme

- 3.1 Présentation
- 3.2 Méthode de résolution
- 3.3 Ebullition en milieu au repos
- 3.4 Ebullition en présence d'un écoulement uniforme
  - 3.4.a Aspects thermiques
  - 3.4.b Aspects dynamiques
- 3.5 Condensation en milieu au repos
- 3.6 Condensation en présence d'un écoulement uniforme
  - 3.6.a Aspects thermiques
  - 3.6.b Aspects dynamiques
- 3.7 Conclusions

### 3.1 Présentation

---

Les écoulements diphasiques avec changement de phase ont connu un intérêt croissant à partir du moment où plusieurs études ont confirmé que le coefficient d'échange thermique entre un liquide et une paroi est considérablement accru lorsque le liquide est en ébullition [Nukiyama 1934, Cryder & Finalbargo 1937]. Ces résultats ont surtout été industriellement appliqués lorsque la mise en oeuvre des récentes technologies a nécessité l'extraction d'importantes puissances calorifiques sur de petites surfaces (refroidissement des réacteurs nucléaires, des moteurs de fusées, ...). Ces écoulements ont par conséquent été très largement étudiés et le nombre d'articles traitant en particulier de l'ébullition ou de la condensation d'une bulle de vapeur isolée en milieu au repos est à ce jour considérable. En revanche, dès que l'on considère des bulles plongées dans un écoulement moyen, peu de résultats concernant notamment les échanges de quantité de mouvement entre la phase continue et la phase dispersée sont utilisables pour la modélisation des écoulements complexes alors que ce sont les forces exercées sur les inclusions qui permettent de décrire leurs trajectoires. L'ensemble des études s'est limité, compte tenu des contraintes expérimentales et de la complexité des équations à résoudre analytiquement, à décrire l'évolution temporelle du rayon de la bulle et le profil du champ de température au voisinage de l'interface. Pour combler ce manque d'information, l'objectif du travail numérique de ce chapitre est d'apporter, outre la clarification des résultats existant concernant l'évolution du rayon et les transferts d'énergie entre les deux phases, des résultats nouveaux concernant la force de traînée exercée par un écoulement sur une bulle en situation d'ébullition et de condensation.

Dans cette étude nous n'abordons pas la manière dont peut être générée la bulle de vapeur : nucléation spontanée, nucléation à partir de germes ou à la paroi [Cole 1974, Collier 1980]. Nous considérons une bulle de vapeur isolée de rayon initial  $R_0$  aux conditions de saturation  $T_V = T_{\text{sat}}$  et  $P_V = P_V(T_{\text{sat}})$  en équilibre thermodynamique au sein de l'écoulement uniforme dont le champ de vitesse non-perturbé, la température et la pression loin de l'inclusion sont respectivement notées  $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x$ ,  $T$  et  $P$ . Cet équilibre est facilement rompu [Cole 1974, Fabre 1985] et la moindre perturbation de pression ou de température au sein de l'écoulement déclenche, selon son signe, l'un des deux changements de phase considérés.

L'ébullition et la condensation d'une bulle de vapeur sont contrôlées à la fois par l'inertie de la phase continue et par le changement de phase à la surface de la bulle. Ces deux

contributions à l'évolution radiale de la bulle sont respectivement décrites par les bilans à l'interface de quantité de mouvement (1.32) :

$$-P + \rho \tau_{nn} = -p_v(T_{sat}) + \frac{2\sigma}{R(t)} \quad (3.1)$$

et d'énergie (1.37). L'énergie diffusée par le liquide est utilisée pour vaporiser du liquide ou condenser de la vapeur selon le sens du gradient de température entre les deux phases :

$$\lambda 4\pi R(t)^2 \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{R(t)} = \frac{d}{dt} \left( \rho_v(T_{sat}) L \frac{4}{3} \pi R(t)^3 \right) \quad (3.2)$$

où  $\rho_v$  et  $L$  sont respectivement la masse volumique de la phase gazeuse et la chaleur latente de changement de phase. Les bilans dynamique et thermique interfaciaux qui régissent l'évolution du rayon de la bulle apparaissent par conséquent fortement couplés par l'intermédiaire de la température de la bulle  $T_v = T_{sat}$  qui dépend elle même de la pression à l'intérieure de la bulle  $P_v = P_v(T_{sat})$ . Mais il ressort des nombreuses études réalisées à ce jour que deux régimes distincts ne nécessitant que l'écriture d'un seul bilan à l'interface pour leur description sont très fréquemment rencontrés (figure 3.0).

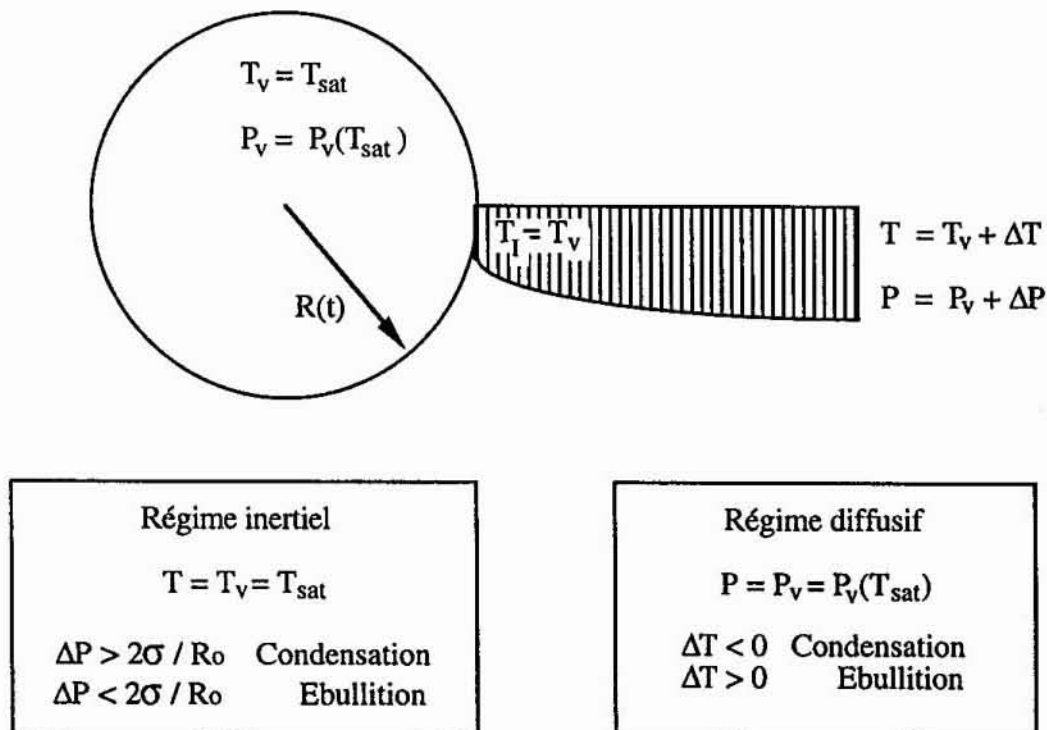


Figure 3.0 : Présentation de la configuration générale et des deux régimes particuliers

Le régime inertiel est observé lorsque l'écart de température  $\Delta T$  entre les deux phases est faible et que la différence de pression  $\Delta P$  contrôle l'évolution de la bulle. La dynamique du régime inertiel est uniquement décrite par le bilan de quantité de mouvement à l'interface (3.1), le transfert d'énergie entre les deux phases étant alors négligeable. Il s'agit par exemple des phénomènes physiques où intervient la cavitation [Lord Rayleigh 1917, Plesset 1949].

Par contre lorsque la température de la bulle est proche de la température de saturation correspondant à la pression dans la phase liquide, l'évolution de la bulle est essentiellement contrôlée par le bilan d'énergie à l'interface (3.2). Il s'agit dans ce cas du régime diffusif.

L'influence respective de ces deux régimes est estimée en comparant leurs temps caractéristiques définis par les relations (3.3) et (3.4) :

$$t_i = \frac{R_o}{\sqrt{\Delta P/\rho}} \quad (3.3)$$

$$t_d = \frac{R_o^2}{\chi \left( \frac{\rho C_p \Delta T}{\rho_v L} \right)^2} \quad (3.4)$$

La comparaison de ces temps caractéristiques permet de montrer que pour des pressions supérieures à la pression atmosphérique le régime diffusif est prépondérant pour l'ébullition [Borée et al. 1991]. En situation de condensation, cette comparaison montre que, jusqu'à une certaine valeur du rapport  $B = t_i/t_d < 0.05$ , le régime inertiel est très bref et que le changement de phase est entièrement contrôlé par le régime diffusif [Florschuetz & Chao 1965]. Cette condition est en pratique vérifiée lorsque l'écart de température entre les deux phases reste modéré. Par exemple, pour une bulle de rayon  $R_o = 3$  mm plongée dans de l'eau à température  $T = 100$  °C et à pression atmosphérique  $P = 1$  bar, si la perturbation initiale de pression est  $\Delta P = 0.4$  bar, l'écart de température en fin de régime inertiel est  $\Delta T = 8$  °C. Le rapport des temps caractéristiques est dans ce cas  $B = 0.009$  et il vérifie largement le critère proposé par Florschuetz & Chao (1965).

Lorsque la surchauffe  $\Delta T$  est modérée, la température de la bulle devient très rapidement très proche de la température de saturation correspondant à la pression du liquide, la phase inertielle étant alors très brève [Forster & Zuber 1954, Plesset & Zwick 1954]. Le régime inertiel étant dans de nombreuses situations d'ébullition et de condensation restreint aux tous premiers temps du changement de phase, ce chapitre est consacré à l'étude du régime diffusif pur. Cette simplification, dont le domaine de validité est très large, revient à considérer une

bulle de vapeur initialement en équilibre dans un écoulement uniforme et subissant une brusque variation de température  $\Delta T$  (le régime inertiel est supposé infiniment rapide). Cette condition initiale est réalisée numériquement en plaçant à  $t = 0$  la bulle dans les champs de vitesse et de température non-perturbés. La condition initiale pour la vitesse interfaciale n'est pas réaliste mais la brusque création du gradient de température entre les deux phases est respectée. Pour atténuer le plus possible l'effet de la discontinuité initiale de la vitesse interfaciale, les premiers pas de temps sont choisis très faibles.

Le nombre adimensionnel généralement utilisé pour caractériser l'ébullition ou la condensation en régime diffusif pur est le nombre de Jacob. Il compare la quantité d'énergie par unité de volume de la phase liquide pouvant être cédée ou captée selon le changement de phase considéré, et la quantité d'énergie nécessaire pour obtenir ou condenser une unité de volume de vapeur. Le changement de phase est d'autant plus favorisé que le nombre de Jacob est grand. Il est noté  $Ja$  et s'écrit :

$$Ja = \frac{\rho C_p \Delta T}{\rho_v L} \quad (3.5)$$

Lorsque la bulle de vapeur est au sein d'un écoulement uniforme, celui-ci est défini par les nombres de Reynolds et de Peclet instantanés :

$$Re(t) = 2R(t)U/v \quad (3.6.a)$$

$$Pe(t) = Pr Re(t) \quad (3.6.b)$$

où  $Pr = \nu/\chi$  est le nombre de Prandtl. L'instant initial sera décrit par le nombre de Reynolds  $Re_0 = 2R_0U/v$  ou le nombre de Peclet  $Pe_0 = Pr Re_0$ .

Les observations réalisées au cours d'études expérimentales montrent que, tant pour l'ébullition [Florschuetz *et al.*, 1969] que pour la condensation [Florschuetz & Chao, 1965], la forme de la bulle peut rester sphérique suffisamment longtemps pour que cette hypothèse soit utilisable.

Finalement, les principales hypothèses utilisées pour cette étude sont les suivantes :

- Le régime qui contrôle le changement de phase étudié est purement diffusif.
- La forme de la bulle reste sphérique tout au long de son évolution.



- La température de la bulle, supposée constante et uniforme (chapitre 1, § 1.7.3), est égale à la température de saturation à la pression dans le liquide.

- Les propriétés du fluide sont supposées indépendantes de sa température et sont celles prises à la température de saturation  $T_{\text{sat}}$ . Cette hypothèse ne peut s'appliquer qu'aux surchauffes modérées. Lorsque la surchauffe est importante, par exemple pour du sodium liquide où elle peut atteindre plusieurs centaines de degrés, cette hypothèse n'est plus valable et les résultats qui l'utilisent semblent amplifier les véritables comportements [Cole & Shulman 1966, Donne & Ferranti 1975]. La validité de cette hypothèse a cependant été vérifiée jusqu'à des surchauffes de 300 degrés à pression atmosphérique dans du sodium liquide en prenant en compte le régime inertiel [Prosperetti & Plesset, 1978].

- Le nombre de Prandtl sera pour toutes les simulations réalisées  $Pr = 1$  ce qui correspond à de nombreuses situations physiques où le régime diffusif est observé. Par exemple, pour de l'eau à température  $T = 100$  °C et à pression atmosphérique  $P = 1$  bar, le nombre de Prandtl est  $Pr = 1.74$ .

## 3.2 Méthode de résolution

---

Le problème supplémentaire rencontré pour résoudre numériquement les situations d'ébullition et de condensation d'une bulle de vapeur est causé par le mouvement de l'interface fluide-inclusion. Cet obstacle est très simplement levé dans le cas d'une bulle sphérique en considérant le référentiel en expansion  $\mathcal{R}^*$  obtenu à partir du référentiel absolu  $\mathcal{R}$  à l'aide du changement de référentiel (3.7). En effet, dans  $\mathcal{R}^*$ , les frontières du domaine de calcul sont fixes.

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* = \mathbf{x} \frac{R_0}{R(t)} \\ t^* = t \end{cases} \quad (3.7)$$

On note dans la suite de l'étude  $\gamma(t)$  le rayon adimensionnel défini par :

$$\gamma(t) = \frac{R(t)}{R_0} \quad (3.8)$$

Les équations de passage de  $\mathcal{R}$  vers  $\mathcal{R}^*$  des opérateurs spatiaux et temporels s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t^*} - \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt^*} \mathbf{x}^* \cdot \nabla^* \\ \nabla = \gamma^{-1} \nabla^* \end{cases} \quad (3.9)$$

Le système d'équations (1.1) qui gouverne l'évolution du champ de vitesse absolu  $\mathbf{V}$  et du champ de température  $T$  est écrit dans  $\mathcal{R}^*$  à l'aide des relations (3.9) :

$$\nabla^* \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.10.a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t^*} + \gamma^{-1} \nabla^* \cdot \left( \mathbf{V} \left( \mathbf{V} - \frac{d\gamma}{dt^*} \mathbf{x}^* \right) \right) + 3\gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt^*} \mathbf{V} = -\gamma^{-1} \nabla^* (P/\rho) + \gamma^{-1} \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* \quad (3.10.b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t^*} + \gamma^{-1} \nabla^* \cdot \left( T \left( \mathbf{V} - \frac{d\gamma}{dt^*} \mathbf{x}^* \right) \right) + 3\gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt^*} T = \chi \gamma^{-2} \nabla^{*2} T \quad (3.10.c)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}^*$  est défini dans  $\mathcal{R}^*$  par :

$$\boldsymbol{\tau}^* = \gamma^{-1} \nu \left( \nabla^* \mathbf{V} + {}^t \nabla^* \mathbf{V} \right) \quad (3.11)$$

On note que le premier membre de (3.10.b) et de (3.10.c) fait apparaître deux effets de la vitesse locale du référentiel  $\mathbf{w} = d\gamma/dt^* \mathbf{x}^*$  :

- d'une part les grandeurs sont advectées par la vitesse relative  $\mathbf{V} - \mathbf{w}$
- d'autre part  $\mathbf{w}$  n'étant pas à divergence nulle ( $\nabla \cdot \mathbf{w} = 3d\gamma/dt^*$ ), il apparaît suivant le cas un terme source ou puits correspondant à la dilatation ou à la compression locale du référentiel.

Les conditions à la surface de la bulle, décrites par les relations (1.31), (1.34), (1.35) du chapitre 1 et (3.2), s'écrivent respectivement dans  $\mathcal{R}^*$  :

$$V_n = V_{In} = \dot{R} \quad (3.12.a)$$

$$\boldsymbol{\tau}^*_{ij n} = 0 \quad (3.12.b)$$

$$T = T_I = T_V \quad (3.12.c)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n^*} \right)_{R_0} = \rho_V L R_0 \gamma \frac{d\gamma}{dt^*} \quad (3.12.d)$$

Le système d'équations (3.10) complété par les nouvelles conditions à l'interface (3.12) est résolu suivant la méthode numérique décrite au chapitre 1. Les modifications à apporter à l'outil numérique défini dans ce chapitre concernent les nouvelles vitesses advectives ( $\mathbf{V} - d\gamma/dt^* \mathbf{x}^*$ ) et l'écriture de l'opérateur  $\nabla$  qui doit tenir compte du changement d'échelle  $\gamma(t)$  notamment lors de la résolution de l'équation de Poisson pour le potentiel auxiliaire  $\Phi$ . Le critère de stabilité est également modifié par le changement de référentiel. Il s'écrit dans le nouveau domaine de calcul lié à  $\mathcal{R}^*$  :

$$\Delta t^* \leq \gamma \sqrt{3} \min \left[ \frac{\Delta \xi^* \Delta \eta^* \eta^* \Delta \phi}{U \Delta \eta^* \eta^* \Delta \phi + V \Delta \xi^* \eta^* \Delta \phi + W \Delta \xi^* \Delta \eta^*} \right] \quad (3.13)$$

Ce critère étant proportionnel à  $\gamma(t)$ , il est de moins en moins pénalisant au cours du temps pour l'ébullition alors qu'il l'est de plus en plus pour la condensation qui nécessite des temps de calcul nettement plus importants.

### 3.3 Ebullition en milieu au repos

Le cas de l'ébullition en l'absence d'écoulement a été très largement étudié et l'on possède à ce sujet des solutions analytiques et de nombreuses données expérimentales. Le résultat analytique le plus fréquemment cité est celui de *Plesset & Zwick* (1954). Il s'agit du développement asymptotique du taux de croissance de la bulle à grand nombre de Jacob obtenu en considérant la couche limite thermique comme mince. De par sa complexité, la solution analytique de *Scriven* (1959) est beaucoup moins utilisée alors qu'elle est applicable quelque soit le nombre de Jacob. De nombreuses mesures expérimentales ont permis de vérifier avec succès ces deux solutions analytiques dans le cas des liquides faiblement surchauffés [*Dergarabedian* 1953, *Florschuetz et al.* 1969]. Cette abondance de résultats nous a permis de tester les modifications apportées à notre outil de simulation pour tenir compte du changement de référentiel introduit précédemment. A cet effet nous avons réalisé de nombreuses simulations numériques sur une large plage de nombre de Jacob ( $0.01 < Ja < 100$ ). Il ressort à la fois de nos résultats numériques et des références précédentes qu'en régime permanent la loi d'évolution du rayon s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{d\tau} = \sqrt{\frac{f(Ja)}{\tau}} \quad (3.14)$$

en notant  $\tau$  le temps adimensionnel défini par :

$$\tau = \frac{4 \text{Ja}^2 \chi}{\pi R_o^2} t^* \quad (3.15)$$

Le transfert thermique à l'interface, exprimé par le nombre de Nusselt, est donné par :

$$\text{Nu} = \frac{16}{\pi} \text{Ja} f(\text{Ja}) \quad (3.16)$$

La relation (3.16) montre que le transfert thermique est indépendant du temps c'est à dire que la vitesse de l'interface est la même que celle de la couche limite thermique. Un calcul analytique simple, prenant comme hypothèse le résultat (3.16), permet d'obtenir pour  $f(\text{Ja})$  l'expression (3.17) :

$$f(\text{Ja}) = \frac{\pi}{8\text{Ja}^2} F \quad \text{et} \quad \text{Ja} = F \exp\left(\frac{3}{2}F\right) \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{F}{x} - \frac{F}{2}x^2\right) dx \quad (3.17)$$

Le calcul menant à (3.17), accompagné du tableau A3.1 présentant des valeurs analytiques de  $f(\text{Ja})$  pour différents nombres de Jacob, est développé dans l'annexe 3. On peut aussi, en utilisant la même hypothèse mais en tenant compte du rapport  $\varepsilon_\rho = \rho_v/\rho$  des masses volumiques des deux phases, obtenir [Scriven 1959] :

$$f(\text{Ja}) = \frac{\pi}{4\text{Ja}^2} \beta^2$$

$$\text{Ja} = 2\beta^3 \exp\left[(3 - 2\varepsilon_\rho)\beta^2\right] \int_\beta^\infty \frac{1}{x^2} \exp\left[-\frac{2(1 - \varepsilon_\rho)\beta^3}{x} - x^2\right] dx \quad (3.18)$$

Les résultats numériques obtenus pour  $f(\text{Ja})$  (figure 3.1) sont en parfait accord avec les expressions analytiques (3.17), (3.18) et également, si le nombre de Jacob est suffisamment grand, avec la relation (3.19) obtenue par Plesset & Zwick (1954) en supposant la couche limite thermique mince :

$$f(\text{Ja}) = \frac{3}{4} \quad (3.19)$$

L'hypothèse de couche limite thermique mince est applicable lorsque la diffusion dans la couche limite thermique n'a pas le temps de s'adapter aux évolutions instationnaires imposées

par l'advection radiale. Elle est donc vérifiée lorsque le nombre de Jacob est grand [Plesset & Zwick 1952].

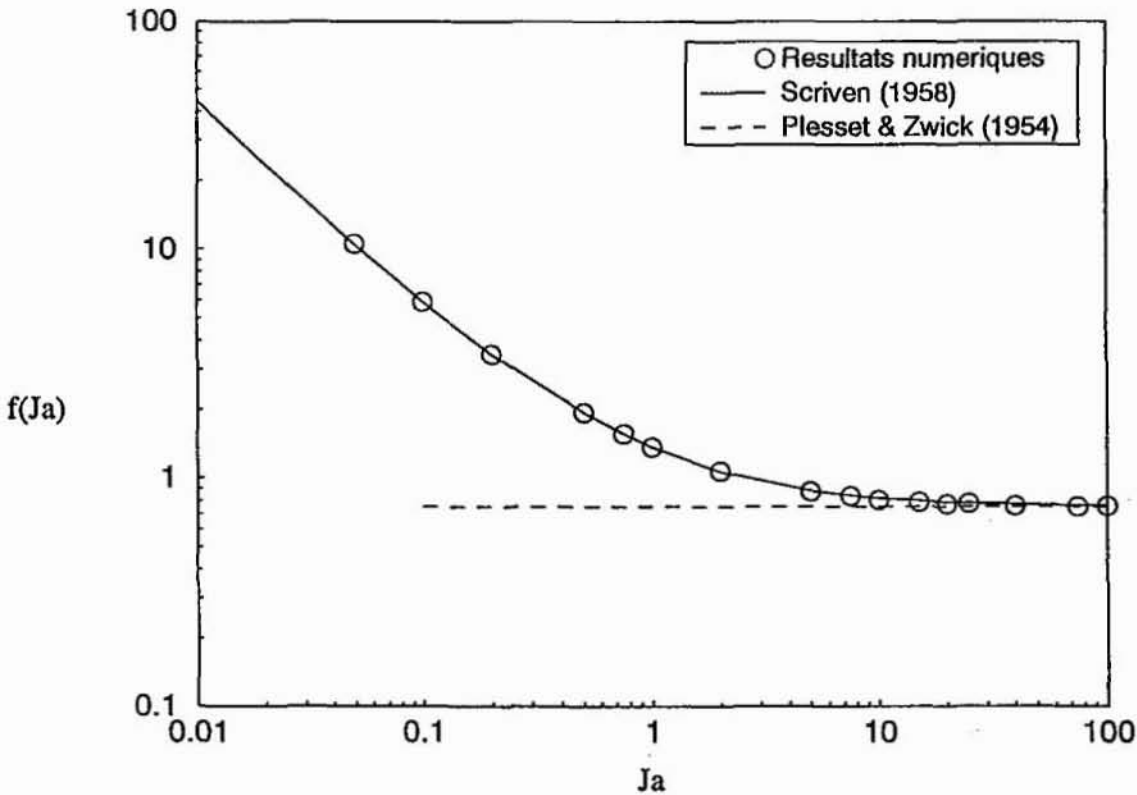


Figure 3.1 : Représentation de  $f(Ja)$ .

### 3.4 Ebullition en présence d'un écoulement uniforme

#### 3.4.a Aspects thermiques

La littérature concernant l'ébullition d'une bulle de vapeur en présence d'un écoulement moyen est nettement moins abondante. *Ruckenstein & Davis (1971)* ont étudié à l'aide d'un calcul analytique l'influence de la vitesse du fluide sur le taux de croissance de la bulle. Leur calcul est effectué en considérant l'écoulement comme potentiel et en supposant la couche limite thermique mince. Il aboutit à une expression pour le rayon qui est en fait une équation différentielle. La résolution numérique de celle-ci montre que l'écoulement a en général pour effet d'accélérer la croissance de la bulle mais que lorsque le nombre de Jacob est suffisamment grand cet effet est très faible, le taux de croissance étant alors donné de manière satisfaisante par

les solutions de *Plesset & Zwick* (1954) et de *Scriven* (1959). Les résultats ainsi obtenus sont également en bon accord avec les données expérimentales de *Florschuetz et al.* (1969).

Nos simulations numériques réalisées pour différents nombres de Jacob ( $Ja = 1, 10$ ) et pour différents nombres de Reynolds initiaux ( $Re_o = 0.1, 1, 10, 100$ ) montrent, comme chez l'ensemble de ces auteurs, que l'écoulement augmente le transfert interfacial et par conséquent le taux de croissance de la bulle. La croissance de la bulle est en fait, comme l'avaient observé *Ruckenstein & Davis* (1971), composée de deux régimes distincts qui sont conditionnés par le rapport  $C = \dot{R} / U$  de la vitesse de l'interface à celle de l'écoulement non-perturbé. Ce phénomène est parfaitement décrit par le tracé du nombre de Nusselt instantané en fonction du nombre de Peclet instantané (figure 3.2). Lorsque  $C$  est supérieur à l'unité, la couche limite dynamique est contrôlée par la vitesse radiale de l'interface. Les évolutions du rayon de la bulle et du transfert interfacial sont celles observées en l'absence d'écoulement, c'est à dire données respectivement par les relations (3.14) et (3.16). Ce régime est essentiellement rencontré en début d'ébullition car c'est à ce stade du processus que la vitesse interfaciale est maximale. Elle décroît ensuite au cours du temps et, lorsque le rapport  $C$  devient plus petit que l'unité, la dynamique de la couche limite est progressivement contrôlée par l'écoulement à l'infini. On constate alors que le transfert thermique est parfaitement prédit par la solution quasi-statique (3.20) obtenue par *Ruckenstein* (1958) :

$$Nu(t) = 2 \sqrt{\frac{Pe(t)}{\pi}} \quad (3.20)$$

Ce remarquable résultat permet de calculer la loi de croissance de la bulle. En effet l'équation différentielle vérifiée par le rayon de la bulle s'écrit alors simplement en tenant compte de (3.20) à l'aide du bilan d'énergie à l'interface (3.2) :

$$\frac{8}{\pi} Ja \gamma \dot{\gamma} = 2 \sqrt{\frac{Pe_o \gamma}{\pi}} \quad (3.21)$$

L'intégration de (3.21) permet d'obtenir la vitesse de l'interface :

$$\dot{\gamma} = \left( \frac{Pe_o g(Ja)}{\tau} \right)^{1/3} \quad \text{avec} \quad g(Ja) = \frac{\pi}{24 Ja^2} \quad (3.22)$$

La représentation graphique de la vitesse de l'interface  $\dot{\gamma}$  montre que l'ébullition en présence d'un écoulement uniforme est pratiquement décrite par les relations (3.14) et (3.22). En effet, la zone de transition entre ces deux comportements asymptotiques est relativement

brève (figures 3.3.a et 3.3.b). On peut alors estimer l'instant  $\tau_c$  (et par conséquent la valeur du rapport C des vitesses correspondant) pour lequel le changement de comportement observé intervient en égalant (3.14) et (3.22) :

$$\tau_c = \frac{24^2 Ja^4 f(Ja)^3}{\pi^2 Pe_o^2} \quad (3.23.a)$$

$$C = \frac{1}{3 f(Ja)} \quad (3.23.b)$$

Le comportement quasi-statique observé lorsque C est suffisamment grand montre que les effets d'histoire thermique sont dans cette situation négligeables. En effet le rapport C n'est autre que la comparaison du temps caractéristique de l'advection induite par l'écoulement moyen et de celui de la mise en mouvement du liquide par le déplacement de l'interface. Plus le temps caractéristique d'un phénomène physique est court plus celui-ci s'établit rapidement. Par conséquent, lorsque C est petit devant l'unité, l'advection, qui a alors le temps caractéristique le plus petit, s'établit la première et n'est pas en retard par rapport au mécanisme instationnaire.

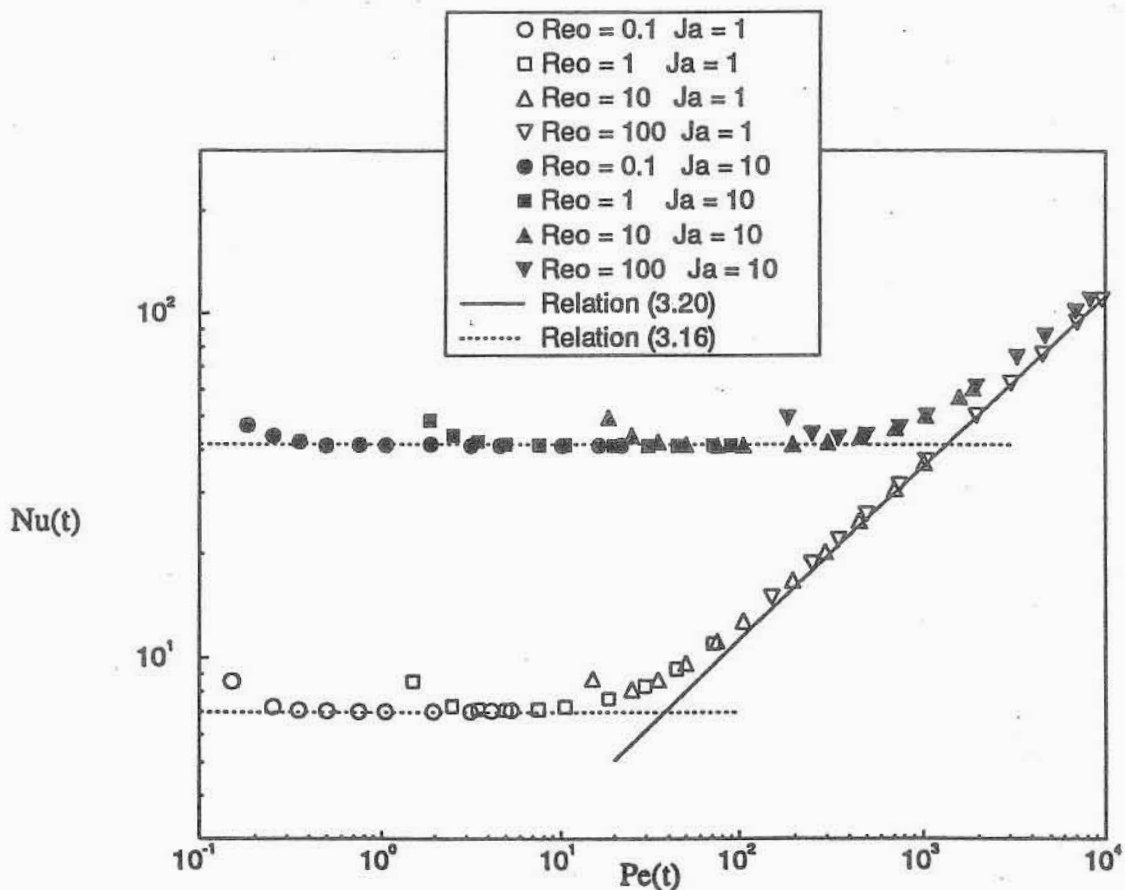


Figure 3.2 : Nombre de Nusselt en ébullition au sein d'un écoulement uniforme

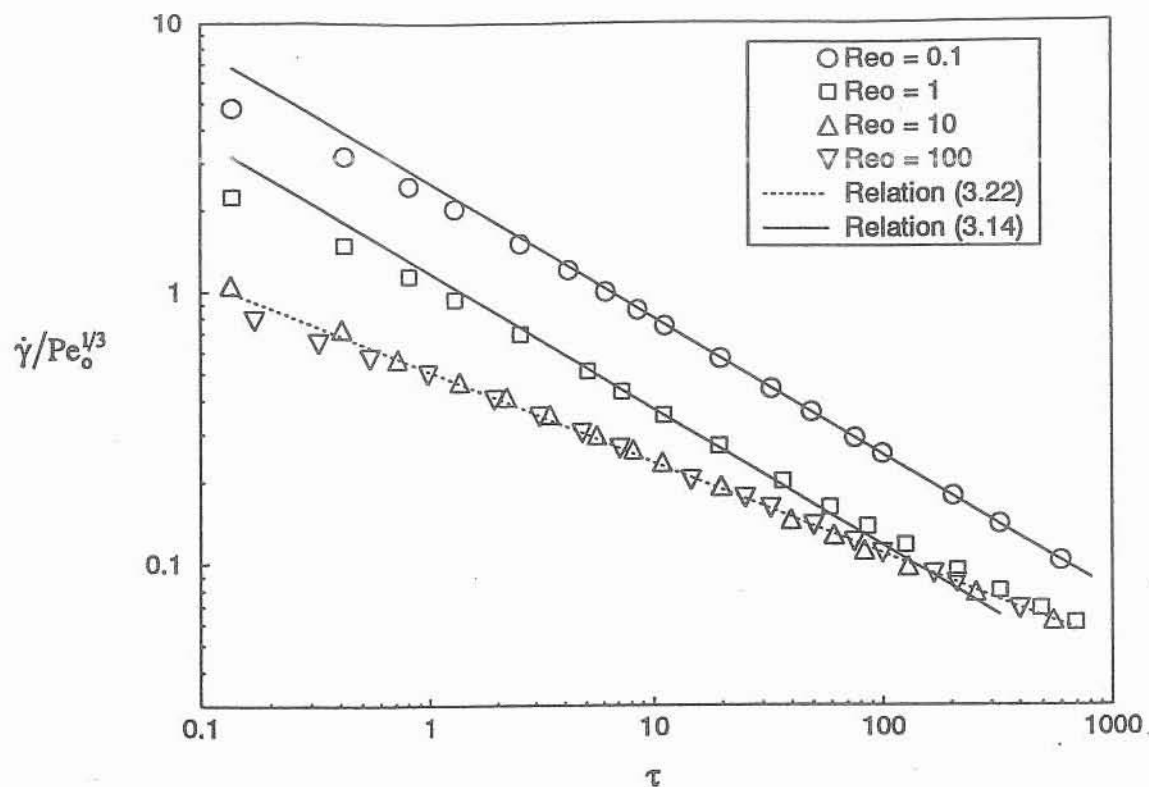


Figure 3.3.a : Vitesse de l'interface  $\dot{\gamma}$  en ébullition au sein d'un écoulement uniforme ( $Ja = 1$ )

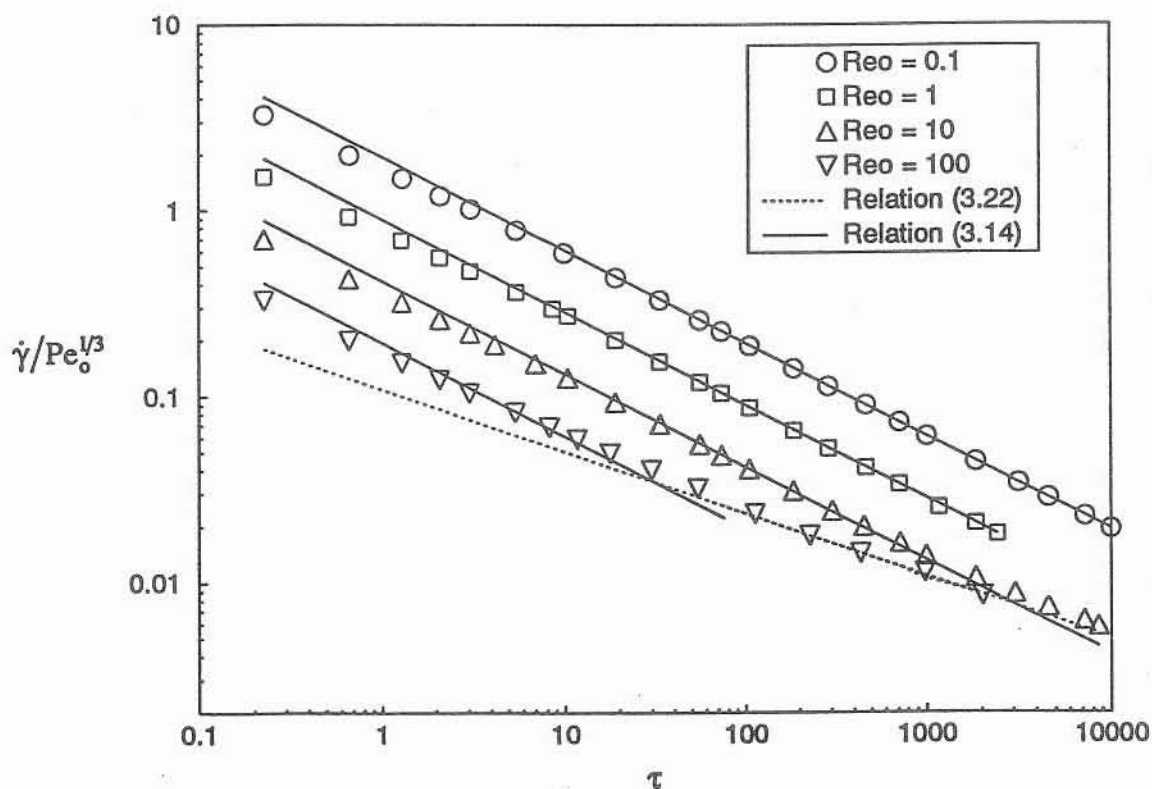


Figure 3.3.b : Vitesse de l'interface  $\dot{\gamma}$  en ébullition au sein d'un écoulement uniforme ( $Ja = 10$ )



### 3.4.b Aspects dynamiques

Les études qui se sont intéressées aux actions hydrodynamiques que subit une bulle qui grossit sont assez rares. *Lhuilier* (1982) a déterminé analytiquement la force d'inertie exercée par un écoulement non-uniforme et instationnaire sur une bulle en expansion dans un fluide non visqueux. *Gopalakrishna & Lior* (1992) ont résolu l'équation de mouvement d'une bulle en ébullition sous l'action de la gravité pour étudier l'effet des différentes forces sur la vitesse d'ascension de la bulle en utilisant une loi arbitraire de croissance proposée par *Mikic et al.* (1970). Pour cela la résultante des forces agissant sur la bulle est écrite comme la somme de la force d'Archimède, d'un terme de masse ajoutée dû au déplacement du liquide induit par la croissance de la bulle [identique à celui calculé par *Lhuilier* (1982)], de la traînée stationnaire visqueuse et de la force d'histoire supposée donnée par l'expression de Basset valable en régime de Stokes pour une sphère rigide. Les résultats de ces auteurs montrent que l'effet de la force de Basset est négligeable. Le problème des forces agissant sur une bulle en expansion a été plus abondamment abordé pour étudier le détachement de bulles en nucléation de paroi [*Klausner et al.* 1993, *Zeng et al.* 1993]. Les forces prises en compte sont, outre les forces liées à la présence de la paroi, la force de masse ajoutée et la traînée visqueuse stationnaire.

La synthèse de ces diverses études montre que l'expression communément utilisée pour exprimer la force  $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_x$  qui s'exerce sur une bulle de rayon variable plongée au sein d'un écoulement uniforme, dont le champ de vitesse non perturbé est  $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} F &= F_{IB} + F_D(Re) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho \vartheta_b U \right) + C_{DS}(Re) \frac{1}{2} \rho U^2 \pi R(t)^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho U^2 \pi R(t)^2 (C_{IB} + C_{DS}(Re)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

où  $\vartheta_b = 4\pi R^3/3$  est le volume de la bulle,  $C_{IB} = 4\dot{R}(t)/U$  le coefficient d'inertie et  $C_{DS}(Re)$  le coefficient de traînée visqueuse correspondant au nombre de Reynolds instantané  $Re(t)$ . Le coefficient de traînée est déduit des expressions stationnaires à l'aide de l'hypothèse d'évolution quasi-statique c'est à dire en négligeant les effets d'histoire [*Gopalakrishna & Lior* 1992, *Klausner et al.* 1993]. En fait, la force d'histoire prenant en compte l'accélération radiale du fluide est négligée car aucune expression n'existe lorsque l'instationnarité de l'écoulement est causée par le déplacement de l'interface.

Bien entendu l'équation (3.24) peut être replacée dans le contexte de l'équation dynamique générale d'une bulle (cf. introduction). Dans le cas où le rayon de la bulle varie, l'analyse de l'écoulement potentiel autour de la bulle [Lhuilier, 1982] montre que la force d'inertie totale agissant sur la bulle prend la forme :

$$\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_{IB} = \rho \left[ \vartheta_b \frac{D\mathbf{U}}{Dt} + C_M \frac{D(\vartheta_b \mathbf{U})}{Dt} - C_M \frac{d(\vartheta_b \mathbf{U}_b)}{dt} \right] \quad (3.25)$$

Les expressions (3.24) et (3.25) montrent bien que le terme inertiel proportionnel à  $\dot{R}U$  est un effet de masse ajoutée qui apparaît dès lors qu'une bulle de rayon variable est placée dans un écoulement (même stationnaire et uniforme), l'écoulement autour de la bulle étant alors nécessairement instationnaire. Le coefficient d'inertie s'écrit en fait  $C_{IB} = 8 C_M \dot{R}(t)/U$ .

Un calcul analytique, utilisant la méthode de la dissipation, de la force subie par une bulle en expansion plongée dans un écoulement uniforme est présenté dans l'annexe 3. Ce calcul est basé sur une hypothèse d'écoulement potentiel et confirme que la force se met sous la forme (3.24) c'est à dire que le coefficient d'inertie est bien  $C_{IB} = 4\dot{R}(t)/U$  ( $C_M = 1/2$ ) et que dans cette situation le coefficient de traînée d'origine visqueuse est celui calculé pour l'écoulement stationnaire à l'ordre  $Re(t)^{-1}$  :

$$C_D = C_{DS} = \frac{48}{Re(t)} \quad (3.26)$$

Ce calcul permet également de déterminer les contributions relatives de la pression et de la contrainte normale visqueuse à la traînée visqueuse qui valent respectivement 1/3 et 2/3. Dans la suite, les contributions de la pression et de la contrainte normale visqueuse au coefficient de traînée total seront respectivement notés  $C_{Dp}$  et  $C_{Dv}$  pour l'écoulement considéré et  $C_{Dsp}$  et  $C_{Dsv}$  pour l'écoulement stationnaire au même nombre de Reynolds. Cette décomposition est intéressante car le terme d'inertie est entièrement contenu dans la pression et le terme dû à la contrainte normale visqueuse représente environ 2/3 de la contribution visqueuse totale.

Les résultats des simulations numériques montrent que les effets respectifs de la pression et de la contrainte normale visqueuse sont très dépendants du nombre de Jacob c'est à dire de l'intensité de la vitesse interfaciale. Lorsque le nombre de Jacob est supérieur à l'unité la principale force exercée sur la bulle provient de la masse ajoutée, la contribution visqueuse étant alors négligeable (figure 3.4.a). Dans cette situation ( $Ja = 10$ ), la partie visqueuse de la traînée contenue dans la pression est de l'ordre de grandeur de l'erreur numérique ce qui ne nous a pas

permis de séparer avec une précision acceptable dans ce cas la force d'inertie et la traînée visqueuse. Par contre lorsque le nombre de Jacob est de l'ordre de l'unité, ces deux contributions à la force totale sont du même ordre de grandeur (figure 3.4.b). Ainsi, en ôtant à la force totale  $F$  le terme d'inertie  $F_{IB} = 2\pi \rho U R(t)^2 \dot{R}(t)$ , on accède de manière plus précise à la contribution visqueuse. On constate alors qu'à partir d'un certain nombre de Reynolds instantané (figure 3.5), le coefficient de traînée  $C_D$  est bien celui de l'écoulement stationnaire  $C_{DS}$  au même nombre de Reynolds et la force exercée sur l'inclusion est alors donnée par (3.24). Par contre lorsque  $Re(t)$  est plus faible, l'effet de la vitesse interfaciale radiale amincit la couche limite dynamique ce qui a pour effet d'accroître la traînée visqueuse. Cette correction de traînée par rapport au cas stationnaire peut être définie par :

$$C_H = C_D - C_{DS} \quad (3.27)$$

Les valeurs calculées pour  $C_H$  dans nos diverses expériences numériques sont regroupées et comparées aux valeurs de  $C_{DS}$  dans le tableau 3.1. La modification de la traînée visqueuse (Figure 3.6) est essentiellement présente à petit nombre de Reynolds et disparaît ensuite pour approximativement  $Re(t) > 20$  dans les diverses expériences numériques réalisées.  $C_H$  devient ensuite négligeable devant la traînée stationnaire ( $< 5\%$ ) compte tenu des erreurs numériques commises et de la différence des ordres de grandeur entre  $C_{IB}$  et  $C_D$ . L'effet d'histoire contenus dans  $C_H$  est analogue à celui apporté par le terme d'histoire classique (force de Basset) : le retard dû à la diffusion de la vorticité par la viscosité conduit à une traînée instantanée supérieure à la traînée stationnaire c'est à dire qu'à un nombre de Reynolds  $Re(t)$ , la mémoire de l'écoulement conduit la bulle à "voir" autour d'elle l'écoulement équivalent à  $Re(t_1)$  avec  $t_1 < t$ . Ce retard n'est pas négligeable lorsque la vitesse de l'interface est prépondérante. On constate aussi qu'après un régime transitoire,  $C_H$  semble tendre vers un comportement identique pour toutes les simulations réalisées à un même nombre de Jacob.

Compte tenu des expressions obtenues précédemment pour la vitesse de l'interface (relations 3.14 et 3.22) la force d'inertie peut être exprimée en fonction des nombres adimensionnels du problème. Le régime de transition entre les deux comportements asymptotiques observés est très bref et correspond approximativement au nombre de Reynolds instantané  $Re(t) = Re_C(Ja)$  obtenu en intégrant (3.14) de  $\tau = 0$  à  $\tau = \tau_C$  pour accéder à la valeur du rayon correspondante :

$$Re_C(Ja) = Re_o + \frac{48 Ja^2 f(Ja)^2}{\pi Pr} \quad (3.28)$$

Le coefficient d'inertie s'exprime alors de manière très satisfaisante (figure 3.7) dans le cadre de l'ébullition diffusive pure à l'aide des deux expressions (3.29.a) et (3.29.b) :

$$C_{IB} = \frac{64 \text{Ja}^2 f(\text{Ja})}{\pi \text{Pr}} \text{Re}(t)^{-1} \quad \text{Re}(t) < \text{Re}_c(\text{Ja}) \quad (3.29.a)$$

$$C_{IB} = \frac{8 \text{Ja}}{\sqrt{\pi \text{Pr}}} \text{Re}(t)^{-1/2} \quad \text{Re}(t) > \text{Re}_c(\text{Ja}) \quad (3.29.b)$$

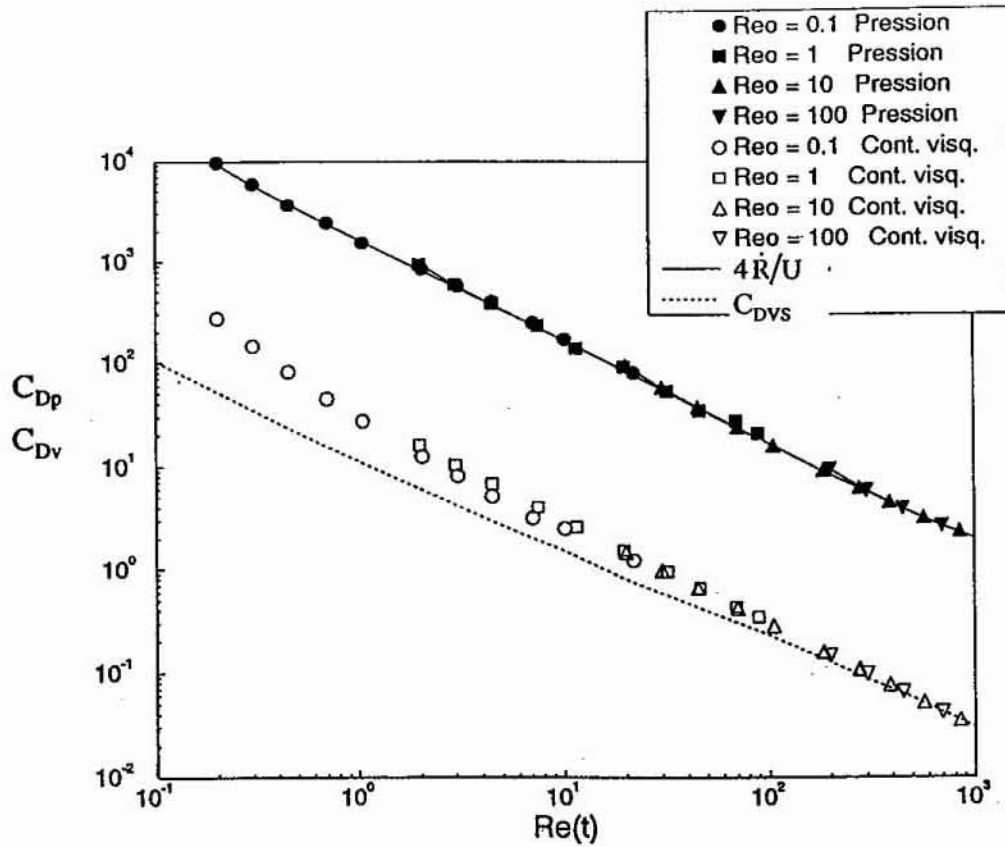
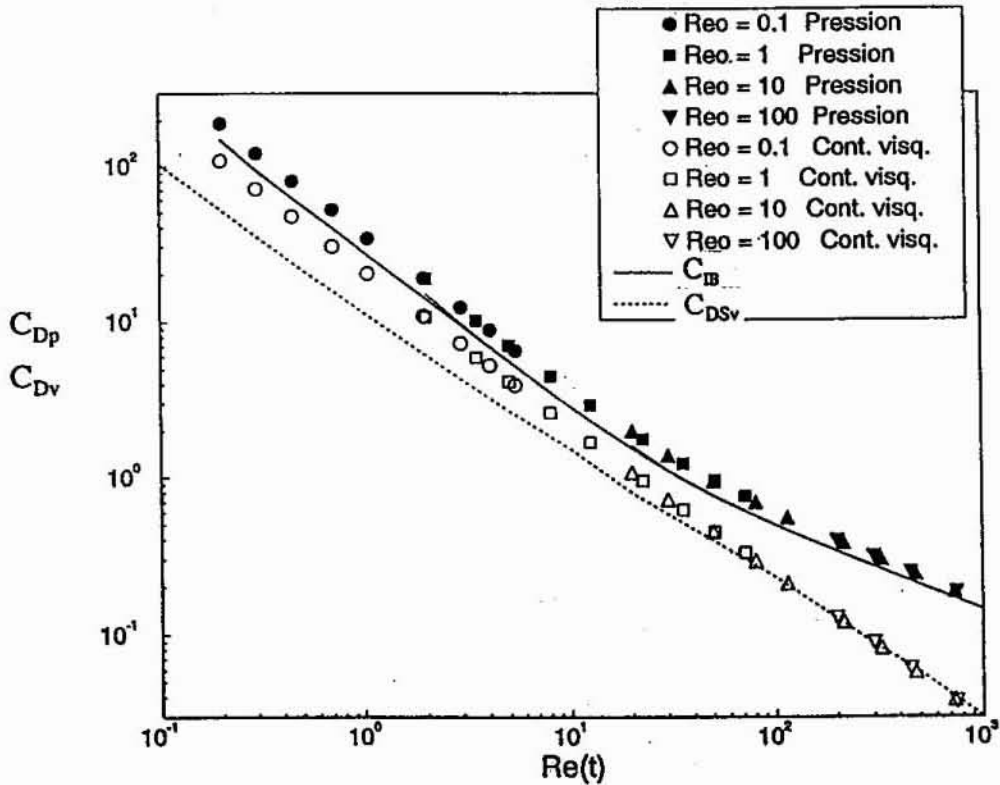
Le principal résultat de ces simulations numériques est de confirmer que le coefficient  $C_{IB}$  est bien égal à  $4\dot{R}/U$ , ou de manière équivalente que le coefficient de masse ajouté  $C_M$  est égal à  $1/2$ , ceci quelque soit le nombre de Reynolds  $\text{Re}(t)$ . Ce résultat étend en fait celui établi par *Rivero* (1991) pour une inclusion sphérique de rayon fixe (bulle ou sphère solide) plongée dans un écoulement instationnaire, situation pour laquelle il avait été montré que  $C_M = 1/2$  quelque soit  $\text{Re}(t)$ . Nos simulations numériques ont également mis en évidence que la force exercée sur une bulle sphérique en croissance au sein d'un écoulement uniforme est composée d'un terme d'histoire prépondérant lié à l'instationnarité de l'interface lorsque l'écoulement est suffisamment visqueux.

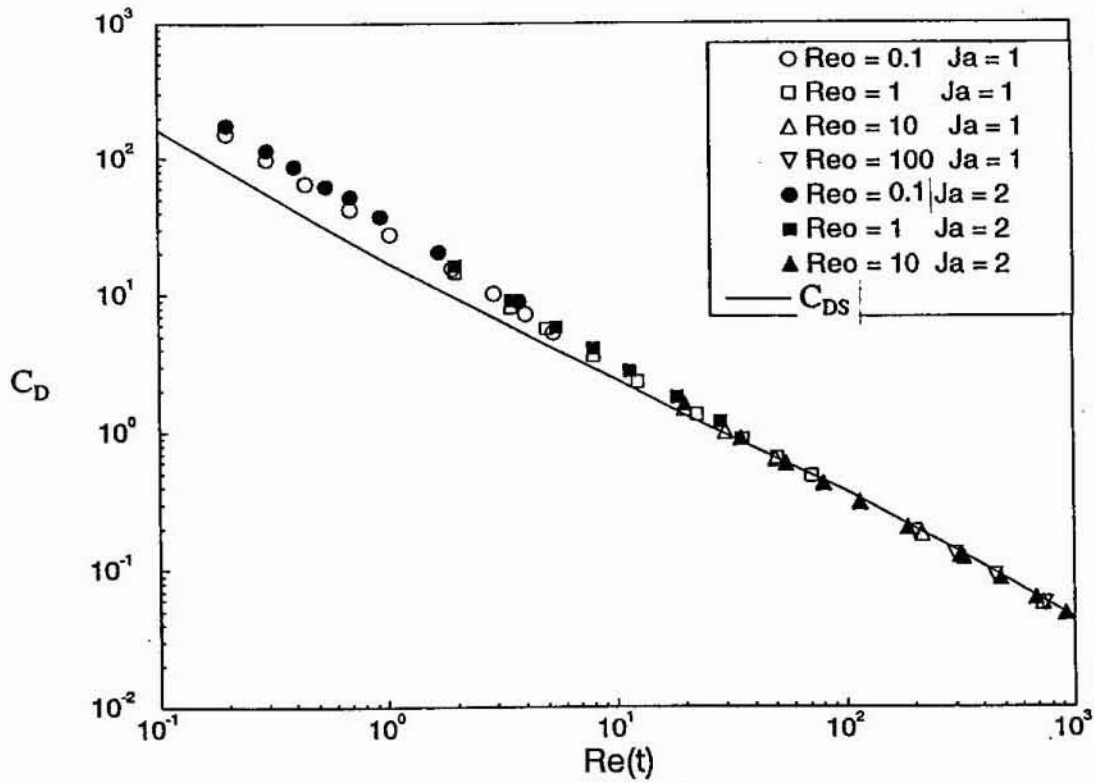
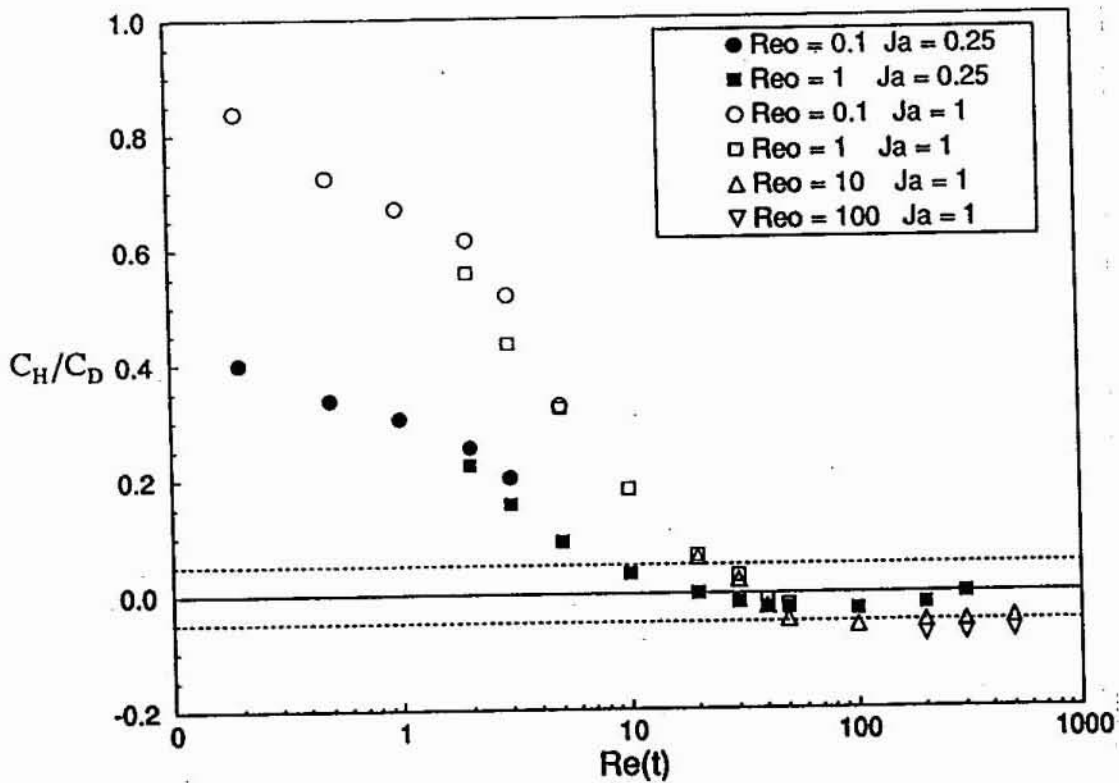
Enfin cette étude a permis de montrer que l'expression de la force exercée sur une bulle sphérique en croissance au sein d'un écoulement uniforme de vitesse relative  $U$  peut se mettre sous la forme :

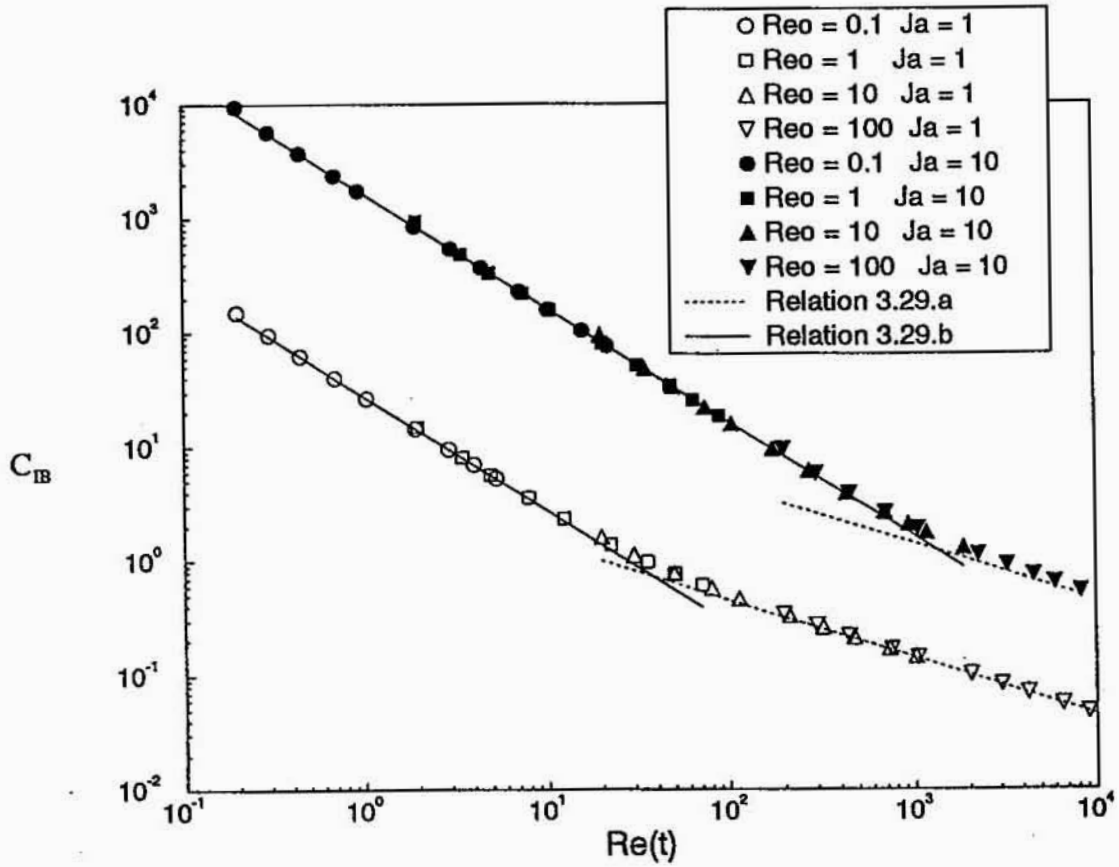
$$F = \frac{1}{2} \rho U^2 \pi R(t)^2 (C_{IB} + C_{DS} + C_H) \quad (3.30)$$

où  $C_{DS}$  est le coefficient de traînée de l'écoulement stationnaire,  $C_{IB} = 8 C_M \dot{R}/U$  (avec  $C_M = 1/2$ ) est le coefficient d'inertie dû au déplacement de l'interface et  $C_H$  est un terme d'histoire présent lorsque l'écoulement est relativement visqueux ( $\text{Re}(t) < 20$ ) et dont l'intensité dépend fortement de celle de la vitesse de l'interface.

Ce travail a également permis de proposer dans le cadre de l'ébullition diffusive pure des expressions de la vitesse interfaciale, du nombre de Nusselt et de la force d'inertie exercée sur la bulle en fonction des paramètres caractéristiques de l'écoulement.

Figure 3.4.a : Contributions  $C_{Dp}$  et  $C_{Dv}$  pour  $Ja = 10$ Figure 3.4.b : Contributions  $C_{Dp}$  et  $C_{Dv}$  pour  $Ja = 1$

Figure 3.5 : Coefficient de traînée visqueuse  $C_D$ Figure 3.6 : Ecart  $C_H$  entre les coefficients de traînée visqueuse  $C_D$  et  $C_{DS}$

Figure 3.7 : Coefficient d'inertie  $C_{IB}$

### 3.5 Condensation en milieu au repos

La dynamique de la condensation est beaucoup plus capricieuse que celle de l'ébullition. Même en l'absence d'écoulement seules les solutions asymptotiques à petits et grands nombres de Jacob existent. Dans le cas général, le comportement observé pour l'ébullition et décrit par la relation (3.16), n'est plus observé en condensation. En effet la couche limite thermique et l'interface ne se déplaçant plus à la même vitesse et dans le même sens (car la couche limite diffuse toujours vers l'extérieur, cf. figure 3.8), le transfert interfacial n'est plus stationnaire. Le calcul analytique de *Scriven* qui utilise cette hypothèse n'est donc pas applicable à la condensation.

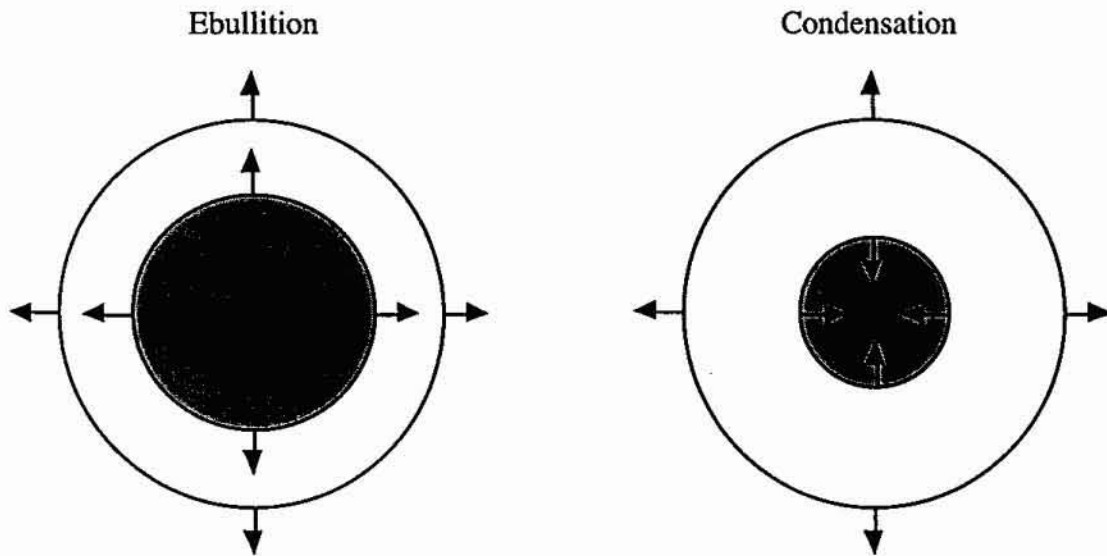


Figure 3.8 : Différence de comportement des couches limites entre l'ébullition et la condensation

*Florschuetz & Chao* (1965) ont réalisé le calcul analytique de la condensation en utilisant la méthode de la couche limite thermique mince développée par *Plesset & Zwick* (1952). La loi temporelle (3.31) donnant l'évolution du rayon adimensionnel  $\gamma(\tau)$  ainsi obtenue n'est applicable qu'à grand nombre de Jacob :

$$\tau = \frac{2}{3}\gamma^{-1} + \frac{1}{3}\gamma^2 - 1 \quad (3.31)$$

On rappelle que dans (3.31)  $\tau$  est le temps adimensionnel défini par (3.15) :



$$\tau = \frac{4 \text{Ja}^2 \chi}{\pi R_o^2} t$$

Compte tenu de la relation (3.31), l'écriture du bilan d'énergie à l'interface (3.2) permet d'exprimer le nombre de Nusselt instantané :

$$\text{Nu} = \frac{12}{\pi} \text{Ja} \frac{\gamma^3}{1 - \gamma^3} \quad (3.32)$$

*Okhotsimskii* (1988) a résolu numériquement le problème de la condensation d'une bulle de vapeur au sein d'un liquide initialement au repos pour une large gamme de nombre de Jacob ( $0.01 < \text{Ja} < 1000$ ). La comparaison de ses résultats avec l'expression (3.31) montre que celle-ci peut être appliquée pour  $\text{Ja}$  suffisamment grand et jusqu'à une certaine valeur de  $\gamma(\tau)$ . *Okhotsimskii* (1988) a également proposé un développement asymptotique valable à très petit nombre de Jacob et qui est en pratique une approximation acceptable dans les situations où  $\text{Ja} < 0.01$ . La loi d'évolution de  $\gamma(\tau)$  ainsi obtenue s'écrit :

$$\gamma(\tau) = \sqrt{\left(1 - \tau / \frac{2\text{Ja}}{\pi(1 + 1.5\text{Ja})}\right)} \quad (3.33)$$

Elle correspond à un transfert interfacial constant obtenu par un développement au premier ordre en Jacob :

$$\text{Nu} = 2 \left(1 + \frac{3}{2} \text{Ja}\right) \quad (3.34)$$

Nos résultats numériques (figure 3.9) sont en parfait accord avec ceux de *Okhotsimskii* (1988). Ils n'apportent donc aucune information supplémentaire si ce n'est que les expressions asymptotiques (3.33) et surtout (3.34) ne sont pas vérifiées de manière acceptable même à  $\text{Ja} = 0.1$ . Aucune loi générale permettant de décrire la condensation d'une bulle de vapeur en l'absence d'écoulement ne semble se dégager de nos résultats numériques. Cependant nous avons tracé dans le diagramme  $(\gamma, \text{Ja})$  (figure 3.10) le domaine de validité de l'hypothèse de couche limite thermique mince c'est à dire le domaine dans lequel les résultats (3.31) et (3.32) de *Florschuetz & Chao* (1965) permettent de décrire la physique étudiée. A cet effet le critère choisi est un écart de 2% entre nos résultats numériques et la relation (3.31). Ce tracé montre, comme l'avait constaté *Okhotsimskii* (1988), que l'expression (3.31) et par conséquent (3.32)

sont représentatives de la condensation en début de processus lorsque le déplacement de l'interface et la diffusion de la couche limite thermique qui s'effectuent dans des directions opposées n'ont pas trop épaissi la couche limite thermique. Ces résultats sont utilisables tant que la diffusion dans la couche limite thermique est négligeable devant l'advection radiale c'est à dire d'autant plus longtemps que le nombre de Jacob est important car la vitesse de l'interface lui est proportionnelle. Par contre lorsque le nombre de Jacob est faible, la couche limite thermique a le temps de diffuser et devient très rapidement plus épaisse que ne le tolère l'hypothèse de couche limite mince de telle sorte que la théorie basée sur cette hypothèse ne peut s'appliquer. On peut également noter (figure 3.11) que cette hypothèse a pour effet de sous-estimer le transfert interfacial et par conséquent, ce qui peut paraître paradoxal, de surestimer l'épaisseur réelle de la couche limite thermique. En effet l'approximation du champ de température, utilisée pour résoudre ce problème par *Florschuetz & Chao* (1965), est réalisée en négligeant un terme advectif et un terme diffusif dans la résolution de la couche limite thermique ce qui a pour effet, dans le cas de la condensation, de surestimer la diffusion thermique. Par rapport à la situation réelle, l'épaisseur de la couche limite thermique ainsi calculée est augmentée, le transfert interfacial est diminué ce qui a pour effet de retarder la condensation (figure 3.9).

La résolution du problème de la condensation par voie numérique ne permet pas la simulation complète du processus jusqu'au collapse final de la bulle. C'est la raison pour laquelle *Okhotsimskii* (1988) s'interroge sur la valeur finale de la vitesse de l'interface, ne sachant conclure si celle-ci est finie ou infinie au moment de la disparition de l'inclusion. En effet, lorsque que l'on observe l'évolution temporelle du rayon présentée par la figure 3.9, on constate un changement de pente qui traduit l'accélération de l'interface en fin de condensation. La représentation de cette vitesse dans l'espace des phases  $(\gamma, \dot{\gamma})$  (figure 3.12) montre effectivement qu'elle augmente lorsque la condensation de la bulle arrive à terme. Cependant, au moment de la disparition complète de la bulle, le rayon de celle-ci étant de plus en plus petit, les effets d'inertie, au travers de la tension superficielle, deviennent prépondérants. Le problème initialement purement diffusif ne sera alors plus contrôlé uniquement par le changement de phase à l'interface. Les études expérimentales de la condensation complète ont permis d'observer que la forme de la bulle n'est plus sphérique en fin de condensation. Dans certaines situations, l'interface devient même instable et des jets de liquide peuvent alors traverser la bulle et la scinder en plusieurs autres bulles de vapeur [*Florschuetz & Chao* 1965].

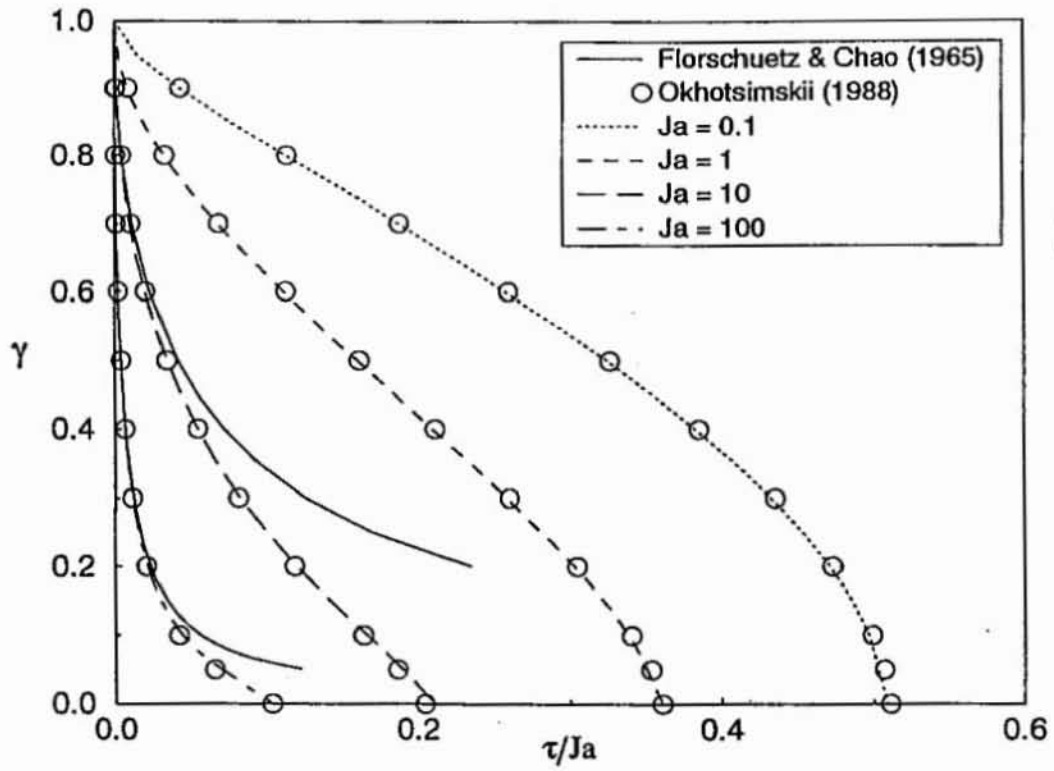


Figure 3.9 : Evolution du rayon au cours de la condensation en milieu au repos

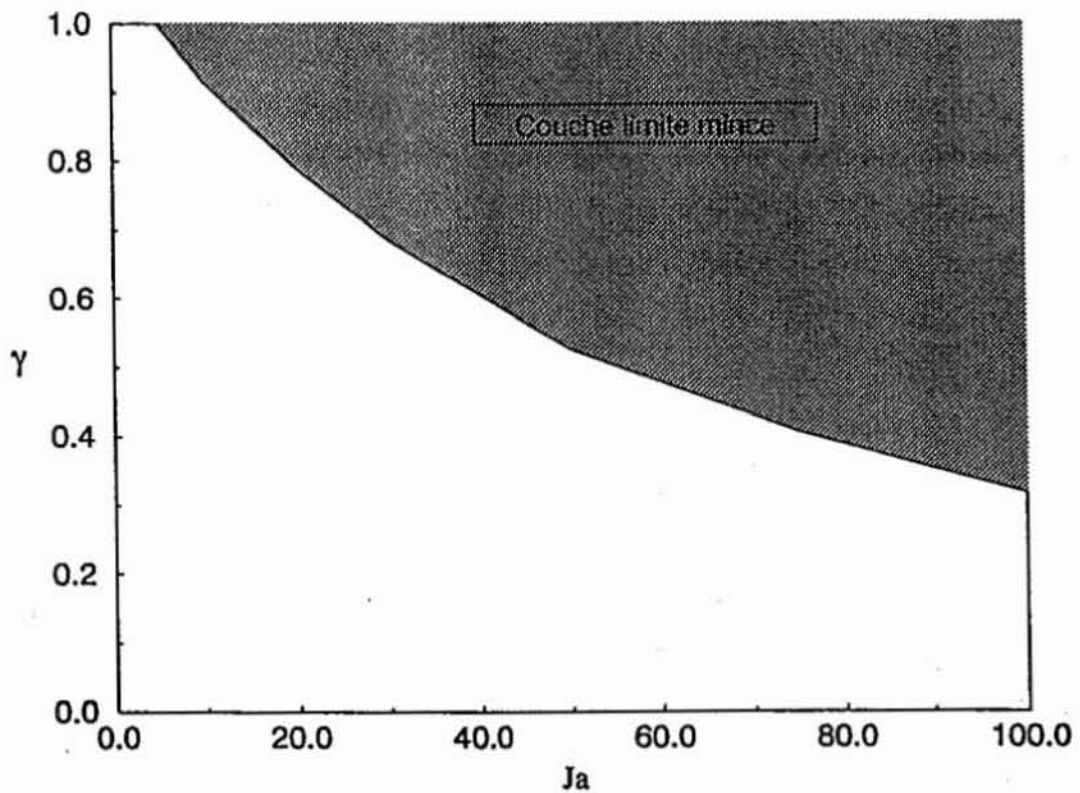


Figure 3.10 : Diagramme de validité de l'hypothèse de couche limite thermique mince

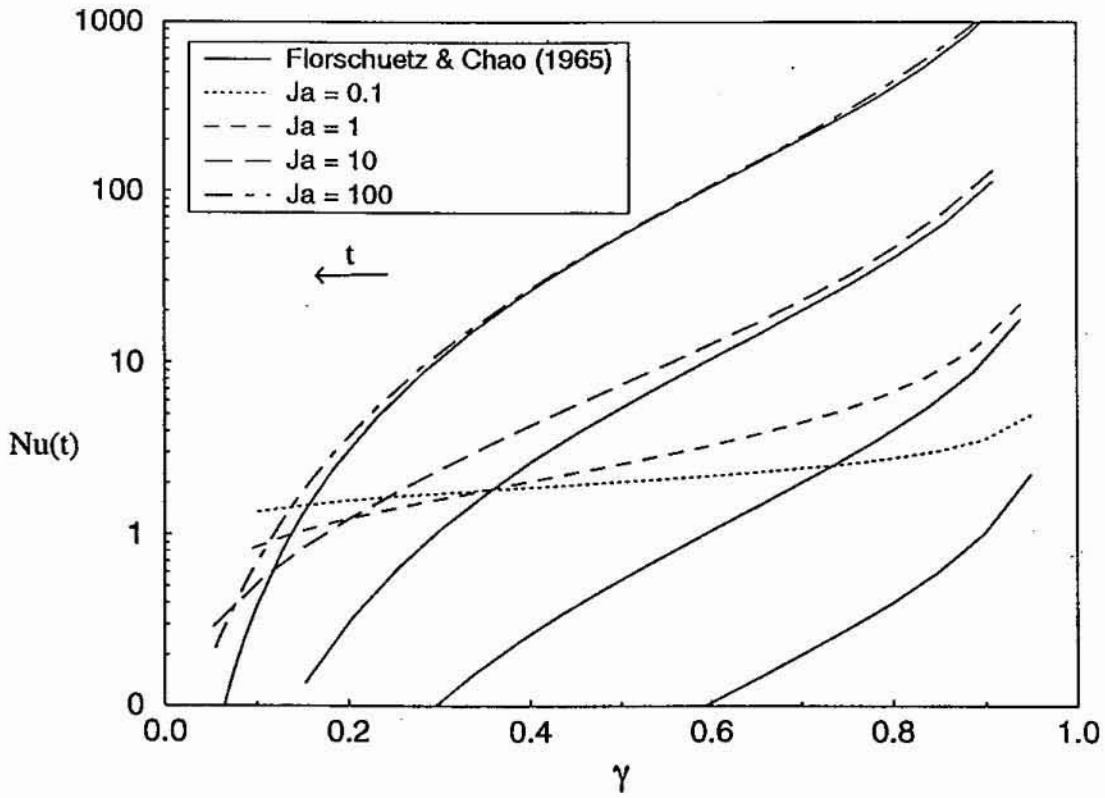


Figure 3.11 : Nombre de Nusselt au cours de la condensation en milieu au repos

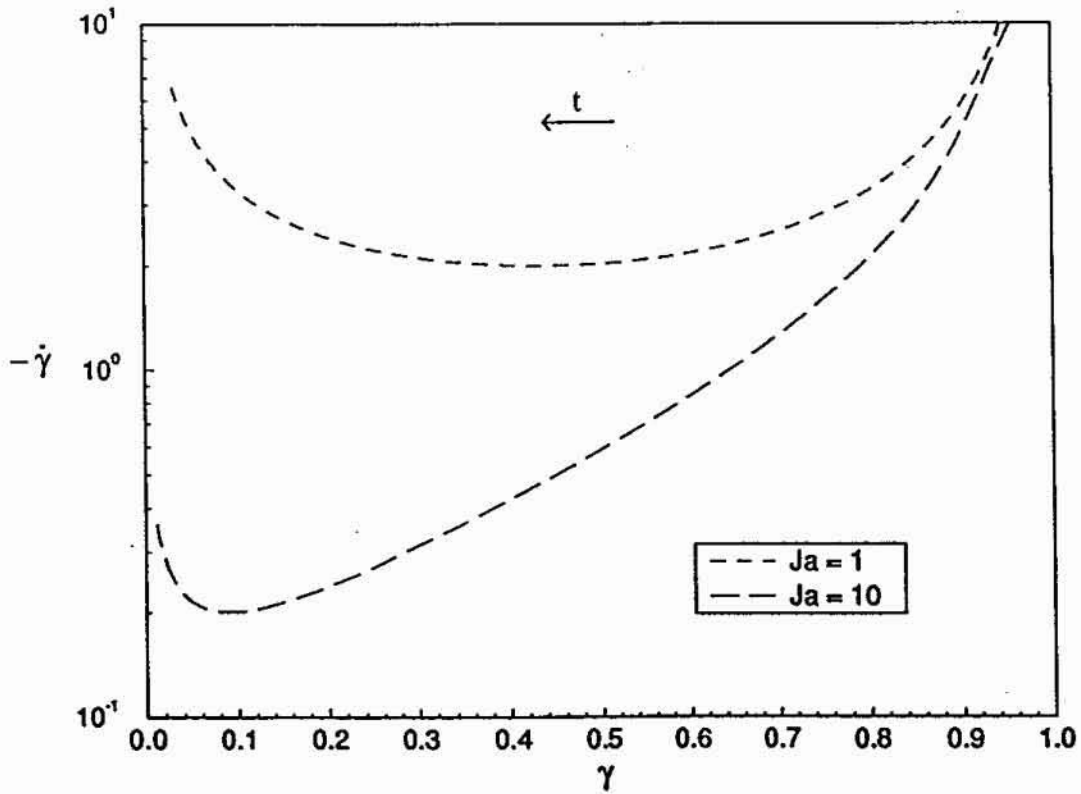


Figure 3.12 : Représentation dans l'espace des phases  $(\gamma, \dot{\gamma})$  de la condensation en milieu au repos

## 3.6 Condensation en présence d'un écoulement uniforme

### 3.6.a Aspects thermiques

Les connaissances relatives à la condensation en présence d'un écoulement sont encore plus limitées que celles existant en ébullition. Les études qui se sont intéressées à ce problème ont montré que, comme pour l'ébullition, la translation de la bulle a pour effet d'accélérer la condensation. *Wittke & Chao* (1967) ont résolu numériquement l'écoulement potentiel autour d'une bulle en condensation diffusive en considérant le champ de température obtenu à l'aide de l'hypothèse de couche limite thermique mince développée par *Plesset & Zwick* (1952). Leurs résultats numériques sont en bon accord avec leurs mesures pour des nombres de Peclet initiaux très élevés ( $1000 < Pe < 7000$ ), et par conséquent des nombres de Reynolds importants ( $Re > 600$ ). Leurs expériences ont été réalisées dans de l'eau dont la température avoisinait  $90^{\circ}\text{C}$  ce qui correspond à un nombre de Prandtl sensiblement égal à 1.7.

Nos résultats numériques montrent que, comme pour l'ébullition, deux régimes sont observés selon la valeur du rapport  $C = \dot{R} / U$  de la vitesse de l'interface et de celle de l'écoulement non-perturbé. En début de processus la vitesse interfaciale est très importante et l'effet de l'advection due à l'écoulement moyen est imperceptible. Celui-ci influence ensuite la condensation d'autant plus tardivement que le nombre de Jacob est grand et que le nombre de Reynolds initial est petit (figures 3.13.a et 3.13.b). La principale différence avec l'ébullition est que dans certaines situations, par exemple pour le cas  $Re_0 = 10$ ,  $Pr = 1$  et  $Ja = 10$  présenté sur la figure 3.13.a, l'advection induite par l'écoulement externe n'a aucune influence pendant toute la condensation de la bulle qui est alors parfaitement décrite par les résultats obtenus en l'absence d'écoulement.

En condensation le rayon de la bulle décroît au cours du temps et l'épaisseur des couches limites dynamique et thermique ne cesse de s'accroître. Par conséquent le comportement de la bulle ne peut tendre vers les lois prédites par la théorie potentielle quasi-statique tant pour le transfert thermique interfacial (relation 3.20) que pour la traînée (relation 3.23).

En ce qui concerne le transfert thermique (figure 3.15), il est identique au transfert obtenu en l'absence d'écoulement tant que la vitesse de l'interface est prépondérante. Lorsque ce n'est plus le cas, l'écart avec le transfert observé dans l'écoulement stationnaire correspondant ne cesse de s'accroître, le nombre de Nusselt descendant même en dessous de la valeur du

coefficient de transfert obtenu en diffusion pure  $Nu_D = 2$ . Ce comportement est lié à des effets d'histoire thermique croissants amplifiés par les effets d'histoire dynamique décrits ci-après.

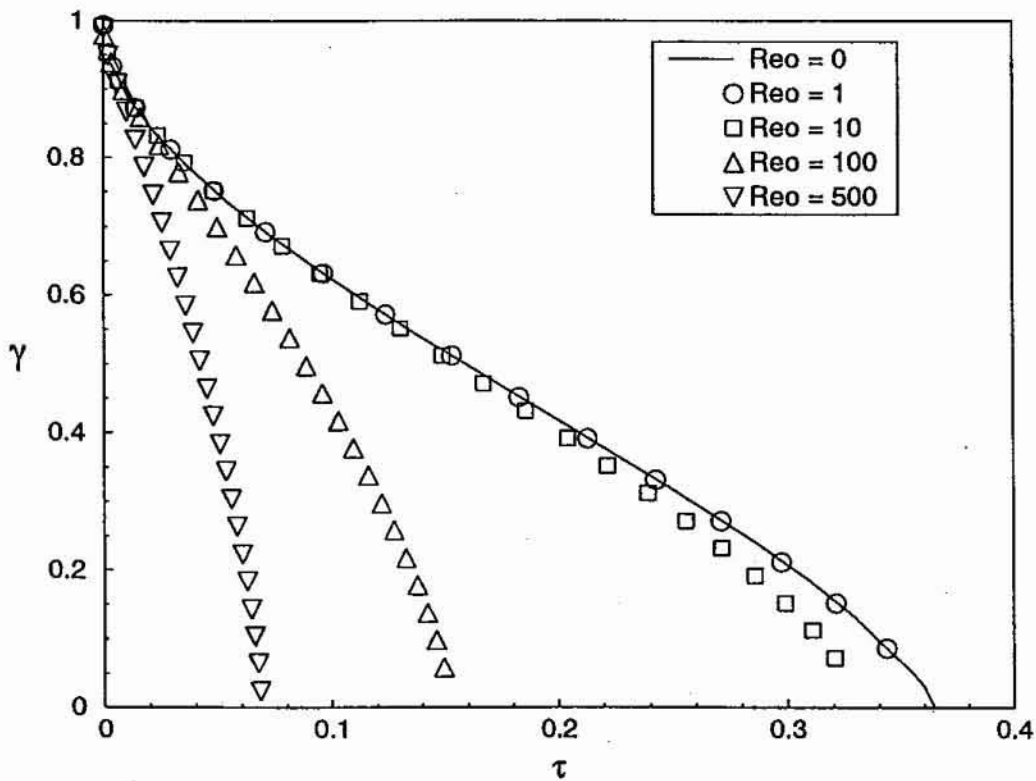


Figure 3.13.a : Rayon de la bulle lors de la condensation au sein d'un écoulement ( $Ja = 1$ )

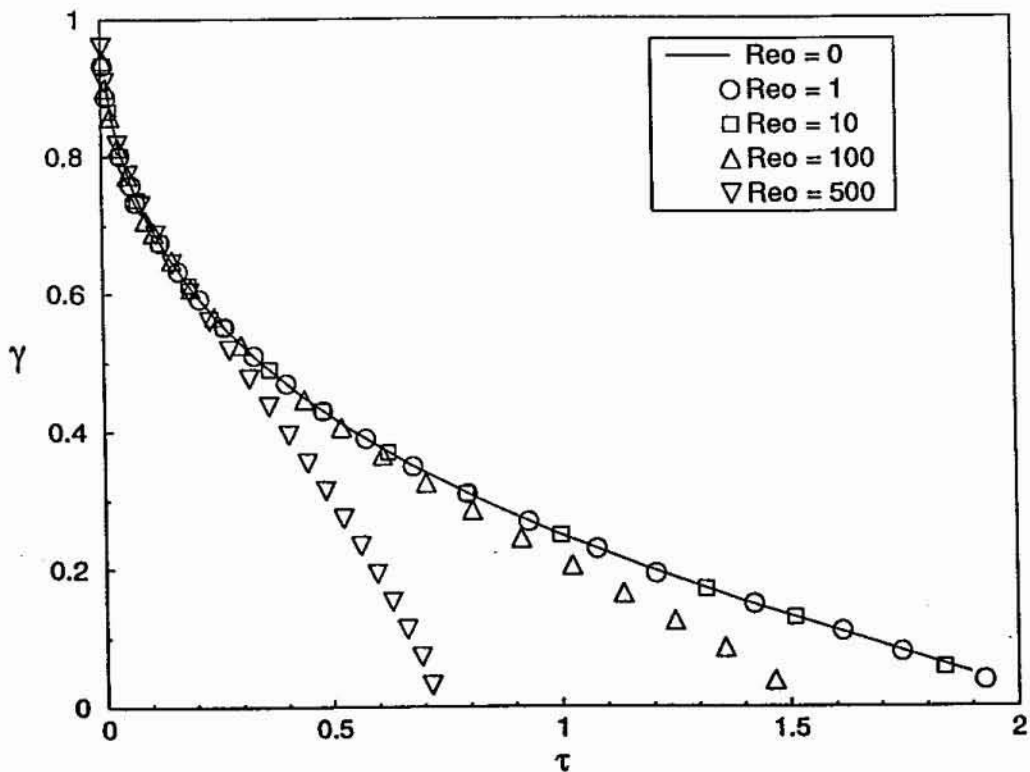


Figure 3.13.b : Rayon de la bulle lors de la condensation au sein d'un écoulement ( $Ja = 10$ )

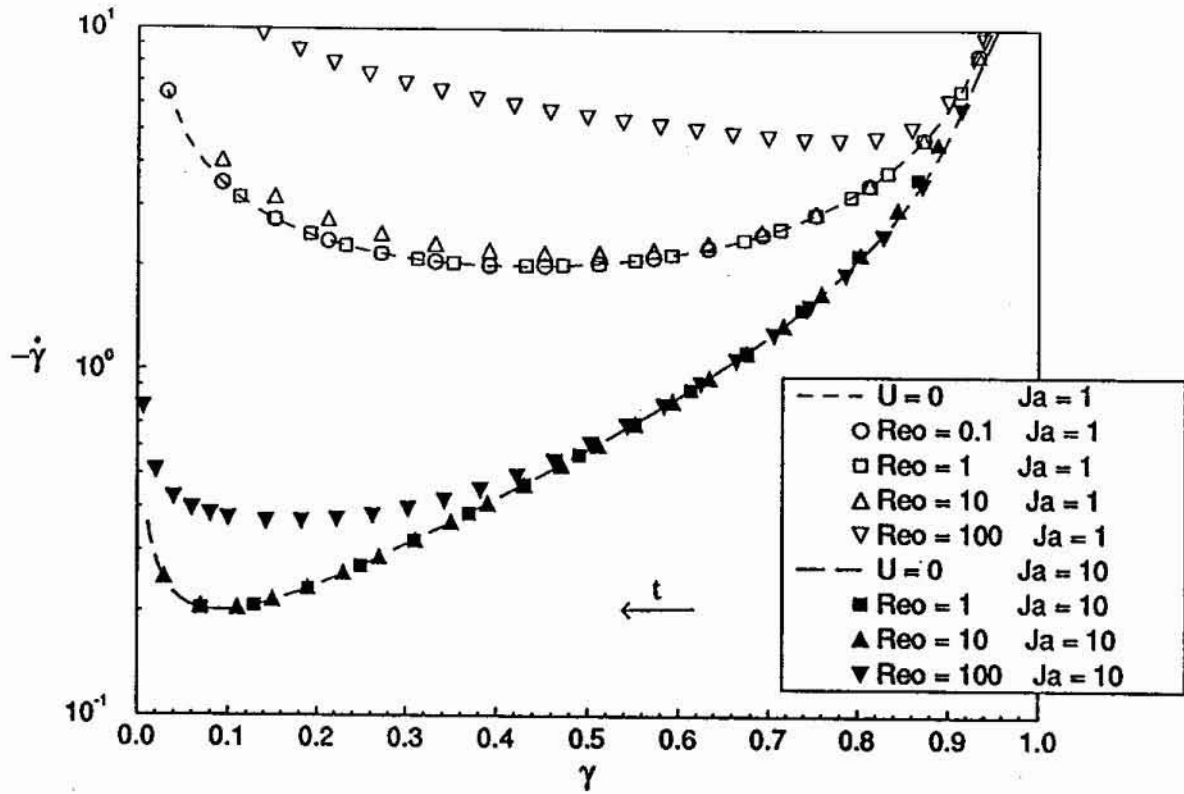


Figure 3.14 : Vitesse de l'interface lors de la condensation en présence d'un écoulement

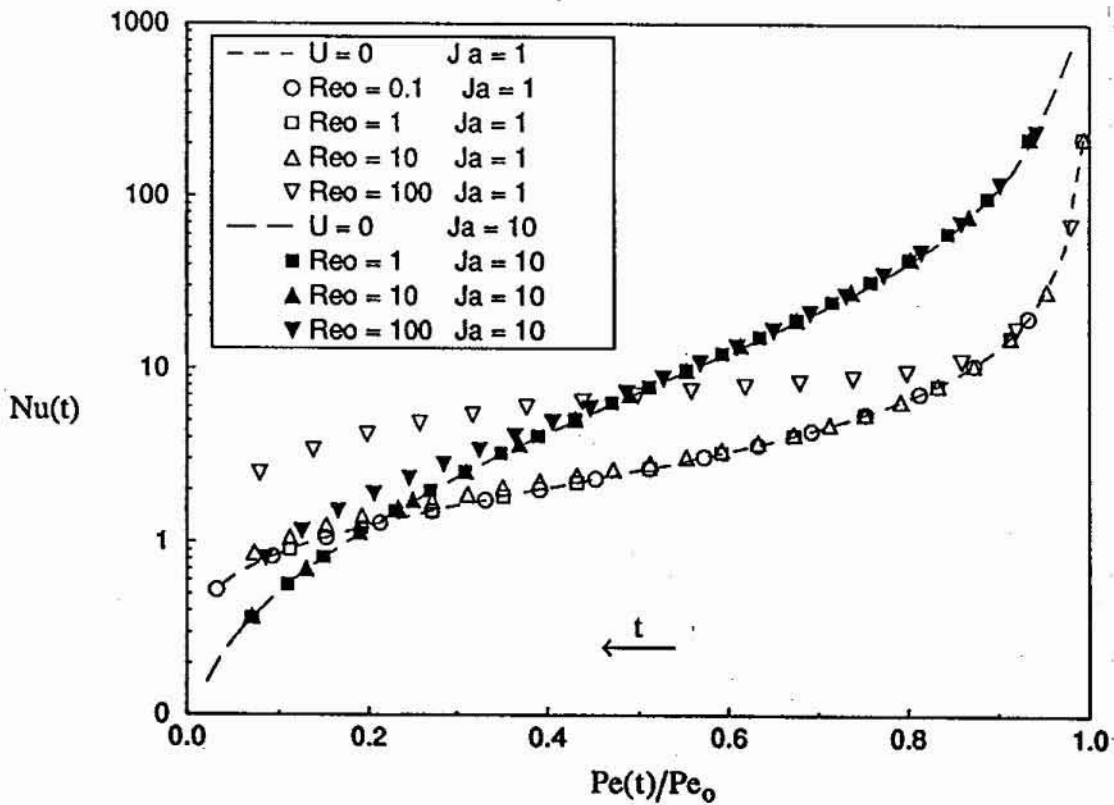


Figure 3.15 : Nombre de Nusselt en condensation au sein d'un écoulement ( $Ja = 1$  et  $Ja = 10$ )



### 3.6.b Aspects dynamiques

La caractéristique dynamique essentielle de la condensation en présence d'un écoulement est le rôle de plus en plus important des effets visqueux au cours du processus sans que l'écoulement tende vers un comportement quasi-statique de Stokes. Ceci est dû au fait qu'en fin de condensation la vitesse de l'interface augmente très rapidement et l'on n'atteint donc jamais  $C = \dot{R}/U \ll 1$ , c'est à dire que le nombre de Reynolds  $Re(t)\dot{R}/U$  défini à partir de la vitesse interfaciale ne devient pas petit devant l'unité. On constate que très rapidement les contributions de la pression et de la contrainte visqueuse à la traînée totale deviennent du même ordre de grandeur (figures 3.16.a et 3.16.b). On observe sur les mêmes graphes que le signe de la force totale change au cours de la condensation. Si l'on considère le sens positif comme étant celui de l'écoulement, la force d'inertie proportionnelle à la vitesse interfaciale est négative. La force liée aux effets visqueux est dissipative donc positive. Ainsi selon le rapport des intensités respectives de ces deux forces, la résultante sera soit dissipative pour l'écoulement, soit source de quantité de mouvement. Au début du processus, de par la brusque mise en mouvement du fluide induite par l'échelon initial de température, la bulle fournit suffisamment de quantité de mouvement au fluide pour compenser la dissipation visqueuse de telle sorte que la résultante des forces est opposée au sens de l'écoulement. Progressivement les effets de masse ajoutée diminuent et les effets visqueux, qui eux augmentent car le nombre de Reynolds diminue, deviennent prépondérants. La force résultante est alors positive, donc dissipative. La bulle fournit d'autant plus longtemps de la quantité de mouvement au fluide que le nombre de Reynolds initial et le nombre de Jacob sont grands.

L'étude plus détaillée de la force a été réalisée en reprenant la décomposition (3.30) adoptée dans le paragraphe 3.4.b traitant de l'ébullition :

$$F = \frac{1}{2} \rho U^2 \pi R(t)^2 (C_{IB} + C_{DS} + C_H)$$

où  $C_{IB} = 8 C_M \dot{R}/U$  ( $C_M = 1/2$ ) est le coefficient d'inertie. La comparaison de l'ensemble de la traînée d'origine visqueuse  $C_D = C_{DS} + C_H$  avec la traînée de l'écoulement stationnaire  $C_{DS}$  montre que l'écart  $C_H$  à la situation stationnaire est considérable (figure 3.17). Les effets visqueux instationnaires contenus dans  $C_H$  sont significatifs et présents dans certaines situations tout au long du processus (figure 3.18). En début de condensation  $C_H$  est positif et d'autant plus grand que le nombre de Reynolds est petit c'est à dire que la viscosité joue un rôle prépondérant. Dans la plupart des cas de figure,  $C_H$  décroît ensuite pour



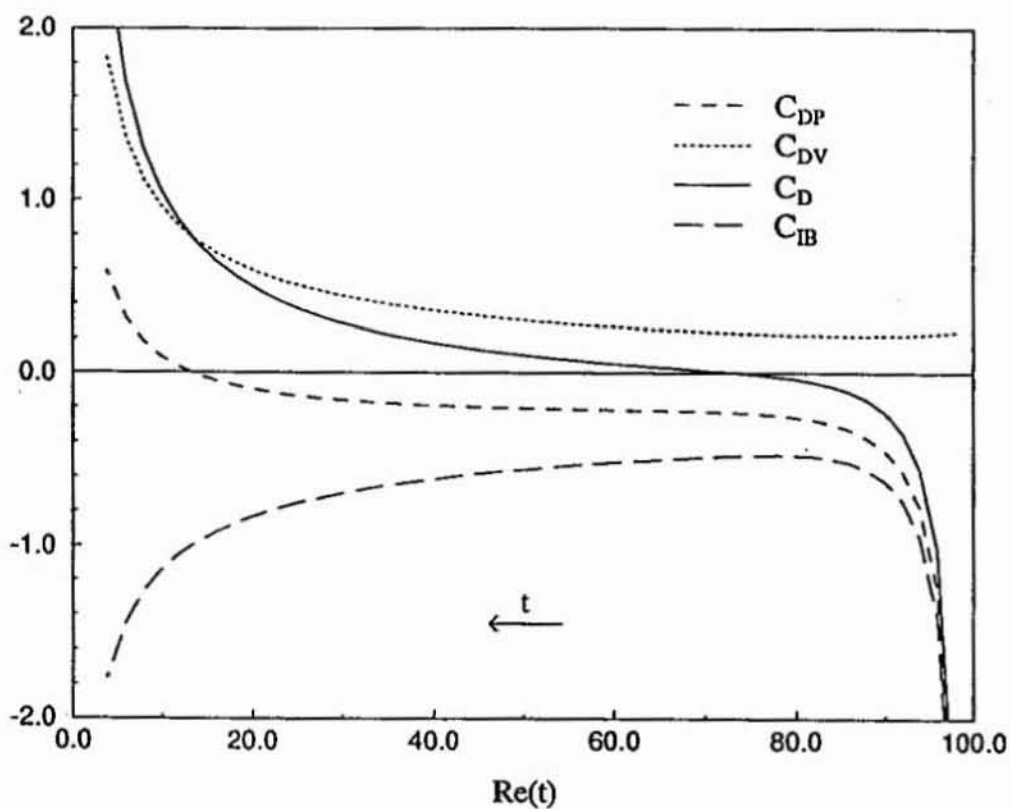


Figure 3.16.b : Coefficient de traînée au cours de la condensation pour  $Re_0 = 10$

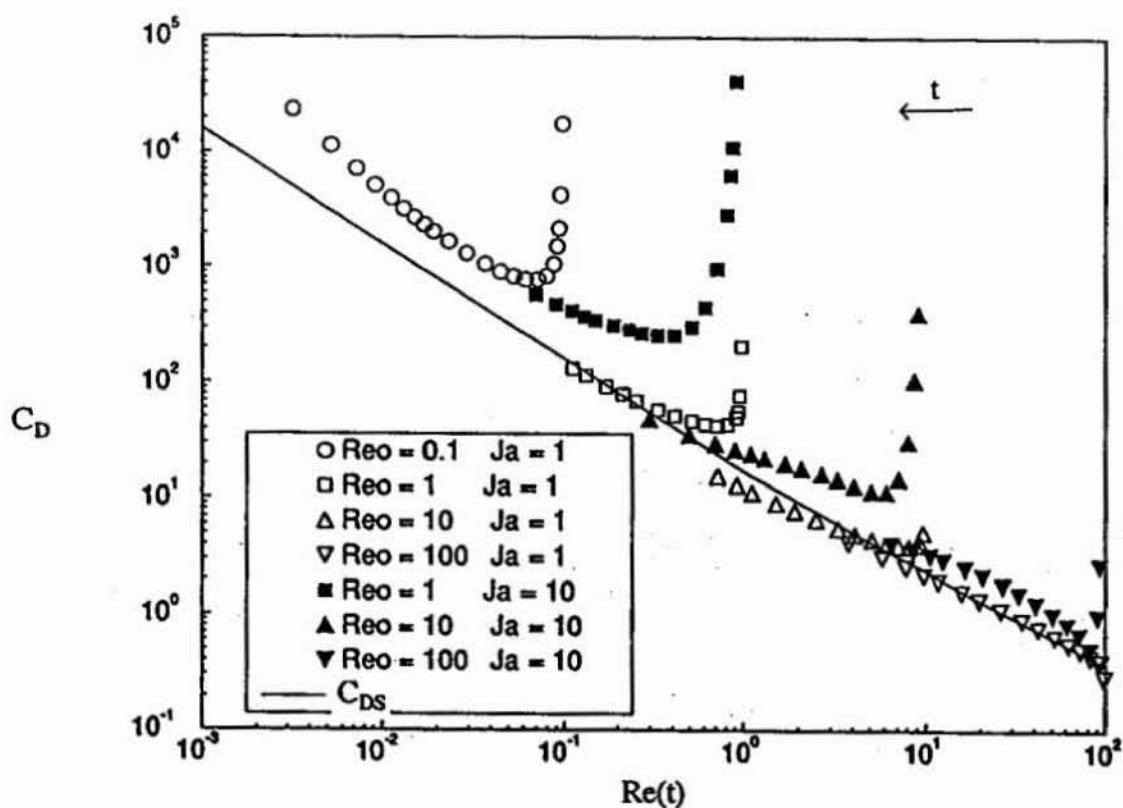


Figure 3.17 : Coefficient  $C_D$  au cours de la condensation à  $Ja = 1$  et  $Ja = 10$ .

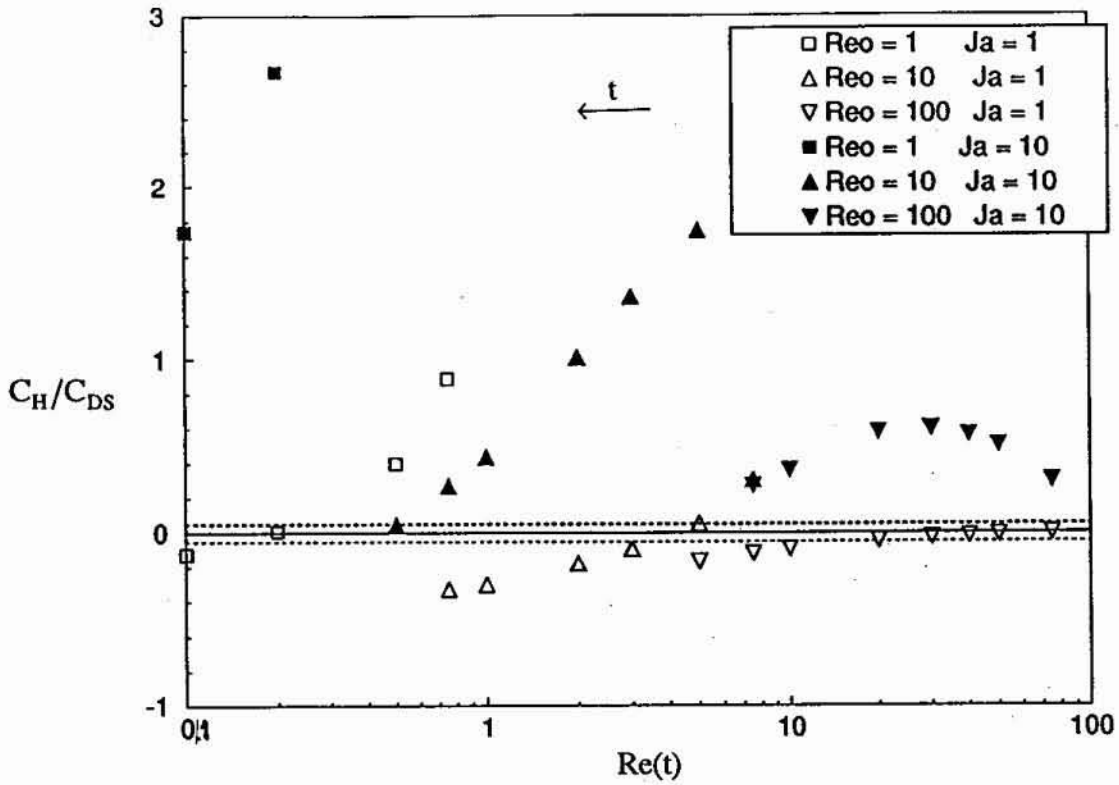


Figure 3.18 : Rapport  $C_H/C_{DS}$  au cours de la condensation à  $Ja = 1$  et  $Ja = 10$

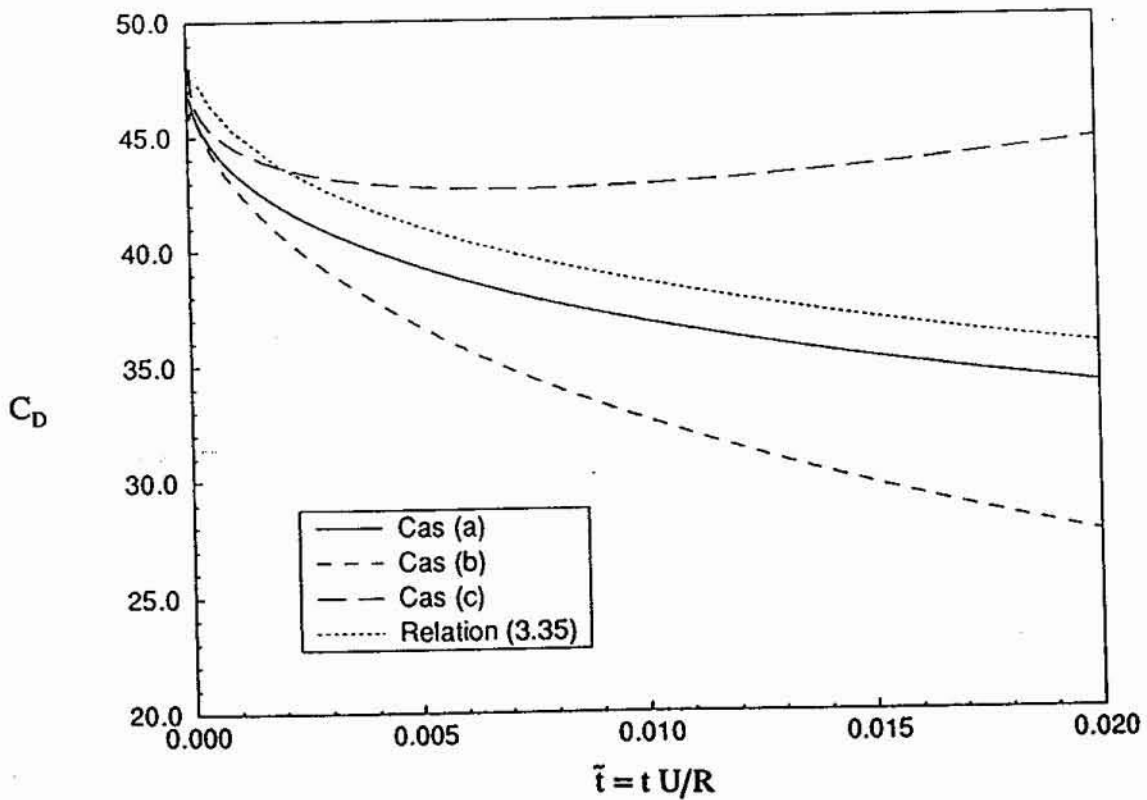


Figure 3.19 : Effets d'histoire liés aux conditions initiales

### 3.7 Conclusions

L'ébullition et la condensation d'une bulle de vapeur ont été étudiées numériquement en présence d'un écoulement uniforme. Tant que le rapport  $C = \dot{R} / U$  entre la vitesse interfaciale et la vitesse de l'écoulement à l'infini est favorable à la vitesse de l'interface, le changement de phase n'est pas affecté par l'écoulement extérieur. Les résultats obtenus pour ces mêmes phénomènes en l'absence d'écoulement sont alors une très bonne approximation du comportement observé pour l'évolution temporelle du rayon et du transfert thermique interfacial. Dès que le rapport  $C = \dot{R} / U$  devient favorable à l'écoulement à l'infini, le changement de phase est accéléré. Ce changement de régime est plus ou moins rapide selon la valeur du nombre de Reynolds initial et du nombre de Jacob. Dans le cas de l'ébullition, le nombre de Nusselt tend alors vers le comportement quasi-statique décrit par la relation de *Ruckenstein* (1958). On constate également que le régime de transition entre ces deux comportements est très bref ce qui permet de proposer une loi d'évolution pour le rayon (relation 3.22). En ce qui concerne les actions hydrodynamiques exercées sur la bulle, les effets d'histoire présents à petit nombre de Reynolds deviennent négligeables lorsque  $Re(t) > 20$ . La force correspondante peut alors s'écrire sous la forme (3.30).

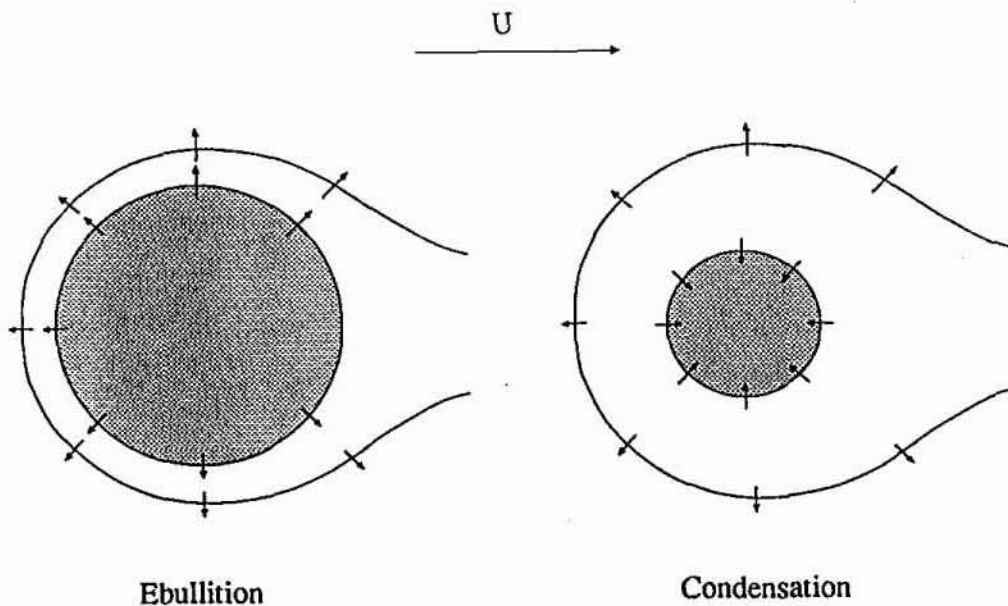


Figure 3.20 : Comparaison du comportement des couches limites dynamiques et thermiques en ébullition et en condensation.

La dynamique de la condensation est beaucoup plus complexe. A l'inverse de l'ébullition où la vitesse de l'interface est de même sens que celle de la frontière externe de la couche limite thermique, en condensation ces vitesses sont opposées et les couches limites dynamiques et thermiques ne cessent de s'épaissir (figure 3.20). Les effets visqueux deviennent au cours du processus de plus en plus importants mais le comportement ne tend pas vers celui d'un écoulement de Stokes à cause de la vitesse radiale toujours significative et qui augmente même en fin de condensation. Des effets d'histoire sont constamment présents dans l'évolution dynamique et thermique de la condensation ce qui rend la description dynamique, et par conséquent la prédiction des trajectoires des bulles, délicate.

Il faut également souligner que, tant en ébullition qu'en condensation, les actions hydrodynamiques exercées sur la bulle gardent en mémoire, pendant une bonne partie du processus, les conditions dans lesquelles le changement de phase a été initié.

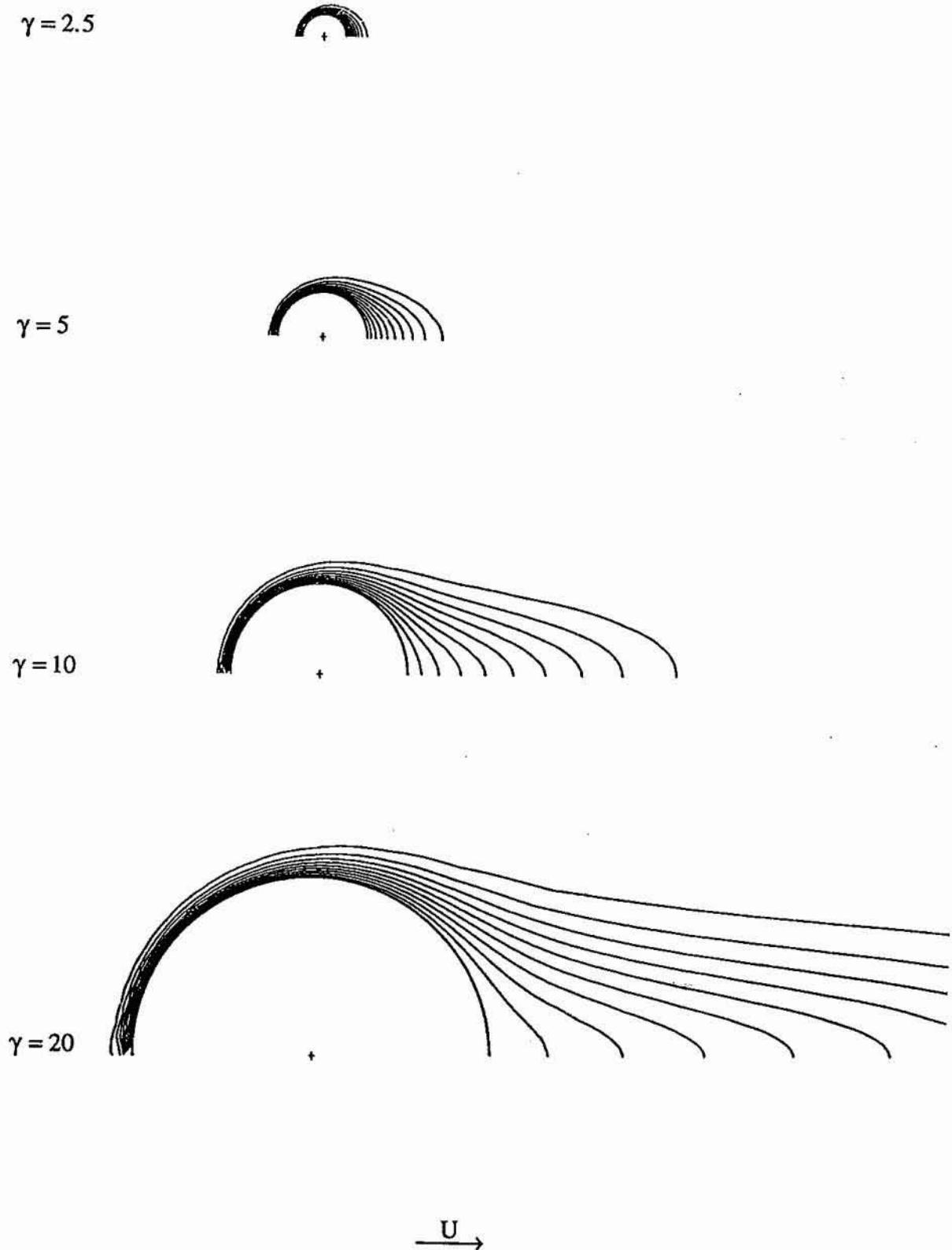


Figure 3.21 : Isothermes en ébullition à  $Ja = 1$  et  $Re_o = 10$

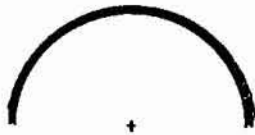
$\gamma = 2.5$  $\gamma = 5$  $\gamma = 10$  $\gamma = 20$ 

Figure 3.22 : Isothermes en ébullition à  $Ja = 10$  et  $Re_o = 10$

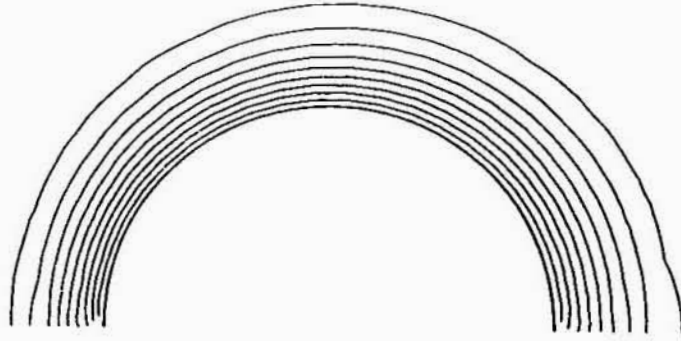
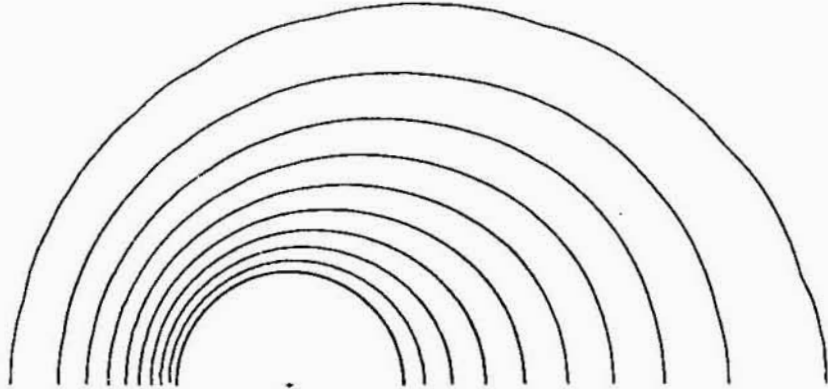
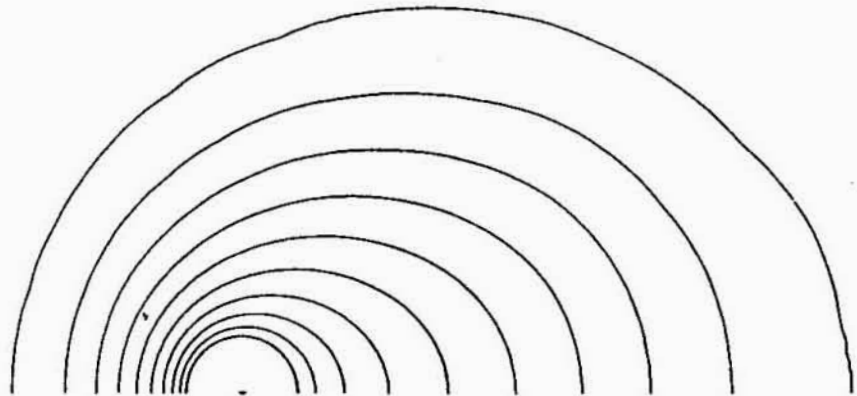
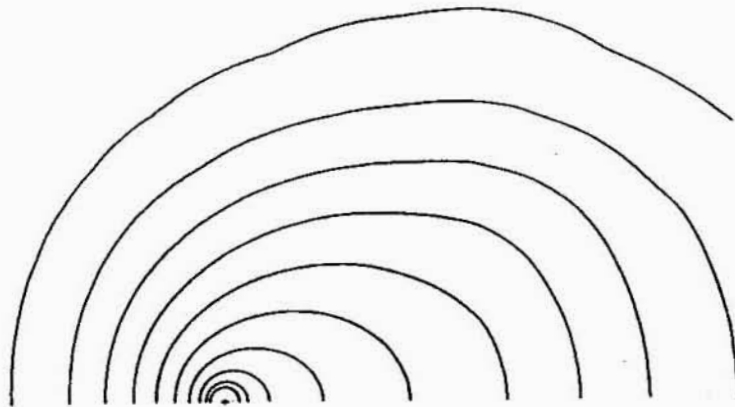
$\gamma = 0.8$  $\gamma = 0.4$  $\gamma = 0.2$  $\gamma = 0.05$  $\underline{U} \rightarrow$ 

Figure 3.23 : Isothermes en condensation à  $Ja = 1$  et  $Re_o = 10$

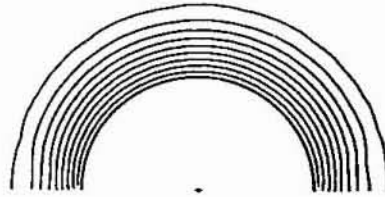
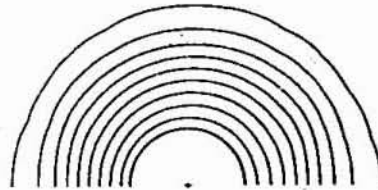
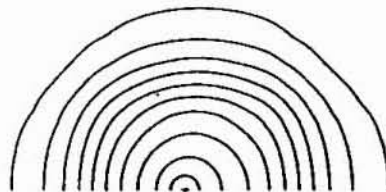
$\gamma = 0.8$  $\gamma = 0.4$  $\gamma = 0.2$  $\gamma = 0.05$  $\xrightarrow{U}$ 

Figure 3.24 : Isothermes en condensation à  $Ja = 10$  et  $Re_o = 10$



## Chapitre 4

## Chapitre 4

# Force de portance sur une bulle sphérique plongée dans un cisaillement linéaire

4.1 Introduction

4.2 Aperçu bibliographique

4.3 Calcul analytique de la force de portance à petit nombre de Reynolds

4.4 Résultats des simulations : force de traînée

4.5 Résultats des simulations : force de portance

4.6 Description de l'écoulement

4.7 Conclusions

## 4.1 Introduction

Une particule sphérique en mouvement dans un écoulement stationnaire cisaillé subit, outre la force de traînée classique, une force orthogonale à sa trajectoire. Même si son intensité est en général plus faible que celle de la force de traînée, cette force appelée portance est responsable par exemple de la migration latérale de particules en écoulement de Poiseuille [Segré & Silberberg, 1962]. Dans ce chapitre nous nous intéressons à la force exercée sur une bulle sphérique par un écoulement cisaillé dont le champ de vitesse non-perturbé s'écrit :

$$\mathbf{U} = (U + \omega y) \mathbf{e}_x \quad (4.1)$$

La vorticité de cet écoulement non-perturbé est :

$$\boldsymbol{\Omega} = -\omega \mathbf{e}_z \quad (4.2)$$

Dans le cadre de cette étude (figure 4.1), la bulle est immobile ( $\mathbf{U}_b = \mathbf{0}$ ) et localisée à l'origine du repère cartésien  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ .

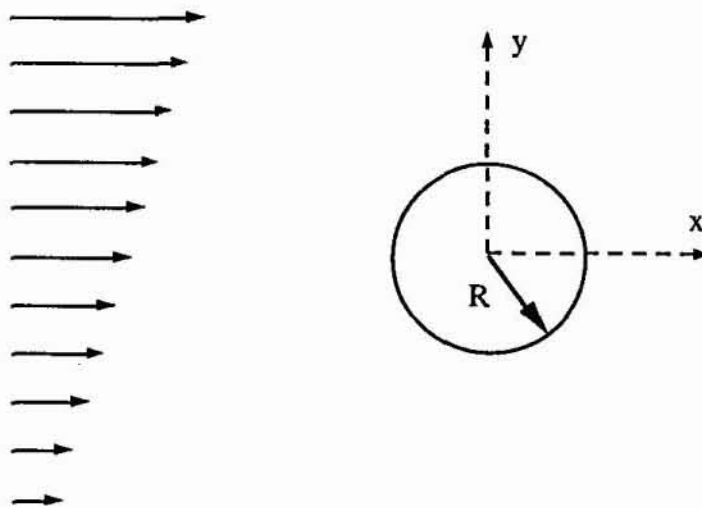


Figure 4.1

L'écoulement étudié est caractérisé par le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{2RU}{\nu} \quad (4.3)$$

et par la vorticité adimensionnelle  $A_\omega$  définie à partir des caractéristiques de l'écoulement non-perturbé par :

$$A_\omega = \frac{2R \omega}{U} \quad (4.4)$$

Ce nombre est construit avec le diamètre de la bulle car  $A_\omega$  représente ainsi la déformation relative  $\Delta U/U$  du champ de vitesse non-perturbé à l'échelle de la bulle (figure 4.2).

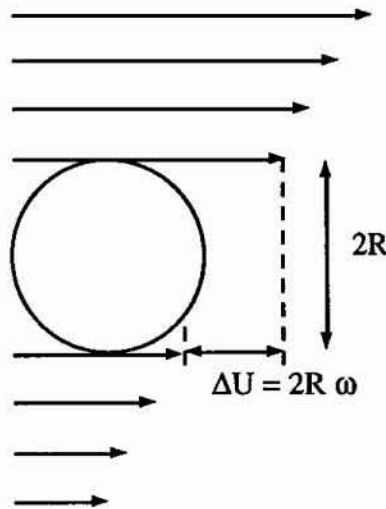


Figure 4.2 : Interprétation physique de  $A_\omega$

Dans cette étude, la force exercée sur la bulle par l'écoulement (4.1) est écrite en étendant au cas de l'écoulement visqueux l'expression de la force (0.9), obtenue en fluide parfait par *Auton et al.* (1988), et en la superposant à l'expression de la force de traînée visqueuse (0.3). Par conséquent, pour l'écoulement (4.1) étudié dans ce chapitre, la force totale  $\mathbf{F}$  subie par la bulle est décomposée à priori en une force de traînée visqueuse  $\mathbf{F}_D$  et une force de portance  $\mathbf{F}_L$ , la force d'inertie provenant de l'accélération de l'écoulement étant nulle ( $\mathbf{F}_I = \mathbf{0}$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_D \\ &= C_L \rho \vartheta_b (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \times \boldsymbol{\Omega} + C_D \pi R^2 \frac{1}{2} \rho |\mathbf{U} - \mathbf{U}_b| (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Compte tenu de l'expression des champs de vitesse (4.1) et de vorticité (4.2) de l'écoulement non-perturbé, la résultante  $\mathbf{F}$  prend la forme :

$$\mathbf{F} = C_D \pi R^2 \frac{1}{2} \rho U^2 \mathbf{e}_x + C_L \rho \vartheta_b U \omega \mathbf{e}_y \quad (4.6)$$

L'expression de  $\mathbf{F}$  est simple et sa projection sur les axes cartésiens donne directement accès au coefficient de portance  $C_L$  et au coefficient de traînée visqueuse  $C_D$ .  $C_D$  est en fait défini à partir du coefficient de traînée visqueuse  $C_{DS}$  de l'écoulement stationnaire uniforme  $\mathbf{V}_s$ , correspondant à  $A_\omega = 0$  et dont le champ de vitesse non-perturbé est  $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x$ , par :

$$C_D = C_{DS} + C_{D\omega} \quad (4.7)$$

où  $C_{D\omega}$  représente par conséquent la modification de la traînée visqueuse par le champ de vorticité  $\mathbf{\Omega} = -\omega \mathbf{e}_z$ .

La figure 4.3 rappelle les définitions respectives de l'angle polaire  $\theta$  et de l'angle azimutal  $\phi$  qui forment le repère  $(\theta, \phi)$  dans lequel l'ensemble des distributions locales à la surface de la bulle sont exprimées (§ 1.8). On rappelle également que le vecteur tangent  $\mathbf{e}_\theta$  à la surface de la bulle suivant l'angle  $\theta$  correspond en fait au vecteur de la base curviligne  $\mathbf{e}_\xi$  et que par conséquent la vitesse à la surface de la bulle est décrite à l'aide de ses composantes curvilignes  $\mathbf{V}_i = (V_\xi, V_\eta = 0, V_\phi)$ .

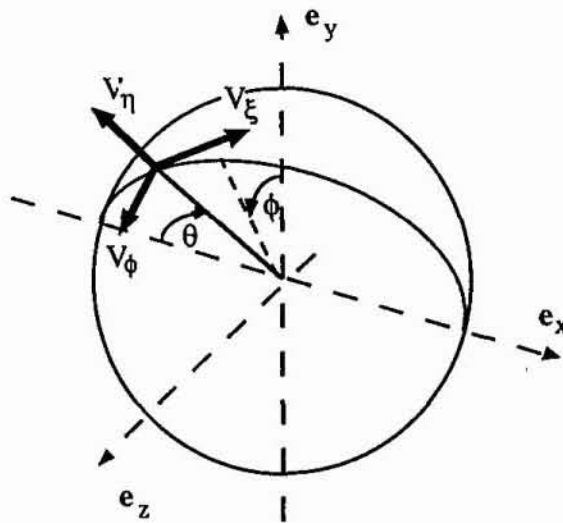


Figure 4.3 : repère local  $(\theta, \phi)$  à la surface de la bulle.

Tant que le sillage n'est pas le si ge d'un détachement tourbillonnaire (ce qui ne se produit jamais pour une bulle sphérique propre), l'écoulement est symétrique par rapport au plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ . Par conséquent seul un demi-espace est simulé et les résultats présentés dans ce chapitre ainsi que ceux du chapitre 5 correspondent à l'écoulement contenu dans le demi-espace associé aux valeurs positives de l'axe  $e_z$  c'est à dire à  $0 < \phi < \pi$ . Les simulations numériques

sont réalisées dans le maillage LCE présenté au Chapitre 1. Les frontières du domaine de calcul sont situées à 80 rayons de la bulle. Cette distance est nécessaire pour éviter les effets de confinement qui influencent très nettement l'intensité de la force de portance lorsque l'écoulement est à prédominance visqueuse. La demi-surface de la bulle est décrite par 22 mailles suivant la coordonnée  $\xi$  et 32 mailles suivant l'angle azimutal  $\phi$ . 40 mailles sont utilisées suivant la direction radiale  $\eta$ . Le nombre total de mailles  $N_\xi \times N_\eta \times N_\phi$  est en fait  $80 \times 40 \times 32$ . Le choix de cette densité de maillage résulte de plusieurs tests qui ont montré qu'une augmentation du nombre de mailles suivant l'une ou l'autre des trois directions ne modifiait pas les résultats. Le calcul des vitesses qui traversent l'axe  $e_x$  correspondant à l'axe de rotation du maillage est traité en imposant la condition présentée au paragraphe 1.7.5.

Les simulations numériques, réalisées en imposant la vitesse (4.1) comme condition à la limite à l'entrée du domaine de calcul, ont été menées pour une large plage de nombres de Reynolds  $[0.1 ; 500]$  et pour deux intensités de cisaillement différentes  $A_\omega = 0.02$  et  $A_\omega = 0.2$ . L'intensité  $A_\omega = 0.2$  correspond par exemple à une bulle de 1 mm de diamètre se déplaçant à une vitesse de 20 cm/s dans un écoulement dont le cisaillement est de  $40 \text{ s}^{-1}$ , valeur typique d'une couche limite de paroi. Il s'agit donc d'une intensité de cisaillement particulièrement intéressante dans les applications réelles et pour laquelle l'hypothèse de forme sphérique est bien vérifiée.

## 4.2 Aperçu bibliographique

---

Le nombre de travaux et les résultats significatifs concernant la force de portance subie par une bulle ou une sphère solide plongée dans un écoulement présentant un cisaillement linéaire sont relativement limités. Seules deux solutions asymptotiques reposant sur des hypothèses restrictives sur l'intensité du cisaillement ont à ce jour été obtenues de manière analytique. Il s'agit des études en écoulement de fluide parfait et en écoulement de Stokes, ce qui nous permet de classer les travaux réalisés en deux catégories différentes, l'une baptisée de "fluide parfait" et l'autre de "visqueuse".

La démarche suivie par la majorité des études correspondant à la catégorie "fluide parfait" consiste à calculer le champ de vitesse à la surface de la bulle par une méthode de perturbation où la vorticité de l'écoulement  $\Omega = -\omega e_z$  est considérée comme une petite perturbation de l'écoulement potentiel uniforme. Cette hypothèse est nécessaire à cause du terme d'étirement tourbillonnaire qui ne permet pas d'obtenir une solution analytique de l'équation de la vorticité

dans le cas général. Elle est par contre inutile pour un obstacle bidimensionnel car  $\omega \cdot \nabla \mathbf{V} = 0$  dans ce cas [Auton *et al.*, 1988]. La modification de vitesse qui résulte de l'existence de  $\Omega$  est calculée après avoir résolu l'équation de Helmholtz développée au premier ordre. La force de portance est alors déduite par intégration numérique directe sur la surface de la bulle de la pression déterminée à l'aide du théorème de Bernoulli. *Lighthill* (1956) a initié cette démarche en reprenant la fonction de dérive introduite par *Darwin* (1953) pour calculer au premier ordre la manière dont la vorticité de l'écoulement non-perturbé est modifiée lors de son transport autour de l'obstacle sphérique par l'écoulement potentiel. Ceci lui a ensuite permis [*Lighthill*, 1957] de déterminer par intégration numérique la vitesse tangentielle le long de la ligne de courant issue du point d'arrêt amont dans le but de corriger les mesures de vitesses faites avec un tube de Pitot. *Cousins* (1970) a repris la théorie de *Lighthill* pour calculer numériquement la valeur du champ de vitesse à la surface de la sphère mais sur une partie seulement de celle-ci ( $\theta < 60^\circ$ ), toujours avec l'objectif de recalibrer les tubes de Pitot. Il a fallu ensuite attendre les travaux de *Auton* (1983, 1987) pour voir apparaître le calcul complet de la vitesse à la surface de la bulle. Ce calcul est très délicat compte tenu des singularités de l'intégrale de Biot-Savart qui permet, à partir de la modification de la vorticité de l'écoulement non-perturbé, de remonter à la perturbation de vitesse correspondante. *Auton* (1987) en a également profité pour rectifier les inexactitudes des calculs de *Lighthill* (1957), de *Cousins* (1970) et également de *Hall* (1956) qui avait obtenu une approximation de la vitesse dans le plan de symétrie de l'écoulement. *Auton* (1983, 1987) a ainsi pu obtenir, en intégrant la pression à la surface de la bulle, la valeur de  $C_L$  dans le cas d'un cisaillement linéaire faible et aboutir au désormais célèbre résultat :

$$C_L = 1/2 \quad (4.8)$$

Les hypothèses utilisées pour ce calcul de la force de portance correspondent à un écoulement non-visqueux et faiblement cisailé c'est à dire qu'elles sont vérifiées respectivement pour  $Re \gg 1$  et  $A_\omega \ll 1$ .

Depuis, cette démarche a été reprise par *Naciri* (1992) qui, par une méthode permettant d'enlever les singularités de l'intégration, a obtenu la force de portance d'un ellipsoïde plongé dans un écoulement non-visqueux faiblement cisailé. La perturbation de vitesse est décomposée en une partie rotationnelle qui est calculée à partir de la fonction de dérive et en une partie potentielle qui est obtenue par résolution d'une équation de Poisson. En prenant le cas particulier où l'ellipsoïde est une sphère, *Naciri* (1992) a retrouvé le résultat (4.8).

*Drew & Lahey* (1987, 1990), après une erreur assez surprenante, ont finalement retrouvé (4.8) en intégrant la pression à la surface de la bulle exprimée à partir du champ de vitesse

calculé dans un repère tournant avec la vitesse angulaire  $-\omega \mathbf{e}_z$ . Leur calcul est simplifié par rapport à celui d'*Auton* (1983, 1987) mais nécessite toujours l'intégration de la fonction de courant proposée par *Lighthill* (1957) c'est à dire que le résultat obtenu reste soumis aux mêmes hypothèses que celles de (4.8).

*Auton* (1987) a également proposé une autre méthode pour redémontrer le résultat (4.8). Le calcul analytique consiste à intégrer l'équation de quantité de mouvement linéarisée grâce à l'hypothèse de faible cisaillement dans un domaine défini par la bulle et un cylindre de grande taille centré sur la bulle et dont l'axe correspond à la direction de l'écoulement. La force de portance est obtenue en faisant tendre la taille du cylindre vers l'infini mais de telle sorte que sa longueur soit toujours supérieure au rayon de sa base pour que l'hypothèse de faible cisaillement soit toujours respectée. *Naciri* (1992) en reprenant la même démarche a étendu le résultat à tout corps axisymétrique en montrant l'égalité du coefficient de portance et du coefficient de masse ajouté. Les hypothèses de ces deux démonstrations sont toujours celles d'un écoulement de fluide parfait faiblement cisailé.

La catégorie baptisée de "visqueuse" regroupe les résultats analytiques concernant la force de portance sur une sphère à petit nombre de Reynolds. Cette force a été calculée pour une sphère solide par une méthode de développements asymptotiques raccordés suggérée par *Proudman & Pearson* (1957). Le développement intérieur est obtenu en considérant que le champ de vitesse est au premier ordre celui de la solution de Stokes, la perturbation de vitesse étant due aux effets d'inertie considérés comme faibles devant les effets visqueux. Le développement extérieur est calculé en considérant la sphère comme une perturbation ponctuelle de quantité de mouvement. Les effets visqueux et les effets d'inertie sont du même ordre de grandeur dans cette partie de l'écoulement. Le raccordement des deux développements permet de déterminer la force de portance exercée sur la sphère.

*Saffman* (1965) a le premier appliqué avec succès cette démarche pour calculer la force de portance. Pour cela, le développement extérieur a été obtenu en négligeant  $U$  devant  $\omega y$  dans le terme advectif. L'expression analytique du coefficient de portance qui est ainsi calculée est soumise à la condition  $Re \ll (Re A_\omega)^{1/2} \ll 1$  et s'exprime par :

$$C_L = 3.084 (Re A_\omega)^{-1/2} \quad (4.9)$$

*Mc Laughlin* (1991) a repris le calcul développé par *Saffman* (1965) en recalculant le développement extérieur avec des hypothèses moins restrictives. La méthode utilisée est en fait identique mais la force de portance est alors obtenue sous l'hypothèse  $Re \ll 1$  et dans la limite



où le rapport  $\varepsilon = (A_\omega/\text{Re})^{1/2}$  ne devient pas trop petit devant l'unité. Le coefficient de portance s'exprime dans ces conditions par :

$$C_L = \frac{27}{2\pi^2} (\text{Re} A_\omega)^{-1/2} J(\varepsilon) \quad (4.10)$$

Les valeurs numériques de  $J(\varepsilon)$  calculées par *Mc Laughlin* (1991) sont rappelées dans le tableau A4.2 de l'annexe 4. Lorsque  $\varepsilon = (A_\omega/\text{Re})^{1/2} \rightarrow \infty$ , c'est à dire lorsque les hypothèses utilisées par *Saffman* (1965) sont vérifiées,  $J(\varepsilon) \rightarrow 2.255$  et l'expression (4.10) tend vers le résultat (4.9).

Les résultats obtenus pour la sphère solide ne sont bien entendu pas utilisables pour la bulle. Nous allons montrer dans la suite comment la méthode développée par *Saffman* (1965) peut être étendue au cas de la bulle. Ce calcul analytique est présenté dans le paragraphe suivant et ses hypothèses correspondent à celles du calcul de *Mc Laughlin* (1991). Par conséquent, nous ne dirons ici qu'un mot du résultat erroné proposé par *Mei & Klausner* (1994) concernant la force de portance d'une bulle en écoulement cisailé visqueux. Ces auteurs ont tenté d'adapter au cas de la bulle la résolution proposée par *Saffman* (1965) et *Mc Laughlin* (1991) en ne reconsidérant que le développement extérieur (ce qui est immédiat) et n'ont pas songé que la véritable solution était également dépendante du développement intérieur c'est à dire de la nature de l'interface car comme chacun sait les conditions limites sur une bulle et une sphère solide sont différentes.

Enfin, la seule étude numérique réalisée à ce jour [*Dandy & Dwyer*, 1990] concerne les forces de portance et de traînée ainsi que le transfert thermique sur une sphère solide plongée dans l'écoulement cisailé (4.1). Ces simulations ont été réalisées pour des nombres de Reynolds vérifiant  $0.1 < \text{Re} < 100$  et pour des cisaillements tels que  $0.01 < A_\Omega < 0.4$ . Les résultats obtenus concernant la force de portance sont à petit nombre de Reynolds en parfait accord avec le résultat (4.9) de *Saffman* (1965). Lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à l'unité, le coefficient de portance défini par (0.8) est quasiment constant et sa valeur  $C_L \approx 0.09$  est beaucoup plus faible que celles calculées en écoulement visqueux à l'aide de (4.9) et pour un fluide parfait avec (4.8). La force de traînée ainsi que le transfert thermique interfacial sont très peu modifiés par la présence du cisaillement.

Cette synthèse bibliographique souligne le manque d'information concernant la force de portance que subit une bulle sphérique dans un écoulement cisailé. Seul le résultat analytique (4.8) pour un fluide parfait faiblement cisailé permet de décrire cette force lorsque la viscosité de l'écoulement peut être considérée comme négligeable. Le résultat (4.9) de *Saffman* (1965)

est bien souvent utilisé pour exprimer cette force en écoulement fortement visqueux alors qu'il n'est applicable que pour une particule sphérique pour laquelle la condition d'adhérence est vérifiée.

### 4.3 Calcul analytique de la force de portance à petit nombre de Reynolds

---

Dans ce paragraphe est développée, et généralisée au cas d'une bulle, la méthode utilisée par *Saffman* (1965) puis reprise par *Mc Laughlin* (1991). La force de portance est obtenue à l'aide d'une méthode de développements asymptotiques raccordés. Cette procédure s'avère nécessaire car la solution d'ordre 0 en Reynolds (écoulement de Stokes) conduit à une force de portance nulle. C'est donc la solution d'ordre 1 en Reynolds, résultant de la prise en compte des termes advectifs formés par la solution de Stokes, qui est responsable de la force de portance. Or on sait, [*Van Dyke*, 1975], que la solution de Stokes autour d'une sphère n'est pas valable lorsque  $r/R \rightarrow \infty$ . Il en résulte que l'on ne peut pas construire directement à partir de cette solution, une solution d'ordre 1 en Reynolds car celle-ci ne peut vérifier les conditions à l'infini (paradoxe de Whitehead). Pour lever ce problème, on est amené à déterminer le champ de vitesse en raccordant un développement intérieur et un développement extérieur à l'endroit où les termes advectifs et diffusifs deviennent du même ordre de grandeur.

#### 4.3.a Développement intérieur

La solution du développement intérieur est recherchée sous la forme (4.11). Il n'est pas possible dès à présent de préciser complètement quel sera le petit paramètre de ce développement car on peut choisir comme échelle de vitesse  $U$  ou  $R\omega$ . Cependant, l'important à retenir est qu'il s'agit d'un développement en inverse de la viscosité. Nous posons donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_{St} + \mathbf{V}^1 + \dots \\ P &= P_{St} + P^1 + \dots \end{aligned} \tag{4.11}$$

où  $\mathbf{V}_{St}$  et  $P_{St}$  sont respectivement les champs de vitesse et de pression solutions de l'équation de Stokes. La solution de Stokes ( $\mathbf{V}_{St}$  et  $P_{St}$ ) est calculée analytiquement en prenant la forme générale de la solution proposée pour un écoulement quelconque par *Lamb* (1932, p. 596) et en l'appliquant à l'écoulement (4.1) en présence de l'inclusion considérée. Cette

solution ne prend en compte aucun effet d'inertie et l'intégration du champ de contrainte qui lui est associé ne donne par conséquent aucune force de portance. Elle s'écrit dans le cas général :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{St} = \mathbf{U} + \sum_n \left[ \frac{\mathbf{r}}{r^{2n+3}} \left( \frac{1}{2} r^2 P_n - (2n+1) \varphi_n \right) \right] - \frac{(n-2) \nabla P_n}{2n(2n-1) r^{2n-1}} \\ + \frac{\nabla \varphi_n}{r^{2n+1}} + \frac{\nabla \chi_n \times \mathbf{r}}{r^{2n+1}} \end{aligned} \quad (4.12.a)$$

$$P_{St} = \mu \sum_n \frac{P_n}{r^{2n+1}} \quad (4.12.b)$$

Les termes non nuls donnant la solution pour la bulle sphérique sont :

$$p_1 = -URx \quad p_2 = -2\omega R^3 xy \quad (4.13)$$

tandis que pour la sphère solide on a [Saffman, 1965] :

$$\begin{aligned} p_1 = -\frac{3}{2} URx \quad , \quad p_2 = -5\omega R^3 xy \\ \varphi_1 = -\frac{1}{4} UR^3 x \quad , \quad \varphi_2 = -\frac{1}{2} \omega R^5 xy \quad , \quad \chi_1 = -\frac{1}{4} \omega R^3 z \end{aligned} \quad (4.14)$$

Le développement au premier ordre des équations de Navier-Stokes obtenu à partir de cette solution de l'écoulement de Stokes s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^1 = 0 \quad (4.15.a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P^1 + \nu \nabla^2 \mathbf{V}^1 = (\mathbf{V}_{St} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{St} \quad (4.15.b)$$

On définit les vecteurs  $\mathbf{a}_n$ ,  $\mathbf{b}_n$  et  $\mathbf{c}_n$  à partir de  $\mathbf{Q} = (\mathbf{V}_{St} \cdot \nabla) \mathbf{V}_{St}$  par :

$$\begin{aligned} \int \mathbf{Q} d\Gamma &= U\omega \sum \mathbf{a}_n r^n \\ \int \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{Q}) d\Gamma &= U\omega \sum \mathbf{b}_n r^n \\ \int \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{r}}{r} d\Gamma &= U\omega \sum \mathbf{c}_n r^{n+1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

où  $d\Gamma$  représente l'élément de surface d'une sphère  $\Gamma$  de rayon  $r > R$  concentrique à l'inclusion. Le calcul de ces vecteurs pour une sphère solide ou une bulle sphérique permet de montrer que, excepté pour  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{c}_1$ , les vecteurs constants  $\mathbf{a}_n$ ,  $\mathbf{b}_n$  et  $\mathbf{c}_n$  sont tous nuls pour  $n \geq -1$ . Cette information sera en fait précieuse au moment de réaliser le raccordement.

La force totale  $\mathbf{F}^1$  induite sur  $\Gamma$  par  $\mathbf{V}^1$  et  $\mathbf{P}^1$  se met sous la forme [Saffman, 1965] :

$$\mathbf{F}^1 = - \int \mathbf{P}^1 \frac{\mathbf{r} d\Gamma}{r} - \mu \int \frac{\mathbf{V}^1 d\Gamma}{r} + \mu r \frac{d}{dr} \int \frac{\mathbf{V}^1 d\Gamma}{r} - \rho \int \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}_{St}) \mathbf{V}_{St} d\Gamma}{r} \quad (4.17)$$

L'intégration de la vitesse  $\mathbf{V}^1$  sur la sphère de rayon  $r$  conduit à [Saffman, 1965] :

$$\int \frac{\mathbf{V}^1 d\Gamma}{r} = \underbrace{\frac{\omega}{v} \mathbf{U} \sum \left[ \frac{\mathbf{a}_n}{n(n+1)} + \frac{\mathbf{b}_n}{n(n+1)(n-2)} \right]}_{S1} r^{n+1} + \underbrace{\mathbf{C}r + \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B}r^3}_{S2} \quad (4.18)$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont des vecteurs constants résultant d'intégrations. Ils sont déterminés à l'aide des conditions aux limites à la surface de l'inclusion et en réalisant le raccordement avec le développement extérieur.

Dans le calcul de Saffman (1965), la prise en compte de la condition à la limite sur la sphère solide, qui permet d'obtenir une relation entre ces vecteurs constants, est immédiate car la condition d'adhérence annule la relation (4.18) en  $r = R$ . Par contre, lorsque l'inclusion est une bulle sphérique, la condition à la limite est beaucoup plus délicate à prendre en compte car elle n'est pas identique pour les trois composantes de la vitesse. Ainsi, même si la vitesse normale est nulle, la condition dans le plan tangent correspond à la nullité des contraintes tangentielles. Par conséquent la présence de vitesses tangentielles ne permet pas de conclure que (4.18) s'annule en  $r = R$  et nécessite à priori la connaissance de l'expression analytique de ces vitesses pour obtenir la relation en  $r = R$ . Cependant, cet obstacle est élégamment contourné sans développement analytique supplémentaire en déterminant l'origine réelle des deux termes  $S1$  et  $S2$  qui apparaissent dans (4.18).

Les deux termes  $S1$  et  $S2$  résultent en fait de l'intégration sur la surface  $\Gamma$  des deux contributions à  $\mathbf{V}^1$  notées respectivement  $\mathbf{V}_1^1$  et  $\mathbf{V}_2^1$ . Le champ de vitesse  $\mathbf{V}_1^1$  correspond à la solution particulière de (4.15.b) qui vérifie les conditions limites à la surface de l'inclusion. Or, on sait [Van Dyke, 1975] que cette solution ne peut satisfaire les conditions à l'infini et doit être corrigée par un champ de vitesse  $\mathbf{V}_2^1$  dont l'intensité dépend du raccordement avec le développement extérieur.  $\mathbf{V}_2^1$  est nécessairement solution de l'équation (4.15.b) sans second membre c'est à dire que  $\mathbf{V}_2^1$  est en fait la solution de Stokes (4.12) correspondant à un champ

de vitesse uniforme dont la direction et l'intensité sont à priori inconnues, mais qui sont en fait imposées par le raccordement avec le développement extérieur. La solution de Stokes (4.12) étant connue pour une vitesse à l'infini, notée  $V_\infty$ , on peut l'intégrer sur une sphère de rayon  $r$  et identifier le résultat obtenu avec S2. On obtient ainsi des contributions respectivement égales à  $4\pi V_\infty(r-R)$  pour une sphère solide et  $4\pi V_\infty(r-2/3R)$  pour une bulle sphérique. Par identification avec S2, on trouve  $V_\infty = C/4\pi$  et

$$\mathbf{B} = \mathbf{0} + o\left(\frac{\omega}{v} \mathbf{U}\right) \quad (4.19)$$

Par contre, les relations entre les vecteurs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  dépendent de la nature de l'inclusion. Ainsi, pour une sphère solide il vient par identification avec S2 :

$$\mathbf{D} = -\mathbf{C} R + o\left(\frac{\omega}{v} \mathbf{U}\right) \quad (4.20)$$

alors que pour une bulle sphérique :

$$\mathbf{D} = -\frac{2}{3} \mathbf{C} R + o\left(\frac{\omega}{v} \mathbf{U}\right) \quad (4.21)$$

Par ailleurs, en exprimant (4.17) à l'aide de (4.18) et de relations obtenues par *Saffman* (1965, relations 2.13 et 2.15), on peut aisément montrer que quelque soit la nature de l'inclusion la force  $\mathbf{F}^l$  se met sous la forme :

$$\mathbf{F}^l = \rho U \omega \sum \left[ \frac{3a_n}{2(n+1)} - \frac{b_n}{2(n+1)} - \frac{c_n}{2} \right] R^{n+1} - \frac{3}{2} \mu \mathbf{D} \quad (4.22)$$

Dans le cas d'une sphère solide, la somme des vecteurs  $\mathbf{c}_n$  de (4.16) est nulle à la surface de l'inclusion compte tenu de la condition d'adhérence. Les vecteurs  $\mathbf{c}_n$  disparaissent alors de l'expression (4.22).

### 4.3.a Développement extérieur

Le développement extérieur peut en fait être généralisé à un obstacle de forme quelconque. L'inclusion est plongée dans le champ de vitesse non-perturbé (4.1). La force de traînée  $\mathbf{F}_D = F_D \mathbf{e}_x$  exercée par l'écoulement (4.1) sur cette inclusion est à l'ordre 0 pour les termes d'inertie la force de traînée exercée par l'écoulement uniforme. Loin de l'inclusion la force  $\mathbf{F}_D$  est perçue comme un point puits de quantité de mouvement pour l'écoulement.

Notons  $\mathbf{v}$  la perturbation de vitesse créée par la présence de l'inclusion. Le champ de vitesse  $\mathbf{V}$  dans la région externe s'écrit :

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{v} = (U + \omega y) \mathbf{e}_x + \mathbf{v} \quad (4.22)$$

Les équations de Navier-Stokes à résoudre pour la perturbation de vitesse  $\mathbf{v}$  sont alors au premier ordre :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.23.a)$$

$$(\mathbf{U} + \mathbf{v}) \cdot \nabla (\mathbf{U} + \mathbf{v}) = (U + \omega y) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \omega v_y \mathbf{e}_x = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\mathbf{F}_D}{\rho} \delta(\mathbf{r}) \quad (4.23.b)$$

avec la condition à vérifier loin de l'inclusion :

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{pour } \mathbf{r} \rightarrow \infty \quad (4.23.c)$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur position dont l'origine correspond au point singulier formé par l'inclusion. Le champ de vitesse solution de (4.23) est recherché sous forme d'un développement exprimé en fonction du petit paramètre  $\eta$  dont l'expression est déterminée en comparant les termes advectif et diffusif écrits en introduisant la variable externe  $\tilde{\mathbf{r}} = \eta \mathbf{r}/R$ . Ceux-ci doivent être du même ordre de grandeur dans le développement extérieur :

$$\left( U + \omega \tilde{y} R \eta^{-1} \right) \frac{\eta}{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tilde{x}} + \omega v_y \mathbf{e}_x = \nu \frac{\eta^2}{R^2} \tilde{\nabla}^2 \mathbf{v} \quad (4.24)$$

ce qui entraîne

$$\nu \frac{\eta^2}{R^2} = \omega \quad \text{soit} \quad \eta = R \left( \frac{\omega}{\nu} \right)^{1/2} = (\text{Re } A_\omega)^{1/2} \quad (4.25)$$

Le fait que  $\eta$  soit un petit paramètre se traduit par la condition :

$$(\text{Re } A_\omega)^{1/2} \ll 1 \quad (4.26)$$

Cette analyse permet de souligner en fait deux points essentiels :

- Le terme diffusif est équilibré par un terme advectif dont la direction est différente de celle de l'écoulement uniforme  $U \mathbf{e}_x$ . Ceci explique l'ajustement de la solution  $\mathbf{V}^I$  résultant du

développement intérieur par un champ de vitesse solution des équations de Stokes dont la direction dépend du raccordement avec le développement extérieur.

- Elle permet de mettre en évidence le domaine de validité plus restreint de l'approche de *Saffman* (1965) par rapport à celle de *Mc Laughlin* (1991) que nous avons adoptée. Chez *Saffman* (1965), le terme advectif de (4.23.b) est approximé en supposant que  $U \ll \omega y$  :

$$(\mathbf{U} + \mathbf{v}) \cdot \nabla (\mathbf{U} + \mathbf{v}) = (\omega y) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \omega v_y \mathbf{e}_x \quad (4.27)$$

Ceci se traduit compte tenu de (4.24) par :

$$U \ll \omega R \eta^{-1} \text{ et } \eta = R \left( \frac{\omega}{\nu} \right)^{1/2} \ll 1 \text{ soit } Re \ll (Re A_\omega)^{1/2} \ll 1 \quad (4.28)$$

Ceci étant, revenons maintenant à notre développement extérieur. La solution extérieure recherchée peut s'écrire sous la forme [*Saffman*, 1965] :

$$\mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}}) = \eta U \left[ \frac{\mathbf{H}^0(\bar{\mathbf{r}})}{\bar{r}} + \mathbf{H}^1(\bar{\mathbf{r}}) + \bar{r} \mathbf{H}^2(\bar{\mathbf{r}}) + \dots \right] \quad (4.29)$$

où les fonctions  $\mathbf{H}$  sont homogènes de degré zéro en  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  et  $\bar{z}$ . Le développement (4.29) se réécrit en fonction de la variable interne  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{r}/R$  :

$$\mathbf{v}(\bar{\mathbf{r}}) = U \left[ \frac{\mathbf{H}^0(\bar{\mathbf{r}})}{\bar{r}} + \eta \mathbf{H}^1(\bar{\mathbf{r}}) + \eta^2 \bar{r} \mathbf{H}^2(\bar{\mathbf{r}}) + \dots \right] \quad (4.30)$$

On peut alors former :

$$\int \frac{\mathbf{v} \, d\Gamma}{\bar{r}} = U \left[ \int \frac{\mathbf{H}^0 \, d\Gamma}{\bar{r}^2} + \eta \bar{r} \int \frac{\mathbf{H}^1 \, d\Gamma}{\bar{r}^2} + \eta^2 \bar{r}^2 \int \frac{\mathbf{H}^2 \, d\Gamma}{\bar{r}^2} + \dots \right] \quad (4.31)$$

En identifiant (4.31) avec l'expression (4.18) obtenue pour le développement intérieur, le raccordement implique :

$$\mathbf{C} = \eta U \int \frac{\mathbf{H}^1 \, d\Gamma}{\bar{r}^2} \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

On retrouve la relation (4.19) déjà vérifiée par  $\mathbf{B}$  et on montre ainsi que  $\mathbf{C}$  est d'ordre  $\eta$ . Dans l'expression (4.22), la force  $\mathbf{F}^1$  est exprimée en fonction du seul vecteur  $\mathbf{D}$ . Cependant



$\mathbf{D}$  étant pour les deux inclusions considérées proportionnel à  $\mathbf{C}$  [relations (4.20) et (4.21)], le premier terme dans l'expression (4.22) de la force  $\mathbf{F}^1$  est d'ordre  $\eta$  et correspond à la contribution de  $\mathbf{D}$ , les termes correspondants aux vecteurs  $\mathbf{a}_n$ ,  $\mathbf{b}_n$  et  $\mathbf{c}_n$  dans l'expression de  $\mathbf{F}^1$  apportant une contribution d'ordre  $\eta^2$ . Il est par conséquent maintenant suffisant pour obtenir la force de portance à l'ordre  $\eta$  de connaître la projection de  $\mathbf{C}$  suivant  $\mathbf{e}_y$ , ce qui implique le calcul de  $\mathbf{H}^1 \cdot \mathbf{e}_y$ . Pour cela, *Saffman* (1965) et *Mc Laughlin* (1991) résolvent le développement extérieur (4.23) projeté sur  $\mathbf{e}_y$  dans l'espace de Fourier de façon à éliminer de manière immédiate la pression. Ils exploitent également le fait que pour  $\tilde{\mathbf{r}} = \eta \mathbf{r}/R \rightarrow 0$ , le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  tend vers le champ de vitesse dérivant du Stokeslet  $-\mathbf{F}_D/8\pi\mu$ . On obtient alors [*Mc Laughlin*, 1991] :

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_y = \eta \frac{F_D}{\pi^2 \mu R} J(\varepsilon) \quad (4.33)$$

où l'on rappelle que  $\varepsilon = (A_\omega/\text{Re})^{1/2}$ . Cette relation est applicable quelque soit la nature de l'inclusion. La valeur de  $J(\varepsilon)$  correspondant au calcul de *Saffman* est  $J(\infty) = 2.255$ .

#### 4.3.c Solution pour une sphère solide

La solution pour une sphère solide est obtenue en regroupant les relations (4.20), (4.22) et (4.33) et le résultat concernant la force de traînée  $F_D = 6\pi\mu UR$ . L'expression de la force s'écrit alors [*Mc Laughlin*, 1991] :

$$F_L = \frac{9}{\pi} \rho v^{1/2} \omega^{1/2} R^2 U J(\varepsilon) \quad (4.34)$$

#### 4.3.d Solution pour bulle sphérique

La solution pour une bulle sphérique est obtenue en regroupant les relations (4.21), (4.22) et (4.33) et le résultat concernant la force de traînée  $F_D = 4\pi\mu UR$ . L'expression de la force s'écrit :

$$F_L = \frac{4}{\pi} \rho v^{1/2} \omega^{1/2} R^2 U J(\varepsilon) \quad (4.35)$$

Le coefficient de portance correspondant est pour la bulle :

$$C_L = \frac{6}{\pi^2} (\text{Re } A_\omega)^{-1/2} J(\varepsilon) \quad (4.36)$$



On constate donc que les forces de portance pour la bulle sphérique et la sphère solide sont liées par la relation :

$$F_L(\text{bulle}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 F_L(\text{sphère}) \quad (4.37)$$

et non pas par le résultat  $F_L(\text{bulle}) = 2/3 F_L(\text{sphère})$  de *Mei & Klausner* (1994).

Les valeurs numériques de  $J(\varepsilon)$  calculées par *Mc Laughlin* (1991) sont rappelées dans le tableau A4.2 de l'annexe 4. On rappelle que les hypothèses de validité de cette solution analytique sont :

$$(\text{Re } A_\omega)^{1/2} \ll 1 \quad \text{et} \quad \text{Re} \ll 1$$

#### 4.4 Résultats des simulations : force de traînée

La force de traînée subie par une bulle sphérique plongée dans l'écoulement cisailé (4.1) est étudiée en comparant le coefficient de traînée  $C_D$  calculé pour cet écoulement et le coefficient de traînée  $C_{DS}$  pour l'écoulement stationnaire correspondant à  $A_\omega = 0$  (tableau 4.2). On représente par  $C_{D\omega} = C_D - C_{DS}$  l'effet du cisaillement de l'écoulement sur la force de traînée.

Les valeurs prises par le rapport  $C_{D\omega}/C_D$  montrent nettement que la modification de la traînée induite par le cisaillement de l'écoulement peut être considérée comme négligeable. En effet, pour l'ensemble des simulations réalisées, l'influence de la vorticité de l'écoulement non-perturbé, représentée par  $C_{D\omega}$ , est toujours inférieure à 2% du coefficient de traînée  $C_{DS}$ . On retrouve ainsi un résultat comparable à celui déjà observé par *Dandy & Dwyer* (1990) pour la sphère solide. Ces auteurs ont résolu par simulation numérique l'écoulement (4.1) autour d'une sphère solide et ont ainsi mis en évidence que sur la plage de nombre de Reynolds  $1 < \text{Re} < 100$  l'effet sur la traînée visqueuse est également inférieur à 2%.

La comparaison de nos résultats entre les situations  $A_\omega = 0.02$  et  $A_\omega = 0.2$  montre que la modification de traînée induite par la présence du cisaillement dans l'écoulement semble être proportionnelle à  $A_\omega$ . Le signe négatif de  $C_{D\omega}$  pour certaines simulations correspondant à  $A_\omega = 0.02$  n'est vraiment pas significatif compte tenu de l'importance de  $C_{D\omega}$  qui est dans ces situations inférieur à 0.7%.

On peut donc conclure que la modification de traînée peut être considérée en première approximation comme négligeable mais que l'effet le plus significatif observé, inférieur à 2%, semble être un accroissement de la traînée proportionnel à  $A_\omega$ .

Re	$A_\omega = 0.02$			$A_\omega = 0.2$	
	$C_{DS}$	$C_D$	$C_{D\omega}/C_D$	$C_D$	$C_{D\omega}/C_D$
0.1	162.4	162.2	-0.001	163.3	0.006
0.2	82.3	81.7	-0.007		
0.5	33.8	33.7	-0.003		
1	17.5	17.6	0.006	17.5	0.001
5	4.27	4.25	-0.005		
10	2.43	2.44	0.006	2.44	0.006
20	1.403	1.406	0.002		
50	0.670	0.673	0.004		
100	0.373	0.376	0.008	0.377	0.011
300	0.140	0.141	0.007		
500	0.0874	0.0877	0.003	0.0880	0.018

Tableau 4.1 : Coefficient de traînée  $C_D$

## 4.5 Résultats des simulations : force de portance

---

Les valeurs numériques calculées pour le coefficient de portance sont regroupées dans les tableaux 4.2 et 4.3 et représentées sur la figure 4.4. Le coefficient de portance  $C_L$  est décomposé en  $C_L = C_{Lp} + C_{Lv}$  où  $C_{Lp}$  et  $C_{Lv}$  représentent respectivement les contributions de la pression et de la contrainte normale visqueuse à  $C_L$ .

Lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand, les résultats numériques sont en très bon accord avec le résultat (4.8) obtenu analytiquement par *Auton* (1987) pour un fluide parfait. Cet accord montre donc que la correction de vorticité à la surface de la bulle liée à la viscosité de l'écoulement réel par rapport à l'écoulement de fluide parfait a pour cet écoulement très peu d'influence sur la force de portance. Ainsi, la contribution visqueuse totale est négligeable devant la contribution inertielle contenue dans  $C_{Lp}$ . Par exemple à  $Re = 500$ , l'écart entre  $C_{Lp}$  et le résultat  $C_L = 0.5$ , obtenu par *Auton* (1983) en considérant l'écoulement comme non-visqueux, est inférieur à 1% et la partie de la correction visqueuse contenue dans  $C_{Lv}$  représente dans ce cas moins de 1% de  $C_{Lp}$ .

Cette prédominance des effets potentiels devant les effets visqueux sur la force de portance reste vérifiée tant que le nombre de Reynolds est plus grand que 10. En effet, le coefficient de portance est toujours essentiellement donné par la pression, la résultante des contraintes normales visqueuses étant négligeable et de signe opposé (figure 4.6). On observe alors que, sur la plage de  $A_\omega$  couverte par ces simulations, le coefficient de portance est indépendant de  $A_\omega$  c'est à dire que la force de portance est directement proportionnelle à la vorticité de l'écoulement non-perturbé. Ces différentes constatations et un rapide traitement des valeurs numériques obtenues permettent de proposer la loi empirique donnant les variations de  $C_L$  à grand nombre de Reynolds :

$$C_L = 0.5 - \frac{4.0}{Re} \quad (4.38)$$

Cette expression permet de reproduire de façon relativement fidèle (  cart inférieur à 2%) les variations du coefficient de portance pour  $Re > 50$  (figure 4.4).

Les résultats numériques obtenus à petit nombre de Reynolds tendent vers la solution analytique (4.36) calculée au paragraphe 4.3. Pour  $Re = 0.1$ , l'accord simulation / théorie asymptotique est réalisé à 5% près, ce qui conforte nos résultats. On constate, toujours à faible nombre de Reynolds, que la contribution de la contrainte normale visqueuse  $C_{Lv}$  change

brusquement de signe lorsque  $Re < 1$  et devient du même ordre de grandeur que  $C_{Lp}$ . Le coefficient de portance augmente assez nettement pour valoir  $C_L = 7.0$  à  $Re = 0.1$  et  $A_\omega = 0.02$ . Lorsque le nombre de Reynolds décroît, le rapport  $C_{Lv}/C_{Lp}$  comparant ces deux contributions s'équilibre et se rapproche de la valeur  $C_{Lv}/C_{Lp} = 2$  (figure 4.5) qui correspond en fait à celle vérifiée par le rapport  $C_{Dv}/C_{Dp}$  des contributions respectives de la contrainte normale visqueuse et de la pression au coefficient de traînée  $C_D$ . On constate également une dépendance assez nette du coefficient de portance avec la valeur de  $A_\omega$  lorsque l'écoulement est visqueux comme l'illustre l'écart observé à  $Re = 0.1$  entre les cisaillements  $A_\omega = 0.02$  et  $A_\omega = 0.2$ . En effet, la force de portance (4.35) exercée sur la bulle n'est alors plus directement proportionnelle au cisaillement de l'écoulement comme l'a démontré le calcul analytique et tend vers une dépendance de la forme  $\omega^{1/2} J(\epsilon)$ .

La contribution locale du tenseur des contraintes à la force de portance totale est représentée par le coefficient de portance local défini par :

$$C_y(\theta, \phi) = C_{yp}(\theta, \phi) + C_{yv}(\theta, \phi) = \frac{\Sigma_{nn} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y}{\rho \vartheta_b \omega (U - U_b)} A_\omega \quad (4.39)$$

où  $\Sigma_{nn} = -P + \rho \tau_{nn}$  et  $\mathbf{n}$  sont respectivement la contrainte normale et la normale au point considéré. Ce coefficient local permet de mettre en évidence les zones de plus forte contrainte exercée suivant l'axe  $\mathbf{e}_y$ , ainsi que les contributions respectives de la pression  $C_{yp}(\theta, \phi)$  et de la contrainte normale visqueuse  $C_{yv}(\theta, \phi)$ .

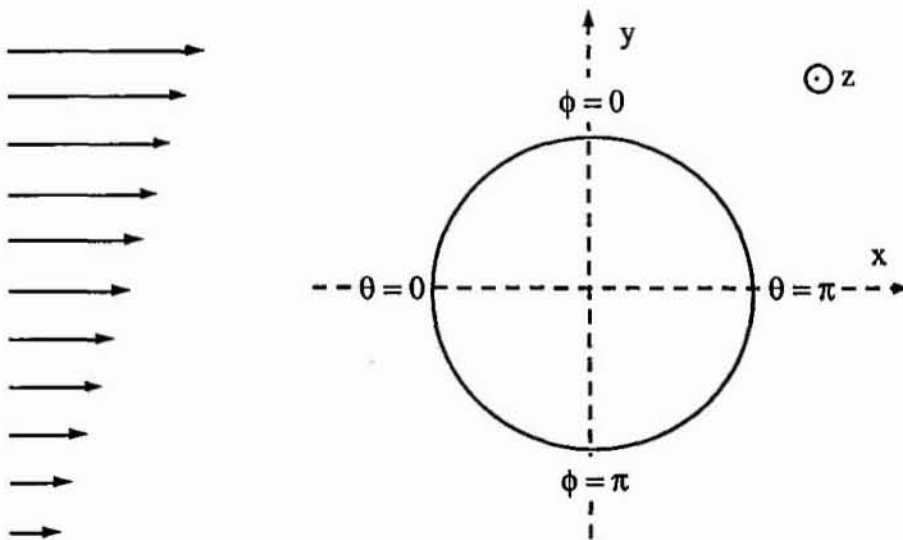


Figure 4.6 : sens d'observation des distributions locales

Ces distributions locales sont étudiées en fonction de l'intensité du cisaillement et du nombre de Reynolds (figures 4.7 à 4.10). Elles représentent les iso- $C_y(\theta, \phi)$  à la surface de la bulle observées suivant la direction  $-e_z$  (figure 4.6). Dans cette représentation, les projections  $C_{yp}(\theta, \phi = \pi/2)$  et  $C_{yv}(\theta, \phi = \pi/2)$  sont nulles car, sur l'équateur  $\phi = \pi/2$ , la normale  $\mathbf{n}$  et l'axe  $e_y$  sont orthogonaux. On retrouve comme précédemment des répartitions très différentes de la force exercée sur la bulle suivant que l'écoulement est à prédominance visqueuse ( $Re = 0.1$ ) ou au contraire faiblement visqueux ( $Re = 500$ ). Dans ces deux situations, les répartitions de pression et de contrainte normale semblent symétriques par rapport à l'axe  $e_y$  et antisymétriques par rapport à l'axe  $e_x$ . Cependant les contributions verticales maximales sont présentes à  $\theta = \pi/4$  et  $\theta = 3\pi/4$  pour  $Re = 0.1$  et à  $\theta = \pi/2$  pour  $Re = 500$ . Les nombres de Reynolds intermédiaires (figures 4.8 et 4.9) montrent le déplacement progressif de ce front maximal de contribution verticale de  $\theta = \pi/2$  vers  $\theta = 3\pi/4$  et par conséquent une distribution non-symétrique par rapport à l'angle  $\theta$ . L'intensité du cisaillement de l'écoulement influence la distribution des forces suivant l'angle  $\phi$ . Ainsi lorsque  $A_\omega$  est faible ( $A_\omega = 0.02$ ), la distribution de l'ensemble des composantes verticales apparaît pratiquement antisymétrique par rapport à l'axe  $e_x$ . Bien sûr, elle ne l'est pas, car sinon la force de portance serait nulle. Par contre lorsque  $A_\omega$  est plus important ( $A_\omega = 0.2$ ), la non-antisymétrie des ces composantes verticales est plus nette.

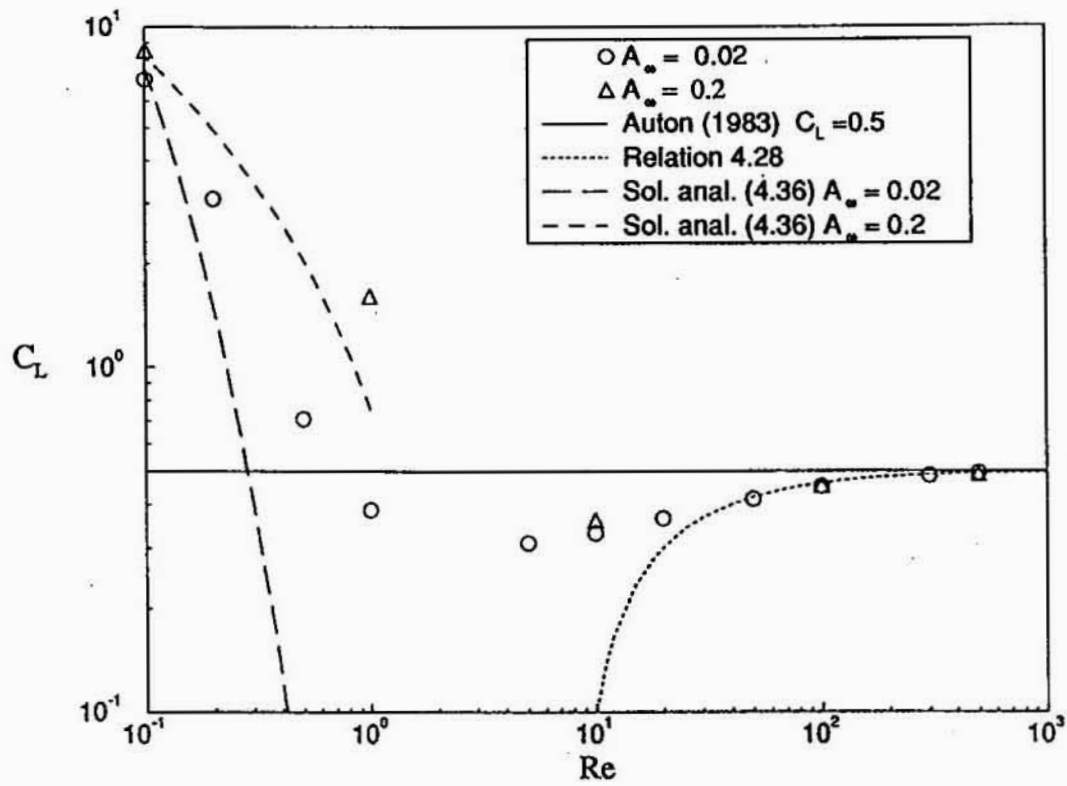
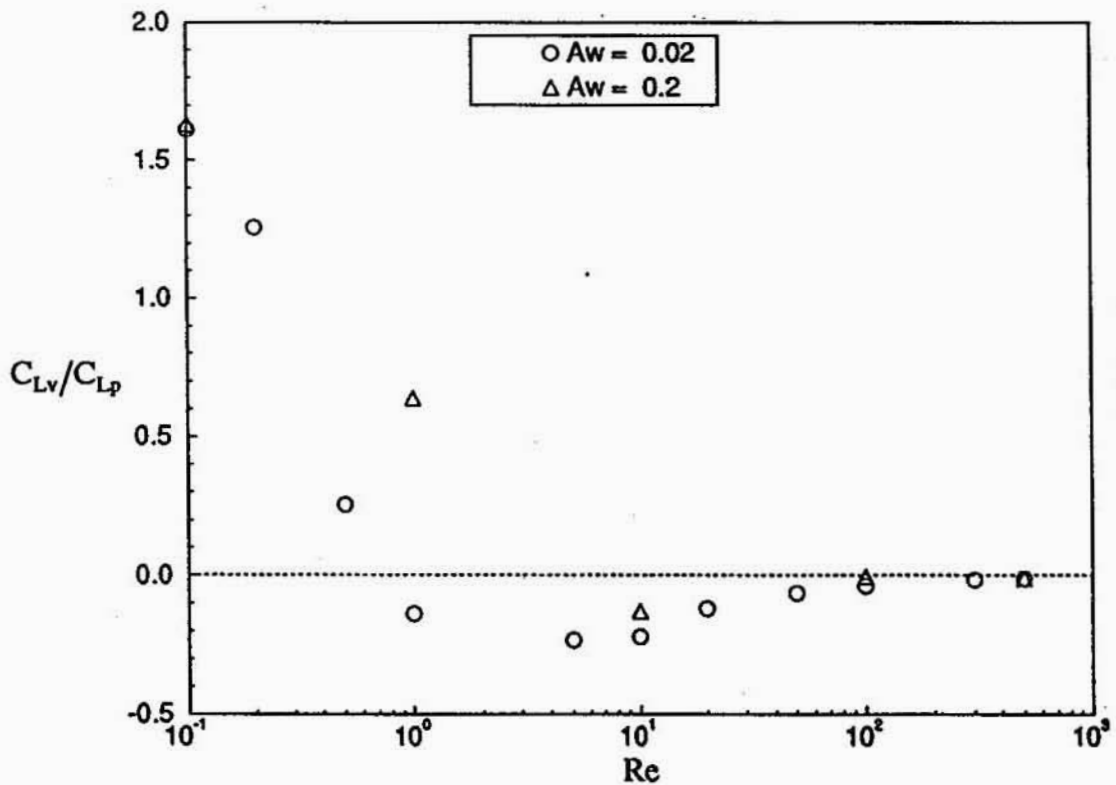
Les distributions locales du coefficient de pression  $C_p$  et du coefficient de contrainte normale  $C_n$  à  $A_\omega = 0.02$  sont pratiquement invariantes suivant l'angle  $\phi$  et correspondent en fait à celles observées en écoulement stationnaire uniforme c'est à dire pour  $A_\omega = 0$  (figures 4.11 à 4.13). Lorsque le cisaillement de l'écoulement est plus important, les variations de ces distributions locales suivant l'angle  $\phi$  sont perceptibles mais restent toutefois beaucoup moins importantes que celles observées suivant l'angle  $\theta$ . Ces informations sont intéressantes pour appréhender la déformation d'une bulle dans un écoulement cisailé. En effet, la prise en compte du bilan normal de quantité de mouvement (Annexe 2, relation A2.11) à la surface de la bulle permet la détermination de sa déformation [Blanco, 1995]. On constate que la présence du cisaillement n'entraîne que des variations secondaires de l'ensemble des contraintes normales suivant l'angle azimutal  $\phi$  comparées à leur distributions suivant l'angle  $\theta$ . Il est cependant délicat d'en conclure que la forme de la bulle observée en écoulement uniforme [cf. Blanco, 1995] sera très sensiblement la même en écoulement cisailé. En effet, la déformation d'une bulle semble modifier de façon très nette l'intensité et même le sens de la force de portance [Ervin & Tryggvason, 1994]. Ainsi lorsque la bulle est déformée, les actions hydrodynamiques

sont modifiées par rapport au cas sphérique. Les travaux de *Ervin & Tryggvason* (1994) ne précisent cependant pas si la forme de la bulle reste approximativement axisymétrique.

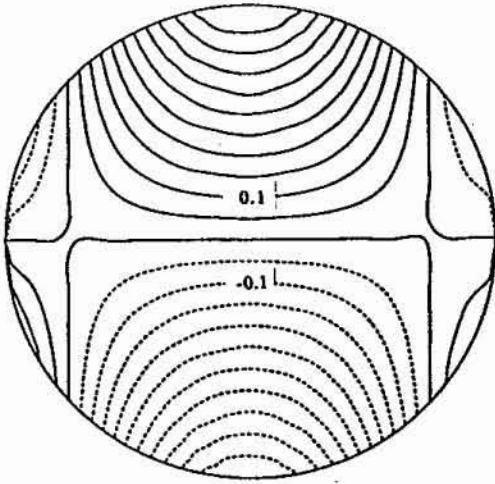
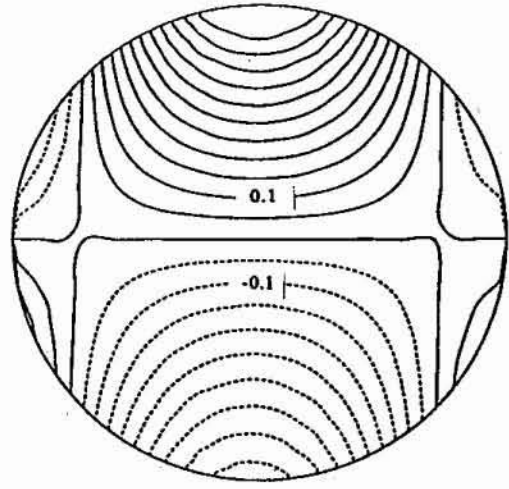
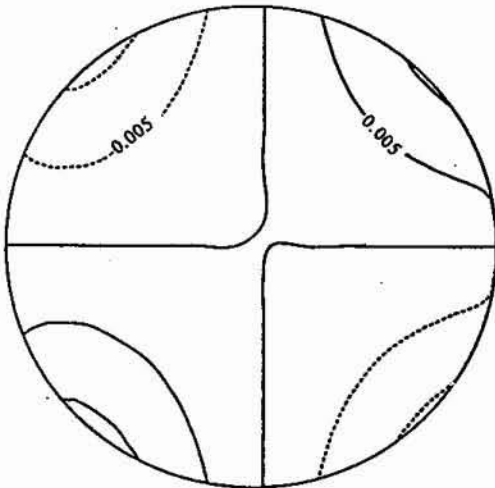
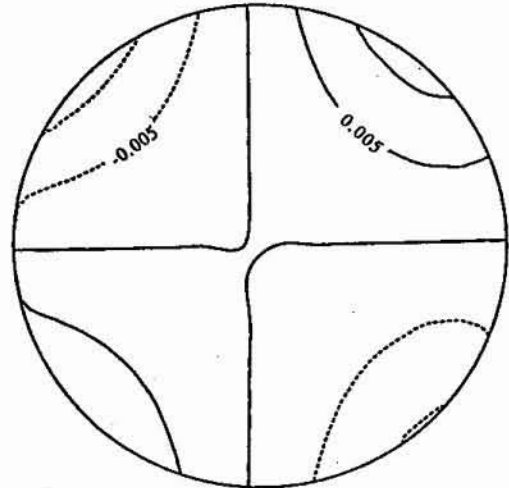
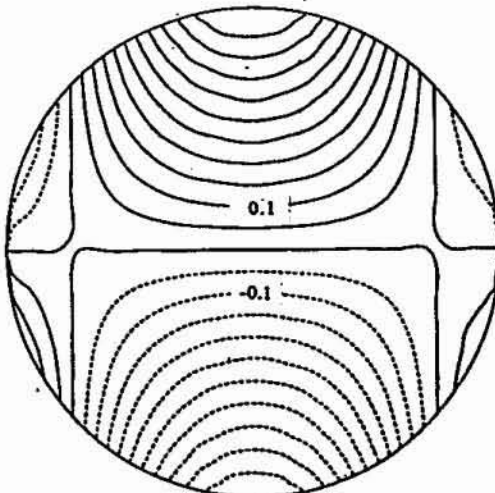
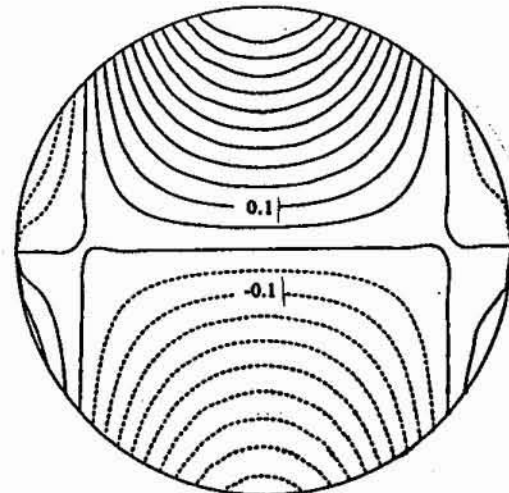
Pour avoir une idée plus précise des poids respectifs des différentes forces, il est intéressant de comparer l'intensité de la force de portance  $F_L$  et celle de la force de traînée visqueuse  $F_D$ . Le rapport  $F_L/F_D$  s'exprime en fait en fonction des coefficients de traînée et de portance et, compte tenu de (4.6), les expressions de  $F_D$  et de  $F_L$  permettent d'écrire :

$$\frac{F_L}{F_D} = \frac{4}{3} A_\omega \frac{C_L}{C_D} \quad (4.40)$$

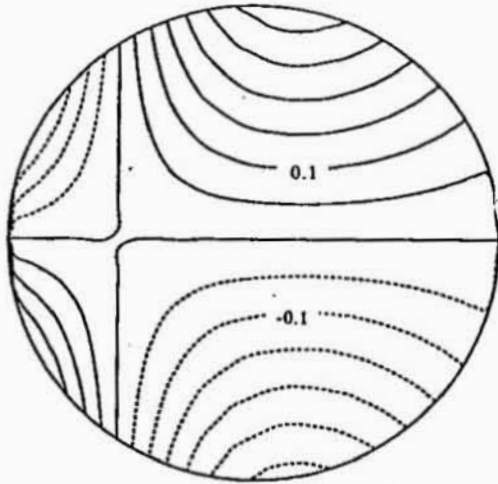
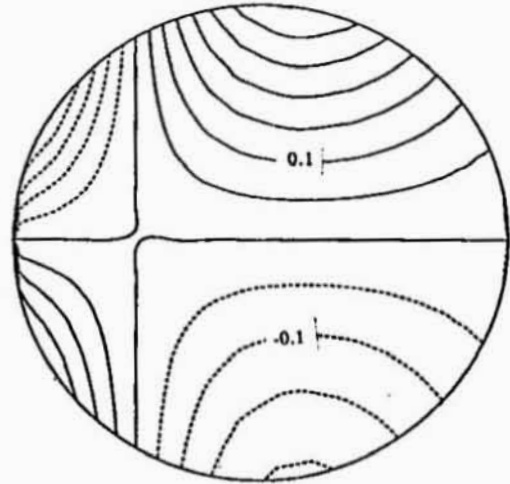
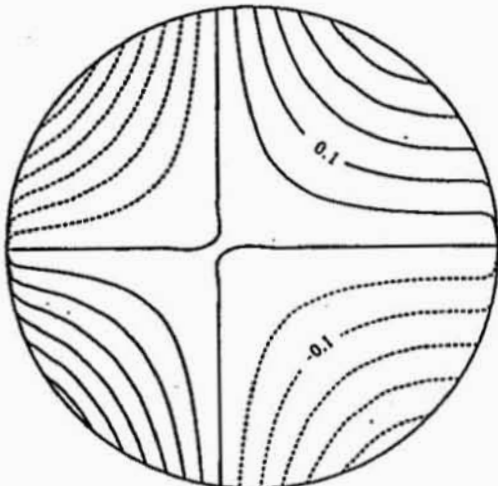
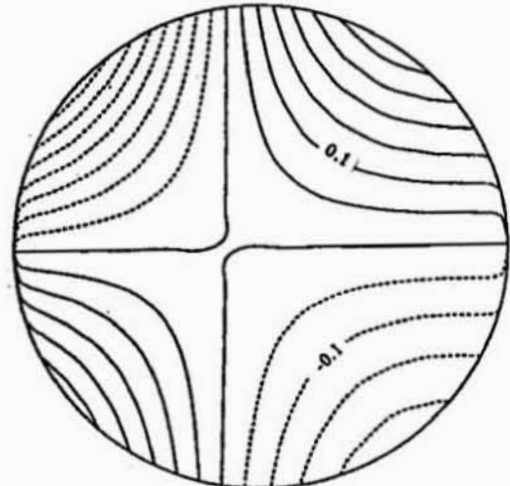
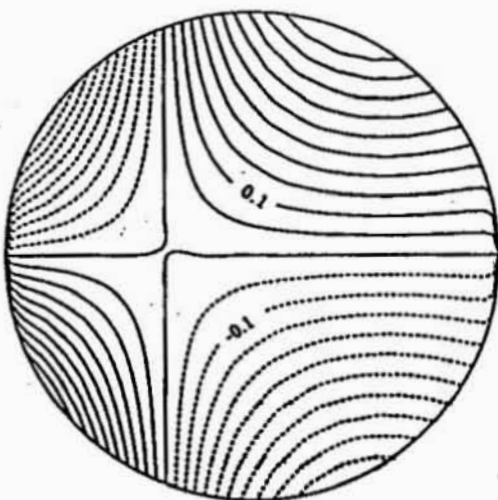
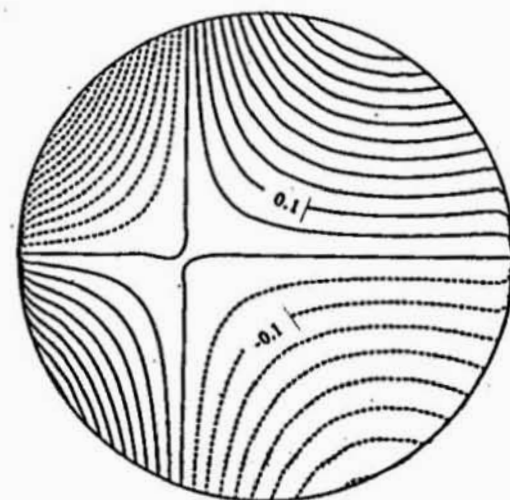
La représentation graphique de  $A_\omega^{-1} F_L/F_D$  permet de tirer plusieurs enseignements sur ces deux forces (figure 4.14). On constate tout d'abord que le rapport  $A_\omega^{-1} F_L/F_D$  est indépendant du cisaillement  $A_\omega$  ce qui n'est pas surprenant car  $F_D$  est pratiquement indépendante de  $A_\omega$  (§ 4.5) et, d'après ce qui précède,  $F_L$  est directement proportionnelle à  $A_\omega$  (excepté à petit nombre de Reynolds). On constate également que l'intensité relative de la force de portance est beaucoup plus importante à grand nombre de Reynolds. Lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à l'unité, la représentation Log-Log du rapport  $A_\omega^{-1} F_L/F_D$  permet de montrer que, en première approximation, ce rapport varie de manière linéaire avec le nombre de Reynolds. Ceci est directement lié au fait que, en première approximation,  $C_D$  est proportionnel à  $1/Re$  alors que  $C_L$  est constant. Le rapport  $A_\omega^{-1} F_L/F_D$  décroît donc lorsque le nombre de Reynolds diminue c'est à dire lorsque les effets visqueux augmentent. Lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à  $Re = 1$ , l'ordre de grandeur du rapport  $A_\omega^{-1} F_L/F_D$  est sensiblement constant et la force de portance est dans ces situations très faible. Ainsi, même pour  $A_\omega = 0.2$ , l'intensité de la force de portance  $F_L$  ne représente que quelques pour-cent de la force de traînée visqueuse alors que, pour ce même cisaillement et au nombre de Reynolds  $Re = 500$ , elle a une intensité supérieure à celle de la traînée visqueuse. Ce comportement montre que l'effet de la diffusion visqueuse est de diminuer l'importance relative de la force de portance par rapport à la force de traînée.

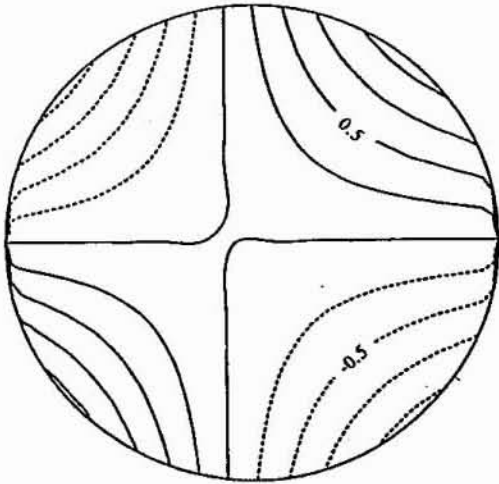
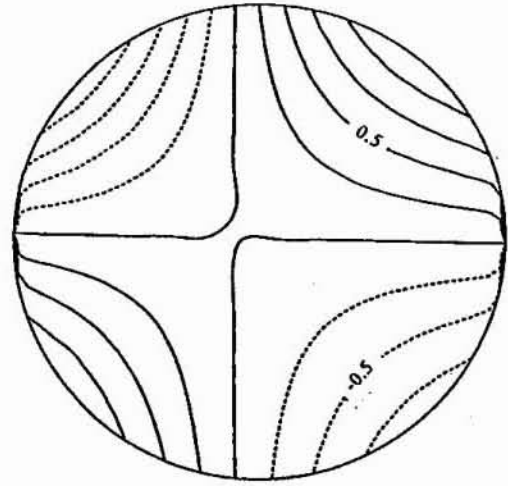
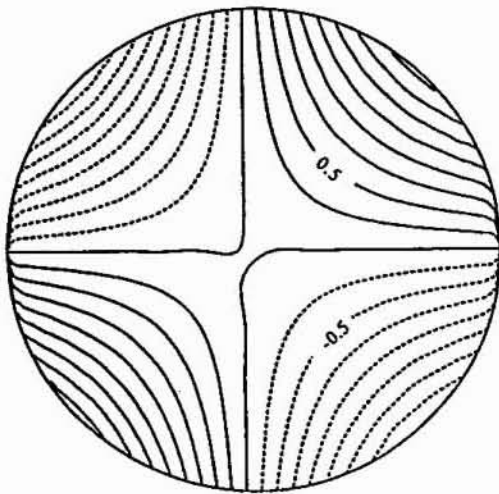
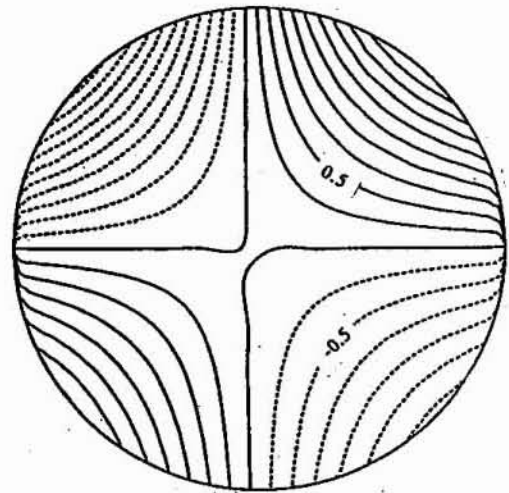
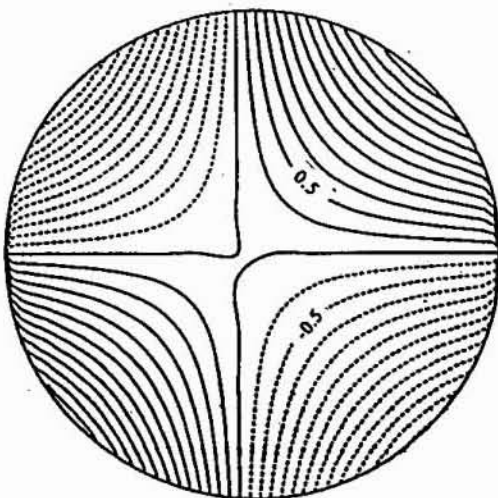
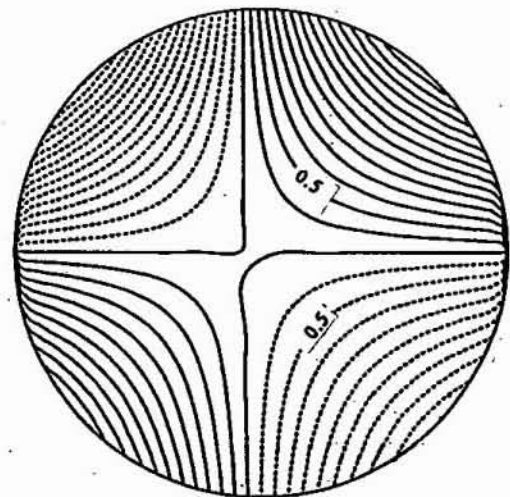
figure 4.4 : Coefficient de portance  $C_L$ figure 4.5 : Rapport des contributions  $C_{Lv}$  et  $C_{Lp}$  au coefficient de portance  $C_L$

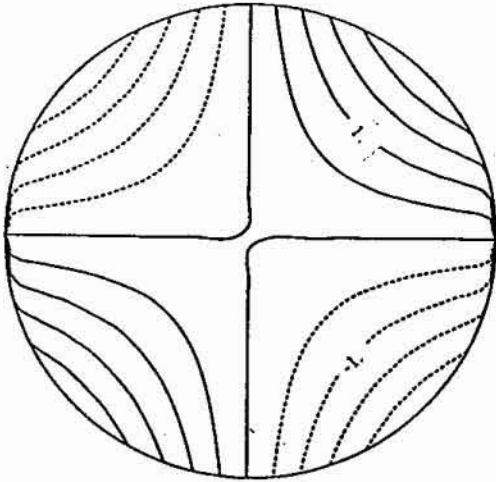
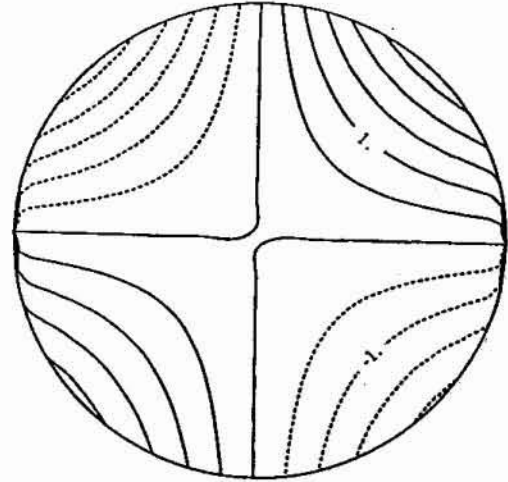
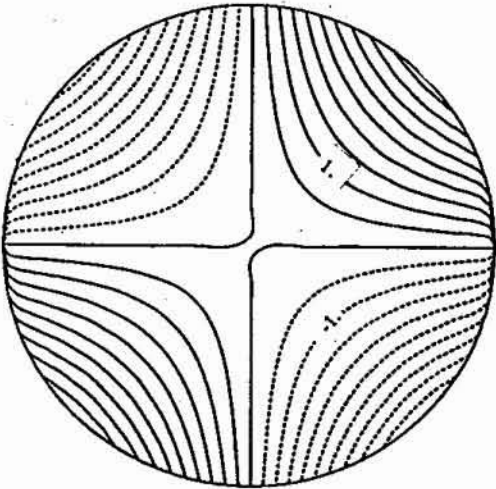
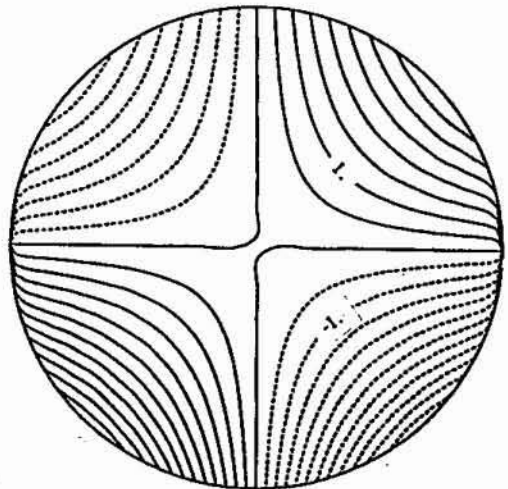
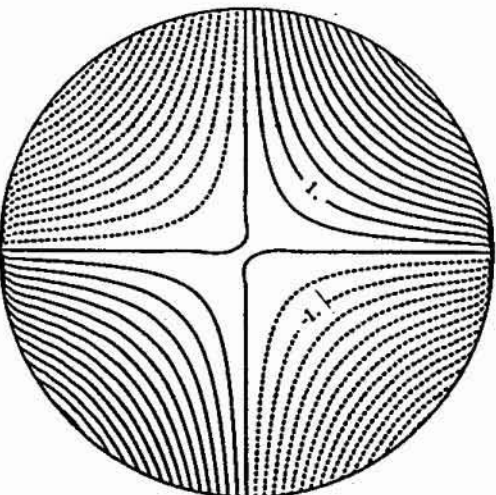
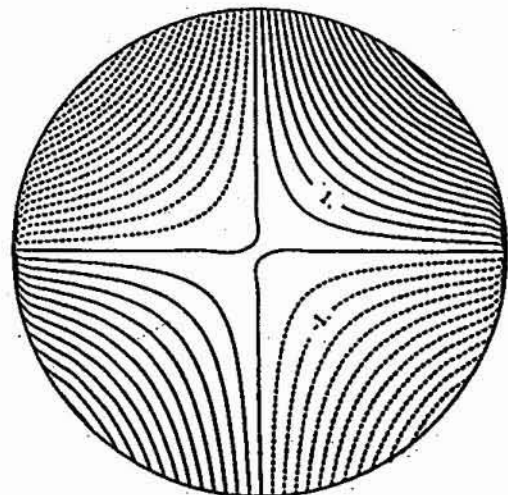


(a)  $C_{yp}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (d)  $C_{yp}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ (b)  $C_{yv}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (e)  $C_{yv}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ (c)  $C_y(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (f)  $C_y(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ Figure 4.7 : Distribution locale de la force de portance à  $Re = 500$



(a)  $C_{yp}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (d)  $C_{yp}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ (b)  $C_{yv}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (c)  $C_{yv}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ (e)  $C_y(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (f)  $C_y(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ Figure 4.8 : Distribution locale de la force de portance à  $Re = 10$

(a)  $C_{yp}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (d)  $C_{yp}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ (b)  $C_{yv}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (e)  $C_{yv}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ (c)  $C_y(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (f)  $C_y(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ Figure 4.9 : Distribution locale de la force de portance à  $Re = 1$

(a)  $C_{yp}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (d)  $C_{yp}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ (b)  $C_{yv}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (e)  $C_{yv}(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ (c)  $C_y(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$ (f)  $C_y(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$ Figure 4.10 : Distribution locale de la force de portance à  $Re = 0.1$

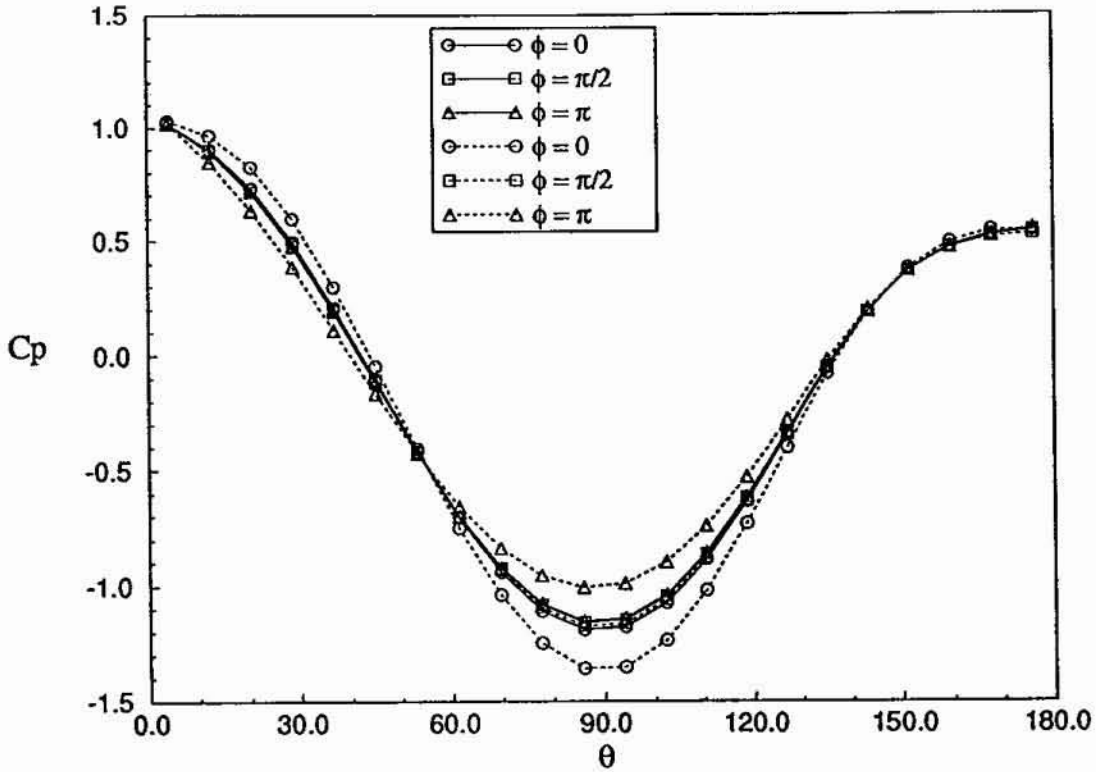


Figure 4.11.a : Coefficient  $C_p$  à  $Re = 500$  : ———  $A_\omega = 0.02$  ; .....  $A_\omega = 0.2$

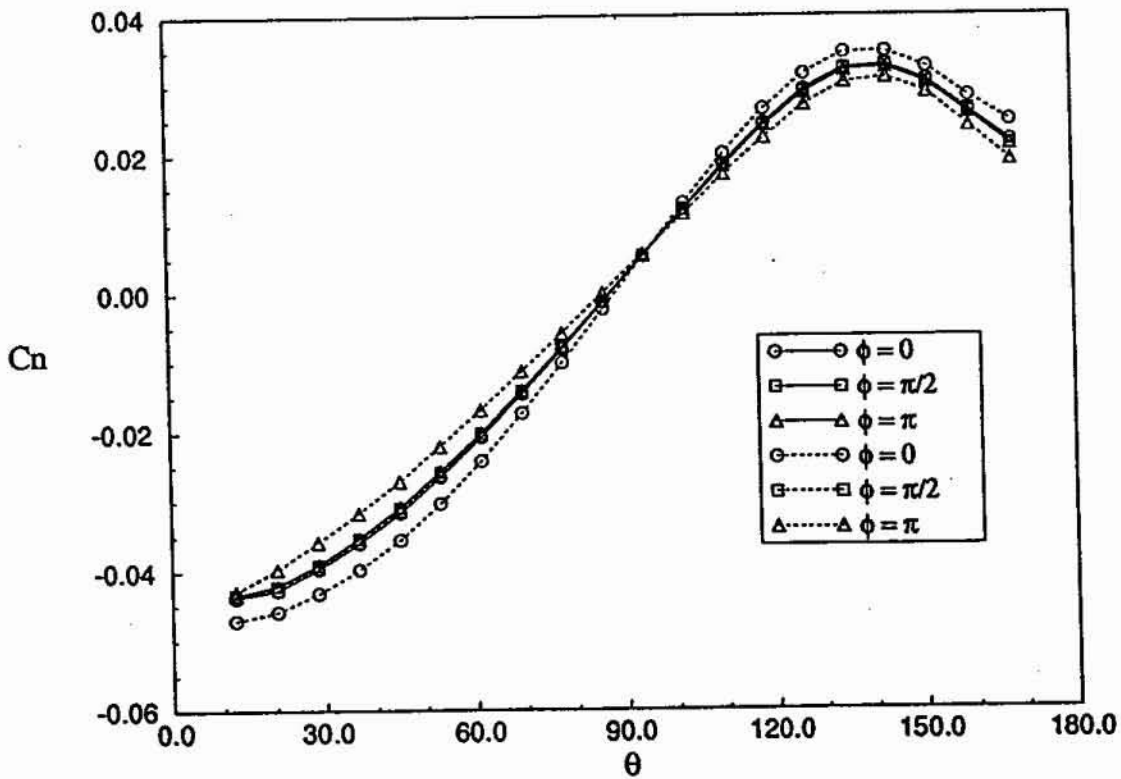


Figure 4.11.b : Coefficient  $C_n$  à  $Re = 500$  : ———  $A_\omega = 0.02$  ; .....  $A_\omega = 0.2$

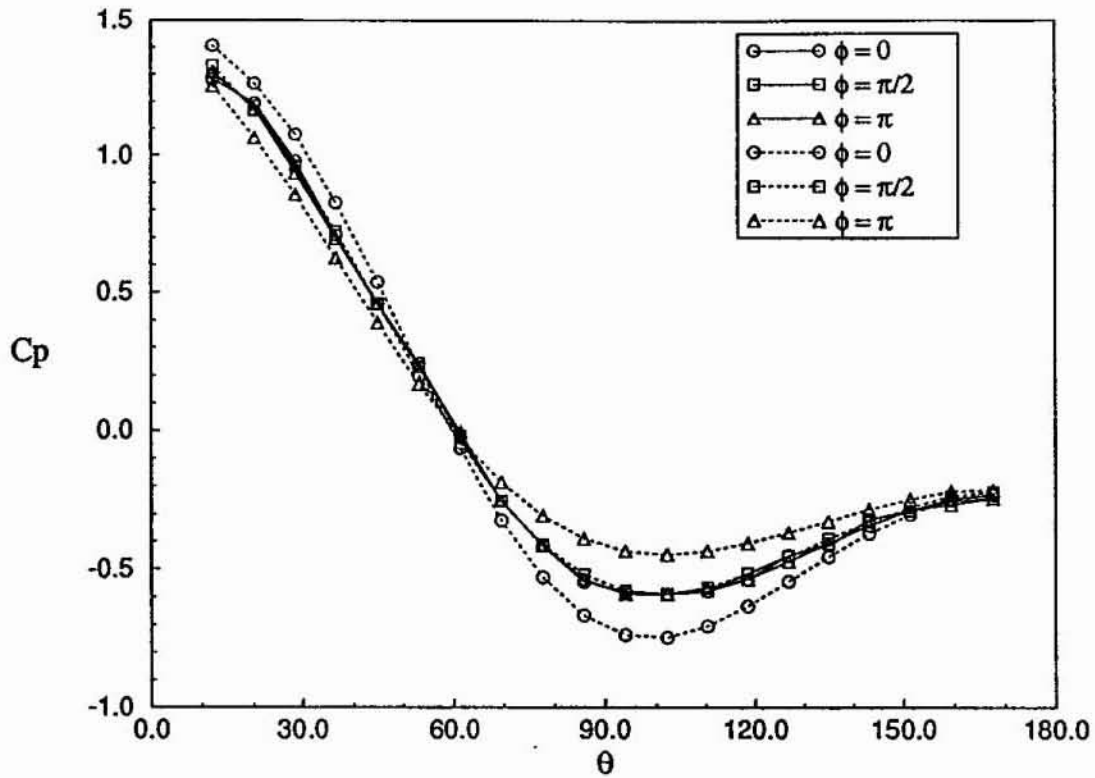


Figure 4.12.a : Coefficient  $C_p$  à  $Re = 10$  : ———  $A_\omega = 0.02$  ; .....  $A_\omega = 0.2$

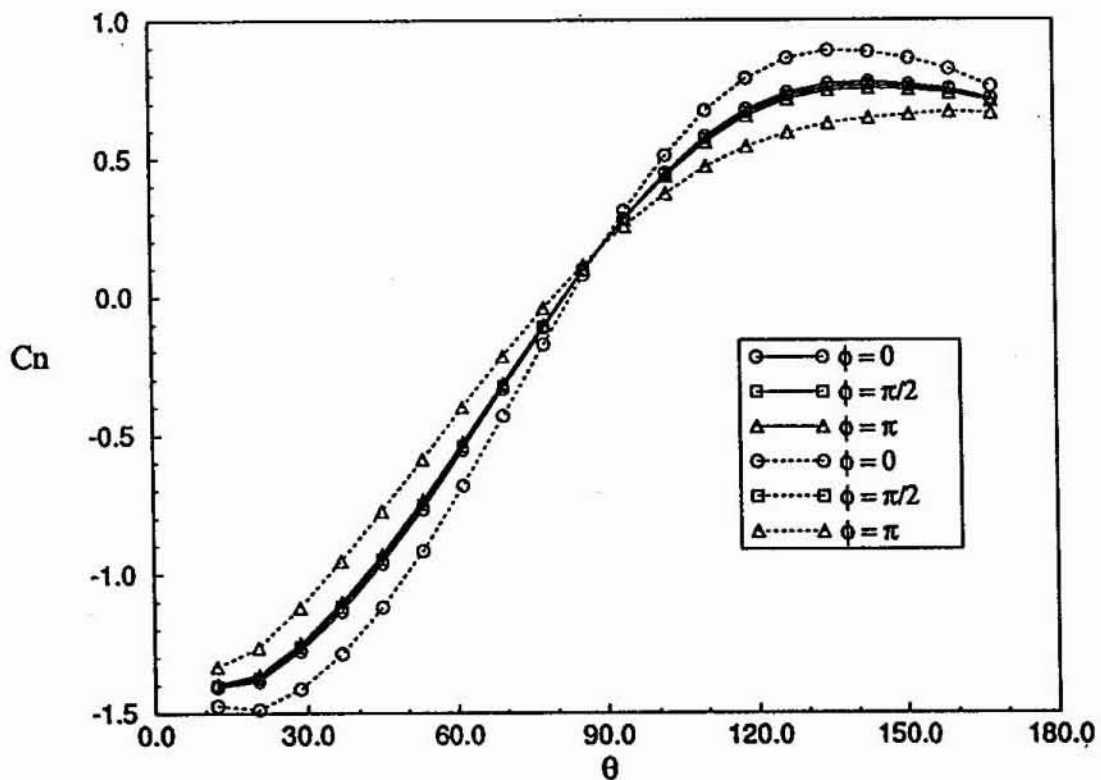


Figure 4.12.b : Coefficient  $C_n$  à  $Re = 10$  : ———  $A_\omega = 0.02$  ; .....  $A_\omega = 0.2$

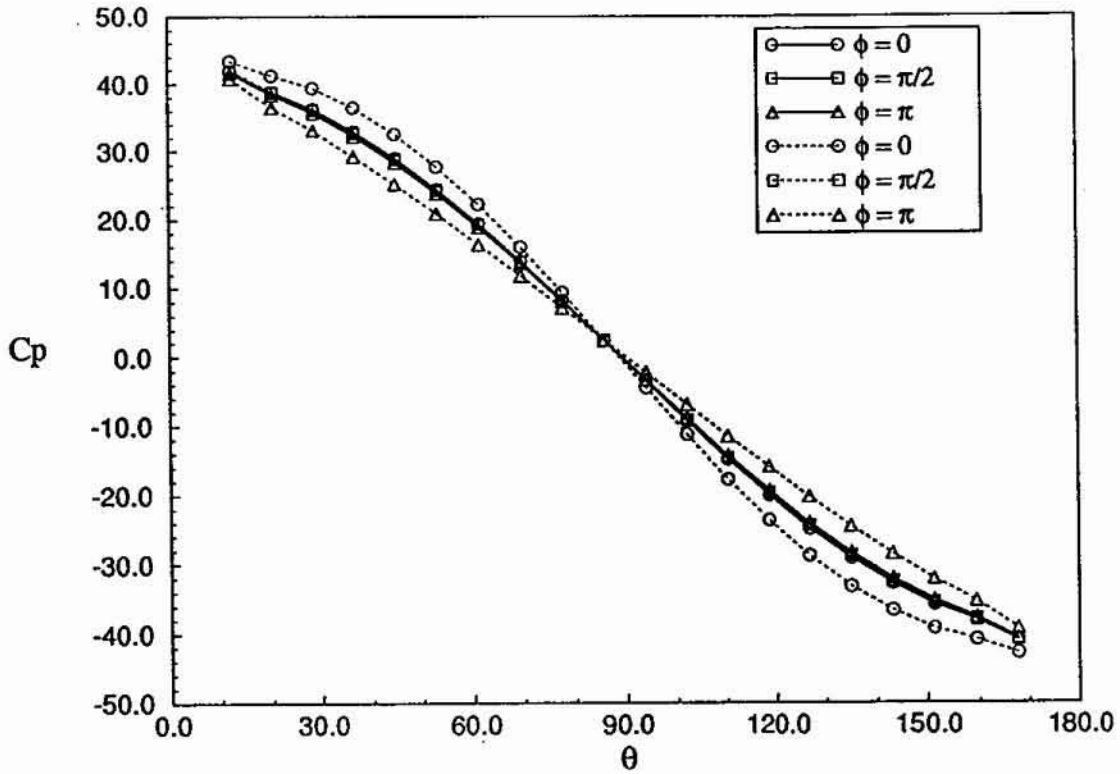


Figure 4.13.a : Coefficient  $C_p$  à  $Re = 0.1$  : ———  $A_\omega = 0.02$  ; .....  $A_\omega = 0.2$

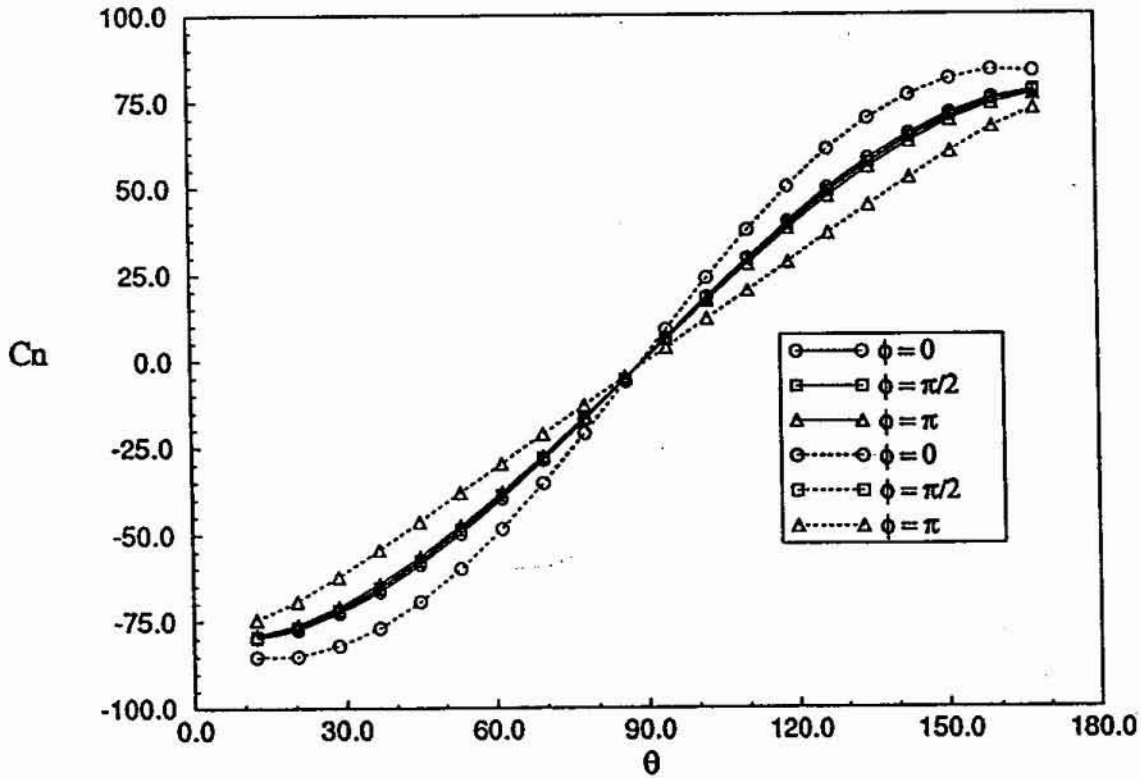


Figure 4.13.b : Coefficient  $C_n$  à  $Re = 0.1$  : ———  $A_\omega = 0.02$  ; .....  $A_\omega = 0.2$

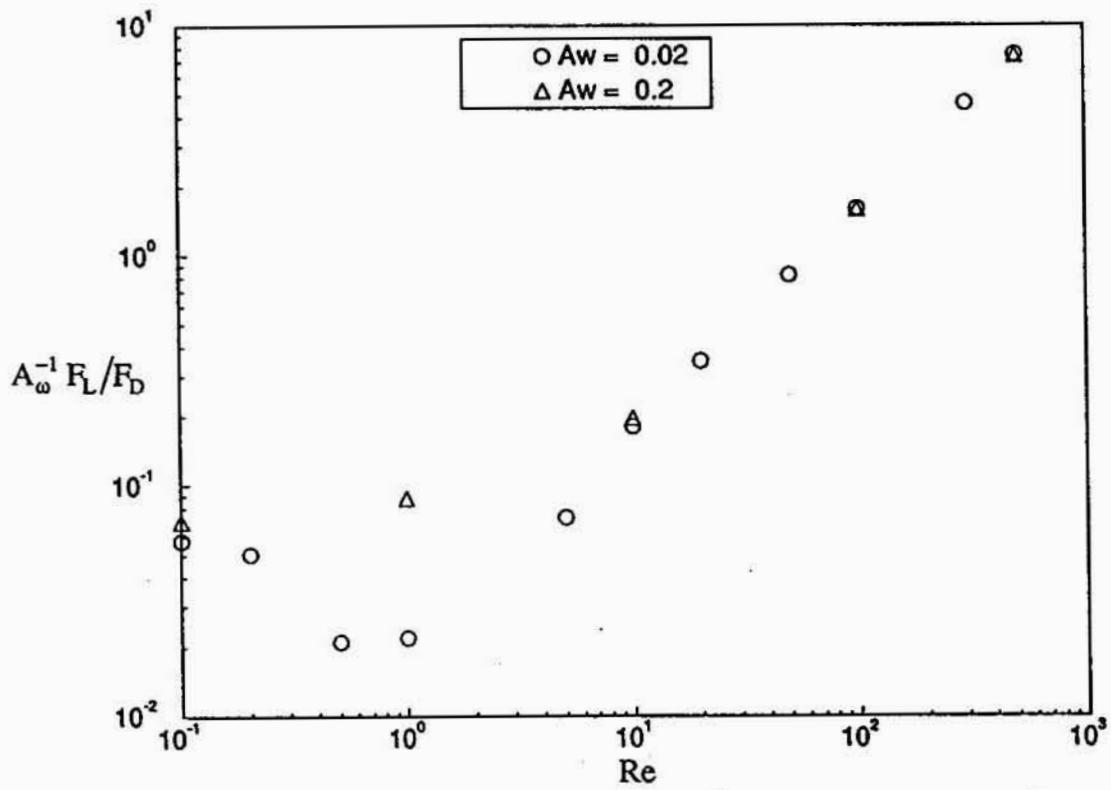


Figure 4.14 : Rapport  $A_\omega^{-1} F_L / F_D$  des forces de portance et de traînée

$A_\omega$	0.01	0.02	0.05	0.2	0.4
$C_L$	0.492	0.492	0.492	0.488	0.480

Tableau 4.2 : Coefficient de portance  $C_L$  à  $Re = 500$ 

Re	$A_\omega = 0.02$			$A_\omega = 0.2$		
	$C_{Lp}$	$C_{Lv}$	$C_L$	$C_{Lp}$	$C_{Lv}$	$C_L$
0.1	2.679	4.318	<b>7.00</b>	3.15 <sup>NCC</sup>	5.30 <sup>NCC</sup>	<b>8.55<sup>NCC</sup></b>
0.2	1.371	1.724	<b>3.095</b>			
0.5	0.564	0.1431	<b>0.707</b>			
1.	0.449	-0.063	<b>0.386</b>	0.709	0.458	<b>1.16</b>
5.	0.402	-0.0931	<b>0.309</b>			
10.	0.403	-0.0730	<b>0.330</b>	0.412	-0.0463	<b>0.360</b>
20.	0.413	-0.0493	<b>0.364</b>			
50.	0.442	-0.0279	<b>0.414</b>			
100.	0.469	-0.0176	<b>0.451</b>	0.470	-0.0180	<b>0.452</b>
300.	0.492	-0.0075	<b>0.485</b>			
500.	0.497	-0.0048	<b>0.492</b>	0.493	-0.0048	<b>0.488</b>

Tableau 4.3 : Coefficient de portance  $C_L$  à  $A_\omega = 0.02$  et  $A_\omega = 0.2$ 

NCC : Non complètement convergé



## 4.6 Description de l'écoulement

---

La force de portance résulte de la déformation de l'écoulement autour de la bulle suivant l'angle azimutal  $\phi$ . Lorsque l'écoulement contourne la bulle, la variation suivant  $\phi$  de sa quantité de mouvement se traduit par exemple par une différence entre les vitesses tangentielles  $V_{\xi}(\theta, \phi = 0)$  et  $V_{\xi}(\theta, \phi = \pi)$ . Le bilan de quantité de mouvement de part et d'autre de la bulle entraîne alors l'apparition d'une différence de pression entre la partie supérieure  $\phi = 0$  et la partie inférieure  $\phi = \pi$  de la bulle. Lorsque la viscosité de l'écoulement est faible, la présence de la vitesse azimutale  $V_{\phi}$  est essentiellement contrôlée par ce gradient de pression. Par contre lorsque l'écoulement est visqueux, la vitesse  $V_{\phi}$  est le résultat de l'équilibre entre ce gradient de pression et la diffusion de la quantité de mouvement suivant l'angle  $\phi$ . On constate alors que la composante tangentielle  $V_{\phi}$  est beaucoup moins importante. L'intensité de l'écoulement secondaire  $V_{\phi}$  à la surface de la bulle est, quelque soit le nombre de Reynolds, proportionnelle au cisaillement de l'écoulement  $A_{\omega}$ . Par conséquent, lorsque l'intensité du cisaillement  $A_{\omega}$  est faible, la composante adimensionnée  $V_{\phi}/U$  de la vitesse tangentielle à la surface de la bulle est de plusieurs ordres de grandeur inférieure à l'autre composante  $V_{\xi}/U$  contrôlée par l'écoulement d'ensemble et dont le maximum a un ordre de grandeur contenu dans l'intervalle  $[1/2, 3/2]$ . Le calcul numérique de  $V_{\phi}$  est dans ces situations délicat et fortement conditionné par la résolution du champ de pression autour de la bulle.

### 4.6.a Écoulement à la surface de la bulle

Compte tenu de la faible intensité des vitesses induites par la présence du cisaillement, l'écoulement tangentiel à la surface de la bulle est étudié en définissant le champ de vitesse de perturbation adimensionnel  $\mathbf{v}$  par :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_U + R\omega \mathbf{v} \quad (4.41)$$

où  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{V}_U$  représentent les champs de vitesse calculés numériquement respectivement pour l'écoulement cisailé étudié (4.1) et pour l'écoulement uniforme de champ de vitesse non-perturbé  $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x$  correspondant à  $A_{\omega} = 0$  ( $V_{U\xi} = V_{U\xi}(\theta)$  et  $V_{U\phi} = 0$ ). La composante tangentielle  $V_{U\xi}(\theta)$  de la vitesse  $\mathbf{V}_U$  à la surface de la bulle est représentée pour différents nombres de Reynolds sur la figure 4.15.

L'étude de la distribution de  $\mathbf{v} = v_\xi(\theta, \phi) \mathbf{e}_\xi + v_\phi(\theta, \phi) \mathbf{e}_\phi$  à la surface de la bulle suivant l'angle azimutal  $\phi$  montre que, pour  $A_\omega = 0.02$  et quelque soit le nombre de Reynolds, les composantes tangentielles de cette vitesse se mettent sous la forme :

$$v_\xi = v_\xi(\theta, \phi = 0) \cos\phi \mathbf{e}_\xi \quad (4.42.a)$$

$$v_\phi = v_\phi(\theta, \phi = \pi/2) \sin\phi \mathbf{e}_\phi \quad (4.42.b)$$

On retrouve ainsi la forme de l'écoulement obtenue en fluide parfait par *Auton* (1983) pour un écoulement faiblement cisailé. Ce résultat est en fait vérifié quelque soit l'importance de la viscosité de l'écoulement. Les expressions (4.42) restent encore valables lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à  $Re = 10$  même pour un cisaillement important tel que  $A_\omega = 0.2$  comme le montrent les représentations respectives de  $v_\xi(\theta, \phi)/\cos\phi$  et  $v_\phi(\theta, \phi)/\sin\phi$  (figures 4.16.a et 4.16.b) à  $Re = 10$  pour différents angles azimutaux  $\phi$ . On constate par ailleurs que les vitesses  $v_\xi(\theta, \phi = 0)$  et  $v_\phi(\theta, \phi = \pi/2)$  sont indépendantes du cisaillement de l'écoulement  $A_\omega$  et ne dépendent par conséquent que du nombre de Reynolds. Ces mêmes représentations à  $Re = 1$  et  $A_\omega = 0.2$  montrent que la relation (4.42.a) reste encore applicable pour la vitesse tangentielle  $v_\xi(\theta, \phi)$  (figure 4.17.a) mais ne l'est plus pour la composante azimutale  $v_\phi(\theta, \phi)$  (figure 4.17.b). On trouve ainsi l'explication de la dépendance du coefficient de portance vis à vis de l'intensité du cisaillement  $A_\omega$  lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à la valeur  $Re = 10$ .

Les distributions suivant l'angle polaire  $\theta$  de  $v_\xi(\theta, \phi = 0)$  et  $v_\phi(\theta, \phi = \pi/2)$  en fonction du nombre de Reynolds sont respectivement reportées sur les figures 4.18 et 4.19. Elles sont comparées aux distributions calculées par *Auton* (1983) pour un fluide parfait et à la solution de Stokes (4.12) pour l'écoulement (4.1). Le champ de vitesse tangentiel à la surface de la bulle correspondant à cette solution s'écrit :

$$\mathbf{V}_{St} = (U \sin\theta + \omega R \sin^2\theta \cos\phi) \mathbf{e}_\xi \quad (4.43)$$

et la contribution  $v_{St}$  correspondante est :

$$v_{St} = \sin^2\theta \cos\phi \mathbf{e}_\xi \quad (4.44)$$

On constate que l'effet de la viscosité de l'écoulement réel est important sur la distribution des composantes  $v_\xi(\theta, \phi = 0)$  et  $v_\phi(\theta, \phi = \pi/2)$  de la vitesse tangentielle.

Ainsi, même à  $Re = 500$ , la viscosité influence assez nettement les distributions de  $v_\xi(\theta, \phi = 0)$  à la surface de la bulle. Ce résultat n'est en fait pas très surprenant si l'on observe (figure 4.15) la distribution de la vitesse tangentielle  $V_{U\xi}(\theta)$  de l'écoulement uniforme par rapport à celle prédite pour l'écoulement potentiel, écoulement utilisé dans le calcul d'*Auton* (1983). On constate que, à  $Re = 500$ ,  $V_{U\xi}(\theta)$  n'est pas symétrique par rapport à l'angle  $\theta = \pi/2$  et que, de plus, son intensité maximale est de 10% plus faible que celle de l'écoulement potentiel. Les intensités respectives des deux composantes tangentielles  $v_\xi(\theta, \phi)$  et  $v_\phi(\theta, \phi)$  se trouvent par conséquent, même à  $Re = 500$ , assez nettement diminuées par rapport à celles calculées en écoulement de fluide parfait mais l'allure générale en fonction de l'angle  $\theta$  en reste proche de telle sorte que l'intégration sur la surface de la bulle des actions hydrodynamiques donne au total un coefficient de portance approchant  $C_L = 0.5$  à 1% près. Ainsi, même à grand nombre de Reynolds, la viscosité de l'écoulement réel modifie de façon très nette la distribution de la perturbation de vitesse à la surface de la bulle, mais la force de portance n'en est pas affectée.

Lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement diminue, les distributions suivant l'angle  $\theta$  des vitesses tangentielles  $v_\xi(\theta, \phi)$  et  $v_\phi(\theta, \phi)$  sont très nettement modifiées et de manière très différente pour les deux composantes. On constate que l'intensité maximale de  $v_\xi(\theta, \phi = 0)$  reste comparable pour les différents nombres de Reynolds étudiés. L'effet de la viscosité sur cette composante est de la rendre symétrique par rapport à l'angle  $\theta = \pi/2$  et de la faire devenir entièrement positive. La vitesse tangentielle  $v_\xi(\theta, \phi = 0)$  est en fait très proche de la solution de Stokes (4.33). L'effet de la viscosité sur la composante azimutale  $v_\phi(\theta, \phi)$  est assez différent. On observe tout d'abord que l'intensité de  $v_\phi(\theta, \phi)$  diminue lorsque la viscosité de l'écoulement augmente. A  $Re = 0.1$ , l'ordre de grandeur du rapport  $v_\phi/v_\theta$  entre les deux composantes tangentielles n'est plus que de 5% alors que ces vitesses ont un module comparable à  $Re = 500$ . On constate également que le signe de  $v_\phi(\theta, \phi)$ , qui est celui de  $v_\phi(\theta, \phi = \pi/2)$  car  $v_\phi(\theta, \phi)$  varie comme  $\sin \phi$ , devient négatif sur l'ensemble de la bulle. La distribution de la composante tangentielle  $v_\phi(\theta, \phi)$  à la surface de la bulle est représentée par le tracé des isovitesses sur les figures 4.21 et 4.22. Ces différents tracés mettent en évidence deux régions très marquées à la surface de la bulle qui se différencient par le signe de  $v_\phi(\theta, \phi)$ . La séparation entre ces deux parties de la surface de la bulle correspond à un angle  $\theta$  constant tant que le comportement de  $v_\phi(\theta, \phi)$  est décrit par la relation (4.42.b). Lorsque les effets visqueux deviennent prépondérants, on constate que la zone correspondant à une vitesse tangentielle  $v_\phi(\theta, \phi)$  négative, augmente progressivement. Ainsi, à  $Re = 10$  elle correspond à un secteur angulaire dont l'ordre de grandeur est  $\Delta\theta = \pi/2$  et représente toute la surface de la bulle à

$Re = 0.1$ . La diffusion visqueuse modifie donc de manière radicale à la fois l'intensité et la distribution de la vitesse tangentielle  $v_\phi(\theta, \phi)$  à la surface de la bulle. En effet, lorsque l'écoulement est visqueux, le transfert de quantité de mouvement à la surface de la bulle se fait essentiellement par diffusion de la composante tangentielle  $V_\xi$  et ceci influe sur la vitesse azimutale  $v_\phi(\theta, \phi)$  qui devient alors de plus en plus négative. Cette particularité des effets résultant de la diffusion visqueuse est même observée à  $Re = 500$  alors que la théorie de fluide parfait prédit une vitesse  $v_\phi(\theta, \phi)$  toujours positive.

A  $Re = 0.1$ , la distribution de la vitesse tangentielle  $\mathbf{v} = v_\xi(\theta, \phi) \mathbf{e}_\xi + v_\phi(\theta, \phi) \mathbf{e}_\phi$  à la surface de la bulle est en fait très proche de la solution de Stokes  $\mathbf{v}_{St}$  correspondant à l'écoulement étudié (4.1). L'écart entre le champ de vitesse calculé et cette solution correspond aux effets de la vorticité de l'écoulement non-perturbé qui sont responsables de la force de portance. On constate alors que, pour un écoulement fortement visqueux, la distribution de la vitesse tangentielle azimutale reste sous la forme (4.42.b) alors que la vitesse tangentielle polaire s'écrit à partir de la solution de Stokes :

$$v_\xi = \left( \sin^2 \theta + v_\xi^*(\theta, \phi = 0) \right) \cos \phi \mathbf{e}_\xi \quad (4.45)$$

Les deux composantes tangentielles  $v_\xi^*(\theta, \phi = 0)$  et  $v_\phi(\theta, \phi = \pi/2)$  sont alors du même ordre de grandeur  $O(10^{-1})$  (figure 4.20) et ont un module et une distribution suivant l'angle  $\theta$  qui dépendent du cisaillement de l'écoulement. Les résultats obtenus à  $Re = 0.1$  ne nous ont pas permis de mettre en évidence la nature de cette dépendance qui est vraisemblablement complexe comme le laisse supposer l'expression analytique (4.35) de la force de portance calculée au paragraphe 4.3. Ceci est d'autant plus vrai que le résultat proposé à  $Re = 0.1$  et  $A_\omega = 0.2$  n'est pas au moment où sont écrites ces lignes complètement convergé.

#### 4.6.b écoulement autour de la bulle

Ces distributions locales des vitesses tangentielles sont la conséquence directe de la forme de l'écoulement autour de la bulle. La forme de cet écoulement diffère de façon très nette suivant les valeurs du nombre de Reynolds et du cisaillement adimensionnel  $A_\omega$ . Les figures 4.23 à 4.26 représentent, dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ , la perturbation de vitesse de l'écoulement  $\mathbf{V} - \mathbf{U}$  crée par la présence de la bulle. On rappelle que  $\mathbf{U}$  désigne le champ de vitesse non-perturbé donné par (4.1).

On retrouve tout d'abord l'allure générale observée en écoulement uniforme. A grand nombre de Reynolds, le sillage est très marqué et le déplacement du fluide autour de la bulle est

très proche de celle-ci. Par contre, lorsque l'écoulement est très visqueux, la perturbation de vitesse est beaucoup plus diffusée et sa forme ressemble beaucoup à la solution obtenue en écoulement de Stokes.

A grand nombre de Reynolds ( $Re = 500$ ) et lorsque l'écoulement est très faiblement cisailé ( $A_\omega = 0.02$ ), la différence du champ de vitesse entre les plans  $\phi = 0$  et  $\phi = \pi$  est pratiquement imperceptible. Par contre, pour le même nombre de Reynolds et des cisaillements plus importants, le sillage de la bulle est considérablement modifié. Ainsi à  $A_\omega = 0.4$ , le point d'arrêt aval est nettement dans le plan  $\phi = \pi$  et le sillage formé par la bulle remonte ensuite comme aspiré par les pressions plus faibles. On observe alors un rétrécissement très spectaculaire du sillage de la bulle lorsque l'intensité du cisaillement augmente.

Par contre, lorsque le nombre de Reynolds est plus faible ( $Re = 1$ ), la déformation du sillage est pratiquement imperceptible même pour des intensités de cisaillement laissant apparaître des déformations sensibles des champs de vitesse et de pression à la surface de la bulle. La zone visqueuse autour de la bulle est alors plus épaisse et les modifications observées localement sont diffusées et réparties dans une région plus importante de l'espace.

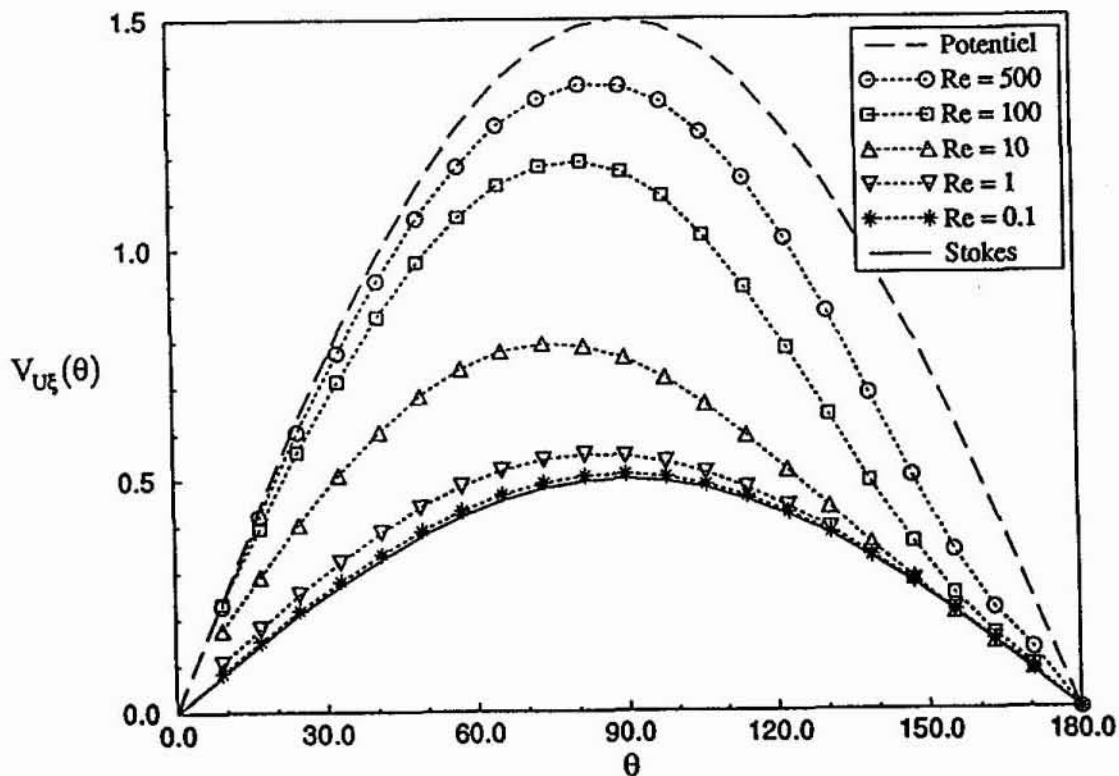
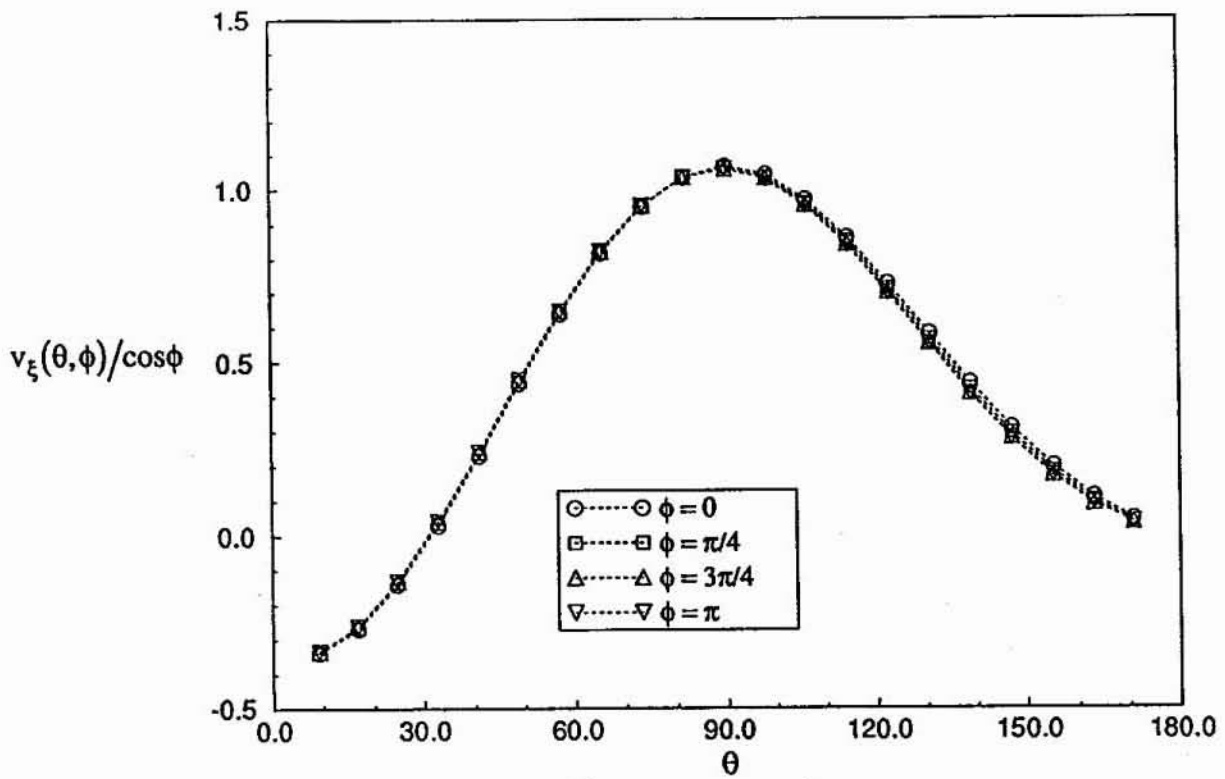
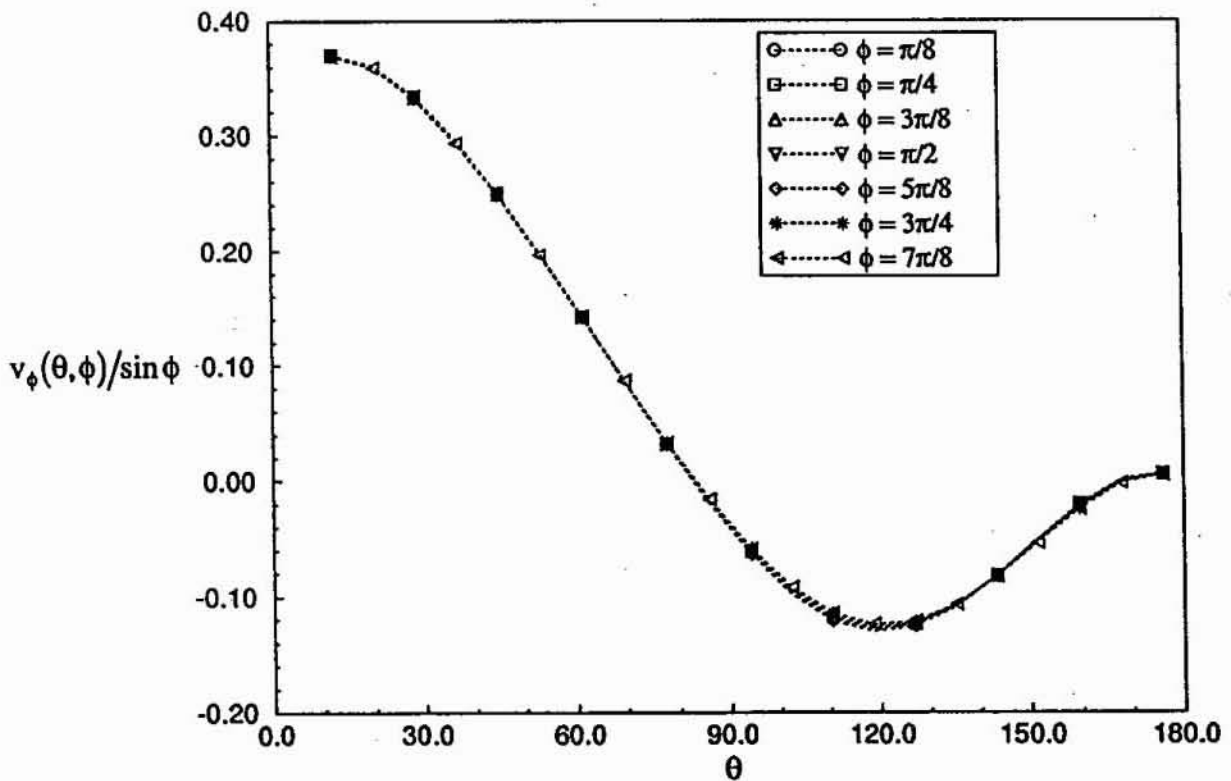
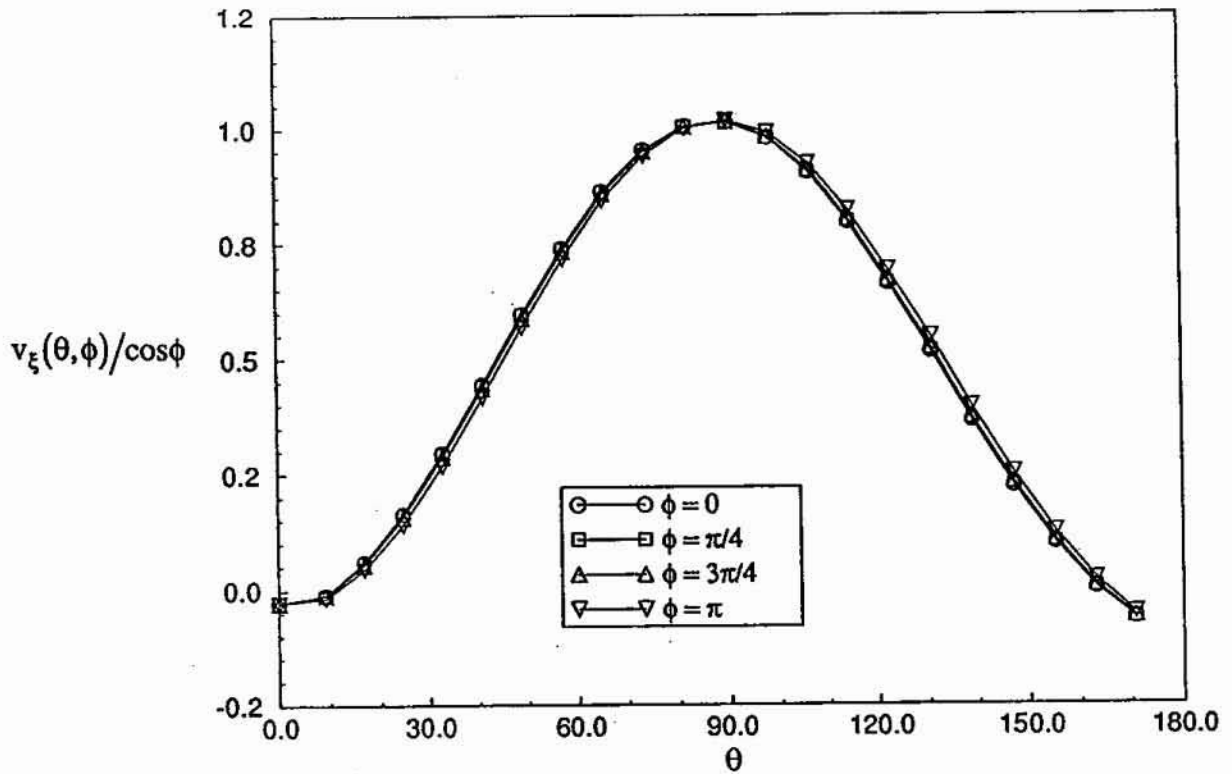
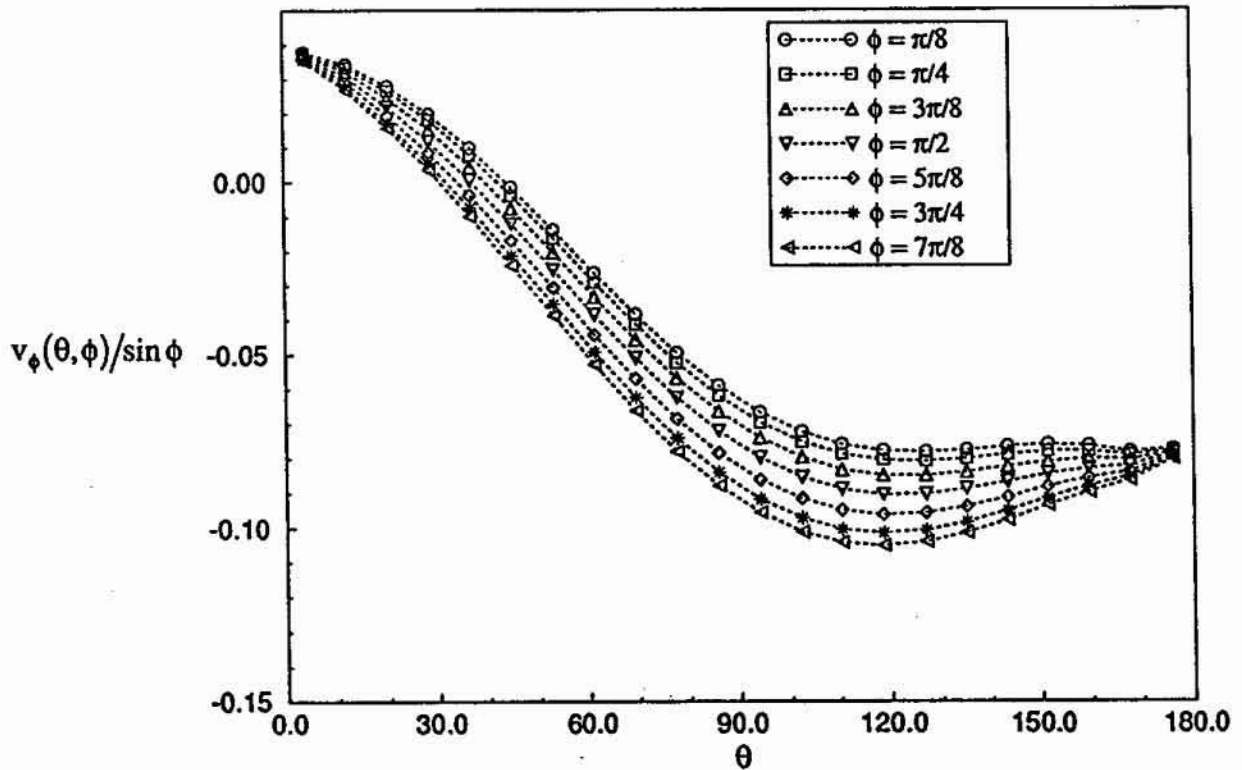
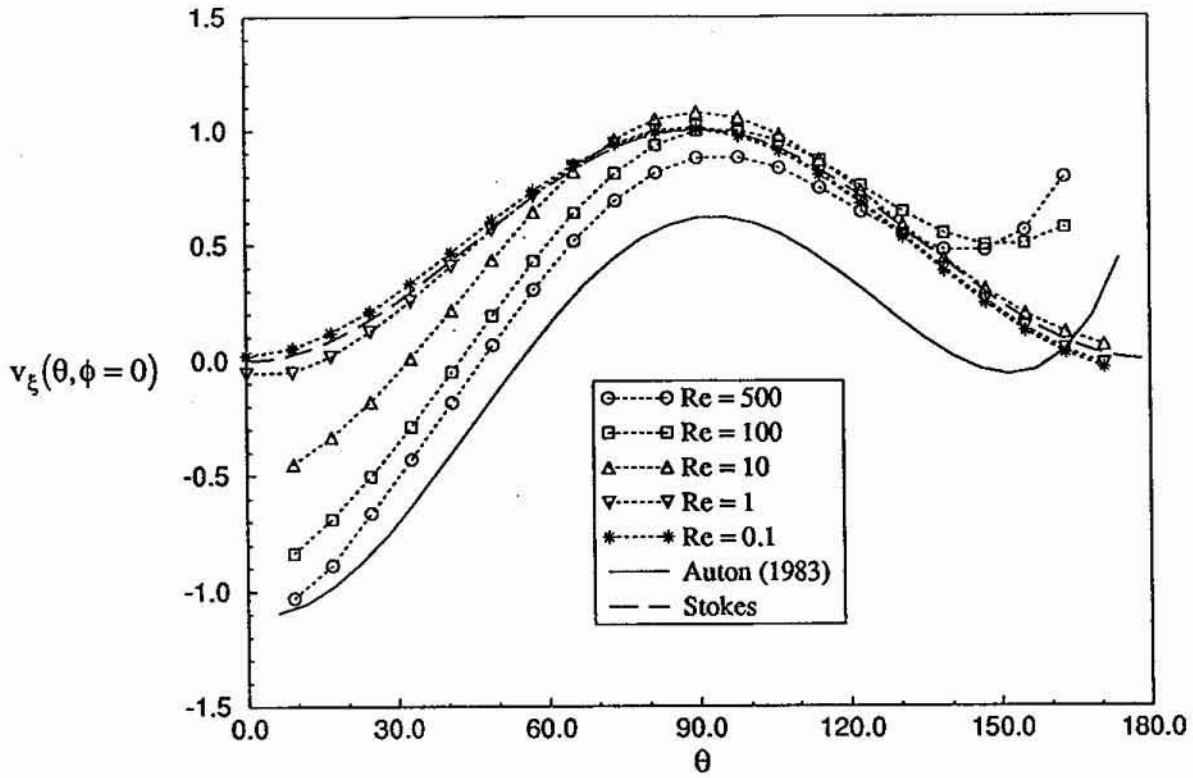
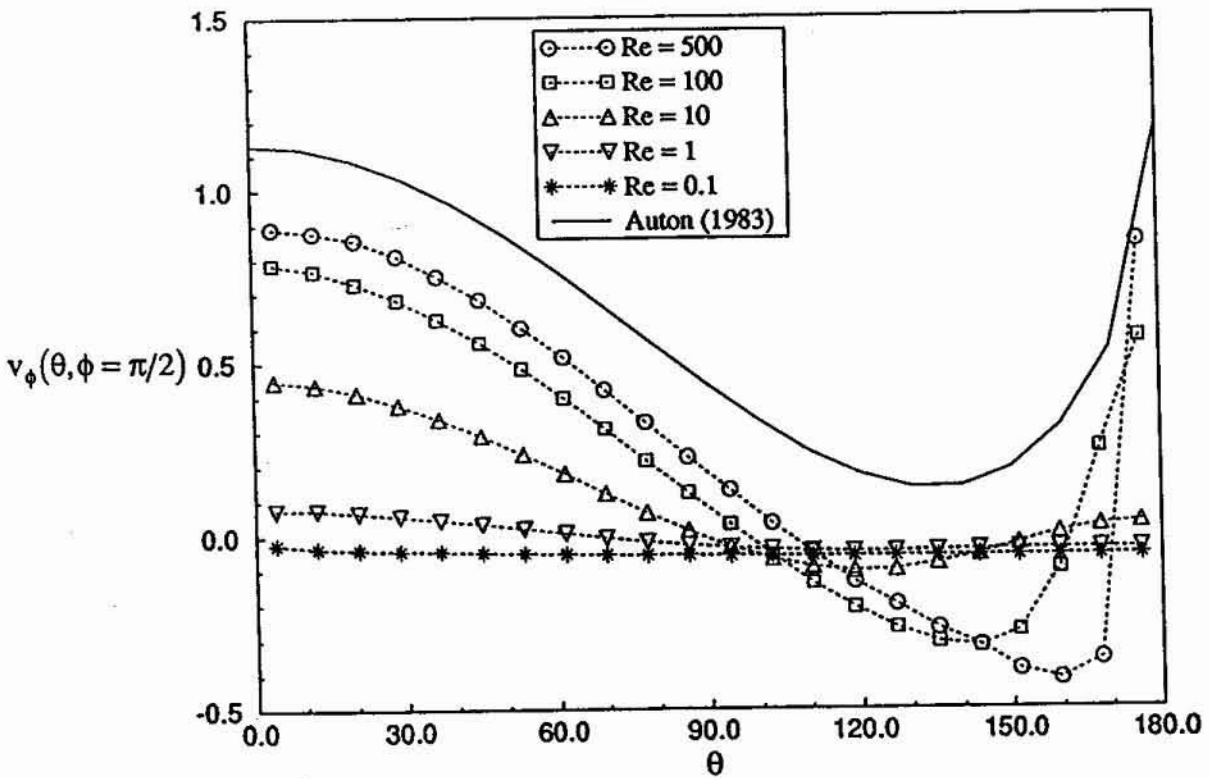


Figure 4.15 :  $V_{U\xi}(\theta)$

Figure 4.16.a :  $v_\xi(\theta, \phi) / \cos\phi$  à  $Re = 10$  et  $A_\omega = 0.2$ Figure 4.16.b :  $v_\phi(\theta, \phi) / \sin\phi$  à  $Re = 10$  et  $A_\omega = 0.2$



Figure 4.17.a :  $v_\xi(\theta, \phi)/\cos\phi$  à  $\text{Re} = 1$  et  $A_\omega = 0.2$ Figure 4.17.b :  $v_\phi(\theta, \phi)/\sin\phi$  à  $\text{Re} = 1$  et  $A_\omega = 0.2$

Figure 4.18 :  $v_\xi(\theta, \phi = 0)$ .Figure 4.19 :  $v_\phi(\theta, \phi = \pi/2)$ .



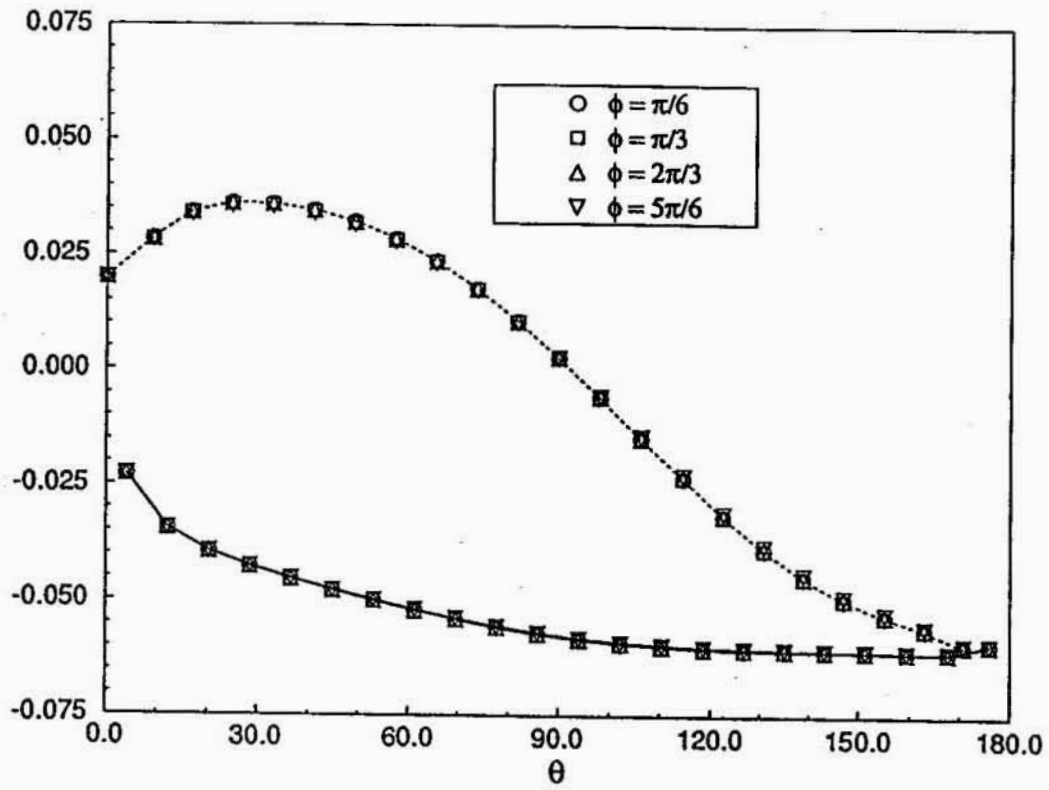
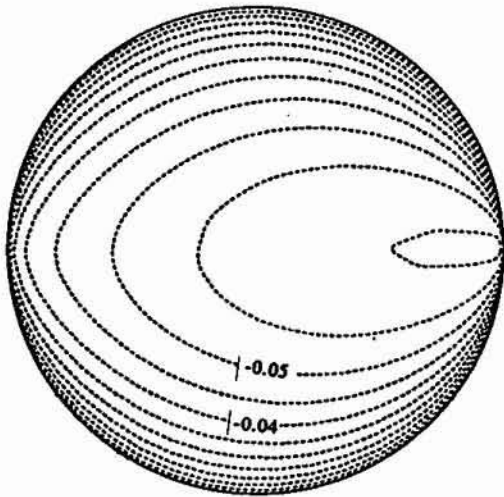
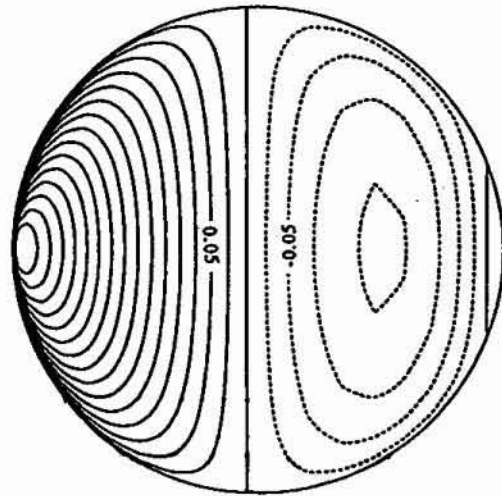
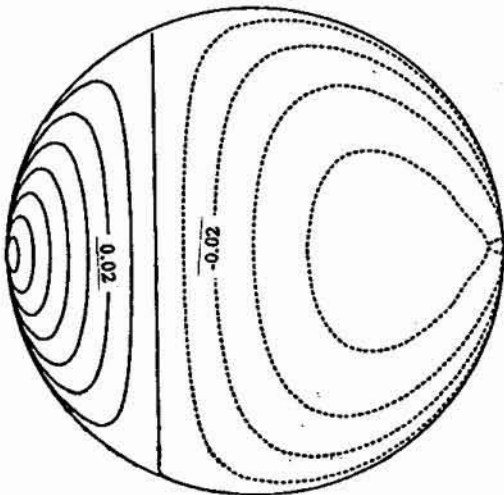
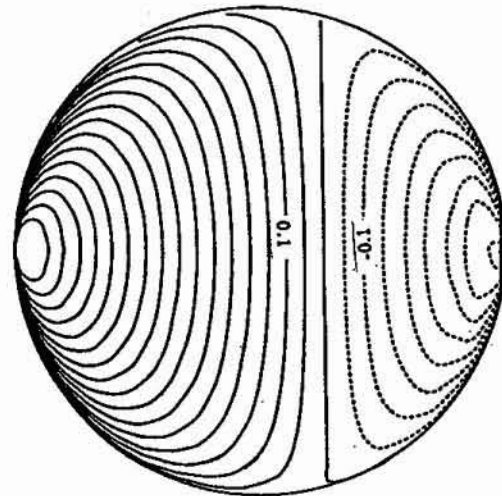
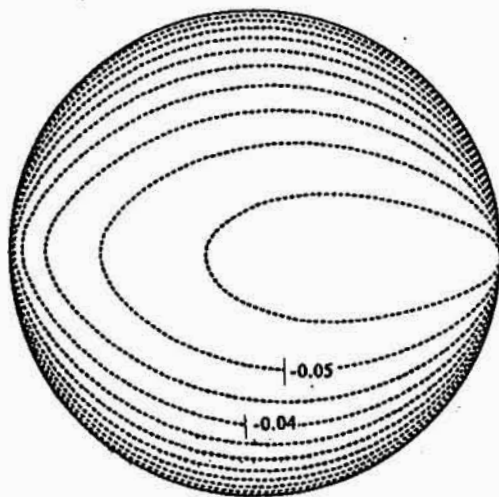
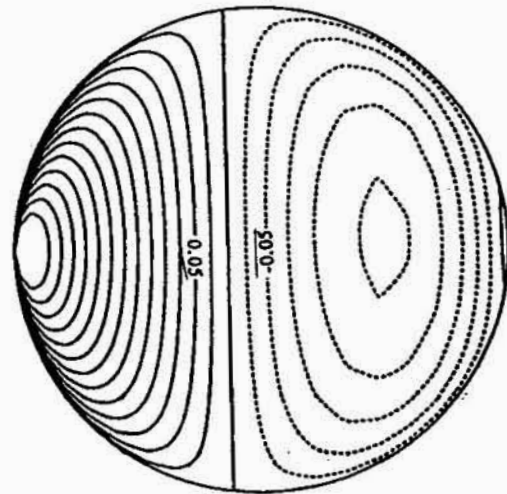
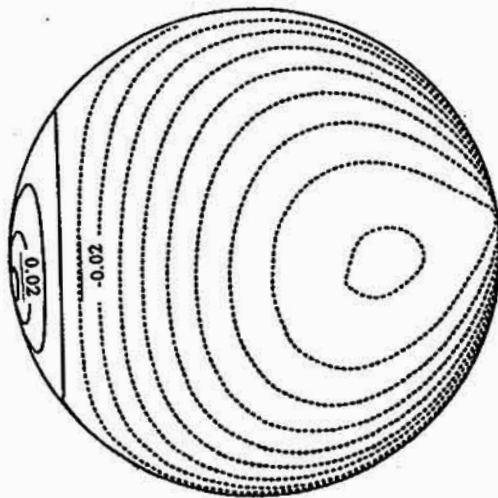
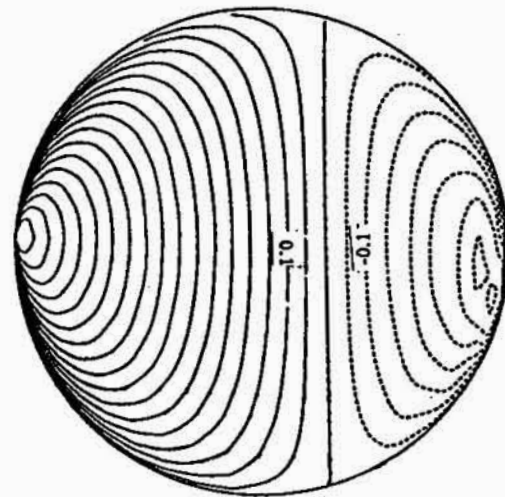


Figure 4.20 : Vitesses tangentielles à  $Re = 0.1$  : - - - -  $v_\xi^*(\theta, \phi = 0)$  et ———  $v_\phi(\theta, \phi = \pi/2)$

(a)  $Re = 0.1$ (b)  $Re = 10$ (c)  $Re = 1$ (d)  $Re = 500$ Figure 4.21 : Distribution locale de  $v_\phi(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$

(a)  $Re = 0.1$ (b)  $Re = 10$ (c)  $Re = 1$ (d)  $Re = 500$ Figure 4.22 : Distribution locale de  $v_\phi(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.2$

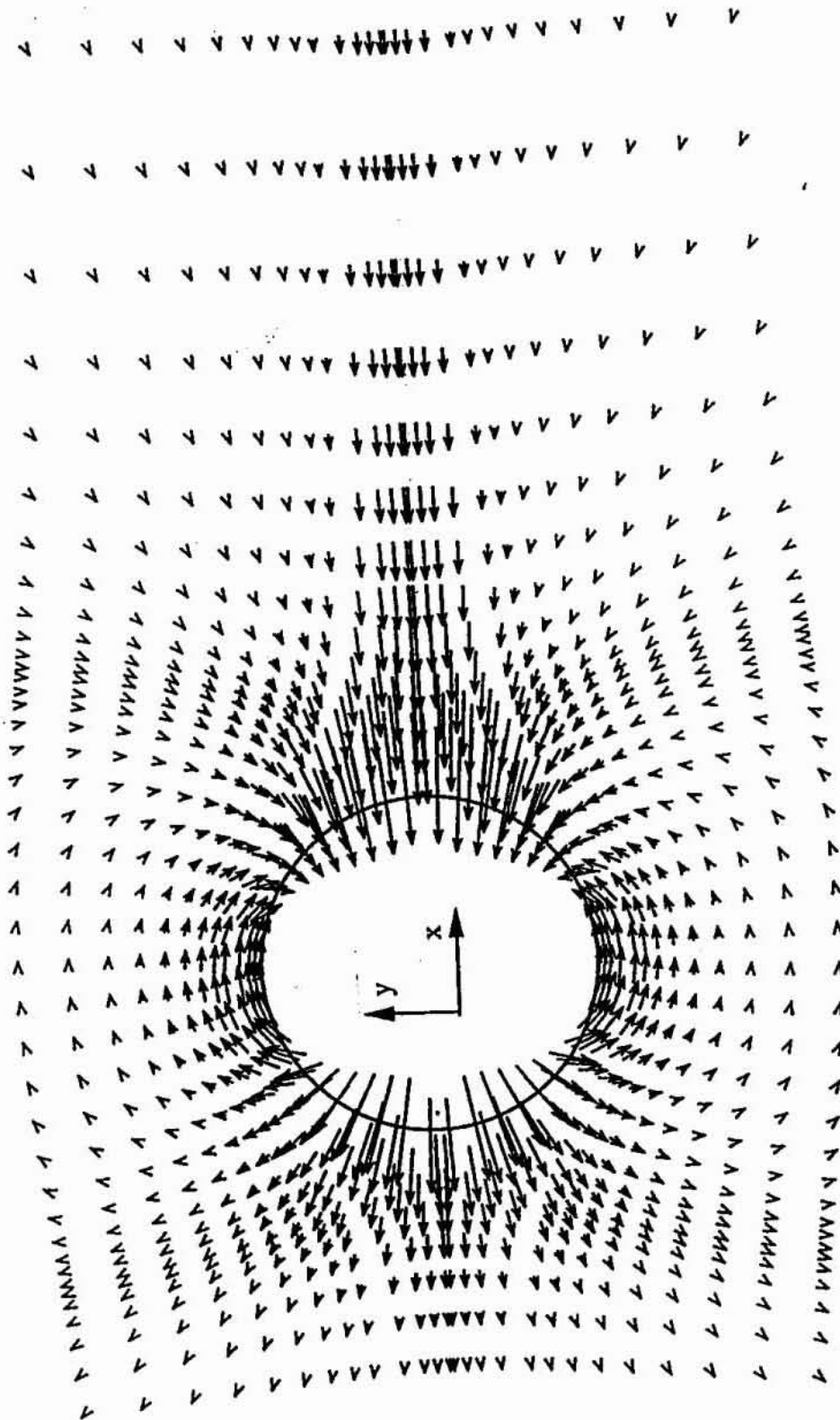


Figure 4.23 : Ecoulement dans le plan  $(e_x, e_y)$  à  $Re = 500$  et  $A_\omega = 0.02$

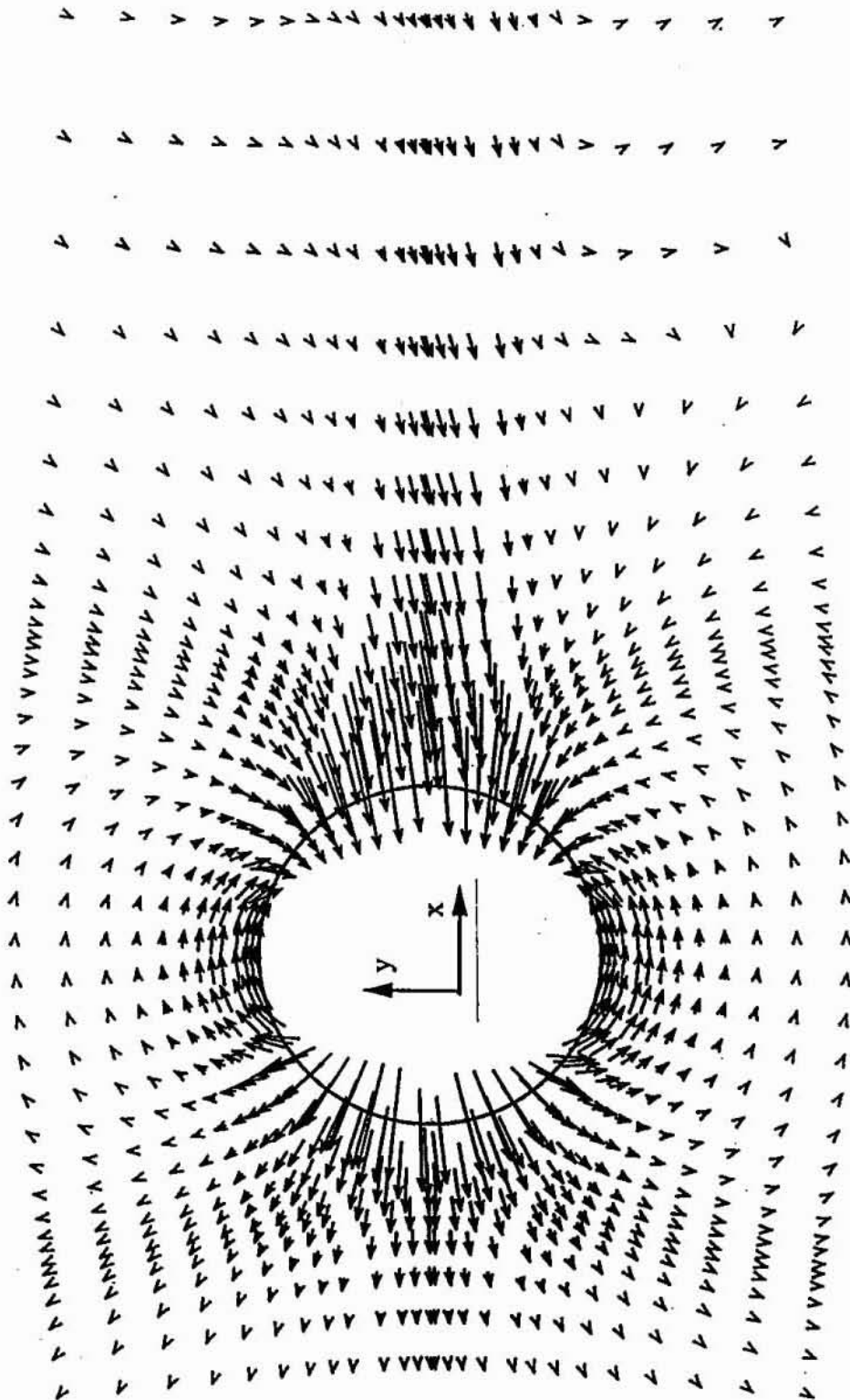


Figure 4.24 : Ecoulement dans le plan  $(e_x, e_y)$  à  $Re = 500$  et  $A_\omega = 0.2$

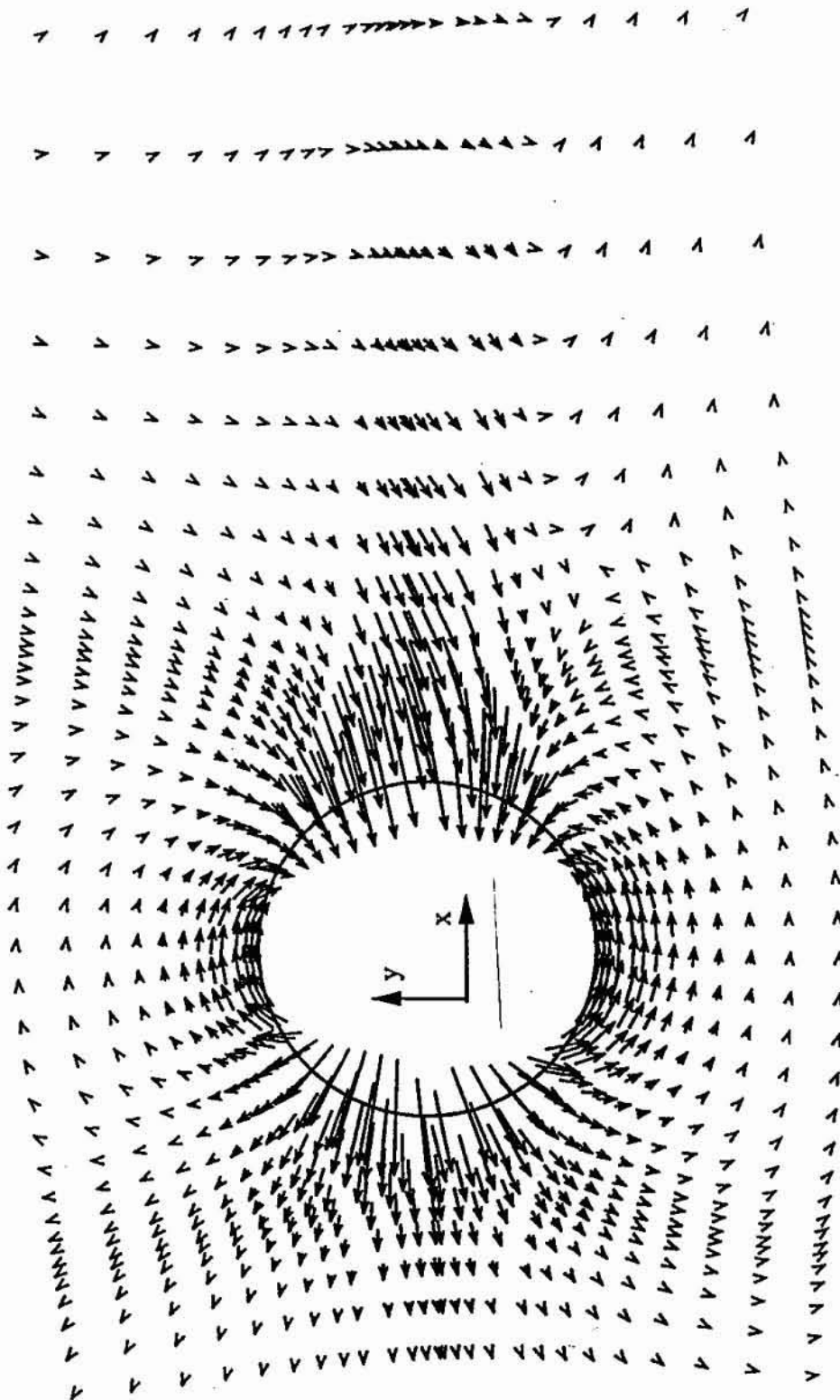


Figure 4.25 : Ecoulement dans le plan  $(e_x, e_y)$  à  $Re = 500$  et  $A_\omega = 0.4$ .

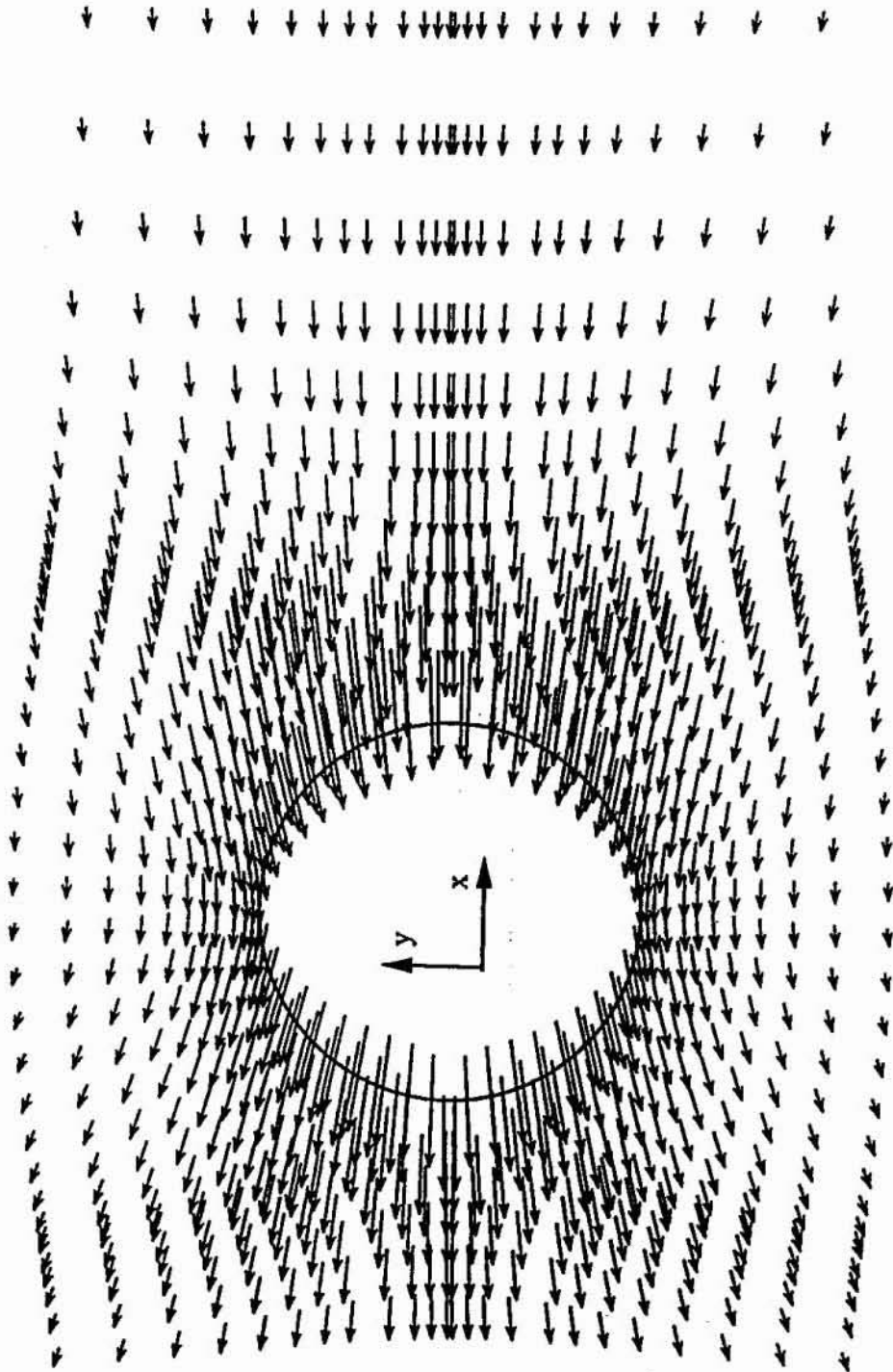


Figure 4.26 : Ecoulement dans le plan  $(e_x, e_y)$  à  $Re = 1$  et  $A_\omega = 0.2$ .

## 4.7 Conclusions

---

L'étude présentée dans ce chapitre a permis de décrire l'évolution du coefficient de portance d'une bulle plongée dans un écoulement visqueux et cisailé pour une large plage de nombres de Reynolds et pour diverses intensités de cisaillement. Elle a également montré que l'effet de cet écoulement sur la force de traînée exercée sur la bulle peut être considéré comme négligeable. Ce chapitre à dominante numérique a été complété par le calcul analytique de la force de portance exercée sur une bulle sphérique en écoulement visqueux. La proposition d'une loi empirique permet également de décrire l'évolution du coefficient de portance lorsque  $Re > 50$ .

La description de l'écoulement autour de la bulle a montré que la distorsion de l'écoulement est proportionnelle à l'intensité du cisaillement et est beaucoup plus perceptible lorsque les effets visqueux ont un rôle négligeable. Un soin particulier a été consacré à la description des distributions des vitesses tangentielles  $v_{\xi}(\theta, \phi)$  et  $v_{\phi}(\theta, \phi)$  à la surface de la bulle. L'influence de la diffusion visqueuse sur  $v_{\phi}(\theta, \phi)$  s'est révélée considérable, ce qui explique que le coefficient de portance se comporte différemment pour  $Re < 10$  et pour  $Re > 10$ .



## Chapitre 5

## Chapitre 5

# Effets combinés de la déformation et de la vorticité d'un écoulement sur la force de portance

- 5.1 Présentation
- 5.2 Force de portance en écoulement de déformation pure plane
  - 5.2.a Présentation de l'écoulement
  - 5.2.b Solution potentielle
  - 5.2.c Résultats numériques
  - 5.2.d Discussion
  - 5.2.e Analyse et Synthèse
  - 5.2.f Description de l'écoulement
- 5.3 Force de portance en écoulement de rotation solide
  - 5.3.a Présentation de l'écoulement
  - 5.3.b Résultats numériques et discussion
  - 5.3.c Expression de la résultante des forces
- 5.4 Force de traînée
- 5.5 Conclusions

## 5.1 Présentation

---

Ce chapitre est consacré à l'étude de la force hydrodynamique, et plus particulièrement la force de portance, subie par une bulle sphérique dans des écoulements plans de rotation solide et de déformation pure. Son objectif est de proposer à partir des résultats numériques obtenus, l'écriture de la résultante  $\mathbf{F}$  des forces agissant sur la bulle de vitesse  $\mathbf{U}_b$ , de volume  $\vartheta_b$  et de rayon  $R$  plongée dans un écoulement non-uniforme de champ de vitesse non-perturbé  $\mathbf{U}$ , de viscosité dynamique  $\mu$  et de masse volumique  $\rho$ . A cet effet, la possibilité d'écrire la résultante  $\mathbf{F}$  comme étant composée de la force de traînée visqueuse (0.3) et de la force (0.9) obtenue en écoulement non-visqueux et faiblement rotationnel [Auton *et al.*, 1988] est discutée :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_D \\ &= \rho \vartheta_b \left[ (1 + C_M) \frac{D\mathbf{U}}{Dt} - C_M \frac{d\mathbf{U}_b}{dt} \right] + C_L \rho \vartheta_b (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \times \boldsymbol{\Omega} \\ &\quad + C_D \pi R^2 \frac{1}{2} \rho |\mathbf{U} - \mathbf{U}_b| (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \end{aligned} \quad (5.0)$$

où on rappelle que  $C_M$ ,  $C_L$  et  $C_D$  sont respectivement les coefficients de masse ajoutée, de portance et de traînée et  $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{U}$  est la vorticité de l'écoulement non-perturbé.

Afin de réaliser cette étude, deux écoulements ont été choisis. Ces écoulements, selon le signe des gradients de vitesse constants qui les composent, exercent sur la bulle une force de portance faisant intervenir des effets de déformation pure et/ou de vorticité. Il s'agit des écoulements suivants :

L'écoulement de déformation pure qui correspond à la superposition d'un écoulement uniforme et d'une déformation située dans le plan de cet écoulement mais dont les axes propres sont inclinés à  $\pi/4$  :

$$\mathbf{U} = \left( \mathbf{U} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} y \right) \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} x \mathbf{e}_y \quad (5.1)$$

L'écoulement de rotation solide qui correspond à la superposition d'un tourbillon solide et d'un écoulement uniforme :

$$\mathbf{U} = \left( \mathbf{U} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} y \right) \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} x \mathbf{e}_y \quad (5.2)$$

La bulle est immobile ( $\mathbf{U}_b = \mathbf{0}$ ) et placée à l'origine du repère cartésien  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  dans l'écoulement non-perturbé étudié. L'écoulement ainsi généré est caractérisé par le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{2RU}{\nu} \quad (5.3)$$

et par la vorticité ou la déformation adimensionnelle  $A_\omega$  définie à partir des caractéristiques de l'écoulement non-perturbé par :

$$A_\omega = \frac{2R \omega}{U} \quad (5.4)$$

L'objectif de ce chapitre est d'apporter principalement des résultats nouveaux concernant la force de portance totale  $F_y = F_y \mathbf{e}_y$  qui correspond à la contribution de la résultante  $\mathbf{F}$  des forces suivant l'axe  $\mathbf{e}_y$ . On peut la définir, pour les configurations d'écoulement (5.1) et (5.2), par l'expression (5.5) :

$$F_y = C_y \rho \vartheta_b U \omega \quad (5.5)$$

Les coefficients de portance de la bulle au sein des écoulements (5.1) et (5.2) sont respectivement notés  $C_{y1}$  et  $C_{y2}$ .

Les effets de la vorticité ou de la déformation de l'écoulement sur la force de traînée visqueuse sont également étudiés. Pour ces écoulements, ils sont directement décelés car la projection de  $\mathbf{F}$  sur l'axe  $\mathbf{e}_x$  est directement la traînée visqueuse  $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}_D$ . Comme pour le chapitre précédent,  $C_D$  est en fait défini à partir du coefficient de traînée visqueuse  $C_{DS}$  de l'écoulement stationnaire uniforme  $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x$  par :

$$C_D = C_{DS} + C_{D\omega} \quad (5.6)$$

où  $C_{D\omega}$  représente la modification de la traînée visqueuse due à la vorticité ou à la déformation spatiale de l'écoulement.

Nous renvoyons le lecteur au chapitre 4 pour l'ensemble des définitions concernant les distributions à la surface de la bulle. Les conditions des simulations numériques sont également les mêmes tant au niveau du choix du maillage que des conditions aux limites. Les simulations à très faible nombre de Reynolds n'ont pas été effectuées compte tenu du coût du calcul correspondant. En effet, à  $\text{Re} = 0.1$  et  $A_\omega = 0.2$  le temps CPU estimé est de 60 heures de CRAY C98 car le critère de stabilité impose, pour le calcul des termes advectifs, un pas de

temps très faible, les vitesses loin de la bulle étant importantes compte tenu de la taille du domaine de calcul nécessaire.

Ce chapitre se décompose en trois parties. La première partie (§ 5.2) regroupe les simulations numériques réalisées lorsque l'écoulement non-perturbé est irrotationnel [écoulement (5.1)]. Dans ces situations, la force de portance est, si l'on se réfère à (5.0), uniquement liée à un effet de masse ajoutée. La deuxième partie (§ 5.3) présente les simulations numériques de l'écoulement (5.2) où la force de portance résulte de la combinaison d'effets de masse ajoutée et de vorticité. La possibilité de superposer les résultats issus du chapitre 4 et ceux obtenus au paragraphe 5.2 pour retrouver ceux de cette partie sera discutée. Enfin, la dernière partie (§ 5.4) présente l'ensemble des résultats concernant la force de traînée.

## 5.2 Force de portance en écoulement de déformation pure plane

### 5.2.a Présentation de l'écoulement

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la force exercée sur une bulle sphérique par l'écoulement de déformation pure (figure 5.1) dont le champ de vitesse non-perturbé (5.1) est :

$$\mathbf{U} = \left( U + \frac{1}{2} \omega y \right) \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \omega x \mathbf{e}_y$$

La vorticité  $\Omega$  et le tenseur de déformation  $\bar{\mathbf{S}}$  de cet écoulement sont respectivement :

$$\Omega = \mathbf{0} \tag{5.7.a}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \tag{5.7.b}$$

Compte tenu de (5.7.a), la force de portance  $\mathbf{F}_L$  résultant de la vorticité de l'écoulement non-perturbé est nulle. Suivant l'expression (5.0), la force totale  $\mathbf{F}$  subie par la bulle est alors composée de la force d'inertie  $\mathbf{F}_I$  et de la force de traînée visqueuse  $\mathbf{F}_D$  :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_D = (1 + C_M) \rho \vartheta_b \frac{DU}{Dt} + C_D \pi R^2 \frac{1}{2} \rho U U \tag{5.8}$$

Compte tenu de l'expression du champ de vitesse (5.1) de l'écoulement non-perturbé, la résultante  $\mathbf{F}$  des forces exercées par cet écoulement sur la bulle prend la forme :

$$\mathbf{F} = C_D \pi R^2 \frac{1}{2} \rho U^2 \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} (1 + C_M) \rho \vartheta_b U \omega \mathbf{e}_y \quad (5.9)$$

Si l'on en croit (5.9), la force de portance est donc uniquement créée par l'inertie de l'écoulement non-perturbé et ne dépend que du coefficient de masse ajoutée  $C_M$  vérifiant en fluide parfait [cf. Introduction, relation (0.5)] :

$$C_M = 1/2$$

Le coefficient de portance  $C_{y1}$  défini par (5.5) vaut alors en fluide parfait :

$$C_{y1} = \frac{1}{2} (1 + C_M) = \frac{3}{4} \quad (5.10)$$

Il est à noter dès à présent que le résultat (0.5)  $C_M = 1/2$  n'a été démontré pour l'instant que pour un écoulement de fluide parfait. En effet, *Magnaudet et al.* (1995) ont démontré que  $C_M = 1/2$  en fluide visqueux uniquement dans le cas d'écoulements axisymétriques. Bien que l'on puisse penser que ce résultat est général, la preuve n'en a pas encore été apportée.

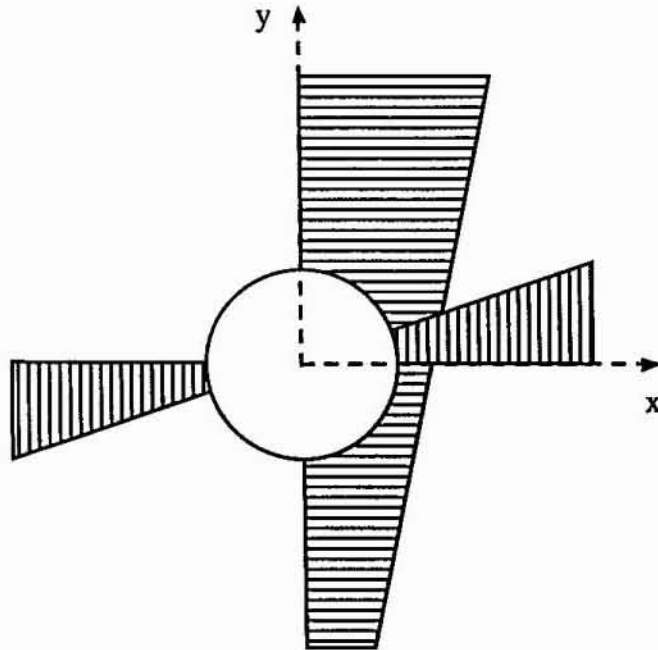


Figure 5.1 : Ecoulement de déformation pure (5.1)

### 5.2.b Solution potentielle

Soit de façon générale, un écoulement potentiel s'écrivant sous la forme :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_o(t) + \bar{\bar{\mathbf{S}}}. \mathbf{x} \quad (5.11)$$

où  $\mathbf{U}_o(t)$  est la vitesse de l'écoulement non perturbé au centre de la bulle et  $\bar{\bar{\mathbf{S}}}$  le tenseur de déformation qui vérifie nécessairement la condition  $\text{tr } \bar{\bar{\mathbf{S}}} = 0$  imposée par la continuité. Le potentiel des vitesses  $\Phi$  de l'écoulement généré par le déplacement d'une inclusion sphérique à la vitesse  $\mathbf{U}_b(t)$  dans le champ de vitesse (5.11) est [Voinov, 1973] :

$$\begin{aligned} \Phi = \mathbf{U}_o(t). \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}. \bar{\bar{\mathbf{S}}}. \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_b(t) - \mathbf{U}_o(t) - \mathbf{z}. \bar{\bar{\mathbf{S}}}). (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \left(\frac{R}{r}\right)^3 \\ + \frac{1}{3} (\mathbf{x} - \mathbf{z}). \bar{\bar{\mathbf{S}}}. (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \left(\frac{R}{r}\right)^5 \end{aligned} \quad (5.12)$$

où  $\mathbf{z}$  est la position de l'inclusion dans le repère fixe choisi. La force exercée sur l'inclusion par le champ de vitesse  $\mathbf{V}$  dérivant de ce potentiel est obtenue en intégrant à sa surface la pression déterminée à l'aide du théorème de Bernoulli :

$$\mathbf{F} = \rho \int_{\Gamma_b} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right) \mathbf{n} \, d\Gamma_b \quad (5.13)$$

Pour l'écoulement (5.1), l'intégration de (5.13) permet de montrer que la force exercée par l'écoulement potentiel non-visqueux est :

$$\mathbf{F} = \frac{3}{4} \rho \vartheta_b U \omega \mathbf{e}_y \quad (5.14)$$

On retrouve donc pour le coefficient de portance  $C_{y1}$  le résultat (5.10) obtenu à partir de l'expression générale de la force (0.7) établie par *Auton et al.* (1988) pour un écoulement non-uniforme, non-visqueux et faiblement rotationnel. La relation (5.14) montre en fait que pour l'écoulement potentiel (5.1), l'expression (5.10) du coefficient de portance  $C_{y1}$  est vérifiée quelque soit l'intensité de la déformation de l'écoulement.

D'autre part, les vitesses tangentielles dérivant du potentiel  $\Phi$  s'écrivent à la surface de la bulle :

$$\begin{aligned}
 V_{\xi} &= \frac{3}{2} U \sin \theta - \frac{5}{6} \omega R \cos 2\theta \cos \phi \\
 V_{\phi} &= \frac{5}{6} \omega R \cos \theta \sin \phi
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

La perturbation de vitesse associée  $\mathbf{v} = v_{\xi}(\theta, \phi) \mathbf{e}_{\xi} + v_{\phi}(\theta, \phi) \mathbf{e}_{\phi}$  définie au chapitre précédent par (4.41) est alors :

$$v_{\xi}(\theta, \phi) = -\frac{5}{6} \cos 2\theta \cos \phi \tag{5.16.a}$$

$$v_{\phi}(\theta, \phi) = \frac{5}{6} \cos \theta \sin \phi \tag{5.16.b}$$

On constate donc que la dépendance pour ces deux vitesses tangentielles suivant l'angle azimutal  $\phi$  est celle déjà observée au chapitre précédent.

### 5.2.c Résultats numériques

Les résultats des diverses expériences numériques concernant le coefficient de portance  $C_{y1}$  sont regroupés dans les tableaux 5.1 et 5.2. Comme dans le chapitre précédent,  $C_{y1}$  est décomposé en  $C_{y1} = C_{yp1} + C_{yv1}$  où  $C_{yp1}$  et  $C_{yv1}$  représentent respectivement les contributions de la pression et de la contrainte normale visqueuse à  $C_{y1}$ .

On constate tout d'abord pour  $C_{y1}$  un comportement d'ensemble identique à celui observé au chapitre précédent pour le coefficient de portance  $C_L$  (figure 5.2). Ainsi le coefficient de portance  $C_{y1}$  est beaucoup plus important à petit nombre de Reynolds qu'à grand nombre de Reynolds. A petit nombre de Reynolds il décroît, passe ensuite par un minimum entre  $Re = 1$  et  $Re = 10$  et tend finalement vers le résultat correspondant au fluide parfait (5.10). On retrouve aussi le fait que lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 10, le coefficient de portance est pratiquement insensible à l'intensité de la déformation de l'écoulement c'est à dire que la force de portance correspondante lui est proportionnelle. La force de portance résulte alors essentiellement de l'intégration de la pression à la surface de la bulle.

Cependant, la caractéristique essentielle des résultats obtenus est l'écart important observé entre le résultat de fluide parfait (5.10) et la valeur numérique du coefficient de portance  $C_{y1}$ , et ceci même à  $Re = 500$ . Les différentes explications possibles à ce résultat inattendu sont a priori les suivantes :



1- Le calcul numérique de cet écoulement est peu précis. Cette possibilité qui demeure la hantise première de tout numéricien n'est pas à exclure malgré les nombreux tests présentés au chapitre 1. Ainsi d'autres tests complémentaires ont été réalisés et sont présentés dans la discussion qui suit.

2- Cet écart important est dû, même à  $Re = 500$ , à la viscosité de l'écoulement réel qui modifie la distribution des vitesses tangentielles à la surface de la bulle. Cet effet a déjà été observé lorsque la bulle est placée au sein d'un cisaillement linéaire (Chapitre 4) mais la modification significative de la distribution interfaciale des vitesses ne se répercute pas, pour cet écoulement, sur le résultat de l'intégration des contraintes normales exercées sur la bulle. En effet on constate alors que la force de portance est très proche de celle calculée en fluide parfait par *Auton* (1983).

3- Le coefficient de masse ajoutée  $C_M$  n'est pas dans toutes les situations égal à 0.5. Cette hypothèse apparaît comme la plus improbable compte tenu du nombre croissant de confirmations du résultat  $C_M = 0.5$ . Nous avons cependant réalisé la simulation d'un écoulement tridimensionnel très proche de (5.1) permettant de calculer une nouvelle fois  $C_M$ .

#### 5.2.d Discussion

Afin de nous convaincre que notre outil numérique calcule bien les effets d'inertie induits par un écoulement de déformation sur une bulle sphérique, nous avons simulé l'écoulement irrotationnel suivant pour  $Re = 500$  et pour une déformation adimensionnelle  $A_\omega = 0.2$  :

$$\mathbf{U} = \left( U + \frac{1}{2} \omega x \right) \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \omega y \mathbf{e}_y \quad (5.17)$$

Cet écoulement diffère de l'écoulement (5.1) par le sens des gradients de vitesse qui le composent. De ce fait il est caractérisé par le taux de déformation :

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}$$

L'écoulement (5.17) autour d'un obstacle sphérique est tridimensionnel et les effets d'inertie appliqués sur la bulle le sont également. La force de portance subie par la bulle dans cette situation est cependant nulle et le coefficient de traînée totale  $C_x$  est composé de la traînée visqueuse classique  $C_D$  de l'écoulement stationnaire uniforme  $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x$  et du terme d'inertie causé par la masse ajoutée :

$$C_x = C_D + \frac{4}{3} A_\omega (1 + C_M) \quad , \quad C_y = 0 \quad (5.18)$$

Pour  $Re = 500$ , la résolution numérique de l'écoulement uniforme aboutit au résultat  $C_{DS} = 0.0874$ . Le résultat du calcul de l'écoulement (5.17), avec les conditions  $Re = 500$  et  $A_\omega = 0.2$ , est  $C_x = 0.4885$ . La valeur correspondante calculée pour  $C_M$  à partir de ce résultat est  $C_M = 0.504$ . Ceci confirme par conséquent la relation (0.5) avec une précision meilleure que 1% et permet d'écarter la dernière hypothèse faite ci-dessus pour expliquer les résultats obtenus avec l'écoulement (5.1).

Les résultats présentés au chapitre 4 sont, à grand nombre de Reynolds, en parfait accord avec le résultat (4.8) calculé analytiquement par *Auton* (1983). Notre outil de simulation permet par conséquent de calculer correctement l'écoulement (4.1) ( $U = (U + \omega y) e_x$ ) autour d'une bulle.

L'écoulement non-perturbé (5.1) n'est autre que la superposition de l'écoulement (4.1) et de l'écoulement défini par  $U = \omega \times e_y$ . Afin de vérifier que le code prend également correctement en compte ce type de gradient de vitesse, notamment à la traversée de l'axe singulier  $e_x$  (cf. § 1.7.5), nous avons alors simulé l'écoulement linéairement cisailé :

$$U = (U + \omega x) e_y \quad (5.19)$$

Les résultats obtenus pour cet écoulement à  $A_\omega = 0.02$  et  $Re = 500$  sont respectivement pour la traînée  $C_y = C_D = 0.0880$  et pour la portance  $C_x = C_L = 0.492$ . Ces valeurs sont donc identiques à celles obtenues au chapitre précédent (cf. Tableau 4.4) pour le même écoulement cisailé suivant l'axe  $e_x$ , la différence mesurée pour le coefficient de portance étant très faible et celle sur la traînée étant de 0.4%. Ainsi les deux écoulements (4.1) et (5.19) pris séparément permettent de retrouver à grand nombre de Reynolds le résultat (4.8) obtenu par *Auton* (1983) pour un écoulement non-visqueux.

L'ensemble des tests réalisés et notamment ceux portant sur les écoulements (5.17) et (5.19) nous conduisent à écarter le fait que les résultats obtenus pour l'écoulement (5.1) puissent être dus à un problème de résolution ou à une valeur de  $C_M$  différente de 0.5. Il ne nous reste donc plus qu'à considérer les effets de la viscosité.

Tout d'abord, l'écart observé entre les simulations numériques de l'écoulement (5.1) et le résultat correspondant au fluide parfait aurait pu provenir d'un calcul imprécis des effets réels à l'intérieur même de la couche limite visqueuse. Afin d'éliminer cette possibilité, deux simulations dans des conditions identiques ont été réalisées avec des maillages différents. La différence entre les deux maillages concerne l'épaisseur  $\Delta\eta$  de la première maille au dessus de

la bulle. De plus, ces deux maillages ainsi que tous ceux utilisés dans l'ensemble de cette étude sont construits en s'assurant que pour les nombres de Reynolds élevés la couche limite visqueuse dont l'épaisseur  $\delta$  est estimée par  $\delta/R \equiv Re^{-1/2}$  est décrite par au moins cinq noeuds de pression. Les résultats obtenus à  $Re = 500$  et  $A_\omega = 0.05$  pour les maillages correspondant à  $\Delta\eta = 0.01 R$  et  $\Delta\eta = 0.005 R$  sont identiques à la modification de la précision  $O(\Delta\eta^2)$  près.

Le résultat analytique (5.10) donnant le coefficient de portance est en fait la solution des équations d'Euler pour l'écoulement (5.1). La résolution de ces équations est possible, bien que délicate, avec notre outil numérique en choisissant une viscosité de l'écoulement infiniment faible c'est à dire en pratique de l'ordre de grandeur de la précision de la machine ( $Re = 10^{+16}$ ). Le résultat obtenu pour  $A_\omega = 0.05$  est dans ces conditions  $C_{y1} = 0.737$  et correspond alors à celui donné par la relation (5.10) avec une erreur de 1.7%.

L'effet mesuré dans les expériences numériques concernant l'écoulement (5.1) semble donc bien être lié à la viscosité et à la différence qu'elle induit entre l'écoulement réel et l'écoulement de fluide parfait. Ceci est confirmé par les simulations numériques réalisées pour  $A_\omega = 0.05$  et différents nombres de Reynolds supérieurs à 100 (tableau 5.3). Ces simulations ne sont bien entendu pas représentatives des situations réelles notamment concernant la forme sphérique de la bulle pour des nombres de Reynolds supérieurs à  $Re = 500$ . Elles permettent cependant de montrer que lorsque le nombre de Reynolds augmente, c'est à dire lorsque l'effet de la viscosité diminue, le coefficient de portance  $C_{y1}$  tend vers celui prédit par la théorie de fluide parfait ( $C_{y1} = 0.75$ ).

Re	100	500	1000	5000	$\infty$
$C_{y1}$	0.534	0.624	0.649	0.693	0.737

Tableau 5.3 : Valeurs de  $C_{y1}$  à très grand nombre de Reynolds pour  $A_\omega = 0.05$

Ainsi il apparaît clairement que l'écart trouvé entre les résultats numériques et la théorie de fluide parfait est directement lié à l'existence de la viscosité. Celle-ci se manifeste pour l'écoulement réel autour d'une bulle par la création d'une vorticité  $\Omega_b$  d'ordre  $U/R$  dont l'effet est contenu dans une couche limite visqueuse dont l'épaisseur adimensionnelle en écoulement uniforme est  $Re^{-1/2}$  [Moore, 1963]. La génération de la vorticité  $\Omega_b$  résulte de la condition limite de cisaillement nul (1.34) que doit vérifier l'écoulement réel à la surface de la bulle. Pour  $Re \rightarrow \infty$ , cette correction de vorticité  $\Omega_b$  s'écrit à la surface de la bulle pour l'écoulement (5.1) :

$$\Omega_b = -\frac{5}{3}\omega \cos\theta \sin\phi \mathbf{e}_\xi + \left(3\frac{U}{R}\sin\theta - \frac{5}{3}\omega \cos 2\theta \cos\phi\right) \mathbf{e}_\phi \quad (5.20)$$

Afin d'apprécier l'effet réel de la vorticité interfaciale  $\Omega_b$ , un calcul numérique a été réalisé en imposant comme condition à la surface de la bulle la nullité de la vorticité. Pour notre code de simulation, cette condition  $\Omega_b = \mathbf{0}$  n'est pas naturelle et n'est pas imposée telle quelle à la surface de l'inclusion car les équations sont exprimées en variables primitives vitesse-pressure (cf. Chapitre 1). La condition  $\Omega_b = \mathbf{0}$  est malgré tout prise en compte en modifiant la manière dont sont extrapolées les vitesses tangentielles à la surface de la bulle. Avec cette condition, le résultat obtenu à  $Re = 500$  et  $A_\omega = 0.05$  est  $C_{y1} = 0.706$ . Celui-ci ne correspond pas parfaitement au résultat (5.10) car la nullité de la vorticité à l'interface n'a pu être complètement assurée. Il est cependant beaucoup plus proche de (5.10) que les résultats numériques obtenus pour  $C_{y1}$  à  $Re = 500$  (cf. § 5.2.c) et il approche à 4% près le résultat  $C_{y1} = 0.737$  obtenu en résolvant uniquement l'équation d'Euler.

### 5.2.e Analyse et synthèse

Il apparaît donc maintenant de manière certaine que l'écart observé pour  $C_{y1}$  entre le résultat (5.10) et les résultats numériques (tableau 5.1) est la conséquence de l'existence de la vorticité  $\Omega_b$  à la surface de la bulle. C'est en fait la simulation à  $Re = 1$  et un retour sur la partie analytique du chapitre 4 qui vont nous fournir l'explication du phénomène. En effet, pour  $Re = 1$ , l'écart  $C_{y1} - 1/2(1 + C_M)$  est considérable puisqu'il atteint 0.63. On est donc tenté d'examiner le comportement asymptotique des termes d'inertie de l'écoulement pour  $Re \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} &= (\mathbf{U} + \mathbf{v}) \cdot \nabla (\mathbf{U} + \mathbf{v}) \\ &\approx \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + \left( \mathbf{U} + \frac{1}{2} \omega \mathbf{y} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{1}{2} \omega x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \omega (v_y \mathbf{e}_x + v_x \mathbf{e}_y) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Si l'on compare ce terme avec le terme advectif de l'équation (4.23.b) du développement extérieur de *Mc Laughlin* (1991), on constate une structure analogue à ceci près qu'il apparaît maintenant un terme supplémentaire  $1/2\omega(v_x \mathbf{e}_y + x \partial \mathbf{v} / \partial y)$  provenant des gradients de la vitesse verticale. On imagine donc sans difficulté que s'il on reprenait le calcul de la solution externe de *Saffman* (1965) ou *Mac Laughlin* (1991), on trouverait ici aussi  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_y \neq 0$  (cf. équation 4.18). Le raccordement avec la solution intérieure et l'expression de celle-ci à l'ordre dominant étant identiques, un tel calcul conduirait sans nul doute à l'apparition d'une force de portance. Ainsi, l'effet visqueux que nous observons dans l'écoulement (5.1) est à l'évidence

de même nature que la force de portance mise en évidence par *Saffman* (1965). C'est d'ailleurs ce qui ressort de l'étude de *Drew* (1978) qui, à petit nombre de Reynolds, a généralisé l'étude de *Saffman* (1965) au cas d'un écoulement de déformation pure et a bien mis en évidence l'existence d'une force de portance. Ceci nous amène à nous poser deux questions portant l'une sur l'expression générale de la force calculée en écoulement de cisaillement pur par *Saffman* et l'autre sur son origine profonde.

Nous avons mis systématiquement dans le chapitre 4 la force de portance sous la forme :

$$\mathbf{F}_L = C_L \rho \partial_b (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \times \Omega \quad (5.22)$$

Puisque nous venons de faire le lien entre la force "supplémentaire" que nous observons en écoulement de déformation pure et la force mise en évidence par *Saffman*, il est clair que cette dernière n'est généralement pas de la forme (5.22) puisqu'elle serait alors nulle dans l'écoulement (5.1). On est donc amené à penser que cette force, que nous appellerons désormais "*force de Saffman*" et noterons  $\mathbf{F}_S$ , s'écrit dans le cas général  $F_{Si} \propto \partial U_j / \partial x_i U_j$  ou  $F_{Si} \propto S_{ji} U_j$ . Ceci sera tranché plus loin dans ce chapitre. C'est donc par pure coïncidence que  $\mathbf{F}_S$  peut être mise sous la forme (5.22) en écoulement de cisaillement pur, la vorticité, le gradient de vitesse et le taux de déformation étant alors identiques à un facteur près.

Venons en maintenant à la seconde question. Les tests que nous avons menés ci-dessus ont démontré que la contribution "supplémentaire"   la portance provient de la vorticité générée à la surface de la bulle. Peut-on dire qu'il en est de même dans la force de Saffman et dans l'affirmative comment cela se traduit-il? Pour répondre à cette question, commençons par rappeler, que dans l'écoulement de Stokes de champ de vitesse uniforme  $\mathbf{U}_\infty$  autour d'une inclusion sphérique, la vorticité s'écrit  $\Omega = 2B/r^2 U_\infty \sin \theta \mathbf{e}_\phi$  tandis que la force de traînée s'exprime par  $\mathbf{F}_{St} = -8\pi\mu B \mathbf{U}_\infty$  ( $B = -R/2$  pour une bulle sphérique et  $B = -3R/4$  pour une sphère solide). Ainsi on voit qu'il existe un lien direct entre l'intensité de la vorticité à la surface de l'inclusion et la force de traînée. Par ailleurs en discutant le développement extérieur (4.23) nous avons vu que l'intensité du vecteur  $\mathbf{C}$  qui assure le raccordement des deux développements est proportionnel à  $F_{St}$ . La force de Saffman peut alors se mettre sous la forme :

$$F_{Si} \propto \frac{R}{(\omega v)^{1/2}} F_{Sij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (5.23)$$

La nature de la force de Saffman s'éclaire donc. Elle résulte du transport, par *les gradients de vitesse* de l'écoulement non-perturbé, de *la vorticité générée* par la condition de non-



glissement ou de cisaillement nul à la surface de l'inclusion. Elle n'a donc strictement rien à voir au plan physique avec la force de portance mise en évidence par Auton (1983) qui est le résultat de la distorsion de la vorticité de l'écoulement non-perturbé lors de son advection autour de l'inclusion. A la lumière de cette analyse, on peut récrire les résultats du chapitre 4 sous la forme d'une "force d'Auton" (ou "force de Lighthill")  $F_A$  et d'une "force de Saffman"  $F_S$  :

$$F_L = F_A + F_S \quad (5.24)$$

où la force d'Auton est  $F_A = C_A \rho \vartheta_b (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \times \Omega$ . Nous supposons dans un premier temps pour simplifier la discussion qui suit que  $C_A$  est constant et égal à 1/2. On voit alors (figure 4.4), en étant à  $C_L$  la valeur  $C_A = 1/2$ , que  $F_S$  est positive pour  $Re \rightarrow 0$ , devient rapidement négative pour tendre finalement asymptotiquement vers 0 quand  $Re \rightarrow \infty$ .

Revenons maintenant à l'écoulement (5.1). Le coefficient de portance total exercé sur la bulle pour cet écoulement peut donc être écrit sous la forme :

$$C_{y1} = \frac{1}{2}(1 + C_M) + C_{yS1} \quad (5.25)$$

Les valeurs numériques calculées pour  $C_{yS1}$  sont regroupées dans le tableau 5.4. On constate qu'à grand nombre de Reynolds  $C_{yS1}$  est décrit avec une excellente précision par la relation empirique (5.26) pour les déformations modérées de l'écoulement (figure 5.3) :

$$C_{yS1} = \frac{-1.0}{Re^{1/3}} \quad (5.26)$$

Ceci montre qu'à grand nombre de Reynolds la force de Saffman ne se comporte pas de la même façon en écoulement de déformation pure et en écoulement de cisaillement pur où elle est rapidement négligeable. On note que l'effet de cette force n'intervient à grand nombre de Reynolds que par l'intermédiaire de la pression, la contribution de la contrainte normale  $C_{yv1}$  au coefficient de portance  $C_{y1}$  étant négligeable (tableau 5.1).

Par ailleurs un point reste encore inexplicé : pourquoi la force de Saffman apparaît-elle dans l'écoulement (5.1) où la déformation n'est pas alignée avec l'écoulement moyen et non dans l'écoulement (5.17) où les deux sont colinéaires et où nous ne la retrouvons pas suivant l'axe  $e_x$ ? La réponse à cette question nécessite sans doute la résolution du développement extérieur analogue de (4.23) pour le cas d'une déformation quelconque. Nous ne l'avons pas entrepris pour l'instant car il apparaît beaucoup plus complexe que dans le cas cisailé puisque

l'on passe dans le plan de Fourier d'une équation différentielle à une équation aux dérivées partielles.

### 5.2.f Description de l'écoulement

Cet effet de la viscosité de l'écoulement réel est également mis en évidence en comparant la perturbation de vitesse tangentielle  $\mathbf{v} = v_\xi(\theta, \phi) \mathbf{e}_\xi + v_\phi(\theta, \phi) \mathbf{e}_\phi$  avec la solution (5.16) de l'écoulement potentiel. Tout d'abord, les résultats numériques obtenus montrent que, comme au chapitre précédent, elle peut s'écrire sous la forme :

$$v_\xi = v_\xi(\theta, \phi = 0) \cos\phi \mathbf{e}_\xi \quad (5.27)$$

$$v_\phi = v_\phi(\theta, \phi = \pi/2) \sin\phi \mathbf{e}_\phi \quad (5.28)$$

Cette décomposition de la vitesse tangentielle reste vérifiée à  $Re = 1$  (figure 5.4) alors que ce n'est pas le cas pour l'écoulement cisailé étudié au chapitre précédent. Ceci explique l'écart plus réduit à  $Re = 1$ , concernant  $C_{y1}$ , entre les déformations  $A_\omega = 0.02$  et  $A_\omega = 0.2$  (tableau 5.3) comparé à celui observé pour  $C_L$  (tableau 4.3). On constate que la dépendance (5.27)-(5.28) en fonction de l'angle azimutal  $\phi$  est la même que celle de l'écoulement potentiel (5.16).

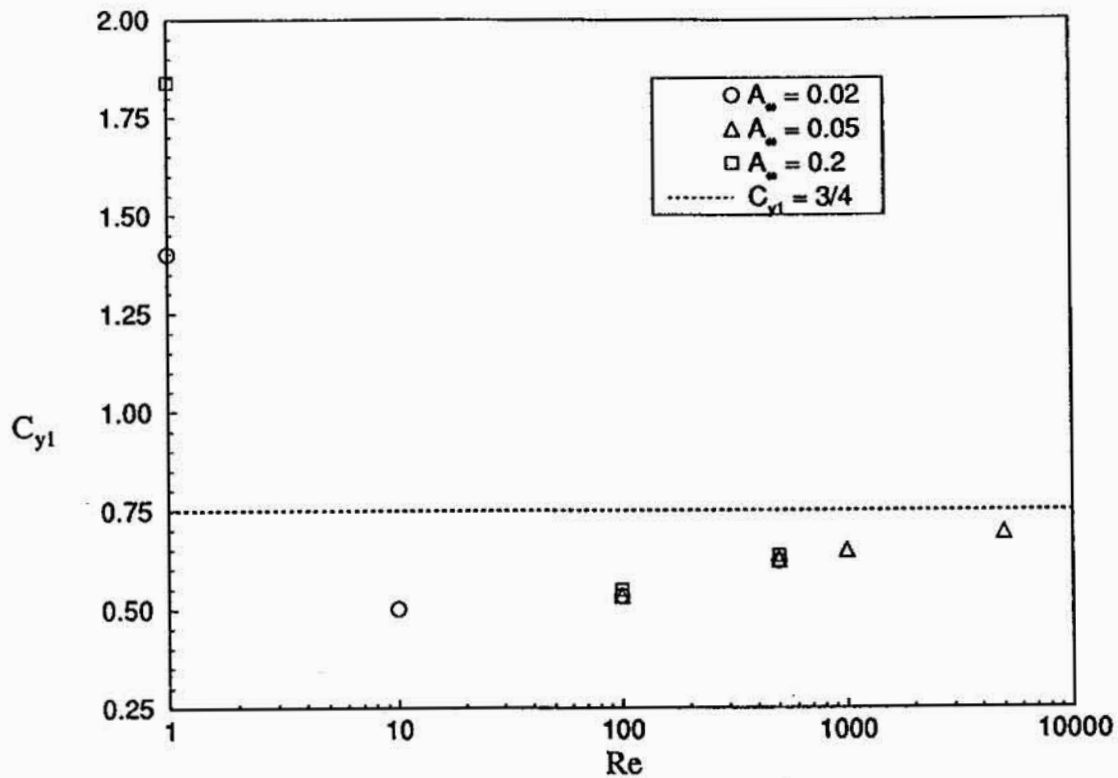
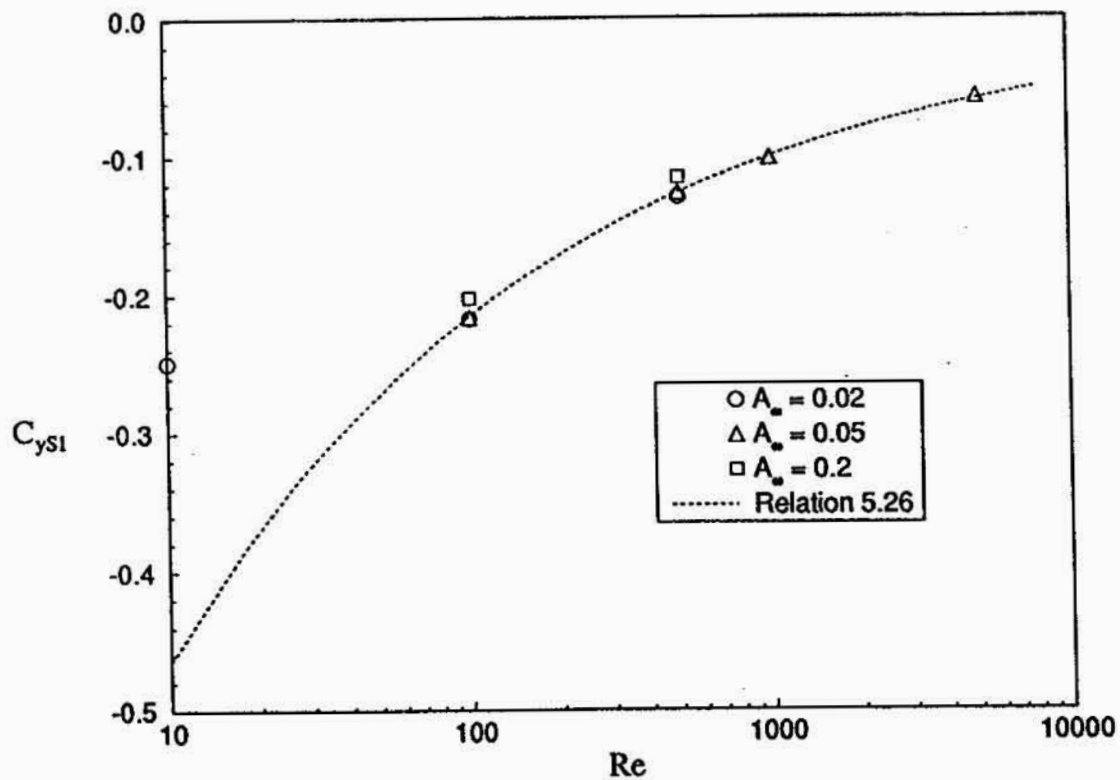
On constate également une influence nette de la viscosité sur les vitesses tangentielles  $v_\phi(\theta, \phi = \pi/2)$  et  $v_\xi(\theta, \phi = 0)$  (figures 5.5 et 5.6) dont les amplitudes sont comparables à celles observées au chapitre 4. Cependant, l'effet pour cet écoulement est différent de celui observé pour l'écoulement cisailé (4.1) (chapitre 4, figures 4.18 et 4.19) et cette différence permet de comprendre pourquoi il existe un écart à  $Re = 500$  entre  $C_{y1}$  et le coefficient de portance calculé pour l'écoulement non-visqueux alors que ce n'est pas le cas pour  $C_L$ . Pour cela, notons que les calculs analytiques de la force de portance créée par l'écoulement (4.1) et par l'écoulement potentiel (5.1) montrent que pratiquement toute la contribution de la pression à la force de portance provient en fait du secteur angulaire  $65^\circ < \theta < 135^\circ$  et résulte de l'intégration de la partie du terme  $-1/2\rho V^2$  correspondant au produit des deux composantes de la vitesse tangentielle  $-1/2\rho \omega R V_{U\xi}(\theta) v_\xi(\theta, \phi)$ . Comparons maintenant les distributions de ces deux composantes tangentielles pour les écoulements (4.1) et (5.1) sur cette partie de la surface de la bulle. Pour l'écoulement (5.1), la composante  $v_\xi(\theta, \phi)$  a une amplitude diminuée par rapport à celle de l'écoulement de fluide parfait (figure 5.5) alors que pour l'écoulement cisailé (4.1) on observe une augmentation du module de cette composante tangentielle (figure 4.18). Le coefficient de portance  $C_L$  est inchangé car, à la surface de la bulle, la diminution de l'intensité

de  $V_{U\xi}(\theta)$  de l'écoulement réel (chapitre 4, figure 4.15) est compensée par l'augmentation de  $v_{\xi}(\theta, \phi)$  alors que la valeur prise par  $C_{y1}$  résulte du cumul des diminutions de  $V_{U\xi}(\theta)$  et de  $v_{\xi}(\theta, \phi)$ . L'ordre de grandeur de l'écart entre  $C_{y1}$  et le résultat potentiel (5.10) se retrouve quantitativement en constatant à  $Re = 500$  que les écarts à la solution de fluide parfait sont tous d'environ 10% pour  $65^\circ < \theta < 135^\circ$ . Ainsi, pour l'écoulement cisailé, le résultat de l'intégration en fluide parfait est pondéré par  $0.9 \times 1.1 \cong 1.0$ , alors que pour l'écoulement de déformation (5.1) il l'est par  $0.9 \times 0.9 \cong 0.81$  ce qui correspond grossièrement aux résultats numériques obtenus ( $0.621/0.75 \cong 0.83$ ).

La distribution de la vitesse tangentielle  $v_{\phi}(\theta, \phi)$  à la surface de la bulle est pour les différents nombres de Reynolds étudiés de forme assez proche de celle correspondant à l'écoulement potentiel (figure 5.7). On constate que, comme pour l'écoulement cisailé, la vitesse tangentielle  $v_{\phi}(\theta, \phi)$  est pratiquement antisymétrique par rapport à l'angle  $\theta = \pi/2$  à grand et à petit nombre de Reynolds. Par contre, pour les nombres de Reynolds intermédiaires, la distribution de  $v_{\phi}(\theta, \phi)$  n'est plus antisymétrique, traduisant ainsi l'influence des effets rotationnels. Ce résultat apparaît également, mais de façon moins évidente, sur le tracé de  $v_{\phi}(\theta, \phi = \pi/2)$  (figure 5.6) qui permet d'illustrer plus nettement la diminution de l'intensité de  $v_{\phi}(\theta, \phi)$  avec la viscosité de l'écoulement.

La structure de l'écoulement autour de la bulle est également comparable à celle observée pour l'écoulement cisailé (4.1). La perturbation de vitesse créée par la bulle est très diffusée à  $Re = 1$  (figure 5.8) alors que le retour du fluide se fait au voisinage de la bulle à  $Re = 500$  (figure 5.9). Le sillage est également plus réduit pour la déformation  $A_{\omega} = 0.2$  qu'il ne l'est en écoulement uniforme correspondant à  $A_{\omega} = 0$ . On décèle assez nettement l'influence de la déformation de l'écoulement qui tend à enrouler le sillage derrière la bulle.



Figure 5.2 : Coefficient de portance  $C_{y1}$ Figure 5.3 : Coefficient de portance  $C_{yS1}$

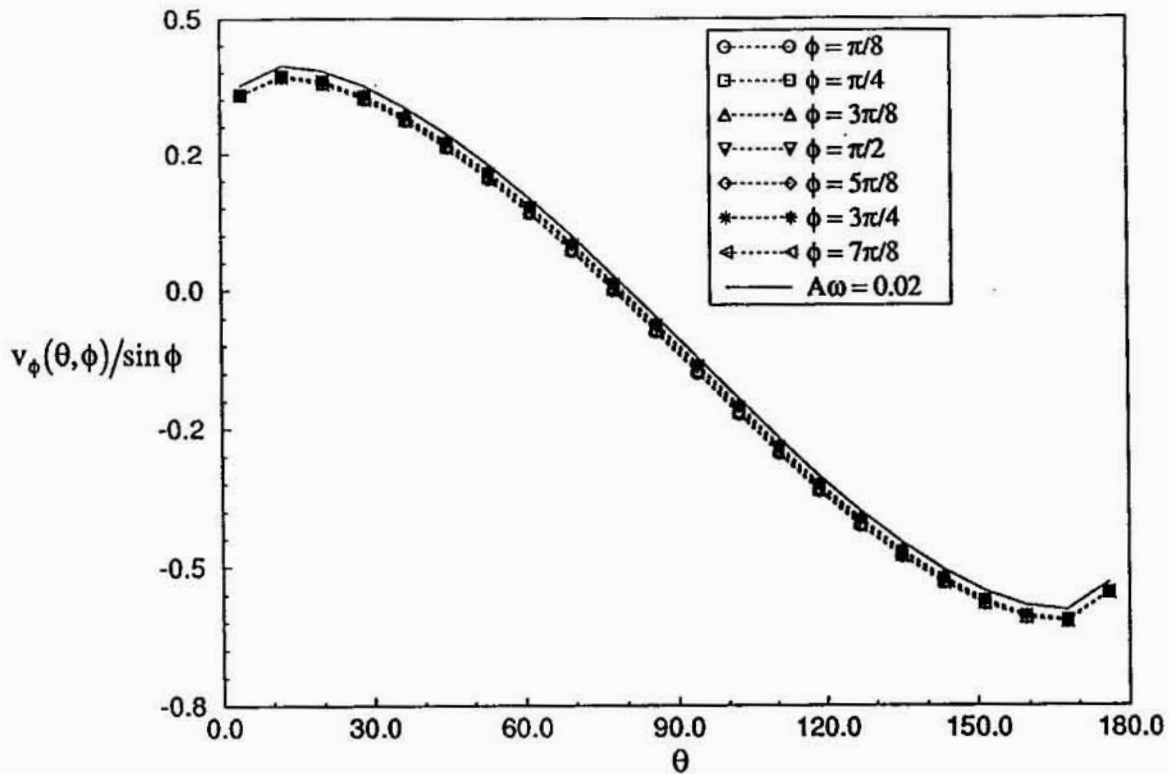


Figure 5.4 : Distribution de  $v_\phi(\theta, \phi)/\sin \phi$  à  $Re = 1$  et  $A_\omega = 0.02$

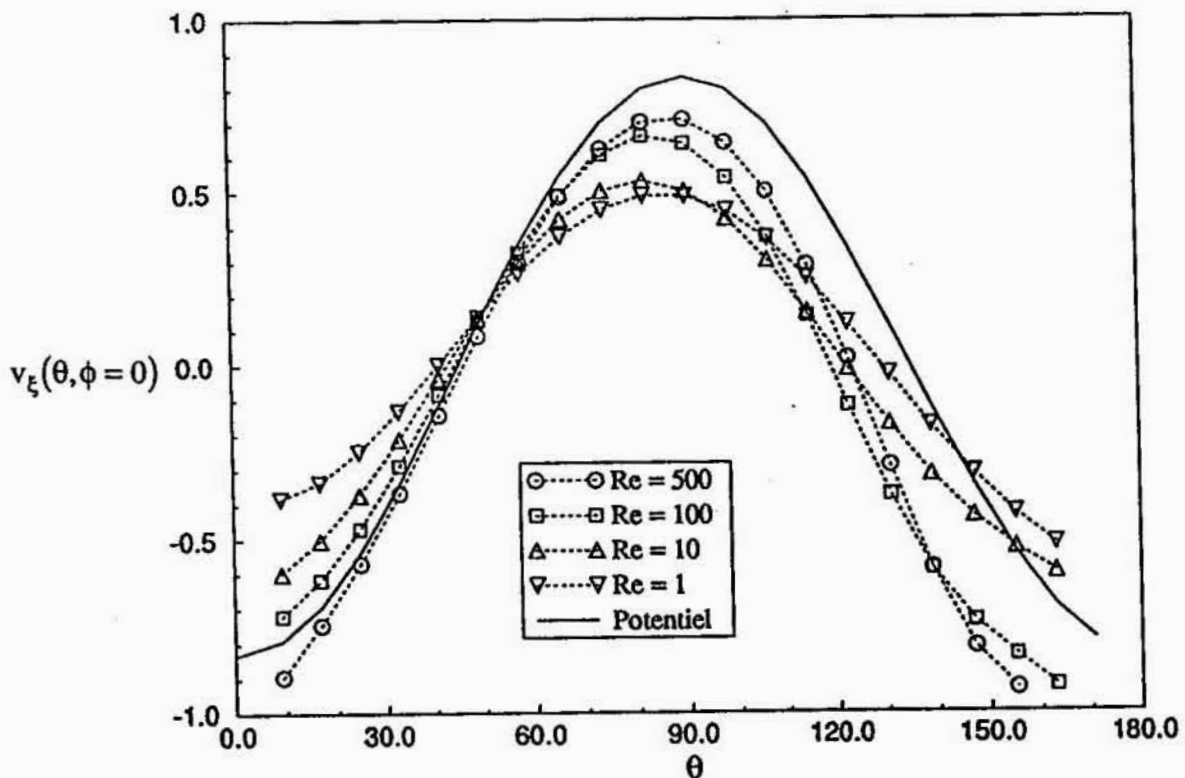


Figure 5.5 : Distribution de  $v_\xi(\theta, \phi = 0)$  à  $A_\omega = 0.02$

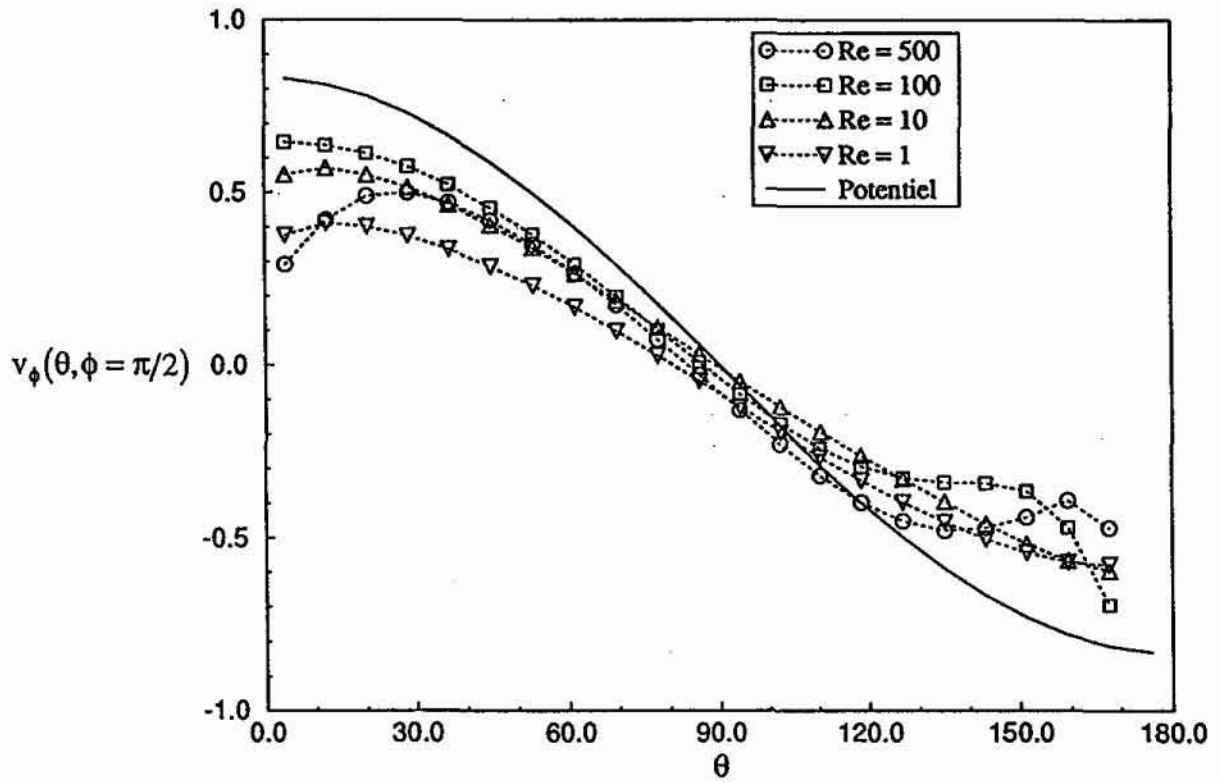
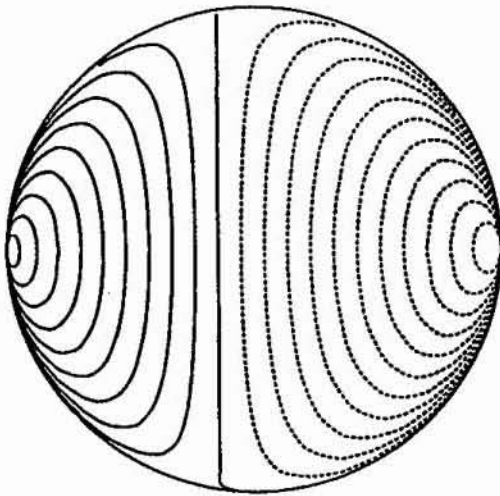
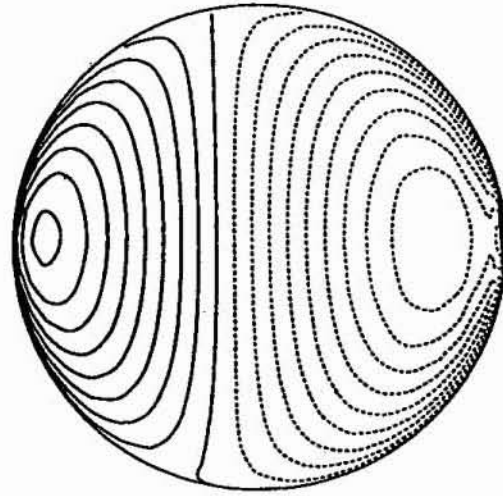
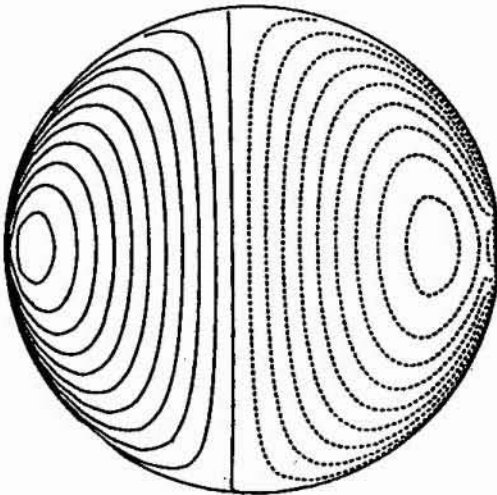
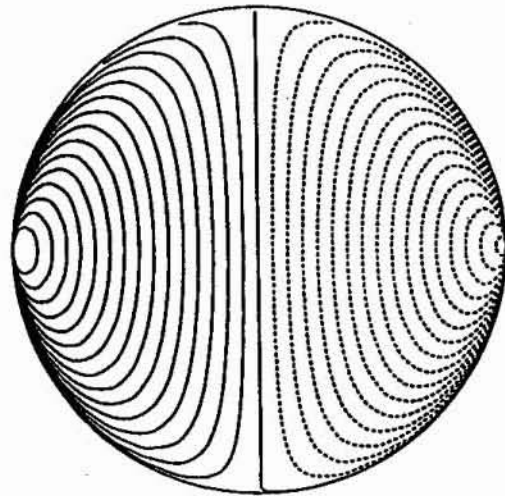


Figure 5.6 : Distribution de  $v_\phi(\theta, \phi = \pi/2)$  à  $A_\omega = 0.02$

(a)  $Re = 1$ (b)  $Re = 100$ (c)  $Re = 500$ 

(d) Ecoulement potentiel

Figure 5.7 : Composante tangentielle  $v_\phi(\theta, \phi)$  à  $A_\omega = 0.02$

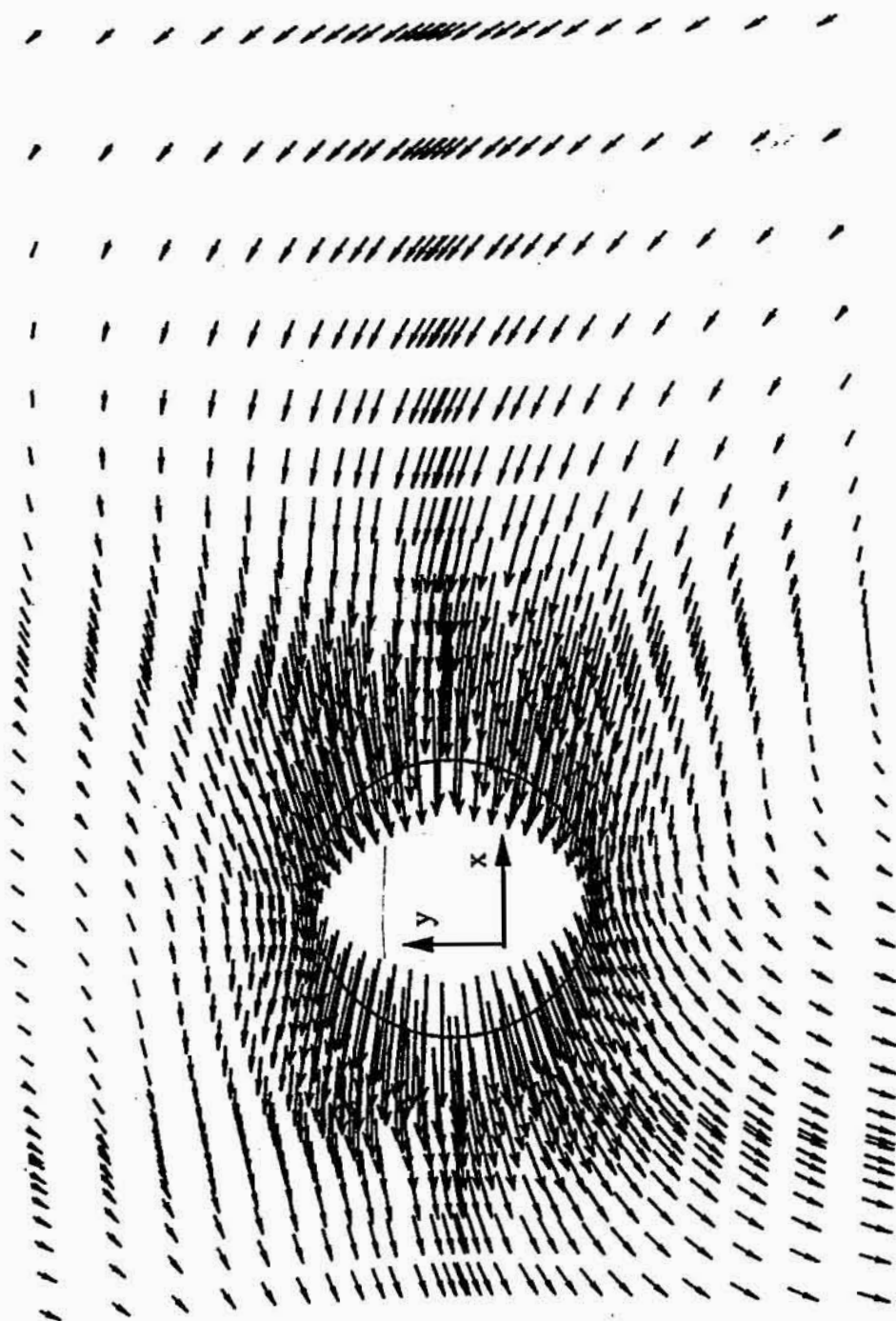


Figure 5.8 : Ecoulement dans le plan  $(e_x, e_y)$  à  $Re = 1$  et  $A_\omega = 0.2$

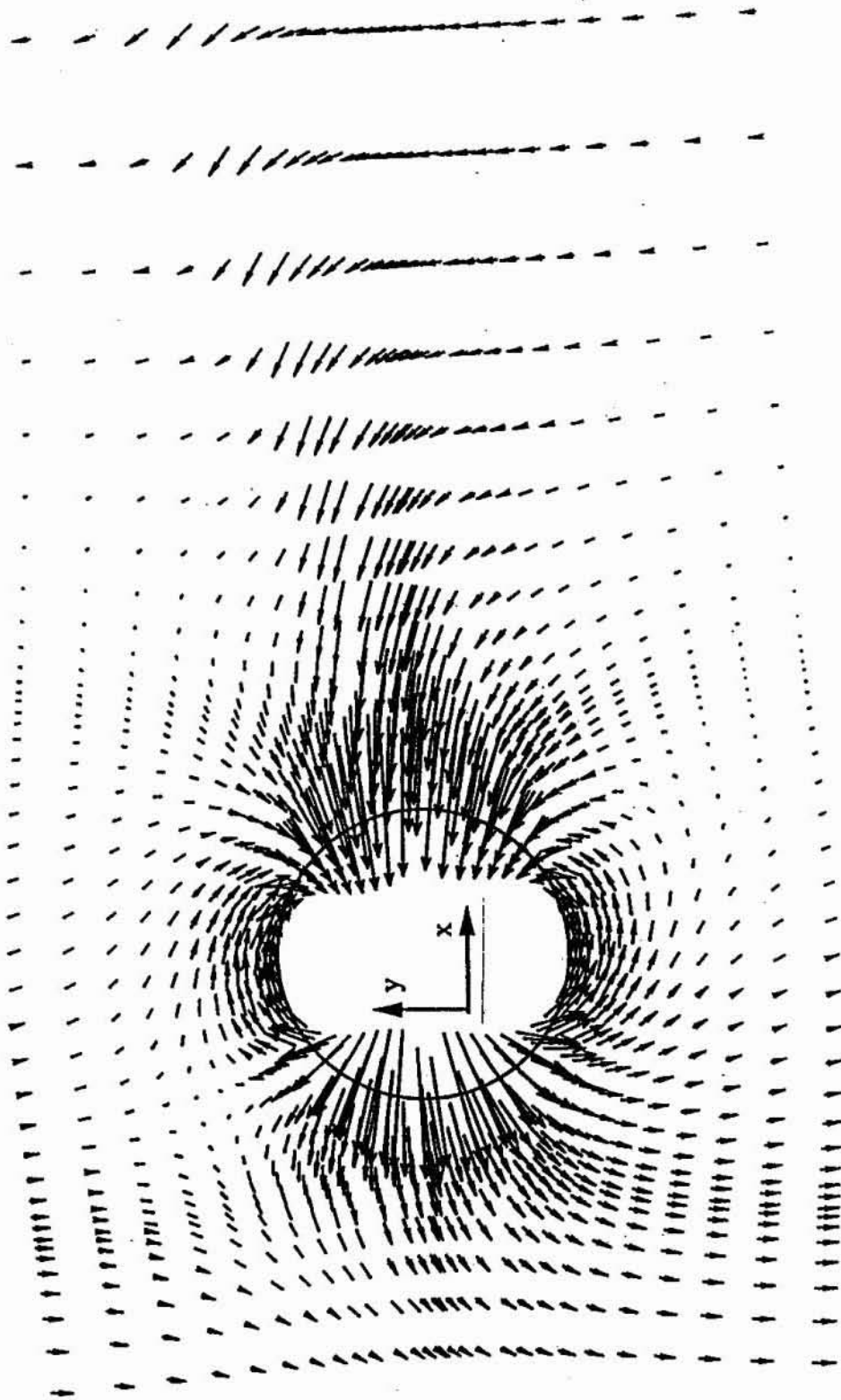


Figure 5.9 : Ecoulement dans le plan  $(e_x, e_y)$  à  $Re = 500$  et  $A_\omega = 0.2$

$A_\omega$	0.02	0.05	0.2	0.4
$C_{y1}$	0.621	0.624	0.635	0.652

Tableau 5.1 : Coefficient de portance  $C_{y1}$  à  $Re = 500$ 

Re	$A_\omega = 0.02$			$A_\omega = 0.2$		
	$C_{ypl}$	$C_{yvl}$	$C_{y1}$	$C_{ypl}$	$C_{yvl}$	$C_{y1}$
1	0.768	0.612	<b>1.380</b>	0.932	0.920	<b>1.85</b>
10	0.467	0.034	<b>0.501</b>			
100	0.528	0.0048	<b>0.533</b>	0.543	0.0050	<b>0.548</b>
500	0.620	0.0015	<b>0.621</b>	0.634	0.0011	<b>0.635</b>

Tableau 5.2 : Coefficient de portance  $C_{y1}$  à  $A_\omega = 0.02$  et  $A_\omega = 0.2$ 

Re	$A_\omega = 0.02$	$A_\omega = 0.05$	$A_\omega = 0.2$
1	0.63		1.09
10	-0.249		
100	-0.217	-0.216	-0.202
500	-0.129	-0.126	-0.115
1000		-0.101	
5000		-0.057	

Tableau 5.4 : Coefficient  $C_{yS1}$  de la force de *Saffman*

### 5.3 Force de portance en écoulement de rotation pure

#### 5.3.a Présentation de l'écoulement

Cette deuxième partie est consacrée à l'étude de la force exercée sur une bulle sphérique par l'écoulement de rotation pure (figure 5.10) dont le champ de vitesse non-perturbé (5.2) s'écrit :

$$\mathbf{U} = \left( U + \frac{1}{2} \omega y \right) \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \omega x \mathbf{e}_y$$

La vorticité  $\Omega$  et le tenseur de déformation  $\bar{\mathbf{S}}$  sont respectivement pour cet écoulement :

$$\Omega = -\omega \mathbf{e}_z \quad (5.29.a)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (5.29.b)$$

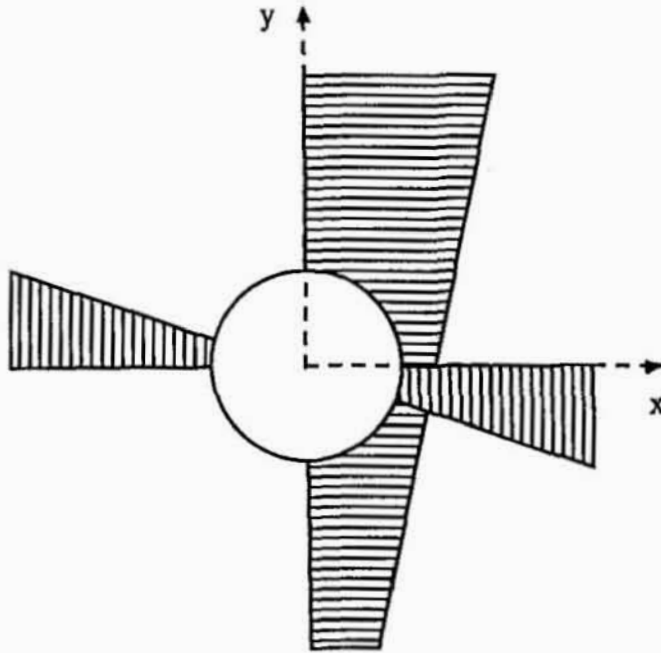


Figure 5.10 : Ecoulement de rotation pure (5.2)



L'expression (5.0) de la résultante  $\mathbf{F}$  des forces exercées par l'écoulement (5.2) sur la bulle prend la forme :

$$\mathbf{F} = C_D \pi R^2 \frac{1}{2} \rho U^2 \mathbf{e}_x + \left[ -\frac{1}{2}(1+C_M) + C_L \right] \rho \vartheta_b U \omega \mathbf{e}_y \quad (5.30)$$

La force de portance est donc induite par l'inertie de l'écoulement non-perturbé et par sa vorticité. Le coefficient de portance  $C_{y2}$  défini par (5.5) est alors déduit de (5.30) :

$$C_{y2} = -\frac{1}{2}(1+C_M) + C_L \quad (5.31)$$

Avec  $C_M = C_L = 1/2$ , on obtient donc  $C_{y2} = -1/4$ . Ce résultat étonne toujours car il montre que, en fluide parfait, pour un écoulement de cisaillement pur où  $C_y = C_L = 1/2$  (chapitre 4) et un écoulement de rotation pure dans lesquels la vorticité a la même intensité, les forces de portance sont de sens opposé. L'expression (5.31) correspond au coefficient de portance trouvé en fluide non-visqueux pour un écoulement stationnaire et faiblement rotationnel. Pour un fluide réel, le coefficient de portance  $C_L$  correspond en fait aux résultats du chapitre 4 et le terme  $(1+C_M)/2$  correspond au coefficient  $C_{y1}$  calculé au paragraphe 5.2 et résultant à la fois de l'inertie de l'écoulement et de la vorticité générée à la surface de la bulle. Par conséquent, pour un écoulement de fluide visqueux, si une superposition de type (5.31)  tait possible, le coefficient de portance  $C_{y2}$  correspondant à la force exercée sur la bulle devrait s'écrire :

$$C_{y2} = -C_{y1} + C_L \quad (5.32)$$

Le principal objectif des travaux présentés dans ce chapitre est d'étudier la possibilité d'une telle superposition des différentes contributions à la force de portance déjà mises en évidence en écoulement visqueux (chapitre 4 et paragraphe 5.2). Pour cela les valeurs numériques du coefficient  $C_{y2}$  sont comparées à celles obtenues en utilisant la relation (5.32)   l'aide des résultats numériques obtenus pour  $C_{y1}$  et  $C_L$ .

### 5.3.b Résultats numériques et discussion

Les résultats numériques concernant le coefficient de portance  $C_{y2}$  sont regroupés dans les tableaux 5.5 et 5.6. Comme précédemment, le coefficient de portance  $C_{y2}$  est décomposé en  $C_{y2} = C_{yp2} + C_{yv2}$  où  $C_{yp2}$  et  $C_{yv2}$  représentent respectivement les contributions de la pression et de la contrainte normale visqueuse.  $C_{y2}$  est comparé au coefficient de portance donné par la

relation (5.32) où  $C_L$  et  $C_{y1}$  sont les résultats numériques obtenus dans les mêmes conditions d'écoulement et respectivement présentés au chapitre 4 (tableau 4.2) et au paragraphe 5.2 (tableau 5.2).

On constate (figure 5.11) que le coefficient de portance  $C_{y2}$  vérifie très bien la relation (5.32) quelque soit le nombre de Reynolds. Les contributions respectives de la pression et de la contrainte normale visqueuse à  $C_{y2}$  correspondent également à la superposition des contributions respectives de  $C_L$  et  $C_{y1}$ .  $C_{y2}$  ne vérifie pas par conséquent le résultat  $C_{y2} = -0.25$  prédit pour l'écoulement de fluide parfait même à grand nombre de Reynolds. De plus, toujours à grand nombre de Reynolds et en appliquant la superposition (5.32), l'effet de la vorticité interfaciale responsable de cette différence est entièrement contenu dans le coefficient  $C_{y1}$ , c'est à dire décrite par le coefficient de portance  $C_{y1}$ . Le fait que la force de Saffman  $F_S$  ne soit pas nulle dans le présent écoulement permet de préciser son expression. En effet, cet écoulement vérifie  $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{0}}$  et on ne peut donc pas écrire uniquement la force  $F_S$  sous la forme  $F_{Si} \propto S_{ji} U_j$ , de même que l'on ne pouvait pas écrire le résultat du paragraphe (5.1) sous la forme  $F_{Si} \propto \Omega_{ji} U_j$  ( $\bar{\bar{\Omega}}$  désignant le taux de rotation). On pourrait alors être tenté de proposer l'expression  $F_{Si} \propto (\nabla U)_{ji} U_j$ . Cependant, celle-ci conduirait à petit nombre de Reynolds à une force positive aussi bien dans l'écoulement (5.1) que dans l'écoulement (5.2). Or la force de Saffman  $F_S$  est positive dans le premier cas et négative dans le second. On est donc amené à conclure que la véritable expression pour  $F_S$  est de la forme  $F_{Si} = \alpha S_{ji} U_j + \beta \Omega_{ji} U_j$ . On peut même préciser un peu plus cette expression dans la limite  $Re \rightarrow 0$ . En effet, on doit alors retrouver la forme de l'expression (4.35) déterminée analytiquement. On peut donc en conclure que la force de Saffman  $F_S$  peut être alors écrite sous la forme :

$$F_S = \rho \vartheta_b \frac{v^{1/2}}{R} \left[ \alpha_{sd} \frac{U \cdot \bar{\bar{S}}}{(2\bar{\bar{S}}:\bar{\bar{S}})^{1/4}} + \alpha_{sr} \frac{U \cdot \bar{\bar{\Omega}}}{(2\bar{\bar{\Omega}}:\bar{\bar{\Omega}})^{1/4}} \right] \quad (5.33)$$

où le symbole  $\cdot$  représente le produit contracté. Notons que l'expression (5.33) qui résulte de l'analyse des résultats de nos simulations contredit le développement analytique de *Drew* (1978) qui prédit que la force de portance est nulle en écoulement de rotation pure pour  $Re \ll 1$ . La raison de cette discordance nous paraît provenir du fait que *Drew* base sa résolution du développement extérieur sur un terme advectif approximé par  $1/2 \omega (y e_x + x e_y)$  c'est à dire que la composante correspondant à l'écoulement uniforme  $U e_x$  n'est pas prise en compte [cf. expressions (4.23.b) et (4.27) différenciant respectivement les hypothèses de *Mc Laughlin* (1991) et *Saffman* (1965) dans le cas d'un cisaillement pur].

Revenons à la forme (5.33) à laquelle conduisent nos simulations. Il est intéressant d'écrire  $\mathbf{F}_S$  sous la forme (5.34) pour préciser les contributions respectives de la déformation et de la rotation à partir des écoulements (5.1) et (5.2) étudiés dans ce chapitre.

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_{Sd} + \mathbf{F}_{Sr} \quad (5.34.a)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Sd} &= 2 \rho \vartheta_b C_{Sd} \left( \left[ \frac{\nu}{4R^2 (2\overline{\mathbf{S}}:\overline{\mathbf{S}})^{1/4}} \right]^{1/2}, Re \right) \mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{S}} = \rho \vartheta_b C_{yS1} \omega U \mathbf{e}_y \\ \mathbf{F}_{Sr} &= 2 \rho \vartheta_b C_{Sr} \left( \left[ \frac{\nu}{4R^2 (2\overline{\mathbf{\Omega}}:\overline{\mathbf{\Omega}})^{1/4}} \right]^{1/2}, Re \right) \mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{\Omega}} = \rho \vartheta_b C_{yS2} \omega U \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (5.34.b)$$

Le graphe (5.12) montre l'évolution de  $C_{yS1}$  (tableau 5.4) et de  $C_{yS2}$  (tableau 5.7) avec  $Re$  et  $A_\omega$ . On constate que déformation et rotation conduisent à des forces de *Saffman* de signe opposé et d'ordre de grandeur sensiblement équivalent. On comprend alors comment se compose  $\mathbf{F}_S$  dans l'écoulement de cisaillement pur. En effet d'après (5.34), la force de *Saffman* devrait être dans ce cas la somme des forces correspondant aux écoulements (5.1) et (5.2), soit  $\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_{Sd} + \mathbf{F}_{Sr}$ . Examinons par exemple le cas  $Re = 1$  et  $A_\omega = 0.02$ . Les simulations montrent que pour les écoulements (5.1) et (5.2), les forces de *Saffman* valent respectivement  $\mathbf{F}_{Sd} = 0.63\rho\vartheta_b\omega U\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{F}_{Sr} = -0.75\rho\vartheta_b\omega U\mathbf{e}_y$  et la somme de ces deux forces vaut par conséquent  $\mathbf{F}_S = -0.12\rho\vartheta_b\omega U\mathbf{e}_y$  qui est exactement la valeur trouvée dans l'écoulement de cisaillement pur puisque l'on a  $C_L - C_A = 0.38 - 0.5 = -0.12$ .

La seule question qui reste en suspens est l'universalité des fonctions  $C_{Sd}$  et  $C_{Sr}$ . Il semble en effet que, d'après nos résultats,  $C_{Sd}$  varie avec l'angle que fait le gradient de vitesse avec l'écoulement principal puisque l'intensité de  $\mathbf{F}_S$  devient négligeable lorsque la déformation est alignée avec l'écoulement de base (cf. écoulement 5.19). Seule la résolution complète du problème asymptotique pour les écoulements (5.1) et (5.2) permettra de trancher définitivement ce point.

### 5.3.c Expression de la résultante des forces

Revenons pour conclure à la relation (5.32) vérifiée par l'ensemble des résultats des simulations. Cette relation montre que la force totale qui s'exerce sur une bulle sphérique

plongée dans un écoulement visqueux dont la déformation et la vorticité sont non-nulles prend la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_D \quad (5.35.a)$$

où la force d'inertie  $\mathbf{F}_I$  et les forces de portance  $\mathbf{F}_A$  et  $\mathbf{F}_S$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_I &= \rho \vartheta_b \left[ (1 + C_M) \frac{D\mathbf{U}}{Dt} - C_M \frac{d\mathbf{U}_b}{dt} \right] \quad \text{avec} \quad C_M = \frac{1}{2} \\ \mathbf{F}_A &= 2 C_A \rho \vartheta_b (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \\ \mathbf{F}_S &= 2 \rho \vartheta_b \left[ C_{Sd} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \cdot \overline{\overline{\mathbf{S}}} + C_{Sr} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \right] \end{aligned} \quad (5.35.b)$$

Rien ne nous permet de conclure pour l'instant sur l'évolution du coefficient  $C_A$  avec le nombre de Reynolds. En effet,  $C_A$  est-il constant et égal à 1/2 comme l'est le coefficient de masse ajoutée ou bien  $C_A$  tend-il vers 0 lorsque  $Re \rightarrow 0$ ? Nous ne sommes pas encore également totalement en mesure de préciser l'expression des fonctions  $C_{Sd}$  et  $C_{Sr}$ . Nous savons cependant en nous inspirant de l'analyse asymptotique du chapitre 4 [qui de ce point de vue se transpose complètement aux écoulements (5.1) et (5.2)] que  $C_{Sd}$  et  $C_{Sr}$  s'écrivent dans la limite  $Re \rightarrow 0$  :

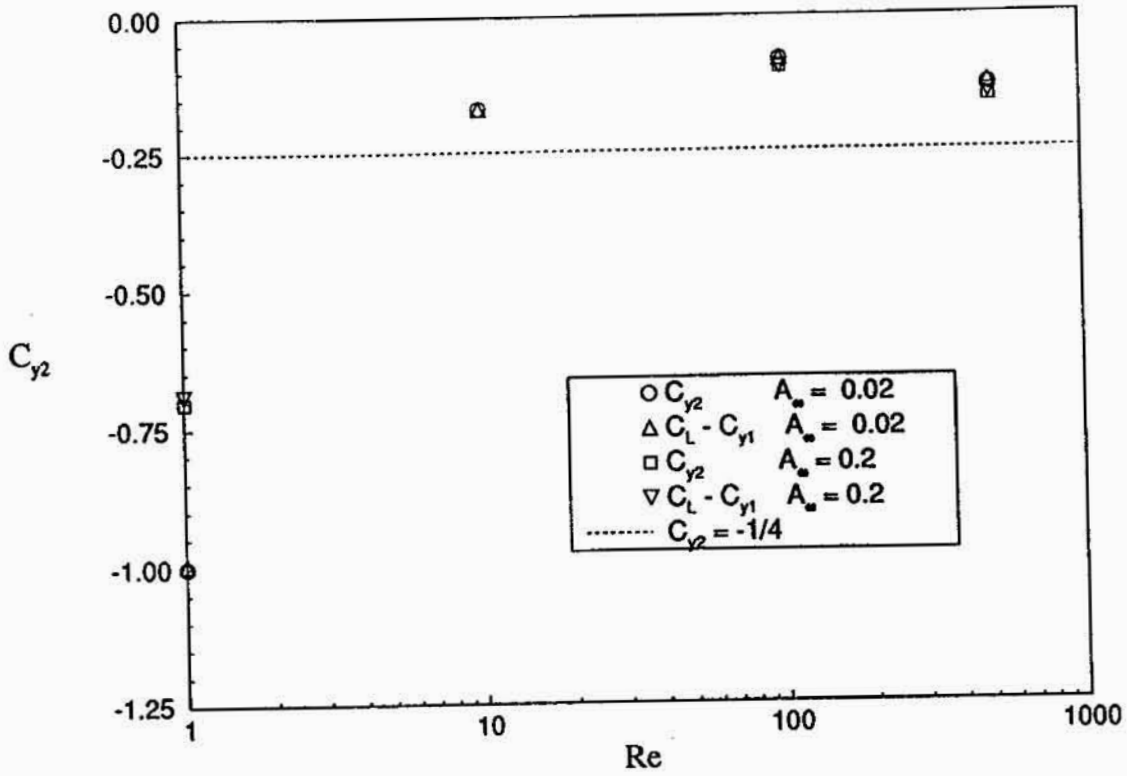
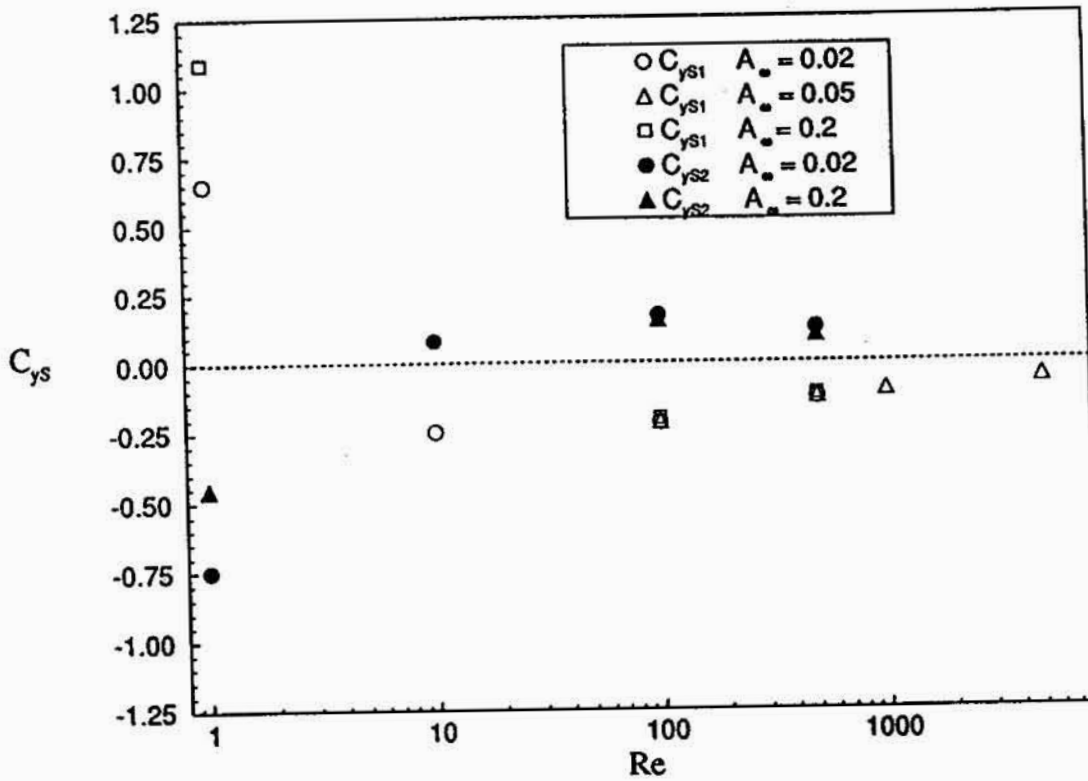
$$C_{Sd} = \left[ \frac{\nu}{4R^2 (2\overline{\overline{\mathbf{S}}:\overline{\overline{\mathbf{S}}})}^{1/2}} \right]^{1/2} J_d \left( \left[ \frac{\nu}{4R^2 (2\overline{\overline{\mathbf{S}}:\overline{\overline{\mathbf{S}}})}^{1/2}} \right]^{1/2} Re \right) \quad (5.36.a)$$

$$C_{Sr} = \left[ \frac{\nu}{4R^2 (2\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}:\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}})}^{1/2}} \right]^{1/2} J_r \left( \left[ \frac{\nu}{4R^2 (2\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}:\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}})}^{1/2}} \right]^{1/2} Re \right) \quad (5.36.b)$$

où  $J_d$  et  $J_r$  sont des fonctions analogues à la fonction  $J(\epsilon)$  déterminée par *Mc Laughlin* (1991) [cf. chapitre 4, relation (4.10)]. En revanche, à grand nombre de Reynolds, la relation (5.26) et les observations faites pour l'écoulement de rotation solide et de cisaillement pur (pour lequel la force de Saffman se comporte comme  $Re^{-1}$ ) nous permettent d'écrire pour  $Re \rightarrow \infty$  :

$$C_A \rightarrow 1/2 + O(Re^{-1}) \quad (5.37.a)$$

$$C_{Sd} \rightarrow -1.0 Re^{-1/3} + O(Re^{-1}) \quad \text{et} \quad C_{Sr} \rightarrow +1.0 Re^{-1/3} + O(Re^{-1}) \quad (5.37.b)$$

Figure 5.11 : Coefficient de portance  $C_{y2}$ Figure 5.12 : Coefficients de portance  $C_{ys1}$  et  $C_{ys2}$

Re	$A_\omega = 0.02$			
	$C_{yp2}$	$C_{yv2}$	$C_{y2}$	$C_L - C_{y1}$
1	-0.324	-0.685	<b>-1.001</b>	-0.994
10	-0.0639	-0.106	<b>-0.170</b>	-0.171
100	-0.0588	-0.00228	<b>-0.0816</b>	-0.0820
500	-0.125	-0.0065	<b>-0.131</b>	-0.126

Tableau 5.5 : Coefficient de portance  $C_{y2}$  à  $A_\omega = 0.02$ 

Re	$A_\omega = 0.2$			
	$C_{yp2}$	$C_{yv2}$	$C_{y2}$	$C_L - C_{y1}$
1	-0.221	-0.460	<b>-0.704</b>	-0.680
100	-0.0565	-0.00232	<b>-0.0970</b>	-0.096
500	-0.148	-0.0059	<b>-0.154</b>	-0.147

Tableau 5.6 : Coefficient de portance  $C_{y2}$  à  $A_\omega = 0.2$ 

Re	$A_\omega = 0.02$	$A_\omega = 0.2$
1	-0.750	-0.454
10	0.0080	
100	0.168	0.153
500	0.119	0.096

Tableau 5.7 : Coefficient  $C_{ys2}$  de la force de *Saffman*

## 5.4 Force de traînée

L'ensemble des résultats concernant la force de traînée d'une bulle sphérique plongée dans les écoulements (5.1) et (5.2) est présenté dans ce paragraphe (tableau 5.8). Les valeurs des coefficients de traînée respectivement notés  $C_{D1}$  et  $C_{D2}$  pour les écoulements (5.1) et (5.2) sont comparées avec celles de l'écoulement stationnaire correspondant à  $A_\omega = 0$  (noté  $C_{DS}$ ) et également avec celles du coefficient de traînée (noté ici  $C_{DL}$ ) calculées dans le chapitre 4 pour l'écoulement cisailé (4.1).

Les effets sur la traînée de la bulle des deux écoulements étudiés dans ce chapitre peuvent être considérés comme négligeables. On retrouve donc le même résultat que celui déjà observé pour l'écoulement cisailé (§ 4.5). Ce comportement a également été observé expérimentalement par *Naciri* (1992) pour une bulle en équilibre au sein d'un écoulement de rotation pure.

Ainsi, pour ces trois écoulements, la redistribution du champ de vitesse suivant l'angle azimutal  $\phi$  n'affecte quasiment pas le bilan des contraintes interfaciales projetées suivant la direction de l'écoulement principal.

Re	$C_{DS}$	$A_\omega = 0.02$			$A_\omega = 0.2$		
		$C_{DL}$	$C_{D1}$	$C_{D2}$	$C_{DL}$	$C_{D1}$	$C_{D2}$
1	17.5	17.6	17.6	17.6	17.5	17.5	17.5
10	2.43	2.44	2.44	2.44	2.44		
100	0.373	0.376	0.376	0.376	0.377	0.377	0.378
500	0.0874	0.0877	0.0873	0.0878	0.0880	0.0885	0.0891

Tableau 5.8 : Coefficients de traînée

## 5.5 Conclusions

Les expériences numériques présentées dans ce chapitre nous ont permis de montrer :

- qu'il existe en fait trois forces de portance d'origine bien différente. Deux sont présentes en fluide parfait et résultent de l'inertie de l'écoulement de base et de sa vorticité. La troisième est baptisée "*force de Saffman*" dont l'origine totalement différente provient de la vorticité générée à la surface de l'inclusion et du transport de cette vorticité par les gradients de l'écoulement de base.

- que la superposition des forces est également possible dans un écoulement visqueux. Ainsi, dans les écoulements (4.1), (5.1) et (5.2), la force totale exercée sur une bulle sphérique est la superposition de la force de traînée visqueuse  $F_D$  correspondant à l'écoulement uniforme, de la *force d'Auton*  $F_A$  induite par la vorticité de l'écoulement non-perturbé, de la force d'inertie  $F_I$  résultant de la déformation de cet écoulement et de la *force de Saffman*  $F_S$ . On peut donc écrire pour une bulle sphérique se mouvant dans un milieu infini la résultante des forces hydrodynamiques sous la forme générale :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} = & (\rho_b - \rho) \vartheta_b \mathbf{g} + C_D \pi R^2 \frac{1}{2} \rho |\mathbf{U} - \mathbf{U}_b| (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \\
 & + \rho \vartheta_b \left[ (1 + C_M) \frac{D\mathbf{U}}{Dt} - C_M \frac{d\mathbf{U}_b}{dt} \right] + 2 C_A \rho \vartheta_b (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \\
 & + \rho \vartheta_b \left[ C_{Sd} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \cdot \overline{\overline{\mathbf{S}}} + C_{Sr} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_b) \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \right]
 \end{aligned} \tag{5.38.a}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 C_D = f(\text{Re}) \quad C_M = 1/2 \quad C_A \xrightarrow{\text{Re} \rightarrow \infty} 1/2 + O(\text{Re}^{-1}) \\
 C_{Sd} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Re} \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{v}}{4R^2 (2\overline{\overline{\mathbf{S}}:\overline{\overline{\mathbf{S}}})}^{1/2}} \right]^{1/2} J_d \left( \left[ \frac{\mathbf{v}}{4R^2 (2\overline{\overline{\mathbf{S}}:\overline{\overline{\mathbf{S}}})}^{1/2}} \right]^{1/2} \text{Re} \right) \\ \xrightarrow{\text{Re} \rightarrow \infty} -1.0 \text{Re}^{-1/3} + O(\text{Re}^{-1}) \end{array} \right. \\
 C_{Sr} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Re} \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{v}}{4R^2 (2\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}:\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}})}^{1/2}} \right]^{1/2} J_r \left( \left[ \frac{\mathbf{v}}{4R^2 (2\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}:\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}})}^{1/2}} \right]^{1/2} \text{Re} \right) \\ \xrightarrow{\text{Re} \rightarrow \infty} 1.0 \text{Re}^{-1/3} + O(\text{Re}^{-1}) \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{5.38.b}$$



## Chapitre 6

## Chapitre 6

### Influence d'une surface imperméable sur l'écoulement autour d'une bulle sphérique

- 6.1 Présentation
- 6.2 Présentation des simulations
- 6.3 Force d'interaction
- 6.4 Force de traînée
- 6.5 Description de l'écoulement
- 6.6 Conclusions

## 6.1 Présentation

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'influence hydrodynamique subie par une bulle sphérique du fait de la proximité d'une surface imperméable ou de la présence d'une autre bulle. Ces deux problèmes sont équivalents pour les deux situations particulières respectivement décrites dans les paragraphes 6.1.a et 6.1.b. Une bulle de volume  $\vartheta_b$  et de rayon  $R$  est plongée dans un écoulement stationnaire et uniforme de champ de vitesse non-perturbé  $U$ , de viscosité dynamique  $\mu$  et de masse volumique  $\rho$ .

### 6.1.a Interaction hydrodynamique entre deux bulles

Le premier problème auquel cette étude s'applique est celui de deux bulles identiques en équilibre au sein d'un écoulement uniforme et stationnaire dont le champ de vitesse  $U$  est orthogonal à l'axe reliant les centres des deux bulles (figure 6.1). La distance séparant les centres des deux bulles est notée  $d$ . Cette configuration d'écoulement est en fait symétrique par rapport au plan  $x = d/2$ . L'écoulement est alors identique dans chaque demi-plan à la situation décrite dans le paragraphe 6.1.b.

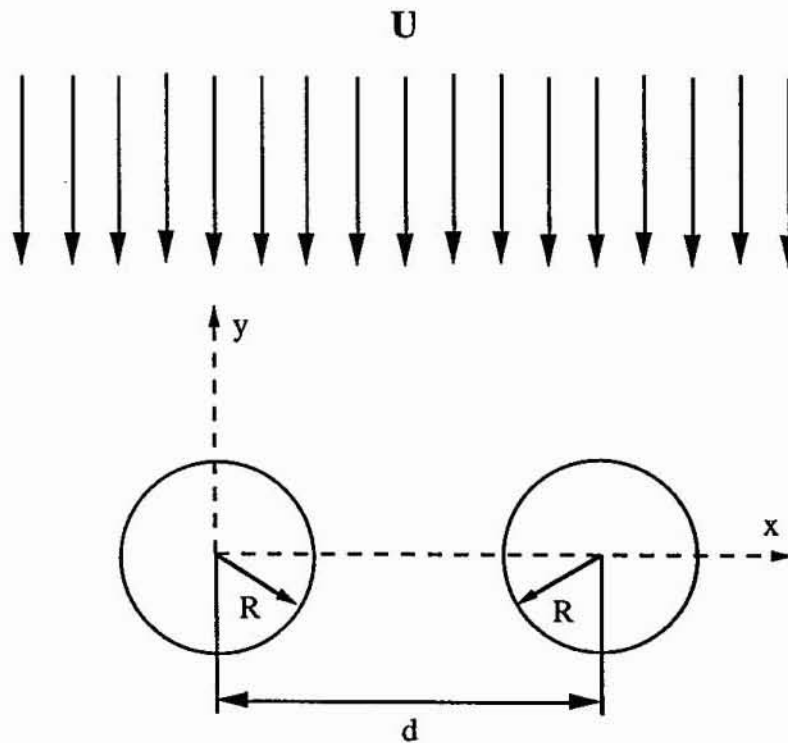


Figure 6.1

### 6.1.b Bulle en présence d'une surface plane imperméable

Le deuxième cas de figure correspond à une bulle située à proximité d'une surface plane imperméable. La bulle considérée est plongée dans un écoulement dont la vitesse  $U$  à l'infini est parallèle à la surface  $\Gamma$  (figure 6.2).

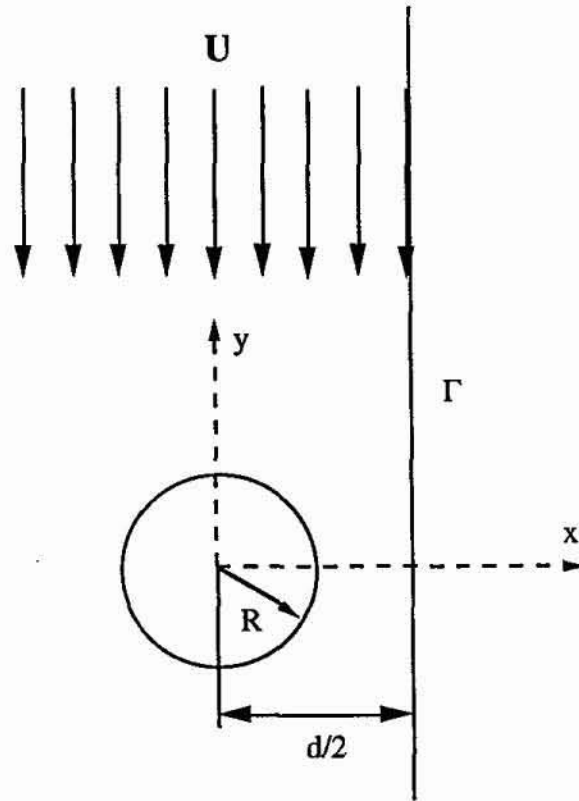


Figure 6.2

### 6.1.c Généralités

Ces deux configurations d'écoulement sont équivalentes si la surface  $\Gamma$  est plane et permet le glissement du fluide, car les conditions limites qui y sont vérifiées ( cf. § 1.7.3) sont identiques à celles existant sur un plan de symétrie :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.1)$$

$$\mathbf{t}_j \cdot \rho \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.2)$$

Ces conditions s'écrivent en reprenant les notations des figures 6.1 et 6.2 :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_x = 0 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_y \cdot \rho \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_x &= 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \rho \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_x &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dans ces deux situations, l'écoulement est caractérisé par le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{2RU}{\nu}$$

et par la distance adimensionnelle  $A_d$  :

$$A_d = \frac{d}{R} \quad (6.5)$$

L'objectif de ce chapitre est d'apporter principalement des informations nouvelles, lorsque l'écoulement est uniforme, stationnaire et visqueux, sur la force d'interaction  $\mathbf{F}_{\text{INT}}$  résultant de la présence de la surface  $\Gamma$ . Pour les deux configurations d'écoulement 6.1.a et 6.1.b présentées précédemment, la force  $\mathbf{F}_{\text{INT}} = F_{\text{INT}} \mathbf{e}_x$  est exprimée en fonction du coefficient de portance  $C_{\text{INT}}$  par :

$$F_{\text{INT}} = C_{\text{INT}} \pi R^2 \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (6.6)$$

L'influence de la proximité de la surface  $\Gamma$  sur la force de traînée visqueuse  $F_y = F_D$  est également étudiée. Comme pour les chapitres précédents,  $C_D$  est comparé au coefficient de traînée visqueuse  $C_{\text{DS}}$  de l'écoulement stationnaire uniforme  $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_x$  autour d'une bulle isolée.

## 6.2 Présentation des simulations

---

Les simulations numériques ont été réalisées pour trois distances différentes ( $A_d = 6$ ,  $A_d = 10$  et  $A_d = 14$ ) et pour des nombres de Reynolds compris entre 10 et 500. La principale différence avec les autres configurations d'écoulement présentées dans les chapitres précédents réside dans la géométrie de l'écoulement et par conséquent dans la définition du domaine de calcul. Jusqu'à présent, toutes les frontières extérieures étaient placées loin de la bulle. Pour l'étude présentée dans ce chapitre, la frontière  $x = d/2$ , correspondant à la surface  $\Gamma$ , est placée

à quelques diamètres de la bulle. Cette modification nécessite donc la construction d'un nouveau maillage curviligne orthogonal pour chaque distance  $A_d$  étudiée.

Les maillages orthogonaux utilisés sont construits à partir du maillage LCE (cf. § 1.6). Pour les mailles dont la coordonnée curviligne  $\xi$  est inférieure à  $\xi = 2$ , le maillage est identique au maillage LCE. Pour les mailles comprises entre  $\xi = 2$  et la frontière  $x = d/2$ , le maillage est construit en remarquant que les lignes de coordonnées  $\eta = \text{cste}$  du maillage LCE sont pratiquement orthogonales à la ligne de coordonnée  $x = d/2$ . Les mailles sont alors définies en se déplaçant sur chaque ligne de coordonnées  $\eta_i = \text{cste}$  avec un pas  $\Delta\xi_i$  constant (figure 6.3). Les trois maillages ainsi construits sont présentés sur la figure (6.4).

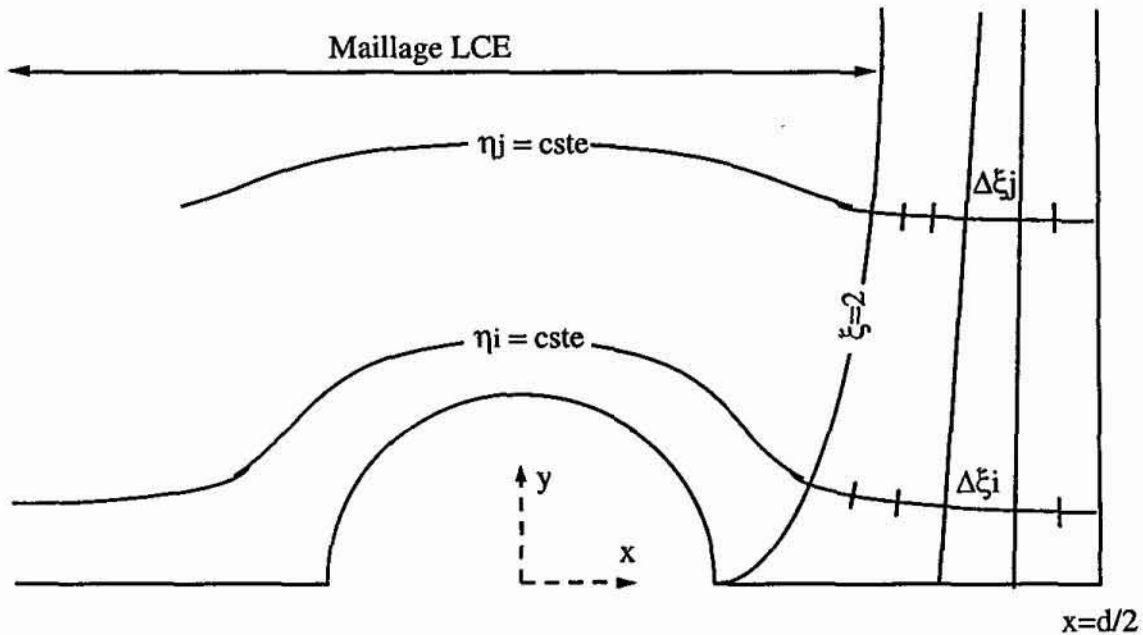


Figure 6.3 : Construction du maillage

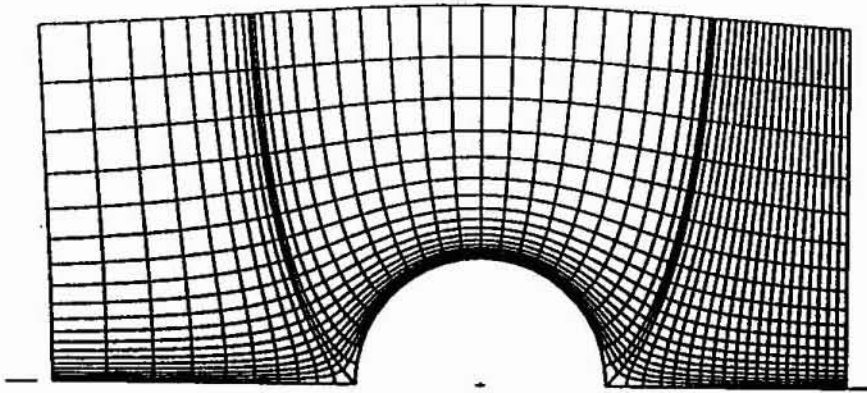
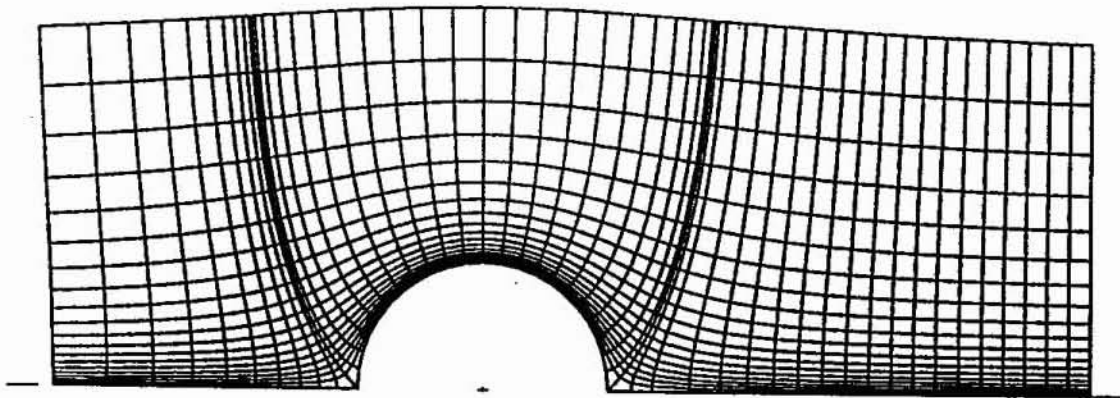
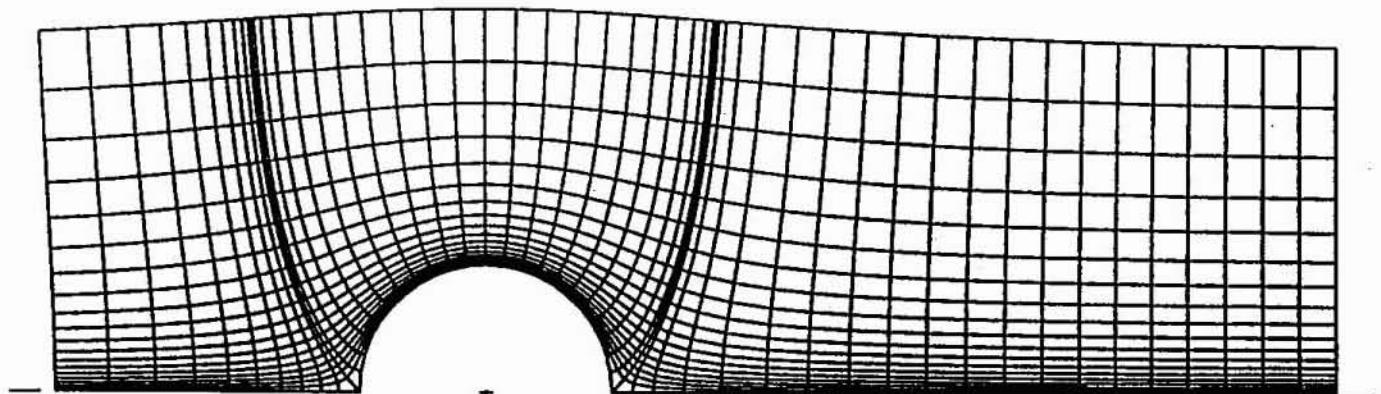
(a)  $A_d = 6$ (b)  $A_d = 10$ (c)  $A_d = 14$ 

Figure 6.4 : Présentation des maillages au voisinage de la bulle

### 6.3 Force d'interaction

---

Les résultats des différentes expériences numériques concernant le coefficient  $C_{INT}$  sont regroupés dans les tableaux 6.1, 6.2 et 6.3. Comme dans les chapitres précédents, le coefficient d'interaction  $C_{INT}$  est décomposé en  $C_{INT} = C_{INTp} + C_{INTv}$  où  $C_{INTp}$  et  $C_{INTv}$  représentent respectivement les contributions de la pression et de la contrainte normale visqueuse.

La figure 6.5 montre l'évolution de  $C_{INT}$  en fonction de la distance adimensionnelle  $A_d$  pour les différents nombres de Reynolds étudiés. Le coefficient  $C_{INT}$  y est comparé avec le résultat correspondant à l'écoulement potentiel. Le coefficient d'interaction en écoulement potentiel, calculé à l'aide du potentiel des vitesses déterminé dans le cas général par *Biesheuvel & Van Wijngaarden* (1982), s'écrit en première approximation :

$$C_{INT} = 6 A_d^{-4} + o(A_d^{-4}) \quad (6.7)$$

On constate tout d'abord que les résultats des simulations sont fort éloignés de ceux de la théorie potentielle. D'autre part, ils montrent également que le signe de la force d'interaction n'est pas constant. En effet, celui-ci dépend à la fois de la viscosité de l'écoulement, c'est à dire du nombre de Reynolds, et de la distance entre la bulle et la surface  $\Gamma$ . Ce comportement n'est pas prédit par la solution potentielle pour laquelle la force d'interaction est toujours attractive. Ainsi ce comportement particulier apparaît lié à l'influence de la vorticité existant autour de la bulle comme le montre le signe de toutes les contributions des contraintes normales visqueuses  $C_{INTv}$  calculées (tableaux 6.1 à 6.3). Celles-ci sont négatives dans toutes les configurations d'écoulement étudiées c'est à dire que leur contribution est répulsive. Lorsque le nombre de Reynolds diminue et/ou lorsque la paroi se rapproche, la contribution visqueuse  $C_{INTv}$  devient de plus en plus significative. Sa comparaison avec la contribution de la pression  $C_{INTp}$  semble tendre vers un rapport constant  $|C_{INTv}/C_{INTp}| = 2$  comme dans le cas des coefficients de portance et de traînée. On constate alors que la contribution de la pression diminue et devient répulsive sous l'effet de la diffusion visqueuse de la vorticité interfaciale.

On retrouve le même comportement que celui observé par *Kim et al.* (1993) lorsque l'inclusion est une sphère solide. Les résultats des simulations numériques réalisées par ces auteurs montrent que, pour les nombres de Reynolds 50, 100 et 150 étudiés, la force d'interaction entre deux sphères solides est répulsive si l'ordre de grandeur de la distance les séparant est inférieur à deux ou trois diamètres alors que pour des distances supérieures elle est attractive.



On observe par exemple que pour une distance à la surface (ou à l'autre bulle) donnée, il existe un nombre de Reynolds critique  $Re_C$  pour lequel la force d'interaction exercée sur la bulle est nulle. La force d'interaction est alors nulle car les contributions visqueuse  $C_{INTv}$  et de pression  $C_{INTp}$  sont de même intensité et de signe contraire. Ainsi lorsque  $Re > Re_C$  la force exercée est attractive alors qu'elle est répulsive lorsque  $Re < Re_C$ .

De même, pour un nombre de Reynolds donné on constate qu'il existe une distance critique  $d_C$  pour laquelle la force d'interaction exercée sur la bulle est nulle. Lorsque la bulle est placée à une distance  $d > d_C$  la force d'interaction est attractive alors que pour  $d < d_C$  elle est répulsive. Ainsi si l'on considère une bulle libre de se mouvoir perpendiculairement à l'écoulement, la position  $d = d_C$  représente dans cette situation le point d'équilibre de la bulle.

Le diagramme  $(Re, d)$  présentant le sens de la force pour les simulations réalisées permet de définir deux zones distinctes pour lesquelles les conditions de l'écoulement entraînent une force répulsive ou attractive (figure 6.6). La courbe  $d_C(Re)$  est estimée par simple interpolation linéaire à l'aide des valeurs numériques de  $C_{INT}$ . On constate que dans le plan  $(Re, d)$  la partie correspondant à une force répulsive est beaucoup moins importante pour une bulle que pour une sphère solide. La vorticité produite à la surface de la sphère solide étant beaucoup plus intense, ce résultat renforce l'idée que la présence de la paroi perturbe la diffusion de la vorticité générée à la surface de l'inclusion et se traduit par une contribution répulsive à la force d'interaction.

Le tableau 6.4 regroupe les rapports des intensités de la force d'interaction  $F_{INT}$  et de la force de portance  $F_L$  résultant d'un champ de vorticité constant dont l'intensité est caractérisée par le nombre adimensionnel  $A_\omega$  défini au chapitre 4. Cette comparaison est intéressante car, lorsqu'une bulle se trouve à proximité d'une paroi, la force d'interaction liée à la présence de la paroi et la force de portance liée à au gradient de vitesse présent dans la couche limite sont appliquées sur la bulle suivant la même direction mais pas forcément dans le même sens. Le rapport  $F_{INT}/F_L$  s'exprime en fait en fonction des coefficient d'interaction  $C_{INT}$  et de portance  $C_L$  sous la forme :

$$\left| \frac{F_{INT}}{F_L} \right| = \frac{3}{4} A_\omega^{-1} \left| \frac{C_{INT}}{C_L} \right| \quad (6.8)$$

Ce rapport est évalué à l'aide des résultats numériques obtenus au chapitre 4 pour l'écoulement cisailé (4.1) et de ceux présentés dans les tableaux 6.1, 6.2 et 6.3. Les valeurs du rapport  $|F_{INT}/F_L|$  correspondant à une distance adimensionnelle  $A_d = 6$  montrent que celui-ci dépend considérablement à la fois du nombre de Reynolds et de l'intensité du cisaillement de

l'écoulement. On ne peut en tirer par conséquent aucune tendance générale. Ces deux forces devront donc être prise en compte ensemble pour décrire les actions hydrodynamiques exercées sur une bulle proche d'une paroi.

De manière générale, nos résultats soulèvent une question de fond sur la représentativité de toutes les études d'interaction de bulles réalisées en théorie potentielle [Van Wijngaarden 1993, Sangani & Didwania 1993, Smereka 1993]. Même si ces études sont en elles-mêmes intéressantes, il paraît clair, au vu de nos conclusions, que les effets de vorticité contrôle en fait la force d'interaction sur toute la plage de nombre de Reynolds d'utilité pratique. Ceci expliquerait que lorsque les bulles sont plongées dans un champ de gravité, ces études prédisent l'apparition d'amas horizontaux, induits par les forces attractives, alors que l'expérience quotidienne montre que les bulles peuvent se répartir uniformément. Autrement dit, nous sommes enclins à penser que la prise en compte des effets de la vorticité présente à la surface de la bulle est indispensable pour aboutir à des modèles réalistes d'écoulements à bulles et tout particulièrement pour les simulations "directes" de ces écoulements.

#### 6.4 Force de traînée

---

Les résultats concernant la force de traînée sont regroupés dans le tableau 6.5. Les valeurs des coefficients de traînée sont comparées avec celles de l'écoulement stationnaire  $C_{DS}$  correspondant à  $A_d = \infty$ .

Les effets sur la traînée de la bulle peuvent être considérés comme négligeables pour les trois distances choisies. On retrouve donc le résultat d  j observé pour les écoulements précédents (chapitres 4 et 5). Ce résultat confirme le calcul de Kok (1993) qui a obtenu la force de traînée visqueuse en calculant la dissipation de l'écoulement potentiel (relation 0.11). Le coefficient de traînée correspondant s'écrit à l'ordre  $1/Re$  :

$$C_D = \frac{48}{Re} \left[ 1 + A_d^{-3} + o(A_d^{-3})^3 \right] \quad (6.8)$$

Ce résultat montre que la correction par rapport au résultat de Levich (1949) n'est significative que lorsque la surface imperméable (ou la bulle) est très proche. Par exemple, la modification de la traînée est supérieure à 2% pour une distance inférieure à  $d = 3.5R$  c'est à dire lorsque la distance entre les deux bulles est inférieure à  $1.5 R$  ou que la distance séparant la

bulle et la surface est plus petite que  $0.75 R$ . Dans de telles situations d'approche, la bulle se déforme et cette déformation est responsable d'une modification de traînée bien plus importante encore.

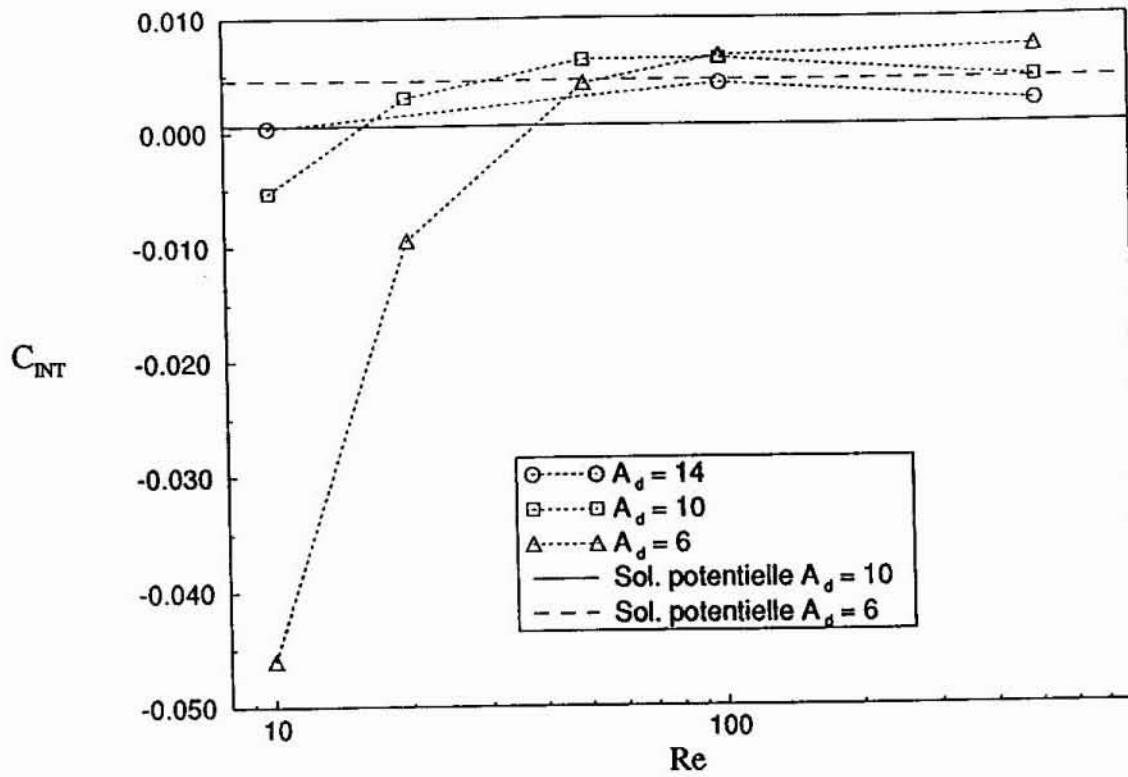
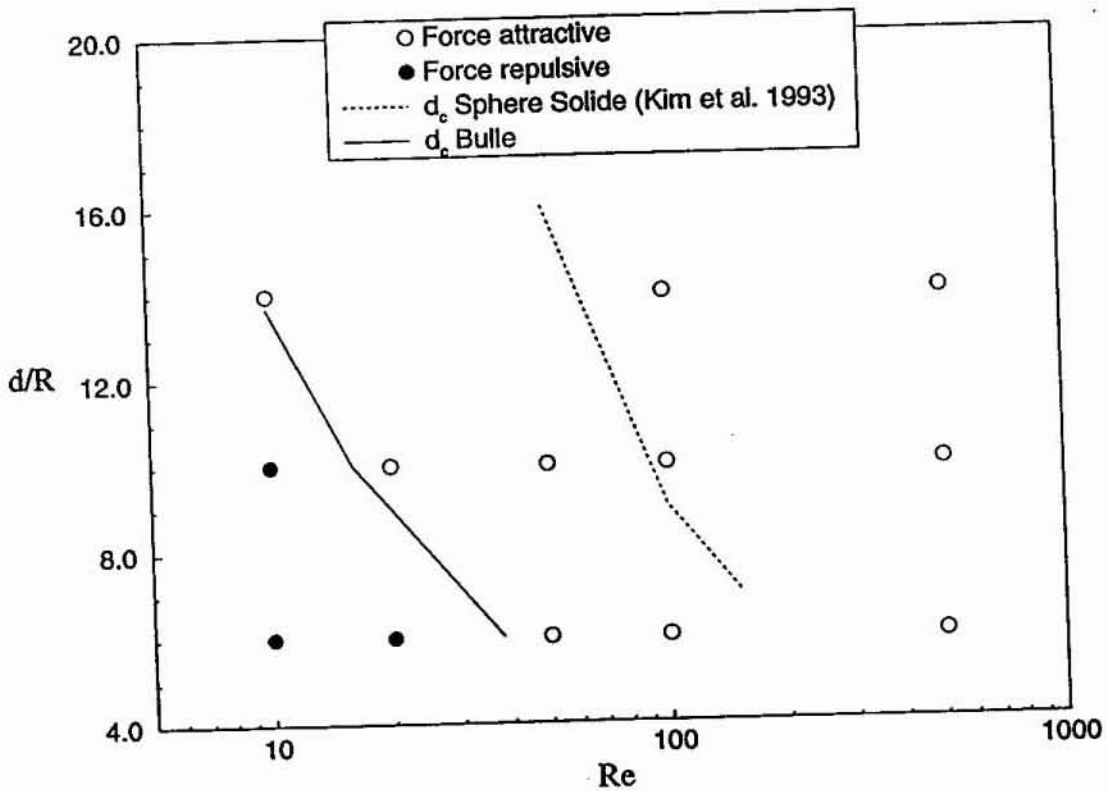
Ainsi, dans les situations où la distance séparant la bulle d'une autre bulle ou d'une paroi est respectivement supérieure à deux et un rayon, la modification induite sur la force de traînée pourra être considérée comme négligeable.

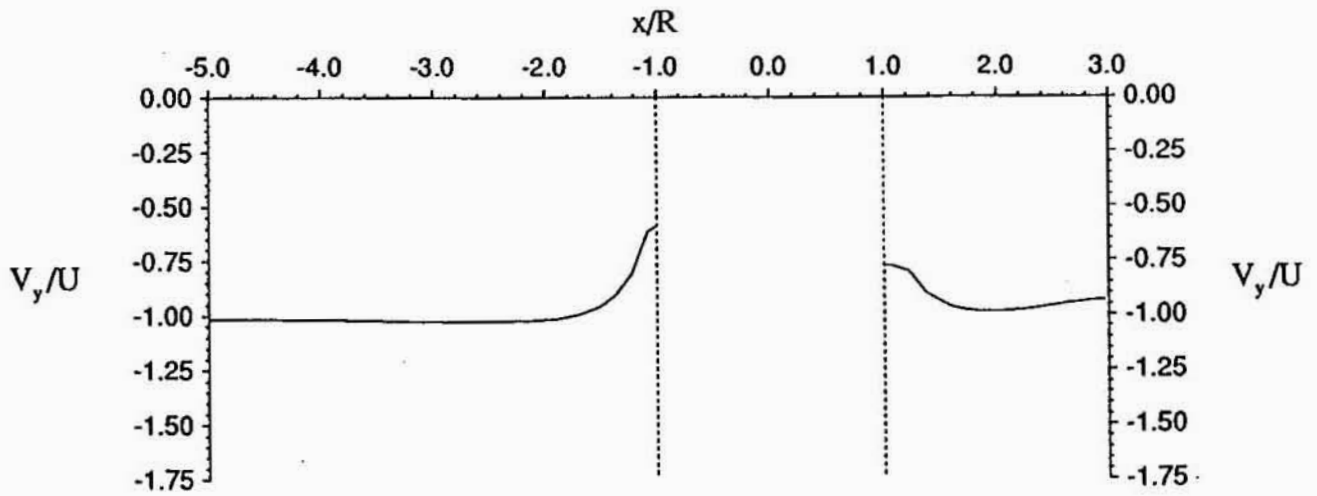
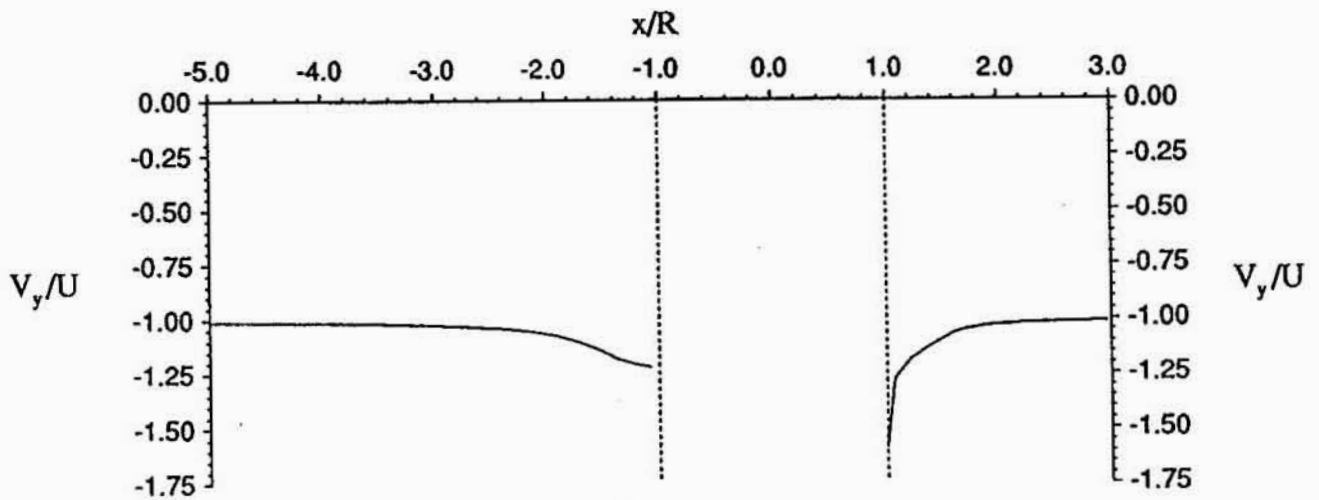
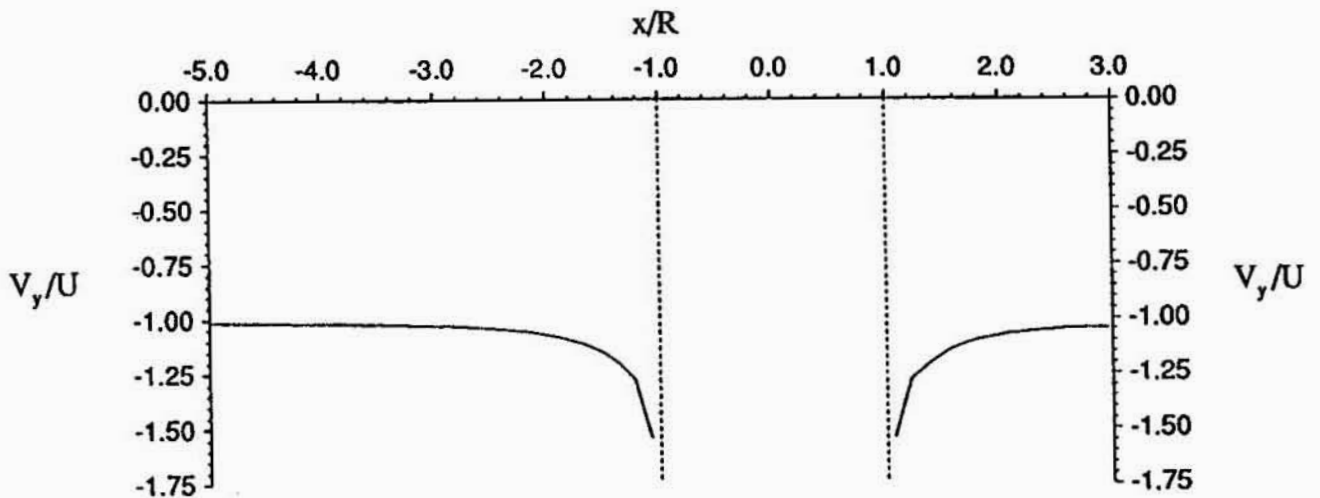
## **6.5 Description de l'écoulement**

---

L'écoulement autour de la bulle sphérique observé dans cette étude est beaucoup moins spectaculaire que celui décrit par *Kim et al.* (1993) pour une sphère solide dans la même configuration et sensiblement pour les mêmes nombres de Reynolds. La différence provient bien entendu de l'absence de zone de recirculation derrière la bulle. Les résultats numériques obtenus montrent que même pour une bulle dont le centre est distant de la surface imperméable uniquement de 1.5 diamètre ( $A_d = 6$ ), l'effet sur le sillage est imperceptible même à  $Re = 10$ . Celui-ci reste pratiquement parallèle à l'écoulement et n'est pas dévié vers le plan de symétrie  $x = d/2$  comme pour une sphère solide. On constate encore une fois la conséquence de la différence de condition à la limite entre une bulle sphérique et une sphère solide. Pour une bulle, la condition de cisaillement nul permet à l'écoulement entre la bulle et la surface imperméable de se faire sans résistance, l'écoulement "glissant" à la surface de la bulle. Par contre dans le cas de la sphère solide, la condition d'adhérence à la surface accompagnée de l'augmentation de la vitesse de l'écoulement entre la particule et le plan de symétrie se traduit par un décollement plus près du point d'arrêt amont sur la partie de la sphère la plus proche du plan de symétrie [*Kim et al.*, 1993].

Le tracé du profil des vitesses de part et d'autre de la bulle illustre l'effet de la présence de la paroi ou de l'autre bulle. Les figures 6.7 présentent les vitesses adimensionnelles  $V_y/U$  normales à l'axe  $e_x$  dans le plan  $(e_x, e_y)$ . Les profils de vitesse de chaque côté de la bulle sont peu modifiés à  $Re = 500$ . Par contre l'influence de la paroi est croissante lorsque le nombre de Reynolds diminue et la vitesse tangentielle sur la partie de la bulle faisant face à l'axe de symétrie est accrue. On constate également que pour le nombre de Reynolds  $Re = 10$ , la vitesse sur la surface  $\Gamma$  est inférieure à la vitesse de l'écoulement non-perturbé traduisant ainsi l'effet de la diffusion visqueuse responsable de la force de répulsion.

Figure 6.5 : Coefficient  $C_{INT}$ Figure 6.6 : Nature de la force  $F_{INT}$

(a)  $Re = 10$ (b)  $Re = 100$ (c)  $Re = 500$ Figure 6.7 : Profils des vitesses  $V_y/U$  dans le plan  $(e_x, e_y)$  pour  $A_d = 6$

Re	$A_d = 6$		
	$C_{INT}$	$C_{INTp}$	$C_{INTv}$
10	<b>-0.0460</b>	-0.0195	-0.0265
20	<b>-0.00945</b>	-0.000624	-0.00883
50	<b>0.00421</b>	0.00650	-0.00228
100	<b>0.00664</b>	0.00750	-0.00086
500	<b>0.00874</b>	0.00748	-0.000085

Tableau 6.1 : Coefficient  $C_{INT}$  pour  $A_d = 6$ 

Re	$A_d = 10$		
	$C_{INT}$	$C_{INTp}$	$C_{INTv}$
10	<b>-0.00525</b>	0.00217	-0.00742
20	<b>0.00306</b>	0.00585	-0.00279
50	<b>0.00632</b>	0.00738	-0.00106
100	<b>0.00642</b>	0.00688	-0.00046
500	<b>0.00467</b>	0.00471	-0.000034

Tableau 6.2 : Coefficient  $C_{INT}$  pour  $A_d = 10$

Re	$A_d = 14$		
	$C_{INT}$	$C_{INTp}$	$C_{INTv}$
10	<b>0.000388</b>	0.00358	-0.00319
100	<b>0.00423</b>	0.00456	-0.00033
500	<b>0.00262</b>	0.00266	-0.000038

Tableau 6.3 : Coefficient  $C_{INT}$  pour  $A_d = 14$ 

Re	$A_\omega = 0.02$	$A_\omega = 0.2$
10	0.52	5.2
100	0.055	0.55
500	0.067	0.67

Tableau 6.4 : Rapport  $|F_{INT}/F_L|$  pour  $A_d = 6$ 

Re	$C_{DS}$	$A_d = 6$	$A_d = 10$	$A_d = 14$
		$C_D$	$C_D$	$C_D$
10	2.43	2.43	2.43	2.43
20	1.403	1.408	1.403	
50	0.670	0.676	0.672	
100	0.373	0.376	0.375	0.374
500	0.0874	0.0874	0.0872	0.0869

Tableau 6.5 : Coefficient de traînée

## 6.6 Conclusions

---

Ce chapitre a permis de mettre en évidence à l'aide de plusieurs simulations numériques le fait qu'en écoulement visqueux la force d'interaction entre une bulle et une paroi imperméable ou une autre bulle est selon la distance les séparant attractive ou répulsive. Ces résultats rejoignent ceux obtenus numériquement par *Kim et al.* (1993) pour une sphère solide et sont primordiaux car ils démontrent ainsi les limites de la théorie potentielle pour laquelle la force exercée sur la bulle n'est qu'attractive. Les résultats obtenus montrent également que, tant que la distance entre la bulle et l'axe de symétrie est supérieure à un diamètre, l'effet sur la traînée visqueuse est imperceptible.

La suite logique de ce travail consistera à calculer par simulation numérique la force de portance subie par une bulle située dans une couche limite de paroi afin d'étudier la combinaison des effets de vorticité présentés au chapitre 4 et ceux résultant de la proximité d'une paroi imperméable étudiés dans ce chapitre. L'utilisation de maillages issus du générateur orthogonal développé par *Blanco* (1992, 1995) permettra d'étendre cette étude à des distances bulle-paroi encore plus réduites.



## Conclusion

## Conclusions et perspectives

Ce travail à dominance numérique a permis de mettre en évidence certains aspects des effets de l'accélération, de la déformation et de la vorticité d'un écoulement sur les actions hydrodynamiques et le transfert thermique la surface d'une bulle sphérique.

Du point de vue de la thermique, les résultats analytiques et numériques obtenus ont démontré que les effets majeurs résultant de l'inertie d'un écoulement sont d'origine instationnaire. L'effet de déformations spatiales peut être considéré en première approximation comme négligeable. Ainsi une description complète des transferts en écoulement complexe devra rendre compte des effets d'histoire thermique en élargissant aux situations à prédominance visqueuse la solution analytique proposée pour un écoulement potentiel.

Les résultats nouveaux concernant les phénomènes d'ébullition et de condensation d'une bulle de vapeur ont souligné la différence existant entre ces deux phénomènes lorsque le bilan d'énergie à l'interface contrôle la croissance de la bulle. La condensation apparaît comme étant plus complexe et par conséquent plus délicate à décrire à cause de l'épaississement croissant des couches limites et de l'accélération de la vitesse interfaciale en fin de processus. Cependant les premiers instants sont très bien décrits tant que l'écoulement autour de la bulle reste uniquement contrôlé par la vitesse interfaciale, les lois d'évolution du rayon et du transfert thermique correspondant alors à celles obtenues en milieu au repos. Bien que les effets de masse ajoutée soient ceux calculés en fluide parfait, la description hydrodynamique de la condensation est rendue délicate car la force d'histoire est souvent prépondérante. Le phénomène d'ébullition est quant à lui composé de deux régimes très distincts qui sont désormais parfaitement bien décrits car les résultats numériques obtenus ont permis de proposer les lois donnant l'évolution du transfert d'énergie à l'interface. Les actions hydrodynamiques correspondent à la superposition de la force de traînée stationnaire, du terme de masse ajoutée calculé en fluide parfait et d'une force d'histoire présente à petit nombre de Reynolds et gardant en mémoire les premiers instants. Une compréhension plus poussée de ces deux phénomènes dépend maintenant de la description de cette force d'histoire. Celle-ci se décompose en une contribution résultant des conditions initiales et indépendante du sens de déplacement de l'interface et une contribution traduisant le retard classique provenant de la diffusion de la vorticité dans l'écoulement au cours d'une évolution instationnaire.

Une grande partie de cette étude a ensuite été consacrée aux forces hydrodynamiques et plus particulièrement à la force de portance que peut subir une bulle sphérique. Les résultats numériques obtenus ont permis d'apporter de nombreuses informations concernant l'expression générale de la force induite par la déformation et la vorticité d'un écoulement. L'extension au cas d'un écoulement visqueux des résultats obtenus en fluide parfait faiblement rotationnel a pu

être réalisée. Pour cela, les valeurs du coefficient de portance correspondant à différentes intensités de vorticité de d'un cisaillement linéaire ont tout d'abord été calculées sur une plage de nombre de Reynolds allant de 0.1   500. De plus, une généralisation de la théorie de *Saffman* (1965) a permis d'obtenir l'expression de la force de portance sur une bulle à petit nombre de Reynolds qui a ensuite été confirmée par les simulations. Les expériences numériques ont ensuite montré que la force de portance d'origine rotationnelle se superpose avec la force d'inertie résultant de la déformation de l'écoulement lorsque celui-ci est en rotation solide. Elles ont également mis en évidence l'apparition d'une force de portance provenant de la génération de vorticité à la surface de la bulle lorsque les gradients de l'écoulement ne sont pas alignés avec le mouvement d'ensemble. Il est alors apparu clairement qu'il existe deux forces de portance d'origine bien différente, l'une liée à la vorticité de l'écoulement de base, l'autre à celle générée sur l'inclusion. Enfin, l'étude de l'influence hydrodynamique de la proximité d'une paroi ou d'une autre bulle a permis d'exprimer la force de portance correspondante dont la connaissance est indispensable à la description par exemple des mouvements de bulles dans des écoulements en conduite. Lorsque la bulle est très proche de la paroi, la vorticité de l'écoulement est responsable du changement de sens de la force d'interaction qui devient répulsive lorsque la distance séparant la bulle et la paroi est de l'ordre de grandeur du diamètre de la bulle. Ces résultats nouveaux pour une bulle mettent en défaut la théorie potentielle ainsi que ses applications en écoulement visqueux car la force d'interaction prédite par cette approche ne peut être qu'attractive.

La suite à donner à ce travail est directement liée au potentiel important de l'outil numérique développé et aux nombreuses et diverses interrogations que posent encore les écoulements à phases dispersées. Tout d'abord une étude identique à celle-ci lorsque l'inclusion est une sphère solide ne présente aucune difficulté supplémentaire et sera rapidement engagée. De plus l'étude de la force de portance dans un écoulement de Poiseuille devrait permettre de compléter les informations déjà recueillies afin d'étudier notamment la combinaison des effets de portance liés à la double présence de la paroi et du cisaillement de l'écoulement. Ces deux travaux complémentaires sont immédiatement réalisables et ne demandent aucun travail numérique supplémentaire.

Les connaissances relatives aux forces exercées sur une particule sphérique ont considérablement progressé grâce notamment aux résultats apportés par cette étude. On peut maintenant raisonnablement envisager d'aborder l'étude par simulation numérique de deux centres d'intérêt essentiels dans les écoulements à phases dispersées réels à savoir la

déformation de la bulle et la turbulence qu'elle génère ou modifie. A cet effet, l'adjonction, déjà partiellement réalisée, dans le code JADIM de modules numériques développés parallèlement à l'IMFT offre des possibilités d'investigation qui devraient permettre dans les prochaines années d'apporter des informations précieuses pour la modélisation des écoulements réels.

La généralisation à trois dimensions d'un générateur de maillage et d'un algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes autour d'une inclusion déformable [Blanco, 1995] devrait permettre l'étude des déformations quelconques d'une bulle dans diverses situations type. Par exemple, la résolution numérique de l'ascension d'une bulle sous l'action de la gravité dans un liquide au repos apportera des informations essentielles permettant de comprendre notamment l'influence de la déformation de la bulle sur la forme de sa trajectoire (hélicoïdale ou en zigzag).

La simulation des grandes échelles de la turbulence accompagnée de la prise en compte des effets de sous-maille [Calmet, 1995] offre également des perspectives très attractives. Par exemple, l'outil numérique est déjà potentiellement capable de simuler l'écoulement autour d'une bulle plongée dans une turbulence contrôlée et de décrire entre autres choses ce que deviennent les expressions des différentes forces obtenues en écoulement laminaire. La simulation numérique de la turbulence générée dans la couche limite et le sillage de la bulle ouvre également des perspectives pleines de promesses pour la description des effets locaux dans les écoulements dispersés.

Il est évident que même si ces perspectives sont à portée de calculateur, elles demandent malgré tout un travail numérique non négligeable et des possibilités de calcul qui le sont encore moins...

## Bibliographie

- ABRAMZON, B. & ELATA, C. 1984 Unsteady heat transfer from a single sphere in stokes flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* **27**(5), 687-695.
- AL TAWHEEL, A. M. & LANDAU, J. 1976 Mass transfer between solid spheres and oscillating fluids - A critical review. *Canadian J. Chem.Engng.* **54**, 532-539.
- AUTON, T. R. 1983 *The dynamics of bubbles, drops and particles in motion in liquids*. Ph. D. Dissertation, University of Cambridge.
- AUTON, T. R. 1987 The lift force on a spherical body in a rotational flow. *J. Fluid Mech.* **183**, 199-218.
- AUTON, T. R., HUNT, J. C. R. & PRUD'HOMME, M. 1988 The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotating flow. *J. Fluid Mech.* **197**, 241-257.
- BARTHELET, P., CHARRU, F. & FABRE, J. 1995 Experimental study of interfacial long waves in a two-layer shear flow. *J. Fluid Mech.* **303**, 23-53.
- BATCHELOR, G. K. 1967 *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- BIESHEUVEL, A. & WIJNGAARDEN, J. 1982 The motion of pair of gas bubbles in a perfect liquid. *J. Engng. Math.* **16**, 349-365.
- BLANCO ALVAREZ, A. 1992 *Génération de maillages orthogonaux*. Mémoire de D.E.A., Inst. Nat. Polytech. de Toulouse, Toulouse.
- BLANCO ALVAREZ, A. 1995 *Quelques aspects de l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une bulle déformable : une analyse par simulation directe*. Thèse de Doctorat, Inst. Nat. Polytech. de Toulouse, Toulouse.
- BOREE, J., CHARNAY G. & FABRE, J. 1991 *Écoulements diphasiques eau-vapeur avec changement de phase*. Rapport intermédiaire IMFT-Interfaces 54, Inst. de Mécanique des fluides de Toulouse, Toulouse.
- BRANDER, B. & BRAUER, H. 1992 Instationärer wärmetransport durch die grenzfläche von stark abgebremsten festen kugeln. *Forschung im Ingenieurwesen - Engineering Research Bd.* **58**, 165-177.
- CALMET, I. 1995 *Analyse par simulation des grandes échelles des mouvements turbulents et du transfert de masse sous une interface plane*. Thèse de Doctorat, Inst. Nat. Polytech. de Toulouse, Toulouse.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T. 1988 *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer.

CHANG, E. J. & MAXEY, M. R. 1994 Unsteady flow about a sphere at low to moderate Reynolds number. Part I - Oscillatory motion. *J. Fluid Mech.* **277**, 347-379.

CLIMENT, E. R. P. 1996 *Dispersion de bulles et modification du mouvement de la phase porteuse dans des écoulements tourbillonnaires*. Thèse de Doctorat, Inst. Nat. Polytech. de Toulouse, Toulouse (en préparation).

COLE, R. 1974 Boiling nucleation. *Adv. Heat Transfer* **10**, 87-166.

COLE, R. & SHULMAN, H. 1966 Bubble growth rates at high Jakob numbers. *Int. J. Heat Mass Transfer* **9**, 1377-1390.

COUSINS, R. R. 1970 A note on the shear flow past a sphere. *J. Fluid Mech.* **40**, 543-547.

CRYDER, D. S. & FINALBARGO, A. C. 1937 Heat transmission from metal surfaces to boiling liquids: effect of temperature of the liquid on film coefficient. *Trans. AIChE* **33**, 346-362.

CUENOT, B., MAGNAUDET, J. & SPENNATO, B. 1996 A direct numerical simulation of the effect of surfactants on the dynamics of a spherical bubble. Soumis à *J. Fluid Mech.*

DALLE DONNE, M. & FERRANTI, H. 1966 The growth of vapor bubbles in superheated sodium. *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 477-493.

DANDY, D. S. & DWYER, H. A. 1990 A sphere in shear flow at finite Reynolds number: effect of shear on particule lift, drag, and heat transfer. *J. Fluid Mech.* **216**, 381-410.

DREW, D. A. 1978 The force on a small sphere in slow viscous flow. *J. Fluid Mech.* **88**, 393-400.

DREW, D. A. & LAHEY, R. T. 1987 The virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow. *Int. J. Multiphase Flow* **13**, 113-121.

DREW, D. A. & LAHEY, R. T. 1990 Some supplemental analysis concerning the virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow. *Int. J. Multiphase Flow* **16**, 1127-1130.

DRUMMOND, C. K. & LYMAN, F. A. 1990 Mass transfer from a sphere in an oscillating flow with zero mean velocity. *Comp.Mech.* **6**, 315-326.

ERVIN, E. A. & TRYGGVASON, G. 1996 The rise of bubbles in a vertical shear flow. Submitted to *J. Fluid Engng.*

FABRE, J. 1985 *Écoulements Diphasiques*. Cours de D.E.A., Inst. Nat. Polytech. de Toulouse, Toulouse.



- FLORSCHUETZ, L. W. & CHAO, B. T. 1965 On the mechanics of vapor bubble collapse. *J. Heat Transf., Trans. ASME* **87**, 209-220.
- FLORSCHUETZ, L. W., HENRY, C. L. & RASHID KHAN, A. 1969 Growth rates of free vapor bubbles in liquids at uniform superheats under normal and zero gravity conditions. *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**, 1465-1489.
- FORSTER, H. K. & ZUBER, N. 1954 Growth of a vapour bubble in a superheated liquid. *J. Appl. Phys.* **25**, 474-478.
- GHIA, U., GHIA, K. N. & SHIN, C. T. 1982 High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comp. Phys.* **48**, 387-411.
- GOPALAKRISHNA, S. & LIOR, N. 1992 Analysis of bubble translation during transient flash evaporation. *Int. J. Heat Mass Transfer* **35**, 1753-1761.
- HADAMARD, J. S. 1911 *C. R. Acad. Sci. Paris* **152**, 1735-1738.
- HALL, I. M. 1956 The displacement effect of a sphere in a two-dimensional flow. *J. Fluid Mech.* **1**, 142-161.
- JEFFREY, D. J. 1973 Conduction through a random suspension of sphere. *Proc. Roy. Soc. A* **335**, 355-367.
- KANG, I. S. & LEAL, L. G. 1988 The drag coefficient for a spherical bubble in a uniform streaming flow. *Phys. Fluids* **31**, 233-237.
- KIM, I., ELGHOBASHI, S. & SIRIGNANO, W. A. 1993 Three-dimensional flow over two spheres placed side by side. *J. Fluid Mech.* **246**, 465-488.
- KIM, J. & MOIN, P. 1985 Application of a fractional-step method to incompressible Navier-stokes equations. *J. Comp. Phys.* **59**, 308-323.
- KLAUSNER, J. F., MEI, R., BERNHARD, D. M. & ZENG, L. Z. 1993 Vapor bubble departure in forced convection boiling. *Int J. Heat Mass Transfer* **36**(3), 651-662.
- KOK, J. B. W. 1993 Dynamics of a pair of gas bubbles moving through liquid. Part I. Theory. *Eur. J. Mech., B/Fluid* **12**, 515-540.
- KOK, J. B. W. 1993 Dynamics of a pair of gas bubbles moving through liquid. Part II. Experiment. *Eur. J. Mech., B/Fluid* **12**, 541-560.
- KONOPLIV, N. & SPARROW, E. M. 1971 Temperature and heat transfer history of a solid body in a forced convection flow. *Q. Appl. Math.* **29**, 225-235.

- KONOPLIV, N. & SPARROW, E. M. 1972 Unsteady heat transfer and temperature for stokesian flow about a sphere. *J. Heat Transfer* **94C**(3), 266-272.
- LAMB, SIR H. 1932 *Hydrodynamics*, 6th edition. Cambridge University Press.
- LE, H. & MOIN, P. 1991 An improvement of fractional step method for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.* **92**, 369-379.
- LEGENDRE, D. 1991 *Etude par simulation numérique du transfert de chaleur entre un écoulement stationnaire ou accéléré et une inclusion sphérique*. Mémoire de D.E.A., Inst. Nat. Polytech. de Toulouse, Toulouse.
- LEVICH, V. G. 1962 *Physicochemical Hydrodynamics*. Prentice Hall.
- LHUILIER, D. 1982 Forces d'inertie sur une bulle en expansion se déplaçant dans un fluide. *C. R. Acad. Sci. Paris* **295** Sér. II, 95-98.
- LIGHTHILL, M. J. 1956 Drift. *J. Fluid Mech.* **1**, 31-53 et Corrigenda. *J. Fluid Mech.* **2** (1957), 311.
- LIGHTHILL, M. J. 1957 Contributions to the theory of the Pitot tube displacement effect. *J. Fluid Mech.* **2**, 493-512.
- MAGNAUDET, J., RIVERO, M. & FABRE, J. 1995 Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part I: steady straining flow. *J. Fluid Mech.* **284**, 97-135.
- MAGNAUDET, J., RIVERO, M., LEGENDRE, D. & FABRE, J. 1995 Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part II: unsteady uniform flows. Soumis à *J. Fluid Mech.*
- MCLAUGHLIN, J. B. 1991 Inertial migration of a small sphere in linear shear flows. *J. Fluid Mech.* **224**, 261-274.
- MEI, R. & KLAUSNER, J. F. 1994 Shear lift force on spherical bubbles. *Int. J. Heat and Fluid Flow* **15**, 62-65.
- MEI, R., LAWRENCE, C. J. & ADRIAN, R. J. 1994 A note on the history force on a spherical bubble at finite Reynolds number. *Phys. Fluids* **6**, 418-420.
- MICHAELIDES, E. E. & FENG, Z. G. 1994 Heat transfer from a rigid sphere in a nonuniform flow and temperature field. *Int. J. Heat Mass Transfer* **37**(14), 2069-2076.
- MIKIC, B. B., ROHSENOW, W. M. & GRIFFITH, P. 1970 On bubble growth rates. *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 657-666.
- MOORE, D. W. 1959 The rise of a gas bubble in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.* **6**, 113-130.

- MOORE, D. W. 1963 The boundary layer on a spherical gas bubble. *J. Fluid Mech.* **16**, 161-176.
- NACIRI, A. 1992 *Contribution à l'étude des forces exercées par un liquide sur une bulle de gaz : portance, masse ajoutée et interactions hydrodynamiques*, Thèse de Doctorat, Ec. Centrale de Lyon, Lyon.
- NIGMATULIN, R. I., KHABEEV, N. S. & NAGIEV, F. B. 1981 Dynamics, heat and mass transfer of vapour-gas bubbles in a liquid. *Int. J. Heat Mass Transfer* **24**(6), 1033-1044.
- NUKYIYAMA, S. 1934 Maximum and minimum values of heat transmitted from a metal to boiling water under atmospheric pressure. *Japan Soc. Mech. Eng.* **37**, 367-394.
- OKHOTSIMSKII, A. D. 1988 The thermal regime of vapour bubble collapse at different Jacob numbers. *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**(8), 1569-1576.
- PARK, W. C., KLAUSNER J. F. & MEI, R. 1995 Unsteady forces on spherical bubbles. *Exp. Fluids* **19**, 167-172.
- PLESSET, M. S. 1949 The dynamics of cavitation bubbles. *J. of Appl. Mech.* **16**, 277.
- PLESSET, M. S. & PROSPERETTI, A. 1977 Bubble dynamics and cavitation. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **9**, 145-185.
- PLESSET, M. S. & ZWICK, S. A. 1952 A non-steady heat diffusion problem with spherical symmetry. *J. of Appl. Phys.* **23**, 95-98.
- PLESSET, M. S. & ZWICK, S. A. 1954 The growth of vapour bubbles in superheated liquids. *J. of Appl. Phys.* **25**, 493-500.
- PROSPERETTI, A. & PLESSET, M. S. 1978 Vapour-bubble growth in a superheated liquid. *J. Fluid Mech.* **85**, 349-368.
- PROUDMAN, I. & PEARSON, J. R. 1957 Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **2**, 237-262.
- RAI, M. M. & MOIN, P. 1991 Direct simulations of turbulent flow using finite-differences schemes. *J. Comp. Phys.* **96**, 15-53.
- RIBCZYNSKI, W. 1911 On the translatory motion of a fluid sphere in a viscous medium. *Bull. Ibt. Acad. Pol. Sci. Lett. Cl. Sci. Math. Nat.*, (A), 40-46.
- RILEY, N. 1966 On a sphere oscillating in a viscous fluid. *Quart. J. Mech. and Applied Math.*, **19**, 461-472.

- RIVERO, M. 1991 *Etude par simulation numérique des forces exercées sur une inclusion sphérique par un écoulement accéléré*. Thèse de Doctorat, Inst. Nat. Polytech. de Toulouse, Toulouse.
- RUCKENSTEIN, E. 1959 On heat transfer between vapour bubbles in motion and the boiling liquid from which they are generated. *Chem. Engng. Sci.* **10**, 22-30.
- RUCKENSTEIN, E. 1967 Mass transfer between a single drop and a continuous phase. *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 1785-1792.
- RUCKENSTEIN, E. & JAMES DAVIS, E. 1971 The effect of bubble translation on vapor bubble growth in superheated liquid. *Int. J. Heat Mass Transfer* **14**, 939-952.
- RUBINOW, P. G. & KELLER, J. B. 1961 The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **11**, 447-459.
- SAFFMAN, S. I. 1965 The lift force on a small sphere in a slow shear flow. *J. Fluid Mech.* **22**, 385-400 et Corrigendum. *J. Fluid Mech.* **31** (1968), 624.
- SANGANI, A. S. & DIDWANIA A. K. 1993 Dynamic simulations of flows of bubbly liquids at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **250**, 307-437.
- SCRIVEN, L. E. 1959 On the dynamics of phase growth. *Chem. Engng. Sci.* **1**, 1-13.
- SEGRE, G. & SILBERBERG, A. 1962 Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 1. et Part 2. *J. Fluid Mech.* **14**, 115-157.
- SMEREKA, P. 1993 On the motion of bubbles in a periodic box. *J. Fluid Mech.* **254**, 79-112.
- SRIDHAR, G. & KATZ, J. 1995 Drag and lift forces on a microscopic bubbles entrained by a vortex. *Phys. Fluids* **7**(2), 389-399.
- TÂM, P. D. 1981 *De la traînée instationnaire sur une petite bulle*. Thèse de Doctorat, Inst. Nat. Polytech. de Grenoble, Grenoble.
- TAYLOR, T. D. & ACRIVOS, A. 1964 On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **18**, 466.
- VAN DYKE, M. V. 1975 *Perturbation methods in fluid mechanics*. The Parabolic Press.
- WIJNGAARDEN, J. 1993 The mean rise velocity of pairwise-interacting bubbles in liquid. *J. Fluid Mech.* **251**, 55-78.
- WITTKE, D. D. & CHAO, B. T. 1967 Collapse of vapour bubbles with translatory motion. *J. Heat Transfer, Trans. ASME* **89**, 17-24.

YUAN, H. & PROSPERETTI, A. 1994 On the line motion of two spherical bubbles in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **278**, 325-349.

YANG, S. & LEAL, L. G. 1991 A note on memory-integral contributions to the force on an accelerating spherical drop at low Reynolds number. *Phys. Fluids A* **3**, 1822-1824.

ZENG, L. Z., KLAUSNER, J. F., BERNHARD, D. M. & MEI, R. 1993 A unified model for the prediction of bubble detachment diameters in boiling systems II. Flow boiling. *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**(9), 2271-2279.

## Annexes

## Annexe 1

- A1.1 Expression des opérateurs vectoriels en coordonnées curvilignes orthogonales
- A1.2 Equations de passage entre le domaine numérique et le domaine physique du maillage LCE

### A1.1 Expression des opérateurs vectoriels en coordonnées curvilignes orthogonales

---

Les différents opérateurs vectoriels utilisés dans cette étude s'écrivent en coordonnées curvilignes orthogonales  $\xi_i$  de la manière suivante :

- Gradient d'un scalaire  $\phi$  :

$$(\nabla\phi)_i = \frac{\partial\phi}{\partial\xi_i} \quad (\text{A1.1})$$

- Gradient d'un vecteur  $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_{\xi_i}$  :

$$(\nabla\mathbf{A})_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial\xi_j} - H_j^i A_j + \sum_k H_i^k A_k \delta_{ij} \quad (\text{A1.2})$$

- Rotationnel d'un vecteur  $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_{\xi_i}$  :

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ikj} \left( \frac{\partial A_j}{\partial\xi_k} - H_k^j A_k \right) \quad (\text{A1.3})$$

- Divergence d'un vecteur  $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_{\xi_i}$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \left( \frac{\partial A_i}{\partial\xi_i} + \sum_{k \neq i} H_i^k A_k \right) = \sum_i \nabla_{\cdot(i)} A_i \quad (\text{A1.4})$$

- Divergence d'un tenseur d'ordre deux  $\mathbf{T} = (T_{ij})$  :

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_i = \sum_j (\nabla_{\cdot(j)} T_{ij} - H_j^i T_{ij}) + \sum_k H_i^k T_{ki} \quad (\text{A1.5})$$



## A1.2 Equations de passage entre le domaine numérique et le domaine physique du maillage LCE

---

Le maillage axisymétrique  $(\xi, \eta, \phi)$  choisi pour les simulations numériques autour d'un obstacle sphérique est le maillage obtenu par rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $e_x$  du maillage plan  $(\xi, \eta)$  où  $\xi$  et  $\eta$  sont respectivement les lignes de courant et les équipotentiels de l'écoulement potentiel autour d'un cylindre. Les équations de passage entre le domaine numérique et le domaine physique sont, pour ce maillage, les suivantes :

- du domaine physique  $(x, y, z)$  au domaine transformé  $(\xi, \eta, \phi)$  :

$$\begin{aligned}\xi &= x \left( 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\ \eta &= (y^2 + z^2)^{1/2} \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\ \phi &= \text{arctg} \left[ \frac{z}{y} \right]\end{aligned}\tag{A1.6}$$

- du domaine transformé  $(\xi, \eta, \phi)$  au domaine physique  $(x, y, z)$  :

$$\begin{aligned}x &= \frac{\xi}{\left( 1 + \frac{2}{a + \sqrt{a^2 - 4}} \right)} \\ y &= \frac{-\eta}{\left( 1 - \frac{2}{a + \sqrt{a^2 - 4}} \right)} \cos[\phi] \\ z &= \frac{-\eta}{\left( 1 - \frac{2}{a + \sqrt{a^2 - 4}} \right)} \sin[\phi]\end{aligned}\tag{A1.7.a}$$

$$\text{en notant } a = \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi^2 + \eta^2}{R^2} + \sqrt{\left( \frac{\xi^2 + \eta^2}{R^2} \right)^2 + 8 \left( 2 - \frac{\xi^2}{R^2} + \frac{\eta^2}{R^2} \right)} \right]\tag{A1.7.b}$$

## Annexe 2

### Conditions aux limites à la surface d'une bulle

A2.1 Thermostatique de l'interface

A2.2 Ecriture de l'équation de bilan à l'interface pour une grandeur  $\Phi$

A2.3 Bilan de masse

A2.4 Bilan d'entropie

A2.5 Bilan de quantité de mouvement

A2.6 Bilan d'énergie

Cette annexe est consacrée à l'écriture des conditions aux limites à l'interface d'une bulle et d'un liquide. Ces conditions sont obtenues à partir des bilans interfaciaux de masse, de quantité de mouvement, d'énergie et d'entropie. Les grandeurs correspondant à chaque phase  $k$  ( $k=1, 2$ ) sont indicées par  $_k$  et les grandeurs interfaciales par  $_1$ . On note pour la phase  $k$  considérée,  $\mathbf{n}_k$  et  $\mathbf{t}_{jk}$  ( $j=1, 2$ ) respectivement la normale sortante et les vecteurs tangents à l'interface qui vérifient :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= -\mathbf{n}_2 \\ \mathbf{t}_{j1} &= \mathbf{t}_{j2} \quad j=1,2 \end{aligned} \tag{A2.1}$$

Compte tenu de (A2.1), les vecteurs tangents seront notés indifféremment  $\mathbf{t}$ . On note également par les indices  $_n$  et  $_t$  les projections des vecteurs et des tenseurs suivant la normale  $\mathbf{n}$  et le plan tangent. On pose  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ .

Les bilans sont écrits dans un premier temps dans le cas général à l'aide des hypothèses les moins restrictives possibles. Il s'agit des deux hypothèses suivantes :

**H1** : Il n'y a pas de masse superficielle attachée à l'interface ( $\rho_1 = 0$ ).

**H2** : L'interface n'est pas la source d'une production d'entropie c'est à dire que les transferts moléculaires interfaciaux irréversibles sont négligeables.

Les bilans obtenus sont ensuite écrits (§ 1.7.3) dans deux cas particuliers correspondant aux situations abordées dans cette étude. Il s'agit des situations où la bulle est sphérique et de rayon fixe (Chapitres 2, 4, 5 et 6) et où la bulle est sphérique, non déformable mais en présence d'un changement de phase (Chapitre 3).

### A2.1 Thermostatique de l'interface

Dans le cas où l'interface est constituée d'une seule espèce, ce qui correspond à un équilibre entre un liquide pur et sa vapeur, l'énergie interne de l'interface s'écrit [Fabre, 1985] :

$$e_t = T_1 s_1 + \sigma \tag{A2.2.a}$$

avec la relation de Gibbs-Duhem :

$$s_1 dT + d\sigma = 0 \tag{A2.2.b}$$

où  $e_t$ ,  $s_1$ ,  $\sigma$  et  $T_1$  sont respectivement l'énergie interne surfacique, l'entropie surfacique, la tension superficielle ou densité d'énergie libre surfacique et la température de l'interface.

Dans le cas où l'interface est constituée d'un système binaire d'espèces  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui correspond par exemple à une bulle d'air dans de l'eau en présence de tensioactifs ou d'impuretés, la relation (A2.2.a) est inchangée mais la relation (A2.2.b) devient :

$$s_I dT + d\sigma + \left( \rho_{\alpha l} - \frac{C_{\alpha l}}{C_{\beta l}} \rho_{\beta l} \right) \frac{\partial \mu_{\beta}}{\partial C_{\alpha l}} dC_{\alpha l} = 0 \quad (\text{A2.3})$$

où  $C_{\alpha l}$  est la concentration de l'espèce  $\alpha$  dans la phase liquide et  $\mu_{\beta}$  le potentiel chimique de l'espèce  $\beta$ . On constate donc que si  $C_{\alpha l}$  est constante, la thermostatique de l'interface peut être décrite par le système (A2.2). De plus si  $\sigma$  est indépendant de la température, (A2.2) s'écrit alors :

$$\left. \begin{array}{l} e_I = \sigma \\ s_I = 0 \end{array} \right\} \text{H3} \quad (\text{A2.4})$$

où H3 est en fait l'hypothèse de tension interfaciale constante.

## A2.2 Ecriture de l'équation de bilan pour une grandeur $\Phi$

L'équation de bilan d'une grandeur de densité volumique et surfacique respectivement  $\varphi_k$  et  $\varphi_I$ , dont les taux volumique et surfaciques de création sont respectivement  $\pi_k$  et  $\pi_I$  et dont les flux surfacique et linéiques sont respectivement  $\Pi_k$  et  $\Pi_I$ , s'écrit localement à l'interface [Fabre, 1985] :

$$\frac{\partial \varphi_I}{\partial t} + \nabla_I \cdot (\varphi_I \mathbf{V}_I) - \nabla_I \cdot \Pi_I - 2H \Pi_I \cdot \mathbf{n} - \pi_I = \sum_{k=1}^2 \mathbf{n}_k \cdot (\varphi_k (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_I) - \Pi_k) \quad (\text{A2.5})$$

où  $H$  est la courbure moyenne de l'interface au point considéré et  $\nabla_I \cdot$  la divergence surfacique.

## A2.3 Bilan de masse

Pour la masse les différentes grandeurs intervenant dans l'équation de bilan (A2.5) sont:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \rho_k \\ \varphi_I &= 0 \text{ d'après H1.} \\ \Pi_k &= \Pi_I = \mathbf{0} \\ \pi_k &= \pi_I = 0 \end{aligned}$$

L'équation de bilan (A2.5) s'écrit alors :

$$\dot{m} = \rho_1(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_I) \cdot \mathbf{n} = \rho_2(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_I) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A2.6})$$

On notera également par la suite  $\dot{m}_k = \rho_k(\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_I) \cdot \mathbf{n}_k$ .

#### A2.4 Bilan d'entropie

L'écriture complète du bilan d'entropie n'est pas développée ici mais seuls les résultats qui en découlent sont présentés. Ceux-ci sont en fait obtenus en combinant le bilan interfacial d'entropie avec les équations de conservation de la quantité de mouvement (A2.10) et de l'énergie (A2.15) qui vont suivre [Fabre, 1985]. Ils sont cependant introduits à cet endroit de l'annexe car ils permettent de simplifier l'écriture des bilans suivants.

L'écriture du bilan de l'entropie à l'interface permet d'aboutir à l'égalité des températures entre l'interface et les deux phases :

$$T_k = T_I \quad (\text{A2.7})$$

et à la condition de non glissement à l'interface :

$$\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{t}_I = \mathbf{V}_I \cdot \mathbf{t}_I \quad (\text{A2.8})$$

La condition de non glissement (A2.8) permet d'écrire en utilisant (A2.6) la relation (A2.9) donnant la vitesse relative de la phase k par rapport à l'interface :

$$\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_I = (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_I) \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} = \frac{\dot{m}_k}{\rho_k} \mathbf{n} \quad (\text{A2.9})$$

#### A2.5 Bilan de quantité de mouvement

Pour la quantité de mouvement, les différentes grandeurs intervenant dans l'équation de bilan (A2.5) sont:

$$\Phi_k = \rho_k \mathbf{V}_k$$

$$\Phi_I = 0 \text{ d'après H1 } (\rho_I = 0)$$

$$\Pi_k = -P_k \mathbf{I} + \rho_k \boldsymbol{\tau}_k$$

$$\Pi_I = \sigma \mathbf{I}$$

$$\pi_k = \rho_k \mathbf{g} \text{ où } \mathbf{g} \text{ est l'accélération due à la pesanteur.}$$

$\pi_1 = 0$  d'après **H1** ( $\rho_1 = 0$ )

L'équation de bilan s'écrit alors :

$$\nabla_1 \sigma - 2H \sigma \mathbf{n} - \sum_{k=1}^2 \dot{m}_k \mathbf{V}_k + P_k \mathbf{n}_k - \rho_k \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k = \mathbf{0} \quad (\text{A2.10})$$

Le bilan de la quantité de mouvement (A2.10) est projeté suivant la normale et le plan tangent de l'interface pour donner respectivement les relations (A2.11) et (A2.12) :

$$2H \sigma + \dot{m}^2 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + P_1 - P_2 - \mathbf{n} \cdot (\rho_1 \boldsymbol{\tau}_1 - \rho_2 \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{A2.11})$$

$$\nabla_1 \sigma + \dot{m} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{t} - \mathbf{t} \cdot (\rho_1 \boldsymbol{\tau}_1 - \rho_2 \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{A2.12})$$

En tenant compte de la condition de non glissement à l'interface (A2.8), la projection (A2.12) sur le plan tangent s'écrit alors :

$$\nabla_1 \sigma - \mathbf{t} \cdot (\rho_1 \boldsymbol{\tau}_1 - \rho_2 \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{A2.13})$$

Lorsque l'hypothèse **H3** est vérifiée, le gradient surfacique de la tension interfaciale est nul. La projection sur le plan tangent de l'équation de quantité de mouvement (A2.13) prend finalement la forme suivante :

$$\mathbf{t} \cdot (\rho_1 \boldsymbol{\tau}_1 - \rho_2 \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{A2.14})$$

qui traduit l'égalité des contraintes tangentielles entre les deux phases à l'interface.

## A2.6 Bilan d'énergie

Pour l'énergie, les différentes grandeurs intervenant dans l'équation de bilan (A2.5) sont :

$$\varphi_k = \rho_k \left( e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) \text{ où } e_k \text{ est la densité massique d'énergie interne.}$$

$$\varphi_1 = e_1$$

$$\Pi_k = -P_k \mathbf{V}_k + \boldsymbol{\tau}_k \mathbf{V}_k - \mathbf{q}_k \text{ où } \mathbf{q}_k \text{ est le flux d'énergie thermique donné par la loi de}$$

$$\text{Fourier } \mathbf{q}_k = -\lambda_k \nabla T_k.$$

$$\Pi_1 = \sigma \mathbf{V}_1$$

$$\pi_k = \rho_k \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_k$$

$\pi_I = 0$  d'après H2

L'équation de bilan (A2.5) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_I}{\partial t} + \nabla_I \cdot (e_I \mathbf{V}_I - \sigma \mathbf{V}_I) - 2H \sigma \mathbf{V}_I \cdot \mathbf{n}_I \\ - \sum_{k=1}^2 \dot{m}_k \left( e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) + P_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{V}_k - \mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{V}_k + \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.15})$$

Le bilan de l'énergie (A2.15) est simplifié :

- en lui ajoutant le bilan de quantité de mouvement (A2.10) multiplié par  $\mathbf{V}_I$
- en lui ajoutant la relation suivante déduite du bilan de masse :

$$\sum_{k=1}^2 \dot{m}_k \frac{V_k^2}{2} = 0 \quad (\text{A2.16})$$

- en tenant compte des relations (A2.17) obtenues en exploitant (A2.9) :

$$\begin{aligned} P_k \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_I) &= \dot{m} P_k / \rho_k \\ \mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \cdot (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_I) &= \dot{m} \mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k / \rho_k \end{aligned} \quad (\text{A2.17})$$

Le bilan interfacial (A2.18) ainsi obtenu s'écrit :

$$\frac{\partial e_I}{\partial t} + \nabla_I \cdot (e_I \mathbf{V}_I) - \sigma \nabla_I \cdot \mathbf{V}_I - \sum_{k=1}^2 \dot{m}_k \left( h_k + \frac{\dot{m}_k^2}{\rho_k} - \frac{\mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k}{\rho_k} \right) + \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k = 0 \quad (\text{A2.18})$$

où  $h_k = e_k + P_k / \rho_k$  est la densité massique d'enthalpie.

Compte tenu des relations (A2.4) décrivant la thermostatique de l'interface lorsque l'hypothèse H3 est vérifiée, le bilan d'énergie à l'interface se met sous la forme :

$$\sum_{k=1}^2 \dot{m}_k \left( h_k + \frac{\dot{m}_k^2}{\rho_k} - \frac{\mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k}{\rho_k} \right) + \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n}_k = 0 \quad (\text{A2.19})$$

## Annexe 3

### Calculs complémentaires

A3.1 Calcul de  $f(Ja)$

A3.2 Calcul de la force exercée sur une bulle de rayon variable par un écoulement potentiel uniforme

A3.2.a Ecriture du théorème de la dissipation

A3.2.b Calcul du travail radial  $I_r$  du tenseur des contraintes

A3.2.c Calcul de la force totale



### A3.1 Calcul de $f(\text{Ja})$

La fonction  $f(\text{Ja})$  intervient dans l'expression de la vitesse radiale de l'interface d'une bulle en phase d'ébullition diffusive en l'absence d'écoulement (relation 3.14). Le calcul analytique de  $f(\text{Ja})$  présenté ici est en fait une simplification, grâce à l'hypothèse  $\varepsilon = \rho_v/\rho \ll 1$ , de celui réalisé par *Scriven* (1959). Il s'appuie sur l'hypothèse faite par *Scriven* et vérifiée par nos simulations numériques (relation 3.16) : les vitesses de la couche limite thermique et de l'interface de la bulle sont identiques en régime permanent. Le nombre de Nusselt est alors constant et s'écrit en fonction de  $f(\text{Ja})$  :

$$\text{Nu} = \frac{16}{\pi} \text{Ja} f(\text{Ja}) \quad (\text{A3.1})$$

Le problème à résoudre est purement radial et l'équation d'advection-diffusion de la température (1.1.c) s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} = \chi \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{A3.2})$$

où la vitesse radiale  $V_r$  est déduite de l'équation de continuité (1.1.a) :

$$V_r = \dot{R} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad (\text{A3.3})$$

L'équation (A3.2) est résolue dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$  défini au chapitre 3 par le changement de référentiel (3.7). Elle devient à l'aide des transformations (3.9) :

$$\frac{\partial T}{\partial t^*} + \left( \frac{\dot{R} R_0^3}{R r^*} - \frac{\dot{R}}{R} r^* \right) \frac{\partial T}{\partial r^*} = \chi \frac{R_0^2}{R^2 r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^{*2} \frac{\partial T}{\partial r^*} \right) \quad (\text{A3.4})$$

La relation (A3.1) exprime le fait que, dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$ , la couche limite thermique est stationnaire c'est à dire que la température n'y dépend pas du temps. Cette hypothèse permet d'écrire (A3.4) sous la forme :

$$\frac{\dot{R} R}{\chi} \left( R_0 - \frac{r^{*3}}{R_0^2} \right) \frac{dT}{dr^*} = \frac{d}{dr^*} \left( r^{*2} \frac{dT}{dr^*} \right) \quad (\text{A3.5})$$

La combinaison de (A3.1) et du bilan d'énergie interfacial (3.2) permet d'écrire :

$$\frac{\dot{R} R}{\chi} = \frac{Ja Nu}{2} = \frac{8}{\pi} Ja^2 f(Ja) = F \quad (A3.6)$$

L'équation (A3.5) vérifiée par  $\frac{dT}{dr^*}$  est une équation différentielle du premier ordre dont la solution est :

$$\frac{dT}{dr^*} = \frac{K}{r^{*2}} \exp \left[ -\frac{FR_o}{r^*} - F \frac{r^{*2}}{2R_o^2} \right] \quad (A3.7)$$

Le champ de température est obtenu en intégrant la relation (A3.7) :

$$T(r^*) = K_1 + K \int_{r^*/R_o}^{\infty} \frac{1}{\zeta^2} \exp \left[ -\frac{FR_o}{\zeta} - F \frac{\zeta^2}{2R_o^2} \right] d\zeta \quad (A3.8)$$

L'écriture des conditions aux limites à la surface de la bulle et loin de celle-ci permet de calculer les constantes d'intégration :

$$K_1 = T_{\infty}$$

$$K = \frac{(T_1 - T_{\infty}) R_o}{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \exp \left[ -\frac{F}{x} - F \frac{x^2}{2} \right] dx} \quad (A3.9)$$

Le nombre de Nusselt est calculé en intégrant (A3.7) à la surface de la bulle. La solution analytique cherchée pour  $f(Ja)$  est alors obtenue en écrivant la relation (A3.1). L'expression de  $f(Ja)$  est une fonction du paramètre  $F$  qui s'exprime par :

$$f(Ja) = \frac{\pi}{8Ja^2} F$$

$$Ja = F \exp \left[ \frac{3}{2} F \right] \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \exp \left[ -\frac{F}{x} - F \frac{x^2}{2} \right] dx \quad (A3.10)$$

Le tableau A3.1 regroupe les valeurs de  $f(Ja)$  obtenues en résolvant (A3.10) pour différents nombres de Jacob. Ces calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel Mathematica installé sur station IBM RS6000.

Ja	f(Ja)	Ja	f(Ja)	Ja	f(Ja)
0.01	44.538	0.75	1.5571	20	0.7832
0.02	23.451	1	1.3663	25	0.7766
0.05	10.426	2	1.0686	40	0.7666
0.1	5.8702	5	0.8806	75	0.7589
0.2	3.4632	7.5	0.8377	100	0.7567
0.5	1.9257	10	0.8160		

Tableau A3.1 : valeurs de f(Ja)

### A3.2 Calcul de la force exercée sur une bulle de rayon variable par un écoulement potentiel uniforme

---

Nous nous proposons dans cette annexe d'obtenir la force de traînée exercée par un écoulement uniforme sur une bulle de gaz dont le rayon varie dans le temps en calculant la dissipation d'énergie de l'écoulement potentiel. Pour cela on considère une bulle sphérique de rayon variable en translation avec la vitesse  $\mathbf{U}_b = U_b \mathbf{e}_x$  au sein d'un liquide au repos. Dans ces conditions, le potentiel des vitesses s'écrit en coordonnées sphériques centrées sur la bulle :

$$\Phi(r, \theta, t) = U_b \frac{R^3}{2r^2} \cos\theta - \dot{R} \frac{R^2}{r} \quad (\text{A3.11})$$

#### A.3.2.a Ecriture du théorème de la dissipation

Dans le cas qui nous intéresse, la surface de la bulle se déplace et l'écriture du théorème de la dissipation est plus délicate que dans la situation où l'interface est immobile. En effet le travail du tenseur des contraintes est dû comme dans le cas classique au mouvement de translation de la bulle mais également au déplacement radial de sa surface. La force qui s'exerce

sur la bulle est la résultante des contraintes intégrées sur sa surface. Elle s'écrit compte tenu de la condition de cisaillement nul (1.34) :

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \Sigma_{nn} \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{A3.12})$$

où  $\Sigma = (-P \mathbf{I} + \rho \mathcal{T})$  est le tenseur des contraintes et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à la surface de la bulle. Le théorème de la dissipation résulte de l'écriture du bilan d'énergie cinétique dans tout l'espace. L'équation de bilan local de l'énergie cinétique est obtenue en réalisant le produit scalaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.1.b) par le vecteur vitesse. Cette équation s'écrit, en notant  $D = 2\mu S_{ij}S_{ij}$  la dissipation visqueuse de l'écoulement et  $S_{ij} = (\partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i) / 2$  le tenseur des taux de déformation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \mathbf{V} \right) - \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \Sigma) + D = 0 \quad (\text{A3.13})$$

On considère le domaine de fluide  $\vartheta$  compris entre la surface de la bulle  $\Gamma$  et une sphère concentrique à la bulle de surface  $\Gamma_A$  et de rayon  $A$ . L'intégration de chaque terme de (A3.13) dans  $\vartheta$  s'écrit :

$$\int_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) d\vartheta = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\vartheta} \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} d\vartheta - \int_{\Gamma+\Gamma_A} \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \mathbf{V}_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma \quad (\text{A3.14.a})$$

$$\int_{\vartheta} \nabla \cdot \left( \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \mathbf{V} \right) d\vartheta = \int_{\Gamma+\Gamma_A} \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma \quad (\text{A3.14.b})$$

$$\int_{\vartheta} \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \Sigma) d\vartheta = \int_{\Gamma+\Gamma_A} (\mathbf{V} \cdot \Sigma) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma \quad (\text{A3.14.c})$$

où  $\mathbf{n}_{\Gamma}$  et  $\mathbf{V}_{\Gamma}$  sont respectivement la normale sortante par rapport au domaine  $\vartheta$  et la vitesse de déplacement de la surface considérée. Sur la surface de la bulle  $\Gamma$ , la relation entre  $\mathbf{n}_{\Gamma}$  et  $\mathbf{n}$  s'écrit :

$$\mathbf{n} = -\mathbf{n}_{\Gamma} \quad (\text{A3.15})$$

Les différentes intégrales sur  $\Gamma_A$  tendent vers 0 quand A tend vers l'infini (Tâm, 1981). Elles sont calculées de manière classique en considérant que, suffisamment loin de la bulle, le champ des vitesses de l'écoulement potentiel constitue une bonne approximation du champ réel. La relation (A3.13) s'écrit alors compte tenu de (A3.14) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\vartheta} \rho \frac{V^2}{2} d\vartheta + \int_{\Gamma} \rho \frac{V^2}{2} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma} (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma + \int_{\vartheta} D d\vartheta = 0 \quad (\text{A3.16})$$

Compte tenu de la relation (1.29), déduite du bilan de masse à la surface de la bulle en prenant en compte le rapport des masses volumiques des deux phases, la deuxième intégration dans (A.3.16) vérifie :

$$\int_{\Gamma} \rho \frac{V^2}{2} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (\text{A3.17})$$

Le passage le plus délicat de ce calcul concerne l'évaluation de la puissance des contraintes s'exerçant sur la surface de la bulle. Lorsque l'interface est immobile, cette intégrale s'écrit de manière immédiate comme étant l'opposée de la puissance des efforts de traînée exercés par l'écoulement sur la bulle. Lorsque l'interface se déplace, à cette puissance du tenseur des contraintes suivant le déplacement  $\mathbf{U}_b = U_b \mathbf{e}_x$  s'ajoute la puissance développée par les contraintes suivant le déplacement radial de l'interface  $-\dot{R} \mathbf{n}_{\Gamma}$  :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma = \underbrace{\int_{\Gamma} \Sigma_{nn} U_b \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma}_{-F_D \cdot \mathbf{U}_b} + \underbrace{\int_{\Gamma} \Sigma_{nn} (-\dot{R} \mathbf{n}_{\Gamma}) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma}_{-\dot{R} \int_{\Gamma} \Sigma_{nn} d\Gamma} \quad (\text{A3.18})$$

On notera par la suite  $I_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \Sigma_{nn} d\Gamma$ .

Le principal problème persiste car l'évaluation de l'intégrale  $I_{\Gamma}$  nécessite la connaissance de la contrainte normale  $\Sigma_{nn}$  sur la surface. Evidemment, si cette contrainte était connue, le calcul de la traînée se réaliserait de manière directe à l'aide de la relation (A3.12).

A ce stade du calcul, le théorème de la dissipation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\vartheta} \rho \frac{V^2}{2} d\vartheta + F_D \cdot \mathbf{U}_b + \dot{R} I_{\Gamma} + \int_{\vartheta} D d\vartheta = 0 \quad (\text{A3.19})$$

### A.3.2.b Calcul du travail radial $I_\Gamma$ du tenseur des contraintes

L'utilisation du théorème de la dissipation offre le formidable intérêt de pouvoir calculer la force de traînée  $F_D$  sur la bulle sans nécessiter la connaissance des champs de vitesse et de pression dans la couche limite de celle-ci. Elle est donc particulièrement intéressante dans le cas où l'écoulement réel est très proche de l'écoulement potentiel mais en diffère par la condition de cisaillement nul sur la bulle. En effet dans ces conditions, l'intégration de la contrainte normale  $(\Sigma_{nn})_{\text{pot}}$  calculée avec le champ potentiel ne donne pas la totalité de la traînée car la correction de pression  $p_{vd}$  d'origine visqueuse, provenant de la vorticité créée à la surface de la bulle par la condition de cisaillement nul (1.34), apporte une contribution à la traînée qui est du même ordre (en  $Re^{-1}$ ) que le terme de contrainte normale visqueuse [Moore 1959, Moore 1963, Levich 1962]. La contrainte normale à l'interface s'écrit en fait à l'ordre  $O(Re^{-1})$  :

$$\Sigma_{nn} = (\Sigma_{nn})_{\text{pot}} - p_{vd} \quad (\text{A3.20})$$

La correction de pression  $p_{vd}$  est dans le cas de l'écoulement stationnaire en l'absence de déplacement de l'interface [Kang & Leal, 1988] :

$$p_{vd} = -\frac{6}{Re} \cos \theta \quad (\text{A3.21})$$

Elle est antisymétrique par rapport à l'angle polaire  $\theta$  sur  $[0, \pi]$  et sa contribution à  $I_\Gamma$  est donc nulle. Par des considérations purement qualitatives, on constate que la composante radiale de la vitesse du fluide induite par le déplacement de l'interface est indépendante de l'angle polaire  $\theta$  et ne change pas les symétries par rapport à  $\theta$  de la correction de vitesse et par conséquent de la correction de pression  $p_{vd}$ . Ainsi un calcul analogue à celui de Kang & Leal (1988), si les équations voulaient bien se laisser intégrer, aboutirait à une correction de pression antisymétrique par rapport à  $\theta$ . Par conséquent la contribution de  $p_{vd}$  à  $I_\Gamma$  est nulle. L'intégrale  $I_\Gamma$  s'exprime donc en fonction du tenseur des contraintes calculé avec le champ de vitesse et de pression de l'écoulement potentiel (A.3.11) :

$$I_\Gamma = \int_\Gamma \Sigma_{nn} d\Gamma = \int_\Gamma (\Sigma_{nn})_{\text{pot}} d\Gamma \quad (\text{A3.22})$$

### A.3.2.c Calcul de la force totale

Le théorème de la dissipation (A3.19), compte tenu de (A3.22), s'écrit finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\vartheta} \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} d\vartheta + \mathbf{F}_D \cdot \mathbf{U}_b + \dot{R} \int_{\Gamma} (\Sigma_{nn})_{\text{pot}} d\Gamma + \int_{\vartheta} D d\vartheta = 0 \quad (\text{A3.23})$$

Le calcul des différentes intégrales de (A3.23) est immédiat et aboutit aux expressions :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\vartheta} \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} d\vartheta = \pi \rho R^2 \dot{R} U_b^2 + 4\pi \rho R^3 \dot{R} \ddot{R} + 6\pi \rho R^2 \dot{R}^3 \quad (\text{A3.24.a})$$

$$\dot{R} \int_{\Gamma} (\Sigma_{nn})_{\text{pot}} d\Gamma = -6\pi \rho R^2 \dot{R}^3 - 4\pi \rho R^3 \dot{R} \ddot{R} + \pi \rho R^2 \dot{R} U_b^2 - 16\pi \mu R \dot{R}^2 \quad (\text{A3.24.b})$$

$$\int_{\vartheta} D d\vartheta = +12\pi \mu R U_b^2 + 16\pi \mu R \dot{R}^2 \quad (\text{A3.24.c})$$

La force totale exercée sur la bulle est constituée d'un terme d'inertie et du terme de traînée visqueuse classique de l'écoulement stationnaire. Elle s'exprime finalement par :

$$\mathbf{F}_D = -2\pi \rho U_b R(t)^2 \dot{R}(t) - 12\pi \mu R(t) \mathbf{U}_b \quad (\text{A3.25})$$

l'expression (A3.25) peut également se mettre sous la forme vectorielle suivante :

$$\mathbf{F}_D = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \vartheta_b \mathbf{U}_b \right) - C_D \frac{1}{2} \rho \pi R^2 U_b \mathbf{U}_b \quad (\text{A3.26})$$

où  $\vartheta_b = 4\pi R^3/3$  est le volume de la bulle et  $C_D$  est le coefficient de traînée visqueuse calculé à l'aide de la dissipation de l'écoulement potentiel à la précision  $O(\text{Re}^{-1})$  :

$$C_D = \frac{48}{\text{Re}(t)} \quad (\text{A3.27})$$

## Annexe 4

### Tableaux de données

A4.1 Nombre de Nusselt pour une bulle sphérique au sein d'un écoulement uniforme et stationnaire

A4.2 Valeurs numériques de  $J(\epsilon)$  calculées par *McLaughlin* (1991)



### A4.1 Nombre de Nusselt pour une bulle sphérique au sein d'un écoulement uniforme et stationnaire

Dans le tableau A4.1 sont regroupés les résultats numériques du transfert interfacial entre une bulle sphérique et un écoulement uniforme et stationnaire à différents nombre de Reynolds  $Re$  et de Prandtl  $Pr$  [Legendre, 1991]. Ils ont été complétés et comparés avec des simulations réalisées avec la version actuelle de JADIM pour les besoins de cette étude.

Pr	Re	Nu	Pr	Re	Nu	Pr	Re	Nu
1	0.1	2.06	1	20	5.33	10	10	9.56
	0.2	2.10		30	6.34		20	13.6
	0.3	2.14		40	7.22		30	16.84
	0.4	2.18		50	8.01		40	19.69
	0.5	2.21		60	8.73		50	22.22
	0.6	2.24		70	9.41		60	24.54
	0.7	2.28		80	10.04		70	26.68
	0.8	2.31		90	10.63		80	28.68
	0.9	2.34		100	11.20		90	30.56
	1	2.37		200	15.82		100	32.36
	2	2.64		300	19.41			
	5	3.27		400	22.44			
10	4.08	500	25.11					

Tableau A4.1 : nombre de Nusselt en écoulement uniforme et stationnaire

### A4.2 Valeurs numériques de $J(\varepsilon)$ calculées par *McLaughlin* (1991)

Dans le tableau A4.2 sont regroupées les valeurs numériques de  $J(\varepsilon)$  calculées par *McLaughlin* (1991) qui interviennent dans l'expression du coefficient de portance (4.10) pour la sphère solide :

$$C_L = \frac{27}{2\pi^2} (\text{Re } A_\Omega)^{-1/2} J(\varepsilon)$$

et l'expression (4.36) pour la bulle sphérique :

$$C_L = \frac{6}{\pi^2} (\text{Re } A_\Omega)^{-1/2} J(\varepsilon)$$

$\varepsilon$	$J(\varepsilon)$
0.025	-0.0000133
0.05	-0.0002845
0.1	-0.004658
0.15	-0.01458
0.2	-0.01247
0.25	0.02782
0.3	0.1179
0.4	0.4076
0.5	0.7350
0.6	1.0236

$\varepsilon$	$J(\varepsilon)$
0.7	1.2554
0.8	1.436
0.9	1.576
1	1.686
1.5	1.979
2	2.094
5	2.227
10	2.247
20	2.252
$\infty$	2.255

Tableau A4.2 : Valeurs numériques de  $J(\varepsilon)$  calculées par *McLaughlin* (1991)

**WFT**

*Service de reprographie*

*J. Rambouil*

*9, Allée St. Camille Leca  
31400 Toulouse ☎ 01.28.58.27*