



**HAL**  
open science

# Étude des phénomènes de crissement pour les freins automobiles

Guillaume Fritz

► **To cite this version:**

Guillaume Fritz. Étude des phénomènes de crissement pour les freins automobiles : Modélisation non-linéaire et conception robuste. Vibrations [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 2007. Français. NNT: . tel-04621171

**HAL Id: tel-04621171**

**<https://hal.science/tel-04621171>**

Submitted on 23 Jun 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

présentée devant  
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR**

Spécialité : Mécanique

par

**Guillaume FRITZ**

# **Etude des phénomènes de crissement pour les freins automobiles**

Modélisation non-linéaire et conception robuste

Soutenue publiquement le 29 juin 2007 devant le jury :

<b>E. AUBRY</b> , Professeur, ENSISA, Université de Haute-Alsace	Rapporteur
<b>J.M. DUFFAL</b> , Ingénieur, RENAULT	Examineur
<b>J.N. GENCE</b> , Professeur, LMFA, Ecole Centrale de Lyon	Examineur
<b>L. JÉZÉQUEL</b> , Professeur, LTDS, Ecole Centrale de Lyon	Directeur de thèse
<b>B. PESEUX</b> , Professeur, GeM, Ecole Centrale de Nantes	Rapporteur
<b>J.J. SINOUE</b> , Maître de conférences, LTDS, Ecole Centrale de Lyon	Examineur





**ECOLE CENTRALE DE LYON**  
**DIRECTION DE LA RECHERCHE**

**liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon.**

<b>Nom-Prénom</b>	<b>Corps grade</b>	<b>Laboratoire ou à défaut département ECL</b>	<b>Etablissement</b>
AURIOL Philippe	professeur	CEGELY	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	CEGELY	ECL
BURET François	maître de conférences	CEGELY	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	CEGELY	ECL
NICOLAS Alain	professeur	CEGELY	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	CEGELY	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	CEGELY	ECL
VOLLAIRE Christian	maître de conférences	CEGELY	ECL

**Nbre Cégely 11**

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL

**Nbre DER EEA 2**

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

**Nbre DER STMS 2**

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

**Nbre ICJ 7**

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
----------------	------------	------	-----

**Nbre ICTT 1**

CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	LEOM	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	LEOM	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	LEOM	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	professeur	LEOM	ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	LEOM	ECL
O'CONNOR Ian	maître de conférences	LEOM	ECL

PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	LEOM	ECL
ROBACH Yves	professeur	LEOM	ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	LEOM	CNRS/ECL

**Nbre LEOM 16**

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
-------------	------------	-------	-----

**Nbre LIRIS 1**

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT geneviève	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	maître de conférences	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

**Nbre LMFA 20**

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	maître de conférences	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	professeur émérite	LTDS	ECL

**Nbre LTDS 24**

Total HdR ECL

84

# Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés dans le cadre d'une convention CIFRE entre Renault et le laboratoire LTDS de l'Ecole Centrale de Lyon.

J'ai été accueilli dans le groupe acoustique de la direction de la recherche de Renault. Je remercie Stéphane Bonnet et Virginie Maillard qui ont successivement dirigé cette équipe et qui ont veillé à ce que mon travail se déroule dans de bonnes conditions et soit valorisé. J'ai été encadré par Jean-Marc Duffal, que je tiens à remercier particulièrement pour m'avoir soutenu et guidé tout au long de la thèse.

Je remercie sincèrement Louis Jézéquel de la confiance qu'il m'a témoigné en me proposant et en dirigeant cette thèse. Je remercie également Jean-Jacques Sinou, qui a co-encadré mes travaux, pour ses conseils avisés, sa motivation communicative et pour m'avoir encouragé à publier mes résultats.

Je remercie Evelyne Aubry et Bernard Peseux pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que Jean-Noël Gence pour en avoir présidé le jury.

Chez Renault, j'ai profité de la synergie apportée par un groupe de travail spécifique dédié aux bruits de frein. Je remercie tous les membres de ce groupe, avec lesquels j'ai eu des échanges fructueux tout au long de ces trois années. J'adresse en particulier mes remerciements à Philippe Chatot et Elodie Hermet, ainsi qu'à Xavier Laparra et David Perez-Recio pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux. Je tiens également à remercier vivement Bertrand Andro pour m'avoir transmis les résultats de son stage et ainsi m'avoir fait gagner un temps précieux en début de thèse.

Je remercie David Huart, Pascal Lardeur, Joël Hettinger et Anne-Lee Join-Lambert pour leur patience et l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée en ce qui concerne la modélisation numérique et l'utilisation des codes de calcul (Nastran, Abaqus, Sysnoise...).

Je remercie tous les membres du groupe acoustique pour leur disponibilité et pour la bonne ambiance de travail qu'ils ont su créer. J'associe également à ces remerciements l'ensemble des doctorants et des membres de l'équipe d2s qui m'ont accueilli lors de mes séjours à Ecully.



# Résumé

Cette thèse s'articule autour de deux thèmes principaux : la compréhension fine et l'analyse robuste du crissement de frein.

Afin de prédire le crissement, une méthodologie linéaire basée sur un modèle éléments finis représentatif d'un frein réel est proposée dans un premier temps. Ce modèle permet de mettre en évidence le concept de coalescence de modes et de le généraliser afin de considérer le crissement comme un phénomène multiparamétrique de couplage de modes. Une étude originale de l'effet de l'amortissement sur la stabilité du système est également réalisée. Dans un second temps, une méthodologie non-linéaire incluant un calcul statique non-linéaire, une linéarisation du problème et une analyse aux valeurs propres complexes est adoptée. L'influence de la position d'équilibre statique sur le comportement dynamique du système est expliquée. Des courbes de coalescence présentant des discontinuités sont mises en évidence. Ces discontinuités dues aux changements de position d'équilibre statique expliquent la nature fugace du crissement lorsque le système est faiblement chargé.

Pour concevoir au mieux un système de freinage, il est important de prendre en compte la problématique du crissement au plus tôt dans le processus de conception. Un modèle de conception est proposé et est capable de représenter à moindre coût le comportement nominal du système ainsi que sa variabilité aux paramètres. Ce modèle permet de hiérarchiser les paramètres dimensionnants en fonction de leur impact sur le crissement. Afin d'évaluer les performances du système en prenant en compte la variabilité aux conditions d'utilisation et d'environnement, une démarche nommée matrix test numérique est proposée et permet de balayer toutes les conditions dans lesquelles le système est susceptible d'être utilisé. Une démarche de conception robuste, qui s'appuie sur les matrix tests numériques, est enfin proposée afin de trouver une solution plus performante et plus robuste que la solution initiale vis à vis des différentes dispersions. Cette approche aboutit à une solution qui présente un risque de crissement quatre fois inférieur à la solution initiale.

## Mots clés :

Crissement, Frein, Eléments finis, Frottement, Bifurcation de Hopf, Amortissement, Variabilité, Conception robuste



# Abstract

This study deals with advanced understanding and robust analysis of brake squeal.

First, a linear methodology based on the finite element model of an actual brake corner is proposed. This model points out the mode lock-in mechanism, which may be generalized to consider squeal as a multiparametric mode coupling phenomenon. An original study dealing with the effect of damping on the system stability has been conducted. Then, a non-linear methodology including a non-linear static step, a linearization process and a complex eigenvalue analysis is applied. The effect of static position on dynamic behaviour is explained and coalescence curves featuring discontinuities are shown. These discontinuities, which are induced by changes in static position, account for the fugitive nature of squeal when the brake is weakly loaded.

It is important to consider squeal upstream in the development process to improve braking systems. A cost effective design model, which is able to reproduce with accuracy the nominal behaviour of the system and its variability to parameters, has been proposed. Thanks to this model, major parameters are ranked with respect to their effect on squeal. In order to assess the system performance considering operative and environment parameters, a numerical matrix test methodology has been proposed and sweeps all the conditions the brake may face. A robust design approach based on numerical matrix tests has been undertaken to find a more competitive and more robust solution. This approach leads to a solution whose squeal risk is four times less than the initial one.

## Keywords:

Squeal, Brake, Finite Elements, Friction, Hopf bifurcation, Damping, Variability, Robust design



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Etat de l'art du crissement</b>	<b>3</b>
1.1 Bruits induits par le frottement . . . . .	3
1.2 Description des systèmes de freinage . . . . .	4
1.3 Travaux expérimentaux sur le crissement de frein . . . . .	7
1.3.1 Processus de développement et de validation . . . . .	7
1.3.2 Moyens de mesure . . . . .	9
1.3.3 Principales conclusions . . . . .	12
1.4 Modélisation du crissement de frein . . . . .	16
1.4.1 Phénoménologie . . . . .	16
1.4.2 Non-linéarités . . . . .	25
1.4.3 Amortissement . . . . .	26
1.4.4 Vibrations du disque . . . . .	27
1.4.5 Acoustique . . . . .	31
1.5 Robustesse et fiabilité . . . . .	32
1.5.1 Problématique . . . . .	32
1.5.2 Analyse de robustesse . . . . .	33
1.5.3 Analyse de fiabilité . . . . .	34
1.5.4 Conception robuste . . . . .	35
1.6 Conclusion . . . . .	38
<b>2 Modèle linéaire</b>	<b>39</b>
2.1 Analyse aux valeurs propres complexes . . . . .	39
2.1.1 Mise en équation . . . . .	39
2.1.2 Propriétés du problème aux valeurs propres . . . . .	40
2.1.3 Approches directe et modale . . . . .	41
2.1.4 Algorithmes de résolution . . . . .	41
2.1.5 Signification physique . . . . .	42
2.2 Synthèse modale . . . . .	43
2.2.1 Sous-structuration . . . . .	43
2.2.2 Approche modale semi-analytique . . . . .	43
2.2.3 Développement limité . . . . .	44
2.3 Modèle éléments finis . . . . .	45
2.3.1 Maillage . . . . .	45
2.3.2 Liaisons . . . . .	45
2.3.3 Modélisation du frottement . . . . .	46
2.4 Comparaison des méthodes . . . . .	47
2.4.1 Précision . . . . .	47

2.4.2	Temps de calcul . . . . .	48
2.5	Effet du coefficient de frottement . . . . .	49
2.5.1	Etude paramétrique . . . . .	49
2.5.2	Coalescence des modes 44 et 45 . . . . .	50
2.5.3	Marche avant - Marche arrière . . . . .	53
2.5.4	Facteurs de participation modale . . . . .	53
2.5.5	Phénomène de découplage . . . . .	59
2.6	Effet du module d'Young du disque . . . . .	60
2.6.1	Plan d'expériences . . . . .	60
2.6.2	Courbes de coalescence fonction de $\mu$ . . . . .	60
2.6.3	Courbes de coalescence fonction de $E_d$ . . . . .	63
2.6.4	Courbes de coalescence biparamétriques $\mu, E_d$ . . . . .	64
2.6.5	Zones de stabilité . . . . .	65
2.7	Effet de l'amortissement . . . . .	68
2.7.1	Problématique . . . . .	68
2.7.2	Mise en équation . . . . .	68
2.7.3	Couplages simples . . . . .	69
2.7.4	Couplages multi-modes . . . . .	79
2.8	Conclusion . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Modèle non-linéaire</b>	<b>87</b>
3.1	Etude statico-dynamique . . . . .	87
3.1.1	Présentation des outils . . . . .	87
3.1.2	Méthode de Newton-Raphson . . . . .	91
3.1.3	Formulation du contact . . . . .	92
3.1.4	Linéarisation . . . . .	94
3.1.5	Synthèse . . . . .	95
3.2	Etude statico-dynamique au nominal . . . . .	96
3.2.1	Modèle éléments finis . . . . .	96
3.2.2	Stratégie de calcul . . . . .	98
3.2.3	Comportement statique . . . . .	99
3.2.4	Comportement dynamique . . . . .	105
3.3	Etude paramétrique au coefficient de frottement . . . . .	107
3.3.1	Comportement statique . . . . .	107
3.3.2	Comportement dynamique . . . . .	111
3.4	Etudes paramétriques à la pression hydraulique . . . . .	114
3.4.1	Comportement statique . . . . .	114
3.4.2	Comportement dynamique . . . . .	116
3.5	Plan d'expériences complet ( $\mu, P$ ) . . . . .	118
3.5.1	Comportement statique . . . . .	118
3.5.2	Comportement dynamique . . . . .	121
3.6	Rayonnement acoustique . . . . .	123
3.7	Conclusion . . . . .	125
<b>4</b>	<b>Modèle de conception</b>	<b>127</b>
4.1	Ingénierie système . . . . .	127
4.1.1	Cycle en V . . . . .	127
4.1.2	Chaînage des modèles dans la phase de conception . . . . .	128
4.1.3	Application au crissement de frein . . . . .	128
4.1.4	Synthèse des travaux sur la variabilité et la robustesse du crissement . . . . .	129

4.1.5	Conclusion . . . . .	130
4.2	Construction du modèle de conception . . . . .	130
4.2.1	Identification des paramètres . . . . .	130
4.2.2	Construction du modèle . . . . .	130
4.3	Comparaison avec le modèle de développement . . . . .	131
4.3.1	Recalage . . . . .	131
4.3.2	Point de fonctionnement nominal . . . . .	131
4.3.3	Effet du coefficient de frottement . . . . .	133
4.3.4	Effet de la pression hydraulique . . . . .	137
4.3.5	Conclusion sur la représentativité du modèle . . . . .	138
4.4	Etudes paramétriques . . . . .	141
4.4.1	Amortissement induit par le frottement . . . . .	141
4.4.2	Comportement en marche arrière . . . . .	142
4.4.3	Variabilité à l'usure . . . . .	145
4.4.4	Module d'Young des pièces frottantes . . . . .	148
4.4.5	Synthèse des études paramétriques . . . . .	149
4.5	Etudes de sensibilité . . . . .	152
4.6	Matrix test numérique . . . . .	155
4.6.1	Matrix test $\mu.P.V.M$ . . . . .	155
4.6.2	Matrix test $\mu.P.M.E_d.E_p$ . . . . .	158
4.7	Robustesse à l'usure . . . . .	161
4.7.1	Problématique . . . . .	161
4.7.2	Usure des plaquettes . . . . .	162
4.7.3	Usure du disque . . . . .	164
4.7.4	Usure du moule du disque . . . . .	166
4.8	Conception robuste . . . . .	167
4.8.1	Plan complet $(\mu, E_p)$ . . . . .	167
4.8.2	Plan complet $(\mu, E_d)$ . . . . .	168
4.8.3	Plan complet $(E_d, E_p)$ . . . . .	170
4.8.4	Choix des plaquettes . . . . .	172
4.8.5	Choix des matériaux . . . . .	174
4.9	Conclusion . . . . .	178
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>181</b>
	<b>Publications personnelles</b>	<b>183</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>185</b>
	<b>Nomenclature</b>	<b>201</b>
	<b>A Modèle pion-disque</b>	<b>203</b>
A.1	Modèle linéaire . . . . .	203
A.2	Modèle non-linéaire . . . . .	203
	<b>B Modélisation par éléments finis</b>	<b>205</b>
B.1	Solveurs complexes . . . . .	205
B.2	Matériaux anisotropes et orthotropes . . . . .	206
	<b>C Relations non-amorti / iso-amorti</b>	<b>207</b>



# Introduction

Le crissement est un bruit de frein très gênant qui se caractérise par des niveaux acoustiques très importants dans la plage de fréquence  $[1, 10]$  kHz. Ce problème inhérent aux systèmes de freinage n'a jamais été aussi critique qu'aujourd'hui pour les constructeurs automobiles. En effet, ces dernières années l'augmentation des performances des systèmes de freinage nécessaire à la réduction des distances d'arrêt a conduit à augmenter de façon très importante leur propension au crissement. En parallèle, de gros progrès ont été réalisés sur la plupart des autres bruits du véhicule et leurs niveaux ont été réduits significativement. Aujourd'hui, le conducteur n'accepte plus d'être dérangé par ce bruit strident lorsqu'il freine. Ainsi, le crissement induit de très nombreuses plaintes clients et il est pour certains véhicules le problème qui génère le plus de coûts de garantie.

Jusqu'à présent, le problème est traité de façon expérimentale dans la phase de validation d'un nouveau système de freinage. Ce dernier est testé et des modifications sont proposées s'il n'est pas satisfaisant. Ce processus basé sur une démarche essai-erreur est très long et très coûteux. De plus, il ne permet qu'une marge de manœuvre très limitée puisqu'il est réalisé en fin de projet lorsque les outils définitifs sont déjà fabriqués. Les impératifs de réduction de coût et de raccourcissement des plannings de conception et de développement imposent de trouver une méthode plus efficace pour traiter le problème.

Le crissement de frein appartient à la famille des vibrations auto-entretenues induites par le frottement. Les chercheurs s'y intéressent depuis plus d'une trentaine d'années maintenant, mais la compréhension des phénomènes n'est toujours pas suffisante pour régler le problème. Ils ont commencé par des études purement expérimentales puis ont poursuivi par des travaux de modélisation. Ainsi, de nombreux modèles analytiques à quelques degrés de liberté ont été proposés. Ils ont permis d'identifier la coalescence de modes comme le mécanisme donnant naissance à l'instabilité vibratoire qui apparaît lors du crissement. Néanmoins, ces modèles sont beaucoup trop simplifiés pour pouvoir représenter la réalité des phénomènes. C'est la raison pour laquelle des modèles éléments finis plus détaillés ont vu le jour et ont été étudiés grâce à des analyses aux valeurs propres complexes. Ces techniques de modélisation et d'analyse du crissement de frein commencent à arriver à maturité et peuvent maintenant être mises en œuvre grâce aux progrès récents des moyens informatiques.

La problématique principale associée au crissement de frein est sa nature fugace. En effet, ce phénomène d'instabilité est extrêmement sensible à une multitude de paramètres. Ainsi, que ce soit expérimentalement ou numériquement, la performance d'un système de freinage ne saurait être prédite par une unique évaluation dans les conditions nominales d'utilisation. Il est donc indispensable de hiérarchiser les paramètres et de prendre en compte leur variabilité au travers d'une analyse robuste du crissement. La complexité des phénomènes associée au grand nombre de paramètres potentiellement influents constitue le principal défi de cette étude.

Le sujet de cette thèse s'articule autour de deux thèmes principaux : la compréhension fine et l'analyse robuste du crissement de frein. Ce mémoire s'organise autour de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous ferons un état de l'art relativement large des connaissances acquises sur la thématique du crissement de frein. Nous synthétiserons en particulier les travaux

expérimentaux et de modélisation publiés ces dernières années. Nous introduirons également les notions de robustesse, de fiabilité et de conception robuste.

Dans le second chapitre, nous présenterons un modèle éléments finis représentatif d'un système de freinage réel. Grâce à une analyse aux valeurs propres complexes, nous mettrons en évidence le phénomène de coalescence de modes qui aboutit à l'apparition d'une instabilité vibratoire de type flottement. Des études paramétriques nous permettront de généraliser ce concept de coalescence en considérant le crissement comme un phénomène multiparamétrique de couplage de modes. Nous présenterons ensuite une étude originale de l'effet de l'amortissement sur la stabilité et nous montrerons qu'il peut avoir des conséquences non-intuitives pouvant aller jusqu'à déstabiliser le système dans certains cas.

Dans le troisième chapitre, nous montrerons qu'une prédiction précise du crissement de frein nécessite la prise en compte du chargement appliqué sur le système. Nous proposerons alors un modèle représentatif d'un système réel dans lequel l'ensemble des contacts est modélisé de façon fine. Celui-ci nous permettra de réaliser un calcul statique non-linéaire suivi d'une analyse de stabilité. Nous montrerons au travers d'études paramétriques en quoi la position d'équilibre statique influe sur le comportement dynamique du système. Nous expliquerons en particulier pourquoi l'équilibre des plaquettes joue un rôle essentiel sur la nature fugace du crissement.

Dans le quatrième chapitre, nous aurons pour objectif la réalisation d'un modèle de conception destiné à être utilisé en avant projet. Ce modèle nous permettra dans un premier temps de hiérarchiser les paramètres dimensionnants du système en terme d'impact sur le crissement. Nous proposerons ensuite une méthodologie que nous baptiserons « matrix test numérique » qui permet d'analyser la variabilité des phénomènes aux conditions d'utilisation et d'environnement. Cette méthodologie sera ensuite utilisée dans le cadre d'une démarche de conception robuste et conduira à la proposition d'une solution qui réduit considérablement le risque de crissement.

Nous synthétiserons enfin les apports de cette thèse et évoquerons les perspectives qu'elle ouvre.

# Chapitre 1

## Etat de l'art du crissement

Ce chapitre présente le phénomène de crissement de frein de façon générale ainsi que toutes les thématiques qui s'y rapportent. Dans un premier temps, le crissement de frein est identifié comme un membre de la famille des bruits de frottement. Il est cependant spécifique car causé par une instabilité vibratoire induite par le frottement. Après une présentation générale des systèmes de freinage, un état de l'art des recherches sur ce phénomène est proposé, à la fois en terme de mesure et de modélisation. Celui-ci montre que le crissement est par nature extrêmement sensible et qu'il doit donc être abordé en utilisant une approche robuste.

### 1.1 Bruits induits par le frottement

La famille des bruits induits par le frottement regroupe un grand nombre de phénomènes très différents les uns des autres. Dans cette partie, nous nous bornerons aux bruits d'origine automobile. Pour plus d'informations concernant les autres domaines d'application, nous nous référons à la synthèse générale de Akay [12] sur l'acoustique du frottement et aux articles de M.A. Heckl et I.D. Abrahams [59,60,61] qui traitent de la problématique ferroviaire (crissement en courbe des roues de train). Dans une automobile, tous les systèmes impliquant des pièces susceptibles de frotter les unes sur les autres sont potentiellement sources de bruit. Ainsi, nous pouvons citer les grincements d'assemblages, les bruits d'embrayage, les crissements d'essuie-vitre et de lécheur de vitre, etc. Néanmoins, les systèmes qui présentent la plus grande variété de bruits induits par le frottement sont les systèmes de freinage. Ces systèmes, qu'ils soient à disques ou à tambours, peuvent générer près d'une dizaine de types de bruits différents. Ces bruits s'étalent sur tout le spectre audible et ont des implications très différentes. En effet, les phénomènes hautes fréquences n'impliquent généralement que des nuisances sonores, alors que les phénomènes basses fréquences s'accompagnent de vibrations qui se transmettent à l'ensemble du véhicule et qui peuvent altérer les performances de freinage et le contrôle du véhicule. Les cinq types de bruits les plus courants sont regroupés dans le tableau 1.1 et détaillés dans la suite.

Rang	Nom	Name	Fréquence	Vitesse (km/h)	Pression (bar)
1	Crissement BF	LF Squeal	1 - 4 kHz	0 - 10	0 - 30
2	Crissement HF	HF Squeal	4 - 16 kHz	0 - 10	0 - 30
3	Broutement	Judder	10 - 100 Hz	80 - $V_{max}$	10 - 20
4	Grognement	Groan	50 - 500 Hz	0 - 1	5 - 10
5	Bruit de vache	Moan	50 - 100 Hz	0 - 10	0 - 10

TAB. 1.1 – Liste des cinq bruits de frein les plus courants

**Broutement** : ce phénomène se produit principalement lors de freinages à haute et moyenne vitesse en décélération rapide. Il se traduit, en plus du bruit, par des vibrations au volant et à la pédale de frein. Il est associé aux imperfections du disque, quantifiées par sa DTV (*Disc Thickness Variation*). Ces imperfections sont permanentes, pour le broutement à froid (*cold judder*), ou induites par des déformations à chaud, pour le broutement à chaud (*hot judder*). Ces imperfections excitent et mettent en résonance l'ensemble de la structure à chaque tour de roue [102, 93, 84, 47].

**Grognement** : ce bruit basse fréquence est associé à des couples antagonistes moteur et frein. Il se produit lorsqu'on lâche progressivement la pédale de frein. Il apparaît lors d'un freinage en pente avec une boîte de vitesse manuelle et à chaque démarrage avec une boîte automatique. Le mécanisme associé est un phénomène de glissement-adhérence (*Stick-slip*) associé à la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement [6, 74, 155, 24].

**Bruit de vache** : ce bruit, encore appelé hululement, se caractérise par une fréquence fondamentale entre 300 et 400 Hz et plusieurs harmoniques. Il se produit à très basse vitesse, entre 0 et 10km/h, pour une pression de freinage quasi-nulle, et surtout en marche arrière. Lorsque le client entend ce bruit inquiétant, il est surpris et porte immédiatement son véhicule au garage. Le mécanisme associé est une instabilité vibratoire induite par le frottement qui provoque la mise en résonance du train. La plupart des études expérimentales sur le sujet mettent en cause un mode rigide de rotation d'étrier du fait de la souplesse de la chape et du porte fusée [120, 58, 157, 80].

**Crissements** : les crissements se caractérisent par une fréquence pure, entre 1 et 16kHz, et des niveaux acoustiques élevés pouvant atteindre près de 110 dB(A). Ils apparaissent dans des conditions de faible vitesse véhicule, faible température et faible pression hydraulique. Ces bruits ne remettent pas en cause les performances et la sécurité du système de freinage, mais entraînent de nombreuses plaintes clients. Dans la pratique, les crissements sont divisés en deux catégories : les crissements basses et hautes fréquences. La limite entre ces deux catégories est généralement fixée à 4kHz, fréquence qui marque l'apparition du premier mode dans le plan du disque. Le mécanisme associé au crissement est une instabilité vibratoire induite par le frottement.

Parmi les bruits détaillés ci-dessus, seul le broutement est un phénomène de vibration forcé. Tous les autres appartiennent à la famille des vibrations auto-entretenues et ont pour cause une instabilité vibratoire induite par le frottement. Dans la suite, nous allons nous focaliser sur la problématique du crissement de frein. Celle-ci a fait l'objet de très nombreuses études et publications ces trente dernières années. Parmi les études les plus conséquentes, citons les thèses de J.P. Boudot [22], P. Chambrette [26], F. Moiroit [116] et J-J. Sinou [139], les synthèses de R.A. Ibrahim [64, 65] et de N.M. Kinkaid, O.M. O'Reilly et P. Papadopoulos [81], ainsi que le livre de F. Chen, C.A. Tan et R.L. Quaglia [29].

## 1.2 Description des systèmes de freinage

L'objectif de cette partie est de décrire les différentes technologies relatives aux systèmes de freinage. Notons tout d'abord qu'un tel système ne se limite pas aux freins, comme le montre la figure 1.1. L'effort de freinage appliqué par le conducteur sur la pédale de frein est amplifié grâce à l'assistance pneumatique et transmis au maître cylindre. Ce système se charge de convertir l'effort appliqué en pression hydraulique qui est ensuite envoyée aux quatre freins du véhicule. L'ensemble du circuit de commande est conçu de façon à maximiser l'effort appliqué aux freins. Ainsi, la pédale, l'assistance et le système hydraulique engendrent respectivement des rapports de 4, 5 et 5 en terme d'effort. Au final, ceci permet d'obtenir un rapport 100 entre l'effort appliqué

par le conducteur et l'effort appliqué aux freins. Cet effort est distribué de façon optimale entre le train avant et le train arrière grâce au répartiteur de freinage. Pour être complet, mentionnons que cet effort peut être modulé par le système anti-blocage de roue, ABS, et par le système de contrôle de trajectoire, ESP.

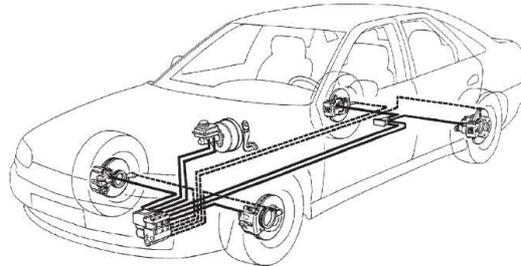
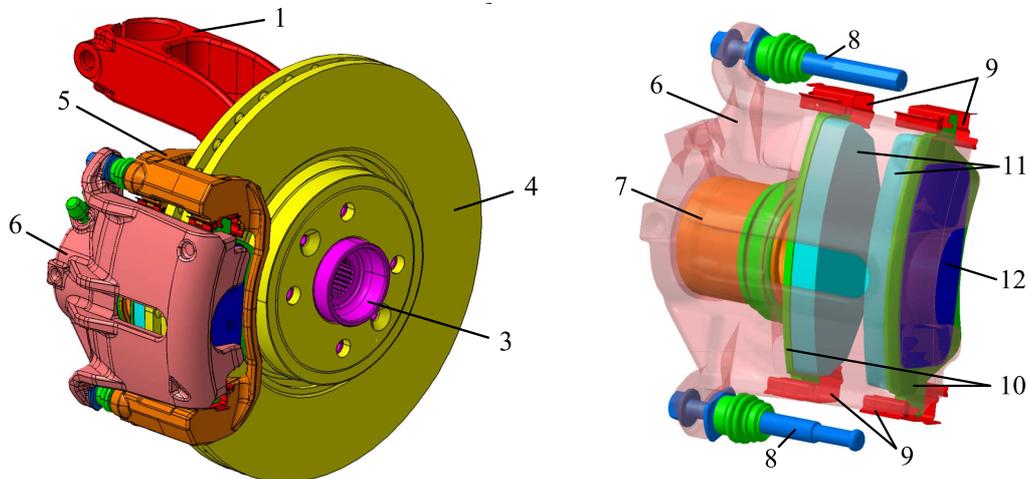


FIG. 1.1 – Structure d'un système de freinage

Nous allons maintenant nous focaliser sur les technologies particulières des freins. Dans le secteur automobile, deux catégories de systèmes de freinage sont utilisées : les freins à tambour et les freins à disque. Les premiers sont cantonnés aux trains arrière des véhicules basse et moyenne gammes, alors que les seconds sont utilisés dans tous les autres cas. Dans la famille des freins à disque, de nombreuses variantes existent [25], dont les principales sont les freins à étrier fixe et les freins à étrier flottant. Nous nous bornerons ici à la description de ce dernier type de frein qui, grâce à un très bon rapport prix-prestations, est le plus largement utilisé.



1	Porte fusée	4	Disque	7	Piston	10	Dos de plaquette
2	Roulement	5	Chape	8	Colonnnettes	11	Garniture
3	Moyeu	6	Etrier	9	Ressort de rappel	12	Shim

FIG. 1.2 – Frein à disque à étrier mobile

La figure 1.2 représente un frein à étrier mobile et permet d'identifier les différentes pièces qui le composent. La spécificité des freins à étrier mobile est, comme son nom l'indique, d'avoir un étrier mobile en translation dans la direction normale au disque. Cette translation est autorisée grâce à la présence des deux colonnettes qui assurent une liaison glissière entre la chape et l'étrier. Une telle technologie permet de se contenter d'un seul piston tout en garantissant une

parfaite répartition de l'effort de freinage de chaque côté du disque. Notons que le rappel du piston est assuré par le retour élastique du joint d'étanchéité, grâce à la géométrie de la gorge dans laquelle il se déforme. Le disque est principalement dimensionné pour la thermique. Il a une forme de « chapeau » afin de protéger au maximum le roulement des fortes températures. Le disque présenté ici est un disque ventilé comportant 36 ailettes de refroidissement. La partie centrale du disque qui se fixe sur le moyeu porte le nom de bol alors que les surfaces frottantes sont désignées par le terme piste. Dans notre exemple, les plaquettes sont maintenues en position par rapport aux butées de chape grâce à des ressorts de rappel. Pour chacun de ces quatre ressorts, trois butées de chapes sont impliquées : deux butées radiales et une butée tangentielle (au disque). Seules les butées tangentielles basses sont impliquées en marche avant, alors que ce sont les butées tangentielles hautes qui sont sollicitées en marche arrière. Afin de faciliter les explications, nous parlerons d'*entrée de couple* et de *sortie de couple* pour indiquer respectivement la première et la dernière partie de la plaquette en contact avec un secteur donné du disque.

Les plaquettes présentent une structure multicouche complexe, composée de la garniture, de la sous-couche, du dos de plaquette et de l'anti-bruit encore appelé *shim*, comme illustré figure 1.3-a. Les garnitures sont réalisées dans un matériau dont les plaquettistes conservent le secret et qui répond à un cahier des charges très exigeant en terme de performances, d'usure, de tenue en température, de silence, etc. La sous-couche permet de lier la garniture au dos de plaquette, qui est en acier. Le shim, représenté figure 1.3-b, est un multicouche métal-polymère conçu pour apporter de l'amortissement au système afin de réduire les problèmes de crissement [39]. Les fabricants de shim proposent une grande variété de produits qui sont optimisés pour des températures de fonctionnement différentes. Dans la pratique, ces anti-bruits ne sont vraiment efficaces que pour les crissements au delà de 5kHz.

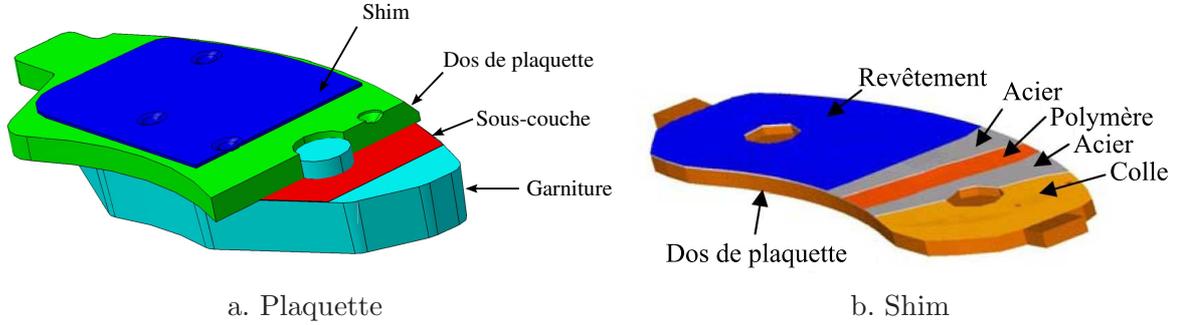


FIG. 1.3 – Structure des plaquettes

Afin d'introduire les notions de couple de freinage et de rayon d'action qui seront utiles dans la suite, nous allons nous intéresser à la garniture simplifiée représentée figure 1.4 en coordonnées cylindriques. Considérons un élément de surface  $dS$  centré autour du point  $M$ . Localement, le disque exerce sur la garniture un effort de frottement  $d\mathbf{T}$  colinéaire à la vitesse de glissement, c'est à dire au vecteur orthoradial  $\mathbf{e}_\theta$ . De façon globale, l'action du disque sur la garniture se caractérise alors par la résultante  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}$  et le moment au point  $O$   $\mathcal{M}_{\text{frottement}}^O$  qui s'expriment :

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}} = \int_S d\mathbf{T} \quad \mathcal{M}_{\text{frottement}}^O = \int_S \mathbf{OM} \wedge d\mathbf{T} \quad (1.1)$$

En utilisant la loi de Coulomb qui relie l'effort tangentiel  $T$  à l'effort normal  $N$  au contact par l'intermédiaire du coefficient de frottement  $\mu$ , et la définition de la pression de contact  $P$ , qui s'écrivent respectivement

$$T = \mu N \quad P = \frac{\partial N}{\partial S} \quad (1.2)$$

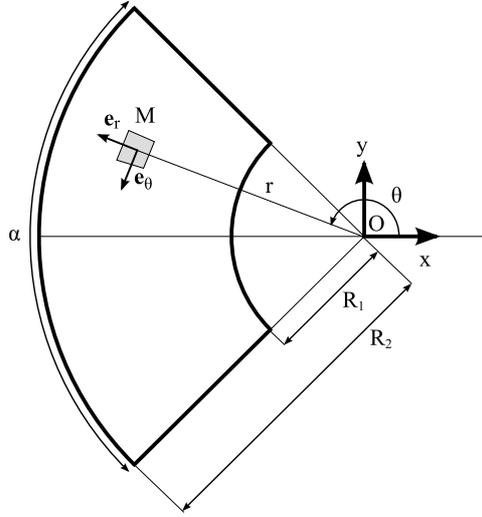


FIG. 1.4 – Estimation des efforts de freinage

nous obtenons :

$$d\mathbf{T} = \mu P dS \mathbf{e}_\theta \quad (1.3)$$

En supposant une pression  $P$  constante à l'interface, l'intégration donne :

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}} = -\mu P (R_2^2 - R_1^2) \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{y} \quad \mathcal{M}_{\text{frottement}}^O = \mu P \alpha \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \mathbf{z} \quad (1.4)$$

avec  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\alpha$  respectivement le rayon intérieur, le rayon extérieur et l'angle qui caractérisent la géométrie de la plaquette. Nous constatons que l'effort résultant est purement vertical et orienté vers le bas. Sa composante en  $\mathbf{x}$  est nulle du fait de la symétrie de la structure par rapport à l'axe  $O\mathbf{x}$ . Le rayon d'action du frein,  $R_a$ , est défini tel que  $|\mathcal{M}_{\text{frottement}}^O| = |\mathbf{F}_{\text{frottement}}| R_a$ . Il s'exprime alors

$$R_a = \frac{\alpha}{3 \sin \frac{\alpha}{2}} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1.5)$$

Le couple de freinage appliqué par les deux plaquettes sur le disque s'écrit :

$$C_{\text{freinage}} = 2 |\mathcal{M}_{\text{frottement}}^O| = 2\mu R_a F_{\text{serrage}} \quad (1.6)$$

avec  $F_{\text{serrage}}$  l'effort de serrage appliqué sur les deux plaquettes.

### 1.3 Travaux expérimentaux sur le crissement de frein

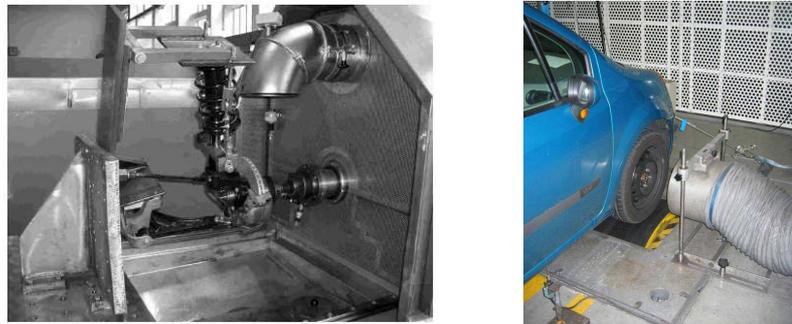
Depuis près de 50 ans, les constructeurs automobiles sont confrontés aux problèmes de crissements de frein. Afin d'obtenir le système le plus silencieux possible, ils ont mis en place un processus de développement et de validation expérimentale à plusieurs niveaux. En parallèle, de nombreuses recherches expérimentales ont été réalisées sur le sujet et ont bénéficié des grandes avancées dans le domaine des moyens de mesures.

#### 1.3.1 Processus de développement et de validation

La mise au point d'un système de freinage en terme de crissement est une tâche extrêmement ardue de par la forte sensibilité du phénomène. En effet, en fonction des conditions de freinage,

de la température et de l'hygrométrie, le système peut être soit totalement silencieux soit très bruyant. La plupart des tests montrent que les faibles températures et les forts taux d'humidité sont propices au crissement. Ainsi, la probabilité de crissement dépend fortement du climat du pays dans lequel le véhicule est utilisé et est d'autant plus forte pendant la saison hivernale. Les automobilistes se rendent également compte de ce phénomène le matin, car leur premier freinage a une probabilité de crisser généralement beaucoup plus importante que les suivants. Ce phénomène est connu sous le nom de *morning squeal*. Outre la sensibilité aux paramètres d'environnement, le crissement est également très sensible aux dispersions de fabrication. Ainsi, il n'est pas rare d'observer deux systèmes ayant la même définition technique, mais des comportements différents en terme de crissement. En raison de son extrême sensibilité aux paramètres d'environnement et aux paramètres dispersés, le crissement de frein doit faire l'objet d'une validation pointue basée sur le calcul de la probabilité de crissement, encore appelée occurrence.

Chaque constructeur possède son propre processus de développement et de validation, mais le principe général demeure identique. Lors du développement d'un nouveau système de freinage, son comportement acoustique est évalué sur un banc appelé dynamomètre. Un tel banc permet d'entraîner en rotation le disque ou le tambour et d'actionner le système de freinage tout en contrôlant tous les paramètres importants que sont la vitesse de rotation, la pression hydraulique, la température et l'hygrométrie. Il existe deux types de dynamomètres : les dynamomètres à entraînement par arbre (*shaft-type dynamometer*) et les bancs à rouleaux pour lesquels l'entraînement se fait par la roue (*chassis-type dynamometer*). Les premiers se limitent au périmètre train, comme illustré figure 1.5-a. et sont donc massivement utilisés par les équipementiers en amont dans le processus de développement. Les seconds réclament un véhicule complet, comme illustré figure 1.5-b., et permettent donc de prédire de façon plus précise le crissement en conditions réelles. Ils sont généralement utilisés par les constructeurs pour valider les solutions. Pour de plus amples informations techniques sur les dynamomètres, nous nous référerons à [152].



a. Dynamomètre à entraînement par arbre      b. Banc à rouleaux

FIG. 1.5 – Dynamomètres

Les essais réalisés sur ces deux types de dynamomètres portent le nom de *matrix test*. Il s'agit d'une série de plusieurs milliers de coups de freins réalisés en suivant un profil de vitesse, de pression, de température et d'hygrométrie prédéfini. Les performances acoustiques du système sont mesurées grâce à un microphone et enregistrées. Le dépouillement de ces données permet d'identifier les fréquences des crissements et d'en calculer l'occurrence. Il permet également d'évaluer la dépendance des phénomènes par rapport aux paramètres d'environnement. Un exemple typique de résultats de matrix test est visible figure 1.6.

Après avoir été validés sur les deux types de bancs dynamométriques, les systèmes de freinage font l'objet d'une dernière campagne de validation en roulage de plusieurs milliers de kilomètres. Les détails de la procédure de validation sont spécifiques à chaque constructeur, mais à titre

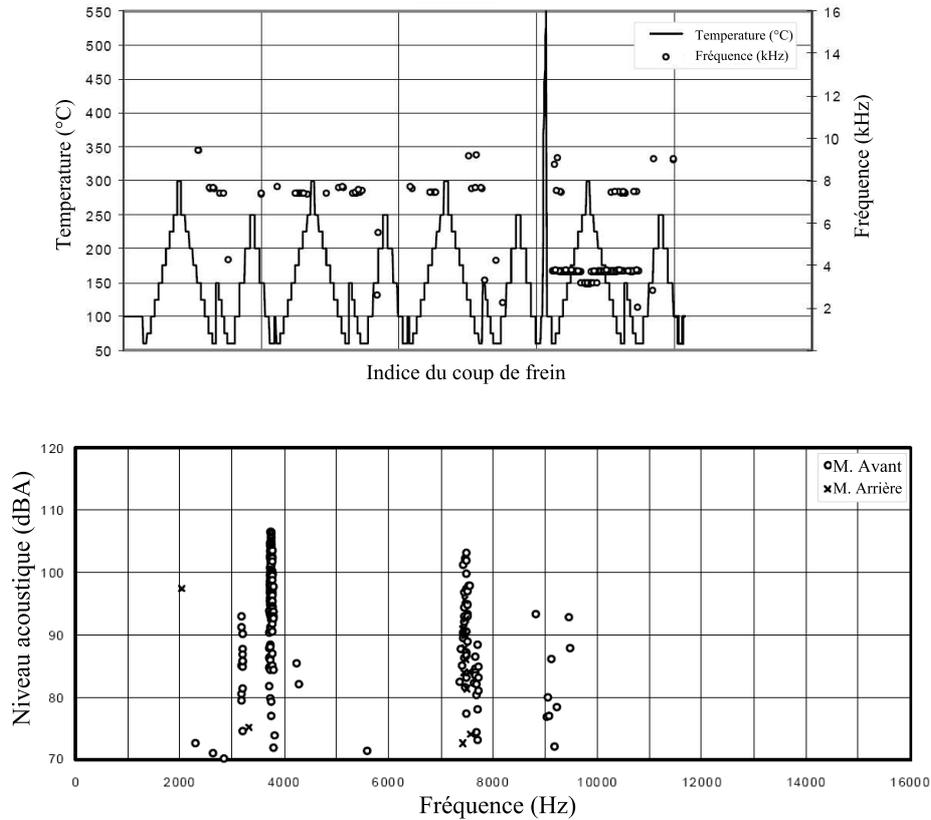


FIG. 1.6 – Résultats typiques d'un matrix test

d'exemple, nous pouvons citer la procédure LACT (Los Angeles City Traffic). Cette procédure, qui a fait l'objet d'une publication [7], est utilisée par les constructeurs et les équipementiers américains. Cette étape est indispensable, car elle correspond à la réalité que percevra le client. Elle présente néanmoins l'inconvénient d'être moins reproductible que les essais sur banc dans la mesure où le conducteur évalue de façon subjective la criticité de chaque freinage et que cette criticité dépend fortement des conditions météorologiques qui ne sont pas contrôlables. Les essais sur banc et en roulage ont fait l'objet de plusieurs comparaisons [8, 104] et restent indispensables et complémentaires pour la validation d'un nouveau système de freinage.

### 1.3.2 Moyens de mesure

Afin d'expliquer les mécanismes mis en jeu lors du crissement de frein, de nombreuses études expérimentales ont été réalisées. Elles consistent à mesurer le comportement vibratoire et/ou acoustique du système de freinage. Ce type de mesure comporte de nombreuses difficultés liées à la présence de pièces tournantes, au caractère hautes fréquences et, dans certains cas, instationnaire du phénomène. Dans la suite, les quatre principaux moyens de mesure sont listés et leurs apports sont détaillés.

#### Mesures accélérométriques

Les premières études expérimentales du crissement de frein sont basées sur des mesures accélérométriques. Compte tenu de la fréquence élevée des vibrations ( $> 1$  kHz), il est nécessaire d'opter pour une résolution spatiale relativement grande, ce qui signifie l'utilisation d'un grand

nombre d'accéléromètres. Il s'agit alors de réaliser une déformée opérationnelle (*ODS : Operative Deflection Shape*) de l'ensemble de la structure en fonctionnement. Un exemple est illustré figure 1.7 et d'autres sont consultables dans les références [100, 40]. Nous voyons apparaître la principale difficulté, qui se concentre au niveau de la mesure des déplacements du disque en rotation. Marschner et Rischbieter proposent une solution efficace, mais relativement complexe à mettre en oeuvre qui consiste à placer des accéléromètres miniaturisés à l'intérieur des conduits de refroidissement du disque [106].

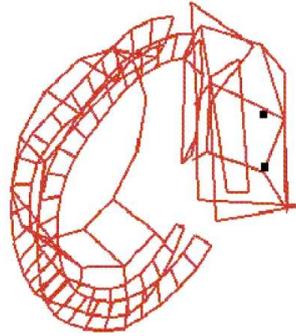


FIG. 1.7 – Mesures accélérométriques - Déformée opérationnelle

### Vibrométrie laser à balayage

Un vibromètre laser est un moyen de mesure sans contact de la vitesse de vibration d'une surface. Lorsque le faisceau laser est pointé sur la surface vibrante, celle-ci le réfléchit et lui impose un décalage en fréquence proportionnel à sa vitesse dans l'axe du faisceau. Ce décalage fréquentiel, connu sous le nom d'effet Doppler, est ensuite mesuré grâce à un dispositif optique et à un détecteur numérique. Les vibromètres les plus basiques se limitent à la mesure de la vitesse en un point et dans une direction. Les appareils plus évolués sont dits à balayage dans la mesure où un jeu de miroirs motorisés combiné à un logiciel permet de mesurer successivement plusieurs points de l'espace. A l'heure actuelle, les vibromètres les plus perfectionnés sont les vibromètres 3D à balayage. Il s'agit en fait d'un système composé de trois têtes de mesure laser couplées à une caméra vidéo et à un logiciel de pilotage automatique, comme illustré figure 1.8-a. Ces appareils permettent de recalculer en chaque point les vibrations de la structure dans les trois directions de l'espace. Comme toutes les techniques optiques, la vibrométrie laser ne peut mesurer que les points visibles de façon directe ou indirecte (avec des miroirs) par la tête laser. D'autre part, cette méthode de mesure n'est pertinente que pour les crissements stationnaires en raison du balayage spatial. Pour d'avantages de détails concernant les possibilités de cette technique, nous consulterons les études [37, 111, 106, 70].

### Holographie laser

Le principe de l'holographie consiste à faire interférer deux faisceaux laser cohérents (issus d'une même source) en un point donné. Si les deux faisceaux ont parcouru des chemins optiques différents avant de se rencontrer, ils ne seront pas en phase et des interférences apparaîtront. Ces interférences seront constructives si la différence de chemin optique est un multiple de la longueur d'onde  $\lambda$  du laser et destructives s'il vaut  $\lambda/2$  modulo  $\lambda$ .

Dans la pratique, on utilise une source laser que l'on sépare en deux faisceaux. Le premier est utilisé comme faisceau de référence et le second passe au travers d'une lentille divergente afin

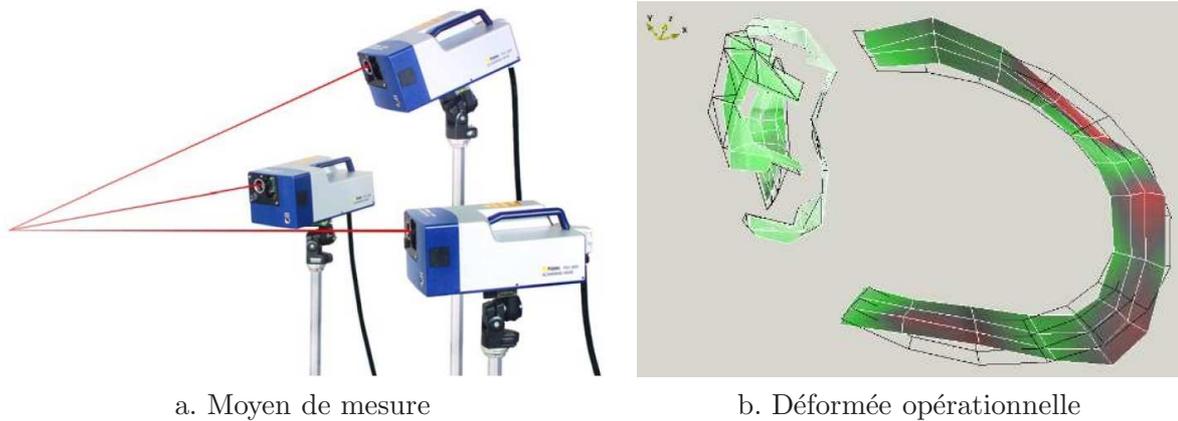


FIG. 1.8 – Vibrométrie laser

d'illuminer l'ensemble du système de freinage. Ce dernier réfléchit une partie de la lumière qui interfère ensuite avec le faisceau de référence au niveau d'une plaque photographique ou d'un capteur numérique. Au final, une image sous forme de franges d'interférences semblable à celle représentée figure 1.9-b est observable. Deux franges destructives successives (représentées en noir) indiquent un déplacement relatif de la structure de  $\lambda/2$ . Ainsi, les franges de l'hologramme peuvent être considérées comme des lignes de niveau : les zones de fortes déformations sont caractérisées par la présence d'un grand nombre de franges. Cette technique présente l'immense avantage de pouvoir déterminer de façon instantanée les déplacements de tous les points visibles de la structure. Cependant, avec cette technique, seuls des déplacements relatifs sont mesurés et il n'est donc pas possible de déterminer le sens des vibrations.

De nombreuses variantes de cette technique existent comme détaillé par Fieldhouse, Ettemeyer et Chen [48]. Mentionnons qu'aujourd'hui, les moyens les plus perfectionnés utilisent le système ESPI (*electronic-speckle pattern interferometry*) et qu'ils sont capable de mesurer les déplacements dans les trois directions de l'espace grâce aux images de trois caméras numériques traitées par un logiciel adéquat 1.9-b. Pour d'avantage de précisions, nous consulterons les études de Chen [27], Fleske [52], Ichiba [66], Krupka [83] et Fieldhouse [49, 150, 51, 50].

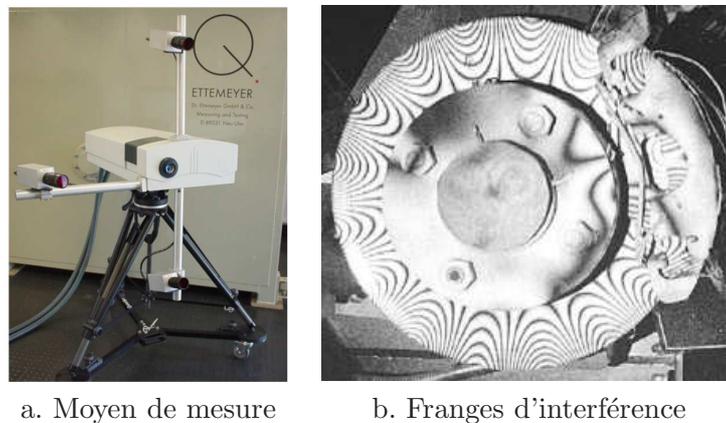
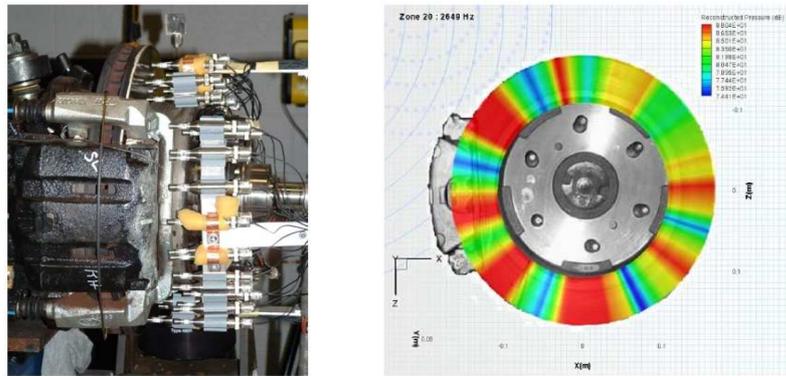


FIG. 1.9 – Holographie laser

### Imagerie acoustique

Ces cinq dernières années, plusieurs chercheurs ont utilisé des moyens de mesure précis du comportement acoustique du système de freinage. Cunefare et Rye ont exploré cette voie en utilisant une sonde intensimétrique qu'ils déplacent autour du système afin de localiser la source acoustique [37]. Flint et Hald utilisent une technique d'imagerie acoustique beaucoup plus performante : l'holographie acoustique instationnaire en champ proche [55]. Grâce à une antenne composée de 100 microphones, ils sont capables de calculer, par rétro-propagation, la pression acoustique instantanée en chaque point du plan du disque. Plus récemment, Wu et al ont utilisé une variante de l'holographie acoustique instationnaire en champ proche : la méthode HELS (*Helmholtz equation least square*) [28, 159]. Leur moyen de mesure et leurs résultats sont illustrés figure 1.10 .



a. Moyen de mesure      b. Cartographie de pression acoustique

FIG. 1.10 – Holographie acoustique

### 1.3.3 Principales conclusions

Tous les moyens de mesure décrits ci-dessus présentent des avantages et des inconvénients particuliers qui les rendent complémentaires. C'est la raison pour laquelle la grande majorité des chercheurs combinent au moins deux de ces moyens de mesure dans leurs études. En synthétisant les très nombreux et très diversifiés travaux expérimentaux, nous pouvons tirer les conclusions suivantes.

#### Nature du crissement

Lorsque le crissement apparaît, toutes les pièces constitutives du système se mettent à vibrer à la même fréquence, en suivant l'évolution temporelle caractéristique représentée figure 1.11. L'accroissement exponentiel de l'amplitude des vibrations au début du signal nous confirme la nature instable du phénomène de crissement. A partir d'un certain temps, l'amplitude des vibrations atteint un niveau borné, qui est en général de l'ordre du micron, appelé cycle limite. Le système continue de vibrer en suivant ce cycle tant que les conditions opérationnelles ne varient pas. Lorsque cela se produit, les vibrations sont progressivement amorties et le système redevient silencieux. Sur banc, certains crissements peuvent être maintenus en continu plusieurs dizaines de minutes alors que d'autres disparaissent dès que la température augmente. Le crissement qui est présenté ici est un cas particulier de crissement intermittent qui se produit au tour de roue du fait de la symétrie imparfaite du système.

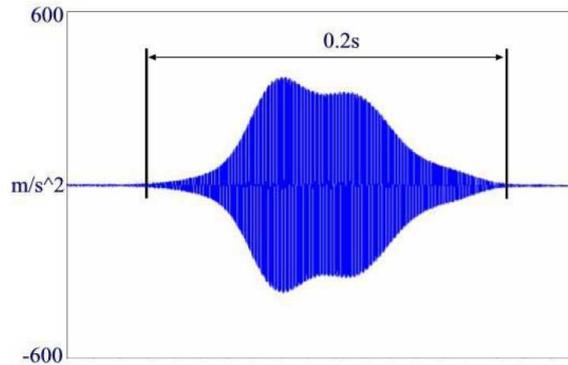


FIG. 1.11 – Evolution temporelle de l'accélération d'un point du système [40]

Lorsqu'on s'intéresse au bruit émis lors d'un crissement « pur », on observe une raie spectrale correspondant à la fréquence des vibrations du système. Dans la pratique, on observe souvent des spectres à plusieurs raies qui correspondent à une fréquence fondamentale et à ses harmoniques, ou alors à plusieurs crissements différents qui apparaissent simultanément. De nombreuses études expérimentales, dont notamment celles qui utilisent les techniques d'imagerie acoustique [55, 28, 159], montrent que le disque est l'élément rayonnant du système. Dans la plupart des cas, ce sont les modes de disque hors du plan qui sont responsables du rayonnement (cf figures 1.7 à 1.10). Cependant, certaines études, dont notamment celles de Matsuzaki et al. [110] et de Yang et al. [160], montrent que les modes dans le plan peuvent également être impliqués dans les crissements hautes fréquences.

### Travelling waves

Les premières mesures du comportement vibratoire instationnaire du frein lors du crissement ont été réalisées grâce à l'holographie laser. Elles ont montré que les modes de flexion de disque étaient stationnaires, c'est à dire fixes par rapport au repère global, en dépit de la rotation du disque. A partir des années 1990, Fieldhouse et al. poursuivent l'étude du comportement instationnaire du frein par holographie laser et publient leurs résultats à de nombreuses reprises. Ils montrent l'existence de modes de flexion de disque qui semblent tourner autour de l'axe de ce dernier [49]. Ils interprètent ce phénomène en terme de propagation d'ondes et le nomment *travelling waves*. Dans ce premier exemple, la déformée modale du disque tourne dans le même sens que le disque à la vitesse angulaire moyenne de  $\omega/n$ , avec  $\omega$  la pulsation de crissement et  $n$  le nombre de diamètres nodaux. Dans ce cas, les déplacements hors du plan du disque  $w_z$  peuvent s'écrire, dans le repère cylindrique défini par les coordonnées  $(r, \theta, z)$  :

$$w_z(r, \theta, t) = A(r)f(n\theta - \omega t) \quad (1.7)$$

Ils montrent ensuite que, dans le cas général, les vibrations du disque peuvent être considérées comme la superposition de deux ondes se propageant autour du disque en sens opposés [150]. Les déplacements transverses au disque peuvent alors s'écrire

$$w_z(r, \theta, t) = A(r) f(n\theta - \omega t) + B(r) g(n\theta + \omega t) \quad (1.8)$$

avec  $f$  l'onde progressive et  $g$  l'onde régressive, en considérant le sens de rotation du disque comme sens positif. Dans les très nombreux exemples présentés par Fieldhouse et al., l'onde qui

tourne dans le même sens que le disque est toujours prépondérante. Ichiba et al. trouvent, eux, une déformée qui tourne dans le sens opposé au sens de rotation du disque [66]. Ils montrent que ceci peut s'expliquer par la superposition de deux ondes stationnaires décalées spatialement de  $\lambda/4$  et déphasées de  $\pi/2$ . Récemment, des travelling waves ont également été mises en évidence par Flint et al. [55], en utilisant une technique d'holographie acoustique instationnaire, par James et al. [72], grâce à des mesures par capteurs capacitifs, et par Marschner et al. qui utilisent des mesures accélérométriques [106].

### Paramètres influents

Toutes les études expérimentales démontrent que le crissement est un phénomène très sensible aux conditions d'utilisation et d'environnement. Il n'apparaît que lorsque le frein est sollicité à faible pression hydraulique (0 - 30 bar) et faible vitesse véhicule (0 - 10 km/h). Notons cependant qu'une fois le crissement établi, la vitesse n'a plus d'effet et qu'il se maintient alors à la même fréquence jusqu'à l'arrêt du véhicule. Les conditions climatiques jouent également un rôle très important, dans la mesure où le crissement n'intervient qu'à faible température et qu'une hygrométrie forte est un facteur aggravant.

Les travaux expérimentaux ont également montré que le crissement est un phénomène difficile à répéter et à reproduire sur banc ; et ce malgré tous les efforts mis en oeuvre pour réaliser les essais dans les mêmes conditions d'utilisation et d'environnement. En outre, il a été constaté que de très légères modifications du système, volontaires ou non, peuvent bouleverser son comportement, en le rendant silencieux alors qu'il était bruyant ou inversement. Il serait vain de lister ici tous les paramètres identifiés comme influents par les chercheurs, du fait de la grande diversité des systèmes et des crissements qu'ils ont étudiés. En règle générale, ils mesurent la déformée opérationnelle du système lors du crissement afin d'identifier les paramètres les plus pertinents pour lutter contre ce mode de vibration. En résumé, la caractéristique essentielle du crissement, mise en lumière expérimentalement, est sa très haute sensibilité à de nombreux paramètres. Pour exprimer cela, de nombreux chercheurs parlent de la nature fugace (*fugitive nature*) du crissement de frein.

La liste des paramètres qui influent sur un crissement dépend fortement de ses caractéristiques propres. Néanmoins, dans toutes les études, les chercheurs ont pu identifier le coefficient de frottement entre disque et plaquettes comme le paramètre le plus influent sur le crissement. Plus il augmente plus la propension au crissement est forte. Ce coefficient de frottement est lui même sensible aux conditions d'utilisation et d'environnement, ce qui explique, en partie, la sensibilité du crissement à ces conditions. Ce paramètre dépend également de l'« historique tribologique » du système, ce qui explique pourquoi, dans la plupart des cas, le crissement n'apparaît qu'après une étape de rodage. En outre, la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement a souvent été présentée comme un facteur aggravant en terme d'occurrence de crissement. Ainsi, une partie de la variabilité du crissement est imputable à la variabilité du coefficient de frottement. L'autre partie de la variabilité du crissement provient de la variabilité de la réponse vibratoire du système à tous les paramètres. En effet, le crissement étant à l'origine une instabilité vibratoire, il apparaît comme un phénomène binaire vis à vis des paramètres influents. Si le point de fonctionnement du système se trouve à proximité de la frontière de stabilité, de très faibles variations d'un paramètre suffisent pour la franchir. C'est ce qui explique la nature fugace du crissement, qui est illustrée figure 1.12 par rapport à la pression et à la température.

### Solutions pour réduire le crissement

Les très nombreux exemples de mise au point de frein, par un processus expérimental d'essai-erreur, ont permis d'accumuler un certain nombre de techniques empiriques qui permettent de

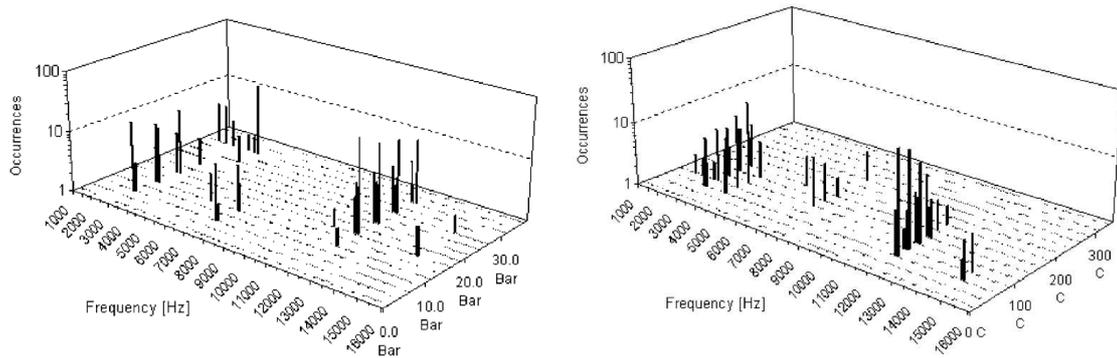


FIG. 1.12 – Occurrences fonction de la pression et de la température

réduire le crissement de frein. La technique la plus efficace d'un point de vue purement acoustique consiste à réduire la valeur du coefficient de frottement. Pour des raisons évidentes, cette technique n'est pas acceptable et n'est donc jamais utilisée dans la pratique. Les trois autres principales méthodes consistent respectivement à uniformiser les conditions de contact entre pièces, à amortir le système et à réduire la variabilité du coefficient de frottement aux paramètres d'environnement. Les solutions technologiques les plus couramment utilisées sont respectivement :

- ajout de chanfreins ou de rainures aux garnitures,
- modification des butées, clips et ressorts,
- ajout de graisse entre piston et dos de plaquette, lubrification des colonnettes,
- ajout ou modification du shim et de la sous-couche,
- changement du matériau des garnitures.

En ce qui concerne les conditions de contact entre pièces, les travaux de Spurr [147], que nous évoquerons plus en détail par la suite, ont montré que la position du centre de pression entre le piston et le dos de plaquette est déterminante sur le crissement. En effet, sa potentialité augmente si le centre de pression est décalé vers l'entrée de couple et diminue dans le cas contraire. Ainsi, des découpes dans les shims, appelées lunules, sont souvent utilisées pour décaler le centre de pression vers la sortie de couple. Plus récemment, il a été préconisé de concevoir les disques de façon à séparer nettement en fréquence les modes dans le plan et hors du plan. Citons également les travaux de Fieldhouse qui visent à rompre la symétrie du disque afin de réduire les potentialités de crissement [50]. Terminons cette énumération des moyens de réduction du crissement en évoquant la percée récente des moyens de contrôle actif. Dès 1997, Nishizawa et al. proposent un système de contrôle en boucle fermée composé de deux capteurs et deux actionneurs piézo-électriques [122]. Cunefare et al. proposent un système de contrôle en boucle ouverte baptisé *dither* basé sur un actionneur piézo-électrique placé dans le piston [36, 76, 13]. Chen et al. utilisent également le principe du *dither* [32], alors que Von Wagner et al. proposent une plaquette active [156].

## 1.4 Modélisation du crissement de frein

Après avoir étudié le crissement de façon expérimentale, les chercheurs ont rapidement tenté d'en déterminer les mécanismes en le modélisant de façon mathématique. Pour ce faire, il convient de cerner les quatre problématiques associées au phénomène, que sont l'excitation, la réponse, les non-linéarités et le rayonnement acoustique du système. Un certain nombre de chercheurs se sont focalisés sur l'excitation du crissement, mais cet aspect présente un intérêt relativement limité du fait du caractère instable du phénomène. En effet, le crissement étant une instabilité vibratoire, même des niveaux d'excitation très faibles peuvent donner naissance à des niveaux vibratoires élevés. Cependant, se borner à cet aspect « linéairement instable » du phénomène conduirait à des niveaux vibratoires infinis, ce qui est heureusement en contradiction avec la physique observée. Dans la réalité, des non-linéarités intrinsèques au système entraînent des phénomènes de saturation qui limitent les niveaux vibratoires et donnent naissance à des cycles limites. Dès lors qu'une instabilité s'est développée en un cycle limite de niveau important, elle ne donnera naissance à un crissement qu'à condition que sa déformée soit un émetteur acoustique efficace.

### 1.4.1 Phénoménologie

Au fil des années, les chercheurs ont proposé plusieurs théories destinées à expliquer le mécanisme d'apparition du crissement de frein. Les synthèses de Ibrahim [64, 65], de Tan et Chen [151] et de Kinkaid et al. [81] expliquent que les quatre principaux mécanismes proposés sont, par ordre chronologique, le *stick-slip*, l'amortissement négatif, le *sprag-slip* et le couplage de modes (*mode lock-in*). Aucun de ces mécanismes ne permet d'expliquer toute la physique du crissement, mais ils apportent chacun un éclairage particulier sur le phénomène. Les deux premières approches sont de nature tribologique et supposent une variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement. Les deux autres approches proposent comme cause du crissement un phénomène de couplage modal pouvant se produire à coefficient de frottement constant.

#### Stick-slip

Les premiers travaux de modélisation des vibrations auto-entretenues induites par le frottement se sont focalisés sur l'aspect tribologique du problème en étudiant la loi de frottement. En 1955, Sinclair et Manville proposent le phénomène de *stick-slip* comme origine du crissement [138]. Ce phénomène, qui signifie littéralement « collé-glissé » a pour origine physique un coefficient de frottement statique supérieur au coefficient de frottement dynamique. A cette époque et durant de nombreuses années, ce phénomène a été considéré comme le mécanisme responsable du crissement. A ce titre, il a fait l'objet de très nombreuses études et publications, dont notamment les travaux de Oden et Martins [126], de Chambrette [26] et d'Ibrahim [64, 65].

Nous allons maintenant détailler le phénomène de stick-slip grâce au modèle à un degré de liberté représenté figure 1.13-a. Il s'agit d'une masse  $m$  mobile dans la direction  $\mathbf{x}$  et retenue au bâti par un ressort  $k$ . Cette masse est soumise à un effort vertical vers le bas  $N$  et frotte sur une surface qui avance à la vitesse constante  $V$  dans la direction  $\mathbf{x}$ . Le point essentiel de la modélisation repose sur la formulation du contact. Celui-ci est modélisé grâce à la loi de Coulomb,

$$T = \mu N \quad (1.9)$$

qui exprime l'effort tangentiel au contact  $T$  comme le produit de l'effort normal  $N$  et du coefficient de frottement  $\mu$ . La loi de frottement utilisée est représentée figure 1.13-b. en fonction de la vitesse de glissement  $V_g = V - \dot{x}$ . Elle présente un coefficient de frottement statique  $\mu_s$  supérieur au coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$ .

En supposant initialement la masse collée au tapis et le ressort dans sa position de repos, la masse va être entraînée par le tapis dans la direction  $\mathbf{x}$  et le ressort va se tendre progressivement. Elle restera collée au tapis jusqu'au seuil de glissement qui correspond à un effort  $\mu_s N$  exercé par le ressort. Ensuite, pendant la phase de glissement, l'amplitude de la force exercée par le tapis sur la masse vaudra  $\mu_d N$ . La masse ne recollera au tapis que lorsqu'elle atteindra la vitesse  $V$  en étant soumise à un effort ressort inférieur à  $\mu_s N$ .

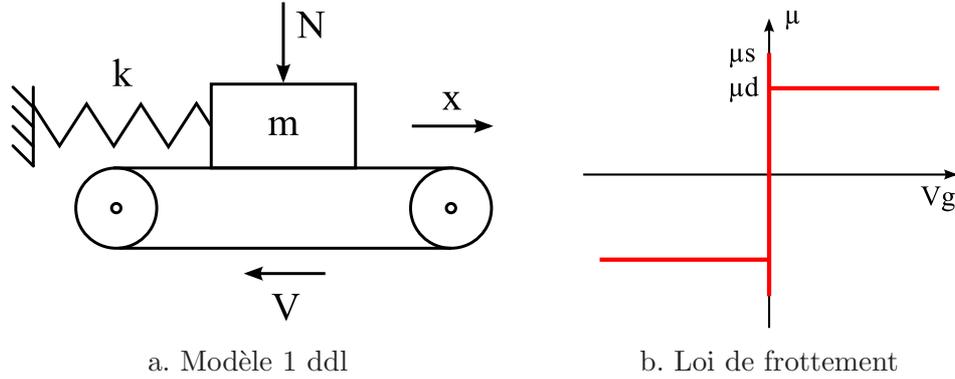


FIG. 1.13 – Stick-slip

L'équation qui gouverne le système s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = T \quad (1.10)$$

Avec

$$\begin{aligned} \dot{x} = V, \quad |T| \leq \mu_s N & \quad \text{adhérence} \\ \dot{x} \leq V, \quad T = \mu_d N & \quad \text{glissement positif} \\ \dot{x} \geq V, \quad T = -\mu_d N & \quad \text{glissement négatif} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ce qui peut également s'écrire sous la forme condensée suivante

$$\begin{cases} |T| \leq \mu_s N \\ (V - \dot{x}) T - |V - \dot{x}| \mu_d N = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Afin d'analyser toutes les configurations possibles, nous allons tracer les trajectoires du système dans le plan de phase  $(x, \dot{x})$ . Pour ce faire, commençons par faire les constatations suivantes :

- le système présente un point stationnaire  $S$  de coordonnées  $(x_e, 0)$ , avec  $x_e = \mu_d N/k$
- la phase d'adhérence, définie par  $\dot{x} = V$  et  $|T| \leq \mu_s N$ , se traduit sur le diagramme de phase par le segment  $[A_1, A_2]$ , avec  $A_1 = (-x_a, V)$ ,  $A_2 = (x_a, V)$  et  $x_a = \mu_s N/k$ .
- pendant la phase de glissement positif, le changement de variable  $x_p = x - x_e$  permet d'écrire  $m\ddot{x}_p + kx_p = 0$ . En multipliant cette équation par  $\dot{x}_p$ , nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{x}_p^2 + \frac{k}{2} x_p^2 \right) = 0 \quad (1.13)$$

Une simple intégration montre alors que le système suit, dans le plan de phase, des trajectoires elliptiques centrées en  $(x_e, 0)$  et d'équation

$$\frac{m}{2} \dot{x}_p^2 + \frac{k}{2} x_p^2 = cte \quad (1.14)$$

La valeur de  $cte$  est à déterminer en fonction des conditions initiales  $(x_0, \dot{x}_0)$  du système.

- pendant la phase de glissement négatif, le même raisonnement avec le changement de variable  $x_n = x + x_e$  permet de montrer que les trajectoires du système dans le plan de phase sont des ellipses centrées en  $(-x_e, 0)$ .

Tout ceci nous permet de tracer les trajectoires du système dans le plan de phase, comme illustré figure 1.14. Quatre configurations sont possibles en fonction des conditions initiales  $(x_0, \dot{x}_0)$  du système :

- si  $(x_0, \dot{x}_0) = (x_e, 0)$ , le système est en équilibre stable
- si le système est lâché à l'intérieur de l'ellipse limite  $E_L$  de centre S tangente au segment d'adhérence, il oscillera en suivant une ellipse complète
- si le système est lâché sur le segment d'adhérence, il le parcourra dans le sens positif jusqu'au point de glissement  $A_2$ . Il glissera ensuite en décrivant une portion d'ellipse qui le ramènera sur le segment d'adhérence au point  $A_3$ . Nous obtenons ici le phénomène de stick-slip défini par son cycle  $\Gamma_L$  parcouru dans le sens horaire et composé d'une phase collée  $A_3 \rightarrow A_2$  et d'une phase glissée  $A_2 \rightarrow A_3$ .
- dans tous les autres cas, c'est à dire lorsque le système est lâché à l'extérieur de  $\Gamma_L$  ou entre  $E_L$  et  $\Gamma_L$ , il décrira des ellipses tronquées et atteindra forcément, à un moment donné, le segment d'adhérence. Au final, le système atteindra le cycle  $\Gamma_L$  nommé cycle limite attracteur du système.

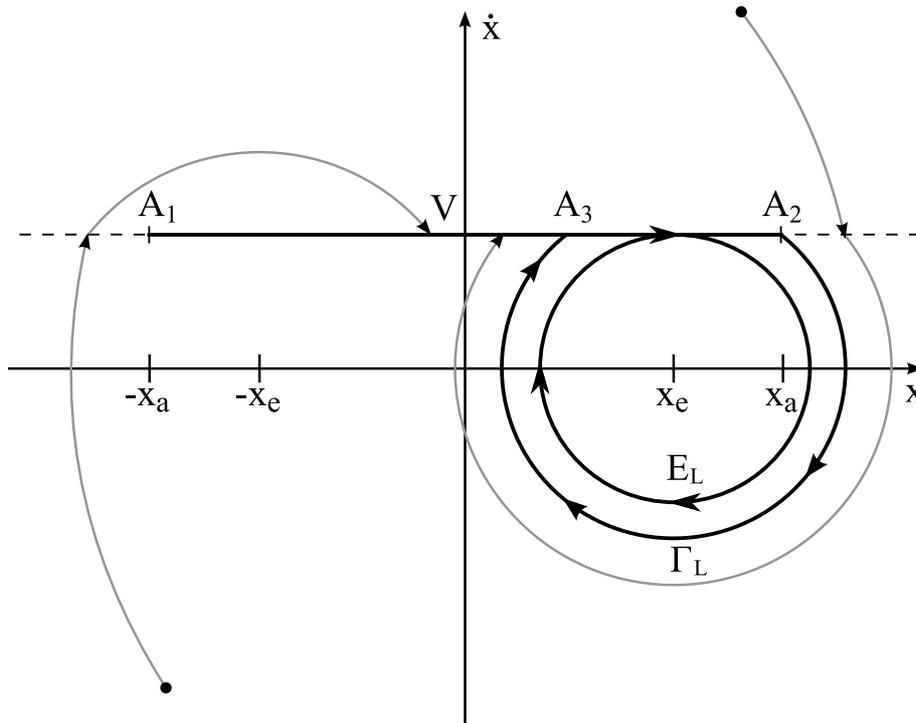


FIG. 1.14 – Trajectoires dans l'espace des phases - coefficient de frottement discontinu

### Amortissement négatif

Le mécanisme nommé amortissement négatif est lié, comme le stick-slip, à la forme de la loi de frottement. Mais dans ce cas, l'origine physique des vibrations est une décroissance du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement. Dès 1938, Mills décrit ce phénomène et le

soupçonne d'être la cause du crissement [115]. Afin de le détailler, nous allons à nouveau utiliser le modèle présenté figure 1.13-a, mais cette fois avec la loi de frottement décrite figure 1.15.

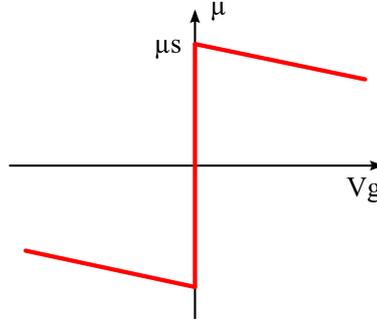


FIG. 1.15 – Loi de frottement décroissante avec la vitesse de glissement

L'équation qui gouverne le système s'écrit :  $m\ddot{x} + kx = T$ , avec

$$\begin{aligned} \dot{x} = V, & \quad |T| \leq \mu_s N & \text{adhérence} \\ \dot{x} \leq V, & \quad T = [\mu_s - \mu_1(V - \dot{x})]N & \text{glissement positif} \\ \dot{x} \geq V, & \quad T = [-\mu_s - \mu_1(V - \dot{x})]N & \text{glissement négatif} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Pendant les phases de glissement, la décroissance du coefficient de frottement induit un amortissement négatif équivalent, dans la mesure où 1.15 peut être réécrite sous la forme suivante

$$m\ddot{x} - \mu_1 N \dot{x} + kx = (\pm\mu_s - \mu_1 V)N \quad (1.16)$$

La présence de cet amortissement négatif tend à déstabiliser le système, comme nous allons le constater en observant ses trajectoires dans le plan de phase, figure 1.16. Nous remarquons que

- le système présente un point stationnaire  $S$  de coordonnées  $(x_e, 0)$ , avec  $x_e = (\mu_s - \mu_1 V)N/k$
- la phase d'adhérence, définie par  $\dot{x} = V$  et  $|T| \leq \mu_s N$ , se traduit sur le diagramme de phase par le segment  $[A_1, A_2]$ , avec  $A_1 = (-x_a, V)$ ,  $A_2 = (x_a, V)$  et  $x_a = \mu_s N/k$ .
- pendant la phase de glissement positif, la trajectoire du système est une spirale divergente centrée en  $(x_e, 0)$
- pendant la phase de glissement négatif, la trajectoire du système est une spirale divergente centrée en  $(-x_e, 0)$ .

L'unique point stationnaire du système,  $S = (x_e, 0)$ , est instable. En effet, si le système se trouve initialement dans un voisinage de  $S$ , il s'en éloigne progressivement en suivant une spirale divergente dans le plan de phase. Au bout d'un certain temps, le système atteint la zone adhérente. Il la quitte au niveau du point  $A_2$ , glisse en suivant une portion de spirale et la retrouve au point  $A_3$ . Le système se trouve alors sur le cycle attracteur  $\Gamma_L$  composé d'une phase de glissement  $A_2 \rightarrow A_3$  et d'une phase d'adhérence  $A_3 \rightarrow A_2$ . Quelque soit la position initiale du système dans le plan de phase, il atteindra inévitablement la zone adhérente, en suivant des spirales tronquées, et donc le cycle limite  $\Gamma_L$ .

Pour de plus amples informations concernant l'amortissement négatif, nous nous reporterons aux travaux de Shin et al. [137] et de Paliwal et al. [132] qui considèrent un coefficient de frottement linéairement décroissant avec la vitesse de glissement. Mentionnons également que d'autres chercheurs utilisent des lois de frottement plus complexes, comme par exemple Chambrette qui propose dans le premier chapitre de sa thèse une loi exponentiellement décroissante [26].

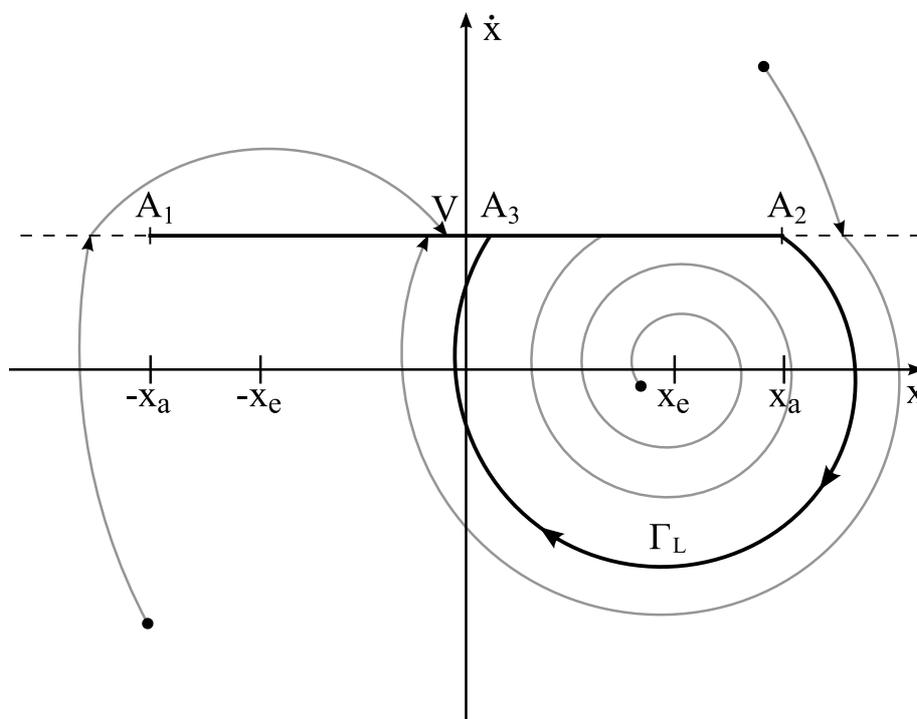


FIG. 1.16 – Trajectoires dans l'espace des phases - coefficient de frottement décroissant avec  $V_g$

### Conclusions sur les phénomènes liés à la loi de frottement

Actuellement, l'ensemble de la communauté scientifique est d'accord sur le fait que le stick-slip et l'amortissement négatif peuvent expliquer des bruits tels que le grognement, mais ne sont pas les mécanismes responsables du crissement. Nous allons maintenant exposer les trois arguments essentiels qui confortent cette hypothèse. Tout d'abord, citons les études de Boudot [22] et de Fleske [52] qui montrent que des instabilités induites par le frottement apparaissent malgré un coefficient de frottement quasiment insensible à la vitesse de glissement. Citons également les travaux de Chambrette [26] qui montrent que la phase collée ne peut exister, dans les conditions d'apparition des crissements qu'il a observés. Enfin, l'hypothèse qui consiste à limiter le mécanisme de génération du crissement à des considérations tribologiques est clairement mise en défaut. En effet, la plupart des travaux de mise au point montrent que modifier la structure du frein sans en changer les caractéristiques tribologiques a une influence très forte sur son comportement crissant. En outre, mentionnons que les chercheurs s'accordent pour dire que la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement est un facteur aggravant en terme d'occurrences de crissement.

### Sprag-slip

En 1961, Spurr proposa une nouvelle théorie, qu'il nomma *sprag-slip* pour expliquer le crissement [147]. Cette théorie considère que la cause de l'instabilité vibratoire est une variation des forces normale et tangentielle au contact engendrée par la géométrie et les déformations du système. Notons que contrairement aux deux mécanismes décrits précédemment, le sprag-slip apparaît avec un coefficient de frottement constant. Afin d'illustrer cette théorie, reprenons le modèle de principe proposé par Spurr et présenté figure 1.17.

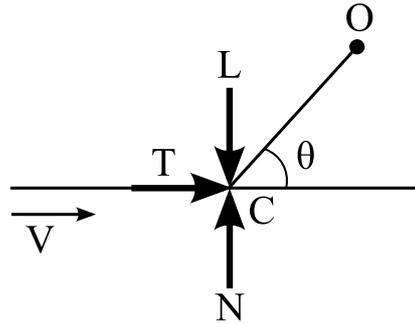


FIG. 1.17 – Modèle de sprag-slip

Ce modèle est constitué d'une barre rigide  $OC$  articulée au point  $O$  qui est en contact au point  $C$  avec un plan mobile à la vitesse  $V$ . La barre est soumise à un effort extérieur  $L$  au point  $C$ . Par conséquent, le plan mobile exerce sur la barre un effort normal  $N$  et un effort tangentiel  $T = \mu N$ , conformément à la loi de Coulomb. L'équilibre des moments de la barre permet d'obtenir l'expression des efforts au contact

$$N = \frac{L}{1 - \mu \tan \theta} \quad T = \frac{\mu L}{1 - \mu \tan \theta} \quad (1.17)$$

Ceux-ci peuvent atteindre des amplitudes très importantes lorsque le coefficient de frottement tend vers  $\cotan(\theta)$ , ou lorsque l'angle  $\theta$  tend vers  $\arctan(1/\mu)$ . Nous observons alors l'arc-boutement de la barre qui, dans le cas parfaitement rigide, entraîne des efforts au contact infinis. Si la souplesse de la barre est maintenant considérée, cette pièce peut se libérer de l'arc-boutement en glissant sur le plan après avoir été suffisamment déformée. Cette situation se reproduit de façon périodique et donne lieu à un cycle limite de sprag-slip composé d'une phase d'arc-boutement et d'une phase de glissement.

Spurr relie sa théorie à la physique du crissement, en considérant que le point  $O$  représente le point d'application des efforts au dos de la plaquette et  $C$  le point de contact effectif entre disque et plaquette, comme illustré figure 1.18. Pour la valider expérimentalement, il usina des plaquettes afin d'obtenir différentes configurations de contact avec des angles  $\theta$  différents. Il a ainsi pu montrer que le crissement apparaît préférentiellement lorsque le point de contact est proche de l'entrée de couple. De plus, lorsque le point de contact se trouve du côté sortie de couple, c'est à dire lorsque  $\theta > \pi/2$ , le frein est beaucoup plus silencieux.

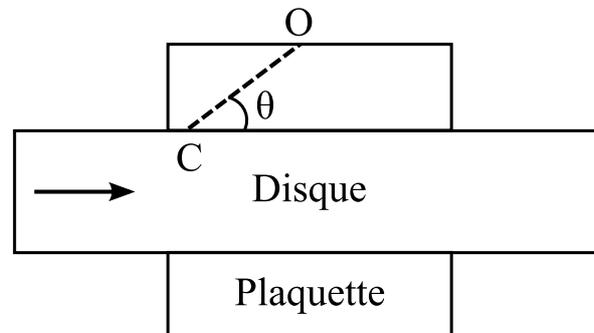


FIG. 1.18 – Angle de sprag-slip sur un frein à disque

### Couplage de modes

Suite aux travaux de Spurr, de nombreuses études expérimentales et théoriques ont été réalisées afin de valider et de généraliser la théorie du sprag-slip. En 1963, Jarvis et Mills publient leurs travaux sur le système pion-disque, constitué d'une poutre flexible frottant sur un disque [73]. Ils montrent que la variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement est insuffisante pour expliquer l'apparition des instabilités. De plus, ils observent que conformément à la théorie de Spurr, l'inclinaison de la poutre est déterminante sur la stabilité du système. Ces résultats ont ensuite été confirmés par de nombreux autres travaux sur les systèmes pion-disque, dont notamment ceux de Earles [43, 44, 42].

En 1972, North est le premier chercheur à considérer le crissement comme un phénomène de vibration auto-entretenue induit par le frottement. Il présente un modèle analytique dans lequel les forces de frottement sont modélisées par des forces suiveuses avec un coefficient de frottement constant [123, 124]. Il poursuit ses travaux en faisant un parallèle entre le crissement et le flottement des ailes d'avion [125]. Dans cet article, le modèle analytique à deux degrés de liberté présenté fait apparaître une matrice de raideur non-symétrique. Deux cas sont alors à distinguer. Dans le premier cas, le système possède deux valeurs propres imaginaires pures correspondant à deux modes stables ayant des fréquences distinctes. Dans le second cas, le système possède deux valeurs propres complexes conjuguées. Celles-ci correspondent à deux modes à la même fréquence, dont l'un est stable et l'autre instable. Le mécanisme de transition de l'état stable à l'état instable est nommé *couplage* ou *coalescence* de modes, dans la mesure où les fréquences des deux modes se rapprochent jusqu'à devenir égales. De nombreux autres chercheurs, dont notamment Millner [114], ont suivi la piste proposée par North en utilisant différents modèles analytiques.

Afin de décrire plus précisément le phénomène de coalescence de modes, nous allons reprendre le modèle proposé par Chambrette [26] pour décrire un système pion-disque. Il représente une poutre flexible inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à un disque tournant sur lequel elle frotte. Le contact est considéré comme ponctuel et permanent et le frottement est modélisé par un coefficient de frottement constant. Seuls les déplacements hors du plan du disque sont pris en compte, alors que les déplacements en flexion et en traction-compression de la poutre sont considérés. Ainsi, le modèle proposé par Chambrette et présenté figure 1.19 compte trois degrés de liberté représentant respectivement le premier mode de poutre en traction-compression, le premier mode de poutre en flexion et le premier mode de flexion de disque.

Le comportement dynamique de ce modèle est décrit par le système d'équations suivant

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 = (\sin \theta + \mu \cos \theta)N \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 = (\cos \theta - \mu \sin \theta)N \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_3 x_3 = -N \end{cases} \quad (1.18)$$

A cela, il faut ajouter une équation de liaison qui traduit le fait que le contact est permanent

$$x_3 = x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \quad (1.19)$$

Cette équation combinée à la troisième équation du système 1.18 permet d'exprimer l'effort normal en fonction de  $x_1$  et  $x_2$ . En substituant son expression dans les deux autres équations et en posant  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ , nous obtenons l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

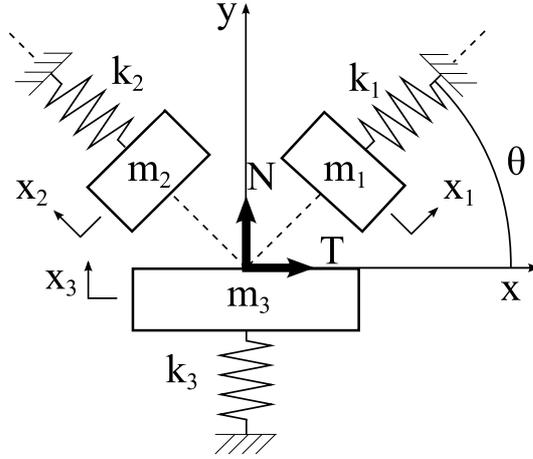


FIG. 1.19 – Modèle analytique représentant un système pion-disque

Avec

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_3 \sin \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) & m_3 \cos \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) \\ m_3 \sin \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta) & m_2 + m_3 \cos \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta) \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 \sin \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) & k_3 \cos \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) \\ k_3 \sin \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta) & k_2 + k_3 \cos \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta) \end{bmatrix}$$

Afin d'analyser la stabilité du système, nous allons calculer ses valeurs propres, qui vérifient

$$\det(s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0 \quad (1.22)$$

Avec  $s$  la variable de Laplace. Le calcul du déterminant permet d'obtenir le polynôme caractéristique du système, qui s'écrit

$$P(s) = as^4 + bs^2 + c \quad (1.23)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= m_1 m_2 + m_3 [m_1 \cos^2 \theta + m_2 \sin^2 \theta + \mu \sin \theta \cos \theta (m_2 - m_1)] \\ b &= m_1 k_2 + m_2 k_1 + k_3 [m_1 \cos^2 \theta + m_2 \sin^2 \theta + \mu \sin \theta \cos \theta (m_2 - m_1)] \\ &\quad + m_3 [k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta + \mu \sin \theta \cos \theta (k_2 - k_1)] \\ c &= k_1 k_2 + k_3 [k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta + \mu \sin \theta \cos \theta (k_2 - k_1)] \end{aligned} \quad (1.24)$$

Un tel système peut donner lieu, en fonction du signe de son discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ , à deux types d'instabilités :

- instabilités de type *divergence* lorsque  $\Delta > 0$ .
- instabilités de type *flottement* lorsque  $\Delta < 0$ .

Le premier type d'instabilité se produit à fréquence nulle, contrairement au second type. Pour plus de détails concernant les conditions d'apparition de ces deux types d'instabilité, nous nous reporterons à la thèse de Chambrette [26]. Dans la suite, nous nous focalisons sur les instabilités de type flottement en utilisant les données numériques renseignées en annexe A, avec  $f_i = 1/2\pi\sqrt{k_i/m_i}$ .

La figure 1.20 détaille l'évolution des valeurs propres du système pour un coefficient de frottement variant de 0 à 1. Initialement, le discriminant est positif et les deux racines du polynôme

caractéristique en  $s^2$  sont négatives. Le système présente alors deux valeurs propres  $s$  imaginaires pures différentes. A mesure que le coefficient de frottement augmente  $\Delta$  décroît, ce qui provoque un rapprochement des valeurs propres en fréquence. Pour  $\mu = 0.7$ , le discriminant s'annule et les deux valeurs propres sont égales, en étant toujours imaginaires pures. Au delà, le discriminant devenant négatif, les racines du polynôme caractéristique en  $s^2$  ne sont plus réelles mais complexes conjuguées. En conséquence, nous obtenons deux valeurs propres complexes qui ont des parties imaginaires égales et des parties réelles opposées. Ainsi, la valeur propre à partie réelle positive correspond à un mode instable alors que l'autre correspond à un mode stable. A mesure que le coefficient de frottement augmente, les valeurs absolues des parties réelles des deux valeurs propres augmentent alors que leurs parties imaginaires restent identiques. Cette transition qui conduit à la naissance d'une instabilité vibratoire de type flottement porte le nom de *bifurcation de Hopf*. Ce phénomène est également nommé coalescence ou couplage de modes (en anglais *mode lock-in*).

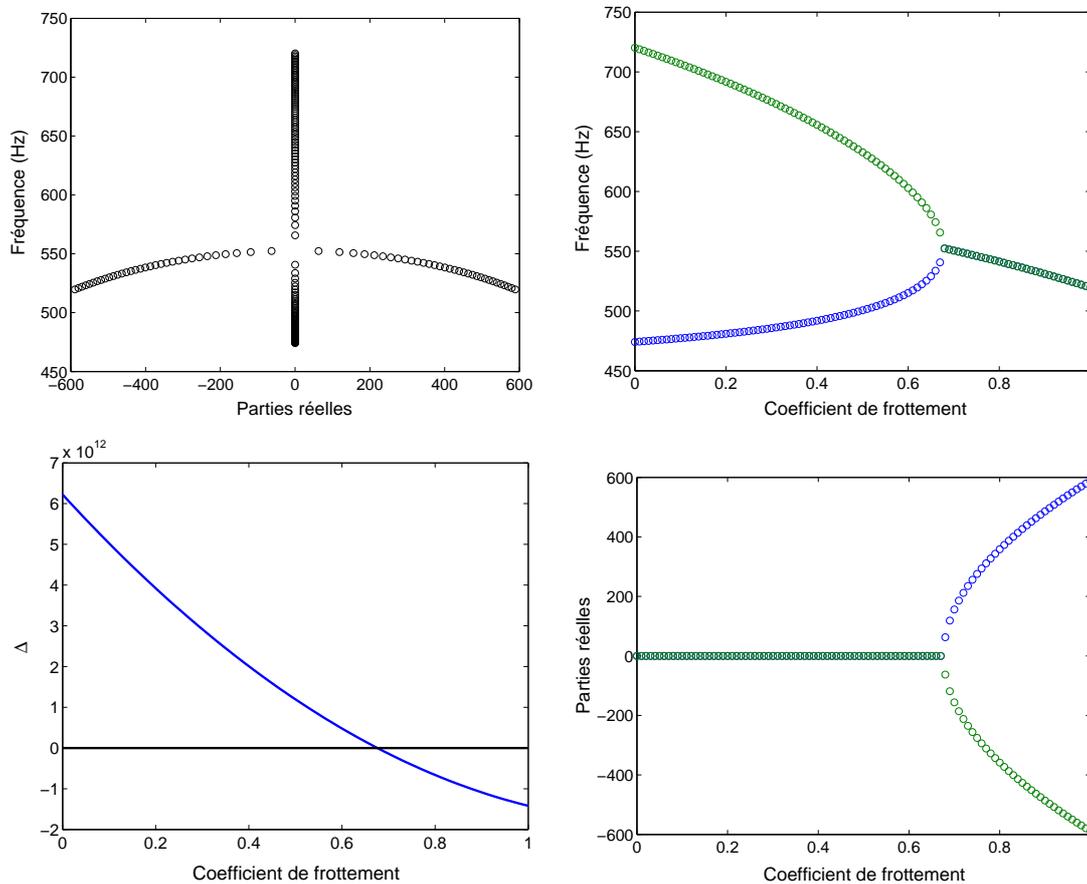


FIG. 1.20 – Coalescence de modes

Le modèle de Chambrette permet de généraliser le concept de sprag-slip, dans la mesure où l'angle  $\theta$  est responsable du couplage entre les degrés de liberté normaux et tangentiels. Il met en évidence le phénomène de coalescence de modes qui, malgré un coefficient de frottement indépendant de la vitesse de glissement, donne naissance à des instabilités vibratoires. Les nombreux modèles analytiques mettant en évidence ce phénomène, bien que trop simplifiés pour être prédictifs, ont permis d'aboutir à un consensus quant au mécanisme du crissement. En effet, la majorité des chercheurs sont maintenant d'accord sur le fait que le crissement est une instabilité de type flottement due au caractère non-conservatif du frottement.

### 1.4.2 Non-linéarités

Dans les problèmes mécaniques, plusieurs sources de non-linéarité peuvent apparaître. Elles ont alors des effets importants sur les comportements statique et dynamique du système.

#### Effet statique des non-linéarités : précharge

Dans la réalité, la plupart des systèmes mécaniques ne sont pas linéaires. Les principales sources de non-linéarités sont de type :

- « matériau » : élasticité non-linéaire, plasticité, endommagement,...
- « conditions aux limites » : contacts
- « géométrique » : grands déplacements, grandes déformations, effet de précharge...

Dans le cas du frein, les deux derniers types de non-linéarités sont prépondérants. En effet, la mise en position des différentes pièces du système engendre de grands déplacements, de grandes rotations et de grandes déformations. De plus, ces pièces sont en contact entre elles et ces contacts sont susceptibles d'être ou non établis. Nous parlerons alors respectivement de *contacts fermés* ou de *contacts ouverts*. Ce phénomène est très discontinu dans la mesure où le changement d'état d'un contact marque la transition brutale d'un état libre à un état contraint. Finalement, ces deux types de discontinuités doivent être pris en compte pour calculer la position d'équilibre statique du système de façon précise. De plus, ces discontinuités ont pour conséquence de rendre son comportement dynamique dépendant du chargement qui lui est appliqué.

#### Effet dynamique des non-linéarités : cycles limites

Un phénomène d'instabilité se traduit par des niveaux vibratoires exponentiellement croissants avec le temps. Dans le cas linéaire, ceci conduit à des niveaux tels que la structure atteint son point de rupture. De telles extrémités peuvent être atteintes pour des phénomènes d'instabilité telles que le flottement d'ailes d'avion, mais ce n'est pas le cas de l'instabilité de crissement. Il existe donc nécessairement un mécanisme qui limite les niveaux vibratoires. Dans cette partie, nous allons montrer que la présence de non-linéarités dans un système instable a tendance à borner les niveaux vibratoires du fait de l'apparition de cycles limites. Pour illustrer ceci, nous allons reprendre le modèle de Chambrette présenté figure 1.19 en nous plaçant juste après le point de bifurcation de Hopf.

Un amortissement  $c = 2\xi m\omega$  est ajouté à chacun des trois degrés de liberté du modèle et une raideur cubique  $k_1^{NL}$  est associée au premier d'entre eux. L'équation qui gouverne le système s'écrit alors

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}^{NL} = \mathbf{0} \quad (1.25)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_1 + c_3 \sin \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) & c_3 \cos \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) \\ c_3 \sin \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta) & c_2 + c_3 \cos \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}^{NL} &= \begin{bmatrix} k_1^{NL} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.26)$$

En posant  $\mathbf{y} = [\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}]^T$ , nous obtenons un système d'équations différentielles du premier ordre de type  $\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$  que nous pouvons résoudre numériquement. En utilisant les valeurs numériques référencées en annexe A, une intégration temporelle permet de calculer les évolutions de  $x_1$  et  $x_2$  en fonction du temps, comme illustré figure 1.21. Nous observons clairement le phénomène d'instabilité se développer avec une croissance exponentielle des amplitudes vibratoires. Néanmoins, nous constatons qu'après la phase de croissance exponentielle, les déplacements atteignent une amplitude bornée. Ceci correspond à un cycle limite que nous observons en représentant les trajectoires des masses dans le plan de phase, comme illustré figure 1.22. Nous noterons que le

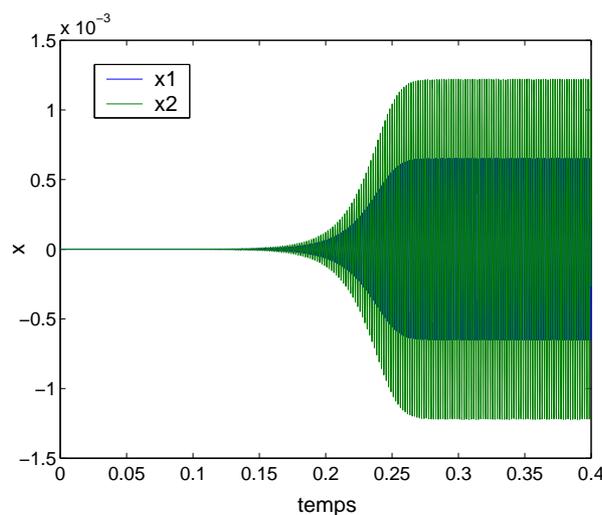


FIG. 1.21 – Intégration temporelle

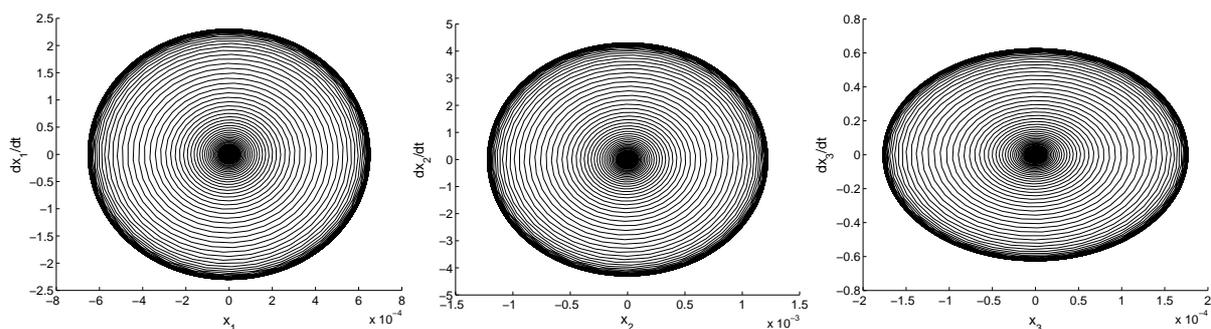


FIG. 1.22 – Trajectoires dans le plan de phase

comportement dynamique de la masse 3 est calculé en fonction de celui des deux autres masses grâce à l'équation 1.19. Les trois masses s'écartent progressivement de leurs positions initiales et atteignent chacune un cycle limite qui définit leur comportement en régime permanent.

Dès 1990, D'Souza et Dweib débattent de l'apparition de tels cycles limites [41]. Après avoir réalisé des mesures sur un système pion-disque, ils en proposent une modélisation non-linéaire qui les conduit à calculer par intégration temporelle les niveaux vibratoires des cycles limites. Dans la pratique, l'intégration temporelle est souvent très coûteuse en terme de temps de calcul. Ainsi, Sinou propose dans sa thèse [139] et dans les articles [143] et [144] des méthodes non-linéaires qui permettent de calculer, avec un coût de calcul beaucoup plus faible et une bonne précision, les niveaux vibratoires des cycles limites.

### 1.4.3 Amortissement

Le crissement de frein étant un phénomène d'instabilité vibratoire, il dépend fortement de l'amortissement introduit dans le système. A priori, nous nous attendons à ce qu'un apport d'amortissement ait tendance à stabiliser le système. C'est la raison pour laquelle la plupart des chercheurs négligent l'amortissement en considérant que cette situation sera la plus défavorable. Il est vrai que l'ajout d'amortissement a souvent un effet stabilisant, mais ce n'est pas une règle

générale. Dans certains cas particuliers, cet ajout peut déstabiliser le système. Pour illustrer ceci, citons Hoffmann et Gaul qui ont étudié l'effet de l'amortissement sur les courbes de coalescence obtenues avec un modèle à deux degrés de liberté [62]. Lorsque les deux modes sont amortis de façon identique, l'ajout d'amortissement ne modifie pas les fréquences, mais décale uniformément les parties réelles vers les valeurs négatives. Ainsi, le système est stabilisé dans la mesure où il devient instable pour une valeur du coefficient de frottement plus élevée qu'initialement. Lorsque les deux modes ne sont pas amortis de façon identique, les courbes de coalescence sont beaucoup plus affectées. L'effet stabilisant de décalage des parties réelles est toujours présent, mais il est combiné à un effet de « lissage » des courbes de coalescences. Cet effet se matérialise par une inflexion des parties réelles qui se produit avant le point de coalescence non-amorti. Cette topologie de courbe qui ne fait plus apparaître de façon franche le point de bifurcation est appelée couplage imparfait. Dans le cas particulier où l'un des modes est faiblement amorti et où l'autre l'est fortement, le système amorti devient instable avant le système non-amorti. Sinou et al. retrouvent ces phénomènes et les approfondissent en mettant notamment en évidence l'existence d'un rapport optimal entre les amortissements, qui maximise la plage de stabilité [140,142].

Pour appuyer ce débat sur l'effet de l'amortissement, nous nous reporterons également à la synthèse de Tan et Ford qui référence un grand nombre de travaux, à la fois expérimentaux et numériques, sur le sujet [151]. Il en ressort des conclusions contradictoires qui montrent que l'effet de l'amortissement n'est pas toujours identique : il est tantôt stabilisateur tantôt déstabilisateur. Ceci pourrait expliquer pourquoi, dans la pratique, l'utilisation d'anti-bruits amortissants permet de traiter le crissement avec plus ou moins de succès selon les cas.

L'effet de l'amortissement sur le crissement de frein sera analysé en détail dans le second chapitre de cette thèse.

#### 1.4.4 Vibrations du disque

Le disque de frein est un élément clé pour le crissement pour deux raisons. D'abord, c'est à sa surface qu'intervient le frottement, qui est la cause de l'instabilité, et de plus il est un émetteur acoustique efficace de par sa géométrie. Dans la réalité, un disque de frein présente une géométrie relativement complexe avec la présence du bol et des ailettes de refroidissement. Néanmoins, il est commode, en première approximation, de le modéliser par une coque mince annulaire afin d'évaluer son comportement modal. De nombreux chercheurs, dont notamment Yang et al. [160] et J.A. Wickert [158], ont utilisé cette approximation pour classifier les modes de disque. Ceci leur a permis de distinguer deux catégories de modes : les modes hors du plan symbolisés par les lettres OP (*out-of-plane*) et les modes dans le plan du disque dénommés IP : (*In-plane*). Nous allons maintenant décrire ces deux types de modes.

##### Modes de disque hors du plan

Considérons une coque mince annulaire et uniforme de densité  $\rho$ , d'épaisseur  $h$ , de module d'Young  $E$  et de coefficient de poisson  $\nu$ . Son équation du mouvement s'écrit alors

$$D\nabla^4 u + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.27)$$

avec  $D$  la rigidité en flexion du disque. En coordonnées cylindriques, l'opérateur laplacien s'écrit :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1.28)$$

Afin de déterminer les modes propres du disque, nous transférons l'équation 1.27 dans le domaine fréquentiel en posant  $u = U \exp(i\omega t)$ . Il nous faut alors résoudre

$$(\nabla^4 - \beta^4) U = 0 \quad \text{en ayant posé} \quad \beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (1.29)$$

Commençons par chercher les fonctions  $u_1$  et  $u_2$  telles que

$$(\nabla^2 + \beta^2) U_1 = 0 \quad \text{et} \quad (\nabla^2 - \beta^2) U_2 = 0 \quad (1.30)$$

En effet, si  $U_1$  et  $U_2$  vérifient l'équation 1.30, alors  $U_1 + U_2$  vérifie l'équation 1.29. Afin de déterminer les deux fonctions  $U_1$  et  $U_2$ , nous opérons une séparation des variables  $r$  et  $\theta$ .

$$U_1 = R_1(r)\Theta_1(\theta) \quad \text{et} \quad U_2 = R_2(r)\Theta_2(\theta) \quad (1.31)$$

En substituant les équations 1.28 et 1.31 dans l'équation 1.30, nous obtenons

$$\left( \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} \right) \Theta_1 + \frac{R_1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \theta^2} + \beta^2 R_1 \Theta_1 = 0 \quad (1.32)$$

$$\left( \frac{\partial^2 R_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_2}{\partial r} \right) \Theta_2 + \frac{R_2}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \theta^2} - \beta^2 R_2 \Theta_2 = 0 \quad (1.33)$$

En séparant les variables  $r$  et  $\theta$ , nous constatons que les deux équations précédentes ne peuvent être satisfaites que s'il existe une constante  $n$  telle que

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \theta^2} + n^2 \Theta_1 = 0 \quad \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \theta^2} + n^2 \Theta_2 = 0 \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} + \left( \beta^2 - \frac{n}{r^2} \right) = 0 \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_2}{\partial r} + \left( -\beta^2 - \frac{n}{r^2} \right) = 0 \quad (1.35)$$

Les équations référencées 1.34 permettent d'exprimer  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions sinus et cosinus. De plus, l'axisymétrie du disque impose que  $n$  soit un entier positif. Les deux équations référencées 1.35 permettent d'exprimer  $R_1$  comme une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première ( $J_n$ ) et seconde espèce ( $Y_n$ ) et  $R_2$  comme une combinaison linéaire des fonctions de Bessel modifiées de première ( $I_n$ ) et seconde espèce ( $K_n$ ). Au final, la solution générale de l'équation 1.29 s'écrit  $U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  avec

$$\Theta(\theta) = A \cdot \cos(n\theta) + B \cdot \sin(n\theta) \quad (1.36)$$

$$R(r) = C \cdot J_n(\beta r) + D \cdot Y_n(\beta r) + E \cdot I_n(\beta r) + F \cdot K_n(\beta r) \quad (1.37)$$

Les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes  $A, B, C, D, E, F$  ainsi que les pulsations propres  $\omega_{mn}$ . Les modes sont référencés par le couple  $(m, n)$ , avec  $m$  le nombre de cercles nodaux et  $n$  le nombre de diamètres nodaux. Ces deux nombres correspondent respectivement aux nombres de zéros des équations 1.37 et 1.36. La figure 1.23-a présente les déformées des premiers modes en condition libre-libre. Notons que les modes  $(0,0)$  et  $(0,1)$ , qui sont des modes de corps rigide, ne sont pas représentés. Parmi les premiers modes de déformation hors du plan, nous pouvons distinguer trois sous-catégories :

- les modes diamétriques à  $n$  diamètres nodaux, symbolisés par  $(0,n)$  ou par D(*Diametric*)
- les modes de torsion à 1 cercle et  $n$  diamètres nodaux, symbolisés par  $(1,n)$  ou par T(*Twisting*)
- les modes dits de parapluie à  $n$  cercles nodaux, symbolisés par  $(m,0)$  ou par U(*Umbrella*)

Les modes de type U sont des modes simples correspondant à des racines simples de l'équation 1.29. Les autres modes, de type  $(m, n)$  avec  $m \neq 0$ , sont doubles car ils correspondent à des racines doubles de cette même équation. Les deux déformées modales associées sont alors décalées d'un angle de  $\pi/2n$  et forment une base de toutes les déformées à  $m$  cercles et  $n$  diamètres nodaux.

### Modes de disque dans le plan

Le disque présente également des modes dans le plan. Dans le cas d'une coque annulaire, ceux-ci sont mathématiquement découplés des modes hors du plan. Les modes dans le plan du disque mettent en cause des vibrations radiales et tangentielles respectivement décrites par les variables  $u_r$  et  $u_\theta$ . Ces deux vibrations suivent les deux équations couplées suivantes

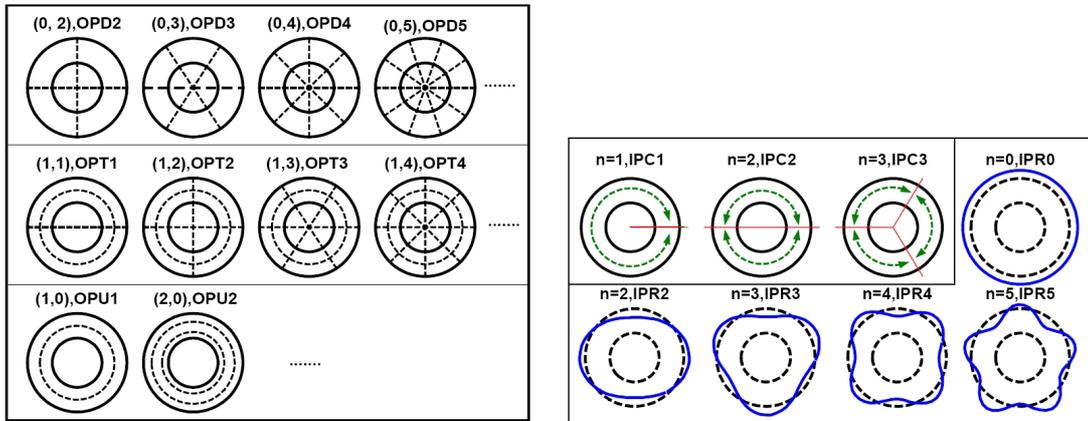
$$\frac{EI}{a^4} \left( \frac{\partial^3 u_r}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) - \frac{EA}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \rho A \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{EI}{a^4} \left( \frac{\partial^4 u_r}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^3 u_\theta}{\partial \theta^3} \right) + \frac{EA}{a^2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \rho A \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0 \quad (1.39)$$

avec  $EI$  et  $EA$  des constantes de rigidité,  $\rho A$  une constante de masse et  $a$  une constante géométrique. Les solutions des équations 1.38 et 1.39 sont de forme harmonique et sont associées aux déformées suivantes

$$\begin{cases} U_r(\theta) = A_r \cos n\theta + B_r \sin n\theta \\ U_\theta(\theta) = A_\theta \cos n\theta + B_\theta \sin n\theta \end{cases} \quad (1.40)$$

avec  $n$  le nombre de lignes nodales. Les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $A_\theta$ ,  $B_\theta$  ainsi que les fréquences propres relatives aux modes radiaux et tangentiels. La figure 1.23-b illustre les déformées associées à ces deux types de modes dans les conditions libre-libre. Ils sont respectivement référencés par les lettres R (*Radial*) et C (*Circumferential*) et par leur nombre de lignes nodales. Notons que le mode radial à  $n = 0$  est souvent appelé mode de respiration et que celui à  $n = 1$  est un mode de corps rigide.



a. Modes hors du plan

b. Modes dans le plan

FIG. 1.23 – Classification des modes de disque

### Vibrations d'un disque réel

Pour un disque réel, la présence du bol entraîne inévitablement un couplage des modes hors du plan et des modes dans le plan. Ainsi, tous les modes font intervenir simultanément des déplacements selon les trois directions  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ . Néanmoins, la classification des modes présentée dans les deux paragraphes précédents reste qualitativement applicable pour les premiers modes du disque. Pour une étude plus précise des modes de disque, les chercheurs ont dans la plupart des cas recours à des modèles éléments finis. Nous citerons ici les études de Bae et Wickert [14, 158] qui évaluent l'effet de la profondeur du bol et les travaux de Tuchinda [153] qui proposent une classification des modes de disque avec bol (*top-hat like structure*).

### Travelling waves

Comme nous l'avons évoqué dans la partie synthétisant les travaux expérimentaux, des travelling waves apparaissent lors du crissement et se traduisent par une déformée qui semble tourner autour du disque. Afin d'introduire cette thématique, Kinkaid et al. rappellent que les modes de disque peuvent être considérés comme la superposition de deux ondes se propageant en sens opposés [81]. Par exemple, le mode hors du plan à  $m$  cercles et  $n$  diamètres nodaux décrit par  $u = R(r) \cos n\theta \cos \omega_{mn}t$  peut également s'écrire  $u = R(r)/2 [\cos(n\theta - \omega_{mn}t) + \cos(n\theta + \omega_{mn}t)]$ .

Une partie des chercheurs explique la présence des travelling waves par la rotation du disque. Tuchinda propose de calculer le comportement modal d'un disque tournant [153]. Il déclare que les fréquences des modes doubles hors du plan à  $m$  cercles et  $n$  diamètres nodaux se séparent lorsque le disque tourne. Pour expliquer cela, il cite les deux équations suivantes

$$\omega_{mn}^f = \omega_{mn} + n\Omega \quad \omega_{mn}^b = \omega_{mn} - n\Omega \quad (1.41)$$

avec  $\Omega$  la vitesse de rotation du disque. Le mode dont la pulsation est la plus élevée ( $\omega_{mn}^f$ ) apparaît comme une onde se propageant dans le même sens que la rotation du disque alors que l'autre ( $\omega_{mn}^b$ ) se propage dans le sens opposé. Ouyang et ses différents coauteurs prennent eux aussi en compte la vitesse de rotation du disque dans leurs études du crissement [129,128,127]. Ils modélisent la force de frottement comme un chargement mobile et considèrent le problème comme un problème de vibrations paramétriques. Ainsi, des résonances se produisent pour certaines valeurs particulières de la vitesse de rotation du disque. Dans les deux articles [128,127], la solution est recherchée sous la forme d'une superposition d'ondes stationnaires et de travelling waves progressives et régressives. Néanmoins, nous pouvons légitimement nous demander si cette théorie, initialement introduite pour les systèmes tournant à grande vitesse (disques durs d'ordinateurs, scies circulaires), est applicable dans le cas du crissement. En effet, la rotation du disque est imperceptible à l'échelle du crissement, dans la mesure où ces deux phénomènes sont associés à des constantes de temps complètement différentes, respectivement 6s pour une rotation à 10 tr/min et 1ms pour un crissement à 1kHz. De plus, les études expérimentales montrent qu'une fois établi, le crissement persiste jusqu'à l'arrêt du véhicule et ne se limite donc pas à quelques valeurs particulières de vitesse.

L'autre partie des chercheurs néglige la vitesse de rotation du disque tout en conservant indirectement son effet en introduisant des efforts de frottement non nuls. Le calcul du comportement modal du système fait alors apparaître des vecteurs propres complexes qui se traduisent par des travelling waves se propageant autour du disque. Afin d'éclaircir ce point, nous allons synthétiser les principales notions relatives aux modes complexes et aux phénomènes de propagation. Les modes complexes sont bien connus dans le domaine de l'analyse modale expérimentale. Comme le décrit Ewins [46], ils se caractérisent par des vibrations qui ne sont pas en phase sur toute la structure. Ainsi, chaque point de la structure n'atteint pas son maximum de déplacement au même instant. Les nœuds et les ventres de vibration ne sont plus définis au sens strict dans la mesure où les zéros et les maxima de déplacement changent au cours du temps. Ainsi, à la différence d'un mode réel qui correspond à une onde stationnaire, un mode complexe se traduit par une onde qui se propage dans la structure. Ewins explique que les modes d'une structure conventionnelle linéaire et non tournante ne peuvent être complexes qu'en présence d'amortissement non proportionnel. La figure 1.24 illustre un exemple de mode complexe obtenu par Sorrentino et al. avec une poutre non-proportionnellement amortie [146].

Les freins n'entrent pas dans la catégorie des structures conventionnelles évoquée par Ewins, de par la présence de frottement. C'est ce paramètre qui rend complexe les modes du système, comme l'ont montré de nombreux chercheurs. Pour illustrer ceci, citons les travaux de Flint et Hultén qui se focalisent sur la coalescence de modes induite par le moment des forces de frot-

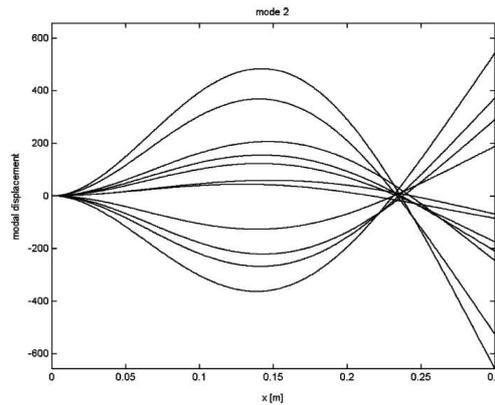


FIG. 1.24 – Exemple de mode complexe

tement [54, 56]. Ils calculent les modes complexes d'un modèle 1D et d'un modèle 2D qui font intervenir respectivement une onde progressive et une onde régressive autour du disque.

La relation entre les modes complexes et les phénomènes de propagation n'est pas triviale et est souvent mal comprise comme le soulignent Ahmida et Arruda [11]. Ils rappellent que dans le cas d'une structure infinie, nous observons un phénomène de propagation pure, alors que pour une structure finie les ondes sont réfléchies au niveau des conditions aux limites et se superposent pour donner les modes réels. Ils expliquent alors que les modes complexes sont à mi-chemin entre ces deux concepts et que les vibrations de telles structures s'expriment donc comme une combinaison d'ondes stationnaires et d'ondes propagatives.

#### 1.4.5 Acoustique

Les essais ont identifié le disque comme la source acoustique du crissement de frein. En observant les déformées associées aux différents modes de cette pièce, figure 1.23, il apparaît évident qu'ils ne se comportent pas tous de la même manière du point de vue rayonnement acoustique. En effet, la transmission des vibrations au milieu fluide environnant nécessite des vitesses normales à la surface importantes. Nous pouvons donc affirmer qu'en terme de rayonnement acoustique, les modes hors du plan sont beaucoup plus efficaces que les modes dans le plan. Nous faisons néanmoins le constat que l'aspect acoustique du crissement n'a fait l'objet que d'un nombre très limité de travaux de modélisation.

M.R. Lee et Singh se sont intéressés au rayonnement des modes hors du plan d'un disque dur d'ordinateur [96]. En partant de l'équation 1.27 et en utilisant une approximation polynomiale, ils calculent analytiquement les déformées modales du disque. Conformément à ce qui a été présenté précédemment, ces déformées sont référencées par leur nombre de cercles et de diamètres nodaux, respectivement  $m$  et  $n$ . A partir de cela, ils utilisent la fonction de Green en champ libre pour calculer la pression acoustique  $p_{mn}$  rayonnée en champ lointain par chaque mode. Ceci leur permet de calculer la puissance acoustique modale  $\Pi_{mn}$  et l'efficacité acoustique modale  $\sigma_{mn}$  sous la forme de séries entières du nombre d'onde.

MacDaniel et al. ont étudié le comportement acoustique du système de freinage grâce à une méthode hybride mesure-calcul [111]. Pour cela, ils ont excité le système avec un pot vibrant tout en mesurant sa réponse en terme de vitesse normale grâce à un vibromètre laser. Ils ont ensuite injecté ces données dans un code de calcul de type éléments de frontière (BEM) afin d'obtenir le rayonnement acoustique correspondant. Ils mettent en évidence que l'efficacité acoustique du système augmente avec la fréquence et atteint quasiment la valeur 1 au delà de 2 kHz. Ils

expliquent que de telles efficacités interviennent généralement au voisinage de la fréquence de coïncidence, qui est définie comme la fréquence pour laquelle les longueurs d'ondes structurelles et acoustiques sont égales. Ces deux longueurs d'ondes, qui s'expriment respectivement  $\lambda_s = 2\pi R_2/n$  pour les modes de flexion et  $\lambda_a = c/f$ , sont effectivement du même ordre de grandeur au voisinage de 2.5kHz, qui est donc la fréquence de coïncidence du système.

H. Lee et Singh proposent une méthode semi-analytique de calcul du rayonnement acoustique du disque [91]. Ils commencent par calculer le comportement modal d'un disque par éléments finis. Pour chacun des modes, ils développent une modélisation analytique de la pression acoustique en champ lointain, en faisant l'hypothèse d'un coque annulaire épaisse.

## 1.5 Robustesse et fiabilité

### 1.5.1 Problématique

La nature fugace du phénomène de crissement nous incite à l'aborder en utilisant une démarche qualité. Améliorer la qualité d'un produit consiste à maximiser ses performances, mais également à minimiser sa variabilité. Afin d'illustrer ces deux notions, commençons par préciser la grandeur que nous cherchons à contrôler et à partir de laquelle la qualité du système sera évaluée. La fonction principale du système de freinage est d'obtenir un certain niveau de décélération qui dépend de la vitesse initiale du véhicule et de la pression hydraulique appliquée par l'utilisateur, comme indiqué figure 1.25.



FIG. 1.25 – Fonctions du système

Le bruit rayonné, qui n'est qu'une conséquence de cette fonction principale, est la grandeur que l'on souhaite maîtriser. En se focalisant sur le comportement acoustique du système, nous pouvons construire le P-diagramme représenté figure 1.26. Celui-ci nous indique que le crissement est sensible à deux types de facteurs que l'on nomme *facteurs de bruit* et *facteurs de conception*.

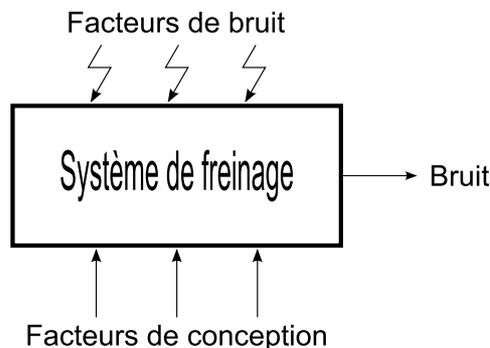


FIG. 1.26 – Fonction acoustique du système

Parmi les facteurs de bruit, nous distinguons

- les paramètres d’usage : la pression hydraulique et la vitesse véhiculé
- les paramètres d’environnement : principalement la température et l’hygrométrie
- l’usure et le vieillissement des composants
- les dispersions de fabrication

Les paramètres d’usage et d’environnement ainsi que le vieillissement provoquent la variabilité des performances d’un même système physique, alors que les dispersions de fabrication entraînent une variabilité de comportement d’un système à l’autre. Dans le premier cas, nous parlons de dispersion intra-système et dans le second de dispersion inter-systèmes, pour des systèmes de même définition technique utilisés dans les mêmes conditions.

Les facteurs de conception, encore nommés facteurs de contrôle, désignent l’ensemble des paramètres qui permettent de définir de façon complète le système. Ils regroupent à la fois les paramètres géométriques et matériaux, ainsi que les choix en terme de technologie et de process.

Dans la suite, nous présenterons les deux approches les plus utilisées pour estimer la qualité d’un système : l’approche robuste et l’approche fiabiliste. Nous aborderons ensuite une méthode qui permet d’améliorer la qualité : l’ingénierie robuste.

### 1.5.2 Analyse de robustesse

Pour introduire cette notion, nous nous référons dans un premier temps à l’ouvrage de Taguchi [149], dans lequel il donne à la robustesse la définition suivante :

The state where the technology, product, or process performance is minimally sensitive to factors causing variability (either in the manufacturing or user’s environment) and aging at the lowest unit manufacturing cost.

L’objectif d’une analyse de robustesse consiste à s’assurer que le système conserve ses performances quelque soit la valeur des facteurs de bruit. Afin de s’en assurer, deux outils sont principalement utilisés : les plans d’expériences et les simulations de Monte Carlo. Les résultats obtenus permettent alors d’estimer la robustesse du système.

#### Plans d’expériences

Les plans d’expériences sont des outils aujourd’hui largement utilisés dans de nombreux domaines de l’ingénierie [38]. L’objectif de ce paragraphe n’est pas de les présenter de façon exhaustive, mais uniquement de souligner les points importants qui nous serviront dans les prochains chapitres. Le principe d’un plan d’expérience est d’observer la sortie d’un système, par la mesure ou par la simulation, pour différentes combinaisons des facteurs d’entrée. L’objectif d’une telle démarche peut être de plusieurs natures :

- déterminer les paramètres influents sur un système et les hiérarchiser
- obtenir une expression analytique linéaire liant la sortie aux entrées
- identifier les éventuelles interactions entre paramètres

En premier lieu, il faut déterminer les facteurs à faire varier et leur fixer un certain nombre de niveaux ou modalités. Ces modalités correspondent aux valeurs que peuvent prendre les différents facteurs. Il convient ensuite de créer la table de référence du plan d’expérience. C’est une matrice qui représente les valeurs prises par chaque facteur, selon les colonnes, pour chaque expérience, selon les lignes. Les plans d’expériences les plus communs sont les plans factoriels complets, qui comportent autant d’expériences que de combinaisons possibles entre les modalités des différents facteurs. Lorsque tous les facteurs ont le même nombre,  $m$ , de modalités, ils sont désignés par  $m^n$ , avec  $n$  le nombre de facteurs. De manière générale, le nombre d’expériences s’écrit  $\prod_{i=1}^n m_i$ , avec  $m_i$  le nombre de modalités du facteurs  $i$ . De tels plans fournissent de multiples informations, aussi bien sur l’influence des facteurs que sur leurs interactions, mais sont extrêmement coûteux

à réaliser. Ainsi, d'autres types de plans moins coûteux ont été développés pour répondre à des attentes spécifiques. Citons notamment les plans fractionnaires orthogonaux, latins hypercubes et centraux composites. Pour plus de détails, nous nous référerons par exemple à [38, 1].

### Simulation de Monte Carlo

Une simulation de Monte Carlo consiste à évaluer la réponse d'un système pour des combinaisons de paramètres d'entrée choisies de façon aléatoire. Chaque entrée est définie par sa distribution de probabilité, généralement uniforme ou gaussienne, par sa moyenne et son écart type. Toutes les entrées sont considérées comme des variables aléatoires indépendantes. Il convient ensuite de décider du nombre de simulations à réaliser. Ce nombre correspond au nombre de combinaisons des facteurs d'entrée à choisir aléatoirement en respectant les lois de probabilité de chacun d'eux. Le coût de calcul dépend directement du nombre de simulations choisi et peut se révéler prohibitif si on souhaite obtenir avec précision la distribution de probabilité de la variable de sortie. Néanmoins, si on se limite à l'observation de ses moments d'ordre inférieur, l'écart type et la moyenne, le nombre de simulations et donc le coût de calcul peuvent être considérablement réduits.

### Indicateur de robustesse

Les plans d'expériences et les simulations de Monte Carlo permettent d'obtenir la réponse du système pour différentes combinaisons des entrées. L'objectif est ensuite d'évaluer la robustesse de cette réponse par rapport à la variabilité des entrées. D'après Taguchi, le seul indicateur pertinent de robustesse est le rapport signal sur bruit  $S/N$  (*signal to noise ratio*) [149]. Le mode de calcul de cet indicateur dépend de la nature de la réponse. En effet, selon que l'on cherche à obtenir les réponses les plus proches du nominal, les plus faibles ou les plus élevées possibles, l'expression de  $S/N$  sera différente, comme indiqué dans le tableau 1.2. Les notations utilisées sont les suivantes :  $y_i$  désigne la réponse de l'expérience  $i$ ,  $n$  le nombre d'expériences,  $\bar{y}$  la moyenne et  $\sigma$  l'écart type des réponses sur l'ensemble des expériences. Notons que les expressions annoncées ne sont valables que pour des réponses positives, ce qui sera le cas dans nos études. Pour obtenir les expressions à adopter dans les autres cas, nous nous reporterons à [1].

Type de comportement	$S/N$
Le nominal le meilleur	$10 \log_{10} (\bar{y}^2 / \sigma^2)$
Le plus faible le meilleur	$-10 \log_{10} (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2)$
Le plus élevé le meilleur	$-10 \log_{10} (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1/y_i^2)$

TAB. 1.2 – Expressions de  $S/N$

### 1.5.3 Analyse de fiabilité

Les méthodes d'analyse de fiabilité ont été développées afin de s'assurer qu'un système remplit sa fonction, définie par son cahier des charges, malgré la présence d'incertitudes et d'aléas. Ces incertitudes et aléas sont considérés comme variables d'entrée du système et sont définis par leurs densités de probabilité. Connaissant les probabilités des variables d'entrée, les méthodes fiabilistes consistent à calculer la probabilité de défaillance du système, c'est à dire la probabilité qu'il ne

satisfasse pas le cahier des charges. La fiabilité est alors définie comme le complémentaire à 1 de la probabilité de défaillance.

L'analyse fiabiliste fait partie intégrante du processus de validation d'un nouveau système de freinage, comme illustré dans la partie 1.3. En effet, lors d'un matrix test, la probabilité que le frein soit défaillant, c'est à dire bruyant, est calculée. Cette probabilité,  $Occ$ , porte le nom d'occurrence de crissement et est exprimée en pourcentage de l'ensemble des coups de freins. Son complémentaire à 1 porte le nom de niveau de fiabilité et est symbolisé par la lettre  $R$ .

$$Occ = \frac{\text{Nombre de coups de frein bruyants}}{\text{Nombre total de coups de frein}} \quad R = 1 - Occ \quad (1.42)$$

La notion de risque est ensuite définie à partir de la probabilité de défaillance et de sa gravité.

$$\text{Risque} = \text{Probabilité} \cdot \text{Gravité} \quad (1.43)$$

Dans notre cas, la grandeur associée à la gravité d'un crissement est son niveau acoustique. Le diagramme qui consiste à observer la probabilité de défaillance en fonction du niveau de gravité porte le nom de diagramme de Farmer. Sur ce diagramme, les courbes d'iso-risque prennent la forme d'hyperboles. Dans la pratique, ce diagramme est utilisé pour définir les notions de risques acceptables et de risque inacceptables, comme illustré figure 1.27 dans le cas du crissement de frein.

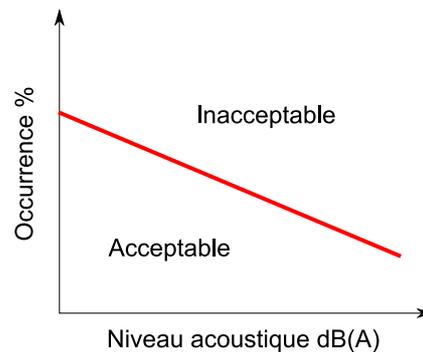


FIG. 1.27 – Diagramme de Farmer

Il est également possible d'utiliser l'approche fiabiliste du point de vue de la simulation. Dans ce cas, la probabilité de défaillance est calculée à partir de simulations de Monte Carlo, en utilisant l'équation 1.42.

#### 1.5.4 Conception robuste

La vérification a posteriori de la robustesse et de la fiabilité d'un système est une étape indispensable dans son processus de développement, mais on ne peut se contenter de cela. En effet, si on se rend compte à ce stade d'un manque de qualité, la marge de manœuvre pour pallier ce problème est très réduite. Les seules solutions sont de réduire les tolérances de fabrication, ce qui a un coût très important, ou de réduire la plage d'utilisation du système, ce qui est inenvisageable dans la plupart des cas. Il est donc capital de prendre en compte la robustesse du système dès la phase de conception en adoptant une démarche d'ingénierie robuste. Il s'agit alors de réaliser une double optimisation en maximisant les performances du système et en minimisant sa sensibilité aux facteurs de bruit.

### Conception robuste au sens de Taguchi

L'objectif de la conception robuste est d'améliorer la qualité du système en trouvant dans l'espace des paramètres de conception une solution qui assure de bonnes performances tout en minimisant la sensibilité de ces dernières aux variations des paramètres de bruit. Dans cette approche, la performance et la variabilité du système sont évaluées grâce à un *plan d'expérience produit* construit en croisant deux plans d'expériences représentant respectivement les facteurs de contrôle et les facteurs de bruit. Dans l'exemple représenté figure 1.28, trois facteurs de bruit ( $z_1, z_2, z_3$ ) et trois facteurs de contrôle ( $x_1, x_2, x_3$ ) ont été considérés. Ils sont respectivement associés à deux plans d'expériences factoriels complets à deux niveaux (+, -). Le plan produit comporte donc  $2^3 \cdot 2^3 = 64$  expériences pour lesquelles la réponse  $y_{ij}$  du système est évaluée, avec  $i$  et  $j$  respectivement les indices des matrices de contrôle et de bruit. Pour chaque expérience  $i$  du plan de contrôle, c'est à dire pour chaque ligne du plan produit, la moyenne  $\mu_{yi}$ , l'écart-type  $\sigma_{yi}$  et le ratio  $S/N_{yi}$  des sorties sont calculés. Ainsi, nous obtenons une mesure de la performance,  $\mu_{yi}$ , et de la robustesse,  $S/N_{yi}$ , de chaque solution. Il convient alors de déterminer la solution optimale en choisissant un compromis entre ces deux grandeurs.

						Bruits								
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	.	$z_3$	$z_2$	$z_1$	.	.	.	.	.	
		.	.	.	.	+	+	+	-	.	.	.	.	
		.	.	.	.	+	+	-	+	.	.	.	.	
		.	.	.	.	+	-	+	+	.	.	.	.	
		.	.	.	.	1	2	3	4	.	.	.	.	
Contrôles	1	+	+	+	.	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$	.	.	$\mu_{y1}$	$\sigma_{y1}$	$S/N_{y1}$
	2	-	+	+	.	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	$y_{24}$	.	.	$\mu_{y2}$	$\sigma_{y2}$	$S/N_{y2}$
	3	+	-	+	.	$y_{31}$	$y_{32}$	$y_{33}$	$y_{34}$	.	.	$\mu_{y3}$	$\sigma_{y3}$	$S/N_{y3}$
	4	+	+	-	.	$y_{41}$	$y_{42}$	$y_{43}$	$y_{44}$	.	.	$\mu_{y4}$	$\sigma_{y4}$	$S/N_{y4}$
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

FIG. 1.28 – Plan produit

### Analyse Six Sigma

Nous avons évoqué précédemment un certain nombre d'outils qui permettent d'évaluer et d'améliorer la qualité d'un système. Ils ont chacun leurs avantages et leurs propres modes de prise en compte de la variabilité. Ainsi, une analyse de Monte Carlo est un outil d'investigation sans contrainte ni objectif. Une analyse fiabiliste se focalise sur le respect d'une contrainte. Une analyse de robustesse au sens de Taguchi a pour objectif l'obtention du meilleur compromis performance-robustesse, mais ne prend pas en compte de contrainte. Tous ces aspects ont été synthétisés dans une démarche globale pour la qualité nommée *analyse Six Sigma* ( $6\sigma$ ). Cette méthodologie initialement développée par B. Smith chez Motorola a ensuite fait ses preuves dans de très nombreuses entreprises. La démarche Six Sigma est à la fois une mesure de qualité, une méthodologie et un système de management. Dans la suite, nous nous bornerons à détailler le premier de ces concepts et nous nous référerons à la documentation fournie par Motorola pour les autres.

Le terme sigma fait référence à l'écart-type, qui est une mesure de la variabilité d'une grandeur autour de sa moyenne. La figure 1.29 représente la dispersion d'une variable gaussienne en terme de sigma. Pour chaque niveau de sigma, l'aire sous la courbe représente la probabilité associée.

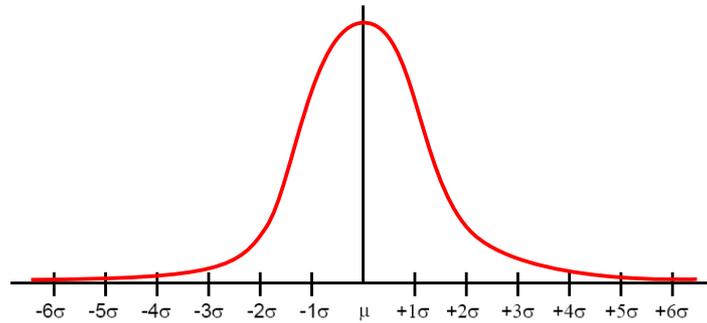


FIG. 1.29 – Distribution gaussienne

Niveau de sigma	Pourcentage de variation	Défauts par million à court terme	Défauts par million à long terme
$\pm 1\sigma$	68.26	317400	697700
$\pm 2\sigma$	95.46	45400	308733
$\pm 3\sigma$	99.73	2700	66803
$\pm 4\sigma$	99.9937	63	6200
$\pm 5\sigma$	99.999943	0.57	233
$\pm 6\sigma$	99.9999998	0.002	3.4

TAB. 1.3 – Niveau de sigma

Ainsi, par exemple,  $\pm 1\sigma$  correspond à une probabilité de 0.683. Le tableau 1.3 permet de faire le lien entre le niveau de sigma et la probabilité associée. Cette probabilité peut également être exprimée en nombre de défauts par million, qui est le principal indicateur de qualité utilisé dans les différents domaines de la production. Dans ces industries, le niveau de qualité est généralement qualifié de  $3\sigma$ , ce qui signifie que l'intervalle de tolérance accepté est de  $\pm 3\sigma$  autour du nominal. De tels systèmes ont des performances acceptables dans 99.73 % des cas. Bien que ce niveau de qualité ait été pendant longtemps considéré comme suffisant, de nombreuses entreprises dont Motorola, l'ont récemment mis en défaut. En effet, une qualité  $3\sigma$  implique 2700 défauts par million. De plus, cette qualité subit une dérive au cours du temps, du fait de l'usure des moyens de production. Cette dérive, qui est généralement estimée à  $1.5\sigma$  par rapport à la valeur moyenne, est prise en compte pour définir la qualité à long terme représentée dans la quatrième colonne du tableau 1.3. Nous constatons alors qu'une qualité  $3\sigma$  correspond, à long terme, à 66803 défauts par million, ce qui est clairement inacceptable. Ainsi, Motorola définit un objectif qualité plus sévère afin de s'affranchir des dérives des performances dans le temps. Cet objectif définit un intervalle de tolérance acceptable de  $\pm 6\sigma$  autour du nominal, ce qui correspond à 0.002 défauts par million à court terme et à 3.4 à long terme. Cet objectif de qualité s'intègre dans la phase de conception par la démarche de *Design for six sigma*. Il convient alors de définir a priori les limites acceptables de performance du système. Le but est ensuite de le concevoir de façon à ce que ses performances restent dans la plage acceptable avec une probabilité correspondant à  $\pm 6\sigma$  malgré la variabilité des paramètres. Afin d'illustrer ceci, la figure 1.30 compare une conception  $3\sigma$  et une conception  $6\sigma$  avec les mêmes limites acceptables de performance.

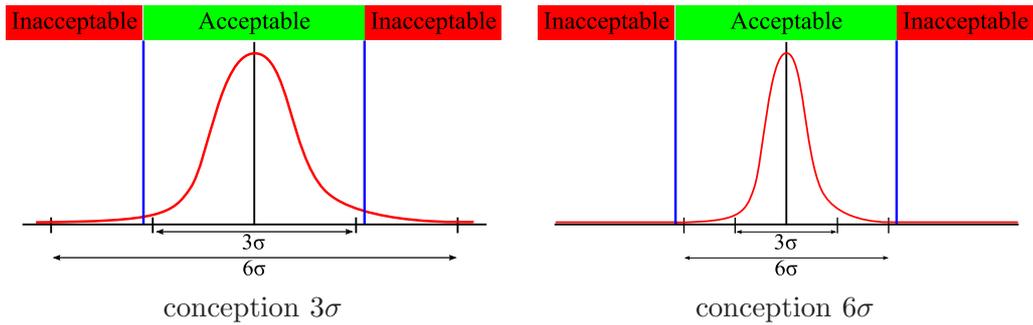


FIG. 1.30 – Design for six sigma

## 1.6 Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de présenter la problématique du crissement de frein avec ses multiples aspects. Ce bruit de frein se caractérise par une fréquence pure comprise entre 1 et 16 kHz et par des niveaux acoustiques pouvant atteindre 110 dB.

Une synthèse des travaux expérimentaux nous montre que ce phénomène apparaît préférentiellement pour de faibles pressions, faibles vitesses et faibles températures. Lors de l'apparition du crissement, l'ensemble des pièces vibrent à la même fréquence avec une amplitude exponentiellement croissante, ce qui prouve que ce phénomène est à l'origine une instabilité vibratoire induite par le frottement. La principale caractéristique qui rend le crissement très difficile à appréhender est sa forte sensibilité à de nombreux paramètres. C'est la raison pour laquelle de nombreux chercheurs parlent de la nature fugace du crissement de frein.

Une synthèse des travaux de modélisation permet de montrer que la coalescence de modes est reconnue de façon consensuelle comme étant le mécanisme responsable du crissement. Ainsi, une analyse aux valeurs propres complexe permet de montrer comment deux modes peuvent se coupler pour donner naissance à un mode instable lorsque le coefficient de frottement augmente. Le développement de l'instabilité est ensuite contrarié par la présence de non-linéarités qui bornent les niveaux vibratoires et forcent le système à rester sur un cycle limite. Dans le cas des crissements basses fréquences, ce sont ensuite les vibrations hors du plan du disque qui sont responsables du rayonnement acoustique.

Le crissement étant par nature très sensible, il convient de l'aborder de façon robuste. Ainsi, nous avons présenté les concepts et les outils de base qui seront utilisés dans la suite dans le but d'améliorer la performance et de réduire la variabilité du système.

## Chapitre 2

# Modèle linéaire

L'état de l'art présenté dans le chapitre précédent a conclu que le crissement est une instabilité vibratoire induite par le frottement. Un modèle analytique à deux degrés de liberté a permis de mettre en évidence le phénomène de coalescence de modes qui donne naissance à une instabilité de type flottement. Ce modèle phénoménologique est néanmoins beaucoup trop simplifié pour décrire la réalité des phénomènes physiques présents dans un frein complet. L'objectif de ce chapitre est maintenant de réaliser un modèle représentatif d'un système de freinage réel afin de prédire sa propension au crissement. La modélisation choisie est basée sur la méthode des éléments finis et prend en compte le frottement aux interfaces disque-plaquettes. Nous allons commencer par détailler la mise en équation qui conduit à l'écriture d'un problème aux valeurs propres complexes. Nous introduirons ensuite une méthode modale particulière qui permet de réduire considérablement les temps de calcul tout en conservant une très bonne précision. Nous présenterons enfin le modèle éléments finis et nous l'utiliserons pour réaliser des études paramétriques par rapport au coefficient de frottement, au module d'Young du disque et à l'amortissement.

### 2.1 Analyse aux valeurs propres complexes

#### 2.1.1 Mise en équation

Dans cette partie, nous allons décrire la mise en équation du problème en nous basant sur une modélisation par éléments finis. Cette méthodologie suppose tout d'abord la discrétisation des différentes pièces constituant le système en éléments finis volumiques. Les liaisons entre les pièces sont ensuite prises en compte sous forme de corps rigides ou de raideurs équivalentes. Néanmoins, la partie la plus importante de la modélisation concerne le contact frottant entre le disque et les plaquettes. Comme l'indiquent Ouyang et al. dans leurs synthèses sur les méthodes numériques, la plupart des chercheurs l'ont pris en compte en distinguant deux phénomènes [130, 131]. D'une part le contact en tant que tel, qui pilote les efforts normaux  $\mathbf{N}$  à la surface de contact et d'autre part le frottement qui pilote les efforts tangentiels  $\mathbf{T}$ .

Dans un premier temps, *le contact* est modélisé par des raideurs de contact nœuds à nœuds. Ainsi, l'équation gouvernant le système s'écrit

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_s\mathbf{u} = \mathbf{F}_f \quad (2.1)$$

avec  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}_s$  respectivement les matrices de masse et de raideur structurelle du système. Notons que  $\mathbf{K}_s$  inclue les termes relatifs aux raideurs de contact.  $\mathbf{F}_f$  désigne le vecteur effort induit par le frottement.

Dans un second temps, *le frottement* est modélisé grâce à la loi de Coulomb, qui relie l'effort

tangentiel à l'effort normal au contact par l'intermédiaire du coefficient de frottement  $\mu$

$$\mathbf{T} = \mu \mathbf{N} \quad (2.2)$$

La présence des raideurs de contact permet d'exprimer l'effort normal en fonction des déplacements de l'interface. En combinant cette constatation à l'équation 2.2, nous pouvons affirmer qu'il existe une matrice  $\mathbf{K}_f$  vérifiant  $\mathbf{F}_f = -\mu \mathbf{K}_f \mathbf{u}$ . Ainsi, l'équation 2.1 devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_s + \mu \mathbf{K}_f) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

La matrice de raideur induite par le frottement,  $\mu \mathbf{K}_f$ , dépend explicitement du coefficient de frottement et des valeurs des raideurs de contact. De plus, elle a la particularité d'être non-symétrique. En posant  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_s + \mu \mathbf{K}_f$ , la matrice de raideur totale, l'équation 2.3 prend la forme générique suivante

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Cette équation définit un problème aux valeurs propres dont il faut déterminer les valeurs propres  $\lambda$  et les vecteurs propres  $\Psi$ . La matrice  $\mathbf{K}$  étant non-symétrique,  $\lambda$  et  $\Psi$  sont dans le cas général complexes.

### 2.1.2 Propriétés du problème aux valeurs propres

En transférant l'équation 2.4 dans le domaine fréquentiel et en appelant  $s$  la variable de Laplace, nous obtenons

$$(s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \Psi = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Cette équation définit un problème aux valeurs propres généralisées avec  $\lambda = s^2$  la valeur propre et  $\Psi$  le vecteur propre. Dans le cas général, toutes ces grandeurs sont complexes :

$$\lambda = a + ib \quad s = \alpha + i\omega \quad \Psi = \mathbf{X} + i\mathbf{Y} \quad (2.6)$$

Le lien entre  $\lambda$  et  $s$  s'écrit

$$\begin{cases} a = \alpha^2 - \omega^2 \\ b = 2\alpha\omega \end{cases} \quad \text{ou encore, pour } \omega \neq 0 \quad \begin{cases} \alpha = b/2\omega \\ \omega^4 + a\omega^2 - b^2/4 = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Ainsi, connaissant  $\lambda$ ,  $s$  s'obtient en résolvant une équation du quatrième ordre, dont les quatre racines sont

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad (2.8)$$

En remarquant que  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, -a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ , nous pouvons exclure deux des racines qui sont imaginaires et donc en contradiction avec la définition de  $\omega$ . Mathématiquement, le polynôme possède deux racines réelles opposées, mais nous excluons la racine négative qui n'est pas physique, et nous obtenons finalement

$$\omega = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \alpha = \frac{b}{\sqrt{2(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}} \quad (2.9)$$

Les deux matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  étant réelles, les éléments propres associés à l'équation 2.5 sont deux à deux complexes conjugués. En effet, si  $(\lambda, \Psi)$  sont éléments propres, alors  $(\bar{\lambda}, \bar{\Psi})$  le sont également. Pour redémontrer ceci, il suffit d'injecter l'équation 2.6 dans 2.5, de développer et de séparer les parties réelle et imaginaire pour constater que l'on obtient les mêmes relations pour

les deux couples d'éléments propres. L'équation 2.9 montre que si  $s = \alpha + i\omega$  est solution de 2.5 en association avec  $\lambda$  et  $\Psi$ , alors  $-\bar{s} = -\alpha + i\omega$  est solution de cette même équation en association avec  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{\Psi}$ . Nous pouvons également montrer qu'un vecteur propre réel implique que  $s$  soit imaginaire pure, et réciproquement.

Dans la suite, nous utiliserons le terme « valeur propre du système » pour désigner  $s$  et non  $\lambda$  dans la mesure où  $s$  est la grandeur physiquement interprétable. Ceci se justifie par le fait que l'équation 2.5 peut se ramener, en doublant la taille de l'espace d'état, à un problème aux valeurs propres dont  $s$  est la valeur propre.

### 2.1.3 Approches directe et modale

Pour résoudre 2.4, deux approches sont possibles : l'approche directe ou l'approche modale. Nous allons ici détailler la seconde approche qui consiste à projeter l'équation 2.4 sur la base modale réelle du système avant d'en extraire les valeurs propres complexes. Pour ce faire, un calcul aux valeurs propres réelles est d'abord réalisé en ne prenant en compte que la partie symétrique de la matrice de raideur. Ceci revient à trouver les fréquences et la base modale réelle du système sans frottement associés à l'équation 2.10

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_s\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

Après extraction des  $n$  premiers modes de 2.10, notons  $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1 \cdots \omega_n)$  la matrice contenant les pulsations propres correspondantes et  $\mathbf{\Phi}$  la base modale réelle constituée des vecteurs propres classés par colonnes.

Les déplacements du système avec frottement 2.4 sont ensuite cherchés sous forme d'une combinaison linéaire des modes réels du système sans frottement. Ceci s'écrit sous forme matricielle comme indiqué par l'équation 2.11, avec  $\gamma$  le vecteur des coordonnées modales

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}\gamma \quad (2.11)$$

En multipliant à gauche l'équation 2.4 par  $\mathbf{\Phi}^T$  et en utilisant 2.11, nous aboutissons à

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\gamma} + \tilde{\mathbf{K}}\gamma = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

$$\text{avec} \quad \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$$

Une fois les valeurs et vecteurs propres complexes de 2.12 calculés, les vecteurs propres de 2.4 sont reconstruits grâce à la relation 2.11. En effet, en appelant  $\mathbf{\Gamma}$  la matrice contenant les vecteurs coordonnées modales  $\gamma$  classés par colonnes, les modes propres du système avec frottement se déduisent des modes propres sans frottement par la relation :

$$\Psi = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma} \quad (2.13)$$

Nous remarquons que les équations relatives à l'approche directe (2.4) et à l'approche modale (2.12) ont la même structure. Cependant, la première est de dimension  $(N_{ddl} \times N_{ddl})$ , alors que la seconde est de dimension  $(N_{mode} \times N_{mode})$  beaucoup plus faible. Au global, l'approche modale, qui nécessite un calcul modal réel de grande dimension et un calcul modal complexe de petite dimension, est beaucoup plus efficace que l'approche directe en terme de temps de calcul.

### 2.1.4 Algorithmes de résolution

Pour les deux approches, directe et modale, la matrice de raideur est non-symétrique en présence de frottement. La résolution de l'équation du mouvement nécessite alors un type de

solveur particulier, nommé « solveur complexe », capable de prendre en compte une matrice de raideur non-symétrique. Les deux algorithmes les plus utilisés dans la pratique se nomment Lanczos complexe et Hessenberg. Le premier, de type itératif, est adapté aux problèmes de grande dimension, alors que le second est un algorithme de réduction mieux adapté aux problèmes de petite ou moyenne dimension. Ainsi, nous préférons l'algorithme Lanczos pour une approche directe et l'algorithme Hessenberg pour une approche modale. Il existe plusieurs variantes de ces algorithmes implémentées dans les logiciels commerciaux, comme nous pouvons le constater en annexe B.1. Les variantes les plus performantes s'appellent respectivement « Adaptive block complex Lanczos » (ABLE) et « QZ Hessenberg ». Les principales caractéristiques de ces solveurs sont détaillées en annexe, mais pour plus de détails nous nous reporterons au livre de Bai et al. [15] et aux guides [2, 82] pour leur implémentation dans le logiciel Nastran. Pour être complet, citons également les articles de Lee et al. [94] et de Lou et al. [103] qui détaillent les avantages de l'utilisation de l'algorithme ABLE pour des calculs de crissement de frein.

### 2.1.5 Signification physique

Quelque soit la méthode et le solveur choisis, nous obtenons les valeurs propres  $s$  et les vecteurs propres  $\Psi$  associés à l'équation 2.4. Dans le cas général, ces deux grandeurs sont complexes. Ainsi, chaque mode de la structure s'écrit en terme de déplacements :

$$\mathbf{u} = \Psi e^{st} \quad (2.14)$$

$$\text{avec} \quad s = \alpha + i\omega \quad \text{et} \quad \Psi = \mathbf{X} + i\mathbf{Y} = |\Psi| e^{i\Theta} \quad (2.15)$$

La partie imaginaire de la valeur propre,  $\omega$ , détermine la pulsation des oscillations alors que la partie réelle,  $\alpha$ , en détermine la stabilité. En effet, une partie réelle positive entraîne une divergence exponentielle de l'amplitude des oscillations, alors qu'une partie réelle négative est synonyme d'un comportement évanescent.

Dans la réalité, le fait que cette partie réelle soit positive est une condition nécessaire mais pas suffisante pour obtenir du crissement. En effet, si sa valeur est faible l'amortissement du système peut être suffisant pour stabiliser le mode. D'autre part, du fait de la présence de non-linéarités dans le système, l'amplitude des oscillations des modes instables converge vers un niveau donné appelé cycle limite. Enfin, un mode instable qui se développe vers un cycle limite de niveau important n'est pas nécessairement un bon émetteur acoustique. Toutes ces raisons expliquent pourquoi l'analyse aux valeurs propres complexe a tendance à prédire plus de modes instables que de crissements effectivement détectés lors des essais.

La partie réelle des valeurs propres représente le taux de divergence de l'amplitude des oscillations sur une période. Il est également possible d'analyser la stabilité du système en terme de taux d'amortissement critique  $\xi$  ou de facteur de perte  $\eta$ , respectivement définis comme suit

$$\xi = -\frac{\alpha}{\omega} \quad \eta = 2\xi \quad (2.16)$$

L'équation 2.16 montre qu'une partie réelle positive est formellement équivalente à un taux d'amortissement négatif. Le principal avantage de l'utilisation de  $\xi$  est qu'il permet d'évaluer simplement le taux d'amortissement qui serait nécessaire pour stabiliser le mode instable. De par sa définition,  $\xi$  a également tendance à « privilégier » les modes basses fréquences par rapport aux modes hautes fréquences. Ceci présente un intérêt dans l'évaluation de la criticité des modes instables car les premiers sont dans la pratique beaucoup plus difficile à éliminer que les seconds. Afin d'avoir un indicateur de la stabilité du frein sur l'ensemble de la plage de fréquence, Lee,

Brooks et al. proposent d'étudier l'écart-type de toutes les parties réelles [78,98,99]. Ahmed et al. proposent un autre critère nommé TOI (*Tendency Of Instability*) qui est défini comme suit [10].

$$TOI = \sum_{i=1}^{N_{mode}} \left( \frac{\alpha}{\omega} \cdot 1000 \right)_{,\alpha>0} \quad (2.17)$$

Nous allons maintenant interpréter physiquement ce que sont les modes complexes. Le fait qu'un vecteur propre soit complexe indique qu'il existe un déphasage entre chacun des degrés de liberté. Ce déphasage est représenté dans l'équation 2.15 par le vecteur  $\Theta$ . L'animation d'un mode complexe dans le domaine temporel s'obtient alors en suivant l'équation

$$\mathbf{u}(t) = |\Psi| e^{\alpha t} \cos(\omega t + \Theta) \quad (2.18)$$

Pour des raisons pratiques de visualisation, la partie exponentielle est omise lors de l'animation. Celle-ci montre que les degrés de liberté n'admettant plus leurs maxima et minima au même instant. Les concepts de nœuds et de ventres de vibration ne sont donc plus définis. De plus, les modes complexes sont facilement reconnaissables car les déphasages entraînent des mouvements caractéristiques qui sont qualifiés de *wobbling effect* par Nack et Chen [119].

## 2.2 Synthèse modale

### 2.2.1 Sous-structuration

G.D. Liles [101] a été le premier, en 1989, à proposer une simulation du crissement de frein basée sur une analyse aux valeurs propres complexes par éléments finis. Afin de réduire le temps de calcul de cette analyse, une technique de synthèse modale a été utilisée : la sous-structuration. Chaque pièce est maillée séparément afin de réaliser des calculs modaux sur chacune d'elles. Le modèle complet est ensuite construit en intégrant le comportement modal des pièces ainsi que les liaisons appropriées. La taille du modèle est alors suffisamment faible pour qu'il soit résolu grâce à un solveur de type Hessenberg. Par la suite, d'autres chercheurs ont poursuivi les travaux de G.D. Liles en utilisant plusieurs méthodes de sous-structuration [108,77], dont la méthode de MacNeal [95]. Ces techniques de sous-structuration, qui étaient indispensables dans les années 1990, sont un peu moins utilisées aujourd'hui du fait de l'augmentation importante des performances des moyens informatiques. De plus, la plupart des méthodes utilisent les modes libre-libre des sous-structures. Bien que ceci présente un intérêt indéniable d'un point de vue ingénierie, l'intérêt en terme de temps de calcul et de précision est parfois limité car les modes de sous-structures sont, pour certaines pièces, très éloignés des modes du système assemblé. C'est pour cette raison que la méthode modale semi-analytique, que nous allons maintenant décrire, remplace avantageusement la sous-structuration.

### 2.2.2 Approche modale semi-analytique

L'approche modale qui consiste à projeter le problème sur la base modale du système sans frottement présente un intérêt certain en terme de temps de calcul. Comme le suggèrent Chung et ses différents coauteurs [121,33,34,35], il est possible de développer cette démarche de façon semi-analytique en travaillant sur l'équation 2.12.

Tout d'abord, les modes du système sans frottement,  $\Phi$ , sont normalisés par rapport à la matrice de masse. Les relations d'orthogonalité de ces vecteurs propres réels s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \\ \Phi^T \mathbf{K}_s \Phi = \Omega^2 \end{cases} \quad (2.19)$$

Une fois ces relations injectées dans 2.12, cette équation devient :

$$\mathbf{I}\ddot{\gamma} + \tilde{\mathbf{K}}\gamma = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

$$\text{avec} \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{\Omega}^2 + \mu\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}_f\mathbf{\Phi}$$

L'équation 2.20 est ensuite transférée dans le domaine fréquentiel, pour obtenir la forme classique d'un problème aux valeurs propres :

$$(s^2\mathbf{I} + \mathbf{\Omega}^2 + \mu\mathbf{\Lambda}_f)\gamma = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

avec  $s$  la variable de Laplace et  $\mathbf{\Lambda}_f = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}_f\mathbf{\Phi}$  la projection sur la base modale réelle de la matrice de raideur induite par le frottement.  $\mathbf{\Omega}^2$  et  $\mathbf{\Phi}$  s'obtiennent par un calcul modal réel et  $\mathbf{K}_f$  est déterminée analytiquement en fonction des raideurs de contact, comme nous le verrons par la suite. L'équation 2.21 définit pour chaque valeur de  $\mu$  un problème aux valeurs propres complexes de dimension  $(N_{mode} \times N_{mode})$ . Cette dimension est suffisamment faible pour traiter le problème dans un logiciel de calcul numérique tel que Matlab avec un solveur complexe de type QZ. Le grand intérêt de cette démarche est de ne réaliser qu'un seul calcul éléments finis coûteux afin d'obtenir  $\mathbf{\Omega}^2$  et  $\mathbf{\Lambda}_f$  puis de réaliser pour chaque valeur de  $\mu$  un calcul peu coûteux pour obtenir les valeurs propres du système.

### 2.2.3 Développement limité

Dans l'équation modale 2.21, seule la matrice  $\mathbf{\Lambda}_f$  est source de couplage entre les modes de par ses termes extra-diagonaux. Afin d'analyser le couplage induit par le coefficient de frottement, il est intéressant de calculer le développement limité au second ordre de 2.21 par rapport à ce paramètre :

$$s_i^2 \sim -\omega_i^2 - \mu[\mathbf{\Lambda}_f]_{ii} + \mu^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{[\mathbf{\Lambda}_f]_{ij} \cdot [\mathbf{\Lambda}_f]_{ji}}{\omega_j^2 - \omega_i^2} + o(3) \quad (2.22)$$

avec  $i \in [1..n]$  l'indice du mode considéré. Le terme d'ordre 0 correspond aux fréquences propres sans frottement. Le terme d'ordre 1 induit un décalage de ces fréquences proportionnellement au coefficient de frottement. Le terme d'ordre 2 exprime la contribution de tous les modes sans frottement  $j \neq i$  sur le mode  $i$ . Ceci fait apparaître la matrice de couplage entre chaque couple de modes  $(i, j)$ ,  $j \neq i$  :

$$[\mathbf{CS}]_{ij} = \frac{[\mathbf{\Lambda}_f]_{ij} \cdot [\mathbf{\Lambda}_f]_{ji}}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (2.23)$$

Cette matrice étant antisymétrique, si  $i$  a tendance à faire augmenter la fréquence de  $j$ , alors  $j$  fera diminuer celle de  $i$ , et réciproquement.

Focalisons nous d'abord sur le cas du couplage pur entre deux modes  $i$  et  $j$ , pour lequel seuls les termes  $[\mathbf{CS}]_{ij}$  et  $[\mathbf{CS}]_{ji}$  sont non nuls. Ces termes étant par ailleurs opposés, les fréquences des deux modes ne peuvent que se rapprocher ou s'éloigner de façon symétrique. C'est le signe de  $[\mathbf{\Lambda}_f]_{ij} \cdot [\mathbf{\Lambda}_f]_{ji}$  qui détermine s'ils se rapprochent ou s'ils s'éloignent. Leur vitesse de rapprochement ou d'éloignement s'écrit alors

$$\frac{d(s_j^2 - s_i^2)}{d\mu^2} = \frac{2[\mathbf{\Lambda}_f]_{ij} \cdot [\mathbf{\Lambda}_f]_{ji}}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \quad (2.24)$$

Cette équation montre que pour « retarder » un couplage, deux solutions sont possibles : augmenter l'écart en fréquence des deux modes sans frottement ou réduire la valeur de  $[\mathbf{\Lambda}_f]_{ij} \cdot [\mathbf{\Lambda}_f]_{ji}$ .

Dans le cas général, la somme présente dans l'équation 2.22 fait intervenir plusieurs contributions. Des phénomènes plus complexes de compensation peuvent alors apparaître. Néanmoins,

la matrice de couplage, une fois normalisée comme suit, est un premier indicateur permettant d'identifier quels sont les modes à  $\mu = 0$  susceptibles de se coupler.

$$[\mathbf{CR}]_{ij} = \frac{2[\mathbf{CS}]_{ij}}{\omega_i^2 + \omega_j^2} \quad (2.25)$$

Il faut néanmoins rester prudent lors de l'utilisation de ce critère car le développement limité à partir duquel il est construit n'est valable qu'au voisinage de  $\mu = 0$ .

## 2.3 Modèle éléments finis

### 2.3.1 Maillage

L'ensemble du système de freinage a été modélisé par éléments finis. Ce système comprend le porte fusée, le moyeu, le disque, la chape et l'étrier de frein, le piston et les deux plaquettes. Le maillage a été réalisé en tétraèdres paraboliques à partir des CAO des différentes pièces. Le modèle, qui est représenté figure 2.1, totalise 528 000 degrés de liberté.

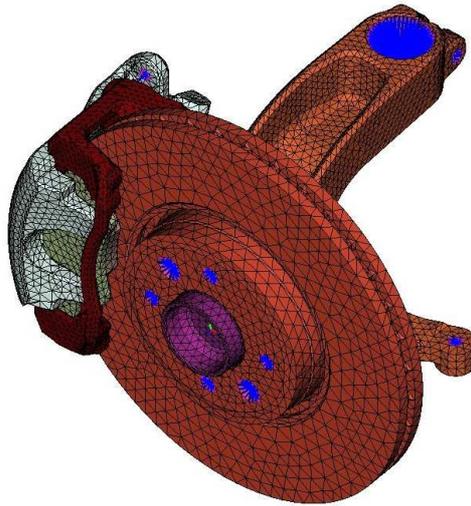


FIG. 2.1 – Modèle linéaire

Le moyeu, le piston et les dos de plaquettes sont en acier alors que le disque, la chape, l'étrier et le porte fusée sont fabriqués à partir de différentes nuances de fonte. Pour toutes ces pièces, un matériau isotrope est adopté. Les caractéristiques élastiques des garnitures sont beaucoup plus complexes de par leur composition et leur procédé de fabrication. En effet, des mesures ultrasonores montrent que ces matériaux sont orthotropes et qu'ils présentent comme direction privilégiée la normale à la surface frottante. Les caractéristiques élastiques de tels matériaux sont décrites en annexe B.2, mais pour plus de détails, nous nous reporterons aux références [23, 161].

### 2.3.2 Liaisons

Le porte fusée est encastré au niveau de ses liaisons avec la jambe de force, le bras inférieur et la biellette de direction. Le roulement est modélisé par sa masse ainsi que par trois raideurs en translation et trois raideurs en rotation. Les liaisons moyeu - disque et porte fusée - chape sont modélisées par des corps rigides. Les colonnettes, qui relient la chape à l'étrier sont représentées par des liaisons glissières parfaites. Toutes les autres liaisons, qui sont en fait des contacts, sont

modélisées par des raideurs de contact. Cette technique nécessite que les maillages soient coïncidents au niveau de toutes les interfaces de contact. De plus, il nous faut choisir une valeur pour ces raideurs de contact. Comme préconisé par de nombreux chercheurs, dont notamment Liles [101] et Nack [119], nous avons choisi des raideurs fortes comparées aux autres raideurs présentes dans le système afin de ne pas en perturber le comportement dynamique et de limiter les interpénétrations entre pièces.

### 2.3.3 Modélisation du frottement

Afin de comprendre comment le frottement est introduit dans le système, focalisons nous sur le modèle de principe représenté figure 2.2. Il symbolise le disque et une plaquette reliés entre eux par une raideur de contact  $k$ .

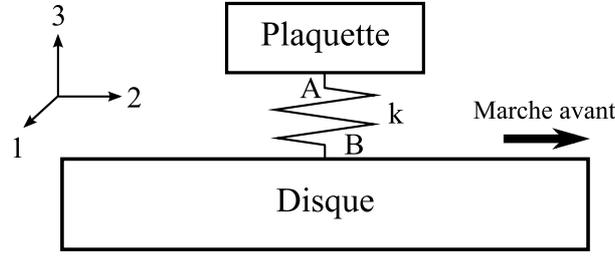


FIG. 2.2 – Introduction du frottement - Modèle de principe

Dans le cas de la marche avant, la loi de Coulomb permet d'écrire la relation suivante entre les efforts et les déplacements :

$$\begin{pmatrix} F_{1 \rightarrow A} \\ F_{2 \rightarrow A} \\ F_{3 \rightarrow A} \\ F_{1 \rightarrow B} \\ F_{2 \rightarrow B} \\ F_{3 \rightarrow B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu k & 0 & 0 & \mu k \\ 0 & 0 & -k & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu k & 0 & 0 & -\mu k \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1A} \\ u_{2A} \\ u_{3A} \\ u_{1B} \\ u_{2B} \\ u_{3B} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Cette relation fait apparaître une matrice élémentaire de raideur qui se décompose comme la somme d'une matrice de raideur structurelle  $\hat{\mathbf{K}}_s$ , associée à la raideur de contact, et d'une matrice de raideur induite par le frottement  $\mu \hat{\mathbf{K}}_f$ . Pour la marche arrière, nous obtenons une équation semblable à 2.26 avec un coefficient de frottement opposé. De façon formelle, l'équation 2.26 est donc généralisable aux deux cas, marche avant et marche arrière, en utilisant un coefficient de frottement positif en marche avant et négatif en marche arrière. Ainsi, dans la suite, nous utiliserons la loi de frottement définie figure 2.3 par rapport à la vitesse de glissement du disque.

L'application au modèle de frein se fait en utilisant 2.26 dans le repère cylindrique lié au disque pour chaque couple de nœuds coïncidents. L'implémentation du frottement dans un code éléments finis consiste à introduire dans la matrice de raideur du système les termes des matrices élémentaires  $\mu \hat{\mathbf{K}}_f$  pour chacun des nœuds coïncidents. Dans le cas de la méthode modale semi-analytique, l'implémentation du frottement demande un peu plus de développements afin de calculer  $\mathbf{\Lambda}_f$ . En effet, il faut assembler la matrice de raideur induite par le frottement sur l'ensemble du système et la projeter sur la base modale sans frottement. En développant les équations, il apparaît que  $\mathbf{\Lambda}_f$  ne dépend que de la valeur des raideurs de contact et des déplacements modaux des nœuds de l'interface dans les directions normale et tangentielle au disque. En appelant

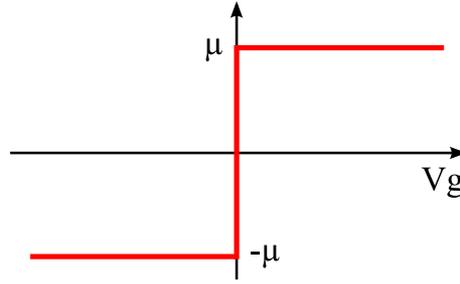


FIG. 2.3 – Courbe caractéristique de frottement

$\mathbf{L}$  le vecteur ligne contenant les déplacements modaux associés aux  $n$  modes calculés, pour une direction et un nœud particulier, nous obtenons

$$\Lambda_{\mathbf{f}} = \sum_{\text{ressorts}} \delta_{int}^{ext} k \left[ \mathbf{L}_{\text{plaquette}}^{\text{tangential}} - \mathbf{L}_{\text{disque}}^{\text{tangential}} \right]^T \cdot \left[ \mathbf{L}_{\text{plaquette}}^{\text{normal}} - \mathbf{L}_{\text{disque}}^{\text{normal}} \right] \quad (2.27)$$

$$\text{avec} \quad \delta_{int}^{ext} = \begin{cases} 1 & \text{pour les ressorts côté extérieur disque} \\ -1 & \text{pour les ressorts côté intérieur disque} \end{cases}$$

## 2.4 Comparaison des méthodes

Dans cette partie, nous allons expliquer brièvement comment les trois approches ont été mises en œuvre dans la pratique. Nous comparerons ensuite les résultats obtenus, à la fois en terme de précision et de temps de calcul, avant d'envisager la réalisation d'études paramétriques.

Le logiciel Nastran a été choisi pour réaliser les analyses aux valeurs propres complexes en utilisant les approches directe et modale, qui portent respectivement les noms de *Sol 107* et *Sol 110*. Pour chaque raideur de contact, la matrice de raideur élémentaire induite par le frottement est introduite dans la matrice de raideur totale en utilisant le format *dmig*, comme explicité dans le guide [2] sur un exemple simple. La méthode semi-analytique nécessite à la fois Nastran pour calculer  $\Omega^2$  et  $\Phi$  et une routine développée grâce au code de calcul Matlab pour déterminer les valeurs propres complexes associées à l'équation 2.21.

### 2.4.1 Précision

Les résultats obtenus avec les trois méthodes ont été comparés pour un coefficient de frottement de 0.5 en marche avant. Lors de cette comparaison, la *Sol 107* a été considérée comme méthode de référence car elle n'implique aucune approximation liée à une troncature modale. Pour la *Sol 110*, le problème a été projeté sur 100 modes réels, alors que 75 modes réels ont été utilisés pour la méthode modale semi-analytique. Les résultats obtenus sont très bien corrélés entre eux, comme l'illustre la figure 2.4. Malgré la troncature modale, la précision des deux méthodes modales par rapport à la méthode de référence est très bonne. En effet, les écarts relatifs sont inférieurs à 0.2% pour les fréquence (figure 2.5-a) et à 4% pour les parties réelles (figure 2.5-b) sur toute la plage [0, 5] kHz. Ceci montre que, dans ce cas, une projection sur 75 modes est suffisante. Néanmoins, l'utilisation des méthodes modales pour des fréquences ou des coefficients de frottement plus élevés, nécessitera la prise en compte de d'avantage de modes réels.

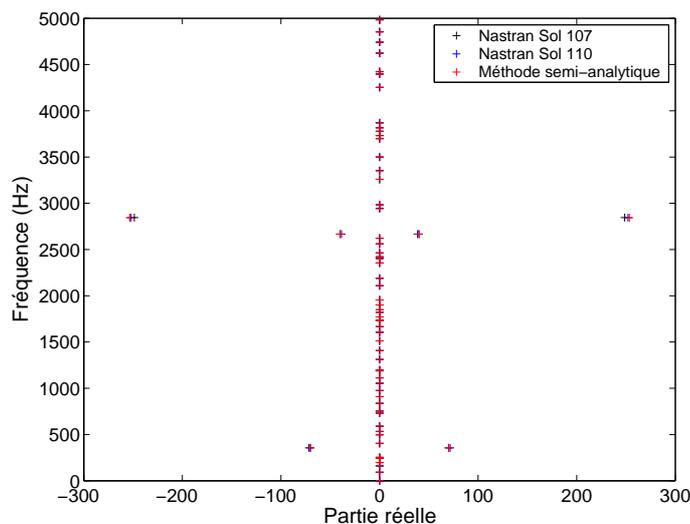


FIG. 2.4 – Comparaison des trois méthodes - valeurs propres dans le plan complexe

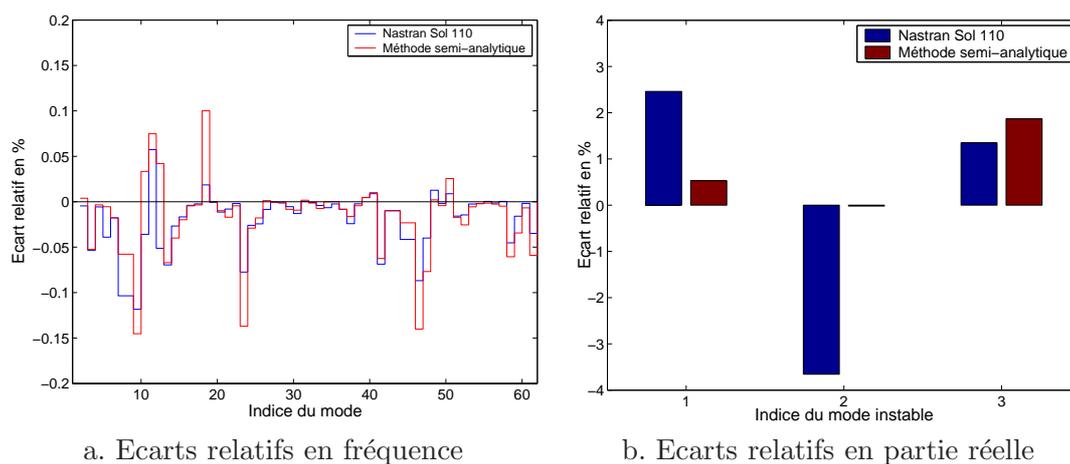


FIG. 2.5 – Précision des méthodes modales par rapport à la Sol107

### 2.4.2 Temps de calcul

En terme de temps de calcul, les méthodes modales présentent un avantage certain, comme illustré dans le tableau 2.1. Elles permettent de le réduire d'un facteur supérieur à 7, compte tenu des tronçures modales choisies. En outre, la méthode semi-analytique permet de ne réaliser qu'un seul calcul éléments finis coûteux suivi d'un calcul de valeurs propres peu coûteux pour chaque valeur du coefficient de frottement. Ainsi, le surcoût en temps de calcul pour passer d'un calcul à  $\mu$  donné à une analyse paramétrique avec 100 valeurs de  $\mu$  n'est que de 5 secondes.

Valeurs de $\mu$	Sol 107	Sol 110	Approche modale semi-analytique
1	4040s	580s	480s
100	112h	16h	485s

TAB. 2.1 – Temps de calcul

## 2.5 Effet du coefficient de frottement

Nous venons de montrer que la méthode modale semi-analytique est l'approche qui présente le meilleur compromis précision - temps de calcul. Nous allons maintenant l'utiliser afin d'évaluer l'effet du coefficient de frottement sur le comportement modal du système.

### 2.5.1 Etude paramétrique

Le frottement est de par son caractère non-conservatif la source des instabilités de cisement. Ainsi, une étude a été réalisée par rapport au coefficient de frottement, en le faisant varier entre 0 et 1, en marche avant. L'ensemble des valeurs propres obtenues, tracé figure 2.6, indique que le système présente six modes instables, représentés en rouge. Les fréquences de ces six modes ainsi que les plages de coefficient de frottement sur lesquelles ils sont instables sont regroupées dans le tableau 2.2. La troisième colonne de ce tableau détaille quels sont les modes à frottement nul, référencés par leurs indices et leurs fréquences, responsables des différentes instabilités.

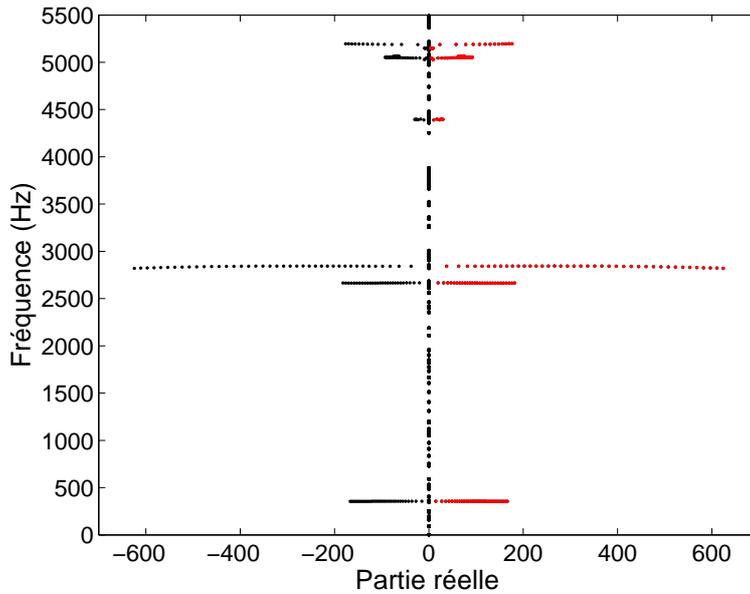


FIG. 2.6 – Evolution des valeurs propres en fonction de  $\mu$

Fréquence	Plage d'instabilité	Modes à $\mu = 0$
354 Hz	$\mu \in [0.34, 1.00]$	$7_{\mu=0} : 343 \text{ Hz} + 8_{\mu=0} : 367 \text{ Hz}$
2665 Hz	$\mu \in [0.46, 1.00]$	$42_{\mu=0} : 2654 \text{ Hz} + 43_{\mu=0} : 2686 \text{ Hz}$
2840 Hz	$\mu \in [0.20, 1.00]$	$44_{\mu=0} : 2818 \text{ Hz} + 45_{\mu=0} : 2860 \text{ Hz}$
4400 Hz	$\mu \in [0.64, 0.76]$	$57_{\mu=0} : 4400 \text{ Hz} + 58_{\mu=0} : 4485 \text{ Hz}$
5045 Hz	$\mu \in [0.16, 1.00]$	-
5150 Hz	$\mu \in [0.34, 1.00]$	-

TAB. 2.2 – Liste des modes instables

### 2.5.2 Coalescence des modes 44 et 45

Pour bien comprendre les mécanismes mis en jeu, nous allons commencer par nous focaliser sur le mode qui présente la partie réelle la plus forte : le mode à 2840 Hz. L'évolution de ses valeurs propres par rapport au coefficient de frottement est représentée figure 2.7 sous quatre formes différentes. Nous retrouvons ici les courbes caractéristiques du phénomène de coalescence de modes présenté dans la partie 1.4.1.

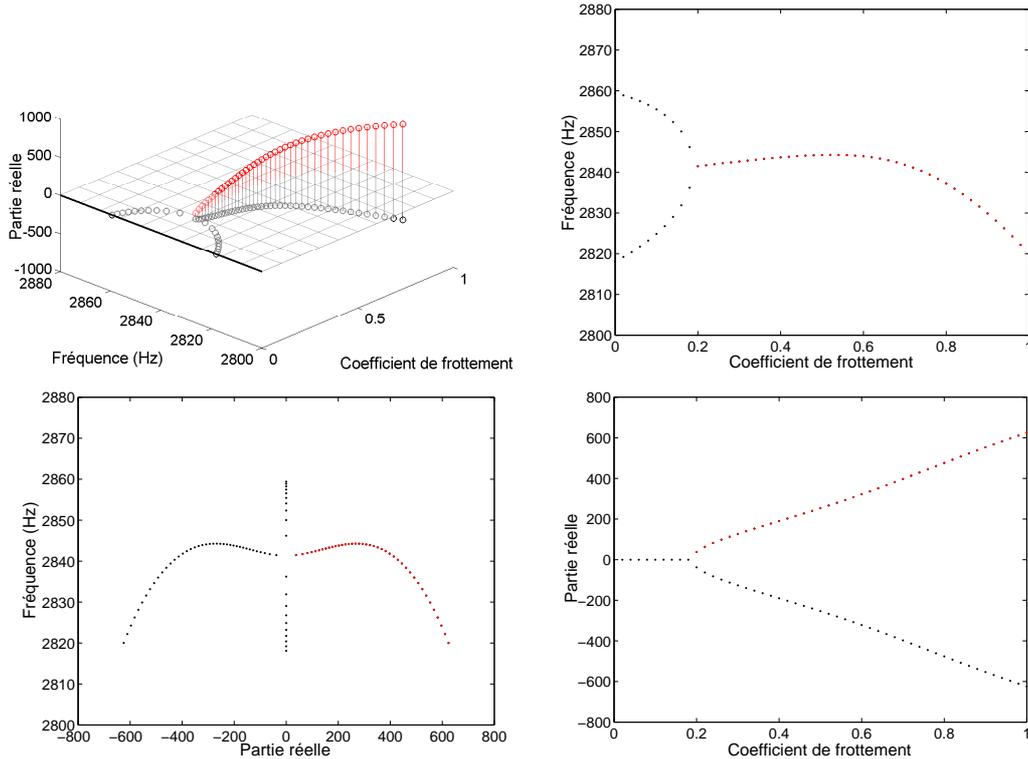


FIG. 2.7 – Evolution des valeurs propres en fonction de  $\mu$  - modes 44 et 45

A  $\mu = 0$ , le système présente deux modes stables respectivement les modes 44 à 2818 Hz et 45 à 2860 Hz. Leurs déformées sont représentées figure 2.8. Le mode 44 est un mode réel impliquant l'ensemble des pièces du système. Les oreilles du porte fusée vibrent en opposition de phase dans la direction  $y$  et entraînent la chape dans un mode de torsion relativement complexe. Le disque se déforme selon un mode de flexion à trois diamètres nodaux et la plaquette intérieure glisse sans déformation le long de la surface du disque. Le mode 45 est dominé par une flexion de l'étrier. Ce mode implique également le premier mode de flexion de la plaquette intérieure et le mode de compression de la plaquette extérieure. Il présente, tout comme le mode 44, une composante de flexion de disque à trois diamètres nodaux.

A mesure que  $\mu$  augmente, les fréquences de ces deux modes se rapprochent, jusqu'à devenir égales en un point nommé point de bifurcation de Hopf. Le coefficient de frottement associé à ce point est défini comme le coefficient de frottement critique,  $\mu_c$ , qui dans notre cas vaut 0.2. Au delà de ce point, les fréquences des deux modes restent égales, mais leurs parties réelles deviennent non-nulles et opposées. Ainsi, un des deux modes est stable alors que l'autre est instable.

Les déformées des deux modes, stable et instable, sont associées à des vecteurs propres complexes conjugués. Elles sont donc identiques en module mais déphasées, comme illustré figure 2.9 pour  $\mu = 0.5$ . Elles reprennent les principales caractéristiques des modes 44 et 45 qui leur ont

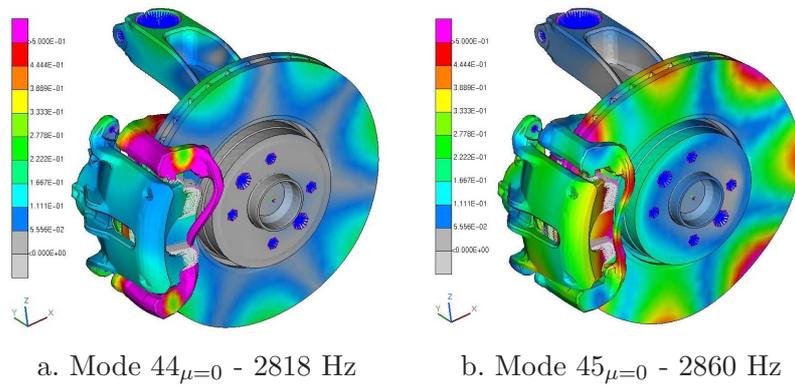
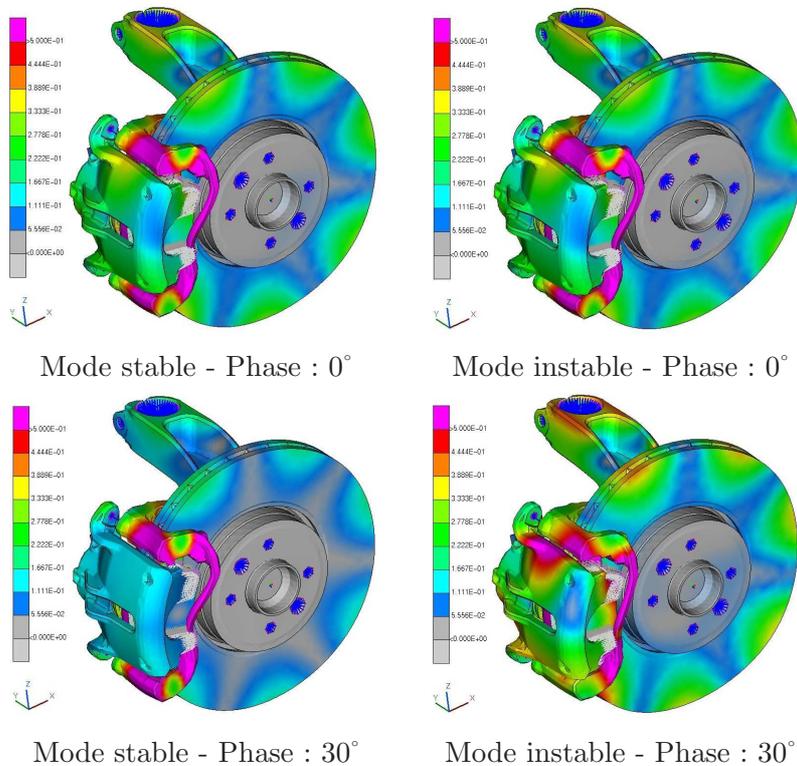


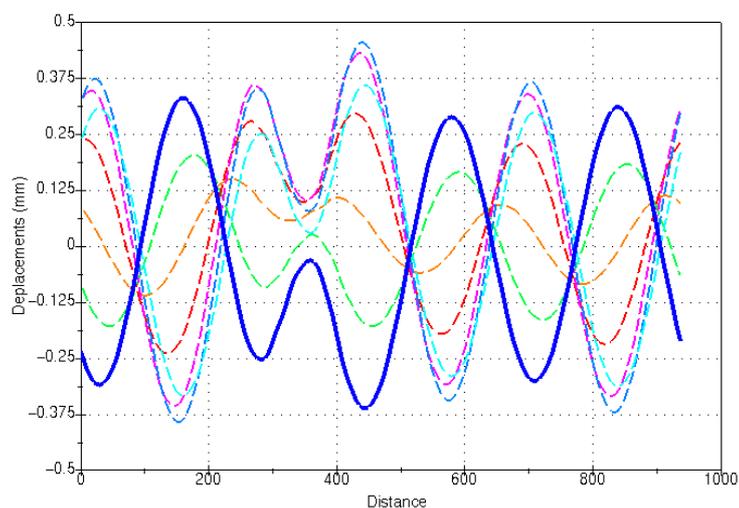
FIG. 2.8 – Déformées des modes réels 44 et 45 sans frottement

FIG. 2.9 – Déformée des modes complexes issus du couplage des modes 44 et 45 à  $\mu = 0.5$ 

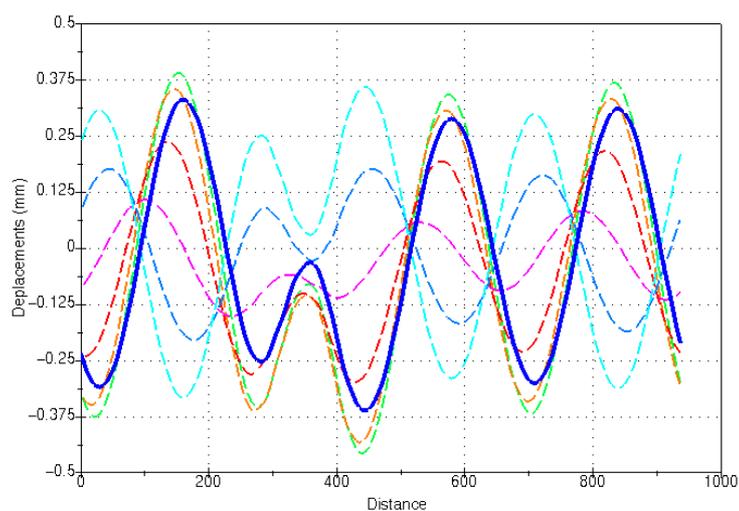
donné naissance, à savoir une flexion de disque à trois diamètres nodaux, une flexion d'étrier, un glissement de la plaquette intérieure et une torsion de chape. Nous observons également que la plaquette extérieure tourne autour de l'axe  $y$ .

L'animation de ces modes complexes fait apparaître des travelling waves. Les déphasages entre degrés de liberté donnent lieu à des ondes de déplacement qui se propagent dans le système. Ceci est particulièrement notable pour les déplacements du disque dans la mesure où le mode à trois diamètres nodaux semble tourner dans le sens trigonométrique pour le mode stable, et dans le sens rétrograde pour le mode instable. Le premier tourne donc dans le même sens que le disque et le second dans le sens opposé. Pour expliquer ce phénomène, la figure 2.10 représente les déplacements des nœuds du périmètre du disque en fonction de la phase  $\omega t$  pour les deux modes.

Les courbes sont tracées par rapport à l'abscisse curviligne qui parcourt le périmètre du disque dans le sens trigonométrique. Elles mettent en évidence les six lobes associés aux modes de disque et montrent que ceux-ci sont différents des modes libre-libre du fait de la présence des plaquettes, qui sont centrées autour de l'abscisse 400mm. Nous remarquons également que comme l'indique l'équation 2.18, les modes stable et instable ont des déplacements égaux pour des phases de  $0^\circ$  et  $180^\circ$  et opposés pour des phases de  $90^\circ$  ou  $270^\circ$ . Ces figures sont à rapprocher de la figure 1.24 du chapitre précédent car elles montrent que les zéros et les maxima de vibration ne sont pas fixes dans l'espace. Les nœuds de vibration se déplacent dans le sens trigonométrique pour le mode stable et dans le sens opposé pour le mode instable, et ce juste avant que les déplacements ne changent de signe. Après ce changement de signe, les nœuds se déplacent dans le sens opposé, ce qui prouve que l'onde de déplacement n'est pas une onde progressive ou régressive pure se déplaçant à vitesse constante. La présence de ces travelling waves est conforme aux observations expérimentales exposées dans la partie 1.3.3.



a. Mode stable → : sens trigonometrique



b. Mode instable → : sens trigonometrique

■ :  $0^\circ$  - ■ :  $30^\circ$  - ■ :  $60^\circ$  - ■ :  $90^\circ$  - ■ :  $120^\circ$  - ■ :  $150^\circ$  - ■ :  $180^\circ$

FIG. 2.10 – Déplacements des nœuds du périmètre du disque en fonction de la phase pour  $\mu = 0.5$

### 2.5.3 Marche avant - Marche arrière

Les courbes qui ont été tracées jusqu'à présent étaient consacrées à la marche avant. La figure 2.11 décrit l'évolution des modes 44 et 45 en fonction du coefficient de frottement à la fois en marche avant et en marche arrière. La formulation utilisée nous conduit à représenter la marche arrière par un coefficient de frottement négatif. Le premier point à remarquer est que les deux modes ne se comportent pas de la même façon suivant le sens de rotation, ce qui s'explique par le fait que le système de freinage dans son ensemble ne présente pas de symétrie particulière. Notons également que les courbes sont continues au voisinage de  $\mu = 0$ . En marche arrière, les fréquences des deux modes commencent par s'écartier avant de se rapprocher de nouveau jusqu'à la coalescence pour  $\mu = -0.82$ . La coalescence apparaît beaucoup plus rapidement en marche avant qu'en marche arrière. Des précisions sur ce point peuvent être apportées en étudiant le développement limité énoncé équation 2.22. Ce développement limité a été superposé aux valeurs propres sur la figure 2.11. Il les approxime de façon très correcte jusqu'à  $\mu = \pm 0.1$ . Le terme d'ordre 2 introduit des paraboles de convexités opposées qui représentent le couplage entre les modes. Le terme d'ordre 1 est le seul terme qui introduit une dissymétrie dans le comportement marche avant / marche arrière. De sa valeur dépend donc le degré de dissymétrie avant / arrière et de son signe dépend la direction qui sera « privilégiée ».

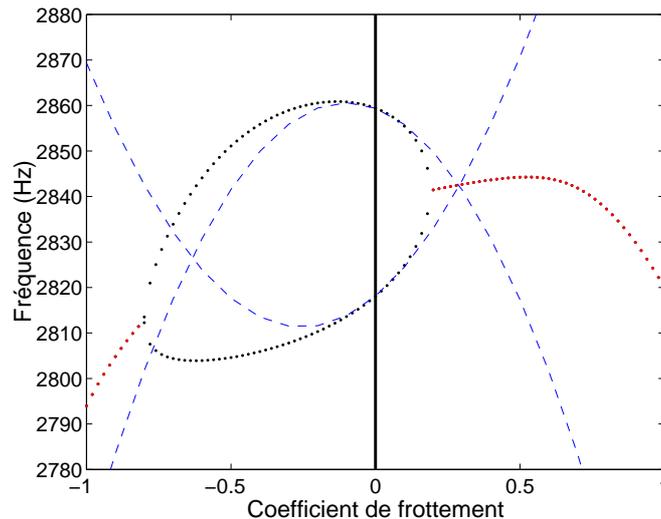


FIG. 2.11 – Marche avant / Marche arrière • : valeurs propres, - - : développement limité

### 2.5.4 Facteurs de participation modale

Nous allons maintenant nous intéresser aux modes qui se trouvent autour des modes 44 et 45 que nous venons de décrire. Par souci de clarté, nous nous focaliserons sur la marche avant, en sachant qu'une démarche identique peut être appliquée en marche arrière. La figure 2.12 décrit l'évolution des fréquences des modes 41 à 47 en fonction du coefficient de frottement. Les modes 42 et 43 se couplent à  $\mu = 0.46$ . Les modes 41, 46 et 47 restent stables sur toute la plage de coefficient de frottement étudiée, mais leurs fréquences sont sensibles à ce paramètre.

Les déformées à  $\mu = 0$  de ces sept modes sont consultables figures 2.8 et 2.13 et sont décrites dans le tableau 2.3. Le mode complexe issu du couplage entre les modes 42 et 43 est représenté figure 2.14 pour  $\mu = 0.5$ . Il présente des caractéristiques communes aux modes réels qui lui ont donné naissance. En effet, il présente un mode de chape asymétrique et un mode de disque en

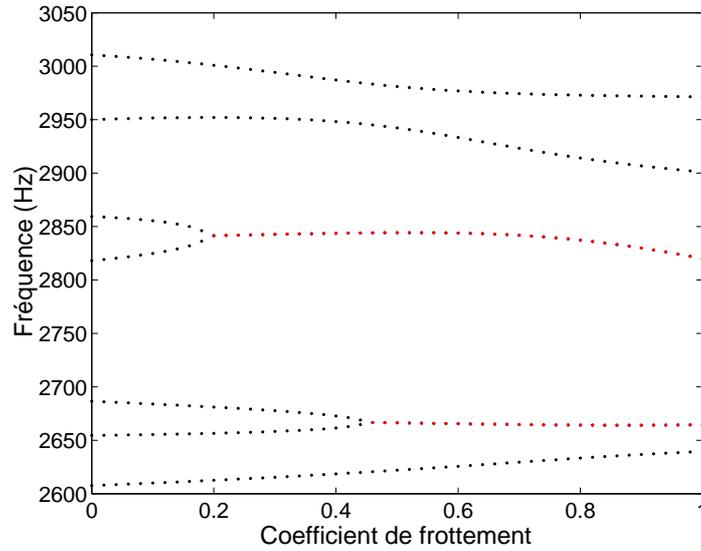


FIG. 2.12 – Evolution des valeurs propres en fonction de  $\mu$  - modes 41 à 47

parapluie. Le piston glisse sur la plaquette intérieure et cette dernière glisse sur la surface du disque entre ses butées.

Afin d’analyser l’évolution des déformées par rapport au coefficient de frottement, les coordonnées  $\gamma$  de chacun des modes ont été calculées dans la base modale sans frottement. Ces coordonnées modales, qui sont également appelées facteurs de participation modale, nous renseignent sur les contributions des modes réels du système sans frottement sur les modes du système avec frottement. Pour plus d’informations sur les différents types de facteurs de participation modale, nous nous référerons aux études de Lee et al. [95] et de Kung et al. [87]. Les coordonnées modales sont normalisées à 1 et sont tracées figures 2.15 et 2.16 respectivement pour les couples de modes 42-43 et 44-45. Pour faciliter l’explication, nous nommerons  $(M1, M2)$  l’un de ces couples. Comme attendu, à  $\mu = 0$ , les modes  $M1$  et  $M2$  sont réels et toutes leurs coordonnées modales sont nulles sauf celle du mode sans frottement, correspondant respectivement à  $M1_{\mu=0}$  et à  $M2_{\mu=0}$ , qui vaut 1. A mesure que le coefficient de frottement augmente, les participations respectives de  $M1_{\mu=0}$  sur  $M1$  et de  $M2_{\mu=0}$  sur  $M2$  diminuent au profit des autres modes. Ceci se poursuit jusqu’au point de bifurcation où une rupture de pente apparaît sur les courbes. En ce point, les deux modes, qui sont toujours réels, ont les mêmes coordonnées modales et donc la même déformée. Au delà du point de bifurcation, les deux vecteurs propres ne sont plus réels. Ils deviennent complexes conjugués. Notons que le point de bifurcation est un point singulier qui se caractérise par des valeurs propres doubles associées au même vecteur propre. Il n’est donc pas possible de suivre les modes au passage de ce point. Ainsi, au delà du point de bifurcation, le mode stable a été arbitrairement associé à  $M1$  et le mode instable à  $M2$ .

La figure 2.15 montre que, après le point de bifurcation, les modes  $42_{\mu=0}$  et  $43_{\mu=0}$  pilotent les parties imaginaires des modes 42 et 43. En revanche, ils ne participent quasiment plus à leurs parties réelles qui sont dominées par le mode  $41_{\mu=0}$ . Les autres modes,  $44_{\mu=0}$  à  $47_{\mu=0}$ , ont une influence limitée à la fois sur les parties réelles et sur les parties imaginaires. En ce qui concerne le couple 44-45, le scénario de couplage est relativement différent comme illustré figure 2.16. En effet, au delà du point de bifurcation, le mode  $44_{\mu=0}$  pilote les parties réelles des modes 44 et 45, mais n’a aucune influence sur leurs parties imaginaires. Celles-ci dépendent, par ordre d’importance, des modes  $47_{\mu=0}$ ,  $46_{\mu=0}$ ,  $41_{\mu=0}$ ,  $45_{\mu=0}$  et  $43_{\mu=0}$ . Ces modes participent également aux parties réelles de façon non négligeable.

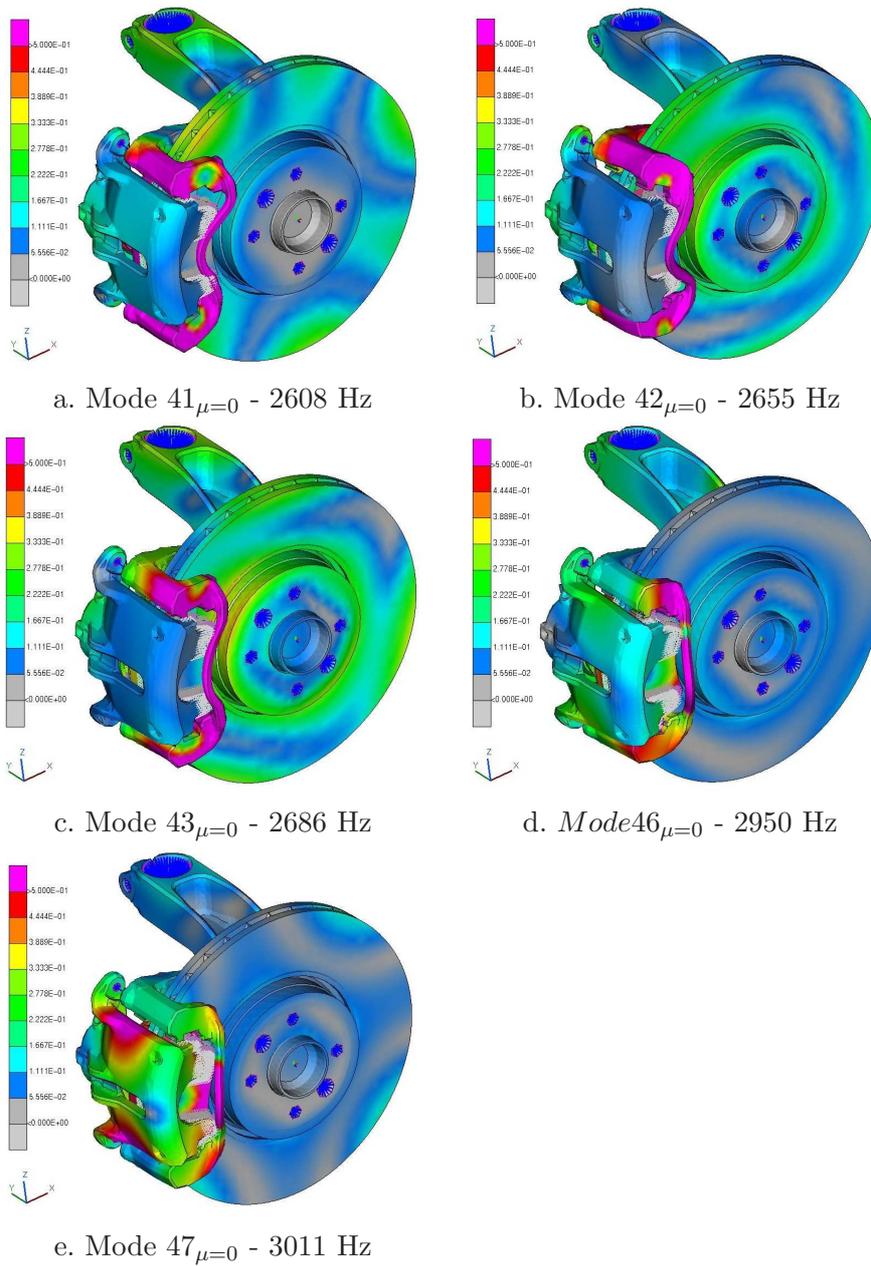
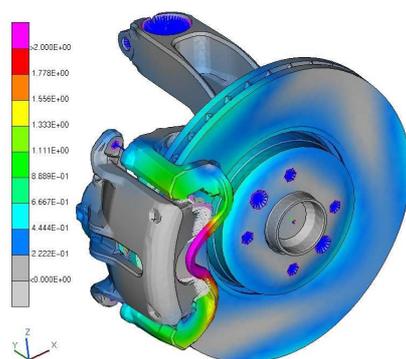


FIG. 2.13 – Déformées des modes réels 41 à 47

Mode	Description
41	Ce mode présente une torsion du porte fusée. Les parties supérieure et inférieure de la chape subissent une torsion en opposition de phase selon $\mathbf{y}$ . En conséquence, la partie de la chape appelée poignée de valise fléchit en $\mathbf{x}$ . Le disque subit des vibrations de faible amplitude correspondant à une flexion à trois diamètres nodaux. La plaquette intérieure glisse sur la surface du disque, dans la direction orthoradiale, entre ses butées.
42	Les oreilles de porte fusée vibrent en opposition de phase et pilotent la chape dans un mode de flexion ressemblant à celui impliqué dans le mode 41. Mené par l'étrier, le piston glisse sur la plaquette intérieure dans la direction radiale. La garniture intérieure se déforme en compression et le disque présente un mode de parapluie.
43	Ce mode est dominé par un mode de chape similaire à celui des modes 41 et 42. Il présente également une flexion de l'étrier et un mode de parapluie du disque. La plaquette intérieure glisse sur la surface du disque, dans la direction orthoradiale, entre ses butées.
44	Les oreilles de porte fusée vibrent en opposition de phase. La chape présente un mode d'« ouverture » en $\mathbf{y}$ de forte amplitude. Les parties basse et haute de la chape s'ouvrent et se ferment en opposition de phase. L'étrier fléchit, la plaquette intérieure glisse entre ses butées et les garnitures se déforment en compression. Le disque présente une flexion à trois diamètres nodaux, avec une ligne nodale sous le milieu des plaquettes.
45	La chape présente un mode d'ouverture de faible amplitude. L'étrier se déforme selon une flexion de forte amplitude. La plaquette intérieure fléchit et la garniture extérieure se déforme en compression. Le disque présente une flexion à trois diamètres nodaux, avec un ventre de vibration sous les plaquettes.
46	Les oreilles de porte-fusée vibrent en phase. La poignée de valise se déforme en $\mathbf{y}$ de façon importante. L'étrier fléchit et le disque se déforme selon un mode de parapluie. La plaquette intérieure glisse entre ses butées. La plaquette extérieure présente un mode de rotation de corps rigide en $\mathbf{y}$ .
47	Les oreilles de porte-fusée vibrent en phase. La poignée de valise se déforme en $\mathbf{y}$ de façon importante. L'étrier se déforme selon son premier mode de torsion. La plaquette intérieure glisse entre ses butées. La plaquette extérieure présente un mode de rotation de corps rigide en $\mathbf{y}$ . Le disque présente des déformations combinant un mode de parapluie et une flexion à quatre diamètres nodaux.

TAB. 2.3 – Déformées des modes réels 41 à 47



Mode stable - Phase : 0°

FIG. 2.14 – Déformée des modes complexes issus du couplage des modes 42 et 43 à  $\mu = 0.5$

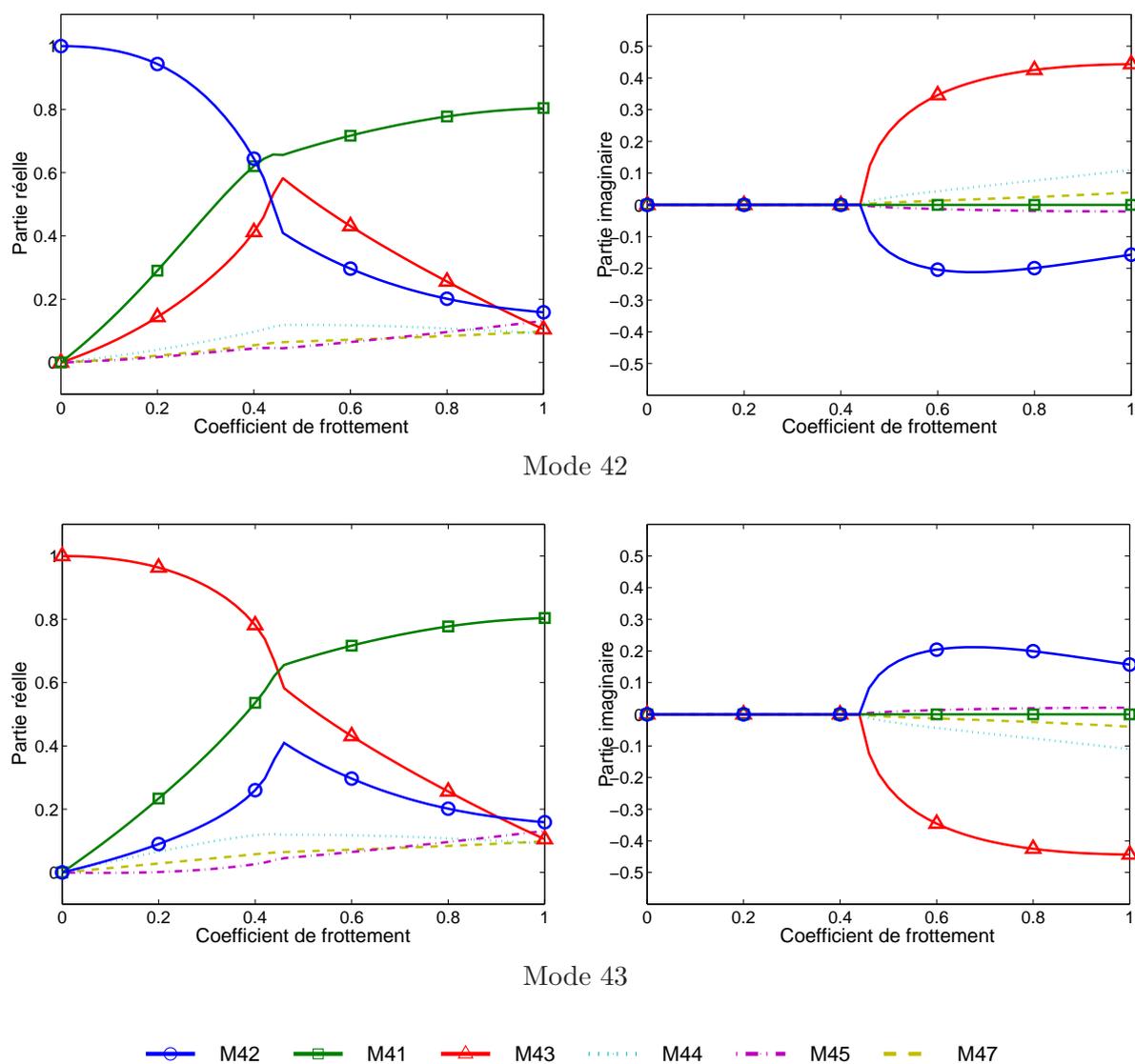
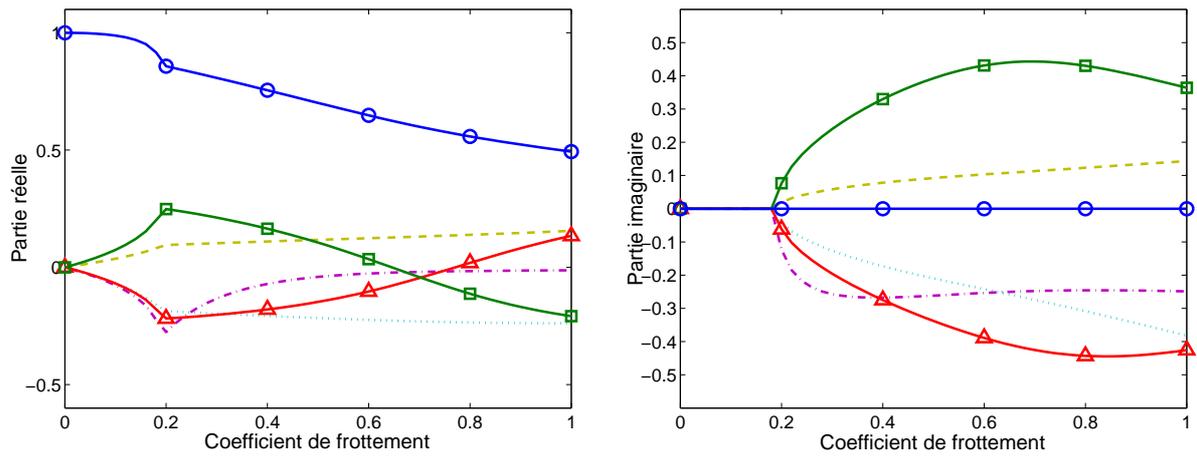
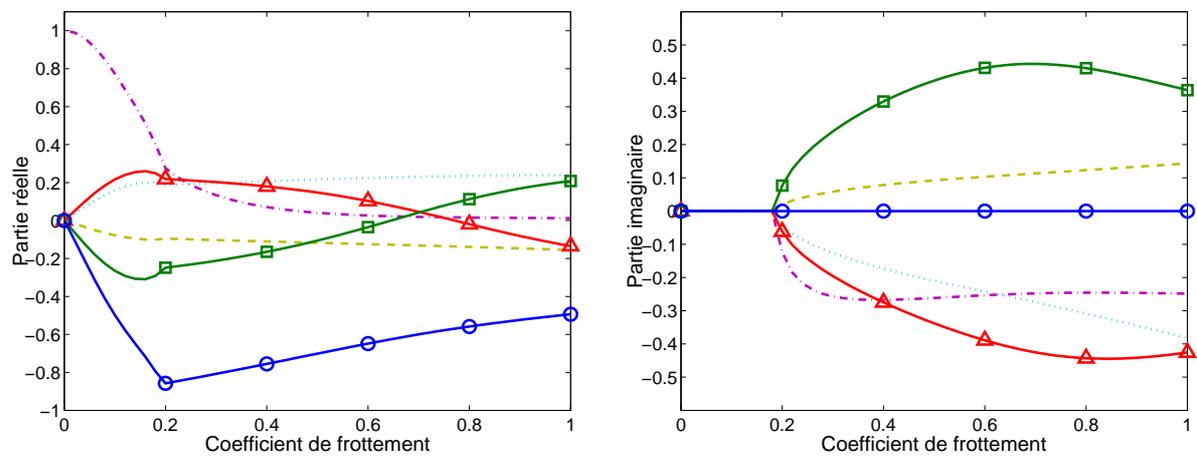


FIG. 2.15 – Facteurs de participation modale - modes 42 et 43



Mode 44



Mode 45

—○— M44   
 —□— M46   
 —△— M47   
 ⋯ M41   
 - - - M45   
 - - - M43

FIG. 2.16 – Facteurs de participation modale - modes 44 et 45

### 2.5.5 Phénomène de découplage

Jusqu'à présent, nous n'avons présenté que des coalescences « pures » qui se traduisent par une croissance monotone de l'amplitude des parties réelles au delà du point de bifurcation. Ainsi, le système est d'autant plus instable que le coefficient de frottement augmente. Néanmoins, ceci n'est pas toujours le cas, comme illustré dans le tableau 2.2 par le mode à 4400 Hz qui devient instable pour  $\mu = 0.64$  et redevient stable au delà de  $\mu = 0.76$ . Dans ce cas, l'amplitude des parties réelles présente une inflexion caractéristique du phénomène de découplage (*lock-out*), comme illustré figure 2.17-a. Des topologies de couplage encore plus compliquées peuvent apparaître, notamment à hautes fréquences comme illustré par la figure 2.17-b qui décrit l'évolution des modes 62 à 70. Nous constatons que les modes 64 et 65 se couplent à partir de  $\mu = 0.16$ . Le mode 66 croise le couple (64,65). Ce « croisement » n'est pas anodin et modifie la topologie de couplage dans la mesure où l'évolution des parties réelles est perturbée à partir de ce point. Le mode 66 se couple ensuite avec le mode 63 à  $\mu = 0.72$  et le couple se sépare à  $\mu = 0.75$ . Les modes 68 et 69 se couplent à  $\mu = 0.33$  et se découplent à  $\mu = 0.48$ . Ensuite, l'un des deux modes ainsi libéré se couple avec le mode 70 à partir de  $\mu = 0.76$ .

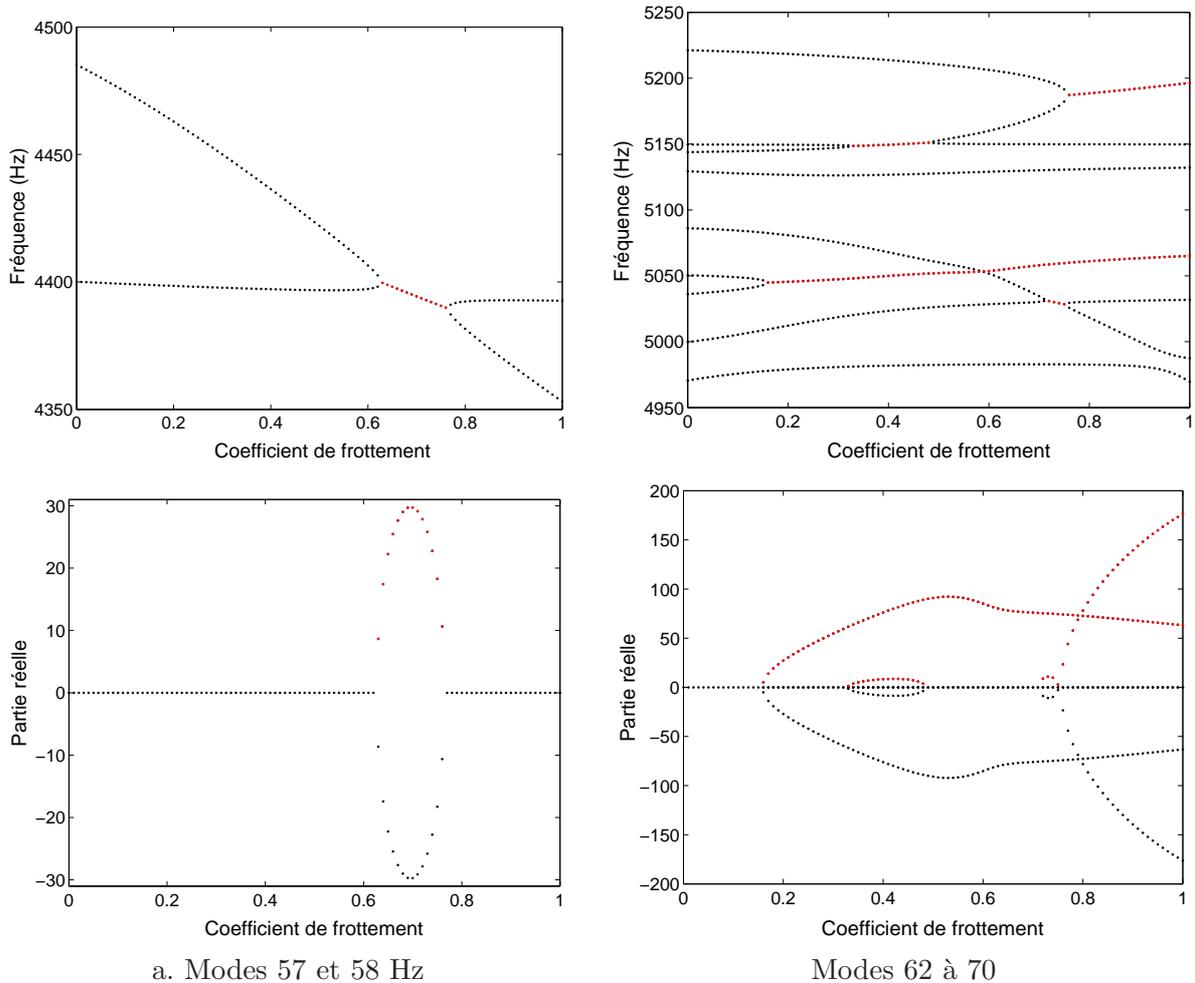


FIG. 2.17 – Phénomènes de découplage

## 2.6 Effet du module d'Young du disque

### 2.6.1 Plan d'expériences

Jusqu'à présent, nous avons étudié l'influence du paramètre qui donne naissance aux instabilités : le coefficient de frottement. Lorsque ce coefficient est non-nul, la stabilité du système dépend également de son comportement modal, c'est à dire de toutes les caractéristiques mécaniques qui le définissent. Dans cette partie, l'idée est de choisir l'un de ces paramètres afin d'avoir une première indication sur la sensibilité des phénomènes. Le paramètre qui a été retenu est le module d'Young du disque :  $E_d$ . Ce choix se justifie par le fait que, dans la majorité des cas, les modes instables présentent une composante importante de déformation du disque qui est à l'origine du bruit rayonné. De plus, ce paramètre est relativement dispersé dans la réalité car il dépend à la fois des dispersions de fabrication et des paramètres d'environnement tels que la température. Le matériau du disque est une fonte GL11, qui a un module d'Young nominal de 100 GPa. Un plan d'expériences numérique a été réalisé en faisant varier ce paramètre de  $\pm 10\%$  autour de sa valeur nominale par pas de 1%. L'évolution des fréquences propres des modes 41 à 47 du système sans frottement est tracée figure 2.18 pour chacune des configurations.

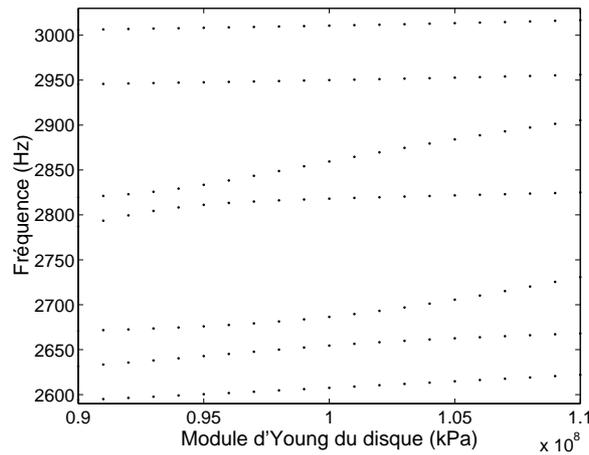


FIG. 2.18 – Evolution des fréquences sans frottement en fonction de  $E_d$

### 2.6.2 Courbes de coalescence fonction de $\mu$

Pour chaque valeur du module d'Young du disque, les valeurs propres du système sont calculées en marche avant et en marche arrière pour un coefficient de frottement variant de 0 à 1 par pas de 0.01. Au total le plan d'expérience comporte donc 2100 expériences. Pour faciliter les explications, seule la marche avant sera présentée dans un premier temps. La figure 2.19 regroupe l'ensemble des valeurs propres en marche avant dans la plage de fréquence [2600, 3000] Hz. Cette figure présente 21 branches correspondant aux 21 valeurs du module d'Young du disque. Les flèches indiquent les variations croissantes de  $E_d$ .

Le motif obtenu est relativement complexe car le coefficient de frottement et le module d'Young varient simultanément. Pour mieux comprendre les phénomènes, les figures 2.20 et 2.21 retracent l'évolution des courbes de coalescence fonction de  $\mu$  pour quatre valeurs remarquables de  $E_d$  : 90, 105, 107 et 110 GPa. Initialement, pour  $E_d = 90$  GPa, deux couplages apparaissent entre les modes 41-42 et 44-45. Ces deux couplages se produisent respectivement pour des coefficients de frottements de  $\mu = 0.53$  et  $\mu = 0.12$ . Le coefficient de frottement critique associé au couplage

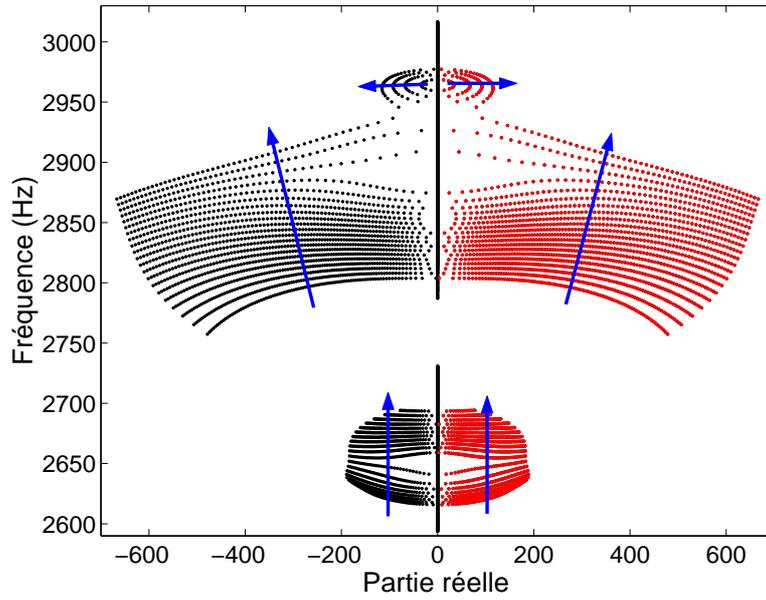


FIG. 2.19 – Variabilité des valeurs propres en fonction de  $\mu$  et de  $E_d$

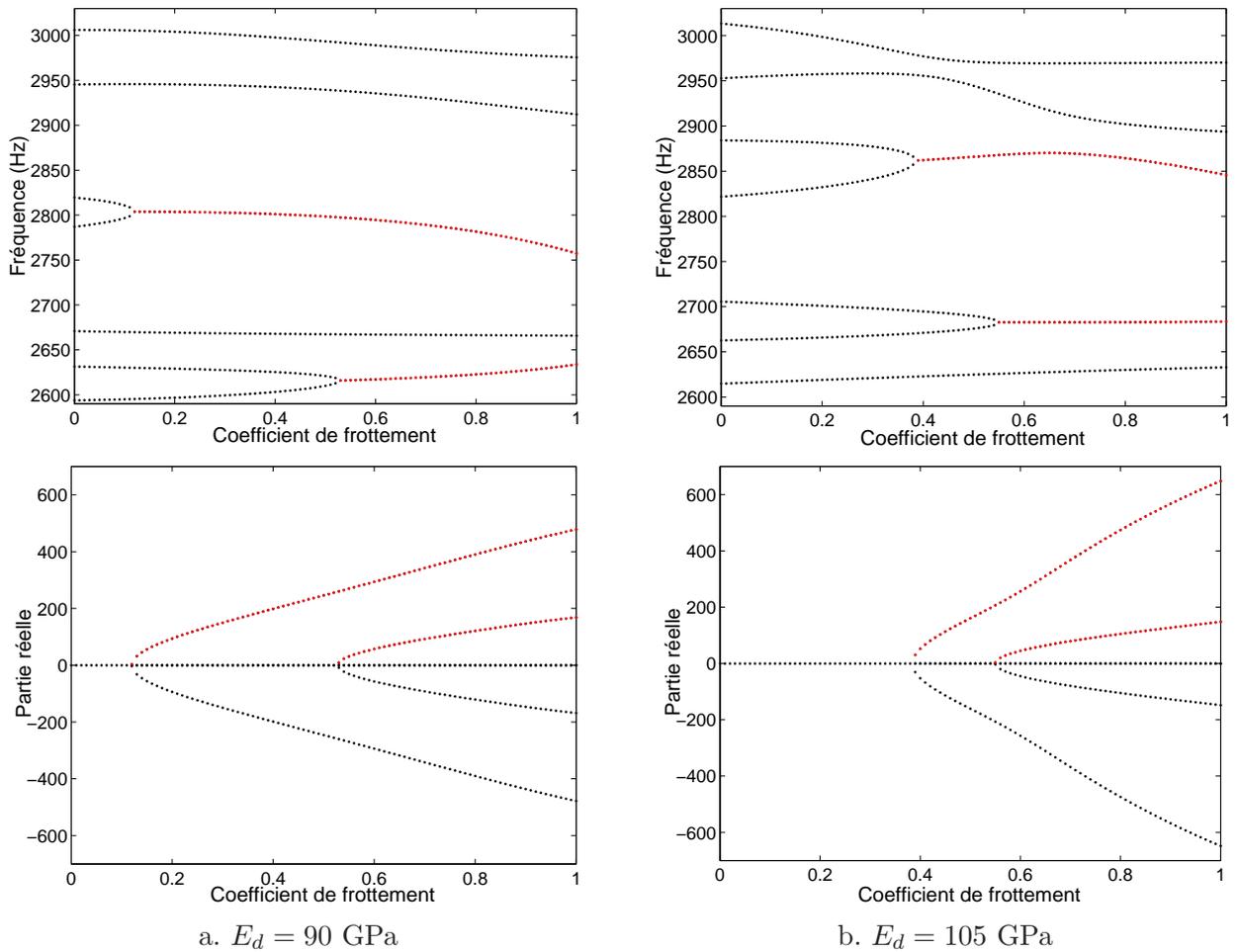


FIG. 2.20 – Courbes de coalescence fonction de  $\mu$  -  $E_d = 90$  GPa et  $E_d = 105$  GPa

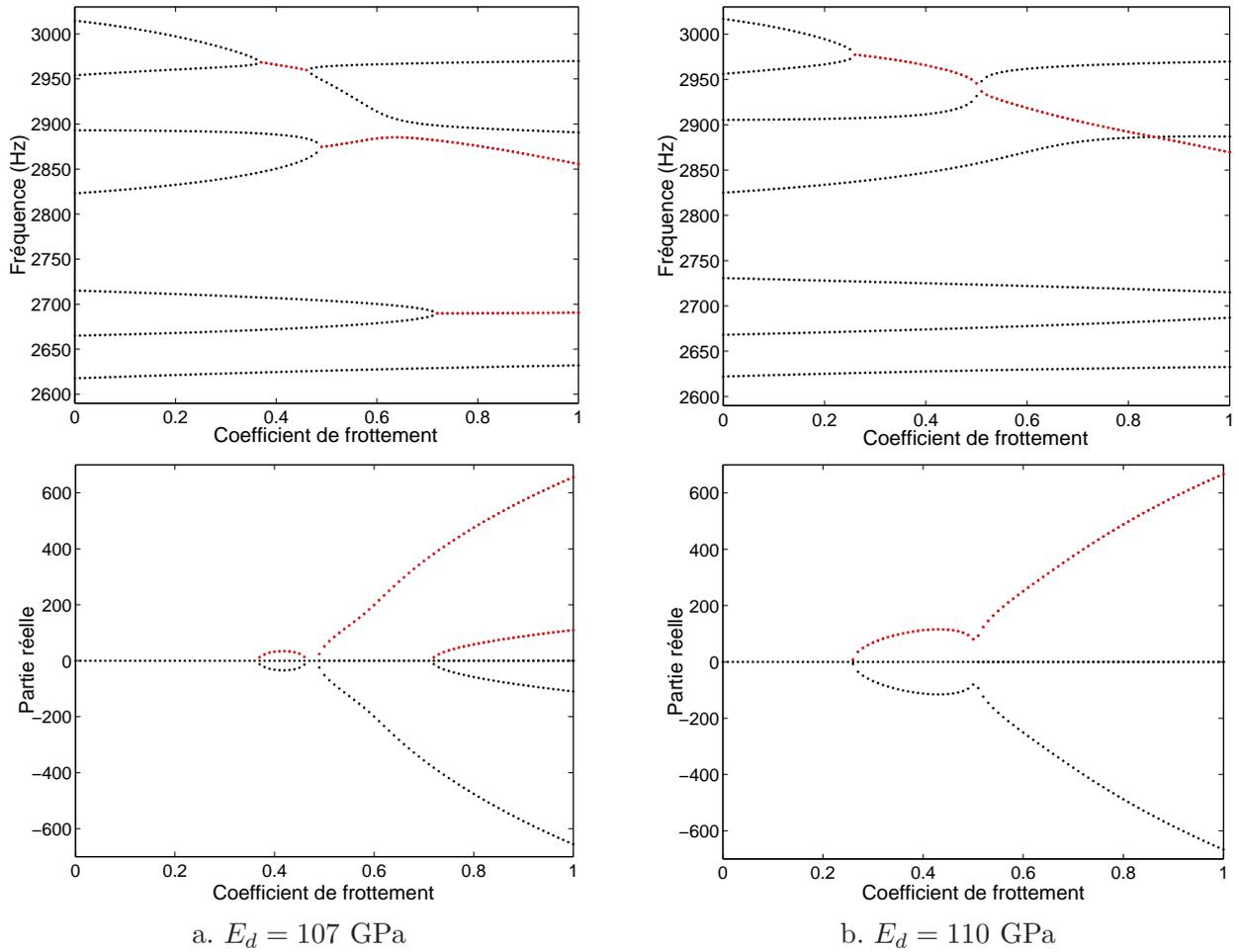


FIG. 2.21 – Courbes de coalescence fonction de  $\mu$  -  $E_d = 107$  GPa et  $E_d = 110$  GPa

44-45 commence par diminuer de  $E_d = 90$  à  $E_d = 94$  GPa puis augmente au delà de cette valeur. A mesure que  $E_d$  augmente, les fréquences des modes  $44_{\mu=0}$  et  $45_{\mu=0}$  augmentent, alors que celles des modes  $46_{\mu=0}$  et  $47_{\mu=0}$  varient très peu. La figure 2.20-b montre que pour  $E_d = 105$  GPa, les modes 44 et 45 se couplent à  $\mu_c = 0.39$  et que les modes 46 et 47 ont tendance à se rapprocher l'un de l'autre au voisinage de  $\mu = 0.45$ . Ceci se confirme pour  $E_d = 107$  GPa, figure 2.21-a, puisque ces deux modes se couplent sur la plage  $\mu \in [0.37, 0.46]$ . Sur cette plage, la valeur absolue des parties réelles augmente puis diminue avec  $\mu$ , ce qui se traduit sur la courbe correspondante par une forme elliptique. Le coefficient de frottement critique associé aux modes 44 et 45 continue d'augmenter. On observe, au delà de la coalescence, une inflexion des courbes associées aux modes 44 et 45, qui est le signe qu'ils sont influencés par le mode 46 très proche. Pour  $E_d = 110$  GPa, les modes 46 et 47 se couplent à  $\mu = 0.26$ . Ils se découpent à  $\mu = 0.5$  et l'un des deux modes ainsi libéré se recouple aussitôt avec 45. Notons que 44 croise les deux modes couplés à  $\mu = 0.85$ . Il s'agit bien d'un croisement de modes et non d'une coalescence, car en ce point, les courbes fréquence fonction de  $\mu$  ne présentent pas de tangentes verticales et les parties réelles ne sont pas perturbées.

### 2.6.3 Courbes de coalescence fonction de $E_d$

Dans notre étude biparamétrique, nous avons initialement privilégié le coefficient de frottement car c'est lui que donne naissance aux instabilités. De plus, l'analyse des résultats par rapport à ce paramètre permet d'illustrer les phénomènes de coalescence. Or, il est également possible d'analyser les résultats par rapport au second paramètre,  $E_d$ , comme le montrent les figures 2.22 et 2.23. Il est important de remarquer que les courbes de variabilité avec  $\mu$  et avec  $E_d$  présentent la même topologie, dans la mesure où elles peuvent toutes deux être interprétées en termes de coalescences. Cependant, ces deux paramètres ne jouent pas exactement le même rôle puisque l'augmentation de  $\mu$  est propice aux instabilités, alors que ce n'est pas le cas pour  $E_d$ .

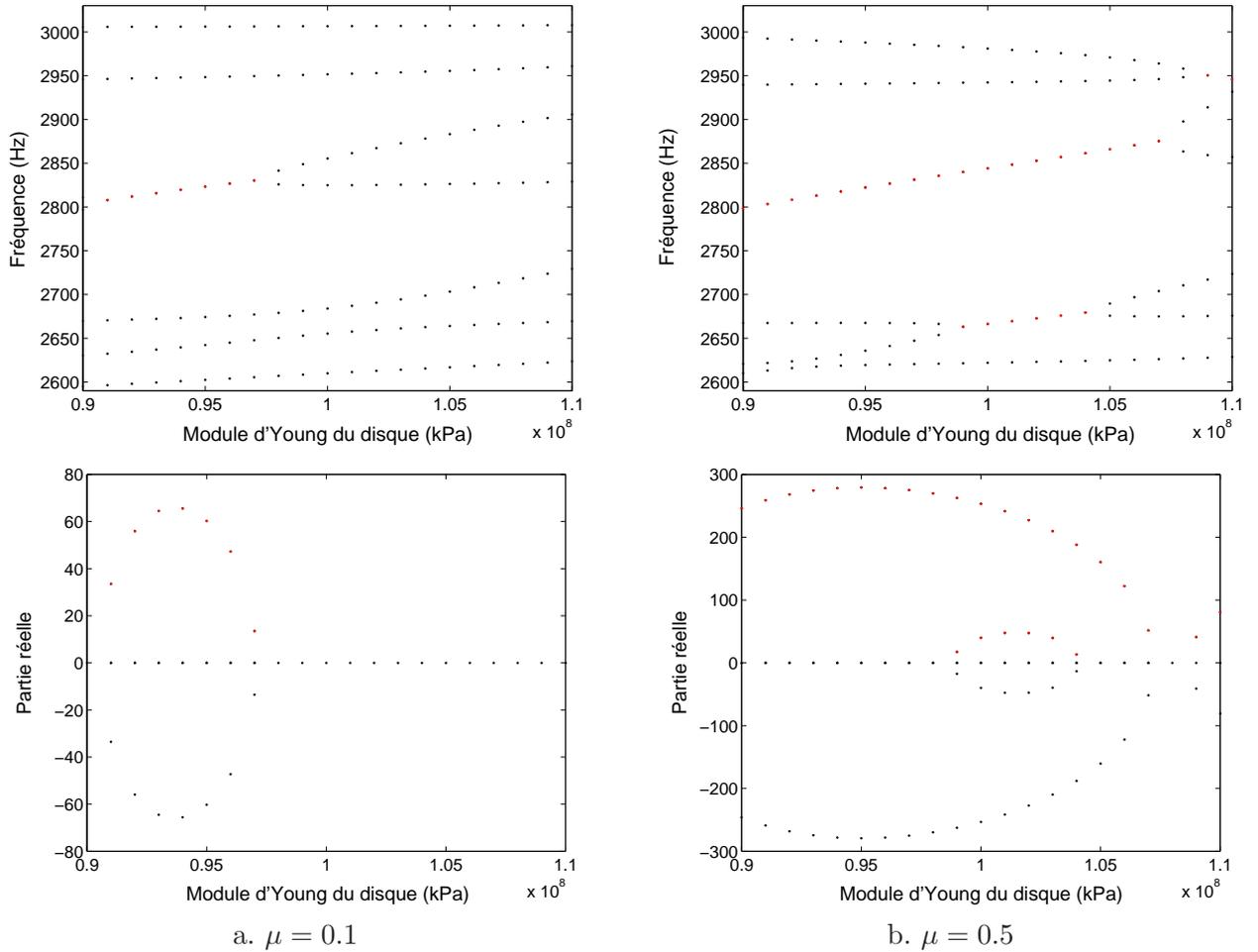
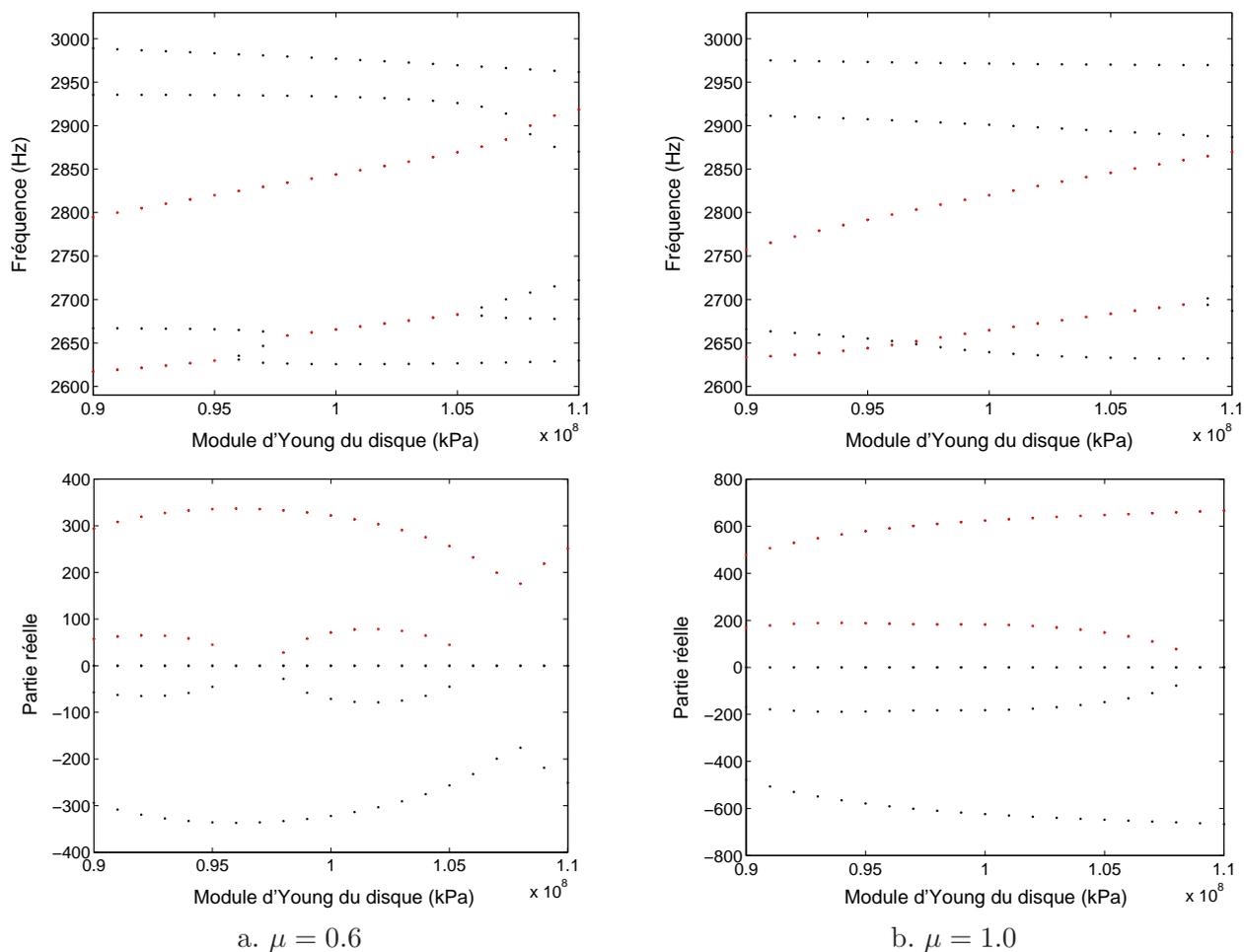


FIG. 2.22 – Courbes de coalescence fonction de  $E$  -  $\mu = 0.1$  et  $\mu = 0.5$

La figure 2.18 montre qu'à frottement nul, les modes 44 et 45 sont très proches en fréquence pour  $E_d = 0.94$ . Ces deux modes se couplent pour cette valeur du module d'Young dès  $\mu = 0.06$ . Lorsqu'on augmente le coefficient de frottement, la plage de module d'Young sur laquelle le système est instable s'étend. Ainsi, dans le cas  $\mu = 0.1$  décrit figure 2.22-a, le système est instable sur la plage  $E_d \in [0.91, 0.97]$ . Cette plage continue à s'élargir à mesure que  $\mu$  augmente. Au delà de  $\mu = 0.3$ , les modes 46 et 47 se couplent pour les valeurs élevées de  $E_d$  et en parallèle, les modes 42 et 43 se rapprochent en fréquence. Ceci conduit aux résultats tracés figure 2.22-b pour  $\mu = 0.5$ . Nous observons alors trois couplages : 42-43 pour  $E_d \in [97, 104]$  GPa, 44-45 pour  $E_d \in [90, 107]$  GPa et 46-47 pour  $E_d \in [109, 110]$  GPa. Pour  $\mu = 0.6$ , représenté figure 2.23-a, le mode 47 n'est

FIG. 2.23 – Courbes de coalescence fonction de  $E$  -  $\mu = 0.6$  et  $\mu = 1.0$ 

plus impliqué, mais les modes 44-45 se découplent à  $E_d = 108$  GPa sous l'influence du mode 46, pour redonner aussitôt naissance à un autre mode instable. Nous observons également un couplage entre les modes 41 et 42 pour  $E_d \in [90, 95]$  GPa. Pour le cas  $\mu = 1.0$ , figure 2.23-b, 44-45 et 41-42 sont couplés respectivement sur les plages  $E_d \in [90, 110]$  GPa et  $E_d \in [90, 109]$  GPa. Il est à noter que le mode 43 « croise » le couple 41-42 pour  $E_d = 97$  GPa. Il s'agit bien d'un « croisement » et non d'un couplage car les fréquences ne présentent pas de tangente verticale et les parties réelles n'ont pas d'inflexion en ce point.

#### 2.6.4 Courbes de coalescence biparamétriques $\mu, E_d$

Afin de présenter de façon synthétique l'aspect biparamétrique du problème, l'évolution des fréquences et des parties réelles des sept modes est représentée figure 2.24 au moyen de nappes en trois dimensions. Les modes stables sont représentés en vert et les modes instables en rouge. L'observation des parties réelles nous permet de déterminer facilement la plage de stabilité du système alors que les fréquences nous renseignent sur les motifs de couplage. Nous observons en particulier les couplages, les découplages et les croisements de modes.

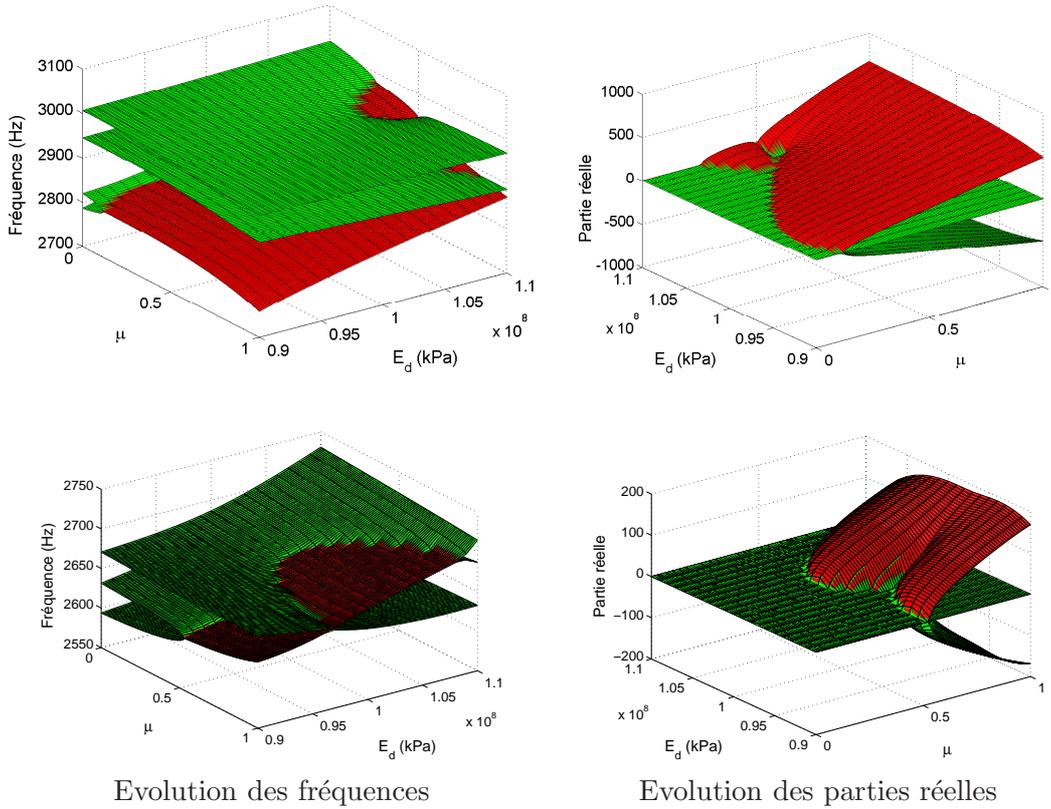


FIG. 2.24 – Courbes de coalescences biparamétriques - ■ : Stable, ■ : Instable

### 2.6.5 Zones de stabilité

Nous avons montré dans les parties précédentes que la stabilité du frein est un phénomène multi-paramétrique très sensible qui repose sur des mécanismes de couplage complexes. Or, du point de vue d'un constructeur automobile, l'important est de savoir si le frein est stable au nominal, c'est à dire à  $\mu = 0.5$  et  $E_d = 100$  GPa, et si cette stabilité est robuste par rapport aux paramètres variables. Afin de répondre à cette attente, les zones de stabilité du frein ont été calculées dans le plan  $\mu - E$  et tracées figure 2.25. Il s'agit de compter, pour chaque configuration, le nombre de modes instables et de représenter le résultat sous forme d'un dégradé de couleurs. Les diagrammes 2.25-a à -d correspondent à 5 plages successives de 1000 Hz alors que 2.25-e fait la synthèse de la stabilité du frein entre 0 et 5 kHz. Notons qu'à la fois la marche avant et la marche arrière sont représentées sur toutes ces figures. Sur la plage  $[0, 1000]$  Hz, les frontières de stabilité sont des droites de faible pente. Ainsi, la stabilité du système ne sera que très légèrement améliorée si la valeur de  $E_d$  est réduite. Sur la plage  $[1000, 2000]$  Hz, le système est totalement stable en marche avant, mais est instable en marche arrière. Le minimum de stabilité est obtenu pour  $E_d = 0.93$ , avec un  $\mu_c$  de 0.025. La configuration la plus stable en marche arrière correspond à  $E_d = 0.9$ , mais elle n'est pas robuste dans la mesure où la pente de la frontière de stabilité est importante. Ainsi, une augmentation de 3 GPa fait passer le coefficient de frottement critique de  $\mu_c = 0.5$  à  $\mu_c = 0.025$ . La configuration  $E_d = 110$  GPa est moins performante, avec un  $\mu_c$  de 0.41, mais est la plus robuste. Sur la plage  $[2000, 3000]$  Hz, les zones de stabilité sont plus compliquées. En marche avant, la configuration la plus instable et la plus stable est respectivement  $E_d = 93$  et  $E_d = 106$  GPa. Au voisinage de ce dernier point, un phénomène de décoalescence peut être observé sous forme d'une enclave stable au sein de la zone instable. La seconde frontière de stabilité, qui

marque l'apparition de la seconde instabilité, fait apparaître un maximum et deux minima pour la marge de stabilité, respectivement pour  $E_d = 92, 101$  et  $97$  GPa. En marche arrière, le principal point à noter concerne une brutale variation de la zone de stabilité entre  $E_d = 95$  et  $E_d = 96$  GPa, passant de  $\mu_c = 0.9$  à  $\mu_c = 0.5$ . Sur la plage  $[3000, 4000]$  Hz, une zone instable apparaît en marche arrière pour  $\mu \in [0.2, 0.75]$  et  $E_d \in [90, 104]$  GPa. Cette zone bornée est associée à des phénomènes de couplage-découplage par rapport aux deux paramètres. Sur la plage  $[4000, 5000]$  Hz, la frontière de stabilité est relativement continue entre  $E_d = 100$  et  $110$  GPa, mais elle est beaucoup plus accidentée entre  $90$  et  $100$  GPa. Dans cette dernière zone, la discrétisation choisie pour  $E_d$  atteint sa limite de validité et se révèle trop grossière pour saisir les phénomènes. Le diagramme 2.25-e résume la stabilité du frein sur toute la plage de fréquence. La zone de stabilité est minimum pour  $E_d = 93$  GPa et est maximum pour  $E_d = 106$  GPa. Ce diagramme a l'avantage d'être synthétique, mais il faut avoir conscience qu'il donne le même poids à des phénomènes très différents en terme de fréquences.

D'un point de vue pratique, ces diagrammes de stabilité ont un grand intérêt en terme de robustesse de conception. En effet, ils permettent, à partir d'une solution technique donnée et des dispersions de fabrication associées, de s'assurer que le frein répond au cahier des charges dans tous les cas. De plus, ces diagrammes peuvent être utilisés en amont dans la conception afin de déterminer une valeur du module d'Young qui garantisse à la fois une bonne performance au nominal et une faible variabilité aux dispersions. En clair, il s'agit de trouver une valeur nominale de  $E_d$  qui assure que le système soit dans la zone stable malgré les variations autour de ce nominal, pour un coefficient de frottement de  $0.5$ .

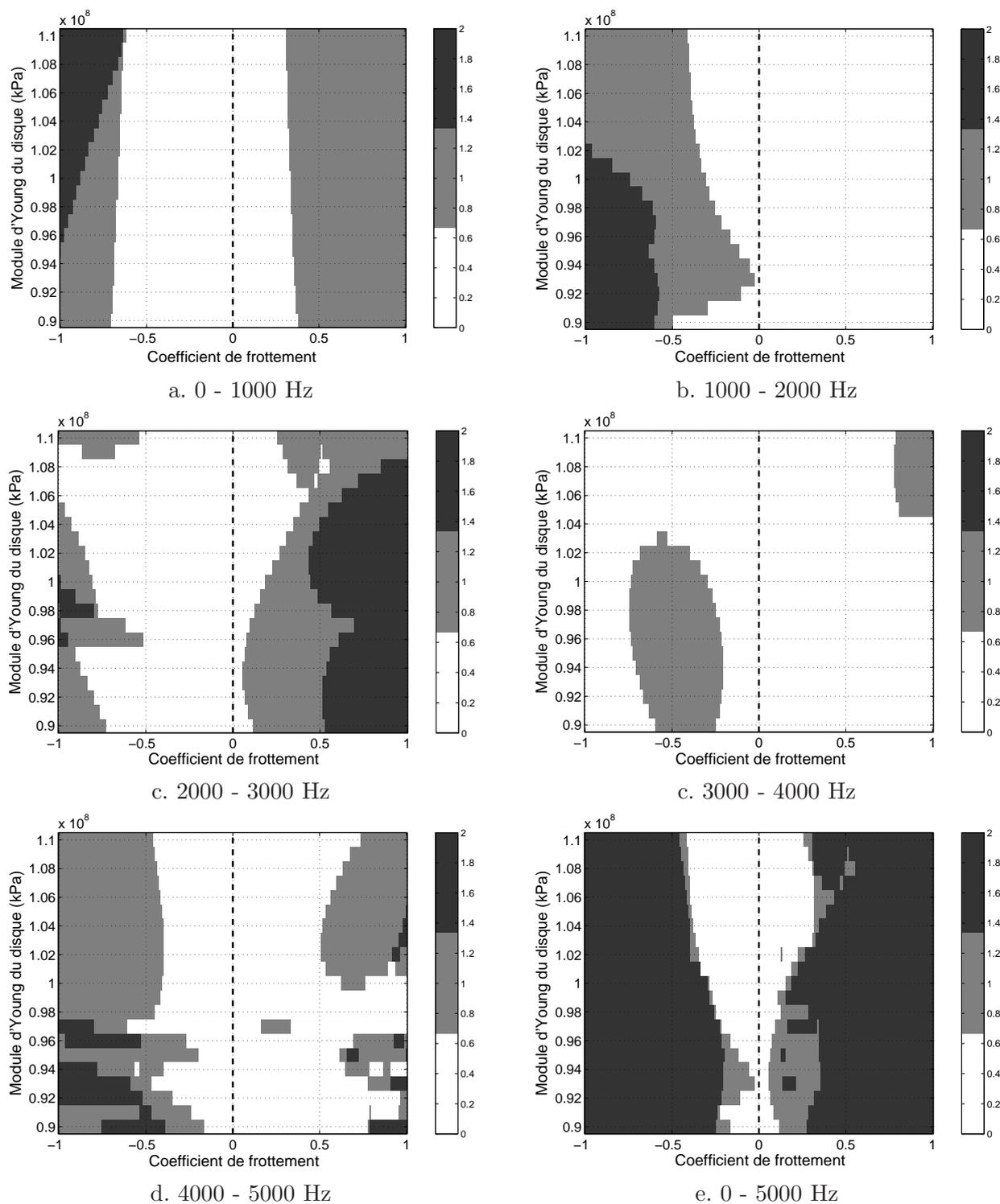


FIG. 2.25 – Zones de stabilité par bandes de fréquence

## 2.7 Effet de l'amortissement

### 2.7.1 Problématique

L'amortissement joue un rôle très important sur la stabilité des systèmes mécaniques et doit donc être considéré lors de l'analyse du crissement de frein. Il faut savoir qu'un système de freinage présente plusieurs types d'amortissements tels que l'amortissement structural, qui caractérise les matériaux de chaque pièce, l'amortissement induit par le frottement ou l'amortissement apporté par les antibruits. Notons que ce dernier exemple illustre bien l'importance de la prise en compte de l'amortissement puisque celui qu'il apporte permet, dans la pratique, de supprimer certains crissements.

Les chercheurs ont commencé par prendre l'amortissement en compte sur des modèles analytiques [137, 62, 54]. Concernant les études par éléments finis, la plupart des chercheurs négligent l'amortissement en considérant que la situation non-amortie est la plus défavorable. Certains ont néanmoins pris en compte un amortissement forfaitaire, sous la forme d'un facteur de perte constant sur toute la plage de fréquence [101, 87, 136]. D'autres chercheurs se sont consacrés à la modélisation des types d'amortissements spécifiques aux systèmes de freinage : l'amortissement induit par le frottement [16, 88, 17], l'amortissement apporté par la sous-couche [107] et l'amortissement apporté par l'antibruit [113, 53, 105, 112, 45]. Cependant, il reste illusoire, en l'état actuel des connaissances et des moyens expérimentaux et numériques, de vouloir simuler précisément l'effet de l'amortissement sur un système de freinage réel. Pour illustrer ce point, citons par exemple que la technique de mesure de l'amortissement structural d'une plaquette n'est pas encore satisfaisante [31, 39].

Dans cette étude, nous nous sommes focalisés sur le comportement modal du système. Ainsi, l'amortissement n'a pas été modélisé de façon précise sur toute la structure, mais de façon globale sous la forme d'un amortissement modal. L'objectif est d'expliquer en quoi cet amortissement modal modifie les mécanismes de coalescence. Nous allons montrer que négliger l'amortissement peut conduire à des résultats faux et en particulier, que l'amortissement peut déstabiliser le système.

### 2.7.2 Mise en équation

Lorsque l'amortissement est pris en compte, l'équation 2.4 devient

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

avec  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement du système. La projection de cette équation sur la base modale du système sans frottement s'écrit de façon analogue à 2.21 :

$$[\mathbf{I}s^2 + \mathbf{D}s + (\boldsymbol{\Omega}^2 + \mu\boldsymbol{\Lambda}_f)] \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

avec  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi}$ , la projection de la matrice d'amortissement sur la base modale sans frottement. Cette matrice ne pouvant être calculée précisément avec l'équation précédente, elle a été estimée en considérant un amortissement modal pour chaque mode de la structure. Ceci se traduit par une matrice diagonale  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1..d_n)$ , avec  $d_i$  l'amortissement associé au mode  $i$ .

En analysant l'effet de l'amortissement sur les motifs de coalescence, deux cas ont été observés. Dans le premier cas, que nous avons nommé *couplage simple* et qui concerne surtout les basses fréquences, l'ajout d'amortissement sur un mode ne perturbe que la coalescence qui lui est associée. Dans le second cas, que nous avons qualifié de *couplage multi-modes*, l'ajout d'amortissement sur un mode conduit à la perturbation de modes qui ne sont pas directement impliqués dans la coalescence.

### 2.7.3 Couplages simples

#### Effet sur les courbes de coalescences

Afin d'illustrer l'effet de l'amortissement sur les mécanismes de couplage, nous allons dans un premier temps nous focaliser sur une coalescence basse fréquence à 356 Hz. La courbe de coalescence associée prend, dans le cas non-amorti, la forme classique illustrée figure 2.26. Les deux modes sans frottement  $7_{\mu=0}$  à 343 Hz et  $8_{\mu=0}$  à 367 Hz, dont les déformées sont représentées figure 2.27 et détaillées tableau 2.4, se couplent pour  $\mu = 0.33$ .

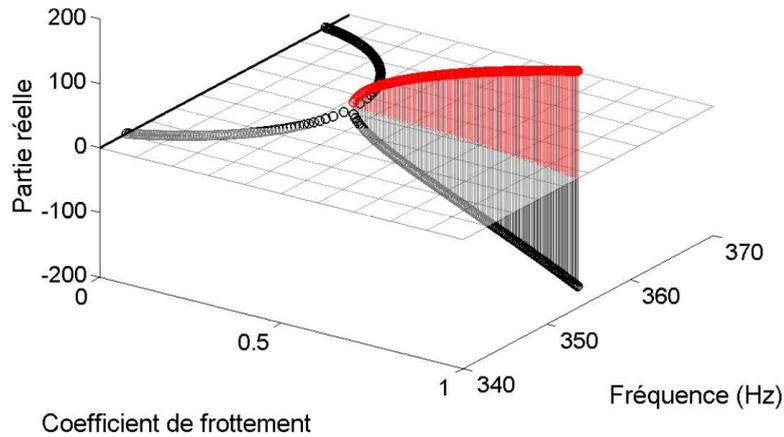


FIG. 2.26 – Coalescence non-amortie

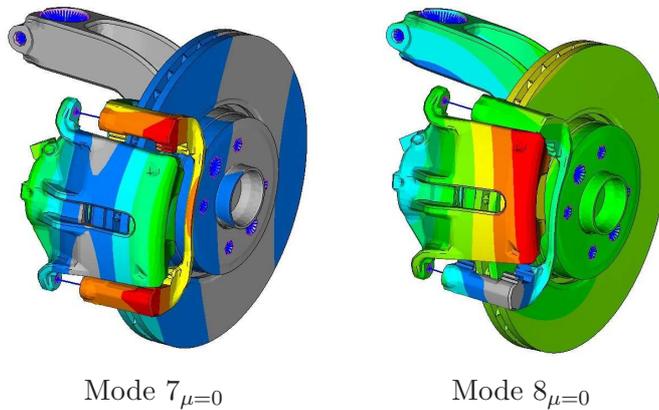


FIG. 2.27 – Déformées des modes  $7_{\mu=0}$  et  $8_{\mu=0}$

L'évolution des facteurs de participation modale relatifs aux modes 7 et 8 en fonction du coefficient de frottement est illustrée figure 2.28. Seuls les modes  $7_{\mu=0}$  et  $8_{\mu=0}$  contribuent aux déformées des modes 7 et 8, ce qui justifie que nous parlions de *couplage simple*. Les modes 7 et 8 étant quasiment découplés des autres modes, nous pouvons restreindre l'étude de l'effet de l'amortissement à ces deux modes. La matrice  $\mathbf{D}$  prend alors la forme

$$\mathbf{D} = \text{diag}(0\dots 0, d_7, d_8, 0\dots 0) \quad (2.30)$$

Le cas iso-amorti, défini par  $d_7 = d_8 = d$ , a été étudié dans un premier temps. La figure 2.29-a compare les courbes de coalescence non-amortie et iso-amorties à  $d = 25$  et  $d = 50$ . Nous

Mode	Description
7	Les pattes de porte fusée fléchissent en phase et pilotent la chape dans un mode rigide de balancement. L'étrier oscille le long de ses colonnettes
8	Le mode de torsion du porte fusée entraîne les pattes de fixation en opposition de phase. Ainsi, la chape se tord et, par l'intermédiaire des colonnettes, entraîne l'étrier en rotation. Les plaquettes glissent à la surface du disque entre leurs butées.

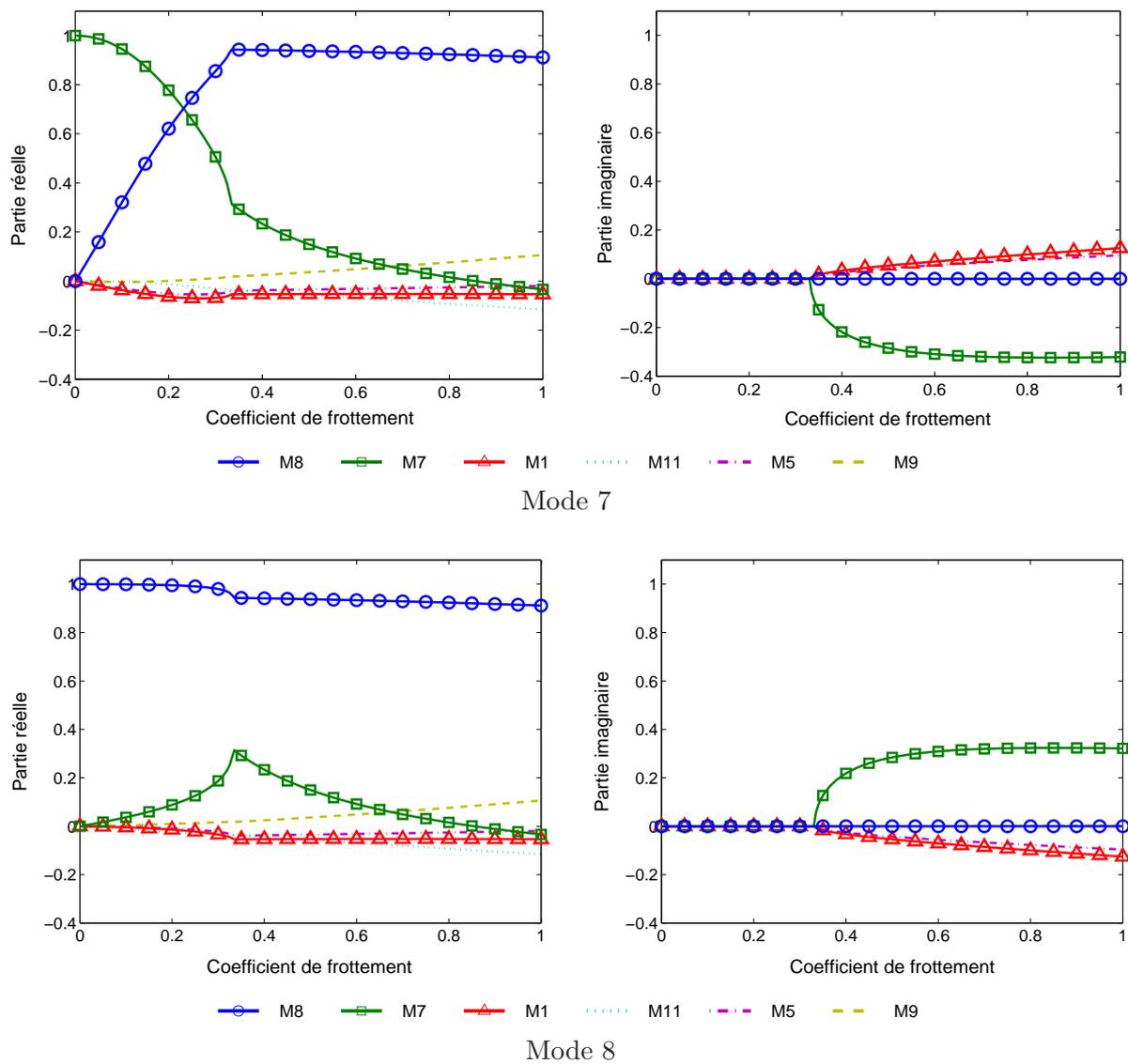
TAB. 2.4 – Déformées des modes  $7_{\mu=0}$  et  $8_{\mu=0}$ 

FIG. 2.28 – Facteurs de participation modale des modes 7 et 8

observons ici les phénomènes décrits par Hoffmann et Gaul [62] et Sinou et Jézéquel [142] sur des modèles analytiques. En effet, l'augmentation de  $d$  ne perturbe pas les fréquences, mais décale les parties réelles des valeurs propres de  $d/2$  vers les valeurs négatives. Une démonstration de cette propriété est présentée en annexe C sur un modèle analytique. En conséquence, l'augmentation de  $d$  stabilise le système en augmentant le coefficient de frottement critique à partir duquel il devient instable.

Dans le cas non-iso-amorti, les motifs de couplage sont beaucoup plus complexes, comme illustré figure 2.29-b. Cette figure compare le cas non-amorti et les configurations amorties définies par les couples  $(d_7, d_8)$  suivants :  $(25, 30)$  et  $(50, 55)$ . Comme attendu, l'ajout d'amortissement se traduit principalement par un décalage des valeurs propres du côté stable du plan complexe. Néanmoins, les motifs de coalescence sont profondément marqués par le caractère non-uniforme de la répartition d'amortissement. En effet, cette répartition provoque une différence de  $|d_8 - d_7|/2$  au niveau des parties réelles des deux modes à  $\mu = 0$ . D'autre part, les principaux changements apparaissent au voisinage du point de bifurcation, sous la forme d'un « effet de lissage » décrit par Hoffmann et Gaul [62]. Ainsi, les parties réelles des valeurs propres commencent à évoluer pour un coefficient de frottement inférieur au coefficient de frottement critique non-amorti. Ceci peut déstabiliser le système si un des modes est très faiblement amorti et que le second l'est fortement, comme illustré figure 2.30.

Une répartition non-uniforme d'amortissement complexifie les courbes de coalescence, mais permet également de s'affranchir du caractère singulier du point de bifurcation. En effet, quelque soit la valeur du coefficient de frottement, les valeurs propres des deux modes sont distinctes. Il est alors possible de suivre ces deux modes et d'identifier celui qui devient instable. La figure 2.32 illustre l'effet d'un ajout d'amortissement de  $d = \pm 25$  sur l'un ou l'autre des deux modes par rapport à la configuration  $(d_7 = 25, d_8 = 25)$ . Dans les quatre cas observés, le mode instable est toujours celui qui est le moins amorti. Il est ensuite intéressant d'analyser l'effet de l'amortissement sur les déformées, d'autant que cette fois, la déformée du mode instable pourra être déterminée sans ambiguïtés. Seules les configurations  $(0, 25)$  et  $(50, 25)$  sont décrites figures 2.31 et 2.33 en terme de facteurs de participation modale, mais les conclusions sont similaires pour les autres configurations. Les courbes amorties sont comparables aux courbes non-amorties, excepté que le point de bifurcation est beaucoup moins marqué du fait de l'« effet lissage ». De plus, les modes deviennent complexes avant le coefficient de frottement critique non-amorti. Les facteurs de participation modale relatifs aux configurations  $(0, 25)$  et  $(50, 25)$  sont égaux en parties réelles et opposés en partie imaginaire. En d'autres termes, la déformée du mode instable présente une partie imaginaire positive, alors que celle du mode stable est associée à une partie imaginaire négative.

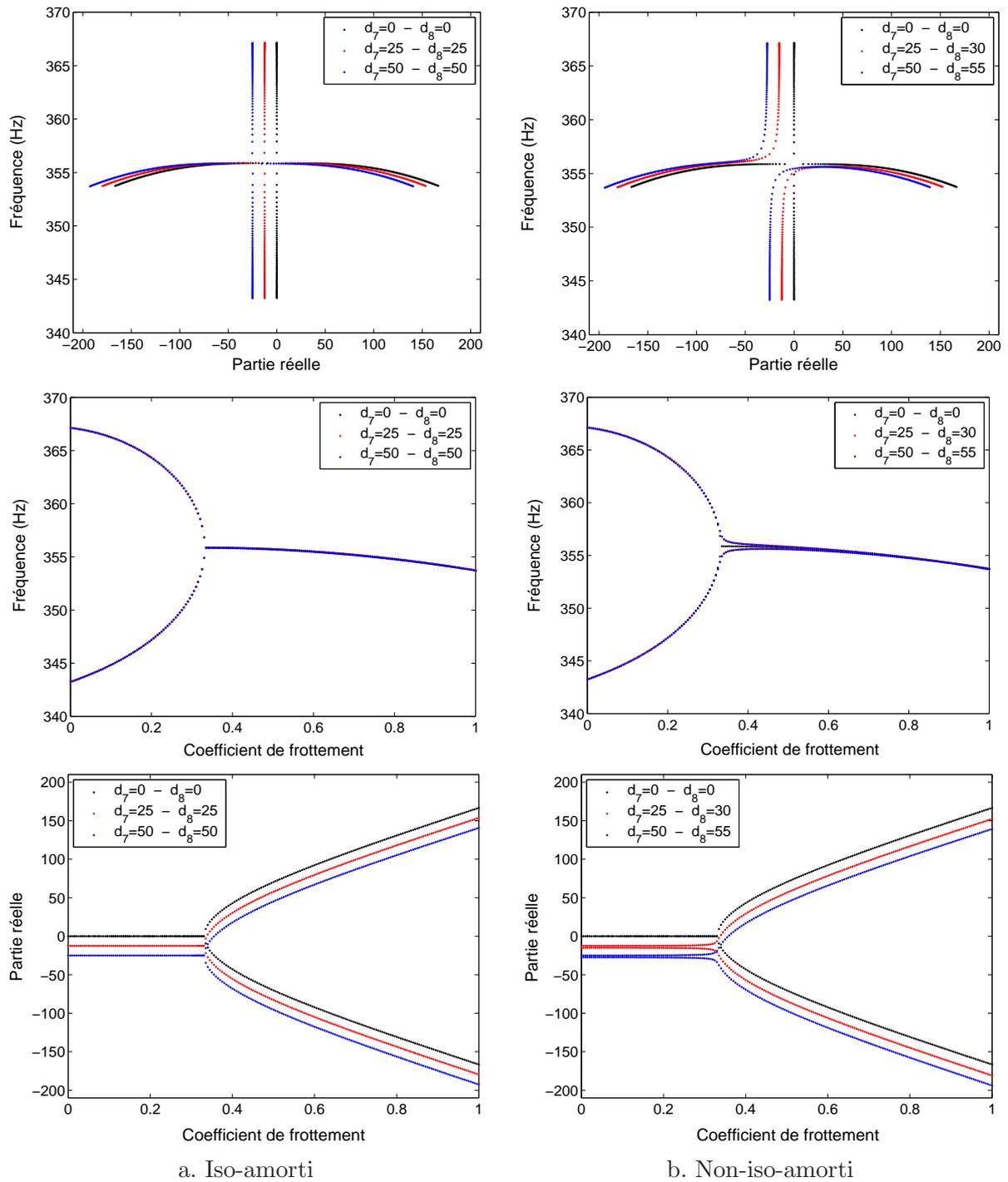


FIG. 2.29 – Courbes de coalescence amorties

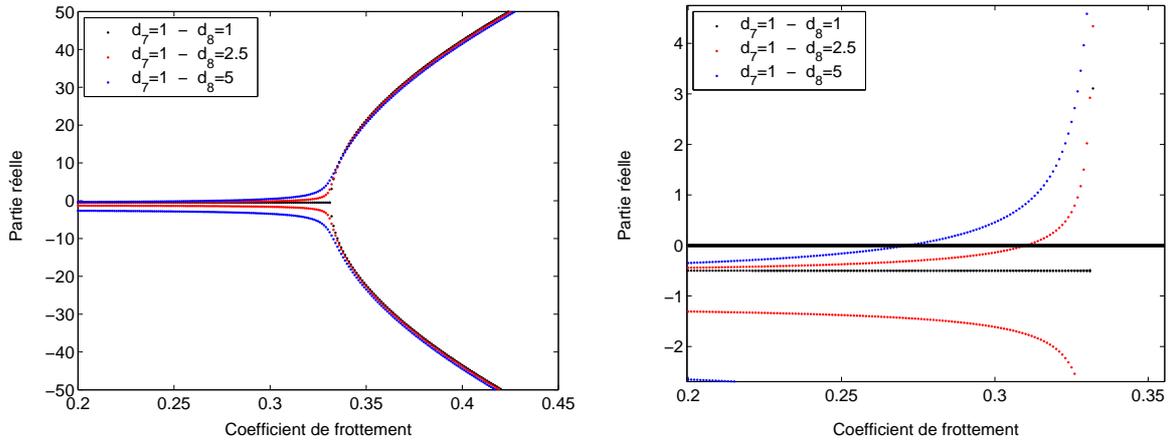


FIG. 2.30 – Déstabilisation par l'amortissement

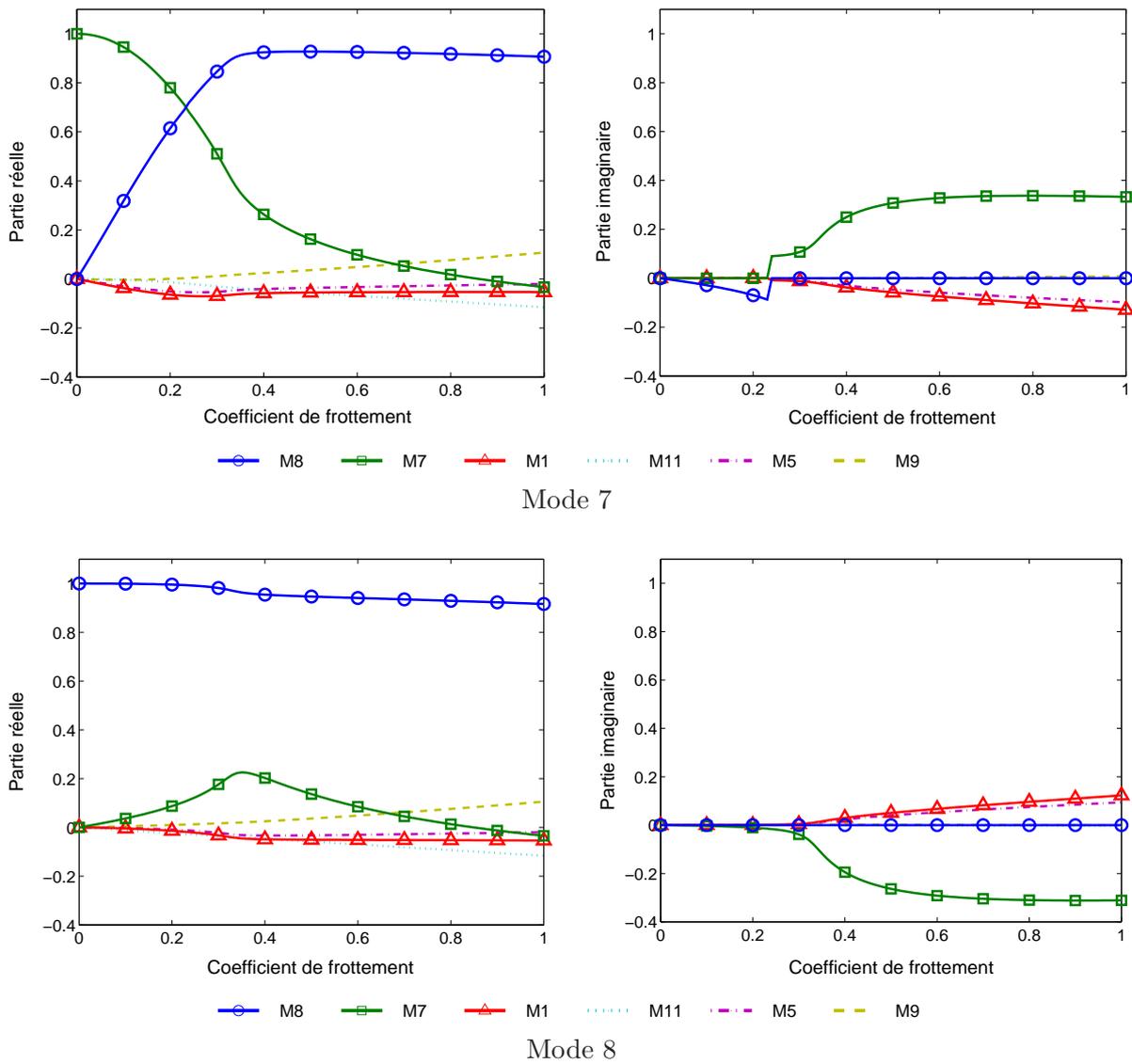


FIG. 2.31 – Facteurs de participation modale - configuration  $d_7 = 0, d_8 = 25$

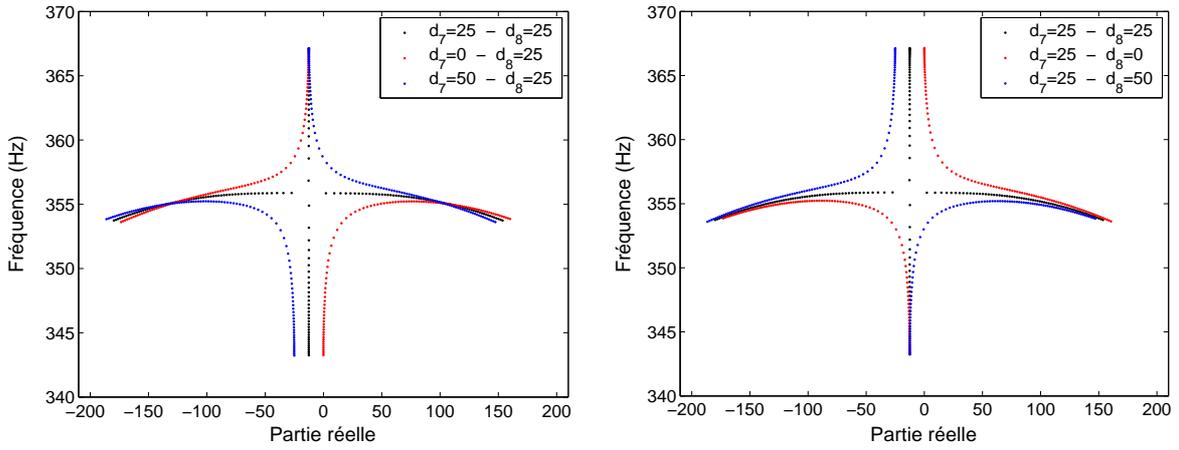
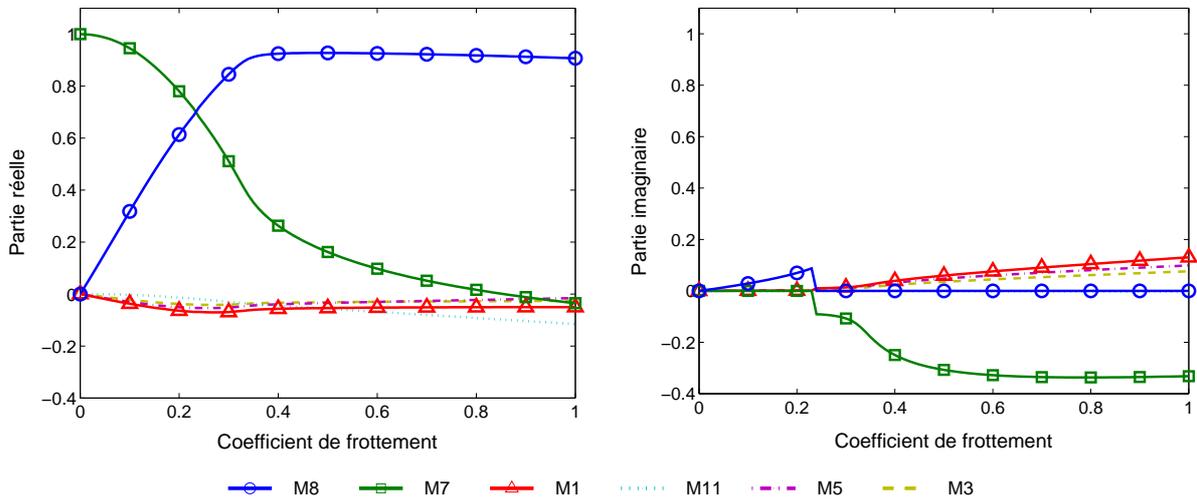
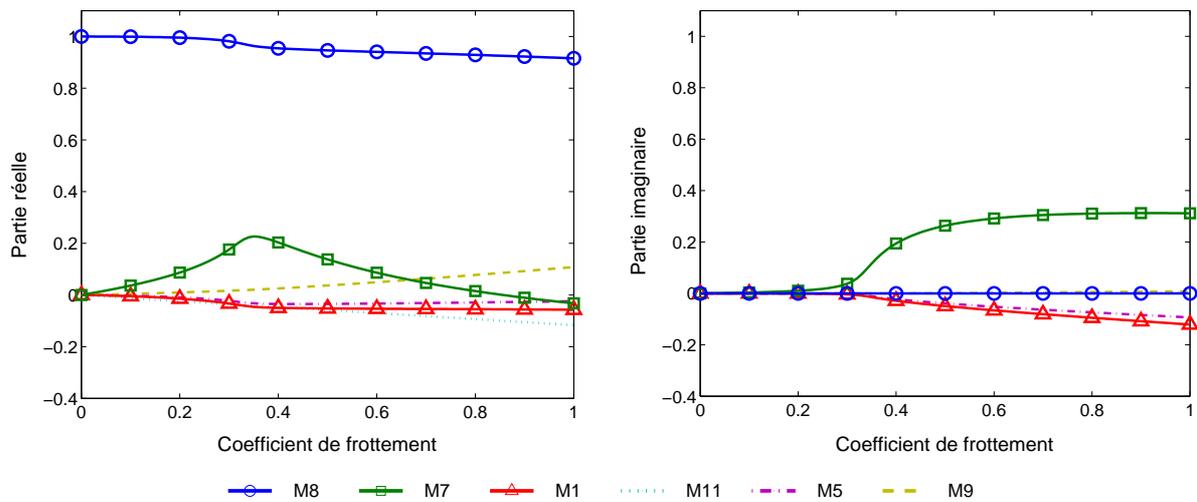


FIG. 2.32 – Courbes de coalescence amorties - suivi du mode instable



Mode 7



Mode 8

FIG. 2.33 – Facteurs de participation modale - configuration  $d_7 = 50, d_8 = 25$

### Zones de stabilité

Comme expliqué dans la partie précédente, l'amortissement a un effet assez complexe sur les courbes de coalescence. Néanmoins, l'important est de connaître son influence sur la stabilité du système. La figure 2.32 montre que ce qui pilote cette stabilité est le ratio entre les amortissements des deux modes. La figure 2.34-a regroupe les diagrammes de stabilité en fonction de  $\mu$  et de  $d_8/d_7$  pour  $d_7 \in \{1, 10, 20\}$ . Pour chaque couple  $(\mu, d_8/d_7)$ , le système est stable dans la zone blanche et instable dans la zone grise. La figure 2.34-b trace l'évolution des fréquences en fonction des deux paramètres sous forme de nappes 3D. Ces nappes permettent d'identifier le mode instable, qui est représenté en rouge.

Dans le cas  $d_7 = 1$ , la position la plus stable s'avère être la configuration iso-amortie. Lorsqu'on s'en éloigne, la plage de stabilité diminue de façon monotone. Les nappes de fréquences permettent d'illustrer le fait que lorsque  $d_8/d_7 > 1$ , le mode 7 est instable, alors que dans le cas contraire, c'est le mode 8 qui est instable. Pour les valeurs plus importantes de  $d_7$ , la configuration iso-amortie correspond toujours à un maximum de stabilité, mais cette fois, le maximum est local. En effet, au delà d'un ratio de 40 pour  $d_7 = 10$  et d'un ratio de 10 pour  $d_7 = 20$ , la plage de stabilité s'élargit fortement. Ce ratio critique marque une inflexion au niveau des fréquences, qui ont alors tendance à se rapprocher l'une de l'autre.

Pour aller plus loin, un plan d'expériences factoriel complet a été lancé en prenant comme paramètres les deux amortissements modaux. Les résultats sont rassemblés figure 2.35 pour  $\mu \in \{2.0, 3.2, 3.3, 3.4\}$ . Nous observons que la zone stable est une plage centrée autour de la ligne d'iso-amortissement et qu'elle converge vers cette dernière lorsque le coefficient de frottement tend vers le coefficient de frottement critique non-amorti :  $\mu_c = 0.33$ . Ces cartographies illustrent le phénomène de déstabilisation induite par l'amortissement. En effet, en choisissant un point de la zone stable, une augmentation non-simultanée de  $d_7$  ou  $d_8$  conduira à franchir la frontière de stabilité. Au delà du frottement critique non-amorti, le système n'est stable qu'à condition que les deux modes soient suffisamment amortis et d'une manière relativement homogène, comme l'illustre la cartographie à  $\mu = 0.34$ . Pour cette valeur du coefficient de frottement, l'évolution des fréquences en fonction des deux amortissements modaux est représentée figure 2.36. Cette figure illustre le changement de mode instable et montre que les fréquences des deux modes ne sont égales que dans le cas iso-amorti.

### Facteur d'amortissement robuste

Dans cette partie, le facteur d'amortissement robuste (*RD-Factor*) défini par Sinou et al. [141] a été utilisé afin de déterminer le ratio d'amortissement  $d_8/d_7$  optimal. Cet indicateur se calcule à partir des écarts des parties réelles et des fréquences des modes qui se couplent, comme indiqué ci-dessous.

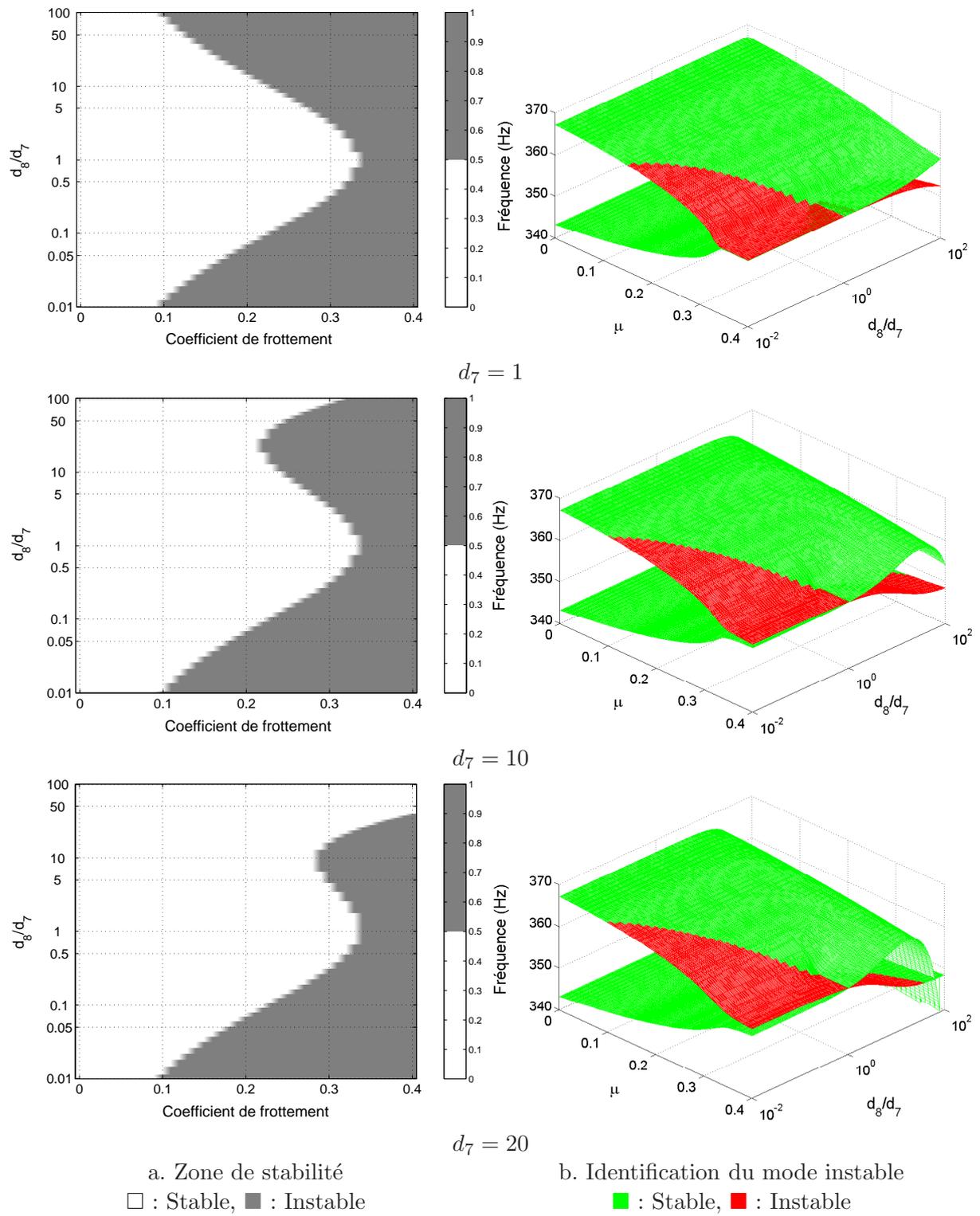
$$\begin{aligned} RD - Factor &= -\text{Max}(\text{Re}(s)) \log \left( \frac{\Delta F}{\Delta R + 1} + 1 \right) & \text{si } \text{Re}(s) \leq 0 \\ RD - Factor &= 0 & \text{si } \text{Re}(s) > 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$\Delta R$  et  $\Delta F$  sont définis respectivement comme l'écart en partie réelle et l'écart en fréquence :

$$\Delta R = |\text{Re}(s_{instable}) - \text{Re}(s_{stable})| \quad (2.32)$$

$$\Delta F = |\text{Im}(s_{instable}) - \text{Im}(s_{stable})| \quad (2.33)$$

Plus la valeur de l'indicateur est forte, meilleure est la stabilité du système. Les résultats, qui sont tracés figure 2.37, confirment que la configuration optimale en terme de stabilité est la configuration iso-amortie.

FIG. 2.34 – Zones de stabilité  $(\mu, d_8/d_7)$  et identification du mode instable

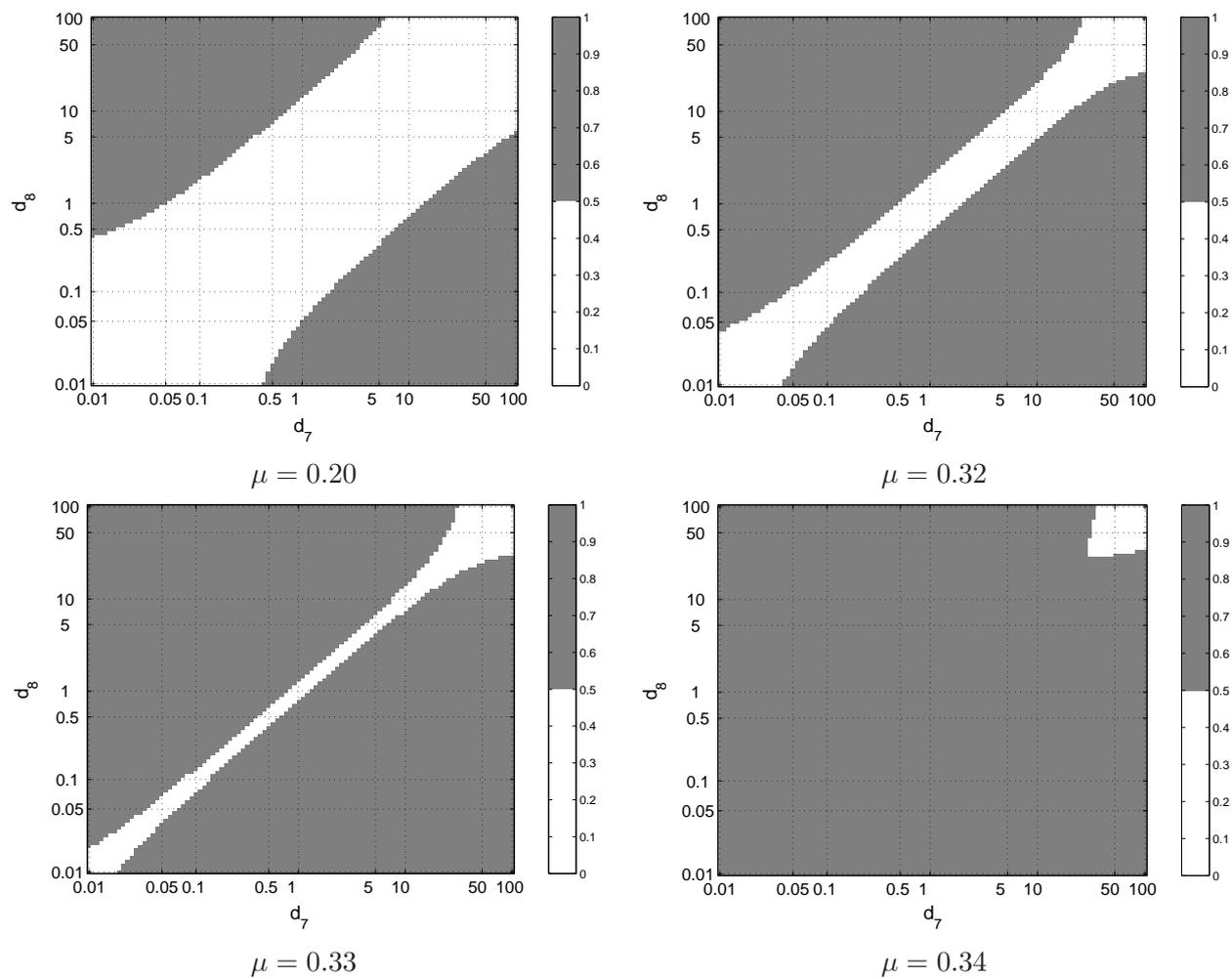


FIG. 2.35 – Zones de stabilité  $(d_7, d_8)$  - □ : Stable, ■ : Instable

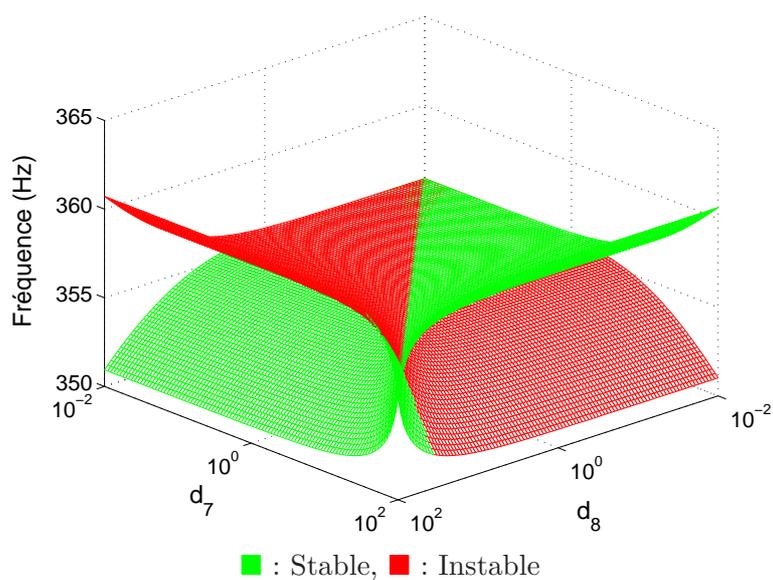


FIG. 2.36 – Fréquences en fonction des amortissements modaux  $d_7$  et  $d_8$  pour  $\mu = 0.34$

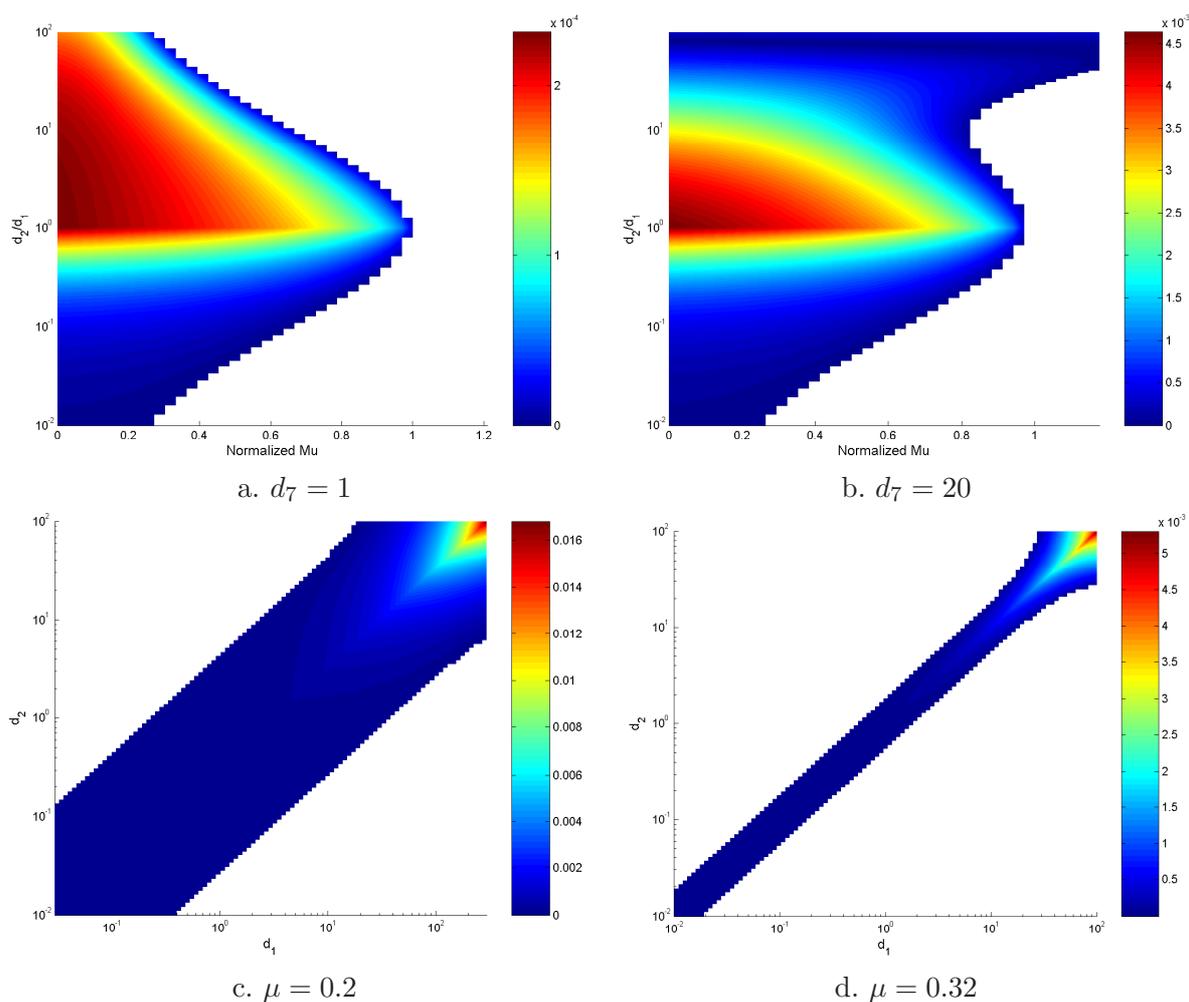


FIG. 2.37 – Evolution du RD Factor

### Synthèse sur les couplages simples

Cette étude du couplage simple entre deux modes nous a permis de tirer un certain nombre de conclusions générales :

- les deux modes peuvent être instables suivant la répartition d'amortissement,
- la situation non amortie n'est pas la plus défavorable du point de vue de la stabilité,
- ajouter de l'amortissement de façon proportionnelle sur les modes stabilise toujours,
- ajouter de l'amortissement de façon non-proportionnelle peut déstabiliser le système .

Ainsi, le fait de négliger l'amortissement peut conduire à un pronostic erroné quant à la stabilité du système. De plus, l'ajout d'amortissement sur une unique partie du système, par exemple sur les plaquettes comme cela est fait en pratique, peut le déstabiliser.

### 2.7.4 Couplages multi-modes

Jusqu'à présent, nous n'avons décrit que des motifs de couplage ne faisant intervenir que deux modes en basses fréquences. Pour des crissements plus hauts en fréquence, les phénomènes sont plus complexes du fait d'une plus forte densité modale. Afin d'illustrer ceci, nous allons nous focaliser sur les modes 41 à 47 que nous avons décrits précédemment. Les valeurs propres non-amorties associées à ces sept modes sont tracées dans le plan complexe figure 2.38-a. Lorsque nous amortissons l'ensemble des modes avec  $d = 400$ , ce qui correspond dans cette plage de fréquence à  $\xi \simeq 1\%$ , nous obtenons un motif de couplage identique mais décalé en parties réelles de 200, comme illustré figure 2.38-b.

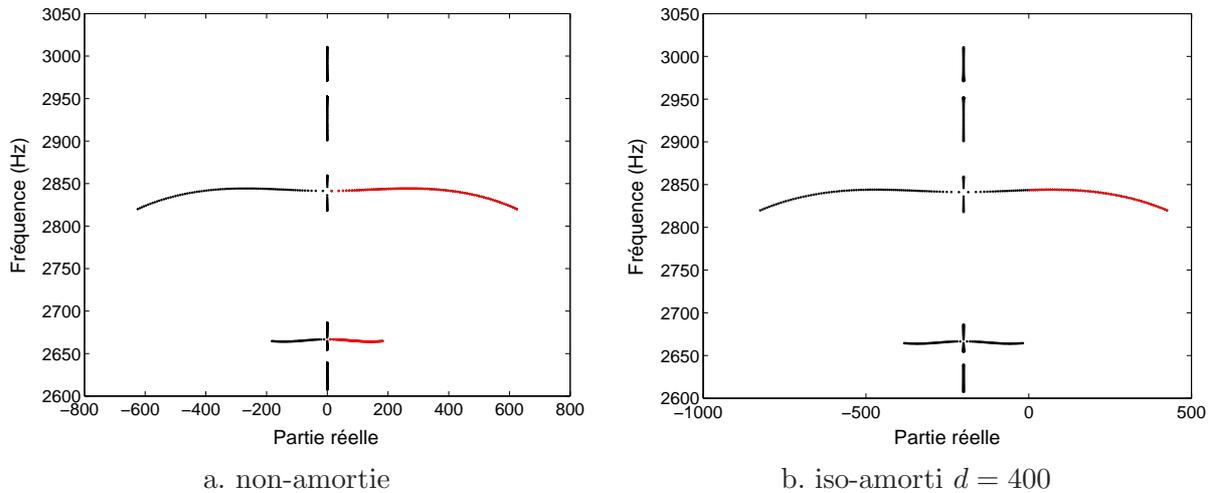


FIG. 2.38 – Evolution des valeurs propres des modes 41 à 47 dans le plan complexe

Il est important de remarquer que les termes contenus dans la matrice induite par le frottement,  $\mathbf{\Lambda}_f$ , couplent ces sept modes entre eux, comme nous le constatons figure 2.39. Nous pouvons en déduire que les équations qui gouvernent les valeurs propres de ces sept modes sont fortement couplées entre elles.

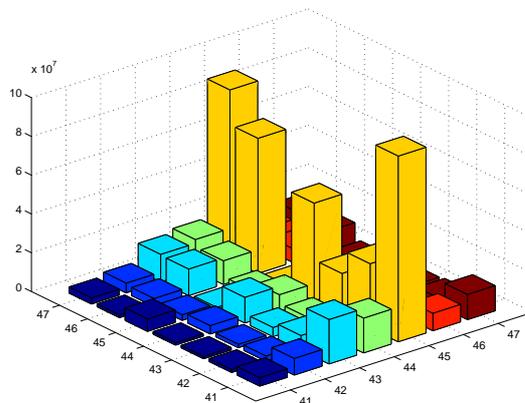


FIG. 2.39 – Termes de la matrice  $\mathbf{\Lambda}_f$  correspondant aux modes 41 à 47

En conséquence, l'ajout d'amortissement modal sur un des modes ne va pas seulement impacter son motif de coalescence, mais il perturbera également tous les autres modes. Pour illustrer

ceci, nous avons réalisé sept études paramétriques en modifiant l'amortissement de chaque mode de  $\pm 400$  par rapport à la configuration iso-amortie à  $d_0 = 400$ . Les résultats sont présentés figure 2.40.

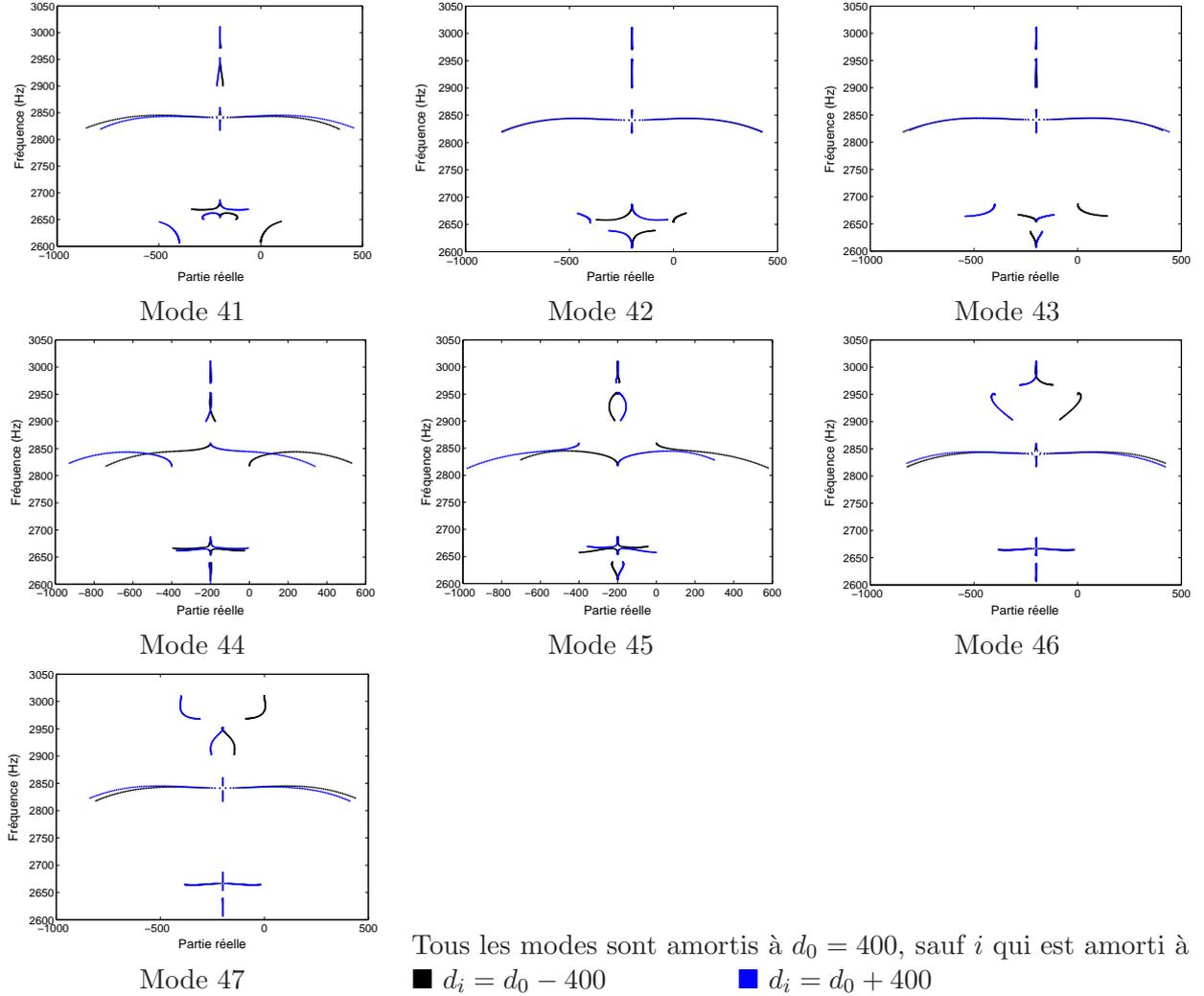


FIG. 2.40 – Effet de l'amortissement de chaque mode sur les motifs de coalescence

Le premier point à remarquer est que l'ajout de  $\pm d$  sur l'amortissement d'un mode a un effet symétrique par rapport à la droite d'iso-amortissement, qui a pour abscisse  $-d_0/2$ , soit ici -200. De plus, nous constatons que l'ajout d'amortissement sur un mode provoque non seulement la stabilisation de ce mode, mais également la stabilisation ou la déstabilisation des autres modes. Par exemple, lorsqu'on ajoute de l'amortissement sur le mode 41, les modes 42, 44, 46 et 47 sont stabilisés alors que les modes 43 et 45 sont déstabilisés. En fonction du mode que l'on amortit, les effets sont différents. Par exemple, amortir le mode 42 n'a aucun effet sur les modes 44 à 47. Néanmoins, nous constatons que dans tous les cas, la règle suivante est respectée

$$\sum_{i=1}^{NbMode} \alpha_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NbMode} d_i \quad (2.34)$$

Ce qui signifie que la moyenne des parties réelles est liée à l'amortissement modal moyen.

### Echange de branches

L'amortissement fait intervenir un phénomène encore plus complexe, que nous avons nommé « échange de branches ». Ce dernier n'a pas été observé sur la configuration nominale, mais sur la configuration  $E_d = 105$  GPa. La figure 2.42 présente l'évolution dans le plan complexe des modes 44 à 47 en fonction du coefficient de frottement. Initialement, il ne sont pas amortis, puis le mode 47 est progressivement amorti avec  $d_{47}$  variant de 0 à 1500 par pas de 100. La valeur maximale de l'amortissement correspond à un taux d'amortissement critique ( $\xi$ ) d'un peu plus de 4 %. Nous n'avons sélectionné ici que les valeurs clé de ce paramètre qui permettent de comprendre le phénomène. De 0 à 600, les trajectoires des modes 46 et 47 varient progressivement dans le plan complexe et se rapprochent l'une de l'autre. Entre 600 et 700, un échange brutal de branches se produit pour un coefficient de frottement de 0.69. En effet, une partie des valeurs propres, qui étaient initialement rattachées au mode 47 sont maintenant rattachées au mode 46 et réciproquement. La figure 2.43, qui présente l'évolution des fréquences des quatre modes en fonction de  $\mu$  pour les deux valeurs de  $d_{47}$ , permet de mettre en évidence le phénomène d'échange, grâce à l'utilisation d'un algorithme de suivi des modes. Le principe de cet échange de branches est symbolisé figure 2.41, avec le point et la flèche symbolisant respectivement la situation non-amortie et le sens croissant du coefficient de frottement.

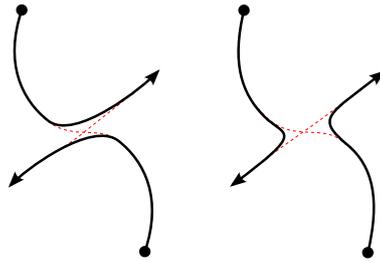


FIG. 2.41 – Principe de l'échange de branches

Afin d'analyser plus finement ce phénomène, nous allons nous intéresser aux facteurs de participation modale de ces deux modes. Ils sont représentés figure 2.45 dans le cas non-amorti. Nous constatons que ces deux modes interagissent fortement entre eux dans la mesure où la contribution de  $47_{\mu=0}$  sur 46 et celle de  $46_{\mu=0}$  sur 47 croît à mesure que  $\mu$  augmente. Au delà de  $\mu = 0.4$ , le mode 47 est dominé par la contribution de  $46_{\mu=0}$ . Pour  $d_{47} = 700$ , nous obtenons les facteurs de participation modale complexes représentés figure 2.46. Les courbes présentent un brusque changement de comportement au voisinage du coefficient de frottement associé à l'échange de branches. Le point le plus remarquable concerne le mode 47 qui passe brutalement d'une déformée dominée par  $47_{\mu=0}$  à une déformée dominée par  $46_{\mu=0}$  en terme de parties réelles, et inversement en terme de parties imaginaires.

En revenant à la figure 2.42, nous observons que pour  $d_{47}$  variant de 700 à 900, les courbes se lissent de manière à faire disparaître les traces du phénomène qui vient de se produire. En parallèle, les trajectoires des modes 44 et 47 se rapprochent dans le plan complexe. Un second échange de branches impliquant ces deux modes se produit entre 900 et 1000 pour un coefficient de frottement de 0.79. Les trajectoires continuent à évoluer dans le plan complexe, et nous observons entre 1300 et 1400 un troisième échange de branches, cette fois entre les modes 44 et 46 pour un coefficient de frottement de 0.97. La figure 2.44 permet d'illustrer ces deux changements de branches d'un point de vue fréquentiel.

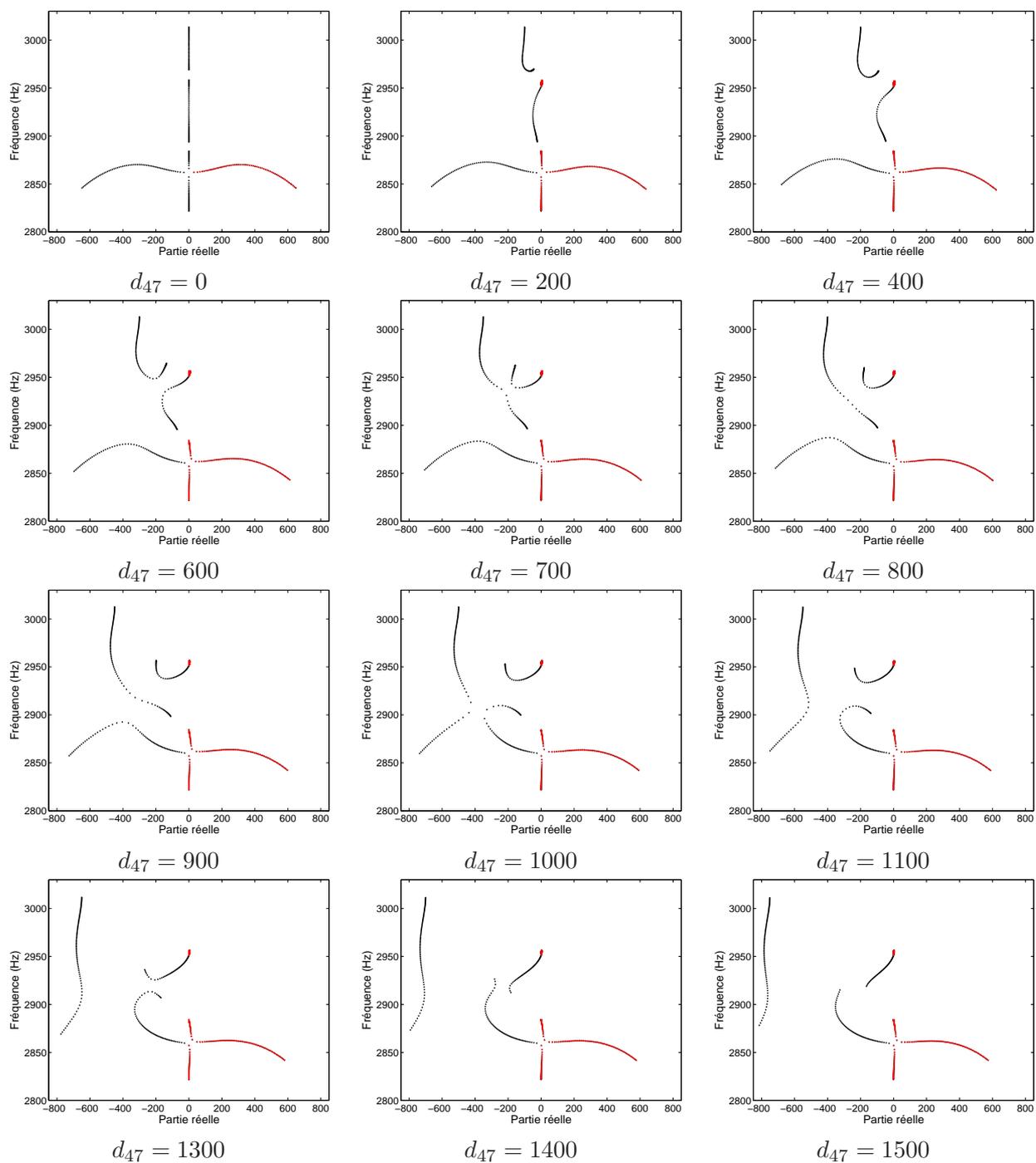
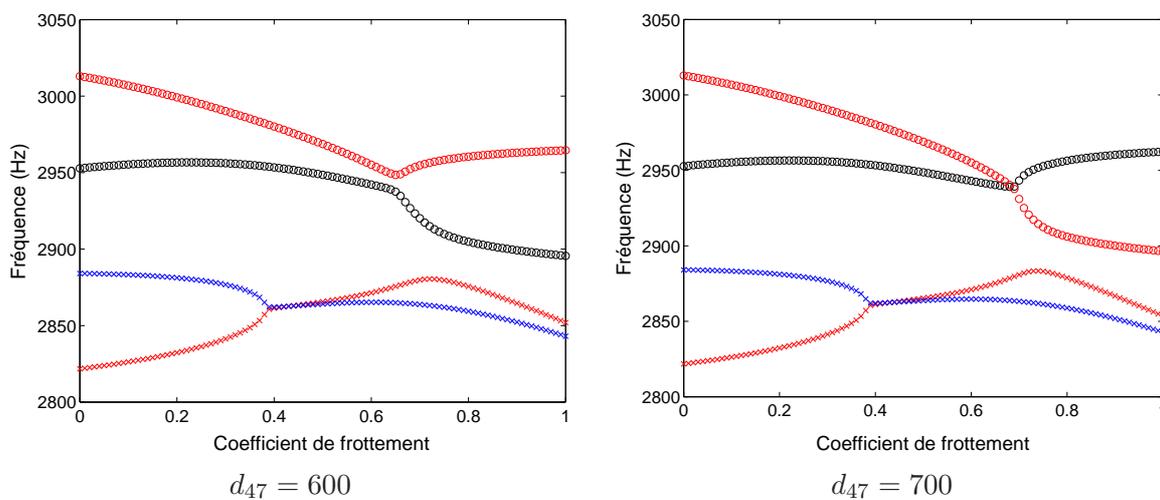
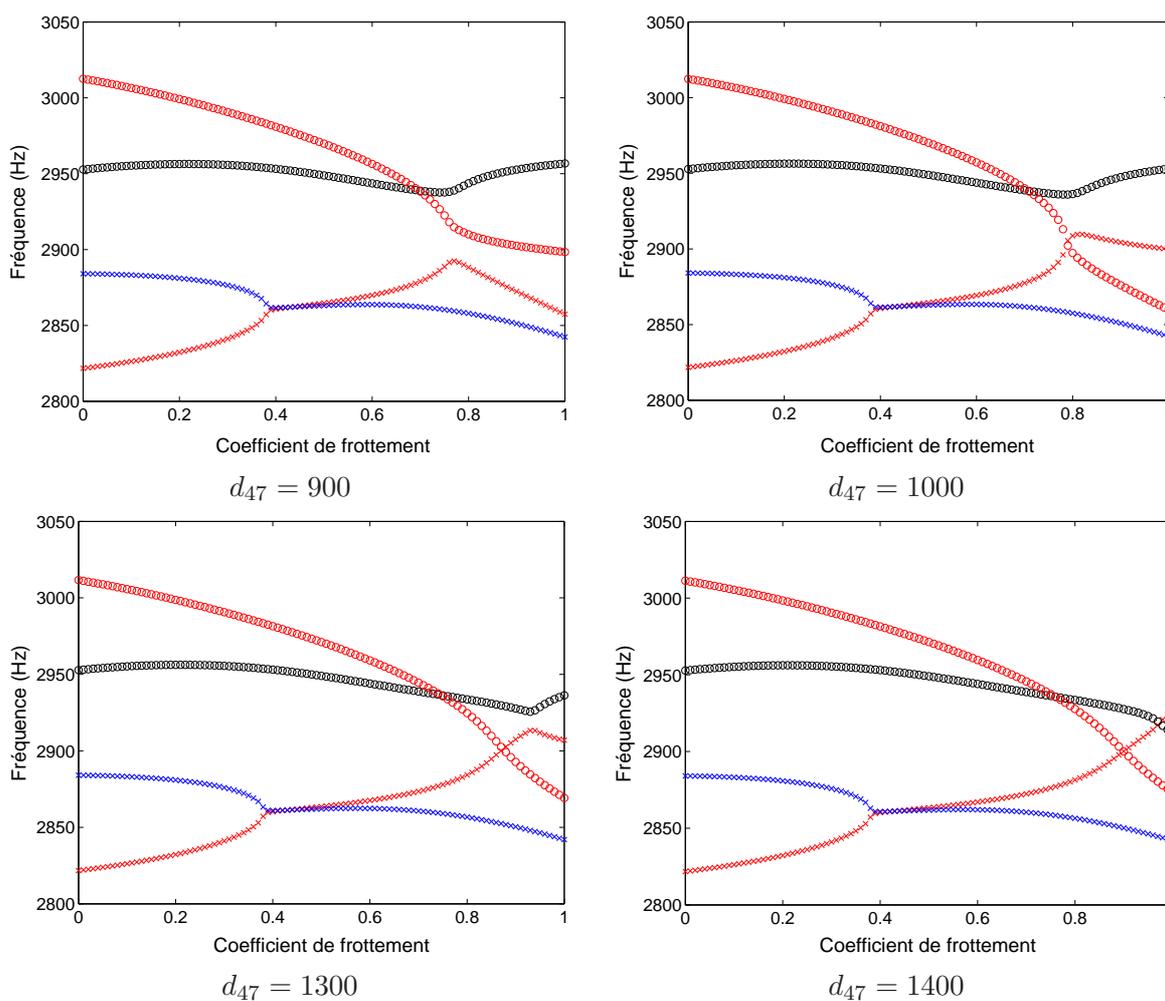


FIG. 2.42 – Phénomène d'échange de branches -  $E_d = 105$  GPa - Modes 44 à 47

FIG. 2.43 – Premier échange de branches - Modes  $\times$  44,  $\times$  45,  $\circ$  46,  $\circ$  47FIG. 2.44 – Second et troisième échanges de branches - Modes  $\times$  44,  $\times$  45,  $\circ$  46,  $\circ$  47

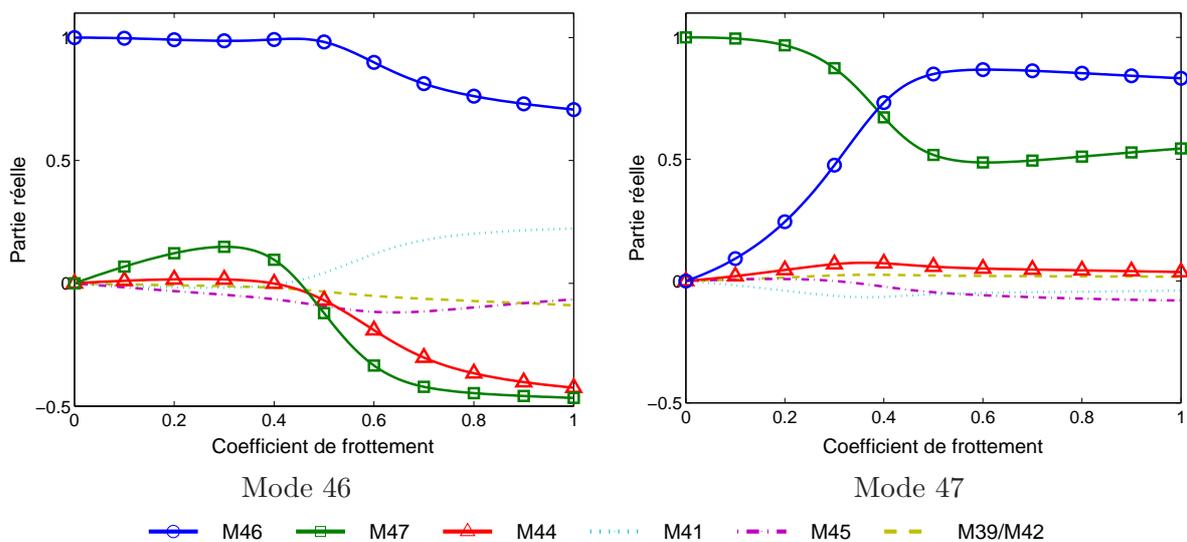


FIG. 2.45 – Facteurs de participation modale -  $d_{47} = 0$  - Modes 46 et 47

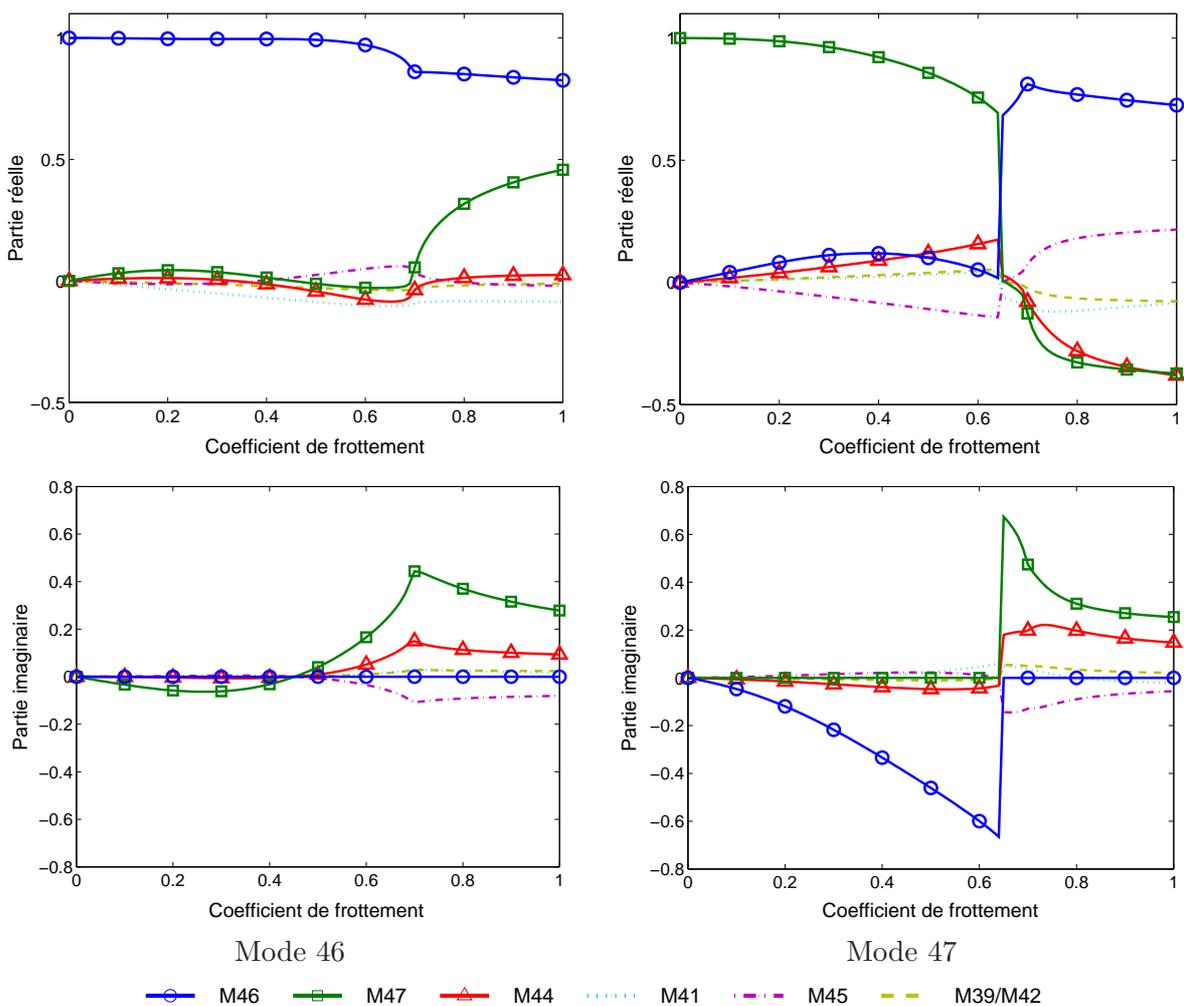


FIG. 2.46 – Facteurs de participation modale -  $d_{47} = 700$  - Modes 46 et 47

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé le crissement grâce à un modèle éléments finis représentatif d'un système de freinage réel. Le frottement a été modélisé grâce à la loi de Coulomb et la stabilité du système a été estimée à travers des analyses aux valeurs propres complexes. Une méthode modale semi-analytique qui permet de réduire de façon très importante le temps de calcul sans pour autant nuire à la précision des résultats a été adoptée.

Ceci nous a permis de réaliser, dans un premier temps, une étude paramétrique au coefficient de frottement. Nous avons ainsi mis en évidence le phénomène de coalescence de modes qui aboutit à l'apparition d'un mode complexe instable. Nous avons analysé précisément l'évolution des valeurs propres, mais également des vecteurs propres complexes, ce qui à notre connaissance n'avait jamais été réalisé.

Dans un second temps, nous avons lancé un plan d'expériences factoriel complet par rapport au coefficient de frottement et au module d'Young du disque. Nous avons obtenu des courbes de coalescence biparamétriques, ce qui nous a permis de généraliser le concept de coalescence aux autres paramètres que le frottement. Le crissement peut ainsi être appréhendé comme un phénomène multiparamétrique de couplage de modes.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de l'effet de l'amortissement sur la stabilité du système de freinage. A notre connaissance, c'est la première fois qu'une étude de ce type est réalisée sur la base d'un modèle éléments finis. Nous avons choisi de modéliser cet amortissement par de l'amortissement modal. Contrairement à ce que supposent la plupart des chercheurs, nous avons montré que la configuration non amortie n'est pas la situation la plus défavorable en terme de crissement. Ainsi, il est important de le prendre en compte pour donner un pronostic fiable quant à la stabilité du système. Lorsque l'amortissement est réparti de façon proportionnelle sur l'ensemble des modes, il a toujours un effet stabilisant. En revanche, s'il est réparti de façon non-proportionnelle, il peut conduire à déstabiliser le système. Dans le cas d'un « couplage simple » entre deux modes, le mode instable est le mode le moins amorti. Nous avons également identifié des « couplages multi-modes » qui font apparaître des motifs beaucoup plus complexes avec des « échanges de branches ».



## Chapitre 3

# Modèle non-linéaire

Les études présentées dans le chapitre précédent sont consacrées au comportement dynamique du système de freinage autour de sa position d'origine. Or, de nombreux essais ont montré que son point de fonctionnement influait sur son comportement dynamique. En effet, en régime établi, le système est soumis à une pression hydraulique et à un couple résistant à la roue qui s'équilibrent par l'intermédiaire du frottement à l'interface disque-plaquettes. En glissement permanent, le système atteint alors un équilibre qui se caractérise par sa position et ses contraintes internes ainsi que par les conditions de contact entre pièces. Le calcul de ce point de fonctionnement est hautement non-linéaire du fait de la présence de contacts et réclame donc des méthodes de résolution adaptées. Une fois ce calcul non-linéaire réalisé, la démarche consiste à linéariser le système afin d'en extraire les valeurs propres complexes. En résumé, un calcul précis de prédiction du crissement de frein doit comporter les trois étapes suivantes :

1. calcul statique non-linéaire,
2. linéarisation du problème autour de la position d'équilibre statique,
3. analyse aux valeurs propres complexes sur le système linéarisé.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par présenter les outils capables de réaliser de tels calculs par éléments finis. Après avoir choisi et présenté l'outil qui nous semble le plus adapté pour traiter ce problème, nous l'utiliserons pour analyser le comportement de notre système de freinage. Nous détaillerons les phénomènes dans les conditions nominales et nous réaliserons deux études paramétriques, relativement au coefficient de frottement et à la pression hydraulique. Nous concluons ce chapitre par l'analyse d'un plan d'expériences complet par rapport à ces deux paramètres qui nous permettra de déterminer les zones de stabilité du système. Nous montrerons alors toute la complexité des phénomènes liée à l'extrême sensibilité du comportement statique et dynamique à ces deux paramètres.

### 3.1 Etude statico-dynamique

#### 3.1.1 Présentation des outils

L'enchaînement d'un calcul statique non-linéaire, d'une linéarisation et d'une extraction de valeurs propres complexes, étant très spécifique aux problèmes de crissement de frein, n'est pas classiquement proposé dans les codes éléments finis. Dans cette partie, nous allons brièvement citer les premiers travaux visant à prendre en compte le préchargement des freins. Faute d'outils adaptés, les chercheurs ont commencé par développer leurs propres méthodologies qui combinaient souvent plusieurs codes éléments finis ainsi que des routines spécifiques. Nous montrerons ensuite que l'évolution des logiciels éléments finis a permis de simplifier la démarche en intégrant

progressivement toutes les fonctionnalités nécessaires dans un même code. Actuellement, deux logiciels permettent de réaliser les trois étapes de l'analyse : Abaqus et Ansys. Néanmoins, Abaqus reste la référence tant au niveau de la gestion des contacts que de la procédure de linéarisation. Pour être complet, citons que Msc Software travaille sur une interaction entre ses logiciels Msc Marc, pour la gestion du contact, et Msc Nastran, pour l'analyse complexe, mais l'efficacité de la démarche n'a pas encore été démontrée.

### Premiers modèles

Une des premières tentatives de prédiction par éléments finis de la répartition de pression de contact à l'interface disque – plaquettes a été réalisée par Samie et Sheridan [134]. Cette étude non dédiée au crissement utilise le solveur Nastran ainsi qu'une formulation analytique des contacts entre nœuds coïncidents. Nack est l'un des premiers chercheurs à chaîner les trois étapes de calcul en commençant par un calcul de préchargement réalisé grâce à la Sol106 de Nastran [118]. Un contact glissant est imposé entre disque et plaquettes en utilisant des raideurs de contact très fortes et en introduisant les termes de frottement dans la matrice de raideur du système. Blaschke et al. ont développé un modèle analytique permettant de s'affranchir de ces raideurs de contact arbitraires [21]. Ce modèle fait apparaître des termes de couplage dans les matrices de masse et de raideur, qui deviennent alors non-symétriques. De plus, l'évolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de rotation induit des termes dans la matrice d'amortissement. Les équations obtenues sur le modèle analytique sont ensuite utilisées sur un modèle éléments finis afin d'introduire des sous-matrices de couplage au niveau des degrés de liberté d'interface. Ceci permet de chaîner sous Nastran un calcul statique et une analyse aux valeurs propres complexes. Moiro et al. proposent une méthodologie combinant un calcul statique non-linéaire et une analyse modale complexe [117]. La seule non-linéarité incluse dans le modèle concerne le contact unilatéral frottant à l'interface disque-plaquette. La méthodologie utilisée est basée sur le solveur Nastran et suppose des nœuds coïncidents. Shaw et al. proposent une méthode hybride basée sur un préchargement Abaqus et une analyse aux valeurs propres complexes Nastran [135].

### Modèles Ansys

Les possibilités du logiciel Ansys ont été utilisées pour réaliser des études incluant un préchargement statique et une extraction de valeurs propres complexes, à la fois pour des freins à disque [10, 97, 98, 99, 68] et à tambour [78, 69, 9].

Il s'agit d'abord de réaliser un maillage coïncident entre les parties fixes et tournantes. Il convient ensuite de modéliser le contact en utilisant l'une des deux techniques disponibles : les éléments *gap* [78, 97, 98, 99] ou les surfaces de contact [69, 68]. Les éléments *gap* sont des éléments pseudo-linéaires, valables uniquement en petits déplacements. La modélisation par surfaces de contact est une méthode plus performante permettant les grands déplacements. Un contact est alors défini comme un couple de surfaces modélisées par des éléments différents : *surface* d'un côté et *target* de l'autre. Dans tous les cas, les éléments qui servent à gérer le contact sont associés à une raideur de contact et à un coefficient de frottement. La gestion du contact reposant sur une méthode de pénalité, le choix de la raideur de contact est très important pour le compromis précision - temps de calcul. En effet, cette raideur doit être suffisamment forte pour éviter les interpénétrations entre pièces et suffisamment faible pour éviter les problèmes de conditionnement numériques. La valeur optimale de raideur qui apparaît dans plusieurs publications est de l'ordre de  $1.2 \text{ GNm}^{-1}$ . Notons que cette raideur optimale est déterminée automatiquement par le solveur dans le cas d'une modélisation par surfaces de contact alors qu'elle doit être spécifiée manuellement lorsqu'on utilise des éléments *gap*.

Le problème non-linéaire est résolu en plusieurs étapes. Dans un premier temps, la pression

hydraulique est appliquée. Dans un second temps, un faible déplacement angulaire est appliqué aux parties tournantes afin d'introduire les forces de frottement. L'angle de rotation est progressivement augmenté afin d'atteindre la limite de glissement. L'algorithme utilisé, qui est de type Newton-Raphson, subdivise le chargement total en plusieurs incréments. Cependant, il a la particularité de ne converger que très difficilement en présence de frottement. Afin de pallier cette difficulté, une routine destinée à stabiliser l'équilibre est nécessaire. Au final, la déformée statique ainsi que les pressions de contact aux interfaces sont obtenues.

La linéarisation du système, abordée spécifiquement par Lee et al. dans l'article [98], consiste ensuite à remplacer les éléments de contact non-linéaires, effectivement en contact, par des éléments linéaires équivalents. Dans la pratique, c'est une routine dédiée qui se charge de réaliser ces actions répétitives. Ceci permet d'obtenir un modèle linéaire équivalent présentant une matrice de raideur non-symétrique. Un tel système présente des valeurs propres complexes qui sont extraites grâce à un solveur de type Lanczos complexe disponible dans Ansys.

Au delà de la méthodologie présentée, nous allons maintenant synthétiser rapidement les principaux travaux réalisés grâce à Ansys. Kang et al. utilisent le langage de paramétrisation APDL afin de réaliser des études paramétriques [78]. Lee et al. essayent de relier la non-uniformité des pressions des contact à la non-uniformité des valeurs propres [97, 98, 99]. Ioannidis et al. étudient l'évolution des pressions de contact en fonction de la pression hydraulique et du coefficient de frottement [69]. Ils s'intéressent également à l'effet, sur les modes instables, d'un changement de matériau [68]. Notons que, jusqu'à présent, les chercheurs utilisant Ansys se sont limités à étudier les pièces frottantes, à savoir les périmètres disque-plaquettes ou tambour-garnitures.

### Modèles Abaqus

A partir de la version 6.4 d'Abaqus, datant de 2003, le chaînage des trois étapes du calcul de crissement est assuré. Ainsi, les études [88, 17, 3, 89, 16, 162, 18, 19, 75, 148] réalisent successivement un calcul statique non-linéaire, une linéarisation et une analyse aux valeurs propres complexes.

L'analyse statique non-linéaire se décompose en deux étapes de chargement au minimum. Dans la première, la pression hydraulique est appliquée. Dans la seconde, une vitesse angulaire constante est imposée aux nœuds du disque en contact avec les plaquettes. Cette vitesse est définie de façon eulérienne afin de pouvoir résoudre le problème de glissement permanent en statique. Dans certains cas, des étapes supplémentaires sont nécessaires pour prendre en compte d'autres phénomènes particuliers. Les contraintes et les déformations obtenues en fin de calcul statique sont ensuite prises en compte pour l'analyse modale en linéarisant le problème.

Cette méthodologie a été appliquée en incluant uniquement le disque et les plaquettes [17, 3] ou en prenant en compte tout le frein [88, 89, 16]. Dans cette dernière étude, Kung et al. expliquent qu'à la suite du préchargement statique, de fortes pressions de contact sont localisées au niveau des entrées de couple des deux garnitures. Dans l'article [89], Kung et al. présentent une étude du crissement basse fréquence d'un frein arrière à tambour. Le périmètre d'étude s'étend au delà du frein et englobe toute la suspension. De plus, l'amortissement induit par le frottement est pris en compte.

Dans l'étude [16], Bajer et al. constatent que le calcul de préchargement fait apparaître des pressions très hétérogènes au niveau des interfaces en contact. Une grande partie de leur surface n'est pas en contact. L'usure des plaquettes est ensuite simulée grâce à un algorithme disponible dans la version 6.5 d'Abaqus. Cet algorithme itératif consiste à déplacer les nœuds de l'interface d'une distance  $d$  afin d'enlever de la matière proportionnellement à la pression de contact  $p$  associée. La loi d'usure utilisée s'écrit  $d = c p$ , avec  $c$  une constante. Cette étape de calcul permet de « roder » les plaquettes et donc d'obtenir une répartition de pression plus homogène. Les auteurs mettent également l'accent sur l'effet important des non-linéarités sur le comportement dynamique du système. Pour cela, ils comparent les fréquences obtenues avec et sans la phase de

préchargement. Les écarts sont de l'ordre de 14 % sur les modes réels et de 23% sur les modes complexes.

Papinniemi et al. présentent l'analyse d'un crissement impliquant des modes dans le plan du disque [162]. Le modèle se limite au disque et aux plaquettes. Le calcul en trois phases est réalisé pour 6 valeurs du coefficient de frottement, ce qui permet de tracer une courbe de coalescence. Les modes incriminés à 9.4 kHz sont les seconds modes doubles tangentiels dans le plan du disque.

Abu Bakar et al. s'intéressent à l'effet de la topographie de la surface des plaquettes sur la répartition des pressions de contact [18] et sur le crissement [19]. Dans la première étude, les auteurs montrent que la prise en compte précise de la topographie surfacique permet d'améliorer la corrélation calcul/mesure des pressions et des aires de contact. Cet effet est particulièrement important pour les plaquettes neuves, qui ont des topographies sensiblement différentes. Néanmoins, après la phase de rodage, l'importance de cet aspect est relativement réduit. La seconde étude se focalise sur l'effet de la topographie de surface des plaquettes sur la nature fugace du crissement. Pour cela, une loi particulière d'usure est choisie afin d'évaluer l'effet de plusieurs niveaux d'usure. Il s'avère que ceci change sensiblement la stabilité du système. Les auteurs en concluent que la topographie de surface des plaquettes est un des aspects du caractère fugace du crissement de frein.

Joo et al. identifient, grâce à des calculs de MAC, les modes de pièces qui contribuent le plus au mode complexe calculé [75]. Ceci leur permet de proposer des modifications qui réduisent le risque d'apparition de ce mode. Stanef et al. évaluent l'impact d'une modification des chanfreins de plaquettes et de la géométrie du disque [148].

## Synthèse des travaux

Ouyang et al. ont récemment réalisé deux synthèses incluant notamment certains travaux de modélisation du préchargement statique du frein [130,131]. Ils précisent que l'analyse de stabilité se fait par linéarisation autour de la position de glissement permanent et qu'elle n'est donc valable qu'au voisinage de ce point de fonctionnement. Les auteurs expliquent que le piston agit sur une petite partie de la surface du dos de plaquette, ce qui entraîne une répartition de pression non-uniforme à l'interface disque-plaquettes. De plus, le frottement entre disque et plaquettes induit une augmentation de la pression de contact du côté de l'entrée de couple. Certains chercheurs ont montré qu'il y avait rupture de contact entre disque et plaquettes dans certaines zones. Ils préconisent alors d'utiliser des plaquettes plus souples pour homogénéiser les pressions de contact. Lors des vibrations, le contact peut s'ouvrir et se fermer, mais la plupart des études font l'hypothèse que les conditions de contact ne varient pas lors des vibrations. Des chercheurs ont conclu que décaler le piston ou les doigts d'étrier vers la sortie de couple conduit à une répartition de pression plus uniforme et est bénéfique pour réduire le crissement. Les auteurs insistent sur l'importance de modéliser l'ensemble des contacts. En effet, à ce jour, le contact disque-plaquettes a été analysé, mais beaucoup de travail reste à faire au niveau des contacts entre plaquettes, piston et étrier et entre plaquettes et chape. En effet, la rotation du disque met les plaquettes en butée sur la chape côté sortie de couple, alors que le contact n'est pas assuré côté entrée de couple. Les auteurs mentionnent également que la présence du shim et éventuellement de graisse modifie les conditions de contact.

## Conclusion sur les outils

Comme le montrent les essais, le chargement du système a une influence de premier ordre sur son comportement en crissement. Ainsi, sa prise en compte est indispensable pour réaliser un calcul précis. Ceci implique la réalisation d'un calcul statique non-linéaire qui est ensuite linéarisé autour du point de fonctionnement afin d'effectuer une analyse aux valeurs propres complexes.

Cette procédure particulière a été intégrée dans deux codes éléments finis et commence à arriver à maturité, comme le montrent les différents travaux que nous venons de citer. Cette étude bibliographique nous a permis d'évaluer les avantages et les inconvénients de ces deux codes. Pour toute la suite, nous avons choisi de travailler avec le code Abaqus car il nous a semblé être le plus abouti et le plus flexible. Nous allons maintenant présenter les méthodologies adoptées par Abaqus pour réaliser un calcul de crissement. Nous détaillerons en particulier la méthode de résolution des problèmes non-linéaires de type Newton-Raphson, la formulation du contact et la procédure de linéarisation.

### 3.1.2 Méthode de Newton-Raphson

En statique, l'équation d'équilibre exprime l'égalité des efforts externes  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  et des efforts internes  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  en chacun des nœuds, dont les déplacements sont représentés par le vecteur  $\mathbf{u}$ . Cette équation peut s'écrire symboliquement

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

Dans le cas linéaire, les efforts internes s'expriment  $\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{K}\mathbf{u}$ , avec  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur du système. La résolution de l'équation 3.1 est alors immédiate et donne  $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_{\text{ext}}$ .

Dans le cas non-linéaire, l'équation 3.1 peut être résolue par une méthode incrémentale itérative basée sur la technique de Newton-Raphson. Nous détaillons maintenant cette méthode, qui est utilisée par le logiciel Abaqus.

#### Méthode itérative

Supposons que les déplacements  $\mathbf{u}_i$  sont connus à l'itération  $i$ . L'objectif est alors de déterminer les déplacements à l'itération  $i + 1$ , que nous chercherons sous la forme  $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \mathbf{c}_{i+1}$ . Pour l'itération  $i + 1$ , l'équation 3.1 s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}_i + \mathbf{c}_{i+1}) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}_i + \mathbf{c}_{i+1}) = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Un développement en série de Taylor autour de  $\mathbf{u}_i$  donne

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}_i) + \left( \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{c}_{i+1} + \dots = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Si  $\mathbf{u}_i$  est une bonne approximation de la solution,  $\mathbf{c}_{i+1}$  est « petit ». Dans ce cas, nous pouvons négliger les termes d'ordre supérieurs ou égaux à 2 et écrire

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{K}_i \mathbf{c}_{i+1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_i = -\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.4)$$

Une fois la raideur tangente  $\mathbf{K}_i$  calculée, cette équation permet de calculer  $\mathbf{c}_{i+1}$  en fonction des résultats de l'itération  $i$  et ainsi de déterminer  $\mathbf{u}_{i+1}$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \mathbf{K}_i^{-1} (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{u}_i) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}_i)) \quad (3.5)$$

Le principe de cette méthode itérative de résolution est illustrée figure 3.1 en partant d'un état d'équilibre  $\mathbf{F}_{\text{ext}}^0 = \mathbf{F}_{\text{int}}^0$  et en appliquant un échelon d'effort pour atteindre un effort total  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ . Dans le cas à un degré de liberté présenté, les efforts extérieurs ne dépendent pas des déplacements. La matrice tangente se ramène donc à la pente de la courbe décrite par les efforts internes au point considéré. La première correction en déplacement,  $\mathbf{c}_1$ , est déterminée en fonction de la raideur tangente  $\mathbf{K}_0$  et de l'écart entre efforts internes et externes  $\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}^0$ .

Cette procédure est répétée jusqu'à ce que la différence entre les efforts externes appliqués et les efforts internes, que l'on nomme résidu  $\mathbf{R}_i = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}^i$ , soit suffisamment faible. Dans la pratique, les résidus sont comparés au flux d'effort transitant dans la structure nommé *time average force*. Lorsque le résidu est inférieur à 0.5 % de cet indicateur, la procédure s'interrompt et le calcul est dit convergé, sinon il continue à itérer.

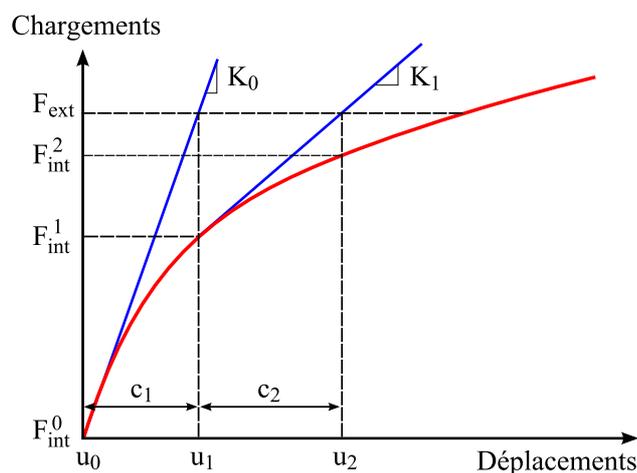


FIG. 3.1 – Méthode itérative

### Méthode incrémentale itérative

En général, la solution recherchée est tellement éloignée de la solution initiale qu'il est très difficile, voir impossible, de faire converger le calcul en utilisant directement la méthode itérative décrite ci-dessus. La stratégie adoptée par Abaqus pour surmonter cette difficulté consiste à réaliser le calcul en plusieurs incréments. Afin d'appliquer progressivement le chargement sur la structure, une rampe est utilisée entre sa valeur initiale à sa valeur finale par rapport à un temps fictif associé à l'analyse, comme illustré figure 3.2. Dans notre exemple, nous avons considéré trois incréments de même durée. Dans la pratique, la durée des incréments est déterminée automatiquement par le logiciel en fonction de la « difficulté » de convergence. Le fait de réaliser le calcul en plusieurs incréments permet d'obtenir des solutions intermédiaires équilibrées afin de bien représenter les inflexions du comportement. Un bon compromis entre nombre d'itérations et nombre d'incrémentes permet de minimiser les risques de divergence du calcul et de réduire sa durée.

#### 3.1.3 Formulation du contact

Le contact est un phénomène hautement non-linéaire qui se caractérise par des inégalités unilatérales traduisant l'impossibilité d'interpénétration de la matière. En guise d'introduction à la mécanique du contact, nous nous reporterons par exemple à la synthèse de Barber et Ciavarella [20]. La modélisation du contact nécessite la connaissance de deux lois : la loi de compressibilité qui relie l'effort à la distance d'approche dans la direction normale à l'interface et la loi de frottement. Dans la plupart des cas, une modélisation de type contact dur, que nous détaillerons dans la suite, associée à la loi de Coulomb est suffisante. Néanmoins, il faut savoir que des modèles plus fins et plus complexes ont été développés. Nous citerons ici les travaux de Oden et Martins [126]

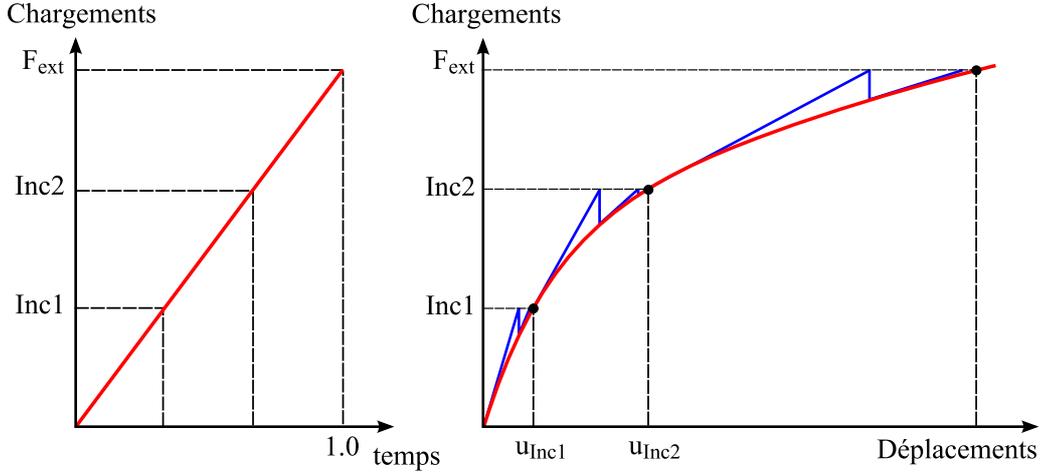


FIG. 3.2 – Méthode incrémentale itérative - Efforts extérieurs et intérieurs

qui proposent une modélisation beaucoup plus générale du contact. Nous citerons également la synthèse de Tworzydło qui s'intéresse aux différentes lois de contact capables de prendre en compte la topographie des surfaces caractérisées par leurs aspérités [154].

Nous allons maintenant nous focaliser sur la formulation du contact spécifique au logiciel Abaqus [3, 4, 5]. La gestion du contact repose sur la définition de surfaces *maîtresse* et *esclave*. Ces surfaces sont discrétisées car définies à partir des nœuds ou des éléments des pièces en contact. La définition de ces surfaces ne nécessite pas de maillages coïncidents, mais un certain nombre de préconisations sont à respecter [5]. Le principe général de gestion du contact repose sur les règles suivantes : les nœuds de la surface esclave ne peuvent pas pénétrer la surface maîtresse, mais les nœuds de la surface maîtresse peuvent pénétrer la surface esclave. La formulation du contact normal aux interfaces exprime la relation entre la pression de contact  $p$  et l'interpénétration  $h$ . Dans le cas du contact dur, cette relation s'écrit :

$$\begin{cases} p = 0 & \text{pour } h < 0 & \text{contact ouvert} \\ h = 0 & \text{pour } p > 0 & \text{contact fermé} \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans la pratique, la pression de contact est représentée par un multiplicateur de Lagrange. La contribution du contact normal en terme de travail virtuel s'écrit :

$$\delta\Pi = \delta p h + p \delta h \quad (3.7)$$

Le type d'interaction entre les surfaces en contact peut ensuite être défini en spécifiant une loi de frottement. Cette loi fait intervenir le coefficient de frottement  $\mu$  qui peut éventuellement dépendre de la pression de contact, de la vitesse de glissement et de la température. La formulation du frottement est de type bidimensionnelle et s'écrit :

$$\begin{cases} \tau < \mu p & \text{pour } \dot{\gamma} = 0 & \text{pas de glissement} \\ \tau = \mu p & \text{pour } \dot{\gamma} \neq 0 & \text{glissement} \end{cases} \quad (3.8)$$

La contrainte de cisaillement  $\tau$  et le glissement relatif à l'interface  $\dot{\gamma}$  s'expriment en projection sur le repère décrivant le plan de glissement :

$$\tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2} \quad (3.9)$$

Dans le cas d'un frottement isotrope, les contraintes de cisaillement et les glissements relatifs ont la même direction. Ils se répartissent de façon identique dans les deux directions du plan de glissement :

$$\frac{\tau_i}{\tau} = \frac{\dot{\gamma}_i}{\dot{\gamma}} = n_i \quad , i \in \{1, 2\} \quad (3.10)$$

La contribution du frottement aux travaux virtuels s'écrit :

$$\delta\Pi = \int_S \tau_i \delta\gamma_i dS \quad (3.11)$$

avec  $S$  la surface de contact et  $\delta\gamma_i$  le glissement relatif virtuel.

Abaqus propose deux algorithmes permettant de résoudre les problèmes de contact. Le premier, nommé *small sliding*, est destiné à l'étude des petits glissements. Le second, nommé *finite sliding* est plus général mais également plus coûteux car il autorise les grands déplacements.

### 3.1.4 Linéarisation

Une fois le calcul statique non-linéaire réalisé, il est nécessaire de linéariser le problème autour de la position d'équilibre obtenue. La linéarisation de l'équation 3.7 représentant la contribution du contact normal en terme de travail virtuel s'écrit :

$$d\delta\Pi = \delta p dh + dp \delta h \quad (3.12)$$

La linéarisation de l'expression 3.11 qui décrit la contribution du frottement aux travaux virtuels est explicité par Bajer et al. [17, 16] et s'écrit :

$$d\delta\Pi = \int_S d\tau_i \delta\gamma_i dS \quad (3.13)$$

En condition de glissement, les équations 3.8 et 3.10 permettent d'exprimer  $\tau_i$  sous la forme.

$$\tau_i = \mu p n_i \quad (3.14)$$

En supposant que  $\mu$  soit explicitement dépendant de  $\dot{\gamma}$  et de  $p$ , la linéarisation de la contrainte de cisaillement s'écrit :

$$d\tau_i = \frac{\partial\mu}{\partial\dot{\gamma}} d\dot{\gamma} p n_i + \frac{\partial\mu}{\partial p} dp p n_i + \mu dp n_i + \mu p dn_i \quad (3.15)$$

Or,

$$dn_i = d\left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\dot{\gamma}}\right) = \frac{d\dot{\gamma}_i}{\dot{\gamma}} + \dot{\gamma}_i \left(\frac{-d\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^2}\right) \quad (3.16)$$

$$d\dot{\gamma} = d\left(\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}\right) = \frac{\dot{\gamma}_j d\dot{\gamma}_j}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}} = n_j d\dot{\gamma}_j \quad (3.17)$$

En injectant les équations 3.16 et 3.17 dans 3.15, nous obtenons :

$$d\tau_i = \frac{\partial\mu}{\partial\dot{\gamma}} n_j d\dot{\gamma}_j p n_i + \left(\mu + \frac{\partial\mu}{\partial p} p\right) dp n_i + \frac{\mu p}{\dot{\gamma}} (\delta_{ij} - n_i n_j) d\dot{\gamma}_j \quad (3.18)$$

Cette expression montre que le linéarisé du travail virtuel induit par le frottement défini par l'équation 3.13, se décompose en trois termes associés à des origines physiques différentes.

$$d\delta\Pi = d\delta\Pi^K + d\delta\Pi^{D-} + d\delta\Pi^{D+} \quad (3.19)$$

Ces trois termes s'écrivent :

$$d\delta\Pi^K = \int_S \left( \mu + \frac{\partial\mu}{\partial p} p \right) dp n_i \delta\gamma_i dS \quad (3.20)$$

$$d\delta\Pi^{D-} = \int_S \frac{\partial\mu}{\partial\dot{\gamma}} n_j d\dot{\gamma}_j p n_i \delta\gamma_i dS \quad (3.21)$$

$$d\delta\Pi^{D+} = \int_S \frac{\mu p}{\dot{\gamma}} (\delta_{ij} - n_i n_j) d\dot{\gamma}_j \delta\gamma_i dS \quad (3.22)$$

Ils représentent respectivement :

$d\delta\Pi^K$  : la contribution du frottement à la matrice de raideur du système

$d\delta\Pi^{D-}$  : la contribution à la matrice d'amortissement, qui est non nulle si  $\mu$  dépend de la vitesse.

En cas de courbe  $\mu = f(\dot{\gamma})$  décroissante, cette contribution peut provoquer des instabilités.

$d\delta\Pi^{D+}$  : la contribution à la matrice d'amortissement qui stabilise le système. Cette stabilisation est d'autant plus forte que la pression est forte et que la vitesse de glissement est faible.

Ceci permet ensuite de calculer la matrice de raideur tangente du système qui est non-symétrique, du fait de la présence de frottement. Le problème aux valeurs propres linéarisé est ensuite résolu par la technique de projection sur la base modale réelle.

Dans ce calcul modal, le choix nous est laissé de prendre en compte ou non l'amortissement induit par le frottement, c'est à dire les termes  $d\delta\Pi^{D-}$  et  $d\delta\Pi^{D+}$ . De par la formulation utilisée, la vitesse angulaire imposée au disque n'a aucune influence sur les valeurs propres, excepté si cet amortissement induit par le frottement est pris en compte. De plus, la prise en compte de l'amortissement positif a un effet stabilisant qui permet de réduire le risque de « sur-prédiction » (*overprediction*). Ainsi, seuls les modes qui sont effectivement instables sont identifiés.

### 3.1.5 Synthèse

Cet état de l'art nous montre qu'un calcul précis de prédiction du crissement de frein nécessite trois étapes. Dans un premier temps, un calcul de préchargement statique du système doit être réalisé. Ce calcul, qui est hautement non-linéaire de par la présence de contacts, nécessite une technique de résolution adaptée, basée sur la méthode de Newton-Raphson. Le problème doit ensuite être linéarisé autour de la position d'équilibre obtenue. Cette linéarisation fait apparaître trois termes, dont un rend non-symétrique la matrice de raideur, alors que les deux autres contribuent à la matrice d'amortissement du système. Finalement, ceci permet de réaliser un calcul modal complexe afin de prédire la stabilité du frein.

Nous avons choisi le solveur Abaqus pour réaliser ces trois étapes de calcul car ce logiciel nous est apparu comme le plus abouti et le plus flexible pour atteindre le but que nous nous sommes fixés. Jusqu'à présent, la plupart des travaux avec préchargement du système de freinage se limitaient au périmètre disque - plaquettes. Quelques chercheurs ont toutefois essayé d'inclure le frein dans son ensemble, mais à notre connaissance, seul le contact disque - plaquettes était modélisé de façon précise alors que les autres contacts étaient assimilés à des raideurs équivalentes. Or, de nombreux travaux expérimentaux montrent qu'il est important de prendre en compte l'ensemble des contacts de façon précise. Cette idée est soutenue par Ouyang et al. qui affirment que beaucoup de travail est encore à faire sur la modélisation des contacts entre plaquettes, piston et étrier, et entre plaquettes et chape [130, 131].

Notre objectif est donc de réaliser un modèle éléments finis de notre système de freinage en modélisant de façon précise l'ensemble des contacts. Ce modèle permettra de réaliser des calculs de crissement avec préchargement puis des études paramétriques.

## 3.2 Etude statico-dynamique au nominal

### 3.2.1 Modèle éléments finis

Le modèle non-linéaire que nous avons construit reprend le même périmètre que le modèle linéaire, à savoir le porte fusée, le moyeu, le disque, la chape et l'étrier de frein, le piston et les deux plaquettes. En outre, les anti-bruits positionnés au dos des plaquettes sont pris en compte afin d'obtenir des conditions de contact représentatives de la réalité entre plaquette-piston et plaquette-étrier. Le maillage de l'ensemble du système a nécessité des études préliminaires afin de choisir le type et le nombre d'éléments les plus adaptés au problème non-linéaire, en terme de compromis temps de calcul-précision. En effet, ce problème étant beaucoup plus exigeant en temps de calcul, les modèles maillés en tétraèdres paraboliques se sont révélés beaucoup trop lourds pour espérer obtenir des résultats dans un temps de calcul raisonnable. Ainsi, les éléments hexaédriques ont été préférés aux éléments tétraédriques car ils permettent d'obtenir une bonne précision avec un nombre d'éléments beaucoup plus faible. La réalisation d'un tel maillage est très ardue sur un système aussi complexe qu'un système de freinage car elle doit se faire en grande partie manuellement. Malgré ces difficultés, cette solution a été retenue et a abouti à la réalisation du maillage hexaédrique représenté figure 3.3. Celui-ci comporte 55 000 nœuds et 38 000 éléments.

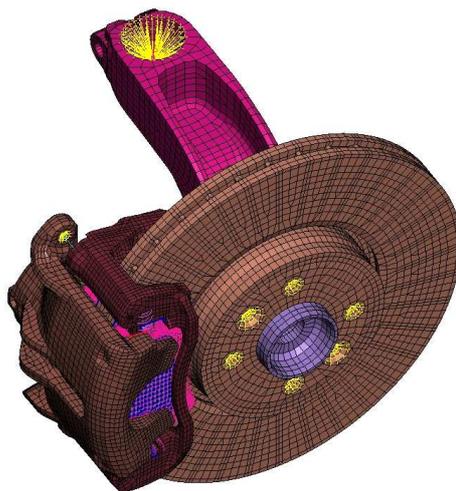


FIG. 3.3 – Modèle non-linéaire

Les propriétés matériaux utilisées sont, comme dans le cas du modèle linéaire, orthotropes pour les garnitures et isotropes pour toutes les autres pièces. Notons qu'en première approximation, le shim, qui est constitué d'un empilement de couches d'acier et de polymère a été modélisé comme un matériau homogène ayant les mêmes propriétés que l'acier.

La figure 3.4 détaille l'ensemble des liaisons entre pièces ainsi que leur type de modélisation. Les assemblages sont modélisés grâce à des corps rigides. Les liaisons de type glissière, telles que colonnettes - chape et piston - étrier, sont prises en compte grâce à des couplages cinématiques. Néanmoins, le point le plus important et le plus complexe de la modélisation réside dans la modélisation des contacts. Ils sont définis comme l'interaction de deux surfaces, l'une maîtresse et l'autre esclave, avec des propriétés de frottement spécifiques. L'ensemble des contacts est représenté figure 3.5, avec les surfaces maîtresses en bleu et les surfaces esclaves en rouge. Au total, le modèle comporte 17 contacts, que nous désignerons dans la suite, par le nom qui leur est attribué dans le tableau 3.1. Parmi ceux-ci, 5 sont normaux au disque et impliquent le pis-

ton, les plaquettes, le disque et l'étrier. Les 12 autres concernent les butées de chape, qui sont tangentielles et radiales par rapport au disque. Ces butées sont référencées par leur position par rapport au véhicule (intérieur/extérieur) et au disque (entrée/sortie de couple) ainsi que par leur type (tangentielle, radiale intérieure et radiale extérieure).

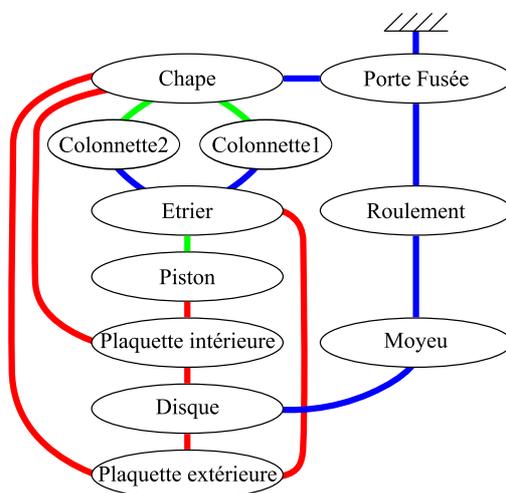


FIG. 3.4 – Synoptique des liaisons : ■ contact - ■ liaison glissière - ■ liaison rigide

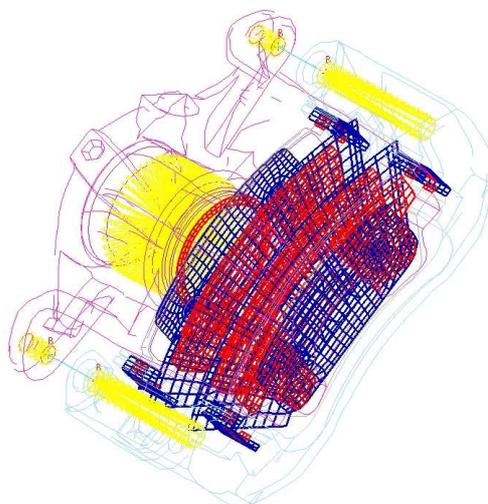


FIG. 3.5 – Modélisation des contacts

Lors des études préliminaires, la très grande influence des ressorts de rappel des plaquettes sur le comportement statique et dynamique du système a été démontrée. Ces ressorts, qui sont situés au niveau des butées de chape, sont représentés en rouge figure 3.6-a. Leur courbe effort-déplacement a été mesurée en suivant le protocole précisé figure 3.6-b. et a été tracée figure 3.6-c. Au repos, chaque ressort exerce un effort de 12 N sur les oreilles de plaquettes afin de les maintenir contre leur butée radiale extérieure. La courbe effort-déplacement mesurée est linéaire par morceaux et présente deux changements de pente qui résultent de deux mises en butée successives, respectivement au niveau des butées (1) et (2) indiquées figure 3.6-b. Au final, les

Pi	plaquette intérieure - piston		Butée de chape	intérieure	extérieure
Ga_int	garniture intérieure - disque	Entrée	tangentielle	Bint_EcT	Bext_EcT
Ga_ext	garniture extérieure - disque		radiale intérieure	Bint_EcRi	Bext_EcRi
Et_Ec	plaquette extérieure - étrier, côté entrée de couple		radiale extérieure	Bint_EcRe	Bext_EcRe
Et_Sc	plaquette extérieure - étrier, côté sortie de couple	Sortie	tangentielle	Bint_ScT	Bext_ScT
			radiale intérieure	Bint_ScRi	Bext_ScRi
			radiale extérieure	Bint_ScRe	Bext_ScRe

a. Contacts normaux

b. Contacts tangentiels et radiaux

TAB. 3.1 – Noms des contacts

ressorts de rappel des plaquettes ont été implémentés dans le modèle sous forme de raideurs non-linéaires suivant la loi effort-déplacement mesurée.

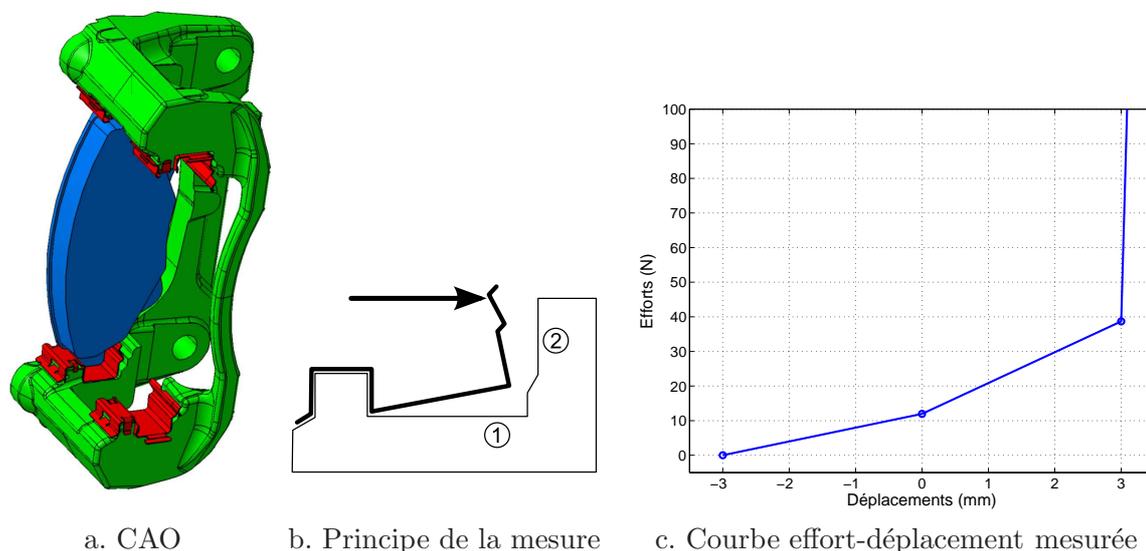


FIG. 3.6 – Ressorts de rappel des plaquettes

### 3.2.2 Stratégie de calcul

Une fois le modèle assemblé et vérifié, il convient de définir les caractéristiques du calcul que l'on souhaite réaliser. Dans notre cas, nous souhaitons réaliser un calcul de préchargement statique du frein suivi d'une analyse modale complexe. Pour réaliser un tel enchaînement, Abaqus propose une démarche *multi-steps* qui consiste à séparer le calcul complet en plusieurs étapes élémentaires nommées *steps*. Chaque étape élémentaire a pour conditions initiales la position d'équilibre et les contraintes internes calculées à l'étape précédente. Deux types de steps sont à distinguer : les steps généraux qui modifient l'état d'équilibre du système (ex : calcul statique) et les steps de perturbations qui consistent à calculer le comportement du système autour de son point d'équilibre (ex : calcul modal). Pour chacun de ces steps, il est nécessaire de préciser les conditions aux limites ainsi que les chargements à imposer.

Le préchargement du frein est un problème hautement non-linéaire du fait de la présence de contacts. En conséquence, un algorithme itératif de type Newton-Raphson est utilisé afin d'appliquer progressivement le chargement. Avec lui vient la notion très importante de vitesse

de convergence du schéma de résolution. Cette vitesse de convergence pilote de façon directe le temps de calcul. Pour obtenir la convergence du calcul en un temps raisonnable, il est donc très important d'élaborer une stratégie rigoureuse de calcul en plusieurs étapes permettant d'aboutir à l'état d'équilibre de façon progressive.

Dans la pratique, le calcul complet est divisé en quatre étapes élémentaires détaillées ci-après. Initialement, les pièces sont placées de façon à ce que les contacts normaux aux disques entre piston, plaquettes, disque et étrier, soient initialisés. Ceci signifie que pour chacun de ces contacts, les surfaces maîtresses et esclaves sont définies dans le même plan. En ce qui concerne les autres contacts, les plaquettes sont placées de façon à simuler un comportement en marche avant, c'est à dire en appui sur les butées radiales extérieures et tangentielles inférieures de chape. Néanmoins, les contacts ne sont pas initialisés et un jeu de 0.1 mm est spécifié.

#### **Step 1 : Mise en pression**

Une pression de 5 bar est appliquée sur le fond du piston ainsi que dans le fond de la chambre hydraulique de l'étrier. Lors du calcul, cette pression s'équilibre sur l'ensemble des contacts entre piston, plaquettes, disque et étrier dans la direction normale au disque.

#### **Step 2 : Mise en rotation du disque**

Le chargement circonférentiel du frein, associé au couple de freinage, est simulé en imposant une vitesse angulaire aux nœuds du disque. Afin de conserver le caractère statique du calcul, ceci est réalisé en utilisant une description eulérienne des phénomènes. En effet, dans ce cas, bien qu'ils soient associés à une vitesse non nulle, les nœuds du disque restent fixes par rapport au repère global. Au niveau des contacts disque-plaquettes, le solveur détecte une vitesse de glissement non-nulle et applique donc un effort de frottement proportionnel à l'effort normal, conformément à la loi de Coulomb. Dans notre exemple, une vitesse angulaire de 4.3 rad/s, correspondant à une vitesse véhicule de 5km/h est appliquée aux nœuds du disque. Cependant, il faut garder à l'esprit que, dès lors que la vitesse de rotation est non-nulle, seul son sens a une importance sur le calcul statique.

#### **Step 3 : Calcul modal réel**

La matrice de raideur tangente du système est calculée à partir de la configuration chargée obtenue à la fin du step précédent. Dans un premier temps, seule la partie symétrique de cette matrice est utilisée afin d'extraire les modes propres réels du système chargé.

#### **Step 4 : Calcul modal complexe**

La matrice de raideur tangente n'étant pas symétrique à cause des termes induits par le frottement, un calcul modal complexe est nécessaire. Pour des raisons d'efficacité, ce calcul est réalisé par projection sur la base modale réelle du système.

### **3.2.3 Comportement statique**

Cette partie se focalise sur les résultats du calcul statique à la fin du step 2. Pour cela, nous allons successivement étudier les contraintes internes au système, la répartition des pressions de contact et l'équilibre des plaquettes.

#### **Contraintes internes**

L'examen des contraintes de Von Mises permet de mieux comprendre à quelles sollicitations le système est soumis. Le premier élément à remarquer concerne les concentrations de contraintes liées à l'effort normal engendré par la pression hydraulique. Grâce à la présence des colonnettes, les efforts normaux s'équilibrent entre étrier, piston, plaquette intérieure, disque et plaquette extérieure. Par conséquent, les contraintes sont réparties de façon relativement homogène dans la matière. Seules les zones de faible section telles que l'interface piston plaquette intérieure ou,

dans une moindre mesure, les ailettes du disque présentent des contraintes importantes. D'autre part, les efforts tangentiels induits par le frottement compriment les plaquettes contre les butées de chape. Il en résulte des concentrations de contraintes au niveau des oreilles de plaquette. L'effort de frottement est ensuite répercuté en totalité sur la chape. Cet effort vertical, orienté vers le bas, entraîne des concentrations de contraintes dans la chape et dans les pattes du porte fusée. L'ouverture de la chape sous l'effet de la charge provoque également des concentrations de contraintes sur l'étrier, au niveau de la fixation de colonnette inférieure. Notons cependant que ce point est sans doute surestimé du fait de la modélisation rigide des colonnettes. Des concentrations de contraintes peuvent également être observées au niveau du moyeu et des vis de roues. Elles sont la conséquence du couple de freinage appliqué par les plaquettes sur le disque.

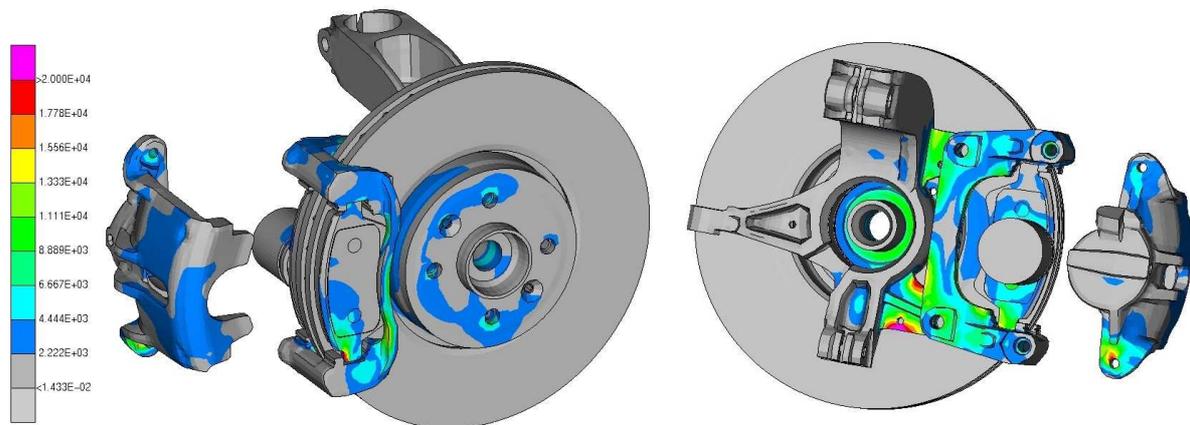


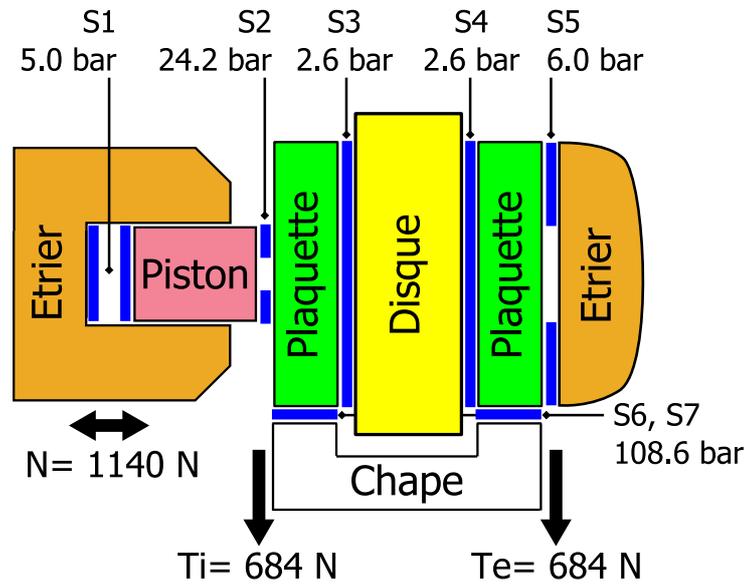
FIG. 3.7 – Contraintes de Von Mises

### Pressions de contact

En évaluant les surfaces des zones de contact par lesquelles transitent les efforts, nous nous rendons compte de leur grande diversité. En effet, la surface par laquelle transite tout l'effort de freinage (les deux oreilles inférieures de plaquette) est 18 fois plus petite que la surface du piston sur laquelle la pression hydraulique est appliquée et 70 fois plus faible que la surface frottante des garnitures. Afin de prendre conscience des implications de ceci, nous allons dans un premier temps faire l'hypothèse très réductrice de pression uniforme aux interfaces. Ceci permet, comme illustré figure 3.8, d'obtenir une première estimation des pressions de contact. Compte tenu de la section du piston, une pression hydraulique de 5 bar induit un effort normal de 1140 N qui comprime les plaquettes sur le disque. Ce calcul très simple, uniquement basé sur des rapports de sections, permet de montrer que l'effort normal génère une pression de l'ordre de 2.6 bars à l'interface disque-plaquette et de 108 bar au niveau des butées de chape, pour un coefficient de frottement de 0.6. Chacune de ces butées encaisse alors un effort de 684 N.

Cette approche montre qu'en moyenne, les deux butées inférieures de chapes encaissent le même effort. La position des points d'application de ces efforts par rapport à la fixation de la chape sur le porte fusée devrait alors induire un basculement de la chape. La figure 3.9, dans laquelle les déplacements ont été multipliés par 400, confirme que c'est bien ce qui se produit. Le couple de basculement entraîne une déformation des pattes de porte fusée et une torsion de la chape. Cette dernière entraîne l'étrier dans son mouvement, via les colonnettes. En conséquence, un couple en  $x$  est appliqué sur le disque, par l'intermédiaire des plaquettes, et tend à le tordre.

La rotation en  $x$  de l'étrier a évidemment des conséquences importantes sur la répartition des



N°	Surface	Effort (N)	Surface ( $mm^2$ )	Pression (bar)
$S_1$	dos piston - fond étrier	1140	2280	5.0
$S_2$	couronne piston - plaquette intérieure	1140	470	24.2
$S_3$	plaquette intérieure - disque	1140	4390	2.6
$S_4$	disque - plaquette extérieure	1140	4390	2.6
$S_5$	plaquette extérieure - étrier	1140	1910	6.0
$S_6$	chape - plaquette intérieure	684	63	108.6
$S_7$	chape - plaquette étrangère	684	63	108.6

FIG. 3.8 – Calcul analytique des pressions moyennes de contact

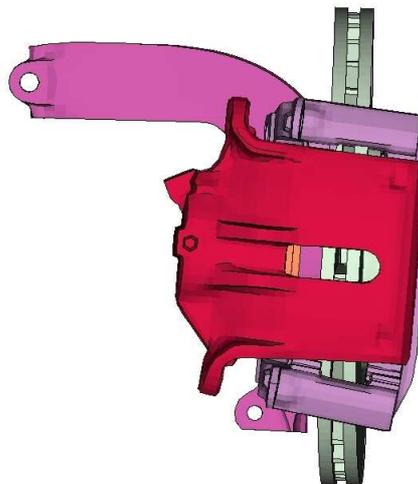


FIG. 3.9 – Déformée statique au nominal - Echelle des déplacements 400 : 1

pressions de contact aux interfaces. Elles sont très hétérogènes comme l'indique le tableau 3.2, et leurs valeurs moyennes sont cohérentes avec les résultats obtenus précédemment. En outre, nous constatons que, pour certaines interfaces, le contact n'est pas établi sur toute leur surface. En effet, leur surface effectivement en contact est plus faible que leur surface totale référencée dans le tableau 3.8. La figure 3.10 détaille la répartition des pressions de contact sur chacune des surfaces. Notons que l'échelle utilisée est exprimée en kPa et correspond à la plage  $[0, 5]$  bar. Les pressions les plus fortes sont relevées au niveau des butées de chape, comme évoqué précédemment. Nous constatons que le piston n'est en contact avec le dos de plaquette intérieure que sur une faible partie de sa surface. La figure 3.11 permet d'illustrer ceci plus clairement, grâce à une échelle adaptée, et de montrer que les pressions les plus fortes sont localisées du côté de l'entrée de couple. Concernant le contact entre étrier et plaquette extérieure, les pressions sont très hétérogènes et localisées principalement sur le pourtour de la zone de contact.

Nom	Surface	Effort normal (N)	Surface en contact ( $mm^2$ )	Pression (bar)	
				maximale	moyenne
Pi	plaquette int - piston	1140	323.7	105.00	20.03
Ga_int	garniture int - disque	1140	3627.0	10.20	2.66
Ga_ext	garniture ext - disque	1140	3673.0	9.29	2.92
Et_Ec	plaquette ext - étrier	475	550.7	98.93	3.55
Et_Sc	plaquette ext - étrier	665	398.4	92.42	6.45
Bint_ScT	plaquette int - chape	667	62.8	423.60	123.90
Bext_ScT	plaquette ext - chape	666	6.7	1515.00	145.80

TAB. 3.2 – Pressions de contact calculées avec le modèle Abaqus

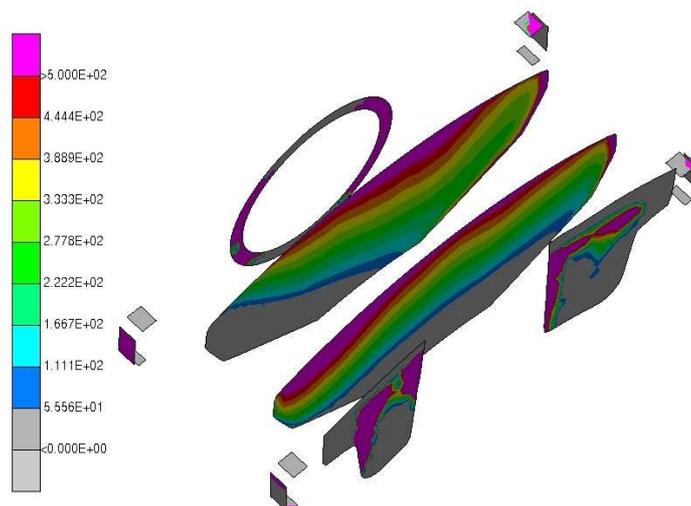


FIG. 3.10 – Pressions de contact au nominal (kPa)

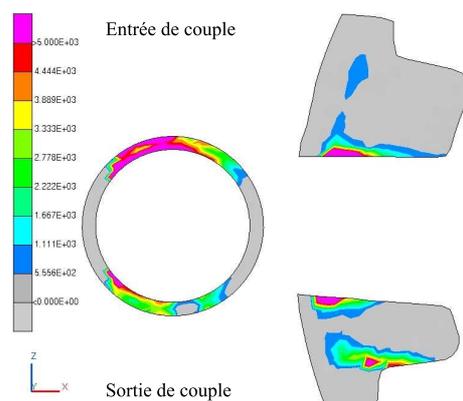


FIG. 3.11 – Pressions de contact - détail : piston, étrier (kPa)

### Couple de freinage et équilibre des plaquettes

Nous allons maintenant nous focaliser sur les répartitions de pression de contact aux interfaces disque-plaquettes, détaillées figure 3.12. La plaquette intérieure subit de fortes pressions au niveau de l'arête d'entrée de couple ainsi que sur son arête radiale extérieure (à gauche sur la figure), et ce principalement côté entrée de couple. Toute la partie sortie de couple de la plaquette n'est pas en contact avec le disque. La plaquette extérieure subit également de fortes pressions le long de son arête radiale extérieure, mais cette fois, principalement côté sortie de couple. Dans la partie de la plaquette la plus proche du centre du disque, le contact n'est pas établi, du fait de l'ouverture sous charge de l'étrier.

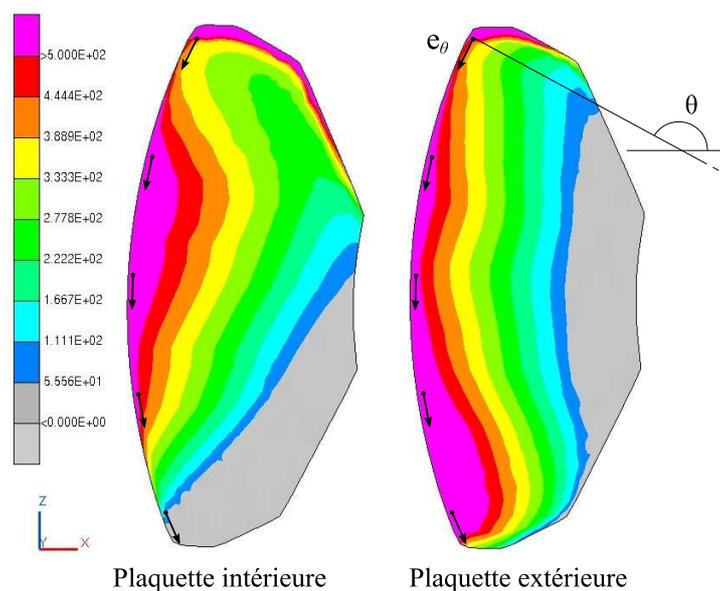


FIG. 3.12 – Pressions de contact - détail : plaquettes (kPa)

Afin d'affiner la compréhension de l'équilibre des plaquettes, nous souhaitons évaluer la résultante et le moment des forces de frottement qu'elles subissent. Pour cela, commençons par reprendre le cas de la pression uniforme détaillé dans la partie 1.2. En utilisant l'équation 1.4

avec des valeurs réalistes des paramètres ( $\mu = 0.6$ ,  $P = 2.6$  bar,  $R_1 = 98$  mm,  $R_2 = 147$  mm,  $\alpha = 42^\circ$ ), nous obtenons

$$\mathbf{F}_{frottement}^z = -671 \text{ N} \quad \mathcal{M}_{frottement}^O y = -85.2 \text{ Nm} \quad (3.23)$$

Soit un couple de freinage de 170.4 Nm et un rayon d'action  $R_a = 127$  mm.

Le moment des forces de frottement ramené au centre de gravité  $G$  de la plaquette s'écrit :

$$\mathcal{M}_{frottement}^G = \mathcal{M}_{frottement}^O + \mathbf{GO} \wedge \mathbf{F}_{frottement} \quad (3.24)$$

Nous constatons que le moment en  $G$ , bien qu'inférieur en valeur absolue au moment en  $O$ , reste négatif et vaut -2.99 Nm selon  $\mathbf{y}$ . Ce moment a tendance à faire tourner la plaquette dans le sens trigonométrique ( $-\mathbf{y}$ ) autour de son centre de gravité. Comme illustré figure 3.13, la force de frottement provoque donc le contact des plaquettes sur la chape au niveau de la butée radiale extérieure côté entrée de couple et de la butée radiale intérieure côté sortie de couple. Sans prendre en compte les ressorts de rappel, l'équilibre des moments de la plaquette permet de montrer que cette dernière applique un effort de 23 N sur les deux butées de chape.

Dans le cas réel, la pression n'étant pas uniforme, la résultante et le moment des forces de frottement appliquées par le disque sur les garnitures s'écrivent :

$$\mathbf{F}_{frottement} = \int_S \mu P dS \mathbf{e}_\theta \quad \mathcal{M}_{frottement}^O = \int_S \mathbf{OM} \wedge \mu P dS \mathbf{e}_\theta \quad (3.25)$$

et valent

	$\mathbf{F}_{frottement}$ (N)		$\mathcal{M}_{frottement}^O$ (Nm)
	$\mathbf{x}$	$\mathbf{z}$	$\mathbf{y}$
Garniture intérieure	-88	-667	-90.2
Garniture extérieure	-6.7	-665	-91.7

Grâce à ces données, nous pouvons calculer le couple de freinage,  $C_{freinage} = 181.9$  Nm, et estimer le rayon actif du frein,  $R_a$ , à 136.5 mm. La répartition particulière de pression de contact à l'interface disque-plaquettes représentée figure 3.12 tend, par rapport au cas à pression constante,

- à surcharger la butée en entrée de couple et à décharger la butée en sortie de couple, pour la plaquette intérieure,
- à surcharger la butée en sortie de couple et à décharger la butée en entrée de couple, pour la plaquette extérieure.

Nous avons la confirmation de ceci en observant en détail les efforts transitants par les butées radiales de chape et les pressions de contact associées, figure 3.14 et tableau 3.3.

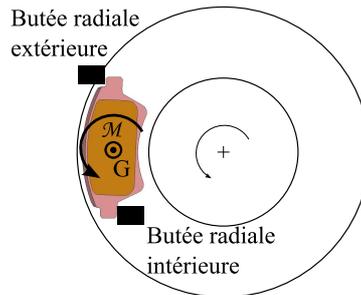


FIG. 3.13 – Equilibre des plaquettes

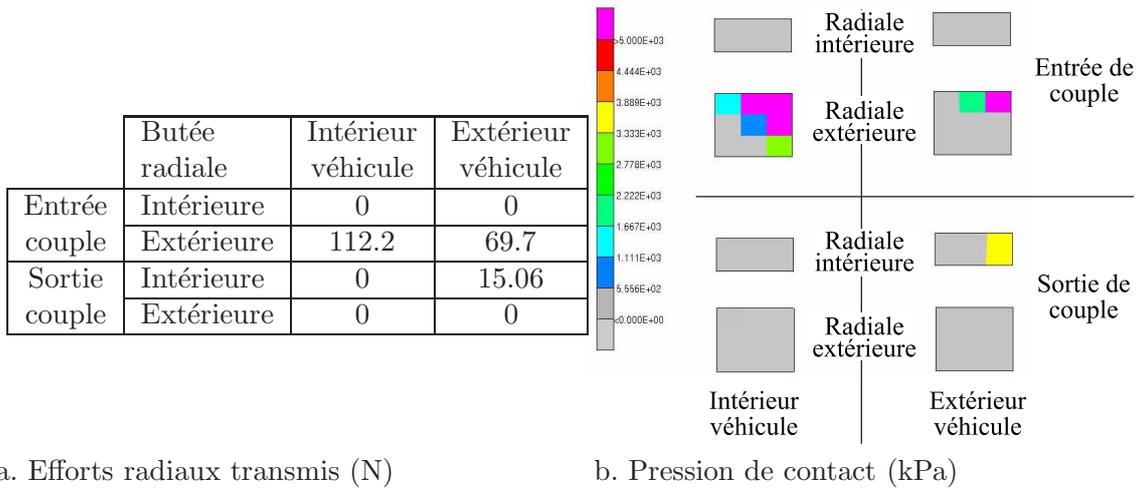


FIG. 3.14 – Contacts au niveau des butées radiales de chape

Nom	Type de butée	Effort normal (N)	Surface en contact ( $mm^2$ )	Pression (bar)	
				maximale	moyenne
Bint_EcRe	radiale extérieure	112.2	11.8	437.5	62.0
Bext_EcRe	radiale extérieure	69.7	2.1	861.8	58.0
Bext_ScRi	radiale intérieure	15.06	1.1	137.3	17.2

TAB. 3.3 – Butées radiales de chape

En entrée de couple, il y a bien contact des deux plaquettes au niveau des butées radiales extérieures. Par contre, en sortie de couple, seule la plaquette extérieure est en contact avec la butée radiale intérieure. En effet, l’effort exercé par le ressort de rappel est suffisant pour maintenir la plaquette intérieure à proximité de sa butée radiale extérieure, comme nous le voyons figure 3.15. La position de la plaquette extérieure implique un contact partiel avec sa butée de chape tangentielle. Cette situation, révélée dans le tableau 3.2 est illustrée plus précisément figure 3.15-c, avec des déplacements multipliés par 10.

Dans cette étude, nous nous sommes concentrés sur l’équilibre des plaquettes et leur mise en butée contre la chape. Ce point qui a été identifié expérimentalement comme primordial n’a, à notre connaissance, jamais été étudié numériquement faute de modélisation précise des contacts impliqués. Nous montrons ici que l’équilibre des plaquettes est relativement complexe et qu’il dépend à la fois de la raideur des ressorts de rappel et de l’équilibre du système dans sa globalité. La mise en butée des plaquettes contre la chape définit des conditions aux limites particulières qui influent sur le comportement dynamique du système.

### 3.2.4 Comportement dynamique

A la suite du calcul de préchargement statique, les valeurs propres complexes du système sont extraites par projection sur sa base modale réelle. Elles sont représentées dans le plan complexe figure 3.16. Nous observons six modes instables, dont trois sont des crissements de fréquences supérieures à 1 kHz. Ces trois crissements sont respectivement à 1990, 4420 et 5100 Hz. Leurs déformées sont représentées figure 3.17 et décrites ci-après.

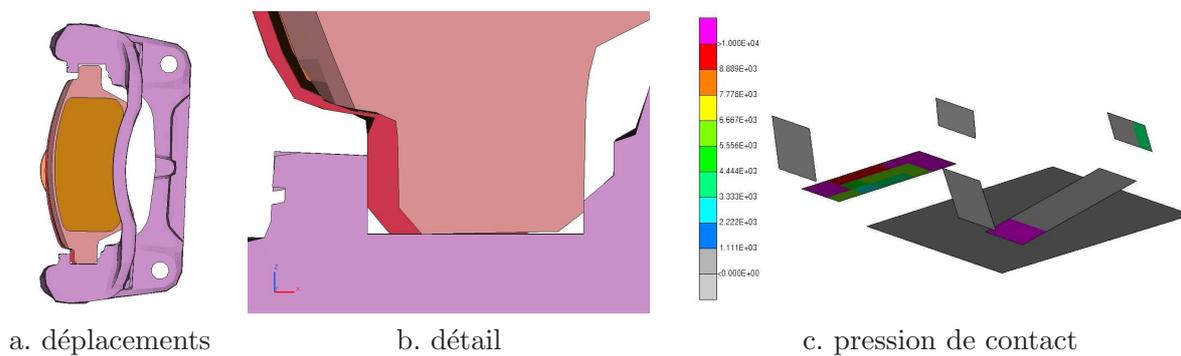


FIG. 3.15 – Position des plaquettes

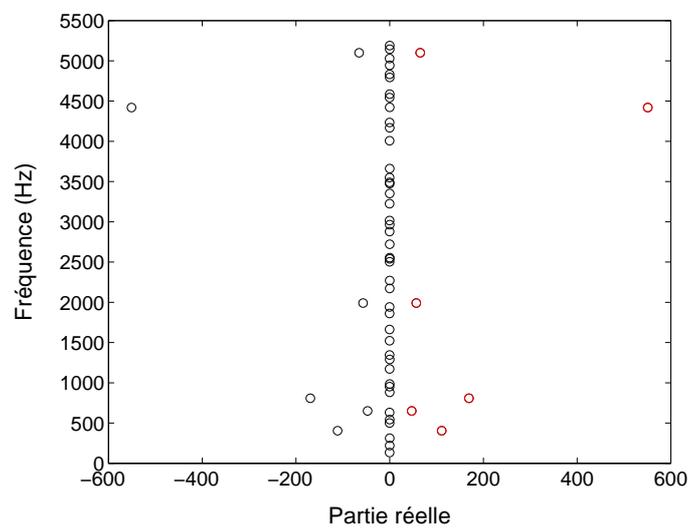
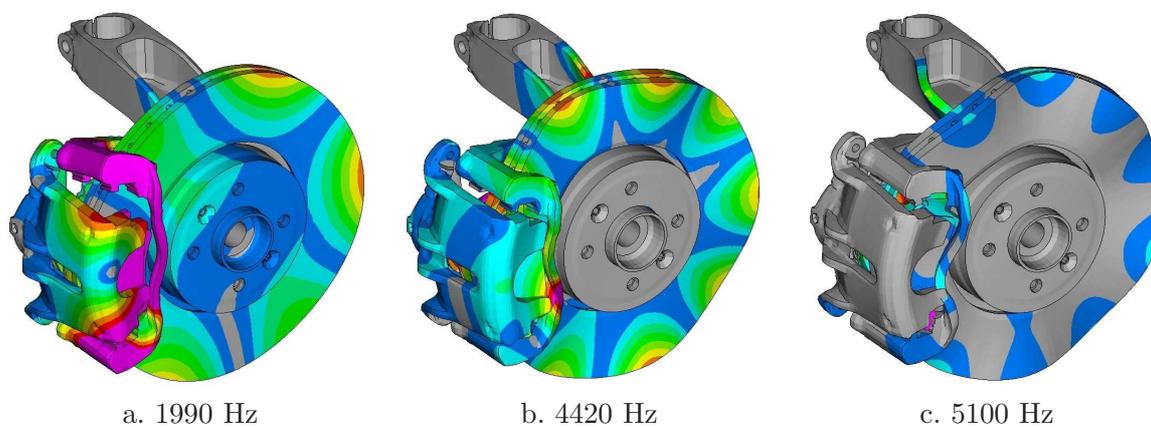
FIG. 3.16 – Valeurs propres complexes  $\mu = 0.6$ 

FIG. 3.17 – Modes complexes (à phase nulle)

**mode à 1990 Hz** Ce mode présente une ouverture de la chape qui induit une flexion des oreilles d'étrier et une flexion de ce dernier. La chape entraîne les plaquettes en glissement sur le disque. Les garnitures se déforment en compression. Le disque subit une flexion à trois diamètres nodaux présentant des travelling waves. Le mode instable tourne dans le même sens que le disque.

**mode à 4420 Hz** Ce mode est caractérisé par une flexion d'étrier et une torsion de chape. Les plaquettes intérieure et extérieure subissent respectivement une flexion et une torsion. Les garnitures se déforment en compression et le disque subit une flexion à 5 diamètres nodaux. Le mode instable tourne dans le même sens que le disque.

**mode à 5100 Hz** Ce mode présente une flexion d'étrier et une déformation de chape tous deux complexes (*ie* les déplacements ne sont pas en phases). La plaquette intérieure fléchit alors que la plaquette extérieure se déforme en compression et en torsion tout en tournant selon l'axe  $y$ . Le disque présente une déformée réelle (standing wave) à 5 diamètres nodaux.

### 3.3 Etude paramétrique au coefficient de frottement

Le coefficient de frottement étant le paramètre le plus important pour le crissement, nous avons étudié son influence grâce à une étude paramétrique. Nous avons choisi de faire varier  $\mu$  de 0.05 à 1.0 par pas de 0.05, soit 20 modalités. Pour chacune de ces modalités, un calcul complet de crissement en quatre steps, tel que présenté précédemment, a été lancé. De façon à réduire le temps de calcul, nous n'avons pas lancé 20 calculs indépendants, mais un unique calcul principal composé de 61 steps, comme illustré figure 3.18. Au premier step de mise en pression succèdent 20 groupes de trois steps correspondant respectivement à la mise en rotation du disque et aux calculs modaux réel et complexe pour chacune des valeurs de  $\mu$ . Cette technique permet un gain significatif en temps de calcul dans la mesure où la structure est chargée de façon progressive, en partant pour chaque nouvel incrément de  $\mu$  de la position d'équilibre calculée à l'incrément précédent.

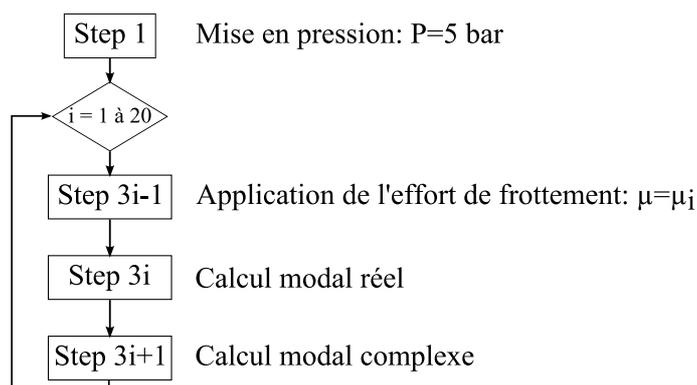
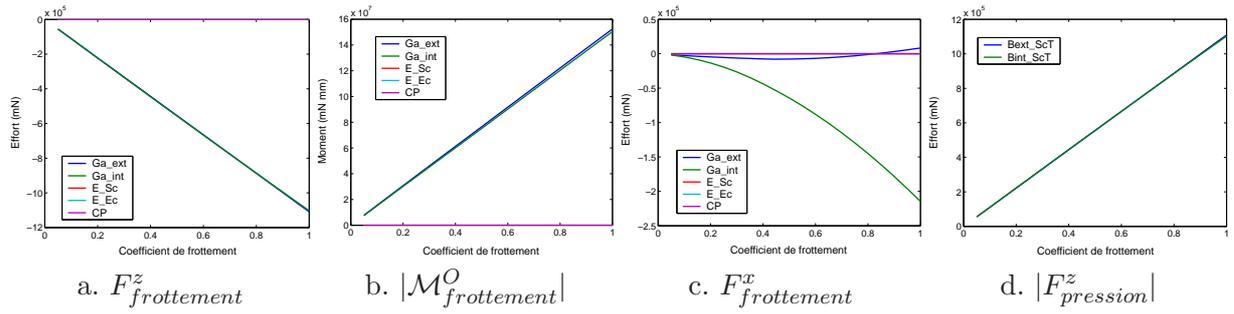
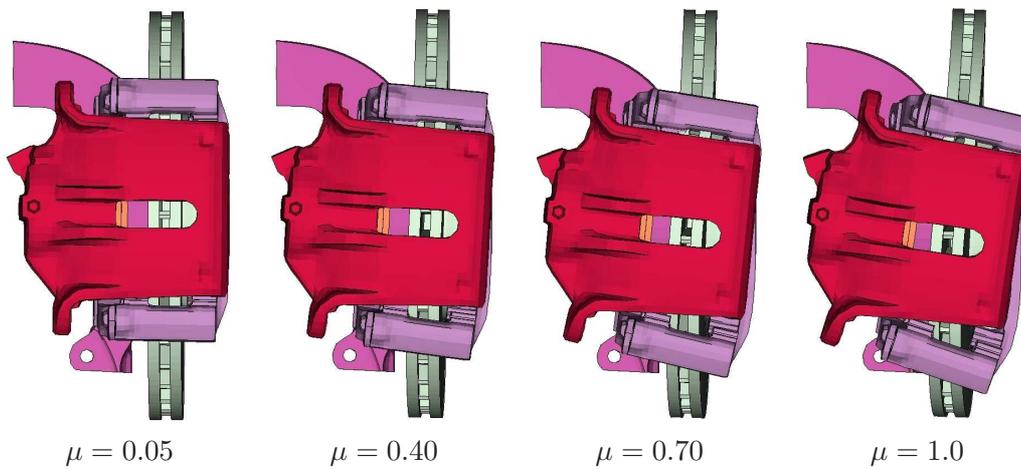


FIG. 3.18 – Principe de l'analyse paramétrique multistep

#### 3.3.1 Comportement statique

Notre but est ici d'étudier précisément la mise en position du système en fonction du coefficient de frottement. Nous nous focaliserons en particulier sur l'équilibre des plaquettes qui se révèle être très sensible à l'équilibre global du système et que nous supposons être à l'origine de la nature fugace du crissement de frein.

FIG. 3.19 – Evolution de la résultante et du moment des efforts de contact en fonction de  $\mu$ FIG. 3.20 – Evolution de la déformée statique en fonction de  $\mu$  -  $P = 5$  bar - Echelle 400 : 1

Nous commençons par étudier la résultante et le moment des forces de contact sur les différentes interfaces. Nous distinguons les forces normales au contact, associées à la pression de contact, et les forces de frottement tangentes aux contacts. Nous désignons la résultante et le moment au point O de ces deux forces respectivement par  $(\mathbf{F}_{pression}, \mathcal{M}_{pression}^O)$  et  $(\mathbf{F}_{frottement}, \mathcal{M}_{frottement}^O)$ . Lorsque le coefficient de frottement augmente, la composante verticale de la résultante et le couple au centre-roue des forces de frottement qui s'appliquent sur chaque garniture augmentent proportionnellement, comme illustré figure 3.19. Nous constatons que, du fait de la non symétrie du problème, la résultante présente une composante non négligeable en  $\mathbf{x}$ . Son évolution est monotone en fonction de  $\mu$  côté garniture intérieure, mais présente une inflexion côté garniture extérieure, qui la conduit à changer de signe pour  $\mu = 0.83$ . Le couple de freinage transite ensuite par les butées tangentielles de chape en sortie de couple, comme illustré figure 3.19-d. Cette pièce ploie alors progressivement sous la charge, comme l'illustre la figure 3.20 et entraîne l'étrier en rotation, via les colonnettes.

Cette mise en position particulière en fonction du coefficient de frottement implique au niveau des doigts d'étrier une augmentation des efforts transitant côté sortie de couple et une diminution de ceux passant par l'entrée de couple, comme indiqué figure 3.21-a. En parallèle, la figure 3.21-b montre que la surface du doigt d'étrier côté entrée de couple diminue. Il en est de même pour la surface de garniture extérieure effectivement en contact avec le disque. Cette mise en position provoque également de profondes modifications de la répartition de pression de contact aux interfaces disque-plaquettes, comme indiqué figure 3.22. Pour les faibles valeurs de  $\mu$ , la répartition de pression sur les plaquettes est radiale et la pression augmente à mesure que l'on

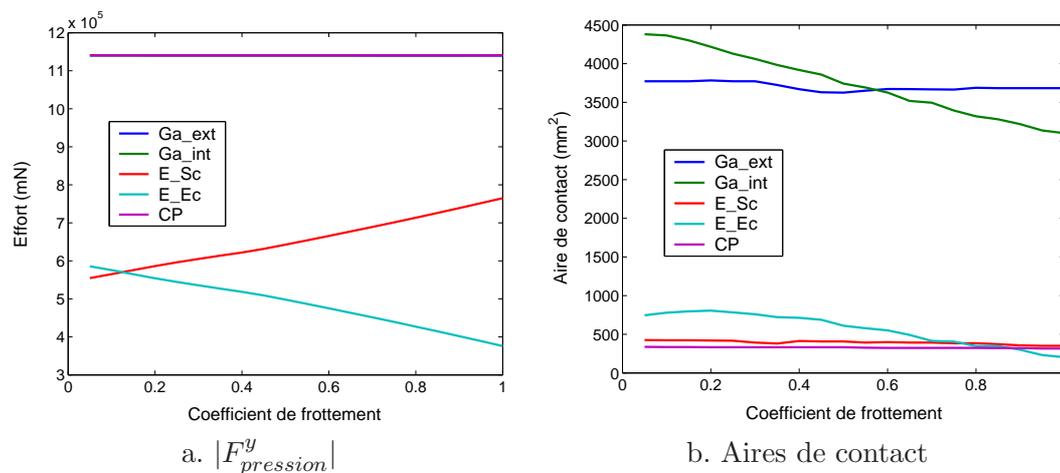


FIG. 3.21 – Effet de la mise en position de l'étrier en fonction  $\mu$

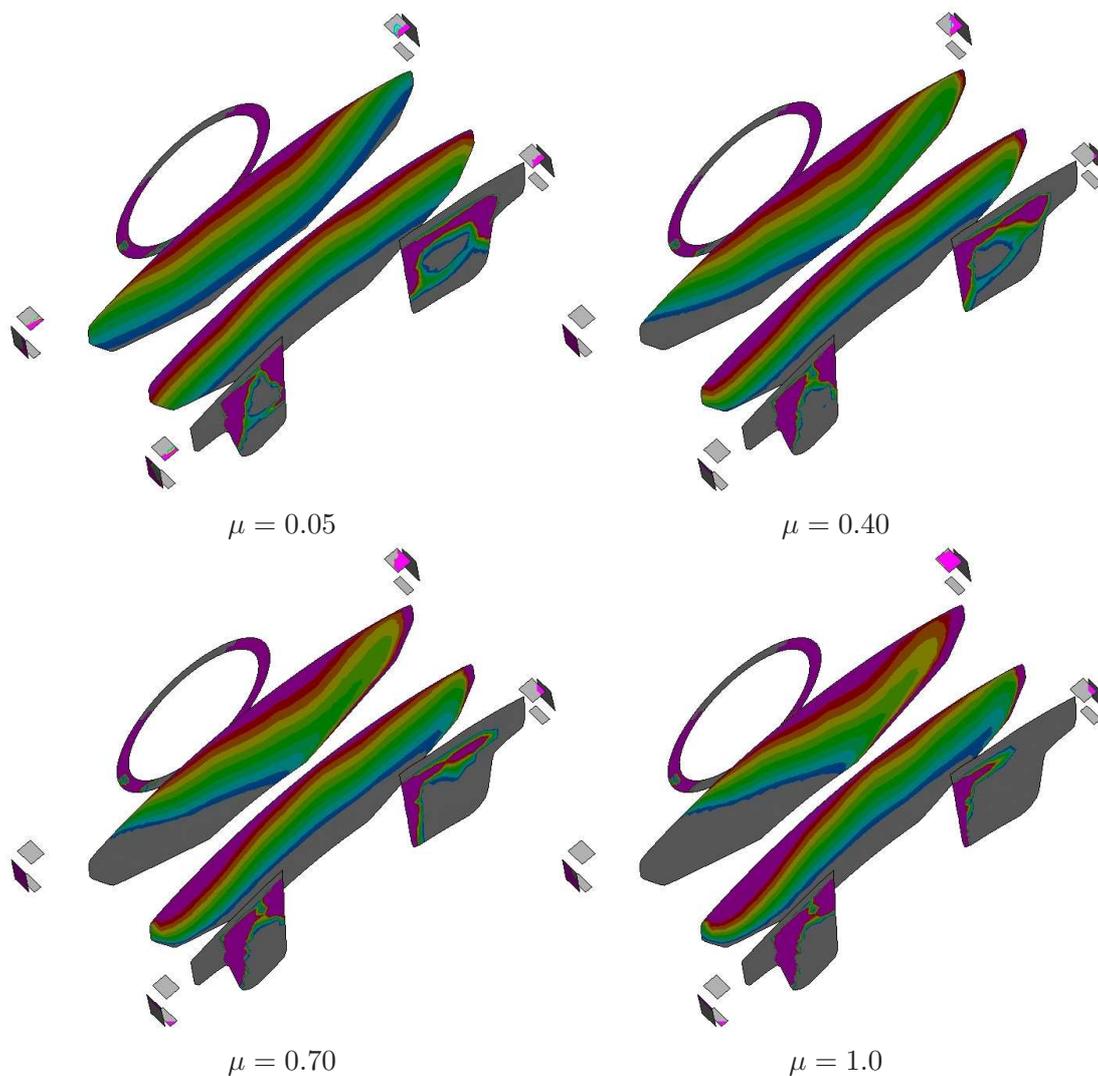


FIG. 3.22 – Evolution des pressions de contact en fonction de  $\mu$  - Echelle 0-5 bar

s'éloigne du centre du disque. En raison de l'ouverture de l'étrier, la pression est maximale sur leurs arêtes radiales externes, alors qu'il n'y a pas contact sur leurs arêtes radiales internes. L'augmentation du coefficient de frottement provoque une dissymétrie des pressions entre l'entrée et la sortie de couple. Ainsi, les fortes pressions sont progressivement décalées côté entrée de couple pour la plaquette intérieure et côté sortie de couple pour la plaquette extérieure.

L'augmentation du couple de freinage avec  $\mu$  a également tendance à faire tourner les plaquettes dans le sens trigonométrique autour de l'axe  $\mathbf{y}$ , comme illustré figure 3.23. Les plaquettes sont de plus en plus fermement maintenues contre les butées radiales extérieures côté entrée de couple et tendent à s'en écarter côté sortie de couple. Ainsi, côté sortie de couple, les plaquettes sont en équilibre en  $\mathbf{x}$  entre leurs deux butées radiales, sous l'action du couple de frottement et de l'effort du ressort de rappel. Les répartitions de pression aux interfaces disque-plaquettes entraînent un effort résultant en  $\mathbf{x}$  beaucoup plus important côté extérieur que côté intérieur véhicule. Ainsi, initialement, l'effort de rappel du ressort est suffisant pour maintenir la plaquette intérieure, contre la butée radiale extérieure. Elle la quitte au delà de  $\mu = 0.1$  mais reste à proximité. Au delà de  $\mu = 0.4$ , la plaquette extérieure entre en contact avec la butée radiale intérieure en sortie de couple. La figure 3.24-a permet d'illustrer ceci de façon plus précise en représentant les efforts dans les butées radiales de chape. Comme annoncé, l'effort sur les butées radiales d'entrée de couple croît plus vite côté intérieur que côté extérieur en raison de la répartition de pression particulière aux interfaces disque-plaquettes. Les deux non-linéarités du comportement du système, associées aux pertes de contact respectivement à  $\mu = 0.125$  et  $0.425$  peuvent également être décelées en observant l'évolution des aires de contact figure 3.24-b. Le déplacement de la plaquette extérieure vers sa butée radiale intérieure en sortie de couple entraîne un contact de plus en plus partiel avec la butée tangentielle, comme illustré figures 3.24-c et 3.25. Initialement, le contact est établi sur toute la surface. Au delà de  $\mu = 0.25$ , l'aire de contact se stabilise et ne concerne plus qu'une arête du dos de plaquette. La transition entre ces deux états de contact intervient pour  $\mu = 0.175$ . Cette valeur du coefficient de frottement marque une nouvelle non-linéarité dans le comportement du système car elle correspond à un changement d'appui de la plaquette qui lui donne plus de liberté.

Cette étude paramétrique démontre pour la première fois que la valeur du coefficient de frottement a un impact fort et relativement complexe sur la position d'équilibre statique du système. Lorsque cette valeur augmente, la chape se déforme et entraîne l'étrier en rotation. Ceci a pour effet de dissymétriser la répartition de pression de contact à l'interface disque-plaquettes en privilégiant l'entrée de couple côté intérieur et la sortie de couple côté extérieur. En conséquence, l'équilibre des plaquettes est perturbé, ce qui fait apparaître trois non-linéarités associées à des changements de conditions de contact.

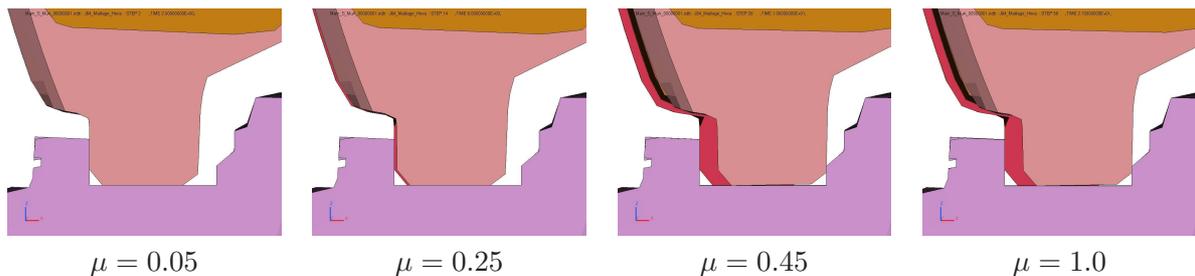


FIG. 3.23 – Evolution de la position des plaquettes en fonction de  $\mu$

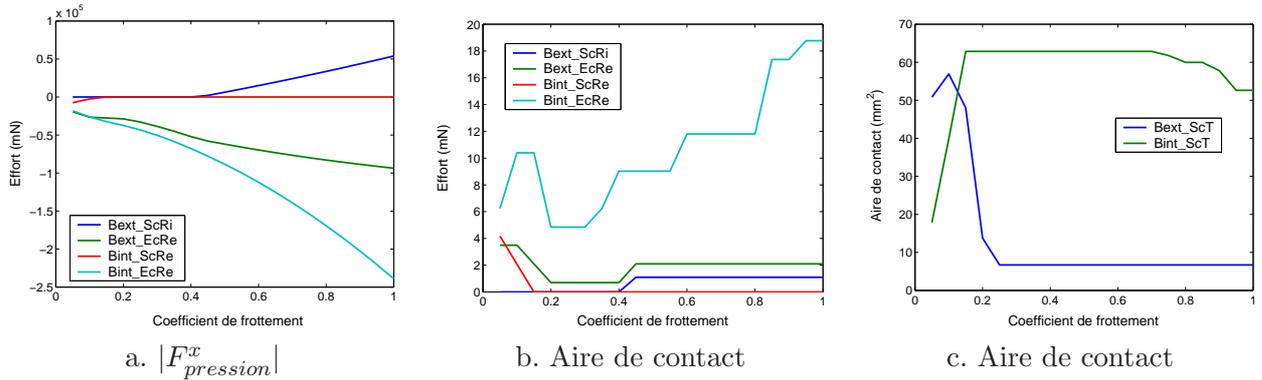
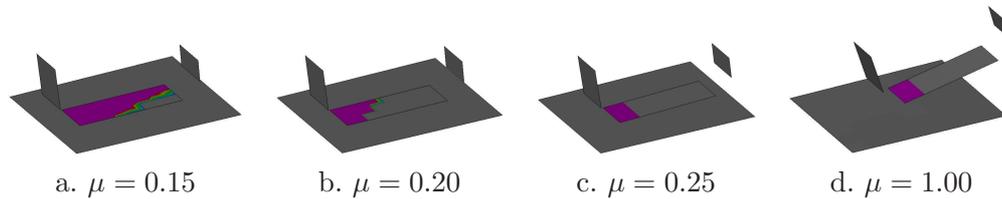
FIG. 3.24 – Evolution des conditions de contact sur les butées de chape en fonction de  $\mu$ 

FIG. 3.25 – Butées tangentielles de chape - déplacements multipliés par 10

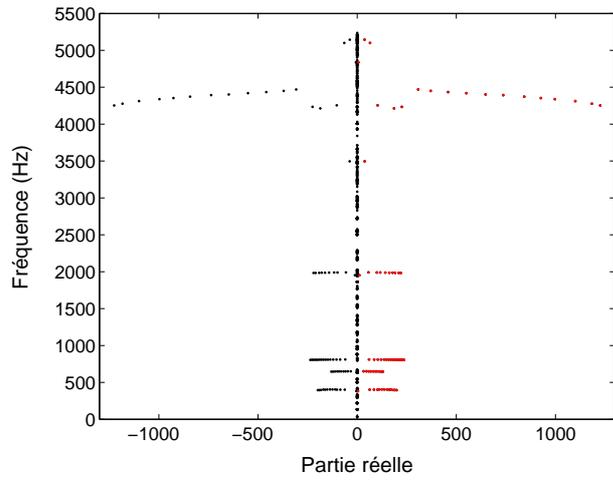
### 3.3.2 Comportement dynamique

Les valeurs propres du système relatives aux différentes valeurs du coefficient de frottement sont tracées dans le plan complexe figure 3.26-a. L'étude précise de leur évolution en fonction de  $\mu$  permet, comme avec le modèle linéaire, de mettre en évidence le phénomène de coalescence de modes. La figure 3.26-b détaille, par exemple, la coalescence à 810 Hz qui intervient pour un coefficient de frottement critique de 0.25. Cette courbe est en tous points similaire aux courbes linéaire. Néanmoins, en montant en fréquence, ce n'est plus le cas et les courbes sont de plus en plus perturbées par rapport au cas linéaire.

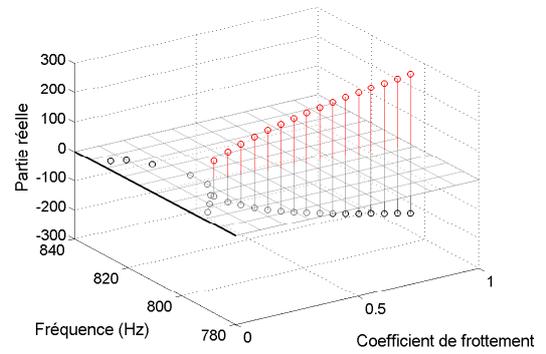
La figure 3.27 détaille la coalescence qui se produit à 1990 Hz. Nous observons trois modes qui interagissent entre eux de façon assez complexe, en particulier pour les faibles valeurs du coefficient de frottement. L'évolution de la fréquence de ces modes présente des discontinuités flagrantes, qui correspondent à deux des trois non-linéarités du comportement statique. Il s'agit respectivement du changement d'appui de la plaquette extérieure sur sa butée tangentielle à  $\mu = 0.175$  et de son entrée en contact avec la butée radiale intérieure à  $\mu = 0.425$ . Nous nous intéressons maintenant à l'évolution des déformées modales en fonction du coefficient de frottement. A  $\mu = 0.05$ , les trois modes réels, que nous nommons MA, MB et MC, par fréquences croissantes, sont associés aux déformées représentées figures 3.28 et décrites ci-après.

**Mode MA** : la déformée de ce mode est pilotée par une flexion de disque à un diamètre nodal avec rotation du bol et du moyeu en  $\mathbf{z}$  par rapport au centre du roulement. Elle présente également une flexion d'étrier et une ouverture de chape en  $\mathbf{z}$ , toutes deux de faible amplitude. En parallèle, les garnitures se déforment en compression.

**Mode MB** : la déformée est dominée par une ouverture de chape en  $\mathbf{z}$  associée à une flexion de la poignée de valise. Ceci implique un glissement en  $\mathbf{z}$  des plaquettes sur le disque. L'étrier se déforme en torsion et le disque subit une flexion à 3 diamètres nodaux de faible amplitude. Notons qu'une ligne nodale est située sous les plaquettes.



a. Plan complexe



b. Coalescence à 810 Hz

FIG. 3.26 – Evolution des valeurs propres complexes en fonction de  $\mu$

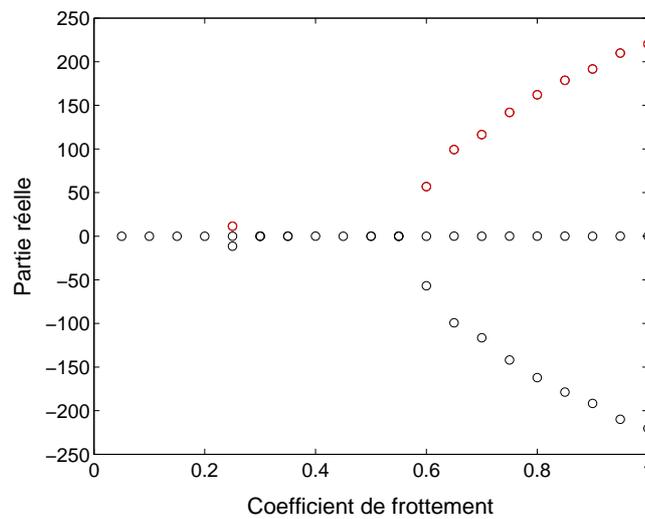
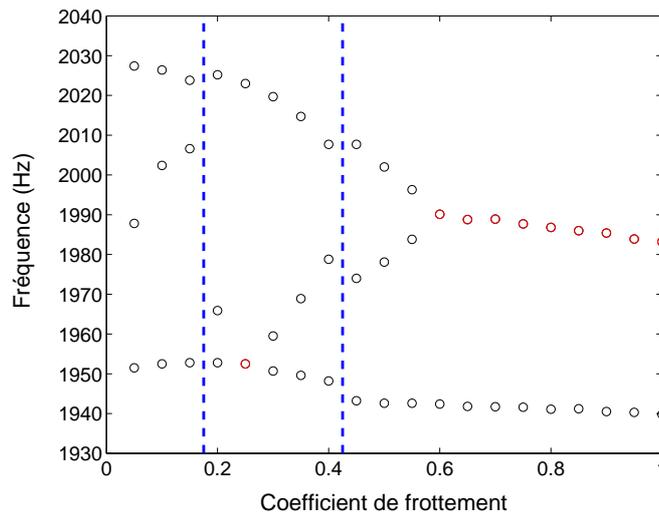


FIG. 3.27 – Coalescence à 1990 Hz

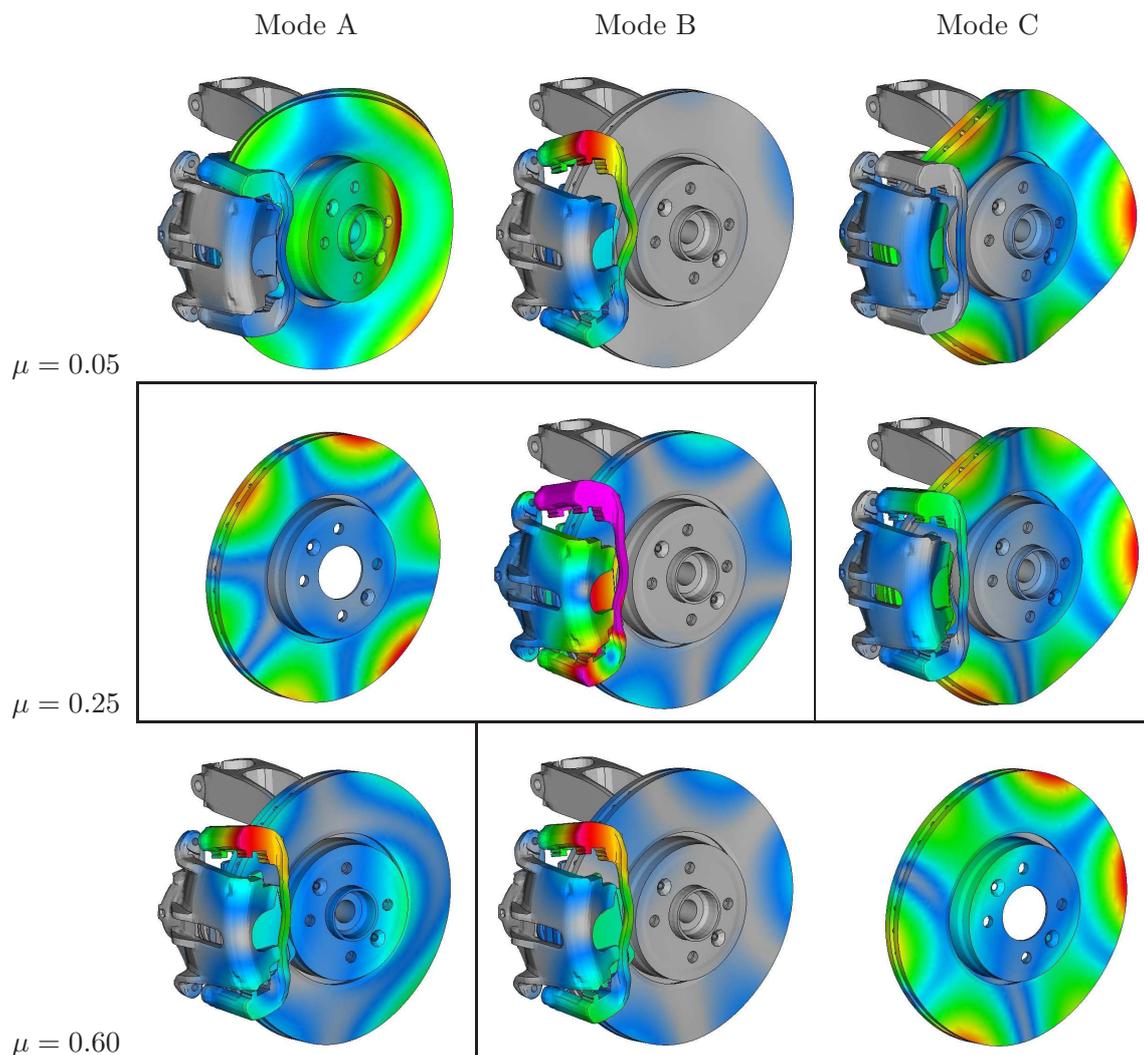


FIG. 3.28 – Evolution des déformées des modes en fonction de  $\mu$  - □ : couples de modes complexes

**Mode MC** : ce mode implique principalement une flexion de disque à trois diamètres nodaux et une flexion d'étrier. Les plaquettes étant situées sur un ventre de vibration, translatent en  $y$  et entraînent un coulisement du piston dans son logement. De plus, la plaquette intérieure fléchit alors que la garniture extérieure se déforme en compression.

A mesure que  $\mu$  augmente, la composante d'ouverture de chape prend de plus en plus d'importance dans la déformée du mode MA. En parallèle, les plaquettes se mettent à glisser sur le disque en  $z$ . L'étrier passe brutalement d'une flexion à une torsion entre  $\mu = 0.15$  et  $0.20$ . Cette valeur correspond à une des non-linéarités statiques mises en évidence, mais le lien de cause à effet n'a pu être démontré. A  $\mu = 0.25$ , les modes MA et MB coalescent et donnent naissance à deux modes complexes composés principalement d'une ouverture de chape en  $z$ , associée à un glissement des plaquettes sur le disque dans la même direction, et d'une torsion d'étrier. Le disque subit lui des vibrations de faible amplitude à 3 diamètres nodaux faisant apparaître des travelling waves. Au delà de cette valeur du coefficient de frottement, les deux modes se découplent. Notons que ce découplage se produit sans « croisement » en fréquence et que les déformées de MA et MB à  $\mu = 0.3$  sont sensiblement identiques à celles à  $\mu = 0.2$ . Au delà de cette valeur du coefficient de frottement, MA n'évolue quasiment plus. La déformée de l'étrier relative au mode MC passe

progressivement d'une flexion à une torsion. Les lignes nodales associées aux déplacements du disque des modes MB et MC changent progressivement de positions. En d'autres termes, les deux déformées sont de plus en plus semblables à mesure que  $\mu$  augmente. A partir de  $\mu = 0.6$ , les modes MB et MC se couplent et donnent naissance à deux modes complexes caractérisés par une ouverture de chape, une torsion d'étrier et une flexion de disque à trois diamètres nodaux associée à des travelling waves. Ces deux modes n'évolueront quasiment plus jusqu'à  $\mu = 1.0$ .

Grâce à cette étude paramétrique, nous sommes en mesure de suivre précisément l'évolution des modes avec le coefficient de frottement. Dans le cas général, cette évolution est discontinue du fait des non-linéarités du comportement statique, comme nous l'avons montré dans le cas du crissement à 1990 Hz. Malgré cela, le phénomène de coalescence est mis en évidence comme le phénomène qui conduit à l'instabilité du système. En outre, nous sommes capables de suivre précisément l'évolution des déformées modales et de mettre en évidence la transition des modes réels aux modes complexes.

### 3.4 Etudes paramétriques à la pression hydraulique

Le chargement du système de freinage est associé au couple qu'il subit. Ce couple dépend de deux paramètres : le coefficient de frottement, que nous venons d'étudier et la pression hydraulique, qui va nous intéresser maintenant. En effet, ce paramètre a été identifié expérimentalement comme influent sur la propension au crissement. Une étude paramétrique a ainsi été réalisée afin d'analyser l'effet de la pression hydraulique sur le comportement statique et dynamique du système. Dans cette étude, le coefficient de frottement est fixé à 0.6 et la pression hydraulique varie de 1 à 10 bar par pas de 1 bar.

#### 3.4.1 Comportement statique

La figure 3.29 regroupe les courbes d'évolution en fonction de  $\mu$  des efforts, moments et surfaces relatives aux différents contacts. Nous constatons évidemment une dépendance linéaire de la résultante et du moment des forces de frottement à l'interface disque-plaquettes (a, b et c), conformément à la loi de Coulomb. La composante en  $\mathbf{z}$  de l'effort de frottement est intégralement transmise aux butées tangentielles de chape en sortie de couple (d). De la même manière qu'une augmentation de coefficient de frottement, une augmentation de pression entraîne une déformation progressive de la chape associée à une rotation de l'étrier, comme illustré figure 3.30. Nous constatons que la répartition de l'effort normal entre les deux doigts d'étrier évolue linéairement avec la pression (e). La surface de garniture en contact avec le disque augmente légèrement côté intérieur et diminue légèrement côté extérieur pour se stabiliser au delà de 4 bar (g). Mais de façon générale, les aires de contact évoluent peu avec la pression.

Les pressions de contact sont représentées figure 3.31 respectivement pour des pressions hydrauliques de 1 et 10 bar. Nous constatons qu'au niveau des surfaces de contact parallèles au disque, les répartitions de pression sont identiques, malgré les échelles différentes d'un facteur 10. Ceci est le signe d'une évolution linéaire des pressions de contact avec la pression hydraulique. En ce qui concerne les butées de chape, l'évolution des pressions est plus complexe. La figure 3.29-f illustre l'évolution des efforts dans les butées radiales. Les butées radiales d'entrée de couple sont toujours en contact avec les plaquettes. En revanche, la plaquette intérieure est en contact sur sa butée radiale extérieure pour  $P = 1$  bar et la quitte ensuite. La plaquette extérieure, elle, atteint sa butée radiale intérieure pour une pression hydraulique de 4 bar. Ceci est également illustré figure 3.29-h en terme d'aire de contact. Le déplacement de la plaquette extérieure en sortie de couple induit le même phénomène de contact tangentiel partiel que celui détaillé dans la partie précédente, comme illustré figure 3.32.

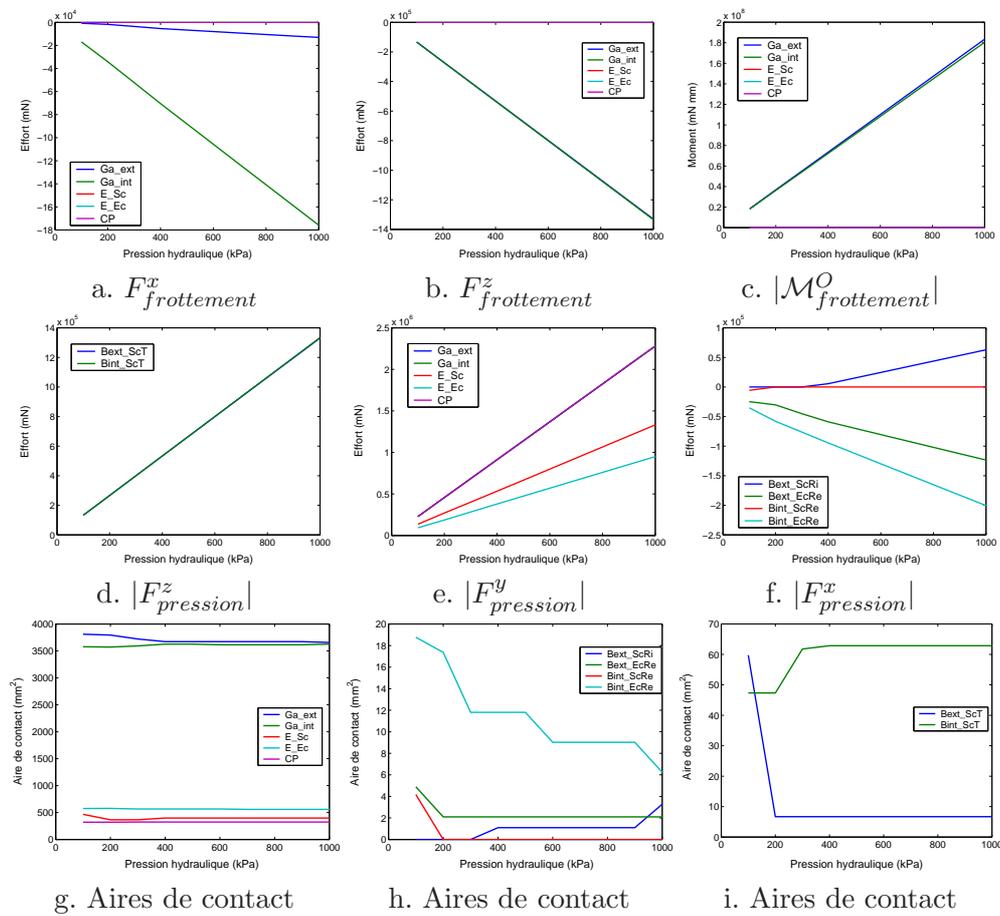


FIG. 3.29 – Evolution de la résultante et du moment des efforts de contact en fonction de  $P$

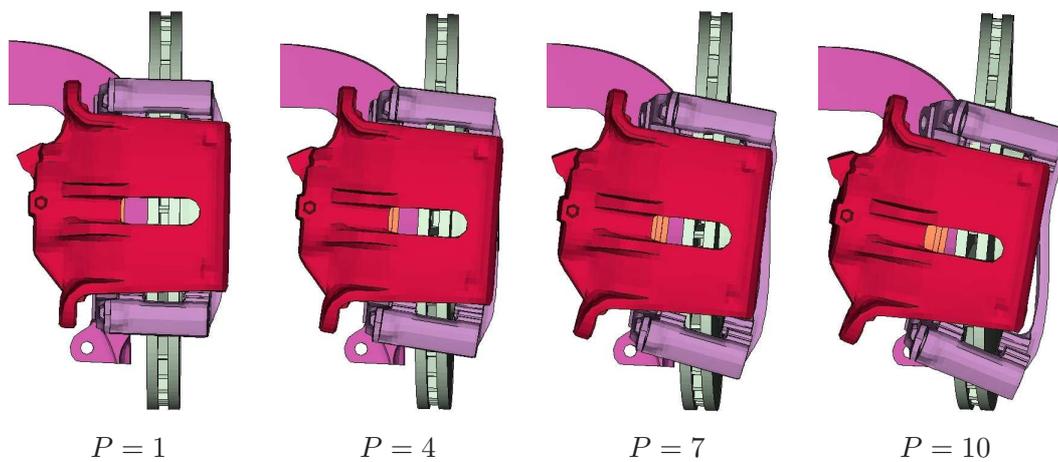
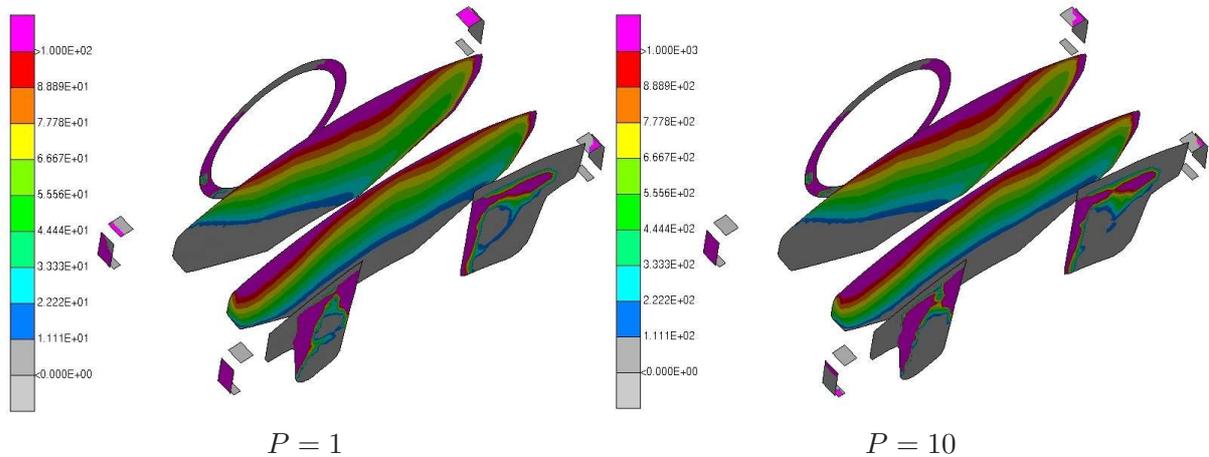
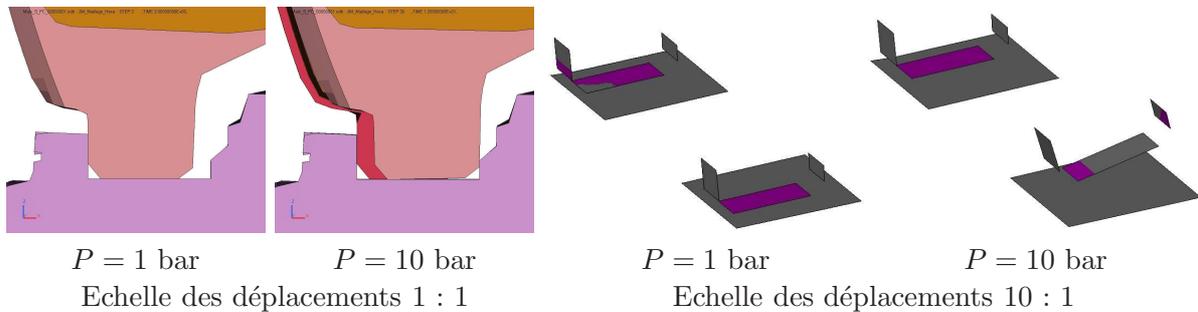


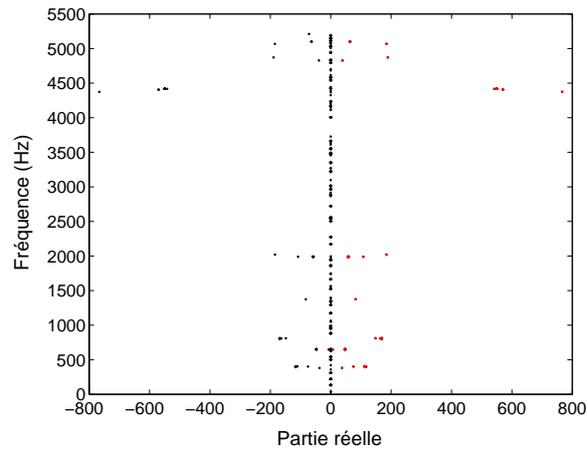
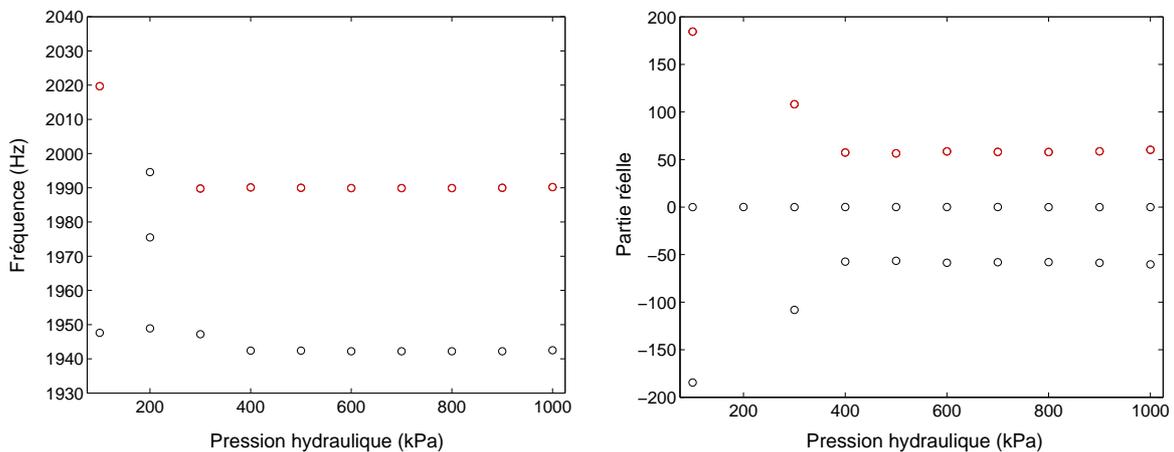
FIG. 3.30 – Evolution de la déformée statique en fonction de  $P$  -  $\mu = 0.6$  - Echelle 400 : 1

FIG. 3.31 – Evolution des pressions de contact en fonction de  $P$  -  $\mu = 0.6$ FIG. 3.32 – Evolution de la position des plaquettes en fonction de  $P$ 

Contrairement au coefficient de frottement, la pression hydraulique ne modifie pas la répartition des pressions de contact sur les interfaces parallèles au disque. En effet, elle agit de façon linéaire sur ces valeurs des pressions de contact. Nous pouvons conclure de nos deux études paramétriques que le paramètre qui pilote la statique du système est le couple de freinage. En effet, une augmentation de ce dernier, induite par une augmentation de  $\mu$  ou de  $P$ , provoque une augmentation des efforts encaissés par la chape. Celle-ci se déforme alors en conséquence et entraîne l'étrier en rotation. D'autre part, l'augmentation du couple de freinage entraîne une augmentation du moment des forces de frottement appliqué sur les plaquettes. Lorsque celui-ci est suffisant pour vaincre l'effort appliqué par les ressorts de rappel, les plaquettes quittent leurs butées radiales extérieures et atteignent ensuite leurs butées radiales intérieures, en sortie de couple. Ce phénomène engendre des non-linéarités dans le comportement du système et se produit préférentiellement côté extérieur du fait de la répartition particulière de pression de contact à l'interface disque-plaquettes.

### 3.4.2 Comportement dynamique

Les valeurs propres associées aux différentes valeurs de la pression hydraulique sont tracées dans le plan complexe figure 3.33-a. Nous observons les mêmes fréquences d'instabilité qu'au nominal, à savoir 1990, 4420 et 5100 Hz ainsi que trois instabilités à moins de 1 kHz. Nous remarquons cependant une dispersion fréquentielle de l'instabilité à 5100 Hz. De plus, une nouvelle instabilité émerge à 1375 Hz, de façon ponctuelle pour une pression de 1 bar.

FIG. 3.33 – Evolution des valeurs propres complexes en fonction de  $P$ FIG. 3.34 – Evolution de la coalescence à 1990 Hz en fonction de  $P$ 

La figure 3.34 détaille l'évolution des fréquences et des parties réelles des modes MA, MB et MC en fonction de la pression hydraulique. Nous constatons que de 4 à 10 bar, les valeurs propres associées à ces trois modes restent constantes, tant en fréquence qu'en partie réelle. De plus, les déformées observées n'évoluent que très légèrement. Pour les pressions plus faibles, ce paramètre est influent sur la stabilité du système. En effet, ce dernier est stable à 1 bar, instable à 2 bar et de nouveau instable à 3 bar. Notons que lorsque les trois modes sont stables, leur déformées sont similaires à celles observées figure 3.28 pour  $\mu = 0.05$ . La compréhension détaillée des phénomènes à faible pression réclamerait une discrétisation plus fine en pression.

Néanmoins, nous constatons que le comportement dynamique du système est extrêmement sensible à la pression hydraulique lorsque celle-ci est inférieure à 4 bar. Dans cette plage, les efforts de frottement dans la direction  $x$  appliqués sur les plaquettes sont du même ordre de grandeur que les efforts des ressorts de rappel. En conséquence, les conditions de contact entre plaquettes et chape évoluent rapidement, ce qui modifie les conditions aux limites et donc le comportement dynamique du système. Cette constatation, qui a également été faite expérimentalement, explique au moins en partie la nature fugace du crissement.

### 3.5 Plan d'expériences complet ( $\mu, P$ )

Les deux études paramétriques précédentes ont démontré les effets différents du coefficient de frottement et de la pression hydraulique sur le comportement statique et dynamique du frein. En observant les résultats, il est raisonnable de penser que ces deux paramètres interagissent fortement entre eux. En particulier, cette interaction doit déterminer les points d'apparition des non-linéarités que nous avons pour l'instant mis en évidence en faisant évoluer  $\mu$  et  $P$  de façon indépendante. Afin d'éclaircir ce point, un plan d'expériences factoriel complet a été réalisé pour une pression hydraulique variant de 1 à 10 bar par pas de 1 bar et un coefficient de frottement variant de 0.1 à 1.0 par pas de 0.1, soit au total 100 expériences.

#### 3.5.1 Comportement statique

L'analyse systématique de la position d'équilibre statique des 100 configurations étant inenvisageable, nous nous sommes limités à l'étude des configurations de contact. Une telle étude nous permet de suivre l'évolution des conditions de contact en fonction des paramètres et de mettre en évidence les non-linéarités du comportement statique. La figure 3.35 illustre l'évolution des conditions de contact entre disque et plaquettes. Nous vérifions que l'effort normal au contact,  $F_{pression}^y$ , est indépendant du coefficient de frottement et varie linéairement avec la pression hydraulique (a). La composante verticale de la résultante,  $F_{frottement}^z$ , et le moment au centre roue,  $\mathcal{M}_{frottement}^O$ , des forces de frottement ont une variation linéaire par rapport aux deux paramètres (c, d). L'évolution de la composante horizontale de la résultante des forces de frottement,  $F_{frottement}^x$ , est moins intuitive et est différente côté intérieur et extérieur (e, f). La déformation de la chape et la rotation de l'étrier sous l'effet des forces de frottement peuvent être analysées en observant l'évolution des aires de contact entre disque et plaquettes, figure 3.35-b. En effet, nous constatons une décroissance de l'aire de contact de la garniture intérieure avec le coefficient de frottement, et ce, quelque soit la pression hydraulique. L'aire de contact de la garniture extérieure varie moins, mais dépend des deux paramètres, notamment lorsque ceux-ci sont faibles.

Nous allons maintenant nous intéresser aux efforts transmis aux butées de chape. Les butées tangentielles encaissent la résultante verticale des efforts de frottement représentées figure 3.35-c. Au niveau des butées radiales de chape, les efforts transmis sont plus complexes à analyser en raison d'établissement et de rupture de contact, comme illustré figure 3.36. En entrée de couple, le contact est toujours assuré, alors que ce n'est pas le cas en sortie de couple. Côté intérieur, le contact n'est établi en sortie de couple que pour les faibles pressions. Notons que la pression en deçà de laquelle il y a contact dépend de la valeur du coefficient de frottement. Côté extérieur, le contact n'est établi que lorsque le produit  $\mu \times P$  est élevé, ou autrement dit, lorsque le couple de freinage est élevé. La limite d'établissement du contact a la forme d'une hyperbole dans le plan  $(\mu, P)$ , comme nous pouvons le constater figure 3.36-d. Notons que cette limite marque également un changement de comportement en entrée de couple, comme nous pouvons le remarquer figure 3.36-b. Ces courbes font apparaître clairement et précisément les deux non-linéarités associées à la rupture du contact *Bint\_ScRe* et à l'initiation du contact *Bext\_ScRi* dans le plan  $(\mu, P)$ .

La nature des contacts sur les butées de chape s'analyse également en observant l'évolution des différentes aires de contact représentées figures 3.37 et 3.38. En sortie de couple, l'aire de contact sur la butée radiale est maximale lorsque le couple de freinage est maximal côté extérieur (3.38-d), alors que côté intérieur l'aire est maximale lorsque le couple est minimal (3.38-c). Ces courbes mettent également en évidence les deux non-linéarités que nous venons de citer.

Comme nous l'avons évoqué dans les parties précédentes, la rotation des plaquettes sous l'effet du couple de freinage induit un contact partiel au niveau des butées tangentielles de chape. L'évolution des aires de contact de ces butées est illustrée figure 3.38-a et b. Côté extérieur, nous observons clairement la limite entre un contact sur la quasi totalité de la surface et un

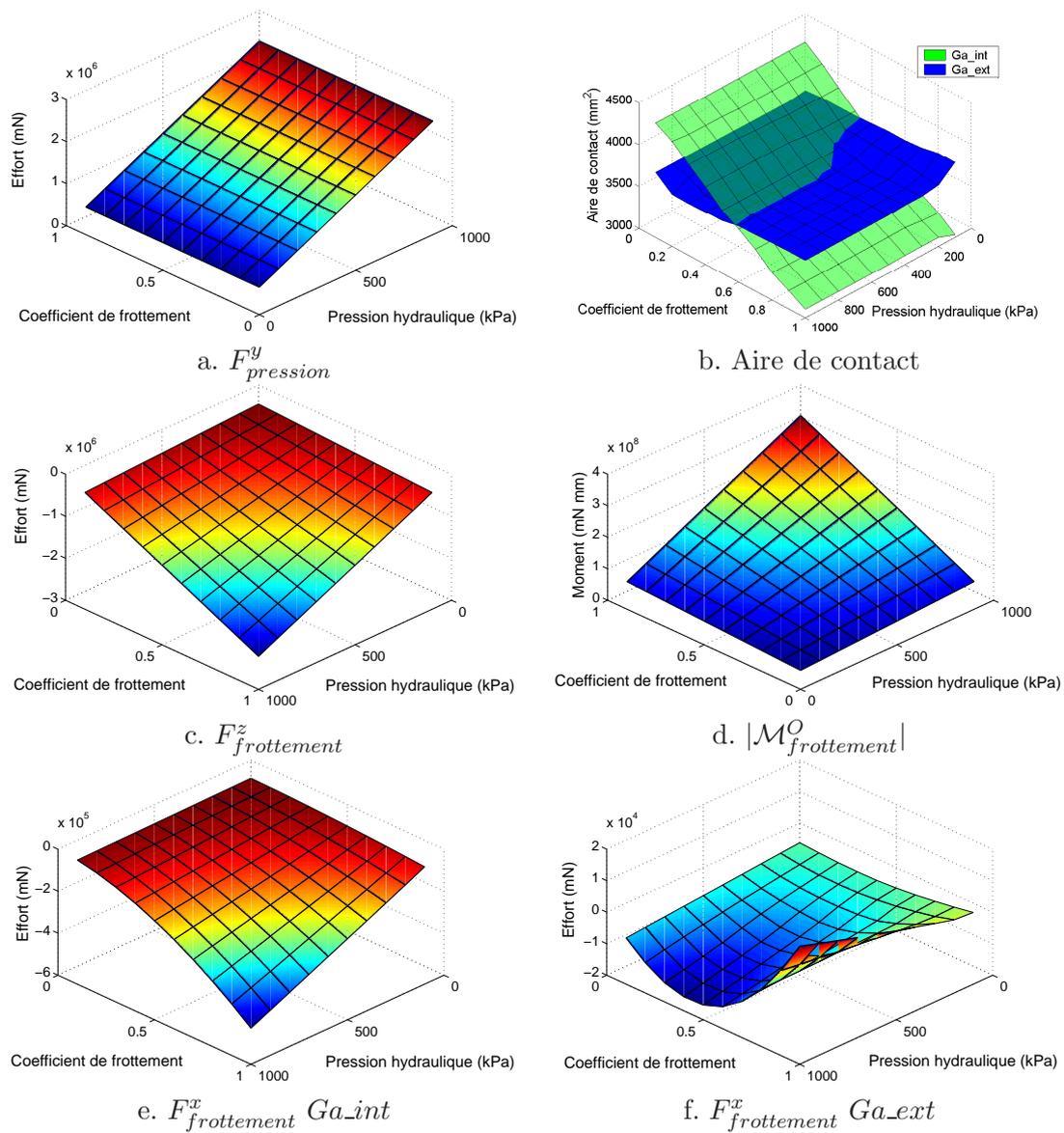


FIG. 3.35 – Evolution des conditions de contact entre disque et plaquettes

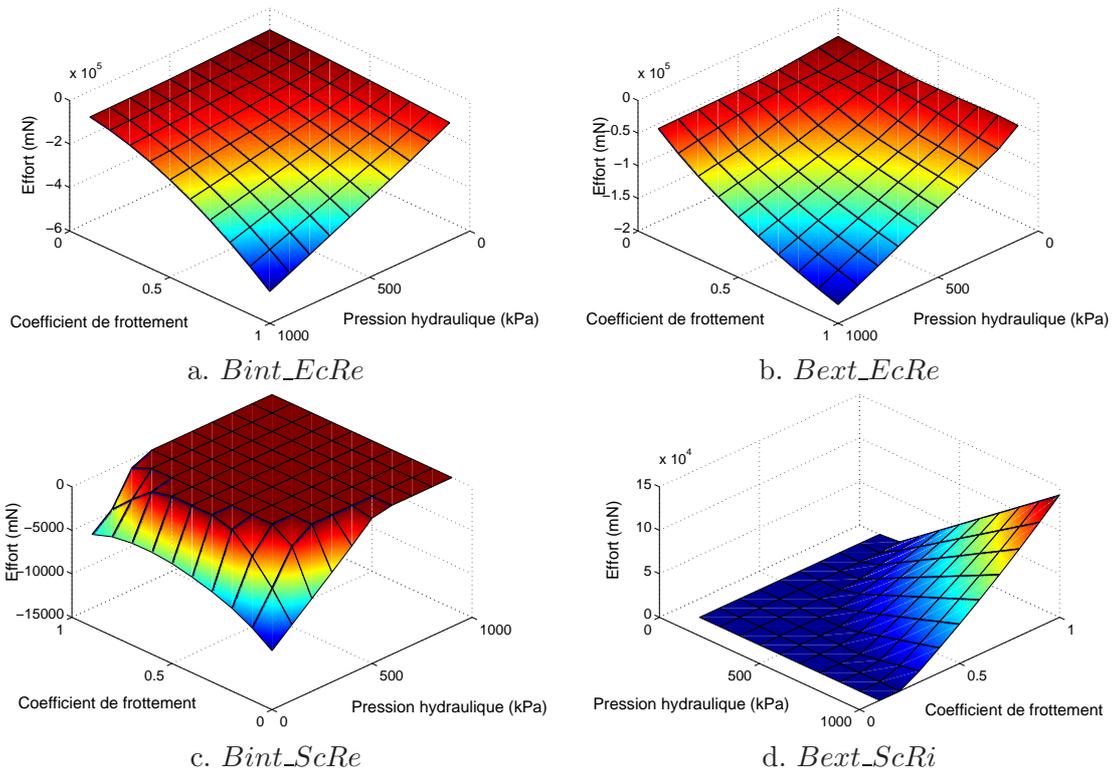


FIG. 3.36 – Evolution des efforts de contact au niveau des butées radiales de chape

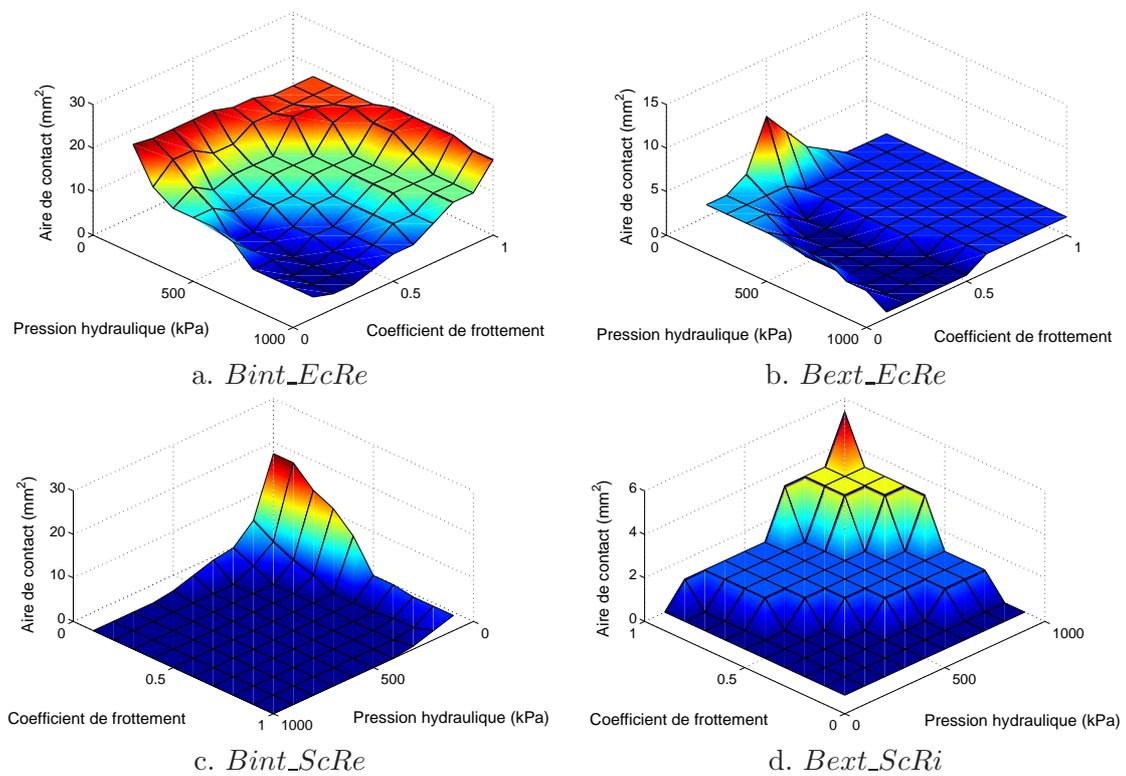


FIG. 3.37 – Evolution des aires de contact au niveau des butées radiales de chape

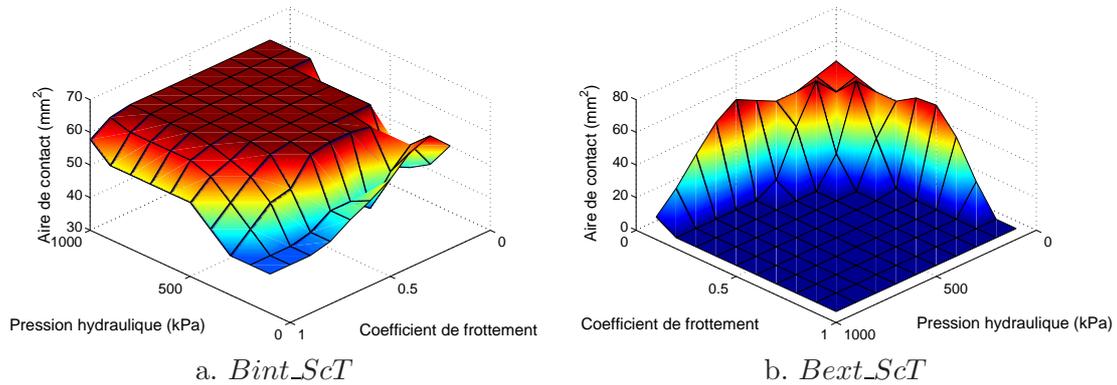


FIG. 3.38 – Evolution des aires de contact au niveau des butées tangentielles de chape

contact uniquement sur une arête du dos de plaquette. Cette limite correspond à une troisième non-linéarité dans le comportement du système.

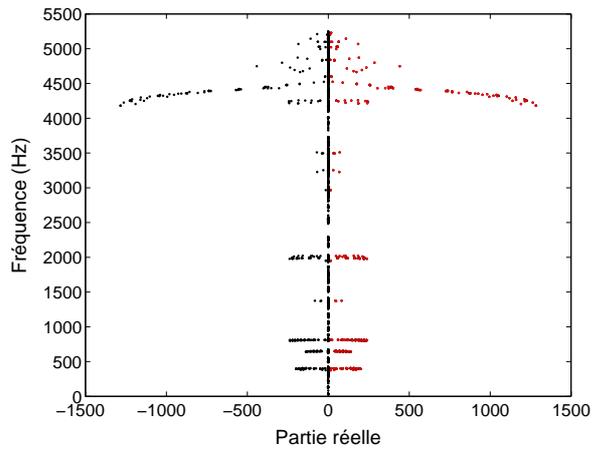
Au final, cette étude fine du comportement statique du système en fonction de la pression hydraulique et du coefficient de frottement permet de décrire précisément les changements de conditions de contact. Nous sommes ainsi en mesure de déterminer pour quelles combinaisons de ces deux paramètres apparaissent les trois non-linéarités associées à la mise en butée des plaquettes contre la chape.

### 3.5.2 Comportement dynamique

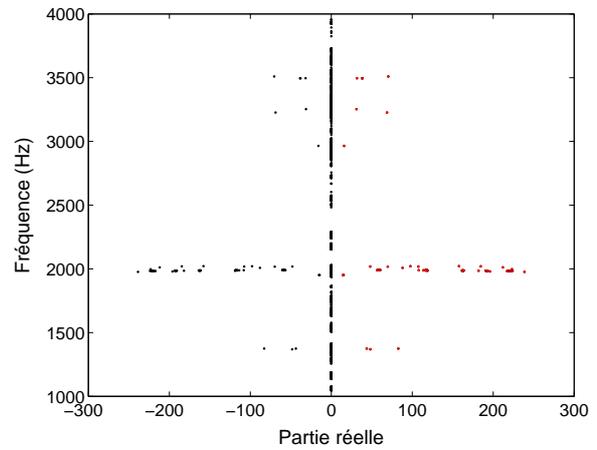
La figure 3.39-a représente dans le plan complexe les valeurs propres du système pour les 100 configurations calculées. Les modes instables mis en évidence dans les deux études paramétriques précédentes sont évidemment retrouvés. Cependant, d'autres modes instables émergent également, notamment à 2965 et 3250 Hz, comme illustré figure 3.39-b. Toutes ces données peuvent ensuite être analysées par rapport aux deux paramètres du plan d'expériences,  $P$  et  $\mu$ . Ainsi, les figures 3.39-c et 3.39-d représentent respectivement l'évolution des fréquences et des parties réelles en fonction de ces deux paramètres. Sur ces figures, les modes stables sont représentés en vert alors que les modes instables sont en rouge. En observant l'évolution des parties réelles, nous déterminons facilement la limite de stabilité du système dans le plan ( $\mu, P$ ) sur l'ensemble de la plage de fréquence.

Dans la suite, nous allons nous focaliser sur l'étude du mode à 1990 Hz, mais la démarche peut également être entreprise pour les autres modes instables. La figure 3.40 présente les courbes de coalescence associées à ce mode par rapport à ( $\mu, P$ ). Nous constatons qu'en deçà de 4 bar la pression hydraulique a une influence d'ordre 1 alors que cette influence est beaucoup plus limitée au delà de cette valeur. De plus, pour les faibles valeurs du coefficient de frottement, le système présente des parties réelles légèrement positives pour certaines valeurs particulières de la pression hydraulique. La figure 3.41-a illustre ceci de façon plus aisée sous la forme d'un diagramme de stabilité dans le plan ( $\mu, P$ ). De façon générale, nous constatons que le comportement du système est beaucoup plus sensible lorsqu'il est faiblement chargé. Comme nous l'avons évoqué précédemment, ceci s'explique par le fait que c'est dans cette zone que se produisent les changements de conditions de contact entre plaquettes et chape. Nous constatons qu'à basse pression, la frontière de stabilité est très accidentée et que la discrétisation adoptée est insuffisante pour la décrire correctement.

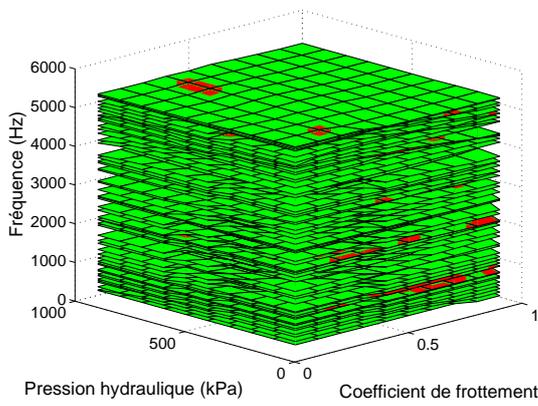
Un second plan d'expériences factoriel complet a donc été lancé afin d'affiner l'évaluation de la frontière de stabilité à basses pressions. La figure 3.41-b présente les résultats pour une pression



a. Plan complexe

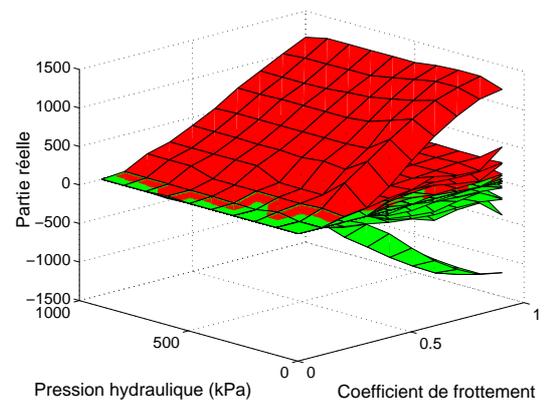


b. Plan complexe - détail



c. Evolution biparamétrique des fréquences

■ : Stable



d. Evolution biparamétrique des parties réelles

■ : Instable

FIG. 3.39 – Evolution des valeurs propres complexes en fonction de  $\mu$  et  $P$

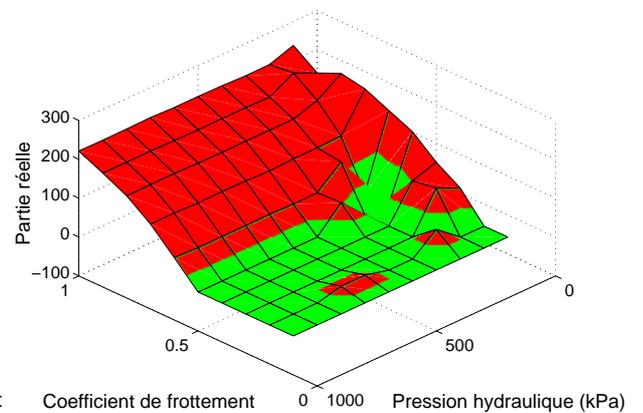
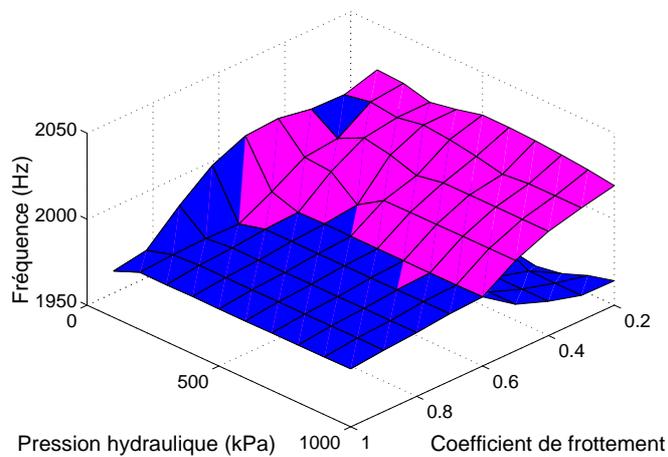


FIG. 3.40 – Courbe de coalescence à 1990 Hz fonction de  $\mu$  et  $P$

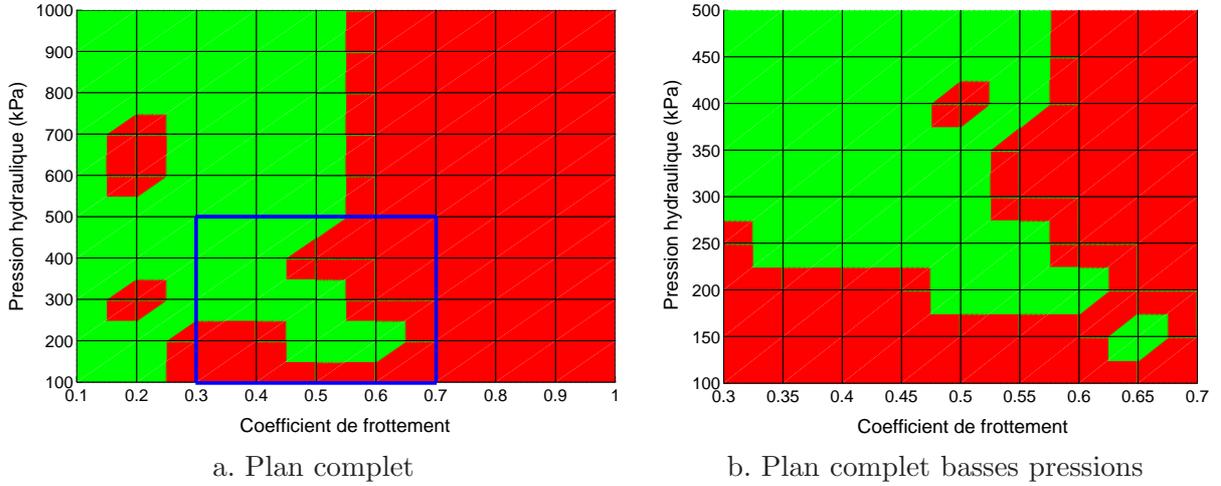


FIG. 3.41 – Diagramme de stabilité dans le plan  $(\mu, P)$  - ■ : Stable, ■ : Instable

hydraulique variant de 1 à 5 bar par pas de 0.5 bar et un coefficient de frottement 0.3 à 0.7 par pas de 0.05. Cette figure permet de tracer la frontière de stabilité de façon plus précise et met en évidence une enclave instable à  $P = 4$  bar,  $\mu = 0.5$ . Nous remarquons également une zone stable qui vient s'enclaver dans la zone instable et se prolonge du point de coordonnées  $(0.5, 250)$  à celui de coordonnées  $(0.65, 150)$ . Ceci forme un étroit « couloir » de stabilité qui explique la nature fugace du crissement dans ces conditions. En effet, il suffit d'une faible variation des paramètres pour rendre le système stable ou instable.

### 3.6 Rayonnement acoustique

Pour terminer ce chapitre, nous réalisons une étude du rayonnement acoustique du système. La bibliographie, que nous avons synthétisée chapitre 1, nous permet de conclure que le disque est le principal élément rayonnant du système dans le cas des crissements basses fréquences. Notre objectif est de trouver un indicateur capable de hiérarchiser les modes instables en fonction de leur « faculté » à rayonner. Pour cela, nous nous intéressons au ratio entre la puissance acoustique rayonnée  $\mathcal{P}_A$  et la puissance vibratoire totale  $\mathcal{P}_V$  associées à un mode donné. En faisant l'hypothèse que le disque est la seule pièce rayonnante et que le fluide est non visqueux, nous déduisons que la puissance vibratoire associée au disque dans la direction normale,  $\mathcal{P}_{V N}^{disque}$ , est la seule susceptible d'être convertie en puissance acoustique. En définissant le facteur de rayonnement par

$$\sigma = \frac{\mathcal{P}_A}{\mathcal{P}_{V N}^{disque}} \quad (3.26)$$

nous concluons que

$$\frac{\mathcal{P}_A}{\mathcal{P}_V} = \sigma \frac{\mathcal{P}_{V N}^{disque}}{\mathcal{P}_V} \quad (3.27)$$

Ce ratio, qui est calculé pour chaque mode, est l'image de son efficacité acoustique.

Dans la pratique, le rapport des puissances vibratoires est obtenu à partir du calcul modal complexe. Une estimation du facteur de rayonnement s'obtient par un calcul acoustique Sysnoise en utilisant la méthode des éléments de frontière (BEM). Pour calculer ce facteur, Sysnoise utilise une formule approchée qui ne représente pas la physique du disque de frein. Ceci peut conduire

à des valeurs non-physiques supérieures à 1. Bien que le résultat obtenu soit quantitativement faux, il est un bon indicateur qualitatif pour comparer les modes entre eux.

Les résultats du calcul acoustique sont présentés figure 3.42 dans l'exemple du mode à 1990 Hz. Les pressions acoustiques sont alors calculées à la surface du disque ainsi qu'à un mètre de son centre. Il faut néanmoins garder à l'esprit que les niveaux de pression acoustique obtenus n'ont aucune signification physique car ils sont associés à un mode. Par conséquent, seule une analyse qualitative de ces données est pertinente.

Le tableau 3.4 synthétise les différents résultats pour les trois modes instables du système. Nous noterons que dans notre cas, les trois modes font intervenir une composante importante de flexion de disque. Ceci explique pourquoi notre indicateur est du même ordre de grandeur pour les trois modes. Il se révélerait plus pertinent en cas de présence de modes ne faisant pas intervenir de composantes normales au disque.

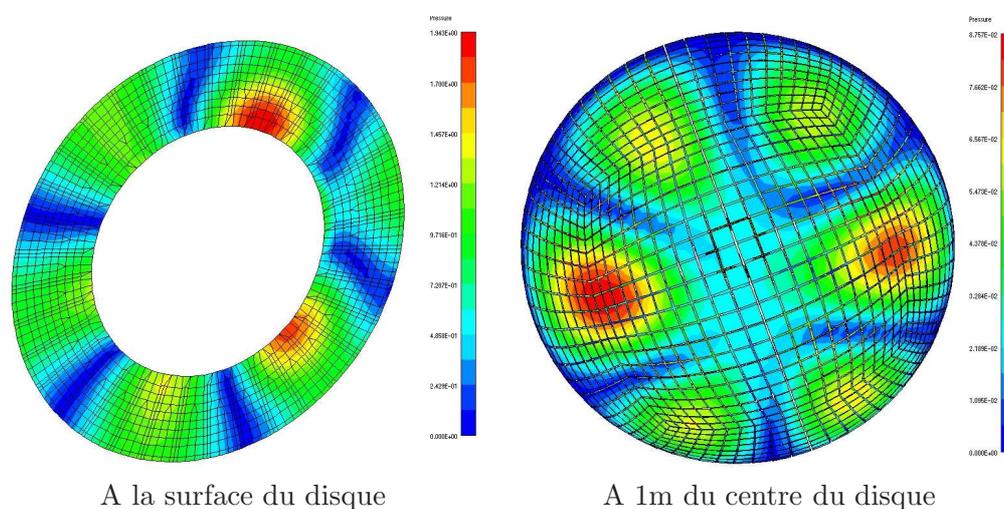


FIG. 3.42 – Pressions acoustiques calculées par méthode BEM pour le mode instable à 1990 Hz

Mode	$\sigma$	$\mathcal{P}_{V_N}^{disque} / \mathcal{P}_V$	$\mathcal{P}_A / \mathcal{P}_V$
1990 Hz	1.265	0.069	0.087
4420 Hz	1.659	0.113	0.188
5100 Hz	1.536	0.072	0.111

TAB. 3.4 – Critère de rayonnement des modes complexes

### 3.7 Conclusion

Un calcul précis de prédiction du crissement de frein nécessite trois étapes successives : un calcul statique non-linéaire, une linéarisation du problème autour du point de fonctionnement et un calcul aux valeurs propres complexes. Le calcul de préchargement statique est hautement non-linéaire de par la présence de contacts et nécessite une technique de résolution adaptée basée sur la méthode de Newton-Raphson. La linéarisation fait apparaître trois termes, dont un rend non-symétrique la matrice de raideur, alors que les deux autres contribuent à la matrice d'amortissement. Finalement, ceci permet de réaliser un calcul modal complexe afin de prédire la stabilité du système de freinage. Après avoir fait un état de l'art des outils capables de réaliser de telles analyses, nous avons choisi d'utiliser le solveur Abaqus. Jusqu'à présent, seul le contact disque-plaquettes a été étudié de façon précise par les différents chercheurs qui ont travaillé sur le sujet. Dans leurs travaux, les autres contacts impliquant plaquettes, étrier, piston et chape ne sont pas pris en compte ou sont modélisés de façon très simplifiée par des raideurs linéaires. Or, de nombreux travaux expérimentaux montrent qu'il est important de prendre en compte l'ensemble des contacts de façon précise.

Nous avons construit un modèle éléments finis du système de freinage dans sa globalité en modélisant de façon précise l'ensemble des contacts. Ainsi, nous considérons 17 contacts alors que la plupart des chercheurs n'en considèrent que 2. Une attention toute particulière a été apportée à la modélisation des contacts entre les plaquettes et la chape, contacts identifiés par les chercheurs comme une des causes probables de la très forte variabilité du crissement. Nous avons en particulier fait caractériser expérimentalement la raideur non-linéaire des ressorts de rappel des plaquettes.

Une fois le modèle finalisé, un calcul de crissement en trois étapes tel que décrit ci-dessus a été réalisé dans une configuration que nous nommons nominale. Celle-ci correspond à une pression hydraulique de 5 bar et à un coefficient de frottement de 0.6 entre le disque et les plaquettes. L'intégralité des efforts de frottement générés au niveau de cette interface est répercuté sur la chape par l'intermédiaire des plaquettes. Cette pièce se déforme et entraîne l'étrier en rotation selon  $\mathbf{x}$  par l'intermédiaire des colonnettes. Ceci a pour effet de dissymétriser la répartition de pression de contact à l'interface disque-plaquettes en privilégiant l'entrée de couple côté intérieur et la sortie de couple côté extérieur. De cette répartition particulière de pression dépend l'amplitude des efforts de frottement en chaque point de la surface frottante. La plaquette est soumise à un chargement multiple composé des efforts de frottement, des réactions de la chape au niveau des butées et des efforts de rappel exercés par les ressorts. Au nominal, l'équilibre des plaquettes montre que

- les plaquettes sont en contact avec les butées tangentielles de chape en sortie de couple,
- en entrée de couple, elles sont en contact avec les butées radiales extérieures,
- en sortie de couple, la plaquette intérieure est en équilibre entre ses deux butées radiales,
- en sortie de couple, la plaquette extérieure est en appui contre la butée radiale intérieure.

Le premier point est très simple à comprendre, mais les trois autres méritent quelques explications supplémentaires. Nous avons montré que le disque exerce sur les plaquettes un moment qui vaut environ 4 % du couple de freinage et qui a tendance à les faire tourner dans le même sens que le disque. Ce moment a donc tendance à les appuyer contre les butées radiales extérieures en entrée de couple et contre les butées radiales intérieures en sortie de couple. Du fait de la répartition des pressions de contact, ce phénomène est beaucoup plus marqué côté extérieur, où il est suffisant pour vaincre la raideur du ressort de rappel. De ce côté, la plaquette subit alors une grande rotation qui engendre un contact partiel sur la butée tangentielle. A partir de la position d'équilibre statique obtenue, un calcul modal complexe est réalisé et révèle trois crissements basses fréquences à 2, 4.4 et 5.1 kHz.

L'équilibre de la plaquette est très sensible aux conditions de chargement car les moments induits par le frottement et par les ressorts de rappel sont du même ordre de grandeur. Afin d'éclaircir ce point, deux études paramétriques ont été réalisées par rapport au coefficient de frottement et à la pression hydraulique. Elles nous ont permis de montrer clairement l'évolution des conditions et des pressions de contact, notamment au niveau des butées de chape, en fonction du chargement. Lorsque le système est faiblement chargé, c'est à dire lorsque la pression hydraulique ou le coefficient de frottement est faible, les ressorts de rappel parviennent à maintenir les plaquettes contre les butées radiales extérieures de chape. Lorsque l'un de ces deux paramètres augmente, ce n'est plus le cas. Nous mettons alors en évidence quatre non-linéarités dans le comportement statique du système au niveau des butées radiales de sortie de couple. Ces non-linéarités, qui apparaissent pour un chargement relativement faible, sont dans l'ordre

- la rupture du contact entre la plaquette extérieure et sa butée radiale extérieure,
- la rupture du contact entre la plaquette intérieure et sa butée radiale extérieure,
- la grande rotation de la plaquette extérieure qui engendre un contact partiel au niveau de la butée tangentielle,
- l'initialisation du contact entre la plaquette extérieure et sa butée radiale intérieure.

Comme dans le cas linéaire, l'étude paramétrique au coefficient de frottement permet de mettre en évidence le phénomène de coalescence comme le mécanisme qui donne naissance aux instabilités. Néanmoins, les courbes obtenues sont beaucoup plus complexes du fait des changements de position d'équilibre statique. Ainsi, les courbes de coalescence présentent des discontinuités cohérentes avec les non-linéarités statiques mises en évidence.

Une étude fine du comportement statique du système en fonction de la pression hydraulique et du coefficient de frottement a ensuite été réalisée au moyen d'un plan d'expériences factoriel complet. Nous sommes ainsi en mesure de déterminer pour quelles combinaisons de ces deux paramètres apparaissent les quatre non-linéarités associées à la mise en butée des plaquettes contre la chape. Ces non-linéarités, qui se produisent pour des chargements faibles engendrent une grande variabilité du comportement dynamique du système. Cette variabilité dans la stabilité du système a été mise en évidence par des courbes de coalescence biparamétriques et explique la nature fugace du crissement observée expérimentalement dans des conditions de faible chargement.

## Chapitre 4

# Modèle de conception

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un modèle détaillé sur lequel nous avons appliqué une méthodologie qui permet de prédire précisément le crissement. Un tel modèle se positionne pour une utilisation dans la phase de validation d'un nouveau système de freinage. Une fois toutes les pièces dessinées et complètement définies, l'objectif est alors de donner un pronostic sur sa prestation acoustique.

Dans ce chapitre, nous comptons aller plus loin et créer un modèle capable d'orienter les choix techniques et technologiques dès la phase de conception. Notre objectif ne se limite pas à la prédiction du crissement dans les conditions nominales d'utilisation mais englobe la prise en compte des différentes variabilités observées expérimentalement. Ainsi, nous envisageons d'améliorer la qualité du système dans une démarche de conception robuste.

Après avoir exposé la stratégie qui nous a conduit à la réalisation d'un modèle de conception, nous nous assurerons que celui-ci est capable de représenter la physique. Nous réaliserons des études paramétriques et des études de sensibilité afin de déterminer quels sont les paramètres dimensionnants. Nous analyserons ensuite la robustesse du crissement par rapport à ces paramètres. Pour terminer ce chapitre, nous proposerons dans une démarche de conception robuste des solutions permettant d'améliorer la qualité du système en réduisant le risque de crissement.

### 4.1 Ingénierie système

#### 4.1.1 Cycle en V

L'ingénierie système est un cadre méthodologique adopté par tous les concepteurs car il permet de réaliser des systèmes complexes conformément à un cahier des charges fixé. Le principal outil de l'ingénierie système est le cycle en V, représenté figure 4.1. Cette démarche consiste, dans la descente du cycle, à affiner progressivement la définition du système puis, dans la remontée du cycle, à le fabriquer en s'assurant à chaque étape de sa conformité par rapport à sa définition.

La phase de conception débute par une expression du besoin et se poursuit en décomposant progressivement le système en ensembles fonctionnels, en sous ensembles fonctionnels puis en organes et enfin en pièces. Ce processus permet de séparer clairement les deux étapes de la conception qui sont respectivement basées sur les visions fonctionnelle et organique. La vision fonctionnelle permet de définir les fonctions que doit remplir le système alors que la vision organique consiste à choisir les solutions techniques et matérielles qui permettent de réaliser ces fonctions. La vision organique est déclinée au niveau de chaque pièce pour aboutir finalement aux spécifications techniques de l'ensemble du système.

Actuellement, la problématique du crissement de frein n'est prise en compte que dans la phase d'intégration au niveau I2, sur le périmètre du système de freinage, et au niveau I4 lors de

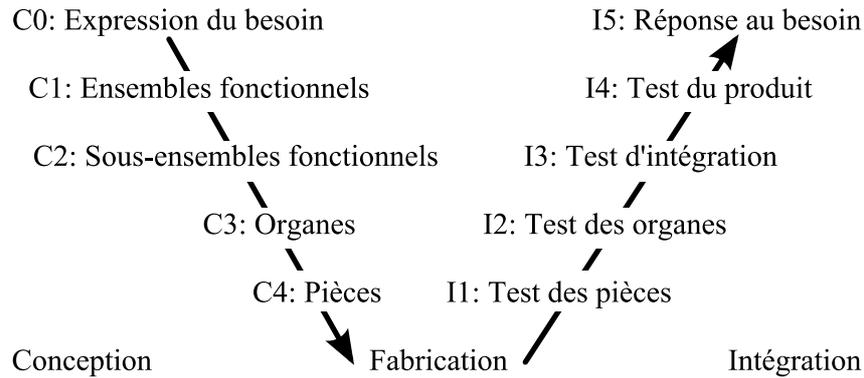


FIG. 4.1 – Cycle en V

tests sur véhicule complet. Ces validations sont réalisées très tardivement dans la vie du projet. En conséquence, si des problèmes sont détectés, la marge de manœuvre est très limitée et les modifications sont très onéreuses puisque le système est complètement défini et que les outils définitifs sont déjà réalisés.

#### 4.1.2 Chaînage des modèles dans la phase de conception

Le recours au calcul permet de prévenir ces problèmes en évaluant les performances du système dès la fin du niveau C4, c'est à dire juste avant le lancement de la fabrication. C'est ce que nous avons effectué dans le chapitre précédent grâce à un modèle éléments finis détaillé et représentatif du système de freinage que l'on appelle *modèle de développement*.

Dans un processus de conception efficace, le calcul ne doit pas être cantonné à la vérification a posteriori des performances du système, mais doit être intégré à toute la phase de descente du cycle. A chaque niveau correspond alors un type de modèle dont la précision dépend du degré de définition du système :

- *Modèles fonctionnels* pour les niveau C1 et C2. Ils ne font intervenir que des paramètres relatifs à la fonction du système et non à la façon dont cette fonction sera réalisée.
- *Modèles matériels simplifiés* pour le niveau C3. A ce stade, les principales caractéristiques matérielles du système sont connues, mais le dessin précis des pièces n'est pas encore disponible. En général, ces modèles sont de type éléments finis.
- *Modèles de développement* pour le niveau C4. Ils sont également de type éléments finis.

La mise en place d'une stratégie hiérarchisée de conception repose alors sur un processus d'optimisation à chaque niveau, basé sur le modèle correspondant.

#### 4.1.3 Application au crissement de frein

Dans le cas du crissement de frein, il est excessivement difficile d'appliquer cette stratégie dans son intégralité. En effet, le phénomène est d'une sensibilité telle aux différents paramètres, qu'il est indispensable de connaître les solutions technologiques utilisées pour obtenir un niveau de prédiction correct. En conséquence, le seul modèle pertinent pour une utilisation en avant projet est le modèle matériel simplifié, que nous nommerons donc dans la suite *modèle de conception*.

Ce modèle s'appuie sur les principales dimensions et solutions technologiques retenues, mais les différentes pièces ne sont pas encore complètement définies et leurs géométries sont simplifiées de façon importante. Un tel modèle est donc beaucoup moins coûteux en temps de calcul qu'un modèle de développement, ce qui autorise des études paramétriques de grande ampleur. Ainsi,

dans un premier temps, nous pourrions évaluer la robustesse du système par rapport aux paramètres dispersés, action que nous n'avons pu envisager sur le modèle de développement du fait de sa lourdeur. Néanmoins, le véritable objectif du modèle de conception est d'explorer l'espace des paramètres de conception afin de trouver une configuration optimale, à la fois en terme de performance et de robustesse.

A notre connaissance, aucun chercheur n'a jusqu'à présent envisagé cette approche basée sur un modèle de conception pour le crissement de frein. Néanmoins, certains d'entre eux ont tenté de prendre en compte sa variabilité et d'évaluer sa robustesse sur des modèles de développement. Avant d'aller plus loin, nous allons synthétiser brièvement leurs travaux.

#### 4.1.4 Synthèse des travaux sur la variabilité et la robustesse du crissement

##### Etudes paramétriques et de sensibilité

Dès l'apparition des premiers modèles de prédiction du crissement, les chercheurs ont cherché à évaluer sa variabilité par différentes méthodes plus ou moins évoluées. Ils commencent par sélectionner un certain nombre de paramètres de modélisation qu'ils jugent importants. Ces paramètres sont souvent des modules d'Young, des raideurs de liaison et parfois des paramètres géométriques. Ils réalisent ensuite des études paramétriques en faisant varier quelques uns de ces paramètres de façon indépendante [101, 109, 86, 145, 77, 135, 69, 63, 92, 99, 85, 148]. Il serait trop long mais également inutile de détailler les conclusions de ces études car elles ne sont pas généralisables et sont souvent contradictoires. D'autres chercheurs ont développé des méthodes analytiques permettant d'évaluer la sensibilité des valeurs propres complexes par rapport à certains paramètres [57, 90]. Ces méthodes sont spécifiques au type de sous structuration utilisé et ne sont valides qu'au voisinage du point de fonctionnement.

##### Analyses stochastiques

Des analyses stochastiques ont également été réalisées. Chung et al. déterminent que les écarts en fréquence entre deux modes qui se couplent sont de l'ordre de 1 à 3 %, alors que l'écart induit par les tolérances de fabrication des pièces est de l'ordre de 5 % [33]. Ils traitent alors le crissement comme un problème statistique puisqu'un unique calcul ne permet pas de conclure de façon robuste sur la prestation. Ils prennent en compte la variabilité des pièces comme une incertitude sur la fréquence des modes sans frottement. Im et al. [67] proposent également une analyse stochastique mais cette fois en considérant comme paramètres incertains les raideurs de contact et les amortissements. Cette analyse commence par le choix d'une valeur nominale, d'une loi et d'une plage de variation pour chaque paramètre. Elle se poursuit par une simulation de Monte Carlo comportant 100 calculs. Les résultats sont analysés de façon statistique par une analyse de la variance (ANOVA). Cette méthodologie permet de déterminer le paramètre le plus influent sur l'amplitude de la partie réelle.

##### Analyse de robustesse

Chen et Quaglia expliquent qu'il est important d'analyser la robustesse du système par rapport à la variabilité des différents paramètres [30, 133]. Ils discutent de ce type d'analyse, en citant notamment les paramètres qu'ils jugent importants, sans toutefois la mettre en œuvre. Jaber et al. proposent ce qu'ils appellent un « dynamomètre virtuel » basé sur le logiciel Nastran [71]. La démarche consiste simplement à réaliser des calculs aux valeurs propres complexes pour 8 couples (pression, coefficient de frottement). A notre connaissance, Kapadnis et Im sont les seuls qui ont réalisé une véritable analyse de la robustesse du crissement [79]. En effet, ils proposent un plan produit avec 2 facteurs de bruit et 3 facteurs de contrôle comprenant au total 81 expériences. Pour

chaque combinaison des facteurs de contrôle, la réponse moyenne et le ratio signal sur bruit sont calculés. Ceci permet de choisir la meilleure configuration en terme de compromis performance / robustesse.

#### 4.1.5 Conclusion

Pour concevoir au mieux un système de freinage, il est important de prendre en compte la problématique du crissement au plus tôt dans le processus de conception. En effet, ceci permet de faire les bons choix aux bons moments afin d'aboutir à un système performant et robuste. Nous avons montré que le seul modèle de conception pertinent pour orienter ces choix est un modèle matériel simplifié. De par son très bon rapport précision / temps de calcul, ce modèle nous permettra dans un premier temps d'évaluer la variabilité et la robustesse du système par rapport aux différentes dispersions. Nous envisageons de réaliser ces analyses de la façon la plus exhaustive possible. De plus, contrairement aux travaux réalisés jusqu'alors, nous envisageons de prendre en compte le préchargement du système. Le véritable objectif du modèle est d'explorer l'espace des paramètres de conception afin de trouver une configuration optimale, à la fois en terme de performance et de robustesse. Nous allons maintenant présenter ce modèle simplifié et sa construction au juste nécessaire.

## 4.2 Construction du modèle de conception

### 4.2.1 Identification des paramètres

La simplification d'un modèle entraîne nécessairement une dégradation de sa prédictivité, notamment à haute fréquence. Il faut donc avoir une idée claire de ce que l'on cherche à représenter avec ce modèle. Nous nous sommes fixés comme objectif de représenter le comportement dynamique du système au voisinage de 2 kHz. Cette plage de fréquence est en effet celle qui pose le plus de problèmes d'un point de vue pratique.

Dans un premier temps, les principales caractéristiques du modèle de développement ont été listées et documentées, en termes de géométrie, de propriétés matériaux et de solutions technologiques. Nous avons ensuite estimé et hiérarchisé l'impact de ces différents paramètres sur le crissement en nous servant à la fois de la bibliographie, de résultats expérimentaux et des résultats numériques du modèle de développement. Au final, nous n'avons retenu que les paramètres de conception qui nous semblaient les plus importants.

### 4.2.2 Construction du modèle

La liste des paramètres de conception retenue nous a permis de construire un cahier des charges du modèle de conception, en ayant pour principal souci de maximiser son compromis précision / coût de calcul. Un certain nombre de choix ont été faits dans ce sens. Le maillage a été réalisé en hexaèdres linéaires avec réduction de la taille de maille là où cela est nécessaire. Le porte fusée a été simplifié de façon importante dans la mesure où le modèle de développement a montré que cette pièce ne participe que très peu au comportement dynamique à 2 kHz. La partie centrale du disque, qui présente une géométrie très complexe de par la présence des ailettes de refroidissement a été simplifiée et le disque a été modélisé de façon pleine. Nous avons redessiné puis maillé les différentes pièces avant de les assembler en reprenant la même technique que celle utilisée pour le modèle de développement. Au final, cette démarche nous a conduit à réaliser le modèle de conception représenté figure 4.2 qui comporte 13 000 nœuds et 8 500 éléments.

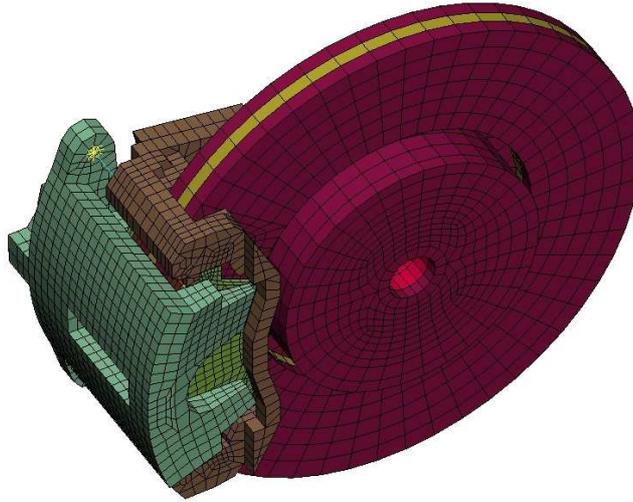


FIG. 4.2 – Modèle de conception

## 4.3 Comparaison avec le modèle de développement

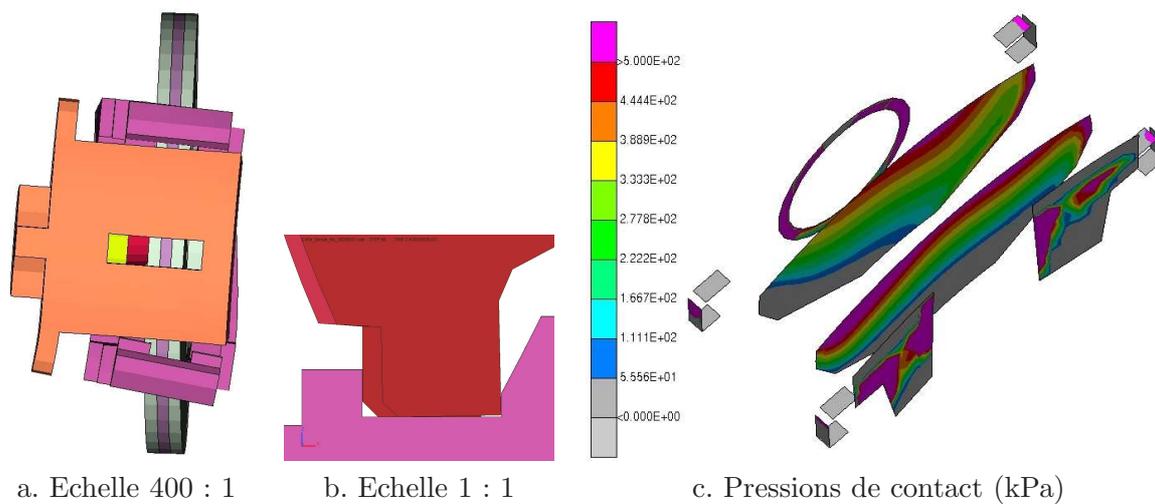
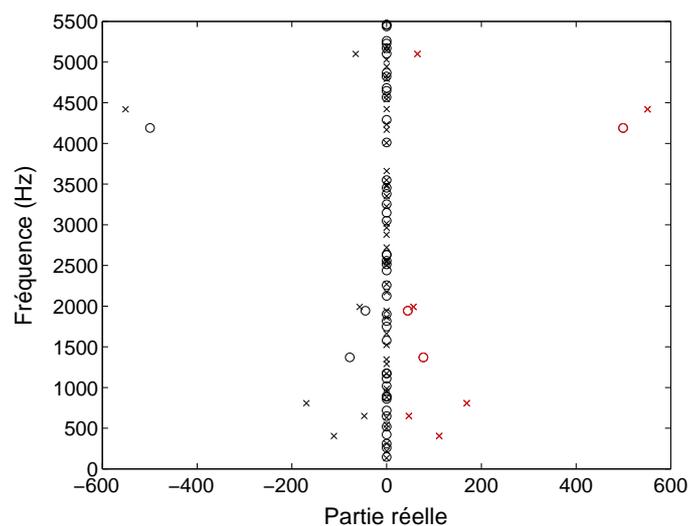
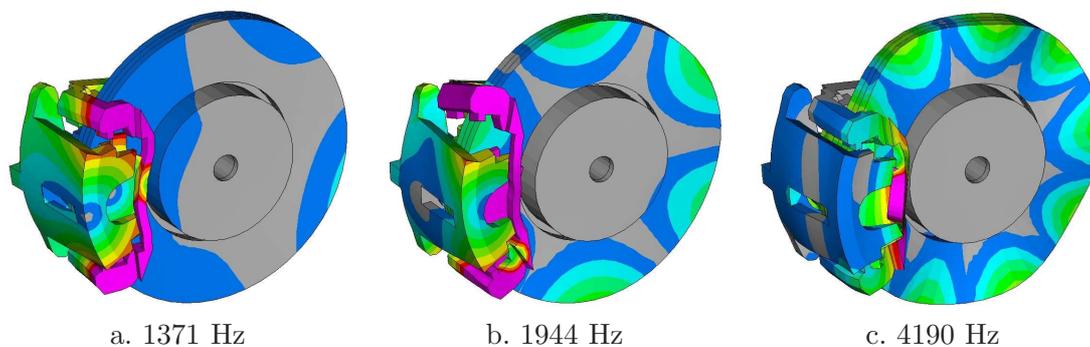
### 4.3.1 Recalage

Le disque étant modélisé comme un disque plein, il nous faut déterminer les caractéristiques mécaniques équivalentes de sa partie centrale, que nous nommerons « cœur », afin de prendre en compte l'effet des ailettes de refroidissement. La densité équivalente s'obtient en réalisant un bilan de masse, ce qui nous donne  $\rho_c = 1390 \text{ kg/m}^3$ . La détermination du module d'Young équivalent a été réalisée en deux temps. Il a d'abord été estimé grossièrement en réalisant une analyse paramétrique sur le disque seul en libre-libre. En recalant en fréquence les modes de flexion à trois diamètres nodaux des disques réel et simplifié, nous obtenons la valeur de  $E_c \simeq 6.5 \text{ GPa}$ . Une étude paramétrique est ensuite réalisée autour de cette estimation en considérant le système complet et en réalisant à chaque fois un préchargement suivi d'une étude aux valeurs propres complexes. L'objectif est alors de comparer les courbes de coalescence des systèmes réel et simplifié et de déterminer la valeur de  $E_c$  qui garantit la meilleure corrélation, tant en terme de parties réelles que de fréquences. La valeur retenue est  $E_c = 5.25 \text{ GPa}$ .

### 4.3.2 Point de fonctionnement nominal

Nous allons maintenant comparer le comportement du système de développement et celui du système de conception recalé, dans les conditions nominales de pression et de coefficient de frottement ( $P = 5 \text{ bar}$ ,  $\mu = 0.6$ ). La figure 4.3, qui décrit la déformée statique du modèle de conception, est à comparer aux figures 3.9, 3.10 et 3.15 pour le modèle de développement. Nous constatons que la corrélation est très bonne, tant qualitativement que quantitativement. En effet, nous retrouvons à la fois la rotation d'étrier (a) et la mise en position des plaquettes entre les butées radiales de chape (b). De plus, les cartographies de pression de contact obtenues sont en tout point similaires à celles trouvées sur le modèle de développement (c).

L'analyse aux valeurs propres complexes réalisée autour de cette position d'équilibre statique indique trois modes instables à 1371, 1944 et 4190 Hz, comme illustré figures 4.4. Nous constatons que les deux modes les plus hauts en fréquence présentent une bonne corrélation dans le plan complexe avec deux modes instables du modèle de développement, respectivement à 1990 et 4420 Hz.

FIG. 4.3 – Comportement statique -  $\mu = 0.6$  -  $P = 5$  barFIG. 4.4 – Plan complexe -  $\mu = 0.6$  -  $P = 5$  bar - Modèle de  $\circ$  : conception,  $\times$  : développementFIG. 4.5 – Modes complexes -  $\mu = 0.6$  -  $P = 5$  bar

Pour aller plus loin dans l'analyse, il nous faut examiner la figure 4.5 qui présente les déformées des modes instables du modèle de conception. Nous allons les décrire précisément en les comparant aux modes instables du modèle de développement (cf page 105).

**mode à 1371 Hz** : ce mode présente une flexion d'étrier et une torsion de chape. Les plaquettes glissent à la surface du disque. En particulier, la plaquette extérieure suit un mouvement combinant une translation en  $\mathbf{z}$  et une rotation en  $\mathbf{y}$ . De plus, la garniture extérieure se déforme en compression. Le disque subit une variante de flexion de disque à deux diamètres nodaux qui se propage sous la forme d'une travelling wave. Après vérification, nous constatons que ce mode est identique au mode à 1374 Hz mis en évidence par l'analyse paramétrique à la pression hydraulique, sur le modèle de développement, figure 3.33.

**mode à 1944 Hz** : le mode complexe à 1944 Hz est quasiment identique au mode à 1990 Hz du modèle de développement. Ils diffèrent uniquement par une position des lignes nodales légèrement différente sur le disque et une déformation d'étrier qui est une torsion pour le premier et une flexion pour le second.

**mode à 4190 Hz** : le mode complexe à 4190 Hz est quasiment identique au mode à 4420 Hz du modèle de développement. Ajoutons que la flexion d'étrier se produit avec les doigts en opposition de phase, et que la torsion de chape s'accompagne de forts déplacements de la poignée de valise.

Les trois modes basses fréquences du modèle de développement ne sont pas retrouvés sur le modèle de conception. En effet, ceux-ci présentent une forte composante de déformation du porte fusée qui a été simplifié de façon importante dans le modèle de conception.

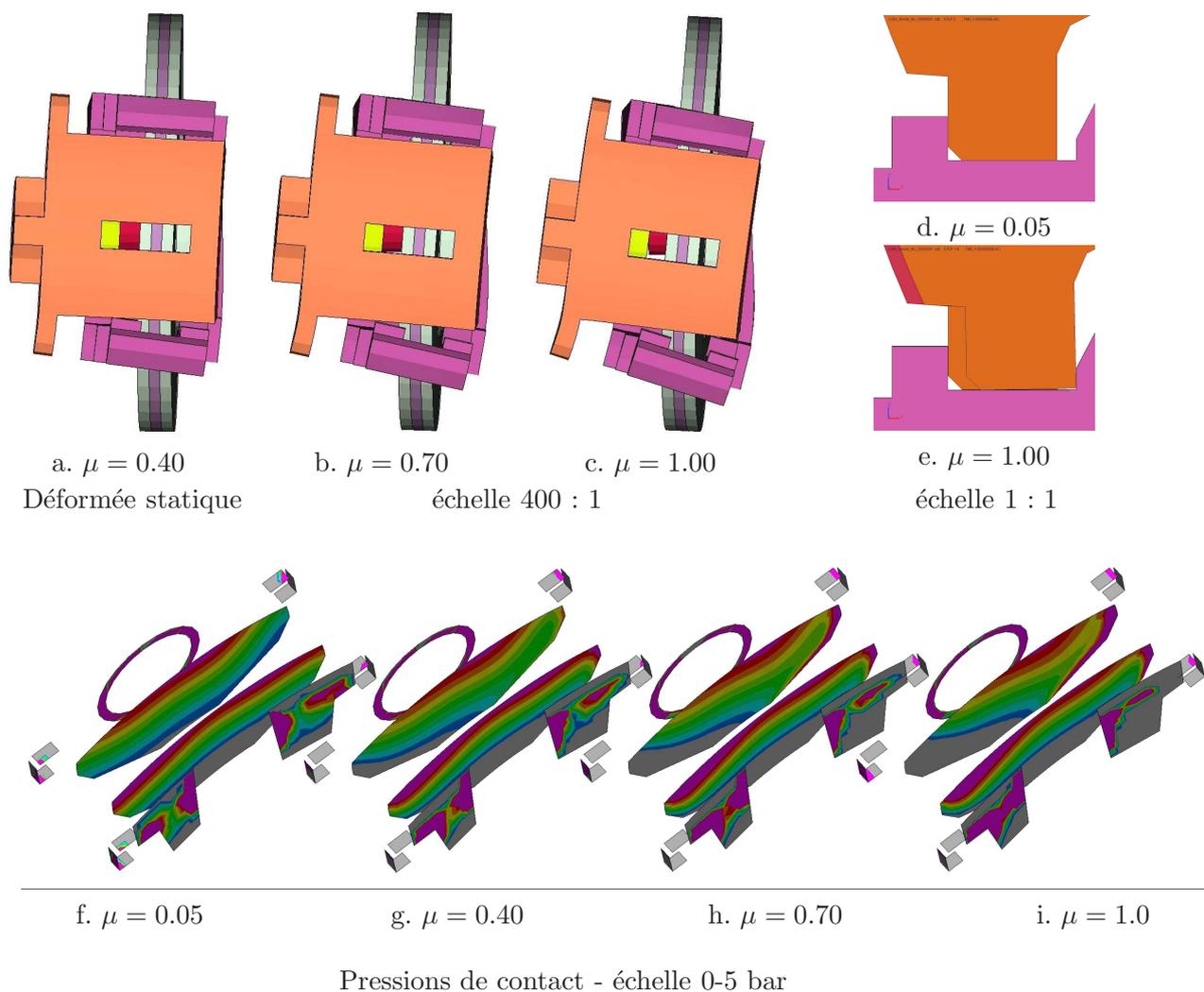
En conclusion, le modèle de conception permet de prédire à faible coût le comportement dynamique du modèle de développement autour de 2 kHz. La corrélation obtenue fait intervenir des écarts de 2.3 % en fréquence et de 21 % en parties réelles. En statique, la corrélation entre les deux modèles est très bonne. En dynamique, les simplifications réalisées ne permettent pas de retrouver le comportement en basses fréquences, mais la corrélation est bonne de 1500 à 5000 Hz, à la fois en termes de fréquences, de parties réelles et de déformées.

### 4.3.3 Effet du coefficient de frottement

Il nous faut maintenant vérifier que l'effet du coefficient de frottement est correctement reproduit par le modèle de conception. Nous allons en particulier nous focaliser sur les non-linéarités dans le comportement statique, associées à la mise en butée des plaquettes sur la chape. La figure 4.6 nous montre qualitativement qu'en statique les phénomènes de rotation d'étrier et de mise en butée sont bien reproduits.

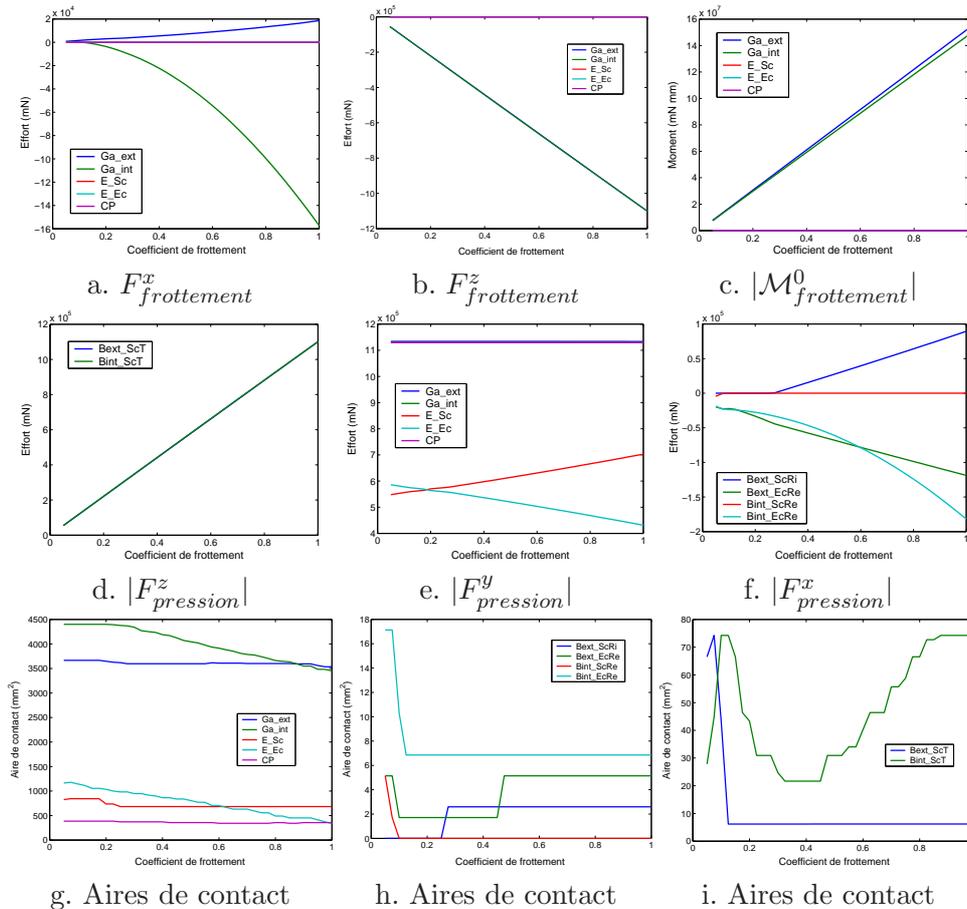
Pour affiner l'analyse, la figure 4.7 synthétise l'évolution des conditions de contact en fonction du coefficient de frottement. Nous constatons que même si les courbes représentant l'évolution des aires de contact sont un peu bruitées du fait de la discrétisation adoptée, toutes les courbes sont bien corrélées par rapport au modèle de développement (cf figures 3.19, 3.21 et 3.24). Elles permettent de mettre en évidence les non-linéarités du comportement statique. En effet, la plaquette intérieure quitte sa butée radiale extérieure en sortie de couple dès  $\mu = 0.1$  et reste à proximité par la suite. La plaquette extérieure fait de même dès  $\mu = 0.075$ , puis elle se met de biais dès  $\mu = 0.125$ . Elle atteint sa butée radiale intérieure à partir de  $\mu = 0.275$  et au delà de cette valeur, l'effort transitant par ce contact croît progressivement. Toutes ces données sont synthétisées et comparées à celles du modèle de développement, dans le tableau 4.1. Nous constatons que les non-linéarités statiques sont bien retrouvées, même si le coefficient de frottement associé à la mise en butée radiale intérieure de la plaquette extérieure est sous estimé.

La figure 4.8-a compare, dans le plan complexe, les valeurs propres des deux modèles lors de la même étude paramétrique au coefficient de frottement. Au delà de 1.5 kHz, les deux modèles

FIG. 4.6 – Evolution du comportement statique en fonction de  $\mu$  - P = 5 bar

Plaquette	Action	Modèle de	
		développement	conception
intérieure	quitte la butée radiale extérieure	0.100	0.100
extérieure	quitte la butée radiale extérieure	0.050	0.075
extérieure	se met de biais	0.175	0.125
extérieure	atteint la butée radiale intérieure	0.400	0.275

TAB. 4.1 – Valeurs de  $\mu$  marquant les non-linéarités statiques - comparaison des modèles

FIG. 4.7 – Evolution des conditions de contact en fonction de  $\mu$ 

détectent quatre modes instables. La corrélation est bonne au voisinage de 2 kHz, même si les parties réelles sont sous estimées. En s'éloignant de la fréquence de recalage, la corrélation en fréquence se dégrade. La figure 4.8-b, qui présente la courbe de coalescence du mode à 1944 Hz, met en évidence l'effet des non-linéarités statiques sur le comportement dynamique. Les non-linéarités à  $\mu = 0.75$  et  $0.125$  sont bien retrouvées. En revanche, celle à  $\mu = 0.275$  est très peu marquée et d'autres au voisinage de  $\mu = 0.2$  ne sont pas expliquées par un changement net des conditions de contact.

La figure 4.9 compare l'évolution du comportement dynamique des deux modèles en fonction du coefficient de frottement, à la fois en fréquences et en parties réelles. Notons qu'en raison d'un décalage fréquentiel de 45 Hz entre les deux modèles, nous utilisons deux échelles distinctes afin de faciliter la lecture des courbes. En dépit de cet écart et des positions différentes des non-linéarités statiques, le comportement fréquentiel est dans l'ensemble bien reproduit. Il en est de même pour les parties réelles, même si elles sont largement sous estimées pour les coefficients de frottement élevés. Néanmoins, le point fondamental qui fait tout l'intérêt du modèle de conception est qu'il est capable de prédire de façon très précise le point de coalescence. En effet, les deux modèles donnent exactement la même valeur, à savoir  $\mu_c = 0.55$ .

L'évolution des déformées des trois modes a été analysée en fonction du coefficient de frottement. Celle-ci est en grande partie similaire à celle observée sur le modèle de développement, page 111, même si quelques légères différences apparaissent pour les faibles valeurs de  $\mu$ .

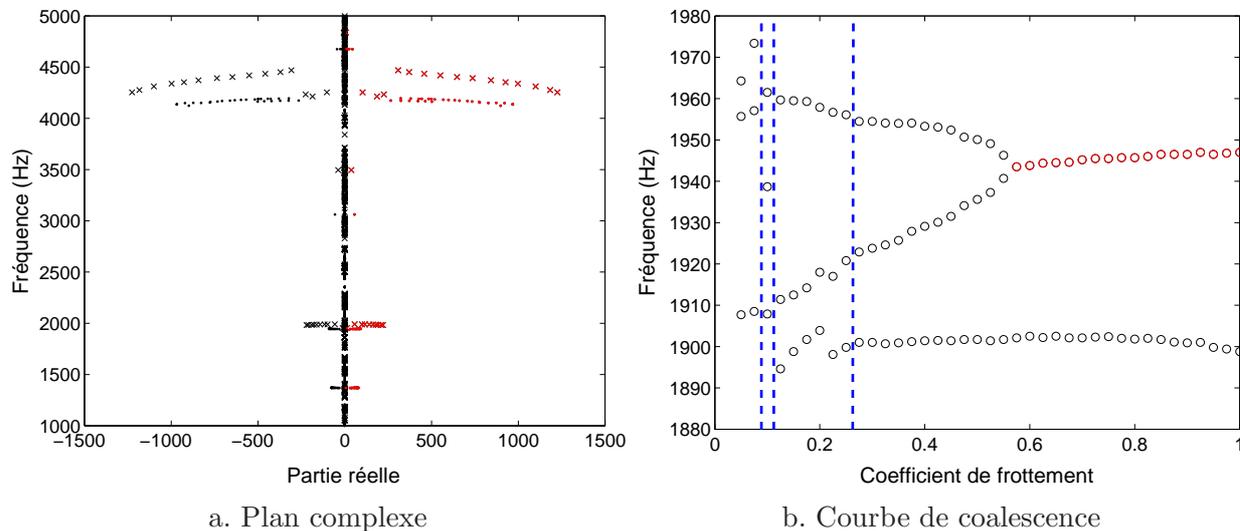
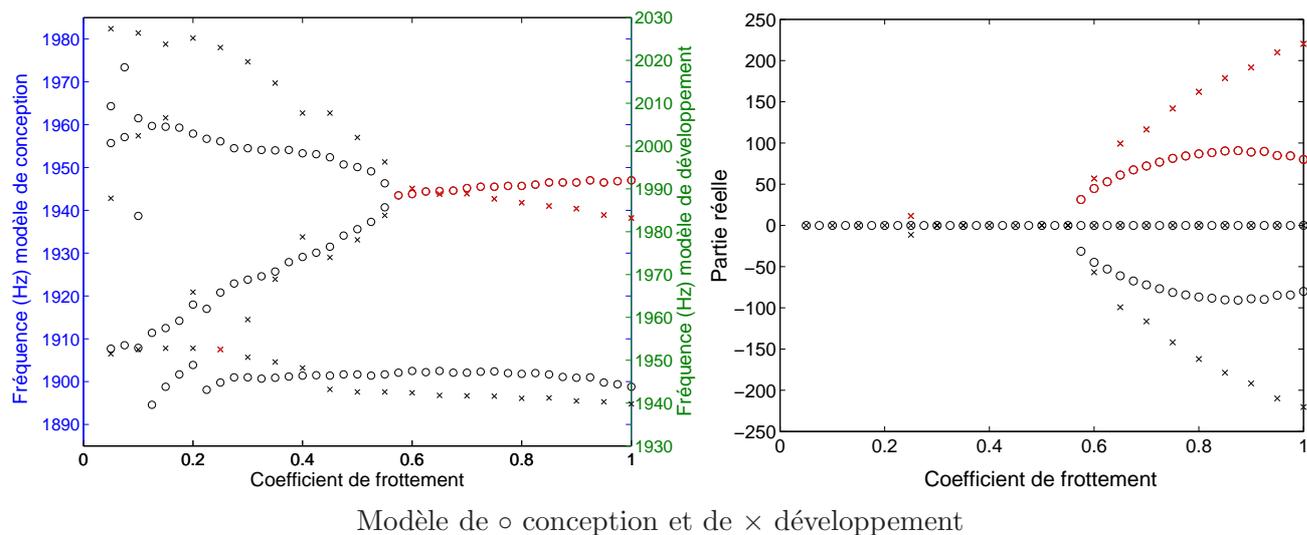


FIG. 4.8 – Comportement dynamique - Modèle de ● conception, × développement



Modèle de ○ conception et de × développement

FIG. 4.9 – Comparaison de la dynamique des modèles en fonction de  $\mu$

#### 4.3.4 Effet de la pression hydraulique

Nous allons maintenant vérifier si l'effet de la pression hydraulique est correctement représenté par le modèle de conception. Par souci de concision, nous ne nous intéresserons qu'au comportement dynamique du système. La figure 4.10 indique que les deux modèles prédisent les quatre même modes instables entre 1 et 5 kHz pour une pression hydraulique variant de 1 à 10 bar. Notons en particulier le mode à 1370 Hz qui a fait l'objet de précédentes remarques. La figure 4.11 détaille l'évolution de la dynamique du système en fonction de la pression hydraulique. Malgré des différences de comportement en basses pressions, la corrélation entre les deux modèles est bonne à la fois en fréquences et en parties réelles. En effet, les deux modèles montrent qu'au delà d'une valeur limite, respectivement 2.5 bar pour le modèle de conception et 4 bar pour le modèle de développement, la pression hydraulique n'a quasiment plus d'influence sur le comportement dynamique du système.

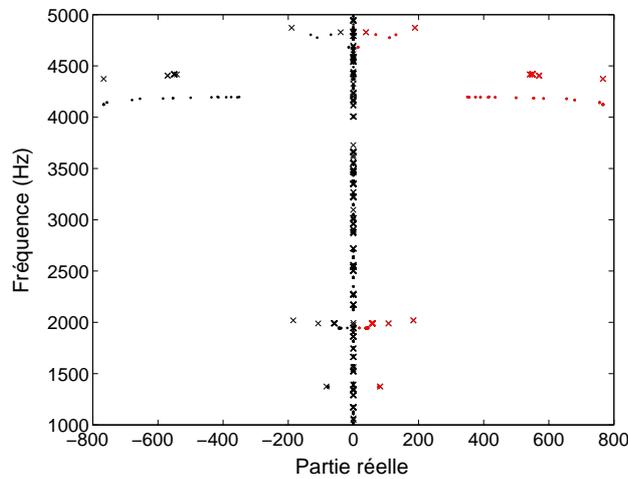


FIG. 4.10 – Variabilité des valeurs propres à  $P$  - Modèle de ● conception, de × développement

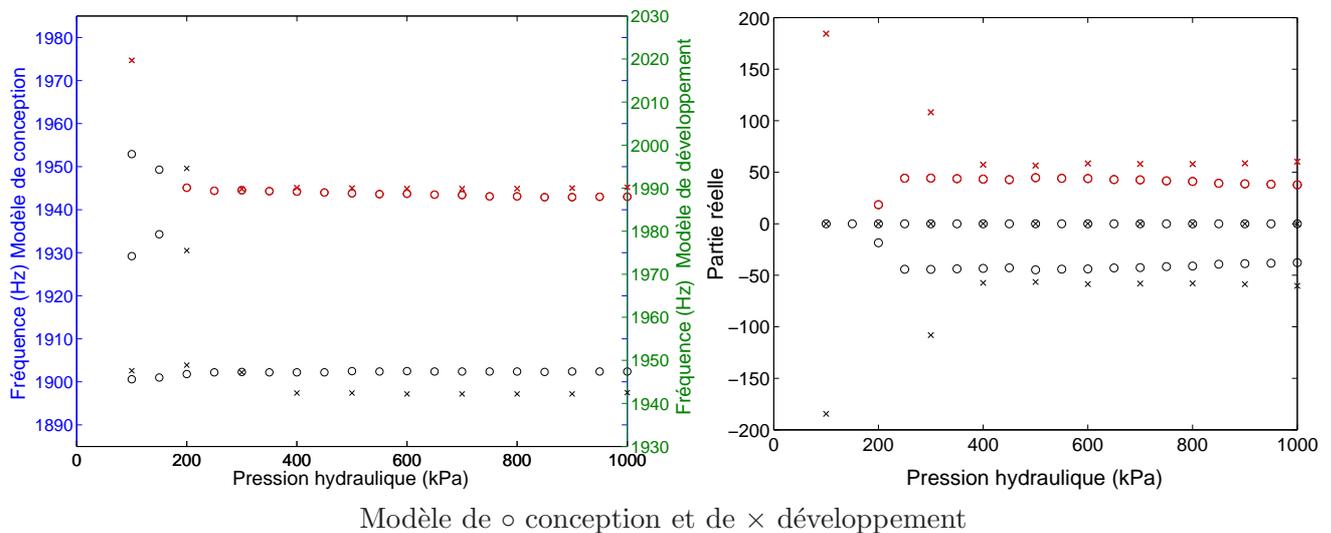
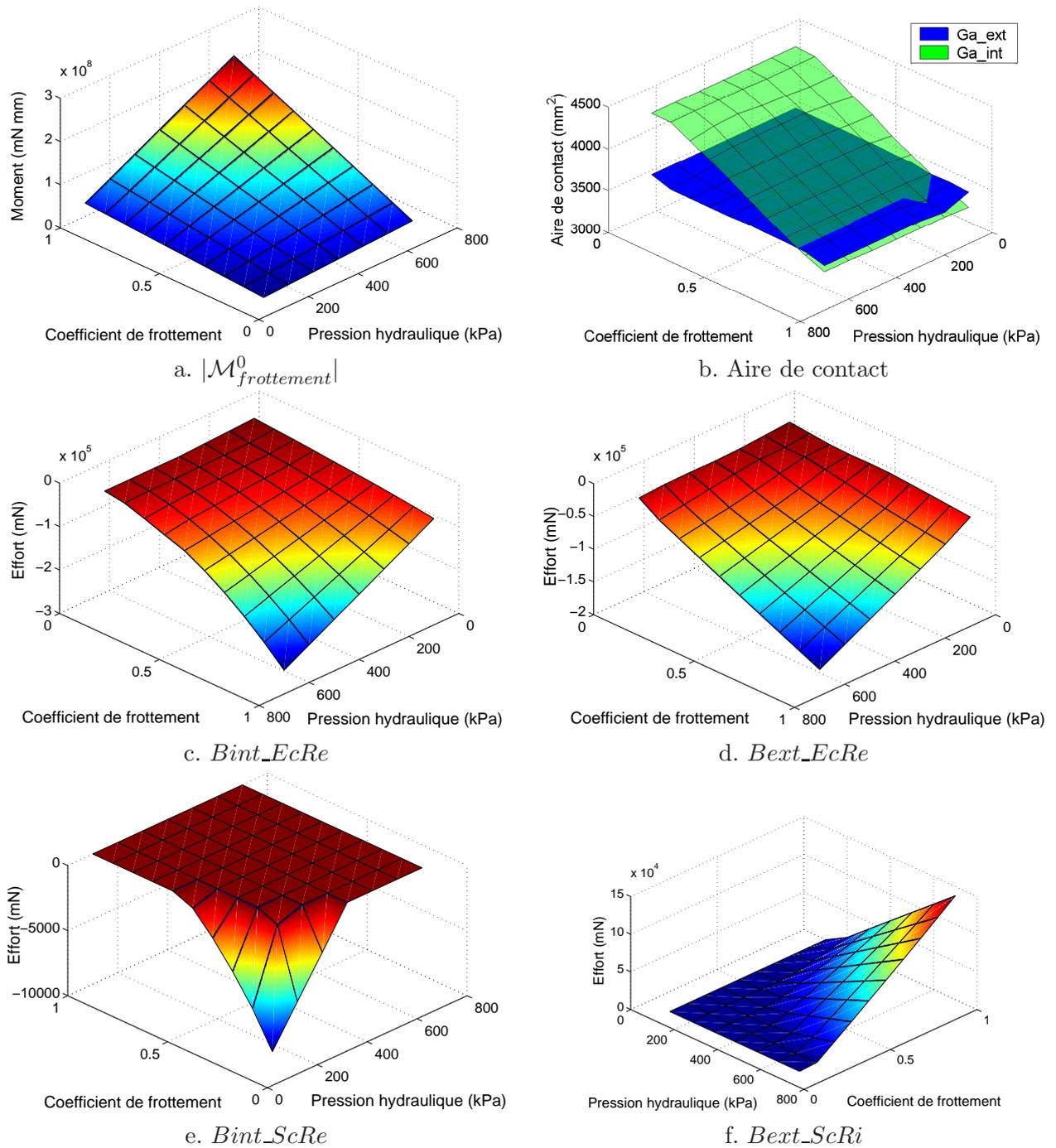


FIG. 4.11 – Comparaison de la dynamique des modèles en fonction de  $P$

Afin de s'assurer que ceci est vérifié pour toutes les valeurs du coefficient de frottement, un plan d'expériences factoriel complet a été lancé par rapport au coefficient de frottement et à la pression hydraulique. Notons que compte tenu de la faible sensibilité du système à haute pression, nous limitons l'étude à 7 bar. La figure 4.12 rassemble les principales courbes qui décrivent la statique du système en fonction des deux paramètres. Nous retrouvons le même comportement que celui du modèle de développement, en particulier en ce qui concerne l'évolution des non-linéarités statiques au niveau des butées radiales de chape. Les résultats dynamiques, qui sont présentés figure 4.13, sont cohérents avec ceux du modèle de développement, bien que ponctuellement de légères divergences apparaissent. La figure 4.14, qui représente les courbes de coalescence du mode instable à 1944 Hz, confirme qu'au delà de 2 bar, la pression hydraulique n'a quasiment plus d'effet sur les fréquences et les parties réelles. Cette conclusion est tout de même à nuancer pour les très faibles et les très fortes valeurs de  $\mu$  respectivement pour les fréquences et les parties réelles.

#### 4.3.5 Conclusion sur la représentativité du modèle

Le modèle de conception présenté a été construit en simplifiant au juste nécessaire la géométrie du modèle de développement afin d'approximer à moindre coût le comportement de ce dernier au voisinage de 2 kHz. La principale simplification consiste à considérer la partie centrale du disque qui comporte les ailettes de refroidissement comme pleine et associée à des caractéristiques matériau équivalentes. Après un recalage permettant de trouver ces propriétés équivalentes, le comportement du modèle a été comparé à celui du modèle de développement. Au nominal, la corrélation est bonne à la fois en termes de fréquences, de parties réelles et de déformées au voisinage de la fréquence de recalage. Néanmoins, les parties réelles ont tendance à être sous estimées par le modèle de conception. L'effet du coefficient de frottement est très bien reproduit dans la mesure où les deux modèles aboutissent exactement à la même valeur pour le coefficient de frottement critique. L'effet de la pression est également bien reproduit puisque les deux modèles s'accordent pour montrer qu'au delà de 4 bar, la pression hydraulique a très peu d'influence sur le comportement dynamique du système. Il faut néanmoins garder à l'esprit les limitations de ce modèle. En effet, il n'est vraiment représentatif qu'au voisinage de la fréquence de recalage et a du mal à prédire le comportement du système lorsqu'il est faiblement chargé, c'est à dire lorsque le comportement est le plus sensible. Sa précision est très correcte dans le domaine qui nous intéresse et il a le très grand avantage d'être peu coûteux en temps de calcul. Ceci permet d'envisager sereinement la réalisation d'études paramétriques de grande ampleur.

FIG. 4.12 – Comportement statique du modèle de conception dans le plan  $(\mu, P)$

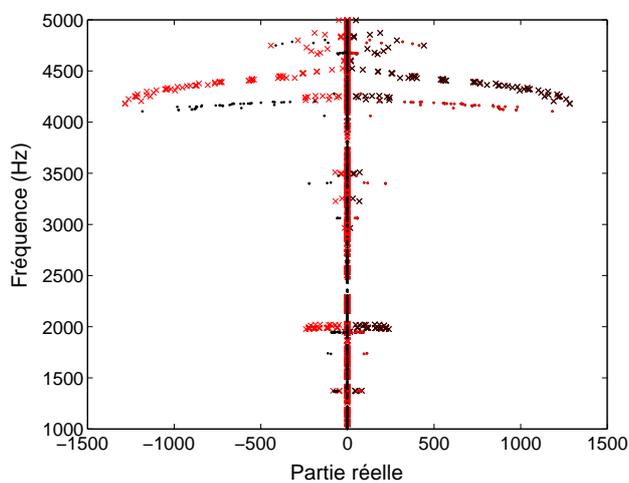


FIG. 4.13 – Variabilité des valeurs propres à  $\mu$  et  $P$  - Modèle de  $\bullet$  conception,  $\times$  développement

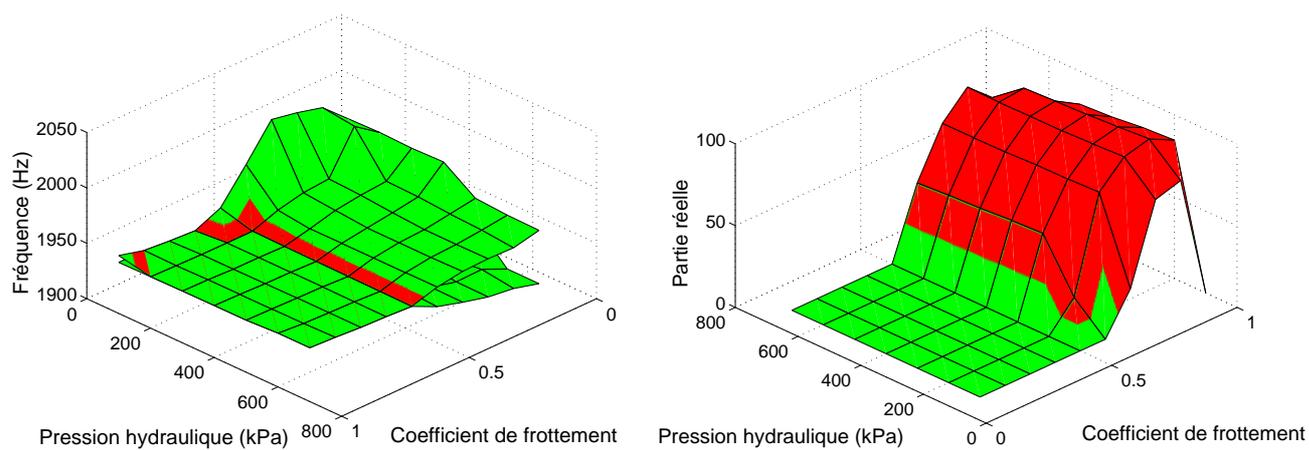


FIG. 4.14 – Courbes de coalescence du mode instable à 1944 Hz en fonction de  $\mu$  et de  $P$

## 4.4 Etudes paramétriques

Dans un premier temps, nous allons étudier l'effet d'un certain nombre de paramètres qui ont été identifiés comme influents grâce à des travaux expérimentaux et à la bibliographie. L'objectif est alors de déterminer si ces paramètres sont dimensionnants et dans quelle mesure ils le sont. Les paramètres qui ont été retenus sont : l'amortissement induit par le frottement, le sens de marche (avant ou arrière), les usures (plaquettes, disque, moule) et les modules d'Young des pièces frottantes (disque et garnitures).

### 4.4.1 Amortissement induit par le frottement

Jusqu'à présent, nous n'avons pris en compte que la contribution du frottement à la matrice de raideur du système, qui en terme de travail virtuel s'exprime  $d\delta\Pi^K$ . Or, comme le montre l'équation 3.19, le frottement contribue également à la matrice d'amortissement par le terme  $d\delta\Pi^{D^+}$ . Celui-ci a tendance à stabiliser le système de façon proportionnelle à la pression hydraulique et inversement proportionnelle à la vitesse de glissement.

La figure 4.15, qui représente l'évolution des valeurs propres lors d'une étude paramétrique au coefficient de frottement, montre que la prise en compte de l'amortissement induit par le frottement modifie profondément les parties réelles des modes. En revanche en terme de fréquences, l'influence est très limitée, excepté au delà du point de bifurcation pour les modes qui se couplent. Les courbes de coalescence du mode instable à 1944 Hz, représentées figure 4.16 illustrent ceci et font apparaître les effets « abaissant » et « lissant » que nous avons évoqués lors du second chapitre. Ces deux effets permettent d'identifier sans ambiguïté le mode qui devient instable. Les déformées sont identiques à celles du cas sans amortissement.

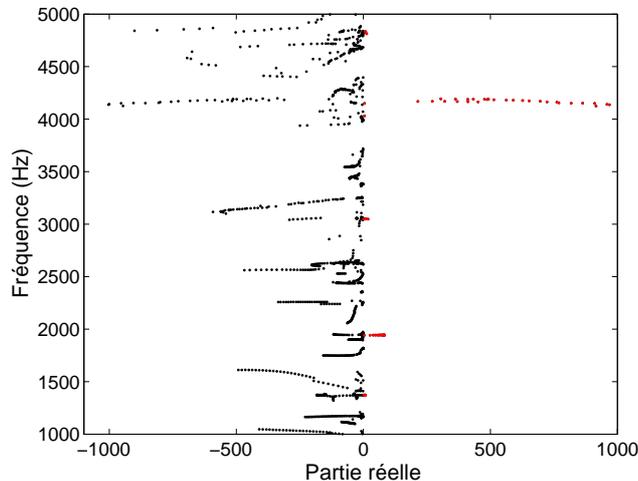


FIG. 4.15 – Variabilité des valeurs propres avec  $\mu$ , avec amortissement induit par le frottement

Il nous faut maintenant évaluer l'effet de la vitesse et de la pression sur l'amortissement induit par le frottement. La figure 4.17 présente les résultats des deux études paramétriques correspondantes réalisées par rapport à la configuration nominale : ( $P = 5$  bar,  $\mu = 0.6$ ,  $V = 4.3$  rad/s, soit 5 km/h). Ces deux figures représentent l'évolution de la partie réelle du mode instable à 1944 Hz respectivement pour une vitesse véhicule variant de 0 à 25 km/h et une pression hydraulique variant de 3 à 10 bar. L'effet de la vitesse est relativement limité et se cantonne aux très faibles vitesses. Il est très probable que la variabilité à la vitesse constatée expérimentalement ne soit pas liée à ce phénomène d'amortissement, mais plutôt à la variation

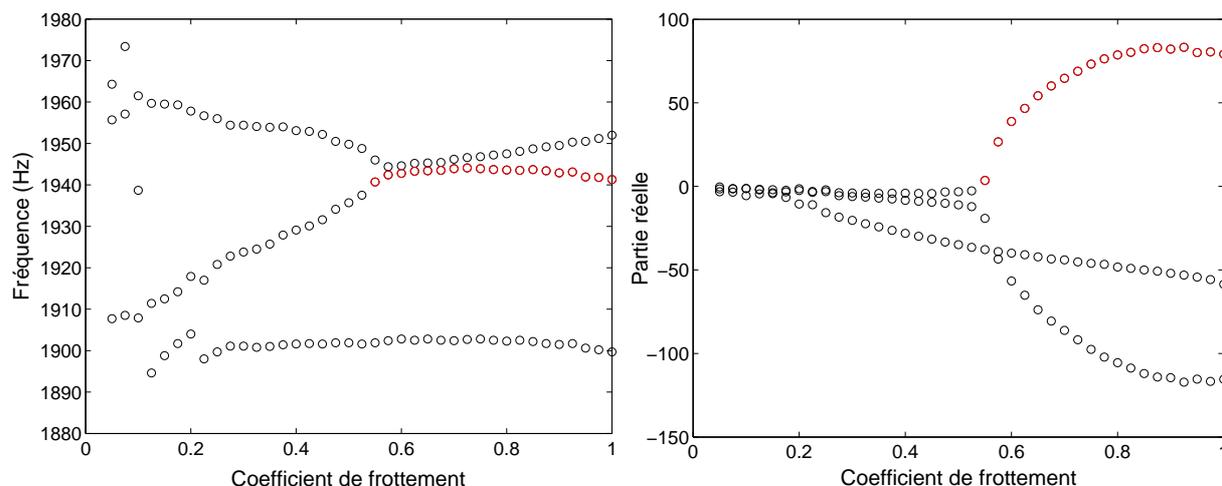


FIG. 4.16 – Courbes de coalescence avec amortissement induit par le frottement

du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement. En revanche, l'effet de la pression hydraulique sur l'amortissement induit par le frottement a des conséquences plus significatives. En effet, entre 3 et 10 bar, la partie réelle associée au mode instable chute de plus de 30 %. Lors de nos précédentes études paramétriques à la pression hydraulique, sans amortissement induit par le frottement, nous observions déjà une décroissance des parties réelles, mais seulement de 14 % entre 3 et 10 bar. La pression hydraulique a donc un effet direct et un effet indirect, par l'intermédiaire de l'amortissement induit par le frottement, sur la stabilité du système. Ceci explique pourquoi expérimentalement les crissements n'interviennent qu'à basse pression.

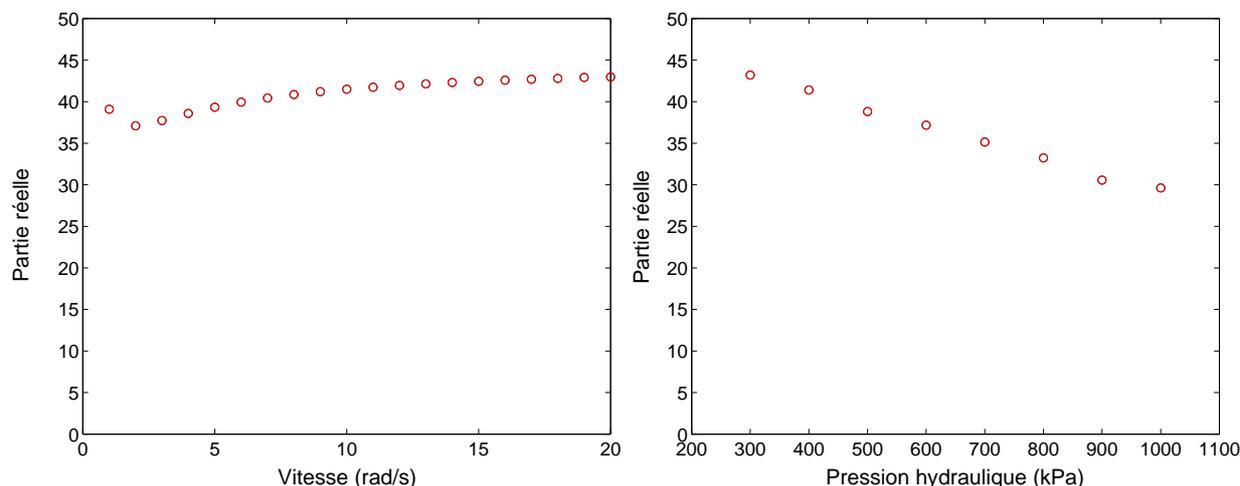


FIG. 4.17 – Effet de la vitesse et de la pression sur l'amortissement induit par le frottement

#### 4.4.2 Comportement en marche arrière

En marche arrière, les plaquettes viennent se mettre en butée de l'autre côté de la chape et l'étrier a donc tendance à tourner dans le sens opposé par rapport à la marche avant, comme illustré figure 4.18. Les pressions de contact correspondantes sont représentées figure 4.19.

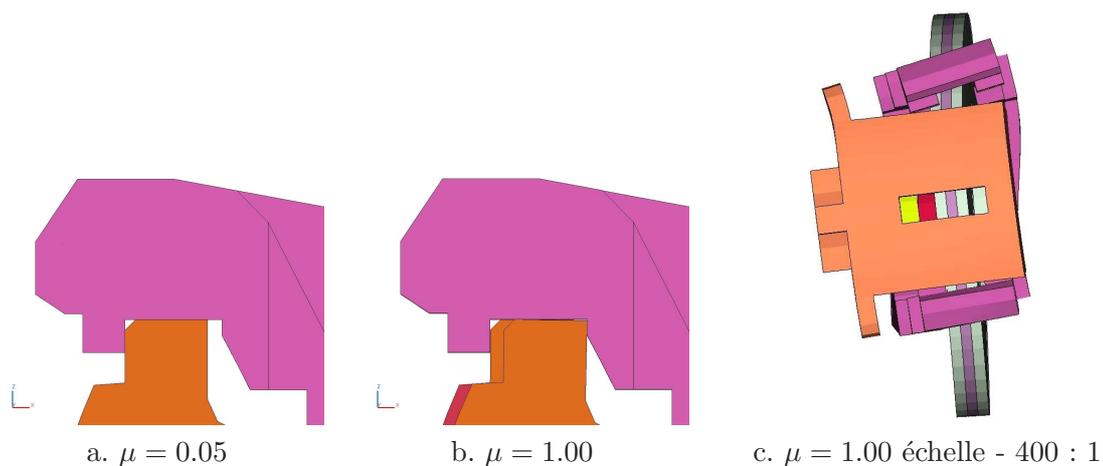
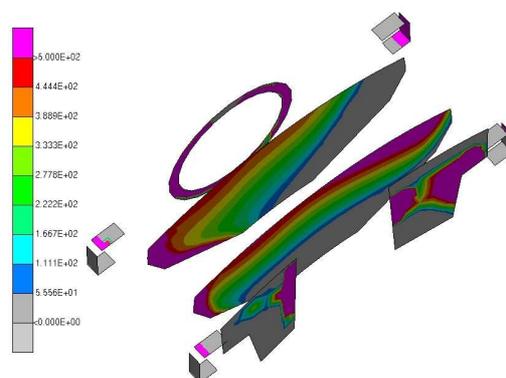
FIG. 4.18 – Evolution de la position d'équilibre statique en marche arrière en fonction de  $\mu$ 

FIG. 4.19 – Pressions de contact en marche arrière

Le comportement du système en marche arrière semble qualitativement être le symétrique du comportement en marche avant. Or, il n'y a aucune raison que ce soit le cas quantitativement, dans la mesure où le système n'est pas symétrique par rapport au plan  $xy$  qui passe par le centre du disque. En effet, le piston n'est pas centré par rapport à ce plan et les deux doigts de l'étrier n'ont pas la même géométrie, comme illustré figure 4.20. Ainsi, les non-linéarités statiques, que nous ne présenterons pas ici par souci de concision, apparaissent pour des valeurs de coefficient de frottement différentes par rapport à la marche avant.

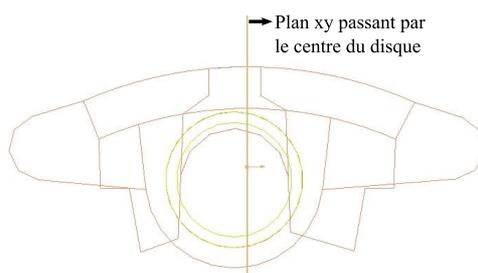


FIG. 4.20 – Non-symétrie de l'étrier

La figure 4.21 présente le comportement dynamique du système à la fois en marche avant et en marche arrière, en associant la marche arrière à un coefficient de frottement négatif. Du fait de la non-symétrie du modèle, le comportement dynamique est différent pour les deux marches. Afin de faciliter les explications, nous reprenons la notation MA, MB et MC pour désigner les trois modes par fréquences croissantes. En marche avant, MB et MC coalescent à  $\mu = 0.575$ . En marche arrière, un couplage se produit d'abord entre MA et MB pour  $\mu \in [-0.175, -0.225]$ . Suite au découplage, MB et MC coalescent à  $\mu = -0.5$ . Nous constatons que pour un coefficient de frottement de 1.0, la partie réelle du mode instable est supérieure de plus de 50 % en marche arrière, par rapport à la marche avant. En marche arrière, les déformées des modes sont qualitativement les symétriques, par rapport au plan  $xy$  qui passe par le centre du disque, des déformées en marche avant. Ceci est illustré par la figure 4.22 qui compare les déformées des modes instables à  $\mu = \pm 0.6$ . Ces deux modes font apparaître des travelling waves associées à un mode de disque à trois diamètres nodaux, une torsion d'étrier, un glissement de plaquettes sur le disque et une ouverture de la chape. Ces deux derniers sont qualitativement symétriques entre la marche avant et la marche arrière.

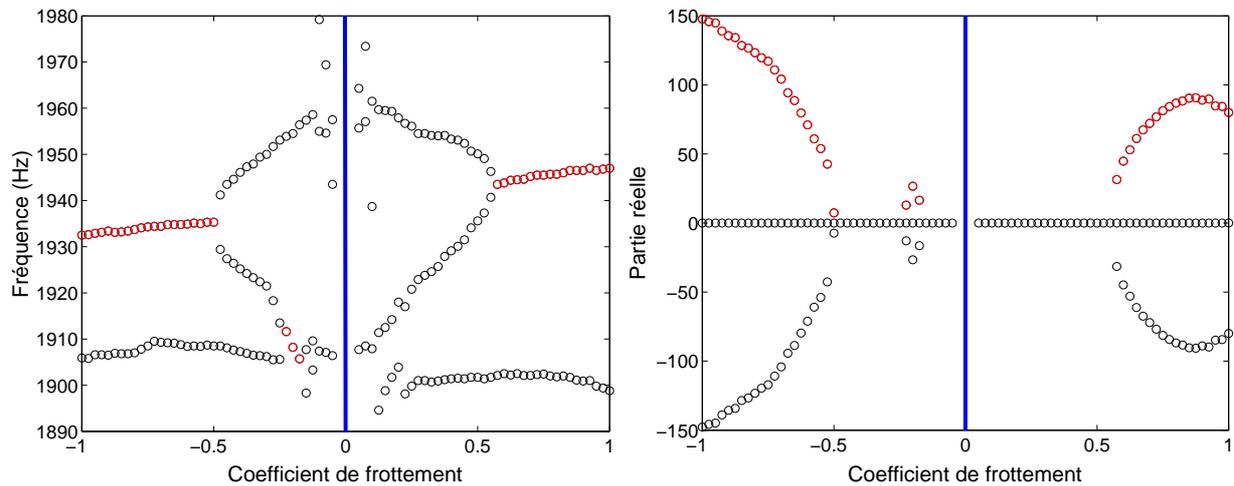


FIG. 4.21 – Courbes de coalescence en marche avant et en marche arrière

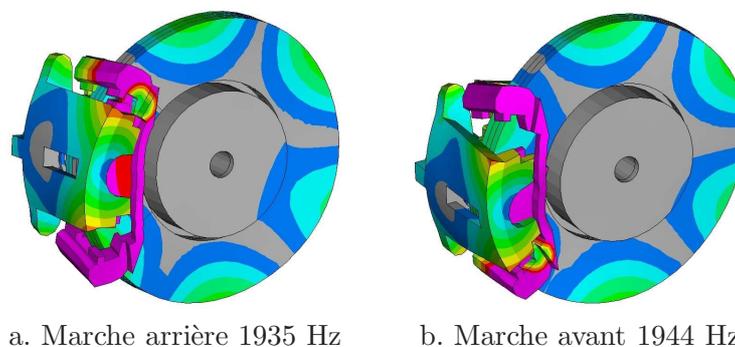


FIG. 4.22 – Déformées du mode instable -  $\mu = \pm 0.60$

### 4.4.3 Variabilité à l'usure

#### Usure des plaquettes

Lors de l'utilisation d'un système de freinage, les garnitures des plaquettes sont les parties qui s'usent le plus rapidement. Initialement, elles mesurent 12 mm d'épaisseur et sont utilisées jusqu'à ce que l'usure les réduise à une épaisseur de l'ordre de 2 mm. Une étude paramétrique, dont les résultats sont présentés figure 4.23, a été réalisée en supposant en première approximation que l'usure est homogène sur toute la surface des garnitures. Les deux modes à 1944 Hz initialement couplés se découplent dès que les plaquettes sont usées de 1 mm. Un des modes ainsi libéré évolue ensuite en fréquence puis se couple, pour une usure de 6 mm, avec le mode initialement à 2125 Hz.

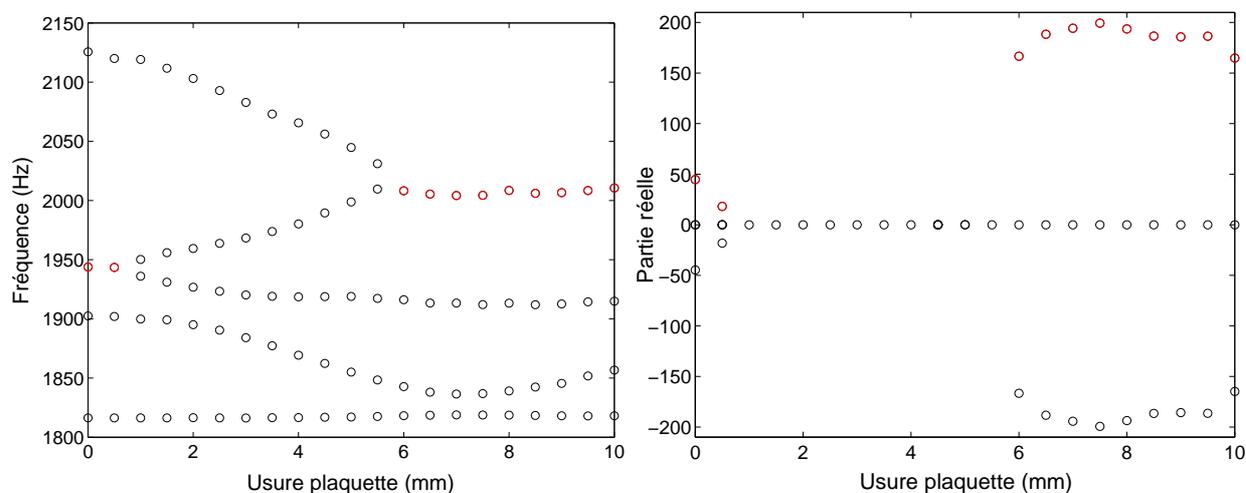


FIG. 4.23 – Effet de l'usure des plaquettes

#### Usure du disque

Le disque est également une pièce d'usure, même si celle-ci est plus limitée et plus lente que celle des plaquettes. Ils sont remplacés en moyenne tous les deux jeux de plaquettes lorsqu'ils sont usés d'environ 1 mm de chaque côté. La figure 4.24 présente les résultats de l'étude paramétrique réalisée en considérant une usure homogène variant de 0 à 1 mm. Malgré la faible plage de variation de ce paramètre, le comportement du système est profondément modifié. En effet, les deux modes initialement couplés à 1944 Hz se découplent à partir d'une usure de 0.3 mm puis leurs fréquences s'écartent l'une de l'autre.

#### Usure du moule

Nous concluons ici notre analyse de la variabilité à l'usure en étudiant l'effet de l'usure des moules utilisés pour la réalisation des disques. A la différence de l'usure des plaquettes ou des disques, qui influent sur la variabilité intra-système, l'usure des moules est une dispersion de fabrication qui affecte la variabilité inter-systèmes. Pour mener à bien cette étude, il nous faut d'abord détailler le process de fabrication de ces pièces, qui est illustré figure 4.25.

Un moule métallique (a) est utilisé afin de réaliser un moule en sable comportant un noyau (b). La fonte est ensuite coulée dans ce moule (c), puis le disque est usiné sur les surfaces marquées en rouge (d). Il est à noter que les surfaces des conduits de ventilation ne sont pas usinées et restent brutes de fonderie. En conséquence, lorsque le moule métallique s'use sous l'effet du sable,

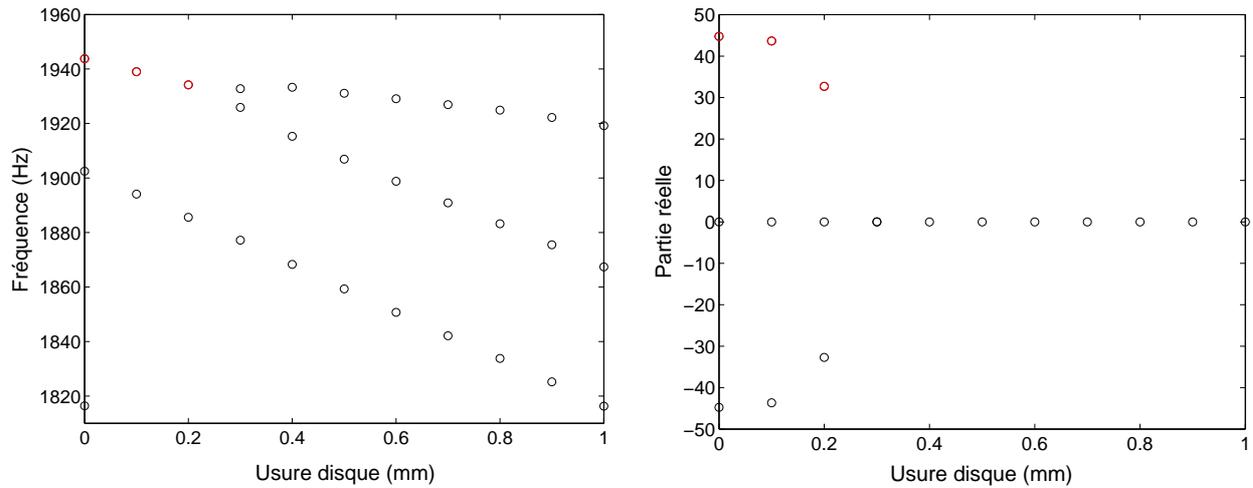


FIG. 4.24 – Effet de l'usure du disque

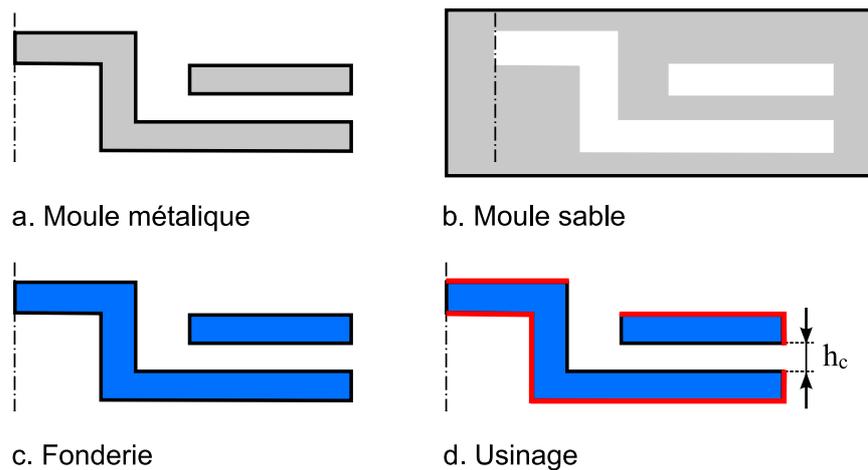


FIG. 4.25 – Process de fabrication des disques

les canaux de ventilation ont tendance à s'élargir. L'épaisseur des canaux de ventilation, que nous nommerons  $h_c$ , est spécifiée dans le cahier des charges du disque étudié à la cote nominale de 7.6 mm avec une tolérance de  $\pm 0.8$  mm. Afin de maîtriser la dérive liée à l'usure du moule métallique, ce dernier est spécifié à la cote minimum de  $h_c$ , *ie* 6.8 mm, lorsqu'il est neuf. Ainsi, cette cote suivra l'évolution temporelle, décrite figure 4.26, centrée autour de la valeur nominale. Lorsque  $h_c$  atteint sa cote maximale, ici 8.4 mm, le moule est complètement usé et il est remplacé par un neuf.

La figure 4.27 détaille l'effet de l'usure du moule du disque sur le mode instable à 1944 Hz. Nous constatons que sa fréquence est très peu affectée, alors que sa partie réelle croit de 38 % lorsque le moule s'use. L'effet de l'usure du moule est relativement limité sur ce mode particulier, mais ce n'est pas toujours le cas comme le montre la figure 4.28 sur l'exemple du mode instable à 5950 Hz. En effet, cette figure fait apparaître une coalescence par rapport à ce paramètre.

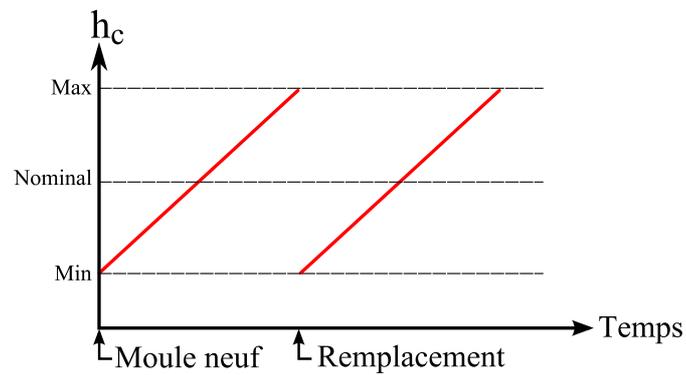


FIG. 4.26 – Dérive due à l'usure du moule

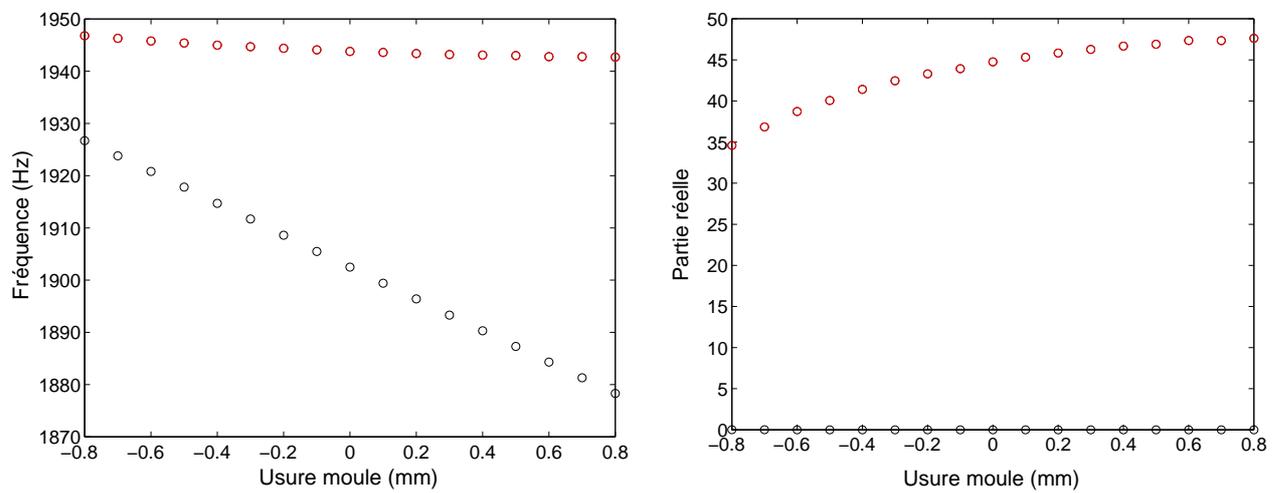


FIG. 4.27 – Effet de l'usure du moule du disque - Mode à 1944 Hz

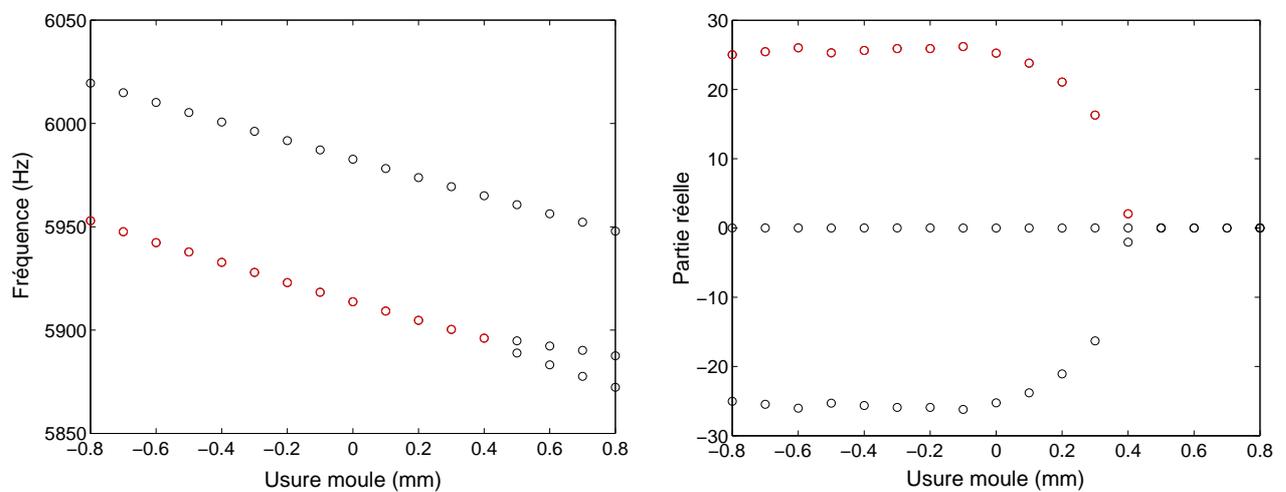


FIG. 4.28 – Effet de l'usure du moule du disque - Mode à 5950 Hz

#### 4.4.4 Module d'Young des pièces frottantes

Les modules d'Young des pièces frottantes ont également été identifiés comme des paramètres importants. Celui du disque pilote le mode de flexion de disque alors que celui des garnitures détermine la nature des interactions entre le disque et le reste du système.

#### Module d'Young du disque

La variabilité du module d'Young du disque est associée à deux causes principales : la variabilité à la température et les dispersions de fabrication. A priori, la variabilité engendrée par ces deux facteurs est relativement faible, néanmoins il nous faut évaluer son impact sur le crissement. Ainsi, la figure 4.29 décrit l'évolution des valeurs propres complexes pour un module d'Young du disque variant de  $\pm 10\%$  autour de sa valeur nominale. Nous observons ici un phénomène de coalescence suivi d'un découplage qui conduit le système à être instable sur la plage  $[103, 106]$  GPa. Dans la pratique, nous estimons que le module d'Young du disque varie de  $\pm 2\%$  autour de sa valeur nominale à cause de sa variabilité à la température et aux dispersions de fabrication. La plage de variation considérée ici a été volontairement élargie de façon à représenter également l'effet d'un changement de nuance du matériau.

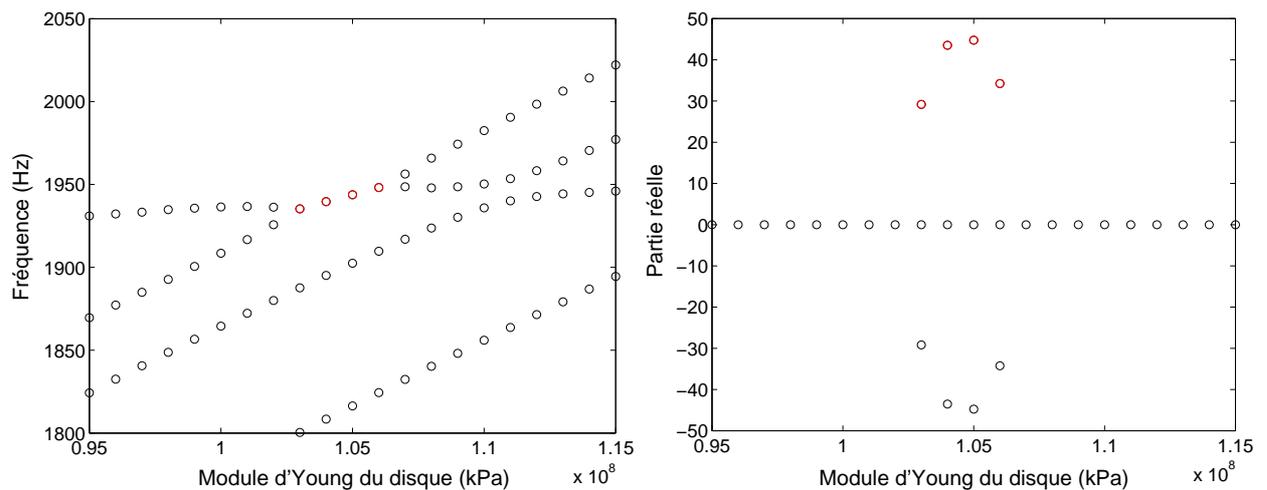


FIG. 4.29 – Effet du module d'Young du disque

#### Module d'Young des garnitures

Les garnitures sont faites d'un matériau très particulier dont les caractéristiques dépendent fortement de la température et du process de fabrication. La figure 4.30 présente l'évolution des valeurs propres du système pour une raideur des garnitures variant de  $\pm 50\%$  autour de sa valeur nominale. Le matériau étant orthotrope, nous avons affecté cette variabilité à chaque module de façon proportionnelle et avons tracé les résultats en fonction du module d'Young tangentiel. Nous constatons que la courbe obtenue peut être analysée en terme de coalescence et que les deux modes au voisinage de 1940 Hz sont couplés sur la plage  $[6.0, 11.5]$  GPa. A partir de données mesurées, nous avons évalué un peu plus précisément le niveau de variabilité de la raideur des garnitures. Dans la suite, nous considérons une variabilité de  $\pm 20\%$  autour du nominal pour ce paramètre.

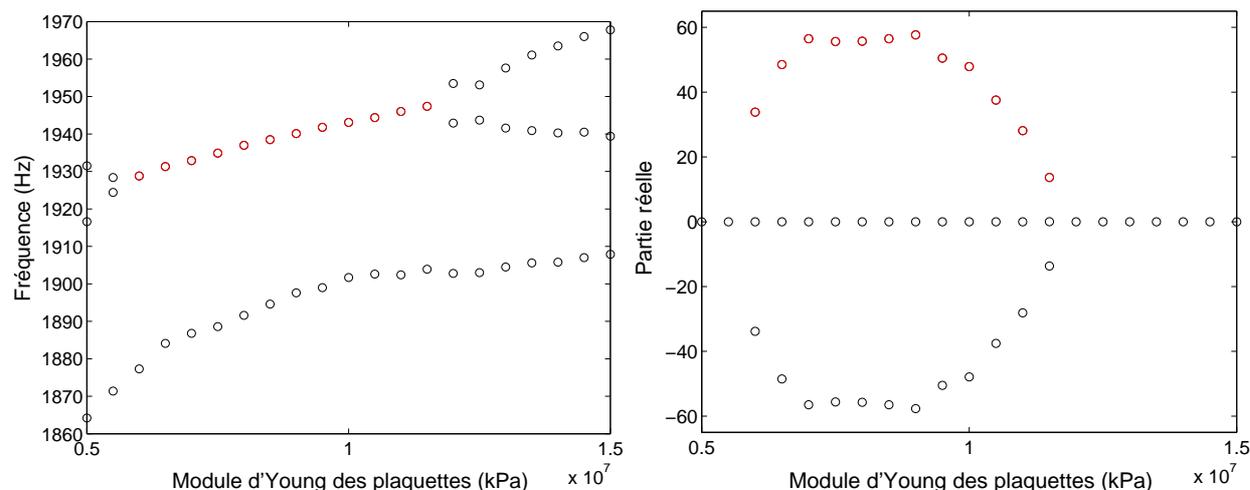


FIG. 4.30 – Effet du module d'Young des plaquettes

#### 4.4.5 Synthèse des études paramétriques

Cette première campagne d'études paramétriques conclut que tous les paramètres sélectionnés sont effectivement dimensionnants. Chacun de ces paramètres peut donc être considéré comme une des dimensions du problème, comme illustré de façon synthétique figure 4.31. Pour affiner l'analyse, nous allons distinguer les différents types de paramètres et de dispersions. L'amortissement induit par le frottement, qui est un paramètre de modélisation, doit être pris en compte afin de prédire précisément le comportement du système et en particulier afin de représenter correctement la variabilité à la pression hydraulique. Le paramètre d'usage associé au sens de rotation, l'usure du disque et des plaquettes, ainsi que les dispersions de fabrication liées à l'usure des moules ont un impact fort sur les motifs de couplage. Il est donc nécessaire de les intégrer dans le processus de validation d'un système de freinage. Les modules d'Young des pièces frottantes modifient également les topologies de couplage de façon très importante. Ces paramètres sont relativement complexes à appréhender car ils peuvent être considérés comme

- des paramètres d'environnement, de par leurs variations avec la température,
- des paramètres liés aux dispersions de fabrication (notamment pour la garniture),
- des paramètres de conception liés au choix du matériau.

A ce stade, nous pouvons hiérarchiser les différents paramètres par rapport à l'effet qu'ils ont sur la stabilité du système. Pour cela, nous avons évalué leurs variabilités respectives que nous avons rassemblées dans le tableau 4.2. La figure 4.32 permet de comparer l'impact de ces variations sur les parties réelles du mode à 1944 Hz. Les amplitudes de variation des paramètres sont normalisées à 1 et les résultats sont représentés de façon à ce que la configuration nominale soit à l'abscisse 0. Ainsi, toutes les courbes se croisent en un même point, excepté les courbes représentant  $P$  et  $V$  car dans ces deux cas l'amortissement induit par le frottement est pris en compte. A partir de ces données, les 8 paramètres sont hiérarchisés en fonction de leur impact sur les parties réelles, comme illustré figure 4.33.

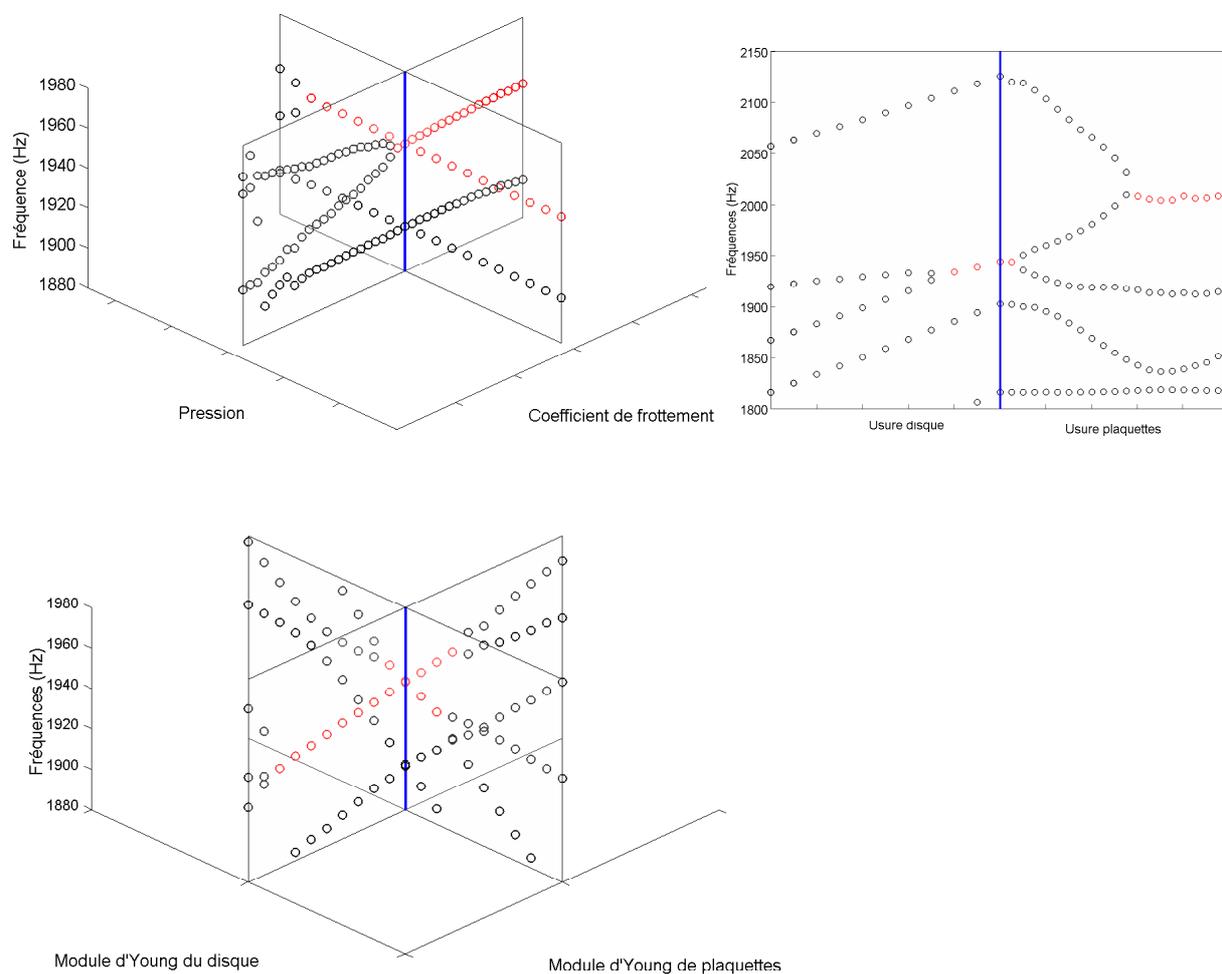


FIG. 4.31 – Vision multi-paramétrique des courbes de coalescence

Paramètre	Nominal	Variations	
		Plage	Nature
$\mu$ Coefficient de frottement	0.6	0.3 - 0.7	température, hygrométrie
$P$ Pression hydraulique	5 bar	2 - 50	usage
$V$ Vitesse	5km/h	1 - 20	usage
$W_p$ Usure plaquettes	0 mm	0 - 10	usure
$W_d$ Usure disque	0 mm	0 - 1	usure
$W_m$ Usure moule	0 mm	-0.8 - 0.8	dispersion de fabrication
$E_d$ Module d'Young du disque	105 Gpa	103 - 107 ( $\pm 1.9\%$ )	température, disp. fab.
$E_d$ Module d'Young des garnitures	10 Gpa	8 - 12 ( $\pm 20\%$ )	température, disp. fab.

TAB. 4.2 – Variabilité des différents paramètres

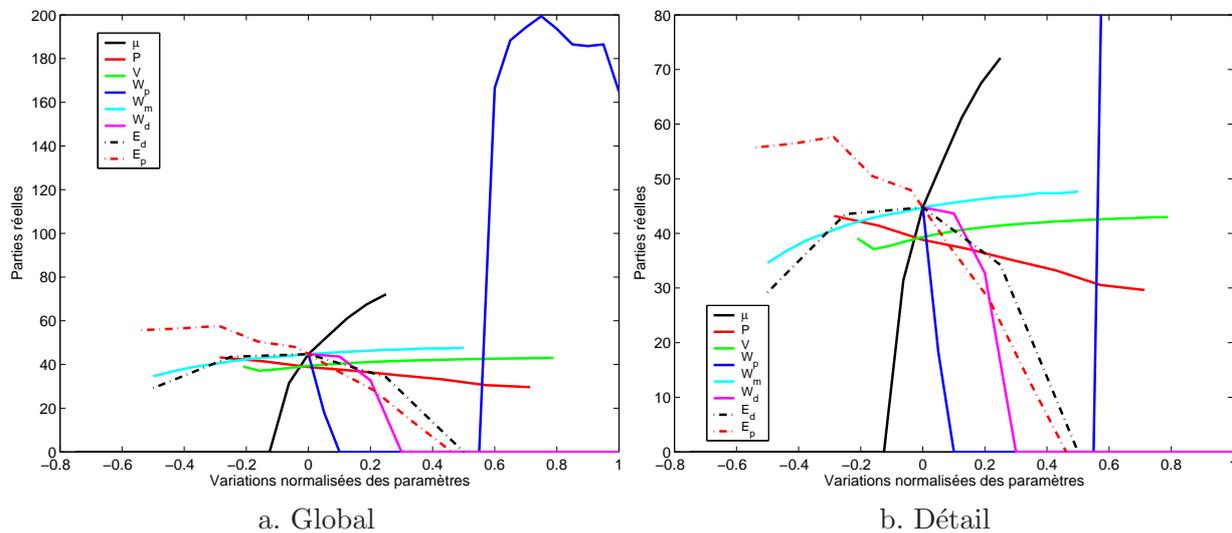


FIG. 4.32 – Synthèse de l'effet des variabilités

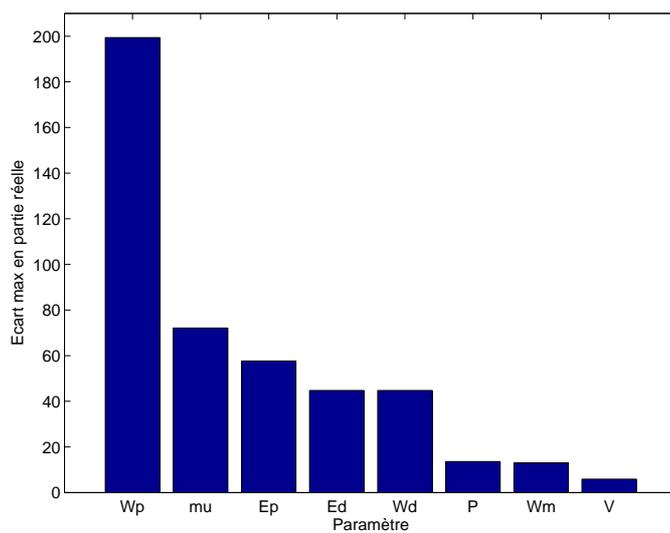


FIG. 4.33 – Hiérarchisation des paramètres en fonction leur effet sur la stabilité

## 4.5 Etudes de sensibilité

Dans la partie précédente, nous avons évalué les effets de certains paramètres que nous savions variables ou dispersés. Pour les autres paramètres, dont nous ne connaissons pas les variations, nous pouvons uniquement réaliser des calculs de sensibilité. Nous avons choisi d'évaluer la variabilité du mode à 1944 Hz pour des variations des paramètres de modélisation de  $\pm 5\%$  autour de leur nominal. Les paramètres retenus sont les densités et les modules d'Young de chacune des pièces ainsi que la raideur en rotation du roulement. Nous noterons que pour les garnitures, les modules d'Young et de cisaillement, dans les directions normale et tangentielle ont été étudiés séparément. Au total, 20 études de sensibilité ont été réalisées et leurs résultats sont rassemblés figure 4.34. Nous constatons que la stabilité du système est très sensible aux caractéristiques matériau du disque et de la chape. En effet, les variations de ces paramètres entraînent des changements dans les topologies de couplage. Ainsi, pour certaines valeurs de ces paramètres, les modes sont couplés et le système est instable alors que pour d'autres valeurs, le système est stable. La figure 4.35 synthétise les sensibilités des parties réelles aux différents paramètres. Ces données permettent ensuite de les hiérarchiser en fonction de leur influence sur les résultats, comme illustré figure 4.36.

La hiérarchisation obtenue met en évidence les paramètres sur lesquels nous devons nous focaliser. Du fait de la forte sensibilité du résultat à leurs faibles variations, il est important de les mesurer précisément et d'évaluer leurs niveaux de dispersion. En supposant que ceci soit réalisé, nous pourrions alors compléter la liste hiérarchisée des paramètres qui ont un rôle sur la dispersion du crissement (figure 4.33).

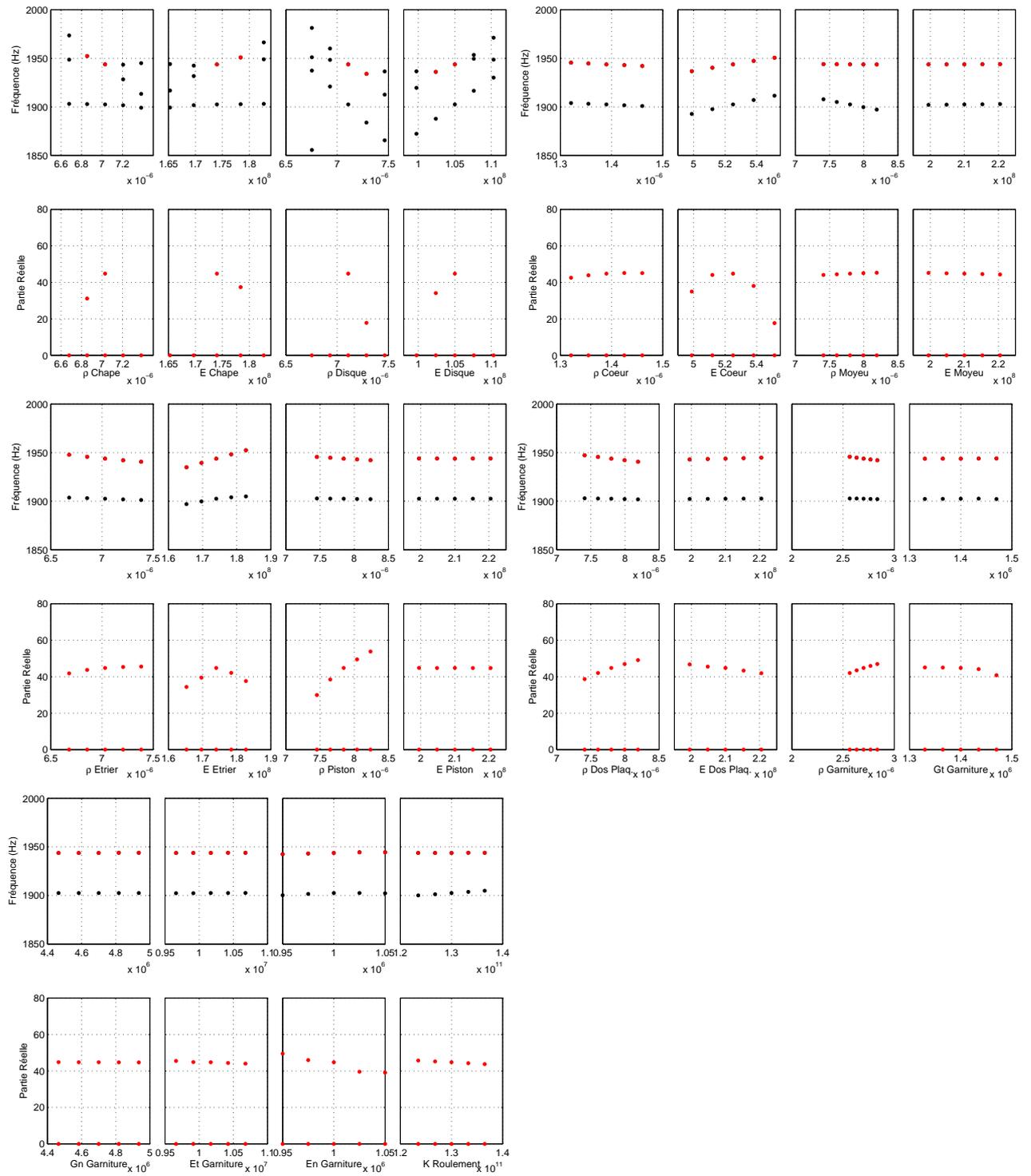


FIG. 4.34 – Résultats des analyses de sensibilité aux paramètres de modélisation

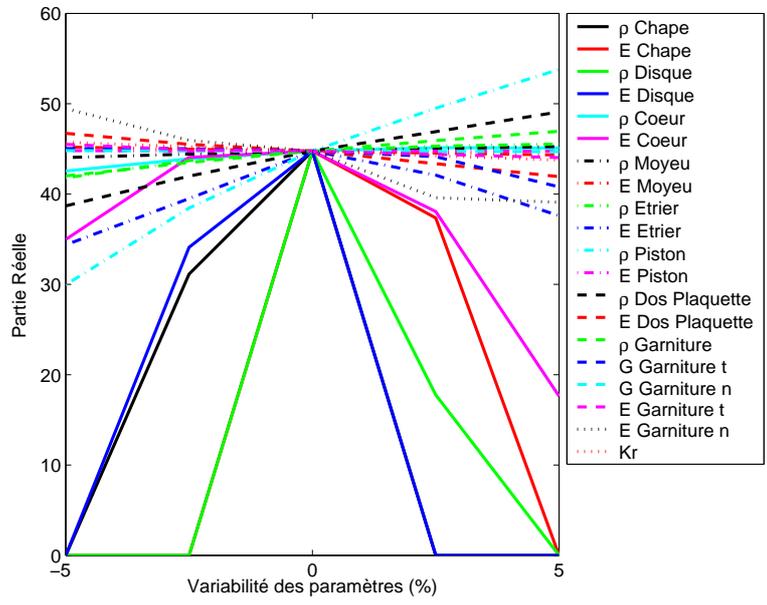


FIG. 4.35 – Synthèse des sensibilités aux paramètres de modélisation

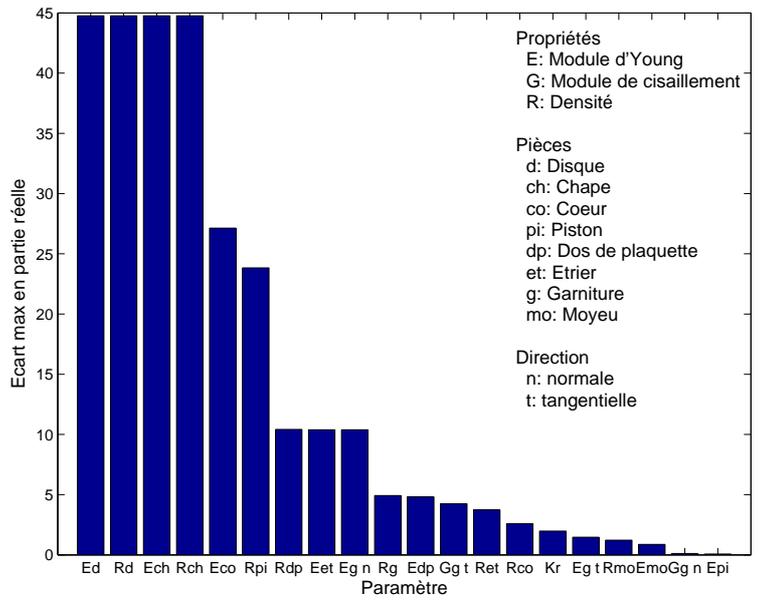


FIG. 4.36 – Analyses de sensibilité - Hiérarchisation des paramètres

## 4.6 Matrix test numérique

Dans les parties précédentes, nous avons identifié un certain nombre de paramètres comme très influents sur le crissement, compte tenu de leurs variabilités. Jusqu'à présent, les études paramétriques ont été réalisées en faisant varier successivement chaque paramètre. Or, les résultats obtenus nous laissent penser que certains interagissent entre eux de façon forte.

Dans cette partie, nous nous plaçons dans la phase de validation d'un nouveau système de freinage et avons donc comme objectif de nous assurer qu'il est toujours silencieux. Ainsi, nous recherchons une méthode permettant d'évaluer son comportement dans toutes les situations qu'il est susceptible de rencontrer. Dans un premier temps, nous nous inspirons de la méthode expérimentale que nous avons présentée dans le chapitre 1 : les matrix tests. Ceux-ci considèrent trois paramètres variables : la pression hydraulique, la vitesse et la température.

Dans notre modélisation, la pression hydraulique et la vitesse influent par l'intermédiaire de l'amortissement induit par le frottement. D'autre part, la température n'est pas modélisée mais peut être prise en compte indirectement car elle pilote la valeur du coefficient de frottement et des modules d'Young des pièces.

### 4.6.1 Matrix test $\mu.P.V.M$

Le premier matrix test numérique que nous avons réalisé prend en compte quatre paramètres : le coefficient de frottement  $\mu$ , la pression hydraulique  $P$ , la vitesse  $V$  et le sens de marche  $M$ . Un plan d'expériences complet a été réalisé par rapport à ces quatre paramètres avec respectivement 9, 2, 3 et 2 modalités. Au total, le plan comporte 108 expériences, comme illustré figure 4.37.

Dans un premier temps, nous allons analyser la bande de fréquence [1000, 4000] Hz du crissement basses fréquences. Nous pouvons réaliser le même type d'analyse que pour un matrix test expérimental, comme illustré figure 4.38. Ainsi, nous traçons (a) les parties réelles des modes instables en fonction de leurs fréquences. Cette représentation peut être considérée comme l'équivalent numérique du tracé des niveaux acoustiques en fonction des fréquences de crissement (cf figure 1.6). Cette figure met en évidence trois crissements au voisinage de 1400, 2000 et 2500 Hz. Nous calculons ensuite l'occurrence de crissement sur toute la plage (c) ou par bandes de fréquence (b). Ainsi, nous constatons que le système est instable dans 80 % des expériences et que les occurrences des trois crissements sont respectivement de 77 %, 55 % et 2 %. La répartition en fréquence (d) confirme que le crissement à 1400 Hz est le plus probable, juste devant celui à 2000 Hz.

Dans la suite, nous nous concentrons sur le crissement à 2 kHz. Nous constatons, figure 4.39, qu'il s'étend sur une plage de 50 Hz en fonction des conditions. Il est ensuite possible d'analyser les résultats en terme d'occurrences pour chacun des paramètres, comme illustré figure 4.40. Comme nous pouvions le supposer, le coefficient de frottement est le paramètre le plus influent sur les occurrences puisque celles-ci passent de 0 % pour  $\mu = 0.3$  à 100 % pour  $\mu \geq 0.6$ . La probabilité de crissement est beaucoup plus forte en marche arrière qu'en marche avant : 72 % contre 39 %. La pression hydraulique a un impact plus faible : 61 % à 2 bar contre 50 % à 5 bar. En outre, l'impact de la vitesse véhicule est quasiment nul.

Cette première campagne de calcul démontre la pertinence et la faisabilité d'un matrix test numérique. Néanmoins, le choix des paramètres et de la matrice des expériences demande à être affiné afin de représenter plus précisément la variabilité du crissement aux paramètres d'utilisation et d'environnement.

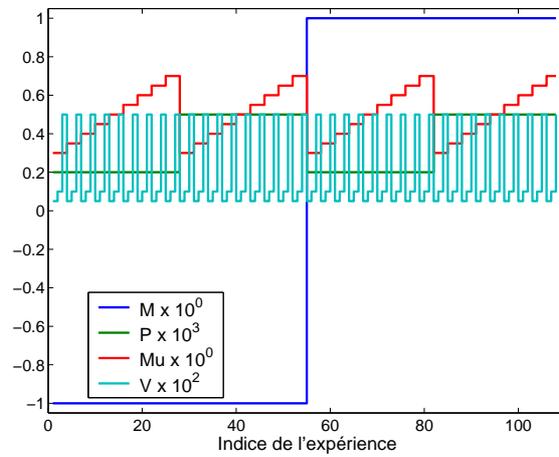
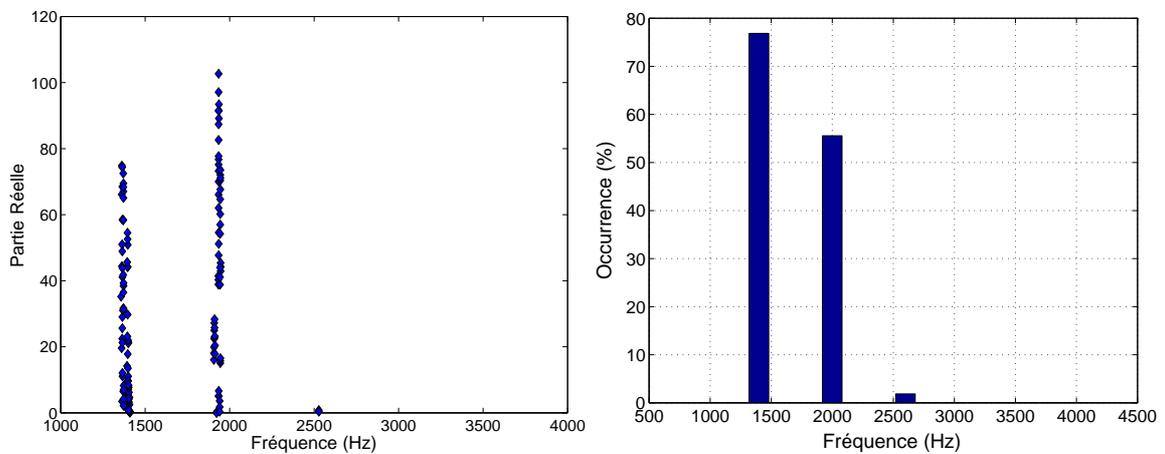
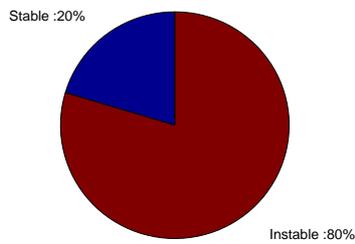


FIG. 4.37 – Matrix test  $\mu.P.V.M$  - Matrice des expériences

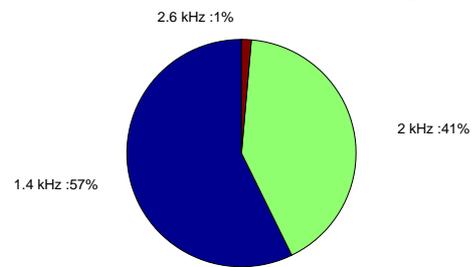


a. Résultats du matrix test

b. Occurrence par bandes de fréquence



c. Occurrence sur la plage 0 - 4000 Hz



d. Répartition en fréquence

FIG. 4.38 – Matrix test  $\mu.P.V.M$  - Résultats

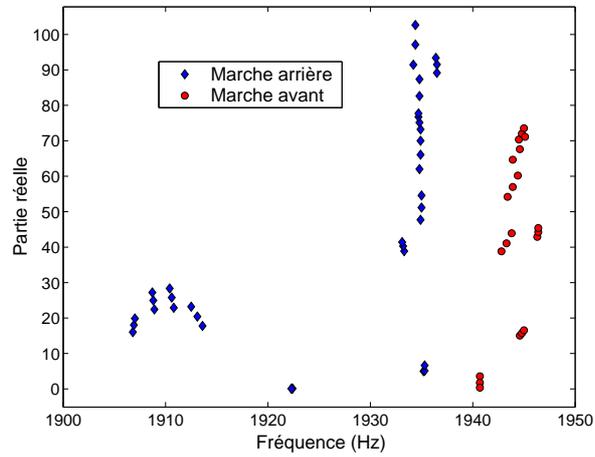


FIG. 4.39 – Matrix test  $\mu.P.V.M$ - Crissement à 2 kHz

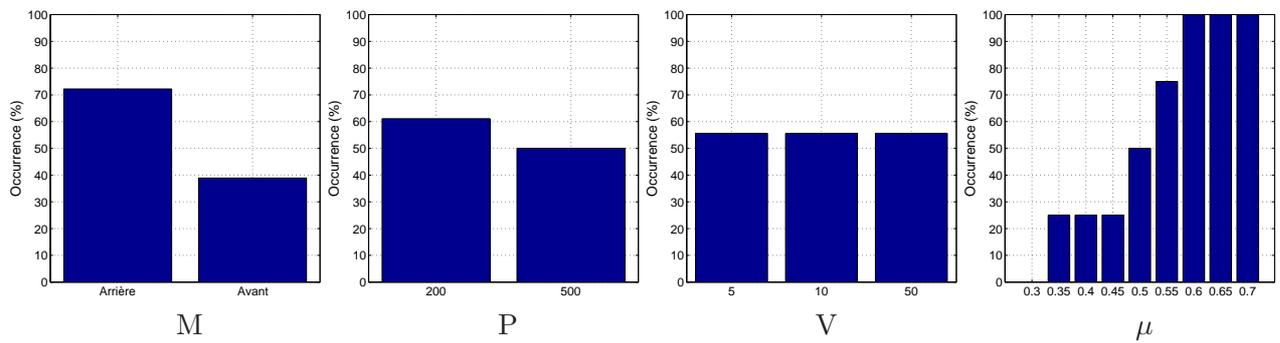


FIG. 4.40 – Matrix test  $\mu.P.V.M$  - Occurrences en fonction des paramètres

#### 4.6.2 Matrix test $\mu.P.M.E_d.E_p$

Un second matrix test plus complet et plus représentatif a été construit en fixant la vitesse du véhicule à 5 km/h et en intégrant la variabilité des modules d'Young des pièces frottantes, conformément au tableau 4.2. Ce matrix test comporte 9 modalités pour  $\mu$ , 2 pour  $P$ , 2 pour  $M$ , 5 pour le module d'Young du disque  $E_d$  et 5 pour le module d'Young des garnitures  $E_p$ . Il est donc constitué au total de 900 expériences, comme représenté figure 4.41.

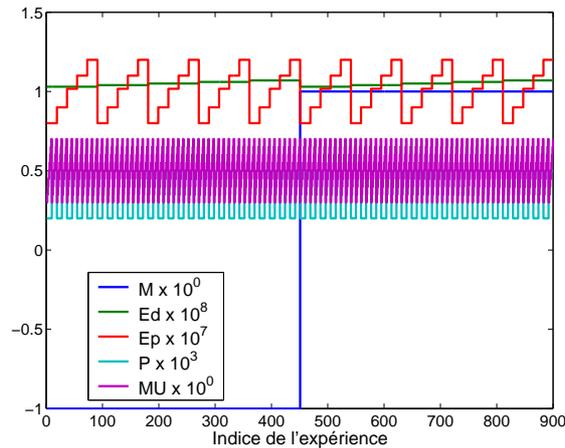


FIG. 4.41 – Matrix test  $\mu.P.M.E_d.E_p$  - Matrice des expériences

La figure 4.42 présente les résultats de ce nouveau matrix test. Outre les trois crissements évoqués précédemment à 1.4, 2.0 et 2.6 kHz, cette figure fait apparaître un quatrième crissement à 3 kHz. Le mode à 2kHz présente la plus forte occurrence avec 55 %, suivi du mode à 1.4 kHz avec 40 %. Les deux derniers crissements sont beaucoup moins probables et apparaissent dans 2 % des cas.

L'analyse de l'occurrence du crissement à 2kHz pour chaque modalité des paramètres est présentée figure 4.43. En ce qui concerne le sens de marche et le coefficient de frottement, les tendances sont conservées par rapport au précédent matrix test. En revanche, ce n'est pas le cas pour la pression hydraulique. En effet, avec ce nouveau matrix test, une pression de 5 bar est plus critique qu'une pression de 2 bar. Ceci met en évidence la grande influence des paramètres et leurs fortes interactions entre eux. Il faut donc être conscient que le choix du matrix test n'est pas anodin et qu'il doit se baser sur les véritables variations des paramètres pour être représentatif de la réalité. Le module d'Young du disque a un effet non monotone sur les occurrences et la valeur de 104 GPa est identifiée comme la plus critique. L'augmentation du module d'Young des garnitures a tendance à réduire de façon importante et progressive l'occurrence. En effet, celle-ci passe de 63 % pour  $E_p = 8$  GPa à 47 % pour  $E_p = 12$  GPa.

Pour aller plus loin dans l'analyse, il nous faut revenir aux grandeurs de base : les valeurs propres. Leur évolution par rapport aux différents paramètres est tracée au voisinage de 2 kHz figure 4.44. Jusqu'à présent, nous avons analysé le matrix test en terme d'occurrence, mais pas en terme de gravité. Or, cette figure nous montre par exemple que le crissement qui présente la partie réelle la plus élevée est obtenu pour une valeur de  $E_p$  de 12 GPa. Cette valeur est celle pour laquelle l'occurrence est la plus faible. Le bon indicateur qu'il nous faut surveiller est le risque de crissement, qui se définit comme le compromis entre son occurrence et sa gravité. Le meilleur moyen de visualiser ce compromis consiste à tracer un diagramme de Farmer, comme celui présenté dans le chapitre 1.

Afin d'avoir une approche générale, il nous faut définir un indicateur capable de représenter

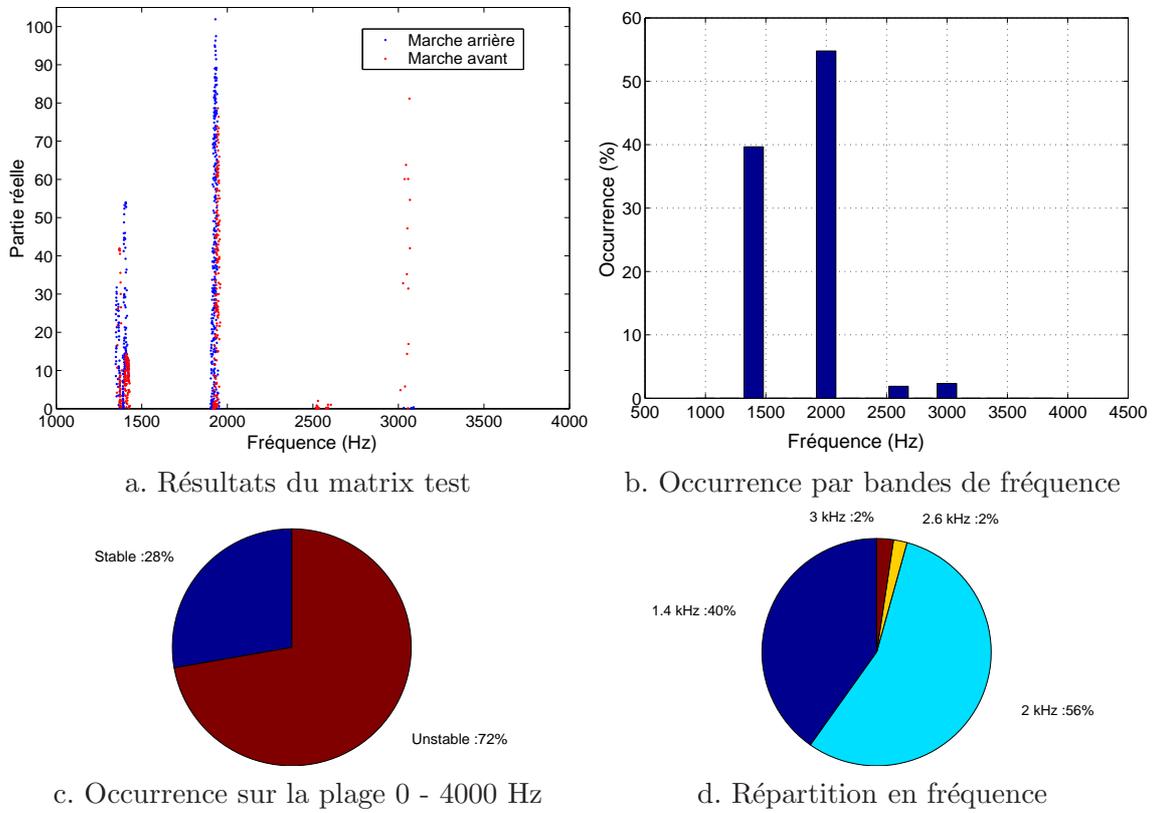


FIG. 4.42 – Matrix test  $\mu.P.M.E_d.E_p$  - Résultats

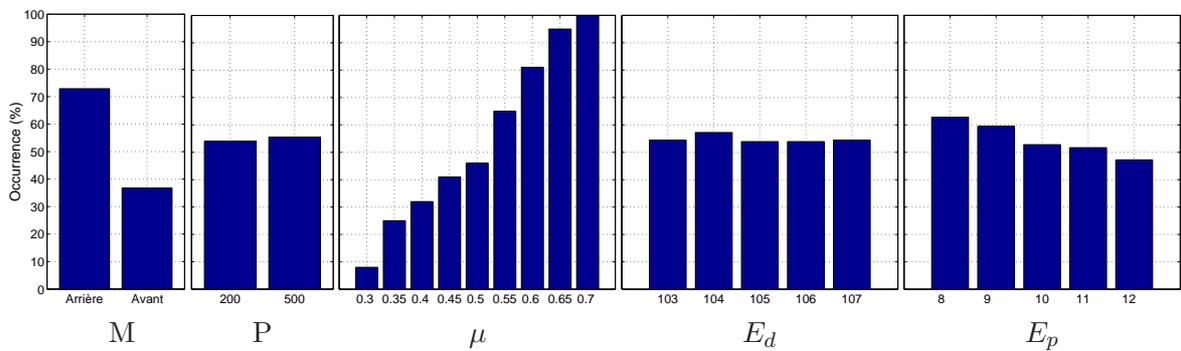


FIG. 4.43 – Matrix test  $\mu.P.M.E_d.E_p$  - Occurrences en fonction des paramètres

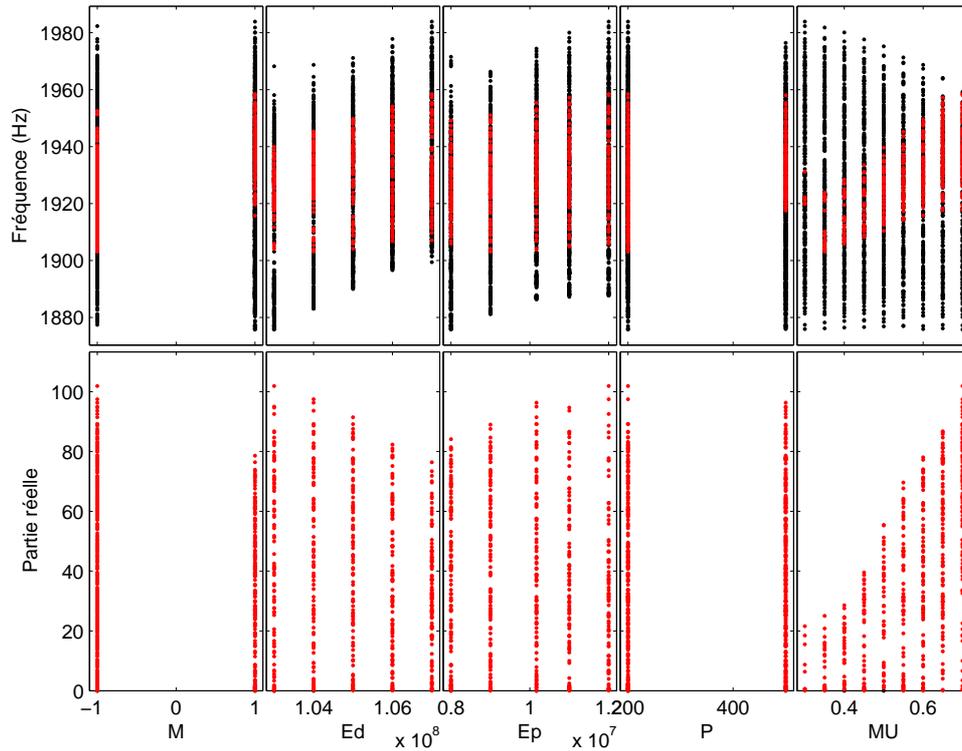


FIG. 4.44 – Matrix test  $\mu.P.M.E_d.E_p$  - Valeurs propres - Modes ● stables, ● instables

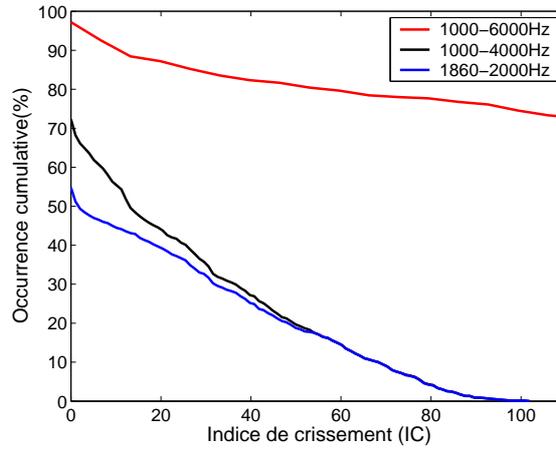
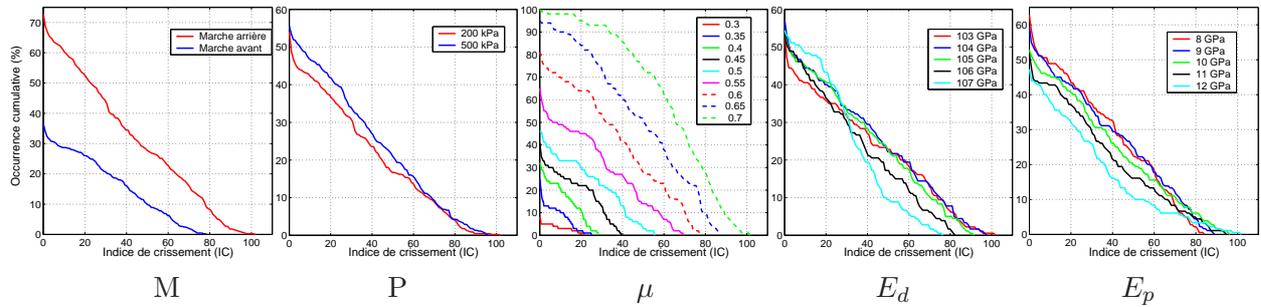
la propension au crissement sur une plage de fréquence donnée. Nous avons choisi *l'indice de crissement* ( $IC$ ) que nous définissons comme la plus grande des parties réelles sur la plage de fréquence  $[f_{inf}, f_{sup}]$

$$IC = \begin{cases} \max_i (\alpha_i), & \text{s'il existe au moins un mode } i \text{ verifiant } f_i \in [f_{inf}, f_{sup}] \text{ et } \alpha_i > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

En se basant sur cet indice, nous traçons le diagramme de Farmer du crissement pour différentes plages de fréquence, comme illustré figure 4.45. Celui-ci représente la probabilité qu'un crissement ait un  $IC$  supérieur à une certaine valeur. Ainsi, sur ce graphique, l'ordonnée à l'origine correspond à l'occurrence (*ie* la probabilité que l'indice de crissement soit positif) alors que l'abscisse à l'origine correspond à l'indice de crissement maximal observé sur l'ensemble des expériences.

Ce diagramme est très utile pour comparer le niveau de risque de plusieurs situations. Ainsi, nous pouvons évaluer plus finement les risques liés aux différentes modalités des paramètres, comme illustré figure 4.46 sur la plage  $[1860, 2000]$  Hz. Pour les paramètres  $M$ ,  $P$  et  $\mu$ , la hiérarchisation des niveaux de risque pour les différentes modalités des paramètres est immédiate puisque l'occurrence et la gravité des crissements évoluent dans le même sens. En revanche, ce n'est pas le cas pour les deux autres paramètres. En effet, nous constatons clairement que lorsque le module d'Young du disque augmente, l'occurrence des crissements augmente alors que leur criticité diminue. Nous observons le même type de comportement, qui se traduit par des courbes qui s'intersectent, lorsque le module d'Young des garnitures diminue.

Ce matrix test permet d'analyser finement le risque de crissement, à la fois en terme d'occurrence et de gravité, et d'analyser l'effet des différents paramètres d'utilisation et d'environnement. Pour le frein étudié, les résultats obtenus sont en accord avec les résultats expérimentaux concernant un plus fort risque en marche arrière qu'en marche avant. Pour les autres paramètres, la

FIG. 4.45 – Matrix test  $\mu.P.M.E_d.E_p$  - Diagramme de FarmerFIG. 4.46 – Matrix test  $\mu.P.M.E_d.E_p$  - Diagrammes de Farmer sur la plage [1860, 2000] Hz

corrélation est plus délicate à réaliser puisque les variations de  $\mu$ ,  $E_d$  et  $E_p$  représentent les variations de température et d'hygrométrie.

## 4.7 Robustesse à l'usure

### 4.7.1 Problématique

Le matrix test que nous venons de présenter permet d'analyser la variabilité par rapport aux paramètres d'utilisation et d'environnement d'un système de freinage neuf et dont toutes les cotes sont au nominal. Or, comme nous l'avons souligné lors de nos études paramétriques, l'usure a un impact très fort sur le crissement. Nous envisageons donc d'évaluer la robustesse du système par rapport à ces paramètres.

Conformément aux préconisations de Taguchi, nous utilisons le ratio signal sur bruit,  $S/N$ , comme indicateur de robustesse (cf p 34). Nous le définissons comme « le plus faible le meilleur » à partir de l'indice de crissement

$$S/N = -10 \log \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n IC^2 \right) \quad (4.2)$$

Ainsi, plus cet indicateur sera élevé, plus la solution sera robuste. Notons que d'après cette formule, le  $S/N$  d'un système qui ne crisse jamais est infini. Pour faciliter la lecture des courbes, nous avons choisi de borner sa valeur supérieure à 0.

### 4.7.2 Usure des plaquettes

Dans cette partie, nous envisageons d'évaluer la robustesse du crissement au coefficient de frottement pour différentes usures de plaquette. Un plan factoriel complet a été lancé pour une usure plaquette,  $PW$ , variant de 0 à 10 mm par pas de 1 mm. Pour des raisons numériques qui mériteraient d'être étudiées plus finement, des problèmes de convergence ont été rencontrés pour les valeurs intermédiaires de l'usure. Finalement, la matrice du plan d'expériences exploitable est représentée figure 4.47-a. Nous constatons figure 4.47-b la très grande influence de l'usure plaquette avec l'émergence de très nombreux crissements entre 1 et 4 kHz : 1375, 1550, 2000, 2375, 2630, 2925, 3100 Hz. Les occurrences associées et la répartition en fréquence de ces différents crissements sont consultables figures 4.47-c et 4.47-d.

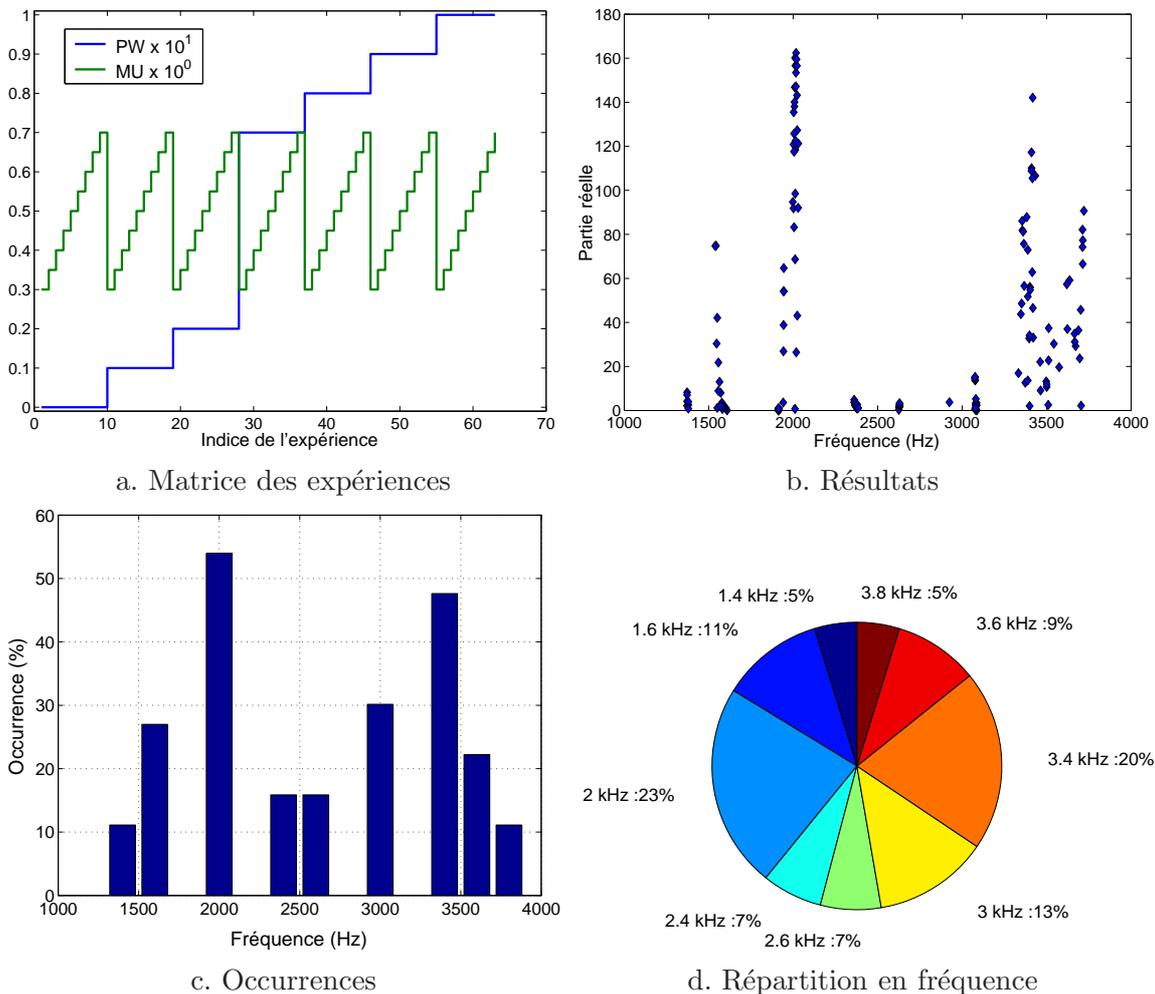


FIG. 4.47 – Plan d'expériences à l'usure des plaquettes

Dans la suite, nous nous focalisons sur le crissement à 2 kHz. L'effet de l'usure des plaquettes sur le risque de crissement est analysé figure 4.48-a. Nous constatons que lorsque la plaquette commence à s'user, le risque diminue jusqu'à devenir nul pour une usure de 2 mm. Pour une usure de 7 mm, le risque de crissement est multiplié par près de 4 par rapport à la configuration plaquette neuve (occurrence multipliée par 1.8 et gravité par 2.2). Au delà, le risque ne cesse d'augmenter. Nous observons également cette tendance sur la figure 4.48-b qui représente la robustesse du crissement au coefficient de frottement pour les différentes valeurs de l'usure plaquette. Le ratio

signal sur bruit vaut initialement  $-30$  et croit jusqu'à  $0$  pour une usure de  $2$  mm. Dans cette configuration le système est stable et robuste aux variations de coefficient de frottement. En effet, les variations de ce paramètre ne déstabilisent jamais le système. Pour les usures plus importantes, la robustesse se dégrade très fortement avec un ratio signal sur bruit qui atteint des valeurs de l'ordre de  $-40$ .

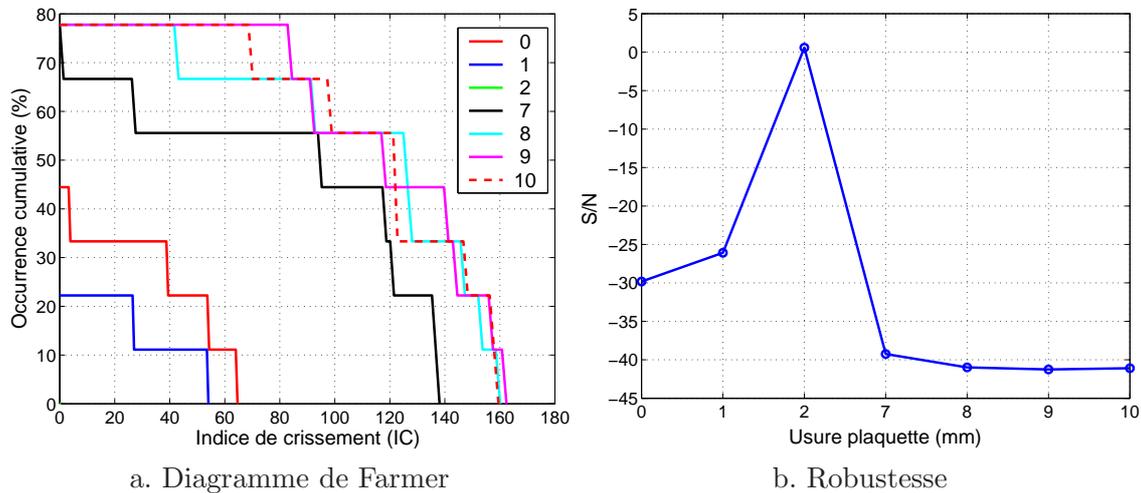


FIG. 4.48 – Risque et robustesse en fonction de l'usure des plaquettes

Afin d'expliquer cette chute de robustesse, nous traçons les courbes de coalescence biparamétriques représentées figure 4.49 en fonction du coefficient de frottement et de l'usure plaquette. Comme nous l'avons décrit précédemment, lorsque la plaquette est neuve, les modes à  $1910$  et  $1960$  Hz coalescent à partir d'un coefficient de frottement de  $0.6$  pour donner un mode instable à  $1944$  Hz. Lorsque la plaquette s'use, les deux modes ont tendance à s'éloigner en fréquence, ce qui entraîne une augmentation du coefficient de frottement critique. Ainsi, à partir d'une usure de  $2$  mm, ce frottement critique est supérieur à  $0.7$  et sort donc de la plage de variation étudiée. Lorsque la plaquette continue à s'user, le mode initialement à  $1960$  Hz se rapproche du mode supérieur à  $2200$  Hz et ces deux modes finissent par se coupler.

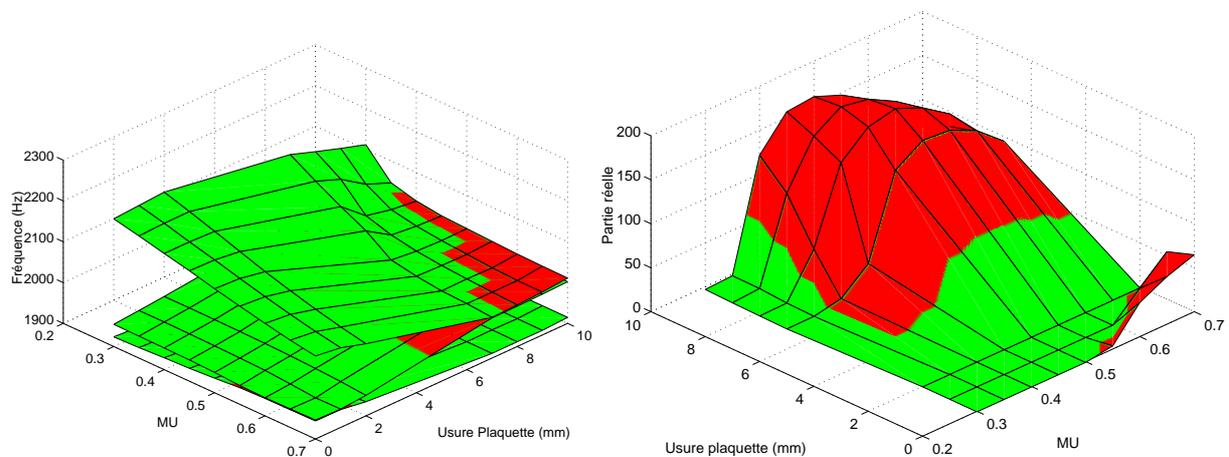


FIG. 4.49 – Courbes de coalescence biparamétriques -  $(\mu, PW)$

### 4.7.3 Usure du disque

Une seconde étude de robustesse est menée par rapport à l'usure du disque. Ce paramètre, que nous nommons  $DW$ , prend 11 valeurs de 0 à 1 mm dans le plan d'expériences que nous avons choisi et dont la matrice est représentée figure 4.50-a. Sur l'ensemble des expériences, seuls 3 crissements apparaissent sur la plage [1, 4] kHz : 1.4, 2.0 et 3.3 kHz.

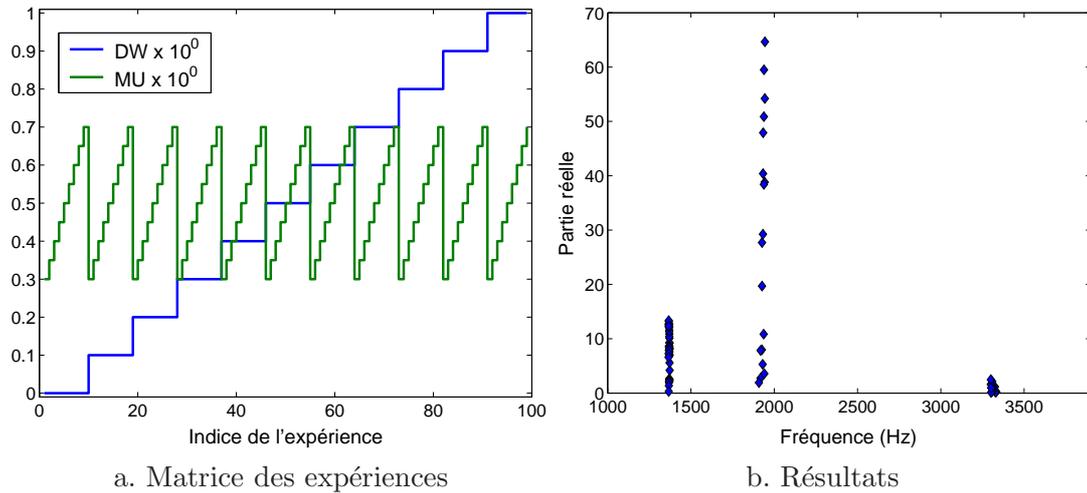


FIG. 4.50 – Plan d'expériences à l'usure du disque

Au voisinage de 2 kHz, nous constatons que l'usure du disque a tendance à stabiliser le système. En effet, à la fois les parties réelles et les occurrences de crissement, représentées figure 4.51, chutent lorsque ce paramètre augmente. A partir d'une usure de 0.6 mm, le système est stable. Tout ceci est clairement synthétisé par le diagramme de Farmer, figure 4.52, qui montre que le risque de crissement diminue avec l'usure jusqu'à devenir nul à partir de cette valeur d'usure. En parallèle, le ratio signal sur bruit, qui vaut initialement  $-30$ , augmente progressivement et atteint la valeur 0 à partir d'une usure de 0.6 mm. A partir de cette valeur, le système est robuste puisqu'il reste stable malgré les variations du coefficient de frottement.

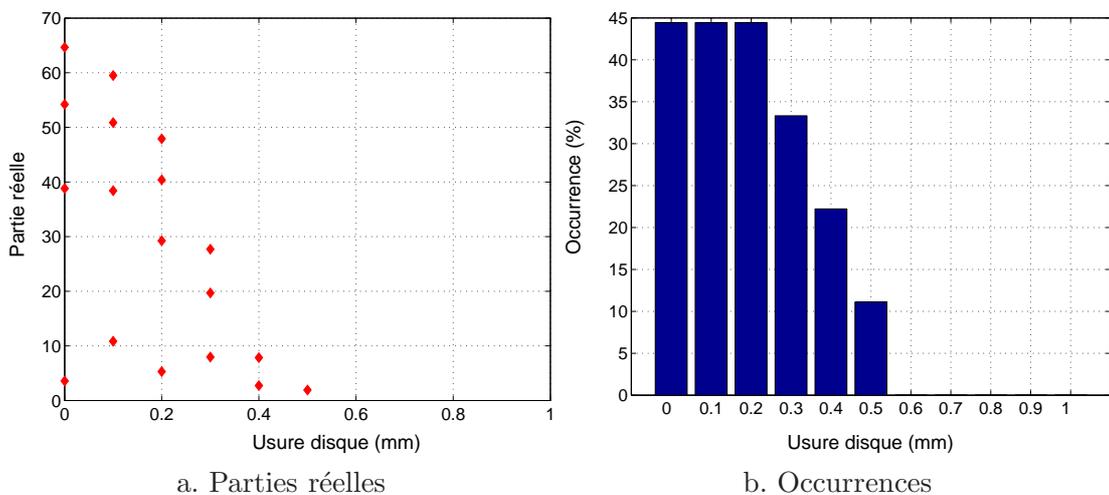


FIG. 4.51 – Résultats du plan d'expériences à l'usure du disque

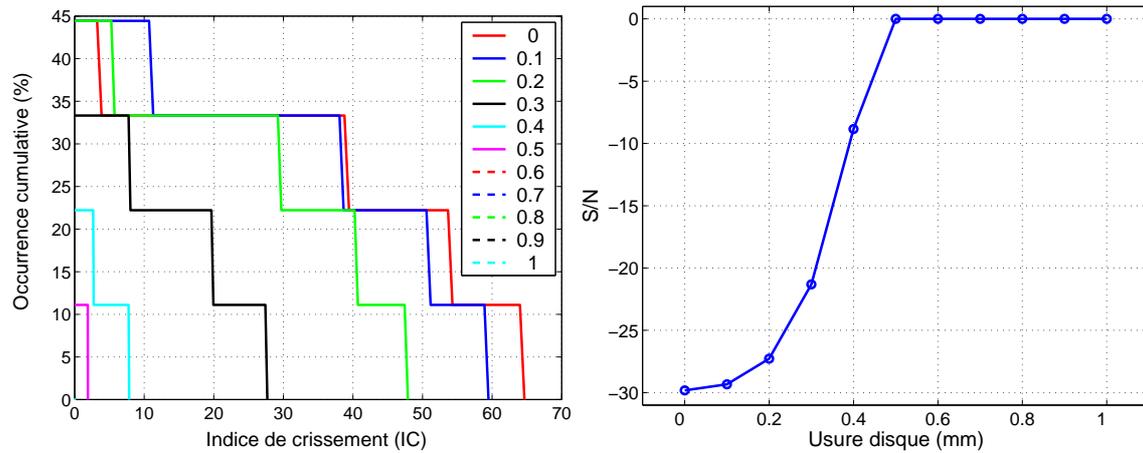
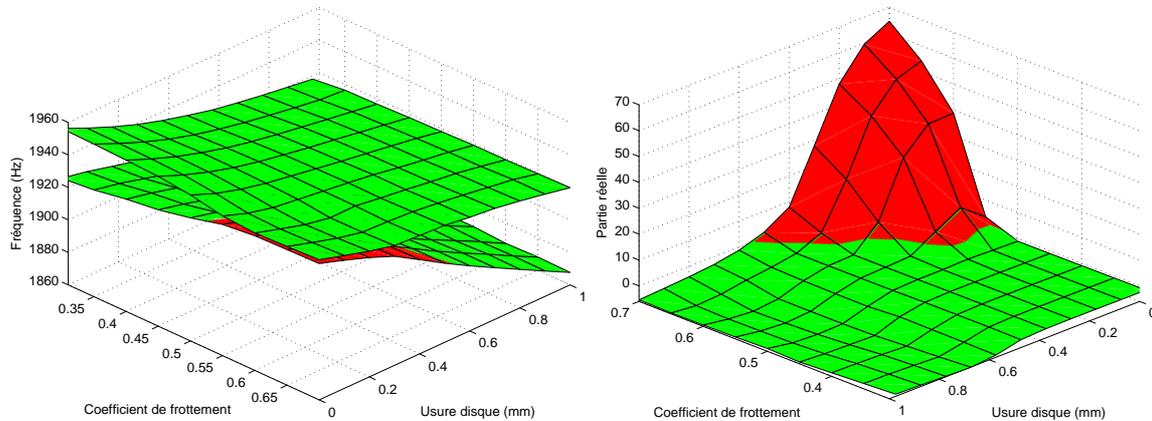


FIG. 4.52 – Risque et robustesse en fonction de l'usure du disque

La figure 4.53, qui représente les courbes de coalescences biparamétriques  $(\mu, DW)$ , permet de comprendre la raison de ce phénomène. En effet, initialement, le mode instable à 1944 Hz naît de la coalescence des modes à  $\mu = 0$  à 1910 et 1960 Hz. Lorsque l'usure du disque augmente, ces deux modes se séparent progressivement en fréquence. Ainsi, le coefficient de frottement critique augmente jusqu'à sortir de la plage de variation de coefficient de frottement considérée.

FIG. 4.53 – Courbes de coalescence biparamétriques -  $(\mu, DW)$

#### 4.7.4 Usure du moule du disque

En ce qui concerne l'usure du moule du disque, une étude plus poussée a été réalisée. La variabilité des modules d'Young des pièces frottantes et du coefficient de frottement ont été pris en compte, conformément à la matrice représentée figure 4.54. Nous constatons qu'en dépit de ces variations de paramètres, le comportement du système est relativement peu perturbé par l'usure des moules. En effet, sur la plage [1000, 4000] Hz, seuls les trois crissements à 1.4, 2.0 et 2.5 kHz mis en évidence lors des matrix tests apparaissent. Bien que l'usure des moules n'affecte pas les fréquences de crissement, elle a un léger effet sur leurs risques. La figure 4.55 nous montre en effet que le risque de crissement augmente à mesure que les moules s'usent, ce qui se traduit par une diminution progressive de la robustesse.

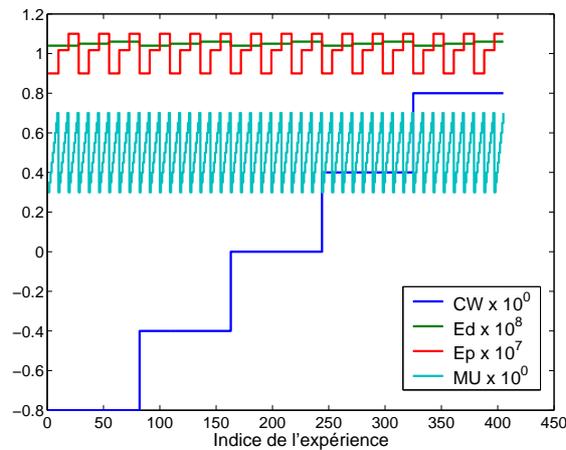


FIG. 4.54 – Matrice du plan d'expériences à l'usure du moule du disque

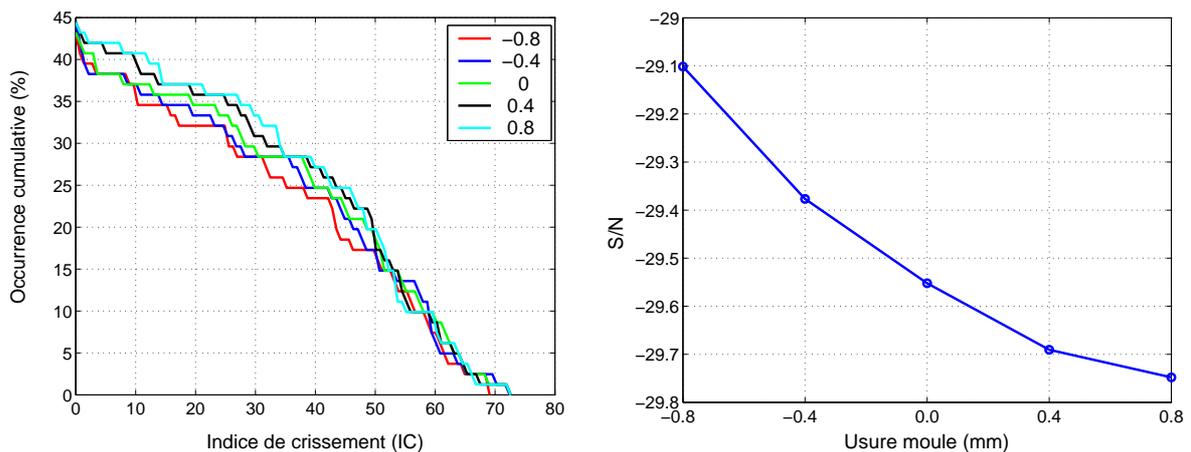


FIG. 4.55 – Risque et robustesse en fonction de l'usure du moule du disque

## 4.8 Conception robuste

Dans cette partie, nous nous attachons au véritable objectif du modèle de conception qui est d'explorer l'espace des paramètres de conception afin de trouver une solution plus performante et plus robuste aux dispersions que la solution initiale. Dans un premier temps, nous proposons trois études biparamétriques qui permettent d'investiguer certaines directions particulières de cet espace. Dans un second temps, nous réalisons des matrix tests  $\mu.P.M.E_d.E_p$  pour différentes solutions techniques. La méthodologie que nous avons mise en place nous permet alors de les comparer et de les hiérarchiser en terme de risque de crissement et de robustesse.

### 4.8.1 Plan complet $(\mu, E_p)$

Nous étudions ici de façon précise les interactions entre le coefficient de frottement et le module d'Young des garnitures,  $E_p$ , grâce à un plan d'expériences factoriel complet. Comme précédemment, les variations de rigidité sont répercutées proportionnellement sur tous les modules de ce matériau orthotrope.  $E_p$ , qui est utilisé pour tracer les résultats, correspond au module d'Young dans le plan.

Les valeurs propres au voisinage de 2 kHz sont tracées figure 4.56 en fonction des deux paramètres pour l'ensemble des expériences. Ces données permettent ensuite de calculer le ratio signal sur bruit en fonction de  $E_p$ . Nous constatons que le système n'est robuste qu'entre 5 et 5.5 GPa. Ensuite, la robustesse se dégrade rapidement, avec un ratio signal sur bruit qui atteint -35 pour 10 GPa, la configuration nominale. Au delà, la robustesse s'améliore lentement.

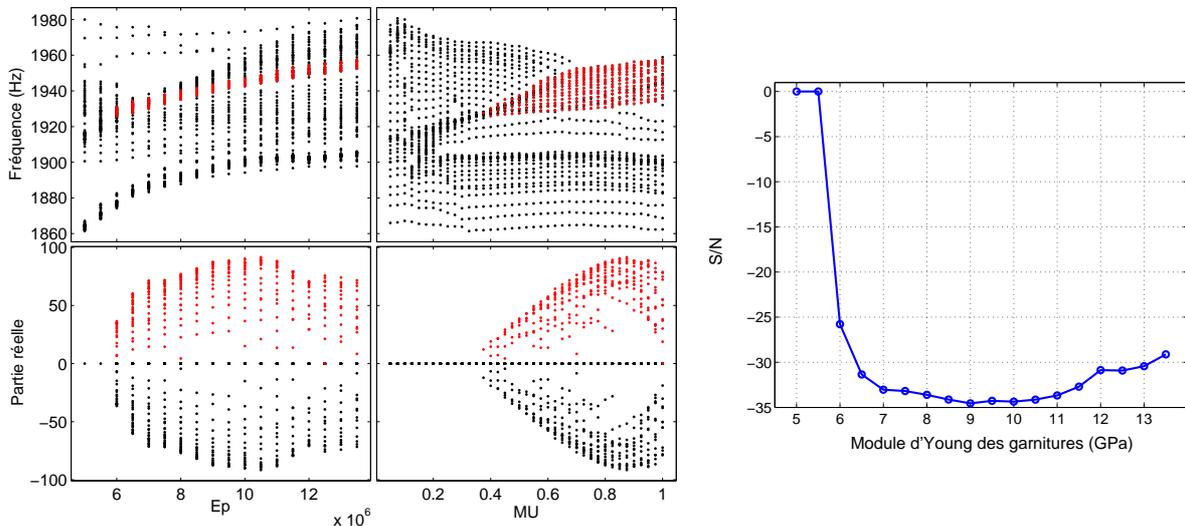


FIG. 4.56 – Evolution des valeurs propres en fonction de  $(\mu, E_p)$  et robustesse

Ceci se comprend assez facilement en observant les courbes de coalescence biparamétriques représentées figure 4.57. En effet, pour  $E_p = 5$  GPa, nous observons deux modes stables qui coalescent lorsque la valeur de ce paramètre augmente. Parallèlement, le coefficient de frottement critique augmente, ce qui élargit la plage de stabilité. Cette plage de stabilité est représentée plus clairement figure 4.58. Le rectangle bleu qui est superposé au diagramme représente la variabilité réelle des paramètres. Dans le processus de conception, nous pouvons agir sur le choix de la valeur nominale de  $E_p$ , ce qui signifie que nous sommes libres de translater ce rectangle verticalement. Une augmentation de cette valeur nominale nous permettrait d'améliorer légèrement la robustesse.

Cependant, pour rendre le système véritablement robuste, il faudrait augmenter  $E_p$  de façon telle que nous atteindrions rapidement les limites de ce que les plaquettistes sont capables de fabriquer.

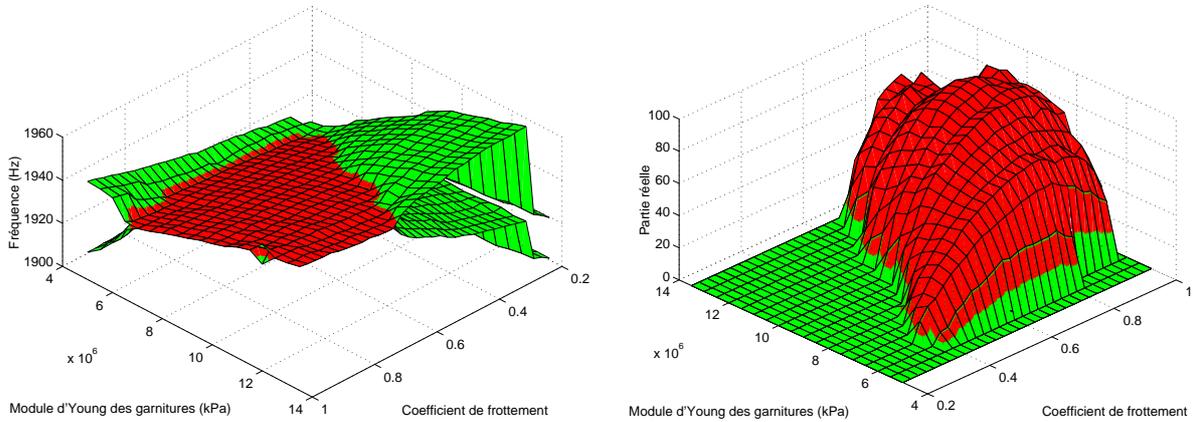


FIG. 4.57 – Courbes de coalescence biparamétriques  $(\mu, E_p)$

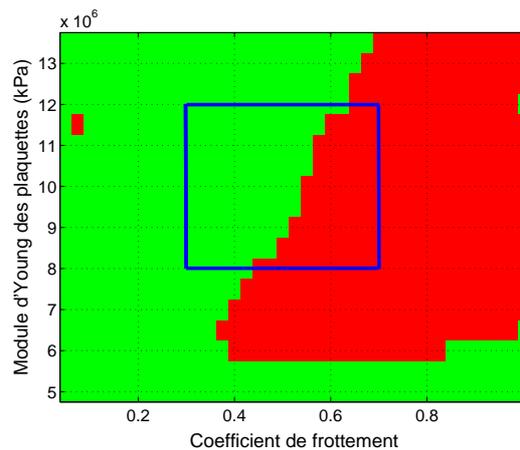


FIG. 4.58 – Zone de stabilité  $(\mu, E_p)$

#### 4.8.2 Plan complet $(\mu, E_d)$

Un second plan factoriel complet a été réalisé en prenant comme paramètres le coefficient de frottement et le module d'Young du disque. Nous avons choisi les valeurs de ce dernier paramètre afin de balayer l'ensemble des fontes GL (Graphite Lamellaire) couramment utilisées pour la réalisation de disques de frein.

Les valeurs propres au voisinage de 2 kHz sont tracées figure 4.59 en fonction des deux paramètres pour l'ensemble des expériences. Ces données permettent ensuite de calculer le ratio signal sur bruit en fonction de  $E_d$ . Le système est robuste sur les plages [95, 102] et [122, 125] GPa. Pour les valeurs intermédiaires, la robustesse du système se dégrade très rapidement. Nous remarquons qu'un maximum local de robustesse apparaît tout de même pour  $E_d = 111$  GPa.

Ceci peut être expliqué en observant les courbes de coalescence biparamétriques figure 4.60. Cette figure, qui détaille l'évolution des trois modes de la plage [1800, 2100] Hz, montre que

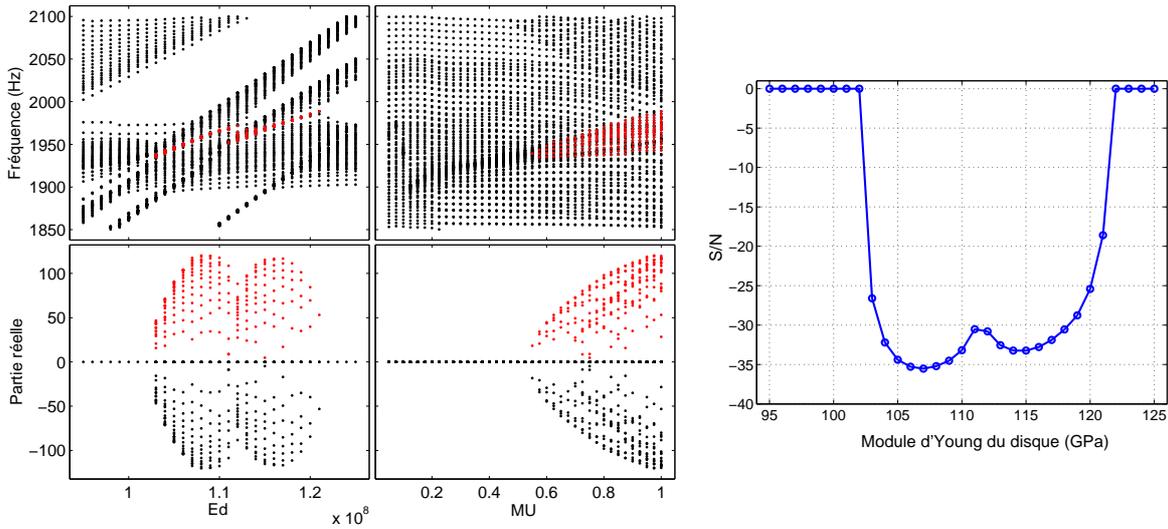


FIG. 4.59 – Evolution des valeurs propres en fonction de  $(\mu, E_d)$  et robustesse

lorsque le coefficient de frottement augmente,

- les trois modes restent stables pour  $E_d \in [95, 102] \cup [122, 125]$  GPa,
- les deux modes supérieurs coalescent pour  $E_d \in [103, 110]$  GPa,
- les deux modes inférieurs coalescent pour  $E_d \in [111, 121]$  GPa.

Une analyse précise par rapport à  $E_d$  de la transition entre ces deux régimes de couplage montre que les deux modes supérieurs se découpent lorsqu'on franchit 110 GPa et que l'un des deux modes ainsi libéré se recouple immédiatement avec le troisième mode. C'est la raison pour laquelle les courbes de coalescence présentent des tangentes verticales pour cette valeur du module d'Young.

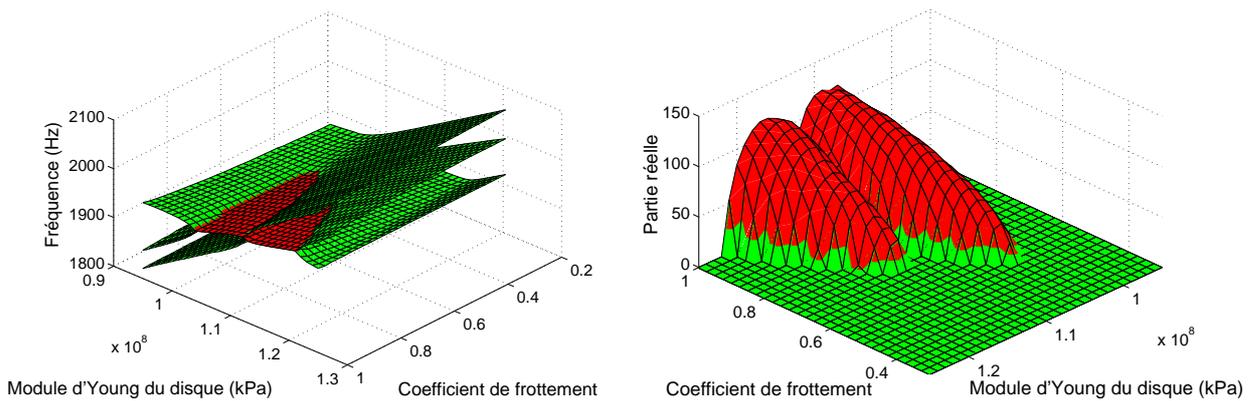


FIG. 4.60 – Courbes de coalescence biparamétriques  $(\mu, E_d)$

Le diagramme de stabilité au voisinage de 2 kHz est représenté figure 4.61 par rapport aux deux paramètres. Nous constatons alors clairement que la configuration nominale, 105 GPa, est la plus défavorable de toutes. Le choix d'une autre nuance de fonte permettrait donc de réduire le risque de crissement à 2 kHz. La solution la plus simple et la plus efficace consisterait à adopter une fonte moins rigide. Cependant, s'agissant d'un disque de frein, nous préconisons

plutôt une augmentation de  $E_d$  pour des raisons autres qu'acoustiques. Ceci pose néanmoins plus de problèmes dans la mesure où il faut éviter la « seconde » coalescence centrée sur 114 GPa. En outre, il faut garder à l'esprit que le diagramme de stabilité  $(\mu, E_d)$  présenté ici n'est valable que dans le cas où tous les autres paramètres sont à leur valeur nominale. Les variations de ces derniers paramètres sont susceptibles de modifier de façon importante le diagramme de stabilité et donc de remettre en cause la pertinence de notre préconisation.

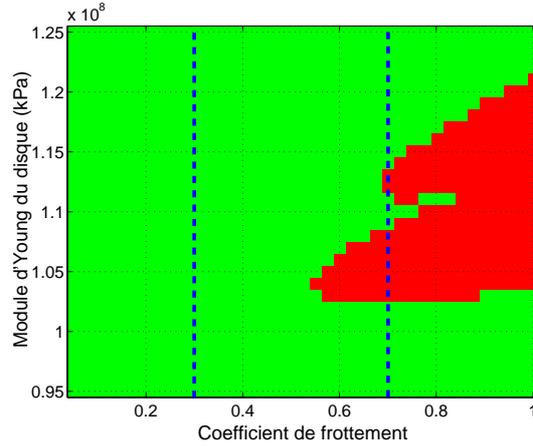


FIG. 4.61 – Zone de stabilité  $(\mu, E_d)$

#### 4.8.3 Plan complet $(E_d, E_p)$

Afin de lever une partie des réserves que nous venons d'émettre, un dernier plan factoriel complet a été réalisé afin de s'assurer qu'une augmentation du module d'Young du disque permet de réduire le risque de crissement à 2 kHz malgré la variabilité du module d'Young des garnitures. Dans cette analyse, la valeur du coefficient de frottement a été fixée à sa valeur nominale : 0.6.

Les valeurs propres au voisinage de 2 kHz sont tracées figure 4.62 en fonction des deux modules d'Young pour l'ensemble des expériences. Ces données permettent ensuite de calculer la robustesse par rapport aux variations de  $E_p$  en fonction de  $E_d$ . Nous constatons que la courbe représentant  $S/N$  en fonction de  $E_d$ , figure 4.62, ressemble fortement à la courbe tracée figure 4.59. Ces deux courbes représentent l'évolution du ratio signal sur bruit en fonction de  $E_d$ , mais dans le premier cas il s'agit de la robustesse par rapport aux variations de  $\mu$  alors que dans le second cas, il s'agit de la robustesse par rapport aux variations de  $E_p$ . Dans les deux cas, la plage de robustesse est identique, à savoir  $E_d \in [95, 102] \cup [122, 125]$  GPa et les minima et maxima de robustesse sont atteints pour les mêmes valeurs de  $E_d$ . La principale différence est que le maximum local de robustesse est associé cette fois à une valeur nulle du ratio signal sur bruit.

La raison de ceci est encore une fois liée aux coalescences entre les trois modes représentés figure 4.63. Les variations de  $E_p$  ont qualitativement les mêmes effets sur les motifs de coalescence que les variations de coefficient de frottement. Ceci se confirme lorsque l'on trace le diagramme de stabilité en fonction des deux modules d'Young, figure 4.64. Ce dernier nous informe que malgré la dispersion de  $E_p$ , une augmentation de  $E_d$  reste pertinente pour réduire le risque de crissement à 2 kHz. Pour s'éloigner encore d'avantage de la zone à risque, il serait également souhaitable d'augmenter la valeur nominale de  $E_p$ .

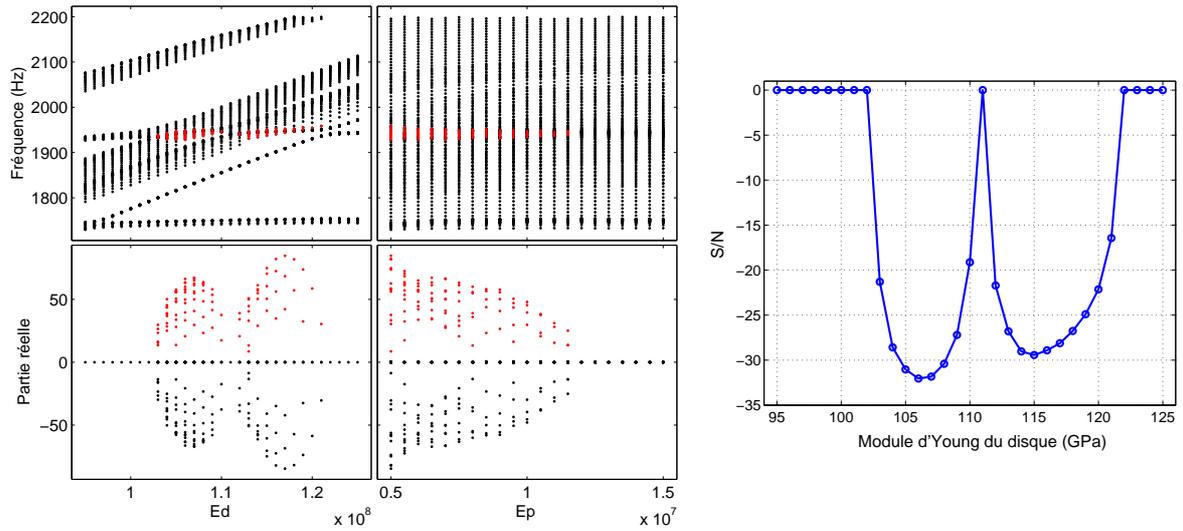


FIG. 4.62 – Evolution des valeurs propres en fonction de  $(E_d, E_p)$  et robustesse

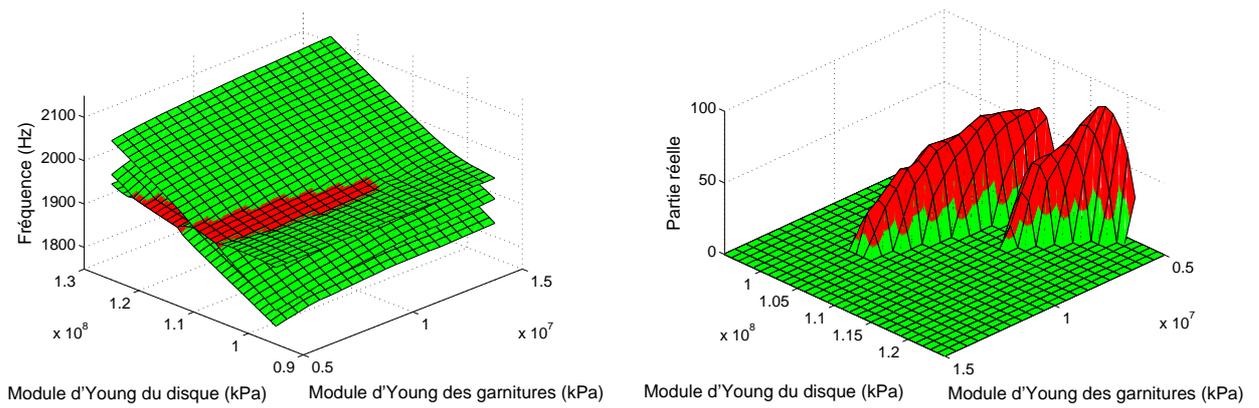


FIG. 4.63 – Courbes de coalescence biparamétriques  $(E_d, E_p)$

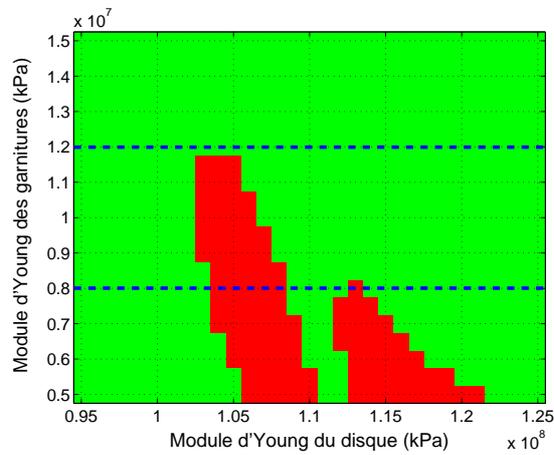


FIG. 4.64 – Zone de stabilité  $(E_d, E_p)$

#### 4.8.4 Choix des plaquettes

Pour réduire les problèmes de crissement, un des premiers angles de travail adopté expérimentalement consiste à modifier la géométrie des plaquettes. Cette technique qui a le mérite d'être relativement simple et peu coûteuse englobe une grande variété de solutions technologiques dont les deux principales sont l'adoption de chanfreins ou de troncutures sur les garnitures. Lors du développement du système sur lequel nous travaillons, des plaquettes standard, chanfreinées et tronquées ont été testées. La dernière de ces variantes s'est révélée être la meilleure pour réduire le problème de crissement à 2 kHz et a donc été choisie.

Notre objectif dans cette partie est d'évaluer numériquement ces trois solutions et de vérifier si la hiérarchisation expérimentale est retrouvée. Comme illustré figure 4.65, nous commençons par modéliser ces trois solutions.

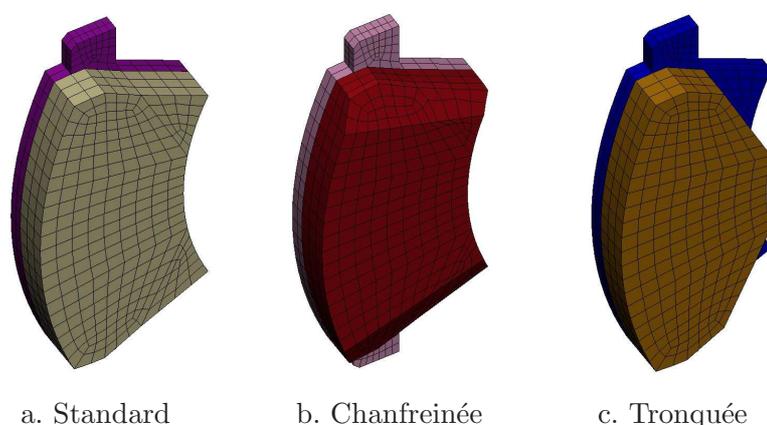


FIG. 4.65 – Différentes géométries de plaquettes

Un matrix test  $\mu.P.M.E_d.E_p$  est ensuite réalisé pour chacune de ces trois solutions. Une analyse en terme de risque de crissement et de robustesse permet alors de comparer les résultats et de hiérarchiser l'impact des solutions technologiques sur le crissement à 2 kHz, comme illustré figure 4.66. L'adoption d'un chanfrein réduit l'occurrence des crissements de faible gravité, mais augmente celle des plus graves. La troncuture des plaquettes n'a quasiment pas d'impact sur les crissements bénins, mais permet de réduire l'occurrence des crissements qui ont un  $IC > 40$ . Parmi les trois solutions, la plaquette tronquée est celle qui permet de minimiser le risque de crissement à 2 kHz. L'analyse de robustesse permet d'affiner la hiérarchisation en montrant que les plaquettes tronquées apportent de la robustesse au système alors que les plaquettes chanfreinées la dégradent.

Nous pouvons aller plus loin dans l'analyse en étudiant la variabilité du crissement aux différents paramètres, pour ces trois solutions. La figure 4.67 détaille les diagrammes de Farmer pour la marche avant et la marche arrière. Nous constatons que l'utilisation de chanfreins améliore sensiblement le comportement en marche avant mais dégrade celui en marche arrière. Il est également possible de conduire ce même type d'analyse par rapport à la pression et aux modules d'Young des pièces frottantes pour constater que les trois solutions ne réagissent pas de la même manière à la variabilité des paramètres.

Numériquement, nous obtenons la même conclusion que celle trouvée expérimentalement, à savoir que la plaquette tronquée est la meilleure des 3 solutions proposées. Nous conserverons donc cette plaquette pour la suite de l'étude. Néanmoins, il faut avoir conscience que le gain obtenu est relativement faible et que le problème de crissement à 2 kHz n'est pas résolu pour autant.

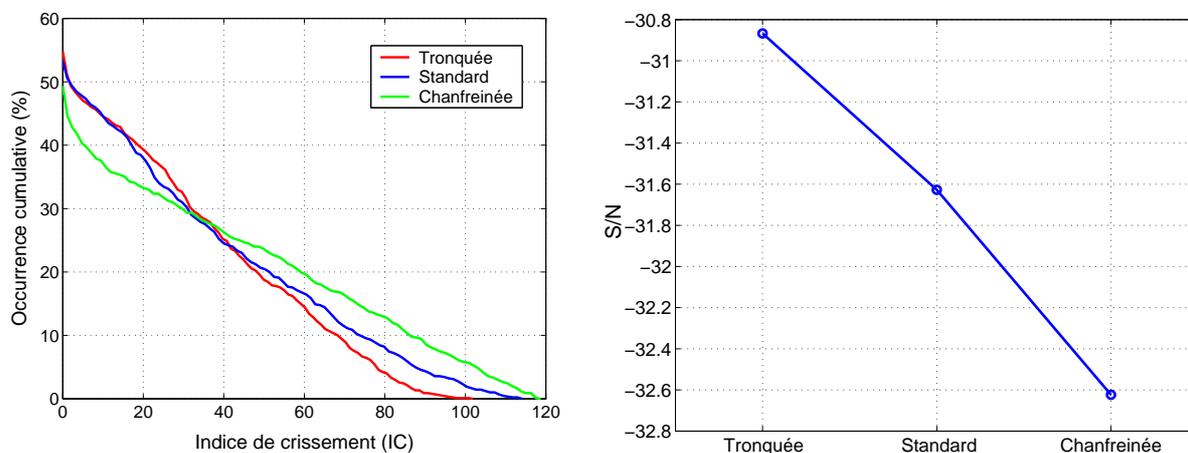


FIG. 4.66 – Risque et robustesse en fonction du choix de plaque

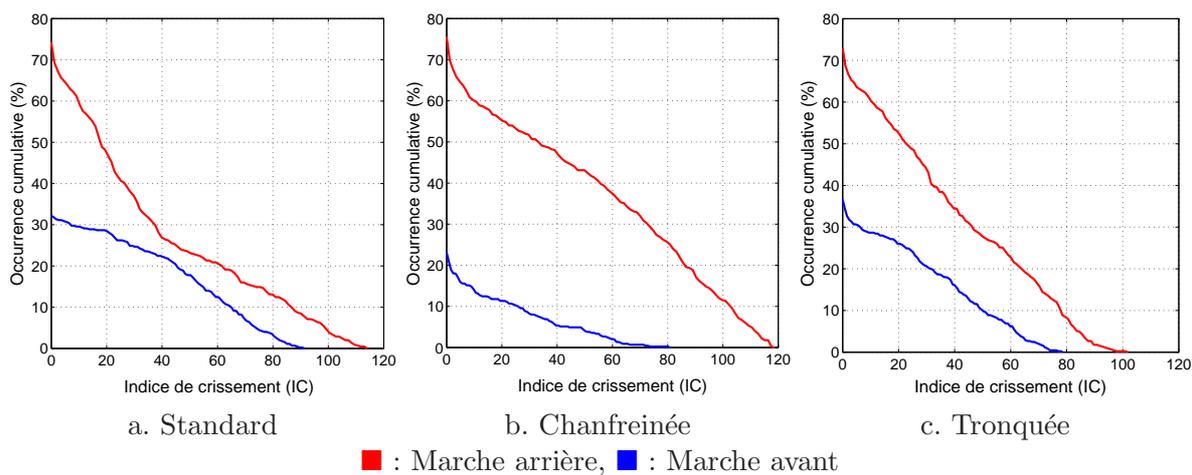


FIG. 4.67 – Variabilité aux paramètres d'utilisation pour les trois types de plaquettes

#### 4.8.5 Choix des matériaux

Dans cette partie, notre but est de trouver une solution qui présente un risque de crissement moindre et une robustesse accrue par rapport à la solution initiale. Le champ des solutions technologiques possibles étant évidemment très vaste, nous nous sommes imposés comme contrainte de ne pas modifier la géométrie du système. Nous tentons donc d'améliorer le système en choisissant judicieusement les matériaux des différentes pièces. Nos choix seront guidés par les études paramétriques et les trois plans complets présentés précédemment.

Dans un premier temps, nous nous basons sur les résultats de l'étude de sensibilité présentée figure 4.34 qui montrent que la rigidité et la densité du matériau de la chape sont des paramètres influents. A l'origine, cette pièce est réalisée en fonte sphéroïdale GS50.7, dont les caractéristiques sont indiquées tableau 4.3. Les résultats de l'étude de sensibilité montrent qu'une réduction du module d'Young ou une augmentation de densité permet de découpler les modes et donc de rendre le système stable. Nous avons donc choisi d'évaluer l'effet de l'utilisation de la fonte GS52, qui est 5 % plus souple et 3 % plus lourde que la fonte GS50.7. La figure 4.68 compare les résultats des matrix tests  $\mu.P.M.E_d.E_p$  réalisés avec ces deux nuances de fonte. Les crissements à 1.4, 1.9, 2.6 et 3.0 kHz émergent dans les deux cas. Les deux premiers sont moins critiques, et les deux suivants plus critiques avec la fonte GS52. De plus, cette nuance de fonte fait émerger un cinquième crissement à 3.3 kHz, qui est le plus critique de tous en terme de parties réelles. Néanmoins, en se focalisant sur le crissement à 1.9 kHz, nous constatons figure 4.69 que cette nouvelle fonte permet de réduire le risque de crissement et d'augmenter la robustesse du système.

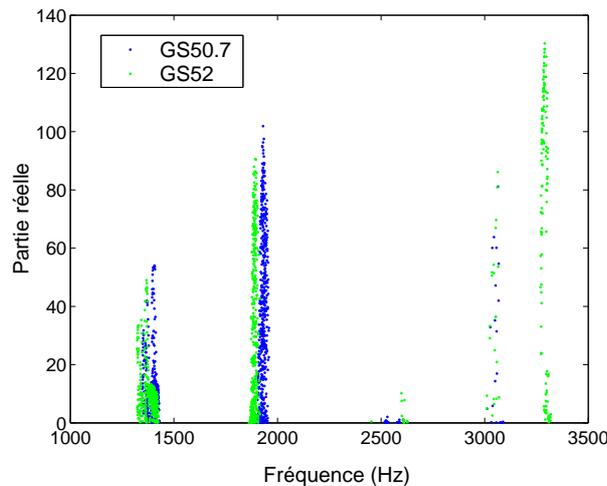


FIG. 4.68 – Matrix test  $\mu.P.M.E_d.E_p$  - Changement de nuance de fonte pour la chape

Dans un second temps, nous utilisons les trois plans factoriels complets afin de choisir judicieusement les matériaux des pièces frottantes. Initialement, le disque est réalisé en fonte GL11 et les garnitures en un matériau que nous nommerons G1. Les caractéristiques de ces deux matériaux sont référencées dans le tableau 4.3. Comme préconisé lors de l'analyse des plans complets, nous cherchons une fonte plus rigide que la fonte actuelle afin de s'éloigner de la zone de coalescence. Nous avons identifié deux nuances de fonte qui répondent à cette attente tout en étant adaptées à la réalisation de disques de frein : la GL03 et la GL09. Ces deux fontes sont 1.5 % plus lourdes et respectivement 5 et 15 % plus rigides que la GL11. Une augmentation de la raideur des garnitures était également préconisée pour s'éloigner encore d'avantage de la zone à risque. Nous avons donc évalué une configuration avec un disque en GL09 et des garnitures réalisées dans un matériau que nous nommons G2 et qui a une raideur augmentée de 10 % par rapport à G1. La figure 4.70

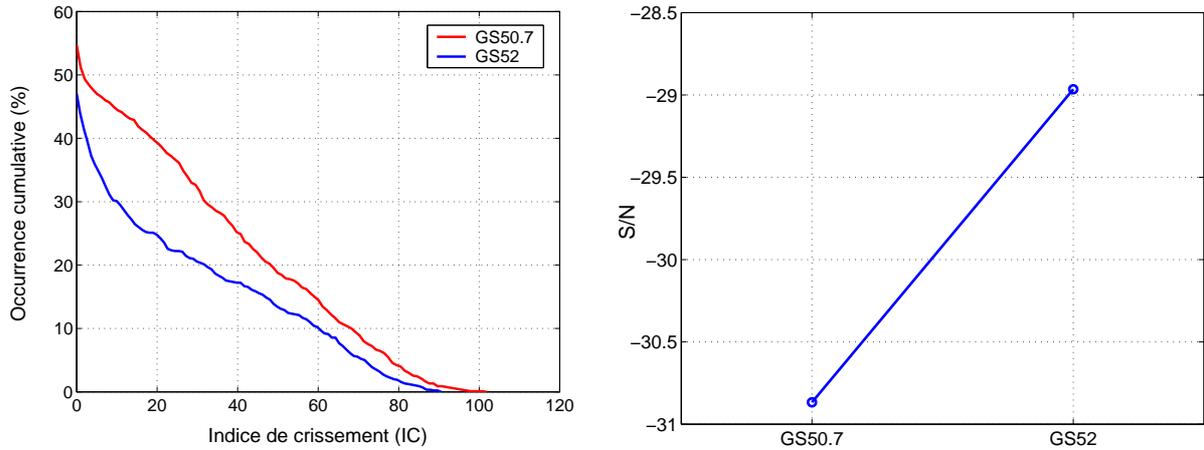


FIG. 4.69 – Risque et robustesse en fonction du choix de la chape

Pièce	Matériau	$E(GPa)$	$\rho(kgm^{-3})$
Chape	GS50.7	174	7000
	GS52	165	7200
Disque	GL11	105	7100
	GL03	110	7200
	GL09	120	7200
Garniture	G1	10	2700
	G2	11	2700

TAB. 4.3 – Caractéristiques des matériaux utilisés

nous montre l'effet de ces trois modifications en comparaison avec la solution initiale.

Avec la fonte GL03, les crissements à 1.4, 1.9 et 3.0 kHz émergent avec un niveau comparable à la solution initiale. En revanche, ce choix augmente la criticité sur la plage [2.5, 2.7] kHz. La fonte GL09 permet de réduire sensiblement l'émergence des crissements à 1.9 et 3.0 kHz. Néanmoins, les crissements à 1.4 et 2.6 kHz sont plus critiques et un nouveau crissement apparaît à 3.2 kHz. L'adoption d'une garniture en G2 en plus du disque en GL09 fait disparaître le crissement à 3.0 kHz, mais fait fortement émerger un nouveau crissement à 3.4 kHz.

En nous focalisant maintenant sur le crissement à 1.9 kHz, nous constatons, figure 4.71, que l'adoption d'une fonte GL03 pour le disque ne permet de réduire le risque que de façon limitée. En revanche, l'utilisation d'une fonte GL09 réduit considérablement ce risque. En effet, l'indice de crissement maximum est divisé par 2 et la probabilité d'obtenir un crissement d' $IC > 10$  passe de 45 % à 5 %. L'utilisation de garnitures en matériau G2 permet encore de réduire le risque de crissement. L'indice de crissement maximum est alors de 36, soit une valeur 3 fois inférieure à la configuration initiale et la probabilité d'un crissement d' $IC > 10$  est réduite à moins de 3 %. Cette amélioration du système pour le crissement à 1.9 kHz peut également être appréciée en terme de robustesse. Notre dernière solution permet d'atteindre une valeur de  $S/N$  de  $-11.4$ , alors qu'initialement l'indicateur de robustesse valait  $-30.4$ .

Le plan produit représenté tableau 4.4 rassemble les valeurs des indicateurs de performance et de robustesse de toutes les configurations que nous avons évaluées. Il confirme que la solution N°7, avec un disque en GL09 et des garnitures en G2, est la solution la plus performante en moyenne et également la plus robuste par rapport aux variations de conditions d'utilisation et

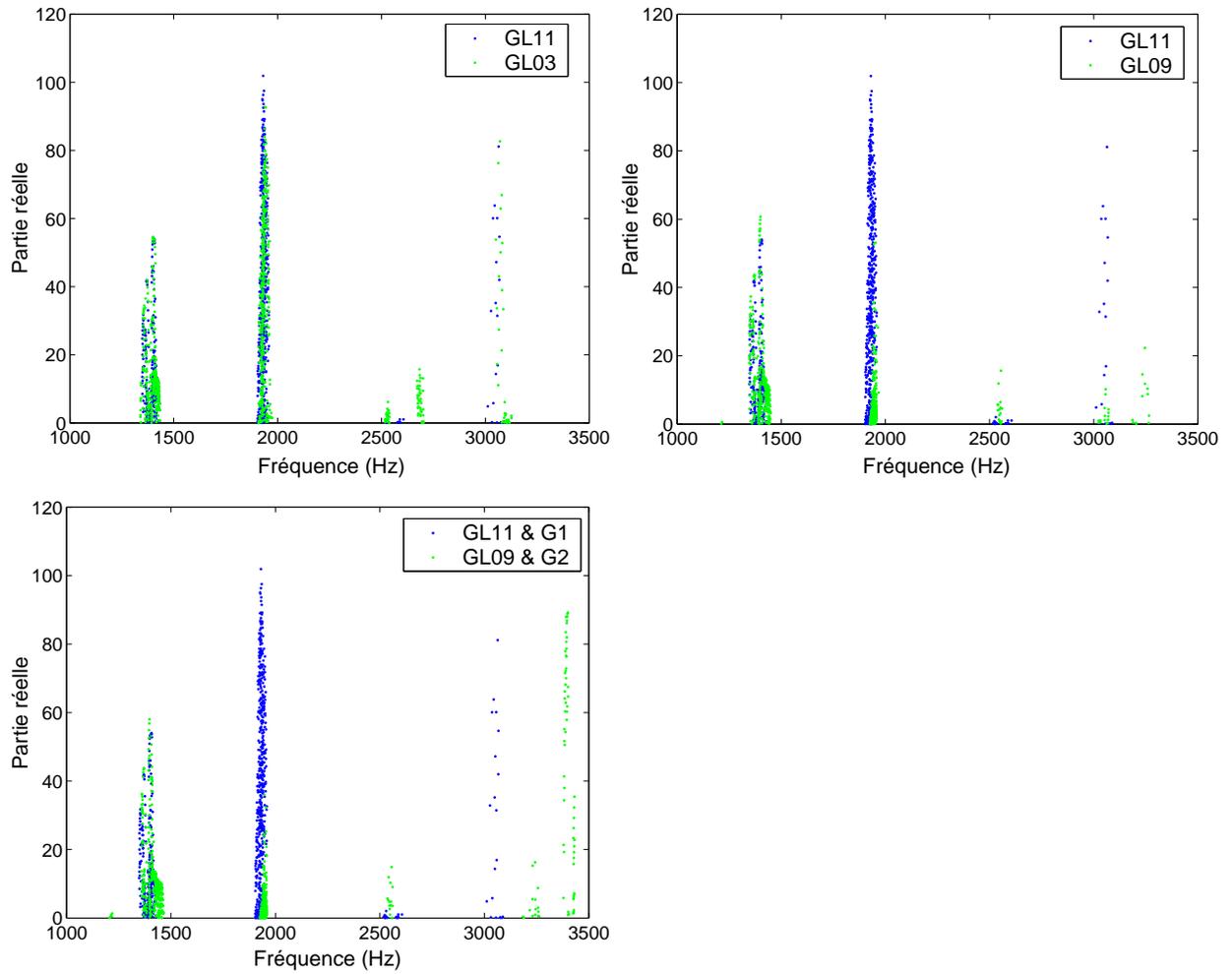


FIG. 4.70 – Matrix test  $\mu.P.M.E_d.E_p$  - Changement des matériaux des pièces frottantes

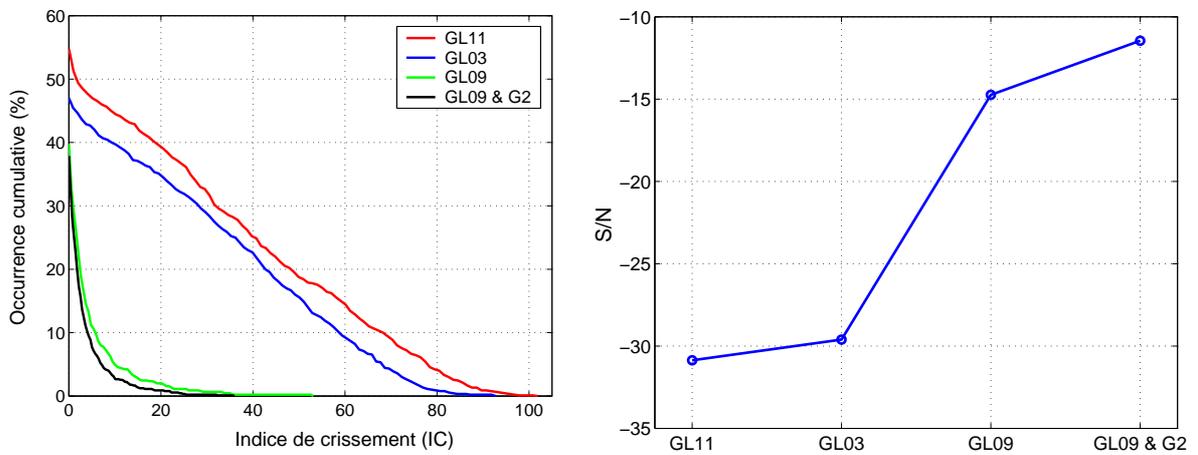


FIG. 4.71 – Risque et robustesse en fonction des matériaux des pièces frottantes

N°	Plaquette		Disque	Chape	$\bar{I}C$	S/N
1	Tronquée	G1	GL11	GS50	<b>21.37</b>	<b>-30.87</b>
2	Standard	G1	GL11	GS50	22.62	-31.63
3	Chanfreinée	G1	GL11	GS50	23.73	-32.62
4	Tronquée	G1	GL11	GS52	14.34	-28.96
5	Tronquée	G1	GL03	GS50	17.71	-29.60
6	Tronquée	G1	GL09	GS50	1.97	-14.74
7	Tronquée	G2	GL09	GS50	1.35	-11.45

TAB. 4.4 – Plan produit - Performance et robustesse aux paramètres d'utilisation et d'environnement sur la plage [1.8, 2.2] kHz

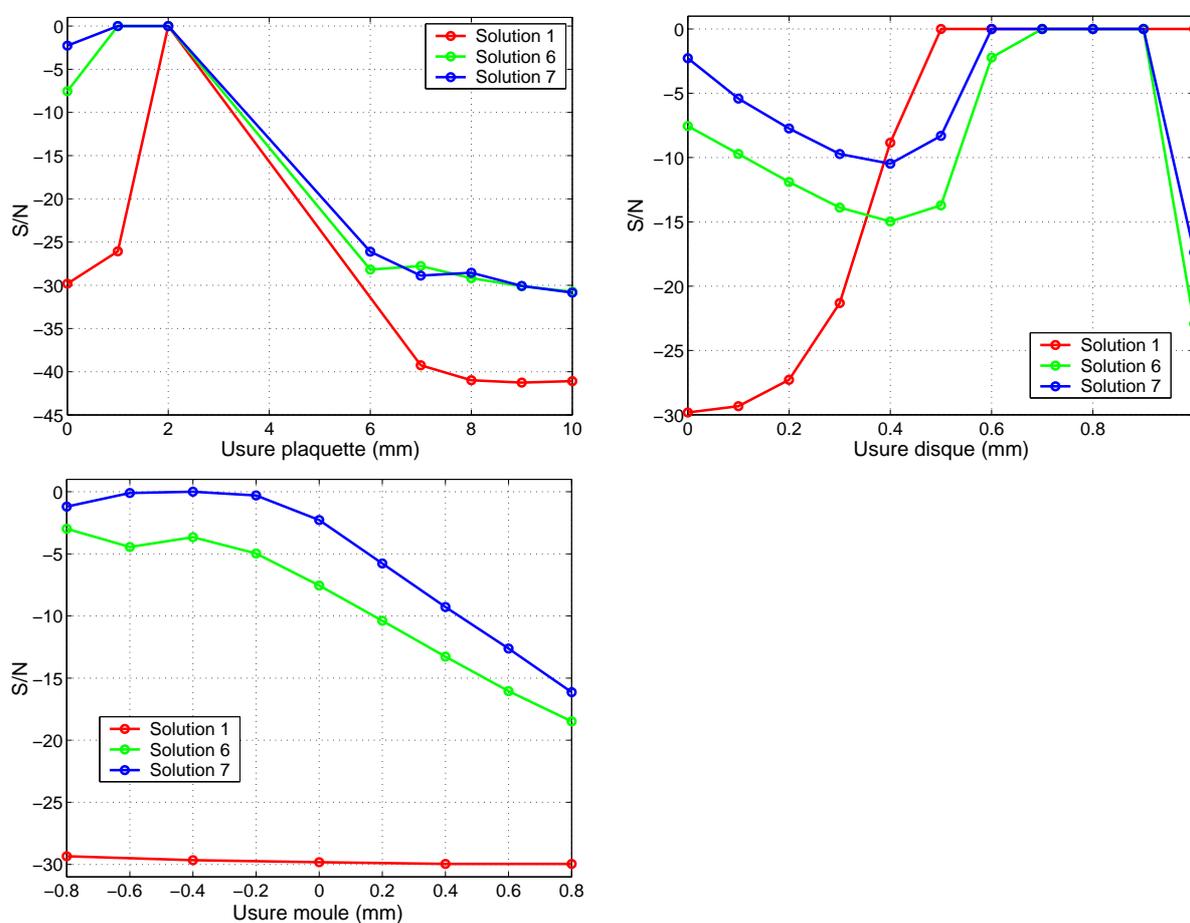


FIG. 4.72 – Robustesse des différentes solutions à l'usure

Usure	Plaquette		Disque		Moule	
	$\bar{I}C$	S/N	$\bar{I}C$	S/N	$\bar{I}C$	S/N
1	55.47	-38.41	5.17	-23.56	17.95	-29.75
6	12.33	-27.30	1.42	-14.46	1.78	-12.47
7	12.53	-27.13	0.76	-9.28	1.15	-9.35

TAB. 4.5 – Plan produit - Performance et robustesse à l'usure sur la plage [1.8, 2.2] kHz

d'environnement. Avant d'adopter définitivement cette solution, il nous faut encore nous assurer de sa robustesse par rapport à l'usure des différentes pièces. La robustesse à l'usure des plaquettes, à l'usure du disque et à l'usure du moule du disque ont été évaluées indépendamment grâce à trois plans d'expériences faisant intervenir l'usure correspondante et le coefficient de frottement. Ceci nous permet de tracer l'évolution de la robustesse au coefficient de frottement en fonction de l'usure, comme illustré figure 4.72. Nous constatons que pour les trois configurations, la robustesse se dégrade assez fortement lorsque les plaquettes s'usent. Les solutions N°6 et N°7 voient leur robustesse décroître jusqu'à une usure du disque de 0.4 mm, croître ensuite pour atteindre 0 et enfin se dégrader à nouveau pour un disque usé au maximum. Ces deux solutions sont également plus sensibles à l'usure des moules que la solution N°1. Leur robustesse décroît avec ce paramètre, mais conservent toujours des valeurs supérieures à celle de la solution N°1.

De façon globale, le plan produit représenté tableau 4.5 synthétise la performance moyenne du système et sa robustesse aux trois usures. Nous constatons que la solution N°7 est celle qui est la plus robuste par rapport à ces usures. Nous retenons donc définitivement cette solution qui est la plus performante et la plus robuste de toutes celles que nous avons évaluées.

## 4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, notre objectif était de créer un modèle capable d'orienter les choix techniques et technologiques dès la phase de conception d'un nouveau système de freinage. L'intérêt est alors de pouvoir faire les bons choix aux bons moments afin de réduire les délais et les coûts de développement. Nous avons montré que le seul modèle de conception pertinent pour orienter ces choix est un modèle matériel simplifié.

Ainsi, une stratégie a été élaborée afin de réaliser un modèle éléments finis simplifié capable de représenter au mieux et à moindre coût le comportement du système au voisinage de 2 kHz. La modélisation de l'ensemble des contacts n'étant pas simplifiée, ce modèle permet de réaliser un calcul précis de préchargement. Au nominal, les résultats obtenus avec le modèle de conception sont bien corrélés avec ceux du modèle de développement, à la fois en fréquences, en parties réelles et en déformées. De plus, malgré un nombre d'éléments divisé par 4.5, il permet de reproduire avec précision la variabilité des phénomènes avec le coefficient de frottement et avec la pression hydraulique.

De par son très bon rapport précision / temps de calcul, ce modèle nous a ensuite permis de réaliser une vaste campagne d'études paramétriques. Nous avons dans un premier temps listé un certain nombre de paramètres manifestement dispersés et susceptibles d'avoir une influence sur le crissement. Nous avons montré par le calcul que tous ces paramètres sont effectivement dimensionnants et nous les avons hiérarchisés en fonction de leur impact sur le crissement. Les résultats obtenus nous incitent à considérer le crissement comme un phénomène de coalescence multi-paramétrique dans lequel chaque paramètre est associé à une des dimensions du problème. Nous avons ensuite réalisé une étude de sensibilité par rapport à tous les paramètres de modélisation dont la variabilité nous était inconnue afin d'identifier ceux qu'il conviendrait de mettre sous contrôle.

Afin d'évaluer les performances du système en prenant en compte la variabilité aux conditions d'utilisation et d'environnement, nous proposons une démarche que nous nommons matrix test numérique. Il s'agit d'un plan d'expériences comprenant 900 calculs qui balayent toutes les conditions dans lesquelles le système est susceptible d'être utilisé. Ce matrix test permet d'analyser finement le risque de crissement, à la fois en terme d'occurrence et de gravité, et d'analyser l'effet des différents paramètres. Cette étude a ensuite été complétée par une analyse de robustesse par rapport à l'usure des plaquettes, du disque et du moule du disque.

Dans une dernière partie, nous adoptons une démarche de conception robuste afin de trouver

une solution plus performante et plus robuste que la solution initiale vis à vis des différentes dispersions. Pour cela, nous commençons par réaliser des études biparamétriques afin d'explorer certaines directions de l'espace de conception. Nous montrons numériquement que la troncature des plaquettes permet de réduire le risque de crissement, ce qui est conforme aux constatations expérimentales. Nous proposons ensuite six solutions que nous évaluons grâce à des matrices test afin de les comparer à la solution initiale. L'une d'elle permet de diviser par 4 le risque de crissement. Ainsi, la probabilité d'obtenir un crissement critique ( $IC > 10$ ) est réduite à moins de 3 %, alors qu'initialement elle était de 45 %. En outre, la robustesse de cette solution par rapport aux différentes usures a été vérifiée et s'est révélée être meilleure que celle de la solution initiale.



# Conclusions et perspectives

L'objectif de cette thèse était de proposer une méthodologie de modélisation du crissement de frein qui soit capable de décrire finement ce phénomène et d'en expliquer le caractère fugace.

Pour cela, nous avons commencé par réaliser un état de l'art des très nombreux travaux consacrés à ce bruit de frein. La synthèse des travaux expérimentaux nous a appris que le crissement est à l'origine une instabilité vibratoire induite par le frottement et que sa principale caractéristique est d'être extrêmement sensible à de nombreux paramètres. Les différents travaux de modélisation permettent d'identifier de façon consensuelle la coalescence de modes comme le mécanisme qui donne naissance au crissement.

Afin de prédire le crissement, nous avons proposé dans un premier temps une méthodologie linéaire basée sur un modèle éléments finis représentatif d'un frein réel. Le frottement a été modélisé grâce à la loi de Coulomb et la stabilité du système a été estimée à travers des analyses aux valeurs propres complexes. Ce modèle a permis de mettre en évidence le phénomène de coalescence de modes lors d'une étude paramétrique par rapport au coefficient de frottement. Ce concept a ensuite été généralisé de façon à considérer le crissement comme un phénomène multi-paramétrique de couplage de modes. Nous avons également réalisé une étude originale de l'effet de l'amortissement sur la stabilité dans laquelle nous montrons qu'il peut avoir des conséquences non-intuitives pouvant aller jusqu'à la déstabilisation du système.

Conscients des limitations importantes de la modélisation linéaire, nous avons ensuite adopté une méthodologie non-linéaire pour le calcul du crissement. Celle-ci consiste à enchaîner un calcul statique non-linéaire, une linéarisation du problème et une analyse aux valeurs propres complexes. Nous avons proposé un modèle éléments finis représentatif d'un frein réel dans lequel l'ensemble des contacts est modélisé de façon fine. Nous avons expliqué en quoi la position d'équilibre statique, et en particulier l'équilibre des plaquettes, influe sur le comportement dynamique du système. Des études paramétriques à la pression hydraulique et au coefficient de frottement ont permis de mettre en évidence des courbes de coalescence discontinues du fait des changements de position d'équilibre statique. Ces discontinuités qui apparaissent lorsque le système est faiblement chargé expliquent la nature fugace du crissement dans ces conditions.

Pour concevoir au mieux un système de freinage, il est important de prendre en compte la problématique du crissement au plus tôt dans le processus de conception. Nous avons montré que le seul modèle de conception pertinent pour orienter les choix techniques et technologiques est un modèle matériel simplifié. Ainsi, nous avons proposé un modèle éléments finis simplifié au juste nécessaire qui permet de représenter à moindre coût mais précisément le comportement nominal du système ainsi que sa variabilité aux paramètres. Ce modèle nous a permis de hiérarchiser les paramètres dimensionnants en fonction de leur impact sur le crissement. De plus, ces études paramétriques ont mis en évidence l'effet des différents paramètres sur les motifs de couplage des modes. Afin d'évaluer les performances du système en prenant en compte la variabilité aux conditions d'utilisation et d'environnement, nous avons proposé une démarche que nous nommons *matrix test numérique*. Il s'agit d'un plan d'expériences qui balaye toutes les conditions dans

lesquelles le système est susceptible d'être utilisé et qui permet d'analyser finement le risque de crissement. Nous avons enfin proposé une démarche de conception robuste, qui s'appuie sur les matrix tests numériques, afin de trouver une solution plus performante et plus robuste que la solution initiale vis à vis des différentes dispersions. Cette approche nous a guidé vers une solution qui permet de diviser par 4 le risque de crissement par rapport à la solution initiale. Ainsi, la probabilité d'obtenir un crissement critique a été réduite à moins de 3 %, alors qu'initialement elle était de 45 %. Après avoir vérifié sa robustesse aux phénomènes d'usure, nous avons conclu que cette solution est beaucoup moins critique que la solution initiale en terme de crissement.

Cette étude ouvre de nombreuses perspectives à la fois en modélisation et en conception.

Des progrès importants ont été réalisés d'un point de vue modélisation et compréhension de la physique. Néanmoins, il serait souhaitable de valider les résultats obtenus, à la fois au nominal et en variabilité, par une campagne de comparaison calcul-mesure rigoureuse. Ceci permettrait d'identifier les points à améliorer, qui concernent probablement la modélisation des différentes liaisons. Dans nos travaux, nous représentons la variabilité du comportement du système à la température et à l'hygrométrie par des variations de coefficient de frottement et de module d'Young. La relation entre ces deux couples de paramètres est dans le principe admise, mais nous manquons de données expérimentales. Sans cette relation, il est très difficile de comparer précisément les variabilités obtenues numériquement et expérimentalement. Nous avons également identifié un certain nombre de paramètres très influents mais dont les dispersions sont mal connues. Il serait judicieux de s'y intéresser au travers d'études expérimentales spécifiques.

Dans toute cette étude, nous avons analysé la stabilité du système grâce à une approche modale qui nous renseigne sur le taux de divergence des oscillations. Idéalement, il faudrait poursuivre l'étude en considérant les niveaux vibratoires puis les niveaux acoustiques. Or actuellement, le calcul des niveaux vibratoires sur un modèle représentatif n'est pas mature au nominal et a fortiori dans le cadre d'une analyse de robustesse. En effet, ce calcul nécessite une intégration temporelle très exigeante en temps de calcul, une modélisation précise de l'amortissement et l'identification des non-linéarités dynamiques du système. Malgré quelques travaux ponctuels, par exemple sur l'analyse temporelle de modèles simplifiés ou sur la modélisation de l'amortissement apporté par l'anti-bruit, il reste encore beaucoup de travail à accomplir pour mener cette démarche jusqu'à son terme.

D'un point de vue conception, nous pouvons envisager d'adapter les méthodologies présentées à d'autres systèmes de freinage : les freins à disque avec des technologies différentes de maintien des plaquettes et les freins à tambour. D'autre part, nous pourrions automatiser la recherche d'une solution plus performante et plus robuste en ayant recours à des algorithmes d'optimisation.

# Publications personnelles

## Revue internationale spécialisée avec comité de lecture

G. FRITZ, J-J. SINOÛ, J-M. DUFFAL et L. JÉZÉQUEL : Parameter analysis of brake squeal using finite element method. *European Journal of Computational Mechanics*, 16(1) : 11-32, 2007.

G. FRITZ, J-J. SINOÛ, J-M. DUFFAL et L. JÉZÉQUEL : Effects of damping on brake squeal coalescence patterns - application on a finite element model. *Mechanics Research Communications*, 34 : 181-190, 2007.

J-J. SINOÛ, G. FRITZ et L. JÉZÉQUEL : The role of damping and definition of the Robust Damping Factor (RD-Factor) for a self-exciting mechanism with constant friction. *Journal of Vibration and Acoustics*, Sous presse.

G. FRITZ, J-J. SINOÛ, J-M. DUFFAL et L. JÉZÉQUEL : Investigation of the relationship between damping and mode coupling patterns in case of brake squeal *Journal of Sound and Vibration* Accepté avec révisions mineures le 22 mars 2007.

## Colloques internationaux avec actes publiés

G. FRITZ, J-M. DUFFAL, D. PEREZ-RECIO, S. BONNET, J-J. SINOÛ et L. JÉZÉQUEL : Brake squeal : a multi parametric phenomenon assessed in terms of robustness. *ISMA2006 International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven, Belgique*, September 18-20, 2006.

G. FRITZ, J-M. DUFFAL, J-J. SINOÛ et L. JÉZÉQUEL : Robust stability analysis of brake squeal based on a parametric finite element model. *SAE 2007 Noise and Vibration Conference and Exhibition, St. Charles, Illinois, USA*, May 14-17, 2007.

## Colloques nationaux avec actes publiés

G. FRITZ, J-J. SINOÛ, J-M. DUFFAL et L. JÉZÉQUEL : Modélisation par éléments finis et étude paramétrique du crissement de frein. *15ème Colloque Vibrations Chocs et bruit, Ecully, France*, 14-16 Juin, 2006.

G. FRITZ, J-J. SINOÛ, J-M. DUFFAL et L. JÉZÉQUEL : Effet de l'amortissement sur les motifs de coalescence impliqués dans le crissement de frein. *8ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France*, 21-25 Mai, 2007



# Bibliographie

- [1] Design of experiments reference information. *iSIGHT Reference Guide*, pages 245–310.
- [2] Nastran advanced dynamic user's guide, msc.nastran version 70. *MSC.Software Corporation*.
- [3] Abaqus example problems manual. *ABAQUS, Inc., Version 6.5 Documentation*, 2004.
- [4] Abaqus theory manual. *ABAQUS, Inc., Version 6.5 Documentation*, 2004.
- [5] Abaqus analysis user's manual. *ABAQUS, Inc., Version 6.5 Documentation*, 2005.
- [6] M.K. ABDELHAMID : Creep groan of disc brakes. *SAE paper 951282*, 1995.
- [7] M.K. ABDELHAMID et E. DENYS : Los angeles city traffic (lact) testing. *In Disc Brake Squeal*, chapitre 10. SAE International, 2006.
- [8] H. ABENDROTH et U. SCHWARZ : Correlating dynamometer and vehicle brake test results : Brake squeal. *SAE paper 2001-01-3143*, 2001.
- [9] I. AHMED et S. ABOUL-SEOUD : Drum brake squeal analysis by finite element method. *SAE paper 2006-01-3211*, 2006.
- [10] I.L.M. AHMED, P.S. LEUNG et P.K. DATTA : Contact analysis of the disc brake by finite element methods. *Vehicle Noise and Vibration 2002, Institution of Mechanical Engineers, London, I MECH E*, C605/001/2002:3–15, 2002.
- [11] K.M. AHMIDA et J.R.F. ARRUDA : On the relation between complex modes and wave propagation phenomena. *Journal of Sound and Vibration*, 255(4):663–684, 2002.
- [12] A. AKAY : Acoustics of friction. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(4), 2002.
- [13] J. BADERTSCHER et K.A. CUNEFARE : Experimental investigation of dither control on effective braking torque. *SAE paper 2003-01-1617*, 2003.
- [14] J.C. BAE et J.A. WICKERT : Free vibration of coupled disk-hat structures. *Journal of Sound and Vibration*, 235(1):117–132, 2000.
- [15] Z. BAI, J. DEMMEL, J. DONGARRA, A. RUHE et H. van der VORST : Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems : a practical guide. *SIAM, Philadelphia*, 2000.
- [16] A. BAJER, V. BELSKY et S.W. KUNG : The influence of friction-induced damping and nonlinear effects on brake squeal analysis. *SAE paper 2004-01-2794*, 2004.
- [17] A. BAJER, V. BELSKY et L.J. ZENG : Combining a nonlinear static and complex eigenvalue extraction in brake squeal simulation. *SAE paper 2003-01-3349*, 2003.
- [18] A.R. Abu BAKAR, H. OUYANG, L. LI et J.E. SIEGEL : Brake pad surface topography part 1 : Contact pressure distributions. *SAE paper 2005-01-3941*, 2005.
- [19] A.R. Abu BAKAR, H. OUYANG, L. LI et J.E. SIEGEL : Brake pad surface topography part 2 : Squeal generation and prevention. *SAE paper 2005-01-3935*, 2005.
- [20] J.R. BARBER et M. CIAVARELLA : Contact mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 37 (2000):29–43, 2000.

- [21] P. BLASCHKE, M. TAN et A. WANG : On the analysis of brake squeal propensity using finite element method. *SAE paper 2000-01-2765*, 2000.
- [22] J.P. BOUDOT : *Modélisation des Bruits de freinage des Véhicules Industriels*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1995.
- [23] J. BRECHT, A. ELVENKEMPER, J. BETTEN, U. NAVRATH et J.B. MULTHOFF : Elastic properties of friction materials. *SAE paper 2003-01-3333*, 2003.
- [24] J. BRECHT et K. SCHIFFNER : Influence of friction law on brake creep-groan. *SAE paper 2001-01-3138*, 2001.
- [25] J-J. CARRÉ : Technologie du freinage freins à disque. *Techniques de l'ingénieur*, B5 574:1–18.
- [26] P. CHAMBRETTE : *Stabilité des systèmes Dynamiques avec Frottement Sec : Application au Crissement des Freins à Disque*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1991.
- [27] F. CHEN, G.M. BROWN, M.M. MARCHI et M. DALE : Recent advances in brake noise and vibration engineering using laser metrology. *Optical Engineering*, 42(5):1359–1369, 2003.
- [28] F. CHEN, D. MCKILLIP, J. LUO et S.F. WU : Measurement and analysis of rotor inplane mode induced disc brake squeal and beyond. *SAE paper 2004-01-2798*, 2004.
- [29] F. CHEN, C.A. TAN et R.L. QUAGLIA : *Disc Brake Squeal. Mechanism, Analysis, Evaluation and Reduction/Prevention*. SAE International, 2006.
- [30] F. CHEN, H. TONG, S.E. CHEN et R. QUAGLIA : On automotive disc brake squeal part 4 : Reduction and prevention. *SAE paper 2003-01-3345*, 2003.
- [31] F. CHEN, A. WANG, J. BLOOMER et M. YANG : Brake pad modal characteristic measurement and analysis. *SAE paper 2005-01-3926*, 2005.
- [32] F. CHEN, A. WANG et C.A. TAN : Suppression of self-excited vibration by dither technique with potential application to reduce brake squeal. *SAE paper 2004-01-2790*, 2004.
- [33] C.H. CHUNG, W. STEED, K. KOBAYASHI et H. NAKATA : A new analysis method for brake squeal part 1 : Theory for modal domain formulation and stability analysis. *SAE paper 2001-01-1600*, 2001.
- [34] C.H.J. CHUNG et M. DONLEY : Mode coupling phenomenon of brake squeal dynamics. *SAE paper 2003-01-1624*, 2003.
- [35] C.H.J. CHUNG, W. STEED, J. DONG, B.S. KIM et G.S. RYU : Virtual design of brake squeal. *SAE paper 2003-01-1625*, 2003.
- [36] K.A. CUNEFARE et A.J. GRAF : Experimental active control of automotive disc brake rotor squeal using dither. *Journal of Sound and Vibration*, 250(4):579–590, 2002.
- [37] K.A. CUNEFARE et R. RYE : Investigation of disc brake squeal via sound intensity and laser vibrometry. *SAE paper 2001-01-1604*, 2001.
- [38] J. DEMONSANT : Comprendre et mener des plans d'expériences. *AFNOR*, 1996.
- [39] E. DENYS, M. YANG et F. CHEN : Brake pad damping : measurement, design, and application. In *Disc Brake Squeal*, chapitre 8. SAE International, 2006.
- [40] S. DOM, M. RIEFE et T.S. SHI : Brake squeal noise testing and analysis correlation. *SAE paper 2003-01-1616*, 2003.
- [41] A.H. DWEIB et A.F. D'SOUZA : Self-excited vibrations induced by dry friction, part 2 : stability and limit-cycle analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 137(2):177–190, 1990.
- [42] S.W.E. EARLES et C.K. LEE : Instabilities Arising from the Frictional Interaction of a Pin-Disc System Resulting in Noise Generation. *Trans. ASME J. Engng Ind.*, 1: 81–86, 1976.

- [43] S.W.E. EARLES et G.B. SOAR : Squeal Noise in Disc Brakes. *Proc. I. Mech. E. Conf. on Vibration and Noise in Motor Vehicles*, paper C100/71, 1971.
- [44] S.W.E. EARLES et G.B. SOAR : A Vibrational Analysis of a Pin-Disc System with Particular Reference to Squeal Noise in Disc Brakes. *Stress Analysis Group Annual Conference*, pages 237–251, 1974.
- [45] A. ELVENKEMPER, Enrique WEGMANN, A. WANG, J. FLINT, J.G. MCDANIEL et K. TSENG : Application of state of the art fe software for simulating the effect of insulators. *SAE paper 2006-01-3218*, 2006.
- [46] D.J. EWINS : *Modal testing : theory, practice and application*. Research Studies Press LTD, Second edition, 2000.
- [47] J.D. FIELDHOUSE et C. BEVERIDGE : An experimental investigation of hot judder. *SAE paper 2001-01-3135*, 2001.
- [48] J.D. FIELDHOUSE, A. ETTEMEYER et F. CHEN : Laser metrology and its applications to brake squeal. In *Disc Brake Squeal*, chapitre 14. SAE International, 2006.
- [49] J.D. FIELDHOUSE et T.P. NEWCOMB : The application of holographic interferometry to the study of disc brake noise. *SAE paper 930805*, 1993.
- [50] J.D. FIELDHOUSE, W.P. STEEL, C.J. TALBOT et M.A. SIDDIQUI : Rotor asymmetry used to reduce disc brake noise. *SAE paper*, 2004.
- [51] J.D. FIELDHOUSE, C.J. TALBOT, W.P. STEEL et A. CRAMPTON : In-plane vibration investigations of a noisy twin calliper disc brake. *SAE paper 2003-01-3320*, 2003.
- [52] A. FLESKE, G. HOPPE et H. MATTHAI : A study on drum brake noise by holographic vibration analysis. *SAE paper 800221*, 1980.
- [53] J. FLINT : A review of theories on constrained layer damping and some verification measurements on shim material. *SAE paper 2003-01-3321*, 2003.
- [54] J. FLINT : Complex eigenvalue analysis of friction moment-induced mode coupling in one- and two-dimensional models. In *Disc Brake Squeal*, chapitre 5. SAE International, 2006.
- [55] J. FLINT et J. HALD : Traveling waves in squealing disc brakes measured with acoustic holography. *SAE paper 2003-01-3319*, 2003.
- [56] J. FLINT et J. HULTÉN : Lining-deformation-induced modal coupling as squeal generator in a distributed parameter disc brake model. *Journal of Sound and Vibration*, 254(1):1–21, 2002.
- [57] D. GUAN, X. SU et F. ZHANG : Sensitivity analysis of brake squeal tendency to substructures modal parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 291:72–80, 2006.
- [58] A. GUGINO, J. JANEVIC et L. FECSKE : Brake moan simulation using flexible methods in multibody dynamics. *SAE paper 2000-01-2769*, 2000.
- [59] M.A. HECKL et I.D. ABRAHAMS : Curve squeal of train wheels, part 1 : mathematical model for its generation. *Journal of Sound and Vibration*, 229(3):669–693, 2000.
- [60] M.A. HECKL et I.D. ABRAHAMS : Curve squeal of train wheels, part 2 : which wheel modes are prone to squeal? *Journal of Sound and Vibration*, 229(3):695–707, 2000.
- [61] M.A. HECKL et I.D. ABRAHAMS : Curve squeal of train wheels, part 3 : active control. *Journal of Sound and Vibration*, 229(3):709–735, 2000.
- [62] N. HOFFMANN et L. GAUL : Effects of damping on mode-coupling instability in friction induced oscillations. *Z. Angew. Math. Mech.*, 83(8):524–534, 2003.

- [63] J. HUANG, C.M. KROUSGRILL et A.K. BAJAJ : Modeling of automotive drum brakes for squeal and parameter sensitivity analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 289:245–263, 2006.
- [64] R.A. IBRAHIM : Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos part 1 : Mechanics of contact and friction. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, 7:209–226, 1994.
- [65] R.A. IBRAHIM : Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos part 2 : Dynamics and modeling. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, 7:227–253, 1994.
- [66] Y. ICHIBA et Y. NAGASAWA : Experimental study on disc brake squeal. *SAE paper 930802*, 1993.
- [67] K. IM, J.C. BAE et S. KALE : Stochastic analysis of vehicle brake noise. *SAE paper 2005-01-0788*, 2005.
- [68] P. IOANNIDIS, D. BARTON et P. BROOKS : Noise and vibration characterisation of cast iron and siliconised carbon composite brake rotors. *SAE paper 2005-01-2313*, 2005.
- [69] P. IOANNIDIS, P.C. BROOKS et D.C. BARTON : Drum brake contact analysis and its influence on squeal noise prediction. *SAE paper 2003-01-3348*, 2003.
- [70] N.A. JABER, A.Y. WANG et R. YAN : Brake noise study (part 1) low-frequency squeal. *SAE paper 2006-01-0474*, 2006.
- [71] N.A. JABER, A.Y. WANG et R. YAN : Brake noise study (part 2) high-frequency squeal. *SAE paper 2006-01-0475*, 2006.
- [72] S. JAMES, H. OUYANG, D.J. BROOKFIELD et J.E. MOTTERSHEAD : Disc brake squeal - an experimental approach. *International Conference Braking 2004, IMechE, Leeds*, pages 179–188, 2004.
- [73] R.P. JARVIS et B. MILLS : Vibrations Induced by Dry Friction. *Proc. Instn. Mech. Engrs*, paper 32: 847–866, 1963.
- [74] J. BRECHT, W. HOFFRICHIER et A. DOHLE : Mechanisms of brake creep groan. *SAE paper 973026*, 1997.
- [75] S.D. JOO, J.H. HAN, K.W. PARK et Y.J. KIM : Reducing brake squeal through fem approach and parts design modifications. *SAE paper 2006-01-3206*, 2006.
- [76] A.J. Graf K.A. CUNEFARE : Disc brake rotor squeal suppression using dither control. *SAE paper 2001-01-1605*, 2001.
- [77] T. KANEDA, K. ISHIHARA, H. HONDA et M. KOKAWA : Analysis of disk brake squeal using substructure synthesis method. *SAE paper 2003-32-0042*, 2003.
- [78] H-I. KANG, P.C. BROOKS et D.C. BARTON : Drum brake squeal prediction using a parametric finite element model. *Vehicle Noise and Vibration 2002, Institution of Mechanical Engineers, London, I MECH E*, C605/007/2002:17–33, 2002.
- [79] P. KAPADNIS et K. IM : Brake squeal reduction using robust design. *SAE paper 2003-01-0879*, 2003.
- [80] C.J. KIM, B.H. LEE, C. LEE et H. JEONG : Analysis of the induced moan noise in the coupled torsional axle suspension module. *SAE paper 2005-01-3920*, 2005.
- [81] N.M. KINKAID, O.M. O'REILLY et P. PAPADOPOULOS : Automotive disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 267:105–166, 2003.
- [82] L. KOMZSIK : Nastran numerical methods user's guide, msc. nastran 2001. *MSC Software Corporation*.
- [83] R. KRUPKA, T. WALZ et A. ETTEMEYER : New techniques and applications for 3d-brake vibration analysis. *SAE paper 2000-01-2772*, 2000.

- [84] M. KUBOTA, T. SUENAGA et K. DOI : A study of the mechanism causing high-speed brake judder. *SAE paper 980594*, 1998.
- [85] F. KUMAMOTO, K. KAWAI et H. BABA : A study on relationship between pad restraint condition and brake squeal generation. *SAE paper 2004-01-2801*, 2004.
- [86] S.W. KUNG, K.B. DUNLAP et R.S. BALLINGER : Complex eigenvalue analysis for reducing low frequency brake squeal. *SAE paper 2000-01-0444*, 2000.
- [87] S.W. KUNG, V.C. SALIGRAMA et M.A. RIEHLE : Modal participation analysis for identifying brake squeal mechanism. *SAE paper 2000-01-2764*, 2000.
- [88] S.W. KUNG, G. STELZER, V. BELSKY et A. BAJER : Brake squeal analysis incorporating contact conditions and other nonlinear effects. *SAE paper 2003-01-3343*, 2003.
- [89] S.W. KUNG, G. STELZER et K.A. SMITH : A study on low frequency drum brake squeal. *SAE paper 2004-01-2787*, 2004.
- [90] H. LEE et N. KIKUCHI : Sensitivity analysis of complex eigensolutions for brake noise. *SAE paper 2003-01-1626*, 2003.
- [91] H. LEE et R. SINGH : Sound radiation from a disk brake rotor using a semi-analytical method. *SAE paper 2003-01-1620*, 2003.
- [92] J.M. LEE, S.W. YOO, J.H. KIM et C.G. AHN : A study on the squeal of a drum brake which has shoes of non-uniform cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 240(5):789–808, 2001.
- [93] K. LEE et R.B. DINWIDDIE : Conditions of frictional contact in disk brakes and their effects on brake judder. *SAE paper 980598*, 1998.
- [94] L. LEE, G. LOU, K. XU, M. MATSUZAKI et B. MALOTT : Direct finite element analysis on disc brake squeal using the able algorithm. *SAE paper 2003-01-3350*, 2003.
- [95] L. LEE, K. XU, B. MALOTT, M. MATSUZAKI et G. LOU : A systematic approach to brake squeal simulation using MacNeal method. *SAE paper 2002-01-2610*, 2002.
- [96] M.R. LEE et R. SINGH : Analytical formulation for annular disk sound radiation using structural modes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95(6):3311–3323, 1994.
- [97] Y.S. LEE, P.C. BROOKS, D.C. BARTON et D.A. CROLLA : A predictive tool to evaluate disc brake squeal propensity part 1 : The model philosophy and the contact problem. *International Journal of Vehicle Design*, 31(3):289–308, 2003.
- [98] Y.S. LEE, P.C. BROOKS, D.C. BARTON et D.A. CROLLA : A predictive tool to evaluate disc brake squeal propensity part 2 : System linearisation and modal analysis. *International Journal of Vehicle Design*, 31(3):309–329, 2003.
- [99] Y.S. LEE, P.C. BROOKS, D.C. BARTON et D.A. CROLLA : A predictive tool to evaluate disc brake squeal propensity part 3 : Parametric design studies. *International Journal of Vehicle Design*, 31(3):330–353, 2003.
- [100] T.M. LEWIS et P. SHAH : Analysis and control of brake noise. *SAE paper 872240*, 1987.
- [101] G.D. LILES : Analysis of disc brake squeal using finite element methods. *SAE paper 891150*, 1989.
- [102] E. LITTLE, T.K. KAO, P. FERDANI et T. HODGES : A dynamometer investigation of thermal judder. *SAE paper 982252*, 1998.
- [103] G. LOU, T.W. WU et Z. BAI : Disk brake squeal prediction using the able algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 272:731–748, 2004.
- [104] J. LUO et A. LOCK : Noise dynamometer and vehicle test correlation. *In Disc Brake Squeal*, chapitre 11. SAE International, 2006.

- [105] S.K. MAHAJAN, E. DENYS, J.C. BAE, T.S. SHI et K.H. IM : Pad insulator modeling for brake squeal analysis. *SAE paper 2005-01-2314*, 2005.
- [106] H. MARSCHNER et F. RISCHBIETER : Three-dimensional operational deflection shape analysis of squealing disc brakes. *SAE paper 2004-01-2796*, 2004.
- [107] L.T. MATOZO, A. MENETRIER et A. TAMAGÑA : Analysis of high damping underlayer materials for brake pads and its effects on NVH performance. *SAE paper 2006-01-3223*, 2006.
- [108] H. MATSUI, H. MURAKAMI, H. NAKANISHI et Y. TSUDA : Analysis of disc brake squeal. *SAE paper 920553*, 1992.
- [109] T. MATSUSHIMA, H. MASUMO, S. ITO et M. NISHIWAKI : Fe analysis of low-frequency disc brake squeal (in case of floating type caliper). *SAE paper 982251*, 1998.
- [110] M. MATSUZAKI et T. IZUMIHARA : Brake noise caused by longitudinal vibration of the disc rotor. *SAE paper 930804*, 1993.
- [111] J.G. MCDANIEL, C.L. CLARKE, J. MOORE et S.E. CHEN : Acoustic radiation models of brake systems from stationary ldv measurements. *Proceedings of International Mechanical Engineering Congress and Exposition November 14-19, 1999, Nashville, Tennessee, USA*, 1999.
- [112] J.G. MCDANIEL, X. LI, A. ELVENKEMPER, E. WEGMANN, W.A. WANG, S.E. CHEN et J. FLINT : Simulating the effect of insulators in reducing disc brake squeal. *SAE paper 2005-01-3944*, 2005.
- [113] L. MIGNERY et J. WANG : Prediction of damper effects in a brake system model. *SAE paper 2001-01-3140*, 2001.
- [114] N. MILLNER : An Analysis of Disc Brake Squeal. *SAE paper 780332*, 1978.
- [115] H.R. MILLS : Brake Squeal. *Institution of Automobile Engineers, Research Report 9000b and Research Report 9162B*, 1938.
- [116] F. MOIROT : *Etude de la stabilité d'un équilibre en présence de frottement de Coulomb. Application au crissement des freins à disque*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1998.
- [117] F. MOIROT, A. NEHME et Q.S. NGUYEN : Numerical simulation to detect low-frequency squeal propensity. *SAE paper 2000-01-2767*, 2000.
- [118] W.V. NACK : Brake squeal analysis by finite elements. *SAE paper 1999-01-1736*, 1999.
- [119] W.V. NACK et S.E. CHEN : Complex modes : Analysis and design. *In Disc Brake Squeal*, chapitre 4. SAE International, 2006.
- [120] W.V. NACK et A.M. JOSHI : Friction induced vibration : brake moan. *SAE paper 951095*, 1995.
- [121] H. NAKATA, K. KOBAYASHI, M. KAJITA et C.H.J. CHUNG : A new analysis approach for motorcycle brake squeal noise and its adaptation. *SAE paper 2001-01-1850*, 2001.
- [122] Y. NISHIZAWA, H. SAKA, S. NAKAJIMA et T. ARAKAWA : Electronic control canceling system for a disc brake noise. *SAE paper 971037*, 1997.
- [123] M.R. NORTH : Disc brake squeal - a theoretical model. *Motor Industry Research Association, Warwickshire, England, Technical Report 1972/5*, 1972.
- [124] M.R. NORTH : A mechanism of disc brake squeal. *14th FISITA Congress Paper*, 1/9, 1972.
- [125] M.R. NORTH : Disc brake squeal. *Braking of road vehicles, Automobile Division of the Institution of Mechanical Engineers, Mechanical Engineering Publication Limited, London, England*, pages 169–176, 1976.

- [126] J.T. ODEN et J.A.C. MARTINS : Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52:527–634, 1985.
- [127] H. OUYANG : Parametric vibration induced by moving loads. In *Disc Brake Squeal*, chapitre 3. SAE International, 2006.
- [128] H. OUYANG et J.E. MOTTERSHEAD : Unstable travelling waves in the friction-induced vibration of discs. *Journal of Sound and Vibration*, 248(4):768–779, 2001.
- [129] H. OUYANG, J.E. MOTTERSHEAD, D.J. BROOKFIELD, S. JAMES, M.P. CARTMELL, T. KAS-TER, T. TREYDE, B. HIRST et R. ALLEN : Dynamic instabilities in a simple model of a car disc brake. *SAE paper 1999-01-3409*, 1999.
- [130] H. OUYANG, W. NACK, Y. YUAN et F. CHEN : On automotive disc brake squeal part 2 : Simulation and analysis. *SAE paper 2003-01-0684*, 2003.
- [131] H. OUYANG, W. NACK, Y. YUAN et F. CHEN : Numerical analysis of automotive disc brake squeal : a review. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 1(3/4):207–231, 2005.
- [132] M. PALIWAL, A. MAHAJAN, J. DON, T. CHU et P. FILIP : Noise and vibration analysis of a disc-brake system using a stick-slip friction model involving coupling stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 282:1273–1284, 2005.
- [133] R.L. QUAGLIA et F. CHEN : Squeal reduction and prevention. In *Disc Brake Squeal*, chapitre 15. SAE International, 2006.
- [134] F. SAMIE et D.C. SHERIDAN : Contact analysis for a passenger car disc brake. *SAE paper 900005*, 1990.
- [135] P.C. SHAW, M.A. RIEHLE et S.W. KUNG : Mechanical properties of friction materials and the effect on brake system stability. *SAE paper 2003-01-1619*, 2003.
- [136] T.S. SHI, O. DESSOUKI, T. WARZECHA, W.K. CHANG et A. JAYAUNDERA : Advances in complex eigenvalue analysis for brake noise. *SAE paper 2001-01-1603*, 2001.
- [137] K. SHIN, M.J. BRENNAN, J.E. OH et C.J. HARRIS : Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model. *Journal of Sound and Vibration*, 254(5):837–848, 2002.
- [138] D. SINCLAIR et N.J. MANVILLE : Frictional vibrations. *Journal of Applied Mechanics*, pages 207–213, 1955.
- [139] J-J. SINOÛ : *Synthèse non-linéaire des systèmes vibrants. Application aux systèmes de freinage*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002.
- [140] J-J. SINOÛ, O. DEREURE, G-B. MAZET, F. THOUVEREZ et L. JÉZÉQUEL : Friction induced vibration for an aircraft brake system. part 1 : experimental approach and stability analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48:536–554, 2006.
- [141] J-J. SINOÛ, G. FRITZ et L. JÉZÉQUEL : The role of damping and definition of the robust damping factor (rd-factor) for a self-exciting mechanism with constant friction. *Journal of Vibration and Acoustics*, In press:1–9, 2006.
- [142] J-J. SINOÛ et L. JÉZÉQUEL : Mode coupling instability in friction induced vibrations and its dependency on system parameters including damping. *Journal of European Mechanics - A/Solids*, 26(1):106–122, 2007.
- [143] J-J. SINOÛ, F. THOUVEREZ et L. JÉZÉQUEL : Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation. *Archives of Computational Methods in Engineering : State of the Art Reviews*, 11(3):257–344, 2004.
- [144] J-J. SINOÛ, F. THOUVEREZ et L. JÉZÉQUEL : Stability analysis and non-linear behaviour of structural systems using the complex non-linear modal analysis. *Computers & Structures*, 84:1891–1905, 2006.

- [145] R. SOMNAY et S. SHIH : Predicting drum brake noise using finite element methods. *SAE paper 2002-01-3139*, 2002.
- [146] S. SORRENTINO, S. MARCHESIELLO et B.A.D. PIOMBO : A new analytical technique for vibration analysis of non-proportionally damped beams. *Journal of Sound and Vibration*, 265:765–782, 2003.
- [147] R.T. SPURR : A Theory of Brake Squeal. *Proc. Auto. Div. Instn. Mech. Engrs*, 1:33–40, 1961.
- [148] D. STANEF, A. PAPINNIEMI et J. ZHAO : From prototype to production - the practical nature of brake squeal noise. *SAE paper 2006-01-3217*, 2006.
- [149] G. TAGUCHI, S. CHOWDHURY et S. TAGUCHI : Robust engineering. *McGraw-Hill*, 2000.
- [150] C. TALBOT et J.D. FIELDHOUSE : Animations of a disc brake generating noise. *SAE paper 2001-01-3126*, 2001.
- [151] C.A. TAN et F. CHEN : Mechanisms and causes of disc brake squeal. *In Disc Brake Squeal*, chapitre 1. SAE International, 2006.
- [152] J.K. THOMPSON : Dynamometer testing. *In Disc Brake Squeal*, chapitre 9. SAE International, 2006.
- [153] A. TUCHINDA : *Development of validated models for brake squeal predictions*. Thèse de doctorat, Imperial College London, 2003.
- [154] W.W. TWORZYDLO : Contact and interface dynamics. *In Disc Brake Squeal*, chapitre 2. SAE International, 2006.
- [155] V. VADARI et M. JACKSON : An experimental investigation of disk brake creep-groan in vehicles and brake dynamometer correlation. *SAE paper 1999-01-3408*, 1999.
- [156] U. Von WAGNER et T. JEARSIRIPONGKUL : Active control of brake squeal via "smart pads". *SAE paper 2004-01-2773*, 2004.
- [157] A. WANG, L. ZHANG, N. JABER et J. RIEKER : On brake moan mechanism from the modeling perspective. *SAE paper 2003-01-0681*, 2003.
- [158] J.A. WICKERT : Vibration of disc brake rotors. *In Disc Brake Squeal*, chapitre 7. SAE International, 2006.
- [159] S.F. WU : Visualizing automobile squeals and the corresponding out-of-plane vibration modes. *SAE paper 2005-01-2319*, 2005.
- [160] M. YANG, A.H. AFANEH et P. BLASCHKE : A study of disc brake high frequency squeals and disc in-plane/out-of-plane modes. *SAE paper 2003-01-1621*, 2003.
- [161] D.E. YUHAS et M.P. YUHAS : Friction materials elastic constant measurements. *In Disc Brake Squeal*, chapitre 12. SAE International, 2006.
- [162] J. ZHAO, A. PAPINNIEMI et D. STANEF : A study on in-plane rotor vibration modes in disc brake squeal noise. *SAE paper 2005-01-3923*, 2005.

# Table des figures

1.1	Structure d'un système de freinage . . . . .	5
1.2	Frein à disque à étrier mobile . . . . .	5
1.3	Structure des plaquettes . . . . .	6
1.4	Estimation des efforts de freinage . . . . .	7
1.5	Dynamomètres . . . . .	8
1.6	Résultats typiques d'un matrix test . . . . .	9
1.7	Mesures accélérométriques - Déformée opérationnelle . . . . .	10
1.8	Vibrométrie laser . . . . .	11
1.9	Holographie laser . . . . .	11
1.10	Holographie acoustique . . . . .	12
1.11	Evolution temporelle de l'accélération d'un point du système . . . . .	13
1.12	Occurrences fonction de la pression et de la température . . . . .	15
1.13	Stick-slip . . . . .	17
1.14	Trajectoires dans l'espace des phases - coefficient de frottement discontinu . . . . .	18
1.15	Loi de frottement décroissante avec la vitesse de glissement . . . . .	19
1.16	Trajectoires dans l'espace des phases - coefficient de frottement décroissant avec $V_g$ . . . . .	20
1.17	Modèle de sprag-slip . . . . .	21
1.18	Angle de sprag-slip sur un frein à disque . . . . .	21
1.19	Modèle analytique représentant un système pion-disque . . . . .	23
1.20	Coalescence de modes . . . . .	24
1.21	Intégration temporelle . . . . .	26
1.22	Trajectoires dans le plan de phase . . . . .	26
1.23	Classification des modes de disque . . . . .	29
1.24	Exemple de mode complexe . . . . .	31
1.25	Fonctions du système . . . . .	32
1.26	Fonction acoustique du système . . . . .	32
1.27	Diagramme de Farmer . . . . .	35
1.28	Plan produit . . . . .	36
1.29	Distribution gaussienne . . . . .	37
1.30	Design for six sigma . . . . .	38
2.1	Modèle linéaire . . . . .	45
2.2	Introduction du frottement - Modèle de principe . . . . .	46
2.3	Courbe caractéristique de frottement . . . . .	47
2.4	Comparaison des trois méthodes - valeurs propres dans le plan complexe . . . . .	48
2.5	Précision des méthodes modales par rapport à la Sol107 . . . . .	48
2.6	Evolution des valeurs propres en fonction de $\mu$ . . . . .	49
2.7	Evolution des valeurs propres en fonction de $\mu$ - modes 44 et 45 . . . . .	50
2.8	Déformées des modes réels 44 et 45 sans frottement . . . . .	51

2.9	Déformée des modes complexes issus du couplage des modes 44 et 45 à $\mu = 0.5$ . . .	51
2.10	Déplacements des nœuds du périmètre du disque avec la phase, $\mu = 0.5$ . . . . .	52
2.11	Marche avant / Marche arrière . . . . .	53
2.12	Evolution des valeurs propres en fonction de $\mu$ - modes 41 à 47 . . . . .	54
2.13	Déformées des modes réels 41 à 47 . . . . .	55
2.14	Déformée des modes complexes issus du couplage des modes 42 et 43 à $\mu = 0.5$ . . .	57
2.15	Facteurs de participation modale - modes 42 et 43 . . . . .	57
2.16	Facteurs de participation modale - modes 44 et 45 . . . . .	58
2.17	Phénomènes de découplage . . . . .	59
2.18	Evolution des fréquences sans frottement en fonction de $E_d$ . . . . .	60
2.19	Variabilité des valeurs propres en fonction de $\mu$ et de $E_d$ . . . . .	61
2.20	Courbes de coalescence fonction de $\mu$ - $E_d = 90$ GPa et $E_d = 105$ GPa . . . . .	61
2.21	Courbes de coalescence fonction de $\mu$ - $E_d = 107$ GPa et $E_d = 110$ GPa . . . . .	62
2.22	Courbes de coalescence fonction de $E$ - $\mu = 0.1$ et $\mu = 0.5$ . . . . .	63
2.23	Courbes de coalescence fonction de $E$ - $\mu = 0.6$ et $\mu = 1.0$ . . . . .	64
2.24	Courbes de coalescences biparamétriques . . . . .	65
2.25	Zones de stabilité par bandes de fréquence . . . . .	67
2.26	Coalescence non-amortie . . . . .	69
2.27	Déformées des modes $7_{\mu=0}$ et $8_{\mu=0}$ . . . . .	69
2.28	Facteurs de participation modale des modes 7 et 8 . . . . .	70
2.29	Courbes de coalescence amorties . . . . .	72
2.30	Déstabilisation par l'amortissement . . . . .	73
2.31	Facteurs de participation modale - configuration $d_7 = 0, d_8 = 25$ . . . . .	73
2.32	Courbes de coalescence amorties - suivi du mode instable . . . . .	74
2.33	Facteurs de participation modale - configuration $d_7 = 50, d_8 = 25$ . . . . .	74
2.34	Zones de stabilité ( $\mu, d_8/d_7$ ) et identification du mode instable . . . . .	76
2.35	Zones de stabilité ( $d_7, d_8$ ) . . . . .	77
2.36	Fréquences en fonction des amortissements modaux $d_7$ et $d_8$ pour $\mu = 0.34$ . . . . .	77
2.37	Evolution du RD Factor . . . . .	78
2.38	Evolution des valeurs propres des modes 41 à 47 dans le plan complexe . . . . .	79
2.39	Termes de la matrice $\mathbf{\Lambda}_f$ correspondant aux modes 41 à 47 . . . . .	79
2.40	Effet de l'amortissement de chaque mode sur les motifs de coalescence . . . . .	80
2.41	Principe de l'échange de branches . . . . .	81
2.42	Phénomène d'échange de branches - $E_d = 105$ GPa - Modes 44 à 47 . . . . .	82
2.43	Premier échange de branches . . . . .	83
2.44	Second et troisième échanges de branches . . . . .	83
2.45	Facteurs de participation modale - $d_{47} = 0$ - Modes 46 et 47 . . . . .	84
2.46	Facteurs de participation modale - $d_{47} = 700$ - Modes 46 et 47 . . . . .	84
3.1	Méthode itérative . . . . .	92
3.2	Méthode incrémentale itérative - Efforts extérieurs et intérieurs . . . . .	93
3.3	Modèle non-linéaire . . . . .	96
3.4	Synoptique des liaisons . . . . .	97
3.5	Modélisation des contacts . . . . .	97
3.6	Ressorts de rappel des plaquettes . . . . .	98
3.7	Contraintes de Von Mises . . . . .	100
3.8	Calcul analytique des pressions moyennes de contact . . . . .	101
3.9	Déformée statique au nominal . . . . .	101
3.10	Pressions de contact au nominal . . . . .	102
3.11	Pressions de contact - détail : piston, étrier . . . . .	103

3.12	Pressions de contact - détail : plaquettes . . . . .	103
3.13	Equilibre des plaquettes . . . . .	104
3.14	Contacts au niveau des butées radiales de chape . . . . .	105
3.15	Position des plaquettes . . . . .	106
3.16	Valeurs propres complexes $\mu = 0.6$ . . . . .	106
3.17	Modes complexes . . . . .	106
3.18	Principe de l'analyse paramétrique multistep . . . . .	107
3.19	Evolution de la résultante et du moment des efforts de contact en fonction de $\mu$ . . . . .	108
3.20	Evolution de la déformée statique en fonction de $\mu$ . . . . .	108
3.21	Effet de la mise en position de l'étrier en fonction $\mu$ . . . . .	109
3.22	Evolution des pressions de contact en fonction de $\mu$ . . . . .	109
3.23	Evolution de la position des plaquettes en fonction de $\mu$ . . . . .	110
3.24	Evolution des conditions de contact sur les butées de chape en fonction de $\mu$ . . . . .	111
3.25	Butées tangentielles de chape . . . . .	111
3.26	Evolution des valeurs propres complexes en fonction de $\mu$ . . . . .	112
3.27	Coalescence à 1990 Hz . . . . .	112
3.28	Evolution des déformées des modes en fonction de $\mu$ . . . . .	113
3.29	Evolution de la résultante et du moment des efforts de contact en fonction de $P$ . . . . .	115
3.30	Evolution de la déformée statique en fonction de $P$ . . . . .	115
3.31	Evolution des pressions de contact en fonction de $P$ - $\mu = 0.6$ . . . . .	116
3.32	Evolution de la position des plaquettes en fonction de $P$ . . . . .	116
3.33	Evolution des valeurs propres complexes en fonction de $P$ . . . . .	117
3.34	Evolution de la coalescence à 1990 Hz en fonction de $P$ . . . . .	117
3.35	Evolution des conditions de contact entre disque et plaquettes . . . . .	119
3.36	Evolution des efforts de contact au niveau des butées radiales de chape . . . . .	120
3.37	Evolution des aires de contact au niveau des butées radiales de chape . . . . .	120
3.38	Evolution des aires de contact au niveau des butées tangentielles de chape . . . . .	121
3.39	Evolution des valeurs propres complexes en fonction de $\mu$ et $P$ . . . . .	122
3.40	Courbe de coalescence à 1990 Hz fonction de $\mu$ et $P$ . . . . .	122
3.41	Diagramme de stabilité dans le plan $(\mu, P)$ . . . . .	123
3.42	Pressions acoustiques calculées par méthode BEM pour le mode instable à 1990 Hz . . . . .	124
4.1	Cycle en V . . . . .	128
4.2	Modèle de conception . . . . .	131
4.3	Comportement statique - $\mu = 0.6$ - $P = 5$ bar . . . . .	132
4.4	Plan complexe - $\mu = 0.6$ - $P = 5$ bar . . . . .	132
4.5	Modes complexes - $\mu = 0.6$ - $P = 5$ bar . . . . .	132
4.6	Evolution du comportement statique en fonction de $\mu$ - $P = 5$ bar . . . . .	134
4.7	Evolution des conditions de contact en fonction de $\mu$ . . . . .	135
4.8	Comportement dynamique . . . . .	136
4.9	Comparaison de la dynamique des modèles en fonction de $\mu$ . . . . .	136
4.10	Variabilité des valeurs propres à $P$ . . . . .	137
4.11	Comparaison de la dynamique des modèles en fonction de $P$ . . . . .	137
4.12	Comportement statique du modèle de conception dans le plan $(\mu, P)$ . . . . .	139
4.13	Variabilité des valeurs propres à $\mu$ et $P$ . . . . .	140
4.14	Courbes de coalescence du mode instable à 1944 Hz en fonction de $\mu$ et de $P$ . . . . .	140
4.15	Variabilité des valeurs propres avec $\mu$ , avec amortissement induit par le frottement . . . . .	141
4.16	Courbes de coalescence avec amortissement induit par le frottement . . . . .	142
4.17	Effet de la vitesse et de la pression sur l'amortissement induit par le frottement . . . . .	142
4.18	Evolution de la position d'équilibre statique en marche arrière en fonction de $\mu$ . . . . .	143

4.19	Pressions de contact en marche arrière . . . . .	143
4.20	Non-symétrie de l'étrier . . . . .	143
4.21	Courbes de coalescence en marche avant et en marche arrière . . . . .	144
4.22	Déformées du mode instable - $\mu = \pm 0.60$ . . . . .	144
4.23	Effet de l'usure des plaquettes . . . . .	145
4.24	Effet de l'usure du disque . . . . .	146
4.25	Process de fabrication des disques . . . . .	146
4.26	Dérive due à l'usure du moule . . . . .	147
4.27	Effet de l'usure du moule du disque - Mode à 1944 Hz . . . . .	147
4.28	Effet de l'usure du moule du disque - Mode à 5950 Hz . . . . .	147
4.29	Effet du module d'Young du disque . . . . .	148
4.30	Effet du module d'Young des plaquettes . . . . .	149
4.31	Vision multi-paramétrique des courbes de coalescence . . . . .	150
4.32	Synthèse de l'effet des variabilités . . . . .	151
4.33	Hierarchisation des paramètres en fonction leur effet sur la stabilité . . . . .	151
4.34	Résultats des analyses de sensibilité aux paramètres de modélisation . . . . .	153
4.35	Synthèse des sensibilités aux paramètres de modélisation . . . . .	154
4.36	Analyses de sensibilité - Hierarchisation des paramètres . . . . .	154
4.37	Matrix test $\mu.P.V.M$ - Matrice des expériences . . . . .	156
4.38	Matrix test $\mu.P.V.M$ - Résultats . . . . .	156
4.39	Matrix test $\mu.P.V.M$ - Crissement à 2 kHz . . . . .	157
4.40	Matrix test $\mu.P.V.M$ - Occurrences en fonction des paramètres . . . . .	157
4.41	Matrix test $\mu.P.M.E_d.E_p$ - Matrice des expériences . . . . .	158
4.42	Matrix test $\mu.P.M.E_d.E_p$ - Résultats . . . . .	159
4.43	Matrix test $\mu.P.M.E_d.E_p$ - Occurrences en fonction des paramètres . . . . .	159
4.44	Matrix test $\mu.P.M.E_d.E_p$ - Valeurs propres . . . . .	160
4.45	Matrix test $\mu.P.M.E_d.E_p$ - Diagramme de Farmer . . . . .	161
4.46	Matrix test $\mu.P.M.E_d.E_p$ - Diagrammes de Farmer sur la plage [1860, 2000] Hz . . . . .	161
4.47	Plan d'expériences à l'usure des plaquettes . . . . .	162
4.48	Risque et robustesse en fonction de l'usure des plaquettes . . . . .	163
4.49	Courbes de coalescence biparamétriques - $(\mu, PW)$ . . . . .	163
4.50	Plan d'expériences à l'usure du disque . . . . .	164
4.51	Résultats du plan d'expériences à l'usure du disque . . . . .	164
4.52	Risque et robustesse en fonction de l'usure du disque . . . . .	165
4.53	Courbes de coalescence biparamétriques - $(\mu, DW)$ . . . . .	165
4.54	Matrice du plan d'expériences à l'usure du moule du disque . . . . .	166
4.55	Risque et robustesse en fonction de l'usure du moule du disque . . . . .	166
4.56	Evolution des valeurs propres en fonction de $(\mu, E_p)$ et robustesse . . . . .	167
4.57	Courbes de coalescence biparamétriques $(\mu, E_p)$ . . . . .	168
4.58	Zone de stabilité $(\mu, E_p)$ . . . . .	168
4.59	Evolution des valeurs propres en fonction de $(\mu, E_d)$ et robustesse . . . . .	169
4.60	Courbes de coalescence biparamétriques $(\mu, E_d)$ . . . . .	169
4.61	Zone de stabilité $(\mu, E_d)$ . . . . .	170
4.62	Evolution des valeurs propres en fonction de $(E_d, E_p)$ et robustesse . . . . .	171
4.63	Courbes de coalescence biparamétriques $(E_d, E_p)$ . . . . .	171
4.64	Zone de stabilité $(E_d, E_p)$ . . . . .	171
4.65	Différentes géométries de plaquettes . . . . .	172
4.66	Risque et robustesse en fonction du choix de plaquette . . . . .	173
4.67	Variabilité aux paramètres d'utilisation pour les trois types de plaquettes . . . . .	173

4.68	Matrix test $\mu.P.M.E_d.E_p$ - Changement de nuance de fonte pour la chape . . . . .	174
4.69	Risque et robustesse en fonction du choix de la chape . . . . .	175
4.70	Matrix test $\mu.P.M.E_d.E_p$ - Changement des matériaux des pièces frottantes . . . . .	176
4.71	Risque et robustesse en fonction des matériaux des pièces frottantes . . . . .	176
4.72	Robustesse des différentes solutions à l'usure . . . . .	177
A.1	Modèle linéaire pion-disque . . . . .	203
C.1	Modèle à deux degrés de liberté . . . . .	207



# Liste des tableaux

1.1	Liste des cinq bruits de frein les plus courants . . . . .	3
1.2	Expressions de $S/N$ . . . . .	34
1.3	Niveau de sigma . . . . .	37
2.1	Temps de calcul . . . . .	48
2.2	Liste des modes instables . . . . .	49
2.3	Déformées des modes réels 41 à 47 . . . . .	56
2.4	Déformées des modes $7_{\mu=0}$ et $8_{\mu=0}$ . . . . .	70
3.1	Noms des contacts . . . . .	98
3.2	Pressions de contact calculées avec le modèle Abaqus . . . . .	102
3.3	Butées radiales de chape . . . . .	105
3.4	Critère de rayonnement des modes complexes . . . . .	124
4.1	Valeurs de $\mu$ marquant les non-linéarités statiques - comparaison des modèles . . .	134
4.2	Variabilité des différents paramètres . . . . .	150
4.3	Caractéristiques des matériaux utilisés . . . . .	175
4.4	Plan produit - paramètres d'utilisation et d'environnement . . . . .	177
4.5	Plan produit - usure . . . . .	177
A.1	Données numériques du modèle pion-disque . . . . .	203
B.1	Solveurs complexes . . . . .	205



# Nomenclature

$x$	scalaire
$\mathbf{x}$	vecteur
$\mathbf{u}$	vecteur déplacement
$\dot{\mathbf{u}}$	vecteur vitesse
$\ddot{\mathbf{u}}$	vecteur accélération
$T$	effort normal au disque
$N$	effort tangentiel au disque
$\mathbf{F}_{frottement}$	résultante des efforts de frottement
$\mathcal{M}_{frottement}^O$	moment au point $O$ des efforts de frottement
$R_a$	rayon actif
$C_{freinage}$	couple de freinage
$\mu$	coefficient de frottement
$\mu_d$	coefficient de frottement dynamique
$\mu_s$	coefficient de frottement statique
$\mathbf{I}$	matrice identité
$\mathbf{M}$	matrice de masse
$\mathbf{C}$	matrice d'amortissement
$\mathbf{K}$	matrice de raideur
$\mathbf{K}_s$	matrice de raideur structurelle
$\mathbf{K}_f$	matrice de raideur induite par le frottement
$s$	variable de Laplace
$\lambda$	valeur propre
$\alpha$	partie réelle de la valeur propre
$\omega$	partie imaginaire de la valeur propre (pulsation propre)
$\Psi$	vecteur propre
$\Omega$	matrice diagonale des pulsations propres du système sans frottement
$\Phi$	base modale du système sans frottement
$\gamma$	coordonnées modales
$\Lambda_f$	projection de $\mathbf{K}_f$ sur la base modale du système sans frottement
$\mathbf{D}$	projection de $\mathbf{C}$ sur la base modale du système sans frottement

$\mathbf{F}_{\text{ext}}$	efforts externes
$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}_i)$	efforts internes à l'itération $i$
$\mathbf{K}_i$	matrice de raideur tangente à l'itération $i$
$p$	pression de contact
$h$	interpénétration
$\Pi$	travail virtuel
$P$	pression hydraulique
$V$	vitesse véhicule
$M$	sens de marche
$\rho$	densité
$E$	module d'Young
$E_d$	module d'Young du disque
$E_p$	module d'Young des garnitures
$W_p$	usure plaquettes
$W_d$	usure disque
$W_m$	usure moule
$IC$	indice de crissement
$S/N$	ratio signal sur bruit

## Annexe A

# Modèle pion-disque

### A.1 Modèle linéaire

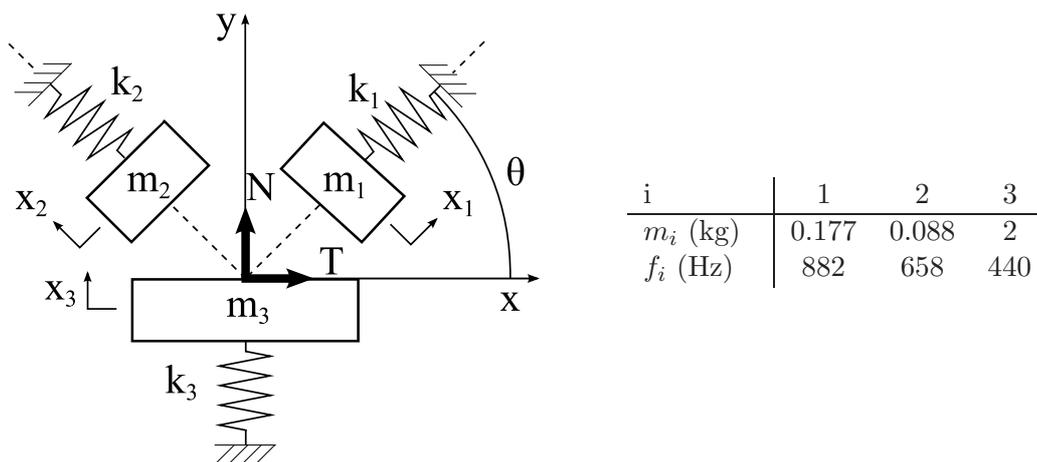


FIG. A.1 – Modèle linéaire pion-disque

### A.2 Modèle non-linéaire

$i$	1	2	3
$m_i$ (kg)	0.177	0.088	2
$f_i$ (Hz)	882	658	440
$\xi_i$	0.06	0.03	0.03
$k_i^{NL}$	1.0 e11	0	0

TAB. A.1 – Données numériques du modèle pion-disque

Les calculs sont réalisés juste après le point de bifurcation de Hopf, pour un coefficient de frottement de  $\mu = 0.71$ .



## Annexe B

# Modélisation par éléments finis

### B.1 Solveurs complexes

Les « solveurs complexes » permettent de calculer les valeurs et vecteurs propres complexes d'un problème non-Hermitien  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ , avec  $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^*$ . Nous avons à faire à ce type de problème dans les calculs de crissement de frein car le frottement rend la matrice de raideur du système non-symétrique. Il existe différentes méthodes de résolution implémentées dans les logiciels commerciaux, comme nous pouvons le constater dans le tableau suivant :

Méthode	Type	Variante	Nastran	Abaqus	Matlab
Lanczos complexe	Iteratif	Single vector complex Lanczos	×		
		Adaptative block complex Lanczos	×		
Hessenberg	Réduction	QR Hessenberg	×		
		QZ Hessenberg	×	×	×

TAB. B.1 – Solveurs complexes - Algorithmes Nastran, Abaqus et Matlab

Nous allons détailler en quelques mots ces différents algorithmes, en nous attardant plus longtemps sur la méthode de Hessenberg que nous avons utilisée préférentiellement. Il faut savoir que cette méthode est adaptée aux matrices de petites dimensions, alors que la méthode de Lanczos est principalement utilisée pour les matrices de grandes dimensions et largement creuses.

La méthode de Lanczos est une méthode itérative de projection qui permet de converger vers une approximation de la base des vecteurs propres à droite et à gauche. Une variante « par block » existe et apporte un gain important en efficacité.

La méthode de Hessenberg consiste à réduire la matrice  $\mathbf{A}$  à sa forme de Schur en utilisant le théorème suivant

**Théorème 1 (Décomposition de Schur)** *Si  $\mathbf{A} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  alors, il existe une matrice unitaire  $\mathbf{Q} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  et une matrice triangulaire supérieure  $\mathbf{T}$  dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  telles que  $\mathbf{T} = \mathbf{Q}^* \mathbf{A} \mathbf{Q}$ .*

Une telle décomposition permet d'obtenir directement les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  et de calculer ses vecteurs propres relativement simplement en résolvant un système triangulaire. Dans la pratique, la forme de Schur de la matrice  $\mathbf{A}$  est obtenue en deux étapes. La méthode de Householder permet dans un premier temps d'écrire cette matrice non-symétrique comme étant semblable à

une matrice de Hessenberg, qui par définition a la forme suivante

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{43} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Cette matrice de Hessenberg est ensuite réduite à sa forme de Schur grâce à l'algorithme itératif nommé QR. Cet algorithme consiste à construire, à partir de la matrice de Hessenberg et en utilisant une factorisation QR, une suite de matrices deux à deux semblables, de sorte qu'elles aient les mêmes valeurs propres. Dans certaines conditions, que nous ne précisons pas ici, cette suite converge vers une forme triangulaire pour laquelle les valeurs propres sont évidentes.

La variante baptisée « QZ » de la méthode de Hessenberg est une extension aux problèmes aux valeurs propres non-Hermitiens généralisés, qui s'écrivent  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$ . Cette variante utilise l'analogue de l'algorithme itératif QR, nommé algorithme QZ. L'avantage de cet algorithme est d'être plus robuste et de supporter une matrice  $\mathbf{B}$  singulière.

Pour ces deux variantes de la méthode de Hessenberg, les formulations adoptées pour résoudre un problème de structure sont les suivantes :

$$QR : \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad QZ : \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

## B.2 Matériaux anisotropes et orthotropes

Pour un tel matériau la relation entre les contraintes et les déformations est anisotrope et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Les termes présents dans la matrice se calculent à partir des modules d'Young  $E_x, E_y, E_z$ , des modules de cisaillement  $G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$  et des coefficients de poisson  $\nu_{ij}$  par les relations suivantes :

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{yz} \nu_{zy}}{E_y E_z D} \quad C_{12} = \frac{\nu_{yz} + \nu_{zx} \nu_{yz}}{E_y E_z D} \quad C_{13} = \frac{\nu_{zx} + \nu_{yx} \nu_{zy}}{E_y E_z D} \quad (\text{B.3})$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{xz} \nu_{zx}}{E_x E_z D} \quad C_{23} = \frac{\nu_{zy} + \nu_{xy} \nu_{zx}}{E_x E_z D} \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}{E_x E_y D} \quad (\text{B.4})$$

$$C_{44} = G_{xy} \quad C_{55} = G_{yz} \quad C_{66} = G_{zx} \quad (\text{B.5})$$

Avec

$$D = \frac{1 - \nu_{xy} \nu_{yx} - \nu_{yz} \nu_{zy} - \nu_{xz} \nu_{zx} - 2\nu_{yx} \nu_{zy} \nu_{xz}}{E_x E_y E_z} \quad (\text{B.6})$$

Les matériaux orthotropes présentent une direction privilégiée et leurs caractéristiques élastiques dans les deux autres directions sont égales.

## Annexe C

# Relations non-amorti / iso-amorti

Nous proposons ici de montrer, sur le système à deux degrés de liberté présenté figure C.1, la relation entre les valeurs propres non-amorties et les valeurs propres iso-amorties.

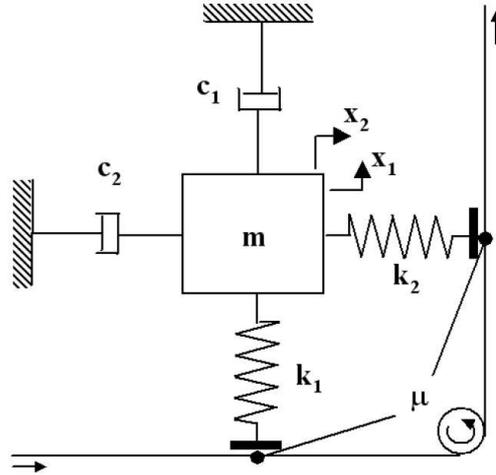


FIG. C.1 – Modèle à deux degrés de liberté

L'équation du mouvement d'un tel système s'écrit [?]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \omega_{0,1} & 0 \\ 0 & \eta_2 \omega_{0,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{0,1}^2 & -\mu \omega_{0,2}^2 \\ \mu \omega_{0,1}^2 & \omega_{0,2}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Avec  $\omega_{0,i}$  et  $\eta_i$  la pulsation propre et le facteur de perte associés au mode  $i$ .

$$\omega_{0,i} = \sqrt{\frac{k_i}{m}} \quad \eta_i = \frac{c_i}{\sqrt{k_i m}} \quad (\text{C.2})$$

L'analyse de stabilité est réalisée en déterminant les valeurs propres de l'équation

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) = 0 \quad (\text{C.3})$$

avec  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  les matrices de masse, amortissement et raideur relatives au système (C.1). Une fois développée, cette équation s'écrit

$$\lambda^4 + (\eta_1 \omega_{0,1} + \eta_2 \omega_{0,2}) \lambda^3 + (\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2 + \eta_1 \omega_{0,1} \eta_2 \omega_{0,2}) \lambda^2 + (\eta_1 \omega_{0,1} \omega_{0,2}^2 + \eta_2 \omega_{0,2} \omega_{0,1}^2) \lambda + \omega_{0,1}^2 \omega_{0,2}^2 (1 + \mu^2) = 0 \quad (\text{C.4})$$

Les termes d'ordre un et trois de ce polynôme n'existent que dans le cas amorti. Dans la suite, nous allons considérer deux cas, le cas non-amorti et le cas iso-amorti, définis respectivement par  $\eta_1\omega_{0,1} = \eta_2\omega_{0,2} = 0$  et  $\eta_1\omega_{0,1} = \eta_2\omega_{0,2} = d$ .

En supposant  $\lambda$  solution de l'équation iso-amortie, nous avons

$$\lambda^4 + 2d\lambda^3 + (\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2 + d^2)\lambda^2 + (\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2)d\lambda + \omega_{0,1}^2\omega_{0,2}^2(1 + \mu^2) = 0 \quad (\text{C.5})$$

En supposant  $\Psi$  solution de l'équation non-amortie, nous avons

$$\Psi^4 + (\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2)\Psi^2 + \omega_{0,1}^2\omega_{0,2}^2(1 + \mu^2) = 0 \quad (\text{C.6})$$

L'équation C.6 ne présente que des termes pairs. Notre but est de déterminer si  $\lambda$  décalée en partie réelle peut être solution de l'équation C.6 avec une raideur modifiée. Nous utiliserons une tilde pour désigner ces raideurs modifiées.

Supposons  $\exists s \in \mathbb{R}/\Psi = \lambda + s$ . Ceci nous conduit à

$$\lambda^4 + 4s\lambda^3 + (\tilde{\omega}_{0,1}^2 + \tilde{\omega}_{0,2}^2 + 6s^2)\lambda^2 + (2s(\tilde{\omega}_{0,1}^2 + \tilde{\omega}_{0,2}^2) + 4s^3)\lambda + \tilde{\omega}_{0,1}^2\tilde{\omega}_{0,2}^2(1 + \mu^2) + s^4 + s^2(\tilde{\omega}_{0,1}^2 + \tilde{\omega}_{0,2}^2) = 0 \quad (\text{C.7})$$

En identifiant terme à terme les équations C.5 et C.7, nous obtenons

$$\begin{cases} 2d = 4s \\ \omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2 + d^2 = \tilde{\omega}_{0,1}^2 + \tilde{\omega}_{0,2}^2 + 6s^2 \\ (\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2)d = 2s(\tilde{\omega}_{0,1}^2 + \tilde{\omega}_{0,2}^2) + 4s^3 \\ \omega_{0,1}^2\omega_{0,2}^2(1 + \mu^2) = \tilde{\omega}_{0,1}^2\tilde{\omega}_{0,2}^2(1 + \mu^2) + s^4 + s^2(\tilde{\omega}_{0,1}^2 + \tilde{\omega}_{0,2}^2) \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Il nous faut maintenant vérifier la cohérence de ce système. Remarquons tout d'abord que la première et la troisième équation sont liées. Ainsi, l'équation C.8 se réécrit

$$\begin{cases} s = d/2 \\ \tilde{\omega}_{0,1}^2 + \tilde{\omega}_{0,2}^2 = \omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2 - d^2/2 \\ \tilde{\omega}_{0,1}^2\tilde{\omega}_{0,2}^2 = \omega_{0,1}^2\omega_{0,2}^2 - \frac{d^2}{4(1+\mu^2)}\left(\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2 - \frac{d^2}{4}\right) \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Ceci signifie que si  $\lambda$  est solution de l'équation iso-amortie avec les raideurs  $(\omega_{0,1}^2, \omega_{0,2}^2)$ , alors  $\lambda + d/2$ , est solution de l'équation non-amortie avec les raideurs modifiées  $(\tilde{\omega}_{0,1}^2, \tilde{\omega}_{0,2}^2)$  définies par l'équation C.9.

## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 avril 2002,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur L. JEZEQUEL

et les rapports de

Madame E. AUBRY  
Professeur - Université de Haute Alsace - ESSAIM - 12, Rue des Frères Lumière  
68093 MULHOUSE CEDEX

et de

Monsieur B. PESEUX  
Professeur - Ecole Centrale de Nantes - GeM - Equipe Structure et Simulation - 1, Rue de la Noé  
BP 92101 - 44321 NANTES CEDEX 3

**Monsieur FRITZ Guillaume**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)**

Fait à Ecully, le 18 juin 2007

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur des Etudes



J. JOSEPH