



**HAL**  
open science

# Quelques applications du contrôle stochastique aux mathématiques financières

Thomas Lim

► **To cite this version:**

Thomas Lim. Quelques applications du contrôle stochastique aux mathématiques financières. Optimisation et contrôle [math.OA]. Université d'Evry Val d'Essonne, 2018. tel-04605598

**HAL Id: tel-04605598**

**<https://hal.science/tel-04605598v1>**

Submitted on 7 Jun 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Mémoire présenté pour l'obtention du  
**Diplôme d'habilitation à diriger des recherches**

de

L'UNIVERSITÉ D'EVRY-VAL-D'ESSONNE

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

*Établissement d'inscription* : Université d'Evry-Val-d'Essonne

*Établissement d'accueil* : Ecole Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et  
l'Entreprise

*Laboratoire d'accueil* : Laboratoire de mathématiques et modélisation d'Évry, UMR 8071

*Spécialité* : Mathématiques appliquées

**Thomas LIM**

Quelques applications du contrôle stochastique  
aux mathématiques financières

*Date de soutenance* : 4 décembre 2018

STEFAN ANKIRCHNER (Universität Jena)

*Après avis des rapporteurs* : LUCIANO CAMPI (London School of Economics)

ANTHONY REVEILLAC (INSA Toulouse)

*Jury de soutenance* :

CLAUDIA CECI	(Università di Pescara) Examinatrice
STÉPHANE CREPEY	(Université d'Evry-Val-d'Essonne) Directeur
ROMUALD ELIE	(Université Paris-Est Marne-La-Vallée) Examinateur
HUYEN PHAM	(Université Paris Diderot) Examinateur
ANTHONY REVEILLAC	(INSA Toulouse) Rapporteur
AGNÈS SULEM	(INRIA) Examinatrice



*A Timothé et Capucine*



## Remerciements

Mes premiers remerciements vont tout naturellement vers mes co-auteurs sans qui cette habilitation n'aurait pas pu être écrite et toutes ces années de recherche auraient été moins plaisantes, en particulier Idris et Mhamed avec qui c'est toujours un plaisir de travailler.

Je suis très reconnaissant envers Stefan Ankirchner, Luciano Campi et Anthony Reveillac d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette habilitation, et Claudia Ceci, Romuald Elie, Huyen Pham et Agnès Sulem d'avoir accepté de faire parti du jury. C'est un réel honneur pour moi d'avoir de si grands noms dans mon jury.

Je voudrai également remercier les membres du LaMME, et en particulier l'équipe Probabilités et Mathématiques Financières, Arnaud, Etienne, Monique et Stéphane pour leur disponibilité et leur aide durant toutes mes années passées au laboratoire, également Maouloud, Valérie et Vincent.

Mes remerciements vont également à mes collègues de l'ENSIIE, en particulier Nicolas, Sergio, Vathana, Raul, Sylvain et Carric.

J'ai également une pensée pour mes collègues et étudiants de l'ITC et RUPP.

J'exprime toute ma reconnaissance à ma famille qui a toujours été présente pour moi.

Enfin, je termine en remerciant Cécile qui m'a soutenu durant ces années, et qui s'est occupée de Timothé et Capucine pendant que je rédigeai mon habilitation.



## Introduction

Ce manuscrit présente une synthèse des travaux de recherche que j'ai effectués depuis le début de ma thèse sur le contrôle stochastique et des applications en finance et assurance.

Le titre de ma thèse était "Quelques applications du contrôle stochastique aux risques de défaut et de liquidité". Elle m'a permis d'appréhender la théorie du contrôle stochastique et des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) avec quelques applications en finance. C'est donc tout naturellement que j'ai poursuivi mes recherches dans la théorie du contrôle stochastique avec en particulier l'utilisation des EDSR, mais également l'utilisation des équations d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB). Je me suis également intéressé à des produits d'assurance vie puisque les méthodes que j'ai étudiées durant ma thèse s'appliquent aux risques de défaut mais également à l'assurance où l'on remplace le temps de défaut par un temps de mortalité. Depuis quelques temps, je m'intéresse également au cas de la gestion de ressource naturelle.

J'ai choisi de regrouper mes résultats en trois chapitres. Le premier chapitre est composé de résultats théoriques sur les EDSR dans le cadre du grossissement de filtrations. Dans le deuxième chapitre, je considère des problèmes d'optimisation en finance et assurance lorsqu'il y a un temps de défaut/mortalité possible, résolu en utilisant les résultats présentés dans le premier chapitre. Enfin, dans le troisième chapitre, je m'intéresse à des problèmes de gestion de ressources naturelles, renouvelables ou non, appréhendés à l'aide d'outils de contrôle stochastique.

La première section du Chapitre 1 est consacrée aux EDSR avec un nombre fini de sauts. Je m'intéresse d'un point de vue théorique à l'existence et l'unicité d'une solution. Pour cela j'utilise une approche par décomposition afin d'écrire une EDSR avec un nombre fini de sauts comme un système récursif d'EDSR browniennes. Cette approche permet d'étendre plusieurs résultats d'existence et d'unicité sur les EDSR browniennes aux EDSR avec sauts. Je me suis également intéressé aux schémas d'approximation pour ce type d'EDSR lorsqu'il n'y a qu'un temps de saut. Pour cela j'approxime chaque EDSR brownienne qui apparaît dans le système récursif, puis je recolle judicieusement les approximations. Cela permet d'obtenir des vitesses de convergence similaire à celle des schémas pour les EDSR browniennes.

Dans la deuxième section du Chapitre 1, j'adapte les résultats obtenus sur les EDSR avec un nombre fini de sauts aux EDSR avancées avec un saut. En utilisant l'approche développée dans la première section, j'arrive à généraliser des résultats d'existence et d'unicité pour les EDSR avancées browniennes au cas des EDSR avancées avec un saut.

Dans la première section du Chapitre 2, je m'intéresse à des problèmes d'optimisation dans un marché financier incomplet avec des temps de défaut. En utilisant une approche par optimalité martingale, je montre que résoudre le problème d'optimisation est équivalent à résoudre une EDSR à sauts, pour le cas de la maximisation d'utilité, ou un système d'EDSR à sauts, pour le cas de l'optimisation moyenne-variance. Concernant le cas de la maximisation de l'utilité, je considère le cas de l'information totale, lorsque l'agent observe tous les coefficients du modèle et le mouvement brownien, et le cas de l'information partielle, lorsque l'agent n'observe qu'une partie des coefficients. Pour le cas de l'information partielle, j'utilise d'abord la théorie du filtrage afin de réécrire la diffusion du processus avec des coefficients adaptés à la filtration observée, puis je m'intéresse au problème de maximisation. J'étudie également le cas avec consommation pour le problème de maximisation de l'utilité en faisant un lien entre problème dual et EDSR.

La deuxième section du Chapitre 2 est consacrée au pricing des *variable annuities*. Je propose une nouvelle manière de déterminer le prix de ces produits d'assurance en généralisant la théorie du prix d'indifférence. Je considère à la fois le cas où l'assuré fait des retraits aléatoires durant la période du contrat, et également le cas où l'assuré fait les pires retraits du point de vue de l'assureur, ce qui correspond à un problème de max-min. Dans le deuxième cas j'utilise une approche séquentielle qui permet de travailler entre deux dates anniversaires du contrat comme un problème de maximisation puis de faire une minimisation, à la date anniversaire, d'une fonction continue. Pour cela j'utilise une approche par optimalité martingale qui amène à résoudre un système récursif d'EDSR pour caractériser la fonction valeur associée au problème.

Dans le Chapitre 3, je considère le problème de gestion de ressource naturelle lorsque l'agent peut récolter cette ressource afin de la revendre sur le marché. En utilisant les outils du contrôle optimal, je caractérise la fonction valeur à l'aide d'une équation d'HJB et approche la solution de celle-ci afin d'obtenir des résultats numériques que l'on s'efforce d'interpréter de manière économique. Dans la Section 1 de ce chapitre, je considère le cas où la ressource n'évolue pas dans le temps, comme par exemple le cas d'un puits de pétrole. Dans la Section 2, je considère le cas où la quantité de ressource évolue au cours du temps mais l'agent ne peut pas réintroduire de la ressource, comme par exemple un lac avec des poissons lorsqu'on s'interdit de réintroduire des poissons dans le lac. Je traite le cas où l'agent récolte en temps continu avec des interdictions de récolter si la quantité de ressource est en dessous d'une constante, et également le cas impulsionnel. Dans la Section 3, je considère le cas où la quantité de ressource évolue au cours du temps et l'agent peut réintroduire de la ressource, comme par exemple une forêt, c'est à dire que l'on peut planter de nouveaux arbres. Je m'intéresse à l'exploitation de cette ressource en temps discret.

## Liste des travaux

**Chapitre 1** : Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec grossissement de filtrations

- [L1] I. Kharroubi and T. Lim (2014) "Progressive enlargement of filtrations and BSDEs with jumps", *Journal of Theoretical Probability*, vol. 27, 683-724.
- [L2] I. Kharroubi and T. Lim (2015) "A decomposition approach for the discrete-time approximation of FBSDEs with a jump", *Random Operators and Stochastic Equations*, vol. 23 (2), 81-109.
- [L3] M. Jeanblanc, T. Lim and N. Agram (2017) "Some existence results for advanced backward stochastic differential equations with a jump time", *ESAIM : Proceedings and Surveys : Enlargement of filtrations*, vol. 56, 88-110.

**Chapitre 2** : Contrôle stochastique appliqué à la finance et à l'assurance

- [L4] T. Lim and M.-C. Quenez (2011) "Exponential utility maximization in an incomplete market with defaults", *Electronic Journal of Probability*, vol. 16, 1434-1464.
- [L5] T. Lim and M.-C. Quenez (2015) "Portfolio optimization in a default model under full/partial information", *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, vol. 29 (4), 565-587.
- [L6] B. Iftimie, M. Jeanblanc and T. Lim (2016) "Optimization problem under change of regime of interest rate", *Stochastic and Dynamics*, vol. 16 (5), 1-31.
- [L7] I. Kharroubi, T. Lim and A. Ngoupeyou (2013) "Mean-Variance hedging on uncertain time horizon in a market with a jump", *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 68, 413-444.
- [L8] E. Chevalier, T. Lim and R. Romo Romero (2016) "Indifference fee rate for the variable annuities", *Applied Mathematical Finance*, vol. 23 (4), 278-308.
- [L9] C. Blanchet Scalliet, E. Chevalier, I. Kharroubi and T. Lim (2015) "Max-Min optimization problem for variable annuities pricing", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 18, 1-35.

**Chapitre 3** : Contrôle stochastique appliqué à la gestion de ressources naturelles

- [L10] S. Goutte, I. Kharroubi and T. Lim (2018) "Optimal management of an oil exploitation", accepté dans *International Journal of Global Energy Issues*.
- [L11] M. Gaigi, S. Goutte, I. Kharroubi and T. Lim "Optimal investment problem in the management of natural resources : Application to oil drilling", soumis à *Annals of Operation Research*.
- [L12] M. Gaigi, I. Kharroubi, T. Lim and J.-M. Sahut "Management of a scare resource and price rule : the case of sustainable fishing", soumis à *European Journal of Operational Research*.
- [L13] M. Gaigi, I. Kharroubi and T. Lim "Management of a natural resource with delay to respect", working paper.
- [L14] I. Kharroubi, T. Lim and V. Ly Vath "A stochastic delayed impulse control model for optimal exploitation of a renewable resource", soumis à *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.

**Article non présenté**

- [L15] T. Lim, V. Ly Vath, J.-M. Sahut and S. Scotti (2013) "Bid-ask spread modelling, a perturbative approach", *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VII Progress in Probability*, vol. 67, 411-434.

## Notations

Dans tout ce manuscrit, on considérera un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$  muni d'un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel  $W$ . La filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  générée par le mouvement brownien est supposée satisfaire les conditions usuelles. On notera parfois  $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[\cdot]$  au lieu de  $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ .

$T$  sera une constante positive correspondant à la date terminale du problème.

Si nous avons un  $n$ -uplet  $x_1, \dots, x_n$  nous le noterons  $x_{(n)}$  ou  $x^{(n)}$  et par convention  $x_0 = 0$  et  $x_{n+1} = \infty$ .

Pour n'importe quel temps aléatoire  $\tau$  on définit le processus de saut pur  $H_t := \mathbb{1}_{\tau \leq t}$ , on note  $M$  la martingale compensée associée et  $\lambda$  l'intensité si le compensateur est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, auquel cas

$$M_t = H_t - \int_0^t \lambda_s ds .$$

Pour une filtration  $\mathbb{H}$ , nous notons  $\mathcal{P}(\mathbb{H})$  (resp.  $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ ) la  $\sigma$ -algèbre des sous-ensembles  $\mathbb{H}$ -prévisible (resp. optionnel) de  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ .

$\mathcal{S}_{\mathbb{H}}^{\infty}[a, b]$  est l'ensemble des processus  $Y$  de  $\mathcal{O}(\mathbb{H})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que

$$\|Y\|_{\mathcal{S}_{\mathbb{H}}^{\infty}[a, b]} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a, b]} |Y_t| < \infty .$$

$L_{\mathbb{H}}^2[a, b]$  est l'ensemble des processus  $Z$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{H})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  tels que

$$\|Z\|_{L_{\mathbb{H}}^2[a, b]}^2 := \mathbb{E} \left[ \int_a^b |Z_t|^2 dt \right] < \infty .$$

$L^2(\mu)$  est l'ensemble des processus  $U$   $\mathcal{P}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{B}(E)$ -mesurable, avec  $E$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathcal{B}(E)$  l'ensemble des boréliens de  $E$ , tels que

$$\|U\|_{L^2(\mu)}^2 := \mathbb{E} \left[ \int_0^T \int_E |U_t(e)|^2 \mu(de, dt) \right] < \infty .$$

Le symbole  $\int_s^t$  correspond à l'intégrale sur l'intervalle  $(s, t]$  et vaut 0 si  $s \geq t$ .



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec grossissement de filtrations</b>	<b>15</b>
1.1	Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec grossissement de filtrations . . . . .	15
1.1.1	Grossissement progressif de filtrations et EDSR . . . . .	15
1.1.2	Application à la gestion de portefeuille . . . . .	18
1.1.3	Schéma d'approximation pour les EDSR avec un saut . . . . .	19
1.2	Equation différentielle stochastique rétrograde avancée avec grossissement de filtration . . . . .	21
1.3	Perspectives . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Contrôle stochastique appliqué à la finance et l'assurance</b>	<b>25</b>
2.1	Problème d'optimisation dans un modèle avec saut . . . . .	25
2.1.1	Maximisation d'utilité avec information globale . . . . .	25
2.1.2	Maximisation d'utilité avec information partielle . . . . .	28
2.1.3	Optimisation avec consommation et changement de régime du taux d'intérêt . . . . .	29
2.1.4	Couverture moyenne-variance . . . . .	32
2.2	Pricing des variable annuités . . . . .	33
2.3	Perspectives . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Contrôle stochastique appliqué à la gestion de ressources naturelles</b>	<b>39</b>
3.1	Cas des ressources naturelles dont le stock est constant . . . . .	39
3.2	Cas des ressources avec stock dynamique mais non renouvelable . . . . .	42
3.2.1	Cas avec des périodes d'interdiction d'exploitation . . . . .	42
3.2.2	Cas impulsionnel . . . . .	46
3.3	Cas des ressources renouvelables . . . . .	51
3.4	Perspectives . . . . .	56



# Chapitre 1

## Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec grossissement de filtrations

### 1.1 Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec grossissement de filtrations

Depuis une dizaine d'années, le risque de crédit est devenu un des sujets les plus prolifiques en mathématique financière, et en particulier le risque de défauts ([3, 4]). Dans plusieurs papiers liés à ce sujet [2, 12, 14] et [L5], les EDSR avec sauts apparaissent mais les résultats sur celles-ci sont loin d'être aussi nombreux que pour les EDSR browniennes. Hormis [1] dans lequel les hypothèses sont fortes, il n'y a pas de résultats généraux pour les EDSR quadratiques dans ce cadre.

Je présente dans ce chapitre les résultats que j'ai obtenus pour les EDSR avec des temps de sauts marqués. En particulier, je me suis intéressé aux problèmes d'existence et d'unicité de la solution pour ce type d'EDSR dans [L1] avec quelques applications en mathématique financière dans le cadre de marché financier incomplet avec risque de défauts, et également à des schémas de discrétisation de la solution dans [L2].

#### 1.1.1 Grossissement progressif de filtrations et EDSR

On considère la plus petite filtration  $\mathbb{G}$  qui contient la filtration brownienne  $\mathbb{F}$  et qui rend la suite croissante de temps aléatoires  $(\tau_k)_{1 \leq k \leq n}$  des temps d'arrêt et la suite de marques aléatoires  $(\zeta_k)_{1 \leq k \leq n}$ , à valeurs dans un sous espace borélien  $E$  de  $\mathbb{R}^m$ , mesurable aux temps  $(\tau_k)_{1 \leq k \leq n}$ . Ce cadre correspond à la théorie du grossissement progressif de filtration introduit dans les années 80 par Jeulin et Yor [10, 11]. On note  $\mu$  la mesure aléatoire associée à la suite  $(\tau_k, \zeta_k)_{1 \leq k \leq n}$  :

$$\mu([0, t] \times B) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq t, \zeta_k \in B\}}, \quad t \geq 0, \quad B \in \mathcal{B}(E).$$

Nous faisons l'hypothèse de densité suivante concernant les temps et marques aléatoires.

(HD) Il existe une fonction  $\gamma$  positive et  $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\Delta_n) \otimes \mathcal{B}(E^n)$ -mesurable telle que pour tout  $t \geq 0$

$$\mathbb{P}[(\tau_{(n)}, \zeta_{(n)}) \in d\theta de | \mathcal{F}_t] = \gamma_t(\theta_{(n)}, e_{(n)}) d\theta_1 \dots d\theta_n de_1 \dots de_n,$$

où  $\Delta_n$  est défini par

$$\Delta_n := \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \in (\mathbb{R}_+)^n : \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n\}.$$

Cette hypothèse garantit l'existence d'un compensateur absolument continu pour la mesure  $\mu$  que l'on notera  $\lambda_t(e)dedt$ . Elle nous permet également de pouvoir considérer les EDSR dans la filtration  $\mathbb{G}$  puisque l'intégrale stochastique est alors bien définie : on cherche un triplet  $(Y, Z, U) \in \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^{\infty}[0, T] \times L_{\mathbb{G}}^2[0, T] \times L^2(\mu)$  tel que

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s, U_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_E U_s(e)\mu(de, ds), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

où

- $\xi$  est une variable aléatoire  $\mathcal{G}_T$ -mesurable,
- $f$  est une fonction de  $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \text{Bor}(E, \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  qui est  $\mathcal{P}(\mathbb{G}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\text{Bor}(E, \mathbb{R}))$ -mesurable, où  $\text{Bor}(E, \mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions boréliennes de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{B}(\text{Bor}(E, \mathbb{R}))$  est la tribu borélienne engendrée par  $\text{Bor}(E, \mathbb{R})$ .

Pour prouver l'existence d'une solution à une telle EDSR, nous utilisons le résultat suivant de décomposition des processus  $\mathbb{G}$ -prévisibles donné dans [16] et généralisé au cas des processus  $\mathbb{G}$ -optionnel dans [20] : tout processus  $\mathbb{G}$ -prévisible  $X$  peut s'écrire

$$X_t = X_t^0 \mathbf{1}_{t \leq \tau_1} + \sum_{k=1}^{n-1} X_t^k(\tau_{(k)}, \zeta_{(k)}) \mathbf{1}_{\tau_k < t \leq \tau_{k+1}} + X_t^n(\tau_{(n)}, \zeta_{(n)}) \mathbf{1}_{\tau_n < t},$$

pour tout  $t \geq 0$ , avec  $X^0$  est  $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ -mesurable et  $X^k$  est  $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\Delta_k) \otimes \mathcal{B}(E^k)$ -mesurable pour  $k = 1, \dots, n$ . Ces résultats de décomposition permettent d'écrire la condition terminale et le générateur de l'EDSR (1.1) sous la forme

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{k=0}^n \xi^k(\tau_{(k)}, \zeta_{(k)}) \mathbf{1}_{\tau_k \leq T < \tau_{k+1}}, \\ f(t, y, z, u) &= \sum_{k=0}^n f^k(t, y, z, u, \tau_{(k)}, \zeta_{(k)}) \mathbf{1}_{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}}, \end{aligned}$$

avec  $f^0$  (resp.  $\xi^0$ ) est  $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\text{Bor}(E, \mathbb{R}))$  (resp.  $\mathcal{F}_T$ )-mesurable et  $f^k$  (resp.  $\xi^k$ ) est  $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\text{Bor}(E, \mathbb{R})) \otimes \mathcal{B}(\Delta_k) \otimes \mathcal{B}(E^k)$  (resp.  $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\Delta_k) \otimes \mathcal{B}(E^k)$ )-mesurable pour  $k = 1, \dots, n$ . Ces décompositions nous amènent à nous intéresser au système récursif d'EDSR browniennes suivant

$$\begin{aligned} Y_t^n(\theta_{(n)}, e_{(n)}) &= \xi^n(\theta_{(n)}, e_{(n)}) + \int_t^T f^n\left(s, Y_s^n(\theta_{(n)}, e_{(n)}), Z_s^n(\theta_{(n)}, e_{(n)}), 0, \theta_{(n)}, e_{(n)}\right) ds \\ &\quad - \int_t^T Z_s^n(\theta_{(n)}, e_{(n)}) dW_s, \quad \theta_n \wedge T \leq t \leq T, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y_t^k(\theta_{(k)}, e_{(k)}) &= \xi^k(\theta_{(k)}, e_{(k)}) + \int_t^T f^k\left(s, Y_s^k(\theta_{(k)}, e_{(k)}), Z_s^k(\theta_{(k)}, e_{(k)}), Y_s^{k+1}(\theta_{(k)}, s, e_{(k)}, \cdot) \right. \\ &\quad \left. - Y_s^k(\theta_{(k)}, e_{(k)}), \theta_{(k)}, e_{(k)}\right) ds - \int_t^T Z_s^k(\theta_{(k)}, e_{(k)}) dW_s, \quad \theta_k \wedge T \leq t \leq T. \end{aligned}$$

On obtient le résultat général suivant.

**Théorème 1.1.1.** *Supposons que l'hypothèse (HD) soit satisfaite. Si les EDSR browniennes admettent des solutions  $(Y^k(\theta_{(k)}, e_{(k)}), Z^k(\theta_{(k)}, e_{(k)}))$ , pour  $k = 0, \dots, n$ , pour tout  $(\theta_{(n)}, e_{(n)})$  et si ces solutions satisfont*

$$\sup_{(k, \theta_{(k)}, e_{(k)})} \|Y^k(\theta_{(k)}, e_{(k)})\|_{\mathcal{S}^\infty[\theta_k \wedge T, T]} < \infty,$$

et

$$\mathbb{E} \left[ \int_{\Delta_n \times E^n} \left( \int_0^{\theta_1 \wedge T} |Z_s^0|^2 ds + \sum_{k=1}^n \int_{\theta_k \wedge T}^{\theta_{k+1} \wedge T} |Z_s^k(\theta_{(k)}, e_{(k)})|^2 ds \right) \gamma_T(\theta_{(n)}, e_{(n)}) d\theta_{(n)} de_{(n)} \right] < \infty,$$

alors l'EDSR (1.1) a une solution  $(Y, Z, U) \in \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^\infty[0, T] \times L_{\mathbb{G}}^2[0, T] \times L^2(\mu)$  donnée par

$$\begin{cases} Y_t = Y_t^0 \mathbf{1}_{t < \tau_1} + \sum_{k=1}^n Y_t^k(\tau_{(k)}, \zeta_{(k)}) \mathbf{1}_{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}}, \\ Z_t = Z_t^0 \mathbf{1}_{t \leq \tau_1} + \sum_{k=1}^n Z_t^k(\tau_{(k)}, \zeta_{(k)}) \mathbf{1}_{\tau_k < t \leq \tau_{k+1}}, \\ U_t(\cdot) = U_t^0(\cdot) \mathbf{1}_{t \leq \tau_1} + \sum_{k=1}^{n-1} U_t^k(\tau_{(k)}, \zeta_{(k)}, \cdot) \mathbf{1}_{\tau_k < t \leq \tau_{k+1}}, \end{cases} \quad (1.2)$$

avec  $U_t^k(\tau_{(k)}, \zeta_{(k)}, \cdot) = Y_t^{k+1}(\tau_{(k)}, t, \zeta_{(k)}, \cdot) - Y_t^k(\tau_{(k)}, \zeta_{(k)})$  pour tout  $k = 0, \dots, n-1$ .

On remarque que la composante de sauts  $U$  est écrite comme la différence de  $Y^{k+1}$  et  $Y^k$  pour chaque temps de sauts  $\tau_k$ . Ce qui entraîne en particulier que le processus  $U$  est borné.

La preuve de ce théorème consiste à d'abord prouver la mesurabilité et l'intégrabilité des processus  $Y, Z$  et  $U$  donnés par (1.2) puis de montrer  $\omega$  par  $\omega$  que le triplet est solution de l'équation (1.1).

Pour le cas d'un générateur à croissance quadratique avec une condition terminale bornée, on obtient un résultat d'existence de solution si on ajoute l'hypothèse suivante

$$(HBI) \quad \text{Le processus} \quad \left( \int_E \lambda_t(e) de \right)_{t \geq 0} \quad \text{est borné sur} \quad [0, \infty).$$

Nous nous sommes également intéressés au problème d'unicité de solutions. Pour cela nous devons ajouter l'hypothèse suivante :

(H) Toute  $\mathbb{F}$ -martingale est une  $\mathbb{G}$ -martingale.

**Théorème 1.1.2.** *Soient  $\underline{\xi}, \bar{\xi}, \underline{f}$  et  $\bar{f}$ . Supposons que  $\underline{\xi} \leq \bar{\xi}$ ,  $\mathbb{P}$ -a.s. et sont bornés, et que pour  $k = 0, \dots, n$*

$$\underline{f}^k(t, y, z, \underline{Y}_t^{k+1}(\tau_{(k)}, t, \zeta_{(k)}, \cdot) - y) \leq \bar{f}^k(t, y, z, \bar{Y}_t^{k+1}(\tau_{(k)}, t, \zeta_{(k)}, \cdot) - y),$$

$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbb{P}$ -a.s. et que les générateurs  $\bar{f}^k$  ou  $\underline{f}^k$  satisfont les hypothèses de comparaison pour le cas d'EDSR browniennes. Alors, si  $\bar{U}_t = \underline{U}_t = 0$  pour  $t > \tau_n$ , on a sous les hypothèses (HD) et (H)

$$\underline{Y}_t \leq \bar{Y}_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}$$

La preuve de ce résultat consiste à montrer que  $\underline{Y}^k$  et  $\bar{Y}^k$  sont solutions d'EDSR browniennes sur  $[\tau_k \wedge T, \tau_{k+1} \wedge T]$  et non plus sur  $[\tau_k \wedge T, T]$ , lesquelles vérifient un théorème de comparaison. On obtient alors l'inégalité suivante pour tout  $0 \leq k \leq n$ ,  $\theta_{(k)}$  et  $e_{(k)}$

$$\underline{Y}_t^k(\theta_{(k)}, e_{(k)}) \leq \bar{Y}_t^k(\theta_{(k)}, e_{(k)}), \quad \tau_k \wedge T \leq t \leq \tau_{k+1} \wedge T.$$

Puis par recollement des processus on obtient que  $\underline{Y} \leq \bar{Y}$ .

On peut ainsi montrer l'unicité de la solution à une EDSR à croissance quadratique sous les hypothèses (HD), (HBI) et (H).

### 1.1.2 Application à la gestion de portefeuille

On considère un marché financier composé d'un actif sans risque dont le prix est constant égal à 1 et un actif risqué dont le prix  $S$  suit la dynamique suivante

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_{u-} \left( b_u du + \sigma_u dW_u + \int_E \beta_u(e) \mu(de, du) \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dans la suite nous supposons que  $W$  est unidimensionnel, et que les hypothèses (H), (HD) et (HBI) sont satisfaites.  $b$ ,  $\sigma$  et  $\beta$  satisfont des conditions de régularité que l'on ne précise pas pour ne pas rentrer dans les détails.

On considère le problème d'optimisation suivant

$$V(x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[ -\exp(-\gamma(X_T^{x,\pi} - B)) \right],$$

où

- $B$  est une variable aléatoire  $\mathcal{G}_T$ -mesurable correspondant à un actif contingent,
- $X^{x,\pi}$  est la richesse en partant de  $x$  et suivant la stratégie autofinancée d'investissement  $\pi$ , sa dynamique est donnée par

$$X_t^{x,\pi} = x + \int_0^t \pi_s b_s ds + \int_0^t \pi_s \sigma_s dW_s + \int_0^t \int_E \pi_s \beta_s(e) \mu(de, ds), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Par la suite on suppose que  $\pi_t$  prend ses valeurs dans un compact  $\mathcal{C}$ . Pour caractériser  $V(x)$  on considère l'EDSR suivante

$$Y_t = B + \int_t^T f(s, Z_s, U_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T \int_E U_s(e) \mu(de, ds), \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec  $f$  définie par

$$f(t, z, u) := \inf_{\pi \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\gamma}{2} \left| \pi \sigma_t - \left( z + \frac{\vartheta_t}{\gamma} \right) \right|^2 + \int_E \frac{\exp(\gamma(u(e) - \pi \beta_t(e))) - 1}{\alpha} \lambda_t(e) de \right\} \\ - \vartheta_t z - \frac{|\vartheta_t|^2}{2\gamma},$$

pour tout  $(t, z, u) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \text{Bor}(E, \mathbb{R})$  avec  $\vartheta_t := b_t / \sigma_t$ . On montre qu'il existe une unique solution  $(Y, Z, U) \in \mathcal{S}_{\mathbb{G}}^\infty[0, T] \times L_{\mathbb{G}}^2[0, T] \times L^2(\mu)$  en utilisant les résultats de la Section 1.1.1. En utilisant un théorème de vérification semblable à [9], on caractérise la fonction valeur par

$$V(x) = -\exp(-\gamma(x - Y_0)).$$

On obtient également une stratégie d'investissement optimale

$$\hat{\pi}_t \in \arg \min_{\pi \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\alpha}{2} \left| \pi \sigma_t - \left( z + \frac{\vartheta_t}{\alpha} \right) \right|^2 + \int_E \frac{\exp(\alpha(u(e) - \pi \beta_t(e))) - 1}{\alpha} \lambda_t(e) de \right\}.$$

### 1.1.3 Schéma d'approximation pour les EDSR avec un saut

Dans cette section, on s'intéresse au schéma de discrétisation des EDSR avec un saut en utilisant l'approche développée dans la Section 1.1.1. Nous avons préféré traiter le cas avec un seul saut pour simplifier les preuves mais les résultats peuvent se généraliser à un nombre fini de sauts et éventuellement avec des marques. On considère dans la suite de cette section les EDSR de la forme suivante

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + \int_0^t \beta(s, X_{s-}) dH_s, \\ Y_t = g(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s, U_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T U_s dH_s. \end{cases} \quad (1.3)$$

Ce genre de schéma est étudié dans [5] lorsque le mouvement brownien est indépendant de la mesure de saut. Dans ce cadre, il est possible d'utiliser le calcul de Malliavin pour avoir des résultats de régularité sur la composante  $Z$ . Dans notre cas, on suppose uniquement que le temps de saut admet une densité conditionnelle sachant le mouvement brownien. Nous n'avons trouvé aucun résultat de la théorie du calcul de Malliavin dans ce cadre, donc la méthode de [5] ne s'applique pas dans notre cadre. Pour cela nous utilisons une approche par décomposition comme dans la Section 1.1.1 qui permet de considérer l'EDSR (1.3) comme un système récursif d'EDSR browniennes. De plus cette approche permet d'affaiblir les conditions sur les coefficients.

Nous commençons par montrer que l'EDSR (1.3) a une unique solution lorsque le générateur est Lipschitz ou à croissance quadratique quand les coefficients de l'EDS satisfait par  $X$  satisfont des conditions de régularité. Pour cela on introduit le système d'EDSR suivant

$$\begin{cases} X_t^1(\theta) = x + \int_0^t b(s, X_s^1(\theta)) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^1(\theta)) dW_s + \beta(\theta, X_{\theta-}^1(\theta)) \mathbf{1}_{\theta \leq t}, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_t^1(\theta) = g(X_T^1(\theta)) + \int_t^T f(s, X_s^1(\theta), Y_s^1(\theta), Z_s^1(\theta), 0) ds - \int_t^T Z_s^1(\theta) dW_s, & \theta \leq t \leq T, \end{cases}$$

pour tout  $\theta \in [0, T]$  et

$$\begin{cases} X_t^0 = x + \int_0^t b(s, X_s^0) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^0) dW_s, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_t^0 = g(X_T^0) + \int_t^T f(s, X_s^0, Y_s^0, Z_s^0, Y_s^1(s) - Y_s^0) ds - \int_t^T Z_s^0 dW_s, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Puis on considère une grille de discrétisation  $\pi := \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $[0, T]$ . Pour  $t \in [0, T]$ , on définit  $\pi(t) := \max \{t_i, i = 0, \dots, n \mid t_i \leq t\}$  et on note  $|\pi| := \max \{t_{i+1} - t_i, i = 0, \dots, n-1\}$ . On introduit les notations  $\Delta W_i^\pi := W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$  et  $\Delta t_i^\pi := t_i - t_{i-1}$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

On introduit d'abord une approximation pour les processus  $X^0$  et  $X^1$  liés à la décomposition du processus  $X$ .

Schéma d'Euler pour  $X^0$ . On considère le schéma  $X^{0,\pi}$  défini par

$$\begin{cases} X_{t_0}^{0,\pi} = x, \\ X_{t_i}^{0,\pi} = X_{t_{i-1}}^{0,\pi} + b(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^{0,\pi}) \Delta t_i^\pi + \sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^{0,\pi}) \Delta W_i^\pi, & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Schéma d'Euler pour  $X^1$ . Puisque le processus  $X^1$  dépend des paramètres  $t$  et  $\theta$ , on introduit une discrétisation de  $X^1$  par rapport à ces deux paramètres. On considère le schéma  $X^{1,\pi}$

défini par

$$\begin{cases} X_{t_0}^{1,\pi}(\pi(\theta)) = x + \beta(t_0, x) \mathbb{1}_{\pi(\theta)=0}, \\ X_{t_i}^{1,\pi}(\pi(\theta)) = X_{t_{i-1}}^{1,\pi}(\pi(\theta)) + b(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^{1,\pi}(\pi(\theta))) \Delta t_i^\pi + \sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^{1,\pi}(\pi(\theta))) \Delta W_i^\pi \\ \quad + \beta(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^{1,\pi}(\pi(\theta))) \mathbb{1}_{t_i=\pi(\theta)}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq \theta \leq T. \end{cases}$$

Puis on introduit une approximation des processus  $(Y^1, Z^1)$  et  $(Y^0, Z^0)$ .

Schéma d'Euler rétrograde pour  $(Y^1, Z^1)$ . On considère le schéma implicite  $(Y^{1,\pi}, Z^{1,\pi})$  défini par

$$\begin{cases} Y_T^{1,\pi}(\pi(\theta)) = g(X_T^{1,\pi}(\pi(\theta))), \\ Y_{t_{i-1}}^{1,\pi}(\pi(\theta)) = \mathbb{E}_{i-1}^{1,\pi(\theta)} [Y_{t_i}^{1,\pi}(\pi(\theta))] + f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^{1,\pi}(\pi(\theta)), Y_{t_{i-1}}^{1,\pi}(\pi(\theta)), Z_{t_{i-1}}^{1,\pi}(\pi(\theta)), 0) \Delta t_i^\pi, \\ Z_{t_{i-1}}^{1,\pi}(\pi(\theta)) = \frac{1}{\Delta t_i^\pi} \mathbb{E}_{i-1}^{1,\pi(\theta)} [Y_{t_i}^{1,\pi}(\pi(\theta)) \Delta W_i^\pi], \quad \pi(\theta) \leq t_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

où  $\mathbb{E}_i^{1,s}[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | \sigma(X_{t_j}^{1,\pi}(s), j \leq i)]$  pour  $0 \leq i \leq n$  et  $s \in [0, T]$ .

Schéma d'Euler rétrograde pour  $(Y^0, Z^0)$ . Puisque le terme  $(Y_t^1(t))_{t \in [0, T]}$  apparaît dans le générateur de l'EDSR associée à  $(Y^0, Z^0)$ , on considère une discrétisation basée sur  $Y^{1,\pi}$

$$\begin{cases} Y_T^{0,\pi} = g(X_T^{0,\pi}), \\ Y_{t_{i-1}}^{0,\pi} = \mathbb{E}_{i-1}^0 [Y_{t_i}^{0,\pi}] + \bar{f}^\pi(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^{0,\pi}, Y_{t_{i-1}}^{0,\pi}, Z_{t_{i-1}}^{0,\pi}) \Delta t_i^\pi, \\ Z_{t_{i-1}}^{0,\pi} = \frac{1}{\Delta t_i^\pi} \mathbb{E}_{i-1}^0 [Y_{t_i}^{0,\pi} \Delta W_i^\pi], \quad 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

où  $\mathbb{E}_i^0[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | \sigma(X_{t_j}^{0,\pi}, j \leq i)]$  pour  $0 \leq i \leq n$  et  $\bar{f}^\pi$  est définie par

$$\bar{f}^\pi(t, x, y, z) := f(t, x, y, z, Y_{\pi(t)}^{1,\pi}(\pi(t)) - y),$$

pour tout  $(t, x, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

On considère alors le schéma suivant pour approcher la solution  $(X, Y, Z, U)$  de l'EDSR (1.3)

$$\begin{cases} X_t^\pi = X_{\pi(t)}^{0,\pi} \mathbb{1}_{t < \tau} + X_{\pi(t)}^{1,\pi}(\pi(\tau)) \mathbb{1}_{t \geq \tau}, \\ Y_t^\pi = Y_{\pi(t)}^{0,\pi} \mathbb{1}_{t < \tau} + Y_{\pi(t)}^{1,\pi}(\pi(\tau)) \mathbb{1}_{t \geq \tau}, \\ Z_t^\pi = Z_{\pi(t)}^{0,\pi} \mathbb{1}_{t \leq \tau} + Z_{\pi(t)}^{1,\pi}(\pi(\tau)) \mathbb{1}_{t > \tau}, \\ U_t^\pi = (Y_{\pi(t)}^{1,\pi}(\pi(t)) - Y_{\pi(t)}^{0,\pi}) \mathbb{1}_{t \leq \tau}. \end{cases}$$

**Théorème 1.1.3.** *Si les hypothèses (HD), (HBI) et (H) sont satisfaites, le générateur  $f$  est Lipschitz ou à croissance quadratique et les coefficients de l'EDS de  $X$  sont assez réguliers, nous obtenons l'erreur d'approximation suivante*

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left[ |Y_t - Y_t^\pi|^2 \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^T |Z_t - Z_t^\pi|^2 dt \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^T \lambda_t |U_t - U_t^\pi|^2 dt \right] \leq K |\pi|,$$

pour une constante  $K$  indépendante de  $\pi$ .

Pour la preuve, nous considérons d'abord le cas du générateur Lipschitz. Pour cela nous obtenons des estimateurs à priori pour  $(X^1, Y^1, Z^1)$  puis  $(X^0, Y^0, Z^0)$  avec le calcul de Malliavin lequel peut être utilisé car on se place dans la filtration brownienne. Puis on obtient des résultats pour  $(X, Y, Z, U)$  en utilisant l'hypothèse de densité qui permet d'écrire  $\mathbb{E}[|Y_t - Y_t^\pi|^2]$  en fonction de  $\mathbb{E}[|Y_t^0 - Y_{\pi(t)}^{0,\pi}|^2]$  et  $\mathbb{E}[|Y_t^1(\theta) - Y_{\pi(t)}^{1,\pi}(\pi(\theta))|^2]$ , de même pour les composantes  $Z$  et  $U$ . Concernant le cas quadratique, nous arrivons à prouver que la composante  $Z$  est bornée en utilisant la théorie des martingales BMO comme dans [19]. Ce qui permet de montrer que l'unique solution  $(X, Y, Z, U)$  est aussi solution d'une EDSR Lipschitz ce qui permet alors d'obtenir la majoration de l'erreur.

## 1.2 Equation différentielle stochastique rétrograde avancée avec grossissement de filtration

Je présente dans ce chapitre les résultats obtenus dans [L3] sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades avancées (EDSRA). Dans l'approche traditionnelle des EDSR comme dans le Section 1.1 on considère que le générateur dépend de façon markovienne des paramètres. Dans cette section, on suppose que le générateur dépend du futur de la solution, tout en s'assurant que celui-ci est adapté, par exemple l'EDSR  $-dY_t = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}(Y_{t+1})dt - Z_t dW_t - U_t dH_t$ . Dans la suite de cette section, on s'intéressera aux EDSRA de la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} -dY_t = f(t, Y_t, \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Y_{t+\delta}], (\mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Y_{t+s}])_{0 \leq s \leq \delta}, Z_t, \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Z_{t+\delta}], (\mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Z_{t+s}])_{0 \leq s \leq \delta}, \\ \quad U_t, \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[U_{t+\delta}], (\mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[U_{t+s}])_{0 \leq s \leq \delta})dt - Z_t dW_t - U_t dH_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_{T+t} = \xi_{T+t}, \quad 0 \leq t \leq \delta, \\ Z_{T+t} = P_{T+t}, \quad U_{T+t} = Q_{T+t} \mathbf{1}_{\{T+t \leq \tau\}}, \quad 0 < t \leq \delta, \end{array} \right. \quad (1.4)$$

où  $T$  et  $\delta$  sont deux constantes positives et  $W$  un mouvement brownien unidimensionnel. Contrairement aux EDSR classiques, on a besoin ici de connaître la condition terminale sur l'intervalle  $[T, T + \delta]$  pour tous les termes de la solution et pas uniquement à la date  $T$  pour  $Y$ . Ce type d'EDSRA a été introduit dans [18] dans un cadre brownien. Dans [L3], nous avons également étudié les EDSRA dont le générateur est de la forme  $f(t, Y_t, Y_{t+\delta}, (Y_{t+s})_{0 \leq s \leq \delta}, Z_t, Z_{t+\delta}, (Z_{t+s})_{0 \leq s \leq \delta}, U_t, U_{t+\delta}, (U_{t+s})_{0 \leq s \leq \delta})$  mais on n'en parlera pas dans ce chapitre pour faciliter la lecture. Ce second type d'EDSRA a été introduit dans [15] dans un cadre avec saut poissonien pour traiter les problèmes de contrôle optimal avec délais.

En utilisant une approche semblable à celle mise en place dans la Section 1.1.1, on remarque que l'EDSRA (1.4) est liée au système récursif d'EDSRA browniennes suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -dY_t^a(\theta) = f^a(t, \theta, Y_t^a(\theta), \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[Y_{t+\delta}^a(\theta)], (\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[Y_{t+s}^a(\theta)])_{0 \leq s \leq \delta}, Z_t^a(\theta), \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[Z_{t+\delta}^a(\theta)], \\ \quad (\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[Z_{t+s}^a(\theta)])_{0 \leq s \leq \delta}, 0, 0, 0)dt - Z_t^a(\theta) dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_{T+t}^a(\theta) = \xi_{T+t}^a(\theta), \quad 0 \leq t \leq \delta, \\ Z_{T+t}^a(\theta) = P_{T+t}^a(\theta), \quad 0 < t \leq \delta, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} -dY_t^b = f^b(t, Y_t^b, \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Y_{t+\delta}], (\mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Y_{t+s}])_{0 \leq s \leq \delta}, Z_t^b, \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Z_{t+\delta}], (\mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Z_{t+s}])_{0 \leq s \leq \delta}, \\ \quad Y_t^a(t) - Y_t^b, \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[U_{t+\delta}], (\mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[U_{t+s}])_{0 \leq s \leq \delta})dt - Z_t^b dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ Y_{T+t}^b = \xi_{T+t}^b, \quad 0 \leq t \leq \delta, \\ Z_{T+t}^b = P_{T+t}^b, \quad U_{T+t}^b = Q_{T+t}, \quad 0 < t \leq \delta, \end{array} \right. \quad (1.6)$$

les exposants  $a$  et  $b$  correspondent au cas après (*after*) et avant (*before*) le saut dans la décomposition des processus.

Dans la suite, on supposera que les hypothèses (H), (HD) et (HBI) sont satisfaites, et on suppose également quelques hypothèses de régularité sur les conditions terminales et que le générateur  $f$  est Lipschitz.

Dans ce cas, on peut montrer que l'EDSRA (1.5) a une solution car les conditions terminales et le générateur  $f^a(\cdot, \theta, \cdot)$  héritent des hypothèses faites sur les conditions terminales de l'EDSR (1.4) et sur  $f$ , et on peut appliquer des résultats d'existence sur les EDSRA browniennes que l'on a obtenu dans [L3] en généralisant les résultats de [18].

L'EDSRA (1.6) est plus complexe à résoudre puisqu'il apparaît des termes de la forme  $\mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Y]$ ,  $\mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Z]$  et  $\mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[U]$  dans le générateur  $f^b$ . A l'instant  $t$ , on ne peut pas remplacer le terme  $Y_s$ , pour  $s \in (t, t + \delta]$ , simplement par  $Y_s^b$  ou  $Y_s^a(\tau)$  puisque  $\tau > t$ , il en est de même pour  $Z$  et  $U$ . En utilisant l'hypothèse (HD) et des résultats de décomposition on peut réécrire ces termes sous la forme

$$\mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Y_u] = \frac{1}{G_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[Y_u^b G_u] + \frac{1}{G_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \left[ \int_t^u Y_u^a(\theta) \gamma_u(\theta) d\theta \right],$$

où  $G$  est la surmartingale d'Azéma défini par  $G_t := \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(\mathbb{1}_{\tau > t})$ . Cela permet de réécrire l'EDSRA (1.6) sous la forme suivante

$$\begin{cases} -dY_t^b = g(t, Y_t^b, Y_{t+\delta}^b, (Y_{t+s}^b)_{0 \leq s \leq \delta}, Z_t^b, Z_{t+\delta}^b, (Z_{t+s}^b)_{0 \leq s \leq \delta}) dt - Z_t^b dW_t, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_{T+t}^b = \xi_{T+t}^b, & 0 \leq t \leq \delta, \\ Z_{T+t}^b = P_{T+t}^b, & 0 < t \leq \delta, \end{cases} \quad (1.7)$$

où les conditions terminales et le générateur  $g$  héritent des hypothèses faites sur les conditions terminales de l'EDSR (1.4) et sur  $f$  qui nous permettent d'utiliser des résultats d'existence sur les EDSRA browniennes.

On définit le triplet  $(Y, Z, U)$  par

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_t^b \mathbb{1}_{t < \tau} + Y_t^a(\tau) \mathbb{1}_{t \geq \tau}, \\ Z_t &= Z_t^b \mathbb{1}_{t \leq \tau} + Z_t^a(\tau) \mathbb{1}_{t > \tau}, \\ U_t &= (Y_t^a(t) - Y_t^b) \mathbb{1}_{t \leq \tau}. \end{aligned}$$

On peut montrer que le triplet  $(Y, Z, U)$  satisfait l'EDSRA (1.4) avec les conditions d'intégrabilité requises.

On obtient des résultats d'unicité pour l'EDSRA (1.4). La preuve est basée sur le fait que si  $(Y, Z, U)$  est solution de l'EDSRA, alors les processus  $(Y^b, Z^b)$  et  $(Y^a, Z^a)$  sont obligatoirement solution des EDSRA (1.5) et (1.7). Puisque les EDSRA (1.5) et (1.7) ont une unique solution on obtient une unique solution à l'EDSRA (1.4).

Nous avons traité en exemple le cas des EDSRA linéaire de la forme suivante

$$\begin{cases} -dY_t = [ \langle \vec{\mathbf{a}}_t, \vec{\mathbf{Y}}_t \rangle + l_t ] dt - Z_t dW_t - U_t dH_t, & 0 \leq t \leq T, \\ Y_{T+t} = \xi_{T+t}, & 0 \leq t \leq \delta, \\ Z_{T+t} = P_{T+t}, \quad U_{T+t} = Q_{T+t} \mathbb{1}_{\{T+t \leq \tau\}}, & 0 < t \leq \delta, \end{cases}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire. Le vecteur  $\vec{\mathbf{a}}$  est défini par

$$\vec{\mathbf{a}}_t := (\mu_t, \bar{\mu}_t, \underline{\mu}_t, \sigma_t, \bar{\sigma}_t, \underline{\sigma}_t, \rho_t, \bar{\rho}_t, \underline{\rho}_t),$$

où les coefficients sont uniformément bornés, et le vecteur  $\vec{Y}$  est défini par

$$\vec{Y}_t := \left( Y_t, \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Y_{t+\delta}], \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[\int_0^\delta Y_{t+u} du], Z_t, \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[Z_{t+\delta}], \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[\int_0^\delta Z_{t+u} du], \right. \\ \left. U_t, \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[U_{t+\delta}], \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}[\int_0^\delta U_{t+u} du] \right).$$

En appliquant les résultats obtenus, on montre que l'unique solution est donnée par  $Y_t = Y_t^b \mathbf{1}_{t < \tau} + Y_t^a(\tau) \mathbf{1}_{t \geq \tau}$ , où  $Y^a$  est défini par

$$Y_t^a(\theta) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \left[ X_T^{t,a}(\theta) \xi_T^a(\theta) + \int_t^T X_s^{t,a}(\theta) l_s^a(\theta) ds + \int_T^{T+\delta} (P_s^a(\theta) \bar{\sigma}_{s-\delta}^a(\theta) X_{s-\delta}^{t,a}(\theta) \right. \\ \left. + \xi_s^a(\theta) \bar{\mu}_{s-\delta}^a(\theta)) ds + \int_T^{T+\delta} \int_0^\delta (\xi_s^a(\theta) \underline{\mu}_{s-u}^a(\theta) + P_s^a(\theta) \underline{\sigma}_{s-u}^a(\theta)) X_{s-u}^{t,a}(\theta) dud s \right],$$

avec  $X^{t,a}$  défini pour tout  $s \in [t, T + \delta]$  par

$$\begin{cases} dX_s^{t,a}(\theta) = \left[ \mu_s^a X_s^{t,a}(\theta) + \bar{\mu}_{s-\delta}(\theta) X_{s-\delta}^{t,a}(\theta) + \int_0^\delta \underline{\mu}_{s-u}^a(\theta) X_{s-u}^{t,a}(\theta) du \right] ds \\ \quad + \left[ \sigma_{s-\delta}^a(\theta) X_s^{t,a}(\theta) + \bar{\sigma}_{s-\delta}^a(\theta) X_{s-\delta}^{t,a}(\theta) + \int_0^\delta \underline{\sigma}_{s-u}^a(\theta) X_{s-u}^{t,a}(\theta) du \right] dW_s, \\ X_t^{t,a}(\theta) = 1, \end{cases}$$

et  $X_s^{t,a}(\theta) = 0$  pour  $s \in [t - \delta, t)$ .  $Y^b$  est défini par

$$Y_t^b = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \left[ X_T^{t,b} \xi_T^b + \int_t^T X_s^{t,b} L_s ds + \int_T^{T+\delta} (G_s \xi_s^b \bar{\mu}_{s-\delta}^b + G_s P_s^b \bar{\sigma}_{s-\delta}^b) X_{s-\delta}^{t,b} ds \right. \\ \left. + \int_T^{T+\delta} \int_0^\delta (G_s \xi_s^b \underline{\mu}_{s-u}^b + G_s P_s^b \underline{\sigma}_{s-u}^b) X_{s-u}^{t,b} dud s \right],$$

avec  $X^{t,b}$  défini pour  $s \in [t, T + \delta]$  par

$$dX_s^{t,b} = \left[ (\mu_s^b - \rho_s^b) X_s^{t,b} + \left( \frac{\bar{\mu}_{s-\delta}^b}{G_{s-\delta}} - \frac{\bar{\rho}_{s-\delta}^b}{G_{s-\delta}} \mathbf{1}_{s \leq T} \right) X_{s-\delta}^{t,b} + \int_0^\delta \left( \frac{\mu_{s-u}^b}{G_{s-u}} - \frac{\rho_{s-u}^b}{G_{s-u}} \mathbf{1}_{s-u \leq T} \right) X_{s-u}^{t,b} du \right] ds \\ + \left[ \sigma_s^b X_s^{t,b} + \frac{\bar{\sigma}_{s-\delta}^b}{G_{s-\delta}} X_{s-\delta}^{t,b} + \int_0^\delta \frac{\underline{\sigma}_{s-u}^b}{G_{s-u}} X_{s-u}^{t,b} du \right] dW_s,$$

avec  $X_t^{t,b} = 1$  et  $X_s^{t,b} = 0$  pour  $t \in [t - \delta, t)$  et  $L$  défini par

$$L_t = l_t^b + \bar{\mu}_t^b J_t^{Y^a}(t + \delta) + \underline{\mu}_t^b \int_0^\delta J_t^{Y^a}(t + u) du + \bar{\sigma}_t^b J_t^{Z^a}(t + \delta) + \underline{\sigma}_t^b \int_0^\delta J_t^{Z^a}(t + u) du \\ + \rho_t^b Y_t^a(t) + \frac{\bar{\rho}_t^b}{G_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} [G_{t+\delta} Y_{t+\delta}^a \mathbf{1}_{t+\delta \leq T} + G_{t+\delta} Q_{t+\delta} \mathbf{1}_{t+\delta > T}] \\ + \frac{\rho_t^b}{G_t} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} \left[ \int_0^\delta (Y_{t+u}^a(t + u) \mathbf{1}_{t+u \leq T} + Q_{t+u} \mathbf{1}_{t+u > T}) G_{t+u} du \right],$$

où  $J_t^K(u) := \frac{1}{G_t} \mathbb{E}[\int_t^u K_u(\theta) \gamma_u(\theta) d\theta | \mathcal{F}_t]$  pour tout processus  $K$  satisfaisant des conditions d'intégrabilité.

### 1.3 Perspectives

Dans [L2], on propose un schéma de discrétisation pour les EDSR avec un saut. On peut généraliser la méthode proposée pour les EDSR avec un nombre fini de sauts. Par contre dans les deux cas le temps de calcul est important même si la vitesse de convergence est en  $1/n$  puisqu'il faut approcher  $n + 1$  EDSR browniennes dans le cas avec un seul saut. On souhaiterait étudier un autre schéma qui repose toujours sur la décomposition des EDSR à saut en un système d'EDSR browniennes, mais cette fois on aimerait étudier l'équation satisfaite par  $Y_s^1(s)$  puisque c'est le terme qui apparaît dans l'EDSR de  $Y^0$ . Cela permettrait alors d'approximer uniquement  $(Y_s^1(s))_{0 \leq s \leq T}$  au lieu de  $(Y_s^1(t))_{t \leq s \leq T}$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

On souhaite également utiliser l'approche développée dans [L1] et [L7] pour considérer le problème de principal-agent quand l'un des deux peut sortir du contrat à un temps aléatoire. Par exemple quand le principal fait faillite et n'honore pas le contrat, dans ce cas l'agent aura travaillé sans avoir de rémunération. De manière plus général, cela permettrait de considérer les *limited liability*. La littérature sur les problèmes de principal-agent montre que ce type de problème est fortement lié aux EDSR et EDP, puisqu'on résout généralement un premier problème de maximisation pour l'agent en utilisant les EDSR puis un deuxième problème pour le principal en utilisant les EDP.

Une autre perspective de recherche sur les EDSR concerne la représentation des solutions d'EDSR brownienne sous la forme analytique. Plus précisément, on aimerait prouver que la solution à une EDSR dont la condition terminale et le générateur sont analytiques par rapport à des paramètres est également analytique par rapport à ces paramètres. Ce résultat devrait nous permettre d'obtenir des résultats sur l'existence de densité pour les solutions d'EDSR. Cela permettrait aussi de trouver des approximations analytiques aux EDSR.

## Chapitre 2

# Contrôle stochastique appliqué à la finance et l'assurance

### 2.1 Problème d'optimisation dans un modèle avec saut

Dans cette section, nous nous intéressons aux problèmes classiques en mathématiques financières de maximisation de l'espérance de l'utilité de la richesse terminale et de couverture moyenne-variance. Cette section résume les résultats obtenus dans [L4], [L5], [L6] et [L7]. Dans [L4], nous avons considéré le cas de l'utilité exponentielle, alors que dans [L5] nous avons traité le cas de l'utilité logarithmique et puissance, et également le cas de l'information partielle lorsque l'agent n'observe pas toute l'information. Dans [L6], nous considérons le cas avec consommation lorsque l'agent a pour utilité la fonction puissance et il y a un changement de régime dans le taux d'intérêt à l'instant de saut. Enfin dans [L7], nous considérons le problème de couverture par moyenne-variance lorsqu'il y a un temps de défaut  $\tau$  dans le marché et le temps terminal du problème est le minimum entre  $T$  et  $\tau$ .

#### 2.1.1 Maximisation d'utilité avec information globale

Dans les sections 2.1.1 et 2.1.2, on considère un marché financier composé d'un actif sans risque dont le prix est égal à 1 et d'un actif risqué dont le prix  $S$  évolue suivant l'EDS

$$dS_t = S_{t-}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t + \beta_t dH_t)$$

où les coefficients satisfont des conditions d'intégrabilité et  $\beta_t > -1$  pour que le prix  $S$  reste positif.

A travers la suite de cette section, une stratégie d'investissement peut prendre deux formes différentes. On notera  $\pi$  lorsque la stratégie correspond à la somme investie dans l'actif risqué et on notera  $\varphi$  lorsque la stratégie correspond à la proportion de richesse investie dans l'actif risqué. Une stratégie quelque soit sa définition sera dite admissible si elle satisfait certaines conditions d'intégrabilité pour que les équations soient bien définies. On notera  $X^{x,\pi}$  (resp.  $X^{x,\varphi}$ ) la richesse associée à la stratégie  $\pi$  (resp.  $\varphi$ ) si la richesse initiale est  $x$ , on notera également  $X^{t,x,\pi}$  (resp.  $X^{t,x,\varphi}$ ) lorsque l'instant initial est  $t$ . On notera  $\mathbb{G}$  la filtration engendrée par  $W$  et  $H$ . On supposera que l'hypothèse (H) et que la propriété de représentation des martingales sont satisfaites, par rapport à  $W$  et  $M$ .

On suppose qu'il existe sur le marché un actif contingent  $\xi$  qui est  $\mathcal{G}_T$ -mesurable et positif. L'agent souhaite alors maximiser son portefeuille suivant un critère de risque lié à une fonction d'utilité

$$V(x, \xi) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T^{x,\pi} + \xi)], \quad (2.1)$$

si la fonction d'utilité  $U(x)$  est la fonction exponentielle  $-\exp(-\gamma x)$ , sinon il cherchera à maximiser

$$V(x) := \sup_{\varphi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U(X_T^{x,\varphi})], \quad (2.2)$$

si  $U(x) = \log(x)$  ou  $U(x) = x^p/p$  avec  $0 < p < 1$ .

Afin de résoudre ce problème dans le cas des fonctions puissance et exponentielle nous utilisons une approche dynamique avec un principe de vérification. Pour la fonction logarithme, nous utilisons une approche simple qui consiste à maximiser  $\omega$  par  $\omega$  la fonction qui se trouve à l'intérieur de l'espérance.

### Utilité logarithmique

Pour le cas de l'utilité logarithmique, nous pouvons résoudre le problème simplement  $\omega$  par  $\omega$  si on suppose que  $\beta^{-1}$  est uniformément bornée et que le processus  $\varphi^*$  défini par

$$\varphi_t^* := \begin{cases} \frac{\mu_t}{2\sigma_t^2} - \frac{1}{2\beta_t} + \frac{\sqrt{(\mu_t\beta_t + \sigma_t^2)^2 + 4\lambda_t\beta_t^2\sigma_t^2}}{2\beta_t\sigma_t^2} & \text{si } t \leq \tau \text{ et } \beta_t \neq 0, \\ \frac{\mu_t}{\sigma_t^2} & \text{si } t \leq \tau \text{ et } \beta_t = 0 \text{ ou } t > \tau, \end{cases} \quad (2.3)$$

est une stratégie admissible. Dans ce cas on obtient

**Théorème 2.1.4.** *La solution du problème d'optimisation (2.2) est donnée par*

$$V(x) = \log(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\varphi_t^* \mu_t - \frac{|\varphi_t^* \sigma_t|^2}{2} + \lambda_t \log(1 + \varphi_t^* \beta_t)\right) dt\right],$$

où  $\varphi^*$  est la stratégie optimale donnée par (2.3).

### Utilité exponentielle

Pour le cas de l'utilité exponentielle, nous introduisons la fonction valeur dynamique  $J(t, \xi)$  (également notée  $J(t)$ ) définie pour tout  $t \in [0, T]$  par la variable aléatoire

$$J(t, \xi) := \operatorname{ess\,inf}_{\pi \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}\left[\exp(-\gamma(X_T^{t,0,\pi} + \xi)) \mid \mathcal{G}_t\right],$$

où  $\mathcal{A}_t$  correspond à l'ensemble des stratégies d'investissement de  $\mathcal{A}$  restreintes à l'intervalle  $[t, T]$ .

Si les coefficients sont uniformément bornés et que les stratégies prennent des valeurs dans un ensemble compact nous montrons de manière très simple en utilisant les EDSR Lipschitz que  $J(t)$  est l'unique solution de l'EDSR Lipschitz

$$\begin{cases} -dY_t = \operatorname{ess\,inf}_{\pi \in \mathcal{A}_t} \left\{ \frac{\gamma^2}{2} |\pi_t \sigma_t|^2 Y_t - \gamma \pi_t (\mu_t Y_t + \sigma_t Z_t) - \lambda_t (1 - e^{-\gamma \pi_t \beta_t}) (Y_t + U_t) \right\} dt \\ \quad - Z_t dW_t - U_t dM_t, \\ Y_T = \exp(-\gamma \xi), \end{cases}$$

et la stratégie d'investissement optimale est donnée par l'argument minimum du générateur. La preuve repose sur le théorème de représentation des martingales et le théorème de comparaison des EDSR.

Dans le cas où les coefficients ne sont pas uniformément bornés et que les stratégies d'investissement ne prennent pas forcément des valeurs dans un ensemble compact, l'argument

que nous avons utilisé, à savoir, l'infimum de fonctions linéaires avec des coefficients uniformément bornés est Lipschitz, n'est plus satisfait. Dans ce cas nous utilisons une approche par programmation dynamique et pour cela nous devons considérer un ensemble admissible particulier afin que les stratégies définies par recollement restent admissibles. C'est à dire que si on se donne une stratégie admissible sur  $[t_1, T]$  et une stratégie admissible sur  $[t_2, T]$  alors la combinaison des deux stratégies est une stratégie admissible sur  $[t_1, T]$  avec  $t_1 < t_2$ .

On peut alors caractériser la fonction valeur  $J(\cdot)$  comme étant le plus grand processus  $\mathbb{G}$ -adapté tel que  $(\exp(-\gamma X_t^{0,\pi} J(t)))_{0 \leq t \leq T}$  est une sous-martingale pour n'importe quelle stratégie admissible. Ce résultat permet de caractériser la fonction valeur à l'aide d'une EDSR.

**Théorème 2.1.5.** *Il existe un processus croissant  $K$  tel que  $(J, Z, U, K)$  est la solution maximale de l'EDSR*

$$\begin{cases} -dJ_t = \operatorname{ess\,inf}_{\pi \in \mathcal{A}_t} \left\{ \frac{\gamma^2}{2} |\pi_t \sigma_t|^2 J_t - \gamma \pi_t (\mu_t J_t + \sigma_t Z_t) - \lambda_t (1 - e^{-\gamma \pi_t \beta_t}) (J_t + U_t) \right\} dt \\ \quad - dK_t - Z_t dW_t - U_t dM_t, \\ J_T = \exp(-\gamma \xi). \end{cases} \quad (2.4)$$

*Si il existe une stratégie optimale alors celle-ci est l'argument minimal du générateur et le processus  $K$  est nul.*

La preuve de ce théorème repose sur la décomposition de Doob-Meyer des sous-martingales et le théorème de représentation des martingales qui nous permettent d'écrire le processus  $J(\cdot)$  comme une somme d'une martingale et d'un processus à variation finie que l'on caractérise.

Dans le cas où la variable aléatoire  $\xi$  est bornée on montre que  $(J, Z, U)$  est une vraie solution et non plus une sous-solution de l'EDSR (2.4). La preuve de ce résultat est basée sur des théorèmes de convergence en introduisant la suite des processus  $(J^k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui correspond à la fonction valeur si on considère le sous-ensemble des stratégies de  $\mathcal{A}$  qui sont bornées par  $k$ . On montre que  $J^k$  converge vers  $J$  et que  $J^k$  est solution d'une EDSR quadratique. En utilisant des arguments similaires à [14] on montre un résultat de stabilité pour les EDSR quadratique.

## Utilité puissance

Pour résoudre ce cas, nous utilisons une approche semblable au cas de l'utilité exponentielle en introduisant la fonction valeur  $J(t)$  définie pour tout  $t \in [0, T]$  par la variable aléatoire

$$J(t) := \operatorname{ess\,sup}_{\varphi \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}[U(X_T^{t,1,\varphi}) | \mathcal{G}_t].$$

On suppose que les coefficients du modèle sont uniformément bornés. Dans ce cas, nous montrons que si les stratégies prennent leurs valeurs dans un ensemble compact alors nous avons la caractérisation suivante. Il existe  $(Z, U)$  tel que le triplet  $(J, Z, U)$  est l'unique solution de l'EDSR Lipschitz

$$\begin{cases} -dJ_t = \operatorname{ess\,sup}_{\varphi \in \mathcal{A}_t} \left\{ \gamma \varphi_t (\mu_t J_t + \sigma_t Z_t) + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} |\varphi_t \sigma_t|^2 J_t + \lambda_t ((1 + \varphi_t \beta_t)^\gamma - 1) (J_t + U_t) \right\} dt \\ \quad - Z_t dW_t - U_t dM_t, \\ J_T = \frac{1}{\gamma}. \end{cases} \quad (2.5)$$

La stratégie optimale est donnée par l'argument maximum du générateur. La preuve de ce résultat est semblable au cas de l'utilité exponentielle en utilisant le fait que le supremum

de fonctions linéaires avec des coefficients uniformément bornés est Lipschitz, et basée sur le théorème de comparaison des EDSR et le théorème de représentation des martingales.

Pour le cas où les stratégies ne prennent pas forcément valeur dans un compact nous pouvons caractériser la fonction valeur comme le plus petit processus  $\mathbb{F}$ -adapté  $J$  tel que  $((X_t^{1,\varphi})^\gamma J(t))_{0 \leq t \leq T}$  est une surmartingale pour toute stratégie  $\varphi$ . Cela nous permet alors de caractériser la fonction valeur en terme d'EDSR.

**Théorème 2.1.6.** *Il existe  $(Z, U)$  tel que  $(J, Z, U)$  est la solution minimale de l'EDSR (2.5) et la stratégie optimale est donnée par l'argument maximum du générateur.*

La preuve de ce théorème repose sur la décomposition de Doob-Meyer et le théorème de représentation des martingales qui nous permettent d'écrire la fonction valeur comme la somme d'une martingale et d'un processus à variation fini que l'on caractérise.

### 2.1.2 Maximisation d'utilité avec information partielle

Nous reprenons ici le modèle de la section précédente en ajoutant l'hypothèse que les paramètres  $\sigma$  et  $\beta$  associés à l'actif risqué sont de la forme suivante

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_1(t, S_t) & \text{si } t \leq \tau, \\ \sigma_2(t, S_t, \tau, \beta_\tau) & \text{si } t > \tau, \end{cases}$$

et

$$\beta_t = \beta(t, S_{t-}) \quad \text{si } t \leq \tau.$$

De plus on suppose que les fonctions  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\beta$  satisfont certaines conditions.

On suppose que l'agent n'observe pas la totalité de l'information  $\mathbb{G}$  mais uniquement la valeur  $S$  de l'actif risqué et le temps de défaut  $\tau$ . On notera  $\mathbb{H}$  la filtration engendrée par  $S$  et  $H$ . Les problèmes d'optimisation sont les mêmes que (2.1) et (2.2), mais les stratégies ne sont plus  $\mathbb{G}$ -prévisibles mais  $\mathbb{H}$ -prévisibles. Afin de résoudre ces nouveaux problèmes d'optimisation, nous utilisons une approche semblable à celle utilisée dans [17] qui consiste à faire dans un premier temps une opération de filtrage pour réécrire les diffusions avec des coefficients observés

$$\begin{cases} dS_t = S_{t-}(\tilde{\mu}_t dt + \sigma_t d\bar{W}_t + \beta_t dH_t), \\ d\bar{W}_t = dW_t + (\mu_t - \tilde{\mu}_t)/\sigma_t dt, \\ d\bar{M}_t = dH_t - \tilde{\lambda}_t dt, \end{cases}$$

où  $\tilde{\mu}_t := \mathbb{E}[\mu_t | \mathcal{H}_t]$  et  $\tilde{\lambda}_t := \mathbb{E}[\lambda_t | \mathcal{H}_t]$ .

Dans un deuxième temps nous montrons que  $\bar{W}$  est un  $(\mathbb{P}, \mathbb{H})$ -mouvement brownien et  $\bar{M}$  est une  $(\mathbb{P}, \mathbb{H})$ -martingale, ce qui permet alors de montrer que la propriété de représentation des  $\mathbb{H}$ -martingales est satisfaite avec  $(\bar{W}, \bar{M})$ . Nous pouvons alors généraliser les résultats obtenus dans le cas de l'information globale au cas de l'information partielle en remplaçant les coefficients non observés par leur projection, et les processus  $(W, M)$  par  $(\bar{W}, \bar{M})$ .

Pour le cas de l'utilité logarithme, on a

**Théorème 2.1.7.** *La solution du problème d'optimisation (2.2) est donnée par*

$$V(x) = \log(x) + \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( \tilde{\varphi}_t \tilde{\mu}_t - \frac{|\tilde{\varphi}_t \sigma_t|^2}{2} + \tilde{\lambda}_t \log(1 + \tilde{\varphi}_t \beta_t) \right) dt \right],$$

où  $\tilde{\varphi}$  est la stratégie optimale donnée par

$$\tilde{\varphi}_t := \begin{cases} \frac{\tilde{\mu}_t}{2\sigma_t^2} - \frac{1}{2\beta_t} + \frac{\sqrt{(\tilde{\mu}_t\beta_t + \sigma_t^2)^2 + 4\tilde{\lambda}_t\beta_t^2\sigma_t^2}}{2\beta_t\sigma_t^2} & \text{si } t \leq \tau \text{ et } \beta_t \neq 0, \\ \frac{\tilde{\mu}_t}{\sigma_t^2} & \text{si } t \leq \tau \text{ et } \beta_t = 0 \text{ ou } t > \tau. \end{cases}$$

Pour le cas de l'utilité puissance, on a

**Théorème 2.1.8.** *Il existe  $(Z, U)$  tel que  $(J, Z, U)$  est la solution minimale de l'EDSR*

$$\begin{cases} -dJ_t = \operatorname{ess\,sup}_{\varphi \in \mathcal{A}_t} \left\{ \gamma \varphi_t (\tilde{\mu}_t J_t + \sigma_t Z_t) + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} |\varphi_t \sigma_t|^2 J_t + \tilde{\lambda}_t ((1 + \varphi_t \beta_t)^\gamma - 1) (J_t + U_t) \right\} dt \\ \quad - Z_t d\bar{W}_t - U_t d\bar{M}_t, \\ J_T = \frac{1}{\gamma}. \end{cases}$$

La stratégie optimale est donnée par l'argument maximum du générateur.

Pour le cas de l'utilité exponentielle, on a

**Théorème 2.1.9.** *Il existe un processus croissant  $K$  tel que  $(J, Z, U, K)$  est la solution maximale de l'EDSR*

$$\begin{cases} -dJ_t = \operatorname{ess\,inf}_{\pi \in \mathcal{A}_t} \left\{ \frac{\gamma^2}{2} |\pi_t \sigma_t|^2 J_t - \gamma \pi_t (\tilde{\mu}_t J_t + \sigma_t Z_t) - \tilde{\lambda}_t (1 - e^{-\gamma \pi_t \beta_t}) (J_t + U_t) \right\} dt \\ \quad - dK_t - Z_t d\bar{W}_t - U_t d\bar{M}_t, \\ J_T = \exp(-\gamma \xi). \end{cases}$$

Si il existe une stratégie optimale alors celle-ci est l'argument minimal du générateur et le processus  $K$  est nul.

La plupart des résultats obtenus dans ces deux sections sont généralisables au cas avec plusieurs sauts ou avec une infinité de sauts poissonien, et également avec un mouvement brownien multidimensionnel. Il suffit que le théorème de représentation pour la filtration considérée soit satisfait pour obtenir les caractérisations des fonctions valeurs puisque les preuves sont basées sur celui-ci.

### 2.1.3 Optimisation avec consommation et changement de régime du taux d'intérêt

On suppose que le marché financier est composé d'un actif risqué dont le prix  $S$  suit l'EDS

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t),$$

où les coefficients  $\mu$  et  $\sigma$  sont  $\mathbb{F}$ -adaptés et bornés, et d'un actif sans risque dont le prix  $S^0$  suit la dynamique

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt,$$

où  $r_t = r_t^0 \mathbf{1}_{t < \tau} + r_t^1(\tau) \mathbf{1}_{t \geq \tau}$  avec  $r^0$  et  $r^1(\cdot)$  bornés. On note  $R_t := e^{-\int_0^t r_s ds}$ .

Ce marché est incomplet, car on ne suppose pas l'existence d'obligation zéro-coupon ou de Credit Default Swaps qui permettraient de couvrir le changement de régime dans le taux d'intérêt.

Dans cette partie, l'agent peut investir dans les deux actifs et il peut également consommer de la richesse. Dans ce cas, la richesse  $X^{x,\pi,c}$  de l'agent qui commence avec la richesse initiale  $x$  en investissant la proportion  $\pi$  de sa richesse dans l'actif risqué et consomme  $c$  suit la dynamique

$$dX_t^{x,\pi,c} = X_t^{x,\pi,c} [(r_t + \pi_t(\mu_t - r_t))dt + \pi_t\sigma_t dW_t] - c_t dt .$$

On considère le problème d'optimisation suivant

$$V(x) := \sup_{(\pi,c) \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} \left[ \int_0^T U(c_s) ds + U(X_T^{x,\pi,c}) \right] ,$$

où la fonction d'utilité  $U(y)$  est égale à  $y^p/p$  avec  $p \in (0, 1)$ .

Dans la suite, on suppose que les hypothèses (H), (HD) et (HBI) sont satisfaites. Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé une approche duale qui consiste à résoudre le problème associé suivant pour tout paramètre  $\eta > 0$

$$\tilde{V}(\eta) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E} \left[ \int_0^T \tilde{U}(\eta R_s L_s^\gamma) ds + \tilde{U}(\eta R_T L_T^\gamma) \right] = -\frac{\eta^q}{q} \inf_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E} \left[ \int_0^T (R_s L_s^\gamma)^q ds + (R_T L_T^\gamma)^q \right]$$

où  $q = p/(p-1)$ ,  $\tilde{U}(y) := \sup_{x>0} (U(x) - xy)$  pour tout  $y > 0$  et  $L^\gamma$  est la densité de Radon-Nikodym d'une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}^\gamma$  par rapport à la probabilité historique  $\mathbb{P}$  définie par

$$dL_t^\gamma = L_{t-}^\gamma (-\theta_t dW_t + \gamma_t dM_t) ,$$

avec  $\theta_t := (\mu_t - r_t)/\sigma_t$  et  $\gamma$  un processus  $\mathbb{G}$ -prévisible tel qu'il existe deux constantes  $A$  et  $C$  telles que  $-1 < A \leq \gamma_t \leq C$  pour  $t \in [0, T]$  et  $\gamma_t = 0$  pour  $t \in (T \wedge \tau, T]$ .

En utilisant l'approche de [8], on montre que ce problème d'optimisation est lié à la famille de processus  $(J^\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  définis par

$$J_t^\gamma := \int_0^t (R_s L_s^\gamma)^q ds + (R_t L_t^\gamma)^q \varphi_t , \quad 0 \leq t \leq T ,$$

où  $\varphi$  est solution de l'EDSR

$$\begin{cases} d\varphi_t = \left[ (qr_t - \frac{1}{2}q(q-1)|\theta_t|^2 + (1-q)\lambda_t)\varphi_t - (1-q)\lambda_t(\varphi_t + \tilde{\varphi}_t)^{1-p} \varphi_t^p \right. \\ \quad \left. + q\theta_t \tilde{\varphi}_t - 1 \right] dt + \tilde{\varphi}_t dW_t + \tilde{\varphi}_t dH_t , \\ \varphi_T = 1 , \end{cases}$$

satisfaisant  $\varphi_{t-} + \tilde{\varphi}_t \geq 1$ . Pour montrer l'existence d'une solution à cette EDSR on utilise les résultats obtenus dans [L1] et on obtient l'unicité de celle-ci par des arguments d'unicité de la fonction valeur.

Par un théorème de vérification on montre que le processus défini par

$$\gamma_t^* := \left( \frac{\varphi_{t-}}{\varphi_{t-} + \tilde{\varphi}_t} \right)^{\frac{1}{q-1}} - 1 ,$$

est admissible et optimal, et la fonction valeur  $\tilde{V}(\eta)$  est égale à  $\varphi_0$ .

En revenant au problème primal, on obtient

**Théorème 2.1.10.** *La stratégie de consommation et d'investissement optimales sont données par*

$$c_t^* = (\eta^* R_t L_t^{\gamma^*})^{\frac{1}{p-1}}, \quad \pi_t^* = \frac{1}{\sigma_t} \left( \frac{\hat{\varphi}_t}{\varphi_{t-}} + \frac{\theta_t}{1-p} \right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

où  $\eta^*$  est défini par

$$\eta^* := \left( \frac{x}{\mathbb{E} \left[ \int_0^T (R_t L_t^{\gamma^*})^q dt + (R_T L_T^{\gamma^*})^q \right]} \right)^{p-1}.$$

La richesse associée est donnée par

$$X_t^{x, \pi^*, c^*} = (\eta^* R_t L_t^{\gamma^*})^{\frac{1}{p-1}} \varphi_t.$$

La fonction valeur du problème primal est donnée par  $x^p \Psi_0 / p$  où  $\Psi_t = \varphi_t^{1-p}$  est l'unique solution de l'EDSR

$$\begin{cases} d\Psi_t = \left( \frac{1}{2} \frac{p}{p-1} (|\theta_t|^2 \Psi_t + \frac{\hat{\psi}_t^2}{\Psi_t}) + \frac{p}{p-1} \theta_t \hat{\psi}_t - (1-p) \Psi_t^q - pr_t \Psi_t \right) dt \\ \quad + \hat{\psi}_t dW_t + \tilde{\psi}_t dH_t, \\ \Psi_T = 1. \end{cases}$$

On peut remarquer dans la figure 2.1 que la fonction valeur est croissante (resp. décroissante) par rapport au paramètre  $\lambda$  lorsque  $r^1 > r^0$  (resp.  $r^1 < r^0$ ). Cela s'explique par le fait que le taux d'intérêt va augmenter (resp. diminuer) si le défaut apparaît. Si  $\lambda$  est grand alors la probabilité pour que  $r$  devienne plus grand (resp. plus petit) est plus importante, le marché est donc avantageux (resp. désavantageux) et la fonction valeur est plus grande (resp. plus petite).

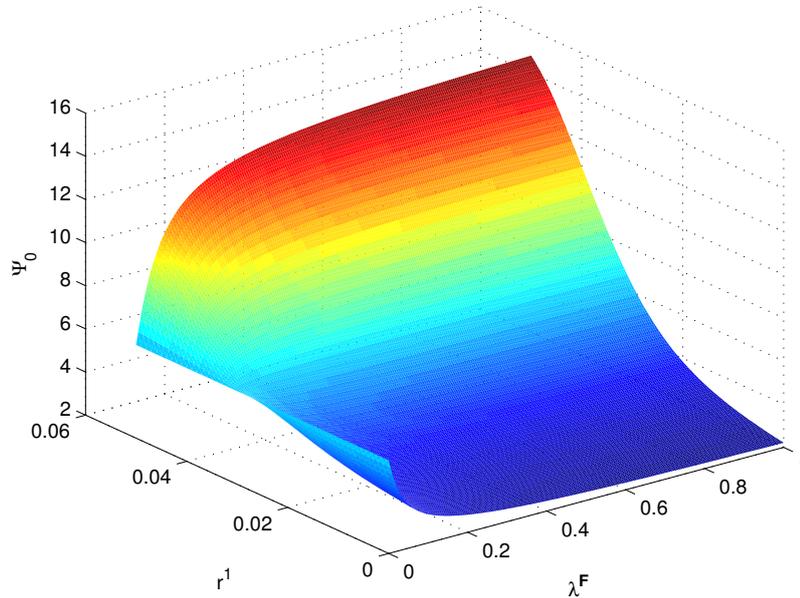


FIGURE 2.1 – Sensibilité de la fonction valeur par rapport aux coefficients  $\lambda$  et  $r^1$  quand  $r^0 = 3\%$ ,  $\mu = 5\%$  et  $\sigma = 10\%$ .

Nous avons également considéré, dans [L6], le cas avec plusieurs temps de changement de régimes et le cas où  $p < 0$ .

### 2.1.4 Couverture moyenne-variance

On considère que le marché est constitué d'un actif sans risque constant égal à 1 et un actif risqué soumis au défaut dont le prix  $S$  suit la dynamique

$$dS_t = S_{t-}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t + \beta_t dM_t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

On suppose que les hypothèses (H), (HD) et (HBI) sont satisfaites et que les coefficients du modèle sont bornés.

Il y a un actif contingent  $\xi$  sur le marché qui est  $\mathcal{G}_{T \wedge \tau}$ -mesurable et s'écrit sous la forme suivante

$$\xi = \xi^b \mathbf{1}_{T < \tau} + \xi^a \mathbf{1}_{T \geq \tau},$$

où  $\xi^b$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et  $\xi^a$  est un processus càd-làg  $\mathbb{F}$ -prévisible tous les deux bornés. On souhaite résoudre le problème d'optimisation

$$\inf_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[ |X_{T \wedge \tau}^{x, \pi} - \xi|^2 \right]. \quad (2.6)$$

Pour résoudre ce problème, nous utilisons une approche par principe d'optimalité martingale comme dans [9]. Pour cela nous introduisons une famille de processus  $(J^\pi)_{\pi \in \mathcal{A}}$  définis par  $Y_t |X_t^{x, \pi} - \mathcal{Y}_t|^2 + \Upsilon_t$  où  $(Y, \mathcal{Y}, \Upsilon)$  est solution d'un système d'EDSR

$$Y_t = 1 + \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} \mathbf{f}(s, Y_s, Z_s, U_s) ds - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} Z_s dW_s - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} U_s dM_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{Y}_t = \xi + \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} \mathbf{g}(s, \mathcal{Y}_s, Z_s, U_s) ds - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} Z_s dW_s - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} U_s dM_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.8)$$

$$\Upsilon_t = \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} \mathbf{h}(s, \Upsilon_s, Z_s, U_s) ds - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} Z_s dW_s - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} U_s dM_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$  sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}(t, y, z, u) := -\frac{|\mu_t y + \sigma_t z + \lambda_t^{\mathbb{G}} \beta_t u|^2}{|\sigma_t|^2 y + \lambda_t^{\mathbb{G}} |\beta_t|^2 (u + y)}, \\ \mathbf{g}(t, y, z, u) := \frac{1}{Y_t} \left[ Z_t z + \lambda_t^{\mathbb{G}} U_t u - \frac{(\mu_t Y_t + \sigma_t Z_t + \lambda_t^{\mathbb{G}} \beta_t U_t)(\sigma_t Y_t z + \lambda_t^{\mathbb{G}} \beta_t (U_t + Y_t) u)}{|\sigma_t|^2 Y_t + \lambda_t^{\mathbb{G}} |\beta_t|^2 (U_t + Y_t)} \right], \\ \mathbf{h}(t, y, z, u) := |Z_t|^2 Y_t + \lambda_t^{\mathbb{G}} (U_t + Y_t) |U_t|^2 - \frac{|\sigma_t Y_t Z_t + \lambda_t^{\mathbb{G}} \beta_t U_t (U_t + Y_t)|^2}{|\sigma_t|^2 Y_t + \lambda_t^{\mathbb{G}} |\beta_t|^2 (U_t + Y_t)}. \end{array} \right.$$

On remarque que le système n'est pas complètement couplé, puisqu'il suffit de résoudre d'abord l'EDSR (2.7), puis (2.8) et enfin (2.9). Pour résoudre ce type d'EDSR nous utilisons une approche semblable à celle présentée dans [L1].

**Théorème 2.1.11.** *Soit l'EDSR suivante dans la filtration  $\mathbb{G}$*

$$Y_t = \xi + \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} F(s, Y_s, Z_s, U_s) ds - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} Z_s dW_s - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} U_s dH_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.10)$$

où  $\xi = \xi^b \mathbf{1}_{T < \tau} + \xi_\tau^a \mathbf{1}_{T \geq \tau}$  et  $F(t, \cdot) \mathbf{1}_{t \leq \tau} = F^b(t, \cdot) \mathbf{1}_{t \leq \tau}$  avec  $F^b$  est  $\mathbb{F}$ -adaptée. Si l'EDSR brownienne

$$Y_t^b = \xi^b + \int_t^T F^b(s, Y_s^b, Z_s^b, \xi_s^a - Y_s^b) ds - \int_t^T Z_s^b dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

admet une solution  $(Y^b, Z^b)$  dans les bons espaces, alors  $(Y, Z, U)$  défini par

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_t^b \mathbf{1}_{t < \tau} + \xi_\tau^a \mathbf{1}_{t \geq \tau}, \\ Z_t &= Z_t^b \mathbf{1}_{t \leq \tau}, \\ U_t &= (\xi_t^a - Y_t^b) \mathbf{1}_{t \leq \tau}, \end{aligned}$$

est solution de l'EDSR (2.10).

La preuve de ce théorème est semblable à celle du Théorème 1.1.1, elle se fait en montrant d'abord que les processus définis sont dans les bons espaces, puis que ces processus satisfont bien les égalités  $\omega$  par  $\omega$ .

On applique ce théorème pour montrer que le système d'EDSR (2.7,2.8,2.9) admet une solution, l'unicité n'est pas considérée puisqu'on utilise un théorème de vérification pour montrer que la famille de processus  $(J^\pi)_{\pi \in \mathcal{A}}$  satisfait les conditions nécessaires. Pour l'EDSR (2.7), nous introduisons une EDSR modifiée puisque le dénominateur du générateur  $\mathfrak{J}^b$  peut s'annuler. Pour cela, nous remplaçons le terme  $y$  par  $y \vee \varepsilon$  dans le dénominateur avec  $\varepsilon > 0$  bien choisi de telle sorte que la solution de l'EDSR modifiée est aussi solution de l'EDSR initiale, c'est à dire que  $y \geq \varepsilon$ . Pour l'EDSR (2.8), nous montrons que la composante  $z$  de la solution de l'EDSR (2.7) satisfait des propriétés de type martingale BMO et la composante  $y$  est bornée ce qui permet alors de faire des changements de probabilité pour simplifier l'EDSR. Enfin pour l'EDSR (2.9), nous montrons que la solution de l'EDSR (2.8) satisfait également des propriétés de type martingale BMO et bornitude pour montrer que la solution intuitée de cette EDSR linéaire est bien intégrable en faisant des changements de probabilité judicieux.

Une fois que l'on a montré l'existence d'une solution au système d'EDSR (2.7-2.8-2.9), nous utilisons un théorème de vérification pour montrer que la stratégie d'investissement définie par

$$\pi_t^* := \frac{(\mathcal{Y}_{t^-} - V_{t^-}^*)(\mu_t Y_{t^-} + \sigma_t Z_t + \lambda_t^G \beta_t U_t) + \sigma_t Y_{t^-} Z_t + \lambda_t^G \beta_t \mathcal{U}_t (Y_{t^-} + U_t)}{|\sigma_t|^2 Y_{t^-} + \lambda_t^G |\beta_t|^2 (U_t + Y_{t^-})},$$

est admissible et optimale pour le problème (2.6). On montre finalement que la fonction valeur vaut

$$\mathbb{E} \left[ |X_{T \wedge \tau}^{x, \pi^*} - \xi|^2 \right] = \min_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[ |X_{T \wedge \tau}^{x, \pi} - \xi|^2 \right] = Y_0 |x - \mathcal{Y}_0|^2 + \Upsilon_0.$$

## 2.2 Pricing des variable annuities

Dans ce chapitre nous nous intéressons au pricing de produits d'assurance que l'on appelle *variable annuities*. Ce sont des produits mixant les risques actuariels et les risques financiers. Dans [L8] et [L9], nous proposons une nouvelle approche par prix d'indifférence pour déterminer le prix de ces produits.

La notion de prix d'indifférence a été introduite en économie et mathématiques financières pour traiter le cas des produits dans les marchés incomplets. C'est le prix  $p$  que le vendeur fait

payer pour que sa fonction valeur soit la même lorsqu'il vend un produit financier de pay-off  $\xi$  payé en  $T$  ou ne le vend pas quand il a une fonction d'utilité  $U$

$$\sup_{\pi} \mathbb{E}[U(X_T^{x+p,\pi} - \xi)] = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(X_T^{x,\pi})] .$$

Dans ces deux travaux nous appliquons cette théorie à un produit d'assurance sachant que la prime d'assurance n'est pas payée à l'instant initial mais de manière continue. Cela rajoute quelques complexités pour le calcul de la prime.

On considère une compagnie d'assurance qui vend une *variable annuities* d'une valeur  $A_0$  à un client représentatif dont le temps de mortalité est modélisé par la variable aléatoire  $\tau$ . L'assureur investit cette somme sur un marché composé d'un actif sans risque dont le taux d'intérêt est supposé nul pour simplifier les notations, sauf dans les applications numériques, et d'un actif risqué correspondant à un indice financier dont le prix  $S$  évolue avec la dynamique suivante

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) ,$$

avec des coefficients  $\mu$  et  $\sigma$  bornés et  $\mathbb{F}$ -adaptés. La valeur du compte de l'assuré suit cette dynamique mais l'assureur lui prélève en plus des frais de gestion en continu qui sont proportionnels à la valeur du compte et l'assuré a le droit de faire des retraits aux dates anniversaires  $(t_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ . On modélise la valeur du compte par la dynamique suivante

$$\begin{cases} dA_t^p = A_t^p [(\mu_t - p)dt + \sigma_t dW_t] , \\ A_{t_i}^p = (A_{t_i^-}^p - f_i) \vee 0 , \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 , \end{cases}$$

où  $p$  correspond à la prime prélevée,  $f_i$  correspond à la somme que l'assureur retire du compte de l'assuré suite à un retrait à la date  $t_i$  d'un montant  $\xi_i$ . La valeur  $f_i$  est une fonction de  $\xi_i$  qui est définie de manière plus ou moins complexe. L'assureur peut retirer du compte plus que la valeur réellement retirée par l'assuré, par exemple il peut mettre des pénalités pour un retrait trop important. On modélisera la valeur retirée  $\xi_i$  par  $\alpha_i G_i$ , où  $\alpha_i$  prend des valeurs dans un ensemble fini de  $[0, K]$  et  $G_i$  correspond à la valeur maximale que l'assuré peut retirer à la date  $t_i$  sans payer de pénalité, cette valeur dépend de l'évolution du compte et également des retraits précédents. Nous noterons par la suite  $F(p, \xi^{(n-1)})$  la valeur payée à la fin du contrat par l'assureur à l'assuré qui dépend de la prime, des retraits et de l'évolution du marché

$$F(p, \xi^{(n-1)}) = F^L(p, T, (A_{t_i}^p)_{i \geq 0}, \xi^{(n-1)}) \mathbf{1}_{T < \tau} + F^D(p, \tau, (A_{t_i}^p)_{i \geq 0}, \xi^{(n-1)}) \mathbf{1}_{\tau \leq T} ,$$

où  $F^L$  correspond à la valeur si l'assuré est en vie en  $T$  et  $F^D$  correspond à la valeur si l'assuré est mort avant  $T$ .

Les valeurs de  $F^L$  et  $F^D$  sont souvent garanties par des clauses dans le contrat et prennent la forme suivante

$$F^Q(p, t, x, e) = x_n \vee G(t, x, e)$$

où  $G$  est une valeur minimale définie dans le contrat que l'on appelle la garantie et  $x_n$  est la valeur du compte à la fin du contrat. Les trois cas classiques pour la valeur minimale sont

— garantie constante : soit  $t_i \leq t < t_{i+1}$

$$G(t, x, e) = x_0 - \sum_{k=1}^i f(t_k, (x_j)_{0 \leq j \leq k}, (e_j)_{0 \leq j \leq k}) ,$$

— garantie *roll-up* : soit  $t_i \leq t < t_{i+1}$

$$G(t, x, e) = x_0(1 + \eta)^i - \sum_{k=1}^i f(t_k, (x_j)_{0 \leq j \leq k}, (e_j)_{0 \leq j \leq k})(1 + \eta)^{i-k},$$

— garantie *ratchet*

$$G(t, x, e) = \sum_{i=0}^n \max \left( x_0 - \sum_{k=1}^i f(t_k, x, e), \dots, x_i - f(t_i, x, e), x_{i+1} \right) \mathbb{1}_{\{t_i \leq T \wedge \tau < t_{i+1}\}},$$

où  $f(t_k, x, e)$  correspond à la somme retirée en  $t_k$  du compte.

Afin de déterminer la prime  $p$  correspondante aux garanties fixées dans le contrat, nous utilisons une approche par prix d'indifférence. Pour cela, on introduit la valeur du portefeuille de l'assureur. On note  $\pi_t$  la somme d'argent investie en  $t$  par l'assureur dans l'actif risqué, la dynamique de sa richesse est donnée par

$$dX_t^\pi = \pi_t \mu_t dt + \pi_t \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0.$$

On définit la prime optimale  $p^*$  comme le plus petit réel  $p$  tel que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}[0, T]} \mathbb{E}[-u(X_T^\pi)] \leq \sup_{\pi \in \mathcal{A}[0, T]} \inf_{\xi^{(n-1)} \in \mathcal{E}} \mathbb{E} \left[ -u \left( A_0 + X_T^\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \mathbb{1}_{t_i \leq \tau} - F(p, \xi) \right) \right],$$

avec  $u(y) := \exp(-\gamma y)$ . Nous considérons donc le pire des cas pour l'assureur.

Dans la suite on suppose que les hypothèses (H), (HD) et (HBI) sont satisfaites. Afin de résoudre ce problème, on calcule les deux termes de l'inégalité

$$V^0 := \sup_{\pi \in \mathcal{A}[0, T]} \mathbb{E}[-u(X_T^\pi)],$$

et  $V(p) = -\exp(-\gamma A_0)w(p)$  avec  $w$  définie par

$$w(p) := \inf_{\pi \in \mathcal{A}[0, T]} \sup_{\xi^{(n-1)} \in \mathcal{E}} \mathbb{E} \left[ u \left( X_T^\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \mathbb{1}_{t_i \leq \tau} - F(p, \xi) \right) \right].$$

La fonction valeur  $V^0$  est caractérisée classiquement à l'aide d'une EDSR :  $V_0 = -\exp(\gamma y_0)$  où  $y$  est la solution de l'EDSR

$$\begin{cases} dy_t = \left( \frac{|\theta_t|^2}{2\gamma} + \theta_t z_t \right) dt + z_t dW_t, \\ y_T = 0, \end{cases}$$

avec  $\theta := \mu/\sigma$ . La caractérisation de la fonction valeur  $V$  est plus compliquée, mais on peut montrer qu'elle est croissante par rapport à la prime  $p$ , ce qui permet dans un premier temps de dire si la prime optimale existe :

- si  $V(-\infty) < V^0 < V(+\infty)$  alors il existe  $p^*$  tel que si  $p < p^*$  alors l'assureur n'a aucun intérêt à vendre le produit et si  $p \geq p^*$  alors l'assureur a tout intérêt à le vendre,
- si  $V(-\infty) > V^0$  alors l'assureur a intérêt à vendre le produit quelque soit la prime  $p$ ,
- si  $V(+\infty) < V^0$  alors l'assureur n'a aucun intérêt à vendre le produit quelque soit la prime  $p$ .

Concernant les garanties classiques, nous avons montré qu'il existait toujours une prime optimale dans le cas d'une garantie *ratchet*, par contre pour une garantie *roll-up* l'existence d'une prime optimale dépend du taux de *roll-up*, si celui-ci est trop important l'assureur n'a pas intérêt à vendre le produit.

Afin de calculer la fonction valeur  $w$ , nous utilisons une approche séquentielle qui consiste à travailler sur les intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$ , ce qui permet d'obtenir la caractérisation suivante :

$$w(p) = \inf_{\pi \in \mathcal{A}[0, t_1 \wedge \tau]} \mathbb{E} [u(X_{t_1 \wedge \tau}^\pi) v(1, \xi^{(0)})] ,$$

où la famille  $(v(i, \xi^{(i-1)}))_{i \in \{1, \dots, n\}}$  est définie récursivement par

$$\begin{cases} v(n, \xi^{(n-1)}) := e^{\gamma H(p, \xi^{(n-1)})} , \\ v(i, \xi^{(i-1)}) := \operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \mathcal{E}_{i-1}^1} \operatorname{ess\,inf}_{\pi \in \mathcal{A}[t_i \wedge \tau, t_{i+1} \wedge \tau]} \mathbb{E} \left[ u \left( X_{t_{i+1} \wedge \tau}^{t_i \wedge \tau, \pi} - \zeta \mathbf{1}_{t_i < \tau} \right) v(i+1, (\xi^{(i-1)}, \zeta)) \middle| \mathcal{G}_{t_i \wedge \tau} \right] , \end{cases}$$

avec  $H(p, \xi) := F(p, \xi) + \frac{1}{\gamma} \log \left[ \operatorname{ess\,inf}_{\pi \in \mathcal{A}[T \wedge \tau, T]} \mathbb{E} [u(X_T^{T \wedge \tau, \pi}) | \mathcal{G}_{T \wedge \tau}] \right]$ .

Cette réécriture de la fonction valeur  $w$  permet d'obtenir la stratégie optimale d'investissement de la part de l'assureur et le pire des retraits de la part de l'assuré sur chacun des intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$ . Pour cela nous traitons d'abord le problème de l'essinf avec une approche semblable à [9] pour le caractériser à l'aide d'une EDSR

$$v(i, \xi^{(i-1)}) = \operatorname{ess\,sup}_{\zeta} \exp(\gamma y^{(i)}(\xi^{(i-1)}, \zeta)) ,$$

où  $y^{(i)}(\xi^{(i-1)}, \zeta) = \zeta \mathbf{1}_{t_i < \tau} + Y_{t_i}^{(i)}(\xi^{(i-1)}, \zeta)$ , et  $Y^{(i)}(\xi^{(i-1)}, \zeta)$  est la solution de l'EDSR

$$\begin{cases} -dY_t = \left[ \lambda_t \left( \frac{e^{\gamma U_t} - 1}{\gamma} \right) - \theta_t Z_t - \frac{|\theta_t|^2}{2\gamma} \right] dt - Z_t dW_t - U_t dH_t , \\ Y_{t_{i+1} \wedge \tau} = y^{(i+1)}(\xi^{(i-1)}, \zeta, \zeta_{i+1}^*) , \end{cases}$$

et la stratégie optimale est donnée par  $\pi_t^{*,i}(\xi^{(i-1)}, \zeta) = \frac{Z_t}{\sigma_t} + \frac{\theta_t}{\gamma \sigma_t}$ . Pour résoudre cette EDSR nous utilisons les résultats développés dans [L1]. On s'intéresse ensuite au problème de l'essup d'une fonction continue. La fonction valeur initiale est alors donnée par  $V(p) = -\exp(\gamma(y^{(0)} - A_0))$ .

Une fois la fonction valeur caractérisée par une suite d'EDSR, il est possible d'approcher celle-ci en approchant les différentes EDSR et en obtenant étape par étape le retrait optimal.

Il reste alors à déterminer la prime d'indifférence  $p^*$  en utilisant une méthode de dichotomie pour l'approcher

$$p^* = \inf \{ p \in \mathbb{R} , y^{(0)}(p) \leq y_0 + A_0 \} .$$

Je conclus ce chapitre avec quelques illustrations numériques de la sensibilité de la prime par rapport aux différents paramètres lorsque l'assuré ne fait pas de retrait (cas traité dans [L7]). Les paramètres du modèle sont  $\gamma = 1.3$ ,  $T = 20$ ,  $A_0 = 1$ ,  $\mu_0 = 0.15$ , avec  $\mu$  évoluant suivant une chaîne de Markov, et  $\sigma = 0.3$ . Dans les figures 2.2, 2.3 et 2.4, une garantie *ratchet* est considérée, tandis que dans la figure 2.5, une garantie *roll-up* est considérée.

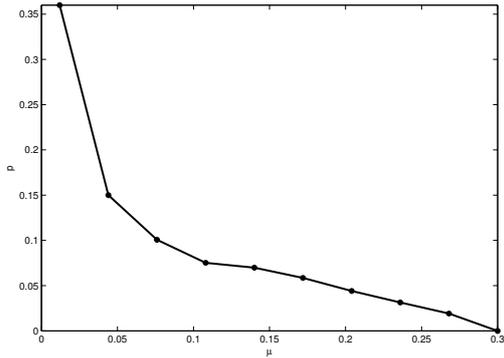


FIGURE 2.2 – Variation de la prime  $p$  en fonction du paramètre  $\mu$

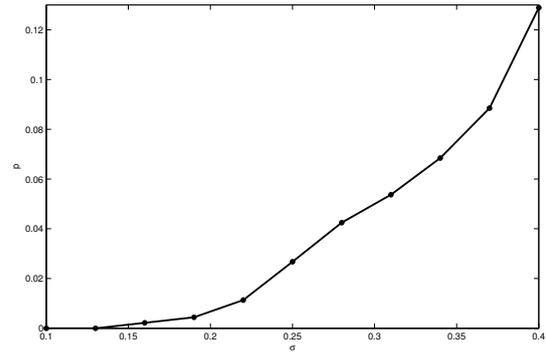


FIGURE 2.3 – Variation de la prime  $p$  en fonction du paramètre  $\sigma$

On remarque sur ces figures que la prime est décroissante par rapport au drift alors qu'elle est croissante par rapport à la volatilité. Ces résultats sont espérés, puisque plus le drift est grand moins la garantie intervient car la valeur du compte sera au dessus de la garantie avec une probabilité importante, alors que plus le marché est volatile plus la garantie est utile puisque la valeur du compte risque d'être très en dessous de la garantie.

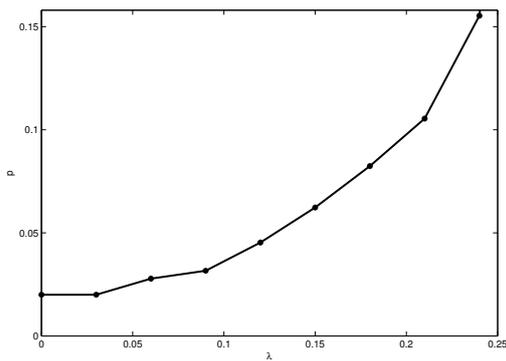


FIGURE 2.4 – Variation de la prime  $p$  en fonction du paramètre  $\lambda$

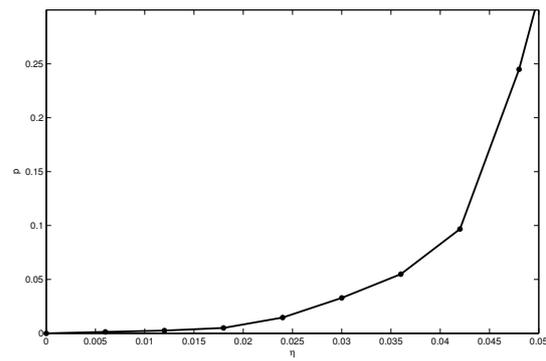


FIGURE 2.5 – Variation de la prime  $p$  en fonction du paramètre  $\eta$

On remarque sur ces figures que la prime est croissante par rapport à l'intensité de mortalité et également par rapport au taux *roll-up*. Ces deux résultats expérimentaux sont espérés, car si l'intensité est importante l'assureur reçoit une prime sur une durée moins importante et devra augmenter la prime pour proposer la même garantie, alors que si le taux *roll-up* est plus important l'assureur propose une meilleure garantie et fera payer plus cher.

## 2.3 Perspectives

J'envisage d'étudier la couverture Moyenne-Variance dans le cas de modèles à volatilité incertaine. Dans le cas de modèles de semi-martingales, il existe dans la littérature un lien entre les stratégies de couverture optimales au sens Moyenne-Variance et certaines EDSR. Dans [L3], nous avons caractérisé une stratégie optimale, dans le cas d'un modèle à sauts, à l'aide de la résolution d'EDSR singulières. Nous souhaitons étendre cette caractérisation

d'optimalité au cas de modèles avec incertitude sur la volatilité par une écriture en EDSR2 avec générateur quadratique.

Je travaille actuellement sur des modèles de pricing des *variable annuities* lorsque le client peut modifier aux dates anniversaires la manière dont il investit son argent. Il peut choisir à chaque date anniversaire la proportion qu'il souhaite investir dans l'indice risqué et le reste dans des obligations. On peut imaginer utiliser l'approche développée dans [L7] pour considérer le pire des cas pour l'assureur.

Je souhaite également considérer le cas d'optimisation de portefeuilles lorsque la fonction à optimiser n'est pas symétrique, par exemple considérer des fonctions qui ne prennent en compte que les pertes.

## Chapitre 3

# Contrôle stochastique appliqué à la gestion de ressources naturelles

### 3.1 Cas des ressources naturelles dont le stock est constant

Je présente dans ce chapitre les résultats obtenus dans [L10] et [L11]. Dans ces papiers, je considère la gestion d'une ressource naturelle dont le stock est constant au cours du temps comme par exemple une réserve de pétrole. On se pose alors la question de comment gérer au mieux cette réserve lorsque le prix de la ressource évolue au cours du temps et qu'il y a des contraintes dans l'exploitation de la ressource, par exemple des coûts d'exploitation, des coûts de stockage, stockage limité, quantité extraite limitée, ...

On suppose que la quantité totale de la ressource exploitable est  $Q^D$  et que la quantité stockable au maximum est  $Q^S$ . L'agent peut agir de différentes manières en temps continu :

- extraire une quantité  $q_t^e$  avec  $q_t^e \leq K_0$ ,
- vendre la quantité  $q_t^v$  de ce qu'il a extrait,
- stocker la quantité  $q_t^s$  de ce qu'il a extrait,
- vendre la quantité  $q_t^{v,s}$  de son stock en supposant que  $q_t^{v,s} \leq q^S$ .

Le problème est de trouver la stratégie optimale  $(q_t^s, q_t^v, q_t^{v,s})_{t \geq 0}$  au problème d'optimisation suivant

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^\infty e^{-\rho s} U \left( q_s^v P_s + q_s^{v,s} (1 - \varepsilon) P_s - (q_s^v + q_s^s) c_e(Q^D - E_s) - c_{stock}(S_s) \right) ds \right],$$

avec  $\rho \geq 0$ ,  $U(x) := 1 - \exp(-\gamma x)$ ,  $P_s$  est le prix au temps  $s$  correspondant à une unité de ressource,  $c_e(\cdot)$  est la fonction de coût d'extraction qui dépend de la quantité de ressource restante que l'on suppose décroissante (plus il y a de la ressource disponible moins ça coûte cher pour l'extraire) et  $c_{stock}$  une fonction de coût de stockage qui dépend de la quantité stockée que l'on suppose croissante (plus il y a de stock plus c'est cher de stocker). Les processus  $E$  et  $S$  correspondent à la quantité extraite depuis le début et la quantité stockée.

Afin de caractériser la fonction valeur  $v$  par une EDP, on introduit les triplets  $q := (q^v, q^s, q^{v,s})$  et  $X^{x,q} := (P, E, S)$  qui correspond au processus d'état si l'agent commence dans l'état  $x := (p, e, s)$  et suit la stratégie  $q$ , et  $\mathcal{D} := \mathbb{R}_+^* \times [0, Q^D] \times \mathbb{R}_+$ . On suppose que

$$dX_t^{x,q} = \begin{pmatrix} \mu P_t \\ q_t^v + q_t^s \\ q_t^s - q_t^{v,s} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma P_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dW_t.$$

Dans la suite on notera  $\mathcal{L}^q$  l'opérateur local du second ordre associé au processus d'état  $X^{x,q}$

$$\mathcal{L}^q v := \mu p \partial_p v + \frac{|\sigma p|^2}{2} \partial_p^2 v + (q^v + q^s) \partial_e v + (q^s - q^{v,s}) \partial_s v,$$

et  $f$  la fonction définie par

$$f(X_t^{x,q}, q_t) := U(q_t^v P_t + q_t^{v,s}(1-\varepsilon)P_t - (q_t^v + q_t^s)c_e(Q^D - E_t) - c_{stock}(S_t)).$$

On peut alors caractériser la fonction valeur  $v$  en terme d'EDP

**Théorème 3.1.12.** *Soit  $w \in C^2(\mathcal{D})$  une fonction à croissance quadratique.*

(i) *Si  $w$  satisfait*

$$\rho w(x) - \sup_q [\mathcal{L}^q w(x) + f(x, q)] \geq 0, \quad x \in \mathcal{D},$$

et

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \mathbb{E}[w(X_T^{x,q})] \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \forall q \in \mathcal{A}(x).$$

Alors, nous avons  $w \geq v$  sur  $\mathcal{D}$ .

(ii) *Si de plus pour tout  $x \in \mathcal{D}$ , il existe une fonction mesurable  $\hat{q}(x)$  à valeurs dans l'ensemble admissible telle que*

$$\rho w(x) - \sup_q [\mathcal{L}^q w(x) + f(x, q)] = \rho w(x) - \mathcal{L}^{\hat{q}(x)} w(x) - f(x, \hat{q}(x)) = 0,$$

et que l'EDS

$$dX_t = \begin{pmatrix} \mu P_t \\ \hat{q}^s(X_t) + \hat{q}^v(X_t) \\ \hat{q}^s(X_t) - \hat{q}^{v,s}(X_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma P_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dW_t,$$

admet une unique solution, que l'on note  $\hat{X}^{x,\hat{q}}$ , telle que

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \mathbb{E}[w(\hat{X}_T^{x,\hat{q}})] \leq 0,$$

et la stratégie  $\{\hat{q}(\hat{X}_t^{x,\hat{q}}), t \geq 0\}$  soit admissible. On a alors

$$w(x) = v(x), \quad \forall x \in \mathcal{D},$$

et  $\hat{q}$  est un contrôle optimal.

Je conclus cette section avec des résultats numériques. Pour cela nous avons utilisé la fonction coût de stockage  $c_s(x) = \exp(C_s x)$  et la fonction coût d'extraction  $c_e(x) = \exp(-C_e x)$ . On obtient alors la fonction valeur suivante.

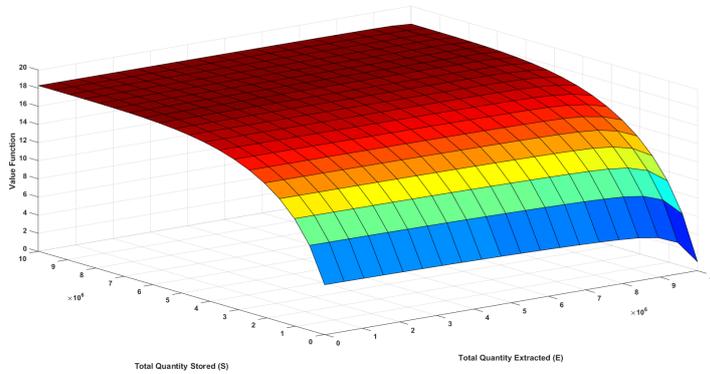


FIGURE 3.1 – Fonction valeur en fonction de la quantité extraite et la quantité stockée

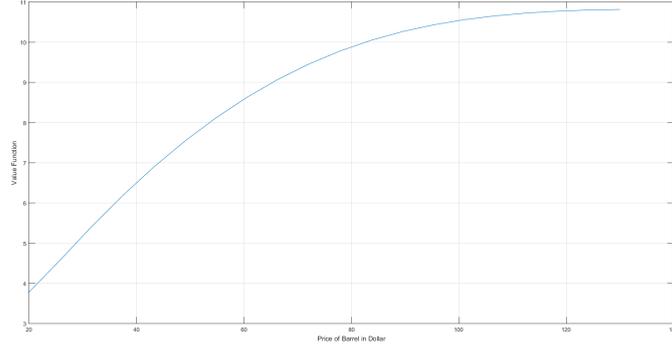


FIGURE 3.2 – Fonction valeur par rapport au prix initial du baril

On remarque sur ces figures que la fonction valeur est décroissante par rapport à la quantité extraite, mais qu'elle est croissante par rapport à la quantité stockée. Ces deux résultats sont espérés économiquement puisque si on a déjà extrait de la ressource il y en a moins de disponible et la richesse sera moins élevée, tandis que si le stock est plus important la quantité de ressource utilisable est plus importante. On remarque également que la fonction valeur est croissante par rapport au prix initial du baril dans le cas du pétrole.

On a également étudié la sensibilité de la fonction valeur par rapport aux différents paramètres. On obtient les résultats suivants lorsque l'on suppose que le stock est vide et que l'on a rien extrait jusqu'à maintenant.

$\sigma$	0.02	$\sigma + 25\%$	$\sigma + 50\%$	$\sigma + 75\%$	$\sigma + 100\%$
$v$	1.2595	1.2521	1.2399	1.2285	1.2155

TABLE 3.1 – Sensibilité de la fonction valeur par rapport à la volatilité

On remarque que la fonction valeur est décroissante par rapport à la volatilité.

$\mu$	0.01	$\mu - 25\%$	$\mu + 25\%$	$\mu + 50\%$	$\mu + 75\%$	$\mu + 100\%$
$v$	1.2595	1.2083	1.3087	1.3498	1.3851	1.4151

TABLE 3.2 – Sensibilité de la fonction valeur par rapport au drift

On remarque que la fonction valeur est croissante par rapport au drift du prix. Ce résultat s'explique par le fait que plus le drift est important plus le prix va être important et l'exploitant va pouvoir vendre à un prix plus élevé.

$K_0$	10000	5000	2000	1000
$v$	1.2595	0.6411	0.2583	0.1286

TABLE 3.3 – Sensibilité de la fonction valeur par rapport à la quantité maximum que l'on peut extraire par unité de temps

On remarque que la fonction valeur est croissante par rapport à la quantité maximum que l'on peut extraire par unité de temps. Ce résultat s'explique par le fait que si on augmente  $K_0$  l'ensemble des stratégies admissibles est plus important et donc la fonction valeur est plus grande.

$q^S$	100000	50000	20000	10000
$v$	1.2595	1.2542	1.2476	0.12436

TABLE 3.4 – Sensibilité de la fonction valeur par rapport à la quantité maximum que l'on peut vendre par unité de temps depuis le stock

On remarque que la fonction valeur est croissante par rapport à la quantité maximum que l'on peut vendre par unité de temps depuis le stock. Ce résultat s'explique également par le fait que si on augmente  $q^S$  l'ensemble des stratégies admissibles est plus important et donc la fonction valeur est plus grande.

$\varepsilon$	0	0.01	0.05	0.1
$v$	9.7504	9.69	9.4444	9.1281

TABLE 3.5 – Fonction valeur en fonction du paramètre d'impact de prix  $\varepsilon$  lorsque l'on commence avec un stock plein

On remarque une décroissance de la fonction valeur en fonction du paramètre d'impact de prix  $\varepsilon$ . Ce résultat s'explique par le fait que si  $\varepsilon$  est plus important alors on vend moins cher le pétrole provenant du stock.

## 3.2 Cas des ressources avec stock dynamique mais non renouvelable

Je présente dans ce chapitre les résultats obtenus dans [L12] et [L13]. Dans ces papiers, je considère la gestion d'une ressource naturelle dont le stock évolue au cours du temps mais on suppose que l'on ne peut pas renouveler la ressource par un apport externe comme par exemple la population de poisson si on s'interdit de réintroduire des poissons. On se pose alors la question de comment gérer au mieux cette ressource lorsque le prix évolue au cours du temps et qu'il y a des contraintes dans l'exploitation de la ressource.

### 3.2.1 Cas avec des périodes d'interdiction d'exploitation

Dans [L12], on suppose que la ressource évolue dans le temps avec une diffusion logistique

$$dX_t^\alpha = \eta X_t^\alpha (\lambda - X_t^\alpha) dt + \gamma X_t^\alpha dB_t - \alpha_t dt ,$$

où  $\alpha$  est la quantité récoltée par l'agent, on suppose que  $\alpha$  est bornée par une constante  $\bar{\alpha}$ . La diffusion du prix de la ressource dépend de la quantité de celle-ci

$$dP_t = P_t (\mu(X_t^\alpha) dt + \sigma dW_t) ,$$

où  $\mu$  est une fonction décroissante (plus la quantité de ressource disponible est importante plus le prix est faible). On suppose que  $\langle B, W \rangle_t = \rho t$ .

On suppose qu'il y a un organisme de contrôle qui observe la quantité de ressource restante en des temps déterministes  $(T_i)_{1 \leq i \leq N}$  et interdit l'agent de récolter si à la date du contrôle  $T_i$  on a  $X_{T_i}^\alpha \leq \Gamma$  où  $\Gamma$  est une constante. Il ne pourra recommencer à récolter qu'à la prochaine date de contrôle telle que  $X_{T_k}^\alpha > \Gamma$  avec  $k > i$ , on note cette date  $\tau_i^\alpha := \inf\{T_k, k \geq i : X_{T_k}^\alpha > \Gamma\}$ . Enfin l'agent devra payer une pénalité  $f((\Gamma - X_T^\alpha)^+, P_T^\alpha)$  à la date  $T$  si la quantité de ressource à cette date est inférieure à  $\Gamma$ , pénalité qui dépendra du prix de la ressource à cette instant.

La fonction valeur de l'agent est alors définie par

$$V(x) := \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\beta t} (P_t \alpha_t - C(\alpha_t)) dt - e^{-\beta T} f((\Gamma - X_T^\alpha)^+, P_T^\alpha) \right],$$

où  $C(\alpha_t)$  correspond à un coût à payer pour récolter la quantité  $\alpha_t$  et  $\beta \geq 0$ .

Afin de résoudre ce problème, nous utilisons une approche par programmation dynamique, mais pour cela on doit rendre le système contrôlé markovien puisque celui-ci dépend de la quantité de ressource au dernier instant de contrôle. Pour cela, nous utilisons une approche semblable à celle de [6] en ajoutant une variable  $i$  au système contrôlé qui indique si l'agent peut récolter  $i = 1$  ou pas  $i = 0$ . Pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $x \geq 0$  et  $i \in \{0, 1\}$  on introduit l'ensemble  $\mathcal{A}_{t,i}(x)$

$$\mathcal{A}_{t,i}(x) := \left\{ \alpha = (\alpha_s)_{t \leq s \leq T}, \alpha_s \text{ est } \mathcal{F}_s \text{-mesurable et à valeur dans } [0, \bar{a}], \right. \\ \left. \begin{aligned} &\alpha_s = 0 \text{ sur } [t, \tau_p^\alpha) \text{ si } i = 0, \\ &\alpha_s = 0 \text{ sur } [T_k, \tau_k^\alpha) \text{ pour } p(t) + 1 \leq k \leq N \end{aligned} \right\},$$

où  $p(t) := \sup\{i, T_i \leq t\}$ .

Soit  $\mathcal{Z} := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \{0, 1\}$ . Soit  $t \in [0, T]$ ,  $z = (x, p, i) \in \mathcal{Z}$  et  $\alpha \in \mathcal{A}_{t,i}(x)$ , on introduit le système contrôlé  $Z^{t,z,\alpha} := (X^{t,x,\alpha}, P^{t,z,\alpha}, I^{t,z,\alpha})$  défini par

$$\begin{aligned} X_s^{t,x,\alpha} &= x + \int_t^s \eta X_u^{t,x,\alpha} (\lambda - X_u^{t,x,\alpha}) du + \int_t^s \gamma X_u^{t,x,\alpha} dB_u - \int_t^s \alpha_u du, \\ P_s^{t,z,\alpha} &= p + \int_t^s \mu(X_u^{t,x,\alpha}) P_u^{t,z,\alpha} du + \int_t^s \sigma P_u^{t,z,\alpha} dW_u, \\ I_s^{t,z,\alpha} &= i \mathbb{1}_{t \leq s < T_{p(t)+1}} + \sum_{i=p(t)+1}^{N-1} \mathbb{1}_{X_{T_i}^{t,x,\alpha} > \Gamma} \mathbb{1}_{T_i \leq s < T_{i+1}}. \end{aligned}$$

Pour  $t \in [0, T]$  et  $z \in \mathcal{Z}$ , on considère la fonction valeur  $v$  définie par

$$v(t, z) := \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{t,i}(x)} \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-\beta(s-t)} (P_s^{t,z,\alpha} \alpha_s - C(\alpha_s)) ds - e^{-\beta(T-t)} f((\Gamma - X_T^{t,x,\alpha})^+, P_T^{t,p,\alpha}) \right]$$

et les deux fonctions valeurs  $v_0$  et  $v_1$  définies sur  $[0, T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$  par

$$v(t, z) = v_0(t, x, p) \mathbb{1}_{i=0} + v_1(t, x, p) \mathbb{1}_{i=1}.$$

$v_0$  (resp.  $v_1$ ) correspond à la fonction valeur lorsque l'on ne peut pas (resp. peut) récolter. On peut alors caractériser les fonctions valeurs  $v_0$  et  $v_1$  en terme de solution de viscosité. Pour cela on introduit l'opérateur du second ordre

$$\mathcal{L}^a \varphi = -\beta \varphi + \eta x (\lambda - x) \partial_x \varphi + \frac{|\gamma x|^2}{2} \partial_x^2 \varphi + \mu(x) p \partial_p \varphi + \frac{|\sigma p|^2}{2} \partial_p^2 \varphi + \rho \sigma \gamma p x \partial_{px}^2 \varphi - a \partial_x \varphi.$$

**Théorème 3.2.13.** Soient  $w^0$  et  $w^1$  des fonctions de  $C^{1,2}([T_i, T_{i+1}] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*) \cap C^0([T_i, T_{i+1}] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*)$  pour tout  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  à croissance quadratique.

(i) Supposons que pour tout  $(x, p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$  on a

$$\left\{ \begin{aligned} &-\partial_t w_0(t, x, p) - \mathcal{L}^0 w_0(t, x, p) \geq 0 \quad t \in [0, T] - \{T_j\}_{1 \leq j \leq N} \\ &w_0(T_j^-, x, p) \geq w_0(T_j, x, p) \mathbb{1}_{x \leq \Gamma} + w_1(T_j, x, p) \mathbb{1}_{x > \Gamma} \quad j \in \{1, \dots, N-1\} \\ &w_0(T^-, x, p) \geq -f((\Gamma - x)^+, p) \end{aligned} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_t w_1(t, x, p) - \sup_{0 \leq a \leq \bar{a}} \{ \mathcal{L}^a w_1(t, x, p) + pa - C(a) \} \geq 0 \quad t \in [0, T] - \{T_j\}_{1 \leq j \leq N} \\ w_1(T_j^-, x, p) \geq w_0(T_j, x, p) \mathbb{1}_{x \leq \Gamma} + w_1(T_j, x, p) \mathbb{1}_{x > \Gamma} \quad j \in \{1, \dots, N-1\} \\ w_1(T^-, x, p) \geq -f((\Gamma - x)^+, p). \end{array} \right.$$

Alors la fonction  $w$  définie par  $w(t, z) := w_0(t, x, p) \mathbb{1}_{i=0} + w_1(t, x, p) \mathbb{1}_{i=1}$  vérifie  $w(t, z) \geq v(t, z)$  sur  $[0, T] \times \mathcal{Z}$ .

(ii) Supposons de plus que pour tout  $z \in \mathcal{Z}$ , il existe une fonction mesurable  $\hat{\alpha}(t, z)$  à valeurs dans  $[0, \bar{a}]$  telle que

—  $i = 0$

$$-\partial_t w(t, z) - \mathcal{L}^0 w(t, z) = 0,$$

—  $i = 1$

$$\begin{aligned} \partial_t w(t, z) + \sup_{a \in [0, \bar{a}]} \left[ \mathcal{L}^a w(t, z) + pa - C(a) \right] &= \partial_t w(t, z) + \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(t, z)} w(t, z) + p\hat{\alpha}(t, z) - C(\hat{\alpha}(t, z)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$w(T_j^-, z) = w(T_j, x, p, 0) \mathbb{1}_{x \leq \Gamma} + w(T_j, x, p, 1) \mathbb{1}_{x > \Gamma}, \quad (j, z) \in \{1, \dots, N-1\} \times \mathcal{Z},$$

et

$$w(T^-, z) = -f((\Gamma - x)^+, p),$$

tel que l'EDS

$$\begin{aligned} X_s^{t, x, \hat{\alpha}} &= x + \int_t^s \eta X_u^{t, x, \hat{\alpha}} (\lambda - X_u^{t, x, \hat{\alpha}}) du + \int_t^s \gamma X_u^{t, x, \hat{\alpha}} dB_u - \int_t^s \hat{\alpha}_u du \\ P_s^{t, z, \hat{\alpha}} &= p + \int_t^s \mu(X_u^{t, x, \hat{\alpha}}) P_u^{t, z, \hat{\alpha}} du + \int_t^s \sigma P_u^{t, z, \hat{\alpha}} dW_u \\ I_s^{t, z, \hat{\alpha}} &= i \mathbb{1}_{t \leq s < T_{p(t)+1}} + \sum_{i=p(t)+1}^{N-1} \mathbb{1}_{X_{T_i}^{t, x, \hat{\alpha}} > \Gamma} \mathbb{1}_{T_i \leq s < T_{i+1}} \end{aligned}$$

a une unique solution, que l'on note  $\hat{Z}_s^{t, z}$ , et  $\{\hat{\alpha}(s, \hat{Z}_s^{t, z}), t \leq s \leq T\}$  est dans  $\mathcal{A}_{t, i}(x)$ . Alors

$$w = v \quad \text{sur } [0, T] \times \mathcal{Z}$$

et  $\hat{\alpha}$  est un contrôle optimal.

La preuve de ce résultat se fait par récurrence sur chaque intervalle  $[T_j, T_{j+1}]$  pour  $i = 0$  et  $i = 1$  en commençant par  $j = N - 1$ .

Je finis cette section par des résultats numériques illustrant les résultats théoriques. Pour cela on a pris une fonction drift pour le prix  $\mu(x) = 0.1 + 0.5 \exp(-0.2x)$ , une fonction pénalité de la forme  $f(x, p) = \kappa p x$  et une fonction coût  $C(x) = x^2$ , avec  $\lambda = 0.5$  et  $\Lambda = 0.2308$ .

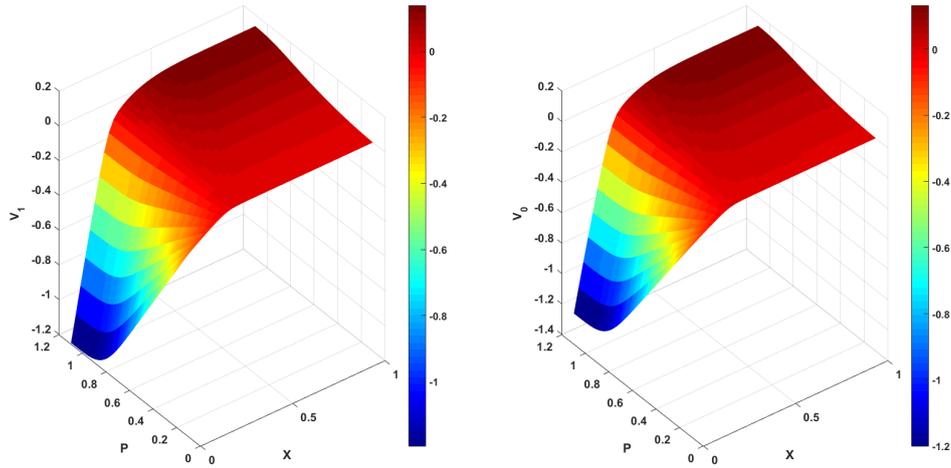


FIGURE 3.3 – Fonctions valeurs  $v_1$  et  $v_0$  à  $t$  fixé

On remarque que  $v_1 \geq v_0$  comme attendu puisque la stratégie ne rien faire est admissible dans le cas où l'on peut récolter. On remarque aussi que les deux fonctions valeurs sont croissantes par rapport à  $x$  ce qui est naturel puisque plus il y a de ressource plus on est content. Par contre elles sont croissantes en  $p$  si  $x > \Gamma$  : plus le prix est élevé plus on est content comme on vend plus cher. Mais elles sont décroissantes en  $p$  si  $x \leq \Gamma$  : cela est dû à la pénalité à payer si en  $T$  on a  $x \leq \Gamma$ , on vend plus cher mais on doit payer une amende plus importante.

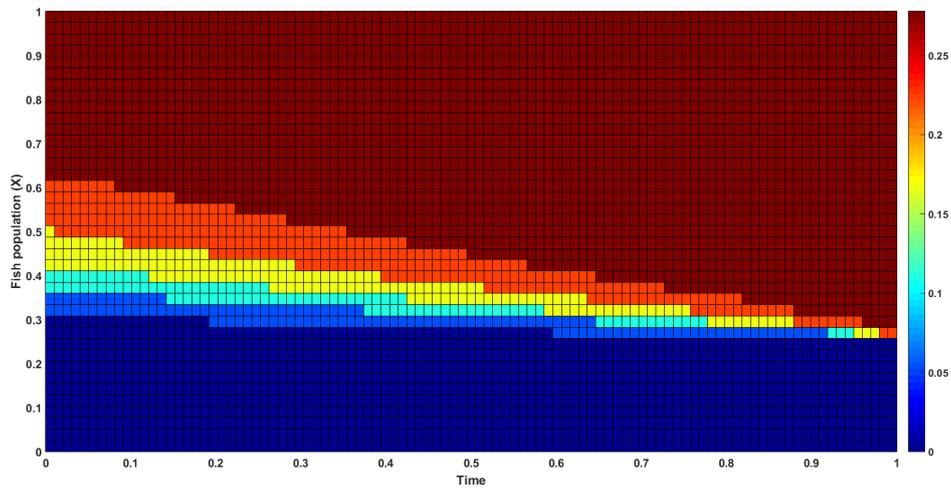


FIGURE 3.4 – Contrôle optimal pour un prix  $p$  fixé

On remarque qu'il y a deux régimes : un régime dans lequel on récolte et un régime dans lequel on ne récolte pas. Quand on est loin de la maturité, ce n'est pas optimal de récolter le maximum si  $X \leq \lambda$ , on préfère laisser la ressource croître naturellement, par contre si on est proche de la maturité on récolte le maximum pour les valeurs en dessous de  $\lambda$  mais on ne récolte pas si on est en dessous de  $\Lambda$ .

	$\kappa = 1$	$\kappa = 2$	$\kappa = 3$	$\kappa = 4$	$\kappa = 5$	$\kappa = 6$
P&L	0.0265	0.0102	-0.0012	-0.0111	-0.0215	-0.0251
$X_T$	0.4855	0.5066	0.5182	0.5232	0.5238	0.5308

Table 1 :  $P\&L$  pour différentes valeurs du paramètre  $\kappa$  dans la fonction de pénalité

On fixe  $\Lambda = 0.4872$  et  $\lambda = 0.3$ . On remarque que le P&L est décroissant par rapport au paramètre  $\kappa$ . Ce résultat s'explique par le fait que moins on est pénalisé plus on récolte et plus on est riche. On remarque que pour  $\kappa = 1$  on est prêt à récolter plus que la limite et à payer l'amende puisque celle-ci n'est pas dissuasive. Pour  $\kappa \geq 3$ , la quantité de la ressource est au dessus de ce que l'on souhaite mais l'agent a une fonction valeur négative donc ce n'est pas avantageux. Le meilleur paramètre serait donc  $\kappa = 2$  pour que la quantité soit au dessus de la constante fixée et que l'agent gagne de l'argent.

### 3.2.2 Cas impulsif

Dans [L13], on considère une ressource qui évolue dans le temps avec une diffusion logistique

$$dX_t = \eta X_t(\lambda - X_t)dt + \gamma X_t dB_t .$$

Un agent peut décider de récolter cette ressource afin de vendre la récolte sur le marché au prix  $P$  lequel suit la diffusion

$$dP_t = P_t(\mu dt + \sigma dW_t) ,$$

avec  $B$  et  $W$  indépendants. On note par  $\alpha := (d_i, s_i)_{i \geq 1}$  une stratégie de récolte

- $(d_i)_{i \geq 1}$  est une suite croissante de  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt, où  $d_i$  correspond au moment où l'agent donne l'ordre de récolter et la récolte commencera en  $d_i + \ell$ ,
- $(s_i)_{i \geq 1}$  est une suite croissante de  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt, où  $s_i$  est le moment choisi par l'agent pour stopper la récolte.

On suppose que ces deux suites satisfont pour tout  $i \geq 1$  les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} 0 &\leq s_i - d_i \leq K \\ s_i + \delta &\leq d_{i+1} . \end{aligned}$$

$\ell$ ,  $m$ ,  $\delta$  et  $K$  sont des constantes positives.

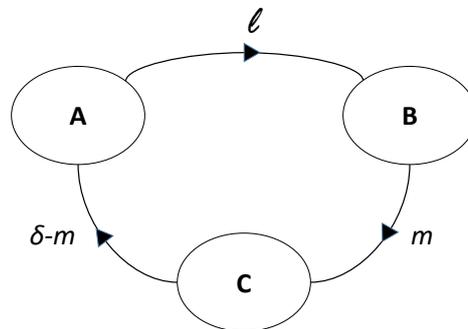


FIGURE 3.5 – L'état  $A$  correspond à l'état dans lequel le manager peut donner l'ordre de récolter à n'importe quel moment. L'état  $B$  correspond à l'état dans lequel le manager peut donner l'ordre d'arrêter la récolte. L'état  $C$  correspond à l'état dans lequel le manager vend la récolte.

$d_i$  (resp.  $s_i$ ) correspond à la date où le manager décide de quitter l'état  $A$  (resp.  $B$ ).  $\ell$  correspond au temps qu'il faut pour aller de l'état  $A$  à l'état  $B$ , c'est à dire qu'il y a un délai  $\ell$  entre le moment où le manager donne l'ordre de commencer la récolte et le moment où celle-ci commence. On ne peut pas rester plus de  $K - \ell$  dans l'état  $B$ , c'est à dire qu'on ne peut pas récolter pendant plus de  $K - \ell$ .  $m$  est la durée pour aller de l'état  $B$  à l'état  $C$ , c'est à dire que lorsque le manager arrête la récolte il doit attendre la durée  $m$  pour vendre celle-ci. Il y a une durée  $\delta - m$  pour aller de l'état  $C$  à l'état  $A$ , c'est à dire que le manager ne peut pas donner l'ordre de récolter avant une durée  $\delta - m$  après avoir vendu la récolte.

Sur une période de récolte, on suppose que l'on récolte la quantité  $g(x)$  par unité de temps lorsque la quantité de ressource disponible est  $x$ , et l'agent doit payer  $f(\Delta t)$  qui correspond au coût pour récolter si la durée de la récolte est  $\Delta t$ . On supposera qu'il existe deux constantes positives  $a_{min}$  et  $a_{max}$  telles que  $a_{min}x \leq g(x) \leq a_{max}x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .  $g$  et  $f$  sont des fonctions croissantes.

Si l'agent suit une stratégie  $\alpha = (d_i, s_i)_{i \geq 1}$ , alors la quantité de ressource disponible est donnée par

$$dX_t^{x,\alpha} = \eta X_t^{x,\alpha}(\lambda - X_t^{x,\alpha})dt + \gamma X_t^{x,\alpha}dB_t - \sum_{i \geq 1} g(X_t^{x,\alpha}) \mathbb{1}_{d_i + \ell \leq t \leq s_i} dt .$$

L'objectif de l'agent est de maximiser ses gains décrits par la fonction

$$V(x, p) := \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[ \sum_{i \geq 1} e^{-\beta(s_i + m)} (G_i^\alpha - C_i^\alpha) \right] ,$$

où  $\beta \geq 0$ , la fonction coût  $C_i^\alpha$  et la fonction gain  $G_i^\alpha$  sont données par

$$\begin{aligned} C_i^\alpha &:= f(s_i - d_i - \ell) , \\ G_i^\alpha &:= P_{s_i + m} \int_{d_i + \ell}^{s_i} g(X_t^{x,\alpha}) dt , \end{aligned}$$

puisque l'on suppose que la récolte  $i$  est vendue au temps  $s_i + m$ . On supposera dans la suite que  $\mu + \eta\lambda < \beta$ , cette condition garantit que la fonction valeur est finie.

Dans la suite on notera  $z := (x, p)$  et  $\Theta := (\theta, \rho, y)$ . On introduit également les ensembles d'état suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &:= \{(\theta, \rho, y) \in \mathbb{R}_+^3, y \geq 0, 0 \leq \theta = \rho \leq K\} , \\ \mathcal{D}_1 &:= \{(\theta, \rho, y) \in \mathbb{R}_+^3, y \geq 0, 0 \leq \theta < \rho \wedge m \text{ et } \rho - K \leq \theta \leq \rho - \ell\} , \\ \mathcal{D}_2 &:= \{(\theta, \rho, y) \in \mathbb{R}_+^3, y \geq 0, m \leq \theta < \rho \text{ et } \rho - K \leq \theta \leq \rho - \ell\} , \end{aligned}$$

et  $\mathcal{D} := \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ .

Afin de résoudre ce problème on définit la fonction gain pour toutes les valeurs de  $x$  correspondant à la quantité de ressource disponible,  $p$  le prix de celle-ci,  $\theta$  le temps écoulé depuis la dernière prise de décision de l'agent,  $\rho$  le temps écoulé depuis la dernière fois que l'agent a décidé de récolter,  $y$  la quantité récoltée depuis que le dernier ordre de récolte a été donné, qui est définie par

$$J(x, p, \theta, \rho, y, \alpha) := \mathbb{E} \left[ \sum_{j \geq 1} e^{-\beta(s_j + m)} (G_j^\alpha - C_j^\alpha) \right] ,$$

où  $G_1^\alpha$  et  $C_1^\alpha$  sont définis par

$$\begin{aligned} G_1^\alpha &:= y P_{m-\theta}^p \mathbb{1}_{\mathcal{D}_1} + \left[ y + \int_{(\ell-\theta)^+}^{s_1} g(X_s^{x,\alpha}) ds \right] P_{s_1+m}^p \mathbb{1}_{\mathcal{D}_0} , \\ C_1^\alpha &:= f(\rho - \theta - \ell) \mathbb{1}_{\mathcal{D}_1} + f(s_1 + \theta - \ell) \mathbb{1}_{\mathcal{D}_0} , \end{aligned}$$

et  $G_i^\alpha$  et  $C_i^\alpha$ , pour  $i \geq 2$ , sont définis précédemment. On introduit également les ensembles de stratégies admissibles suivants

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0(\Theta) &:= \{(d_i, s_i)_{i \geq 1}, \text{ avec } d_1 = -\theta, s_1 \text{ est un temps d'arrêt à valeur dans } [(\ell - \theta)^+, K - \theta] \text{ et} \\ &\quad (d_i, s_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{A} \text{ avec } d_2 \geq s_1 + \delta\}, \\ \mathcal{A}_1(\Theta) &:= \{(d_i, s_i)_{i \geq 1}, \text{ avec } (d_1, s_1) = (-\rho, -\theta) \text{ et } (d_i, s_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{A} \text{ avec } d_2 \geq \delta - \theta\}, \\ \mathcal{A}_2(\Theta) &:= \{(d_i, s_i)_{i \geq 1}, \text{ avec } (d_1, s_1) = (-\rho, -\theta) \text{ et } (d_i, s_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{A} \text{ avec } d_2 \geq (\delta - \theta)^+\}.\end{aligned}$$

Finalement on définit l'ensemble  $\mathcal{A}(\Theta)$  par  $\mathcal{A}(\Theta) = \mathcal{A}_i(\Theta)$  quand  $\Theta \in \mathcal{D}_i$ . On introduit la fonction valeur  $v$

$$v(z, \Theta) := \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(\Theta)} \mathbb{E}[J(z, \Theta, \alpha)].$$

On peut alors démontrer le principe de programmation dynamique pour la fonction valeur  $v$  en introduisant le processus d'état  $Z^{z, \alpha} = (X^{x, \alpha}, P^p)$ , le triplet  $\Theta(\vartheta, \alpha)$  qui indique la durée à l'instant  $\vartheta$  depuis la dernière décision, la durée à l'instant  $\vartheta$  depuis la dernière décision de récolter et la quantité récoltée jusqu'en  $\vartheta$  pour la dernière récolte, et  $\kappa(\vartheta, \alpha) := \sup\{k \geq 1, d_k \leq \vartheta\}$ .

**Proposition 3.2.1.** *Pour tout  $\Theta \in \mathcal{D}_0$  et  $z \in \mathcal{Z}$ , on a*

$$\begin{aligned}v(z, \Theta) &\geq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(\Theta)} \sup_{\vartheta \in \mathcal{T}} \mathbb{E} \left[ e^{-\beta \vartheta} v_*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) \mathbf{1}_{\vartheta < s_1 + m} \right. \\ &\quad + \left[ e^{-\beta(s_1 + m)} \left( (y + \int_{(\ell - \theta)^+}^{s_1} g(X_s^{x, \alpha}) ds) P_{s_1 + m}^p - f(s_1 + \theta - \ell) \right) + \sum_{i=2}^{\kappa(\vartheta, \alpha) - 1} e^{-\beta(s_i + m)} (G_i - C_i) \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\beta \vartheta} v_*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) + e^{-\beta(s_{\kappa(\vartheta, \alpha)} + m)} (G_{\kappa(\vartheta, \alpha)} - C_{\kappa(\vartheta, \alpha)}) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_2} \right] \mathbf{1}_{s_1 + m \leq \vartheta} \right].\end{aligned}$$

Pour tout  $\Theta \in \mathcal{D}_1$  et  $z \in \mathcal{Z}$ , on a

$$\begin{aligned}v(z, \Theta) &\geq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(\Theta)} \sup_{\vartheta \in \mathcal{T}} \mathbb{E} \left[ e^{-\beta \vartheta} v_*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) \mathbf{1}_{\vartheta < m - \theta} \right. \\ &\quad + \left[ e^{-\beta(m - \theta)} \left( y P_{m - \theta}^p - f(\rho - \theta - \ell) \right) + \sum_{i=2}^{\kappa(\vartheta, \alpha) - 1} e^{-\beta(s_i + m)} (G_i - C_i) \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\beta \vartheta} v_*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) + e^{-\beta(s_{\kappa(\vartheta, \alpha)} + m)} (G_{\kappa(\vartheta, \alpha)} - C_{\kappa(\vartheta, \alpha)}) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_2} \right] \mathbf{1}_{m - \theta \leq \vartheta} \right].\end{aligned}$$

Pour tout  $\Theta \in \mathcal{D}_2$  et  $z \in \mathcal{Z}$ , on a

$$\begin{aligned}v(z, \Theta) &\geq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(\Theta)} \sup_{\vartheta \in \mathcal{T}} \mathbb{E} \left[ e^{-\beta \vartheta} v_*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) \mathbf{1}_{\vartheta < d_2} + \left[ \sum_{i=2}^{\kappa(\vartheta, \alpha) - 1} e^{-\beta(s_i + m)} (G_i - C_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\beta \vartheta} v_*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) + e^{-\beta(s_{\kappa(\vartheta, \alpha)} + m)} (G_{\kappa(\vartheta, \alpha)} - C_{\kappa(\vartheta, \alpha)}) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_2} \right] \mathbf{1}_{\vartheta \geq d_2} \right].\end{aligned}$$

**Proposition 3.2.2.** *Pour tout  $z \in \mathcal{Z}$  et  $\Theta \in \mathcal{D}_0$ , on a*

$$\begin{aligned}v(z, \Theta) &\leq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(\Theta)} \inf_{\vartheta \in \mathcal{T}} \mathbb{E} \left[ e^{-\beta \vartheta} v^*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) \mathbf{1}_{\vartheta < s_1 + m} \right. \\ &\quad + \left[ e^{-\beta(s_1 + m)} \left( (y + \int_{(\ell - \theta)^+}^{s_1} g(X_s^{x, \alpha}) ds) P_{s_1 + m}^p - f(s_1 + \theta - \ell) \right) + \sum_{i=2}^{\kappa(\vartheta, \alpha) - 1} e^{-\beta(s_i + m)} (G_i - C_i) \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\beta \vartheta} v^*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) + e^{-\beta(s_{\kappa(\vartheta, \alpha)} + m)} (G_{\kappa(\vartheta, \alpha)} - C_{\kappa(\vartheta, \alpha)}) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_2} \right] \mathbf{1}_{s_1 + m \leq \vartheta} \right].\end{aligned}$$

Pour tout  $z \in \mathcal{Z}$  et  $\Theta \in \mathcal{D}_1$ , on a

$$\begin{aligned} v(z, \Theta) \leq & \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(\Theta)} \inf_{\vartheta \in \mathcal{T}} \mathbb{E} \left[ e^{-\beta\vartheta} v * (Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) \mathbb{1}_{\vartheta < m - \theta} \right. \\ & + \left( e^{-\beta(m-\theta)} \left( y P_{m-\theta}^p - f(\rho - \theta - \ell) \right) + \sum_{i=2}^{\kappa(\vartheta, \alpha) - 1} e^{-\beta(s_i + m)} (G_i - C_i) \right. \\ & \left. \left. + e^{-\beta\vartheta} v^*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) + e^{-\beta(s_{\kappa(\vartheta, \alpha)} + m)} (G_{\kappa(\vartheta, \alpha)} - C_{\kappa(\vartheta, \alpha)}) \mathbb{1}_{\mathcal{D}_2} \right) \mathbb{1}_{m - \theta \leq \vartheta} \right]. \end{aligned}$$

Pour tout  $z \in \mathcal{Z}$  et  $\Theta \in \mathcal{D}_2$ , on a

$$\begin{aligned} v(z, \Theta) \leq & \sup_{\alpha \in \mathcal{A}(\Theta)} \inf_{\vartheta \in \mathcal{T}} \mathbb{E} \left[ e^{-\beta\vartheta} v^*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) \mathbb{1}_{\vartheta < d_2} + \left[ \sum_{i=2}^{\kappa(\vartheta, \alpha) - 1} e^{-\beta(s_i + m)} (G_i - C_i) \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-\beta\vartheta} v^*(Z_\vartheta^{z, \alpha}, \Theta(\vartheta, \alpha)) + e^{-\beta(s_{\kappa(\vartheta, \alpha)} + m)} (G_{\kappa(\vartheta, \alpha)} - C_{\kappa(\vartheta, \alpha)}) \mathbb{1}_{\mathcal{D}_2} \right) \mathbb{1}_{\vartheta \geq d_2} \right]. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir l'unicité de la caractérisation de la fonction valeur  $v$  par une EDP, on a besoin de conditions polynomiales sur la croissance de celle-ci, on obtient qu'ils existent deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$yp - C_1 \leq v(z, \Theta) \leq C_2(1 + |x|^2 + |p|^2).$$

On peut alors caractériser la fonction valeur  $v$  comme l'unique solution de viscosité contrainte au système suivant vérifiant la condition de croissance polynomiale précédente

- Si  $\Theta \in \mathcal{D}_0$  avec  $\theta \in [0, \ell)$ , cela signifie que l'agent a donné l'ordre de récolter mais la récolte n'a pas encore commencé

$$\beta v - \mathcal{L}^0 v = 0,$$

$$\text{avec } \mathcal{L}^0 \psi = \eta x(\lambda - x) \partial_x \psi + \mu p \partial_p \psi + \frac{|\gamma x|^2}{2} \partial_{xx} \psi + \frac{|\sigma p|^2}{2} \partial_{pp} \psi + \partial_\theta \psi + \partial_\rho \psi.$$

- Si  $\Theta \in \mathcal{D}_0$  avec  $\theta \in [\ell, K)$ , cela signifie que la récolte a lieu et l'agent peut décider d'arrêter celle-ci quand il le souhaite

$$\min(\beta v - \mathcal{L}^1 v, v - \mathcal{M}_1 v) = 0,$$

$$\text{avec } \mathcal{L}^1 \psi = (\eta x(\lambda - x) - g(x)) \partial_x \psi + \mu p \partial_p \psi + g(x) \partial_y \psi + \frac{|\gamma x|^2}{2} \partial_{xx} \psi + \frac{|\sigma p|^2}{2} \partial_{pp} \psi + \partial_\theta \psi,$$

et l'opérateur  $\mathcal{M}_1$  est défini pour n'importe quelle fonction  $\psi \in C^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{D}_1)$  par

$$\mathcal{M}_1 \psi(x, p, \theta, \theta, y) = \psi(x, p, 0, \theta, y).$$

- Si  $\Theta \in \mathcal{D}_0$  avec  $\theta = K$ , la récolte doit être stoppée et on a

$$v(x, p, K, K, y) = v(x, p, 0, K, y).$$

- Si  $\Theta \in \mathcal{D}_1$  avec  $\theta \in [0, m)$ , cela signifie que la récolte est terminée mais pas encore vendue

$$\beta v - \mathcal{L}^0 v = 0.$$

- Si  $\Theta \in \mathcal{D}_1$  avec  $\theta = m$ , cela signifie que l'agent vend la récolte

$$v(x, p, m^-, \rho, y) = yp - f(\rho - \ell) + v(x, p, m, \rho, 0).$$

- Si  $\Theta \in \mathcal{D}_2$  avec  $\theta \in [m, \delta)$ , cela signifie que l'agent doit attendre avant de pouvoir donner l'ordre de récolter

$$\beta v - \mathcal{L}^0 v = 0 .$$

- Si  $\Theta \in \mathcal{D}_2$  avec  $\theta \geq \delta$ , cela signifie que l'agent peut donner l'ordre de récolter quand il le souhaite

$$\min(\beta v - \mathcal{L}^0 v, v - \mathcal{M}_2 v) = 0 ,$$

l'opérateur  $\mathcal{M}_2$  est défini pour n'importe quelle fonction  $\psi \in C^2(\mathcal{Z} \times \mathcal{D}_2)$  par

$$\mathcal{M}_2 \psi(x, p, \theta, \rho, y) = \psi(x, p, 0, 0, y) .$$

Je conclus cette partie avec un exemple numérique. Pour approcher la fonction valeur nous avons utilisé une approche par quantification. Les paramètres du modèle sont  $\eta = 0.2$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\beta = 0.51$ . La fonction coût est égale à  $f(\Delta t) = 0.1\Delta t$ , et la fonction de récolte  $g(x) = x$ .

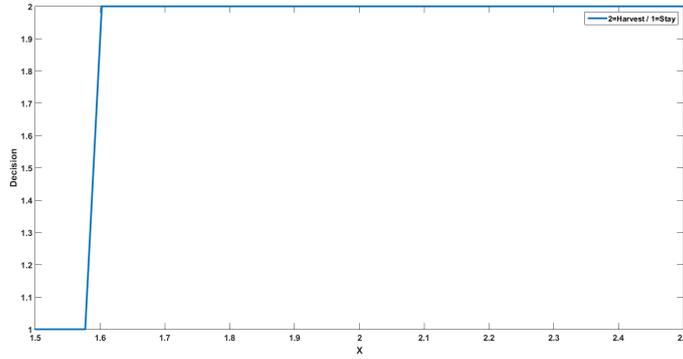


FIGURE 3.6 – Stratégie optimale de sortie en fonction de la quantité  $x$

Si la quantité de ressource est inférieure à 1.58 on ne donne pas l'ordre de récolter si elle est supérieure à 1.58 on donne l'ordre de récolter.

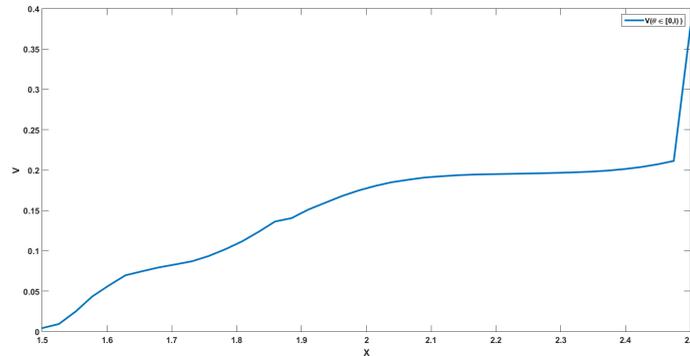


FIGURE 3.7 – Fonction valeur en fonction de la quantité de ressource disponible  $x$

### 3.3 Cas des ressources renouvelables

Dans cette partie, je présente les résultats obtenus dans [L14]. On considère un agent qui gère une ressource naturelle dont le stock évolue au cours du temps avec une diffusion logistique mais contrairement à la section précédente l'agent peut augmenter la quantité de la ressource avec un apport extérieur mais cette action a un coût. On suppose que la quantité de ressource que l'agent peut exploiter est donnée par l'EDS suivante lorsqu'il suit une stratégie  $\alpha = (t_i, \xi_i)_{1 \leq i \leq n} \cup (\tau_k, \zeta_k)_{k \geq 1}$

$$\begin{aligned} R_t^\alpha &= R_0 + \int_0^t \eta R_s^\alpha (\lambda - R_s^\alpha) ds + \int_0^t \gamma R_s^\alpha dB_s \\ &\quad - \sum_{k \geq 1} \zeta_k \mathbb{1}_{\tau_k \leq t} + \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \mathbb{1}_{t_i+m \leq t} + g_0 \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{t_i \leq t}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

où  $(\tau_k)_{k \geq 0}$  est une suite croissante de  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt qui correspond aux instants de récoltes,  $\zeta_k$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_{\tau_k}$ -mesurable qui correspond à la quantité récoltée au temps  $\tau_k$ ,  $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une suite de temps déterministe qui correspond aux instants où l'agent peut réintroduire de la ressource,  $\xi_i$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable qui correspond à la quantité renouvelée par l'agent à la date  $t_i := iT/n$  (on suppose que  $\xi_i \leq K$ ),  $g_0$  correspond au renouvellement naturelle qui apparaît aux dates  $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ . On suppose que la quantité renouvelée  $\xi_i$  à la date  $t_i$  n'est exploitable qu'après la date  $t_i + \delta$  ( $\delta = mT/n$ ) et augmente la quantité de ressource exploitable de  $g(\xi_i)$ . Nous cherchons donc la meilleure politique de gestion en cherchant les meilleurs instants pour récolter et les meilleurs instants pour réintroduire de la ressource.

On suppose que le prix unitaire de la ressource à la vente suit l'EDS

$$P_t = P_0 + \int_0^t \mu P_u du + \int_0^t \sigma P_u dW_u, \quad t \geq 0,$$

alors que le prix à l'achat pour renouveler la ressource est

$$Q_t = Q_0 + \int_0^t \rho Q_u du + \int_0^t \varsigma Q_u dW_u, \quad t \geq 0.$$

Dans la suite, les mouvements browniens  $W$  et  $B$  sont supposés indépendants.

On suppose que l'agent a également des coûts de gestion :

- il y a un coût  $c_1 \zeta_k + c_2$  au temps  $\tau_k$  pour récolter la quantité  $\zeta_k$ ,
- il y a un coût  $c_3 \xi_i$  pour réintroduire une quantité  $\xi_i$  en  $t_i$ .

On peut alors définir la richesse de l'agent pour une stratégie  $\alpha$  ayant une richesse initiale  $x$

$$X_t^{x,\alpha} = x + \sum_{k \geq 1} [(P_{\tau_k} - c_1) \zeta_k - c_2] \mathbb{1}_{\tau_k \leq t} - \sum_{i=1}^n (Q_{t_i} + c_3) \xi_i \mathbb{1}_{t_i \leq t}.$$

On définit alors la fonction liquidative

$$L(z) = \max\{x + (p - c_1)r - c_2, x\}, \quad \text{pour } z = (x, r, p, q) \in \mathcal{Z},$$

où  $\mathcal{Z} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ . On considère le problème d'optimisation suivant

$$V = \sup_{\alpha} \mathbb{E}[L(X_T^{x,\alpha}, R_T^\alpha, P_T, Q_T)],$$

et on dira qu'une stratégie  $\alpha^*$  est optimale si

$$V = \mathbb{E}[L(X_T^{x,\alpha^*}, R_T^{\alpha^*}, P_T, Q_T)].$$

Afin de caractériser cette fonction valeur, on généralise la définition de celle-ci pour différents états initiaux. Cette généralisation nécessite de prendre en compte les ordres de renouvellement en stock car sinon le système n'est pas markovien à cause du délais qu'il y a entre le moment de renouvellement et le moment où l'on peut exploiter cette ressource renouvelée. Pour cela nous introduisons différentes variables supplémentaires comme dans [6] :

—  $N(t)$  est le nombre de dates de renouvellement possible avant  $t$

$$N(t) := \#\{i \in \{1, \dots, n\} : t_i \leq t\},$$

—  $D_t$  est l'ensemble des ordres de réintroduction possibles entre  $t - \delta$  et  $t$

$$D_t := \left\{ d = (t_i, e_i)_{N(t-\delta)+1 \leq i \leq N(t)} : e_i \in [0, K] \text{ pour } i = N(t-\delta) + 1, \dots, N(t) \right\}.$$

On introduit l'ensemble des stratégies admissibles qui dépend de l'instant initial  $t$  et de la mémoire  $d \in D_t$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{t,d} := & \left\{ \alpha = (t_i, \xi_i)_{N(t-\delta)+1 \leq i \leq n} \cup (\tau_k, \zeta_k)_{k \geq 1} : \right. \\ & \xi_i = e_i \text{ pour } i = N(t-\delta) + 1, \dots, N(t); \\ & \xi_i \text{ est } \mathcal{F}_{t_i} \text{ - mesurable pour } N(t) + 1 \leq i \leq n; \\ & (\tau_k)_{k \geq 1} \text{ est une suite croissante de } \mathbb{F} \text{ - temps d'arrêt avec } \tau_1 > t; \\ & \left. \zeta_k \text{ est } \mathcal{F}_{\tau_k} \text{ - mesurable pour } k \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Pour tout état initial  $z = (x, r, p, q) \in \mathcal{Z}$  à l'instant  $t$ , mémoire  $d \in D_t$ , et stratégie  $\alpha \in \mathcal{A}_{t,d}$ , on note  $Z^{t,z,\alpha} = (X^{t,z,\alpha}, R^{t,r,\alpha}, P^{t,p}, Q^{t,q})$  le quadruplet défini par

$$\begin{aligned} R_s^{t,r,\alpha} &= r + \int_t^s \eta R_u^{t,r,\alpha} (\lambda - R_u^{t,r,\alpha}) du + \int_t^s \gamma R_u^{t,r,\alpha} dB_u - \sum_{k \geq 1} \zeta_k \mathbb{1}_{\tau_k \leq s} \\ &+ \sum_{i=N(t-\delta)+1}^n g(\xi_i) \mathbb{1}_{t_{i+m} \leq s} + g_0(N(s) - N(t)), \\ X_s^{t,z,\alpha} &= x + \sum_{k \geq 1} [(P_{\tau_k}^{t,p} - c_1) \zeta_k - c_2] \mathbb{1}_{\tau_k \leq s} - \sum_{i=N(t)+1}^n (Q_{t_i}^{t,q} + c_3) \xi_i \mathbb{1}_{t_i \leq s}, \\ P_s^{t,p} &= p + \int_t^s \mu P_u^{t,p} du + \int_t^s \sigma P_u^{t,p} dW_u, \\ Q_s^{t,q} &= q + \int_t^s \rho Q_u^{t,q} du + \int_t^s \varsigma Q_u^{t,q} dW_u, \end{aligned}$$

pour  $s \in [t, T]$ . Ce qui permet d'introduire la fonction valeur dynamique suivante

$$v(t, z, d) := \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_{t,d}} \mathbb{E} \left[ L(Z_T^{t,z,\alpha}) \right], \quad (t, z, d) \in \mathcal{D},$$

où  $\mathcal{D} := \{(t, z, d) : (t, z) \in [0, T] \times \mathcal{Z} \text{ et } d \in D_t\}$ .

On peut alors montrer que la fonction valeur  $v$  satisfait le principe de programmation dynamique suivant, où  $d(u, \alpha)$  est la mémoire des ordres de renouvellement qui ont eu lieu entre  $u - \delta$  et  $u$  si l'agent suit la stratégie  $\alpha$

(DP1) première inégalité de programmation dynamique

$$v(t, z, d) \geq \mathbb{E} \left[ v(\vartheta, Z_{\vartheta}^{t,z,\alpha}, d(\vartheta, \alpha)) \right],$$

pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}_{t,d}$  et tout  $\vartheta \in \mathcal{T}_{[t,T]}$ .

(DP2) deuxième inégalité de programmation dynamique : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha \in \mathcal{A}_{t,d}$  tel que

$$v(t, z, d) - \varepsilon \leq \mathbb{E} \left[ v(\vartheta, Z_{\vartheta}^{t,z,\alpha}, d(\vartheta, \alpha)) \right],$$

pour tout  $\vartheta \in \mathcal{T}_{[t,T]}$ .

La preuve de ces inégalités utilise les enveloppes convexes semi-continues de la fonction valeur et les propriétés de flots du processus d'état  $Z$ .

Afin de caractériser la fonction valeur  $v$  on décompose l'ensemble  $\mathcal{D}$  sous la forme  $\mathcal{D} = \bigcup_{k=0}^n (\mathcal{D}_k^1 \cup \mathcal{D}_k^2)$  où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_k^1 &= \{(t, z, d) \in \mathcal{D} : t \in [t_k, t_{k+1}) \text{ et } z = (x, 0, p, q)\}, \\ \mathcal{D}_k^2 &= \{(t, z, d) \in \mathcal{D} : t \in [t_k, t_{k+1}) \text{ et } z = (x, r, p, q) \text{ avec } r > 0\}, \end{aligned}$$

pour  $k = 0, \dots, n-1$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n^1 &= \{(t, z, d) \in \mathcal{D} : t = T \text{ et } z = (x, 0, p, q)\}, \\ \mathcal{D}_n^2 &= \{(t, z, d) \in \mathcal{D} : t = T \text{ et } z = (x, r, p, q) \text{ avec } r > 0\}. \end{aligned}$$

On introduit les opérateurs  $\Gamma^c, \Gamma_1^{rn}, \Gamma_2^{rn}, \mathcal{H}, \mathcal{N}_1, \bar{\mathcal{N}}_1, \mathcal{N}_2$  et  $\bar{\mathcal{N}}_2$  définis par

$$\begin{aligned} \Gamma^c(z, \ell) &= (x + (p - c_1)\ell - c_2, r - \ell, p, q), \\ \Gamma_1^{rn}(z, \ell) &= (x - (q + c_3)\ell, r + g_0, p, q), \\ \Gamma_2^{rn}(z, \ell) &= (x, r + g(\ell), p, q), \end{aligned}$$

pour tout  $z = (x, r, p, q) \in \mathcal{Z}$  et  $\ell \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathcal{H}\varphi(t, z, d) = \sup_{0 \leq a \leq r} \varphi(t, \Gamma^c(z, a), d),$$

pour tout  $(t, z, d) \in \mathcal{D}$  et toute fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1\varphi(t_k, z, d) &= \sup_{0 \leq e \leq K} \varphi\left(t_k, \Gamma_1^{rn}(\Gamma_2^{rn}(z, e_{k-m}), e), d \cup (t_k, e) \setminus (t_{k-m}, e_{k-m})\right), \\ \bar{\mathcal{N}}_1\varphi(t_k, z, d) &= \sup_{\substack{0 \leq e \leq K \\ 0 \leq a \leq r}} \varphi\left(t_k, \Gamma_1^{rn}(\Gamma_2^{rn}(\Gamma^c(z, a), e_{k-m}), e), d \cup (t_k, e) \setminus (t_{k-m}, e_{k-m})\right), \end{aligned}$$

pour tout  $k = m+1, \dots, n$ , tout  $(t_k, z, d) \in \mathcal{D}$  et toute fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{D}$ , et

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2\varphi(t_k, z, d) &= \sup_{0 \leq e \leq K} \varphi\left(t_k, \Gamma_1^{rn}(z, e), d \cup (t_k, e)\right), \\ \bar{\mathcal{N}}_2\varphi(t_k, z, d) &= \sup_{\substack{0 \leq e \leq K \\ 0 \leq a \leq r}} \varphi\left(t_k, \Gamma_1^{rn}(\Gamma^c(z, a), e), d \cup (t_k, e)\right), \end{aligned}$$

pour tout  $k = 0, \dots, m$ , tout  $(t_k, z, d) \in \mathcal{D}$  et toute fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{D}$ .

L'opérateur local du second ordre  $\mathcal{L}$  associé à  $(P, Q, R)$  est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\varphi(t, z) &= \partial_t \varphi(t, z) + \mu p \partial_p \varphi(t, z) + \rho q \partial_q \varphi(t, z) + \eta r (\lambda - r) \partial_r \varphi(t, z) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \sigma^2 p^2 \partial_{pp}^2 \varphi(t, z) + \varsigma^2 q^2 \partial_{qq}^2 \varphi(t, z) + 2\sigma\varsigma pq \partial_{pq}^2 \varphi(t, z) + \gamma^2 r^2 \partial_{rr}^2 \varphi(t, z) \right), \end{aligned}$$

pour tout  $(t, z) \in [0, T] \times \mathcal{Z}$  avec  $z = (x, r, p, q)$  et toute fonction  $\varphi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{Z})$ .

Cela permet d'écrire la caractérisation de la fonction valeur  $v$ .

**Théorème 3.3.14.** *v est l'unique fonction satisfaisant*

$$x \leq v(t, z, d) \leq x + C(1 + |r|^4 + |p|^4 + |q|^4),$$

pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $z = (x, r, p, q) \in \mathcal{Z}$ , et  $d \in D_t$ , et solution de viscosité du système d'EDP suivant

$$-\mathcal{L}v(t, z, d) = 0,$$

pour  $(t, z, d) \in \mathcal{D}_k^1$  et  $k = 0, \dots, n$ ,

$$\min \left\{ -\mathcal{L}v(t, z, d), v(t, z, d) - \mathcal{H}v(t, z, d) \right\} = 0,$$

pour  $(t, z, d) \in \mathcal{D}_k^2$  et  $k = 0, \dots, n-1$ ,

$$v(T^-, z, d) = \max \{ \mathcal{N}_1 L(z, d), \bar{\mathcal{N}}_1 L(z, d) \},$$

pour  $(T, z, d) \in \mathcal{D}$ ,

$$v(t_k^-, z, d) = \max \{ \mathcal{N}_1 v(t_k, z, d), \bar{\mathcal{N}}_1 v(t_k, z, d) \},$$

pour  $(t_k, z, d) \in \mathcal{D}_k$  et  $k = m+1, \dots, n-1$ , et

$$v(t_k^-, z, d) = \max \{ \mathcal{N}_2 v(t_k, z, d), \bar{\mathcal{N}}_2 v(t_k, z, d) \},$$

pour  $(t_k, z, d) \in \mathcal{D}_k$  et  $k = 0, \dots, m$ .

De plus  $v$  est continue sur  $\mathcal{D}_k$  pour tout  $k = 0, \dots, n-1$ .

Pour majorer la fonction  $v$  on considère le processus qui majore  $R$  en ne récoltant jamais et en renouvelant toujours le maximum possible. Il est alors possible de majorer ce nouveau processus en utilisant la forme fermée de la solution de l'équation de logistique.

Pour montrer que la fonction  $v$  est solution aux EDP on utilise les enveloppes convexes semi-continues inférieur et supérieur de  $v$  et que celles-ci sont des sur et sous solutions de viscosité en utilisant une preuve par récurrence et en distinguant les cas  $\mathcal{D}_k^1$  et  $\mathcal{D}_k^2$ , on utilise les résultats de [13] pour le cas  $\mathcal{D}_k^2$ .

Pour approximer la fonction valeur  $v$  nous l'approximons de manière récurrente en travaillant sur chaque espace  $\mathcal{D}_k^1$  puis  $\mathcal{D}_k^2$  en commençant par  $k = n-1$ . Sur l'espace  $\mathcal{D}_{n-1}^1$ , on a

$$v(t, z, d) = \mathbb{E} \left[ \max \{ \mathcal{N}_1 L(Z_T^{t,z,d}, d), \bar{\mathcal{N}}_1 L(Z_T^{t,z,d}, d) \} \right].$$

On approxime cette espérance avec son estimateur de Monte-Carlo. Sur  $\mathcal{D}_{n-1}^2$ ,  $v$  est solution de l'EDP

$$\min \left\{ -\mathcal{L}v(t, z, d), v(t, z, d) - \mathcal{H}v(t, z, d) \right\} = 0.$$

On approxime la solution de cette EDP en utilisant [7] avec comme condition au bord  $r = 0$  l'approximation de  $v$  sur  $\mathcal{D}_{n-1}^1$ .

Une fois que l'on a une approximation  $\hat{v}(t, z, d)$  de  $v(t, z, d)$  sur  $\mathcal{D}_{k+1}^1$  et  $\mathcal{D}_{k+1}^2$ , on obtient une approximation sur  $\mathcal{D}_k^1$  en prenant l'estimateur de Monte-Carlo de

$$v(t, z, d) = \mathbb{E} \left[ \max \{ \mathcal{N}_i \hat{v}(t_{k+1}, Z_{t_{k+1}}^{t,z,d}, d), \bar{\mathcal{N}}_i \hat{v}(t_{k+1}, Z_{t_{k+1}}^{t,z,d}, d) \} \right],$$

avec  $i = 1$  si  $k \geq m$  sinon  $i = 2$ . Sur l'espace  $\mathcal{D}_k^2$ , on approxime l'EDP en utilisant [7] et pour les conditions aux bords on utilise les approximations de  $v$  sur  $\mathcal{D}_k^1$  pour  $r = 0$ , sur  $\mathcal{D}_{k+1}^1$  et  $\mathcal{D}_{k+1}^2$  pour  $t = t_{k+1}$  que l'on a déjà.

Pour approcher la stratégie optimale, on utilise les techniques classiques en théorie du contrôle impulsionnel mais en utilisant l'approximation  $\hat{v}$  à la place de la fonction valeur  $v$ . L'instant du  $k + 1$ -ième ordre et la taille de l'ordre  $\hat{\zeta}_{k+1}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{k+1} &= \inf \left\{ s \geq \hat{\tau}_k : \hat{v}(s, \hat{Z}_s^k, \hat{d}_s) = \mathcal{H}\hat{v}(s, \hat{Z}_s^k, \hat{d}_s) \right\} \\ \hat{\zeta}_{k+1} &\in \arg \max_{0 \leq a \leq \hat{R}_{\tau_1}^k} \hat{v}(\hat{\tau}_{k+1}, \Gamma^c(\hat{Z}_{\hat{\tau}_{k+1}}^k, a), \hat{d}_{\hat{\tau}_{k+1}}). \end{aligned}$$

L'ordre de renouvellement à la date  $t_i$  est donné par

$$\hat{\xi}_i = \arg \max_{0 \leq e \leq K} \hat{v}(t_i, \Gamma_1^{rn}(\hat{Z}_{t_i}^k, e), \hat{d}_{t_{i-1}} \cup (t_i, e)).$$

Je finis cette section en donnant quelques figures pour expliquer les résultats numériques obtenus. On suppose que les paramètres du modèle sont  $\eta = 1$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $g_0 = 0.03$ ,  $\mu = 0.07$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $T = 3$ ,  $c_1 = c_3 = 0.1$ ,  $c_2 = 0.01$  et  $g(x) = x$ .

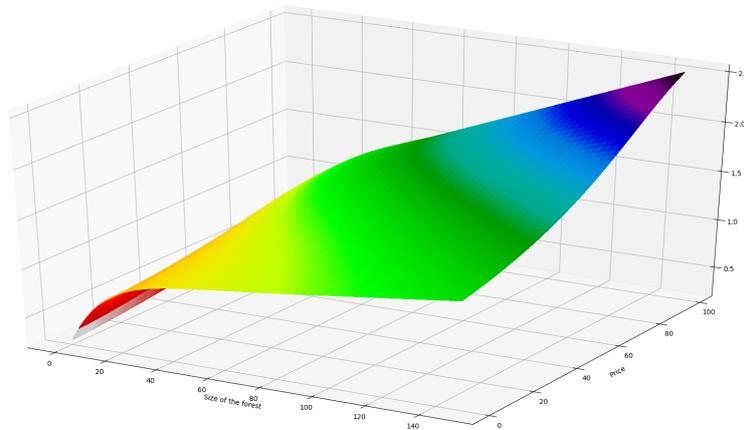


FIGURE 3.8 – Fonction valeur en fonction du prix  $P$  et de la quantité de ressource exploitable  $R$ .

On remarque dans la figure 3.8 que la fonction valeur est croissante avec la quantité de ressource disponible et le prix de la ressource, ce qui est prévisible. Concernant la figure 3.9, on remarque que la région de récolte est croissante avec le prix, plus le prix est élevé plus on récolte même si la quantité de ressource disponible est faible, ce n'est pas intéressant d'attendre pour récolter plus tard vu que le prix est haut. Concernant la région de renouvellement, on remarque qu'elle est décroissante avec le prix, plus le prix est bas plus on renouvelle parce que ça ne coûte pas cher et on espère que le prix augmente dans le futur.

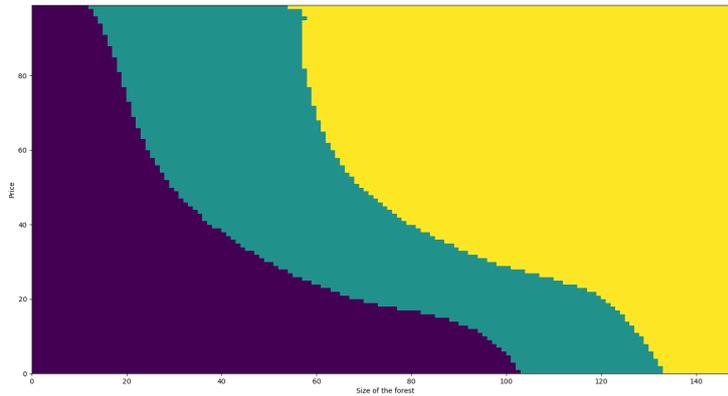


FIGURE 3.9 – Stratégie optimale en fonction du prix  $P$  et de la quantité de ressource disponible  $R$ . La région violette correspond à un ordre de renouvellement, la jaune à un ordre de récolte, la verte à ne rien faire

### 3.4 Perspectives

Je regarde actuellement le problème de gestion d'une ressource dont le stock évolue naturellement lorsqu'on peut réintroduire de la ressource en temps continu en utilisant une approche principal-agent. On suppose que l'agent peut exploiter la ressource mais doit rendre des comptes à un principal qui lui mettra une amende si à la date terminale la quantité de la ressource est trop faible. On regarde quelle est la meilleure politique d'amende. On souhaite également traiter le cas lorsque l'agent ne peut pas réintroduire de la ressource, mais dans ce cas il y a des termes non standard qui apparaissent dans l'EDP associée au problème du principal en particulier on a des parties positives de la dérivée de la fonction valeur.

# Bibliographie

- [1] Ankirchner S., Blanchet-Scalliet C. and A. Eyraud-Loisel : "Credit risk premia and quadratic BSDEs with a single jump", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13 (07), 1103-1129 (2010).
- [2] Bielecki T. and M. Jeanblanc : "Indifference prices in Indifference Pricing", *Theory and Applications, Financial Engineering*, Princeton University Press. R. Carmona editor volume (2008).
- [3] Bielecki T. and M. Rutkowski : "Credit risk : modelling, valuation and hedging", *Springer Finance* (2004).
- [4] Bielecki T., Jeanblanc M. and M. Rutkowski : "Stochastic Methods in Credit Risk Modelling", *Lectures notes in Mathematics*, Springer, 1856, 27-128 (2004).
- [5] Bouchard B. and R. Elie : "Discrete-time approximation of decoupled FBSDE with jumps", *Stochastic processes and Their Applications*, 118, 53-75 (2008).
- [6] Bruder B. and H. Pham : "Impulse control on finite horizon with execution delay", *Stochastic Processes and their Applications*, 119, 1436-1469 (2009).
- [7] Chancelier J.-P., B. Øksendal and A. Sulem : "Combined stochastic control and optimal stopping, and application to numerical approximation of combined stochastic and impulse control," *Stochastic Financial Mathematics, Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, 237, 149-173 (2002).
- [8] Cheridito P. and Y. Hu : "Optimal consumption and investment in incomplete markets with general constraints", *Stoch. Dynam.*, 11, 283-299 (2011).
- [9] Hu Y., Imkeller P. and M. Muller : "Utility maximization in incomplete markets", *Annals of Applied Probability*, 15, 1691-1712 (2005).
- [10] Jeulin T. : "Semimartingales et grossissements d'une filtration", *Lect. Notes in Maths*, Springer, 883 (1980).
- [11] Jeulin T. and M. Yor : "Grossissement de filtration : exemples et applications", *Lect. Notes in Maths*, Springer, 1118 (1985).
- [12] Jiao Y. and H. Pham : "Optimal investment with counterparty risk : a default-density modeling approach", *Finance and Stochastics*, 15 (4), 725-753 (2009).
- [13] Ly Vath V., Mnif M. and H. Pham : "A model of portfolio selection under liquidity risk and price impact", *Finance and Stochastics*, 11, 51-90 (2007).
- [14] Morlais M.-A. : "Utility maximization in a jump market model", *Stochastics and Stochastics Reports*, 81, 1-27 (2009).
- [15] Øksendal B., Sulem A. and T. Zhang : "Optimal control of stochastic delay equations and time-advanced backward stochastic differential equations", *Adv. Appl. Prob.*, 43, 572-596 (2011).
- [16] Pham H. : "Stochastic control under progressive enlargement of filtrations and applications to multiple defaults risk management", *Stochastic processes and Their Applications*, 120, 1795-1820 (2010).

- [17] Pham H. and M.-C. Quenez : "Optimal portfolio in partially observed stochastic volatility models", *Annals of Applied Probability*, 11, 210-238 (2001).
- [18] Peng S. and Z. Yang : "Anticipated backward stochastic differential equations", *The Annals of Probability*, 37 (3), 877-902 (2009).
- [19] Richou A. : "Numerical simulation of BSDEs with drivers of quadratic growth", *Annals of Applied Probability*, 21, 1933-1964 (2011).
- [20] Song S. : "Optional splitting formula in a progressively enlarged filtration", *ESAIM Probability and Statistics*, 18, 829-853 (2014).
- [21] Zhang J. : "A numerical scheme for BSDEs", *Annals of Applied Probability*, 14, 459-488 (2004).