



**HAL**  
open science

# Structures simpliciales, simploldales et cellulaires pour la modélisation géométrique à base topologique

Samuel Peltier

► **To cite this version:**

Samuel Peltier. Structures simpliciales, simploldales et cellulaires pour la modélisation géométrique à base topologique. Informatique [cs]. Université de Poitiers, 2023. tel-04523303

**HAL Id: tel-04523303**

**<https://hal.science/tel-04523303>**

Submitted on 27 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain



UNIVERSITÉ DE POITIERS

---

# Habilitation à diriger des recherches en informatique

*présentée par*

SAMUEL PELTIER

## Structures simpliciales, simploldales et cellulaires pour la modélisation géométrique à base topologique

---

Préparée au laboratoire XLIM, UMR CNRS 7252

Soutenue publiquement le 14 décembre 2023

### Composition du jury :

DOMINIQUE BECHMANN, professeure, université de Strasbourg, ICUBE ..... Rapporteuse  
CHRISTIAN GENTIL, professeur, université de Bourgogne, LIB ..... Rapporteur  
JEAN-LUC MARI, professeur, Aix-Marseille université, LIS ..... Rapporteur  
GUILLAUME DAMIAND, directeur de recherche, CNRS, LIRIS ..... Examineur  
STEFANIE HAHMANN, professeure, université de Grenoble, LJK ..... Examinatrice  
PASCAL LIENHARDT, professeur, université de Poitiers, XLIM ..... Examineur  
GÉRALDINE MORIN, professeure, université de Toulouse, IRIT ..... Examinatrice



## Remerciements

Je suis infiniment reconnaissant à toutes celles et ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à ce que cette aventure aboutisse.

Je remercie sincèrement l'ensemble des membres du jury DOMINIQUE BECHMANN, CHRISTIAN GENTIL, JEAN-LUC MARI, GUILLAUME DAMIAND, STEFANIE HAHMANN, PASCAL LIENHARDT et GÉRALDINE MORIN d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à PASCAL LIENHARDT pour nos innombrables discussions plus passionnantes les unes que les autres, pour son regard affuté sur l'ensemble des sujets traités dans ce manuscrit, et pour tout le savoir qu'il a pu me transmettre durant la vingtaine d'années qui vient de s'écouler.

Les probabilités pour que j'oublie de nommer des personnes étant trop fortes, mes remerciements suivants seront tout aussi sincères que concis. Merci donc aux collègues, nombreux, pour tous nos échanges tellement enrichissants, et pour tous leurs encouragements. Je remercie  $10^3$  fois ma famille et tous mes potes, nombreux eux aussi, pour leur soutien sans faille tout au long de cette aventure.

Je finalement déroger à la règle que je viens d'annoncer, et terminer par remercier nommément les trois personnes les plus importantes de ma vie, mon triptyque, mes filles : Lalie, Bertille et Rose.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte – Problématique . . . . .	1
1.1.1	Caractérisation topologique . . . . .	2
1.1.2	Combinatoire, algèbre et géométrie . . . . .	4
1.2	Structure du document . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Structures Combinatoires</b>	<b>9</b>
2.1	Structures simpliciales . . . . .	11
2.1.1	Ensembles semi-simpliciaux . . . . .	11
2.1.2	Complexes simpliciaux abstraits . . . . .	15
2.2	Structures simloïdales . . . . .	18
2.2.1	Ensembles semi-cubiques . . . . .	19
2.2.2	Ensembles semi-simloïdaux . . . . .	19
2.2.3	Complexes simloïdaux abstraits . . . . .	23
2.3	Structures cellulaires . . . . .	27
2.3.1	Numérotation – Cellules . . . . .	27
2.3.2	Graphes d’incidence . . . . .	29
2.3.3	Variétés – Quasi-variétés . . . . .	33
2.3.4	Cartes combinatoires . . . . .	36
2.3.5	Équivalences de modèles . . . . .	42
2.4	Structures celluloïdales . . . . .	45
2.4.1	Numérotation – Celluloïdes . . . . .	45
2.4.2	Quasi-variétés celluloïdales . . . . .	47
2.4.3	Graphes d’incidences simloïdaux . . . . .	52
2.5	Gestion de la dégénérescence . . . . .	54
2.5.1	Ensembles simpliciaux . . . . .	54
2.5.2	Ensembles simloïdaux . . . . .	58
2.6	Conclusion . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Calculs de groupes d’homologie</b>	<b>65</b>
3.1	Notions de base . . . . .	66
3.1.1	CW-complexes – Complexe de chaînes . . . . .	66
3.1.2	Cycles, bords, homologie . . . . .	67
3.2	Calcul global . . . . .	68
3.2.1	Matrices d’incidence – Forme normale de SMITH . . . . .	69
3.2.2	Calcul des générateurs – forme normale de SMITH-AGOSTON . . . . .	70
3.2.3	Gestion des dégénérés . . . . .	71
3.2.4	Calcul sur les ensembles simloïdaux . . . . .	72
3.2.5	Calcul sur les structures cellulaires . . . . .	72
3.2.6	Liens avec la caractéristique d’EULER-POINCARÉ . . . . .	76

3.3	Calcul incrémental . . . . .	77
3.3.1	Calcul incrémental des nombres de BETTI . . . . .	77
3.3.2	Homologie persistante . . . . .	77
3.3.3	Homologie effective . . . . .	81
3.3.4	Calcul incrémental sur des structures simloïdales . . . . .	92
3.3.5	Calcul incrémental sur des quasi-variétés cellulaires . . . . .	96
3.4	Conclusion . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Objets géométriques</b>	<b>103</b>
4.1	Réalisation géométrique . . . . .	104
4.1.1	Complexes simpliciaux . . . . .	104
4.1.2	Complexes simloïdaux . . . . .	105
4.1.3	Autres structures . . . . .	106
4.2	Plongement linéaire . . . . .	106
4.2.1	Complexes simpliciaux abstraits . . . . .	106
4.2.2	Complexes simloïdaux abstraits . . . . .	107
4.2.3	Structures cellulaires sans multi-incidence . . . . .	107
4.2.4	Structures avec multi-incidence . . . . .	108
4.3	Espaces de BÉZIER . . . . .	108
4.3.1	Notions de base . . . . .	108
4.3.2	Ensembles semi-simpliciaux . . . . .	109
4.3.3	Ensembles semi-simloïdaux . . . . .	113
4.3.4	Ensembles simpliciaux . . . . .	116
4.3.5	Ensembles simloïdaux . . . . .	119
4.3.6	Structures cellulaires . . . . .	122
4.4	Application à la modélisation d'objets tubulaires . . . . .	123
4.4.1	Contexte et objectifs . . . . .	123
4.4.2	Branches – Jonctions . . . . .	124
4.4.3	Pavage quad de la sphère . . . . .	125
4.4.4	Géométrie des branches . . . . .	128
4.4.5	Résultats . . . . .	130
4.5	Conclusion . . . . .	131
<b>5</b>	<b>Conclusion - Perspectives</b>	<b>135</b>
5.1	Bilan . . . . .	135
5.1.1	Structures combinatoires . . . . .	135
5.1.2	Calcul de l'homologie . . . . .	136
5.1.3	Objets géométriques . . . . .	136
5.2	Projet de recherche . . . . .	137
5.2.1	Structures combinatoires . . . . .	137
5.2.2	Calcul de l'homologie . . . . .	138
5.2.3	Objets géométriques . . . . .	139
	<b>Bibliographie</b>	<b>143</b>

# Introduction

## Sommaire

<b>1.1 Contexte – Problématique</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1.1 Caractérisation topologique . . . . .	2
1.1.2 Combinatoire, algèbre et géométrie . . . . .	4
<b>1.2 Structure du document</b> . . . . .	<b>7</b>

## 1.1 Contexte – Problématique

La *modélisation géométrique à base topologique* vise à décrire des objets géométriques structurés en cellules de différentes dimensions : sommets, arêtes, faces, volumes... Cette description se retrouve dans divers domaines de l'informatique graphique : en conception assistée par ordinateur (CAO), en géométrie algorithmique, en simulation, en géométrie discrète, en animation, ou encore en analyse d'image.

Le terme *modélisation géométrique à base topologique* met en exergue deux adjectifs qui sont au coeur de cette discipline : *géométrique* et *topologique*. On s'intéresse ici à la *modélisation d'objets géométriques structurés* et à leur *caractérisation topologique*. Par exemple, considérons les dés représentés sur la figure 1.1a. Chaque dé est composé d'un nombre de faces différent et les faces de ces dés n'ont pas toutes la même structure : celles des dés rouge et bleu possèdent quatre cotés, celles des dés jaune, vert et blanc ont trois cotés, et celles du dé noir en ont cinq.

La structure de chaque dé peut être décrite par la structure de ses faces et par les relations d'adjacence entre celles-ci. Par ailleurs, le volume associé à chaque dé est entièrement décrit par son bord. Cette approche de représentation par les bords est classiquement utilisée en modélisation (B-Rep). Dans d'autres contextes, cette représentation par les bords ne suffit pas : une représentation des éléments volumiques est nécessaire. C'est le cas par exemple en fabrication additive lorsque l'on souhaite fabriquer un objet composé de différents matériaux, en géologie où un maillage peut être utilisé pour effectuer des simulations numériques, ou encore pour l'élaboration de jumeaux numériques pour la simulation d'actes chirurgicaux ou de réactions chimiques. La structure complète d'un dé peut être décrite à partir de cellules abstraites de dimension 0 (les sommets), 1 (les arêtes), 2 (les faces) et 3 (le volume), en décrivant les relations d'incidence entre les cellules de dimension  $n$  et  $n-1$  : les faces sont incidentes au volume, chaque arête est incidente à deux





FIGURE 1.1 – (a) Différents dés présentant différentes structures et différentes formes. (b) Différents joints de différentes formes.

faces, et un coin (*i. e.* un sommet) d'un dé correspond à des extrémités d'arêtes adjacentes.

On peut noter que les faces du dé rouge et du dé bleu, qui ont la même structure, ont des formes différentes. Il est donc important de pouvoir associer une cellule géométrique à chaque cellule abstraite. Pour un dé, en associant un point de  $\mathbb{R}^3$  à chaque sommet, la forme de chaque arête peut être définie par le segment reliant ses deux extrémités, et la forme de chaque face, comme la partie du plan bordée par les arêtes de son bord. Dans d'autres contextes, il est important de pouvoir donner des formes courbes aux objets manipulés. C'est le cas notamment en CAO pour la modélisation de pièces mécaniques ou d'éléments de carrosserie, où des modèles paramétriques surfaciques basés sur les espaces de BÉZIER, B-splines ou NURBS sont classiquement utilisés pour représenter des surfaces courbes. Lorsque l'on associe une forme géométrique à un objet abstrait, combinatoire, on le *réalise géométriquement* dans un espace topologique.

Enfin, on peut facilement imaginer que chacun de ces dés peut être obtenu à partir d'un bloc de plastique suffisamment grand en retirant de la matière, sans jamais percer le bloc. Considérons à présent les joints toriques représentés sur la figure 1.1b. Ils peuvent également être obtenus à partir d'un bloc de plastique en retirant de la matière, mais cette fois-ci, il faudra obligatoirement percer un tunnel afin d'obtenir la structure désirée. En conséquence, un dé et un joint torique n'ont pas la même *caractérisation topologique*.

### 1.1.1 Caractérisation topologique

Selon le contexte, la *caractérisation topologique* d'un objet prend des sens différents. Afin préciser de quoi l'on parle, considérons des variétés sans bord de dimension 2, ou surfaces fermées : la sphère, le tore à  $n$  trous, la bouteille de KLEIN ou encore le plan projectif. De manière intuitive, tous ces objets peuvent être obtenus en cousant deux à

deux des pièces de tissu polygonales le long de leurs côtés<sup>1</sup>. En *topologie générale*, une variété sans bord de dimension 2 est définie par le voisinage de tout point qui doit être topologiquement équivalent, ou *homéomorphe* à une boule de dimension 2. C'est-à-dire qu'il existe une bijection continue permettant de passer du voisinage de tout point à un disque et telle que la bijection inverse soit également continue. Dit autrement, si on se donne un point quelconque sur l'assemblage, il est toujours possible de découper un petit disque de tissu autour. De plus deux points distincts admettent des voisinage disjoints, on dit alors que l'espace topologique est *séparé* ou HAUSDORFF.

En faisant abstraction de la géométrie d'un objet, on peut étudier sa topologie d'un point de vue combinatoire en ne considérant que sa structure, *i. e.* les relations d'incidence entre les cellules. Si dans un objet subdivisé de dimension 2, la propriété *toute arête est incidente à exactement deux faces* est satisfaite, alors il s'agit d'une variété combinatoire fermée de dimension 2. C'est-à-dire que si l'on se donne une représentation combinatoire d'un objet, alors on peut savoir s'il s'agit d'une surface fermée, et si la réponse est oui, alors on sait, à homéomorphisme près, à quelle variété topologique elle correspond. Malheureusement, cette caractérisation combinatoire des surfaces ne se généralise pas et ne permet pas de caractériser les variétés de dimension supérieure. Comme nous le verrons dans le chapitre 2, la classe d'objets caractérisée est plus large, il s'agit des *quasi-variétés*.

De manière générale, il n'est pas possible de caractériser à homéomorphisme près les objets géométriques que l'on manipule. En revanche, on peut caractériser leur structure, en calculant des propriétés qui sont préservées par homéomorphisme. On appelle ces propriétés des *invariants topologiques*. Par exemple, le nombre de composantes connexes, le nombre de tunnels, l'orientabilité, sont des invariants topologiques. Il est essentiel de savoir contrôler et caractériser la structure des objets que l'on manipule. Par exemple, lorsque l'on reconstruit un modèle volumique issu d'un système d'acquisition 3D, les propriétés topologiques peuvent guider cette reconstruction, e.g. le réseau racinaire d'une plante ou un arbre vasculaire est composé d'une seule composante connexe et ne contient pas de tunnels, une structure d'os trabéculaire contient des tunnels mais pas de cavité. En CAD-CAM, lorsque l'on modélise une pièce par des opérations de construction, il est important de pouvoir détecter des changements de structure, par exemple la déconnexion ou la création d'un tunnel ; *in fine*, la pièce ne pourra être usinée qu'à condition que son bord soit orientable.

L'homologie est un invariant topologique qui caractérise les "trous" d'un objet en toute dimension. En dimension 0, les trous correspondent aux composantes connexes, en dimension 1 aux tunnels, en dimension 2 aux cavités ; cette notion de trou se généralise en dimension supérieure. Bien sûr, deux objets ayant la même homologie ne sont pas nécessairement homéomorphes. Par exemple la figure 1.2 représente deux objets qui ont l'homologie du tore : une composante connexe, deux tunnels et une cavité. L'objet représenté en (a) est homéomorphe au tore, mais celui représenté en (b) ne l'est pas.

À l'inverse, si deux objets ont des invariants topologiques différents, alors ils ne sont

---

1. En réalité, on ne peut pas réaliser une bouteille de KLEIN ou un plan projectif dans  $\mathbb{R}^3$  ; on peut en revanche le faire dans  $\mathbb{R}^4$ .

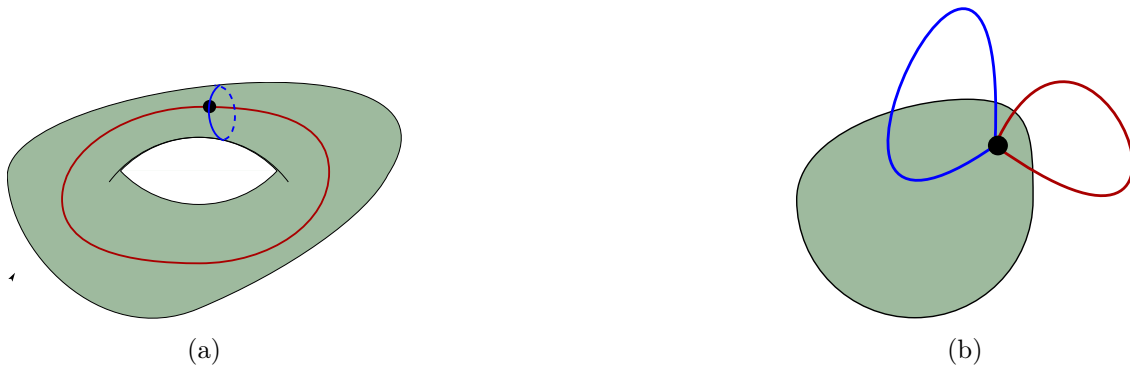


FIGURE 1.2 – Deux objets ayant l’homologie du tore. (a) est homéomorphe au tore, (b) ne l’est pas.

pas homéomorphes. Par exemple, considérons une balle de tennis de table et une bille de flipper. Ces deux objets ont une seule composante connexe, et aucun tunnel. Leurs groupes d’homologie de dimension 0 et 1 sont identiques (*i. e.* un trou de dimension 0 et aucun de dimension 1). En revanche, la balle de tennis de table est creuse, elle possède donc une cavité (*i. e.* un trou de dimension 2) alors que la bille de flipper est pleine et n’a donc pas de trou de dimension 2. Ces deux objets ne sont donc pas homéomorphes.

L’homologie est un invariant topologique puissant et incontournable :

- il est classiquement étudié en topologie algébrique, de nombreux résultats mathématiques sont établis et peuvent être utilisés ;
- il contient d’autres invariants comme le nombre de composantes connexes, les nombres de BETTI, la caractéristique d’EULER ;
- il est directement lié à la structure de l’objet, c’est-à-dire qu’un objet de dimension  $n$  ne contient aucun trou de dimension supérieure à  $n$ , ce qui n’est pas le cas par exemple des groupes d’homotopie ;
- sa définition est homogène : il se calcule de la même manière en toute dimension.

### 1.1.2 Combinatoire, algèbre et géométrie

#### Un monde combinatoire

Au cours des dernières décennies, de nombreuses structures ont été définies afin de répondre à différents besoins en informatique graphique. Par exemple, en géométrie discrète ou en simulation, on travaille usuellement avec des structures à base de cubes, alors qu’en géométrie algorithmique ou en rendu, il est fréquent de travailler avec des structures à base de simplexes. Dans d’autres contextes, il peut s’avérer utile d’utiliser des structures permettant de manipuler des cellules plus générales, où par exemple, une face peut être bordée par un nombre quelconque d’arêtes.

Ainsi on peut distinguer ces différentes structures en fonction des types de cellules utilisées : certaines utilisent des cellules régulières simpliciales, cubiques ou simploldales (un simploldé est un produit de simplexes quelconques), d’autres utilisent des cellules

"quelconques".

On peut également distinguer ces structures selon les contraintes imposées ou non sur les assemblages de cellules. Par exemple, certaines structures contraignent les assemblages dans le but de représenter des variétés. D'autres structures au contraire permettent de modéliser des objets *non-variétés*, c'est-à-dire des assemblages "libres". Cela peut par exemple être utile pour la représentation d'un objet volumique par son squelette (axe médian), ou en géométrie discrète afin de considérer l'assemblage de deux voxels partageant seulement un sommet ou une arête comme connexe.

### Un monde géométrique

Lorsque l'on associe une forme à un objet combinatoire, on le *réalise géométriquement* dans un espace topologique : on associe une forme géométrique à chaque cellule abstraite. On se place ici généralement dans le cadre d'espaces *CW-complexes*<sup>2</sup>, où les cellules sont des *boules topologiques*. Si on se place dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ , la boule de dimension  $n$ , centrée en  $c$ , et de rayon  $r$  est l'ensemble des points situés à une distance inférieure à  $r$  du point  $c$ <sup>3</sup>. Un *CW-complexe* est défini de manière constructive comme suit : on se donne un ensemble discret  $X^0$  de boules de dimension 0. En attachant des boules de dimension 1 à  $X^0$  le long de leur bord  $S^0$ , on obtient  $X^1$ . Puis, en attachant des boules  $B^2$  à  $X^1$  le long de leur bord  $S^1$  on obtient  $X^2$  et ainsi de suite jusqu'à la dimension voulue. La figure 1.3 illustre une construction d'un *CW-complexe* décrivant le tore. L'ensemble  $X^0$  ne contient qu'un sommet. Ensuite, deux arêtes sont attachées à ce sommet, on obtient  $X^1$ . Enfin un disque est attaché à  $X^1$ .

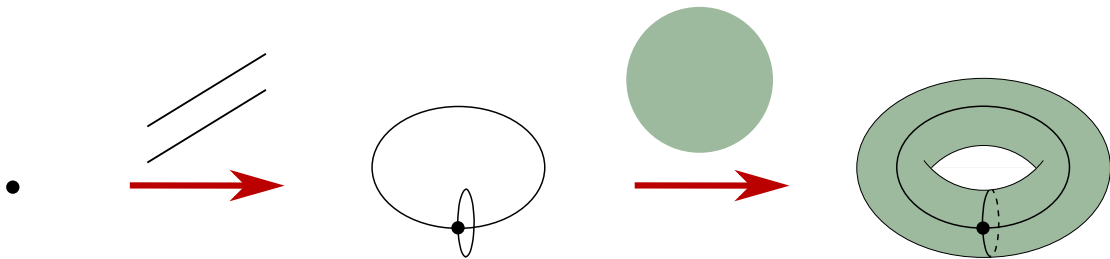


FIGURE 1.3 – Une construction d'un *CW-complexe* : le tore.

### Un monde algébrique

Les groupes d'homologie permettent de caractériser les *CW-complexes* en fonction de leurs trous. Pour effectuer les calculs, on associe une structure algébrique à un *CW-complexe* : un *complexe de chaînes libre*. Pour tout  $k \in [0, n]$ , on associe l'ensemble des boules  $B^k$  à un groupe abélien  $(C_k, +)$ . Les recollements des boules  $B^k$  du *CW-complexe* sur son  $(k - 1)$ -squelette  $X^{k-1}$  sont décrits dans le complexe de chaînes par des applications de bord  $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$  qui correspondent à l'extension linéaire des relations d'incidence des

2. Les *CW-complexes* Closure finite complexes with **W**eak topology, ont été définis par J. H. C. Whitehead [Whitehead 1949].

3. Le bord d'une boule  $B^n$  est une sphère  $S^{n-1}$ .

cellules. L'homologie du  $CW$ -complexe peut alors être calculée sur le complexe de chaînes associé.

Lorsque les  $CW$ -complexes sont triangulables, on associe directement un complexe de chaînes à une structure combinatoire. Une fois calculée, l'information homologique peut être restituée sur la structure combinatoire ou sur l'objet géométrique. On peut ainsi caractériser l'assemblage des cellules en fonction de ses trous, et selon le cas, localiser ces trous sur l'objet géométrique ou sur sa structure combinatoire.

### Activités de recherche

Le triptyque : *structures combinatoires, calcul de propriétés topologiques, formes géométriques* constitue la ligne directrice de nos travaux de recherche depuis le début des années 2000, où trois *mondes* interagissent : un monde combinatoire, un monde algébrique, et un monde géométrique. Ce triptyque représente donc notre vision de la modélisation géométrique, et notre approche de la recherche dans ce domaine qui vise à contribuer à chacun de ces trois *mondes*, tout en tenant compte des liens qui existent entre eux. La figure 1.4 décrit plus précisément ce triptyque, sur lequel s'appuie ce manuscrit.

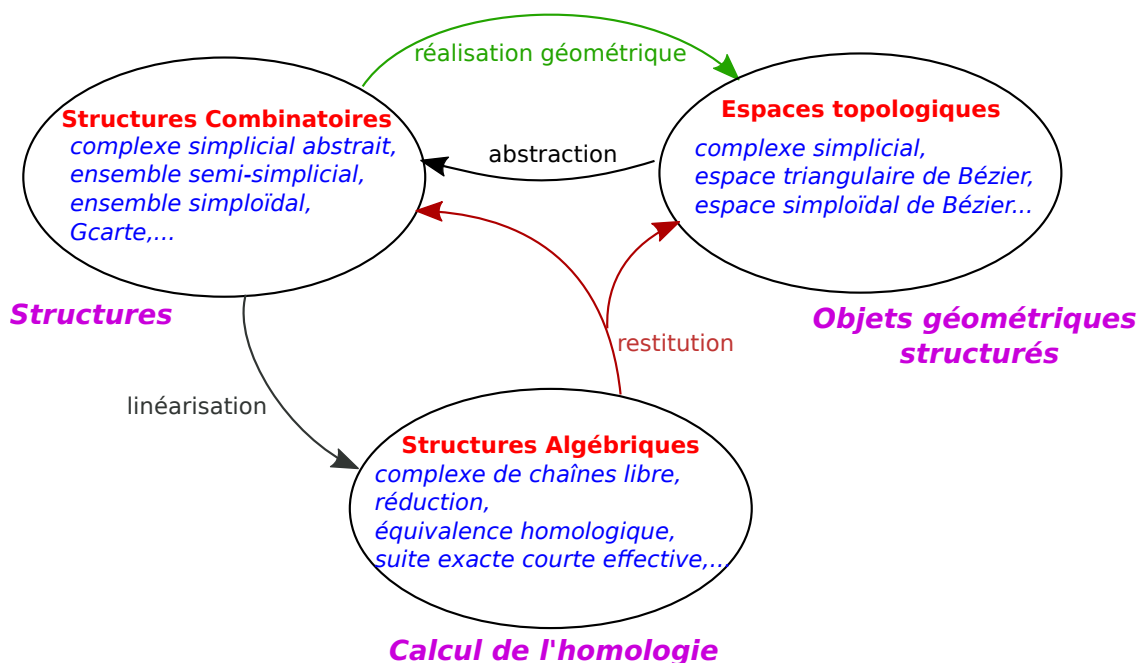


FIGURE 1.4 – La structure des objets subdivisés est modélisée par une structure combinatoire. Ces objets sont réalisés géométriquement par un  $CW$ -complexe, respectant la structure. À tout objet subdivisé modélisé par une structure combinatoire, on peut associer des structures algébriques, à partir desquelles l'homologie de l'objet peut être calculée. Une fois le calcul effectué, l'information homologique peut être reportée sur l'objet combinatoire ou sur sa géométrie.

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'appuient sur des collaborations internationales avec ROCIO GONZALES DIAZ, YLL HAXHIMUSA et ADRIAN ION, WALTER G. KROPATSCH, nationales avec GUILLAUME DAMIAND, JACQUES-OLIVIER LACHAUD et GÉRALDINE MORIN, et locales avec SYLVIE ALAYRANGUES, ARTHUR CAVALIER, LAURENT FUCHS et PASCAL LIENHARDT. Y ont participé les doctorants et post-doctorants INÉS CASTILLA RIESO (doctorante XLIM), SOUKAYNA QARBOUA (post-doctorante XLIM), WASSIM RHARBAOUI (doctorant XLIM), ainsi que les stagiaires du Master informatique de l'université de Poitiers, et de l'ENSEEIH DAMIEN AHOLOU, CLÉMENT CONTET, ANTOINE LAGRANGE et ALEXIS LOUAIL.

Ces collaborations ont donné lieu aux principales publications suivantes :

- concernant le calcul de groupes d'homologie et son optimisation : [Damiand 2006, Peltier 2007a, Peltier 2007b, Peltier 2009b, Damiand 2008, Alayrangues 2009b, Alayrangues 2009a, Damiand 2012, Alayrangues 2015b, Alayrangues 2015a, Lienhardt 2016, Rharbaoui 2020].
- concernant la définition et l'étude de structures combinatoires, en particulier simpléoïdales et cellulaires [Peltier 2009a, Alayrangues 2015c, Peltier 2018, Peltier 2023],
- concernant la modélisation d'objets tubulaires volumiques et paramétriques, à partir d'un squelette ; qui est une activité de recherche plus récente [Peltier 2021].

## 1.2 Structure du document

Le chapitre 2 propose un tour d'horizon de structures combinatoires utilisées en modélisation géométrique à base topologique : simpliciales, simpléoïdales et cellulaires. En particulier, une classification est proposée, mettant en avant trois mécanismes : le produit cartésien, la numérotation cellulaire et la suppression de la multi-incidence.

La section 2.1 rappelle la définition des ensembles semi-simpliciaux et des complexes simpliciaux abstraits. La section 2.2 rappelle les définitions des ensembles semi-simpléoïdaux, une définition des complexes simpléoïdaux abstraits est proposée. La section 2.3 présente des exemples de structures issues de deux familles de structures cellulaires : les  $CF$ -ordres, les  $n$ -surfaces, et les chaînes de  $n$ -surfaces dont les définitions sont basées sur les ordres (ou graphes d'incidence) ; les  $G$ cartes et les chaînes de cartes dont les définitions sont basées sur les cartes combinatoires. En section 2.4, nous définissons la nouvelle notion de *celluloïde*, permettant de définir des structures *celluloïdales* complétant la classification proposée en faisant le pont entre les structures simpléoïdales et cellulaires. Enfin, la section 2.5 met en avant un autre mécanisme : la dégénérescence, permettant la définition du produit cartésien simplicial et du cône simpléoïdal. Les structures présentées dans cette partie sont les ensembles simpliciaux et les ensembles simpléoïdaux.

Le chapitre 3 est dédié au calcul de groupes d'homologie. La section 3.1 rappelle les notions de base de complexe de chaînes, de groupe des cycles, groupe des bords et groupes d'homologie. La section 3.2 rappelle les méthodes globales basées sur des réductions de matrices d'incidence, pour les structures simpliciales, simpléoïdales et cellulaires. En

particulier nous montrons comment étendre les calculs aux structures cellulaires. La section 3.3 est dédiée au calcul incrémental de l'homologie. Les notions liées à l'homologie persistante sont rappelées, l'homologie effective est présentée, ainsi qu'une mise en œuvre pour l'opération d'identification. Le calcul incrémental basé sur le produit cartésien est présenté, mettant en avant la formule de KÜNNETH. Ce résultat peut être directement utilisé dans le cadre simplöidal. Enfin, nous montrons comment les outils de l'homologie effective permettent de calculer l'homologie de cartes combinatoires.

Le chapitre 4 traite de la géométrie associées aux structures vues au chapitre 2. La section 4.1 présente la notion de réalisation géométrique. La définition des complexes simpliciaux réalisant les complexes simpliciaux abstraits est rappelée, et la réalisation des complexes simplöidaux abstraits est présentée. La réalisation géométrique des autres structures est discutée.

La section 4.2 présente les plongements linéaires, c'est-à-dire que la forme de chaque cellule est déduite des positions de l'ensemble des sommets de son bord. La section 4.3 est dédiée aux espaces paramétriques de Bézier, permettant de donner une forme courbe aux cellules. En particulier, nous avons établi les propriétés permettant de retrouver les structures d'ensembles simpliciaux et simplöidaux au sein même des espaces de Bézier. Enfin, la section 4.4 présente un champ d'application des ensembles semi-simplöidaux : la modélisation d'objets tubulaires volumiques paramétriques à partir de squelettes.

Pour conclure, le chapitre 5.1 présente un bilan, ainsi que des perspectives de recherche en lien avec l'ensemble des travaux présentés.

# Structures Combinatoires

## Sommaire

<b>2.1 Structures simpliciales</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1.1 Ensembles semi-simpliciaux . . . . .	11
2.1.2 Complexes simpliciaux abstraits . . . . .	15
<b>2.2 Structures simploïdales</b> . . . . .	<b>18</b>
2.2.1 Ensembles semi-cubiques . . . . .	19
2.2.2 Ensembles semi-simploïdaux . . . . .	19
2.2.3 Complexes simploïdaux abstraits . . . . .	23
<b>2.3 Structures cellulaires</b> . . . . .	<b>27</b>
2.3.1 Numérotation – Cellules . . . . .	27
2.3.2 Graphes d’incidence . . . . .	29
2.3.3 Variétés – Quasi-variétés . . . . .	33
2.3.4 Cartes combinatoires . . . . .	36
2.3.5 Équivalences de modèles . . . . .	42
<b>2.4 Structures celluloïdales</b> . . . . .	<b>45</b>
2.4.1 Numérotation – Celluloïdes . . . . .	45
2.4.2 Quasi-variétés celluloïdales . . . . .	47
2.4.3 Graphes d’incidences simploïdaux . . . . .	52
<b>2.5 Gestion de la dégénérescence</b> . . . . .	<b>54</b>
2.5.1 Ensembles simpliciaux . . . . .	54
2.5.2 Ensembles simploïdaux . . . . .	58
<b>2.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>64</b>

Ce chapitre propose un tour d’horizon de structures combinatoires utilisées en modélisation géométrique à base topologique : simpliciales, simploïdales et cellulaires.

En particulier, nous étendons et complétons la classification présentée dans [Bechmann 2007, Lienhardt 2009]. La figure 2.1 illustre cette classification dans laquelle les structures se déduisent des ensembles semi-simpliciaux par trois mécanismes principaux : le produit cartésien, la numérotation cellulaire et la suppression de la multi-incidence. Dit autrement, toutes les structures ont un lien, plus ou moins direct avec les ensembles semi-simpliciaux. Plus précisément :

- un ensemble semi-simplicial est un ensemble de simplexes abstraits, les relations d’incidence entre ces simplexes est définie par des opérateurs de face ;
- le produit cartésien permet de définir les structures simploïdales à partir des structures simpliciales : un simploïde abstrait correspond à un produit cartésien de simplexes abstraits ;



- la numérotation cellulaire permet de définir les structures cellulaires : une cellule de dimension  $n$  est un cône sur une structure de dimension  $n - 1$  ;
- la suppression de la multi-incidence permet de définir des structures dans lesquelles moins d'informations sont explicitement représentées. En particulier, le simplexe abstrait n'est plus l'élément de base pour de telles structures, contrairement à celles permettant de représenter des cellules incidentes plusieurs fois à d'autres cellules <sup>1</sup>.

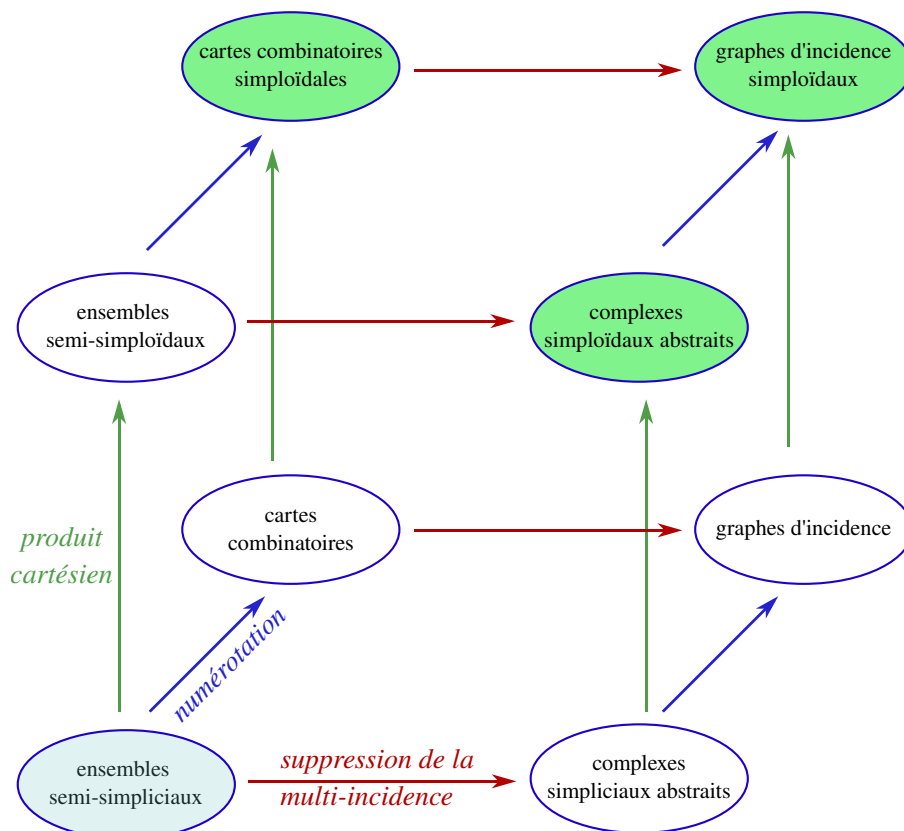


FIGURE 2.1 – Classification complète des familles de structures combinatoires, basée sur les ensembles semi-simpliciaux. Trois mécanismes sont mis en évidence dans cette classification : le produit cartésien permet de passer des structures simpliciales aux structures simloïdales, la numérotation cellulaire permet de structurer des cellules régulières en cellules plus générales, et la suppression de la multi-incidence permet de changer de formalisme.

Dans cette classification, nous proposons :

- une définition de cellule simloïdale, ou celluloïde : une celluloïde est un produit cartésien de cellules quelconques. Nous posons ainsi le cadre permettant d'étendre les cartes combinatoires afin de représenter des assemblages de celluloïdes ;

1. Sauf mention contraire, le terme *cellule* est utilisé dans ce manuscrit dans son sens le plus général, et désigne aussi bien un simplexe, un simloïde ou une cellule quelconque.

- d'expliciter le mécanisme de suppression de la multi-incidence permettant d'aboutir aux notions classiques de complexes simpliciaux abstraits et de graphes d'incidence. Nous étendons ces structures aux simpleïdes et proposons une première définition des complexes simpleïdaux abstraits, qui correspondent aux ensembles semi-simpleïdaux sans multi-incidence, et posons les bases pour la définition de graphes d'incidence simpleïdaux, dont les cellules sont des assemblages de celluloïdes ne présentant pas de multi-incidence.

Un autre mécanisme n'est pas présenté sur la figure 2.1 : la dégénérescence. De manière informelle, il permet "d'écraser" une cellule sur une de ses faces. Par exemple, une arête d'un triangle peut être dégénérée en un sommet. Intuitivement, l'arête géométrique correspondante est écrasée en un point ; le bord du triangle résultant ne comporte alors plus que deux arêtes. Ce mécanisme permet en particulier de définir le produit cartésien simplicial, et le cône simpleïdal.

Pour des raisons de clarté, le choix a été fait de présenter en dernier lieu les structures permettant la représentation de la dégénérescence : les ensembles simpliciaux et simpleïdaux. Comme nous le verrons en conclusion de ce chapitre, la définition de structures cellulaires permettant la représentation de cellules dégénérées ne nous a pas semblé utile.

La Section 2.1 rappelle les notions d'ensembles semi-simpliciaux et de complexes simpliciaux abstraits. La Section 2.2 rappelle la notion d'ensemble semi-simpleïdal, et présente les complexes simpleïdaux abstraits. La Section 2.3 rappelle les notions de cartes combinatoires et de graphes d'incidence. La Section 2.4 présente la notion de celluloïde permettant d'étendre les structures de cartes combinatoires au cadre simpleïdal. Enfin, la Section 2.5 rappelle les notions d'ensembles simpliciaux et simpleïdaux. Nous rappelons ou définissons également les opérations permettant manipuler ces structures, en mettant en avant les différents mécanismes établissant les liens existants entre ces structures.

## 2.1 Structures simpliciales

Comme indiqué en introduction, toutes les structures décrites dans ce manuscrit ont un lien avec les ensembles semi-simpliciaux. Dans la littérature, lorsque l'on présente les structures simpliciales, il est courant de commencer par donner la définition des complexes simpliciaux abstraits, qui permettent de décrire des objets simpliciaux de manière ensembliste, donc sans multi-incidence. Nous avons fait le choix de commencer par présenter la structure qui est à l'origine de cette classification : les ensembles semi-simpliciaux.

### 2.1.1 Ensembles semi-simpliciaux

Les ensembles semi-simpliciaux permettant de décrire des assemblages quelconques de simplexes. Leur définition se base sur un ensemble de simplexes abstraits, sur lesquels agissent des opérateurs de face, permettant de décrire les relations d'incidence entre un simplexe et les simplexes de son bord.

## 2.1.1.1 Structure combinatoire

**Définition 1** Un ensemble semi-simplicial (ou ESS) de dimension  $n$ ,  $S = (K, (d_i))$  est une famille d'ensembles  $K = (K^p)_{p \in [0, n]}$  munis d'applications  $d_i : K^p \rightarrow K^{p-1}$  pour  $p > 0$  et  $i \in [0, p]$ , qui vérifient :

$$\forall p > 1, \forall \sigma \in K^p, \sigma d_i d_j = \sigma d_j d_{i-1} \text{ avec } j < i.$$

Les éléments de  $K^p$  sont les **simplexes de dimension  $p$**  ou  **$p$ -simplexes**. Comme on s'intéresse aux ensembles semi-simpliciaux finis, tous les ensembles  $K^p$  sont finis et le nombre  $n$  d'ensembles de  $K$  est lui aussi fini.

Les applications  $d_i$  sont les **opérateurs de face** des simplexes. En toute rigueur, il faudrait nommer les opérateurs de face d'un  $p$ -simplexe  $d_i^p$  afin de distinguer par exemple l'opérateur de face  $d_0$  d'une arête, de celui d'un triangle ou d'un tétraèdre. Bien souvent, il n'y a pas d'ambiguïté, ce qui permet d'omettre l'exposant  $p$  des opérateurs de face, et ainsi simplifier la notation.

Notons que le choix a été fait ici d'utiliser la notation post-fixée pour les opérateurs de face. Ainsi,  $\sigma d_i d_j$  correspond à  $d_j(d_i(\sigma))$ . L'intérêt de cette notation est qu'elle permet de "lire" directement de gauche à droite en utilisant le même sens de lecture que celui utilisé pour lire ce document.

La figure 2.2 illustre des exemples et un contre-exemple d'ensembles semi-simpliciaux, ainsi que des notions qui suivent.

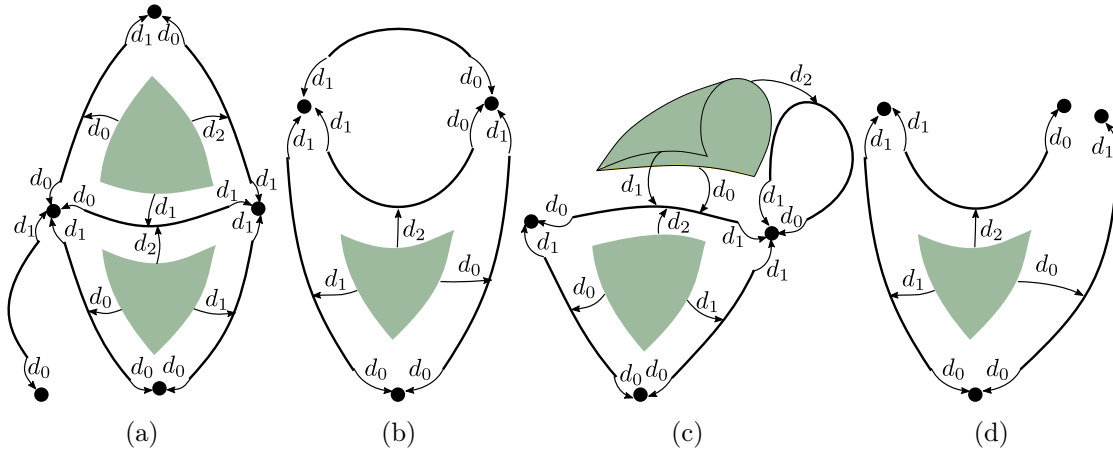


FIGURE 2.2 – (a)–(c) Trois ensembles semi-simpliciaux de dimension 2. Tous les simplexes de (a) et (b) sont complets. En (b), deux arêtes ont même bord. (c) contient de la multi-incidence. On peut vérifier que tout triangle  $\sigma$  vérifie  $\sigma d_2 d_1 = \sigma d_1 d_1$ ,  $\sigma d_2 d_0 = \sigma d_0 d_1$  et  $\sigma d_1 d_0 = \sigma d_0 d_0$ . (d) n'est pas un ensemble semi-simplicial :  $\sigma d_2 d_0 \neq \sigma d_0 d_1$ .

Si  $\sigma d_j = \mu$ , alors  $\mu$  est la  $j^{\text{e}}$  face de  $\sigma$ . Si dans un ensemble semi-simplicial  $S$ , un simplexe  $\sigma$  est incident plusieurs fois à une de ses faces  $i$ . e.  $\exists i \neq j$  tel que  $\sigma d_j = \sigma d_i$ , on dit que  $S$  contient de la **multi-incidence**.

Le **bord** d'un  $p$ -simplexe  $\sigma$  est l'ensemble des simplexes  $\mu = \sigma d_{i_1} \dots d_{i_k}$ ,  $k \in [1, p]$ . Une conséquence directe de la propriété de commutation des opérateurs de face est que tout simplexe du bord de  $\sigma$  peut être désigné de manière unique par une suite d'opérateurs de face d'indices strictement décroissants.

Deux simplexes sont **incidents** si l'un est dans le bord de l'autre. L'ensemble des simplexes qui ont  $\sigma$  dans leurs bords est l'**étoile** de  $\sigma$ . Un simplexe est dit **principal** si son étoile est vide. Un  $p$ -simplexe est **complet** s'il possède  $p + 1$  sommets distincts dans son bord. Un sous-ensemble de  $S$  qui est aussi un ensemble semi-simplicial est un **sous-ensemble semi-simplicial** de  $S$ .

Les relations sur les opérateurs de face garantissent la cohérence du bord des simplexes. Par exemple, sans ces relations, un  $p$ -simplexe pourrait avoir jusqu'à  $(p + 1)!$  sommets distincts dans son bord, alors qu'il ne peut pas en posséder plus de  $(p + 1)$ .

### 2.1.1.2 Opérations de construction

L'opération de **cône** permet en particulier de construire les simplexes et leurs bords, l'opération d'**identification** permet d'assembler les simplexes. Les définitions sont rappelées ici, des précisions et des algorithmes figurent dans [Peltier 2009a].

#### Cône

L'opération de cône sur un ensemble semi-simplicial  $S$  consiste à ajouter un nouveau 0-simplexe  $v$  à  $S$ , et à créer un nouveau  $(p + 1)$ -simplexe  $\bar{\sigma}$  incident à  $\sigma$  et à  $v$  pour chaque  $p$ -simplexe  $\sigma$  de  $S$ . La dimension de tout nouveau simplexe  $\bar{\sigma}$  est donc par définition supérieure ou égale à 1. Les opérateurs de face sont définis par :

- $\forall \bar{\sigma}$  de dimension  $p + 1$ ,  $\bar{\sigma} d_{p+1} = \sigma$  ;
- Si  $p = 0$ , alors  $\bar{\sigma} d_0 = v$ , sinon, pour tout  $i \in [0, p]$ ,  $\bar{\sigma} d_i = \overline{\sigma d_i}$ .

Notons qu'en partant d'un ensemble semi-simplicial réduit à un seul sommet, l'application successive de  $p$  opérations de cône permet de créer un ensemble semi-simplicial correspondant à un  $p$ -simplexe et son bord. La figure 2.3 illustre une opération de cône effectuée sur un ensemble semi-simplicial de dimension 1.

#### Identification

L'opération d'identification de base est définie pour deux  $p$ -simplexes  $\sigma$  et  $\tau$  ayant même bord, c'est-à-dire que, pour tout  $i \in [0, p]$ ,  $\sigma d_i = \tau d_i$ . L'opération consiste à fusionner  $\sigma$  et  $\tau$  en un nouveau  $p$ -simplexe  $\mu$  ayant même bord que  $\sigma$  et  $\tau$ , et telle que son étoile corresponde à l'union des étoiles de  $\sigma$  et  $\tau$ , *i. e.* pour tout  $(p + 1)$ -simplexe  $\nu$  tel que  $\nu d_i = \sigma$  ou  $\nu d_i = \tau$  avant l'identification de  $\sigma$  et  $\tau$ , alors  $\nu d_i = \mu$  après l'opération. Par définition, le bord d'un 0-simplexe est nul, deux sommets ont donc toujours même bord et peuvent toujours être identifiés. La figure 2.4 illustre des opérations d'identification.

Des opérations de plus haut niveau ont été définies : par exemple, deux  $p$ -simplexes n'ayant pas même bord peuvent être identifiés par une opération d'identification plus générale consistant à identifier de manière récursive les faces deux à deux afin de se ramener au cas atomique de l'identification de deux simplexes ayant même bord.

Dans ce cas, il faut être vigilant car il peut arriver que ces identifications changent la

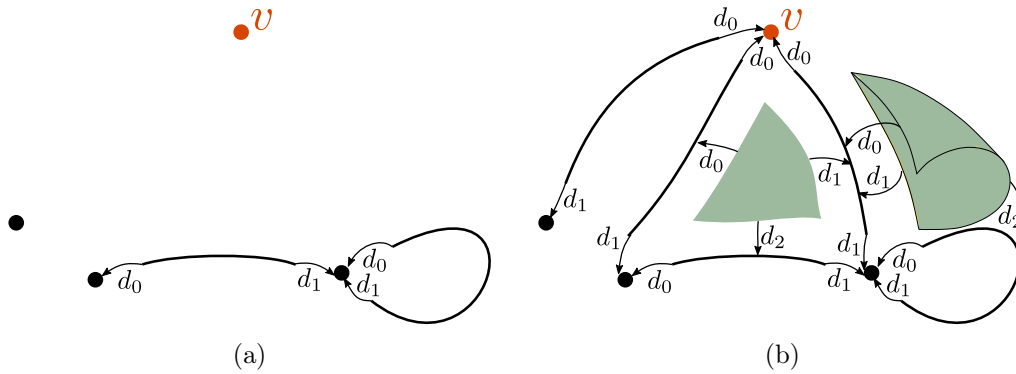


FIGURE 2.3 – (a) Un ensemble semi-simplicial  $S$  de dimension 1 (en noir) et un nouveau sommet  $v$  (en rouge). (b) Résultat de l'opération de cône de  $S$  par  $v$ .

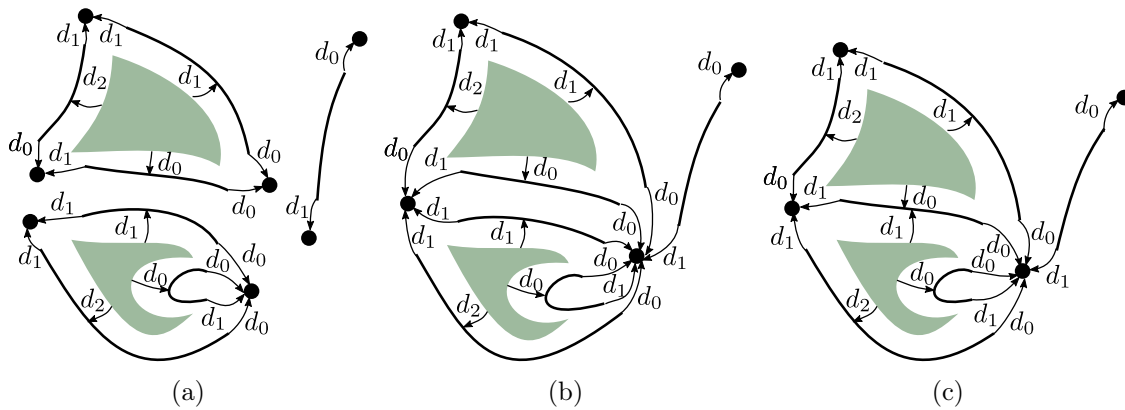


FIGURE 2.4 – (a) Un ensemble semi-simplicial de dimension 2. (b) Peut être obtenu à partir de (a) par trois opérations d'identification des sommets. (c) Peut être obtenu à partir de (b) en identifiant les deux arêtes qui ont même bord.

structure du bord des simplexes à identifier. Par exemple, sur la figure 2.5, l'identification des deux arêtes rouges produit une boucle. En effet, soient  $\sigma$  et  $\mu$  ces deux arêtes. Elles partagent les deux sommets de leur bord, mais pas avec les mêmes opérateurs de face :  $\sigma d_0 = \mu d_1$  et  $\sigma d_1 = \mu d_0$ . L'identification de  $\sigma$  et  $\mu$  entraîne l'identification de leurs faces.

Tous les ensembles semi-simpliciaux peuvent être construits uniquement à partir des opérations de cône et d'identification. D'autres opérations ont également été définies, comme par exemple l'identification de sous-ensembles de simplexes, des opérations de **split**, de **flip**, etc. [Bechmann 2007].

Comme vu en introduction, la notion de variété se caractérise de manière combinatoire jusqu'à la dimension 2. Si l'on souhaite représenter de telles structures, on peut optimiser la représentation et se contenter de représenter les 2-simplexes principaux, et remplacer les opérateurs de face des  $n$ -simplexes par des opérateurs d'adjacence entre  $n$ -simplexes,

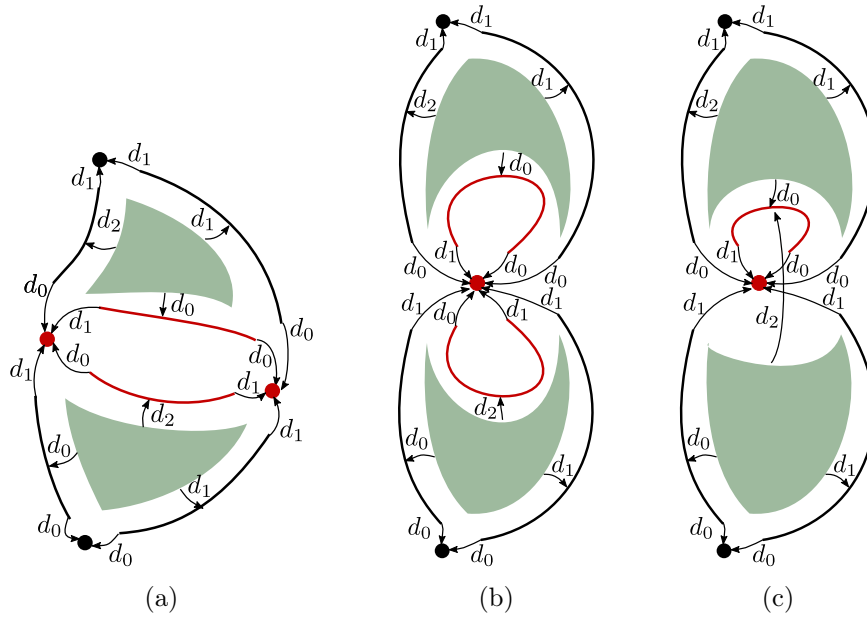


FIGURE 2.5 – (a) L'identification des deux arêtes (en rouge) induit l'identification de leurs sommets (en rouge). (b) L'identification des faces des deux arêtes a créé deux boucles, les deux arêtes ont à présent même bord. (c) Résultat de l'identification des deux arêtes.

comme illustré sur la figure 2.6.

## 2.1.2 Complexes simpliciaux abstraits

Le mécanisme de suppression de la multi-incidence sur les ensembles semi-simpliciaux conduit à la définition des complexes simpliciaux abstraits (ou CSA) [Agoston 1976]. Cette structure simpliciale est basée sur une description ensembliste.

### 2.1.2.1 Structure combinatoire

**Définition 2** *Un complexe simplicial abstrait  $K$  est un ensemble de sous-ensembles non vides d'un ensemble fini  $V$  tel que :*

- (1)  $\{v\} \in K$  pour tout  $v \in V$ ,
- (2) Si  $\sigma \in K$ , alors tout sous-ensemble non vide de  $\sigma$  appartient à  $K$

Les éléments de  $V$  sont appelés **sommets**, ceux de  $K$  sont les **simplexes abstraits**. La **dimension** d'un élément  $\{v_0, \dots, v_p\}$  de  $K$  est  $p$ . En particulier, tout sommet  $v$  de  $V$  est associé au 0-simplexe  $\{v\}$  de  $K$ . La **dimension de  $K$**  est celle d'un simplexe de dimension maximale de  $K$ . On note  $|V|$  le nombre de sommets de  $V$ .

Les notions de sous-complexe, de face, de bord, d'étoile, de simplexe principal et d'incidence, s'étendent directement pour les complexes simpliciaux abstraits.

Notons en particulier que, de par la définition ensembliste des complexes simpliciaux abstraits, deux simplexes ne peuvent pas avoir même bord, et un simplexe ne peut pas

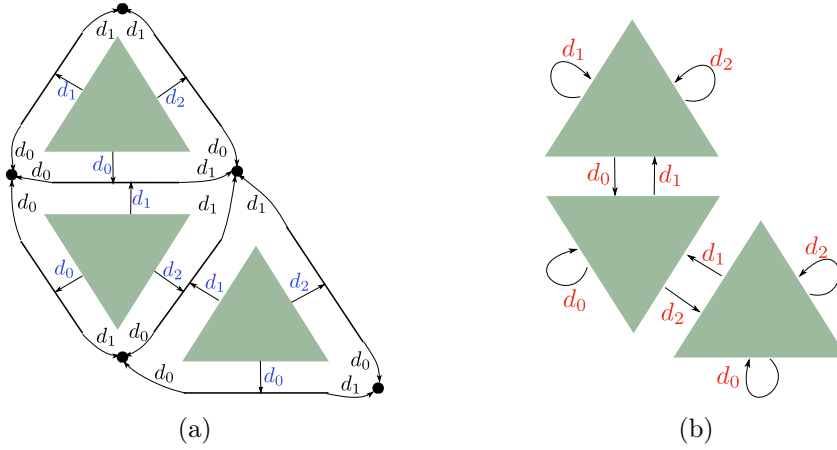


FIGURE 2.6 – (a) Une quasi-variété simpliciale de dimension 2. (b) représentation optimisée de (a) où seuls les 2-simplices sont explicités, leurs opérateurs de face (en bleu) sont remplacés par des opérateurs d'adjacence (en rouge).

être incident plusieurs fois à une de ses faces. Enfin, tout  $p$ -simplexe est complet, *i. e.* possède exactement  $p + 1$  sommets dans son bord.

Par exemple, la figure 2.7 représente les CSA  $K^1, K^2, K^3$  et  $K^4$  suivants :

$$K^1 = \{ \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \\ \{v_3, v_0\}, \{v_3, v_2\}, \{v_3, v_4\} \}$$

$$K^2 = \{ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \\ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_5\}, \{v_1, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \\ \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_5\} \}$$

$$K^3 = \{ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \\ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \\ \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\} \}$$

$$K^4 = \{ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \\ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \\ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \\ \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_0, v_1, v_2\}, \{v_0, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \\ \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \}$$

Le CSA  $K^1$  est de dimension 1,  $K^2$  et  $K^3$  sont de dimension 2 et  $K^4$  est de dimension 3.  $K^1$  est un sous-complexe de  $K^3$ .

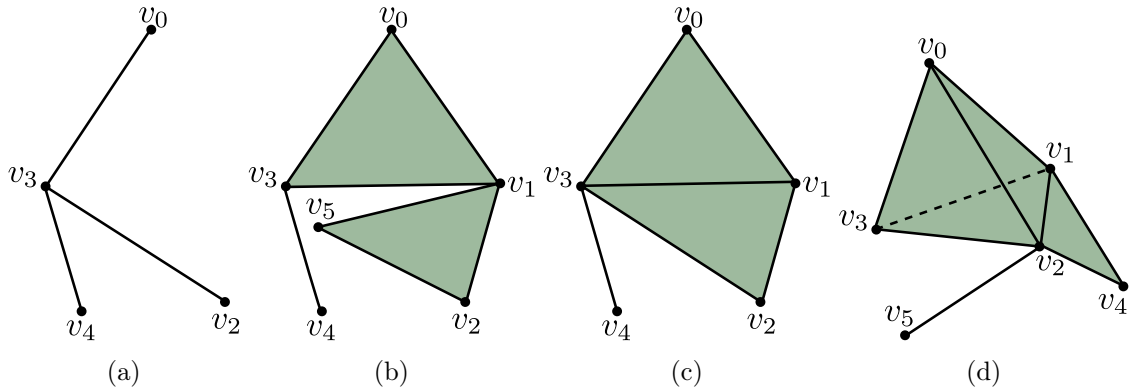


FIGURE 2.7 – (a) – (d) représentation des complexes simpliciaux abstraits  $K^1$ ,  $K^2$ ,  $K^3$  et  $K^4$ .

### 2.1.2.2 Opérations de construction

Les opérations de construction de base sont les mêmes que pour les ensembles semi-simpliciaux : le **cône** permet en particulier de construire les simplexes, et l'**identification** permet de les assembler.

#### Cône

Soit  $K$  un CSA sur  $V$  et  $v \notin V$  un nouveau sommet. Le résultat de l'opération de cône définie par  $K$  et  $v$  est le CSA  $K'$  contenant :

- tous les simplexes de  $K$ ,
- le 0-simplexe  $\{v\}$ ,
- tous les simplexes  $\sigma \cup \{v\}$ , pour tout  $\sigma \in K$ .

Par exemple,  $K^3$  peut être obtenu à partir de  $K^1$  en effectuant une opération de cône sur le sous-complexe  $\{\{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_3, v_0\}, \{v_3, v_2\}\}$  avec le sommet  $v_1$ .

Comme pour les ensembles semi-simpliciaux, en partant d'un CSA réduit à un seul 0-simplexe, l'application successive de  $p$  opérations de cône permet de créer un CSA correspondant à un  $p$ -simplexe abstrait et son bord.

#### Identification

L'opération d'identification élémentaire consiste à "fusionner" deux sommets distincts. Cette opération est toujours définie, quels que soient les deux sommets choisis. Le CSA résultant peut toutefois être fortement impacté par l'identification de deux sommets. En effet, l'identification de deux sommets peut entraîner :

- *l'identification de simplexes de dimensions supérieures*. Par exemple, le CSA  $K^3$  peut être obtenu à partir de  $K^2$  en identifiant  $v_3$  et  $v_5$ , ce qui entraîne l'identification des arêtes  $\{v_1, v_5\}$  et  $\{v_1, v_3\}$ ;
- *la dégénérescence de simplexes de dimensions supérieures*, c'est-à-dire leur suppression. Par exemple,  $K^1$  peut être obtenu à partir de  $K^3$  en identifiant  $v_1$  et  $v_3$ . Cette identification entraîne l'identification des arêtes  $\{v_0, v_3\}$  et  $\{v_0, v_1\}$ , l'identi-



fication des arêtes  $\{v_2, v_3\}$  et  $\{v_1, v_2\}$ , la dégénérescence de l'arête  $\{v_1, v_3\}$ , et la dégénérescence des deux triangles.

D'un point de vue pratique, on peut décrire un CSA en explicitant uniquement les simplexes principaux, tous les autres simplexes peuvent être déduits de ces simplexes : ce sont des sous-ensembles non vides des simplexes principaux.

Notons que le nombre de simplexes nécessaires pour représenter un objet sans multi-incidence est en général bien plus élevé que le nombre de simplexes nécessaires pour représenter le même objet en autorisant la multi-incidence. Par exemple, la subdivision d'un tore avec un CSA nécessite au minimum 14 triangles, 21 arêtes et 7 sommets, alors qu'avec un ESS, seulement 2 triangles, 3 arêtes et 1 seul sommet sont nécessaires, comme le montre la figure 2.8.

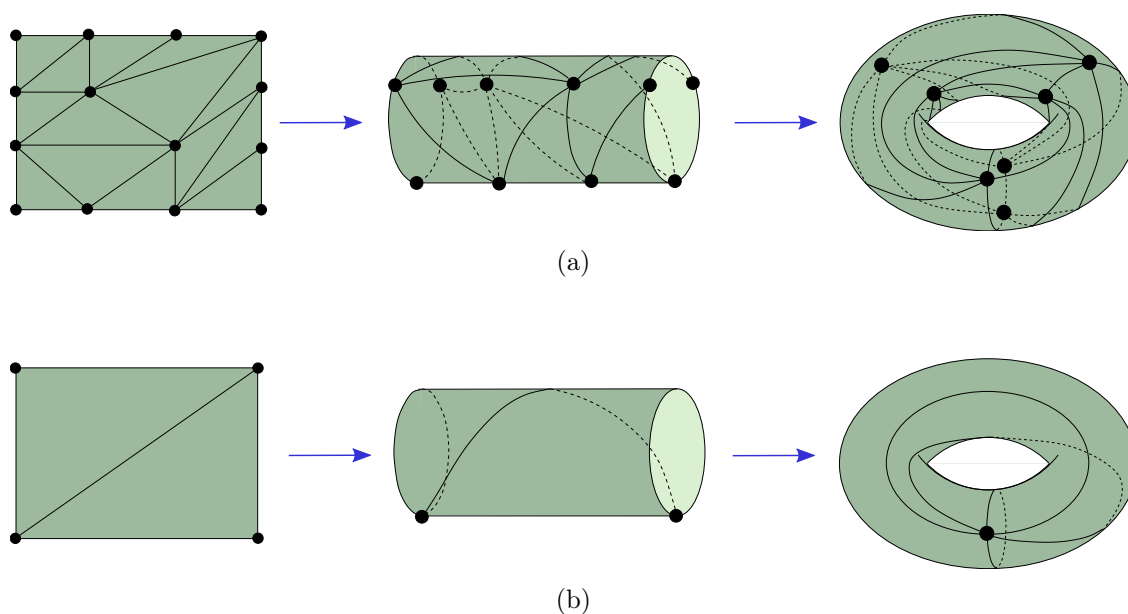


FIGURE 2.8 – (a) Une subdivision simpliciale minimale du tore décrite par un complexe simplicial abstrait. (b) Une subdivision simpliciale minimale du tore décrite par un ensemble semi-simplicial.

## 2.2 Structures simploldales

Nous mettons à présent en avant le mécanisme de produit cartésien, permettant de définir des structures simploldales. Les cellules des structures simploldales sont des produits de simplexes, aussi appelés **simploldes**. À l'instar d'un cube de dimension  $p$  qui peut être obtenu par le produit cartésien de  $p$  arêtes (*i. e.* de 1-simplexes), les simploldes sont des produits de simplexes de dimensions quelconques. La notion de simploldes a été introduite par [Dahmen 1982].

Afin de présenter les ensembles semi-simplôïdaux de manière progressive, nous commençons par présenter les ensembles semi-cubiques, qui sont un cas particulier d'ensembles semi-simplôïdaux. On retrouve des structures cubiques dans divers domaines : en géométrie discrète où les objets discrets sont décrits par des pixels en  $2D$  ou des voxels en  $3D$ , en imagerie  $3D$  où les données d'acquisition sont structurées en grilles régulières, ou encore en simulation numérique dont les calculs sont effectués sur des maillages hexaédriques.

### 2.2.1 Ensembles semi-cubiques

Les **ensembles semi-cubiques** [Serre 1951, Brown 1981] permettent de manipuler des assemblages de cubes. Leur définition est analogue à celle des ESS, *i. e.* elle est basée sur un ensemble de cubes abstraits, sur lesquels agissent des opérateurs de face satisfaisant des relations de cohérence.

**Définition 3** *Un ensemble semi-cubique*  $S = (K, (d_j^i))$ , *de dimension*  $n$ , *est une famille d'ensembles*  $K = (K^p)_{p \in [0, n]}$  *de*  $p$ -*cubes abstraits munis d'opérateurs de face*  $d_j^i : K^p \rightarrow K^{p-1}$ , *pour*  $1 \leq p \leq n$ ,  $i \in [1, p]$  *et*  $j \in [0, 1]$ . *Pour tout*  $p$ -*cube*,  $p > 1$ , *on a :*

$$\sigma d_j^i d_l^k = \sigma d_l^k d_j^{i-1}, \forall k < i$$

Chaque  $p$ -cube est donc muni de  $2p$  opérateurs de face :  $d_0^1, d_1^1, \dots, d_0^p, d_1^p$ . Par exemple, une arête est munie de deux opérateurs de face  $d_0^1$  et  $d_1^1$ , un carré est muni des quatre opérateurs  $d_0^1, d_1^1, d_0^2$  et  $d_1^2$  : cf. figure 2.9. De manière intuitive, chaque  $p$ -cube correspond au produit cartésien de  $p$  arêtes, les deux opérateurs de face  $d_0^i$  et  $d_1^i$  correspondent intuitivement aux opérateurs de face de la  $i^{\text{e}}$  arête intervenant dans le produit. Les relations définies sur les opérateurs de face jouent le même rôle que pour les ensembles semi-simpliciaux : elles garantissent la cohérence du modèle. De manière intuitive, soit  $\mu = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_p$  un  $p$ -cube issu du produit des arêtes  $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ , la face  $\mu d_j^i$  correspond au  $(p-1)$ -cube  $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_i d_j \times \dots \times \sigma_p$ .

### 2.2.2 Ensembles semi-simplôïdaux

Les ensembles semi-simplôïdaux [Fuchs 1997, Peltier 2009a] généralisent les ensembles semi-simpliciaux et semi-cubiques. En effet dans cette structure, les cellules, appelées simplôïdes, correspondent à des produits de simplexes quelconques.

Comme nous le verrons en Section 2.5, l'opération de produit cartésien est également définie sur les structures simpliciales. Dans les structures simplôïdales, les cellules sont plus générales que des simplexes ou les cubes. Par exemple, le produit cartésien simplôïdal d'un 2-simplexe par un 1-simplexe est un prisme, alors que le produit cartésien simplicial des deux mêmes simplexes correspond à la triangulation du prisme : cf. figure 2.10.

#### 2.2.2.1 Structure combinatoire

Pour les simplexes et les cubes, il n'existe qu'un type de cellule pour chaque dimension ; c'est pourquoi les simplexes et les cubes sont caractérisés par leur dimension. On peut en

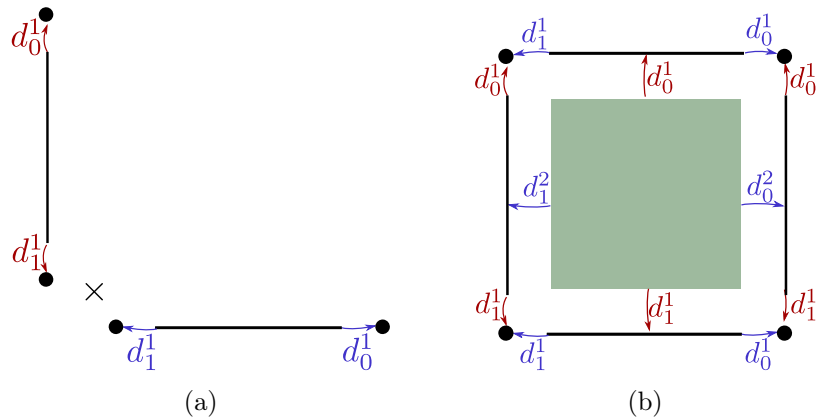


FIGURE 2.9 – Le 2-cube représenté en (b) correspond intuitivement au produit cartésien de l'arête verticale et de l'arête horizontale représentées en (a). Les opérateurs de face  $d_j^1$  (resp.  $d_j^2$ ) du 2-cube correspondent aux opérateurs de face de la première (resp. de la seconde) arête.

revanche construire différents simplexes pour une dimension donnée : cf. figure 2.11. Ainsi, un simplexe  $\mu$  est caractérisé par son **type**  $(a_1, \dots, a_n)$  défini par un  $n$ -uplet d'entiers strictement positifs. Intuitivement,  $\mu$  correspond au produit cartésien  $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$  où  $\sigma_i$  est un simplexe de dimension  $a_i$ . Le simplexe  $\mu$  est de **dimension**  $\sum_{j=1}^n a_j$  et de **longueur**  $n$ .

Le fait de ne pas faire apparaître de 0 dans le type d'un simplexe correspond intuitivement au fait que le produit d'un simplexe par un sommet est l'identité. On notera que les  $p$ -simplexes,  $p > 0$ , sont des simplexes de type  $(p)$  de longueur 1, un 0-simplexe est de type  $()$ , les  $p$ -cubes sont des simplexes de type  $(1, \dots, 1)$  de longueur  $p$ .

**Définition 4** Un ensemble semi-simploïdal  $S = (K, (d_j^i))$  est un ensemble de simplexes muni d'un opérateur de type  $\mathcal{T} : K \mapsto \bigcup_{i \geq 0} \mathbb{N}^{*i}$  et d'opérateurs de face  $d_j^i$ .

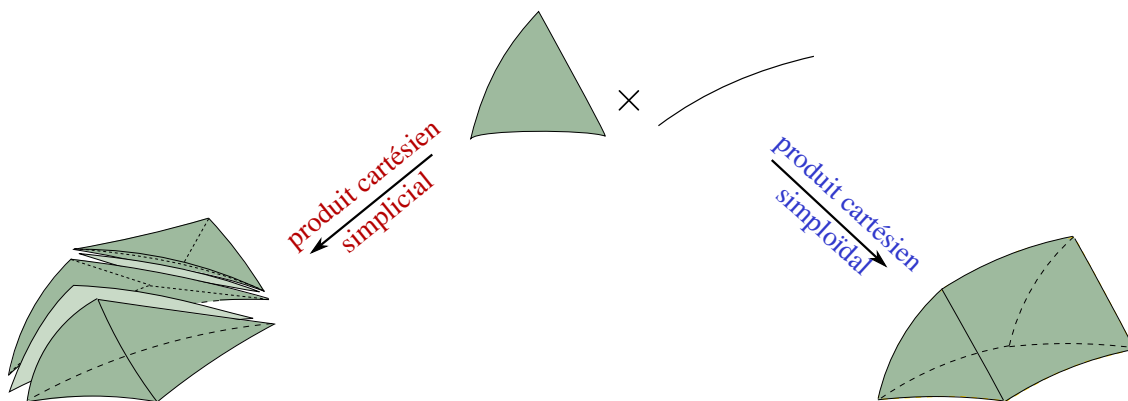


FIGURE 2.10 – Produit cartésien simplicial et produit cartésien simplexoïdal.

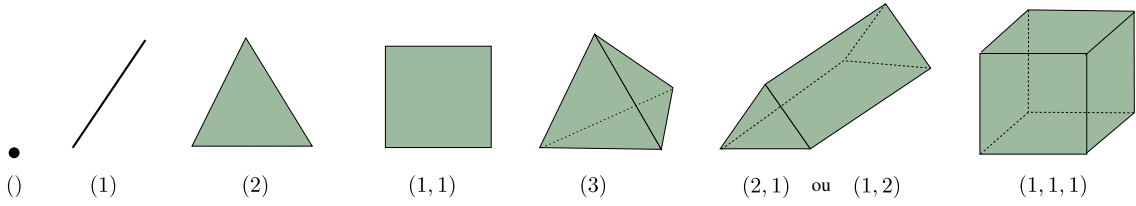


FIGURE 2.11 – simplôïdes et leurs types, jusqu'à la dimension 3.

Soit  $\sigma \in K$ ;  $\sigma\mathcal{T}$  est le type de  $\sigma$ . Soit  $\sigma\mathcal{T} = (a_1, \dots, a_n) : \sigma d_j^i$  est défini si  $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq a_i$ . Les opérateurs vérifient les propriétés suivantes :

(I) Action sur le type

$$1) \sigma d_j^i \mathcal{T} = \begin{cases} (a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_n) & \text{si } a_i > 1 \\ (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) & \text{si } a_i = 1 \end{cases}$$

(II) Commutation des opérateurs de face

$$1) d_j^i d_l^i = d_l^i d_j^{i-1} \quad l < j, a_i > 1$$

$$2) d_j^i d_l^k = \begin{cases} d_l^k d_j^i & \text{si } a_k > 1 \\ d_l^k d_j^{i-1} & \text{sinon} \end{cases} \quad k < i$$

□

Notons que le cas (II.1) avec  $a_i = 1$  n'est pas explicité car il s'agit du cas particulier de (II.2) où  $a_k = 1$ , avec  $k = i - 1$ .

La figure 2.12 illustre un prisme  $\sigma$  de type (2, 1) et une partie de son bord. On peut vérifier par exemple que  $\sigma d_2^1 d_1^1 = \sigma d_1^1 d_1^1$  et  $\sigma d_0^2 d_2^1 = \sigma d_2^1 d_0^2$ .

On peut noter qu'un simplôïde de type (2, 1) et un simplôïde de type (1, 2) n'ont pas la même structure, *i. e.* ils n'ont pas les mêmes opérateurs de face. Cela s'explique par le fait que le produit cartésien n'est pas commutatif.

2.2.2.2 Opérations de construction

Tout ensemble semi-simplôïdal peut être construit à partir de deux opérations de base : l'opération de **produit cartésien** qui permet en particulier de construire des simplôïdes et leurs bords à partir de simplexes et leurs bords, et l'opération d'**identification** permettant de les assembler.

**Produit cartésien**

La définition du produit cartésien sur les ensembles simplôïdaux se déduit directement du fait que le produit de deux simplôïdes  $\sigma$  et  $\mu$  de types respectifs  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_m)$  est un simplôïde  $\tau = \sigma \times \mu$  de type  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ . De plus, les opérateurs de face sont définis de manière à respecter le produit :  $\tau d_j^i = \sigma d_j^i \times \mu$  pour tout

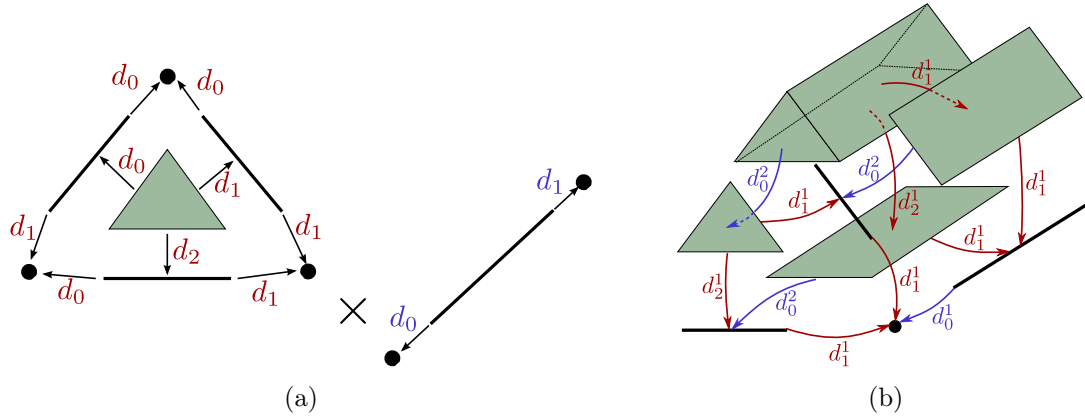


FIGURE 2.12 – (a) – (b) Correspondance entre le produit cartésien de deux simplexes (et leur bord) et un simplexe de type (2, 1). Par souci de clarté, seulement une partie du bord du prisme est représentée. Les opérateurs de face  $d_j^1$  du prisme (en rouge) viennent de sa première composante (*i. e.* un triangle), les opérateurs de face  $d_j^2$  du prisme (en bleu) viennent de la seconde composante (*i. e.* une arête).

$i$  compris entre 1 et  $n$ , et  $\tau d_j^{i+n} = \sigma \times \mu d_j^i$  pour tout  $i$  compris entre 1 et  $m$ . L'opération de produit cartésien peut être défini sur les ensembles semi-simploïdaux de la manière suivante [Peltier 2006a] :

**Définition 5** Soient  $S = (K, (d_j^i))$  et  $S' = (K', (d_j^i))$  deux ensembles semi-simploïdaux. Le produit cartésien  $S \times S'$  est l'ensemble semi-simploïdal  $S'' = (K'', (d_j^i))$  tel que :

- $K'' = K \times K'$
- $\forall \sigma'' = \sigma \times \sigma'$ , tel que  $\sigma \mathcal{T} = (a_1, \dots, a_n)$  et  $\sigma' \mathcal{T} = (b_1, \dots, b_m)$ , on a :
  - $\sigma'' \mathcal{T} = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$
  - $\sigma'' d_j^i = \begin{cases} \sigma d_j^i \times \sigma' & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ \sigma \times \sigma' d_j^{i-n} & \text{si } n+1 \leq i \leq n+m \end{cases}$

Ainsi, le produit cartésien de deux ensembles semi-simploïdaux  $S$  et  $S'$  de dimensions respectives  $d$  et  $d'$ , est un ensemble semi-simploïdal  $S''$  de dimension  $d + d'$ .

### Identification

Le principe est exactement le même que pour les ensembles semi-simpliciaux, l'opération atomique consiste à fusionner deux simplexes ayant même bord (et donc même type), ce qui implique en particulier de mettre à jour leurs étoiles. Ici encore, des opérations de plus haut niveau peuvent être définies, par exemple l'identification de deux simplexes (de même type) n'ayant pas même bord, comme illustré sur la figure 2.13. Enfin, lorsque deux simplexes partagent les mêmes faces mais via des opérateurs différents, les mêmes phénomènes de *twist* présentés dans le cadre simplicial peuvent se produire.

**Théorème 1** Un ensemble semi-simploïdal peut être associé de manière canonique à tout ensemble semi-simplicial et réciproquement.

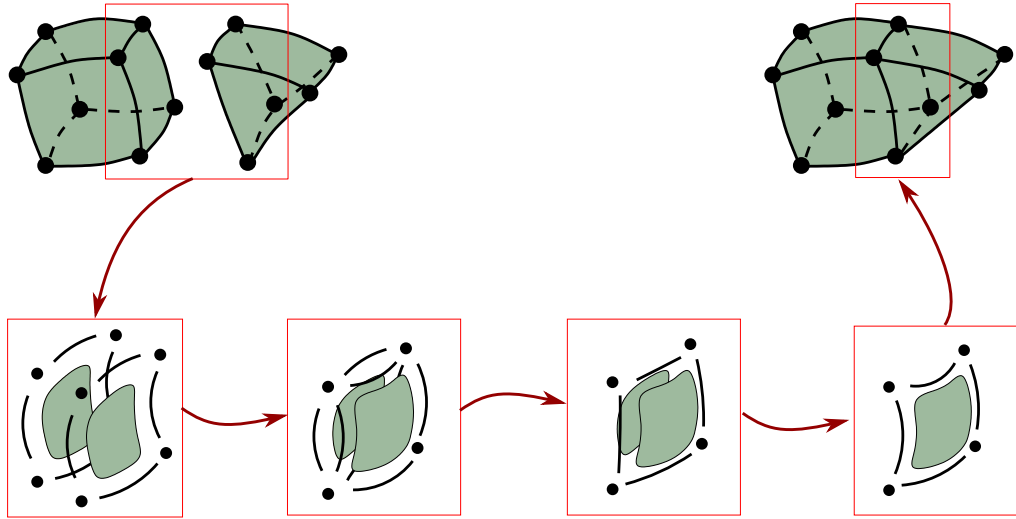


FIGURE 2.13 – L'opération d'identification de deux simplôïdes n'ayant pas même bord est définie de manière récursive en identifiant d'abord leurs faces. Les opérateurs de face ne sont pas représentés.

La preuve est immédiate : cela provient du fait que tout simplexe est un simplôïde, et tout simplôïde correspond à un produit cartésien de simplexes.

### 2.2.3 Complexes simplôïdaux abstraits

Nous proposons à présent une première approche permettant d'étendre au cadre simplôïdal le mécanisme de suppression de la multi-incidence défini dans le cadre simplicial. Pour cela, nous définissons un simplôïde abstrait comme un ensemble de simplexes abstraits. Nous proposons ensuite une définition des complexes simplôïdaux abstraits qui n'ont, à notre connaissance, pas été définis ni étudiés auparavant.

#### 2.2.3.1 Structure combinatoire

**Définition 6** Soit  $V = (V^i)_{i \in [1, n]}$ ,  $n \geq 1$  une partition d'un ensemble fini de sommets. Un **simplôïde abstrait** sur  $V$  est un ensemble non vide de simplexes abstraits  $\sigma = \{\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_p}\}$ , où  $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$  tel que  $\sigma_{j_k} \subseteq V^{j_k}$  pour tout  $k \in [1, p]$ .

Pour tout  $k \in [1, p]$ , pour toute face  $\mu_{j_k}$  de  $\sigma_{j_k}$ , le simplôïde abstrait  $\mu = \{\sigma_{j_1}, \dots, \mu_{j_k}, \dots, \sigma_{j_p}\}$  est une **face** de  $\sigma$ .

Comme  $V$  est une partition, tous les  $V^i$  sont non vides. Notons qu'un simplôïde abstrait peut contenir des simplexes abstraits de dimension 0. Cela permet :

- d'étendre directement la notion de face,
- de définir simplement l'opération d'identification,
- de faire un lien direct avec les complexes simplôïdaux géométriques. Ce dernier point est discuté au Chapitre 4.

Contrairement à la définition des ensembles semi-simploïdaux, le type d'un simpleïde abstrait peut donc contenir des valeurs nulles. Le type d'un simpleïde abstrait est défini par un multi-ensemble d'entiers positifs ou nuls, et sa longueur est le nombre d'éléments de son type. Dit autrement, on ne distingue pas, par exemple, un simpleïde de type  $(1, 2)$  d'un simpleïde de type  $(2, 1)$ ; en revanche, on explicite la produit cartésien par un 0-simplexe, ce qui différencie la structure d'un simpleïde de type  $\{0, 1, 2\}$  de celle d'un simpleïde de type  $\{1, 2\}$ , qui n'ont ni même type, ni même longueur.

En particulier, un simpleïde abstrait composé uniquement de 0-simplexes abstraits est un **sommet simpleïdal**. Il existe donc des sommets simpleïdaux de différents types :  $\{0\}$ ,  $\{0, 0\}$ , etc. Nous pouvons à présent définir les complexes simpleïdaux abstraits :

**Définition 7** Soit  $V = (V^i)_{i \in [1, n]}$ ,  $n \geq 1$  une partition d'un ensemble fini de sommets. Un **complexe simpleïdal abstrait**  $K^\square$  est un ensemble de simpleïdes abstraits définis sur  $V$ , tel que pour tout simpleïde abstrait  $\sigma \in K^\square$ , toutes les faces de  $\sigma$  appartiennent à  $K^\square$ .

Soient  $\sigma = \{\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_p}\}$  et  $\mu = \{\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_p}\}$  deux simpleïdes de  $K^\square$ . Si pour tout  $k \in [1, p]$ ,  $\sigma_{j_k} \subseteq V^{j_k}$  et  $\mu_{j_k} \subseteq V^{j_k}$ , alors  $\sigma$  et  $\mu$  ont **même structure**.

Notons que pour tout  $i \in [1, n]$ , l'ensemble des simplexes de  $V^i$  qui composent l'ensemble des simpleïdes de  $K^\square$  est un complexe simplicial abstrait  $K^i$ .

La figure 2.14 représente un complexe simpleïdal abstrait. On peut noter que tous les sommets simpleïdaux d'une composante connexe ont même structure : ceux de la composante connexe contenant le cube sont construits à partir de  $V^1, V^2$  et  $V^3$ , ceux de l'autre composante connexe sont construits à partir de  $V^1$  et  $V^2$  seulement.

Un complexe simpleïdal abstrait peut être décrit par l'ensemble des simpleïdes principaux qu'il contient, l'ensembles des faces appartiennent implicitement au complexe et peuvent être explicitées en calculant les sous-ensembles non vides de chaque simplexe abstrait.

Par exemple, soit  $\sigma = \{\{a, b, c\}, \{x, y\}\}$  un simpleïde abstrait de type  $\{2, 1\}$ . Les simpleïdes suivants sont des faces de  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} \text{type}\{1, 1\} &: \{\{a, b\}, \{x, y\}\}, \{\{a, c\}, \{x, y\}\}, \{\{b, c\}, \{x, y\}\}; \\ \text{type}\{2, 0\} &: \{\{a, b, c\}, \{x\}\}, \{\{a, b, c\}, \{y\}\}; \\ \text{type}\{0, 1\} &: \{\{a, b\}, \{x\}\}, \{\{a, b\}, \{y\}\}, \{\{b, c\}, \{x\}\}, \{\{b, c\}, \{y\}\}, \{\{a, c\}, \{x\}\}, \\ &\quad \{\{a, c\}, \{y\}\}, \{\{a\}, \{x, y\}\}, \{\{b\}, \{x, y\}\}, \{\{c\}, \{x, y\}\}; \\ \text{type}\{0, 0\} &: \{\{a\}, \{x\}\}, \{\{a\}, \{y\}\}, \{\{b\}, \{x\}\}, \{\{b\}, \{y\}\}, \{\{c\}, \{x\}\}, \{\{c\}, \{y\}\}. \end{aligned}$$

### 2.2.3.2 Opérations de construction

Les deux opérations de base sont : le **produit cartésien** permettant de créer en particulier les simpleïdes abstraits, et l'opération d'**identification de sommets simpleïdaux**.

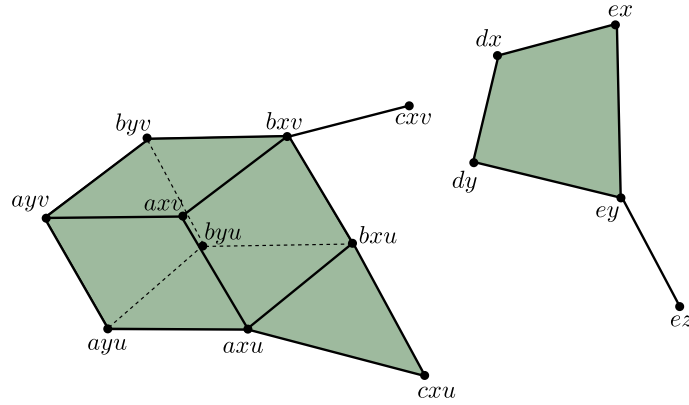


FIGURE 2.14 – Représentation d'un complexe simplôïdal abstrait, défini à partir de la partition de sommets :  $V^1 = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $V^2 = \{x, y, z\}$  et  $V^3 = \{u, v\}$ . Par souci de clarté, un sommet simplôïdal  $\{\{v_{i_1}\}, \dots, \{v_{i_p}\}\}$  est noté  $v_{i_1} \dots v_{i_p}$ . Par exemple, le sommet simplôïdal  $\{\{b\}, \{x\}, \{u\}\}$  est noté  $bxu$ . Les simplôïdes principaux sont  $\{\{a, b\}, \{x, y\}, \{u, v\}\}$  de type  $\{1, 1, 1\}$ ,  $\{\{a, b, c\}, \{x\}, \{u\}\}$  de type  $\{2, 0, 0\}$ ,  $\{\{b, c\}, \{x\}, \{v\}\}$  de type  $\{1, 0, 0\}$  pour la composante connexe de gauche ;  $\{\{d, e\}, \{x, y\}\}$  de type  $\{1, 1\}$  et  $\{\{e\}, \{y, z\}\}$  de type  $\{0, 1\}$  pour celle de droite.

### Produit cartésien

Soient  $\sigma = \{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p}\}$  et  $\mu = \{\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_q}\}$  deux simplôïdes abstraits. Le produit cartésien  $\sigma \times \mu$  est défini si et seulement si  $\sigma$  et  $\mu$  sont définis à partir d'ensembles de sommets disjoints, *i. e.* pour tout  $k \in [1, p]$  et pour tout  $l \in [1, q]$ ,  $V^{i_k} \cap V^{j_l} = \emptyset$ . Le simplôïde  $\sigma \times \mu$  est défini par  $\sigma \cup \mu$ . Le produit cartésien de deux complexes simplôïdaux abstraits  $K^{\square 1} \times K^{\square 2}$  est défini par l'ensemble des simplôïdes abstraits  $\sigma \times \mu$ , pour tout  $\sigma \in K^{\square 1}$  et pour tout  $\mu \in K^{\square 2}$ .

Par exemple, la figure 2.15 illustre une opération de produit cartésien appliqué à deux complexes simplôïdaux abstraits.

L'opération de produit cartésien permet en particulier de créer les simplôïdes abstraits et leurs bords.

### Identification de sommets

Soit  $K^{\square}$  un complexe simplôïdal abstrait. L'opération d'**identification de deux sommets simplôïdaux**  $\sigma$  et  $\mu$  est définie si et seulement si  $\sigma = \{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p}\}$  et  $\mu = \{\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_p}\}$  ont même structure. L'opération consiste à identifier deux à deux les sommets  $\sigma_{i_k}$  et  $\mu_{i_k}$  dans chaque complexe simplicial  $K^{i_k}$ , pour tout  $k \in [1, p]$ .

Par exemple, sur la figure 2.14, il n'est pas possible d'identifier  $bxu$  et  $dy$ , car ils n'ont pas même structure. Pour pouvoir identifier ces deux sommets simplôïdaux, il faut intuitivement faire passer la composante connexe de droite dans le même espace de sommets que la composante de gauche. Cela est possible par exemple en effectuant un produit cartésien par un sommet quelconque de  $V^3$ .



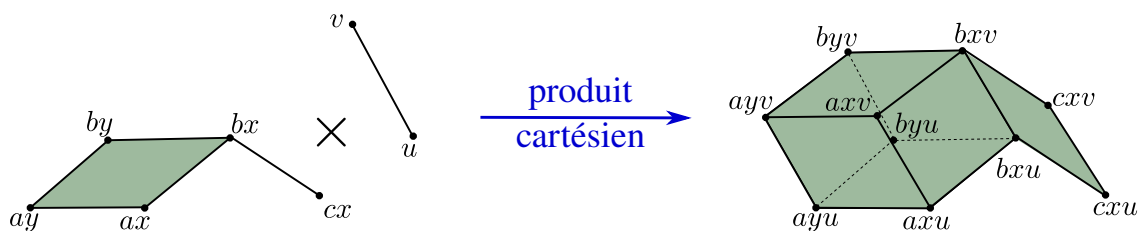


FIGURE 2.15 – Produit cartésien de deux complexes simploldaux abstraits  $K^{\square 1}$  et  $K^{\square 2}$ . Tous les simploldes  $K^{\square 1}$  sont définis à partir de  $V^1$  et  $V^2$ , ceux de  $K^{\square 2}$  à partir de  $V^3$ . La structure de tous les simploldes du complexe résultant du produit est construite à partir de  $V^1, V^2$  et  $V^3$ .

La figure 2.16 illustre des opérations d'identification de sommets simploldaux. Notons que, comme pour les complexes simpliciaux abstraits, l'identification de deux sommets simploldaux peut entraîner l'identification de simploldes de dimensions supérieures, ainsi que la dégénérescence de simploldes sur un simploldes de leur bord. Les dégénérescences correspondent à des dégénérescences simpliciales, répercutées sur le produit cartésien. Par exemple sur la figure 2.16, lors de la dernière identification, les sommets simpliciaux  $\{u\}$  et  $\{v\}$  sont identifiés, entraînant la dégénérescence de l'arête  $\{u, v\}$  et donc la dégénérescence du cube  $\{\{a, b\}, \{x, y\}, \{u, v\}\}$  sur sa face  $\{\{a, b\}, \{x, y\}, \{u\}\}$ .

**Notes :** Cette première approche pour la définition des ensembles simploldaux abstraits est basée sur une partition d'un ensemble de sommets. Un complexe simploldal abstrait est défini à partir de simploldes abstraits issus de produits cartésiens de complexes simpliciaux abstraits  $K^1, \dots, K^n$  définis respectivement sur chaque partie  $V^1 \dots, V^n$  d'une partition de sommets. Cette approche est restrictive, en particulier :

- on ne peut pas représenter explicitement la dégénérescence : lorsqu'un simploldes est dégénéré, cela est uniquement dû au fait qu'un des simplexes  $\sigma^i \in K^i$  qui le compose est dégénéré. On observe le même phénomène pour les complexes simpliciaux abstraits : lorsqu'un simplexe est dégénéré, il n'apparaît plus dans le complexe. Par exemple sur la figure 2.17, la définition proposée ne permet pas d'identifier les quatre sommets rouges du cube représenté en (a) afin d'obtenir le cube dégénéré représenté en (b) ;
- certains assemblages de simploldes non dégénérés ne correspondent pas à des sous-ensembles de produits cartésiens de complexes simpliciaux abstraits. Par exemple, l'assemblage de carrés représentés sur la figure 2.17c<sup>2</sup> ne peut pas être représenté par un complexe simploldal abstrait tel que nous les avons définis.

---

2. Merci à POL VANHAECKE du laboratoire de Mathématiques et Applications de l'université de Poitiers, qui a mis au jour cet exemple.

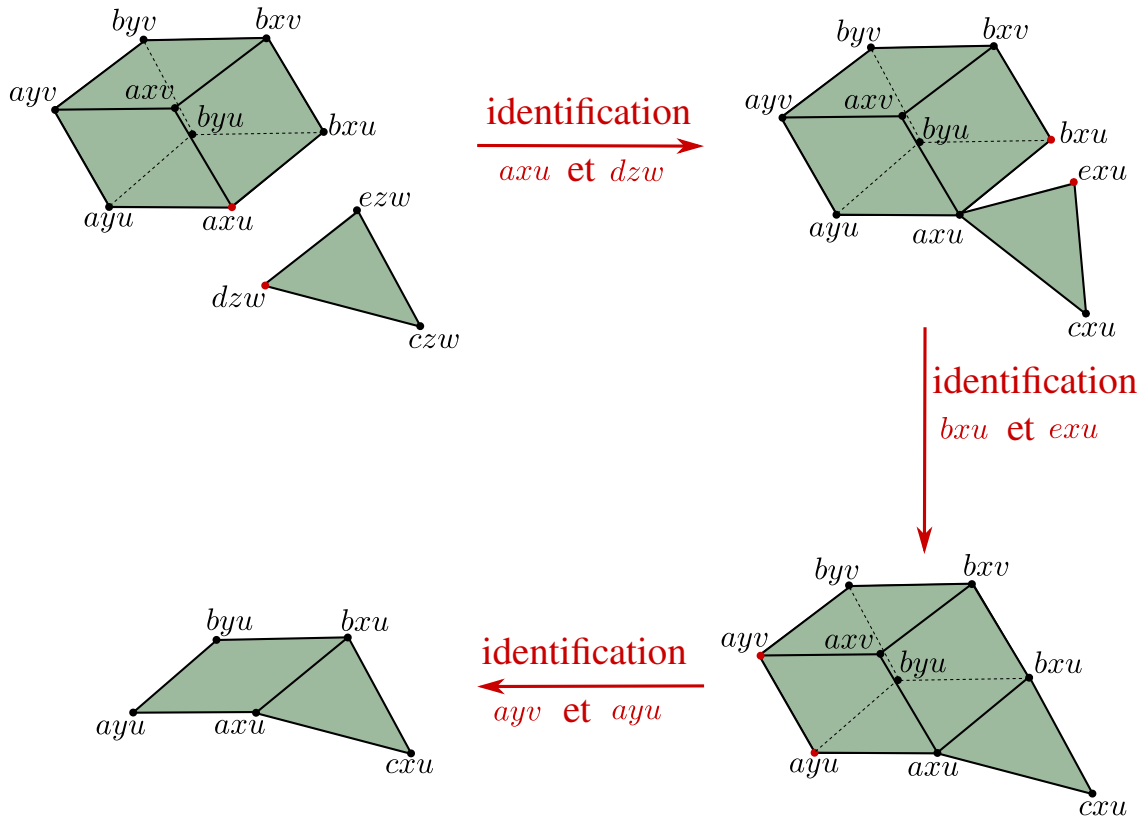


FIGURE 2.16 – Trois opérations d'identification successives de sommets simpleïdaux. La première identification consiste à identifier les 0-simplexes  $\{a\}$  et  $\{d\}$ ,  $\{x\}$  et  $\{z\}$ , et  $\{u\}$  et  $\{w\}$ . La deuxième opération entraîne l'identification de deux arêtes. La troisième identification entraîne la dégénérescence du cube sur une de ses faces.

## 2.3 Structures cellulaires

Jusqu'à présent, nous avons présenté différentes structures régulières basées sur la notion de cellule abstraite (simplexes, cubes, simpleïdes) sur lesquelles agissent des opérateurs de face.

Dans cette partie, nous présentons le mécanisme de numérotation permettant de définir la notion de cellule "quelconque" à partir d'ensembles semi-simpliciaux.

De manière intuitive, l'ensemble des simplexes correspondant à une cellule correspond à la triangulation barycentrique de cette cellule. Les structures cellulaires peuvent donc être vues comme des structures simpliciales structurées en cellules.

### 2.3.1 Numérotation – Cellules

Nous commençons par rappeler la notion d'ensemble semi-simplicial numéroté [Lienhardt 1994], qui permet de définir la notion de cellules.

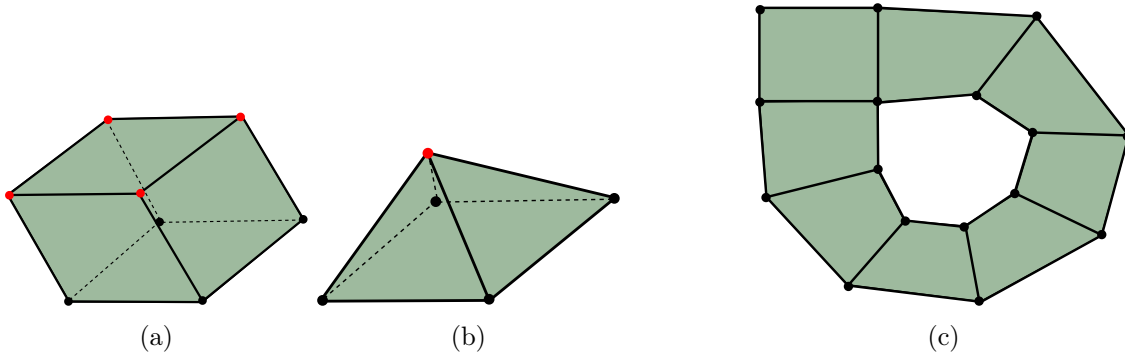


FIGURE 2.17 – Illustration des restrictions inhérentes à la définition des complexes simplœdaux abstraits proposée. (a) – (b) Identification des sommets rouges dégenère le cube. (c) Assemblage de carrés. (b) et (c) ne peuvent pas être représentés par des complexes simplœdaux abstraits, tels que nous les avons définis.

**Définition 8** Un ensemble semi-simplicial numéroté  $(S, \nu)$  est un ensemble semi-simplicial  $S = (K, (d_i))$  de dimension  $n$  muni d'une application  $\nu : K^0 \rightarrow \{0, \dots, n\}$ , tel que pour tout simplexe principal  $\sigma$  de  $K$  :

- si  $\sigma \in K^0$ , alors  $\nu(\sigma) = 0$ ,
- si  $\sigma \in K^p$ ,  $p \in [1, n]$ , l'ensemble des entiers associés par  $\nu$  à l'ensemble des 0-simplexes incidents à  $\sigma$  est  $\{0, \dots, p\}$ .

Soit  $\mu$ , un  $p$ -simplexe dont l'ensemble des sommets associés est  $\{v_0, \dots, v_p\}$  : on dit que  $\mu$  est **numéroté**  $(\nu(v_0), \dots, \nu(v_p))$ , avec  $\nu(v_0) < \dots < \nu(v_p)$ .

Par exemple, la figure 2.18a représente un ensemble semi-simplicial numéroté de dimension 3. Les sommets de chaque  $p$ -simplexe principal sont numérotés  $(0, \dots, p)$ .

On peut noter que la numérotation d'un ensemble semi-simplicial nous assure que tous les simplexes sont complets, *i. e.* un  $p$ -simplexe possède  $(p + 1)$  sommets distincts dans son bord. Ceci n'empêche pas plusieurs simplexes de partager un même bord. On peut enfin noter que l'on ne peut pas associer de numérotation à tout ensemble semi-simplicial, même si tous les simplexes sont complets comme le montre les figures 2.18b et 2.18c.

Dès lors que l'on sait associer une numérotation à un ensemble semi-simplicial, on peut partitionner celui-ci en cellules.

**Définition 9** Soit  $(S, \nu)$  un ensemble semi-simplicial numéroté. Une cellule de dimension  $p$ , ou  $p$ -cellule, est identifiée par un 0-simplexe  $\sigma$  numéroté  $(p)$  et contient  $\sigma$  ainsi que tous les  $j$ -simplexes numérotés  $(\nu(v_0), \dots, \nu(v_{j-1}), p)$  qui lui sont incidents, où  $1 \leq j \leq p$ , et les  $v_k, k \in [0, j - 1]$  sont des 0-simplexes de  $S$ .

Par exemple, dans un ensemble semi-simplicial numéroté de dimension supérieure ou égale à 2, toutes les 2-cellules sont composées d'un sommet  $v$  numéroté  $(2)$ , d'arêtes numérotées  $(0, 2)$  et  $(1, 2)$  incidentes  $v$  et de triangles numérotés  $(0, 1, 2)$  incidents à  $v$ .

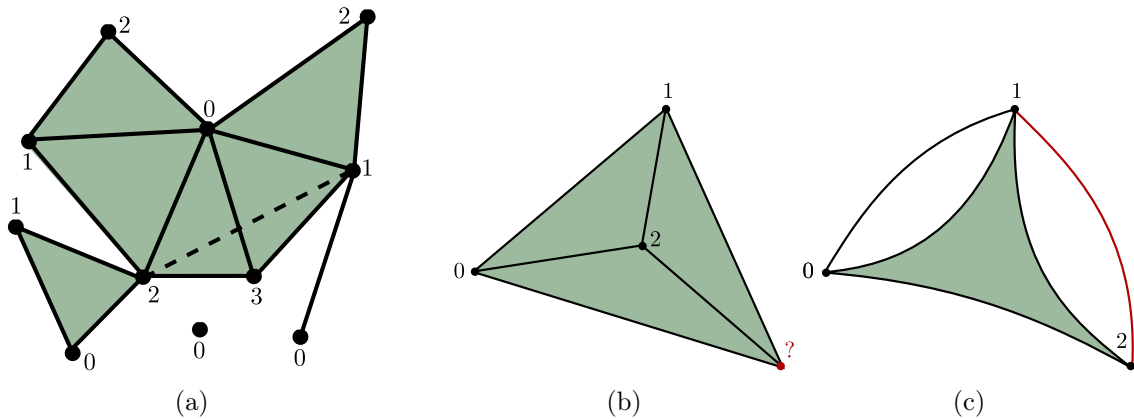


FIGURE 2.18 – (a) Un ensemble semi-simplicial numéroté de dimension 3. Les opérateurs de faces ne sont pas représentés ; ils peuvent être directement déduits de la numérotation : la face  $d_j$  d'un simplexe principal est la face opposée au sommet numéroté  $j$ . (b) – (c) Deux exemples d'ensembles semi-simpliciaux non numérotés. (b) On ne peut pas trouver de numérotation telle que chaque triangle soit numéroté  $(0, 1, 2)$ . (c) Les deux 1-simplexes principaux doivent être numérotés  $(0, 1)$  ; ils sont incidents aux trois sommets d'un triangle principal qui doit être numéroté  $(0, 1, 2)$ , la numérotation est donc impossible. L'arête principale rouge n'est pas numérotée  $(0, 1)$ .

Dans un ensemble semi-simplicial numéroté, il y a donc autant de  $p$ -cellules que de sommets numérotés ( $p$ ) : cf. figure 2.19.

Nous présentons maintenant les deux grandes familles de structures cellulaires : les modèles basés sur les **graphes d'incidence** (ou ordres) et ceux basés sur les **cartes combinatoires**. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage de référence [Damian 2014] pour une étude approfondie.

### 2.3.2 Graphes d'incidence

Comme son nom l'indique, un graphe d'incidence est un graphe, permettant de décrire les relations d'incidence entre les différentes cellules d'un objet subdivisé. Chaque noeud du graphe correspond à une cellule, et deux cellules sont liées par un arc si l'une est face de l'autre.

La relation d'incidence définit une relation d'ordre partiel entre les cellules. Plusieurs structures basées sur les ordres ont été définies et adaptées à différents types d'applications, par exemple [Edelsbrunner 1987, Rossignac 1989, Sobhanpanah 1989]. Les différences sont soit liées à la définition (par exemple les dimensions des cellules sont explicitées ou non), ou au type de subdivisions visé. En particulier, il est possible d'ajouter des contraintes sur la manière dont les cellules sont assemblées ; ce point est discuté en Section 2.3.5.

La définition proposée ici pour illustrer les graphes d'incidence est basée sur la notion d'ordre [Bertrand 1999a].

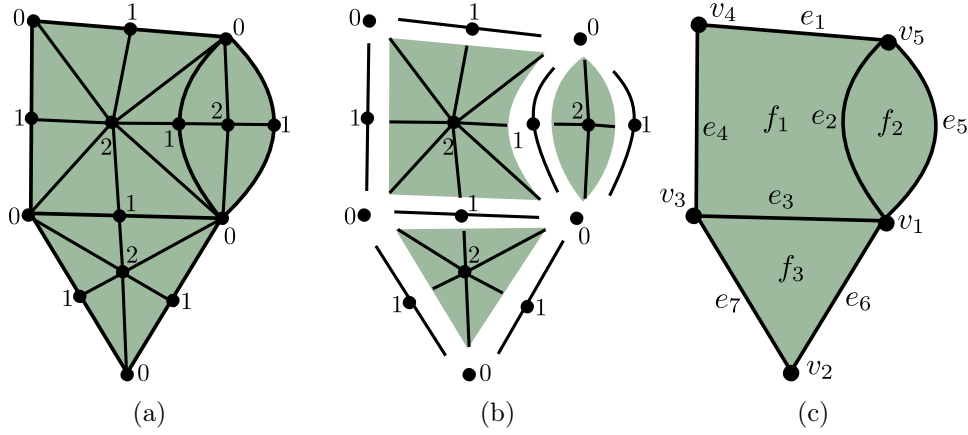


FIGURE 2.19 – (a) Un ensemble semi-simplicial numéroté. (b) Mise en évidence de la structuration cellulaire de (a). (c) Subdivision cellulaire correspondant à (b).

**Définition 10** Un ordre est un couple  $|X| = (X, \alpha)$ , où  $X$  est un ensemble et  $\alpha$  est une relation d'ordre (binaire, réflexive, antisymétrique, et transitive). Soient  $\beta$  l'inverse de  $\alpha$ , et soit  $\theta$  l'union de  $\alpha$  et  $\beta$ .

Les  $CF$ -ordres<sup>3</sup> sont des ordres dénombrables et localement finis, c'est-à-dire que  $X$  est dénombrable et pour tout  $x$  appartenant à  $X$ ,  $\theta(x)$  est fini.

Voici quelques rappels sur le vocabulaire et les notions associées aux ordres [Daragon 2003, Daragon 2005]. La figure 2.20 illustre les différentes notions qui suivent.

L'ensemble  $\alpha(x)$  est l' $\alpha$ -adhérence de  $x$ , ou la **fermeture** de la cellule  $x$ . L'ensemble  $\beta(x)$  est la  $\beta$ -adhérence de  $x$ , ou l'**étoile** de la cellule  $x$ . La  $\theta$ -adhérence de  $x$  est l'union de la fermeture et de l'étoile de  $x$ .

Les  $\alpha$ -,  $\beta$ - et  $\theta$ -adhérences strictes, respectivement notées  $\alpha^\square$ ,  $\beta^\square$  et  $\theta^\square$  contiennent tous les éléments de l'adhérence correspondante, excepté  $x$ . Par exemple, le bord de  $x$  est défini par  $\alpha^\square(x)$ . Les cellules **principales** sont les cellules dont l'étoile stricte est vide, c'est-à-dire que  $\beta^\square(x)$  est vide.

La notion de  $\alpha$ -voisin de  $x$ , notée  $\alpha^\bullet(x)$  est définie par l'ensemble  $\{y \in \alpha^\square(x), \alpha^\square(x) \cap \beta^\square(y) = \emptyset\}$ , qui contient les éléments du bord de  $x$  les plus proches via  $\alpha$  : cela correspond à la notion de face présentée pour les structures régulières. Les notions de  $\beta$ - et  $\theta$ -voisins sont définies de manière similaire, et notées  $\beta^\bullet$  et  $\theta^\bullet$ .

Une suite  $x_0, x_1, \dots, x_n$  telle que  $x_i$  appartient à  $\theta^\square(x_{i+1})$  est une  $\theta$ -chaîne de longueur  $n$ . Un ordre est **connexe** si tout couple d'élément est relié par une  $\theta$ -chaîne. Les notions de  $\alpha$ -,  $\alpha^\bullet$ -,  $\beta$ - et  $\beta^\bullet$ -chaînes sont définies de manière similaire. Le **rang** d'un élément, noté  $\rho(x, |X|)$  est la longueur de la plus longue  $\alpha^\bullet$ -chaîne qui part de  $x$ .

Les  $CF$ -ordres permettent de représenter une classe très large d'objets cellulaires. On ne considère ici que les  $CF$ -ordres **fermés**, c'est-à-dire ne présentant pas de saut

3.  $CF$  signifie *Countable and locally Finite*.

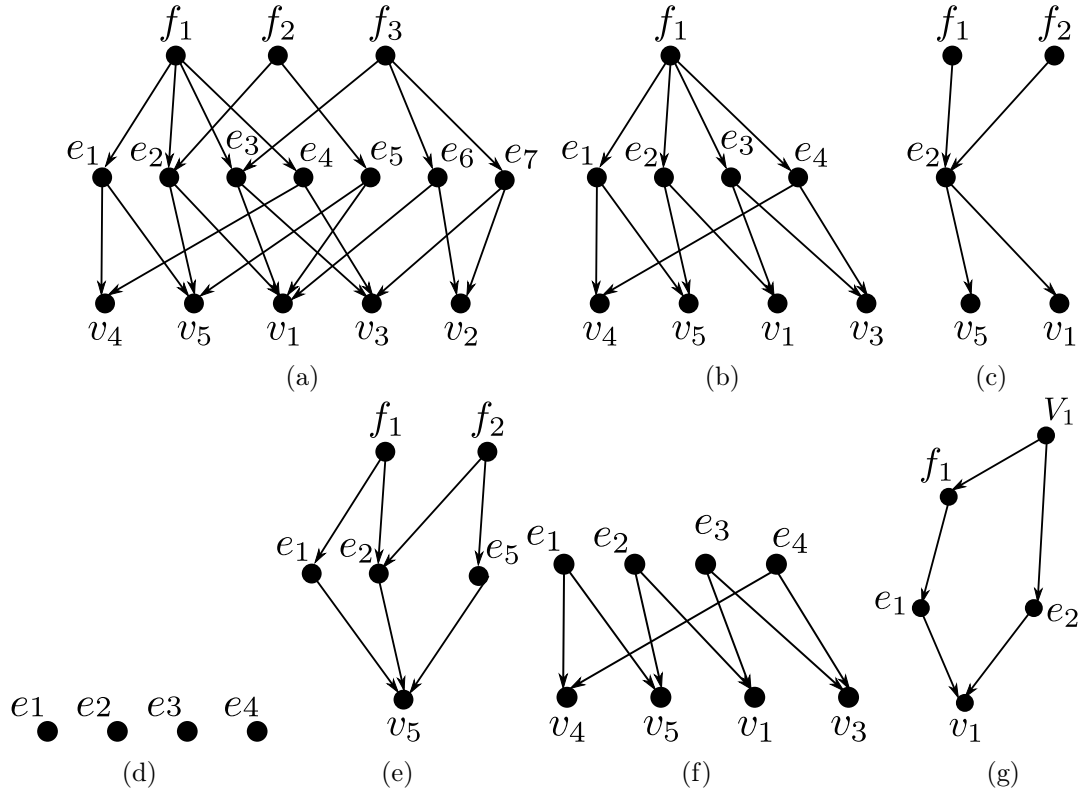


FIGURE 2.20 – (a) Le  $CF$ -ordre fermé correspondant à la subdivision cellulaire de la figure 2.19c. (b) Le  $CF$ -ordre  $|\alpha(f_1)|$ . (c) Le  $CF$ -ordre  $|\theta(e_2)|$ . (d) Le  $CF$ -ordre  $|\alpha^\bullet(f_1)|$ . (e) Le  $CF$ -ordre  $|\beta(v_5)|$ . (f) Le  $CF$ -ordre  $|\alpha^\square(f_1)|$ . (g) Un ordre qui n'est pas fermé car il y a un saut de dimension entre  $V_1$  et  $e_2$ .

de dimension entre deux cellules. En particulier, cela permet d'interpréter le rang d'une cellule comme sa dimension. Un  $CF$ -ordre est dit **pur** si toutes les cellules principales sont de même rang.

**Définition 11** Soit  $|X|$  Un  $CF$ -ordre.  $|X|$  est dit fermé si pour tout  $x \in X$  et  $y \in \alpha^\square(x)$  :

$$\forall i \in ]\rho(y, |X|), \rho(x, |X|[, \exists z \in \alpha^\square(x) \cap \beta^\square(y), \rho(z, |X|) = i$$

On peut imaginer plusieurs manières de représenter un ordre. En utilisant des graphes orientés acycliques (DAG), la relation d'ordre est explicitée par des arcs orientés, la transitivité est encodée de manière implicite. La dimension d'une cellule correspond au nombre d'arcs qui la sépare d'un noeud qui n'a pas de face. Les diagrammes de HASSE permettent également de représenter des ordres en explicitant uniquement les relations entre les deux éléments de rangs successifs, la transitivité est aussi encodée de manière implicite. Les arcs ne sont en revanche pas orientés, la dimension des cellules est déduite de l'axe vertical : si une cellule est représentée au dessus d'une autre, alors sa dimension est supérieure.

La représentation choisie ici utilise les arcs orientés des DAG, ainsi que l'axe vertical pour représenter la relation d'ordre. Les noeuds du graphe d'incidence correspondent aux

éléments de  $X$ , et un arc est représenté de  $x$  vers  $y$  si  $y$  est un élément de  $\alpha^\bullet(x)$ , donc une de ses faces.

Bien que cette description structurelle d'un objet cellulaire par un  $CF$ -ordre soit à première vue "naturelle" et "intuitive", elle comporte certaines limitations. Par exemple, considérons les trois subdivisions cellulaires représentées sur la figure 2.21 : un disque (à bord), une sphère pincée (orientable) et un plan projectif (non orientable). Le  $CF$ -ordre représenté en (d) décrit les relations d'incidence entre les cellules de ces trois objets, qui ne sont clairement pas les mêmes. La question qui se pose alors est : *étant donné un  $CF$ -ordre, quel objet cellulaire décrit-il ?* Comme nous allons le voir dans ce qui suit, dans le cas présent la réponse est : *aucun de ces trois objets...*

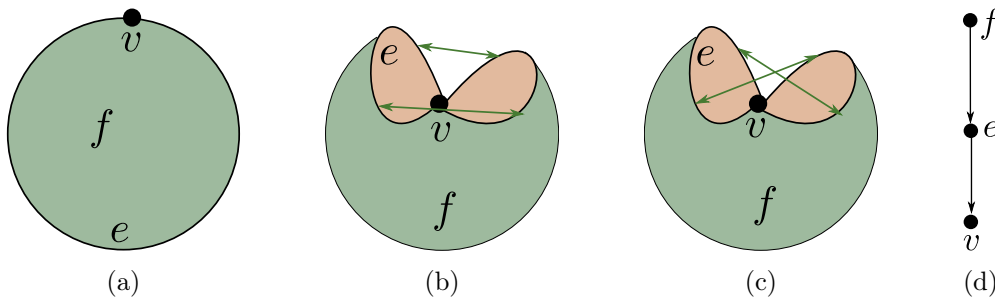


FIGURE 2.21 – (a) Un disque, (b) une sphère pincée et (c) un plan projectif. (d) un  $CF$ -ordre décrivant les relations d'incidence des trois subdivisions cellulaires (a), (b), et (c).

Afin de répondre à cette question, la clé est l'interprétation simpliciale. En effet, on peut associer un ensemble semi-simplicial numéroté à tout  $CF$ -ordre fermé. Plus précisément il s'agit d'un complexe simplicial abstrait numéroté : un 0-simplexe numéroté  $p$  est associé à toute  $p$ -cellule. On obtient ainsi une numérotation et à toute suite de cellules  $(c_i, \dots, c_j)$ , telle que  $c_k$  est une face de  $c_{k+1}$ , avec  $k \in [i, j - 1]$ , correspond un  $(j - i)$ -simplexe.

En particulier, toute suite de longueur maximale  $n$  correspond à un simplexe principal numéroté  $(0, \dots, n)$ . On retrouve donc la notion de cellule au sens des ensembles semi-simpliciaux numérotés. Ainsi, le complexe cellulaire associé au  $CF$ -ordre représenté sur la figure 2.21 est représenté sur la figure 2.22.

### 2.3.2.1 Opérations de construction

Les opérations de construction sont le **cône cellulaire** et l'**identification** de cellules.

#### Cône cellulaire

L'opération de cône cellulaire consiste à ajouter une nouvelle cellule et à la relier à l'ordre par  $\alpha$ . Notons toutefois qu'afin de garantir que le  $CF$ -ordre résultant soit fermé, l'opération de cône doit être effectuée sur un sous-ordre pur. La figure 2.23 illustre l'opération de cône cellulaire sur un  $CF$ -ordre.

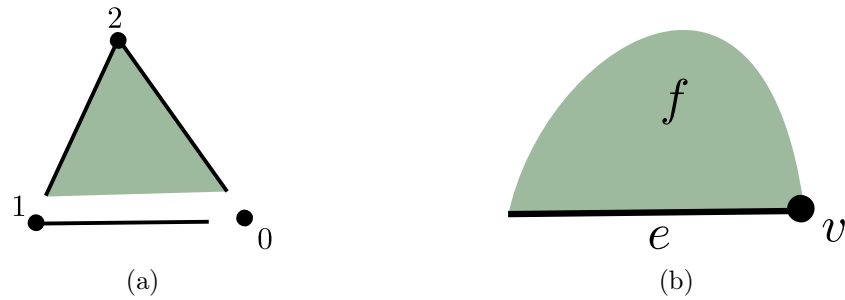


FIGURE 2.22 – (a) Ensemble semi-simplicial numéroté correspondant au  $CF$ -ordre représenté sur la figure 2.21d, avec mise en évidence des cellules. (b) subdivision cellulaire associée à (a).

### Identification

L'opération d'identification consiste à fusionner deux cellules. Il faut pour cela s'assurer que les sous-graphes correspondant à leur fermeture soient identiques.

#### 2.3.2.2 Cellules

Le problème illustré par la figure 2.21 est lié à la multi-incidence. Différentes approches ont été menées pour décrire des assemblages de cellules via des graphes d'incidence, aucune ne permet, à notre connaissance, de décrire des structures cellulaires présentant de la multi-incidence. Si cela peut sembler évident que l'on ne peut pas représenter de la multi-incidence entre une  $k$ -cellule et une  $(k-1)$ -cellule, cela est moins évident lorsqu'il y a plus d'une dimension d'écart, mais cette limitation est toujours vraie [Damiand 2014] Section 8.2.3.

Concernant les cellules, on sait seulement qu'elles sont obtenues par opération de cône. Même s'ils sont purs et fermés, les cellules des  $CF$ -ordres ne correspondent pas nécessairement à des boules. Par exemple, figure 2.24 illustre un  $CF$ -ordre pur et fermé contenant de telles cellules : l'arête  $e_2$  possède trois sommets dans son bord, et le bord de la face  $f_2$  n'est pas connexe.

### 2.3.3 Variétés – Quasi-variétés

Idéalement, il serait intéressant de garantir que la réalisation géométrique des cellules soient homéomorphes à des boules, comme c'est le cas pour les simplexes les cubes et plus généralement les simplloïdes. Cela permettrait de représenter des  $CW$ -complexes, et pouvoir utiliser tous les résultats existants sur ces espaces topologiques. Malheureusement, la caractérisation d'un boule n'est pas combinatoire.

La caractérisation combinatoire utilisée pour définir les cellules des objets construits à partir de  $n$ -cellules assemblées le long de  $(n-1)$ -cellules est basée sur la notion de variété : une condition combinatoire nécessaire est la suivante : *toute  $(n-1)$ -cellule est incidente à au plus 2  $n$ -cellules*. En dimension 0, 1 et 2, cette condition est suffisante. Par exemple,



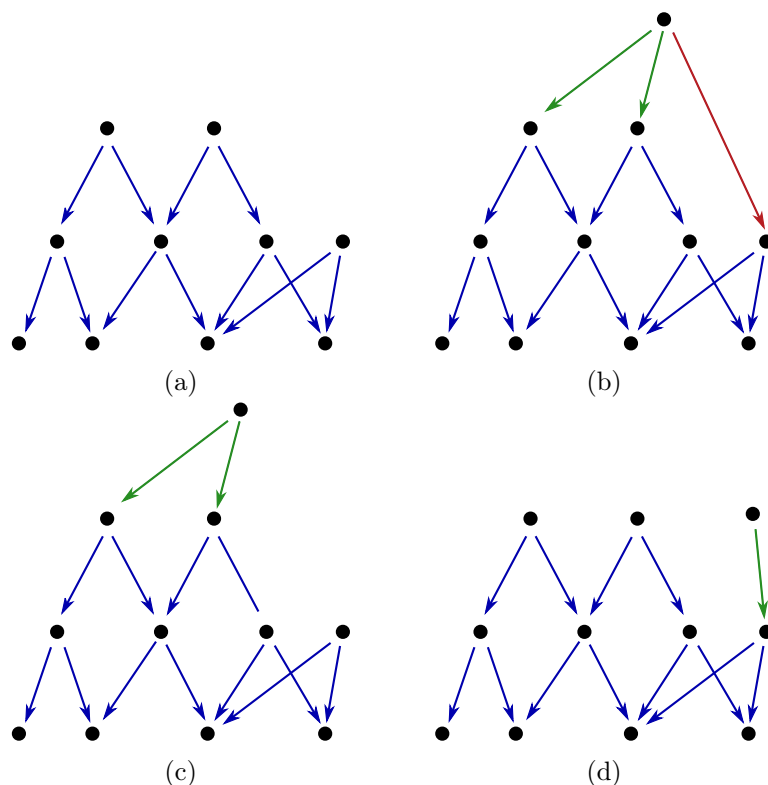


FIGURE 2.23 – (a) Un  $CF$ -ordre fermé mais non pur : deux cellules principales sont de dimension 2 et une est de dimension 1. (b) le  $CF$ -ordre résultant de l'opération de cône sur (a) n'est plus fermé : il y a un saut de dimension (flèche rouge). (c) – (d) Le résultat d'une opération de cône effectuée sur un sous-ordre pur et fermé reste fermé.

la figure 2.25 illustre des exemples de variétés simpliciales obtenues en assemblant deux triangles, le voisinage de tout point est homéomorphe à un disque<sup>4</sup>.

Pour  $n > 2$ , cette condition n'est pas suffisante pour caractériser les variétés. En effet, la classe d'objets vérifiant cette propriété correspond à une classe plus large : les **quasi-variétés**. À notre connaissance, les quasi-variétés constituent la classe d'objets pouvant être caractérisés de manière combinatoire la plus proche des variétés. Par exemple, les cellules  $f_2$  et  $e_2$  (et leurs bords) de la figure 2.24 ne sont pas des quasi-variétés.

**Définition 12** Une *quasi-variété simpliciale numérotée de dimension  $n$*  est un ensemble *semi-simplicial numéroté*  $(S, \nu)$  de dimension  $n$  qui peut être construit, à partir d'un ensemble *semi-simplicial vide*, de la manière suivante :

- ajout des  $n$ -simplexes isolés (et leurs bords),
- identification des  $(n-1)$ -simplexes (et leurs bords) de manière à ce que tout  $(n-1)$ -simplexe soit incident à au plus deux  $n$ -simplexes.

4. Ou bien à un demi-disque sur le bord, dans le cas de variétés à bord.

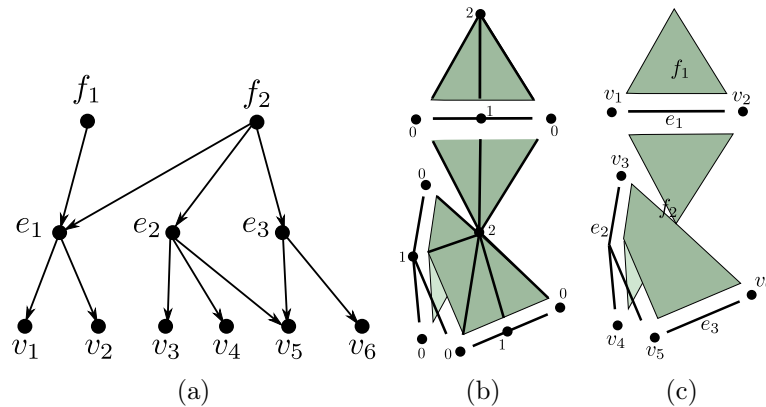


FIGURE 2.24 – (a) Un  $CF$ -ordre. (b) le complexe simplicial abstrait numéroté correspondant avec mise en évidence des cellules. (c) Une représentation de la subdivision cellulaire, certaines cellules sont clairement *pathologiques* au sens où leur topologie est *très différente* de celle d'une boule.

L'objet représenté sur la figure 2.26b est une quasi-variété simpliciale numérotée qui ne correspond pas à une variété. Cet objet peut être obtenu à partir d'un cône sur une cellule carrée (cf. figure 2.26a) en identifiant deux à deux les triangles bleus de deux cotés opposés. Chaque triangle est bien incident à au plus deux tétraèdres, mais le voisinage du sommet numéroté 3 n'est pas homéomorphe à une boule.

Finalement, les **quasi-variétés cellulaires** ou QVC, constituent la sous-classe des quasi-variétés simpliciales numérotées telle que chaque cellule (et son bord) soit également une quasi-variété simpliciale numérotée.

### 2.3.3.1 Quasi-variétés cellulaires

**Définition 13** Une quasi-variété cellulaire  $S$  de dimension  $n$  est une quasi-variété simpliciale numérotée telle que :

- si  $n = 0$ , alors  $S$  est un ensemble de 0-simplexes numérotés 0, partitionné en composantes connexes de un ou deux 0-simplexes.
- si  $n > 0$ , alors  $S$  peut être construite à partir des deux opérations suivantes :
  1. **cône cellulaire** sur une  $(n - 1)$ -quasi-variété cellulaire  $S'$  : cette opération consiste à effectuer un cône simplicial sur chaque composante connexe de  $S'$ , en numérotant  $n$  le nouveau sommet du cône de chaque composante,
  2. **identification** de deux  $(n - 1)$ -cellules. Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux  $(n - 1)$ -cellules de  $S$ , telles que chaque  $(n - 1)$ -simplexe de  $c_1$  et de  $c_2$  appartient au bord d'un seul  $n$ -simplexe de  $S$  et qu'il existe un isomorphisme  $\phi$  entre  $c_1$  et  $c_2$  : cette opération consiste à identifier chaque simplexe de  $c_1$  avec le simplexe de  $c_2$  correspondant par  $\phi$ .

Notons que dans la définition,  $c_1$  et  $c_2$  ne sont pas nécessairement deux cellules différentes. Dans ce cas, il est possible de "replier" la cellule sur elle-même, on parle alors

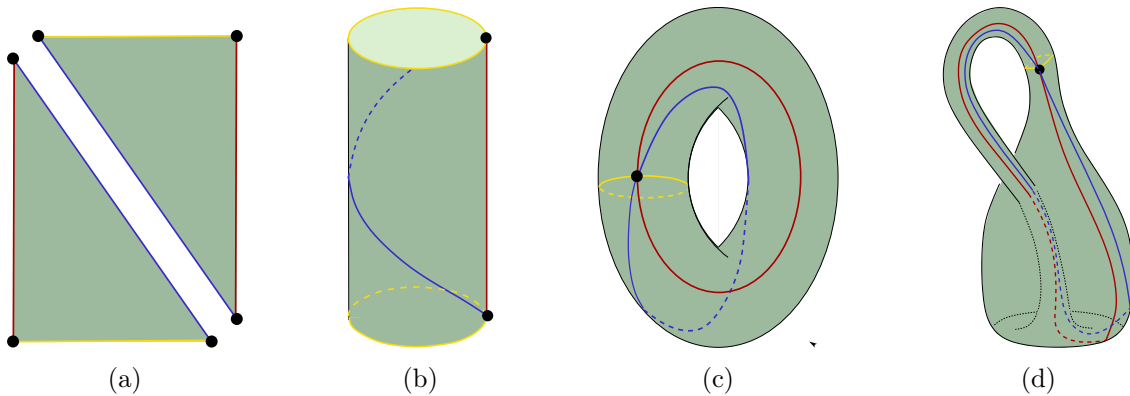


FIGURE 2.25 – (a) Deux triangles peuvent être assemblés de différentes manières afin d’obtenir différentes variétés simpliciales : un anneau en (b), un tore en (c), une bouteille de KLEIN en (d).

de **repliement**. La figure 2.27 présente des exemples et contre-exemples de quasi-variétés cellulaires.

Par définition, dans une quasi-variété cellulaire de dimension  $n$ , tous les simplexes principaux sont de dimension  $n$ . De plus, leur définition constructive par cônes et identifications de cellules garantit que tout  $(n - 1)$ -simplexe  $\mu$  est face d’exactement un ou deux  $n$ -simplexes. Si  $\mu$  est face de deux simplexes  $\sigma$  et  $\sigma'$ , la numérotation garantit que  $\sigma$  et  $\sigma'$  partagent  $\mu$  via un même opérateur de face  $d_j$ . Par exemple, sur la figure 2.27b, les opérateurs de face  $d_j$  de chaque triangle correspondent aux faces opposées à son sommet numéroté  $j$ . On peut constater que toute arête partagée par deux triangles est partagée via un même opérateur de face. En particulier, si  $\mu = \sigma d_n = \sigma' d_n$ , alors  $\mu$  appartient à une  $(n - 1)$ -cellule, sinon  $\mu$  appartient à une  $n$ -cellule. La figure 2.28 illustre la construction d’une quasi-variété cellulaire.

### 2.3.4 Cartes combinatoires

Nous présentons dans cette partie des structures cellulaires qui intègrent dans leur définition les contraintes permettant de garantir que les cellules sont des quasi-variétés. Nous présentons deux structures :

- les **Gcartes** qui permettent de représenter des quasi-variétés cellulaires. Les cellules (et leur bord) ainsi que l’assemblage lui-même sont des quasi-variétés ;
- les **chaînes de cartes** qui permettent de représenter des assemblages quelconques de quasi-variétés cellulaires.

Différents modèles cellulaires ont été définis dans le but de décrire des variétés combinatoires. Historiquement, les premiers travaux sur les cartes combinatoires ont été effectués par Edmonds [Edmonds 1960] pour représenter des subdivisions de surfaces orientables sans bord. La structure de **demi-arête** a été définie dans le cadre de la modélisation de volumes par leurs bords (solid modeling) [Weiler 1985, Mäntylä 1988]. Ces structures ont été étendues aux surfaces orientables ou non [Guibas 1985], à la dimension 3 par

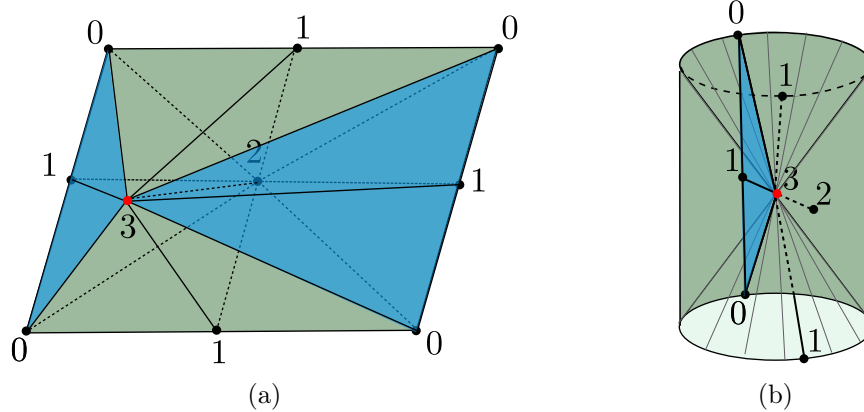


FIGURE 2.26 – (a) Une variété simpliciale de dimension 3 obtenue par une opération de cône sur une cellule carrée. En identifiant deux à deux les quatre faces triangulaires opposées représentées en bleu, on obtient la quasi-variété simpliciale représentée en (b). Par souci de clarté, seules les arêtes des triangles bleues et celles incidentes au sommet numéroté 3 sont représentées. La réalisation topologique de (b) n'est pas une variété : le voisinage du sommet numéroté 3 n'est pas une boule de dimension 3.

[Dobkin 1987], et en dimension quelconque par [Vince 1983, Lienhardt 1989]. Des équivalences entre ces structures ont été montrées dans [Lienhardt 1991].

Il existe donc différentes structures basées sur la notion de carte combinatoire. Les cartes généralisées (ou Gcartes) permettent de décrire les quasi-variétés cellulaires en toute dimension, à bord ou sans bord, orientables ou non.

Les Gcartes optimisent la représentation des quasi-variétés cellulaires en tirant parti du fait que tous les simplexes principaux ont même dimension, et que si deux simplexes principaux  $\sigma$  et  $\mu$  sont adjacents, alors il existe  $j$  tel que  $\sigma d_j = \mu d_j$ . Les cellules ne sont donc pas explicitées au sein de cette structure, mais sont décrites à partir d'un élément plus élémentaire correspondant à chaque simplexe principal : le brin.

Dans la suite de ce chapitre, le terme **cellule** désigne une quasi-variété cellulaire obtenue par application d'une opération de cône sur une quasi-variété cellulaire de dimension inférieure.

#### 2.3.4.1 Cartes généralisées

**Définition 14** Une **carte généralisée** de dimension  $n$ , ou  $n$ -Gcarte, où  $n \geq 0$ , est un  $(n+2)$ -uplet  $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$  tel que :

- $B$  est un ensemble fini d'éléments, appelés **brins**,
- $\forall i \in [0, n], \alpha_i$  est une involution sur  $B$ ,
- $\forall i \in [0, n-2], \forall j \in [i+2, n], \alpha_i \alpha_j$  est une involution.

Une involution  $\alpha_i$  est une permutation telle que  $\alpha_i = \alpha_i^{-1}$ . Une  $n$ -Gcarte n'explicit

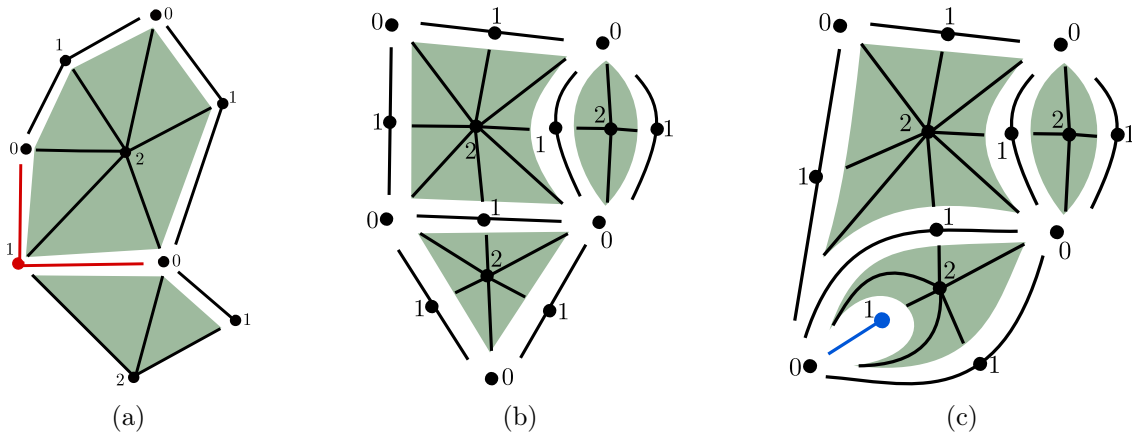


FIGURE 2.27 – (a) Une quasi-variété simpliciale numérotée qui n'est pas une quasi-variété cellulaire, car les deux 2-cellules n'ont pas été assemblées le long d'une 1-cellule complète (en rouge). (b) Une quasi-variété cellulaire. (c) Une quasi-variété cellulaire qui peut être obtenue à partir de (b) en identifiant la 1-cellule (en bleu) avec elle-même, créant un repliement.

que les simplexes de dimension  $n$  (*i. e.* les brins), et les relations d'adjacence entre ces simplexes (*i. e.* les involutions). Les cellules ne sont pas explicitées, mais peuvent être retrouvées en utilisant la notion d'**orbite**. Comme les sommets des simplexes principaux sont numérotés de 0 à  $n$ , tout  $n$ -simplexe est incident à exactement une  $p$ -cellule, pour tout  $p \in [0, n]$ . Une cellule de dimension  $p$  peut donc être définie à partir des simplexes principaux, c'est-à-dire des brins.

**Définition 15** Soit  $\Phi = \{\pi_0, \dots, \pi_n\}$  un ensemble de permutations définies sur un ensemble  $B$ . On note  $\langle \Phi \rangle = \langle \pi_0, \dots, \pi_n \rangle$  le groupe des permutations de  $B$  engendré par  $\Phi$ . L'**orbite** d'un élément  $b \in B$  relative au groupe  $\langle \Phi \rangle$ , notée  $\langle \Phi \rangle (b)$  est l'ensemble  $\{\phi(b) \mid \phi \in \langle \Phi \rangle\}$ .

De manière informelle, l'orbite  $\langle \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n} \rangle (b)$  d'un brin  $b$  d'une Gcarte  $G$  est l'ensemble des brins de  $G$  qu'il est possible d'atteindre à partir de  $b$ , par application de n'importe quelle composition d'involutions  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}$ .

**Définition 16** Soit  $G$  une  $n$ -Gcarte,  $b$  un brin de  $G$  et  $i \in \{0, \dots, n\}$ . La  $i$ -cellule incidente à  $b$  est  $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \rangle (b)$ .

La figure 2.29 illustre les notions d'orbite et de cellules sur une Gcarte de dimension 2. Une  $n$ -Gcarte  $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$  est dite **fermée** ou **sans point fixe** si, pour tout  $i \in 0, \dots, n$ , et pour tout  $b \in B$   $b\alpha_i \neq b$ . Par exemple, la Gcarte représentée sur la figure 2.29a contient des points fixes par  $\alpha_2$ .

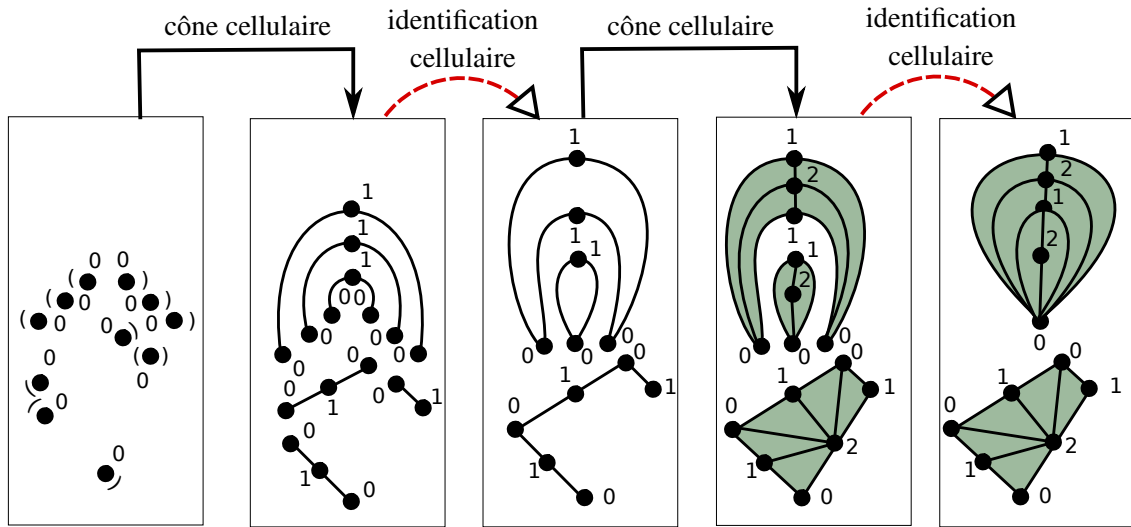


FIGURE 2.28 – Construction d'une quasi-variété cellulaire de dimension 2.

Concernant les opérations de construction, comme les Gcartes correspondent à des quasi-variétés cellulaires, elles peuvent être construites de manière similaire à la définition 13.

**Extention**

Soit  $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$  une  $n$ -Gcarte, et soit  $Q$  la quasi-variété cellulaire de dimension  $n$  correspondante. La  $(n + 1)$ -Gcarte  $(B, \alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} = Id)$ , appelée l'**extention** de  $G$ , correspond à l'application d'une opération de cône cellulaire sur chaque composante connexe de  $Q$ .

**Couture**

L'opération de **couture** permet d'assembler les cellules à chaque étape de la construction de la Gcarte. Cette opération correspond à l'identification de cellules et leur bord dans la quasi-variété cellulaire associée. La figure 2.30 illustre la construction de la Gcarte correspondant à la quasi-variété cellulaire représentée sur la figure 2.28.

**Produit cartésien**

Le produit cartésien d'une  $k$ -Gcarte par une  $l$ -Gcarte est une  $(k + l)$ -Gcarte. Cette opération n'est pas développée ici, une étude complète détaillant les définitions et les algorithmes de calcul du produit cartésien sur différentes structures cellulaires, notamment les Gcartes et les chaînes de cartes est disponible dans [Lienhardt 2004].

**Notes :** Une attention particulière doit être portée sur l'interprétation cellulaire des Gcartes, afin de bien comprendre ce que l'on manipule. Lorsque l'on passe d'une  $n$ -Gcarte à une  $(n + 1)$ -Gcarte via une extention, on ajoute, pour chaque composante connexe, une  $(n + 1)$ -cellule, dont le bord est une quasi-variété cellulaire de dimension  $n$ . Par exemple,

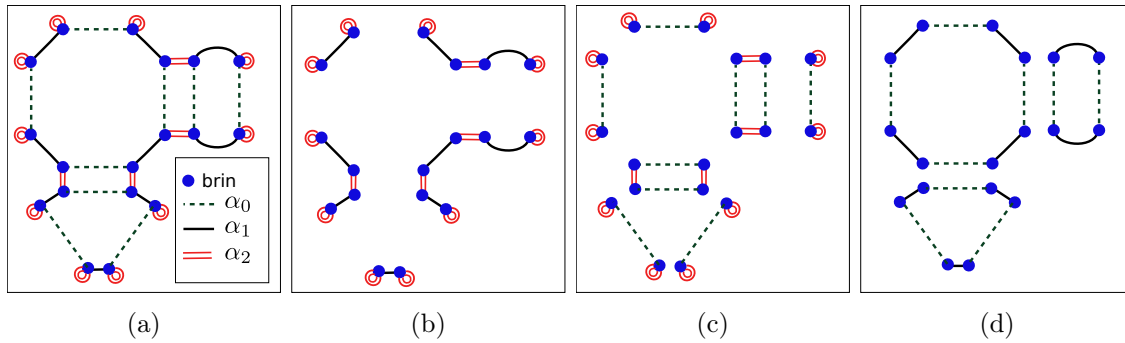


FIGURE 2.29 – (a) La 2-Gcarte correspondant à la quasi-variété cellulaire représentée sur la figure 2.27b. (b) Chaque orbite  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  correspond à une cellule de dimension 0. (c) Chaque orbite  $\langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle$  correspond à une cellule de dimension 1. (d) Chaque orbite  $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$  correspond à une cellule de dimension 2.

lorsque l'on passe d'une 2-Gcarte représentant une sphère à une 3-Gcarte en ajoutant  $\alpha_3 = Id$ , on crée une 3-Gcarte dont le bord correspond à une sphère, la 3-cellule "remplit" la sphère. Considérons à présent une 2-Gcarte représentant un tore; en ajoutant  $\alpha_3 = Id$ , on crée une cellule de dimension 3 dont le bord est un tore, mais on n'a pas "rempli" le tore. Dit autrement, la cellule de dimension 3 ne correspond pas à un tore "plein" mais bien à un cône sur un tore. Un autre exemple illustre cela : la figure 2.26b représente une quasi-variété cellulaire qui peut être obtenue par un cône cellulaire (avec le sommet numéroté 3) sur la surface décrivant un cylindre vertical. On voit bien ici que la 3-cellule est un cône sur le cylindre et non pas un cylindre "plein".

Bien sûr, cela n'empêche pas de décrire une subdivision d'un tore plein, ou d'un cylindre plein, en construisant par exemple un cube de dimension 3, c'est-à-dire un cylindre plein, et en recollant deux faces opposées pour obtenir un tore "plein".

### 2.3.4.2 Chaînes de cartes

Comme nous venons de le voir, la notion de quasi-variété cellulaire permet de manipuler des cellules et des assemblages de cellules proches des variétés.

La modélisation d'objets géométriques *non-variétés* a également été étudiée par exemple dans [De Floriani 2003], conduisant à la définition de structures permettant de relâcher les contraintes portant sur les assemblages de cellules. Nous présentons ici la structure des **chaînes de cartes** [Elter 1994] qui permet de représenter de tels assemblages, dont les cellules sont représentées par des Gcartes (cf. figure 2.31).

**Définition 17** Une chaîne de cartes de dimension  $n$ , est un  $n$ -uplet :

$C = ((G^i)_{i=0,\dots,n}, (\sigma^i)_{i=1,\dots,n})$  tel que :

1.  $\forall i, 0 \leq i \leq n, G^i = (B^i, \alpha_0^i, \dots, \alpha_{i-1}^i, \alpha_i^i = \omega)$  est une  $i$ -Gcarte telle que  $\omega$  n'est pas définie sur  $B^i$ ;
2.  $\forall i, 1 \leq i \leq n, \sigma^i : B^i \longrightarrow B^{i-1}$ ;

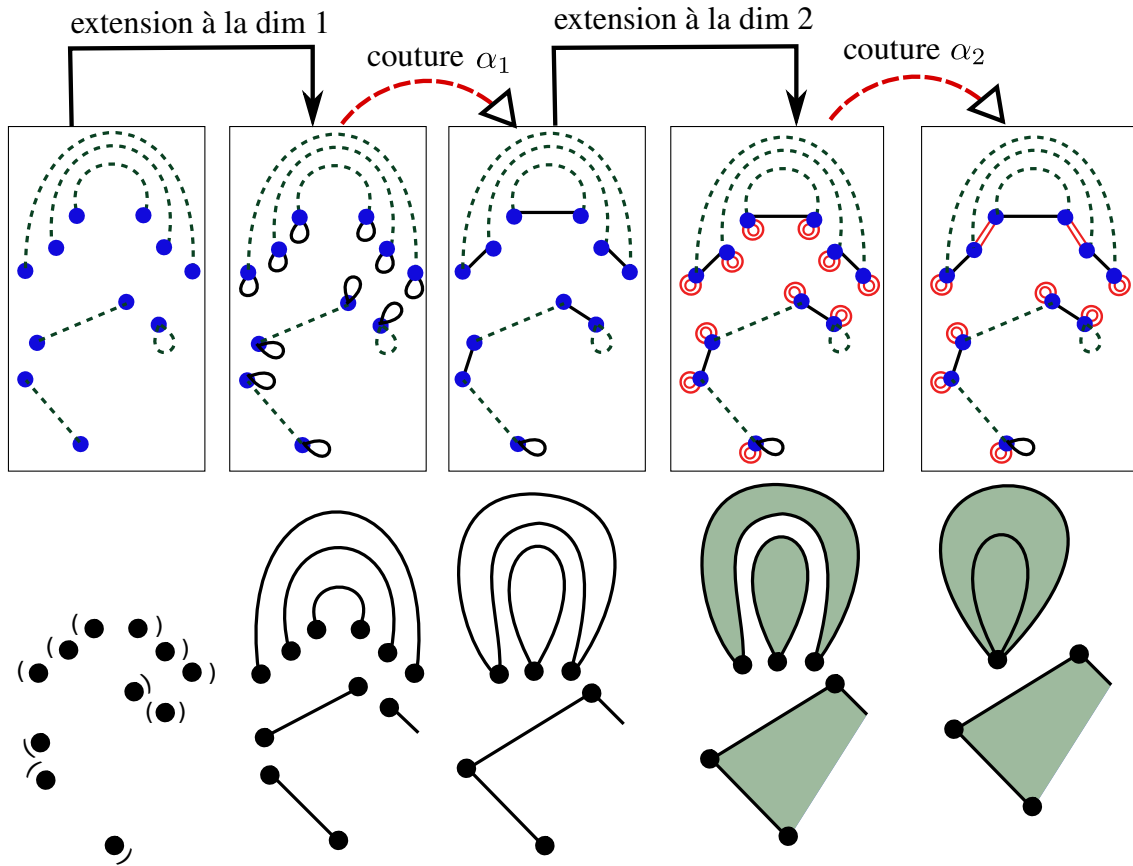


FIGURE 2.30 – En haut : construction d'une Gcarte à partir des opérations d'extension et de couture. L'extension permet de construire une  $(n + 1)$ -Gcarte à partir d'une  $n$ -Gcarte, l'opération de couture identifie des cellules en respectant les contraintes des quasi-variétés cellulaires. En bas : subdivision cellulaire correspondante.

pour  $i \geq 2$ ,  $\sigma^i$  vérifie, pour tout brin  $b$  de  $B^i$  :

- (a)  $\sigma^i$  est un isomorphisme<sup>5</sup> entre une orbite  $\langle \alpha_0^i, \dots, \alpha_{i-2}^i \rangle$  de  $G^i$  et une orbite  $\langle \alpha_0^{i-1}, \dots, \alpha_{i-2}^{i-1} \rangle$  de  $G^{i-1}$ ,
- (b)  $b\alpha_{i-1}^i \sigma^i \sigma^{i-1} = b\sigma^i \sigma^{i-1}$ .

Dans une chaîne de cartes de dimension  $n$ , toutes les cellules sont explicitement représentées. Les relations d'incidence entre une  $i$ -cellule et une  $(i - 1)$ -cellule de son bord sont explicitées via les opérateurs de face  $\sigma^i$ . C'est la raison pour laquelle, pour chaque Gcarte de dimension  $i$ , l'involution  $\alpha_i^i = \omega$  n'est pas définie. On appelle de telles Gcartes des  $\omega$ -Gcartes.

Une  $j$ -cellule  $c_j$  est incidente à une  $i$ -cellule  $c_i$  s'il existe un brin  $b_i$  de  $c_i$ , un brin  $b_j$  de  $c_j$ , et une suite d'opérateurs de face tels que  $b_i \sigma^i \dots \sigma^{j+1} = b_j$ .

5. Cette condition 2.(a) est plus restrictive que celle donnée dans [Elter 1994], mais suffisante ici.



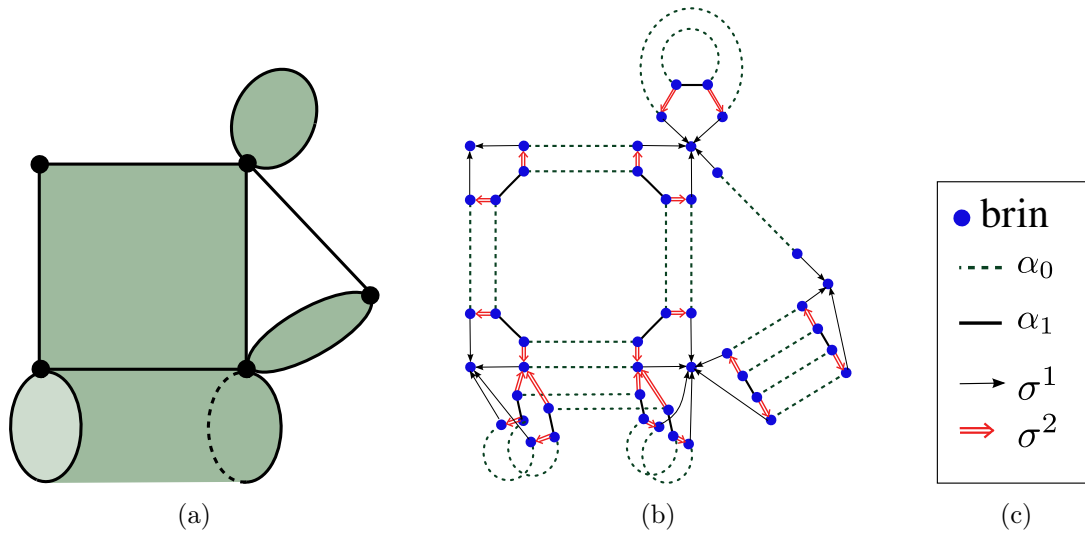


FIGURE 2.31 – (a) Un complexe cellulaire, qui n’est pas une quasi-variété, les cellules sont des quasi-variétés cellulaires. (b) La chaîne de cartes correspondant à la subdivision cellulaire représentée en (a). (c) La légende utilisée pour représenter la chaîne de cartes représentée en (b).

Bien sûr, une chaîne de cartes peut être associée à toute Gcarte. Il suffit pour cela d’expliciter toutes les cellules sous forme de Gcartes. Lorsque l’objet lui-même est une quasi-variété cellulaire, il est plus intéressant, au regard de la complexité de la représentation, de le représenter par une seule Gcarte.

### 2.3.5 Équivalences de modèles

Nous avons présenté deux familles de structures cellulaires, présentant deux approches distinctes : pour les graphes d’incidence, les cellules et les relations d’incidence sont explicitées. Les cellules sont quelconques ; on sait seulement que ce sont des cônes. L’assemblage des cellules ne permet pas de représenter de multi-incidence.

La définition des cartes combinatoires est basée sur la notion de quasi-variété cellulaire ; leurs définitions intègrent des contraintes sur les cellules : ce sont des quasi-variétés cellulaires, et les assemblages autorisent la multi-incidence. Les simplexes principaux composant les cellules (*i. e.* les brins) et leurs relations d’adjacence sont explicitées, mais les cellules en revanche ne le sont pas.

Se pose alors la question du lien entre ces structures, et en particulier : *est-il possible d’ajouter des contraintes sur les CF-ordres afin de garantir que les cellules et les assemblages soient des quasi-variétés cellulaires ?* La réponse est *oui*, et la sous-classe des CF-ordres répondant à cela est celle des  $n$ -surfaces. Les  $n$ -surfaces ont été initialement définies par [Evako 1996] et introduites dans le domaine de l’analyse d’images par [Bertrand 1999b].

Les  $n$ -surfaces sont des  $CF$ -ordres purs et fermés définis récursivement de la manière suivante :

**Définition 18** Soit  $|X| = (X, \alpha)$  un  $CF$ -ordre non vide.

- L'ordre  $|X|$  est une 0-surface si  $X$  contient exactement deux éléments  $x$  et  $y$  tels que  $y \notin \alpha(x)$  and  $x \notin \alpha(y)$  ;
- L'ordre  $|X|$  est une  $n$ -surface,  $n > 0$ , si  $|X|$  est connexe, et si, pour tout  $x \in X$ , l'ordre  $|\theta^\square(x)|$  est une  $(n - 1)$ -surface.

Les  $n$ -surfaces sont des  $CF$ -ordres permettant de représenter les quasi-variétés cellulaires fermées sans multi-incidence. L'équivalence entre les  $n$ -surfaces et les  $n$ -Gcartes fermées sans multi-incidence a été établie dans [Alayrangués 2008].

La figure 2.32 illustre une  $n$ -surface, la quasi-variété cellulaire correspondante, et la Gcarte associée.

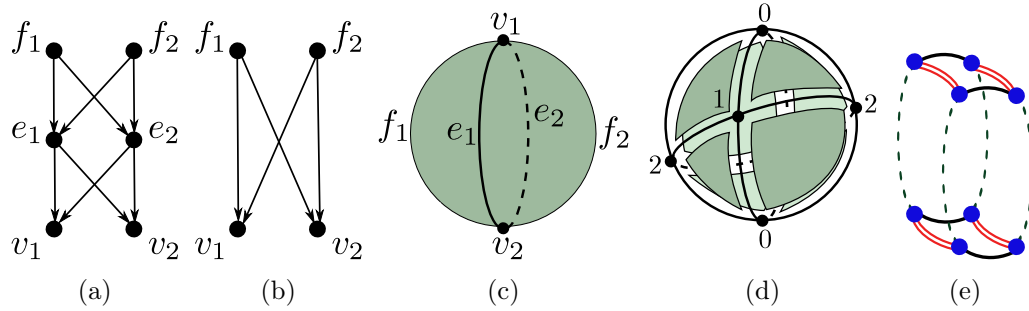


FIGURE 2.32 – (a) Une  $n$ -surface de dimension 2 décrivant une sphère. (b) Le  $CF$ -ordre  $|\theta^\square(e_1)| = |\theta^\square(e_2)|$  est une 1-surface. (c) Subdivision cellulaire décrite par (a). (d) La quasi-variété cellulaire correspondant à (a) est fermée et sans multi-incidence. (e) La Gcarte correspondant à la  $n$ -surface représentée en (a).

Pour résumer, le mécanisme de suppression de la multi-incidence permet de faire le lien dans le cellulaire entre les Gcartes fermées sans multi-incidence et les  $n$ -surfaces.

L'idée de base permettant de prouver l'équivalence entre ces deux modèles est la notion de **cell-tuple** introduite par Brisson [Brisson 1993] et la **propriété de switch** que doivent respecter les graphes d'incidence. Cette propriété garantit qu'à toute suite de cellules incidentes  $(c_0, \dots, c_i, \dots, c_n)$  correspond une unique suite  $(c_0, \dots, c'_i, \dots, c_n)$ , pour tout  $i \in [0, n]$  et  $c_i \neq c'_i$ . L'opérateur  $switch_i$  associe à tout triplet  $(c_{i-1}, c_i, c_{i+1})$  de cellules incidentes de dimension consécutives, l'unique triplet  $(c_{i-1}, c'_i, c_{i+1})$  où  $c_i \neq c'_i$ . Afin d'homogénéiser la définition de l'opérateur  $switch$  sur les cellules de dimension 0 et  $n$ , une cellule fictive de dimension  $-1$  et une cellule fictive de dimension  $n + 1$  sont ajoutées au graphe d'incidence. La figure 2.33 illustre l'opérateur  $switch$  : étant données trois cellules incidentes, une seule configuration *en diamant* (représentée en rouge) passe par ces 3 cellules.

L'opérateur  $switch_i$  correspond dans le modèle des Gcartes aux involutions  $\alpha_i$ . Une conséquence directe de la propriété de switch est que, pour toute suite  $(c_0, \dots, c_n)$ , on a :  $(switch_i switch_j)^2 = Id$  pour tout  $j \neq i \pm 1$ . Ceci correspond, dans le modèle des Gcartes, à la propriété :  $\alpha_i \alpha_j$  est une involution pour tout  $j \in [i + 2, n]$ .

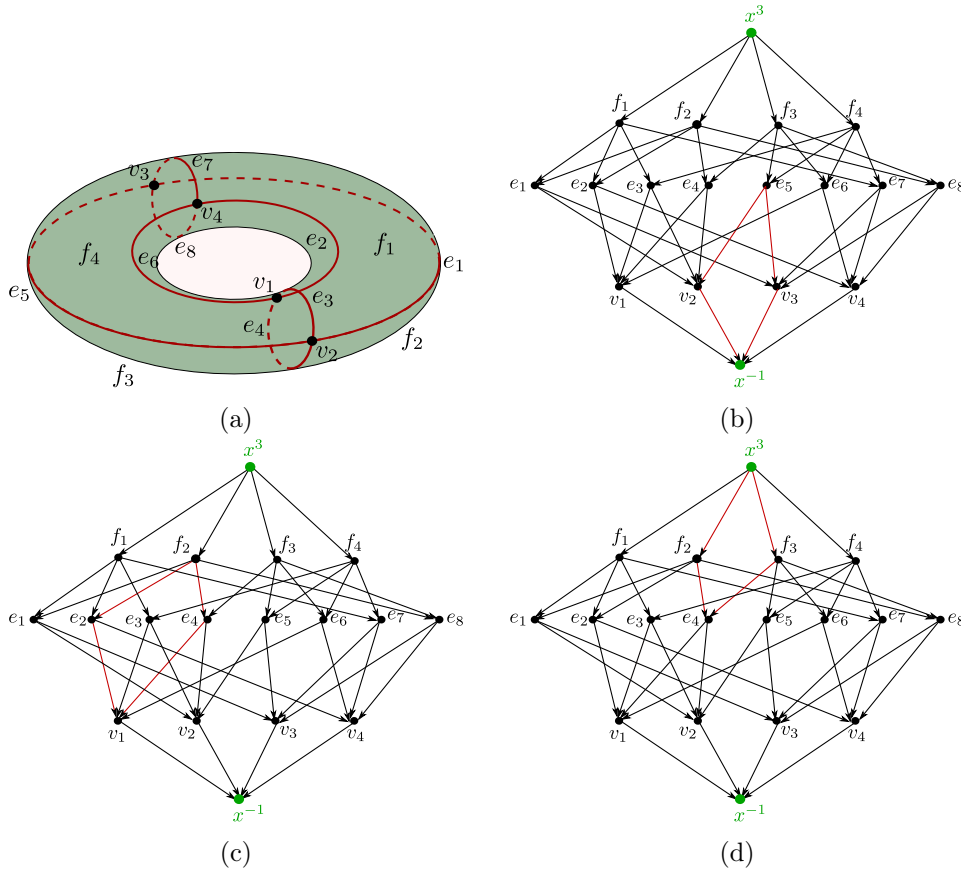


FIGURE 2.33 – (a) Une subdivision cellulaire du tore correspondant à une 2-surface. (b) La propriété  $switch_0$  associe  $(x^{-1}, v_2, e_5)$  et  $(x^{-1}, v_3, e_5)$ . (c) La propriété  $switch_1$  associe  $(v_1, e_2, f_2)$  et  $(v_1, e_4, f_2)$ . (d) La propriété  $switch_2$  associe  $(e_4, f_2, x^3)$  et  $(e_4, f_3, x^3)$ . Les cellules fictives  $x^3$  et  $x^{-1}$  (en vert) sont ajoutées afin d'homogénéiser la propriété de  $switch$  pour les rangs 0 et 2.

### 2.3.5.1 Chaînes de surfaces

Comme nous l'avons vu précédemment, les Gcartes permettent de manipuler des quasi-variétés cellulaires, dont les cellules (et leurs bords) sont également des quasi-variétés cellulaires. Les chaînes de cartes permettent de représenter des assemblages quelconques de quasi-variétés cellulaires. De manière analogue, nous avons étendu les  $n$ -surfaces aux **chaînes de  $n$ -surfaces** [Alayrangues 2015c] qui permettent de représenter des assem-

blages quelconques de quasi-variétés cellulaires sans multi-incidence.

**Définition 19** Soit  $|X| = (X, \alpha)$  un *CF-ordre connexe non vide*.  $|X|$  est une chaîne de surfaces de dimension  $k$  si,  $\forall i, 1 \leq i \leq k, \forall x^i$  cellule principale de rang  $i$  de  $|X|$ ,  $|\alpha^\square(x^i)|$  est une  $(i - 1)$ -surface.

Les chaînes de surfaces généralisent les  $n$ -surfaces : le bord de chaque  $i$ -cellule principale est une  $(i - 1)$ -surface, mais la subdivision globale n'est pas nécessairement une  $n$ -surface. Dit autrement, chaque cellule est contrainte, mais le mode d'assemblage lui-même ne l'est plus.

Nous avons montré l'équivalence entre les chaînes de  $n$ -surfaces et les chaînes de cartes sans multi-incidence. La figure 2.34 illustre une subdivision cellulaire, sa description par une chaîne de surfaces, et la chaîne de cartes correspondante. Pour montrer cette équivalence, nous avons étendu la propriété *switch* aux chaînes de  $n$ -surfaces. Afin d'obtenir une définition homogène, nous considérons également une cellule fictive  $x^{-1}$  qui appartient à l' $\alpha$ -adhérence de tout élément de  $X$ .

**Propriété 1** Soit  $|X|$  une  $k$ -chaîne de surfaces.  $\forall (x, y) \in (X \cup \{x^{-1}\}) \times (X \cup \{x^{-1}\})$ ,  $\beta^\bullet(x) \cap \alpha^\bullet(y)$  est soit vide, soit contient exactement 2 éléments.

À notre connaissance, les chaînes de  $n$ -surfaces constituent la structure combinatoire basée sur des graphes d'incidence la plus large pour laquelle une équivalence ait été établie avec une carte combinatoire.

## 2.4 Structures celluloïdales

Nous avons présenté les trois mécanismes à la base de la classification présentée en introduction de ce chapitre sur la figure 2.1 : le produit cartésien, la suppression de la multi-incidence, et la numérotation cellulaire. Afin de compléter la classification présentée en introduction, nous combinons les mécanismes de produit cartésien et de numérotation cellulaire. À notre connaissance, cette étude n'a jamais été menée auparavant.

L'objectif est donc d'étendre à la fois :

- le mécanisme de numérotation cellulaire aux structures simpléoïdales,
- le mécanisme de produit cartésien aux structures cellulaires,
- le mécanisme de suppression de la multi-incidence aux structures *cellulaires simpléoïdales*, ou *celluloïdales*.

### 2.4.1 Numérotation – Celluloïdes

Pour rappel, la numérotation des ensembles semi-simpliciaux induit une structuration cellulaire ; le produit cartésien permet quant à lui de structurer des produits de simplexes en simpléoïdes. Nous combinons ces deux mécanismes en considérant des produits de cellules, ou **celluloïdes**.

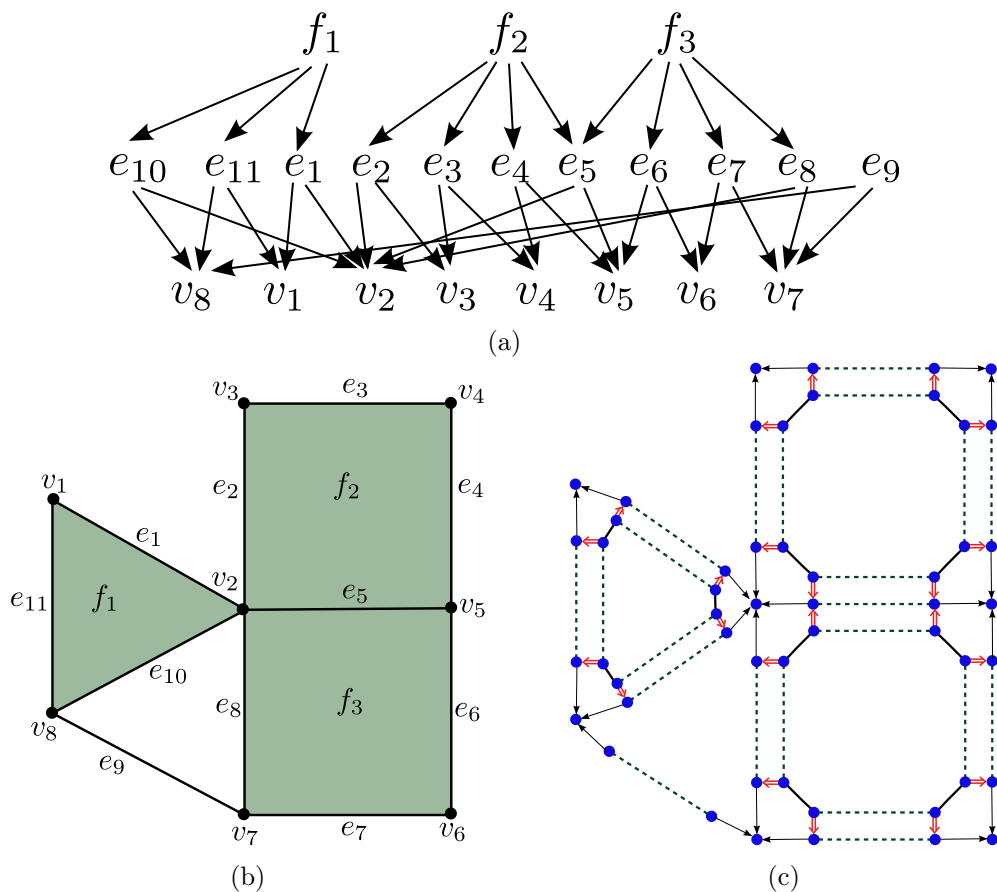


FIGURE 2.34 – (a) Une chaîne de surfaces correspondant à la subdivision cellulaire (b). En (c), la chaîne de cartes sans multi-incidence correspondante.

Ensuite, nous définissons la notion de **quasi-variété celluloïdale** intégrant les contraintes de quasi-variétés pour les celluloïdes. Ces celluloïdes étant définies, nous donnons les éléments permettant de définir des structures celluloïdales basées sur les graphes d'incidence et sur les cartes combinatoires.

Une celluloïde correspond à un produit de cellules : chaque sommet de l'ensemble semi-simploïdal résultant est numéroté par le  $n$ -uplet correspondant aux numéros des sommets des ensembles semi-simpliciaux numérotés dont il est issu, comme illustré sur la figure 2.35.

Chaque sommet numéroté  $n$  d'un ensemble semi-simplicial numéroté correspond à une cellule de dimension  $n$ . On peut étendre directement la notion de cellule à celle de celluloïde en associant à chaque sommet numéroté  $(n_1, \dots, n_p)$  une celluloïde de type correspondant. Un type étant un  $n$ -uplet ne contenant que des valeurs strictement positives, on prendra soin "d'oublier" les sommets numérotés 0. Par exemple, un sommet numéroté  $(0, 0)$  correspond à une celluloïde de type  $()$  ; un sommet numéroté  $(1, 0)$  ou  $(0, 1)$  correspond à une celluloïde de type  $(1)$ , etc.

La figure 2.35 illustre la construction d'un ensemble semi-simploïdal numéroté à partir de deux ensembles semi-simpliciaux numérotés, ainsi que les types associés à chaque sommet. Chaque produit de cellules correspond à une celluloïde.

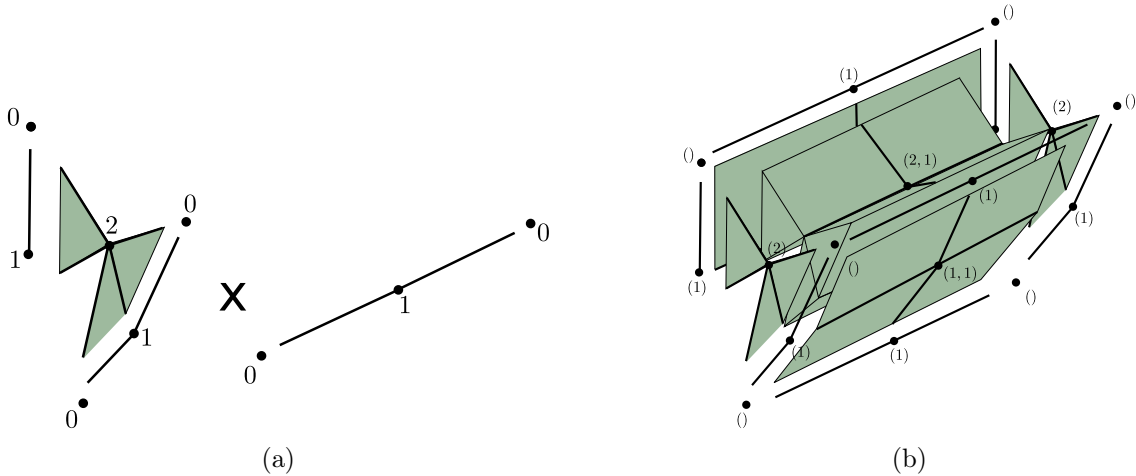


FIGURE 2.35 – (a) Deux ensembles semi-simpliciaux numérotés avec mise en évidence des cellules. (b) L'ensemble semi-simploïdal numéroté résultant de (a), avec mise en évidence des celluloïdes. Chaque celluloïde correspond à un produit de cellules.

### 2.4.2 Quasi-variétés celluloïdales

Par construction, tous les simloïdes principaux d'une celluloïde ont même type. Notons que sans contrainte supplémentaire, on observe le même phénomène que dans le simplicial : le produit de cellules qui ne correspondent pas à des quasi-variétés construit une celluloïde qui ne correspond pas non plus à une quasi-variété, comme sur la figure 2.35.

Nous suivons ici l'approche suivante afin de définir les structures basées sur des assemblages de quasi-variétés celluloïdales :

1. création des celluloïdes quasi-variétés (et leurs bords), ou **celluloïdes élémentaires**,
2. assemblage des celluloïdes élémentaires :
  - préservant la notion de quasi-variété : Gcartes simloïdales,
  - libre : chaînes de cartes simloïdales.

#### 2.4.2.1 Celluloïdes élémentaires

Les briques de base, ou **celluloïdes élémentaires** sont définies comme des produits de quasi-variétés cellulaires, chacune résultant d'une opération de cône cellulaire.

**Définition 20** Une celluloïde élémentaire de type  $(a_1, \dots, a_p)$  et de dimension  $n = \sum_{i=1}^p a_i$ , où  $a_i > 0$  pour tout  $i$ , est le produit de quasi-variétés cellulaires  $Q^1, \dots, Q^p$

de dimensions respectives  $a_1, \dots, a_p$ , telles que, pour tout  $i$ ,  $Q^i$  est un cône sur une quasi-variété cellulaire de dimension  $a_i - 1$ .

Notons que chaque quasi-variété cellulaire  $Q^i$  est connexe, contient exactement une  $a_i$ -cellule, et toutes ses  $(a_i - 1)$ -cellules sont au bord. Par construction, une celluloïde élémentaire contient donc une seule celluloïde principale (et son bord) de type  $(a_1, \dots, a_p)$  et de dimension  $n$ . Notons également que chaque quasi-variété cellulaire de dimension  $a_i$  est un cône cellulaire : aucune identification de  $(a_i - 1)$ -cellules n'a été effectuée. Par exemple, la figure 2.36 illustre la construction d'une celluloïde élémentaire de type  $(2, 1)$  (en haut) et la construction d'une celluloïde élémentaire de type  $(1, 1, 1)$  (en bas).

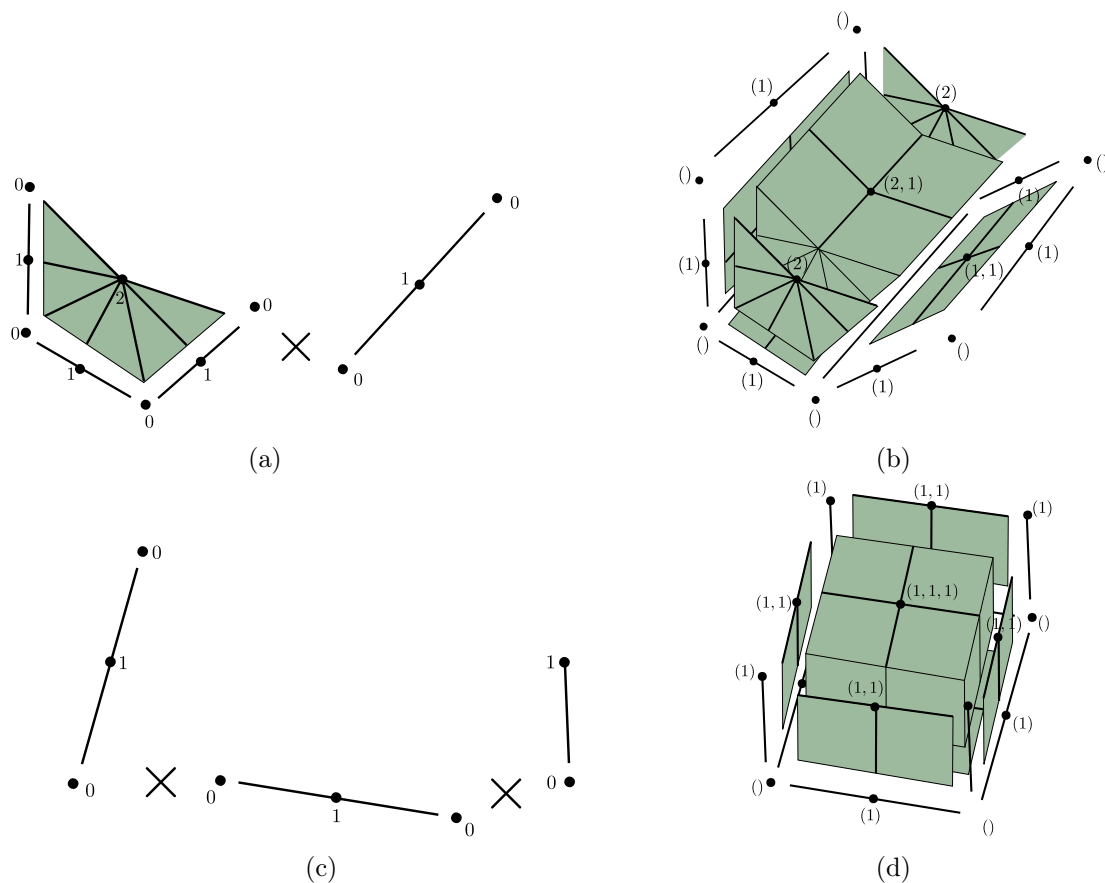


FIGURE 2.36 – (a) Deux cellules (et leurs bords) de dimensions 2 et 1 avec mise en évidence des cellules. (b) La celluloïde élémentaire de type  $(2, 1)$  issue de (a), avec mise en évidence des celluloïdes. (c) Trois cellules (et leurs bords) de dimension 1 avec mise en évidence des cellules. (d) La celluloïde élémentaire de type  $(1, 1, 1)$  issue de (c), avec mise en évidence des celluloïdes.

Dans la suite de cette partie, toutes les **celluloïdes** considérées sont issues de celluloïdes élémentaires. Dit autrement, chaque celluloïde correspond à l'intérieur d'une quasi-variété.

### 2.4.2.2 Assemblages de celluloïdes

Dans cette partie, nous posons les bases permettant d'étendre les Gcartes et les chaînes de cartes pour manipuler des assemblages de celluloïdes : les Gcartes simpléoïdales et les chaînes de cartes simpléoïdales. Pour rappel, nous avons vu en section 2.3.4 que les Gcartes et les chaînes de cartes permettent de représenter des assemblages de cellules où pour chaque  $n$ -cellule, seuls les  $n$ -simplexes sont explicités : chacun étant représenté par un brin. Pour ces deux structures, les involutions  $\alpha_i$ ,  $i < n$ , représentent des relations d'adjacence via un même opérateur de face au sein d'une cellule de dimension  $n$ . Concernant les assemblages de cellules :

- pour les chaînes de cartes, les opérateurs  $\sigma_i$  décrivent les relations de face entre cellules,
- pour les Gcartes, seules les  $n$ -cellules sont représentées et les opérateurs de face sont remplacés par des opérateurs d'adjacence entre  $n$ -cellules : les opérateurs  $\sigma_n$  sont remplacés par les involutions  $\alpha_n$ .

De manière analogue, chaque simpléoïde principal d'une celluloïde peut être représenté par un brin, caractérisé par son type. La définition des celluloïdes garantit que tous les simpléoïdes de dimension  $n - 1$  faisant partie d'une celluloïde de dimension  $n$  sont incidents à exactement 2 simpléoïdes principaux, qui le partagent via un même opérateur de face  $d_j^i$ . La définition 21 traduit la notion de celluloïde élémentaire dans le formalisme des cartes combinatoires.

**Définition 21** Une Gcarte simpléoïdale élémentaire de type  $(a_1, \dots, a_p)$  est un  $n$ -uplet  $G = (B, (\alpha_j^i)_{\substack{i \in [1, p] \\ j \in [0, a_i]}})$ , munie d'un opérateur de type  $\mathcal{T} : B \mapsto \bigcup_{i \geq 0} \mathbb{N}^{*i}$  tel que :

1. pour tout  $b \in B$ ,  $b\mathcal{T} = (a_1, \dots, a_p)$ ,
2. pour tout  $i \in [1, p]$ ,  $\alpha_{a_i}^i = \omega$  n'est pas définie sur  $B$ ,
3.  $\forall i \in [1, p]$ ,  $(B, (\alpha_j^i)_{j \in [0, a_i]})$  est une  $\omega$ -Gcarte,
4.  $\forall i \neq k$ ,  $\forall j \in [0, a_i - 1]$ ,  $\forall l \in [0, a_k - 1]$ ,  $\alpha_j^i \alpha_l^k$  est une involution.

Les cartes combinatoires simpléoïdales peuvent être définies à partir des Gcartes simpléoïdales élémentaires :

- pour les **chaînes de cartes simpléoïdales**, qui décrivent des assemblages libres de celluloïdes, il faut ajouter des opérateurs de face,
- pour les **Gcartes simpléoïdales**, qui décrivent des quasi-variétés celluloïdales, les opérateurs de face sont remplacés par des opérateurs d'adjacence entre celluloïdes élémentaires de même dimension, dont les types sont compatibles, c'est-à-dire qui peuvent être assemblées le long d'une celluloïde de leur bord.

### Chaînes de cartes simpléoïdales

Il est à présent possible de définir les **chaînes de cartes simpléoïdales**, afin de décrire des assemblages quelconques de Gcartes simpléoïdales élémentaires. L'idée est la suivante : toutes les celluloïdes étant explicitées, on ajoute les opérateurs de face  $\sigma_{a_i}^i$ , qui décrivent les relations de face entre celluloïdes ; voici dans les grandes lignes l'idée de la définition :



- soit  $b$  un brin d'une Gcarte simploldale élémentaire  $C$ , tel que  $b\tau = (a_1, \dots, a_p)$  :
- les opérateurs de face  $\sigma_{a_i}^i$  sont définis sur  $C$  pour  $i \in [1, p]$ ,
- $b\sigma_{a_i}^i\tau = \begin{cases} (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_p) & \text{si } a_i > 1, \\ (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p) & \text{si } a_i = 1, \end{cases}$
- les opérateurs de face  $\sigma_{a_i}^i$  sont des isomorphismes sur les faces.
- chaque  $\sigma_{a_i}^i$  vérifie à la fois :
  - la propriété décrite pour les chaînes de cartes simpliciales sur chaque composante du brin cf. 2.(b) de la définition 17,
  - les propriétés de commutation des ensembles semi-simploldaux.

Par exemple, la figure 2.37 représente un assemblage de celluloïdes élémentaires et la chaîne de cartes simploldale correspondante.

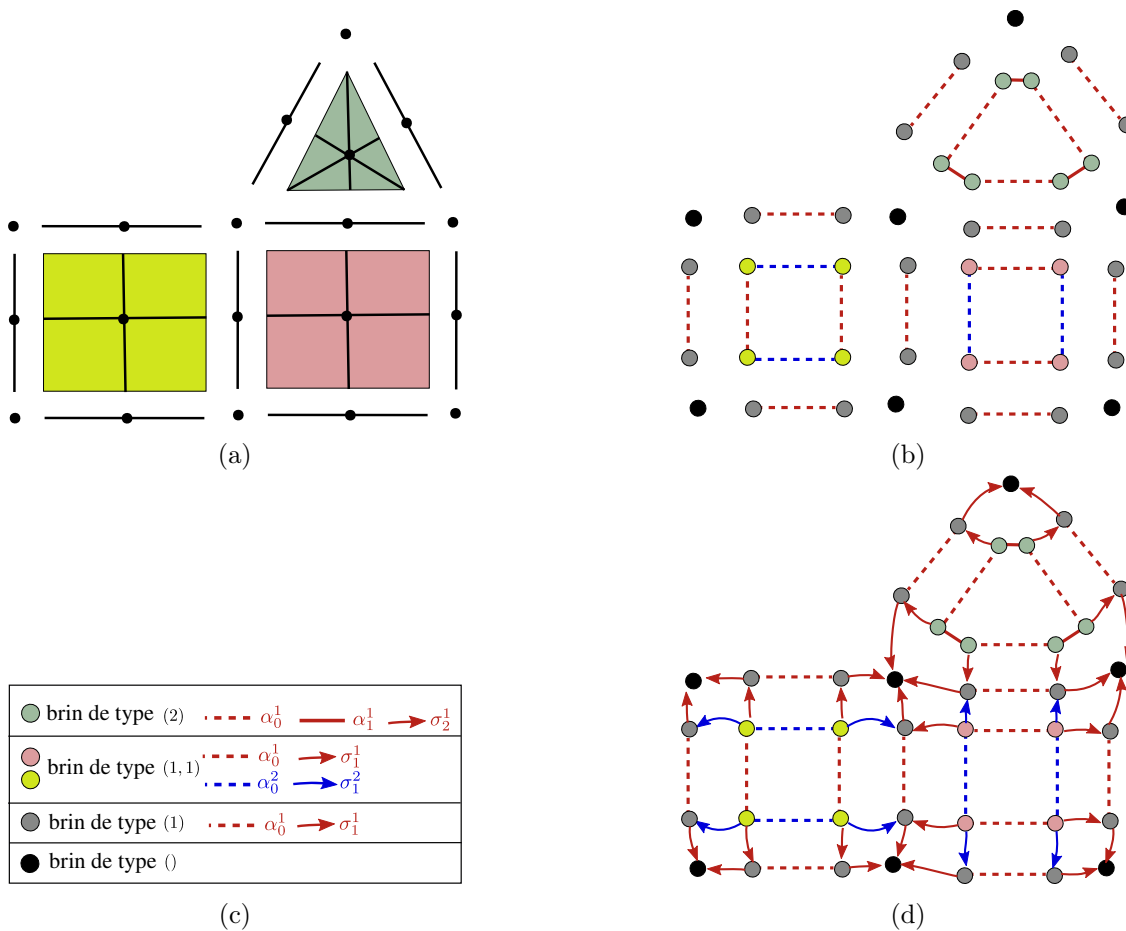


FIGURE 2.37 – (a) Un assemblage de celluloïdes élémentaires avec mise en évidence des celluloïdes. (b) Ensemble des Gcartes simploldales élémentaires. (c) Convention utilisée. (d) Chaîne de cartes simploldale associée à (a).

### Gcartes simploldales

Pour définir les **Gcartes simpléoïdales**, seules les celluloïdes principales sont explicitées, ainsi que les relations d'adjacence. Les celluloïdes principales ont toutes la même dimension  $n$ , mais peuvent avoir des types différents.

Pour cela, nous adaptons la définition des Gcartes simpléoïdales élémentaires : les involutions  $\alpha_{a_i}^i$  sont à présent définies et décrivent les relations d'adjacence entre celluloïdes compatibles, c'est-à-dire qui peuvent être assemblées le long de faces isomorphes. Attention : les opérateurs d'adjacence  $\alpha_{a_i}^i$  ne sont pas des involutions car rien ne garantit que deux celluloïdes sont assemblées via un même opérateur  $\alpha_{a_i}^i$ . Par exemple, une celluloïde de type  $(1, 1, 1)$  pourra être assemblée à une celluloïde de type  $(2, 1)$  le long d'une celluloïde de type  $(1, 1)$  de trois manières différentes : par  $\alpha_1^1$ ,  $\alpha_1^2$  ou  $\alpha_1^3$ . Les propriétés de commutation définies sur ces opérateurs d'adjacence dépendent donc de la composante utilisée pour assembler les celluloïdes. Par exemple, la figure 2.38 reprend l'exemple de la figure 2.37 en tirant partie du fait que l'assemblage des celluloïdes est une quasi-variété. Les celluloïdes élémentaires de types  $(2)$  et  $(1, 1)$  sont assemblées le long de celluloïdes de type  $(1)$ .

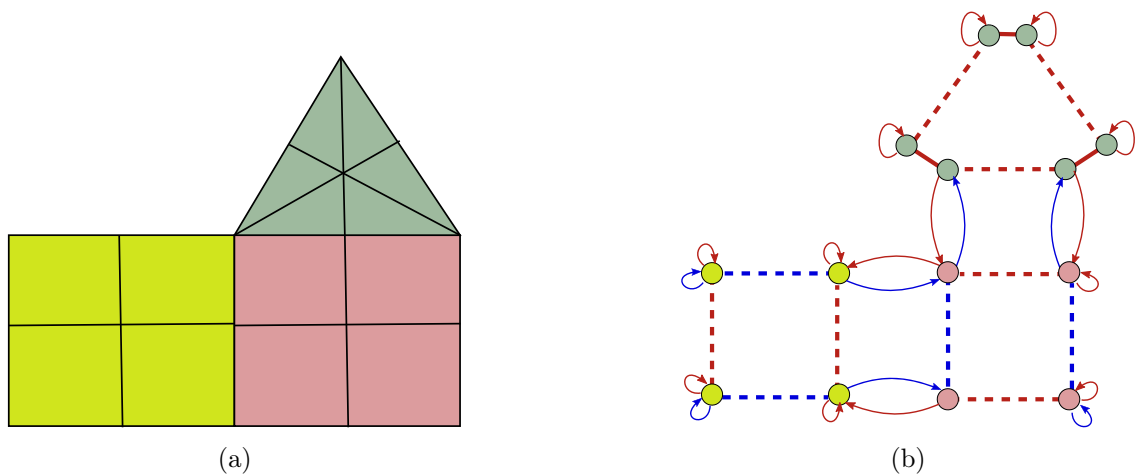


FIGURE 2.38 – *a*) Quasi-variété celluloïdale correspondant à l'exemple de la figure 2.37, seules les celluloïdes principales sont explicitées. *b*) Gcarte simpléoïdale correspondant à *(a)*, les opérateurs de face  $\sigma_j^i$  des celluloïdes principales sont remplacées par des opérateurs d'adjacence  $\alpha_j^i$  entre celluloïdes principales.

La figure 2.39 illustre un exemple en dimension 3 : les brins verts sont de type  $(2, 1)$ , les brins roses sont de type  $(1, 1, 1)$ . Toutes les involutions sont représentées par des *liaisons* non orientées, les opérateurs d'adjacence sont représentés par des *liaisons* orientées. Chaque couleur correspond aux opérateurs  $\alpha_j^i$  pour  $i$  fixé : en rouge  $\alpha_j^1$ , en bleu  $\alpha_j^2$  et en vert  $\alpha_j^3$ . Par souci de clarté, seuls les opérateurs d'adjacence différents de l'identité sont représentés.

On peut vérifier que pour tout brin vert  $b$  de type  $(2, 1)$  relié à un brin rose  $b'$  de type  $(1, 1, 1)$ ,  $b\alpha_1^1 = b'$  et  $b'\alpha_1^2 = b$ . Les deux celluloïdes sont assemblées le long d'une celluloïde de type  $(1, 1)$ . De manière intuitive,  $b'\alpha_1^2 = b$  signifie que c'est la seconde arête composant

$b'$  qui est supprimée pour obtenir la face de type  $(1, 1)$ . Donc  $ba_2^1\alpha_0^1$  commute avec  $ba_0^1\alpha_2^1$  et  $ba_2^1\alpha_0^3$  commute avec  $ba_0^2\alpha_2^1$ .

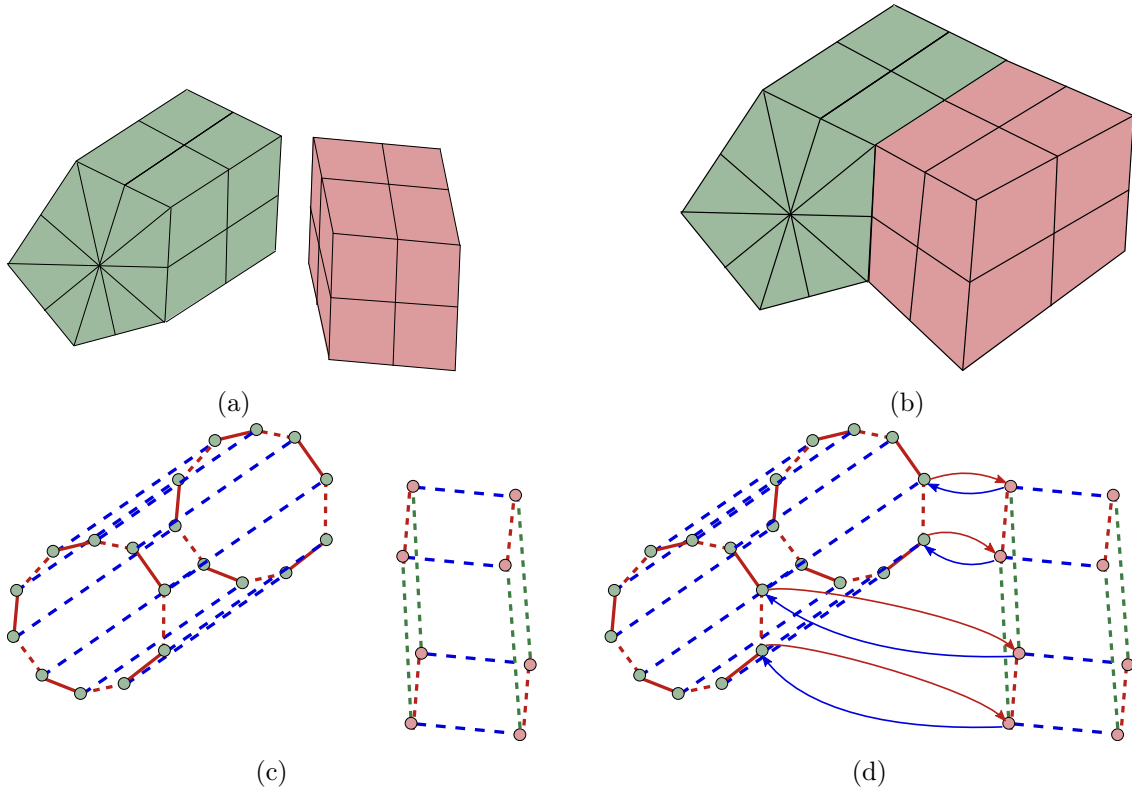


FIGURE 2.39 – *a*) Un ensemble de quasi-variétés celluloïdales élémentaires de dimension 3. Seuls les simplexes principaux sont représentés. *(c)* La Gcarte simpleïdale correspondante, les opérateurs d’adjacence ne sont pas représentés, ils sont tous égaux à l’identité. *(b)* Une quasi-variété celluloïdale obtenue à partir des quasi-variétés celluloïdales élémentaires de *(a)*. *(d)* La Gcarte simpleïdale correspondante ; seuls les opérateurs d’adjacence différents de l’identité sont représentés :  $\alpha_2^1$  (en rouge) et  $\alpha_1^2$  (en bleu).

Bien sûr, les Gcartes simpleïdales autorisent la multi-incidence. On peut tout à fait recoller une Gcarte simpleïdale élémentaire sur elle-même : soit sur deux de ses faces, à la seule condition qu’elles soient isomorphes, soit en recollant une face automorphe sur elle-même en créant ainsi un repliement.

### 2.4.3 Graphes d’incidences simpleïdaux

On s’intéresse enfin au mécanisme de suppression de la multi-incidence pour les structures celluloïdales. Nous donnons dans cette partie les éléments de base pour la définition graphes d’incidence simpleïdaux à partir de la notion de  $CF$ -ordre vue en Section 2.3.2 pour les structures cellulaires.

Nous suivons ici la même approche que pour les structures quasi-variétés celluloïdales,

nous définissons :

- la notion de  $CF$ -celluloïde dans le formalisme des  $CF$ -ordres,
- l'opération d'identification permettant d'assembler des celluloïdes.

Comme vu précédemment, chaque cellule est un cône, et une celluloïde est produit de cellules. Rappelons que nous avons défini les complexes simplloïdaux abstraits à partir d'ensembles de sommets disjoints  $V^1, \dots, V^n$  ; et deux simplloïdes peuvent être identifiés s'ils ont même structure, c'est-à-dire s'ils sont définis à partir des mêmes ensembles de sommets. Nous gardons ici la même approche en étendant la définition des ensembles simplloïdaux abstraits aux celluloïdes.

**Définition 22** Une  $CF$ -celluloïde de type  $(a_1, \dots, a_n)$  est un ensemble de  $CF$ -ordres  $(X^1, \alpha^1), \dots, (X^n, \alpha^n)$  tel que pour tout  $i \in [1..n]$  :

- $(X^i, \alpha^i)$  est de dimension  $a_i$ ,
- $(X^i, \alpha^i)$  est un cône sur un  $CF$ -ordre pur et fermé,
- tous les ensembles  $X^i$  sont disjoints.

Par exemple, la figure 2.40 représente la  $CF$ -celluloïde de type  $(2, 1)$  correspondant à l'ensemble semi-simplloïdal numéroté illustrée sur la figure 2.35.

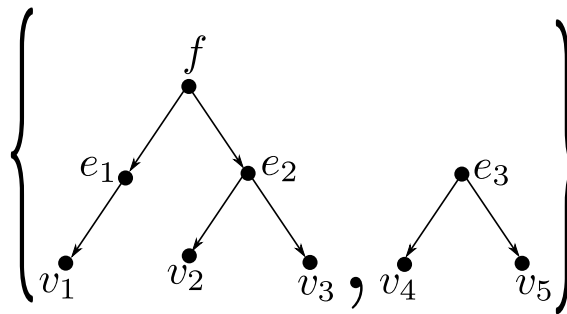


FIGURE 2.40 – La  $CF$ -celluloïde correspondant à la figure 2.35 est définie par l'ensemble des deux  $CF$ -ordres décrivant des cônes sur des  $CF$ -ordres purs et fermés.

On peut reconstruire le complexe simplloïdal abstrait numéroté correspondant en considérant tous les ensembles de chemins (un chemin par composante) de la celluloïde, cf. figure 2.41.

### Assemblages de celluloïdes

Afin de décrire des assemblages de celluloïdes, il faut définir l'opération d'identification. Soit  $C = \{(X^1, \alpha^1), \dots, (X^n, \alpha^n)\}$  une  $CF$ -celluloïde de type  $(a_1, \dots, a_n)$ . Toutes les celluloïdes du bord de  $C$  sont identifiées par des ensembles de sous-ordres de  $\{(X^1, \alpha^1), \dots, (X^n, \alpha^n)\}$ . Par exemple, la figure 2.42 représente une  $CF$ -celluloïde du bord de la celluloïde principale représentée sur la figure 2.40.

Les identifications sont donc définies au niveau des cellules du bord, et consistent donc à fusionner des sous-ordres, composante par composante. Pour cela, il faut que les  $CF$ -celluloïdes aient même structure, *i. e.* définies à partir d'un même ensemble d'ordres,

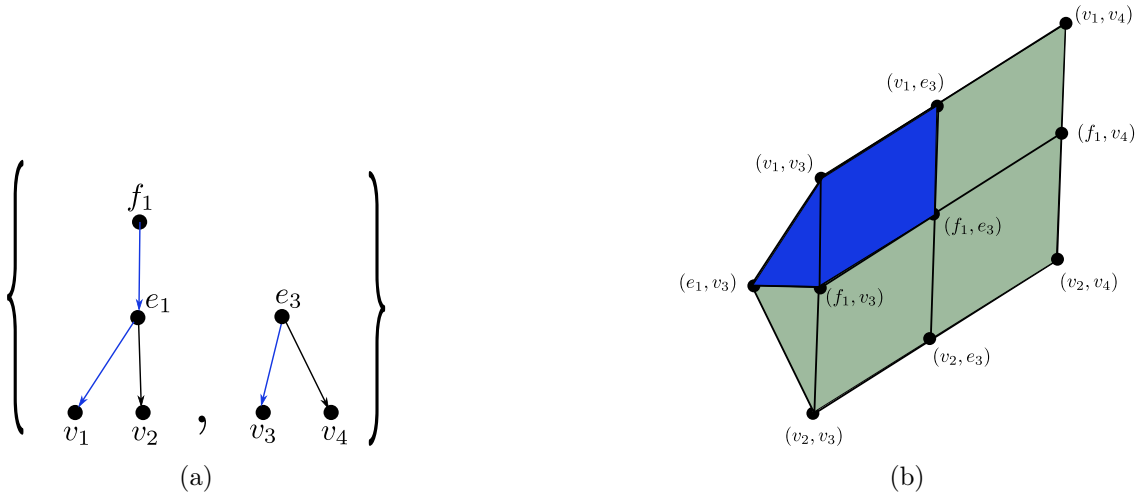


FIGURE 2.41 – (a) Une  $CF$ -celluloïde principale de type  $\{2, 1\}$  et son bord. (b) Complexe simplicial abstrait correspondant à (a). Le simplexe de type  $\{2, 1\}$  représenté en bleu correspond au produit du chemin bleu de longueur 2 de la première composante, par le chemin bleu de longueur 1 de la seconde composante.

comme expliqué pour les complexes simpliciaux abstraits. Afin que les types correspondent, il sera donc éventuellement nécessaire d'effectuer le produit d'une  $CF$ -celluloïde par un  $CF$ -celluloïde correspondant à un sommet.

## 2.5 Gestion de la dégénérescence

Cette partie présente le dernier mécanisme évoqué en introduction : la dégénérescence. Nous présentons deux structures permettant de gérer ce mécanisme : les ensembles simpliciaux et simpliciaux. Ces structures sont munies, en plus des opérateurs de face, d'une seconde famille d'opérateurs appelés **opérateurs de dégénérescence**. Les opérateurs de dégénérescence permettent en particulier de définir :

- l'opération de produit cartésien sur les ensembles simpliciaux. Une définition directe sur les ensembles semi-simpliciaux peut en être déduite [Lienhardt 2004] ;
- l'opération de cône simplicial. Cette définition ne s'étend pas aux ensembles semi-simpliciaux.

Cette partie s'appuie en particulier sur les références [May 1967, Lang 1996, Peltier 2018].

### 2.5.1 Ensembles simpliciaux

Les ensembles simpliciaux sont classiquement étudiés en topologie. Un ensemble simplicial est un ensemble semi-simplicial muni d'une seconde famille d'opérateurs : les opérateurs de dégénérescence.

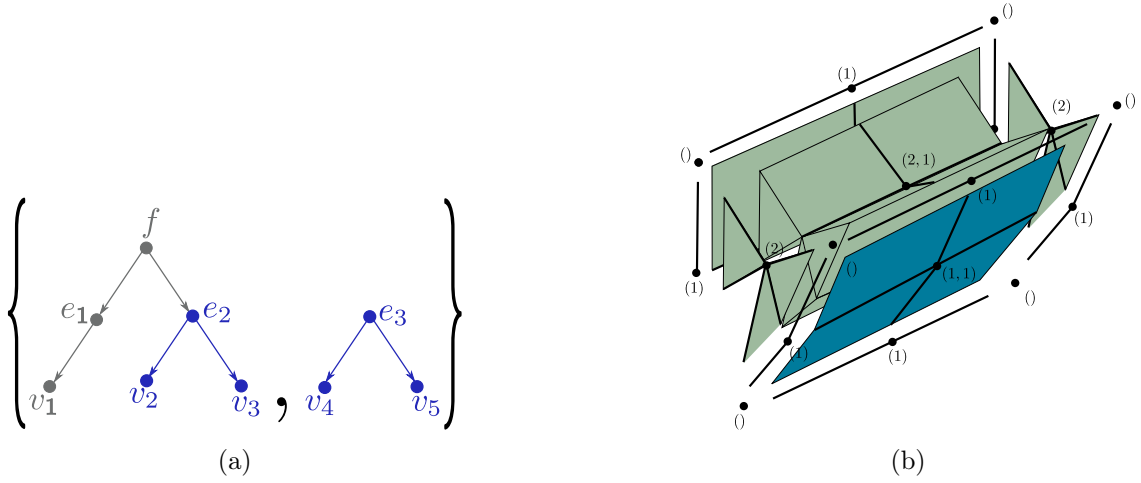


FIGURE 2.42 – (a) La celluloïde de type (1, 1) et son bord, face de la celluloïde principale principale de type {2, 1}, est définie par l’ensemble des deux sous-ordres représentés en bleu. (b) La celluloïde correspondante à (a) est représentée en bleu.

### 2.5.1.1 Structure combinatoire

**Définition 23** *Un ensemble simplicial  $S = S = (K, (d_i), (s_i))$  est une famille d’ensembles  $K = (K^p)_{i \in \mathbb{N}}$ , munie de deux familles d’applications :  $\forall p > 0, \forall i, 0 \leq i \leq p, d_i : K^p \rightarrow K^{p-1}; \forall p \geq 0, \forall i, 0 \leq i \leq p, s_i : K^i \rightarrow K^{i+1}$ , vérifiant :*

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_j d_{i-1} \text{ si } j < i \\ s_i s_j &= s_j s_{i+1} \text{ si } j \leq i \\ s_i d_j &= d_j s_{i-1} \text{ si } j < i \\ s_i d_j &= d_{j-1} s_i \text{ si } j > i + 1 \\ s_i d_i &= s_i d_{i+1} = Id \end{aligned}$$

Un  $(p + 1)$ -simplexe  $\mu$  est dit **dégénéré** s’il existe un  $p$ -simplexe  $\sigma$  et un opérateur de dégénérescence  $s_i$  tel que  $\mu = \sigma s_i$ .

De manière intuitive, un  $p$ -simplexe  $\sigma$  peut être associé à la suite de ses sommets  $(v_0, \dots, v_j, \dots, v_p)$ . Le  $(p - 1)$ -simplexe  $\sigma d_j$  correspond à la suite de sommets  $(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_p)$  et le  $(p + 1)$ -simplexe dégénéré  $\sigma s_j$  correspond à la suite de sommets  $(v_0, \dots, v_j, v_j, \dots, v_p)$ .

D’un point de vue théorique, tous les ensembles simpliciaux contiennent un nombre infini de simplexes : en effet, à tout  $i$ -simplexe correspond au moins un  $(i + 1)$ -simplexe dégénéré. En pratique, seuls les simplexes non dégénérés et leurs bords (dégénérés ou non) sont utiles pour représenter des objets géométriques correspondants.

### 2.5.1.2 Opérations de construction

Les opérations de construction de base sont ici encore le cône et l’identification.

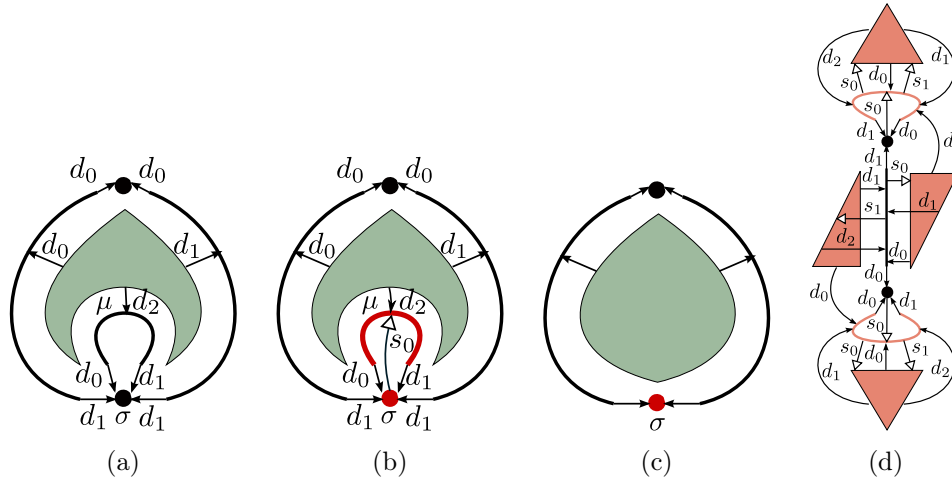


FIGURE 2.43 – *a*) Un ensemble semi-simplicial. *(b)* Un ensemble simplicial : l'arête rouge  $\mu$  est dégénérée sur le sommet rouge  $\sigma$  (*i. e.*  $\mu = \sigma s_0$ ). *(c)* Une représentation intuitive de la structuration simpliciale correspondant à *(b)* : d'un point de vue topologique, l'arête dégénérée n'intervient plus dans le bord du triangle. *(d)* Un ensemble simplicial représentant une arête et son bord et tous ses simplexes dégénérés jusqu'à la dimension 2.

### Cône

L'opération de cône s'étend directement sur les ensemble simpliciaux. Pour chaque  $p$ -simplexe  $\sigma$  (dégénéré ou non) de l'ensemble simplicial sur lequel on souhaite effectuer une opération de cône, un  $(p+1)$ -simplexe  $\bar{\sigma}$  est créé. Les opérateurs de face sont établis comme décrit pour les ensembles semi-simpliciaux, et les opérateurs de dégénérescence sont établis de la même manière :  $\bar{\sigma} s_j = \bar{\sigma} \bar{s}_j$  pour tout  $0 \leq j \leq p$ .

### Identification

L'opération d'identification de deux  $p$ -simplexes  $\sigma$  et  $\mu$  ayant même bord implique l'identification deux à deux de tous les simplexes dégénérés issus de  $\sigma$  et  $\mu$  par une même suite d'opérateurs de dégénérescence, comme illustré sur la figure 2.44. Plus précisément, soit  $K$  l'ensemble des simplexes de  $S$  avant l'identification de  $\sigma$  et  $\mu$ .  $K$  peut être partitionné en  $K = C_0 \cup \dots \cup C_n \cup K'$  tel que pour tout  $i$ , tous les simplexes de  $C_i$  doivent être identifiés<sup>6</sup>; les simplexes de  $K'$  ne sont pas impactés par l'identification. Après l'identification de  $\sigma$  et  $\mu$ , l'ensemble simplicial résultant contient donc un seul simplexe  $\gamma_i$  pour chaque classe d'équivalence  $C_i$ , ainsi que tous les simplexes de  $K'$ .

Les opérateurs de face et de dégénérescence de chaque simplexe  $\gamma_i$  sont définis en respectant les classes d'équivalence. Il faut ensuite mettre à jour les opérateurs de face des simplexes de  $K'$  qui avaient une face dans une classe d'équivalence, ainsi que les opérateurs de dégénérescence des simplexes de  $K'$  qui dégénéraient un simplexe d'une classe d'équivalence. Le détail de l'algorithme est disponible dans [Peltier 2018].

6. L'indice  $i$  est simplement un numéro de classe d'équivalence, et n'a rien à voir avec la dimension des simplexes de la classe.

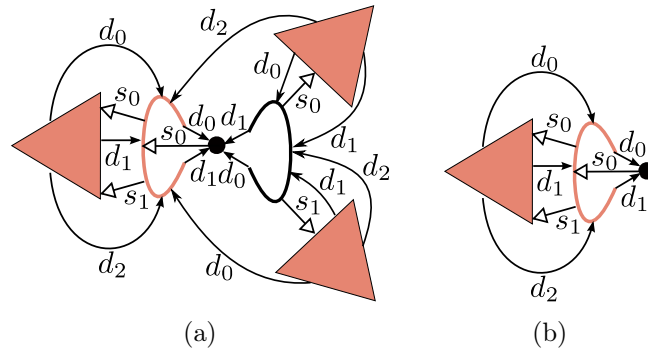


FIGURE 2.44 – L’identification de l’arête non dégénérée (en noir) et de l’arête dégénérée (en rose) représentées en (a) induit l’identification de leurs dégénérés. Le résultat de l’identification de ces deux arêtes est représenté en (b).

**Produit cartésien**

Comme indiqué en préambule, le **produit cartésien**  $S \times S'$  de deux ensembles simpliciaux  $S$  et  $S'$  peut être défini de manière directe : tout  $p$ -simplexe  $\mu \in S \times S' = (\sigma, \sigma')$ , où  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux  $p$ -simplexes est tel que pour tout  $j$ ,  $\mu d_j = (\sigma d_j, \sigma' d_j)$  et  $\mu s_j = (\sigma s_j, \sigma' s_j)$ . Par exemple, sur la Figure 2.45, on peut vérifier que  $(\beta s_1, \beta' s_0) d_0 = (\beta s_1 d_0, \beta' s_0 d_0) = (\beta d_0 s_0, \beta') = (\gamma s_0, \beta')$ .

L’opération de produit cartésien peut être étendue sur les ensembles semi-simpliciaux en considérant un ensemble semi-simplicial comme un ensemble simplicial, en manipulant ses simplexes dégénérés et ses opérateurs de dégénérescence de manière implicite.

**Théorème 2** [Lienhardt 2004] *On peut associer un ensemble semi-simplicial à tout ensemble simplicial, dont tous les simplexes dégénérés sont faces de simplexes dégénérés et réciproquement.*

L’ensemble semi-simplicial et l’ensemble simplicial associé sont dits **équivalents**. Par exemple, l’ensemble simplicial représenté sur la figure 2.45b est équivalent à un ensemble semi-simplicial.

Il est montré dans [Lang 1997], qu’un  $p$ -simplexe  $\nu = (\sigma I, \mu J)$  résultant du produit cartésien de deux simplexes  $p$ -simplexes  $\sigma I$  et  $\mu J$ , avec  $I = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$  et  $J = s_{j_1} \cdots s_{j_l}$ , est dégénéré si et seulement si un même opérateur de dégénérescence est à la fois dans  $I$  et dans  $J$ . Inversement, un  $p$ -simplexe  $\nu$  n’est pas dégénéré si et seulement si aucun opérateur apparaît à la fois dans  $I$  et dans  $J$ . Autrement dit, tous les simplexes, d’un ensemble simplicial  $S$  équivalent à un ensemble semi-simplicial peuvent être définis par un simplexe  $\sigma$  non dégénéré de  $S$  et une suite d’opérateurs de dégénérescence. On peut ainsi montrer que le produit cartésien de deux ensembles simpliciaux équivalents à des ensembles semi-simpliciaux est lui aussi équivalent à un ensemble semi-simplicial.

Finalement, l’opération de produit cartésien se définit sur les ensembles semi-simpliciaux [Lienhardt 2004] en manipulant les opérateurs de dégénérescence de manière implicite, via des suites d’indices.



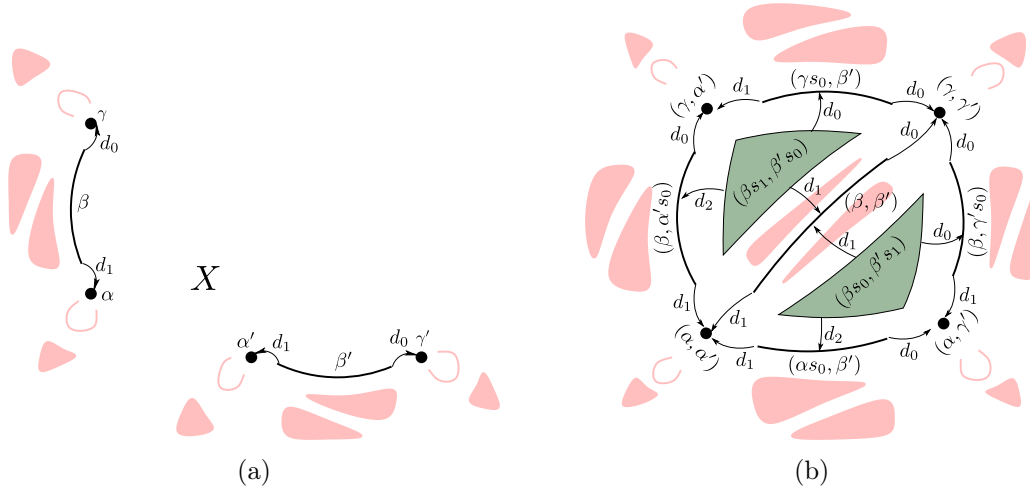


FIGURE 2.45 – Le produit cartésien de deux ensembles simpliciaux s’exprime directement à l’aide des indices des opérateurs de dégénérescence. (a) Deux arêtes non dégénérées et leur bord. (b) Le résultat du produit cartésien. Seuls les simplexes non dégénérés sont nommés.

## 2.5.2 Ensembles simplloïdaux

Les ensembles semi-simplloïdaux permettent de manipuler au sein d’un même formalisme des assemblages de simplexes, de cubes et plus généralement de simplloïdes, mais l’opération de cône n’est pas définie sur les ensembles semi-simplloïdaux : cf. figure 2.46.

Les ensembles simplloïdaux généralisent à la fois les ensembles simpliciaux et les ensembles cubiques qui peuvent être définis de la manière suivante [Serre 1951, Brown 1981].

**Définition 24** *Un ensemble cubique  $S = (K, (d_j^i), (s^i))$  est une famille  $K = (K^p)_{p \in \mathbb{N}}$  de cubes abstraits munis de deux familles d’applications, tel que  $(K, (d_j^i))$  est un ensemble semi-cubique, les  $(s^i)$  sont les opérateurs de dégénérescence :  $\forall p \geq 0, \forall i, 0 \leq i \leq p, s^i : K^p \rightarrow K^{p+1}$ , tels que :*

- $s^i s^k = s^k s^{i+1}$  si  $k \leq i$ ,
- $s^i d_j^k = d_j^k s^{i-1}$  si  $k \leq i$ ,
- $s^i d_j^k = d_j^{k-1} s^i$  si  $k > i + 1$ ,
- $s^i d_j^{i+1} = Id$ .

Par exemple, si  $c$  est un 2-cube, donc de type  $(1, 1)$ ,  $cs^i$  est le 3-cube dégénéré de type  $(1, 1, 1)$  où  $i$  correspond à la position de la nouvelle arête dégénérée dans le type.

### 2.5.2.1 Structure combinatoire

Comme vu pour les ensembles simpliciaux et cubiques, les opérateurs de dégénérescence sont des applications qui montent en dimension.

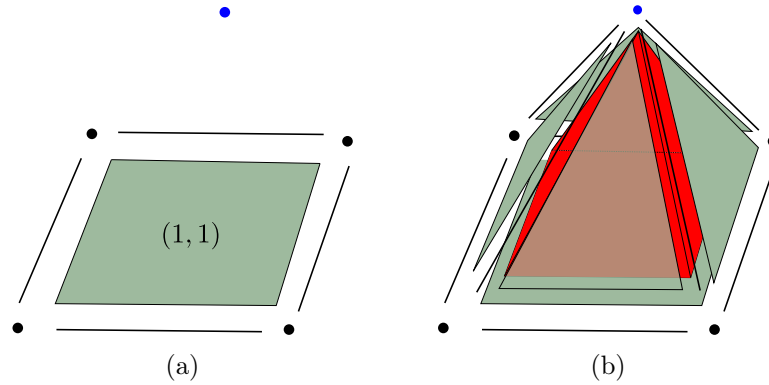


FIGURE 2.46 – L'opération de cône n'est pas définie sur les ensembles semi-simploïdaux. (a) Un ensemble semi-simploïdal. (b) Le cône sur un simploïde de type  $(1, 1)$  produit une cellule de dimension 3 qui n'est pas un simploïde (en rouge).

Un simploïde peut être dégénéré de deux manières différentes : soit sur un simploïde de même longueur, ce qui correspond intuitivement à dégénérer un de ses simplexes générateurs ; soit en augmentant la longueur de 1, ce qui correspond intuitivement à la dégénérescence vue pour les cubes, c'est-à-dire au produit cartésien par une arête dégénérée.

Par exemple, à partir d'un simploïde de type  $(2, 3)$ , ses opérateurs de dégénérescence permettent d'obtenir des simploïdes dégénérés :

- de type  $(3, 3)$  et  $(2, 4)$  : intuitivement, on dégénère chacun de ses simplexes générateurs ;
- de type  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 1, 3)$  et  $(2, 3, 1)$  : intuitivement, on effectue le produit du simploïde par une arête dégénérée.

Bien entendu, des relations de cohérence doivent être respectées entre les opérateurs de face et les opérateurs de dégénérescence. La définition 25 est une version corrigée de celle publiée dans [Peltier 2018], qui intègre des cas particuliers liés aux opérateurs de dégénérescence  $s_{-1}^i$ .

**Définition 25** *Un ensemble simploïdal  $S = (K, (d_j^i), (s_l^k))$  est un ensemble de simploïdes muni d'un opérateur de type  $\mathcal{T} : K \mapsto \bigcup_{i \geq 0} \mathbb{N}^{*i}$ , d'opérateurs de face  $d_j^i$  et d'opérateurs de dégénérescence  $s_l^k$ .*

*Soit  $\sigma \in K$  ;  $\sigma\mathcal{T} = (a_1, \dots, a_n)$  est le type de  $\sigma$  ;  $\sigma d_j^i$  (resp.  $\sigma s_l^k$ ) est défini si  $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq a_i$  (resp.  $0 \leq k \leq n$  et  $l = -1$ , ou  $1 \leq k \leq n$  et  $0 \leq l \leq a_k$ ). Les opérateurs de face vérifient les propriétés suivantes :*

(I) **Action sur le type**

$$\begin{aligned}
1) \sigma d_j^i \mathcal{T} &= \begin{cases} (a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_n) & \text{si } a_i > 1 \\ (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) & \text{sinon} \end{cases} \\
2) \sigma s_j^i \mathcal{T} &= \begin{cases} (a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_n) & 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq a_i \\ (a_1, \dots, a_i, 1, a_{i+1}, \dots, a_n) & 0 \leq i \leq n, j = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

## (II) Commutation des opérateurs de face

$$\begin{aligned}
1) d_j^i d_l^i &= d_l^i d_{j-1}^i \quad l < j, a_i > 1 \\
2) d_j^i d_l^k &= \begin{cases} d_l^k d_j^i & \text{si } a_k > 1 \\ d_l^k d_{j-1}^i & \text{sinon} \end{cases} \quad k < i
\end{aligned}$$

## (III) Commutation des opérateurs de dégénérescence

$$\begin{aligned}
1) s_{-1}^i s_{-1}^k &= s_{-1}^k s_{-1}^{i+1} \quad k \leq i \\
2) si \ l \neq -1, s_{-1}^i s_l^k &= \begin{cases} s_l^k s_{-1}^i & \text{si } k \leq i \\ s_l^{k-1} s_{-1}^i & \text{si } i < k - 1 \end{cases} \\
& \quad s_{-1}^i s_0^{i+1} = s_{-1}^i s_1^{i+1} \\
3) si \ j, l \neq -1, s_j^i s_l^k &= \begin{cases} s_l^k s_j^i & \text{si } i \neq k \\ s_l^k s_{j+1}^i & \text{si } i = k, l \leq j \end{cases}
\end{aligned}$$

## (IV) Commutation des opérateurs de face/dégénérescence

$$\begin{aligned}
1) si \ l \neq -1, s_l^i d_l^i &= s_l^i d_{l+1}^i = Id \\
& \quad s_l^i d_j^i = \begin{cases} d_j^i s_{l-1}^i & \text{si } j < l \\ d_{j-1}^i s_l^i & \text{si } j > l + 1 \end{cases} \quad \text{si } a_i > 1 \\
& \quad s_1^i d_0^i = d_0^i s_{-1}^{i-1} \\
& \quad s_0^i d_2^i = d_1^i s_{-1}^{i-1} \quad \text{si } a_i = 1 \\
2) si \ l = -1, s_l^{i-1} d_j^i &= Id, j = 0, 1
\end{aligned}$$

Dans les autres cas :

$$\begin{aligned}
3) si \ k \leq i - 1, s_l^k d_j^i &= \begin{cases} d_j^i s_l^k & \text{si } l \neq -1 \\ d_j^{i-1} s_l^k & \text{sinon} \end{cases} \\
4) sinon \ (\text{i. e. } k > i), s_l^k d_j^i &= \begin{cases} d_j^i s_l^k & \text{si } a_i > 1 \\ d_j^i s_l^{k-1} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Pour rappel, aucun "0" n'apparaît dans le type d'un simplexe, car le produit cartésien d'un simplexe par un sommet est l'identité d'un point de vue structurel. Cela explique pourquoi différents cas doivent être distingués dans la définition, même si ces différents cas sont intuitivement similaires. Plus généralement, la définition 25 peut être entièrement retrouvée à partir des propriétés de commutation sur les opérateurs de face et de dégénérescence des ensembles simpliciaux, et du fait que, intuitivement, l'application

de deux opérateurs sur deux *simplexes générateurs* différents sont indépendants.

La partie (I) décrit l'action d'un opérateur de face (resp. dégénérescence) sur le type d'un simplexe (I-1) (resp. (I-2)). Comme vu pour le simplicial, un opérateur de face (resp. dégénérescence) diminue (resp. augmente) la dimension du simplexe sur lequel il agit. En particulier, si  $a_i = 1$ , alors l'application d'un opérateur  $d_j^i$  diminue la longueur du simplexe (car il n'y a aucun 0 dans le type d'un simplexe). De manière similaire, lorsque l'on applique un opérateur de dégénérescence  $s_{-1}^k$ , la longueur du simplexe augmente. Intuitivement, cela revient à ajouter une arête dégénérée comme simplexe générateur du simplexe.

Les parties (II) (resp. (III), (IV)) sont les relations de cohérence liées aux opérateurs de face (resp. dégénérescence, face et dégénérescence).

On peut noter que différents cas correspondent aux propriétés de commutation des ensembles simpliciaux, *i. e.* lorsque les opérateurs sont appliqués sur un même simplexe générateur : cf. équation (II-1), le dernier cas de (III-3), et (IV-1).

Le cas (IV-2) correspond au cas où un opérateur de face est appliqué à 1-simplexe générateur dégénéré (au final, rien n'est modifié).

Les autres cas garantissent l'indépendance des opérateurs appliqués sur des simplexes générateurs distincts :

- (II-2) : deux cas distincts car un 1-simplexe générateur peut disparaître suite à l'application d'un opérateur de face ;
- (III-1), (III-2) et le premier cas de (III-3) : correspondent aux différents cas de dégénérescence, qui prennent en compte l'ajout de nouveaux simplexes générateurs créés par des opérateurs  $s_{-1}$ . Notons que (III-2) n'a pas de propriété de commutation lorsque  $k = i + 1$ , car  $\sigma s_{-1}^{k-1} s_i^k \mathcal{T} = (a_1, \dots, a_{k-1}, 2, \dots, a_n)$  (le premier opérateur de dégénérescence crée un nouveau 1-simplexe générateur, sur lequel le second opérateur de dégénérescence agit). Il doit néanmoins vérifier les contraintes des ensembles simpliciaux, c'est pourquoi on a la propriété  $s_{-1}^i s_0^{i+1} = s_{-1}^i s_1^{i+1}$ .
- (IV-3) et (IV-4) : deux cas distincts en fonction de la création ou la suppression d'un 1-simplexe générateur.

Notons qu'une conséquence directe de la définition des ensembles simpliciaux est que l'on peut associer un unique ensemble simplicial à tout ensemble simplicial ainsi qu'à tout ensemble cubique. Par exemple, tout  $p$ -simplexe d'un ensemble simplicial correspond à un simplexe de type  $(p)$  et tout opérateur de face (resp. dégénérescence) simplicial  $d_i$  (resp.  $s_j$ ) correspond à un opérateur de face (resp. dégénérescence) simplicial  $d_i^1$  (resp.  $s_j^1$ ). L'idée est similaire pour les ensembles cubiques en associant un simplexe de type  $(1, \dots, 1)$  de longueur  $p$  à tout  $p$ -cube.

Comme pour les ensembles simpliciaux, d'un point de vue théorique, tous les simplexes dégénérés existent et tout ensemble simplicial est donc par définition de taille infinie. Ici encore, seuls les simplexes non dégénérés et leurs bords (dégénérés ou non) sont utiles pour représenter des objets géométriques correspondants : cf. chapitre 4.

### 2.5.2.2 Opérations de construction

Les opérateurs de dégénérescence permettent de définir l'opération de cône sur les ensembles simplloïdaux. Ainsi, les ensembles simplloïdaux généralisent et homogénéisent les ensembles simpliciaux et cubiques, à la fois au regard des cellules, mais également des opérations.

#### Produit cartésien

Comme pour les ensembles semi-simplloïdaux, l'opération de **produit cartésien** permet de construire en particulier les simplloïdes. La définition du produit cartésien de deux ensembles simplloïdaux  $S^1$  et  $S^2$  est directement déduite de la propriété suivante : le produit cartésien de  $\sigma^1$  de type  $(a_1, \dots, a_k)$ , et  $\sigma^2$  de type  $(b_1, \dots, b_l)$  est un simplloïde  $\sigma^1 \times \sigma^2$  de type  $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$ .

Les opérateurs de face sont établis comme décrit pour l'opération de produit cartésien des ensembles semi-simplloïdaux. Les opérateurs de dégénérescence sont établis selon la propriété suivante :  $\sigma s_j^i = \sigma^1 s_j^i \times \sigma^2$  pour  $0 \leq i \leq k$ ,  $\sigma s_j^{i+k} = \sigma \times \sigma^2 s_j^i$  pour  $0 \leq i \leq l$ .

Attention, les simplloïdes  $\tau^1 = \sigma^1 s_{-1}^k \times \sigma^2$  et  $\tau^2 = \sigma^1 \times \sigma^2 s_{-1}^0$  correspondent à un même simplloïde ; on a donc  $\tau^1 = \tau^2$ .

#### Identification

Comme pour les ensembles semi-simplloïdaux, deux simplloïdes  $\sigma$  et  $\mu$  peuvent être identifiés s'ils ont même type et même bord. De manière analogue à ce qui a été décrit pour les ensembles simpliciaux, l'identification de  $\sigma$  et  $\mu$  induit les identifications de leurs simplexes dégénérés.

D'un point de vue théorique, il n'est pas nécessaire de définir une opération de **dégénérescence** ; pour dégénérer un simplloïde  $\mu$  sur une de ses faces  $\sigma$ , il suffit de l'identifier avec un simplloïde  $\sigma s_j^i$  de même type, ayant même bord que  $\mu$ . En pratique, si  $\sigma s_j^i$  n'est pas explicite, il suffit de l'expliquer en indiquant que  $\sigma s_j^i = \mu$ .

Notons que si  $\mu$  est un simplloïde principal, alors il peut simplement être supprimé car après dégénérescence, il ne sera pas une face d'un simplexe non dégénéré.

#### Cône simplloïdal

Nous avons défini l'opération de **cône simplloïdal** à partir d'un ensemble simplloïdal  $S$  et un nouveau sommet  $v$ , comme une composition de deux opérations :

1. produit cartésien de  $S$  par une arête  $(v', v)$ , ou extrusion,
2. dégénérescence de  $S' = S \times v$  en  $v$ .

L'opération de dégénérescence d'un ensemble simplloïdal  $S'$  en un sommet consiste à identifier tous ses sommets en un seul, puis toutes ses arêtes en une seule arête dégénérée, et à répéter ce processus sur tous les simplloïdes de dimension supérieure. Au final, l'ensemble simplloïdal résultant ne contient qu'un seul sommet, et un simplloïde dégénéré de chaque type contenu dans  $S$ . Par exemple, la figure 2.47 illustre l'opération de cône correspondant à la figure 2.46, la 3-cellule correspondant à une pyramide à base carrée

est en fait un cube dont une face entière est dégénérée.

En pratique, cette opération peut être simplifiée en créant directement  $S'$  dégénéré en un point : un simplexe de chaque type contenu dans  $S$  est créé, tous ses opérateurs de face et de dégénérescence sont définis en fonction de leurs types.

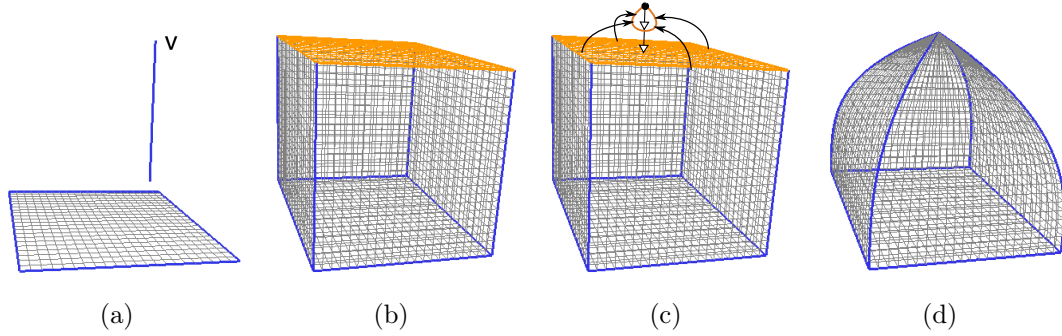


FIGURE 2.47 – Représentation géométrique de l'opération de cône correspond à la figure 2.46. (a) L'opération de cône effectuée sur un carré (et son bord) a pour résultat une pyramide à base carrée (d). L'opération de cône consiste en une extrusion (a) – (b) suivie de la dégénérescence (c) de la copie du carré original (représenté en orange).

Notons enfin que dans le cas particulier où tous les simplexes d'un ensemble semi-simploïdal sont de longueur 1, c'est à dire qu'ils correspondent tous à des simplexes, alors l'opération de cône simplicial peut également être effectuée.

### 2.5.2.3 Lien avec les supercomplexes

Les **supercomplexes** ont été définis en 1957 par [Gugenheim 1957]. En se basant sur notre définition des ensembles simplexoïdaux, la structure des supercomplexes peut se définir de la manière suivante :

**Définition 26** *Un supercomplexe  $S = (K, (d_j^i), (s_l^k))$  est un ensemble de simplexes abstraits, muni d'un opérateur de type  $\mathcal{T} : K \mapsto \bigcup_{i \geq 1} \mathbb{N}^i$ , d'opérateurs de face  $d_j^i$  et d'opérateurs de dégénérescence  $s_l^k$ .*

*Soit  $\sigma\mathcal{T} = (a_1, \dots, a_n) : \sigma d_j^i$  (resp.  $\sigma s_l^k$ ) est défini si  $1 \leq i \leq n, a_i > 0, 0 \leq j \leq a_i$  (resp.  $1 \leq k \leq n$  et  $0 \leq l \leq a_k$ ). Les opérateurs vérifient les conditions suivantes :*

- $\sigma d_j^i \mathcal{T} = (a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_n)$ ,
- $\sigma s_l^k \mathcal{T} = (a_1, \dots, a_i + 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$  ;
- les opérateurs de face et de dégénérescence ayant le même exposant satisfont les propriétés de commutation des opérateurs de face et de dégénérescence des ensembles simpliciaux ;
- les opérateurs de face et de dégénérescence n'ayant pas le même exposant commutent.

□

On peut montrer que notre définition est équivalente à celle des supercomplexes [Peltier 2018]. Si la définition des supercomplexes est clairement plus compacte que la notre, elle est moins adaptée à une implantation directe car il faut gérer la relation d'équivalence entre les types car dans un supercomplexe, le type d'un simplexe peut contenir un nombre quelconque de valeurs nulles.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une classification mettant en avant différentes structures combinatoires, toutes basées sur les ensembles semi-simpliciaux : les structures simpliciales, simplexiales, et cellulaires. Nous avons mis en évidence trois mécanismes permettant de faire des ponts entre ces structures :

- le produit cartésien permettant de structurer des produits de simplexes en simplexes,
- la numérotation cellulaire permettant de définir la notion de cellule, qui peut être créée par l'opération de cône,
- la suppression de la multi-incidence, qui permet d'utiliser un formalisme dans lequel le simplexe abstrait n'est plus l'élément de base de la représentation.

Afin de présenter une classification complète, nous avons défini la notion de cellule correspondant au produit cartésien de cellules. Trois nouvelles structures ont été présentées :

- les complexes simplexiaux abstraits, qui étendent la notion de complexe simplicial abstrait,
- les graphes d'incidence simplexiaux, qui intègrent le mécanisme de suppression de la multi-incidence,
- les cartes simplexiales, qui intègrent dans leur définition des contraintes portant sur les cellules : ce sont des quasi-variétés.

Le mécanisme de dégénérescence a également été présenté pour les structures simpliciales et simplexiales. Les opérateurs de dégénérescence des ensembles simpliciaux permettent de définir l'opération de produit cartésien, qui peut être traduite pour les ensembles semi-simpliciaux.

Les opérateurs de dégénérescence des ensembles simplexiaux permettent de définir l'opération de cône simplexial ; cette opération ne peut pas être définie pour les ensembles semi-simplexiaux.

La définition de nouvelles structures cellulaires intégrant des opérateurs de dégénérescence ne nous semble pas pertinente. En effet, les structures cellulaires permettent déjà de manipuler des cellules quelconques : le fait de pouvoir dégénérer une cellule ne semble pas permettre d'obtenir de nouvelles structures de cellules que l'on ne puisse déjà obtenir. De plus les opérations de construction de base (cône cellulaire, produit cartésien, identification) sont déjà définies pour ces structures.

# Calculs de groupes d'homologie

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Notions de base</b> . . . . .	<b>66</b>
3.1.1	CW-complexes – Complexe de chaînes . . . . .	66
3.1.2	Cycles, bords, homologie . . . . .	67
<b>3.2</b>	<b>Calcul global</b> . . . . .	<b>68</b>
3.2.1	Matrices d'incidence – Forme normale de SMITH . . . . .	69
3.2.2	Calcul des générateurs – forme normale de SMITH-AGOSTON . . . . .	70
3.2.3	Gestion des dégénérés . . . . .	71
3.2.4	Calcul sur les ensembles simplloïdaux . . . . .	72
3.2.5	Calcul sur les structures cellulaires . . . . .	72
3.2.6	Liens avec la caractéristique d'EULER-POINCARÉ . . . . .	76
<b>3.3</b>	<b>Calcul incrémental</b> . . . . .	<b>77</b>
3.3.1	Calcul incrémental des nombres de BETTI . . . . .	77
3.3.2	Homologie persistante . . . . .	77
3.3.3	Homologie effective . . . . .	81
3.3.4	Calcul incrémental sur des structures simplloïdales . . . . .	92
3.3.5	Calcul incrémental sur des quasi-variétés cellulaires . . . . .	96
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>100</b>

Dans le chapitre 2, différentes structures combinatoires ont été présentées, permettant de construire et manipuler des objets subdivisés. On peut les distinguer selon le type de cellules utilisées et selon les contraintes sur les assemblages. Des liens entre ces différentes structures ont été mis en avant.

Quelle que soit la structure utilisée, il est important de savoir caractériser topologiquement l'objet que l'on considère. Par exemple, plusieurs subdivisions du tore ont été présentées, certaines simpliciales, d'autres cellulaires. Mais dans tous les cas, l'espace topologique associé est un tore. Réciproquement, si on se donne une subdivision, *est-on capable de caractériser à homéomorphisme près l'objet que l'on manipule ?* De manière générale, la réponse est *non*.

Comme mentionné en introduction, on s'intéresse ici au calcul des groupes d'homologie, qui peuvent être définis de manière informelle comme l'étude de l'attachement des cellules le long de leur bord. Ils caractérisent les trous d'un objet subdivisé en chaque dimension.

Nous commençons par rappeler les notions de bases algébriques liées à l'homologie. Nous rappelons ensuite les méthodes de calcul globales pour les structures régulières, *i. e.*



basées sur l'étude de l'attachement de toutes les cellules, et donnons le cadre permettant d'appliquer ces méthodes pour les structures cellulaires.

Enfin, nous présentons des méthodes incrémentales permettant de calculer l'homologie d'un objet résultant d'une opération de construction. Le calcul incrémental de l'homologie de structures simpliciales, simplioidales et cellulaires est présenté sous le prisme des opérations de base présentées au chapitre 2 : l'identification, le cône, le produit cartésien et la dégénérescence.

## 3.1 Notions de base

### 3.1.1 CW-complexes – Complexe de chaînes

L'homologie permet en particulier d'étudier les espaces topologiques *CW-complexes*. Afin de pouvoir effectuer des calculs, un *CW-complexe*  $C$  de dimension  $n$  est étudié sur une structure algébrique : un **complexe de chaînes**. Pour tout  $k \in [0, n]$ , on associe l'ensemble des boules  $B^k$  de  $C$  à un groupe abélien  $(C_k, +)$ . Les recollements des boules  $B^k$  du *CW-complexes* sur son  $(k - 1)$  squelette sont décrits dans le complexe de chaînes par des applications de bord  $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ .

Un *CW-complexe* est dit **régulier** si les fonctions d'attachement sont des homéomorphismes. Cela implique en particulier qu'il n'y a pas de multi-incidence, ni de repliements de cellules. Par exemple, la réalisation géométrique d'un complexe simplicial abstrait est un *CW-complexe régulier* : cf. chapitre 4. En revanche, le *CW-complexe* associé à une arête incidente deux fois à un même sommet n'est pas régulier. Pour plus de précisions, voir [Munkres 1984] p.214.

Notons que dans la littérature mathématique, le terme *cellule* est synonyme de *boule topologique*. Ceci n'est pas le cas dans ce manuscrit : la notion de cellule fait bien référence aux *briques de base* de la structure combinatoire dont on parle, *i. e.* des simplexes, des simplioides, ou des cellules au sens des ensembles semi-simpliciaux numérotés. En particulier, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les cellules des structures cellulaires sont des quasi-variétés, elles ne sont donc pas nécessairement homéomorphes à des boules.

Enfin, notons qu'en toute généralité, il existe des *CW-complexes* qui ne sont pas triangulables ; ils ne peuvent donc pas être associés à une structure simpliciale, ils sortent donc du cadre de cette étude.

**Définition 27** *Un complexe de chaînes libre  $(C, \partial)$  est une suite :*

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

où pour tout  $0 \leq p \leq n$ ,  $C_p$  est le **groupe abélien des  $p$ -chaînes** et les applications  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  sont des **homomorphismes de bord** tels que pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$  :

$$\partial_i \partial_{i-1} = 0.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension  $i$  considérée, l'indice  $i$  des homomorphismes  $\partial_i$  n'est pas indiqué.

Nous présentons à présent la manière d'associer un complexe de chaînes à une structure combinatoire en se basant sur l'exemple des ensembles semi-simpliciaux ; les notions présentées s'étendent directement sur les autres structures régulières. Comme nous le verrons, cela est moins direct pour les structures cellulaires, car les cellules ne correspondent pas nécessairement à des boules.

Une  $p$ -chaîne est une somme formelle de  $p$ -cellules à coefficients dans un groupe donné, généralement  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Le *théorème des coefficients universels* [Munkres 1984] garantit que toute l'information homologique est obtenue en travaillant avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Sauf mention contraire, on se place dans ce cadre général. Pour des raisons d'optimisation, il peut s'avérer utile de travailler avec d'autres coefficients. En particulier, si l'homologie sur  $\mathbb{Z}$  n'a pas de torsion (cf. théorème 3 page 68), alors les groupes d'homologie calculés sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  contiennent toute l'information homologique.

L'ensemble des  $p$ -chaînes muni de l'addition  $+$  forme le groupe  $C_p$  des  $p$ -chaînes. Ce groupe est généré par l'ensemble des  $p$ -simplexes qui forme une base de  $C_p$ . Par exemple sur la figure 3.1, toute 2-chaîne s'écrit  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ , où  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ .

Le calcul de l'homologie sur  $\mathbb{Z}$  nécessite une orientation des cellules. Intuitivement, le simplexe  $-\sigma$  correspond au simplexe  $\sigma$  considéré avec son orientation opposée. **Le bord** d'un  $p$ -simplexe  $\sigma$  est la  $(p-1)$ -chaîne définie par la somme alternée de ses faces :  $\sigma \partial_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma d_i$ . Les homomorphismes de bord  $\partial_p$  sont définis comme l'extention linéaire du bord d'un simplexe sur les chaînes. Par exemple,  $(3f_1 - 2f_2)\partial = 3f_1\partial - 2f_2\partial = 3(e_1 - e_2 + e_3) - 2(e_5 - e_4 + e_2) = 3e_1 - 5e_2 + 3e_3 - 2e_5 + 2e_4$ . On peut facilement vérifier que pour toute  $p$ -chaîne  $c$ ,  $p > 0$ , on a bien  $c\partial_p\partial_{p-1} = 0$ . Cela provient du fait que pour tout  $p$ -simplexe  $\sigma$ ,  $\sigma\partial_p\partial_{p-1} = 0$ .

### 3.1.2 Cycles, bords, homologie

Certaines  $p$ -chaînes ont la particularité d'avoir un bord nul. On appelle ces  $p$ -chaînes des  **$p$ -cycles** :  $z$  est un  $p$ -cycle si et seulement si  $z\partial_p = 0$ . Parmi les  $p$ -cycles, certains ont en plus la particularité d'être le bord d'un  $(p+1)$ -chaîne, on appelle ces  $p$ -cycles des  **$p$ -bords** :  $b$  est un  $p$ -bord si et seulement s'il existe une  $(p+1)$ -chaîne  $c$  tel que  $c\partial_{p+1} = b$ .

Le groupe des  $p$ -cycles est noté  $Z_p$  et celui des  $p$ -bords,  $B_p$ . La propriété  $\partial\partial = 0$  des homomorphismes de bord nous assure que tout  $p$ -bord est un  $p$ -cycle et le groupe  $B_p$  est un sous-groupe de  $Z_p$ .

**Définition 28** *Le  $p^e$  groupe d'homologie d'un complexe de chaînes libre  $(C, \partial)$  est défini par le groupe quotient :*

$$H_p = Z_p / B_p$$

où  $Z_p = \text{Ker } \partial_p$  et  $B_p = \text{Im } \partial_{p+1}$ .

Le  $p^e$  groupe d'homologie  $H_p$  d'un complexe de chaînes libre est donc défini comme le groupe des  $p$ -cycles quotienté par le groupe des  $p$ -bords. Dit autrement, les éléments des groupes d'homologie sont des classes d'équivalence. Deux cycles  $z_1$  et  $z_2$  font partie d'une même classe d'équivalence si et seulement s'il existe un bord  $b$  de  $B_p$  tel que  $z_1 = z_2 + b$ . Les deux cycles  $z_1$  et  $z_2$  sont dits **homologues**.

Par exemple sur la figure 3.1,  $b = e_5 + e_2 - e_4$  est un 1-bord,  $z_1 = e_7 - e_5 + e_6$  et  $z_2 = e_7 + e_2 - e_4 + e_6$  sont des cycles homologues car  $z_2 = z_1 + b$ . On peut constater qu'ils entourent le même tunnel. Dans le cadre de cette étude, les objets considérés sont finis. Ainsi, pour chaque dimension  $p$ , le groupe  $H_p$  est de type fini, c'est-à-dire que tout élément de  $H_p$  peut être obtenu à partir d'un nombre fini d'éléments. Les groupes d'homologie vérifient donc le théorème des groupes abéliens de type fini [Munkres 1984].

### **Théorème 3 (Théorème fondamental des groupes abéliens de type fini).**

*Tout groupe abélien de type fini  $G$  est isomorphe à une somme directe de groupes mono-gènes :*

$$\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{\beta} \oplus \mathbb{Z}/t_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/t_k\mathbb{Z}$$

où  $1 < t_i \in \mathbb{Z}$  et  $t_i$  divise  $t_{i+1}$ . Le rang de  $G$ , noté  $\beta$ , est appelé le **nombre de BETTI** de  $G$ . Les entiers  $t_i$  sont les **coefficients de torsion** de  $G$ . Le nombre de BETTI et les coefficients de torsion de  $G$  sont déterminés de manière unique par  $G$ .

Chaque groupe d'homologie  $H_p$  est donc caractérisé par son nombre de BETTI et ses coefficients de torsion. Pour chaque dimension  $p$ , le  $p^e$  nombre de BETTI  $\beta_p$  d'un objet correspond au nombre de "trous" de dimension  $p$  qu'il possède. Par exemple pour le tore, qui possède une composante connexe, deux tunnels et une cavité, ses nombres de BETTI sont :  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 2$  et  $\beta_2 = 1$ .

Les entiers  $t_i$  caractérisent la partie dite de torsion : un tel élément de torsion est une classe d'équivalence regroupant des cycles qui ne sont pas des bords, mais tels que si on les considère  $t_i$  fois, ce sont des bords. Par exemple, la bouteille de KLEIN contient un élément de torsion en dimension 1 :  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 1$  et  $t_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 0$ . Le plan projectif contient également un élément de torsion en dimension 1 :  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$  et  $t_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 0$ .

## **3.2 Calcul global**

Cette section traite du calcul global des groupes d'homologie, c'est-à-dire basé sur l'analyse globale des relations d'incidence. Différents algorithmes ont été établis pour calculer les nombres de BETTI, les coefficients de torsion ou encore les générateurs des groupes d'homologie, c'est à dire un représentant de chaque classe d'équivalence engendrant le groupe. L'approche classique consiste à réduire les matrices d'incidence décrivant les homomorphismes de bord  $\partial_p$  en leur forme normale de SMITH. Les notions classiques présentées dans cette partie sont détaillées en particulier dans [Cairns 1961, Agoston 1976, Munkres 1984, Kannan 1979, Peltier 2006b].

### 3.2.1 Matrices d'incidence – Forme normale de SMITH

Les matrices d'incidence décrivent les homomorphismes de bord. L'homologie peut se calculer sur la forme normale de SMITH des matrices d'incidence.

#### 3.2.1.1 Matrices d'incidence

On peut associer à tout ensemble semi-simplicial  $(K, (d_i))$  un complexe de chaînes libre  $(C, \partial)$ , où chaque  $C_p$  est engendré par  $K^p$ . Chaque homomorphisme de bord  $\partial_p$  peut être représenté par la matrice d'incidence  $E^p$ , exprimée dans les bases des  $p$  et  $(p-1)$ -simplexes, comme représenté sur la figure 3.1.

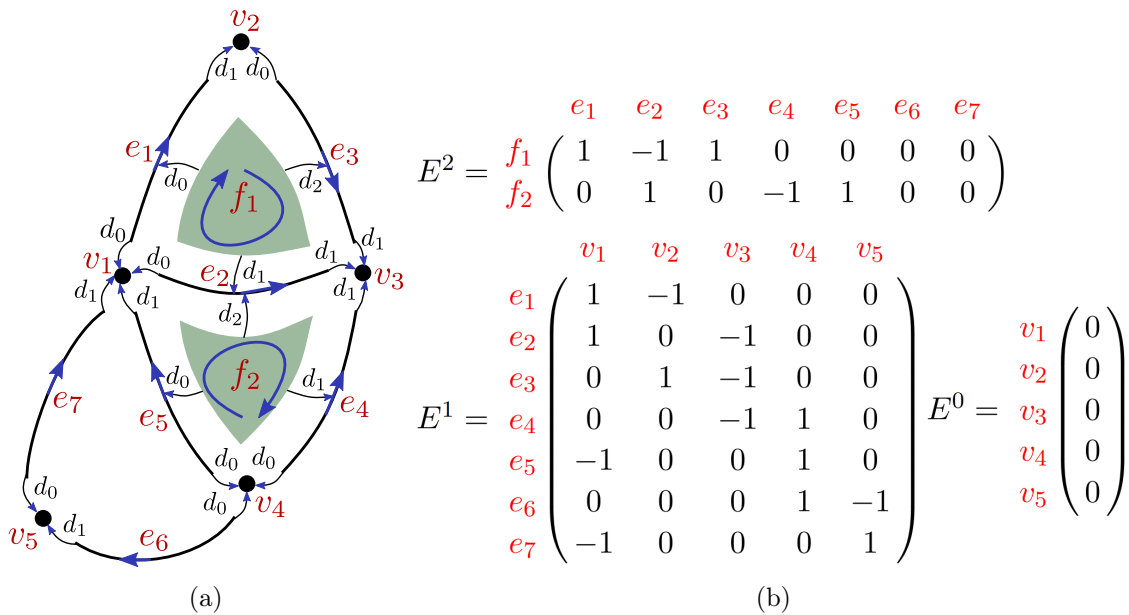


FIGURE 3.1 – (a) Un ensemble semi-simplicial ; (b) les matrices d'incidence correspondant à (a), décrites dans les bases des simplexes.

Notons, que l'on utilise ici une notation transposée comparé à ce que l'on trouve usuellement dans la littérature. Comme pour la notation des opérateurs de face, cela permet de lire les produits de matrice de gauche à droite dans le sens de lecture. Par exemple, on pourra vérifier la propriété  $\partial_p \partial_{p-1} = 0$  en effectuant le produit  $E^p \cdot E^{p-1}$ .

#### 3.2.1.2 Forme normale de SMITH

La forme normale de SMITH  $N^p$  d'une matrice d'incidence  $E^p$  décrit le même homomorphisme de bord  $\partial_p$  mais dans d'autres bases des  $p$ -chaînes et  $(p-1)$ -chaînes, de manière à mettre au jour une base des  $p$ -cycles et une base des  $(p-1)$ -bords. Cette transformation est appelée **réduction** de  $N^p$  en sa forme normale de SMITH.

$$N^p = \left( \begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \lambda_k & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array} \right)$$

où tous les entiers  $\lambda_i$  sont supérieurs ou égaux à 1 et  $\forall i \in [0, k-1]$ ,  $\lambda_i$  divise  $\lambda_{i+1}$ . Cette matrice est dite en forme normale de SMITH.

Le nombre de lignes nulles de chaque matrice  $N^p$  donne donc le rang du groupe  $Z_p$  ; le nombre de colonnes non nulles donne le rang du groupe  $B_{p-1}$ . Le  $p^e$  nombre de BETTI est égal au rang de  $Z_p$  moins le rang de  $B_p$ . Les entiers  $\lambda_j > 1$  sont les coefficients de torsion.

### 3.2.2 Calcul des générateurs – forme normale de SMITH-AGOSTON

En mémorisant les changements de base effectués pour réduire une matrice  $E^p$  en  $N^p$ , on obtient une description de la base de  $Z_p$  en terme de chaînes de  $p$ -simplexes : correspondant aux lignes nulles. En faisant la même chose sur la matrice  $N^{p+1}$ , on obtient une base de  $B_p$  : correspondant aux colonnes non nulles. Pour obtenir un ensemble minimal de générateurs du  $p^e$  groupe d'homologie  $H_p$ , il faut donc pouvoir effectuer le quotient de ces deux groupes. Une manière simple est de s'assurer que la base des bords est un sous-ensemble de la base des cycles (aux coefficients  $t_i$  près). C'est ce que permet la forme normale de SMITH-AGOSTON.

$$N_*^p = \left( \begin{array}{cc|c} & 0 & 0 \\ \lambda_k & 0 & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \end{array} \right)$$

Dit autrement, la forme normale de SMITH-AGOSTON  $N_*^p$  d'une matrice d'incidence  $E^p$  permet de s'assurer que la base des  $p$ -chaînes utilisée pour décrire  $\partial_p$  est bien la même que celle utilisée pour décrire  $\partial_{p+1}$ . Plus précisément, à chaque  $p$ -chaîne correspondant à une ligne  $i$  de  $N_*^p$  correspond bien la même  $p$ -chaîne pour la colonne  $i$  de  $N_*^{p+1}$  : pour plus de détails, voir [Agoston 1976], ainsi que nos travaux de thèse [Peltier 2006a] qui décrivent les algorithmes de mise en forme normale de Smith-Agoston.

Pour le lecteur intéressé, notons que différents travaux ont pour objectif d'optimiser le processus de réduction d'une matrice en sa forme normale de SMITH [Dumas 2001, Giesbrecht 1996, Storjohann 1996]. D'autres s'attachent à réduire le nombre de cellules de l'objet subdivisé tout en préservant son homologie afin de pouvoir effectuer le calcul sur un objet *plus petit* [Dlotko 2010, González-Díaz 2009, Kaczynski 1998, Kaczynski 2004, Damiand 2012]. En particulier, dans [Damiand 2008], nous avons proposé un algorithme permettant de calculer de manière efficace les générateurs des groupes d'homologie sur des Gcartes de dimension 3 orientables, contenant des tunnels et des cavités. En partant d'une subdivision initiale où toutes les cellules sont des boules, la Gcarte est simplifiée, tout en préservant son homologie, jusqu'à obtenir une représentation minimale, permettant d'en déduire directement un ensemble de générateurs.

Des travaux ont été menés afin d'obtenir de "jolies" générateurs, *i. e.* des représentants "collants" au mieux aux tunnels, notamment pour des variétés de dimension 2 [Dey 2008]. Le calcul d'une base *minimale* du premier groupe d'homologie à coefficients sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  d'un complexe simplicial a été proposée dans [Dey 2018]. Le terme *minimal* fait référence au fait que chaque cycle de la base est de longueur minimale (chaque arête étant pondérée). Une base *minimale* est donc un ensemble de cycles minimaux. [Gonzalez-Lorenzo 2022] proposent une heuristique pour le calcul d'une base minimale des groupes d'homologie en toute dimension, à coefficients sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , pour des objets discrets représentés par des structures cubiques.

De manière générale, peu de travaux traitent du calcul des générateurs des groupes d'homologie. La grande majorité des travaux concerne le calcul des nombres de BETTI des groupes, généralement calculés à coefficients  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ceci répond à la grande majorité des cadres applicatifs, où les données correspondent en général à des objets de  $\mathbb{R}^3$  sans torsion.

### 3.2.3 Gestion des dégénérés

On peut associer directement un complexe de chaînes libre à un ensemble simplicial ou simploldal. Un simplexe dégénéré n'est dans ce cas simplement pas pris en compte dans le complexe de chaînes. Soit  $S = (K, (d_i), (s_j))$  un ensemble simplicial, le complexe de chaînes libre associé à  $S$  est construit de la manière suivante :  $C_p$  est engendré par l'ensemble des  $p$ -simplexes non dégénérés.

Pour tout  $p$ -simplexe de  $S$ ,  $\sigma \partial_p = \sum_{i=0}^p r_i (-1)^i \sigma d_i$ , où  $r_i = 0$  si  $\sigma d_i$  est dégénéré,  $r_i = 1$  sinon. Cette définition vérifie bien  $\partial \partial = 0$  : en particulier, le bord de tout simplexe dégénéré  $\sigma = \mu s_i$  est nul. En effet, soit  $\sigma$  un  $p$ -simplexe dégénéré, il existe donc  $\mu$  tel que  $\mu s_i = \sigma$ . D'après la définition 23, pour tout  $j < i$ , on a  $\mu s_i d_j = \mu d_j s_{i-1}$  et pour tout  $j > i + 1$ , on a  $\mu s_i d_j = \mu d_{j-1} s_i$ . Dit autrement, toutes les faces de  $\sigma$ , exceptées  $\sigma d_i$  et  $\sigma d_{i+1}$ , sont dégénérées. Elles comptent donc pour 0 dans le bord de  $\sigma$ . De plus, on a  $\sigma d_i = \sigma d_{i+1}$ . Le bord de  $\sigma$  vaut donc  $\mu - \mu = 0$ . On notera qu'un simplexe dégénéré  $\sigma$  possède au plus un seul simplexe non dégénéré dans son bord : s'il en possède un, il s'agit de  $\mu$ .

La gestion des simplexes dégénérés pour le calcul des matrices d'incidence est donc direct. Les méthodes de réduction de matrices décrites dans les parties précédentes peuvent donc directement être appliquées pour des structures présentant de la dégénérescence.

### 3.2.4 Calcul sur les ensembles simplloïdaux

On peut associer directement un complexe de chaînes à un ensemble semi-simplloïdal en utilisant comme pour les ensembles semi-simpliciaux, l'ensemble des simplloïdes de dimension  $p$  comme base des  $p$ -chaînes. Les homomorphismes de bord  $\partial_p$  sont définis en utilisant la formule générale du bord d'un produit de cellules [Hatcher 2002] :

$$(a \times b)\partial = a\partial \times b + (-1)^{\dim(a)} a \times b\partial$$

Les homomorphismes de bord  $\partial^\square$  des ensembles semi-simplloïdaux sont définis à partir de cette formule générale, à partir des opérateurs de face [Peltier 2006a]. Soit  $\sigma$  un simplloïde de type  $(a_1, \dots, a_p)$ , son bord tient à la fois compte de l'indice des opérateurs de face, et de son type.

**Définition 29** Soit  $\sigma$  un simplloïde de type  $(a_1, \dots, a_p)$  de dimension  $n > 0$ . Le bord de  $\sigma$  est la  $(n-1)$ -chaîne :

$$\sigma\partial^\square = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{a_i} (-1)^{j+\sum_{k=1}^{i-1} a_k} \sigma d_j^i$$

Si  $\sigma$  est un sommet, alors son bord est nul.

Par exemple, considérons un simplloïdes  $\sigma$  de type  $(2, 1)$  et un simplloïde  $\mu$  de type  $(1, 2)$ . On a :

$$\begin{aligned} \sigma\partial^\square &= (\sigma d_0^1 - \sigma d_1^1 + \sigma d_2^1) + (\sigma d_0^2 - \sigma d_1^2), \\ \mu\partial^\square &= (\mu d_0^1 - \sigma d_1^1) - (\sigma d_0^2 - \sigma d_1^2 + \sigma d_2^2). \end{aligned}$$

Les méthodes classiques de réduction de matrices d'incidence peuvent être appliquées directement à tout ensemble semi-simplloïdal. L'homologie calculée sur ce complexe de chaînes est équivalente à l'homologie calculée sur l'ensemble semi-simplicial associé [Peltier 2006a].

Les résultats présentés pour les ensembles simpliciaux et la prise en compte des dégénérés s'étend de manière directe sur les ensembles simplloïdaux : les simplloïdes dégénérés ne sont pas pris en compte dans le calcul du bord d'un simplloïde non dégénéré.

### 3.2.5 Calcul sur les structures cellulaires

Comme indiqué en introduction de ce chapitre, l'homologie d'un  $CW$ -complexe peut être calculée à partir du complexe de chaînes qui lui est associé. Or les cellules des structures cellulaires sont des cônes sur des quasi-variétés, elles ne correspondent donc pas nécessairement à des boules. On ne peut donc pas associer directement un  $CW$ -complexe à une structure cellulaire.

Bien sûr, comme on sait associer un ensemble semi-simplicial à toute structure cellulaire, on peut donc calculer l'homologie d'un objet cellulaire à partir de cet ensemble semi-simplicial. Mais en procédant ainsi, on perd l'intérêt de la structuration cellulaire qui optimise la représentation de l'ensemble semi-simplicial (cf. figure 3.2 et Table 3.1 extraits de [Alayrangues 2015a]).

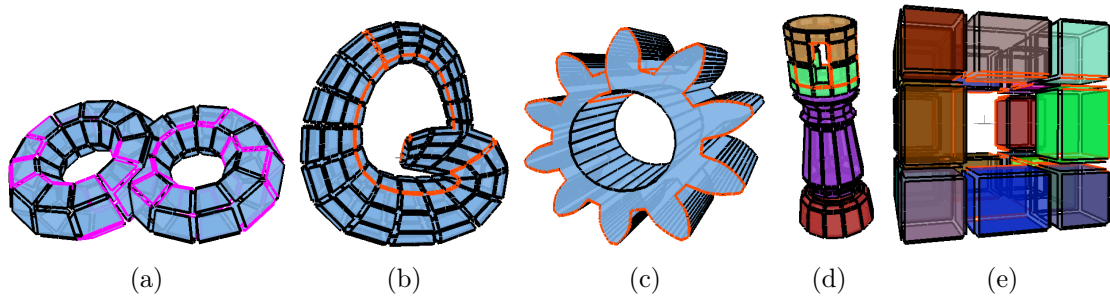


FIGURE 3.2 – Objets cellulaires. (a) Un tore à deux trous. (b) Une bouteille de KLEIN. (c) Un pignon. (d) Une tour volumique. (e) Une éponge de Menger volumique.

Objet	subdivision cellulaire				Analogue simplicial			
	0	1	2	3	0	1	2	3
2-tore	151	294	142	-	588	1.770	1.180	-
bouteille de KLEIN	324	648	324	-	1.296	3.888	2.592	-
Pignon	470	701	231	-	1.402	4.206	2.804	-
Tour	228	452	226	4	910	3.824	4.928	2.016
Éponge de Menger	64	144	96	20	324	1.576	2.208	960

TABLE 3.1 – Nombre de cellules des objets représentés sur la figure 3.2.

Les résultats qui suivent sont issus de nos travaux [Alayrangues 2015a, Alayrangues 2011], où nous avons défini un opérateur de bord cellulaire pour les chaînes de cartes et les Gcartes. Nous avons prouvé que l'homologie définie sur une chaîne de cartes  $C$  par cet opérateur de bord est bien équivalente à l'homologie calculée sur l'analogue simplicial sous les conditions suivantes :

1. toutes les involutions de  $C$  sont sans point fixe, *i. e.* pour tout  $i$ , pour tout brin  $b$ , on a  $b\alpha_i \neq b$  : cf. figure 3.3;
2. toutes les  $i$ -cellules sont orientables;
3. le **bord canonique** que chaque  $i$ -cellule a l'homologie d'une  $(i - 1)$ -sphère, *i. e.*  $H_0 \simeq \mathbb{Z}$ ,  $H_{i-1} \simeq \mathbb{Z}$  et  $H_j \simeq 0$  pour tout  $j \notin \{0, i - 1\}$ . De manière intuitive, le bord canonique d'une  $i$ -cellule revient à la considérer sans tenir compte des recollements sur les  $(i - 1)$ -cellules de son bord, comme représenté sur la figure 3.4.



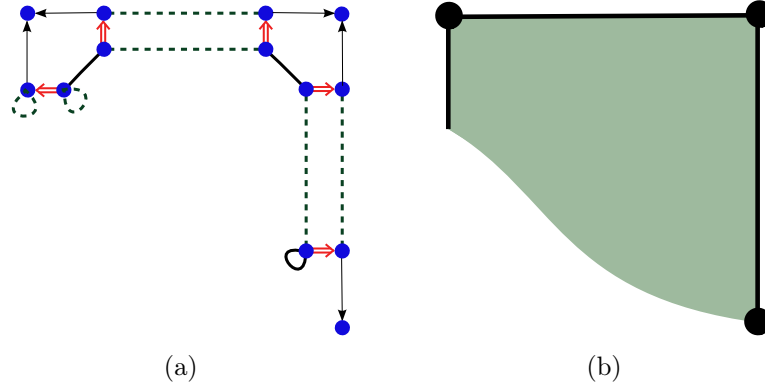


FIGURE 3.3 – (a) Une chaîne de cartes contenant des points fixes. (b) La représentation de la subdivision cellulaire de (a).

### 3.2.5.1 Complexe de chaînes, nombre d'incidence, homomorphismes de bord

Comme décrit pour les structures régulières, on construit le groupe des  $p$ -chaînes à partir de l'ensemble des  $p$ -cellules.

**Définition 30** Soit  $C = ((G^i)_{i=0,\dots,n}, (\sigma^i)_{i=1,\dots,n})$  une chaîne de carte.  $C_* = \{C_i\}_{i=0,\dots,n}$  est la famille de groupes de chaînes associée à  $C$ , telle que chaque  $C_i$  est le groupe engendré par l'ensemble des composantes connexes de  $G^i$ , c'est-à-dire par les  $i$ -cellules.

Afin d'obtenir un complexe de chaînes libre, nous définissons les homomorphismes de bord  $\partial_i^{cell} : C_i \rightarrow C_{i-1}$  directement sur les cellules.

Pour cela, on définit le **nombre d'incidence** entre une  $i$ -cellule et une  $(i-1)$ -cellule. On utilise pour cela la notion de **bord canonique** d'une  $i$ -cellule.

Le **nombre d'incidence** est basé sur l'orientation des cellules. Une condition nécessaire pour définir ce nombre d'incidence est donc que toutes les cellules soient **orientables**.

**Définition 31** Soit  $C$  une chaîne de cartes. Une  $i$ -cellule  $c = (B, \alpha_0^i, \dots, \alpha_{i-1}^i, \alpha_i^i = \omega)$  de  $C$  est orientable si et seulement si son bord canonique  $(B, \alpha_0^i, \dots, \alpha_{i-1}^i)$  est orientable, i. e. si  $c$  contient exactement deux orbites  $\langle \alpha_0^i \alpha_1^i, \dots, \alpha_0^i \alpha_{i-1}^i \rangle$ .

On peut ainsi partitionner l'ensemble des brins de chaque cellule en deux parties et affecter un signe  $sg(b)$  à tout brin  $b$  d'une cellule, tel que  $sg(b) = -sg(b\alpha_0)$ .

Notons que le fait d'avoir uniquement des cellules orientables n'empêche pas que l'objet lui-même ne le soit pas. Par exemple, une bouteille de KLEIN est une surface non orientable qui peut être obtenue à partir d'une cellule orientable carrée en recollant deux à deux les arêtes de son bord canonique, comme sur la figure 3.4. Si on considère un cône cellulaire sur une bouteille de KLEIN, on obtient en revanche une 3-cellule non orientable, car son bord canonique n'est pas orientable puisque c'est une bouteille de KLEIN.

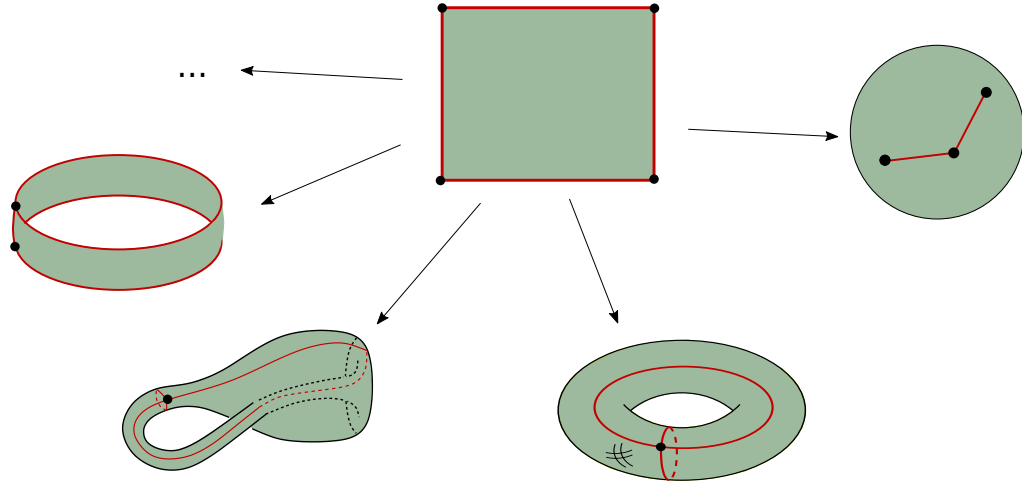


FIGURE 3.4 – Un tore, une sphère, une bouteille de KLEIN, et un anneau peuvent être construits avec une seule 2-cellule, dont le bord canonique correspond à un cycle de quatre arêtes (en rouge).

Soit  $C$  une chaîne de cartes, et soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $c^i(b^i)$  et  $c^{i-1}(b^{i-1})$  deux cellules de  $C$ . Le **nombre d'incidence**,  $(c^i(b^i) : c^{i-1}(b^{i-1})) = n_+ - n_-$ , où  $n_+$  (resp.  $n_-$ ) est le nombre de préimages (relativement à  $\sigma^i$ ) de  $b^{i-1}$  dans  $c^i$  ayant un signe égal (resp. différent) de celui de  $b^{i-1}$ . Intuitivement, le fait d'assigner le signe  $+$  ou  $-$  à l'une des deux orbites d'une cellule détermine son orientation. Ce choix n'a aucun impact sur le calcul de l'homologie. Une fois l'orientation de chaque cellule établie, le choix des brins  $b^i$  et  $b^{i-1}$  n'impacte pas le nombre d'incidence entre ces cellules. Ainsi, on notera plus simplement  $(c^i : c^{i-1})$  le nombre d'incidence entre deux cellules. On peut à présent définir les opérateurs de bord :

**Définition 32** Soit  $C = ((G^i)_{i=0, \dots, n}, (\sigma^i)_{i=1, \dots, n})$  une chaîne de cartes. Soit  $C_* = \{C_i\}_{i=0, \dots, n}$  la famille des groupes des chaînes associé à  $C$ . L'opérateur de bord  $\partial_i^{cell}$  est l'extension linéaire de l'opérateur de bord défini sur chaque  $i$ -cellule de  $G^i$  par :

$$c^i \partial_i^{cell} = \sum_{c^{i-1} \in G^{i-1}} (c^i : c^{i-1}) c^{i-1}$$

La figure 3.5 illustre cette notion de préimage des opérateurs de face tenant compte de l'orientation de chaque cellule.

Nous avons prouvé dans [Alayrangues 2015a] que les opérateurs  $\partial^{cell}$  sont bien des homomorphismes de bord, *i. e.*  $\partial^{cell} \partial^{cell} = 0$ , et que l'homologie définie par ce complexe de chaînes est équivalente à l'homologie calculée sur l'ensemble semi-simplicial associé. Nous avons enfin proposé des optimisations permettant de relâcher certaines contraintes lorsque l'on souhaite calculer l'homologie sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et adapté la définition du nombre d'incidence aux Gcartes.

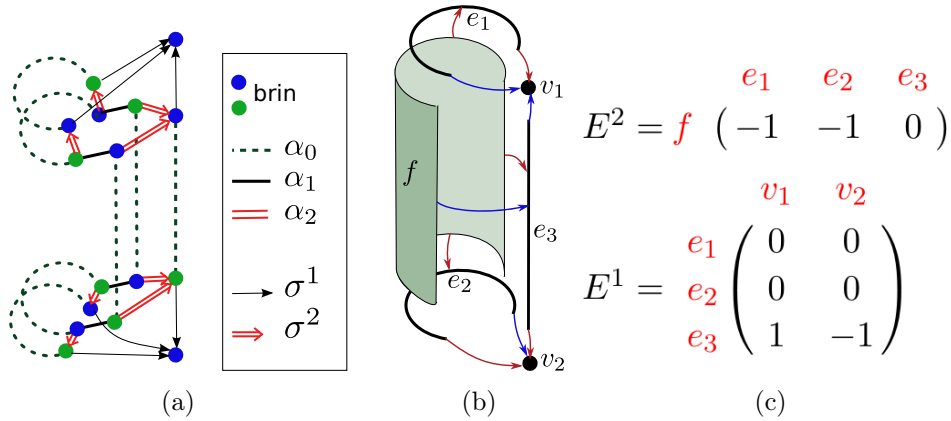


FIGURE 3.5 – (a) Une chaîne de cartes décrivant la subdivision d'un anneau. Chaque cellule est orientable, l'ensemble des brins de chaque cellule est partitionné en deux ensembles de brins (bleus et verts) correspondant à ses deux orientations. (b) Subdivision cellulaire correspondant à (a). Les flèches bleues (resp. rouges) correspondent à des opérateurs de face entre deux cellules ayant même (resp. différent) signe. (c) les matrices d'incidence décrivant les homomorphismes de bord  $\partial_2^{cell}$  et  $\partial_1^{cell}$ .

### 3.2.6 Liens avec la caractéristique d'EULER-POINCARÉ

Il existe un lien fort entre les groupes d'homologie et un autre invariant bien connu en topologie combinatoire : la caractéristique d'Euler-Poincaré, notée  $\chi$ . Cet invariant topologique, initialement défini sur les polyèdres comme la somme alternée du nombre de sommets, arêtes et faces, a été généralisé aux  $CW$ -complexes de dimension  $n$  :  $\chi = \sum_{i=0}^n (-1)^i |c_i|$ , où  $|c_i|$  désigne le nombre de  $i$ -cellules du  $CW$ -complexe.

Une autre définition de la caractéristique d'Euler-Poincaré est basée sur les nombres de BETTI :  $\chi = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i$ .

Cette définition double de la caractéristique d'Euler-Poincaré permet dans certains cas, de calculer les nombres de BETTI efficacement. C'est ce que nous avons utilisé dans le cadre du projet Région *Mimosa* afin d'effectuer la caractérisation et la correction topologique de modèles volumiques d'os trabéculaires, issus d'acquisitions tomographiques. Ce travail s'est effectué au cours du stage post-doctoral de SOUKAYNA QARBOUA. Le modèle utilisé est celui des Gcartes. Une première acquisition produit un modèle où chaque cellule volumique est un cube. Une première étape de simplifications consiste à fusionner des cellules distinctes afin de préserver des cellules correspondant à des boules [Damian 2008].

Nous savons qu'un modèle réel d'os trabéculaire est sans torsion, composé d'une seule composante connexe, et ne présente pas de cavité. Lors de la reconstruction du modèle volumique, plusieurs composantes connexes peuvent apparaître. Pour chacune d'elles, nous pouvons calculer le nombre de trous en chaque dimension, sans passer par des réductions de matrices d'incidence :

- $\beta_0$ , le nombre de composantes connexes est égal à 1,

- le nombre de cavités  $\beta_2$  est égal au nombre de bords du volume moins un (la surface externe ne compte pas comme une cavité),
- $\beta_3$  est nul car les données proviennent de  $\mathbb{R}^3$ ,
- le nombre de tunnels  $\beta_1$  peut être déduit de l'égalité  $\sum_{i=0}^3 (-1)^i |c_i| = 1 - \beta_1 + \beta_2$ .

L'étape de simplification topologique consiste à :

- supprimer les petites composantes connexes,
- supprimer les petites cavités,
- fusionner les composantes connexes restantes en créant des *ponts de matière* entre elles,
- *percer* les cavités en creusant la matière depuis chacune d'elles jusqu'au bord extérieur du volume.

### 3.3 Calcul incrémental

De nombreux travaux sont dédiés au calcul de l'homologie d'objets subdivisés. Généralement, on s'intéresse au calcul de l'homologie d'un objet donné (cf. calcul global). Le calcul incrémental de l'homologie d'un objet s'attache à effectuer le calcul étape après étape en analysant la construction de l'objet.

#### 3.3.1 Calcul incrémental des nombres de BETTI

Une première approche concerne le calcul incrémental des nombres de BETTI pour des complexes simpliciaux abstraits dont la dimension maximale est 3 [Delfinado 1995]. Cette approche a l'intérêt d'être intuitive, et se base sur la notion de **filtration**, que l'on retrouve dans d'autres approches incrémentales présentées dans ce document.

Une filtration est une suite de complexes :  $K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^n = K$ .

De manière informelle, une filtration peut être vue comme les différentes étapes de construction d'un complexe, obtenu par ajouts successifs de simplexes.

L'algorithme s'exprime très simplement : à chaque ajout d'un  $p$ -simplexe  $\sigma$ , soit l'ajout de  $\sigma$  crée un  $p$ -cycle, auquel cas  $\beta_p$  augmente de 1, soit l'ajout de  $\sigma$  "bouche" un  $(p-1)$ -cycle, et dans ce cas,  $\beta_{p-1}$  diminue de 1. La Table 3.2 illustre cet algorithme incrémental.

#### 3.3.2 Homologie persistante

La notion de filtration est à la base de la théorie de l'homologie persistante, ou persistance homologique, qui permet de décrire l'homologie d'un objet d'un point de vue dynamique. La persistance homologique est actuellement très largement étudiée et utilisée, dans de nombreux domaines qui dépassent le cadre de la modélisation géométrique à base topologique. Par exemple en cosmologie [Pranav 2016] pour la caractérisation de la toile cosmique, en géosciences pour la détection de fractures dans des roches [Suzuki 2020], en médecine pour la caractérisation d'échantillons cancéreux [Masoomy 2021], ou encore en




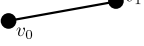
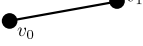
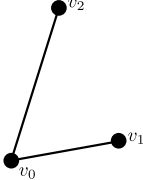
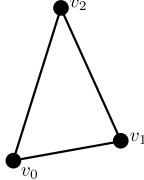
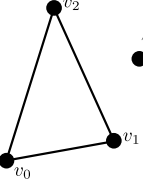
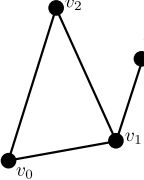
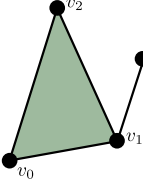
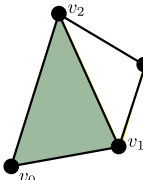
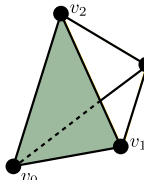
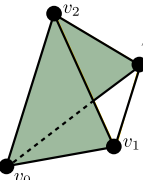
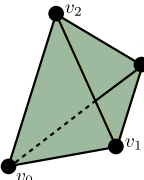
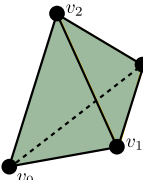
				
				
$K_0$ $\beta_0 = 0$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$	$K_1$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$	$K_2$ $\beta_0 = 2$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$	$K_3$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$	$K_4$ $\beta_0 = 2$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$
$\emptyset$	$v_0$	$v_1$	$v_0v_1$	$v_2$
				
$K_5$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$	$K_6$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 1$ $\beta_2 = 0$	$K_7$ $\beta_0 = 2$ $\beta_1 = 1$ $\beta_2 = 0$	$K_8$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 1$ $\beta_2 = 0$	$K_9$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$
$v_0v_2$	$v_1v_2$	$v_3$	$v_1v_3$	$v_0v_1v_2$
				
$K_{10}$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 1$ $\beta_2 = 0$	$K_{11}$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 2$ $\beta_2 = 0$	$K_{12}$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 1$ $\beta_2 = 0$	$K_{13}$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 0$	$K_{14}$ $\beta_0 = 1$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 1$
$v_2v_3$	$v_0v_3$	$v_0v_2v_3$	$v_0v_1v_3$	$v_1v_2v_3$

TABLE 3.2 – Une filtration d'un complexe simplicial représentant le bord d'un tétraèdre à la dernière étape. À chaque étape le nouveau simplexe ajouté et les nombres de BETTI sont indiqués.

biophysique pour la caractérisation de protéines [Ichinomiya 2020].

Intuitivement, l'homologie persistante permet d'avoir une vision de l'évolution des groupes d'homologie d'un objet relativement à sa filtration. Par exemple, une filtration peut être construite en utilisant des alpha-complexes [Edelsbrunner 2010], des complexes de Čech [Dantchev 2012] ou des complexes de Vietoris-Rips [Zomorodian 2010]. Pour ces structures, à partir d'un nuage de points, en considérant des boules de rayons croissants, des simplexes de dimensions supérieures sont ajoutés au fur et à mesure que les boules grossissent et s'intersectent. La différence entre ces modèles concerne les conditions d'intersection pour créer un nouveau simplexe. Par exemple, la figure 3.6 illustre plusieurs étapes d'une filtration obtenue sur ce principe.

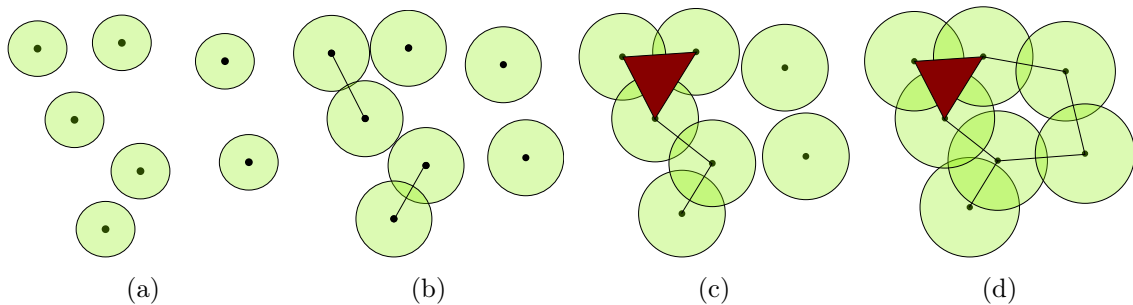


FIGURE 3.6 – (a) – (d) À partir d'un nuage de points, une filtration d'un complexe simplicial de dimension 2 est obtenue en considérant des intersections de disques de rayon croissant.

Dans la théorie de l'homologie persistante, les éléments des groupes d'homologie ont une durée de vie : lorsqu'un  $p$ -cycle est créé à une certaine étape de la filtration, le groupe d'homologie  $H_p$  est modifié. Dans la suite de la filtration, ce cycle sera éventuellement "bouché", c'est-à-dire qu'il deviendra un bord par l'ajout de  $(p + 1)$ -simplexes. La durée de vie d'un cycle correspond au nombre d'étapes entre sa date de naissance (lorsqu'il est créé) et sa date de mort (lorsqu'il est bouché). Plus la durée de vie est grande, plus l'information topologique est significative. À l'inverse, si la durée de vie d'un cycle est courte, alors celui-ci n'est pas significatif dans l'analyse globale du nuage de points. Une des propriétés intéressantes de l'homologie persistante est qu'elle est insensible aux perturbations géométriques.

L'homologie persistante d'une filtration peut être représentée par un **diagramme de persistance**, qui permet de représenter graphiquement les durées de vie de chaque cycle : chaque cycle est représenté par un point dont l'abscisse représente la date de naissance et l'ordonnée la date de mort. Plus le point est proche de la diagonale, plus sa durée de vie est courte. Par exemple, sur la figure 3.7, (a) et (c) représentent deux nuages de points de  $\mathbb{R}^2$  répartis dans un anneau. Sur les diagrammes de persistance correspondants (b) et (d), les points rouges représentent des cycles de dimension 0. Ils sont tous alignés verticalement car l'ensemble des points sont présents dès la première étape de la filtration.

Les points bleus représentent les cycles de dimension 1. Sur ces deux exemples, on peut remarquer qu'une seule composante connexe et un 1-cycle persistant (les points en haut du graphique), et caractérisent bien l'homologie de l'anneau (une composante connexe et un tunnel).

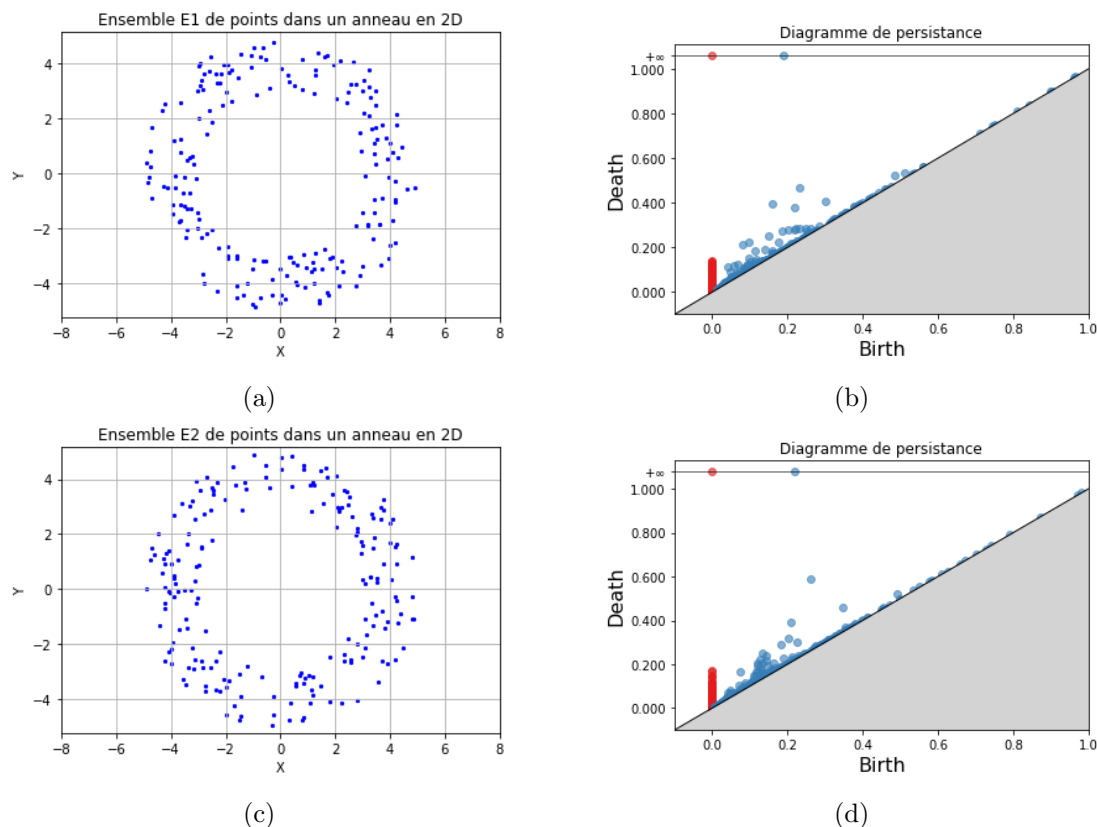


FIGURE 3.7 – Deux nuages de points répartis aléatoirement dans un anneau de  $\mathbb{R}^2$  ont des diagrammes de persistance similaires. (b) Diagramme de persistance associé à l'ensemble de points (a). (d) Diagramme de persistance associé à l'ensemble de points (c). Images réalisées avec la bibliothèque Gudhi.

En pratique, l'homologie persistante est largement utilisée pour des complexes simpliciaux abstraits, et l'homologie est calculée à coefficients dans un corps, le plus souvent  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Des travaux récents s'attachent à calculer les coefficients de torsion [Boissonnat 2019] en utilisant plusieurs corps pour les coefficients.

Il est possible de mesurer une distance entre deux diagrammes de persistance, notamment via la notion de **bottleneck distance**. Par exemple, [Damiand 2020] propose un algorithme permettant de simplifier la filtration associée à une variété combinatoire  $2D$  orientable représentée par une carte combinatoire, tout en garantissant la stabilité du diagramme de persistance.

L'homologie persistante a également été étendue dans le cas de **filtration zigzag**,

donnant lieu à la notion de **persistance zigzag** [Carlsson 2010, Milosavljević 2011], où entre deux complexes simpliciaux successifs de la filtration, on peut avoir  $\mathbb{K}_i \subseteq \mathbb{K}_{i+1}$  ou bien  $\mathbb{K}_i \supseteq \mathbb{K}_{i+1}$ .

Récemment, [Dey 2022] propose d'utiliser une version simplifiée des  $\Delta$ -complexes<sup>1</sup> *i. e.* autorisant que deux simplexes aient même bord, mais pas de multi-incidence, afin de transformer une filtration zigzag de complexes simpliciaux abstraits en une filtration classique sur les  $\Delta$ -complexes. L'objectif est de calculer l'homologie persistante de manière efficace. Ils font l'hypothèse qu'entre deux complexes consécutifs de la filtration, un unique simplexe est ajouté ou supprimé.

### 3.3.3 Homologie effective

En parallèle de l'émergence de l'homologie persistante, nous avons travaillé sur la théorie de l'homologie effective et sa mise en oeuvre dans le cadre de la modélisation géométrique.

Les notions relatives à l'homologie effective utilisées dans cette partie sont basées sur le document de référence de J. RUBIO et F. SERGERAERT [Rubio 2006]. Le terme "effective" fait référence au fait que, plutôt que de prouver l'existence d'un isomorphisme par exemple, cette théorie de l'homologie s'attache à le construire. Par exemple, savoir que le groupe d'homologie  $H_3(X)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  est une chose, construire l'isomorphisme en est une autre.

Nous utilisons ici les notions de **réduction**, d'**équivalence homologique**, et de **cône d'un morphisme**, qui permettent de mettre en oeuvre le **théorème des suites exactes courtes effectives** (théorème SECE).

Cette partie se base en particulier sur nos travaux [Alayrangues 2015b], ainsi que les travaux effectués dans le cadre de la thèse de W. RHARBAOUI [Rharbaoui 2022, Rharbaoui 2020].

#### 3.3.3.1 Outils de base pour l'homologie effective

**Définition 33** Une réduction associe un complexe de chaînes avec un second, homologiquement équivalent, et généralement plus petit en terme de nombre de générateurs.

Une réduction  $\rho = ((C^0, \partial^0), (C^1, \partial^1), h, f, g)$ , notée  $\rho : (C^0, \partial^0) \rightrightarrows (C^1, \partial^1)$ , est un diagramme :

$$\rho = \boxed{\begin{array}{ccc} h \curvearrowright & & \\ (C^0, \partial^0) & \begin{array}{c} \xleftarrow{g} \\ \xrightarrow{f} \end{array} & (C^1, \partial^1) \end{array}}$$

où  $(C^0, \partial^0)$  et  $(C^1, \partial^1)$  sont deux complexes de chaînes,  $f$  et  $g$  sont des morphismes de complexes de chaînes, et  $h$  est un morphisme gradué de degré 1, tels que :

1. Les  $\Delta$ -complexes correspondent à des ensembles semi-simpliciaux géométriques.



- (a)  $gf = id_{C^1}$   
 (b)  $fg + h\partial^0 + \partial^0h = id_{C^0}$   
 (c)  $hf = gh = hh = 0$

Le morphisme gradué  $h : C_i^0 \rightarrow C_{i+1}^0$  est aussi appelé **opérateur d'homotopie**.

**Notes :**

- $f$  est un morphisme de complexe de chaînes :  $\forall c_i \in C_i^0, c_i\partial_i^0 f = c_i f\partial_i^1$
- $g$  est un morphisme de complexe de chaînes :  $\forall c_i \in C_i^1, c_i\partial_i^1 g = c_i g\partial_i^0$
- $h$  est un morphisme gradué de degré 1 :  $\forall c_i \in C_i^0, c_i h \in C_{i+1}^0$

**Propriété 2** Si une réduction existe entre deux complexes de chaînes  $(C^0, \partial^0)$  et  $(C^1, \partial^1)$ , alors leurs groupes d'homologie sont isomorphes.

La figure 3.8, représente la réduction suivante :

- $f : C^0 \rightarrow C^1$ 
  - $v_0f = v_1f = v_2f = v_0$ ;  $v_3f = v_4f = v_5f = v_3$
  - $e_0f = e_1f = e_2f = e_3f = 0$ ;  $e_4f = e_4$ ;  $e_5f = -e_4$ ;  $e_6f = e_6$
  - $f_0f = 0$
- $g : C^1 \rightarrow C^0$ 
  - $v_0g = v_0$ ;  $v_3g = v_3$
  - $e_4g = e_4$ ;  $e_6g = e_6 + e_3 + e_2 - e_1 - e_0$
- $h : C^0 \rightarrow C^0$ 
  - $v_0h = v_3h = 0$ ;  $v_1h = -e_0$ ;  $v_2h = -e_1 - e_0$ ;  $v_4h = -e_2$ ;  $v_5h = -e_3 - e_2$
  - $e_0h = e_1h = e_2h = e_3h = e_4h = 0$ ;  $e_5h = -f_0$ ;  $e_6h = 0$

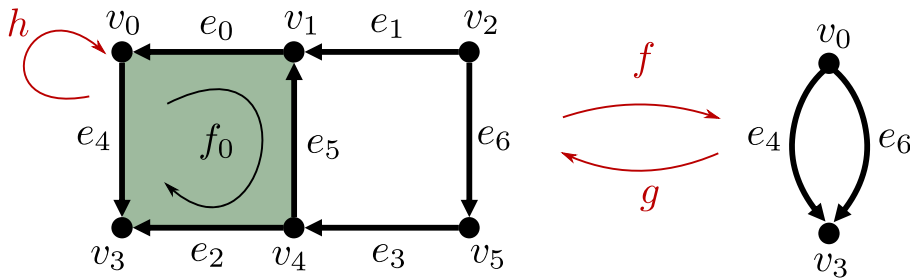


FIGURE 3.8 – Représentation d'une réduction entre deux complexes de chaînes. Leurs groupes d'homologie sont isomorphes :  $H_0 \simeq \mathbb{Z}$  et  $H_1 \simeq \mathbb{Z}$ . Les flèches représentent l'orientation *positive* des cellules.

On peut noter qu'il existe une réduction triviale entre deux complexes de chaînes identiques où  $f$  et  $g$  sont des morphismes identité, et  $h$  est le morphisme gradué nul.

Deux complexes de chaînes peuvent être homologiquement équivalents sans qu'une réduction puisse directement être définie entre les deux. L'association se fait via un

troisième complexe, plus "gros" en terme de nombre de générateurs, tel qu'une réduction existe entre ce complexe et chacun des deux autres.

**Définition 34** Soient trois complexes de chaînes  $(C, \partial)$ ,  $(C^S, \partial^S)$  et  $(C^B, \partial^B)$ . Une **équivalence homologique**  $\Upsilon$  est une paire de deux réductions  $\rho$  et  $\rho^S$  telle que :

$$\Upsilon : (C, \partial) \xleftarrow{\rho} (C^B, \partial^B) \xrightarrow{\rho^S} (C^S, \partial^S)$$

En pratique, on utilise les équivalences homologiques afin d'associer un "petit" complexe de chaînes  $(C^S, \partial^S)$  à un autre complexe  $(C, \partial)$  en passant par un "gros" complexe  $(C^B, \partial^B)$ . La propriété 2 sous assure que ces trois complexes de chaînes ont des groupes d'homologie isomorphes. L'objectif est donc d'utiliser le petit  $(C^S, \partial^S)$ , qui contient généralement moins de générateurs que  $(C, \partial)$ , pour calculer l'homologie de l'objet manipulé. Par exemple, la figure 3.9 représente une équivalence homologique pour laquelle il n'existe pas de réduction entre les complexes  $(C, \partial)$  et  $(C^S, \partial^S)$ .

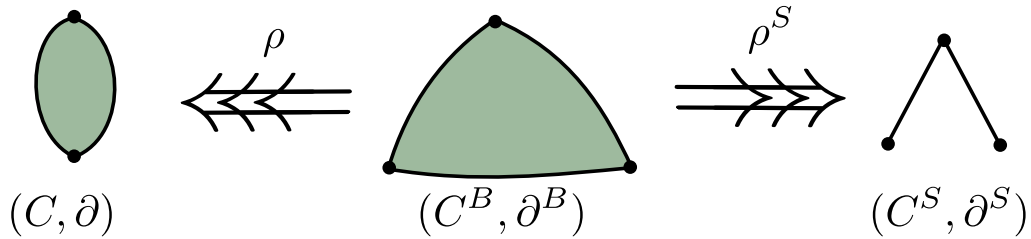


FIGURE 3.9 – Représentation d'une équivalence homologique. Les trois complexes de chaînes ont des groupes d'homologie isomorphes. Il n'existe pas de réduction entre les deux complexes de chaînes  $(C, \partial)$  et  $(C^S, \partial^S)$ .

Le cône d'un morphisme permet de représenter un morphisme sous la forme d'un complexe de chaînes.

**Définition 35** Le cône d'un morphisme de complexe de chaînes  $\phi : (C^0, \partial^0) \rightarrow (C^1, \partial^1)$ , noté  $Cone(\phi)$ , est le complexe de chaînes  $(C^\phi, \partial^\phi)$  défini de la manière suivante :

$$\forall i, C_i^\phi = C_{i-1}^0 \oplus C_i^1 \text{ et } \partial_i^\phi = \begin{pmatrix} -\partial_{i-1}^0 & \phi_{i-1} \\ 0 & \partial_i^1 \end{pmatrix}$$

$C_i^\phi$  est donc défini comme la somme directe de  $C_{i-1}^0$  et de  $C_i^1$ , pour tout  $i$ . Toute  $i$ -chaîne  $c_i = c_{i-1}^0 + c_i^1$  de  $C_i^\phi$  est notée  $c_i = (c_{i-1}^0 \ c_i^1)$ , où  $c_{i-1}^0 \in C_{i-1}^0$  et  $c_i^1 \in C_i^1$ , et

$$c_i \partial_i^\phi = (c_{i-1}^0 \ c_i^1) \begin{pmatrix} -\partial_{i-1}^0 & \phi_{i-1} \\ 0 & \partial_i^1 \end{pmatrix} = (-c_{i-1}^0 \partial_{i-1}^0 \quad c_{i-1}^0 \phi_{i-1} + c_i^1 \partial_i^1)$$

### 3.3.3.2 Théorème des suites exactes courtes effectives

**Définition 36** Une suite exacte courte effective est un diagramme :

$$0 \xrightarrow{0} (C^0, \partial^0) \xleftarrow[i]{r} (C^1, \partial^1) \xleftarrow[j]{s} (C^2, \partial^2) \xrightarrow{0} 0$$

où

- $(C^0, \partial^0)$ ,  $(C^1, \partial^1)$ ,  $(C^2, \partial^2)$  sont des complexes de chaînes,
- $i, j$  sont des morphismes de complexes de chaînes,
- $r, s$  sont des morphismes gradués

qui vérifient :

1.  $ir = id_{C^0}$
2.  $ri + js = id_{C^1}$
3.  $sj = id_{C^2}$

On notera que seuls  $i$  et  $j$  sont des morphismes de complexe de chaînes, c'est-à-dire que la notion de bord est préservée. Les morphismes  $r$  et  $s$  préservent uniquement la notion de chaîne.

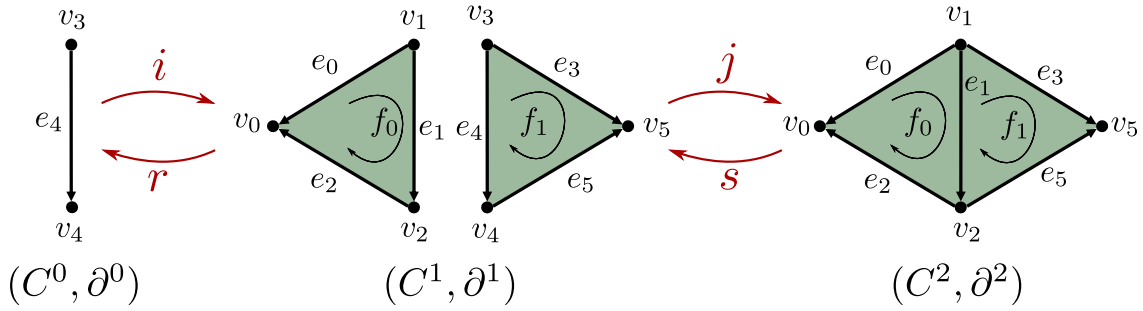


FIGURE 3.10 – Représentation d'une suite exacte courte effective impliquant trois complexes de chaînes.

L'exemple de la figure 3.10 illustre une suite exacte courte, dont les morphismes sont définis de la manière suivante :

- $i : C^0 \rightarrow C^1$ 

$$v_3 i = v_1 - v_3 ; v_4 i = v_2 - v_4 ;$$

$$e_4 i = e_1 - e_4.$$
- $r : C^1 \rightarrow C^0$ 

$$v_0 r = v_1 r = v_2 r = v_5 r = 0 ; v_3 r = -v_3 ; v_4 r = -v_4 ;$$

$$e_0 r = e_1 r = e_2 r = e_3 r = e_5 r = 0 ; e_4 r = -e_4 ;$$

$$f_0 r = f_1 r = 0.$$
- $j : C^1 \rightarrow C^2$ 

$$v_0 j = v_0 ; v_1 j = v_3 j = v_1 ; v_2 j = v_4 j = v_2 ; v_5 j = v_5 ;$$

$$e_0 j = e_0 ; e_1 j = e_4 j = e_1 ; e_2 j = e_2 ; e_3 j = e_3 ; e_5 j = e_5 ;$$

$$f_0j = f_0; f_1j = f_1.$$

$$— s : C^2 \rightarrow C^1$$

$$v_0s = v_0; v_1s = v_1; v_2s = v_2; v_5s = v_5;$$

$$e_0s = e_0; e_1s = e_1; e_2s = e_2; e_3s = e_3; e_5s = e_5;$$

$$f_0s = f_0; f_1s = f_1.$$

On peut remarquer que l'exemple de la figure 3.10 correspond à une opération d'identification :  $(C^0, \partial^0)$  représente la partie identifiée,  $(C^1, \partial^1)$  représente l'objet avant l'opération, et  $(C^2, \partial^2)$  représente le résultat de l'opération.

Étant donnée une suite exacte courte effective, une équivalence homologique pour  $(C^0, \partial^0)$  et une autre pour  $(C^1, \partial^1)$ , le théorème 4 [Rubio 2006] permet de déduire une équivalence homologique pour  $(C^2, \partial^2)$ . Dit autrement, si on sait décrire une opération de construction par une suite exacte courte effective, alors connaissant l'homologie d'un objet avant l'opération, l'homologie correspondant à la partie impactée par l'opération, alors on peut en déduire l'homologie de l'objet après l'opération.

**Théorème 4** *Soit*

$$0 \xrightarrow{0} (C^0, \partial^0) \xleftarrow[i]{r} (C^1, \partial^1) \xleftarrow[j]{s} (C^2, \partial^2) \xrightarrow{0} 0$$

une suite exacte courte effective, et deux équivalences homologiques :

$$(C^0, \partial^0) \xleftarrow{\rho^0} (C^{B0}, \partial^{B0}) \xrightarrow{\rho^{S0}} (C^{S0}, \partial^{S0})$$

$$(C^1, \partial^1) \xleftarrow{\rho^1} (C^{B1}, \partial^{B1}) \xrightarrow{\rho^{S1}} (C^{S1}, \partial^{S1})$$

Il est possible de construire une équivalence homologique :

$$(C^2, \partial^2) \xleftarrow{\rho^2} (C^{B2}, \partial^{B2}) \xrightarrow{\rho^{S2}} (C^{S2}, \partial^{S2})$$

où  $i^B = f^0i^g$ ,  $i^S = g^{S0}i^B f^{S1}$ ,  $(C^{B2}, \partial^{B2}) = Cone(i^B)$  et  $(C^{S2}, \partial^{S2}) = Cone(i^S)$ .

Il s'agit ici uniquement de la partie du théorème utilisée dans la suite. Le théorème complet permet également de calculer notamment  $(C^1, \partial^1)$  à partir d'une suite exacte courte effective et deux équivalences homologiques liées à  $(C^0, \partial^0)$  et  $(C^2, \partial^2)$ . Cette seconde partie du théorème est notamment utilisée pour calculer l'homologie d'un objet après application d'une opération correspondant à l'inverse d'une opération d'identification [Rharbaoui 2022]. La figure 3.11 illustre le principe du théorème SECE.

### 3.3.3.3 Application du théorème SECE à l'opération d'identification

Nous avons utilisé l'homologie effective dans un contexte du suivi de l'homologie d'un objet au cours d'un processus de construction, comme illustré en figure 3.12.

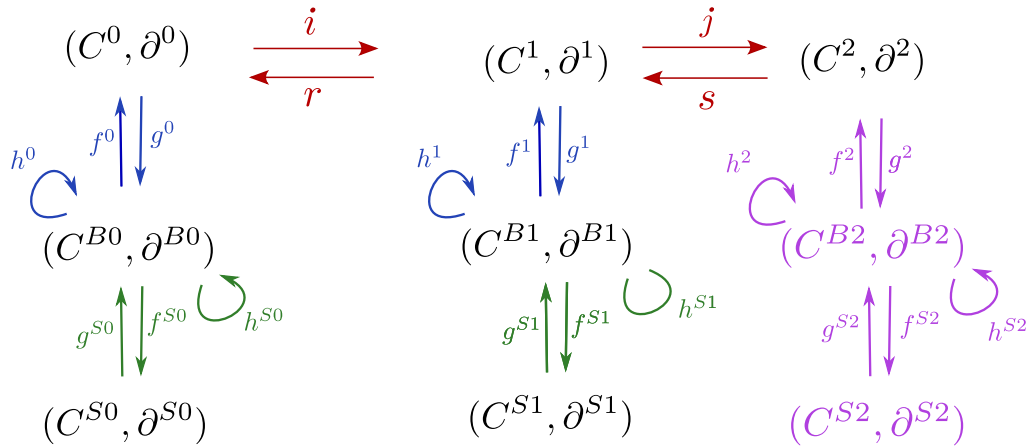


FIGURE 3.11 – Illustration du théorème 4 : étant donnée une suite exacte courte (en haut), et deux équivalences homologiques (à gauche et au centre), on peut déduire la troisième équivalence homologique (à droite en mauve).

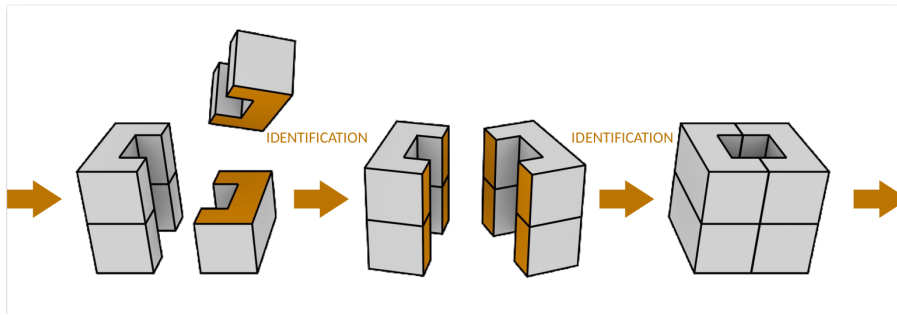


FIGURE 3.12 – Processus de construction d'un objet. Chaque étape de construction est obtenue à partir de la précédente en appliquant une opération d'identification [Rharbaoui 2022].

D'un point de vue théorique, nous avons montré comment utiliser le théorème 4 pour calculer l'homologie d'un objet résultant d'une opération d'identification [Rharbaoui 2020].

Pour cela, nous avons montré comment :

- associer une suite exacte courte à toute opération d'identification,
- associer une équivalence homologique à un objet initial,
- associer une équivalence homologique à la partie de l'objet concernée par l'identification.

Le principe, expliqué ici pour les ensembles semi-simpliciaux est le suivant : pour chaque dimension  $k$ , on partitionne l'ensemble des  $k$ -simplexes de  $(C^1, \partial^1)$  selon les identifications à réaliser. On note  $I_k = (I_{k,q})$  la partition des  $k$ -simplexes, où chaque ensemble  $I_{k,q}$  contient tous les simplexes correspondant à un simplexe résultant de l'opération d'identifi-

cation. L'ensemble des partitions doit respecter la contrainte suivante : si deux  $k$ -simplexes  $\sigma_q^x$  et  $\sigma_q^y$  appartiennent au même ensemble  $I_{k,q}$ , alors pour tout  $i \in [0, k]$ ,  $\sigma_q^x d_i$  et  $\sigma_q^y d_i$  appartiennent à un même ensemble de  $I_{k-1}$ . Ceci qui correspond au fait que deux simplexes peuvent être identifiés seulement si leur bord est identifié.

Soit  $I_{k,q} = \{\sigma_q^0, \dots, \sigma_q^p\}$  un élément de  $I_k$ . Après identification, par convention, tous les simplexes sont remplacés par  $\sigma_q^0$ . Si  $I_{k,q}$  ne contient qu'un seul élément, alors ce simplexe n'est pas impacté par l'opération d'identification. Le simplexe  $\sigma_q^0$  est un **simplexe survivant**, les autres simplexes de  $I_{k,q}$  sont des **simplexes supprimés**.

La suite exacte courte associée à une identification est définie de la manière suivante :

- $\forall \sigma_q^x \in C^1, \sigma_q^x j = \sigma_q^0$ ,
- $\forall \sigma_q^0 \in C^2, \sigma_q^0 s = \sigma_q^0$ ,
- les générateurs de  $C^0$  sont les cellules supprimées,
- $\forall \sigma_q^x \in C^0, \sigma_q^x i = \sigma_q^0 - \sigma_q^x$ ,
- $\forall \sigma_q^x \in C^1, \sigma_q^0 r = 0, \sigma_q^x r = -\sigma_q^x$  si  $x > 0$ ,
- $\partial^0 = i \partial^1 r$ .

En pratique, lorsqu'une opération d'identification est effectuée, il est possible de simplifier l'équivalence homologique de l'objet résultant à deux moments (cf. figure 3.13) :

- lorsque l'équivalence homologique de la partie identifiée est calculée, en simplifiant  $(C^{S^0}, \partial^{S^0})$ , ce qui, par définition, aura pour effet de simplifier  $(C^{S^2}, \partial^{S^2})$ . Pour cela il est nécessaire d'identifier dans une même étape des simplexes et des simplexes de leurs bords. Ces simplifications ne sont par exemple pas possibles si toutes les identifications sont effectuées par dimensions croissantes.
- une fois que l'équivalence homologique liée à l'objet résultant est calculée, il est possible de simplifier  $(C^{S^2}, \partial^{S^2})$ .

Bien entendu, ces simplifications induisent des calculs supplémentaires ; il est donc important de pouvoir mesurer l'impact de ces simplifications sur l'ensemble des calculs effectués lors des étapes suivantes.

Les résultats présentés sur le calcul incrémental de l'homologie d'un objet au cours de sa construction s'étendent directement à toute structure pour laquelle on sait définir un opérateur de bord permettant de construire un complexe de chaînes. Ils s'étendent donc directement aux structures cubiques et simpléïdales. Pour les structures cellulaires il faut bien entendu respecter les contraintes définies pour la définition d'un opérateur de bord.

La figure 3.14 illustre une application du théorème 4 sur un exemple d'identification. La suite exacte courte effective est celle décrite pour la figure 3.10. On peut remarquer que le "gros" complexe de l'équivalence homologique de l'objet manipulé est identique au complexe associé à l'objet manipulé. Il s'agit de l'initialisation du processus de construction. Si on souhaite effectuer d'autres identifications ensuite, on part de l'équivalence homologique que l'on vient d'obtenir (à droite) : le "gros" complexe contient effectivement plus de générateurs que l'objet manipulé. À chaque identification, la taille du "gros" complexe croît proportionnellement à la partie identifiée. Intuitivement, le "gros" complexe mémorise la réduction initiale ainsi que l'ensemble des opérations effectuées depuis la première étape.

Le cas de la désidentification a également été traité dans [Rharbaoui 2022]. Une dési-

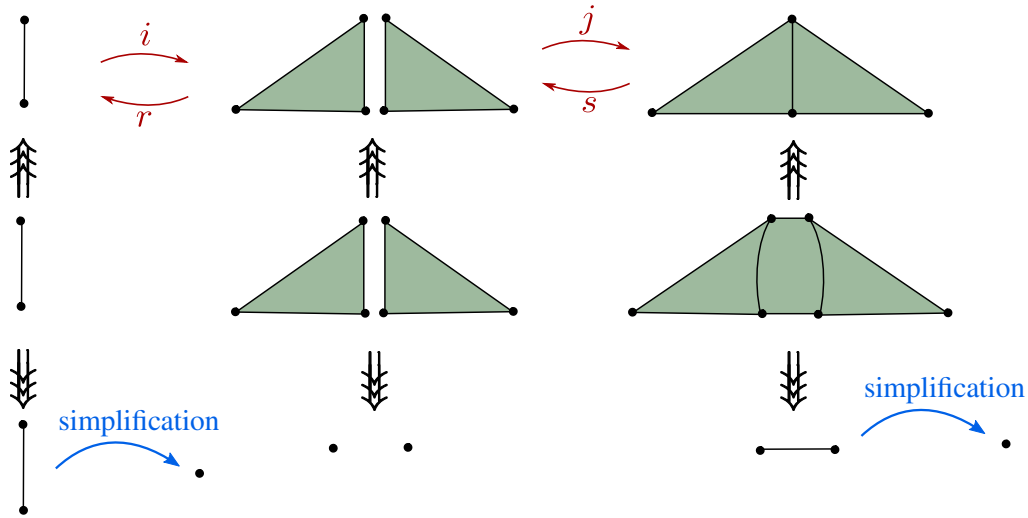


FIGURE 3.13 – Deux types de simplifications permettant de réduire la taille du "petit" complexe associé à l'objet résultant de l'opération d'identification. Dans cet exemple, deux arêtes et leurs bords sont identifiées lors d'une étape, une simplification peut être effectuée lors du calcul de  $(C^{S^0}, \partial^{S^0})$ , et une autre après le calcul de  $(C^{S^2}, \partial^{S^2})$ .

dentification peut être vue comme le processus inverse d'une identification et entre également dans le cadre de l'homologie effective. Nous ne donnons pas le détail dans ce manuscrit, l'approche est similaire, seuls des aspects techniques changent. Les définitions de tous les morphismes ne sont pas rappelés ici ; le lecteur intéressé pourra les trouver dans [Alayrangués 2015b].

D'un point de vue pratique, il est important de noter que tous les morphismes mis en jeu dans la nouvelle équivalence homologique (représentés en mauve sur la figure 3.14) sont définis sous forme matricielle.

Considérons par exemple la définition de  $\partial^{B^2}$ . D'après la définition 35 et le théorème 4, on a :  $\partial_i^{B^2} = \begin{pmatrix} -\partial_{i-1}^{B^0} & f^0 i g^1 \\ 0 & \partial_i^{B^1} \end{pmatrix}$

La définition de l'homomorphisme de bord  $\partial^{B^2}$  nécessite donc :

- de composer les morphismes  $f^0, i$  et  $g^1$ , ce qui se traduit en pratique par les multiplications des matrices correspondantes.
- d'effectuer des sommes directes de (composition de) morphismes, ce qui se traduit en pratique par la fusion des matrices correspondant à  $-\partial_{i-1}^{B^0}, f^0 i g^1$  et  $\partial_i^{B^1}$  et une matrice nulle.

Dans les travaux de thèse de W. RHARBAOUI, une implantation de matrices creuses spécifiquement dédiée au calcul de l'homologie effective est proposée. Elle permet d'optimiser le calcul des différents morphismes.

En particulier, la structure de donnée proposée permet de fusionner 4 matrices par modification d'une des matrices. Dans l'exemple  $\partial^{B^2}$ , il est essentiel de ne pas avoir à parcourir la matrice  $\partial_i^{B^1}$  dont la taille est liée à celle de l'objet ainsi que du nombre total

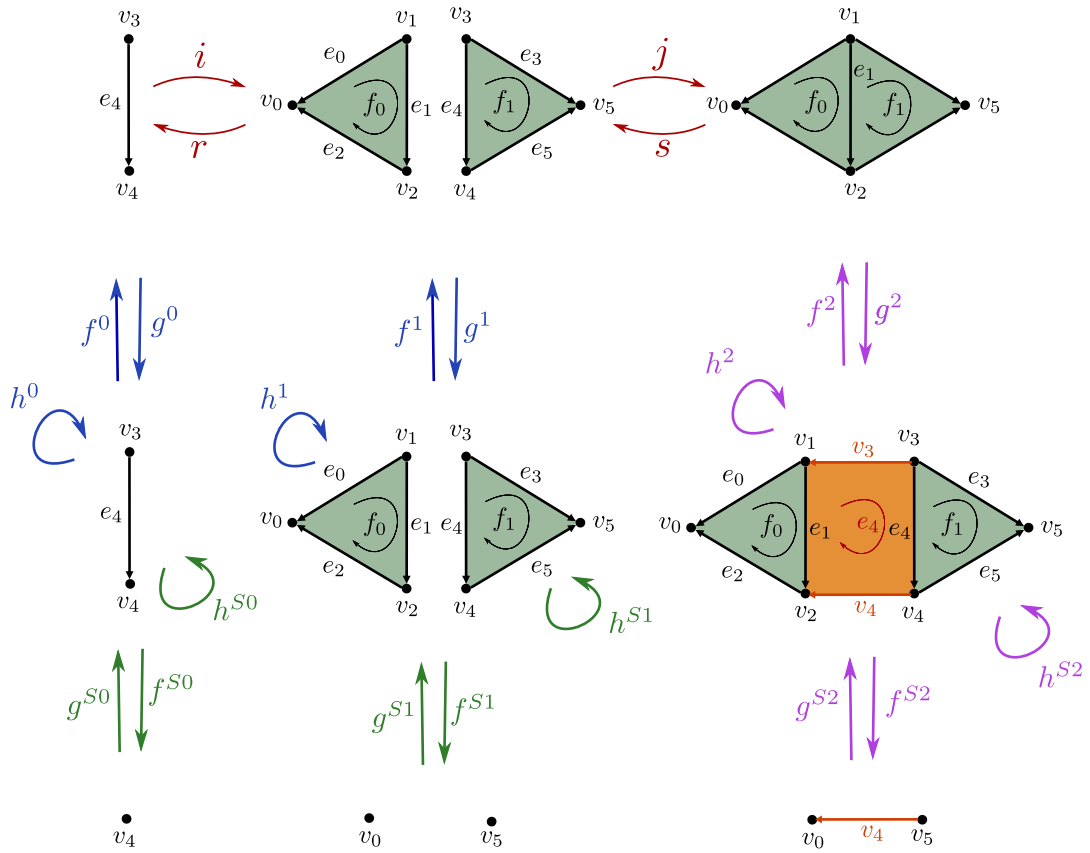


FIGURE 3.14 – Illustration du théorème SECE, appliqué à une opération d'identification. À gauche, l'équivalence homologique relative à la partie identifiée, au centre l'équivalence homologique relative à l'objet avant identification, à droite l'équivalence homologique du résultat de l'opération d'identification, est déduite du théorème SECE.

de cellules qui ont été supprimées lors des identifications passées.

On peut également remarquer que certaines matrices ne diffèrent que très peu de la matrice identité. Par exemple, le morphisme  $j$  est différent de l'identité uniquement pour les seules cellules supprimées. L'implantation proposée permet de manipuler implicitement la matrice identité et d'explicitier uniquement les modifications de telles matrices. D'autres types d'optimisation sont prises en compte dans l'implémentation proposée, comme l'aspect *creux* des matrices. Le détail complet de la structure est disponible dans [Rharbaoui 2022]. En particulier, nous avons montré et observé expérimentalement que :

- lorsque l'information homologique calculée sur le "petit" complexe n'a pas besoin d'être reportée sur l'objet manipulé, alors la complexité du calcul à chaque étape ne dépend que de la partie identifiée à l'étape correspondante,
- lorsque l'information homologique est reportée sur l'objet manipulé : un ensemble de générateurs est calculé, la complexité croît au fur et à mesure des identifications.



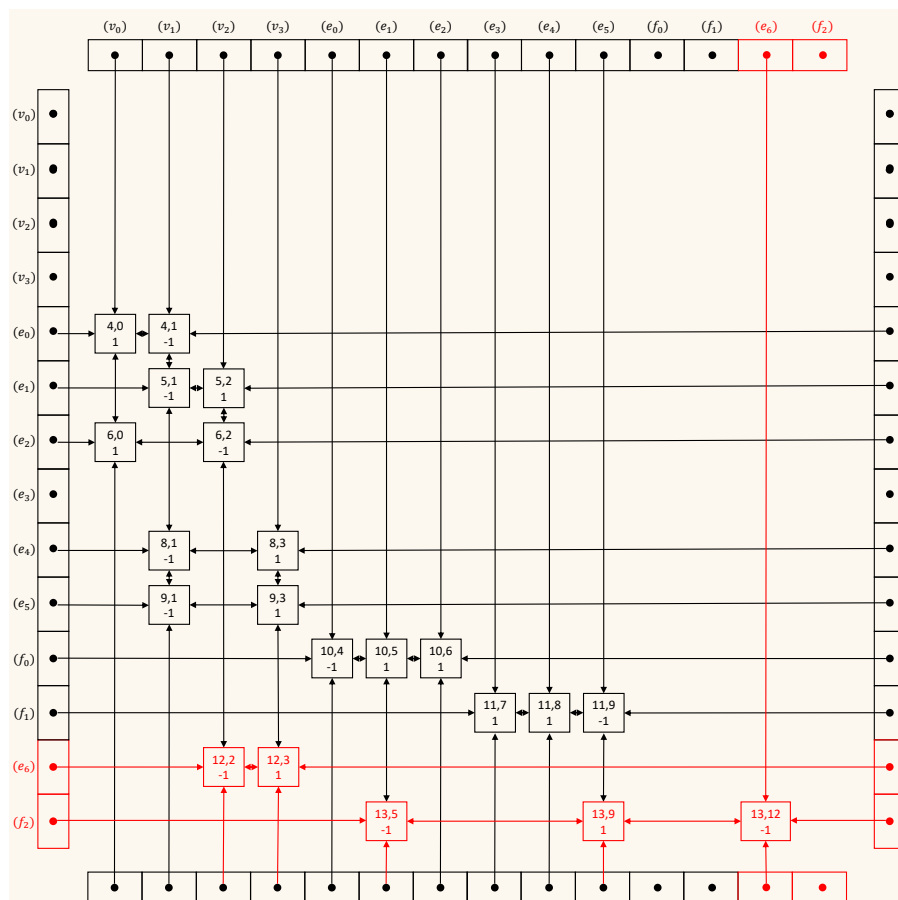


FIGURE 3.15 – Exemple d'une matrice obtenue par fusion de 4 matrices. En rouge, la partie modifiée. Les maillons en noir ne sont pas parcourus [Rharbaoui 2022].

À chaque étape, la complexité des calculs dépend de la complexité de la réduction initiale et du nombre total des cellules impactées par l'identification de l'étape courante ainsi que de toutes les étapes précédentes.

### 3.3.3.4 Liens avec d'autres méthodes

#### Suites de MAYER-VIETORIS

Il existe des liens évidents avec les suites de MAYER-VIETORIS : [Boltcheva 2010] montrent que les résultats sur les suites de MAYER-VIETORIS entrent dans le cadre de l'homologie effective. De manière intuitive, si  $A$  et  $B$  sont deux complexes simpliciaux, une telle suite met en relation les groupes d'homologie de  $A \cap B$  (partie identifiée),  $A \oplus B$  (objet avant application de l'opération d'identification), et  $A \cup B$  (résultat de l'identification). L'exemple présenté sur la figure 3.10 correspond à un tel cas, mais en toute généralité, les suites de MAYER-VIETORIS correspondent à des cas particuliers d'identification, où la partie identifiée correspond à l'intersection de deux complexes simpliciaux. Par exemple

l'identification représentée sur la figure 3.16 ne peut pas être décrite ainsi.

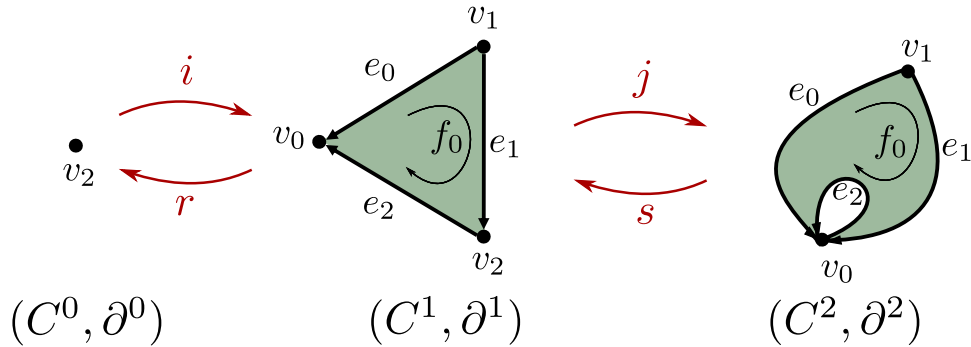


FIGURE 3.16 – Représentation d'une suite exacte courte effective correspondant à une opération d'identification ne pouvant pas être décrite par une suite de MAYER-VIETORIS.

### Homologie persistante de tours

Nous avons mis en évidence des liens avec l'homologie persistante, en particulier l'homologie persistante de tours [Dey 2014, Kerber 2019], dans laquelle la notion de filtration est étendue : les complexes simpliciaux abstraits ne sont plus reliés uniquement par des inclusions mais, plus généralement, par des applications simpliciales. Il est montré en particulier qu'une application simpliciale se décompose en :

- *inclusions élémentaires*, qui correspondent des ajouts de simplexes,
- *effondrements élémentaires*, qui correspondent à l'identification de deux sommets, entraînant éventuellement l'identification ou la dégénérescence de simplexes de dimensions supérieures.

Une tour est donc définie par une suite de complexes  $K_0 \xrightarrow{\phi_0} K_1 \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_{n-1}} K_n$ , où chaque  $\phi_j$  est soit une inclusion élémentaire, soit un effondrement élémentaire.

On sait associer un ensemble simplicial à tout complexe simplicial abstrait via un mécanisme de numérotation [Damian 2014]. Nous avons montré l'on peut traduire chaque opération élémentaire d'un complexe simplicial abstrait dans l'ensemble simplicial correspondant :

- l'inclusion élémentaire dans  $K$  correspond dans  $S$  à ajouter d'un  $p$ -simplexe et son bord, et à identifier son bord avec des simplexes de  $S$ . Notons que l'équivalence homologique correspondant à l'ajout d'un simplexe et son bord dans  $S$  est simplement la somme directe de l'équivalence homologique associée à  $S$  et de celle associée au simplexe et son bord (qui se réduit sur un sommet),
- un effondrement élémentaire dans  $K$  correspond dans  $S$  à des opérations d'identification et de dégénérescence : cf. figure 3.17.

Nous avons montré que l'opération de dégénérescence peut être décrite par une suite exacte courte effective, le Théorème SECE peut donc être appliqué : cf. figure 3.18. Les détails des fonctions ne sont pas données ici, ils sont disponibles dans [Rharbaoui 2022].

Au final, toutes les opérations utilisées pour définir l'homologie persistante de tours entrent dans le cadre de l'homologie effective.

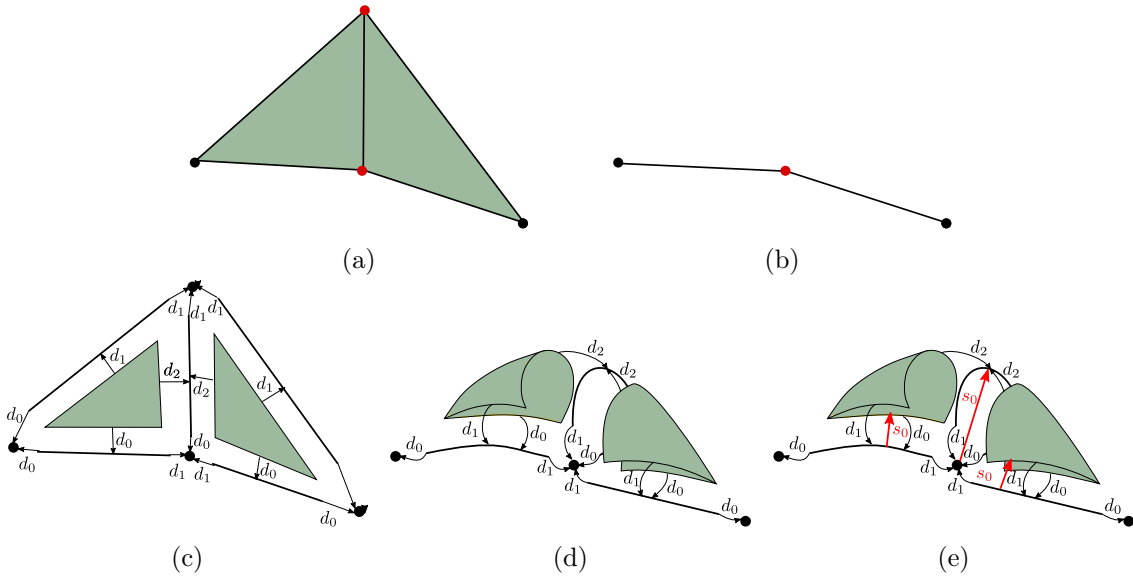


FIGURE 3.17 – L’effondrement élémentaire sur un complexe simplicial abstrait se traduit pas des identifications et des dégénérescences dans l’ensemble simplicial associé (en bas). (a)–(b) Une opération d’effondrement élémentaire (des deux sommets rouges) sur un complexe simplicial abstrait. (c) Un ensemble simplicial correspondant à (a), les opérateurs de dégénérescence ne sont pas représentés. (b) identifications de simplexes. (c) dégénérescences de simplexes.

### 3.3.4 Calcul incrémental sur des structures simpléoïdales

L’étude de l’homologie sur les structures simpléoïdales nous a naturellement conduit à étudier l’opération de produit cartésien. À notre connaissance, il n’est pas possible de décrire une opération de produit cartésien sous la forme d’une suite exacte courte effective comme nous l’avons présenté pour l’opération d’identification. La question qui se pose alors est la suivante : *soient  $S^1$  et  $S^2$  deux ensembles semi-simpléoïdaux ; connaissant les groupes d’homologie de  $S^1$  et ceux de  $S^2$ , peut-on en déduire l’homologie de  $S^1 \times S^2$  ?*

La formule de KÜNNETH du théorème 5 nous indique que cela est bien possible sous certaines conditions, et comment effectuer le calcul.

**Théorème 5** *Soient  $C$  et  $C'$  des complexes de chaînes, Si  $R$  est un anneau principal, et les  $R$ -modules  $C_i$  sont libres, alors pour chaque  $n$ , il existe une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow \bigoplus_i (H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C')) \rightarrow H_n(C \otimes_R C') \rightarrow \bigoplus_i \text{Tor}_R(H_i(C), H_{n-i-1}(C')) \rightarrow 0$$

et cette suite scinde.

Dans notre contexte, les  $R$ -modules  $C_i$  sont des groupes abéliens, ou  $\mathbb{Z}$ -modules libres,  $\mathbb{Z}$  est bien un anneau principal, et la suite exacte scinde. On peut donc appliquer le Théorème 5.

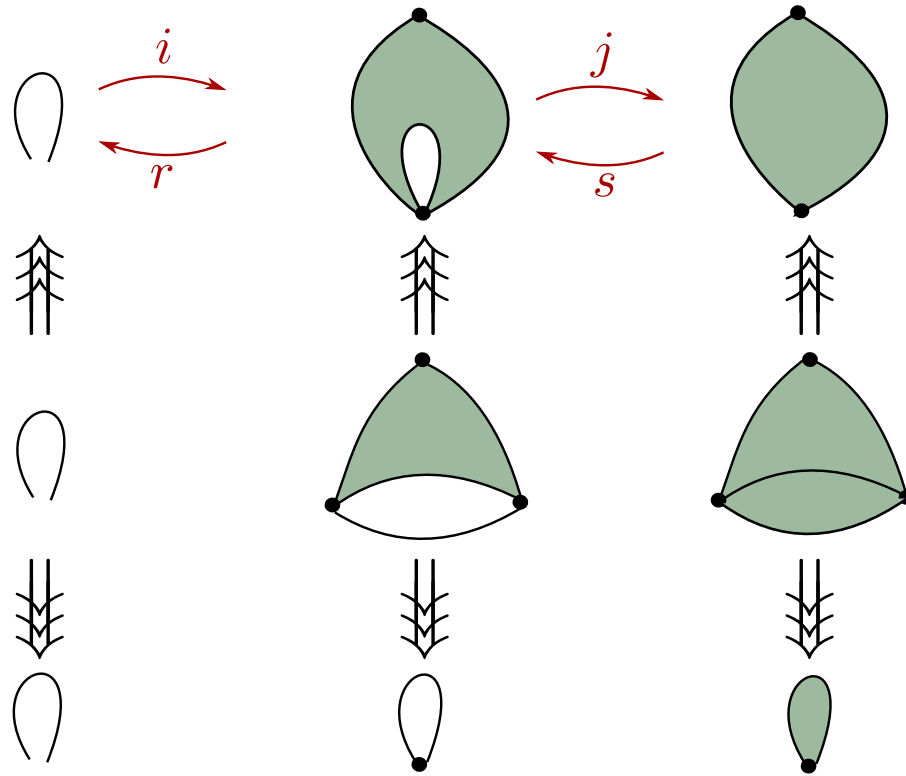


FIGURE 3.18 – Représentation d’une suite exacte courte effective correspondant à une opération de dégénérescence. À partir de l’équivalence homologique correspondant à un ensemble simplicial (au centre) et l’équivalence homologique correspondant à un simplexe dégénéré (à gauche), l’équivalence homologique résultant de la dégénérescence (à droite) peut être déduite.

L’objectif n’est pas ici d’en expliquer tous les détails, dans laquelle l’homologie de deux complexes de chaînes et l’homologie du complexe résultant de leur produit interviennent. En particulier, ce théorème met en jeu une suite exacte courte, dont la forme générale est :

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

En particulier, lorsque une telle suite scinde, comme c’est le cas ici, alors un résultat classique d’algèbre nous assure que le groupe  $B$  est isomorphe à  $A \oplus C$  [Munkres 1984]. Par exemple, sur la figure 3.10, on observe visuellement ce résultat où l’ensemble des  $p$ -simplexes de l’objet avant opération correspond à l’union des  $p$ -simplexes caractérisant l’opération (à gauche) et des  $p$ -simplexes de l’objet résultant. Dit autrement, le groupe des  $p$ -chaînes  $C_p^1$  est bien isomorphe à  $C_p^0 \oplus C_p^2$ .

La formule de KÜNNETH nous garantit donc si l’on connaît l’homologie de deux complexes  $C$  et  $C'$ , et si l’on sait calculer la partie  $Tor$ , alors on peut en déduire l’homologie de  $C \otimes C'$ .

L'opérateur  $\otimes$  est appelé **produit tensoriel**. De manière simplifiée, soient  $A$  et  $B$  deux groupes abéliens de type fini ;  $A \otimes B$  est un groupe abélien de type fini, défini comme le groupe quotient  $F(A \times B)/R(A, B)$ , où  $F(A \times B)$  est le groupe abélien engendré par l'ensemble des couples  $(a, b)$  avec  $a \in A$  et  $b \in B$ , et  $R(A, B)$  est le sous-groupe de  $F(A \times B)$  engendré par tous les éléments de la forme  $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$  ou  $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$ . Dit autrement, les éléments de  $A \otimes B$  vérifient  $(a, b) + (a', b) = (a + a', b)$  et  $(a, b) + (a, b') = (a, b + b')$ . Notons qu'en toute rigueur, deux produits tensoriels distincts apparaissent dans la formule de KÜNNETH : un produit tensoriel de groupes et un produit tensoriel de complexes de chaînes. De manière résumée, si  $(C, \partial)$  et  $(C', \partial')$  sont deux complexes de chaînes, alors le produit tensoriel de ces deux complexes est un complexe de chaînes  $(C^\square, \partial^\square)$  défini par :

$$\begin{aligned} - C_n^\square &= (C \otimes C')_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C_q, \\ - (c_p \otimes c'_q) \partial^\square &= c_p \partial \otimes c'_q + (-1)^p c_p \otimes c'_q \partial' \end{aligned}$$

Cette définition correspond à celle du complexe de chaînes associé au résultat d'un produit cartésien simploidal. Notons que la formule est également définie directement pour les espaces topologiques. Ainsi, on notera  $C \times C'$  un produit d'espaces topologiques et  $C \otimes C'$  le produit tensoriel des complexes de chaînes associé. On utilisera les résultats classiques suivants sur le produit tensoriel de groupes abéliens :

$$\begin{aligned} - A \otimes B &\simeq B \otimes A, \\ - A \otimes \mathbb{Z} &\simeq A, \\ - \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} &\simeq \mathbb{Z}/\text{pgcd}(p, q)\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

L'opérateur  $Tor$ , aussi appelé **produit de torsion**, indique comment influe le produit tensoriel d'éléments de torsion de  $A$  et  $B$  dans l'homologie de  $A \otimes B$ . On utilisera les propriétés suivantes de l'opérateur  $Tor$  :

$$\begin{aligned} - Tor(A, B) &\simeq Tor(B, A), \\ - Tor(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &\simeq 0, \\ - Tor(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &\simeq 0, \\ - Tor(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z}/\text{pgcd}(p, q)\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En particulier, on peut remarquer que si l'homologie de  $C$  ou l'homologie de  $C'$  ne contient pas de torsion, alors la partie  $Tor$  est triviale. Dans ce cas, l'homologie du produit  $C \otimes C'$  est isomorphe au produit des homologies de  $C$  et  $C'$ . Notons que c'est toujours le cas lorsque l'on calcule l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Par exemple, la figure 3.19 illustre la formule dans un cas "simple" où  $C$  ne contient pas de torsion. On cherche à calculer l'homologie d'un complexe de chaînes résultant du produit de deux cercles. Soit  $C$  le complexe de chaînes de dimension 1 associé à un cercle. L'homologie de  $C$  est  $H_0(C) \simeq \mathbb{Z}$ , et  $H_1(C) \simeq \mathbb{Z}$ . L'homologie du produit de deux cercles peut être calculée directement avec la formule de KÜNNETH : on est ici dans le cas où l'homologie de  $C \times C$  est égale au produit des homologies. Comme on peut s'y attendre, on obtient bien l'homologie d'un tore :

$$\begin{aligned} - H_0(C \times C) &\simeq H_0(C) \otimes H_0(C) \simeq \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \\ - H_1(C \times C) &\simeq H_0(C) \otimes H_1(C) \oplus H_1(C) \otimes H_0(C) \simeq \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ - H_2(C \times C) &\simeq H_1(C) \otimes H_1(C) \simeq \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \end{aligned}$$



FIGURE 3.19 – Illustration de la formule de KÜNNETH : le tore peut être défini comme produit cartésien de deux cercles. L’homologie du tore (b) se déduit du produit des homologies des cercles (a).

Considérons à présent le plan projectif  $P$ , dont l’homologie est  $H_0(P) \simeq \mathbb{Z}$  et  $H_1(P) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . La formule de KÜNNETH nous donne l’homologie du produit de deux plans projectifs :

$$\begin{aligned}
 H_0(P \times P) &\simeq H_0(P) \otimes H_0(P) \\
 &\simeq \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \\
 &\simeq \mathbb{Z} \\
 H_1(P \times P) &\simeq H_0(P) \otimes H_1(P) \oplus H_1(P) \otimes H_0(P) \\
 &\simeq \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \\
 &\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
 H_2(P \times P) &\simeq H_1(P) \otimes H_1(P) \\
 &\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
 H_3(P \times P) &\simeq \text{Tor}(H_1(P), H_1(P)) \\
 &\simeq \text{Tor}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\
 &\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

On peut noter qu’il y a un "saut de dimension" pour la torsion. Comme on peut peut-être s’y attendre, dans le produit de deux plans projectifs, de la torsion apparaît dans les groupes d’homologie de dimension 1 et 2. De manière peut être moins évidente, de la torsion apparaît également en dimension 3, alors que les groupes d’homologie de dimension 2 et plus du plan projectif sont triviaux.

La formule de KÜNNETH peut donc être directement utilisée pour le calcul de l’homologie d’ensembles semi-simploïdaux, pour lesquels le produit cartésien est une opération de base. Ce résultat s’étend directement aux ensembles simplloïdaux, seule la définition des homomorphismes de bord change afin de tenir compte des simplloïdes dégénérés.

Si ces résultats permettent de calculer l’homologie résultant d’un produit cartésien, ils ne sont pas adaptés pour une approche incrémentale où différentes opérations peuvent

s'enchaîner. Pour cela, il faut maintenir une équivalence homologique à chaque étape. Ce point reste encore à étudier pour l'opération de produit cartésien.

### 3.3.5 Calcul incrémental sur des quasi-variétés cellulaires

Jusqu'à présent nous avons présenté deux approches globales qui peuvent être utilisées pour calculer l'homologie de structures cellulaires :

- dans tous les cas, le calcul peut être effectué directement sur l'ensemble semi-simplicial associé, sans tenir compte de la structuration cellulaire. On perd alors l'optimisation de la représentation cellulaire,
- pour la sous-classe pour laquelle on sait définir un opérateur de bord (cf. section 3.2.5), le calcul peut être effectué en tenant compte de la structuration en cellules.

On montre dans cette partie comment les outils de l'homologie effective peuvent être utilisés afin de définir incrémentalement l'homologie de structures cellulaires dont les cellules sont des quasi-variétés cellulaires. L'idée est de tirer partie de leur définition constructive, basée sur les opérations de cône cellulaire et d'identification de cellules. Les résultats qui suivent s'appliquent directement pour le calcul incrémental de l'homologie des Gcartes ou des chaînes de cartes. Les détails techniques et les preuves ne sont pas donnés ici, ils sont disponibles dans [Alayrangues 2015b].

Le principe de cette approche est de maintenir une équivalence homologique :

- pour chaque composante connexe,
- pour chaque cellule.

Ainsi, lorsqu'une opération d'identification cellulaire est appliquée, les équivalences homologiques associées aux cellules identifiées sont utilisées afin de calculer de manière efficace l'homologie de la Gcarte ou chaîne de cartes résultante.

Pour effectuer ces calculs de manière efficace, on utilise d'autres outils de l'homologie effective : la notion de **perturbation**, ainsi que les **lemmes de perturbation** [Rubio 2006] associés. Une perturbation d'un complexe de chaînes consiste à modifier ses homomorphismes de bord, les lemmes permettent de répercuter la perturbation sur une réduction impliquant le complexe de chaînes.

**Définition 37** Soit  $(C, \partial)$  un complexe de chaînes. Soit  $\delta : C \rightarrow C$  un morphisme gradué tel que  $(\partial + \delta)^2 = 0$ .  $\delta$  est une perturbation de  $\partial$ .

Par exemple, si  $(C, \partial)$  est un complexe de chaînes, comme  $(C, 0)$  est un complexe de chaînes,  $\partial$  est une perturbation de l'opérateur de bord nul.

Étant donnée une réduction de  $(C^0, \partial^0)$  dans  $(C^1, \partial^1)$ , le **lemme de perturbation Easy** permet, étant donnée une perturbation de  $\partial^1$ , de répercuter cette modification sur  $\partial^0$  afin d'obtenir une nouvelle réduction tenant compte de la perturbation. Le **lemme de perturbation Basic** est défini similairement dans l'autre sens : il permet, à partir d'une perturbation de  $\partial^0$ , de répercuter cette modification dans  $\partial^1$  afin d'obtenir une nouvelle

réduction tenant compte de la perturbation. La figure 3.20 illustre les deux lemmes de perturbation.

**Propriété 3** *Lemme de perturbation Easy*

Soit  $\rho = ((C^0, \partial^0), (C^1, \partial^1), h, f, g)$  une réduction, soit  $\delta^1$  une perturbation de  $\partial^1$ , alors  $\rho^\delta = ((C^0, \partial^0 + \delta^0), (C^1, \partial^1 + \delta^1), h, f, g)$  est une réduction, où  $\delta^0 = f\delta^1g$ .

**Propriété 4** *Lemme de perturbation Basic*

Soit  $\rho = ((C^0, \partial^0), (C^1, \partial^1), h, f, g)$  une réduction, soit  $\delta^0$  une perturbation de  $\partial^0$  qui satisfait l'hypothèse de nilpotence, i. e. :

$$\forall c \in C^0, \exists i \in \mathbb{N} \mid c(\delta^0 h)^i = 0$$

Alors  $\rho^\delta = ((C^0, \partial^0 + \delta^0), (C^1, \partial^1 + \delta^1), h^\delta, f^\delta, g^\delta)$  est une réduction, où :

—  $\delta^1 = g\Phi\delta^0f = g\delta^0\Psi f$ .

—  $f^\delta = \Psi f$

—  $g^\delta = g\Phi$

—  $h^\delta = h\Phi = \Psi h$

avec <sup>2</sup>  $\Phi = \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i (\delta^0 h)^i$  et  $\Psi = \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i (h\delta^0)^i$ .

Notons que le lemme *Easy* est toujours applicable, alors que le lemme *Basic* est applicable sous les conditions de nilpotence.

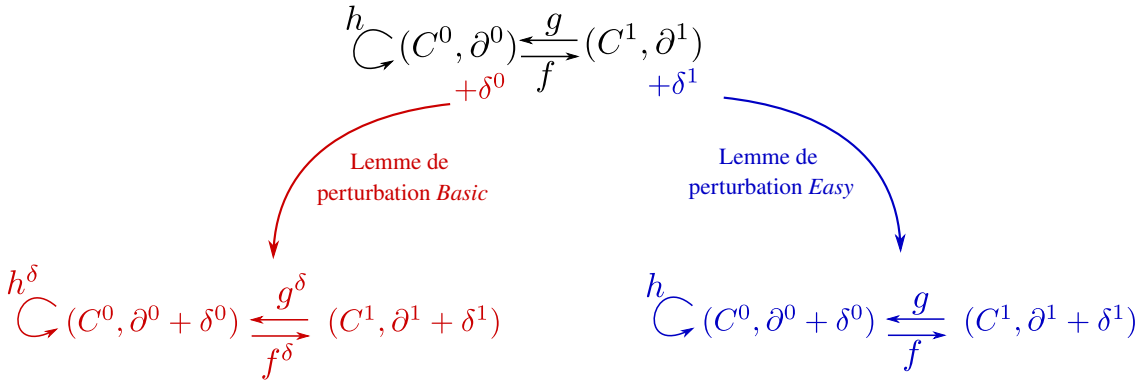


FIGURE 3.20 – Illustration des lemmes de perturbation *Easy* et *Basic*

**3.3.5.1 Équivalence homologique – cône cellulaire**

On note  $CC$  une quasi-variété cellulaire connexe, et  $CC^{ext}$  la quasi-variété cellulaire obtenue par une opération de cône cellulaire sur  $CC$ . Le théorème 6 [Giblin 1977] nous dit que l'opération de cône sur un objet annule tous ses groupes d'homologie, excepté pour  $H_0$  qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

2. D'après l'hypothèse de nilpotence, chaque somme contient un nombre fini de termes non nuls.



**Théorème 6 (Homologie d'un cône)** Soit  $X$  un objet résultant d'une opération de cône, alors :

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$

$$H_p(X) = 0 \text{ pour tout } p > 0$$

**Équivalence homologique d'une composante connexe**

L'équivalence homologique associée à chaque composante connexe après l'application d'un cône cellulaire est obtenue de manière immédiate en utilisant le Théorème 6 : on peut prendre comme "gros" complexe une copie du complexe associé à l'objet manipulé, et comme "petit" complexe, un complexe réduit à un seul générateur de dimension 0. La réduction  $((C^B, \partial^B), (C, \partial), f, g, h)$  est définie de la manière suivante :

- l'opérateur  $h$  est nul,
- $f$  et  $g$  sont des isomorphismes.

La réduction  $((C^B, \partial^B), (C^S, \partial^S), f^S, g^S, h^S)$  est définie de la manière suivante :

- $h^S$  associe à chaque  $k$ -simplexe  $\sigma \in CC^{ext}$ , le  $(k + 1)$ -simplexe  $\tau$  qu'il génère par l'opération de cône, tel que  $\sigma h^S = (-1)^{k+1} \tau$ ,  $h^S$  est nul ailleurs,
- $f^S$  est nul partout excepté pour les sommets (celui du cône et ceux de  $CC$ ), qui sont associés avec le sommet de  $C^S$ ,
- L'application  $g^S$  associe le sommet de  $C^S$  avec le sommet du cône de  $C^B$ .

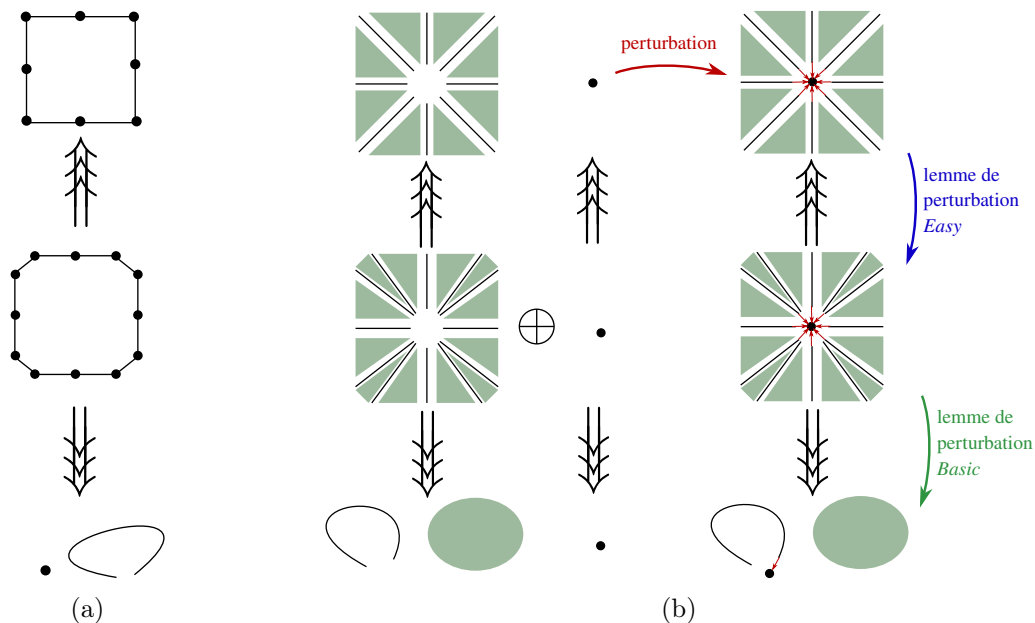


FIGURE 3.21 – (a) une équivalence homologique associée à une composante connexe d'une quasi-variété cellulaire de dimension 1. Après extension de la composante connexe, l'équivalence homologique de la 2-cellule peut être déduite de (a) : à partir d'une équivalence isomorphe (les cellules sont simplement montées en dimension) et d'une équivalence homologique associée à la 0-cellule du cône, les lemmes de perturbation permettent d'en déduire une équivalence homologique de la cellule.

### Équivalence homologique d'une cellule

Les lemmes de perturbation *Easy* et *Basic* permettent de déduire l'équivalence homologique associée à chaque cellule, à partir de l'équivalence homologique de son bord (*i. e.* de la quasi-variété cellulaire de dimension inférieure sur laquelle s'appuie le cône), cf. figure 3.21.

#### 3.3.5.2 Équivalence homologique – identification cellulaire

### Équivalence homologique d'une cellule

Que la cellule soit impactée ou non par l'identification, son équivalence homologique n'est pas modifiée. En pratique, pour chaque ensemble de cellules identifiées, il suffit de conserver une équivalence homologique.

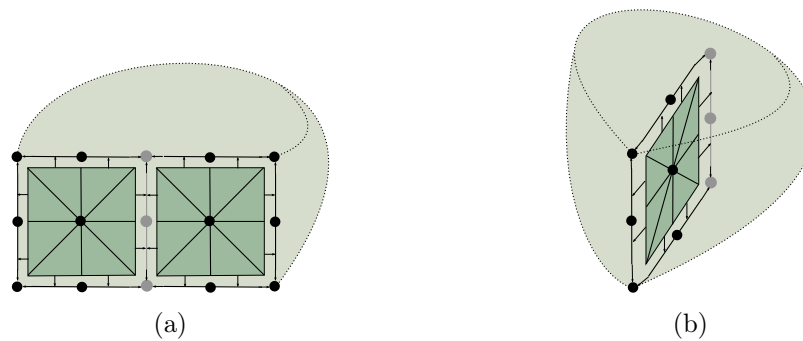


FIGURE 3.22 – Exemple d'identification cellulaire. Seules les cellules identifiées et leurs bords sont mises en évidence. (a) avant identification. (b) après identification. Les cellules représentées en gris, qui apparaissent dans le bord de cellules identifiées, ne sont pas impactées par l'opération d'identification

### Équivalence homologique d'une composante connexe

Afin de pouvoir utiliser le théorème SECE, il faut construire la suite exacte courte associée à une opération d'identification, ainsi que l'équivalence homologique correspondant à la partie identifiée. La figure 3.22 illustre une opération d'identification cellulaire mettant en évidence l'ensemble des cellules impactées. Le principe de l'utilisation des lemmes de perturbation pour le calcul de l'équivalence homologique associée à la partie identifiée est illustré sur la figure 3.23.

Pour obtenir l'équivalence homologique correspondant à la partie identifiée, on utilise les équivalences homologiques des cellules impactées. Le principe est de reconstituer le complexe de chaînes correspondant à l'ensemble des cellules identifiées en perturbant le bord de ces cellules. Ensuite, on répercute la perturbation sur le "gros" complexe en utilisant le lemme de perturbation *Easy*, puis du "gros" vers le "petit" en utilisant le lemme de perturbation *Basic*.

L'équivalence homologique de la partie identifiée est obtenue directement à partir de cette équivalence homologique en considérant la somme directe de  $n$  copies de cette équi-

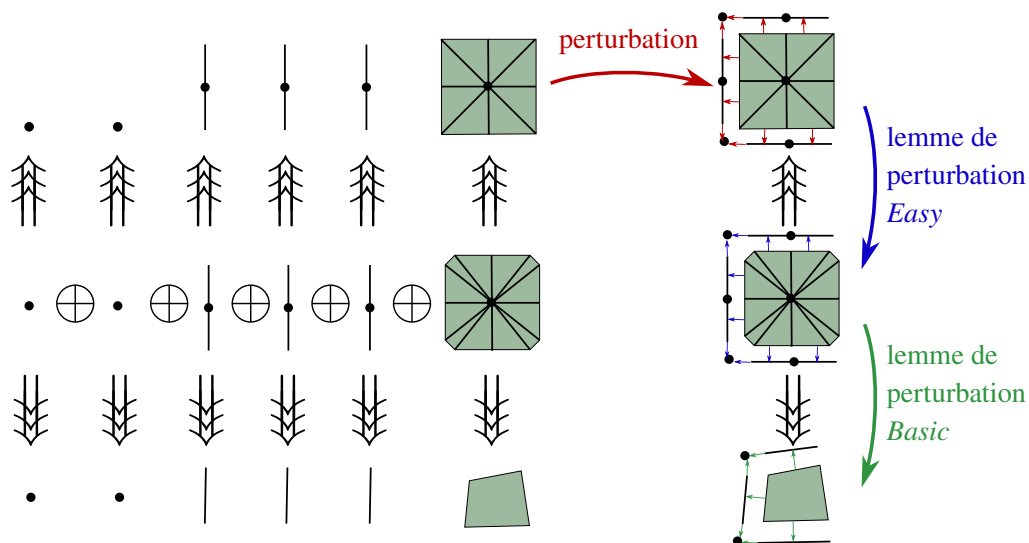


FIGURE 3.23 – Illustration de l'utilisation des lemmes de perturbation pour calculer l'équivalence homologique associée à la partie identifiée de l'identification illustrée sur la figure 3.22.

valence homologique,  $n$  étant le nombre de cellules identifiées diminué d'une unité.

La suite exacte courte effective est obtenue à partir de la définition de la perturbation et du choix des cellules qui "survivent" à l'opération d'identification.

### 3.4 Conclusion

Nous avons présenté différentes méthodes de calcul des groupes d'homologie de structures combinatoires.

L'approche globale consiste à réduire les matrices de bord décrivant les relations d'incidence entre toutes les cellules. Cette approche s'applique directement sur toute structure dont les cellules correspondent à des boules.

C'est le cas pour les structures régulières dont les cellules sont des simplexes, des cubes ou des simloïdes, mais ce n'est pas le cas des cellules des structures cellulaires en général. Nous avons présenté la sous-classe de  $G$ cartes et des chaînes de cartes pour lesquelles on peut calculer l'homologie de manière directe : le bord des cellules doit avoir l'homologie d'une sphère, les cellules doivent être orientables, et sans point fixe. Ceci correspond à de nombreux cas en pratique.

L'approche incrémentale consiste à s'affranchir d'un calcul basé sur l'étude globale de la structure. L'étude d'approches incrémentales pour les structures simpliciales, simloïdales et cellulaires, nous a amené à étudier comment l'homologie est impactée par l'application de différentes opérations :

- il est bien connu que l'homologie d'un cône annule tous les groupes d'homologie,

- excepté  $H_0$  qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ;
- l’homologie effective permet de calculer incrémentalement l’homologie d’un objet construit par une suite d’identifications et de dégénérescence. Elle permet également de calculer l’homologie d’une structure cellulaire de manière incrémentale. Le calcul est basé sur les opérations de cône cellulaire et d’identification cellulaire, et tire partie de la structuration cellulaire ;
  - la formule de KÜNNETH permet de calculer l’homologie d’un objet résultant d’une opération de produit cartésien, particulièrement adapté aux structures simplioidales,
  - Enfin, nous avons montré que l’homologie persistante de tours entre dans le cadre de l’homologie effective.



# Objets géométriques

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Réalisation géométrique</b>	<b>104</b>
4.1.1	Complexes simpliciaux	104
4.1.2	Complexes simplloïdaux	105
4.1.3	Autres structures	106
<b>4.2</b>	<b>Plongement linéaire</b>	<b>106</b>
4.2.1	Complexes simpliciaux abstraits	106
4.2.2	Complexes simplloïdaux abstraits	107
4.2.3	Structures cellulaires sans multi-incidence	107
4.2.4	Structures avec multi-incidence	108
<b>4.3</b>	<b>Espaces de BÉZIER</b>	<b>108</b>
4.3.1	Notions de base	108
4.3.2	Ensembles semi-simpliciaux	109
4.3.3	Ensembles semi-simplloïdaux	113
4.3.4	Ensembles simpliciaux	116
4.3.5	Ensembles simplloïdaux	119
4.3.6	Structures cellulaires	122
<b>4.4</b>	<b>Application à la modélisation d'objets tubulaires</b>	<b>123</b>
4.4.1	Contexte et objectifs	123
4.4.2	Branches – Jonctions	124
4.4.3	Pavage quad de la sphère	125
4.4.4	Géométrie des branches	128
4.4.5	Résultats	130
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>131</b>

---

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, il existe différentes structures permettant de manipuler des assemblages de simplexes, de simplloïdes, de cellules ou encore de cellulloïdes. Nous avons en particulier présenté les opérations de construction de base, ainsi que la caractérisation topologique des objets manipulés via le calcul de groupes d'homologie.

En modélisation géométrique, il est également important de pouvoir donner une forme aux objets combinatoires que l'on manipule. D'ailleurs, dans les chapitres 2 et 3, nous avons illustré différents objets combinatoires par des représentation géométriques.

Dans un premier temps, nous présentons la notion de **réalisation géométrique** de différentes structures dans  $\mathbb{R}^n$ . De manière simplifiée, une réalisation géométrique est un isomorphisme entre une structure combinatoire et un espace topologique. c'est-à-dire qu'à chaque cellule abstraite est associée une cellule géométrique, et la topologie induite dans l'espace géométrique respecte la structure.

Nous présentons ensuite deux approches permettant d'associer plus généralement une forme à un objet combinatoire :

- **plongement linéaire** : qui consiste à associer une forme géométrique à un objet en donnant uniquement une position à ses sommets. La forme de chaque cellule de dimension supérieure à 0 est définie par l'ensemble de positions de ses sommets.
- *plongement non linéaire* : une forme est associée à chaque cellule. Nous présentons les espaces de BÉZIER, définis de manière paramétrique, qui permettent de représenter des cellules de forme courbe. Les espaces de BÉZIER font partie de la famille des modèles dits à *pôles*, c'est-à-dire que la forme de chaque cellule est définie de manière exacte par un ensemble de points appelés **points de contrôle**. Nous montrons en particulier que l'on retrouve, dans les espaces de BÉZIER, les structures d'ensembles simpliciaux et simploldiaux.

**Note :**

Dans la littérature mathématique, une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  est un *plongement* si elle induit un homéomorphisme de  $X$  dans  $f(X)$ , où  $f(X)$  est muni de la topologie induite (comme sous-ensemble de l'espace topologique  $Y$ ). Nous utilisons le terme *plongement* pour désigner l'association d'une forme géométrique à une structure combinatoire.

## 4.1 Réalisation géométrique

### 4.1.1 Complexes simpliciaux

La réalisation géométrique d'un complexe simplicial abstrait  $K$  est un complexe simplicial  $\mathcal{K}$ , dont la définition est basée sur la notion de simplexe géométrique.

**Définition 38** Soit  $\{a_0, \dots, a_p\}$  un ensemble de points de  $\mathbb{R}^n$  affinement indépendants. Le  **$p$ -simplexe géométrique**  $\sigma$  de sommets  $a_0, \dots, a_p$  est l'enveloppe convexe de ces points. Un simplexe décrit par un sous-ensemble non vide de  $\{a_0, \dots, a_p\}$  est une **face** de  $\sigma$ . Les faces de  $\sigma$  différentes de  $\sigma$  lui-même sont les **faces propres** de  $\sigma$ , leur union est le **bord** de  $\sigma$  et  $\sigma$  est la **face principale**.

**Définition 39** Un **complexe simplicial**  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{R}^n$  est une famille finie de simplexes géométriques de  $\mathbb{R}^n$  telle que :

- toute face d'un simplexe de  $\mathcal{K}$  est dans  $\mathcal{K}$ ,
- l'intersection de deux simplexes  $\sigma_1, \sigma_2$  de  $\mathcal{K}$  est soit vide, soit une face commune à  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

Un simplexe de  $\mathcal{K}$  est dit **principal** s'il n'est face propre d'aucun simplexe.

À tout complexe simplicial abstrait  $K$  contenant  $n$  sommets  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , on peut associer un complexe simplicial  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{R}^n$  de manière canonique : on associe à chaque sommet  $v_i$  le point  $e_i$ , où l'ensemble des  $e_i$ ,  $i \in [1, n]$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . À chaque simplexe abstrait  $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_p}\}$  de  $K$ , on associe l'enveloppe convexe des points  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_p}\}$ . Cette construction est la réalisation géométrique canonique de  $K$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Bien souvent, cette construction canonique est réalisée dans un espace "trop grand". Par exemple, tout graphe peut être réalisé géométriquement dans  $\mathbb{R}^3$ , quel que soit le nombre de sommets. De manière générale, tout complexe simplicial abstrait de dimension  $n$  peut être réalisé géométriquement dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Par exemple, considérons le complexe simplicial abstrait suivant :

$$K = \begin{aligned} & \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\} \\ & \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_5\}, \{v_1, v_5\}, \\ & \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_3\}, \{v_0, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \\ & \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_5\} \end{aligned}$$

La réalisation géométrique canonique de  $K$  est définie dans  $\mathbb{R}^6$ . La figure 4.1 illustre trois exemples de complexes simpliciaux qui correspondent à des réalisations géométriques de  $K$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

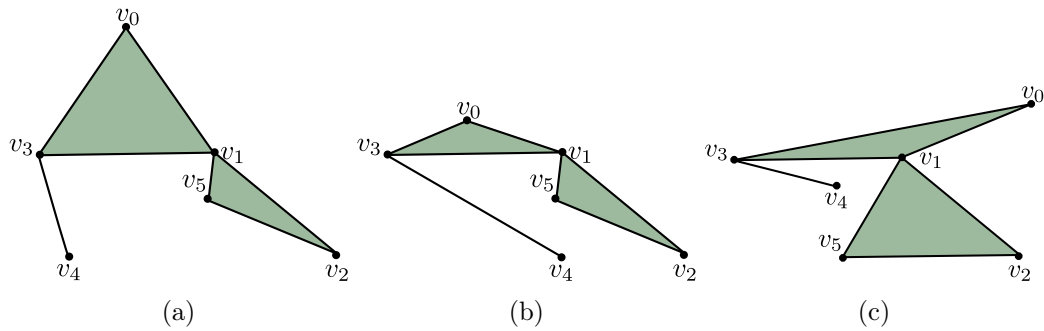


FIGURE 4.1 – (a) – (c) Trois complexes simpliciaux qui correspondent à des réalisations géométriques d'un même complexe simplicial abstrait.

### 4.1.2 Complexes simploldiaux

La définition des complexes simploldiaux abstraits que nous avons proposée permet d'étendre directement la définition de la réalisation géométrique des complexes simpliciaux abstraits. Pour rappel, un complexe simploldal abstrait  $K^\square$  est défini à partir d'une partition de sommets  $V = (V^i)_{i \in [1, n]}$  et pour tout  $i \in [1, n]$ , l'ensemble des simplexes de  $V^i$  composant les simploldes  $K^\square$  est un complexe simplicial abstrait  $K^i$ .

On peut associer à tout  $V^i$ , l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{|V^i|}$ . Comme tous les  $V^i$  sont disjoints, on peut définir l'espace ambiant produit  $\mathbb{R}^{|V^1|} \times \dots \times \mathbb{R}^{|V^n|}$ , qui est isomorphe à  $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n |V^i|}$ . Dit autrement, on peut mettre en bijection l'ensemble des sommets de  $V$  avec la base canonique de  $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n |V^i|}$ . Une manière de procéder est de se donner une numérotation globale sur la partition  $V$  telle que chaque sommet  $v_j \in V$  est associé à  $e_j$ .



Soit  $\sigma = \{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p}\}$  un simpleïde abstrait de  $K^\square$ ; comme tous les espaces vectoriels associés aux ensembles  $V^i$  sont indépendants, on peut directement définir le **simpleïde géométrique** associé à  $\sigma$  comme le produit des simplexes géométriques qui le compose. En associant à tout simpleïde abstrait de  $K^\square$  le simpleïde géométrique correspondant, on construit la réalisation géométrique canonique de  $K^\square$  dans  $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n |V^i|}$ .

Dit autrement, à chaque sommet simpleïdal  $\{\{v_{i_1}\}, \dots, \{v_{i_p}\}\}$  de  $K^\square$ , on associe le point  $e_{i_1} + \dots + e_{i_p}$ , et à tout simpleïde abstrait  $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ , on associe l'enveloppe convexe de ses sommets simpleïdaux. Comme indiqué pour les complexes simpliciaux, l'espace  $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n |V^i|}$  est en général "trop grand".

### 4.1.3 Autres structures

De manière générale, la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial ou simpleïdal est un *CW-complexe* : à chaque cellule abstraite est associée une boule de même dimension, les fonctions d'attachement du *CW-complexe* correspondent aux opérateurs de face.

Pour les structures cellulaires, il est possible de procéder de la même manière en passant par l'interprétation simpliciale. En considérant uniquement les cellules, cela n'est en revanche pas possible en toute généralité car il n'est pas possible d'associer une boule à chaque cellule.

La construction d'un *CW-complexe* nécessite en particulier de contrôler que l'intersection de deux cellules géométriques correspond bien à une cellule de dimension inférieure de leur bord. De manière générale, on associe une forme géométrique à chaque cellule en respectant les relations d'incidence de la structure. Il est également possible d'ajouter des contraintes, afin de garantir par exemple que l'intersection entre deux cellules géométriques quelconques est soit vide, soit correspond à une cellule géométrique de leurs bords, ou encore qu'une cellule ne s'auto-intersecte pas. Ces contraintes géométriques ne sont pas traitées dans ce document.

## 4.2 Plongement linéaire

### 4.2.1 Complexes simpliciaux abstraits

De manière intuitive, les réalisations géométriques des complexes simpliciaux abstraits peuvent être vues comme des plongements aux sommets particuliers. Cette construction garantit la cohérence entre la structure combinatoire et l'espace topologique associé : en particulier, l'intersection de deux simplexes est soit vide, soit un simplexe de dimension inférieure du complexe.

Comme indiqué précédemment, tout complexe simplicial abstrait de dimension  $n$  peut être réalisé géométriquement dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Si l'on souhaite conserver la cohérence entre l'espace topologique et la structure, il est nécessaire de vérifier que toutes les intersections de simplexes correspondent bien à des simplexes de dimension inférieure de l'objet géométrique.

### 4.2.2 Complexes simploldaux abstraits

Le plongement aux sommets d'un complexe simploldal abstrait nécessite les mêmes vérifications d'intersection que celles évoquées pour les complexes simpliciaux abstraits.

Plus généralement, notons que le produit cartésien d'un complexe simploldal abstrait par un sommet ne change pas sa structure, mais cela change l'objet géométrique associé. Par exemple, considérons un complexe simploldal abstrait  $K^\square$  défini sur  $V = (V^i)_{i \in [1, n]}$ , et  $K'^\square$  un sous-complexe de  $K^\square$ , où tous les simploldes de  $K'^\square$  sont de la forme  $\{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p}\}$ , avec  $\sigma_{i_k} \in V^{i_k}$  pour  $k \in [1, p]$ . En effectuant le produit cartésien de  $K'^\square$  par un simploldie correspondant à un sommet de  $V^{i_q}$  où  $q \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ , on augmente intuitivement la dimension de l'espace géométrique dans lequel  $K'^\square$  est réalisé, mais la structure du complexe abstrait reste identique. Cela revient intuitivement à ajouter un 0 dans le type du simploldie abstrait.

Inversement, si on considère un sous-complexe  $K'^\square$  dont tous les simploldes sont de la forme  $\{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p}, \{v\}\}$ , avec  $v \in V^{i_{p+1}}$ , alors le sous-complexe peut être *projeté* de  $\mathbb{R}^{\sum_{k=1}^{p+1} |V^{i_k}|}$  dans  $\mathbb{R}^{\sum_{k=1}^p |V^{i_k}|}$  en supprimant la composante  $\{v\}$  de chaque simploldie.

Notons que le fait d'expliciter les sommets intervenant dans la définition de chaque simploldie se retrouve également dans la définition des **supercomplexes**, comme présenté en section 2.5.2.3.

### 4.2.3 Structures cellulaires sans multi-incidence

Concernant les structures à base de graphes d'incidence, comme les  $n$ -surfaces ou les chaînes de  $n$ -surfaces, qui ne permettent pas de représenter des objets présentant de la multi-incidence, on peut associer une forme à un objet en donnant seulement des coordonnées aux sommets. Cela dit, si cette méthode permet d'associer une géométrie précise à tout simplexe ou simploldie en toute dimension, cela est moins évident pour les structures cellulaires. En effet, si les cellules de dimension 0 et 1 sont définies sans ambiguïté, dès la dimension 2, la définition de la forme d'une 2-cellule par la position de l'ensemble de ses sommets et des arêtes de son bord peut poser certains problèmes. Si l'ensemble des sommets de la cellule n'est pas coplanaire : *comment la cellule surfacique est-elle définie ?* Avec ces seules informations, il n'est pas possible d'effectuer des calculs de base liés à la géométrie de ces cellules, comme par exemple l'intersection avec une droite ou une autre cellule.

On peut bien entendu résoudre ce problème en utilisant la structure simpliciale associée. La géométrie de chaque  $p$ -cellule est alors définie comme l'union des  $p$ -simplexes géométriques associés. Cette solution a bien entendu l'inconvénient de perdre l'optimisation de la représentation cellulaire. On peut appliquer le même type de plongement pour des structures de type cartes combinatoires ne présentant pas de multi-incidence avec bien sûr les mêmes inconvénients.

#### 4.2.4 Structures avec multi-incidence

De manière évidente, les plongements linéaires ne sont pas adaptés aux structures permettant la multi-incidence, comme les ensembles simpliciaux ou simpleïdaux, ou les cartes combinatoires, dès lors que :

- deux cellules partagent un même ensemble de sommets,
- une cellule est incidente plusieurs fois à l'une de ses faces.

Par exemple, si l'on se contente de donner une position à chaque sommet de l'ensemble semi-simplicial représenté sur la figure 4.12a, la forme géométrique du triangle sera définie par le segment reliant les deux sommets de son bord.

### 4.3 Espaces de BÉZIER

Nous présentons dans cette partie les espaces de BÉZIER, qui permettent de donner des formes *courbes* aux simplexes et aux simpleïdes. Plus précisément, les espaces de BÉZIER permettent de donner une forme géométrique à chaque cellule, tout en préservant les relations d'incidence de la structure associée. Un espace **espace triangulaire de BÉZIER**, ou espace de BÉZIER simplicial, est un ensemble de simplexes de BÉZIER satisfaisant certaines contraintes de continuité (cf. [Farin 2002]).

Les espaces de BÉZIER simpliciaux ont naturellement une structure d'ensemble simplicial, et les **espaces simpleïdaux de BÉZIER**, ou produits d'espaces de BÉZIER triangulaires, ont naturellement une structure d'ensemble simpleïdal.

#### 4.3.1 Notions de base

En préambule, il est utile de rappeler les définitions et notations qui suivent. En particulier, la structuration des espaces simpliciaux et simpleïdaux de BÉZIER est mise en évidence via la numérotation des points de contrôle par des **multi-indices**.

L'ensemble  $\Gamma_d^i$  des multi-indices de dimension  $i$  et degré  $d$  est défini de la manière suivante :  $\Gamma_d^i = \{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_i) \in \mathbb{N}^{i+1} \mid |\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_i = d\}$ . Par souci de lisibilité, un multi-indice  $(\alpha_0, \dots, \alpha_i)$  sera plus simplement noté  $\alpha_0 \dots \alpha_i$ . Par exemple,  $\Gamma_3^1 = \{03, 12, 21, 30\}$ , et  $\Gamma_3^2 = \{003, 012, 021, 030, 102, 111, 120, 201, 210, 300\}$ . Le nombre d'éléments de  $\Gamma_d^i$ , noté  $|\Gamma_d^i|$ , est égal à  $\binom{i+d}{i}$ .

Les **polynômes de BERNSTEIN multivariés de degré  $d$**  et multi-indice  $\alpha$  sont définis par  $B_\alpha^d(u) = \binom{d}{\alpha} u_0^{\alpha_0} \dots u_i^{\alpha_i}$ , où  $\alpha \in \Gamma_d^i$ , et  $\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha_0! \dots \alpha_i!}$  sont les **coefficients multinomiaux**, et les  $\{u_j\}$  sont les coordonnées barycentriques de  $u$ , un point du  $i$ -simplexe standard, *i. e.* les  $\{u_j\}$  vérifient :  $\forall j, 0 \leq j \leq i, 0 \leq u_j \leq 1$  et  $\sum_{j=0}^i u_j = 1$ .

L'ensemble des polynômes de BERNSTEIN  $B_\alpha^d(u)$  forme une base des polynômes multivariés, c'est-à-dire que tout polynôme multivarié peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de ces polynômes.

On pourra également noter que la formule du multinôme de Newton nous indique que la somme des polynômes de BERNSTEIN vaut toujours 1 :

$$(u_0 + \cdots + u_i)^d = 1^d = 1 = \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} u_0^{\alpha_0} \cdots u_i^{\alpha_i} = \sum_{|\alpha|=d} B_\alpha^d(u).$$

Cela signifie que les points des simplexes et des simploïdes de Bézier sont bien définis comme combinaisons affines des points de contrôle.

### 4.3.2 Ensembles semi-simpliciaux

Un  $i$ -simplexe de BÉZIER de degré  $d$  est défini par  $P(u) = \sum_{\alpha \in \Gamma_d^i} P_\alpha B_\alpha^d(u)$ , où  $\{P_\alpha, \alpha \in \Gamma_d^i\}$  est l'ensemble de ses **points de contrôle** (cf. figure 4.4). Ainsi, à chaque point  $u$  du  $i$ -simplexe standard correspond un point du simplexe de BÉZIER  $P(u)$ , entièrement défini par ses points de contrôle, comme illustré sur la figure 4.2.

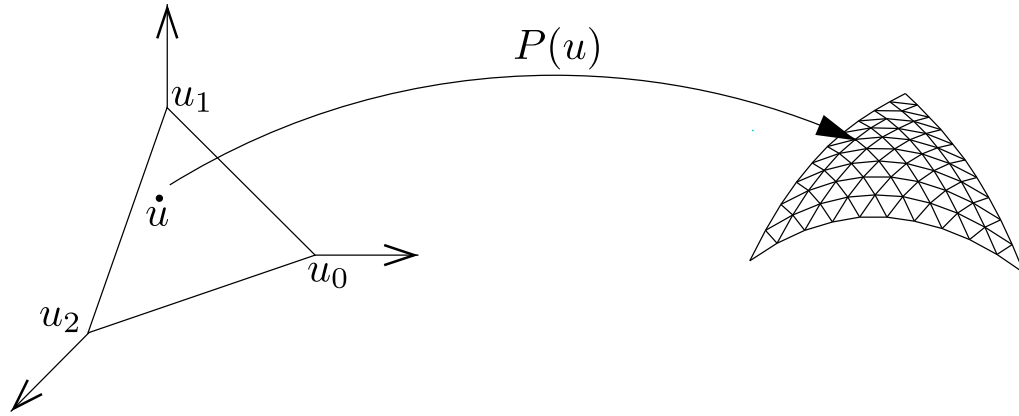


FIGURE 4.2 – À tout point  $u$  de l'espace de paramètre correspond un point  $P(u)$  du simplexe de BÉZIER défini par ses points de contrôle.

En utilisant les polynômes de BERNSTEIN, on peut donc calculer un ensemble de points d'un  $i$ -simplexe de BÉZIER en échantillonnant l'ensemble des points du  $i$ -simplexe standard. En pratique, on peut utiliser l'algorithme récursif de DE CASTELJAU de complexité équivalente.

L'algorithme de DE CASTELJAU permet de calculer les points d'un  $i$ -simplexe de BÉZIER de degré  $d$  par une suite d'interpolations linéaires, ce qui revient à *reconstruire* les polynômes de BERNSTEIN, comme illustré sur la figure 4.3. Pour tout point  $u = (u_0, \cdots, u_i)$  du  $i$ -simplexe standard, le point  $P(u)$  du  $i$ -simplexe de Bézier de degré  $d$  peut être défini à partir de l'ensemble de points de contrôle  $\{P_\alpha \mid \alpha \in \Gamma_d^i\}$  de la manière suivante : pour tout  $u$ ,  $P_\alpha^0(u) = P_\alpha$  sont les points de contrôle. Le point  $P_{0 \dots 0}^d(u) = P(u)$  est un point du  $i$ -simplexe de BÉZIER défini récursivement par la relation suivante :

$$P_{\alpha_0 \dots \alpha_i}^k(u) = \sum_{j=0}^i u_j P_{\alpha_0 \dots \alpha_{j-1}(\alpha_j+1)\alpha_{j+1} \dots \alpha_i}^{k-1}(u), \text{ avec } 0 < k \leq d.$$

De manière intuitive, sur la figure 4.3(a), à partir du point de contrôle  $P_{12}$ , il existe 3 chemins permettant de remonter jusqu'au point  $P_{00}^3$  :  $u_0u_1u_1$ ,  $u_1u_0u_1$  et  $u_1u_1u_0$ , soit  $3u_0u_1^2$  correspondant au polynôme de Bernstein  $B_{12}^3(u_0, u_1)$ .

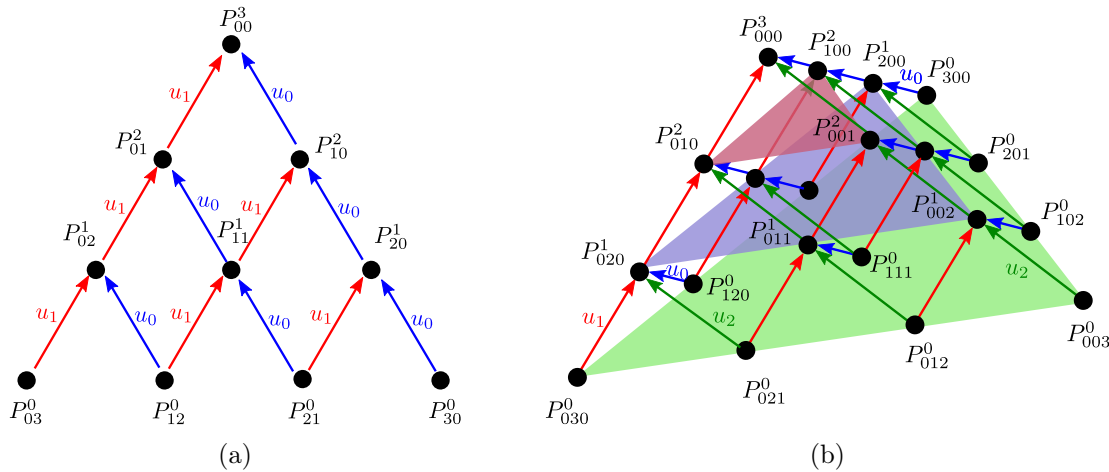


FIGURE 4.3 – Principe de l'algorithme de DE CASTELJAU. En (a), pour une courbe de degré 3, en (b) pour un triangle de degré 3.

Notons que tout point  $u = (u_0, \dots, u_i)$  du  $i$ -simplexe standard peut toujours s'écrire  $(u_0, \dots, u_{i-1}, 1 - (u_0 + \dots + u_{i-1}))$ ; ainsi, on trouve souvent dans la littérature la définition des courbes de BÉZIER utilisant un unique paramètre  $t$  et les polynômes de BERNSTEIN décrits dans la base  $t$ ,  $(1 - t)$ , avec  $t$  compris entre 0 et 1.

#### 4.3.2.1 Représentation d'un espace simplicial de BÉZIER

On peut représenter un espace triangulaire de BÉZIER par l'ensemble de ses simplexes principaux, où chaque simplexe principal stocke l'ensemble de ses points de contrôle. Le degré peut être fixé pour tous les simplexes d'un ensemble semi-simplicial afin de simplifier les opérations de construction. Cela étant, il est également possible de manipuler des simplexes principaux de degrés différents en utilisant des résultats bien connus d'élévation de degré [Farin 2002]. Cette approche basée sur le stockage des points de contrôle sur les simplexes principaux pose deux problèmes, cf. figure 4.4a :

- la structure n'est pas explicitée : les relations d'incidence ne sont donc pas directes. Or ce sont des informations essentielles dès que l'on souhaite étudier la structure un objet ;
- si deux simplexes sont assemblés le long d'une face, leurs points de contrôle sont dupliqués, ce qui est bien entendu une source potentielle d'incohérences.

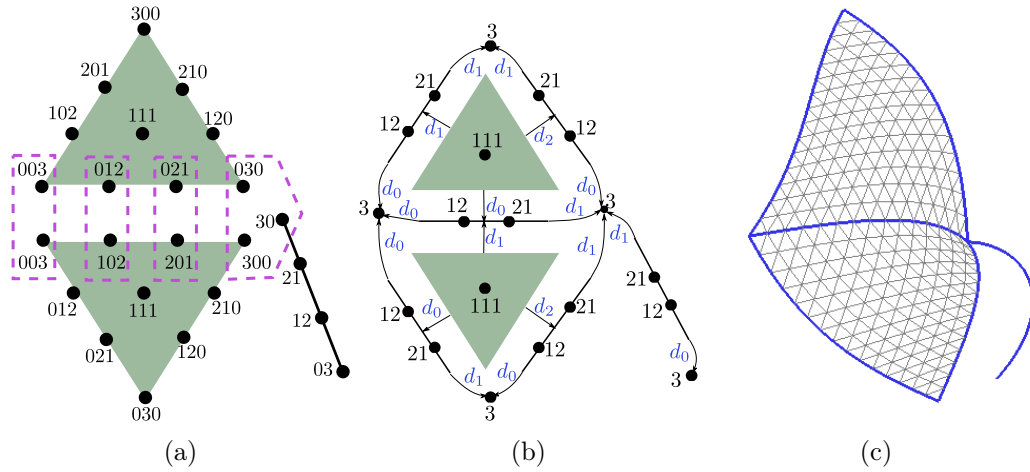


FIGURE 4.4 – (a) Simplexes principaux et leurs points de contrôle. (b) Répartition des points de contrôle sur l'ensemble de la structure. Chaque simplexe ne stocke que ses points de contrôle propres. (c) Un espace triangulaire de BÉZIER dont la structure correspond à l'ensemble semi-simplicial représenté en (b).

On peut utiliser d'autres structures de données qui permettent de résoudre ces deux problèmes en utilisant les propriétés des espaces de BÉZIER. En effet, il est bien connu que le bord d'un  $i$ -simplexe de BÉZIER est composé de simplexes de BÉZIER de dimensions inférieures : tout simplexe de BÉZIER contient son bord. Par exemple, le bord d'un triangle de BÉZIER est composé de courbes de BÉZIER. La numérotation des points de contrôle des simplexes de BÉZIER basée sur les multi-indices permettent répartir l'ensemble des points de contrôle d'un simplexe principal sur le simplexe et son bord.

Plus précisément, l'ensemble des points de contrôle  $P_{\alpha_0 \dots \alpha_{j-1} 0 \alpha_{j+1} \dots \alpha_i}$  d'un  $i$ -simplexe de BÉZIER sont les points de contrôle d'un  $(i-1)$ -simplexe de BÉZIER correspondant à sa  $j^{\text{e}}$  face. Par exemple, sur la figure 4.4a, l'ensemble des points de contrôle  $\{P_{300}, P_{210}, P_{120}, P_{030}\}$  d'un des deux triangles de degré 3 sont les points de contrôle de la courbe de BÉZIER de degré 3 correspondant à sa face obtenue par application de l'opérateur  $d_2$ .

Chaque  $i$ -simplexe peut donc stocker uniquement ses **points de contrôle propres**, c'est-à-dire les points de contrôle qui n'appartiennent pas à son bord. Les points de contrôle propres d'un  $i$ -simplexe sont donc de la forme  $P_{\alpha_0 \dots \alpha_i}$  avec, pour tout  $0 \leq j \leq i$ ,  $\alpha_j > 0$ . L'ensemble des points de contrôle d'un espace triangulaire de BÉZIER peuvent être répartis sur la structure d'un ensemble semi-simplicial [Lang 1996, Fuchs 1997]. Cela permet de résoudre les deux problèmes présentés lorsque chaque simplexe principal stocke tous ses points de contrôle :

- les relations d'incidence sont explicitées par l'ensemble semi-simplicial,
- aucun point de contrôle n'est dupliqué.

Lorsque l'on souhaite calculer l'espace triangulaire de BÉZIER associé à un ensemble semi-simplicial, on peut reconstituer l'ensemble des points de contrôle de chaque simplexe

principal via les indices des opérateurs de face qui permettent d'accéder aux points de contrôle de leurs bords. Par exemple, sur la figure 4.4b, l'arête commune aux deux triangles contient uniquement ses points de contrôle propres numérotés 12 et 21. Pour le triangle du haut (resp. du bas), cette arête est sa face  $d_0$  (resp.  $d_1$ ), ces points sont donc numérotés 012 et 021 (resp. 102 et 201) pour le triangle, comme indiqué sur la figure 4.4a.

D'un point de vue pratique, les points de contrôle d'un simplexe de BÉZIER peuvent être stockés dans un *tableau simplicial*, selon l'ordre lexicographique de leur multi-indice [DeRose 1993] comme illustré sur la figure 4.5.

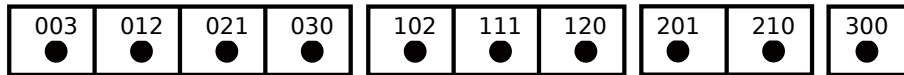


FIGURE 4.5 – Les points de contrôle d'un simplexe de BÉZIER peuvent être stockés dans un tableau simplicial en utilisant l'ordre lexicographique des multi-indices.

L'indice d'un point de contrôle  $P_\alpha$  peut être simplement retrouvé en utilisant l'algorithme décrit dans [Peltier 2018]. L'idée est la suivante : soit  $\alpha = \alpha_0 \dots \alpha_i$  le multi-indice d'un point de contrôle. Si  $i = 1$ , alors le point de contrôle est stocké dans la case  $\alpha_0$  du tableau simplicial. Si  $i > 1$ , alors il faut d'abord stocker tous les multi-indices de même degré commençant par 0, puis 1,  $\dots$  jusqu'à tous ceux commençant par  $\alpha_0 - 1$ . On recommence en considérant à présent  $\alpha_1$  et ainsi de suite jusqu'à considérer le dernier indice  $\alpha_i$ .

Dans le cas où l'ensemble des points de contrôle est réparti sur un ensemble semi-simplicial, chaque simplexe stocke uniquement ses points de contrôles propres.

### 4.3.2.2 Opérations de construction

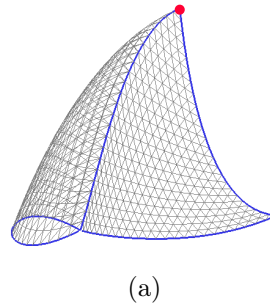
Comme nous l'avons vu au chapitre 2, les opérations de construction de base pour les ensembles semi-simpliciaux sont le cône et l'identification. Pour chacune de ces opérations, les positions des points de contrôle des simplexes impactés par les opérations doivent être calculées.

#### Cône

Pour l'opération de cône, les points de contrôle propres des nouveaux simplexes créés par l'opération peuvent être calculés par exemple par interpolation entre les points du simplexe dont il est issu est le nouveau sommet : cf. figure 4.6.

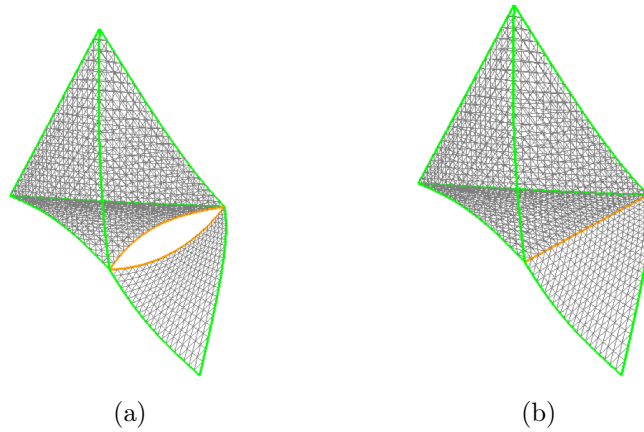
#### Identification

Les points de contrôle du simplexe  $\tau$  résultant de l'identification de deux simplexes  $\sigma$  et  $\mu$  peuvent être définis de différentes manières : par exemple, on peut leur associer les points  $\sigma$  ou ceux de  $\mu$ , on encore les définir par interpolation des points de  $\sigma$  et  $\mu$  comme représenté sur la figure 4.7.



(a)

FIGURE 4.6 – Espace triangulaire de BÉZIER issu d’une opération de cône. Les points de contrôle des deux triangles sont obtenus par interpolation des points de contrôle de la boucle et de l’arête en bas et du point de contrôle du nouveau sommet (en rouge).



(a)

(b)

FIGURE 4.7 – (a) Un espace triangulaire de BÉZIER. (b) Résultat de l’opération d’identification des deux arêtes en orange de (a). Les points de contrôle de l’arête résultante peuvent être calculés par interpolation linéaire des points de contrôle des deux arêtes.

### Produit cartésien

L’opération de produit cartésien est présentée en Section 4.3.4, les résultats présentés peuvent être directement adaptés aux ensembles semi-simpliciaux en manipulant les simplexes dégénérés nécessaires à la définition du produit cartésien de manière implicite.

### 4.3.3 Ensembles semi-simploïdaux

Les simpleïdes de BÉZIER [Dahmen 1982] généralisent la notion bien connue de carreaux de BÉZIER, définis par des produits tensoriels de courbes de BÉZIER. La structure d’ensemble semi-simploïdal se retrouve grâce aux multi-indices des points de contrôle. Plus précisément, chaque point de contrôle est ici numéroté par un  $n$ -uplet de multi-indices, correspondant à la structure du simpleïde.



Un simpleïde de BÉZIER de type  $(a_1, \dots, a_n)$  et de degré  $(d_1, \dots, d_n)$  est défini par :  $P(u^1, \dots, u^n) = \sum_{\alpha^1 \in \Gamma_{d_1}^{a_1}} \dots \sum_{\alpha^n \in \Gamma_{d_n}^{a_n}} P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)} B_{\alpha^1}^{d_1}(u^1) \times \dots \times B_{\alpha^n}^{d_n}(u^n)$  où chaque  $u^i$  est un point du  $a_i$ -simplexe standard, et  $\{P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)}\}$  est l'ensemble de ses points de contrôle. Par souci de clarté,  $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)}$  est également noté  $P_{\alpha^1, \dots, \alpha^n}$ .

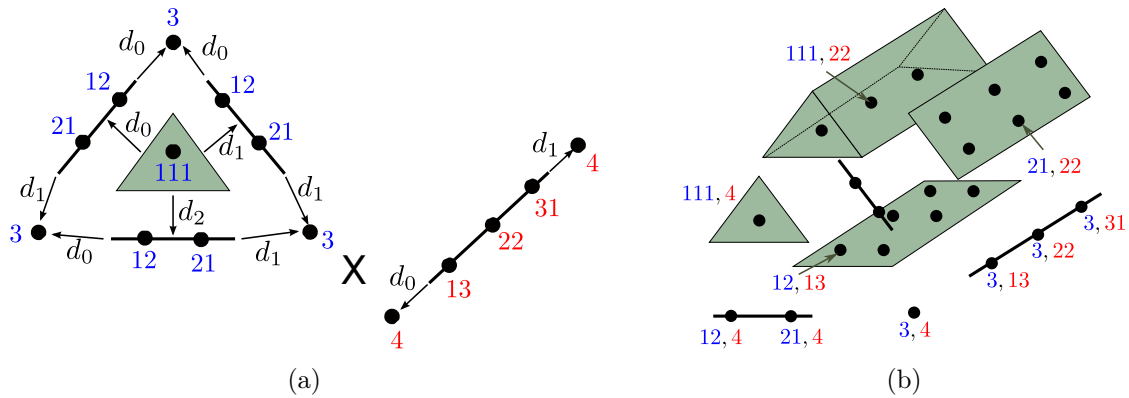


FIGURE 4.8 – Les points de contrôle du prisme et son bord, représentés en (b) sont numérotés par des couples de multi-indices correspondant aux simplexes et leurs bords représentés en (a).

La figure 4.9 représente des simpleïdes de BÉZIER et leurs types jusqu'à la dimension 3. Les points de contrôle ne sont pas représentés.

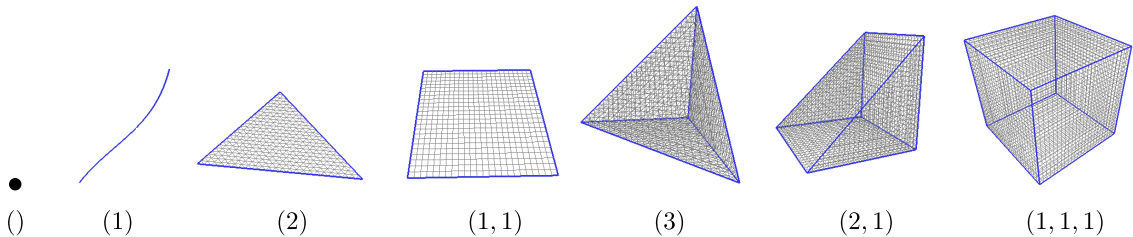


FIGURE 4.9 – Simpleïdes de BÉZIER et leurs types jusqu'à la dimension 3.

Les espaces simpleïdaux de BÉZIER généralisent les espaces cubiques de BÉZIER, définis comme des assemblages de cubes de BÉZIER. Le principe est exactement le même, mais on ne se restreint pas ici à des produits tensoriels d'arêtes : cf. figure 4.10.

Un espace simpleïdal de BÉZIER est un ensemble  $S$  de simpleïdes de BÉZIER respectant certaines contraintes, comme présenté pour les espaces simpliciaux de BÉZIER.

Dans les espaces simpleïdaux de BÉZIER, l'espace paramétrique d'un simpleïde de type  $(a_1, \dots, a_n)$  correspond à des produits tensoriels d'espaces triangulaires de BÉZIER. La figure 4.11 illustre l'espace paramétrique d'un prisme défini comme produit de deux espaces paramétriques.

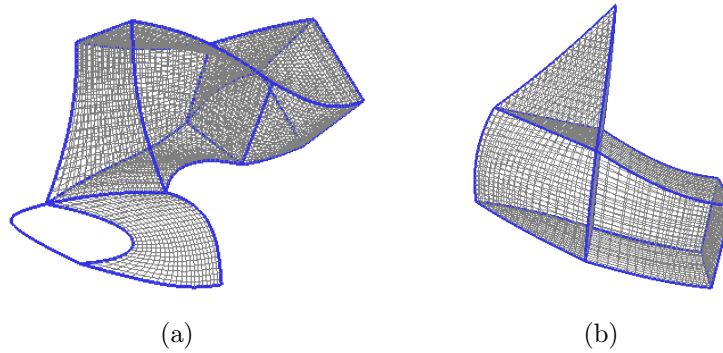


FIGURE 4.10 – (a) Un espace cubique de BÉZIER. (b) Un espace simplloïdal de BÉZIER dans lequel un simplloïde de type  $(2, 1)$  est assemblé à un tétraèdre le long d’une de ses faces triangulaires, et à un cube le long d’une de ses faces carrées.

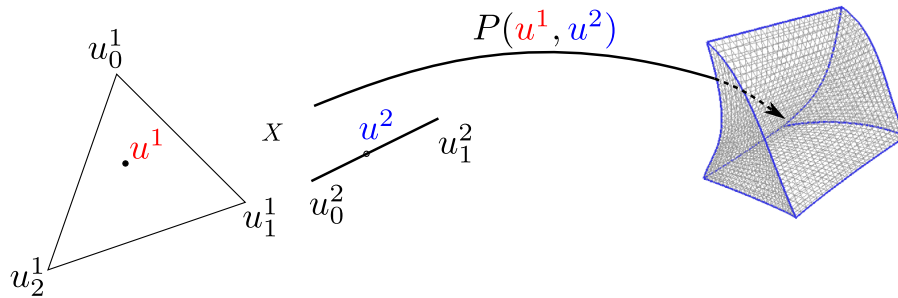


FIGURE 4.11 – Le domaine de l’espace paramétrique du prisme est le produit de deux domaines indépendants correspondant à la structure du prisme. À chaque point  $(u^1, u^2)$  de l’espace des paramètres correspond un point du simplloïde de BÉZIER.

#### 4.3.3.1 Représentation d’un espace simplloïdal de BÉZIER

Comme décrit pour les espaces simpliciaux de BÉZIER, il est possible de décrire un espace simplloïdal de BÉZIER par l’ensemble des simplloïdes principaux où chacun stocke l’ensemble de ses points de contrôle. Cette approche présente les mêmes inconvénients.

Il est également possible ici de répartir l’ensemble des points de contrôle d’un simplloïde de BÉZIER sur lui-même et son bord. Plus généralement, les espaces simplloïdaux de BÉZIER ont une structure d’ensemble semi-simplloïdal. On retrouve ici encore cette structuration au niveau des  $n$ -uplets de multi-indices qui numérotent les points de contrôle des simplloïdes de BÉZIER. Cette correspondance illustrée sur la figure 4.8) permet en particulier d’associer à chaque simplloïde de BÉZIER ses points de contrôle propres (*i. e.* qui ne contiennent aucun 0 dans tout le  $n$ -uplet) et de reconstruire l’ensemble de ses points de contrôle en utilisant les indices des opérateurs de face, en procédant de la même manière que pour les ensembles semi-simpliciaux sur chaque composante du  $n$ -uplet de

multi-indices.

Par exemple, soit  $\sigma$  un simplexe de BÉZIER de type  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $\{P_{\alpha^1, \dots, \alpha^n}\}$  l'ensemble de ses points de contrôle. L'ensemble des points de contrôle de  $\sigma$  tels que  $\alpha_j^i = 0$  définit le simplexe de BÉZIER correspondant à sa face  $d_j^i$ . Par exemple sur la figure 4.8b, si  $\sigma$  désigne le prisme, alors l'ensemble des points de contrôle  $P_{\alpha^1, 04}$  définit sa face triangulaire  $d_0^2$  située au premier plan.

D'un point de vue pratique, de manière analogue à ce qui a été vu pour les ensembles semi-simpliciaux, l'ensemble des points de contrôles propres de chaque simplexe peut être stocké dans un **tableau simplexial** selon l'ordre lexicographique des  $n$ -uplets de multi-indices [DeRose 1993]. Par exemple, soit  $P = \{P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)}\}$  l'ensemble des points de contrôle d'un simplexe de BÉZIER de type  $(a_1, \dots, a_n)$  et de degré  $(d_1, \dots, d_n)$ . Si  $n = 1$ , alors le simplexe correspond à un simplexe, et  $P$  est stocké dans un tableau simplicial. Si  $n > 1$ , il faut commencer par stocker tous les points de contrôle d'un simplexe de type  $(a_2, \dots, a_n)$  de degré  $(d_2, \dots, d_n)$  pour chaque multi-indice de  $\Gamma_{d_1}^{\alpha^1}$  précédant  $\alpha^1$ . Ensuite, le point  $P$  peut être stocké comme s'il s'agissait d'un simplexe de BÉZIER de type  $(a_2, \dots, a_n)$  et  $(d_2, \dots, d_n)$ , indicé par le  $n$ -uplet de multi-indices  $(\alpha^2, \dots, \alpha^n)$ .

#### 4.3.3.2 Opérations de construction

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, les opérations de construction de base pour les ensembles semi-simpliciaux sont le produit cartésien et l'identification. Pour chacune de ces opérations, les positions des points de contrôle des simplexes impactés par les opérations doivent être calculées. Notons que l'opération de cône simplexial n'est pas définie sur les ensembles semi-simpliciaux

**produit cartésien** Chaque point de contrôle  $P_{\alpha^1, \dots, \alpha^p, \alpha^{p+1}, \dots, \alpha^{p+q}}$  d'un simplexe de BÉZIER  $\tau$  résultant du produit cartésien de deux simplexes  $\sigma$  et  $\mu$  de types respectifs  $(a_1, \dots, a_p)$  et  $(b_1, \dots, b_q)$  est obtenu à partir du point  $P_{\alpha^1, \dots, \alpha^p}$  de  $\sigma$  et du point  $P_{\alpha^1, \dots, \alpha^q}$  de  $\mu$ . On peut par exemple utiliser une somme de MINKOWSKI. Par exemple sur la figure 4.8, le point de contrôle  $P_{111,22}$  du prisme est obtenu à partir du point  $P_{111}$  du triangle et du point  $P_{22}$  de l'arête.

**identification**

#### 4.3.4 Ensembles simpliciaux

Nous avons vu que d'un point de vue structurel, si un  $p$ -simplexe  $\mu = \tau d_j$  est dégénéré, *i. e.*  $\mu = \sigma s_i$ , alors  $\mu$  n'intervient pas dans le bord de  $\tau$ . Par exemple la figure 4.12 illustre la différence entre un ensemble semi-simplicial contenant une boucle, et un ensemble simplicial où la boucle est dégénérée. Ces deux objets n'ont pas la même homologie  $H_1$  : celle de l'ensemble semi-simplicial est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et celle de l'ensemble simplicial est triviale.

Pour que la forme géométrique associée à un ensemble simplicial  $S$  corresponde bien à la structure de  $S$ , la forme géométrique associée de  $\mu$  doit être égale à celle de  $\sigma$ . D'un

point de vue pratique, seuls les simplexes non dégénérés et leurs faces, dégénérées ou non, sont utiles pour définir la forme d'un ensemble simplicial. On peut donc expliciter uniquement ces simplexes ; les autres simplexes dégénérés peuvent être gérés de manière implicite et peuvent être obtenus, si nécessaire, en appliquant une suite d'opérateurs de dégénérescence à partir d'un simplexe non dégénéré.

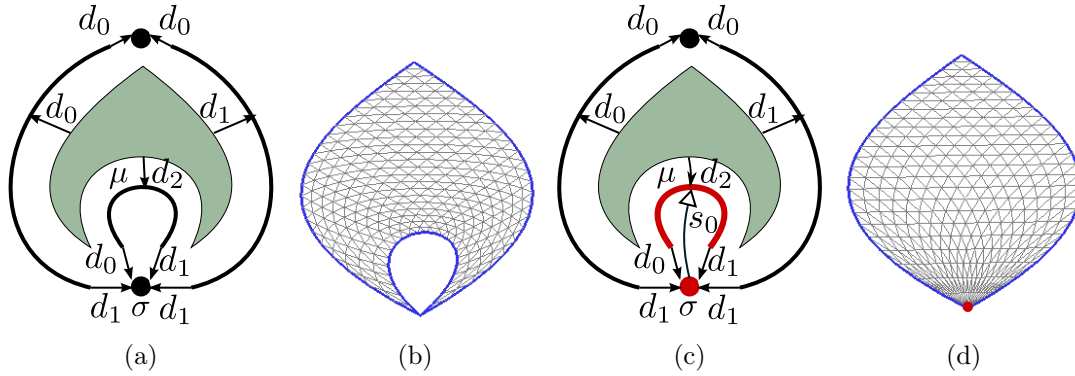


FIGURE 4.12 – (a) Un ensemble semi-simplicial, (b) un espace triangulaire de BÉZIER associé à (a). (c) Un ensemble simplicial : l'arête rouge  $\mu$  est dégénérée sur le sommet rouge  $\sigma$  (i. e.  $\mu = \sigma s_0$ ), (d) Un espace triangulaire de BÉZIER associé à (c) : la forme de l'arête dégénérée est définie par celle du sommet de son bord. L'arête  $\mu$  est le seul simplexe dégénéré qui apparaît dans le bord d'un simplexe non dégénéré.

On peut également associer un simplexe de BÉZIER à tout  $i$ -simplexe  $\sigma$  d'un ensemble simplicial et plus généralement un espace triangulaire de BÉZIER à tout ensemble simplicial [Peltier 2018]. Les relations entre les points contrôle de  $\sigma$  et ceux de  $\sigma d_j$  sont celles décrites pour les ensembles semi-simpliciaux, i. e. l'ensemble des points de contrôle  $P_\alpha$  de  $\sigma$  tels que  $\alpha_j = 0$  sont les points de contrôle de  $\sigma d_j$ . Si  $\mu$  est dégénéré, i. e.  $\mu = \sigma s_j$  alors la Propriété 5 [Peltier 2018] doit être satisfaite afin de garantir que la forme de  $\mu$  soit bien celle de  $\sigma$  : cf. Figure 4.13.

**Propriété 5** Soient  $\sigma$  un  $i$ -simplexe, et  $B_\sigma$  le simplexe de BÉZIER qui lui est associé, défini par les points de contrôle  $\{P_\alpha\}$ . Soient  $\mu = \sigma s_j$ ,  $0 \leq j \leq i$ , et  $B_\mu$  le simplexe de BÉZIER qui lui est associé, défini par les points de contrôle  $\{P_{\alpha'}\}$ . Si tous les points de contrôle  $P_{\alpha'_0 \dots \alpha'_j \alpha'_{j+1} \dots \alpha'_{i+1}}$  tels que :

- $\alpha'_k = \alpha_k$ , pour  $0 \leq k \leq j - 1$ ,
- $\alpha'_j + \alpha'_{j+1} = \alpha_j$ ,
- $\alpha'_k = \alpha_{k-1}$ , pour  $j + 2 \leq k \leq i + 1$

sont égaux à  $P_{\alpha_0 \dots \alpha_i}$ , alors  $B_\sigma = B_\mu$ .  $\square$

On peut montrer de manière directe que si la propriété est vérifiée, alors à tout point  $P(u'_0, \dots, u'_{i+1})$  de  $B_\mu$  correspond le point  $P(u_0, \dots, u_i)$  de  $B_\sigma$ , où  $u'_k = u_k$  pour tout  $0 \leq k \leq j - 1$ ,  $u'_j + u'_{j+1} = u_j$  et  $u'_k = u_{k-1}$  pour tout  $j + 2 \leq k \leq i + 1$ . Pour cela il suffit de montrer que pour tout  $P_\alpha$ , on a :

$$\binom{d}{\alpha} u_0^{\alpha_0} \cdots u_j^{\alpha_j} \cdots u_i^{\alpha_i} = \sum_{\alpha'_j + \alpha'_{j+1} = \alpha_j} \binom{d}{\alpha'} u_0^{\alpha'_0} \cdots u_j^{\alpha'_j} u_{j+1}^{\alpha'_{j+1}} \cdots u_{i+1}^{\alpha'_{i+1}}$$

Ce qui revient à montrer que l'on a bien l'égalité suivante, qui se montre directement en appliquant la formule du binôme de NEWTON :

$$\begin{aligned} & \binom{d}{\alpha} u_0^{\alpha_0} \cdots (u_j + u_{j+1})^{\alpha_j} \cdots u_i^{\alpha_i} \\ &= \sum_{\alpha'_j + \alpha'_{j+1} = \alpha_j} \binom{d}{\alpha_0 \cdots \alpha'_j \alpha'_{j+1} \cdots \alpha_i} u_0^{\alpha_0} \cdots u_j^{\alpha'_j} u_{j+1}^{\alpha'_{j+1}} \cdots u_i^{\alpha_i} \end{aligned}$$

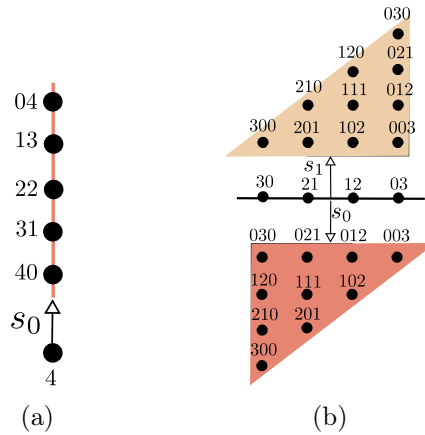


FIGURE 4.13 – Illustration de la Propriété 5. (a) Si tous les points de contrôle de l’arête dégénérée sont égaux à celui du sommet, alors les deux simplexes de BÉZIER correspondants sont égaux. (b) Une arête et ses deux triangles dégénérés. Si tous les points de contrôle d’un triangle alignés verticalement correspondent au point de contrôle de l’arête dans l’alignement vertical, alors les simplexes de BÉZIER correspondant sont égaux.

D’un point de vue pratique, seuls les points de contrôle des simplexes non dégénérés sont donc nécessaires pour associer un espace triangulaire de BÉZIER à un ensemble simplicial. L’ensemble des points de contrôle de tout simplexe, qu’il soit dégénéré ou non, peut être retrouvé à partir de ses points de contrôle propres et des relations correspondant à ses opérateurs de face et de dégénérescence. En particulier, si un simplexe est dégénéré, alors ses points de contrôle peuvent être déduits du simplexe non dégénéré de plus grande dimension de son bord, en utilisant la Propriété 5.

On notera qu’ici encore, on suppose que tous les simplexes de l’ensemble simplicial sont de même degré, mais il est tout à fait possible d’assembler des simplexes de BÉZIER de degrés différents en utilisant des techniques d’élévation de degré.

4.3.4.1 Produit cartésien

La figure 4.14 reprend l'exemple de la figure 2.45) en représentant les points de contrôle des différents simplexes mis en jeu. Comme toutes les faces de tous les simplexes non dégénérés sont également non dégénérés, cet exemple illustre également un produit cartésien d'ensemble semi-simpliciaux.

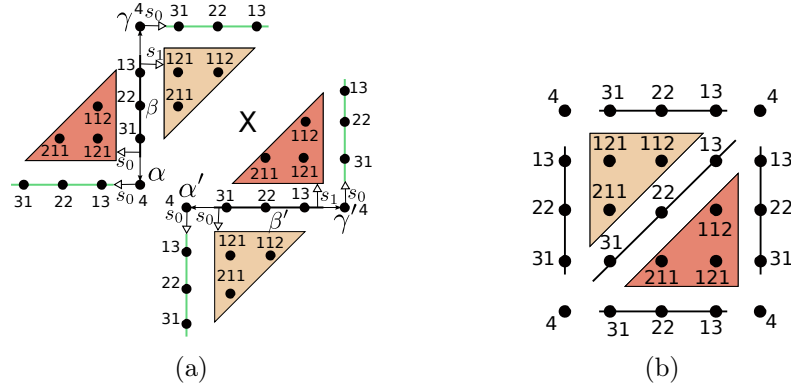


FIGURE 4.14 – Produit cartésien de deux espaces triangulaires de BÉZIER. Les simplexes dégénérés et leurs points de contrôle sont explicités sur la figure, mais peuvent être manipulés de manière implicite. (b) L'espace triangulaire de BÉZIER résultant de (a) correspond à un ensemble semi-simplicial.

[Lang 1997] proposent de calculer la position des points de contrôle d'un simplexe  $\sigma \times \mu$  par combinaisons linéaires de ses sommets. Cette méthode dégénère la géométrie d'un simplexe qui serait plusieurs fois incident à son bord.

Par définition,  $\sigma$ ,  $\mu$  et  $\sigma \times \mu$  ont même dimension. La propriété 5 permet d'associer chaque point de contrôle d'un simplexe dégénéré à un point de contrôle d'un simplexe de son bord. On peut donc calculer les points de chaque simplexe  $\sigma \times \mu$  en utilisant par exemple une somme de MINKOWSKI : chaque point  $P_\alpha$  de  $\sigma \times \mu$  correspond à la somme du point  $P_\alpha$  de  $\sigma$  et du point  $P_\alpha$  de  $\mu$ .

4.3.5 Ensembles simplloïdaux

Concernant les ensembles simplloïdaux, l'approche est similaire : on sait associer un simplloïde de BÉZIER à tout simplloïde. Pour associer un espace simplloïdal de BÉZIER à tout ensemble simplloïdal  $S$  et garantir que la structure de  $S$  soit bien respectée, la propriété suivante doit être vérifiée [Peltier 2018] :

**Propriété 6** Soit  $S = (K, (d_j^i), (s_l^k))$  un ensemble simplloïdal, soit  $\sigma$  un simplloïde de type  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $K$ , soit  $P^\sigma = \{P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)}, \alpha^i \in \Gamma_{d_i}^{a_i}, 1 \leq i \leq n\}$  l'ensemble de ses points de contrôle, et  $B_\sigma$  le simplloïde de BÉZIER qui lui est associé.

- (1) Soit  $\mu = \sigma d_j^i$ , soit  $P^\mu$  son ensemble de points de contrôle, et soit  $B_\mu$  le simpleïde de BÉZIER associé à  $\mu$ .

Si tout point de contrôle  $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^i, \dots, \alpha^n)}^\sigma$  est égal à :

—  $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}, \alpha^i, \alpha^{i+1}, \dots, \alpha^n)}^\mu$ , où  $\alpha^{i+1} = \alpha_0^i \cdots \alpha_{j-1}^i \alpha_{j+1}^i \cdots \alpha_{a_i}^i$  si  $a_i > 1$  et  $\alpha_j^i = 0$ ,

—  $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^{i-1}, \alpha^{i+1}, \dots, \alpha^n)}^\mu$ , si  $a_i = 1$ ,

alors  $B_\sigma(u) = B_\mu(u')$  où :

—  $u = (u^1, \dots, u^n)$ ,

—  $u' = (u^1, \dots, u^{i-1}, u^i, u^{i+1}, \dots, u^n)$ ,

où  $u^i = (u_0^i, \dots, u_{j-1}^i, u_{j+1}^i, \dots, u_{a_i}^i)$ , si  $a_i > 1$  et  $u_j^i = 0$ ,

—  $u' = (u^1, \dots, u^{i-1}, u^{i+1}, \dots, u^n)$  si  $a_i = 1$ .

- (2) Soit  $\mu = \sigma s_j^i$ , soit  $P^\mu$  l'ensemble de ses points de contrôle, et soit  $B_\mu$  le simpleïde de BÉZIER associé à  $\mu$  :

— si  $j \geq 0$  : tous les points de contrôle  $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^i, \dots, \alpha^n)}^\mu$  sont égaux au point de contrôle  $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^i, \dots, \alpha^n)}^\sigma$ , où  $\alpha_k^{i+1} = \alpha_k^i$  pour  $k < j$ ,  $\alpha_j^{i+1} + \alpha_{j+1}^{i+1} = \alpha_j^i$ , et  $\alpha_k^{i+1} = \alpha_{k-1}^i$  pour  $k > j+1$ ,

— si  $j = -1$  : tous les points de contrôle  $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^i, \alpha^{i+1}, \alpha^{i+1}, \dots, \alpha^n)}^\mu$  de  $\sigma s_{-1}^i$  sont égaux au point de contrôle  $P_{(\alpha^1, \dots, \alpha^n)}^\sigma$ , où  $\alpha^{i+1} \in \Gamma_{d_{i+1}}^1$ ,

alors  $B_\sigma = B_\mu$

□

Par exemple, la figure 4.15 représente des simpleïdes de BÉZIER de type (2,1) dont certaines faces sont dégénérées (en rouge). La figure 4.16 illustre un ensemble simpleïdal de BÉZIER, certains simpleïdes sont dégénérés (en rouge).

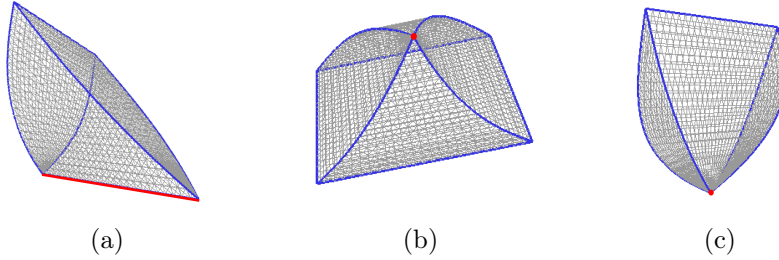


FIGURE 4.15 – (a) – (c) Un prisme dont une partie du bord, représentée en rouge, est dégénérée. (a) Une face carrée est dégénérée en une arête. (b) Une arête est dégénérée en un sommet. (c) Une face carrée est dégénérée en un sommet.

Une conséquence directe de la Propriété 6, est qu'en pratique, il suffit que chaque simpleïde non dégénéré d'un ensemble simpleïdal connaisse ses points de contrôles propres pour pouvoir reconstruire l'espace simpleïdal de BÉZIER entièrement. L'ensemble des points de contrôle de tout simpleïde  $\sigma$  peut être reconstitué en utilisant la Propriété 6 et les indices des opérateurs de face :

- si  $\sigma$  est un sommet, le point de l'espace correspondant à son point de contrôle lui est associé ;

- sinon :
  - si  $\sigma$  est non dégénéré, l'ensemble de ses points de contrôles peut être reconstruit à partir de ses points de contrôles propres et ceux des simpleïdes de son bord, en utilisant les indices de ses opérateurs de face ;
  - si  $\sigma$  est dégénéré, il est nécessaire de reconstituer l'ensemble des points du simplexe non dégénéré dont il est issu, en utilisant les indices des opérateurs de dégénérescence ainsi que la Propriété 6, qui lie les points de contrôle de  $\sigma$  et ceux de  $\sigma s_j^i$ .

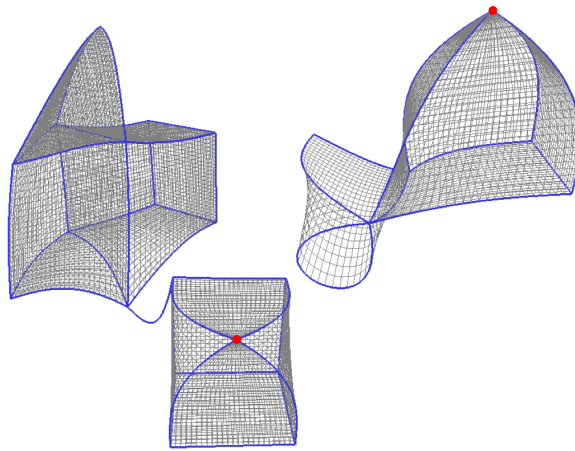


FIGURE 4.16 – Un ensemble simpleïdal plongé dans un espace simpleïdal de BÉZIER.

Comme pour les ensembles simpliciaux, la forme géométrique associée à un ensemble simpleïdal est entièrement définie par l'ensemble des simpleïdes non dégénérés comme le montrent les figures 4.15 et 4.16.

Notons que deux simpleïdes  $\sigma$  et  $\mu$  peuvent avoir des formes similaires, mais des types différents et dans ce cas, ils ne pourront pas être identifiés. Cela se produit en particulier lorsque :

- le type de  $\sigma$  est une permutation du type de  $\mu$ . Par exemple, un simpleïde de type  $(1, 2)$  et un simpleïde de type  $(2, 1)$  ont des formes de prisme, mais leurs types sont différents ; ils n'ont pas les mêmes opérateurs de face (le produit cartésien n'est pas commutatif) ;
- un simpleïde possède une face dégénérée. Par exemple, sur la figure 4.17a, les deux faces ont bien une forme triangulaire, mais correspondent à un simpleïde de type  $(1, 1)$  dont une arête est dégénérée pour l'une, et à un simpleïde de type  $(2)$  pour l'autre. Comme le montrent les Figures 4.17b et 4.17c, les structures de leurs points de contrôle sont différentes.



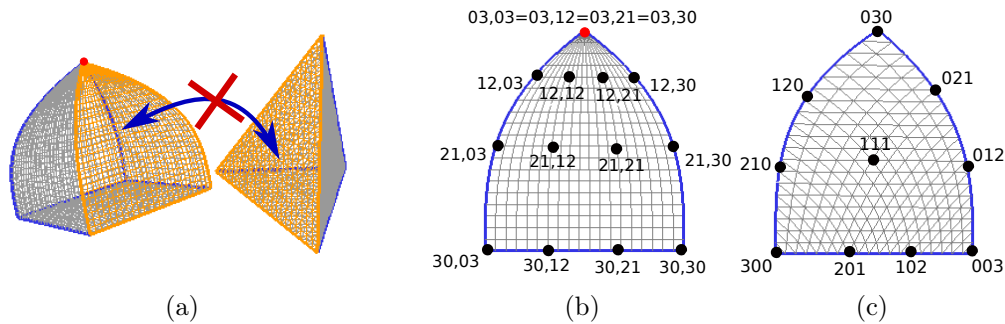


FIGURE 4.17 – (a) Deux faces de forme triangulaire, leur structure n'est pas la même. La structure des points de contrôle d'un carreau de BÉZIER dont une arête est dégénérée (b) est différente de celle d'un triangle de BÉZIER (c).

#### 4.3.5.1 Cône simploldal

Par définition, le résultat d'une opération de cône simploldal contient des simploldes dégénérés (cf. section 2.5.2.2 page 62). Par exemple, la pyramide à base carrée représentée sur la figure 4.17a est obtenue par une opération de cône sur un simploldes de type (1, 1). Il s'agit d'un cube dont une face carrée est dégénérée en un sommet. Tous les points de contrôle de cette face sont égaux à l'unique sommet de son bord, représenté en rouge. Les autres points de contrôle peuvent être obtenus par interpolation à partir du point correspondant à ce sommet, et des points du simploldes de type (1, 1) sur lequel l'opération a été appliquée.

#### 4.3.6 Structures cellulaires

Concernant les cartes combinatoires, qui permettent la multi-incidence, il est intéressant de pouvoir associer une géométrie courbe à chaque cellule. Il n'existe pas de lien aussi fort que ceux présentés pour les structures simpliciales et simploldales avec les espaces de BÉZIER. De plus à notre connaissance, la plupart des modeleurs cellulaires visent à générer des maillages, et sont basés sur des plongements linéaires.

Dans [Bechmann 1997], des liens structurels ont été mis en avant entre les chaînes de cartes et les carreaux de GREGORY-BÉZIER cubiques et triangulaires de degré 3. De manière informelle, les carreaux de GREGORY-BÉZIER de degré 3 sont définis par 4 courbes de BÉZIER ayant chacune leurs points de contrôle. Comparé aux carreaux de BÉZIER classiques, certains points sont "dupliqués" afin de mieux contrôler les assemblages au niveau des coins des carreaux. Un carreau de GREGORY-BÉZIER de dimension 2 et degré 3 possède 20 points de contrôle, soit exactement le nombre de brins d'une chaîne de cartes représentant une face carrée et son bord. Les auteurs proposent d'associer un point de contrôle à chaque brin. La géométrie de chaque cellule principale de la chaîne de carte est ainsi définie de manière paramétrique. Si cette solution semble s'étendre de manière directe en dimension supérieures pour des cellules cubiques et triangulaires de degré 3,

l'extension à des cellules quelconques ou à d'autres degrés ne semble pas immédiate.

En CAO, une technique classique consiste à utiliser des morceaux de surfaces découpées, ou *trimmées* dans des espaces paramétriques de simplexes ou des carreaux de BÉZIER. Par exemple, en découpant un pentagone dans l'espace paramétrique d'un triangle de BÉZIER, on obtient un morceau de surface *trimmé*, que l'on peut associer à une 2-cellule. Un des problèmes majeurs est le maintien de la structure au sein de l'objet géométrique. En effet, si dans la structure combinatoire, deux cellules partagent une arête, alors on souhaite que l'intersection des deux cellules *trimmées* correspondantes s'intersectent en une courbe. Généralement, ce problème est traité par approximation d'une courbe. Il serait bien évidemment plus intéressant de maintenir la structure dans le modèle géométrique, comme dans les espaces de BÉZIER.

## 4.4 Application à la modélisation d'objets tubulaires

Cette section se base sur nos travaux [Peltier 2021] effectués en collaboration avec GÉRALDINE MORIN, et concerne la modélisation d'objets tubulaires volumiques paramétriques à partir d'un squelette, que l'on appelle aussi *dessin en bâtons*. Ces travaux montrent un cas d'application des ensembles semi-simploïdaux, tirant parti à la fois de la structure combinatoire et de leur plongement "naturel" dans des espaces de BÉZIER.

### 4.4.1 Contexte et objectifs

Les modèles paramétriques surfaciques basés sur les espaces de BÉZIER, ou d'autres espaces comme les B-splines ou les NURBS, sont les modèles standards utilisés dans le noyau des systèmes CAO [Farin 2002]. Ils offrent la possibilité d'étudier et d'assurer une continuité lisse pour les surfaces géométriques 3D, tout en offrant un contrôle intuitif et un échantillonnage *à la carte*. La version linéaire par morceaux de ces modèles, ou maillages, est la représentation la plus usuelle des objets volumiques, et sont l'entrée naturelle des pipelines de rendu et le support du plaquage de texture. Ils sont utilisés dans des applications qui ne requièrent pas de surfaces lisses, comme par exemple dans les jeux. Plus récemment, l'analyse isogéométrique (IGA) [Cottrell 2009, Hughes 2005] propose d'utiliser directement le modèle géométrique pour effectuer des calculs physiques dans le cadre de la Fabrication Assistée par Ordinateur.

Lorsque les propriétés physiques d'un objet volumique doivent être contrôlées et analysées, comme pour l'impression 3D, la représentation d'un volume par son bord ne suffit pas et une subdivision volumique explicite doit être utilisée [Livesu 2017]. Des méthodes discrètes générant des maillages volumiques ont été proposées. Par exemple [Lyon 2016] propose d'extraire un maillage volumique à partir de sa surface. [Massarwi 2016] propose une représentation volumique paramétrique continue et lisse basée sur des B-splines ; ils considèrent le volume issu de produits tensoriels et se basent sur des techniques de *trimming*. Ces modèles volumiques différentiables peuvent être utilisés comme support pour des calculs mécaniques [Massarwi 2019]).

Les squelettes offrent une représentation intuitive, simplifiée et de dimension réduite d'un objet 3D [Tagliasacchi 2016]. Ils sont donc intéressants pour la reconstruction de formes (e.g. [Sundar 2003]), la conception de formes, comme ébauche, et pour l'animation (e.g. [Raptis 2011]). Comblant le fossé entre les squelettes et les modèles de surfaces correspondants a été traité par différents travaux [Bærentzen 2012, Usai 2016, Panotopoulou 2018, Fuentes Suárez 2018]. [Livesu 2016] et [Viville 2021] généralisent ces approches pour calculer un maillage volumique d'hexaèdres à partir d'un squelette.

La figure 4.18 illustre les différentes étapes du processus.

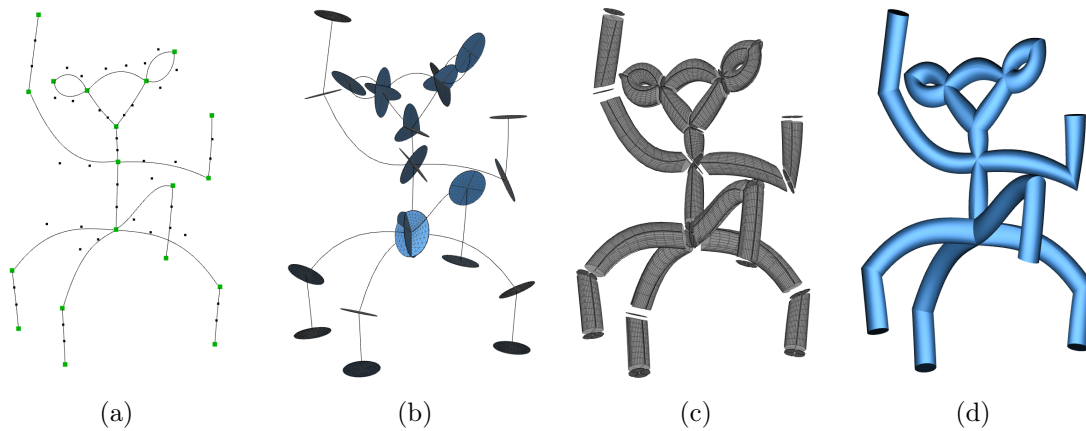


FIGURE 4.18 – Un objet tubulaire volumique paramétrique construit à partir d'un squelette. (a) En entrée : un dessin en bâtons modélisé par un ensemble semi-simplicial de dimension 1, dont la forme est décrite par un assemblage de courbes de BÉZIER. (b) Construction des jonctions en chaque sommet du graphe. (c) Construction et assemblage des branches volumiques sur les jonctions. (d) Résultat du processus : un objet tubulaire volumique paramétrique lisse par morceaux.

Par rapport aux travaux de [Livesu 2017] ou [Viville 2021] qui proposent de calculer un modèle linéaire par morceaux (maillage volumique) à partir d'un squelette, nous calculons un modèle lisse basé sur des éléments polynomiaux. De plus, alors que [Massarwi 2019] utilise des techniques de *trimming* pour calculer un modèle de volume lisse, nous utilisons les ensembles semi-simploïdaux afin d'assurer la cohérence topologique du domaine paramétrique des volumes de BÉZIER. Notre travail généralise et étend aux volumes paramétriques lisses les résultats présentés dans [Panotopoulou 2018], où des maillages de carreaux de surfaces sont calculés.

#### 4.4.2 Branches – Jonctions

Intuitivement, la création de l'objet volumique consiste à "épaissir" le squelette 1D en un assemblage de volumes. On associe à chaque arête  $A$  du squelette, une **branche volumique** qui "suit" la courbe associée à  $A$ , et on associe une **jonction** à chaque sommet

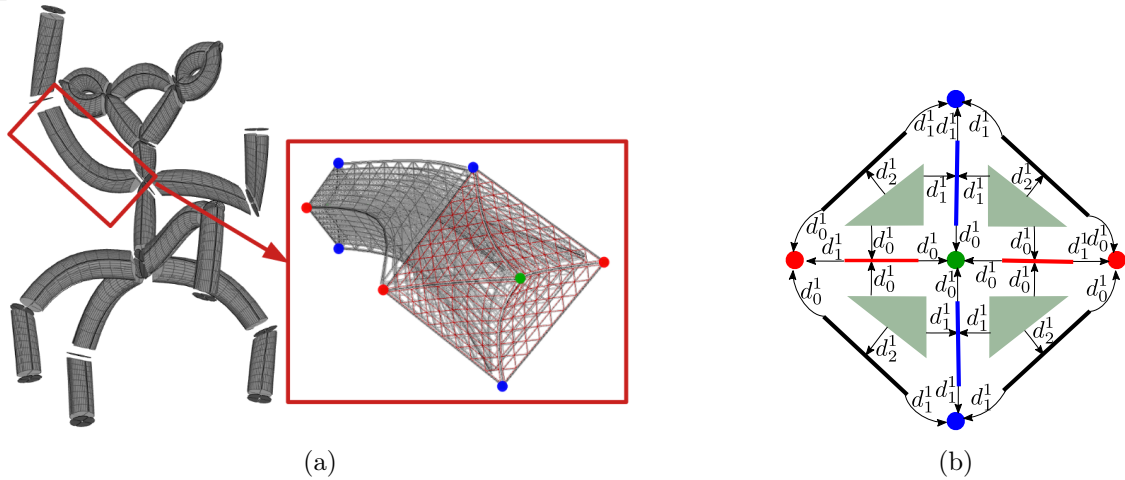


FIGURE 4.19 – (a) Chaque branche volumique est un assemblage symétrique de quatre prismes de BÉZIER ; le bord de chaque branche est composé de quatre carreaux de BÉZIER (on ne considère pas les extrémités). (b) Mise en évidence de la structuration symétrique des prismes, qui se retrouve sur les kites. Les opérateurs de face se déduisent de la couleur des sommets.

du squelette. L'objet volumique tubulaire est alors défini par un ensemble de branches qui sont assemblées de manière continue au niveau des jonctions. Dans [Panotopoulou 2018], toutes les branches ont la même structure régulière : la surface d'une branche est constituée de quatre faces carrées, ou **quads**. Une régularité similaire est fournie par le modèle de volume proposé : chaque branche est un assemblage de quatre prismes, collés le long de faces carrées : les quatre prismes sont disposés symétriquement autour de l'axe de la branche, correspondant au squelette. La même structure composée de quatre triangles se retrouve aux extrémités des branches et au niveau des jonctions. On appelle cet assemblage de quatre triangles un **kite** : cf. figure 4.19b. Une jonction est définie comme un assemblage de kites, ou **kite folio**.

Cette symétrie permet d'assembler les branches entre elles au niveau des jonctions en respectant les couleurs des sommets, *i. e.* les opérateurs de face des triangles. En effet, au niveau d'un **kite**, les couleurs des sommets sont déduits des indices des opérateurs de face. Une branche peut être adjacente à quatre autres branches au maximum (via les quatre triangles du kite), et une jonction peut supporter autant de branches que l'on souhaite : cf. figure 4.20.

#### 4.4.3 Pavage quad de la sphère

Un des principaux enjeux dans le processus est la création des jonctions. Sur le squelette, on considère une sphère unitaire autour de chaque sommet  $v$  de degré  $n \geq 2$  : chaque arête incidente à  $v$  est associée à une courbe de BÉZIER, et sa tangente en  $v$  définit un point sur la sphère. On appelle ces points les **points verts**. Nous construisons

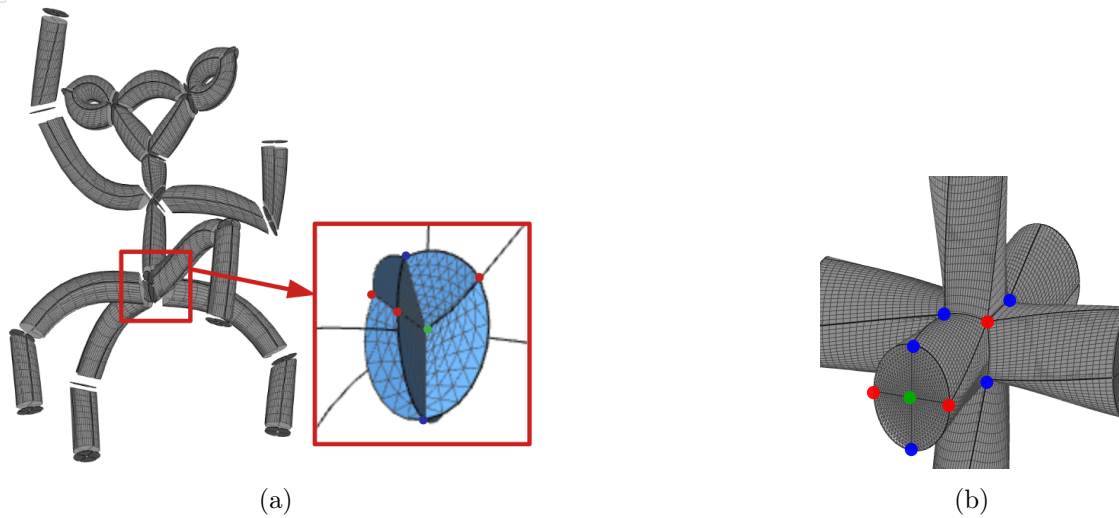


FIGURE 4.20 – (a) Chaque jonction est un assemblage de kites, chaque kite est le support d’une branche. (b) Six branches sont assemblées au niveau d’une jonction. Chaque branche partage un quart de kite avec quatre branches voisines distinctes. Toutes les branches ont comme sommet commun le point vert de la jonction.

une quadrangulation où chaque quad correspond à un point vert, en considérant chaque branche de manière incrémentale. Une fois la quadrangulation établie, le kite folio est créé et les branches sont assemblées, chacune sur son kite. La figure 4.21 illustre le processus de création d’une jonction.

Les quadrangulations que nous considérons sont des **quadrangulations simples** sur la sphère correspondant à une classe de graphes simples planaires, c’est-à-dire sans boucle, et tel que deux arêtes distinctes ne peuvent pas avoir les mêmes sommets extrémités. Les quadrangulations simples sur des surfaces ont été étudiées dans [Nakamoto 1996].

[Batagelj 1989] étudie les classes de quadrangulation calculées de manière inductive, *i. e.* en partant d’une configuration initiale en ajoutant des quads. Une approche similaire est menée dans [Brinkmann 2005], où des opérations d’**expansion** et leurs inverses, les **réductions de face** mettent en jeu des sommets de degré minimal 2 ou 3, correspondant à un cas particulier de **contraction de face** définies dans [Nakamoto 1996]. De manière simplifiée, ces opérations consistent à ajouter ou supprimer des quads en préservant une quadrangulation.

L’approche suivie dans [Panotopoulou 2018] est basée sur la division, ou *split* d’un quad en deux, correspondant à une opération d’expansion de [Brinkmann 2005]. Dans la quadrangulation résultante, au moins deux quads partagent 2 arêtes adjacentes. Cette approche ne permet donc pas d’obtenir des configurations où chaque branche est adjacente à quatre branches distinctes comme représenté sur la figure 4.20b. L’approche incrémentale suivie dans [Viville 2021] est basée sur l’utilisation de la triangulation de Delaunay calculée à partir de l’enveloppe convexe des points verts répartis sur la sphère. Le graphe corres-

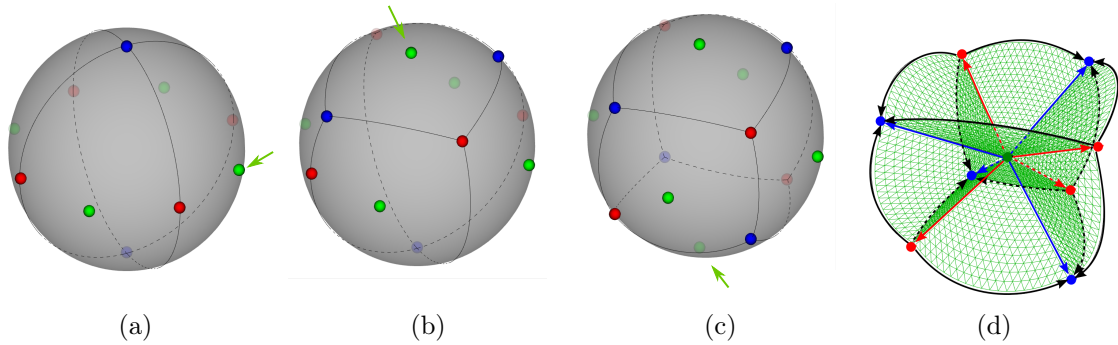


FIGURE 4.21 – (a) – (c) Illustration de l'algorithme incrémental de quadrangulation de la sphère. À chaque étape, un point vert est ajouté, entraînant l'ajout d'un quad dans le pavage de la sphère. (d) La jonction est finalement créée en effectuant une opération de cône sur le graphe correspondant au pavage quad, avec comme nouveau sommet le centre de la sphère. Cette jonction correspond à la configuration représentée sur la figure 4.20b.

pendant est ensuite modifié par des opérations de suppression et d'ajouts d'arêtes jusqu'à ce que chaque sommet soit de degré 4, obtenant ainsi le graphe dual de la quadrangulation.

Dans notre contexte, les opérations d'expansion et de réduction de *quads* correspondent à ajouter ou supprimer une branche au niveau de la jonction. Nous avons défini des opérations d'**ouverture** et de **fermeture** correspondant à l'ajout et à la suppression d'un quad. Nos résultats sont similaires à ceux de [Brinkmann 2005], mais ils sont plus adaptés à des considérations géométriques. En particulier, nous avons établi et prouvé le Théorème 7 qui garantit que toute quadrangulation est atteignable en utilisant une suite d'opérations d'ouvertures. L'idée de la preuve est de partir d'une configuration quelconque, et de montrer qu'il existe toujours une suite de fermetures permettant d'obtenir la quadrangulation canonique de la sphère à deux quads. Les détails de la preuve sont disponibles dans [Peltier 2021].

**Théorème 7** *Toute quadrangulation simple de la sphère, contenant  $n \geq 2$  quads, peut être obtenue à partir de la quadrangulation simple canonique composée de 2 quads, par application d'une suite de  $n - 2$  opérations d'ouvertures.*

L'algorithme que nous proposons est incrémental : il considère les points verts un par un (cf. figure 4.21). En pratique, nous travaillons sur le graphe dual de la quadrangulation, où chaque sommet correspond à un point vert ; nous maintenons le graphe dual où chaque sommet est de degré 4.

Le graphe dual est représenté par une carte combinatoire de dimension 2, ce qui permet de savoir, à chaque étape, dans quelle face se trouve le nouveau point vert à traiter.

À partir de ce graphe dual, les positions géométriques des points rouges et bleus de chaque quad sont calculés via une heuristique, définissant ainsi la quadrangulation, que nous modélisons par un ensemble semi-simplicial de dimension 1 où les opérateurs de face de chaque arête sont déduits de la couleur rouge ou bleue des sommets. La jonction est

finaleme<sup>nt</sup> créée en effectuant une opération de cône sur la quadrangulation, avec comme nouveau sommet le centre de la sphère : cf. figure 4.21d.

Comme chaque arête de la quadrangulation est partagée par exactement deux quads, chaque triangle d'une jonction est commun à exactement deux *kites*, correspondant à deux branches adjacentes. Notons que la géométrie de chaque arête de la quadrangulation est une géodésique, c'est-à-dire un arc de **grand cercle** (*i. e.* dont le plan support contient le centre de la sphère). Plus précisément, les deux sommets d'un arc passent par un unique grand cercle<sup>1</sup>, définissant ainsi deux arcs possibles. Dans certaines configurations, comme par exemple lorsque toutes les branches ont des directions proches (cf. figure 4.22), certains arcs ont une longueur supérieure à  $\pi$ . Le choix de l'arc associé à chaque arête est traité dans notre algorithme au moment de l'ajout de chaque point vert.

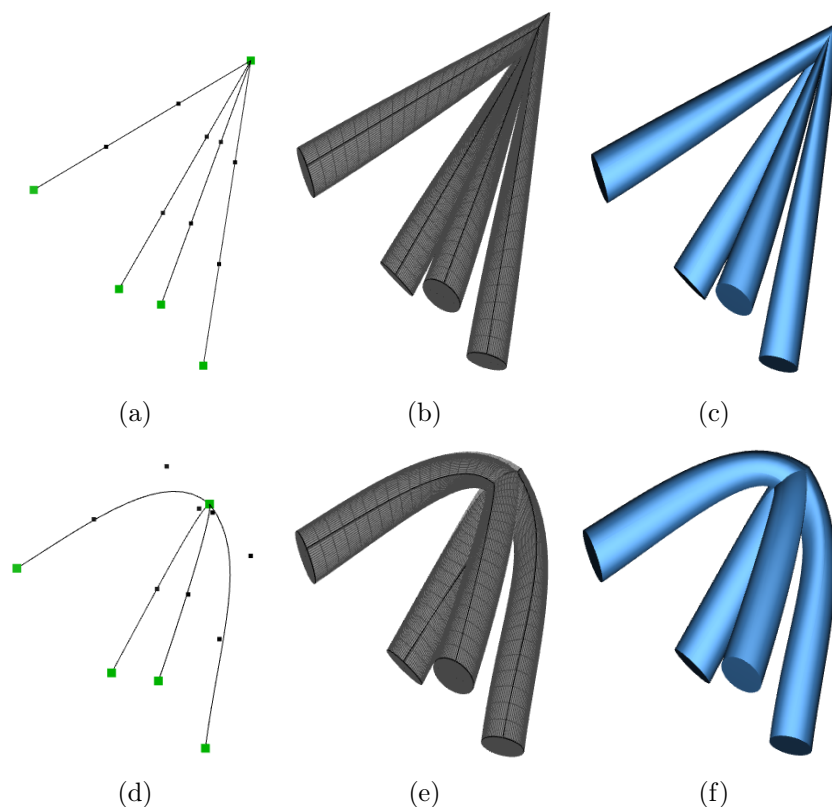


FIGURE 4.22 – (a) – (c) Une jonction composée de quatre branches ayant des directions proches. La quadrangulation de la sphère est donc composée de quatre quads. (d) – (f) En changeant les directions des arêtes du squelette, la jonction obtenue est lissée.

#### 4.4.4 Géométrie des branches

Une fois l'ensemble des jonctions créé, il reste à définir la géométrie des branches et à les assembler au niveau des jonctions sur les *kites* correspondants, en respectant les

1. Sauf cas particulier de deux points antipodaux qui appartiennent à une infinité de grands cercles.

couleurs des sommets.

Les points de contrôle de chaque kite de branche sont placés sur les plans correspondants aux quatre triangles de chaque kite de jonction. Il reste alors à positionner les points de contrôle internes de chaque branche afin de contrôler les volumes de BÉZIER. La courbe centrale de chaque branche correspond à celle du squelette. Nous prenons deux critères en considération pour définir la géométrie des branches :

- *minimisation des twists* : des twists peuvent se produire lorsque la section d'une branche tourne autour de la courbe centrale,
- *préservation de la section* : le long d'une branche, la surface correspondant à sa section dépend des points de contrôle intermédiaires. L'objectif est garantir une épaisseur régulière sur toute la longueur de la branche.

La première étape est la mise en correspondance des points rouges et bleus des kites des branches avec les points rouges et bleus des kites des jonctions correspondantes. Afin de minimiser les twists le long de chaque branche, nous nous sommes basés sur la méthode utilisée dans [Panotopoulou 2018] utilisant l'algorithme de *minimisation de rotation des frames* (*rotation minimizing frames*, ou RMF) proposé par [Wang 2008]. Au niveau de chaque jonction, nous choisissons l'appariement entre le kite de la branche et le kite correspondant de la jonction minimisant l'angle de rotation entre les deux kites. La figure 4.23 illustre deux appariements possibles entre un kite d'une branche et celui de sa jonction. L'appariement représenté en (a) minimise le twist de la branche. Dans la configuration (c) aucun appariement n'est significativement meilleur que l'autre (cas d'un twist à  $90^\circ$ ). Dans ce cas, on permute les couleurs rouges et bleues de toute la jonction. Bien entendu, cette permutation des couleurs n'est parfois plus possible lorsque l'objet tubulaire présente des cycles de branches.

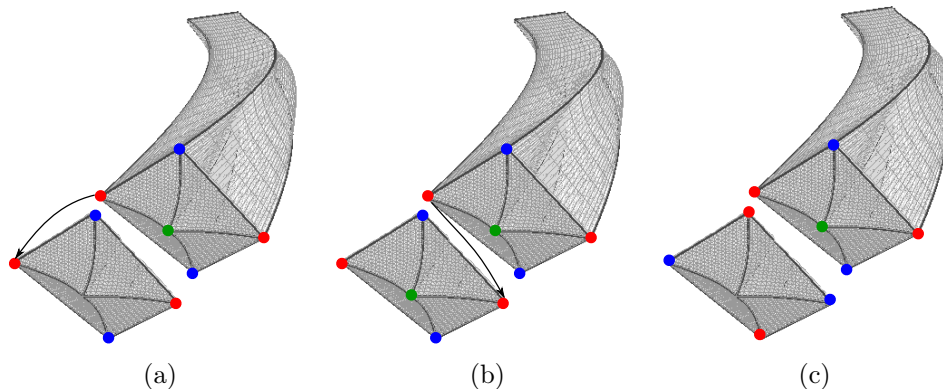


FIGURE 4.23 – Appariement du kite d'une branche avec le kite d'une jonction. L'appariement (a) minimise le twist comparé à l'appariement (b). Lorsque la configuration (c) se présente, on échange les couleurs rouge/bleu de la jonction lorsque cela est possible, afin de se retrouver dans la configuration (a).

À ce stade, les points de contrôle des extrémités des branches sont positionnés selon les kites, et les points de contrôle de la courbe de BÉZIER centrale  $c$  d'une branche sont ceux de la courbe correspondant dans le squelette.



Afin d'éviter des aplatissements de la branche et préserver son épaisseur, les points de contrôle internes des volumes doivent être placés sur des plans orthogonaux à la courbe. Notons que l'algorithme de RMF est a priori défini sur la courbe elle-même et non pas pour ses points de contrôle. Néanmoins, l'algorithme de double réflexion [Wang 2008] nécessite en entrée uniquement la tangente en un point afin de calculer la *frame* locale basée sur un plan orthogonal à ce point. Nous avons donc besoin d'obtenir une tangente en chaque point de contrôle interne. Pour cela, nous utilisons le polygone de contrôle de la courbe  $c$ . Plus précisément, le polygone de contrôle d'une courbe de BÉZIER  $c$  de degré  $d$  définie à partir de  $d + 1$  points de contrôles converge de manière lisse vers la courbe [Morin 2001], mais seulement  $d$  tangentes de contrôle sont définies par le polygone de contrôle. Ces  $d$  tangentes définissent les points de contrôle de l'hodographe de la courbe, *i. e.* la dérivée première de  $c$  qui est une courbe de BÉZIER de degré  $d - 1$ . Afin d'obtenir une tangente par point de contrôle de  $c$ , nous effectuons donc une élévation de degré de l'hodographe. Ainsi on peut déduire  $d + 1$  tangentes de contrôle, et donc une *frame* par point de contrôle : cf. figure 4.24.

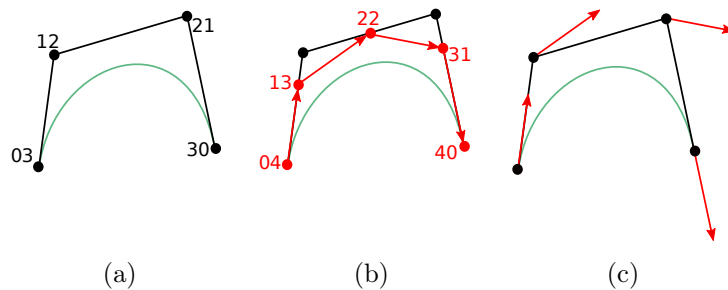


FIGURE 4.24 – (a) Le polygone de contrôle d'une courbe de BÉZIER de degré 3 définit trois vecteurs correspondant aux 3 points de contrôle de l'hodographe défini par une courbe de degré 2. (b) Élévation du degré de l'hodographe : 4 vecteurs définissent une courbe de degré 3. Le nouveau polygone de contrôle définit les tangentes (en rouge) en chaque point de contrôle de la courbe initiale (a).

Les points de contrôle internes des branches sont ainsi interpolés entre les deux kites extrémités dans chaque *frame* locale au niveau de chaque point de contrôle de la courbe. En pratique, cela est fait pour chaque triangle de chaque kite. Au final, l'utilisation de ces frames locales permet de garantir une épaisseur globalement constante tout au long de la branche, cf : figure 4.25.

Les contraintes géométriques liées aux éventuelles intersections entre les branches ou auto-intersections ne sont pas traitées.

#### 4.4.5 Résultats

La figure 4.26 montre des modèles d'objets tubulaires volumiques polynomiaux, obtenus avec notre méthode à partir de squelettes. Tous les exemples contiennent des cycles de branches. Sur le premier exemple, tous les sommets du squelette sont de degré au plus 3. Le deuxième et le troisième exemple présentent un noeud de degré 9 et plusieurs branches ont

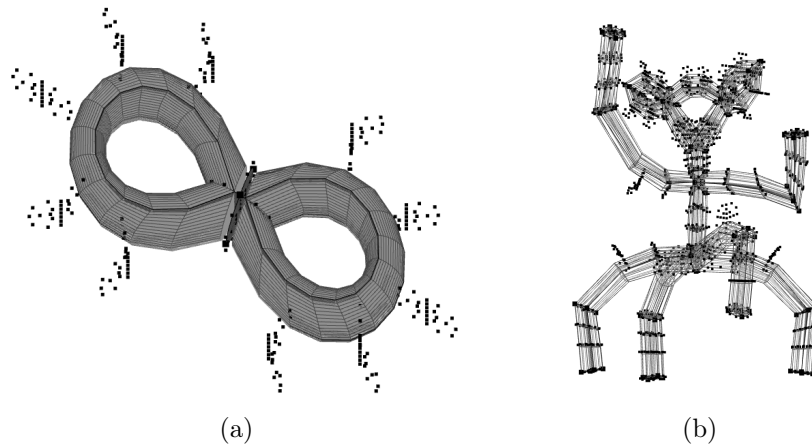


FIGURE 4.25 – (a) – (b) En chaque point intermédiaire de la courbe directrice de la branche, les points de contrôles internes des branches sont positionnés en fonction des tangentes de contrôle.

les mêmes extrémités. Le dernier exemple contient des branches dont les deux extrémités sont incidentes à une même jonction, ainsi que des courbes de différents degrés.

Bien que nous n'ayons pas d'objectif de performance, les temps de calculs sont les suivants :

- 750 ms pour la poubelle (première ligne),
- 117 ms pour le trèfle (deuxième ligne),
- 175 ms pour la pieuvre (troisième ligne)
- 80 ms pour le serpent (quatrième ligne).

## 4.5 Conclusion

Nous avons rappelé comment construire la réalisation géométrique des complexes simpliciaux abstraits et présenté celle des simplexes simploldaux abstraits. Nous avons ensuite présenté deux approches permettant d'associer une forme à une structure :

- **plongements linéaires** : de manière générale, pour les structures ne présentant pas de multi-incidence comme les complexes simpliciaux, les complexes simploldaux abstraits ou les  $n$ -surfaces, on peut associer une forme respectant la structure en définissant uniquement la position des sommets. La réalisation géométrique des complexes simpliciaux et simploldaux abstraits permet une telle construction, dans un espace généralement trop grand. De manière générale, il faut s'assurer que les contraintes structurelles sont bien respectées, c'est-à-dire que si deux cellules géométriques s'intersectent, elles s'intersectent en une cellule correspondant à la structure.
- **plongements non linéaires** : les espaces paramétriques de BÉZIER permettent d'associer une forme courbe aux simplexes et aux simploldes. L'ensemble des points de contrôle définissant un espace de BÉZIER simplicial (resp. simploldal) est na-

turellement structuré en ensemble simplicial (resp. simploldal). Si l'on souhaite préserver la structure sur l'objet géométrique afin d'obtenir un  $CW$ -complexe, il est là aussi nécessaire d'ajouter des contraintes géométriques sur les intersections ou auto-intersections des cellules.

Nous avons présenté un cadre applicatif utilisant les ensembles simploldaux : la modélisation d'objets tubulaires volumiques paramétriques à partir de squelettes. La cohérence entre la structure du domaine paramétrique et la géométrie des objets tubulaires est garantie par l'utilisation des ensembles semi-simploldaux. La géométrie des branches est contrôlée par la définition de *frames* orthogonales en chaque point de contrôle interne de la courbe guidant chaque branche.

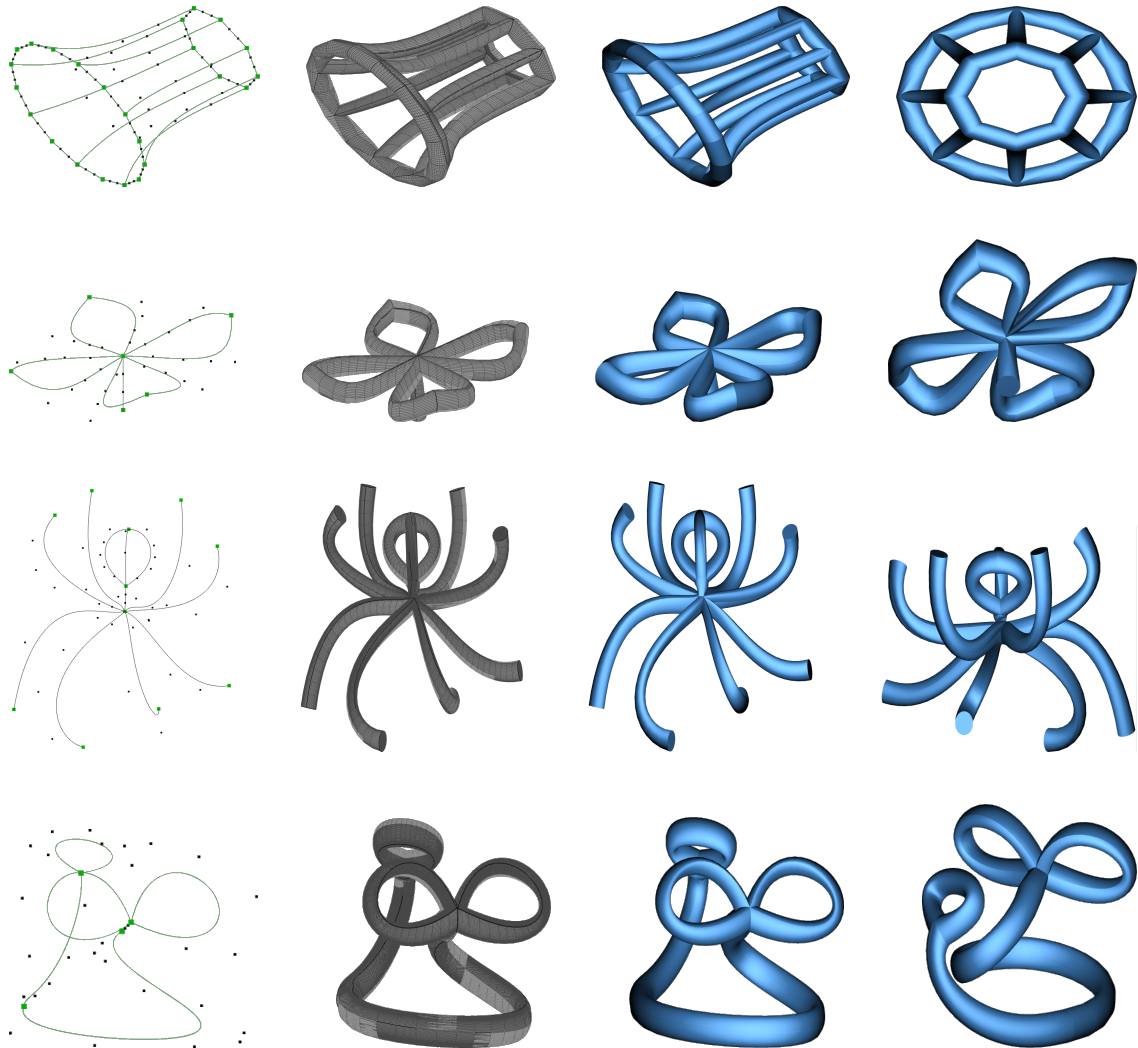


FIGURE 4.26 – De gauche à droite : des squelettes définis par des assemblages de courbes de BÉZIER (en vert), les points de contrôle sont représentés en noir ; les maillages volumiques 3D correspondants ; un rendu de l'objet ; une seconde vue du même objet.



# Conclusion - Perspectives

---

## 5.1 Bilan

### Sommaire

---

<b>5.1 Bilan</b> . . . . .	<b>135</b>
5.1.1 Structures combinatoires . . . . .	135
5.1.2 Calcul de l'homologie . . . . .	136
5.1.3 Objets géométriques . . . . .	136
<b>5.2 Projet de recherche</b> . . . . .	<b>137</b>
5.2.1 Structures combinatoires . . . . .	137
5.2.2 Calcul de l'homologie . . . . .	138
5.2.3 Objets géométriques . . . . .	139

---

Nous avons présenté une vision de la modélisation géométrique à base topologique selon le triptyque *structures combinatoires, calcul de propriétés topologiques, objets géométriques*.

### 5.1.1 Structures combinatoires

Concernant les structures combinatoires, nous avons présenté une classification mettant en jeu différentes structures basées sur des cellules de différents types. Toutes les structures présentées se déduisent des ensembles semi-simpliciaux par trois mécanismes principaux : le produit cartésien, la numérotation cellulaire et la suppression de la multi-incidence.

Afin de présenter une classification complète, nous avons défini les complexes simpleïdaux abstraits qui étendent les complexes simpliciaux abstraits, ainsi que la notion de celluloïde qui étend la notion de cellule aux structures simpleïdales. Nous avons ainsi posé le cadre permettant de définir les structures combinatoires celluloïdales basées sur les cartes combinatoires ou les graphes d'incidence.

Nous avons enfin montré comment le mécanisme de dégénérescence permet la définition d'opérations de base : les ensembles simpliciaux permettent de définir l'opération de produit cartésien simplicial, les ensembles simpleïdaux permettent de définir l'opération de cône simpleïdal.

Dès que l'on souhaite représenter un objet subdivisé, il est important de choisir la structure la mieux adaptée au contexte dans lequel on souhaite se placer. Afin de pouvoir effectuer un choix adapté, il est essentiel de répondre aux questions suivantes :

- *Quelles sont les cellules manipulées ?* On choisira une structure simpliciale ou cubique si les cellules sont régulières et toutes identiques, simplloïdales si les cellules sont régulières mais si plusieurs types de cellules sont nécessaires, cellulaires lorsque les cellules sont "quelconques".
- *Quelles sont les contraintes sur les assemblages ?*
  - Du point de vue de chaque cellule et son bord, si la multi-incidence est nécessaire, ou si deux cellules peuvent avoir même bord, on choisira une structure permettant de représenter des assemblages quelconques : un ensemble semi-simplicial ou simplicial, un ensemble semi-simplloïdal ou simplloïdal, ou une carte combinatoire ;
  - du point de vue de l'assemblage global, si l'objectif est de se rapprocher au plus près des variétés, on utilisera une structure optimisée permettant de représenter une quasi-variété simpliciale, simplloïdale ou cellulaire ( $G$ carte ou  $n$ -surface).
- *Quelles sont opérations que l'on souhaite appliquer ?* Excepté l'opération de cône qui n'est pas définie pour les ensembles semi-simplloïdaux, les opérations de cône, de produit cartésien et d'identification sont définies pour chaque type de structure.

### 5.1.2 Calcul de l'homologie

Concernant le calcul de groupes d'homologie, nous avons rappelé les principes des méthodes globales basées sur l'étude des relations d'incidence entre cellules, via des réductions de matrices d'incidence. Les résultats classiques définis pour des  $CW$ -complexes ont été étendus pour les structures cellulaires dont le bord de chaque cellule a l'homologie d'une sphère.

Nous avons présenté des méthodes incrémentales permettant de déduire l'homologie d'un objet résultant d'une opération :

- l'homologie d'un objet résultant d'un cône est triviale ;
- l'homologie d'un objet résultant d'une identification ou d'une dégénérescence peut être calculée en utilisant le théorème des suites exactes courtes effectives ;
- l'homologie d'un objet résultant d'un produit cartésien peut être calculée en utilisant la formule de KÜNNETH.

Les lemmes de perturbation *Easy* et *Basic* permettent de maintenir des équivalences homologiques sur des structures cellulaires, en se basant sur leur définition constructive utilisant les opérations de cône et d'identification cellulaire.

### 5.1.3 Objets géométriques

Concernant les aspects géométriques, nous avons présenté la réalisation géométrique canonique des complexes simpliciaux abstraits et des complexes simplloïdaux abstraits. De manière plus générale, un plongement linéaire peut être associé aux structures sans multi-incidence : la forme de chaque cellule est définie à partir de la position de l'ensemble de ses sommets. Ce type de plongement peut être utilisé pour tout type de structure, y

compris cellulaire. Dans ce cas, les objets doivent être suffisamment subdivisés afin de ne pas contenir de multi-incidence ; ils doivent de plus respecter certaines contraintes géométriques comme la planarité des faces ou l'absence d'intersection de cellules ne respectant pas la structure. Cela permet notamment de générer des maillages non dégénérés. Dans d'autres contextes, par exemple lorsque l'on représente des objets par des ébauches minimalistes, de la multi-incidence peut apparaître et ce type de plongement produit alors des cellules géométriques dégénérées.

Les espaces paramétriques de BÉZIER permettent d'associer une forme courbe aux simplexes et aux simplexes. Plus généralement, nous avons montré comment les espaces de BÉZIER simpliciaux et simplexes sont naturellement structurés en ensembles simpliciaux et simplexes. La clé de cette structuration est la numérotation des points de contrôle utilisant les multi-indices. L'ensemble des points de contrôle d'un espace de BÉZIER peut ainsi être réparti sur un ensemble simplicial ou simplexe, explicitant ainsi les relations d'incidence entre les cellules, tout en évitant de dupliquer de l'information.

Nous avons enfin présenté un cadre applicatif permettant de modéliser des objets tubulaires volumiques définis sur des espaces paramétriques de BÉZIER, dont la structure est contrôlée par un ensemble semi-simplexe. Les objets tubulaires sont définis à partir de dessins en bâtons, ou squelettes  $1D$ . Le processus complet utilise différentes structures combinatoires plongées dans  $\mathbb{R}^3$  : des ensembles semi-simpliciaux de dimension 1 pour représenter les squelettes, des cartes combinatoires  $2D$  pour représenter les quadrangulations de sphères, des ensembles semi-simplexes de dimension 2 pour représenter les jonctions, et des ensembles semi-simplexes de dimension 3 pour modéliser les objets tubulaires. Nous avons proposé un algorithme incrémental de construction des jonctions, et prouvé que toutes les configurations topologiques d'agencement de branches sont gérées. Nous minimisons les effets de "twist", et une épaisseur globalement constante des branches est assurée par l'utilisation d'un algorithme de *rotation minimizing frames*.

## 5.2 Projet de recherche

### 5.2.1 Structures combinatoires

La classification présentée dans ce manuscrit ne met pas en évidence un manque notable de structure ou d'opérations, et les liens les différentes structures sont établis. Il reste à formaliser les définitions des Gcartes simplexe permettant de modéliser les quasi-variétés celluloïdales, des chaînes de cartes celluloïdales permettant de modéliser des assemblages quelconques de celluloïdes, et les  $CF$ -ordres simplexes. Il semble également intéressant d'étudier des définitions alternatives des complexes simplexes abstraits afin de répondre aux limitations présentées. Par exemple, on peut envisager d'utiliser un ensemble de sommets non partitionné afin de gérer des simplexes abstraits dégénérés.

Afin de finaliser ce travail de classification, il reste à établir des liens entre les structures celluloïdales. En particulier : *la notion de chaînes de surface se généralise-t-elle au produit cartésien ? C'est-à-dire : retrouve-t-on les propriétés de quasi-variétés cellulaires si l'on ne considère que des  $CF$ -celluloïdes dont chaque composante correspond à un cône sur une  $n$ -surface ?*



La définition des ensembles simpliciaux et simploldiaux, intégrant des opérateurs de dégénérescence, a permis en particulier la définition d'opérations de base : le produit cartésien simplicial, et le cône simploldial.

Nous n'avons pas étudié la définition de structures cellulaires intégrant de la dégénérescence, car l'apport de telles structures ne nous semble pas pertinent. En effet, les opérations de base (cône, identification et produit cartésien) sont définies sur les structures cellulaires, ainsi que de nombreuses opérations (suppression, contraction, split, chanfreinage...).

Récemment, nous avons mis au jour une piste de recherche autour de problématiques de transformations de graphes, en particulier en lien avec le modelleur Jerboa [Belhaouari 2014]. De manière simplifiée, ce modelleur dont le noyau est basé sur les Gcartes permet de prototyper des modelleurs géométriques en spécifiant les opérations géométriques à base de topologie par des règles de transformation de graphes. Lors de premiers échanges avec PASCALE LE GALL (MICS Supélec Paris), ROMAIN PASCUAL (MICS Supélec Paris), AGNÈS ARNOULD (XLIM Poitiers) et HAKIM FERRIER BELHAOUARI (XLIM Poitiers), nous avons identifié d'autres modèles, notamment simpliciaux, qui semblent être adaptés à cette approche. L'objectif est donc d'étudier en profondeur comment ces structures et leurs opérations peuvent entrer dans le cadre de la modélisation géométrique à base de règles de transformations de graphes, où la théorie des *catégories* est au coeur du domaine. La théorie des catégories est largement répandue dans divers domaines des mathématiques, notamment en topologie où les ensembles simpliciaux ont été définis en termes de *catégories*. Nous projetons également, à court terme, d'étudier ce formalisme qui pourrait permettre de transférer des connaissances d'un domaine à l'autre.

Enfin, nous débutons l'encadrement de la thèse de VINCENT COMMINS en collaboration avec SÉBASTIEN HORNA (XLIM POITIERS), ARTHUR CAVALIER (XLIM POITIERS) et CHRONOSPEDIA, encyclopédie du savoir horloger. L'objectif principal est d'automatiser le processus de génération de modèles 3D de systèmes d'horlogerie. Dans un premier temps, nous souhaitons définir un processus de génération procédurale basée sur la paramétrisation de pièces d'horlogerie. L'objectif est de développer des opérations destinées à automatiser la modélisation de systèmes mécaniques d'engrenages. Dans un second temps, l'objectif est d'utiliser ce système de paramétrisation afin d'alimenter un processus d'intelligence artificielle destinée à de la reconnaissance de formes 3D dans une horloge. À terme, il s'agira d'analyser des données issues de différents systèmes d'acquisition (nuages de points, grilles 3D, maillages) et d'utiliser ce système d'IA afin de localiser les différentes pièces pour produire, *in fine*, un jumeau numérique du mécanisme.

### 5.2.2 Calcul de l'homologie

Concernant le calcul de groupes d'homologie, des pistes de recherches restent encore à explorer concernant les approches incrémentales. En particulier, il semble intéressant de poursuivre l'étude des liens entre homologie effective et homologie persistante. En effet, lors de la construction d'un objet par identifications, la suite des "gros" complexes forme une filtration, qui peut donc être exploitée dans le cadre de l'homologie persistante. Nous avons établi des liens entre l'homologie persistante de tours et l'homologie effective ; il serait

intéressant de poursuivre l'étude des liens entre ces deux approches, notamment afin de pouvoir transférer des résultats existants d'une approche à l'autre.

Concernant le contrôle de l'homologie d'un objet au cours d'un processus de construction, nous avons montré comment maintenir une équivalence homologique pour une opération de cône, d'identification, ou de dégénérescence. La formule de KÜNNETH permet de déduire l'homologie d'un objet résultant d'une opération de produit cartésien, mais le calcul d'une équivalence homologique reste à établir. Cela permettrait de pouvoir appliquer les résultats de l'homologie effective pour toute suite d'opérations de constructions.

Lors des travaux de thèse WASSIM RHARBAOUI, en collaboration avec PASCAL LIENHARDT (XLIM Poitiers), SYLVIE ALAYRANGUES (XLIM Poitiers), et GUILLAUME DAMIAND (LIRIS Lyon), nous avons mis en évidence la possibilité de paralléliser le calcul incrémental de l'homologie d'un objet distribué. À court terme, l'objectif est de finaliser la mise en oeuvre de ces travaux.

Depuis 2020, dans le cadre d'une collaboration initiée avec le Centre d'Investigation Clinique (CIC 1402) du CHU de Poitiers, via l'encadrement d'un stagiaire de M2, nous explorons les apports possibles de l'utilisation de structures combinatoires et leur caractérisation topologique dans le domaine de l'intelligence artificielle. Actuellement, dans le cadre de l'encadrement de la thèse d'INÉS CASTILLA RIESO, en collaboration avec P. CARRÉ (XLIM Poitiers), P.-J. SAULNIER (CIC 1402, CHU Poitiers) et A. JULIAN (CIC 1402, CHU Poitiers), nous travaillons sur la structuration de données issues de l'utilisation de smartphones par des structures simpliciales, et à leur caractérisation topologique via l'homologie persistante. L'objectif est d'utiliser ces informations pour alimenter des algorithmes d'IA, destinés à de l'aide au diagnostic de la maladie d'ALZHEIMER.

Les données en question sont hétérogènes (texte, géolocalisation, utilisation d'applications...) et ne sont, pour la plupart, pas de nature géométrique. Un premier enjeu est de structurer ces données en établissant des relations d'incidence "pertinentes", au sens où l'homologie persistante calculée sur cette structuration met en avant des indicateurs concernant la détection de la maladie.

Un second enjeu concerne l'interprétation de l'homologie. En effet, comme nous l'avons présenté dans ce document, l'interprétation de l'homologie est généralement une interprétation géométrique, caractérisant les "trous" d'un espace topologique. Bien que la nature des données ne soient pas ici de nature géométrique, elles sont plongées dans un espace géométrique. La question se pose alors de l'interprétation de ces "trous" sur les données elles-mêmes. Dit autrement : *est-on capable d'interpréter l'information homologique en terme métier neurologique ?*

### 5.2.3 Objets géométriques

Concernant les modèles géométriques, plusieurs pistes de recherche sont actuellement en cours, notamment autour de modèles paramétriques et la modélisation d'objets tubulaires.

Concernant les structures cellulaires, nous projetons d'investiguer la possibilité de plonger les cellules dans différents espaces paramétriques. Si cette approche est classique pour des modeleurs surfaciques, cela nous semble plus rare pour la modélisation cellulaire volumique où, bien souvent, objets géométriques associés aux structures sont obtenus par plongements linéaires. Les modèles sont généralement subdivisés de manière à générer des maillages. Le plongement non linéaire de ces structures permettrait de pouvoir répondre à des enjeux d'optimisation et de visualisation. Par exemple, lorsqu'une structure est simplifiée en supprimant des cellules tout en préservant son homologie, la version minimale présente en général de la multi-incidence. La définition d'un plongement non linéaire permettrait de visualiser une forme correspondant à la structure.

La définition des complexes simpléoïdaux abstraits nous a permis de faire le lien avec les supercomplexes de GUGENHEIM. En particulier, nous avons mis en évidence les liens géométriques entre deux simpléoïdes ayant un type ne différant que par des 0. Il semble intéressant de poursuivre l'étude et la définition de la notion de projection d'un espace géométrique à l'autre, afin de pouvoir contrôler la forme géométrique des objets de manière fine.

Concernant les structures simpliciales et simpléoïdales, dont le plongement est "naturellement" effectuée dans des espaces de BÉZIER, il semble intéressant d'étudier d'autres espaces paramétriques, en particulier les espaces Splines ou NURBS. La structuration de tels espaces en structures simpliciales et simpléoïdales semble moins directe, mais les travaux initiés dans [Fuchs 1997] semblent une piste intéressante de travail. Cela permettrait en particulier un contrôle paramétrique *par morceaux* des cellules géométriques, ainsi qu'un contrôle avancé de la continuité [Massarwi 2016].

Concernant la modélisation d'objets tubulaires volumiques, nous travaillons actuellement avec GÉRALDINE MORIN (IRIT Toulouse), sur l'élaboration d'une méthode qui vise à obtenir une quadrangulation de la sphère présentant de bonnes propriétés géométriques. L'objectif à terme est d'obtenir une quadrangulation canonique pour toute configuration de jonction. En complément, les travaux sur l'analyse isogéométrique (IGA) qui proposent d'utiliser directement le modèle géométrique pour effectuer des calculs physiques, ouvre des perspectives intéressantes pour envisager l'utilisation de nos modèles tubulaires dans des cadres applicatifs liés à des problématiques de simulation physique.

Nous avons récemment initié des travaux avec THIERRY BAY (CERAMATHS Valenciennes), LAURA SAINI (CERAMATHS Valenciennes) et GÉRALDINE MORIN (IRIT Toulouse) afin de plonger les objets tubulaires volumiques dans des espaces permettant d'obtenir de manière exacte des branches de section circulaire. Cela n'est pas possible dans les espaces de BÉZIER basés sur les fonctions polynomiales de BERNSTEIN. Les espaces *Algebraic Trigonometric Pythagorean Hodograph*, ou ATPH [Bay 2022] sont basés sur des fonctions polynomiales et trigonométriques permettant de répondre à ce besoin. À terme, l'objectif est d'établir les liens précis entre la structuration des points de contrôles des espaces ATPH et ceux des ensembles semi-simpléoïdaux, en utilisant les multi-indices.

Enfin, d'un point de vue pratique, un modèleur simplloïdal est actuellement en cours de développement en collaboration avec ARTHUR CAVALIER (XLIM Poitiers). Ce projet s'appuie sur des travaux d'étudiants, en particulier sur les stages de fin de master de DAMIEN AHOLOU et d'ALEXIS LOUAIL. L'objectif à terme est de proposer un modèleur basé sur les ensembles simplloïdaux, intégrant à la fois :

- l'ensemble des opérations de construction de base présentées dans ce manuscrit : le cône simplicial, le cône simplloïdal, le produit cartésien simplicial, le produit cartésien simplloïdal et l'identification ;
- le calcul de groupes d'homologie, intégrant à la fois les méthodes globales et incrémentales ;
- un plongement paramétrable dans différents espaces à pôles, comme BÉZIER, ATPH et si possible, également dans des espaces Splines.

Pour conclure, notons que jusqu'à présent j'ai utilisé le pronom *nous* dans tout ce manuscrit. Ce *nous* reflète mon approche de la recherche, basée sur les collaborations et les échanges que j'ai pu avoir avec différents collègues ou étudiants. Pour la suite de ma carrière, je compte m'appuyer sur les collaborations existantes, et en construire de nouvelles, notamment via l'élaboration de projets nationaux et internationaux, en gardant toujours comme ligne de mire le triptyque *structures combinatoires, calcul de propriétés topologiques, formes géométriques*.



# Bibliographie

- [Agoston 1976] M. K. Agoston. Algebraic topology, a first course. Pure and applied mathematics. Marcel Dekker Ed., 1976. (Cité en pages 15, 68 et 70.)
- [Alayrangues 2008] Sylvie Alayrangues, X. Daragon, Jacques-Olivier Lachaud et Pascal Lienhardt. *Equivalence between Closed Connected  $n$ -G-Maps without Multi-Incidence and  $n$ -Surfaces*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. Vol.32, pages p.1–22, 2008. (Cité en page 43.)
- [Alayrangues 2009a] Sylvie Alayrangues, Guillaume Damiand, Laurent Fuchs, Pascal Lienhardt et Samuel Peltier. *Homology Computation on Cellular Structures in Image Context*. In Computational Topology in Image Context, pages 19–28, St. Kathrein/Offenegg, Austria, Ao ?t 2009. (Cité en page 7.)
- [Alayrangues 2009b] Sylvie Alayrangues, Samuel Peltier, Guillaume Damiand et Pascal Lienhardt. *Border operator for generalized maps*. In 15th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI 2009), volume 5810 of *Discrete Geometry for Computer Imagery 15th IAPR International Conference, DGCI 2009, Montréal, Canada, September 30 - October 2, 2009. Proceedings*, pages 300–312, Montreal, Canada, Septembre 2009. Springer Berlin/Heidelberg. (Cité en page 7.)
- [Alayrangues 2011] S. Alayrangues, G. Damiand., P. Lienhardt et S. Peltier. *A Boundary Operator for Computing the Homology of Cellular Structures*. Research Report 2012-1, XLIM-Sic Laboratory, University of Poitiers, France. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00683031>, 2011. (Cité en page 73.)
- [Alayrangues 2015a] Sylvie Alayrangues, Guillaume Damiand, Pascal Lienhardt et Samuel Peltier. *Homology of Cellular Structures Allowing Multi-incidence*. Discrete and Computational Geometry, vol. 54, no. 1, pages 42–77, Juillet 2015. (Cité en pages 7, 73 et 75.)
- [Alayrangues 2015b] Sylvie Alayrangues, Laurent Fuchs, Pascal Lienhardt et Samuel Peltier. *Incremental Computation of the Homology of Generalized Maps : An Application of Effective Homology Results*. working paper or preprint, Avril 2015. (Cité en pages 7, 81, 88 et 96.)
- [Alayrangues 2015c] Sylvie Alayrangues, Pascal Lienhardt et Samuel Peltier. *Conversion between chains of maps and chains of surfaces ; application to the computation of incidence graphs homology*. Research report, Université de Poitiers, 2015. (Cité en pages 7 et 44.)
- [Batagelj 1989] Vladimir Batagelj. *An inductive definition of the class of 3-connected quadrangulations of the plane*. Discrete Mathematics, vol. 78, no. 1, pages 45–53, 1989. Special Double Issue in Memory of Tory Parsons. (Cité en page 126.)
- [Bay 2022] T. Bay, Cattiaux-Huillard I. et L. Saini. *Hermite interpolation by planar cubic-like ATPH*. Adv Comput Math, vol. 48, no. 64, 2022. (Cité en page 140.)

- [Bechmann 1997] D. Bechmann, Y. Bertrand et S. Thery. *N-dimensional Bezier-Gregory patches for multidimensional cellular complexes*. In The Fourth International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces, Lillehammer, Norvège, 3-8, July 1997. (Cité en page 122.)
- [Bechmann 2007] B. Bechmann D. et Péroche. Informatique graphique, modélisation géométrique et animation. Signal et Image, Traité IC2. Lavoisier, 2007. (Cité en pages 9 et 14.)
- [Belhaouari 2014] Hakim Belhaouari, Agnès Arnould, Pascale Le Gall et Thomas Bellet. *Jerboa : A Graph Transformation Library for Topology-Based Geometric Modeling*. In Holger Giese et Barbara König, éditeurs, Graph Transformation, pages 269–284, Cham, 2014. Springer International Publishing. (Cité en page 138.)
- [Bertrand 1999a] G. Bertrand. *New notions for discrete topology*. In G. Bertrand, M. Couprie et L. Perroton, éditeurs, Proc. DGCI'99, volume 1568 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 218–228, Marne-la-Vallée, France, 1999. Springer. (Cité en page 29.)
- [Bertrand 1999b] Gilles Bertrand et Michel Couprie. *A Model for Digital Topology*. In Gilles Bertrand, Michel Couprie et Laurent Perroton, éditeurs, Discrete Geometry for Computer Imagery, pages 229–241, Berlin, Heidelberg, 1999. Springer Berlin Heidelberg. (Cité en page 42.)
- [Boissonnat 2019] Jean-Daniel Boissonnat et Clément Maria. *Computing persistent homology with various coefficient fields in a single pass*. Journal of Applied and Computational Topology, vol. 3, no. 1-2, pages 59–84, apr 2019. (Cité en page 80.)
- [Boltcheva 2010] Dobrina Boltcheva, Sara Merino Aceitunos, Jean-Claude Léon et Franck Héty. *Constructive Mayer-Vietoris Algorithm : Computing the Homology of Unions of Simplicial Complexes*. Research Report RR-7471, INRIA, D?embre 2010. (Cité en page 90.)
- [Brinkmann 2005] Gunnar Brinkmann, Sam Greenberg, Catherine Greenhill, Brendan D. McKay, Robin Thomas et Paul Wollan. *Generation of simple quadrangulations of the sphere*. Discrete Mathematics, vol. 305, no. 1, pages 33–54, 2005. (Cité en pages 126 et 127.)
- [Brisson 1993] E. Brisson. *Representing geometric structures in d dimensions : topology and order*. Discrete & Computational Geometry, vol. 9, no. 1, pages 387–426, 1993. (Cité en page 43.)
- [Brown 1981] Ronald Brown et Philip J. Higgins. *On the algebra of cubes*. Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 21, no. 3, pages 233 – 260, 1981. (Cité en pages 19 et 58.)
- [Bærentzen 2012] J.A. Bærentzen, M.K. Misztal et K. Wełnicka. *Converting skeletal structures to quad dominant meshes*. Computers & Graphics, vol. 36, no. 5, pages 555 – 561, 2012. Shape Modeling International (SMI) Conference 2012. (Cité en page 124.)
- [Cairns 1961] S. S. Cairns. Introductory topology. Ronald Press Company, 1961. (Cité en page 68.)

- [Carlsson 2010] Gunnar Carlsson et Vin De Silva. *Zigzag persistence*. Foundations of computational mathematics, vol. 10, no. 4, pages 367–405, 2010. (Cité en page 81.)
- [Cottrell 2009] J Austin Cottrell, Thomas JR Hughes et Yuri Bazilevs. *Isogeometric analysis : toward integration of cad and fea*. John Wiley & Sons, 2009. (Cité en page 123.)
- [Dahmen 1982] W. Dahmen et C. A. Micchelli. *On the linear independence of multivariate B-splines I. Triangulation of simploids*. SIAM J. Numer. Anal., vol. 19, 1982. (Cité en pages 18 et 113.)
- [Damiand 2006] Guillaume Damiand, Samuel Peltier et Laurent Fuchs. *Computing Homology for Surfaces with Generalized Maps : Application to 3D Images*. In International Symposium on Visual Computing, volume 4292 of *Advances in Visual Computing*, pages 235–244, Lake Tahoe, Nevada, United States, Novembre 2006. Springer Berlin/Heidelberg. (Cité en page 7.)
- [Damiand 2008] Guillaume Damiand, Samuel Peltier et Laurent Fuchs. *Computing Homology Generators for Volumes Using Minimal Generalized Maps*. In International Workshop on Combinatorial Image Analysis, volume 4958 of *LNCS*, pages 63–74, Buffalo, NY, United States, Avril 2008. Springer-Verlag. (Cité en pages 7, 71 et 76.)
- [Damiand 2012] Guillaume Damiand, Rocio Gonzalez-Diaz et Samuel Peltier. *Removal Operations in nD Generalized Maps for Efficient Homology Computation*. In International Workshop on Computational Topology in Image Context, volume 7309, pages 20–29, Bertinoro, Italy, Mai 2012. Springer Berlin/Heidelberg. (Cité en pages 7 et 71.)
- [Damiand 2014] G. Damiand et P. Lienhardt. *Combinatorial maps : Efficient data structures for computer graphics and image processing*. A K Peters/CRC Press, September 2014. (Cité en pages 29, 33 et 91.)
- [Damiand 2020] Guillaume Damiand, Eduardo Paluzo-Hidalgo, Ryan Slechta et Rocio Gonzalez-Diaz. *Approximating lower-star persistence via 2D combinatorial map simplification*. Pattern Recognition Letters, vol. 131, pages 314–321, 2020. (Cité en page 80.)
- [Dantchev 2012] Stefan Dantchev et Ioannis Ivriissimtzis. *Efficient construction of the Čech complex*. Computers & Graphics, vol. 36, no. 6, pages 708–713, 2012. (Cité en page 79.)
- [Daragon 2003] X. Daragon, M. Couprie et G. Bertrand. *Discrete frontiers*. In I. Nyström, G. Sanniti di Baja et S. Svensson, editeurs, Proc. DGCI'03, volume 2886 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 236–245, Naples, Italie, 2003. Springer. (Cité en page 30.)
- [Daragon 2005] X. Daragon, M. Couprie et G. Bertrand. *Discrete surfaces and frontier orders*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 23, pages 379–399, 2005. (Cité en page 30.)
- [De Floriani 2003] Leila De Floriani, Franco Morando et Enrico Puppo. *Representation of Non-Manifold Objects*. In Proceedings of the Eighth ACM Symposium on Solid



- Modeling and Applications, SM '03, page 304–309, New York, NY, USA, 2003. Association for Computing Machinery. (Cité en page 40.)
- [Delfinado 1995] C. J. A. Delfinado et H. Edelsbrunner. *An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere*. *Comput. Aided Geom. Design*, vol. 12, no. 7, pages 771–784, 1995. (Cité en page 77.)
- [DeRose 1993] T. DeRose, R. N. Goldman, H. Hagen et S. Mann. *Functional composition algorithms via blossoming*. *Transactions On Graphics*, vol. 12, no. 2, pages 113–135, 1993. (Cité en pages 112 et 116.)
- [Dey 2008] Tamal K. Dey, Kuiyu Li, Jian Sun et David Cohen-Steiner. *Computing Geometry-Aware Handle and Tunnel Loops in 3D Models*. *ACM Trans. Graph.*, vol. 27, no. 3, page 1–9, aug 2008. (Cité en page 71.)
- [Dey 2014] Tamal K Dey, Fengtao Fan et Yusu Wang. *Computing topological persistence for simplicial maps*. In *Proceedings of the thirtieth annual symposium on Computational geometry*, pages 345–354, 2014. (Cité en page 91.)
- [Dey 2018] Tamal K. Dey, Tianqi Li et Yusu Wang. *Efficient Algorithms for Computing a Minimal Homology Basis*. In Michael A. Bender, Martín Farach-Colton et Miguel A. Mosteiro, éditeurs, *LATIN 2018 : Theoretical Informatics*, pages 376–398, Cham, 2018. Springer International Publishing. (Cité en page 71.)
- [Dey 2022] Tamal K. Dey et Tao Hou. *Fast Computation of Zigzag Persistence*. In Shiri Chechik, Gonzalo Navarro, Eva Rotenberg et Grzegorz Herman, éditeurs, *30th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2022)*, volume 244 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 43 :1–43 :15, Dagstuhl, Germany, 2022. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik. (Cité en page 81.)
- [Dlotko 2010] P. Dlotko, Tomas Kaczynski, M. Mrozek et T. Wanner. *Coreduction Homology Algorithm for Regular CW-Complexes*. *Discrete Comput. Geom.*, vol. 46, pages 361–388, 2010. (Cité en page 71.)
- [Dobkin 1987] D. Dobkin et M. Laszlo. *Primitives for the Manipulation of Three-Dimensional Subdivisions*. In *3rd Symposium on Computational Geometry*, pages 86–99, Waterloo, Canada, June 1987. (Cité en page 37.)
- [Dumas 2001] J. G. Dumas, B.D. Saunders et G. Villard. *On efficient sparse integer matrix Smith normal form computations*. *J. of Symbolic Computation*, vol. 32, no. 1/2, pages 71–99, 2001. (Cité en page 71.)
- [Edelsbrunner 1987] H. Edelsbrunner. *Algorithms in computational geometry*. Springer, New-York, 1987. (Cité en page 29.)
- [Edelsbrunner 2010] Herbert Edelsbrunner et John Harer. *Computational topology - an introduction*. American Mathematical Society, 2010. (Cité en page 79.)
- [Edmonds 1960] J. Edmonds. *A Combinatorial Representation for Polyhedral Surfaces*. *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 7, 1960. (Cité en page 36.)
- [Elter 1994] H. Elter et P. Lienhardt. *Cellular complexes as structured semi-simplicial sets*. *International Journal of Shape Modeling*, vol. 1, no. 2, pages 191–217, 1994. (Cité en pages 40 et 41.)

- [Evako 1996] A. V. Evako, R. Kopperman et Y. V. Mukhin. *Dimensional properties of graphs and digital spaces*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 6, pages 109–119, 1996. (Cité en page 42.)
- [Farin 2002] G. Farin. Curves and surfaces for cagd : A practical guide. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 5th édition, 2002. (Cité en pages 108, 110 et 123.)
- [Fuchs 1997] Laurent Fuchs. *Une spécification formelle des modèles de courbes et de surfaces de forme libre*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1997. 1997STR13239. (Cité en pages 19, 111 et 140.)
- [Fuentes Suárez 2018] A.J. Fuentes Suárez et E. Hubert. *Scaffolding skeletons using spherical Voronoi diagrams : Feasibility, regularity and symmetry*. Computer-Aided Design, vol. 102, pages 83 – 93, 2018. Proceeding of SPM 2018 Symposium. (Cité en page 124.)
- [Giblin 1977] P. J. Giblin. Graphs, surfaces and homology. Chapman and Hall, 1977. (Cité en page 97.)
- [Giesbrecht 1996] M. Giesbrecht. *Probabilistic Computation Of The Smith Normal Form Of A Sparse Integer Matrix*. In Proceedings of the Second Int. Symp. on Algorithmic Number Theory, LNCS, volume 1122, pages 173–186. Springer-Verlag, 1996. (Cité en page 71.)
- [González-Díaz 2009] Rocío González-Díaz, María José Jiménez, Belén Medrano et Pedro Real. *Chain homotopies for object topological representations*. Discrete Applied Mathematics, vol. 157, no. 3, pages 490–499, 2009. (Cité en page 71.)
- [Gonzalez-Lorenzo 2022] Aldo Gonzalez-Lorenzo, Alexandra Bac et Jean-Luc Mari. *A Heuristic for Short Homology Basis of Digital Objects*. In International Joint Conference on Discrete Geometry and Mathematical Morphology (DGMM), volume 13493 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 60–70, Strasbourg, France, 2022. Springer International Publishing. (Cité en page 71.)
- [Gugenheim 1957] V. K. A. M. Gugenheim. *On supercomplexes*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 85, no. 1, pages 35–51, May 1957. (Cité en page 63.)
- [Guibas 1985] L. Guibas et G. Stolfi. *Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams*. Transactions on Graphics, vol. 4, no. 2, pages 74–123, 1985. (Cité en page 36.)
- [Hatcher 2002] A. Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, 2002. (Cité en page 72.)
- [Hughes 2005] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell et Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, no. 39, pages 4135–4195, 2005. (Cité en page 123.)
- [Ichinomiya 2020] Takashi Ichinomiya, Ipei Obayashi et Yasuaki Hiraoka. *Protein-Folding Analysis Using Features Obtained by Persistent Homology*. Biophysical Journal, vol. 118, no. 12, pages 2926–2937, 2020. (Cité en page 79.)

- [Kaczynski 1998] T. Kaczynski, M. Mrozek et M. Slusarek. *Homology computation by reduction of chain complexes*. Computers & Math. Appl., vol. 34, no. 4, pages 59–70, 1998. (Cité en page 71.)
- [Kaczynski 2004] T. Kaczynski, K. Mischaikow et M. Mrozek. Computational homology. Springer, 2004. (Cité en page 71.)
- [Kannan 1979] R. Kannan et A. Bachem. *Polynomial algorithms for computing the Smith and Hermite normal forms of an integer matrix*. SIAM Journal on Computing, vol. 8, no. 4, pages 499–507, November 1979. (Cité en page 68.)
- [Kerber 2019] Michael Kerber et Hannah Schreiber. *Barcodes of towers and a streaming algorithm for persistent homology*. Discrete & computational geometry, vol. 61, no. 4, pages 852–879, 2019. (Cité en page 91.)
- [Lang 1996] V. Lang et P. Lienhardt. *Simplicial sets and triangular patches*. In Proceedings of CGI'96, Pohang, Korea, 1996. (Cité en pages 54 et 111.)
- [Lang 1997] V. Lang et P. Lienhardt. *Cartesian product of simplicial sets*. In Proc. of WSCG'97, Plzen, Czech Republic, 1997. (Cité en pages 57 et 119.)
- [Lienhardt 1989] P. Lienhardt. *Subdivisions of  $n$ -dimensional spaces and  $n$ -dimensional generalized maps*. In ACM Symposium on Computational Geometry, pages 228–236, Juin 1989. (Cité en page 37.)
- [Lienhardt 1991] P. Lienhardt. *Topological models for boundary representation : a comparison with  $n$ -dimensional generalized maps*. Computer Aided Design, vol. 23, no. 1, pages 59–82, 1991. (Cité en page 37.)
- [Lienhardt 1994] P. Lienhardt.  *$N$ -Dimensional Generalized Combinatorial Maps and Cellular Quasi-Manifolds*. International Journal of Computational Geometry and Applications, vol. 4, no. 3, pages 275–324, 1994. (Cité en page 27.)
- [Lienhardt 2004] P. Lienhardt, X. Skapin et A. Bergey. *Cartesian Product of Simplicial and Cellular Structures*. Int. Journal of Computational Geometry and Applications, vol. 14, no. 3, pages 115–159, June 2004. (Cité en pages 39, 54 et 57.)
- [Lienhardt 2009] Pascal Lienhardt, Laurent Fuchs et Yves Bertrand. *Combinatorial models for topology-based geometric modeling*. In S. Naimpally G. Di Maio, éditeur, Theory and applications of proximity, nearness and uniformity, pages 151–198. Quaderni di matematica, dipartimento di matematica, seconda universita di Napoli, 2009. (Cité en page 9.)
- [Lienhardt 2016] Pascal Lienhardt et Samuel Peltier. *Homology Computation During an Incremental Construction Process*. In Jean-Luc Mari Alexandra Bac, éditeur, Computational Topology in Image Context - CTIC 2016, volume 9667 of *Computational Topology in Image Context (CTIC 2016)*, pages 7–15, Marseille, France, Juin 2016. Springer. (Cité en page 7.)
- [Livesu 2016] Marco Livesu, Alessandro Muntoni, Enrico Puppo et Riccardo Scateni. *Skeleton-driven Adaptive Hexahedral Meshing of Tubular Shapes*. Computer Graphics Forum, vol. 35, no. 7, pages 237–246, 2016. (Cité en page 124.)

- [Livesu 2017] Marco Livesu, Stefano Ellero, Jonàs Martínez, Sylvain Lefebvre et Marco Attene. *From 3D models to 3D prints : an overview of the processing pipeline*. In Computer Graphics Forum, volume 36, pages 537–564. Wiley Online Library, 2017. (Cité en pages 123 et 124.)
- [Lyon 2016] Max Lyon, David Bommes et Leif Kobbelt. *HexEx : robust hexahedral mesh extraction*. ACM Transactions on Graphics (TOG), vol. 35, no. 4, pages 1–11, 2016. (Cité en page 123.)
- [Mäntylä 1988] M. Mäntylä. An introduction to solid modeling. Computer Science Press,, 1988. (Cité en page 36.)
- [Masoomy 2021] H. Masoomy, B. Askari, S. Tajik et al. *Topological analysis of interaction patterns in cancer-specific gene regulatory network : persistent homology approach*. Nature, Scientific report, no. 16414, 2021. (Cité en page 77.)
- [Massarwi 2016] Fady Massarwi et Gershon Elber. *A B-spline based framework for volumetric object modeling*. Computer-Aided Design, vol. 78, pages 36–47, 2016. (Cité en pages 123 et 140.)
- [Massarwi 2019] Fady Massarwi, Pablo Antolin et Gershon Elber. *Volumetric untrimming : Precise decomposition of trimmed trivariates into tensor products*. Computer Aided Geometric Design, vol. 71, pages 1–15, 2019. (Cité en pages 123 et 124.)
- [May 1967] J. P. May. Simplicial objects in algebraic topology. Van Nostrand, Princeton, 1967. (Cité en page 54.)
- [Milosavljević 2011] Nikola Milosavljević, Dmitriy Morozov et Primoz Skraba. *Zigzag persistent homology in matrix multiplication time*. In Proceedings of the twenty-seventh annual symposium on Computational geometry, pages 216–225, 2011. (Cité en page 81.)
- [Morin 2001] Géraldine Morin et Ron Goldman. *On the smooth convergence of subdivision and degree elevation for Bézier curves*. Computer Aided Geometric Design, vol. 18, no. 7, pages 657–666, 2001. (Cité en page 130.)
- [Munkres 1984] J. R. Munkres. Elements of algebraic topology. Perseus Books, 1984. (Cité en pages 66, 67, 68 et 93.)
- [Nakamoto 1996] Atsuhiko Nakamoto. *Diagonal transformations in quadrangulations of surfaces*. Journal of Graph Theory, vol. 21, no. 3, pages 289–299, 1996. (Cité en page 126.)
- [Panotopoulou 2018] Athina Panotopoulou, Elissa Ross, Kathrin Welker, Evelyne Hubert et Géraldine Morin. *Scaffolding a skeleton*. In Research in Shape Analysis, pages 17–35. Springer, 2018. (Cité en pages 124, 125, 126 et 129.)
- [Peltier 2006a] S. Peltier. *Calcul de groupes d’homologie sur des structures simpliciales, simpliciales et cellulaires*. Phd thesis, Université de Poitiers, Poitiers, France, 2006. (Cité en pages 22, 70 et 72.)
- [Peltier 2006b] S. Peltier, S. Alayrangues, L. Fuchs et J.-O. Lachaud. *Computation of homology groups and generators*. Comput. & Graph., vol. 30, pages 62–69, feb. 2006. (Cité en page 68.)

- [Peltier 2007a] Samuel Peltier, Adrian Ion, Yll Haxhimusa, Walter Kropatsch et Guillaume Damiand. *Computing Homology Group Generators of Images Using Irregular Graph Pyramids*. In Graph-Based Representations in Pattern Recognition, volume 4538 of *Graph-Based Representations in Pattern Recognition*, pages 283–294, Alicante, Spain, Juin 2007. Springer Berlin / Heidelberg. (Cité en page 7.)
- [Peltier 2007b] Samuel Peltier, Adrian Ion, Yll Haxhimusa et Walter G. Kropatsch. *Controlling Geometry of Homology Generators*. In Computer Vision Winter Workshop, pages 115–121, Graz, Austria, Février 2007. (Cité en page 7.)
- [Peltier 2009a] L. Peltier S. Fuchs et P. Lienhardt. *Simploidal sets : Definitions, operations and comparison with simplicial sets*. Discrete Applied Mathematics, vol. 157, no. 3, pages 542–557, 2009. International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery. (Cité en pages 7, 13 et 19.)
- [Peltier 2009b] Samuel Peltier, Adrian Ion, Walter G. Kropatsch, Guillaume Damiand et Yll Haxhimusa. *Directly Computing the Generators of Image Homology using Graph Pyramids*. Image and Vision Computing, vol. 27, no. 7, pages 846–853, Juin 2009. (Cité en page 7.)
- [Peltier 2018] S. Peltier et P. Lienhardt. *Simploidal Sets : a data structure for handling simploidal Bezier spaces*. Computer Aided Geometric Design, vol. 62, pages 44 – 62, Mai 2018. (Cité en pages 7, 54, 56, 59, 64, 112, 117 et 119.)
- [Peltier 2021] Samuel Peltier, Géraldine Morin et Damien Aholou. *Tubular parametric volume objects : Thickening a piecewise smooth 3D stick figure*. Computer Aided Geometric Design, vol. 85, page 101981, Février 2021. (Cité en pages 7, 123 et 127.)
- [Peltier 2023] S. Peltier. Informatique mathématique : une photographie en 2023. chapitre i : Structures combinatoires pour la modélisation géométrique à base topologique. Elements of mathematics. CNRS éditions, 2023. (Cité en page 7.)
- [Pranav 2016] Pratyush Pranav, Herbert Edelsbrunner, Rien van de Weygaert, Gert Vegter, Michael Kerber, Bernard J. T. Jones et Mathijs Wintraecken. *The topology of the cosmic web in terms of persistent Betti numbers*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 465, no. 4, pages 4281–4310, nov 2016. (Cité en page 77.)
- [Raptis 2011] Michalis Raptis, Darko Kirovski et Hugues Hoppe. *Real-time classification of dance gestures from skeleton animation*. In Proceedings of the 2011 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on computer animation, pages 147–156, 2011. (Cité en page 124.)
- [Rharbaoui 2020] Wassim Rharbaoui, Sylvie Alayrangues, Pascal Lienhardt et Samuel Peltier. *Local computation of homology variations over a construction process*. Computer Aided Geometric Design, vol. 81, page 101907, 2020. (Cité en pages 7, 81 et 86.)
- [Rharbaoui 2022] Wassim Rharbaoui. *Calcul incrémental des groupes d’homologie d’un objet au cours d’un processus de construction*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2022. Thèse de doctorat dirigée par Lienhardt, Pascal Peltier, Samuel et Alayrangues, Sylvie Informatique. (Cité en pages 81, 85, 86, 87, 89, 90 et 91.)

- [Rossignac 1989] J. Rossignac et M. O'Connor. *A Dimension-Independent Model for Pointsets with Internal Structures and Incomplete boundaries*. Geometric modeling for Product Engineering, pages 145–180, 1989. (Cité en page 29.)
- [Rubio 2006] J. Rubio et F. Sergeraert. *Constructive Homological Algebra and Applications*, August, 28 - September, 02 2006. <http://arxiv.org/abs/1208.3816>. (Cité en pages 81, 85 et 96.)
- [Serre 1951] Jean-Pierre Serre. *Homologie Singuliere Des Espaces Fibres*. The Annals of Mathematics, vol. 54, no. 3, pages pp. 425–505, 1951. (Cité en pages 19 et 58.)
- [Sobhanpanah 1989] C. Sobhanpanah. *Extension of a Boundary Representation Technique for the Description of N-Dimensional Polytopes*. Computer and Graphics, vol. 13, no. 1, pages 17–23, 1989. (Cité en page 29.)
- [Storjohann 1996] A. Storjohann. *Near Optimal Algorithms for Computing Smith Normal Forms of Integer Matrices*. In Y. N. Lakshman, editeur, Proceedings of the 1996 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pages 267–274. ACM, 1996. (Cité en page 71.)
- [Sundar 2003] Hari Sundar, Deborah Silver, Nikhil Gagvani et Sven Dickinson. *Skeleton based shape matching and retrieval*. In 2003 Shape Modeling International., pages 130–139. IEEE, 2003. (Cité en page 124.)
- [Suzuki 2020] A. Suzuki, M. Miyazawa, A. Okamoto, H. Shimizu, I. Obayashi, Y. Hiraoka, T. Tsuji, P.K. Kang et T. Ito. *Inferring fracture forming processes by characterizing fracture network patterns with persistent homology*. Computers & Geosciences, vol. 143, page 104550, 2020. (Cité en page 77.)
- [Tagliasacchi 2016] Andrea Tagliasacchi, Thomas Delame, Michela Spagnuolo, Nina Amenta et Alexandru C Telea. *3D Skeletons : A State-of-the-Art Report*. Computer Graphics Forum, vol. 35, no. 2, pages 573–597, Mai 2016. (Cité en page 124.)
- [Usai 2016] Francesco Usai, Marco Livesu, Enrico Puppo, Marco Tarini et Riccardo Scateni. *Extraction of the Quad Layout of a Triangle Mesh Guided by Its Curve Skeleton*. ACM Trans. Graph., vol. 35, no. 1, D embre 2016. (Cité en page 124.)
- [Vince 1983] A. Vince. *Combinatorial Maps*. Journal of Combinatorial Theory Series B, vol. 34, pages 1–21, 1983. (Cité en page 37.)
- [Viville 2021] P. Viville, P. Kraemer et D. Bechmann. *Hexahedral Mesh Generation For Tubular Shapes Using Skeletons and Connection Surfaces*. In International Joint Conference on Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications (VISIGRAPP), Feb 2021. (Cité en pages 124 et 126.)
- [Wang 2008] Wenping Wang, Bert Jüttler, Dayue Zheng et Yang Liu. *Computation of rotation minimizing frames*. ACM Transactions on Graphics (TOG), vol. 27, no. 1, pages 1–18, 2008. (Cité en pages 129 et 130.)
- [Weiler 1985] K. Weiler. *Edge-based data structures for solid modelling in curved-surface environments*. Computer Graphics and Applications, vol. 5, no. 1, pages 21–40, 1985. (Cité en page 36.)

- [Whitehead 1949] J. H. C. Whitehead. *Combinatorial homotopy. I*. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 55, no. 3.P1, pages 213 – 245, 1949. (Cité en page 5.)
- [Zomorodian 2010] Afra Zomorodian. *Fast construction of the Vietoris-Rips complex*. Computers & Graphics, vol. 34, no. 3, pages 263–271, 2010. (Cité en page 79.)

---

## Résumé

La modélisation géométrique à base topologique vise à décrire des objets géométriques structurés en cellules de différentes dimensions : sommets, arêtes, faces, volumes... Cette description se retrouve dans divers domaines de l'informatique graphique : en conception assistée par ordinateur (CAO), en géométrie algorithmique, en simulation, en géométrie discrète, en animation, ou encore en analyse d'image. Ce manuscrit propose une vision de la modélisation géométrique à base topologique selon le triptyque *structures combinatoires, calcul de propriétés topologiques, formes géométriques*.

*Structures combinatoires* : dans ce premier volet, une classification est proposée, où les structures simpliciales, simploldales (un simplold est un produit de simplexes quelconques) et cellulaires se déduisent des ensembles semi-simpliciaux par trois mécanismes principaux : le produit cartésien, la numérotation cellulaire et la suppression de la multi-incidence. Le mécanisme de dégénérescence est ensuite présenté. Ce dernier permet de définir le produit cartésien simplicial et de cône simploldal.

*Calcul de propriétés topologiques* : l'homologie permet de caractériser les "trous" d'un objet subdivisé (composantes connexes, tunnels, cavités, etc.). Dans ce deuxième volet, le calcul de l'homologie est étudié pour les structures simpliciales, simploldales et cellulaires selon deux approches. L'approche classique "globale" est basée sur des réductions de matrices décrivant les relations d'incidence entre les cellules d'un objet subdivisé. Le calcul incrémental de l'homologie s'attache à effectuer le calcul étape après étape. L'approche est ici "locale" : connaissant l'homologie d'un objet et l'homologie de la partie impactée par l'opération, il est possible d'en déduire l'homologie de l'objet résultant. Cette approche, basée sur les outils de l'homologie effective, permet en particulier de maintenir l'homologie d'un objet construit par une suite d'identifications. Le calcul incrémental basé sur le produit cartésien, mettant en avant la formule de KÜNNETH est également présenté.

*Formes géométriques* : deux approches permettant d'associer une forme aux structures simpliciales, simploldales et cellulaires sont abordées dans ce dernier volet : les plongements linéaires où la forme de chaque cellule est déduite des positions de l'ensemble des sommets de son bord, et les plongements non linéaires où une forme courbe peut être donnée à chaque cellule. En particulier, les espaces paramétriques de BÉZIER sont présentés, et les propriétés permettant de retrouver les structures d'ensembles simpliciaux et simploldaux au sein même de ces espaces sont établies. Enfin, un champ d'application des ensembles semi-simploldaux est présenté : la modélisation d'objets tubulaires volumiques paramétriques à partir de squelettes.

---

**Mots clés :** *modélisation géométrique, structures simpliciales, structures simploldales, structures cellulaires, structures celluloïdales, calculs de groupes d'homologie, homologie effective, espaces simpliciaux de BÉZIER, espaces simploldaux de BÉZIER.*

---