



**HAL**  
open science

# Modèle équivalent de structures multicouches à interfaces complexes

Nicolas Auquier

► **To cite this version:**

Nicolas Auquier. Modèle équivalent de structures multicouches à interfaces complexes. Acoustique [physics.class-ph]. École Nationale des Travaux Publics de l'État [ENTPE], 2023. Français. NNT : 2023ENTP0008 . tel-04510536v2

**HAL Id: tel-04510536**

**<https://hal.science/tel-04510536v2>**

Submitted on 5 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2023ENTP0008

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'ENTPE**  
**Membre de l'Université de Lyon**

**École Doctorale N° 162**  
**MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE**

**Spécialité de doctorat : Acoustique**

Soutenue publiquement le 26/10/2023, par :  
**Nicolas AUQUIER**

---

**Modèle équivalent de structures multicouches à interfaces complexes**

---

Devant le jury composé de :

OUISSÉ, Morvan DUPONT, Thomas	Professeur des Universités Professeur Agrégé	ENSMM ÉTS	Rapporteur Rapporteur
DAUCHEZ, Nicolas ROULEAU, Lucie	Professeur des Universités Maître de Conférences	UTC CNAM	Président Examinatrice
GOURDON, Emmanuel EGE, Kerem	ICTPE (Professeur) Maître de Conférences, HDR	ENTPE INSA-Lyon	Directeur de thèse Directeur de thèse
CHEVILLOTE, Fabien	Ingénieur de Recherche	MATELYS-Research Lab	Invité



# Remerciements

Sans réellement savoir expliquer pourquoi, j'ai toujours plus ou moins souhaité faire l'expérience de la thèse. D'une part, l'indéniable aspect scientifique pointu de l'exercice, mais d'autre part, une forme de reconnaissance envers les établissements de l'enseignement supérieur et de la recherche que j'ai pu fréquenter. Dans un premier temps, la Faculté des Sciences de Montpellier, qui a révélé en moi cette passion pour la Physique fondamentale grâce aux enseignants chercheurs animées par cette même passion. Dans un second temps, l'INSA de Lyon, qui m'a permis de réaliser une formation complète et concrète en mécanique et reconnue à l'échelle nationale. C'est un peu par sentiment de devoir que j'ai donc réalisée cette thèse, une manière pour moi de les remercier pour tout ce savoir et cette passion que je n'ai finalement jamais payée.

Il va sans dire que cela n'aurait pas été possible sans mes directeurs de thèse, Kerem Ege et Emmanuel Gourdon, qui m'ont accompagné durant ces trois années de doctorat, et je vous remercie profondément pour cela. Pour m'avoir accompagné dans les tâches très variées que j'ai pu effectuer tout au long de la thèse, que ce soit sur les aspects théoriques et expérimentaux, ou les enseignements effectués à l'ENTPE ou à l'INSA. Pour m'avoir challengé quand il le fallait, et avoir répondu présent quand cela était nécessaire.

Je remercie l'intérêt qu'a porté le jury à mon travail. Je remercie donc les rapporteurs, Morvan Ouisse et Thomas Dupont, pour votre temps et votre travail minutieux et enrichissant. Je remercie aussi les examinateurs, Nicolas Dauchez et Lucie Rouleau, pour le rôle que vous avez joué et les questions très intéressantes durant la soutenance (et avant aussi!). Et je tiens à remercier aussi Fabien Chevillote d'avoir accepté d'être membre invité de ce jury, un rôle symbolique pour

moi par rapport au rôle essentiel que tu as joué durant cette thèse.

Je tiens donc une volonté particulière de remercier l'ensemble de l'équipe de Matelys-Research Lab (passé et présente). François-Xavier Bécot, Fabien Chevillote, Fabien Marchetti et Arasan Uthayasuriyan pour votre apport scientifique conséquent, mais aussi vos valeurs humaines très appréciables. Je remercie aussi les autres membres de cette formidable équipe, pour votre accueil lors de mes différentes (que j'aurai souhaité plus nombreuses!) visites.

Qu'est-ce qu'une aventure sans ses compagnons de route? Une histoire bien ennuyante bien sûr! Il va sans dire qu'ils furent nombreux, ces Seigneur(e)s du Fardeau. Je commence donc par remercier François et Emanuele, une affinité sincère s'est rapidement construite au sein de l'établissement des travaux publics. Ensuite, je fis mon entrée dans un monde peuplé d'étoiles et de cailles, aux caractères plus ou moins sulfureux, disons-le. Je remercie sincèrement Nicolas (\*), Nicolas (§) et Nicolas (°), pour respectivement nos discussions passionnantes et amusantes (\*), ta folie rafraichissante (§) et ta bienveillance (°). Je remercie en toute simplicité Adrien pour ton grand cœur et ta présence. Toujours plus hautes, viennent les quatre étoiles, perchées très haut au sommet du olympique deuxième étage (oui cela n'est pas si haut finalement). Valentin, Matthieu, Thibaut et Raphaël, merci à chacun de vous pour les drames (j'exagère à mon habitude), mais surtout nos échanges sincères et bienveillants. Je remercie aussi bien évidemment mes compagnons de conférences, en particulier Mélissandre avec qui nous avons été missionnés dans différentes conférences ensemble, dont celle réalisée dans le lointain pays boréal qu'est.. la Belgique (conditions sanitaires faisant). Je remercie aussi tous ceux que je n'ai pas cité explicitement, cela ne minimise en rien ce que vous avez pu être pour moi.

Je termine donc par remercier mes proches, Matthieu (qui était présent sans être là chaque jour de cette thèse, disons-le! La KheyG n'a aucune limite d'espace et de temps) et Kévin (on partage nos passions depuis pas si loin de 10 ans, le temps passe!) accompagné de Charlène, merci de vous être déplacés de loin pour moi.

Je remercie bien assurément mais pudiquement, ma femme, Hanane, je ne verrai pas l'intérêt de tout cela sans toi.

Pour finir, je dédis symboliquement l'ensemble de ce travail, qui représente d'une certaine manière l'aboutissement de mes études, à ma mère, Marie-Christine. L'adolescent que j'ai été, fut très chanceux d'avoir été poussé à se lancer dans les études.



# Résumé

Les travaux de recherche présentés ici traitent du développement d'un modèle équivalent préexistant en y incluant une modélisation d'interfaces imparfaites. Le but est d'enrichir les possibilités de modélisation dans les modèles équivalents actuels qui font généralement l'hypothèse d'une continuité parfaite du champ de contrainte et du champ de déplacement.

Le premier chapitre de ce manuscrit correspond à la synthèse bibliographique de la littérature utilisée pour les présents travaux. Cette synthèse détaille les principales familles de modèles multicouches dans la littérature scientifique actuelle, ainsi que quelques remarques sur leur classification. Une attention particulière a été portée sur la modélisation des interfaces imparfaites ainsi que leur mise en évidence expérimentale. Quelques éléments introductifs de mécanique du contact sont aussi apportés en suppléments afin de souligner l'importance de ce type de modélisation dans l'implémentation des interfaces imparfaites.

Le second chapitre est dédié à la présentation du modèle développé au cours de cette thèse. Le modèle équivalent est issu d'un modèle préexistant, pour lequel les conditions de couplage aux interfaces sont modifiées dans le but d'implémenter des interfaces imparfaites. Ces dernières sont modélisées à l'aide d'une raideur et d'un amortissement. Une rigidité élevée correspond à un bon couplage, à l'inverse, une rigidité faible correspond à un mauvais couplage. Ceci est décrit à travers un seul paramètre, le paramètre d'interface  $B$  qui est l'inverse de la rigidité d'interface. Ce paramètre est dépendant de chaque couche, mais il peut aussi être utilisé comme une valeur globale sur l'imperfection apparente de l'ensemble de la structure.

La méthodologie de caractérisation d'une structure plane et en particulier d'une poutre est détaillée dans le troisième chapitre. Une synthèse bibliographique suc-



cincte est présente autour des méthodes de mesure du champ cinématique d'une structure, et des méthodes d'identification des paramètres dynamiques d'une structure. Une vue complète de la méthodologie retenue est ensuite présentée, telle que l'utilisation d'un vibromètre laser et du banc expérimental pour réaliser une mesure du champ de déplacement ou des vitesses. Finalement, le champ de déplacement transverse mesuré est utilisé pour déduire les paramètres dynamiques de la structure de flexion. Les éléments principaux de post-traitement employés sont présentés en détails, ils ont notamment permis l'extension de la méthode de caractérisation jusqu'à 100 kHz. Ce chapitre se conclut sur la présentation des résultats attendus pour une structure multicouche. Ils sont comparés à des résultats obtenus par de l'analyse modale pour les valider car ces deux méthodes sont sensibles à des paramètres différents.

La modélisation ainsi que de la méthodologie expérimentale sont finalement employées d'une manière complémentaire dans le quatrième chapitre. L'objectif est de réaliser la caractérisation dynamique d'échantillons aux interfaces imparfaites, et plus particulièrement l'identification du paramètre d'interface  $B$ . Cela permet de valider le modèle avec des résultats expérimentaux, mais aussi de pouvoir obtenir une valeur expérimentale du paramètre d'interface en fonction de la fréquence. Ce travail a été effectué sur près une dizaine d'échantillons différents. L'effet des interfaces imparfaites est visualisé en fonction de la fréquence, mais aussi en fonction de l'espace. Une approche complémentaire entre ces deux visualisations est finalement effectuée afin de procurer des résultats de caractérisation plus détaillés.

**Mots-clés** : modèle équivalent, multicouche, structure sandwich, interface imparfaite, caractérisation dynamique, méthode inverse, rigidité de flexion

# Abstract

The work presented here aims to incorporate the imperfect interface modelling into an equivalent model extensively used. The goal is to add new modeling possibilities to the equivalent models, which usually assume that the displacement field and the stresses are continuous at interfaces.

The state of the art is presented in the first chapter. Firstly, the classification of the equivalent models is synthesized and discussed. Then, a focus on imperfect interface models is carried out. In addition, an introduction to contact mechanics is given, which is a field of research highly connected with imperfect interface modeling.

The second chapter is about the model developed during this PhD thesis. The equivalent model is done on the basis of an already existing model; only the interface conditions are written differently in order to consider imperfect interfaces. The latter are modeled thanks to a spring approach. The stiffness of the spring depicts the coupling of the layers in contact. This is symbolized by the interface parameter  $B$ , which is the interface compliance.

Several characterization methodologies for a beam are detailed in the third chapter. A complete overview of the methodology finally used is presented, which includes the measurement of the kinematic field by means of a laser vibrometer (LDV). The transverse displacement is then used to compute the dynamical parameters of the structure under bending. These parameters are called apparent parameters because they are estimated from the equation of the transverse displacement of an equivalent beam. The post-processing used to increase the frequency bandwidth of the results is also detailed. Finally, the typical results of a multilayered beam characterization are shown and compared to modal analysis.

In the final chapter, the modeling methodology and the experimental methodology are both used to characterize samples with imperfect interfaces. The goal is to compute the dynamical parameters for different samples, particularly the interface parameter  $B$ . The results are used not only as a validation of the model, but also to get an experimental value of the interface parameter in dynamics. This study was done on a dozen different samples. It is examined how the interface impacts the dynamics of a sandwich panel in terms of both frequency and space.

**Keywords** : equivalent model, multilayered, sandwich panel, imperfect interface, dynamic characterization, inverse method, flexural rigidity

# Table des matières

<b>Table des sigles</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>1 Synthèse bibliographique</b>	<b>19</b>
1.1 Modélisation dynamique de structures planes multicouches . . . . .	20
1.1.1 Structures planes homogènes et élastiques . . . . .	20
1.1.2 Plaques multicouches aux interfaces parfaites . . . . .	22
1.1.3 Résolution de modèles par discrétisation . . . . .	28
1.2 Modélisation des interfaces d'un multicouche . . . . .	33
1.2.1 Modèles équivalents à interfaces imparfaites . . . . .	34
1.2.2 Introduction à la mécanique du contact . . . . .	45
1.3 Travaux expérimentaux sur les couplages imparfaits dans les maté- riaux multicouches . . . . .	51
1.3.1 Caractérisation adhésive des interfaces imparfaites . . . . .	51
1.3.2 Caractérisation cohésive des interphases complexes . . . . .	53
1.4 Conclusion . . . . .	55
<b>2 Modèle équivalent dynamique de matériaux multicouches à inter-   faces imparfaites</b>	<b>58</b>
2.1 Introduction de la modélisation . . . . .	59
2.1.1 Champ de déplacement et implémentation d'une loi de glis- sement . . . . .	59
2.1.2 Loi de comportement de l'interface . . . . .	63

2.2	Equivalent dynamic model of multilayered structures with imperfect interfaces : Application to a sandwich structured plate with sliding interfaces, JSV 2022 . . . . .	64
2.3	Recalage d'un modèle tricouche aux interfaces parfaites . . . . .	83
2.3.1	Comparaison des flexions de rigidité . . . . .	83
2.3.2	Méthode de recalage . . . . .	84
2.4	Modélisation d'un tricouche avec interfaces imparfaites par 5 couches aux interfaces parfaites . . . . .	88
2.5	Limitations du modèle . . . . .	92
2.6	Perspectives . . . . .	93
2.7	Conclusion . . . . .	94
<b>3</b>	<b>Caractérisation expérimentale de poutres multicouches</b>	<b>96</b>
3.1	Mesure non intrusive du champ de déplacement d'une structure vibrante . . . . .	97
3.1.1	Holographie acoustique . . . . .	98
3.1.2	Défectométrie . . . . .	100
3.1.3	Vibrométrie laser . . . . .	101
3.2	Méthodes d'identification d'une structure plane . . . . .	104
3.2.1	Méthode des champs virtuels . . . . .	105
3.2.2	Résolution Inverse Corrigée appliquée aux poutres . . . . .	107
3.2.3	Analyse modale sur champ de déplacement . . . . .	111
3.3	Application à une poutre en structure sandwich . . . . .	113
3.3.1	Banc de mesure . . . . .	114
3.3.2	Adaptation du facteur d'échelle . . . . .	115
3.3.3	Filtrage de la réponse en nombre d'onde . . . . .	118
3.3.4	Résultats . . . . .	123
3.4	Conclusion . . . . .	125
<b>4</b>	<b>Application du modèle pour la caractérisation de poutres multicouches sandwiches à interfaces complexes</b>	<b>127</b>
4.1	Fabrication des échantillons étudiés . . . . .	129
4.1.1	Protocole de fabrication . . . . .	129

4.1.2	Présentation des échantillons produits . . . . .	136
4.2	Conditions expérimentales et paramètres du banc de mesure . . . . .	140
4.2.1	Étude de l'effet des conditions expérimentales . . . . .	141
4.2.2	Paramètres du banc de mesure . . . . .	146
4.3	Caractérisation dynamique d'une poutre sandwich aux interfaces imparfaites . . . . .	148
4.3.1	Résolution inverse, visualisation fréquentielle . . . . .	149
4.3.2	Résolution inverse, visualisation spatiale . . . . .	154
4.3.3	Résolution inverse pour approche complémentaire . . . . .	161
4.3.4	Résultats expérimentaux supplémentaires sur des multicouches aux interfaces hétérogènes spatialement . . . . .	167
4.4	Conclusion . . . . .	168
<b>Conclusion du manuscrit et perspectives</b>		<b>170</b>
<b>A Comparaison entre la méthode des matrices de transfert et le modèle équivalent aux interfaces imparfaites</b>		<b>176</b>
A.1	Motivations de l'étude . . . . .	176
A.2	Introduction à la méthode des matrices de transfert . . . . .	177
A.3	Implémentation de l'interface imparfaite en TMM dans AlphaCell .	179
A.4	Comparaisons des approches . . . . .	179
<b>B Implémentation et effets d'un paramètre d'interface fréquentiel- lement dépendant</b>		<b>185</b>
B.1	Motivations de l'étude . . . . .	185
B.2	Implémentation de la dépendance fréquentielle . . . . .	185
B.3	Effet d'un paramètre d'interface fréquentiellement dépendant . . . .	187
<b>C Introduction à l'implémentation d'interfaces non linéaires</b>		<b>189</b>
C.1	Motivations . . . . .	189
C.2	Méthodologie proposée . . . . .	190
<b>Bibliographie</b>		<b>194</b>

# Table des sigles

- AMT : Ambartsumian Multilayered Theory
- BF : Basses Fréquences
- CFAT : Corrected Force Analysis Technique
- CLT : Classical Laminate Theory
- ESL : Equivalent Single Layer
- FEM : Finite Element Method
- FSDT : First order Shear Deformation Theory
- HF : Hautes Fréquences
- HSDT : High order Shear Deformation Theory
- LW : Layer Wise
- LMT : Lekhnitskii Multilayered Theory
- MEMS : Micro Electromechanical Systems
- PTV : Principe des Travaux Virtuels
- RIC : Résolution Inverse Corrigée
- RIFF : Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée
- RMVT : Reissner Mixed Variational Theorem
- SH : Shear Horizontal
- TMM : Transfer Matrix Method
- VFM : Virtual Field Method
- ZZ : Zig Zag

# Introduction générale

## Contexte scientifique

La modélisation mécanique d'une structure consiste à décrire à l'aide de relations mathématiques, comme une équation, ou un système d'équations, le comportement mécanique du système d'intérêt. Ces relations vont permettre de prédire le comportement mécanique d'une structure en fonction de variables fondamentales. L'intérêt de ce type de modélisation est avant tout d'obtenir un aperçu du comportement d'un système, une information clé dans une démarche de conception. Les modèles mécaniques sont aussi abondamment utilisés afin de caractériser une structure, cela permet de comparer les structures entre elles avec des indicateurs concrets (module de Young, dureté, etc.), et aussi de savoir si le système conçu correspond aux conditions de fonctionnement auxquelles il sera exposé. Il existe deux grandes familles de modèle physique : les modèles théoriques et les modèles empiriques. Une approche complémentaire entre les deux familles existe aussi. Les modèles théoriques sont obtenus en utilisant des équations de Physique fondamentale, on utilise généralement la minimisation ou la conservation de l'énergie d'un système afin de savoir quelles équations gouvernent son comportement physique. C'est de cette façon que de nombreuses équations fondamentales peuvent être démontrées telle que l'équation de la chaleur. Il est évident que ce type de modèle ne peut être appliqué entièrement et sans limites à l'objet d'étude. Des hypothèses sont alors explicitées, afin de limiter la complexité du système étudié et rendre ainsi le modèle exploitable. Quant aux modèles empiriques, ils sont composés d'un ensemble de relations mathématiques obtenu sur la base d'observations expérimentales. Ce type de modèle est construit quand la base théorique n'est



pas encore suffisamment développée ou en complément des modèles théoriques, et constitue souvent de solides bases pour développer ensuite des modèles théoriques si besoin. Par exemple, la gravitation de Newton, développée par Isaac Newton dans le célèbre ouvrage *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* publié en 1687 à Londres, fut premièrement un modèle empirique basé sur l'observation de chutes libres d'objets de différentes natures. Ensuite, la mécanique analytique, et en particulier la mécanique lagrangienne développée par Joseph-Louis Lagrange à partir de 1788, ensuite approfondie par les travaux de William Rowan Hamilton, apporta les bases théoriques pour modéliser la gravitation universelle classique de Newton. Les forces de Newton engendrant l'accélération des objets sont désormais décrites à l'aide de la minimisation d'un potentiel d'énergie, ce que l'on appelle le principe variationnel ou le principe de moindre action. L'équivalence entre les lois de conservation et le principe variationnel n'est pas directe, mais fut démontrée à l'aide du théorème de Noether, par la mathématicienne Emmy Noether en 1915. Aujourd'hui encore, le principe de moindre action est abondamment utilisé dans toutes les branches de la mécanique, comme la mécanique quantique, la mécanique du point ou la mécanique des milieux continus.

La mécanique des milieux continus s'intéresse à la description mécanique de l'ensemble des états de la matière que nous expérimentons au quotidien, de la déformation des solides jusqu'à l'écoulement des fluides, tout est une question de mouvement. Dans ce manuscrit, on s'intéressera exclusivement aux solides déformables. Les modèles utilisés pour ce type de mécanique sont souvent des modèles semi-empiriques, car ils font appel à de nombreux principes fondamentaux, mais sont couplés à des lois de comportement basées sur des fondements empiriques. La loi de comportement la plus utilisée est bien sûr la loi de Hooke, énoncée par le physicien Robert Hooke en 1676. C'est une loi linéaire qui est donc l'approximation au premier ordre d'une loi plus complète non établie théoriquement. Elle est limitée aux déformations élastiques, ce qui est généralement le cas pour des déformations du premier ordre. Ensuite, la théorie des poutres fut développée par Jacques Bernoulli et Leonhard Euler vers 1750 en utilisant la déformation en flexion de la fibre neutre. Il est intéressant de noter qu'alors le génie mécanique n'est pas considéré comme une science et que les Mathématiques n'avaient pas pour objectif d'être

appliquées concrètement. Ce n'est qu'avec la construction des premières grandes roues et de la tour Eiffel au XIX<sup>ème</sup> siècle que la théorie des poutres a pu démontrer son intérêt pratique à un large public. Ensuite, la théorie des plaques minces fut développée en 1888 par Augustus Love basée sur les travaux de Gustav Kirchhoff. Ultérieurement, la théorie des plaques épaisses fut développée par Raymond Mindlin à partir des travaux de Rayleigh, Timoshenko et Reissner. Ce type de théorie considère toujours la fibre normale rectiligne mais elle n'est plus contrainte à être perpendiculaire au plan moyen. Cela permet de prendre en considération le cisaillement dans la déformation de la structure.

Les matériaux composites sont des matériaux obtenus par l'assemblage ou le mélange de deux composants différents, ils sont utilisés depuis l'aube de l'humanité car le bois, composé d'une matrice et d'un renfort, est un composite naturel. En revanche, la production de matériaux composites artificiels commence dans les années 1930 lors de l'étude du plastique renforcé. En 1939, les premières applications émergent avec en particulier l'entreprise française *Manufacture d'Isolants et Objets Moulés*, qui combina résine et fibre de verre afin de renforcer des hélices d'avions et des cannes à pêche. Pendant la guerre froide, l'évolution des matériaux composites s'accélère dans le but de soutenir les efforts scientifiques et industriels nécessaires dans la course à l'espace. L'âge d'or du développement des matériaux composites s'étend alors sur une période de 30 ans, de 1950 à 1980, avec notamment son introduction au marché public. Dès lors, l'intérêt de la communauté scientifique sur ce sujet n'a cessé de croître. La production de modèles et d'applications sur ce type de solutions sont toujours d'actualité grâce aux propriétés optimisées de ce type de matériaux. Pour plus de détails sur l'histoire des matériaux composites, je recommande vivement les écrits sur l'histoire des matériaux composites [10] par Bensaude-Vincent, une philosophe et historienne des sciences qui a réalisé plusieurs ouvrages sur l'histoire des sciences de l'Antiquité jusqu'aujourd'hui.

Les objectifs des présents travaux de thèse s'inscrivent donc dans une démarche globale de modélisation dynamique de matériaux multicouches. L'objectif principal de recherche général est de fournir davantage d'éléments de modélisation pour la description de matériaux multicouches.

## Contexte industriel

Le principal intérêt des matériaux multicouches pour l'industrie réside dans ses propriétés mécaniques optimisées. Ces matériaux vont allier de bonnes propriétés mécaniques, selon les caractéristiques recherchées, telle que la résistance mécanique par exemple, pour une masse minimisée et donc une réduction de l'inertie totale du système conçu. Depuis leur arrivée sur le marché des matériaux, les multicouches ont été abondamment adoptés dans tous les secteurs. Les multicouches qui allient masse minimale et rigidité élevée vont être principalement utilisés dans l'automobile ou l'aéronautique, où la masse des différentes pièces assemblées a un rôle déterminant dans les performances du produit conçu. Les multicouches ont aussi de nombreuses applications dans le domaine du bâtiment. Ils se sont révélés déterminants dans la réduction du poids (et donc baisse des coûts) tout en conservant des performances d'isolation acoustique suffisante. Parallèlement, il existe aussi des matériaux remplissant ce type de critères tels que les matériaux microperforés [30, 35, 77]. Ce type de matériaux parvient à générer de bonnes propriétés acoustiques sans avoir à faire appel à une couche absorbante, à l'inverse des matériaux tricouches.

L'utilisation abondante des matériaux multicouches implique l'obtention de nouveaux outils de conception. Ces outils ont évolué au cours du temps vers des descriptions de plus en plus détaillées, afin de décrire d'une manière suffisamment fiable ces matériaux au comportement dynamique complexe et au domaine d'application grandissant. La révolution du numérique et l'utilisation des éléments finis ont grandement contribué à l'essor de popularité que ces matériaux ont connu. Mais un intérêt pour les modèles analytiques des matériaux multicouches a resurgi principalement ces 20 à 30 dernières années. Leur avantage est, d'une part, la compréhension physique du système étudié apportée par ce type de modèle. D'autre part, alliés à du calcul numérique, il est possible d'obtenir des modèles hybrides au temps de calcul optimisé et aux résultats riches en informations. On appelle ce type de modèle les modèles condensés.

Cependant, bien que les techniques de fabrication des matériaux multicouches aient été abondamment développées et intégrées dans une démarche d'amélioration continue, quelques verrous subsistent lorsqu'il s'agit de décrire des matériaux au

couplage incertain. Il existe inévitablement des variations de la qualité du couplage lorsque différents matériaux sont joints afin de former un composite. Dans d'autres cas, lorsque le client s'approprie le matériau multicouche fourni par un fabricant, le couplage de ce dispositif au système que le client souhaite traiter n'est pas assurément idéal. Des outils de conception peuvent ainsi se révéler indispensables dans le but d'accompagner le client dans son étude. L'objectif est d'obtenir un matériau qui resterait fonctionnel face aux conditions opératoires contrôlées ou non contrôlées. Dans le cadre des matériaux présentant des défauts, tels que des délaminations, des glissements de couche, ou des inclusions, il est aussi essentiel de pouvoir modéliser correctement ce type de comportement. En effet, dans une démarche de surveillance des machines, savoir si notre pièce remplit toujours sa fonction au sein de l'assemblage malgré des défauts peut être déterminant dans une optimisation des coûts tout en conservant un haut niveau de sûreté et de sécurité. Un exemple d'un matériau multicouche, et d'un schéma de nombreux types de défauts sont présentés à la Figure 1. Dans une certaine mesure, certains défauts présentent les mêmes caractéristiques d'un point de vue modélisation. Par exemple, l'inclusion (foreign object) ou la fissure d'une couche correspondra dans les deux cas à une modification du module de rigidité d'un point de vue macroscopique (rigidification ou assouplissement).

Un manque important à combler dans le contexte industriel actuel est le besoin de caractérisation des interfaces au sein des matériaux multicouches. En effet, il n'existe pas à l'heure actuelle de consensus sur les propriétés mécaniques d'interfaces imparfaites. Il serait pourtant essentiel, même si un modèle prenant en compte les interfaces imparfaites était implémenté, de pouvoir caractériser des interfaces afin de nourrir ce modèle.

Ainsi, un autre objectif de recherche principal dans les présents travaux de thèse est d'implémenter des interfaces complexes. Cela se concentre sur les interfaces imparfaites engendrant des discontinuités du champ de déplacement, afin de décrire les effets de couplages imparfaits, une thématique importante dans l'industrie.

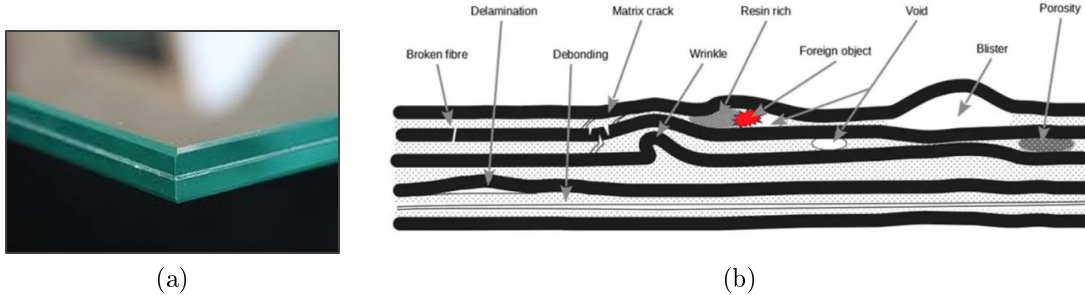


FIGURE 1 – (a) Verre feuilleté (MSR Miroiterie) (b) Schéma exhaustif des différents types de défauts dans un multicouche (réalisé par Duy Cao de Addcomposites pour Wevolver.com)

### Objectifs de recherche

Dans le cadre de cette thèse, il est d'abord recherché d'apporter de nouveaux éléments de physique dans un modèle multicouche préexistant. L'objectif est d'obtenir de nouveaux leviers de caractérisation et de conception des multicouches. Ces nouveaux éléments visent à décrire le comportement d'interfaces imparfaites au sein d'un multicouche. À l'aune de la synthèse bibliographique, présentée ultérieurement (Chapitre 1), des objectifs plus concrets et plus détaillés seront fournis, avec un positionnement en fonction de la littérature actuelle, ce qui est bien sûr un élément déterminant dans la formulation d'objectifs de recherche précis.

## Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est organisé en 4 chapitres :

- Le Chapitre 1 est une synthèse bibliographique autour des modèles de plaques multicouches, de la modélisation des interfaces imparfaites ainsi que de leur caractérisation. L'objectif de ce chapitre est de situer les présents travaux de thèse, mais aussi de donner un regard synthétique et critique sur la littérature scientifique utilisée. Les trois points principaux abordés dans

cette synthèse bibliographique sont : les modèles dynamiques de structures planes multicouches ; la modélisation des interfaces d'un multicouche ; et les travaux expérimentaux sur le couplage imparfait de matériaux multicouches.

- Dans le Chapitre 2 est détaillé le modèle développé. Une introduction sur les équations fondamentales et leurs rôles est réalisée dans une première partie. La suite du chapitre est constituée d'un article publié durant la thèse au *Journal of Sound and Vibration* [9] issu des travaux de thèse réalisés. Finalement, des applications supplémentaires du modèle sont fournies à la suite de l'article pour présenter le modèle dans sa globalité ainsi que ses alternatives et ses limites.
- Le Chapitre 3 décrit la méthodologie employée dans l'étude expérimentale réalisée. L'objectif de ce chapitre est de détailler la méthode de mesure employée ainsi que le traitement de données implémenté afin de caractériser le comportement dynamique d'échantillons multicouches. Les choix de la vibrométrie laser comme méthode de mesure et de la Résolution Inverse Corrigée [65] comme méthode de caractérisation dynamique sont alors justifiés dans une première partie à l'aide d'une brève synthèse sur les méthodes similaires communément employées. Ensuite, cette méthodologie est appliquée à un cas d'étude afin de montrer comment ces méthodes ont été employées dans les présents travaux.
- Le Chapitre 4 correspond à l'application des méthodologies de modélisation et d'expérimentation. L'objectif est de montrer la capacité du modèle à prédire le comportement dynamique d'un matériau multicouche aux interfaces imparfaites, ainsi que la possibilité de l'utiliser dans le but de caractériser des interfaces imparfaites. Premièrement, le protocole de fabrication des échantillons étudiés y est décrit ainsi que les échantillons obtenus en appliquant ce protocole. Ensuite, les conditions expérimentales de mesure et leurs effets sur la dynamique des échantillons étudiés sont détaillés. Finalement, les résultats de caractérisation obtenus sont présentés et discutés.

# Chapitre 1

## Synthèse bibliographique

### Sommaire

---

1.1	Modélisation dynamique de structures planes multicouches . . . . .	20
1.1.1	Structures planes homogènes et élastiques . . . . .	20
1.1.2	Plaques multicouches aux interfaces parfaites . . . . .	22
1.1.3	Résolution de modèles par discrétisation . . . . .	28
1.2	Modélisation des interfaces d'un multicouche . . . . .	33
1.2.1	Modèles équivalents à interfaces imparfaites . . . . .	34
1.2.2	Introduction à la mécanique du contact . . . . .	45
1.3	Travaux expérimentaux sur les couplages imparfaits dans les maté- riaux multicouches . . . . .	51
1.3.1	Caractérisation adhésive des interfaces imparfaites . . . . .	51
1.3.2	Caractérisation cohésive des interphases complexes . . . . .	53
1.4	Conclusion . . . . .	55

---

Ce chapitre est consacré à la synthèse bibliographique des travaux utilisés dans la thèse et l'élaboration de ce manuscrit. La Section 1.1 est réservée à la modélisation de structures planes aux conditions de couplages parfaites entre les couches ainsi que les principales méthodes de résolution par discrétisation d'un modèle de plaque. Ensuite, la Section 1.2 comporte une synthèse sur les modèles analytiques aux interfaces imparfaites, ainsi que quelques éléments de mécanique du contact en relation avec les interfaces imparfaites au sein d'une structure multicouche. La dernière section de cette synthèse bibliographique, la Section 1.3, porte sur les travaux expérimentaux au sujet des matériaux multicouches aux conditions de couplages imparfaites.

## 1.1 Modélisation dynamique de structures planes multicouches

Cette section du manuscrit est dédiée à décrire brièvement les modèles dynamiques qui ont pour fonction de décrire le comportement mécanique de structures planes multicouches. Cette partie du manuscrit reprend très synthétiquement les idées générales des quelques modèles abordés ici. Pour une revue plus exhaustive sur le sujet des modèles de plaques multicouches aux interfaces parfaites, il est conseillé de se référer aux synthèses bibliographiques de Castel [21], Viverge [113] et Marchetti [78], qui ont inspiré cette synthèse, cette dernière étant conçue comme un complément de leur état de l'art.

### 1.1.1 Structures planes homogènes et élastiques

Pour une structure plane de type plaque ou poutre monocouche au moins une dimension, généralement considérée comme l'épaisseur totale  $h$  du matériau, est petite devant la longueur  $L$  et la largeur  $b$ , autrement dit  $h \ll (L, b)$ . Cela permet d'utiliser la séparation des variables du champ cinématique en trois dimensions  $u(x, y, z)$ , où  $z$  est la direction dans la dimension de l'épaisseur, très utilisée dans la modélisation de structure plane :



$$u(x, y, z) = g(x, y)F(z), \quad (1.1)$$

Dès lors, le champ de déplacement admis à l'Équation (1.1) va être particulièrement affectée par le type de modélisation de plaque que l'on choisit. La théorie classique de Love-Kirchhoff [59, 75], ou Classical Laminate Theory (CLT) est un modèle de plaque mince car il ne prend pas en compte le cisaillement hors-plan, uniquement les déplacements membranaires  $u_x(x, y, z)$  et  $u_y(x, y, z)$  et le déplacement  $u_z(x, y)$  sont considérés. Peu après, ce type de modèle a été étendu aux déformations du premier ordre par Hencky [49], Mindlin [83] et Reissner [98], formant ainsi les premiers modèles de plaques épaisses ou First order Shear Deformation Theory (FSDT). Les déformations au premier ordre permettent de prendre en considération le cisaillement de la structure et augmentent ainsi la validité du modèle dans des plus hautes fréquences que les théories classiques. Des modèles d'ordre supérieur, ou High order Shear Deformation Theory (HSDT) ont été développés à partir des modèles FSDT. Leur intérêt principal est de pouvoir respecter l'annulation des contraintes de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la structure, ce qui implique des prédictions d'une meilleure précision. Pour cela, les modèles sont étendus au moins au 3ème ordre ou sont réécrits avec des fonctions trigonométriques. Le but est d'employer une fonction impaire non linéaire afin de pouvoir satisfaire les conditions aux limites mentionnées précédemment.

Dans le cadre de la modélisation de structures planes multicouches, les modélisations de plaque employées sont a minima au premier ordre, car cela est essentiel afin de pouvoir utiliser des conditions de couplage aux interfaces entre les couches. Fondamentalement, au moins 4 éléments sont nécessaires afin de construire un modèle analytique de plaques multicouches, la plupart de ces éléments sont propres à la modélisation de structure d'une manière générale (monocouche notamment) :

- Une loi de comportement, par exemple la loi de Hooke (1.2) pour les déformations élastiques. Celle-ci va permettre de décrire comment la structure considérée va réagir à une contrainte mécanique spécifique.
- Une relation entre les déplacements et les déformations de la structure, mise en place par le tenseur de déformation.
- Une ou plusieurs hypothèses sur la distribution du déplacement transverse,

ce qui différencie les modèles de plaques épaisses à ceux des plaques minces par exemple.

- Un équilibre dynamique doit être obtenu à l'aide d'une équation ou d'un système d'équations, le principe des travaux virtuels ou une équivalence est généralement utilisé.

Parmi ces 4 éléments, le principal point de divergence entre les différents modèles de plaques multicouches qui existent est sur la distribution du déplacement transverse et sur l'écriture même du champ de déplacement. La suite de ce chapitre est donc consacrée exclusivement aux hypothèses que les différents modèles formulent sur le champ de déplacement, car ce dernier constitue la principale différence entre la majorité des modèles de plaques multicouches.

$$\sigma_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}, \quad (1.2)$$

Avec  $\alpha = \{x, y, z\}$ ,  $\beta = \{x, y, z\}$ ,  $\gamma = \{x, y, z\}$ ,  $\delta = \{x, y, z\}$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  le tenseur des contraintes,  $Q_{\alpha\beta\gamma\delta}$  le tenseur des raideurs et  $\varepsilon_{\gamma\delta}$  le tenseur des déformations.

Lorsque la situation s'y prête, l'écriture de l'Équation (1.2) (ou des équations équivalentes) sous forme matricielle, où les vecteurs et matrices seront écrits en **gras**, sera employée à l'image de l'Équation (1.3)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.3)$$

### 1.1.2 Plaques multicouches aux interfaces parfaites

L'évaluation et la comparaison de plus de 40 modèles analytiques de plaques multicouches orthotropes ont été réalisées par Carrera en 2000 [19]. Il propose alors une classification afin de réunir l'ensemble des types de modèles qui existent, ce qui a comme grand intérêt de notifier les points de divergences entre les différents modèles présents dans la littérature. À l'image de la classification proposée par Carrera, deux grandes familles sont présentes dans le paysage scientifique des modèles multicouches : les modèles monocouches équivalents ou Equivalent Single Layer (ESL) models, et les modèles par couche ou Layer Wise (LW) models. Ces deux familles de modèles sont présentées de manière sommaire par Reddy et Ro-

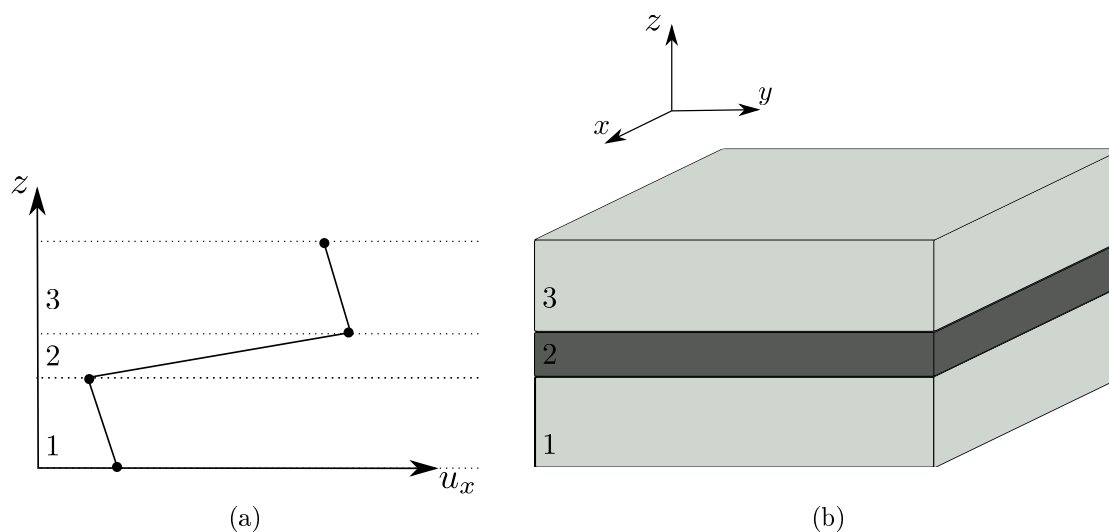


FIGURE 1.1 – (a) Représentation du déplacement  $u_x$  en fonction de l'épaisseur  $z$  généralement obtenu pour un modèle de plaque multicouche. (b) Schéma d'un multicouche aux interfaces parfaites en 3D.

bins [97] mais avec de nombreux exemples. Une représentation schématique d'un multicouche aux interfaces parfaites est montrée à la Figure 1.1.

### Modèles monocouche équivalente ou Equivalent Single Layer models

La caractéristique propre aux modèles ESL est de parvenir à exprimer le comportement dynamique d'une structure multicouche complète à l'aide du champ cinématique d'une seule couche, la couche de référence. Cette dernière peut être une véritable couche du matériau (la première couche selon la notation adoptée généralement), ou une couche virtuelle ayant des propriétés équivalentes capables de décrire la dynamique du multicouche. Pour cela, un champ de déplacement global indépendant des couches peut être émis pour commencer :

$$\begin{cases} u_x(x, y, z, t) = U_{0x}(x, y, t) - z \frac{\partial W(x, y, t)}{\partial x} + F(z) \phi_{xz}(x, y, t), \\ u_y(x, y, z, t) = U_{0y}(x, y, t) - z \frac{\partial W(x, y, t)}{\partial y} + F(z) \phi_{yz}(x, y, t), \\ u_z(x, y, z, t) = W(x, y, t). \end{cases} \quad (1.4)$$

Où  $u_x(x, y, z, t)$ ,  $u_y(x, y, z, t)$  et  $u_z(x, y, z, t)$  sont respectivement le déplacement selon la direction  $x$ ,  $y$  et  $z$ , avec  $t$  le temps. Les fonctions  $\phi_{\alpha z}(x, y, t)$  avec  $\alpha = \{x, y\}$  représente le cisaillement des couches.

Ce champ cinématique est un champ global qui mène à différentes théories selon le choix de la fonction  $F(z)$ , résumées dans le Tableau 1.1.

$F(z)$	Théorie	Références
$C_0$	Classical Laminate Theory (CLT)	[28, 29, 59, 75]
$C_1.z + C_0$	First order Shear Deformation Theory (FSDT)	[29, 49, 83, 98]
$C_2.z^2 + C_1.z + C_0$	High order Shear Deformation Theory (HSDT)	[12, 13, 73]

TABLE 1.1 – Les différentes théories de plaque selon le choix de l'ordre de la fonction  $F(z)$  et les références associées, avec,  $\{C_0, C_1, C_2\}$  des constantes.

Une autre caractéristique fondamentale dans les modèles ESL, est qu'ils réduisent un problème complexe 3D en un problème 2D. Cela est fait en intégrant les travaux virtuels dans l'épaisseur  $h$  du matériau multicouche, comme dans l'Équation (1.5) par exemple, pour le moment généralisé  $M_{xy}$  défini à l'Équation (1.5).

$$M_{xy}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy}(x, y, z) dz, \quad (1.5)$$

En revanche, les modèles ESL échouent à décrire avec précision le comportement de structure épaisse car la dynamique locale de chaque couche est négligée.

### Modèles par couche ou Layer Wise models

La caractéristique propre aux modèles LW est d'écrire le champ de déplacement indépendant par couche, chaque couche notée  $i$  a ses propres variables cinématiques considérées comme indépendantes a priori. Comme exemple, on pourrait citer le modèle développé par Ghinet et Attala [38] :

$$\begin{cases} u_x^i(x, y, z, t) = U_{0x}^i(x, y, t) + F(z)\phi_{xz}^i(x, y, t), \\ u_y^i(x, y, z, t) = U_{0y}^i(x, y, t) + F(z)\phi_{yz}^i(x, y, t), \\ u_z^i(x, y, z, t) = W(x, y, t). \end{cases} \quad (1.6)$$

À l'inverse des modèles ESL, les modèles LW présentent bien plus de variables

à identifier. Pour cela, de nouvelles équations sont nécessaires. Dans le cadre des modèles aux interfaces parfaites, deux conditions de continuité entre la couche  $i$  et la couche  $i + 1$  sont utilisées : (1) la continuité du champ de déplacement à l'interface  $i$ ,  $u^i(x, y, z = z^i, t) = u^{i+1}(x, y, z = z^i, t)$ ; et (2) la continuité du champ de contrainte  $\sigma^i(x, y, z = z^i, t) = \sigma^{i+1}(x, y, z = z^i, t)$ . Les modèles LW ont l'avantage de décrire le comportement dynamique d'une manière plus détaillée, au détriment de la simplicité de ceux-ci. Les déformations de structures épaisses voire très épaisses peuvent être modélisées par ce type de théories. De nombreux exemples sont disponibles dans la littérature notamment [26, 31, 38].

### L'effet Zig-Zag

L'effet Zig-Zag (ZZ) se traduit concrètement par une discontinuité de la dérivée du champ de déplacement aux interfaces entre les couches. Les composantes du champ de déplacement sont donc des fonctions de classe  $C_z^0$ , ou « dérivée d'ordre 0 selon  $z$  continue », autrement dit « dérivée d'ordre 1 selon  $z$  discontinue ». Une représentation de cet effet ZZ est montrée à la Figure 1.1. L'effet ZZ apparaît lorsque les matériaux choisis pour constituer les différentes couches de la structure sont de natures différentes, il est essentiel afin de garantir une continuité des contraintes transverses aux interfaces entre les couches. En revanche, cet effet peut apparaître de différentes manières selon la modélisation choisie, ce qui a pu engendrer quelques débats dans la communauté scientifique. Trois stratégies différentes sont possibles lorsqu'il s'agit d'implémenter cet effet comme indiqué par Carrera [20], ce qui engendre trois types de modèles multicouches implémentant l'effet ZZ.

- **Les modèles multicouches de Lekhnitskii ou Lekhnitskii Multilayered Theories (LMT)**

Le premier à avoir développé un champ de déplacement prenant en compte l'effet ZZ, c'est-à-dire en respectant la nature  $C_z^0$  du champ de déplacement, était Lekhnitskii dans son modèle LW [69]. Il développa un modèle au champ de déplacement cubique et prit en considération l'effet ZZ *grâce à la continuité du champ de déplacement aux interfaces*. Les changements de dérivées et de signes des dérivées successives s'opèrent naturellement en changeant de couche

grâce aux conditions de continuité. L'effet ZZ est donc considéré dans le modèle mais a posteriori : aucune hypothèse de départ ne l'intègre explicitement dans le champ de déplacement. Ainsi, les modèles multicouches implémentant l'effet ZZ par leurs conditions de continuité appartiennent à la famille des modèles multicouches de Lekhnitskii.

- **Les modèle multicouches d'Ambartsumian ou Ambartsumian Multilayered Theories (AMT)**

Ce type de modélisation a été obtenu principalement afin d'étendre les théories de Reissner et de Mindlin pour des plaques isotropes et homogènes, en incluant les effets ZZ du cas multicouche. Pour cela, le champ cinématique de Reissner-Mindlin est utilisé par couche.

$$\begin{cases} u_x^i(x, y, z) = U_{0_x}^i(x, y, t) - \bar{z}^i \phi_x^i(x, y, t), \\ u_y^i(x, y, z) = U_{0_y}^i(x, y, t) - \bar{z}^i \phi_y^i(x, y, t), \\ u_z^i(x, y, z) = W(x, y), \end{cases} \quad (1.7)$$

Avec  $\bar{z}^i = (z - z^i)$  la coordonnée d'épaisseur dont l'origine est placée au plan moyen de la couche  $i$  et  $z^i$  la coordonnée du plan moyen de la couche  $i$ . Ensuite, les déformations linéaires et les contraintes élastiques sont calculées. Des relations entre les champs cinématiques des couches successives sont trouvées grâce à la continuité du champ de déplacement et la continuité des contraintes. Finalement, un modèle équivalent à un modèle ESL est obtenu, car l'ensemble du champ de déplacement est exprimé à l'aide d'une couche de référence, mais avec des paramètres matériaux qui dépendent des couches. À partir de là, l'effet ZZ est bien pris en compte car la continuité des champs de déplacement et de contrainte est considérée. C'est le type d'implémentation que nous retrouverons dans le modèle étudié dans ce manuscrit au Chapitre 2. Ainsi, plus de détails seront explicités sur les différentes étapes de l'implémentation du modèle, dont l'effet ZZ.

- **Les modèles multicouches basés sur le théorème variationnel mixte de Reissner ou multilayered theories based on Reissner Mixed Variational Theorem (RMVT)**

Dans de nombreuses théories et particulièrement dans les modèles LW, *l'effet ZZ est introduit à l'aide d'une fonction* à l'image du modèle de Murakami [84], illustré par l'Équation (1.8). On retrouvera ce type d'implémentation régulièrement dans les modèles LW dans la Section 1.2, dédiée aux modèles aux interfaces imparfaites. Le changement de signe lors d'un passage d'une couche à l'autre est explicitement injecté dans le champ de déplacement de départ à l'aide de la fonction signe  $sgn(z)$  ou  $(-1)^i$  avec  $i$  l'indice de la couche :

$$\begin{cases} u_x^i(x, y, z, t) = U_{0_x}(x, y, t) + z\varphi_x^i(x, y, t) + S_x^i(x, y, t)(-1)^i \frac{2}{n^i h} \bar{z}^i, \\ u_y^i(x, y, z, t) = U_{0_y}(x, y, t) + z\varphi_y^i(x, y, t) + S_y^i(x, y, t)(-1)^i \frac{2}{n^i h} \bar{z}^i, \\ u_z^i(x, y, z, t) = W(x, y, t). \end{cases} \quad (1.8)$$

Avec de nouveau  $\bar{z}^i$  la coordonnée d'épaisseur dont l'origine est placée au plan moyen de la couche  $i$ . Les formulations LW sont légèrement différentes des autres, car les variables du champ cinématique ne décrivent pas explicitement des modes de déformations particuliers, telle que la flexion ou le cisaillement. L'ensemble de ces déformations sont en revanche prises en compte par les différents termes du champ de déplacement. Pour  $u_x^i(x, y, z, t)$  par exemple : un terme constant  $U_{0_x}(x, y, t)$ , commun à toutes les couches ; un terme linéaire  $z\varphi_x^i(x, y, t)$ , dont la pente varie en fonction des couches ; et le terme ZZ  $S_x^i(x, y, t)(-1)^i \frac{2}{n^i h} \bar{z}^i$ , que l'on écrira par la suite avec la fonction  $\Omega$  telle que  $\Omega_x^i(x, y, t)(z - z^i) = S_x^i(x, y, t)(-1)^i \frac{2}{n^i h} \bar{z}^i$ .

Pour plus de détails, l'auteur suggère une revue très complète des modèles implémentant l'effet ZZ selon les trois catégories décrites précédemment, ainsi que leurs développements ultérieurs, écrite par Carrera en 2003 [20].

**Classification des modèles :**

La frontière entre les modèles ESL et les modèles LW est en réalité perméable. En effet, il est relativement simple de passer d'une description LW a priori à une description ESL a posteriori si par exemple, des équations de continuité aux interfaces sont utilisées. Des équivalences peuvent être aussi réalisées a posteriori, comme le propose Guyader [44] afin de réaliser une analyse des nombres d'onde de son modèle multicouche. On obtient ainsi un paramètre monocouche qui décrit à des fréquences données le comportement vibratoire d'un matériau multicouche. Finalement, les points de divergence entre les modèles ESL et les modèles LW sont plus de l'ordre de la finalité de ces modèles. Un modèle comme celui de Guyader est dans l'esprit un modèle ESL qui prend en compte les effets ZZ, car sa finalité principale est de donner aisément des paramètres de plaque monocouche équivalente afin de décrire le comportement de la structure.

À l'inverse, un modèle comme celui de Murakami [84] est un modèle LW dans ses hypothèses de départ, mais aussi dans sa finalité, car l'écriture du champ de déplacement (Équations (1.8)) excelle dans la description par couche du champ de déplacement et de contrainte. Néanmoins, ce type de modèle devient encombrant lorsqu'il s'agit de calculer simplement des paramètres décrivant le comportement global du multicouche (tels que des paramètres équivalents).

### 1.1.3 Résolution de modèles par discrétisation

Une fois le modèle analytique choisi, il est bien évidemment nécessaire de le résoudre, c'est-à-dire de combiner les équations avec les hypothèses imposées par la prédiction que l'on souhaite établir. Par exemple, si le chargement appliqué à la structure est connu, le but peut être de prédire la déformation qui en sera engendrée. De nombreuses méthodes sont disponibles afin de résoudre un modèle analytique de plaque multicouche, et bien qu'elles soient indépendantes du modèle choisi, une vision propre à la méthode choisie est établie à l'issue de la résolution. Une bonne méthode de résolution consiste alors à obtenir des résultats fiables et précis avec un temps de calcul réduit et avec une facilité d'implémentation dans



l'idéal.

Dans le cadre des modèles de plaques, il est toujours possible de trouver une solution analytique, mais pour des questions de simplicité (comme le besoin de résoudre un système d'équation linéaire d'ordre 6 complexe) ou pour des questions de faisabilité (résoudre un problème non linéaire qui ne présente pas de solution analytique simple), employer une méthode de discrétisation peut se révéler être le meilleur moyen de résoudre un problème efficacement. Par ailleurs, le type de méthode de discrétisation va principalement être imposé par le modèle analytique lui-même, ou par les paramètres que l'on souhaite prédire. La procédure de Navier est utile lorsqu'il s'agit de prédire efficacement un champ cinématique grâce à sa décomposition trigonométrique. La méthode de Rayleigh-Ritz est l'une des méthodes les plus utilisées dans la résolution de modèles de plaques, car elle permet de révéler théoriquement la dynamique d'une structure plane. D'autres types de méthode de résolution ont été employés dans la littérature, comme une méthode basée sur la propagation d'onde pour analyser la dynamique de structures cylindriques [119], ou la matrice exponentielle afin de résoudre un problème d'équilibre en 3D pour des plaques et des coques [15]. Cependant, ces méthodes échouent lorsqu'il s'agit de résoudre le comportement dynamique de structures complexes. Pour pallier cela, la méthode des éléments finis est employée en discrétisant localement les équations de la dynamique et en les résolvant par éléments finis. Voici quelques détails ci-dessous sur les principales méthodes de discrétisation utilisées dans les modèles analytiques de plaque.

### Procédure de Navier

La procédure de Navier consiste à poser une hypothèse sur la forme du champ cinématique à partir des conditions aux limites. Il s'agit ensuite d'écrire les différentes composantes du champ cinématique à partir de fonctions trigonométriques afin de respecter les différentes conditions aux limites. La forme la plus classique de la procédure de Navier est son application à une plaque rectangulaire simplement appuyée avec un chargement sinusoïdal. Par exemple, le champ de déplacement du cas présenté précédemment avec une cinématique de Reissner-Mindlin (Équations (1.4)), pourrait être écrit à l'image des Équations (1.9).

$$\begin{cases} U_{0_x}(x, y) = U_{0_x}^{nm} \cos(m\pi x/L) \sin(n\pi y/b), \\ U_{0_y}(x, y) = U_{0_y}^{nm} \sin(m\pi x/L) \cos(n\pi y/b), \\ W(x, y) = W^{nm} \sin(m\pi x/L) \sin(n\pi y/b), \\ \phi_{xz}(x, y) = \phi_{xz}^{nm} \cos(m\pi x/L) \sin(n\pi y/b), \\ \phi_{yz}(x, y) = \phi_{yz}^{nm} \sin(m\pi x/L) \cos(n\pi y/b) \end{cases} \quad (1.9)$$

Avec  $m$  et  $n$  des entiers naturels correspondant respectivement aux modes dans la direction  $x$  de longueur totale  $L$  et  $y$  de largeur totale  $b$ .

Le cas statique est simplement décrit en prenant  $m = n = 1$ . Pour le cas dynamique, un couple  $(m, n)$  est d'abord choisi, les Équations (1.9) deviennent alors un système d'équations linéaires à résoudre. La première solution positive au système d'équations correspond à la fréquence propre du mode  $(m, n)$ . Il n'est pas nécessaire de sommer les différents termes pour résoudre le problème en dynamique, il suffit de résoudre le problème pour tous les couples  $(m, n)$  nécessaires à l'étude, à l'image de l'analyse modale.

Ce type de procédure a été utilisé dans un grand nombre d'applications afin de tester le modèle d'intérêt. Cela a été le cas par Guyader [45] pour tester son modèle de plaque multicouches orthotropes. Loredo [74] appliqua le même type de procédure afin de comparer son modèle au modèle de Woodcock [117], un modèle similaire à celui de Guyader.

### Méthode de Rayleigh-Ritz

L'intérêt d'utiliser la méthode de Rayleigh-Ritz [95, 96, 99] est de pouvoir implémenter simplement plusieurs types de conditions aux limites, ainsi qu'une plus grande variété de matériaux multicouches sur une même procédure. En effet, son écriture sous forme de base et de déformées propres implique son adaptabilité. Il est d'ailleurs possible d'obtenir assez facilement une procédure semblable à la procédure de Navier si la base choisie est sinusoïdale. Néanmoins, le champ de déplacement est généralement écrit avec des fonctions polynomiales [118]. Ensuite, l'objectif est d'écrire le champ de déplacement en utilisant une base et des vecteurs propres. Par exemple, le déplacement transverse  $W$  du Système d'Équations (1.9)

pourrait être réécrit comme :

$$W(x, y, \omega) = \mathbf{A}(\omega)\boldsymbol{\lambda}(x, y), \quad (1.10)$$

Avec  $\mathbf{A}$  la base choisie et  $\boldsymbol{\lambda}$  le vecteur correspondant.

Un bilan énergétique est dressé et peut ainsi être exprimé qu'avec l'aide des bases choisies pour chaque composante du champ de déplacement. Finalement, le bilan énergétique peut être réécrit en fonction d'une matrice de raideur  $\mathbf{K}$  et d'une matrice de masse  $\mathbf{M}$ . La résolution du système obtenu, pour différents chargements si besoin, mène à la réponse de la structure étudiée. Ce type de méthode a largement été utilisé pour des cas relativement simples, car pour des géométries trop complexes, il peut être trop difficile de trouver la base nécessaire à l'application de la méthode. Ghinet et Atalla [38] ont utilisé cette méthode pour tester leur modèle appliqué à une structure sandwich comportant un amortissement visqueux. On retrouve aussi l'application de cette méthode dans le même article de Loredo cité précédemment [74]. Il existe aussi dans la littérature de nombreux exemples où la méthode de Rayleigh-Ritz est améliorée afin de résoudre des problèmes aux géométries plus complexes comme Guo [43] pour l'analyse de vibrations libres de plaques aux formes arbitraires.

### Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis ou Finite Element Method (FEM) est devenue de plus en plus populaire au fil de l'amélioration technologique et des moyens de calcul. Elle est aujourd'hui vastement utilisée et développée dans l'industrie et dans la communauté scientifique grâce à la robustesse des résultats qu'elle propose. Son but est de résoudre les équations de la physique localement, sur l'ensemble des nœuds et des éléments définis lors du maillage de la structure étudiée. Son concept provient du couplage des équations de la mécanique des milieux continus avec les différences finies et les méthodes variationnelles [121].

L'essentiel de la FEM ainsi que ses améliorations sur certains aspects sont présentés dans « The finite element method » de Zienkiewicz et Taylor [120]. L'idée principale est que la mécanique de chaque élément fini est définie à partir d'un ensemble de paramètres. Ces paramètres sont définis à l'aide de fonctions de formes,

ce qui engendre un état propre à chaque élément fini. Ensuite, chaque élément fini est couplé avec les autres sous-systèmes à l'aide de conditions aux limites et forment ainsi un système global complexe. Une structure modélisée par FEM pourrait être résumée par l'Équation (1.11) dans le domaine fréquentiel.

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{q}(\omega) + j\omega \mathbf{C} \mathbf{q}(\omega) + \mathbf{K} \mathbf{q}(\omega) = \mathbf{F}(\omega), \quad (1.11)$$

Avec  $\mathbf{M}$  la matrice raideur correspondant aux effets d'inertie du système,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur correspondant aux propriétés élastiques des milieux continus,  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement qui modélise les pertes d'énergie lors de la déformation de la structure,  $\mathbf{q}(\omega)$  le vecteur des degrés de liberté dans le domaine fréquentiel, qui comportent ainsi toute la dynamique de tous les nœuds existants, et  $\mathbf{F}(\omega)$  le vecteur force appliqué à chaque degré de liberté dans le domaine fréquentiel.

La qualité principale de la FEM est l'analyse de structure finie, autrement dit, des structures dont la géométrie a un effet non négligeable sur les résultats, ce qui est particulièrement le cas en basses fréquences. En effet, la géométrie et les conditions aux limites jouent un plus grand rôle dans les grandes longueurs d'ondes.

Cependant, comme indiqué par Castel [21], la FEM présente certaines limites lorsqu'il s'agit de calculer des dérivées multiples successives, car il est nécessaire d'implémenter des fonctions de formes dont leurs dérivées sont continues entre les éléments. De plus, implémenter de nouveaux éléments ou un nouveau modèle physique dans les éléments finis est un projet à part entière. De plus, pour des structures aux couches fines comme étudiées dans ce manuscrit notamment, le maillage nécessaire devient rapidement conséquent. Un modèle analytique devient alors essentiel lorsqu'il s'agit d'analyser le comportement vibratoire de structures efficacement, mais aussi pour comprendre les phénomènes physiques que ces vibrations impliquent. En revanche, l'implémentation de modèles analytiques condensés en complément de la FEM afin de contourner des maillages conséquents et gagner en temps de calcul font l'œuvre de nombreux travaux, à l'image des travaux d'Uthayasuriyan [112].

**Les limites des modèles aux interfaces parfaites :** L'ensemble des modèles présentés dans cette section sont des fonctions continues de  $z$ , pour les déplacements et les contraintes, car la fonction forme  $F(z)$  est admise comme continue selon  $z$ , autrement dit une fonction de classe  $C_z^0$ . Cela constitue un large panel de modèles couramment utilisés par la communauté scientifique. Cependant, quelques verrous subsistent lorsqu'il s'agit de décrire des effets de couplages non conventionnels aux interfaces entre les couches. L'écriture de classe  $C_z^0$  du champ de déplacement échoue donc à décrire explicitement des effets de couplage imparfaits aux interfaces. Dans cette optique, la prochaine section de cette synthèse bibliographique est consacrée à une revue sur les modèles analytiques de structures planes multicouches prenant en compte des couplages imparfaits aux interfaces entre les couches.

## 1.2 Modélisation des interfaces d'un multicouche

Pour obtenir un modèle multicouche capable de décrire une structure multicouche, il est nécessaire d'écrire des équations aux interfaces entre les couches successives afin d'avoir suffisamment d'équations pour résoudre le problème. Généralement, les équations utilisées sont la continuité des déplacements et des contraintes à l'interface, ce qui correspond à émettre l'hypothèse que les interfaces sont parfaites. Dans le cas d'interfaces imparfaites, plusieurs équations peuvent être utilisées afin de prendre en compte cette hypothèse. La plus largement admise est la discontinuité des déplacements et la continuité des contraintes car le contact, au moins partiel, est toujours opéré.

La définition d'interface dans un matériau multicouche ne fait pas toujours consensus. Dans le cas des modèles équivalents dynamiques, l'interface représente généralement une surface d'épaisseur nulle entre deux couches conjointes d'une structure multicouche. Cependant, dans la littérature expérimentale majoritairement, l'interface peut être définie comme étant un volume entre deux couches permettant d'homogénéiser toutes les imperfections qui s'y présentent. Au sein de cette interface d'épaisseur non nulle se trouve par exemple des mélanges de maté-

riaux issus des deux couches couplées, des bulles d'air ou des impuretés (résidus lors du couplage par adhésion chimique). Plus de détails seront donnés dans la Section 1.3 dédiée aux travaux expérimentaux sur les interfaces imparfaites.

Certains modèles ont une vision micro-mécanique des effets d'interface, à l'image de Lee en 2007 [67]. Néanmoins, les modèles qui ont inspiré le présent travail ont plutôt une approche équivalente, ce qui revient à homogénéiser les effets des interfaces imparfaites en ne rendant compte que de leurs conséquences sur le comportement global du matériau.

Cette section est composée d'une première partie qui synthétise l'implémentation de ce type de modèle dans le but d'en comprendre les subtilités. Ensuite, la méthode d'implémentation de l'interface imparfaite est abordée ainsi que les principales applications qui sont généralement faites avec ces modèles. Puis, la modélisation des interfaces imparfaites est complétée avec quelques éléments de mécanique du contact. Les liens entre la modélisation multicouche homogénéisé et la vision locale de la dynamique du contact sont explicités à la fin de cette section.

## 1.2.1 Modèles équivalents à interfaces imparfaites

### Les bases des modèles pionniers

Pour conserver une clarté d'écriture et éviter l'utilisation de plusieurs indices et notations qui s'entremêlent, les bases des modèles seront présentées avec le déplacement  $u_x$  principalement. Pour un modèle de plaque complet, le déplacement  $u_y$  s'écrira de la même façon. Le déplacement  $u_z$  est souvent considéré constant dans l'épaisseur afin de rendre l'implémentation de ces modèles plus directe. Une illustration d'un tricouche aux interfaces imparfaites ainsi que les sauts de déplacement aux interfaces sont montrés à la Figure 1.2. L'ensemble des modèles synthétisés ici regroupent principalement les travaux pionniers de : Liu publiés en 1994 [71, 72], Cheng publiés en 1996 [22], Schmidt et Librescu publiés en 2001 [70, 105], et Soldatos publiés en 2001 [109]. Tous ces modèles ont pour même origine le modèle de Pagano publié en 1969 [89], qui donna une solution exacte pour des laminés en flexion et aux conditions aux limites simplement appuyées.

D'un point de vue modélisation, le champ de déplacement exact est écrit à l'aide de la fonction Heaviside selon  $z$  notée  $H(z)$ . Elle permet d'écrire l'ensemble

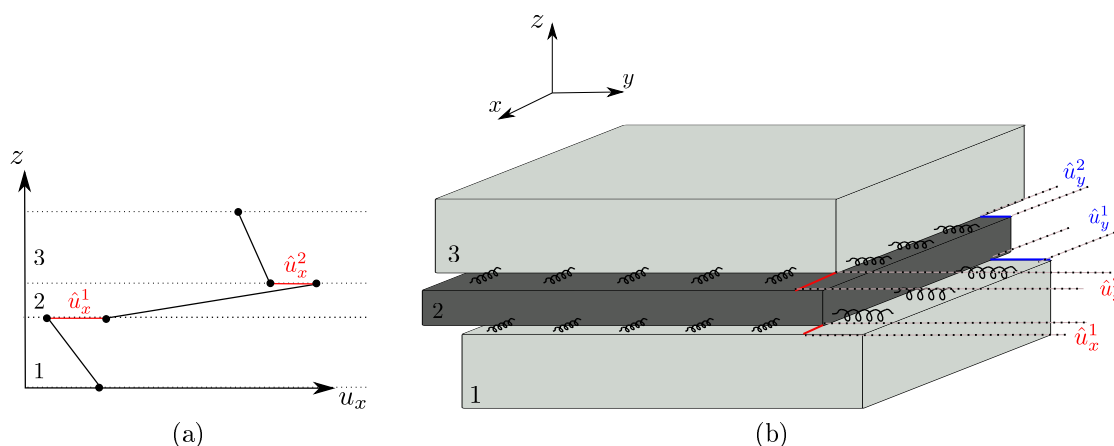


FIGURE 1.2 – (a) Représentation du déplacement  $u_x$  en fonction de l'épaisseur  $z$  en ordonnée avec les sauts aux interfaces  $\hat{u}_x^i$ . (b) Schéma d'un multicouche aux interfaces imparfaites avec l'illustration des sauts de déplacements  $\hat{u}_\alpha^i$  avec  $\alpha = \{x, y\}$ .

du champ de déplacement ainsi que la contribution des  $N - 1$  couches en une seule équation. Un exemple est donné pour le champ de déplacement  $u_x$  à l'Équation (1.12)

$$u_x(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N u_x^i(x, y, z, t) H(z - z^i). \quad (1.12)$$

Ensuite, le champ de déplacement exact est approximé en utilisant le développement de Taylor dans la direction transverse désignée par la variable  $z$  (Équation (1.13)). Ce type d'approche est notamment développé par Cheng [22].

$$u_x(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} u_x^{ij}(x, y, t) (z - z^i)^j H(z - z^i). \quad (1.13)$$

Il y a alors deux indices, l'indice  $i$  qui désigne l'indice d'interface (surface supérieure de la couche  $i$ ), et l'indice  $j$  correspond à l'ordre d'approximation du développement de Taylor. L'indice  $i = 0$  correspond à la surface inférieure de la première couche, où s'applique généralement la condition de contrainte de cisaillement nulle. La surface supérieure de la dernière couche d'indice  $i = N$ , où s'applique la même condition. Le développement en série de Taylor est ensuite

effectué jusqu'à l'ordre recherché. Un exemple de développement au 1<sup>er</sup> ordre est donnée dans l'Équation (1.14).

$$u_x(x, y, z, t) = U_{x_0}(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) + \sum_{i=1}^{N-1} [\hat{u}_\alpha^i + u_x^i(x, y, z - z^i, t)]H(z - z^i) \quad (1.14)$$

Le champ de déplacement est écrit dans sa globalité dans l'Équation (1.15), et de manière plus conventionnelle pour un modèle LW. Dans ce champ de déplacement, on exprime le terme de contribution globale et constante  $U_{x_0}$  pour le déplacement  $u_x$ , qui va affecter l'ensemble du tricouche indépendamment des couches. Il est équivalent au terme homonyme vu précédemment pour les modèles à interfaces parfaites illustré par exemple à l'Équation (1.8). Les termes locaux propres à chaque couche sont ajoutés grâce à la somme sur les interfaces  $i$  et à la fonction de Heaviside  $H(z)$ . Di Sciuva utilise le même type de théorie, mais en écrivant le champ de déplacement de son modèle à partir des fonctions de Lagrange [25, 25, 27].

$$\left\{ \begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= U_{x_0}(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) + \sum_{i=1}^{N-1} \Omega_x^i(x, y, t)(z - z^i)H^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \hat{u}_x^i(x, y, t)H^i \\ u_y(x, y, z, t) &= U_{y_0}(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) + \sum_{i=1}^{N-1} \Omega_y^i(x, y, t)(z - z^i)H^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \hat{u}_y^i(x, y, t)H^i \\ u_z(x, y, z, t) &= U_{z_0}(x, y, t) + z\varphi_z(x, y, t) + \sum_{i=1}^{N-1} \Omega_z^i(x, y, t)(z - z^i)H^i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \hat{u}_z^i(x, y, t)H^i, \end{aligned} \right. \quad (1.15)$$

Avec  $\varphi_\alpha(x, y, t)$  qui représente le terme linéaire global (indépendant des couches),



il diffère du terme  $\phi_{\alpha z}^i(x, y, t)$  vu précédemment pour les modèles à interfaces parfaites. Le terme  $\phi_{\alpha z}^i(x, y, t)$  correspond au cisaillement de la couche  $i$  et serait équivalent à la composition d'une partie de  $\varphi_\alpha(x, y, t)$  et de la fonction ZZ notée  $\Omega_\alpha^i(x, y, t)$ . Dans ces équations  $\alpha = \{x, y\}$ .

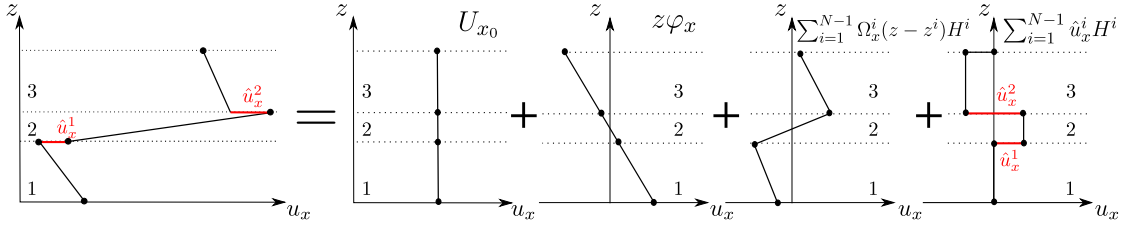


FIGURE 1.3 – Décomposition du déplacement  $u_x = u_x(z)$  de l'Équation (1.15) en fonction de ses quatre composantes : la composante constante pour toutes les couches  $U_{x_0}(x, y, t)$  ; la composante linéaire pour toutes les couches  $z\varphi_x(x, y, t)$  ; la composante linéaire par couche (ou fonction Zig-Zag)  $\sum_{i=1}^{N-1} \Omega_x^i(x, y, t)(z - z^i)H^i$  ; la composante constante par couche (ou saut de déplacement à l'interface)  $\sum_{i=1}^{N-1} \hat{u}_x^i(x, y, t)H^i$ .

On retrouve alors un champ cinématique qui a une base commune avec le champ cinématique de Murakama décrit à l'Équation (1.8), mais avec un terme supplémentaire relatif à la discontinuité du champ de déplacement  $\sum_{i=1}^{N-1} \hat{u}_z^i(x, y, t)H^i$ . Le champ de déplacement donné à l'Équation (1.15) est la forme la plus répandue pour ce type de théorie (modèle LW au premier ordre avec effet ZZ) comme dans le modèle de Librescu et Schmidt [105] ou de Liu [71] mais différentes hypothèses peuvent être formulées sur le déplacement transverse  $u_z$ . Une illustration de ce champ de déplacement est fournie à la Figure 1.3. Cette figure détaille le champ de déplacement  $u_x(z)$  de l'Équation (1.15), ce dernier étant ainsi décomposé des trois termes de la théorie des plaques multicouches aux interfaces parfaites, qui correspondent au trois premiers termes, plus le dernier terme étant le saut de déplacement engendré par l'interface imparfaite. Dans le cadre des modèles de plaques, et pour des raisons de simplicité de calcul, l'hypothèse souvent admise est que le déplacement transverse  $u_z$  est constant dans l'épaisseur  $z$ , à l'image de Librescu dans l'article qui suivit ses travaux [70], de Di Sciuva [25, 27] ou encore de Cheng [22].

## L'implémentation de l'interface imparfaite

L'interface imparfaite s'implémente dans le champ de déplacement à partir du terme  $\hat{u}_\alpha$ , le saut de déplacement, qui contient la composante discontinue du champ de déplacement du multicouche. La grande majorité des modèles à interfaces imparfaites commencent en postulant un champ de déplacement LW prenant en compte l'effet ZZ, à l'image de Murakami [84] ou de l'Équation (1.15). Dans ce champ de déplacement se trouve une nouvelle composante : le saut de déplacement dans le plan horizontal décomposé dans les deux directions  $\hat{u}_x$  et  $\hat{u}_y$  définis par l'Équation (1.16). Quant aux contraintes, elles restent constantes aux interfaces (Équation (1.17)) car malgré le découplage partiel entre les couches, le contact a toujours lieu. Certains font l'hypothèse d'avoir aussi une discontinuité transverse du déplacement à l'image de Liu [71], mais cela doit aller de pair avec un déplacement transverse  $W(x, y, t)$  qui n'est pas constant dans l'épaisseur, ce qui va grandement augmenter la complexité du modèle.

$$\begin{cases} u_x^{i+1}(x, y, z = h^i) - u_x^i(x, y, z = h^i) = \hat{u}_x^i, \\ u_y^{i+1}(x, y, z = h^i) - u_y^i(x, y, z = h^i) = \hat{u}_y^i, \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xz}^{i+1}(x, y, z = h^i) = \sigma_{xz}^i(x, y, z = h^i) = \hat{\sigma}_{xz}^i, \\ \sigma_{yz}^{i+1}(x, y, z = h^i) = \sigma_{yz}^i(x, y, z = h^i) = \hat{\sigma}_{yz}^i, \end{cases} \quad (1.17)$$

avec,  $h^i$  la position selon l'axe transverse de la surface supérieure de la couche  $i$ .

Cependant, la valeur de la discontinuité du champ de déplacement nécessite davantage de modélisation, car elle ajoute au moins une inconnue dans le système d'équations à résoudre. Un choix arbitraire de la valeur aurait déjà peu d'intérêt d'un point de vue modélisation, mais plusieurs aspects de la modélisation seraient ainsi négligés par cette hypothèse. Afin de rendre compte de l'effet du couplage aux interfaces, ces dernières sont généralement modélisées avec une raideur (Équations (1.18)-(1.19) en écriture matricielle). La notation utilisée ici ne correspond pas exactement à l'ensemble des modélisations mentionnées dans cette section, mais correspond au formalisme utilisé dans ce manuscrit de thèse. Bien sûr ces différentes notations sont équivalentes, le choix a donc été fait de présenter uni-

quement celle utilisée dans mes travaux. La raideur d'interface va permettre de faire varier le couplage entre un couplage parfait, à l'image des modèles aux interfaces parfaites, et un découplage total. Ainsi, si  $K_{xx}^i \rightarrow 0$ , alors  $\hat{\sigma}_{xz}^i \rightarrow 0$ , ce qui décrit le cas d'un découplage total, car aucune énergie n'est communiquée entre les couches successives. Si  $B_{xx}^i \rightarrow 0$ , alors  $\hat{u}_x^i \rightarrow 0$ , ce qui correspond au cas parfaitement couplé à l'image des modèles aux interfaces parfaites vus à la Section 1.1.

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xz}^i \\ \hat{\sigma}_{yz}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{xx}^i & K_{xy}^i \\ K_{yx}^i & K_{yy}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_x^i \\ \hat{u}_y^i \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x^i \\ \hat{u}_y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{xx}^i & B_{xy}^i \\ B_{yx}^i & B_{yy}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xz}^i \\ \hat{\sigma}_{yz}^i \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Avec,  $K_{\alpha\beta}^i$  la raideur à l'interface  $i$  et  $B_{\alpha\beta}^i$  la souplesse à l'interface  $i$  ou paramètre d'interface  $i$  avec  $\alpha = \{x; y\}$  et  $\beta = \{x; y\}$ . Les Équations (1.18)-(1.19) sont l'écriture générale, on fera en revanche souvent l'hypothèse qu'il n'y a pas de couplage entre les directions  $x$  et  $y$ . Autrement dit,  $B_{xy}^i = B_{yx}^i = 0$  et  $K_{xy}^i = K_{yx}^i = 0$ . Afin d'avoir une idée plus concrète de l'implémentation des interfaces imparfaites, l'Équation (1.19) peut être injectée dans la loi de Hooke (Équation (1.2)), ce qui va permettre d'écrire le glissement en fonction de la déformation (Équation (1.20)) et donc du champ de déplacement, avec l'hypothèse de découplage des directions  $x$  et  $y$ .

$$\hat{u}_x^i = 2B_{xx}^i Q_{xzxz}^i \mathcal{E}_{xz}^i \quad (1.20)$$

## Les diverses applications statiques des modèles

Il est intéressant de s'attarder sur le type d'application qu'un modèle implique, car le champ des applications possibles est intrinsèquement lié aux choix de modélisation. Les modèles détaillés précédemment cherchent à appliquer leur modélisation dans le but de calculer principalement 3 paramètres : la flèche centrale ; le champ de déplacement ; le champ de contrainte, dans le cadre d'un chargement de forme sinusoïdale et statique, aux conditions aux limites simplement appuyées.

Ces applications sont réalisées dans les travaux de Pagano [89], et donc dans tous les articles pionniers sur les interfaces imparfaites qui s'en inspirent, par exemple [22, 71, 72, 109]. Les structures étudiées dans ces travaux correspondent souvent à un matériau tricouche avec les mêmes matériaux et les mêmes épaisseurs pour les couches successives, car le premier intérêt est de démontrer l'effet des interfaces imparfaites. Cependant, ces mêmes travaux font aussi l'objet de matériau bicouche ou de plus de trois couches selon les auteurs, aux épaisseurs différentes.

- **Calcul de la flèche**

Le premier paramètre calculé et utilisé pour montrer l'effet des interfaces imparfaites dans un multicouche est la flèche, et plus particulièrement la flèche centrale. Celle-ci est adimensionnée et est tracée en fonction d'un ratio longueur  $l$  sur épaisseur totale  $h$  noté  $S = l/h$ . Comme montré sur la Figure 1.4, on observe sur ce type de courbe deux comportements asymptotiques : pour un rapport  $S = 5$ , la flèche tend vers l'infini ; pour un rapport  $S \rightarrow \infty$  la flèche adimensionnée tend vers une valeur constante et commune à tous les taux d'imperfection. Ces comportements asymptotiques sont indépendants de l'imperfection des interfaces. Les interfaces ont un effet sur la transition entre ces deux asymptotes : plus les interfaces sont découplées, plus cette transition se fera pour un ratio  $S = l/h$  élevé. D'une manière générale, pour un ratio  $S$  fixé, la flèche sera toujours plus élevée pour un multicouche aux interfaces imparfaites. On a ainsi *une perte de rigidité virtuelle, ou un gain de souplesse virtuelle pour le multicouche, lorsque les couches se découplent*. Ces résultats sont illustrés dans les articles de Cheng [22], de Massabò [82] et de Lee [68] par exemple.

- **Calcul du champ de déplacement**

Le calcul du champ de déplacement est sans doute l'application la plus courante pour les modèles LW aux interfaces imparfaites. Les résultats d'un tel calcul sont illustrés à la Figure 1.5a. Généralement les couches successives choisies sont identiques, elles sont composées du même matériau et ont la même géométrie, dans le but de faciliter la visualisation des effets d'interfaces. Le comportement observé dans le déplacement est une discontinuité proportionnelle au paramètre d'interface : plus les couches sont découplées, plus le saut de déplacement entre les

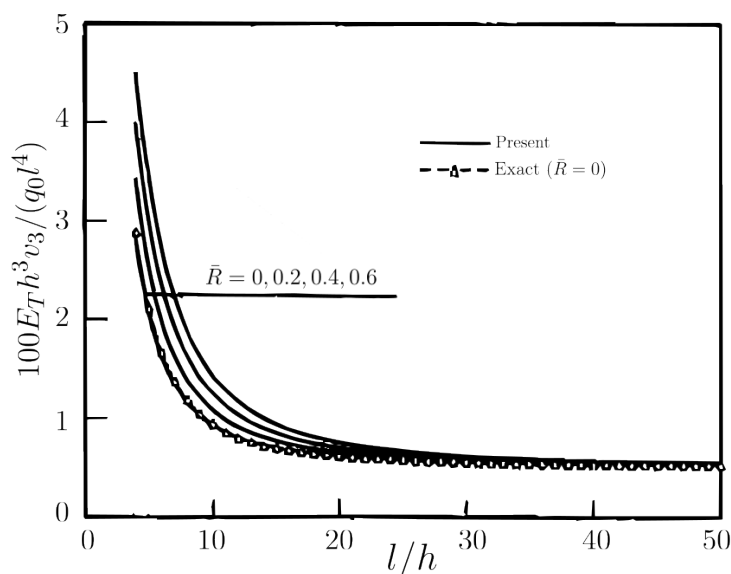


FIGURE 1.4 – Flèche au centre  $u_z$  noté  $v_3$  dans le graphique, d'une plaque simplement supportée en fonction d'un ratio longueur sur épaisseur  $S = l/h$ , pour différents paramètres de couplage de l'interface  $\bar{R}$ . Résultats obtenus par Cheng [22].

couches successives est important. Si une seule interface est imparfaite, alors cette discontinuité ne s'observera qu'à cette interface. Cela est un comportement attendu par le modèle et a été explicité plus tôt dans cette synthèse à l'Équation (1.20). En effet, le paramètre  $B_{xx}^i$  correspond au paramètre de découplage de l'interface  $i$ , plus sa valeur est importante plus le saut de déplacement dans la direction  $x$  de la couche  $i$   $\hat{u}_x^i$  est important. De plus, une perte de rigidité de toutes les couches de la structure peut être déduite à partir du champ de déplacement. La pente du déplacement est plus importante à contrainte constante lorsque l'interface est imparfaite, ce qui signifie que la rigidité du matériau a chuté virtuellement. Bien sûr les caractéristiques intrinsèques des matériaux ne changent pas en fonction de l'interface. Cependant, cela signifie que le découplage progressif d'une structure multicouche entraîne une baisse de rigidité globale de l'ensemble.

- **Calcul du champ de contrainte**

La dernière application la plus commune des modèles multicouches à interfaces imparfaites est le calcul du champ de contrainte en fonction de l'épaisseur, illustré

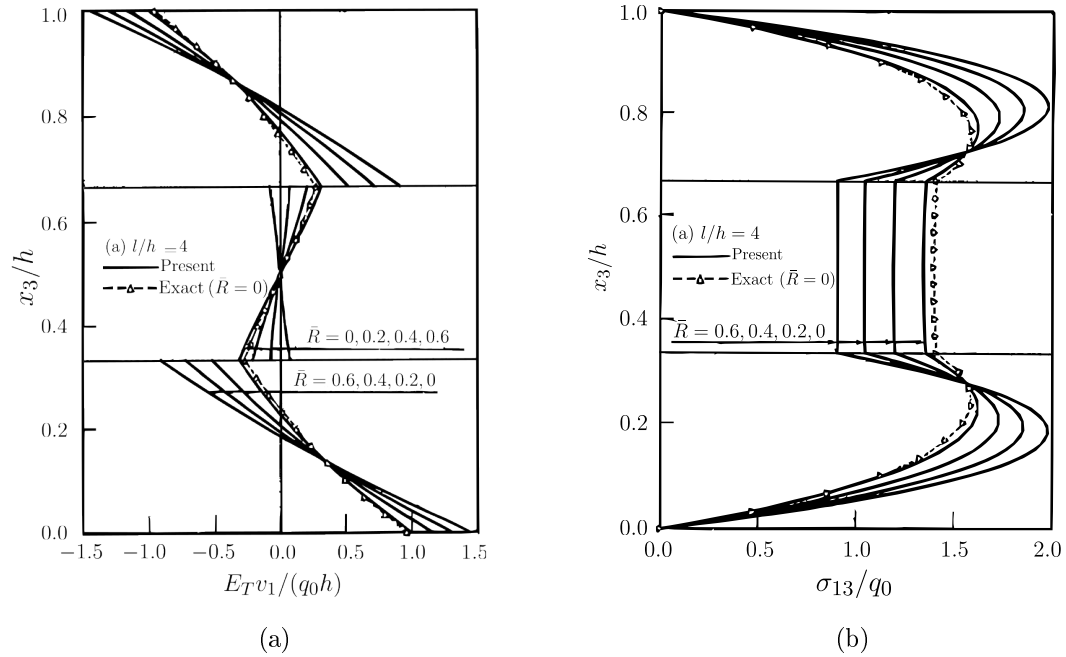


FIGURE 1.5 – (a) En abscisse, le déplacement  $u_x$  (Équation (1.16)) ( $v_1$  dans le graphique) adimensionné au centre d’une plaque simplement supportée avec différentes valeurs du paramètre de couplage de l’interface  $\bar{R}$  engendrant une discontinuité aux interfaces en fonction de l’épaisseur  $z = x_3$  adimensionnée par l’épaisseur totale  $h$  en ordonnée. (b) En abscisse, la contrainte transverse  $\sigma_{xz}$  ( $\sigma_{13}$  dans le graphique) adimensionnée par le chargement  $q_0$  calculé au centre d’une plaque simplement supportée avec différentes valeurs du paramètre de couplage de l’interface  $\bar{R}$  engendrant une baisse des contraintes aux interfaces en fonction de l’épaisseur adimensionnée en ordonnée. Résultats obtenus par Cheng [22].

à la Figure 1.5b. Le calcul de la contrainte  $\sigma_{xz}$  (ou  $\sigma_{yz}$ ) est l’application la plus représentative de l’effet des interfaces imparfaites, car elle rend compte directement des effets du saut de déplacement sur le comportement de la structure concernée. Le champ de déplacement doit être minimum d’ordre 3 par couche, afin de contenir des informations d’intérêts pour les interfaces imparfaites, car pour un ordre inférieur, les contraintes de cisaillement ne peuvent pas s’annuler aux surfaces supérieure et inférieure de chaque couche. Ainsi, un champ de déplacement d’ordre 3 par couche, et donc de contrainte d’ordre 2 par couche, peut permettre dans le cas d’un découplage parfait des couches, une annulation des contraintes à chaque interface.

Il est important de noter qu'en revanche, une écriture du champ de déplacement d'ordre 3 global, c'est-à-dire, un champ de déplacement d'ordre 3 qui ne prend pas en compte les cinématiques locales, va échouer à décrire l'effet d'interfaces imparfaites. En effet, un champ de contrainte d'ordre 2 qui ne dépend pas des couches ne peut pas s'annuler à chaque interface. Il ne peut s'annuler que deux fois, une fois à la surface inférieure du multicouche et une deuxième fois à la surface supérieure du multicouche.

Cheng réalise ce type d'application sur un champ de déplacement cubique en 1996 [22]. Cela est aussi visible dans le travail de Lee en 2020 [68] qui utilise la méthode de Navier, précédemment mentionnée, permettant alors d'écrire son champ de déplacement avec des fonctions sinusoïdales. Lee approxime alors son champ de déplacement final de l'ordre 1 à l'ordre 7 (par pas de 2) et calcule un champ de contrainte de l'ordre 0 à l'ordre 6.

L'effet des interfaces imparfaites sur le champ de contrainte est double :

- La contrainte à l'interface est réduite, ce qui est montré explicitement par l'Équation (1.18). Si la raideur d'interface  $K_{xx}^i$  est nulle, la contrainte  $\sigma_{xz}^i$  s'annule également.
- Les contraintes se répartissent alors différemment, ce qui fait augmenter les contraintes locales au sein des couches respectives. Ainsi, la contrainte maximale atteinte pour une couche augmente. Cela fait écho avec le champ de déplacement vu précédemment. En effet, puisque la contrainte transverse augmente au sein d'une couche, il est normal d'observer un déplacement plus important de cette couche.

Cependant, une erreur dans le calcul du champ de contrainte est souvent présente. Cette erreur est de calculer le champ de contrainte à l'aide de l'équilibre dynamique pour un modèle tricouche émettant une approximation d'ordre selon la variable  $z$ , au lieu d'utiliser classiquement l'équation de comportement. Concrètement, les contraintes sont le résultat de déformations issues d'un chargement extérieur, mais proviennent bien d'efforts intérieurs issus des déformations de la structure. Les contraintes sont classiquement calculées à l'aide des déformations et de la loi de Hooke. Mais dans certains articles, tel que Di Sciuva en 1992 [26], puis repris par Cheng en 1996 [22] et puis par Massabò en 2014 [82], le calcul du champ

de contrainte s'effectue à partir d'un équilibre des contraintes (Équation(1.21)). Cette idée se base sur les travaux de Pagano en 1969 [89] qui avait développé des solutions exactes pour des laminés. Cette méthode est tout à fait viable dans le cadre des solutions exactes, car elle vérifie l'unicité des solutions grâce à l'écriture sinusoïdale du champ de déplacement et du champ de contrainte. En revanche, pour tous les modèles non exacts, cette méthode échoue à décrire correctement des champs de contrainte. En effet, un champ de déplacement du 1<sup>er</sup> ordre permettrait d'obtenir une contrainte de cisaillement transverse d'ordre 2 à partir de l'Équation (1.21), ce qui est physiquement incorrect car le champ de contrainte est issu de la dérivée du champ de déplacement, pas de son intégration. De plus, réutiliser le champ de contrainte obtenu et intégrer ses composantes afin d'obtenir un champ de déplacement, donne un champ de déplacement du 3<sup>ème</sup> ordre, ce qui ne correspond évidemment pas aux hypothèses de base.

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} = 0. \quad (1.21)$$

### Modélisation d'interfaces à l'aide de couches fines

Une solution alternative, qui prend en compte les effets des interfaces imparfaites sans ajouter de nouveaux éléments de modélisation directement, est d'ajouter une couche relativement fine par rapport à la structure, qui servira d'interface artificielle. Une raideur lui est alors attribuée, permettant de faire varier autant que nécessaire le champ de déplacement au sein de cette fine couche. Il est possible de cette façon de recalculer un modèle qui ne prend pas en compte explicitement les effets des interfaces imparfaites. Implémenter ce substitut dans un modèle plus complexe est aussi une manière d'intégrer simplement la modélisation des interfaces, c'est ce qui est généralement fait en FEM.

Par exemple, Rokhlin [101] proposa l'utilisation d'une couche intermédiaire afin de modéliser les effets d'interfaces dans un multicouche anisotropes. C'est aussi l'approche proposée par Hosten en 2005 [51] dans son modèle éléments finis pour la propagation d'ondes guidées dans une structure multicouche aux interfaces imparfaites. Ces modèles ont de bonnes correspondances avec des mesures expérimentales, mais pour fonctionner, ils nécessitent des valeurs non physiques pour



modéliser cette couche intermédiaire. En effet, une épaisseur fictive est injectée dans la structure, changeant ainsi l'épaisseur totale du multicouche. Il est bien entendu possible de faire tendre cette épaisseur vers 0 afin de minimiser ce biais, mais ce dernier ne pourra être annulé. De plus, les propriétés mécaniques utilisées pour cette couche ne représentent pas les propriétés physiques d'une couche, et sont donc choisies d'une manière arbitraire. Par exemple, la valeur que la raideur  $C_{xy}$  doit prendre pour correspondre au bon comportement physique dans [51] est négative, ce qui implique un module de Young négatif. L'effet final est d'assouplir la structure, mais la cause n'est pas physique. Ceci fait écho aux résultats vus pour les modèles aux interfaces imparfaites comme la Figure 1.5. Ce type d'alternative ne permet pas non plus une prédiction plus précise du comportement d'un matériau multicouches aux interfaces imparfaites, car ces valeurs-là sont avant tout choisies afin de recalibrer un modèle a posteriori, à partir de mesure par exemple. En effet, les valeurs à affecter aux paramètres physiques des couches qui modélisent les interfaces sont entièrement arbitraires, il n'existe pas d'indications qui permettraient de fixer a priori les paramètres d'interface.

Un exemple de la possible modélisation d'un multicouche avec deux interfaces imparfaites à l'aide d'un 5 couches aux interfaces parfaites est montré à la fin du Chapitre 2, et en particulier à partir de la Figure 2.5. La modélisation avec un 5 couches y est donc montrée mais celle-ci implique l'usage de nouveaux paramètres pour chaque couche ajoutée dont principalement : son épaisseur ; son module de rigidité et autres paramètres physiques (masse volumique, coefficient de Poisson, etc.). D'une part, ces valeurs sont non représentatives d'une interface imparfaite : elles ne décrivent pas le comportement physique d'une interface, mais d'une couche artificielle. D'autre part, une quantité non négligeable de paramètres à fixer est ajoutée, ce qui augmente la complexité d'un modèle autant que l'interprétation de ses résultats.

## 1.2.2 Introduction à la mécanique du contact

La physique des interfaces imparfaites est intrinsèquement liée à la mécanique du contact. C'est dans cette discipline que l'on pourrait trouver des théories capables de modéliser plus précisément le couplage mécanique entre deux couches

en contact. La seule différence est l'échelle d'étude du système. En effet, la mécanique du contact est à l'échelle microscopique du système, alors qu'un modèle analytique d'une plaque multicouche cherche à modéliser le système dans son ensemble, à l'échelle macroscopique. Quelques notions de mécanique du contact sont alors abordées dans cette section en présentant différents modèles. Elle est inspirée de Gilardi qui a décrit les modèles principaux du contact discret et du contact continu en 2002 [39]. À cette échelle, mentionner uniquement l'aspect mécanique du phénomène serait une erreur, les forces électrostatiques ou moléculaires ont éventuellement un effet non négligeable selon la nature des surfaces en contact. Ainsi, l'énergie de surface, décisive dans les mécanismes de contact mécanique, sera aussi abordée ultérieurement dans cette même section.

### Dynamique des contacts discrets

La friction, et plus précisément la friction de Coulomb, est définie comme étant le résultat de deux surfaces en contact avec une vitesse relative. Ce type de friction est représenté à l'aide d'une fonction non linéaire de la vitesse relative. Le phénomène de friction est finalement celui de micro-chocs entre les aspérités microscopiques de deux surfaces en contact. Lorsque ces aspérités viennent à se rencontrer, c'est la dynamique des chocs qui intervient, autrement dit ce sont les quantités de mouvement  $\mathbf{P}_n = M_n \mathbf{V}_n$  qui correspondent au produit de la masse  $M_n$  du corps  $n$  et de la vitesse vectorielle  $\mathbf{V}_n$  du corps  $n$ . Le contact discret repose alors principalement sur le coefficient de restitution noté  $e = e(\mathbf{P}_n)$ . C'est ce qui est illustré à la Figure 1.6. Seulement le résultat du contact ou de l'impact est considéré à partir des données d'entrée du problème, c'est-à-dire, les masses et vitesses des corps concernés. Plusieurs modèles sur le coefficient de restitution existent et leurs modélisations respectives sont résumées par Gilardi [39]. Ces modèles sont généralement consacrés au contact entre deux sphères ou une sphère sur un plan. D'autres types de contact ont cependant été étudiés par la communauté scientifique [86, 110]. Les modèles de contacts discrets constituent les fondamentaux de la dynamique de contact, mais leur modélisation propre n'est pas directement applicable pour des modèles de plaques multicouches à cause de leur nature discrète. Pour pallier cela, les modèles dynamiques de contacts continus sont employés.

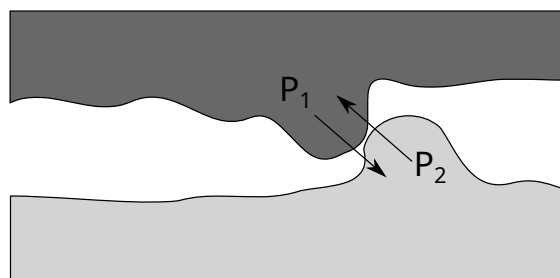


FIGURE 1.6 – Schéma d'un contact discret entre deux corps de quantité de mouvement  $\mathbf{P}_1 = M_1 \mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{P}_2 = M_2 \mathbf{V}_2$ .

### Dynamique des contacts continus

Dans l'optique d'une étude macroscopique d'un tel système, la suite interrompue de micro-chocs pourrait s'apparenter à un phénomène aléatoire et pourrait être ainsi modélisé en tant que tel. Cela est représenté à la Figure 1.7. La moyenne du nombre de micro-chocs ainsi que la moyenne de leurs intensités seraient ainsi directement liées à la nature des surfaces en contact glissant. Haessig en 1991 développa deux nouveaux modèles dont le bristle model, ou modèle capillaire [46], dans lequel la nature aléatoire de la friction est prise en compte.

Dans les modèles dynamiques des contacts continus, la déformation des corps pendant le contact est explicitement écrite. Cette dynamique s'illustre en deux étapes : la phase de compression et la phase de restitution. Dans le cadre de contact élastique, l'énergie de compression est entièrement restituée. Cependant, de l'énergie sera toujours perdue au cours de la transformation, que ce soit sous la forme d'énergie plastique (déformation irréversible), d'amortissement des matériaux en jeu, de la génération de chaleur ou de la génération d'ondes vibratoires et acoustiques. Ainsi, les premières lois dynamiques des contacts continus sont écrites à partir de systèmes constitués d'une raideur et d'un amortissement. La loi la plus basique correspond à l'Équation (1.22).

$$F_c = k\delta + b\dot{\delta}, \quad (1.22)$$

Avec  $F_c$  la force de contact,  $k$  le coefficient de raideur,  $b$  le coefficient d'amortissement et  $\delta$  le déplacement local de la matière.

Modèle	Force de contact	Avantage(s)	Inconvénient(s)
Classique [14, 81]	$F_c = b\dot{\delta} + k\delta$	Implémentation simple Amortissement considéré Écriture en complexe possible	Déformation élastique Force discontinue
Hertz [50]	$F_c = k\delta^n$	Force de contact continue Non-linéarités considérées	Déformation élastique Pas d'amortissement
Hertz amélioré [52]	$F_c = b\delta^n\dot{\delta} + k\delta^n$	Force continue et non linéaire	Amortissement linéaire
Hertz non linéaire [61]	$F_c = b\delta^p\dot{\delta}^q + k\delta^n$	Amortissement et déformation non linéaires	Implémentation

TABLE 1.2 – La force de contact  $F_c$  selon les modèles principaux. Avec  $b$  le coefficient d'amortissement,  $k$  le coefficient de raideur,  $\delta$  la déformation,  $\dot{\delta}$  la vitesse de déformation,  $\{p, q, n\}$  des entiers naturels.

Cependant, ce modèle présente quelques inconvénients. Les inconvénients majeurs sont que, premièrement, le terme d'amortissement rend la force de contact initiale  $\delta = 0$  non nulle lors d'un contact, ce qui n'est pas réaliste. Dans un contact réaliste, la force de contact initiale est de zéro, sinon des discontinuités trop importantes pour des contacts progressifs sont présentes. Deuxièmement, le modèle ne considère pas de déformations plastiques et échoue donc à modéliser des phénomènes de contact avec d'importantes déformations. En revanche, cela n'est pas un inconvénient pour les travaux présentés dans ce manuscrit, car les forces locales en jeu restent minimales dans le cadre des vibrations de structures continues.

Si nécessaire, d'autres lois existent et peuvent être utilisées afin de modéliser un comportement avec plus de justesse. Plusieurs lois sur la modélisation de la force de contact sont présentées au Tableau 1.2 avec la loi de comportement de chaque modèle, ainsi que leurs avantages et inconvénients respectifs. Le modèle de Hertz [50] y est présenté par exemple. C'est un modèle non linéaire, mais limité aux impacts élastiques dans sa forme originelle. Pour remédier à cela, il est bien sûr possible d'étendre ce modèle aux déformations plastiques en y ajoutant de l'hystérésis. De plus, les amortissements non linéaires sont particulièrement intéressants dans la dynamique des contacts, mais ne sont pas considérés dans le modèle de Hertz. Ce dernier a alors été étendu par Hunt [52] afin de conserver les bénéfices de ce modèle non linéaire, tout en considérant des amortissements non linéaires.

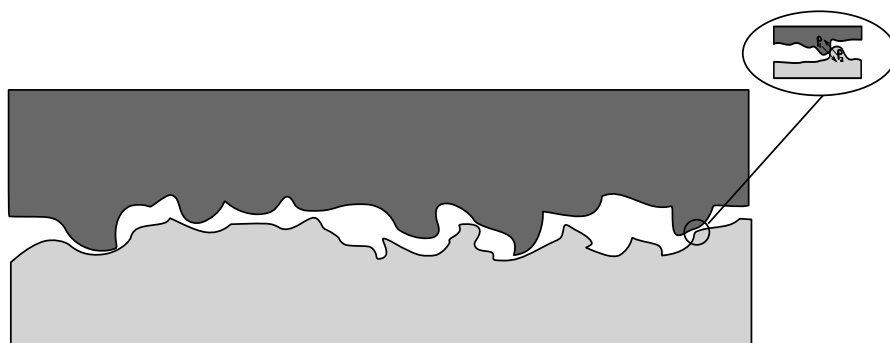


FIGURE 1.7 – Schéma d'un contact continu entre deux couches en contact.

### L'énergie de surface

L'énergie de surface est le résultat de l'adhésion entre deux surfaces. Ce terme est négligé dans la théorie de Hertz du contact [50] car il n'est pas nécessaire pour des chargements importants. En revanche, pour des chargements faibles tendant vers 0, l'effet des forces d'adhésions n'est pas négligeable. L'équation de Hertz, du contact d'une sphère sur une sphère, a alors été réécrite (Équation (1.23)) en ajoutant les termes d'énergie de surface par Johnson et al. en 1971 [54]. Cette théorie est nommée la théorie JKF du nom de ses auteurs (Johnson, Kendall et Roberts). Les tests actuels d'adhésion entre deux surfaces couramment employés sont issus de cette théorie. Ces tests sont particulièrement utilisés pour caractériser les polymères, grâce à la facilité de mise en forme de ces derniers.

$$a^3 = \frac{R}{K} (P + 3\gamma\pi R + \sqrt{6\gamma\pi RP + (3\gamma\pi R)^2}), \quad (1.23)$$

Avec  $a$  le rayon de contact,  $R$  le rayon équivalent des deux sphères,  $K$  le coefficient d'élasticité équivalent des surfaces en contact,  $P$  le chargement statique, et  $\gamma$  l'énergie de surface.

Cette nouvelle charge de Hertz est alors plus élevée que le chargement de Hertz classique et met en lumière les effets de surface. En effet, afin de ne plus mettre les surfaces en contact, autrement dit d'obtenir le rayon de contact  $a = 0$ , il est nécessaire d'appliquer un chargement négatif  $P = -\frac{3}{2}\gamma\pi R$ . Davantage de travaux sur le sujet ont permis une meilleure investigation de l'énergie de surface. L'énergie d'adhésion notée  $\gamma$  dans les travaux de JKR est désormais identifiée comme

l'énergie de Dupré (souvent notée  $W$ ), cette dernière étant issue du bilan du gain d'énergie obtenu lorsque deux surfaces se mettent en contact. À la manière de deux atomes se mettant en cohésion afin de réduire leur énergie respective et être ainsi plus stable, lorsque deux surfaces vont entrer en contact, une partie de leur tension superficielle se met en commun afin de minimiser leur énergie.

Cette notion d'énergie de surface se retrouve dans les travaux traitant de la modélisation des interfaces au sein de structures complexes comme la maçonnerie. Fouchal et al. [33] notamment, prennent en considération cette énergie de surface dans le but de modéliser les effets de couplages aux interfaces dans une structure de maçonnerie. Un modèle complet prenant en compte le contact unilatéral, la friction de Coulomb et l'adhésion est développé par Raous [94]. L'interface entre le mortier et la brique, donc un matériau bicouche, est étudiée avec une approche micro-mécanique par Sacco et Lebon [103]. Dans ces articles, l'équation de contact avec adhésion est écrite à l'image de l'Équation (1.24).

$$R_N - C_N \hat{u}_N \beta^2 = 0 \quad (1.24)$$

Avec  $R_N$  le chargement normal,  $C_N$  le coefficient de glissement perpendiculaire à la normale,  $\hat{u}_N$  le glissement ou saut de déplacement et  $\beta$  le coefficient d'adhésion. On retrouve alors une loi similaire à la loi utilisée dans les modèles multicouches telle que l'Équation (1.18).

**Des liens explicites peuvent être trouvés entre les lois de la mécanique du contact et la modélisation des multicouches aux interfaces imparfaites.**

La force de contact continue classique, écrite dans le Tableau 1.2, correspond exactement à l'écriture de la loi d'interface de l'Équation (1.18). On retrouve une force ou une contrainte, en fonction d'un déplacement. C'est en réalité la modélisation sous la forme d'une raideur et d'un amortissement qui est équivalente. Dans les modèles d'énergie de surface, on retrouve une loi presque identique décrivant l'interface imparfaite de glissement (Équation (1.24)).

## 1.3 Travaux expérimentaux sur les couplages imparfaits dans les matériaux multicouches

Rendre patents les effets des interfaces imparfaites sur le comportement global d'une structure expérimentalement est resté un objectif qui a reçu peu d'attention dans la communauté scientifique. Il existe néanmoins, dans le domaine du contrôle non destructif, une littérature intéressante sur le sujet. Cette section a ainsi pour objectif de réunir les exemples principaux de ce type d'investigation en deux catégories : les travaux sur les interfaces à épaisseurs nulles ; et les travaux sur les interfaces à épaisseurs non nulles. Une synthèse bibliographique plus complète et plus détaillée peut être trouvée dans la thèse d'Attar dans le cadre spécifique des collages par adhésifs [4]. Notamment, elle met en évidence deux types de défauts dans son manuscrit : **les défauts cohésifs**, qui correspondent à des défauts propres à l'adhésif, comme une mauvaise réticulation ; et **les défauts adhésifs**, qui correspondent à des défauts à l'interface, comme un décollement par exemple.

### 1.3.1 Caractérisation adhésive des interfaces imparfaites

Les travaux de Kendall en 1970 [56] constituent une partie des premiers travaux expérimentaux sur la caractérisation d'interfaces imparfaites à l'aide de mesures ultrasonores. Ses travaux ont en plus le mérite de faire le lien avec la section précédente sur l'énergie de surface, car ils sont consacrés à l'étude de l'aire de contact entre des surfaces statiques en glissement. De nombreux travaux expérimentaux sur les interfaces sont basés sur la modélisation de Schoenberg publiés en 1980 [106]. Il y détaille un modèle de propagation d'ondes de cisaillement ou Shear Horizontal (SH) waves dans un bicouche au couplage imparfait. L'interface imparfaite est modélisée dans le même esprit que les modèles abordés précédemment, c'est-à-dire à l'aide d'une raideur qui prend compte les effets de couplage. Cette modélisation est entièrement consacrée aux effets d'adhésion ou de couplage aux interfaces, on parle alors de modèle adhésif. Les travaux qui suivirent ont ainsi utilisé ce type de modèle afin de caractériser expérimentalement des défauts d'interfaces à l'aide d'ondes ultrasonores. Nagy a notamment classé les différents types d'interfaces imparfaites par mesure ultrasonore en 1992 [85]. Il met alors en

exergue trois principaux types d'interfaces imparfaites :

- Le **glissement d'interface** ou **slip bond**, qui est la condition imparfaite la plus souvent modélisée. Dans ce cas, le couplage d'un point de vue mécanique reste convenable, c'est-à-dire, que le multicouche se comporte toujours en tant que tel malgré une détérioration de ses propriétés mécaniques. Du point de vue des ondes ultrasonores, ce type de couplage tend même vers un couplage quasi-parfait (ondes de réflexion d'amplitude négligeable). C'est le type de couplage développé dans les modèles multicouches vus dans la section précédente.
- Le **découplage partiel** ou **partial bond**, qui correspond à une grande quantité de découplages locaux. L'effet de celui-ci n'est pas observé localement à l'aide des ultrasons, uniquement leur effet global sur le couplage est révélé. Ce type de couplage est donc à la limite du découplage parfait.
- Entre ces deux conditions se trouve le **couplage par compression** ou **kissing bond**. Ici, les couches ne sont pas couplées à l'aide de propriétés adhésives, mais mécaniquement. Les surfaces en contact sont compressées l'une contre l'autre. La raideur d'une telle condition d'interface est très faible, mais engendre très peu de réflexion des ondes ultrasonores et est donc proche d'un couplage parfait de ce point de vue. D'un point de vue mécanique et particulièrement de vibration des structures, cette condition de couplage engendre quelques inconvénients. Un couplage par compression présenterait rapidement une condition de découplage parfait en haute fréquence si la compression n'est pas répartie uniformément sur la structure. De plus, une précontrainte appliquée aux matériaux pourrait grandement changer leur comportement dynamique, et plus particulièrement leurs modules d'élasticité.

Par la suite, Lavrentyev [62, 63] a mis davantage en évidence les effets de couplage sur la propagation d'une onde au sein du matériau multicouche étudié. En 1998, il développa une étude sur deux plaques d'aluminium mis en contact par compression progressive. On est donc face à un couplage par compression désigné par l'appellation kissing bond dans la littérature. La particularité de son travail est que la qualité du couplage était mesurée en fonction de la compression appliquée



de part et d'autre du matériau bicouche. Ainsi, au fur et à mesure que la charge augmente, la raideur d'interface augmente, symbolisant l'amélioration du couplage à l'interface. Lavrentyev a approfondi l'analyse en 2000 [62] en étudiant l'interface de deux couches d'acier fusionnées à 1100°C avec des pressions de bridage comprises entre 5 et 20 MPa. La qualité du couplage, symbolisée par sa raideur, varie ainsi fortement avec les conditions de couplages établies pendant la fabrication.

### 1.3.2 Caractérisation cohésive des interphases complexes

L'usage du mot « interface » ne fait pas toujours l'unanimité dans la littérature scientifique. Il arrive régulièrement qu'il soit employé afin de décrire une couche de très faible épaisseur où les propriétés mécaniques de cette couche ne sont pas connues. Ce type de couche est généralement obtenu à la frontière entre le substrat et l'adhésif, où ces deux matériaux vont se mélanger, comme illustré à la Figure 1.8.

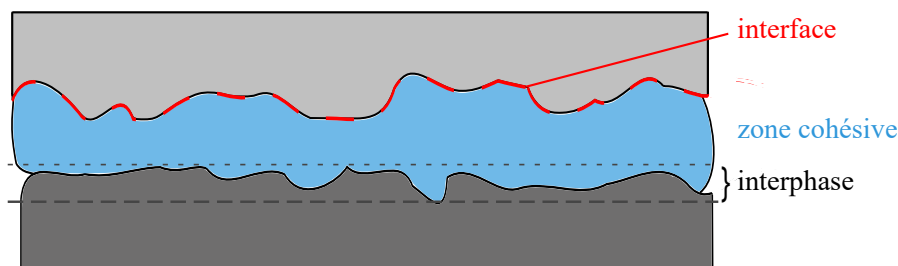


FIGURE 1.8 – Schéma d'un tricouche définissant les différentes régions d'un matériau multicouche. La zone cohésive correspond à la couche d'adhésif uniquement. Les interphases sont une région où les matériaux s'entremêlent dans l'épaisseur. L'interface définit une surface à la frontière entre les deux matériaux, des discontinuités lors de décollement peuvent apparaître.

Ainsi, dans cette région, que l'on nommera ici *l'interphase*, des modèles sont employés afin de lever le voile sur cette complexité. L'effet des interphases dans un tricouche est généralement étudié simplement à l'aide de modèles 5 couches, ou d'un tricouche avec des intercouches au comportement simplifié, comme le modèle de Jones [55]. Dans ce modèle, les interphases sont supposées suffisamment petites pour que la contrainte n'évolue pas au sein de cette couche de très faible épaisseur. Il réécrit alors les propriétés physico-chimiques à l'interphase en fonction d'un saut de déplacement entre les couches de part et d'autre de l'interphase, et de la

contrainte aux surfaces en contact. Cette loi de comportement correspond alors à l'Équation (1.18) vue précédemment, mais avec la prise en compte de l'épaisseur de l'interphase. Les modèles qui tentent de modéliser les effets d'une interphase ou d'un adhésif lui-même, à l'image du modèle de Jones [55], sont des **modèles cohésifs**.

La caractérisation cohésive des interphases complexes a fait l'objet de nombreux travaux. Margetan en 1992 [80] étudie expérimentalement le couplage de deux matériaux identiques (cuivre, fer, nickel ou alliages) avec différents défauts comme : des inclusions inhomogènes avec une matière différente ; des espaces vides périodiques ; ou l'inclusion de tige de métal. Lowe en 1994 [76] utilise les ondes de Lamb afin de caractériser les effets cohésifs du couplage d'un adhésif. De Barros utilise le même type de procédure en 2004 [24] avec aussi des ondes de cisaillement sur des échantillons qui présentent différentes intensités de couplage. Ismaili en 2009 [53] étudie la couche d'adhésif d'un matériau tricouche symétrique (aluminium-époxy-aluminium). L'objectif est d'obtenir les caractéristiques mécaniques de la couche d'époxy à partir d'une mesure ultrasonore. Attar en 2020 [5], traite un matériau tricouche (aluminium, époxy, carbone+époxy) au couplage imparfait. Ce couplage est étudié au niveau des interphases, c'est-à-dire, à la jonction entre l'époxy et l'aluminium (ou l'époxy et le carbone+époxy), où se trouve un mélange des deux couches consécutives aux caractéristiques incertaines.

### Remarque sur l'usage du mot interface

L'usage du mot interface varie selon les auteurs dans les travaux traitant de la mise en évidence expérimentale des effets des interfaces imparfaites. L'interface désigne parfois une surface entre deux couches successives, parfois une couche d'épaisseur non nulle au sein de laquelle les propriétés mécaniques ne sont pas clairement définies. Cette dernière correspond dans les faits plus fidèlement à ce que l'on appelle l'interphase. En revanche, une modélisation qui ne fait pas cas de la distinction interphase/interface peut réussir à avoir un comportement qui est physique. En effet, la modélisation d'une interphase se réalise à partir d'une raideur, tout comme l'interface. On trouve par exemple dans la littérature des auteurs qui utilisent des modèles adhésifs (qui modélisent les effets d'interface) et des modèles

cohésifs (qui modélisent les effets de l'adhésif lui-même) dans les mêmes travaux et parviennent toutefois à décrire correctement le comportement physique du phénomène [36, 80, 114]. En revanche, l'interphase fait l'hypothèse d'une contrainte qui n'évolue pas dans cette couche de faible épaisseur, et échoue donc à décrire des comportements de découplage comme le décollement ou le glissement total. Cette ambiguïté peut aussi engendrer une mauvaise interprétation des résultats expérimentaux, en confondant un effet adhésif avec à un défaut cohésif, et inversement, ce qui donnerait des valeurs erronées sur les caractéristiques mécaniques de l'adhésif imparfait par exemple.

Afin de limiter les incompréhensions dans les présents travaux, dans la suite de ce mémoire **l'interface qualifiera toute couche d'épaisseur nulle (ou surface) entre deux couches successives**. Les interfaces permettent ainsi de modéliser les effets de couplage entre deux surfaces de différentes couches en contact. Alors que l'interphase correspondra à une couche de faible épaisseur où les couches en contact s'entremêlent. **L'adhésif** en tant que tel, ou toute autre couche intermédiaire de faible épaisseur, **sera considéré comme une couche parmi les autres** sans aucune distinction. Les défauts associés à l'adhésif lui-même sont définis comme des défauts cohésifs et ne sont pas les enjeux des travaux présentés ici.

## 1.4 Conclusion

L'intérêt de cette synthèse bibliographique est de faire état de la littérature scientifique actuelle autour des modèles multicouches aux interfaces imparfaites, afin de pouvoir situer les objectifs de la présente thèse. Divisée en trois parties, elle résume les travaux actuels avec quelques exemples non exhaustifs sur : la modélisation dynamique de plaques et de plaques multicouches, accompagnée des méthodes de résolution par discrétisation principales ; la modélisation de plaques multicouches à interfaces imparfaites, accompagnée de quelques notions de mécanique du contact ; et les principaux travaux expérimentaux que l'on peut trouver

sur les interfaces imparfaites.

À l'aune de cette synthèse bibliographique, **plusieurs remarques** ont été tirées et sont résumées ci-dessous :

- La classification de modèles de plaques multicouches en deux catégories principales, les modèles ESL (Equivalent Single Layer) et les modèles LW (Layer Wise), sont plus de l'ordre de l'application des modèles en question. Il est relativement simple de passer d'une écriture à l'autre, mais la modélisation intrinsèque de chaque modèle rendra son application en ESL ou en LW plus adaptée, ce qui définit alors sa famille de modèles.
- La loi d'interface utilisée dans les modèles multicouches actuels est simpliste (raideur + amortissement), mais réussit tout à fait à décrire des effets d'interface, à l'image des lois classiques de la dynamique des contacts continus. Pour l'implémentation d'interfaces complexes plus variées, se tourner vers les lois de dynamiques des contacts continus développées dans les sections précédentes sera sûrement une première étape primordiale.
- Une divergence est parfois visible sur l'usage du terme « interface », ce qui peut mener à des incompréhensions quant à la nature de l'objet étudié dans un article. Ainsi, dans les présents travaux de thèse, le terme interface est utilisé uniquement pour décrire une surface (d'épaisseur nulle) entre deux couches. Accessoirement, le terme interphase sera utilisé afin de décrire une couche se situant de part et d'autre d'une interface, où les différentes couches du matériau s'entremêlent à l'échelle microscopique. L'adhésif en lui-même est considéré ici comme une couche à part entière.

Les éléments abordés lors de cette synthèse bibliographique apportent les **deux axes de recherche d'intérêts** sur lesquels se concentre cette thèse :

- Le premier axe est la modélisation dynamique équivalente de structures multicouches aux interfaces imparfaites. De nombreux modèles LW existent, mais de par leur nature, ils sont principalement employés pour prédire les déformations et les contraintes par couche. Leur application en dynamique est possible et existe, mais ce type de modèle échoue à décrire simplement le comportement dynamique d'une structure multicouche aux interfaces complexes avec des paramètres équivalents uniques. Pour pallier cela, l'implé-

mentation d'interfaces imparfaites dans un modèle équivalent a été réalisée au cours de ces travaux de thèse et est présentée au Chapitre 2.

- Le second axe est l'étude expérimentale du comportement vibratoire de matériaux multicouches aux interfaces complexes. Cette étude est un moyen de valider le modèle établi dans les présents travaux. De plus, la communauté scientifique a déjà publié sur l'étude des interfaces imparfaites dans une structure multicouche, mais cela concernait majoritairement la propagation d'ondes ultrasonores dans ces milieux dans le domaine du contrôle non destructif. Il y a un manque notable d'études sur les conséquences des interfaces imparfaites sur le comportement dynamique global de la structure multicouche. Cela est étudié dans les Chapitres 3 et 4.

# Chapitre 2

## Modèle équivalent dynamique de matériaux multicouches à interfaces imparfaites

### Sommaire

---

2.1	Introduction de la modélisation . . . . .	59
2.1.1	Champ de déplacement et implémentation d'une loi de glissement . . . . .	59
2.1.2	Loi de comportement de l'interface . . . . .	63
2.2	Equivalent dynamic model of multilayered structures with imperfect interfaces : Application to a sandwich structured plate with sliding interfaces, JSV 2022 . . . . .	64
2.3	Recalage d'un modèle tricouche aux interfaces parfaites . . . . .	83
2.3.1	Comparaison des flexions de rigidité . . . . .	83
2.3.2	Méthode de recalage . . . . .	84
2.4	Modélisation d'un tricouche avec interfaces imparfaites par 5 couches aux interfaces parfaites . . . . .	88
2.5	Limitations du modèle . . . . .	92
2.6	Perspectives . . . . .	93
2.7	Conclusion . . . . .	94

---

Ce chapitre est consacré aux travaux de modélisation d'une structure plane aux interfaces imparfaites réalisés au cours de la thèse. Ces travaux reposent sur le modèle de Guyader et Lesueur [45] ainsi que sur les récents développements réalisés par Marchetti [78]. L'objectif est d'étendre l'approche classique du modèle Guyader vers la considération des interfaces imparfaites et ainsi d'obtenir des outils de conception supplémentaires pour des matériaux multicouches en explorant l'effet des interfaces imparfaites.

Les deux premières sections de ce chapitre sont dédiées à une introduction complète de la modélisation effectuée dans ces travaux. Cette introduction est suivie d'une partie illustrée exclusivement par l'article que j'ai rédigé au cours de la deuxième année de thèse sur le modèle équivalent aux interfaces imparfaites. Il a été publié au *Journal of Sound and Vibration* en 2022 [9]. Ensuite, les sections suivantes sont dédiées à apporter davantage de résultats pour exposer le modèle dans son ensemble. Ce chapitre se termine sur les limitations actuelles du modèle ainsi que les perspectives envisagées. Ces travaux ont aussi fait l'objet d'une communication à la conférence SAPEM 2021 [6].

## 2.1 Introduction de la modélisation

L'introduction au modèle ci-dessous et la Section « 3. Methodology » de l'article joint après sont vues comme complémentaires. En effet, la partie introductive présentée dans le manuscrit apporte des détails sur l'implémentation d'une loi d'interface ainsi que le lien de celle-ci avec la mécanique du contact, ce qui n'est pas présenté en détails dans l'article.

### 2.1.1 Champ de déplacement et implémentation d'une loi de glissement

Le modèle de plaque développé ici a pour point d'origine le modèle de Guyader [45]. Son formalisme est résumé en détails par les travaux de thèse de Fabien Marchetti qui a réalisé l'extension du modèle Guyader à des multicouches anisotropes [78]. C'est un modèle LW dans ses premières étapes de modélisation, car il postule un champ cinématique de plaque épaisse par couche comme montré aux

Équations (2.1). Il considère alors trois modes de déformation : la déformation membranaire, symbolisée par la variable  $\psi$  ; la flexion, symbolisée par la variable  $W$  et plus particulièrement sa dérivée par rapport aux variables du plan horizontal  $(x, y)$  ; et le cisaillement, symbolisée par la variable  $\phi$ . Ces modes de déformations sont illustrés schématiquement dans la Figure 2.1.

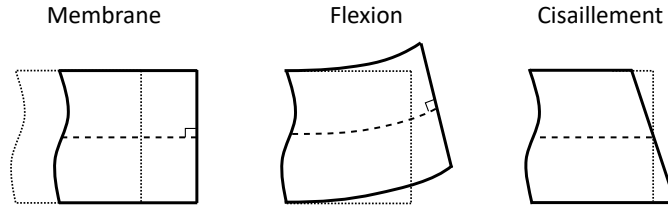


FIGURE 2.1 – Les 3 modes de déformations pris en compte dans le champ de déplacement (Équations (2.1)) du modèle présenté.

$$\begin{cases} u_x^n = \psi_x^n(x, y, t) - (z - R_n)\left(\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial x} + \phi_x^n(x, y, t)\right), \\ u_y^n = \psi_y^n(x, y, t) - (z - R_n)\left(\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial y} + \phi_y^n(x, y, t)\right), \\ u_z^n = W(x, y, t), \end{cases} \quad (2.1)$$

Le modèle actuel débute aussi à l'Équation (2.1). Cette dernière correspond au champ cinématique d'un multicouche exprimé dans le repère global, l'unique repère utilisé dans ces travaux dont l'origine se situe au bord de la première couche (confère l'article joint après Section 2.2 : « Fig. 1. Sandwich panels with perfect interfaces. » ou « Fig. 2. Sandwich panel with imperfect interfaces modeled by interface jump and interface stiffness. »). La loi de comportement utilisée est classiquement la loi de Hooke linéaire (Équation (2.2)) écrite par couche. Cette même loi est utilisée dans le cadre d'un matériau multicouche orthotrope, ce qui donne l'Équation matricielle (2.3)

$$\sigma_{\alpha\beta}^i = Q_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \varepsilon_{\gamma\delta}^i \quad (2.2)$$



$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^i \\ \sigma_{yy}^i \\ \sigma_{yz}^i \\ \sigma_{xz}^i \\ \sigma_{xy}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{xxxx}^i & Q_{xxyy}^i & 0 & 0 & 0 \\ Q_{yyxx}^i & Q_{yyyy}^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{yzyz}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{zzxz}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{xyxy}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^i \\ \varepsilon_{yy}^i \\ 2\varepsilon_{yz}^i \\ 2\varepsilon_{xz}^i \\ 2\varepsilon_{xy}^i \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Le champ de déformation en contraintes planes se calcule à l'aide des Équations (2.4).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^i \\ \varepsilon_{yy}^i \\ 2\varepsilon_{xy}^i \\ 2\varepsilon_{xz}^i \\ 2\varepsilon_{yz}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ u_z^i \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

L'implémentation de la loi d'interface se réalise lors de l'homogénéisation du multicouche, c'est-à-dire, lorsque le champ de déplacement du multicouche complet ( $u_x^i$  par exemple) se décrit à l'aide de la première couche, la couche de référence ( $u_x^1$ ). Pour cela, des équations de continuités du champ de déplacement et du champ de contrainte sont admises, dans le cas d'un couplage parfait. Cependant, dans le modèle actuel aux interfaces imparfaites, le champ de déplacement devient discontinu. Les nouvelles équations aux interfaces peuvent ainsi s'écrire comme les Équations (2.5).

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^i(x, y, z = z^i) = \sigma_{\alpha\beta}^{i-1}(x, y, z = z^i), \\ u_{\alpha}^i(x, y, z = z^i) = u_{\alpha}^{i-1}(x, y, z = z^i) + \hat{u}_{\alpha}^{i-1}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Où,  $\hat{u}_{\alpha}^{i-1}$  désigne le saut de déplacement dans la direction  $\alpha = \{x, y\}$  et ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$  dans les présentes hypothèses, l'indice  $i$  dans  $\hat{u}_{\alpha}^{i-1}$  est relatif non pas à la couche  $i - 1$  mais à l'interface  $i - 1$ . Cette dernière représente la surface supérieure de la couche  $i - 1$ . Le même indice est utilisé dans les deux cas car ils sont équivalents. Si l'interface avait été définie comme la surface inférieure de la couche  $i - 1$ , l'équation d'interface aurait été écrite simplement à l'aide de  $\hat{u}_{\alpha}^i$  pour permettre de nouveau cette équivalence.

Afin d'homogénéiser le multicouche, les Équations (2.5) sont toutes réécrites en utilisant le champ de déplacement (2.1) et la loi de Hooke (2.3). L'ensemble des équations linéaires obtenu peut être réécrit sous la forme matricielle telle que l'Équation (2.6).

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \phi_x^i \\ \psi_x^i \\ \frac{\partial W}{\partial y} \\ \phi_y^i \\ \psi_y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx}^i & 0 & 0 & A_{xy}^i & 0 \\ B^i & C_{xx}^i & 1 & 0 & C_{xy}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{yx}^i & 0 & 0 & A_{yy}^i & 0 \\ 0 & C_{yx}^i & 0 & B^i & C_{yy}^i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \phi_x^{i-1} \\ \psi_x^{i-1} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \\ \phi_y^{i-1} \\ \psi_y^{i-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{u}_x^{i-1} \\ 0 \\ 0 \\ \hat{u}_y^{i-1} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{U}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{U}^{i-1} + \hat{\mathbf{U}}^{i-1}. \quad (2.7)$$

Ainsi, afin d'exprimer n'importe quel vecteur des variables cinématiques de la couche  $i$  noté  $\mathbf{U}^i$ , il suffit d'appliquer l'opérateur  $\mathbf{T}^i$  et d'ajouter la contribution du glissement pour chaque interface traversée. Par exemple, pour un tricouche la propagation du champ cinématique s'écrit :  $\mathbf{U}^3 = \mathbf{T}^3 \mathbf{U}^2 + \hat{\mathbf{U}}^2 = \mathbf{T}^3 (\mathbf{T}^2 \mathbf{U}^1 + \hat{\mathbf{U}}^1) + \hat{\mathbf{U}}^2$ . Le cas des interfaces parfaites se retrouve directement si  $\hat{\mathbf{U}}^i = \mathbf{0}$ . La composante discontinue du champ cinématique se propage plus simplement au fil des interfaces traversées car  $\hat{\mathbf{U}}^j$  est invariant à l'application de  $\mathbf{T}^i$ , autrement dit  $\mathbf{T}^i \hat{\mathbf{U}}^j = \hat{\mathbf{U}}^j$ . La propagation s'écrit alors comme le cas parfait plus la somme des contributions discontinues, ce qui revient à écrire l'Équation matricielle (2.8).

$$\mathbf{U}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{T}^{i-1} \dots \mathbf{T}^2 \mathbf{U}^1 + \sum_{n=1}^{n=i-1} \hat{\mathbf{U}}^n. \quad (2.8)$$

Avec comme résultats spécifiques :  $\mathbf{T}^1 = \mathbf{I}_6$ , avec  $\mathbf{I}_6$  la matrice identité de taille  $6 \times 6$  ; et  $\hat{\mathbf{U}}^N = \mathbf{0}$  avec  $N$  l'indice de la couche supérieure du multicouche. Ce terme est nul car aucune couche ne se situe au-dessus, il n'existe donc pas d'interface.

En utilisant les Équations issues de (2.8), le champ cinématique de la couche  $i$  est réécrit uniquement en fonction de la couche  $i = 1$ . Le champ de déplacement obtenu après homogénéisation ainsi que la présentation de ses différentes composantes sont réunis dans la Figure 2.2

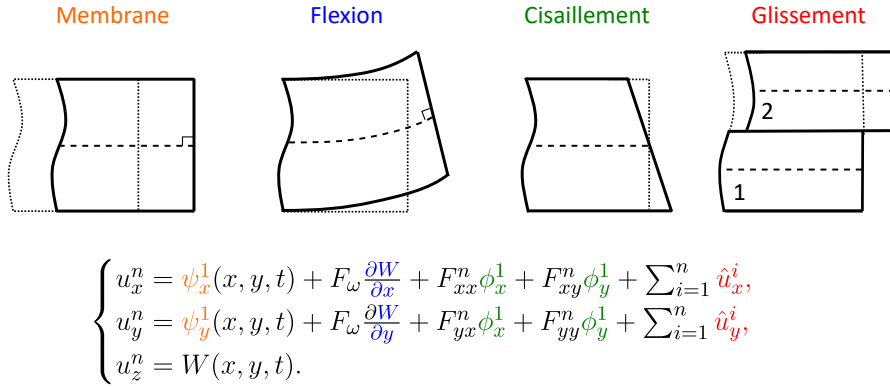


FIGURE 2.2 – Représentation des 4 composantes considérées dans le modèle présenté et l'écriture du champ de déplacement associé.

### 2.1.2 Loi de comportement de l'interface

La loi de comportement utilisée pour modéliser les effets d'interface ou effets de couplage est écrite par analogie avec un ressort. Une forme similaire a été vue dans la synthèse bibliographique au Chapitre 1 (confère les Équations (1.18)-(1.19) et la description qui les accompagne), mais elle est rappelée dans cette section avec les Équation (2.9)-(2.10).

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xz}^i \\ \hat{\sigma}_{yz}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{xx}^i & K_{xy}^i \\ K_{yx}^i & K_{yy}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_x^i \\ \hat{u}_y^i \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x^i \\ \hat{u}_y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{xx}^i & B_{xy}^i \\ B_{yx}^i & B_{yy}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xz}^i \\ \hat{\sigma}_{yz}^i \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Où,  $K_{\alpha\beta}^i$  et  $B_{\alpha\beta}^i$  désignent respectivement la raideur et la souplesse de la couche  $i$  avec  $\alpha = \{x, y\}$  et  $\beta = \{x, y\}$ .

La dissipation de l'interface peut être prise en compte par une partie imaginaire, à l'image de la dissipation de déformation. De cette manière, ces lois correspondent à la force de contact classique rappelée dans l'Équation (1.22) et dans le Tableau 1.2. Il est possible d'écrire la loi de comportement de l'interface linéaire par morceaux, en fonction des contraintes qui lui sont appliquées et donc implicitement en fonction de la fréquence de déformation. Cela permettrait notamment de prendre en considération des comportements plus complexes, comme la force

de contact de Hertz, voire de Hertz amélioré avec un amortissement non-linéaire, aussi présentées dans le Tableau 1.2. Cette analyse n'a malencontreusement pas été effectuée durant les présents travaux de thèse, mais les équations affectées par une implémentation d'une interface non linéaire sont détaillées à l'Annexe C.

La propagation du saut de déplacement de la couche  $i$  dans la direction de  $\alpha$  noté  $\hat{u}_\alpha^i$ , utilisée implicitement pour obtenir l'équation de la Figure 2.2, a nécessité quelques hypothèses. Il y a bien sûr les hypothèses d'ores et déjà appliquées dans le modèle Guyader, par exemple : l'isothermie du système, le champ de déplacement linéaire selon  $z$ . Cependant, des hypothèses supplémentaires ont dû être formulées exclusivement pour la loi de comportement de l'interface. Le saut de déplacement de la couche  $i$  dans l'axe  $(O\alpha)$  noté  $\hat{u}_\alpha^i$ , est supposé constant selon les trois variables spatiales  $(x, y, z)$ . Puisque c'est une surface, son indépendance vis-à-vis de la variable  $z$  est évidente, mais pour le plan  $(x, y)$  cela n'est bien sûr pas représentatif de la réalité. En effet, un défaut de collage, telle qu'une inclusion par exemple, ne peut pas être omniprésente dans le plan  $(x, y)$ . Cependant, cette hypothèse d'homogénéisation permet d'obtenir un seul et simple paramètre rendant compte de l'effet final apparent du couplage imparfait du système étudié.

Au sujet de la notation, les interfaces étant supposées isotropes pour l'ensemble des applications, on a  $B_{xx}^i = B_{yy}^i$  et  $B_{xy}^i = B_{yx}^i = 0$ . Cela implique que le paramètre d'interface sera régulièrement noté  $B_i$  directement en omettant les directions.

## 2.2 Equivalent dynamic model of multilayered structures with imperfect interfaces : Application to a sandwich structured plate with sliding interfaces, JSV 2022

Cette section est réservée à l'article que j'ai rédigé durant les présents travaux de thèse. Il a été publié au JSV et présente dans sa globalité le modèle développé. L'article reprend les hypothèses initiales du champ de déplacement et parcourt sommairement les différentes étapes de l'homogénéisation du champ de déplacement. Ensuite, la méthodologie de calcul est explicitée, suivie de l'application à

des structures sandwichées. L'article est intégré dans le manuscrit tel que sa version publiée dans le Journal of Sound and Vibration 535 (2022) 117052, en anglais [9].



# Equivalent dynamic model of multilayered structures with imperfect interfaces: Application to a sandwich structured plate with sliding interfaces

Nicolas Auquier <sup>a,b,c,\*</sup>, Kerem Ege <sup>b,c</sup>, Emmanuel Gourdon <sup>a,c</sup>

<sup>a</sup> Univ Lyon, ENTPE, Ecole Centrale de Lyon, CNRS, LTDS, UMR5513, Vaulx-en-Velin, 69518, France

<sup>b</sup> Univ Lyon, INSA Lyon, LVA, EA677, 69621, Villeurbanne, France

<sup>c</sup> LabEx CeLyA - Centre Lyonnais d'Acoustique, 36 avenue Guy de Collongue, Ecully, 69134, France

## ARTICLE INFO

### Keywords:

Equivalent single layer  
Equivalent model  
Imperfect interface  
Sliding interface

## ABSTRACT

This work aims to build an equivalent model of multilayered structures with imperfect interfaces for vibro-acoustic modeling and characterization. To take into account imperfections, new interface conditions including constitutive equations, that describe the imperfections, are implemented. Once the displacement field with imperfect interfaces is obtained, the dispersion relation of the structure is derived from the equivalent model. The bending wavenumbers are then used to compute the equivalent flexural rigidity and the damping of the sandwich panel. In this paper, the methodology is applied to a sandwich panel with sliding interfaces. The equivalent parameters are computed and compared to the reference case, i.e. perfect interfaces model. The main impact of the imperfection on the results is a shift towards the low frequency of the equivalent parameter curves.

## 1. Introduction

This work aims to develop an equivalent model able to characterize and optimize the behavior of multilayered structures with imperfect interfaces. The structures of interest here are sandwich panels, made up of three layers with a soft layer as core, usually thick, and hard skins from either side of the core. Sandwich panels are mainly used in the industry because of its high ratio stiffness over mass and its effectiveness to dissipate vibrations by using the high damping of the core. Hence, such structures yield many applications in several fields such as transport [1,2] or civil engineering [3,4], mostly for customer comfort and energy savings in the audible spectrum.

This particular interest has found echoes in the scientific community, which has developed many models to predict the response of such materials. Equivalent plate models are increasingly developed in the scientific community these last years [5–9], because of their several advantages for the calculation and the understanding of the modeling. For instance: (1) a minimum calculation time allows the testing of many configurations efficiently *i.e.* without using a finite element model mainly 3D with a significant mesh. (2) A small amount of parameters which make the method easily implemented. (3) Physical meaning brought by the physical model. Carrera [5] has gathered the models into three categories depending on their implementation types. The first category is the Equivalent Single Layer (ESL) models, they describe the displacement of the whole structures through the displacement variables of a reference layer. The second category is the Layer-Wise (LW) models, they describe the behavior of the structure in each layer, which increase the calculation time but increase also the accuracy. For instance, LW description is more accurate than a corresponding ESL

\* Corresponding author at: Univ Lyon, ENTPE, Ecole Centrale de Lyon, CNRS, LTDS, UMR5513, Vaulx-en-Velin, 69518, France.  
E-mail address: [nicolas.auquier@entpe.fr](mailto:nicolas.auquier@entpe.fr) (N. Auquier).

<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117052>

Received 8 November 2021; Received in revised form 16 May 2022; Accepted 19 May 2022

Available online 27 May 2022

0022-460X/© 2022 Elsevier Ltd. All rights reserved.

model, *i.e.* same hypothesis and order for  $z$ -expansion. The third category is for hybrid models, hereby providing the advantages of both previous categories. Once the model is chosen, the goal is similar and consist in developing a calculation methodology from the displacement field of the panel, to get the equivalent parameters of the multilayered system or its strains.

Guyader and Lesueur [10,11] developed a hybrid model for  $n$ -layers structures based on the work of Sun [12]. The methodology is developed by assuming a displacement field composed of 3 types of displacement: transversal, shearing and bending displacement, which is related to the Reissner model [13]. The latter is an extension of the Love-Kirchhoff plate theory [14] that takes into account shear strains throughout the thickness of the plate. Firstly, each layer has a specific displacement field as a LW model, but then interface conditions between the layers are implemented in order to propagate the kinematic field of the layer  $n$  into the layers. The propagation is applied until the kinematic field of the layer  $n$  is fully described with respect to the kinematic variables of the first layer, chosen as the reference layer in most cases. Once the kinematic field is fully propagated, the model is equivalent to an ESL model because the kinematic of all the layers are described thanks to the reference layer only. Thus, this kinematic field can be used to derive equivalent parameters of the multilayered structure, such as the equivalent flexural rigidity or the damping. The work of Guyader has been recently improved by Marchetti [15,16], he extended the previous work to panel structures with anisotropic layers and it gathers many details about the implementation of the model.

However, the interface perfection between two consecutive layers in multilayered media is not guaranteed, which yields to uncertainties in the characterization of panels. Interface characterization for multilayered structures has found some interest in the scientific community. Schoenberg [17] showed the impact of a slipping interface over the propagation of an elastic wave through the media, especially at the interface between two layers, where the plane wave reaction (described by the reflection coefficient for instance), will depend on the interface properties. In this work, the effects of the sliding between two consecutive layers are modeled thanks to a zero-thickness interface, but interface can also refers to actual thickness inside a layer or between two layers where inhomogeneities are present as in [18]. In the latter, the goal of using interface modeling is to simplify the model by considering a small thickness with specific parameters that will take into account the impact of the inhomogeneities. Larentyev [19] experimentally highlighted pure interface effect due to interface quality. He analyzed the interaction of ultrasonic waves sent through two roughened aluminum layers in contact. Since the layers have the same properties, the interface properties are only function of the coupling quality. Throughout the previous works, it is shown that an interface stiffness is a good tool to describe interface properties, low interface stiffness is related to a low bonding quality and a very high interface stiffness is similar to a perfectly bonded system.

The goal of this work is to extend the latest improvement of the Guyader's model for multilayered plates, by taking into account imperfect interfaces, and more specifically, as a first step, sliding between the layers. The modeling of sliding interfaces is performed as in the work of Larentyev [19], which consist of assuming interface stress resulting of sliding and interface stiffness. Thus, an equivalent model is derived with new assumptions for the interface conditions between the layers, and several material parameters are calculated to check the impact of such modifications. So far, the effects of imperfect interfaces in equivalent plate models observed in simulations are mainly about internal stresses of the multilayered plate [20–24]. The interest is mainly in the evaluation of the maximum stress for each layer of a panel under a static load. It is shown that an equivalent model with perfect interfaces will underestimate the stresses applied to the skins, which could be a problem if the skins are too thin for example.

One original feature of this work is to implement imperfect interfaces into a dynamic model and to highlight its effect on frequency-dependent equivalent parameters, such as the equivalent flexural rigidity. Moreover, the application chosen, instead of being a two-layered or three-layered plate with the same thickness and the same material properties as the previous cited models, is a sandwich panels, which implies three layers with two different thickness and two different materials. The paper is organized as follows: Section 2 describes the model development in details. The Section 3 describes the methodology used to derive dynamic parameters in order to show the imperfection impacts and to compare them with the perfect interfaces case. The Section 4 shows the results of the methodology application to a sandwich panel; in Section 5 is discussed the model assumptions and the results.

## 2. Models

The aim of this section is to detail the models used in the current work. It starts with the Guyader–Marchetti's model and its assumptions, in order to see clearly the modification carried out in the proposed model and also to have a better understanding of its starting assumptions. The modification of the model is done to take into account imperfections. In this work, the imperfections assumed in the model are jumps of the transverse displacement, which implies uncontinuous displacement field between the layers. This modification is implemented similarly to other imperfect interface models [20–24] but in dynamics, and is summarized by the new displacement field. Throughout this paper, the model presented is developed in the isotropic case for the sake of simplicity. But the model with imperfect interfaces can be developed for an anisotropic case as in Marchetti's work for the perfect interfaces case [15,16].

### 2.1. Guyader–Marchetti's model

The beginning of our work settled in the equivalent model for multilayered plate of Guyader [10] and especially in the recent developments of Marchetti [15] who extended the model to anisotropic plates. The Guyader's model is categorized as a “Zig-Zag” model, the main characteristic of such models is that they take into account a kinematic analysis for each layer and then use perfect interface conditions between the layers as in Fig. 1 to obtain an Equivalent Single Layer (ESL) modeling.

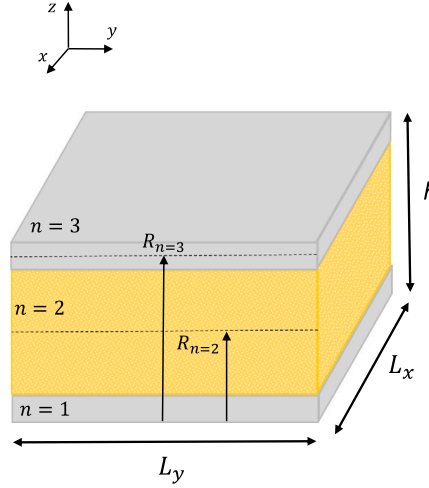


Fig. 1. Sandwich panels with perfect interfaces.

The Guyader's model starts with the displacement field introduced by Sun and Whitney [12]:

$$\begin{cases} u_x^n = u_{0_x}^n(x, y, t) - z^n \phi_x^n(x, y, t), \\ u_y^n = u_{0_y}^n(x, y, t) - z^n \phi_y^n(x, y, t), \\ u_z^n = W(x, y, t), \end{cases} \quad (1)$$

with,  $u_i^n$  the displacement of the layer  $n$  for the coordinate  $i$ ,  $z^n$  the thickness coordinate with the origin located at the midplane of the  $n$ th layer and  $\phi_i^n$  the rotation in the (Oxz) or (Oyz) plane.

However, the displacement field is written differently in [10] by adding a new kinematic variable to the model. The Guyader's displacement field is assumed to be described thanks to 3 displacement terms, namely: the bending, the shearing and the membrane displacement, respectively represented by  $W(x, y, t)$ ,  $\phi(x, y, t)$  and  $\psi(x, y, t)$ , which corresponds to a Reissner's [13] or Mindlin's [25] plate.

$$\begin{cases} u_x^n = \psi_x^n(x, y, t) - (z - R_n) \left( \frac{\partial W(x, y, t)}{\partial x} + \phi_x^n(x, y, t) \right), \\ u_y^n = \psi_y^n(x, y, t) - (z - R_n) \left( \frac{\partial W(x, y, t)}{\partial x} + \phi_y^n(x, y, t) \right), \\ u_z^n = W(x, y, t), \end{cases} \quad (2)$$

with,  $\psi_x$  ( $\psi_y$ ) the translation over the  $Ox^n$  ( $Oy^n$ ) axis), which simply describes the displacement yielded by the extensional waves in the layer  $n$ ,  $R_n$  is the  $z$  mid-plane coordinate of the layer  $n$  with respect to the global axis.  $\phi_x^n$  ( $\phi_y^n$ ) is the rotation around the  $Oy$  ( $Ox$ ) axis, which is depending on shear of the structure.

Firstly, all the layers have the same theoretical displacement field formulation but their index. Thus, to compute the displacement field of the whole plate, one has to propagate the displacement field into the layers thanks to interface conditions between the layers. For the Guyader model, it is done throughout continuity conditions of the kinematic field and the stresses. In the Guyader–Marchetti's case, the interface conditions are continuity conditions for the transverse shear stresses and the displacement field.

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha z}^n = \sigma_{\alpha z}^{n-1}, \\ \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n-1}, \end{cases} \quad (3)$$

with,  $\alpha = \{x, y\}$  and  $\mathbf{U}^n = [u_x^n, u_y^n, u_z^n]$ .

The interface conditions leads to a linear system of equations that can be rewritten by means of a transfer matrix of the interface  $n$  [ $T^n$ ]. This linear system of equations expresses the kinematic field of the layer  $n$  ( $\mathbf{U}^n$ ) with respect to the kinematic field of the layer  $n - 1$  ( $\mathbf{U}^{n-1}$ ), which yields  $(\mathbf{U}^n) = [T^n].(\mathbf{U}^{n-1})$ . After all, [ $T^n$ ] can be seen as an operator, its application to the kinematic field of the layer ( $\mathbf{U}^n$ ) yields the kinematic field of the next layer ( $\mathbf{U}^{n+1}$ ). The operator has to be applied as much as there are layers, so one can derive the expression of the kinematic field of the layer  $n$  with respect the layer  $n = 1$  and by doing so, derive an ESL model because the displacement field of the whole panel is described thanks to a single layer. If the reader is interested in the details of the derivation he can refers to the work of Marchetti [15].

Once the displacement field is fully propagated, the displacement variables of the first layer are the only unknowns of the model:

$$\begin{cases} u_x^n = \psi_x^1(x, y, t) + F_\omega \frac{\partial W}{\partial x} + F_{xx}^n \phi_x^1 + F_{xy}^n \phi_y^1, \\ u_y^n = \psi_y^1(x, y, t) + F_\omega \frac{\partial W}{\partial y} + F_{yx}^n \phi_x^1 + F_{yy}^n \phi_y^1, \\ u_z^n = W(x, y, t), \end{cases} \quad (4)$$



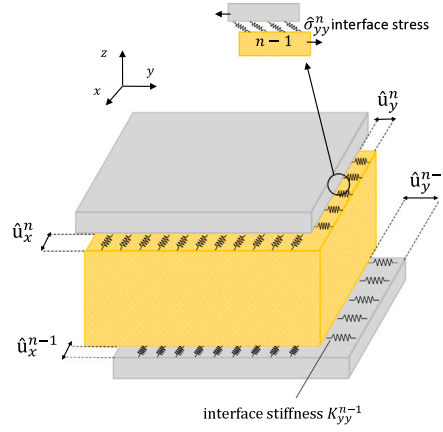


Fig. 2. Sandwich panel with imperfect interfaces modeled by interface jumps and interface stiffness.

with,  $F_\omega = R_1 - z$ ,  $F_{ij}^n = \alpha_{ij}^n (R_n - 2) + \gamma_{ij}^n \cdot \alpha_{ij}^n$  and  $\gamma_{ij}^n$  are material parameters (mainly Young’s modulus ratios) yielded by the transfer matrix  $[T^n]$ . The details are given in appendix of Loredo [26] or by Marchetti [15].

Thus, the Eq. (4) are the same as Eq. (2) but propagated thanks to the interface conditions. Fundamentally, the next step is to obtain the equation of motions and then compute equivalent parameters. However, the next subsection will describe the other model used in this paper. It introduces the interface conditions that take into account bonding imperfections, which has an impact on the propagated displacement field seen in Eq. (2).

## 2.2. Imperfect interface implementation

Previously, the interface conditions are assumed to respect perfect continuity of the displacement field and the transverse and vertical stresses, describing hereby perfect interfaces. For example, Massàbo’s model [22] also starts with a Zig-Zag model, it takes into account transverse shear as previously but the mathematical formulation is slightly different and used only in a static application. A displacement field for each layer is also stated, but displacement variables come from mathematical assumptions sorted by smoothness types, defined by the number of continuous derivatives it has over a domain. This yields the global displacement to be a composition of different function classes: a global displacement with a continuous first derivative function over  $z$  also known as a  $C^1$  function; and perturbations with a piecewise continuous function over  $z$  namely a  $C^0$  function. This model is equivalent to the previous model because the displacement field takes into account the same phenomenon such as shearing, bending and membrane effects.

The imperfect interface is implemented by assuming discontinuous displacement field at the interfaces Fig. 2. Then, a constitutive equation is formulated for the interfaces in order to compute the sliding term in the new displacement field. A spring approach is used to represent imperfect interface effects, the springs take into account the coupling quality between two consecutive layers. If the equivalent stiffness approaches infinity the interface has a perfect interface behavior. However, if the equivalent stiffness approaches 0 the consecutive layers are totally debonded. The spring stiffnesses are piecewise linear functions, which makes such formulation quite adaptive if needed. On one hand, these functions are called “jumps” and are written  $\hat{u}_n^x$  or  $\hat{u}_n^y$  for interfacial slip in the  $x$  or the  $y$  direction. On the other hand, they are called “openings” and are written  $\hat{u}_n^z$  for a discontinuity in the  $z$  direction. These discontinuities can be computed by the difference between the displacement field of two consecutive layers:

$$\hat{U}_n^i = U_n^i - U_{n-1}^i. \tag{5}$$

It is noteworthy to specify that the interface indexation depends on the indexation of the layers. In this work, the interface index is chosen according to the upper layer, which implies that for  $n = 1$  there is not an interface since it indicates the first layer. Mathematically, it is represented by writing simply  $\hat{U}_1^i = 0$ . Moreover, openings are not considered in the model, they are assumed to be negligible  $\hat{u}_n^z \approx 0$ .

Thus, this new term in the displacement field is implemented into the Guyader–Marchetti’s model and is represented in Fig. 2. To do so, the interface conditions are changed to discontinuous interface conditions for the displacements but still continuous for the stresses since contact is still occurring. The new interface conditions taken into account are modeled as:

$$\begin{cases} \sigma_{az}^n = \sigma_{az}^{n-1}, \\ U^n = U^{n-1} + \hat{U}_i^n. \end{cases} \tag{6}$$

Once the interface conditions are modified, the derivation of the equations is done similarly as Guyader–Marchetti’s model. Fortunately, the propagated displacement field can be written almost the same way as in Eq. (4) by gathering the terms with

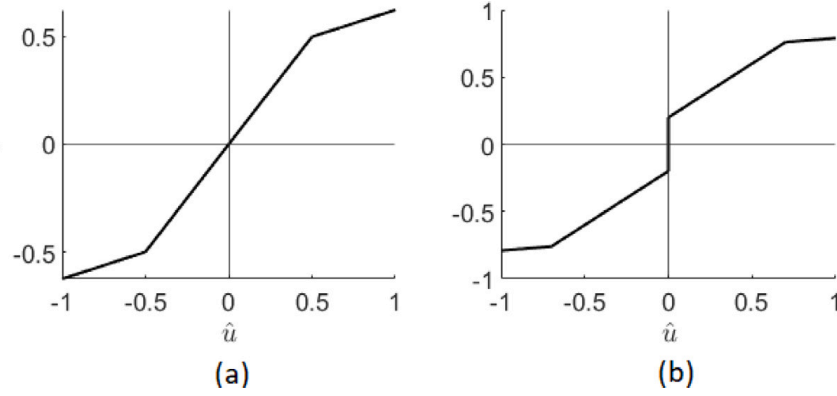


Fig. 3. Illustration of two different cases for the constitutive equation of imperfect interfaces. (a) purely elastic interface with piecewise linear interface parameter  $B$ , (b) linear non-proportional interface with piecewise linear interface parameter  $B$ .

respect to the kinematic variables:

$$\begin{cases} u_x^n = \psi_x^1(x, y, t) + F_\omega \frac{\partial W}{\partial x} + F_{xx}^n \phi_x^1 + F_{xy}^n \phi_y^1 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_x^i, \\ u_y^n = \psi_y^1(x, y, t) + F_\omega \frac{\partial W}{\partial y} + F_{yx}^n \phi_x^1 + F_{yy}^n \phi_y^1 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_y^i, \\ u_z^n = W(x, y, t). \end{cases} \quad (7)$$

However, the so-called jumps are not directly quantified and need another equation in order to be physically valuable. Thus, an equation has to be used in order to write the jumps with respect to known parameters. So the following constitutive equations are used:

$$\hat{\sigma}_{z=z^n}^n = \mathbf{K}^n \cdot \hat{U}^n, \quad (8)$$

And in its inverse form:

$$\hat{U}_{z=z^n}^n = \mathbf{B}^n \cdot \hat{\sigma}^n, \quad (9)$$

with, “ $\cdot$ ” the scalar product,  $\hat{\sigma}^n = [\hat{\sigma}_{xz}^n, \hat{\sigma}_{yz}^n]$  the vector of the interface stresses between the layers  $n$  and  $n-1$ ,  $\mathbf{K}^n = [K_{xx}^n, K_{xy}^n, K_{yx}^n, K_{yy}^n]$  the matrix of interface stiffness,  $\mathbf{B}^n = [B_{xx}^n, B_{xy}^n, B_{yx}^n, B_{yy}^n]$  the matrix of interface compliance. The stiffness matrix  $\mathbf{K}^n$  or the compliance matrix  $\mathbf{B}^n$  are complex matrices in order to take into account interface dissipation. Nevertheless, the dissipation can be implemented thanks to a dissipative term such as  $\hat{\sigma}_{z=z^n}^n = \mathbf{K}^n \cdot \hat{U}^n + t^n$  with  $t^n = [t_x, t_y]$  the vector of interface losses. Such equations describe the bonding behavior between consecutive layers with 2 limit cases. Let us write  $\hat{\sigma}_{xz}^n = K_{xz}^n \hat{u}_x^n$  or in its inverse form  $\hat{u}_x^n = B_{xz}^n \hat{\sigma}_{xz}^n$ , which corresponds to an isotropic plate. If  $K_{xz}^n \rightarrow 0$ , so  $\hat{\sigma}_{xz}^n \rightarrow 0$ , which describes a fully debonded case because no energy communication is carried out between the layers. If  $B_{xz}^n \rightarrow 0$ , so  $\hat{u}_x^n \rightarrow 0$ , which corresponds to a perfectly bonded condition such as the Guyader’s case where no imperfections are assumed.

Moreover, since the interface stiffness (or compliance) is written as a piecewise linear function, several kind of interfaces can be described. Such functions can, by their formulation, illustrate many kinds of interface behaviors, for instance a classic linear function of  $\hat{u}$ , a non-linear behavior or even non-elastic behavior. Fig. 3 shows two different cases: an elastic piecewise linear case; and a non-elastic case.

Thus, the jumps ( $\hat{U}^n$ ) can be written thanks to Eq. (9), by means of the material parameters and the stresses. To link the kinematic variables to the interface variables, the Hooke’s law has to be used. Then, the displacement field can be rewritten by using only the kinematic variables and some material parameters. In the case of  $\hat{u}_x^n$  for the most general case:

$$\hat{u}_x^n = B_{xz}^n (\Phi_x^1 (-\alpha_{yx}^n Q_{45}^n - \alpha_{xx}^n Q_{55}^n) + \Phi_y^1 (-\alpha_{yy}^n Q_{45}^n - \alpha_{xy}^n Q_{55}^n) - t_x^n), \quad (10)$$

with,  $Q_{ij}$  stiffness values following Voigt’s notation. After writing an equivalent equation for  $\hat{u}_y^n$ , the propagated displacement field Eq. (7) can be written as:

$$\begin{cases} u_x^n = \psi_x^1(x, y, t) + F_\omega \frac{\partial W}{\partial x} + F_{xxg}^n \phi_x^1 + F_{xyg}^n \phi_y^1 - \sum_{i=1}^n B_{xz}^i t_x^i, \\ u_y^n = \psi_y^1(x, y, t) + F_\omega \frac{\partial W}{\partial y} + F_{yxg}^n \phi_x^1 + F_{yyg}^n \phi_y^1 - \sum_{i=1}^n B_{yz}^i t_y^i, \\ u_z^n = W(x, y, t). \end{cases} \quad (11)$$

Where,  $F_{xx}$  became  $F_{xxg} = F_{xx} - B_{xz}^n (\alpha_{yx}^n Q_{45}^n + \alpha_{xx}^n Q_{55}^n)$ ,  $F_{yy}$  became  $F_{yyg} = F_{yy} - B_{yz}^n (\alpha_{yy}^n Q_{44}^n + \alpha_{xy}^n Q_{45}^n)$ ,  $F_{xy}$  became  $F_{xyg} = F_{xy} - B_{xz}^n (\alpha_{yy}^n Q_{45}^n + \alpha_{xy}^n Q_{55}^n)$  and  $F_{yx}$  became  $F_{yxg} = F_{yx} - B_{yz}^n (\alpha_{yx}^n Q_{44}^n + \alpha_{xx}^n Q_{45}^n)$ . It is noteworthy to say that in this case, no openings are taken into account, which leaves  $u_z^n$  unmodified. If the layers of the multilayered plate are assumed to be isotropic, it yields  $F_{xy} = F_{yx} = 0$  and  $F_{xx} = F_{yy}$ .

Once the displacement field is obtained, most of the previous applications [20,22] show the impact of the imperfections on the displacement field or on the stresses under a static load. However, the presented model is a dynamic model for infinite plate, but the

displacement can still be visualized as shown in Section 3.1 and particularly thanks to Fig. 9, where the impact of the imperfection can clearly be checked after computation: a discontinuity of the displacement at the interfaces. In this work, the impact on equivalent dynamic parameters is shown, such as the flexural rigidity and the equivalent damping. A new displacement field Eq. (7) is used, but the computation methodology follows the same steps as Guyader or Woodcock's work [10,27]. Similarly to the previous model, the coefficients can be propagated into the equations without repeating the derivation from scratch. But, this has to be done carefully by considering every step and the changes it yields on the equations. For instance, a spatial derivative of the displacement field could impact the new coefficients if they are functions of space.

The model has been fully described in this section. In the light of the details given throughout the model description some limitations can be drawn:

- Dilatation motion is not yet considered in the presented model. The first dilatation modes are hereby the high frequency limit of the model.
- The vertical displacement is assumed to be linear with respect to  $z$ . This yields the shear stresses to be constant through the thickness. Marchetti has shown that the effect of this assumption has low impact on the dynamics of multilayered plate [15] for the audible spectrum.
- The interface parameter, namely the interface stiffness  $K_{ij}$  or the interface compliance  $B_{ij}$  is assumed to be constant throughout this work for the sake of simplicity. But, the parameter can be implemented frequency dependent or space dependent if needed.
- Openings  $\hat{u}_z^n$  are not currently considered here. They are assumed to be negligible.

### 3. Methodology

This section details the methodology applied in this work to visualize the impact of the imperfections on the equivalent parameters, this gives insight into the panel behavior and particularly into the imperfection impact. It is done by considering the multilayered plate as a single layer plate for each frequency and compute its equivalent parameters as in [28], this will yield frequency-dependent parameters for the bending motion. In order to give evidence about the correctness of the method, the dispersion curves are compared with the Spectral Finite Element Method (SFEM) used by Shorter [29].

The methodology detailed in this section can be summarized thanks to the workflows in Fig. 4. Firstly, the displacement field  $u^n$  is used to compute the kinetic energy and the strain energy in order to use the least action principle. This yields a differential equation system that can be written thanks to matrices. A particular solution, which describe a propagative wave in the (Ox) and (Oy) directions, is assumed and leads to a system of equation with respect to the wavenumber  $k$ . Finally, the determinant of the equation yields the wavenumbers with respect to the frequency. Then, the bending wavenumbers are retrieved and equivalent dynamic parameters are computed by using a Love–Kirchhoff model. The main idea is to compute the bending wavenumber taken into account by the displacement field assumed Eq. (7). Then, compute the frequency dependent flexural rigidity by doing a thin-plate equivalence thanks to the Love–Kirchhoff model. All these parameters will finally be used in an application in the next section to illustrate the impact of the imperfections on the equivalent parameters and so the behavior of an imperfect panel. All the examples shown in the methodology section are obtained from the parameters of a three-layers multilayered plate. Their values are gathered in Table 3.

#### 3.1. Wavenumber calculation

Once the displacement field is obtained Eq. (11), the next step is to write the equation of motions. To do so, the Lagrangian of the system is computed  $L = T - V$ , which needs the computation of the kinetic energy  $T$  with Eq. (12) and of the potential energy  $V$  with Eq. (13):

$$T = \int_{-\frac{L_x}{2}}^{+\frac{L_x}{2}} \int_{-\frac{L_y}{2}}^{+\frac{L_y}{2}} \left[ \frac{1}{2} \sum_n \int_{z_n - \frac{h_n}{2}}^{z_n + \frac{h_n}{2}} \rho_n \left( \left| \frac{\partial u_x^n}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_y^n}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_z^n}{\partial t} \right|^2 \right) dz \right] dy dx. \tag{12}$$

$$V = \int_{-\frac{L_x}{2}}^{+\frac{L_x}{2}} \int_{-\frac{L_y}{2}}^{+\frac{L_y}{2}} \left[ \frac{1}{2} \sum_n \int_{z_n - \frac{h_n}{2}}^{z_n + \frac{h_n}{2}} \sigma^n \cdot (\epsilon^n)^T dz \right] dy dx. \tag{13}$$

To compute these two energy terms, one needs only to use the kinematic field previously shown in Eq. (7). The energy terms are developed with respect to the kinematic variables. Then, the principle of least action is applied for 3 variables  $x$ ,  $y$  and  $t$ , which yields 5 equations, one for each kinematic variables Eq. (11). The equations to solve is:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \alpha_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \alpha_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \frac{\partial L}{\partial \alpha_{xt}} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \frac{\partial L}{\partial \alpha_{yt}} \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial L}{\partial \alpha_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial \alpha_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial \alpha_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial L}{\partial \alpha_{yy}} = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

with,  $\alpha = \{W, \phi_x, \phi_y, \psi_x, \psi_y\}$ ,  $\alpha_{,i} = \frac{\partial \alpha}{\partial i}$  and  $\alpha_{,ij} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial i \partial j}$ .

The set of 5 equations thus obtained can be written thanks to a matrix equation Eq. (15):

$$\left( \mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbf{K} \right) \mathbf{W} = \mathbf{0}. \tag{15}$$

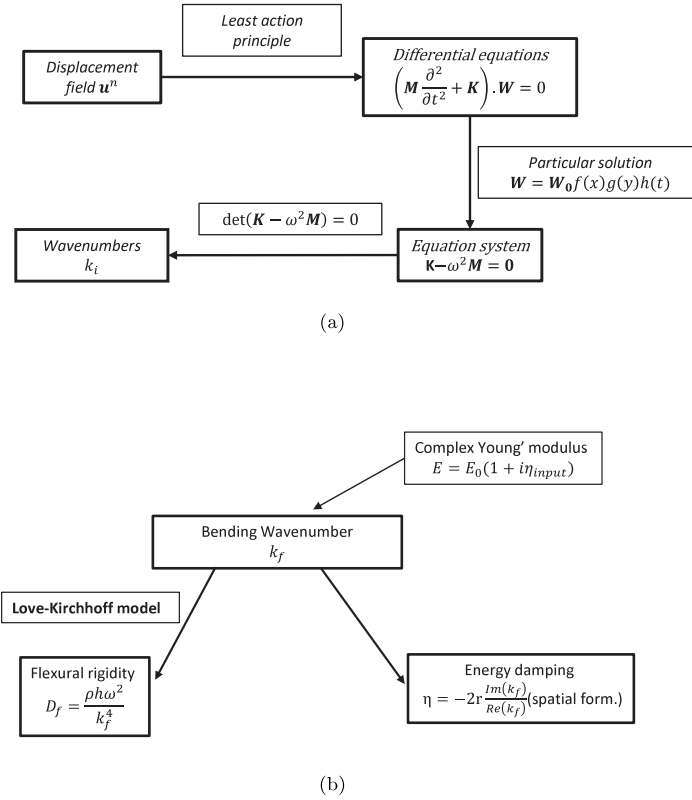


Fig. 4. (a) Complex wavenumbers  $k_i$  computation workflow with the displacement  $U$  Eq (7) as input, (b) Equivalent complex flexural rigidity  $D_f$  and equivalent damping  $\eta$  workflow with the bending wavenumbers  $k_f$  as input.

A particular solution  $W = W_0 e^{j\omega t} e^{-j(k_x x + k_y y)}$ , with  $k_x = k \cos(\theta)$ ,  $k_y = k \sin(\theta)$  and with  $\theta$  the direction of propagation, is then injected to remove the time differentials and write the system of equations as a mass and spring system as in Eq. (16):

$$(K - \omega^2 M) W_0 = 0. \quad (16)$$

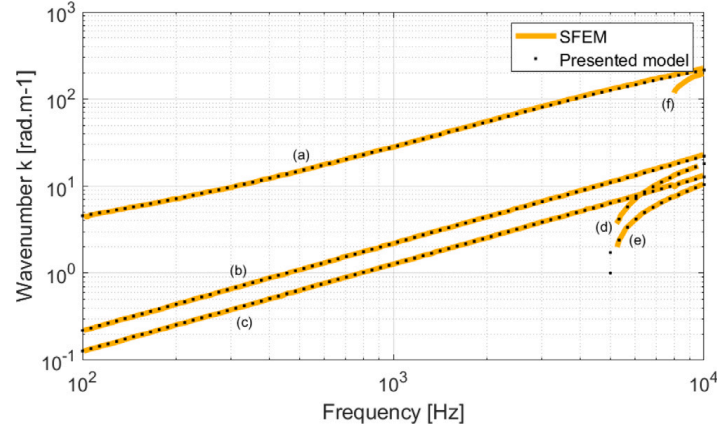
The matrices  $K$  and  $M$  are written respectively with the parameters  $\lambda_i$  and  $\delta_i$ , also called Woodcock's parameters. These parameters have been expressed relatively to other plate models in [26]. They are functions of the material parameters such as thicknesses of the layers or Young's modulus of the layers. Since the  $\lambda_i$  describe strain energy they are intuitively function of the Young's modulus of the layers and of their thicknesses. The  $\delta_i$  describe inertia effects and are functions of the density of each layer and also of Young's modulus ratio of the consecutive layers. These parameters can be expressed with respect to the coefficients of the kinematic variables in the displacement field Eq. (7) such as  $F_\omega$  or  $F_{xxg}$ .

Moreover, the matrices  $K$  and  $M$  are computed with the updated coefficients that take into account the imperfections. However, only some parameters are impacted by the imperfection implementation, these modifications are written as  $\delta_i^g$  and  $\lambda_i^g$  and are implemented by adding them to the right coefficient such as  $\tilde{\delta}_i = \delta_i + \delta_i^g$ . All the parameters impacted for an isotropic case are written below:

$$\begin{aligned} \lambda_2^g &= \sum_{i=1}^n \left[ Q_{11}^i h_i \left( -2\gamma_i \sum_{j=2}^i \alpha_j Q_{55}^j B_j + \sum_{j=2}^i (\alpha_j Q_{55}^j B_j)^2 \right) \right] \\ \lambda_4^g &= -2 \sum_{i=1}^n \left[ Q_{11}^i h_i \beta_i \sum_{j=2}^i \alpha_j Q_{55}^j B_j \right] \\ \lambda_6^g &= -2 \sum_{i=1}^n \left[ Q_{11}^i h_i \sum_{j=2}^i \alpha_j Q_{55}^j B_j \right] \\ \delta_2^g &= \sum_{i=1}^n \left[ \rho_i h_i \left( -2\gamma_i \sum_{j=2}^i \alpha_j Q_{55}^j B_j + \sum_{j=2}^i (\alpha_j Q_{55}^j B_j)^2 \right) \right] \\ \delta_4^g &= -2 \sum_{i=1}^n \left[ \rho_i h_i \beta_i \sum_{j=2}^i \alpha_j Q_{55}^j B_j \right] \\ \delta_6^g &= -2 \sum_{i=1}^n \left[ \rho_i h_i \sum_{j=2}^i \alpha_j Q_{55}^j B_j \right] \end{aligned}$$

**Table 1**  
Multilayered plate mechanical parameters from Shorter's SFEM [29].

	$h$ /[mm]	$\rho$ /[kg m-3]	$E$ /[MPa]	$\nu$	$\eta$
Skins	0.6	2700	71 000	0.33	0.5%
Core	15	48	30	0.2	10%



**Fig. 5.** Full set of wavenumbers in 3D obtained by solving the system of equation (16), comparison between the presented model and SFEM [29]. (a) Bending wavenumbers, (b)–(c) Extensional wavenumbers, (d)–(e) Shear wavenumbers, and (f) Dilatation wavenumbers (SFEM only).

To have details about the classic Woodcock's coefficient in a similar case as the present work, the reader is referred to [26].

In order to solve Eq. (16) according to the bending wavenumber  $k = k_f$ , one needs to solve the determinant of Eq. (16)  $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ . The equation can be solved for  $\omega$  or for  $k$ , in this work the choice has been to solve it according to  $k$ , which finally yields an  $8th$  order equation. The equation can be simply solved by using a symbolic math solver software.

The solutions yield all the wavenumbers accounted by the modeling as in Fig. 5, where they are compared with SFEM results by Shorter [29]. In order to make the comparison between the two results, the properties of the multilayered plate were chosen according to the case studied by Shorter. The characteristics of the multilayered are gathered in Table 1. All the wavenumbers obtained in a two dimensions kinematic field are plotted in this figure, so 5 curves are displayed. The highest wavenumbers correspond to the bending wavenumbers. The two curves linear with the frequency are the extensional waves in the ( $Ox$ ) and ( $Oy$ ) directions. Then, at higher frequencies shear appears in the structure in both direction of the ( $Oxy$ ) plane. The dilatation wavenumbers are not appearing in the presented model since the vertical displacement  $W(x, y, t)$  is assumed constant through the thickness Eq. (1)

For the present work, only the bending wavenumbers are of interest. Its extraction is usually simple, because of the bending wave nature, their wavenumbers at a fixed frequency is mainly higher to the other wavenumber types. So they can be retrieve by taking the maximum wavenumber for a frequency. Otherwise, an algorithm can be used such as Newton–Raphson to get only one solution at the Eq. (16). The first proposition works in most of the cases but is not always a reliable technique because the bending wavenumber curve can be sometimes lower to the membrane wavenumbers for low frequencies. Once the bending wavenumbers have been retrieved, two parameters can be derived: the equivalent flexural rigidity  $D$  and the equivalent damping ratio  $\eta$ .

### 3.2. Equivalent flexural rigidity

The next parameter detailed in this subsection is the equivalent flexural rigidity. The goal is to explore the imperfection impacts thanks to another parameter. The equivalent flexural rigidity derivation will be first detailed, then compared to different cases, i.e. with or without imperfect interfaces.

Firstly, to compute the flexural rigidity one needs the bending wavenumber. This parameter is retrieved by solving the determinant of Eq. (16) thanks to a Newton–Raphson algorithm. Since we are interested only in the bending of the panel, the Love-Kirchhoff theory can be applied for each frequency to model this effect. This implies that the multilayered structure studied is, for a single frequency, seen as an equivalent thin plate. The methodology is applied for each frequency in order to have frequency-dependent equivalent parameters of the multilayered structure.

The governing equation for vertical displacement of the Love-Kirchhoff [14] model in isotropic conditions is:

$$D_f \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = -\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{17}$$

with,  $D_f$  the equivalent complex flexural rigidity of the isotropic plate,  $h = \sum h_i$  and  $\rho = \frac{\sum h_i \rho_i}{\sum h_i}$ .

It is noteworthy to say that the isotropic assumption is done for the sake of simplicity, the model can be developed for anisotropic layers if needed in the same way as Marchetti's work [15]. A particular solution can be used to solve the equation, such as:

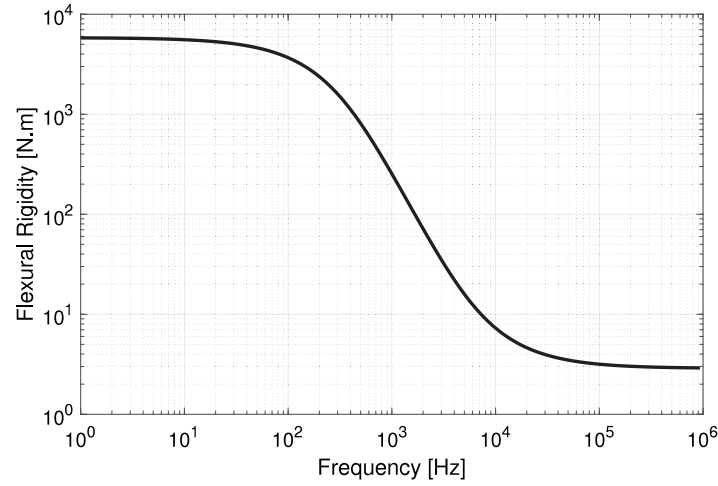


Fig. 6. Flexural rigidity of a sandwich panel as a function of frequency. The characteristics of the panel considered are gathered in Table 1.

$W = W_0 e^{j(k_f x - \omega t)}$ . So the Eq. (17) yields Eq. (18), which is a straightforward equation that computes the flexural rigidity by using the bending wavenumber and the frequencies corresponding:

$$D_f = \frac{\rho h \omega^2}{k_f^4}. \quad (18)$$

This equation is particularly valid for beam-like structures since only one axis of propagation is considered.

The results for a sandwich panels are shown in Fig. 6. These are typical results for this type of structure and they can be divided into 3 zones: firstly, in low frequencies the multi-layered structure is behaving as an equivalent plate with the same flexural rigidity as the skins, but weighted by the thickness of the layers; in higher frequencies a transition is occurring because shear is appearing in the multi-layered structure, this makes the core, which is in most application a low rigidity material, involved in the behavior of the panel energy; finally, in the high frequencies, the layers are unbounded and so the flexural rigidity is mainly governed by the skins. The analysis of the first and last zones are more detailed in the next subsection.

### 3.3. Asymptotic analysis

The system of Eq. (16) can be used also to derive another equation of the flexural rigidity Eq. (19) as in [30,31]. The computation is rather straightforward so only the result will be discussed here. By rearranging the system of equations the following result can be found out:

$$A_4 D_f^{3/4} + A_3 D_f - A_1 A_4 D_f^{1/2} - A_1 A_3 + A_2 = 0, \quad (19)$$

With  $A_1 = \lambda_1 - \frac{\lambda_5^2}{\lambda_3}$ ,  $A_2 = \omega \sqrt{M} (\lambda_4 - \frac{\lambda_5 \lambda_6}{\lambda_3})^2$ ,  $A_3 = \omega \sqrt{M} (\lambda_2 - \frac{\lambda_6^2}{\lambda_3})$  and  $A_4 = \lambda_{37}$ , where the  $\lambda_i$  are the Woodcock's coefficient [26], and  $M$  the total mass of the panel.

Accordingly, the asymptotic values of the flexural rigidity can be found out by computing the limits of the equation with respect to  $\omega$ . If  $\omega \rightarrow 0$ :  $\lim_{\omega \rightarrow 0} D = D_{low}$ ,  $A_2 \rightarrow 0$  and  $A_3 \rightarrow \infty$  so

$$D_{low} = A_1 \approx D_1 \left( 8 + 12 \frac{h_2}{h_1} + 6 \frac{h_2^2}{h_1^2} \right). \quad (20)$$

To obtain this equation approximation, the skins are assumed to be identical, which implies that the skins have the same flexural rigidity  $D_1 = D_3$ , this is the case in most of the sandwich panels. Thus, the rigidity at the low frequencies is governed by the flexural rigidity of the skins and the ratio of thickness of the core over the thickness of the skins. So, a study on the effect of the thickness of the core shows that a thicker core yields a higher flexural rigidity at low frequencies.

On the other hand, if  $\omega \rightarrow \infty$ :  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} D = D_{high}$ ,  $A_2 \gg (A_1, A_4)$  and  $A_3 \gg (A_1, A_4)$  so

$$D_{high} = A_1 - \frac{A_2}{A_3} \approx D_1 + D_3. \quad (21)$$

Thus, the high frequency limit is simply the sum of the flexural rigidity of the skins. And so, in the case of the sandwich panels studied here,  $D_{high} \approx 2D_1$ .

In this work, the asymptotic analysis has been re-implemented with imperfect interfaces in order to check what is the impact of the imperfections on the model asymptotic behavior and so increase our understanding on the result obtained for the flexural rigidity. When the propagation of the imperfect interface parameters is checked, one can notice that only the even  $\lambda_i$  are affected

**Table 2**

Different equivalent damping parameters, the equivalent damping does not consider shear effects and is based on energy formulation, the spatial damping is based on spatial formulation and the energy damping is similar to the equivalent damping but takes into account shear effects. The definition are gathered from the work of Marchetti in [15,32].

Damping type	Equation
Equivalent Damping	$\eta_{eq} = -\frac{Im(k^4)}{Re(k^4)}$
Spatial Damping	$\gamma = \frac{Im(k)}{Re(k)}$
Energy Damping	$\eta = -2\frac{c_g}{c_\phi} \frac{Im(k)}{Re(k)}$

by the modification. So only  $A_2$  and  $A_3$  are different from the previous results. In other words, only the high frequency limit  $D_{high}$  is impacted by the imperfections.  $A_1$  is not changed by the imperfection conversely to  $A_2$  and  $A_3$ . They can be written with respect to this modification by isolating the terms of the imperfection such as:  $\tilde{A}_2 = \omega\sqrt{M} \left( (\lambda_4 + \lambda_{4_g}) - \frac{\lambda_5}{\lambda_3} (\lambda_6 + \lambda_{6_g}) \right)^2$  and  $\tilde{A}_3 = \omega\sqrt{M} \left( (\lambda_2 + \lambda_{2_g}) - \frac{(\lambda_6 + \lambda_{6_g})^2}{\lambda_3} \right)$ . Finally they can be expressed as in Eqs. (22) and (23):

$$\tilde{A}_2 = \left( A_2 + A_{2_g} + 2\sqrt{A_2 A_{2_g}} \right)^2, \quad (22)$$

$$\tilde{A}_3 = \left( A_3 + A_{3_g} \right), \quad (23)$$

with,  $A_{2_g} \approx h_1(h_1 + h_2)Q_{11}^1 Q_{55}^1 \frac{B_{xz}^2 B_{xz}^1}{2}$  and  $A_{3_g} \approx h_1 Q_{11}^1 (Q_{55}^1)^2 \left( \frac{h_2}{Q_{55}^2} (B_{xz}^1 + B_{xz}^2) + \frac{(B_{xz}^1 + B_{xz}^2)^2}{2} \right)$ . The  $\omega\sqrt{M}$  terms have been omitted since they vanish in the computation of  $D_{high}$  thanks to the ratio between  $A_2$  and  $A_3$ . The imperfection has an impact on the asymptotic value only for important imperfections that finally would stand for fully debonded cases. Nevertheless, the approximation  $D_{high} \approx D_1 + D_3$  is still a good for small damages as it will be shown in the application section.

### 3.4. Damping factor modeling

Another way to explore the impact of the imperfect interfaces in the model is to derive the equivalent damping factor. The damping implementation in the model has been done through a complex Young's modulus:  $E = E_0(1 + i\eta)$  of the layers, which yields the wavenumber to be complex, and so all the equivalent parameters. A classic way to estimate the equivalent damping ratio of the bending is by using the flexural rigidity as in Eq. (24):

$$\eta_{eq} = \frac{Im(D_f)}{Re(D_f)} = -\frac{Im(k^4)}{Re(k^4)}. \quad (24)$$

However, as pointed out by Marchetti [32], this equation based on Love-Kirchhoff's model overestimate the damping of the system because this model does not take into account the shear of the structure. At low frequencies, the behavior of a multilayered structure is depending mainly on pure bending. At higher frequencies, the behavior of the structure is changing because shear is appearing. However, in Love-Kirchhoff model the shear is not taken into account. This yields the ratio  $c_g/c_\phi = 2$  for any frequency, with  $c_g = d\omega/dk$  and  $c_\phi = \omega/k$ . In this case, the behavior modeled corresponds to a pure bending situation and overestimate the damping value when shear is occurring. In case of pure shearing of the structure the ratio  $c_g/c_\phi = 1$ . Thus, the ratio of group velocity over phase velocity must vary between 2 and 1 depending on the frequency.

Furthermore, the damping ratio can be written through different formulations. The equivalent damping, as seen previously in the current subsection, will overestimate the damping at some frequencies because of the assumptions it implies. There is the spatial damping, which is obtained by computing the damping resulting of the propagation into space by using the particular solution  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 e^{jk_f x}$ . The energy damping, obtained from a spatial formulation or a time formulation, which should give the same results as the first equivalent damping under the same conditions because both are computed by the ratio of the imaginary part and the real part of the flexural rigidity. All these damping ratio formulation are gathered into the Table 2.

The result for a sandwich panels is shown in Fig. 7. The low values for the low frequency limit and the high frequency limit indicates the damping of the skins, which are the only layers involved in the panel in these frequency intervals. A maximum damping is observed which corresponds to the optimum shearing zone, i.e. all the layers are involved in the behavior of the panel and particularly the high-dissipating core thanks to the shear of the panel. According to the damping chosen for the core, the equivalent damping shows its limits here by overestimating the maximum damping, which cannot be higher than the damping of the core.

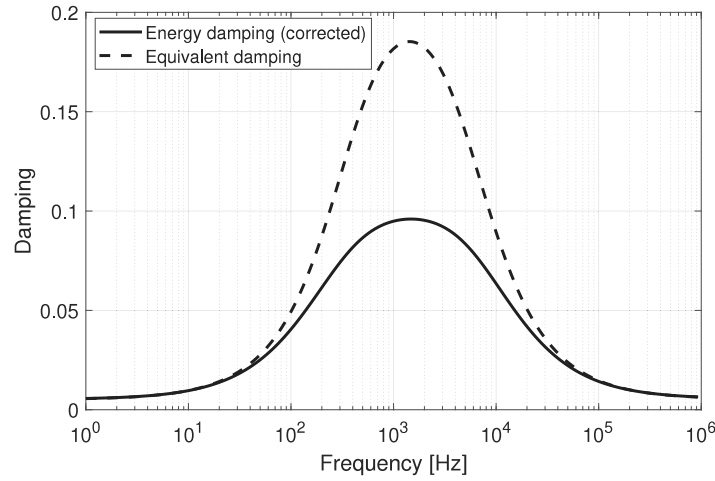


Fig. 7. Damping of a sandwich panel as a function of frequency. Two models used: the Equivalent Damping and the Energy Damping, where the first overestimate the maximum damping. The characteristics of the panel considered are gathered in Table 3.

Table 3  
Multilayered plate mechanical parameters.

	h/[mm]	$\rho$ /[kg m <sup>-3</sup> ]	E/[MPa]	$\nu$	$\eta$
Skins	1	2700	71 000	0.33	0.5%
Core	5	48	30	0.2	10%

#### 4. Application on sandwich panels

In this section is shown the results generated from the current model. The results are obtained for a three layered plate with the same properties for all simulations in order to check similarities and behavior modifications. The characteristics of the panel are shown in Table 3. In the previous papers [20–22], the application is mainly about a two-layer or three-layer plate with the same thicknesses and the same material properties. In the application section, the system studied is a common type of sandwich panel that one can find in the industry, namely thin skins made out of aluminum with a soft and dissipative core to represent a polymer. This type of structure has been also studied and used as an example by the scientific community [29,32–36].

In the results of the application, the perfect interface condition is always used as a reference. The results shown corresponds to the methodology previously detailed in Section 3. It first begins with the modification on the wavenumbers, to continue with the equivalent parameters, namely the equivalent flexural rigidity and the equivalent damping. Finally a comparison of the imperfect interfaces with a perfect interfaces model but with a softer core is shown. The parameter of defect has been chosen high enough to be physically valuable and fit illustrations, which corresponds to  $B_s = 5e-10 \text{ m Pa}^{-1}$ .

##### 4.1. Wavenumber modifications

As seen in Section 3.1, the wavenumbers considered in the model are bending, shearing and extensional wavenumbers. At higher frequencies other types of strain can appear such as breathing modes but are not taken into account in the presented model because the vertical displacement is assumed to be constant through the thickness, which implies that the vertical strain  $\epsilon_z = 0$ , which is a good assumption up to high frequencies.

In Fig. 8 the wavenumbers of the structure are plotted for different type of imperfect panels. The wavenumbers in the ( $Oy$ ) direction are omitted, since they do not add information already brought by the ones in the ( $Ox$ ) direction, in order to enhance the readability of the figures. The impact of one imperfect interface whether it is the first or the second interface is the same, which has been made to check the symmetry validity of the model. This could have been predicted from the impact of the imperfection in the displacement  $u_x$  in Fig. 9. Indeed, whether the interface 1 or the interface 2 is imperfect, the displacement  $u_x$  is the same for the skins. Since the behavior of a sandwich panel is mainly governed by the skins and the thickness of the layers, the equivalent parameters must be the same. Besides, this impact is clearly seen as a shift of the transition frequency towards the low frequencies, particularly visible on the bending mode thanks to its two slope changes. It is also particularly visible on the shear mode frequencies, they appear at lower frequencies for the imperfect interface 1 or 2 in comparison with the reference. No changes can be noticed for the extensional modes, they stay unchanged for any value of sliding interfaces. This is intuitive since the interface stresses are transverse shear stresses and so have effects only on the rotation kinematic variables in this model. This can be verified by deriving the transverse strain, which yields Eq. (25):

$$\epsilon_{xz}^n = -\alpha_{xx}^n \Phi_x^1 - \alpha_{xy}^n \Phi_y^1, \quad (25a)$$



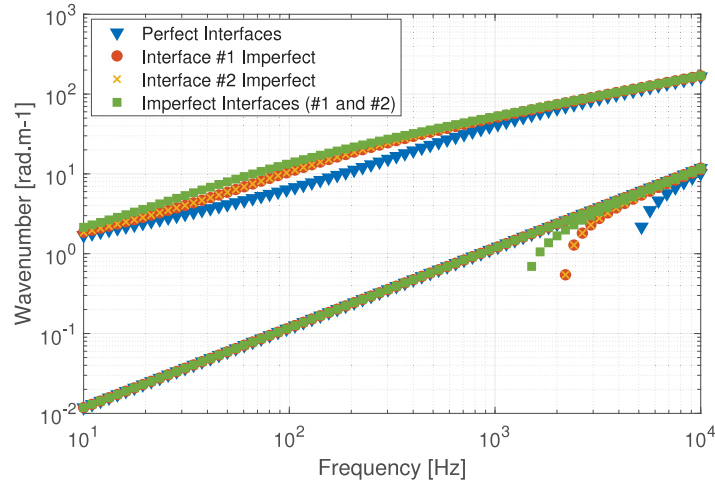


Fig. 8. Full set of wavenumbers in 2D, with perfect interfaces and one or two imperfect interfaces.

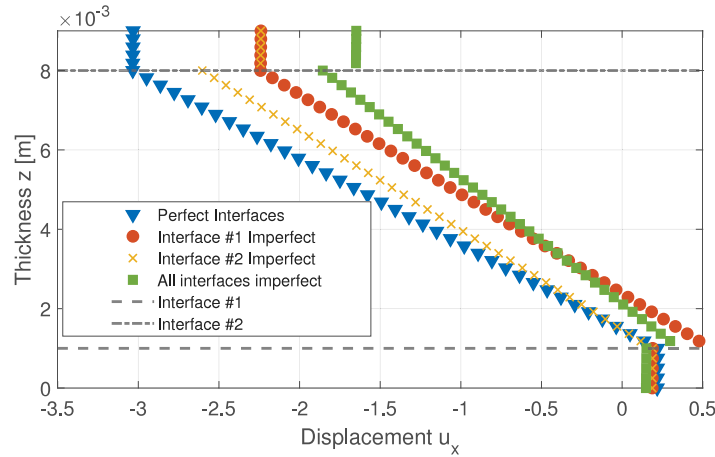


Fig. 9. Displacement  $u_x$  through the thickness  $z$  of the panel for different imperfection namely: Only perfect interfaces, first interface imperfect and second perfect, first interface perfect and second interface imperfect, all interfaces are imperfect.

$$\epsilon_{yz}^n = -\alpha_{yx}^n \Phi_x^1 - \alpha_{yy}^n \Phi_y^1. \quad (25b)$$

Finally if both interfaces are imperfects, the effect is even higher since the total amount of imperfects is higher too. These results give evidence that such imperfects facilitate the shear between the layers, which is seen in Fig. 8 but also in the following subsection.

An example of the resulting displacement field with imperfect interfaces is displayed in Fig. 9, it shows the discontinuities introduced in the displacement field depending on which interface is impacted by the imperfection. The displacement displayed is obtained from the computed wavenumbers. It shows the displacement in the  $x$  direction  $u_x^n$  for each layer  $n$  in case of free vibrations. Thus, the figure provides an insight of the imperfection impact on the displacement field. An interesting result is that whether the first or the second interface is imperfect, the strains of the skins are the same. One can see that the imperfects change the strains evolution in the core since they are more and more independent.

#### 4.2. Equivalent flexural rigidity and damping shift

As seen in Section 3.2, the equivalent flexural rigidity for a three layered plate is changing with respect to the frequency domain according 3 regions namely: the low frequency domain; the transition domain; and the high frequency domain.

This behavior is seen in Fig. 10 for two kinds of simulation: a perfect interfaces panel; and a panel with imperfect interfaces. Thus, the imperfects have a similar effect as seen previously, i.e. the whole curve is shifted towards the low frequencies, and for this kind of structure does not show any additional impact than seen on the bending wavenumbers. Since the transition frequency is depending on the shear of the panel, the same conclusion can be drawn from this figure.

The damping used in the current results will only be the energy damping, which as seen in Section 3.4, is corrected by the ratio between the group velocity and phase velocity of the waves in order to take into account the shear of the structure. As we could expect from the previous results, the frequency corresponding to the maximum damping is shifted towards the low frequencies,

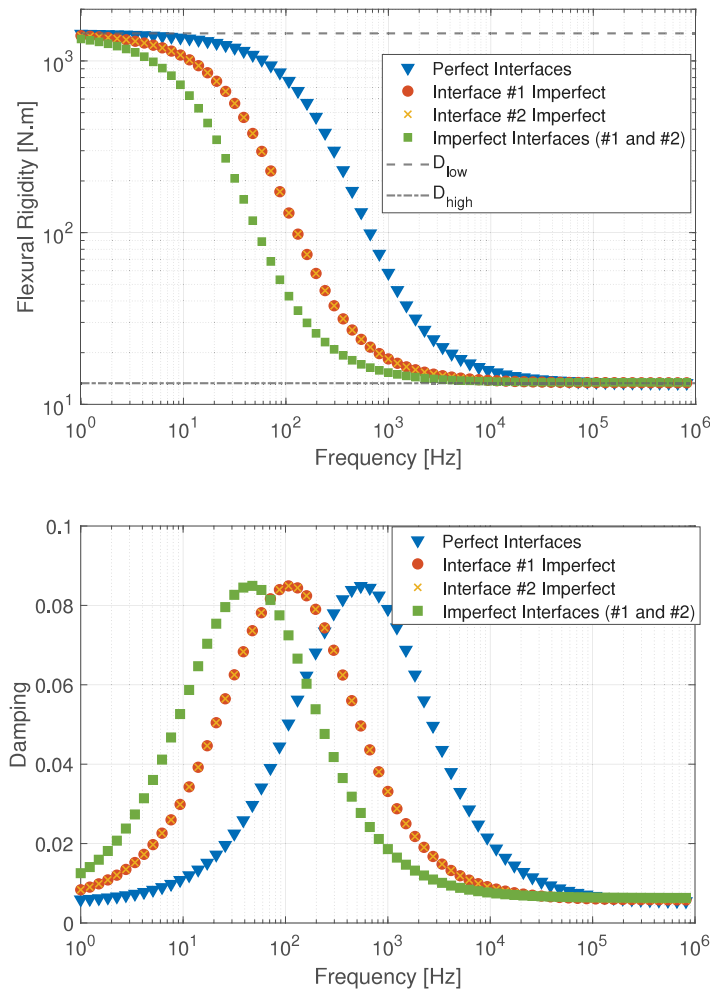


Fig. 10. (a) Equivalent Flexural Rigidity  $D$  and (b) Equivalent damping  $\eta$  with perfect interfaces, one imperfect interface and all interfaces are imperfects..

because the location of this frequency is depending on the shear of the structure. Moreover, it is noteworthy to say that the damping of the panel is only shifted towards the low frequencies. Even if the defect is particularly high, no damping is added to the structure nor removed, only the transition between the medium frequency behavior and the high frequency behavior happens more easily. This indicates that the imperfections does not change the whole behavior of the panel but makes the shearing easier to happen. This is intuitive since the imperfections taken into account are sliding in the transverse directions. However, some damping can be added to the system if needed thanks to the imperfect parameter  $B_i$ , by increasing its imaginary part.

#### 4.3. Comparison with perfect interfaces with different parameter variables

As depicted by the previous results, the main impact of this new modeling is that the imperfections shift the transition frequency towards the low frequencies. Even though this behavior is intuitive, it can be already modeled simply with a perfect interface equivalent model by using a softer core as shown in Fig. 11.

The advantages of keeping the previous model and to model imperfection by reducing the Young's modulus of the core are quite obvious since its results are already used and have been experienced, and its modeling is simpler because it does not require any more computations to describe such effects. Nevertheless, to model imperfection with perfect interfaces by reducing the Young's modulus of the core is not physically valuable and can lead to errors on material parameters of the core. Thus, using the model with imperfect interfaces gives more insight into the physics of multilayered plate. As in Fig. 11, a rather important sliding defect is equivalent to a core approximately 8 times softer, which is too high to be acceptable as experimental uncertainties. Conversely, small imperfections that yield a slight shift of the equivalent parameters are hardly detected experimentally. They can be mistaken for a softer core, mainly if the variation of the rigidity is of the same order than the uncertainties.

Moreover, the application in the present work has been chosen for its simplicity as a first step for the model in order to see if it contains some particularities. Further applications are considered, with new assumptions in the model such as 3rd order vertical displacement or non-linear interface constitutive equation.

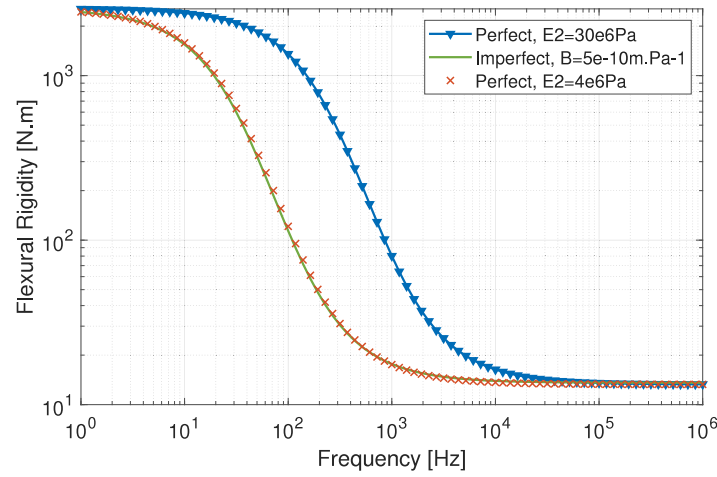


Fig. 11. Equivalent flexural rigidity comparison between an imperfect interfaces equivalent model and a perfect interfaces equivalent model but with a softer core.

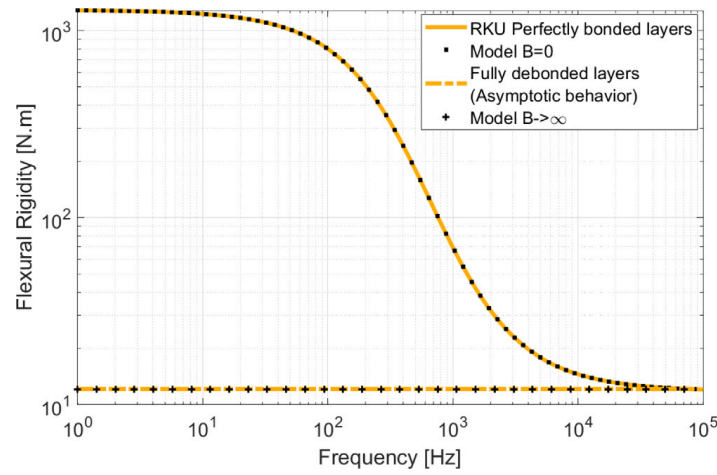


Fig. 12. Equivalent flexural rigidity computation according to Table 3. Comparison between the presented model and RKU [37] in the asymptotic behaviors namely: perfectly bonded layers  $B = 0$ , fully debonded layers  $B \rightarrow \infty$ .

#### 4.4. Comparison with RKU model

In order to validate the asymptotic behaviors of the dynamic model, a comparison is done with a model developed by Ross, Kerwin and Ungar model [37], denoted here by RKU. The RKU model is a simplified model of the dynamics of a constrained layer system. It is used to model perfectly bonded layers dynamics and so, can be compared to the presented model in the case  $B = 0 \text{ m Pa}^{-1}$ . The comparison is made in Fig. 12 and shows good agreement between the RKU model and the presented model. For the fully debonded layers case, no multilayered plate dynamics are involved. Thus, the flexural rigidity of the system must be the sum of the flexural rigidity of the three layers  $D = D_1 + D_2 + D_3$ , which implies the flexural rigidity to not be a frequency dependent parameter. If the interface stiffness tends towards infinity  $B \rightarrow \infty$ , the model shows good agreement with this result. Furthermore, the equivalent dynamic model with imperfect interfaces is able to model the transition between these two asymptotic behaviors.

#### 4.5. Application to various sandwich panels

In this section are gathered the results for various sandwich panels with different mechanical parameters and different geometry. The cases were chosen according to the work presented here, but also to the work of Ghinet and Atalla [7]. All the results are summarized in Table 4.

One can find the input of each case needed for the model to yields results. For each case, two results are always computed: The first result is obtained with perfect interfaces  $B = 0 \text{ m Pa}^{-1}$ ; and the second with  $B = 5\text{e}-10 \text{ m Pa}^{-1}$  similarly as the first application. Therefore, it is possible to compare the effect of the interface parameter depending on the sandwich panel characteristics. The effect is seen thanks to  $\Delta f = f_{T,B=0} - f_{T,B=5\text{e}-10}$ . The frequency values correspond to the frequency where the maximum damping is obtained, i.e. where the maximum shearing is obtained. So, the difference of the frequency values  $\Delta f$  represents the frequency shift of the dynamical parameters.

**Table 4**

Multilayered plate mechanical parameters, with,  $f_{T,B=0}$  the frequency of maximum shearing, which correspond to the maximum damping value, for the perfectly bonded case  $B = 0 \text{ m Pa}^{-1}$ .  $f_{T,B=5e-10}$  the frequency of maximum shearing for the imperfect case with  $B = 5e-10 \text{ m Pa}^{-1}$ .  $\Delta f = f_{T,B=0} - f_{T,B=5e-10}$  the frequency shift of the dynamical parameters.  $D_{low}$  the low frequency asymptotic value of the flexural rigidity.  $D_{high}$  the high frequency asymptotic value of the flexural rigidity.

<b>Case #1:</b> $E_1 = E_3 = 71e9 \text{ Pa}$ , $E_2 = 30e6 \text{ Pa}$ , $h_1 = h_3 = 1 \text{ mm}$ , $h_2 = 5 \text{ mm}$ , $\rho_1 = \rho_3 = 2700 \text{ kg m}^{-3}$ , $\rho_2 = 48 \text{ kg m}^{-3}$ , $\nu_1 = \nu_3 = 0.33$ , $\nu_2 = 0.2$ .					
$f_{T,B=0}$	544 Hz	$h_1/h_2$	0.2	$D_{low}$	1448 N m
$f_{T,B=5e-10}$	42 Hz	$E_1/E_2$	2.3e3	$D_{high}$	13 N m
$\Delta f$	502 Hz				
<b>Case #2:</b> $E_1 = E_3 = 69e9 \text{ Pa}$ , $E_2 = 2.1e6 \text{ Pa}$ , $h_1 = h_3 = 1.52 \text{ mm}$ , $h_2 = 0.127 \text{ mm}$ , $\rho_1 = \rho_3 = 2800 \text{ kg m}^{-3}$ , $\rho_2 = 940 \text{ kg m}^{-3}$ , $\nu_1 = \nu_3 = 0.33$ , $\nu_2 = 0.2$ .					
$f_{T,B=0}$	132 Hz	$h_1/h_2$	12	$D_{low}$	205 N m
$f_{T,B=5e-10}$	2 Hz	$E_1/E_2$	3.3e4	$D_{high}$	45 N m
$\Delta f$	130 Hz				
<b>Case #3:</b> $E_1 = E_3 = 125e9 \text{ Pa}$ , $E_2 = 5e6 \text{ Pa}$ , $h_1 = h_3 = 1 \text{ mm}$ , $h_2 = 3 \text{ mm}$ , $\rho_1 = \rho_3 = 1600 \text{ kg m}^{-3}$ , $\rho_2 = 33 \text{ kg m}^{-3}$ , $\nu_1 = \nu_3 = 0.33$ , $\nu_2 = 0.2$ .					
$f_{T,B=0}$	87 Hz	$h_1/h_2$	0.33	$D_{low}$	1145 N m
$f_{T,B=5e-10}$	28 Hz	$E_1/E_2$	2.2e4	$D_{high}$	23 N m
$\Delta f$	59 Hz				
<b>Case #4:</b> $E_1 = E_3 = 210e9 \text{ Pa}$ , $E_2 = 15.8e6 \text{ Pa}$ , $h_1 = h_3 = 0.453 \text{ mm}$ , $h_2 = 0.035 \text{ mm}$ , $\rho_1 = \rho_3 = 7850 \text{ kg m}^{-3}$ , $\rho_2 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ , $\nu_1 = \nu_3 = 0.33$ , $\nu_2 = 0.2$ .					
$f_{T,B=0}$	1233 Hz	$h_1/h_2$	13	$D_{low}$	16 N m
$f_{T,B=5e-10}$	0.03 Hz	$E_1/E_2$	1.3e5	$D_{high}$	3.7 N m
$\Delta f$	1233 Hz				

Some conclusions can be drawn in the light of the results shown in Table 4. The impact of the interface compliance  $B$  is different depending on the sandwich panel properties. Higher is the stiffness of the skins  $E_1 = E_3$  in comparison to the core, lower will be the impact of the interface parameter  $B$ . This can be checked by comparing the case #1 with the case #3, where the latter has stiffer skins comparing to the core. Similarly, thicker is the core  $h_2$  in comparison to the thickness of the skins  $h_1 = h_3$ , higher will be the impact of the interface parameter  $B$ . The flexural rigidity asymptotic values  $D_{low}$  and  $D_{high}$  are unchanged since the interface parameter impact only the coupling of the layers and not the rigidity of the layers.

## 5. Discussion

Since the 3D-displacement of the plate is assumed to be linear with respect to the vertical axis and the layers have the same properties, the vertical stress is constant through the thickness. It has been shown that this assumption has meaningless impact on the equivalent parameters for the bending motion in case of perfect interfaces as in Appendix of [15]. But, since the interface stresses are strongly impacted by the imperfections, especially for highly imperfect conditions such as fully debonded layers, 3rd order vertical displacement will be considered and its influence will be checked on the results.

Moreover, it has been shown in [16] that dilatational motion represents the high frequency limit of the present model but also have strong impact on the behavior of a multilayered structure even in low frequency range ( $f \in [200, 500] \text{ Hz}$ ). This is a current limitation of the presented model since no dilatation is assumed here. Thus, take into account dilatational motion would increase the high frequency limit of the model but would also be interesting to model openings  $\hat{u}_z^n$  in the panel in order to implement more imperfection types.

Furthermore, the constitutive law, and especially the interface parameters  $B_{ij}$  or  $K_{ij}$  are assumed to be constant in the present work. This was an unavoidable step for the model development since it provides a preview on the impact of the imperfection implementation. But this limits the present model to describe only sliding imperfect interfaces linearly with frequency. However, in order to fully take advantage of the model, other types of interface parameters are considered to be explored, such as frequency varying interface parameter or non-linear constitutive law described through piece-wise linear interface parameter.

## 6. Conclusion

This paper proposes a method to model imperfect interfaces, and in particular sliding interfaces for a better characterization and optimization of the behavior of multilayered structures. This implementation is done into an equivalent layer model, the Guyader model, a Zig-Zag model, recently improved by Marchetti for anisotropic plates. The advantage of such models is to yield reliable results efficiently by describing the behavior of all the layers of the panel one by one, but thanks to a single reference layer. For example, this allows to show the global displacement through the layers as well as equivalent parameters to model the panel as if it was an unique layer with specific properties. It is noteworthy to say that the presented method is focused on sandwich panels but can be used as well for other types of multilayered structures.

The results of the method show the impact of imperfect interfaces when added to the model, that is mainly the shift towards the low frequencies of the typical behavior of the frequency-dependent parameters for a sandwich panels. Since the transition between the first and the second behavior of a sandwich panels is depending on the shear between the layers, it is intuitive that the imperfection, which here is an interface sliding, will facilitate such behaviors. This effect is illustrated throughout the application done for this paper with several parameters: firstly, the set of wavenumbers shows this shift towards the low frequencies where the most obvious shift is the one of the shear which appears in lower frequencies. Then, the flexural rigidity shows this same effect by the shift of the transition. Finally, the damping, which implies the imaginary part into the process, shows the same effect, that is to say, the maximum damping is also shifted.

The model could be used to characterize the coupling conditions in a multilayered panel. It could be challenging to apply the method experimentally on several sandwich panels and analyze them in the scope of the presented model. It would be interesting to apply the method for Structure Health Monitoring (SHM). Adhesive defects that impact the dynamical behavior of the multilayered structure could be detected and characterized thanks to the shift of the dynamical parameters. Furthermore, the aging of systems could be analyzed in the light of the model, by checking the dynamical characteristics evolution.

### CRedit authorship contribution statement

**Nicolas Auquier:** Conceptualization, Data curation, Formal analysis, Investigation, Methodology, Project administration, Resources, Software, Supervision, Validation, Visualization, Writing – original draft, Writing – review & editing. **Kerem Ege:** Conceptualization, Data curation, Formal analysis, Funding acquisition, Investigation, Methodology, Project administration, Resources, Software, Supervision, Validation, Visualization, Writing – original draft, Writing – review & editing. **Emmanuel Gourdon:** Conceptualization, Data curation, Formal analysis, Funding acquisition, Investigation, Methodology, Project administration, Resources, Software, Supervision, Validation, Visualization, Writing – original draft, Writing – review & editing.

### Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

### Acknowledgments

This work was supported by the LABEX CeLyA (ANR-10-LABX-0060) of Université de Lyon, within the program « Investissements d’Avenir » operated by the French National Research Agency (ANR). We also express our gratitude to Fabien Marchetti (Research Engineer at Matelys) for fruitful discussions.

### References

- [1] M.D. Rao, Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes, *J. Sound Vib.* 262 (2003) 457–474, [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00106-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00106-8).
- [2] S. Subramanian, R. Surampudi, K.R. Thomson, S. Vallurupalli, Optimization of Damping Treatments for Structure Borne Noise Reduction.
- [3] M. Caniato, F. Bettarello, A. Ferluga, L. Marsich, C. Schmid, P. Fausti, Acoustic of lightweight timber buildings: A review, *Renew. Sustain. Energy Rev.* 80 (2017) 585–596, <http://dx.doi.org/10.1016/j.rser.2017.05.110>.
- [4] Jamal. Arbaoui, Y. Schmitt, J.-L. Pierrot, F.-X. Royer, Effect of core thickness and intermediate layers on mechanical properties of polypropylene honeycomb multi-layer sandwich structures, *Arch. Metall. Mater.* 59 (1) (2014) <http://dx.doi.org/10.2478/amm-2014-0002>.
- [5] E. Carrera, An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates, *Compos. Struct.* 50 (2) (2000) 183–198, [http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00099-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00099-4).
- [6] E. Carrera, Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells, *Arch. Comput. Methods Eng.* 9 (2) (2002) 87–140, <http://dx.doi.org/10.1007/BF02736649>.
- [7] S. Ghinet, N. Atalla, Modeling thick composite laminate and sandwich structures with linear viscoelastic damping, *Comput. Struct.* 89 (2011) 547–1561, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.09.008>.
- [8] O. Dazel, J.-P. Groby, B. Brouard, C. Potel, A stable method to model the acoustic response of multilayered structures, *J. Appl. Phys.* 113 (2013) 083506, <http://dx.doi.org/10.1063/1.4790629>.
- [9] K. Viverge, C. Boutin, F. Sallet, Model of highly contrasted plates versus experiments on laminated glass, *Int. J. Solids Struct.* 102–103 (2016) 238–258, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.09.035>.
- [10] J.L. Guyader, C. Lesueur, Acoustic transmission through orthotropic multilayered plates, Part I: Plate vibration modes, *J. Sound Vib.* 58 (1978) 51–68, [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X\(78\)80060-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80060-1).
- [11] J.L. Guyader, C. Lesueur, Acoustic transmission through orthotropic multilayered plates, Part II: Transmission loss, *J. Sound Vib.* 58 (1978) 69–86, [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X\(78\)80061-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80061-3).
- [12] C.-T. Sun, J.M. Whitney, Theories for dynamic response of laminated plates, *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. J.* 11 (2) (1973) 178–183, <http://dx.doi.org/10.2514/3.50448>.
- [13] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Am. Soc. Mech. Eng., J. Appl. Mech.* 12 (1945) A69–A77, <http://dx.doi.org/10.1115/1.4009435>.
- [14] A.E.H. Love, The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* 179 (1888) 491–546, <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1888.0016>.
- [15] F. Marchetti, Modélisation et caractérisation large bande de plaques multicouches anisotropes, in: *Broadband Modelling and Characterization of Anisotropic Multilayered Plate, Vibrations, INSA, Lyon, 2009*.
- [16] F. Marchetti, U. Arasan, F. Chevillotte, K. Ege, On the condensation of thick symmetric multilayer panels including dilatational motion, *J. Sound Vib.* 502 (2021) 116078, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116078>.

- [17] M. Schoenberg, Elastic wave behavior across linear slip interfaces, *J. Acoust. Soc. Am.* 68 (1980) 1516–1521, <http://dx.doi.org/10.1121/1.385077>.
- [18] F.J. Margetan, R.B. Thompson, J.H. Rose, T.A. Gray, The interaction of ultrasound with imperfect interfaces: Experimental studies of model structures, *J. Nondestruct. Eval.* 11 (1992) 109–126, <http://dx.doi.org/10.1007/BF00566403>.
- [19] Anton I. Lavrentyev, S.I. Rokhlin, Ultrasonic spectroscopy of imperfect contact interfaces between a layer and two solids, *Acoust. Soc. Am.* 103 (2) (1998) 657–664, <http://dx.doi.org/10.1121/1.423235>.
- [20] D. Liu, L. Xu, X. Lu, Stress analysis of imperfection composite laminates with an interlaminar bonding theory, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 37 (1994) 2819–2839, <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620371608>.
- [21] Z.-Q. Cheng, A.K. Jemah, F.W. Williams, Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces, *J. Appl. Mech.* 63 (1996) 1019–1026, <http://dx.doi.org/10.1115/1.2787221>.
- [22] R. Massàbo, F. Campi, Assessment and correction of theories for multilayered plates with imperfect interfaces, *Meccanica* 50 (2015) 1045–1071, <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-014-9994-x>.
- [23] R. Massàbo, F. Campi, An efficient approach for multilayered beams and wide plates with imperfect interfaces and delaminations, *Compos. Struct.* 116 (2014) 311–324, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.04.009>.
- [24] X. Lu, D. Liu, Interlayer shear slip theory for cross-ply laminates with nonrigid interfaces, *AIAA J.* 30 (4) (1992) 1063–1073, <http://dx.doi.org/10.2514/3.11028>.
- [25] R. Mindlin, Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates American society of mechanical engineers, *J. Appl. Mech.* 18 (1951) <http://dx.doi.org/10.1115/1.4010217>.
- [26] A. Loredo, A. Castel, A multilayer anisotropic plate model with warping functions for the study of vibrations reformulated from woodcock's work, *J. Sound Vib.* 332 (1) (2013) 102–125, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.06.014>.
- [27] R.L. Woodcock, Free vibration of advanced anisotropic multilayered composites with arbitrary boundary conditions, *J. Sound Vib.* 312 (2008) 769–788, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2007.11.015>.
- [28] K. Ege, N.B. Roozen, Q. Leclère, R.G. Rinaldi, Assessment of the apparent bending stiffness and damping of multilayer plates; modelling and experiment, *J. Sound Vib.* 426 (2018) 129–149, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2018.04.013>.
- [29] P.J. Shorter, Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates, *J. Acoust. Soc. Am.* 115 (5) (2004) 1917–1925, <http://dx.doi.org/10.1121/1.1689342>.
- [30] J.-L. Guyader, C. Cacciolati, Viscoelastic properties of single layer plate material equivalent to a multi-layer composites plate, *InterNoise* (2007).
- [31] U. Arasan, F. Marchetti, F. Chevillotte, L. Jaouen, D. Chronopoulos, E. Gourdon, A simple equivalent plate model for three-layer sandwich panels with shearing core, *J. Sound Vib.* 500 (2021) 116025, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116025>.
- [32] F. Marchetti, K. Ege, Q. Leclère, N.B. Roozen, On the structural dynamics of laminated composite plates and sandwich structures; a new perspective on damping identification, *J. Sound Vib.* 474 (2020) 115256, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115256>.
- [33] A. Mejdí, N. Atalla, S. Ghinet, Wave spectral finite element model for the prediction of sound transmission loss and damping of sandwich panels, *J. Sound Vib.* 158 (2014) 251–258, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.06.014>.
- [34] K. Ege, V. Henry, Q. Leclère, R.G. Rinaldi, C. Sandier, Vibrational behavior of multi-layer plates in broad-band frequency range: comparisons between experimental and theoretical estimations, in: *InterNoise 2015, San Francisco, United States*, pp. 4485–4496.
- [35] C. Boutin, K. Viverge, Generalized plate model for highly contrasted laminates, *Eur. J. Mech. A Solids* 55 (2016) 149–166, <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.08.008>.
- [36] U. Arasan, F. Marchetti, F. Chevillotte, G. Tanner, D. Chronopoulos, E. Gourdon, On the accuracy limits of plate theories for vibro-acoustic predictions, *J. Sound Vib.* 493 (2020) 115848, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115848>.
- [37] D. Ross, E.E. Ungar, E. Kerwin, Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae., *Struct. Damping* (J.E. Ruzicka, Ed) 3 (1959) 44–87.

## 2.3 Recalage d'un modèle tricouche aux interfaces parfaites

Recaler un modèle tricouche aux interfaces parfaites peut être utile pour avoir une alternative pour des modèles numériques qui ne peuvent pas implémenter simplement des interfaces imparfaites. Ce recalage est aussi intéressant afin de pouvoir calculer la surestimation des paramètres matériaux. Cela peut être nécessaire dans le but d'obtenir une meilleure correspondance mesure-modèle. Il est aussi par exemple difficile d'implémenter directement des interfaces imparfaites dans la méthode des matrices de transfert ou Transfer Matrix Method (TMM) de par leur épaisseur nulle.

Le recalage d'un modèle aux interfaces parfaites est réalisable en le comparant avec le modèle aux interfaces imparfaites. Pour cela, les rigidités de flexion équivalentes, qui rendent compte du comportement global du tricouche, entre les deux approches sont égalisées en modifiant les propriétés du cœur du multicouche aux interfaces parfaites. De plus, une comparaison avec la TMM développée sur AlphaCell<sup>1</sup> est réalisée à l'Annexe A. AlphaCell est un logiciel commercialisé par MATELYS-Research Lab<sup>2</sup> qui implémenta les interfaces imparfaites dans la TMM à l'aide d'une loi de mélange entre le cas parfaitement couplé et le cas totalement découplé.

### 2.3.1 Comparaison des flexions de rigidité

Dans l'article, le modèle multicouche aux interfaces imparfaites est appliqué à un tricouche, puis est comparé à un tricouche aux interfaces parfaites à la section 4.3. de l'article. L'objectif est de montrer que pour le cas des interfaces imparfaites simples, il est possible d'obtenir le même type de comportement avec un tricouche aux interfaces parfaites en changeant ses propriétés mécaniques.

La Figure 11 de l'article montre ainsi 3 flexions de rigidité en fonction de la fréquence : celle pour un matériau aux interfaces parfaites avec la rigidité du cœur  $E_2 = 30$  MPa ; celle pour un matériau aux interfaces parfaites avec la rigidité du

---

1. [alphacell.matelys.com](http://alphacell.matelys.com)

2. [matelys.com](http://matelys.com)

cœur  $E_2 = 4$  MPa ; et la flexion de rigidité d'un matériau aux interfaces imparfaites avec  $B_{tot} = B_1 + B_2 = 5 \cdot 10^{-10} \text{m.Pa}^{-1}$  et avec la rigidité du cœur  $E_2 = 30$  MPa. Tous les autres paramètres mécaniques sont bien sûr rigoureusement égaux, telles que l'épaisseur des couches successives et la rigidité des peaux.

Cela montre qu'il est possible d'obtenir les mêmes résultats, mais au prix d'une physique grandement dégradée. Pour de petites imperfections, il est alors possible de modifier légèrement les propriétés du cœur afin de recalibrer le modèle. Ainsi, un couplage légèrement imparfait peut même être confondu avec une identification incertaine des propriétés du cœur. Cependant, pour des défauts importants, il est bien sûr aberrant de diviser par un facteur 2 ou plus les propriétés d'une couche. Néanmoins, cette équivalence peut être une manière de considérer l'effet des interfaces imparfaites dans un modèle aux interfaces parfaites rapidement. Cette possibilité est détaillée pour un tricouche dans la section suivante.

### 2.3.2 Méthode de recalage

Le paramètre d'interface par couche  $B_i$  résume en l'état actuel de nombreux mécanismes de contact. Comme vu dans le Chapitre « Synthèse Bibliographique », et plus particulièrement à la Section 1.2, la dynamique des contacts est riche en mécanismes, qu'ils soient purement mécaniques comme l'état des surfaces en contact, la masse des objets en collision ou encore la vitesse de collision, ou qu'ils soient électromagnétiques comme la tension de surface.

Afin de mieux comprendre les effets du paramètre  $B$ , une analyse approfondie de ses répercussions sur les paramètres dynamiques a été effectuée en se basant sur les travaux d'Uthayasuriyan [3], cela permet notamment d'exprimer le  $B$  en fonction des paramètres matériaux d'un modèle plus classique. Uthayasuriyan a développé une modélisation simplifiée du modèle Guyader afin de réduire considérablement le temps de calcul. Ce modèle simplifié est basé sur la flexion de rigidité qui peut être décrite à l'aide d'une fonction sigmoïde. Uniquement 4 paramètres sont alors nécessaires pour décrire cette courbe : l'asymptote Basse Fréquence (BF), l'asymptote Haute Fréquence (HF), la fréquence de transition ( $f_T$ ) et la courbure ou slope factor  $R$ . Nous savons que le paramètre d'interface  $B$  a particulièrement un effet sur la fréquence  $f_T$ , car son effet est simplement de décaler les paramètres



dynamiques vers les basses fréquences lorsque le taux d'imperfection augmente. Mais cela n'est qu'une conséquence. In fine, l'effet que le paramètre d'interface apporte est équivalent à une variation d'un module de cisaillement du cœur dit « virtuel » noté  $*G_{xz}^2$ . Ce paramètre est calculé à partir de la fréquence de transition  $f_T$  du modèle sigmoïde. À partir de l'Équation (2.11), équation de l'équilibre dynamique du multicouche, il est possible d'obtenir la formulation théorique de cette fréquence transition, elle correspond à l'Équation (2.12).

$$A_4 D^{3/2} + A_3 D - A_1 A_4 D^{1/2} - A_1 A_3 + A_2 = 0, \quad (2.11)$$

Avec,  $D$  la flexion de rigidité équivalente fonction de la pulsation  $\omega = 2\pi f$ ,  $A_1 = \lambda_1 - \frac{(\lambda_5)^2}{\lambda_3}$ ,  $A_2 = \omega\sqrt{M}(\lambda_4 - \frac{\lambda_5\lambda_6}{\lambda_3})^2$ ,  $A_3 = \omega\sqrt{M}(\lambda_2 - \frac{(\lambda_6)^2}{\lambda_3})$  et  $A_4 = \lambda_{37}$ . Les  $\lambda_i$  sont des paramètres simplement fonctions des propriétés matériaux élastiques telle que la rigidité des peaux et du cœur. Ils sont détaillés dans les annexes de Marchetti [78] et dans l'article de Loredo au sujet de l'équivalence entre le modèle de Woodcock, rigoureusement similaire au modèle de Guyader, et les autres modèles de plaques [74].

$$f_T = \frac{1}{2\pi} \frac{A_4 \sqrt{D_T} (A_1 - D_T^{1/4})}{A_3' D_T + A_2' - A_1 A_3'}, \quad (2.12)$$

Avec,  $D_T = \sqrt{D_{low} D_{high}}$ , l'asymptote de flexion de rigidité BF notée  $D_{low} = \lim_{\omega \rightarrow 0} D(\omega)$ , l'asymptote de flexion de rigidité HF notée  $D_{high} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} D(\omega)$ ,  $A_2' = A_2/\omega$  et  $A_3' = A_3/\omega$ .

Le paramètre d'interface n'influence pas tous les paramètres de l'Équation (2.11), mais uniquement les paramètres  $A_2$  et  $A_3$  qui seront ainsi notés respectivement  $\tilde{A}_2$  et  $\tilde{A}_3$  lorsqu'ils sont une fonction de  $B$ . L'effet du paramètre d'interface est étudié grâce au module de cisaillement du cœur  $G_{xz}^2 = Q_{xzzz}^2 = \frac{E_x^2}{2(1+\nu_{xy}^2 \nu_{yx}^2)}$ , avec  $\nu_{xy}^2 = \nu_{yx}^2 = \nu_2$  et  $E_x^2 = E_y^2 = E_2$ . Le but de l'analyse est de calculer le module de cisaillement virtuel, c'est-à-dire  $*G_{xz}^2$ , qui est le module dans le multicouche aux interfaces parfaites considérant la modification due aux interfaces imparfaites. C'est un module de cisaillement factice qui est une fonction explicite du paramètre  $B$ . Il permet notamment de vérifier pour quelles valeurs  $B$  devient influent dans la dynamique, mais aussi de vérifier pour quelles valeurs le multicouche peut

être considéré comme totalement découplé. Il permet aussi d'avoir une équivalence simple entre un modèle aux interfaces imparfaites avec un modèle aux interfaces parfaites pour un tricouche sandwich.

Cette démarche commence en calculant deux fréquences  $f_T$  : la fréquence de transition avec la modélisation des interfaces imparfaites  $\tilde{f}_T$  ; et la fréquence de transition virtuelle  ${}^*f_T$  issue d'une modélisation aux interfaces parfaites. On écrit ensuite  $\tilde{f}_T = {}^*f_T$  (Équation (2.13)) en prenant  $D_T = {}^*D_T$  car comme précisé dans les résultats principaux de l'article, les asymptotes ne sont pas affectées par le paramètre  $B$  et  $D_T = \sqrt{D_{low}D_{high}}$ .

$$\frac{1}{2\pi} \frac{{}^*A_4 \sqrt{D_T} (A_1 - D_T)}{A_3' D_T + A_2' - A_1 A_3'} = \frac{1}{2\pi} \frac{A_4 \sqrt{D_T} (A_1 - D_T)}{\tilde{A}_3' D_T + \tilde{A}_2' - A_1 \tilde{A}_3'} \quad (2.13)$$

Avec  $A_4 = \sum_{i=1}^{i=N} G_{xz}^i h_i \alpha_{xz}^i$ ,  ${}^*A_4 = \sum_{i=1}^{i=N} {}^*G_{xz}^i h_i \alpha_{xz}^i$ ,  ${}^*G_{xz}^1 = G_{xz}^1$  et  ${}^*G_{xz}^3 = G_{xz}^3$ .

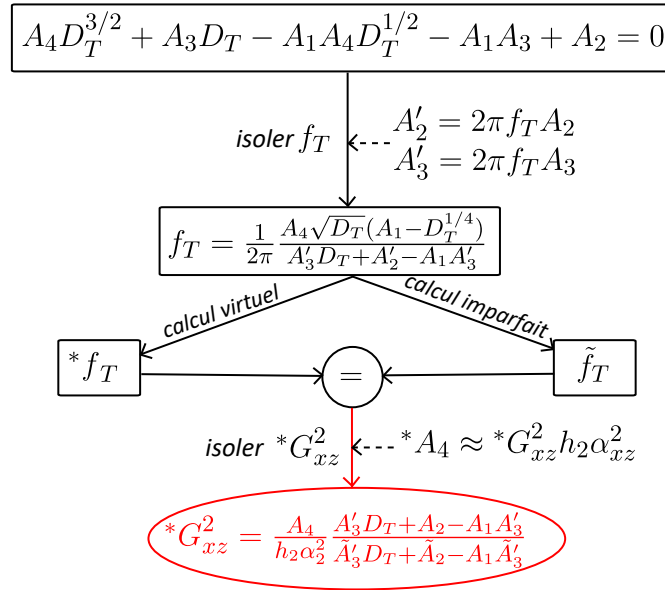
L'Équation (2.13) se simplifie ensuite en Équation (2.14).

$${}^*G_{xz}^2 = \frac{A_4}{h_2 \alpha_{xz}^2} \frac{A_3' D_T + A_2' - A_1 A_3'}{\tilde{A}_3' D_T + \tilde{A}_2' - A_1 \tilde{A}_3'} \quad (2.14)$$

L'Équation (2.14) est obtenue en faisant l'hypothèse  $A_4 \approx G_{xz}^2 h_2 \alpha_{xz}^2$  et  ${}^*A_4 \approx {}^*G_{xz}^2 h_2 \alpha_{xz}^2$ . Cela est équivalent à dire que le cœur est bien plus souple que les peaux et/ou que le cœur est plus souple et plus épais que les peaux.

Dans l'Équation (2.14), les termes avec l'étoile  ${}^*$  (comme  ${}^*G_{xz}^2$ ) correspondent aux calculs avec interfaces parfaites, mais « corrigés » par les résultats du calcul avec interfaces imparfaites, c'est-à-dire, le module de cisaillement est recalculé afin d'obtenir comme dynamique résultante la même flexion de rigidité dynamique équivalente que le modèle aux interfaces imparfaites. Les termes avec un tilde comme  $\tilde{A}_2$  correspondent au calcul avec interfaces imparfaites. Toute la démarche est résumée à la Figure 2.3.

Finalement, puisque les termes  $\tilde{A}_2$  et  $\tilde{A}_3'$  sont des fonctions explicites de  $B$ , il est possible de calculer  ${}^*G_{xz}^2$  en fonction de  $B$ . La Figure 2.4 illustre les résultats de ce calcul pour le même matériau décrit au Tableau 3 de l'article. Il y a deux manières de voir ces résultats : en fonction de la souplesse de l'interface  $B$ , régulièrement appelée paramètre d'interface dans ce manuscrit ; ou en fonction de la raideur de l'interface  $K = 1/B$ . Le choix a été fait de tracer la Figure 2.4 en fonction de  $B$ .

FIGURE 2.3 – Organigramme du calcul de  $*G_{xz}^2$ .

On observe alors 3 zones remarquables :

- Pour une valeur de  $B < 10^{-13}$  m.Pa<sup>-1</sup>, l'effet du paramètre d'interface est négligeable sur la dynamique du tricouche sandwich étudié. Les résultats pour une modélisation aux interfaces parfaites et imparfaites sont donc identiques pour ces valeurs. **Cela correspond alors au cas parfaitement couplé.**
- Au-delà, pour des valeurs de  $B$  tel que  $10^{-13} < B < 10^{-8}$  m.Pa<sup>-1</sup>, la dynamique du multicouche est affectée par le paramètre d'interface et plus la valeur de  $B$  est importante, plus l'effet est remarquable. **Cela correspond alors au cas partiellement découplé.**
- Pour  $B > 10^{-8}$  m.Pa<sup>-1</sup>, le paramètre d'interface affecte toujours la dynamique du multicouche et fait tendre le module de cisaillement virtuel  $*G_{xz}^2$  vers 0, **ce qui correspond alors au cas totalement découplé.**

L'Équation (2.14) permet ainsi de calculer facilement le module de cisaillement virtuel du cœur nécessaire pour de prendre en considération l'effet d'interfaces imparfaites dans un modèle tricouche aux interfaces parfaites. Cependant, la fonction entre  $*G_{xz}^2$  et  $B$  est différente selon la configuration du tricouche choisie et ne fonctionne bien sûr que pour un tricouche.

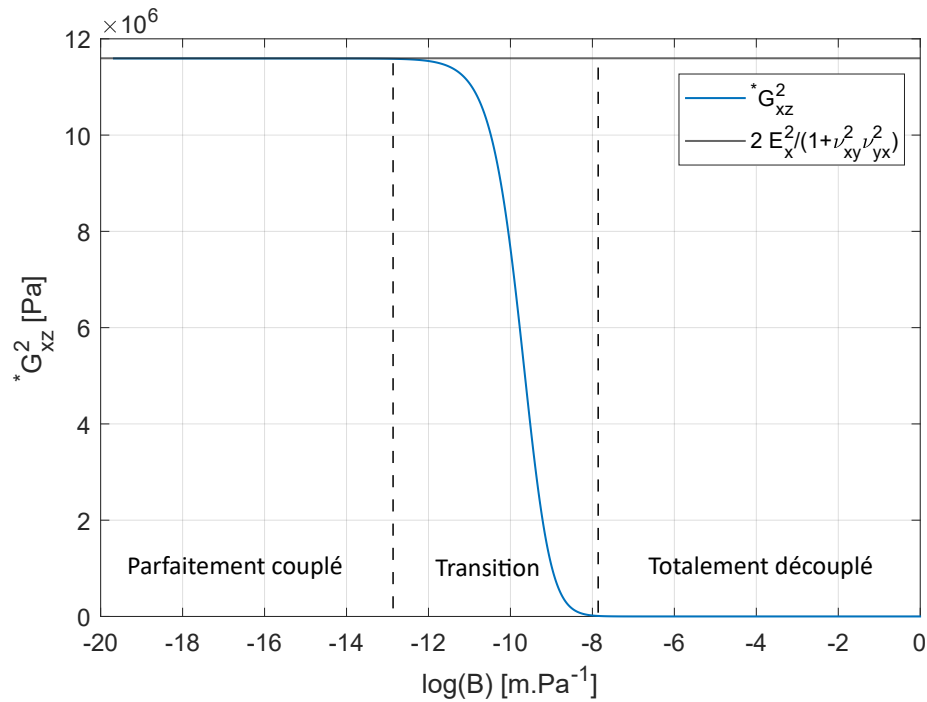


FIGURE 2.4 – Module de cisaillement virtuel calculé à partir de l'Équation (2.14) en fonction du logarithme du paramètre d'interface  $B = 1/K$ .

## 2.4 Modélisation d'un tricouche avec interfaces imparfaites par 5 couches aux interfaces parfaites

Il est intéressant de comparer les résultats d'un tricouche aux interfaces imparfaites à un 5 couches aux interfaces parfaites pour au moins 2 raisons : valider le comportement dynamique du modèle ; vérifier si le comportement d'un tricouche aux interfaces parfaites est modélisable par un matériau avec 5 couches. En effet, le modèle aux interfaces parfaites et donc le modèle Guyader [45] ou le modèle Woodcock [117], a été largement validé par des comparaisons éléments finis, ainsi que par les différentes applications industrielles telle que son implémentation dans des logiciels commercialisés comme Actran<sup>3</sup> ou AlphaCell<sup>4</sup>. Le modèle aux interfaces parfaites peut donc servir de référence pour valider le comportement du modèle

3. [fft.be/product/actran-acoustics](http://fft.be/product/actran-acoustics)

4. [alphacell.matelys.com](http://alphacell.matelys.com)

aux interfaces imparfaites. De plus, l'utilisation de couches fines pour modéliser les effets d'interfaces est une méthode de substitution fonctionnelle pour prendre en compte les effets d'interfaces imparfaites, à l'image de certains travaux de modélisation numérique présents dans la littérature [51, 101]. Cependant, ce type de modélisation n'est pas physique, car les paramètres implémentés ne modélisent pas un comportement d'interface à partir d'une équation par exemple. En effet, ce n'est qu'une manière détournée d'obtenir les mêmes effets, mais les causes ne sont pas modélisées avec une physique propre.

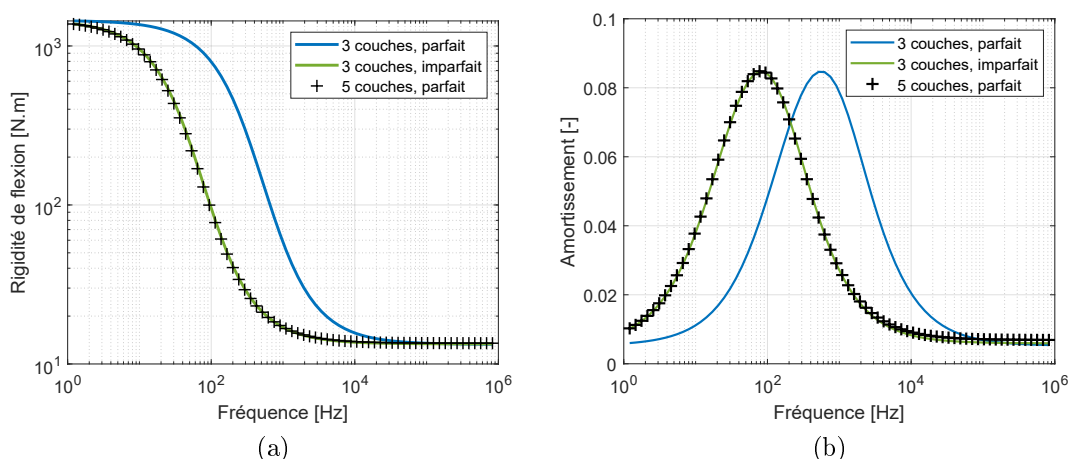


FIGURE 2.5 – (a) Rigidité de flexion et (b) Amortissement en fonction de la fréquence afin de montrer l'équivalence entre un matériau en cinq couches aux interfaces parfaites et un matériau tricouche aux interfaces imparfaites.

La Figure 2.5 est issue de l'application de cette comparaison pour le tricouche du Tableau 3 de l'article ci-dessus. La tendance habituelle de la flexion de rigidité en fonction de la fréquence pour un multicouche est de nouveau illustrée. L'effet du paramètre d'interface sur les paramètres dynamiques est aussi présent. Cette figure montre aussi qu'il est possible de décrire le même comportement qu'un tricouche aux interfaces imparfaites avec un matériau composé de 5 couches aux interfaces parfaites. Pour cela, les matériaux ont été modélisés à l'identique à l'exception des fines couches d'épaisseur  $10^{-6}$  mm qui ont été introduites de part et d'autre du cœur à l'image de la Figure 2.6. Le module de Young des couches intermédiaires sont égaux et valent  $E_{inter} = 2.5$  Pa, une rigidité très faible donc. Mais le paramètre

d'interface étant homogène à des  $\text{m.Pa}^{-1}$ , il est plus intéressant de comparer cette valeur à  $h_{inter}/E_{inter} = 4 \cdot 10^{-10} \text{m.Pa}^{-1}$ . Quant au paramètre d'interface, il a été fixé à  $B = 3.2 \cdot 10^{-10} \text{m.Pa}^{-1}$  par interface. Les valeurs sont ainsi du même ordre, et relativement proche (80%), mais ne sont pas identiques.

L'équivalence entre le modèle d'un 5 couches aux interfaces parfaites et du modèle aux interfaces imparfaites montrée à la Figure 2.5 est plus difficile à mettre en œuvre que ce qui a été proposée préalablement à la Section 2.3.2. En effet, il y a cette fois-ci 4 paramètres (les rigidités et épaisseurs des intercouches) dans le but de rendre compte de l'effet des interfaces imparfaites contre 1 paramètre précédemment. Ces paramètres ne décrivent pas la même couche, ce qui augmente aussi le nombre d'équations à utiliser afin d'exprimer ces paramètres en fonction de  $B$  et donc qui allonge l'expression finale obtenable. De plus, cette description implique l'usage d'intercouches très fines pour correspondre à un tricouche réel. Dans le cadre des méthodes numériques telle que la FEM, cela augmenterait considérablement le temps de calcul à cause d'un maillage très fin dans l'épaisseur. La solution pour pallier cela est alors de prendre en considération une modélisation d'interfaces imparfaites.

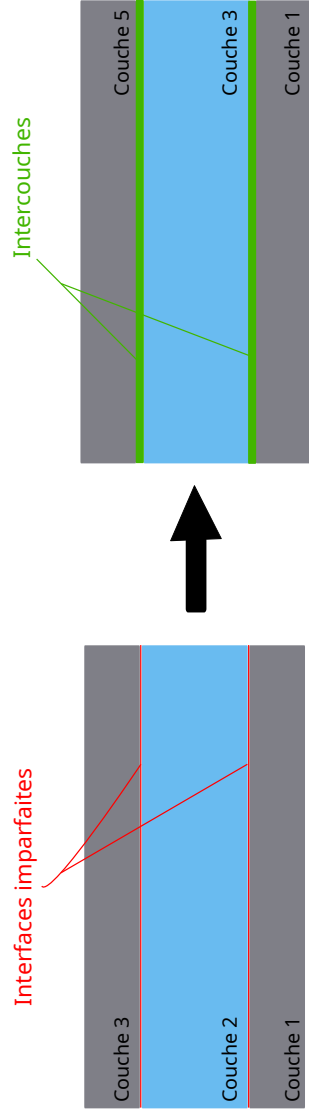


FIGURE 2.6 – Transformation d'un matériau tricouche aux deux interfaces imparfaites en un matériau en cinq couches aux interfaces parfaites.

**Le premier objectif** de ces comparaisons est tout d'abord de valider le comportement du modèle aux interfaces imparfaites. En effet, la loi d'interface implémentée à l'Équation (2.5) est une loi linéaire aux paramètres d'interfaces  $B_i$  linéaires, isotropes et avec une partie imaginaire non nulle afin de modéliser l'amortissement. Cette modélisation est alors très proche de la modélisation mécanique des couches qui sont décrites à l'aide d'un module de Young ayant les mêmes propriétés que la loi d'interface choisie. Ainsi, obtenir des tendances similaires en modifiant directement le module de Young du cœur ou avec la loi d'interface linéaire est naturel et est aussi une façon de valider l'effet de l'implémentation des interfaces imparfaites simples.

Cela est aussi une première étape dans l'implémentation des interfaces complexes. En effet, la prolongation de ces travaux serait d'implémenter des interfaces plus complexes que les interfaces imparfaites qui correspondent uniquement à un saut du déplacement. En revanche, ces interfaces complexes (non linéaires et/ou visqueuses par exemple) n'ont pas d'équivalent avec des modèles de multicouche à interfaces parfaites, rendant ainsi leur implémentation plus incertaine, car il est plus complexe de valider leur comportement.

**Le second objectif** de cette comparaison est de montrer l'intérêt de l'implémentation d'interfaces imparfaites dans un modèle multicouche. En effet, prédire le comportement d'un multicouche aux interfaces imparfaites à l'aide d'un modèle aux interfaces parfaites emmène le modèle à introduire des paramètres dynamiques qui ne correspondent pas à la conception réelle du multicouche. Pour l'exemple utilisé dans l'article (Figure 11 de l'article), il a été nécessaire de réduire d'un facteur 7,5 la rigidité du cœur pour correspondre au bon comportement dynamique, ce qui n'est bien sûr pas réaliste et pas rigoureux dans l'analyse dynamique d'un système ou dans sa conception.

## 2.5 Limitations du modèle

Au cours des travaux de modélisation d’interfaces imparfaites et d’analyses approfondies des conséquences d’une telle modélisation sur le comportement dynamique d’un multicouche, quelques limitations ont émergé et sont présentées ci-dessous.

Une première limitation est la modélisation des contraintes par couche. Cela provient de l’écriture du champ cinématique (Équations (2.1)) par type de déformation (Figure 2.1) qui rend difficile l’écriture du champ de déplacement au troisième ordre ou à des ordres plus élevés. Le principal inconvénient pour le modèle présenté ici est qu’il n’est pas possible d’obtenir une écriture analytique efficace d’un champ de contrainte qui considère le découplage partiel des interfaces imparfaites. Marchetti [78] a effectué l’extension au troisième ordre du champ de déplacement dans un modèle multicouche aux interfaces parfaites. Cela a permis d’annuler le cisaillement de part et d’autre du multicouche, mais n’a montré qu’un léger gain de précision dans le comportement dynamique en hautes fréquences [78]. Cependant, cette description cubique du cisaillement a été réalisée à l’aide de coefficients supplémentaires (Équation (2.15)) qui ne dépendent pas des couches à cause du nombre limité d’équations disponibles pour résoudre le modèle. Ainsi, cette description cubique **globale** du multicouche ne peut suffire à décrire le comportement d’un multicouche aux interfaces complexes. En effet, la potentielle nécessité d’annuler les contraintes aux interfaces implique d’écrire une description cubique **locale** des coefficients, c’est-à-dire, des coefficients qui dépendent des couches. Cela peut être illustré par les résultats de Lee en 2020 [68] dans sa figure 12.

$$F_{\alpha\beta}^i = a_{\alpha\beta}z^3 + b_{\alpha\beta}z^2 + c_{\alpha\beta}^i z + d_{\alpha\beta}^i, \quad (2.15)$$

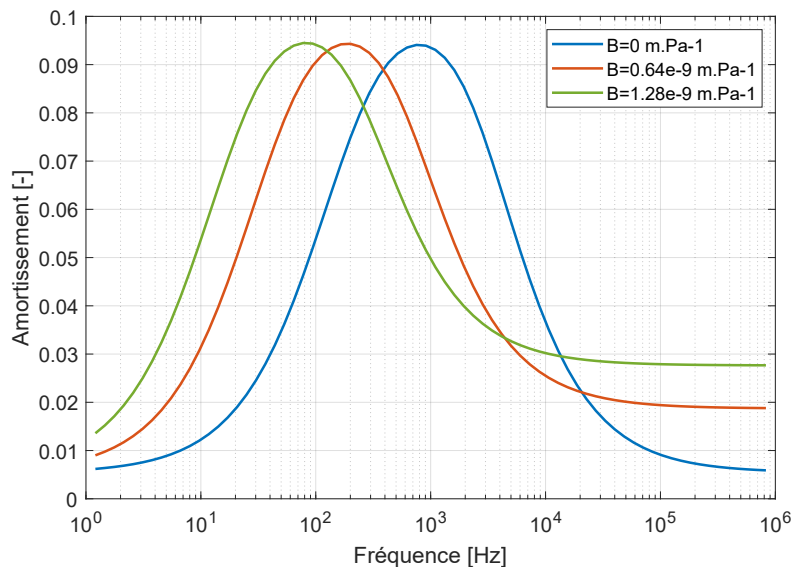
Une seconde limitation du modèle actuel est son comportement HF visible dans la Figure 2.7. En l’état, il n’est pas capable de décrire correctement des comportements HF cohérents pour des cœur épais présentant des imperfections aux conséquences notables sur le comportement dynamique (c’est-à-dire, un valeur de  $B$  qui engendre un décalage notable des paramètres dynamiques). Cette limitation est présente seulement pour un cœur très épais **et** un défaut important. Si le



	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [MPa]	$\nu$	$\eta$ [%]
Peaux	1	2700	71 000	0.33	0.5
Cœur	15	48	30	0.2	10

TABLE 2.1 – Propriétés d’un tricouche sandwich au cœur épais.

paramètre  $B \rightarrow 0$ , alors le comportement est valide. Ce comportement erroné provient d’une description trop simple du paramètre d’interface, qui est linéaire en fréquence et isotrope.

FIGURE 2.7 – Amortissement en fonction de la fréquence pour différentes valeurs du paramètre d’interface  $B$ . Les propriétés du tricouche utilisé sont résumées dans le Tableau 2.1.

## 2.6 Perspectives

Pour répondre à ces limitations, ainsi que d’enrichir le modèle actuel, quelques perspectives sont proposées ici :

- Développer la loi de comportement des interfaces (Équation (2.10)) vers une loi non linéaire afin de grandement enrichir les capacités de modélisation

du modèle aux interfaces imparfaites en ajoutant une multitude de comportements possibles. Une introduction d'une méthode d'implémentation est jointe à ce manuscrit à l'Annexe C.

- L'implémentation complète de cette loi d'interface (Équation (2.10)) dans d'autres types de modèle, comme la TMM ou la FEM. Cela permettrait de pouvoir comparer la modélisation analytique employée ici, mais aussi, d'avoir d'autres outils plus généraux dans leurs applications. Une comparaison entre le modèle équivalent ainsi présenté et la TMM, implémentant d'une manière alternative les interfaces, est présentée à l'Annexe A.

## 2.7 Conclusion

Un modèle analytique équivalent de multicouches aux interfaces imparfaites a été proposé dans ce chapitre. Ce modèle a été construit comme une extension du modèle de Guyader et Lesueur [45], qui correspond aussi à l'extension du modèle de Woodcock [117], ou de Castel et Loredó [74] ou de Marchetti [78, 79]. Cette extension a été réalisée à partir d'une équation de comportement de l'interface et d'un nouveau paramètre central, le paramètre d'interface noté  $B$ . Cette extension constitue l'originalité principale de ces travaux de modélisation par rapport à la littérature actuelle.

La validation du modèle a été présentée dans l'article [9] intégré en l'état dans ce chapitre. Le cas où l'interface tend vers la perfection  $B \rightarrow 0$  a été comparé au modèle SFEM de Shorter [108] et correspond exactement au modèle de Guyader. Cette comparaison a été effectuée pour l'ensemble des nombres d'ondes obtenus par les deux modélisations. La flexion de rigidité dynamique a été validée par comparaison dans ses comportements asymptotiques. En effet, par manque de littérature sur la modélisation d'interfaces imparfaites, le choix a été fait dans un premier temps de comparer les comportements limites du modèle, la transition entre ces asymptotes étant ce qui constitue l'originalité de ces travaux. Pour  $B \rightarrow 0$  les résultats ont été comparés au modèle RKU [102], pour  $B \rightarrow \infty$  le modèle a simplement été comparé à un tricouche entièrement découplé qui correspond à la somme des flexions de rigidité des couches successives. **Une comparaison**

**plus complète avec la TMM** pour des valeurs intermédiaires de  $B$  est montrée à l'**Annexe A**. J'ai également montré quelques limites du modèle telle que la surestimation de l'amortissement en HF pour les structures épaisses. La solution proposée était de rendre le paramètre d'interface  $B$  dépendant de la fréquence. Cette solution a été implémentée et montrée à l'**Annexe B**, et suffit en l'état pour corriger ce comportement.

La suite de ce manuscrit est dédiée à la validation expérimentale du modèle, afin de vérifier sa capacité à prédire le comportement dynamique d'un multicouche aux interfaces imparfaites expérimentalement.

# Chapitre 3

## Caractérisation expérimentale de poutres multicouches

### Sommaire

---

3.1	Mesure non intrusive du champ de déplacement d'une structure vibrante . . . . .	97
3.1.1	Holographie acoustique . . . . .	98
3.1.2	Défectométrie . . . . .	100
3.1.3	Vibrométrie laser . . . . .	101
3.2	Méthodes d'identification d'une structure plane . . . . .	104
3.2.1	Méthode des champs virtuels . . . . .	105
3.2.2	Résolution Inverse Corrigée appliquée aux poutres . . . . .	107
3.2.3	Analyse modale sur champ de déplacement . . . . .	111
3.3	Application à une poutre en structure sandwich . . . . .	113
3.3.1	Banc de mesure . . . . .	114
3.3.2	Adaptation du facteur d'échelle . . . . .	115
3.3.3	Filtrage de la réponse en nombre d'onde . . . . .	118
3.3.4	Résultats . . . . .	123
3.4	Conclusion . . . . .	125

---

Le Chapitre 3 présente différentes méthodes de mesure du champ de déplacement ainsi que les différentes méthodes de caractérisation à partir de ce champ. Les méthodes retenues telle que la mesure par vibrométrie laser, et l'identification des paramètres dynamiques par l'analyse modale ainsi que la résolution inverse corrigée sont plus détaillées. Ce chapitre expérimental est exclusivement réservé à la présentation des méthodes de caractérisation, avec le traitement de données dans son ensemble, et des résultats attendus avec ce type de méthodologie. En revanche, l'analyse expérimentale d'échantillons complexes ainsi que la validation du modèle aux interfaces imparfaites sont le sujet du prochain et dernier chapitre, le Chapitre 4. Dans le présent chapitre sont alors abordées :

- Les différentes méthodes de mesure expérimentale afin d'obtenir le champ de déplacement de la structure étudiée, telle que l'holographie acoustique, la déflectométrie et la vibrométrie laser.
- La présentation des différentes méthodes d'identification des paramètres dynamiques tel que le principe des travaux virtuels, l'analyse modale et la caractérisation par méthode inverse.
- L'application de la méthodologie retenue sur une poutre sandwich avec quelques détails sur les points clés de son implémentation.

### **3.1 Mesure non intrusive du champ de déplacement d'une structure vibrante**

Cette section traite de trois méthodologies différentes de mesure du champ cinématique d'une structure soumise à une sollicitation dynamique. Elle se limite aux mesures non intrusive, c'est-à-dire, aux moyens de mesure qui n'affectent pas (ou d'une manière négligeable) le comportement dynamique de la structure étudiée. Ainsi, les méthodes basées sur des capteurs à contact tels que les accéléromètres sont exclues de cette courte synthèse sur les méthodes de mesure dynamique.

Nos critères afin de retenir une mesure non intrusive en particulier allient en premier lieu une possibilité matérielle, ensuite la qualité des résultats est un critère important. En effet, une méthode qui aura tendance à être très sensible au bruit est naturellement pénalisée. Un autre critère décisif est la largeur de bande

fréquentielle de mesure possible. La dynamique du modèle étant large bande (l'ensemble du spectre audible), il est essentiel que la méthode de mesure corresponde à cela. Le temps de mesure que la méthode implique ainsi que son champ d'application (certaines méthodes ne sont applicables qu'aux matériaux réfléchissants et/ou d'un type de structure particulier) est aussi un critère important sur lequel notre attention s'est portée.

### 3.1.1 Holographie acoustique

La première méthode de mesure présentée ici est l'holographie acoustique. Le principe de l'holographie est la visualisation complète d'une grandeur physique en une seule mesure (*holos* signifiant « en entier » en grec). Ce procédé provient de l'électromagnétisme, et permet de reconstruire des images en 3D. Par extension, l'holographie acoustique est la visualisation du champ cinématique d'une structure vibrante à partir de la mesure du champ de pression à proximité de la source acoustique que l'on souhaite étudier. Ce type de mesure s'effectue à l'aide d'un réseau de microphones et est donc une mesure plein champ, c'est-à-dire, une mesure qui capte la grandeur physique mesurée sur l'ensemble de la structure étudiée et généralement en un temps court. Une illustration d'un réseau de microphones classiques et d'un réseau de microphones MEMS sont montrées à la Figure 3.1. Une méthode d'holographie acoustique est de reconstruire le champ de vitesse de la structure par rétropropagation du champ de pression mesuré en champ proche. Cette méthode s'appelle la Nearfield Acoustical Holography (NAH) pour holographie acoustique en champ proche. Cette méthode est résumée dans sa globalité par l'Équation (3.1) [116].

$$\dot{w}(x, y, z) = \mathcal{F}_x^{-1} \mathcal{F}_y^{-1} \left[ \mathcal{F}_x \mathcal{F}_y [p(x, y, z_h)] \frac{k_z}{\rho c k} e^{ik_z(z-z_h)} \right], \quad (3.1)$$

Avec,  $\mathcal{F}_x$  et  $\mathcal{F}_x^{-1}$  qui sont respectivement la transformée et la transformée inverse de Fourier directe dans la direction  $x$ ,  $z_h$  la distance du réseau de microphones normal à la structure vibrante,  $p(x, y, z_h)$  le champ de pression mesuré à la distance  $z_h$ ,  $\rho$  la densité de l'air,  $c$  la vitesse du son dans l'air,  $k_z$  le nombre d'onde de rétropropagation et  $k$  le nombre d'onde de l'onde évanescente acoustique.

L'équation (3.1) est applicable en 4 étapes :

1. Mesure du champ de pression à la distance  $z = z_h : p(x, y, z_h)$ ,
2. Calcul du spectre angulaire  $P(k_x, k_y, z_h) = \mathcal{F}_x \mathcal{F}_y [p(x, y, z_h)]$ ,
3. Rétropropagation du champ de pression en utilisant l'opérateur de vitesse  $G(k_x, k_y, z - z_h) = \frac{k_z}{\rho c k_t} e^{ik_z(z-z_h)}$ ,
4. Calcul de la transformée de Fourier inverse 2D afin de récupérer le champ de pression rétropropagée à la distance  $z$ .

Pour plus de détails sur cette méthode de mesure du champ de vitesse d'une structure, le lecteur peut se référer à [47, 107, 116].

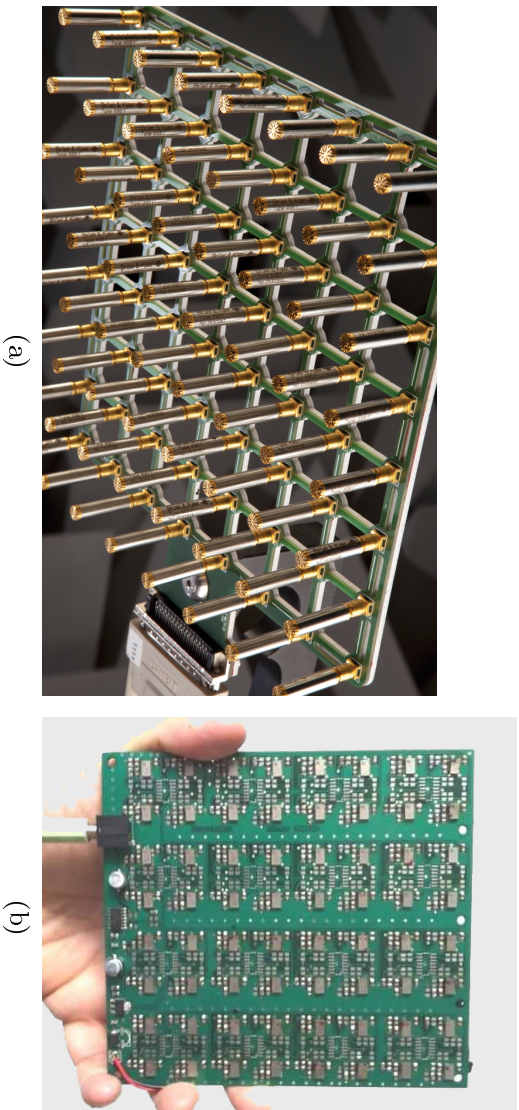


FIGURE 3.1 – (a) Réseau de microphones, image issue de Brüel and Kjaer<sup>1</sup>, (b) Microphones sous formes de microsystèmes électromécaniques (MEMS), image issue de Dodotroniç<sup>2</sup>. <sup>1</sup> bksv.com, <sup>2</sup> dodotroniç.com

C'est une méthode qui présente une implémentation légèrement complexe par son formalisme comparativement aux autres méthodes de mesure non intrusives qui existent, mais elle se révèle être très rapide une fois mise en place. En effet, la mesure est directement effectuée sur l'ensemble de l'échantillon par le réseau de microphones. Cela en fait une méthode très intéressante pour les grandes structures par exemple. Cependant, elle est une méthode relativement contraignante, car ses données entrées sont les nombres d'ondes des ondes évanescentes qui par définition s'atténuent rapidement lors de leur propagation dans l'espace.

### 3.1.2 Déflectométrie

La déflectométrie est une méthode optique plein champ qui permet d'obtenir le champ des pentes du déplacement d'une structure plane qui se déforme. Cette méthode a été employée notamment par Giraudeau [40] dans l'objectif de caractériser une plaque vibrante. Une grille est placée en face d'une surface réfléchissante appartenant à la structure que l'on souhaite étudier. La grille est généralement observée à l'aide d'une caméra rapide CCD, ce qui permet d'obtenir des images hautes définitions pour une résolution temporelle élevée. Les déformations de la grille suivent les déformations de la plaque en flexion. Ce principe est illustré à l'aide de la Figure 3.2.

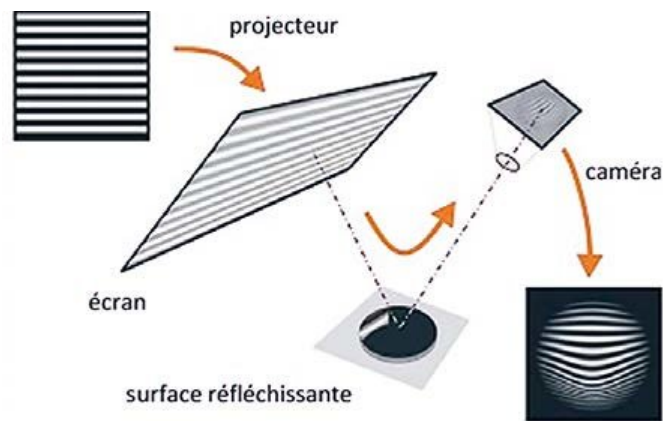


FIGURE 3.2 – Schéma de la déflectométrie, image issue de Yvan Sortais's Lab [37]

C'est une méthode relativement simple à mettre en place, mais elle se limite aux échantillons réfléchissants. Il est bien sûr possible de traiter la surface d'échantillons non réfléchissants, mais cela ne suffira pas à obtenir suffisamment de réflexion spéculaire (réflexion non diffuse). En revanche, cela peut être résolu à l'aide de la déflectométrie dans les infrarouges [100]. Un autre défaut de cette méthode va être la taille des jeux de données obtenus. En effet, la résolution spatiale et temporelle des images étant deux points déterminants afin d'obtenir de grands nombres d'ondes sur une large bande fréquentielle, ils impliquent l'obtention de nombreuses images hautes définitions. Plus de détails sur l'utilisation de la déflectométrie et son implémentation sont disponibles dans les travaux suivants [87, 88, 100].



L'holographie acoustique et la déflectométrie sont deux méthodes de mesure du champ cinématique efficaces, elles permettent d'effectuer des mesures riches en informations et rapidement. Cependant, leurs contraintes respectives telle que principalement : la limitation fréquentielle pour la NAH ; et la difficulté d'emploi de la déflectométrie pour les échantillons peu réfléchissants, furent décisives dans le choix de la méthode de mesure employée. La méthode retenue fut donc la vibrométrie laser qui a pour principal défaut son temps de mesure qui est fortement dépendant de la taille du maillage de mesure. Ce qui n'est pas une caractéristique contraignante dans les présents travaux, car les échantillons étudiés ici présentent des surfaces suffisamment petites  $60 \times 3 \text{ cm}^2$ . En effet, le temps de mesure par échantillon se trouvait entre 30 et 45 minutes. De plus, la vibrométrie laser permet une mesure du champ cinématique large bande et n'est pas limitée aux échantillons hautement réfléchissants. Ainsi, si l'échantillon n'a pas naturellement un coefficient de réflexion important, il est possible de le traiter et d'obtenir des résultats satisfaisants.

### 3.1.3 Vibrométrie laser

La mesure du champ de vitesse peut aussi être réalisée par un vibromètre laser, comme avec le PSV-400 de Polytec<sup>1</sup> qui sera utilisé dans les présents travaux. Une illustration de ce dispositif est montrée à la Figure 3.3. Le principe de la mesure réside dans les interférences entre une onde de référence et l'onde de mesure, c'est ce que l'on appelle un interféromètre hétérodyne. L'onde de mesure est orientée vers l'objet d'étude qui vibre. La vibration de l'échantillon engendre un changement de fréquence de l'onde de mesure par effet Doppler appelée à l'Équation (3.2). La fréquence résultante de l'onde retour est donc de  $f_{\text{retour}} = f_{\text{incident}} + \delta f_{\text{Doppler}}$ .

$$\delta f_{\text{Doppler}}(t) = \frac{v_{\text{objet}}(t)(\vec{e}_r - \vec{e}_i)}{\lambda}, \quad (3.2)$$

avec  $\delta f_{\text{Doppler}}(t)$  la variation de fréquence par effet Doppler en fonction du temps  $t$ ,  $v_{\text{objet}}(t)$  la vitesse de l'objet mesurée en fonction du temps  $t$ ,  $\vec{e}_r$  le vecteur colinéaire

---

1. polytec.com



FIGURE 3.3 – Vibromètre laser par effet Doppler (PSV-400) muni de son matériel informatique associé : le boîtier d'acquisition (ou front head) et d'un PC conditionné. [www.polytec.com](http://www.polytec.com)

à la propagation de l'onde réfléchie,  $\vec{e}_r$  le vecteur colinéaire à la propagation de l'onde incidente et  $\lambda$  la longueur d'onde du laser.

L'effet Doppler peut aussi être vu comme une modification de la phase par le déplacement de la surface mesurée. Le déphasage de l'onde incidente correspond à l'Équation (3.3) où les déplacements de l'objet étudié interviennent. La modulation de la phase de l'onde est ainsi une fonction explicite du déplacement de l'objet, ce qui permet de remonter directement au champ de déplacement de la structure complète par le balayage de la surface. Ensuite, l'onde de référence et l'onde de mesure vont interférer au sein du vibromètre laser et former une intensité lumineuse correspondant à l'Équation (3.4).

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{e}_r - \vec{e}_i)\Delta r, \quad (3.3)$$

Avec  $\Delta\phi$  le déphasage de l'onde par effet Doppler,  $\Delta r$  le déplacement de l'objet

étudié.

En revanche, si l'effet Doppler n'est pas réécrit en fonction de la distance, son effet sur l'onde retour n'est pas une modulation de la phase, mais une modulation de la fréquence directement comme vu au début de la section. C'est pourquoi ce type de dispositif permet, par démodulation du signal, d'estimer à la fois le déplacement et la vitesse de l'objet étudié.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi) \quad (3.4)$$

Avec  $I$  l'intensité lumineuse de l'onde mesuré,  $I_1$  l'intensité lumineuse de l'onde de référence et  $I_2$  l'intensité lumineuse de l'onde de mesure. Afin d'améliorer le retour signal, ce qui est essentiel pour les échantillons les moins réfléchissants, l'échantillon mesuré doit être placé à une distance qui maximise l'intensité lumineuse. Pour cela, il suffit de se placer à une distance qui correspond à un ventre d'intensité lumineuse. Au travers de son manuel, Polytec précise que la distance entre les maxima successifs sont de 204 mm, ce qui correspond à la longueur de la cavité optique du laser. Une mesure du champ de déplacement en balayage en fonction de la fréquence pour une poutre est montrée à la Figure 3.4. Sur cette figure, on observe ainsi les différents modes de flexion que la poutre multicouche présente en fonction de la fréquence. Les premiers modes sont particulièrement visibles, puis le niveau d'amplitude s'atténue avec la fréquence. Certaines zones sont d'un niveau très faible (notamment autour de 15 kHz) à cause des buzzers piézoélectriques qui ne transmettent pas efficacement l'énergie de déformation pour ces fréquences. À partir de 25 kHz les modes de flexion sont modulés par d'autres modes de déformation qui diminuent alors le niveau d'amplitude des modes de flexion. Pour la sollicitation de l'échantillon, deux systèmes d'excitation sont utilisés de part et d'autre de la poutre, ce qui explique que les ventres des modes de déformations successifs ont pour origines les extrémités de la structure.

La vibrométrie laser par effet Doppler est la méthode de mesure utilisée dans ce manuscrit. En effet, un de ces défauts majeurs est le temps de mesure qui peut être relativement long comparativement aux autres méthodes présentées, mais les échantillons étudiés ici réduisent grandement ce temps de mesure. Ces échantillons sont des structures poutres et donc 1D, ce qui réduit considérablement la taille du

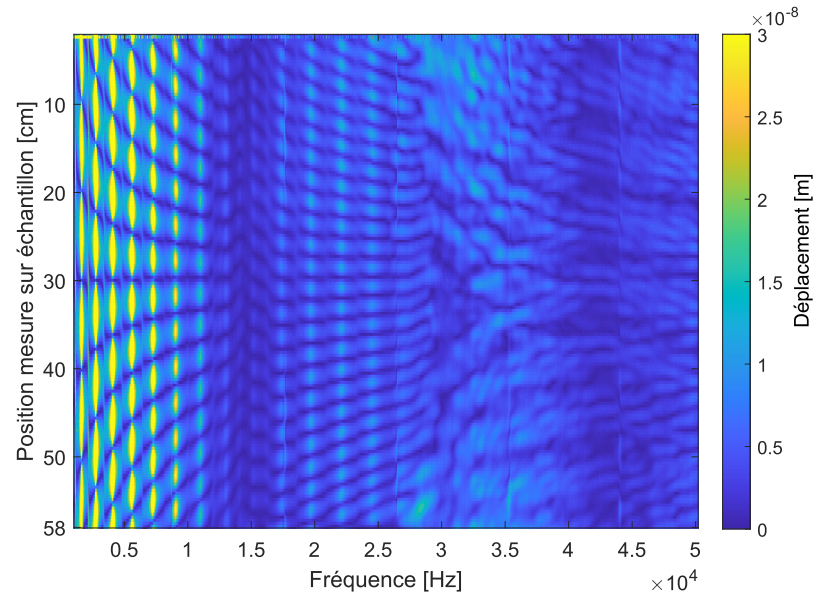


FIGURE 3.4 – Carte du champ de déplacement mesuré en fonction de la position de mesure et de la fréquence. Deux buzzers piézoélectriques ont été disposés de part et d'autre de la poutre pour maximiser le niveau mesuré. Les différentes colonnes de mesure ont été moyennées entre elles pour la visualisation des données.

maillage de mesure. De plus, cette méthode permet une mesure simple à mettre en place et robuste, car elle est très peu sensible aux erreurs d'alignement, et les surfaces non réfléchissantes peuvent être analysées lorsque du révélateur est déposé par-dessus. Il est aussi simple d'effectuer une mesure large bande fréquentielle à l'inverse de l'holographie en champ proche par exemple. La disponibilité d'un vibromètre laser PSV-400 capable de mesurer jusqu'au MHz a aussi été un élément important dans le choix de la méthode de mesure employée pour les présents travaux.

## 3.2 Méthodes d'identification d'une structure plane

L'objectif d'une méthode d'identification est d'être appliquée afin d'estimer des paramètres physiques de la structure étudiée. Dans le cadre de cette thèse, le champ de déplacement est le paramètre d'entrée. Celui-ci est mesuré par la vibrométrie laser, préalablement présentée, est peut être l'entrée de différentes

méthodes d'identification.

Trois différentes méthodes vont être présentées brièvement ci-dessous. L'objectif est de faire un état des lieux non exhaustif de quelques méthodes utilisées actuellement par la communauté scientifique et de justifier la méthode d'identification retenue. Premièrement, cette synthèse aborde la méthode des champs virtuels, une méthode puissante qui montre un champ d'application très large, comme la caractérisation structurelle et l'identification des efforts appliqués. Ensuite, des outils d'analyse modale sont présentés. Il est relativement simple d'obtenir des outils de caractérisation en comparant la réponse modale d'une structure à un modèle vibratoire d'une structure théorique équivalente décrit par une décomposition modale. Finalement, une méthode de résolution inverse est présentée à la fin de cette section. Cette méthode est la Résolution Inverse Corrigée (RIC) ou Corrected Force Analysis Technique (CFAT), elle est une méthode qui permet d'identifier les paramètres dynamiques d'une structure à partir de ses nombres d'ondes. Elle base son formalisme sur l'équation de déplacement d'une plaque ou d'une poutre mince.

### 3.2.1 Méthode des champs virtuels

La méthode des champs virtuels ou Virtual Field Method (VFM) est basée sur la formulation faible de l'équation du mouvement d'une structure plane. C'est une méthode qui peut être utilisée afin d'identifier les paramètres matériaux d'une structure lorsque les champs de déplacement sont connus. Des applications expérimentales ont été développées à partir d'une mesure de déflectométrie [40, 42]. Elle a été utilisée notamment dans l'identification locale de la rigidité d'une plaque composite endommagée par Kim [58]. Naturellement, cette méthode permet aussi l'identification du chargement dynamique lorsque les propriétés matériaux sont connues [11]. Pierron a appliqué la VFM [90] sur une mesure de flexion en trois points d'une poutre d'aluminium.

La VFM repose sur le principe des travaux virtuels. Ce dernier est l'équilibre dynamique énergétique écrit sous sa forme générale :

$$-\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^V dV + \int_S \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}^V dS + \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^V dV = \int_V \rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}^V dV, \quad (3.5)$$

Avec,  $W_{\text{int}}^V = - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^V dV$  le travail virtuel des efforts internes élastiques,  $W_{\text{ext}}^V = \int_S \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}^V dS + \int \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^V dV$  la somme des travaux virtuels des efforts externes,  $W_{\text{acc}}^V = \int_V \rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}^V dV$  le travail virtuel des efforts d'inertie. Le terme  $\bar{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  correspond au chargement extérieur (avec  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface du solide étudié),  $\mathbf{u}^V$  au champ de déplacement virtuel,  $\boldsymbol{\varepsilon}^V$  au champ de déformation résultant,  $\mathbf{b}$  l'ensemble des forces volumiques et  $\mathbf{a}$  l'accélération.

La suite de la méthode consiste à réécrire d'une manière plus précise l'Équation (3.5) en fonction de la structure étudiée (membrane, poutre, ou plaque). Ensuite, il est nécessaire de trouver un champ virtuel qui résout cette nouvelle équation. Ces champs virtuels agissent comme des filtres qui permettent d'extraire les inconnues du champ mesuré. Il y a deux critères indispensables afin d'obtenir le bon champ virtuel dans le cadre de la détermination des paramètres de structure : il doit être cinématiquement admissible ; il doit être une fonction continue d'ordre compatible avec la déformation étudiée. Être cinématiquement admissible signifie que le champ cinématique (déplacement et vitesse) postulé doit s'annuler aux limites de la structure. Être une fonction compatible signifie avoir suffisamment de dérivées continues nécessaires à la structure étudiée. Par exemple, dans le cadre des membranes une fonction  $C^0$  suffit, pour les plaques la fonction doit être au moins de classe  $C^1$ . Finalement, les équations sont résolues afin de calculer les inconnues du système, qui sont dans notre cas par exemple, les propriétés dynamiques de la structure étudiée.

La méthode des travaux virtuels a pour intérêt majeur sa faible sensibilité au bruit grâce à sa formulation faible (sous forme d'intégrales). Cependant, son formalisme relativement complexe peut engendrer un temps d'implémentation important, et un temps de calcul élevé. Cela nous a mené à écarter cette méthode au profit de la Résolution Inverse Corrigée (RIC, ou CFAT). En effet, cette méthode montre un temps de calcul très faible (quelques secondes) et est aussi une méthode qui fut abondamment éprouvée au laboratoire, ce qui naturellement simplifie son implémentation. En parallèle, des outils d'analyse modale sont aussi employés dans les présents travaux, et donc présentés ultérieurement. Ces outils sont bien connus de la communauté et ont donc servi à valider les résultats de caractérisation car l'analyse modale n'est pas sensible aux mêmes paramètres que CFAT.

### 3.2.2 Résolution Inverse Corrigée appliquée aux poutres

La méthode principale retenue pour les présents travaux est la Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée (RIFF) ou Force Analysis Technique (FAT) [1, 91–93], qui est une méthode de caractérisation locale. Cette dernière est similaire à une méthode d'analyse des nombres d'ondes, comme l'analyse par la transformée de Fourier spatiale par exemple, mais ajoute l'hypothèse que la structure expérimentale étudiée correspond à une structure théorique. Cela lui permet d'une part d'être plus précise dans sa caractérisation d'une méthode globale, si bien sûr l'objet étudié correspond aux hypothèses posées (structure plane et fine), mais autorise aussi une résolution locale des équations du mouvement et donc une visualisation locale des paramètres mécaniques de la structure ou des contraintes appliquées. Dans le cadre des présents travaux, uniquement le cas de la visualisation locale des paramètres mécaniques nous intéresse.

La résolution inverse utilisée ici est plus précisément la version corrigée de la méthode FAT. Celle-ci se nomme simplement la Résolution Inversée Corrigée (RIC) ou Corrected Force Analysis Technique (CFAT) [65, 66]. La méthode CFAT (tout comme FAT) se base sur l'Équation (3.6), qui correspond à l'application du

Principe Fondamental de la Dynamique à une poutre mince en flexion.

$$p(x) = EI \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 w(x), \quad (3.6)$$

avec,  $p(x)$  la pression exercée au point  $x$ ,  $E$  le module de Young apparent de flexion,  $I$  le moment d'inertie,  $\rho$  la densité,  $S$  la section,  $\omega$  la pulsation en  $\text{rad.s}^{-1}$  et  $w(x)$  le déplacement transverse en fonction de  $x$  avec l'axe transverse parallèle à l'épaisseur du matériau.

Dans le cadre des poutres, un schéma aux différences finies de 5 points défini à l'Équation (3.7) est utilisé afin d'estimer la dérivée 4<sup>ème</sup> du déplacement  $w(x)$ .

$$\delta_{\Delta}^{4x} = \frac{w(x - 2\Delta) - 4w(x - \Delta) + 6w(x) - 4w(x + \Delta) + w(x + 2\Delta)}{\Delta^4}. \quad (3.7)$$

avec,  $\Delta$  le pas du maillage choisi et  $\delta_{\Delta}^{4x}$  l'approximation de la dérivée 4<sup>ème</sup> du champ de déplacement au point  $x$  et en fonction du pas  $\Delta$ . Le pas optimal correspond à un maillage spatial de trois points par longueur d'onde [65, 78]. Il dépend donc de la fréquence d'analyse, et doit être adaptatif. Ce concept est illustré à la Figure 3.5, et sera résolu à la section suivante.

Cependant, l'estimation du paramètre de structure  $s = \frac{EI}{\rho S}$  à partir de l'Équation (3.6) et du schéma aux différences finies de l'Équation (3.7) est surévaluée dans les hautes fréquences à cause d'une singularité [66]. L'atténuation de l'erreur engendrée en HF par cette singularité est effectuée à partir du paramètre  $\mu$  qui réalise un fenêtrage et un filtrage des nombres d'ondes [93]. Le paramètre structure  $s$  s'estime alors à l'aide de l'Équation (3.8). Lorsque  $\mu^4$  est écrit en fonction de l'équation de dispersion, la forme finale de l'application de CFAT à une poutre dans l'identification du paramètre de structure correspond à l'Équation (3.9) [65].

$$s = \frac{\omega^2 w(x)}{\mu^4 \delta_{\Delta}^{4x}}, \quad (3.8)$$

avec  $\mu^4 = \frac{\Delta^4 k_N^4}{(2 - 2\cos(k_f \Delta))^2}$  et  $k_N^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2$  l'équation de dispersion de l'onde à la fréquence  $\omega$ .



$$s = \omega^2 \Delta^4 \left[ \arccos\left(1 - \frac{\Delta^2}{2} \sqrt{\frac{\delta_{\Delta}^{4x}}{w(x)}}\right) \right]^{-4}. \quad (3.9)$$

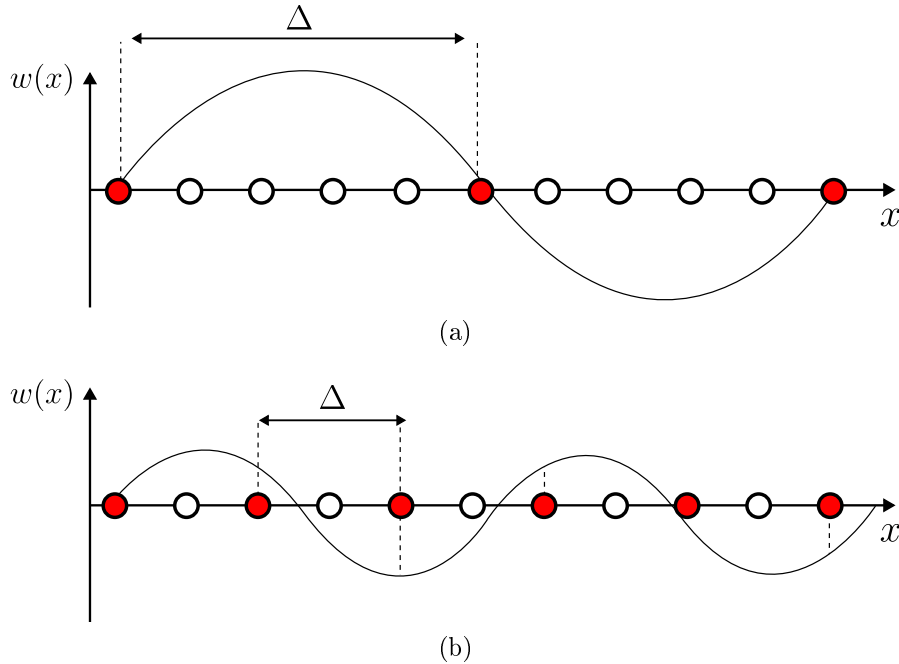


FIGURE 3.5 – Adaptation du pas  $\Delta$  dans le schéma aux différences finies de l'Équation (3.7) pour (a) une grande longueur d'onde et (b) une longueur d'onde plus faible. Le pas optimal est celui qui permet d'avoir trois points par longueur d'onde [65].

Ainsi, pour estimer le paramètre de structure  $s$  pour une fréquence unique, seulement 5 points de mesure du champ de déplacement sont nécessaires. Mais un balayage complet de la structure permet d'atténuer les incertitudes de mesure. En effet, l'utilisation de la méthode des moindres carrés sur l'ensemble des résultats spatiaux a été utilisée et est vivement conseillée [65] afin de réduire le bruit de mesure à l'image de la Figure 3.6. Pour une poutre, le calcul au sens des moindres carrés est direct. En posant  $C = \delta_{\Delta}^{4x}$ , l'estimation de  $A = w(x)/\delta_{\Delta}^{4x}$  au sens des moindres carrés est réalisée par  $A = \frac{C^H w}{C^H C}$ , avec  $C^H$  l'hermitien de la matrice  $C$  (transposée-conjuguée de la matrice  $C$ ).

À l'inverse, il est aussi possible d'estimer une cartographie du paramètre de structure  $s$  en appliquant une moyenne sur une faible largeur de bande fréquen-

tielle, suffisamment faible pour que les paramètres de structure ne varient pas trop afin d’avoir une estimation fiable de la rigidité en chaque point  $x$  de la structure.

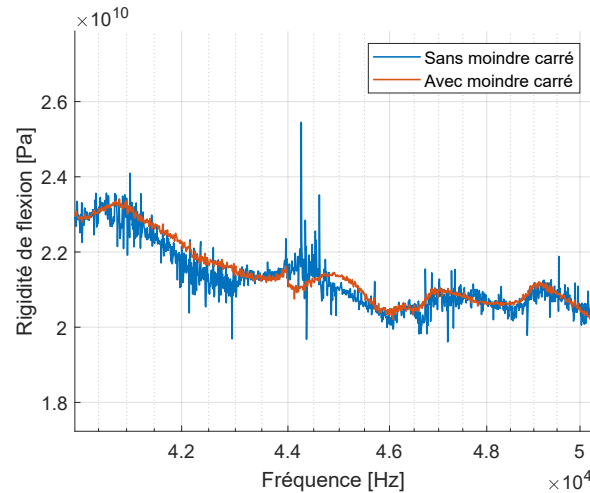


FIGURE 3.6 – Rigidité de flexion apparente en fonction de la fréquence avec ou sans l’approximation au sens des moindres carrés. Sans cette approximation, une simple moyenne des résultats obtenus sur l’ensemble du maillage est effectuée.

L’inconvénient majeur de cette méthode est sa haute sensibilité aux erreurs expérimentales. En effet, l’ordre 4 sur le pas  $\Delta$  diminue fortement la précision des résultats si ce premier est mal estimé. Dans les présents travaux, la comparaison a été effectuée avec l’analyse modale. La méthode CFAT montre tout son intérêt par sa caractérisation large bande rapide à implémenter et aux résultats riches, car il est possible d’adopter une visualisation spatiale et/ou fréquentielle, son écriture locale est aussi efficace afin d’obtenir des résultats sur une zone limitée de l’échantillon, ce qui se révélera être décisif dans l’étude des échantillons aux interfaces imparfaites. Ces avantages forts propres à CFAT sont issus des hypothèses formulées autour de la structure étudiée. En effet, la caractérisation en nombre d’onde est utilisée dans ce traitement de données afin d’estimer précisément le paramètre structure  $s$  d’une structure mince académique (poutre ou plaque). Cependant, cette forte hypothèse est aussi un inconvénient car elle limite l’application de cette méthode à ce type de structure idéale.

La méthode retenue présentée ici se limite aux structures planes et fines. Cependant, Wassereau [115] par exemple, a développé la méthode FAT pour la ca-

ractérisation de poutre épaisse à partir de la théorie de Timoshenko.

### 3.2.3 Analyse modale sur champ de déplacement

L'analyse modale [48] présente un large panel de méthodes aidant à identifier les propriétés mécaniques d'une structure. Elle peut être utilisée dans une forme basique afin d'obtenir la rigidité de flexion ainsi que l'amortissement en flexion de la structure étudiée. Si l'on considère un tricouche, il est possible d'utiliser les modes de son champ de déplacement pour effectuer de l'analyse modale. En effet, ces modes rendent compte du comportement dynamique du multicouche, à l'image d'une poutre monocouche, mais ils dépendront de la fréquence à la manière d'un multicouche. La rigidité apparente de l'ensemble variera alors en fonction des modes de déformations prédominants, et donc en fonction de la fréquence, à l'inverse d'une poutre monocouche.

L'analyse modale d'un multicouche s'effectue donc en décrivant le tricouche à l'aide d'une poutre homogène aux propriétés variables en fonction de la fréquence, tout en correspondant aux conditions aux limites expérimentales. La variation du comportement caractéristique d'un tricouche, qui varie entre flexion pure et cisaillement pur, est ainsi reproduit à partir d'une poutre aux propriétés dynamiques fréquemment dépendantes. Le système ainsi obtenu est appelé une poutre équivalente. La méthode présentée ici est restreinte au type de structure étudiée dans les présents travaux : les structures poutres.

#### Identification de la rigidité équivalente

Pour obtenir une rigidité de flexion modale équivalente, la méthode est d'utiliser l'équation d'une poutre en flexion correspondant aux conditions aux limites expérimentales, libre-libre dans le cas des travaux présentés ici. Dans le cadre des ondes de flexion dans une poutre libre-libre, l'équation caractéristique (3.10) à résoudre n'a pas de solution analytique. Il faut donc trouver les solutions numériquement. Les solutions pour chaque mode  $n$  sont utilisées afin de calculer les fréquences des modes correspondant avec l'équation (3.11).

$$\cos(\beta_n L) \cosh(\beta_n L) = 1, \quad (3.10)$$

avec  $\beta_n L$  les solutions modales de l'équation caractéristique. Elles sont ensuite utilisées dans le calcul des pulsations modales à l'Équation (3.11).

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}}. \quad (3.11)$$

Cependant, ceci n'est qu'une équivalence par rapport au comportement du multicouche qui résulte de la contribution de plusieurs modes de déformations. En effet, de la flexion pure est d'abord observée pour un multicouche, et correspondra donc bien à l'Équation (3.11). Mais pour des fréquences plus élevées, la flexion est couplée au cisaillement, pour finir en HF sur du cisaillement pur. Ainsi, l'équivalence d'une unique poutre en flexion est effectuée pour chaque mode avec une rigidité variable, et plus précisément décroissante en fonction de la fréquence. Le but est de repérer le mode  $n$  ainsi que sa fréquence  $f_n$  dans le champ de déplacement mesuré, et de recalibrer un modèle modal de poutre en flexion en faisant varier le module de Young afin de minimiser l'écart entre la fréquence du mode mesuré et la fréquence de ce même mode obtenue par le modèle. Cela permet d'obtenir un module de Young apparent comparable à celui obtenu lors de l'application de CFAT. Les résultats de cette méthode seront illustrés dans la Section 3.3 à la Figure 3.15.

### Identification de l'amortissement apparent

L'équivalence est aussi valable dans l'identification de l'amortissement équivalent. Cela s'effectue plus simplement que l'identification de la rigidité équivalente, car elle se fait directement sur le champ de déplacement mesuré (Figure 3.7), sans avoir à optimiser un paramètre. La méthode d'estimation de l'amortissement utilisée est l'estimation par la bande passante à  $-3$  dB, ce qui correspond à une chute de 50% de l'intensité de déplacement. Le déplacement n'étant pas une grandeur quadratique, cela correspond à diviser son amplitude par  $\sqrt{2}$ . Une fois la largeur de bande à  $-3$  dB estimée, le taux d'amortissement modal s'estime alors classiquement avec l'Équation (3.12).

$$\zeta_n = \frac{\Delta f}{2f_n}, \quad (3.12)$$

avec,  $\zeta_n$  le taux d'amortissement du mode  $n$ ,  $\Delta f$  la largeur de bande à  $-3$  dB et  $f_n$  la fréquence du mode  $n$ . Cette équation n'est vraie que pour des  $\zeta_n$  faibles. L'ensemble de ces grandeurs sont représentées sur la Figure 3.7.

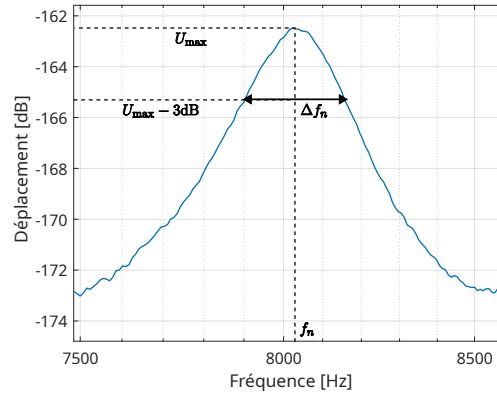


FIGURE 3.7 – Déplacement transverse en fonction de la fréquence sur le mode à  $f_n = 8$  kHz. Illustration des grandeurs utiles lors de l'estimation de l'amortissement modal. Le déplacement est en échelle dB et est calculé de la façon suivante :  $u_{\text{dB}}(f) = 20 \log_{10}(u(f))$

### 3.3 Application à une poutre en structure sandwich

La caractérisation d'une structure est un processus fondamental dans l'ingénierie et la recherche. Elle sert généralement à savoir si un produit conçu par un bureau d'étude aura le comportement attendu, en caractérisant un prototype représentatif du produit final par exemple. Dans le cadre de la recherche, ce type de technique est utilisé pour valider des modèles théoriques. Une méthode inverse consiste à estimer une grandeur physique par les conséquences d'un problème, par opposition aux méthodes directes qui permettent par la mesure d'obtenir directement la grandeur recherchée. Dans cette section est d'abord détaillée le banc de mesure employé dans les présents travaux. L'implémentation de la méthode de caractérisation par résolution inverse retenue est ensuite détaillée, ainsi que l'implémentation des principales techniques de traitement de données classiquement

employées pour améliorer significativement les résultats obtenus. Les seuls paramètres d'entrée de la méthodologie sont : le spectre du champ de déplacement transverse mesuré dans le plan  $(x, y)$  noté  $u_z(x, y, f)$  ; la géométrie de l'échantillon tricouche  $V = L \times b \times h = (60.0 \times 10^{-2}) \times (3.0 \times 10^{-2}) \times (0.3 \times 10^{-2}) \text{ m}^3$  ; et sa masse  $m = 270 \text{ g}$ .

### 3.3.1 Banc de mesure

L'objectif du banc de mesure est de réaliser une mesure vibratoire dans le but de caractériser le comportement dynamique d'une structure plane. La Figure 3.8 illustre l'ensemble des outils qui constituent le banc ainsi que leurs connexions. Les différents éléments du banc de mesure sont donc :

- **L'échantillon** mesuré : choisi dans un ensemble de poutres multicouches fabriquées au laboratoire.
- **Le bâti** qui accueille l'échantillon mesuré.
- **Le système d'excitation**, qui dans les présents travaux est un buzzer piézoélectrique.
- **Le vibromètre laser** accompagné de son hardware et software, afin de réaliser la mesure optique du champ de déplacement.

Les **échantillons** mesurés sont suspendus à l'aide d'une potence par la longueur pour correspondre à des conditions aux limites libre-libre. L'extrémité inférieure de l'échantillon est aussi accrochée à l'aide d'une fine ficelle en polypropylène et mise en légère tension en faisant un nœud coulissant dans le but d'éviter des mouvements de pendule. Pour des échantillons en aluminium, des trous peuvent être effectués aux extrémités pour y loger les ficelles. Pour des échantillons en verre, un adhésif est généralement utilisé en bout de poutre dans le but de pouvoir la suspendre.

L'**excitation** dynamique de la structure est réalisée à l'aide de buzzers piézoélectriques. Leur faible masse ainsi que leur petite taille font des buzzers piézoélectriques des systèmes de sollicitation peu intrusifs et ne modifient que très peu le comportement de la structure étudiée. Cependant, il est important de bien choisir son buzzer piézoélectrique afin qu'il corresponde aux analyses prévues. Son diamètre est le paramètre le plus important dans le cas des buzzers sous la forme d'un disque, il va déterminer sa fréquence de résonance et ainsi sa bande de fréquence

d'utilisation optimale. En effet, il est prévu par le fournisseur<sup>2</sup> d'utiliser ce type de système d'excitation sur une bande de fréquences précise qui correspond à l'encadrement de sa fréquence de résonance de  $\pm 1000$  Hz. Il est en revanche possible d'avoir malgré tout du signal en dehors de ces fréquences, les buzzers constituent alors un bon outil pour de l'analyse fréquentielle large bande. Le manque de signal dû à leur faible amplitude de sollicitation est comblé en utilisant deux buzzers piézoélectriques ou plus, car cela augmente le niveau d'amplitude du champ de déplacement de l'échantillon mesuré. Cependant, le traitement de données diverge aux points de sollicitation, parce qu'il fait l'hypothèse d'une pression appliquée nulle. Il est donc recommandé de ne pas surdimensionner la quantité de systèmes d'excitation à ajouter, ces derniers étant des buzzers piézoélectriques dans le cas présent.

Pour les essais présentés ici, le signal injecté est un bruit blanc cohérent pour les deux buzzers piézoélectriques, la largeur de bande dépend de l'analyse, mais se trouve généralement entre 1 kHz et 50 kHz. Cependant, si une analyse en basses fréquences (BF) est recherchée, il faut alors concentrer cette largeur de bande autour des valeurs d'intérêts. En effet, les BF comportent les premiers modes de déformation du buzzer piézoélectrique et vont donc utiliser la majorité de la tension injectée pour leur déformation. De l'énergie est donc perdue à solliciter faiblement et insuffisamment les modes HF, ce qui rendra aussi les résultats BF insuffisants.

### 3.3.2 Adaptation du facteur d'échelle

Comme vu précédemment, le pas ou facteur d'échelle, doit être adaptatif en fonction de la fréquence afin de ne pas faire diverger le calcul. La Figure 3.9 montre trois résultats pour trois différents pas fixes utilisés sur l'ensemble du calcul. Le pas est ainsi valide uniquement pour une bande fréquentielle relativement réduite. La superposition des courbes successives permet d'obtenir un résultat correct sur l'ensemble de la bande de fréquence mesurée. Le pas optimal qui est recherché sur l'ensemble du spectre doit être de 3 points par longueur d'onde [1, 32], afin de minimiser le bruit tout en estimant correctement l'onde étudiée.

L'adaptation du facteur d'échelle passe d'abord par une estimation de la lon-

---

2. [fr.rs-online.com/web/content/m/rs-pro](http://fr.rs-online.com/web/content/m/rs-pro)

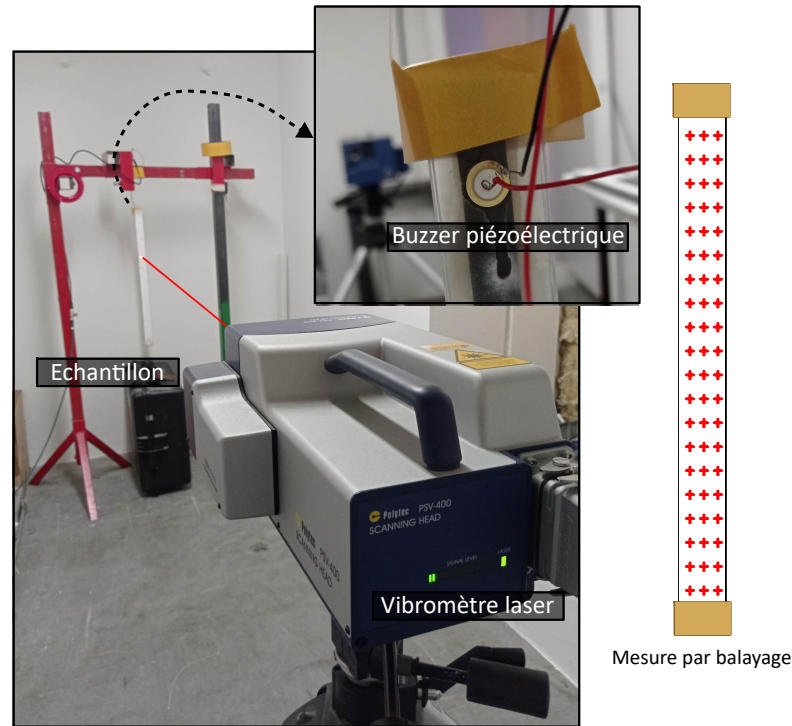


FIGURE 3.8 – Photographie du banc de mesure complet constitué de : l'échantillon mesuré, le système de sollicitation et le vibromètre laser. La photographie est accompagnée d'un schéma de l'échantillon vu par le vibromètre laser ainsi que le maillage de la mesure par balayage.

gueur d'onde de flexion. Cette estimation se fait classiquement à partir de la transformée de Fourier 2D du déplacement mesuré précisé à l'Équation (3.13).

$$U_{2D}(k, f) = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} u(x, t) e^{-ikx} e^{i\omega t} dx dt. \quad (3.13)$$

Ensuite, uniquement les nombres d'onde de flexion sont extraits du signal et sont utilisés dans l'estimation de longueur d'onde par l'Équation (3.14). L'ensemble des nombres d'ondes sont visibles dans la Figure 3.11. Les nombres d'onde de flexion correspondent généralement au nombre d'onde le plus élevé. Il est possible cependant qu'en BF les ondes de membrane aient des nombres d'onde plus élevés.

$$\lambda_{\text{flexion}} = \frac{2\pi}{k_{\text{flexion}}}. \quad (3.14)$$



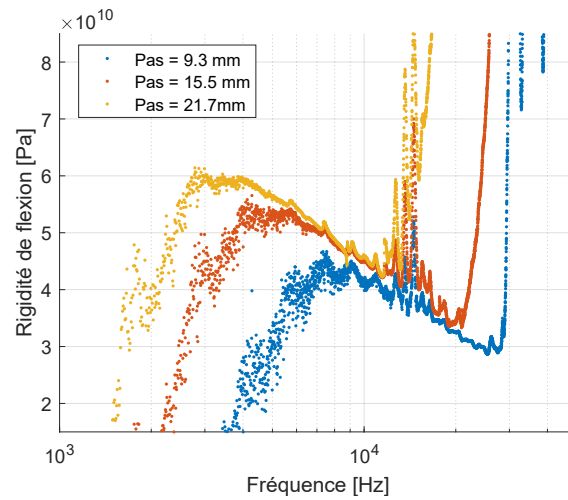


FIGURE 3.9 – Module de rigidité de flexion en fonction de la fréquence, pour différents pas de maillage du schéma aux différences finis de l'Équation (3.7).

L'adaptation du facteur d'échelle selon la procédure détaillée précédemment permet d'obtenir la superposition des courbes successives de la Figure 3.9 sans les divergences BF et HF. Cela permet d'avoir des résultats sur une large bande de fréquence en une seule mesure comme cela est représenté à la Figure 3.10.

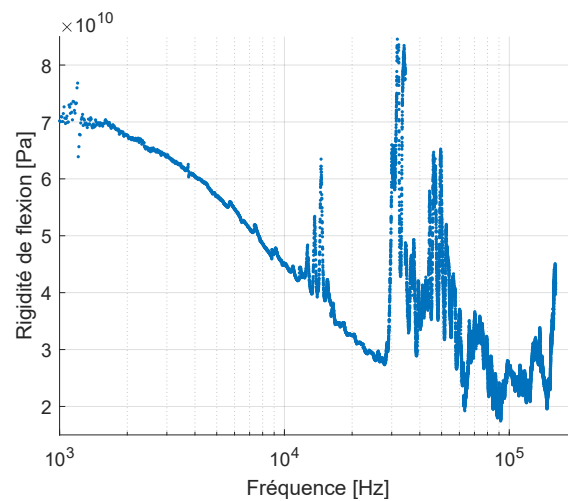


FIGURE 3.10 – Module de rigidité de flexion en fonction de la fréquence avec un pas de maillage adaptatif sur l'ensemble de la bande fréquentielle.

### 3.3.3 Filtrage de la réponse en nombre d'onde

Les résultats obtenus si on applique directement la méthodologie abordée jusqu'à présent présentent quelques divergences pour certaines bandes de fréquences, principalement en HF (voir Figure 3.10, autour de  $f = 40$  kHz). La source majeure de cette divergence est la contribution des autres modes de déformations visibles à la transformée de Fourier du déplacement à la Figure 3.11, ainsi que le bruit de mesure mais aussi la contribution du buzzer piézoélectrique. Une des hypothèses de CFAT est que l'on se trouve en plaque infinie sans sollicitation extérieure. Ce qui est naturellement faux près du système d'excitation. De plus, le nombre d'onde de flexion se confond peu à peu avec le bruit dans les hautes fréquences, au profit des autres modes de déformation qui deviennent donc prédominants pour ces régions fréquentielles.

La solution triviale est donc de filtrer dans l'espace des nombres d'onde le champ de déplacement. Cependant, le fenêtrage empêche une reconstitution du champ de déplacement représentative du signal d'origine, particulièrement pour les basses fréquences. Pour pallier cela, il est recommandé d'employer un border-padding afin d'étendre le domaine spatial de mesure au-delà de ce qui a été mesuré. C'est une technique qui permet de fenêtrer le signal spatialement sans détériorer le signal mesuré, car le fenêtrage s'appliquera ainsi sur les bords ajoutés. Le border-padding effectué est obtenu uniquement à partir de données mesurées. Premièrement, un zero-padding est réalisé. Le signal d'origine ainsi que ses bords sont alors filtrés dans l'espace des nombres d'ondes. Les bords du signal ainsi reconstruits ne sont plus des zéros, mais l'extrapolation réalisée n'atteint pas une qualité suffisante à la première itération. Ainsi, dans une optique d'amélioration de l'extrapolation, les bords sont conservés mais le champ de déplacement mesuré (le signal original) est réinjecté tout en conservant le début de border-padding. Les deux dernières étapes sont alors répétées jusqu'à ce que l'extrapolation soit satisfaisante par convergence du border-padding. Cette méthodologie suit la logique illustrée par l'organigramme 3.12.

Une rapide étude des paramètres permet de choisir la valeur optimale de chaque paramètre qui maximise la qualité du filtrage. Les trois paramètres principaux sont ainsi : la largeur du bord ajouté, symbolisée par le nombre de pixels ajoutés au

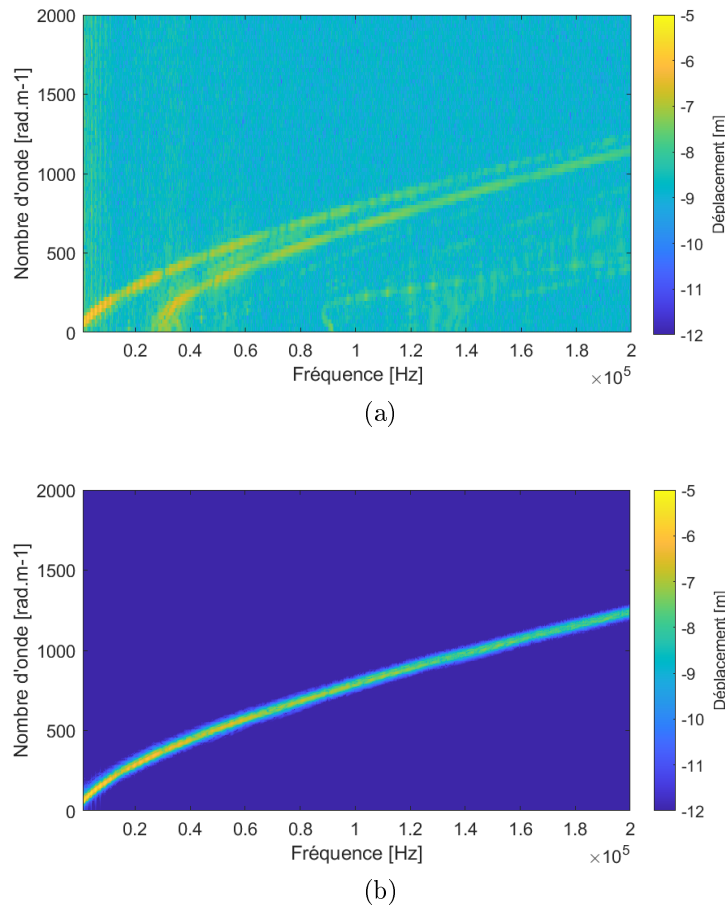


FIGURE 3.11 – Carte de la transformée de Fourier 2D (a) brute et (b) filtrée, du déplacement transverse  $U_{2D}(k, f)$  en fonction du nombre d'onde et de la fréquence effectuée à l'aide de l'Équation (3.13). Les conditions de mesures sont identiques à celles pour la Figure 3.4. La Figure (a) correspond aux données en entrée du filtrage et la Figure (b) au résultat final obtenu après filtrage selon la procédure expliquée dans cette section.

signal (précisé en % par rapport au nombre de pixel initiaux); la largeur de la fenêtre de filtrage; et l'ordre du filtre. Pour cela, la boucle de filtrage présentée à la Figure 3.12 ne sera pas appliquée afin de gagner une flexibilité d'analyse non négligeable. En effet, un filtrage complet du signal dure environ 3 minutes, et il est généralement nécessaire d'effectuer au moins 100 boucles de calcul pour avoir un border-padding satisfaisant. Cela a pour effet principal de dégrader grandement les résultats BF, hautement sensibles aux effets de bord, qui ne seront donc pas

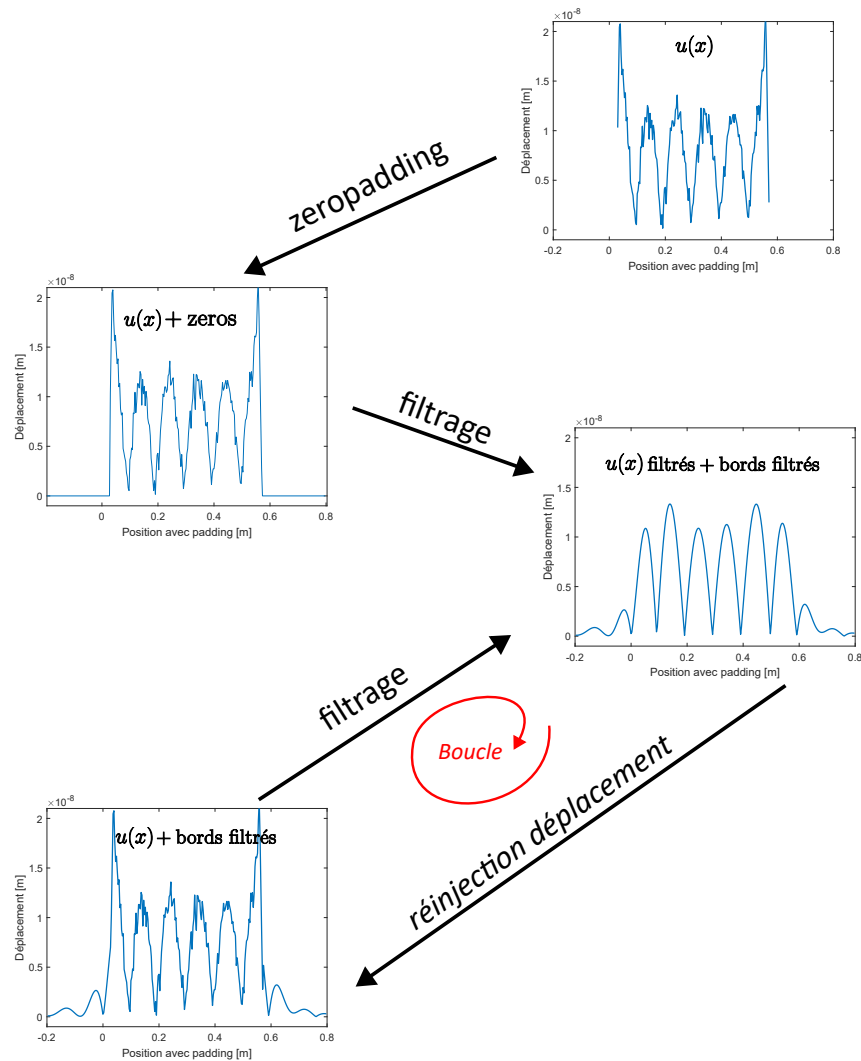


FIGURE 3.12 – Organigramme du filtrage avec border-padding. Le border-padding est réalisé à l'aide d'un zero-padding et une succession de filtrages. Pour cela, le champ de déplacement mesuré est réinjecté à chaque cycle sans modifier les bords afin d'obtenir progressivement un border-padding uniquement à partir des données mesurées.

affichés. Néanmoins, la qualité des résultats HF est conservée et suffit pour étudier les effets des paramètres du filtre.

L'étude des paramètres est affichée dans l'ensemble des Figures 3.13, la flexion de rigidité calculée avec filtrage et le border-padding sert de référence afin de vérifier l'effet des différents paramètres de filtrage, et de vérifier pour quelles valeurs

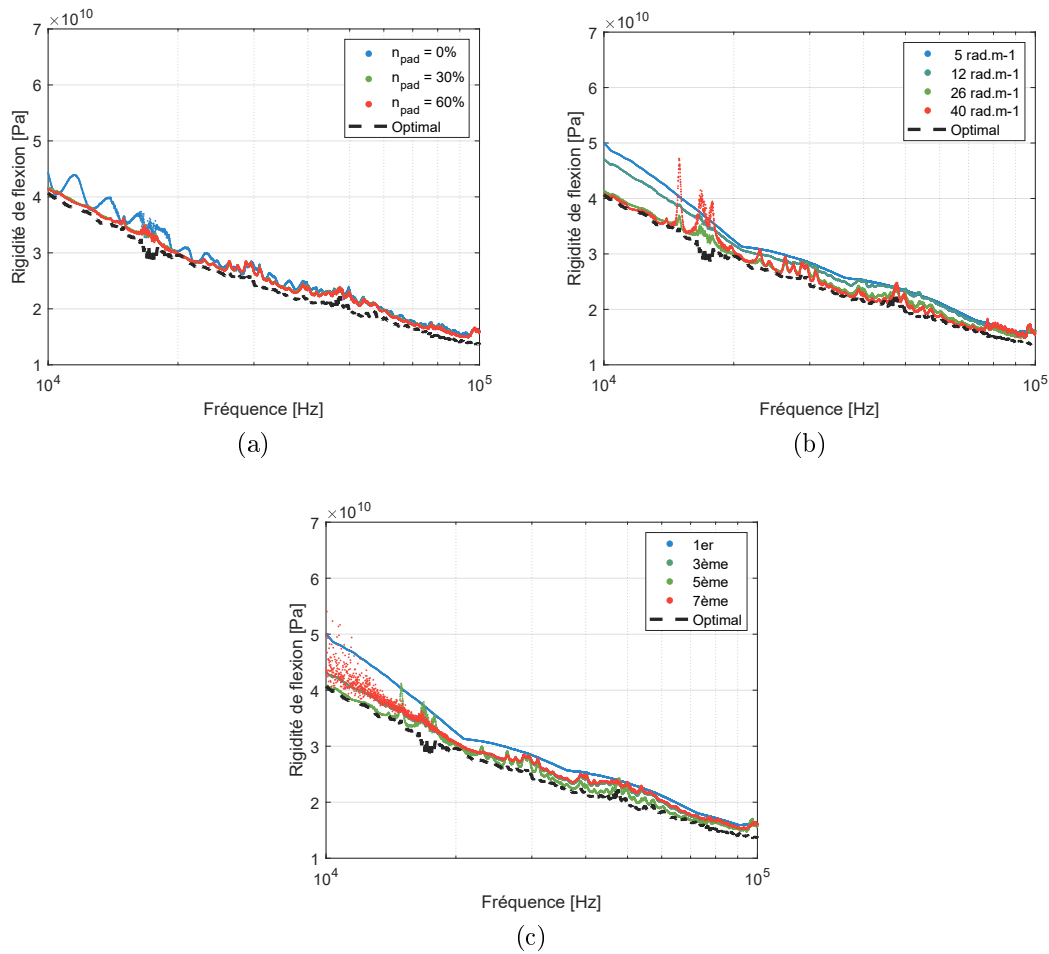


FIGURE 3.13 – Rigidité de flexion en fonction de la fréquence en faisant varier (a) le padding avec une largeur de fenêtre de  $25 \text{ rad.m}^{-1}$  et d'ordre 5 (b) la largeur de la fenêtre avec un zero-padding de 85% et un ordre de 5 et (c) l'ordre de la fenêtre avec un zero-padding de 85% et d'une largeur de fenêtre de  $25 \text{ rad.m}^{-1}$ . Ces calculs ont été réalisés sans le border-padding obtenu à partir des données expérimentales présenté à la Figure 3.12. À chaque figure est ajoutée le résultat final filtré avec le border-padding complet, qui sert donc de référence.

ils sont optimaux. Le but est donc de tendre le plus possible vers cette courbe. La Figure 3.13a montre l'**effet du zero-padding** et donc par extension du border-padding. À partir de seulement 30% l'effet du zero-padding a convergé. L'**effet de la largeur de la fenêtre** (Figure 3.13b) est l'effet le plus important du filtrage. Le filtrage dénaturera le signal si sa largeur de bande est trop faible, et ne filtrera

pas assez si sa largeur est trop importante. Une largeur de  $40 \text{ rad.m}^{-1}$  de cette figure correspond à une largeur trop grande qui montre que le signal n'est plus suffisamment filtré, ce qui revient aux résultats vus précédemment sans filtrage à la Figure 3.10. Pour une largeur inférieure à  $20 \text{ rad.m}^{-1}$ , le signal est trop filtré et correspond ainsi davantage à un signal simulé qu'au signal expérimental. Une largeur optimale se trouve donc entre  $20$  et  $25 \text{ rad.m}^{-1}$ . Au sujet de l'**ordre du filtre**, la Figure 3.13c montre qu'un ordre trop faible aura pour effet de surestimer la rigidité de flexion et de trop tronquer le signal. À l'inverse, un ordre trop élevé aura des effets indésirables sur le signal, particulièrement en BF. L'ordre idéal se situe donc entre 3 et 5.

Finalement, le border-padding et le signal mesuré sont filtrés en ne conservant que les nombres d'onde de flexion. Cela permet d'obtenir la Figure 3.11b dans l'espace des nombres d'ondes. Uniquement la portion de signal correspondant à la région spatiale mesurée (sans le border-padding) est utilisée afin d'appliquer le traitement de données CFAT. L'application de l'ensemble de cette méthodologie mène à la Figure 3.14, pour un zero-padding de 80 %, une largeur de fenêtre de  $23 \text{ rad.m}^{-1}$  et un filtre d'ordre 5. On observe alors que la partie réelle est bien filtrée et permet ainsi d'étendre le domaine de mesure. En revanche, pour la partie imaginaire, plusieurs artefacts sont retirés du jeu de données, mais des erreurs subsistent lorsque le niveau mesuré est trop faible. Cela est particulièrement le cas pour les résultats HF, l'amortissement trop sensible au bruit se retrouve ainsi entièrement noyé par ce dernier.

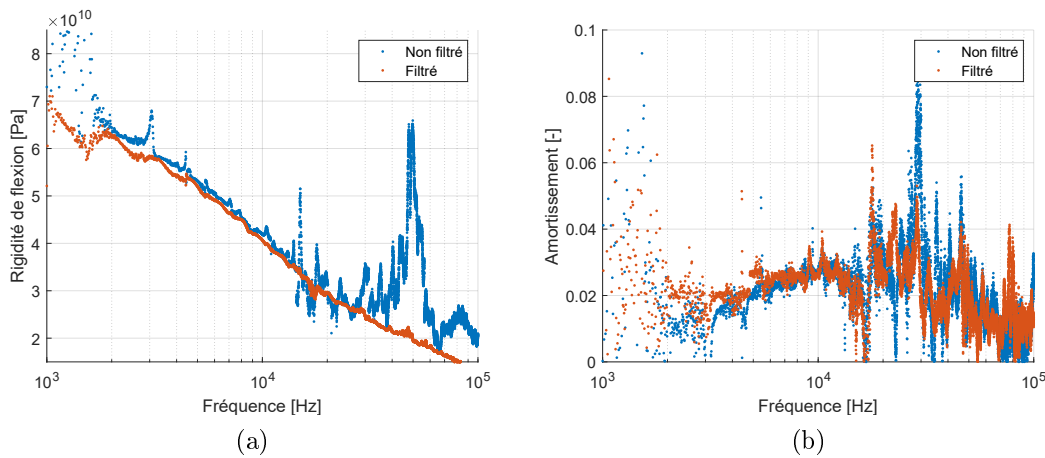


FIGURE 3.14 – (a) Rigidité de flexion et (b) Amortissement en fonction de la fréquence avec ou sans filtrage. Le filtrage est effectué sur le signal d’origine enrichi avec un border-padding réalisé selon la Figure 3.12.

### 3.3.4 Résultats

Les résultats issus de la méthodologie expérimentale ainsi détaillée sont affichés à la Figure 3.15. Le traitement de données implique aussi le filtrage sur l’ensemble du spectre du champ de déplacement, que ce soit pour l’analyse modale ou pour CFAT. Les résultats sont obtenus pour une large bande fréquentielle  $f = [1, 100]$  kHz, correspondant à la largeur de bande de mesure.

La comparaison avec l’analyse modale a été appliquée comme expliquée à la Section 3.2.3 à l’aide d’une poutre équivalente aux conditions aux limites libre-libre. Pour cela, les modes expérimentaux visibles à la Figure 3.4, ou plus précisément à la Figure 3.16, sont réobtenus à l’aide d’un modèle modal de poutre en flexion avec les conditions aux limites correspondantes. La première étape consiste à détecter le mode concerné, ce qui est fait en comptant le nombre de ventres d’amplitude du déplacement. Ensuite, l’Équation (3.11) est utilisée en modifiant la valeur du module de Young injectée afin de minimiser l’écart entre la fréquence propre du mode théorique et celle du mode expérimental. Le module de Young permettant de minimiser cet écart est donc le module de Young de la poutre équivalente en flexion choisie. Deux exemples de déformées modales théoriques obtenues pour le 6<sup>ème</sup> mode à  $f_6 = 1635$  Hz et le 8<sup>ème</sup> mode à  $f_8 = 2760$  Hz sont montrés à la

Figure 3.16 avec les déformées expérimentales correspondantes.

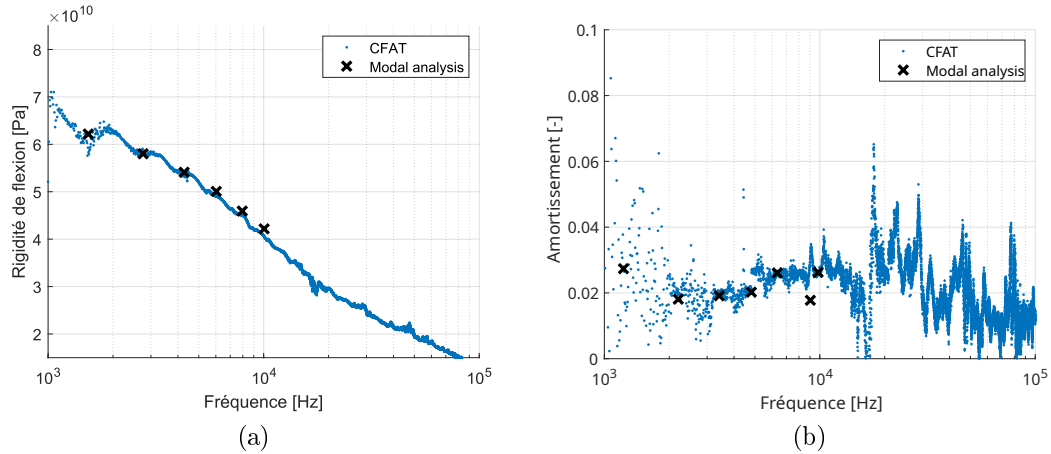


FIGURE 3.15 – (a) Module de rigidité apparente et module de rigidité modal en fonction de la fréquence, (b) Amortissement de flexion apparente et amortissement de flexion des modes de flexion en fonction de la fréquence. Les paramètres apparents sont obtenus à partir de CFAT, présentée à la Section 3.2, et le calcul des paramètres modaux à partir d’une poutre équivalente en flexion est présenté à la Section 3.2.3. Peu de modes sont représentés car la sollicitation de l’échantillon par deux buzzers piézoélectriques n’a engendré que les modes impairs.

Les résultats à la Figure 3.15 décrivent alors un comportement classique pour une structure multicouche et suivent les mêmes tendances que les rigidités de flexion calculées au Chapitre 2 au sujet de la modélisation. Les résultats obtenus grâce à CFAT, qu’ils soient en partie réelle (rigidité de flexion apparente) ou en partie imaginaire (amortissement apparent) permettent une estimation large bande du comportement dynamique d’une structure, même pour des taux d’amortissement très faible, le pic d’amortissement réel se trouvant seulement vers 3%. L’analyse modale permet de confirmer en BF le comportement obtenu grâce à l’analyse par CFAT. Cependant, en HF les modes génèrent de faibles résonances et ne permettent ainsi pas une analyse modale convenable. CFAT montre aussi quelques points de divergence qui correspondent à des chutes de signal injecté par les buzzers piézoélectriques. D’une manière générale, utiliser CFAT et l’analyse modale dans une démarche comparative est très utile car ces deux méthodes ne sont pas sensibles aux mêmes paramètres, ce qui permet de confirmer la fiabilité



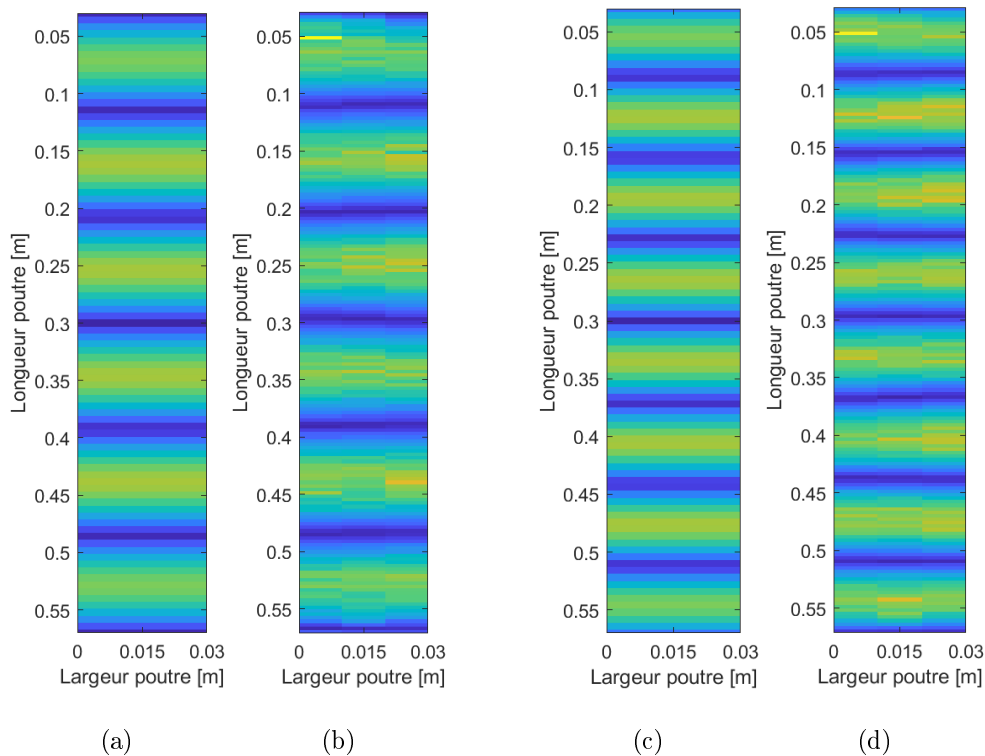


FIGURE 3.16 – Déformée modale d’une poutre libre-libre du : 6ème mode pour  $E_{1635\text{Hz}} = 62.2$  GPa (a) théorique (b) expérimentale ; 8ème mode pour  $E_{2760\text{Hz}} = 58.0$  GPa (c) théorique (d) expérimentale.

des résultats. L’inconvénient est que cette comparaison n’est possible que si les modes sont présents suffisamment haut en fréquence et qu’ils restent dissociables. Cela est le cas d’une structure poutre, mais pour une plaque le recouvrement modal fait que rapidement les modes ne sont plus dissociables. On rappelle que pour une poutre, la densité modale décroît en  $\omega^{-1/2}$ .

### 3.4 Conclusion

L’objectif de ce chapitre était de dresser une courte revue sur les principaux éléments de quelques méthodologies de caractérisation applicable à une poutre multicouche. Cela a permis de justifier le choix de la méthodologie complète re-

tenue, c'est-à-dire, l'utilisation d'un vibromètre laser afin de mesurer les déformations d'une poutre multicouche, et l'application de CFAT avec l'analyse modale conjointement dans le but d'identifier les paramètres dynamiques. Ce choix a bien sûr été grandement conditionné par l'application finale recherchée, qui est l'étude expérimentale de l'effet des interfaces imparfaites au sein des multicouches. La caractérisation retenue passe ainsi avant tout par un banc de mesure complet constitué : de l'échantillon étudié ; d'un système de sollicitation ; d'un système de mesure ; et d'un système d'acquisition. Ces rôles sont assurés respectivement par : une poutre multicouche ; un buzzer piézoélectrique ; un vibromètre laser à effet Doppler (PSV-400) ; et le système d'acquisition fourni par Polytec avec leur vibromètre laser. Quelques détails sur la technique de mesure du champ de vitesse ou de déplacement utilisée par le vibromètre laser et le système d'acquisition ont été abordés. Ensuite, le traitement de données a été présenté ainsi que quelques méthodes de post-traitement supplémentaires utilisées afin d'améliorer les résultats. L'application de l'analyse modale à la caractérisation de matériaux multicouches a ensuite été abordée. Ces deux méthodes ont finalement été appliquées à la fin de ce chapitre pour mettre en évidence les résultats obtenus à l'issue de la méthodologie, ainsi que les résultats attendus pour une poutre sandwich.

# Chapitre 4

## Application du modèle pour la caractérisation de poutres multicouches sandwiches à interfaces complexes

### Sommaire

---

4.1	Fabrication des échantillons étudiés . . . . .	129
4.1.1	Protocole de fabrication . . . . .	129
4.1.2	Présentation des échantillons produits . . . . .	136
4.2	Conditions expérimentales et paramètres du banc de mesure . . . . .	140
4.2.1	Étude de l'effet des conditions expérimentales . . . . .	141
4.2.2	Paramètres du banc de mesure . . . . .	146
4.3	Caractérisation dynamique d'une poutre sandwich aux interfaces imparfaites . . . . .	148
4.3.1	Résolution inverse, visualisation fréquentielle . . . . .	149
4.3.2	Résolution inverse, visualisation spatiale . . . . .	154
4.3.3	Résolution inverse pour approche complémentaire . . . . .	161
4.3.4	Résultats expérimentaux supplémentaires sur des multicouches aux interfaces hétérogènes spatialement . . . . .	167
4.4	Conclusion . . . . .	168

---

Le Chapitre 4 utilise l'ensemble des méthodologies vues précédemment afin de confronter le modèle à l'expérimentation. La méthodologie de calcul a été présentée au Chapitre 2. Elle est utilisée dans le but d'appliquer le modèle équivalent aux interfaces imparfaites. La méthodologie appliquée pour caractériser le comportement dynamique de poutres multicouches est présentée au Chapitre 3. L'idée dans ce chapitre est donc d'appliquer le modèle et la méthode expérimentale pour l'analyse complète de plusieurs échantillons pour la caractérisation mécanique d'un multicouche et de ses interfaces. Cette synergie entre les chapitres déjà présentés représente l'aspect le plus innovant des travaux effectués. En effet, il existe déjà plusieurs travaux sur la modélisation analytique ou numérique des interfaces au sein d'un multicouche, mais sont généralement appliqués en statique uniquement et il n'y a pas à ma connaissance d'utilisation de l'approche équivalente dans le cadre des interfaces imparfaites. Il existe aussi des travaux sur la mise en évidence d'interfaces à l'aide de mesures ultrasoniques principalement, ce qui correspond plutôt au domaine du contrôle non destructif. Il y a donc un manque important de travaux sur la caractérisation dynamique d'interfaces au sein d'un matériau multicouche comme il a été relevé au Chapitre 1. Ce point avait été soulevé notamment par Mathieu Gaborit dans les perspectives de sa thèse [34]. En effet, détecter la présence d'une interface imparfaite n'implique pas les mêmes outils que prédire ou caractériser les conséquences d'une ou plusieurs interfaces imparfaites sur le comportement dynamique d'une structure multicouche.

Ce chapitre commence alors par la présentation du banc de mesure à la Section 4.2, il fait écho avec une partie du Chapitre 3, mais est bien plus factuel. Son objectif est de mettre en évidence les paramètres expérimentaux. Ensuite, les quelques paramètres expérimentaux qui ont un effet indésirable sur la dynamique des structures étudiées seront présentés, tel que l'effet du vieillissement et de la température lors de la mesure. Ensuite, la Section 4.3 présente les résultats de caractérisation d'échantillons aux interfaces imparfaites. Cela implique l'identification des paramètres dynamiques expérimentaux à l'aide du modèle présenté au Chapitre 2. Des résultats sont montrés en fonction de la fréquence, pour permettre une comparaison avec le modèle, mais aussi en fonction de l'espace, afin de rendre compte de l'évolution de l'interface au sein même d'un matériau. Dans cette sec-

tion apparaît aussi la comparaison modèle/mesure. Certains des résultats joints dans ce chapitre ont été présentés durant le Congrès Français d'Acoustique 2022 (CFA2022) [8] et l'International Conference on Noise and Vibration Engineering en 2022 (ISMA2022-USD2022) [7]. .

## 4.1 Fabrication des échantillons étudiés

Dans cette partie est présentée le protocole de fabrication dans son ensemble. Le but est principalement de montrer la reproductibilité du présent travail et des échantillons produits. La motivation principale quant à la fabrication des échantillons sur place, avec nos moyens de fabrication, était le contrôle du collage et donc des interfaces. En effet, nous pouvions tester toutes les configurations que nous souhaitions, au prix d'une procédure essai-erreur coûteuse en temps. Cependant, une fois le procédé de fabrication maîtrisé, la production d'échantillon était rapide et configurable.

### 4.1.1 Protocole de fabrication

#### Le choix des matériaux

Les échantillons fabriqués sont des structures poutres, malgré l'écriture en plaque du modèle équivalent proposé. Ce choix a été motivé pour la simplicité de fabrication des échantillons, mais surtout pour la simplicité de génération d'interfaces imparfaites. Ces interfaces étant générées en dégradant le tricouche, il était naturellement plus aisé de contrôler cette dégradation dans une seule dimension que deux. De plus, cela évite aussi lors de la caractérisation, des incertitudes supplémentaires quant à l'interprétation des résultats. D'un point de vue de la modélisation, l'écriture en poutre se déduit très facilement à partir du modèle de plaque en ne conservant que les éléments selon deux dimensions : une dimension horizontale, perpendiculaire à l'épaisseur ; une dimension transverse, parallèle à l'épaisseur. Les autres termes sont ainsi mis à zéro.

Le choix de la nature des échantillons a principalement été imposé par la méthode de mesure qui est optimale entre 1 kHz et 40 kHz.

- Les peaux étaient premièrement constituées d’aluminium, car ce matériau est bien connu en mécanique, il possède un fort coefficient de réflexion optique (très intéressant pour une mesure au laser) et il était simple de trouver des échantillons de la forme recherchée. Elles ont ensuite été remplacées par des peaux en verre, car il était plus simple de contrôler la fabrication lors de la pose des échantillons grâce à la transparence du matériau. De plus, le verre présente un module de Young  $E$  et une masse volumique  $\rho$  proche de l’aluminium, ce qui permettait d’obtenir des comportements dynamiques proches entre les différents échantillons.
- Le choix du cœur était décisif dans le comportement du tricouche. Le matériau choisi a été la colle époxyde bi-composante DP-190 3M<sup>1</sup> (*Scotch Weld DP 190*). L’utilisation d’un adhésif en tant que cœur des structures sandwiches a été choisie pour la simplicité de fabrication, mais aussi pour permettre une détérioration des interfaces a priori plus aisément. Le choix de la DP-190 3M en particulier a été fait car la haute rigidité de ce matériau pour une colle époxyde (de l’ordre de 1 GPa), engendre un comportement mécanique favorable à l’analyse dynamique par la méthode CFAT.

### Les étapes de fabrication

Le protocole a évolué tout au long des présents travaux. Uniquement les derniers échantillons (qui représentent finalement plus de la moitié des échantillons totaux) ont été fabriqués avec ce protocole. Le principal avantage de ce dernier est sa haute capacité à reproduire des échantillons similaires. Ce dernier protocole a été développé lors d’un projet de fin d’études à l’INSA en collaboration avec l’étudiant-ingénieur T. Sacco [104].

L’essentiel de la fabrication se situe dans la matrice qui présente trois emplacements de moulage, elle est présentée à la Figure 4.1. Elle a été réalisée sur-mesure au laboratoire par notre technicien, afin de positionner les échantillons en largeur ainsi qu’en longueur. Un bon positionnement garantit une bonne reproductibilité lors de la fabrication. La profondeur d’un moule correspondait, aux incertitudes près, à l’épaisseur totale d’un échantillon verre-époxy-verre que l’on a choisie à 6,7mm.

---

1. 3mfrance.fr

La largeur d'un moule correspond ainsi à la largeur des échantillons d'aluminium qui est de 30 mm pour les échantillons en verre, et 32 mm pour les échantillons en aluminium. La longueur correspondait ainsi à la longueur des échantillons que l'on souhaite fabriquer, plus quelques centimètres afin de simplifier le démoulage. La pression lors de la pose était exercée par les 4 sauterelles réparties sur l'ensemble d'un échantillon.

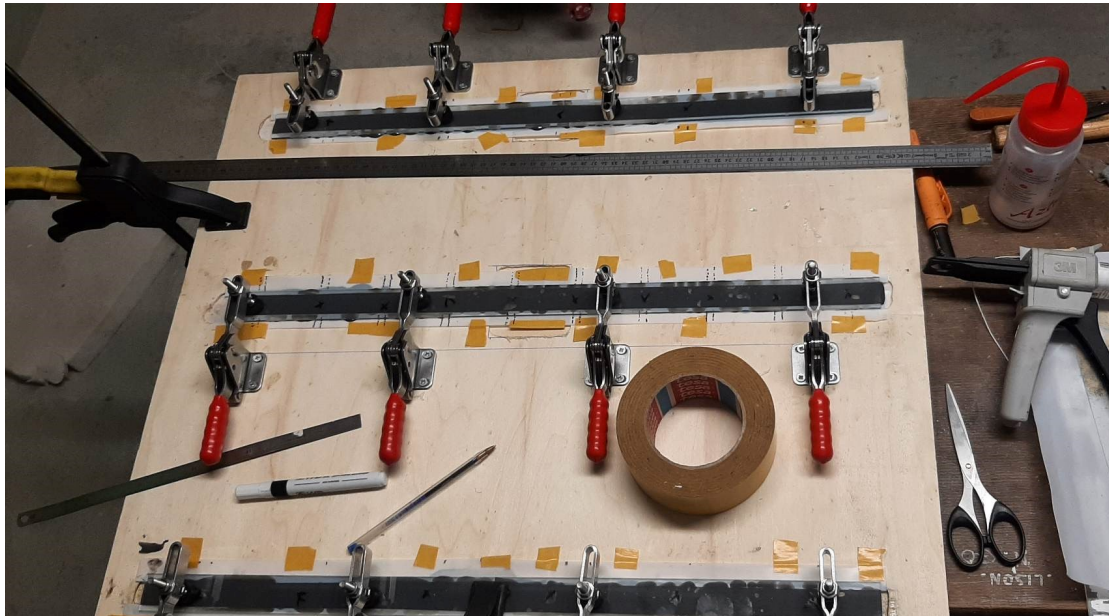


FIGURE 4.1 – Matrice de fabrication servant à effectuer une pose des échantillons pendant environ 24h. Il était possible de fabriquer 3 échantillons à la fois dans des conditions similaires. La pression était répartie de manière homogène et reproductible par des sauterelles de bridage.

Avant d'effectuer le collage, la surface des peaux en verre ou en aluminium était traitée avec de l'acétone (Figure 4.2), afin de garantir une qualité de collage contrôlée, qui peut être ensuite dégradée ou non. Cela permet aussi accessoirement une meilleure visibilité du collage lorsque les peaux sont en verre.

Une étape importante est la pose de la colle époxyde sur la peau inférieure du tricouche. En effet, c'est celle-ci qui va déterminer la qualité du couplage en fonction du taux de colle présent, ou de la quantité de bulles générées. Deux exemples sont montrés à la Figure 4.3, un cas en sous-dosage et un cas en sur-dosage. La quantité de colle à injecter peut être estimée simplement en calculant le

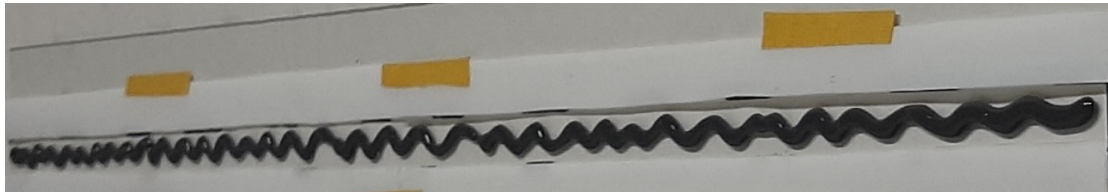


FIGURE 4.2 – Peaux en verre et acétone utilisé pour le traitement de leur surface. Cela permettait de contrôler la qualité de la surface des peaux qui seront en contact avec le cœur.

volume injecté à partir de l'avancée du piston ainsi que de la surface des injecteurs (au nombre de deux car l'adhésif est bi-composant). La masse peut ainsi être calculée à partir de la masse volumique fournie par le fabricant, ou bien directement par le volume. Le sous-dosage permet de générer une grande quantité de bulles et/ou de générer un taux de colle en largeur minimisé. Il est cependant possible de ne pas avoir de bulles d'air même dans ce cas. Pour cela, mettre l'échantillon sous une presse pneumatique afin d'exercer une compression importante suffit à chasser les bulles d'air présentes. Néanmoins, cela minimise la capacité du protocole à fabriquer plusieurs échantillons dans un temps court et dans les mêmes conditions (âge/température). En effet, la pression doit être exercée sur l'ensemble du temps de pose qui est d'environ 24h. En revanche, le sur-dosage était une manière fiable de minimiser la quantité de bulle même lorsque la pression exercée lors de la pose



était faible, ce qui correspond particulièrement au cas de la matrice présentée à la Figure 4.1.



(a)



(b)

FIGURE 4.3 – Motifs de collage (a) en sous-dosage et (b) en sur-dosage. Le sous-dosage permet la génération d'inclusion d'air, le sur-dosage permet d'obtenir des échantillons avec un taux de colle plus élevé et donc un meilleur couplage des peaux.

L'épaisseur du cœur, qui est un paramètre très important dans la fabrication des échantillons, était contrôlée d'abord à l'aide de réglettes en acier de 0.3 mm, puis de réglettes en téflon (PTFE) de 0.4mm. Celles en acier avaient comme avantages d'être réutilisables et rigides, ce qui avait pour conséquence que l'épaisseur du cœur était facilement reproductible peu importe la pression exercée lors de la pose. Mais cela avait aussi pour inconvénient important leur rigidité élevée qui menait régulièrement les échantillons en verre à casser lors du démoulage. De plus, leur adhérence à la colle époxyde complexifiait davantage le démoulage. Ainsi, l'utilisation du téflon a parfaitement résolu ces problèmes (Figure 4.4). Premièrement, le PTFE est non-adhérent à l'époxy, et puis sa souplesse facilite le démoulage des échantillons en verre. Le seul inconvénient est leur ductilité qui implique une faible réutilisation afin de fixer l'épaisseur du cœur. Leur plus faible rigidité rend aussi le protocole plus sensible à la pression exercée lors de la pose, celle-ci doit donc s'avérer être reproductible sur plusieurs fabrications.



FIGURE 4.4 – Bande de téflon (PTFE) non-adhérent à la colle époxyde.

Le téflon servait à contrôler l'épaisseur du cœur en le disposant sur les côtés, avec une pénétration de 5mm. La largeur du cœur est ainsi de 20 mm alors que les peaux sont larges de 30 mm. L'idéal afin de pallier cela, aurait été de fabriquer un ensemble d'échantillons sur une large plaque, puis de découper cette plaque en sous-structures poutres.

Le protocole de fabrication final est comme suit :

- Une poutre de verre dont la surface a été traitée est disposée dans un moule. Il est recommandé de déposer un film fin de papier ou de cellophane afin de faciliter le démoulage ultérieur.
- Les bandes de téflon sont fixées au bord des peaux avec une pénétration de 5 mm en général. Cela va dépendre de la configuration recherchée.
- Les bandes de téflon sont fixées à la matrice à l'aide de bandes adhésives pour conserver l'intégrité du collage malgré un sur-dosage.
- La colle bi-composante époxyde est déposée sur la première peau à l'image de la Figure 4.3.
- La deuxième peau et troisième couche est déposée sur l'ensemble.
- Une légère pression avec les mains ou un rouleau est exercée du centre vers les extrémités afin de sortir l'excédent de colle et de chasser les éventuelles bulles d'air formées.
- Les sauterelles sont mises en position de bridage pendant 24h à l'image de la Figure 4.5.
- Après le temps de pose, l'échantillon est démoulé, le téflon se retire facilement à la main voire à l'aide d'une pince. La mesure est généralement effectuée après une semaine, voire deux dans l'idéal, afin de laisser les propriétés mécaniques du cœur viscoélastique converger.



FIGURE 4.5 – Pose finale d'un échantillon verre-époxy-verre. La pression appliquée est exercée par 4 sauterelles de bridage, le téflon permettant de gérer l'épaisseur du matériau est fixé à l'aide de bandes adhésives.

### Finalisations et préparations pour la mesure

Une fois l'échantillon démoulé et ayant suffisamment vieilli selon la nature des résultats recherchés, il est préparé en vue d'une mesure vibratoire au laser. Pour cela, un buzzer piézoélectrique est ajouté à l'aide d'une colle acrylique à prise rapide, lui-même soudé à un connecteur BNC. La surface du matériau est aussi déterminante dans la mesure. Si l'échantillon est en aluminium, il est possible de le laisser tel quel. Si l'échantillon en aluminium est trop réfléchissant, alors il peut être intéressant d'effectuer un polissage de la surface. Dans le cas d'un échantillon en verre, des mesures directes sur le cœur au travers de la première couche de verre avait été réalisées mais n'étaient pas satisfaisantes. L'utilisation d'un révélateur sur une couche extérieure était donc nécessaire. Un spray est donc utilisé pour vaporiser la surface à mesurer, ce premier dépose une légère et fine couche blanche

réfléchissante qui permet de réaliser une mesure optique sur la surface vaporisée. Une solution pour ne pas avoir besoin de traiter la surface en verre serait d’effectuer une mesure en infrarouge. Il faut cependant un laser dont la longueur d’onde est élevée dans le but de maximiser l’onde retour, ce qui correspond au domaine de l’infrarouge lointain.

### 4.1.2 Présentation des échantillons produits

Les échantillons qui sont utilisés dans les présents travaux de thèse et obtenus à l’aide du protocole présenté précédemment dans la présente section sont réunis dans ce paragraphe. Cela peut permettre principalement une comparaison entre les résultats présentés ultérieurement, et le profil de collage des échantillons, afin de conforter ou pas les résultats de caractérisation des interfaces imparfaites.

Les échantillons en aluminium au taux de collage variable (**Échantillons (A)** (**B**) et (**C**)) sont présentés à la Figure 4.6. Le fort découplage de l’**Échantillon (D)** en aluminium est mis en évidence à la Figure 4.7. Ce dernier n’est pas présenté en vue de dessus à l’image des autres échantillons car sa particularité se trouve dans son découplage, visible uniquement avec une vue de côté. L’échantillon peut être considéré comme étant totalement découplé d’un point de vue vibratoire, ce qui sera mis en évidence expérimentalement ultérieurement. Trois échantillons similaires aux **Échantillons (A)** (**B**) et (**C**) ont été fabriqués en verre. Ces échantillons (**Échantillons (G1)** (**G2**) et (**G3**)) présentent donc aussi un taux de collage variable, ils sont présentés à la Figure 4.8. Les paramètres d’intérêts de tous ces échantillons sont présentés au Tableau 4.1.

Des échantillons en verre avec une qualité d’interface variable pilotée par des ajouts de cellophane (**Échantillons (G4)** et (**G5**)) sont présentés à la Figure 4.9. Des échantillons en verre avec un taux de collage variable piloté par la quantité de colle en largeur (**Échantillons (Biseau 1)** et (**Biseau 2**)) sont présentés à la Figure 4.10. Les paramètres d’intérêts de ces derniers échantillons sont présentés au Tableau 4.2.

Les échantillons des Figures 4.8-4.9-4.10 ont été fabriqués à l’aide du protocole [104] présenté à la Section 4.1. Les autres échantillons ont été fabriqués avec un protocole similaire, mais qui ne faisait pas appel à la matrice de moulage.

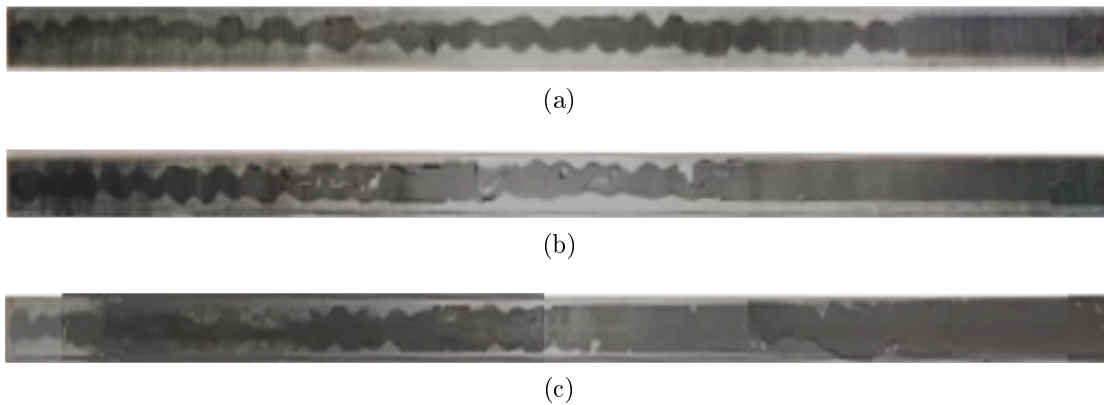


FIGURE 4.6 – Reconstitution après ouverture du motif de collage pour trois échantillons aluminium-époxy-aluminium : (a) **Échantillon (A)** Fabrication juin 2021, (b) **Échantillon (B)** Fabrication décembre 2021, (c) **Échantillon (C)** Fabrication janvier 2022.

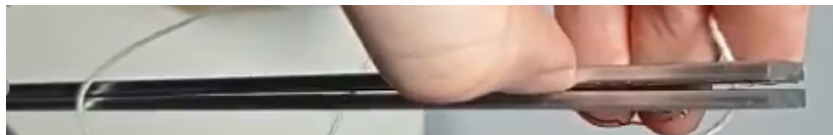


FIGURE 4.7 – **Échantillon (D)** en aluminium. Les peaux en aluminium étaient très fortement découplées mécaniquement. Fabrication février 2022.

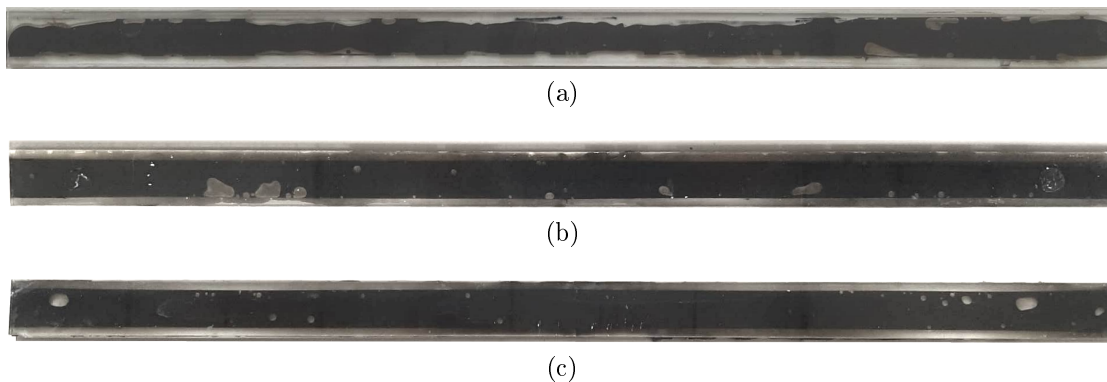


FIGURE 4.8 – Échantillons en verre à la qualité de collage variable (a) **Échantillon G1** (b) **Échantillon G2** et (c) **Échantillon G3**. Fabrication avril 2023.

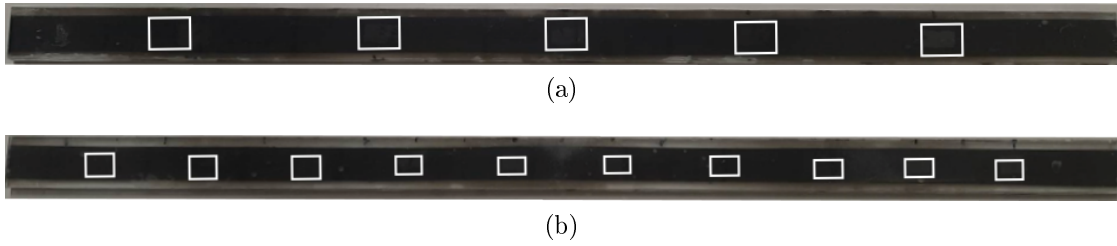


FIGURE 4.9 – Échantillons en verre (a) **Échantillon G4** (b) **Échantillon G5** avec la mise en évidence des morceaux de cellophane par des rectangles blancs. Fabrication juin 2023.

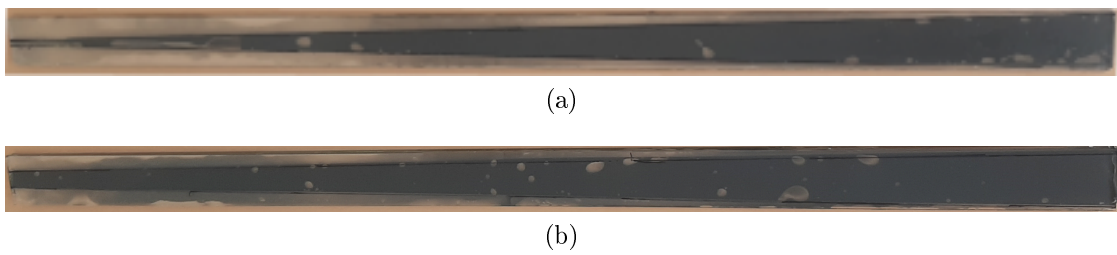


FIGURE 4.10 – Échantillons en verre de forme biseauté. (a) **Biseau 1** et (b) **Biseau 2**. Fabrication juin 2023.

<b>Échantillon A</b> <i>Fabrication juin 2021</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$ [%]	$m$ [g]
Peaux (aluminium)	3.2	2700	71	0.33	0.05	104.0
Cœur (époxy)	0.3	1300	1.9	0.2	6	3.8

<b>Échantillon B</b> <i>Fabrication décembre 2021</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$ [%]	$m$ [g]
Peaux (aluminium)	3.2	2700	71	0.33	0.05	104.0
Cœur (époxy)	0.3	1300	1.9	0.3	6	4.5

<b>Échantillon C</b> <i>Fabrication janvier 2022</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$ [%]	$m$ [g]
Peaux (aluminium)	3.2	2700	71	0.33	0.05	104.0
Cœur (époxy)	0.3	1300	1.9	0.3	6	5.0

<b>Échantillon D</b> <i>Fabrication février 2022</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$ [%]	$m$ [g]
Peaux (aluminium)	3.2	2700	71	0.33	0.05	104.0
Cœur (époxy)	0.3	1300	1.9	0.3	6	4.8

<b>Échantillon G1</b> <i>Fabrication avril 2023</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$ [%]	$m$ [g]
Peaux (verre)	3	2700	71	0.33	0.05	129.0
Cœur (époxy)	0.3	1300	1	0.3	5	6.3

<b>Échantillon G2</b> <i>Fabrication avril 2023</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$ [%]	$m$ [g]
Peaux (verre)	3	2700	71	0.33	0.05	128.0
Cœur (époxy)	0.3	1300	1	0.3	5	9.4

<b>Échantillon G3</b> <i>Fabrication avril 2023</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$ [%]	$m$ [g]
Peaux (verre)	3	2700	71	0.33	0.05	129.5
Cœur (époxy)	0.3	1300	1	0.3	5	9.8

TABLE 4.1 – Propriétés des échantillons caractérisés - partie 1

<b>Échantillon G4</b> <i>Fabrication juin 2023</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$ [%]	$m$ [g]
Peaux (verre)	3	2700	71	0.33	0.05	129.5
Cœur (époxy)	0.3	1300	1	0.3	5	9.6

<b>Échantillon G5</b> <i>Fabrication juin 2023</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$	$m$ [g]
Peaux (verre)	3	2700	71	0.33	0.05%	130
Cœur (époxy)	0.3	1300	1	0.3	5	8.7

<b>Biseau 1</b> <i>Fabrication juin 2023</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$ [%]	$m$ [g]
Peaux (verre)	3	2700	71	0.33	0.05	130.3
Cœur (époxy)	0.3	1300	1	0.3	5	6

<b>Biseau 2</b> <i>Fabrication juin 2023</i>	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\eta$ [%]	$m$ [g]
Peaux (verre)	3	2700	71	0.33	0.05	128
Cœur (époxy)	0.3	1300	1	0.3	5	7.5

TABLE 4.2 – Propriétés des échantillons caractérisés - partie 2

## 4.2 Conditions expérimentales et paramètres du banc de mesure

Cette section est divisée en deux parties. Premièrement, les effets de trois paramètres expérimentaux ou de structures sont mis en lumière, car ils ont un effet proche de celui du découplage partiel des couches successives. Ainsi, afin de ne pas confondre leurs conséquences avec l'effet des interfaces imparfaites ceux-ci sont analysés expérimentalement, et leurs tendances propres exposées. Deuxièmement, le banc d'essai choisi et plus précisément les paramètres de mesures seront mis en lumière pour donner le maximum d'informations possibles sur les conditions de mesure.



### 4.2.1 Étude de l'effet des conditions expérimentales

#### La température de l'échantillon

Le cœur des échantillons étant constitué d'un matériau époxy, sa nature viscoélastique implique une sensibilité importante à la température et peut ainsi grandement modifier le comportement dynamique de la structure entière. Cependant, le comportement autour de la température vitreuse, qui se situe au-delà des 82°C selon la fiche technique du produit, est naturellement exclu de l'analyse car les mesures sont réalisées à température ambiante, suffisamment loin de cette température.

L'effet concret de la température est illustré par la Figure 4.11. Il est important de tracer son effet à la fois sur l'amortissement et sur la rigidité car l'effet n'est pas le même selon le paramètre dynamique analysé. D'une manière générale, que ce soit pour la partie réelle ou imaginaire, on observe un assouplissement global de la structure apporté bien sûr par l'assouplissement du cœur. Cela est particulièrement visible sur la partie réelle comparée avec le modèle équivalent aux interfaces parfaites, en changeant uniquement la rigidité du cœur réchauffé. En effet, on remarque sur la Figure 4.11 que la rigidité du cœur est grandement affecté par la température. Par exemple, une température de l'échantillon à 15°C correspond à un cœur d'une rigidité de  $E_{15^{\circ}\text{C}} = 800$  MPa, et une température de l'échantillon à 50°C correspond à un cœur d'une rigidité de  $E_{30^{\circ}\text{C}} = 500$  MPa. Pour une température relativement élevée (50°C et plus, plus proche de la température vitreuse), la modification du comportement du matériau est trop importante et les asymptotes basses fréquences et hautes fréquences de rigidité affichées à la Figure 4.11a ne correspondent plus au comportement dynamique du tricouche. Il est probable que sous le poids des peaux et la tenue mécanique faible du cœur chaud, l'épaisseur de colle ait diminué. Cependant, ce n'est pas un domaine de température intéressant pour la présente application, qui se réalise à température ambiante, donc entre 15°C et 30°C entre l'hiver et l'été.

L'effet propre de la température de l'échantillon sur son comportement dynamique est montré par la courbe d'amortissement à la Figure 4.11b. Il est souligné ici car l'effet des interfaces imparfaites est proche avec celui de la température de l'échantillon, et n'est donc pas à confondre avec la température. Le décalage des

paramètres dynamique vers les basses fréquences dû à l'assouplissement du cœur est ainsi vérifié. Cependant, l'amortissement maximum augmente fortement avec la température, ce qui est un point de différenciation avec l'effet des interfaces imparfaites. Ce type de comportement pour un matériau viscoélastique est bien connu dans la communauté scientifique. L'analyse mécanique dynamique ou Dynamic Mechanical Analysis (DMA) est la méthode généralement utilisée afin de mettre en évidence cette dépendance des propriétés dynamiques du matériau viscoélastique avec la température. Cette dépendance est souvent étudiée par l'équivalence temps-température, qui est un principe qui permet d'exprimer les grandeurs mécaniques linéaires, tel que le module de Young, en fonction de la température. Les travaux suivants mettent en lumière ce comportement viscoélastique à travers différents cas d'application [17, 18, 41].

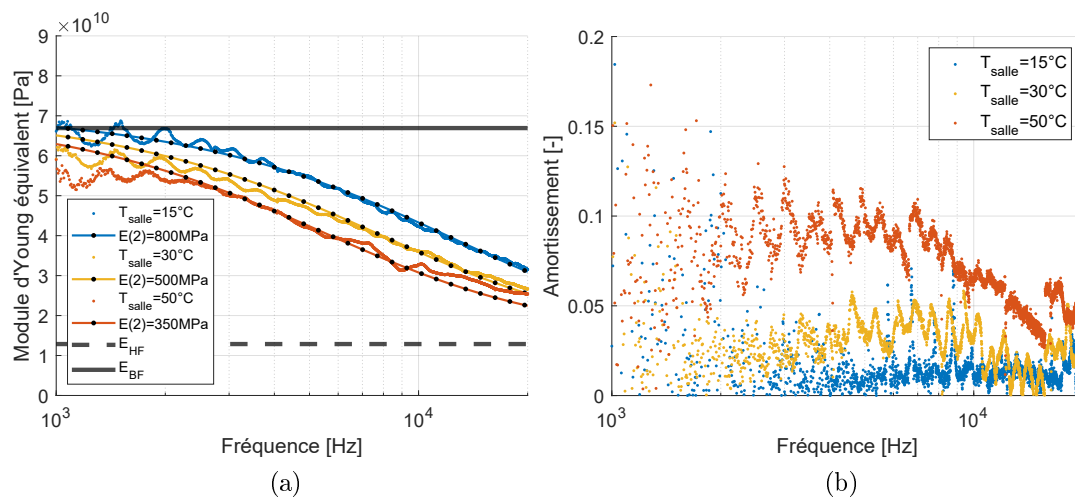


FIGURE 4.11 – (a) Module de Young équivalent en flexion et (b) Amortissement équivalent en fonction de la fréquence obtenus en utilisant CFAT pour l'échantillon montré à la Figure 4.6a pour différentes températures.

La température est un paramètre décisif dans la caractérisation des interfaces imparfaites pour un multicouche comportant au moins une couche viscoélastique, ou sensible à la température plus généralement. Si différents échantillons sont comparés afin de rendre compte de leurs différentes conditions de couplage, il est primordial qu'ils soient comparés à une même température.

### Vieillissement du cœur viscoélastique

La nature époxyde du cœur implique un temps de pause suffisant pour permettre la réticulation complète du matériau. Si la réticulation n'est pas complète, le comportement mécanique n'aura pas convergé, ou le potentiel adhésif attendu ne sera pas atteint. Il est stipulé par le fabricant de la colle bi-composante que le matériau est opérationnel au bout de 24 heures après le mélange des deux composants. Cependant, bien que l'adhésif soit opérationnel dans ces conditions, ses propriétés mécaniques n'ont pas convergé. Il est donc essentiel de connaître l'effet de ce vieillissement sur le matériau, afin de ne pas le confondre avec l'effet du couplage des couches successives.

La Figure 4.12 correspond à l'échantillon aluminium-époxy-aluminium montré à la Figure 4.6b, aux propriétés présentées au Tableau 4.1. Différentes mesures ont été effectuées à plusieurs jours d'intervalle afin de mettre en évidence un potentiel effet du vieillissement. Ainsi, le vieillissement du cœur a pour effet de légèrement augmenter son module de rigidité à température constante montré à la Figure 4.12a. Cela se justifie car l'adhésif bi-composant époxy se solidifie avec le temps lors du mélange des deux composants en créant de nouvelles liaisons chimiques (principe de réticulation). Cependant, l'effet est peu perceptible sur la partie réelle, il pourrait facilement se confondre avec l'ensemble des incertitudes expérimentales (masse échantillon et épaisseur totale notamment). En revanche, pour la partie imaginaire visible à la Figure 4.12b, l'amortissement montre un effet non négligeable du vieillissement. Il n'y a pas de décalage notable de la dynamique en fonction de la fréquence, comme vu pour la partie réelle, mais son maximum est divisé par plus de 2 sur une durée de moins de 10 jours entre la courbe bleue et la courbe rouge. Les différents tests, comme l'atteste la Figure 4.12, montrent qu'après 2 semaines les paramètres ont entièrement convergé. À ce stade d'avancement de la réticulation, les fluctuations encore présentes sont plus de l'ordre des conditions de mesure.

Il est aussi intéressant de visualiser aussi le champ de déplacement des différentes mesures de l'échantillon qui résume simplement les effets vus précédemment.

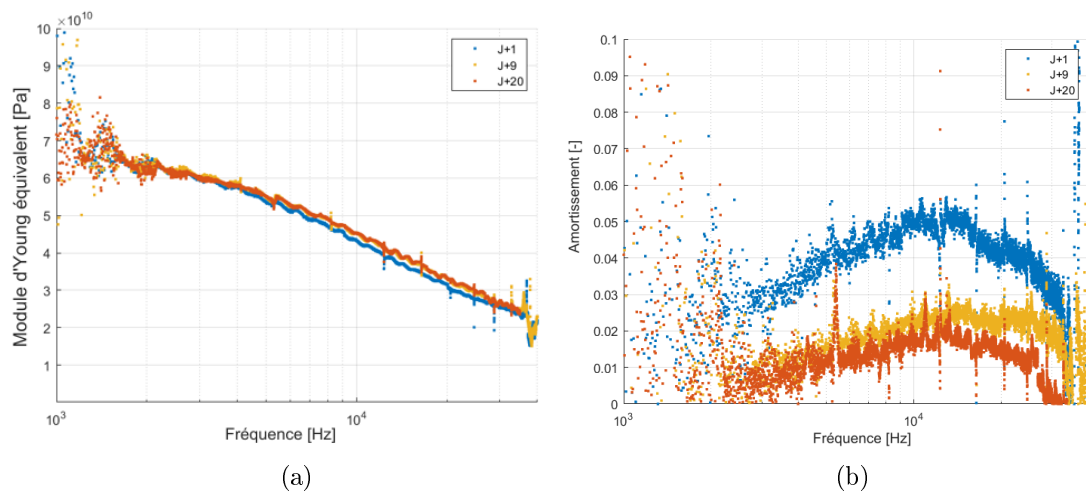


FIGURE 4.12 – (a) Module de Young équivalent en flexion et (b) Amortissement équivalent en fonction de la fréquence obtenus en utilisant CFAT pour l'échantillon montré à la Figure 4.6b à différentes dates post-fabrication.

Ces résultats sont montrés à la Figure 4.13. Les fréquences de résonances se décalent vers les hautes fréquences, ce qui traduit bien la rigidification du matériau. La variation de l'amortissement est aussi visible sur l'amortissement modal présenté par les résonances successives.

Le vieillissement est un paramètre important à prendre en compte lorsque des échantillons sont comparés. Si plusieurs jours de post-fabrication séparent deux jeux de données, il est bien possible de confondre l'effet d'un couplage imparfait avec l'âge d'un échantillon. Cependant, après 2 semaines, les paramètres mécaniques ayant convergé, il suffit de se trouver dans les mêmes conditions de mesure comme la température pour que la comparaison soit cohérente. Cela est montré à la Figure 4.11b, où l'amortissement mesuré 9 jours après la fabrication et 20 jours après la fabrication sont très proches.

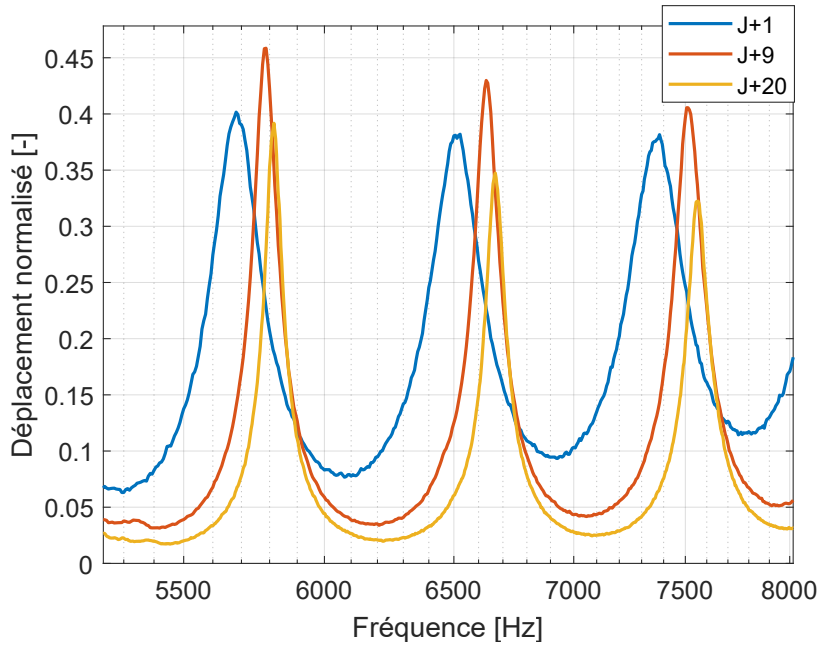


FIGURE 4.13 – Déplacement normalisé  $((U_1 - \min(U_1))/\max(U_1))$  en fonction de la fréquence de l'échantillon présenté à la Figure 4.6b à différentes dates post-fabrication.

### Épaisseur du cœur

L'épaisseur du cœur est un paramètre qui revêt plus de la fabrication, et a déjà été abordée dans la Section 4.1. Cependant, il est important de préciser que c'est un paramètre qui a des effets très proches d'une interface imparfaite. Pour mettre cela en évidence, des simulations à partir du modèle équivalent (détaillé au Chapitre 2) ont été réalisées. Les résultats montrant l'effet de l'épaisseur du cœur sont présentés à la Figure 4.14. Ils correspondent au cas d'étude du Tableau 4.3 qui est un cas représentatif de l'ensemble des échantillons expérimentaux.

Échantillons 1	$h$ [mm]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$E$ [MPa]	$\nu$	$\eta$
Peaux	3.2	2700	71	0.3	0.5%
Cœur	{0.25; 0.30; 0.35}	1300	2	0.22	10%

TABLE 4.3 – Propriétés du cas d'étude appliqué pour la Figure 4.14.

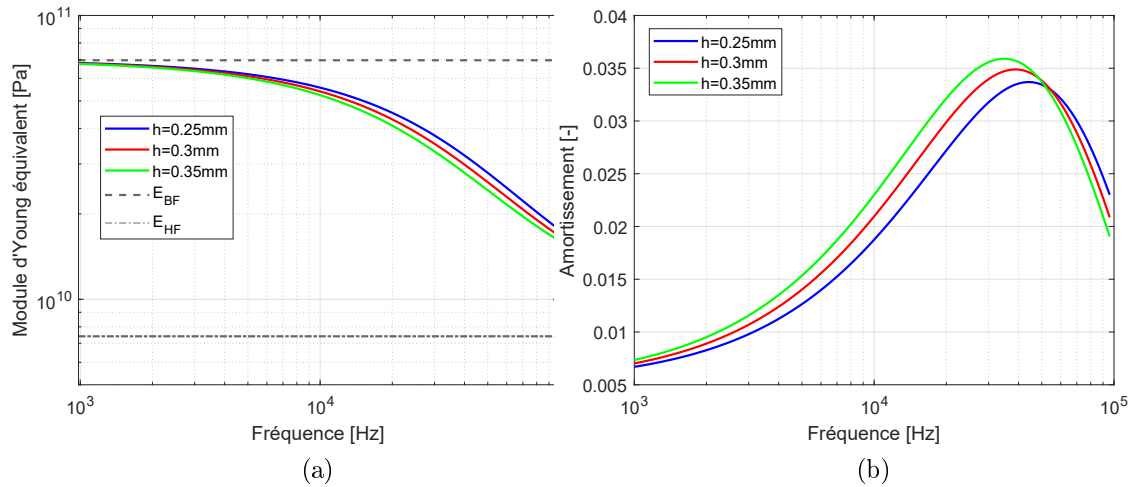


FIGURE 4.14 – Influence de l'épaisseur du cœur sur (a) le module de Young équivalent en flexion et (b) l'amortissement équivalent en fonction de la fréquence. Ces paramètres sont obtenus en utilisant le modèle présenté au Chapitre 2. Les propriétés matériaux correspondent au Tableau 4.3. L'épaisseur du cœur prend ainsi trois valeurs différentes pour chacune des courbes, soit  $h_2 = \{0.25; 0.30; 0.35\}$  mm.

On vérifie donc qu'une variation de l'épaisseur du cœur de  $\pm 17\%$  autour de la valeur centrale (0.30 mm) engendre une variation de la fréquence de cisaillement optimale  $f_{\text{opt}}$  de  $\pm 13\%$  par rapport à la valeur centrale avec  $f_{\text{opt}} = \{34; 39; 44\}$  kHz. Cette fréquence correspond au point d'inflexion du module de Young équivalent ou à l'amortissement maximal. Il est intéressant de noter que contrairement à ce qui est avancé par la modélisation des interfaces imparfaites, la variation d'épaisseur du cœur fait aussi varier la valeur de l'amortissement maximal. Cela est naturel car si le matériau absorbant est plus épais, alors il va davantage prédominer dans la déformation du multicouche.

## 4.2.2 Paramètres du banc de mesure

Le banc de mesure est constitué de nombreux paramètres, qu'ils soient propres à l'échantillon mesuré, aux paramètres de mesures, ou au système d'excitation. Le but de cette partie est de mettre en évidence les paramètres majeurs ainsi que les valeurs qui leur sont généralement attribuées. L'objectif est de permettre une

répétabilité des conditions expérimentales qui ont engendré les résultats montrés ultérieurement.

Les échantillons utilisés pour cette section sont présentés dans les Figures 4.6-4.8-4.10, présentées à la Section 4.1 qui traite du protocole de fabrication ainsi que des échantillons présentés dans ces travaux. Les propriétés mécaniques et géométriques sont connues dans leur ensemble à l'exception du module de rigidité du cœur ainsi que de son amortissement propre. C'est une variable qui est alors estimée en parallèle du paramètre d'interface  $B$ , ce qui implique donc une hypothèse supplémentaire. Cette hypothèse est que l'échantillon le mieux couplé obtenu est considéré comme parfaitement couplé, ce qui permet de fixer  $B = 0 \text{ m.Pa}^{-1}$  et de déterminer le module du cœur noté  $E_2$  pour l'échantillon choisi comme référence. Il est à noter que certains échantillons ont des peaux en aluminium, d'autres en verre, mais les modules de Young du verre et de l'aluminium sont similaires, leur amortissement respectif sont suffisamment faibles pour être confondus dans la dynamique, et leur masse volumique sont aussi similaires. Finalement, le seul paramètre qui variera en fonction des échantillons est naturellement l'interface, l'objet d'étude de ces travaux. Ce changement de matériau a été réalisé afin de visualiser plus simplement l'état de l'échantillon fabriqué, tout en conservant une dynamique semblable. Cependant, malgré la proximité des propriétés mécaniques de ces deux matériaux, les échantillons fabriqués à partir de l'un ou de l'autre matériau ne sont jamais comparés. Premièrement, cette comparaison entre échantillons sensiblement différents pourrait impliquer des incertitudes sur l'interprétation des résultats. Deuxièmement, nous avons suffisamment d'échantillons pour pouvoir les comparer au sein d'une même famille. Les caractéristiques propres aux échantillons sont rassemblées dans le Tableau 4.1.

Au sujet du protocole de mesure, la gamme de fréquence a pu évoluer au cours de ces travaux grâce à l'extension des résultats HF par filtrage des nombres d'ondes présenté au Chapitre 3. En revanche, les autres paramètres sont restés sensiblement les mêmes afin de conserver la qualité des résultats obtenus. Tous ces paramètres sont résumés dans le Tableau 4.4. Dans l'objectif de conserver une précision des résultats suffisante, il est important d'avoir suffisamment de points par longueur d'onde. Pour cela, il est généralement intéressant de relier la longueur

	Fréquence	Pas de maillage	Buzzer piézoélectrique
Valeurs	$f_{\min} = 1 \text{ kHz}$ , $f_{\max} = 100 \text{ kHz}$	2.8 mm	$\emptyset = 12 \text{ mm}$ , $f_{\text{résonance}} = 9 \text{ kHz}$

TABLE 4.4 – Paramètres du dispositif expérimental. Ces paramètres sont à titres indicatifs et permettent une reproductibilité des résultats montrés dans les présents travaux.

d’onde mesurée induite par la fréquence de mesure, souvent par le biais du nombre d’onde. Cependant, il n’est pas toujours évident d’estimer a priori le pas de maillage nécessaire à cause du comportement complexe d’un matériau multicouche, car son nombre d’onde change d’allure en fonction de la fréquence. En effet, comme précisé dans la thèse de Marchetti [78] la flexion dans une plaque épaisse est constituée de flexion pure et de cisaillement pur, à l’inverse d’une plaque mince qui ne considère donc que la flexion pure. Selon le type de déformation qui prédomine, l’allure du nombre d’onde d’une plaque épaisse va être affectée. Ainsi, le meilleur moyen de dimensionner le pas de maillage nécessaire est d’utiliser un modèle multicouche tel que le modèle de Guyader pour un multicouche isotrope par exemple. Sinon, le cas le plus défavorable peut être utilisé, ce qui correspond au nombre d’onde le plus élevé à fréquence égale, c’est-à-dire, l’onde de flexion.

### 4.3 Caractérisation dynamique d’une poutre sandwich aux interfaces imparfaites

Cette section aborde la caractérisation dynamique d’une poutre sandwich. Le but est donc d’apporter des résultats expérimentaux qui rendent compte du comportement dynamique de la structure étudiée, et particulièrement, des effets des interfaces imparfaites sur le comportement dynamique. L’identification des paramètres dynamiques est réalisée à l’aide de la méthode CFAT, présentée à la Section 3.2. Les paramètres mécaniques et géométriques de la structure sont supposés connus, sauf : le module de Young du cœur qui est toujours estimé a priori en prenant l’échantillon le mieux couplé et en faisant l’hypothèse qu’il est parfaitement couplé ( $B = 0$ ); et le paramètre d’interface  $B$ , qui est donc identifié



à l'aide du modèle présenté au Chapitre 2 relativement à l'échantillon considéré comme parfaitement couplé. Cette méthodologie se résume donc par le terme de caractérisation dynamique des interfaces d'un multicouche.

Dans cette section, la résolution inverse est appliquée dans deux types de visualisation : une visualisation fréquentielle ; et une visualisation spatiale, présentées respectivement avec des résultats dans deux sous-sections différentes. Ces deux types de visualisations peuvent jouer un rôle complémentaire, ce qui est une particularité très intéressante de CFAT par opposition à l'analyse modale par exemple, qui ne peut allier directement ces deux approches. Ce travail est l'enjeu de la troisième et dernière sous-section de la Section 4.3.

### 4.3.1 Résolution inverse, visualisation fréquentielle

Pour rappel, l'équation centrale de CFAT est l'Équation (4.1), détaillée au Chapitre 3 en faisant apparaître ici explicitement les fonctions de  $\omega$ . Une fois le champ de déplacement mesuré, la rigidité apparente  $E(x, \omega)$  est isolée. Pour une résolution inverse en fréquence, l'ensemble des solutions sur  $x$  sont moyennées afin de minimiser le bruit de mesure.

$$\frac{E(x, \omega)I}{\rho S} = \omega^2 \Delta(\omega)^4 \left[ \arccos\left(1 - \frac{\Delta(\omega)^2}{2\sqrt{A}}\right) \right]^{-4}, \quad (4.1)$$

Avec,  $A = w(x, \omega)/\delta_{\Delta}^{4x}$  estimée au sens des moindres carrés. Pour une poutre, le calcul au sens des moindres carrés est direct. En posant  $C = \delta_{\Delta}^{4x}$ , elle est réalisée par  $A = \frac{C^H w}{C^H C}$ , avec  $C^H$  l'hermitien de la matrice  $C$  (transposée-conjuguée de la matrice  $C$ ). Cette équation correspond à la résolution d'un système d'équations linéaires où chaque équation est engendrée par une mesure à une fréquence donnée comme indiqué par Leclère [65].

La Figure 4.15 montre les résultats pour trois échantillons présentés à la Figure 4.6 et correspondent donc aux échantillons A B et C du Tableau 4.1. L'échantillon A est supposé parfait comme indiqué plus haut, les propriétés du cœur n'étant pas connues a priori, il est nécessaire d'émettre une hypothèse afin de pouvoir utiliser le modèle. Le comportement expérimental est donc celui attendu par le modèle présenté au Chapitre 2, c'est-à-dire un décalage vers les basses fréquences

des paramètres dynamiques. Le modèle est calculé à partir des caractéristiques des échantillons, données au Tableau 4.1. Le cœur est toujours fixé en amont avec l'hypothèse d'un échantillon parfait. Après cela, le paramètre  $B$  est le seul paramètre qui est variable afin de correspondre de pouvoir caractériser l'interface des deux autres échantillons relativement à celui qui est considéré comme parfait. Cela permet ainsi d'obtenir une valeur expérimentale des paramètres d'interface  $B$ . On remarque naturellement que lorsque la valeur de  $B$  augmente, le modèle correspond davantage aux échantillons les moins bien couplés. Cependant, la partie imaginaire montre des résultats moins satisfaisants que la partie réelle pour ces échantillons. Le but de la caractérisation était principalement de correspondre à la pente ascendante entre 1 kHz et 10 kHz, car au-delà de ces fréquences l'amortissement est très variable. La divergence entre le modèle et l'amortissement expérimental peut provenir de nombreux paramètres (température, âge, alignement des couches, conditions aux limites, etc.) qui une fois sommés, peuvent affecter d'une manière non négligeable le comportement global. L'amortissement est particulièrement affecté par rapport à la rigidité équivalente, car la partie imaginaire est bien plus sensible que la partie réelle, plus sensible au bruit de mesure, mais aussi aux conditions de mesure (telle que la température).

Il est intéressant de noter que des amortissements maximaux très faibles ont pu être calculés dans ces travaux, soit aux alentours de 2%, avec une précision satisfaisante afin de caractériser un matériau. Il est relativement rare d'obtenir une variation de l'amortissement en dynamique en fonction de la fréquence pour des valeurs maximales si faibles. On trouve par exemple dans la bibliographie des mesures d'amortissements maximaux qui se situent entre 7% et 10% au moins.

Pour conforter les résultats apportés, d'autres échantillons ont été traités de la même manière afin de vérifier la robustesse de la caractérisation. Ces échantillons sont légèrement différents car constitués de verre, et les peaux ont une épaisseur 0.2 mm plus faible. Leurs propriétés sont aussi présentées au Tableau 4.1 (échantillons G1, G2 et G3), et les résultats sont présentés à la Figure 4.16. Ces résultats bénéficient de l'amélioration du traitement de données avec le filtrage présenté au Chapitre 3, ce qui explique les résultats plus large bande. L'identification du paramètre d'interface apporte ainsi des valeurs relativement proches des résultats

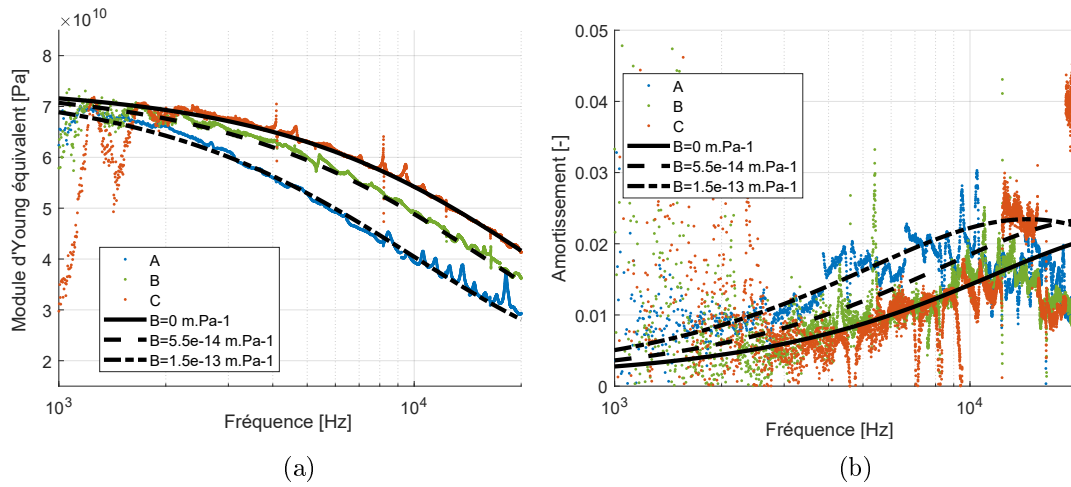


FIGURE 4.15 – (a) Module de Young équivalent en flexion et (b) Amortissement équivalent en fonction de la fréquence obtenus en utilisant CFAT pour les trois échantillons montrés à la Figure 4.6.

obtenus précédemment. Pour la rigidité équivalente, les résultats sont de moins en moins satisfaisants lorsque la fréquence est élevée. Cette différence entre le modèle et la mesure provient de la nature viscoélastique du cœur. En effet, sa rigidité augmente en fonction de la fréquence, ce qui n'est pas pris en compte par la modélisation présentée ici. Pour l'amortissement, les résultats sont plus satisfaisants que pour les échantillons en aluminium, mais il reste cependant quelques divergences lorsque le couplage diminue.

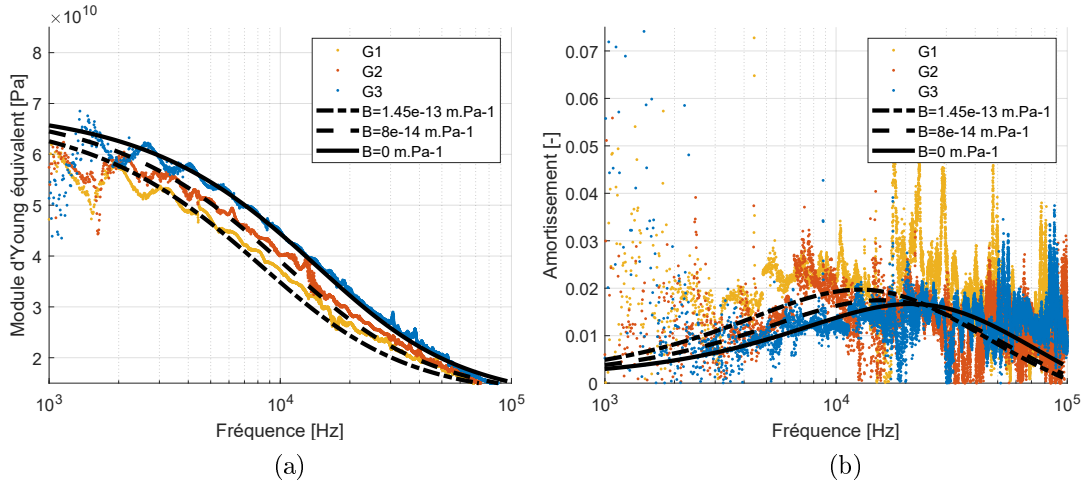


FIGURE 4.16 – (a) Module d'Young équivalent en flexion et (b) Amortissement équivalent en fonction de la fréquence obtenus en utilisant CFAT pour les trois échantillons montrés à la Figure 4.8. Pour rappel, la masse de colle pour chaque échantillon est de  $m_2(G_1) = 6.3$  g  $m_2(G_2) = 9.4$  g et  $m_2(G_3) = 9.8$  g.

Dans un cas plus extrême, la Figure 4.17 montre les résultats de l'échantillon B avec un nouvel échantillon, le D qui a pour particularité d'être très découplé. Il était par exemple possible de bouger légèrement les couches extérieures à la main et sans effort, mais elles étaient toujours couplées à la structure comme montré à la Figure 4.7. Les résultats montrent un découplage total pour une onde de flexion, car le module de Young apparent en flexion ne varie plus en fonction de la fréquence, et devrait correspondre à l'asymptote HF du tricouche. En revanche, le comportement dynamique d'un tricouche totalement découplé est toujours modélisable par le modèle équivalent en prenant  $B \rightarrow \infty$ . Cela correspond à la Figure 2.4 qui montrait que pour une certaine valeur de  $B$ , un seuil était atteint et son augmentation n'aurait plus aucun effet supplémentaire. La rigidité équivalente de l'échantillon D montre cependant une différence relative de 15% en moyenne avec le modèle. Cet écart peut provenir des incertitudes de mesure, grandement liées au pas  $\Delta$  de la méthode CFAT ou de la masse mesurée des échantillons.

Des résultats similaires aux figures présentées ici ont été obtenus par Le Deunf au cours de sa thèse, affichés dans ses annexes [64]. Ils sont rappelés dans le présent manuscrit à la Figure 4.18. Ses résultats concernaient la caractérisation dynamique

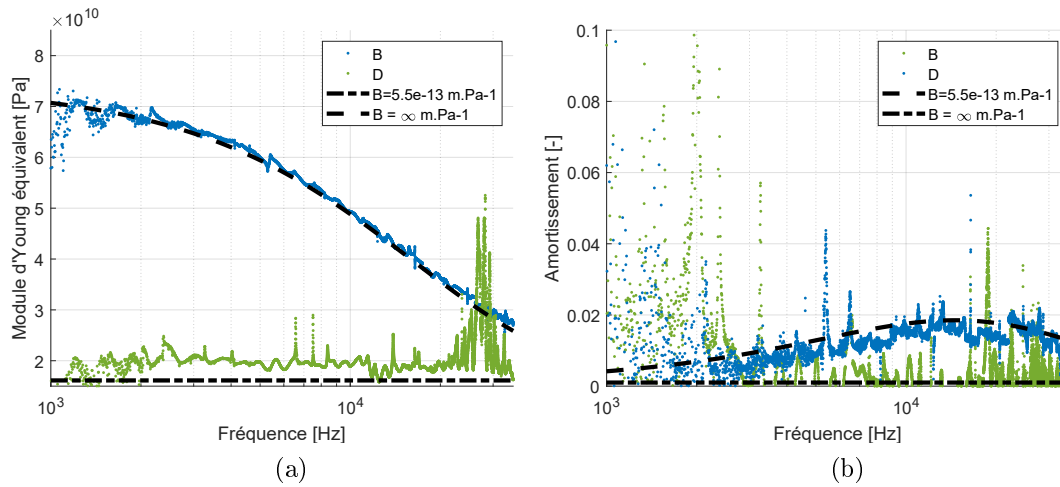


FIGURE 4.17 – (a) Module de Young équivalent en flexion et (b) Amortissement équivalent en fonction de la fréquence obtenus en utilisant CFAT pour l'échantillon B et l'échantillon D. Les échantillons sont relativement similaires, sauf que l'échantillon D a été découplé lors de la fabrication.

selon l'application de CFAT d'un bicouche acier-poreux (nommé « *Plaque+mousse* » à la Figure 4.18) où le couplage entre ces deux matériaux était effectué selon quatre différents cas : « *collé* » ; « *comprimé* » ; « *posé* » ; « *proche* ». Du point de vue des présents travaux, cela correspond respectivement à quatre types d'interface : couplage par l'ajout d'une couche adhésive (passage à un tricouche) ; couplage mécanique par compression dit « *kissing bond* » ; découplage partiel ; totalement découplé. On remarque notamment que dans le cas où le poreux est totalement découplé (« *proche* »), le comportement dynamique est identique au cas où la plaque est seule, ce qui correspond bien à un cas où  $B \rightarrow 0$  pour un bicouche. De plus, il est possible d'observer une augmentation du paramètre d'interface  $B$  entre les cas où le poreux est simplement posé  $B_{\text{posé}}$  et comprimé  $B_{\text{comprimé}}$  avec donc  $B_{\text{posé}} > B_{\text{comprimé}}$  car le couplage par compression est bien sûr une condition de couplage supérieure au cas « *posé* » qui correspond à un découplage partiel. Cependant, il est possible que le couplage par compression modifie le module de rigidité apparent du poreux et son amortissement en lui appliquant ainsi une pré-contrainte, ce qui rend l'interprétation des résultats du point de vue des interfaces plus incertaine. Le cas collé présente une dynamique très différente des autres cas

par l’ajout d’une couche visqueuse, et ne peut donc pas être comparé dans le cadre des interfaces.

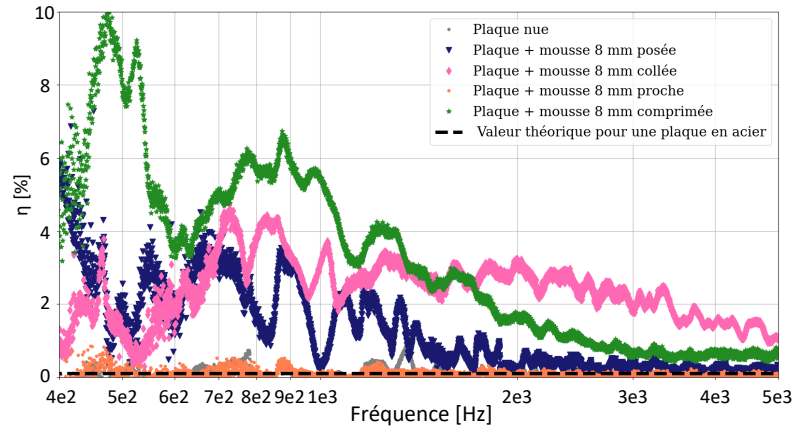


FIGURE 4.18 – Facteur de perte équivalent en fonction de la fréquence pour différents contacts entre une mousse de 8 mm d’épaisseur et une plaque en acier de 1 mm d’épaisseur. [64]

### 4.3.2 Résolution inverse, visualisation spatiale

Leclère et al. notamment ont montré dans [65] que CFAT a la particularité de pouvoir rendre compte des propriétés mécaniques d’une structure spatialement. L’Équation (4.1) est habituellement résolue en fonction de la fréquence et en fonction de l’espace. La rigidité apparente de flexion est ensuite calculée en fonction de l’espace pour chaque fréquence ( $E(x, \omega)$  pour une poutre,  $E(x, y, \omega)$  pour une plaque). En pratique, pour limiter le bruit de mesure, cette rigidité va être au moins moyennée sur une courte bande de fréquence, permettant ainsi une visualisation spatiale correcte des paramètres dynamiques. La valeur obtenue est donc principalement à but représentatif. Elle atteste d’un comportement moyen autour de la fréquence centrale choisie, et non d’un comportement réel à une fréquence donnée. En revanche, cela suffit amplement afin de rendre compte de la dynamique d’une structure spatialement. Un exemple est montré à la Figure 4.19. Les deux visualisations sont montrées simultanément pour vérifier la largeur de la bande fréquentielle utilisée pour la visualisation spatiale.

Les résultats présentés ici sont obtenus à partir des échantillons vus précé-

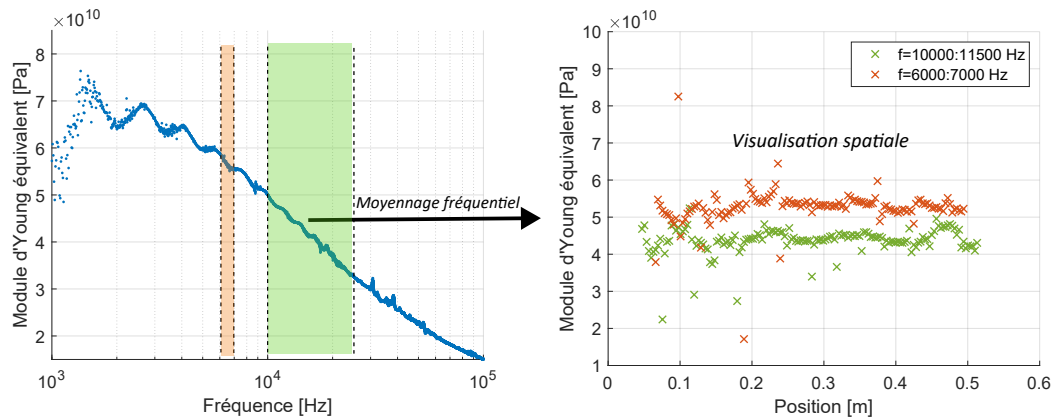


FIGURE 4.19 – Exemple de l’obtention du module de Young en visualisation spatiale à partir des données en visualisation fréquentielle. Ces résultats ont été obtenus pour l’Échantillon G1.

demment, et permettent d’exposer cette autre visualisation possible par CFAT. Une partie des résultats sont présentés à la Figure 4.20. L’amortissement n’est pas affiché pour cette visualisation car ils ne sont pas suffisamment précis. En effet, la forte dépendance fréquentielle du comportement dynamique de la structure, la résolution fréquentielle trop faible pour ce type d’application, et la plus grande sensibilité au bruit de l’amortissement, impliquent une dispersion trop importante de la partie imaginaire.

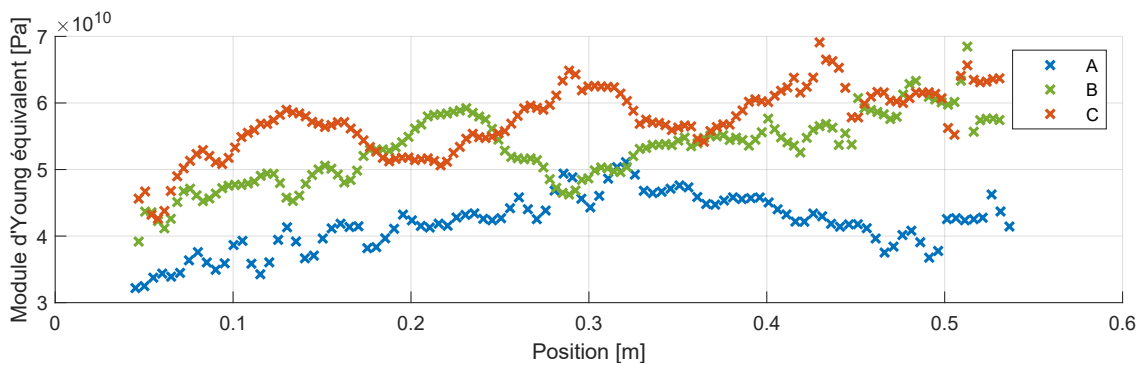


FIGURE 4.20 – Module de Young équivalent en flexion en fonction de la position obtenu à partir de CFAT pour les trois échantillons montrés à la Figure 4.6. Ces résultats ont été obtenus sur une gamme fréquentielle allant de  $f = 10$  kHz à  $f = 11.5$  kHz.

Les résultats montrent une rigidité variable en fonction de la position sur la longueur de la poutre. Cela est cohérent avec les structures étudiées qui possèdent un collage d'une qualité croissante linéairement en moyenne. Pour vérifier cela, les photographies des échantillons ont été traitées afin d'en sortir le profil de collage obtenu. Un exemple est fourni à la Figure 4.21 pour l'échantillon A. L'image d'origine a été transformée en niveaux de gris uniquement, et des seuils ont été imposés dans le but d'obtenir la valeur 0 (totalement noir) lorsque de la colle est présente, et la valeur 1 (totalement blanc) lorsqu'il n'y a pas de colle. L'épaisseur de colle étant constante, la proportion  $\frac{\text{largeur de colle}}{\text{largeur totale}}$  rend directement compte de la quantité de colle présente afin d'améliorer ou non le couplage. La Figure 4.21c montre ainsi cette proportion graphiquement et permet d'avoir un indicateur pour comparer les modules de Young équivalents à la quantité de colle.

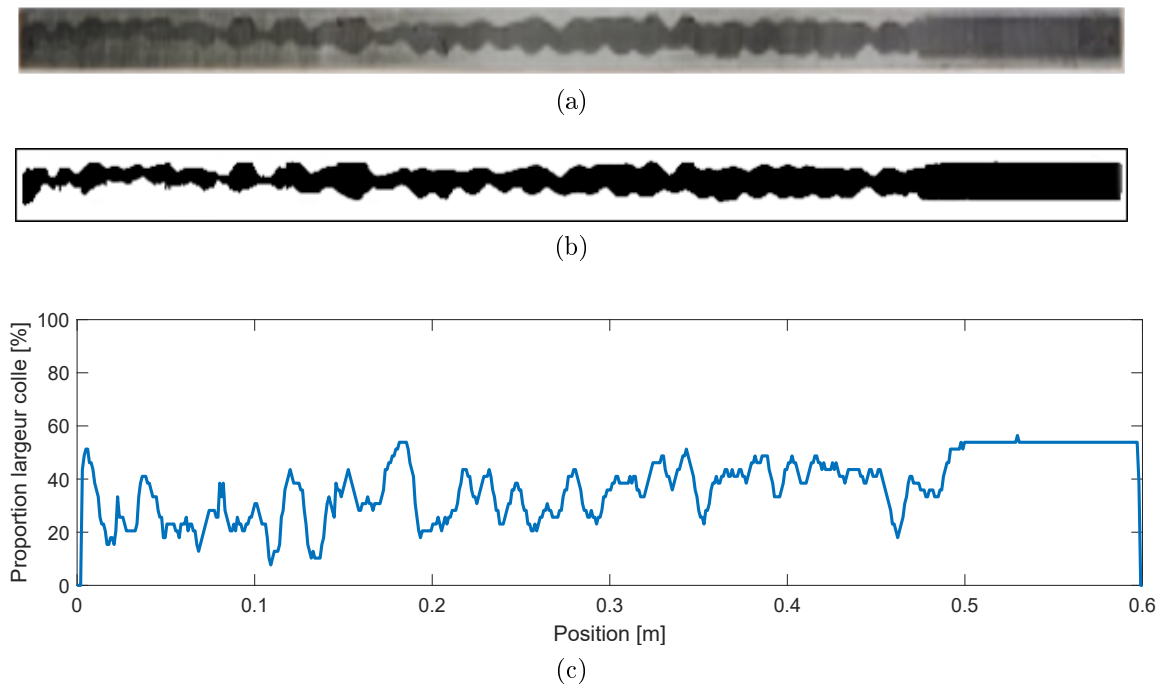


FIGURE 4.21 – (a) Photographie de l'échantillon A (b) Photographie traitée avec des seuils de niveaux de gris (c) Proportion de colle dans la largeur (axe transverse des images)

Cette comparaison est faite sur l'ensemble des échantillons à la Figure 4.22, afin de vérifier la fiabilité de cette analyse. Le résultat est très satisfaisant sur les



trois échantillons, car la tendance globale est bien décrite, mais quelques régions spatiales montrent des résultats à l'évolution moins corrélée (entre 0.075 et 0.175m pour l'échantillon C par exemple). L'erreur peut principalement provenir du traitement d'image qui est perfectible, avec l'utilisation de la détection des bords par exemple, afin d'appliquer les seuils (soit 0 soit 1) sur une région géométrique au lieu de faire cela sur des niveaux de gris. L'erreur peut provenir aussi de la région fréquentielle moyennée. En effet, ces résultats ont été obtenus sur une gamme fréquentielle allant de  $f = 10$  kHz à  $f = 11.5$  kHz, et le comportement du tricouche étant fortement lié à la fréquence, il est possible d'observer un comportement global qui n'est pas représentatif de la réelle dynamique. Cependant, la nécessité d'obtenir des résultats exploitables implique le fait de moyenner sur un spectre relativement large. Afin de réduire ce biais par moyennage, une solution serait d'augmenter la résolution fréquentielle et/ou d'effectuer davantage de moyennes à la mesure.

Afin de mettre en évidence d'une manière plus robuste l'effet de la largeur de colle sur le couplage, des échantillons en forme de biseau ont été fabriqués de manière plus reproductible (Figure 4.10). Comme pour tous les autres échantillons, des réglettes ont été utilisées pour gérer la largeur, mais elles ont été posées en diagonales afin de pouvoir produire la forme recherchée. Ces échantillons sont présentés à la Figure 4.10. L'échantillon "Biseau 1" a une largeur de colle qui varie de 2.8 cm à 0.2 cm de manière linéaire, l'échantillon "Biseau 2" a une largeur qui varie de 2.7 cm à 0.9 cm de manière linéaire. Ces échantillons ont été fabriqués en parallèle dans les mêmes conditions, et mesurés pareillement. Les résultats sont affichés à la Figure 4.23, et correspondent à la rigidité de flexion moyennée de 10 kHz à 11.5 kHz. On retrouve bien les pentes induites par les différentes largeurs de collage produites. Les échantillons "Biseau 1" et "Biseau 2" ont plus ou moins la même largeur maximale, mais la largeur minimale atteinte varie d'un facteur 5 environ, ce qui a des effets directs sur le couplage.

Il est intéressant de noter que lorsque les droites qui représentent le taux de collage des deux échantillons respectivement se croisent, leurs rigidités équivalentes en flexion se croisent aussi. Cela montre la répétabilité du couplage obtenu par la largeur de colle. Il est aussi intéressant de noter que pour un certain taux de collage (environ 60%), l'effet du couplage semble se stabiliser. En effet, la pente

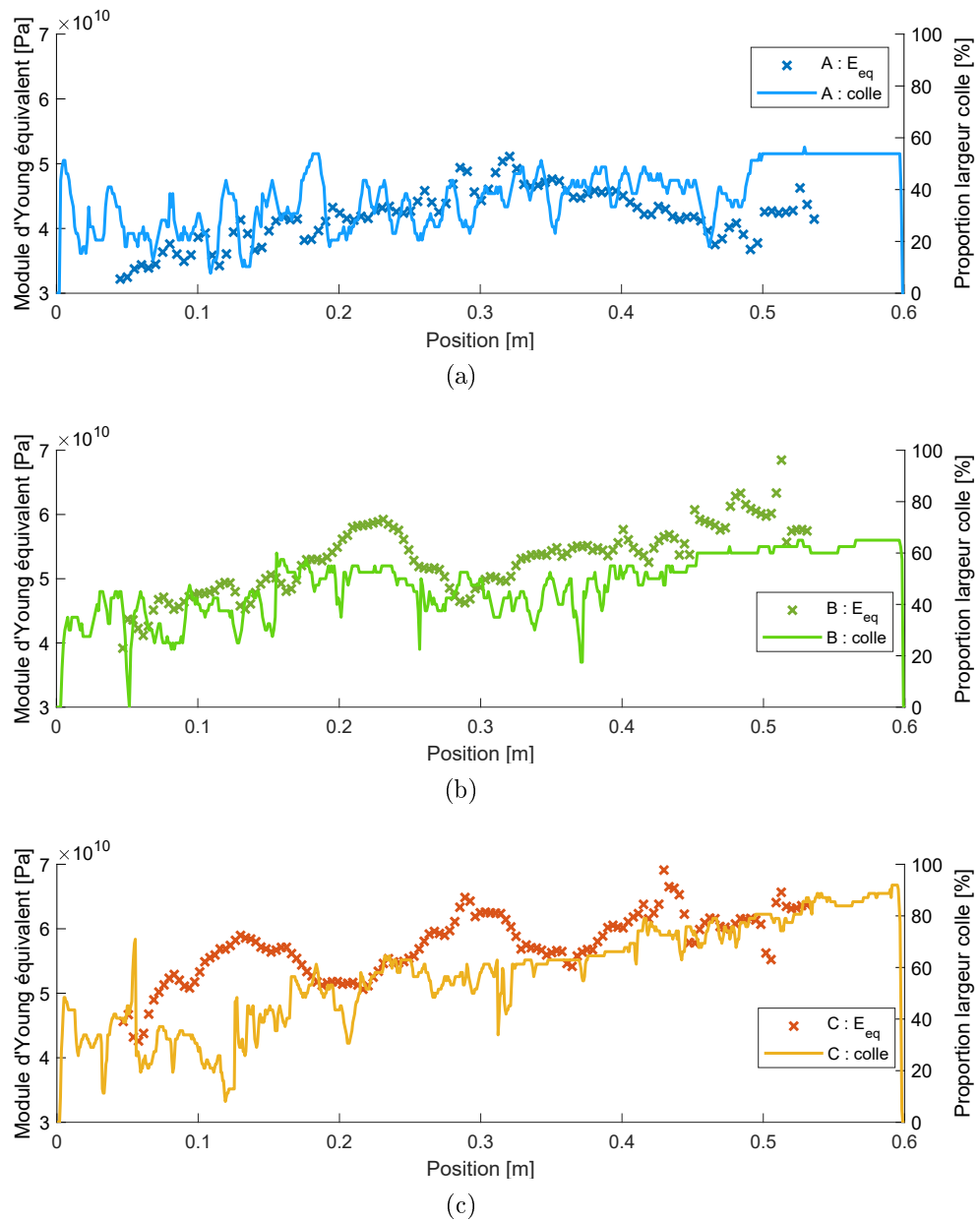


FIGURE 4.22 – Comparaison entre le module de Young équivalent (axe transverse de gauche) en fonction de la position et la quantité de colle présente en largeur (axe transverse de droite) pour (a) l'échantillon A, (b) l'échantillon B et (c) l'échantillon C.

du nuage de points est plus faible, que ce soit pour l'échantillon "Biseau 1" ou "Biseau 2" lorsque cette valeur du taux de collage est atteinte. Cela traduirait

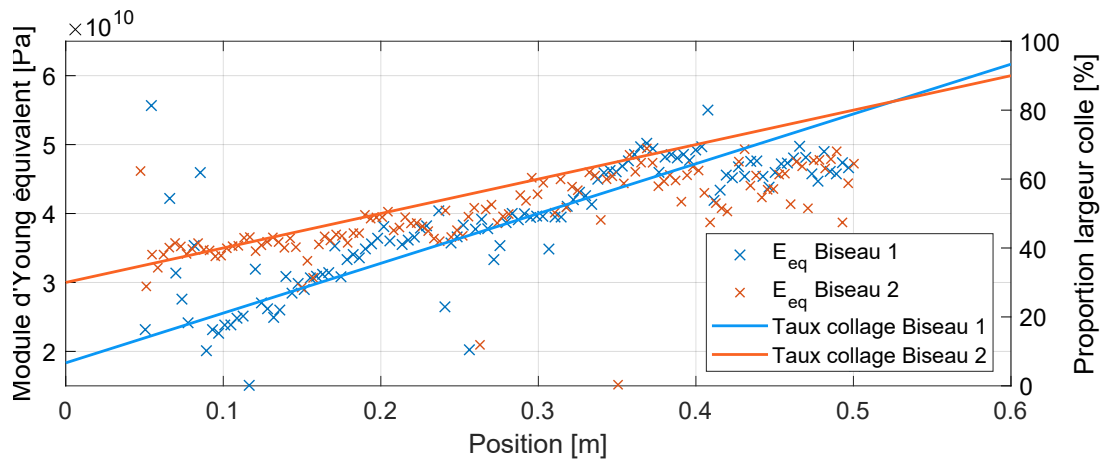
une sensibilité limitée du couplage des peaux en fonction de la largeur de colle appliquée, pour une valeur seuil avoisinant les 60% de largeur de colle le couplage n'évolue plus significativement. Autrement dit, pour cette valeur seuil, le couplage semble avoir convergé vers un couplage parfait. En effet, augmenter la proportion de colle n'améliore plus le couplage des peaux, ce qui correspond par définition à un couplage parfait.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.23 – (a) Échantillon « Biseau 1 » (b) Échantillon « Biseau 2 » (c) Module de Young équivalent en fonction de la position pour les deux échantillons avec un cœur en forme de biseau montrés à la Figure 4.10. Pour rappel, l'échantillon "Biseau 1" a une largeur qui varie de 2.8 cm à 0.2 cm, l'échantillon "Biseau 2" a une largeur qui varie de 2.7 cm à 0.9 cm.

Afin de voir la sensibilité du plateau de couplage obtenu à partir de 60 % de largeur de colle dans la Figure 4.23, les mêmes calculs ont été répétés sur l'échantillon « Biseau 1 » mais pour différentes plages fréquentielles. Ces résultats sont affichés à la Figure 4.24. La largeur de colle semble ainsi de moins en moins un paramètre influent lorsque la fréquence d'analyse diminue. En effet, pour la bande

fréquentielle  $f = 10 : 11,5$  kHz, le module de Young équivalent se stabilise vers 35 cm. En revanche, pour la bande fréquentielle  $f = 2,3 : 2,5$  kHz, le module de Young équivalent se stabilise déjà vers 25 cm. Ce dernier est aussi disponible sur une région spatiale plus réduite car l'adaptation du pas pour le schéma aux différences finies réduit le nombre de points exploités. Finalement, cela signifie que les grandes longueurs d'onde (basses fréquences) sont moins sensibles à l'effet de la largeur de colle que les petites longueurs d'onde (hautes fréquences). Cela paraît intuitif car plus la longueur d'onde est petite, plus l'onde sera sensible à des variations spatiales des paramètres mécaniques telle que l'hétérogénéité d'un matériau, ou de couplage dans le cas présent. De plus, le découplage partiel des couches étant une fonction à la fois du paramètre  $B$  et de la fréquence  $f$  de l'onde de flexion, il est naturel que la variation du module de Young, indicateur du couplage dans les présents travaux, soit affecté différemment selon le couplage et la fréquence. En d'autres termes, cela signifie que la zone du matériau la mieux couplée (au  $B$  le plus faible), se découplera moins rapidement en fonction de la fréquence  $f$ . La contraposée implique que la zone du matériau la moins bien couplée (au  $B$  le plus élevé), se découplera plus rapidement en fonction de la fréquence  $f$ .

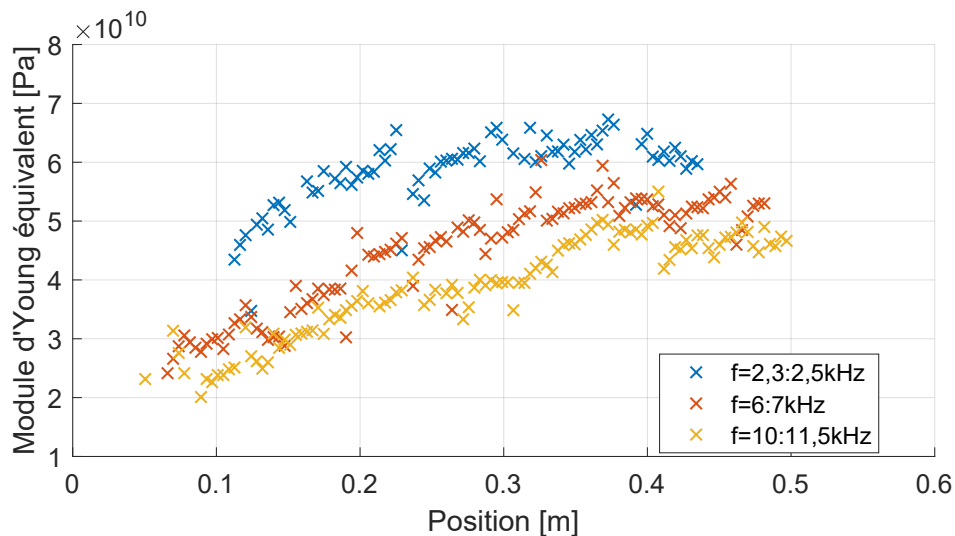


FIGURE 4.24 – Module de Young équivalent en fonction de la position pour l'Échantillon « Biseau 1 » pour 3 plages fréquentielles différentes.

### 4.3.3 Résolution inverse pour approche complémentaire

La résolution inverse avec une visualisation fréquentielle ou spatiale a été ainsi développée. Cependant, il est aussi intéressant d'utiliser ces deux approches d'une manière complémentaire. En effet, afin de grandement diminuer le biais expérimental, issu par exemple de la variation de la température ou du vieillissement de l'échantillon vus à la Section 4.2.1, comparer un échantillon à lui-même en le divisant en différentes zones peut se révéler être utile.

Premièrement, un calcul spatial est réalisé sur une bande fréquentielle raisonnablement large. Ensuite, différentes régions peuvent être identifiées si l'échantillon ne présente pas un profil de rigidité homogène spatialement. Finalement, ces régions sont isolées, et le calcul pour la visualisation fréquentielle n'est effectué que dans cette région. La Figure 4.25 montre les résultats issus de l'application de cette méthode.

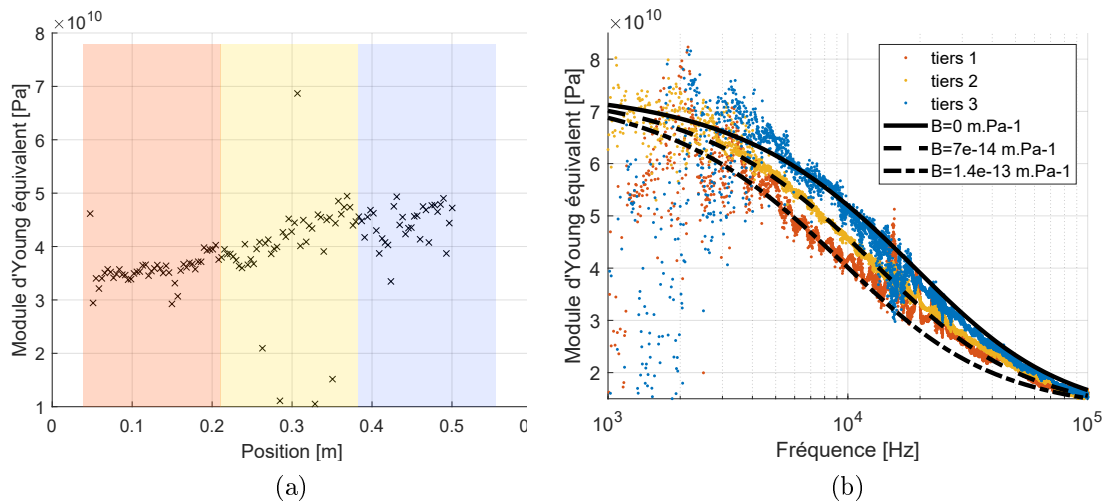


FIGURE 4.25 – Module de rigidité avec une (a) Visualisation spatiale découpée en trois zones (b) Visualisation fréquentielle par portion correspondant aux trois zones découpées ci-contre. Ces résultats ont été obtenus pour l'échantillon "Biseau 2".

La variation spatiale est ainsi de nouveau présentée, mais conjointement avec sa division en trois zones égales. L'utilisation de ces trois zones pour le calcul fréquentiel est montrée à la Figure 4.25b. La référence ( $B = 0 \text{ m.Pa}^{-1}$ ) est choisie au

sein même de cette structure. La variation spatiale du paramètre d'interface  $B$  est donc mis en évidence, ainsi que simplement l'effet de ce dernier sur la dynamique du tricouche. En effet, libéré de nombreuses variations expérimentales (différents échantillons, différentes conditions de mesure), le seul paramètre qui va affecter la dynamique de ce tricouche est ainsi son interface.

Une courbe supplémentaire a été réalisée sur l'échantillon "Biseau 2" afin de montrer son équivalence à l'analyse modale sur certains points. Ces résultats sont montrés à la Figure 4.26. Les résultats en amortissement ne sont pas affichés car pour cet échantillon le bruit était trop important. On vérifie donc sur la Figure 4.26 que l'analyse modale correspondrait au 2<sup>ème</sup> tiers, autrement dit, à la valeur médiane entre l'ensemble des tiers. Elle est donc encadrée par le module de rigidité équivalent du 1<sup>er</sup> tiers et du 3<sup>ème</sup> tiers. Elle correspond aussi bien sûr à l'application de CFAT à l'ensemble de la poutre, puisque le résultat modal correspond à une analyse globale. Cette comparaison est une manière de valider les résultats obtenus par CFAT, très sensible au pas du maillage. Mais aussi de montrer la force de ce traitement de données par rapport à l'analyse modale. En effet, il est impossible pour l'analyse modale d'obtenir directement des résultats en fonction de la fréquence pour différentes régions de l'échantillon étudié. À l'inverse, cela est très simple avec CFAT, les seuls inconvénients étant l'augmentation du bruit sur l'ensemble du spectre et le manque de longueur pour estimer correctement les grandes longueurs d'onde dans le schéma aux différences finies. Les déformées modales expérimentales et théoriques pour deux modes de l'échantillon « Biseau 2 » sont comparées à la Figure 4.27. Ces déformées modales et alternativement les rigidités obtenues par analyse modale montrées à la Figure 4.26 sont obtenues de la même manière qu'au Chapitre 3. La première étape consiste à détecter le mode concerné, ce qui est fait en comptant le nombre de ventres d'amplitude du déplacement. Ensuite, l'Équation (3.11) est utilisée en modifiant la valeur du module de Young injectée afin de minimiser l'écart entre la fréquence propre du mode théorique et celle du mode expérimental. Le module de Young permettant de minimiser cet écart est donc le module de Young de la poutre équivalente en flexion choisie. Cela permet de comparer les déformées modales expérimentales et théoriques. La déformée modale théorique présente dans tous les cas une longueur

d'onde constante dans la longueur de la poutre. En revanche, une légère variation de la longueur d'onde est visible pour les déformées expérimentales, ce qui engendre une variation du module de Young identifié comme montré à la Figure 4.26

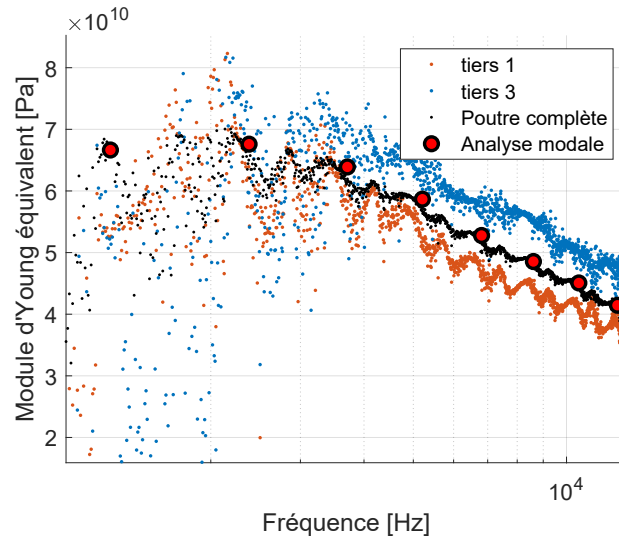


FIGURE 4.26 – Modules de rigidité équivalents en fonction de la fréquence pour le premier tiers (tiers 1) et le troisième tiers (tiers 3) montrés à la Figure 4.25 affichés avec l'analyse modale de la rigidité équivalente et l'application de CFAT sur l'ensemble de l'échantillon en fonction de la fréquence (La méthodologie est expliquée au Chapitre 3).

Ce même type d'analyse est effectué sur un tricouche avec un film fin de cellophane entreposé entre une interface aluminium-époxy, au centre du tricouche. Une schématisation de cette fabrication en vue de dessus est montrée à la Figure 4.28. Un film de cellophane a été choisi afin de découpler l'aluminium de la colle époxyde, car il n'adhère pas à la colle époxyde, et permet ainsi un découplage. L'autre avantage de ce matériau est qu'il est relativement fin, et présente alors une épaisseur négligeable face à l'épaisseur totale et aux épaisseurs des couches successives. Les résultats relatifs à cette structure sont montrés à la Figure 4.29. L'échantillon montre ainsi trois zones caractéristiques qui sont dans l'ordre : partiellement couplé, totalement découplé, partiellement couplé. Le premier et dernier tiers correspondent donc aux zones couplées, et présentent alors une rigidité apparente en flexion relativement élevée. Elles présentent le même taux de collage et donc des résultats spatiaux et fréquentiels similaires. Le tiers du milieu, qui

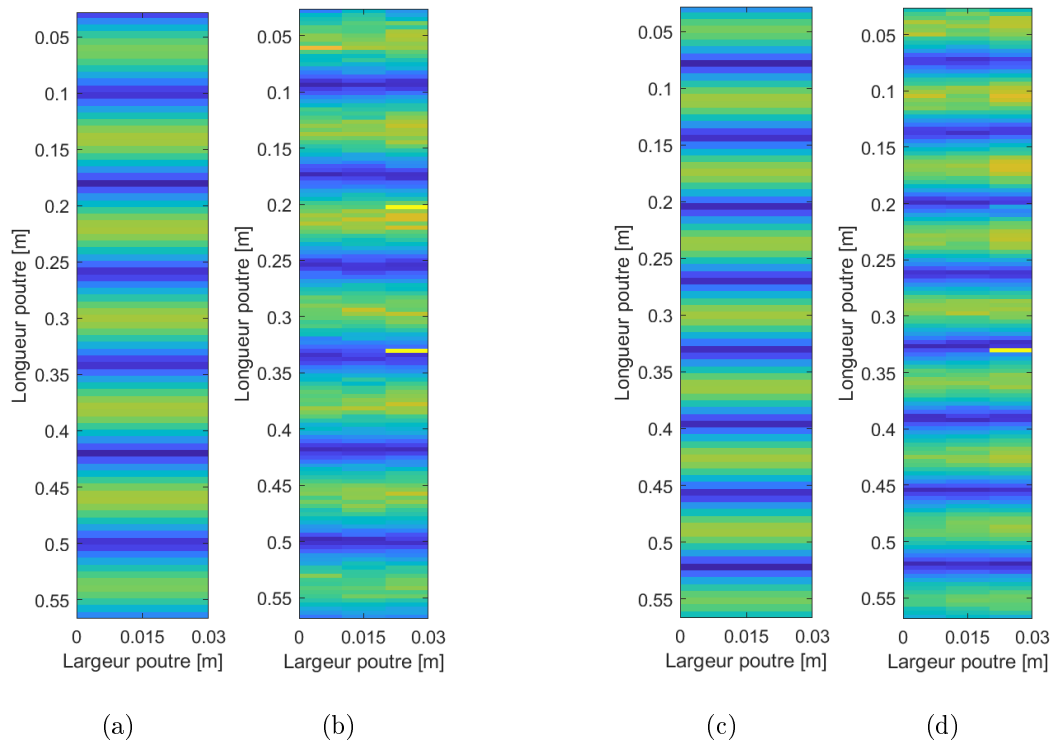


FIGURE 4.27 – Déformée modale d'une poutre libre-libre du : 7ème mode pour  $E_{2380\text{Hz}} = 67.5$  GPa (a) théorique (b) expérimentale ; 9ème mode pour  $E_{3710\text{Hz}} = 63.9$  GPa (c) théorique (d) expérimentale.

correspond à la zone cellophanée est quant à elle bien plus souple, ce qui est une conséquence du découplage presque total des couches. En effet, la valeur montrée dans la visualisation spatiale pour cette zone, qui correspond à environ 15 GPa, est la valeur obtenue sur l'ensemble du spectre pour son calcul en fréquence. Cette valeur correspond au cas où  $B \rightarrow \infty$  m.Pa<sup>-1</sup>, et donc à l'asymptote HF du tri-couche étudié. Cela prouve donc que le découplage est déjà atteint, pour toutes les fréquences mesurées. Ces résultats font écho à la Figure 4.17 par exemple, mais avec une meilleure correspondance modèle-mesure. Les résultats en BF pour le 1<sup>er</sup> tiers et le 3<sup>ème</sup> tiers divergent à cause du manque de longueur utilisée dans l'estimation du nombre d'onde. En effet, la longueur utilisée pour appliquer CFAT étant 3 fois plus petite à cause de la division en trois tiers, la taille de la région utilisée



dans l'estimation des nombres d'onde n'est pas suffisante en BF car les longueurs d'ondes à estimer sont d'une longueur supérieure à la longueur considérée pour le calcul.

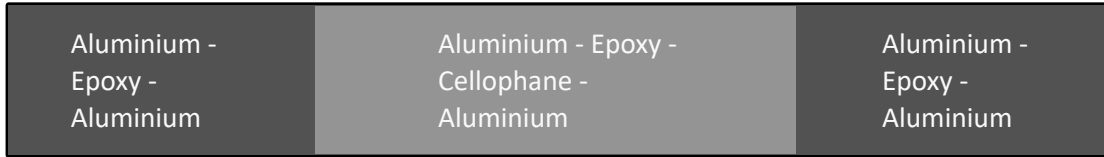


FIGURE 4.28 – Schéma du tricouche aluminium-époxy-aluminium, avec l'introduction de cellophane dans une interface, sur un tiers (20 cm) du tricouche.

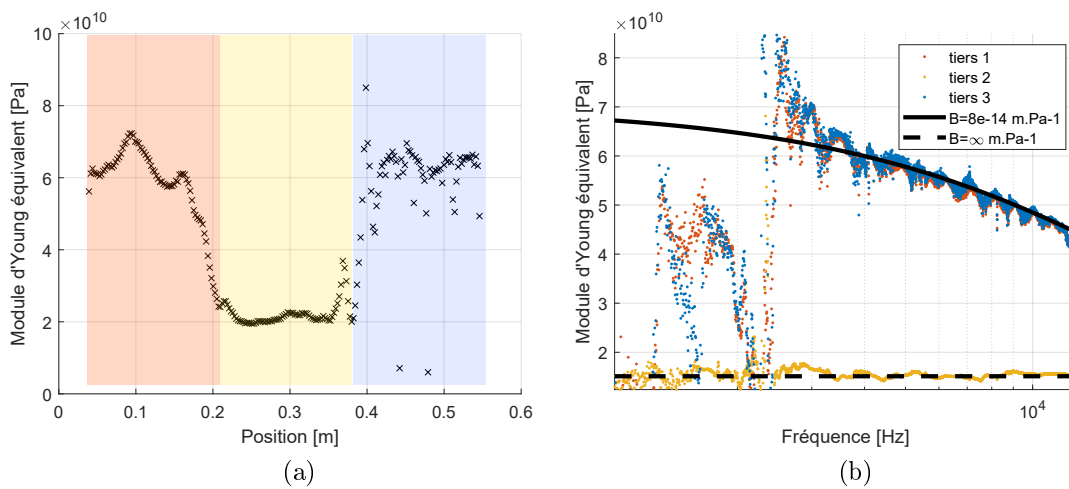


FIGURE 4.29 – Module de rigidité avec une (a) Visualisation spatiale découpée en trois zones obtenues sur la largeur de bande  $f = 4500 : 5500$  Hz, (b) Visualisation fréquentielle par portion correspondant aux trois zones découpées ci-contre. Ces résultats ont été obtenus pour l'échantillon avec de la cellophane.

Dans le cadre du tricouche présenté ici, l'importante discontinuité spatiale du couplage rend compte de dynamiques très différentes localement. Ce type de comportement n'est pas modélisable par le modèle actuel d'une manière globale. Autrement dit, il n'est pas possible d'avoir une valeur du module de Young équivalent en fonction de la fréquence uniquement, car l'hypothèse d'homogénéité spatiale du modèle en serait rompue. Ce qui est le cas aussi pour le traitement des données par la méthode CFAT. Ces fortes discontinuités rendent les résultats fréquentiels

incertains, car la dynamique globale oscille entre le découplage total et le couplage partiel selon les fréquences. De plus, le comportement moyen ne serait finalement pas vraiment représentatif de la dynamique réelle. Cependant, l'écriture spatiale de CFAT résout toutes ces problématiques, et rend ainsi l'analyse de ce type de matériau possible. Le découpage en zone et l'application de CFAT dans ces différentes zones spatiales montrées ici permettent ainsi une analyse en fréquence fiable et cohérente. Ces zones sont aussi visibles à partir du déplacement mesuré affiché à la Figure 4.30. On vérifie en effet une forte variation de la longueur d'onde selon la zone étudiée, comme vu pour la Figure 3.16 dans une moindre mesure. Ici, la forte variation du paramètre d'interface engendre une forte variation du couplage et donc de la longueur d'onde.

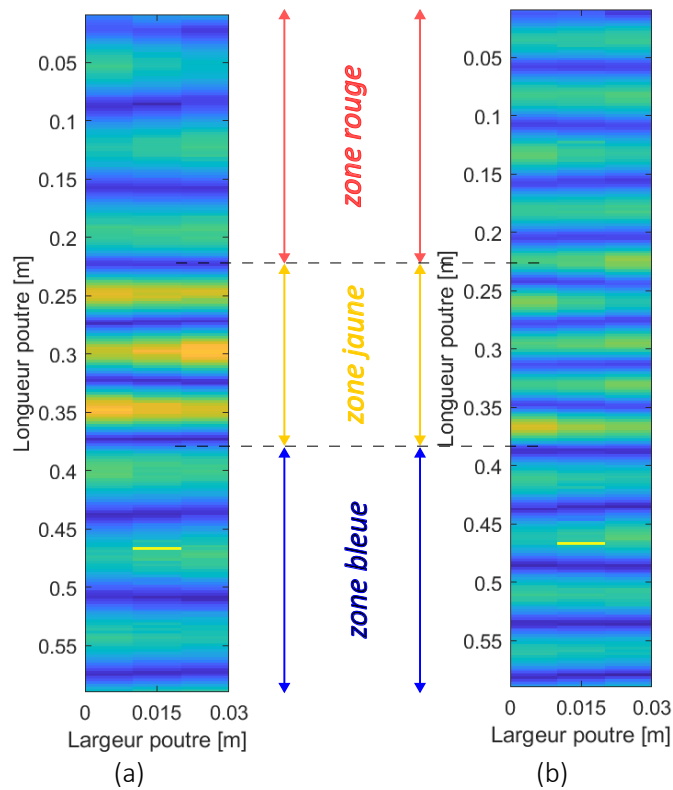


FIGURE 4.30 – Déplacement transverse expérimental à (a)  $f = 3000$  Hz, (b)  $f = 5710$  Hz.

#### 4.3.4 Résultats expérimentaux supplémentaires sur des multicouches aux interfaces hétérogènes spatialement

Les échantillons G4 et G5, présentant respectivement 5 carrés de cellophane avec un côté de 2 cm chacun et 10 carrés de cellophane avec un côté de 1,5 cm chacun, ont été analysés afin d'étudier l'effet des morceaux de cellophane plus discret que pour l'application présentée à la Figure 4.29. Les résultats en fréquence pour les deux échantillons sont présentés à la Figure 4.31.

On vérifie ainsi que dans la version large bande ou plus précisément dans la version zoomée à la Figure 4.31b que les résultats en fréquence sont confondus alors que le taux d'imperfection est pourtant différent. En effet, l'échantillon G4 présente une surface totale de 20 cm<sup>2</sup> de cellophane, alors que l'échantillon G5 présente une surface totale de cellophane de 22.5 cm<sup>2</sup>. L'analyse modale en support des résultats CFAT aussi présentée dans cette figure aide à confirmer la fiabilité de ces résultats. Cependant, l'analyse spatiale en CFAT présentée à la Figure 4.32, accompagnée d'une photographie des deux échantillons, montre une sensibilité non négligeable aux carrés de cellophane. Cette sensibilité n'est pas visible en basses fréquences, mais en hautes fréquences, où le module de Young équivalent est plus faible. Dans les HF, les carrés de cellophane parviennent à faire chuter le module de Young équivalent, synonyme de découplage partiel exacerbé par la présence de la cellophane. Cependant, la petite taille des cellophanes implique qu'ils n'ont un effet que pour les petites longueurs d'ondes, et donc pour les hautes fréquences. Cela explique qu'aucun décalage des paramètres dynamiques en fonction de la fréquence n'est perceptible, car l'effet de la cellophane n'est effectif que dans les hautes fréquences, à partir de 50 kHz, fréquence pour laquelle, le découplage du tricouche est déjà très fortement amorcé.

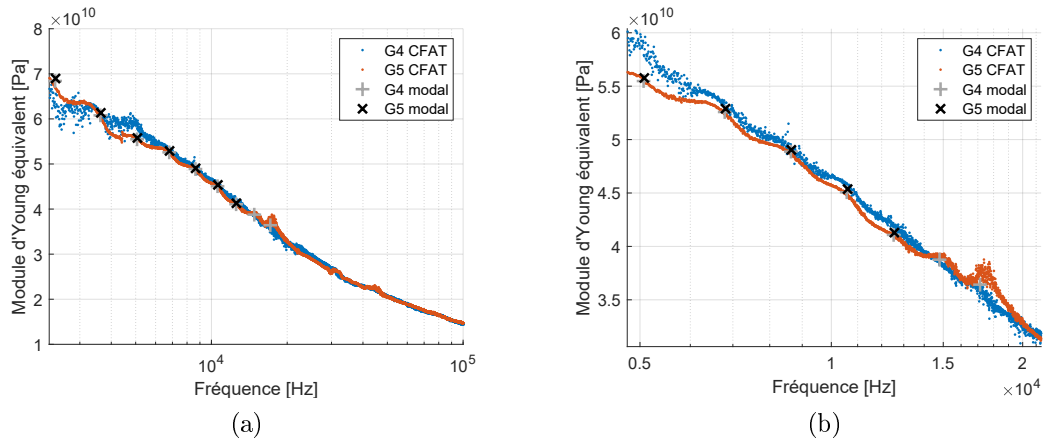


FIGURE 4.31 – Modules de rigidité en fonction de la fréquence pour les échantillons G4 et G5 obtenus à partir de CFAT et de l'analyse modale. (a) Visualisation sur une large bande fréquentielle, (b) Visualisation sur une faible bande fréquentielle.

## 4.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'appliquer l'ensemble de la méthodologie présentée dans ce manuscrit afin de caractériser différents tricouches aux interfaces imparfaites. Cette méthodologie correspond à l'union du chapitre modélisation, le Chapitre 2, avec le chapitre qui traite de la caractérisation expérimentale, le Chapitre 3. Trois différentes approches ont été présentées dans ce chapitre afin de caractériser des interfaces imparfaites : une approche exclusivement fréquentielle ; une approche exclusivement spatiale ; et une approche complémentaire. Ce travail a ainsi permis d'obtenir des valeurs expérimentales du paramètre d'interface  $B$  pour l'analyse dynamique de matériaux multicouches. Obtenir pour la première fois une valeur expérimentale pour un paramètre équivalent et dynamique de couplage au sein d'un tricouche est un bon point de départ pour davantage de travaux sur les interfaces imparfaites. En effet, le paramètre ainsi caractérisé est le paramètre d'interface  $B$  qui résume un ensemble de mécanismes physiques qui ont pour effet de découpler le multicouche. De plus, ces résultats ont été obtenus sur des amortissements particulièrement bas pour ce type d'application, ce qui montre la solidité de la méthodologie expérimentale qui est capable de caractériser de faibles

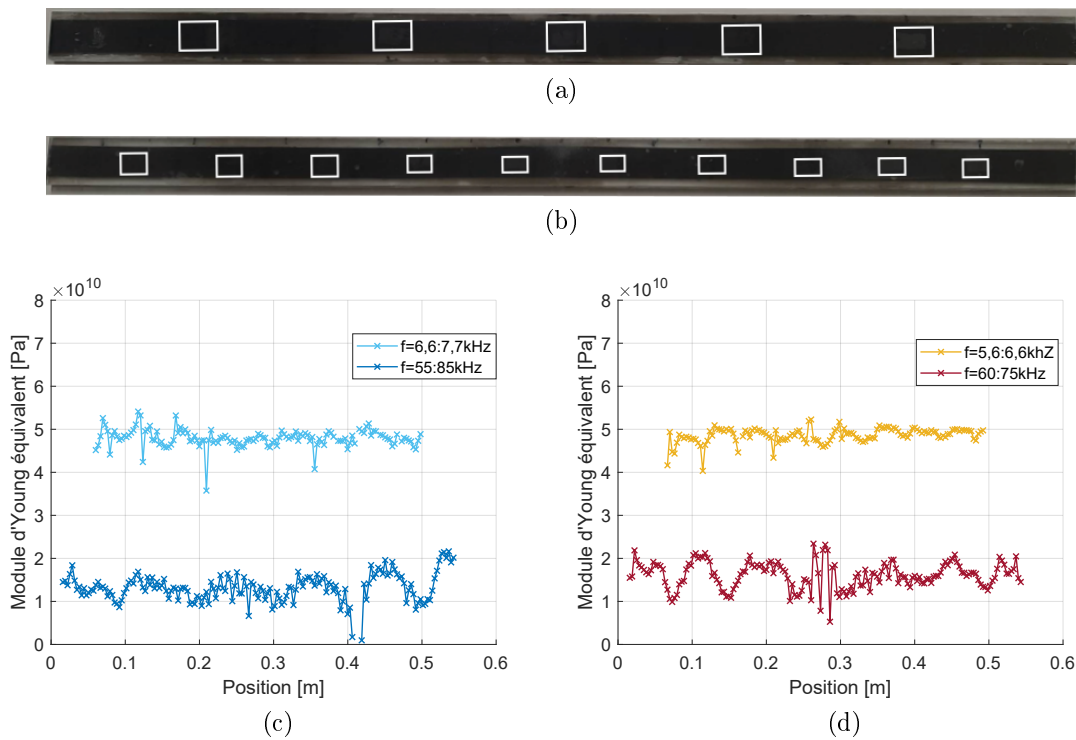


FIGURE 4.32 – (a) Échantillon G4 et (b) Échantillon G5 avec la mise en valeur des positions où se trouvent les morceaux de cellophane. Module de Young équivalent en fonction de la position avec une variation fréquentielle pour (c) l'Échantillon G4 et (d) l'Échantillon G5.

amortissements sur une large bande fréquentielle.

L'approfondissement de l'étude des interfaces imparfaites impliquerait inévitablement une description microscopique du phénomène, afin de lier le paramètre d'interface  $B$  à des paramètres matériaux par exemple. Plus généralement, il serait aussi particulièrement intéressant d'effectuer les mesures dans des enceintes climatiques si le couplage est toujours réalisé par un adhésif. En effet, ce dernier a habituellement une grande sensibilité à la température de mesure.

# Conclusion du manuscrit et perspectives

## Conclusion

Ce manuscrit propose des solutions de modélisation et d'expérimentation pour l'étude des matériaux multicouches aux interfaces imparfaites. L'objectif est de répondre aux besoins toujours croissants de modélisation des plaques multicouches et d'enrichir les outils de conception actuels. Cela permet, par des analyses toujours plus précises et/ou plus rapides, de se libérer de quelques verrous dans l'étape de dimensionnement de matériaux multicouches. Le modèle ainsi développé est une première étape dans les modèles équivalents décrivant le comportement de structures multicouches aux interfaces complexes. Le modèle proposé a aussi été utilisé dans les présents travaux pour caractériser expérimentalement des interfaces imparfaites en dynamique.

Dans l'objectif de développer un modèle, les besoins actuels ont été mis en évidence par une étude bibliographique des travaux existants. Plusieurs points ont émergé de cette étude :

- Il n'existait pas à ma connaissance, après une recherche bibliographique profonde sur le sujet, des modèles équivalents dynamiques qui prennent en compte des effets d'interfaces imparfaites. Les applications étaient principalement faites en statique, et leur formalisme favorise une visualisation par couche des déformations et des contraintes. De plus, à l'inverse d'un modèle équivalent, ils deviennent très encombrants quand il s'agit de modéliser avec efficacité le comportement dynamique d'un matériau multicouche.
- La loi d'interface employée dans ces travaux est abondamment utilisée dans la

communauté scientifique aujourd’hui. C’est une loi simple (raideur + amortissement linéaires), mais réussit tout à fait à décrire des effets d’interfaces mais qui suffit tout à fait à modéliser des effets d’interfaces imparfaites.

- La majorité des travaux expérimentaux sur le sujet concerne l’utilisation des ultrasons dans la détection et la caractérisation des interfaces. Il y avait ainsi un manque notable d’études expérimentales autour des effets des interfaces imparfaites sur le comportement dynamique de matériaux multicouches dans le domaine audible.
- Au-delà de la communauté scientifique, il existe aussi une demande importante dans l’industrie autour de la modélisation des interfaces imparfaites de matériaux multicouches. Par exemple, Adhex dans sa solution du raidisseur de pavillon de toit<sup>2</sup>, fixé par adhésif ou par colle, vise à améliorer le confort acoustique du véhicule tout en raidissant le toit. Le dispositif en lui-même est contrôlé, mais sa mise en place engendre quelques incertitudes quant aux conditions de couplage. Ce même type de problématique a aussi été soulevé par SMAC-SAS pour sa solution SMACSONIC<sup>3</sup>. Cette solution vise à amortir les vibrations qui se propagent au sein d’un avion par le couplage du dispositif amortissant au composant de la structure ciblé.

Les présents travaux de recherche se sont donc concentrés à répondre aux besoins ainsi rappelés, issus principalement de la synthèse bibliographique. Leur premier objectif était de développer un modèle multicouche équivalent dynamique aux interfaces imparfaites. Ce modèle est basé sur le modèle de J.-L. Guyader, et plus particulièrement sur les récents travaux à ce sujet de F. Marchetti. L’équation d’interface classiquement utilisée par la communauté a été implémentée dans ce modèle en modifiant les conditions aux interfaces de ce dernier. La continuité des contraintes est bien sûr conservée, car le contact est toujours maintenu pour la présente application, mais le champ de déplacement est rendu discontinu par cette nouvelle équation. **Cela a permis l’implémentation des interfaces imparfaites.** Leurs conséquences sur le comportement dynamique du multicouche ont été mises en évidence par le calcul de deux paramètres dynamiques : la rigidité

---

2. [adhex.com/automotive-application/raidisseur-toit-amortissement-amelioration-raideur-pavillons](http://adhex.com/automotive-application/raidisseur-toit-amortissement-amelioration-raideur-pavillons)

3. [smac-sas.com/amortissement-structurel-smacsonic](http://smac-sas.com/amortissement-structurel-smacsonic)

équivalente de flexion ; l'amortissement équivalent en flexion. Ces paramètres sont calculés à partir du nombre d'onde de flexion fréquemment dépendant qui est injecté dans un modèle de plaque mince. L'effet ainsi observé est un décalage des paramètres dynamiques vers les basses fréquences, ce qui se traduit physiquement par un découplage facilité par les interfaces imparfaites.

Les Chapitres 3-4 traitent de la partie expérimentale des présents travaux. La méthodologie de caractérisation de structure plane a été développée dans le Chapitre 3. Le but est de montrer comment la méthode de caractérisation a été adaptée aux présents travaux dans le but de caractériser une poutre multicouche. Le post-traitement des données qui a permis d'étendre la méthode jusqu'à 100 kHz a aussi été détaillé. Cette extension fréquentielle de la méthode permettait notamment une visualisation plus large bande des paramètres dynamiques, fondamentale dans l'analyse du paramètre d'interface  $B$ . Ensuite, le protocole de fabrication des échantillons a été présenté. L'objectif de cette section est de maximiser la reproductibilité des présents travaux et d'explicitier les propriétés des différents échantillons utilisés ainsi que leurs particularités pour l'étude expérimentale. Deux moyens de générer des interfaces imparfaites ont été employés au cours de ces travaux : le taux de collage, en faisant varier l'épaisseur de colle ; le découplage entre le cœur et une peau en intégrant une fine feuille de cellophane.

Finalement, l'ensemble de la méthodologie, théorique et expérimentale, a été employé dans le but de caractériser ces échantillons aux interfaces imparfaites dans l'étude expérimentale du Chapitre 4. Cela a permis la mise en évidence des interfaces imparfaites par la mesure, ainsi que leur caractérisation. Cela constitue l'originalité principale de ces travaux de recherche qui est : **la caractérisation des interfaces imparfaites dans un comportement dynamique**. Les résultats obtenus par CFAT ont été validés dans une visualisation fréquentielle en les comparant à des résultats similaires obtenus par analyse modale. Les résultats obtenus par CFAT ont aussi été visualisés spatialement afin de mettre en évidence des interfaces imparfaites hétérogènes dans l'espace. Une approche complémentaire de ces deux visualisations a aussi été utilisée pour étudier des échantillons présentant plusieurs profils d'interfaces imparfaites notables.



## Perspectives

La modèle dynamique équivalent de matériaux multicouches aux interfaces imparfaites proposé dans ces travaux considère les interfaces de glissement. Elles se traduisent par une discontinuité du champ de déplacement à l'interface. Ce modèle a été utilisé afin de réaliser la caractérisation expérimentale d'interfaces imparfaites. La caractérisation des interfaces imparfaites a notamment été un moyen de valider la modélisation ainsi employée, mais a aussi permis de fournir pour la première fois une valeur expérimentale du comportement dynamique d'une interface imparfaite à l'aide d'un modèle équivalent. Cependant, il serait particulièrement intéressant d'appliquer ce type de modélisation à des interfaces plus complexes, et ainsi de caractériser un plus large panel de matériaux aux interfaces complexes.

Plusieurs perspectives sont ainsi proposées selon trois catégories :

### 1. Les perspectives de modélisation :

- Le plus intéressant serait d'implémenter une équation d'interface non linéaire, c'est-à-dire, un glissement qui ne dépend pas linéairement de la contrainte d'interface. Un début de démarche afin d'implémenter des interfaces imparfaites non linéaires est proposé à l'Annexe C.
- Il pourrait être intéressant d'écrire l'équation d'interface spatialement dépendante. Cela permettrait une description plus locale des interfaces imparfaites, impliquant ainsi une précision accrue du comportement dynamique spatialement.
- Une écriture cubique du champ de déplacement, en plus du paramètre d'interface pourrait aussi être envisagée. Cela permettrait d'obtenir une visualisation par couche du champ de contrainte d'un modèle multicouche aux interfaces imparfaites, comme cela a été réalisé par F. Marchetti dans les annexes de sa thèse pour un modèle équivalent aux interfaces parfaites [78]. Bien sûr, ces nouvelles modélisations impliqueraient une complexité accrue du modèle et sont donc à effectuer avec précaution afin de conserver la simplicité d'implémentation des modèles équivalents. Cette description cubique a été abordée durant les présents travaux de thèse, mais aucune piste satisfaisante n'a été apportée pour

le moment. En effet, l'ajout de coefficients dépendants des couches, et non globaux, est nécessaire pour décrire correctement le comportement des contraintes aux interfaces, comme il a été abordé dans les limites du modèle à la Section 2.5. Cependant, cet ajout de plusieurs inconnus nécessite l'emploi de nouvelles équations pour chaque couche en plus des équations de comportement des interfaces, ce qui constitue un point bloquant actuellement.

- Il serait aussi intéressant d'implémenter le modèle dans une analyse compatible en éléments finis. En effet, ces derniers modélisent souvent les interfaces imparfaites comme des couches très fines. Cela est tout d'abord une manière inexacte de modéliser les interfaces, mais implique aussi un maillage très fin qui augmente ainsi considérablement le temps de calcul. L'utilisation du modèle aux interfaces imparfaites dans la simulation de structures complexes permettrait de gagner à la fois en temps de calcul, mais aussi en justesse de modélisation. Cela se réaliserait en remplaçant la modélisation par EF d'un multicouche composant un assemblage, par la modélisation équivalente proposée dans ces travaux. Cette modélisation équivalente fréquemment dépendante du composant impliquerait un gain de temps important puisqu'il n'aurait plus à être maillé, et serait aussi plus justement décrit que par les alternatives utilisées dans les EF actuellement pour décrire les interfaces imparfaites.

## 2. Les perspectives expérimentales :

- Le besoin de caractérisation expérimentale d'interface est un besoin important dans l'industrie aujourd'hui. En effet, même si des outils de modélisation sont proposés, la valeur théorique que l'utilisateur souhaiterait donner au(x) paramètre(s) de l'interface n'a pas de référence expérimentale pour le moment.
- Étudier expérimentalement l'effet non linéaire de l'amplitude de la sollicitation vibratoire serait aussi particulièrement intéressant. L'objectif serait de faire varier l'amplitude de la sollicitation dynamique, avec un pot vibrant par exemple, et de mettre en évidence le comportement non

linéaire des interfaces complexes.

- Il serait aussi intéressant d'étudier des interfaces imparfaites produites à l'aide de différents matériaux ou de différentes méthodes de couplage. La couche d'époxy, qui joue le rôle de cœur du tricouche mais aussi de couplage par ses caractéristiques d'adhésion, pourrait être remplacé par un adhésif moins performant. En effet, la colle époxyde bi-composante employée dans ces travaux présente de très bonnes performances adhésives, mais rend ainsi difficile une détérioration de son couplage aux peaux. Alternativement, il pourrait être intéressant de générer des interfaces imparfaites par d'autres voies d'assemblage, telle que la vulcanisation adhésive assistée par plasma par exemple. Ces interfaces pourraient ainsi présenter des comportements dynamiques distincts par rapport à ceux observés jusqu'à présent.

### 3. Les perspectives industrielles :

- Le modèle est tout à fait apte à être utilisé dans un projet de conception d'un matériau multicouche. Son principal intérêt est de vérifier si, malgré un taux d'imperfection fixé, le matériau conçu répondra toujours aux performances attendues.
- Il est aussi tout à fait envisageable d'utiliser l'introduction d'interfaces imparfaites volontairement dans un multicouche, qui seraient dimensionnées à l'aide du modèle proposé, dans le but d'optimiser le comportement dynamique grâce à son effet sur les paramètres dynamiques. Par exemple, la fréquence de cisaillement optimal peut être décalée pour un multicouche donné vers les basses fréquences en augmentant le taux d'imperfections de l'interface. Cela permettrait d'ajuster la courbe d'amortissement et ainsi d'amoindrir la réponse de la structure aux fréquences ciblées.

# Annexe A

## Comparaison entre la méthode des matrices de transfert et le modèle équivalent aux interfaces imparfaites

### A.1 Motivations de l'étude

Le modèle équivalent aux interfaces imparfaites a été comparé à la FEM, plus particulièrement à la SFEM de Shorter [108] dans le cas où  $B = 0$  qui correspond au cas parfaitement couplé, et au modèle RKU [57, 102, 111] dans le cas  $B \rightarrow 0$  dit totalement découplé. Cependant, une comparaison pour des valeurs intermédiaires de  $B$ , entre le présent modèle et un autre modèle n'a pas été réalisée. Cela est dû au manque de modèle multicouche implémentant les interfaces imparfaites.

MATELYS-Research Lab<sup>1</sup>, dans son logiciel commercialisé AlphaCell<sup>2</sup> [60], a implémenté dans la méthode des matrices de transfert (TMM) un modèle aux interfaces imparfaites. D'une part, La TMM est très différente et fait moins d'hypothèses dans son implémentation que le modèle équivalent présenté dans ces travaux. D'autre part, la manière dont ont été implémentées les interfaces imparfaites est aussi très différente, cette première ayant été fortement affectée par l'écriture-même de la TMM. Les deux méthodes étant très différentes sur plusieurs aspects,

---

1. matelys.com

2. alphacell.matelys.com

il est donc intéressant de les comparer entre elles afin de vérifier si malgré tous ces points de divergence, les résultats obtenus sont similaires.

## A.2 Introduction à la méthode des matrices de transfert

La méthode des matrices de transfert (TMM, pour Transfer Matrix Method) est un problème souvent écrit en 2D, mais considère bien des effets 3D. Les deux paramètres modélisés sont donc généralement : l'épaisseur du matériau traversée par l'onde incidente, modélisée dans l'axe horizontal souvent noté  $x_3$  ou  $z$ . ; et une dimension perpendiculaire, qu'elle soit la longueur ou la largeur du matériau, modélisée dans l'axe transverse généralement noté  $x_1$  ou  $x$ . Les variables intervenant dans la TMM sont illustrées dans la Figure A.1

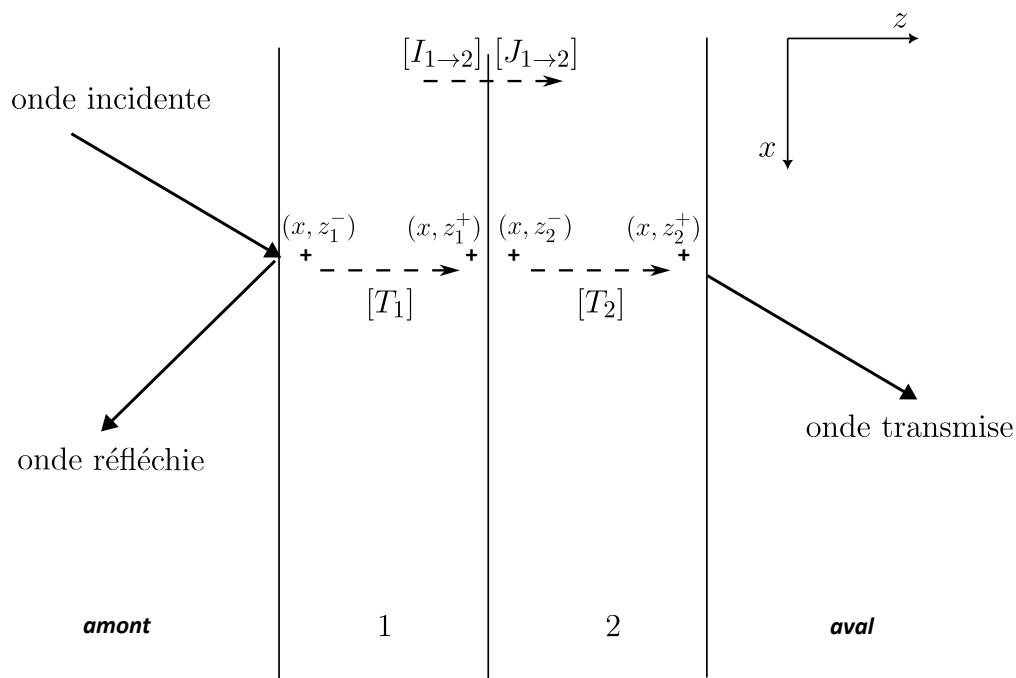


FIGURE A.1 – Schéma de l'application de la TMM à un bicouche en faisant intervenir l'ensemble des variables qui interviennent dans la méthode.

Afin de résoudre un problème avec la TMM, il suffit de connaître les variables d'état qui sont : la pression en un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  ; et la vitesse de

l'onde de pression dans la direction  $x_3$  en  $M$  aussi. Selon le milieu dans lequel l'onde se propage, on parlera donc de vitesse dans un solide  $v_z^s(M)$  ou de vitesse dans un fluide  $v_z^f(M)$ , et de contrainte ( $\sigma_{\alpha z}$ , avec  $\alpha = \{x, z\}$ ) ou de pression acoustique  $p(M)$ . Dans le cadre d'un poreux apparaissent donc à la fois les vitesses fluides et solides, ainsi que les contraintes solides et les contraintes fluides notées  $\sigma_{zz}^f$ . Ces variables d'état sont rassemblées sous la forme d'un vecteur d'état, écrit à l'Équation (A.1).

$$V^f(M) = [p(M), v_z^f(M)]^T, \quad (\text{A.1})$$

Avec  $V^f(M)$  la variable d'état pour une couche de fluide tel que l'air par exemple.

L'idée de la TMM est donc d'exprimer le vecteur d'état en amont d'une couche  $i$  (fluide, solide, ou poreuse), noté pour un fluide  $V^f(z_i^-)$ , en fonction du vecteur d'état en aval de cette même couche noté  $V^f(z_i^+)$ . Cela est fait à l'aide d'une matrice de transfert notée  $[T_i]$ , ce qui donne l'Équation (A.2).

$$V^f(z_i^-) = [T_i]V^f(z_i^+). \quad (\text{A.2})$$

À partir de l'Équation (A.2), il suffit d'écrire les vecteurs d'état pour chaque couche traversée, avec l'écriture qui convient selon la nature du milieu. Finalement, le vecteur d'état de l'onde acoustique incidente est écrit en fonction de celui de l'onde acoustique réfléchi et/ou transmise grâce à une matrice de transfert globale prenant en compte toutes les couches successives traversées. Les matrices de couplage dépendent bien sûr de la nature des couches. Elles n'auront pas la même forme selon le couplage créé, qu'il soit par exemple : poreux-solide, poreux-poreux ou fluide-solide. Plus il y a de variables d'états à déterminer, plus la matrice sera d'un ordre important. En effet, la matrice de transfert pour les fluides, l'ordre de la matrice carré est de 2. L'ordre est de 4 pour les solides et 6 pour les poreux. Ainsi, les matrices de couplages à l'interface, souvent notées  $[I_{i \rightarrow j}]$  et  $[J_{i \rightarrow j}]$  vont permettre le passage de la couche  $i$  à la couche  $j$ . Leur taille va dépendre du nombre de variables d'états en entrées et en sorties. Elles sont donc des matrices carrées si la nature des couches est identique, mais carré si leur nature est différente. Finalement, le multicouche complet est condensé dans une matrice carré d'ordre 2 en le couplant généralement avec de l'air sur sa face amont et sa face aval. Le but

étant ainsi d'exprimer les variables d'états d'une couche de fluide (en amont) en fonction des variables d'états d'une couche de fluide (en aval). Cela explique que la matrice est carrée (même nombre de variables d'états) et d'ordre 2 (fluide). Pour plus de détails sur la TMM, il est recommandé de se référer à [2, 16, 23].

### A.3 Implémentation de l'interface imparfaite en TMM dans AlphaCell

Dans AlphaCell, la TMM a été implémentée à l'aide d'un paramètre unique et sans unité  $\gamma$  qui varie entre 0 et 1. Ce paramètre gère une loi de mélange qui permet de faire le lien entre le comportement parfaitement couplé (dit bonded) et le comportement totalement découplé (dit unbonded). Le  $\gamma$  est ainsi un paramètre de couplage (et non de découplage comme le paramètre d'interface  $B$ ). C'est-à-dire, lorsqu'il est maximal (soit  $\gamma = 1$ ) les couches sont parfaitement couplées. Lorsqu'il est minimal ( $\gamma = 0$ ) les couches sont totalement découplées. Ce qui est une tendance opposée au paramètre  $B$ . Lorsqu'il minimal ( $B = 0$ ), les couches sont parfaitement couplées, et inversement.

Cette loi de mélange implémentée à l'aide du paramètre  $\gamma$  permet de faire donc le lien entre une matrice de transfert décrivant le comportement d'une interface parfaitement couplée, que nous noterons  $[T_{bonded}]$ , avec une matrice de transfert décrivant le comportement d'une interface totalement découplée, que nous noterons  $[T_{unbonded}]$ . La matrice résultante notée  $[T_{mix}]$  est donc une fonction de ces trois paramètres, soit  $[T_{mix}] = f(\gamma, [T_{bonded}], [T_{unbonded}])$ .

### A.4 Comparaisons des approches

**Les pertes par transmission** (TL, pour Transmission Losses) calculées à partir **du modèle équivalent** ont été obtenues à partir de l'impédance d'une plaque mince en flexion (Équation (A.3)) et du couplage avec l'air à partir de son impédance noté  $Z_0$ . **Les pertes par transmission pour la TMM** ont été calculées pour des modèles de solides élastiques à partir d'AlphaCell. Ces calculs ont été effectués en onde incidente avec un angle incident de  $60^\circ$ . Les résultats

Configurations bicouches	$h$ [mm]	$E$ [GPa]	$\eta$ %	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$\nu$ [-]
Configuration 1	3	71	1	2780	0.3
Configuration 2	6	71	1	2780	0.3
Configuration 3	6	1	1	1000	0.3

TABLE A.1 – Tableau des propriétés pour les trois configurations bicouches. Tous ces matériaux ont deux couches du même matériau.

sont montrés sur les Figures A.2-A.3-A.4 pour respectivement trois configurations différentes détaillées dans le Tableau A.1.

$$Z_{eq} = \frac{1}{i\omega}(D_{eq}k_0^4 - \rho h\omega^2); \quad (\text{A.3})$$

avec  $k_0$  le nombre d'onde de l'onde acoustique incidente.

L'objectif de cette comparaison est dans un premier temps de voir la capacité du modèle équivalent à prédire les mêmes comportements asymptotiques que la TMM (parfaitement couplé et totalement découplé). On vérifie sur les Figures A.2-A.3-A.4, pour différentes configurations, que les cas extrêmes (couplé ou découplé) sont bien similaires dans le cas du modèle équivalent et de la TMM. Les deux modèles présentent des fréquences de coïncidence semblables, et l'allure des TL sont relativement proches sur l'ensemble du spectre, excepté sur le comportement asymptotique en fréquence.

Les comportements limites ayant été retrouvés pour les deux méthodes, il est bien sûr trivial d'obtenir une valeur du paramètre d'interface  $B$  qui correspondrait au TL en TMM pour  $\gamma = 0.5$  par exemple. Cependant, cela reste intéressant de comparer les cas intermédiaires afin de vérifier la nature différente entre ces deux paramètres qui peuvent néanmoins engendrer des comportements équivalents. Cela a été réalisé sur les trois configurations aux Figures A.2-A.3-A.4. Il est intéressant de noter que  $B$  doit varier pour correspondre à une valeur constante de  $\gamma = 0.5$ . Cela signifie que le paramètre  $B$  n'a pas le même effet selon la configuration du multicouche étudiée. Ce point avait déjà été soulevé lors du Chapitre 2, à la fin de l'article joint. Il est aussi intéressant de noter que l'effet du paramètre  $\gamma$  est stable en fonction des configurations. En effet, une valeur de  $\gamma = 0.5$  a le même décalage relatif pour les trois configurations étudiées ici. L'ensemble des fréquences caractéristiques ainsi que leurs rapports ont été résumés dans le Tableau A.2.



Configuration	$f_{co}^{min}$ [Hz]	$f_{co}^{max}$ [Hz]	$f_{co}^{0.5}$ [Hz]	$\frac{f_{co}^{0.5} - f_{min}}{f_{max} - f_{min}}$	$f_{max}/f_{min}$
Configuration 1	2756	5531	3529	0.28	2.01
Configuration 2	1387	2756	1743	0.26	1.99
Configuration 3	6535	13189	6535	0.29	2.02

TABLE A.2 – Fréquences caractéristiques en pertes par transmission pour les trois configurations montrées au Tableau A.1.

Ce tableau montre que l'effet de  $\gamma = 0.5$  ne semble pas varier en changeant la configuration du matériau bicouche étudié. La variation présentée provient d'une variation purement numérique due à la résolution fréquentielle de calcul. Cette indépendance à la configuration reste cependant à vérifier pour des multicouches ayant plus de deux couches, et surtout dans le cas de multicouches aux couches différentes.

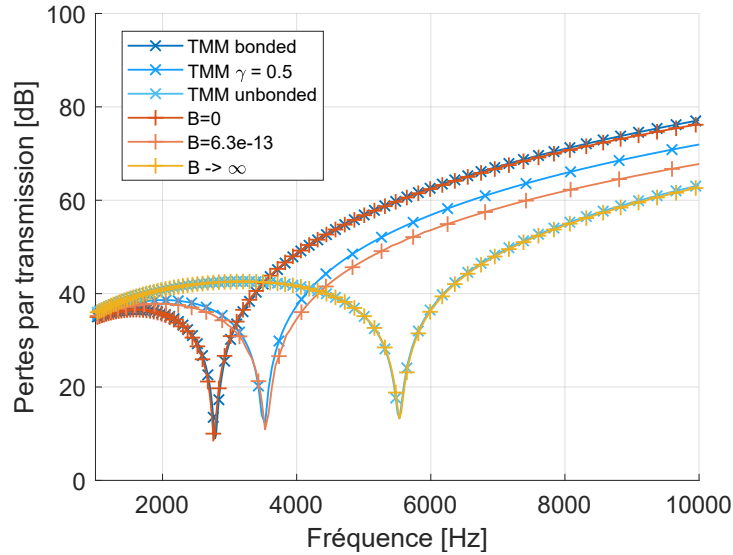


FIGURE A.2 – Pertes par transmission en fonction de la fréquence pour la Configuration 1 du Tableau A.1.

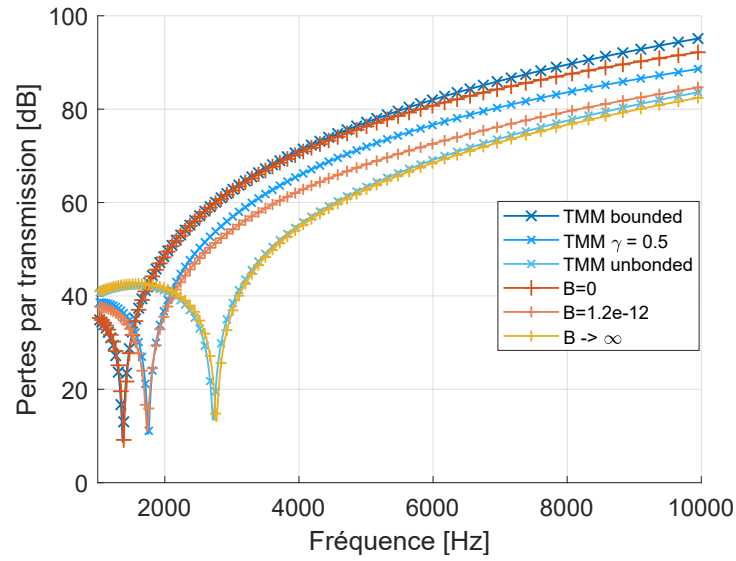


FIGURE A.3 – Pertes par transmission en fonction de la fréquence pour la Configuration 2 du Tableau A.1

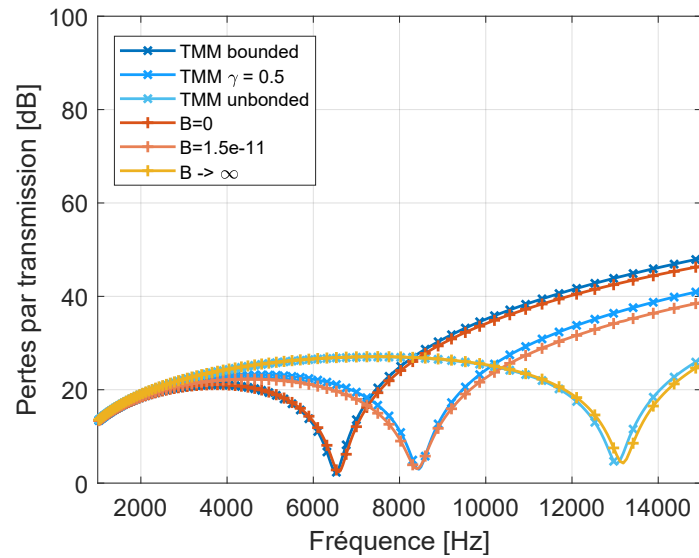


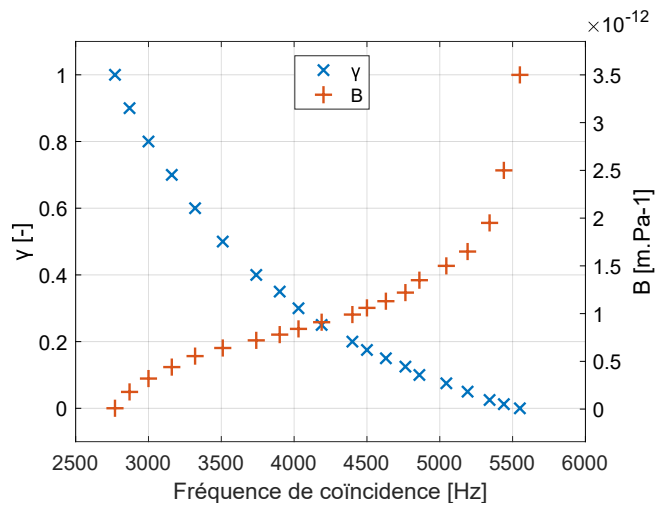
FIGURE A.4 – Pertes par transmission en fonction de la fréquence pour la Configuration 3 du Tableau A.1

Afin de prolonger la comparaison entre les paramètres d'interface  $\gamma$  et  $B$ , une étude sur le matériau bicouche aluminium (3mm) - aluminium (3mm) a été réalisée

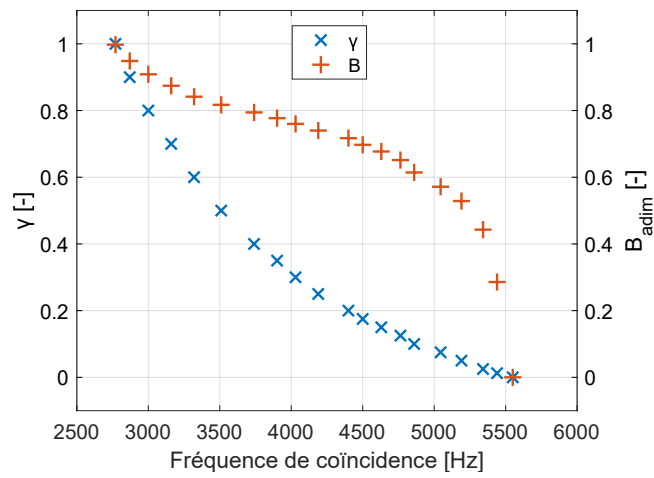
en faisant varier le paramètre  $\gamma$  de 0 à 1. Les valeurs du paramètre d'interface  $B$  correspondantes ont aussi été calculées pour vérifier la différence d'effet de ces deux paramètres. Les résultats de cette analyse sont montrés à la Figure A.5.

- À la Figure A.5a, les paramètres sont affichés en fonction de leurs valeurs naturelles.
- À la Figure A.5b, le paramètre  $B$  est remplacé par un paramètre adimensionné  $B_{\text{adim}} = |B/\max(B) - 1|$ , afin de comparer uniquement les différences de tendances entre les paramètres  $\gamma$  et  $B$ .

On vérifie naturellement que ces paramètres ont des comportements opposés en termes de tendance à la Figure A.5a. Cependant, sur la Figure A.5b, lorsque le  $B$  est dilaté et translaté afin d'afficher le même sens de variation et entre les mêmes bornes que  $\gamma$ , il est plus simple de vérifier une différence notable de leurs tendances respectives. En effet, l'effet du paramètre  $\gamma$  sur la fréquence de coïncidence croît lorsqu'il se rapproche de 0. Cela signifie qu'il est de plus en plus « facile » de découpler le matériau bicouche lorsque l'on s'approche du comportement totalement découplé. L'effet du paramètre  $B$  (en unité naturelle, soit en  $\text{m.Pa}^{-1}$ ) décrit une courbe sigmoïdale. Cela signifie que la dynamique du découplage du matériau bicouche se situe autour d'une valeur de  $B$  en particulier. Premièrement, une variation du paramètre  $B$  aura un effet faible sur le comportement dynamique. Ensuite, lorsque le paramètre  $B$  se rapproche du point d'inflexion, son effet est décuplé. Finalement, lorsque le matériau atteint un taux d'imperfections suffisamment élevé, sa dégradation en fonction du paramètre  $B$  ralentit. Ce type de dynamique avait déjà été vérifié à travers l'étude d'un tricouche à la fin du Chapitre 2, à la Figure 2.4 en particulier.



(a)



(b)

FIGURE A.5 – (a) Paramètres d'interface  $\gamma$  et  $B$  en fonction de la fréquence (b) Paramètres d'interface  $\gamma$  et  $B$  adimensionné en fonction de la fréquence

## Annexe B

# Implémentation et effets d'un paramètre d'interface fréquentiellement dépendant

### B.1 Motivations de l'étude

Comme stipulé dans le Chapitre 2, le paramètre d'interface  $B$  est supposé constant. Cette forte hypothèse était nécessaire afin d'implémenter les interfaces imparfaites tout en conservant une simplicité relative du modèle équivalent, mais aussi pour faciliter les interprétations des résultats qui permettent de comprendre l'effet de cette nouvelle description dans le modèle. L'un des points soulevés était particulièrement le manque de dépendance fréquentielle du paramètre  $B$ . En effet, des comportements inattendus étaient visibles en HF pour des cœur épais à la fin du Chapitre 2. Réduire l'effet de l'interface  $B$  avec la fréquence permet de contrebalancer cet effet. Plusieurs types de fonction de  $B$  sont possibles selon le comportement recherché.

### B.2 Implémentation de la dépendance fréquentielle

L'implémentation dans les équations reste relativement simple par rapport à la complexité usuelle de ce type de modèle. En effet, au lieu de calculer directement

les matrices masses et raideurs et de résoudre l'équation pour toutes les fréquences, les matrices varient en fonction de la fréquence. La nouvelle équation à résoudre est alors l'Équation (B.1). Malgré cet ajout, le temps de calcul reste court car la méthode de résolution n'est pas modifiée. Plusieurs exemples de la forme que le paramètre d'interface  $B$  pourrait prendre sont présentés à la Figure B.1.

$$\det(\mathbf{K}(B(\omega)) - \omega^2 \mathbf{M}(B(\omega))) = 0, \quad (\text{B.1})$$

avec  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  qui deviennent ainsi des fonctions implicites de  $\omega$  car elles sont fonctions de  $B$  qui est dorénavant fonction de  $\omega$ . Des détails sur leur écriture sont donnés à la section 3.1. de l'article du Chapitre 2.

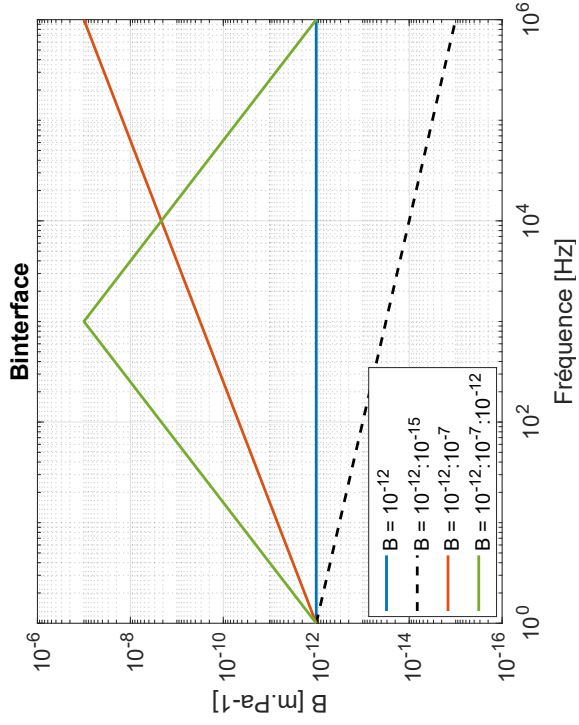


FIGURE B.1 – Différentes fonctions du paramètre d'interface  $B$  en fonction de la fréquence. Les tendances sont linéaires en échelle logarithmique, ce qui traduit une allure exponentielle en échelle linéaire.

### B.3 Effet d'un paramètre d'interface fréquentiellement dépendant

L'ensemble des résultats selon les critères de la Figure B.1 sont regroupés dans la Figure B.2. Les paramètres matériaux choisis sont les mêmes que pour les applications du Chapitre 2, regroupés dans le Tableau 3 de l'article. Réduire la valeur de  $B$  avec la fréquence a pour effet d'augmenter le couplage en fonction de la fréquence, ce qui correspond à la courbe en pointillé. Cela n'a donc aucun effet sur les courbes, puisque la valeur  $B = 10^{-12} \text{ m.Pa}^{-1}$  correspond déjà au cas parfaitement couplé. Ainsi, comme vu dans la partie modélisation, il n'est bien sûr pas possible d'être mieux couplé que des couches parfaitement couplées. Des résultats plus intéressants sont visibles lorsque le paramètre  $B$  augmente avec la fréquence, c'est-à-dire, que le découplage est de plus en plus fort en fonction de la fréquence. Le premier effet, visible sur la partie réelle, est de faire varier la pente de rigidité sans modifier les asymptotes BF et HF. Cela pourrait avoir un intérêt si un type d'interface a tendance à découpler les couches successives plus fortement avec la fréquence. Le deuxième effet, visible sur l'amortissement, est de pouvoir modifier grandement le comportement de l'amortissement. Il est possible de le décaler vers les BF, mais cela aura aussi pour effet de réduire l'amortissement. En effet, la variation du paramètre d'interface  $B$  permet de découpler le multicouche suffisamment tôt sans lui permettre d'atteindre le cisaillement maximal.

Comme spécifié plus haut, la variation fréquentielle de  $B$  permet aussi de corriger la surestimation de l'amortissement en HF pour les matériaux épais et aux interfaces imparfaites. Dans ce cas, en faisant varier entre une valeur relativement haute vers une valeur relativement basse le paramètre  $B$  (Figure B.3a), il est possible d'obtenir un amortissement  $\eta$  en HF qui n'est pas surestimé pour les matériaux épais (Figure B.3b).

Il serait aussi possible d'osciller entre différents comportements dynamiques, ce qui pourrait être intéressant dans le cas de matériaux fortement hétérogènes dans leurs interfaces, comme pour les résultats montrés à la Figure 4.29. Cela pourrait être obtenu en faisant osciller la valeur de  $B$  entre les deux paramètres d'interface obtenus expérimentalement. Il faudrait cependant porter une attention particulière

à la dérivée de l'amortissement en fonction de la fréquence qui pourrait diverger si de fortes discontinuités apparaissent.

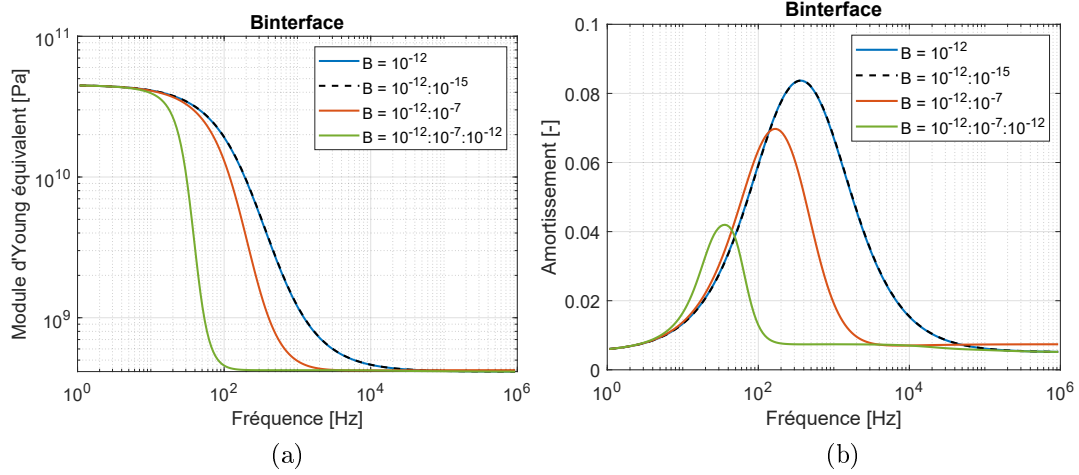


FIGURE B.2 – (a) Module de Young équivalent de flexion et (b) Amortissement en fonction de la fréquence pour différentes variations du paramètre  $B$  montrées à Figure B.1.

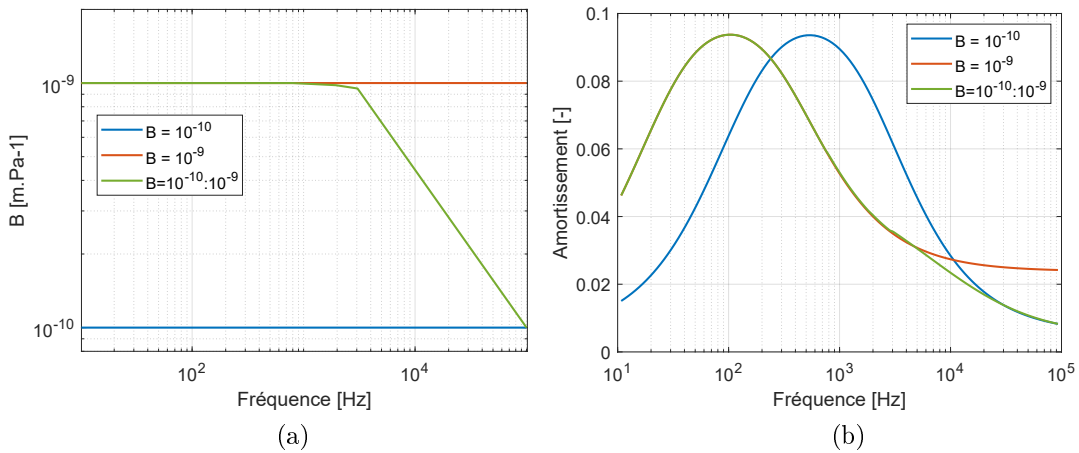


FIGURE B.3 – (a) Paramètres d'interface  $B$  en fonction de la fréquence, (b) Amortissement en fonction de la fréquence pour trois différentes variations du paramètre d'interface  $B$ . Cela permet de corriger des comportements inattendus comme pour la Figure 2.7. Les paramètres matériaux sont ainsi les mêmes que cette dernière.



# Annexe C

## Introduction à l'implémentation d'interfaces non linéaires

### C.1 Motivations

Comme il a été précisé dans les perspectives, il serait particulièrement intéressant d'implémenter une modélisation non linéaire des interfaces imparfaites dans le modèle proposé dans ce manuscrit. L'objectif de cette annexe est ainsi de proposer quelques conseils afin de pouvoir implémenter cette modélisation. Dans le but de simplifier la visualisation de la méthode d'implémentation proposée, les équations utiles seront rappelées directement ici, bien que déjà présentes dans le manuscrit.

L'intérêt principal dans l'implémentation d'interfaces au comportement non linéaire serait de modéliser la réponse d'un multicouche au couplage imparfait en fonction de l'amplitude de la contrainte appliquée. Expérimentalement, cela correspondrait à mesurer la réponse d'une structure aux interfaces imparfaites selon différents niveaux d'amplitude de la sollicitation. Il est intuitif qu'une amplitude plus forte aura pour effet de découpler plus facilement un matériau multicouche à l'image du frottement statique et dynamique de Coulomb. Cependant, il n'est pas établi que le paramètre d'interface  $B$  serait croissant avec l'amplitude ou décroissant par exemple. Le type d'allure qu'une interface non linéaire pourrait avoir est illustré à la Figure C.1.

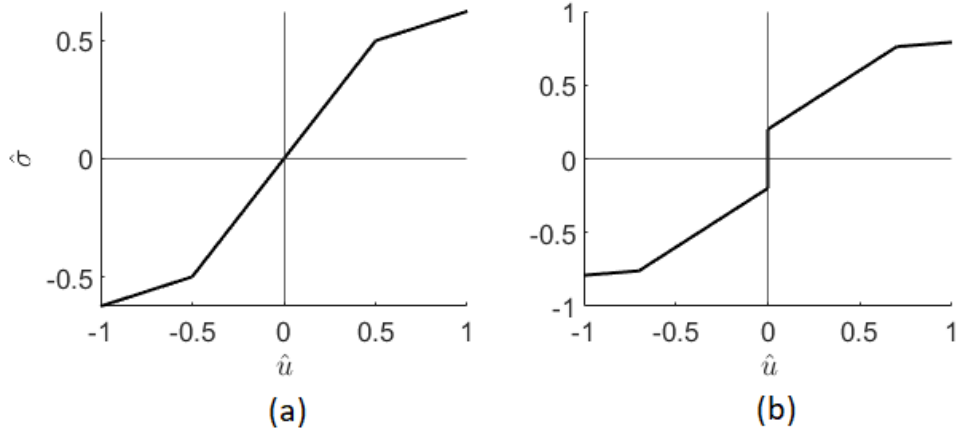


FIGURE C.1 – Illustration de (a) une interface purement élastique avec un paramètre linéaire par morceaux, (b) une interface élastique au paramètre linéaire par morceaux avec une ordonnée à l’origine différente de zéro.

## C.2 Méthodologie proposée

L’implémentation d’un paramètre d’interface  $B$  non linéaire pourrait s’inspirer dans sa forme, des lois de Hertz ou de Hertz améliorée présentées au Tableau 1.2. Dans un premier temps, le plus simple pourrait être de prendre un  $B$  linéaire par morceaux afin de ne pas trop altérer la modélisation d’origine et ainsi conserver une simplicité modérée d’implémentation. L’interface étant implémentée dès les premières équations du modèle, modifier son équation de comportement aura des effets dès l’écriture du champ de déplacement réécrit à l’Équation (C.1). L’écriture du glissement dans la direction  $x$  par exemple, noté  $\hat{u}_x$ , est le terme directement affecté par la réécriture de l’équation d’interface.

$$\begin{cases} u_x^n = \psi_x^1(x, y, t) + F_\omega \frac{\partial W}{\partial x} + F_{xx}^n \phi_x^1 + F_{xy}^n \phi_y^1 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_x^i, \\ u_y^n = \psi_y^1(x, y, t) + F_\omega \frac{\partial W}{\partial y} + F_{yx}^n \phi_x^1 + F_{yy}^n \phi_y^1 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_y^i, \\ u_z^n = W(x, y, t). \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

L’écriture des déformations et donc des contraintes ne changeront pas, car elles dépendent directement de l’ordre du champ de déplacement qui est ici linéaire (d’ordre 1 en fonction de  $z$ ). Ainsi, la contrainte transverse dans la direction  $x$

à l'interface s'écrirait toujours comme dans l'Équation (C.2) en sachant que l'on obtient  $\hat{\sigma}_{xz}^i = Q_{xzxz}^i 2\mathcal{E}_{xz}^i(z = z^i) + Q_{xzyz}^i 2\mathcal{E}_{yz}^i(z = z^i)$  avec la loi de Hooke où  $z^i$  est la coordonnée  $z$  de l'interface  $i$  ou de la surface supérieure de la couche  $i$ .

$$\hat{\sigma}_{xz}^i = -2Q_{xzxz}^i(\alpha_{xx}^i\phi_x^1 + \alpha_{xy}^i\phi_y^1) - 2Q_{xzyz}^i(\alpha_{yx}^i\phi_x^1 + \alpha_{yy}^i\phi_y^1) \quad (C.2)$$

Au lieu d'écrire l'équation de comportement de l'interface en fonction d'une puissance du déplacement, comme  $\sigma_{xz}^i = B(\hat{u}_x^i)^n$  avec  $n$  un entier naturel qui symbolise l'ordre de la non linéarité, il est conseillé dans un premier temps d'écrire une loi linéaire par morceaux. Le paramètre d'interface non linéaire serait fonction de la contrainte appliquée. Cela implique que l'ordre des équations à résoudre n'est pas modifié et qu'aucune nouvelle contribution cinématique dans le bilan énergétique n'est ajoutée. Cependant, la méthode de résolution du problème en sera modifiée. On admet alors que l'équation de comportement de l'interface dans la direction  $x$  s'écrit à la manière de l'Équation (C.3).

$$\hat{u}_x^i = B_{xz}^i \hat{\sigma}_{xz}^i \quad (C.3)$$

Avec  $B_{xz}^i = B_{xz}^i(\hat{\sigma}_{xz}^i)$  le paramètre d'interface à l'interface  $i$  fonction de la contrainte de cisaillement transverse à l'interface  $i$  notée  $\hat{\sigma}_{xz}^i$ .

Ensuite, afin de calculer toutes les fonctions de forme, toutes les contraintes de cisaillement transverse sont calculées à l'image de l'Équation (C.2) puis injectées dans les Équations (C.1)-(C.3). Cela rend finalement le Système d'Équations (C.4).

$$\begin{cases} F_{xxg}^i = \alpha_{xx}^i(R_i - z) + \gamma_{xx}^i - B_{xz}^i(\alpha_{xx}^i Q_{xzxz}^i + \alpha_{yx}^i Q_{xzyz}^i), \\ F_{xyg}^i = \alpha_{xy}^i(R_i - z) + \gamma_{xy}^i - B_{xz}^i(\alpha_{xy}^i Q_{xzxz}^i + \alpha_{yy}^i Q_{xzyz}^i), \\ F_{yfg}^i = \alpha_{yx}^i(R_i - z) + \gamma_{yx}^i - B_{yz}^i(\alpha_{xx}^i Q_{xzyz}^i + \alpha_{yx}^i Q_{yzyz}^i), \\ F_{yfg}^i = \alpha_{yy}^i(R_i - z) + \gamma_{yy}^i - B_{yz}^i(\alpha_{xy}^i Q_{xzyz}^i + \alpha_{yy}^i Q_{yzyz}^i). \end{cases} \quad (C.4)$$

Avec de nouveau  $B_{xz}^i = B_{xz}^i(\hat{\sigma}_{xz}^i)$  le paramètre d'interface à l'interface  $i$  fonction de la contrainte de cisaillement transverse à l'interface  $i$  notée  $\hat{\sigma}_{xz}^i$ .

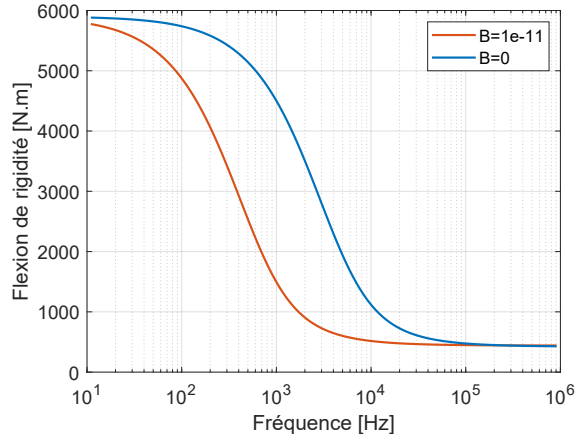
Ce calcul est donc très similaire à ce qui a été fait dans le Chapitre 2. En effet, dans le cadre d'un paramètre  $B$  linéaire par morceaux, l'implémentation analytique n'est pas explicitement affectée. C'est cependant la résolution numérique

qui sera grandement modifiée, car il sera nécessaire d'adapter la valeur de  $B$  en fonction de la contrainte de cisaillement transverse à l'interface  $i$  notée  $\hat{\sigma}_{xz}^i$ . De plus, même si cette dernière ne dépend pas du paramètre  $B$  explicitement (confère Équation (C.2)), une variation du couplage affecte bien la valeur de la contrainte car les nombres d'ondes de flexion sont eux modifiés par le découplage des couches. Cela est illustré par l'ensemble des courbes de la Figure C.2. Il est à noter que les variables cinématiques s'écrivent sous la forme d'une onde progressive, comme  $W = W_0 e^{-j(k_x x + k_y y)} e^{j\omega t}$  pour le déplacement transverse, ce qui explique cette modification implicite par le paramètre  $B$ . En effet, une variation de  $B$  entraîne une modification des nombres d'ondes  $k_x$  et  $k_y$ , ces derniers entraînant à leur tour une modification du déplacement  $W$  et des autres variables cinématiques. Ce qui va finalement entraîner une modification des déformations et donc des contraintes. Les résultats présentés à la Figure C.2 montrent un champ de déplacement et une contrainte très élevée, car l'amplitude choisie est égale à l'unité, soit  $W_0 = 1$  m. Cette valeur n'est bien sûr pas réaliste et entraînerait une invalidité des équations dynamiques de vibrations des structures planes, puisque par exemple, elles ne prendraient pas en compte des déformations non linéaires géométriques dues à de fortes amplitudes de déplacement. Cette valeur fixée à l'unité servait juste de cas test afin de voir la réponse du modèle et particulièrement la variation des contraintes et des déplacements en fonction du paramètre d'interface  $B$ .

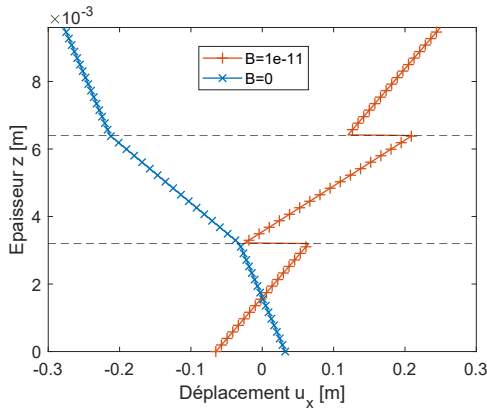
	$h$ [mm]	$E$ [GPa]	$\nu$ [-]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]
Peaux	3.2	72	0.33	2700
Cœur	3.2	1.4	0.3	1300

TABLE C.1 – Propriétés du matériau tricouche sandwich utilisé pour la simulation montrée à la Figure C.2.

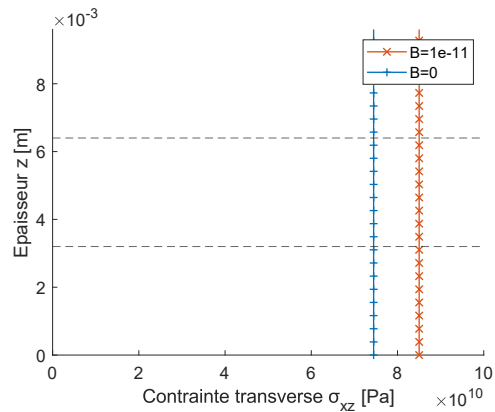
On vérifie ainsi que pour un découplage partiel des couches, visible à la Figure C.2a, le déplacement horizontal  $u_x$  et la contrainte de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  en fonction de l'épaisseur varie selon le paramètre d'interface total  $B = B^1 + B^2$  dans le cadre d'un paramètre constant (et donc d'une équation d'interface linéaire). Cette variation des variables cinématiques et dynamiques est bien entendue physique, mais impliquerait l'implémentation d'une interface linéaire par morceaux plus difficile à mettre en œuvre.



(a)



(b)



(c)

FIGURE C.2 – (a) Flexion de rigidité  $D$  en fonction de la fréquence, (b) Champ de déplacement horizontal  $u_x$  et (c) contrainte de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  en fonction de l'épaisseur  $z$ . Ces deux dernières courbes ont été obtenues pour la fréquence  $f = 4$  kHz au centre du tricouche en  $x = y = L/2$ . Les propriétés du tricouche utilisé pour obtenir ces résultats sont résumées au Tableau C.1.

Finalement, les prochaines étapes seraient consacrées à l'implémentation de la résolution numérique des équations écrites dans cette annexe. Le défi central étant de prendre en compte cette variation des contraintes afin de choisir le bon paramètre d'interface  $B$  dans le calcul des nombres d'ondes.

# Bibliographie

- [1] F. Ablitzer, C. Pézerat, J.-M. Génevaux, and J. Bégué. Identification of stiffness and damping properties of plates by using the local equation of motion. *Journal of Sound and Vibration*, 333(9) :2454–2468, Apr. 2014.
- [2] J.-F. Allard and N. Atalla. *Propagation of sound in porous media : modelling sound absorbing materials*. Wiley, Hoboken, N.J, 2nd edition, 2009.
- [3] U. Arasan, F. Marchetti, F. Chevillotte, G. Tanner, D. Chronopoulos, and E. Gourdon. On the accuracy limits of plate theories for vibro-acoustic predictions. *Journal of Sound and Vibration*, 493 :115848, Feb. 2021.
- [4] L. Attar. *Evaluation par ondes guidées de niveaux d'adhésion dissymétriques dans des collages structuraux métal-matériau composite. Modélisation et approches des cas de kissing bonds*. Thèse de Doctorat, Normandie Université, 2019. NNT : 2019NORMLH06.
- [5] L. Attar, D. Leduc, M. Ech-Cherif El-Kettani, M. V. Predoi, J. Galy, and P. Pareige. Detection of the degraded interface in dissymmetrical glued structures using Lamb waves. *NDT & E International*, 111 :102213, Apr. 2020.
- [6] N. Auquier, K. Ege, and E. Gourdon. Equivalent dynamic model of multilayered structures with imperfect interfaces : application to a three-layer plate with sliding interfaces. SAPEM 2021. West Lafayette (on line), United States, Mar. 2021.
- [7] N. Auquier, K. Ege, and E. Gourdon. Dynamical behaviour of multilaye-

- red beam with imperfect interfaces : modeling and experimental validation. ISMA2022-USD2022. Leuven, Belgium, Sept. 2022.
- [8] N. Auquier, K. Ege, and E. Gourdon. Dynamique des matériaux multicouches à interfaces complexes : modélisation et expérimentation du glissement d'interface. 16ème Congrès Français d'Acoustique, CFA2022. Marseille, France, Apr. 2022.
- [9] N. Auquier, K. Ege, and E. Gourdon. Equivalent dynamic model of multilayered structures with imperfect interfaces : Application to a sandwich structured plate with sliding interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 535 :117052, Sept. 2022.
- [10] B. Bensaude-Vincent. *Eloge du mixte : matériaux nouveaux et philosophie ancienne*. Philosophie. Hachette littératures, Paris, 1998.
- [11] A. Berry, O. Robin, and F. Pierron. Identification of dynamic loading on a bending plate using the Virtual Fields Method. *Journal of Sound and Vibration*, 333(26) :7151–7164, Dec. 2014.
- [12] A. Bhimaraddi and L. K. Stevens. A Higher Order Theory for Free Vibration of Orthotropic, Homogeneous, and Laminated Rectangular Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51(1) :195–198, Mar. 1984.
- [13] M. Biot. A new approach to the mechanics of orthotropic multilayered plates. *International Journal of Solids and Structures*, 8(4) :475–490, Apr. 1972.
- [14] R. M. Brach and W. Goldsmith. Mechanical Impact Dynamics : Rigid Body Collisions. *Journal of Engineering for Industry*, 113(2) :248–249, May 1991.
- [15] S. Brischetto. Convergence analysis of the exponential matrix method for the solution of 3D equilibrium equations for free vibration analysis of plates and shells. *Composites Part B : Engineering*, 98 :453–471, Aug. 2016.
- [16] B. Brouard, D. Lafarge, and J.-F. Allard. A general method of modelling sound propagation in layered media. *Journal of Sound and Vibration*, 183(1) :129–142, May 1995.

- [17] P. Butaud, E. Foltête, and M. Ouisse. Sandwich structures with tunable damping properties : On the use of Shape Memory Polymer as viscoelastic core. *Composite Structures*, 153 :401–408, Oct. 2016.
- [18] P. Butaud, V. Placet, J. Klesa, M. Ouisse, E. Foltête, and X. Gabrion. Investigations on the frequency and temperature effects on mechanical properties of a shape memory polymer (Veriflex). *Mechanics of Materials*, 87 :50–60, Aug. 2015.
- [19] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite Structures*, 50(2) :183–198, Oct. 2000.
- [20] E. Carrera. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 56(3) :287–308, May 2003.
- [21] A. Castel. *Comportement vibratoire de structures composites intégrant des éléments amortissants*. Thèse de Doctorat, Université de Bourgogne, France, 2013. NNT : 2013DIJOS047.
- [22] Z.-Q. Cheng, A. K. Jemah, and F. W. Williams. Theory for Multilayered Anisotropic Plates With Weakened Interfaces. *Journal of Applied Mechanics*, 63(4) :1019–1026, Dec. 1996.
- [23] O. Dazel, J.-P. Groby, B. Brouard, and C. Potel. A stable method to model the acoustic response of multilayered structures. *Journal of Applied Physics*, 113(8) :083506, Feb. 2013.
- [24] S. de Barros, A. L. Gama, M. Rousseau, and B. Collet. Characterization of bonded plates with Lamb and SH waves using a quasi-static approximation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2004.
- [25] M. Di Sciuva. Geometrically Nonlinear Theory of Multilayered Plates with Interlayer Slips. *AIAA Journal*, 35(11) :1753–1759, Nov. 1997.
- [26] M. Di Sciuva and U. Icardi. Discrete-layer models for multilayered shells accounting for interlayer continuity. *Meccanica*, 28(4) :281–291, Dec. 1993.



- [27] M. Di Sciuva and L. Librescu. Contribution to the nonlinear theory of multilayered composite shells featuring damaged interfaces. *Composites Part B : Engineering*, 32(3) :219–227, Apr. 2001.
- [28] S. B. Dong, K. S. Pister, and R. L. Taylor. On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates. *Journal of the Aerospace Sciences*, 29(8) :969–975, Aug. 1962.
- [29] A. Duda and L. L. Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell Type Structures. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 59(10) :585–585, 1979.
- [30] T. Dupont, G. Pavić, and B. Laulagnet. Acoustic Properties of Lightweight Micro-Perforated Plate Systems. *Acta Acustica united with Acustica*, 89(2) :201–212, 2003.
- [31] L. L. Durocher and R. Solecki. Harmonic vibrations of isotropic, elastic, and elastic/viscoelastic three-layered plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 60(1) :105–112, July 1976.
- [32] K. Ege, N. Roozen, Q. Leclère, and R. G. Rinaldi. Assessment of the apparent bending stiffness and damping of multilayer plates ; modelling and experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 426 :129–149, July 2018.
- [33] F. Fouchal, F. Lebon, and I. Titeux. Contribution to the modelling of interfaces in masonry construction. *Construction and Building Materials*, 23(6) :2428–2441, June 2009.
- [34] M. Gaborit. *Modelling of thin and imperfect interfaces : Tools and preliminary study*. PhD Thesis, KTH Royal Institute of Technology, 2018. OCLC : 1038641262.
- [35] L. Gallerand, M. Legrand, T. Dupont, and P. Leclaire. Vibration and damping analysis of a thin finite-size microperforated plate. *Journal of Sound and Vibration*, 541 :117295, Dec. 2022.

- [36] C. Gauthier, M. Ech-Cherif El-Kettani, J. Galy, M. Predoi, D. Leduc, and J.-L. Izbicki. Lamb waves characterization of adhesion levels in aluminum/epoxy bi-layers with different cohesive and adhesive properties. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 74 :15–20, Apr. 2017.
- [37] R. Geyl, F. Houbre, Y. Cornil, T. Lepine, and Y. Sortais. Optiques freeforms : défis et perspectives. *Photoniques*, (106) :17–21, Jan. 2021.
- [38] S. Ghinet and N. Atalla. Modeling thick composite laminate and sandwich structures with linear viscoelastic damping. *Computers & Structures*, 89(15-16) :1547–1561, Aug. 2011.
- [39] G. Gilardi and I. Sharf. Literature survey of contact dynamics modelling. *Mechanism and Machine Theory*, 37(10) :1213–1239, Oct. 2002.
- [40] A. Giraudeau, B. Guo, and F. Pierron. Stiffness and Damping Identification from Full Field Measurements on Vibrating Plates. *Experimental Mechanics*, 46(6) :777–787, Dec. 2006.
- [41] E. Gourdon, C. Sauzéat, H. Di Benedetto, and K. Bilodeau. Seven-Parameter Linear Viscoelastic Model Applied to Acoustical Damping Materials. *Journal of Vibration and Acoustics*, 137(6) :061003, Dec. 2015.
- [42] M. Grédiac, F. Pierron, S. Avril, and E. Toussaint. The Virtual Fields Method for Extracting Constitutive Parameters From Full-Field Measurements : a Review. *Strain*, 42(4) :233–253, Oct. 2008.
- [43] W. Guo and Q. Feng. Free Vibration Analysis of Arbitrary-Shaped Plates Based on the Improved Rayleigh–Ritz Method. *Advances in Civil Engineering*, 2019 :1–14, Oct. 2019.
- [44] J.-L. Guyader and C. Cacciolati. Viscoelastic properties of single layer plate material equivalent to multi-layer composites plate. *Inter-Noise 2007*, 2007.
- [45] J.-L. Guyader and C. Lesueur. Acoustic transmission through orthotropic multilayered plates, part I : Plate vibration modes. *Journal of Sound and Vibration*, 58(1) :51–68, May 1978.

- [46] D. A. Haessig and B. Friedland. On the Modeling and Simulation of Friction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 113(3) :354–362, Sept. 1991.
- [47] S. I. Hayek. Nearfield Acoustical Holography. In D. Havelock, S. Kuwano, and M. Vorländer, editors, *Handbook of Signal Processing in Acoustics*, pages 1129–1139. Springer New York, New York, NY, 2008.
- [48] J. He and Z.-F. Fu. *Modal analysis*. Butterworth-Heinemann, Oxford Boston, 2001.
- [49] H. Hencky. Über die berücksichtigung der schubverzerrung in ebenen platten. *Ingenieur-Archiv*, pages 72–76, 1947.
- [50] H. Hertz. Miscellaneous papers. *Macmillan*, 1896.
- [51] B. Hosten and M. Castaings. Finite elements methods for modeling the guided waves propagation in structures with weak interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(3) :1108–1113, Mar. 2005.
- [52] K. H. Hunt and F. R. E. Crossley. Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics*, 42(2) :440–445, June 1975.
- [53] N. Ismaili, D. Chenouni, Z. Lakhliai, M.-C. El-Kettani, B. Morvan, and J.-l. Izbicki. Determination of epoxy film parameters in a three-layer metal/adhesive/metal structure. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 56(9) :1955–1959, Sept. 2009.
- [54] K. L. Johnson, K. Kendall, and A. D. Roberts. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 324(1558) :301–313, Sept. 1971.
- [55] J. P. Jones and J. S. Whittier. Waves at a Flexibly Bonded Interface. *Journal of Applied Mechanics*, 34(4) :905–909, Dec. 1967.
- [56] K. Kendall and D. Tabor. An ultrasonic study of the area of contact between stationary and sliding surfaces. *Proc. Roy. Soc. Loud.*, 323 :321–340, 1971.

- [57] E. M. Kerwin. Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(7) :952–962, July 1959.
- [58] J.-H. Kim, F. Pierron, M. Wisnom, and K. Syed-Muhamad. Identification of the local stiffness reduction of a damaged composite plate using the virtual fields method. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(9) :2065–2075, Sept. 2007.
- [59] G. Kirchhoff. Ueber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe (in German). *Crelle Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, pages 51–88, 1850.
- [60] M.-R. Lab. AlphaCell. version 15.0, Apr. 2023. [alphacell.matelys.com](http://alphacell.matelys.com).
- [61] H. M. Lankarani and P. E. Nikraves. A Contact Force Model With Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems. *Journal of Mechanical Design*, 112(3) :369–376, Sept. 1990.
- [62] A. I. Lavrentyev and J. T. Beals. Ultrasonic measurement of the diffusion bond strength. *Ultrasonics*, 38(1-8) :513–516, Mar. 2000.
- [63] A. I. Lavrentyev and S. I. Rokhlin. Ultrasonic spectroscopy of imperfect contact interfaces between a layer and two solids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103(2) :657–664, Feb. 1998.
- [64] M. Le Deunf. *Caractérisation par problème inverse de l’amortissement présent dans une structure sandwich mousse-plaque avec différents types de contact à l’interface*. Thèse de Doctorat, Le Mans Université, 2022. NNT : 2022LEMA1013.
- [65] Q. Leclère, F. Ablitzer, and C. Pézerat. Practical implementation of the corrected force analysis technique to identify the structural parameter and load distributions. *Journal of Sound and Vibration*, 351 :106–118, Sept. 2015.
- [66] Q. Leclère and C. Pézerat. Vibration source identification using corrected finite difference schemes. *Journal of Sound and Vibration*, 331(6) :1366–1377, Mar. 2012.

- [67] H. Lee and S. Pyo. Micromechanics-based elastic damage modeling of particulate composites with weakened interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 44(25-26) :8390–8406, Dec. 2007.
- [68] J. Lee, J.-S. Kim, and M. Cho. An asymptotic method-based composite plate model considering imperfect interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 190 :258–270, May 2020.
- [69] S. Lekhnitskii. Strength calculation of composite beams. *Vestnik inzhen i tekhnikov*, 1935.
- [70] L. Librescu and R. Schmidt. A general linear theory of laminated composite shells featuring interlaminar bonding imperfections. *International Journal of Solids and Structures*, 38(19) :3355–3375, May 2001.
- [71] D. Liu, L. Xu, and X. Lu. Stress analysis of imperfect composite laminates with an interlaminar bonding theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(16) :2819–2839, Aug. 1994.
- [72] D. Liu, L. Xu, and L. Xianqiang. An Interlaminar Bonding Theory for Delamination and Nonrigid Interface Analysis. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 12(11) :1198–1211, Nov. 1993.
- [73] K. H. Lo, R. M. Christensen, and E. M. Wu. A High-Order Theory of Plate Deformation—Part 2 : Laminated Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 44(4) :669–676, Dec. 1977.
- [74] A. Loredo and A. Castel. A multilayer anisotropic plate model with warping functions for the study of vibrations reformulated from Woodcock’s work. *Journal of Sound and Vibration*, 332(1) :102–125, Jan. 2013.
- [75] A. E. H. Love. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical trans. of the Royal Society*, pages 491–546, 1888.
- [76] M. J. S. Lowe and P. Cawley. The applicability of plate wave techniques for the inspection of adhesive and diffusion bonded joints. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 13(4) :185–200, Dec. 1994.

- [77] D. Y. Maa. Theory and design of microperforated panel sound-absorbing constructions. *Scientia Sinica*, 18 :55–71, 1975.
- [78] F. Marchetti. *Modélisation et caractérisation large bande de plaques multicouches anisotropes*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA Lyon), France, 2019. NNT : 2019LYSEI130.
- [79] F. Marchetti, U. Arasan, F. Chevillotte, and K. Ege. On the condensation of thick symmetric multilayer panels including dilatational motion. *Journal of Sound and Vibration*, 502 :116078, June 2021.
- [80] F. J. Margetan, R. B. Thompson, J. H. Rose, and T. A. Gray. The interaction of ultrasound with imperfect interfaces : Experimental studies of model structures. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 11(3-4) :109–126, Dec. 1992.
- [81] D. Marhefka and D. Orin. A compliant contact model with nonlinear damping for simulation of robotic systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A : Systems and Humans*, 29(6) :566–572, Nov. 1999.
- [82] R. Massabò and F. Campi. An efficient approach for multilayered beams and wide plates with imperfect interfaces and delaminations. *Composite Structures*, 116 :311–324, Sept. 2014.
- [83] R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, pages 31–38, 1951.
- [84] H. Murakami. Laminated Composite Plate Theory With Improved In-Plane Responses. *Journal of Applied Mechanics*, 53(3) :661–666, Sept. 1986.
- [85] P. B. Nagy. Ultrasonic classification of imperfect interfaces. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 11(3-4) :127–139, Dec. 1992.
- [86] J. Nobre, A. Dias, and R. Gras. A study on elasto-plastic impact friction. *Wear*, 230(2) :133–145, May 1999.

- [87] P. O'Donoghue, O. Robin, and A. Berry. Time-resolved identification of mechanical loadings on plates using the virtual fields method and deflectometry measurements. *Strain*, 54(3) :e12258, June 2018.
- [88] P. O'Donoghue, F. Gautier, E. Meteyer, T. Durand-Texte, M. Secail-Geraud, F. Foucart, O. Robin, A. Berry, M. Melon, C. Pézerat, A. Pelat, and P. Picart. Comparison of three full-field optical measurement techniques applied to vibration analysis. *Scientific Reports*, 13(1) :3261, Feb. 2023.
- [89] N. J. Pagano. Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. *Journal Composite Materials*, 3 :398–411, 1969.
- [90] F. Pierron, M. A. Sutton, and V. Tiwari. Ultra High Speed DIC and Virtual Fields Method Analysis of a Three Point Bending Impact Test on an Aluminium Bar. *Experimental Mechanics*, 51(4) :537–563, Apr. 2011.
- [91] C. Pézerat and J.-L. Guyader. Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam. *Acta Acustica*, 3(1) :1–10, 1995.
- [92] C. Pézerat and J.-L. Guyader. Force analysis technique : Reconstruction of force distributions on plates. *Acta Acustica*, 86(2) :322–332, 2000.
- [93] C. Pézerat and J.-L. Guyader. Identification of vibration sources. *Applied Acoustics*, 61(3) :309–324, 2000.
- [94] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3-4) :383–399, July 1999.
- [95] L. Rayleigh. *The Theory of Sound*, volume 1. The Macmillan Company, 1877.
- [96] L. Rayleigh. *The Theory of Sound*, volume 2. The Macmillan Company, 1878.
- [97] J. N. Reddy and D. H. Robbins. Theories and Computational Models for Composite Laminates. *Applied Mechanics Reviews*, 47(6) :147–169, June 1994.

- [98] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, pages 69–77, 1945.
- [99] W. Ritz. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *Journal für Reine und Angewandte Mathematik*, pages 1–61, 1908.
- [100] O. Robin, P. O’Donoghue, A. Berry, V. Farley, and K. Prithipaul. Full field vibration measurements on a cantilever beam under impact using visible and infrared deflectometry. *Applied Acoustics*, 183 :108294, Dec. 2021.
- [101] S. I. Rokhlin and W. Huang. Ultrasonic wave interaction with a thin anisotropic layer between two anisotropic solids : Exact and asymptotic-boundary-condition methods. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92(3) :1729–1742, Sept. 1992.
- [102] D. Ross. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae. *Structural damping*, 525(21) :49–97, 1959.
- [103] E. Sacco and F. Lebon. A damage–friction interface model derived from micromechanical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 49(26) :3666–3680, Dec. 2012.
- [104] T. Sacco. Dynamique des matériaux multicouches à interfaces complexes : Fabrication et expérimentation d’échantillons à glissement d’interface. Rapport de Projet de Fin d’Etudes, 2023.
- [105] R. Schmidt. A general theory of geometrically imperfect laminated composite shells featuring damaged bonding interfaces. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 52(4) :565–583, Nov. 1999.
- [106] M. Schoenberg. Elastic wave behavior across linear slip interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 68(5) :1516–1521, Nov. 1980.
- [107] R. Scholte. *Fourier based high-resolution near-field sound imaging*. PhD Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2008.



- [108] P. J. Shorter. Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(5) :1917–1925, May 2004.
- [109] K. P. Soldatos and X. Shu. Modelling of perfectly and weakly bonded laminated plates and shallow shells. *Composites Science and Technology*, 61(2) :247–260, Feb. 2001.
- [110] D. Stoianovici and Y. Hurmuzlu. A Critical Study of the Applicability of Rigid-Body Collision Theory. *Journal of Applied Mechanics*, 63(2) :307–316, June 1996.
- [111] E. E. Ungar and E. M. Kerwin. Loss Factors of Viscoelastic Systems in Terms of Energy Concepts. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(7), 1962.
- [112] A. Uthayasuriyan. *Advanced vibro-acoustic condensed models for multi-layer structures*. Thèse de Doctorat, Université de Lyon, France, 2021. NNT : 2021LYSET009.
- [113] K. Viverge. *Modèle de plaques stratifiées à fort contraste : application au verre feuilleté*. Thèse de Doctorat, Université de Lyon, 2019. NNT : 2019LYSET005.
- [114] V. Vlasie, S. de Barros, M. Rousseau, and L. Champaney. Ultrasonic rheological model of cohesive and adhesive zones in aluminum joints : validation by mechanical tests. *Archive of Applied Mechanics*, 75(4-5) :220–234, Feb. 2006.
- [115] T. Wassereau, F. Ablitzer, C. Pézerat, and J.-L. Guyader. Experimental identification of flexural and shear complex moduli by inverting the Timoshenko beam problem. *Journal of Sound and Vibration*, 399 :86–103, July 2017.
- [116] E. G. Williams. *Fourier acoustics : sound radiation and nearfield acoustical holography*. Academic Press, San Diego, Calif, 1999.

- [117] R. L. Woodcock. Free vibration of advanced anisotropic multilayered composites with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 312(4-5) :769–788, May 2008.
- [118] R. L. Woodcock and J. Nicolas. A generalized model for predicting the sound transmission properties of generally orthotropic plates with arbitrary boundary conditions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97(2) :1099–1112, Feb. 1995.
- [119] K. Xie, M. Chen, L. Zhang, and D. Xie. Wave based method for vibration analysis of elastically coupled annular plate and cylindrical shell structures. *Applied Acoustics*, 123 :107–122, Aug. 2017.
- [120] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 5th edition, 2000.
- [121] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. The Standard Discrete System and Origins of the Finite Element Method. *The Finite Element Method : its Basis and Fundamentals*, pages 1–20, 2013.