



HAL
open science

Résolution de certaines équations aux dérivées partielles par la méthode isogéométrique

Uriel Aguemon

► **To cite this version:**

Uriel Aguemon. Résolution de certaines équations aux dérivées partielles par la méthode isogéométrique. Mathématiques [math]. Institut de mathématiques et de sciences physiques (IMSP), 2021. Français. ⟨NNT : ⟩. ⟨tel-04509591⟩

HAL Id: tel-04509591

<https://hal.science/tel-04509591v1>

Submitted on 18 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Université d'Abomey-Calavi (UAC)-République du Bénin
Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP)
Le Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques(CEA-SMA)

Spécialité: Analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Thèse¹
présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Université d'Abomey-Calavi

Par
Aguemon Wiwegnon Uriel-Longin

Titre

*Résolution de certaines équations aux dérivées partielles
par la méthode isogéométrique*

Soutenue publiquement le 22 Octobre 2021 devant un jury composé de :

Président : M. Cyriaque C. ATINDOGBE, Professeur Titulaire, Département de Mathématiques, FAST/UAC.

Rapporteurs :

1. **Professeur Bisso SALEY**, Université Abdou Moumouni, Niamey (Niger).
2. **Professeur Abdou SENE**, Université Gaston Berger, Saint Louis (Sénégal).
3. **Dr MC Guy A. DEGLA**, Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP/UAC).

Examineur : Professeur Liamidi A. LEADI, Département de Mathématiques, FAST/UAC.

Directeur de thèse : Professeur Aboubacar MARCOS, Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP/UAC).

Invité : Dr Aurélien GOUDJO, Département de Mathématiques, FAST/UAC.

ANNEE ACADEMIQUE 2020-2021

1. Financé par le Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques et Applications (CEA-SMA)

Dédicace

*À la mémoire de ma Mère, ATCHE AGUEMON Victorine
et
de Mon frère GNANSOUNOU Désiré.*

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance aux Professeurs **GOUDJO Aurélien** et **AHOUNOU Bernadin** pour l'attention qu'ils ont portée à mon égard. Par leur disponibilité permanente, leurs conseils et leurs encouragements, ils m'ont apporté l'encadrement nécessaire à la conduite de mes travaux de thèse.

Nos remerciements vont également à l'endroit de **l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP)** pour nous avoir soutenu financièrement à travers le projet CEA-SMA de la Banque Mondiale.

Nous remercions **le président du jury, les rapporteurs, l'examineur et les superviseurs** d'avoir acceptés de lire cette thèse.

Nous remercions également le professeur Regis Duvigneau pour les remarques et suggestions faites afin de me permettre d'améliorer la qualité scientifique de cette thèse.

Nous tenons à remercier aussi le Docteur HOUEDANOU Koffi Wilfrid et le Docteur ADETOLA Jamal pour leur contribution scientifique à la rédaction de mon article: **An isogeometric error estimate for transport equation in 2D.**

Nous adressons également mes sincères remerciements aux amis du laboratoire d'analyse fonctionnel, d'analyse numérique et applications(Labo 3A) de la FAST, à ma famille et à ma belle famille, pour le soutien moral et la solidarité à mon égard.

Nous terminerons en ayant une pensée tournée vers toutes ces personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet de thèse.

Résumé

Ces travaux de thèse présentent la méthode isogéométrique comme une alternative fiable à la méthode des éléments finis lorsqu'on résout les edp sur des domaines non polygonaux ou non polyédriques. Nous avons donné les propriétés de la base B-spline dont nous nous sommes servis pour appliquer la méthode isogéométrique à l'approximation au sens des moindres carrés, à l'équation de Poisson, à l'équation de la chaleur et à l'équation de transport. Un résultat de convergence de la méthode isogéométrique a aussi été prouvé en $2D$ pour l'équation de transport, généralisant le résultat d'Alexandre Ern obtenu en éléments finis.

Mots-clés : Méthode isogéométrique, Galerkin discontinue, B-splines, résultat de convergence

Table des figures

1	Maillage éléments finis d'un domaine non polygonal	9
2.1	Vecteur nœud ouvert uniforme	28
2.2	Vecteur nœud ouvert non uniforme	28
2.3	Courbe B-spline obtenue avec $N_{i,1}$	29
2.4	Courbe B-spline obtenue avec $N_{i,2}$	30
2.5	Partition de l'unité de la base B-spline	32
2.6	Paramétrisation d'un segment	42
2.7	Paramétrisation d'une approximation d'un quart de cercle de rayon 3	44
2.8	Paramétrisation d'une approximation du demi-cercle de rayon 3	45
2.9	Paramétrisation de la courbe Ω	46
2.10	Paramétrisation d'une ligne brisée à 2 segments	46
2.11	Paramétrisation d'une ligne brisée à 3 segments	47

Liste des tableaux

2.1 Différences entre la MEF et la MIG	54
--	----

Table des matières

Dédicaces	1
Remerciements	2
Résumé	3
Table des figures	4
Table des tableaux	4
Introduction	9
Motivation	9
Contributions	10
1 Préliminaires	13
1.1 Introduction	13
1.2 Présentation des modèles	13
1.2.1 Equation de Poisson	13
1.2.2 Equation de la chaleur	13
1.2.3 Equation de transport	14
1.3 Résultats d'existence et d'unicité de solution	15
1.3.1 Equation de Poisson	15
1.3.2 Equation de la chaleur	15
1.3.3 Equation de transport	16
1.4 Conclusion	22
2 Approximation par la Méthode IsoGéométrique(MIG)	23
2.1 Introduction	23
2.2 Présentation de la méthode isogéométrique	24

2.2.1	B-splines univariées	26
	Courbe B-spline	29
	Propriétés des fonctions B-splines	30
2.2.2	B-splines bivariées	40
2.2.3	Principe de la méthode isogéométrique	41
	Paramétrisation	41
	L'espace discret	47
	Forme de la solution	47
2.2.4	Raffinement en isogéométrie	49
	Le h raffinement (Insertion des nœuds)	49
	Algorithme d'Oslo	52
2.2.5	Le p raffinement (élévation de degré)	53
	Le k raffinement	53
2.2.6	Différences entre la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode isogéométrique (MIG)	54
2.3	Approximation au sens des moindres carrés	54
2.3.1	Formulation du problème	54
2.3.2	Propriétés de la matrice de masse	55
2.3.3	Intégration numérique des matrices de masse locales	57
2.3.4	Calcul de l'erreur L^2	58
2.4	Résolution numérique de l'équation de Poisson	58
2.4.1	Formulation du problème	58
2.4.2	Calcul de variations sur une courbe régulière de $\mathbf{R}^d, d \in \{1,2\}$	61
2.4.3	Intégration numérique	63
2.4.4	Traitement de la condition de Dirichlet	63
2.4.5	Calcul de l'erreur L^2	64
2.5	Résolution numérique de l'équation de la chaleur	65
2.5.1	Formulation du problème	65
2.5.2	Intégration numérique	67
2.5.3	Traitement de la condition initiale	69
2.5.4	Traitement de la condition de Dirichlet	69
2.5.5	Calcul de l'erreur L^2	71
2.6	Résolution numérique de l'équation de transport	72
2.6.1	Formulation du problème en isogéométrie	72
2.6.2	Intégration numérique	74

2.7	Estimation d'erreur par la méthode isogéométrique pour l'équation de transport en 2D	75
2.7.1	Discrétisation	75
	Sémi-discrétisation en espace	75
	Discrétisation en temps	79
2.7.2	La notion de flux numérique	80
2.7.3	Inégalités inverse et de trace isogéométriques	84
2.7.4	Inégalité de Young-Lemme de Gronwall (version discrète)	85
2.7.5	Equations d'erreur	86
2.7.6	Egalité d'énergie	90
2.7.7	Estimation de stabilité	92
2.7.8	Théorème de convergence	114
2.8	Conclusion	126
	Conclusion et perspectives	127
	Conclusion	127
	Perspectives	127
	Bibliographie	128

Introduction

Motivation

La méthode des éléments finis présente des insuffisances : la dégradation du domaine d'étude lorsqu'on résout les edp sur des domaines non polygonaux ou non polyédriques et la difficulté à réaliser le maillage. En effet, pour la fabrication d'un appareil dans le domaine industriel, la première étape consiste à concevoir sa forme. Cette tâche incombe aux designers qui génèrent des fichiers CAO (conception assistée par l'ordinateur)[10], utilisant les B-splines pour représenter de manière raisonnable la géométrie du domaine.

La seconde étape consiste à réaliser l'analyse éléments finis. Les analystes éléments finis se servent de la base de Lagrange pour approcher la géométrie du domaine. L'utilisation de cette base détériore généralement la géométrie du domaine. Cette approximation de la géométrie peut provoquer des erreurs dans les résultats numériques [33, 20, 37]. De plus, l'analyse éléments finis demande donc beaucoup de temps pour les industriels [33, 10, 19, 49, 36].

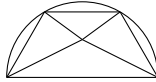


FIG. 1 – *Maillage éléments finis d'un domaine non polygonal*

Il faut donc réduire l'effort fourni pour convertir la description de la géométrie CAO (Conception Assistée par l'Ordinateur) en un maillage convenable pour l'analyse éléments finis en essayant d'intégrer ces deux technologies : la Conception Assistée par l'Ordinateur et l'Analyse Elements Finis. Cela nécessite l'utilisation d'un modèle géométrique qui peut être utilisé directement comme modèle d'analyse. Donc, il est nécessaire de modifier l'AEF(Analyse Elements Finis) en une procédure d'analyse basée sur la représentation CAO. Cette intégration de la CAO et de l'AEF a abouti à une nouvelle méthode de discrétisation des EDP appelée méthode isogéométrique (MIG) [20, 49] s'appuyant sur l'utilisation d'une unique base pour la géométrie et l'analyse [23]. Cette base est appelée la base B-spline.

Notre étude s'articule autour de la résolution de certaines edp par la méthode isogéométrique. Cette technique est mise en œuvre à travers la méthode de Galerkin discontinue ou continue, en se servant de la base B-spline, comme base d'approximation. Des edp elliptiques telles que l'équation de Poisson et l'équation de Laplace sont résolues dans la littérature. Cependant, la résolution de problèmes paraboliques et problèmes hyperboliques est moins aisée. La méthode des éléments finis nous limite d'un point de vue géométrique.

Notre objectif consiste à résoudre l'équation de la chaleur, l'équation de transport et l'équation de Poisson par la méthode isogéométrique sur une courbe de \mathbf{R}^d , $d = \{1; 2\}$.

Contributions

J. Evans and T. Hughes ont en 2011 obtenu des inégalités de trace pour la méthode isogéométrique [26]. A. Tagliabue, L. Dedè et A. Quarteroni ont publié en 2012 un article sur la résolution d'edp elliptiques par la méthode isogéométrique [50].

Des tests numériques ont été effectués et le h raffinement a été fait pour valider les résultats de convergence obtenus.

Stéphane Bordas et Gernot Beer ont résolu en 2015 l'équation de Poisson sur le segment $[0; 1]$ en prenant trois nœuds distincts. Ils ont utilisé comme condition aux limites, la condition de Dirichlet [6]. La résolution d'un tel problème conduit à résoudre un système linéaire faisant intervenir la matrice de rigidité. En prenant trois nœuds distincts, la matrice de rigidité obtenue est inversible. Mais lorsqu'on augmente le nombre de nœuds distincts, la matrice de rigidité n'est pas toujours bien conditionnée. Dans ce cas de figure, les méthodes directes ne marchent plus. Il faut utiliser ainsi les méthodes itératives comme les méthodes de Jacobi ou de Gauss Seidel. De plus, les h et p raffinements ne sont pas abordés dans l'article de Stéphane Bordas et Gernot Beer. De plus, l'équation n'a pas été résolue sur une courbe de \mathbf{R}^2 . Par conséquent, nous voulons résoudre l'équation de Poisson sur des courbes de \mathbf{R}^2 telles qu'un demi-cercle, une ligne brisée, afin de montrer les atouts de la méthode isogéométrique.

Y. Bazilevs, L. Beirao da Veiga, J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, G. Sangalli ont résolu le problème d'advection diffusion et ont obtenu une estimation d'erreur qui a été validée numériquement en 2006 [5].

Carla Manni, Francesca Pelosi et M. Lucia Sampoli ont résolu en 2011 cette même équation.

Cette EDP a été résolue en utilisant la méthode de Galerkin discontinue et la base B-spline comme base d'approximation.

L. Beirao da Veiga, A. Buffa, G. Sangalli, et R. Vazquez ont résolu l'équation d'advection-diffusion-reaction en 2012. Des tests numériques ont aussi été effectués pour valider numériquement les résultats obtenus[11].

L'équation de convection-diffusion a été aussi résolue par Liesel Schumacher en se servant de la méthode isogéométrique[47].

Dans le cadre de nos travaux de master, nous avons résolu l'équation de transport sur un segment par la méthode isogéométrique. Nous comptons aller au-delà du travail effectué

en master, en résolvant l'équation de transport sur des courbes de \mathbf{R}^2 .

Dans ce cas, l'équation de transport se met sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \nabla \cdot (\beta(x)u(x,t)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0; t_F] \\ u(.,t=0) = u_0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbf{R}^2 \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega^- \times [0; t_F] \end{array} \right. \quad (1)$$

$u : \Omega \times [0; t_F] \mapsto \mathbf{R}$ est l'inconnue. u est une fonction scalaire et t_F est fini.

$$\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega, \quad \beta(x) \cdot n(x) < 0\} \quad (2)$$

- Ω est un ouvert borné de \mathbf{R}^2 .
- n est la normale unitaire extérieure au bord du domaine.
- β est la vitesse advective, définie de \mathbf{R}^2 vers \mathbf{R}^2 .
- Nous supposons que $\beta \in [L^\infty(\Omega)]^2$ tel que $\nabla \cdot \beta \in L^\infty(\Omega)$.
- u_0 est la condition initiale.

La principale contribution de ce travail est l'obtention d'un résultat de convergence par la méthode isogéométrique en $2D$ pour l'équation de transport en utilisant le schéma explicite de Heun à 2 pas. Ce résultat est une généralisation du résultat obtenu par Alexandre Ern et al. En effet, Nous l'avons prouvé en utilisant une géométrie quelconque, contrairement à Alexandre Ern et al. qui l'a obtenu en éléments finis en se servant d'un polyèdre. Il est important de savoir que les schémas explicites Runge Kutta (RK) sont des méthodes populaires pour approcher en temps les systèmes d'équations différentielles ordinaires. Dans le contexte de la semi-discretisation par la méthode de Galerkin Discontinue, les schémas explicites RK ont été développés par Cockburn et Shu [17], Cockburn, Lin, et Shu [16], et Cockburn, Hou, et Shu [15] et appliqués à des problèmes en ingénierie [14]. Ces schémas par exemple *RK2* et *RK3* ont été utilisés par Alexandre Ern, E. Burman, and M. A. Fernandez, pour les lois de conservation linéaire en utilisant la méthode de Galerkin discontinue pour prouver un résultat de convergence [13].

Par ailleurs, d'autres outils sont nécessaires pour obtenir ce résultat :

1. Une équation d'erreur.
2. Une identité d'énergie obtenue à partir d'équation d'erreur.
3. Une estimation de stabilité utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le lemme de Gronwall, l'inégalité de Young et des inégalités inverses et de traces éléments finis [41].

Dans le cadre de nos travaux, nous avons prouvé un résultat de convergence en $2D$ utilisant la méthode isogéométrique. Ainsi, contrairement à la méthode des éléments finis, nous avons :

1. Construit un maillage paramétrique en faisant un produit tensoriel de vecteurs nœuds.
2. Construit une paramétrisation du domaine physique, indispensable pour décrire ce domaine.
3. Introduit un espace discret sur le domaine physique en utilisant notre paramétrisation.

De plus, en lieu et place des inégalités inverse et de trace éléments finis, nous utiliserons des inégalités inverse et de trace isogéométriques.

Préliminaires

1.1 Introduction

Dans cette partie, nous présentons les modèles soumis à notre étude. Il s'agit de l'équation de Poisson, l'équation de la chaleur et l'équation de transport. Puis, nous décrivons certains phénomènes que ces équations modélisent. Par la suite, nous donnons une formulation faible pour chaque modèle.

1.2 Présentation des modèles

1.2.1 Equation de Poisson

L'équation de Poisson se met sous la forme :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d, \quad (d = \{1; 2\}), \quad f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ω est une courbe de \mathbf{R}^d .

L'équation de Poisson modélise le déplacement vertical d'une membrane élastique fixée à ses extrémités et soumise à une force normale f [1].

1.2.2 Equation de la chaleur

L' équation de la chaleur encore appelée équation de diffusion se met sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nabla \cdot (D(x)\nabla u) = f(x,t), & x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d, \quad (d = \{1; 2\}), \quad t \in [0; T], \quad f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^2(\Omega), \quad x \in \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0; T]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Où $D(x)$ est une matrice carrée d'ordre d dépendant de x , appelée coefficient de diffusion.

Ω est une courbe de \mathbf{R}^d .

L'équation de la chaleur décrit la propagation de la chaleur à travers un milieu homogène et isotrope [46]. Par exemple, $u(x,t)$ peut désigner la température d'une tige métallique à l'instant t au point x [32]. Elle modélise aussi la diffusion ou la migration d'une concentration ou d'une densité à travers le domaine Ω . Par exemple, un polluant diffusant dans l'atmosphère[1]. Cette équation est utilisée également dans le domaine de la finance et est connue sous le nom d'équation de Black-Scholes [46, 1].

1.2.3 Equation de transport

Les phénomènes de transport apparaissent dans de multiples processus en physique ou dans notre vie de tous les jours : le transport de particules dans un champ électrique, le transport d'un signal le long d'un câble téléphonique, les phénomènes de conservation (conservation de la masse, de la quantité de mouvement) ou encore l'évolution de véhicules sur une route. Ces problèmes peuvent être modélisés par l'équation de transport [32] qui se présente sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \nabla \cdot (\beta(x)u(x,t)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0; t_F] \\ u(.,t = 0) = u_0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega^- \times [0; t_F] \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega, \quad \beta(x) \cdot n(x) < 0\}. \quad (1.4)$$

- Ω est un ouvert borné de \mathbf{R}^2 .
 - Ω est une surface.
 - $n(x)$ est la normale extérieure au bord du domaine.
 - On suppose que $\beta \in [L^\infty(\Omega)]^2$ et que $\nabla \cdot \beta \in L^\infty(\Omega)$.
 - On suppose qu'il existe un réel $\mu_0 > 0$, $\frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \mu_0$ p.p sur Ω .
- u représente de manière générale la densité ou la concentration d'une quantité physique.

1.3 Résultats d'existence et d'unicité de solution

1.3.1 Equation de Poisson

Le résultat d'existence et d'unicité de solution pour l'équation de Poisson est obtenu en utilisant le théorème de Lax-Milgram.

Théorème 1 (Lax-Milgram). *Soit V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de norme $\|\cdot\|_V$. Soit a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$.*

Nous considérons le problème variationnel suivant: étant donné $F \in V'$, trouver $u \in V$, solution de :

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \quad (1.5)$$

Si la forme a est coercive sur V , alors le problème 1.5 a une unique solution $u \in V$

Théorème 2. *La formulation faible de l'équation de Poisson est :*

Chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(u, v) = F(v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\text{Avec } a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Cette formulation faible admet une unique solution [1](page 115).

Démonstration. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, nous déduisons que la formulation faible de l'équation de Poisson admet une unique solution. \square

1.3.2 Equation de la chaleur

Nous rappelons un critère d'existence et d'unicité de solution pour un problème d'évolution.

Théorème 3. *Soit V et H des espaces de hilberts tels que V s'injecte de façon continue dans H et V est dense dans H .*

Soit a une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ telle que :

$$\exists \alpha \geq 0 \text{ et } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } a(u, u) + \alpha \|u\|_H^2 \geq \lambda \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V \quad (1.6)$$

Soient $f \in L^2(0, T, H)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Alors le problème :

Cherchez $u \in L^2(0, T; V) \cap C^1([0, T]; V)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t),v)_H + a(u(t),v) = (f,v)_H, & \forall v \in V. \\ (u(0),v) = (u_0,v), \forall v \in V. \end{cases} \quad (1.7)$$

admet une unique solution.

Théorème 4. Soient $f \in L^2(0,T,H)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$.

La formulation faible de l'équation de la chaleur est :

Chercher $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t),v)_{L^2(\Omega)} + a(u(t),v) = (f,v)_{L^2(\Omega)}, & \forall v \in H_0^1(\Omega). \\ (u(0),v) = (u_0,v), & \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\text{Avec } a(u(t),v) = \int_{\Omega} (D\nabla u(t))\nabla v dx$$

Cette formulation admet une unique solution [1](page254).

Démonstration. En utilisant le théorème 3, nous obtenons que la formulation faible de l'équation de la chaleur admet une unique solution. \square

1.3.3 Equation de transport

La formulation faible pour l'équation de transport est :

Chercher $u \in C^1([0,t_F]; V)$ tel que $\forall v \in V$:

$$\frac{d}{dt}(u(t),v)_{L^2(\Omega)} + (Au(t),v)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{avec } (Au(t),v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta u)v + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} uv \text{ où } (\beta \cdot n)^{\ominus} := \frac{1}{2}(|\beta \cdot n| - \beta \cdot n) \quad (1.10)$$

$$\text{Et } V = \{u \in L^2(\Omega), \nabla \cdot (\beta u) \in L^2(\Omega)\}. \quad (1.11)$$

Cette formulation faible admet une unique solution [41](page39).

L'objectif de cette partie est de montrer que le problème (1.14) est bien posé.

Introduisons l'opérateur $A \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\Omega))$, tel que :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad Av = \nabla \cdot (\beta v) \quad (1.12)$$

L'équation de transport devient :

$$d_t u + Au(t) = 0, \quad \forall t \in [0, t_F] \quad (1.13)$$

Le problème variationnel est : Cherchons $u \in C^1([0, t_F], V)$, $\forall v \in V$:

$$d_t(u(t), v)_{L^2(\Omega)} + (Au(t), v)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (1.14)$$

$$\text{Avec } (Au(t), v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta u) v + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} u v \text{ où } (\beta \cdot n)^{\ominus} := \frac{1}{2}(|\beta \cdot n| - \beta \cdot n) \quad (1.15)$$

$$\text{Et } V = \{u \in L^2(\Omega), \nabla \cdot (\beta u) \in L^2(\Omega)\} \quad (1.16)$$

Nous allons maintenant énumérer les propriétés relatives à V .

Pour $l \in \mathbb{N}$, considérons l'espace :

$$C^l(V) := C^l([0, t_F], V) \quad (1.17)$$

Théorème 5. V est un espace de hilbert muni du produit scalaire défini par :

$$(u, s)_V = (u, s)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \cdot (\beta u), \nabla \cdot (\beta s))_{L^2(\Omega)} \quad (1.18)$$

La norme associée est définie par :

$$\|u\|_V^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot (\beta u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad [41](page39) \quad (1.19)$$

Démonstration. Soit $(v_n)_n$ une suite de cauchy dans V . Montrons que $(v_n)_n$ converge dans V .

$(v_n)_n$ étant de cauchy dans V , $(v_n)_n$ et $(\nabla \cdot (\beta v_n))_n$ sont donc de cauchy dans $L^2(\Omega)$.

$L^2(\Omega)$ étant complet, $(v_n)_n$ et $(\nabla \cdot (\beta v_n))_n$ converge dans $L^2(\Omega)$.

Soit v et w les limites respectives de $(v_n)_n$ et $(\nabla \cdot (\beta v_n))_n$ dans $L^2(\Omega)$.

Montrons que $w = \nabla \cdot (\beta v)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta v_n) \varphi = - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla \varphi) v_n$$

$$\begin{aligned}
v_n \rightarrow v \text{ dans } L^2(\Omega) &\implies v_n \rightarrow v \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\
&\implies - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla \varphi) v_n \rightarrow - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla \varphi) v \\
&\implies \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta v_n) \varphi \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta v) \varphi \\
&\implies \nabla \cdot (\beta v_n) \rightarrow \nabla \cdot (\beta v) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)
\end{aligned}$$

Ainsi $w = \nabla \cdot (\beta v)$ car $\mathcal{D}'(\Omega)$ est séparé.

Par conséquent, $v_n \rightarrow v$ dans $L^2(\Omega)$ et $\nabla \cdot (\beta v_n) \rightarrow \nabla \cdot (\beta v)$ dans $L^2(\Omega)$ d'où $v_n \rightarrow v$ dans V .

On peut conclure que V est un espace de Hilbert. □

Par ailleurs, $C^l(V)$ est un espace de Banach muni de la norme définie par :

$$\|\phi\|_{C^l(V)} = \max_{0 \leq m \leq l} \|d_t^m \phi\|_{C^0(V)} \quad [41](\text{page69}) \quad (1.20)$$

$$\text{Avec } \|\phi\|_{C^0(V)} = \max_{t_0 \leq t \leq t_F} \|\phi(t)\|_V \quad [41](\text{page69}) \quad (1.21)$$

De l'égalité (1.19), nous obtenons que $\forall u \in V$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_V$. V s'injecte donc de façon continue dans $L^2(\Omega)$.

De plus, V est dense dans $L^2(\Omega)$ car $\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset L^2(\Omega)$ [41](page40)

Pour donner un sens à la condition au bord de l'équation de transport, nous allons introduire la notion de trace dans l'espace graphe défini par :

$$L^2(|\beta \cdot n|, \partial\Omega) = \{v \text{ définie sur } \partial\Omega, \int_{\partial\Omega} |\beta \cdot n| v^2 < \infty\} \quad (1.22)$$

Toutefois, rappelons la formule d'intégration par parties.

Théorème 6 (Formule d'intégration par parties).

$$\forall (v, w) \in V^2, \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v) w + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w) v + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v w = \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) \gamma(v) \gamma(w) \quad [41](\text{page41}) \quad (1.23)$$

Démonstration. Soit $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta v) w &= \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) v w - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w) v \\
\int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v w + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v) w &= \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) v w - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w) v \\
\int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v w + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v) w + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w) v &= \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) v w, v \in V \text{ et } w \in V
\end{aligned}$$

car $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans V [51] (pages 15 – 19).

□

Théorème 7 (Théorème de trace).

– On suppose que $\partial\Omega^-$ et $\partial\Omega^+$ sont séparés i.e

$$dist(\partial\Omega^-, \partial\Omega^+) = \min_{(x,y) \in \partial\Omega^- \times \partial\Omega^+} \|x - y\| > 0 \quad (1.24)$$

– Considérons $\gamma : v \mapsto \gamma(v) = v|_{\partial\Omega}$

$$Ainsi : \exists C, \forall u \in V, \|\gamma(u)\|_{L^2(|\beta \cdot n|, \partial\Omega)} \leq C \|u\|_V \quad [41] (page 41) \quad (1.25)$$

Démonstration. $\partial\Omega^-$ et $\partial\Omega^+$ sont séparés, il existe deux fonctions ψ^- et ψ^+ dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ telles que :

$$\psi^- + \psi^+ = 1 \text{ dans } \overline{\Omega} \text{ avec } \psi^-|_{\partial\Omega^+} = 0 \text{ et } \psi^+|_{\partial\Omega^-} = 0$$

Soit $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} v^2 |\beta \cdot n| &= \int_{\partial\Omega} v^2 (\psi^- + \psi^+) |\beta \cdot n| \\
&= \int_{\partial\Omega^-} v^2 \psi^- |\beta \cdot n| + \int_{\partial\Omega^+} v^2 \psi^+ |\beta \cdot n| \\
&= \int_{\partial\Omega} -v^2 \psi^- (\beta \cdot n) + \int_{\partial\Omega} v^2 \psi^+ (\beta \cdot n) \\
&= \int_{\partial\Omega} v^2 (\psi^+ - \psi^-) (\beta \cdot n) \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot (v^2 (\psi^+ - \psi^-) \beta) \quad (\text{Formule de Green}) \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot ((\psi^+ - \psi^-) \beta) v^2 + \int_{\Omega} 2(\psi^+ - \psi^-) (\beta \cdot \nabla v) v \\
&\quad (\text{Formule d'intégration par parties}) \\
&\leq \|\nabla \cdot ((\psi^+ - \psi^-) \beta)\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\psi^+ - \psi^-\|_{L^\infty(\Omega)} \|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\text{Or } 2\|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} v^2 |\beta \cdot n| &\leq \|\nabla \cdot ((\psi^+ - \psi^-) \beta)\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi^+ - \psi^-\|_{L^\infty(\Omega)} \|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\psi^+ - \psi^-\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq (\|\psi^+ - \psi^-\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \cdot ((\psi^+ - \psi^-) \beta)\|_{L^\infty(\Omega)}) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \|\psi^+ - \psi^-\|_{L^\infty(\Omega)} \|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

$$\beta \cdot \nabla v = \nabla \cdot (\beta v) - (\nabla \cdot \beta) v$$

$$\text{Donc } \|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla \cdot (\beta v)\|_{L^2(\Omega)} + \|(\nabla \cdot \beta) v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{Ainsi } \|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\|\nabla \cdot (\beta v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|(\nabla \cdot \beta) v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\|\beta \cdot \nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\|\nabla \cdot (\beta v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\nabla \cdot \beta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\|\gamma(v)\|_{L^2(|\beta \cdot n|, \partial\Omega)} \leq C \|v\|_V, \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

$C^\infty(\overline{\Omega})$ étant dense dans V , $\|\gamma(v)\|_{L^2(|\beta \cdot n|, \partial\Omega)} \leq C\|v\|_V, \forall v \in V$ □

Prouvons maintenant que le modèle équivaut au problème (1.14).

Le modèle \implies problème (1.14) car $\int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus uv = \int_{\partial\Omega^-} |\beta \cdot n| uv$.

Montrons que le problème (1.14) \implies le modèle.

Soit u la solution du problème (1.14). Montrons que u vérifie le modèle.

En prenant $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (1.14), nous obtenons :

$$\int_{\Omega} u_t(x,t)v + \nabla \cdot (\beta(x)u(x,t))v = 0.$$

La relation 1.3.3 est vraie pour $v \in L^2(\Omega)$ car $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

$$\text{Donc } u_t(x,t) + \nabla \cdot (\beta(x)u(x,t)) = 0 \text{ pp sur } \Omega.$$

Par conséquent, nous obtenons la relation suivante :

$$u_t(x,t) + \nabla \cdot (\beta(x)u(x,t)) = 0 \implies \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus uv = 0, \forall v \in V.$$

En posant $v = u$, on a : $\int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus u^2 = 0$.

Or $\int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus u^2 = \int_{\partial\Omega^-} |\beta \cdot n| u^2$. Nous déduisons que $u|_{\partial\Omega^-} = 0$.

L'implication recherchée est donc obtenue.

Nous voulons nous assurer par la suite que le problème (1.14) admet une unique solution.

Pour le montrer, nous ferons référence au théorème 3 d'existence et d'unicité de solution pour un problème d'évolution.

Théorème 8. *Le problème (1.14) est bien posé.*

Démonstration. $V = \{u \in L^2(\Omega), \nabla \cdot (\beta u) \in L^2(\Omega)\}$.

V est un hilbert s'injectant de façon continue dans $H = L^2(\Omega)$ et V est dense dans H .

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta u)v + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus uv.$$

Montrons que a est donc continue sur $V \times V$. Soient $(u, v) \in V \times V$.

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla \cdot (\beta u) v| + \int_{\partial\Omega} |(\beta \cdot n)^{\ominus} u v| \\
&\leq \|\nabla \cdot (\beta u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} |(\beta \cdot n)| |u v| \\
&\leq \|u\|_V \|v\|_V + \|\gamma(u)\|_{L^2(|\beta \cdot n|, \partial\Omega)} \|\gamma(v)\|_{L^2(|\beta \cdot n|, \partial\Omega)} \\
&\leq \|u\|_V \|v\|_V + C^2 \|u\|_V \|v\|_V \\
|a(u, v)| &\leq (1 + C^2) \|u\|_V \|v\|_V
\end{aligned}$$

a est donc continue sur $V \times V$.

Vérifions l'hypothèse (1.6)

Soit $u \in V$.

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta u) u + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} u^2 \\
&= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u^2 + (\beta \cdot \nabla u) u + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} u^2 \\
&= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u^2 + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{1}{2} (\beta \cdot n) + (\beta \cdot n)^{\ominus} \right] u^2
\end{aligned}$$

en utilisant la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u^2 + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| u^2 \\
a(u, u) &\geq \mu_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(|\beta \cdot n|, \partial\Omega)}^2
\end{aligned}$$

En posant $\|u\|_V^2 = \mu_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(|\beta \cdot n|, \partial\Omega)}^2$, nous avons : $a(u, u) \geq \|u\|_V^2$

Par conséquent, le problème (1.14) est bien posé.

□

1.4 Conclusion

Les modèles soumis à notre étude à savoir l'équation de Poisson, l'équation de la chaleur et l'équation de transport ont été présentés ainsi que certains phénomènes physiques qu'ils décrivent. Les résultats d'existence et d'unicité de solution ont été mentionnés pour les différents modèles.

Approximation par la Méthode IsoGéométrique (MIG)

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rassemblons les outils de base de la méthode isogéométrique, nécessaire pour résoudre les équations que nous voulons étudier. Dans la section 2.2.1, nous parlons des B-splines univariées en utilisant la formule de récurrence de Cox de Boor. Nous donnons les différents types de vecteurs nœuds. Nous définissons les courbes B-splines. Nous donnons par la suite les propriétés des B-splines à savoir la propriété du support local, la positivité des B-splines, la partition de l'unité, la propriété de l'enveloppe convexe, le calcul de la dérivée des fonctions B-splines. Dans la sous-section 2.2.2, nous définissons les B-splines bivariées et donnons leurs propriétés. La sous-section 2.2.3 est consacrée au principe de la MIG. A ce niveau, nous parlons de la paramétrisation du domaine. Nous donnons des exemples de paramétrisation d'un segment de droite, d'un quart de cercle, d'un demi-cercle puis d'un cercle. Par la suite, nous décrivons l'espace discret. Dans la sous-section 2.2.4, nous abordons le raffinement en isogéométrie : nous parlons du h raffinement en passant en revue l'algorithme de Boehm et de celui d'Oslo. Nous nous penchons après sur les p et k raffinements.

Par ailleurs, nous approchons une fonction par une courbe B-spline. Cette approximation nous conduit à formuler le problème dans la sous-section 2.3.1. La formulation du problème mène à un système d'équations faisant intervenir la matrice de masse. De plus, nous abordons les propriétés de symétrie et d'inversibilité des matrices de masse locales dans la sous-section 2.3.2. Le problème étant résolu, l'approximation au sens des moindres carrés est obtenue. Nous calculons ensuite l'erreur L^2 entre la fonction à approcher et l'approximation dans la sous-section 2.3.4.

Dans la suite, nous résolvons l'équation de Poisson par la MIG. Cela nécessite la résolution d'un système linéaire en utilisant la méthode de Jacobi pondérée.

La sous-section 2.5.1 est consacrée à la formulation de l'équation de la chaleur. A ce niveau, nous faisons une sémi-discrétisation en espace. Nous nous donnons un vecteur nœud ouvert, puis nous construisons la base B-spline associée. Nous donnons la paramétrisation permettant de décrire notre domaine. Nous construisons l'espace discret et nous donnons la forme de la solution à calculer en utilisant la méthode de Galerkin discontinue et la base B-spline comme base d'approximation. Dans la sous-section 2.5.3, nous abordons le traitement de la condition initiale qui conduit à la résolution d'un système d'équations faisant intervenir la matrice de masse. Nous parlons du traitement de la condition de Dirichlet dans la sous-section 2.5.4. Par la suite, nous obtenons un système d'équations différentielles utilisant les matrices de masse et de rigidité. Nous faisons une discrétisation en temps pour résoudre le système obtenu, en nous servant d'une méthode de RUNGE KUTTA d'ordre 2.

La section 2.6 traite de la résolution de l'équation de transport par la méthode isogéométrique. Nous formulons le problème, en nous servant de la matrice de masse et de la matrice de rigidité pour résoudre l'edp.

Dans la section 2.7, nous présentons une estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution numérique de l'équation de transport en $2D$. A cet effet, nous faisons une sémi-discrétisation en espace : nous construisons un vecteur nœud ouvert ainsi que la base B-spline associée suivant les deux directions en faisant un produit tensoriel. Nous donnons la paramétrisation du domaine, l'espace discret et le problème discret. Nous montrons que le problème discret est bien posé. En ce qui concerne la discrétisation en temps, nous donnons un schéma numérique et nous introduisons la notion de flux numérique. Nous énumérons les inégalités inverses et de traces isogéométriques. Nous donnons l'inégalité de Young et le lemme de Gronwall. Ensuite, nous établissons des équations d'erreur, une égalité d'; une estimation de stabilité ainsi qu'un théorème de convergence. Pour finir, nous montrons que notre théorème de convergence est une généralisation du résultat obtenu par Alexandre Ern.

2.2 Présentation de la méthode isogéométrique

La méthode isogéométrique (MIG) a été introduite par Thomas J.R. Hughes, Yuri Bazilevs et J.A.Cottrell en 2005 [20], motivée par les défis posés par le problème de génération de maillage [2]. Elle fournit des procédures de raffinement incluant les h et p raffinements classiques semblables à la méthode des éléments finis et développe une nouvelle technique de raffinement appelée le k raffinement. Elle se consacre à unifier les processus de conception et d'analyse en utilisant le même cadre [25]. En effet, la méthode isogéométrique est une méthode dont le principe est d'utiliser une base pour décrire exactement la géométrie du

domaine et de s'en servir par la suite pour calculer la solution numérique. En d'autres termes, l'idée essentielle est de construire un modèle géométrique et d'utiliser directement les fonctions décrivant la géométrie en analyse [34]. Il s'agit des fonctions de base B-spline.

Les B-splines signifient **basis splines**[28, 44, 45, 12]. Elles ont été étudiées dès le début du 19^e siècle par N.Lobachevsky [27]. En 1946, Schoenberg a utilisé les B-splines comme base pour les techniques d'interpolation numérique [3, 48, 12]. Son papier a marqué le début de la théorie moderne de l'approximation par les splines [27], [11]. Les méthodes pour les courbes B-splines ont été développées grâce aux travaux de l'ingénieur français Pierre Bézier en 1960 qui travaillait à Renault [44]. Il a conçu des courbes portant aujourd'hui son nom, pour la fabrication des pièces automobiles à l'aide de l'ordinateur. Ces courbes sont obtenues en se servant des points de contrôle et de la base de Bernstein.

Par ailleurs, la base de Bernstein présente certaines propriétés intéressantes d'un point de vue géométrique telles que, la partition de l'unité, la propriété de l'enveloppe convexe, l'invariance par transformation affine. Cependant, cette base présente deux insuffisances [44]:

- Elle limite la flexibilité de la courbe de Bézier obtenue. En effet, le nombre de points de contrôle fixe le degré de la courbe [44] car le degré d'une courbe de Bézier est inférieur d'une unité au nombre de points de contrôles [31].
- Lorsqu'on déplace un point de contrôle, la forme de la courbe est totalement modifiée. On ne peut donc pas contrôler localement une courbe en se servant de la base de Bernstein [44].

Par exemple, dans l'industrie automobile, il est gênant que toute la pièce change de forme lorsque nous voulons seulement faire varier une partie de la pièce [31].

Il faut donc utiliser une base qui présente les avantages de la base de Bernstein et qui améliorent ses faiblesses[31]. Il s'agit des B-splines. Les B-splines sont une généralisation de la base de Bernstein. Contrairement à la base de Bernstein, les B-splines nous permettent de contrôler localement une courbe et de modifier le degré de la base sans changer le nombre de points de contrôle.

Suite aux travaux de Pierre Bézier, d'autres chercheurs ont développé dans les années 1970 des méthodes pour les courbes B-splines. En effet, En 1960, Carl de Boor travaillait pour General Motors et se servait des B-splines comme outil de représentation géométrique [28].

La définition originale des B-splines utilise les différences divisées et cette définition est numériquement instable [28, 21, 8]. Ainsi, Carl de Boor, Maurice Cox et L.Mansfield ont établi au début des années 1970, une relation de récurrence pour les B-splines[27, 21, 8] afin d'améliorer leur stabilité et de faciliter leur utilisation [12].

Par la suite, plusieurs algorithmes ont été développés pour simplifier le traitement mathématique des courbes B-splines [28]. Nous pouvons citer :

1. L'algorithme d'Oslo écrit à Oslo en Norvège en 1979, par Elie Cohen, Tom Lyche et Rich Riesenfeld [18, 29].
2. L'algorithme d'insertion de nœuds de Wolfgang Boehm en 1980[7].
3. L'algorithme d'élévation du degré de Piegl et Tiller [42].

D'autres chercheurs tels que Larry Schumacher, Harmut Prautzsch, Robin Forrest, Bill Gordon, Ken Versprille, Steve Coons, Lewie Knapp ont apporté également leur contribution au développement des B-splines[44].

2.2.1 B-splines univariées

Définition 1. Soit $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ une suite croissante (au sens large) de réels, les fonctions B-splines $N_{i,k}$ de degré k (d'ordre $k+1$) sont définies par la formule de récurrence de Cox de Boor par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Pour } 1 \leq i \leq m-1 & \\ N_{i,0}(t) = 1 & \text{si } t \in [x_i, x_{i+1}[\quad (1) \\ N_{i,0}(t) = 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Pour } k \geq 1 \text{ et } 1 \leq i \leq m-k-1 & \\ N_{i,k}(t) = \frac{t-x_i}{x_{i+k}-x_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{x_{i+k+1}-t}{x_{i+k+1}-x_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) & (2) \end{array} \right.$$

Avec la convention $\frac{x}{0} := 0$ pour tout nombre réel x .

La construction des fonctions de base B-spline se fait en utilisant le triangle suivant :

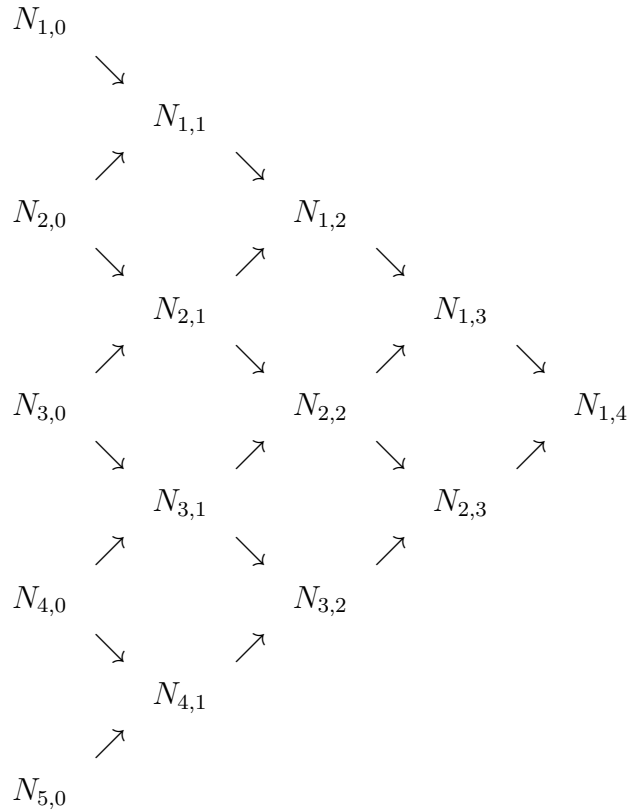


Schéma récursif de $N_{1,4}$

Le vecteur constitué des x_i ($1 \leq i \leq m$) est appelé vecteur nœud.

Il existe différents types de vecteurs nœuds utiles pour faire de l'analyse numérique des edp.

Définition 2. Un vecteur nœud dont les valeurs extrêmes sont répétées $(k + 1)$ fois est appelé vecteur nœud ouvert pour une base B-spline de degré k .

Exemple 1. $[0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3]$ est un vecteur nœud ouvert pour une base B-spline de degré 1.

Définition 3. Un vecteur nœud ouvert est dit uniforme, lorsque la multiplicité des nœuds aux extrémités du vecteur nœud est égale à l'ordre (soit le degré plus un) de la fonction de base B-spline et le pas interne est identique.

Exemple 2. 1. $[0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4]$ est un vecteur nœud ouvert uniforme de degré 1.

2. $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ est un vecteur nœud ouvert uniforme de degré 2.

3. $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$ est un vecteur nœud ouvert uniforme de degré 3.

Définition 4. Un vecteur nœud ouvert est dit non uniforme lorsque les conditions pour qu'il soit uniforme ne sont pas réunies.

Exemple 3. 1. $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4]$ est un vecteur nœud ouvert non uniforme de degré 2.

2. $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 5 \ 5]$ est un vecteur nœud ouvert non uniforme de degré 3.

Nous vous proposons quelques courbes de fonctions de base B-spline construites avec différents vecteurs nœuds.

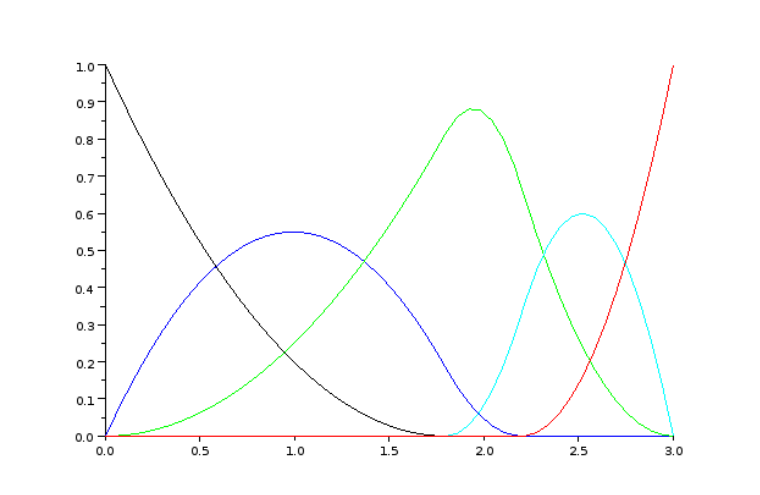


FIG. 2.1 – Vecteur nœud ouvert uniforme

$$X = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3] \quad k=2 \quad m=8 \quad n+1=5$$

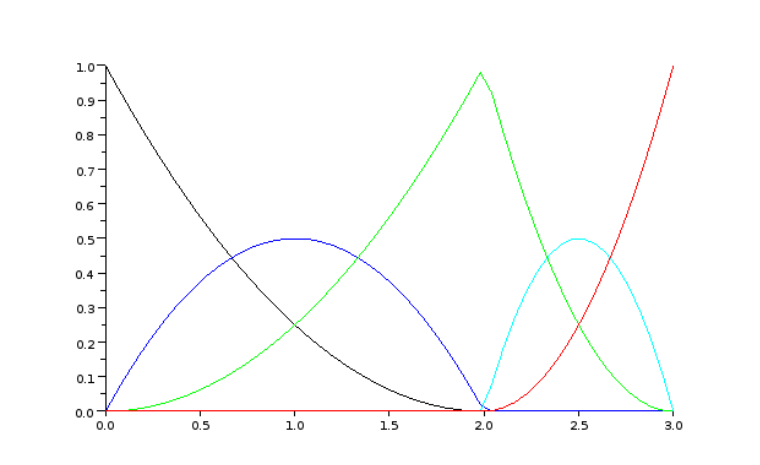


FIG. 2.2 – Vecteur nœud ouvert non uniforme

$$X = [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3] \quad k=2 \quad m=8 \quad n+1=5$$

Courbe B-spline

Définition 5. Soit $X = [x_1 \ x_2 \dots \ x_m]$ un vecteur noeud. Soit n un entier naturel non nul et soit $(P_i)_{i=0}^n$ une suite de points de \mathbf{R}^d ($d \in \mathbf{N}^*$ et $d \leq 3$). On appelle courbe B-spline de degré k (d'ordre $k + 1$) et de points de contrôle P_i , $i = 0, \dots, n$ la fonction P définie de l'intervalle $[x_1, x_m]$ dans \mathbf{R}^d par :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t), \quad x_1 \leq t \leq x_m, \quad 0 \leq k \leq n$$

L'ensemble des points $(P_i)_{i=0}^n$ sont les sommets d'un polygone appelé polygone de contrôle de la courbe P .

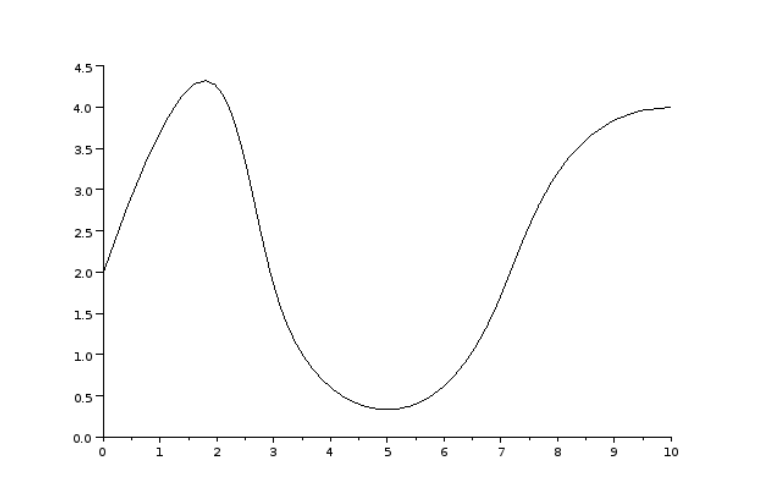


FIG. 2.3 – Courbe B-spline obtenue avec $N_{i,1}$
Points de contrôle :

$$P_1(0,0) \quad P_2(3,9) \quad P_3(6,3) \quad P_4(9,6)$$

Vecteur noeud :

$$X = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3]$$

Degré : $k = 1$ Nombre de fonctions de base : $n + 1 = 4$

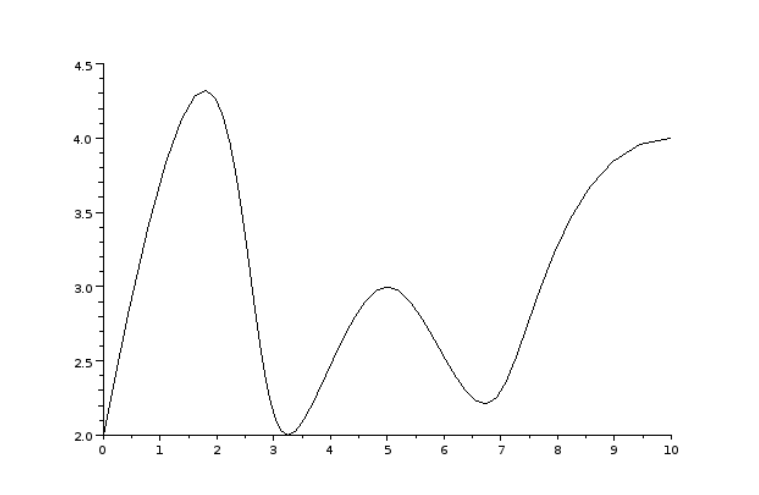


FIG. 2.4 – Courbe B-spline obtenue avec $N_{i,2}$
Points de contrôle :

$$P_1(0,0) \quad P_2(3,9) \quad P_3(6,3) \quad P_4(9,6)$$

Vecteur nœud :

$$X = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.5 \quad 3 \quad 3 \quad 3]$$

Degré : $k = 2$ Nombre de fonctions de base : $n + 1 = 4$

Propriétés des fonctions B-splines

Soit $(n + 1)$, le nombre de points de contrôle, k le degré de la fonction B-spline $N_{i,k}$ avec $1 \leq i \leq n + 1$ et m le nombre de nœuds. On se donne $X = [x_1 \quad x_2 \cdots x_m]$

Propriété 1. *L'image d'une courbe B-spline par une transformation affine est une courbe B-spline.*

Démonstration. Montrons que l'image d'une courbe B-splines par une transformation affine est une courbe B-splines. Soient n un entier naturel non nul et k le degré des fonctions B-splines. Soit ϕ une transformation affine et P une courbe B-splines définie par :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$$

avec P_i les points de contrôle. Comme ϕ est une transformation affine, Donc

$$\phi(P(t)) = \sum_{i=0}^n \phi(P_i) N_{i,k}(t)$$

d'où $\phi(P)$ est une courbe B-splines. On déduit que l'image d'une courbe B-splines par une transformation affine est une courbe B-splines. \square

Propriété 2. le support de $N_{i,k}$ est contenu dans $[x_i, x_{i+k+1}]$ [42] (page 55).

Démonstration. Il s'agit ici de démontrer que $N_{i,k}(t) = 0$ pour tout $t \notin [x_i, x_{i+k+1}]$. On Raisonnara par récurrence sur k . Cette preuve se fait en deux étapes :

- Démontrer que $\text{supp}N_{i,0} \subset [x_i, x_{i+1}]$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que le support de $N_{i,k}$ est contenu dans $[x_i, x_{i+k+1}]$ i.e $\forall t \notin [x_i, x_{i+k+1}], N_{i,k}(t) = 0$. On montre que le support de $N_{i,k+1}$ est contenu dans $[x_i, x_{i+k+2}]$ i.e $\forall t \notin [x_i, x_{i+k+2}], N_{i,k+1}(t) = 0$.

\square

Remarque 1. $N_{n+1,k} \subset [x_{n+1}, x_{n+k+2}]$. Comme c'est la dernière B-spline alors x_{n+k+2} est égal au dernier nœud x_m . Ainsi, si l'on dispose d'un vecteur nodal de longueur m et de degré k alors il y a exactement $(n + 1)$ fonctions de base avec $n = m - k - 2$.

Propriété 3. A l'intérieur de l'intervalle $[x_j; x_{j+1}[$, les seules $N_{i,k}$ non nulles sont les $N_{i,k}$ pour lesquelles $j - k \leq i \leq j$ [42] (page 56).

Démonstration. les $N_{i,k}$ sont non nulles si $[x_j; x_{j+1}[\subset [x_i; x_{i+k+1}]$ car

$\text{supp}N_{i,k} \subset [x_i; x_{i+k+1}]$. La suite $(x_i)_{i=1}^m$ étant croissante, nous obtenons :

$i \leq j$ et $j + 1 \leq i + k + 1$ donc $j - k \leq i \leq j$.

$$\begin{array}{ccccccc} \times & & \times & & \times & & \times \\ x_i & \text{-----} & x_j & \text{-----} & x_{j+1} & \text{-----} & x_{i+k+1} \end{array}$$

\square

Propriété 4. $\forall t \in [x_1; x_m], N_{i,k}(t) \geq 0$ [42] (page 57).

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur k .

Soit $t \in [x_1; x_m]$. Montrons que $N_{i,0}(t) \geq 0$. Par définition de $N_{i,0}$, on a $N_{i,0}(t) \geq 0$. supposons que $N_{i,k}(t) \geq 0$.

Montrons que $N_{i,k+1}(t) \geq 0$.

$$N_{i,k+1}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+k+1} - x_i} N_{i,k}(t) + \frac{x_{i+k+2} - t}{x_{i+k+2} - x_{i+1}} N_{i+1,k}(t).$$

$\forall t \in [x_i, x_{i+k+2}], \frac{t - x_i}{x_{i+k+1} - x_i} \geq 0$ et $\frac{x_{i+k+2} - t}{x_{i+k+2} - x_{i+1}} \geq 0$. De plus,

$$\forall i, N_{i,k}(t) \geq 0, \forall t \in [x_1; x_m]$$

donc

$$N_{i+1,k}(t) \geq 0, \forall t \in [x_1; x_m].$$

On en déduit ainsi que

$$N_{i,k+1}(t) \geq 0, \forall t \in [x_1; x_m]$$

car

$$\forall t \notin [x_i, x_{i+k+2}] \quad N_{i,k}(t) = 0 \quad \text{et} \quad N_{i+1,k}(t) = 0$$

ce qui achève la preuve. □

Propriété 5.

$$\sum_{i=j-k}^j N_{i,k}(t) = 1, \forall t \in [x_j, x_{j+1}[\quad [42] (Page 57) \quad (2.1)$$

On dit dans ce cas que les fonctions B-splines forment une partition de l'unité. Pour illustrer ce resultat, on pourra examiner la figure ci-dessous :

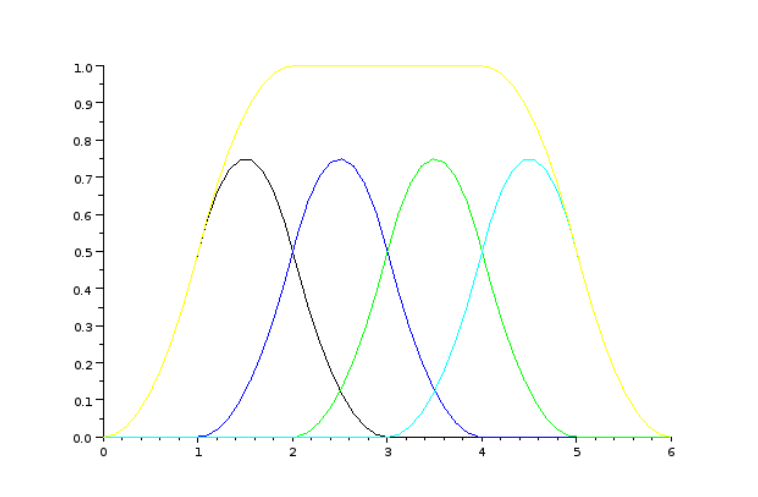


FIG. 2.5 – Partition de l'unité de la base B-spline

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur k .

Soit $t \in [x_j, x_{j+1}[$.

Pour $k = 0$, la relation 2.1 est triviale car $N_{i,0}(t) = 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall t \in [x_j, x_{j+1}[$, $\sum_{i=j-k}^j N_{i,k}(t) = 1$.

Montrons que $\forall t \in [x_j, x_{j+1}[$, $\sum_{i=j-k-1}^j N_{i,k}(t) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=j-k-1}^j N_{i,k+1}(t) &= \sum_{i=j-k-1}^j \frac{t-x_i}{x_{i+k+1}-x_i} N_{i,k}(t) + \sum_{i=j-k-1}^j \frac{x_{i+k+2}-t}{x_{i+k+2}-x_{i+1}} N_{i+1,k}(t). \\
&= \sum_{i=j-k-1}^j \frac{t-x_i}{x_{i+k+1}-x_i} N_{i,k}(t) + \sum_{i=j-k}^{j+1} \frac{x_{i+k+1}-t}{x_{i+k+1}-x_i} N_{i,k}(t). \\
&= \frac{t-x_{j-k-1}}{x_j-x_{j-k-1}} N_{j-k-1,k}(t) + \frac{x_{j+k+2}-t}{x_{j+k+2}-x_{j+1}} N_{j+1,k}(t) + \sum_{i=j-k}^j N_{i,k}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& \times & & \times & & \times & & \times \\
& x_{j-k-1} & & x_j & & x_{j+1} & & x_{j+k+2}
\end{array}$$

$$\forall t \in [x_j, x_{j+1}[, \sum_{i=j-k}^j N_{i,k}(t) = 1$$

De plus, $\text{supp}(N_{j-k-1,k}) \subset [x_{j-k-1}, x_j]$ donc $\forall t \in [x_j, x_{j+1}[, N_{j-k-1,k}(t) = 0$.

Aussi, $\text{supp}(N_{j+1,k}) \subset [x_{j+1}, x_{j+k+2}]$ ainsi $\forall t \in [x_j, x_{j+1}[, N_{j+1,k}(t) = 0$.

D' où

$$\sum_{i=j-k-1}^j N_{i,k+1}(t) = \sum_{i=j-k}^j N_{i,k}(t) = 1.$$

On conclut que

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\}, \forall t \in [x_j, x_{j+1}[, \sum_{i=j-k}^j N_{i,k}(t) = 1.$$

□

Propriété 6. La courbe B-spline se situe dans l'enveloppe convexe du polygone de contrôle.

Démonstration. la courbe B-Spline est donnée par $P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t)$.

Considérons un repère $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n+1})$, Soit $M(x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n+1}(t))$ un point de la courbe B-Spline et $B_i(B_{ix_1}, B_{ix_2}, \dots, B_{ix_{n+1}})$.

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \iff \begin{cases} x_1(t) &= \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) B_{ix_1} \\ x_2(t) &= \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) B_{ix_2} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ x_{n+1}(t) &= \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) B_{ix_{n+1}} \end{cases}$$

on obtient donc $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(t) \overrightarrow{OB_i}$. Comme $\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(t) = 1 \neq 0$, on déduit que $M = \text{bar}\{(B_1, N_{1,k}), (B_2, N_{2,k}), \dots, (B_{n+1}, N_{n+1,k})\}$

On déduit ainsi que la courbe B-Spline se situe dans l'enveloppe convexe du polygone de contrôle. \square

Propriété 7. $\forall t \in [x_1; x_m], N'_{i,k}(t) = k \left(\frac{N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right)$ [42](pages 59 – 61.)

Démonstration. Soit $t \in [x_1; x_m]$. Montrons que $N'_{i,k}(t) = k \left(\frac{N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right)$.

Raisonnons par récurrence sur k .

Montrons premièrement que :

$$N'_{i,1}(t) = \frac{N_{i,0}(t)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{N_{i+1,0}(t)}{x_{i+2} - x_{i+1}}.$$

$$N_{i,1}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+1} - x_i} N_{i,0}(t) + \frac{x_{i+2} - t}{x_{i+2} - x_{i+1}} N_{i+1,0}(t).$$

Comme $N_{i,0}(t)$ et $N_{i+1,0}(t)$ sont des constantes, en dérivant $N_{i,1}(t)$, on obtient que :

$$N'_{i,1}(t) = \frac{N_{i,0}(t)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{N_{i+1,0}(t)}{x_{i+2} - x_{i+1}}.$$

Supposons que pour $k \geq 1$, $N'_{i,k-1}(t) = (k-1) \left(\frac{N_{i,k-2}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-2}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \right)$. Montrons deuxièmement que $N'_{i,k}(t) = k \left(\frac{N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right)$.

En dérivant $N_{i,k}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
N'_{i,k}(t) &= \frac{N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} + \frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} N'_{i,k-1}(t) + \frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} N'_{i+1,k-1}(t) \\
&= \frac{N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} + \frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} \left[(k-1) \left(\frac{N_{i,k-2}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-2}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \left[(k-1) \left(\frac{N_{i+1,k-2}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} - \frac{N_{i+2,k-2}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+2}} \right) \right] \\
&= \frac{N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} + \frac{k-1}{x_{i+k} - x_i} \frac{t - x_i}{x_{i+k-1} - x_i} N_{i,k-2}(t) \\
&\quad - \frac{k-1}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+2} - x_{i+2}} N_{i+2,k-2}(t) + \\
&\quad \frac{k-1}{x_{i+k} - x_{i+1}} \left[\frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} - \frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} \right] N_{i+1,k-2}(t)
\end{aligned}$$

$$\frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} - \frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} = \frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} - \frac{x_{i+k+1} - x_{i+1}}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} + \frac{x_{i+k} - x_i}{x_{i+k} - x_i} - \frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i}$$

$$\frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} - \frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} = \frac{x_{i+k} - t}{x_{i+k} - x_i} - \frac{t - x_{i+1}}{x_{i+k+1} - x_{i+1}}$$

donc nous obtenons :

$$\begin{aligned}
N'_{i,k}(t) &= \frac{N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} + \frac{k-1}{x_{i+k} - x_i} \frac{t - x_i}{x_{i+k-1} - x_i} N_{i,k-2}(t) \\
&\quad - \frac{k-1}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+2}} N_{i+1,k-2}(t) \\
&\quad + \frac{k-1}{x_{i+k} - x_{i+1}} \left[\frac{x_{i+k} - t}{x_{i+k} - x_i} - \frac{t - x_{i+1}}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right] N_{i+1,k-2}(t) \\
&= \frac{N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} + \frac{k-1}{x_{i+k} - x_i} N_{i,k-1}(t) - \frac{k-1}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} N_{i+1,k-2}(t)
\end{aligned}$$

$$N'_{i,k}(t) = k \left(\frac{N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right),$$

ce qui achève la démonstration □

Propriété 8. Si un nœud intérieur x_i a pour multiplicité p_i , alors $N_{i,k}$ est $k - p_i$ fois continûment différentiable en $t = x_i$, et C^∞ partout ailleurs [40].

Démonstration. Etant donné que les fonctions B-splines sont polynomiales par morceaux,

elles sont C^∞ partout sauf en chacun des nœuds intérieurs du vecteur nœud.

Raisonnons maintenant par récurrence sur k . Supposons que x_i a pour multiplicité

$$p_i, (1 \leq p_i \leq k).$$

Pour $k = 1$, $p_i = 1$ et on a :

$$N_{i,1}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+1} - x_i} N_{i,0}(t) + \frac{x_{i+2} - t}{x_{i+2} - x_{i+1}} N_{i+1,0}(t)$$

Donc nous obtenons par la suite :

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} \frac{t - x_i}{x_{i+1} - x_i} \text{ si } t \in [x_i, x_{i+1}[\\ \frac{x_{i+2} - t}{x_{i+2} - x_{i+1}} \text{ si } t \in [x_{i+1}, x_{i+2}[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour $t \neq x_i$, $N_{i,1}$ est C^∞ et donc C^0 .

De plus, nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow x_i^+} N_{i,1}(t) = \lim_{t \rightarrow x_i^-} N_{i,1}(t) = N_{i,1}(x_i) = 0.$$

$N_{i,1}$ est par conséquent continue en x_i .

$$\lim_{t \rightarrow x_{i+1}^+} N_{i,1}(t) = \lim_{t \rightarrow x_{i+1}^-} N_{i,1}(t) = N_{i,1}(x_{i+1}) = 1.$$

$N_{i,1}$ est donc continue en x_{i+1} .

$$\lim_{t \rightarrow x_{i+2}^+} N_{i,1}(t) = \lim_{t \rightarrow x_{i+2}^-} N_{i,1}(t) = N_{i,1}(x_{i+2}) = 0.$$

Ainsi $N_{i,1}$ est continue en x_{i+2} . Donc $N_{i,1}$ est C^0 .

Supposons que t a pour multiplicité p_i .

Montrons que $N_{i,k} \in C^{k-p_i}$ en $t = x_i$.

$$N'_{i,k}(t) = k \left(\frac{N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \right).$$

$N'_{i,k} \in C^{k-p_i}$ car $N'_{i,k}$ s'écrit comme somme et produit de fonctions C^{k-p_i} en $t = x_i$.

Ainsi $N'_{i,k}$ et ses $k - 1 - p_i$ premières dérivées sont continues en $t = x_i$ d'où

les $k - p_i$ premières dérivées de $N_{i,k}$ sont continues en $t = x_i$. Etant donné que

$N_{i,k}$ est continue en $t = x_i$, on déduit que $N_{i,k} \in C^{k-p_i}$ en $t = x_i$.

On conclut que $N_{i,k}$ est $k - p_i$ fois continûment différentiable en $t = x_i$, et C^∞ partout ailleurs. \square

Remarque 2. De cette propriété, nous déduisons que l'augmentation de la multiplicité d'un nœud en un point a pour conséquence de baisser la régularité en ce point [42]. Cette technique est très importante dans la résolution des EDP dont les solutions présentent des discontinuités sur leur domaine.

Propriété 9. Les fonctions B-splines $N_{i,k}(t)$ forment une base de \mathbb{P}_n , l'ensemble des polynômes de degré au plus n .

Démonstration.

Montrons que les fonctions B-splines $N_{i,k}(t)$ forment une base de \mathbb{P}_n .

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-k-1}$ des réels. On montrera que :

$$\sum_{i=1}^{m-k-1} \lambda_i N_{i,k}(t) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-k-1} = 0 \quad \forall t \in [x_{k+1}; x_{m-k}] \quad (\star)$$

Raisonnons par récurrence sur k .

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ des réels. Montrons que :

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i N_{i,0}(t) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = 0, \quad \forall t \in [x_1; x_m].$$

$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i N_{i,0}(t) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m-2\}, \forall t \in [x_i, x_{i+1}[$, Ainsi pour $t = x_i$, on a $\lambda_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, m-2\}$.

Supposons que $\sum_{i=1}^{m-k-1} \lambda_i N_{i,k}(t) = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_{m-k-1} = 0 \quad \forall t \in [x_{k+1}; x_{m-k}]$,

Montrons que $\sum_{i=1}^{m-k-2} \lambda_i N_{i,k}(t) = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_{m-k-2} = 0 \quad \forall t \in [x_{k+2}; x_{m-k-1}]$,

$$\sum_{i=1}^{m-k-2} \lambda_i N_{i,k}(t) = 0 \implies \sum_{i=1}^{m-k-2} \lambda_i N'_{i,k+1}(t) = 0$$

$$\text{or } N'_{i,k+1}(t) = (k+1) \left(\frac{N_{i,k}(t)}{x_{i+k+1} - x_i} - \frac{N_{i+1,k}(t)}{x_{i+k+2} - x_{i+1}} \right),$$

$$\text{donc on a : } \sum_{i=1}^{m-k-2} \lambda_i \frac{N_{i,k}(t)}{x_{i+k+1} - x_i} - \sum_{i=1}^{m-k-2} \lambda_i \frac{N_{i+1,k}(t)}{x_{i+k+2} - x_{i+1}} = 0 \quad (\star\star)$$

$$(\star\star) \iff \sum_{i=1}^{m-k-2} \lambda_i \frac{N_{i,k}(t)}{x_{i+k+1} - x_i} - \sum_{i=2}^{m-k-1} \lambda_{i-1} \frac{N_{i,k}(t)}{x_{i+k+1} - x_i} = 0$$

$$\iff \lambda_1 \frac{N_{1,k}(t)}{x_{k+2} - x_1} + \sum_{i=2}^{m-k-1} \lambda_i \frac{N_{i,k}(t)}{x_{i+k+1} - x_i} - \lambda_{m-k-1} \frac{N_{m-k-1,k}(t)}{x_m - x_{m-k-1}} = 0$$

$$\sum_{i=2}^{m-k-1} \lambda_{i-1} \frac{N_{i,k}(t)}{x_{i+k+1} - x_i} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\iff \lambda_1 \frac{N_{1,k}(t)}{x_{k+2} - x_1} - \lambda_{m-k-1} \frac{N_{m-k-1,k}(t)}{x_m - x_{m-k-1}} + \sum_{i=1}^{m-k-1} \frac{\lambda_i - \lambda_{i-1}}{x_{i+k+1} - x_i} N_{i,k}(t) = 0 \\
&\iff \lambda_1 \frac{N_{1,k}(t)}{x_{k+2} - x_1} - \lambda_{m-k-1} \frac{N_{m-k-1,k}(t)}{x_m - x_{m-k-1}} + \sum_{i=1}^{m-k-1} \frac{\lambda_i - \lambda_{i-1}}{x_{i+k+1} - x_i} N_{i,k}(t) - \\
&\quad \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{x_{k+2} - x_1} N_{1,k}(t) = 0 \\
&\iff \frac{\lambda_0}{x_{k+2} - x_1} N_{1,k}(t) - \lambda_{m-k-1} \frac{N_{m-k-1,k}(t)}{x_m - x_{m-k-1}} + \sum_{i=1}^{m-k-1} \frac{\lambda_i - \lambda_{i-1}}{x_{i+k+1} - x_i} N_{i,k}(t) = 0
\end{aligned}$$

$\forall t \in [x_{k+2}; x_{m-k-1}[$, $N_{1,k}(t) = 0$ car $\text{Supp}N_{1,k} \subset [x_1; x_{k+2}]$.

$\forall t \in [x_{k+2}; x_{m-k-1}[$, $N_{m-k-1,k}(t) = 0$ car $\text{Supp}N_{m-k-1,k} \subset [x_{m-k-1}; x_m]$.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi } (\star\star) \implies &\sum_{i=1}^{m-k-1} \frac{\lambda_i - \lambda_{i-1}}{x_{i+k+1} - x_i} N_{i,k}(t) = 0, \forall t \in [x_{k+2}; x_{m-k-1}[\\
\text{car } &\sum_{i=1}^{m-k-1} \frac{\lambda_i - \lambda_{i-1}}{x_{i+k+1} - x_i} N_{i,k}(t) = 0, \forall t \in [x_{k+1}; x_{m-k}[\text{ et } [x_{k+2}; x_{m-k-1}[\subset [x_{k+1}; x_{m-k}[. \\
&\text{Ainsi Nous obtenons :}
\end{aligned}$$

$$\lambda_i - \lambda_{i-1} = 0, \forall i \in \{1, \dots, m - k - 1\} \quad (2.0)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-k-2} \lambda_i N_{i,k}(t) = 0 &\implies \sum_{i=1}^{m-k-2} \lambda_i \frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} N_{i,k-1}(t) + \sum_{i=1}^{m-k-2} \lambda_i \frac{x_{i+k+1} - t}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) = 0 \\
&\implies \sum_{i=1}^{m-k-2} \lambda_i \frac{t - x_i}{x_{i+k} - x_i} N_{i,k-1}(t) + \sum_{i=2}^{m-k-1} \lambda_{i-1} \frac{x_{i+k} - t}{x_{i+k} - x_i} N_{i,k-1}(t) = 0 \\
&\implies \sum_{i=2}^{m-k-2} (\lambda_i + \lambda_{i-1}) N_{i,k-1}(t) = 0 \\
&\text{car } \forall t \in [x_{k+2}, x_{m-k-1}[$$
, $N_{1,k-1}(t) = 0$ et $N_{m-k-1,k-1}(t) = 0$

$$\implies (\lambda_i + \lambda_{i-1}) = 0, \forall i \in \{2, \dots, m - k - 2\} \quad (2.1)$$

De 2.0 et 2.1, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_i - \lambda_{i-1} = 0 \\ \lambda_i + \lambda_{i-1} = 0 \end{cases}$$

$$d' \text{ où } \lambda_i = \lambda_{i-1} = 0, \forall i \in \{2, \dots, m - k - 2\}. \quad (2.2)$$

$$\text{De 2.0, on déduit que } \lambda_i = \lambda_{i-1} = 0, \text{ pour } i = 1. \quad (2.3)$$

D' après 2.2 et 2.3, $\lambda_i = \lambda_{i-1} = 0, \forall i \in \{1, \dots, m - k - 2\}$. ce qui achève la démonstration. \square

Propriété 10. *soit a et b les valeurs minimale et maximale respectives de X .*

Si X est un vecteur nœud ouvert de degré k alors,

$$N_{i,k}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$N_{i,k}(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [42]$$

Démonstration.

$$N_{i,0}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k + 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Montrons maintenant que $N_{i,k}(a) = N_{i+1,k-1}(a), \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

$$N_{i,k}(a) = \frac{a - x_i}{x_{i+k} - x_i} N_{i,k-1}(a) + \frac{x_{i+k+1} - a}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} N_{i+1,k-1}(a)$$

$$N_{i,k}(a) = \frac{x_i - x_i}{x_{i+k} - x_i} N_{i,k-1}(a) + \frac{x_{i+k+1} - x_{i+1}}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} N_{i+1,k-1}(a)$$

car $\forall i \in \{1, \dots, k\}, a = x_i$ et $a = x_{i+1}$ puisque a est de multiplicité $k + 1$.

donc $N_{i,k}(a) = N_{i+1,k-1}(a), \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & a & & a & & b & & b \\ & \times & & \times & & \times & & \times \\ x_1 & \text{---} & & x_{k+1} & \text{---} & x_{n+2} & \text{---} & x_{n+k+2} \end{array}$$

Sachant que $N_{i,k}(a) = N_{i+1,k-1}(a), \forall i \in \{1, \dots, k\}$, on obtient :

$$N_{1,k}(a) = N_{2,k-1}(a) = N_{3,k-2}(a) = \dots = N_{k+1,0}(a) = 1.$$

Etant donné que les $N_{i,k}$ forment une partition de l'unité et qu'elles sont toutes positives, on déduit que $N_{i,k}(a) = 0$ si $i \geq 2$

On peut donc conclure que

$$N_{i,k}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons maintenant que

$$N_{i,k}(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montrera par récurrence que $N_{n+1,k}(b) = N_{n+1,0}(b), \forall k \in \mathbb{N}$.

La relation est vraie pour $k = 0$.

Soit $k \geq 0$. Supposons que $N_{n+1,k}(b) = N_{n+1,0}(b)$ et montrons que $N_{n+1,k+1}(b) = N_{n+1,0}(b)$.

$$N_{n+1,k+1}(b) = \frac{b - x_{n+1}}{x_{n+k+2} - x_{n+1}} N_{n+1,k}(b) + \frac{x_{n+k+3} - b}{x_{n+k+3} - x_{n+2}} N_{n+2,k}(b)$$

$$N_{n+1,k+1}(b) = N_{n+1,k}(b).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $N_{n+1,k}(b) = N_{n+1,0}(b)$,

Ainsi $N_{n+1,k}(b) = N_{n+1,0}(b)$. Etant donné que $N_{n+1,0}(b) = 1$, on déduit que :

$$N_{n+1,k}(b) = 1.$$

Sachant que les $N_{i,k}$ forment une partition de l'unité et qu'elles sont toutes positives, on déduit que $N_{i,k}(b) = 0$ si $i \neq n + 1$

On peut donc conclure que :

$$N_{i,k}(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

2.2.2 B-splines bivariées

Les B-splines bivariées sont définies en se servant du produit tensoriel de fonctions B-splines univariées.

Définition 6. Soient $(N_{i,p})_{i=1}^{n_1}$ et $(N_{j,q})_{j=1}^{n_2}$ deux familles de fonctions B-splines définies

par leur degré respectif p et q et par les vecteurs nœuds respectifs qui leur sont associés :

$$s = [s_1, \dots, s_{m_1}] \text{ et } t = [t_1, \dots, t_{m_2}] \text{ où } m_1 = n_1 + p + 2 \text{ et } m_2 = n_2 + q + 2$$

Les fonctions B-splines bivariées sont les fonctions $N_{(i,j),(p,q)}$ définies par :

$N_{(i,j),(p,q)} : [s_1; s_{m_1}] \times [t_1; t_{m_2}] \mapsto \mathbf{R}$ définies par :

$$N_{(i,j),(p,q)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = N_{i,p}(\varepsilon_1) \otimes N_{j,q}(\varepsilon_2) \quad (2.4)$$

$$= N_{i,p}(\varepsilon_1) \cdot N_{j,q}(\varepsilon_2) \quad (2.5)$$

Les vecteurs nœuds s et t définissent un maillage divisant le domaine

$$\hat{\Omega} = [s_1; s_{m_1}] \times [t_1; t_{m_2}] \text{ en des éléments rectangulaires } \hat{Q}_{i,j} = [s_i; s_{i+1}] \times [t_j; t_{j+1}]$$

Comme les B-splines univariées, les B-splines multivariées sont des fonctions polynomiales par morceaux. Elles forment une partition de l'unité, ont un support local et sont positives [26].

2.2.3 Principe de la méthode isogéométrique

La méthode isogéométrique propose d'utiliser une unique base de représentation pour la géométrie et l'analyse : les B-splines. Nous voulons résoudre une edp sur un domaine Ω . Le domaine sur lequel l'edp est résolue, est appelé le domaine physique. La description de ce domaine se fait en utilisant une paramétrisation.

Paramétrisation

La paramétrisation F du domaine physique est définie par :

$$F : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^d$$

$$\varepsilon \mapsto x = F(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n_1} C_i \hat{N}_{i,k}(\varepsilon)$$

où $\hat{\Omega}$ est le domaine paramétrique, les C_i sont des points de contrôle et n_1 est le nombre de fonctions de base.

En ce qui concerne le choix du vecteur nœud, nous construisons un vecteur nœud ouvert de degré k en donnant k . Ainsi les valeurs extrêmes du vecteur nœud sont écrites $(k+1)$ fois. Lorsque nous voulons construire une base composée de fonctions discontinues, les points

intérieurs du vecteur sont écrits au moins $k + 1$ fois. Quand nous voulons construire une base composée de fonctions continues, les points intérieurs du vecteur sont écrits au plus k fois.

Exemple 4 (Paramétrisation d'un segment). *Nous donnons une paramétrisation du segment $[AB]$ avec $A(1; 5), B(3; 8)$.*

Pour une base B-spline de degré 2, notre vecteur nœud ouvert est :

$$X = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$$

Soit m le nombre de vecteur nœud et N le nombre de points de contrôle.

$m = 7$. Donc $N = m - p - 1$ ainsi $N = 4$.

Les points de contrôle sont : $A_1(1; 5); A_2(2; 6.5); A_3(2; 6.5)$ et $A_4(3; 8)$.

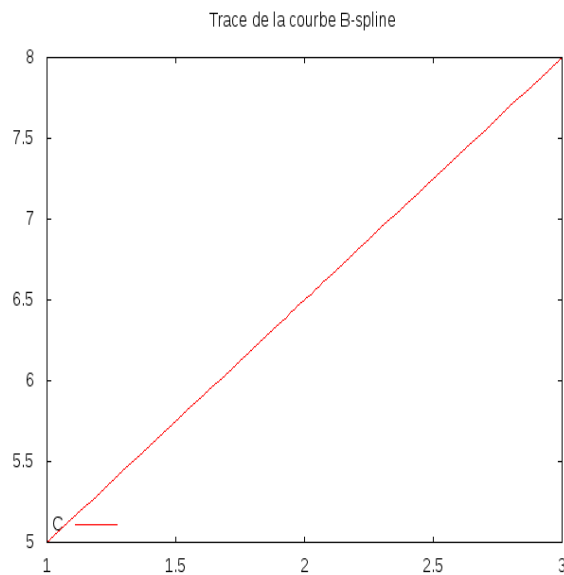


FIG. 2.6 – Paramétrisation d'un segment

Exemple 5 (Approximation d'un demi-cercle). *La première étape de la description est de déterminer les points de contrôle qui vont servir à représenter une approximation d'un quart de cercle. La seconde consistera à déterminer le vecteur nœud.*

Une représentation paramétrique d'un cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon a se présente sous la forme :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}$$

Dans notre contexte, nous avons choisi cinq points de contrôle : X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 avec $X_1(a,0)$, $X_5(0,a)$.

Déterminons les coordonnées de X_2, X_3 , et X_4 .

1. Le point X_3 est défini par $\text{mes}(\overrightarrow{OX_1}, \overrightarrow{OX_3}) = \frac{\pi}{4}$ ainsi $X_3(a\frac{\sqrt{2}}{2}, a\frac{\sqrt{2}}{2})$.
2. Le point X_2 est l'intersection de la tangente au point X_3 et de la droite d'équation $x = a$. Par ailleurs un vecteur directeur de la tangente en X_3 est :

$$\vec{V} \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -a \sin \theta \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = a \cos \theta \end{cases}$$

avec $\theta = \frac{\pi}{4}$. On obtient $\vec{V}(-a\frac{\sqrt{2}}{2}, a\frac{\sqrt{2}}{2})$ et il existe $\lambda \in \mathbf{R}$, $\overrightarrow{X_3X_2} = \lambda \vec{V}$.

Nous avons :

$$\begin{vmatrix} x_2 - a\frac{\sqrt{2}}{2} & -a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_2 - a\frac{\sqrt{2}}{2} & a\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Comme $x_2 = a$ alors on trouve $y_2 = a(\sqrt{2} - 1)$. Par suite $X_2(a, a(\sqrt{2} - 1))$

3. Le point X_4 est l'intersection de la tangente au point X_3 et de la droite d'équation $y = a$ et en utilisant le même raisonnement, on trouve $X_4(a(\sqrt{2} - 1), a)$.

On construit un vecteur noeud ouvert X de degré 2.

$$X = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1 \quad 1].$$

Nous obtenons par la suite une approximation d'un quart de cercle.

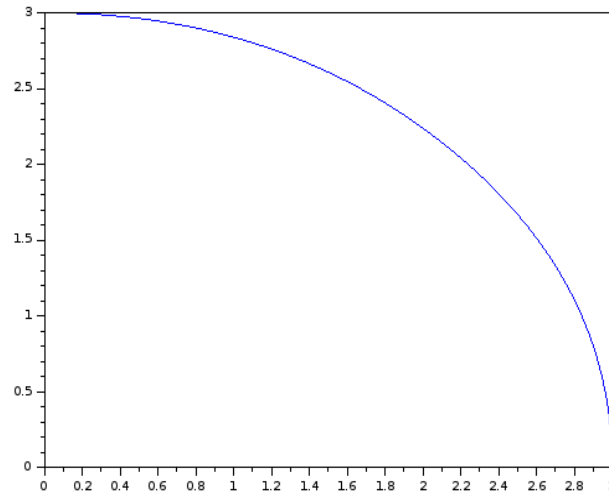


FIG. 2.7 – Paramétrisation d'une approximation d'un quart de cercle de rayon 3

En contruisant l'image des points de contrôle, $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$ par la symétrie axiale d'axe (oy) , on obtient une approximation du demi-cercle de rayon a . Nous avons donc au total 9 points de contrôle.

On procède par la suite à la détermination du vecteur nœud. On construit un vecteur noeud ouvert X de degré 2.

$$X = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4]$$

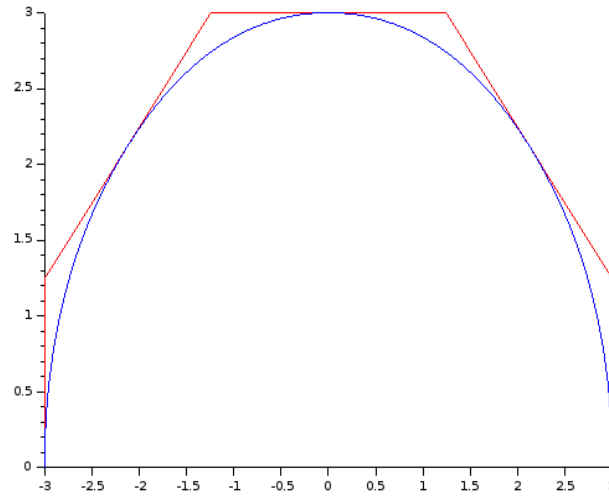


FIG. 2.8 – Paramétrisation d'une approximation du demi-cercle de rayon 3

La courbe tracée en rouge est appelée polygone de contrôle de la courbe B-spline.

Exemple 6. – Le vecteur nœud ouvert de degré 2 est le suivant :

$$X = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4].$$

$m = 12$. Donc $N = 12 - 2 - 1$ ainsi $N = 9$.

– Les points de contrôle sont donnés par :

$$A_1(0; 0), A_2(0.5; 0), A_3(1; 0), A_4(1; 1), A_5(2.5; 1), A_6(4; 1), A_7(4; 0), A_8(4.5; 0) \text{ et } A_9(5; 0).$$

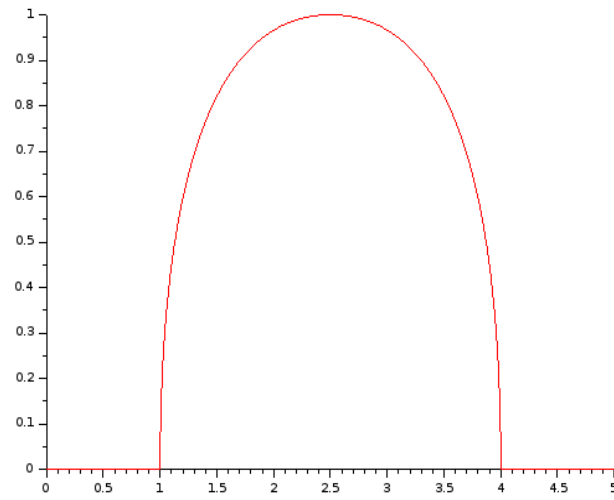


FIG. 2.9 – Paramétrisation de la courbe Ω

Exemple 7. – Le vecteur nœud ouvert de degré 2 est le suivant :

$$X = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2].$$

$m = 7$. Donc $N = 7 - 2 - 1$ ainsi $N = 4$.

– Les points de contrôle sont donnés par :

$$A_1(0; 0), A_2(3; 6), A_3(3; 6) \text{ et } A_4(5; 2).$$

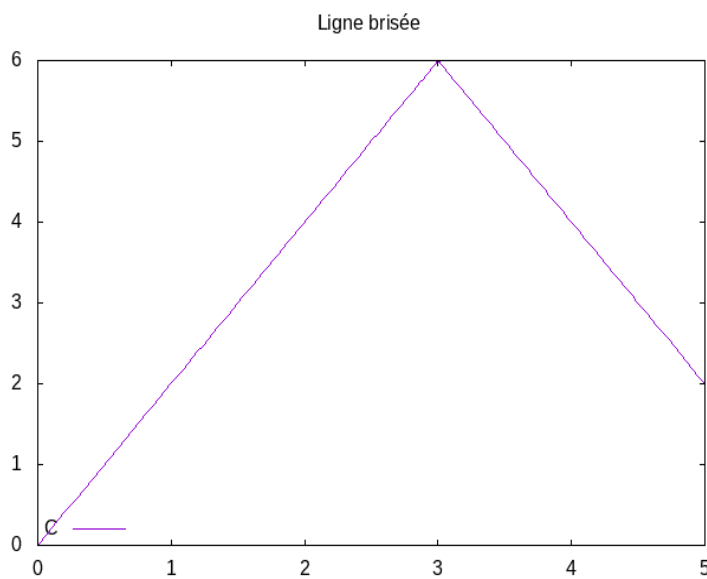


FIG. 2.10 – Paramétrisation d'une ligne brisée à 2 segments

Exemple 8. – Le vecteur nœud ouvert de degré 2 est le suivant :

$$X = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4].$$

$m = 9$. Donc $N = 9 - 2 - 1$ ainsi $N = 6$.

– Les points de contrôle sont donnés par :

$$A_1(1; 1), A_2(3; 6), A_3(3; 6), A_4(5; 2), A_5(5; 2) \text{ et } A_6(6; 4).$$

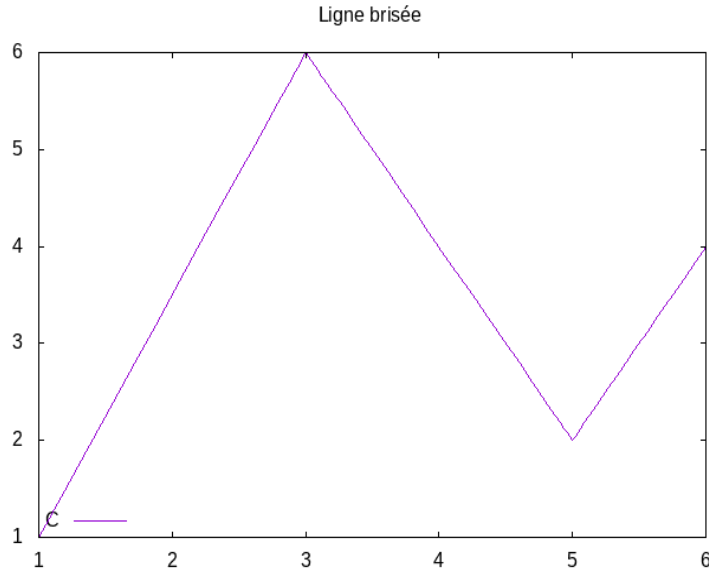


FIG. 2.11 – Paramétrisation d'une ligne brisée à 3 segments

L'espace discret

Les espaces d'approximation discrets pour la méthode isogéométrique sont construits en appliquant le paradigme isoparamétrique : on choisit une base capable de représenter raisonnablement la géométrie et on l'utilise comme base pour la solution que l'on veut approcher.

L'espace discret V_h est défini par :

$$V_h := \text{span}\{N_{i,p} = \hat{N}_{i,p} \circ F^{-1}\}_{i=1}^{n_1} \quad [11]$$

$\hat{N}_{i,p}$ désigne la i -ème fonction de base b-spline de degré p définie sur le domaine paramétrique.

Forme de la solution

Soit $(N_{j,p})_j$ une base B-spline de degré p permettant de construire le domaine Ω .

Soit $X = (X_i)_{i=1}^m$ le vecteur nœud associé, avec m le nombre total de nœuds et $X_d = (\chi_i)_{i=1}^{N_d}$ l'ensemble des nœuds distincts de X .

Soit $\Omega_i = \{x \in \mathbf{R}^d; x = F(t), t \in [\chi_i, \chi_{i+1}]\}$

Ainsi $\exists!$ $q(i) \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\chi_i = X_{q(i)}$ où $q(i) = \sum_{k=1}^i n_k$ et n_k est la multiplicité de χ_i dans X .

Soit $\Omega = \bigcup \Omega_i, 1 \leq i \leq N_d - 1$ avec $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Soit $N_{j,p}^i(x) = \begin{cases} N_{j,p}(x) & \text{si } x \in F([\chi_i; \chi_{i+1}]) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $I_i = \{k \in \{1, \dots, n+1\}; \text{Supp}N_{k,p} \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$

$$\text{Supp}N_{j,p} = F([\chi_j; \chi_{j+p+1}])$$

$$\text{Supp}N_{j,p} \cap F([\chi_i; \chi_{i+1}]) \neq \emptyset \iff j \in \{q(i) - p, \dots, q(i)\}$$

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N_d-1} u^i(x,t) \text{ où } u^i(x,t) = \begin{cases} u_{/\partial\Omega_i} \text{ sur } \bar{\Omega}_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On cherche u^i sous la forme :

$$u^i(x,t) = \sum_{j \in I_i} u_j^i(t) N_{j,p}^i(x), \forall i \in \{1, \dots, N_d - 1\}.$$

Lorsque le problème que nous voulons résoudre est un problème d'évolution. Lorsque nous voulons résoudre un problème stationnaire, la solution se met sous la forme :

$$u^i(x) = \sum_{j \in I_i} u_j^i N_{j,p}^i(x), \forall i \in \{1, \dots, N_d - 1\}.$$

De plus $\mathcal{N} = \bigcup \{N_{j,p}^i\}_{j \in I_i}$ est une base de l'ensemble des polynômes de degré au plus $(N_d - 1)(p + 1)$ car $\text{card}(I_i) = p + 1$.

$$\text{Par conséquent } u(x,t) = \sum_{l=1}^{(N_d-1)(p+1)} u_l(t) \tilde{N}_l(x).$$

avec $u_l = u_j^i, \tilde{N}_l = N_j^i$ et $l = (i - 1)(p + 1) + j$.

On cherche ainsi $U = (u_l)_{l=1}^{(N_d-1)(p+1)}$ dans la base $\mathcal{N} = \bigcup \{\tilde{N}_l\}_{l=1}^{(N_d-1)(p+1)}$.

Les fonctions de base étant définies, une formulation variationnelle utilisant la méthode de Galerkin discontinue est obtenue pour résoudre le(s) équation(s) intervenant dans notre problème [23]. Dans la suite, on utilisera cette méthode pour résoudre l'équation de Poisson, l'équation de la chaleur et l'équation de transport.

2.2.4 Raffinement en isogéométrie

Il existe des techniques fondamentales pour augmenter la flexibilité d'une courbe B-spline, sans changer géométriquement la forme de la courbe [44]. Il s'agit de l'insertion de nœuds et de l'élévation du degré [44].

Le h raffinement (Insertion des nœuds)

L'insertion de nœud consiste à ajouter un nœud dans le vecteur nœud [42].

Soit

$$C(u) = \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,p}(u) P_i \quad (a)$$

une courbe B-spline définie sur $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$. Insérons $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1}[$.

Nous obtenons le nouveau vecteur nœud

$$\bar{U} = \{\bar{u}_1 = u_1, \bar{u}_2 = u_2, \dots, \bar{u}_k = u_k, \bar{u}_{k+1} = \bar{u}, \bar{u}_{k+2} = u_{k+1}, \dots, \bar{u}_{m+1} = u_m\}$$

Insérer \bar{u} revient à déterminer les nouveaux points de contrôle $(Q_i)_{i=1}^{n+2}$

$$C(u) = \sum_{i=1}^{n+2} \bar{N}_{i,p}(u) Q_i \quad (b)$$

où $\bar{N}_{i,p}$ est la i -ème fonction B-spline de degré p définie sur \bar{U} .

Des relations (a) et (b), nous avons:

$$\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,p}(u) P_i = \sum_{i=1}^{n+2} \bar{N}_{i,p}(u) Q_i \quad (c)$$

A l'intérieur de $[u_k, u_{k+1}[$, seules les $N_{i,p}(u)$ sont non nulles $\forall i, k-p \leq i \leq k$.

$$\text{Ainsi, } \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,p}(u) P_i = \sum_{i=k-p}^k N_{i,p}(u) P_i$$

A l'intérieur de $[\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}[$, seules les $\bar{N}_{i,p}(u)$ sont non nulles, $\forall i, k-p \leq i \leq k$. (1)

A l'intérieur de $[\bar{u}_{k+1}, \bar{u}_{k+2}[$, seules les $\bar{N}_{i,p}(u)$ sont non nulles, $\forall i, k+1-p \leq i \leq k+1$.
(2)

De (1) et de (2), on déduit qu'à l'intérieur de $[\bar{u}_k, \bar{u}_{k+2}[$, seules les $\bar{N}_{i,p}(u)$ sont non nulles, $\forall i, k-p \leq i \leq k+1$.

$$\text{Ainsi, } \sum_{i=1}^{n+2} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i = \sum_{i=k-p}^{k+1} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=k-p}^k N_{i,p}(u)P_i &= \sum_{i=k-p}^{k+1} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i \\ \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,p}(u)P_i &= \sum_{i=1}^{k-p-1} N_{i,p}(u)P_i + \sum_{i=k-p}^k N_{i,p}(u)P_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} N_{i,p}(u)P_i \\ \sum_{i=1}^{n+2} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i &= \sum_{i=1}^{k-p-1} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i + \sum_{i=k-p}^{k+1} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i + \sum_{i=k+2}^{n+2} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i \\ \sum_{i=k+2}^{n+2} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i &= \sum_{i=k+1}^{n+1} \bar{N}_{i+1,p}(u)Q_{i+1} \end{aligned}$$

A l'intérieur de $[u_k, u_{k+1}[$,

$$N_{i,p}(u) = \begin{cases} \bar{N}_{i,p}(u), & \forall i \in \{1, \dots, k-p-1\} \\ \bar{N}_{i+1,p}(u), & \forall i \in \{k+1, \dots, n+1\} \end{cases}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,p}(u)P_i = \sum_{i=1}^{n+2} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i \implies \sum_{i=1}^{k-p-1} N_{i,p}(u)(P_i - Q_i) + \sum_{i=k+1}^{n+1} N_{i,p}(u)(P_i - Q_{i+1}) = 0$$

$$\text{car } \sum_{i=k-p}^k N_{i,p}(u)P_i = \sum_{i=k-p}^{k+1} \bar{N}_{i,p}(u)Q_i$$

La famille $(N_{1,p}, \dots, N_{k-p-1,p}, N_{k+1,p}, \dots, N_{n+1,p})$ est une famille contenue dans la famille $(N_{i,p})_{i=1}^{n+1}$ qui est une famille libre d'où

$$P_i = \begin{cases} Q_i, & \forall i \in \{1, \dots, k-p-1\} \\ Q_{i+1}, & \forall i \in \{k+1, \dots, n+1\} \end{cases}$$

De plus, $\forall i \in \{k-p, \dots, k\}$

$$N_{i,p}(u) = \frac{\bar{u} - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+p+1} - \bar{u}_i} \bar{N}_{i,p}(u) + \frac{\bar{u}_{i+p+2} - \bar{u}}{\bar{u}_{i+p+2} - \bar{u}_{i+1}} \bar{N}_{i+1,p}(u)$$

La preuve se fait par récurrence sur p [9].

$$\begin{aligned} \sum_{i=k-p}^k N_{i,p}(u) P_i &= \left(\frac{\bar{u} - \bar{u}_{k-p}}{\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_{k-p}} \bar{N}_{k-p,p}(u) + \frac{\bar{u}_{k+2} - \bar{u}}{\bar{u}_{k+2} - \bar{u}_{k-p+1}} \bar{N}_{k-p+1,p}(u) \right) P_{k-p} \\ &+ \left(\frac{\bar{u} - \bar{u}_{k-p+1}}{\bar{u}_{k+2} - \bar{u}_{k-p+1}} \bar{N}_{k-p+1,p}(u) + \frac{\bar{u}_{k+3} - \bar{u}}{\bar{u}_{k+3} - \bar{u}_{k-p+2}} \bar{N}_{k-p+2,p}(u) \right) P_{k-p+1} \\ &+ \dots + \left(\frac{\bar{u} - \bar{u}_k}{\bar{u}_{k+p+1} - \bar{u}_k} \bar{N}_{k,p}(u) + \frac{\bar{u}_{k+p+2} - \bar{u}}{\bar{u}_{k+p+2} - \bar{u}_{k+1}} \bar{N}_{k+1,p}(u) \right) P_k \end{aligned}$$

Sachant que $\bar{u} = \bar{u}_{k+1}, \bar{u}_i = u_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$

et que $\bar{u}_{i+1} = u_i, \forall i \in \{k+1, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=k-p}^k N_{i,p}(u) P_i &= \sum_{i=k-p}^{k+1} \bar{N}_{i,p}(u) Q_i \implies \bar{N}_{k-p,p}(P_{k-p} - Q_{k-p}) + \\ &\bar{N}_{k-p+1,p} \left(Q_{k-p+1} - \frac{\bar{u} - u_{k-p+1}}{u_{k+1} - u_{k-p+1}} P_{k-p+1} - \frac{u_{k+1} - \bar{u}}{u_{k+1} - u_{k-p+1}} P_{k-p} \right) + \dots \\ &+ \bar{N}_{k,p} \left(Q_k - \frac{\bar{u} - u_k}{u_{k+p} - u_k} P_k - \frac{u_{k+p} - \bar{u}}{u_{k+p} - u_k} P_{k-1} \right) + \bar{N}_{k+1,p}(Q_{k+1} - P_k) = 0 \end{aligned}$$

Pour $i = k-p+1, \dots, k$, Posons

$$\alpha_i = \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i}$$

Par conséquent

$$1 - \alpha_i = \frac{u_{i+p} - \bar{u}}{u_{i+p} - u_i}$$

Sachant que la famille des $(\bar{N}_{i,p})_{i=k-p}^k$ est libre, nous obtenons :

$$\begin{cases} Q_{k-p} = P_{k-p} \\ Q_i = \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1}, k-p+1 \leq i \leq k \\ Q_{k+1} = P_k \end{cases}$$

On peut conclure que

$$Q_i = \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1}$$

avec

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq k - p \\ \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i}, & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } k + 1 \leq i \leq n + 2 \end{cases} \quad [42, 43]$$

où $P_0 := 0$ et $P_{n+2} := 0$

Cet algorithme est connu sous le nom d'algorithme de **Boehm**

Lorsqu'on insère plusieurs nœuds simultanément, on parle de raffinement de nœuds ou de **h raffinement**.

Elaine Cohen, Tom Lyche et Rich Riesenfeld ont développé à cet effet un algorithme permettant d'insérer à la fois plusieurs nœuds. Cet algorithme a été conçu à Oslo et est appelé algorithme d'**Oslo**.

Algorithme d'Oslo

Considérons la courbe B-spline définie par :

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t)$$

avec $X = [x_1, \dots, x_{n+k+2}]$ le vecteur nœud.

Après insertion de nœuds, nous obtenons :

$$R(s) = \sum_{j=1}^{m+1} C_j M_{j,k}(s)$$

avec pour vecteur nœud $Y = [y_1, \dots, y_{m+k+2}]$ où $n < m$

L'objectif est de déterminer les (C_j) tels que $P(t) = R(s)$.

les (C_j) sont données par :

$$C_j = \sum_{i=1}^{n+1} B_i \alpha_{i,j}^k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

où les $\alpha_{i,j}^k$ sont donnés par la relation de récurrence :

$$\alpha_{i,j}^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \leq y_j < x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $k \geq 1$, nous avons :

$$\alpha_{i,j}^k = \frac{y_{j+k} - x_i}{x_{i+k} - x_i} \alpha_{i,j}^{k-1} + \frac{x_{i+k+1} - y_{j+k}}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} \alpha_{i+1,j}^{k-1} \quad [44, 4].$$

2.2.5 Le p raffinement (élévation de degré)

Soit $C_p(u) = \sum_{i=1}^{n+1} N_{i,p}(u)P_i$ une courbe B-spline de degré p sur un vecteur nœud U .

Élever le degré d'une courbe B-spline de p à $p+1$, revient à déterminer les points de contrôle $(Q_i)_{i=1}^N$ et le vecteur nœud \hat{U} tels que :

$$C_{p+1}(u) = \sum_{i=1}^N N_{i,p+1}(u)Q_i \quad [42].$$

$$\text{Soit } U = [u_1, \dots, u_m] = \underbrace{[a, \dots, a]}_{p+1}, \underbrace{[u_1, \dots, u_1]}_{m_1}, \dots, \underbrace{[u_s, \dots, u_s]}_{m_s}, \underbrace{[a, \dots, a]}_{p+1}$$

où m_1, \dots, m_s sont la multiplicité de nœuds intérieurs.

Au nœud de multiplicité m_i , la courbe C_p est de classe C^{p-m_i} . Comme la courbe C_{p+1} doit avoir la même continuité que la courbe C_p , le même nœud doit avoir la multiplicité $m_i + 1$ pour la courbe C_{p+1} .

$$\text{Soit } \hat{U} = [u_1, \dots, u_{\hat{m}}] = \underbrace{[a, \dots, a]}_{p+2}, \underbrace{[u_1, \dots, u_1]}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{[u_s, \dots, u_s]}_{m_s+1}, \underbrace{[a, \dots, a]}_{p+2}$$

Ainsi $\hat{m} = m + s + 2$. Sachant que $m = n + p + 2$ et que $\hat{m} = N + p + 2$, on déduit que $N = n + s + 2$. Pour plus de détails, cf [42]

Le k raffinement

Cette technique consiste à élever le degré d'une courbe B-spline puis à insérer un nœud dans le vecteur nœud. Pour plus de détails, confère [20].

2.2.6 Différences entre la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode isogéométrique (MIG)

MEF	MIG
Méthode avec maillage	Méthode sans maillage
Géométrie approximative	Géométrie exacte
Points nodaux	Points de contrôle
Interpolation	Approximation
Signe non constant des fonctions de base	Fonctions de base positives
Paramétrisation locale	Paramétrisation globale

TAB. 2.1 – Différences entre la MEF et la MIG
[20]

2.3 Approximation au sens des moindres carrés

2.3.1 Formulation du problème

Considérons $\varepsilon \xrightarrow{F} F(\varepsilon) \xrightarrow{g} g(F(\varepsilon))$

où F est la paramétrisation du domaine Ω .

Soit $X = (X_i)_{i=1}^m$ un vecteur nœud ouvert, avec m le nombre total de nœuds et $X_d = (\chi_i)_{i=1}^{N_d}$ l'ensemble des nœuds distincts de X .

Soit $(N_{j,p})_j$ une base B-spline de degré p permettant de construire le domaine Ω .

Soit $\Omega_i = \{x \in \mathbf{R}^d; x = F(\varepsilon), \varepsilon \in [\chi_i, \chi_{i+1}]\}$

ainsi $\exists!$ $q(i) \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\chi_i = X_{q(i)}$ où $q(i) = \sum_{k=1}^i n_k$

et n_k est la multiplicité de χ_k dans X .

Soit $\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq N_d - 1} \Omega_i$ avec $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

$$\text{Soit } N_{j,p}^i(x) = \begin{cases} N_{j,p}(x) & \text{si } x \in F([\chi_i; \chi_{i+1}]) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On veut approcher g par une courbe B-spline C sur un domaine Ω au sens des moindres carrés.

$$\text{Où } C(F(\varepsilon)) = \sum_{i=1}^{N_d-1} \sum_{j \in I_i} P_j^i N_{j,p}^i(F(\varepsilon))$$

Approcher g par une courbe B-spline C sur un domaine Ω au sens des moindres carrés revient à rendre minimale $\|g - C\|_{L^2(\Omega)}$.

Nous cherchons donc les coefficients (P_j^i) , sachant que :

$$\int_{\Omega_i} g(F(\varepsilon)) N_{k,p}^i(F(\varepsilon)) dx = \int_{\Omega_i} \sum_{i=1}^{N_d-1} \sum_{j \in I_i} P_j^i N_{j,p}^i(F(\varepsilon)) N_{k,p}^i(F(\varepsilon)) dx$$

Soit $x = (x_s)_{s=1}^d$.

$$x = F(\varepsilon) \implies dx = \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon \quad (2.6)$$

$$\text{Avec } \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} = \sqrt{\sum_{s=1}^d \left(\frac{dx_s(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^2} \quad (2.7)$$

Nous avons successivement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\Omega}_i} g(F(\varepsilon)) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon) \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon &= \int_{\widehat{\Omega}_i} \sum_{j \in I_i} P_j^i \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon) \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon \text{ car } N_{j,p}^i \circ F = \widehat{N}_{j,p}^i \\ \int_{\widehat{\Omega}_i} \sum_{j \in I_i} P_j^i \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon) \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon &= \int_{\widehat{\Omega}_i} g(F(\varepsilon)) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon) \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon \\ \sum_{j \in I_i} P_j^i \int_{\widehat{\Omega}_i} \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon) \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon &= \int_{\widehat{\Omega}_i} g(F(\varepsilon)) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon) \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon \\ \sum_{j \in I_i} P_j^i M_{k,j}^i &= S_k^i, \forall k \in I_i. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\text{Où } M_{k,j}^i = \int_{\widehat{\Omega}_i} \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon) \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon \text{ et } S_k^i = \int_{\widehat{\Omega}_i} g(F(\varepsilon)) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon) \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon.$$

Dans le soucis de calculer les P_j^i , nous nous intéresserons à étudier les propriétés de la matrice de masse M^i .

2.3.2 Propriétés de la matrice de masse

Propriété 11. M^i est une matrice carrée d'ordre $(p+1)$ qui est symétrique.

Démonstration. Sachant que $M^i = (M_{kj}^i)_{\substack{k,j \in I_i \\ 1 \leq i \leq N_d-1}}$, et que $\text{card}(I_i) = p+1$, M^i est une

matrice carrée d'ordre $(p+1)$. De plus, M^i est une matrice symétrique car $M_{kj}^i = M_{jk}^i, \forall 1 \leq i \leq N_d - 1, \forall k \in I_i$ et $\forall j \in I_i$. \square

Propriété 12. M^i est une matrice inversible.

Nous montrerons que M^i est une matrice définie positive pour déduire qu'elle est inversible.

Démonstration. Soit $L^i = (L_j^i)_{j \in I_i}$ un vecteur colonne.

$$M^i L^i = (\lambda_k^i)_{k \in I_i} \text{ avec } \lambda_k^i = \sum_{j \in I_i} M_{kj}^i L_j^i$$

Donc nous obtenons :

$$\begin{aligned} (L^i)^t M^i L^i &= \sum_{k \in I_i} \lambda_k^i L_k^i \\ &= \sum_{k \in I_i} \left(\sum_{j \in I_i} M_{kj}^i L_j^i \right) L_k^i \\ &= \sum_{k \in I_i} \sum_{j \in I_i} \int_{\Omega_i} (N_{k,p}^i(x) N_{j,p}^i(x) dx) L_j^i L_k^i \\ &= \int_{\Omega_i} \left(\sum_{j \in I_i} N_{j,p}^i(x) L_j^i \right)^2 dx \\ &= \left\| \sum_{j \in I_i} N_{j,p}^i(x) L_j^i \right\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \end{aligned}$$

Donc $(L^i)^t M^i L^i \geq 0$.

$$\begin{aligned} (L^i)^t M^i L^i = 0 &\implies \sum_{j \in I_i} N_{j,p}^i(x) L_j^i = 0 \tag{2.9} \\ &\implies L_j^i = 0 \text{ car les } N_{j,p}^i \text{ forment une base de } \mathbb{P}_{(p+1)(N_d-1)}. \end{aligned}$$

M^i est donc définie positive, d'où M^i est inversible. \square

Propriété 13. $invM^i$ l'inverse de M^i , est une matrice carrée d'ordre $(p+1)$ qui est symétrique.

Démonstration. M^i étant une matrice carrée d'ordre $(p+1)$, son inverse est aussi une matrice carrée d'ordre $(p+1)$.

M^i étant symétrique, on a : $(M^i)^t = M^i$.

$$\begin{aligned} (M^i)^t = M^i &\implies \text{inv}((M^i)^t) = \text{inv}M^i \\ &\implies (\text{inv}M^i)^t = \text{inv}M^i \text{ car } M^i \text{ est une matrice carrée inversible} \end{aligned}$$

$\text{inv}M^i$ est donc une matrice symétrique. □

Les propriétés de la matrice de masse ayant été énumérées, nous obtenons de la relation 2.8 que :

$$M^i P^i = S^i \text{ où } P^i = (P_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq N_d-1 \\ j \in I_i}}, S^i = (S_k^i)_{\substack{1 \leq i \leq N_d-1 \\ k \in I_i}} \text{ et } M^i = (M_{k,j}^i)_{\substack{1 \leq i \leq N_d-1 \\ k,j \in I_i}}.$$

On obtient donc $P^i = (\text{inv}M^i)S^i$.

2.3.3 Intégration numérique des matrices de masse locales

Calculer une intégrale sur Ω_i revient à calculer cette intégrale sur $\widehat{\Omega}_i$ au moyen de la paramétrisation F [6]. Cette intégrale sur le domaine paramétrique est par la suite ramenée sur le domaine parent en utilisant une transformation. Le domaine parent en $1D$ est l'intervalle $[-1; 1]$.

$$M_{k,j}^i = \int_{\widehat{\Omega}_i} \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon) \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon \quad (2.10)$$

$$\text{Ainsi } M_{k,j}^i = \int_{\widehat{\Omega}_i} \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon) \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^2} d\varepsilon \quad (2.11)$$

$$M_{k,j}^i = \sum_{r=\text{pos1}(i)}^{\text{pos2}(i)} l_r^i \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon_r^i) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_r^i) \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2}$$

Avec $l_r^i = \frac{\chi_{i+1} - \chi_i}{2} \omega_r^i$ puis $\text{pos1}(i) = (i-1)Npgs + 1$, $\text{pos2}(i) = iNpgs$ et $1 \leq i \leq N_d - 1$. $Npgs$ est le nombre de points de Gauss par segment, les ω_r^i et les ε_r^i sont respectivement les poids et noeuds de Gauss.

$$\begin{aligned}
S_k^i &= \int_{\Omega_i} g(F(\varepsilon)) N_{k,p}^i(F(\varepsilon)) dF \\
S_k^i &= \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} l_r^i g(F(\varepsilon_r^i)) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_r^i) \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Dans la suite, après avoir déterminé C , nous nous intéressons au calcul de l'erreur L^2 entre g et C .

2.3.4 Calcul de l'erreur L^2

Soit err cette erreur.

$$err = \sqrt{D}$$

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{i=1}^{N_d-1} \int_{\widehat{\Omega}_i} \left(g(F(\varepsilon)) - \sum_{j \in I_i} P_j^i N_{j,p}^i(F(\varepsilon)) \right)^2 \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^2} d\varepsilon \\
D &= \sum_{i=1}^{N_d-1} \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} \omega_r^i \left[g(F(\varepsilon_r^i)) - \sum_{j \in I_i} P_j^i N_{j,p}^i(F(\varepsilon_r^i)) \right]^2 \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2} \\
D &= \sum_{i=1}^{N_d-1} \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} l_r^i \left[g(F(\varepsilon_r^i)) - \sum_{j \in I_i} P_j^i \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon_r^i) \right]^2 \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2}
\end{aligned}$$

Avec $l_r^i = \frac{\chi_{i+1} - \chi_i}{2} \omega_r^i$ et $pos1(i) = (i-1)Npgs + 1$, $pos2(i) = iNpgs$,
 $1 \leq i \leq N_d - 1$.

2.4 Résolution numérique de l'équation de Poisson

2.4.1 Formulation du problème

Le but de cette partie est de résoudre numériquement par la méthode isogéométrique, l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d, \quad 1 \leq d \leq 2 \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

Ω est une courbe de \mathbf{R}^d .

Soit $X = (X_i)_{i=1}^m$ un vecteur nœud ouvert, avec m le nombre total de nœuds

et $X_d = (\chi_i)_{i=1}^{N_d}$ l'ensemble des nœuds distincts de X .

Soit $(N_{j,p})_j$ une base B-spline de degré p permettant de construire le domaine Ω .

Soit $\Omega_i = \{x \in \mathbf{R}^d; x = F(\varepsilon), \varepsilon \in [\chi_i, \chi_{i+1}]\}$

Ainsi $\exists!$ $q(i) \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\chi_i = X_{q(i)}$ où $q(i) = \sum_{k=1}^i n_k$

et n_k est la multiplicité de χ_i dans X .

Soit $\Omega = \bigcup \Omega_i, 1 \leq i \leq N_d - 1$ avec $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Soit $N_{j,p}^i(x) = \begin{cases} N_{j,p}(x) & \text{si } x \in F([\chi_i; \chi_{i+1}]) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $I_i = \{k \in \{1, \dots, n+1\}; \text{Supp}N_{k,p} \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$

$\text{Supp}N_{j,p} = F([\chi_j; \chi_{j+p+1}])$

$\text{Supp}N_{j,p} \cap F([\chi_i; \chi_{i+1}]) \neq \emptyset \iff j \in \{q(i) - p, \dots, q(i)\}$

$u(x) = \sum_{i=1}^{N_d-1} u^i(x)$ où $u^i(x) = \begin{cases} u_{/\partial\Omega_i} \text{ sur } \bar{\Omega}_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Avec $u^i(x) = \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i N_{j,p}^i(x), \forall i \in \{1, \dots, N_d - 1\}$.

On cherche $u \in V_h, \forall v_h \in V_h$:

$$- \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\nabla u) v_h(x) dx = \int_{\Omega_i} f(x) v_h(x) dx \quad (2.14)$$

Où $V_h = \{v_h : v_h^i \in L^2(\Omega_i); \nabla v_h^i \in L^2(\Omega_i), v_h^i|_{\partial\Omega} = 0\}$

Soit $x = (x_s)_{s=1}^d$.

$$x = F(\varepsilon) \implies dx = \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} d\varepsilon \quad (2.15)$$

$$\text{Avec } \|F(\varepsilon)\|_{\mathbf{R}^d} = \sqrt{\sum_{s=1}^d \left(\frac{dx_s(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^2} \quad (2.16)$$

Pour $v_h = N_{k,p}^i(x)$, nous avons :

$$- \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\Omega_i} f(x) N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.17)$$

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\partial\Omega_i} (\nabla u) N_{k,p}^i(x) dx - \int_{\Omega_i} \nabla u \nabla N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.18)$$

Sachant que $\text{supp} N_{k,p}^i \subset \Omega_i$, $\int_{\partial\Omega_i} (\nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = 0$.

Ainsi, nous avons :

$$- \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\Omega_i} \nabla u \nabla N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.19)$$

Etant donné que $u^i(x) = \begin{cases} u|_{\partial\Omega_i} & \text{sur } \bar{\Omega}_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = - \int_{\Omega_i} \nabla u^i \nabla N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.20)$$

Nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\nabla u) N_{k,p}^i(x) dx &= \int_{\Omega_i} \nabla u^i \nabla N_{k,p}^i(x) dx \\ &= \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i \int_{\Omega_i} \nabla N_{j,p}^i(x) \nabla N_{k,p}^i(x) dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

De 2.21, nous déduisons :

$$\sum_{j \in I_i} \alpha_j^i \int_{\Omega_i} \nabla N_{j,p}^i(x) \nabla N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\Omega_i} f(x) N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.22)$$

Ainsi, on a :

$$R\alpha = F \quad (2.23)$$

Où

1.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{Nd-1} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\alpha^i = (\alpha_j^i)_{\substack{j \in I_i \\ 1 \leq i \leq Nd-1}}$$

2.

$$F = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ \vdots \\ F^{Nd-1} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$F^i = (F_k^i)_{\substack{k \in I_i \\ 1 \leq i \leq Nd-1}}$$

$$F_k^i = \int_{\Omega_i} f(x) N_{k,p}^i(x) dx$$

3.

$$R = \begin{pmatrix} R^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R^{Nd-1} \end{pmatrix}$$

Où R est la matrice de rigidité globale. c'est une matrice bloc diagonale qui est telle que :

$$R^i = (R_{kj}^i)_{\substack{k,j \in I_i \\ 1 \leq i \leq Nd-1}}$$

$$R_{kj}^i = \int_{\Omega_i} \nabla N_{j,p}^i(x) \nabla N_{k,p}^i(x) dx$$

2.4.2 Calcul de variations sur une courbe régulière de $\mathbf{R}^d, d \in \{1,2\}$

Soit $d \in \mathbb{N}$. Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^d \in C^1([a; b], \mathbf{R}^q)$.

Soit $\Omega = \{M \in \mathbf{R}^q \text{ tel que } M = \varphi(s), s \in [a; b]\}$ une courbe de \mathbf{R}^d .

φ est une paramétrisation de Ω sur l'espace paramétrique $[a; b]$.

Ainsi considérons l'application $s \in [a; b] \mapsto M(s) = \varphi(s) \in \Omega \subset \mathbf{R}^d$.

$M = (x_i)_{i=1}^d \in \Omega$.

Pour tout i , $x_i = \varphi_i(s)$. Comme $\varphi \in C^1([a; b], \mathbf{R}^q)$, alors pour tout $i = 1$ à d , $\varphi_i \in C^1([a; b], \mathbf{R})$ avec φ'_i continue sur $[a; b]$.

Remarque 3. Soit $i \in \{1, \dots, d\}$ et $\alpha \in]a; b[$. Si $\varphi'_i(\alpha) \neq 0$, alors il existe $0 < r < \frac{|b-a|}{2}$ tel que :

$$\forall s \in]\alpha - r; \alpha + r[\subset]a; b[, \varphi'_i(s) \neq 0.$$

Lemme 1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^d \in C^1([a; b], \mathbf{R}^q)$.

Soit $\alpha \in]a; b[$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $\varphi'_i(s) \neq 0$ alors il existe $r \in]0; +\infty[$ tel que φ soit injective sur $]\alpha - r; \alpha + r[\subset]a; b[$.

Posons $I_\alpha =]\alpha - r; \alpha + r[$.

φ est une bijection de I_α sur $\varphi(I_\alpha) \subset \Omega$.

$\varphi^{-1} \in C^1[\varphi(I_\alpha), \mathbf{R}]$ et son gradient est :

$$\nabla \varphi^{-1}(M(\alpha)) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{\varphi'_i(\alpha)} \right)_{i=1}^d \quad (2.24)$$

Démonstration. $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^d \in C^1([a; b], \mathbf{R}^q)$ avec pour $\alpha \in]a; b[, \varphi'_i(\alpha) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. Alors il existe $I_\alpha =]\alpha - r; \alpha + r[\subset]a; b[$ tel que $\varphi'_i(s) \neq 0$ pour tout $s \in I_\alpha$. D'après le théorème d'inversion locale, la restriction de φ à I_α admet une réciproque φ^{-1} sur $\varphi(I_\alpha)$ en $M(\alpha) = \varphi(\alpha) \in \varphi(I_\alpha)$. Comme $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{I_\alpha}$ alors $ds(\alpha) = \nabla \varphi^{-1}(M(\alpha)).d\varphi(\alpha)$

Or pour tout i , on a :

$$dx_i(\alpha) = \varphi'_i.d.ds(\alpha) \quad (2.25)$$

$$\text{Donc } d.ds(\alpha) = \frac{dx_i(\alpha)}{\varphi'_i} \text{ pour tout } i \text{ et pour tout } M(s) = (x_i(s))_{i=1}^d \in \Omega \quad (2.26)$$

$$\text{Ainsi } \sum_{i=1}^d \frac{dx_i(\alpha)}{\varphi'_i} = \sum_{i=1}^d d.ds(\alpha)$$

$$\text{D'où } ds(\alpha) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \frac{dx_i(\alpha)}{\varphi'_i(\alpha)}$$

On observe que

$$ds(\alpha) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{\varphi'_i(\alpha)} \right) (dx_i(\alpha))_{i=1}^d$$

C'est à dire que :

$$ds(\alpha) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{\varphi'_i(\alpha)} \right) .dM(\alpha)$$

On déduit alors que :

$$\nabla \varphi^{-1}(M(\alpha)) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{\varphi'(\alpha)} \right)_{i=1}^d \quad (2.27)$$

□

2.4.3 Intégration numérique

Sachant que $N_{j,p}^i = \widehat{N}_{j,p}^i \circ F^{-1}$.

$$\nabla N_{j,p}^i(x) \nabla N_{k,p}^i(x) = \frac{1}{d^2} \sum_{s=1}^d \frac{d\widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{d\widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \times \frac{1}{\left(\frac{dx_s(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^2}$$

$$R_{kj}^i = \frac{1}{d^2} \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} l_r^i \left(\sum_{s=1}^d \frac{d\widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \frac{d\widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \times \frac{1}{\left(\frac{dx_s(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2} \right) \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2} \quad (2.28)$$

Avec $l_r^i = \frac{\chi_{i+1} - \chi_i}{2} \omega_r^i$ puis $pos1(i) = (i-1)Npgs + 1$, $pos2(i) = iNpgs$ et $1 \leq i \leq N_d - 1$. $Npgs$ est le nombre de points de Gauss par segment, les ω_r^i et les ε_r^i sont respectivement les poids et noeuds de Gauss.

$$F_k^i = \int_{\Omega_i} f(x) N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.29)$$

$$F_k^i = \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} l_r^i f(F(\varepsilon_r^i)) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_r^i) \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2}$$

2.4.4 Traitement de la condition de Dirichlet

Etant donné que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, nous avons :

$$\sum_{j \in I_1} \alpha_j^1 \widehat{N}_{j,p}^1(\chi_1) = 0 \implies \alpha_1^1 = 0 \text{ car } \widehat{N}_{j,p}^1(\chi_1) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\sum_{j \in I_{N_d-1}} \alpha_j^{N_d-1} \widehat{N}_{j,p}^{N_d-1}(\chi_{N_d}) = 0 \implies \alpha_{p+1}^{N_d-1} = 0 \text{ car } \widehat{N}_{j,p}^{N_d-1}(\chi_{N_d}) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = p + 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Résoudre l'équation de Poisson en utilisant la méthode isogéométrique revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} R\alpha = F \\ \alpha_1^1 = 0 \\ \alpha_{p+1}^{N_d-1} = 0 \end{cases}$$

Les coefficients α_j^i sont calculés en utilisant une méthode itérative : la méthode de Jacobi pondérée.

2.4.5 Calcul de l'erreur L^2

Soit err cette erreur. Notons u_{ex} la solution exacte.

$$err = \sqrt{D}$$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{N_d-1} \int_{\widehat{\Omega}_i} \left(u_{ex}(F(\varepsilon)) - \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i N_{j,p}^i(F(\varepsilon)) \right)^2 \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^2} d\varepsilon \\ D &= \sum_{i=1}^{N_d-1} \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} \omega_r^i \left[u_{ex}(F(\varepsilon_r^i)) - \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i N_{j,p}^i(F(\varepsilon_r^i)) \right]^2 \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2} \\ D &= \sum_{i=1}^{N_d-1} \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} l_r^i \left[u_{ex}(F(\varepsilon_r^i)) - \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon_r^i) \right]^2 \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2} \end{aligned}$$

Avec $l_r^i = \frac{\chi_{i+1} - \chi_i}{2} \omega_r^i$ et $pos1(i) = (i-1)Npgs + 1$, $pos2(i) = iNpgs$,

$1 \leq i \leq N_d - 1$.

2.5 Résolution numérique de l'équation de la chaleur

2.5.1 Formulation du problème

Le but de cette partie est de résoudre numériquement par la méthode isogéométrique, l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nabla \cdot (D(x)\nabla u) = f(x,t), & x \in \Omega, \quad t \in [0; T_{fin}] \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \quad \text{avec } \Omega \subset \mathbf{R}^d, \quad 1 \leq d \leq 2 \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0; T_{fin}] \end{cases} \quad (2.30)$$

Ω est une courbe de \mathbf{R}^d .

Où $D(x)$ est une matrice carrée d'ordre d dépendant de x , D est le coefficient de diffusion.

Soit $X = (X_i)_{i=1}^m$ un vecteur nœud ouvert, avec m le nombre total de nœuds et $X_d = (\chi_i)_{i=1}^{N_d}$ l'ensemble des nœuds distincts de X .

Soit $(N_{j,p})_j$ une base B-spline de degré p permettant de construire le domaine Ω .

Soit $\Omega_i = \{x \in \mathbf{R}^d; x = F(\varepsilon), \varepsilon \in [\chi_i, \chi_{i+1}]\}$

ainsi $\exists! q(i) \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\chi_i = X_{q(i)}$ où $q(i) = \sum_{k=1}^i n_k$

et n_k est la multiplicité de χ_i dans X .

Soit $\Omega = \bigcup \Omega_i, 1 \leq i \leq N_d - 1$ avec $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

$$\text{Soit } N_{j,p}^i(x) = \begin{cases} N_{j,p}(x) & \text{si } x \in F([\chi_i; \chi_{i+1}]) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $I_i = \{k \in \{1, \dots, n+1\}; \text{Supp}N_{k,p} \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$

$$\text{Supp}N_{j,p} = F([\chi_j; \chi_{j+p+1}])$$

$$\text{Supp}N_{j,p} \cap F([\chi_i; \chi_{i+1}]) \neq \emptyset \iff j \in \{q(i) - p, \dots, q(i)\}$$

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N_d-1} u^i(x,t) \text{ où } u^i(x,t) = \begin{cases} u_{/\partial\Omega_i} \text{ sur } \bar{\Omega}_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Avec } u^i(x,t) = \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i(t) N_{j,p}^i(x), \forall i \in \{1, \dots, N_d - 1\}.$$

On cherche $u(t) \in V_h, \forall v_h \in V_h$:

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v_h(x) dx - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (D(x) \nabla u) v_h(x) dx = \int_{\Omega_i} f(x,t) v_h(x) dx \quad (2.31)$$

$$\text{Où } V_h = \{v_h : v_h^i \in L^2(\Omega_i); \nabla \cdot (D(x) \nabla v_h^i) \in L^2(\Omega_i), v_h^i|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Pour $v_h = N_{k,p}^i(x)$, nous avons :

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) N_{k,p}^i(x) dx - \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (D(x) \nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\Omega_i} f(x,t) N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.32)$$

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot (D(x) \nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\partial\Omega_i} (D(x) \nabla u) N_{k,p}^i(x) dx - \int_{\Omega_i} (D(x) \nabla u) \nabla N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.33)$$

$$\text{Sachant que } \text{supp} N_{k,p}^i \subset \Omega_i, \int_{\partial\Omega_i} (D(x) \nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = 0.$$

Ainsi, nous avons :

$$- \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (D(x) \nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\Omega_i} (D(x) \nabla u) \nabla N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.34)$$

$$\text{Etant donné que } u^i(x,t) = \begin{cases} u|_{\partial\Omega_i} \text{ sur } \bar{\Omega}_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot (D(x) \nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = - \int_{\Omega_i} (D(x) \nabla u^i) \nabla N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.35)$$

nous pouvons déduire que :

$$- \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (D(x) \nabla u) N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\Omega_i} (D(x) \nabla u^i) \nabla N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.36)$$

$$= \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i(t) \int_{\Omega_i} (D(x) \nabla N_{j,p}^i(x)) \nabla N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.37)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) N_{k,p}^i(x) dx = \sum_{j \in I_i} \frac{d}{dt} \alpha_j^i(t) \int_{\Omega_i} N_{j,p}^i(x) N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.38)$$

Des égalités 2.37 et 2.38, nous déduisons les égalités suivantes :

$$\sum_{j \in I_i} \frac{d}{dt} \alpha_j^i(t) \int_{\Omega_i} N_{j,p}^i(x) N_{k,p}^i(x) dx + \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i(t) \int_{\Omega_i} (D(x) \nabla N_{j,p}^i(x)) \nabla N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\Omega_i} f(x,t) N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.39)$$

$$M^i \frac{d}{dt} \alpha^i(t) + R^i \alpha^i(t) = F^i \quad (2.40)$$

$$\text{Avec } M^i = (M_{kj}^i)_{\substack{k,j \in I_i \\ 1 \leq i \leq N_d-1}}$$

$$M_{k,j}^i = \int_{\Omega_i} N_{j,p}^i(x) N_{k,p}^i(x) dx$$

$$R^i = (R_{kj}^i)_{\substack{k,j \in I_i \\ 1 \leq i \leq N_d-1}}$$

$$R_{kj}^i = \int_{\Omega_i} (D(x) \nabla N_{j,p}^i(x)) \nabla N_{k,p}^i(x) dx$$

$$F^i = (F_k^i)_{\substack{k \in I_i \\ 1 \leq i \leq N_d-1}}$$

$$F_k^i = \int_{\Omega_i} f(x,t) N_{k,p}^i(x) dx$$

$$\frac{d}{dt} \alpha^i(t) = (\text{inv} M^i) (F^i - R^i \alpha^i(t)) \text{ car } M^i \text{ est inversible} \quad (2.41)$$

2.5.2 Intégration numérique

$$R_{kj}^i = \int_{\Omega_i} (D(x) \nabla N_{j,p}^i(x)) \nabla N_{k,p}^i(x) dx$$

$$D(x) = (D_{ls})_{\substack{1 \leq l \leq d \\ 1 \leq s \leq d}}$$

$$D(x)\nabla N_{j,p}^i(x) = (\beta_l)_{1 \leq l \leq d}$$

$$\text{où } \beta_l = \sum_{s=1}^d D_{ls}(x) \frac{\partial N_{j,p}^i(x)}{\partial x_s}$$

$$\beta_l = \frac{1}{d} \sum_{s=1}^d D_{ls}(x) \frac{d\widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \times \frac{1}{\left(\frac{dx_s(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)}$$

$$(D(x)\nabla N_{j,p}^i(x))\nabla N_{k,p}^i(x) = (\lambda_l)_{1 \leq l \leq d}$$

$$\text{où } \lambda_l = \sum_{l=1}^d \beta_l \frac{\partial N_{k,p}^i(x)}{\partial x_l}$$

$$\lambda_l = \frac{1}{d^2} \sum_{l=1}^d \beta_l \frac{d\widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \times \frac{1}{\left(\frac{dx_l(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)}$$

$$\lambda_l = \frac{1}{d^2} \sum_{l=1}^d \left(\sum_{s=1}^d D_{ls}(x) \frac{d\widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \times \frac{1}{\left(\frac{dx_s(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)} \right) \frac{d\widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \times \frac{1}{\left(\frac{dx_l(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)}$$

On a donc :

$$R_{kj}^i = \frac{1}{d^2} \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} l_r^i \left(\sum_{l=1}^d \left(\sum_{s=1}^d D_{ls}(F(\varepsilon_r^i)) \frac{d\widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \times \frac{1}{\left(\frac{dx_s(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon}\right)} \right) \frac{d\widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \times \frac{1}{\left(\frac{dx_l(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon}\right)} \right)$$

Avec $l_r^i = \frac{\chi_{i+1} - \chi_i}{2} \omega_r^i$ puis $pos1(i) = (i-1)Npgs + 1$, $pos2(i) = iNpgs$ et $1 \leq i \leq N_d - 1$. $Npgs$ est le nombre de points de Gauss par segment, les ω_r^i et les ε_r^i sont respectivement les poids et noeuds de Gauss.

$$F_k^i = \int_{\Omega_i} f(x,t) N_{k,p}^i(x) dx \quad (2.42)$$

$$F_k^i = \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} l_r^i f(F(\varepsilon_r^i), t) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_r^i) \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2}$$

2.5.3 Traitement de la condition initiale

Sachant que $u(x,0) = u_0(x)$, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\int_{\Omega_i} u(x,0) N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\Omega_i} u_0(x) N_{k,p}^i(x) dx$$

$$\int_{\Omega_i} u^i(x,0) N_{k,p}^i(x) dx = \int_{\Omega_i} u_0(x) N_{k,p}^i(x) dx$$

$$\sum_{j \in I_i} \alpha_j^i(0) M_{kj}^i = \int_{\Omega_i} u_0(x) N_{k,p}^i(x) dx$$

$$M^i \alpha^i(0) = B^i$$

$$\text{Où } B^i = (B_k^i)_{\substack{k \in I_i \\ 1 \leq i \leq N_d - 1}} \text{ et } B_k^i = \int_{\Omega_i} u_0(x) N_{k,p}^i(x) dx$$

On déduit que :

$$\alpha^i(0) = (inv M^i) B^i \quad (2.43)$$

2.5.4 Traitement de la condition de Dirichlet

Etant donné que $u = 0$ sur $\partial\Omega \times [0; T_{fin}]$, nous avons :

$$\sum_{j \in I_1} \alpha_j^1(t) \widehat{N}_{j,p}^1(\chi_1) = 0 \implies \alpha_1^1(t) = 0 \text{ car } \widehat{N}_{j,p}^1(\chi_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\sum_{j \in I_{N_d-1}} \alpha_j^{N_d-1}(t) \widehat{N}_{j,p}^{N_d-1}(\chi_{N_d}) = 0 \implies \alpha_{p+1}^{N_d-1}(t) = 0 \text{ car } \widehat{N}_{j,p}^{N_d-1}(\chi_{N_d}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = p+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Résoudre l' équation de la chaleur revient à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \alpha^i(t) = \text{inv}M^i (F^i - R^i \alpha^i(t)) \\ \alpha^i(0) = (\text{inv}M^i) B^i \\ \alpha_1^1(t) = 0 \\ \alpha_{p+1}^{N_d-1}(t) = 0 \end{array} \right. \quad (2.44)$$

sous la condition CFL :

$$\|D(x)\| \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad [1].$$

Soit $t_i = t_0 + i\delta t$ pour $i = 0, \dots, N$ un réseau régulier de points, de pas δt tel que :

$$\delta t = \frac{T_{fin} - t_0}{N} \text{ où } t_0 = 0.$$

Posons $\dot{G}(t_i; \alpha^i(t)) = (\text{inv}M^i)(F^i - R^i \alpha^i(t))$.

Nous résolverons le système ci-dessus en utilisant la méthode de RUNGE KUTTA d'ordre 2. Nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\alpha^i(t+h) = \alpha^i(t) + \frac{1}{2}(K_1^i + K_2^i) \\
\alpha^i(0) = (invM^i)B^i \\
\alpha_1^1(t) = 0 \\
\alpha_{p+1}^{Nd-1}(t) = 0 \\
K_1^i = \delta t G(t; \alpha^i(t)) \\
K_2^i = \delta t G(\tilde{t}, \tilde{\alpha}^i(t)) \\
\text{Avec } \tilde{t} = t+h \text{ et } \tilde{\alpha}^i(t) = \alpha^i(t) + K_1^i
\end{array} \right. \quad (2.45)$$

2.5.5 Calcul de l'erreur L^2

Soit err cette erreur. Notons u_{ex} la solution exacte.

$$err = \sqrt{D}$$

$$\text{Avec } D = \sum_{i=1}^{N_d-1} \int_{\hat{\Omega}_i} \left(u_{ex}(F(\varepsilon), t) - \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i(t) N_{j,p}^i(F(\varepsilon)) \right)^2 \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^2} d\varepsilon$$

$$D = \sum_{i=1}^{N_d-1} \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} \omega_r^i \left[u_{ex}(F(\varepsilon_r^i), t) - \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i(t) N_{j,p}^i(F(\varepsilon_r^i)) \right]^2 \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2}$$

$$D = \sum_{i=1}^{N_d-1} \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} l_r^i \left[u_{ex}(F(\varepsilon_r^i), t) - \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i(t) \hat{N}_{j,p}^i(\varepsilon_r^i) \right]^2 \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2}$$

Avec $l_r^i = \frac{\chi_{i+1} - \chi_i}{2} \omega_r^i$ et $pos1(i) = (i-1)Npgs + 1$, $pos2(i) = iNpgs$,

$1 \leq i \leq N_d - 1$.

2.6 Résolution numérique de l'équation de transport

2.6.1 Formulation du problème en isogéométrie

Le but de cette partie est de résoudre numériquement par la méthode isogéométrique, l'équation de transport à vitesse variable.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \nabla \cdot (g(u)) = 0, x \in \Omega, t \in [0; T_{fin}] \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \text{ avec } \Omega \subset \mathbf{R}^d, 1 \leq d \leq 2 \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0; T_{fin}] \end{cases} \quad (2.46)$$

Ω est une courbe de \mathbf{R}^d .

Nous voulons résoudre l'équation de transport dans le cas où la vitesse c dépend de x .

C'est le cas où $g(u(x,t)) = c(x)u(x,t), c(x) \in \mathbf{R}^d$.

Soit $(N_{j,p})_j$ une base B-spline de degré p permettant de construire le domaine Ω .

Soit $X = (X_i)_{i=1}^m$ le vecteur nœud associé, avec m le nombre total de nœuds et

$X_d = (\chi_i)_{i=1}^{N_d}$ l'ensemble des nœuds distincts de X .

Soit $\Omega_i = \{x \in \mathbf{R}^d; x = F(\varepsilon), \varepsilon \in [\chi_i, \chi_{i+1}]\}$

ainsi $\exists! q(i) \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$\chi_i = X_{q(i)}$ où $q(i) = \sum_{k=1}^i n_k$ et n_k est la multiplicité de

χ_i dans X .

Soit $\Omega = \bigcup \Omega_i, 1 \leq i \leq N_d - 1$ avec $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

$$\text{Soit } N_{j,p}^i(x) = \begin{cases} N_{j,p}(x) \text{ si } x \in F([\chi_i; \chi_{i+1}]) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Soit $I_i = \{k \in \{1, \dots, n+1\}; \text{Supp}N_{k,p} \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$

$$\text{Supp}N_{j,p} = F([\chi_j; \chi_{j+p+1}])$$

$$\text{Supp}N_{j,p} \cap F([\chi_i; \chi_{i+1}]) \neq \emptyset \iff j \in \{q(i) - p, \dots, q(i)\}$$

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N_d-1} u^i(x,t) \text{ où } u^i(x,t) = \begin{cases} u_{/\partial\Omega_i} \text{ sur } \bar{\Omega}_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On cherche u^i sous la forme :

$$u^i(x,t) = \sum_{j \in I_i} \alpha_j^i(t) N_{j,p}^i(x), \forall i \in \{1, \dots, N_d - 1\}.$$

On effectue une discrétisation en espace et en temps en se donnant un pas de discrétisation en espace h . De même on se donne un pas de discrétisation en temps Δt . Sachant que $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \nabla \cdot (g(u)) = 0$, on a :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) N_{k,p}^i(x) dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (g(u)) N_{k,p}^i(x) dx dt = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) N_{k,p}^i(x) dx dt &= \int_{\Omega_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) N_{k,p}^i(x) dt dx \\ &= \int_{\Omega_i} [u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)] N_{k,p}^i(x) dx \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) N_{k,p}^i(x) dx dt &= \sum_{j \in I_i} [\alpha_j^i(t_{n+1}) - \alpha_j^i(t_n)] \int_{\Omega_i} N_{j,p}^i(x) N_{k,p}^i(x) dx \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (g(u)) N_{k,p}^i(x) dx dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(u(x_{i+1},t)) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_{i+1}) dt - \\ &\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(u(x_i,t)) \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_i) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_i} g(u(x,t)) \nabla N_{k,p}^i(x) dx dt \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$= \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_{i+1}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(u(x_{i+1},t)) dt - \quad (2.49)$$

$$\widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_i) \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(u(x_i,t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_i} g(u(x,t)) \nabla N_{k,p}^i(x) dx dt$$

Posons $G_{i+1}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(u(x_{i+1},t)) dt$.

Nous avons donc $G_i^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(u(x_i,t)) dt$.

G_i^n est le flux numérique.

Nous obtenons par la suite le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in I_i} [\alpha_j^i(t_{n+1}) - \alpha_j^i(t_n)] M_{kj}^i + \\ \Delta t G_{i+1}^n \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_{i+1}) - \Delta t G_i^n \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_i) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} A_{kj}^i dt \\ \alpha^i(0) = (inv M^i) B^i \\ \alpha_1^1(t) = 0 \\ \alpha_{p+1}^{Nd-1}(t) = 0 \end{array} \right. \quad (2.50)$$

$$\text{Avec } M^i = (M_{kj}^i)_{\substack{k \in I_i \\ j \in I_i}} \text{ où } M_{kj}^i = \int_{\Omega_i} N_{j,p}^i(x) N_{k,p}^i(x) dx.$$

$$\text{Avec } A^i = (A_{kj}^i)_{\substack{k \in I_i \\ j \in I_i}} \text{ où } A_{kj}^i = \int_{\Omega_i} (c(x) \nabla N_{k,p}^i(x)) N_{j,p}^i(x) dx$$

Les α_j^i sont obtenus en résolvant ce système d' équations différentielles sous la condition CFL :

$$\|c(x)\| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad [1]$$

Le calcul de M^i et A^i requiert une intégration numérique.

2.6.2 Intégration numérique

Dans cette partie, nous nous intéresserons à l'intégration numérique de la matrice de convection.

$$\begin{aligned} A_{kj}^i &= \int_{\Omega_i} (c(x) \nabla N_{k,p}^i(x)) N_{j,p}^i(x) dx \\ &= \int_{\Omega_i} \left(\sum_{s=1}^d c_s(x) \frac{\partial N_{k,p}^i(x)}{\partial x_s} \right) N_{j,p}^i(x) dx \end{aligned}$$

$$N_{j,p}^i \circ F = \widehat{N}_{j,p}^i \text{ donc } N_{j,p}^i = \widehat{N}_{j,p}^i \circ F^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{k,p}^i(x)}{\partial x_s} &= \frac{1}{d} \frac{d \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_s} \\ &= \frac{1}{d} \frac{d \widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{1}{\frac{dx_s(\varepsilon)}{d\varepsilon}} \text{ en supposant que } \frac{dx_s(\varepsilon)}{d\varepsilon} \neq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} A_{kj}^i &= \frac{1}{d} \int_{\Omega_i} \left(\sum_{s=1}^d c_s(F(\varepsilon)) \frac{d\widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{1}{\frac{dx_s(\varepsilon)}{d\varepsilon}} \right) \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon) \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)^2} d\varepsilon \\ &= \frac{1}{d} \sum_{r=pos1(i)}^{pos2(i)} l_r^i \left(\sum_{s=1}^d c_s(F(\varepsilon_r^i)) \frac{d\widehat{N}_{k,p}^i(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \frac{1}{\frac{dx_s(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon}} \right) \widehat{N}_{j,p}^i(\varepsilon_r^i) \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\frac{dx_j(\varepsilon_r^i)}{d\varepsilon} \right)^2} \end{aligned}$$

Le calcul de l'erreur L^2 se fait exactement comme pour l'équation de la chaleur.

2.7 Estimation d'erreur par la méthode isogéométrique pour l'équation de transport en 2D

Dans cette partie, Ω est une surface.

2.7.1 Discrétisation

Cette partie est divisée en deux grandes parties à savoir :

1. La sémi-discrétisation en espace.
2. La discrétisation en temps.

Sémi-discrétisation en espace

Définition 7. *un sous-ensemble F de $\overline{\Omega}$ est une face d'un maillage (τ_h) si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- *Il y a des éléments distincts du maillage, T_1 et T_2 tel que $F = \partial T_1 \cap \partial T_2$. Dans un tel cas, F est appelé une interface du domaine.*
- *Il y a $T \in \tau_h$ tel que $F = \partial T \cap \partial \Omega$. Dans un tel cas, F est appelé une face du bord.*

L'ensemble des interfaces est noté \mathcal{F}_h^i et celui des faces du bord est noté \mathcal{F}_h^b .

Notations et hypothèses

Considérons le carré unité $\widehat{\Omega} = [0; 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Soient n_l un entier et soit p_l le degré suivant la direction l , $l = 1, 2$.

Introduisons le vecteur nœud ouvert E_l suivant la direction l : $E_l = \{\xi_{l,1}, \dots, \xi_{l,n_l+p_l+2}\}$.

Posons $p := \min(p_1, p_2)$

Les vecteurs nœuds correspondants sans répétition sont donnés pour chaque direction l par :

$$Z_l = \{\zeta_{l,1}, \dots, \zeta_{l,N_l}\}$$

Il y a un maillage cartésien paramétrique Q_h associé aux vecteurs nœuds Z_1 et Z_2 , partitionnant le domaine paramétrique $\hat{\Omega}$ en un quadrillage rectangulaire. Nous avons donc :

$$Q_h = \{Q = \otimes_{l=1,2}(\zeta_{i_l,l}, \zeta_{i_l+1,l}), 1 \leq i_l \leq m_l - 1\} \quad [26] \quad (2.51)$$

Pour chaque élément du maillage paramétrique $Q \in Q_h$, nous associons un pas $h_Q = h_{Q,max}$ où $h_{Q,max}$ est la longueur du plus grand bord de Q . Aussi, pour chaque élément, nous définissons une constante de régularité :

$$\lambda_Q = \frac{h_Q}{h_{Q,min}} \quad [26] \quad (2.52)$$

où $h_{Q,min}$ est la longueur du plus petit bord de Q .

Nous associons à chaque vecteur nœud $E_l, (l = 1, 2)$ des fonctions de base B-spline N_{i,p_l} de degré p_l pour $i = 1, \dots, n_l$.

Sur le maillage Q_h , nous définissons le produit tensoriel des fonctions de base B-spline par :

$$N_{(i,j),(p_1,p_2)} = N_{i,p_1} \otimes N_{j,p_2}, i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2 \quad (2.53)$$

$$N_{(i,j),(p_1,p_2)} = N_{i,p_1} N_{j,p_2}, i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2 \quad (2.54)$$

Pour chaque élément Q dans le domaine paramétrique, il y a un élément physique correspondant $K = F(Q)$ où

$$F : [0,1]^2 \rightarrow \Omega, \text{ où } \Omega \text{ est le domaine physique .}$$

Nous supposons que F est inversible, ayant pour inverse F^{-1} .

Sur chaque élément $Q \in Q_h$, nous définissons le maillage physique :

$$\tau_h = \{K : K = F(Q), Q \in Q_h\} = F(Q_h). \quad (2.55)$$

Nous introduisons V_h , l'espace engendré par les fonctions de base B-spline dans Ω comme le push-forward de l'espace S_h des B-splines.

$$V_h := span\{N_{(i,j),(p_1,p_2)} \circ F^{-1}\}_{i=1, j=1}^{n_1, n_2}.$$

Etant donné une fonction $\hat{v} \in L^2(\hat{\Omega})$, nous définissons un opérateur projectif sur l'espace des B-splines S_h :

$$\pi_{S_h} : L^2(\hat{\Omega}) \rightarrow S_h, \pi_{S_h} \hat{v} := \sum_{i=1, j=1}^{n_1, n_2} \varphi(\hat{v}) N_{(i,j), (p_1, p_2)},$$

où la fonctionnelle linéaire $\varphi \in L^2(\hat{\Omega})'$ détermine la base duale pour l'ensemble des B-splines.

L'opérateur projectif sur l'espace des B-splines V_h , est défini comme le push-forward de l'opérateur π_{S_h} .

$$\pi_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h, \pi_h v := (\pi_{S_h}(\hat{v})) \circ F^{-1}$$

Nous définissons pour chaque élément physique $K \in \tau_h$ un pas :

$$h_K = \|\nabla F\|_{L^\infty(Q)} h_Q. \quad (2.56)$$

Posons :

- $\mathcal{F}_h := \mathcal{F}_h^b \cup \mathcal{F}_h^i$.
- $\forall T \in \tau_h, \mathcal{F}_T = \{F \in \mathcal{F}_h, F \subset \partial T\}$.

Définition 8. Soit v une fonction scalaire définie sur Ω . Soit $F \in \mathcal{F}_h^i$ avec $F = \partial T_1 \cap \partial T_2$. Pour presque tout $x \in F$, la moyenne de v est définie par :

$$\{\{v\}\}_F(x) := \frac{1}{2}(v_{/T_1}(x) + v_{/T_2}(x)) \quad (2.57)$$

le saut de v est défini par :

$$[v] = n_F(v_{/T_1} - v_{/T_2}) \quad (2.58)$$

Pour presque tout $x \in F$, avec $F \in \mathcal{F}_h^b, F = \partial T \cap \partial \Omega$,

$$\{\{v\}\}_F(x) = [v]_F(x) := v_{/T}(x)$$

- Soit β une fonction lipschitzienne i.e

$$\exists L_\beta, \forall (x, y) \in \Omega^2, \|\beta(x) - \beta(y)\| \leq L_\beta \|x - y\|$$

Où $\|x - y\|$ est la norme Euclidienne de $(x - y)$ dans \mathbf{R}^2 .

- Posons $\tau_c := \frac{1}{\max\{\|\nabla \cdot \beta\|_{L^\infty(\Omega)}; L_\beta\}}$ et $\beta_c := \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}$
- Posons $\tau_\star := \min(t_F, \tau_c)$
- On suppose que $h \leq \beta_c \tau_\star$

– Soit $P_\Omega = \{\Omega_i\}_{1 \leq i \leq N_\Omega}$ une partition de Ω telle que pour la solution exacte u ,

$$u \in V_\star = V \cap H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(P_\Omega), \varepsilon > 0 \quad [41]$$

$$\text{Posons } V_{\star h} := V_\star + V_h$$

On définit l'opérateur discret $A_h : V_{\star h} \rightarrow V_h$ tel que $\forall (v, w_h) \in V_{\star h} \times V_h$,

$$(A_h v, w_h)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla \cdot (\beta v) w_h + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus v w_h \quad [41]$$

$$\begin{aligned} (A_h v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla \cdot (\beta v_h) v_h + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus v_h^2 \\ &= \int_\Omega (\nabla \cdot \beta) v_h^2 + \int_\Omega (\beta \cdot \nabla v_h) v_h + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus v_h^2 \end{aligned}$$

$$\int_\Omega (\beta \cdot \nabla v_h) v_h = \sum_{T \in \tau_h} \int_T (\beta \cdot \nabla v_h) v_h$$

$$\int_T (\beta \cdot \nabla v_h) v_h = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial T} (\beta \cdot n) v_h^2 - \int_T (\nabla \cdot \beta) v_h^2 \right) \quad (\text{Intégration par parties})$$

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \tau_h} \int_T (\beta \cdot \nabla v_h) v_h &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \tau_h} \int_{\partial T} (\beta \cdot n) v_h^2 - \frac{1}{2} \sum_{T \in \tau_h} \int_T (\nabla \cdot \beta) v_h^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n) [v_h^2] + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F (\beta \cdot n) v_h^2 - \frac{1}{2} \sum_{T \in \tau_h} \int_T (\nabla \cdot \beta) v_h^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n) [v_h^2] + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) v_h^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla \cdot \beta) v_h^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$(A_h v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \nabla \cdot \beta\right) v_h^2 + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n) [v_h^2] + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v_h^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) v_h^2$$

$$(A_h v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \nabla \cdot \beta\right) v_h^2 + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n) [v_h^2] + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\beta \cdot n| v_h^2$$

$\frac{1}{2}[v_h^2] = [v_h]\{\{v_h\}\}$, donc nous avons :

$$(A_h v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \nabla \cdot \beta\right) v_h^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n) [v_h] \{\{v_h\}\} + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\beta \cdot n| v_h^2$$

$$\text{i.e } (A_h v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n) [v_h] \{\{v_h\}\} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \nabla \cdot \beta\right) v_h^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\beta \cdot n| v_h^2$$

Dans la suite, considérons l'opérateur discret $A_h : V_{\star h} \rightarrow V_h$ tel que $\forall (v, w_h) \in V_{\star h} \times V_h$,

$$(A_h v, w_h)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta v) w_h + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v w_h - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) [v] \{\{w_h\}\} \quad [41] \quad (2.59)$$

Le problème discret est : chercher $u_h \in C^1([0, t_F], V_h), \forall v_h \in V_h$:

$$\frac{d}{dt} (u_h(t), v_h)_{L^2(\Omega)} + (A_h u_h(t), v_h)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (2.60)$$

$$\text{avec } V_h = \mathbb{P}_2^k(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in \mathbb{P}_2^k(T)\} \quad (2.61)$$

Théorème 9. *Le problème discret est bien posé [41].*

Discrétisation en temps

Définition 9. *On appelle π_h la $L^2(\Omega)$ projection orthogonale sur V_h , l'application qui est telle que :*

$$\forall v \in L^2(\Omega), \pi_h v \in V_h \text{ avec } (\pi_h v, y_h)_{L^2(\Omega)} = (v, y_h)_{L^2(\Omega)}, \forall y_h \in V_h \quad (2.62)$$

Soit δt le pas de temps tel que $t_F = N \delta t$ où N est un entier naturel.

Pour $n \in \{0; \dots; N\}$, nous définissons le temps discret $t^n = n \delta t$.

On pose $u_h^n = u_h(t^n)$, où $u_h(t^n)$ est la solution numérique à la date t^n .

$\pi_h u^0$ est le projeté orthogonal de u^0 sur V_h .

Supposons que $\delta t \leq \tau_*$ avec $\tau_* = \min(t_F, \tau_c)$.

Nous nous intéressons au schéma explicite d'ordre 2 de la forme :

$$\begin{cases} u_h^{n,1} = u_h^n - \delta t A_h u_h^n \\ u_h^{n+1} = \frac{1}{2}(u_h^n + u_h^{n,1}) - \frac{1}{2} \delta t A_h u_h^{n,1} \\ \text{avec } u_h^0 = \pi_h u^0 \end{cases} \quad [41]$$

2.7.2 La notion de flux numérique

Dans le soucis d'introduire la notion de flux numérique, nous allons considérer l'opérateur discret suivant :

$A_h : V_{*h} \rightarrow V_h$ tel que $\forall (v, w_h) \in V_{*h} \times V_h$,

$$\begin{aligned} (A_h v, w_h)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta v) w_h + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v w_h \\ - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) [v] \{ \{ w_h \} \} &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v] [w_h] \quad [41] \text{ où } (\beta \cdot n)^{\ominus} := \frac{1}{2} (|\beta \cdot n| - \beta \cdot n) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Le problème discret est : chercher $u_h \in C^1([0, t_F], V_h), \forall v_h \in V_h$:

$$\frac{d}{dt} (u_h(t), v_h)_{L^2(\Omega)} + (A_h u_h(t), v_h)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (2.64)$$

Théorème 10. *Le problème discret 2.64 est bien posé [41].*

Lemme 2. $\forall (v, w_h) \in V_{*h} \times V_h$,

$$(A_h v, w_h) = - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w_h) v + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\oplus} v w_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \{ \{ v \} \} [w_h] + \quad [41] \quad (2.65)$$

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v] [w_h]$$

Avec $(\beta \cdot n)^{\oplus} = \frac{1}{2} (|\beta \cdot n| + \beta \cdot n)$

Démonstration. Soit $(v, w_h) \in V_{*h} \times V_h$.

$$\text{Posons } S = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta v) w_h + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v w_h - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) [v] \{ \{ w_h \} \} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla \cdot (\beta v) w_h &= \sum_{T \in \tau_h} \int_T \nabla \cdot (\beta v) w_h \\
&= \sum_{T \in \tau_h} \int_{\partial T} (\beta \cdot n) v w_h - \sum_{T \in \tau_h} \int_T (\beta \cdot \nabla w_h) v \\
&= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) [v w_h] + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F (\beta \cdot n_F) v w_h \\
&\quad - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w_h) v \\
&= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) [v] \{ \{ w_h \} \} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) [w_h] \{ \{ v \} \} \\
&\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F (\beta \cdot n_F) v w_h - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w_h) v
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc que :

$$\begin{aligned}
S &= - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w_h) v + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) [w_h] \{ \{ v \} \} \\
&\quad + \int_{\partial \Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v w_h + \int_{\partial \Omega} (\beta \cdot n) v w_h \\
S &= - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w_h) v + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \{ \{ v \} \} [w_h] + \int_{\partial \Omega} (\beta \cdot n)^{\oplus} v w_h
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned}
(A_h v, w_h) &= - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w_h) v + \int_{\partial \Omega} (\beta \cdot n)^{\oplus} v w_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \{ \{ v \} \} [w_h] + \\
&\quad \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v] [w_h]
\end{aligned}$$

□

Considérons un élément arbitraire T de notre maillage et un polynôme $\xi \in \mathbb{P}_2^k(T)$ avec \mathbb{P}_2^k l'espace des polynômes de degré au plus k à 2 variables.

Pour $S \subset \Omega$, notons χ_S la fonction caractéristique de S . En prenant la fonction test $w_h = \xi\chi_T$, l'utilisation de la relation 2.65 nous permet d'écrire que :

$$\begin{aligned}
(A_h v, \xi\chi_T)_{L^2(\Omega)} &= - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla (\xi\chi_T))v + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\oplus} v (\xi\chi_T) + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \{\{v\}\} [\xi\chi_T] + \\
&\quad \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v] [\xi\chi_T] \\
(A_h v, \xi)_{L^2(T)} &= - \int_T (\beta \cdot \nabla \xi)v + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F (\beta \cdot n)^{\oplus} v [\xi\chi_T] \\
&\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \{\{v\}\} [\xi\chi_T] + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v] [\xi\chi_T] \\
&= - \int_T (\beta \cdot \nabla \xi)v + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} (n_T \cdot n_F) \int_F (\beta \cdot n)^{\oplus} v \xi \tag{2.67} \\
&\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} (n_T \cdot n_F) \int_F (\beta \cdot n_F) \{\{v\}\} \xi + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} (n_T \cdot n_F) \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v] \xi \\
&\quad \text{car } [\xi\chi_T] = (n_T \cdot n_F) \xi \quad [41] \\
(A_h v, \xi)_{L^2(T)} &= - \int_T (\beta \cdot \nabla \xi)v + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} (n_T \cdot n_F) \int_F \phi_F(v) \xi
\end{aligned}$$

$$\text{où } \phi_F(v) = \begin{cases} (\beta \cdot n_F) \{\{v\}\} + \frac{\eta}{2} |\beta \cdot n_F| [v] & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^i \\ (\beta \cdot n)^{\oplus} v & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^b \end{cases} \tag{2.68}$$

avec $\eta = 1$. ϕ_F est appelé le flux numérique. Dans ce cas, on dit que le flux est décentré.

Lorsque $\eta = 0$,

$$\phi_F(v) = \begin{cases} (\beta \cdot n_F) \{\{v\}\} & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^i \\ (\beta \cdot n)^{\oplus} v & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^b \end{cases} \tag{2.69}$$

Dans ce cas, on parle de flux centré.

$$\text{avec } V_h = \mathbb{P}_2^k(\tau_h) = \{v \in L^2(\Omega); \forall T \in \tau_h, v|_T \in \mathbb{P}_2^k(T)\} \tag{2.70}$$

Lemme 3.

1. Pour la solution exacte, $u \in C^0([0, t_F], H^1(\Omega)) \cap C^1([0, t_F], L^2(\Omega))$,

$$\pi_h \frac{d}{dt} u(t) + A_h u(t) = 0, \forall t \in [0, t_F] \quad [41] \quad (2.71)$$

2.

$$(A_h v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = |v_h|_\beta^2 + (\Lambda v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} \quad [41] \quad (2.72)$$

$$\text{où } \Lambda = \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \quad (2.73)$$

$$\text{et } |v|_\beta^2 = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| v^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n_F| [v]^2, \forall v \in V_{*h} \quad (2.74)$$

Démonstration. 1. En se servant de l'égalité 1.14,

$$\frac{d}{dt} (u(t), w_h)_{L^2(\Omega)} + (Au(t), w_h)_{L^2(\Omega)} = 0, \forall w_h \in V_h \quad (2.75)$$

Etant donné que $u \in C^0(H^1(\Omega))$, $u(t)|_{\partial\Omega^-} = 0$ et que $[u(t)]_F = 0, \forall F \in \mathcal{F}_h^i$,

$$\text{nous avons : } (Au(t), w_h)_{L^2(\Omega)} = (A_h u(t), w_h)_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{Par définition de } \pi_h \text{ nous avons : } (\pi_h \frac{d}{dt} u, w_h)_{L^2(\Omega)} = (\frac{d}{dt} u, w_h)_{L^2(\Omega)}$$

Par conséquent, nous déduisons que :

$$(\pi_h \frac{d}{dt} u(t), w_h)_{L^2(\Omega)} + (A_h u(t), w_h)_{L^2(\Omega)} = 0, \forall w_h \in V_h$$

$$\text{i.e } \pi_h \frac{d}{dt} u(t) + A_h u(t) = 0 \quad (2.76)$$

2. Soit $v_h \in V_{*h}$

$$\begin{aligned} (A_h v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v_h^2 + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v_h) v_h + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus v_h^2 \\ &\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) [v_h] \{ \{ v_h \} \} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v_h]^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, nous avons :

$$\int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v_h) v_h = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) v_h^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v_h^2$$

La relation 2.77 devient :

$$\begin{aligned} (A_h v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta) v_h^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n) v_h^2 + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v_h^2 \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v_h]^2 \\ (A_h v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta) v_h^2 + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| v_h^2 + \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v_h]^2 \end{aligned}$$

□

2.7.3 Inégalités inverse et de trace isogométriques

Théorème 11.

$$\forall h > 0, \forall K \in \tau_h \text{ et } \forall v_h \in \mathbb{P}_2^k(\tau_h), \|\nabla v_h\|_{[L^2(K)]^2} \leq C_{\star} h_K^{-1} \|v_h\|_{L^2(K)} \quad [24] \quad (2.78)$$

où C_{\star} dépend du degré du polynôme, de la dimension du problème et de ∇F .

Théorème 12.

$$\forall v_h \in \mathbb{P}_2^k(\tau_h), \|v_h\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq C \lambda_Q \lambda_K h_K^{-1} \|v_h\|_{L^2(K)}^2 \quad [26] \quad (2.79)$$

Où C dépend de p_1 et p_2 , λ_Q est la constante de régularité locale de Q , et λ_K est la constante de régularité de K .

Dans la suite on pose $p := \min(p_1, p_2)$ [5, 47]

Théorème 13. Etant donné les entiers l et s tels que $0 \leq l \leq s \leq p + 1$ et une fonction $u \in H^s(\Omega)$, alors :

$$\sum_{K \in \tau_h} |u - \pi_h u|_{H^l(K)}^2 \leq C h^{2(s-l)} \|u\|_{H^s(\Omega)}^2, \quad [50] \quad (2.80)$$

où C est indépendant de h .

Théorème 14. *Etant donné les entiers l et s tels que $0 \leq l \leq s \leq p + 1$ et une fonction $u \in H^s(\Omega)$, alors :*

$$\sum_{K \in \tau_h} \|u - \pi_h u\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq C \max_{K \in \tau_h} (\lambda_Q \lambda_K) h^{(2s-1)} \|u\|_{H^s(\Omega)}^2, \quad (2.81)$$

Démonstration. Soit $u \in H^s(\Omega)$. En utilisant l'inégalité 2.79, nous avons :

$$\sum_{K \in \tau_h} \|u - \pi_h u\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq C \sum_{K \in \tau_h} \lambda_Q \lambda_K h_K^{-1} \|u - \pi_h u\|_{L^2(K)}^2, \quad (2.82)$$

$(\tau_h)_h$ étant quasi-uniforme, $h \leq Ch_K$.

$$(2.83)$$

$$\begin{aligned} h \leq Ch_K &\implies C^{-1} h_K^{-1} \leq h^{-1} \\ &\implies h_K^{-1} \leq Ch^{-1} \\ &\implies Ch_K^{-1} \leq C^2 h^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{K \in \tau_h} \|u - \pi_h u\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq C \max_{K \in \tau_h} (\lambda_Q \lambda_K) h^{-1} \sum_{K \in \tau_h} \|u - \pi_h u\|_{L^2(K)}^2 \quad (2.84)$$

En utilisant l'inégalité 2.80, nous avons :

$$\sum_{K \in \tau_h} \|u - \pi_h u\|_{L^2(K)}^2 \leq Ch^{2s} \|u\|_{H^s(\Omega)}^2 \quad (2.85)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\sum_{K \in \tau_h} \|u - \pi_h u\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq C \max_{K \in \tau_h} (\lambda_Q \lambda_K) h^{(2s-1)} \|u\|_{H^s(\Omega)}^2 \quad (2.86)$$

□

2.7.4 Inégalité de Young-Lemme de Gronwall (version discrète)

Théorème 15 (Inégalité de Young). *Pour tous réels a et b , pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}$$

Démonstration. On montrera que :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2, ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

De plus, en posant $a = \frac{a'}{\sqrt{\varepsilon}}$ et $b = b'\sqrt{\varepsilon}$ où a' et b' sont des réels, on obtiendra l'inégalité de Young.

□

La version discrète du lemme de Gronwall¹ est utilisée pour étudier la stabilité des méthodes numériques.

Théorème 16 (Lemme de Gronwall (version discrète)). *Soit λ un réel positif. Soient $(h_n)_n, (\theta_n)_n$ des suites positives et $(\varepsilon_n)_n$ une suite réelle telles que :*

$$\theta_{n+1} \leq (1 + \lambda h_n)\theta_n + \varepsilon_n.$$

Donc, nous obtenons :

$$\theta_n \leq \exp(\lambda(t_n - t_0))\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \exp(\lambda(t_n - t_{i+1}))\varepsilon_i \quad [22]$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur n . Pour l'hypothèse d'hérédité, on utilisera l'inégalité suivante :

$$1 + \lambda h_n \leq \exp(\lambda h_n).$$

□

2.7.5 Equations d'erreur

Théorème 17. *Posons*

$$\varepsilon_h^n := u_h^n - \pi_h u^n \quad (2.87)$$

$$\varepsilon_\pi^n := u^n - \pi_h u^n \quad (2.88)$$

$$\zeta_h^n := w_h^n - \pi_h w^n \quad (2.89)$$

$$\zeta_\pi^n := w^n - \pi_h w^n \quad (2.90)$$

$$\text{avec } w := u + \delta t \frac{d}{dt} u \quad [41] \quad (2.91)$$

1. Le lemme de Gronwall a été établie par thomas Hakon Gronwall en 1919.

u_h^n est la solution numérique u_h à la date t^n .

$\pi_h u^n$ est le projeté orthogonal de u^n sur V_h .

u^n est la solution exacte à la date t^n .

De 2.87 et 2.88, nous avons $u^n - u_h^n = \varepsilon_\pi^n - \varepsilon_h^n$

De 2.89 et 2.90, nous avons $w^n - w_h^n = \zeta_\pi^n - \zeta_h^n$

Nous obtenons alors :

$$\zeta_h^n = \varepsilon_h^n - \delta t A_h \varepsilon_h^n + \delta t \alpha_h^n \quad [41] \quad (2.92)$$

$$\varepsilon_h^{n+1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_h^n + \zeta_h^n) - \frac{1}{2}\delta t A_h \zeta_h^n + \frac{1}{2}\delta t \beta_h^n \quad [41] \quad (2.93)$$

$$\text{où } \alpha_h^n = A_h \varepsilon_\pi^n \quad (2.94)$$

$$\beta_h^n = A_h \zeta_\pi^n - \pi_h \theta^n \quad (2.95)$$

$$\text{et } \theta^n = \frac{1}{\delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)^2 \frac{d^3}{dt^3} u^n dt \quad (2.96)$$

Démonstration.

$$w^n = u^n + \delta t \frac{d}{dt} u^n \implies \pi_h w^n = \pi_h u^n + \delta t \pi_h \frac{d}{dt} u_t^n$$

Sachant que $\pi_h \frac{d}{dt} u(t) + A_h u(t) = 0$, nous obtenons que $\pi_h \frac{d}{dt} u(t) = -A_h u(t)$

$$\text{donc } \pi_h w^n = \pi_h u^n - \delta t A_h u^n.$$

De plus, en se référant au schéma RK2, $w_h^n = u_h^n - \delta t A_h u_h^n$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\zeta_h^n &= w_h^n - \pi_h w^n \\
&= u_h^n - \delta t A_h u_h^n - (\pi_h u^n - \delta t A_h u^n) \\
&= u_h^n - \pi_h u^n - \delta t A_h u_h^n + \delta t A_h u^n \\
&= u_h^n - \pi_h u^n - \delta t A_h u_h^n + \delta t A_h u^n - \delta t A_h \pi_h u^n + \delta t A_h \pi_h u^n \\
&= u_h^n - \pi_h u^n - \delta t A_h (u_h^n - \pi_h u^n) + \delta t A_h (u^n - \pi_h u^n) \\
&= \varepsilon_h^n - \delta t A_h \varepsilon_h^n + \delta t A_h \varepsilon_\pi^n \\
\zeta_h^n &= \varepsilon_h^n - \delta t A_h \varepsilon_h^n + \delta t \alpha_h^n
\end{aligned}$$

Montrons la deuxième égalité.

En appliquant la formule de Taylor, nous avons :

$$\begin{aligned}
u^{n+1} &= u^n + \delta t \frac{d}{dt} u^n + \frac{1}{2} \delta t^2 \frac{d^2}{dt^2} u^n + \frac{\delta t}{2} \theta^n \\
w^{n+1} &= w^n + \frac{1}{2} \delta t^2 \frac{d^2}{dt^2} u^n + \frac{\delta t}{2} \theta^n
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\pi_h u^{n+1} = \pi_h w^n + \frac{\delta t^2}{2} \pi_h \frac{d^2}{dt^2} u^n + \frac{\delta t}{2} \pi_h \theta^n \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}
\pi_h w^n &= \frac{1}{2} \pi_h w^n + \frac{1}{2} \pi_h w^n \\
&= \frac{1}{2} \pi_h u^n - \frac{\delta t}{2} A_h u^n + \frac{1}{2} \pi_h w^n \\
\pi_h w^n &= \frac{1}{2} (\pi_h u^n + \pi_h w^n) - \frac{\delta t}{2} A_h u^n
\end{aligned}$$

L' égalité 2.97 devient:

$$\pi_h u^{n+1} = \frac{1}{2} (\pi_h u^n + \pi_h w^n) - \frac{\delta t}{2} A_h u^n + \frac{\delta t^2}{2} \pi_h \frac{d^2}{dt^2} u^n + \frac{\delta t}{2} \pi_h \theta^n \tag{2.98}$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned}
\delta t \pi_h \frac{d^2}{dt^2} u^n &= \delta t \pi_h \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} u^n \right) \\
&= \delta t \frac{d}{dt} \left(\pi_h \frac{d}{dt} u^n \right) \\
&= \delta t \frac{d}{dt} (-A_h u^n) \\
&= -\delta t A_h \frac{d}{dt} u^n \\
&= -A_h \left(\delta t \frac{d}{dt} u^n \right) \\
\delta t \pi_h \frac{d^2}{dt^2} u^n &= -A_h (w^n - u^n) \text{ car } w^n = u^n + \delta t \frac{d}{dt} u^n
\end{aligned}$$

L' égalité 2.98 devient :

$$\pi_h u^{n+1} = \frac{1}{2} (\pi_h u^n + \pi_h w^n) - \frac{\delta t}{2} A_h u^n - \frac{\delta t}{2} A_h (w^n - u^n) + \frac{\delta t}{2} \pi_h \theta^n \quad (2.99)$$

Sachant que

$$u_h^{n+1} = \frac{1}{2} (u_h^n + w_h^n) - \frac{\delta t}{2} A_h w_h^n,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_h^{n+1} &= u_h^{n+1} - \pi_h u^{n+1} \\
&= \frac{1}{2} (\varepsilon_h^n + \zeta_h^n) - \frac{\delta t}{2} A_h w_h^n + \frac{\delta t}{2} A_h w^n - \frac{\delta t}{2} \pi_h \theta^n
\end{aligned}$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}
-\frac{\delta t}{2} A_h w_h^n + \frac{\delta t}{2} A_h w^n &= -\frac{\delta t}{2} A_h w_h^n - \frac{\delta t}{2} A_h \pi_h w^n + \frac{\delta t}{2} A_h \pi_h w^n + \frac{\delta t}{2} A_h w^n \\
&= -\frac{\delta t}{2} A_h (w_h^n - \pi_h w^n) + \frac{\delta t}{2} A_h (w^n - \pi_h w^n) \\
-\frac{\delta t}{2} A_h w_h^n + \frac{\delta t}{2} A_h w^n &= -\frac{\delta t}{2} A_h (\zeta_h^n) + \frac{\delta t}{2} A_h (\zeta_\pi^n)
\end{aligned}$$

Ainsi nous déduisons que :

$$\varepsilon_h^{n+1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_h^n + \zeta_h^n) - \frac{\delta t}{2}A_h(\zeta_h^n) + \frac{\delta t}{2}A_h(\zeta_\pi^n) - \frac{\delta t}{2}\pi_h\theta^n$$

Par conséquent, nous obtenons que :

$$\varepsilon_h^{n+1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_h^n + \zeta_h^n) - \frac{1}{2}\delta t A_h \zeta_h^n + \frac{1}{2}\delta t \beta_h^n \quad [41] \quad (2.100)$$

$$\text{où } \alpha_h^n = A_h \varepsilon_\pi^n \quad (2.101)$$

$$\beta_h^n = A_h \zeta_\pi^n - \pi_h \theta^n \quad (2.102)$$

□

2.7.6 Egalité d'énergie

Théorème 18. *On suppose que :*

$$\zeta_h^n = \varepsilon_h^n - \delta t A_h \varepsilon_h^n + \delta t \alpha_h^n$$

$$\text{et } \varepsilon_h^{n+1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_h^n + \zeta_h^n) - \frac{1}{2}\delta t A_h \zeta_h^n + \frac{1}{2}\delta t \beta_h^n$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t |\varepsilon_h^n|_\beta^2 + \delta t |\zeta_h^n|_\beta^2 &= \|\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t (\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \delta t (\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \Lambda_h^n \quad [41] \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\text{avec } \Lambda_h^n = \delta t (\Lambda \varepsilon_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} + \delta t (\Lambda \zeta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} \quad (2.104)$$

$$\text{et } \Lambda = \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \quad (2.105)$$

Démonstration.

$$\zeta_h^n = \varepsilon_h^n - \delta t A_h \varepsilon_h^n + \delta t \alpha_h^n$$

Donc, nous obtenons :

$$(\zeta_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} = \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \delta t (A_h \varepsilon_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} + \delta t (\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} \quad (2.106)$$

$$\varepsilon_h^{n+1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_h^n + \zeta_h^n) - \frac{1}{2}\delta t A_h \zeta_h^n + \frac{1}{2}\delta t \beta_h^n \quad (2.107)$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_h^{n+1}, 2\zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_h^n, 2\zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}(\zeta_h^n, 2\zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \\ &\quad \frac{\delta t}{2}(A_h \zeta_h^n, 2\zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\delta t(\beta_h^n, 2\zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$2(\varepsilon_h^{n+1}, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} = (\varepsilon_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} + \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \delta t(A_h \zeta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} + \delta t(\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} \quad (2.109)$$

En utilisant les égalités 2.106 et 2.109, nous déduisons que :

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon_h^{n+1}, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} &= \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \delta t(A_h \varepsilon_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} + \delta t(\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \delta t(A_h \zeta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} + \delta t(\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Sachant que

$$(A_h v_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = |v_h|_\beta^2 + (\Lambda \zeta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)}$$

Nous pouvons écrire que :

$$\begin{cases} (A_h \zeta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} = |\zeta_h^n|_\beta^2 + (\Lambda \zeta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} \\ (A_h \varepsilon_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} = |\varepsilon_h^n|_\beta^2 + (\Lambda \varepsilon_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

L' égalité 2.110 devient :

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon_h^{n+1}, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} &= \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t(\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \delta t(\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \delta t|\zeta_h^n|_\beta^2 - \delta t|\varepsilon_h^n|_\beta^2 - \Lambda_h^n \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon_h^{n+1}, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t(\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \delta t(\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \delta t|\zeta_h^n|_\beta^2 - \delta t|\varepsilon_h^n|_\beta^2 - \Lambda_h^n \end{aligned} \quad (2.112)$$

Etant donné que $2ab = a^2 + b^2 - (a - b)^2$, nous obtenons que :

$$2(\varepsilon_h^{n+1}, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} = \|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|(\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.113)$$

$$2(\varepsilon_h^{n+1}, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|(\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.114)$$

De 2.112 et 2.114, on a :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|(\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t(\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} + \delta t(\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \delta t|\zeta_h^n|_\beta^2 - \delta t|\varepsilon_h^n|_\beta^2 - \Lambda_h^n \end{aligned} \quad (2.115)$$

Nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t|\varepsilon_h^n|_\beta^2 + \delta t|\zeta_h^n|_\beta^2 &= \|\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t(\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \delta t(\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \Lambda_h^n \end{aligned}$$

□

2.7.7 Estimation de stabilité

$\forall v \in V_{\star h}$, posons :

$$\|v\|_{\star\star}^2 = \|v\|_{uwb,\star}^2 + \beta_c h \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad [41] \quad (2.116)$$

$$\|v\|_{uwb,\star}^2 = \|v\|_{uwb}^2 + \sum_{K \in \tau_h} \beta_c \|v\|_{L^2(\partial K)}^2 \quad [41] \quad (2.117)$$

$$\|v\|_{uwb}^2 = \frac{1}{\tau_c} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_\beta^2 \quad [41] \quad (2.118)$$

$$E_h^n = \|\varepsilon_\pi^n\|_{\star\star} + \|\zeta_\pi^n\|_{\star\star} + \tau_\star^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))} \delta t^2 + \tau_\star^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} \quad [41] \quad (2.119)$$

Par convention, $a \lesssim b \iff \exists C$ ind ependante de $\beta, h, \delta t$ tel que $a \leq Cb$ [41]

Lemme 4. $\forall (v, w_h) \in H^1(\Omega) \times V_h$,

$$(A_h(v - \pi_h v), w_h)_{L^2(\Omega)} \lesssim \|v - \pi_h v\|_{uwb,\star} \|w_h\|_{uwb} \quad (2.120)$$

Démonstration. Soit $(v, w_h) \in H^1(\Omega) \times V_h$. Posons $y = v - \pi_h v$

D'après la relation 2.65

$$(A_h y, w_h) = - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla w_h) y + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\oplus} y w_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) \{ \{ y \} \} [w_h] +$$

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [y] [w_h]$$

$$\int_{\partial\Omega} |(\beta \cdot n)^{\oplus} y w_h| \leq \int_{\partial\Omega} |(\beta \cdot n)| |y w_h| \tag{2.121}$$

$$\leq 2 \left(\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |(\beta \cdot n)| y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |(\beta \cdot n)| w_h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Inégalité de cauchy-schwarz})$$

$$\leq 2 \|y\|_{uwb} \|w_h\|_{uwb}$$

$$\leq 2 \|y\|_{uwb, \star} \|w_h\|_{uwb}$$

Soit $\langle \beta \rangle_K$ la valeur moyenne de β sur chaque K . Nous obtenons :

$$\|\beta - \langle \beta \rangle_K\|_{L^\infty(K)} \leq L_\beta h_K \text{ car } \beta \text{ est une fonction lipschitzienne}$$

$$\|\beta - \langle \beta \rangle_K\|_{L^\infty(K)} \leq \tau_c^{-1} h_K \text{ car } \tau_c := \frac{1}{\max\{\|\nabla \cdot \beta\|_{L^\infty(\Omega)}; L_\beta\}}$$

$$\langle \beta \rangle_K \cdot \nabla w_h \in \mathbb{P}_2^{k-1}(K) \subset \mathbb{P}_2^k(K)$$

Donc nous avons :

$$\forall K \in \tau_h, \int_K y \langle \beta \rangle_K \cdot \nabla w_h = 0 \text{ par définition de } \pi_h$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\int_K y \langle \beta \rangle_K \cdot \nabla w_h = \sum_{K \in \tau_h} \int_K y \beta \cdot \nabla w_h \tag{2.122}$$

$$= \sum_{K \in \tau_h} \int_K y (\beta - \langle \beta \rangle_K) \cdot \nabla w_h$$

$$\leq \sum_{K \in \tau_h} \|y\|_{L^2(K)} \tau_c^{-1} h_K \|\nabla w_h\|_{[L^2(K)]^2}$$

D'après l' inégalité inverse 2.78, $h_K \|\nabla w_h\|_{[L^2(K)]^2} \leq C \|w_h\|_{L^2(K)}$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_K y \beta \nabla w_h &\leq C \sum_{K \in \tau_h} \|y\|_{L^2(K)} \tau_c^{-1} \|w_h\|_{L^2(K)} \\
&\leq C \sum_{K \in \tau_h} \frac{1}{\tau_c^{\frac{1}{2}}} \|y\|_{L^2(K)} \frac{1}{\tau_c^{\frac{1}{2}}} \|w_h\|_{L^2(K)} \\
&\leq C \left(\sum_{K \in \tau_h} \frac{1}{\tau_c} \|y\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \tau_h} \frac{1}{\tau_c} \|w_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\frac{1}{\tau_c} \|y\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tau_c} \|w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|y\|_{uwb} \|w_h\|_{uwb} \\
&\leq C \|y\|_{uwb, \star} \|w_h\|_{uwb}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F |(\beta \cdot n_F) \{\{y\}\} [w_h]| \leq \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} 2 \int_F |\beta \cdot n_F \{\{y\}\}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F [w_h]|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\forall F \in \mathcal{F}_h^i$ avec $F = \partial K_1 \cap \partial K_2$, posons $y_i = y|_{K_i}, i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
2\{\{y\}\}^2 &= 2 \left(\frac{1}{2} (y_1 + y_2) \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} (y_1 + y_2)^2 \\
&\leq y_1^2 + y_2^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} 2 \int_F |\beta \cdot n_F| \{y\}^2 &\leq \beta_c \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F 2 \{y\}^2 \\
&\leq \beta_c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F y_1^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F y_2^2 \right) \\
&\leq \beta_c \sum_{K \in \tau_h} \|y\|_{L^2(\partial K)}^2 \\
\left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} 2 \int_F |\beta \cdot n_F| \{y\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{K \in \tau_h} \beta_c \|y\|_{L^2(\partial K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|y\|_{uwb, \star}
\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [w_h]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq |w_h|_\beta \leq \|w_h\|_{uwb}$$

D'où

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F |(\beta \cdot n_F) \{y\} [w_h]| \leq \|y\|_{uwb, \star} \|w_h\|_{uwb} \quad (2.123)$$

En plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [y] [w_h] &\leq \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n_F| [y]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n_F| [w_h]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|y\|_{uwb, \star} \|w_h\|_{uwb}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons déduire le résultat suivant :

$$(A_h(v - \pi_h v), w_h)_{L^2(\Omega)} \lesssim \|v - \pi_h v\|_{uwb, \star} \|w_h\|_{uwb} \quad (2.124)$$

□

Lemme 5.

$$\forall v \in V_{*h}, \|A_h v\|_{L^2(\Omega)} \lesssim r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{**} \text{ avec } r = \max \left(1, \sqrt{\max_{K \in \tau_h} (\lambda_Q \lambda_K)} \right) \quad (2.125)$$

Démonstration. En se servant de la relation 2.63,

$$\forall (v, w_h) \in V_{*h} \times V_h,$$

$$\begin{aligned} (A_h v, w_h)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v) w_h + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v w_h + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^{\ominus} v w_h \\ &\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) [v] \{ \{ w_h \} \} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v] [w_h] \quad [41] \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$\int_{\Omega} |(\beta \cdot \nabla v) w_h| \leq \beta_c \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|w_h\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v w_h &\leq \|\nabla \cdot \beta\|_{L^\infty} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\tau_c} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w_h\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\text{car } \tau_c := \frac{1}{\max\{\|\nabla \cdot \beta\|_{L^\infty(\Omega)}; L_\beta\}}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |(\beta \cdot n)^{\ominus} v w_h| &\leq \sqrt{2} |v|_{\beta} \left(\int_{\partial\Omega} |\beta \cdot n| w_h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Inégalité de Cauchy Schwarz}) \\ &\leq \sqrt{2} \beta_c^{\frac{1}{2}} |v|_{\beta} \|w_h\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq C \sqrt{2} m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |v|_{\beta} \|w_h\|_{L^2(\Omega)} \text{ d'après l'inégalité inverse 2.79} \end{aligned}$$

$$\text{avec } m = \max_{K \in \tau_h} (\lambda_Q \lambda_K)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F |\beta \cdot n_F| [v] [w_h] &\leq |v|_\beta \left(\frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F |\beta \cdot n_F| [w_h]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \beta_c^{\frac{1}{2}} |v|_\beta \left(\sum_{T \in \tau_h} \|w_h\|_{L^2(\partial K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \beta_c^{\frac{1}{2}} |v|_\beta \|w_h\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq C m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |v|_\beta \|w_h\|_{L^2(\Omega)} \text{ d'après l'inégalité inverse 2.79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F |\beta \cdot n_F| [v] \{\{w_h\}\} &\leq |v|_\beta \left(2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F |\beta \cdot n_F| \{\{w_h\}\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |v|_\beta \beta_c^{\frac{1}{2}} \|w_h\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq C m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |v|_\beta \|w_h\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$(A_h v, w_h)_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{\tau_c} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \beta_c \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^2} + 2C\sqrt{2} m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |v|_\beta \right) \|w_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.127)$$

posons $r = \max\left(1, m^{\frac{1}{2}}\right)$

L'inégalité devient :

$$(A_h v, w_h)_{L^2(\Omega)} \lesssim r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \left(\beta_c^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tau_c} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^2} + |v|_\beta \right) \|w_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned}
h \leq \beta_c \tau_\star &\implies h \leq \beta_c \tau_c \\
&\implies \beta_c^{-1} h \leq \tau_c \\
&\implies \beta_c^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \leq \tau_c^{\frac{1}{2}} \\
&\implies \beta_c^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tau_c} \leq \frac{1}{\tau_c^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire que

$$(A_h v, w_h)_{L^2(\Omega)} \lesssim r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{\star\star} \|w_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.129)$$

Etant donné que

$$\|A_h v\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{w_h \in V_h - \{0\}} \frac{(A_h v, w_h)_{L^2(\Omega)}}{\|w_h\|_{L^2(\Omega)}}$$

Nous obtenons par conséquent :

$$\|A_h v\|_{L^2(\Omega)} \lesssim r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{\star\star}$$

avec $r = \max\left(1, \sqrt{\max_{K \in \tau_h} (\lambda_Q \lambda_K)}\right)$ □

Lemme 6.

$$\|v_h\|_{\star\star} \lesssim r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}, \forall v_h \in V_h \quad (2.130)$$

Démonstration. $\forall v_h \in V_{\star h}$,

$$\|v_h\|_{\star\star}^2 = \|v_h\|_{uwb, \star}^2 + \beta_c h \|\nabla v_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \quad (2.131)$$

$$\|v_h\|_{uwb, \star}^2 = \|v_h\|_{uwb}^2 + \sum_{K \in \tau_h} \beta_c \|v_h\|_{L^2(\partial K)}^2 \quad (2.132)$$

$$\|v_h\|_{uwb}^2 = \frac{1}{\tau_c} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + |v_h|_\beta^2 \quad (2.133)$$

$$|v_h|_\beta^2 = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| v_h^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n_F| [v_h]^2 \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} |\beta \cdot n| v_h^2 &\leq \frac{1}{2} \beta_c \|v_h\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \\
&\lesssim m \beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Soit $F \in \mathcal{F}_h^i$ avec $F = \partial K_1 \cap \partial K_2$, posons $v_i = v_{h/K_i}, i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[v_h]^2 \leq v_1^2 + v_2^2 &\implies \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n_F| [v_h]^2 \leq \beta_c \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F v_1^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F v_2^2 \right) \\ &\implies \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n_F| [v_h]^2 \leq \beta_c \sum_{K \in \tau_h} \|v\|_{L^2(\partial K)}^2 \\ &\implies \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n_F| [v_h]^2 \leq m\beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Donc, nous déduisons que :

$$|v_h|_\beta^2 \lesssim m\beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} h \leq \beta_c \tau_* &\implies h \leq \beta_c \tau_c \\ &\implies \frac{1}{\tau_c} \leq \beta_c h^{-1} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{\tau_c} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Donc en posant $q = \max(1, m)$

$$\|v_h\|_{uvb}^2 \lesssim q\beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.136)$$

En se servant de l'inégalité inverse 2.78, nous avons :

$$\begin{aligned} \beta_c h \|\nabla v_h\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\lesssim \beta_c h h^{-2} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité inverse 2.79, nous avons :

$$\|v_h\|_{L^2(\partial K)}^2 \lesssim m h^{-1} \|v_h\|_{L^2(K)}^2$$

Donc,

$$\sum_{T \in \tau_h} \beta_c \|v_h\|_{L^2(\partial K)}^2 \lesssim m \beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

D'où

$$\|v_h\|_{\star\star}^2 \lesssim q \beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

C'est à dire que

$$\|v_h\|_{\star\star} \lesssim q^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

Ainsi,

$$\|v_h\|_{\star\star} \lesssim r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

□

Lemme 7.

$$\forall v_h \in V_h, \|A_h v\|_{L^2(\Omega)} \lesssim r^2 \beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.137)$$

Démonstration. Ce résultat est obtenu en utilisant les inégalités 2.125 et 2.130 □

Lemme 8. *Supposons que la condition CFL est vérifiée :*

$$\delta t \leq \varrho \frac{h}{\beta_c} \text{ pour un certain réel positif } \varrho. \quad (2.138)$$

Alors,

1.

$$\delta t^{\frac{1}{2}} \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} \lesssim r E_h^n \quad (2.139)$$

2.

$$\delta t^{\frac{1}{2}} \|\beta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \lesssim r E_h^n \quad (2.140)$$

3.

$$\|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \lesssim r^2 \left(\|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon \pi^n\|_{\star\star} \right) \quad (2.141)$$

4.

$$\Lambda_h^n \lesssim r^4 \delta t (E_h^n)^2 \quad (2.142)$$

5.

$$\delta t (\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta t}{2} |\varepsilon_h^n|_\beta^2 \lesssim \delta t (E_h^n)^2 \quad (2.143)$$

6.

$$\delta t (\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^n|_\beta^2 \lesssim r^4 \delta t (E_h^n)^2 \quad (2.144)$$

Démonstration. 1. De la relation 2.101, nous avons :

$$\begin{aligned}\delta t^{\frac{1}{2}} \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} &= \delta t^{\frac{1}{2}} \|A_h \varepsilon_\pi^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim r \delta t^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \text{ en utilisant la relation 2.125}\end{aligned}$$

En se servant de la condition CFL, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\delta t \lesssim \frac{h}{\beta_c} &\implies \delta t^{\frac{1}{2}} \lesssim h^{\frac{1}{2}} \beta_c^{-\frac{1}{2}} \\ &\implies \delta t^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} \lesssim 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi } \delta t^{\frac{1}{2}} \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim r \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \\ \delta t^{\frac{1}{2}} \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim r E_h^n\end{aligned} \tag{2.145}$$

2. De l'égalité 2.102, nous avons :

$$\delta t^{\frac{1}{2}} \|\beta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta t^{\frac{1}{2}} \|A_h \zeta_\pi^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t^{\frac{1}{2}} \|\pi_h \theta^n\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}\delta t^{\frac{1}{2}} \|A_h \zeta_\pi^n\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim r \delta t^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} \|\zeta_\pi^n\|_{**} \\ &\lesssim r \|\zeta_\pi^n\|_{**}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\pi_h \theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \int_{\Omega} \delta t^{-2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)^2 \frac{d^3}{dt^3} u(t) dt \right)^2 dx \\
&\leq \delta t^{-2} \int_{\Omega} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)^4 dt \right) \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left| \frac{d^3}{dt^3} u(t) \right|^2 dt \right) dx \\
&\leq \frac{1}{5} \delta t^3 \int_{\Omega} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left| \frac{d^3}{dt^3} u(t) \right|^2 dt dx \\
&\leq \frac{1}{5} \delta t^4 \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

donc $\|\pi_h \theta^n\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \delta t^2 C_u$
avec $C_u = \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{L^2(\Omega)}$
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\delta t^{\frac{1}{2}} \|\beta_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim r \|\zeta_{\pi}^n\|_{\star\star} + \delta t^{\frac{1}{2}} C_u \delta t^2 \\
&\lesssim r \left(\|\zeta_{\pi}^n\|_{\star\star} + \delta t^{\frac{1}{2}} C_u \delta t^2 \right) \text{ car } 1 \leq r \\
&\lesssim r E_h^n \text{ car } \delta t \leq \tau_{\star}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t \|A_h \varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + r^2 \delta t \beta_c h^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t^{\frac{1}{2}} r \|\varepsilon_{\pi}^n\|_{\star\star} \\
&\lesssim \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + r^2 \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t^{\frac{1}{2}} r \|\varepsilon_{\pi}^n\|_{\star\star} \\
\|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim r^2 \left(\|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_{\pi}^n\|_{\star\star} \right) \tag{2.146}
\end{aligned}$$

4. De l'inégalité 2.146, on a :

$$\|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim r^4 \left(\|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t \|\varepsilon_{\pi}^n\|_{\star\star}^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } \delta t \tau_c^{-1} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim r^4 \left(\delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t^2 \tau_c^{-1} \|\varepsilon_\pi^n\|_{\star\star}^2 \right) \\
&\lesssim r^4 \delta t \left(\tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_\pi^n\|_{\star\star}^2 \right) \\
&\lesssim r^4 \delta t \left(\tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varepsilon_\pi^n\|_{\star\star}^2 \right) \text{ car } \delta t \tau_c^{-1} \leq 1 \\
\delta t \tau_c^{-1} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim r^4 \delta t (E_h^n)^2
\end{aligned}$$

En utilisant la relation 2.104 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Lambda_h^n &\leq \delta t \|\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t \|\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\Lambda_h^n &\leq \delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t \tau_c^{-1} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ car } \|\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tau_c^{-1} \\
&\lesssim \delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + r^4 \delta t (E_h^n)^2 \\
&\lesssim r^4 \delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + r^4 \delta t (E_h^n)^2 \text{ car } 1 \leq r^4 \\
&\lesssim r^4 \delta t \left(\tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (E_h^n)^2 \right) \\
\Lambda_h^n &\lesssim r^4 \delta t (E_h^n)^2
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\delta t(\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} &= \delta t(A_h \varepsilon_\pi^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \delta t \|\varepsilon_\pi^n\|_{uwb, \star} \|\varepsilon_h^n\|_{uwb} \text{ en utilisant l'inégalité 2.120} \\
&\lesssim \delta t \|\varepsilon_\pi^n\|_{\star\star} \left(\frac{1}{\tau_c} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + |\varepsilon_h^n|_\beta \right) \text{ car } \|\varepsilon_\pi^n\|_{uwb, \star} \leq \|\varepsilon_\pi^n\|_{\star\star}
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous avons :

$$\delta t(\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} \lesssim \delta t \left(\frac{\|\varepsilon_\pi^n\|_{\star\star}^2}{2} + \frac{1}{2\tau_c} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\|\varepsilon_\pi^n\|_{\star\star}^2}{2} + \frac{1}{2} |\varepsilon_h^n|_\beta^2 \right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\delta t(\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta t}{2} |\varepsilon_h^n|_\beta^2 &\lesssim \delta t \left(\|\varepsilon_\pi^n\|_{**}^2 + \frac{1}{\tau_c} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\lesssim \delta t \left(\|\varepsilon_\pi^n\|_{**}^2 + \frac{1}{\tau_c} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\lesssim \delta t \left(\|\varepsilon_\pi^n\|_{**}^2 + \frac{1}{\tau_c} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\lesssim \delta t \left(\|\varepsilon_\pi^n\|_{**}^2 + \frac{1}{\tau_c} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
\delta t(\alpha_h^n, \varepsilon_h^n)_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta t}{2} |\varepsilon_h^n|_\beta^2 &\lesssim \delta t (E_h^n)^2
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\delta t(\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} &= \delta t(A_h \zeta_\pi^n - \pi_h \theta^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \delta t(A_h \zeta_\pi^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} + \delta t(-\pi_h \theta^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \delta t \|\zeta_\pi^n\|_{**} \|\zeta_h^n\|_{uwb} + \delta t \|\pi_h \theta^n\|_{L^2(\Omega)} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \delta t \|\zeta_\pi^n\|_{**} \left(|\zeta_h^n|_\beta + \frac{1}{\tau_c^{\frac{1}{2}}} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \right) + \delta t^3 C_u \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\delta t(\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^n|_\beta^2 &\lesssim \delta t \left(\|\zeta_\pi^n\|_{**}^2 + \frac{1}{\tau_c} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \delta t^3 C_u \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \delta t \|\zeta_\pi^n\|_{**}^2 + \delta t \tau_c^{-1} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t^3 C_u \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

En se servant de l'inégalité 2.146, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\delta t(\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^n|_\beta^2 &\lesssim \delta t \|\zeta_\pi^n\|_{**}^2 + r^4 \delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\
&\quad r^4 \delta t \|\varepsilon_\pi^n\|_{**}^2 + r^2 C_u \delta t^3 \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + r^2 C_u \delta t^3 \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \\
&\lesssim r^4 \delta t \left(\|\zeta_\pi^n\|_{**}^2 + \tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varepsilon_\pi^n\|_{**}^2 + C_u \delta t^2 \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\quad + r^4 \delta t \left(C_u \delta t^2 \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \right)
\end{aligned}$$

$$C_u \delta t^2 \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq 2(\tau_\star^{\frac{1}{2}} C_u \delta t^2)(\tau_\star^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)})$$

$$C_u \delta t^2 \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \leq 2(\tau_\star^{\frac{1}{2}} C_u \delta t^2) (\|\varepsilon_\pi^n\|_{**})$$

En se référant à l'expression de E_h^n , nous pouvons déduire que :

$$\delta t (\beta_h^n, \zeta_h^n)_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^n|_\beta^2 \lesssim r^4 \delta t (E_h^n)^2$$

□

Lemme 9. *Supposons que $u \in C^3(L^2(\Omega)) \cap C^0(H^1(\Omega))$.*

Supposons que la condition CFL est vérifiée :

$$\delta t \leq \varrho \frac{h}{\beta_c} \text{ pour un certain réel positif } \varrho. \quad (2.147)$$

$$\text{Alors } \|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta t}{2} |\varepsilon_h^n|_\beta^2 + \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^n|_\beta^2 \leq \|\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + Cr^4 \delta t (E_h^n)^2 \quad (2.148)$$

où C ne dépend pas de $h, \delta t$ et β .

Démonstration. En utilisant l'égalité 2.103 et les inégalités 2.143 et 2.144, nous obtenons :

$$\|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta t}{2} |\varepsilon_h^n|_\beta^2 + \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^n|_\beta^2 \leq \|\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + Cr^4 \delta t (E_h^n)^2 \quad (2.149)$$

□

Lemme 10. *(Lemme de stabilité, $k \geq 2$) Supposons que $u \in C^3(L^2(\Omega)) \cap C^0(H^1(\Omega))$.*

Supposons la $\frac{4}{3}$ CFL Condition :

$$\delta t \leq \varrho' \tau_\star^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{h}{\beta_c} \right)^{\frac{4}{3}} \text{ pour un certain réel positif } \varrho' \quad (2.150)$$

$$\text{Alors } \|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta t}{2} |\varepsilon_h^n|_\beta^2 + \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^n|_\beta^2 \leq Cr^8 \delta t (E_h^n)^2 \quad (2.151)$$

Démonstration. D'après 2.92 et 18

$$\zeta_h^n = \varepsilon_h^n - \delta t A_h \varepsilon_h^n + \delta t \alpha_h^n$$

$$\varepsilon_h^{n+1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_h^n + \zeta_h^n) - \frac{1}{2}\delta t A_h \zeta_h^n + \frac{1}{2}\delta t \beta_h^n$$

$$\text{Ainsi } \varepsilon_h^n + \zeta_h^n = 2\varepsilon_h^n - \delta t A_h \varepsilon_h^n + \delta t \alpha_h^n$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2}(\varepsilon_h^n + \zeta_h^n) = \varepsilon_h^n - \frac{1}{2}\delta t A_h \varepsilon_h^n + \frac{1}{2}\delta t \alpha_h^n$$

$$\text{Par conséquent, } \varepsilon_h^{n+1} = \varepsilon_h^n - \frac{1}{2}\delta t A_h \varepsilon_h^n + \frac{1}{2}\delta t \alpha_h^n - \frac{1}{2}\delta t A_h \zeta_h^n + \frac{1}{2}\delta t \beta_h^n$$

$$\text{De plus, } \varepsilon_h^n = \zeta_h^n + \delta t A_h \varepsilon_h^n - \delta t \alpha_h^n$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \varepsilon_h^{n+1} &= \zeta_h^n + \delta t A_h \varepsilon_h^n - \delta t \alpha_h^n - \frac{1}{2}\delta t A_h \varepsilon_h^n + \frac{1}{2}\delta t \alpha_h^n - \frac{1}{2}\delta t A_h \zeta_h^n + \frac{1}{2}\delta t \beta_h^n \\ \varepsilon_h^{n+1} &= \zeta_h^n + \frac{1}{2}\delta t A_h \varepsilon_h^n - \frac{1}{2}\delta t \alpha_h^n - \frac{1}{2}\delta t A_h \zeta_h^n + \frac{1}{2}\delta t \beta_h^n \\ \varepsilon_h^{n+1} &= \zeta_h^n - \frac{1}{2}\delta t A_h (\zeta_h^n - \varepsilon_h^n) + \frac{1}{2}\delta t (\beta_h^n - \alpha_h^n) \end{aligned} \quad (2.152)$$

D'après 2.92,

$$\zeta_h^n - \varepsilon_h^n = -\delta t A_h \varepsilon_h^n + \delta t \alpha_h^n$$

D'où

$$A_h(\zeta_h^n - \varepsilon_h^n) = -\delta t (A_h)^2 \varepsilon_h^n + \delta t A_h \alpha_h^n$$

$$\text{i.e. } -\frac{1}{2}\delta t A_h (\zeta_h^n - \varepsilon_h^n) = \frac{1}{2}\delta t^2 (A_h)^2 \varepsilon_h^n - \frac{1}{2}\delta t^2 A_h \alpha_h^n$$

$$\text{Ainsi } \varepsilon_h^{n+1} = \zeta_h^n + \frac{1}{2}\delta t^2 (A_h)^2 \varepsilon_h^n - \frac{1}{2}\delta t^2 A_h \alpha_h^n + \frac{1}{2}\delta t (\beta_h^n - \alpha_h^n)$$

$$\text{i.e. } \varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n = \frac{1}{2}\delta t^2 (A_h)^2 \varepsilon_h^n + \frac{1}{2}\delta t (\beta_h^n - \alpha_h^n - \delta t A_h \alpha_h^n)$$

Posons

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{1}{2} \|\delta t^2 (A_h)^2 \varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\ \tau_2 = \frac{1}{2} \|\delta t (\beta_h^n - \alpha_h^n - \delta t A_h \alpha_h^n)\|_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{1}{2} \delta t^2 \|A_h(A_h \varepsilon_h^n)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \frac{1}{2} \delta t^2 r^2 \beta_c h^{-1} \|A_h \varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} \text{ d'après l'inégalité 2.125} \\
&\lesssim \delta t^2 r^4 \beta_c^2 h^{-2} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\delta t^2 \beta_c^2 h^{-2} = (\delta t^{\frac{3}{2}} \beta_c^2 h^{-2} \tau_\star^{\frac{1}{2}}) (\delta t^{\frac{1}{2}} \tau_\star^{-\frac{1}{2}})$$

$$\delta t \lesssim \tau_\star^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{h}{\beta_c} \right)^{\frac{4}{3}} \implies \delta t^{\frac{3}{2}} \beta_c^2 h^{-2} \tau_\star^{\frac{1}{2}} \lesssim 1$$

Donc, nous pouvons déduire que :

$$\tau_1 \lesssim r^4 \delta t^{\frac{1}{2}} \tau_\star^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &\leq \frac{1}{2} \delta t \|\beta_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \delta t \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|A_h \alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \delta t \|\beta_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} + r^2 \delta t^2 \beta_c h^{-1} \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \delta t \|\beta_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} + r^2 \delta t \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim r^2 \delta t \|\beta_h^n\|_{L^2(\Omega)} + r^2 \delta t \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim r^3 \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n + r^3 \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n \\
&\lesssim r^3 \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_h^{n+1} - \varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq |\tau_1|^2 + |\tau_2|^2 \\
&\lesssim r^8 \delta t \tau_\star^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + r^6 \delta t (E_h^n)^2 \\
&\lesssim r^8 \delta t (E_h^n)^2
\end{aligned}$$

l'inégalité 2.149 devient :

$$\|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta t}{2} |\varepsilon_h^n|_\beta^2 + \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^n|_\beta^2 \leq Cr^8 \delta t (E_h^n)^2 \quad (2.154)$$

□

Lemme 11. Soit π_h^0 la L^2 projection orthogonale sur $\mathbb{P}_2^0(\tau_h)$.

$\mathbb{P}_2^0(\tau_h)$ est l'espace engendré par les fonctions constantes par morceaux sur τ_h .

Alors, $\forall (v_h, w_h) \in V_h \times V_h$,

$$(A_h v_h, w_h - \pi_h^0 w_h) \leq C_{\star\star} r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{uwb} \|w_h - \pi_h^0 w_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.155)$$

où $C_{\star\star}$ est indépendant de $h, \delta t$ et de β .

Démonstration. Soit $(v_h, w_h) \in V_{\star h} \times V_h$,

Posons $S = w_h - \pi_h^0 w_h$.

En se servant de la relation 2.126,

$$\begin{aligned} (A_h v_h, S)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v_h) S + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v_h S + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot n)^\ominus v_h S \\ &\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F (\beta \cdot n_F) [v_h] \{\{S\}\} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v_h] [S] \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v_h) S &= \int_{\Omega} ((\beta - \pi_h^0 \beta) \cdot \nabla v_h) S \\ &\leq C_{\star} L_{\beta} h h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \|S\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{\star} \tau_c^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \|S\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{\star} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \|S\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{\star} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{uwb} \|S\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{\star} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{uwb} \|S\|_{L^2(\Omega)} \text{ car } h \leq \beta_c \tau_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(\nabla \cdot \beta) v_h S| &\leq \|\nabla \cdot \beta\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \|S\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \tau_c^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \|S\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{uwb} \|S\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} |(\beta \cdot n)^\ominus v_h S| &\leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\beta \cdot n| v_h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} |\beta \cdot n| S^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2} \|v_h\|_{uwb} \beta_c^{\frac{1}{2}} \|S\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq C \sqrt{2} m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{uwb} \|S\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F |(\beta \cdot n_F)[v_h]\{\{S\}\}| &\leq \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v_h]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} 2 \int_F |\beta \cdot n_F| \{\{S\}\}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |v_h|_\beta \beta_c^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \tau_h} \|S\|_{L^2(\partial T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{uwb} \|S\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \frac{1}{2} \int_F |\beta \cdot n_F| [v_h][S] &\leq \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n_F| [v_h]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \frac{1}{2} |\beta \cdot n_F| [S]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|v_h\|_{uwb} \beta_c^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \tau_h} \|S\|_{L^2(\partial T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{uwb} \|S\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

On peut donc déduire que :

$$(A_h v_h, w_h - \pi_h^0 w_h) \leq (C_\star + 1 + 3C\sqrt{2}) r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{uwb} \|w_h - \pi_h^0 w_h\|_{L^2(\Omega)}$$

D'où :

$$(A_h v_h, w_h - \pi_h^0 w_h) \leq C_{\star\star} r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|v_h\|_{uwb} \|w_h - \pi_h^0 w_h\|_{L^2(\Omega)}$$

□

Lemme 12. (Lemme de stabilité, $k = 1$) Supposons que $u \in C^3(L^2(\Omega)) \cap C^0(H^1(\Omega))$.

Supposons que la condition CFL est vérifiée :

$$\delta t \leq \varrho \frac{h}{\beta_c} \text{ pour un certain réel positif } \varrho \text{ avec } \varrho \leq \min\left\{\frac{1}{8}(C')^{-2}; \frac{1}{2}(C_*C_{**})^{-\frac{2}{3}}\right\} \quad (2.157)$$

$$\text{Alors } \|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}r^2\right) |\varepsilon_h^n|_\beta^2 + \delta t \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}r^2\right) |\zeta_h^n|_\beta^2 \leq Cr^4 \delta t (E_h^n)^2 \quad (2.158)$$

où C ne dépend pas de $h, \delta t$ et β .

Démonstration. Posons $x_h^n := \varepsilon_h^n - \zeta_h^n$ □

En se servant de l'inégalité 2.152, nous obtenons :

$$\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n = \frac{\delta t}{2} A_h x_h^n + \frac{\delta t}{2} (\beta_h^n - \alpha_h^n) \quad (2.159)$$

$$\text{posons } \tau_1 = \left\| \frac{\delta t}{2} A_h x_h^n \right\|_{L^2(\Omega)} \text{ et } \tau_2 = \left\| \frac{\delta t}{2} (\beta_h^n - \alpha_h^n) \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.160)$$

En utilisant l'inégalité 2.127,

$$\|A_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{\tau_c} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \beta_c \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^2} + C' m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |v|_\beta \right) \quad (2.161)$$

Donc, nous avons :

$$\tau_1 \leq \frac{\delta t}{2} \tau_c^{-1} \|x_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta t}{2} \beta_c \|\nabla x_h^n\|_{[L^2(\Omega)]^2} + \frac{\delta t}{2} C' m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |x_h^n|_\beta \quad (2.162)$$

Soit $v_h \in \mathbb{P}_d^1(\tau_h)$

$$\|\nabla v_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} = \|\nabla(v_h - \pi_h^0 v_h)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C_* h^{-1} \|v_h - \pi_h^0 v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{Donc } \|\nabla x_h^n\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C_* h^{-1} \|y_h^n\|_{L^2(\Omega)} \text{ avec } y_h^n = x_h^n - \pi_h^0 x_h^n$$

$$\zeta_h^n = \varepsilon_h^n - \delta t A_h \varepsilon_h^n + \delta t \alpha_h^n \implies x_h^n = \delta t A_h \varepsilon_h^n - \delta t \alpha_h^n$$

$$\text{D'où } \|y_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 = (x_h^n, y_h^n)_{L^2(\Omega)} = \delta t (A_h \varepsilon_h^n, y_h^n)_{L^2(\Omega)} - \delta t (\alpha_h^n, y_h^n)_{L^2(\Omega)} \quad [41]$$

En utilisant la relation 2.155, nous avons :

$$\begin{aligned} \delta t |(A_h \varepsilon_h^n, y_h^n)_{L^2(\Omega)}| &\leq C_{**} \delta t r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{uwb} \|y_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{**} \delta t r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} (|\varepsilon_h^n|_\beta + \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}) \|y_h^n\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\text{D'après 2.145, } \delta t^{\frac{1}{2}} \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} \lesssim r \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \quad (2.163)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \delta t |(\alpha_h^n, y_h^n)_{L^2(\Omega)}| &\lesssim \delta t \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|y_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim r \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \|y_h^n\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \|y_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left[C_{**} \delta t r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \left(|\varepsilon_h^n|_\beta + \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} \right) + Cr \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \right] \|y_h^n\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \|y_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left[C_{**} \delta t r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \left(|\varepsilon_h^n|_\beta + \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} \right) + Cr \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \right] \\ &\leq C_{**} \delta t r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta + C_{**} \delta t r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + Cr \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \\ &\leq C_{**} \delta t r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta + Cr \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \|\nabla x_h^n\|_{[L^2(\Omega)]^2} &\leq C_* h^{-1} \|y_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_* C_{**} \delta t r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{3}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta + C_* Cr h^{-1} \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n \end{aligned}$$

En remplaçant l'inégalité précédente dans 2.162, nous avons :

$$\tau_1 \leq \frac{\delta t}{2} \tau_c^{-1} \|x_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta t}{2} \beta_c \left(C_* C_{**} \delta t r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{3}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta + C_* Cr h^{-1} \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n \right) + \frac{\delta t}{2} C' m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |x_h^n|_\beta$$

$$\tau_1 \leq \frac{\delta t}{2} \tau_c^{-1} \|x_h^n\|_{L^2(\Omega)} + C_* C_{**} \frac{\delta t^2}{2} r \beta_c^{\frac{3}{2}} h^{-\frac{3}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta + C_* Cr h^{-1} \beta_c \delta t^{\frac{3}{2}} E_h^n + \frac{\delta t}{2} C' m^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |x_h^n|_\beta \quad (2.164)$$

$$\begin{aligned}
\delta t \tau_c^{-1} \|x_h^n\|_{L^2(\Omega)} &= \delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n - \zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t \tau_c^{-1} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \text{ car } \delta t \leq \tau_c
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\delta t \tau_c^{-1} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim r^4 \left(\delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t \delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**}^2 \right) \quad (2.165)$$

$$\delta t \tau_c^{-1} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim r^4 \left(\delta t \tau_c^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t \|\varepsilon_\pi^n\|_{**}^2 \right) \text{ car } \delta t \tau_c^{-1} \leq 1 \quad (2.166)$$

$$\text{Donc } \delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq r^2 \left(\delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \right) \quad (2.167)$$

$$\text{Ainsi } \delta t \tau_c^{-1} \|x_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + r^2 \left(\delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} \right) \quad (2.168)$$

Par conséquent, l'inégalité 2.164 devient :

$$\tau_1 \leq \frac{1}{2} \delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} + \quad (2.169)$$

$$C_* C_{**} \frac{\delta t^2}{2} r \beta_c^{\frac{3}{2}} h^{-\frac{3}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta + C_* C r h^{-1} \beta_c \delta t^{\frac{3}{2}} E_h^n + \frac{\delta t}{2} C' r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |x_h^n|_\beta$$

$$\tau_1 \leq r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} + C_* C_{**} \frac{\delta t^2}{2} r \beta_c^{\frac{3}{2}} h^{-\frac{3}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta \quad (2.170)$$

$$+ C_* C r h^{-1} \beta_c \delta t^{\frac{3}{2}} E_h^n + \frac{\delta t}{2} C' r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |x_h^n|_\beta$$

$$\tau_1 \leq C_* C_{**} \frac{\delta t^2}{2} r \beta_c^{\frac{3}{2}} h^{-\frac{3}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta + \frac{\delta t}{2} C' r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |x_h^n|_\beta + \quad (2.171)$$

$$r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^n\|_{**} + C_* C r h^{-1} \beta_c \delta t^{\frac{3}{2}} E_h^n$$

$$r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} \tau_c^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h^n\|_{**} + C_* C r h^{-1} \beta_c \delta t^{\frac{3}{2}} E_h^n \leq r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n + C_* C r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n$$

$$\leq C'' r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n$$

$$\text{Donc } \tau_1 \leq C_* C_{**} \frac{\delta t^2}{2} r \beta_c^{\frac{3}{2}} h^{-\frac{3}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta + \frac{\delta t}{2} C' r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |x_h^n|_\beta + C'' r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n \quad (2.172)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \left\| \frac{\delta t}{2} (\beta_h^n - \alpha_h^n) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\delta t}{2} \|\beta_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta t}{2} \|\alpha_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C r \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \tau_1 + \tau_2 \\ &\leq C_* C_{**} \frac{\delta t^2}{2} r \beta_c^{\frac{3}{2}} h^{-\frac{3}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta + \frac{\delta t}{2} C' r \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |x_h^n|_\beta + C'' r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n + C r \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n \end{aligned}$$

Des relations 2.159 et 2.160, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \tau_1 + \tau_2 \\ &\leq r \left(C_* C_{**} \frac{\delta t^2}{2} \beta_c^{\frac{3}{2}} h^{-\frac{3}{2}} |\varepsilon_h^n|_\beta + \frac{\delta t}{2} C' \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} |x_h^n|_\beta \right) + C r^2 \delta t^{\frac{1}{2}} E_h^n \end{aligned}$$

En se servant de la condition CFL, nous avons :

$$\varrho \leq \min \left\{ \frac{1}{8} (C')^{-2}; \frac{1}{2} (C_* C_{**})^{-\frac{2}{3}} \right\} \implies \begin{cases} C_* C_{**} \frac{\delta t^2}{2} \beta_c^{\frac{3}{2}} h^{-\frac{3}{2}} \leq \delta t^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{5}{2}} \\ \frac{\delta t}{2} C' \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} \leq \delta t^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq r\delta t^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{5}{2}}(|\varepsilon_h^n|_\beta + |\varepsilon_h^n - \zeta_h^n|_\beta) + Cr^2\delta t^{\frac{1}{2}}E_h^n \\
&\leq r\delta t^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{5}{2}}(2|\varepsilon_h^n|_\beta + 2|\zeta_h^n|_\beta) + Cr^2\delta t^{\frac{1}{2}}E_h^n \\
&\leq r\delta t^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{3}{2}}(|\varepsilon_h^n|_\beta + |\zeta_h^n|_\beta) + Cr^2\delta t^{\frac{1}{2}}E_h^n \\
&\leq r\delta t^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{3}{2}}|\varepsilon_h^n|_\beta + r\delta t^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{3}{2}}|\zeta_h^n|_\beta + Cr^2\delta t^{\frac{1}{2}}E_h^n
\end{aligned}$$

Sachant que $(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$,

$$\|\varepsilon_h^{n+1} - \zeta_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{3}{8}\delta tr^2|\varepsilon_h^n|_\beta^2 + \frac{3}{8}\delta tr^2|\zeta_h^n|_\beta^2 + 3C^2r^4\delta t(E_h^n)^2$$

En injectant l'inégalité précédente dans la relation 2.148,

$$\|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}r^2 \right) |\varepsilon_h^n|_\beta^2 + \delta t \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}r^2 \right) |\zeta_h^n|_\beta^2 \leq Cr^4\delta t(E_h^n)^2$$

2.7.8 Théorème de convergence

Lemme 13. *On suppose que :*

$$\forall v_h \in V_h, \|v_h\|_{uwb}^2 \lesssim q\beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.173)$$

où $q = \max(1, m)$ avec $m = \max_{K \in \tau_h}(\lambda_Q \lambda_K)$.

$$\text{Alors } \|\varepsilon_\pi^m\|_{uwb}^2 \lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \quad (2.174)$$

Démonstration.

$$\text{Sachant que } \|v_h\|_{uwb}^2 \lesssim q\beta_c h^{-1} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2, \text{ on déduit que :} \quad (2.175)$$

$$\|\varepsilon_\pi^m\|_{uwb}^2 \lesssim r^2 \beta_c h^{-1} \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\Omega)}^2$$

En se servant de l'inégalité inverse 2.80,

$$\|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim h^{2(k+1)} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2$$

$$\text{Donc } \|\varepsilon_\pi^m\|_{uwb}^2 \lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2$$

□

Lemme 14. *On suppose que $h \leq \beta_c \tau_c$ et que :*

$$\|\varepsilon_\pi^m\|_{uwb}^2 \lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \quad (2.176)$$

$$\text{Alors } \|\varepsilon_\pi^m\|_{**}^2 \lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \quad (2.177)$$

$$\text{Et } \|\zeta_\pi^m\|_{**}^2 \lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \left(\|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta_c^{-2} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \right) \quad (2.178)$$

Démonstration. 1.

$$\|\varepsilon_\pi^m\|_{**}^2 = \|\varepsilon_\pi^m\|_{uwb}^2 + \sum_{T \in \tau_h} \beta_c \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\partial T)}^2 + \beta_c h \|\nabla \varepsilon_\pi^m\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \quad (2.179)$$

$$\|\varepsilon_\pi^m\|_{uwb}^2 \lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \quad (\text{cf lemme précédent})$$

En utilisant l'inégalité inverse 2.81 pour $s = k + 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \tau_h} \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\partial T)}^2 &\leq m h^{-1} h^{2(k+1)} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \\ &\lesssim m h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \\ \text{Donc } \sum_{T \in \tau_h} \beta_c \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\partial T)}^2 &\lesssim m \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

En se servant de l'inégalité inverse 2.78 et sachant que $h \leq \beta_c \tau_c$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\nabla \varepsilon_\pi^m\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\lesssim h^{-2} \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\lesssim h^{-2} h^{2k+2} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \quad (\text{d'après 2.80}) \\ \|\nabla \varepsilon_\pi^m\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\lesssim h^{2k} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \\ \text{Donc } \beta_c h \|\nabla \varepsilon_\pi^m\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\lesssim \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons déduire que :

$$\|\varepsilon_\pi^m\|_{**}^2 \lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2$$

2.

$$\|\zeta_\pi^m\|_{**}^2 = \|\zeta_\pi^m\|_{uwb}^2 + \sum_{T \in \tau_h} \beta_c \|\zeta_\pi^m\|_{L^2(\partial T)}^2 + \beta_c h \|\nabla \zeta_\pi^m\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2$$

$$\|\zeta_\pi^m\|_{uwb}^2 \leq r^2 \beta_c h^{-1} \|\zeta_\pi^m\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \|\zeta_\pi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\varepsilon_\pi^m + \delta t \frac{d}{dt} \varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\lesssim \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t^2 \left\| \frac{d}{dt} \varepsilon_\pi^m \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ d'après l'inégalité de Young} \\ &\lesssim h^{2k+2} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \delta t^2 h^{2k} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\zeta_\pi^m\|_{uwb}^2 &\lesssim r^2 \beta_c h^{-1} h^{2k+2} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + r^2 \beta_c h^{-1} \delta t^2 h^{2k} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \\ &\lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + r^2 \beta_c \delta t^2 h^{2k-1} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \\ &\lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + r^2 \beta_c \delta t^2 h^{-2} h^{2k+1} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \\ &\lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + r^2 \beta_c h^{2k+1} \beta_c^{-2} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \\ \text{car } \delta t &\lesssim \frac{h}{\beta_c} \implies \delta t^2 h^{-2} \lesssim \beta_c^{-2} \\ \|\zeta_\pi^m\|_{uwb}^2 &\lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \left(\|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta_c^{-2} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\|\zeta_\pi^m\|_{L^2(\partial T)}^2 \lesssim \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\partial T)}^2 + \delta t^2 \left\| \frac{d}{dt} \varepsilon_\pi^m \right\|_{L^2(\partial T)}^2$$

$$\text{Donc } \sum_{T \in \tau_h} \beta_c \|\zeta_\pi^m\|_{L^2(\partial T)}^2 \lesssim \sum_{T \in \tau_h} \beta_c \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\partial T)}^2 + \sum_{T \in \tau_h} \beta_c \delta t^2 \left\| \frac{d}{dt} \varepsilon_\pi^m \right\|_{L^2(\partial T)}^2$$

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \tau_h} \beta_c \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\partial T)}^2 &\lesssim m\beta_c h^{-1} \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\lesssim m\beta_c h^{-1} h^{2k+2} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \\
&\lesssim m\beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \tau_h} \beta_c \delta t^2 \left\| \frac{d}{dt} \varepsilon_\pi^m \right\|_{L^2(\partial T)}^2 &\lesssim \beta_c \delta t^2 m h^{2k-1} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \\
&\lesssim \beta_c h^{2k+1} m \beta_c^{-2} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \sum_{T \in \tau_h} \beta_c \|\zeta_\pi^m\|_{L^2(\partial T)}^2 \lesssim m\beta_c h^{2k+1} \left(\|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta_c^{-2} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla \zeta_\pi^m\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 &\lesssim \|\nabla \varepsilon_\pi^m\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \delta t^2 \left\| \nabla \left(\frac{d}{dt} \varepsilon_\pi^m \right) \right\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \\
&\lesssim h^{-2} \|\varepsilon_\pi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t^2 h^{-2} \left\| \frac{d}{dt} \varepsilon_\pi^m \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\lesssim h^{2k} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta_c^{-2} h^{2k} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \beta_c h \|\nabla \zeta_\pi^m\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \lesssim \beta_c h^{2k+1} \left(\|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta_c^{-2} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \right)$$

Par conséquent, nous pouvons déduire que :

$$\|\zeta_\pi^m\|_{**}^2 \lesssim r^2 \beta_c h^{2k+1} \left(\|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta_c^{-2} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \right)$$

□

Théorème 19. (Convergence pour $k \geq 2$)

Supposons la $\frac{4}{3}$ CFL Condition :

$$\delta t \leq \varrho' \tau_\star^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{h}{\beta_c} \right)^{\frac{4}{3}} \text{ pour un certain réel positif } \varrho' \tag{2.180}$$

et que $\frac{d^s}{dt^s} u \in C^0(H^{k+1-s}(\Omega))$ pour $s \in \{0,1\}$. Alors,

$$\|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) \left(\chi_1 \delta t^2 + \chi_2 h^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (2.181)$$

$$\text{Avec } \chi_1 = r^4 t_F^{\frac{1}{2}} \tau_\star^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))} \quad (2.182)$$

$$\text{et } \chi_2 = t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{\frac{1}{2}} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} + t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{-\frac{1}{2}} \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{C^0(H^k(\Omega))} \quad (2.183)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} &= \|u^N - \pi_h u^n + \pi_h u^n - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u^N - \pi_h u^n\|_{L^2(\Omega)} + \|\pi_h u^n - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} \\ \|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\varepsilon_\pi^N\|_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et celle de Young, nous avons :

$$\begin{aligned} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 &\lesssim \delta t |\varepsilon_\pi^m|_\beta^2 + \delta t |\varepsilon_h^m|_\beta^2 \\ &\lesssim \delta t \|\varepsilon_\pi^m\|_{\star\star}^2 + \delta t |\varepsilon_h^m|_\beta^2 \\ \text{Donc } \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t \|\varepsilon_\pi^m\|_{\star\star}^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \delta t |\varepsilon_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \sum_{m=0}^{N-1} \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^m\|_{\star\star} + \sum_{m=0}^{N-1} \delta t^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^m|_\beta \end{aligned}$$

$$\text{car } \forall (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \|\varepsilon_\pi^N\|_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \sum_{m=0}^{N-1} \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^m\|_{\star\star} + \sum_{m=0}^{N-1} \delta t^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^m|_\beta \end{aligned} \quad (2.184)$$

Soit $n \in \{0, \dots, N\}$

$$\text{Posons } b^n = \frac{\delta t}{2} |\varepsilon_h^n|_\beta^2 + \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^n|_\beta^2$$

Sachant que $(a + b + c + d)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2$

De la relation 2.151, nous déduisons que :

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + b^n \leq \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ & Cr^8 \delta t \left(4\|\varepsilon_\pi^n\|_{**}^2 + 4\|\zeta_\pi^n\|_{**}^2 + 4\tau_\star \left\| \frac{d}{dt} \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^3 u \delta t^4 + 4\delta t \tau_\star^{-1} \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \text{posons } d^n = 4Cr^8 \delta t \left(\|\varepsilon_\pi^n\|_{**}^2 + \|\zeta_\pi^n\|_{**}^2 + \tau_\star \left\| \frac{d}{dt} \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^3 u \delta t^4 \right) \end{aligned} \quad (2.185)$$

Nous avons donc :

$$\|\varepsilon_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1 + 4Cr^8 \delta t \tau_\star^{-1}) \|\varepsilon_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + d^n - b^n \quad (2.186)$$

En appliquant le lemme de Gronwall discret, nous avons pour $n = N - 1$:

$$\|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star}(t_F - t_0)\right) \|\varepsilon_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star}(t_F - t_{i+1})\right) (d^i - b^i) \quad (2.187)$$

$$\text{Donc } \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star}(t_F - t_{i+1})\right) (d^i - b^i) \text{ car } u_h^0 = \pi_h u^0 \implies \varepsilon_h^0 = 0 \quad (2.188)$$

$$\begin{aligned} 2.188 \implies & \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star}(t_F - t_{i+1})\right) b^i \leq \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star}(t_F - t_{i+1})\right) d^i \\ \implies & \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} b^i \leq \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \end{aligned} \quad (2.189)$$

$$\text{car } 1 \leq \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star}(t_F - t_{i+1})\right) \text{ et } \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star}(t_F - t_{i+1})\right) \leq \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right)$$

$$\implies \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\delta t}{2} |\varepsilon_h^i|_\beta^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^i|_\beta^2 \leq \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i$$

Ainsi, nous avons :

$$\left(\|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \delta t^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^i|_\beta + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \delta t^{\frac{1}{2}} |\zeta_h^i|_\beta \right)^2 \lesssim \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\delta t}{2} |\varepsilon_h^i|_\beta^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\delta t}{2} |\zeta_h^i|_\beta^2$$

Par conséquent,

$$\left(\|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \delta t^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^i|_\beta + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \delta t^{\frac{1}{2}} |\zeta_h^i|_\beta \right) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sachant que $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$, nous obtenons :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\sqrt{2}}{2} \delta t^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^{N-1} |\varepsilon_h^i|_\beta + \sum_{i=0}^{N-1} |\zeta_h^i|_\beta \right) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \delta t^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^{N-1} |\varepsilon_h^i|_\beta + \sum_{i=0}^{N-1} |\zeta_h^i|_\beta \right) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc } \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{i=0}^{N-1} \delta t^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^i|_\beta \right) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.190)$$

$$d^i = 4Cr^8 \delta t \left(\|\varepsilon_\pi^i\|_{\star\star}^2 + \|\zeta_\pi^i\|_{\star\star}^2 + \tau_\star \left\| \frac{d}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^2 \delta t^4 \right)$$

$$\text{Donc } 4Cr^8 \delta t \|\varepsilon_\pi^i\|_{\star\star}^2 = d^i - 4Cr^8 \delta t \left(\|\zeta_\pi^i\|_{\star\star}^2 + \tau_\star \left\| \frac{d}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^2 \delta t^4 \right)$$

$$\text{Ainsi } 4Cr^8 \delta t \|\varepsilon_\pi^i\|_{\star\star}^2 \leq d^i$$

$$4Cr^8 \delta t \|\varepsilon_\pi^i\|_{\star\star}^2 \leq \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \quad (2.191)$$

La relation 2.191 \implies

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{N-1} 4Cr^8 \delta t \|\varepsilon_\pi^i\|_{**}^2 \leq \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \\
& \implies \sum_{i=0}^{N-1} \delta t \|\varepsilon_\pi^i\|_{**}^2 \lesssim \frac{1}{4r^8} \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \\
& \implies \left(\sum_{i=0}^{N-1} \delta t \|\varepsilon_\pi^i\|_{**}^2\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{1}{r^4} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \implies \left(\sum_{i=0}^{N-1} \delta t \|\varepsilon_\pi^i\|_{**}^2\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i\right)^{\frac{1}{2}} \text{ car } \frac{1}{r^4} \leq 1 \\
& \implies \left(\sum_{i=0}^{N-1} \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^i\|_{**}\right) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.192) \\
& \text{car } \left(\sum_{i=0}^{N-1} \delta t^{\frac{1}{2}} \|\varepsilon_\pi^i\|_{**}\right) \lesssim \left(\sum_{i=0}^{N-1} \delta t \|\varepsilon_\pi^i\|_{**}^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Des inégalités 2.184, 2.190 et 2.192, nous obtenons :

$$\|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|\varepsilon_\pi^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.193)$$

$$\text{i.e. } \|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|\varepsilon_\pi^N\|_{L^2(\Omega)} + \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) \left(\sum_{i=0}^{N-1} d^i\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.194)$$

$$d^i = 4Cr^8 \delta t \left(\|\varepsilon_\pi^i\|_{**}^2 + \|\zeta_\pi^i\|_{**}^2 + \tau_\star \left\| \frac{d}{dt}{}^3 u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^2 \delta t^4 \right)$$

$$d^i \lesssim r^8 \delta t \left(\|\varepsilon_\pi^i\|_{**}^2 + \|\zeta_\pi^i\|_{**}^2 + \tau_\star \left\| \frac{d}{dt}{}^3 u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^2 \delta t^4 \right)$$

$$\text{Donc } \sum_{i=0}^{N-1} d^i \lesssim r^8 \delta t \sum_{i=0}^{N-1} \|\varepsilon_\pi^i\|_{**}^2 + r^8 \delta t \sum_{i=0}^{N-1} \|\zeta_\pi^i\|_{**}^2 + r^8 \delta t \sum_{i=0}^{N-1} \tau_\star \left\| \frac{d}{dt}{}^3 u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^2 \delta t^4$$

Des inégalités 2.177 et 2.178, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N-1} d^i &\lesssim r^8 \delta t \sum_{i=0}^{N-1} \left(r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \right) + \\
&\quad \sum_{i=0}^{N-1} r^8 \delta t \left(r^2 \beta_c h^{2k+1} \left(\|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta_c^{-2} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \right) \right) \\
&\quad + r^8 \delta t \sum_{i=0}^{N-1} \tau_\star \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^2 \delta t^4 \\
\sum_{i=0}^{N-1} d^i &\lesssim r^8 N \delta t \left(r^2 \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \right) + \\
&\quad r^8 N \delta t \left(r^2 \beta_c h^{2k+1} \left(\|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta_c^{-2} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \right) \right) \\
&\quad + r^8 N \delta t \tau_\star \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^2 \delta t^4 \\
\sum_{i=0}^{N-1} d^i &\lesssim t_F \left(r^{10} \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \right) + \\
&\quad t_F \left(r^{10} \beta_c h^{2k+1} \left(\|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta_c^{-2} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \right) \right) \\
&\quad + r^8 t_F \tau_\star \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^2 \delta t^4 \\
\sum_{i=0}^{N-1} d^i &\lesssim t_F r^{10} \beta_c h^{2k+1} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \\
&\quad t_F r^{10} \beta_c^{-1} h^{2k+1} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)}^2 + r^8 t_F \tau_\star \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}^2 \delta t^4 \\
\text{D' où } \left(\sum_{i=0}^{N-1} d^i \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \\
&\quad t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{-\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)} + r^4 t_F^{\frac{1}{2}} \tau_\star^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))} \delta t^2
\end{aligned}$$

En se servant de l'inégalité inverse 2.80,

$$\|\varepsilon_\pi^N\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim h^{2k+2} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2$$

$$\text{Donc } \|\varepsilon_\pi^N\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{k+1} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))}$$

Par conséquent, l'inégalité 2.194 devient :

$$\|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim h^{k+1} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} + \quad (2.195)$$

$$\exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) \left(t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \|u^m\|_{H^{k+1}(\Omega)} + t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{-\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \left\| \frac{d}{dt} u^m \right\|_{H^k(\Omega)} \right) \\ + \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) r^4 t_F^{\frac{1}{2}} \tau_\star^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))} \delta t^2$$

$$\|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim h^{k+1} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} + \quad (2.196)$$

$$\exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) \left(t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} + t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{-\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{C^0(H^k(\Omega))} \right) \\ + \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) r^4 t_F^{\frac{1}{2}} \tau_\star^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))} \delta t^2$$

$$\text{Posons } \chi_1 = r^4 t_F^{\frac{1}{2}} \tau_\star^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))}$$

$$\text{et } \chi_2 = t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{\frac{1}{2}} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} + t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{-\frac{1}{2}} \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{C^0(H^k(\Omega))} \quad (2.197)$$

$$h^{k+1} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} = \sqrt{h} h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} \\ \lesssim t_F^{\frac{1}{2}} \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} \text{ car } h \lesssim t_F \beta_c \\ h^{k+1} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} \lesssim \chi_2 h^{k+\frac{1}{2}}$$

Nous obtenons ainsi

$$\|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \exp\left(\frac{4Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) \left(\chi_1 \delta t^2 + \chi_2 h^{k+\frac{1}{2}} \right)$$

□

Théorème 20. (Convergence pour $k = 1$) Supposons la $\frac{4}{3}$ CFL Condition

Supposons que $\frac{d^s}{dt^s} u \in C^0(H^{k+1-s}(\Omega))$ pour $s \in \{0,1\}$ et $4 - 3r^2 > 0$. Alors,

$$\|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{1}{\sqrt{4-3r^2}} \exp\left(\frac{8Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) (\chi_1 \delta t^2 + \chi_2 h^{k+\frac{1}{2}}) \quad (2.198)$$

$$\text{Avec } \chi_1 = r^4 t_F^{\frac{1}{2}} \tau_\star^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))} \quad (2.199)$$

$$\text{et } \chi_2 = t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{\frac{1}{2}} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} + t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{-\frac{1}{2}} \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{C^0(H^k(\Omega))} \quad (2.200)$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité 2.158, nous obtenons l'inégalité 2.189,

$$\|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} b^i \leq \sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{8Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \quad (2.201)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } b^i &= \delta t \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} r^2 \right) |\varepsilon_h^i|_\beta^2 + \delta t \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} r^2 \right) |\zeta_h^i|_\beta^2 \\ b^i &= \delta t \left(\frac{4-3r^2}{2} \right) |\varepsilon_h^i|_\beta^2 + \delta t \left(\frac{4-3r^2}{8} \right) |\zeta_h^i|_\beta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt{4-3r^2}}{2\sqrt{2}} \delta t^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^i|_\beta + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt{4-3r^2}}{2\sqrt{2}} \delta t^{\frac{1}{2}} |\zeta_h^i|_\beta \right)^2 &\lesssim \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &\sum_{i=0}^{N-1} \delta t \frac{4-3r^2}{8} |\varepsilon_h^i|_\beta^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \delta t \frac{4-3r^2}{8} |\zeta_h^i|_\beta^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt{4-3r^2}}{2\sqrt{2}} \delta t^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^i|_\beta + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt{4-3r^2}}{2\sqrt{2}} \delta t^{\frac{1}{2}} |\zeta_h^i|_\beta \lesssim \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{8Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Ainsi } \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{4-3r^2} \delta t^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^i|_\beta \lesssim \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{8Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.202)$$

$$\text{D'où } \|\varepsilon_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{N-1} \delta t^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_h^i|_\beta \lesssim \frac{1}{\sqrt{4-3r^2}} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(\frac{8Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) d^i \right)^{\frac{1}{2}} \text{ car } \sqrt{4-3r^2} \leq 1 \quad (2.203)$$

Par conséquent,

$$\|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim h^{k+1} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} + \quad (2.204)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4-3r^2}} \exp\left(\frac{8Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) \left(t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} + t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{-\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{C^0(H^k(\Omega))} \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{4-3r^2}} \exp\left(\frac{8Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) r^4 t_F^{\frac{1}{2}} \tau_\star^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))} \delta t^2 \end{aligned}$$

$$\|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{1}{\sqrt{4-3r^2}} h^{k+1} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} + \quad (2.205)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4-3r^2}} \exp\left(\frac{8Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) \left(t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{C^0(H^{k+1}(\Omega))} + t_F^{\frac{1}{2}} r^5 \beta_c^{-\frac{1}{2}} h^{k+\frac{1}{2}} \left\| \frac{d}{dt} u \right\|_{C^0(H^k(\Omega))} \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{4-3r^2}} \exp\left(\frac{8Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) r^4 t_F^{\frac{1}{2}} \tau_\star^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{d^3}{dt^3} u \right\|_{C^0(L^2(\Omega))} \delta t^2 \text{ car } 1 \leq \frac{1}{\sqrt{4-3r^2}} \end{aligned}$$

$$\|u^N - u_h^N\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{m=0}^{N-1} \delta t |u^m - u_h^m|_\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{1}{\sqrt{4-3r^2}} \exp\left(\frac{8Cr^8}{\tau_\star} t_F\right) \left(\chi_1 \delta t^2 + \chi_2 h^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (2.206)$$

□

Remarque 4. Lorsque F est l'application identique, $K = Q$, donc $\lambda_K = \lambda_Q = 1$ [26]. Par conséquent $r = 1$. Nous obtenons les mêmes résultats qu'Alexandre Ern. Ainsi, notre résultat est une généralisation du résultat d'Alexandre Ern car en éléments finis, Ern a obtenu son résultat en travaillant sur un polyèdre [41]. Dans le cas de nos travaux de recherche, nous avons obtenu le même ordre de précision en temps et en espace comme Alexandre Ern. Mais, la différence s'observe au niveau de la géométrie car nous travaillons avec une géométrie quelconque.

2.8 Conclusion

Nous retenons que ce chapitre présente les outils de base de la méthode isogéométrique et fait ressortir les différences entre la MEF et la MIG. Nous avons dans ce chapitre, établi une nouvelle estimation d'erreur pour l'équation de transport en $2D$ par la méthode isogéométrique. Par la suite, nous avons approché une fonction par une courbe B-splines. La méthode isogéométrique est aussi appliquée à l'équation de Poisson, à l'équation de la chaleur et à l'équation de transport.

Conclusion et Perspectives

Conclusion

Dans nos travaux, le cadre théorique de la méthode isogéométrique a été abordé en utilisant la base B-spline. Le principe de la méthode a été présenté. La méthode isogéométrique nous a permis de construire une paramétrisation afin de décrire de manière raisonnable notre domaine, ce qui n'est pas le cas de la MEF. La méthode isogéométrique a été appliquée pour l'approximation au sens des moindres carrés, pour les équations de Poisson, de la chaleur et celle de transport. Un résultat de convergence isogéométrique a été aussi obtenu en $2D$ pour l'équation de transport. Le schéma explicite de HEUN à deux pas a été utilisé pour la discrétisation en temps. Les résultats présentés dans la section 2.7 du chapitre 2 ont donné lieu à un article (cf [30])

Perspectives

Nous comptons à l'avenir nous pencher sur les tâches suivantes :

1. Valider numériquement l'équation de la chaleur et l'équation de transport.
2. Résoudre numériquement le problème hyperbolique de la forme $\frac{\partial u}{\partial t} + A(u)u_x = 0$ en $1D$ où A est une matrice diagonalisable afin de l'appliquer aux équations de Saint Venant et d'Euler.
3. Résoudre numériquement la loi de conservation $\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(f(u)) = 0$, en $2D$ afin de l'appliquer aux équations de Saint Venant et d'Euler.

Bibliographie

- [1] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation, Les éditions de l'école polytechnique, 2005.
- [2] A. M. de Almeida Cortes, Isogeometric analysis and preconditioning strategies for divergence-conforming splines discretizations for the stokes problem, PhD thesis, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, 2013.
- [3] J. Bailleul, Rendu rapide de splines rationnelles(NURBS) dans une bibliothèque graphique(CLIM) par Common Lisp, DEA informatique, université de Bordeaux, 2001.
- [4] R. H. Bartels, John C. Beatty and Brian A. Barsky, An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling, university of waterloo and university of california, Morgan Kaufmann Publishers, 1987.
- [5] Y. Bazilevs, L.Beirao da Veiga, A. Cottrell, Thomas Hughes, G.Sangalli, Isogeometric analysis : approximation, stability and error estimates for h-refined meshes, University of Texas at Austin, Institute for computational engineering and sciences, Dipartimento di Matematica F. Enriques, Universita di Milano, Dipartimento di Matematica F. Casorati, University of Pavia, 2006.
- [6] G. Beer and S. Bordas, Isogeometric methods for numerical simulation, CISM International Centre for Mechanical Sciences,Courses and Lectures, Springer 2015.
- [7] W. Boehm, Inserting new knots into B-spline curves, 1980.
- [8] C. de Boor, On calculating with B-splines, Journal of approximation theory, 1972
- [9] C. de Boor, a practical guide to splines, New-york : Springer Verlag, 1978.
- [10] M.Breitenberger, B.Philipp, R.Wuchner, K.U.Bletzinger, S.Hartmann and A.Haufe, increasing efficiency of the design process with an isogeometric analysis plugin for Siemens NX analyzing the CAD model directly, 10th european LS-DYNA conference, Wurzburg, Germany, 2015.
- [11] A. Buffa and G. Sangalli, IsoGeometric Analysis: A New Paradigm in the Numerical Approximation of PDEs, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Cetraro, Italy 2012.

- [12] R. L. Burden and J.D. Faires, Numerical Methods, Youngstown State University, second edition, Brooks and Cole, 1998.
- [13] E. Burman, A. Ern, and M. A. Fernández, Explicit Runge-Kutta schemes and finite elements with symmetric stabilization for first-order linear PDE systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2010.
- [14] B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C.-W. Shu, Discontinuous Galerkin Methods Theory, Computation and Applications, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., Springer-Verlag, New York, 2000.
- [15] B. Cockburn, S. Hou, and C.-W. Shu, The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. IV. The multidimensional case, *Math. Comp.*, 2015.
- [16] B. Cockburn, S. Lin, and C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. III. One-dimensional systems, *J. Comput. Phys.*, 1989.
- [17] B. Cockburn and C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework, *Math. Comp.*, 1989.
- [18] E. Cohen, T. Lyche, and R. Riesenfeld, Discrete b-splines and subdivision techniques in computer aided geometric design and computer graphics, *Computer graphics and Image processing*, 1980.
- [19] J. A. Cottrell, Isogeometric Analysis and Numerical Modeling of the Fine Scales within the Variational Multiscale Method, Phd thesis, University of Texas at Austin 2007.
- [20] J. A. Cottrell, Thomas J.R. Hughes and Yuri Bazilevs, Isogeometric Analysis, Toward Integration of CAD and FEA, John Wiley and sons Ltd, 2009.
- [21] M. Cox, The Numerical evaluation of b-splines, *Journal Inst. Maths Applies*, 1972.
- [22] J. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 2006.
- [23] R. Duvigneau, Conception optimale en mécanique des fluides numériques : approches hiérarchiques, robustes et isogeométriques, Université de Nice Sophia Antipolis, 2013.
- [24] A. Ern and J. L. Guermond, *Theory and practice of finite elements*, Springer-verlag, 2004.
- [25] L. Espath, A. Braun and Armando Awruch, an introduction to isogeometric analysis applied to solid mechanics, *asociacion Argentina de mecanica computacional*, 2011.
- [26] J. Evans and T. Hughes, Explicit trace inequalities for isogeometric analysis and parametric hexahedral finite elements, The Institute for computational engineering and sciences report, the University of Texas at Austin, May 2011.

- [27] Gerald Farin, curves and surfaces for computer aided geometric design, a practical Guide, Fourth edition, Academic press, 1997.
- [28] Gerald Farin, A history of curves and surfaces in CAGD, Handbook of CAGD, Elsevier, 2002.
- [29] R. N. Goldman and T. Lyche, Knot insertion and deletion algorithms for B-Spline curves and surfaces, Rice University and University of Oslo, the Society for Industrial and Applied Mathematics(SIAM), 1993.
- [30] **A. Goudjo and U. Aguemon, An isogeometric error estimate for transport equation in 2d, Advances in Pure Mathematics , 2019.**
- [31] T. Guillod, Interpolations, courbes de Bézier et B-splines, Bulletin de la Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences, 34, Janvier 2008.
- [32] J. Hubbard and F. Hubert, Calcul scientifique, de la théorie à la pratique, Université de Provence, Marseille, 2005.
- [33] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, computer methods in applied mechanics and engineering, the University of Texas at Austin, 2005. 41
- [34] T.J.R. Hughes, A. Reali and G. Sangalli, Efficient quadrature for NURBS based isogeometric analysis, Elsevier, 2008.
- [35] A. J. Kjetil, An adaptive isogeometric finite element analysis, Master of science in physics and mathematics, Norwegian university of science and technology, 2009.
- [36] G.R. Liu, Mesh free methods moving beyond the finite element method, CRC press, 2003.
- [37] H. Li and S. Mulay. Meshless methods and their numerical properties. CRC Press Taylor and Francis Group, 2013.
- [38] R. J. Leveque, Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, 2002.
- [39] V. Manet, La méthode des éléments finis : vulgarisation des aspects mathématiques, illustration des capacités de la méthode, HAL, archives ouvertes.fr, Lyon, 2012.
- [40] Duncan Marsh, Applied geometry for computer graphics and CAD, deuxième édition, Springer 2005.
- [41] D. A. Di Pietro and A. Ern, Mathematical aspects of Discontinuous Galerkin methods, Springer-verlag, 2012.
- [42] L. Piegl and W. Tiller, The Nurbs book, deuxième édition, Springer 1995.
- [43] H. Prautzsch, W. Boehm, M. Paluszny, Bezier and b-splines techniques, Springer, 2002.

- [44] D. F. Rogers, An Introduction to NURBS with historical perspective, United States Naval Academy, Annapolis, Academic Press, 2001.
- [45] David Salomon, curves and surfaces for computer graphics, Springer, 2006.
- [46] S. Salsa, Partial differential equations in action, from modelling to theory, Département de mathématiques polytechniques de Milan, 2008.
- [47] Liesel Schumacher, Isogeometric analysis for scalar convection diffusion equations, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II, Institut für Mathematik, Phd thesis, Mai 2013.
- [48] Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, University of Pennsylvania and Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, 1946
- [49] Z. Sun, Generating analysis-ready NURBS models of cloth for isogeometric analysis, PhD thesis, University of Iowa, 2015.
- [50] A. Tagliabue, L. Dedè and A. Quarteroni, Isogeometric analysis and error estimates for high order partial differential equations in fluid dynamics, Mathematics institute of computational science and engineering technical report, octobre 2012.
- [51] M. Jensen, Discontinuous Galerkin Methods for Friedrichs Systems with irregular solutions. PhD thesis, University of oxford, 2004.

