



**HAL**  
open science

# Sur les $g$ -hérissos de l'espace hyperbolique et de l'hypersphère, ainsi que leurs transformées de L-Gauss vues comme $g$ -hérissos marginalement piégés.

Romain Sieuzac

## ► To cite this version:

Romain Sieuzac. Sur les  $g$ -hérissos de l'espace hyperbolique et de l'hypersphère, ainsi que leurs transformées de L-Gauss vues comme  $g$ -hérissos marginalement piégés.. Mathématiques [math]. CY Cergy Paris Université, 2023. Français. NNT: . tel-04500379

**HAL Id: tel-04500379**

**<https://hal.science/tel-04500379>**

Submitted on 11 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Thèse de Doctorat  
de CY Cergy Paris Université**

réalisée au  
**Laboratoire de Mathématiques Analyse, Géométrie et Modélisation**  
en collaboration avec  
**l'Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche**

Sujet de la thèse:

**Sur les  $g$ -hérissons de l'espace hyperbolique et de  
l'hyper-sphère, ainsi que leurs transformées de  
 $\mathcal{L}$ -Gauss vues comme  $g$ -hérissons marginalement  
piégés**

par  
**Romain SIEUZAC**

Présentée et soutenue publiquement à Paris le jeudi 21 décembre 2023

devant le jury composé de :

Rapporteur:	M.	Marc Soret	Université de Tours
Rapporteur:	M.	Rabah Souam	CNRS
Président du jury:	M.	Yves Martinez-Maure	Sorbonne Université
Examinatrice:	Mme.	Marie-Claude Arnaud	Université Paris Cité
Directeur de thèse:	M.	Yong Fang	CY Cergy Paris Université
Co-directeur de thèse:	M.	Anatole Khelif	Sorbonne Université



Nicht einmal falsch!  
— Wolfgang Pauli —



# Résumé

La notion de hérisson a été introduite par R.Langevin, G.Levitt et H.Rosenberg et correspond à la réalisation géométrique des différences formelles de corps convexes sur l'espace euclidien. Par la suite, Y.Martinez-Maure a largement développé la théorie des hérissons, ce qui lui a permis, entre autres, de produire en 2001 un contre-exemple de la conjecture d'A.D.Alexandrov. Aussi, on retrouve sur l'ensemble des hérissons des relations que l'on connaît sur les corps convexes, dont, en particulier, les inégalités de Minkowski et les inégalités isopérimétriques. C'est ainsi qu'apparaît la notion de hérisson marginalement piégé, qui sont des surfaces marginalement piégées sur l'espace de Lorentz-Minkowski, vérifiant des propriétés correspondant à la notion de hérisson.

L'objet de cette thèse consiste à retrouver une notion de hérisson marginalement piégé sur des espaces de Lorentz dont la courbure interne est non nulle. Il a alors été nécessaire de définir la notion de hérisson sur l'espace hyperbolique et sur l'hypersphère, où, en particulier, nous en avons étudié la correspondance avec les notions de g-convexité et de h-convexité. Nous introduisons ainsi la notion de g-hérisson, dont nous étudions la cohérence ainsi que la compatibilité avec les hérissons de l'espace euclidien, et qui doit vérifier la contrainte de pouvoir définir leur transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss. Cela nous permet alors de définir les g-hérissons marginalement piégés qui sont des surfaces marginalement piégées sur les espaces de Lorentz  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$  et dont les propriétés correspondent bien avec les g-hérissons de l'espace hyperbolique et de l'hypersphère. Il nous faut néanmoins noter que les caractéristiques géométriques des hérissons marginalement piégés de l'espace de Lorentz-Minkowski ne sont pas toutes transposables aux g-hérissons marginalement piégés, ce qui contribue à limiter significativement notre démarche.



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier, pour l'examen de mes travaux et la tenue de la soutenance, mon jury de thèse qui est composé de Marie-Claude Arnaud et Yves Martinez-Maure (ex co-directeur), auxquels s'ajoutent mon directeur de thèse Yong Fang et mon co-directeur Anatole Khelif, ainsi que mes deux rapporteurs Marc Soret et Rabah Souam. En particulier, je me dois d'avoir une pensée pour Yong Fang qui a permis l'existence de cette thèse, pour Yves Martinez-Maure qui a partagé son temps, sa patience et son travail de recherche, et pour Anatole Khelif sans qui jamais je n'aurais pu aller au bout de ce travail. À toi Anatole, je veux exprimer, dans ces quelques lignes, que je te dois beaucoup et en particulier le fait que tu as su, il y a deux ans, me redonner courage alors que tout, absolument tout, poussait à raisonnablement abandonner ce projet de thèse. Tu as su toujours être, dans le tumulte de ces deux dernières années de cette thèse, un appui moral et compétent absolument indispensable. À Yves, je sais que diriger cette thèse n'a pas été une chose facile. Aussi, je sais que tu as toujours montré une grande volonté à m'apprendre les rudiments du métier de chercheur et que tu as toujours eu à cœur que je parvienne à aboutir dans ce projet. Je te remercie pour ta générosité et j'espère que nous aurons la possibilité de continuer à échanger sur ce qui a motivé ce travail.

Je tiens ensuite à remercier mon tuteur Eric Toubiana pour ses nombreux conseils et appuis. Il me faut remercier l'IMJ-PRG pour m'avoir permis d'effectuer ma thèse au sein de l'équipe de Géométrie et Dynamique, ainsi que le laboratoire de l'AGM de l'université de Cergy-Pontoise pour m'avoir permis de débiter ma thèse. Je voudrais aussi remercier l'école doctorale de l'université de Cergy-Pontoise qui m'a beaucoup aidé dans toutes mes démarches. En particulier Lalia Sy qui n'a jamais manqué de répondre à mes très nombreuses questions.

Je remercie les universités de Cergy-Pontoise, de Nanterre et de Paris-Cité qui m'ont permis d'effectuer des missions d'enseignement, via divers contrats, et me faisant ainsi découvrir le plaisir d'enseigner dans la discipline qui nous passionne.

Je remercie Étienne Parizot, Alexandru Oancea, Frédéric Le Roux et Joseph Oesterlé qui sont des enseignants, parmi d'autres, de physique et de mathématiques qui ont marqué mon parcours d'étudiant, qui m'ont inspiré et ont contribué à me donner l'ambition d'entreprendre des études doctorales en mathématiques fondamentales.

Je veux remercier les doctorants et doctorantes de Sophie Germain pour tous les échanges et moments de vie que nous avons pu partager. Il ne m'est pas possible d'écrire pour tout le monde mais je ne peux pas manquer de penser à Maud, (...), Pierre, (... [[comme vous le savez je n'ai pas la mémoire des noms car je suis ingrat]] ...) Razvan et Dorian pour tous les échanges que nous avons eus, sans oublier bien sûr Farouk qui ... n'est pas farouche ... :D Bref, on a passé de très bons moments! Je veux aussi remercier les doctorants du LPTHE que j'ai eu le plaisir de

rencontrer dernièrement.

J'ai une pensée pour mes amis de Toulouse, de Jussieu, de la cité internationale, etc., pour qui, sur ces dernières années, je n'ai pas pu suffisamment entretenir la relation. En particulier, Ibra, je ne manquerai pas de m'incruster chez toi, pour profiter de ton avantageuse localisation dans les Pyrénées. Il n'y a pas de petit profit...

À ma famille, je vous remercie d'avoir, partout où vous l'avez pu, été là pour moi. En me rappelant que ma scolarité a été aussi tumultueuse que ma thèse, je vous résumerai, tous autant que vous êtes, par la phrase suivante, je cite : "Oui madame, le conseil de classe il sert uniquement à me conseiller, et si j'estime que vos conseils ....".

Je termine avec toi Andriani. Je suis chaque jour heureux de partager ma vie avec toi. Et je tiens à te remercier pour cela, car être avec toi a été d'un indispensable apport pour mener à bien mon projet de thèse. Tu es ma boussole :)





# Table des matières

<b>Liste des symboles</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1 Contexte et résultat connu . . . . .	3
1.1 Définition d'un hérisson euclidien . . . . .	4
1.2 Caractérisation en géométrie de contact . . . . .	4
1.3 Dualité projective d'un hérisson euclidien . . . . .	6
1.4 Les hérissons marginalement piégés . . . . .	7
2 Problématique et contraintes sur les choix de définition . . . . .	10
3 Principaux résultats de la thèse . . . . .	10
3.1 Définition et conditions d'existence des g-hérissons sur l'espace hyperbolique . . . . .	11
3.2 Pseudo-hérissons et g-hérissons sur la sphère . . . . .	12
3.3 Caractérisation en structure de contact . . . . .	13
3.4 Dualité et théorème de caractérisation projective . . . . .	14
3.5 Transformée de $\mathcal{L}$ -Gauss et g-hérisson marginalement piégé . . . . .	16
4 Conclusion et questions ouvertes . . . . .	17
5 Structure de la thèse . . . . .	18
<b>I Sur les hérissons de l'espace euclidien</b>	<b>21</b>
<b>1 Introduction et première propriété</b>	<b>25</b>
1.1 Petit point sur les corps convexes . . . . .	25
1.2 Définition et existence des hérissons euclidiens . . . . .	35
1.3 Propriétés combinatoires et correspondance avec les corps convexes . . . . .	40
<b>2 Conditions de contact et structures de contact pour les hérissons euclidiens</b>	<b>47</b>
2.1 Structure de contact usuelle sur $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ . . . . .	47
2.2 Les hérissons euclidiens vus comme fronts de Legendre . . . . .	48
2.3 Autre méthode pour décrire les hérissons . . . . .	49
2.4 Proposition de généralisation de la notion de hérisson . . . . .	51
<b>3 Dualité et caractérisation projective</b>	<b>53</b>
3.1 Dualité d'un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	53
3.1.1 Dualité polaire par rapport à la sphère . . . . .	53
3.1.2 Dualité projective . . . . .	56
3.2 Dualité projective d'un hérisson euclidien . . . . .	61
3.2.1 Représentation du dual d'un hérisson sur la sphère . . . . .	63

3.2.2	Petite remarque géométrique . . . . .	64
3.3	Théorème de caractérisation projective . . . . .	66
<b>II</b>	<b>Sur les g-hérissons de l'espace hyperbolique et de la sphère</b>	<b>73</b>
<b>4</b>	<b>Définition et première propriété de la notion de g-hérisson sur l'espace hyperbolique</b>	<b>81</b>
4.1	Petit point sur la géométrie hyperbolique . . . . .	81
4.2	Les corps g-convexes . . . . .	83
4.2.1	Définition et première remarque . . . . .	83
4.2.2	Définition et propriété sur les g-hyperplans de support . . . . .	84
4.2.3	Fonction de support d'un corps g-convexe . . . . .	88
4.3	Les familles de g-hyperplans co-orientés . . . . .	88
4.4	Définition d'un g-hérisson et première propriété. . . . .	95
4.4.1	Conditions d'existence des g-hérissons . . . . .	96
4.4.2	Orientation naturelle des g-hérissons . . . . .	99
4.4.3	Relation entre les g-hérissons et les corps g-convexes . . . . .	99
4.4.4	Correspondance avec les hérissons euclidiens . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Corps h-convexe et h-hérisson</b>	<b>103</b>
5.1	Application de Gauss et Horosphères . . . . .	103
5.1.1	Limite d'une géodésique sur le bord à l'infini . . . . .	104
5.1.2	Application de Gauss d'une hypersurface orientée . . . . .	104
5.1.3	Définition et propriétés élémentaires des horosphères . . . . .	106
5.2	Les corps h-convexes . . . . .	108
5.2.1	Définition et premières propriétés . . . . .	109
5.2.2	Les corps h-convexes de classe $\mathcal{C}^2$ . . . . .	111
5.2.3	Comparaison des hyperplans tangents par la méthode des horosphères. . . . .	114
5.3	Familles d'Horosphères Co-orientées et H-Hérissons . . . . .	114
5.3.1	Petite remarque sur la relation entre les applications de Gauss . . . . .	115
5.3.2	Les familles d'horosphères co-orientées . . . . .	116
5.3.3	Définition et première propriété sur les h-hérissons . . . . .	118
5.3.4	Définition alternative de la notion de h-hérisson . . . . .	123
5.4	Carte de support et dualité des h-hérissons . . . . .	125
5.4.1	Description des horosphères via le cône lumière . . . . .	125
5.4.2	Relation de dualité entre l'espace hyperbolique et le cône lumière . . . . .	128
5.4.3	Carte de support d'un h-hérisson . . . . .	131
5.4.4	Relation de dualité sur les h-hérissons . . . . .	133
5.5	Opérations sur les h-hérissons . . . . .	133
<b>6</b>	<b>Universalité de la notion de g-hérisson</b>	<b>137</b>
6.1	Les sous-espaces hyperboliques et la fonction de changement de point . . . . .	137
6.1.1	Définition et propriétés des sous-espaces hyperboliques . . . . .	137
6.1.2	Définition et propriétés de la fonction de changement de point . . . . .	138
6.2	La fonction de réindexation . . . . .	139
6.2.1	Définition et propriété d'existence . . . . .	139
6.2.2	Propriétés préliminaires de la restriction sur le plan hyperbolique et les relations antipodales . . . . .	142
6.3	Lemme sur l'injectivité de la fonction de réindexation . . . . .	146

6.4	Énoncé et démonstration du théorème . . . . .	152
<b>7</b>	<b>Conditions et structures de contact pour les g-hérissos et les h-hérissos</b>	<b>157</b>
7.1	Structure de contact usuelle . . . . .	157
7.2	Structure de contact et hérissos . . . . .	160
7.2.1	Caractérisation des g-hérissos en géométrie de contact . . . . .	160
7.2.1.1	L'application orthonormale généralisée . . . . .	160
7.2.1.2	Condition de contact pour les g-hérissos . . . . .	163
7.2.1.3	Caractérisation des g-hérissos en géométrie de contact . . . . .	163
7.2.1.4	Les g-hérissos vus comme le front legendrien d'une immersion de Legendre dont l'application de Gauss est un difféomorphisme . . . . .	164
7.2.2	Caractérisation des h-hérissos en géométrie de contact . . . . .	165
7.2.2.1	L'application orthonormale horosphérique généralisée . . . . .	165
7.2.2.2	Les h-hérissos vus comme le front legendrien d'une immersion de Legendre dont l'application de Gauss est un difféomorphisme . . . . .	167
7.3	Correspondance et Caractérisation de Contact . . . . .	167
<b>8</b>	<b>Dualité et caractérisation projective des g-hérissos</b>	<b>171</b>
8.1	Dualité sur l'Espace Hyperbolique . . . . .	171
8.1.1	Généralités sur les espaces modèles . . . . .	171
8.1.2	Modèle de l'espace hyperbolique et de l'espace de Sitter sur l'espace projectif . . . . .	172
8.1.3	Dualité projective sur l'espace de Sitter . . . . .	174
8.2	Duale projective d'un corps g-convexe . . . . .	176
8.3	Duale projectif d'un g-hérisson . . . . .	178
8.3.1	Définition et première propriété . . . . .	179
8.3.2	Représentation du dual d'un g-hérisson sur l'hyperboloïde $dS^n$ . . . . .	180
8.4	Théorème de caractérisation projective . . . . .	181
<b>9</b>	<b>Les pseudo-hérissos sur l'hypersphère</b>	<b>185</b>
9.1	Modèle de l'hypersphère et notations usuelles . . . . .	185
9.2	Généralités, problématiques et lemmes fondamentaux . . . . .	186
9.2.1	Définition et première remarque sur les pseudo-hérissos . . . . .	186
9.2.2	Exemples de g-hérissos passant par leur équateur et hypothèses de classement . . . . .	188
9.2.2.1	Exemple d'un pseudo-hérisson qui passe par son équateur et occupe les demi-sphères nord et sud . . . . .	189
9.2.2.2	Exemple de pseudo-hérisson qui passe par son équateur sans annuler ses courbures principales . . . . .	191
9.2.2.3	Hypothèse sur les pseudo-hérissos qui passent par leur équateur . . . . .	192
9.2.3	Lemme des points de l'équateur . . . . .	193
9.3	Conjecture sur le passage de l'équateur . . . . .	206
9.4	Conclusion sur le classement des pseudo-hérissos . . . . .	211
<b>10</b>	<b>Sur les g-hérissos de la sphère</b>	<b>213</b>
10.1	Définition et première propriété . . . . .	213
10.2	Problème du changement de point . . . . .	215
10.3	Les g-hérissos vus comme fronts de Legendre . . . . .	216
10.4	Relation de dualité . . . . .	221

<b>III</b>	<b>Sur les g-hérissons marginalement piégés</b>	<b>223</b>
<b>11</b>	<b>Les hérissons marginalement piégés dans l'espace de Lorentz-Minkowski</b>	<b>227</b>
11.1	Majoration de l'inégalité isopérimétrique . . . . .	227
11.2	Structure de co-contact . . . . .	235
11.2.1	Espace symplectique, symplectomorphismes linéaires et structure complexe	235
11.2.2	Variété symplectique et symplectisé d'une variété de contact . . . . .	236
11.2.3	Représentation d'un hérisson marginalement piégé par un front lagrangien	237
<b>12</b>	<b>Les g-hérissons marginalement piégés sur le lorentzianisé de l'espace hyperbolique et de la sphère.</b>	<b>241</b>
12.1	Définition de la notion de co-enveloppe . . . . .	241
12.1.1	Les variétés de Lorentz $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ vues comme espaces des sphères de l'espace hyperbolique et de la sphère. . . . .	241
12.1.2	Famille de géodésiques lumière orientées en $e$ . . . . .	242
12.1.3	Éléments de base sur le laplacien et l'opérateur de Hodge . . . . .	245
12.1.4	Définition et propriétés de la notion de co-enveloppe . . . . .	246
12.2	Théorème d'existence . . . . .	249
12.3	Problème de structure de co-contact . . . . .	258
<b>13</b>	<b>Co-enveloppe sur <math>\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}</math> pour la métrique usuelle de la sphère.</b>	<b>261</b>
13.1	Démonstration du lemme . . . . .	262
13.1.1	Calcul du terme $\Delta_S [SH f(u)N(u)]$ . . . . .	262
13.1.2	Calcul du terme $\Delta_S [CH f(u)x(u)]$ . . . . .	263
13.1.3	Expression de la condition de co-contact et conclusion . . . . .	265
13.2	Propriété des $g_S$ -co-enveloppes . . . . .	265
<b>Annexe</b>		<b>271</b>
<b>A</b>	<b>Éléments sur la théorie des enveloppes</b>	<b>271</b>
<b>B</b>	<b>Éléments sur la géométrie de contact</b>	<b>273</b>
2.1	Champ de sous-espaces vectoriel, forme de contact et variété de contact . . . . .	273
2.2	Champ de Reeb et variété métrique de contact . . . . .	275
2.3	Les contactomorphismes . . . . .	276
2.4	Immersion, fibré et front de Legendre . . . . .	276
<b>C</b>	<b>Éléments sur la notion de co-orientation</b>	<b>279</b>
<b>D</b>	<b>Éléments sur l'espace projectif</b>	<b>283</b>
4.1	Cartes projectives et transformations projectives . . . . .	283
4.2	Notions de dualité et de polarité . . . . .	285
4.2.1	La notion de dualité entre les points et les hyperplans projectifs . . . . .	285
4.2.2	Identification entre l'espace projectif et son bidual. . . . .	286
4.2.3	La notion de polarité entre les points et les hyperplans projectifs. . . . .	287
4.3	Dualité projective et polaire d'un corps convexe . . . . .	288
4.3.1	Dualité projective d'un corps convexe . . . . .	289
4.3.2	La dualité polaire d'un corps convexe . . . . .	294

<b>E</b>	<b>Les espaces à courbure constante</b>	<b>299</b>
5.1	L'espace hyperbolique . . . . .	300
5.1.1	Expression des dérivées covariantes, des géodésiques et de la carte exponentielle . . . . .	302
5.1.2	Le modèle de Klein . . . . .	302
5.1.3	Le modèle du disque de Poincaré . . . . .	306
5.1.4	Définitions et propriétés utiles . . . . .	310
5.1.4.1	Les horosphères de l'espace hyperbolique . . . . .	310
5.1.4.2	Définition et propriétés des g-hyperplans . . . . .	311
5.1.4.3	Les g-hyperplans parallèles . . . . .	312
5.2	L'espace sphérique . . . . .	313
<b>F</b>	<b>Éléments calculatoires en coordonnées sphériques</b>	<b>315</b>
6.1	Système de coordonnées sphériques . . . . .	315
6.2	Propriétés calculatoires sur le laplacien . . . . .	317
<b>G</b>	<b>Éléments sur le degré de Brouwer</b>	<b>321</b>
7.1	Point critique et valeur critique . . . . .	321
7.2	Définition du degré et première propriété . . . . .	322
7.3	Degré d'une application et intégration . . . . .	322
	<b>Bibliographie</b>	<b>324</b>



# Liste des notations

**Avertissement.** Dans ce document, figurent des notations non usuelles qu'il est important de prendre en compte afin de prévenir de potentielles difficultés de lecture. En conséquence, nous invitons à considérer la liste des notations ci-dessous avant lecture.

## Les ensembles usuels

- $\mathbb{A}^{n-1}$ : Il s'agit de l'absolu, correspondant à la projection dans l'espace projectif du cône lumière de l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$ .
- $\mathbb{T}^n$  et  $\mathbb{T}_+^n$ : Le cône lumière et le demi-cône lumière (en temps positif) de l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$ .
- $\mathcal{D}(e)$ : Si  $e$  est un point sur  $\mathbb{H}^n$  ou  $\mathbb{S}^n$ , alors  $\mathcal{D}(e)$  est la boule unité dans  $(T_e\mathbb{H}^n, g_e)$  (resp.  $(T_e\mathbb{S}^n, g_e)$ ), où  $g$  est la métrique induite.
- $\mathbb{E}^n$ : C'est l'espace euclidien, correspondant à  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel.
- $\mathbb{H}^n$ : C'est le demi-hyperboloïde défini par  $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} \text{ tel que } \langle x|x \rangle_L = -1 \text{ et } x_{n+1} > 0\}$ .
- $\mathbb{L}^{n+1}$ : C'est l'espace de Lorentz-Minkowski, correspondant à  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni du produit de Minkowski  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L = \langle \cdot | \cdot \rangle - dt^2$ .
- $\mathbb{S}^n$ : C'est la sphère unité dans  $\mathbb{E}^{n+1}$ .
- $\mathbb{S}_e^{n-1}$ : Si  $e$  est un point sur  $\mathbb{H}^n$  ou  $\mathbb{S}^n$ , alors  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  correspond au bord topologique de la boule fermée  $\overline{\mathcal{D}(e)}$ .
- $\mathbf{dS}^n$ : C'est l'espace de Sitter, correspondant à la projection de l'hyperboloïde  $dS^n$  dans l'espace projectif.
- $\mathbf{dS}^n$ : C'est l'hyperboloïde défini par  $dS^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} \text{ tq } \langle x|x \rangle_L = 1\}$ .

## Les fonctions usuelles

- $\mathbf{CH}(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{SH}(\mathbf{t})$  et  $\mathbf{TH}(\mathbf{t})$ : Ce sont les notations pour les fonctions hyperboliques.

## Les opérations et opérateurs

- $\vec{\nabla} \mathbf{h}(\mathbf{u})$ : Nous noterons ainsi le gradient, pour la métrique usuelle, d'une fonction  $f$  définie sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ .
- $\Delta_{\mathbf{S}}(\mathbf{f})$ : Nous noterons ainsi le laplacien d'une fonction  $f$  définie sur la sphère  $\mathbb{S}^n$  et pour la métrique usuelle.
- $\partial_{\mathbf{k}} \mathbf{f}$  ou  $\partial_t \gamma$ : Nous noterons de cette manière les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  ou  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ .
- $\mathbf{Ad}$  et  $\mathbf{Int}$ : Nous noterons ainsi les opérations de fermeture et d'ouverture topologique.

→ **Hess(h)<sub>u</sub>**: Nous noterons ainsi la matrice hessienne, pour la métrique usuelle, d'une fonction  $f$  définie sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ .

### Les ensembles de sections

→  **$\Delta(\mathbf{M})$** : Si  $M$  est une variété différentielle, alors on notera  $\Delta(M)$  le  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -module des champs de vecteurs qui habituellement admet  $\Gamma^0(TM)$  pour notation.

→  **$\Omega(\mathbf{M})$** : Si  $M$  est une  $n$ -variété différentielle, alors on notera  $\Omega(M)$  le  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -module des formes différentielles tel que  $\Omega(M) = \Omega_1(M) \oplus \cdots \oplus \Omega_n(M)$ .

→  **$\Omega_k(\mathbf{M})$** : Si  $M$  est une variété différentielle, alors on notera  $\Omega_k(M)$  le  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -module des  $k$ -formes différentielles.

→  **$\Gamma(\mathbf{E})$** : Si  $p : E \mapsto B$  est un fibré vectoriel, alors on notera  $\Gamma(E)$  le  $\mathcal{C}^\infty(B)$ -module des sections généralisées tel que  $\Gamma(E) = \Omega(B) \otimes \Gamma^0(E)$ .

→  **$\Gamma^0(\mathbf{E})$** : Si  $p : E \mapsto B$  est un fibré vectoriel, alors on notera  $\Gamma^0(E)$  le  $\mathcal{C}^\infty(B)$ -module des sections lisses  $\sigma : B \mapsto E$ .

→  **$\Gamma^k(\mathbf{E})$** : Si  $p : E \mapsto B$  est un fibré vectoriel, alors on notera  $\Gamma^k(E)$  le  $\mathcal{C}^\infty(B)$ -module des  $k$ -sections généralisées tel que  $\Gamma^k(E) = \Omega_k(B) \otimes \Gamma^0(E)$ .

### Les terminologies particulières

→ **n-espace vectoriel**: On appelle  $n$ -espace vectoriel tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

→ **n-sphère**: On appelle  $n$ -sphère la sphère  $\mathbb{S}^n$  de dimension  $n$ .

→ **n-variété**: On appelle  $n$ -variété toute variété de dimension  $n$ .

→ **p-sous-espace vectoriel**: On appelle  $p$ -sous-espace vectoriel tout sous-espace vectoriel de dimension  $p$  dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

→ **p-sous-variété**: On appelle  $p$ -sous-variété toute sous-variété de dimension  $p$ .

# Introduction

Cette thèse est consacrée à une tentative de définir et étudier une notion de hérisson marginalement piégé sur des espaces de Lorentz dont la courbure est non nulle. Pour cela, il nous faudra retrouver une notion de hérisson sur des variétés de Riemann à courbure constante et donc sur leurs revêtements universels (l'espace euclidien, l'espace hyperbolique et la sphère). De plus, il nous sera nécessaire d'approcher cette notion de hérisson par le biais d'une démarche universelle au sens où nous obtiendrons les mêmes formulations (quelle que soit la géométrie considérée) et les mêmes propriétés. Ainsi nous pourrons constater que les différentes notions de hérisson que nous allons considérer correspondent bien lorsque l'on adopte un point de vue relevant de la géométrie de contact ou de la géométrie projective.

## 1 Contexte et résultat connu

L'objet de la théorie des hérissons est de généraliser la théorie de Brunn-Minkowski aux différences de corps convexes. Pour cela, en remarquant que tout corps convexe est caractérisé par son bord, il nous suffit de définir la notion de hérisson comme étant une différence de bords de corps convexes. C'est précisément l'approche qui a été adoptée par R.Langevin, G.Levitt et H.Rosenberg (voir [52] pour plus de détails) en considérant l'enveloppe d'hyperplan  $h(u)u + \langle u \rangle^\perp$ , avec  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^k$ , où  $k \geq 2$ . Ainsi, on peut vérifier que de telles enveloppes correspondent à des différences de bords de corps convexes de classe  $\mathcal{C}^k$ . Par la suite, Y.Martinez-Maure a étendu de telles différences de corps convexes à tous les corps convexes, fournissant ainsi les premières définitions et propriétés de la théorie des hérissons (voir l'ouvrage [78] pour un exposé complet). L'intérêt d'une telle théorie réside dans la réduction de la complexité des différentes problématiques (traitant de questions connexes aux corps convexes) du fait que l'ensemble des hérissons admet une structure d'espace vectoriel. Nous pouvons prendre, pour exemple, la proposition d'un contre-exemple à la conjecture d'A.D.Aleksandrov<sup>1</sup> (voir [63] pour en savoir plus). En ce qui nous concerne, nous nous en tiendrons aux hérissons de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Aussi, il est important de noter que, dans cette thèse, nous abordons seulement une petite partie des notions relevant de la théorie des hérissons. En particulier, nous prendrons soin d'en donner la définition la plus large possible (voir chapitre 1 et 4 pour plus de détails). Puis, nous nous contenterons d'en exposer leur caractérisation en géométrie de contact, par un certain type d'immersion de Legendre, ainsi que leurs propriétés de dualité projective.

---

1. La conjecture d'A.D.Aleksandrov affirme que toute surface convexe fermée de classe  $\mathcal{C}_+^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  vérifient l'inégalité :

$$(k_1 - c)(k_2 - c) \leq 0,$$

avec  $c$  une constante, est nécessairement la 2-sphère.

## 1.1 Définition d'un hérissou euclidien

Considérons donc  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Alors on appelle **famille d'hyperplans co-orientés** toute famille d'hyperplans de la forme  $h(u)u + \langle u \rangle^\perp$  ainsi que **hérissou euclidien** toute enveloppe paramétrée (voir définition 1.2.4 et 1.2.5 page 36) de famille d'hyperplans co-orientés. En particulier, nous appellerons naturellement **fonction de support** la fonction  $h$ . Il est alors possible de vérifier que le bord d'un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^\infty$  est un hérissou euclidien dont la famille d'hyperplans co-orientés correspond à sa famille d'hyperplans tangents. Ensuite, en constatant que pour toute fonction  $h$ , il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $h + k$  correspond à la fonction de support d'un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on obtient alors que tout hérissou est une différence de bords de corps convexes (voir propriété 1.3.4 page 44).

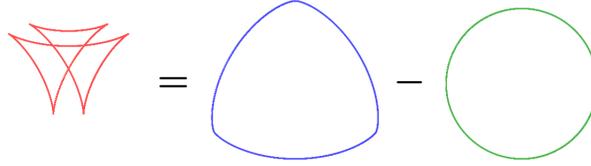


FIGURE 1 – Exemple de hérissou comme différence de bords de corps convexes

Il nous faut alors remarquer que tout hérissou euclidien, que l'on note  $\mathcal{H}_h$  (avec  $h$  la fonction de support), admet  $x(u) = h(u)u + \vec{\nabla}h(u)$  pour paramétrage que l'on peut considérer (ou interpréter) comme étant l'inverse de son application de Gauss. En effet, si pour  $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ , la différentielle  $d_{u_0}x$  est injective, alors  $\mathcal{H}_h$  est localement une hypersurface orientée, en  $x_0 = x(u_0)$ , dont  $x^{-1}$  correspond à un champ orthonormal. En particulier, si  $\mathcal{H}_h$  est le bord d'un corps convexe  $K$ , alors le paramétrage  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathcal{H}_h = \partial K$  est un difféomorphisme dont l'inverse correspond au champ orthonormal sortant.

## 1.2 Caractérisation en géométrie de contact

L'objet de cette caractérisation est de proposer une méthode de généralisation de la notion de hérissou à d'autres espaces que l'espace euclidien (voir [74] pour en savoir plus). Commençons par remarquer qu'une application  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  correspond au paramétrage d'un hérissou euclidien si et seulement si elle vérifie la condition :

$$\langle u | d_u x \cdot \vec{v} \rangle = 0 \quad (1.2.1)$$

que l'on appelle condition de contact.

Ensuite, on rappelle qu'une structure de contact est la donnée d'une  $(2n + 1)$ -variété différentielle  $M$  que l'on munit d'une 1-forme  $\alpha \in \Omega_1(M)$  (que l'on appelle forme de contact) telle que  $(d\alpha)^n \wedge \alpha \neq 0$ . Aussi, on appelle :

1. Immersion de Legendre toute immersion  $i : \Gamma \mapsto M$  définie sur une  $n$ -variété telle que  $Im(d_u i) \subset Ker(\alpha_{i(u)})$ .
2. Sous-variété de Legendre toute  $n$ -sous-variété  $\mathcal{L} \subset M$  telle que  $T_x \mathcal{L} \subset Ker(\alpha_x)$ , pour tout  $x \in \mathcal{L}$ .
3. Fibré de Legendre tout fibré lisse  $p : M \mapsto \beta$  dont les fibres sont des sous-variétés de Legendre.

4. **Front de Legendre** La donnée de la partie  $p \circ i(\Gamma)$  et du paramétrage  $x := p \circ i$  avec  $p$  et  $i$  étant respectivement un fibré et une immersion de Legendre.

et est donc le vocabulaire nécessaire pour caractériser la notion de hérisson euclidien en géométrie de contact. Pour en savoir plus, il est possible de consulter l'annexe B dans laquelle nous décrivons ces différentes notions. Ainsi, on peut définir sur  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  la 1-forme de contact  $\alpha_{(u,x)} \cdot (V, X) = \langle u|X \rangle$  et par la condition (1.2.1), il est clair que tout hérisson euclidien est le front legendrien d'une immersion de Legendre de la forme

$$i(u) = (u, x(u)) \quad (1.2.2)$$

En particulier, on peut remarquer que l'immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  correspond au relèvement du paramétrage  $x$  en une immersion définissant une  $(n-1)$ -sous-variété de Legendre sur  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ .

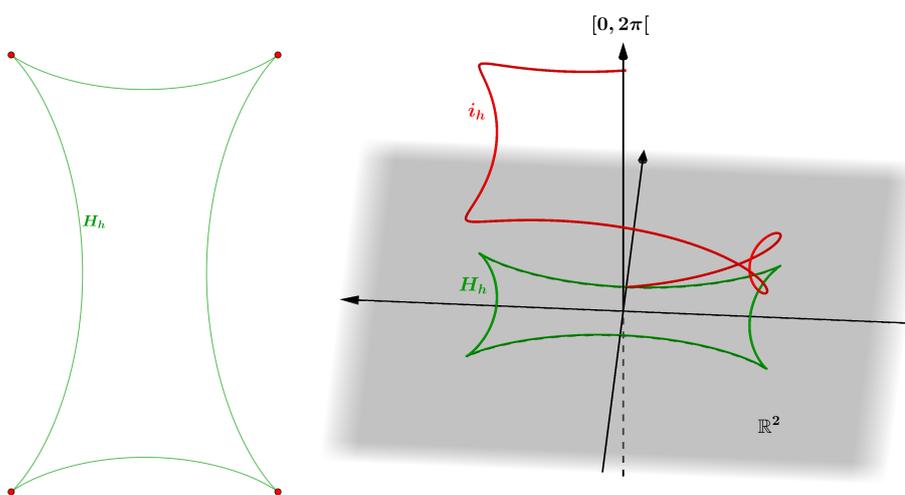


FIGURE 2 – Relèvement d'un hérisson euclidien via l'immersion de Legendre (en identifiant  $\mathbb{S}^1$  avec  $]0, 2\pi[$ ).

Pour finir, considérons  $i : \Gamma \mapsto \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  une immersion de Legendre. Alors on appelle application de Gauss l'application  $\nu : \Gamma \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  telle que  $i(u) = (\nu(u), x(u))$ . Et ainsi, on peut formuler le résultat suivant :

**Théorème.** *Tout hérisson euclidien est, à difféomorphisme de  $\mathbb{S}^{n-1}$  près, le front legendrien d'une immersion de Legendre dont l'application de Gauss est un difféomorphisme.*

Nous pouvons considérer ce dernier résultat comme étant une caractérisation des hérissons euclidiens en géométrie de contact. De plus, comme nous retrouvons cette caractérisation pour tous les autres types de hérissons, comme les hérissons lorentziens (voir page 431 de [74]) ou complexes (voir [77]), mais aussi les g-hérissons (et h-hérissons) de l'espace hyperbolique et de la sphère que nous introduisons dans cette thèse (voir théorème 7.3.1 et 10.3.2), il est alors possible de considérer, comme hypothèse de généralisation, de définir une notion de hérisson en se reposant sur cette caractérisation. C'est précisément la proposition qu'a faite Y.Martinez-Maure dans la section 2.2.1 page 338 de [74].

### 1.3 Dualité projective d'un hérisson euclidien

Les relations de dualité polaire (ou projective) sont bien connues pour les corps convexes (voir section 1.6 de [100] pour un exposé détaillé) et il est naturel de les retrouver pour les hérissons euclidiens. Ainsi, pour  $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ , on considère l'espace tangent  $T_e \mathbb{S}^n = \langle e \rangle^\perp$ , que l'on identifie avec  $\mathbb{R}^n$ , ainsi que  $\mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n)$ , l'ensemble des hyperplans projectifs ne contenant pas le point  $e$ . En conséquence, on définit les relations de dualité suivantes :

1. Si  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $L \subset \mathbb{R}^n$  sont un point et un hyperplan affine, alors on définit l'hyperplan projectif  $x^* = p(\langle e + x \rangle^\perp)$  ainsi que le point  $L^* = p(e + L)^\perp$ .
2. Si  $\alpha \in \mathbb{P}_n \setminus \{e\}$  et  $H \in \mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n)$  sont un point et un hyperplan projectif, alors on considère l'hyperplan affine  $\alpha^* \subset \mathbb{R}^n$  et le point  $H^* \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\alpha = p(\langle e + \alpha^* \rangle^\perp)$  et  $H = p(\langle e + H^* \rangle^\perp)$ .

Il est alors facile de vérifier que les relations que nous avons considérées sont involutives (au sens où  $x^{**} = x$ ,  $L^{**} = L$ ,  $\alpha^{**} = \alpha$  et  $H^{**} = H$ ), ce qui justifie que l'on parle de dualité. Par la suite, si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$  est l'enveloppe paramétrée d'une famille d'hyperplans affines  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$ , alors on appelle dual de  $\mathcal{H}$  la donnée de la partie  $x^*(\Gamma)$  et du paramétrage  $x^*(u) = \Sigma_u^*$ . En considérant la même définition pour toute enveloppe paramétrée  $\Lambda \subset \mathbb{P}_n \setminus \{e\}$ , on peut vérifier que le dual d'un hérisson euclidien  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$  est l'enveloppe paramétrée de la famille d'hyperplans projectifs  $x(u)^*$ , avec  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  le paramétrage du hérisson  $\mathcal{H}$  tel que  $\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}$ , ce qui justifie de nouveau que l'on parle de dualité. En particulier, on peut calculer que lorsque  $h(u)$  est non nul, alors le paramétrage du dual a pour expression  $x^*(u) = \frac{u}{h(u)}$ .

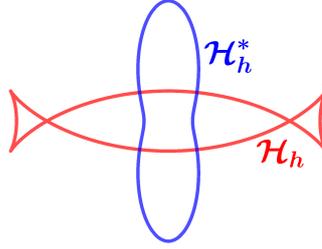


FIGURE 3 – Dual d'un hérisson euclidien

Il est également important de remarquer que la notion de dualité projective sur les corps convexes coïncide avec celle des hérissons euclidiens. Ainsi, on sait que la dualité sur les hérissons euclidiens prolonge la notion de dualité projective connue pour les corps convexes. Pour conclure, observons qu'il est possible de représenter sur la sphère  $\mathbb{S}^n$  le dual d'un hérisson euclidien en considérant le représentant  $s : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^n$  du paramétrage  $x^*$  selon la relation :

$$s(u) = \sigma(u)[u - h(u)e] \text{ avec } \sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + h(u)^2}} \quad (1.3.3)$$

Ce résultat est intéressant car le dual d'un hérisson, ainsi défini, correspond simplement au graphe de la fonction de support  $h$  en considérant l'équateur comme étant l'axe des abscisses et qui est donc une hypersurface orientée.

## 1.4 Les hérissons marginalement piégés

La notion de hérisson marginalement piégé apparaît naturellement lorsque l'on prolonge au hérisson euclidien de l'espace  $\mathbb{R}^3$  les inégalités isopérimétriques que l'on connaît sur les corps convexes (voir chapitre 7 de [100]). Comme nous décrivons en détail cette notion au chapitre 11, nous nous contenterons, dans cette introduction, d'un court exposé en présentant uniquement les éléments essentiels. Il est aussi possible de consulter l'article [74] dans lequel Y.Martinez-Maure définit et étudie les propriétés de cette notion.

Sur le plan, on peut vérifier (voir [60] pour plus de détails) qu'un hérisson euclidien  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$  vérifie l'inégalité isopérimétrique  $0 \leq l(h)^2 - 4\pi a(h) \leq -4\pi a(\partial h) = -4\pi a(h, \partial^2 h)$  avec  $a(h)$  l'aire du hérisson,  $a(\partial h)$  l'aire de sa développée et  $a(h, \partial^2 h)$  l'aire mixte du hérisson avec sa développée seconde. Il convient de noter que les développées première et seconde d'un hérisson du plan sont aussi des hérissons euclidiens. Cependant, pour les hérissons sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , si on peut définir sur  $\mathbb{R}^3$  la développée moyenne qui correspond à la double développée (et qui est aussi un hérisson euclidien), il n'est pas possible de définir sur  $\mathbb{R}^3$  un équivalent de la développée simple d'un hérisson euclidien. C'est précisément pour définir un équivalent de la développée simple d'un hérisson sur l'espace (sans s'imposer la contrainte qu'elle réside sur  $\mathbb{R}^3$ ) que Y.Martinez-Maure a introduit la notion de hérisson marginalement piégé. Il s'agit d'une surface marginalement piégée<sup>2</sup> de l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^4$  qui vérifie des propriétés analogues à celle des hérissons euclidiens. Ce qui est surprenant et qui rend l'étude des hérissons marginalement piégés très intéressante, c'est que les surfaces marginalement piégées correspondent à une catégorie de surfaces qui ont été introduites par R. Penrose (voir [83] pour l'article original) pour étudier, dans le cadre de la relativité générale, l'horizon d'un trou noir.

Considérons donc  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$  une famille de droites affines de type lumière sur l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , vérifiant que pour tout  $u \in \mathbb{S}^2$ , la droite  $\mathbb{R}u$  est orthogonale à l'intersection  $(l_u)_0^\perp = \mathbb{R}^3 \cap (l_u)^\perp$ .

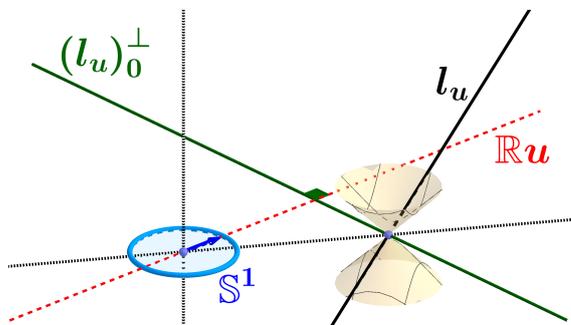


FIGURE 4 – Représentation sur  $\mathbb{L}^3$

En particulier, on appelle **famille de lignes lumière orientées** les familles de droites affines ainsi définies. Dans un premier temps, on peut remarquer que toute famille de lignes lumière orientées correspond à un unique hérisson euclidien tel que  $l_u = x(u) + \mathbb{R}u_L$ , avec  $x$  le paramétrage du hérisson lui étant associé. On appelle alors **co-enveloppe** d'une telle famille, la donnée de la partie  $y(\mathbb{S}^2)$  et du paramétrage  $y : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{L}^4$  telle que  $y(u) \in l_u$ ,  $\langle d_u y \cdot \vec{v} | u_L \rangle = 0$  et

2. Si  $(M, g)$  est une 4-variété de Lorentz, alors on appelle surface marginalement piégée toute 2-sous-variété de type espace dont le vecteur de courbure moyenne est de type lumière.

$\langle \delta(dy)|_{u_L} \rangle = 0$  (qu'on appelle condition de co-contact), avec  $u_L = (u, -1)$  et  $\delta$  la co-différentielle de Hodge. Ainsi, on obtient les deux résultats suivants :

**Théorème.** *Toutes les familles de lignes lumière orientées admettent une unique co-enveloppe. Plus précisément, si  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$  est une famille de lignes lumière et  $h$  la fonction de support du hérisson euclidien lui correspondant, alors sa co-enveloppe admet pour paramétrage*

$$y_{\partial h}(u) = L_h(u) + \delta(dh)_u u_L \quad (1.4.4)$$

avec  $L_h(u) = \left( \vec{\nabla} h(u), h(u) \right)$ .

Par ce théorème, on sait que si  $(l_u^1)_{u \in \mathbb{S}^2}$  et  $(l_u^2)_{u \in \mathbb{S}^2}$  sont deux familles de lignes lumières orientées, telles que  $dh_1 = dh_2$ , alors leurs co-enveloppes se correspondent, à une translation près par rapport à l'axe du temps. En particulier, il est justifié d'appeler **1-forme de support** la forme différentielle  $dh$  correspondant à chaque famille de lignes lumières orientées. Par conséquence, nous avons que pour chaque forme exacte  $dh$ , correspond une unique co-enveloppe  $\partial \mathcal{H}$ , à translation près par rapport à l'axe du temps. Ensuite, nous avons :

**Théorème.** *Toute co-enveloppe d'une famille de lignes lumière orientées est, en ses points non-ombilic, localement une surface marginalement piégée. Plus précisément, si  $\partial \mathcal{H}$  est la co-enveloppe de la famille de lignes lumière  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$ , alors on a :*

1. *La première forme fondamentale est  $y^*g = \frac{1}{4}(R_1 - R_2)^2 g_S$ , avec  $g$  la métrique de l'espace de Lorentz-Minkowski,  $R_i$  les rayons de courbure principaux du hérisson  $\mathcal{H}_h$  qui correspond à la famille de lignes lumière et  $g_S$  la métrique usuelle de la sphère.*
2. *Pour tout point non-ombilic (c'est-à-dire :  $u \in \mathbb{S}^2$  tel que  $R_1(u) \neq R_2(u)$ ), le paramétrage  $y_{\partial h}$  est localement un plongement dont le vecteur de courbure moyenne est colinéaire à  $u_L$ .*

**Note.** *On appelle rayons de courbure principaux d'un hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ , les fonctions qui sont définies, en chaque  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , par les valeurs propres de la différentielle  $d_u x : T_u \mathbb{S}^{n-1} \mapsto T_u \mathbb{S}^{n-1}$ .*

Pour comprendre la correspondance entre la développée d'un hérisson du plan et les hérissons marginalement piégés que nous venons de considérer, il suffit de constater que de telles constructions correspondent forcément à la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss (pour plus de détails, voir l'article [82] ou les dernières pages de la section 11.1) d'un hérisson euclidien de  $\mathbb{R}^3$ . De ce qui précède, nous pouvons conclure que les hérissons marginalement piégés correspondent bien à des surfaces marginalement piégées qui vérifient des propriétés analogues à celles des hérissons. Il est donc justifié d'appeler **hérisson marginalement piégé** toute co-enveloppe d'une famille de lignes lumière orientées. En particulier, pour mieux comprendre cette correspondance, nous comparons les différentes propriétés qui caractérisent les notions de hérisson euclidien et hérisson marginalement piégé dans le tableau suivant :

	Les hérissons euclidiens	Les hérissons marginalement piégés
<b>La définition géométrique :</b>	Espace ambiant : L'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, g)$ , avec $g$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ . Les hérissons euclidiens sont des enveloppes de familles d'hyperplans co-orientés $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$ .	Espace ambiant : Le lorentzianisé $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, g_L)$ avec $g_L = g - dt^2$ la métrique de Minkowski induite du produit scalaire. Les hérissons marginalement piégés sont des co-enveloppes de familles de lignes lumière orientées $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$ .
<b>La condition différentielle :</b>	Tout hérisson euclidien correspond à l'image d'une application lisse $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$ vérifiant la condition de contact ci-dessous :  Pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , $\langle d_u x   u \rangle = 0$	Tout hérisson marginalement piégé correspond à l'image d'une application lisse $y : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{L}^4$ vérifiant les conditions respectives de contact et de co-contact ci-dessous :  1. Pour tout $u \in \mathbb{S}^2$ , $\langle d_u y   u_L \rangle = 0$ 2. Pour tout $u \in \mathbb{S}^2$ , $\langle \delta(dy)_u   u_L \rangle = 0$ Ici, on rappelle que $u_L = (u, -1)$ et $\delta$ est la co-différentielle de Hodge.
<b>Relèvement :</b>	On se place dans le cadre de la géométrie de contact.  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}, \alpha)$  Si $x_h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$ est le paramétrage d'un hérisson euclidien $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ , alors on définit le plongement $i_h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ tel que :  $i_h(u) = (x_h(u), u)$  Ce plongement vérifie alors les deux points suivants :  1. C'est une immersion de Legendre sur $i_h(\mathbb{S}^{n-1})$ qui est donc une sous-variété de Legendre.  2. Le hérisson euclidien $\mathcal{H}$ est le front de Legendre pour l'immersion $i_h$ .  En d'autres termes, tout hérisson euclidien se relève dans la variété de contact $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}, \alpha)$ en une sous-variété de Legendre.	On se place dans le cadre du symplectisé :  $(\mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2, w)$  avec $\mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2 = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2) \times \mathbb{R}$ et la forme symplectique $w = d[e^t \alpha]$ .  Si $y_{\partial h} : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2$ est la paramétrisation d'un hérisson marginalement piégé $\partial \mathcal{H} \subset \mathbb{L}^4$ , alors on définit le plongement $i_{\partial h} : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2$ tel que :  $i_{\partial h}(u) = (y_{\partial h}(u), u)$  Ce plongement vérifie alors les trois points suivants :  1. Si on considère $\mathcal{L}_h$ la surface de Lagrange formée par tous les hérissons parallèles de fonction de support $h + t$ primitive de la 1-forme $\partial h$ alors :  $i_{\partial h}(\mathbb{S}^2) \subset \mathcal{L}_h$  2. C'est un plongement pour lequel la surface $i_{\partial h}(\mathbb{S}^2)$ est marginalement piégée.  3. Le hérisson marginalement piégé $\partial \mathcal{H}$ est le front de Lagrange pour l'immersion $i_{\partial h}$ .  En d'autres termes, tout hérisson marginalement piégé se relève dans la variété symplectique $(\mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2, w)$ en une surface marginalement piégée comprise dans une sous-variété de Lagrange.

## 2 Problématique et contraintes sur les choix de définition

La notion de hérisson marginalement piégé sur l'espace de Lorentz-Minkowski introduit une nouvelle catégorie de surface marginalement piégée qui présente des propriétés géométriques correspondant à la notion de hérisson euclidien. Le but de cette thèse est de généraliser cette notion pour des espaces dont la courbure n'est pas nulle. Nous traiterons le cas des variétés de Lorentz de la forme  $(M \times \mathbb{R}, g_L)$ , où  $g_L = g - dt^2$  et  $(M, g)$  est une 3-variété de Riemann à courbure constante. Il sera donc nécessaire de définir une notion de hérisson pour l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  et la sphère  $\mathbb{S}^n$ , qui correspondent respectivement au revêtement universel des variétés de Riemann à courbure constante. Pour cela, nous devons définir et étudier une notion de hérisson sur l'espace hyperbolique et la sphère qui généralise la notion de hérisson euclidien, en veillant à bien saisir la mécanique de cette généralisation. De plus, les définitions que nous envisagerons devront respecter la contrainte suivante, qui est intrinsèquement satisfaite dans le cas des hérissons euclidiens : Le rayon de courbure moyenne doit exister et être fini en tout point. Par conséquent, sur l'espace hyperbolique (tout comme sur la sphère), si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  est un hérisson dont le paramétrage est  $x : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{H}^3$  et le champ orthonormal est  $N : \mathbb{S}^2 \mapsto x^*ST\mathbb{H}^3$ , il doit exister, en tout point, des scalaires  $r_1$  et  $r_2$  tels que :

$$d_u x \cdot \vec{v}_1^\rightarrow = r_1 d_u N \cdot \vec{v}_1^\rightarrow \text{ et } d_u x \cdot \vec{v}_2^\rightarrow = r_2 d_u N \cdot \vec{v}_2^\rightarrow \quad (2.0.1)$$

ce qui nécessite que, pour tout  $u \in \mathbb{S}^2$ , la dérivée covariante  $\nabla(N)_u$  soit injective. Bien que cette contrainte n'ait pas de sens sur l'espace euclidien - qui est forcément satisfaite par les hérissons euclidiens - nous verrons que dans l'espace hyperbolique (tout comme sur la sphère), cette contrainte influencera significativement nos choix de définitions.

En effet, sur l'espace hyperbolique, plusieurs méthodes existent pour définir la notion de hérisson (une infinité pour être plus précis, voir [33] pour plus de détails). Certaines ont déjà été considérées comme des enveloppes d'horosphères (voir [24], [26] et [25]) ou encore les enveloppes d'hypersurfaces totalement géodésiques (voir [81]). En conséquence, nous prendrons soin de définir et d'établir les fondements d'une théorie des hérissons pour l'espace hyperbolique et la sphère, apportant des solutions à toutes les questions nécessaires pour présenter une construction rigoureuse, complète et cohérente qui ambitionne de regrouper et d'unifier, autant que possible, toutes les approches précédemment explorées.

## 3 Principaux résultats de la thèse

La notion de corps convexe sur l'espace hyperbolique et sur la sphère suscite de l'intérêt depuis près d'un demi-siècle (voir [95], [96], [97] et [98]). Naturellement, des questions fondamentales émergent, telles que la recherche d'une opération équivalente à la somme de Minkowski et l'étude des inégalités isopérimétriques. Il apparaît rapidement qu'il n'existe pas de définition canonique pour des notions telles que la somme ou la largeur d'un corps convexe. Pour chacune d'entre elles, nous identifions des avantages et des inconvénients, sans jamais parvenir à une situation aussi confortable que celle observée sur l'espace euclidien. C'est précisément dans ce contexte que nous introduisons différentes notions de hérisson, correspondant chacune à un choix de méthode pour comparer les hyperplans tangents (et donc de "support") au bord d'un corps convexe (voir les sections 4.2 et 5.2 pour une description plus complète).

### 3.1 Définition et conditions d'existence des g-hérissos sur l'espace hyperbolique

Sur l'espace hyperbolique, il existe plusieurs méthodes pour définir la notion de hérisson, dont essentiellement deux : les h-hérissos (enveloppes d'horosphères) et les g-hérissos (enveloppes d'hyperplans totalement géodésiques). Pour notre part, nous nous concentrerons sur la notion de g-hérisson, même si nous discuterons également des h-hérissos.

Considérons un point  $e \in \mathbb{H}^n$ , alors on appelle **famille de g-hyperplans co-orientés en e** toute famille lisse (voir annexe A pour plus de détails) d'hyperplans totalement géodésiques  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ , avec  $\mathbb{S}_e^{n-1} = S[T_e \mathbb{H}^n]$  vérifiant que pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  :

$$\gamma_u \perp \Sigma_u \quad (3.1.1)$$

avec  $\gamma_u$  la géodésique qui passe par le point  $e$  à la vitesse  $u$ .

Notons que si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une telle famille de g-hyperplans (on appelle g-hyperplan toute hypersurface totalement géodésique), alors on peut l'associer à une fonction  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ , que l'on appelle **fonction de support centré en e** (ou simplement fonction de support), correspondant à l'unique fonction  $h$  telle que  $\gamma_u(h(u)) \in \Sigma_u$ . Ainsi, on définit la notion de g-hérisson comme suit :

**Définition.** On appelle **g-hérisson centré en e** toute enveloppe paramétrée  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  d'une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$ . De plus, on appelle **fonction de support de  $\mathcal{H}$**  la fonction de support de la famille de g-hyperplans.

On peut aisément remarquer que le bord d'un corps g-convexe est bel et bien un g-hérisson (en tout point de  $\mathbb{H}^n$ ) et que, via la projection de Klein centrée en  $e$ , tout g-hérisson centré en  $e$  correspond à un hérisson euclidien sur l'espace tangent  $(T_e \mathbb{H}^n, g_e)$ . Cependant, la première grande différence avec ce que nous connaissons des hérissos de l'espace euclidien est que toute famille de g-hyperplans centrée en  $e$  ne correspond pas nécessairement à un g-hérisson. En particulier, nous avons le résultat suivant :

**Théorème.** Une famille de g-hyperplans co-orientés centrés en  $e$  admet une enveloppe paramétrée si et seulement si sa fonction de support vérifie la condition :

$$\frac{\|\vec{\nabla} h(u)\|}{CH h(u)} < 1 \quad (3.1.2)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . De plus, dans le cas d'existence d'une enveloppe paramétrée, cette dernière est unique.

Pour conclure, notons qu'il est possible de construire des familles de g-hyperplans co-orientés en  $e$  pour lesquelles il existe un point  $v_0 \in \mathbb{H}^n$  tel que la famille de g-hyperplans en question n'est pas co-orientée en  $v_0$  (voir figure 4.4 page 94 pour comprendre comment construire une telle famille). Concernant la notion de g-hérisson, nous avons le résultat suivant :

**Théorème.** Tout g-hérisson centré en  $e$  est centré en tout point de  $\mathbb{H}^n$ .

Ce dernier résultat montre que la notion de g-hérisson sur l'espace hyperbolique est aussi pertinente que la notion de h-hérisson qui a déjà été considérée (voir [24], [26] et [25]) sans la nommer explicitement, pour étudier les corps h-convexes qui sont une sous-catégorie des corps g-convexes. Il est aussi intéressant de noter que la correspondance géométrique entre les g-hérissos

et les hérissons euclidiens pourrait permettre de retrouver, sur l'espace hyperbolique, des résultats analogues à ceux que nous connaissons sur l'espace euclidien. En effet, nous pouvons citer comme exemple les développements récents entrepris par D.Rochera et Y.Martinez-Maure sur les courbes de Zindler (voir [90] et [91] pour plus de détails), développements qui pourraient être transposés sur l'espace hyperbolique via les g-hérissons.

### 3.2 Pseudo-hérissons et g-hérissons sur la sphère

Sur la sphère, les choses se compliquent en raison de la non-injectivité de la carte exponentielle. L'approche intuitive suggérerait de considérer un point  $e \in \mathbb{S}^n$  ainsi que la demi-sphère ouverte  $\Omega_e = \{x \in \mathbb{S}^n \text{ tel que } \langle x|e \rangle > 0\}$  pour définir la notion de g-hérisson via la projection gnomonique  $\varphi_e : \Omega_e \rightarrow T_e\mathbb{S}^n$  (voir section 5.2 de l'annexe E). Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle ne définit pas géométriquement la notion de hérisson. Par conséquent, il est naturel de reprendre ce que nous avons fait sur l'espace hyperbolique en l'adaptant à la sphère. Ainsi, pour  $e \in \mathbb{S}^n$ , on appelle **famille de g-hyperplan co-orienté en e** toute famille lisse d'hyperplans totalement géodésiques tels que  $\gamma_u \perp \Sigma_u$ , pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . On peut alors remarquer que, dans le cas de la sphère, il n'est pas toujours vrai que toute famille de g-hyperplan co-orienté possède une fonction de support. De plus, en considérant la famille  $\Sigma_u = \mathcal{C}_e = \mathbb{S}^n \cap \langle e \rangle^\perp$ , il s'agit clairement d'une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  pour laquelle  $\mathcal{C}_e$  correspond à une des enveloppes (qui ne sont même pas uniques). Mais puisqu'il est évident que  $\mathcal{C}_e$  ne satisfait pas aux caractéristiques que nous recherchons (voir section 2), nous ne pouvons pas simplement définir la notion de g-hérisson sur la sphère comme étant l'enveloppe paramétrée d'une famille de g-hyperplan co-orienté. Nous considérons donc la définition suivante :

**Définition.** On appelle **pseudo-hérisson centré en e** toute enveloppe paramétrée d'une famille de g-hyperplan co-orienté en  $e$ .

**Note.** On notera  $x$  le paramétrage de l'enveloppe.

Nous pouvons alors observer (voir les sections 9.2.2.1 et 9.2.2.2 aux pages 189 et 191) que les pseudo-hérissons centrés en  $e$  et qui ne correspondent pas aux contraintes énoncées à la section 2, intersectent l'équateur  $\mathcal{C}_e$ . À ce stade, nous n'avons pas totalement épuisé cette question qui fait l'objet de la conjecture suivante :

**Conjecture.** Tout pseudo-hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  centré en  $e$  dont la partie  $K = x^{-1}(\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e) \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$  (qui est toujours un corps à bords lisses) est non vide et n'est pas une demi-sphère, est, en un point  $x_0 \in \mathcal{H}$ , localement une hypersurface dont la courbure est nulle.

Néanmoins, il est possible de vérifier cette conjecture dans le cas où le corps  $K$  est compris dans une demi-sphère et est difféomorphe à la boule unité  $B^{n-1}$  (voir théorème 9.3.1 page 210 pour plus de détails). En nous basant sur cette conjecture, nous pouvons conclure que la catégorie de pseudo-hérissons qui nous intéresse correspond aux pseudo-hérissons compris dans la demi-sphère  $\Omega_e$  et donc, nous retrouvons bien notre considération intuitive initiale. Par conséquent, il est justifié d'ajouter à la définition de famille de g-hyperplan co-orienté en  $e$  la contrainte suivante :

$$\Sigma_u \neq \mathcal{C}_e \tag{3.2.3}$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Nous considérons donc la définition suivante :

**Définition.** Nous appelons **g-hérisson centré en e** toute enveloppe paramétrée  $\mathcal{H}$ , d'une famille de g-hyperplan co-orienté en  $e$ , qui est comprise dans la demi-sphère ouverte  $\Omega_e$ .

Il est alors clair que toute famille de  $g$ -hyperplans co-orientés centrés en  $e$  vérifiant la condition (3.2.3) admet une unique fonction de support  $h$  à image dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Aussi, on peut montrer que de telles familles de  $g$ -hyperplans admettent forcément une unique enveloppe paramétrée dans la demi-sphère  $\Omega_e$  et qui correspond, via la projection gnomonique  $\varphi_e$ , à un hérisson euclidien sur l'espace tangent  $T_e\mathbb{S}^n$ . En particulier, il n'y a pas de condition d'existence comme c'est le cas pour les  $g$ -hérissons de l'espace hyperbolique, mais par contre, la notion de  $g$ -hérisson sur le sphère dépend fortement du choix du point de référence (voir section 10.2 page 215 pour plus de détails).

### 3.3 Caractérisation en structure de contact

Sur l'espace euclidien, la définition de l'application de Gauss est canonique. Cependant, ce n'est plus le cas sur l'espace hyperbolique et sur la sphère. Dans cette introduction, nous ne présenterons qu'une seule méthode pour définir l'application de Gauss. Il est cependant à noter que nous pourrions également proposer une définition alternative (voir les sections 7.2.1 et 10.3 des pages 160 et 216 pour plus de détails) qui nous permettrait d'obtenir des résultats intéressants.

Considérons, sur l'espace projectif, l'ensemble  $\mathbb{A}^{n-1} = \{p(x) \text{ tel que } \langle x|x \rangle_L = 0\} \subset \mathbb{P}_n$  que l'on appelle **absolue**, avec  $p$  la projection projective. Si  $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$  est une hypersurface orientée et si  $N : \Sigma \rightarrow ST\mathbb{H}^n$  est un champ orthonormal, alors on définit l'**application de Gauss** comme étant l'unique application  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$  telle que pour tout  $x \in \Sigma$ , le point  $\nu(x)$  correspond à la limite à l'infini de la fonction  $p(\gamma_{N(x)}(t))$ , où  $\gamma_u$  est la géodésique passant par le point  $x$  à la vitesse  $N(x)$ . En particulier, il nous faut noter que toute hypersurface orientée et connexe admet exactement deux applications de Gauss.

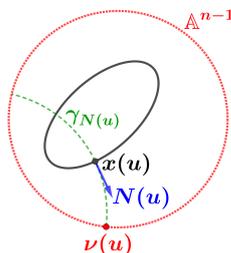


FIGURE 5 – Application de Gauss d'une hypersurface sur l'espace hyperbolique

On appelle **horosphère** toute hypersurface orientée qui est maximale au sens de l'inclusion et dont l'application de Gauss est constante (ce qui est équivalent à ce que les courbures principales soient toutes et partout égales à  $-1$ ). Il est donc clair que pour tout  $x \in \mathbb{H}^n$  et  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ , il existe une unique horosphère contenant le point  $x$  et dont l'application de Gauss pointe vers  $a$ . Ainsi, on appelle horosphère centrée en  $a$  toute horosphère dont l'application de Gauss pointe vers  $a$ . Par conséquent, considérer une hypersurface dont l'application de Gauss  $\nu : \Gamma \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$  est un difféomorphisme revient à dire qu'elle soit l'enveloppe d'une famille lisse d'horosphères  $(\Sigma_a)_{a \in \mathbb{A}^{n-1}}$ , où chaque  $\Sigma_a$  est centrée en  $a$ . Il est alors justifié d'appeler **h-hérisson** toute enveloppe d'une telle famille d'horosphères. Si nous voulons caractériser les  $g$ -hérissons par des immersions de Legendre dont l'application de Gauss (définie comme ci-dessus) est un difféomorphisme, il est nécessaire de déterminer les critères de correspondance entre les  $g$ -hérissons et les  $h$ -hérissons. On obtient alors (voir les propriétés 7.3.1 et 7.3.2 pour plus de détails) :

*Tout h-hérisson dont les courbures principales, partout où elles existent, ne sont jamais nulles, est un g-hérisson. De plus, tout g-hérisson dont les courbures principales, partout où elles existent, ne valent jamais  $-1$  est un h-hérisson.*

Nous savons donc que les h-hérissons dont les courbures principales ne sont jamais nulles correspondent aux g-hérissons dont les courbures principales ne valent jamais  $-1$ . En particulier, lorsque les conditions sur les courbures principales ne sont plus remplies, il est facile de définir des h-hérissons et des g-hérissons qui ne correspondent pas simultanément aux deux définitions (voir la propriété 5.3.5 et la remarque 7.3.1, des pages 123 et 170, pour en savoir plus). Par la suite, on définit naturellement une structure de contact sur le fibré des sphères  $ST\mathbb{H}^n$  en considérant la forme de contact :

$$\alpha_{x,u}(\vec{X}, \vec{V}) = \langle u | \vec{X} \rangle_L$$

où  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$  est le produit de Minkowski sur l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$ . Ainsi, en définissant, pour toute immersion de Legendre, l'application de Gauss par prolongement géodésique sur l'absolue  $\mathbb{A}^{n-1}$ , on obtient le résultat suivant :

**Théorème.** *Tout g-hérisson dont les courbures principales ne valent jamais  $-1$ , partout où elles existent, est le front legendrien d'une immersion de Legendre  $\iota : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  vérifiant les deux points suivants :*

1. *L'application de Gauss  $\nu : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  est un difféomorphisme.*
2. *Les courbures principales, partout où elles existent, ne sont jamais nulles.*

Nous retrouvons ainsi le même énoncé que nous avons vu pour les hérissons euclidiens à la section 1.2. Ajoutons aussi (voir les théorèmes 10.3.1 et 10.3.2, des pages 219 et 221, pour plus de détails) qu'en adaptant nos dernières constructions à la géométrie de la sphère, nous obtenons que :

**Théorème.** *Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  est un g-hérisson gaussien<sup>3</sup> centré en  $e$ , alors c'est le front legendrien d'une immersion de Legendre  $\iota : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{S}^n$ , centré en  $e$ , dont l'application de Gauss  $\nu : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathcal{C}_e$  est un difféomorphisme.*

Ces deux derniers résultats confirment l'intuition que Y.Martinez-Maure a exposée dans [74] et indiquent, en même temps, que le choix de généralisation de la notion de hérisson par les enveloppes de g-hyperplans correspond bien géométriquement aux hérissons euclidiens.

### 3.4 Dualité et théorème de caractérisation projective

Il est bien connu que l'on peut définir des relations de dualité entre l'espace hyperbolique et l'espace de Sitter, qui correspondent à l'analogue de la notion de dualité projective que nous connaissons sur l'espace euclidien (voir [30] pour une description détaillée). Pour cela, considérons la partie  $d\mathbb{S}^n$ , que l'on appelle **espace de Sitter**, et qui correspond sur l'espace projectif à l'ensemble des vecteurs de type espace de l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$ . De plus, on considère  $\mathcal{H}(d\mathbb{S}^n)$  l'ensemble des hyperplans projectifs, que l'on appelle **hyperplans elliptiques**, et qui correspondent à la projection d'hyperplans vectoriels de type espace dans  $\mathbb{L}^{n+1}$ . Aussi, considérons  $\mathcal{H}(\mathbb{H}^n)$  l'ensemble des g-hyperplans dans l'espace hyperbolique. Ainsi, on définit les relations de dualité suivantes :

---

3. Un g-hérisson  $\mathcal{H}$  centré en  $e$  de la sphère sera dit gaussien si  $\mathcal{H}$  ne correspond jamais localement à une hypersphère centrée sur l'équateur  $\mathcal{C}_e$ . Pour en savoir plus, voir la définition 10.3.3 page 219.

1. Si  $x \in \mathbb{H}^n$  et  $L \in \mathcal{H}(\mathbb{H}^n)$  sont un point et un g-hyperplan, alors on définit l'hyperplan elliptique  $x^* = p(\langle x \rangle^\perp)$  ainsi que le point  $L^* = p(\langle L \rangle^\perp)$ .
2. Si  $\alpha \in d\mathbb{S}^n$  et  $H \in \mathcal{H}(d\mathbb{S}^n)$  sont un point et un hyperplan elliptique, alors on définit  $\alpha^* \in \mathcal{H}(\mathbb{H}^n)$  et  $H^* \in \mathbb{H}^n$ , l'unique g-hyperplan et l'unique point tels que  $\alpha = p(\langle \alpha^* \rangle^\perp)$  et  $H = p(\langle H^* \rangle^\perp)$ .

Il est alors immédiat que les relations ainsi définies sont involutives. Ensuite, comme nous l'avons fait sur l'espace euclidien, on définit le dual de l'enveloppe paramétrée  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  d'une famille de g-hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  en considérant la partie  $x^*(\Gamma)$  que l'on munit du paramétrage  $x^*(u) = \Sigma_u^*$ . Et en définissant le dual d'une enveloppe paramétrée d'hyperplan elliptique  $\Lambda \subset d\mathbb{S}^n$  en appliquant la même méthode, on obtient de nouveau (voir propriété 8.3.1 page 179 pour plus de détails) que le dual d'un g-hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  centré en  $e$  correspond à l'enveloppe paramétrée de la famille d'hyperplans elliptiques  $(x(u)^*)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ . De plus, on peut vérifier que  $\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}$ , ce qui justifie que l'on parle bien de dualité. Il est à noter que nous pouvons établir les mêmes constructions et relations pour les g-hérissons de la sphère, en prenant soin de constater la dépendance du choix du point de référence.

Vient à présent la question centrale que nous avons traitée pour étudier la dualité des hérissons euclidiens et des g-hérissons de l'espace hyperbolique et de la sphère. Il est bien connu que le dual d'un corps convexe sur  $\mathbb{R}^n$  (resp. sur  $\mathbb{H}^n$  et  $d\mathbb{S}^n$ ) est un corps convexe sur l'espace projectif<sup>4</sup>  $\mathbb{P}_n$ . Il est alors intéressant de savoir ce qu'il en est pour le dual d'un hérisson euclidien (resp. d'un g-hérisson). Il nous est d'abord possible de produire des contre-exemples (voir section 3.2.2 pour en savoir plus) nous permettant d'évacuer la question de savoir si le dual d'un hérisson est toujours un hérisson (via une identification du même genre que celle que nous avons considérée pour définir la notion de corps convexe sur l'espace projectif). Ainsi, sur l'espace euclidien (voir les théorèmes 3.3.1 et 3.3.2 des pages 66 et 68 pour plus de détails), une application  $\mu : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_n$  correspond<sup>5</sup> au paramétrage du dual d'un hérisson euclidien si et seulement si :

1. C'est une immersion.
2. Toute droite projective passant par le point<sup>6</sup>  $e$  intersecte l'image  $\mu(\mathbb{S}^{n-1})$  en un ou deux points.
3. Les hyperplans tangents<sup>7</sup> de l'image  $\mu(\mathbb{S}^{n-1})$ , vus comme hyperplans projectifs, ne passent jamais par le point  $e$ .

Si, pour les g-hérissons de la sphère, nous retrouvons immédiatement le même résultat du fait de la correspondance des relations de dualité entre les espaces  $\mathbb{R}^n \sim T_e\mathbb{S}^n$ ,  $\Omega_e$  et  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ , il nous faut être plus prudents concernant l'espace hyperbolique. En effet, pour les g-hérissons de l'espace hyperbolique (voir les théorèmes 8.4.1 et 8.4.2 des pages 181 et 182 pour plus de détails), on obtient que le dual d'un g-hérisson correspond à une immersion  $\mu : \mathbb{A}^{n-1} \rightarrow d\mathbb{S}^n$  vérifiant les mêmes caractéristiques que pour les hérissons euclidiens, mais dont les hyperplans tangents de l'image  $\mu(\mathbb{A}^{n-1})$ , vus comme des hyperplans projectifs, sont elliptiques. Il est à noter que, de ce qui précède, le dual d'un g-hérisson de l'espace hyperbolique est indépendant du choix du

4. On dira que  $K \subset \mathbb{P}_n$  est un corps convexe s'il existe  $H \subset \mathbb{P}_n$  un hyperplan projectif tel qu'il soit un corps convexe dans  $\mathbb{P}_n \setminus H$  via l'identification entre  $\mathbb{P}_n \setminus H$  et  $\mathbb{R}^n$ .

5. Si  $n \geq 3$  l'application  $\mu$  correspond au paramétrage  $x^*$  via un difféomorphisme de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . En revanche, pour  $n = 2$ , on parle de correspondance du fait que  $\mathcal{H}^* = \mu(\mathbb{S}^{n-1})$ .

6. On rappelle que nous avons défini le point  $e$  à la section 1.3.

7. Ici, nous appelons hyperplans tangents les hyperplans projectifs  $p(\langle s(u) + d_u s \cdot T_u \mathbb{S}^{n-1} \rangle)$ , avec  $s : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$  tels que  $\mu = p \circ s$ .

point de référence (ce qui est une conséquence directe du théorème de l'indépendance du choix du point de référence).

Cette série de résultats (que l'on appelle les théorèmes de caractérisation projective) est intéressante car elle nous montre que les différentes notions de hérisson que nous avons considérées (les hérissons euclidiens, et les g-hérissons de la sphère et de l'espace hyperbolique) correspondent, via le point de vue de la géométrie projective, à un même objet géométrique. Ceci nous donne ainsi une nouvelle hypothèse de généralisation de la notion de hérisson (toujours dans le cadre de l'objectif de pouvoir définir le plus largement possible la notion de g-hérisson marginalement piégé).

### 3.5 Transformée de $\mathcal{L}$ -Gauss et g-hérisson marginalement piégé

Commençons par rappeler que la notion de hérisson marginalement piégé correspond à la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss d'un hérisson euclidien et est l'analogue de la développée par les centres de courbure d'un hérisson du plan. Si, pour les hérissons marginalement piégés, Y.Martinez-Maure s'est appuyé sur les travaux de B.Palmer (voir [82]), en ce qui nous concerne, nous nous baserons sur le chapitre 5 de la thèse de B.M.Xavier (voir [110]) dans lequel nous trouvons plusieurs propriétés sur les transformées de  $\mathcal{L}$ -Gauss<sup>8</sup> d'hypersurface orientée de la sphère et de l'espace hyperbolique.

Ainsi, pour  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  un g-hérisson centré en  $e$ , on définit la famille de géodésiques lumière par  $l_u = \exp_{x(u)}(\mathbb{R}N_L(u))$  sur l'espace de Lorentz  $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}, g_L)$ , où  $g_L = g - dt^2$  et  $N_L(u) = (N(u), -1)$ . On appelle alors **famille de géodésiques lumière orientée centrée en  $e$**  toute famille de géodésiques lumière ainsi définie. Dans cette introduction, nous nous en tiendrons à cette définition même si, dans la section 12.1.2, nous adoptons une démarche plus large pour des raisons de cohérence avec nos différentes définitions. Toute la difficulté pour obtenir une notion de g-hérisson marginalement piégé réside dans la définition d'une notion de co-enveloppe qui, comme nous allons le voir, dépend du choix d'une métrique sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$ . Considérons donc  $w$  une métrique sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$  ainsi que  $\nabla_w^*$ , dual de la connexion de Levi-Civita sur  $(\mathbb{S}_e^2, w)$ , et  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita sur l'espace de Lorentz  $(\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}, g_L)$ . Si  $y : \mathbb{S}_e^2 \rightarrow \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  est une application lisse, on définit l'opérateur de Laplace-Beltrami comme suit :

$$\Delta_w(y) = (\nabla_w^* \otimes y^* \nabla)(dy)$$

Par conséquent, on appelle **w-co-enveloppe paramétrée** d'une famille de géodésiques lumière  $(l_u)_{u \in \Gamma}$  l'ensemble défini par la partie  $y(\Gamma)$  et le paramétrage  $y : \Gamma \rightarrow \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(u) \in l_u \\ d_u y \cdot \vec{v} \perp T_{y(u)} l_u \\ \Delta_w(y)_u \perp T_{y(u)} l_u \end{array} \right. \quad (3.5.4)$$

Par ailleurs, pour  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  un g-hérisson centré en  $e$ , considérons les formes fondamentales  $I$  et  $III$  définies sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$  telles que  $I_u(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \langle d_u x \cdot \vec{v}_1 | d_u x \cdot \vec{v}_2 \rangle_L$  et  $III_u(\vec{v}_1, \vec{v}_2) =$

8. Si  $\Sigma \subset \mathbb{H}^3$  est une hypersurface orientée dont le champ orthonormal est  $N$ , alors pour tout  $x \in \Sigma$ , on définit le rayon de courbure moyenne par  $R(x) = \text{ArcTH}\left(\frac{k_1+k_2}{1+k_1k_2}\right)$ , où  $k_1$  et  $k_2$  sont les courbures principales en  $x$ . On appelle transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss le paramétrage  $y(x) = \exp_x(R(x)N_L(x))$ , avec  $N_L(x) = (N(x), -1)$ .

$\langle d_u N \cdot \vec{v}_1 | d_u N \cdot \vec{v}_2 \rangle_L$ , avec  $x$  et  $N$  étant respectivement le paramétrage et le champ orthonormal du  $g$ -hérisson. En définissant la forme bilinéaire  $w = I - III$ , on obtient le résultat suivant (voir les théorèmes 12.2.1 et 12.2.2 des pages 251 et 256 pour plus de détails) :

**Théorème.** *Toute famille de géodésiques lumière engendrée par un  $g$ -hérisson de  $\mathbb{H}^3$  dont les valeurs propres<sup>9</sup>  $r_1$  et  $r_2$  sont comprises dans l'intervalle  $] -1; 1[$  admet une unique  $w$ -co-enveloppe correspondant à la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss du  $g$ -hérisson considéré. De plus, la  $w$ -co-enveloppe est, en ses points non ombilic, localement une surface marginalement piégée.*

On obtient donc un résultat très proche de ce que nous avons déjà vu sur l'espace de Lorentz-Minkowski et, en particulier, il est justifié d'appeler  **$g$ -hérissons marginalement piégés** de tels  $w$ -co-enveloppes. Cependant, on peut vérifier que l'on atteint rapidement des limites difficilement réductibles (voir la section 12.3 et le chapitre 13 pour en savoir plus). En effet, pour les hérissons marginalement piégés de l'espace de Lorentz-Minkowski, nous avons pu définir la notion de co-enveloppe à partir de la co-différentielle de Hodge associée à la métrique usuelle de la sphère. Or, ce n'est clairement plus le cas pour les  $g$ -hérissons marginalement piégés dans le sens où il semble difficile d'associer un opérateur à la notion de co-enveloppe. Cela rend difficile, en l'état actuel, la caractérisation géométrique de tels objets, comme nous pouvons le faire pour les hérissons marginalement piégés de l'espace de Lorentz-Minkowski.

## 4 Conclusion et questions ouvertes

Nous avons pu établir les bases d'une théorie des hérissons sur l'espace hyperbolique et la sphère, et nous nous sommes assurés que leurs caractéristiques géométriques correspondent bien à ce que nous connaissons des hérissons euclidiens. Cela nous a notamment permis de proposer une généralisation de la notion de hérisson marginalement piégé sur les espaces de Lorentz  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$  (ce qui correspond à l'objectif initial de cette thèse). Pour établir cette généralisation, nous nous sommes basés sur certaines caractéristiques (enveloppes de familles d'hyperplans co-orientés) des hérissons euclidiens, pour lesquels nous avons pu définir un équivalent sur l'espace hyperbolique et sur la sphère. Si cela nous a permis de retrouver une partie des propriétés caractérisant les hérissons euclidiens, il est clair que cela reste incomplète. En particulier, nous n'avons, à ce jour, pas été en mesure de retrouver les deux principales caractéristiques qui sont à l'origine de la notion de hérisson :

1. **La composition des  $g$ -hérissons** : Une des caractéristiques fondamentales de la notion de hérisson est le fait que l'on peut doter l'ensemble des hérissons d'une structure d'espace vectoriel qui est isomorphe à l'ensemble des fonctions de support. Cette propriété constitue la principale question non résolue sur les  $g$ -hérissons. Elle se formule de la manière suivante : Considérons  $\Gamma_e(\mathbb{H}^n) \subset \mathcal{F}(\mathbb{S}_e^{n-1}, \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions de support (centré en  $e$ ) vérifiant la condition (3.1.2). Existe-t-il une (ou plusieurs) structure d'espace vectoriel sur l'ensemble  $\Gamma_e(\mathbb{H}^n)$  ?
2. **Les  $g$ -hérissons comme différence de corps  $g$ -convexes** : Ce qui définit initialement la notion de hérisson est qu'ils correspondent à la réalisation géométrique des différences formelles de corps convexes pour la somme de Minkowski. Il est à noter que sur l'espace hyperbolique (comme sur la sphère), il n'existe pas de définition canonique de la somme de Minkowski. Par conséquent, la question précédente peut être complétée par : Existe-t-il une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble  $\Gamma_e(\mathbb{H}^n)$  et une somme sur les corps  $g$ -convexes,

---

9. On appelle valeur propre tout scalaire  $r \in \mathbb{R}$  pour lequel il existe un vecteur  $\vec{v}$  sur l'espace tangent  $T_u \mathbb{S}_e^2$  tel que  $d_u x \cdot \vec{v} = r d_u N \cdot \vec{v}$ .

pour lesquels tous les g-hérissons sont des différences de corps convexes correspondant à la structure d'espace vectoriel sur  $\Gamma_e(\mathbb{H}^n)$ ? Plus précisément, nous recherchons une structure d'espace vectoriel  $(\Gamma_e(\mathbb{H}^n), +, \cdot)$  et une somme  $+$  sur les corps g-convexes telle que :

- Pour tout corps g-convexe  $K_1 \subset \mathbb{H}^n$  et  $K_2 \subset \mathbb{H}^n$ , si  $h_1$  et  $h_2$  sont les fonctions de support qui leur correspondent, alors  $K_1 + K_2 = K_{h_1+h_2}$ .
- Pour tout g-hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{H}^n$ , il existe  $h_1$  et  $h_2$ , deux fonctions de support correspondant à des corps g-convexes, tels que  $h = h_1 - h_2$ .

Il est à noter que si nous considérons sur l'ensemble des fonctions  $\mathcal{F}(\mathbb{S}_e^{n-1}, \mathbb{R})$  la structure d'espace vectoriel usuelle, alors si  $h$  est la fonction de support d'un g-hérisson, il existe forcément un scalaire  $k \in \mathbb{R}$  suffisamment grand pour lequel la fonction  $h + k$  correspond à un corps g-convexe. Évidemment, les opérations usuelle ne sont pas stables sur l'ensemble  $\Gamma_e(\mathbb{H}^n)$ . Toutefois, notons que de telles opérations sont stables pour les h-hérissons (voir section 5.5 pour plus de détails), ce qui est très intéressant. Rajoutons aussi que par le biais des h-hérissons, il est possible de définir la notion de g-hérisson parallèle, qui occupe une place importante pour l'étude des g-hérissons marginalement piégés. Ainsi, il est justifié de considérer, comme première approche, de s'orienter vers les g-hérissons qui correspondent à des h-hérissons.

Viennent ensuite les questions relatives aux g-hérissons marginalement piégés. En effet, comme nous l'avons évoqué précédemment, il est difficile de définir correctement la notion de co-enveloppe, comme nous avons pu le faire dans l'espace de Lorentz-Minkowski. Il est donc nécessaire de déterminer s'il est possible d'associer la notion de  $w$ -co-enveloppe, que nous avons définie précédemment, à un opérateur, à l'instar du co-différentiel de Hodge (associé à la métrique usuelle de la sphère) pour les hérissons marginalement piégés de l'espace de Lorentz-Minkowski. Considérons donc pour  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  un g-hérisson, la fonction  $y_{\partial\mathcal{H}}(u) = \exp_{x(u)}(R(u)N_L(u))$  qui correspond à sa transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss. Il est alors nécessaire d'étudier l'ensemble des métriques  $w$  sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$  telles que :

*Pour tout g-hérisson  $\mathcal{H}$ , si  $y_{\partial\mathcal{H}}$  est la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss, alors  $\langle \delta_w(dy)|\tilde{\eta} \rangle_L = 0$  (où  $\delta_w$  est le co-différentiel de Hodge correspondant à la métrique  $w$ ).*

Notons que  $\tilde{\eta}(u) = \partial_t l_u(t_0)$ , où  $l_u$  est la géodésique lumière passant par le point  $x(u)$  à la vitesse  $N_L(u)$  à l'instant  $t = 0$ , et  $t_0$  est tel que  $l_u(t_0) = y_{\partial\mathcal{H}}(u)$ . Plus particulièrement, il convient de vérifier si cet ensemble de métriques est non-vide. Pour approfondir ce sujet, il est possible de consulter la section 12.3 où nous traitons cette question en détail.

## 5 Structure de la thèse

Pour faciliter la lecture de la thèse, il est utile de connaître sa structure et son organisation. La thèse est divisée en trois parties respectivement consacrées au hérisson euclidien, au g-hérisson de l'espace hyperbolique et de la sphère, ainsi qu'au hérisson et g-hérisson marginalement piégés. Ainsi, les chapitres s'organisent comme suit :

1. Les chapitres 1, 2, 3 (pour les sections 3.1 et 3.2) et 11 sont consacrés aux éléments fondamentaux de la théorie des hérissons euclidiens et des hérissons marginalement piégés sur l'espace de Lorentz-Minkowski. Nous y abordons les éléments nécessaires à nos diverses constructions.
2. Les chapitres 4 et 5 traitent des définitions et propriétés fondamentales des g-hérissons et h-hérissons de l'espace hyperbolique.

3. Les chapitres 6, 7 et 8 sont consacrés à l'étude des propriétés et caractéristiques géométriques des g-hérissons de l'espace hyperbolique. Ajoutons que pour les théorèmes de caractérisation projective, les démonstrations sont fournies dans la section 3.3 du chapitre 3 pour les hérissons euclidiens.
4. Les chapitres 9 et 10 se consacrent à l'étude des g-hérissons de la sphère.
5. Les chapitres 12 et 13 traitent des g-hérissons marginalement piégés sur les espaces de Lorentz  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ .



Première partie

Sur les hérissons de l'espace  
euclidien



Dans cette partie, nous introduisons la notion de hérisson euclidien correspondant à la réalisation géométrique des différences formelles de Minkowski de corps convexes dans un espace euclidien. Nous mettrons en évidence le lien qu'ont de tels objets avec la géométrie de contact et étudierons aussi leurs propriétés de dualité.

## Contexte historique sur la théorie des hérissons

La théorie de Brunn-Minkowski tient un rôle central dans la géométrie des corps convexes (i.e. ensemble compact convexe<sup>10</sup> non vide dans un espace euclidien). Elle est apparue avec un ensemble de travaux que nous devons à H. Brunn en 1887 (voir [14]), qui ont ensuite été prolongés par H. Minkowski (voir [80]), aboutissant à la théorie de Brunn-Minkowski. Cette théorie a depuis suscité un intérêt constant en raison de ses applications diverses, ses connexions avec d'autres domaines (géométrie, analyse, probabilité) et la persistance de certains problèmes encore ouverts. Elle est le fruit de l'alliance de deux notions élémentaires des espaces euclidiens : l'addition vectorielle et le volume. Ensemble, elles conduisent à la notion de volume mixte et aux inégalités de Brunn-Minkowski (voir les pages 369-393 de [100]), permettant la résolution de problèmes complexes et fournissant plusieurs résultats d'unicité. Pour un exposé contemporain sur la théorie de Brunn-Minkowski, nous recommandons la lecture du livre "Convex Bodies : The Brunn-Minkowski Theory" de R. Schneider (voir [100]).

Pour comprendre la genèse de la notion de hérisson, il est important de remarquer qu'il est facile de réaliser des combinaisons de corps convexes (i.e. addition et multiplication par un scalaire positif), aboutissant ainsi à une structure algébrique sur l'ensemble des corps convexes. En particulier, la somme de deux corps convexes  $K_1$  et  $K_2$  est définie par la somme de Minkowski :

$$K_1 + K_2 = \{x_1 + x_2, \text{ avec } x_1 \in K_1 \text{ et } x_2 \in K_2\} \quad (1)$$

En complétant avec la multiplication  $\lambda K = \{\lambda x, x \in K\}$  par des scalaires strictement positifs, il est facile de vérifier que toute combinaison  $K_1 + \lambda K_2$  de corps convexes avec  $\lambda > 0$  est toujours un corps convexe. En effet, il suffit de constater que si  $x = x_1 + \lambda x_2 \in K_1 + \lambda K_2$  et  $y = y_1 + \lambda y_2 \in K_1 + \lambda K_2$ , alors en considérant pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $y_1(t) = x_1 + t(y_1 - x_1) \in K_1$  et  $y_2(t) = x_2 + t(y_2 - x_2) \in K_2$ , on obtient que :

$$y(t) = x + t(y - x) = y_1(t) + \lambda y_2(t) \in K_1 + \lambda K_2$$

Ensuite, pour comprendre géométriquement la somme de Minkowski, il est utile de la voir comme l'union des  $x + K_2$ , où  $x \in K_1$ . Elle correspond ainsi, comme illustré ci-dessous, au tracé de  $K_1$  avec le motif du corps  $K_2$ .

---

10. Un ensemble convexe est une partie  $X$  d'un espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$  pour laquelle, si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $X$ , alors l'intervalle  $[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y, \text{ avec } 0 \leq \lambda \leq 1\}$  est contenu dans  $X$ .

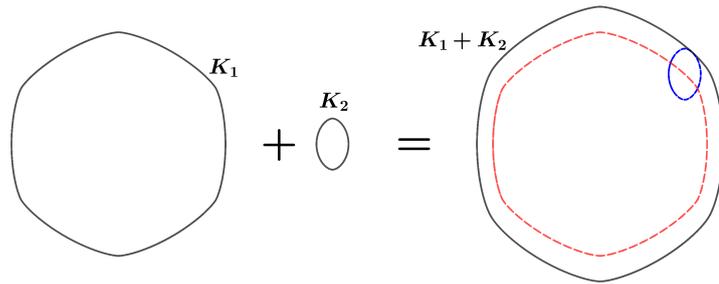


FIGURE 1 – Somme de Minkowski de deux corps convexes

Il est important de remarquer que la combinaison  $K_1 + \lambda K_2$  est toujours envisagée avec le scalaire  $\lambda$  strictement positif. Autrement dit, l'ensemble des corps convexes muni de ces deux opérations n'est pas un espace vectoriel, car il nous manque une notion de différence de Minkowski entre deux corps convexes. Dans les années 30, plusieurs mathématiciens, comme H. Geppert, ont constaté qu'en complétant l'ensemble des corps convexes de cette manière, on obtiendrait une structure d'espace vectoriel très utile. En particulier, on peut consulter l'article [39], dans lequel H. Geppert propose dès 1937 d'étudier les différences de corps convexes en dimensions 2 et 3. La théorie des hérissos est l'aboutissement de cette recherche. Si ce concept occupait déjà l'esprit de certains mathématiciens dès les années 30, son développement et sa reconnaissance sont dus principalement à R. Langevin, G. Levitt, et H.W. Rosenberg qui ont défini la notion de hérisson en 1985, dans le cas où la fonction de support est lisse (voir [52]), puis à Y. Martinez-Maure qui a étendu cette notion aux différences de corps convexes arbitraires. Y. Martinez-Maure a travaillé sur la notion de hérisson dès son doctorat (voir [57]) à la fin des années 80 et y a consacré une longue série d'articles. Aujourd'hui, l'étude des hérissos couvre un large éventail de domaines mathématiques, allant des corps convexes aux surfaces marginalement piégées<sup>11</sup>, en passant par l'étude des équations aux dérivées partielles (voir [36]).

Comme mentionné précédemment, l'idée de prolonger l'ensemble des corps convexes aux différences de corps convexes a tenté les mathématiciens dès les années 30. H. Geppert en a émis l'idée et A.D. Aleksandrov a proposé de travailler avec des différences de fonctions de support (voir [1]). Cette idée a ensuite été mise de côté jusqu'aux années 80 où R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg ont associé à chaque fonction  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  l'enveloppe des hyperplans d'équation  $\langle x(u)|u \rangle = h(u)$  (voir [52]). Cette enveloppe, notée  $\mathcal{H}_h$ , est paramétrée par l'application  $x_h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  telle que  $x_h(u) = h(u)u + \vec{\nabla} h(u)$ , pouvant être interprétée comme étant la réciproque de son application de Gauss. Par la suite, Y. Martinez-Maure a envisagé ces enveloppes comme des différences de corps convexes de classe  $\mathcal{C}_+^k$  (resp.  $\mathcal{C}_+^\infty$ ), puis a défini les différences de corps convexes quelconques (voir [66] ou encore les première et seconde sections de [68]). Son travail a consisté à développer une théorie des hérissos qui prolonge naturellement la théorie de Brunn-Minkowski aux différences de corps convexes. Pour une présentation générale de la théorie des hérissos, il est possible de consulter la deuxième section de l'article [71].

11. Les surfaces marginalement piégées sont une catégorie de surface introduite par R. Penrose pour l'étude des trous noirs en relativité générale (voir [47] chap. VIII)

# Chapitre 1

## Introduction et première propriété

Comme nous l'avons vu précédemment, la théorie des hérissons est le fruit de la volonté de se placer sur un espace vectoriel en associant à toute différence formelle de corps convexes une représentation géométrique satisfaisante. Elle nous fournit une théorie (des hérissons) d'une grande utilité dans l'étude des corps convexes, avec une longue série d'applications en géométrie et en analyse.

### 1.1 Petit point sur les corps convexes

Avant d'envisager de définir rigoureusement la notion de hérisson, il est nécessaire de rappeler certains points et de faire quelques remarques sur les corps convexes. Bien évidemment, nous ne ferons qu'un rapide exposé dont l'objet est de motiver les constructions que nous considérerons lorsque nous aborderons les hérissons dans la prochaine section. Aussi, nous pouvons retrouver un exposé détaillé des notions que nous allons introduire en consultant les chapitres 1 à 3 de [100]. En particulier, nous nous appuyerons sur cet ouvrage pour les quelques démonstrations que nous aborderons sur les corps convexes. Pour commencer, rappelons-en la définition.

**Définition 1.1.1.** *Sur un espace vectoriel euclidien  $(E, +, \cdot, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , nous dirons qu'une partie  $K \subset E$  est un **corps convexe** si et seulement si :*

1. *C'est un ensemble convexe : pour tout  $x$  et  $y \in K$ , l'intervalle  $[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y, \text{ avec } 0 \leq \lambda \leq 1\}$  est compris dans  $K$ .*
2. *La partie  $K$  est compacte et non vide.*

**Note.** *De plus, nous dirons qu'un corps  $K \subset E$ , avec  $E$  que nous considérons de dimension  $n$ , est **de classe  $C^0$**  si et seulement si son bord topologique  $\partial K$  est une variété topologique de dimension  $n - 1$ . De même, pour les classes de régularité supérieures, nous dirons que le corps  $K$  est **de classe  $C^k$** , pour  $k \geq 1$ , si et seulement si son bord topologique est une  $C^k$ -variété de dimension  $n - 1$ .*

**Avertissement 1.1.1.** *Sans perte de généralité, nous travaillerons désormais uniquement sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel  $\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .*

**Définition 1.1.2.** *Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe, nous dirons que  $T \subset \mathbb{R}^n$  est un **hyperplan d'appui** du corps  $K$  si et seulement si c'est un hyperplan affine vérifiant :*

1. Le corps convexe  $K$  est compris dans l'un des demi-espaces fermés bordant l'hyperplan  $T$ .
2. L'intersection  $K \cap T$  est non vide.

On appelle alors **points de support** tous les points appartenant à l'intersection  $K \cap T$ , définissant ainsi l'ensemble des points de support que l'on note  $\text{Supp}(K)$ .

**Note.** Si  $T$  est un hyperplan d'appui, nous appellerons alors **demi-espace de support** le demi-espace bordant  $T$  contenant le corps  $K$ .

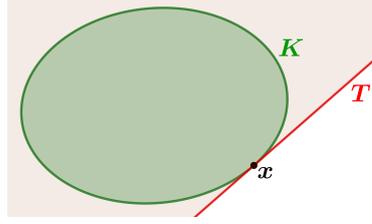


FIGURE 1.1 – Hyperplan d'appui et points de support d'un corps convexe

Par le théorème de Mazur-Bourgoin (voir prop 11.5.2 page 43 de [7] pour plus de détails), publié en 1933, nous savons que le bord topologique d'un corps convexe  $K$ , que l'on note  $\partial K$ , vérifie que  $\partial K \subset \text{Supp}(K)$  (et donc nous avons égalité par définition des points de support). On peut alors vérifier que, pour les corps convexes dont le bord topologique est de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ , les hyperplans d'appui correspondent aux hyperplans tangents du bord  $\partial K$ . C'est-à-dire que :

**Propriété 1.1.1.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$  (resp. de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ). Alors son bord topologique est une hypersurface orientée de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty$ ) telle que :

1. Si  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  est un champ orthonormal à  $\partial K$ , alors  $\nu$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty$ ), surjectif, et pour tout  $x \in \partial K$ , l'hyperplan tangent  $T = x + \langle \nu(x) \rangle^\perp$  est un hyperplan de support contenant le point  $x$ .
2. Pour tout point  $x \in \partial K$ , il existe un unique hyperplan de support  $T \subset \mathbb{R}^n$  contenant le point  $x$ .

*Démonstration.* Considérons  $K$  un corps convexe dont le bord topologique, noté  $\partial K$ , est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Commençons par définir un champ orthonormal  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . En observant que, par convexité, les hyperplans tangents sont nécessairement des hyperplans de support (voir section 2.5 de [100] pour davantage de détails), si  $x \in \partial K$  est un point du bord, alors il existe un vecteur  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  orthogonal à l'hyperplan tangent  $T_x \partial K$  tel que, pour tout  $t > 0$ , le point  $x + tu$  se trouve dans la région  $\mathbb{R}^n \setminus K$ . Nous désignerons, pour la suite de la démonstration, par "vecteur orthonormal sortant" tout vecteur  $u$  défini de cette manière. Par conséquent, nous définissons  $\nu$  comme le champ orthonormal sortant qui, à chaque point  $x \in \partial K$  du bord, associe le vecteur orthonormal sortant de  $K$  correspondant à l'hyperplan  $T_x \partial K$ . Notre objectif est donc de montrer que l'application  $\nu$  ainsi définie est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . Pour ce faire, choisissons un point  $x \in \partial K$  sur le bord du corps  $K$ . Par régularité, il existe nécessairement  $r > 0$  tel que, pour tout vecteur  $w$  dans la boule ouverte  $\mathcal{B}_u(r) = \{w \in \langle u \rangle^\perp \text{ tel que } \|w\| < r\}$ , la droite  $x + w + \mathbb{R}u$  coupe  $K$ . Nous introduisons alors la fonction  $\varphi : \mathcal{B}_u(r) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(w) = \text{Min}\{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } x + w - tu \in K\}$$

où  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  est le vecteur orthonormal sortant de l'hyperplan tangent  $T_x \partial K$ . Par la construction de la fonction  $\varphi$ , nous pouvons définir l'application  $f : \mathcal{B}_u(r) \mapsto \partial K$  telle que :

$$f(w) = x + w - \varphi(w)u \tag{1.1.0.1}$$

que nous illustrons ci-dessous :

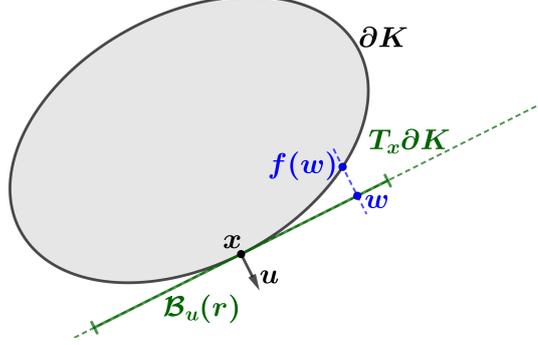


FIGURE 1.2 – Construction de la fonction  $f$

Nous pouvons alors vérifier, après un petit calcul, qu'en considérant  $r$  suffisamment petit, la fonction  $f$  est inversible et admet pour fonction réciproque la fonction  $g$  telle que :

$$g(y) = p_u(y - x),$$

avec  $p_u : \mathbb{R}^n \mapsto \langle u \rangle^\perp$  la projection orthogonale le long de la droite  $\mathbb{R}u$ . Comme  $d_x g \cdot \vec{W} = \vec{W}$ , alors par le théorème d'inversion locale, il existe  $\mathcal{W}$  un ouvert de  $\partial K$  centré en  $x$  et  $r > 0$  tel que la restriction  $g : \mathcal{W} \mapsto \mathcal{B}_u(r)$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^k$ . Ainsi, il est clair que la fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et comme le champ  $\nu$  admet pour expression

$$\nu \circ f(w) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\vec{\nabla} \varphi(w)\|^2}} (\vec{\nabla} \varphi(w) + u)$$

au voisinage du point  $x$ , il est immédiat que  $\nu$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

Ensuite, il nous faut montrer qu'en chaque point  $x \in \partial K$  il existe un seul et unique hyperplan de support  $T \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $x \in T \cap K$ . D'abord, on sait par le théorème de Mazur-Bourgin que tout point du bord admet un hyperplan de support. Considérons donc  $T = x + \langle u \rangle^\perp$  un hyperplan de support en  $x$ , tel que le vecteur  $u$  correspond à la normale extérieure au corps  $K$ . Alors on peut définir le demi-espace de support :

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle y - x | u \rangle \leq 0\}$$

D'abord, on sait que  $K \subset H$  et de plus, si  $\gamma : \mathbb{R} \mapsto H$  est une courbe régulière de classe  $\mathcal{C}^k$  telle que  $\gamma(0) = x$ , alors nous avons forcément que la fonction  $\langle u | \gamma(t) - x \rangle$  admet zéro pour maximum et l'atteint en l'instant  $t = 0$ . En particulier, on sait que  $\langle u | \partial_t \gamma(0) \rangle = 0$  et donc  $\partial_t \gamma(0) \in \vec{T}$ . Ainsi, pour un vecteur  $\vec{W} \in T_x \partial K$  en considérant  $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \partial K$  une courbe de classe  $\mathcal{C}^k$  qui passe par le point  $x$  à la vitesse  $\vec{W}$  en l'instant  $t = 0$ , on a donc que  $\vec{W} = \partial_t \gamma(0) \in \vec{T}$ . Par conséquent, si on considère les hyperplans tangents comme étant des hyperplans affines, nous avons que les

hyperplans de support contenant le point  $x$  correspondent forcément à l'hyperplan tangent en  $x$ .

Enfin, nous pouvons vérifier que l'application  $\nu$  est bien surjective. En effet, si  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , il existe forcément un point  $x \in \partial K$  tel que l'hyperplan  $T = x + \langle u \rangle^\perp$  est un hyperplan de support de  $K$  (voir théorème 1.3.2 à la page 11 de [100] pour plus de détails). Mais par ce qui précède, le corps  $K$  étant de bord  $\mathcal{C}^k$ , l'hyperplan  $T$  est forcément l'hyperplan tangent  $T_x \partial K$  et  $\nu(x) = \pm u$ . Supposons donc que  $\nu(x) = -u$ . Alors, si nous considérons la fonction continue  $\eta(y) = \langle y - x | u \rangle$  définie sur  $K$ , comme  $K$  est compact, la fonction  $\eta$  admet une valeur inférieure (en l'occurrence  $x$ ) et une valeur supérieure, disons  $y$ . Ainsi, il est clair que  $\nu(y) = u$ .

En conclusion, nous avons bien que l'application  $\nu$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ , surjective et que pour tout point  $x \in \partial K$ , il existe un seul et unique hyperplan de support en  $x$  qui est exactement  $T = x + \langle \nu(x) \rangle^\perp$ .  $\square$

Il nous sera utile de faire une digression sur les corps convexes de classe  $\mathcal{C}^0$ . En effet, on trouve souvent dans la littérature que la notion de corps convexe correspond à des parties de  $\mathbb{R}^n$  qui sont convexes, compactes et d'intérieur non vide. Ce n'est pas ce que nous avons considéré dans la définition 1.1.1. Il est alors intéressant de vérifier la propriété suivante :

**Propriété 1.1.2.** *Tout corps convexe d'intérieur non vide est de classe  $\mathcal{C}^0$ .*

*Démonstration.* Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe d'intérieur non vide et  $x \in \partial K$  un point sur le bord. Alors, pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , on considère la fonction  $g_u : \partial K \mapsto \langle u \rangle^\perp$  définie par l'expression suivante :

$$g_u(y) = p_u(y - x)$$

avec  $p_u : \mathbb{R}^n \mapsto \langle u \rangle^\perp$  la projection orthogonale le long de la droite  $\mathbb{R}u$ . Le corps étant d'intérieur non vide, il est clair qu'il existe un  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  tel que  $g_u(\partial K)$  est un voisinage de zéro. Il est particulièrement intéressant de visualiser cette situation. Comme nous le représentons ci-dessous, nous avons à gauche un exemple de corps convexe d'intérieur non vide et à droite un corps convexe d'intérieur vide.

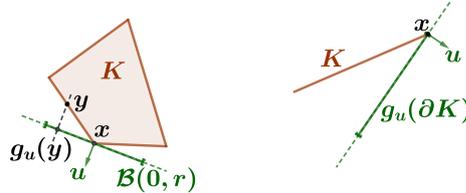


FIGURE 1.3 – Projection d'un corps convexe

Pour s'en convaincre, il suffit de voir que si  $\tilde{g}_u : K \mapsto \langle u \rangle^\perp$  prolonge l'application  $g_u$ , alors par convexité, on a  $g_u(\partial K) = \tilde{g}_u(K)$ . De plus, si on considère un  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  tel que  $(x + \mathbb{R}u) \cap \text{Int}(K) \neq \emptyset$ , il est clair que  $\tilde{g}_u(K)$  est un voisinage de zéro. Considérons donc la boule ouverte  $\mathcal{B}(0, r) \subset x + \langle u \rangle^\perp$  pour un certain  $r > 0$  et  $\mathcal{W} = g_u^{-1}(\mathcal{B}(0, r))$ .

Par construction, en considérant la topologie induite sur  $\partial K$ , on a que l'application  $g_u$  est continue et donc  $\mathcal{W}$  est ouvert dans  $\partial K$ . Aussi, nous pouvons considérer la fonction  $f_u : \mathcal{B}(0, r) \mapsto \partial K$  que nous avons précédemment définie par l'expression (1.1.0.1). En considérant  $r$  suffisamment petit et en ne conservant que la composante convexe de  $\mathcal{W}$  contenant le point  $x$ , il est clair que

$g_u : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{B}(0, r)$  est bijective et admet  $f_u : \mathcal{B}(0, r) \rightarrow \mathcal{W}$  comme application réciproque. Nous pouvons alors conclure en observant que l'application  $g_u$  ainsi définie est une application ouverte. En effet, par construction, pour tout  $y \in \partial K$  et pour tout  $\eta > 0$ ,

$$g_u(\mathcal{B}(y, \eta) \cap \partial K) = \mathcal{B}(g_u(y), \eta) \cap g_u(\partial K)$$

ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

Revenons à présent aux corps convexes de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ . Lorsque le bord topologique  $\partial K$  d'un corps convexe  $K \subset \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ , il est évidemment connexe et admet donc exactement deux orientations. En particulier, si  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  est un champ orthonormal au bord topologique  $\partial K$ , alors, par compacité de  $K$ , deux situations sont possibles :

1. Pour tout  $x \in \partial K$  et  $t > 0$ , on a  $x + t\nu(x) \in \mathbb{R}^n \setminus K$ .
2. Pour tout  $x \in \partial K$ , il existe  $a > 0$  tel que  $\forall t \in [0; a], x + t\nu(x) \in K$ .

Nous appellerons **orientation extérieure du corps convexe  $K$**  l'orientation du bord topologique associée au champ orthonormal vérifiant le premier point. Étant donné qu'il est d'usage d'orienter le bord d'un corps convexe par l'orientation extérieure du corps convexe  $K$ , il est alors naturel de considérer la définition suivante :

**Définition 1.1.3.** *Soit  $K$  un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$  (resp. de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ), nous appellerons **bord du corps convexe  $K$**  l'hypersurface formée par le bord topologique muni de l'orientation vers l'extérieur du corps  $K$ .*

**Note.** *Pour un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^0$  qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ , le bord du corps convexe  $K$  sera simplement son bord topologique car il n'est évidemment pas possible de définir une orientation sur  $\partial K$ .*

Cela revient, pour les corps convexes de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \geq 1$ , à considérer le couple  $(\partial K, \nu)$  formé par le bord topologique du corps  $K$  et son champ orthonormal extérieur  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . Dans la suite, nous adopterons cette description lorsque nous parlerons des bords d'un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \geq 1$ .

**Définition 1.1.4.** *Nous dirons qu'un corps convexe est de **classe  $\mathcal{C}_+^k$**  (resp.  $\mathcal{C}_+^\infty$ ), avec  $k \geq 2$ , lorsque son bord topologique  $\partial K$  est une hypersurface orientable de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty$ ) dont la courbure de Gauss est toujours non nulle<sup>1</sup>.*

**Avertissement 1.1.2.** *Comme nous parlerons principalement de corps convexes (resp. hérissons) de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ , nous prendrons la liberté, à partir de cet instant, de ne plus le préciser. Autrement dit, lorsque l'on considère  $K$  un corps convexe (resp. un hérisson  $\mathcal{H}$ ), nous le considérerons implicitement de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ , sauf mention contraire. Il est important de noter que la plupart de nos énoncés resteront valables pour les corps convexes (resp. hérissons) de classe  $\mathcal{C}_+^k$  avec  $k \geq 2$ .*

À présent, nous allons voir que la famille des hyperplans tangents au bord d'un corps convexe vérifie une certaine condition d'injectivité. Pour cela, nous commençons par définir la relation d'équivalence suivante :

**Définition 1.1.5.** *Nous dirons que deux hyperplans affines orientés  $(\Sigma_1, \bar{\beta}_1)$  et  $(\Sigma_2, \bar{\beta}_2)$  sont **dans le même sens** si et seulement s'ils vérifient :*

$$\vec{\Sigma}_1 = \vec{\Sigma}_2 \text{ et } \bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 \tag{1.1.0.2}$$

1. En particulier, si on considère le champ orthonormal extérieur, la courbure de Gauss est strictement positive. C'est pour cela que l'on note  $\mathcal{C}_+^k$  cette catégorie.

**Note.** Nous rappelons qu'un hyperplan affine orienté est la donnée d'un hyperplan affine  $\Sigma$  dirigé par  $\vec{\Sigma}$  et d'une orientation  $\vec{\beta}$  sur  $\vec{\Sigma}$ .

**Notation 1.1.1.** Nous prendrons l'habitude de noter  $\sim$  la relation que nous venons de considérer.

Il est alors clair que c'est bien une relation d'équivalence. De plus, si nous considérons  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  une hypersurface orientée<sup>2</sup> par  $\vec{\beta}$ , il est tout à fait possible qu'il existe deux points  $x$  et  $y \in \Sigma$  pour lesquels les hyperplans tangents orientés  $(T_x\Sigma, \vec{\beta}_x)$  et  $(T_y\Sigma, \vec{\beta}_y)$ , vus comme hyperplans affines, soient dans le même sens.

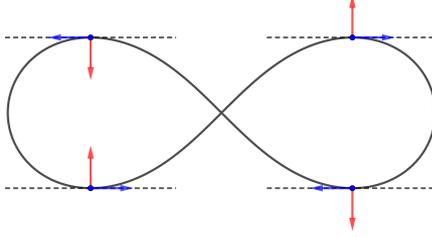


FIGURE 1.4 – Hypersurface<sup>3</sup> qui admet des hyperplans tangents parallèles ayant la même orientation.

Dans ce dernier exemple, nous pouvons dire que la famille des hyperplans tangents orientés, vue comme hyperplan affine, de l'hypersurface n'est pas "injective" car il existe au moins deux points pour lesquels les hyperplans tangents orientés sont dans le même sens. Nous pouvons ainsi définir la condition d'injectivité sur les familles d'hyperplans affines orientés comme suit :

**Définition 1.1.6.** Une famille d'hyperplans affines orientés  $(\Sigma_u, \vec{\beta}_u)_{u \in \Gamma}$  sera dite **injective** si elle vérifie la condition ci-dessous :

$$\text{Si } (\Sigma_{u_1}, \vec{\beta}_{u_1}) \sim (\Sigma_{u_2}, \vec{\beta}_{u_2}) \text{ alors } u_1 = u_2 \quad (1.1.0.3)$$

pour tout  $u_1 \in \Gamma$  et  $u_2 \in \Gamma$ .

Ainsi, nous appellerons **condition d'injectivité** la condition (1.1.0.3) que nous venons de définir. En particulier, pour la famille des hyperplans tangents d'un corps convexe, cela est évidemment le cas. En effet, il nous suffit de vérifier les propriétés 1.1.3 et 1.1.5 que nous considérons ci-dessous :

**Propriété 1.1.3.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 0$ , ou de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , ainsi que  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Considérons à présent  $f_v : K \mapsto \mathbb{R}$  l'application telle que :

$$f_v(x) = \langle x | v \rangle \quad (1.1.0.4)$$

Alors, pour tout  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ , l'image  $f_v(K)$  est un intervalle fermé  $[a; b]$  non réduit à un singleton, c'est-à-dire  $a \neq b$ .

2. On rappelle qu'une  $n$ -variété orientée est la donnée d'une  $n$ -variété  $M$  et d'une famille d'orientation  $\vec{\beta} = (\vec{\beta}_x)_{x \in M}$  sur chaque espace tangent  $T_x M$  vérifiant la condition de régularité suivante : Pour tout  $x_0 \in M$ , il existe  $\varphi : \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^n$  une carte centrée en  $x_0$  pour laquelle les bases de la famille  $((d_x \varphi)_* \cdot \beta_x)_{x \in \mathcal{W}}$ , avec chaque  $\beta_x$  un représentant de la classe  $\vec{\beta}_x$ , sont formées de bases de  $\mathbb{R}^n$  qui sont deux à deux dans le même sens.

3. Il est clair que ce n'est pas une hypersurface du plan. Cependant, nous avons conservé cet exemple car, en plus d'être esthétique, il représente bien ce dont nous parlons.

*Démonstration.* Supposons donc que  $f_v(K) = \{a\}$  pour un certain  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Alors, le corps  $K$  est égal à son bord  $\partial K$  et est compris dans l'hyperplan  $\Sigma = av + \langle v \rangle^\perp$ . En particulier, c'est une sous-variété de  $\Sigma$  de classe  $\mathcal{C}^k$  et, ayant la même dimension que  $\Sigma$ , est alors ouverte. On a donc que  $K$  est un ouvert fermé de  $\Sigma$  et ainsi  $K = \Sigma$ . Ce qui n'est pas possible par compacité de  $K$ .  $\square$

Nous allons à nouveau faire une digression sur les corps convexes de classe  $\mathcal{C}^0$ . En effet, nous avons déjà vu à la propriété 1.1.2 que tout corps convexe d'intérieur non vide est de classe  $\mathcal{C}^0$ . À présent, nous allons voir que la propriété 1.1.3 nous permet de montrer la réciproque.

**Propriété 1.1.4.** *Tout corps convexe de classe  $\mathcal{C}^0$  possède un intérieur non vide.*

*Démonstration.* Commençons par démontrer cette propriété pour les corps convexes du plan. Considérons un corps convexe  $K \subset \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^0$  et choisissons une direction  $u_1 \in \mathbb{S}^1$ . La propriété 1.1.3 nous permet de savoir que les extremums  $x_1$  et  $y_1 \in \partial K$  de la fonction  $f_{u_1}$ , définie par l'expression (1.1.0.4), sont distinctes. À présent, considérons la direction  $u_2 \in \mathbb{S}^1$  orthogonale à la droite  $\mathbb{R}(y_1 - x_1)$ . De nouveau, par la propriété 1.1.3 on sait que les extremums  $x_2$  et  $y_2 \in \partial K$  de la fonction  $f_{u_2}$  sont aussi distinctes. Il est alors clair que, les vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  formant une base de  $\mathbb{R}^2$ , l'enveloppe convexe<sup>4</sup>  $\mathcal{K}(x_1, y_1, x_2, y_2)$  possède un intérieur non vide.

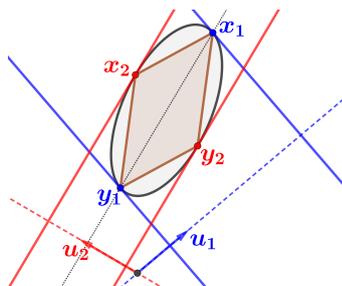


FIGURE 1.5 – Construction du simplexe  $\mathcal{K}(x_1, y_1, x_2, y_2)$

Et comme par convexité, nous savons que  $\mathcal{K}(x_1, y_1, x_2, y_2) \subset K$  alors le corps  $K$  possède bien un intérieur non vide. Ceci termine donc la démonstration pour les corps convexes du plan.

Pour conclure, appliquons une méthode de récurrence. Supposons la propriété 1.1.4 vraie en dimension  $n - 1$ . Considérons  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^0$  et une direction  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Les extrémités  $x$  et  $y \in \partial K$  de la fonction  $f_u$  étant distinctes, considérons  $z \in ]x; y[$ . Il est alors clair que l'hyperplan  $\Sigma = z + \langle u \rangle^\perp$  n'est pas un hyperplan d'appui de  $K$ . Par conséquent,  $K \cap \Sigma$  est un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^0$  dans  $\Sigma$ . Et par hypothèse de récurrence, on sait que le corps  $K \cap \Sigma$  possède un intérieur non vide dans  $\Sigma$ . Ainsi, l'enveloppe convexe  $\mathcal{K}(K \cap \Sigma, x, y)$  est nécessairement d'intérieur non vide et étant incluse dans  $K$ , nous obtenons le résultat souhaité.  $\square$

**Remarque 1.1.1.** *Un corps convexe n'est pas de classe  $\mathcal{C}^0$  si et seulement s'il est contenu dans un hyperplan.*

4. L'enveloppe convexe d'une partie  $A \subset \mathbb{R}^n$  est le plus petit convexe contenant la partie  $A$ . Voir section 1.1 de [100] pour plus d'informations.

Pour comprendre cette dernière remarque, observons qu'un corps convexe admet un intérieur vide si et seulement si il est contenu dans un hyperplan. En effet, dans le cas où un corps  $K \subset \mathbb{R}^n$  n'est pas contenu dans un hyperplan, alors il contient forcément l'enveloppe convexe de  $n + 1$  points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tels que la famille de vecteurs  $(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)$  forme une base de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier,  $K$  est d'intérieur non vide.

Après cette brève parenthèse, revenons à notre question. En effet, nous pouvons montrer l'injectivité de la famille des hyperplans tangents du bord d'un corps convexe par la propriété suivante :

**Propriété 1.1.5.** *Soit un corps convexe  $K \subset \mathbb{R}^n$  et  $\delta$  une droite affine. Alors, il existe exactement deux points  $x_1$  et  $x_2 \in \partial K$  sur le bord de  $K$  pour lesquels les espaces tangents sont orthogonaux à la droite  $\delta$ . De plus, leurs vecteurs orthonormal sortants  $u_1$  et  $u_2$  sont opposés.*

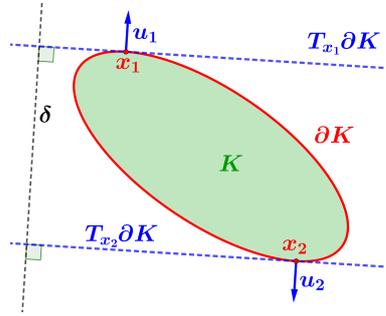


FIGURE 1.6 – Injectivité de la famille des hyperplans orientés tangents au bord d'un corps convexe.

*Démonstration.* Considérons une droite affine  $\delta$  portée par un vecteur  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  et  $K$  un corps convexe de classe  $C_+^\infty$ . La fonction  $f(x) = \langle x|v \rangle$  étant continue et définie sur un compact, elle admet nécessairement  $x_1$  et  $x_2$  comme bornes inférieure et supérieure. En particulier, par la propriété 1.1.3, nous savons que les points  $x_1$  et  $x_2$  ne sont pas sur le même hyperplan de support.

Ensuite, on considère  $u_1$  et  $u_2$  dans  $\mathbb{S}^{n-1}$  comme étant les vecteurs orthonormaux sortant du corps  $K$  et correspondant aux points  $x_1$  et  $x_2$ . Par la propriété 1.1.1, nous savons que les points  $x_1$  et  $x_2$  admettent comme uniques hyperplans de support, les hyperplans  $T_1 = x_1 + \langle u_1 \rangle^\perp$  et  $T_2 = x_2 + \langle u_2 \rangle^\perp$ . De plus, nous savons que les demi-espaces de support sont respectivement :

$$H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle x - x_1|u_1 \rangle \leq 0\} \text{ et } H_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle x - x_2|u_2 \rangle \leq 0\}$$

Considérons donc un point  $y \in \partial K$  dont l'hyperplan tangent  $T_y\partial K$  est parallèle à l'hyperplan tangent  $T_{x_1}\partial K$  et le vecteur orthonormal sortant  $u$  est identique à  $u_1$ . En particulier, supposons que les points  $x_1$  et  $y$  soient distincts. En considérant  $H$  le demi-espace de support pour le point  $y$ , il est clair que  $x_1 \in H$  et  $y \in H_1$ . Ainsi, nous avons  $\langle x_1 - y|u_1 \rangle \leq 0$  et  $\langle y - x_1|u_1 \rangle \leq 0$ , donc les points  $x_1$  et  $y$  sont sur le même hyperplan de support orthogonal à  $u_1$ . En particulier, il est immédiat que le segment  $[x_1, y]$  est compris dans le bord  $\partial K$ . Mais alors, il n'est pas possible que le champ orthonormal  $\nu$  soit une immersion<sup>5</sup> sur  $[x_1, y]$ . Ce qui nous donne finalement que  $y = x_1$ .  $\square$

Enfin, remarquons que la donnée d'un hyperplan affine orienté  $(\Sigma, \bar{\beta})$  peut être associée à un unique vecteur  $u$  de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . En effet, si  $(\Sigma, \bar{\beta})$  est un hyperplan affine orienté, il est facile de voir qu'il existe un vecteur  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , unique, tel que  $\Sigma_u = \lambda u + \langle u \rangle^\perp$  et pour chaque représentant  $\beta$  de la classe  $\bar{\beta}$ , la base  $(\beta, u)$  est dans le même sens que la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Nous pouvons alors résumer tout ce dont nous avons parlé précédemment par la propriété suivante :

**Propriété 1.1.6.** *Considérons la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  munie de  $\bar{\gamma}$  l'orientation extérieure à la boule fermée  $\bar{\mathcal{B}}(0,1)$ . Alors la famille des hyperplans tangents (vus comme espace affine orientés) du bord  $\partial K$  d'un corps convexe  $K$  peut être associée à une famille d'hyperplans affines orientés  $(T_u, \beta_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  vérifiant :*

$$\forall u \in \mathbb{S}^{n-1}, (T_u, \beta_u) \sim (u + \langle u \rangle^\perp, \gamma_u) \quad (1.1.0.5)$$

tels que  $T_u = T_x \partial K$  avec  $\langle u|x \rangle = \text{Sup}\{\langle u|y \rangle \text{ tel que } y \in K\}$ . En particulier, nous appellerons **famille d'hyperplans tangents paramétrés sur la sphère** la famille  $(T_u, \beta_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$ .

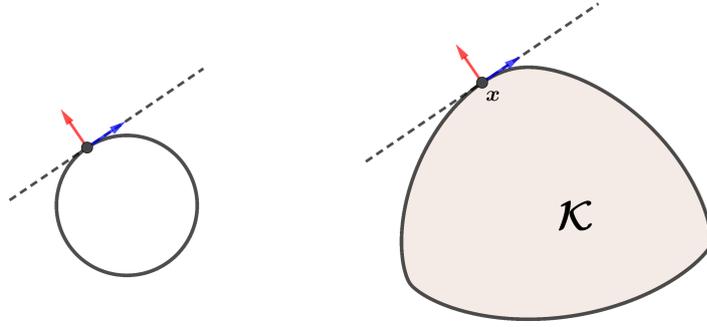


FIGURE 1.7 – Correspondance entre les orientations de la sphère et du bord d'un corps convexe.

*Démonstration.* Considérons la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  munie de  $\bar{\gamma}$  l'orientation extérieure à la boule fermée  $\bar{\mathcal{B}}(0,1)$ . La normale sortante  $v : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  est définie par  $v(u) = u$  et chaque orientation  $\bar{\gamma}_u$  vérifie que la base  $(\gamma_u, u)$  est dans le même sens que la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . À présent, considérons  $K$  un corps convexe de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ . Alors, par les deux propriétés précédentes, on sait que  $\nu : \partial K \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$ , le champ orthonormal sortant au corps  $K$ , est bijectif. Il nous suffit alors de considérer la famille d'hyperplans affines orientés  $(T_u, \bar{\beta}_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  tels que pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , l'hyperplan affine est  $T_u = T_{\nu^{-1}(u)} \partial K$  et l'orientation  $\bar{\beta}_u$  vérifie que la base  $(\beta_u, u)$  est dans le même sens que la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier, il est alors clair que l'orientation  $\bar{\beta}$  correspond bien à l'orientation extérieure au corps  $K$ .  $\square$

Nous en arrivons naturellement à considérer la fonction de support mesurant la distance signée des hyperplans de support d'un corps convexe  $K$  (et donc les hyperplans tangents du bord  $\partial K$ ) par rapport à l'origine.

**Définition 1.1.7.** *Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe. On appelle **fonction de support de  $K$**  la fonction  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  définie de la manière suivante :*

$$h(u) = \text{Sup}\{\langle x|u \rangle \text{ tel que } x \in K\} \quad (1.1.0.6)$$

5. Par immersion en  $x \in \partial K$ , nous entendons que la différentielle  $d_x \nu : T_x \partial K \mapsto T_{\nu(x)} \mathbb{S}^{n-1}$  soit injective.

**Propriété 1.1.7.** *La fonction de support d'un corps convexe  $K$  est lisse.*

**Note.** *Nous rappelons que depuis l'avertissement 1.1.2 de la page 29, nous ne traitons que des corps convexes de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ . Pour en savoir plus, il est possible de consulter la section 1.7.1 des pages 44 à 51 de [100], qui traite plus largement de la notion de fonction de support pour les corps convexes sans contrainte sur leur classe de régularité.*

*Démonstration.* Soit  $K$  un corps convexe de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$  ainsi que  $x \in \partial K$  un point sur le bord et  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  la normale extérieure au corps  $K$  en  $x$ . Si  $T_u$  est l'hyperplan de support en  $x$ , on sait que  $K \cap T_u = \{x\}$  et  $K \subset H$  avec  $H = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle u|y - x \rangle \leq 0\}$  le demi-espace de support bordé par  $T_u$ . Il est alors clair que :

$$\langle u|x \rangle = \text{Sup}\{\langle u|y \rangle \text{ tel que } y \in K\} = h(u) \quad (1.1.0.7)$$

En particulier, comme  $\nu : \partial K \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  le champ orthonormal sortant du corps  $K$  est une bijection, alors on obtient que :

$$h(u) = \langle \nu^{-1}(u)|u \rangle$$

De plus, le corps  $K$  étant de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ , le champ orthonormal est un difféomorphisme local en tout point (et donc évidemment un difféomorphisme). Il est donc clair que la fonction  $h$  est lisse.  $\square$

Il nous faut alors noter que cette fonction joue un rôle fondamental dans la théorie des hérissons comme c'est le cas pour les corps convexes. Elle permet, par exemple, de décrire la famille des hyperplans tangents du bord d'un corps convexe dont nous avons parlé précédemment. En effet, si  $K$  est un corps convexe, de bord  $\partial K$  et de fonction de support  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ , alors la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  des hyperplans tangents au bord, vue comme espace affine (en adoptant le paramétrage sur la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ ), vérifie la propriété suivante :

**Propriété 1.1.8.** *Soit  $K$  un corps convexe de fonction de support  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ , alors la famille des hyperplans tangents affines orientés paramétrés sur la sphère vérifie que :*

$$\Sigma_u = h(u)u + \langle u \rangle^\perp \quad (1.1.0.8)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

*Démonstration.* Considérons  $x \in \partial K$  et  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  la normale sortante en  $x$  du corps  $K$ . Si  $T_u$  est l'hyperplan tangent en  $x$  (vu comme espace affine), on a que  $x \in T_u$  et  $T_u = \lambda u + \langle u \rangle^\perp$ . Il est alors immédiat que  $\lambda = \langle u|x \rangle$  et par la relation (1.1.0.7) on obtient le résultat recherché.  $\square$

Il est alors possible de vérifier que si  $K_1$  et  $K_2$  sont deux corps convexes dont les fonctions de support sont respectivement  $h_1$  et  $h_2$ , alors, si  $\lambda > 0$  on a que  $K_1 + \lambda K_2$  est un corps convexe dont la fonction de support est  $h_1 + \lambda h_2$  (voir théorème 1.7.5 page 48 de [100] pour plus de détails). Mais nous reviendrons sur ce point lorsque nous aborderons les opérations sur les corps convexes et les hérissons. Pour l'instant, nous pouvons comprendre que nous avons une forme de correspondance linéaire entre les corps convexes et leurs fonctions de support. Il est donc naturel d'envisager de faire des différences de fonctions de support comme l'a considéré A.D.Aleksandrov (voir [1] pour en savoir plus).

## 1.2 Définition et existence des hérissons euclidiens

Dans cette section, nous prendrons la liberté de définir la notion de hérisson euclidien par le biais de familles d'hyperplans co-orientés. En effet, nous adopterons une démarche similaire pour définir les h-hérissons et les g-hérissons dans la partie II. Considérons donc les deux définitions suivantes :

**Définition 1.2.1.** *Nous dirons qu'une famille d'hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\Gamma$  une  $p$ -variété différentiel, est **lisse** si et seulement si en tout point, il existe localement  $\nu : \mathcal{W} \subset \Gamma \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  et  $h : \mathcal{W} \subset \Gamma \mapsto \mathbb{R}$  deux applications lisses telles que :*

$$\Sigma_u = h(u)\nu(u) + \langle \nu(u) \rangle^\perp \quad (1.2.0.1)$$

pour tout  $u \in \mathcal{W}$ .

**Note.** *Pour plus de généralité sur la notion de famille lisse (et la notion d'enveloppe), il est possible de consulter l'annexe A dans laquelle nous rassemblons les éléments essentiels traitant de ces deux notions.*

**Remarque 1.2.1.** *De ce qui précède, la famille des hyperplans tangents paramétrés sur la sphère du bord d'un corps convexe est évidemment lisse.*

**Définition 1.2.2.** *Nous dirons qu'une famille  $(\Sigma_u, \overline{\beta}_u)_{u \in \Gamma}$  d'hyperplans affins orientés de  $\mathbb{R}^n$  est **co-orientée** si et seulement si elle vérifie les deux points suivants :*

1. *La famille d'hyperplans affins  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  est lisse.*
2. *Il existe  $\nu : \Gamma \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  une application lisse (globale) telle que pour tout  $u \in \Gamma$ , la droite  $\mathbb{R}\nu(u)$  est orthogonale à l'hyperplan  $\Sigma_u$  et pour chaque représentant  $\beta_u$  de la classe  $\overline{\beta}_u$ , la base complétée  $(\beta_u, \nu(u))$  est dans le même sens que la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Note.** *Nous dirons de plus que la famille  $(\Sigma_u, \overline{\beta}_u)_{u \in \Gamma}$  est **régulière** lorsque l'application  $\nu$  est une immersion.*

**Remarque 1.2.2.** *Si  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  est le ruban de Möbius, alors sa famille d'hyperplans tangents  $(T_x \Sigma)_{x \in \Sigma}$  ne peut pas correspondre à une famille d'hyperplans co-orientés.*

La notion de co-orientation est bien entendu bien plus large que la définition que nous venons de considérer. C'est une notion qui provient de la géométrie de contact, que nous présentons avec plus de détail dans les annexes C et B de ce document. Par ailleurs, il est possible de consulter l'ouvrage [38] de H. Geiges afin de trouver un exposé complet sur cette notion. Pour la suite, puisque la définition 1.2.2 est inutilement large pour les besoins de notre exposé, nous prendrons la liberté de considérer la définition suivante :

**Définition 1.2.3.** *Nous appelons **famille d'hyperplans co-orientés** de  $\mathbb{R}^n$  toute famille lisse d'hyperplans affins orientés  $(\Sigma_u, \overline{\beta}_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  vérifiant que : Pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , la droite  $\mathbb{R}u$  est orthogonale à l'hyperplan  $\Sigma_u$  et chaque représentant  $\beta_u$  de la classe  $\overline{\beta}_u$  vérifie que la base complétée  $(\beta_u, u)$  est dans le même sens que la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Note.** *Nous appellerons également **fonction de support** la fonction lisse  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  telle que pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\Sigma_u = h(u)u + \langle u \rangle^\perp$ .*

**Avertissement 1.2.1.** *Nous prendrons l'habitude de considérer qu'une famille d'hyperplans affins  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  est co-orientée lorsque pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , la droite  $\mathbb{R}u$  est orthogonale à l'hyperplan  $\Sigma_u$ , sans faire mention de l'orientation  $\overline{\beta}_u$ . En effet, nous la considérons implicitement engendrée par le vecteur  $u$  de chaque hyperplan  $\Sigma_u$ . Bien sûr, il s'agit d'alléger le texte et nous nous permettrons ce raccourci lorsqu'il ne produira pas de confusion.*

Nous pouvons aussi constater que la définition 1.2.3 consiste à considérer les familles d'hyperplans affins orientés vérifiant les deux conditions suivantes :

1. Ce sont des familles co-orientées selon la définition 1.2.2, régulières et paramétrées sur la sphère.
2. Elles vérifient la condition d'injectivité de la définition 1.1.6.

Cette dernière remarque n'est pas utile lorsque nous parlons des hérissons de l'espace euclidien, mais le deviendra lorsque nous travaillerons sur l'espace hyperbolique et sur la sphère. En particulier, il ne nous sera pas immédiat (au sens de la non canonicité) de retrouver une condition d'injectivité comme pour la définition 1.1.6 de la page 30. Cela proviendra du fait que cette condition d'injectivité nécessite de comparer globalement les orientations d'hyperplans qui vivent sur des espaces tangents différents.

**Remarque 1.2.3.** *La famille des hyperplans tangents paramétrés sur la sphère du bord d'un corps convexe est une famille d'hyperplans co-orientés.*

La définition de hérisson proposée par R.Langevin, G.Levitt et H.Rosenberg consiste à considérer l'enveloppe des hyperplans d'équation  $\langle x|u \rangle = h(u)$ , pour une fonction lisse  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  qui bien sûr ne correspondrait pas forcément à la fonction de support d'un corps convexe. Ainsi, nous définirons les hérissons de la manière suivante :

**Définition 1.2.4.** *Soit  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  une famille lisse d'hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n$ . Nous appelons **enveloppe** de la famille d'hyperplans, l'image d'une fonction lisse  $x : \Gamma \mapsto \mathbb{R}^n$  vérifiant les deux conditions suivantes :*

1. Pour tout  $u \in \Gamma$ ,  $x(u) \in \Sigma_u$ .
2. Pour tout  $u \in \Gamma$  et  $\vec{W} \in T_u \Gamma$ ,  $d_u x \cdot \vec{W} \in \vec{\Sigma}_u$ .

**Note.** *Nous appellerons en particulier **paramétrage** l'application  $x$  que nous avons considérée précédemment. De plus, nous appellerons **enveloppe paramétrée** la donnée de l'enveloppe d'une famille lisse d'hyperplans affines et de son paramétrage.*

**Définition 1.2.5.** *On appelle **hérisson euclidien** ou simplement **hérisson**, la donnée de l'enveloppe  $\mathcal{H}$  d'une famille d'hyperplans co-orientés et de son paramétrage  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$ . Bien sûr, nous dirons que la fonction de support de la famille d'hyperplans est la fonction de support du hérisson.*

**Note.** *Nous appelons **paramétrage** du hérisson, le paramétrage de l'enveloppe de la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  d'hyperplans co-orientés.*

**Remarque 1.2.4.** *Nous pouvons reformuler la définition 1.2.5 en constatant qu'un hérisson est l'enveloppe paramétrée d'une famille d'hyperplans co-orientés.*

**Notation 1.2.1.** *Par commodité, nous prendrons l'habitude de noter  $\mathcal{H}_h$  le hérisson euclidien de fonction de support  $h$  ainsi que  $x_h$  son paramétrage.*

**Avertissement 1.2.2.** *Il nous arrivera de noter " $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  est un hérisson" sans faire mention de son paramétrage, comme si nous considérions une partie de  $\mathbb{R}^n$ . Bien sûr, il s'agira d'un raccourci utilisé dans le but de simplifier le texte.*

Avant de poursuivre, nous allons justifier pourquoi nous considérons un tel couple  $(\mathcal{H}, x)$  pour définir la notion de hérisson euclidien. Pour ce faire, rappelons d'abord que nous avons défini le bord d'un corps convexe (voir définition 1.1.3 page 29) comme étant l'ensemble des points

de support d'un corps convexe  $K$  muni du champ orthonormal sortant. Notons également qu'il est facile de constater que l'information  $(\partial K, \nu)$  est entièrement contenue dans  $(\mathcal{H}_h, x_h)$ , avec  $h$  étant la fonction de support de  $K$ . En effet, il suffit de prendre en compte la propriété 1.2.1 suivante :

**Remarque 1.2.5.** *Si  $f : M \rightarrow N$  est une immersion bijective entre deux variétés différentielles de même dimension  $n$ , alors c'est un difféomorphisme.*

**Propriété 1.2.1.** *Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe. L'application de Gauss  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , correspondant à la normale sortante du corps  $K$ , est un difféomorphisme.*

*Démonstration.* Le corps convexe  $K$  étant de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ , par définition, l'application  $\nu$  est un difféomorphisme local en chaque point. De plus, en vertu des propriétés 1.1.1 et 1.1.5, il est clair que l'application  $\nu$  est bijective. D'après ce qui précède, nous obtenons le résultat recherché.  $\square$

**Remarque 1.2.6.** *Il est alors immédiat que considérer le bord  $(\partial K, \nu)$  d'un corps convexe  $K$  équivaut à considérer le hérisson  $(\mathcal{H}, x)$  avec  $\mathcal{H} = \partial K$  et  $x = \nu^{-1}$ . En particulier, la fonction de support du hérisson  $\mathcal{H}$  est également la fonction de support du corps convexe  $K$ .*

Mais pourquoi choisir  $(\mathcal{H}, x)$  alors que nous aurions pu envisager une définition analogue à  $(\partial K, \nu)$  en appliquant la définition 1.3.1 de la page 40 pour des différences de bord de corps convexe? Cela provient du fait que si nous considérons une fonction  $h$  qui est nulle sur un ouvert  $\mathcal{W} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ , alors il n'est pas possible de définir<sup>6</sup> la normale de l'enveloppe  $x_h(\mathbb{S}^{n-1})$  comme étant une application  $\nu : x_h(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . En particulier, la définition pour le bord  $\partial K$  d'un corps convexe est suffisante, car le paramétrage de  $\partial K$  n'admet pas de point critique. Mais cela n'est évidemment pas le cas pour les hérissons en général. C'est précisément cette contrainte qui justifie la démarche adoptée pour définir la notion de hérisson. Dès lors, il nous faut considérer la propriété suivante :

**Propriété 1.2.2.** *Toute famille d'hyperplans co-orientés  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$ , et de fonction de support  $h$ , admet une unique enveloppe paramétrée  $\mathcal{H}$  (qui est par définition un hérisson euclidien). De plus, son paramétrage  $x : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est unique et vérifie l'expression suivante :*

$$x(u) = h(u)u + \vec{\nabla} h(u) \quad (1.2.0.2)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

*Démonstration.* Supposons d'abord l'existence d'une telle enveloppe. Si  $x : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est le paramétrage de l'enveloppe en question, alors par définition, il vérifie l'expression suivante :

$$x(u) = h(u)u + \vec{V}(u)$$

avec  $\vec{V}(u) \perp u$ .

Nous savons aussi que par définition du paramétrage d'une enveloppe, l'application  $x$  vérifie les deux conditions suivantes :  $x(u) \in \Sigma_u$  et si  $\vec{W} \in T_u \mathbb{S}^{n-1}$  alors  $d_u x \cdot \vec{W} \perp u$ . Ainsi, on a que  $\langle x(u) | u \rangle = h(u)$  et  $\langle x(u) | \vec{W} \rangle = d_u h(\vec{W})$ . En particulier, on obtient que pour tout  $\vec{W} \in T_u \mathbb{S}^{n-1}$ ,

6. Ce n'est pas seulement dû au fait que  $x_h(\mathbb{S}^{n-1})$  admet des points critiques (i.e. valeurs critiques pour  $x_h$ ). En effet, si nous considérons l'exemple de hérisson présenté dans la figure 1.8 de la page 40, il est parfaitement possible de définir l'application normale  $\nu : x_h(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  en imposant la condition  $\nu \circ x_h(u) = u$ . Il s'agirait d'une application continue et lisse sur les valeurs régulières de  $x_h$ . Mais dans le cas d'un hérisson dont la fonction de support  $h$  vérifie qu'il existe un ouvert  $\mathcal{W} \subset \mathbb{S}^{n-1}$  sur lequel elle est nulle, alors la fonction  $\nu$  n'est pas définissable sur  $\{x\} = x_h(\mathcal{W})$ .

$$\langle \vec{V}(u) | \vec{W} \rangle = d_u h(\vec{W}) \text{ et donc } \vec{V}(u) = \vec{\nabla} h(u).$$

Enfin, si l'on considère une famille d'hyperplans co-orientés de fonction de support  $h$ , alors l'application  $x(u) = h(u)u + \vec{\nabla} h(u)$  remplit forcément les conditions requises pour être un paramétrage de l'enveloppe associée à cette famille d'hyperplans.  $\square$

Nous pouvons immédiatement remarquer que le paramétrage  $x_h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  d'un hérisson euclidien  $\mathcal{H}_h$  peut être interprété comme étant la réciproque de son application de Gauss. En effet, si  $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  n'est pas un point critique, alors il existe un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$  centré en  $u_0$  sur lequel la restriction de  $x_h$  est un plongement. Pour vérifier cela, on considère les deux propositions suivantes :

**Propriété 1.2.3.** *Si  $f : M \mapsto N$  est une injection continue définie sur un compact, avec  $M$  et  $N$  deux espaces topologiques séparés, alors c'est un plongement topologique<sup>7</sup>.*

**Note.** *Il est alors immédiat que si  $f$  est une immersion injective définie sur un compact, alors c'est un plongement différentiel.*

*Démonstration.* En effet, comme  $M$  est compact, l'image d'un fermé est fermée dans  $N$  car elle est compacte. Il est donc immédiat que si  $\mathcal{W} = M \setminus F$  est ouvert, alors  $f(\mathcal{W}) = f(M) \cap (N \setminus f(F))$  est ouvert dans  $f(M)$ , muni de la topologie induite par  $N$ .  $\square$

**Propriété 1.2.4.** *Soit  $\mathcal{H}_h$  un hérisson de paramétrage  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$ . Si  $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  est un point régulier pour  $x$ , alors il existe un ouvert  $\mathcal{W} \subset \mathbb{S}^{n-1}$  sur lequel l'application  $x$  est un plongement différentiel.*

*Démonstration.* Considérons  $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  un point tel que la différentielle  $d_{u_0} x : \langle u \rangle^\perp \mapsto \langle u \rangle^\perp$  soit injective. Il est alors clair qu'il existe  $\mathcal{V} \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un ouvert centré en  $u_0$  sur lequel la différentielle  $dx$  est toujours injective. On peut alors supposer que le paramétrage est injectif sur  $\mathcal{V}$  (via application du théorème d'inversion locale). Considérons donc  $\mathcal{W} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{V}$  avec  $\mathcal{W}$  ouvert et  $\mathcal{F}$  fermé. Alors, par la propriété précédente, l'application  $x$  est un plongement topologique sur  $\mathcal{F}$  et ainsi un plongement différentiel sur  $\mathcal{W}$ .  $\square$

À partir de là, nous savons que  $x_h(\Omega)$  est une hypersurface orientée de  $\mathbb{R}^n$  pour laquelle on peut choisir l'application de Gauss  $\mathcal{N} : x_h(\Omega) \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  vérifiant :

$$\mathcal{N} \circ x_h(u) = u \tag{1.2.0.3}$$

pour tout  $u \in \Omega$ .

C'est pour cela que R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg ont intitulé leur article "Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss)". De plus, l'utilisation de la terminologie "hérisson" est parfaitement justifiée sachant que les normales de l'enveloppe  $\mathcal{H} = x_h(\mathbb{S}^{n-1})$  se répartissent comme les piques à la surface d'un hérisson.

7. Nous rappelons qu'un plongement topologique est une application  $f : M \mapsto N$  qui est un homéomorphisme sur son image  $f(M)$ , avec  $f(M) \subset N$  muni de la topologie induite par  $N$ . Un plongement différentiel est alors une application lisse  $f : M \mapsto N$ , entre deux variétés différentielles, qui est un plongement topologique dont la différentielle est toujours injective. En particulier, l'image  $f(M)$  d'un plongement différentiel est une sous-variété différentielle de  $N$  et donc l'application  $f$  est un difféomorphisme sur son image.

**Remarque 1.2.7.** Si  $K$  est un corps convexe dont le paramétrage du bord  $\partial K$ , vu comme un hérisson, est  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \partial K$  et  $\nu : \partial K \mapsto \mathbb{R}^n$  le champ orthonormal sortant, alors on a toujours que, pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  :

$$\nu \circ x(u) = u \tag{1.2.0.4}$$

En particulier, si le corps  $K$  est de classe  $\mathcal{C}_+^k$ , alors le champ orthonormal sortant  $\nu : \partial K \mapsto \mathbb{R}^n$  est également de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Définition 1.2.6.** Soit  $\mathcal{H}_h$  un hérisson de paramétrage  $x_h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$ . On appelle **fonction de courbure**<sup>8</sup> la fonction  $R_h := \det(dx_h) : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ .

**Note.** Pour bien comprendre cette définition, il faut remarquer que la fonction  $d_u x_h$  est forcément un endomorphisme de  $T_u \mathbb{S}^{n-1} = \langle u \rangle^\perp$ .

**Remarque 1.2.8.** Il est intéressant de noter que lorsque nous parlerons de hérisson, le paramétrage joue un rôle analogue à l'application de Gauss du bord d'un corps convexe. De la même manière, la fonction de courbure remplace la courbure de Gauss.

**Remarque 1.2.9.** Une conséquence immédiate de la propriété 1.2.4 est qu'un hérisson euclidien est, en ses points réguliers<sup>9</sup>, une hypersurface orientée dont la courbure de Gauss n'est jamais nulle.

**Avertissement 1.2.3.** L'orientation naturelle d'un hérisson  $\mathcal{H}_h$  est l'orientation transverse définie sur l'hypersurface  $\mathcal{H}_h \setminus \{x_h(u) \mid R_h(u) = 0\}$  via l'application de Gauss  $N : \mathbb{S}^{n-1} \setminus R_h^{-1}(0) \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  telle que :

- $N(u) = u$  lorsque  $R_h(u) > 0$ .
- $N(u) = -u$  lorsque  $R_h(u) < 0$ .

Cette orientation permet en particulier de déterminer les volumes et volumes mixtes, qui, étant une problématique fondamentale dans la théorie de Brunn-Minkowski, le sont aussi dans la théorie des hérissons. Néanmoins, dans ce document, lorsque nous parlerons d'application de Gauss d'un hérisson (tout comme à la partie II, pour les h-hérisson et g-hérisson), ce sera dans le sens de la relation (1.2.0.3).

Nous pouvons conclure cette première partie en constatant que la notion de hérisson peut être considérée selon deux points de vue parfaitement équivalents. D'une part, le point de vue où l'on considère un hérisson euclidien comme l'enveloppe d'une famille d'hyperplans co-orientés (c'est-à-dire dont la famille des hyperplans tangents vérifie la condition d'injectivité), et d'autre part, le point de vue qui voit un hérisson comme une hypersurface orientée, admettant des points critiques, paramétrée par l'inverse de son application de Gauss. Considérer comme distincts ces deux points de vue est totalement superflu pour les hérissons euclidiens. Toutefois, nous verrons à la partie II que lorsque nous voudrions définir la notion de hérisson sur des espaces comme l'espace hyperbolique, la distinction de ces deux points de vue occupera une place importante dans la compréhension de la notion de hérisson.

8. Pour en savoir plus sur la fonction de courbure  $R_h$  d'un hérisson, qui joue un rôle important dans la théorie des hérissons, il est possible de consulter l'article [70].

9. Les points critiques d'un hérisson  $\mathcal{H}$  correspondent évidemment aux valeurs critiques de son paramétrage de Gauss.

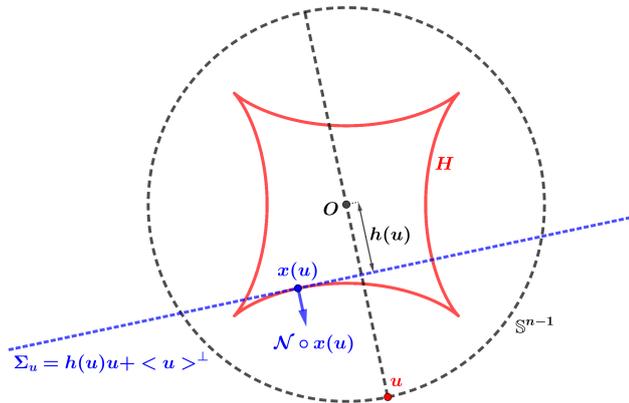


FIGURE 1.8 – Illustration des "deux points de vue" d'un hérisson euclidien sur le plan

Pour conclure ce chapitre, il nous faut discuter des propriétés algébriques que vérifient les hérissons euclidiens ainsi que leurs liens avec les corps convexes, pour s'assurer qu'ils correspondent bien à des différences de corps convexes. Notons que ces caractéristiques constituent le point central de la théorie des hérissons.

### 1.3 Propriétés combinatoires et correspondance avec les corps convexes

Comme nous en avons déjà discuté, il est nécessaire de relier la notion de hérisson aux différences de corps convexes. Tout d'abord, il est facile de constater que le bord d'un corps convexe est nécessairement un hérisson euclidien dont la fonction de support vérifie la relation (1.1.0.6) de la page 33. Ensuite, nous pouvons combiner les corps convexes ainsi que leurs bords en considérant la définition suivante :

**Définition 1.3.1.** Soit  $K_1$  et  $K_2$  deux corps convexes et  $\lambda > 0$ . Nous considérons alors les deux opérations suivantes :

1.  $K_1 + \lambda K_2 = \{x_1 + \lambda x_2, \text{ avec } x_1 \in K_1 \text{ et } x_2 \in K_2\}$ , que l'on appelle en particulier **somme de Minkowski**.
2.  $\partial K_1 + \lambda \partial K_2 = \{x_1 + \lambda x_2 \text{ avec } x_1 \in \partial K_1, x_2 \in \partial K_2 \text{ tels que } \nu_1(x_1) = \nu_2(x_2)\}$ , que l'on munit du champ orthonormal  $\nu(x_1 + \lambda x_2) = \nu_1(x_1) = \nu_2(x_2)$  pour tout  $x_1 + \lambda x_2 \in \partial K_1 + \lambda \partial K_2$ .

**Note.** Nous précisons que  $\nu_1$  et  $\nu_2$  correspondent aux applications orthonormales sortant des corps convexes respectifs  $K_1$  et  $K_2$ .

**Propriété 1.3.1.** Soit  $K_1$  et  $K_2$  deux corps convexes avec comme fonctions de support  $h_1$  et  $h_2$ , et soit  $\lambda > 0$  un scalaire. Alors  $K_1 + \lambda K_2$  est un corps convexe dont le bord est  $\partial K_1 + \lambda \partial K_2$  et dont la fonction de support est  $h_1 + \lambda h_2$ .

*Démonstration.* Voir théorème 1.7.5 page 48 de [100]. □

Cette correspondance entre la somme de Minkowski et la somme des bords nous indique que les différences de bords de corps convexes permettent de réaliser géométriquement les différences formelles (pour la somme de Minkowski) de corps convexes. Ainsi, nous définissons les opérations combinatoires sur les hérissons euclidiens de la manière suivante :

**Définition 1.3.2.** Soit  $\mathcal{H}_{h_1}$  et  $\mathcal{H}_{h_2}$  deux hérissons. On définit alors les opérations combinatoires sur l'ensemble des hérissons euclidiens comme ci-dessous :

$$\mathcal{H}_{h_1} + \lambda\mathcal{H}_{h_2} = (\text{Img}(x_1 + \lambda x_2), x_1 + \lambda x_2) \quad (1.3.0.1)$$

avec  $x_1$  et  $x_2$  étant les paramétrages respectifs.

**Remarque 1.3.1.** Il est alors immédiat que si  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont deux hérissons euclidiens avec  $h_1$  et  $h_2$  pour fonctions de support et pour paramétrages  $x_1$  et  $x_2$ , alors la composition  $\mathcal{H}_1 + \lambda\mathcal{H}_2$  est un hérisson dont la fonction de support est  $h_1 + \lambda h_2$  et dont le paramétrage est  $x_{h_1} + \lambda x_{h_2}$ .

En particulier, il est clair que toute différence  $\partial K_1 - \partial K_2$  entre bords de corps convexes est un hérisson avec pour fonction de support  $h_{K_1} - h_{K_2}$ . Cette fonction n'est pas nécessairement celle d'un corps convexe. Cependant, pour associer les hérissons aux corps convexes, nous souhaitons alors montrer que tout hérisson est une différence entre bords de corps convexes. C'est précisément ce que nous abordons ci-dessous :

**Définition 1.3.3.** Soit  $\mathcal{H}_h$  un hérisson avec comme paramétrage  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$ . Nous appellerons **rayon de courbure principale en  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$**  les valeurs propres  $\left\{ r_1^{(u)}, \dots, r_{n-1}^{(u)} \right\}$  de l'endomorphisme  $d_u x : T_u \mathbb{S}^{n-1} \mapsto T_u \mathbb{R}^n$ .

**Note.** Nous évoquerons souvent les rayons de courbure principaux comme étant une famille de fonctions  $r_i : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ . Cependant, il est important de souligner que ces fonctions ne sont pas toujours lisses. Néanmoins, la fonction de courbure  $R_h := r_1 \cdots r_{n-1}$  l'est.

**Propriété 1.3.2.** Soit  $\mathcal{H}_h$  un hérisson ayant pour fonction de support  $h$  et pour paramétrage  $x$ . La différentielle du paramétrage vérifie l'expression ci-dessous :

$$d_u x \cdot \vec{W} = h(u)\vec{W} + \text{Hess}(h)_u * \vec{W} \in T_u \mathbb{S}^{n-1} \quad (1.3.0.2)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  et  $\vec{W} \in T_u \mathbb{S}^{n-1}$ . De plus, comme l'endomorphisme  $d_u x$  est symétrique pour le produit scalaire, les fonctions de rayon de courbure principales existent bien en chaque point de la sphère.

*Démonstration.* Considérons  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  un hérisson ayant pour fonction de support  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  et pour paramétrage  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$ . Commençons par définir les fonctions  $\alpha : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$  et  $\beta : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$  telles que :

$$\alpha(x) = \sqrt{\langle x|x \rangle} \text{ et } \beta(x) = \frac{1}{\sqrt{\langle x|x \rangle}}$$

Nous trouvons alors que  $d_x \alpha \cdot \vec{W} = \beta(x) \langle x|\vec{W} \rangle$  et  $d_x \beta \cdot \vec{W} = -\beta(x)^3 \langle x|\vec{W} \rangle$ . Examinons ensuite les fonctions  $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$  et  $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$  où  $\tilde{h}(x) = h(\beta(x)x)$ . Après un petit calcul en utilisant les coordonnées polaires, on obtient :

$$x(u) = h(u)u + \vec{\nabla}_S h(u) = \vec{\nabla} \varphi(u)$$

Il est important de noter que les gradients  $\vec{\nabla}_S h(u)$  et  $\vec{\nabla} \varphi(u)$  sont respectivement définis sur la sphère  $(\mathbb{S}^{n-1}, g_S)$  munie de la métrique usuelle et sur l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ . Ainsi, nous avons :

$$d_u x \cdot \vec{W} = d_u \left[ \vec{\nabla} \varphi \right] \cdot \vec{W}$$

Toute la difficulté se résume à trouver un système de coordonnées sur la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  qui se prolonge sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et qui nous permette de calculer facilement sur la sphère la différentielle  $\vec{\nabla}\varphi$ . Pour cela, on commence par remarquer que sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  :

$$\vec{\nabla}\varphi(x) = \beta(x)\tilde{h}(x)x + \alpha(x)\vec{\nabla}\tilde{h}(x)$$

Pour comprendre cette dernière relation, il nous faut considérer la base canonique  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, on calcule que  $\partial_i[\varphi]_x = \beta(x)x_i\tilde{h}(x)\vec{v}_i + \alpha(x)\partial_i\tilde{h}(x)\vec{v}_i$ . De là, on obtient notre relation.

A présent, considérons un point  $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Nous allons donc pouvoir déterminer la relation (1.3.0.2) en  $u_0$ . Pour ce faire, nous choisissons une base orthonormale  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$  de l'hyperplan tangent  $T_{u_0}\mathbb{S}^{n-1}$ . Si  $exp_{u_0} : \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{-u_0\} \mapsto T_{u_0}\mathbb{S}^{n-1}$  est la carte exponentielle en  $u_0$ , alors nous définissons le repère différentiel  $(\partial_1, \dots, \partial_{n-1})$  vérifiant que pour tous les points  $u \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{-u_0\}$  :

$$\partial_i(u) = (d_u exp_{u_0})^{-1} \cdot \vec{e}_i$$

Nous pouvons facilement prolonger ces champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{\lambda u_0 \text{ tq } \lambda \leq 0\}$  en considérant les  $(\partial_1, \dots, \partial_{n-1})$  tels que  $\partial_i(x) = (d_u exp_{u_0})^{-1} \cdot \vec{e}_i$  avec  $u = \beta(x)x$ . En complétant avec le champ  $\partial_n(x) = \beta(x)x$ , nous obtenons un repère différentiel sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{\lambda u_0 \text{ tq } \lambda \leq 0\}$ . Nous pouvons alors vérifier que pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{-u_0\}$  et  $i, j$  dans  $\{1, \dots, n-1\}$ , on a :

$$\partial_i\tilde{h}(u) = \partial_i h(u), \partial_{ij}^2\tilde{h}(u) = \partial_{ij}^2 h(u), \partial_n\tilde{h}(u) = 0 \text{ et } \partial_{in}^2\tilde{h}(u) = 0$$

Si les deux premiers points sont immédiats, nous obtenons les deux derniers en constatant que si  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\lambda u_0 \text{ tq } \lambda \leq 0\}$  alors  $d_x\tilde{h} \cdot \vec{W} = \beta(x)d_{\beta(x)x}h(\vec{W} - \beta(x)^2 \langle x | \vec{W} \rangle x)$ . Il est alors clair que  $d_x\tilde{h} \cdot \partial_n(x) = 0$  et ainsi  $\partial_{in}^2\tilde{h}(x) = 0$ .

Rappelons ensuite que nous construisons la carte exponentielle  $exp_{u_0}$  en inversant localement en zéro la fonction lisse  $f : T_{u_0}\mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  telle que  $f(t\vec{v}) = \text{Cos}(t)u_0 + \text{Sin}(t)\vec{v}$ , avec  $t \geq 0$  et  $\vec{v} \in S[T_{u_0}\mathbb{S}^{n-1}]$ . Ainsi, nous savons que  $\partial_i \circ f(t\vec{e}_i) = -\text{Sin}(t)u_0 + \text{Cos}(t)\vec{e}_i$  avec, bien sûr,  $i$  dans  $\{1, \dots, n-1\}$ . Alors, en remarquant que  $\partial_t[\partial_i \circ f(t\vec{e}_i)]_{t=0} = d_{u_0}[\partial_i] \cdot \partial_t[f(t\vec{e}_i)]_{t=0} = d_{u_0}[\partial_i] \cdot \vec{e}_i$ , nous obtenons :

$$\partial_i[\partial_i(x)]_{x=u_0} = d_{u_0}[\partial_i] \cdot \vec{e}_i = \partial_t[\partial_i \circ f(t\vec{e}_i)]_{t=0} = -u_0$$

Ensuite, pour  $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$  distincts, il est clair que  $\partial_i \circ f(t\vec{e}_j) = \vec{e}_j$  et donc  $\partial_j[\partial_i(x)]_{x=u_0} = 0$ . Nous pouvons alors remarquer que ce que nous obtenons est cohérent avec  $\nabla(\partial_i)_{u_0} \cdot \partial_j(u_0) = 0$  pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, n-1\}$ , où  $\nabla : \Delta(\mathbb{S}^{n-1}) \mapsto \Omega_1(\mathbb{S}^{n-1}) \otimes \Delta(\mathbb{S}^{n-1})$  est la connexion de Levi-Civita pour la métrique induite de la sphère. Ainsi, comme  $x(u_0) = \beta(u_0)\tilde{h}(u_0)u_0 + \alpha(u_0)[\partial_1\tilde{h}(u_0)\partial_1(u_0) + \dots + \partial_{n-1}\tilde{h}(u_0)\partial_{n-1}(u_0)]$ , nous pouvons faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} d_{u_0}x \cdot \vec{e}_i &= \partial_i x(u_0) = \beta(u_0)\tilde{h}(u_0)u_0 + \beta(u_0)\tilde{h}(u_0)\partial_i(u_0) \\ &\quad + \alpha(u_0)[\partial_{i,1}^2\tilde{h}(u_0)\partial_1(u_0) + \dots + \partial_{i,n-1}^2\tilde{h}(u_0)\partial_{n-1}(u_0) - \partial_i\tilde{h}(u_0)u_0] \end{aligned}$$

ce qui nous donne que :

$$\begin{aligned} d_{u_0}x \cdot \vec{e}_i &= \partial_i h(u_0)u_0 + h(u_0)\vec{e}_i + \partial_{i,1}^2 h(u_0)\vec{e}_1 + \cdots + \partial_{i,n-1}^2 h(u_0)\vec{e}_{n-1} - \partial_i h(u_0)u_0 \\ &= h(u_0)\vec{e}_i + \text{Hess}(h)_{u_0} * \vec{e}_i \end{aligned}$$

et ainsi, nous obtenons le résultat recherché.  $\square$

**Propriété 1.3.3.** *Tout hérisson  $\mathcal{H}_h$  dont les fonctions de rayon de courbure principal sont partout strictement positives correspond au bord d'un corps convexe.*

*Démonstration.* Considérons  $\mathcal{H}_h$ , un hérisson paramétré par  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  et de fonction de support  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ . Soit  $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  un point. Nous définissons alors la fonction  $\eta : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  par :

$$\eta(u) = \langle u_0 | x(u) - x_0 \rangle$$

où  $x_0 = x(u_0)$ .

Il est clair que  $d_u \eta \cdot \vec{W} = \langle u_0 | d_u x \cdot \vec{W} \rangle$ . En particulier, en nous plaçant dans la base propre  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}\}$  de l'endomorphisme  $d_u x$  pour le point  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , nous avons :

$$\partial_i \eta(u) = r_i(u) \langle u_0 | \vec{v}_i \rangle$$

Ainsi, le gradient  $\vec{\nabla} \eta(u)$  s'annule uniquement aux points  $u_0$  et  $-u_0$ . Par conséquent, la fonction  $\eta$ , définie sur un compact, admet un minimum et un maximum qui doivent correspondre aux points  $u_0$  et  $-u_0$ . Les rayons de courbure étant strictement positifs, nous pouvons vérifier que  $u_0$  est le maximum de  $\eta$ . En effet, on sait que  $\mathcal{H}_h$  est une hypersurface et  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathcal{H}_h$  est un difféomorphisme. Aussi, par construction, l'application  $\nu := x^{-1} : \mathcal{H}_h \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  est le champ orthonormal correspondant aux courbures principales qui sont strictement positives. Ensuite, si pour  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , on considère  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1})$  une base propre de l'endomorphisme  $d_u x$ , il nous faut remarquer que c'est forcément une base propre de l'opérateur de Weingarten  $d_x \nu : T_x \mathcal{H}_h \mapsto T_x \mathcal{H}_h$ , avec  $x = x(u)$ . Considérons donc  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1})$  une base propre de l'endomorphisme  $d_{u_0} x$  et, pour le  $i$ -ème vecteur propre, on définit le 2-plan affine  $\mathcal{P}_i = x_0 + \mathbb{R}u_0 \oplus \mathbb{R}\vec{v}_i$ , avec  $x_0 = x(u_0)$ . Il est alors clair que l'intersection  $\mathcal{H}_h \cap \mathcal{P}_i$  correspond localement (au voisinage de  $x_0$ ) à une courbe paramétrée dont la courbure d'arc est strictement positive. En particulier, on a que  $\langle u_0 | x - x_0 \rangle \leq 0$  au voisinage de  $x_0$  sur  $\mathcal{H}_h \cap \mathcal{P}_i$  et en appliquant le même raisonnement pour tous les autres vecteurs propres, on obtient bien que  $u_0$  est le maximum de la fonction  $\eta$ .

Si  $H_{u_0} = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle u_0 | y - x_0 \rangle \leq 0\}$  est le demi-espace bordant  $T_{u_0} = x_0 + \langle u_0 \rangle^\perp$ , alors, de ce qu'il précède, on sait que  $\mathcal{H}_h \subset H_{u_0}$ . En appliquant la même opération à tous les points  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  de la sphère, la famille des demi-espaces  $H_u$  ainsi définie vérifie que :

$$\mathcal{H}_h \subset H_u$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

En particulier, nous avons  $\mathcal{H}_h \subset K = \bigcap H_u$ , où  $K$  est clairement un ensemble convexe, compact et non vide (donc un corps convexe). Enfin, si nous considérons  $T_u = x(u) + \langle u \rangle^\perp$ , il est clair qu'il s'agit d'un hyperplan de support, car  $K \subset H_u$  et  $x(u) \in T_u \cap K$ . Ainsi on a que  $\mathcal{H}_h = \text{Supp}(K) = \partial K$  et donc le hérisson  $\mathcal{H}_h$  correspond bien au bord du corps  $K$ ,

dont l'application  $\nu := x^{-1} : \mathcal{H}_h \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$ , vu précédemment, correspond au champ orthonormal sortant.  $\square$

**Propriété 1.3.4.** *Tout hérisson euclidien est une différence de bords de corps convexes. C'est-à-dire que pour tout hérisson euclidien  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ , il existe deux corps convexes  $K_1$  et  $K_2$  tels que :*

$$\mathcal{H} = \partial K_1 - \partial K_2 \quad (1.3.0.3)$$

*Démonstration.* Nous avons vu que  $d_u x \cdot \vec{W} = h(u)\vec{W} + Hess(h)_u * \vec{W} \in T_u \mathbb{S}^{n-1}$ . Il est alors clair qu'il existe un  $\lambda > 0$  pour lequel les fonctions des rayons de courbure principaux (pour  $x_{h+\lambda}$ ) sont partout strictement positives et par la propriété 1.3.3 vue précédemment, le hérisson  $\mathcal{H}_{h+\lambda}$  est forcément le bord d'un corps convexe. Enfin, la remarque combinatoire 1.3.1, nous permet de conclure que  $\mathcal{H}_h$  est bien une différence de bords de corps convexes du fait que  $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}_{h+\lambda} - \mathcal{H}_\lambda$ .  $\square$

Nous savons donc que tout hérisson est une différence de bords de corps convexes, ce qui justifie que l'on parle bien d'un prolongement de la théorie de Brunn-Minkowski aux différences de corps convexes. En particulier, sur le plan, il est facile de comprendre la mécanique des opérations que nous avons considérées, comme nous l'illustrons<sup>10</sup> ci-dessous :

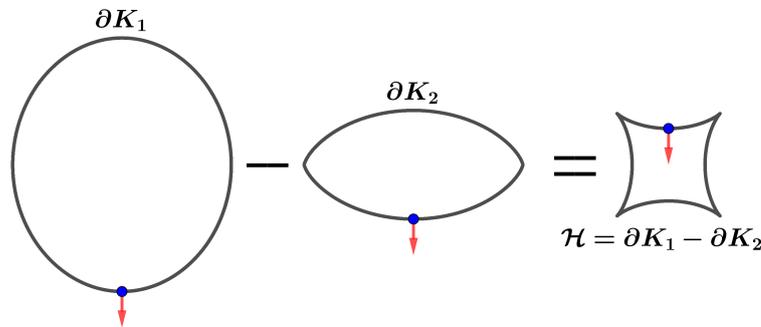
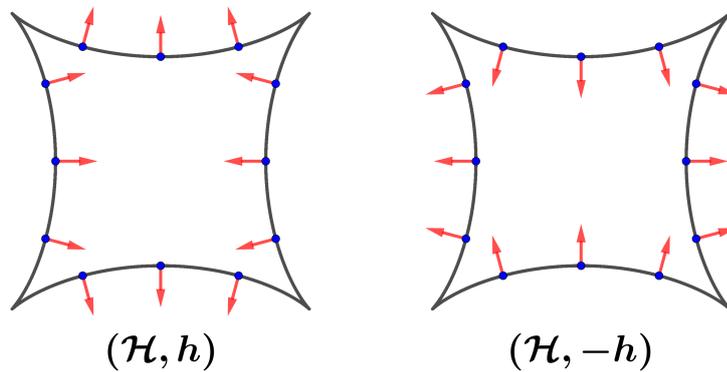


FIGURE 1.9 – Hérisson comme différence de bord de corps convexe.

Remarquons aussi que si  $(\partial K, \nu)$  est le bord d'un corps convexe, nous pouvons voir que le symétrique, en considérant l'expression (1.3.0.1), correspond bien à  $(\partial K, -\nu)$ , l'ensemble des points de support muni de la normale entrante du corps convexe  $K$ . Et cette remarque s'applique aussi au hérisson, comme nous l'illustrons ci-dessous :

<sup>10</sup>. Nous tirons cette illustration de la présentation [75] correspondant à un séminaire donné par Y. Martinez-Maure en 2018 pour exposer ses travaux (voir [74]) sur lesquels repose le sujet de cette thèse.

FIGURE 1.10 – Inversion de la normale entre  $\mathcal{H}_h$  et  $-\mathcal{H}_h$ .

Profitons de la fin de cette section pour une petite conclusion. Comme nous l'avons répété à plusieurs reprises maintenant, la notion de hérisson provient de la volonté de prolonger la théorie de Brunn-Minkowski aux différences de corps convexes. Dans ce document, nous nous contenterons de juste définir les hérissons, mais nous pouvons observer que l'usage des hérissons est très varié. En effet, il est déjà possible de prolonger aux hérissons certaines inégalités connues sur les corps convexes (voir [60], [65]), mais c'est aussi un très bon outil pour générer des contre-exemples<sup>11</sup>. Aujourd'hui, la notion de hérisson s'est enrichie avec des objets qui vérifient des caractéristiques communes et qui justifient de les appeler ainsi sans forcément avoir un lien aussi direct avec les corps convexes. Nous avons dans cette catégorie : les hérissons lorentziens, fuchsien (voir [72]), complexes (voir [77]) ou encore marginalement piégés (voir [74]). Sans compter les différentes caractérisations comme les hérissons minimal (voir [92] et [67]), ou les hérissons projectifs (voir [90]) qui suscitent un grand intérêt dans l'étude des courbes à longueur constante.

---

11. Nous pouvons consulter [63] dans lequel Y. Martinez-Maure propose un contre-exemple à la conjecture de A.D.Aleksandrov.



## Chapitre 2

# Conditions de contact et structures de contact pour les hérissons euclidiens

Un hérisson euclidien étant, comme nous l'avons vu précédemment, l'enveloppe d'une famille d'hyperplans co-orientés, nous allons voir qu'il est naturel de les définir comme étant le front legendrien d'un certain type d'immersion de Legendre. En particulier, nous verrons que la géométrie de contact offre un cadre adéquat pour généraliser la notion de hérisson.

### 2.1 Structure de contact usuelle sur $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$

Une structure de contact est la donnée d'une  $(2n + 1)$ -variété  $M$  et d'une 1-forme  $\alpha \in \Omega_1(M)$ , dite **forme de contact**, vérifiant la condition de **maximale non-intégrabilité**  $\alpha \wedge d\alpha^n \neq 0$ . Pour en savoir plus, il est possible de se rapporter à l'annexe B que nous dédions à la présentation des éléments de base de la géométrie de contact. Pour les besoins de ce chapitre (et des chapitres 7 et 10 de la partie II), nous nous contenterons des deux définitions suivantes :

**Définition 2.1.1.** Soit  $(M, \alpha)$  une  $(2n + 1)$ -variété de contact. Alors, nous dirons qu'une application  $i : \Gamma \rightarrow M$ , avec  $\Gamma$  une  $n$ -variété différentielle, est une **immersion de Legendre** si c'est une immersion telle que : pour tout  $u \in \Gamma$  et  $\vec{W} \in T_u\Gamma$ ,  $d_u i \cdot \vec{W} \in \text{Ker}(\alpha_{i(u)})$ .

**Note.** Nous dirons aussi qu'une sous-variété  $\mathcal{L} \subset M$  est une **sous-variété de Legendre** si elle est de dimension  $n$  et vérifie que pour tout  $x \in \mathcal{L}$  l'espace tangent vérifie  $T_x\mathcal{L} \subset \text{Ker}(\alpha_x)$ .

**Définition 2.1.2.** Soit  $(M, \alpha)$  une  $(2n + 1)$ -variété de contact. Alors, nous appellerons **fibré de Legendre** tout fibré lisse<sup>1</sup>  $p : M \rightarrow \beta$  dont les fibres sont des sous-variétés de Legendre.

**Note.** En particulier, si  $i : \Gamma \rightarrow M$  et  $p : M \rightarrow \beta$  sont respectivement une immersion et un fibré de Legendre, alors nous appellerons **front legendrien** la donnée de l'image  $p \circ i(\Gamma)$  et de l'application  $x := p \circ i : \Gamma \rightarrow \beta$  que l'on appellera **paramétrage**.

---

1. Un fibré lisse de fibre  $T$ , avec  $T$  une variété différentielle, est une submersion surjective  $p : \mathcal{E} \rightarrow \beta$  telle que pour tout  $b_0 \in \beta$ , il existe  $\mathcal{V} \subset \beta$  un ouvert centré en  $b_0$  ainsi qu'un difféomorphisme  $\phi : \mathcal{V} \times T \rightarrow p^{-1}(\mathcal{V})$ , que l'on appelle **trivialiseur local**, vérifiant que : pour tout  $(b, x) \in \mathcal{V} \times T$ ,  $p \circ \phi(b, x) = b$ .

Les variétés de contact induites par l'espace euclidien correspondent à un exemple classique de telle structure qui nous intéressera tout particulièrement. En effet, tout espace euclidien  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  induit naturellement une structure de contact sur  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ . La variété  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  étant de dimension impaire  $2n - 1$ , il nous suffit de considérer la 1-forme  $\alpha$  de  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  qui, en tout point  $w = (v, x)$  de  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  et pour tout vecteur  $\vec{W} = \vec{V} \oplus \vec{X} \in T_v \mathbb{S}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^n$ , associe le produit :

$$\alpha_w \cdot \vec{W} = \langle v | \vec{X} \rangle \quad (2.1.0.1)$$

qui est bien une forme de contact comme nous pouvons le vérifier en considérant la propriété ci-dessous :

**Propriété 2.1.1.** *La forme  $\alpha$  précédemment définie est une 1-forme de contact.*

*Démonstration.* Nous avons défini la 1-forme  $\alpha$  telle que pour tout point  $(v, x) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_{(v,x)} = v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n$ . Aussi, comme  $v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 + v_n^2 = 1$ , alors  $v_1 dv_1 + \dots + v_n dv_n = 0$  et en particulier, on obtient :

$$v_n d\alpha = dv_1 \wedge (v_n dx_1 - v_1 dx_n) + \dots + dv_{n-1} \wedge (v_n dx_{n-1} - v_{n-1} dx_n)$$

Après quelques calculs, on peut vérifier que  $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \sim dv_1 \wedge \dots \wedge dv_{n-1} \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , qui est alors bien une forme volume. Ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

Il est clair que les immersions de Legendre à image dans la structure de contact vue précédemment sont définies par la donnée de deux applications  $\nu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  et  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  telles que :

$$i(u) = (\nu(u), x(u)) \text{ et } \langle dx | \nu \rangle = 0 \quad (2.1.0.2)$$

Enfin, constatons que la projection  $\pi : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  est un fibré de Legendre. En effet, il suffit de voir que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la fibre  $\pi^{-1}(x)$  vérifie que  $T_{(u,x)} \pi^{-1}(x) = \langle u \rangle^\perp \oplus \{0\}$  et est donc bien une sous-variété de Legendre.

## 2.2 Les hérissons euclidiens vus comme fronts de Legendre

Pour les quelques éléments que nous considérerons au sujet des hérissons euclidiens en géométrie de contact, nous nous reposons sur l'article [74]. Commençons donc par constater que, en considérant la définition 1.2.5 page 36, il est immédiat que le paramétrage  $x$  d'un hérisson euclidien vérifie la condition ci-dessous :

$$\langle dx | u \rangle = 0 \quad (2.2.0.1)$$

et que l'on appelle naturellement **condition de contact**. En particulier, nous pouvons facilement remarquer que c'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  corresponde au paramétrage d'un hérisson euclidien. Il est alors immédiat que les hérissons euclidiens, dont les paramétrages  $x$  satisfont la condition de contact (2.2.0.1), correspondent à des immersions de Legendre de la forme  $i(u) = (u, x(u))$ . Par conséquence, nous pouvons donc résumer tout ce dont nous avons discuté par la propriété suivante :

**Propriété 2.2.1.** *Tout hérisson euclidien est le front legendrien d'une immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  de la forme :*

$$i(u) = (u, x(u)) \quad (2.2.0.2)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

*Démonstration.* Si  $(\mathcal{H}, x)$  est un hérisson avec pour fonction de support  $h$  et  $x$  est le paramétrage de l'enveloppe de la famille d'hyperplans co-orientés, on a :

$$\langle x(u)|u \rangle = h(u) \text{ et } \langle d_u x \cdot \vec{W} | u \rangle = 0$$

En particulier, le paramétrage  $x$  vérifie la condition de contact. Il est alors immédiat que  $(\mathcal{H}, x)$  est le front legendrien de  $i(u) = (u, x(u))$ , qui est bien-sûr une immersion de Legendre. Réciproquement, supposons que  $(\mathcal{H}, x)$  soit le front legendrien d'une immersion de Legendre de la forme  $i(u) = (u, x(u))$ . Comme le paramétrage  $x$  vérifie la condition de contact, alors, en considérant  $h(u) = \langle x(u)|u \rangle$ , il est clair que  $(\mathcal{H}, x)$  est un hérisson euclidien dont la fonction de support est  $h$ .  $\square$

Nous pouvons aussi remarquer que de telles immersions de Legendre sont forcément des difféomorphismes sur leur image, ce qui consiste à relever les hérissons dans une variété de dimension supérieure, éliminant ainsi les points critiques comme nous le représentons <sup>2</sup> ci-dessous :

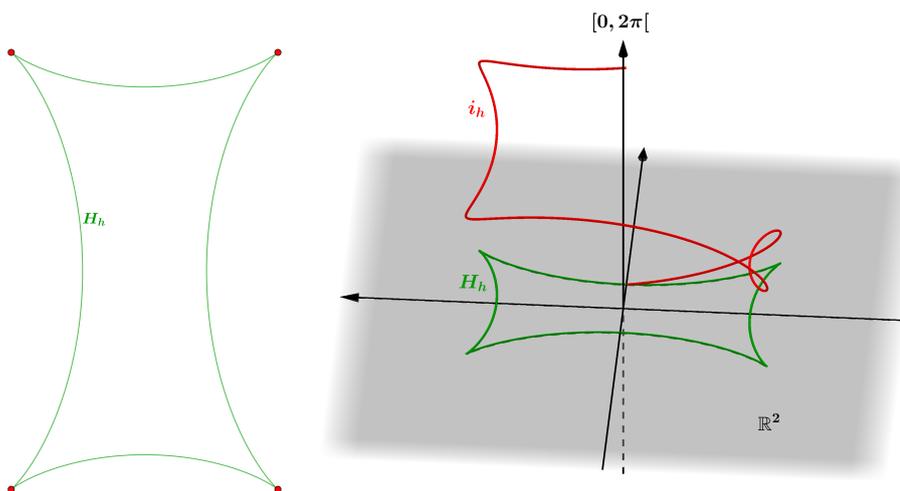


FIGURE 2.1 – Relèvement d'un hérisson euclidien en géométrie de contact.

## 2.3 Autre méthode pour décrire les hérissons en géométrie de contact

Il est intéressant de faire une rapide digression en considérant une autre représentation, bien évidemment équivalente, de la notion de hérisson en géométrie de contact. Remarquons que considérer l'enveloppe d'une famille d'hyperplans co-orientés consiste à considérer, pour tout

<sup>2</sup> Pour bien comprendre la figure 2.1, il nous faut noter que nous considérons le cercle  $\mathbb{S}^1$  via le paramétrage défini sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$ .

$u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , la donnée d'un vecteur  $\vec{V}(u) \in T_u \mathbb{S}^{n-1}$  et d'une longueur algébrique<sup>3</sup>  $h(u) \in \mathbb{R}$  telle que  $x_h(u)$  correspond à la translation selon le vecteur  $\vec{V}(u)$  du point  $h(u)u$ .

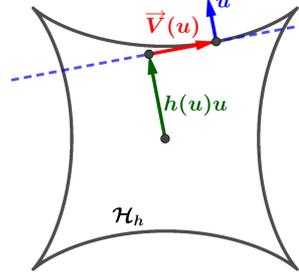


FIGURE 2.2 – Décomposition de l'enveloppe d'une famille d'hyperplans co-orientés.

La remarque précédente nous permet de faire correspondre tout point  $x_h(u)$  avec le triplet  $(u, \vec{V}(u), h(u))$  dans  $T\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Considérons donc la 1-forme de contact  $\beta$  qui, à  $w = (u, v, t) \in T\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$  et  $\vec{W} = \vec{U} \oplus \vec{V} \oplus T \in T_u \mathbb{S}^{n-1} \oplus T_u \mathbb{S}^{n-1} \oplus \mathbb{R}$ , donne :

$$\beta_w \cdot \vec{W} = T - \langle v | \vec{U} \rangle \quad (2.3.0.1)$$

Nous pouvons nous assurer que c'est bien une forme de contact en considérant des coordonnées locales de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  nous permettant de l'exprimer comme  $\beta = dt - v_1 du_1 - \dots - v_{n-1} du_{n-1}$ . Il n'est alors pas difficile de constater que  $\beta \wedge d\beta^{n-1} \sim dt \wedge du_1 \wedge \dots \wedge du_{n-1} \wedge dv_1 \wedge \dots \wedge dv_{n-1}$  et est donc bien une forme volume. Ensuite, constatons que la condition de contact (2.2.0.1) admet la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} \langle x|u \rangle = h \\ \langle x|du \rangle = dh \end{cases} \quad (2.3.0.2)$$

Enfin, pour comprendre la correspondance entre ces deux structures de contact, nous pouvons considérer le contacto-morphisme<sup>4</sup>  $f : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n \mapsto T\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$  que l'on définit par l'expression suivante :

$$f(u, x) = (u, x - \langle x|u \rangle u, \langle x|u \rangle) \quad (2.3.0.3)$$

On peut alors vérifier que toute immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  correspond, via ce contacto-morphisme, à une immersion de Legendre  $j : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto T\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Ainsi, si nous considérons le fibré de Legendre  $p : T\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$  défini par  $p(u, \vec{v}, \lambda) = \lambda u + \vec{v}$ , nous retrouvons bien que tout hérisson euclidien est le front legendrien d'une immersion de Legendre  $j : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto T\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$  de la forme :

$$j\left(u, \vec{\nabla} h(u), h(u)\right) \quad (2.3.0.4)$$

avec  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction lisse.

3. Il s'agit d'une longueur signée.

4. Nous appellerons donc **contacto-morphisme** entre deux variétés de contact  $(M_1, \alpha_1)$  et  $(M_2, \alpha_2)$  tout difféomorphisme  $f : M_1 \mapsto M_2$  vérifiant que :  $f^* \alpha_2 = \lambda \alpha_1$  avec  $\lambda \neq 0$

## 2.4 Proposition de généralisation de la notion de hérisson

Précédemment, nous avons caractérisé les hérissons euclidiens en géométrie de contact. Il est intéressant de constater que nous retrouvons aussi cette caractérisation pour d'autres types de hérissons comme les hérissons lorentziens (voir page 341 de [74]). Pour définir les hérissons lorentziens, on se place sur  $\mathbb{L}^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle \cdot | \cdot \rangle_L)$ , l'espace de Lorentz-Minkowski avec  $\langle \vec{V} | \vec{W} \rangle_L = V_1 W_1 + \dots + V_{n-1} W_{n-1} - V_n W_n$  le produit de Minkowski. Ainsi, un hérisson lorentzien correspondra à l'enveloppe paramétrée<sup>5</sup> des hyperplans d'équation  $\langle x | v \rangle = h(v)$ , où  $h : \mathcal{H}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  définie sur la pseudo-sphère  $\mathcal{H}^{n-1} = \{x \in \mathbb{L}^n \text{ tel que } \langle x | x \rangle_L = -1\}$ . À partir de là, en considérant la structure de contact  $(\mathcal{H}^{n-1} \times \mathbb{L}^n, \alpha)$  dont la forme de contact est  $\alpha_{(v,x)} := \langle v | dx \rangle_L$ , les hérissons lorentziens sont aussi le front legendrien d'immersion de Legendre de la forme  $i(v) = (v, x_h(v))$ . Plus récemment encore, Y.Martinez-Maure a retrouvé une telle caractérisation pour les hérissons complexes<sup>6</sup> (voir l'article [77] pour en savoir plus) en considérant la structure de contact holomorphe  $(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^n, \alpha)$ , avec  $\alpha$  la forme de contact holomorphe qui à tout point  $q = (z_1, \dots, z_{n-1}, w_0, \dots, w_{n-1})$  donne  $\alpha_q = dw_0 + z_1 dw_1 + \dots + z_{n-1} dw_{n-1}$ . Ainsi, dans ce cadre-là, tout hérisson complexe est aussi le front legendrien d'immersion de Legendre  $i : \mathbb{C}^{n-1} \mapsto \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^n$  de la forme  $i(z) = (z, x_h(z))$ , avec  $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$ .

Il apparaît de ce constat que les hérissons (quel que soit leur type) sont le front legendrien d'immersion de Legendre de la forme  $i(u) = (u, x(u))$  ou autrement dit "d'un certain type d'immersion de Legendre". Bien sûr, pour les quelques exemples que nous avons vus précédemment, il n'était pas nécessaire d'être plus exigeant sur cet énoncé. Mais en partie II, lorsque nous étudierons la caractérisation des g-hérissons et des h-hérissons en géométrie de contact, il nous sera nécessaire d'avoir une approche plus générale de ce que nous venons de considérer ici. Pour cela, nous considérons la définition suivante :

**Définition 2.4.1.** *Nous appellerons **application de Gauss legendrienne** d'une immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  la projection sur  $\mathbb{S}^{n-1}$  de  $i$ .*

Il est possible de considérer une telle définition pour toute immersion de Legendre du type  $i : \mathcal{H}^{n-1} \mapsto \mathcal{H}^{n-1} \times \mathbb{L}^n$  ou encore  $i : \mathbb{C}^{n-1} \mapsto \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^n$ . Ensuite, constatons que nous pouvons reformuler ce que nous avons vu précédemment sur la caractérisation des hérissons euclidiens en géométrie de contact, par l'énoncé suivant :

**Propriété 2.4.1.** *Tout hérisson euclidien est (à difféomorphisme près de  $\mathbb{S}^{n-1}$ ) le front legendrien d'une immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  dont l'application de Gauss legendrienne est un difféomorphisme.*

*Démonstration.* Considérons  $(\mathcal{H}, x)$  le front legendrien d'une immersion de Legendre  $i$  dont l'application de Gauss legendrienne  $\nu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  est un difféomorphisme. Il est alors immédiat que l'application  $x \circ \nu^{-1}$  vérifie la condition de contact et donc  $(\mathcal{H}, x \circ \nu^{-1})$  est un hérisson. La réciproque est encore plus évidente.  $\square$

5. Il s'agit, comme pour les hérissons euclidiens, de considérer la fonction  $x_h : \mathcal{H}^{n-1} \mapsto \mathbb{L}^n$  vérifiant les conditions de contact  $\langle x_h(v) | v \rangle_L = h(v)$  et  $\langle x_h(v) | \cdot \rangle_L = d_v h$ . En particulier, un tel paramétrage admet pour expression  $x_h(v) = \vec{\nabla} h(v) - h(v)v$ . (voir [72] pour en savoir plus)

6. Si  $h : \mathbb{C}^{n-1} \mapsto \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe, alors on définit le hérisson complexe pour la fonction de support  $h$  comme étant la donnée de l'image  $x_h(\mathbb{C}^{n-1})$  que l'on munit du paramétrage  $x_h : \mathbb{C}^{n-1} \mapsto \mathbb{C}^n$  défini par l'expression suivante :

$$x_h(z) = (h(z) - z_1 \partial_{z_1} h(z) - \dots - z_{n-1} \partial_{z_{n-1}} h(z), \partial_{z_1} h(z), \dots, \partial_{z_{n-1}} h(z))$$

avec  $z = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ .

En constatant que nous retrouvons le même énoncé pour les hérissons lorentziens et complexes dont nous avons parlé précédemment, nous pouvons donc envisager l'hypothèse de généralisation de la notion de hérisson que nous énonçons ci-dessous :

*Si  $(M, g)$  est une  $n$ -variété riemannienne (resp. lorentzienne ou hermitienne) isométriquement plongée dans  $(\mathbb{R}^N, \langle \cdot | \cdot \rangle_L)$  un  $\mathbb{R}$ -espace pseudo-euclidien (resp.  $(\mathbb{C}^N, \langle \cdot | \cdot \rangle_L)$  un  $\mathbb{C}$ -espace pseudo-hermitien), alors nous pourrions reconnaître un hérisson comme étant (avec quelques adaptations) le front legendrien<sup>7</sup> d'une immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto STM^n$  dont l'application de Gauss legendrienne est un difféomorphisme.*

Toute la difficulté réside, bien sûr, dans le fait de définir une notion d'application de Gauss legendrienne  $\nu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$ , comme nous avons pu le faire précédemment à la définition 2.4.1. C'est précisément la difficulté à laquelle nous serons confrontés au chapitre 7 pour caractériser les g-hérissons en géométrie de contact, nous permettant, en particulier, de retrouver un énoncé équivalent à la propriété 2.4.1 que nous avons précédemment considéré.

---

7. La structure de contact qui correspond au fibré des sphères est définie selon la méthode suivante : Considérons  $(M, g)$  une  $n$ -variété de Riemann isométriquement plongée dans  $(\mathbb{R}^N, \langle \cdot | \cdot \rangle_L)$  un  $\mathbb{R}$ -espace pseudo-euclidien, alors on définit sur le fibré des sphères  $STM$  la forme de contact  $\alpha$  qui, à  $w = (x, u) \in STM$  et  $\vec{W} = (\vec{X}, \vec{v}) \in T_{(x,u)}[STM] \sim T_x M \oplus T_u \mathbb{S}_x^{n-1}$ , avec  $\mathbb{S}_x^{n-1} = S[T_x M]$ , donne  $\alpha_w \cdot \vec{W} = \langle u | \vec{X} \rangle_L$ .

## Chapitre 3

# Dualité et caractérisation projective

En géométrie projective, les relations de dualité fournissent des méthodes classiques permettant d'aboutir à de nombreux résultats. Il n'est donc pas étonnant de retrouver une telle notion pour les hérissos euclidiens. Pour un exposé général sur la théorie des hérissos et en particulier sur leurs propriétés duales, nous pouvons consulter l'ouvrage [78] sur lequel nous nous baserons pour les notions que nous présentons dans ce chapitre.

### 3.1 Dualité d'un corps convexe de $\mathbb{R}^n$

Dans le cadre des corps convexes sur les espaces euclidiens, nous pouvons distinguer deux notions de dualité : la dualité polaire par rapport à la sphère et la dualité projective. En particulier, nous verrons que ces deux notions fournissent les mêmes objets à un signe près. Nous nous contenterons ici d'exposer le strict nécessaire sur ce sujet afin d'éviter d'alourdir inutilement notre texte. Néanmoins, une présentation plus exhaustive de la notion de dualité en géométrie projective est donnée à l'annexe D de ce document. En particulier, nous y prenons le temps d'étudier le sens géométrique des expressions (3.1.1.1) et (3.1.3).

#### 3.1.1 Dualité polaire par rapport à la sphère

Classiquement, lorsque l'on considère la notion de dualité en ce qui concerne les corps convexes, on parle de dualité polaire (voir section 1.6 de [100] pour en savoir plus). Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  est un corps convexe centré en zéro (c'est-à-dire que  $\text{Int}(K)$  contient zéro), alors on appelle **dual polaire par rapport à la sphère**  $\mathbb{S}^{n-1}$  (ou simplement **dual polaire**) la partie  $K^\circ \subset \mathbb{R}^n$  de l'espace euclidien, telle que :

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R}^n, \langle x|y \rangle \leq 1\} \quad (3.1.1.1)$$

Il est clair que le dual polaire  $K^\circ$  est une partie compacte dont le bord topologique  $\partial K^\circ$  correspond à l'enveloppe de la famille  $(\Sigma_x)_{x \in \partial K}$  telle que pour tout point du bord  $x \in \partial K$ , la partie  $\Sigma_x$  est l'hyperplan affine défini comme ci-dessous :

$$\Sigma_x = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle x|y \rangle = 1\} \quad (3.1.1.2)$$

En particulier, nous dirons que chaque  $\Sigma_x$  est l'**hyperplan polaire du point  $x \in \partial K$** . Nous pouvons alors vérifier (voir propriété 3.1.2) que le dual polaire d'un corps convexe est toujours un corps convexe dont les hyperplans  $\Sigma_x$  sont bien sûr les hyperplans de support.

**Propriété 3.1.1.** *Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe centré en zéro dont la fonction de support est  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ . Alors la famille des hyperplans  $\Sigma_u = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle x(u)|y \rangle = 1\}$  est (à difféomorphisme près de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ ) une famille d'hyperplans co-orientés.*

*Démonstration.* Considérons  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \partial K$  le paramétrage du bord  $\partial K$  vu comme un hérisson, ainsi que  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  sa fonction de support. Commençons par considérer les fonctions suivantes sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  :

$$\sigma(w) = \frac{1}{\sqrt{\langle w|w \rangle}} \text{ et } \mathcal{N}(w) = \sigma(w)w$$

Si  $\vec{W} \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur, alors on a  $d_w \sigma \cdot \vec{W} = -\sigma(w)^3 \langle w|\vec{W} \rangle$  et  $d_w \mathcal{N} \cdot \vec{W} = \sigma(w) [\vec{W} - \sigma(w)^2 \langle w|\vec{W} \rangle w]$ . À présent, considérons l'application  $\nu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  définie par l'expression suivante :

$$\nu(u) = \mathcal{N} \circ x(u) = k(u)x(u) \text{ avec } k(u) = \sigma \circ x(u) \quad (3.1.1.3)$$

D'abord, remarquons que le corps  $K$  étant centré en zéro,  $x(u)$  n'est jamais nul et donc l'application  $\nu$  est bien définie. Ensuite, on calcule :

$$d_u \nu \cdot \vec{W} = k(u) [d_u x \cdot \vec{W} - k(u)^2 \langle x(u)|d_u x \cdot \vec{W} \rangle x(u)] \quad (3.1.1.4)$$

Considérons un vecteur  $\vec{W} \neq 0$ . L'application  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \partial K$  étant un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme, alors  $d_u x \cdot \vec{W}$  est non nul. De plus, comme le corps  $K$  est centré en zéro, la fonction de support  $h$  n'est jamais nulle. Donc, la famille formée par les éléments  $x(u)$  et  $d_u x \cdot \vec{W}$  est linéairement libre. En particulier, la différentielle  $d_u \nu \cdot \vec{W}$  ne peut être nulle. On sait donc que l'application  $\nu$  est un difféomorphisme local en tout point. Toujours du fait que la fonction de support n'est jamais nulle, elle est donc strictement positive (car la fonction de support d'un corps convexe est toujours positive) et ainsi :

$$\forall u \in \mathbb{S}^{n-1}, \langle \nu(u)|u \rangle = k(u)h(u) > 0$$

Mais alors la fonction  $\nu$  est forcément de degré 1 (voir annexe G pour des rappels sur le degré de Brouwer) et ainsi c'est un difféomorphisme. Pour finir, il suffit de constater que pour chaque  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , la droite  $\mathbb{R}\nu(u)$  est orthogonale à l'hyperplan  $\Sigma_u$ . Ainsi, la famille  $(\Sigma_{\nu^{-1}(u)})_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  est une famille d'hyperplans co-orientés et de fonction de support  $k$ .  $\square$

**Propriété 3.1.2.** *Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe centré en zéro dont la fonction de support est  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ . Alors, son dual polaire par rapport à la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  est un corps convexe dont le bord  $\partial K^\circ$  est paramétré par l'application  $x^\circ : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \partial K^\circ$  telle que :*

$$x^\circ(u) = \frac{1}{h(u)}u \quad (3.1.1.5)$$

*En particulier, son bidual  $(K^\circ)^\circ$  vérifie la relation d'involution  $(K^\circ)^\circ = K$ , ce qui justifie que l'on parle de dualité sur les corps convexes.*

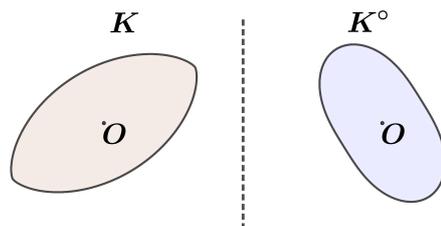


FIGURE 3.1 – Dual polaire d'un corps convexe.

**Note.** Pour rappel, et par souci de clarté, depuis l'avertissement 1.1.2 à la page 29, nous travaillons uniquement avec des corps convexes de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ .

*Démonstration.* Soit  $K$  un corps convexe de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ , de fonction de support  $h$  et de paramétrage du bord (vu comme hérisson)  $x$ . On sait par la propriété 3.1.1 que la famille d'hyperplans duals  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$ , définie par  $\Sigma_u = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle y | x(u) \rangle = 1\}$ , est co-orientée. En particulier :

$$\Sigma_u = k(u)\nu(u) + \langle \nu(u) \rangle^\perp$$

avec  $\nu$  et  $k$  que nous avons définis à l'expression (3.1.1.3). Il nous faut vérifier que  $x^\circ$  est le paramétrage de l'enveloppe de la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$ . Il est clair que  $x^\circ(u) \in \Sigma_u$ . De plus, on observe que :

$$\langle x(u) | d_u x^\circ \cdot \vec{W} \rangle = -\frac{1}{h(u)} \langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{W} \rangle + \frac{1}{h(u)} \langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{W} \rangle = 0$$

Ainsi,  $x^\circ \circ \nu^{-1} : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \partial K^\circ$  est le paramétrage du hérisson engendré par la famille d'hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  et aussi :

$$\|d_u x^\circ \cdot \vec{W}\|^2 = \frac{\langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{W} \rangle^2}{h(u)^4} + \frac{\|\vec{W}\|^2}{h(u)^2}$$

Et donc, nécessairement  $(\partial K^\circ, \nu \circ (x^\circ)^{-1})$  est le bord d'un corps convexe de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ . En particulier, on sait que  $\nu$  correspond bien à la normale sortante car, par construction, si  $t > 0$ , alors  $x^\circ(u) + t\nu(u) \in \mathbb{R}^n \setminus K^\circ$ . Pour finir, afin de montrer que  $(K^\circ)^\circ = K$ , il suffit de constater que l'hyperplan polaire  $\Gamma_u$  du point  $x^\circ(u)$  est défini de la manière suivante :

$$\Gamma_u = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle y | x^\circ(u) \rangle = 1\} = h(u)u + \langle u \rangle^\perp$$

ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

Dans un cadre bien plus large, nous retrouvons les mêmes relations que celles que nous venons d'obtenir à la propriété 4.3.3 de l'annexe D. En effet, nous y étudions les propriétés de convexité du dual polaire de corps convexes qui ne sont pas forcément de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ .

On peut également définir le dual polaire du bord  $\partial K$  d'un corps, qui est alors une hypersurface orientée, en considérant l'enveloppe de la famille d'hyperplans  $(\Sigma_x)_{x \in \partial K}$ , avec  $\Sigma_x$ , pour tout point  $x \in \partial K$ , correspondant à l'hyperplan polaire du point  $x$  tel que nous l'avons défini par l'expression (3.1.1.2). Il est alors intéressant de remarquer que le dual polaire du bord d'un corps convexe correspond bien sûr au bord d'un corps convexe. Mais nous verrons que ce n'est pas

vrai pour le dual d'un hériçon en général. En effet, nous avons vu dans la propriété 3.1.1 que la famille des hyperplans polaires du bord d'un corps  $K$  est co-orientée du fait que le paramétrage de  $\partial K$  est un difféomorphisme.

### 3.1.2 Dualité projective

La dualité projective est un concept moins courant dans l'étude des corps convexes, mais nous nous baserons dessus pour définir une notion de dualité pour les hériçons. Il convient de commencer par quelques définitions et notations. Nous nous plaçons dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  et considérons le point  $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ . Nous introduisons alors les éléments suivants :

1. L'espace projectif  $\mathbb{P}_n = \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  correspondant à l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+1}$ , où  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{P}_n$  est la projection projective (que nous noterons parfois simplement  $p$ ). Nous désignerons par  $\bar{\delta}$  tout point de  $\mathbb{P}_n$  qui correspond à une droite  $\delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .
2. On considère l'hyperplan affine  $T_e = e + \langle e \rangle^\perp$  ainsi que  $\vec{T}_e = \langle e \rangle^\perp$ , son hyperplan directeur que nous identifierons naturellement avec  $\mathbb{R}^n$ . De plus, nous considérons l'hyperplan projectif  $H_e = \mathcal{P}(\langle e \rangle^\perp)$ , qui correspond à la projection de l'hyperplan vectoriel  $\vec{T}_e$ .
3. Afin de ne pas alourdir notre texte, nous considérerons le point  $e$  aussi bien sur  $\mathbb{P}_n$  que sur  $\mathbb{S}^n$ . C'est-à-dire que nous confondrons volontairement  $p(e)$  et  $e$  tant que cela n'entraîne pas de confusion.
4. Nous noterons  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{H}(\mathbb{P}_n)$  l'ensemble des hyperplans projectifs de  $\mathbb{P}_n$ . En particulier, on définit :

$$\mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n) = \{H \in \mathcal{H}(\mathbb{P}_n) \text{ tel que } e \notin H\} \quad (3.1.2.6)$$

et qui correspond aux hyperplans vectoriels de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dont l'orthogonal intersectent  $T_e$ .

5. On définit, relativement au point  $e$ , la demi-sphère nord  $\Omega_e = \{v \in \mathbb{S}^n \text{ tel que } \langle v|e \rangle > 0\}$ .
6. Nous appellerons **carte projective en e** le difféomorphisme  $\overline{\varphi}_e : \mathbb{P}_n \setminus H_e \mapsto \vec{T}_e$ , défini par le passage au quotient de l'application  $\varphi_e : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \vec{T}_e \mapsto \vec{T}_e$  telle que :

$$\varphi_e(x) = \sigma_e(x)x - e \text{ avec } \sigma_e(x) = \frac{1}{\langle x|e \rangle} \quad (3.1.2.7)$$

Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, nous aurons l'habitude de confondre les notations  $\varphi_e$  et  $\overline{\varphi}_e$ . De plus, nous considérerons souvent l'application  $\varphi_e$  restreinte à la demi-sphère  $\Omega_e$ . En particulier, il est utile de noter que la restriction  $\varphi_e : \Omega_e \mapsto \vec{T}_e$  est un difféomorphisme.

Pour discuter de la notion de dualité projective des corps convexes et des hériçons, nous devons d'abord définir la dualité entre les points et les hyperplans. Il est important de savoir que les définitions que nous allons énoncer ne correspondent pas exactement à celles traditionnellement considérées en matière de dualité, mais elles seront suffisantes pour la suite. Pour plus d'informations, on peut se référer à la section 4.2.1 de l'annexe D, où sont présentées les définitions correspondant à ce qui est couramment mentionné dans la littérature.

**Définition 3.1.1.** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $L \subset \mathbb{R}^n$ , un point et un hyperplan affine. Nous définissons leurs duaux  $x^*$  et  $L^*$  dans  $\mathbb{P}_n$  de la manière suivante :

$$x^* = \mathcal{P}(\langle e + x \rangle^\perp) \text{ et } L^* = \mathcal{P}(\langle e + L \rangle^\perp) \quad (3.1.2.8)$$

avec  $\langle e + x \rangle^\perp$  et  $\langle e + L \rangle^\perp$  étant l'orthogonal de la droite  $\langle e + x \rangle$  et de l'hyperplan  $\langle e + L \rangle$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  pour le produit scalaire usuel.

**Note.** Il est important de noter que pour tout point  $x \in \mathbb{R}^n$  et hyperplan  $L \subset \mathbb{R}^n$ , les duaux  $x^*$  et  $L^*$  sont respectivement dans  $\mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n)$  et  $\mathbb{P}_n \setminus \{e\}$ .

Si  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $L \subset \mathbb{R}^n$  sont respectivement un point et un hyperplan affine, alors nous appellerons  $x^*$  **l'hyperplan dual du point  $x$**  et  $L^*$  **le point dual de l'hyperplan  $L$** . Remarquons maintenant que pour tout point  $x \in \mathbb{P}_n \setminus \{e\}$  et hyperplan projectif  $H \in \mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n)$ , par construction, on a que  $x = \bar{\delta}$  et  $H = \mathcal{P}(\Sigma)$ , avec  $\delta$  et  $\Sigma$  étant respectivement une droite vectorielle et un hyperplan vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  vérifiant que  $\delta^\perp \cap T_e \neq \emptyset$  et  $\Sigma^\perp \cap T_e \neq \emptyset$ . Ainsi, nous pouvons proposer la définition suivante :

**Définition 3.1.2.** Soit  $x \in \mathbb{P}_n \setminus \{e\}$  et  $H \in \mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n)$  étant respectivement un point et un hyperplan projectif. Alors on définit leurs duaux  $x^* \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  et  $H^* \in \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$x = \mathcal{P}(\langle e + x^* \rangle^\perp) \text{ et } H = \mathcal{P}(\langle e + H^* \rangle^\perp) \quad (3.1.2.9)$$

De même, si  $x \in \mathbb{P}_n \setminus \{e\}$  et  $H \in \mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n)$  sont respectivement un point et un hyperplan projectif, alors nous appellerons  $x^*$  **l'hyperplan dual du point  $x$**  et  $H^*$  **le point dual de l'hyperplan  $H$** . Il est alors clair que pour tout point  $x \in \mathbb{R}^n$  et hyperplan affine  $L \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ , nous retrouvons la relation de bidualité suivante :

$$(x^*)^* = x \text{ et } (L^*)^* = L \quad (3.1.2.10)$$

et il en serait de même si nous considérons nos points et hyperplans sur  $\mathbb{P}_n \setminus \{e\}$  et  $\mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n)$ . En particulier, cette relation justifie que nous parlions de dualité. De plus, il n'est pas difficile de constater que pour tous points  $x$  et  $y$ , nous avons la relation suivante :

$$x \in y^* \iff y \in x^* \quad (3.1.2.11)$$

et cela, que nous considérons nos points sur  $\mathbb{R}^n$  pour  $x$  et  $\mathbb{P}_n \setminus \{e\}$  pour  $y$  ou inversement. En effet, nous pouvons vérifier ces relations en remarquant que pour tout point  $u \in \mathbb{S}^n$  et  $v \in \mathbb{S}^n$  de la sphère, alors on a toujours  $u \in \langle v \rangle^\perp \iff v \in \langle u \rangle^\perp$ .

Il est alors naturel de définir le dual projectif d'un corps convexe comme étant le dual de ses hyperplans de support (pour le bord du dual) et de tous les hyperplans qui sont à l'extérieur du corps (pour l'intérieur du dual). Considérons donc la définition suivante :

**Définition 3.1.3.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe centré en zéro. Nous appellerons **dual projectif de  $K$**  la partie  $K^* \subset \mathbb{P}_n$  définie telle que :

$$K^* = Ad\{L^* \text{ tel que } L \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \text{ et } K \cap L = \emptyset\} \quad (3.1.2.12)$$

On peut également remarquer que pour tout corps convexe  $K \subset \mathbb{R}^n$ , le dual projectif  $K^*$  est fermé dans  $\mathbb{P}_n$  (et donc compact) et est compris dans  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ . Ensuite, via l'identification de  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  avec  $\mathbb{R}^n$  par la carte projective en  $e$ , nous pouvons définir une notion de corps convexe telle que :  $K \subset \mathbb{P}_n \setminus H_e$  est un **corps convexe** si et seulement si c'est aussi un corps convexe sur  $\mathbb{R}^n$  (via l'identification). Ainsi, nous considérons la définition suivante :

**Définition 3.1.4.** Soit  $K \subset \mathbb{P}_n \setminus H_e$  un corps convexe centré en  $e$  (c'est-à-dire que  $e \in \text{Int}(K)$ ). Alors nous appellerons **dual projectif de  $K$**  la partie  $K^* \subset \mathbb{R}^n$  définie telle que :

$$K^* = \text{Ad}\{H^* \text{ tel que } H \in \mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n) \text{ et } H \cap K = \emptyset\} \quad (3.1.2.13)$$

**Propriété 3.1.3.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe centré en zéro et de fonction de support  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ . Alors son dual projectif  $K^* \subset \mathbb{P}_n$  est un corps convexe dans  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ , centré en  $e$ , dont le bord topologique  $\partial K^*$  est paramétré (via l'identification entre  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  et  $\mathbb{R}^n$ ) par l'application  $x^* : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  définie telle que :

$$x^*(u) = -\frac{1}{h(u)}u \quad (3.1.2.14)$$

et de plus, son bidual vérifie  $(K^*)^* = K$ .

**Note.** Il en est de même pour les corps convexes de  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ . Si  $K \subset \mathbb{P}_n \setminus H_e$  est un corps convexe centré en  $e$  et de fonction de support  $h$ , alors son dual  $K^*$  est un corps convexe de  $\mathbb{R}^n$  centré en zéro dont le paramétrage du bord topologique vérifie la relation (3.1.2.14).

*Démonstration.* Pour commencer, nous allons réexprimer, via l'identification  $\mathbb{P}_n \setminus H_e \sim \vec{T}_e \sim \mathbb{R}^n$ , les notions de dualité que nous avons introduites à la définition 3.1.2 entre les points et les hyperplans. Ainsi, nous allons définir une relation de dualité entre les points et les hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  telle que si  $\Sigma = \lambda u + \langle u \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est un hyperplan affine et  $x = \eta v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est un point, alors on définit respectivement le point dual et l'hyperplan dual comme :

$$\Sigma^* = -\frac{1}{\lambda}u \text{ et } x^* = -\frac{1}{\eta}v + \langle v \rangle^\perp \quad (3.1.2.15)$$

avec bien sûr  $\lambda$  et  $\eta$  non nuls ainsi que  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

On peut vérifier que la notion de dualité de la définition 3.1.2 correspond bien, via la carte projective, aux expressions de (3.1.2.15). En effet, considérons  $\Sigma = \lambda u + \langle u \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un hyperplan affine. On rappelle que via la carte projective  $\varphi_e : \mathbb{P}_n \setminus H_e \mapsto \vec{T}_e$ , nous identifions  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  avec  $\vec{T}_e \sim \mathbb{R}^n$ . Et donc, si  $y = \varphi_e(\alpha)$  (avec  $\alpha$  correspondant au dual projectif de  $\Sigma$  selon la définition 3.1.2), par construction, on a que :

$$\begin{cases} e + \Sigma = T_e \cap \left( \mathbb{R}(e + \lambda u) \oplus \langle u \rangle^\perp \right) \\ \mathbb{R}(e + y) \perp \mathbb{R}(e + \lambda u) \oplus \langle u \rangle^\perp \end{cases}$$

Par conséquent, le point  $y$  est nécessairement de la forme  $y = ku$ , tel que  $\langle e + y | e + \lambda u \rangle = 1 + k\lambda = 0$  et donc on obtient bien que  $y = -\frac{1}{\lambda}u$ . L'exercice reste le même pour le dual d'un point.

Ensuite, nous pouvons remarquer que nous retrouvons facilement les relations (3.1.2.10) et (3.1.2.11), relations qui sont élémentaires lorsque l'on parle de dualité. Aussi, considérons  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un hyperplan affine. Alors on choisit l'unique vecteur  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  orthonormal à l'hyperplan  $\Sigma$  tel que :

$$\Sigma = \lambda u + \langle u \rangle^\perp \text{ avec } \lambda > 0$$

et ainsi on définit les demi-espaces, respectivement positif et négatif, comme ci-dessous :

$$\begin{cases} H_+(\Sigma) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle y - x_0 | u \rangle \geq 0\} \\ H_-(\Sigma) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle y - x_0 | u \rangle \leq 0\} \end{cases}$$

avec  $x_0 \in \Sigma$ .

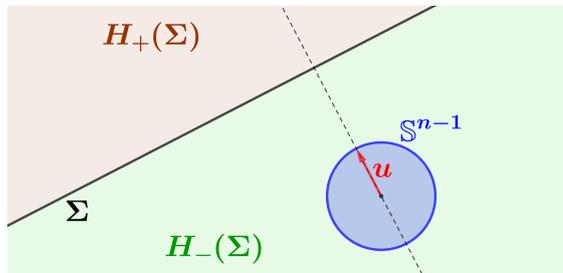


FIGURE 3.2 – Les demi-espace positif et négatif.

En particulier, nous appellerons le vecteur  $u$  « orientation extérieure de l'hyperplan  $\Sigma$  ». En définissant ainsi les demi-espaces positif et négatif pour tous les hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et après un petit calcul, on peut vérifier que si  $\Sigma = \lambda u + \langle u \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est un hyperplan affine et  $x = \eta v$  un point, avec  $\lambda$  et  $\eta > 0$  alors :

$$x \in H_+(\Sigma) \Leftrightarrow \langle u | v \rangle \geq \frac{\lambda}{\eta} \Leftrightarrow \Sigma^* \in H_+(x^*)$$

et évidemment, nous retrouvons une relation similaire pour les demi-espaces négatifs.

Considérons donc  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$  centré en zéro. On considère alors le bord topologique  $\partial K$  ainsi que  $\nu : \partial K \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  le champ orthonormal extérieur au corps  $K$ . Mais alors, en considérant le paramétrage  $x := \nu^{-1} : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \partial K$ , on sait que  $(\partial K, x)$  est un hérissage de fonction de support  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ . On sait enfin que pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , l'hyperplan en  $x(u)$  vérifie l'expression ci-dessous :

$$\Sigma_u = h(u)u + \langle u \rangle^\perp$$

À présent, montrons que le dual projectif  $K^*$  est un corps convexe. Pour cela, considérons  $y \notin K^*$  alors on a que  $y^* \cap K \neq \emptyset$  et n'est pas un hyperplan de support. En effet, si  $y^*$  est un hyperplan de support de  $K$ , alors il existe forcément une famille de points  $(y_n)_{n \in \mathcal{N}}$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tel que  $y_n^* \rightarrow y^*$  et  $y_n^* \cap K = \emptyset$ . En particulier, nous aurions que  $y \in K^*$ , ce qui est en contradiction avec le choix du point  $y$ . Par conséquent, le corps  $K$  étant de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$  et  $y^*$  n'étant pas un hyperplan de support, alors il est immédiat que  $K \cap \overset{\circ}{H}_+(y^*) \neq \emptyset$ . En particulier, il existe  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  tel que  $x(u) \in \overset{\circ}{H}_+(y^*)$  et donc  $y \in \overset{\circ}{H}_+(x(u)^*)$ . Ce qui nous donne finalement que :

$$\mathbb{R}^n \setminus K^* \subset \bigcup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \overset{\circ}{H}_+(x(u)^*)$$

À présent, considérons  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  et  $y \in \overset{\circ}{H}_+(x(u)^*)$ . Alors on a  $x(u) \in \overset{\circ}{H}_+(y^*)$ . Comme le corps  $K$  est centré en zéro et que le demi-espace  $H_-(y^*)$  contient zéro, il existe  $z \in ]0, x(u)[$

tel que  $z \in y^*$ . Nous pouvons préciser que  $z$  ne peut être égal à  $x(u)$  car sinon nous aurions  $x(u) \in y^*$  et donc  $y \in x(u)^*$ , ce qui n'est pas possible.

Remarquons que le corps  $K$  étant de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$  et centré en zéro, alors l'intervalle  $]0, x(u)[$  est compris dans l'ouvert  $\text{Int}(K)$ . En particulier, l'hyperplan  $y^*$  n'est pas un hyperplan de support du corps  $K$  et vérifie  $y^* \cap K \neq \emptyset$ . Ainsi, on peut vérifier que  $y \notin K^*$ . En effet, si le point  $y$  est sur  $K^*$ , et comme  $y^* \cap K \neq \emptyset$ , on en déduit nécessairement que  $y$  est sur la frontière de  $K^*$ . Par définition, il existe une famille  $(y_n)_{n \in \mathcal{N}}$  telle que  $y_n^* \cap K = \emptyset$  et  $y_n \rightarrow y$ . Par conséquent, l'hyperplan  $y^*$  serait un hyperplan de support de  $K$ , ce qui est contradictoire. Ainsi,  $K^* \subset H_-(x(u)^*)$  et plus généralement :

$$K^* \subset \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} H_-(x(u)^*)$$

Par conséquence, le dual projectif  $K^*$  est un corps convexe. Il nous faut vérifier qu'il est de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ . Remarquons (voir expression (3.1.2.15)) que son bord topologique est paramétré par l'application  $x^* : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \partial K^*$  telle que :

$$x^*(u) = -\frac{1}{h(u)}u$$

et sa différentielle vérifie  $h(u)^2 d_u x^* \cdot \vec{W} = \langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{W} \rangle u - h(u) \vec{W}$ . La fonction de support n'étant jamais nulle, c'est un plongement différentiel (voir la propriété 1.2.3 de la page 38). Le corps  $K^*$  est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Finalement, notons que le champ orthonormal vérifie l'expression (3.1.1.3) et donc, est un difféomorphisme. Le corps  $K^*$  est donc bien de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ .

Enfin, constatons que nous pouvons obtenir les mêmes résultats en appliquant la même méthodologie pour les corps convexes  $K \subset \mathbb{P}_n \setminus H_e$ , via l'identification de  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  avec  $\mathbb{R}^n$ . Terminons par la relation de bidualité qui s'obtient en vérifiant les deux points suivants :

$$\begin{aligned} (i) \quad & y \in \partial K \Leftrightarrow y^* \text{ est un hyperplan de support de } K^* \\ (ii) \quad & y^* \cap K^* = \emptyset \Leftrightarrow y \in \text{Int}(K) \end{aligned} \tag{3.1.2.16}$$

Considérons  $y \in \partial K$ . Pour montrer que  $y^*$  est un hyperplan de support de  $K^*$ , il nous faut vérifier les deux points suivants :

$$\underbrace{K^* \subset H_-(y^*)}_{(1)} \quad \text{et} \quad \underbrace{K^* \cap y^* \neq \emptyset}_{(2)}$$

Pour (1), considérons  $z \in K^*$ . Alors,  $K \subset H_-(z^*)$  et donc  $y \in H_-(z^*)$ , c'est-à-dire  $z \in H_-(y^*)$ . Pour (2), considérons  $z^* \subset \mathbb{R}^n$ , l'hyperplan de support de  $K$  en  $y$ . Par adhérence,  $z \in K^*$  et comme  $y \in z^*$  alors  $z \in y^*$ . Ce qui nous donne le résultat recherché.

Réciproquement, supposons que  $y^*$  soit un hyperplan de support de  $K^*$ . On a donc  $y$  qui vérifie les points (1) et (2). Nous devons cependant vérifier les deux points suivants :

$$\underbrace{y \in \Sigma}_{(a)} \quad \text{et} \quad \underbrace{y \in K}_{(b)}$$

avec  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  un hyperplan de support de  $K$ . Pour ce faire, considérons  $\Sigma^* \in K^* \cap y^*$ . On en déduit que  $\Sigma^* \in \partial K^*$  et donc  $\Sigma$  est un hyperplan de support de  $K$ . En particulier, on a  $y \in \Sigma$ ,

ce qui valide le point (a). Poursuivons en considérant  $z^* \subset \mathbb{R}^n$ , un hyperplan de support de  $K$ . On a alors  $z \in K^*$  et donc  $z \in H_-(y^*)$ ; par conséquent,  $y \in H_-(z^*)$ . En particulier, on déduit que :

$$y \in \bigcap_{z \in \partial K^*} H_-(z^*) = K \quad (3.1.2.17)$$

ce qui nous amène au point (b). Cela nous fournit la première équivalence de (3.1.2.16).

Supposons que l'intersection  $y^* \cap K^*$  ne soit pas vide. Alors, nous avons deux possibilités. Premièrement, si  $y^*$  est un hyperplan de support de  $K^*$ , alors nous avons vu que  $y \in \partial K$ . Ainsi, examinons le cas où  $y^* \cap \text{Int}(K^*) \neq \emptyset$ . Alors, considérons une point  $z \in y^* \cap \text{Int}(K^*)$ . Il est clair que  $y \in z^*$ . De plus, comme  $z \in \text{Int}(K^*)$ ,  $z^*$  n'est pas un hyperplan de support de  $K$  donc  $z^* \cap K = \emptyset$ . Il s'ensuit que  $y \notin K$  et plus précisément  $y \notin \text{Int}(K)$ .

Réciproquement, supposons que  $y \in \text{Int}(K)$ . De nouveau, deux cas sont possibles. Si  $y \in \partial K$ , alors nous savons que  $y^*$  est un hyperplan de support de  $K^*$ . Examinons maintenant le cas où  $y \notin K$ . Prenons  $z^*$  comme un hyperplan tel que  $z^* \cap K = \emptyset$  et que  $y \in z^*$ . Nous avons donc  $z \in y^* \cap K^*$ . Comme  $z^*$  n'est pas un hyperplan de support de  $K$ , alors  $z \in \text{Int}(K^*)$ . En particulier, nous avons que  $y^* \cap \text{Int}(K^*)$  est non vide. Ainsi, nous établissons bien la deuxième relation d'équivalence de (3.1.2.16), ce qui termine la preuve.  $\square$

Ainsi, par les propriétés 3.1.2 et 3.1.3, nous savons que (via l'identification entre  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  et  $\mathbb{R}^n$ ) les duals polaires et projectifs d'un corps convexe correspondent au signe près. Il est également intéressant de remarquer que l'on retrouve la propriété 3.1.1 pour le dual projectif. En effet, si  $K$  est un corps convexe, alors nous pouvons constater que le bord du corps  $K^*$  est l'enveloppe de la famille d'hyperplans duaux  $(x(u)^*)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$ . De plus, via l'identification entre  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  et  $\mathbb{R}^n$ , on peut vérifier que la famille d'hyperplans  $(x(u)^*)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  est co-orientée.

## 3.2 Dualité projective d'un hérissseon euclidien

De ce qui précède, il est naturel de définir le dual projectif d'un hérissseon en considérant l'ensemble des points duaux de sa famille d'hyperplans co-orientés. Soit  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  un hérissseon de fonction de support  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ . En rappelant que sa famille d'hyperplans co-orientés est définie par les hyperplans affines  $\Sigma_u = h(u)u + \langle u \rangle^\perp$  indexés sur  $\mathbb{S}^{n-1}$  alors, on appelle **dual projectif de  $\mathcal{H}_h$**  la donnée de l'ensemble  $\mathcal{H}_h^* \subset \mathbb{P}_n$  et du paramétrage  $x^* : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{P}_n$  tel que :

$$\mathcal{H}_h^* = \{\Sigma_u^* \text{ avec } u \in \mathbb{S}^{n-1}\} \text{ et } x^*(u) = \Sigma_u^* \quad (3.2.0.1)$$

Contrairement à ce que nous avons pour les corps convexes, il n'est pas garanti que le dual projectif  $\mathcal{H}_h^*$  soit inclus dans  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ . Ainsi, nous ne pouvons pas simplement identifier  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  avec  $\mathbb{R}^n$  pour définir le bidual d'un hérissseon. Rappelons que pour définir le bidual d'un corps convexe, nous nous sommes basés sur le fait que le dual projectif était toujours un corps convexe, en définissant la notion de corps convexe sur  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  via l'identification  $\mathbb{P}_n \setminus H_e \sim \mathbb{R}^n$ . Pour surmonter ce problème, il est nécessaire de considérer les deux définitions suivantes :

**Définition 3.2.1.** *Nous dirons qu'une famille  $(H_u)_{u \in \Gamma}$ , avec  $\Gamma$  une  $p$ -variété, est une **famille lisse d'hyperplans projectifs de  $\mathbb{P}_n$**  si et seulement s'il existe une application lisse  $v : \Gamma \mapsto \mathbb{S}^n$  telle que :*

$$H_u = \mathcal{P}\left(\langle v(u) \rangle^\perp\right) \quad (3.2.0.2)$$

pour tout  $u \in \Gamma$ .

**Note.** Nous appellerons  $v$  **l'application duale dans  $\mathbb{S}^n$  de la famille  $(H_u)_{u \in \Gamma}$** . Il est alors utile de remarquer que si  $\Gamma$  est connexe, alors la famille  $(H_u)_{u \in \Gamma}$  admet exactement deux applications duales dans  $\mathbb{S}^n$ .

**Définition 3.2.2.** Soit  $(H_u)_{u \in \Gamma}$  une famille lisse d'hyperplans projectifs de  $\mathbb{P}_n$  et  $v : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^n$  une application duale dans  $\mathbb{S}^n$ . Alors, nous appelons **enveloppe** de cette famille (si elle existe) l'image d'une application lisse  $x := \mathcal{P}(x_0) : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_n$ , que l'on appelle **paramétrage**, où  $x_0 : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^n$  est une application vérifiant les deux conditions de contact suivantes :

$$\langle x_0(u) | v(u) \rangle = 0 \text{ et } \langle d_u x_0 | v(u) \rangle = 0 \quad (3.2.0.3)$$

Aussi, nous appellerons **enveloppe paramétrée** la donnée d'une enveloppe et du paramétrage qui lui est associé.

**Note.** La définition d'enveloppe de famille lisse d'hyperplans projectifs ne dépend pas du choix de l'application duale dans  $\mathbb{S}^n$  de la famille considérée.

Il est alors naturel de définir le dual d'une enveloppe paramétrée dans  $\mathbb{P}_n$  de la manière suivante : Si  $\Lambda = (\Sigma, x)$  est l'enveloppe paramétrée d'une famille lisse  $(H_u)_{u \in \Gamma}$  d'hyperplans projectifs définie sur  $\mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n)$ , alors on appelle **dual projectif de  $\Lambda$** , que l'on note  $\Lambda^*$ , la donnée de l'ensemble  $\Sigma^*$  et de l'application  $x^* : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$\Sigma^* = \{H_u^* \text{ avec } u \in \Gamma\} \text{ et } x^*(u) = H_u^* \quad (3.2.0.4)$$

**Propriété 3.2.1.** Soit  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  un hérisson de paramétrage  $x$ . Alors, son dual projectif correspond à l'unique l'enveloppe paramétrée de la famille lisse d'hyperplans projectifs  $(x(u)^*)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$ . Aussi, son bidual vérifie la relation d'involution :

$$(\mathcal{H}_h^*)^* = \mathcal{H}_h \quad (3.2.0.5)$$

ce qui justifie l'appellation de dualité.

*Démonstration.* Considérons  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  un hérisson de fonction de support  $h$ . Nous définissons alors la fonction  $s : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$  par l'expression suivante :

$$s(u) = \eta(u)(u - h(u)e) \text{ avec } \eta(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + h(u)^2}}$$

Nous considérons également la famille d'hyperplans  $\Sigma_u = h(u)u + \langle u \rangle^\perp$  pour chaque  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , qui correspond évidemment à la famille d'hyperplans co-orientés du hérisson  $\mathcal{H}_h$ . Il est clair que, par construction, le paramétrage  $x^*$  défini par la relation (3.2.0.1) vérifie l'expression suivante :

$$x^*(u) = p \circ s(u)$$

avec  $p : \mathbb{S}^n \dashrightarrow \mathbb{P}_n$  la projection projective.

À présent, considérons le paramétrage  $x(u) = h(u)u + \vec{\nabla} h(u)$  du hérisson  $\mathcal{H}_h$ . Il est alors clair que la famille d'hyperplans projectifs  $(x(u)^*)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  est définie par  $x(u)^* = p\left(\langle v(u) \rangle^\perp\right)$ , avec :

$$\nu(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|x(u)\|^2}} [e + x(u)]$$

Après un petit calcul, on peut vérifier que l'application  $s$  vérifie les conditions de contact  $\langle s(u) | \nu(u) \rangle = 0$  et  $\langle d_u s | \nu(u) \rangle = 0$ , ce qui nous donne le résultat recherché. Enfin, la relation (3.2.0.5) découle directement de la relation de bidualité (3.1.2.10) entre les points et les hyperplans.  $\square$

Il sera utile de remarquer que si  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  est un hérisséau dont la fonction de support  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  n'est jamais nulle, alors son dual projectif  $\mathcal{H}_h^*$  est contenu dans  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ . De plus, via l'identification  $\mathbb{P}_n \setminus H_e \sim \mathbb{R}^n$ , le paramétrage  $x^* : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  admet pour expression :

$$x^*(u) = -\frac{1}{h(u)}u \quad (3.2.0.6)$$

ce qui correspond à l'expression (3.1.2.14) de la propriété 3.1.3.

### 3.2.1 Représentation du dual d'un hérisséau sur la sphère

La représentation du dual d'un hérisséau est l'ensemble des représentants, sur l'hypersphère  $\mathbb{S}^n$ , correspondant aux points de son dual sur l'espace projectif. Il est à noter qu'en pratique, la représentation du dual d'un hérisséau fournit une méthode qui simplifie, dans certains cas de figure, les développements que nous pouvons considérer dans le cadre de l'étude du dual d'un hérisséau (voir démonstration de la propriété 3.2.2). Considérons donc  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  un hérisséau de fonction de support  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ . Nous appellerons **représentation du dual de  $\mathcal{H}_h$  sur la sphère** l'application  $s : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^n$  définie par l'expression ci-dessous :

$$s(u) = \sigma(u)[u - h(u)e] \quad (3.2.1.7)$$

avec  $\sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{1+h(u)^2}}$ .

Il est assez clair que, comme nous le représentons ci-dessous, la représentation du dual d'un hérisséau sur la sphère correspond au graphe de sa fonction de support sur  $\mathbb{S}^n$ , en prenant l'équateur comme l'axe des abscisses.

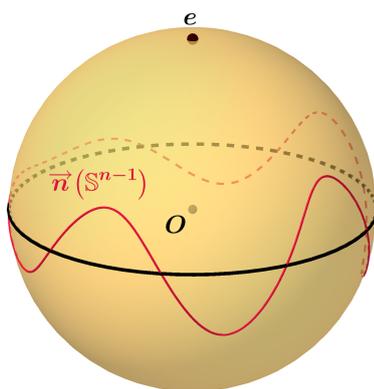


FIGURE 3.3 – Représentation du dual d'un hérisséau sur la sphère

En particulier, sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ , le dual projectif d'un hérisson est une hypersurface orientée dont le champ orthonormal est l'application  $\vec{v} : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto T\mathbb{S}^n$  définie par l'expression suivante :

$$\vec{v}(u) = \eta(u)[e + x(u)] \quad (3.2.1.8)$$

avec  $\eta(u) = \frac{1}{\sqrt{1+\|x(u)\|^2}}$ .

Il est alors intéressant de remarquer que les relations de dualité que nous avons définies via les définitions 3.1.1 et 3.1.2 induisent naturellement des relations de dualité entre l'espace  $\mathbb{R}^n$  et la sphère  $\mathbb{S}^n \setminus \{e, -e\}$ . Ainsi, via ces relations de dualité, il est immédiat que la représentation, sur la sphère, du dual d'un hérisson vérifie la propriété 3.2.1.

### 3.2.2 Petite remarque géométrique

Nous voulons ici montrer un exemple de correspondance géométrique<sup>1</sup> entre un hérisson et son dual sur l'espace projectif ou la sphère. Ainsi, nous allons démontrer que si  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  est un hérisson dont le dual projectif est  $\mathcal{H}_h^* \subset \mathbb{P}_n$ , alors on a :

1. Les valeurs critiques de  $\mathcal{H}_h$  correspondent aux points du dual  $\mathcal{H}_h^*$  où la courbure de Gauss s'annule.
2. Les points d'intersection de  $\mathcal{H}_h$  correspondent sur  $\mathcal{H}_h^*$  à des couples de points dont les hyperplans tangents coïncident.

La figure 3.4 ci-dessous représente graphiquement un hérisson (à droite) ainsi que son dual projectif (à gauche). Nous pouvons en particulier y observer la correspondance entre les valeurs critiques et les points d'intersection du hérisson avec les points d'inflexion<sup>2</sup> et les couples de points qui partagent la même droite tangent sur son dual.

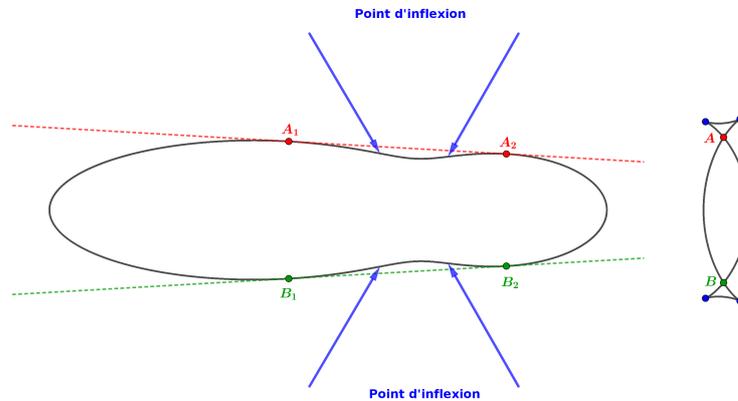


FIGURE 3.4 – Exemple de correspondance géométrique entre un hérisson et son dual

Munissons l'espace projectif  $\mathbb{P}_n$  de la structure riemannienne induite par la sphère  $\mathbb{S}^n$  via la projection projective  $\mathcal{P} : \mathbb{S}^n \mapsto \mathbb{P}_n$ . Il nous sera nécessaire d'identifier les hyperplans vectoriels de chaque espace tangent de  $\mathbb{P}_n$  avec les hyperplans projectifs via le procédé suivant : Si  $x \in \mathbb{P}_n$  est un point et  $\Sigma \subset T_x\mathbb{P}_n$  un hyperplan vectoriel, alors on considère l'unique hyperplan projectif  $\Gamma \subset \mathbb{P}_n$  tel que :

1. Ce rapporter aux pages 145 et 146 de [70] pour plus de détails.
2. Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité d'une courbe plane.

$$x \in \Gamma \text{ et } T_x \Gamma = \Sigma \quad (3.2.2.9)$$

Il est aussi utile de remarquer que si  $\Sigma \subset T_x \mathbb{P}_n$  est un hyperplan vectoriel, alors  $\Sigma = d_v \mathcal{P} \cdot \Sigma_0$ , avec  $v \in \mathbb{S}^n$  tel que  $x = \mathcal{P}(v)$  et  $\Sigma_0 \subset T_v \mathbb{S}^n$  est un hyperplan vectoriel. Il est ainsi immédiat que si  $\Gamma$  est l'hyperplan projectif qui correspond à  $\Sigma$ , alors on a :

$$\Gamma = \mathcal{P}(\langle v + \Sigma_0 \rangle) \quad (3.2.2.10)$$

Via cette identification, nous dirons que, pour  $\Lambda \subset \mathbb{P}_n$  une hypersurface, **les hyperplans tangents sont confondus en  $x$  et  $y$** , avec  $x$  et  $y$  deux points sur  $\Lambda$ , si et seulement si il existe  $\Gamma \subset \mathbb{P}_n$  un hyperplan projectif contenant les points  $x$  et  $y$  tel que  $T_x \Gamma = T_x \Lambda$  et  $T_y \Gamma = T_y \Lambda$ . Par conséquent, on considère la propriété suivante :

**Propriété 3.2.2.** Soit  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  un hérisson et  $\mathcal{H}_h^* \subset \mathbb{P}_n$  son dual projectif ainsi que  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  et  $x^* : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{P}_n$  leurs paramétrages respectifs. Alors on a :

1. Les valeurs critiques de  $\mathcal{H}_h$  correspondent aux points du dual  $\mathcal{H}_h^*$  dont la courbure de Gauss est nulle.
2. Pour  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  et  $u' \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $x(u) = x(u')$  si et seulement si les hyperplans tangents dans  $\mathbb{P}_n$  en  $x^*(u)$  et  $x^*(u')$  sont confondus.

*Démonstration.* Considérons  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  un hérisson dont la fonction de support est  $h$ . La représentation du dual de  $\mathcal{H}_h$  dans  $\mathbb{S}^n$  est définie par l'application  $s : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^n$  vérifiant l'expression (3.2.1.7). Nous savons aussi que  $s(\mathbb{S}^{n-1})$  est une hypersurface orientée dont l'application orthonormale  $\vec{v} : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto T\mathbb{S}^n$  est définie par l'expression (3.2.1.8).

Pour calculer la dérivée covariante du champ  $\vec{v}$ , rappelons que, par définition de la sphère  $\mathbb{S}^n$ , si  $\nabla : \Delta(\mathbb{S}^n) \otimes \Omega_1(\mathbb{S}^n) \mapsto \Delta(\mathbb{S}^n)$  est la connexion de Levi-Civita pour la métrique induite de la sphère, alors  $\nabla_u \vec{v} \cdot \vec{W} = d_u \vec{v} \cdot \vec{W}$ , avec  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  et  $\vec{W} \in T_u \mathbb{S}^{n-1}$ . De plus, nous avons :

$$\begin{cases} d_u s \cdot \vec{W} = -\sigma(u)^2 \langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{W} \rangle s(u) + \sigma(u) [\vec{W} - \langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{W} \rangle e] \\ d_u \vec{v} \cdot \vec{W} = -\eta(u)^2 \langle x(u) | d_u x \cdot \vec{W} \rangle \vec{v}(u) + \eta(u) d_u x \cdot \vec{W} \end{cases}$$

Remarquons maintenant que si  $d_u x \cdot \vec{W}$  est non nul, alors la famille formée par les éléments  $\vec{v}(u)$  et  $d_u x \cdot \vec{W}$  est libre. En particulier,  $d_u \vec{v} \cdot \vec{W}$  est non nul, d'où :

$$d_u \vec{v} \cdot \vec{W} = 0 \Leftrightarrow d_u x \cdot \vec{W} = 0$$

ce qui nous donne le premier point.

Pour le second point, il suffit de voir que  $\langle s(u) + \text{Im}(d_u s) \rangle = \langle \vec{v}(u) \rangle^\perp$ , avec  $\vec{v}(u)$  dans  $\Omega_e$ , et cela pour tout point  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Ainsi, pour tout couple de points distincts  $u_1$  et  $u_2$  dans  $\mathbb{S}^{n-1}$ , nous avons :

$$\vec{v}(u_2) \perp \langle s(u_1) + \text{Im}(d_{u_1} s) \rangle \Leftrightarrow \vec{v}(u_1) = \vec{v}(u_2) \Leftrightarrow x(u_1) = x(u_2)$$

ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

Nous pouvons alors aisément comprendre que si le dual projectif (ou polaire) d'un corps est toujours un corps convexe, ce n'est plus le cas pour les hérissons. À titre d'exemple, il nous suffit de reconsidérer la figure 3.4. Il est donc intéressant de caractériser géométriquement le dual d'un hérisson. C'est précisément l'objet de la section suivante.

### 3.3 Théorème de caractérisation projective

L'objet de cette section est de connaître les caractéristiques géométriques du dual d'un hérisson. En effet, nous avons vu précédemment que, contrairement aux corps convexes, le dual d'un hérisson n'est pas nécessairement un hérisson. Nous commençons donc par le résultat suivant :

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  un hérisson euclidien. Alors son dual projectif  $\mathcal{H}_h^*$  vérifie les trois conditions ci-dessous :*

1. *Son paramétrage  $x^* : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{P}_n$  est une immersion.*
2. *Toute droite projective passant par  $e$  intersecte  $\mathcal{H}_h^*$  en un ou deux points.*
3. *Les hyperplans tangents de  $\mathcal{H}_h^*$ , vus comme hyperplans projectifs, ne passent jamais par  $e$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$  un hérisson de fonction de support  $h : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ . Considérons maintenant  $s : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^n$  la représentation de son dual sur la sphère définie par l'expression (3.2.1.7). Il est alors clair que la fonction  $s$  est une immersion et ainsi, le paramétrage du dual  $x^* = p \circ s$ , avec  $p : \mathbb{S}^n \mapsto \mathbb{P}_n$  la projection projective, est également une immersion.

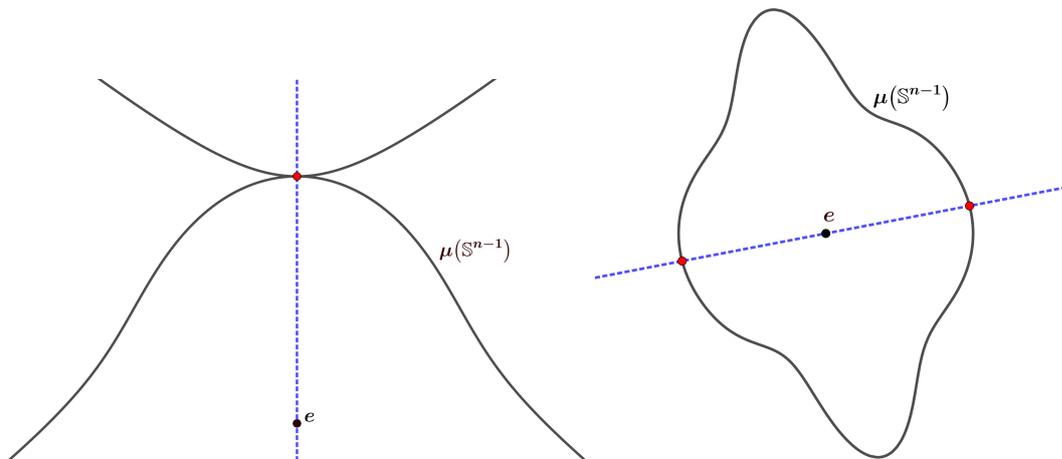
Dans la suite, nous identifions la  $(n-1)$ -sphère à  $\mathbb{S}_e^{n-1} = S(\langle e \rangle^\perp)$ . Ainsi, par construction, si l'on considère le 2-plan  $P_u = \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}e$ , avec  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , l'intersection  $P_u \cap s(\mathbb{S}_e^{n-1})$  contient exactement deux points. En identifiant la droite  $\mathbb{R}u$  avec la droite projective  $p(P_u)$ , il est immédiat que l'intersection  $\mathbb{R}u \cap \mathcal{H}_h^*$  contient soit un, soit deux points.

Pour finir, il nous suffit de remarquer que la troisième condition découle directement du fait que, par la propriété 3.2.1 page 62, on sait que le dual  $\mathcal{H}_h^*$  est l'enveloppe paramétrée de la famille des hyperplans projectifs  $x(u)^* \subset \mathbb{P}_n \setminus \{e\}$ .  $\square$

Il est alors intéressant de discuter du sens géométrique des deuxième et troisième conditions précédentes. Considérons, pour un hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^n$ , la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  d'hyperplans co-orientés dont  $\mathcal{H}_h$  est l'enveloppe paramétrée. La deuxième condition correspond à l'injectivité (voir définition 1.1.6 de la page 30) de la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$ . En particulier, si pour une direction  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , la droite<sup>3</sup>  $\mathbb{R}u$  intersecte le dual  $\mathcal{H}_h^*$  en un seul point, cela signifie que les hyperplans  $\Sigma_u$  et  $\Sigma_{-u}$  sont les mêmes (avec bien sûr des orientations opposées). Dans l'exemple ci-dessous, nous représentons le dual d'un hérisson en prenant soin d'obtenir un exemple (à gauche) où l'intersection d'une droite projective passant par le point  $e$  avec le dual  $\mathcal{H}_h^*$  se fait en un seul point et (à droite) en deux points.

---

3. Bien sûr, lorsque l'on parle de la droite  $\mathbb{R}u$  dans  $\mathbb{P}_n$ , on parle de la droite projective  $\mathcal{P}(\mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}u)$ .

FIGURE 3.5 – Intersection du graphe de la représentation projective via la carte projective en  $e$ 

On peut remarquer que dans le cas où  $\Sigma_u = \Sigma_{-u}$  alors  $h(u) = -h(-u)$  et donc il existe forcément un  $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  tel que  $h(u_0) = 0$ , ce qui explique que le graphe de gauche explose. En effet, nous avons vu que via la carte projective centrée en  $e$ , le paramétrage du dual projectif vérifie l'expression (3.2.0.6) lorsque  $h(u) \neq 0$ . Ainsi, les points vérifiant  $h(u_0) = 0$  correspondent forcément à des points à l'infini sur  $\mathbb{P}_n$ .

La troisième condition est plus difficile à visualiser. Rappelons que la représentation sur la sphère du dual d'un hérisson (voir expression (3.2.1.7)) correspond au graphe de la fonction de support sur la sphère en considérant l'équateur comme l'axe des abscisses. Considérons pour un hérisson  $\mathcal{H}_h$  la représentation sur la sphère de son dual, qui correspond à l'application  $s : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^n$ . Supposons qu'en  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , l'hyperplan  $d_u x^* \cdot T_u \mathbb{S}^{n-1}$  contienne le point  $e$ . On a donc :

$$d_u s \cdot T_u \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}s(u) \oplus \mathbb{R}e \quad (3.3.0.1)$$

et il n'est alors pas possible que  $s(\mathbb{S}^{n-1})$  corresponde au graphe d'une fonction lisse sur la sphère en prenant l'équateur comme étant l'axe des abscisses. Dans la figure ci-dessous, nous illustrons ce dont nous avons discuté en considérant une fonction  $h : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{R}$  qui n'est pas partout de classe  $\mathcal{C}^1$ .

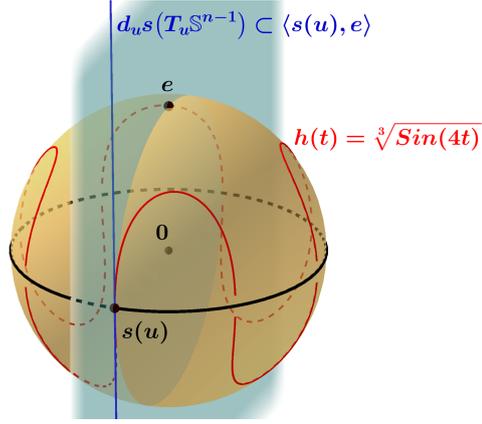


FIGURE 3.6 – Défaut de régularité de la fonction de support

À présent, montrons que les conditions que nous avons considérées sont suffisantes. Il nous faut vérifier que toute application  $\mu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{P}_n$  vérifiant ces trois conditions correspond au paramétrage du dual d'un hérisson.

**Lemme 3.3.1.** *Si  $\mu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{P}_n \setminus \{e\}$  est une application lisse alors la famille d'hyperplans duals  $(\mu(u)^*)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  est lisse.*

*Démonstration.* Considérons  $\mu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{P}_n \setminus \{e\}$  une application lisse. Alors, pour tout  $u_0$  dans  $\mathbb{S}^{n-1}$ , il existe forcément  $v_0 \in \mathbb{S}^n$  et  $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ , un ouvert centré en  $u_0$  tel que :

$$\forall u \in \Omega, \mu(u) \in \mathbb{P}_n \setminus H_{v_0}$$

avec  $H_{v_0} = p(\langle v_0 \rangle^\perp)$ .

Mais alors, il est clair que sur  $\Omega$ ,  $\mu(u) = p(v_0 + \bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu(u))$ , où la fonction  $\bar{\varphi}_{v_0} : \mathbb{P}_n \setminus H_{v_0} \mapsto \vec{T}_{v_0} = \langle v_0 \rangle^\perp$  est la carte projective centrée en  $v_0$ . En particulier, si on considère la fonction  $w : \Omega \mapsto \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  telle que  $w(u) = v_0 + \bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu(u)$ , alors par construction, on a :

$$\forall u \in \Omega, e + \mu(u)^* = T_e \cap \langle w(u) \rangle^\perp$$

et ainsi la famille d'hyperplans  $(\mu(u)^*)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  est bien une famille lisse.  $\square$

**Théorème 3.3.2.** *Considérons  $\mu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{P}_n$ , avec  $n \geq 3$ , une application lisse vérifiant les trois points suivants :*

1. *C'est une immersion.*
2. *Toutes les droites projectives passant par le point  $e$  intersectent l'image  $\mu(\mathbb{S}^{n-1})$  en un ou deux points.*
3. *Les hyperplans tangents<sup>4</sup> de l'image  $\mu(\mathbb{S}^{n-1})$ , vus comme hyperplans projectifs, ne passent jamais par le point  $e$ .*

*Alors, il existe un unique hérisson euclidien  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$  pour lequel l'application  $\mu$  correspond (à un difféomorphisme de la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  près) au paramétrage de son dual projectif.*

4. Il s'agit des  $d_u \mu \cdot T_u \mathbb{S}^{n-1}$ .

*Démonstration.* Considérons  $\mu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{P}_n$  une application lisse vérifiant les trois points précédents. On peut alors remarquer que le troisième point implique que l'image  $\mu(\mathbb{S}^{n-1})$  ne contient pas le point  $e$ . Considérons donc la famille d'hyperplans duaux  $(\mu(u)^*)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$ . D'après le lemme 3.3.1 précédent, nous savons que c'est une famille lisse. Tout l'enjeu de la preuve est alors de montrer qu'elle est co-orientée, à difféomorphisme de la sphère près.

La famille d'hyperplans duaux  $(\mu(u)^*)_{u \in \mathbb{S}^{n-1}}$  étant lisse, par définition, il existe des fonctions lisses  $\nu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  et  $a : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  telles que :

$$\mu(u)^* = a(u)\nu(u) + \langle \nu(u) \rangle^\perp$$

et ainsi, il nous faut montrer que l'application  $\nu$  est un difféomorphisme.

À présent, considérons l'application  $s : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^n$ , que nous appellerons représentation de  $\mu$  sur la sphère, définie de la manière suivante :

$$s(u) = \sigma(u)[\nu(u) - a(u)e] \text{ avec } \sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + a(u)^2}} \quad (3.3.0.2)$$

et qui vérifie en particulier la relation suivante :

$$\mu(u) = p \circ s(u) \text{ et } e + \mu(u)^* = T_e \cap \langle s(u) \rangle^\perp$$

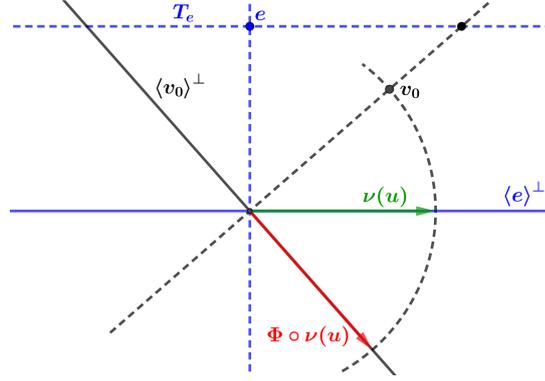
En rappelant que la restriction sur la sphère  $\mathbb{S}^n$  de la projection  $p$  est une immersion alors, d'après l'hypothèse sur  $\mu$ , il est immédiat que c'est également le cas pour  $s$ .

Pour la suite de la preuve, nous identifions la  $(n-1)$ -sphère avec  $\mathbb{S}_e^{n-1} = S[\langle e \rangle^\perp]$ . Soit  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , alors on considère le 2-plan  $P_{u_0} = \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}\nu(u_0)$ . Par définition de la fonction  $s$ , il existe forcément  $v_0 \in P_{u_0} \cap \mathbb{S}_e^{n-1}$  et  $\Omega \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$  un ouvert centré en  $u_0$  tel que :

$$\mathbb{R}_+ v_0 \cap T_e \neq \emptyset \text{ et } \forall u \in \Omega, s(u) \notin \langle v_0 \rangle^\perp \quad (3.3.0.3)$$

En considérant la projection orthogonale  $\pi_{v_0} : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \langle v_0 \rangle^\perp$  ainsi que l'application de normalisation  $\mathcal{N} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{S}^n$ , il est clair que l'application  $\phi := \mathcal{N} \circ \pi_{v_0} : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ , avec  $\mathbb{S}_{v_0}^{n-1} = S[\langle v_0 \rangle^\perp]$ , est un difféomorphisme. Le point  $v_0$  étant défini par (3.3.0.3), si nous considérons l'application  $v := \phi \circ \nu : \Omega \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ , il existe forcément une fonction lisse  $\alpha : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall u \in \Omega, s(u) \sim v_0 + \alpha(u)v(u) \quad (3.3.0.4)$$

FIGURE 3.7 – Définition du point  $v_0$  et de l'application  $\Phi$ 

À présent, considérons la carte projective  $\bar{\varphi}_{v_0} : \mathbb{P}^n \setminus H_{v_0} \mapsto \vec{T}_{v_0}$ , avec  $H_{v_0} = p(\langle v_0 \rangle^\perp)$  et  $\vec{T}_{v_0} = \langle v_0 \rangle^\perp$ . Remarquons aussi que sur  $\Omega$ , la fonction  $\mu$  vérifie que  $\mu(u) = p(v_0 + \bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu(u))$  et ainsi, par (3.3.0.4), il s'ensuit que :

$$\forall u \in \Omega, \alpha(u)v(u) = \bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu(u) \quad (3.3.0.5)$$

Supposons donc que  $d_{u_0}v \cdot \vec{W} = 0$  pour  $\vec{W} \in T_{u_0}\mathbb{S}_e^{n-1}$ , un vecteur non nul. L'application  $\bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu : \Omega \mapsto \vec{T}_{v_0}$  étant, par hypothèse, une immersion, on a donc que :

$$d_{u_0}[\bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu] \cdot \vec{W} = \langle \vec{\nabla} \alpha(u_0) | \vec{W} \rangle v(u_0) \neq 0$$

En particulier, le produit scalaire  $\langle \vec{\nabla} \alpha(u_0) | \vec{W} \rangle$  est non nul. Ceci nous indique que la droite  $\mathbb{R}v(u_0)$  est comprise dans l'hyperplan  $d_{u_0}[\bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu] \cdot T_{u_0}\mathbb{S}_e^{n-1}$ . Mais alors, par la relation (3.3.0.5), on obtient que :

$$\mathbb{R}v(u_0) \subset \bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu(u_0) + d_{u_0}[\bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu] \cdot T_{u_0}\mathbb{S}_e^{n-1}$$

De plus, comme  $v_0 \in P_{u_0}$ , alors par construction, nous avons  $\mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}v(u_0) = \mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}v(u_0)$  et en particulier  $\bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu(P_{u_0}) = \mathbb{R}v(u_0)$ . Ensuite, en observant que  $e \in P_{u_0}$ , nous obtenons :

$$\bar{\varphi}_{v_0} \circ p(e) \in \bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu(u_0) + d_{u_0}[\bar{\varphi}_{v_0} \circ \mu] \cdot T_{u_0}\mathbb{S}_e^{n-1}$$

Or, cela n'est pas possible d'après l'hypothèse initiale. Par conséquent, l'application  $\nu$  est une immersion. De plus, étant une immersion de  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  dans  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ , et avec  $n \geq 3$ , elle est alors, par simple convexité de  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ , un difféomorphisme. En particulier, la famille d'hyperplans  $(\mu \circ \nu^{-1}(u)^*)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est co-orientée.  $\square$

Remarquons que, pour le moment, nous ne traitons pas du cas où  $n = 2$ . En effet, en reconsidérant les arguments de la démonstration précédente, nous savons que l'application  $\nu : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$  est une immersion surjective. Cependant, du fait que  $\mathbb{S}^1$  n'est pas simplement connexe,  $\nu$  n'est pas nécessairement injective. Ainsi, la situation se complique dans ce cas. Si l'application  $\nu$  n'est pas injective, alors les intersections  $P_u \cap s(\mathbb{S}^1)$  vérifient forcément l'une des trois conditions suivantes :

1. Elle contient deux points. Plus précisément, l'intersection  $p(P_u) \cap \mu(\mathbb{S}^1)$  ne contient qu'un seul point si et seulement si l'intersection  $P_u \cap s(\mathbb{S}^1)$  contient exactement deux points qui, de plus, sont antipodaux.

2. Elle contient trois points dont deux sont antipodaux.
3. Elle contient deux couples de points antipodaux.

Prenons un exemple simple d'application  $\mu : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{P}_2$  non triviale. Nous souhaitons donc que l'application  $\nu$  ne soit pas injective, c'est à dire que les intersections  $P_u \cap s(\mathbb{S}^1)$  contiennent plus de deux points. À cette fin, considérons la fonction lisse  $a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  définie comme suit :

$$a(t) = \begin{cases} ke^{-\frac{1}{\sin(t)^4(\sin(t)^2-1)^2}} & \text{si } t \in [0; \frac{\pi}{2}] \bmod 2\pi \\ le^{-\frac{1}{\sin(t)^4(\sin(t)^2-1)^2}} & \text{si } t \in ]\frac{\pi}{2}; \pi[ \cup ]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[ \bmod 2\pi \\ -le^{-\frac{1}{\sin(t)^4(\sin(t)^2-1)^2}} & \text{si } t \in [\pi; \frac{3\pi}{2}] \bmod 2\pi \end{cases} \quad (3.3.0.6)$$

En considérant ensuite l'application  $s : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^2$  définie par l'expression (3.3.0.2), il est aisé de constater qu'il s'agit d'une immersion dont les intersections  $P_u \cap s(\mathbb{S}^1)$  contiennent alternativement deux ou trois points. De plus, l'application  $\mu := p \circ s : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{P}_2$  vérifie les conditions du théorème 3.3.2. Ci-dessous, nous représentons la fonction  $s$  (à gauche), la fonction  $\mu$  (au centre) et le hériçon correspondant (à droite).

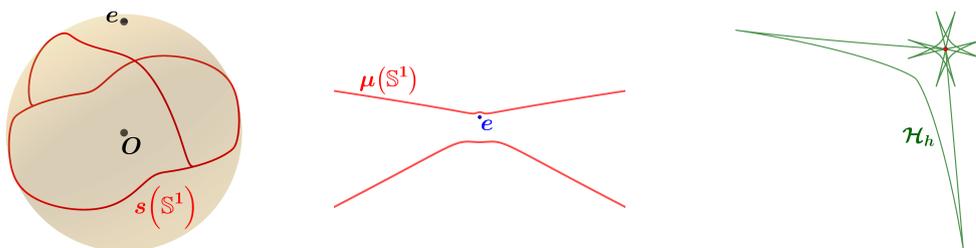


FIGURE 3.8 – Représentation des fonctions  $s$  et  $\mu$  ainsi que du hériçon correspondant

La principale conséquence de ce que nous venons de discuter est que nous ne pourrons jamais avoir  $a = h \circ \nu$ . Ainsi, dans notre exemple, il ne peut donc pas exister de hériçon  $\mathcal{H}_h$  dont le paramétrage du dual vérifie  $\mu = x^* \circ \nu$ , avec  $\nu$  un difféomorphisme de  $\mathbb{S}^1$ .

Néanmoins, nous pouvons obtenir un résultat équivalent à celui que nous observons lorsque  $n \geq 3$ . Considérons  $\mu : \mathbb{S}_e^1 \mapsto \mathbb{P}_2$ , une application vérifiant les conditions du théorème 3.3.2. On obtient alors que  $\mu = p \circ s$  avec  $s$  défini par l'expression (3.3.0.2), et bien sûr,  $\nu$  est une immersion surjective. Il est donc clair qu'il existe  $[a; b] \subset \mathbb{S}_e^1$ , un arc de cercle, tel que :

- L'application  $s$  est injective sur  $]a; b[$ .
- $s([a; b]) = s(\mathbb{S}_e^1)$ .
- $s(a) = s(b)$ .

Ainsi, après passage au quotient, l'application  $\bar{\nu} : \mathbb{S}_e^1 \sim [a; b] /_{a \sim b} \mapsto \mathbb{S}_e^1$  est un difféomorphisme. En considérant l'application  $\bar{\mu} : \mathbb{S}_e^1 \sim [a; b] /_{a \sim b} \mapsto \mathbb{P}_2$ , nous avons  $\bar{\mu}(\mathbb{S}_e^1) = \mu(\mathbb{S}_e^1)$  et la famille d'hyperplans  $(\bar{\mu}(u)^*)_{u \in \mathbb{S}_e^1}$  est co-orientée.

En conclusion, si  $\mathcal{H}_h$  est le hériçon généré par la famille d'hyperplans duals induite par l'application  $\bar{\mu}$ , alors on obtient :

$$\mathcal{H}_h^* = \mu(\mathbb{S}_e^1) \tag{3.3.0.7}$$

ce qui correspond à la conclusion du théorème 3.3.2.

## Deuxième partie

# Sur les $g$ -hérissos de l'espace hyperbolique et de la sphère



Dans cette partie, nous étudions la notion de hérisson sur des espaces non euclidiens, et en particulier sur des espaces dont les courbures sectionnelles sont constantes. La question à laquelle nous allons répondre est donc la suivante : **qu'est-ce qu'un hérisson dans un espace non-euclidien ?** Il apparaît alors une notion naturelle, que nous appellerons g-hérisson, et que nous étudierons sur l'espace hyperbolique et la sphère. En particulier, l'espace hyperbolique et la sphère étant les revêtements universels des variétés de courbure constante (voir annexe E pour plus de détails), il serait alors possible d'étendre nos constructions sur de tels espaces.

La motivation principale qui nous pousse à considérer une notion de hérissons sur les espaces à courbure sectionnelle constante provient de l'ambition de définir et d'étudier des hérissons marginalement piégés dans un cadre plus général que celui considéré par Y.Martinez-Maure dans [74], et où en particulier la courbure de l'espace de Lorentz ne serait pas nulle. En effet, les hérissons marginalement piégés correspondent à des surfaces marginalement piégées, admettant des points ombilics, sur l'espace de Lorentz-Minkowski<sup>5</sup>, qui sont construites à partir de hérissons euclidiens. Or les surfaces marginalement piégées correspondent à des objets géométriques introduits par R.Penrose (voir [83]) pour décrire l'horizon d'un trou noir dans le cadre de la relativité générale. D'où l'intérêt de retrouver la relation, mise en avant par Y.Martinez-Maure (voir [74]), entre ces surfaces et les hérissons euclidiens, mais sur des espaces dont la courbure est non nulle.

Étant donné que nous dédions déjà la partie III de ce document à l'étude des g-hérissons marginalement piégés, nous n'en dirons pas plus dans cette introduction. Cependant, nous verrons ci-dessous que l'intérêt de définir une notion de g-hérisson sur l'espace hyperbolique et la sphère va au-delà des éléments de motivation que nous avons précédemment considérés et qui motivent cette thèse.

## Élément de motivation à l'étude des g-hérissons

Alors que la notion de corps convexe a fait l'objet d'un grand intérêt sur l'espace euclidien, il a rapidement été envisagé d'étudier cette notion sur des espaces non euclidiens, et en particulier l'espace hyperbolique. Nous pouvons par exemple considérer les travaux de L.A.Santaló (voir [95], [96], [97] et [98]) qui font référence sur la question. En particulier, il est intéressant de noter que les articles [95] et [96] correspondent aux premières mentions de tels objets sur l'espace hyperbolique et sur la sphère. On voit alors apparaître dans la littérature une série de questions naturelles que nous présentons succinctement ci-dessous :

- 1) **Différents types de corps convexes** : Sur  $\mathbb{H}^n$ , la définition de corps convexe correspond à la généralisation naturelle de celle que l'on connaît sur  $\mathbb{R}^n$ . Dans la littérature traitant de cette question, on découvre rapidement que l'ensemble des corps convexes de classe  $\mathcal{C}_+^2$ , dont les courbures principales sont supérieures à 1, possèdent des propriétés très proches de celles que l'on connaît sur les corps convexes de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle les corps convexes de cette sous-catégorie des "h-convexes" (avec "h" pour horosphère), tandis que les corps convexes en général sont appelés "g-convexes" (avec "g" pour géodésique). Pour une définition la plus générale possible, nous pouvons nous référer à l'article [33] de E.Gallego et A.Reventós où l'on trouve la notion de corps  $\lambda$ -convexe (voir définition 5 de [33]). En particulier, avec cette notion de corps  $\lambda$ -convexe et les propriétés qui l'accompagnent, on constate que la classification des corps convexes de l'espace hyperbolique est bien plus nuancée que pour les corps convexes de  $\mathbb{R}^n$ .

---

5. Si  $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  est l'espace euclidien usuel de dimension  $n$ , alors on appelle espace de Lorentz-Minkowski l'espace  $\mathbb{L}^{n+1} = \mathbb{E}^n \times \mathbb{R}$  muni du produit de Minkowski  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L = \langle \cdot | \cdot \rangle - dt^2$ .

- 2) **Définir une somme de Minkowski pour les corps convexes de  $\mathbb{H}^n$**  : Sur  $\mathbb{R}^n$ , on étudie la géométrie des corps convexes dans l'espace euclidien en utilisant la somme de Minkowski. Mais sur  $\mathbb{H}^n$ , il n'y a pas de définition universellement reconnue pour la somme de deux ensembles. La principale difficulté dans l'établissement d'une théorie de Brunn-Minkowski pour les corps convexes de l'espace hyperbolique est qu'il n'existe évidemment pas de structure linéaire sous-jacente sur  $\mathbb{H}^n$ .

On trouve néanmoins différentes définitions (non canoniques) de somme de corps convexes sur  $\mathbb{H}^n$ , chacune avec ses avantages et inconvénients. Par exemple, L.Haizhong et X.Botong définissent et étudient (voir [46]) une notion de  $p$ -somme pour les  $h$ -convexes. Nous pourrions aussi citer l'article [34] de E.Gallego, G.Solanes et E.Teufel qui propose différentes méthodes de combinaisons d'hypersurfaces sur  $\mathbb{H}^n$  ayant pour avantage de ne pas dépendre d'un point de référence (voir définition 4 page 339 de [34]) ou de correspondre à une fonction de support  $h$  (voir section 4.4 de [34]). Nous reviendrons sur ces travaux lorsque nous aborderons les  $h$ -hérissons au chapitre 5. Enfin, nous pourrions citer l'article [53] de K.Lleichtweib dans lequel nous trouvons la définition la plus intuitive (voir définition 3.5 page 100 de [53]) pour additionner des corps convexes sur  $\mathbb{H}^n$  mais qui dépend d'un choix d'origine (donc n'est pas isométriquement invariante) et qui surtout n'est pas stable sur l'ensemble des corps convexes. En particulier, le résultat principal (voir théorème 4.12 page 114 de [53]) de ce dernier article montre qu'en adoptant une telle somme, la somme de deux  $h$ -convexes est toujours un corps strictement convexe (mais pas nécessairement un  $h$ -convexe).

- 3) **Inégalité sur les aires, volumes, surfaces et courbure moyenne** : Un exemple classique d'inégalité faisant intervenir les aires, volumes, surfaces et courbure moyenne sur les corps convexes de  $\mathbb{R}^n$  est celui des inégalités isopérimétriques. Bien sûr, cette même question se pose pour les corps  $h$ -convexes. À titre d'exemple, on peut considérer l'article [12] de A.A.Borisenko et V.Miquel qui étudient les rapports entre l'aire, le volume et la courbure moyenne pour les corps  $h$ -convexes.
- 4) **Définition et étude des corps convexes de largeur constante** : Dans l'espace euclidien, tout comme dans l'espace hyperbolique, l'étude des corps convexes de largeur constante occupe une place importante. Il est possible de consulter l'ouvrage [79] de H.Martini, L.Montejano et D.Oliveros où l'on trouve un exposé complet sur cette question. Nous recommandons aussi la lecture de l'article [76], une note simple et pédagogique rédigée par Y.Martinez-Maure traitant en particulier du triangle de Reuleaux qui est, sur le plan, la courbe convexe de longueur constante minimisant sa surface. Dans l'espace euclidien, la définition de largeur d'un corps convexe est immédiate grâce au cinquième axiome<sup>6</sup> d'Euclide. Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  est un corps convexe et  $x \in \partial K$  un point sur le bord avec  $\Sigma$  un hyperplan de support en  $x$ , alors il existe un unique hyperplan de support  $\Sigma'$  pour  $K$  parallèle à  $\Sigma$  (qui peut être le même lorsque le corps  $K$  est d'intérieur vide). Un corps  $K$  est dit de **largeur constante** si la distance entre les paires d'hyperplans  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  est constante.

Dans l'espace hyperbolique et sur la sphère, il n'existe pas de méthode canonique pour définir la notion de largeur constante des corps convexes. Cela découle bien sûr du fait que ni dans l'espace hyperbolique ni sur la sphère, le cinquième axiome d'Euclide ne s'applique<sup>7</sup>.

---

6. Il s'agit de l'axiome des parallèles : Si  $p$  est un point et  $(d)$  une droite, alors il existe une et une seule droite  $(d')$  passant par le point  $p$  et parallèle à la droite  $(d)$ .

Dans l'espace hyperbolique, A.G.Horváth présente dans son article [41] quatre méthodes pour définir un corps convexe de largeur constante (voir section 1.1 de [41]) auxquelles il ajoute une cinquième qu'il définit et étudie (voir définition 2.1 page 47 de [41]). Cet article est intéressant car il compare plusieurs notions de corps convexes de largeur constante. Après avoir lu cet article, on comprend que la principale difficulté pour définir la notion de corps convexe de largeur constante dans l'espace hyperbolique est de choisir une méthode pour identifier des hyperplans parallèles. Plus précisément, cela revient à définir (ou plutôt choisir) une notion **d'injectivité** comme nous l'avons fait naturellement dans l'espace euclidien (voir définition 1.1.6 page 30), mais pour des champs d'hyperplans co-orientés (voir définition 3.0.2 page 280). Pour conclure sur l'étude des corps g-convexes et h-convexes de largeur constante, il est intéressant de mentionner quelques résultats classiques connus dans l'espace euclidien que l'on retrouve également dans l'espace hyperbolique et sur la sphère. Prenons donc, pour exemple, les trois résultats suivants :

- Nous avons un équivalent du théorème de Blaschke-Lebesgue (voir [9]), que nous devons à P.V.Araujo (voir théorème 1 de [4]). Sur le plan euclidien, le théorème de Blaschke-Lebesgue stipule que le triangle de Reuleaux possède la plus petite aire parmi toutes les courbes de largeur constante. Pour rappel, le triangle de Reuleaux est une figure du plan définie de la manière suivante : On part d'un triangle équilatéral et à chaque sommet, on dessine un arc de cercle entre les deux autres sommets, comme le montre la représentation ci-dessous :

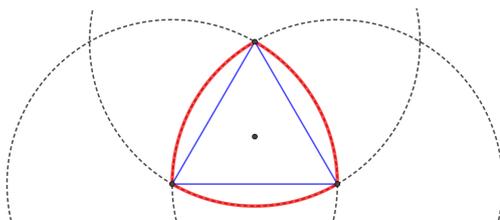


FIGURE 1 – Construction du triangle de Reuleaux

- Nous avons un équivalent du théorème de Barbier (voir théorème 12.1.3 page 281 de [79]) qui affirme : Si  $\mathcal{C}$  est une courbe fermée sur  $\mathbb{R}^2$  de largeur constante, alors  $L = \pi l$ ,  $L$  et  $l$  étant respectivement le périmètre et la largeur de la courbe  $\mathcal{C}$ . K.Leichtweib a montré (voir théorème 3.5 de [55]) que sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  (resp. sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ ) nous avons :

$$L = J \cdot \text{Tan}\left(\frac{l}{2}\right), \text{ resp } L = J \cdot \text{TH}\left(\frac{l}{2}\right)$$

avec  $J$  la courbure totale de la courbe  $\mathcal{C}$ .

---

7. Il est à noter que l'aventure de la géométrie non euclidienne a débuté avec la constatation qu'il est possible de construire des géométries cohérentes où le cinquième axiome d'Euclide n'est plus valide. De nombreux mathématiciens, de Proclus (412 av. J.-C.) à A.M.Legendre, ont tenté de prouver qu'invalider l'axiome des parallèles mène à une contradiction. Cela a notamment conduit à l'émergence de la géométrie hyperbolique entre les XVIIIème et XIXème siècles grâce aux travaux de mathématiciens tels que G.G.Saccheri, J.H.Lambert, N.Lobatchevski et J.Bolyai. Dans cette géométrie, le cinquième axiome est remplacé par : Si  $x$  est un point et  $(d)$  une droite ne contenant pas le point  $x$ , alors il existe une infinité de droites parallèles à la droite  $(d)$  et passant par le point  $x$ . De même, la géométrie sphérique apparaît lorsqu'on rejette l'existence de droites parallèles. Pour en savoir plus sur l'histoire de l'émergence de la géométrie non euclidienne, il est intéressant de consulter l'ouvrage [87] de J.C.Pont.

- Enfin, le théorème d’Alexandrov (voir théorème 13.1.7 page 303 de [79]) : Tout corps convexe à symétrie d’origine<sup>8</sup> sur  $\mathbb{R}^n$  est entièrement déterminé par son volume et ses projections. Un équivalent de ce théorème a été obtenu dans l’espace hyperbolique par M.A.Alfonseca, M.Cordier et D.I.Florentin (voir [2]), à condition de choisir la bonne définition de largeur constante.

Pour en savoir plus, nous pouvons consulter les pages 240 à 243 de [79] où l’auteur énumère les principales avancées réalisées sur la question des corps convexes de largeur constante dans des espaces non euclidiens. En particulier, la question des corps convexes de largeur constante sur des variétés de Riemann abstraites y est traitée.

- 5) **Inégalité de Brunn-Minkowski** : C’est une inégalité qui combine les notions de somme et de volume de corps convexes. Si  $K$  et  $L$  sont deux corps convexes de  $\mathbb{R}^n$ , elle donne une minoration du volume d’une telle somme telle que :

$$Vol_n(K)^{\frac{1}{n}} + Vol_n(L)^{\frac{1}{n}} \leq Vol_n(K + L)^{\frac{1}{n}}$$

Sur l’espace hyperbolique, il est clair qu’à chaque fois que l’on définit une méthode pour sommer des corps convexes, on peut potentiellement retrouver une telle inégalité. C’est par exemple ce que retrouvent L. Haizhong et X. Botong (voir théorème 12.4, 12.5 et 12.6 page 144 de [46]) en utilisant leur définition de  $p$ -somme de corps convexes.

Plus généralement, il est même possible de retrouver l’inégalité de Brunn-Minkowski sur des variétés abstraites, comme D. Barilari et L. Rizzi l’ont mise en évidence (voir la section 1.3 page 6 de [6]).

Sur l’espace euclidien, la théorie des hérissons englobe les différents thèmes que nous avons précédemment abordés. Dans la première partie, nous avons discuté de la notion de hérisson comme étant des différences de corps convexes de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ . Mais bien sûr, nous pouvons étendre cela à tous les corps convexes, quelle que soit leur classe (voir [61]). Ceci nous amène naturellement à étendre la théorie de Brunn-Minkowski aux hérissons. En effet, nous avons une structure vectorielle sur l’ensemble des hérissons et une notion de volume (voir [62]). Cela permet de retrouver des résultats classiques comme l’inégalité d’Alexandrov-Fenchel (voir théorème 1 page 446 de [60] et théorème 2 page 67 de [73]), l’inégalité de Brunn-Minkowski (voir propriété 3 page 448 de [60]) ou encore l’inégalité isopérimétrique présente sur le plan (voir proposition 5 page 449 de [60]) et qui, dans l’espace  $\mathbb{R}^3$ , met en lumière la notion de hérisson marginalement piégé (voir [69] et [74]).

Au vu de ces derniers éléments, il est clair qu’une théorie des hérissons sur les espaces à courbure constante serait utile pour étudier les corps convexes, à l’instar de ce qui est fait avec les hérissons de l’espace euclidien. Tout comme pour les notions gravitant autour des corps convexes de l’espace hyperbolique, nous serons confrontés à la non-canonicité du problème qui consiste à définir une notion de hérisson et, par conséquent, à la nécessité de définir une sorte de ”cahier des charges” à respecter.

Terminons cette introduction avec la question de l’étude des courbes de Zindler qui prennent récemment de l’intérêt dans la théorie des hérissons. Une courbe  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  est dite de **Zindler** lorsque toutes les cordes qui coupent le périmètre de la courbe en deux parties égales sont de même

8. Un corps  $K$  est dit à symétrie d’origine s’il vérifie : Si  $x \in K$ , alors  $-x \in K$ .

8. Voir théorème 7.3.1 page 393 de [100] pour en savoir plus.

longueur. Comme pour les corps convexes, l'étude des hérissons de largeur constante<sup>9</sup> permet d'obtenir plusieurs résultats (voir [59], [64], [56], [58] et [62]). Il a récemment été établi par D. Rochema sur le plan (voir théorème 1 de [90]) puis sur  $\mathbb{R}^4$  en travaillant avec Y. Martinez-Maure (voir théorème 4 de [91]) que toute courbe de Zindler généralisée correspond à la transformée<sup>10</sup> d'un hérisson projectif<sup>11</sup>.

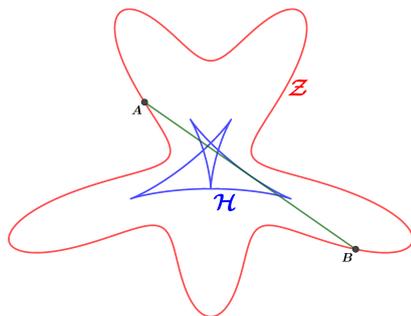


FIGURE 2 – Courbe  $\mathcal{Z}$  de Zindler du plan associée au hérisson projectif  $\mathcal{H}$  par transformation de paramètre  $r = 0,5$ .

Notons aussi que certains travaux ont étudié les courbes de Zindler dans des géométries non euclidiennes, comme dans les espaces isotropes (voir [88] et [108]). Il sera donc intéressant de retrouver, sur l'espace hyperbolique, les relations mises en avant par D. Rochema et Y. Martinez-Maure à travers les g-hérissons que nous définirons au chapitre suivant.

9. Un hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$  sera dit de largeur constante si et seulement si sa fonction de support vérifie  $h(u) + h(-u) = cst$  pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

10. Sur  $\mathbb{R}^2$ , la transformée d'un hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2$  de paramétrage  $x : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  correspond à la courbe paramétrée par  $y(u) = x(u) + re(u)$  avec  $r > 0$  un paramètre et  $e : \mathbb{S}^1 \rightarrow T\mathbb{S}^1$  la section lisse telle que pour tout  $u \in \mathbb{S}^1$ , la famille  $(u, e(u))$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^2$  dans le même sens que la base canonique.

11. Un hérisson est dit projectif lorsqu'il est de largeur constante et nulle. En particulier, un hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$  est projectif si et seulement si sa fonction de support vérifie  $h(u) + h(-u) = 0$  pour tout  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .



## Chapitre 4

# Définition et première propriété de la notion de g-hérisson sur l'espace hyperbolique

Dans ce chapitre, nous définissons la notion de g-hérisson qui correspond à une méthode parmi d'autres pour généraliser la notion de hérisson que nous avons vue en partie I. En particulier, nous mettrons l'accent sur le fait que cette méthode découle d'un choix de procédé sur la comparaison des hyperplans orientés.

### 4.1 Petit point sur la géométrie hyperbolique

Avant toute chose, il est essentiel de faire un point sur quelques notions de la géométrie hyperbolique. Nous en profiterons aussi pour définir les notations employées tout au long de ce document. Pour en savoir plus sur les notions que nous introduisons, il est possible de se référer à la section 5.1 de l'annexe E.

**L'espace ambiant :** Nous commençons par définir les deux espaces ci-dessous qui reviendront systématiquement tout au long de cette partie, ainsi que dans la partie III.

- On appelle **espace euclidien usuel de dimension  $n$** , que l'on note  $\mathbb{E}^n$ , la donnée de  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel que l'on notera  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .
- On appelle **espace de Lorentz-Minkowski de dimension  $n + 1$** , que l'on note  $\mathbb{L}^{n+1}$ , la donnée de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que l'on munit du produit de Minkowski  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L = \langle \cdot | \cdot \rangle - dt^2$ . Il nous arrivera de noter  $\mathbb{L}^{n+1} = \mathbb{E}^n \times \mathbb{R}$  l'espace de Lorentz-Minkowski, notation que nous adopterons en particulier durant la partie III.

**Définition et modèle de l'espace hyperbolique :** On appelle **espace hyperbolique de dimension  $n$**  toute  $n$ -variété de Riemann  $(M, g)$  complète, simplement connexe, dont la courbure est partout égale à  $-1$ . Notons que de telles variétés sont deux à deux isométriques, à condition bien sûr qu'elles soient de la même dimension. Il existe aussi plusieurs modèles de l'espace hyperbolique et nous travaillerons essentiellement avec trois d'entre eux qui sont les suivants :

- **Le modèle du demi-hyperboloïde de Lorentz-Minkowski :** On considère le demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{L}^{n+1}$  de l'espace de Lorentz-Minkowski tel que :

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1 \text{ et } x_{n+1} > 0\} \quad (4.1.0.1)$$

que l'on munit de la métrique induite notée  $g$ . Dans ce modèle, les géodésiques correspondent aux intersections de plans vectoriels de type temps avec le demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$ . Il est à noter que ce modèle sera notre modèle par défaut. En particulier, lorsque nous parlerons de l'espace hyperbolique, il s'agira du demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$  muni de la métrique induite  $g$ .

- **Le modèle de Klein** : Considérons  $e \in \mathbb{H}^n$  un point, alors on appelle **projection de Klein centrée en  $e$**  la projection, par rapport à l'origine, de l'hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$  sur l'hyperplan affine  $e + T_e\mathbb{H}^n$ . On obtient ainsi l'application  $\psi_e : \mathbb{H}^n \mapsto \mathcal{D}(e)$ , avec  $\mathcal{D}(e)$  la boule ouverte unité de l'espace euclidien  $(T_e\mathbb{H}^n, g_e)$ , définie par l'expression suivante :

$$\psi_e(v) = k_e(v)v - e \text{ avec } k_e(v) = -\frac{1}{\langle e|v \rangle} \quad (4.1.0.2)$$

qui est un difféomorphisme dont la réciproque est :

$$\varphi_e(w) = \alpha(w)[w + e] \text{ avec } \alpha(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - \|w\|^2}} \quad (4.1.0.3)$$

On appelle alors **modèle de Klein centré en  $e$**  la donnée de la boule unité  $\mathcal{D}(e)$  que l'on munit de la métrique tirée en arrière  $\varphi_e^*(g)$ . Notons que, dans ce modèle de l'espace hyperbolique, les géodésiques correspondent aux intersections non vides de la boule unité  $\mathcal{D}(e)$  avec les droites affines de l'espace tangent  $T_e\mathbb{H}^n$ .

- **Le modèle de Poincaré** : Considérons  $e \in \mathbb{H}^n$  un point, alors on appelle **projection de Poincaré centrée en  $e$**  la projection par rapport à  $-e$  de  $\mathbb{H}^n$  sur l'hyperplan vectoriel  $T_e\mathbb{H}^n$ . La projection ainsi définie est une application  $\psi_e : \mathbb{H}^n \mapsto \mathcal{D}(e)$  qui est un difféomorphisme. Ainsi, si  $\varphi_e$  est l'inverse de la projection de Poincaré, alors on appelle **modèle de Poincaré centré en  $e$**  la donnée de la boule unité  $\mathcal{D}(e)$  munie de la métrique tirée en arrière  $\varphi_e^*(g)$  qui est conforme avec le produit scalaire  $g_e$  de l'espace tangent  $T_e\mathbb{H}^n$ . Notons que les géodésiques de ce modèle correspondent aux intersections de la boule unité  $\mathcal{D}(e)$  avec les droites vectorielles et les cercles orthogonaux au bord topologique de  $\overline{\mathcal{D}}(e)$  dans  $(T_e\mathbb{H}^n, g_e)$ .

**Notations usuelles** : Pour des fins pratiques, nous résumons ci-dessous les notations usuelles que nous utiliserons très régulièrement. Considérons donc  $e \in \mathbb{H}^n$  un point, alors nous noterons :

- $\mathbb{E}^n$  l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ .
- $\mathbb{L}^{n+1}$  l'espace de Lorentz-Minkowski  $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot | \cdot \rangle_L)$ .
- $\mathcal{D}(e)$  la boule unité de  $(T_e\mathbb{H}^n, g_e)$ .
- $\mathbb{S}_e^{n-1} = ST_e\mathbb{H}^n$  que l'on appelle **hypersphère centrée en  $e$** .

**Avertissement 4.1.1.** Afin de simplifier la rédaction, nous nous permettrons de confondre les notations des produits  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ,  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$  et  $g_e(\cdot, \cdot)$  lorsque, bien sûr, cela ne produira pas de confusion.

## 4.2 Les corps g-convexes

Dans cette section, nous exposons quelques éléments de base sur les corps convexes dans l'espace hyperbolique. Nous y considérons également quelques propriétés topologiques et définissons les g-hyperplans et fonctions de support. Cette section est un préliminaire à la définition de la notion de g-hérisson.

### 4.2.1 Définition et première remarque

La notion de corps convexe, telle que nous l'avons vue sur les espaces euclidiens, peut se définir sur toute variété de Riemann et suscite un intérêt<sup>1</sup> certain, même sur des variétés abstraites. Tout d'abord, la notion de corps est une notion topologique qui est la suivante : Si  $(M, \mathcal{T})$  est une variété topologique, alors une partie  $K \subset M$  est appelée **corps** lorsqu'elle est non vide et vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

→ La partie  $K$  est compacte d'intérieur vide.

→ La partie  $K$  est compacte d'intérieur non vide telle que  $K = Ad\left(\overset{\circ}{K}\right)$ .

En particulier, on peut remarquer que les corps convexes tels que nous les avons définis en partie I (voir définition 1.1.1 page 25) sont bien des corps. Ensuite, sur une variété de Riemann  $(M, g)$ , une partie  $K \subset M$  sera dite **géodésiquement convexe** si, étant donné deux points quelconques de  $K$ , il existe une géodésique minimisante<sup>2</sup> unique contenue dans  $K$  qui joint ces deux points. Ainsi, sur l'espace hyperbolique, on considère la définition suivante :

**Définition 4.2.1.** Une partie  $K \subset \mathbb{H}^n$  sera appelée **corps g-convexe** si elle est compacte, non vide et vérifie la condition de convexité : Pour tout couple de points  $x$  et  $y$  dans  $K$ , le segment géodésique qui relie  $x$  à  $y$  est compris dans  $K$ .

De plus, nous dirons que le corps  $K$  est de classe  $C^k$  lorsque son bord topologique est une sous-variété de classe  $C^k$ .

**Note.** Si  $x$  et  $y$  sont deux points dans une variété de Riemann  $(M, g)$ , alors on appelle **segment géodésique reliant  $x$  à  $y$**  l'image de toute géodésique  $\gamma : [a, b] \mapsto M$  telle que  $\gamma(a) = x$  et  $\gamma(b) = y$ . En particulier, sur l'espace hyperbolique, pour tout couple de points  $x$  et  $y$ , il existe un unique segment géodésique les reliant et qui de plus est une géodésique minimisante.

**Remarque 4.2.1.** Si  $\psi_e : \mathbb{H}^n \mapsto \mathcal{D}(e)$  est la projection de Klein centrée en  $e \in \mathbb{H}^n$ , alors une partie  $K \subset \mathbb{H}^n$  est un corps convexe (resp. de classe  $C^k$ ) si et seulement si l'image  $\psi_e(K)$  est un corps convexe (resp. de classe  $C^k$ ) sur l'espace euclidien  $(T_e\mathbb{H}^n, g_e)$ .

Cette remarque va nous permettre de faire correspondre les propriétés des corps g-convexes avec celles que nous connaissons sur les corps convexes de l'espace euclidien. Il est important de noter que l'on parle de correspondance car il est évident que nous ne retrouvons pas exactement les mêmes propriétés. Il est déjà possible, en se basant sur cette dernière remarque, de considérer les propriétés topologiques suivantes :

1. Dans une série d'articles, B.V.Dekster a travaillé sur la notion de corps convexe de largeur constante sur des variétés de Riemann (voir [19], [18], [21], [20] et [22]). En particulier, l'auteur a montré que l'on retrouve certaines propriétés standards que l'on connaît sur l'espace euclidien.

2. On appelle géodésique minimisante un segment géodésique qui minimise la distance géodésique. Nous pouvons constater que ce n'est pas toujours vrai qu'un segment géodésique minimise la distance géodésique en considérant, par exemple, la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

1. Un corps  $g$ -convexe  $K$  a un intérieur non vide si et seulement s'il est de classe  $\mathcal{C}^0$ .
2. Un corps  $g$ -convexe n'est pas de classe  $\mathcal{C}^0$  si et seulement s'il est compris dans un  $g$ -hyperplan (voir définition 4.2.2 ci-dessous).

#### 4.2.2 Définition et propriété sur les $g$ -hyperplans de support

Il existe essentiellement deux méthodes, qui ont toutes deux des avantages et des inconvénients, pour définir un équivalent aux hyperplans de support sur les corps  $g$ -convexes. Nous pouvons utiliser des géodésiques porteuses et transversales pour raisonner comme dans un espace affine. C'est une méthode qui a été introduite par L.A.Santaló afin de définir une notion de largeur constante pour les corps  $g$ -convexes (voir [96] pour en savoir plus). Nous pouvons aussi utiliser les horosphères comme courbes supports, comme cela a été considéré par J.P.Fillmore (voir [32]). Cette dernière approche permet d'obtenir un grand nombre de résultats, mais elle a pour inconvénient de n'être applicable que pour une partie réduite des corps  $g$ -convexes. Malgré cela, il est à noter que les propriétés ainsi obtenues privilégient cette méthode pour étudier la notion de convexité sur l'espace hyperbolique. En particulier, nous en parlerons au prochain chapitre.

Ici, nous nous appuyerons sur la méthode des géodésiques transverses et porteuses qui, après quelques adaptations, nous amène à naturellement définir les  $g$ -hyperplans de support ainsi que la notion de fonction de support qui leur est associée. Cette méthode nous permet d'établir une correspondance directe entre les corps  $g$ -convexes et les corps convexes des espaces euclidiens via la projection de Klein. Considérons donc la définition suivante :

**Définition 4.2.2.** *On appelle  **$g$ -hyperplan** toute hypersurface totalement géodésique<sup>3</sup> de l'espace hyperbolique.*

Pour plus de détails, nous pouvons nous rapporter à la section 5.1.4.2 page 311 de l'annexe E dans laquelle nous traitons en détail les propriétés des  $g$ -hyperplans. De cette manière, afin d'éviter de surcharger notre texte, nous allons nous contenter de lister les propriétés qui nous seront nécessaires.

1. Une hypersurface  $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$  est un  $g$ -hyperplan si et seulement s'il existe un point  $e \in \mathbb{H}^n$  tel que l'image de  $\Sigma$  par la projection de Klein centrée en  $e$  est l'intersection d'un hyperplan affine avec le disque unité. De plus, si  $\Sigma$  est un  $g$ -hyperplan, alors pour tout  $v_0 \in \mathbb{H}^n$ , on a que  $\psi_{v_0}(\Sigma)$  correspond à l'intersection (non vide) d'un hyperplan affine de  $T_{v_0}\mathbb{H}^n$  avec  $\mathcal{D}(v_0)$ .
2. Si  $\Sigma$  est un  $g$ -hyperplan, alors en tout point  $e \in \mathbb{H}^n$ , il existe une unique géodésique orthogonale à  $\Sigma$  et passant par le point  $e$ . De plus, si  $\gamma$  est la géodésique orthogonale à  $\Sigma$ , alors l'intersection  $\gamma \cap \Sigma$  ne contient qu'un seul point.
3. Pour tout point  $e \in \mathbb{H}^n$  et vecteur  $\vec{v} \in T_e\mathbb{H}^n$ , non nul, il existe un unique  $g$ -hyperplan passant par le point  $e$  et orthogonal au vecteur  $\vec{v}$ .
4. Tout  $g$ -hyperplan est une hypersurface orientable qui admet exactement deux orientations. Nous appellerons donc  **$g$ -hyperplan orienté** la donnée d'un  $g$ -hyperplan  $\Sigma$  que l'on munit d'un champ orthonormal  $\nu : \Sigma \rightarrow ST\mathbb{H}^n$ .
5. Tout  $g$ -hyperplan  $\Sigma$  divise l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  en deux parties fermées géodésiquement convexes que nous appellerons **demi-espaces bordant  $\Sigma$** .

3. Nous dirons qu'une  $p$ -sous-variété  $N \subset M$  dans une variété de Riemann est totalement géodésique si toute géodésique  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^n$  tangente à  $N$  est comprise dans  $N$ .

Une notion importante dont nous aurons besoin est celle de  $g$ -hyperplan parallèle. Bien sûr, par définition de l'espace hyperbolique, la notion de parallèle n'est pas aussi simple que dans l'espace euclidien. Nous dirons que deux  $g$ -hyperplans sont **parallèles** lorsque leur intersection est vide. Ainsi, on considère la définition suivante :

**Définition 4.2.3.** *Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point et deux  $g$ -hyperplans  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Alors nous dirons que ces deux  $g$ -hyperplans sont **parallèles par rapport à  $e$**  s'il existe une géodésique  $\gamma$  passant par le point  $e$  et orthogonale aux deux  $g$ -hyperplans.*

**Remarque 4.2.2.** *Si  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont deux  $g$ -hyperplans parallèles par rapport à  $e$ , alors ils sont parallèles.*

**Remarque 4.2.3.** *Il existe des  $g$ -hyperplans parallèles qui ne sont parallèles par rapport à aucun point. (Voir section 5.1.4.3 page 312 de l'annexe E)*

À partir de là, nous pouvons définir l'analogue des hyperplans de support que nous avons vus à la section 1.1 page 25. En particulier, il est intéressant de remarquer que nous retrouvons essentiellement les mêmes propriétés que celles vues pour les corps convexes de l'espace euclidien. Ce constat rendra naturelle la définition de  $g$ -hérisson que nous considérerons, comme cela a été le cas pour les hérissons de l'espace euclidien. On considère donc la définition suivante :

**Définition 4.2.4.** *Soit  $K \subset \mathbb{H}^n$  un corps  $g$ -convexe. Alors on appelle  **$g$ -hyperplan de support** tout  $g$ -hyperplan  $\Sigma$  tel que :*

1. *Le corps  $K$  est compris dans le demi-espace bordé par  $\Sigma$ .*
2. *L'intersection  $K \cap \Sigma$  est non vide.*

**Note.** *De plus, si  $\Sigma$  est un  $g$ -hyperplan de support, alors nous appellerons **demi-espace de support** le demi-espace bordant  $\Sigma$  qui contient le corps  $K$  et **point de support** les points contenus dans l'intersection  $K \cap \Sigma$ , définissant ainsi  $Supp(K)$  comme étant l'ensemble des points de support.*

Il est alors immédiat que  $Supp(K) = \partial K$  comme pour les corps convexes de l'espace euclidien. Mais aussi, dans le cas où le bord de  $K$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ , la propriété 1.1.1 de la page 26, que nous réadaptions aux corps  $g$ -convexes via la projection de Klein (voir la remarque 4.2.1), nous donne que le bord topologique de  $K$  est une hypersurface orientée de classe  $\mathcal{C}^k$  telle que :

1. Si  $\nu : \partial K \mapsto ST\mathbb{H}^n$  est un champ orthonormal, alors l'application  $\nu$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  et pour tout  $x \in \partial K$ , le  $g$ -hyperplan passant par le point  $x$  et orthogonal au vecteur  $\nu(x)$  est un  $g$ -hyperplan de support.
2. Pour tout  $x \in \partial K$ , il existe un unique  $g$ -hyperplan de support contenant le point  $x$ .

Remarquons que, contrairement à la propriété 1.1.1, nous n'avons pas évoqué la surjectivité de l'application  $\nu$ . Cela provient du fait qu'il n'existe pas de méthode canonique pour comparer les orientations des  $g$ -hyperplans de support dans l'espace hyperbolique. La question est donc de surmonter ce problème. En constatant que le bord d'un corps  $g$ -convexe de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ , admet exactement deux orientations, nous considérons la définition suivante :

**Définition 4.2.5.** *Soit  $K \subset \mathbb{H}^n$  un corps  $g$ -convexe de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ . Alors on appelle **orientation extérieure au corps  $K$**  l'unique orientation  $\nu : \partial K \mapsto ST\mathbb{H}^n$  telle que, pour tout  $x \in \partial K$ , si  $\gamma$  est la géodésique qui passe par le point  $x$  à la vitesse  $\nu(x)$  à l'instant  $t = 0$ , alors :*

$$\gamma(t) \in \mathbb{H}^n \setminus K \tag{4.2.2.1}$$

*pour tout  $t > 0$ .*

**Note.** Par opposition, nous appellerons **orientation intérieure au corps  $K$**  l'orientation opposée à l'orientation extérieure.

Notons que tout corps  $g$ -convexe, de classe  $C^k$ , muni de l'orientation extérieure présente en chaque point une courbure Gauss<sup>4</sup> positive ou nulle. Ce constat nous amène à considérer naturellement la définition suivante :

**Définition 4.2.6.** Nous dirons qu'un corps  $g$ -convexe est de **classe  $C_+^k$** , avec  $k \geq 2$ , lorsque son bord topologique  $\partial K$  est une hypersurface orientable de classe  $C^k$  dont la courbure de Gauss n'est jamais nulle.

**Avertissement 4.2.1.** À ce stade, nous reprenons l'avertissement 1.1.2 page 29, consistant à ne considérer que les corps  $g$ -convexes de classe  $C_+^\infty$ . Ainsi, dans toute la suite, lorsque nous considérerons un corps  $g$ -convexe, nous supposerons implicitement qu'il est de classe  $C_+^\infty$  (sauf mention contraire).

Nous abordons maintenant une question essentielle pour définir une notion de hérisson dans l'espace hyperbolique : **Comment comparer l'orientation des hyperplans tangents du bord d'un corps  $g$ -convexe ?** L'idée est d'établir une méthode associant la donnée d'un triplet  $(x, T_x \partial K, \nu(x))$ , avec  $x \in \partial K$  et  $\nu$  le champ orthonormal correspondant à l'orientation extérieure au corps  $K$ , à la donnée d'un couple  $(x, u)$ , où  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Il est alors important de bien remarquer qu'il n'existe pas de méthode canonique qui réponde à cette problématique. Aussi, bon nombre de questionnements sur les corps  $g$ -convexes se ramènent, de près ou de loin, à cette question. Par exemple, lorsque L.A.Santaló ou J.P.Fillmore définissent une notion de largeur constante correspondant respectivement à l'usage des géodésiques porteuses et transverses, ou par le biais des horosphères, cela passe nécessairement par la contrainte de donner un sens à la notion d'hyperplan tangent opposé

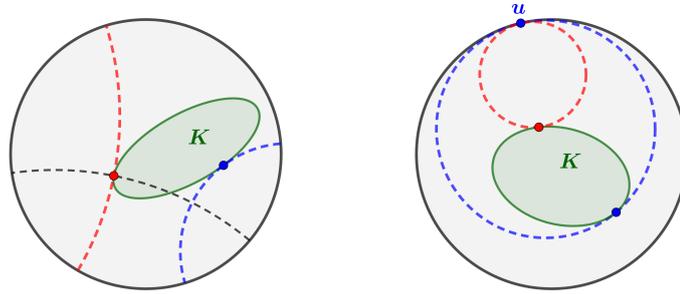


FIGURE 4.1 – Identification des hyperplans tangents opposés selon la méthode de L.A.Santaló (à gauche) et de J.P.Fillmore (à droite)

Nous pouvons néanmoins observer que pour L.A.Santaló il est seulement nécessaire de définir les hyperplans opposés, tandis que pour J.P.Fillmore, une méthode est clairement établie pour comparer toutes les orientations des hyperplans tangents. En ce qui nous concerne, nous proposons ci-dessous une méthode à la croisée de ces deux approches.

**Définition 4.2.7.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point, alors nous désignons par **hypersphère centrée en  $e$**  la  $(n-1)$ -sphère  $\mathbb{S}_e^{n-1} = S[T_e \mathbb{H}^n]$ .

4. Si  $N \subset M$  est une hypersurface orientée par  $\nu : N \rightarrow STM$ , alors on appelle **courbure de Gauss** le déterminant  $k = \det(\nabla \nu)$ , où  $\nabla$  est la connexion induite par l'injection canonique et la connexion de Levi-Civita sur  $TM$ . Précisons que, pour tout  $x \in N$ , la dérivée covariante  $(\nabla \nu)_x$  définit un endomorphisme de  $T_x N$ .

**Propriété 4.2.1.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  et  $(\Sigma, \nu)$  un  $g$ -hyperplan orienté. Il existe alors un unique vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que la géodésique  $\gamma$  passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$ , intersecte le  $g$ -hyperplan en  $x$  avec  $\nu(x) = \partial_t \gamma(t_0)$ , où  $t_0$  est l'instant pour lequel  $x = \gamma(t_0)$ .

*Démonstration.* En se plaçant dans le modèle de Poincaré centré en  $e$ , c'est immédiat.  $\square$

Considérons un corps  $g$ -convexe  $K$  de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ , ainsi que  $\nu : \partial K \mapsto ST\mathbb{H}^n$  le champ orthonormal extérieur. À chaque point  $x \in \partial K$ , si  $\Sigma$  est le  $g$ -hyperplan de support en  $x$ , considérons alors  $\eta : \Sigma \mapsto ST\mathbb{H}^n$  le champ orthonormal associé au vecteur  $\nu(x)$  en  $x$ . D'après ce qui précède, il existe un vecteur unique  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  correspondant au  $g$ -hyperplan orienté  $(\Sigma, \eta)$ . Nous définissons ainsi une fonction  $v : \partial K \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$ , que nous appelons **champ orthonormal extérieur centré en  $e$** . La propriété suivante nous fournit alors la méthode recherchée.

**Propriété 4.2.2.** Soit  $K \subset \mathbb{H}^n$  un corps  $g$ -convexe de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ . Alors, le champ orthonormal extérieur centré en  $e$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  et est surjective.

De plus, si  $K$  est un corps  $g$ -convexe de classe  $\mathcal{C}_+^k$ , avec  $k \geq 2$ , alors le champ orthonormal extérieur centré en  $e$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.

*Démonstration.* Pour ce faire, plaçons-nous dans le modèle de Klein centré en  $e$ . Notons que si  $L \subset T_e\mathbb{H}^n$  est un hyperplan affine intersectant la boule ouverte  $\mathcal{D}(e)$  et si  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  est un vecteur tel que  $\mathbb{R}u \perp L$ , alors la géodésique  $\gamma \subset \mathbb{H}^n$  passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  intersecte orthogonalement le  $g$ -hyperplan  $\Sigma = \varphi_e(L \cap \mathcal{D}(e))$ . Voir la propriété 5.1.4 et la remarque 5.1.4 page 304 de l'annexe E pour plus de détails.

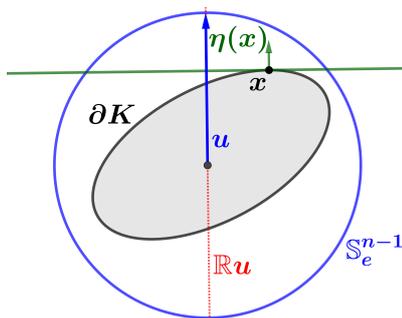


FIGURE 4.2 – Correspondance géométrique du champ orthonormal.

De cette remarque, il est clair que dans le modèle de Klein centré en  $e$ , le champ orthonormal centré en  $e$  correspond à l'orientation extérieure du corps convexe  $\psi_e(K)$  dans l'espace euclidien  $(T_e\mathbb{H}^n, g_e)$ . Ainsi, par les propriétés 1.1.1 et 1.1.5 des pages 26 et 32, nous obtenons le résultat recherché.  $\square$

Nous prendrons l'habitude d'orienter les  $g$ -hyperplans de support d'un corps  $g$ -convexe de manière à ce que leur orientation corresponde à l'orientation extérieure. Nous appelons alors **orientation extérieure** l'orientation des  $g$ -hyperplans de support ainsi définie. En particulier, d'après la propriété 4.2.2, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , il correspond un unique  $g$ -hyperplan de support que nous noterons  $\Sigma_u$ , dont l'orientation extérieure est associée au vecteur  $u$  (via le champ orthonormal extérieur centré en  $e$ ).

**Notation 4.2.1.** Dans la suite, nous prendrons la liberté de désigner par **orientation** les vecteurs de l'hypersphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ .

**Remarque 4.2.4.** Soit  $K \subset \mathbb{H}^n$  un corps  $g$ -convexe et  $e \in \mathbb{H}^n$  un point. En considérant l'inverse du champ orthonormal centré en  $e$ , nous obtenons une application que l'on désigne par  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \partial K$ , et que nous appellerons naturellement **paramétrage centré en  $e$  du corps  $K$** . Elle vérifie que pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , le point  $x(u)$  est le point de support qui correspond à l'unique point dans l'intersection  $K \cap \Sigma_u$ . Plus spécifiquement, il convient de noter que le paramétrage centré en  $e$  ainsi défini est un difféomorphisme.

### 4.2.3 Fonction de support d'un corps $g$ -convexe

La notion de fonction de support est un outil essentiel pour décrire les corps convexes. Dans l'espace euclidien, nous avons vu que la fonction de support est définie par la définition 1.1.7 page 33. Cependant, dans l'espace hyperbolique, plusieurs notions s'en rapprochent. Par exemple, lorsqu'un corps  $g$ -convexe est  $h$ -convexe, il existe naturellement une notion de fonction de support définie par la distance signée de chaque horosphère de support (voir définition 5.3.2 page 117). Aussi, nous pouvons la définir par le biais des bandes de support (voir définition 2.2 page 260 de [55]). Enfin, nous pouvons considérer un dernier exemple de fonction de support qui est donné dans l'article [54] (voir (9) page 178), et qui ressemble beaucoup à ce que nous aborderons dans cette section. Nous retrouvons donc le même problème évoqué en introduction concernant la non-canonicité des notions à considérer. En effet, si dans l'espace euclidien il n'existe qu'une seule façon de définir la fonction de support d'un corps convexe, nous venons de voir que ce n'est pas le cas dans l'espace hyperbolique.

**Remarque 4.2.5.** Soit  $\gamma$  une géodésique passant par un point  $e$  à la vitesse  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , alors il est clair que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$t = \int_0^t \|\partial_t \gamma(t)\| dt \quad (4.2.3.2)$$

**Définition 4.2.8.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point et  $K$  un corps  $g$ -convexe. On définit la **fonction de support centrée en  $e$  de  $K$**  comme la fonction  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  telle que pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ ,  $\gamma_u(h(u)) \in \Sigma_u$ , où  $\Sigma_u$  est l'unique  $g$ -hyperplan de support de  $K$  dont l'orientation extérieure correspond au vecteur  $u$  et  $\gamma_u$  est la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$ .

**Propriété 4.2.3.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point et  $K$  un corps  $g$ -convexe. La fonction de support  $h$  centrée en  $e$  de  $K$  est lisse. De plus, si  $\psi_e : \mathbb{H}^n \mapsto \mathcal{D}(e)$  est la projection de Klein centrée en  $e$ , alors  $L = \psi_e(K)$  est un corps convexe dont la fonction de support est  $l = TH(h)$ .

*Démonstration.* Via la projection de Klein centrée en  $e$ , on sait que  $L = \psi_e(K)$  est un corps convexe dans l'espace euclidien  $T_e \mathbb{H}^n$ . De plus, on peut montrer que si  $\gamma$  est la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  à l'instant  $t = 0$ , alors  $\psi_e \circ \gamma(t) = TH(t)u$ . En particulier, si  $h$  et  $l$  sont les fonctions de support des corps  $K$  et  $L$ , alors (par la remarque 4.2.5), on a  $l = TH(h)$ . Ce qui termine la preuve.  $\square$

## 4.3 Les familles de $g$ -hyperplans co-orientés

Commençons par faire un point sur la terminologie. Sur un fibré métrique  $(E, g)$ , un champ d'hyperplan vectoriel<sup>5</sup>  $T \subset E$  est dit **co-orienté** si et seulement si le champ des droites vecto-

5. Soit  $(E, g)$  un fibré vectoriel de base  $\beta$  et de dimension  $n$ . On appelle **champ de  $p$ -sous-espaces vectoriels** toute famille de  $p$ -sous-espaces vectoriels  $(V_x)_{x \in \beta}$  vérifiant qu'il existe toujours localement une famille libre de sections  $(e_1, \dots, e_p)$  telle que  $V = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ .

rielles orthogonales  $l = T^\perp$  est orienté<sup>6</sup>. Nous pouvons alors donner une première adaptation de cette définition pour les variétés de Riemann comme suit :

**Définition 4.3.1.** Soit  $(M, g)$  une variété de Riemann et  $x : \Gamma \rightarrow M$  une application lisse. Nous dirons qu'un champ d'hyperplan  $T \subset x^*TM$  est **co-orienté** s'il existe une section lisse  $\nu : \Gamma \rightarrow x^*STM$  telle que :

$$T_u = \langle \nu(u) \rangle^\perp \quad (4.3.0.1)$$

pour tout  $u \in \Gamma$ .

**Note.** Nous dirons qu'un champ d'hyperplan co-orienté est **régulier** lorsque la dérivée covariante de la section  $\nu$  est injective en tout point.

**Remarque 4.3.1.** Il est clair qu'un champ d'hyperplan  $T \subset x^*TM$  est co-orienté si et seulement s'il est co-orienté dans le fibré métrique  $(x^*TM, g)$  selon la définition générale, ce qui assure le bon usage de la terminologie.

**Remarque 4.3.2.** Il est important de noter le caractère global de cette définition. Si l'on considère, par exemple,  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  le ruban de Möbius et  $(T_u)_{u \in \mathcal{M}}$  la famille des plans tangents, il est clair que cette famille de plans tangents ainsi définie ne correspond pas à un champ d'hyperplan co-orienté. Cela vient du fait qu'il n'est pas possible d'orienter les plans tangents de manière à satisfaire globalement la condition (4.3.0.1). En effet, dans le cas contraire, le ruban de Möbius serait une surface orientable.

Autre exemple : les hypersurfaces orientées de  $\mathbb{R}^n$ . Il est clair que tout champ d'hyperplan correspondant à la famille des hyperplans tangents d'une hypersurface orientée est co-orienté. Plus généralement, une hypersurface  $\Sigma \subset M$ , avec  $(M, g)$  une variété de Riemann, est orientable si et seulement si sa famille d'hyperplans tangents correspond à un champ d'hyperplan co-orienté.

Pour les besoins de nos futurs développements, nous allons devoir adapter la définition 4.3.1 pour donner une définition de co-orientation (dont l'équivalence avec la définition 4.3.1 est évidente) sur les familles  $(T_u, \bar{\beta}_u)_{u \in \Gamma}$  d'hyperplans orientés dans un fibré  $TM$ , avec  $(M, g)$  une variété de Riemann orientée. Considérons donc la définition suivante :

**Définition 4.3.2.** Soit  $(M, g)$  une variété de Riemann orientée. Nous dirons alors qu'une famille d'hyperplans orientés  $(T_u, \bar{\beta}_u)_{u \in \Gamma}$  est **co-orientée** s'il existe  $x : \Gamma \rightarrow M$  une application lisse et  $\nu : \Gamma \rightarrow x^*STM$  une section lisse telle que :

1. La famille  $T = (T_u)_{u \in \Gamma}$  est un champ d'hyperplans vectoriels dans le fibré vectoriel  $x^*TM$ .
2. Il existe  $\bar{\gamma}$  une orientation<sup>7</sup> sur  $M$  telle que, pour tout  $u \in \Gamma$ , si  $\beta_u$  et  $\gamma_{x(u)}$  sont des représentants de  $\bar{\beta}_u$  et  $\bar{\gamma}_{x(u)}$ , alors la base complétée  $(\beta_u, \nu(u))$  est dans le même sens que la base  $\gamma_{x(u)}$ .

**Note.** Tout comme pour la définition 4.3.1, nous dirons qu'une famille d'hyperplans co-orientés  $(T_u, \bar{\beta}_u)_{u \in \Gamma}$  est **régulière** lorsque la dérivée covariante du champ vectoriel  $\nu$  est injective en tout point.

6. Soit  $E$  un fibré vectoriel. Nous dirons qu'un champ de droites vectorielles  $l \subset E$  est orienté lorsqu'il existe une section  $v \in \Gamma^0(E)$  jamais nulle telle que  $l = \mathbb{R}v$ .

7. Pour plus de clarté, rappelons qu'une orientation  $\bar{\gamma}$  sur une variété différentielle  $M$  correspond à une famille d'orientations  $(\bar{\gamma}_x)_{x \in M}$  sur chaque espace tangent  $T_x M$  qui satisfait en outre une condition de régularité.

A présent, rappelons qu'un hériçon est défini par l'information d'une famille d'hyperplans co-orientés qui vérifie une condition de régularité et d'injectivité (voir définition 1.1.6 page 30). En particulier, pour la condition d'injectivité, nous avons déjà vu qu'il existe plusieurs méthodes pour comparer les hyperplans tangents, dont deux que nous allons développer dans cette thèse. Considérons donc  $(T, \bar{\beta})$  un hyperplan orienté sur l'espace tangent  $T_x \mathbb{H}^n$ . On appelle alors **prolongement géodésique de  $(T, \bar{\beta})$**  l'unique g-hyperplan orienté  $(\Sigma, \nu)$  tel que :

$$x \in \Sigma \text{ et } (T_x \Sigma, \nu(x)) = (T, \bar{\beta}) \quad (4.3.0.2)$$

Pour comprendre la condition (4.3.0.2), nous devons définir la relation entre le vecteur orthogonal  $\nu(x)$  et le choix d'orientation  $\bar{\beta}$ . Considérons sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ , le champ orthogonal  $v(x) = x$  ainsi que l'orientation  $\bar{\gamma}$  sur  $\mathbb{H}^n$ , telle que pour tout représentant  $\gamma_x$  (de l'orientation  $\bar{\gamma}_x$  sur l'espace tangent  $T_x \mathbb{H}^n$ ), la base complétée  $(\gamma_x, x)$  est dans le même sens que la base canonique de  $\mathbb{L}^{n+1}$ . Par conséquent, nous dirons que le choix d'orientation  $\bar{\beta}$  sur l'hyperplan  $T \subset T_x \mathbb{H}^n$  **correspond** au vecteur  $u \in \mathbb{S}_x^{n-1}$  si et seulement si, pour tout représentant  $\beta$  et  $\gamma_x$  de  $\bar{\beta}$  et  $\bar{\gamma}_x$ , la base complétée  $(\beta, u)$  est dans le même sens que la base  $\gamma_x$ . Par conséquent, nous pouvons considérer la définition suivante :

**Définition 4.3.3.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point, ainsi que  $(T_1, \bar{\beta}_1)$  et  $(T_2, \bar{\beta}_2)$  deux hyperplans orientés sur les espaces tangents respectifs  $T_{v_1} \mathbb{H}^n$  et  $T_{v_2} \mathbb{H}^n$ . Nous dirons que ces hyperplans tangents **sont dans le même sens par rapport à  $e$**  s'il existe  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que, si  $\gamma$  est la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  ainsi que  $(\Sigma_1, \nu_1)$  et  $(\Sigma_2, \nu_2)$  sont les g-hyperplans orientés correspondant au prolongement géodésique des hyperplans orientés  $(T_1, \bar{\beta}_1)$  et  $(T_2, \bar{\beta}_2)$ , alors :

1. La géodésique  $\gamma$  est orthogonale aux g-hyperplans  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .
2. Si  $x_1 = \gamma(t_1) \in \gamma \cap \Sigma_1$  et  $x_2 = \gamma(t_2) \in \gamma \cap \Sigma_2$ , alors  $\nu_1(x_1) = \partial_t \gamma(t_1)$  et  $\nu_2(x_2) = \partial_t \gamma(t_2)$ .

**Note.** On notera alors  $(T_1, \bar{\beta}_1) \sim_e (T_2, \bar{\beta}_2)$  la relation ainsi définie.

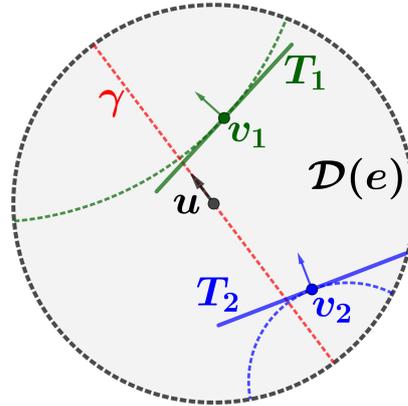


FIGURE 4.3 – Deux hyperplans dans le même sens par rapport à  $e$  dans le modèle de Poincaré.

**Remarque 4.3.3.** La relation précédemment définie est une relation d'équivalence. De plus, dans le modèle de Klein centré en  $e$ , la relation de même sens par rapport à  $e$  correspond à la relation que nous avons considérée à la définition 1.1.5 page 29.

**Définition 4.3.4.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point, ainsi que  $(T_u, \overline{\beta_u})_{u \in \Gamma}$  une famille d'hyperplans co-orientés. Nous dirons que la famille d'hyperplans est **injective par rapport à e** lorsque, pour tout  $u_1 \in \Gamma$  et  $u_2 \in \Gamma$  :

$$(T_{u_1}, \overline{\beta_{u_1}}) \sim_e (T_{u_2}, \overline{\beta_{u_2}}) \Rightarrow u_1 = u_2 \quad (4.3.0.3)$$

**Note.** On appelle **condition d'injectivité centrée en e** la condition (4.3.0.3).

**Propriété 4.3.1.** La famille des hyperplans tangents d'un corps  $g$ -convexe correspond à une famille d'hyperplans co-orientés réguliers et injectifs par rapport à tous les points de  $\mathbb{H}^n$ .

*Démonstration.* Considérons donc  $K \subset \mathbb{H}^n$  un corps  $g$ -convexe de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ , ainsi que  $\nu : \partial K \mapsto ST\mathbb{H}^n$  le champ orthonormal extérieur et  $v : \partial K \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  le champ orthonormal extérieur centré en  $e$ . On sait déjà que  $T_x \partial K = \langle \nu(x) \rangle^\perp$  pour tout point  $x \in \partial K$ . En particulier, la famille des hyperplans tangents est co-orientée et régulière. Ensuite, par la construction de l'application  $v$ , on a nécessairement :

$$(T_{x_1} \partial K, \nu(x_1)) \sim (T_{x_2} \partial K, \nu(x_2)) \iff v(x_1) = v(x_2)$$

et par la propriété 4.2.2, on obtient le résultat recherché.  $\square$

À présent, il est naturel d'adapter la notion de co-orientation aux familles de  $g$ -hyperplans afin de pouvoir caractériser les  $g$ -hyperplans de support d'un corps  $g$ -convexe. Ceci nous permettra d'aboutir à une définition de hérisson que nous appellerons évidemment  $g$ -hérisson, car cette définition découle du choix de comparer les orientations des hyperplans tangents en utilisant des géodésiques porteuses et transverses. Considérons donc les définitions suivantes :

**Définition 4.3.5.** On dira qu'une famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  est **lisse** si, en tout point  $u_0 \in \Gamma$ , les  $g$ -hyperplans sont localement de la forme :

$$\Sigma_u = \mathbb{H}^n \cap \langle N(u) \rangle^\perp \quad (4.3.0.4)$$

avec  $N : \Omega \subset \Gamma \mapsto dS^n$  une application lisse.

**Note.** La partie  $dS^n$  correspond à l'hyperboloïde  $dS^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} \text{ tq } \langle x|x \rangle_L = 1\}$  que l'on appelle **hyperboloïde de Sitter**. Notons aussi que  $\langle N(u) \rangle^\perp$  correspond à l'orthogonal de la droite  $\mathbb{R}N(u)$  dans l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$ .

**Définition 4.3.6.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point. Nous appellerons **famille de  $g$ -hyperplan co-orienté en e** toute famille lisse de  $g$ -hyperplans orientés  $(\Sigma_u, \nu_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ , indexée sur l'hypersphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ , telle que : pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , la géodésique  $\gamma_u$  passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  est orthogonale au  $g$ -hyperplan  $\Sigma_u$  et vérifie que si  $x_0 = \gamma_u(t_0) \in \Sigma_u$  alors  $\partial_t \gamma_u(t_0) = \nu_u(x_0)$ .

**Avertissement 4.3.1.** Comme pour la notion de famille d'hyperplans co-orientés, nous avons par définition que l'orientation des  $g$ -hyperplans  $\Sigma_u$  est définie par les vecteurs  $u$ . En conséquence, pour alléger notre texte, nous prendrons la liberté de ne plus mentionner l'orientation des  $g$ -hyperplans lorsque nous considérons une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés.

La notion de  $g$ -hyperplan co-orienté s'accompagne naturellement d'une notion de fonction de support. Pour cela, il nous suffit de considérer la définition suivante :

**Définition 4.3.7.** Si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés centrés en  $e$ , alors nous appellerons **fonction de support de la famille**  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  toute fonction  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  vérifiant la condition suivante :

$$x_0 = \gamma_u(h(u)) \in \Sigma_u \text{ et } \partial\gamma_u(h(u)) = \nu_u(x_0) \quad (4.3.0.5)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

**Note.** Dans l'expression (4.3.0.5) ci-dessus, l'application  $\nu_u : \Sigma_u \mapsto ST\mathbb{H}^n$  correspond au champ orthonormal associé à l'orientation du  $g$ -hyperplan  $\Sigma_u$ .

**Lemme 4.3.1.** Soit  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  une famille lisse de  $g$ -hyperplans. Alors, en tout point  $u_0 \in \Gamma$ , il existe, au voisinage de  $u_0$ , une application lisse  $x_0 : \Omega \subset \Gamma \mapsto \mathbb{H}^n$  telle que :

$$x_0(u) \in \Sigma_u \quad (4.3.0.6)$$

pour tout  $u \in \Omega$ .

*Démonstration.* Soit  $u_0 \in \Gamma$  ainsi que  $e \in \mathbb{H}^n$ , un point qui n'est pas dans le  $g$ -hyperplan  $\Sigma_{u_0}$ . Alors, par définition, il existe  $N : \Omega \subset \Gamma \mapsto dS^n$ , une fonction lisse définie au voisinage de  $u_0$  telle que pour tout  $u \in \Omega$ ,

$$\Sigma_u = \mathbb{H}^n \cap \langle N(u) \rangle^\perp \text{ et } e \notin \Sigma_u$$

avec  $\langle N(u) \rangle^\perp$  étant l'orthogonal de la droite  $\mathbb{R}N(u)$  dans  $\mathbb{L}^{n+1}$ . Par conséquent, il nous suffit de considérer, pour tout  $u \in \Gamma$ , le point  $x_0(u)$  correspondant à l'unique élément de l'intersection  $\langle e, N(u) \rangle \cap \Sigma_u$ .  $\square$

**Propriété 4.3.2.** Toute famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  admet une unique fonction de support, qui de plus, est lisse.

*Démonstration.* Si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille de  $g$ -hyperplans, on construit la fonction de support en considérant, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , l'unique instant  $t_u \in \mathbb{R}$  tel que  $\gamma_u(t_u) \in \Sigma_u$ . On définit alors la fonction  $h$  par :

$$h(u) = t_u$$

Il nous faut montrer que la fonction de support ainsi construite est lisse. On sait par le lemme 4.3.1 précédent que, pour chaque  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , il existe  $\Omega \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$  un voisinage de  $u_0$  et une fonction lisse  $\theta : \Omega \mapsto \mathbb{H}^n$  telle que :

$$\theta(u) \in \Sigma_u$$

pour tout  $u \in \Omega$ . Par conséquent, en considérant la fonction  $\theta_0(u) = \gamma_u \circ h(u) = SH h(u)u + CH h(u)e$ , il existe un champ de vecteurs  $\vec{R} : \Omega \mapsto T\mathbb{S}_e^{n-1}$  vérifiant la condition :

$$\vec{R}(u) \in T_u\mathbb{S}_e^{n-1} \text{ et } \theta(u) = \exp_{\theta_0(u)} \vec{R}(u) = a(u)\vec{R}(u) + b(u)\theta_0(u)$$

Il est alors évident que les fonctions  $\langle \theta(u) | u \rangle = b(u)SH h(u)$  et  $\langle \theta(u) | e \rangle = b(u)CH h(u)$  sont lisses. Ainsi, la fonction  $b^2$  est lisse et, par construction, la fonction  $b$  étant strictement positive, on obtient le résultat recherché.  $\square$

**Définition 4.3.8.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point et  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction lisse. Alors, on définit les applications  $x_0 : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$  et  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto T\mathbb{H}^n$  par :

$$x_0(u) = \gamma_u(h(u)) \text{ et } N(u) = \varphi_{e,x_0(u)}(u) \quad (4.3.0.7)$$

avec l'application  $\gamma_u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{H}^n$  correspondant à la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  et l'application  $\varphi_{e,x_0(u)} : T_e\mathbb{H}^n \mapsto T_{x_0(u)}\mathbb{H}^n$  étant le transport parallèle entre les points  $e$  et  $x_0(u)$  le long de  $\gamma_u$ .

**Remarque 4.3.4.** Pour tout point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$  et fonction lisse  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ , les fonctions  $x_0$  et  $N$ , telles que définies précédemment, sont données par :

$$x_0(u) = SH h(u)u + CH h(u)e \text{ et } N(u) = CH h(u)u + SH h(u)e \quad (4.3.0.8)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

**Propriété 4.3.3.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence. Alors, pour toute fonction lisse  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ , il existe une unique famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  qui lui est associée.

*Démonstration.* Il suffit de remarquer qu'une famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  ayant pour fonction de support  $h$  si et seulement si elle est de la forme :

$$\Sigma_u = \exp_{x_0(u)} \langle N(u) \rangle^\perp$$

avec  $x_0$  et  $N$  les applications définies par (4.3.0.7). □

**Remarque 4.3.5.** Par construction, si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ , alors l'orientation de chaque  $g$ -hyperplan  $\Sigma_u$  est définie par le champ orthonormal  $\nu_u$  tel que :

$$\nu_u(x) = N(u) \quad (4.3.0.9)$$

pour tout  $x \in \Sigma_u$ .

**Propriété 4.3.4.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, alors une famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est co-orientée en  $e$  si et seulement si la famille d'hyperplans  $(\langle \psi_e \cdot \Sigma_u \rangle)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est co-orientée sur l'espace euclidien  $(T_e\mathbb{H}^n, g_e)$ .

De plus, si  $h$  et  $l$  correspondent aux fonctions de support des familles respectives  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  et  $(\langle \psi_e \cdot \Sigma_u \rangle)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ , alors :

$$l = TH(h) \quad (4.3.0.10)$$

*Démonstration.* En reprenant les mêmes arguments que pour la propriété 4.2.3, c'est immédiat. □

Pour conclure, une remarque importante s'impose. La notion de co-orientation de familles de  $g$ -hyperplans dépend du choix du point. En effet, comme nous allons le voir, il est possible de construire une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en un point  $e$  mais pour laquelle il existerait un second point  $v_0$  tel que la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  n'est pas co-orientée en  $v_0$ . Considérons donc la définition suivante :

**Définition 4.3.9.** Nous dirons qu'une famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  est **co-orientable en  $e$**  si il existe  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \hookrightarrow \Gamma$  un difféomorphisme tel que la famille  $(\Sigma_{\phi(u)})_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  soit co-orientée en  $e$ .

Pour comprendre la méthode de construction d'une telle famille de  $g$ -hyperplans, nous travaillerons dans le modèle de Poincaré. En particulier, nous pourrions nous appuyer sur la figure ci-dessous qui illustre notre construction.

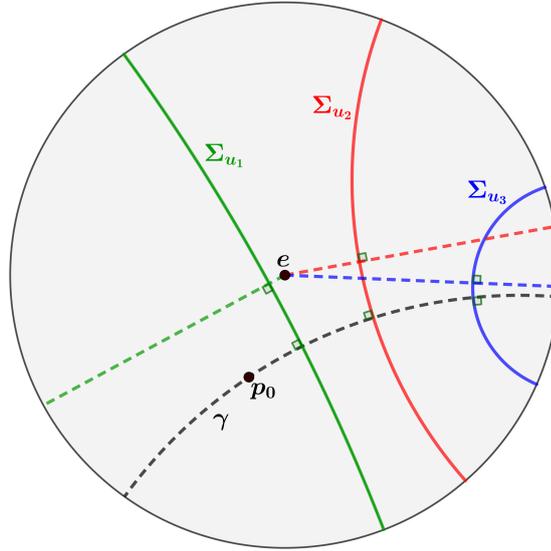


FIGURE 4.4 – Construction d'une famille de  $g$ -hyperplans co-orientée dépendant du point  $e$

Considérons deux points  $e$  et  $p_0$  ainsi qu'une géodésique  $\gamma$  passant par le point  $p_0$  et ne contenant pas le point  $e$ . Il nous suffit alors de considérer trois  $g$ -hyperplans  $\Sigma_{u_1}$ ,  $\Sigma_{u_2}$  et  $\Sigma_{u_3}$ , deux à deux distincts et orthogonaux à la géodésique  $\gamma$ . Il est alors clair que relativement au point  $e$ , les trois  $g$ -hyperplans ainsi définis correspondent à trois directions  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ , deux à deux distinctes et non colinéaires. Considérons donc  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés centrée en  $e$  qui correspond aux  $g$ -hyperplans précédemment définis pour les directions respectives. Il est alors clair que la famille de  $g$ -hyperplans ainsi définie ne peut être co-orientée en  $p_0$ , car les  $g$ -hyperplans  $\Sigma_{u_1}$ ,  $\Sigma_{u_2}$  et  $\Sigma_{u_3}$  sont parallèles par rapport au point  $p_0$ . Nous avons donc vérifié la propriété suivante :

**Propriété 4.3.5.** Pour tout point  $e$ , il existe une famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  pour laquelle il existe un point  $v_0$  tel que la famille de  $g$ -hyperplans n'est pas co-orientable en  $v_0$ .

Cette observation souligne que la notion de  $g$ -hérission que nous allons définir par cette démarche pourrait être potentiellement plus complexe et moins maniable que la notion de hérission sur les espaces euclidiens. Une question légitime se pose alors : Existe-t-il des familles de  $g$ -hyperplans qui sont co-orientées en tout point de  $\mathbb{H}^n$  ? Pour répondre à cette question, il nous suffit de considérer la propriété suivante :

**Propriété 4.3.6.** La famille de  $g$ -hyperplans de support d'un corps  $g$ -convexe est co-orientable en tout point de  $\mathbb{H}^n$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la propriété 4.3.1. □

## 4.4 Définition d'un g-hérisson et première propriété.

Étant donné que la définition de hérisson sur l'espace hyperbolique (comme sur la sphère) relève d'un choix et n'est pas canonique, il est important de définir en premier lieu "le cahier des charges" que nous souhaitons voir vérifié par notre définition. Rappelons donc que notre objectif principal est de retrouver, sur des espaces dont la courbure est non nulle, la relation établie par Y.Martinez-Maure (voir [74]) entre les hérissons de l'espace euclidien et les surfaces marginalement piégées de l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^4$ . Pour cela, il est nécessaire que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. La courbure de Gauss est non nulle en tous les points non singuliers. C'est en effet à cette condition que l'on peut définir les hérissons marginalement piégés qui dérivent (par transformation de  $\mathcal{L}$ -Gauss) des hérissons et correspondent à des surfaces marginalement piégées en leurs points non-ombilicux.
2. Le bord d'un corps g-convexe de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$  est un hérisson.
3. Tout hérisson correspond à une différence de corps g-convexe. Il est à noter que cette condition dépend du choix d'une somme sur les corps g-convexes. En particulier, nous ne remplissons pas, en l'état, cette condition qui reste donc une question ouverte.
4. La définition de hérisson ne dépend pas du choix de l'espace considéré. Nous entendons par là que la définition de hérisson doit rester la même quel que soit l'espace considéré. En particulier, il nous faudra étudier la correspondance géométrique entre les hérissons de l'espace euclidien, de l'espace hyperbolique et de la sphère. Voir les chapitres 3, 7 et 10 pour en savoir plus.
5. Tout hérisson de l'espace hyperbolique (et de la sphère) correspond au front legendrien d'un certain type d'immersion de Legendre et vérifie en particulier un équivalent de la propriété 2.4.1 page 51. Il est à noter que nous retrouverons naturellement la même problématique de non-canonlicité lorsque nous déterminerons le type d'immersion de Legendre qui correspond aux hérissons de l'espace hyperbolique et de la sphère.

En conséquence, la démarche que nous adopterons consistera naturellement à reprendre la même construction qui a été adoptée par R.Langevin, G.Levitt et H.Rosenberg en considérant des enveloppes généralisées de familles de g-hyperplans co-orientés. Nous considérons ainsi les définitions suivantes :

**Définition 4.4.1.** Soit  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  une famille lisse de g-hyperplans. Alors on appelle **enveloppe** l'image de toute application lisse  $x : \Gamma \mapsto \mathbb{H}^n$  vérifiant les deux points suivants :

1. Pour tout  $u \in \Gamma$ ,  $x(u) \in \Sigma_u$ .
2. Pour tout  $u \in \Gamma$  et  $\vec{W} \in T_u \Gamma$ ,  $d_u x \cdot \vec{W} \in T_{x(u)} \Sigma_u$ .

**Note.** De plus, on appelle **paramétrage**, l'application  $x$  et **enveloppe paramétrée** la donnée d'une enveloppe  $\Lambda$  munie de son paramétrage  $x$ .

**Définition 4.4.2.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point, alors nous appellerons **g-hérisson centré en e** toute enveloppe paramétrée d'une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$ .

**Note.** Nous appellerons alors **fonction de support centrée en e** la fonction de support de la famille de g-hyperplans.

**Avertissement 4.4.1.** Afin de ne pas alourdir inutilement notre texte, nous reprendrons l'avertissement 1.2.2 que nous avons considéré en première partie pour les hérissons euclidiens. En conséquence, nous noterons " $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$ " sans faire mention du paramétrage.

**Notation 4.4.1.** Il nous arrivera souvent de noter  $\mathcal{H}_h$  pour mentionner un  $g$ -hérisson centré en  $e$  de fonction de support  $h$ .

#### 4.4.1 Conditions d'existence des $g$ -hérissons

Dans cette section, nous étudions les conditions d'existence des  $g$ -hérissons, nous fournissant ainsi un premier résultat qui, en particulier, met en évidence une condition nécessaire et suffisante (voir (4.4.1.2)) que doivent vérifier les fonctions de support des  $g$ -hérissons.

**Lemme 4.4.1.** Soit  $\vec{R} : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{L}^{n+1}$  une application lisse ainsi que  $R : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  la fonction vérifiant  $R(u) = \|\vec{R}(u)\|$ . Alors les applications  $a$ ,  $b$  et  $\beta$  définies par les expressions :

$$a(u) = \frac{SH R(u)}{R(u)}, b(u) = CH R(u) \text{ et } \beta(u) = \alpha(u)^2 = (SH R(u))^2 \quad (4.4.1.1)$$

sont lisses.

*Démonstration.* Considérons une fonction lisse  $\vec{R} : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{L}^{n+1}$  ainsi que  $R(u) = \|\vec{R}(u)\|$ . Nous pouvons déjà remarquer que la fonction  $R^2$  est forcément lisse. Considérons donc les fonctions suivantes :

$$a(u) = \frac{SH R(u)}{R(u)}, b(u) = CH R(u) \text{ et } \alpha(u) = SH R(u)$$

À présent, rappelons que les fonctions hyperboliques  $CH(t)$  et  $SH(t)$  sont analytiques et admettent pour décomposition en série entière :

$$CH(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} \text{ et } SH(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

Ainsi, en remarquant que les séries entières  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^n$  définissent des fonctions  $f$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telles que  $CH(t) = f(t^2)$  et  $SH(t) = tg(t^2)$ , alors on obtient forcément que :

$$a(u) = g\left(R(u)^2\right), b(u) = f\left(R(u)^2\right) \text{ et } \alpha(u)^2 = R(u)^2 g\left(R(u)^2\right)^2$$

ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

**Théorème 4.4.1.** Une famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  et de fonction de support  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ , admet une enveloppe si et seulement si la fonction de support vérifie la condition suivante :

$$\|\vec{\nabla} h(u)\| < CH h(u) \quad (4.4.1.2)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

De plus, en cas d'existence de l'enveloppe, celle-ci est unique et admet pour paramétrage et champ orthonormal les fonctions respectives  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$  et  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto T\mathbb{H}^n$  vérifiant les relations suivantes :

$$x(u) = \sigma(u) \left[ x_0(u) + \vec{V}(u) \right] \text{ et } N(u) = CH h(u)u + SH h(u)e \quad (4.4.1.3)$$

avec  $x_0$  et  $N$  les applications que nous avons introduites à la définition 4.3.8, ainsi que  $\vec{V}$  et  $\sigma$  que nous définissons dans la note ci-dessous :

**Note.** On définit la section  $\vec{V} : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto x_0^*T\mathbb{H}^n$  et la fonction  $\sigma : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  via les expressions :

$$\vec{V}(u) = \frac{\vec{\nabla} h(u)}{CH h(u)} \text{ et } \sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - V(u)^2}} \quad (4.4.1.4)$$

avec  $V(u) = \|\vec{V}(u)\|$ .

*Démonstration.* Considérons une famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  de g-hyperplans co-orientés en  $e$  et de fonction de support  $h$ . Ainsi, en considérant les applications  $x_0$  et  $N$  définies par (4.3.0.7), il est alors clair que chaque g-hyperplan  $\Sigma_u$  sont définis par l'expression suivante :

$$\Sigma_u = \exp_{x_0(u)} \langle N(u) \rangle^\perp$$

Supposons donc que la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  admette une enveloppe  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  dont le paramétrage est  $x$ . Par construction, il existe forcément une section lisse  $\vec{R} : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto x_0^*T\mathbb{H}^n$  telle que :

$$x(u) = \exp_{x_0(u)} \vec{R}(u) \text{ et } N(u) \perp \vec{R}(u) \quad (4.4.1.5)$$

et donc il existe des fonctions  $a$  et  $b$  telles que

$$x(u) = a(u) \vec{R}(u) + b(u) x_0(u) \quad (4.4.1.6)$$

avec  $a(u) = \frac{SH R(u)}{R(u)}$ ,  $b(u) = CH R(u)$  et  $R(u) = \|\vec{R}(u)\|$ .

Ainsi, par le lemme 4.4.1, on sait que les applications  $a$  et  $b$  sont nécessairement lisses. De plus, par définition, le paramétrage  $x$  satisfait la condition ci-dessous :

$$\langle d_u x \cdot \vec{W} | N(u) \rangle = 0 \quad (4.4.1.7)$$

que nous appellerons naturellement condition de contact.

Ensuite, en observant que  $\langle x(u) | N(u) \rangle = 0$ , la condition de contact (4.4.1.7) admet pour expression équivalente  $\langle x(u) | d_u N \cdot \vec{W} \rangle = 0$ , et comme, après un petit calcul, la différentielle du champ orthonormal vérifie l'expression  $d_u N \cdot \vec{W} = \langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{W} \rangle x_0(u) + CH h(u) \vec{W}$  on obtient donc la relation suivante :

$$a(u) CH h(u) \vec{R}(u) = b(u) \vec{\nabla} h(u) \quad (4.4.1.8)$$

Aussi, en définissant la fonction  $\alpha(u) = SH R(u)$ , alors par la relation (4.4.1.6), on obtient que les fonctions  $\alpha$  et  $b$  vérifient l'égalité ci-dessous :

$$\alpha(u)^2 - b(u)^2 = -1 \quad (4.4.1.9)$$

et en combinant la relation (4.4.1.6) avec (4.4.1.8) et la relation (4.4.1.8) avec (4.4.1.9), on obtient les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} R(u)CH R(u)\vec{\nabla}h(u) = SH R(u)CH h(u)\vec{R}(u) \\ (1 + \alpha(u)^2)\|\vec{\nabla}h(u)\|^2 = \alpha(u)^2(CH h(u))^2 \end{cases} \quad (4.4.1.10)$$

Par conséquence, en considérant l'application  $\vec{V}$  que nous avons définie par l'expression (4.4.1.4), alors par (4.4.1.10), on obtient la relation suivante :

$$(1 - V(u)^2)\alpha(u)^2 = V(u)^2 \quad (4.4.1.11)$$

Ainsi, la relation (4.4.1.11) nous permet de savoir que  $1 - V(u)^2 > 0$ . En effet, il est d'abord immédiat que  $1 - V(u)^2 \geq 0$  et si  $1 - V(u)^2 = 0$ , alors nous aurions  $V(u)^2 = 0$  et  $V(u)^2 = 1$ , ce qui est impossible. En conclusion, nous obtenons bien que si la famille de g-hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  admet une enveloppe, alors la fonction de support vérifie l'inégalité :

$$\|\vec{\nabla}h(u)\| < CH h(u)$$

Pour déterminer l'expression du paramétrage  $x$ , il nous suffit de calculer les coefficients  $a$  et  $b$ . Pour cela, remarquons que :

1.  $b(u)^2 = 1 + \alpha(u)^2 = 1 + \sigma(u)^2 V(u)^2 = \sigma(u)^2$  avec  $\sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - V(u)^2}}$ .
2. Si  $\vec{V}(u) \neq 0$ , alors  $a(u)\vec{R}(u) = \alpha(u)\frac{\vec{V}(u)}{V(u)} = \sigma(u)\vec{V}(u)$ .
3. D'après la relation ((4.4.1.10)),  $R(u) = \text{ArcTH } V(u)$ . En particulier, si  $\vec{V}(u) = 0$ , alors  $a(u)\vec{R}(u) = 0$ .

et donc, tout paramétrage correspondant à l'enveloppe d'une famille de g-hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est forcément défini par l'expression (4.4.1.3).

Enfin, si  $x$  est l'application définie par l'expression (4.4.1.3), il est clair que l'inégalité sur la fonction de support (4.4.1.2) ainsi que la condition de contact (4.4.1.7) sont vérifiées. En effet, nous avons que l'inégalité sur la fonction de support est forcément vérifiée du fait que la fonction  $\sigma$  est bien définie. Ensuite, pour la condition de contact, il suffit de remarquer que :

$$\langle N(u)|d_u \vec{V}(\vec{W}) \rangle = -\langle \vec{\nabla}h(u)|\vec{W} \rangle$$

ce qui termine la preuve. □

Contrairement à ce que nous avons observé sur l'espace euclidien, n'importe quelle famille de g-hyperplans co-orientés en un point donné n'engendrera pas nécessairement un g-hérison. En particulier, nous étudierons plus loin (voir section 6.3 du chapitre 6) la signification géométrique de l'inégalité (4.4.1.2). Notons également que notre approche n'est pas singulière. En effet, V. Oliker a adopté une démarche similaire dans l'article [81] afin d'étudier les relations de dualité entre les hypersurfaces sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  et les hypersurfaces sur l'espace de Sitter  $d\mathbb{S}^n$ . Pour ce faire, l'auteur a considéré des "enveloppes généralisées" qui correspondent à la définition de g-hérison. Aussi, notons que nous discuterons des relations de dualité entre les espaces  $\mathbb{H}^n$  et  $d\mathbb{S}^n$  au cours du chapitre 8.

### 4.4.2 Orientation naturelle des g-hérissos

Comme pour les hérissos euclidiens, il nous sera nécessaire de considérer un choix d'orientation pour les g-hérissos. Ce choix d'orientation, qui est non canonique, nous permettra en particulier de définir les fonctions de courbure par lesquelles nous pouvons étudier la correspondance entre les corps g-convexes et les g-hérissos. Par conséquence, si  $\mathcal{H}_h$  est un g-hérisson centré en  $e$ , nous appellerons **orientation naturelle** (ou simplement **orientation**) du g-hérisson, l'orientation de ses g-hyperplans définie par le champ de vecteurs  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto x^* ST\mathbb{H}^n$ .

**Remarque 4.4.1.** Soit  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{H}^n$  un g-hérisson centré en  $e$ . Alors, par propriété de la connexion de Levi-Civita sur  $\mathbb{H}^n$  correspondant au demi-hyperboloïde de Lorentz-Minkowski, la dérivée covariante du champ orthonormal  $N$  d'un g-hérisson vérifie la relation suivante :

$$\nabla(N)_{\cdot u} \cdot \vec{W} = d_u N \cdot \vec{W} \quad (4.4.2.12)$$

En particulier, constatons que pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , la différentielle  $d_u N : T_u \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \langle N(u) \rangle^\perp \subset T_{x(u)} \mathbb{H}^n$  est un isomorphisme et la différentielle  $d_u x$  du paramétrage du g-hérisson est forcément à image dans  $\langle N(u) \rangle^\perp$ . Nous pouvons ainsi considérer le morphisme de fibré  $\phi : \Delta(\mathbb{S}_e^{n-1}) \mapsto \Delta(\mathbb{S}_e^{n-1})$  tel que :

$$\phi_u = \nabla(N)_{\cdot u}^{-1} \circ d_u x \quad (4.4.2.13)$$

ce qui nous permet de définir la fonction  $R(u) = \det(\phi_u)$  que l'on appelle **fonction de courbure**. Nous pouvons noter que la fonction de courbure ainsi définie correspond à la fonction de courbure que nous avons considérée pour les hérissos euclidiens (voir définition 1.2.6 page 39).

Il est alors possible de traiter la question de la courbure des g-hérissos en des points non singuliers. Pour cela, si  $\mathcal{H}_h$  est un g-hérisson de paramétrage  $x$ , nous dirons que  $x_0 \in \mathcal{H}_h$  est un **point singulier** si  $x_0 = x(u_0)$  tel que la différentielle  $d_{u_0} x$  n'est pas injective.

**Propriété 4.4.1.** Soit  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{H}^n$  un g-hérisson centré en  $e$ . Alors en tout point non singulier, le g-hérisson  $\mathcal{H}_h$  est localement une hypersurface orientée dont la courbure de Gauss n'est jamais nulle. De plus, lorsque  $x(\Omega)$  est une hypersurface, avec  $\Omega \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$  un ouvert, alors c'est une hypersurface orientée pour laquelle on peut choisir l'application de Gauss  $\nu$  telle que  $N = \nu \circ x$ .

*Démonstration.* Considérons  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que la différentielle  $d_{u_0} x$  soit injective. En appliquant le même raisonnement que celui considéré pour la propriété 1.2.4 page 38, il existe  $\Omega \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$  un voisinage ouvert de  $u_0$  sur lequel la restriction du paramétrage  $x$  est un plongement différentiel. En particulier,  $x(\Omega)$  est une hypersurface de  $\mathbb{H}^n$  orientée par le champ orthonormal  $\nu : x(\Omega) \mapsto ST\mathbb{H}^n$  vérifiant que  $N = \nu \circ x$ . Par conséquence, l'application  $N$  (vue comme une application à image dans  $\mathbb{L}^{n+1}$ ) étant clairement une immersion, nous obtenons le résultat recherché.  $\square$

### 4.4.3 Relation entre les g-hérissos et les corps g-convexes

Pour étudier la relation entre les corps g-convexes et les g-hérissos, nous devons introduire quelques définitions. Considérons donc  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{H}^n$  un g-hérisson centré en  $e$  ainsi que  $x$  son paramétrage et  $N$  son champ orthonormal. Comme la dérivée covariante de  $N$  est partout injective, alors on appelle **troisième forme fondamentale** la forme bilinéaire :

$$III_u(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \langle d_u N \cdot \vec{v}_1 | d_u N \cdot \vec{v}_2 \rangle_L \quad (4.4.3.14)$$

qui est clairement une métrique Riemannienne sur la sphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ . En particulier, on peut vérifier (voir propriété 12.2.2 page 250 du chapitre 12) que le morphisme de fibré  $\phi$  que nous avons considéré à la remarque 4.4.1 est symétrique par rapport à la forme III. Par conséquent, on définit les **fonctions des courbures principales** correspondant, pour chaque  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , aux valeurs propres  $r_1(u), \dots, r_{n-1}(u)$  de l'endomorphisme  $\phi_u$ . Il est à noter que les fonctions  $r_i$  ainsi définies ne sont pas forcément partout de classe  $C^\infty$ .

**Propriété 4.4.2.** *Soit  $K \subset \mathbb{H}^n$  un corps  $g$ -convexe. Alors pour tout point  $e$ , le bord du corps  $K$  est un  $g$ -hérissoson dont le paramétrage correspond à l'inverse de son orientation extérieure centrée en  $e$ . Réciproquement, tout  $g$ -hérissoson centré en  $e$  dont les fonctions de courbure principales sont toutes et partout strictement positives correspond forcément au bord orienté d'un corps  $g$ -convexe.*

*Démonstration.* D'abord, si  $K$  est un corps  $g$ -convexe de classe  $C_+^\infty$ , alors par la propriété 4.3.6, il est immédiat que le bord  $\partial K$  correspond à un  $g$ -hérissoson en tous points. Réciproquement, il nous suffit de constater qu'un  $g$ -hérissoson  $\mathcal{H}_h$  centré en  $e$  admet des fonctions de courbure principales qui sont toutes et partout strictement positives si et seulement si c'est le cas pour le hérissoson euclidien  $\psi_e(\mathcal{H}_h)$  via la projection de Klein centrée en  $e$ . Ainsi, par la propriété 1.3.3 page 43, on obtient le résultat recherché.  $\square$

#### 4.4.4 Correspondance avec les hérissosons euclidiens

Enfin, nous concluons ce chapitre avec une propriété évidente qui nous éclaire sur la géométrie de nos constructions. Considérons donc :

**Propriété 4.4.3.** *Si  $e \in \mathbb{H}^n$  est un point et  $\psi_e : \mathbb{H}^n \mapsto \mathcal{D}(e)$  la carte de Klein centrée en  $e$ , alors une hypersurface topologique  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  est un  $g$ -hérissoson centré en  $e$  si et seulement si  $\psi_e(\mathcal{H})$  est un hérissoson euclidien. De plus, si  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  est la fonction de support de  $\mathcal{H}$  et  $l : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  la fonction de support de  $\psi_e(\mathcal{H})$ , alors elles vérifient la relation suivante :*

$$l = TH(h) \tag{4.4.4.15}$$

*Démonstration.* Ceci découle directement de la propriété 4.3.4 page 93.  $\square$

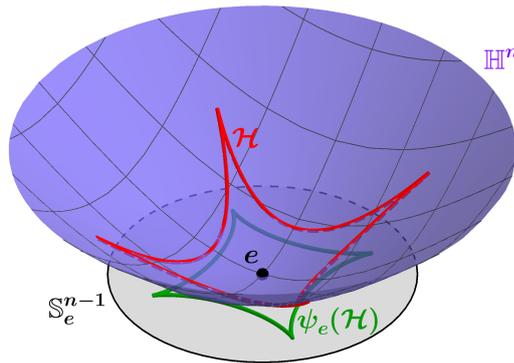


FIGURE 4.5 – Correspondance via le modèle de Klein entre  $g$ -hérissoson et hérissoson euclidien

Cette dernière propriété démontre que les  $g$ -hérissosons correspondent à des structures projectives comme c'est le cas pour les corps  $g$ -convexes. Pour approfondir ce sujet, il est recommandé

de consulter l'article [30] de F. Fillastre, où l'auteur décrit les propriétés projectives des corps convexes sur les espaces modèles. En particulier, nous revisiterons ces sujets dans le chapitre 8, au cours duquel nous examinerons le dual projectif des g-hérissés.



## Chapitre 5

# Corps h-convexe et h-hérisson

Dans ce chapitre, nous considérons une définition alternative de la notion de hérisson (les h-hérissons) sur l'espace hyperbolique. Nous étudierons les propriétés élémentaires de cette notion ainsi que ses avantages et inconvénients par rapport au g-hérisson que nous avons introduit précédemment. En particulier, il sera nécessaire de présenter certaines propriétés des corps h-convexes dont les caractéristiques géométriques motivent la définition de la notion de h-hérisson.

### 5.1 L'application de Gauss et les horosphères sur l'espace hyperbolique

Sur l'espace hyperbolique, une définition naturelle de l'application de Gauss consiste à prolonger géodésiquement le champ orthonormal d'une hypersurface orientée et à considérer sa limite sur le bord à l'infini. Cette définition s'accompagne de la notion d'horosphère, qui correspond à des hypersurfaces orientées dont les courbures principales sont partout égales à 1 ou sont partout égales à  $-1$ . En particulier, il nous sera utile de noter que dans le modèle du disque de Poincaré, les horosphères correspondent à des sphères tangentes au bord à l'infini  $\partial_\infty \mathbb{H}^n = \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

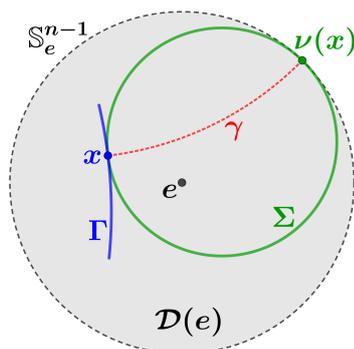


FIGURE 5.1 – Représentation de l'application de Gauss dans le disque de Poincaré

Pour en savoir plus sur l'application de Gauss d'une hypersurface sur l'espace hyperbolique, il est possible de consulter les articles [27] et [11], sur lesquels nous nous appuyons pour les éléments présentés dans cette section.

### 5.1.1 Limite d'une géodésique sur le bord à l'infini

Pour définir la limite à l'infini d'une géodésique, la manière la plus immédiate consiste à se placer sur le modèle du disque de Poincaré et à considérer le point limite sur le bord à l'infini. Étant donné que nous travaillons principalement avec le modèle du demi-hyperboloïde de Lorentz-Minkowski, il est nécessaire de comprendre cette construction dans ce cadre. Pour cela, observons que, pour  $\gamma \subset \mathbb{H}^n$  une géodésique, la droite  $\mathbb{R}\gamma(t)$  tend vers une droite de lumière lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Ainsi, il est justifié de considérer la définition suivante :

**Définition 5.1.1.** On appelle **absolue**, la partie de l'espace projectif  $\mathbb{P}_n$ , que l'on note  $\mathbb{A}^{n-1}$ , correspondant à l'ensemble des droites lumière<sup>1</sup> sur l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$ .

**Propriété 5.1.1.** L'absolue  $\mathbb{A}^{n-1}$  est une  $(n-1)$ -variété différentielle qui est, de plus, difféomorphe à la  $(n-1)$ -sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

*Démonstration.* Il suffit de considérer la sphère  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$  ainsi que l'application  $f : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}P^n$  définie par l'expression  $f(u) = p(u, 1)$ . Ainsi, si  $\varphi_e : \mathbb{R}P^n \setminus \langle e \rangle^\perp \xrightarrow{\sim} \langle e \rangle^\perp$  est la carte projective centrée en  $e = (0_{\mathbb{R}^n}, 1)$ , il est clair que  $\varphi_e \circ f(u) = u$  et donc  $f$  est un plongement dont l'image est  $\mathbb{A}^{n-1}$ .  $\square$

**Définition 5.1.2.** Nous dirons qu'une géodésique  $\gamma \subset \mathbb{H}^n$  **converge vers**  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$  si elle vérifie  $p \circ \gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} a$ .

**Note.** Si  $\gamma$  converge vers  $a$ , alors on notera  $\gamma \rightarrow a$ .

**Propriété 5.1.2.** Si  $\gamma \subset \mathbb{H}^n$  est une géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , alors elle converge vers le point  $a = p(e + u)$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $p \circ \gamma(t) = p(e + TH(t)u) \rightarrow p(e + u)$ .  $\square$

### 5.1.2 Application de Gauss d'une hypersurface orientée

Puisque l'absolue  $\mathbb{A}^{n-1}$  correspond à une  $(n-1)$ -sphère, il est naturel de définir, pour toute hypersurface orientée, les deux applications correspondant au prolongement géodésique (dans les sens positif et négatif) du champ orthonormal. Par conséquent, on considère la définition suivante :

**Définition 5.1.3.** Soit  $\Sigma$  une hypersurface orientée. On appelle **application de Gauss positive** (resp. **négative**) les applications  $\nu_+ : \Sigma \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  et  $\nu_- : \Sigma \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  telles que : pour tout  $x \in \Sigma$ , le point  $\nu_+(x) \in \mathbb{A}^{n-1}$  correspond à la limite à l'infini de la géodésique  $\gamma$  passant par le point  $x$  à la vitesse  $N(x)$  (resp.  $-N(x)$  pour  $\nu_-(x)$ ).

**Remarque 5.1.1.** Par la propriété 5.1.2, il est évident que l'application de Gauss d'une hypersurface orientée s'exprime comme :

$$\nu_+(x) = p(x + N(x)) \text{ et } \nu_-(x) = p(x - N(x)), \quad (5.1.2.1)$$

avec  $p$  la projection projective. En particulier, les applications de Gauss positive et négative sont bien de classe  $C^\infty$ .

Il nous sera également utile de considérer une notion complémentaire à l'application de Gauss que nous avons précédemment définie, comme ci-dessous :

1. Une droite vectorielle  $l = \mathbb{R}v$  est dite de type lumière lorsque  $\langle v|v \rangle = 0$ .

**Définition 5.1.4.** Soit  $\Sigma$  une hypersurface orientée, alors on appelle **carte de support positive** (resp. **négative**) les applications  $\sigma_+ : \Sigma \mapsto \mathbb{T}_+^n$  et  $\sigma_- : \Sigma \mapsto \mathbb{T}_+^n$  telles que :

$$\sigma_+(x) = x + N(x) \text{ et } \sigma_-(x) = x - N(x), \quad (5.1.2.2)$$

où  $\mathbb{T}_+^n$  est le cône lumière à temps positif (voir (5.4.1.1) page 125).

Il convient de noter que, comme pour toutes les notions que nous avons abordées sur l'espace hyperbolique, la notion d'application de Gauss ne possède pas de définition canonique. En effet, comme nous le verrons au chapitre 8, il est possible de définir une application de Gauss par le biais de géodésiques porteuses et transverses. A présent, il nous faut établir la correspondance entre la courbure de Gauss d'une hypersurface orientée et les deux applications de Gauss qui lui sont associées.

**Propriété 5.1.3.** Les courbures principales d'une hypersurface orientée  $\Sigma$  ne valent jamais  $\lambda = -1$  (resp.  $\lambda = 1$ ) si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. L'application de Gauss  $\nu_+$  (resp.  $\nu_-$ ) est, en chaque point, un difféomorphisme local.
2. La carte de support  $\sigma_+$  (resp.  $\sigma_-$ ) est une immersion.

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que si  $\lambda$  est une courbure principale et si  $\vec{v} \in T_x \Sigma$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ , on a que :

$$d_x \sigma_+ \cdot \vec{v} = (1 + \lambda) \vec{v} \text{ et } d_x \sigma_- \cdot \vec{v} = (1 - \lambda) \vec{v} \quad (5.1.2.3)$$

et en remarquant que la projection projective  $p$ , restreinte sur l'espace tangent  $T_x \mathbb{H}^n$ , est un isomorphisme, alors on obtient le résultat recherché.  $\square$

L'intérêt de la propriété 5.1.3 est qu'à la différence de ce que nous observons sur l'espace euclidien, les propriétés de l'application de Gauss dépendent du choix de l'orientation sur l'hypersurface. Aussi, elle ne correspond plus à la courbure de Gauss (au sens où il n'est plus vrai que la courbure de Gauss est non nulle en un point  $x$  si et seulement si l'application de Gauss est un difféomorphisme au voisinage de ce point). Par conséquent, dans la suite, si  $K$  est un corps  $g$ -convexe, nous appellerons **application de Gauss du corps  $K$**  l'application de Gauss positive du bord  $\partial K$  muni de l'orientation extérieure.

**Propriété 5.1.4.** L'application de Gauss d'un corps  $g$ -convexe est un difféomorphisme.

*Démonstration.* Considérons  $K$  un corps  $g$ -convexe de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ . Nous savons alors que son bord est un  $g$ -hérisson centré en n'importe quel point de référence. Considérons donc  $e \in \text{Int}(K)$  et soit  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto R$  la fonction de support centrée en  $e$ . Si  $\nu$  est l'application de Gauss précédemment définie, alors  $\nu \circ x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  est un difféomorphisme local en tout point, avec  $x$  étant le paramétrage du bord  $\partial K$  vu comme un  $g$ -hérisson. De plus, puisque  $h$  est strictement positive, nous pouvons vérifier que :

$$\langle x(u) + N(u)|u \rangle = \sigma(u)SH h(u) + CH h(u) > 0, \quad (5.1.2.4)$$

où  $N$  est le champ orthonormal du bord  $\partial K$  vu comme un  $g$ -hérisson et  $\sigma$  est l'application définie par (4.4.1.4). En particulier, par (5.1.2.4), il est clair que l'application  $\nu \circ x$  est de degré 1, ce qui termine la preuve.  $\square$

### 5.1.3 Définition et propriétés élémentaires des horosphères

Une horosphère est une sphère de rayon infini sur l'espace hyperbolique, qui, contrairement à ce que nous connaissons sur l'espace euclidien, ne correspond pas à un  $g$ -hyperplan. Pour les propriétés élémentaires des horosphères, nous pouvons nous rapporter à la section 5.1.4.1 de l'annexe E. Ainsi, nous nous limiterons dans cette section à exposer uniquement les propriétés dont nous aurons besoin pour nos futurs développements. En particulier, nous nous baserons, pour les quelques éléments que nous considérerons, sur la cinquième section de l'article [3] où nous trouvons une présentation détaillée des enveloppes d'horosphères.

**Définition 5.1.5.** On appelle **horosphère** toute hypersurface orientée dont les courbures principales sont toutes et partout égales à 1 (ou toutes et partout égales à  $-1$ ) et qui est connexe et maximale au sens de l'inclusion.

**Note.** Sur le plan hyperbolique, les horosphères sont appelées **horocycles**.

**Propriété 5.1.5.** Une hypersurface  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  est comprise dans une horosphère si et seulement si l'une de ses applications de Gauss  $\nu_+$  ou  $\nu_-$  est constante.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la propriété 5.1.3.  $\square$

Dans la suite, et afin d'alléger notre texte, nous considérerons toujours les horosphères orientées par le champ  $N$ , que l'on appelle **orientation extérieure**, telle que les courbures principales sont partout égales à 1. Par ailleurs, on appelle **orientation intérieure** l'orientation opposée à l'orientation extérieure.

**Définition 5.1.6.** On appelle **horosphère centrée en  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$**  toute horosphère dont l'application de Gauss  $\nu_-$  pointe vers  $a$ .

Remarquons que, dans le modèle de Poincaré centré en  $e$ , les horosphères correspondent aux intersections non vides de la boule unité  $\mathcal{D}(e)$  avec les hypersphères de l'espace  $T_e\mathbb{H}^n$  qui sont tangentes au bord à l'infini  $\partial\overline{\mathcal{D}}(e) = \mathbb{S}_e^{n-1}$  (voir propriété 5.1.12 page 310 de l'annexe E). Par construction, si  $\mathcal{H}$  est une horosphère centrée en  $a$ , alors pour tout point  $e$ , il existe un unique vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que  $a = p(e + u)$ . En particulier, si  $\gamma$  est la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$ , alors elle est orthogonale à l'horosphère  $\mathcal{H}$ . Ainsi, on définit :

**Définition 5.1.7.** Soit  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  une horosphère et  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence. Alors on dira que l'horosphère  $\mathcal{H}$  est **centrée en  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$**  si elle est centrée en  $a = p(e + u)$ . De plus, on appelle **distance orientée de  $\mathcal{H}$  par rapport à  $e$**  le nombre  $s \in \mathbb{R}$  tel que : si  $\gamma$  est la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  pour l'instant  $t = 0$ , alors  $\gamma(-s) \in \mathcal{H}$  est le seul point dans l'intersection  $\gamma \cap \mathcal{H}$ .

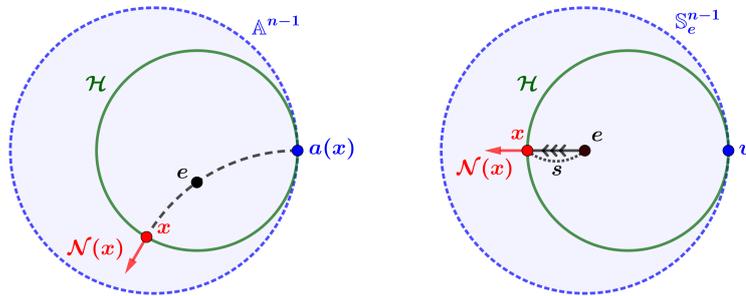


FIGURE 5.2 – Distance orientée d'une horosphère centrée en  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$

**Propriété 5.1.6.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence et  $\mathcal{H}$  une horosphère centrée en  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ . Si  $s$  est la distance orientée de  $\mathcal{H}$  par rapport à  $e$ , alors on a :

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{H}^n \text{ tel que } \langle x|e+u \rangle_L = -e^s\} \quad (5.1.3.5)$$

*Démonstration.* Si  $\mathcal{H}$  est une horosphère, alors on sait que la carte de support  $\sigma_-$  est constante. Par conséquent, si l'horosphère  $\mathcal{H}$  est centrée en  $a = p(e+u)$ , l'application  $\sigma_-$  étant constante, il existe  $\lambda$  tel que :

$$\sigma_-(x) = x - N(x) = \lambda(e+u)$$

pour tout  $x \in \mathcal{H}$ .

De plus, on a que  $x_0 = CH(-s)e + SH(-s)u \in \mathcal{H}$ , et en remarquant que le produit  $\langle x|e+u \rangle$  est constant (car est égale à  $-\lambda^{-1}$ ) pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on obtient le résultat recherché.

Réciproquement, considérons une hypersurface  $\mathcal{H}$  définie par la relation (5.1.3.5). À présent, considérons le point  $x_0 = CH(s)e - SH(s)u$ , qui par définition est dans l'hypersurface  $\mathcal{H}$ . Alors, par ce qui précède, il est clair que l'unique horosphère centrée en  $a$  qui contient le point  $x_0$  correspond à l'hypersurface  $\mathcal{H}$ .  $\square$

Cette dernière propriété nous permet de facilement définir les demi-espaces bordés par une horosphère. Pour cela, remarquons que si  $\mathcal{H}$  est une horosphère centrée en  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  et  $N$  est l'orientation extérieure, alors si  $\gamma$  est une géodésique passant par le point  $x \in \mathcal{H}$  à la vitesse  $N(x)$  pour l'instant  $t = 0$ , alors pour tout  $t > 0$ , on a  $\langle \gamma(t)|e+u \rangle_L < -e^s$ , où  $s$  est la distance orientée de  $\mathcal{H}$  par rapport à  $e$ . Ainsi, on considère la définition suivante :

**Définition 5.1.8.** Soit  $\mathcal{H}$  une horosphère. On appelle **h-demi-espace négatif** la partie  $\mathcal{B}_-$  de  $\mathbb{H}^n$  correspondant à l'ensemble des  $CH(t)x - SH(t)N(x)$  avec  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathcal{H}$ , et  $N$  étant l'orientation extérieure de  $\mathcal{H}$ .

**Note.** De même, on appelle **h-demi-espace positif** la partie  $\mathcal{B}_+$  définie par les  $CH(t) - SH(t)$  tels que  $t \leq 0$ , et qui correspond nécessairement à la fermeture du complémentaire de  $\mathcal{B}_-$ .

**Propriété 5.1.7.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence et  $\mathcal{H}$  une horosphère de centre  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  dont la distance orientée par rapport au point  $e$  est  $s$ . Alors, on a :

$$\mathcal{B}_- = \{x \in \mathbb{H}^n \text{ tel que } \langle \gamma(t)|e+u \rangle_L \geq -e^s\} \quad (5.1.3.6)$$

*Démonstration.* En reprenant le raisonnement précédent, c'est immédiat.  $\square$

**Remarque 5.1.2.** Par les propriétés précédentes, on a que les h-demi-espaces  $\mathcal{B}_+$  et  $\mathcal{B}_-$  sont géométriquement analogues aux demi-espaces bordés par un hyperplan sur l'espace euclidien.

Pour terminer, nous devons définir une notion de segment horosphérique qui sera nécessaire pour définir les corps h-convexes. En particulier, nous observerons que contrairement au segment géodésique, il n'y a pas d'unicité du segment horosphérique reliant deux points.

**Définition 5.1.9.** On appelle **cercle horosphérique** l'intersection d'une horosphère  $\mathcal{H}$  avec un g-plan<sup>2</sup>  $\Sigma$  telle que, pour tout  $x \in \mathcal{H} \cap \Sigma$ , la géodésique passant par le point  $x$  à la vitesse  $N(x)$  est contenue dans  $\Sigma$ .

2. Un g-plan est l'intersection non-vide d'un 3-sous-espace vectoriel de type temps avec le demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$ .

**Note.** Un cercle horosphérique sera appelé **cercle horosphérique centré en  $a$**  lorsque l'horosphère qui lui est associée est centrée en  $a$ .

**Définition 5.1.10.** On appelle **segment horosphérique** toute partie compacte et connexe d'un cercle horosphérique. De plus, si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $\mathbb{H}^n$ , alors on appelle **segment horosphérique reliant  $x$  et  $y$**  un plus petit segment horosphérique (au sens de l'inclusion) contenant les points  $x$  et  $y$ .

**Propriété 5.1.8.** Soit  $x$  et  $y$  deux points de  $\mathbb{H}^n$ , l'ensemble des  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$  pour lesquels il existe un segment horosphérique centré en  $a$  reliant les points  $x$  et  $y$  correspond à une hypersurface de  $\mathbb{A}^{n-1}$  qui est difféomorphe à  $\mathbb{S}^{n-2}$ .

*Démonstration.* Considérons le modèle du demi-espace de Poincaré dans lequel la géodésique reliant les points  $x$  et  $y$  converge vers le point à l'infini lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Dans ce cadre géométrique, nous pouvons remarquer que les points  $x$  et  $y$  sont sur une droite orthogonale à l'hyperplan à l'infini  $\partial_\infty \mathbb{H}^n \setminus \{x_\infty\}$ . Considérons donc la sphère  $\mathbb{S}^{n-2}$  sur cet hyperplan. Alors, pour tout  $v \in \mathbb{S}^{n-2}$ , il existe exactement deux cercles horosphériques contenant les points  $x$  et  $y$ , qui sont contenus dans le 2-plan vectoriel engendré par les vecteurs  $y - x$  et  $v$ .

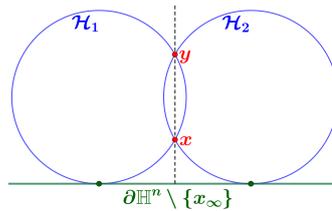


FIGURE 5.3 – Segments horosphériques symétriques reliant deux points dans le demi-espace de Poincaré

De plus, il est important de remarquer que les cercles horosphériques, ainsi définis, sont symétriques par rapport à la droite contenant les points  $x$  et  $y$ . Il est donc clair que la sphère  $\mathbb{S}^{n-2}$  correspond bien à l'ensemble des segments horosphériques qui relient les points  $x$  et  $y$ .  $\square$

## 5.2 Les corps h-convexes

Il semble qu'il n'existe pas encore d'ouvrage traitant des corps h-convexes et présentant les principaux résultats. Nous devons les premières mentions de la notion de h-convexité à L.A. Santalo (voir [97] et [98]) et à J.P. Fillmore (voir [31]). En particulier, J.P. Fillmore a introduit cette notion pour définir et étudier une notion de largeur constante pour les corps h-convexes (voir [32]). En effet, l'une des propriétés des horosphères est que deux horosphères ayant le même centre admettent une distance orthogonale constante, ce qui rend pertinent de considérer des horosphères pour définir une notion de largeur.

Dans cette section, nous nous contenterons d'une rapide présentation, en nous appuyant principalement sur les articles [34], [33] et [53]. En particulier, nous présenterons les résultats qui nous seront nécessaires et qui justifient la notion de h-hérisson.

### 5.2.1 Définition et premières propriétés

Après avoir introduit la notion de segment horosphérique, il est naturel de considérer la condition de convexité horosphérique suivante : un ensemble  $T \subset \mathbb{H}^n$  est dit **h-convexe** si, pour tous points  $x$  et  $y$  appartenant à  $T$ , tout segment horosphérique reliant ces deux points est contenu dans  $T$ . Ainsi, nous considérons la définition suivante :

**Définition 5.2.1.** *On désigne par **corps h-convexe** tout ensemble compact, non vide et qui satisfait la condition de h-convexité.*

Tout comme pour les corps convexes et les corps g-convexes, nous devons introduire une notion d'horosphère de support. Si  $K$  est un corps h-convexe, on appelle **horosphère de support de  $K$**  toute horosphère  $\mathcal{H}$  telle que  $K \subset \mathcal{B}_-$  et  $K \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ . Par ailleurs, un point  $x \in K$  est dit **point de support** s'il existe une horosphère de support contenant ce point, que nous appellerons alors **horosphère de support en  $x$** .

**Remarque 5.2.1.** *Par compacité, si  $K$  est un corps h-convexe, alors pour tout  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ , il existe une horosphère de support centrée en  $a$ .*

**Propriété 5.2.1.** *Tout corps h-convexe est un corps g-convexe. De plus, si un corps h-convexe  $K$  n'est pas réduit à un point, alors c'est un corps g-convexe de classe  $\mathcal{C}^0$ .*

*Démonstration.* Considérons  $K$ , un corps h-convexe qui contient plus d'un point. Si on choisit  $x$  et  $y$  distincts dans  $K$ , plaçons-nous dans le demi-espace de Poincaré où la géodésique reliant ces deux points converge vers le point à l'infini  $x_\infty$  pour l'une de ses extrémités.

Commençons par examiner cette propriété dans le demi-plan de Poincaré. Prenons  $x$  et  $y$  tels que la droite  $\delta$  les reliant soit orthogonale à la droite à l'infini  $\partial\mathbb{H}^2 \setminus \{x_\infty\}$ . Nous avons déjà observé, dans la propriété 5.1.8, que les deux segments horosphériques reliant  $x$  et  $y$  correspondent à deux arcs de cercle,  $C_1$  et  $C_2$ , symétriques par rapport à  $\delta$ . Ainsi, si  $w \in C_1$ , considérons  $z \in C_2$  comme étant le symétrique de  $w$  par rapport à  $\delta$ . En remarquant que l'un des deux segments horosphériques reliant  $w$  à  $z$  coïncide avec le segment  $[w, z]$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$ , il est évident que l'intersection  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$  est incluse dans  $K$ , avec  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  désignent les demi-espaces négatifs des deux horocycles associées respectivement aux segments  $C_1$  et  $C_2$ . Plus spécifiquement,  $K$  est d'intérieur non vide et contient le segment géodésique  $[x, y]$  (qui est le segment euclidien  $[x, y]$  dans le demi-plan de Poincaré). Ainsi,  $K$  est bien un corps g-convexe d'intérieur non vide.

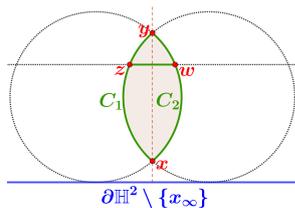


FIGURE 5.4 – La partie  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$

Sur  $\mathbb{H}^n$ , si  $x$  et  $y$  sont des points dans  $K$ , nous adoptons également le cadre du demi-espace de Poincaré, qui présente des caractéristiques similaires à celles mentionnées précédemment. Considérons donc la droite  $\delta$  qui relie  $x$  à  $y$ , que nous supposons vectorielle, ainsi que la sphère  $\mathbb{S}^{n-2}$  dans l'hyperplan à l'infini,  $\partial\mathbb{H}^n \setminus \{x_\infty\}$ . Pour chaque vecteur  $u \in \mathbb{S}^{n-2}$ , considérons, sur le plan  $\mathbb{R}u \oplus \delta$ , l'intersection  $\mathcal{B}_1^u \cap \mathcal{B}_2^u$  telle que définie précédemment. Ainsi, nous obtenons :

$$\bigcup_{u \in \mathbb{S}^{n-2}} \mathcal{B}_1^u \cap \mathcal{B}_2^u \subseteq K,$$

et comme l'union des  $\mathcal{B}_1^u \cap \mathcal{B}_2^u$  est clairement d'intérieur non vide et contient le segment  $[x, y]$ , alors on obtient le résultat recherché.  $\square$

**Propriété 5.2.2.** *Soit  $K$  un corps h-convexe. Alors, pour tout  $x \in \partial K$ , il existe une horosphère de support en  $x$ .*

*Démonstration.* Soit  $K \subset \mathbb{H}^n$  un corps h-convexe et soit  $x \in \partial K$  un point sur le bord de  $K$ . Plaçons-nous alors dans le modèle de Poincaré centré en  $x$ . Puisque  $K$  est aussi un corps g-convexe, il existe un hyperplan vectoriel  $T$  qui correspond à un g-hyperplan de support en  $x$ . Il s'ensuit que  $K$  est contenu dans l'un des demi-espaces  $\Gamma$  délimité par  $T$ .

À présent, considérons  $y \in \text{Int}(\mathcal{B}_+)$ , où  $\mathcal{B}_+$  est le h-demi-espace positif associé à l'horosphère  $\mathcal{H}$ . En nous restreignant au plan vectoriel  $\Sigma_2 = \mathbb{R}y \oplus \delta$ , avec  $\delta$  la droite vectorielle orthogonale à l'hyperplan  $T$ , il est clair que l'un des deux segments horosphériques reliant les points  $x$  et  $y$  n'est pas inclus dans le demi-espace  $\Gamma$ . En effet, il suffit de considérer l'unique cercle  $\mathcal{C}$  qui correspond à l'horocycle contenant les points  $x$  et  $y$ , dont le centre est dans le demi-espace  $\Gamma$ .

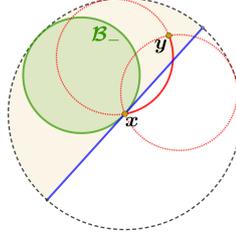


FIGURE 5.5 – Horocycle et hyperplan de support

Par conséquent, si le corps  $K$  possède un point dans  $\text{Int}(\mathcal{B}_+)$ , alors  $T$  ne peut pas être un g-hyperplan de support. Ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque 5.2.2.** *En considérant la partie  $\text{Supp}(K)$  qui correspond à l'ensemble des points de support, on déduit de ce qui précède que  $\text{Supp}(K) = \partial K$ .*

**Théorème 5.2.1.** *Une partie  $K \subset \mathbb{H}^n$  est un corps h-convexe si et seulement s'il existe une famille d'horosphères  $(\mathcal{H}_a)_{a \in \mathbb{A}^{n-1}}$  centrées en chaque point  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$  telle que :*

$$K = \bigcap_{a \in \mathbb{A}^{n-1}} \mathcal{B}_a^- \neq \emptyset, \quad (5.2.1.1)$$

où  $\mathcal{B}_a^-$  représente le h-demi-espace négatif délimité par  $\mathcal{H}_a$ .

*Démonstration.* Soit  $K \subset \mathbb{H}^n$  un corps h-convexe. On sait alors que, pour tout  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ , il existe une unique horosphère de support  $\mathcal{H}_a$  de  $K$  centrée en  $a$ . De là, on a que :

$$K \subset \bigcap_{a \in \mathbb{A}^{n-1}} \mathcal{B}_a^-$$

De plus, si  $x \in \mathbb{H}^n \setminus K$ , il existe alors un g-hyperplan de support  $T$  tel que  $K \subset E^-$  et  $x \in \mathbb{H}^n \setminus E^-$ , où  $E^-$  désigne le demi-espace négatif (selon l'orientation extérieure) bordé par le

g-hyperplan  $T$ . En considérant un point  $x_0$  appartenant à l'intersection  $T \cap K$  et  $\mathcal{H}$  une horosphère de support en  $x_0$ , on a que le demi-espace horosphérique  $\mathcal{B}^-$  est nécessairement contenu dans  $E^-$ . Par conséquent, nous avons :

$$x \in \bigcup_{a \in \mathbb{A}^{n-1}} \mathbb{H}^n \setminus \mathcal{B}_a^-$$

ce qui nous donne le résultat recherché. □

Nous retrouvons alors des propriétés équivalentes à celles que nous connaissons sur les corps convexes, mais en utilisant les horosphères. Un exemple intéressant est celui du triangle horosphérique que nous illustrons ci-dessous :

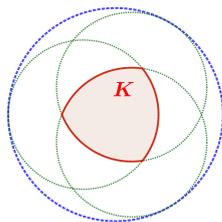


FIGURE 5.6 – Exemple de corps h-convexe dans le disque de Poincaré

### 5.2.2 Les corps h-convexes de classe $\mathcal{C}^2$

À l'instar des corps convexes de l'espace euclidien et des corps g-convexes abordés au chapitre précédent, nous considérerons, à présent, les corps h-convexes de classe  $\mathcal{C}^2$ . En particulier, il nous faudra établir la relation entre les corps strictement h-convexes de classe  $\mathcal{C}^2$  et les corps g-convexes de classe  $\mathcal{C}_+^2$ . Nous nous appuyerons essentiellement sur l'article [11], dans lequel nous retenons deux résultats : le lemme 2.1 et le théorème 3.3, que nous présentons ci-dessous.

Considérons  $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$ , une hypersurface orientée par le champ orthonormal  $N$ , et soit  $x \in \Sigma$  un point donné. Nous dirons que  $\Sigma$  est **localement strictement h-convexe en  $x$**  s'il existe un voisinage  $\mathcal{W} \subset \Sigma$  de  $x$  et une horosphère  $\mathcal{H}$  contenant le point  $x$ , tels que :

$$\mathcal{W} \cap \mathcal{H} = x \text{ et } N(x) = N_0(x) \tag{5.2.2.2}$$

où  $N_0$  désigne le champ orthonormal extérieur à  $\mathcal{H}$ . Ainsi, on a que :

1. **Lemme 2.1** : Une hypersurface orientée  $\Sigma$  est localement strictement h-convexe en  $x \in \Sigma$  si et seulement si ses courbures principales en  $x$  sont soit toutes strictement supérieures à 1, soit toutes strictement inférieures à  $-1$ .
2. **Théorème 3.3** : Si  $\Sigma$  est une hypersurface orientée, complète, et localement h-convexe en chaque point, et que ses courbures principales  $k_1, \dots, k_{n-1}$  satisfont en tout point la condition suivante :

$$\frac{2}{1 + k_1} + \dots + \frac{2}{1 + k_{n-1}} \leq n, \tag{5.2.2.3}$$

alors l'application de Gauss  $\nu_-$  est injective.

Il convient de noter que ce dernier résultat découle d'un théorème attribué à R. Schoen et S.T. Yau. Ce théorème nous apprend que sur une variété de Riemann  $(M, g)$  dont la courbure scalaire  $R_g$  est strictement positive en tout point, toute application conforme<sup>3</sup>  $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$  est injective. Pour en savoir plus, nous pouvons consulter l'ouvrage [101], où nous retrouvons ce résultat au théorème 3.5, de la page 262.

**Remarque 5.2.3.** *Il est clair que l'exemple présenté à la figure 5.6 n'est jamais localement strictement h-convexe. En particulier, c'est un corps h-convexe qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .*

**Lemme 5.2.1.** *Soit  $K$  un corps  $g$ -convexe de classe  $\mathcal{C}_+^2$  dont les courbures principales sont toutes et partout supérieures à 1. Considérons donc un point  $x \in \partial K$  et une horosphère  $\mathcal{H}$  telle que :*

$$x \in \mathcal{H} \text{ et } N(x) = N_0(x) \quad (5.2.2.4)$$

où  $N$  et  $N_0$  sont respectivement les orientations extérieures de  $K$  et  $\mathcal{H}$ . Alors, le corps  $K$  est inclus dans le h-demi-espace négatif  $\mathcal{B}_-$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in \partial K$  et  $\mathcal{H}$  une horosphère vérifiant la condition (5.2.2.4), que nous supposons centrée en  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ . En nous plaçant dans le modèle du demi-espace de Poincaré centré en  $a$  (dans lequel  $a$  correspond au point à l'infini), il s'ensuit que l'horosphère  $\mathcal{H}$  est un hyperplan affine parallèle à l'hyperplan vectoriel correspondant au bord à l'infini  $\partial\mathbb{H}^n \setminus \{a\}$ . De plus, il est clair que l'orientation de  $\mathcal{H}$ , définie par la condition (5.2.2.4), correspond nécessairement à un vecteur (centré en  $x$ ) qui pointe vers l'origine de  $\mathbb{R}^n$ .

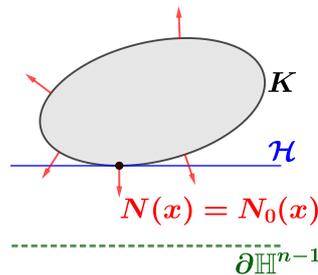


FIGURE 5.7 – Représentation de l'horosphère de support dans le demi-espace de Poincaré

Ainsi, les courbures principales du bord  $\partial K$  étant toutes et partout supérieures à 1, alors dans le demi-espace de Poincaré muni de la métrique correspondant au produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^n$ , il s'agit d'une hypersurface dont les courbures principales sont toutes et partout positives. En particulier, dans le demi-espace de Poincaré, le corps  $K$  est un corps convexe pour lequel l'horosphère  $\mathcal{H}$  est un hyperplan de support en  $x$ . Enfin, en remarquant que le demi-espace inférieur bordé par  $\mathcal{H}$  (vu comme un hyperplan affine orienté par  $N_0(x)$ ) correspond au h-demi-espace négatif  $\mathcal{B}_-$ , on obtient le résultat recherché.  $\square$

**Remarque 5.2.4.** *Il nous sera utile de constater que dans le cas où un corps h-convexe  $K$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors en tout point  $x \in \partial K$ , il existe une unique horosphère de support correspondant au point  $x$ .*

3. Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés de Riemann  $(M, g)$  et  $(N, h)$  est dite conforme si c'est une immersion vérifiant que  $f^*(h) = \alpha g$ , où  $\alpha$  est une fonction lisse qui n'est jamais nulle.

**Théorème 5.2.2.** *Un corps h-convexe est de classe  $\mathcal{C}^2$  si et seulement si c'est un corps g-convexe de classe  $\mathcal{C}_+^2$  dont toutes les courbures principales sont partout supérieures à 1. De plus, lorsque toutes les courbures principales sont strictement supérieures à 1, alors l'application de Gauss  $\nu_-$  est un  $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme.*

*Démonstration.* Considérons un corps h-convexe  $K$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et supposons qu'il existe un point  $x \in \partial K$  sur le bord qui admet une courbure principale strictement inférieure à 1. À présent, considérons  $\mathcal{H}_a$ , l'unique horosphère de support (centrée en  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ ) correspondant au point  $x$ . Alors, nous savons que dans le demi-espace de Poincaré centré en  $a$ , l'horosphère  $\mathcal{H}_a$  est un hyperplan affine qui est parallèle à l'hyperplan vectoriel correspondant au bord à l'infini  $\partial\mathbb{H}^n \setminus \{a\}$  et qui est tangent au bord  $\partial K$  au point  $x$ . De plus, en munissant le demi-espace de Poincaré de la métrique correspondant au produit scalaire usuel  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , alors par hypothèse, nous avons que l'hypersurface  $\partial K$  admet une courbure principale strictement négative (pour l'orientation extérieure au corps  $K$ ) au point  $x$ . En particulier, il n'est pas possible que le corps  $K$  soit compris dans le h-demi-espace  $\mathcal{B}^-$  correspondant à l'horosphère  $\mathcal{H}_a$ .

Réciproquement, considérons un corps g-convexe  $K$  de classe  $\mathcal{C}_+^2$  dont les courbures principales sont toutes et partout supérieures à 1. Considérons donc  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$  un point ; alors, par compacité, il existe forcément une horosphère  $\mathcal{H}_a$  centrée en  $a$  telle que :

$$K \subset \mathcal{B}_- \text{ et } \mathcal{H}_a \cap \partial K \neq \emptyset \quad (5.2.2.5)$$

avec  $\mathcal{B}_-$  étant le h-demi-espace bordé par l'horosphère  $\mathcal{H}_a$ .

À présent, on se place dans le demi-espace de Poincaré centré en  $a$ , que l'on munit de la métrique correspondant au produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Par hypothèse, on sait que, dans ce cadre-là, le corps  $K$  est un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^2$ . De plus, l'horosphère  $\mathcal{H}_a$  correspondant à un hyperplan affine qui est parallèle au bord à l'infini  $\partial_\infty\mathbb{H}^n \setminus \{a\}$  et qui vérifie la relation (5.2.2.5), on a que  $\mathcal{H}_a$  est forcément un hyperplan de support du corps  $K$ . Ajoutons que si  $\mathcal{H}'_a$  est une seconde horosphère centrée en  $a$  vérifiant la condition (5.2.2.5), alors dans le demi-espace de Poincaré centré en  $a$ , les horosphères  $\mathcal{H}_a$  et  $\mathcal{H}'_a$  correspondent à deux hyperplans de support du corps  $K$  qui sont parallèles et dans le même sens (via la condition (1.1.0.2) page 29). Aussi, comme dans le demi-espace de Poincaré, le corps  $K$  est un corps convexe, on obtient donc que  $\mathcal{H}_a = \mathcal{H}'_a$ .

Par conséquent, nous avons construit une famille  $(\mathcal{H}_a)_{a \in \mathbb{A}^{n-1}}$  où chaque  $\mathcal{H}_a$  est l'unique horosphère centrée en  $a$  qui vérifie la condition (5.2.2.5). En particulier, le corps  $K$  est compris dans l'intersection des  $\mathcal{B}_a$  qui correspondent aux h-demi-espaces bordés par les  $\mathcal{H}_a$ . Ensuite, pour  $x \in \partial K$ , considérons  $L_x$  l'unique horosphère qui contient le point  $x$  et dont l'orientation extérieure correspond à l'orientation du corps  $K$ . Alors par le lemme 5.2.1 on sait que  $L_x$  vérifie la condition (5.2.2.5) et donc, par ce qui précède, on a que  $L_x = \mathcal{H}_{\nu_-(x)}$ . On a donc que l'application de Gauss  $\nu_- : \partial K \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$  est surjective. De plus, en remarquant que pour chaque  $x \in \partial K$ , on a que  $\mathcal{B}_{\nu_-(x)} \subset E_x$ , avec  $E_x$  étant le g-demi-espace de support en  $x$ , on obtient que :

$$\bigcap_{a \in \mathbb{A}^{n-1}} \mathcal{B}_a = \bigcap_{x \in \partial K} \mathcal{B}_{\nu_-(x)} \subset \bigcap_{x \in \partial K} E_x = K$$

et ainsi, par le théorème 5.2.1, on a bien que  $K$  est un corps h-convexe.

Pour conclure, lorsque les courbures principales sont toutes strictement supérieures à 1, il est clair que l'application de Gauss  $\nu_-$  est en tout point un difféomorphisme local. De plus, par le

théorème 3.3 de [11], nous pouvons vérifier que  $\nu_-$  est injectif et donc, nous obtenons le résultat recherché.  $\square$

**Définition 5.2.2.** *Nous dirons qu'un corps h-convexe  $K$  est strictement h-convexe si, en tout point  $x \in \partial K$  sur le bord, il existe une unique horosphère de support  $\mathcal{H}$  qui, de plus, vérifie  $K \cap \mathcal{H} = \{x\}$ .*

**Remarque 5.2.5.** *Tout corps strictement h-convexe est de classe  $\mathcal{C}^1$ .*

**Propriété 5.2.3.** *Un corps h-convexe de classe  $\mathcal{C}^2$  est strictement h-convexe si et seulement si c'est un corps g-convexe de classe  $\mathcal{C}_+^2$  dont les courbures principales sont toutes et partout strictement supérieures à 1.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du lemme 2.1 de l'article [11] et du théorème 5.2.2 vue précédemment.  $\square$

**Remarque 5.2.6.** *Les applications de Gauss  $\nu_+$  et  $\nu_-$  d'un corps strictement h-convexe de classe  $\mathcal{C}^2$  sont des  $\mathcal{C}^2$ -difféomorphismes.*

Il est intéressant de noter que c'est l'une des caractéristiques des corps strictement h-convexes de classe  $\mathcal{C}^2$  qui les distingue des corps g-convexes de classe  $\mathcal{C}_+^2$ . En effet, nous avons vu à la propriété 5.1.4 que, pour les corps g-convexes de classe  $\mathcal{C}^2$ , l'application de Gauss  $\nu_+$  est toujours un difféomorphisme, mais ce n'est pas nécessairement le cas de l'application  $\nu_-$ .

### 5.2.3 Comparaison des hyperplans tangents par la méthode des horosphères.

Pour conclure cette section, nous revenons sur la question de la comparaison des hyperplans tangents d'un corps g-convexe. En effet, dans le cadre des corps h-convexes, il est possible de considérer une méthode pour comparer les hyperplans tangents qui diffère de celle que nous avons introduite via la définition 4.3.3 en utilisant les géodésiques porteuses et transverses. Par conséquent, nous considérons la définition suivante :

**Définition 5.2.3.** *Deux hyperplans orientés  $(T_x, N_x)$  et  $(T_y, N_y)$  sur les espaces tangents  $T_x\mathbb{H}^n$  et  $T_y\mathbb{H}^n$  seront dits **dans le même sens** si les géodésiques passant par les points  $x$  et  $y$  aux vitesses  $N_x$  et  $N_y$  convergent vers le même point  $a$  dans  $\mathbb{A}^{n-1}$ .*

**Note.** *Lorsque  $(T_x, N_x)$  et  $(T_y, N_y)$  sont dans le même sens, on notera  $(T_x, N_x) \sim (T_y, N_y)$ .*

**Remarque 5.2.7.** *Il est clair que la relation de même sens est une relation d'équivalence.*

## 5.3 Premiers éléments sur les familles d'horosphères co-orientées et les h-hérissos

À ce stade, il est naturel de considérer des enveloppes de familles d'horosphères qui vérifient une condition d'injectivité. Cela nous permettra ainsi de définir une notion de hérisson que nous appellerons naturellement h-hérisson. Cette notion correspond à une définition alternative des g-hérissos que nous avons considérés au chapitre précédent. Pour cela, nous nous appuyerons essentiellement sur la série d'articles [24], [26] et [25] de C. Epstein, que nous pouvons considérer comme étant une référence sur cette question.

### 5.3.1 Petite remarque sur la relation entre les applications de Gauss

Pour commencer, il nous faut comprendre la relation entre les applications de Gauss  $\nu_+$  et  $\nu_-$  d'une hypersurface orientée. Considérons donc  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence ainsi que  $\mathcal{H}_a$  une horosphère centrée en  $a = p(e + u)$ , avec  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Alors il existe un unique scalaire  $h$  pour lequel  $CH(h)e - SH(h)u \in \mathcal{H}_a$ . Par conséquent, si  $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$  est une hypersurface orientée (par le champ  $N$ ), nous considérons les fonctions  $h_+ : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$  et  $h_- : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$  telles que :

$$\begin{cases} CH(h_+(x))e - SH(h_+(x))N(x) \in \mathcal{H}_{\nu_+(x)} \\ CH(h_-(x))e + SH(h_-(x))N(x) \in \mathcal{H}_{\nu_-(x)} \end{cases} \quad (5.3.1.1)$$

avec  $\nu_+$  et  $\nu_-$  étant les applications définies par (5.1.2.1) ainsi que  $\mathcal{H}_{\nu_+(x)}$  et  $\mathcal{H}_{\nu_-(x)}$ , pour tout  $x \in \Sigma$ , qui sont les horosphères contenant le point  $x$  et qui sont respectivement centrées en  $\nu_+(x)$  et  $\nu_-(x)$ .

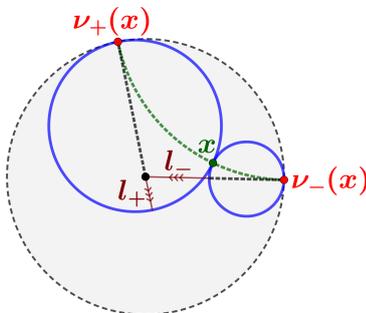


FIGURE 5.8 – Représentation des fonctions de support.

Dans l'article [26], l'auteur fournit deux résultats (i.e., théorème 3.1 et propriété 3.2) qui déterminent le lien entre l'application de Gauss positive  $\nu_+$  et l'application de Gauss négative  $\nu_-$ . Considérons donc une hypersurface orientée  $\Sigma$ , dont nous supposons que les courbures principales sont toutes et partout différentes de 1. Ainsi, l'application de Gauss  $\nu_+$  est un difféomorphisme local en tout point et donc, nous définissons l'application  $\Gamma = \nu_- \circ \nu_+^{-1} : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Alors nous avons les deux relations suivantes :

1.  $\Gamma(u) = \frac{\|\vec{\nabla} h_+(u)\|^2 - 1}{\|\vec{\nabla} h_+(u)\|^2 + 1} u + \frac{2}{\|\vec{\nabla} h_+(u)\|^2 + 1} \vec{\nabla} h_+(u)$
2.  $h_- \circ \nu_+^{-1}(u) = \ln \left( \|\vec{\nabla} h_+(u)\|^2 + 1 \right) - h_+(u)$

en considérant l'application  $h_+$  définie sur  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  via le difféomorphisme  $\nu_+$ .

Ces deux résultats montrent que même s'il existe deux manières de définir l'application de Gauss d'une hypersurface par le biais du prolongement géodésique, alors, à condition que les courbures principales soient toutes et partout différentes de 1 (ou toutes et partout différentes de  $-1$ ), toute l'information est finalement contenue dans le choix d'une seule famille d'horosphères dont on considère l'enveloppe. Cela justifie, en particulier, que l'on considère des enveloppes de familles d'horosphères co-orientées que nous définissons via la définition 5.3.1 ci-dessous.

### 5.3.2 Les familles d'horosphères co-orientées

En considérant la relation de même sens selon la définition 5.2.3, il est clair que la famille des hyperplans de support  $(T_x, N_x)_{x \in \partial K}$  d'un corps strictement h-convexe satisfait la condition suivante :

$$(T_x, N_x) \sim (T_y, N_y) \Rightarrow x = y \quad (5.3.2.2)$$

pour tout  $x \in \partial K$  et  $y \in \partial K$ .

Nous appelons naturellement **condition d'injectivité** la condition ainsi définie. Ensuite, pour  $\Sigma_a$ , une horosphère centrée en  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ , nous appelons **orientation induite par a** l'orientation extérieure de  $\Sigma_a$ . Il est donc naturel de considérer la définition suivante :

**Définition 5.3.1.** *On appelle **famille d'horosphères co-orientées** toute famille lisse<sup>4</sup> d'horosphères  $(\Sigma_a)_{a \in \mathbb{A}^{n-1}}$  telle que, pour toute orientation  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ , l'horosphère  $\Sigma_a$  est centrée en  $a$  et est orientée par  $a$ .*

Contrairement aux familles de g-hyperplans co-orientés, la notion de co-orientation pour les familles d'horosphères est universelle, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix d'un point de référence dans l'espace hyperbolique. En particulier, nous pouvons considérer la propriété suivante :

**Propriété 5.3.1.** *Une famille lisse d'horosphères  $(\Sigma_a)_{a \in \mathbb{A}^{n-1}}$  est co-orientée si et seulement si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *Il existe un point  $e$  tel que, pour toute orientation  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , la géodésique  $\gamma_u$  passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  est orthogonale à l'horosphère  $\Sigma_a$  avec  $a = p(e + u)$ .*
2. *Pour tout point  $e$  et toute orientation  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , la géodésique  $\gamma_u$  passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  est orthogonale à l'horosphère  $\Sigma_a$  avec  $a = p(e + u)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de rappeler que si  $\Sigma_a$  est une horosphère centrée en  $a$  et  $e \in \mathbb{H}^n$ , il existe un unique  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que  $a = p(e + u)$ . Cela provient du fait que l'application  $f : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  définie par :

$$f(u) = p(e + u) \quad (5.3.2.3)$$

est un difféomorphisme. En particulier, la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  est nécessairement orthogonale à toute horosphère centrée en  $f(u)$ .  $\square$

Il est alors naturel d'appeler **famille d'horosphères co-orientées en  $e \in \mathbb{H}^n$**  toute famille d'horosphères  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  telle que la famille  $(\Sigma_{f^{-1}(a)})_{a \in \mathbb{A}^{n-1}}$ , avec  $f$  la fonction définie par l'expression (5.3.2.3), est une famille d'horosphères co-orientées selon la définition 5.3.1.

**Avertissement 5.3.1.** *De nouveau, nous reconsidérons les avertissements 1.1.2 et 4.2.1 que nous appliquerons désormais aux corps h-convexes. Ainsi, dans toute la suite, les corps h-convexes seront toujours considérés (sauf mention du contraire) comme étant strictement h-convexes et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

**Remarque 5.3.1.** *Par le théorème 5.2.2, vu précédemment, il est clair que la famille des horosphères de support d'un corps h-convexe est co-orientée.*

4. Voir les définitions 1.0.1 et 1.0.2 de l'annexe A pour trouver les définitions les plus larges sur les notions de famille lisse et d'enveloppe de famille lisse.

**Définition 5.3.2.** Si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille lisse d'horosphères co-orientées en  $e$ , on appelle **fonction de support centrée en  $e$**  toute fonction  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  telle que :

$$x_0 = \gamma_u(h(u)) \in \Sigma_u \text{ et } \partial \gamma_u(h(u)) = \nu_u(x_0) \quad (5.3.2.4)$$

où  $\nu_u$  est le champ orthonormal extérieur de l'horosphère  $\Sigma_u$  et  $\gamma_u$  est la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $-u$  en l'instant  $t = 0$ .

**Remarque 5.3.2.** Si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille lisse d'horosphères co-orientées en  $e$  et que  $h$  est la fonction de support, alors on a que :

$$CH h(u)e - SH h(u)u \in \Sigma_u \quad (5.3.2.5)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

Il est important de constater que, contrairement aux familles de g-hyperplans et aux familles d'hyperplans, le signe de  $h(u)$  est contraire à l'orientation du vecteur  $u$ . En effet, nous souhaitons que pour tout corps h-convexe  $K$ , la fonction de support  $h$  soit strictement positive lorsque le point de référence  $e$  est dans l'ouverture  $\text{Int}(K)$ . De plus, il nous faut que l'orientation induite par la famille d'horosphères orientées (par l'orientation extérieure) corresponde à l'orientation extérieure du corps  $K$ . Ainsi, pour les corps h-convexes, on considère la famille d'horosphères de support qui correspondent à l'application de Gauss  $\nu_-$ .

**Propriété 5.3.2.** Toute famille d'horosphères co-orientées admet une unique fonction de support qui est de plus, une application lisse.

*Démonstration.* Si la première affirmation est évidente, la seconde se démontre facilement en observant que, dans le modèle de Poincaré centré en  $e$ , toute famille d'horosphères co-orientées en  $e$  peut être définie comme suit :

$$\Sigma_u = \left\{ \frac{1-l(u)}{2}u + \frac{1+l(u)}{2}\vec{v}, \text{ avec } \vec{v} \setminus \{u\} \in \mathbb{S}_e^{n-1} \right\} \quad (5.3.2.6)$$

où  $l$  est la fonction de support dans le modèle de Poincaré centré en  $e$ .

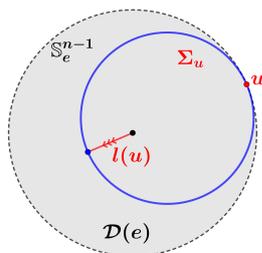


FIGURE 5.9 – Fonction de support dans le modèle de Poincaré

En particulier, dans le modèle de Poincaré centré en  $e$ , les horosphères  $\Sigma_u$  correspondent à des hypersphères de  $T_e \mathbb{H}^n$  centrées en  $\frac{1-l(u)}{2}u$  et de rayon  $\frac{1+l(u)}{2}$ . Il s'ensuit que si la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est lisse au sens de la définition 1.0.1 de l'annexe A, alors l'application  $l$  l'est aussi.  $\square$

**Propriété 5.3.3.** Pour toute application  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , avec  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, il existe une unique famille d'horosphères co-orientées en  $e$  dont l'application de support est  $h$ .

*Démonstration.* Il suffit de se placer dans le modèle de Poincaré centré en  $e$  et de considérer la famille d'horosphères  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  définie par l'expression (5.3.2.6).  $\square$

**Remarque 5.3.3.** *La fonction de support associée à la famille des horosphères de support d'un corps h-convexe  $K$  est partout strictement positive lorsqu'elle est centrée en  $e \in \text{Int}(K)$ .*

### 5.3.3 Définition et première propriété sur les h-hérissons

À présent, en considérant la définition 1.0.1 de l'annexe A sur les enveloppes de familles lisses, il est immédiat que le bord d'un corps h-convexe correspond à l'enveloppe paramétrée d'une famille d'horosphères co-orientées. Ainsi, il est justifié de considérer la définition suivante :

**Définition 5.3.3.** *On appellera **h-hérisson** toute enveloppe paramétrée  $(\mathcal{H}, x)$  d'une famille d'horosphères co-orientées. De plus, on appelle **fonction de support centrée en  $e$**  (ou simplement **fonction de support** lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté) la fonction de support associée à la famille d'horosphères, relativement à un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ .*

**Avertissement 5.3.2.** *Comme pour les hérissons de l'espace euclidien et les g-hérissons, afin de simplifier notre texte, nous considérerons les h-hérissons sans faire mention de leurs paramétrages.*

**Notation 5.3.1.** *Nous prendrons l'habitude de noter  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{H}^n$  un h-hérisson de fonction de support  $h$ .*

Pour la suite, nous nous appuierons essentiellement sur les articles [24] et [26], dans lesquels l'auteur introduit et étudie de telles enveloppes d'horosphères. En particulier, après adaptation des développements figurant dans la deuxième section de l'article [24], nous obtenons la propriété 5.3.4 ci-dessous, qui nous assure l'existence de l'enveloppe paramétrée d'une famille d'horosphères co-orientées. Pour cela, nous devons introduire quelques définitions. Considérons donc, pour  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, une famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  d'horosphères co-orientées en  $e$ . On commence donc par considérer les fonctions  $x_0$  et  $N_0$ , correspondant à l'adaptation de la définition 4.3.8 page 93 pour les familles d'horosphères. Ainsi, nous obtenons que ces deux applications admettent pour expression :

$$x_0(u) = -SH h(u)u + CH h(u)e \text{ et } N_0(u) = CH h(u)u - SH h(u)e \quad (5.3.3.7)$$

Ensuite, il nous sera nécessaire de considérer les applications lisses  $\vec{R}$ ,  $\alpha$ , et  $k$  qui sont définies par les expressions suivantes :

$$\vec{R}(u) = \vec{\nabla} h(u), \alpha(u) = 1 + CH h(u) + SH h(u) \text{ et } k(u) = \frac{1}{2}(1 + CH h(u)) \quad (5.3.3.8)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Par conséquent, on considère la propriété suivante :

**Propriété 5.3.4.** *Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, alors toute famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  d'horosphères co-orientées en  $e$  admet une unique enveloppe paramétrée (qui est, par définition, un h-hérisson). De plus, si  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{H}^n$  est un h-hérisson, alors son paramétrage  $x$  et son champ orthonormal  $N$  ont pour expression :*

$$\begin{cases} x(u) = x_0(u) + \vec{\eta}(u) \\ N(u) = N_0(u) - \vec{\eta}(u) \end{cases} \quad (5.3.3.9)$$

avec  $\vec{\eta}(u) = \frac{1}{2}\alpha(u)^2 \vec{L}(u)$  et  $\vec{L}(u) = R(u)^2 k(u)(e + u) - \vec{R}(u)$ .

*Démonstration.* Commençons par considérer  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence et  $\psi_e : \mathbb{H}^n \mapsto \mathcal{D}(e)$  la projection de Poincaré centrée en  $e$ . Ainsi, considérons  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille d'horosphères co-orientées en  $e$  et de fonction de support  $h$ . En nous plaçant dans le modèle de Poincaré centré en  $e$ , alors pour chaque  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on définit  $l(u)$  tel que  $\tilde{x}_0(u) = -l(u)u \in \psi_e(\Sigma_u)$ , avec  $\tilde{x}_0 = \psi_e \circ x_0$ . On a donc que :

$$\tilde{x}_0(u) = \psi_e \circ x_0(u) = -\frac{SHh(u)}{1+CHh(u)}u = -\frac{e^{2h(u)}-1}{(e^{h(u)}+1)^2}u = -\frac{e^{h(u)}-1}{e^{h(u)}+1}u$$

et ainsi on obtient que :

$$l(u) = \frac{SHh(u)}{1+CHh(u)} = \frac{e^{h(u)}-1}{e^{h(u)}+1} \quad (5.3.3.10)$$

Nous allons déterminer l'expression de l'enveloppe de la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  dans le modèle de Poincaré centré en  $e$ . Supposons donc que  $\tilde{x}$  soit le paramétrage d'une enveloppe de la famille  $(\psi_e(\Sigma_u))_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ . Étant donné que les horosphères  $\psi_e(\Sigma_u)$  satisfont l'expression (5.3.2.6), il existe une application lisse  $v : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  telle que :

$$\tilde{x}(u) = \frac{1-l(u)}{2}u + \frac{1+l(u)}{2}v(u) \quad (5.3.3.11)$$

avec  $v(u) \neq u$ .

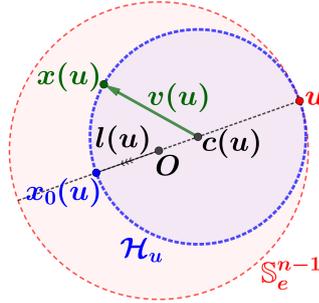


FIGURE 5.10 – Décomposition du paramétrage de l'enveloppe

Plus simplement, nous avons que  $\tilde{x}(u) = c(u) + w(u)$ , où  $c(u) = \frac{1-l(u)}{2}u$  étant le centre de l'horosphère  $\psi_e(\Sigma_u)$  et  $w(u) = \frac{1+l(u)}{2}v(u)$  est un point sur la sphère de rayon  $\frac{1+l(u)}{2}$ . Par définition du paramétrage d'une enveloppe, l'application  $\tilde{x}$  doit satisfaire la condition suivante :

$$\langle d_u x \cdot \vec{W} | v(u) \rangle = 0$$

que l'on appelle naturellement condition de contact. Après quelques calculs, nous trouvons que cette condition de contact est équivalente à la relation suivante :

$$-\langle \vec{\nabla} l(u) | \vec{W} \rangle \langle v(u) | u \rangle + (1-l(u)) \langle v(u) | \vec{W} \rangle + \langle \vec{\nabla} l(u) | \vec{W} \rangle = 0 \quad (5.3.3.12)$$

En considérant  $v_T(u)$  correspondant à la projection orthogonale du vecteur  $v(u)$  le long de  $u$ , nous avons  $v(u) = v_T(u) + a(u)u$ , où  $a(u) = \langle v(u) | u \rangle$ . Et par la condition de contact (5.3.3.12), on obtient que  $v_T$  doit satisfaire la relation suivante :

$$(1-l(u))v_T(u) = (a(u)-1)\vec{\nabla} l(u)$$

À présent, nous adopterons les notations suivantes :  $a = a(u)$ ,  $b = 1 - l(u)$ ,  $\vec{D} = \vec{\nabla}l(u)$ ,  $\vec{v} = v(u)$ ,  $D = \|\vec{D}\|$  et  $v = \|\vec{v}\|$ . Ainsi, nous avons  $b\vec{v} = (a-1)\vec{D} + abu = a(\vec{D} + bu) - \vec{D}$  et en particulier,  $a$  est une racine du polynôme :

$$a^2(D^2 + b^2) - 2aD^2 + D^2 - b^2 \quad (5.3.3.13)$$

Après un petit calcul, on peut vérifier que les racines du polynôme (5.3.3.13) sont  $a_1 = \frac{D^2 - b^2}{D^2 + b^2}$  et  $a_2 = 1$ . De plus, en notant que la racine  $a_2 = 1$  correspond au cas où  $v(u) = u$  (ce qui n'est pas possible), nous obtenons finalement :

$$v(u) = \frac{\|\vec{\nabla}l(u)\|^2 - (1 - l(u))^2}{\|\vec{\nabla}l(u)\|^2 + (1 - l(u))^2}u - \frac{2(1 - l(u))}{\|\vec{\nabla}l(u)\|^2 + (1 - l(u))^2}\vec{\nabla}l(u) \quad (5.3.3.14)$$

Nous retrouvons donc bien la même expression qui a été considérée par C. Epstein dans l'article [24] (voir (2.3) page 9). Ainsi, nous savons qu'il existe une seule et unique enveloppe paramétrée pour chaque famille d'horosphères co-orientées. La suite de la preuve va donc consister à donner une expression satisfaisante du paramétrage d'un h-hérisson, mais sur le modèle du demi-hyperboloïde de Lorentz-Minkowski.

En considérant les expressions (5.3.3.11) et (5.3.3.14), nous obtenons que, dans le modèle de Poincaré, le paramétrage admet pour expression  $\tilde{x}(u) = \tilde{a}(u)u - \tilde{b}(u)\vec{\nabla}l(u)$ , où  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  sont des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} 1) \tilde{a}(u) &= \frac{\|\vec{\nabla}l(u)\|^2 - l(u)(1 - l(u))^2}{\|\vec{\nabla}l(u)\|^2 + (1 - l(u))^2} = \sigma(u)(-l(u) + V(u)^2) \\ 2) \tilde{b}(u)\vec{\nabla}l(u) &= \frac{1 - l(u)^2}{\|\vec{\nabla}l(u)\|^2 + (1 - l(u))^2}\vec{\nabla}l(u) = \sigma(u)(1 + l(u))\vec{V}(u) \end{aligned}$$

avec  $\vec{V}(u) = \frac{1}{1-l(u)}\vec{\nabla}l(u)$  et  $\sigma(u) = \frac{1}{1+V(u)^2}$ . Ainsi, après reformulation, l'expression du paramétrage de l'enveloppe de la famille d'horosphères dans le modèle de Poincaré centré en  $e$  est :

$$\tilde{x}(u) = \tilde{a}(u)u - \tilde{b}(u)\vec{\nabla}l(u) = \sigma(u)\left[\left(-l(u) + V(u)^2\right)u - (1 + l(u))\vec{V}(u)\right]$$

Pour définir le paramétrage  $x$  sur le demi-hyperboloïde, il nous suffit de déterminer l'expression de l'application  $\varphi_e \circ \tilde{x}$ , avec  $\varphi_e$  étant l'inverse de la projection de Poincaré centrée en  $e$ . Pour rappel (voir section 5.1.3 de l'annexe E pour en savoir plus), l'expression de  $\varphi_e$  est définie comme suit :

$$\varphi_e(w) = \beta(w)[w + e] - e \text{ avec } \beta(w) = \frac{2}{1 - \|w\|^2}$$

Commençons donc par déterminer le coefficient  $\tilde{\beta}(u) = \frac{2}{1 - \|\tilde{x}(u)\|^2}$ . Il nous faut alors correctement exprimer la norme  $\|\tilde{x}(u)\|^2$  qui, après quelques calculs, admet pour expression :

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}(u)\|^2 &= \sigma(u)^2 \left[ \left( -l(u) + V(u)^2 \right)^2 + (1 + l(u))^2 V(u)^2 \right] \\ &= \sigma(u)^2 \left( l(u)^2 + V(u)^2 \right) \left( 1 + V(u)^2 \right) = \sigma(u) \left( l(u)^2 + V(u)^2 \right)\end{aligned}$$

et donc, on obtient que :

$$\tilde{\beta}(u) = \frac{2}{1 - \|\tilde{x}(u)\|^2} = \frac{2}{\sigma(u) \left( 1 - l(u)^2 \right)} = 2 \frac{k(u)}{\sigma(u)} \text{ avec } k(u) = \frac{1}{1 - l(u)^2}$$

Ainsi, dans le demi-hyperboloïde, le paramétrage admet pour première expression  $x(u) = \tilde{\beta}(u)\tilde{x}(u) + (\tilde{\beta}(u) - 1)e$  et après quelques développements, on obtient que  $\tilde{\beta}(u) - 1 = k(u) \left( 2V(u)^2 + l(u)^2 + 1 \right)$  et donc :

$$x(u) = k(u) \left[ 2 \left( -l(u) + V(u)^2 \right) u - 2(1 + l(u)) \vec{V}(u) + \left( 2V(u)^2 + l(u)^2 + 1 \right) e \right]$$

À présent, il nous faut reformuler l'expression du paramétrage  $x$  à partir de la fonction de support  $h$ . Pour cela, il suffit de considérer la relation (5.3.3.10). Ainsi, on obtient que :

$$\begin{aligned}1) \quad 1 + l(u)^2 &= 1 + \frac{(SH h(u))^2}{(1 + CH h(u))^2} = \frac{2CH h(u)[1 + CH h(u)]}{(1 + CH h(u))^2} = \frac{2CH h(u)}{1 + CH h(u)} \\ 2) \quad 1 - l(u)^2 &= 1 - \frac{(SH h(u))^2}{(1 + CH h(u))^2} = \frac{2}{1 + CH h(u)} \\ 3) \quad 1 - l(u) &= 1 - \frac{SH h(u)}{1 + CH h(u)} = \frac{1 + CH h(u) - SH h(u)}{1 + CH h(u)} = \frac{2}{1 + CH h(u) + SH h(u)} \\ 4) \quad 1 + l(u) &= \frac{1 + CH h(u) + SH h(u)}{1 + CH h(u)}\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}1) \quad k(u) &= \frac{1}{2}(1 + CH h(u)) \\ 2) \quad \vec{V}(u) &= \frac{1}{2}\alpha(u)\vec{R}(u) \text{ avec } \alpha(u) = 1 + CH h(u) + SH h(u) \text{ et } \vec{R}(u) = \vec{\nabla}h(u)\end{aligned}$$

On a donc que le paramétrage du h-hérisson est donné par l'expression  $x(u) = a(u)u - b(u)\vec{R}(u) + c(u)e$ , où les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned}1) \quad a(u) &= 2k(u) \left[ -l(u) + V(u)^2 \right] = -SH h(u) + \frac{1}{2}\alpha(u)^2 R(u)^2 k(u) \\ 2) \quad b(u) &= 2(1 + l(u)) \frac{\alpha(u)}{2} k(u) = \frac{1}{2}\alpha(u)^2 \\ 3) \quad c(u) &= k(u) \left[ 2V(u)^2 + l(u)^2 + 1 \right] = CH h(u) + \frac{1}{2}\alpha(u)^2 R(u)^2 k(u)\end{aligned}$$

En considérant les applications  $x_0$  et  $\vec{\eta}$  que nous avons respectivement définies par l'expression (5.3.3.7) et dans l'énoncé de la propriété 5.3.4, il en résulte que  $x(u) = x_0(u) + \vec{\eta}(u)$ .

Pour le champ  $N$ , notons que, du fait de la condition de contact, l'application  $v$  correspond à un champ non nul et orthogonal à l'hyperplan tangent (s'il existe) du h-hérissment dans le modèle de Poincaré. Considérons alors l'application  $\tilde{n}_0(u) = (V(u)^2 - 1)u + 2\vec{V}(u)$ . Il est alors clair que  $v(u) = \sigma(u)\tilde{n}_0(u)$ . Ensuite, en reformulant le paramétrage  $\tilde{x}$ , nous obtenons  $\tilde{x}(u) = \sigma(u)[a_0(u)u - b_0(u)\vec{V}(u)]$ , où  $a_0(u) = -l(u) + V(u)^2$  et  $b_0(u) = 1 + l(u)$ . Nous avons alors que :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x}(u) | \tilde{n}_0(u) \rangle &= \sigma(u)a_0(u)(V(u)^2 - 1) + 2\sigma(u)b_0(u)V(u)^2 \\ &= \sigma(u)[V(u)^4 + l(u) + l(u)V(u)^2 + V(u)^2] \\ &= \sigma(u)(1 + V(u)^2)(V(u)^2 + l(u)) = V(u)^2 + l(u) = c_0(u) \end{aligned}$$

Il nous faut donc déterminer l'expression du tiré en arrière du champ de vecteurs  $\tilde{n}_0$  par la projection de Poincaré centrée en  $e$ . Ainsi, on obtient que :

$$d_{\tilde{x}(u)}\varphi_e \cdot \tilde{n}_0(u) = \tilde{\beta}(u)[\tilde{n}_0(u) + \tilde{\beta}(u)\langle \tilde{x}(u) | \tilde{n}_0(u) \rangle(\tilde{x}(u) + e)] \quad (5.3.3.15)$$

tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{n}_0(u) + \tilde{\beta}(u)\langle \tilde{x}(u) | \tilde{n}_0(u) \rangle\tilde{x}(u) &= (V(u)^2 - 1)u - 2\vec{V}(u) + 2k(u)c_0(u)(a_0(u)u - b_0(u)\vec{V}(u)) \\ &= A(u)u - 2B(u)\vec{V}(u) \end{aligned}$$

avec

1.  $A(u) = V(u)^2 - 1 + 2k(u)a_0(u)c_0(u) = k(u)(1 + V(u)^2)[2V(u)^2 - l(u)^2 - 1]$
2.  $B(u) = 1 + k(u)b_0(u)c_0(u) = k(u)(1 + V(u)^2)(1 + l(u))$

et en considérant l'expression (5.3.3.15), on obtient finalement que :

$$\tilde{n}_0(u) + \tilde{\beta}(u)\langle \tilde{x}(u) | \tilde{n}_0(u) \rangle\tilde{x}(u) = \frac{1}{2}\tilde{\beta}(u)[f(u)u - 2g(u)\vec{V}(u)]$$

où  $f(u) = 2V(u)^2 - l(u)^2 - 1$  et  $g(u) = 1 + l(u)$ .

Par conséquent, via l'expression (5.3.3.15), nous obtenons un champ orthogonal aux hyperplans tangents du h-hérissment sur le demi-hyperboloïde, tel que :

$$n_0(u) = f(u)u - 2g(u)\vec{V}(u) + 2c_0(u)e$$

et après quelques calculs, nous avons :

$$\langle n_0(u) | n_0(u) \rangle = f(u)^2 + 4g(u)^2V(u)^2 - 4c_0(u)^2 = l(u)^4 - 2l(u)^2 + 1 = (1 - l(u)^2)^2$$

ce qui nous donne :

$$N(u) = -k(u) \left[ \left( 2V(u)^2 - l(u)^2 - 1 \right) u - 2(1 + l(u)) \vec{V}(u) + 2 \left( V(u)^2 + l(u) \right) e \right]$$

De nouveau, en considérant l'expression (5.3.3.10), nous pouvons exprimer les paramètres du champ orthonormal  $N$  en fonction de la fonction de support  $h$ , comme suit :

$$1) k(u) \left( 2V(u)^2 - l(u)^2 - 1 \right) = -CH h(u) + \frac{1}{2} k(u) \alpha(u)^2 R(u)^2$$

$$2) 2k(u)(1 + l(u)) \frac{1}{2} \alpha(u) = \frac{1}{2} \alpha(u)^2$$

$$3) 2k(u) \left( V(u)^2 + l(u) \right) = SH h(u) + \frac{1}{2} k(u) \alpha(u)^2 R(u)^2$$

et finalement,  $N(u) = N_0(u) - \vec{\eta}(u)$ . □

**Propriété 5.3.5.** *Il existe un h-hérissou  $\mathcal{H}$  qui est localement une hypersurface orientée dont toutes les courbures principales sont nulles en un point  $x \in \mathcal{H}$ .*

*Démonstration.* Pour démontrer cette propriété, il suffit de considérer un h-hérissou  $\mathcal{H}$  et un point  $e \in \mathcal{H}$ . Si on considère  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  la fonction de support centrée en  $e$ , alors il existe nécessairement  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que  $x(u_0) = e$ . D'après la propriété 5.3.4 précédente, on a forcément :

$$h(u_0) = 0 \text{ et } \vec{\nabla} h(u_0) = 0$$

et comme en  $u_0$  nous avons  $d_{u_0} \vec{\eta} \cdot \vec{W} = -Hess(h)_{u_0} * \vec{W}$ , alors :

$$d_{u_0} x \cdot \vec{W} = -Hess(h)_{u_0} * \vec{W} \text{ et } d_{u_0} N \cdot \vec{W} = \vec{W} + Hess(h)_{u_0} * \vec{W}$$

Ainsi, il suffit de considérer une fonction  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  dont les valeurs propres de la matrice hessienne  $Hess(h)_{u_0}$  sont toutes égales à  $-1$ . Et dans ce cas, le paramétrage  $x$  est localement un plongement en  $u_0$ , et donc  $\mathcal{H}$  est, au voisinage de  $x(u_0)$ , une hypersurface orientée dont toutes les courbures principales sont nulles en  $x(u_0)$ . □

Par cette dernière propriété, nous savons que les h-hérissous ne satisfont pas les critères nécessaires pour définir des hérissous marginalement piégés sur des espaces de Lorentz dont la courbure est non nulle. Néanmoins, comme nous le montrerons dans la section suivante, la notion de h-hérissou est, selon certains critères, un bon candidat pour définir une notion de hérissou sur l'espace hyperbolique. Il sera donc intéressant de comparer les h-hérissous aux g-hérissous, et en particulier d'examiner les conditions de correspondance entre ces deux définitions.

### 5.3.4 Définition alternative de la notion de h-hérissou

Il est également possible de définir une notion alternative de h-hérissou en orientant les horosphères selon leur normale entrante. En effet, si l'on considère une hypersurface orientée  $\Gamma \subset \mathbb{H}^n$  pour laquelle seule l'application de Gauss  $\nu_+ : \Gamma \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  est un difféomorphisme, alors via la définition de h-hérissou que nous avons précédemment introduite (voir 5.3.3), il est clair que l'hypersurface orientée  $\Gamma$  ne peut pas correspondre à un h-hérissou.

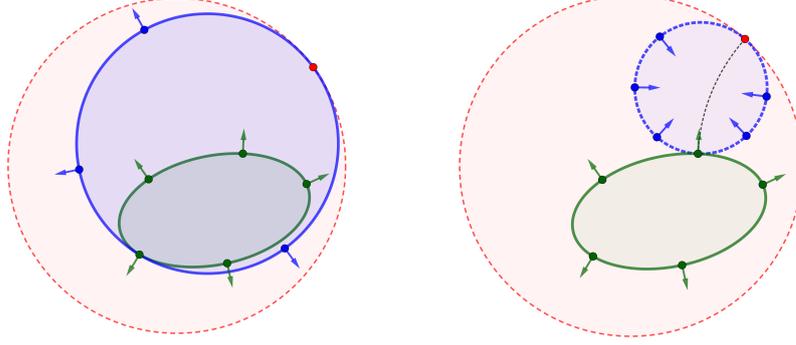


FIGURE 5.11 – Représentation de la définition alternative de h-hérisson

Par conséquent, on appelle **h-hérisson négatif** (et respectivement **h-hérisson positif** pour les h-hérissons précédemment définis) toute enveloppe paramétrée d'une famille d'horosphères co-orientées, dont chaque horosphère est orientée selon la normale entrante. En pratique, peu de choses changent, si ce n'est la fonction de support, le paramétrage et le champ orthonormal. En particulier, dans ce cadre-là, la fonction de support d'une famille d'horosphères  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est l'unique fonction  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  définie par la relation suivante :

$$x_0(u) = CH h(u)e \pm SH h(u)u \in \Sigma_u \quad (5.3.4.16)$$

Ainsi, les expressions diffèrent seulement par quelques signes de celles des h-hérissons positifs. En effet, il suffit de remplacer  $h$  par  $-h$  dans toutes les relations. De cette manière, la propriété 5.3.4 correspond, pour les h-hérissons négatifs, à la propriété ci-dessous :

**Propriété 5.3.6.** *Si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille lisse d'horosphères co-orientées en  $e$  et de fonction de support  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ , alors il existe un unique h-hérisson  $\mathcal{H}$ , pour la fonction de support  $h$ , tel que :*

1. *Le paramétrage est  $x(u) = x_0(u) + \vec{\eta}(u)$ , avec  $x_0(u) = SH h(u)u + CH h(u)e$ .*
2. *Le champ orthonormal est  $N(u) = N_0(u) - \vec{\eta}(u)$ , avec  $N_0(u) = CH h(u)u + SH h(u)e$ .*

où  $\vec{\eta}(u) = \frac{1}{2}\alpha(u)^2 \vec{L}(u)$  et  $\vec{L}(u) = R(u)^2 k(u)(e + u) + \vec{R}(u)$ . Aussi, les applications  $\vec{R}$ ,  $\alpha$  et  $k$  sont définies par les expressions suivantes :

$$\vec{R}(u) = \vec{\nabla} h(u), \alpha(u) = 1 + CH h(u) - SH h(u) \text{ et } k(u) = \frac{1}{2}(1 + CH h(u)) \quad (5.3.4.17)$$

*Démonstration.* Pour obtenir ces relations, il suffit de considérer les expressions de la propriété 5.3.4 et d'appliquer les transformations  $h \rightsquigarrow -h$  et  $\vec{R} \rightsquigarrow -\vec{R}$ .  $\square$

**Remarque 5.3.4.** *Considérons  $K$  un corps  $g$ -convexe. Comme l'application de Gauss  $\nu_+$  est un difféomorphisme, alors son bord<sup>5</sup> est un h-hérisson négatif. De plus, si le bord du corps  $K$  est également un h-hérisson positif, alors il est clair que c'est un corps h-convexe.*

5. Rappelons que le bord d'un corps  $g$ -convexe est toujours orienté par l'orientation extérieure.

**Avertissement 5.3.3.** Dans la suite, les propriétés faisant intervenir la notion de h-hérison correspondront (sauf mention contraire) à la notion de h-hérison négatif. Ce choix est motivé par le fait que la notion de h-hérison négatif est plus adaptée à la définition des g-hérissons. Par conséquent, nous nous permettrons d'appeler simplement h-hérison tous les h-hérissons, sans préciser s'ils sont orientés positivement ou négativement.

## 5.4 Carte de support et dualité des h-hérissons

L'une des raisons pour lesquelles la notion de h-convexité est favorisée dans l'étude de la convexité sur l'espace hyperbolique est qu'elle permet de retrouver certaines relations que l'on connaît sur les corps convexes de l'espace euclidien. Ainsi, ce qui va nous occuper dans cette section (et la suivante) et qui jouera un rôle d'exemple quant à l'utilité de la notion de h-hérison, sera de définir des outils qui nous permettront d'établir une notion de dualité et de considérer des opérations sur les h-hérissons. En particulier, nous allons considérer une notion de dualité sur les horosphères en nous basant sur la définition de carte de support (voir section 2 de l'article [34] pour en savoir plus), et dont nous allons énoncer quelques propriétés élémentaires.

### 5.4.1 Description des horosphères via le cône lumière

Pour définir une notion de dualité, il nous sera nécessaire de décomposer les horosphères comme étant l'intersection du demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$  avec un hyperplan de type lumière qui est paramétré sur le cône lumière. Pour cela, on considère donc le demi-cône lumière positif qui est défini comme ci-dessous :

$$\mathbb{T}_+^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} \text{ tel que } \langle x|x \rangle = 0 \text{ et } x_{n+1} \geq 0\} \quad (5.4.1.1)$$

et qui est clairement une hypersurface (non régulière en zéro) de type lumière.

**Lemme 5.4.1.** Si  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  et  $v \in \mathbb{H}^n$ , alors  $\langle \sigma|v \rangle < 0$ .

*Démonstration.* On commence par considérer le point  $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{H}^n$  ainsi que l'hyper-sphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{E}^n \subset \mathbb{L}^{n+1}$ . Si  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  et  $v \in \mathbb{H}^n$ , alors on a que :

$$\sigma = \lambda(e + u) \text{ et } v = a\nu + be$$

avec  $\lambda$ ,  $a$  et  $b$  des scalaires strictement positifs ainsi que  $u$  et  $\nu$  dans  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ . Mais comme, par définition du demi-hyperboloïde, les coefficients  $a$  et  $b$  vérifient  $a^2 - b^2 = -1$ , on a forcément que  $a < b$  et donc :

$$\langle \sigma|v \rangle = \lambda(a \langle u|\nu \rangle - b) < 0$$

ce qui termine la preuve. □

**Propriété 5.4.1.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point sur l'espace hyperbolique. Alors pour tout  $\sigma$  dans  $\mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , il existe un unique scalaire  $\lambda > 0$  et un unique vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que :

$$\sigma = \lambda(e + u) \quad (5.4.1.2)$$

*Démonstration.* Considérons un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$  dans l'espace hyperbolique ainsi que  $\sigma$  dans  $\mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ . Par le lemme 5.4.1 que nous avons vu précédemment, nous savons que le scalaire  $\lambda = -\langle e|\sigma \rangle$  est strictement positif. Par conséquent, considérons le vecteur

$$u = \frac{\sigma - \lambda e}{\lambda}$$

Et en vérifiant que  $\langle u|e \rangle = \frac{-\lambda + \lambda}{\lambda} = 0$  et  $\langle u|u \rangle = \frac{-2\lambda\langle u|\sigma \rangle - \lambda^2}{\lambda^2} = 1$ , nous obtenons la décomposition (5.4.1.2) dont l'unicité est évidente.  $\square$

Dans les deux propriétés suivantes, nous verrons comment les horosphères de l'espace hyperbolique sont des intersections d'hyperplans affines de type lumière avec le demi hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$ . Pour cela, si  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , considérons l'hyperplan affine :

$$\mathcal{P}_\sigma = \{w \in \mathbb{L}^{n+1} \text{ tel que } \langle w|\sigma \rangle = -1\} \subset \mathbb{L}^{n+1} \quad (5.4.1.3)$$

Pour étudier cette famille d'hyperplans, il nous faut considérer l'application  $\Gamma_e : \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{H}^n$ , définie par l'expression suivante :

$$\Gamma_e(\sigma) = a(\lambda)u + b(\lambda)e \quad (5.4.1.4)$$

avec  $a(\lambda) = \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}$  et  $b(\lambda) = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}$ . Notons également que le scalaire  $\lambda > 0$  et le vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  sont les uniques éléments qui vérifient la relation (5.4.1.2) associé à chaque  $\sigma$  dans  $\mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ .

**Propriété 5.4.2.** *Considérons  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, ainsi que  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ . Alors, nous avons que l'hyperplan affine  $\mathcal{P}_\sigma$ , défini par (5.4.1.3), est un hyperplan de type lumière qui vérifie la relation ci-dessous :*

$$\mathcal{P}_\sigma = \Gamma_e(\sigma) + \langle \sigma \rangle^\perp \quad (5.4.1.5)$$

avec  $\Gamma_e$  l'application définie par (5.4.1.4).

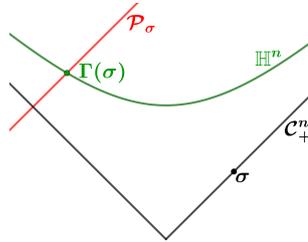


FIGURE 5.12 – Relation entre l'hyperplan  $\mathcal{P}_\sigma$  et le point  $\Gamma_e(\sigma)$ .

*Démonstration.* Considérons donc  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  ainsi que  $\mathcal{P}_\sigma$ , l'hyperplan défini par l'expression (5.4.1.3). Nous pouvons déjà vérifier qu'il s'agit d'un hyperplan de type lumière en constatant que, pour tout  $w \in \mathcal{P}_\sigma$ , nous avons  $\mathcal{P}_\sigma = w + \langle \sigma \rangle^\perp$ . Ensuite, par la propriété 5.4.1, nous savons que :

$$\sigma = \lambda(e + u)$$

avec  $\lambda > 0$  et  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . À présent, supposons qu'il existe un point  $x = au + be$  vérifiant que  $\langle x|\sigma \rangle = -1$  et  $a^2 - b^2 = -1$ . Après quelques calculs, nous obtenons que le point  $x$  vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = \lambda \\ a - b = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

qui admet pour solution  $a = \frac{\lambda^2-1}{2\lambda}$  et  $b = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda}$ . Ainsi, nous avons bien que  $x = \Gamma_e(\sigma)$ , et comme l'hyperplan  $\mathcal{P}_\sigma$  vérifie la relation  $\mathcal{P}_\sigma = x + \langle \sigma \rangle^\perp$ , nous obtenons le résultat recherché.  $\square$

**Lemme 5.4.2.** *Soit  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  ainsi que  $e \in \mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_\sigma$ , alors nous avons  $\Gamma_e(\sigma) = e$ .*

*Démonstration.* Soit  $e \in \mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_\sigma$  un point. Nous savons alors que  $\sigma = \lambda(u + e) \in \langle e, u \rangle$ , et donc  $\langle e, u \rangle \cap \langle \sigma \rangle^\perp = \mathbb{R}\sigma$ . Ensuite, par la propriété 5.4.2 précédente, nous avons  $\mathcal{P}_\sigma = \Gamma_e(\sigma) + \langle \sigma \rangle^\perp$ , ce qui donne que :

$$\mathcal{P}_\sigma \cap \langle e, u \rangle = e + \mathbb{R}\sigma$$

et ainsi,

$$\Gamma(\sigma) \in \mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_\sigma \cap \langle e, u \rangle = \mathbb{H}^n \cap (e + \mathbb{R}\sigma) = \{e\}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**Propriété 5.4.3.** *Pour tout  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , l'intersection  $\Sigma = \mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_\sigma$  est une horosphère centrée en  $a = p(\sigma) \in \mathbb{A}^{n-1}$ . De plus, pour toute horosphère, il existe un unique  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  tel que  $\Sigma = \mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_\sigma$ .*

*Démonstration.* Considérons  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  ainsi que l'intersection  $\Sigma = \mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_\sigma$ . En considérant  $e \in \Sigma$ , nous savons que  $\sigma = \lambda(e + u)$  et par le lemme 5.4.2 précédent, nous avons  $\Gamma(\sigma) = a(\lambda)u + b(\lambda)e = e$ , ce qui implique que  $\lambda = 1$  et donc que  $\sigma = e + u$ .

Posons  $c = \frac{1}{2}u$ , alors nous devons vérifier, via la projection de Poincaré centrée en  $e$ , que l'hypersurface  $\psi_e(\Sigma)$  est une sphère de centre  $c$  et de rayon  $\frac{1}{2}$  pour le produit scalaire  $g_e$ . Pour ce faire, il nous faut déterminer, en tout point  $x \in \Sigma$ , l'expression suivante :

$$\langle \psi_e(x) - c | \psi_e(x) - c \rangle = \langle \psi_e(x) | \psi_e(x) \rangle - 2 \langle c | \psi_e(x) \rangle + \langle c | c \rangle$$

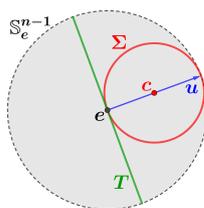


FIGURE 5.13 – Représentation de  $\psi_e(\Sigma)$  dans le modèle de Poincaré centrée en  $e$

Par définition de l'hypersurface  $\Sigma$ , nous avons  $\langle \sigma | x \rangle = -1$ , pour tout  $x \in \Sigma$ . En particulier, nous savons donc que  $\langle \sigma | e \rangle = -1$ . Ainsi, nous obtenons les trois relations suivantes :

1.  $\langle \psi_e(x) | \psi_e(x) \rangle = -2q_e(x) + 1$
2.  $\langle c | \psi_e(x) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma - e | \psi_e(x) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma | \psi_e(x) \rangle = \frac{1}{2} [q_e(x) \langle \sigma | x \rangle + q_e(x) \langle \sigma | e \rangle - \langle \sigma | e \rangle] = \frac{1}{2} [-2q_e(x) + 1]$

$$3. \langle c|c \rangle = \frac{1}{4}$$

ce qui nous donne  $\langle \psi_e(x) - c | \psi_e(x) - c \rangle = \frac{1}{4}$ , confirmant ainsi que  $\Sigma$  est bien une horosphère.

Pour finir, considérons  $\Sigma$  une horosphère centrée en  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$  et prenons  $e \in \Sigma$ . À nouveau, en utilisant la projection de Poincaré centrée en  $e$ , nous savons que  $\psi_e(\Sigma)$  correspond à l'intersection non vide de la boule unité  $\mathcal{D}(e)$  avec une sphère tangente en  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  au bord à l'infini  $\partial_\infty \overline{\mathcal{D}}(e) = \mathbb{S}_e^{n-1}$ . En particulier, nous avons que  $a = p(e + u)$ . De plus, en considérant le point  $\sigma = e + u \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , alors nous obtenons le résultat recherché en reprenant notre raisonnement précédent.  $\square$

**Remarque 5.4.1.** Par le lemme 5.4.2 et la propriété 5.4.3 que nous avons vue précédemment, toute horosphère  $\Sigma$  orientée par  $N$  (qui correspond à l'orientation extérieure) est de la forme  $\mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_\sigma$ , où  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  vérifie que :

$$\sigma = x - N(x) \quad (5.4.1.6)$$

pour tout  $x \in \Sigma$ .

Nous pouvons donc résumer les propriétés précédentes de la manière suivante. Toute horosphère  $\Sigma$  centrée en  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$  correspond à un unique point  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  sur le cône lumière, tel que :

$$\mathcal{P}_\sigma = \Gamma(\sigma) + \langle \sigma \rangle^\perp, \Sigma = \mathcal{P}_\sigma \cap \mathbb{H}^n \text{ et } a = p(\sigma) \quad (5.4.1.7)$$

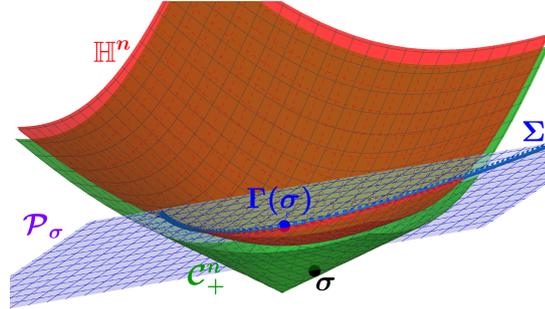


FIGURE 5.14 – Horosphère comme intersection du demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$  avec un hyperplan affine  $\mathcal{P}_\sigma$  de type lumière

## 5.4.2 Relation de dualité entre l'espace hyperbolique et le cône lumière

Nous appellerons **hypersphère unité du cône** (ou plus simplement **hypersphère**) toute partie  $\mathcal{C} \subset \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  de la forme  $\mathcal{C} = x + \mathbb{S}_x^{n-1}$ , pour un point  $x \in \mathbb{H}^n$ . Nous noterons alors  $\mathcal{H}_0(\mathbb{T}_+^n)$  l'ensemble des hypersphères unités du cône. Ainsi, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

**Propriété 5.4.4.** *Considérons un point  $e \in \mathbb{H}^n$  ainsi que  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , un point sur le cône. Alors, l'application  $\Gamma_e$  vérifie que :*

$$\sigma \in \Gamma_e(\sigma) + \mathbb{S}_{\Gamma_e(\sigma)}^{n-1} \quad (5.4.2.8)$$

*Démonstration.* Considérons donc  $\sigma = \lambda(e + u)$ ; nous obtenons alors :

$$\sigma - \Gamma_e(\sigma) = \left( \lambda - \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \right) u + \left( \lambda - \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \right) e = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} u + \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} e$$

et donc  $\langle \Gamma_e(\sigma) | \sigma - \Gamma_e(\sigma) \rangle = 0$  et  $\langle \sigma - \Gamma_e(\sigma) | \sigma - \Gamma_e(\sigma) \rangle = \frac{(\lambda^2 + 1)^2 - (\lambda^2 - 1)^2}{4\lambda^2} = 1$ .  $\square$

**Propriété 5.4.5.** *Si  $x$  et  $y \in \mathbb{H}^n$ , alors  $x + \mathbb{S}_x^{n-1} = y + \mathbb{S}_y^{n-1} \Rightarrow x = y$ .*

*Démonstration.* Considérons le point  $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{H}^n$ , alors il est clair que pour tout  $x \in \mathbb{H}^n$ , si  $e + \mathbb{S}_e^{n-1} = x + \mathbb{S}_x^{n-1}$  alors  $e = x$ . À présent, soit deux points  $x$  et  $y$ . En considérant une isométrie vectorielle  $\phi : \mathbb{L}^{n+1} \mapsto \mathbb{L}^{n+1}$  telle que  $\phi(x) = e$  et  $\phi(T_e \mathbb{H}^n) = \mathbb{E}^n$ , on se retrouve forcément dans le premier cas.  $\square$

À partir des opérations de transformation géométrique que nous avons définies en considérant l'application  $\Gamma_e$ , pour tout point  $e \in \mathbb{H}^n$ , et au vu des deux propriétés précédentes, nous pouvons définir une notion de dualité comme ci-dessous :

**Définition 5.4.1.** *Considérons un point  $x \in \mathbb{H}^n$  et une horosphère  $H \subset \mathbb{H}^n$ . Nous appellerons respectivement **dual de  $x$**  et **dual de  $H$** , l'horosphère  $x^* \in \mathcal{H}_0(\mathbb{T}_+^n)$  et le point sur le cône  $H^* \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , tels que :*

$$x^* = x + \mathbb{S}_x^{n-1} \text{ et } H = \mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_{H^*} \quad (5.4.2.9)$$

**Définition 5.4.2.** *Considérons un point  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  et une hypersphère  $\mathcal{C} \in \mathcal{H}_0(\mathbb{T}_+^n)$ . On appelle **dual de  $\sigma$**  et **dual de  $\mathcal{C}$** , respectivement l'horosphère  $\sigma^* \subset \mathbb{H}^n$  et le point dans l'espace hyperbolique  $\mathcal{C}^* \in \mathbb{H}^n$ , tels que :*

$$\sigma^* = \mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_\sigma \text{ et } \mathcal{C} = \mathcal{C}^* + \mathbb{S}_{\mathcal{C}^*}^{n-1} \quad (5.4.2.10)$$

Il est alors clair que la notion de dualité ainsi définie est involutive. C'est-à-dire que pour tous les points  $x \in \mathbb{H}^n$ ,  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , horosphères  $H \subset \mathbb{H}^n$  et hypersphères  $\mathcal{C} \in \mathcal{H}_0(\mathbb{T}_+^n)$ , on a  $(x^*)^* = x$ ,  $(\sigma^*)^* = \sigma$ ,  $(H^*)^* = H$  et  $(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}$ . De plus, on obtient la propriété suivante :

**Propriété 5.4.6.** *Considérons  $x \in \mathbb{H}^n$  et  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  deux points ainsi qu'une horosphère  $H \subset \mathbb{H}^n$  et une hypersphère  $\mathcal{C} \in \mathcal{H}_0(\mathbb{T}_+^n)$ . Alors on a :*

1. *Si  $\sigma \in \mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{C}^* \in \sigma^*$ .*
2. *Si  $x \in H$ , alors  $H^* \in x^*$ .*

*Démonstration.* Pour le premier point, considérons une hypersphère  $\mathcal{C} = x + \mathbb{S}_x^{n-1}$  et un point  $\sigma = x + u \in \mathcal{C}$ . Ainsi, on a  $\mathcal{C}^* = x$  et, sachant que  $\Gamma_x(\sigma) = x$ , on obtient que  $x \in \mathcal{P}_\sigma = \Gamma_x(\sigma) + \langle \sigma \rangle^\perp$ .

Pour le second point, adoptons un raisonnement similaire. Considérons une horosphère  $H \subset \mathbb{H}^n$  et un point  $x \in H$ . On sait alors que  $H = \mathbb{H}^n \cap \left( x + \langle \sigma \rangle^\perp \right)$  avec  $\sigma = x + u$  et  $u \in \mathbb{S}_x^{n-1}$ , ce qui nous donne que  $\sigma \in x + \mathbb{S}_x^{n-1}$ .  $\square$

**Remarque 5.4.2.** *Ajoutons que, par la propriété 5.4.4, si  $e \in \mathbb{H}^n$  et  $\sigma \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  sont deux points, alors :*

$$\sigma \in \Gamma_e(\sigma)^* \quad (5.4.2.11)$$

et aussi  $\Gamma_e(\sigma) \in \sigma^*$ .

À présent, rappelons que nous avons déjà vu à la section 3.1.2 du chapitre 3 une notion de dualité entre les points et les hyperplans de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , ainsi qu'entre les points sur  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  et les hyperplans projectifs correspond à  $\mathcal{H}_e(\mathbb{P}_n)$ . Aussi, pour démontrer les propriétés 4.3.1 et 4.3.2 de l'annexe D, nous avons défini des relations de dualité sur la sphère  $\mathbb{S}^n$  équivalentes à celles que nous avons considérées sur l'espace projectif  $\mathbb{P}_n$ . Nous allons donc rapidement présenter cette construction de dualité afin de pouvoir la comparer à ce que nous avons vu précédemment. Pour cela, il nous sera utile de reconsidérer les définitions 3.1.1 et 3.1.2 de la page 57.

Considérons le point  $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  ainsi que  $\Omega_e = \{v \in \mathbb{S}^n \text{ tel que } \langle v|e \rangle > 0\}$ , la demi-sphère ouverte centrée en  $e$ . Alors, pour tout point  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et hyperplan  $T = \lambda u + \langle u \rangle^\perp$  avec  $\lambda > 0$ , on considère le grand cercle  $\mathcal{C}_x \subset \Omega_e \setminus \{e\}$  et le point  $v_T \in \Omega_e \setminus \{e\}$  tels que :

$$\mathcal{C}_x = \Omega_e \cap \langle e + x \rangle^\perp \text{ et } v_T = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}(\lambda e - u) \quad (5.4.2.12)$$

De plus, si on considère un point  $v \in \Omega_e \setminus \{e\}$  et un grand cercle  $\mathcal{C} \subset \Omega_e \setminus \{e\}$ , alors on considère l'unique hyperplan  $T \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et l'unique point  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tels que :

$$e + T = (e + T_e \mathbb{S}^n) \cap \langle v \rangle^\perp \text{ et } e + x \in (e + T_e \mathbb{S}^n) \cap \langle \mathcal{C} \rangle^\perp \quad (5.4.2.13)$$

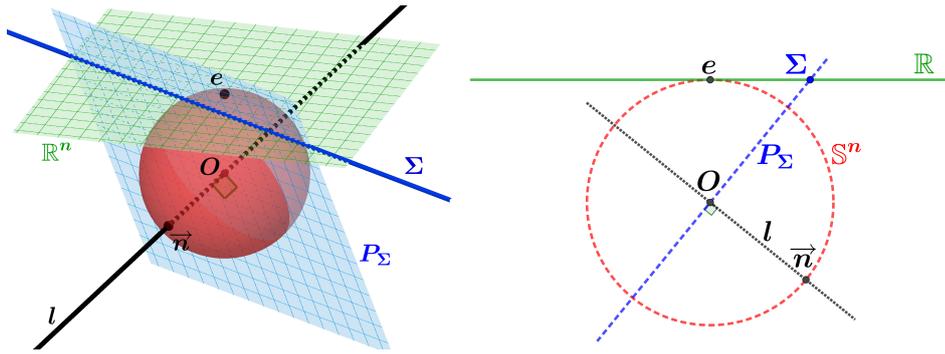


FIGURE 5.15 – Représentation de la dualité sur  $\mathbb{R}^n$  via la sphère  $\mathbb{S}^n$

Il est clair que cette construction correspond à la dualité que nous avons définie sur l'espace projectif via les définitions 3.1.1 et 3.1.2. Pour vérifier cela, il suffit de constater que si  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est un point et  $T \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  un hyperplan, alors on a :

$$\begin{cases} x^* = p(\mathcal{C}_x) \text{ et } p(\mathcal{C}_x)^* = x \\ T^* = p(v_T) \text{ et } p(v_T)^* = T \end{cases} \quad (5.4.2.14)$$

En conclusion, nous avons que les définitions de dualité des points et des horosphères avec les hypersphères et les points du cône relèvent de la même construction géométrique. Cependant, contrairement à la dualité entre  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{P}_n$ , il n'est pas possible de transporter nos relations sur l'espace projectif. Cela provient du fait que la projection projective n'est pas un plongement lorsque l'on se restreint au cône de lumière.

### 5.4.3 Carte de support d'un h-hérison

Dans cette section, nous allons présenter quelques propriétés élémentaires sur les cartes de support (voir définition 5.1.4 page 105), que nous tirons directement de l'article [34] et qui nous seront nécessaires par la suite. Avant tout, il est important de rappeler que nous nous en tiendrons à l'avertissement 5.3.3 page 125 que nous avons considéré précédemment. Par conséquent, lorsque nous considérerons la carte de support d'une hypersurface orientée  $(\Sigma, N)$ , il s'agira uniquement de l'application  $\sigma : \Sigma \mapsto \mathbb{T}_+^n$  définie par l'expression suivante :

$$\sigma(x) = x + N(x) \quad (5.4.3.15)$$

Il est important de noter qu'à présent, dans le cadre de l'avertissement 5.3.3, les horosphères sont toutes orientées par l'orientation entrante. En particulier, comme nous l'avons vu à la propriété 5.1.5 et à la remarque 5.4.1, la carte de support  $\sigma$  d'une horosphère  $H$  centrée en  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$  est constante et vérifie que :

$$p \circ \sigma(x) = a \quad (5.4.3.16)$$

pour tout  $x \in H$ .

**Propriété 5.4.7.** *Si  $\sigma : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  est une application lisse telle que  $\nu = p(\sigma) : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  est une immersion, alors la famille d'horosphères  $\Sigma_a = \mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_{\sigma(a)}$  admet une unique enveloppe paramétrée.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la relation (5.4.3.16). En effet, en tout point de  $\mathbb{A}^{n-1}$ , il existe des voisinages  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  tels que la restriction  $\nu : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$  est un difféomorphisme. Ainsi, la famille d'horosphères  $(\Sigma_{\nu^{-1}(a)})_{a \in \mathcal{W}}$  est lisse et vérifie que chaque horosphère  $\Sigma_{\nu^{-1}(a)}$  est centrée en  $a$ . Par conséquent, en appliquant le même raisonnement que pour la propriété 5.3.4 page 118, on obtient le résultat recherché.  $\square$

Pour la suite, il nous sera utile d'exprimer la carte de support d'un h-hérison en fonction du choix d'un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$  et de sa fonction de support. À cette fin, considérons l'application  $\mathcal{N}_e : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  telle que :

$$\mathcal{N}_e(u) = e + u \quad (5.4.3.17)$$

et que l'on appelle **référentiel normé centré en e**. Alors il est clair que si  $\mathcal{H}$  est un h-hérison dont la fonction de support est  $h$ , pour un point de référence  $e$ , sa carte de support admet pour expression  $\sigma = \lambda \mathcal{N}_e$ , où  $\lambda$  est une fonction lisse définie par la fonction de support  $h$ . Ainsi, nous considérons les deux propriétés suivantes :

**Propriété 5.4.8.** *Considérons  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence ainsi que  $\sigma = \lambda(e + u) \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  un point du cône lumière défini par la relation (5.4.1.2). Alors la distance géodésique entre les points  $e$  et  $\Gamma_e(\sigma)$  vérifie la relation ci-dessous :*

$$d_g(e, \Gamma_e(\sigma)) = |\ln(\lambda)| \quad (5.4.3.18)$$

où  $\ln(\lambda)$  correspond à la distance orientée du point  $e$  au point  $\Gamma_e(\sigma)$ .

*Démonstration.* Considérons  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence et  $\sigma = \lambda(e + u) \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , défini par la relation (5.4.1.2). Si nous définissons le point  $x = \Gamma_e(\sigma) = au + be$ , alors, via la carte de Klein centrée en  $e$ , nous avons :

$$\psi_e(x) = lu$$

et en particulier, il est immédiat que la distance orientée du point  $e$  au point  $\psi_e(x)$  est définie par  $ArcTH(l)$ . De plus, la fonction  $\Gamma_e$  étant définie par (5.4.1.4), nous avons :

$$\psi_e(x) = k_e(x) - e = \frac{au + be}{b} - e = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}u$$

et donc,

$$ArcTH(l) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+l}{1-l} \right) = \ln(\lambda)$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**Propriété 5.4.9.** *Considérons  $\sigma_1 \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  et  $\sigma_2 \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , deux points du cône lumière tels que  $\sigma_2 = \eta\sigma_1$ . Alors, la distance géodésique entre les points  $\Gamma_e(\sigma_1)$  et  $\Gamma_e(\sigma_2)$  est :*

$$d_g(\Gamma_e(\sigma_1), \Gamma_e(\sigma_2)) = |\ln(\eta)| \quad (5.4.3.19)$$

et de plus, la distance orientée du point  $\Gamma_e(\sigma_1)$  au point  $\Gamma_e(\sigma_2)$  est  $\ln(\eta)$ .

*Démonstration.* Commençons par considérer un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$  ainsi que  $\sigma_1 = \lambda(e + u) \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  et  $\sigma_2 = \eta\lambda(e + u) \in \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ . Alors on définit le point :

$$x_0 = \Gamma_e(\sigma_1) = au + be \text{ avec } a = \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \text{ et } b = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}$$

ainsi que le vecteur  $v = \sigma_1 - x_0 = bu + ae$ . Dès lors, nous avons que  $\langle v|v \rangle = b^2 - a^2 = 1$  et  $\langle x_0|v \rangle = -1 + 1 = 0$ , et donc  $v \in \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$ . En particulier,  $\sigma_2 = \eta(x_0 + v)$  et en considérant la propriété 5.4.8 précédente pour le point de référence  $x_0$ , nous obtenons le résultat recherché.  $\square$

Considérons donc  $\mathcal{H}$  un h-hérissément ainsi qu'un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ . Nous appellerons alors **carte de support centrée en e** l'application  $\sigma : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  telle que :

$$\sigma(u) = x(u) + N(u), \quad (5.4.3.20)$$

où  $x$  et  $N$  sont le paramétrage et le champ orthonormal définis via la propriété 5.3.6 page 124. Par conséquent, si  $\mathcal{H}$  est un h-hérissément et  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  sa fonction de support centrée en  $e$ , alors sa carte de support  $\sigma : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , centrée en  $e$ , admet pour expression :

$$\sigma(u) = \lambda(u)\mathcal{N}_e(u) \text{ avec } \lambda(u) = e^{h(u)} \quad (5.4.3.21)$$

Terminons cette section sur une remarque sémantique. Jusqu'à présent, tant pour les g-hérisséments que pour les h-hérisséments, les notions de paramétrage, de champ orthonormal (ou la notion de carte de support, précédemment définie, pour les h-hérisséments) correspondaient à des applications définies sur  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ . A présent, pour les h-hérisséments, nous considérerons ces applications comme étant définies sur  $\mathbb{A}^{n-1}$  lorsque nous ne préciserons pas qu'elles sont centrées en  $e$ . Il est néanmoins important de noter que, lorsque cela ne produira pas de confusion, nous nous permettrons de ne pas imposer de telles précisions afin de simplifier notre texte.

### 5.4.4 Relation de dualité sur les h-hérissons

À partir des propriétés de dualité que nous avons considérées précédemment, nous pouvons définir une notion de dualité sur les h-hérissons comme nous l'avons fait au chapitre 3 pour les hérissons euclidiens. Pour ce faire, nous considérons les deux définitions suivantes :

**Définition 5.4.3.** Soit  $(\mathcal{H}, x)$  l'enveloppe paramétrée d'une famille lisse d'horosphères  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$ . Nous appelons donc **dual de  $\mathcal{H}$**  la donnée de l'ensemble  $\mathcal{H}^* = \{\Sigma_u^* \text{ tel que } u \in \Gamma\} \subset \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  et d'une application lisse  $x^* : \Gamma \mapsto \mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$ , que nous appelons **paramétrage**, définie par l'expression ci-dessous :

$$x^*(u) = \Sigma_u^* \quad (5.4.4.22)$$

pour tout  $u \in \Gamma$ .

**Définition 5.4.4.** Soit  $(\Lambda, y)$  l'enveloppe paramétrée d'une famille lisse d'hypersphères du cône  $(C_u)_{u \in \Gamma}$ . Nous appelons donc **dual de  $\Lambda$**  la donnée de l'ensemble  $\Lambda^* = \{C_u^* \text{ tel que } u \in \Gamma\} \subset \mathbb{H}^n$  et d'une application lisse  $y^* : \Gamma \mapsto \mathbb{H}^n$ , que nous appelons **paramétrage**, définie par l'expression ci-dessous :

$$y^*(u) = C_u^* \quad (5.4.4.23)$$

pour tout  $u \in \Gamma$ .

**Propriété 5.4.10.** Soit  $\mathcal{H}_h$  un h-hérisson, de paramétrage  $x : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$ . Alors le dual de  $\mathcal{H}_h$  est l'enveloppe paramétrée de la famille d'hypersphères du cône  $(x(a)^*)_{a \in \mathbb{A}^{n-1}}$ . De plus, on a que son bidual vérifie la relation d'involution suivante :

$$(\mathcal{H}_h^*)^* = \mathcal{H}_h \quad (5.4.4.24)$$

ce qui justifie que l'on parle de dualité.

*Démonstration.* Considérons  $(\Sigma_a)_{a \in \mathbb{A}^{n-1}}$  une famille d'horosphères co-orientées et  $\mathcal{H}$  le h-hérisson qui lui est associé, dont le paramétrage est  $x : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$ . Ainsi, par la propriété 5.4.6, il est clair que  $x^*(a) = \Sigma_a^* \in x(a)^*$ . A présent, pour  $a \in \mathbb{A}^{n-1}$ , considérons le point  $e = x(a) \in \mathcal{H}$  ainsi que les applications  $h$ ,  $\tilde{x}$  et  $\sigma$  correspondant respectivement à la fonction de support, au paramétrage et à la carte de support, que nous considérerons centrées en  $e$ . Par conséquent, via la propriété 5.3.6, nous savons que  $h(u_0) = 0$  et  $\vec{\nabla} h(u_0) = 0$ , avec  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que  $\tilde{x}(u_0) = e$ . En particulier, la carte de support étant définie par l'expression (5.4.3.20), sa différentielle en  $u_0$  vérifie la relation suivante :

$$d_{u_0} \sigma \cdot \vec{W} = \vec{W} \in T_{u_0} \mathbb{S}_e^{n-1} = T_{\sigma(u_0)} \mathcal{C}_e \text{ avec } \mathcal{C}_e = e + \mathbb{S}_e^{n-1}$$

et ainsi, il est immédiat que l'application  $x^*$  est le paramétrage de l'enveloppe de la famille d'hypersphères  $(x(u)^*)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ . Enfin, par la propriété d'involution, nous obtenons que le paramétrage du bidual a pour expression  $y(a) = (x(a)^*)^* = x(a)$ , ce qui nous permet de conclure que le bidual du h-hérisson  $\mathcal{H}$  vérifie bien la relation  $(\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}$ .  $\square$

## 5.5 Opérations sur les h-hérissons

Dans cette dernière section, nous donnons une rapide présentation de trois méthodes permettant de définir des opérations combinatoires sur l'ensemble des h-hérissons. En particulier,

il est à noter que ces quelques résultats sont tirés de l'article [34], dont l'objet est de définir et d'étudier ces trois opérations. Pour cela, commençons par remarquer que l'hypersurface  $\mathbb{T}_+^n \setminus \{0\}$  est réglé<sup>6</sup>. Cela nous permet en particulier de composer les cartes de support via les opérations usuelles sur l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$ . Ainsi, nous considérons les trois opérations suivantes :

1. **La somme simple** : Considérons  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , deux hypersurfaces orientées dont la courbure de Gauss n'est jamais nulle. De plus, nous supposons que les cartes de support  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , qui leur sont respectivement associées, vérifient la condition suivante :

$$\sigma_2 = \lambda \sigma_1 \quad (5.5.0.1)$$

où  $\lambda$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Alors, en remarquant que l'application  $\sigma_1 + \sigma_2$  vérifie les conditions de la propriété 5.4.7 page 131, nous appelons **somme de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$**  l'enveloppe paramétrée de la famille d'horosphères définie par l'application  $\sigma_1 + \sigma_2$ . Nous pouvons alors faire une première remarque sur cette opération en constatant qu'elle ne dépend pas du choix d'un point de référence sur  $\mathbb{H}^n$ . Ajoutons que si  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont deux h-hérissos dont les fonctions de support centrées en  $e$  sont  $h_1$  et  $h_2$ , alors la somme  $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$  est un h-hérisson dont la fonction de support est :

$$h_1 * h_2 = \ln(e^{h_1} + e^{h_2}) \quad (5.5.0.2)$$

Il est également possible de compléter cette opération par le produit  $k \cdot \mathcal{H}$ , pour  $k > 0$ , correspondant à l'enveloppe paramétrée de la famille d'horosphères définie par l'application  $k\sigma$ . De même, on peut vérifier qu'une telle enveloppe est un h-hérisson dont la fonction de support est  $k \cdot h = \ln(ke^h) = \ln(k) + h$ .

2. **La somme harmonique** : Si  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont deux hypersurfaces orientées dont la courbure de Gauss n'est jamais nulle, alors nous supposons de nouveau que leurs cartes de support  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  vérifient la condition (5.5.0.1). Nous définissons ainsi l'application :

$$\sigma_1 \# \sigma_2 = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \sigma_1 \quad (5.5.0.3)$$

Et en constatant que la fonction  $\sigma_1 \# \sigma_2$  vérifie également les conditions de la propriété 5.4.7, nous appelons **somme harmonique de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$**  l'enveloppe paramétrée de la famille d'horosphères définie par l'application  $\sigma_1 \# \sigma_2$ . Nous noterons naturellement  $\Sigma_1 \# \Sigma_2$  cette somme. Cette opération a aussi pour caractéristique de ne pas dépendre du choix d'un point de référence sur l'espace hyperbolique. De plus, elle a pour propriété (voir propriété 6 de [34]) que la somme harmonique du bord de deux corps h-convexes correspond toujours au bord d'un corps h-convexe.

3. **La somme centrée en  $e$**  : Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, ainsi que  $\mathcal{N}_e$  le référentiel centré en  $e$ . Considérons  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ , deux h-hérissos, ainsi que  $h_1$  et  $h_2$ , leurs fonctions de support centrées en  $e$ . Alors nous savons que leurs cartes de support  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  centrées en  $e$  sont définies comme suit :

$$\sigma_1 = \lambda_1 \mathcal{N}_e \text{ et } \sigma_2 = \lambda_2 \mathcal{N}_e \text{ avec } \lambda_1 = e^{h_1} \text{ et } \lambda_2 = e^{h_2}$$

Ainsi, nous considérons l'application  $\sigma_1 +_e \sigma_2 = \lambda_1 \lambda_2 \mathcal{N}_e$  et en remarquant qu'elle vérifie la condition de la propriété 5.4.7, nous appelons donc **somme centrée en  $e$** , que l'on

---

6. On appelle hypersurface réglé dans  $\mathbb{R}^n$ , toute hypersurface  $\Sigma$  pour laquelle, en chaque point  $x \in \Sigma$ , passe une droite  $\delta \subset \Sigma$ .

note  $\mathcal{H}_1 +_e \mathcal{H}_2$ , l'enveloppe paramétrée de la famille d'horosphères définie par l'application  $\sigma_1 +_e \sigma_2$ . Nous pouvons également compléter cette opération par le produit  $k \cdot \mathcal{H}$ , qui correspond à l'enveloppe paramétrée de la famille d'horosphères définie par l'application  $k \cdot \sigma = \lambda^k \mathcal{N}_e$ .

S'il est clair que ces deux opérations ne sont pas indépendantes du choix du point de référence, leur intérêt réside dans le fait que si  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont deux h-hérissos de fonctions de support  $h_1$  et  $h_2$ , alors  $\mathcal{H}_1 +_e k \cdot \mathcal{H}_2$  est un h-hérisson dont la fonction de support est  $h_1 + kh_2$ . En particulier, via cette opération, nous pouvons considérer que tout h-hérisson correspond à une différence de deux corps h-convexes.



## Chapitre 6

# Universalité de la notion de g-hérisson

Dans ce chapitre, nous montrons que la notion de g-hérisson sur l'espace hyperbolique est universelle au sens où elle ne dépend pas du choix du point de référence. Ce résultat est notamment intéressant du fait que, comme nous l'avons vu, il est possible de produire des exemples de familles de g-hyperplans co-orientés qui dépendent du choix du point de référence (voir propriété 4.3.5 page 94). Nous devons donc montrer que si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  est un g-hérisson centré en  $e$  alors c'est aussi un g-hérisson centré en n'importe quel point  $v_0$ . Pour cela, il nous faudra vérifier que si une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  admet une enveloppe, alors elle est co-orientable<sup>1</sup> en n'importe quel point.

### 6.1 Les sous-espaces hyperboliques et la fonction de changement de point

Dans cette section, nous introduisons les définitions qui nous seront nécessaires et vérifions une série de propriétés qui nous permettront de nous restreindre au plan hyperbolique dans nos futures démonstrations.

#### 6.1.1 Définition et propriétés des sous-espaces hyperboliques

Pour commencer, il nous sera utile de rappeler qu'une  $p$ -sous-variété  $N \subset M$ , sur une variété de Riemann, est dite **totale**ment géodésique lorsque toute géodésique  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  tangente à  $N$  est comprise dans  $N$ . On appelle alors **p-sous-espace hyperbolique** toute sous-variété de dimension  $p$  sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  qui est totalement géodésique.

**Remarque 6.1.1.** *Tout  $p$ -sous-espace hyperbolique  $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$  est l'intersection du demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$  avec un  $(p+1)$ -sous-espace vectoriel de type temps. En particulier, il est immédiat que tout  $p$ -sous-espace hyperbolique est un espace hyperbolique de dimension  $p$ .*

Par conséquent, si  $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$  est un  $p$ -sous-espace hyperbolique, on sait que  $\Sigma$  est de la forme  $L \cap \mathbb{H}^n$ , où  $L \subset \mathbb{L}^{n+1}$  est un  $(p+1)$ -sous-espace de type temps. Considérons donc un point de

---

1. Voir la définition 4.3.9 page 94 pour un rappel de la définition de famille de g-hyperplans co-orientables.

référence  $e \in \Sigma$ . Alors il est clair qu'en considérant le  $p$ -sous-espace vectoriel  $H = L \cap T_e \mathbb{H}^n$  on a que :

$$\Sigma = \varphi_e(H \cap \mathcal{D}(e)) = \left\{ x = \vec{v} + te \text{ tel que } \vec{v} \in H \text{ et } \|\vec{v}\|^2 - t^2 = -1 \right\} \quad (6.1.1.1)$$

Ainsi, pour  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence et  $H \subset T_e \mathbb{H}^n$  un  $p$ -sous-espace vectoriel, il est justifié de considérer le  $p$ -sous-espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n \cap (H \oplus \mathbb{R}e)$ , que l'on notera  $\mathbb{H}_H$ . De plus, pour  $v_0 \in \mathbb{H}_H$  un second point de référence, alors en considérant  $\mathbb{H}_H$  vu comme étant l'espace hyperbolique sur l'espace de Lorentz  $H \oplus \mathbb{R}e$ , on définit :

- La partie  $\mathcal{D}_{\mathbb{H}_H}(v_0) = \mathcal{D}(v_0) \cap (H \oplus \mathbb{R}e)$  qui correspond à la boule unité centrée en  $v_0$ .
- La partie  $\mathbb{S}_{v_0}^{p-1}[\mathbb{H}_H] = \mathbb{S}_{v_0}^{n-1} \cap (H \oplus \mathbb{R}e)$  qui correspond à l'hypersphère centrée en  $v_0$ .

### 6.1.2 Définition et propriétés de la fonction de changement de point

Considérons  $e$  et  $v_0$  deux points sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ . Alors, on appellera **fonction de changement de carte** l'application  $f := \psi_{v_0} \circ \varphi_e : \mathcal{D}(e) \mapsto \mathcal{D}(v_0)$ , où  $\psi_{v_0}$  et  $\varphi_e$  correspondent respectivement à la projection de Klein centrée en  $v_0$  et à la réciproque de la projection de Klein centrée en  $e$ . On appelle également **fonction de changement de point**<sup>2</sup> l'application linéaire  $\mathcal{F} : T_e \mathbb{H}^n \mapsto T_{v_0} \mathbb{H}^n$  définie via l'expression suivante :

$$\mathcal{F}(\vec{W}) = \vec{W} + \kappa(\vec{W})e \quad (6.1.2.2)$$

avec  $\kappa(\vec{W}) = -\frac{\langle v_0 | \vec{W} \rangle}{\langle v_0 | e \rangle} = k \langle v_0 | \vec{W} \rangle$  et  $k = -\frac{1}{\langle v_0 | e \rangle}$ .

**Notation 6.1.1.** Nous prendrons l'habitude, dans la suite de ce chapitre, d'introduire dans nos expressions le paramètre  $k$  que nous définissons ci-dessous :

$$k = -\frac{1}{\langle v_0 | e \rangle} \quad (6.1.2.3)$$

par rapport aux deux points de référence  $e$  et  $v_0$ .

**Propriété 6.1.1.** Considérons  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence. Alors, pour tout  $p$ -sous-espace vectoriel  $H \subset T_e \mathbb{H}^n$  et point  $v_0 \in \mathbb{H}_H$ , on a que :

$$f(H \cap \mathcal{D}(e)) = \mathcal{F}(H) \cap \mathcal{D}(v_0) \quad (6.1.2.4)$$

**Note.** Il est important de constater que  $v_0$ , le second point de référence, n'est pas pris n'importe où sur l'espace hyperbolique.

*Démonstration.* En effet, par la propriété 5.1.6 de l'annexe E, on a que  $f(\mathbb{R}\vec{v} \cap \mathcal{D}(e)) = \mathcal{F}(\mathbb{R}\vec{v}) \cap \mathcal{D}(v_0)$ , ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

**Remarque 6.1.2.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, alors la conséquence immédiate de la propriété précédente est que pour tout sous-espace vectoriel  $H \subset T_e \mathbb{H}^n$  et point  $v_0 \in \mathbb{H}_H$  on a que :  $T_{v_0} \mathbb{H}_H = \mathcal{F}(H) \cap T_{v_0} \mathbb{H}^n$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbb{H}_H}(v_0) = \mathcal{F}(H) \cap \mathcal{D}(v_0)$  et  $\mathbb{S}_{v_0}^{p-1}[\mathbb{H}_H] = \mathcal{F}(H) \cap \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ .

2. Voir définition 5.1.2 page 305 de l'annexe E pour en savoir plus. Il est à noter que la définition que nous considérons dans ce chapitre correspond à un cas particulier (où  $w = 0$ ) de la fonction de changement de point. En particulier, nous considérerons la définition de la fonction de changement de point dans son sens large au cours de la démonstration de la propriété 6.2.1.

**Propriété 6.1.2.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence ainsi qu'un  $p$ -sous-espace vectoriel  $H \subset T_e \mathbb{H}^n$  et  $v_0 \in \mathbb{H}_H$  un second point de référence. Si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  et de fonction de support  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ , alors la famille  $(\mathbb{H}_H \cap \Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}[\mathbb{H}_H]}$  est une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  définie sur le sous-espace hyperbolique  $\mathbb{H}_H$  et dont la fonction de support  $h_H : \mathbb{S}_e^{n-1}[\mathbb{H}_H] \mapsto \mathbb{R}$  correspond à la restriction de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{S}_e^{n-1}[\mathbb{H}_H]$ .

*Démonstration.* Cela vient du fait que si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  alors la famille  $(\psi_e(\Sigma_u))_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est co-orientée. Mais alors il en sera immédiatement de même pour la famille  $(H \cap \psi_e(\Sigma_u))_{u \in H \cap \mathbb{S}_e^{n-1}}$ .  $\square$

## 6.2 La fonction de réindexation

Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  un  $g$ -hérisson centré en  $e$  ainsi que  $v_0$  un second point de référence. Par définition, nous savons que le  $g$ -hérisson  $\mathcal{H}$  correspond à l'enveloppe paramétrée d'une famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ . La condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{H}$  soit un  $g$ -hérisson centré en  $v_0$  est que nous puissions reparamétriser la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  par rapport au point  $v_0$  afin d'obtenir une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $v_0$ . Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante est que la famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  soit co-orientable au point  $v_0$  au sens de la définition 4.3.9 page 94.

### 6.2.1 Définition et propriété d'existence

Considérons  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ . Si  $v_0 \in \mathbb{H}^n$  est un second point de référence, alors pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , nous devons définir un vecteur  $\phi(u) \in \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  tel que la géodésique passant par le point  $v_0$  à la vitesse  $\phi(u)$  soit orthogonale au  $g$ -hyperplan  $\Sigma_u$ .

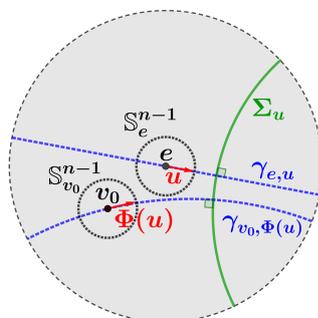


FIGURE 6.1 – La fonction de réindexation

Nous définissons ainsi une application  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ , que nous appelons fonction de réindexation, et dont nous devons vérifier si c'est un difféomorphisme lorsque la famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  admet une enveloppe. Il est à noter que cela n'est pas vrai pour n'importe quelle famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ . En effet, nous savons, par le biais de la propriété 4.3.5 page 94, que pour tout point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ , il existe une famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  ainsi qu'un second point  $v_0 \in \mathbb{H}^n$  pour lesquels la fonction de réindexation (dont l'existence est garantie par la propriété 6.2.1 ci-dessus) n'est pas un difféomorphisme car elle n'est pas injective.

**Définition 6.2.1.** *Considérons  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  ainsi que  $v_0$  un second point de référence. Nous appelons **fonction de réindexation entre les points  $e$  et  $v_0$**  toute application lisse  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  telle que pour tout vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , la géodésique passant par le point  $v_0$  à la vitesse  $\phi(u)$  est orthogonale au  $g$ -hyperplan  $\Sigma_u$ .*

**Propriété 6.2.1.** *Considérons  $e$  et  $v_0$ , sur  $\mathbb{H}^n$ , deux points de référence ainsi que  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ . Il existe alors une unique fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  telle que pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , l'orientation du  $g$ -hyperplan  $\Sigma_u$  corresponde au vecteur  $\phi(u)$ . De plus, si  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  est la fonction de support, centrée en  $e$ , de la famille de  $g$ -hyperplans, alors nous avons que :*

$$\phi := \mathcal{N} \circ \pi_{v_0} \circ \phi_0, \quad (6.2.1.1)$$

avec  $\pi_{v_0}$  étant la projection orthogonale le long de la droite  $\mathbb{R}v_0$ ,  $\mathcal{N}$  la fonction de normalisation des vecteurs non nuls de type espace et  $\phi_0 : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{L}^{n+1}$  la fonction lisse définie via l'expression ci-dessous :

$$\phi_0(u) = u + l(u)e, \quad (6.2.1.2)$$

où  $l = TH(h)$ .

**Note.** À présent, pour une famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  et  $v_0$  un second point de référence, alors dans toute la suite, la fonction de réindexation que nous considérerons sera toujours définie via la relation (6.2.1.1).

*Démonstration.* Commençons par vérifier l'unicité (au signe près). Si  $\phi$  et  $\phi'$  sont deux fonctions de réindexation d'une famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  et relativement à un second point de référence  $v_0$ , alors on considère l'application  $\varepsilon : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  définie via l'expression suivante :

$$\varepsilon(u) = \langle \phi(u) | \phi'(u) \rangle$$

Or, par définition, nous avons que  $\phi(u) \sim \phi'(u)$  et donc  $\varepsilon(u) \in \{-1; +1\}$ . Aussi, par continuité de l'application  $\varepsilon$  et par connexité de l'hypersphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ , on a forcément que l'application  $\varepsilon$  est constante. Il s'ensuit que si les  $\bar{\beta}_u$  correspondent aux orientations des  $g$ -hyperplans  $\Sigma_u$ , alors l'une des deux fonctions de réindexation vérifie forcément que pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , la base complétée<sup>3</sup>  $(\beta_u^{x(u)}, \partial \gamma_u(t_u))$  est dans le même sens que la base canonique de l'espace  $\mathbb{L}^{n+1}$ .

Considérons donc  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ . Alors on sait que, via la propriété 4.4.3 page 100, la famille  $(\psi_e(\Sigma_u))_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  vérifie l'expression suivante :

$$\psi_e(\Sigma_u) = (l(u)u + \langle u \rangle^\perp) \cap \mathcal{D}(e)$$

avec  $l(u) = TH h(u)$ .

---

3. Pour ne pas surcharger notre démonstration, nous faisons le choix d'introduire ici la définition des éléments  $\beta_u^{x(u)}$  et  $\partial_t \gamma_u(t_u)$ . En effet, pour  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on considère  $\gamma_u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{H}^n$  la géodésique qui passe par le point  $v_0$  à la vitesse  $\phi(u)$  et à l'instant  $t = 0$ . Ensuite, on considère le point  $x(u)$  correspondant à l'unique point de l'intersection du  $g$ -hyperplan  $\Sigma_u$  avec la géodésique  $\gamma_u$  ainsi que  $t_u$  étant l'instant tel que  $x(u) = \gamma_u(t_u)$ . Enfin, on définit  $\beta_u^{x(u)}$  comme étant une base de l'espace tangent  $T_{x(u)}\mathbb{H}^n$ , qui correspond à l'orientation  $\bar{\beta}_u$ .

Ensuite, considérons l'application du changement de carte  $f := \psi_{v_0} \circ \varphi_e : \mathcal{D}(e) \mapsto \mathcal{D}(v_0)$  ainsi que l'application de changement de point  $\mathcal{F}_w : T_e \mathbb{H}^n \mapsto T_{v_0} \mathbb{H}^n$  (voir définition 5.1.2 page 305 de l'annexe E), telle que :

$$\mathcal{F}_w(\vec{v}) = \vec{v} + \kappa_w(\vec{v})[e + w], \text{ avec } \kappa_w(\vec{v}) = -\frac{\langle v_0 | \vec{v} \rangle}{\langle v_0 | e + w \rangle}$$

On peut alors vérifier (voir la propriété 5.1.6 page 305 de l'annexe E) que la famille de  $g$ -hyperplan est définie, dans le modèle de Klein centré en  $v_0$ , via la relation ci-dessous :

$$\psi_{v_0}(\Sigma_u) = (f(l(u)u) + \mathcal{F}_{l(u)u} \cdot T_u \mathbb{S}_e^{n-1}) \cap \mathcal{D}(v_0)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

À présent, afin de ne pas inutilement alourdir notre démonstration par des notations redondantes, nous noterons par  $T_u$  l'hyperplan  $\mathcal{F}_{l(u)u} \cdot T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Il est alors important de remarquer que le vecteur  $f(l(u)u)$  n'est pas forcément orthogonal à l'hyperplan vectoriel  $T_u$  sur l'espace euclidien  $(T_{v_0} \mathbb{H}^n, g_{v_0})$ . Nous devons donc, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , définir un vecteur  $\phi(u) \in \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  qui est orthogonal à l'hyperplan vectoriel  $T_u$  pour le produit scalaire usuel. Considérons donc  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , alors pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit le vecteur :

$$\vec{v}_0 = u + \lambda(e + w)$$

avec  $w = l(u)u$ .

Remarquons donc que dans l'hypothèse où le vecteur  $\vec{v}_0$  est orthogonal à l'hyperplan  $T_u$ , alors on a forcément que le scalaire  $\lambda$  vérifie la condition ci-dessous :

$$l(u)\kappa_w(\vec{v}) + \lambda\kappa_w(\vec{v})(l(u)^2 - 1) = 0 \quad (6.2.1.3)$$

pour tout vecteur  $\vec{v} \in T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que  $\kappa_w(\vec{v}) \neq 0$ . Par conséquent, nous pouvons déduire de la condition (6.2.1.3) que le vecteur  $\vec{v}_0$  est orthogonal à l'hyperplan  $T_u$  si et seulement si le scalaire  $\lambda$  est défini via l'expression ci-dessous :

$$\lambda = \frac{l(u)}{1 - l(u)^2}$$

et donc,

$$\vec{v}_0 = u + \frac{l(u)}{1 - l(u)^2}(l(u)u + e) = \frac{1}{1 - l(u)^2}(u + l(u)e)$$

Pour conclure, si pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on considère le vecteur  $\phi_0(u) = u + l(u)e \in \mathbb{L}^{n+1}$ , alors, par ce qui précède, il est évident que  $\phi_0(u)$  est orthogonal à l'hyperplan  $T_u$ . Aussi, comme le vecteur  $\phi_0(u)$  est clairement de type espace, alors, en considérant  $\pi_{v_0}$  la projection orthogonale le long de la droite  $\mathbb{R}v_0$  (qui est de type temps), il est immédiat que le vecteur  $\pi_{v_0} \circ \phi_0(u)$  est non nul. Ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque 6.2.1.** *Il est intéressant de constater que pour toute famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en un point  $e \in \mathbb{H}^n$  et dont la fonction de support est non nulle, il existe forcément un second point de référence  $v_0 \in \mathbb{H}^n$  pour lequel la fonction de réindexation vérifie que :*

$$\langle u_0 | \phi(u_0) \rangle = 0 \quad (6.2.1.4)$$

pour un certain  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . En effet, pour vérifier cela, il suffit de se placer sur le modèle de Poincaré centré en  $e$ . Ainsi, si pour  $u_1 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on a que  $h(u_1)$  est non nul, alors en choisissant  $v_0$  suffisamment proche de l'intersection du bord à l'infini  $\partial\mathcal{D}(e)$  avec la fermeture du  $g$ -hyperplan  $\overline{\Sigma_{u_1}}$  (vue sur l'espace euclidien  $(T_e\mathbb{H}^n, g_e)$ ), on obtient que le produit scalaire  $\langle u_1 | \phi(u_1) \rangle$  est strictement négatif. Mais aussi, en considérant un second vecteur  $u_2 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que la droite  $\mathbb{R}u_2$  contient les points  $e$  et  $v_0$ , alors il est clair que  $\phi(u_2) = u_2$  et en particulier le produit  $\langle u_2 | \phi(u_2) \rangle$  est strictement positif.

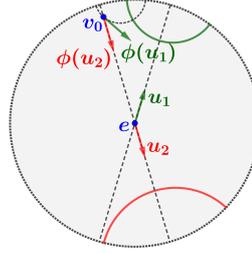


FIGURE 6.2 – Non constance du signe du produit  $\langle u | \phi(u) \rangle$

L'intérêt de cette dernière remarque consiste à évacuer l'idée d'utiliser le fait que le produit  $\langle u | \phi(u) \rangle$  est non nul et donc de signe constant pour conclure que la fonction de réindexation est injective car de degré 1. En effet, pour vérifier que la fonction de réindexation, correspondant à une famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  qui admet une enveloppe, est un difféomorphisme, on montre d'abord (voir démonstration théorème 6.4.1) que lorsque la fonction de support  $h$  vérifie la condition d'existence (4.4.1.2), alors la fonction de réindexation est forcément un difféomorphisme local pour tout  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Mais par la remarque 6.2.1 précédente, il nous est alors nécessaire de déterminer les conditions d'injectivité de la fonction de réindexation (voir lemme 6.3.1).

## 6.2.2 Propriétés préliminaires de la restriction sur le plan hyperbolique et les relations antipodales

Dans cette section, nous présentons trois lemmes qui nous seront nécessaires à la démonstration du lemme d'injectivité de la fonction de réindexation (voir section 6.3 suivante).

**Lemme 6.2.1.** *Considérons  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ . Si  $H \subset T_e\mathbb{H}^n$  est un plan vectoriel et  $v_0 \in \mathbb{H}_H$  un second point de référence, alors la fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  vérifie que :*

$$\phi(H \cap \mathbb{S}_e^{n-1}) \subset \mathcal{F}(H) \cap \mathbb{S}_{v_0}^{n-1} \quad (6.2.2.5)$$

*De plus, en considérant la famille de  $g$ -hyperplans  $(\mathbb{H}_H \cap \Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^1[\mathbb{H}_H]}$  qui est co-orientée en  $e$ , alors la fonction de réindexation  $\phi_H : \mathbb{S}_e^1[\mathbb{H}_H] \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^1[\mathbb{H}_H]$  correspond à la restriction de  $\phi$  sur  $\mathbb{S}_{v_0}^1[\mathbb{H}_H]$ .*

*Démonstration.* Considérons donc un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$  ainsi qu'un plan  $H \subset T_e\mathbb{H}^n$  et  $v_0 \in \mathbb{H}_H$  un second point de référence sur le 2-sous-espace hyperbolique défini par  $H$ . Rappelons aussi (voir section 5.1.2 page 302 de l'annexe E pour plus de détails) que la projection de Klein centrée en  $e$  est définie via l'expression suivante :

$$\psi_e(v) = k_e(v)v - e$$

$$\text{où } k_e(v) = -\frac{1}{\langle e|v \rangle}.$$

À présent, considérons, sur la boule ouverte  $\mathcal{D}(e)$ , le point  $w_0 = \psi_e(v_0) = kv_0 - e$ , où  $k$  est le coefficient défini par l'expression (6.1.2.3). Nous définissons alors le vecteur :

$$u_0 = \lambda w_0$$

où  $\lambda = \frac{1}{\|w_0\|}$ . Il est alors clair que le vecteur  $u_0$ , ainsi défini, est compris dans le plan  $H$ . De plus, nous pouvons vérifier que :

1. Si  $\mathcal{F} : T_e\mathbb{H}^n \mapsto T_{v_0}\mathbb{H}^n$  et  $\mathcal{G} : T_{v_0}\mathbb{H}^n \mapsto T_e\mathbb{H}^n$  sont les fonctions de changement de point (définies via l'expression (6.1.2.2)) correspondant respectivement aux applications de changement de carte  $f := \psi_{v_0} \circ \varphi_e$  et  $g := \psi_e \circ \varphi_{v_0}$ , alors on a que  $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(H) = H$ .
2. Si  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  est la fonction de réindexation définie par l'expression (6.2.1.1), alors l'image  $\phi(H \cap \mathbb{S}_e^{n-1})$  est contenue dans un plan vectoriel.

En effet, pour le premier point, en considérant l'expression des fonctions de changement de point  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ , on obtient la relation suivante :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(\vec{W}) = \vec{W} - k \langle v_0 | \vec{W} \rangle w_0$$

et, par définition du point  $v_0$ , il est clair que  $w_0 \in H$ . Par conséquent, on obtient que  $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(H) \subset H$ . Les applications  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  étant des isomorphismes, on en déduit le résultat recherché.

Pour le second point, il nous faut constater que pour tout vecteur  $\vec{W}$  orthogonal au plan vectoriel  $H$ , l'application  $\phi_0$  étant définie via l'expression (6.2.1.2), on a que  $\vec{W} \perp \phi_0(u)$ , pour tout  $u \in H \cap \mathbb{S}_e^{n-1}$ . On sait donc que  $Im(\phi_0) \subset H \oplus \mathbb{R}e$  et en particulier  $Im(\phi) \subset \pi_{v_0}(H \oplus \mathbb{R}e)$ .

Pour terminer cette démonstration, considérons  $u_1 \in H \cap \mathbb{S}_e^{n-1}$ , un vecteur orthogonal à  $u_0$ . Il est immédiat que la famille  $(u_0, u_1)$  correspond à une base orthonormale du plan vectoriel  $H$ . Ainsi, par ce qui précède, il nous suffit de vérifier que la famille formée par les vecteurs  $\mathcal{G}(\pi_{v_0} \circ \phi_0(u_0))$  et  $\mathcal{G}(\pi_{v_0} \circ \phi_0(u_1))$  correspond à une base de  $H$ . Pour cela, nous devons déterminer les expressions de ces deux vecteurs.

Considérons donc  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  la fonction de support centrée en  $e$  de la famille de  $g$ -hyperplans, ainsi que la fonction  $l = TH(h)$ . En notant  $l_0 = l(u_0)$ , on a que  $\phi_0(u_0) = u_0 + l_0e = \lambda kv_0 + (l_0 - \lambda)e$  et donc  $\langle v_0 | \phi_0(u_0) \rangle = -\Gamma$ , avec  $\Gamma = \lambda k + \frac{l_0 \lambda}{k}$ . Ainsi, on obtient que :

$$\begin{aligned} \pi_{v_0} \circ \phi_0(u_0) &= \phi_0(u_0) + \langle \phi_0(u_0) | v_0 \rangle v_0 = u_0 + l_0e - \Gamma \frac{w_0 + e}{k} \\ &= u_0 + l_0e - \frac{\Gamma}{k\lambda}(u_0 + \lambda e) = \left(1 - \frac{\Gamma}{k\lambda}\right)u_0 + \left(l_0 - \frac{\Gamma}{k}\right)e \end{aligned}$$

ce qui nous donne  $\pi_{v_0} \circ \phi_0(u_0) = \alpha u_0 + \beta e$ . Ensuite, on a que :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\pi_{v_0} \circ \phi_0(u_0)) &= \pi_{v_0} \circ \phi_0(u_0) + k \langle e | \pi_{v_0} \circ \phi_0(u_0) \rangle v_0 = \alpha u_0 + \beta e - k\beta v_0 \\ &= \alpha u_0 + \beta e - k\beta \frac{w_0 + e}{k} = \left(\alpha - \frac{\beta}{\lambda}\right)u_0 \end{aligned}$$

et donc  $\mathcal{G}(\pi_{v_0} \circ \phi_0(u_0)) \sim u_0$ .

Pour le second vecteur, considérons  $\phi_0(u_1) = u_1 + l_1 e$ , avec  $l_1 = l(u_1)$ . Ainsi, on a que  $\langle v_0 | \phi_0(u_1) \rangle = -\frac{l_1}{k}$  et, par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_{v_0} \circ \phi_0(u_1) &= \phi_0(u_1) + \langle \phi_0(u_1) | v_0 \rangle v_0 = u_1 + l_1 e - \frac{l_1}{\lambda k^2} (u_0 + \lambda e) \\ &= -\frac{l_1}{\lambda k^2} u_0 + u_1 + l_1 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) e = \alpha u_0 + u_1 + l_1 \beta e \end{aligned}$$

Cela nous donne finalement que  $\mathcal{G}(\pi_{v_0} \circ \phi_0(u_1)) = \left(\alpha - \frac{l_1 \beta}{\lambda}\right) u_0 + u_1$  et, ainsi, on obtient le résultat recherché.  $\square$

Nous terminons cette section en vérifiant deux lemmes qui traitent de la relation entre les vecteurs antipodaux sur l'hypersphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  et les vecteurs antipodaux sur l'hypersphère  $\mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  via la fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ . Considérons donc  $e$  et  $v_0$  deux points de référence sur l'espace hyperbolique. Alors, nous définissons le vecteur :

$$u_0 = \lambda w_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1} \tag{6.2.2.6}$$

avec  $w_0 = \psi_e(v_0)$  et  $\lambda > 0$ . De plus, pour tout vecteur  $u_1 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  orthogonal au vecteur  $u_0$ , il est nécessaire d'introduire les deux définitions suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_+[u_1] = \left\{ \vec{W} \in \mathbb{R}u_0 \oplus \mathbb{R}u_1 \text{ tel que } \langle u_1 | \vec{W} \rangle \geq 0 \right\} \\ \mathcal{K}_-[u_1] = \left\{ \vec{W} \in \mathbb{R}u_0 \oplus \mathbb{R}u_1 \text{ tel que } \langle u_1 | \vec{W} \rangle \leq 0 \right\} \end{cases} \tag{6.2.2.7}$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{L}_+[\mathcal{F}(u_1)] = \left\{ \vec{V} \in \mathbb{R}\mathcal{F}(u_0) \oplus \mathbb{R}\mathcal{F}(u_1) \text{ tel que } \langle \mathcal{F}(u_1) | \vec{V} \rangle \geq 0 \right\} \\ \mathcal{L}_-[\mathcal{F}(u_1)] = \left\{ \vec{V} \in \mathbb{R}\mathcal{F}(u_0) \oplus \mathbb{R}\mathcal{F}(u_1) \text{ tel que } \langle \mathcal{F}(u_1) | \vec{V} \rangle \leq 0 \right\} \end{cases} \tag{6.2.2.8}$$

avec  $\mathcal{F} : T_e \mathbb{H}^n \mapsto T_{v_0} \mathbb{H}^n$  étant l'application linéaire de changement de point de référence définie via l'expression (6.1.2.2).

**Lemme 6.2.2.** *Considérons  $e$  et  $v_0$  deux points de référence ainsi que  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ . Alors, si le vecteur  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  est défini via l'expression (6.2.2.6) et  $u_1 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  est orthogonal à  $u_0$ , on a :*

1.  $f\left(\overset{\circ}{\mathcal{K}}_+[u_1] \cap \mathcal{D}(e)\right) \subset \overset{\circ}{\mathcal{L}}_+[\mathcal{F}(u_1)] \cap \mathcal{D}(v_0)$  et  $f\left(\overset{\circ}{\mathcal{K}}_-[u_1] \cap \mathcal{D}(e)\right) \subset \overset{\circ}{\mathcal{L}}_-[\mathcal{F}(u_1)] \cap \mathcal{D}(v_0)$ .
2.  $\phi\left(\overset{\circ}{\mathcal{K}}_+[u_1] \cap \mathbb{S}_e^{n-1}\right) \subset \overset{\circ}{\mathcal{L}}_+[\mathcal{F}(u_1)] \cap \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  et  $\phi\left(\overset{\circ}{\mathcal{K}}_-[u_1] \cap \mathbb{S}_e^{n-1}\right) \subset \overset{\circ}{\mathcal{L}}_-[\mathcal{F}(u_1)] \cap \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ .
3. Les vecteurs  $\phi(u_0)$  et  $\phi(-u_0)$  sont contenus sur la droite  $\mathbb{R}\mathcal{F}(u_0)$  et sont, en particulier, des vecteurs antipodaux.

*Démonstration.* Considérons donc deux points de référence  $e \in \mathbb{H}^n$  et  $v_0 \in \mathbb{H}^n$  ainsi que la fonction de changement de carte  $f := \psi_{v_0} \circ \varphi_e : \mathcal{D}(e) \mapsto \mathcal{D}(v_0)$  et la fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ .

Choisissons un vecteur  $u_1 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  orthogonale à  $u_0$ . Via le lemme 6.2.1, que nous avons vu précédemment, nous savons que nous pouvons nous restreindre au 2-plan  $\mathbb{R}u_0 \oplus \mathbb{R}u_1$ . Ainsi, sans perte de généralité, nous travaillerons sur le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  en considérant la fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^1 \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^1$  ainsi que la fonction de changement de point  $f$ . Nous considérons alors les vecteurs  $u_0$  et  $u_1$  vérifiant les conditions du lemme ainsi que les demi-espaces :

$$\mathcal{K}_+ = \left\{ \vec{W} \in T_e \mathbb{H}^2 \text{ tel que } \langle u_1 | \vec{W} \rangle \geq 0 \right\} \text{ et } \mathcal{K}_- = \left\{ \vec{W} \in T_e \mathbb{H}^2 \text{ tel que } \langle u_1 | \vec{W} \rangle \leq 0 \right\}$$

et que nous représentons ci-dessous :

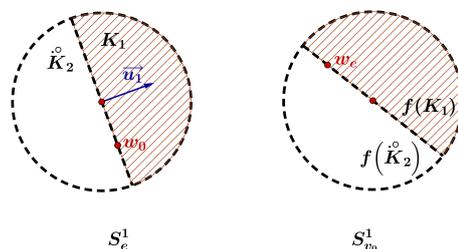


FIGURE 6.3 – Représentation des demi-disques

En remarquant que  $\mathcal{F}(u_1) = u_1$ , avec  $\mathcal{F} : T_e \mathbb{H}^2 \mapsto T_{v_0} \mathbb{H}^2$  la fonction de changement de point (voir expression (6.1.2.2)), alors les demi-espaces  $\mathcal{L}_+[\mathcal{F}(u_1)]$  et  $\mathcal{L}_-[\mathcal{F}(u_1)]$  admettent pour expression :

$$\mathcal{L}_+ = \left\{ \vec{V} \in T_{v_0} \mathbb{H}^2 \text{ tel que } \langle u_1 | \vec{V} \rangle \geq 0 \right\} \text{ et } \mathcal{L}_- = \left\{ \vec{V} \in T_{v_0} \mathbb{H}^2 \text{ tel que } \langle u_1 | \vec{V} \rangle \leq 0 \right\}$$

et, après un petit calcul, nous obtenons :

$$\langle u_1 | f(w) \rangle = -\frac{1}{\langle v_0 | e + w \rangle} \langle u_1 | w \rangle \text{ et } \langle u_1 | \phi(u) \rangle = \langle u_1 | u \rangle$$

ce qui nous donne les deux premiers points.

Pour le troisième point, nous commençons par considérer  $w_e = \psi_{v_0}(e) = ke - v_0 \in \mathcal{D}(v_0)$  ainsi que le scalaire  $\lambda = \pm \frac{1}{\|w_0\|}$ . Il nous faut alors montrer que  $\phi(\lambda w_0) = \mu w_e$ . Ainsi, pour chaque scalaire  $\lambda$ , considérons la longueur  $l_\lambda \in ]-1; 1[$  telle que :

$$\phi_0(\lambda w_0) = \lambda w_0 + l_\lambda e$$

Par conséquent, nous devons déterminer le vecteur  $\pi_{v_0} \circ \phi_0(\lambda w_0)$ , qui correspond à la projection orthogonale du vecteur  $\phi_0(\lambda w_0)$  le long de la droite  $\mathbb{R}v_0$ . Pour ce faire, nous considérons le produit  $\langle \phi_0(\lambda w_0) | v_0 \rangle = -\lambda k - \frac{l_\lambda - \lambda}{k}$ , ce qui nous donne :

$$\pi_{v_0} \circ \phi_0(\lambda w_0) = \frac{l_\lambda - \lambda}{k} (ke - v_0) \quad (6.2.2.9)$$

Ainsi, deux cas sont possibles en fonction de  $\lambda$ . En effet, en remarquant que  $|\lambda| > 1$ , alors par (6.2.2.9), il est immédiat que : Si  $\lambda > 0$ , alors  $\mu < 0$  et si  $\lambda < 0$ , alors  $\mu > 0$ . Ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque 6.2.2.** Une conséquence immédiate du lemme précédent est que  $\phi(-u) \neq \phi(u)$ , pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

**Lemme 6.2.3.** Considérons  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ , ainsi que  $v_0$ , un second point de référence, et  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  la fonction de réindexation entre les points  $e$  et  $v_0$ . Alors, pour tout vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , le produit  $\langle \mathcal{F}(u) | \phi(u) \rangle$  est strictement positif.

*Démonstration.* Rappelons que, comme nous l'avons vu à la propriété 6.2.1, la fonction de réindexation admet pour expression  $\phi := \mathcal{N} \circ \pi_{v_0} \circ \phi_0 : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ , où  $\phi_0$  vérifie l'expression (6.2.1). Pour éviter des notations redondantes, nous adopterons les notations suivantes :

$$l = l(u), \lambda = \langle v_0 | u \rangle, \nu = \phi(u) \text{ et } \nu_0 = \pi_{v_0} \circ \phi_0(u)$$

Par conséquent, si  $\mathcal{F} : T_e \mathbb{H}^2 \mapsto T_{v_0} \mathbb{H}^2$  est la fonction du changement de point, elle admet comme expression  $\mathcal{F}(u) = u + k\lambda e$ . Il est donc immédiat que  $\langle \mathcal{F}(u) | \nu_0 \rangle = \langle u | \nu_0 \rangle + k\lambda \langle e | \nu_0 \rangle$  avec :

$$\langle e | \nu_0 \rangle = -\frac{1}{k} \left[ (k^2 - 1) \frac{l}{k} + \lambda \right] \text{ et } \langle u | \nu_0 \rangle = 1 + \left( \lambda - \frac{l}{k} \right) \lambda$$

ainsi,

$$\langle \mathcal{F}(u) | \nu_0 \rangle = 1 + \left( \lambda - \frac{l}{k} \right) \lambda - \lambda \left[ (k^2 - 1) \frac{l}{k} + \lambda \right] = 1 - k\lambda l$$

et finalement,

$$\langle \mathcal{F}(u) | \phi(u) \rangle = \mu(u) [1 - l(u) \langle w_0 | u \rangle] > 0$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

### 6.3 Lemme sur l'injectivité de la fonction de réindexation

Nous avons vu à la propriété 4.4.1 page 97 qu'une famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  admet une enveloppe seulement dans le cas où sa fonction de support  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  vérifie la condition ci-dessous :

$$\|\vec{\nabla} h(u)\| < CH h(u)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

Si la notion de  $g$ -hérissseon est universelle, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix du point de référence, cela signifie que la condition précédente appliquée à la fonction de support  $h$  impose que toute fonction de réindexation soit au injective. Néanmoins, comme nous l'avons vu via la remarque 6.2.1, la question de l'injectivité de la fonction de réindexation ne peut pas être résolue de manière triviale. Il est alors justifié d'étudier la relation entre la condition d'existence (4.4.1.2) sur la fonction de support d'une famille de  $g$ -hyperplan et l'injectivité des fonctions de réindexation. C'est précisément l'objet du lemme ci-dessous :

**Lemme 6.3.1.** *Considérons  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$ . S'il existe un point  $v_0$  pour lequel la fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  n'est pas injective, alors il existe un vecteur  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que :*

$$\|\vec{\nabla} h(u_0)\| \geq CH h(u_0) \quad (6.3.0.1)$$

avec  $h$  étant la fonction de support centrée en  $e$ .

*Démonstration.* Nous allons commencer par démontrer ce lemme sur le plan hyperbolique. Considérons donc  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^1}$  une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  et supposons qu'il existe un point  $v_0 \in \mathbb{H}^2$  pour lequel la fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^1 \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^1$  n'est pas injective. En particulier, considérons  $u_1 \in \mathbb{S}_e^1$  et  $u_2 \in \mathbb{S}_e^1$  deux vecteurs distincts tels que  $\phi(u_1) = \phi(u_2)$ . Via la remarque 6.2.2 que nous avons vue précédemment, nous savons que les vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  ne peuvent pas être antipodaux. Pour la suite, définissons le vecteur  $\nu = \phi(u_1) = \phi(u_2) \in \mathbb{S}_{v_0}^1$  et considérons les demi-espaces :

$$\begin{cases} K_1 = \{ \vec{W} \in T_e \mathbb{H}^2 \text{ tel que } \langle \vec{W} | u_1 \rangle \geq l_1 \} \\ K_2 = \{ \vec{W} \in T_e \mathbb{H}^2 \text{ tel que } \langle \vec{W} | u_2 \rangle \geq l_2 \} \end{cases} \quad (6.3.0.2)$$

et

$$\begin{cases} L_1 = \{ \vec{V} \in T_{v_0} \mathbb{H}^2 \text{ tel que } \langle \vec{V} | \nu \rangle \geq t_1 \} \\ L_2 = \{ \vec{V} \in T_{v_0} \mathbb{H}^2 \text{ tel que } \langle \vec{V} | \nu \rangle \geq t_2 \} \end{cases} \quad (6.3.0.3)$$

où les scalaires  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $t_1$  et  $t_2$  correspondent à la mesure de la position des g-hyperplans  $\Sigma_{u_1}$  et  $\Sigma_{u_2}$  par rapport aux vecteurs  $u_1$ ,  $u_2$  et  $\nu$  dans les modèles de Klein associés aux points de référence  $e$  et  $v_0$ . En particulier, si  $h : \mathbb{S}_e^1 \mapsto \mathbb{R}$  est la fonction de support, alors via la propriété 4.4.3 page 100, nous savons que :

$$l_1 = TH h(u_1) \text{ et } l_2 = TH h(u_2)$$

À présent, considérons la fonction de changement de carte  $f := \psi_{v_0} \circ \varphi_e : \mathcal{D}(e) \mapsto \mathcal{D}(v_0)$ . Nous devons alors vérifier les deux relations suivantes :

$$f\left(\overset{\circ}{K}_1 \cap \mathcal{D}(e)\right) = \overset{\circ}{L}_1 \cap \mathcal{D}(v_0) \text{ et } f\left(\overset{\circ}{K}_2 \cap \mathcal{D}(e)\right) = \overset{\circ}{L}_2 \cap \mathcal{D}(v_0) \quad (6.3.0.4)$$

Pour cela, introduisons la fonction définie par l'expression  $\mu(l) = \langle \nu | f(lu_1) \rangle$ . Alors, après quelques calculs, nous obtenons :

$$\mu(l) = \langle \nu | f(lu_1) \rangle = \langle \nu | w_e \rangle + S(l) \langle \nu | \mathcal{F}(u_1) \rangle$$

avec  $S(l) = -\frac{l}{\langle v_0 | e + lu_1 \rangle}$  et  $w_e = \psi_{v_0}(e)$ .

Via le lemme 6.2.3, nous savons que le produit  $\langle \nu | \mathcal{F}(u_1) \rangle$  est strictement positif. De plus, comme la fonction  $S(l)$  est strictement croissante, il en est alors de même pour la fonction  $\mu(l)$ . Ainsi, puisque  $\mu(l_1) = t_1$ , il existe donc  $w_1 \in \text{Int}(K_1) \cap \mathcal{D}(e)$  tel que  $f(w_1) \in \text{Int}(K_1) \cap \mathcal{D}(v_0)$ . Enfin, l'application  $f : \mathcal{D}(e) \setminus \psi_e(\Sigma_{u_1}) \mapsto \mathcal{D}(v_0) \setminus \psi_{v_0}(\Sigma_{u_1})$  étant un difféomorphisme, alors  $f$  envoie les composantes connexes sur les composantes connexes, ce qui nous donne le résultat

recherché.

Il est important de remarquer que sur le domaine  $\mathcal{D}(v_0)$ , on ne peut avoir que  $\psi_{v_0}(\Sigma_{u_1}) = \psi_{v_0}(\Sigma_{u_2})$ , car sinon les deux g-hyperplans seraient identiques et il en serait de même pour les vecteurs  $u_1$  et  $u_2$ , du fait qu'ils ne peuvent pas être antipodaux. Par définition des demi-espaces  $L_1$  et  $L_2$ , il est clair que  $L_1 \subset \text{Int}(L_2)$  ou  $L_2 \subset \text{Int}(L_1)$ . Alors, en considérant (6.3.0.4), on a :

$$K_2 \subset \text{Int}(L_1) \text{ ou } K_1 \subset \text{Int}(L_2) \quad (6.3.0.5)$$

À présent, il nous faut noter que, pour la suite, nous considérerons (sans perte de généralité) que les distances orientées  $l_1$  et  $l_2$  vérifient la condition ci-dessous :

$$l_1 \leq l_2 \quad (6.3.0.6)$$

et en particulier, on obtient que :

$$K_2 \subset \text{Int}(L_1) \quad (6.3.0.7)$$

Ensuite, comme il est clair qu'en adoptant la même méthode que pour  $\mu$ , la fonction  $\eta(l) = \langle \nu | f(lu_2) \rangle$  est strictement croissante, alors on obtient que :

$$u_2 \in \text{Int}(K_1) \cap \mathbb{S}_e^1$$

En effet, on sait que  $f(l_2 u_2) \in \psi_{v_0}(\Sigma_{u_2}) \subset L_2 \cap \mathcal{D}(v_0) \subset \text{Int}(L_1) \cap \mathcal{D}(v_0)$ . En particulier, comme la fonction  $\eta$  est strictement croissante, on a : pour tout  $l > l_2$ ,  $f(lu_2) \in \text{Int}(L_2) \cap \mathcal{D}(v_0)$ . Par conséquence, en passant à la limite sur le bord, on obtient le résultat recherché.

À présent, considérons le paramétrage  $s : ]-\pi; \pi[ \mapsto \mathbb{S}_e^1$  correspondant à la rotation indirecte telle que  $s(0) = u_1$ . Aussi, relativement à la droite affine  $T_{u_1} = l_1 u_1 + \langle u_1 \rangle^\perp$ , nous définissons les vecteurs  $u_I \in s(]-\pi; 0])$  et  $u_D \in s(]0; \pi[)$  tels que  $\mathcal{D}(e) \cap T_{u_1} = ]u_I; u_D[$  (où  $]u_I; u_D[$  est le segment reliant les vecteurs  $u_I$  et  $u_D$ , considérés comme des points sur l'espace euclidien  $T_e \mathbb{H}^2$ ), ainsi que  $\theta_I$  et  $\theta_D$  étant leurs coordonnées associées via le paramétrage  $s$ .

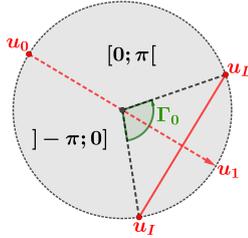


FIGURE 6.4 – Définition des vecteurs  $u_I$  et  $u_D$ .

A présent considérons, pour  $\theta \neq \theta_I$ , l'angle  $\varphi_\theta = \theta - \theta_I$  ainsi que la fonction  $\tilde{l}_I(\theta) = \text{Cos}(\varphi_\theta)$  définie sur  $]-\pi; \theta_I[ \cup ]\theta_I; \pi[$ . Il nous faut alors noter que la famille de g-hyperplans, définie sur  $\mathcal{D}(e)$  par l'application  $\tilde{l}_I$ , représente un cas limite de famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  contenant le g-hyperplan  $\Sigma_{u_1}$ . De plus, tous les g-hyperplans  $\Sigma_\theta$ , ainsi définis et distincts de  $\Sigma_{u_1}$ , sont parallèles<sup>4</sup> à  $\Sigma_{u_1}$ . Par conséquent, on définit la fonction  $\tilde{h}_I : ]-\pi; \theta_I[ \cup ]\theta_I; \pi[ \mapsto \mathbb{R}$  via l'expression suivante :

$$\widetilde{h}_I(\theta) = \text{ArcTH}\left(\widetilde{l}_I(\theta)\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \text{Cos}(\theta - \theta_I)}{1 - \text{Cos}(\theta - \theta_I)}\right)$$

Pour définir la même fonction par rapport au vecteur  $u_D$ , considérons, pour  $\theta \neq \theta_D$ , la fonction  $\widetilde{l}_D(\theta) = \text{Sin}(\varphi_\theta)$ , où  $\varphi_\theta$  vérifie la relation  $\theta + \varphi_\theta = \theta_D$ . En particulier, on considère la fonction définie via l'expression suivante :

$$\widetilde{h}_D(\theta) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \text{Cos}(\theta - \theta_D)}{1 - \text{Cos}(\theta - \theta_D)}\right)$$

Par conséquent, il nous sera nécessaire de remarquer qu'après un petit calcul, on peut vérifier que pour tout  $\theta \neq \theta_I$  (resp.  $\theta \neq \theta_D$ ), on a que les fonctions  $\widetilde{h}_I$  et  $\widetilde{h}_D$ , que nous avons précédemment définies, vérifient les relations ci-dessous :

$$\frac{\partial_\theta \widetilde{h}_I(\theta)}{CH \widetilde{h}_I(\theta)} = -\frac{|\text{Sin}(\theta - \theta_I)|}{\text{Sin}(\theta - \theta_I)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial_\theta \widetilde{h}_D(\theta)}{CH \widetilde{h}_D(\theta)} = -\frac{|\text{Sin}(\theta - \theta_D)|}{\text{Sin}(\theta - \theta_D)}$$

À présent, considérons l'application  $\widetilde{h} : ]-\pi; \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  correspondant, via le paramétrage  $s$ , à la fonction de support  $h$  de la famille de g-hyperplans. Aussi, on définit les angles  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_2$  qui correspondent, via le paramétrage  $s$ , aux vecteurs  $u_1$  et  $u_2$ . Par conséquent, comme les g-hyperplans  $\Sigma_{u_1}$  et  $\Sigma_{u_2}$  sont parallèles<sup>5</sup> par rapport au point  $v_0$  et vérifient la condition (6.3.0.7), on a forcément que : Si l'angle  $\theta_2$  est dans l'intervalle  $]\theta_I; 0[$ , alors :

$$\widetilde{h}(\theta_2) > \widetilde{h}_I(\theta_2) \tag{6.3.0.8}$$

Il est important de bien remarquer que l'inégalité (6.3.0.8) est stricte du fait que les g-hyperplans  $\Sigma_{u_1}$  et  $\Sigma_{u_2}$  sont parallèles par rapport au point  $v_0$  au sens où il existe une géodésique qui leur est communément perpendiculaire et passant par le point  $v_0$ . En effet, par la propriété 5.1.16 page 313 de l'annexe E qui traite des g-hyperplans parallèles, il est clair que le g-hyperplan  $\Sigma_{u_2}$  ne peut pas correspondre à la longueur  $\widetilde{h}_I(\theta_2)$ .

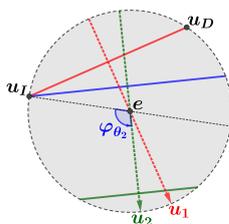


FIGURE 6.5 – Positionnement du g-hyperplan  $\Sigma_{u_2}$  relativement au g-hyperplan  $\Sigma_{u_1}$ .

Pareillement, dans le cas où l'angle  $\theta_2$  est dans l'intervalle  $]0; \theta_D[$ , alors en considérant la même méthode que précédemment, on obtient que  $\widetilde{h}(\theta_2) > \widetilde{h}_D(\theta_2)$ . Ainsi, sans perte de généralité, nous supposons dans toute la suite que  $\theta_2 \in ]\theta_I; 0[$ . Par conséquent, en remarquant que par

4. Il convient de préciser que pour tout  $\theta$  non nul, les g-hyperplans  $\Sigma_{u_1}$  et  $\Sigma_\theta$  sont parallèles sans jamais avoir de géodésique orthogonale commune (voir section 5.1.4.3 page 312 de l'annexe E pour en savoir plus sur les g-hyperplans parallèles).

5. Voir la définition 4.2.3 page 85 du chapitre 4 pour un rappel sur la définition de g-hyperplan parallèle par rapport à un point de référence.

construction, nous avons forcément que  $\tilde{h}(\theta_1) = \tilde{h}_I(\theta_1)$  et  $\tilde{h}_I \rightarrow +\infty$ , lorsque  $\theta \rightarrow \theta_I$ , alors il existe un intervalle fermé  $[a; b] \subset ]\theta_I; 0]$  tel que  $\tilde{h}_I(a) = \tilde{h}(a)$ ,  $\tilde{h}_I(b) = \tilde{h}(b)$  ainsi que :

$$\tilde{h}(\theta) > \tilde{h}_I(\theta) \quad (6.3.0.9)$$

pour tout  $\theta \in ]a; b[$ . En particulier, par la condition (6.3.0.9) on peut calculer que la dérivée des fonctions  $\tilde{h}$  et  $\tilde{h}_I$  vérifie l'inégalité suivante :

$$\partial_\theta \tilde{h}(b) \leq \partial_\theta \tilde{h}_I(b) \quad (6.3.0.10)$$

Pour terminer, il nous faut distinguer trois cas de figure en fonction des distances orientées  $l_1$  et  $l_2$ . En effet, comme les distances  $l_1$  et  $l_2$  vérifient la condition (6.3.0.6), alors on a que :

→ Supposons que les longueurs  $l_1$  et  $l_2$  soient positives ou nulles. Alors dans ce cas de figure, nous avons  $\theta_D - \theta_I \leq \pi$  et en particulier  $b - \theta_I < \frac{\pi}{2}$ . Par conséquent, comme les dérivées des fonctions  $\tilde{h}$  et  $\tilde{h}_I$  vérifient la condition (6.3.0.10), on a forcément que :

$$\frac{\partial_\theta \tilde{h}(b)}{CH \tilde{h}(b)} \leq \frac{\partial_\theta \tilde{h}_I(b)}{CH \tilde{h}_I(b)} = -\frac{|\text{Sin}(b - \theta_I)|}{\text{Sin}(b - \theta_I)} = -1$$

et donc il existe bien un angle  $\theta_0 \in ]\theta_I; 0[$  tel que :

$$\left| \partial_\theta \tilde{h}(\theta_0) \right| \geq CH \tilde{h}(\theta_0) \quad (6.3.0.11)$$

avec  $\theta_0 = b$  dans ce cas de figure.

→ Supposons que les longueurs  $l_1$  et  $l_2$  soient négatives ou nulles. Alors en considérant la famille de g-hyperplan définie par la fonction de support  $-h$ , on se retrouve forcément dans le cas précédent. En particulier, il existe alors un angle  $\theta_0 \in ]-\pi; \pi[$  pour lequel la fonction  $\tilde{h}$  vérifie la relation (6.3.0.11).

→ Supposons que  $l_1 < 0$  et  $l_2 > 0$ . Il nous faut alors définir deux autres vecteurs  $u'_1$  et  $u'_2$  pour lesquels les longueurs  $l'_1$  et  $l'_2$  qui leur correspondent, vérifient l'un des deux cas de figure précédents. Pour cela, remarquons que par continuité, comme on sait que les fonctions  $\tilde{h}$  et  $\tilde{h}_I$  admettent la même image en  $\theta_1 = 0$  et vérifient l'inégalité (6.3.0.8) en  $\theta_2$ , alors il existe forcément un angle  $\theta'_1 \in ]\theta_2; 0]$  pour lequel on a :

$$\begin{cases} \tilde{h}(\theta) > \tilde{h}_I(\theta) \text{ pour tout } \theta \in [\theta_2; \theta'_1[ \\ \tilde{h}(\theta'_1) = \tilde{h}_I(\theta'_1) \end{cases} \quad (6.3.0.12)$$

Aussi, par le même argument de continuité, nous avons qu'il existe un second angle  $\theta'_2 \in ]\theta_2; \theta'_1[$  pour lequel les longueurs  $\tilde{h}(\theta'_1)$  et  $\tilde{h}(\theta'_2)$  sont de même signe<sup>6</sup>. Il nous faut alors remarquer que, par (6.3.0.12), il est clair que les applications  $\tilde{h}$  et  $\tilde{h}_I$  vérifient l'inégalité (6.3.0.8) pour l'angle  $\theta'_2$ . Ainsi, par la propriété 5.1.16 page 313 de l'annexe E, il est immédiat qu'il existe une géodésique  $\gamma$  qui est orthogonale aux g-hyperplans  $\Sigma_{u'_1}$  et  $\Sigma_{u'_2}$ ,

6. Pour plus de clarté, nous précisons que par "de même signe", nous entendons : les longueurs  $\tilde{h}(\theta'_1)$  et  $\tilde{h}(\theta'_2)$  sont soit toutes les deux dans l'intervalle  $[0; +\infty[$ , soit toutes les deux dans l'intervalle  $]-\infty; 0]$ .

avec  $u'_1$  et  $u'_2$  étant les vecteurs correspondant aux angles  $\theta'_1$  et  $\theta'_2$ . Ensuite, en nous plaçant dans le modèle de Klein centré en  $e$ , alors par ce qui précède<sup>7</sup>, il est immédiat que :

$$\mathbb{S}_e^1 \setminus \text{Int}(K'_1) \subset \mathbb{S}_e^1 \setminus K'_2 \quad (6.3.0.13)$$

où  $K'_1$  et  $K'_2$  sont définis via (6.3.0.2) relativement aux vecteurs  $u'_1$  et  $u'_2$ . Par conséquent, comme la géodésique  $\gamma$  correspond à une droite  $\delta$  qui intersecte les g-hyperplans  $\psi_e(\Sigma_{u'_1})$  et  $\psi_e(\Sigma_{u'_2})$ , alors par (6.3.0.13), il est clair qu'il existe un point  $w'_0 \in \delta \cap \mathcal{D}(e)$  pour lequel la droite vectorielle  $T$  qui passe par le point  $w'_0$ , partage  $\mathbb{S}_e^1$  en deux demi-cercles dont l'un contient les vecteurs  $u'_1$  et  $u'_2$  à son intérieur<sup>8</sup>. On définit donc un nouveau point de référence :

$$v'_0 = \varphi_e(w'_0)$$

ainsi que  $\phi' : \mathbb{S}_e^1 \mapsto \mathbb{S}_{v'_0}^1$ , la fonction de réindexation qui lui correspond.

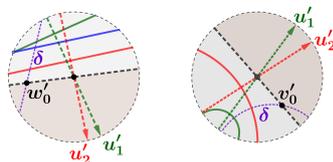


FIGURE 6.6 – Définition du point de référence  $v'_0$

Par construction, il est clair que les images  $\phi'(u'_1)$  et  $\phi'(u'_2)$  sont égales ou antipodales sur le cercle  $\mathbb{S}_{v'_0}^1$ . Considérons alors un vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{S}_e^1$  qui est orthogonal à la droite  $\mathbb{R}w'_0$  et tel que les vecteurs  $u'_1$  et  $u'_2$  soient compris dans l'ouverture  $\text{Int}(K^+)$ , avec  $K^+$  étant la partie définie via l'expression (6.2.2.7) pour le vecteur  $\vec{v}$ . Aussi, en remarquant que  $\vec{v} = \mathcal{F}(\vec{v})$ , où  $\mathcal{F}$  est la fonction de changement de point définie via l'expression (6.1.2.2) et correspondant aux points de référence  $e$  et  $v'_0$ , on définit la partie  $L^+ \subset T_{v'_0}\mathbb{H}^n$  via l'expression (6.2.2.8) relativement au vecteur  $\vec{v}$ . Ainsi, comme par le lemme 6.2.2, on sait que  $\phi'(\text{Int}(K^+) \cap \mathbb{S}_e^1) = \text{Int}(L^+) \cap \mathbb{S}_{v'_0}^1$ , on en déduit forcément que  $\phi'(u'_1) = \phi'(u'_2)$ . Nous sommes donc, pour les vecteurs  $u'_1$  et  $u'_2$  et relativement au point de référence  $v'_0$ , dans l'une des deux situations précédentes. En particulier, il est clair que la fonction  $\tilde{h}$  vérifie la relation (6.3.0.11) pour un angle  $\theta_0 \in ]\theta'_1; \theta'_2[$ .

Pour terminer cette démonstration, nous devons nous placer sur l'espace hyperbolique en dimension quelconque. Considérons donc  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  telle qu'il existe un second point de référence  $v_0$  pour lequel la fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  n'est pas injective. Il existe alors  $u_1$  et  $u_2$  deux vecteurs tels que  $\phi(u_1) = \phi(u_2)$ . Si  $\gamma$  est la géodésique orthogonale aux g-hyperplans  $\Sigma_{u_1}$  et  $\Sigma_{u_2}$ , considérons  $\delta$  comme étant la droite affine sur l'espace  $T_e\mathbb{H}^n$  correspondant à la géodésique  $\gamma$  dans le modèle de Klein centré

7. Il nous faut préciser que la relation (6.3.0.13) est, par construction des g-hyperplans  $\Sigma_{u'_1}$  et  $\Sigma_{u'_2}$ , une conséquence directe de la relation (6.3.0.8) pour l'angle  $\theta'_2$ . En particulier, nous pouvons remarquer que la relation (6.3.0.13), tout comme la relation (6.3.0.7), permet de décrire la position du g-hyperplan  $\Sigma_{u'_1}$  par rapport au g-hyperplan  $\Sigma_{u'_2}$  en prenant en compte l'information de leurs orientations respectives.

8. Il nous faut remarquer que par construction on a que  $[\theta'_2; \theta'_1] \subset ]\theta_2; \theta_1] \subset ]\theta_I; 0] \subset ]-\pi; 0]$  et par conséquent, il n'est pas possible que les vecteurs  $u'_1$  et  $u'_2$  soient antipodaux. Notons qu'il est aussi possible de justifier que les vecteurs  $u'_1$  et  $u'_2$  ne sont pas antipodaux via la relation (6.3.0.13).

en  $e$ . La droite  $\delta$  n'étant pas une droite vectorielle, considérons alors l'unique plan vectoriel  $H$  qui la contient. On peut aussi vérifier<sup>9</sup> que les vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  se trouvent sur le plan  $H$ . En particulier, comme par la remarque 6.2.2, on sait que les vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  ne sont pas antipodaux, alors on obtient finalement que :

$$v_0 \in H = \langle u_1, u_2 \rangle$$

Ainsi, via la propriété 6.1.2 et le lemme 6.2.1, on a que la famille  $(\mathbb{H}_H \cap \Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^1[\mathbb{H}_H]}$  est une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  sur le 2-espace hyperbolique  $\mathbb{H}_H$  pour laquelle la fonction de réindexation  $\phi_H : \mathbb{S}_e^1[\mathbb{H}_H] \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^1[\mathbb{H}_H]$  n'est pas injective. Il s'ensuit qu'il existe nécessairement un vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^1[\mathbb{H}_H]$  tel que :

$$\frac{\|\vec{\nabla} h(u)\|}{CH h(u)} \geq \frac{\|\vec{\nabla}_{\mathbb{S}_e^1[\mathbb{H}_H]} h(u)\|}{CH h(u)} \geq 1$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

## 6.4 Énoncé et démonstration du théorème

Dans cette section, nous présentons et démontrons le théorème de l'indépendance du choix du point de référence pour les g-hérissos de l'espace hyperbolique. Par ce théorème, nous savons que, comme pour les h-hérissos, les g-hérissos correspondent à un objet géométrique que l'on peut décrire (via le paramétrage, la fonction de support, etc.) relativement à n'importe quel point sur l'espace hyperbolique. En particulier, par ce théorème il n'est plus nécessaire de préciser le point de référence lorsque nous considérons un g-hérisson sur l'espace hyperbolique.

**Théorème 6.4.1.** *Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  est un g-hérisson centré en  $e$ , alors c'est un g-hérisson pour tous les points.*

*Démonstration.* Considérons donc  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  un g-hérisson centré en  $e$ . Il existe alors  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  et de fonction de support  $h$ , dont l'enveloppe paramétrée existe et correspond au g-hérisson  $\mathcal{H}$ . À présent, considérons  $v_0 \in \mathbb{H}^n$  un second point de référence, ainsi que  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  la fonction de réindexation entre les points  $e$  et  $v_0$ . Nous devons alors vérifier que l'application  $\phi$  est un difféomorphisme et pour cela, nous déterminerons le noyau de la différentielle  $d_u \phi : T_u \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto T_{\phi(u)} \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ .

Pour commencer, via la propriété 6.2.1, nous savons que la fonction de réindexation est donnée par l'expression  $\phi = \mathcal{N} \circ \pi_{v_0} \circ \phi_0$  avec  $\phi_0(u) = u + l(u)e$ , où  $l = TH(h)$ , ainsi que  $\pi_{v_0}$  étant la projection orthogonale le long de la droite  $\mathbb{R}v_0$  et  $\mathcal{N} : \mathbb{L}^{n+1} \setminus K \mapsto dS^n$  étant l'application de normalisation qui est définie via l'expression suivante :

$$\mathcal{N}(x) = \beta(x)x \text{ avec } \beta(x) = \frac{1}{\sqrt{\langle x|x \rangle}}$$

où  $K = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} \text{ tel que } \langle x|x \rangle_L \leq 0\}$ .

9. En effet, en se plaçant dans le modèle de Poincaré centré en  $v_0$  et en considérant  $\delta$  la droite vectorielle correspondant à la géodésique  $\gamma$ , nous savons que les g-hyperplans  $\Sigma_{u_1}$  et  $\Sigma_{u_2}$  correspondent à des hypersurfaces de révolution dont l'axe de rotation est la droite  $\delta$ . Ainsi, en considérant l'unique plan vectoriel  $H$  contenant la droite  $\delta$  et le point  $e$  (qui, par construction, ne peut se trouver sur la droite  $\delta$ ), on a que les géodésiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , correspondant aux géodésiques passant par le point  $e$  aux vitesses  $u_1$  et  $u_2$ , sont nécessairement contenues dans le plan  $H$ .

Après un calcul rapide, on obtient que pour tout point  $x \in \mathbb{L}^{n+1}$  et vecteur  $\vec{X} \in \mathbb{L}^{n+1}$ , alors  $d_x \mathcal{N} \cdot \vec{X} = \beta(x) \left[ \vec{X} - \beta(x)^2 \langle x | \vec{X} \rangle x \right]$ . On peut donc remarquer que si les éléments  $x$  et  $\vec{X}$  forment une famille libre, alors  $d_x \mathcal{N} \cdot \vec{X} \neq 0$ .

Considérons un vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  ainsi qu'un vecteur tangent  $\vec{W} \in T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$ . La différentielle de la fonction de réindexation est alors donnée via la relation suivante :

$$d_u \phi \cdot \vec{W} = d_{\pi_{v_0} \circ \phi_u(u)} \mathcal{N} \left( \pi_{v_0} \circ d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \right)$$

Il nous faut donc nous assurer que les vecteurs  $\pi_{v_0} \circ \phi_u(u)$  et  $\pi_{v_0} \circ d_u \phi_0 \cdot \vec{W}$  forment une famille libre lorsque le vecteur  $\vec{W}$  est non nul. Déjà, notons que, puisque  $\phi_0(u)$  est un vecteur de type espace, alors le vecteur  $\pi_{v_0} \circ \phi_0(u)$  est toujours non nul. Ensuite, via le théorème 4.4.1 page 97 on sait que la fonction de support  $h$  satisfait la relation :

$$\|\vec{\nabla} h(u)\| < CH h(u)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . De plus, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  et  $\vec{W} \in T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on a que la différentielle de l'application  $\phi_0$  est définie via l'expression ci-dessous :

$$d_u \phi_0 \cdot \vec{W} = \vec{W} + \langle \vec{\nabla} l(u) | \vec{W} \rangle e \text{ avec } \vec{\nabla} l(u) = \frac{1}{(CH h(u))^2} \vec{\nabla} h(u)$$

et donc, lorsque le vecteur  $\vec{W} \in T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$  est non nul, on a que :

$$\begin{aligned} \langle d_u \phi_0 \cdot \vec{W} | d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle &= \|\vec{W}\|^2 - \langle \vec{\nabla} l(u) | \vec{W} \rangle^2 \geq \|\vec{W}\|^2 - \|\vec{\nabla} l(u)\|^2 \|\vec{W}\|^2 \\ &= \|\vec{W}\|^2 - \frac{\|\vec{\nabla} h(u)\|^2}{(CH h(u))^4} \|\vec{W}\|^2 > \|\vec{W}\|^2 - \frac{\|\vec{W}\|^2}{(CH h(u))^2} \\ &= \frac{\|\vec{W}\|^2}{(CH h(u))^2} \left[ (CH h(u))^2 - 1 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui nous donne que :

$$\langle d_u \phi_0 \cdot \vec{W} | d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle > \frac{\|\vec{W}\|^2}{(CH h(u))^2} \left[ (CH h(u))^2 - 1 \right] \geq 0.$$

Ainsi, si le vecteur  $\vec{W} \in T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$  est non nul, alors on obtient que  $d_u \phi_0 \cdot \vec{W}$  est également non nul et de type espace. Par conséquent, on sait que le vecteur  $\pi_{v_0} \circ d_u \phi_0 \cdot \vec{W}$  est non nul lorsque le vecteur  $\vec{W}$  l'est aussi. On peut également observer que les vecteurs  $\phi_0(u)$  et  $d_u \phi \cdot \vec{W}$  forment une famille libre. De plus, il est évident que si

$$\lambda \pi_{v_0} \circ \phi_0(u) + \mu \pi_{v_0} \left( d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \right) = 0,$$

alors on a que :

$$\lambda \phi_0(u) + \mu d_u \phi_0 \cdot \vec{W} = 0 \text{ ou } \lambda \phi_0(u) + \mu d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \sim v_0$$

Par conséquent, vérifions que toutes les combinaisons linéaires  $\lambda \phi_0(u) + \mu d_u \phi_0 \cdot \vec{W}$  sont toujours de type espace ou nul. Pour ce faire, nous devons déterminer les trois produits suivants :

1. Le produit  $\langle \phi_0(u) | \phi_0(u) \rangle$

$$\langle \phi_0(u) | \phi_0(u) \rangle = 1 - l(u)^2 = 1 - (TH h(u))^2 = \frac{1}{(CH h(u))^2}$$

2. Le produit  $\langle \phi_0(u) | d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle$

$$\begin{aligned} \left| \langle \phi_0(u) | d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle \right| &= |l(u)| \cdot \left| \langle \vec{\nabla} l(u) | \vec{W} \rangle \right| = \frac{|l(u)|}{(CH h(u))^2} \left| \langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{W} \rangle \right| \\ &\leq \frac{|l(u)|}{(CH h(u))^2} \cdot \|\vec{\nabla} h(u)\| \cdot \|\vec{W}\| < \frac{|l(u)|}{CH h(u)} \cdot \|\vec{W}\| \end{aligned}$$

3. Le produit  $\langle d_u \phi_0 \cdot \vec{W} | d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle$

$$\langle d_u \phi_0 \cdot \vec{W} | d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle \geq \frac{\|\vec{W}\|^2}{(CH h(u))^2} \left( (CH h(u))^2 - 1 \right) = \|\vec{W}\|^2 \cdot l(u)^2$$

Supposons donc qu'il existe  $\lambda$  et  $\mu$ , deux scalaires pour lesquels la combinaison linéaire  $\lambda \phi_0(u) + \mu d_u \phi_0 \cdot \vec{W}$  est non nulle. Alors, de ce qui précède, nous considérons le développement suivant :

$$\begin{aligned} \langle \lambda \phi_0(u) + \mu d_u \phi_0 \cdot \vec{W} | \lambda \phi_0(u) + \mu d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle &= \lambda^2 \langle \phi_0(u) | \phi_0(u) \rangle + 2\lambda\mu \langle \phi_0(u) | d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle + \mu^2 \langle d_u \phi_0 \cdot \vec{W} | d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle \\ &\geq \lambda^2 \langle \phi_0(u) | \phi_0(u) \rangle - 2|\lambda| |\mu| \left| \langle \phi_0(u) | d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle \right| + \mu^2 \langle d_u \phi_0 \cdot \vec{W} | d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \rangle \\ &> \frac{\lambda^2}{(CH h(u))^2} - 2|\lambda| \cdot |\mu| \cdot \frac{|l(u)|}{CH h(u)} \cdot \|\vec{W}\| + \mu^2 \|\vec{W}\|^2 l(u)^2 \\ &= \left( \frac{|\lambda|}{CH h(u)} - |\mu| \cdot |l(u)| \cdot \|\vec{W}\| \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

En conséquence, nous pouvons conclure que si la combinaison linéaire  $\lambda \phi_0(u) + \mu d_u \phi_0 \cdot \vec{W}$  est non nulle, alors elle correspond à un vecteur de type espace. Ainsi, si on considère deux scalaires  $\lambda$  et  $\mu$  tels que la combinaison linéaire

$$\lambda \pi_{v_0} \circ \phi_0(u) + \mu \pi_{v_0} \left( d_u \phi_0 \cdot \vec{W} \right)$$

est nulle, alors il en est de même pour la combinaison linéaire  $\lambda \phi_0(u) + \mu d_u \phi_0 \cdot \vec{W}$ , impliquant que  $\lambda = 0$  et  $\mu = 0$ . Il en résulte que les éléments  $\pi_{v_0} \circ \phi_u(u)$  et  $\pi_{v_0} \circ d_u \phi_0 \left( \vec{W} \right)$  forment bien une famille libre. En particulier, si  $\vec{W}$  est un vecteur non nul, alors la différentielle  $d_u \phi \cdot \vec{W}$  l'est aussi, ce qui signifie que l'application de réindexation  $\phi$  est un difféomorphisme local en chaque point.

Pour conclure, on a que via la propriété 7.3.1 page 322 de l'annexe G, nous savons que l'application de réindexation est surjective. De plus, par le lemme 6.3.1, nous savons qu'elle est également injective. Par conséquent, c'est un difféomorphisme et la famille de g-hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est co-orientable en  $v_0$ .  $\square$

**Remarque 6.4.1.** *Notons que le lemme 6.3.1, qui traite de la question de l'injectivité de la fonction de réindexation, n'est utile à la démonstration précédente qu'en dimension 2 pour l'espace hyperbolique. En effet, en dimension supérieure, nous aurions pu nous contenter d'un argument topologique basé sur la simple connexité de la sphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ . Néanmoins, il est à noter que le lemme 6.3.1 nous permet aussi de mieux comprendre la géométrie qui s'articule autour de la notion de  $g$ -hérissou.*



## Chapitre 7

# Conditions et structures de contact pour les g-hérissons et les h-hérissons

Rappelons qu'au chapitre 2, nous avons vu que tout hérisson sur l'espace euclidien est le front de Legendre d'un certain type d'immersion de Legendre (voir propriété 2.2.1 page 49). Cette remarque<sup>1</sup> conduit naturellement à proposer une méthode pour généraliser la notion de hérisson (voir section 2.4 page 51 pour plus de détails). Dans ce chapitre, nous vérifions donc que les g-hérissons ainsi que les h-hérissons tels que nous les avons définis correspondent bien à des fronts legendriens d'un certain type d'immersion de Legendre, qu'il nous faut définir.

### 7.1 Structure de contact usuelle induite par l'espace hyperbolique

Pour commencer, il nous faut retrouver une structure de contact qui correspond à celle que nous avons définie sur  $\mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$  en considérant la forme de contact définie via la relation (2.1.0.1) page 48. Pour cela, on considère le fibré des sphères :

$$ST\mathbb{H}^n = \coprod_{x \in \mathbb{H}^n} \mathbb{S}_x^{n-1} \quad (7.1.0.1)$$

ainsi que les deux propriétés suivantes :

**Propriété 7.1.1.** *En tout point  $w = (x, u) \in ST\mathbb{H}^n$ , il existe un  $\mathbb{R}$ -isomorphisme linéaire tel que :*

$$T_w ST\mathbb{H}^n \simeq T_x \mathbb{H}^n \oplus T_u \mathbb{S}_x^{n-1} \quad (7.1.0.2)$$

*Démonstration.* Considérons donc  $x_0 \in \mathbb{H}^n$  un point sur l'espace hyperbolique. Si  $w = (x, u) \in ST\mathbb{H}^n$  alors on considère  $\gamma_{(x, x_0)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^n$  la géodésique qui relie  $x$  à  $x_0$  ainsi que

---

1. Pour en savoir plus sur la relation entre la notion de hérisson et la géométrie de contact, il est possible de consulter les articles [74] et [77] dans lesquels cette relation est développée pour différents types de hérissons (i.e. les hérissons euclidiens, lorentziens et complexes).

$$\varphi_{(x,x_0)} : T_x \mathbb{H}^n \mapsto T_{x_0} \mathbb{H}^n$$

le transport parallèle le long de la géodésique  $\gamma_{(x,x_0)}$ . On définit ainsi, en tout point  $x_0 \in \mathbb{H}^n$ , le morphisme de fibré  $\phi^{(x_0)} : ST\mathbb{H}^n \mapsto \mathbb{H}^n \times \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  vérifiant l'expression suivante :

$$\phi^{(x_0)}(x, u) = (x, \varphi_{x,x_0}(u))$$

En remarquant que  $\phi^{(x_0)}(x_0, u) = (x_0, u)$  alors, par inversion locale, il existe un ouvert  $\mathcal{W} = p^{-1}(\mathcal{V})$ , avec  $p : ST\mathbb{H}^n \mapsto \mathbb{H}^n$  la projection du fibré des sphères et  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $x_0$ , tel que la restriction  $\phi^{(x_0)} : \mathcal{W} \mapsto \mathcal{V} \times \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  est un difféomorphisme. En particulier, on définit un  $\mathbb{R}$ -isomorphisme :

$$f_{(x_0,u)} := d_{(x_0,u)}\phi^{(x_0)} : T_{(x_0,u)}[ST\mathbb{H}^n] \xrightarrow{\sim} T_{x_0}\mathbb{H}^n \oplus T_u\mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \quad (7.1.0.3)$$

ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

**Propriété 7.1.2.** *La famille des  $\mathbb{R}$ -isomorphismes linéaires définis par (7.1.0.3) induit un isomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(ST\mathbb{H}^n)$ -module tel que :*

$$\Delta(ST\mathbb{H}^n) \simeq \Gamma^0(p^*T\mathbb{H}^n) \oplus \Gamma^0(\Pi\mathbb{S}^{n-1}) \quad (7.1.0.4)$$

et qui correspond naturellement à un isomorphisme de fibré vectoriel entre le fibré tangent du fibré des sphères  $ST\mathbb{H}^n$  et le fibré vectoriel  $p^*T\mathbb{H}^n \oplus \Pi\mathbb{S}^{n-1}$ .

**Note.** *Dans la relation (7.1.0.4), nous avons considéré  $p : ST\mathbb{H}^n \mapsto \mathbb{H}^n$  comme étant la projection du fibré des sphères. Aussi, on définit :*

$$\Pi\mathbb{S}^{n-1} = \coprod_{(x,u) \in ST\mathbb{H}^n} T_u\mathbb{S}_x^{n-1} \quad (7.1.0.5)$$

correspondant au fibré vectoriel des hyperplans tangents des sphères tangentes de l'espace hyperbolique.

*Démonstration.* Il nous suffit de considérer la famille des  $\mathbb{R}$ -isomorphismes  $(f_w)_{w \in ST\mathbb{H}^n}$  définis via (7.1.0.3). On obtient alors un isomorphisme de fibré  $f : T[ST\mathbb{H}^n] \mapsto p^*T\mathbb{H}^n \oplus \Pi\mathbb{S}^{n-1}$ . En particulier, nous pouvons vérifier que  $f$  est bien  $\mathcal{C}^\infty$  en constatant que la fonction  $\mathcal{F} : \mathbb{H}^n \times ST\mathbb{H}^n \mapsto d\mathbb{S}^n$ , avec  $d\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{H}^n \text{ tel que } \langle x|x \rangle = 1\}$ , définie via l'expression :

$$\mathcal{F}(x, y, u) = \varphi_{(x,y)}(u)$$

est lisse.  $\square$

Il nous sera utile de remarquer que nous pouvons considérer les mêmes constructions et retrouver ces deux mêmes propriétés sur le fibré  $ST\mathbb{S}^n$  pour l'hypersphère de dimension  $n$ . L'intérêt de ces deux dernières propriétés réside dans le fait que nous devons définir une forme de contact correspondant à l'analogie de la relation (2.1.0.1). Et pour cela, on considère la propriété suivante :

**Propriété 7.1.3.** *Sur le fibré des sphères tangentes  $ST\mathbb{H}^n$ , la 1-forme différentielle  $\alpha \in \Omega_1(ST\mathbb{H}^n)$  définie via l'expression ci-dessous :*

$$\alpha_w(\vec{V} \oplus \vec{W}) = \langle \vec{V} | u \rangle \text{ avec } w = (x, u) \text{ et } \vec{V} \oplus \vec{W} \in T_x\mathbb{H}^n \oplus T_u\mathbb{S}_x^{n-1} \quad (7.1.0.6)$$

est une forme de contact.

*Démonstration.* Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence ainsi que la carte exponentielle  $x : \mathbb{H}^n \mapsto T_e \mathbb{H}^n$  centrée en  $e$ . On considère aussi  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base orthonormale de l'hyperplan tangent  $T_e \mathbb{H}^n$  ainsi que le repère différentiel  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$  défini via la carte exponentielle :

$$\partial_i(p) = (d_p x)^{-1} \cdot \vec{e}_i$$

pour tout  $p \in \mathbb{H}^n$ .

À présent, remarquons que si  $w = (p, u) \in ST\mathbb{H}^n$  est un point et  $\vec{W} = \vec{X} \oplus \vec{V} \in T[ST\mathbb{H}^n]$  un vecteur, alors comme  $\vec{X} = X_1 \partial_1(p) + \dots + X_n \partial_n(p)$ , on a :

$$\alpha_w \cdot \vec{W} = \langle \partial_1(p) | u \rangle X_1 + \dots + \langle \partial_n(p) | u \rangle X_n$$

Ainsi, on définit les applications  $v_i : ST\mathbb{H}^n \mapsto \mathbb{R}$  qui, pour tout  $w = (p, u) \in ST\mathbb{H}^n$ , nous donnent  $v_i(w) = \langle \partial_i(p) | u \rangle$ . De plus, on prolonge<sup>2</sup> la carte  $x$  sur  $ST\mathbb{H}^n$  telle que  $x(w) = x(p)$  et donc, on obtient que la forme  $\alpha$  admet pour expression :

$$\alpha = v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n \quad (7.1.0.7)$$

Considérons donc  $w_e = (e, u)$ , avec  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , ainsi qu'un vecteur  $\vec{W} = \vec{X} \oplus \vec{V} \in T_e \mathbb{H}^n \oplus T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Par propriété de la carte de Gauss, on a que la différentielle des applications  $v_i$  admet pour expression  $d_{w_e} v_i \cdot \vec{W} = \langle \vec{e}_i | \vec{V} \rangle = V_i$ . Ainsi la différentielle extérieur de la forme  $\alpha$  vérifie en  $w_e$  que :

$$d_{w_e} \alpha(\vec{W}, \vec{W}') = V_1 X_1' - V_1' X_1 + \dots + V_n X_n' - V_n' X_n \quad (7.1.0.8)$$

Par conséquent, en sachant que  $u_1 V_1 + \dots + u_n V_n = 0$ , alors après un petit calcul, on obtient que la  $(2n-1)$ -forme alternée  $(d_{w_e} \alpha)^{n-1} \wedge \alpha(w_e)$  est non nulle. Ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

Pour finir, rappelons que (voir définition 2.1.2 page 47 du chapitre 2), si  $(M, \alpha)$  est une  $(2n+1)$ -variété de contact, alors on appelle fibré de Legendre tout fibré lisse  $p : M \mapsto \beta$  dont les fibres sont des sous-variétés de Legendre. Pour en savoir plus, il est aussi possible de consulter les définitions 2.4.1, 2.4.2 et 2.4.3 de l'annexe B. Ainsi, on a la propriété suivante :

**Propriété 7.1.4.** *Considérons la  $(2n-1)$ -variété de contact  $(ST\mathbb{H}^n, \alpha)$  définie via la 1-forme de contact (7.1.0.6). Alors le fibré des sphères  $p : ST\mathbb{H}^n \mapsto \mathbb{H}^n$  est un fibré de Legendre.*

*Démonstration.* Considérons donc un point  $x \in \mathbb{H}^n$  ainsi que la fibre  $L_x = \{x\} \times \mathbb{S}_x^{n-1}$ . Il nous suffit alors de remarquer que  $T_{w_x} L_x = \{0\} \oplus T_u \mathbb{S}_x^{n-1}$  pour tout  $w_x = (x, u)$ . En particulier, la forme  $\alpha$  étant définie par l'expression (7.1.0.6), il est donc clair que  $\text{Ker}(\alpha_{w_x}) \subset T_{w_x} L_x$ .  $\square$

2. Le prolongement de la carte exponentielle  $x$  que nous considérons, correspond à l'application  $w : ST\mathbb{H}^n \mapsto T_e \mathbb{H}^n$  définie via l'expression  $w(p, u) = x(p)$ , pour tout  $(p, u) \in ST\mathbb{H}^n$ . En particulier, il nous faut noter que ce n'est pas un trivialisateur local du fibré des sphères. Ensuite, on définit les fonctions coordonnées  $w_i, \dots, w_n$  relativement à la base orthonormale  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  que nous avons précédemment considérée. Enfin, pour ne pas nous surcharger de notation redondante, nous confondrons volontairement les applications  $w$  et  $x$  ainsi que leurs fonctions coordonnées.

## 7.2 Structure de contact et hérissons sur l'espace hyperbolique

Dans cette section, nous montrons que tout g-hérisson et h-hérisson est le front legendrien d'une immersion de Legendre qui est caract eris e par une condition de contact correspondant au type de hérisson consid er e. En effet, rappelons qu'au chapitre 6, nous avons vu que les hérissons euclidiens étant définis via la condition de contact (voir (2.2.0.1) page 48) correspondent alors naturellement au front legendrien d'immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  de la forme  $i(u) = (u, x(u))$ .

### 7.2.1 Caractérisation des g-hérissons en géométrie de contact

Il nous faut commencer par remarquer que la condition d'injectivité correspondant aux géodésiques transverses et porteuses (voir les définitions 4.3.3 et 4.3.4 page 91) permet de définir une application de Gauss. En effet, si  $(\Sigma, N)$  est une hypersurface orientée, alors pour tout  $x \in \Sigma$ , on considère  $(\Gamma_x, N_x)$  le g-hyperplan orient e correspondant au prolongement géodésique de l'hyperplan tangent orient e  $(T_x\Sigma, N(x))$  comme nous l'avons défini via la relation (4.3.0.2) page 90. Alors pour  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, on appelle **application de Gauss centrée en  $e$** , l'unique application  $\nu : \Sigma \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  vérifiant que pour tout  $x \in \Sigma$ , la géodésique  $\gamma$  passant par le point  $e$    la vitesse  $\nu(x)$  pour l'instant  $t = 0$  vérifie que :

1. La géodésique  $\gamma$  intersecte orthogonalement le g-hyperplan  $\Gamma_x$  en  $x_0$ .
2. Si  $t_0$  est l'instant tel que  $\gamma(t_0) = x_0$  alors  $\partial_t \gamma(t_0) = N_x(x_0)$ .

**Propriété 7.2.1.** *Si  $(\Sigma, N)$  est une hypersurface orientée, alors en tout point  $e \in \mathbb{H}^n$ , l'application de Gauss centrée en  $e$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

*Démonstration.* D'abord, il est clair que la famille de g-hyperplans  $(\Gamma_x)_{x \in \Sigma}$  correspondant au prolongement géodésique des hyperplans tangents est lisse. Ainsi, en se plaçant dans le modèle de Klein centr e en  $e$ , on a que :

$$\Gamma_x = l(x)\nu(x) + \langle \nu(x) \rangle^\perp \tag{7.2.1.1}$$

avec  $l$  et  $\nu$  des fonctions lisses. Par conséquent, en remarquant que l'application  $\nu$  définie via la relation (7.2.1.1) correspond bien à l'application de Gauss centrée en  $e$ , on obtient le résultat recherché.  $\square$

#### 7.2.1.1 L'application orthonormale g eneralis ee

Dans cette section nous définissons l'application orthonormale g eneralis ee qui nous est nécessaire pour définir correctement la condition de contact pour les g-hérissons. Nous voulons donc une application  $N_e : \mathbb{H}^n \times \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$ , avec  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, vérifiant que pour toute hypersurface orientée  $(\Sigma, N)$ , nous ayons, en tout point  $x \in \Sigma$ ,

$$N_e(x, \nu(x)) = N(x) \tag{7.2.1.2}$$

avec  $\nu$  l'application de Gauss centrée en  $e$  que nous avons précédemment définie.

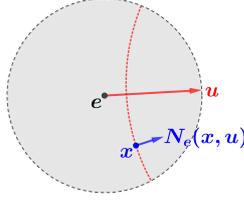


FIGURE 7.1 – Construction de l'application orthonormale généralisée

Pour définir le vecteur  $N_e(x, u)$ , avec  $x \in \mathbb{H}^n$  et  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on considère l'unique g-hyperplan orienté  $(\Gamma, N_0)$  passant par le point  $x$  et dont la géodésique  $\gamma$  passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  intersecte orthogonalement le g-hyperplan  $\Gamma$  au point  $x_0 = \gamma(t_0)$  tel que  $N_0(x_0) = \partial_t \gamma(t_0)$ . Pour cela, rappelons qu'en se plaçant dans le modèle de Klein centré en  $e$ , on a :

$$\psi_e(\Gamma) = l(x, u)u + \langle u \rangle^\perp \quad (7.2.1.3)$$

avec  $l(x, u) = \langle u | \psi_e(x) \rangle$ .

Ainsi, par construction, il est clair que l'application orthonormale généralisée correspond à une généralisation de la fonction de réindexation que nous avons introduite au chapitre 6 (voir définition 6.2.1 et propriété 6.2.1 page 140). Elle est donc définie par l'expression suivante :

$$N_e(x, u) = \mathcal{N} \circ \pi_x \circ \phi_e(x, u) \quad (7.2.1.4)$$

avec  $\phi_e(x, u) = u + l(x, u)e$  ainsi que  $\pi_x$  la projection orthogonale le long de la droite  $\mathbb{R}x$  et  $\mathcal{N}$  l'application de normalisation définie sur l'ensemble des vecteurs non nuls de type espace. Par conséquent, il est justifié de considérer la définition suivante :

**Définition 7.2.1.** *Considérons  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence. On appelle alors **application orthonormale généralisée centrée en  $e$**  le morphisme de fibré  $N_e : \mathbb{H}^n \times \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  vérifiant l'expression suivante :*

$$N_e(x, u) = (x, \mathcal{N}(u + k_e(x) \langle x | u \rangle e)) \quad (7.2.1.5)$$

avec  $k_e(x) = -\frac{1}{\langle x | e \rangle}$ .

**Avertissement 7.2.1.** *En pratique, tant que cela ne produira pas de confusion, nous considérerons que  $N_e(x, u)$  est le vecteur  $\mathcal{N}(u + k_e(x) \langle x | u \rangle e)$  sur l'hyperboloïde de Sitter  $dS^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} \text{ tel que } \langle x | x \rangle = 1\}$ .*

**Propriété 7.2.2.** *Pour tout point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ , l'application orthonormale généralisée centrée en  $e$  est une immersion.*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{N} : \mathbb{L}^{n+1} \setminus K \mapsto dS^n$  est l'application de normalisation avec  $\mathbb{L}^{n+1} \setminus K$  l'ensemble des vecteurs non nuls de type espace et  $dS^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} \text{ tel que } \langle x | x \rangle = 1\}$  l'hyperboloïde de Sitter, alors après un petit calcul, sa différentielle admet pour expression :

$$d_w \mathcal{N} \cdot \vec{W} = \beta(w) \left[ \vec{W} - \beta(w)^2 \langle w | \vec{W} \rangle w \right]$$

Il est alors clair que si les éléments  $w$  et  $\vec{W}$  forment une famille libre, alors le vecteur  $d_w \mathcal{N} \cdot \vec{W}$  est non nul. Considérons donc l'application  $\phi_e : \mathbb{H}^n \times \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{M}^{n+1}$  telle que  $\phi_e(w) = u + k_e(x) \langle x | u \rangle e$  avec  $w = (x, u)$ , et qui admet donc pour différentielle :

$$d_w \phi_e(\vec{W} \oplus \vec{V}) = \vec{V} + k_e(x) f_w(\vec{W} \oplus \vec{V}) e$$

où  $f \in \Omega_1(\mathbb{H}^n \times \mathbb{S}_e^{n-1})$  est une 1-forme différentielle. Il est alors clair que, dans l'hypothèse où  $d_w \phi_e(\vec{W} \oplus \vec{V})$  est non nul, la famille formée par les vecteurs  $\phi_e(w)$  et  $d_w \phi_e(\vec{W} \oplus \vec{V})$  est libre. Par conséquent, comme la différentielle de l'application  $N_e$  est :

$$d_w N_e(\vec{W} \oplus \vec{V}) = \vec{W} \oplus d_w[\mathcal{N} \circ \phi_e](\vec{W} \oplus \vec{V})$$

alors, dans l'hypothèse où la différentielle  $d_w N_e(\vec{W} \oplus \vec{V})$  est nulle, il est donc immédiat que les vecteurs  $\vec{W}$  et  $d_w[\mathcal{N} \circ \phi_e](\vec{W} \oplus \vec{V})$  sont nuls. Alors, par ce qui précède, il en est de même pour  $d_w \phi_e(\vec{W} \oplus \vec{V})$  et donc  $\vec{V} = 0$ .  $\square$

**Propriété 7.2.3.** *Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence. Alors, l'application orthonormale généralisée centrée en  $e$  est l'unique application vérifiant la relation (7.2.1.2) pour toute hypersurface orientée.*

*Démonstration.* Considérons  $N'_e$  une seconde application vérifiant la relation (7.2.1.2). Si  $(x, u) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{S}_e^{n-1}$ , alors il nous suffit de choisir une hypersurface orientée  $(\Sigma, N)$  contenant le point  $x$  telle que  $\nu(x) = u$ . Et alors, il est clair que :

$$N'_e(x, u) = N(x) = N_e(x, u)$$

d'où l'unicité.

A présent, considérons  $(\Sigma, N)$  une hypersurface orientée ainsi que  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence. En tout point  $x \in \Sigma$ , on définit le g-hyperplan  $\Gamma_x$  correspondant au prolongement géodésique de l'hyperplan tangent  $T_x \Sigma$ , ainsi que le point  $x_0(x)$  correspondant à l'intersection de la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $\nu(x)$  avec le g-hyperplan  $\Gamma_x$ . Alors, à partir de la relation (7.2.1.3), on a que les applications  $N$  et  $x_0$  admettent pour expressions :

$$\begin{cases} x_0(x) = CH h(x)e + SH h(x)\nu(x) \\ N(x) = SH h(x)e + CH h(x)\nu(x) \end{cases} \quad (7.2.1.6)$$

avec  $h(x) = \text{ArcTan}(\langle \nu(x) | \psi_e(x) \rangle)$ . Il est alors immédiat que :

$$N_e(x, \nu(x)) = \mathcal{N}(\nu(x) + k_e(x) \langle \nu(x) | x \rangle e) = \mathcal{N}\left(\nu(x) + \frac{SH h(x)}{CH h(x)} e\right) = N(x) \quad (7.2.1.7)$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

---

3. Nous précisons que l'application  $\nu$  correspond à l'application de Gauss centrée en  $e$  que nous avons définie précédemment.

### 7.2.1.2 Condition de contact pour les g-hérissons

Nous avons vu à la section 2.2 du chapitre 2 que la condition de contact (2.2.0.1) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application  $x : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  corresponde au paramétrage d'un hérisson euclidien. Il est alors important de noter que cette condition contient, dans son expression, la condition d'injectivité (voir définition 1.1.6 page 30) sur les hyperplans tangents. Par conséquent, il est naturel de s'appuyer sur les conditions d'injectivité<sup>4</sup> que nous avons introduites pour les g-hérissons et les h-hérissons afin de retrouver une bonne formulation de la condition de contact qui leur corresponde. Par conséquence, en notant que par définition, l'application orthonormale généralisée, que nous avons définie précédemment, contient toute l'information de la condition d'injectivité correspondant à la définition 4.3.4, il nous sera donc nécessaire de nous reposer dessus pour définir la condition de contact correspondant au g-hérisson. En particulier, nous pouvons considérer la propriété suivante :

**Propriété 7.2.4.** *Une application  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$  correspond au paramétrage d'un g-hérisson centré en  $e$  si et seulement si elle vérifie la condition suivante :*

$$\langle d_u x | \langle e | x(u) \rangle u - \langle u | x(u) \rangle e \rangle = 0 \quad (7.2.1.8)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

**Note.** *Par conséquent, il est alors naturel d'appeler **condition de contact centrée en  $e$**  la condition définie via la relation (7.2.1.8).*

*Démonstration.* Le paramétrage et le champ orthonormal d'un g-hérisson étant définis via les relations (4.4.1.3) page 96, relativement à un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ , alors après un petit calcul, nous pouvons facilement vérifier que tout g-hérisson centré en  $e$  vérifie la condition de contact (7.2.1.8).

Réciproquement, considérons  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$  une application lisse vérifiant la condition de contact (7.2.1.8). On définit alors  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  le champ de vecteurs vérifiant l'expression  $N(u) = N_e(x(u), u)$  ainsi que la famille de g-hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  telle que :

$$\Sigma_u = \exp_{x(u)} \left( \langle N(u) \rangle^\perp \right) \quad (7.2.1.9)$$

Ainsi, par construction, il est clair que l'application  $x$  correspond au paramétrage de l'enveloppe de la famille des g-hyperplans  $\Sigma_u$ . De plus, par définition de l'application de Gauss généralisée, il est clair que la famille de g-hyperplans, ainsi définie, est une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$ . Ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

### 7.2.1.3 Caractérisation des g-hérissons en géométrie de contact

Nous terminons cette section par la réalisation de la notion de g-hérisson comme étant le front legendrien d'un certain type d'immersion de Legendre définie via la condition de contact (7.2.1.8) que nous avons vue précédemment. Commençons donc par remarquer qu'une immersion de Legendre, à image sur le fibré des sphères  $TSH^n$  que l'on munit de la forme de contact définie via (7.1.0.6), est une immersion  $i : \Gamma \mapsto ST\mathbb{H}^n$  de la forme  $i(u) = (x(u), N(u))$ , avec  $x$  et  $N$  étant des applications lisses vérifiant la condition de contact  $\langle d_u x \cdot \vec{v} | N(u) \rangle = 0$ . Par conséquent, on considère les deux propriétés suivantes :

4. Voir la définition 4.3.4 et la section 5.3.2 des pages 91 et 116 pour un rappel sur les conditions d'injectivité qui correspondent respectivement aux notions de g-hérisson et h-hérisson.

**Propriété 7.2.5.** *Si  $e \in \mathbb{H}^n$  est un point de référence et  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$  une application lisse, alors l'application  $i : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$ , définie via l'expression  $i(u) = N_e(x(u), u)$ , est une immersion.*

*Démonstration.* Par la propriété 7.2.3 que nous avons vue précédemment, il nous suffit de remarquer que l'application qui, à  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , donne  $(x(u), u) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{S}_e^{n-1}$  est une immersion.  $\square$

**Propriété 7.2.6.** *Tout g-hérisson centré en  $e$  correspond au front legendrien d'une immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  défini via l'expression ci-dessous :*

$$i(u) = N_e(x(u), u) \quad (7.2.1.10)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

*Démonstration.* Il est clair que l'immersion  $i$  ainsi définie est une immersion de Legendre si et seulement si l'application  $x$  vérifie la condition de contacte (7.2.1.8). Par conséquent, en considérant la propriété 7.2.4, on obtient immédiatement le résultat recherché.  $\square$

#### 7.2.1.4 Les g-hérissons vus comme le front legendrien d'une immersion de Legendre dont l'application de Gauss est un difféomorphisme

À présent, nous souhaitons reformuler la propriété 7.2.6 ci-dessus pour l'exprimer sous une forme analogue à la propriété 2.4.1 du chapitre 2. En effet, à la section 2.4, nous avons introduit une proposition de généralisation de la notion de hérisson, consistant à considérer le front legendrien d'immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto STM$ , où  $(M, g)$  est une  $n$ -variété de Riemann, dont l'application de Gauss  $\nu : \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  est un difféomorphisme. Il est alors notable que la notion de hérisson, ainsi définie, nécessite de choisir une méthode permettant de définir une application de Gauss pour chaque immersion de Legendre. En particulier, dans cette section et la suivante, pour chaque type de hérisson (les g-hérissons et les h-hérissons) nous considérerons une méthode permettant de définir l'application de Gauss des immersions de Legendre qui leur correspond.

Dans le cas des g-hérissons, il nous faut donc définir l'application de Gauss associée à une immersion de Legendre de la même manière que nous l'avons fait pour les hypersurfaces au début de la section 7.2.1. Pour cela, considérons un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ . Rappelons que pour toute immersion de Legendre  $i : \Gamma \mapsto ST\mathbb{H}^n$ , il existe  $x : \Gamma \mapsto \mathbb{H}^n$  et  $N : \Gamma \mapsto d\mathbb{S}^n$ , des applications lisses telles que :

$$i(u) = (x(u), N(u)) \quad (7.2.1.11)$$

et qui vérifient la condition  $\langle d_u x \cdot \vec{v} | N(u) \rangle = 0$  pour tout  $u \in \Gamma$  et  $\vec{v} \in T_u \Gamma$ .

Ainsi, pour tout  $u \in \Gamma$ , on considère  $(\Sigma_u, \nu_u)$  l'unique g-hyperplan orienté contenant le point  $x(u)$  tel que  $\nu_u(x(u)) = N(u)$ . On appelle alors **application de Gauss centrée en  $e$**  l'unique application  $\nu : \Gamma \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  vérifiant que, pour tout  $u \in \Gamma$ , la géodésique  $\gamma$  passant par le point  $e$  à la vitesse  $\nu(u)$  intersecte orthogonalement le g-hyperplan  $\Sigma_u$  au point  $x_0 = \gamma(t_0)$  tel que  $\nu_u(x_0) = \partial_t \gamma(t_0)$ .

**Remarque 7.2.1.** *En reprenant les arguments des propriétés 7.2.1 et 7.2.3, l'application de Gauss centrée en  $e$  d'une immersion de Legendre est nécessairement de classe  $C^\infty$  et est l'unique application lisse vérifiant la relation (7.2.1.2).*

**Propriété 7.2.7.** *Tout g-hérison centré en  $e$  est (à difféomorphisme près de  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ ) le front legendrien d'une immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  dont l'application de Gauss centrée en  $e$  est un difféomorphisme.*

*Démonstration.* Il est clair que, si  $(\mathcal{H}, x)$  est un g-hérison centré en  $e$ , alors étant le front legendrien de l'immersion de Legendre  $i(u) = N_e(x(u), u)$ , c'est donc bien le front legendrien d'une immersion de Legendre dont l'application de Gauss centrée en  $e$  est un difféomorphisme.

Réciproquement, considérons  $i(u) = (x(u), N(u))$  une immersion de Legendre dont  $\nu$ , l'application de Gauss centrée en  $e$ , est un difféomorphisme ainsi que  $(\mathcal{H}, x)$  le front legendrien qui lui correspond. Par la remarque 7.2.1, nous savons que  $N(u) = N_e(x(u), \nu(u))$ . Il nous suffit alors de considérer l'immersion de Legendre  $j(u) = i \circ \nu^{-1}(u) = (x \circ \nu^{-1}(u), N \circ \nu^{-1}(u))$ . Nous pouvons alors vérifier que :

$$N \circ \nu^{-1}(u) = N_e(x \circ \nu^{-1}(u), u)$$

et donc par la propriété 7.2.6, nous avons bien que le front legendrien  $(\mathcal{H}, x \circ \nu^{-1})$  est un g-hérison centré en  $e$ .  $\square$

## 7.2.2 Caractérisation des h-hérissions en géométrie de contact

Dans cette section, nous retrouvons une propriété analogue aux propriétés 2.4.1 et 7.2.7 pour les h-hérissions, en définissant une application Gauss adéquate pour les immersion de Legendre. Pour ce faire, nous considérons, pour toute hypersurface orientée et immersion de Legendre, l'application de Gauss  $\nu_+$  telle que nous l'avons définie à la définition 5.1.3 page 104 par le prolongement géodésique du champ orthonormal (dans le sens positif),

### 7.2.2.1 L'application orthonormale horosphérique généralisée

Considérons donc  $(\Sigma, N)$  une hypersurface orientée. On appelle donc **application de Gauss** l'application lisse  $\nu : \Sigma \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  telle que pour tout  $x \in \Sigma$ , le point  $\nu(x)$  correspond à la limite à l'infini de la géodésique passant par le point  $x$  à la vitesse  $N(x)$ . De plus, pour  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, on appelle **application de Gauss centrée en  $e$**  l'application  $v : \Sigma \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  vérifiant la relation ci-dessous :

$$\nu(x) = p(e + v(x)) \tag{7.2.2.12}$$

avec  $p : \mathbb{L}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{P}^n$  la projection projective.

À présent, comme nous l'avons considéré à la section 7.2.1.1, nous devons définir une application  $N_e : \mathbb{H}^n \times \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$ , relativement à un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ , telle que :

$$N_e(x, v(x)) = N(x) \tag{7.2.2.13}$$

pour toute hypersurface orientée  $(\Sigma, N)$ . Considérons  $e \in \mathbb{H}^n$ , un point de référence. Nous devons déterminer l'expression de la vitesse  $N_e(x, u) \in \mathbb{S}_x^{n-1}$  correspondant à la géodésique  $\gamma$  passant par le point  $x$  et convergent à l'infini vers le point  $a = p(e + u)$ .

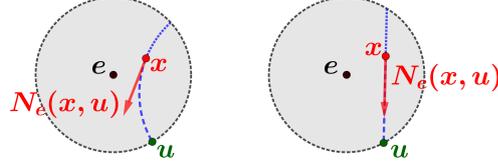


FIGURE 7.2 – Construction de l'application orthonormale horosphérique généralisée dans le modèle de Poincaré (à gauche) et dans le modèle de Klein (à droite)

En conséquence, plaçons-nous dans le modèle de Klein centré en  $e$  et considérons  $\tilde{\gamma} = \psi_e(\gamma)$ , correspondant à la géodésique  $\gamma$  sur  $\mathcal{D}(e)$ . Sans perte de généralité, supposons que  $\tilde{\gamma}(0) = x$  et que  $\tilde{\gamma}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} u$ . Comme dans le modèle de Klein, la géodésique  $\tilde{\gamma}$  correspond à un segment de droite affine, alors  $\partial_t \tilde{\gamma}_{\psi_e(x)}^u(0) \sim u - \psi_e(x)$ . Aussi, comme  $N_e(x, u) = (d_x \psi_e)^{-1} \cdot \partial_t \tilde{\gamma}_{\psi_e(x)}^u(0)$ , on obtient :

$$N_e(x, u) \sim d_{\psi_e(x)} \varphi_e(u - \psi_e(x)) \sim u + e + \langle x | e + u \rangle x$$

avec  $\|u + e + \langle x | e + u \rangle x\| = -\langle x | e + u \rangle$ . Par conséquent, il est justifié de considérer la définition suivante :

**Définition 7.2.2.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence. On appelle **application orthonormale horosphérique généralisée centrée en  $e$**  l'application  $N_e : \mathbb{H}^n \times \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  définie par l'expression suivante :

$$N_e(x, u) = -x - \frac{u + e}{\langle x | u + e \rangle} \quad (7.2.2.14)$$

**Note.** Il est particulièrement utile de remarquer que, par le lemme 5.4.1 page 125, le produit  $\langle x | u + e \rangle$  n'est jamais nul.

**Propriété 7.2.8.** L'application orthonormale horosphérique généralisée centrée en  $e$  est l'unique application vérifiant la relation 7.2.2.13 pour toute hypersurface orientée  $(\Sigma, N)$ .

*Démonstration.* Pour l'unicité, il nous suffit de reprendre les mêmes arguments que pour la propriété 7.2.3. Considérons donc  $(\Sigma, N)$  une hypersurface orientée ainsi que les applications  $\nu$  et  $v$  vérifiant la relation (7.2.2.12). Ainsi, pour un point  $x \in \Sigma$ , on a que par définition de l'application  $v$ , il existe  $\lambda > 0$  tel que  $e + v(x) = \lambda(x + N(x))$ . Par conséquent, on obtient que :

$$N_e(x, v(x)) = -x - \frac{e + v(x)}{\langle x | e + v(x) \rangle} = -x - \frac{x + N(x)}{\langle x | x + N(x) \rangle} = -x + x + N(x) = N(x)$$

ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

**Propriété 7.2.9.** L'application orthonormale horosphérique généralisée centrée en  $e$  est une immersion.

*Démonstration.* Si  $w = (x, u) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{S}_e^{n-1}$  et  $\vec{W} = \vec{X} \oplus \vec{V}$  alors la différentielle de l'application  $N_e$  admet pour expression  $d_x N_e \cdot \vec{W} = \left( \vec{X}, f(\vec{X}) + \alpha \langle x | \vec{V} \rangle (e + u) + \beta \vec{V} \right)$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires non nuls et  $f : T_x \mathbb{H}^n \mapsto \mathbb{L}^{n+1}$  une application linéaire. Par conséquent, il est immédiat que si  $d_x N_e \cdot \vec{W} = 0$  alors  $\vec{X} = 0$  et donc  $\vec{V} = 0$ .  $\square$

### 7.2.2.2 Les h-hérissos vus comme le front legendrien d'une immersion de Legendre dont l'application de Gauss est un difféomorphisme

En considérant les mêmes arguments que pour la propriété 7.2.4, nous pouvons vérifier que toute application  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$  est le paramétrage d'un h-hérisson si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\langle d_u x \cdot \vec{W} | e + u \rangle = 0 \quad (7.2.2.15)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

En particulier, il est justifié d'appeler **condition de contact** la condition (7.2.2.15). Aussi, il est facile de vérifier que tout h-hérisson correspond au front legendrien d'une immersion de Legendre  $i : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  de la forme  $i(u) = N_e(x(u), u)$ .

Par conséquent, en définissant, pour chaque immersion de Legendre  $i : \Gamma \mapsto ST\mathbb{H}^n$ , l'application de Gauss  $\nu : \Gamma \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  correspondant, pour tout  $u \in \Gamma$ , à la limite à l'infini de la géodésique passant par le point  $x(u)$  à la vitesse  $N(u)$ , nous obtenons la propriété suivante :

**Propriété 7.2.10.** *Tout h-hérisson est (à difféomorphisme de  $\mathbb{A}^{n-1}$  près) le front legendrien d'une immersion de Legendre  $i : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  dont l'application de Gauss est un difféomorphisme.*

*Démonstration.* Considérons donc  $i : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  une immersion de Legendre dont l'application de Gauss  $\nu : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  est un difféomorphisme. Il est alors immédiat que, pour tout point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ , l'application  $v : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  définie via la relation (7.2.2.12) est aussi un difféomorphisme. Par conséquent, pour un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ , il nous suffit de remarquer que :

$$i \circ v^{-1}(u) = N_e(x \circ v^{-1}(u), u)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Ainsi, en adaptant les arguments que nous avons considérés pour vérifier la propriété 7.2.4, on obtient le résultat recherché.  $\square$

## 7.3 Correspondance entre les g-hérissos et les h-hérissos et nouvelle caractérisation des g-hérissos en géométrie de contact

Dans cette dernière section, nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour que les notions de g-hérisson et h-hérisson correspondent. En effet, nous avons vu au chapitre 5 (voir propriété 5.3.5 page 123) qu'un h-hérisson n'est pas forcément un g-hérisson. Il est aussi possible de construire des g-hérissos qui correspondent localement à une horosphère et qui alors ne sont pas des h-hérissos. En effet, on peut observer que, puisqu'une horosphère est localement un g-hérisson, un g-hérisson n'est pas un h-hérisson lorsqu'en un point, il correspond localement à une horosphère. Pour les h-hérissos, nous pouvons aussi constater qu'un g-hyperplan est localement un h-hérisson, et donc un h-hérisson n'est pas un g-hérisson lorsqu'il correspond localement à un g-hyperplan.

**Propriété 7.3.1.** *Tout h-hérisson dont les courbures principales, partout où elles existent, ne sont jamais nulles, est un g-hérisson dont les courbures principales, partout où elles existent, ne valent jamais -1.*

*Démonstration.* Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  un h-hérisson. Alors, relativement à  $e \in \mathbb{H}^n$ , un point de référence, considérons les applications  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$  et  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$ , qui sont le paramétrage et le champ orthonormal centré en  $e$ . Ensuite, pour  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , considérons le point  $x_0 = x(u_0) \in \mathcal{H}$  ainsi que  $x_{x_0} : \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$  et  $N_{x_0} : \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$ , le paramétrage et le champ orthonormal centré en  $x_0$ . En considérant le vecteur  $v_0 \in \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  tel que  $x_{x_0}(v_0) = x_0$ , nous savons par la propriété 5.3.4 page 118 que la fonction de support  $h_{x_0} : \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  centrée en  $x_0$  vérifie les relations suivantes :

$$h_{x_0}(v_0) = 0 \text{ et } \vec{\nabla} h_{x_0}(v_0) = 0$$

et ainsi, on a que :

$$d_{v_0} x_{x_0} \cdot \vec{V} = Hess(h_{x_0})_{v_0} * \vec{V} \text{ et } d_{v_0} N_{x_0} \cdot \vec{V} = \vec{V} - Hess(h_{x_0})_{v_0} * \vec{V} \quad (7.3.0.1)$$

pour tout vecteur  $\vec{V} \in T_{v_0} \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$ .

Par conséquent, si  $\lambda$  est une valeur propre de la hessienne  $Hess(h_{x_0})_{v_0}$  et que  $\vec{V}$  est un vecteur propre qui lui est associé, alors par (7.3.0.1), il est immédiat que  $d_{v_0} x_{x_0} \cdot \vec{V} = \lambda \vec{V}$  et  $d_{v_0} N_{x_0} \cdot \vec{V} = (1 - \lambda) \vec{V}$ . Il est donc clair que les courbures principales existent lorsque les valeurs propres de la hessienne sont non nulles. Sans perte de généralité, supposons l'existence de toutes les courbures principales en  $x_0$ . Nous avons donc que le h-hérisson  $\mathcal{H}$  est localement une hypersurface orientée  $(\Omega, \vec{v})$  contenant le point  $x_0$ . Ainsi, le champ orthonormal  $\vec{v}$  vérifie la relation  $\vec{v} = N \circ x_{x_0}$ , et donc nous obtenons :

$$d_{x_0} \vec{v} \cdot \vec{V} = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \vec{V}$$

où  $d_{x_0} \vec{v}$  est l'opérateur de Weingarten en  $x_0$ . En particulier, les courbures principales admettent pour expression :

$$c_i = \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i}$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la hessienne. On obtient donc que les courbures principales, partout où elles existent, ne valent jamais -1. De plus, lorsqu'elles sont non nulles, la différentielle de l'application  $N_{x_0}$  en  $v_0$  est injective. Il en est alors de même pour l'application  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  en  $u_0$ .

À présent, en nous rapportant à la construction de la fonction de réindexation (voir l'expression (6.2.1.2) de la propriété 6.2.1 page 140), pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on considère  $\nu(u) = \mathcal{N} \circ \pi_e \circ N(u) \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , où  $\pi_e$  est la projection orthogonale le long de la droite  $\mathbb{R}e$ , ainsi que  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  la famille de g-hyperplans telle que :

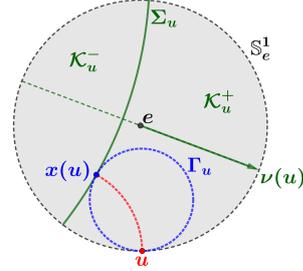
$$\Sigma_u = exp_{x(u)} \left( \langle N(u) \rangle^\perp \right)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

Il est alors clair que, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , le g-hyperplan  $\Sigma_u$  est orthogonal à la géodésique qui passe par le point  $e$  à la vitesse  $\nu(u)$ . Par conséquent, le h-hérisson  $\mathcal{H}$  correspondant à l'enveloppe de la famille de g-hyperplans que nous avons définie ci-dessus, il nous faut donc montrer qu'elle est co-orientée et donc que l'application  $\nu : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  est un difféomorphisme.

Pour cela, remarquons que si  $\vec{W} \in T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$  est un vecteur non nul alors, les éléments  $\pi_e \circ N(u)$  et  $\pi_e(d_u N \cdot \vec{W})$  forment une famille libre<sup>5</sup> et ainsi la différentielle  $d_u \nu \cdot \vec{W}$  est non nulle. On sait donc que l'application  $\nu : \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_e^{n-1}$  est un difféomorphisme local en tout point. En particulier, il est clair que l'application  $\nu$  est surjective et de degré non nul. Aussi, dans l'hypothèse où  $n \geq 3$  alors l'hypersphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  étant simplement connexe, il est donc immédiat que l'application  $\nu$  est un difféomorphisme. Il nous faut ainsi traiter le cas du plan hyperbolique. Supposons donc que  $n = 2$ .

Considérons, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^1$ , les parties compactes  $\mathcal{K}_u^+$  et  $\mathcal{K}_u^-$  correspondant aux demi-espaces dans  $\overline{\mathcal{D}(e)}$  bordés par la fermeture du g-hyperplan  $\overline{\Sigma_u}$ . Par convention, nous supposons donc que la partie  $\mathcal{K}_u^+$  contient le vecteur  $\nu(u)$ . Comme  $\mathcal{H}$  est un h-hérisson orienté négativement (voir section 5.3.4 page 123 du chapitre 5 pour plus de détails) alors, par définition, on a que les demi-espaces  $\mathcal{K}_u^+$  contiennent les horosphères  $\Gamma_u$ , pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^1$ . Supposons donc que l'application  $\nu : \mathbb{S}_e^1 \rightarrow \mathbb{S}_e^1$  soit de degré strictement supérieur à 1. Ainsi, il existe forcément  $u_0 \in \mathbb{S}_e^1$  tel que  $\nu(u_0) = -u_0$ .



Mais alors on a que l'horosphère  $\Gamma_{u_0}$  est comprise dans le demi-espace  $\mathcal{K}_{u_0}^-$ , ce qui n'est pas possible. Par conséquent, on sait que l'application  $\nu$  est de degré 1 et donc on obtient le résultat recherché.  $\square$

**Propriété 7.3.2.** *Tout g-hérisson dont les courbures principales, partout où elles existent, ne valent jamais -1, est un h-hérisson.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  un g-hérisson centré en  $e$  dont les courbures principales, partout où elles existent, ne valent jamais  $-1$ . Soient également  $x$  et  $N$  le paramétrage et le champ orthonormal centré en  $e$ . On considère alors l'application de Gauss  $\nu : \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$  telle que :

$$\nu(u) = p(x(u) + N(u))$$

où  $p$  est la projection projective.

Considérons  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Alors, par le théorème 6.4.1 page 152, nous pouvons supposer que  $x(u) = e$ . En particulier, si  $h$  est la fonction de support centrée en  $e$ , on a :

$$h(u) = 0 \text{ et } \vec{\nabla} h(u) = 0$$

et ainsi,  $d_u x \cdot \vec{W} = Hess(h)_u * \vec{W}$  et  $d_u N \cdot \vec{W} = \vec{W}$ . Considérons donc  $\sigma = x + N$  la carte de support centrée en  $e$  (voir section 5.4.3 page 131 du chapitre 5 pour en savoir plus), ainsi que  $\lambda$  une valeur propre de la hessienne  $Hess(h)_u$ , et  $\vec{W}$  un vecteur propre qui lui est associé. On calcule alors que  $d_u \sigma \cdot \vec{W} = (1 + \lambda)\vec{W}$ . De plus, lorsque la valeur propre  $\lambda$  est non nulle, il est immédiat qu'elle correspond à la courbure principale :

5. Pour plus de clarté, il est essentiel de bien noter que si les courbures principales, partout où elles existent, sont non nulles, alors le différentiel  $d_u N$  est toujours injectif. Pour vérifier cela, considérons, pour un vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , le point  $x_0 = x(u)$ , la fonction de support  $h_{x_0} : \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , le paramétrage  $x_{x_0} : \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \rightarrow \mathbb{H}^n$ , le champ orthonormal  $N_{x_0} : \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \rightarrow ST\mathbb{H}^n$  et le vecteur  $v_0 \in \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  tel que  $x_0 = x_{x_0}(v_0)$ . À présent, si  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  sont les valeurs propres de la hessienne  $Hess(h_{x_0})_{v_0}$ , alors d'après ce qui précède, elles sont toutes différentes de  $\lambda = 1$ . Ainsi, on a que le différentiel  $d_{v_0} N_{x_0}$  est injectif, et en particulier, il en est forcément de même pour le différentiel  $d_u N$ .

$$c = \frac{1}{\lambda}$$

Par conséquent, si toutes les courbures principales, partout où elles existent, ne valent pas  $-1$ , alors l'application de Gauss  $\nu$  est un difféomorphisme local en tout point. Aussi, en appliquant le même raisonnement que pour la propriété précédente, on obtient que l'application de Gauss  $\nu$  est nécessairement injective. On en déduit donc que  $\mathcal{H}$  est l'enveloppe d'une famille d'horosphères co-orientées.  $\square$

**Remarque 7.3.1.** *Il est possible de construire un  $g$ -hérisson  $\mathcal{H}$  admettant un point  $x$  pour lequel une des courbures principales est égale à  $-1$ . En effet, il suffit de définir sur le plan hyperbolique un  $g$ -hérisson dont la fonction de support  $h$  vérifie les trois conditions suivantes :*

$$h(0) = 0, \partial_t h(0) = 0 \text{ et } \partial_t^2 h(0) = -1 \quad (7.3.0.2)$$

*Et en particulier, d'après ce qui précède, il est clair que l'application de Gauss  $\nu$  n'est pas une immersion partout. Ainsi, nous savons construire un ensemble d'exemples de  $g$ -hérisson qui ne sont pas des  $h$ -hérisson.*

Enfin, notons que ces deux dernières propriétés nous permettent de compléter les caractéristiques respectives des deux définitions de la notion de hérisson sur l'espace hyperbolique par les avantages de l'autre. En particulier, on obtient le résultat suivant, grâce auquel nous raccordons la notion de hérisson sur l'espace hyperbolique à l'intuition que nous en avons eue sur l'espace euclidien.

**Définition 7.3.1.** *Considérons une immersion de Legendre  $i : \Gamma \mapsto ST\mathbb{H}^n$ , alors nous dirons que  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une **courbure principale en  $u \in \Gamma$**  si il existe un vecteur  $\vec{W} \in T_u\Gamma$  tel que :*

$$d_u N \cdot \vec{W} = \lambda d_u x \cdot \vec{W} \text{ et } d_u x \cdot \vec{W} \neq 0 \quad (7.3.0.3)$$

**Note.** *On rappelle que  $i(u) = (x(u), N(u))$ .*

**Théorème 7.3.1.** *Tout  $g$ -hérisson dont les courbures principales ne valent jamais  $-1$ , partout où elles existent, correspond<sup>6</sup> au front legendrien d'une immersion de Legendre  $\iota : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto ST\mathbb{H}^n$  vérifiant les deux points suivants :*

1. *L'application de Gauss  $\nu : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  est un difféomorphisme.*
2. *Les courbures principales, partout où elles existent, ne sont jamais nulles.*

**Note.** *Rappelons que l'application de Gauss que l'on considère est définie par le prolongement géodésique à l'infini du champ orthonormal.*

*Démonstration.* Via les propriétés 7.2.10, 7.3.1 et 7.3.2 que nous avons vues précédemment, c'est un résultat immédiat.  $\square$

---

6. Précisons que, dans le cadre des hypothèses du théorème, un  $g$ -hérisson correspond, relativement à un point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ , au front legendrien d'une immersion  $\iota$  via le difféomorphisme entre l'absolue  $\mathbb{A}^{n-1}$  et l'hypersphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  que nous avons considéré pour la propriété 5.1.1 page 104 du chapitre 5.

## Chapitre 8

# Dualité et caractérisation projective des g-hérissos

Dans ce chapitre, nous revenons sur les relations de dualité que nous avons introduites au chapitre 3 pour les hérissos euclidiens. En particulier, nous définissons et étudions le dual, sur l'espace projectif, des g-hérissos de l'espace hyperbolique et nous verrons qu'ils vérifient les mêmes conditions que pour les hérissos euclidiens, modulo quelques exigences supplémentaires. Il est alors à noter que cette correspondance justifie que l'on considère la notion de hérisson au regard de la géométrie projective.

### 8.1 Dualité entre les points et les g-hyperplans de l'espace hyperbolique et de l'espace de Sitter

Dans cette section, nous définissons des relations de dualité entre l'espace hyperbolique et l'espace de Sitter, relations qui nous seront nécessaires pour définir le dual des g-hérissos. Pour cela, nous nous reposons principalement sur l'article [30] dans lequel les auteurs ont pris soin de faire l'exposé des relations de dualité entre l'espace hyperbolique et l'espace de Sitter en adoptant une démarche générale via l'introduction d'espaces modèles (voir définition 8.1.1 ci-dessous). Rajoutons aussi que la motivation des auteurs provient du fait que la littérature sur la question est disparate et difficilement accessible. Pour en savoir plus, il est donc intéressant et utile de se rapporter à l'article [30] ainsi qu'à la thèse [28] de F.Fillastre dont les cinq premiers chapitres constituent un bon exposé des définitions et propriétés de base sur la question.

#### 8.1.1 Généralités sur les espaces modèles

Il est connu que les géométries elliptiques et hyperboliques peuvent être obtenues via la géométrie projective en définissant un absolu correspondant au quotient projectif du cône isotrope d'une forme quadratique. Pour approfondir, il est possible de consulter l'ouvrage [93] dans lequel l'auteur recense toutes les géométries qui peuvent être construites de cette façon. En particulier, nous adopterons cette démarche pour définir un modèle de l'espace hyperbolique et de l'espace de Sitter (voir définition 8.1.2 dans la section suivante).

Considérons donc  $b \in \wedge_1(\mathbb{R}^{n+1}) \otimes \wedge_1(\mathbb{R}^{n+1})$  une forme bilinéaire non dégénérée (et de signature  $(p, q)$ ). On appelle alors **pseudo-sphère** les parties définies comme ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_+(b) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } b(x, x) = 1\} \\ \mathcal{M}_-(b) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } b(x, x) = -1\} \end{cases} \quad (8.1.1.1)$$

ainsi que le **cône isotrope** :

$$\mathcal{I}(b) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } b(x, x) = 0\} \quad (8.1.1.2)$$

où il faut remarquer que c'est une hypersurface réglée (non régulière en  $x = 0$ ) dont le quotient projectif est une hypersurface dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_n$ .

Il est alors immédiat que les pseudo-sphères  $\mathcal{M}_+(b)$  et  $\mathcal{M}_-(b)$  sont des hypersurfaces dont les métriques induites par la forme  $b$  sont respectivement de signatures  $(p-1, q)$  et  $(p, q-1)$ . Par conséquent, on obtient des hypersurfaces que l'on peut orienter via l'application orthonormale  $\mathcal{N}(x) = x$ , et qui admettent donc une courbure de Gauss constante et respectivement égale à 1 et  $-1$ . Il est également important de remarquer que les sous-variétés totalement géodésiques de dimension  $p$ , sur les pseudo-sphères, correspondent à des intersections non vides de sous-espaces vectoriels de dimension  $p+1$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec les pseudo-sphères. En particulier, cette dernière remarque justifie la définition suivante :

**Définition 8.1.1.** *On appelle **espace modèle** toute partie de la forme  $\mathbb{M} = p(\mathcal{M})$  sur l'espace projectif, avec  $p$  la projection projective et  $\mathcal{M}$  une pseudo-sphère.*

**Note.** *Nous noterons  $\mathcal{M}$  et  $\mathbb{M}$  les pseudo-sphères et espaces modèles sans mentionner le signe de la courbure ni la métrique que nous avons considérée.*

**Propriété 8.1.1.** *Tout espace modèle  $\mathbb{M} \subset \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  est une  $n$ -variété pseudo-Riemannienne. De plus, les  $p$ -sous-variétés totalement géodésiques d'un espace modèle correspondent aux intersections non vides avec les  $p$ -sous-espaces projectifs.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que la restriction de la projection projective  $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  sur une pseudo-sphère  $\mathcal{M}$  est une immersion. En effet, si l'on considère un point  $x \in \mathcal{M}$  et un vecteur  $\vec{v} \in T_x\mathcal{M}$ , la forme bilinéaire  $b$  étant non dégénérée et  $x$  n'étant pas sur le cône isotrope, il est alors clair que la famille formée par les éléments  $x$  et  $\vec{v}$  est libre. Par conséquent, il est immédiat<sup>1</sup> que  $d_x p \cdot \vec{v}$  est non nul.  $\square$

### 8.1.2 Modèle de l'espace hyperbolique et de l'espace de Sitter sur l'espace projectif

Sur l'espace projectif, nous avons déjà considéré l'absolu  $\mathbb{A}^{n-1}$  (voir définition 5.1.1 page 104) correspondant à la projection du cône lumière. À présent, considérons les espaces modèles correspondant aux hyperboloïdes  $H^n$  et  $dS^n$  tels que :

$$\begin{cases} H^n = \{w \in \mathbb{M}^{n+1} \text{ tel que } \langle w|w \rangle = -1\} \\ dS^n = \{w \in \mathbb{M}^{n+1} \text{ tel que } \langle w|w \rangle = 1\} \end{cases} \quad (8.1.2.3)$$

En particulier, on appelle **hyperboloïde de Sitter** l'hyperboloïde  $dS^n$  qui, comme nous l'avons vu précédemment, est une variété de Lorentz de dimension  $n$  dont les courbures principales sont constantes et égales à 1.

1. Il suffit de considérer les expressions (8.4.0.1) et (8.4.0.2) page 181.

**Définition 8.1.2.** Sur l'espace projectif  $\mathbb{P}_n$ , on définit les deux espaces modèles  $\mathbb{H}^n = p(H^n)$  et  $d\mathbb{S}^n = p(dS^n)$  que l'on appelle respectivement **espace hyperbolique** et **espace de Sitter**.

**Remarque 8.1.1.** Il est utile de constater que la partie  $\mathbb{H}^n = p(H^n)$  munie de la métrique tirée en arrière  $p_*(g)$ , avec  $g$  étant la métrique induite par le produit de Minkowski sur l'hyperboloïde  $H^n$ , correspond bien à l'espace hyperbolique. De plus, si  $e \in \mathbb{H}^n$  est un point de référence (avec  $\mathbb{H}^n$  vu comme étant le demi-hyperboloïde) et  $f_e : \mathbb{P}_n \setminus H_e \mapsto T_e$  est la carte projective<sup>2</sup> centrée en  $e$ , alors il est clair que par construction, la restriction de l'application  $f_e \circ p$  sur le demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$  est la projection de Klein centrée en  $e$ . Par conséquent, il est justifié de considérer que la restriction de la carte projective  $f_e$  sur  $\mathbb{H}^n$  (vu comme étant l'espace modèle via la définition 8.1.2) correspond à la projection de Klein centrée en  $e$  (où  $e$  est un point sur  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{P}_n$ ).

**Propriété 8.1.2.** Les espaces  $\mathbb{H}^n$ ,  $d\mathbb{S}^n$  et  $\mathbb{A}^{n-1}$  sont respectivement ouverts, ouverts et fermés tels que l'absolue  $\mathbb{A}^{n-1}$  correspond à la frontière commune de la fermeture des espaces modèles  $\mathbb{H}^n$  et  $d\mathbb{S}^n$ . De plus  $\mathbb{P}_n$  admet une décomposition via l'union disjointe des trois espaces que nous avons considérés.

*Démonstration.* Rappelons d'abord que nous avons vu que  $\mathbb{A}^{n-1}$  est difféomorphe à l'hypersphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Il suffit alors de remarquer que l'absolue  $\mathbb{A}^{n-1}$  vérifie les trois relations suivantes :

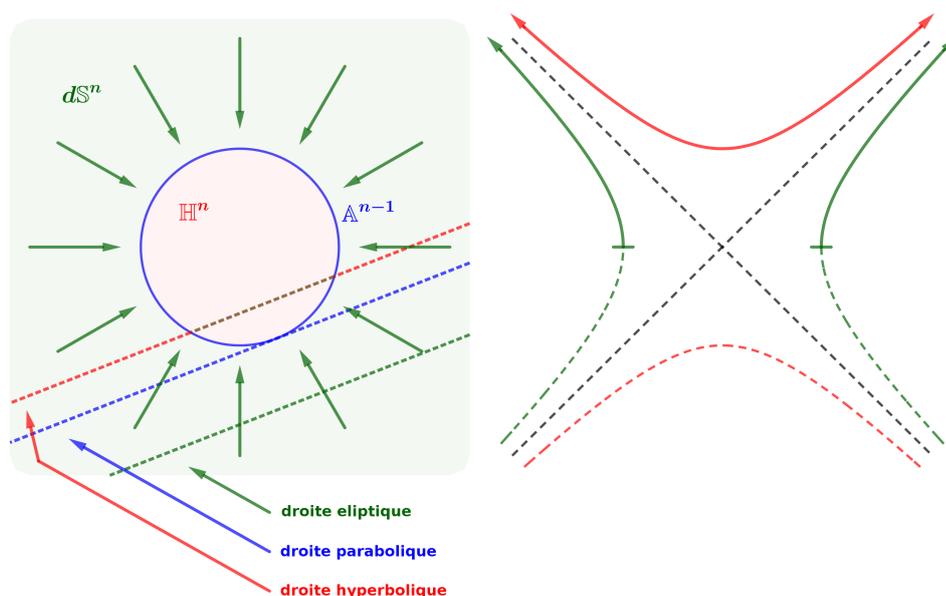
$$Ad(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1}, \quad Ad(d\mathbb{S}^n) = d\mathbb{S}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_n = \mathbb{H}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup d\mathbb{S}^n$$

ce qui termine la preuve. □

Pour terminer cette section, nous allons caractériser les  $p$ -sous-espaces projectifs sur  $\mathbb{P}_n$ . Un  $p$ -sous-espace projectif sera dit **hyperbolique** (resp. **parabolique** ou **elliptique**) s'il intersecte l'absolue en au moins deux points (resp. un seul et unique point ou aucun point).

---

2. Voir section 4.1 page 283 de l'annexe D pour en savoir plus sur la carte projective. Il est à noter que sur l'espace de Lorentz-Minkowski, et en particulier dans la remarque 8.1.1, la carte projective centrée en  $e$  est définie relativement au produit de Minkowski  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$ . Par conséquent, les parties  $T_e$  et  $H_e$  sont définies tel que  $T_e = T_e \mathbb{H}^n$  et  $H_e = p(T_e)$ .

FIGURE 8.1 – Caractérisation des sous-espaces projectifs selon l'absolu  $\mathbb{A}^{n-1}$ .

**Remarque 8.1.2.** *Un  $p$ -sous-espace projectif est hyperbolique (resp. parabolique ou elliptique) si et seulement s'il correspond à la projection d'un  $(p+1)$ -sous-espace vectoriel de type temps (resp. lumière ou espace).*

**Avertissement 8.1.1.** *On rappelle que lorsque l'on considère l'espace hyperbolique, il s'agit toujours du demi-hyperboloïde défini via l'expression (4.1.0.1) page 82. Malgré tout, lorsque cela ne risquera pas de produire de confusion, nous noterons par  $\mathbb{H}^n$  aussi bien le demi-hyperboloïde que l'espace modèle que nous avons considéré via la définition 8.1.2.*

Pour terminer cette section, il est intéressant de constater que, via les caractérisations des sous-espaces projectifs que nous venons de considérer, on a que l'absolu  $\mathbb{A}^{n-1}$ , correspondant au quotient projectif du cône isotrope pour le produit de Minkowski, permet bien de définir l'espace hyperbolique et l'espace de Sitter. En effet, un point  $x$  est sur l'espace hyperbolique (resp. l'espace de Sitter) si et seulement si toute droite projective qui contient le point  $x$  est de type hyperbolique (resp. il existe une droite elliptique qui contient le point  $x$ ). Cette remarque a pour objet d'illustrer la méthode<sup>3</sup> de construction d'une géométrie, sur l'espace projectif, via la définition d'une quadrique (voir définition 4.2.2 page 287 de l'annexe D). En particulier, comme nous l'introduisons à la section 4.2.3 de l'annexe D, nous pouvons aussi définir, relativement à une quadrique  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_n$ , des relations de dualité (i.e. relations de dualité polaire) qui correspondent à la géométrie définie (via le procédé précédent) par la quadrique  $\mathcal{C}$ .

### 8.1.3 Dualité projective sur l'espace de Sitter

La notion de dualité que nous allons considérer correspond à la notion de dualité projective que nous avons déjà étudiée via les définitions 3.1.1 et 3.1.2 page 57 du chapitre 3. Pour cela, considérons  $\mathcal{H}(\mathbb{H}^n)$  et  $\mathcal{H}(d\mathbb{S}^n)$ , qui correspondent respectivement à l'ensemble des  $g$ -hyperplans

3. Voir l'ouvrage [93] pour en savoir plus.

et à l'ensemble des hyperplans projectifs de type éclipique. Considérons donc les deux définitions suivantes :

**Définition 8.1.3.** Si  $x \in \mathbb{H}^n$  et  $L \in \mathcal{H}(\mathbb{H})$  sont un point et un  $g$ -hyperplan, alors on appelle **dual de  $x$**  (et resp. **dual de  $L$** ) l'hyperplan elliptique  $x^*$  dans  $\mathcal{H}(d\mathbb{S}^n)$  ainsi que le point  $L^*$  dans  $d\mathbb{S}^n$  tels que :

$$x^* = p(\langle x \rangle^\perp) \text{ et } L^* = p(v) \quad (8.1.3.4)$$

où  $v \in d\mathbb{S}^n$  est un vecteur pour lequel  $L = \mathbb{H}^n \cap \langle v \rangle^\perp$ .

**Définition 8.1.4.** Si  $\sigma \in d\mathbb{S}^n$  et  $H \in \mathcal{H}(d\mathbb{S}^n)$  sont un point et un hyperplan projectif de type elliptique, alors on appelle **dual de  $\sigma$**  (et resp. **dual de  $H$** ) le  $g$ -hyperplan  $\sigma^*$  dans  $\mathcal{H}(\mathbb{H}^n)$  ainsi que le point  $H^*$  dans  $\mathbb{H}^n$  tels que :

$$\sigma^* = \mathbb{H}^n \cap \langle v \rangle^\perp \text{ et } H^* = v \quad (8.1.3.5)$$

où le vecteur  $v$  correspond, pour le point  $\sigma$ , à  $v \in d\mathbb{S}^n$  tel que  $\sigma = p(v)$  et, pour l'hyperplan elliptique  $H$ , à  $v \in \mathbb{H}^n$  tel que  $H = p(\langle v \rangle^\perp)$ .

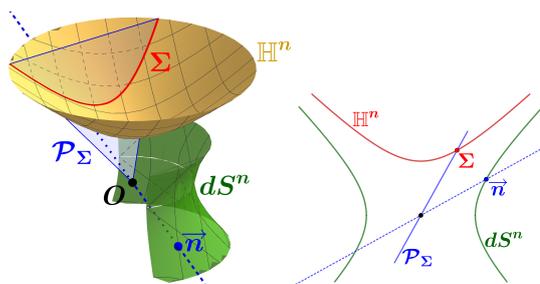


FIGURE 8.2 – Dual d'un  $g$ -hyperplan de  $\mathbb{H}^n$ .

**Remarque 8.1.3.** Il nous sera utile de rappeler que si  $L \subset \mathbb{H}^n$  est un  $g$ -hyperplan et  $x \in L$  un point, alors, en considérant l'hyperplan affine  $T_x \subset T_x \mathbb{H}^n$  tel que  $\psi_x(L) = T_x \cap \mathcal{D}(x)$ , on a  $L = \mathbb{H}^n \cap \mathcal{P}_L$ , où  $\mathcal{P}_L$  est l'hyperplan de type temps sur  $\mathbb{L}^{n+1}$  tel que  $\mathcal{P}_L = \mathbb{R}x \oplus T_x$ .

Il est alors immédiat que la notion de dualité que nous avons définie vérifie bien les relations de bidualité classiques. C'est-à-dire que pour tout point  $x \in \mathbb{H}^n$  (resp. dans  $d\mathbb{S}^n$ ) et  $g$ -hyperplan  $L \in \mathcal{H}(\mathbb{H}^n)$  (resp. hyperplan elliptique dans  $\mathcal{H}(d\mathbb{S}^n)$ ), on a :

$$x^{**} = x \text{ et } L^{**} = L \quad (8.1.3.6)$$

ainsi que,

$$x \in L \Leftrightarrow L^* \in x^* \quad (8.1.3.7)$$

Pour en savoir plus, il est possible de se référer au troisième chapitre de la thèse [28] dans lequel nous trouvons une présentation de la géométrie projective (traitant en particulier des polygones géodésiques et des hypersurfaces régulières) et fournissant quelques propriétés de dualité entre l'espace hyperbolique et l'espace de Sitter.

## 8.2 Duale projective d'un corps g-convexe

À partir des relations de dualité entre les points et les g-hyperplans (resp. les hyperplans elliptiques) de l'espace hyperbolique et de l'espace de Sitter, nous pouvons définir le dual projectif d'un corps g-convexe en adoptant la même démarche que celle que nous avons considérée pour la définition 3.1.3 page 57 du chapitre 3. Il nous faut savoir qu'il existe, bien sûr, d'autres méthodes pour définir le dual d'un corps g-convexe, comme nous pouvons le trouver à la section 2.4 de l'article [30]. L'intérêt de la démarche adoptée par les auteurs est qu'elle nous permet de définir le dual de corps g-convexe sur tout espace modèle. Il est à noter que pour les besoins de nos futurs développements, nous adopterons une méthode plus adaptée, mais qui est, bien sûr, équivalente aux autres méthodes qu'il est possible de considérer.

**Définition 8.2.1.** *Si  $K \subset \mathbb{H}^n$  est un corps g-convexe, alors on appelle **dual du corps  $K$**  la partie  $K^* \subset d\mathbb{S}^n$  vérifiant l'expression suivante :*

$$K^* = Ad\{y \in d\mathbb{S}^n \text{ tel que } y^* \cap K = \emptyset\} \cup \mathbb{H}^n \quad (8.2.0.1)$$

où  $\mathbb{H}^n$  correspond à l'espace modèle que nous avons introduit via la définition 8.1.2.

**Notation 8.2.1.** *Considérons  $e \in \mathbb{H}^n$  un point, alors pour ne pas nous surcharger de notation redondante, nous prendrons l'habitude de noter  $T_e = T_e\mathbb{H}^n$  et  $H_e = p(T_e \setminus \{0\})$ , avec  $p$  étant la projection projective.*

Rappelons que nous avons défini, à la section 3.1.2 du chapitre 3, la notion de corps convexe sur  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ , avec  $H_e$  l'hyperplan projectif défini par le point  $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ , comme étant les corps convexes de  $\mathbb{R}^n$  via l'identification avec  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ . Nous pouvons compléter cette définition telle qu'une partie  $K \subset \mathbb{P}_n$  est appelée **corps convexe** si il existe un hyperplan projectif  $H$  tel que  $K$  est un corps convexe sur  $\mathbb{P}_n \setminus H$  via l'identification entre  $\mathbb{P}_n \setminus H$  et  $\mathbb{R}^n$ . Pour en savoir plus, il est possible de se rapporter à la définition 4.3.1 et à la propriété 4.3.1 page 289 de l'annexe D.

**Propriété 8.2.1.** *Soit  $K \subset \mathbb{H}^n$  un corps g-convexe et  $e \in \text{Int}(K)$  un point de référence. Alors le dual projectif  $K^*$  est un corps convexe dans  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ , centré<sup>4</sup> en  $e$ , dont le bord  $\partial K^*$  est compris dans l'espace de Sitter  $d\mathbb{S}^n$  et est paramétré (via l'identification entre  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  et  $T_e$ ) par l'application  $x^* : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto T_e$  définie via l'expression ci-dessous :*

$$x^*(u) = \frac{1}{TH h(u)} u \quad (8.2.0.2)$$

où  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  est la fonction de support centrée en  $e$ .

*Démonstration.* Considérons l'espace euclidien  $\mathbb{E}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  et l'espace de Lorentz  $\mathbb{L}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot | \cdot \rangle_L)$ . A présent, on considère un point  $e \in \mathbb{H}^n$  ainsi que le vecteur  $e_0 \in \mathbb{S}^n$  qui est orthogonal à l'hyperplan  $T_e$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{E}^{n+1}$  et tel que le produit scalaire  $\langle e | e_0 \rangle$  soit strictement positif. Si  $L = lu + \langle u \rangle^{\perp L} \subset T_e$  est un hyperplan affine avec  $l \neq 0$  et  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , alors :

- Le dual de  $L$  dans l'hyperplan  $T_e$  selon<sup>5</sup> le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est :

$$L^* = p(u - le_0) \sim -\frac{1}{l}u \quad (8.2.0.3)$$

où  $\sim$  correspond à l'identification de  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  avec  $T_e$ .

4. On rappelle (voir les avertissements 1.1.2 et 4.2.1) que les corps convexes et les corps g-convexes sont tous considérés de classe  $\mathcal{C}_+^\infty$ . Ainsi, un corps convexe  $K \subset \mathbb{P}_n$  est dit centré en  $e$  lorsque  $e \in \text{Int}(K)$ .

- Le dual du g-hyperplan  $\varphi_e(L)$  dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  selon le produit de Minkowski  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$  est :

$$\varphi_e(L)^* = p(CH(ArcTan(l))u + SH(ArcTan(l))e) \sim \frac{1}{l}u \tag{8.2.0.4}$$

avec  $\varphi_e$  étant l'inverse de la projection de Klein.

Il nous sera utile de remarquer que pour la relation (8.2.0.3), nous considérons la relation de dualité entre les points et les hyperplans de l'espace euclidien  $(T_e, g_e)$  avec les hyperplans projectifs et les points sur  $\mathbb{P}_n \setminus \{e_0\}$  via les définitions 3.1.1 et 3.1.2 page 57. En particulier, il est justifié de parler de dualité relativement au produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  pour la relation (8.2.0.3) et de dualité relativement au produit de Minkowski  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$  pour la relation (8.2.0.4).

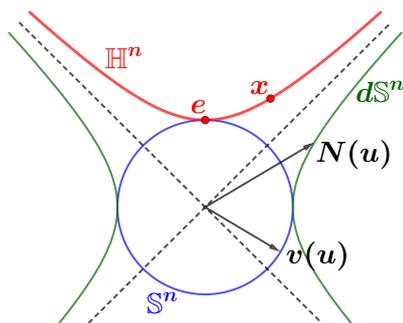


FIGURE 8.3 – Comparaison du dual d'un g-hyperplan avec le dual de l'hyperplan qui lui correspond via la projection de Klein.

Ensuite, si  $K \subset \mathbb{H}^n$  est un corps g-convexe, alors nous savons que  $\psi_e(K)$  est un corps convexe sur l'espace euclidien  $T_e$ , avec  $\psi_e$  étant la projection de Klein centrée en  $e$ . Ainsi, d'après ce qui précède, les duaux  $K^*$  et  $\psi_e(K)^*$  pour les produits respectifs  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$  et  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  vérifient que :

$$K^* = -\psi_e(K)^* \tag{8.2.0.5}$$

dans  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ , identifié à  $T_e$ . Ainsi, en considérant que  $e \in \text{Int}(K)$ , alors par la propriété 3.1.3 page 58 du chapitre 3, on obtient le résultat recherché. Enfin, pour définir le paramétrage  $x^* : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$ , il suffit de considérer le paramétrage  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \partial K$  (voir remarque 4.2.4 page 88 du chapitre 4). En effet, considérons la famille de g-hyperplans  $(T_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  tels que chaque  $T_u$  est le g-hyperplan de support en  $x(u)$  alors, par la relation (8.2.0.4), on a bien que le paramétrage  $x^*$  vérifie l'expression (8.2.0.2).  $\square$

**Remarque 8.2.1.** Si  $K \subset \mathbb{P}_n$  est un corps convexe tel que  $\mathbb{A}^{n-1} \subset \text{Int}(K)$ , alors tout hyperplan projectif dont l'intersection avec  $\text{Int}(K)$  est vide est forcément de type elliptique.

5. Nous entendons par dualité selon le produit  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  le fait de considérer les relations de dualité sur  $\mathbb{E}^{n+1}$  que nous avons introduites via les définitions 3.1.3 et 3.1.4 page 57 au chapitre 3. Plus précisément, si on considère un point  $x \in T_e$  et un hyperplan  $L \subset T_e$ , alors on définit l'hyperplan projectif  $x^* = p(\Sigma)$  et le point  $L^* = p(\mathbb{R}v)$ , où  $\Sigma$  et  $\mathbb{R}v$  sont un hyperplan et une droite sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  qui sont respectivement orthogonaux, pour le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , à la droite  $\mathbb{R}(e_0 + x)$  et à l'hyperplan  $\mathbb{R}e_0 \oplus L$ .

Pareillement, nous entendons par dualité selon le produit  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$  les points  $L^*$  et hyperplans  $x^*$  tels que  $\Sigma$  et  $\mathbb{R}v$  sont respectivement orthogonaux, selon le produit de Minkowski  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$ , à la droite  $\mathbb{R}(e + x)$  et à l'hyperplan  $\mathbb{R}e \oplus L$ .

**Définition 8.2.2.** *Considérons  $K \subset \mathbb{P}_n$  un corps convexe tel que  $\mathbb{A}^{n-1} \subset \text{Int}(K)$ . On appelle alors **dual de  $K$**  la partie  $K^* \subset \mathbb{H}^n$  telle que :*

$$K^* = \text{Ad}\{x \in \mathbb{H}^n \text{ tel que } x^* \cap K = \emptyset\} \quad (8.2.0.6)$$

**Propriété 8.2.2.** *Si  $K \subset \mathbb{P}_n$  est un corps convexe tel que  $\mathbb{A}^{n-1} \subset \text{Int}(K)$ , alors son dual  $K^*$  est un corps  $g$ -convexe dans  $\mathbb{H}^n$ . De plus, pour tout corps  $g$ -convexe  $K \subset \mathbb{H}^n$  et corps convexe  $K \subset \mathbb{P}_n$  contenant l'absolu dans son intérieur, alors leurs bidiaux vérifient la relation d'involution  $K^{**} = K$ , ce qui justifie que l'on parle de dualité.*

*Démonstration.* En reprenant les mêmes arguments que pour la relation (8.2.0.5), on peut vérifier que pour tout corps convexe  $K \subset \mathbb{P}_n$  contenant l'absolu dans son intérieur, alors si  $K^*$  est le dual pour le produit de Minkowski  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$  et  $K^\times$  le dual pour le produit scalaire (voir définition 3.1.4 page 58), alors on a :

$$\psi_e(K^*) = -K^\times \quad (8.2.0.7)$$

Ainsi, à partir des relations (8.2.0.5), (8.2.0.7) et en se reposant sur la propriété 3.1.3 page 58 du chapitre 3, on obtient bien que  $K^*$  est un corps  $g$ -convexe. Enfin, par les relations (8.2.0.5) et (8.2.0.7), il est clair que le bidual d'un corps  $g$ -convexe (resp. d'un corps convexe  $K \subset \mathbb{P}_n$  tel que  $\mathbb{A}^{n-1} \subset \text{Int}(K)$ ) vérifie la relation d'involution.  $\square$

**Remarque 8.2.2.** *En adaptant les arguments précédemment considérés afin de pouvoir les appliquer à la propriété 4.3.2 page 290 de l'annexe D, on obtient que :*

1. *Si  $K \subset \mathbb{H}^n$  est un corps  $g$ -convexe non réduit à un singleton (et donc pas forcément de classe  $\mathcal{C}^0$ ), alors  $K^{**} = K$ . Idem si  $K \subset \mathbb{P}_n$  est un corps convexe contenant l'absolu dans son intérieur.*
2. *Si  $K \subset \mathbb{H}^n$  est un corps  $g$ -convexe qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^0$ , alors son dual  $K^*$  n'est pas un corps convexe de  $\mathbb{P}_n$  et est compris dans un hyperplan elliptique. Il est à noter que sur  $\mathbb{P}_n$ , les corps convexes tels que  $\mathbb{A}^{n-1} \subset \text{Int}(K)$  sont forcément de classe  $\mathcal{C}^0$ .*
3. *Si  $K \subset \mathbb{H}^n$  est un corps  $g$ -convexe de classe  $\mathcal{C}^0$ , alors son dual  $K^*$  est un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^0$ .*
4. *Si  $K \subset \mathbb{P}_n$  est un corps convexe contenant l'absolu dans son intérieur, alors le dual  $K^*$  est un corps  $g$ -convexe de classe  $\mathcal{C}^0$ .*
5. *Si  $K \subset \mathbb{H}^n$  est un corps  $g$ -convexe de classe  $\mathcal{C}_+^k$ , avec  $k \geq 2$ , alors son dual est aussi un corps convexe de classe  $\mathcal{C}_+^k$ . Il en est de même pour les corps convexes  $K \subset \mathbb{P}_n$  contenant l'absolu dans leur intérieur.*

### 8.3 Duale projectif d'un $g$ -hérisson

En constatant que le bord  $\partial K^*$  du dual d'un corps  $g$ -convexe  $K \subset \mathbb{H}^n$  correspond au dual projectif du bord  $\partial K$ , défini comme étant la partie formée par le dual des  $g$ -hyperplans de support du corps  $K$ , il est alors justifié de définir le dual d'un  $g$ -hérisson  $\mathcal{H}$  comme étant la partie formée par le dual des  $g$ -hyperplans correspondant à la famille de  $g$ -hyperplans co-orientés dont l'enveloppe paramétrée est le  $g$ -hérisson  $\mathcal{H}$ .

### 8.3.1 Définition et première propriété

Considérons  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  une famille lisse de g-hyperplans (resp. d'hyperplans elliptiques) admettant une unique enveloppe paramétrée  $(\mathcal{H}, x)$  sur  $\mathbb{H}^n$  (resp.  $d\mathbb{S}^n$ ) au sens des définitions 3.2.2 et 4.4.1 des pages 62 et 95. On appelle alors **dual projectif de  $\mathbf{H}$**  la donnée de la partie  $\mathcal{H}^* \subset d\mathbb{S}^n$  (resp.  $\mathcal{H}^* \subset \mathbb{H}^n$ ) et de l'application  $x^* : \Gamma \mapsto \mathcal{H}^*$ , que l'on appelle **paramétrage**, telle que :

$$\mathcal{H}^* = x^*(\Gamma) \text{ et } x^*(u) = \Sigma_u^* \quad (8.3.1.1)$$

pour tout  $u \in \Gamma$ .

**Avertissement 8.3.1.** Afin de simplifier notre exposé, nous noterons  $\mathcal{H}^*$  le dual d'une enveloppe paramétrée, sans faire mention du paramétrage  $x^*$ .

**Définition 8.3.1.** Soit  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  un g-hérissseon centré en  $e$ , avec  $e$  un point de référence. Alors on appelle **dual projectif centré en  $e$**  la donnée de la partie  $\mathcal{H}^*$  et du paramétrage  $x^* : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto d\mathbb{S}^{n-1}$  défini via la relation (8.3.1.1).

**Propriété 8.3.1.** Soit  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  un g-hérissseon centré en  $e$ , de paramétrage  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$ . Alors, son dual projectif centré en  $e$  correspond à l'enveloppe paramétrée de la famille lisse d'hyperplans elliptiques  $(x(u)^*)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ . De plus, on a que son bidual vérifie la relation d'involution :

$$\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H} \quad (8.3.1.2)$$

ce qui justifie que l'on parle de dualité.

*Démonstration.* Pour le premier point, il suffit de remarquer que si  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$  est le paramétrage et  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto T\mathbb{H}^n$  le champ orthonormal d'un g-hérissseon  $\mathcal{H}$ , alors :

$$\langle x(u) | N(u) \rangle = 0 \quad (8.3.1.3)$$

et comme, par la condition de contact, on sait que  $\langle d_u x \cdot \vec{v} | N(u) \rangle = 0$ , alors on obtient forcément que  $\langle x(u) | d_u N \cdot \vec{v} \rangle = 0$ . Ainsi, si pour chaque  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  on considère l'hyperplan vectoriel  $P_u = \langle x(u) \rangle^\perp$  sur l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$ , alors il est clair que la condition de contact équivaut à :

$$d_u N \cdot \vec{v} \in P_u \quad (8.3.1.4)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

Ensuite, remarquons que par définition, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on a  $x(u)^* = p(P_u)$  et  $\Sigma_u^* = p(N(u))$ , où  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est la famille de g-hyperplans associée au g-hérissseon  $\mathcal{H}$ . Ce qui nous donne<sup>6</sup> donc le premier point. Enfin, la relation d'involution découle du fait que, par bidualité, il est immédiat que  $x(u)^{**} = x(u)$ .  $\square$

**Remarque 8.3.1.** Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  un g-hérissseon centré en  $e$ . Alors, une des conséquences immédiates de la propriété 8.3.1 et du théorème 6.4.1 est que : Si  $v_0 \in \mathbb{H}^n$  est un second point de référence, alors le dual projectif du g-hérissseon  $\mathcal{H}$ , relativement au point de référence  $e$ , correspond au dual projectif par rapport au point  $v_0$  via la fonction de réindexation<sup>7</sup>  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ . En particulier, il est justifié d'adopter la terminologie de **dual projectif**, sans faire mention du point de référence.

6. En effet, par la propriété 8.3.2 page 180 et à la relation (8.3.1.4), il est clair que pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on a que  $d_u x^* \cdot \vec{v} \in p(P_u) = x(u)^*$ .

7. Voir la définition 6.2.1 page 140 pour un rappel sur la fonction de réindexation.

### 8.3.2 Représentation du dual d'un g-hérisson sur l'hyperboloïde $dS^n$

À la section 3.2.1 du chapitre 3, nous avons vu qu'il était utile de représenter le dual d'un hérisson euclidien sur la sphère. Il est dès lors intéressant de constater que nous retrouvons naturellement cette représentation sur l'hyperboloïde de Sitter pour les g-hérissons hyperboliques. En effet, considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  un g-hérisson centré en  $e$ . Il est alors clair que nous pouvons définir la représentation du dual de  $\mathcal{H}$  sur l'hyperboloïde  $dS^n$  en considérant l'application  $s : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto dS^n$  telle que :

$$s(u) = N(u) = CH h(u)u + SH h(u)e \quad (8.3.2.5)$$

et qui correspond donc bien au graphe de la fonction de support sur l'hyperboloïde de Sitter en considérant l'hypersphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  comme "l'axe des abscisses".

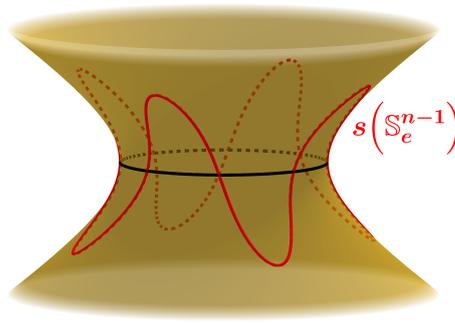


FIGURE 8.4 – Graphe de la fonction de support sur l'espace de Sitter

Ajoutons que, en considérant la relation de contact (8.3.1.4), nous retrouvons, comme c'est le cas pour la représentation sur la sphère du dual d'un hérisson euclidien, que  $s(\mathbb{S}_e^{n-1})$  est une hypersurface orientée sur l'espace de Sitter, dont le champ orthonormal (de type temps) correspond au paramétrage  $x$  du g-hérisson  $\mathcal{H}$ . L'intérêt de cette remarque provient des relations entre les caractéristiques géométriques d'un g-hérisson et de l'hypersurface orientée  $s(\mathbb{S}_e^{n-1})$  correspondant à la représentation de son dual sur l'hyperboloïde de Sitter.

**Propriété 8.3.2.** *Si  $y : \Gamma \mapsto dS^n$  est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et que l'application  $s : \Gamma \mapsto dS^n$  est un représentant de l'application  $y$  sur l'hyperboloïde de Sitter, alors l'application  $s$  est également de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et satisfait la relation suivante :*

$$y(u) + \text{Im}(d_u y) = p(\mathbb{R}s(u) \oplus \text{Im}(d_u s)) \quad (8.3.2.6)$$

pour tout  $u \in \Gamma$ .

**Note.** *Dans l'expression (8.3.2.6),  $y(u) + \text{Im}(d_u y)$  désigne l'unique sous-espace projectif contenant le point  $y(u)$  et dont le sous-espace tangent en  $y(u)$  est  $\text{Im}(d_u y)$ .*

*Démonstration.* Considérons donc  $y : \Gamma \mapsto dS^n$  et  $s : \Gamma \mapsto dS^n$ , deux applications lisses telles que  $y = p \circ s$ . La restriction de la projection  $p$  sur l'hyperboloïde de Sitter étant une immersion, il est clair que l'application  $s$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Ensuite, pour un vecteur  $u \in \Gamma$ , il suffit de remarquer que, par définition,  $H = y(u) + \text{Im}(d_u y)$  est l'unique sous-espace projectif tel que  $T_{y(u)}H = \text{Im}(d_u y)$ . En notant  $L = p(\mathbb{R}s(u) \oplus \text{Im}(d_u s))$ , il est déjà évident que  $y(u) \in L$ . Ensuite, considérons un vecteur tangent  $\vec{v} \in T_{y(u)}L$  et  $\gamma : I \mapsto L$  une courbe régulière définie

au voisinage de  $t = 0$ , telle que  $\gamma(0) = y(u)$  et  $\partial_t \gamma(0) = \vec{v}$ . Il est alors immédiat que la courbe  $\gamma$  est de la forme  $p \circ \beta$ , avec  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}s(u) \oplus \text{Im}(d_u y)$ . On a donc que  $\beta(0) \in \mathbb{R}s(u)$  et  $\vec{v} = d_{s(u)} p \cdot \partial_t \beta(0)$ , où  $\partial_t \beta(0) = \vec{w}_0 + \alpha s(u)$  et  $\vec{w}_0 \in \text{Im}(d_u s)$ . Par conséquent, on obtient que  $\vec{v} = d_{s(u)} p \cdot \vec{w}_0 \in \text{Im}(d_u y)$  et, comme les sous-espaces projectifs  $H$  et  $L$  ont la même dimension, on obtient le résultat recherché.  $\square$

## 8.4 Théorème de caractérisation projective

Dans cette section, nous adaptons pour les g-hérissos les théorèmes de caractérisation projective que nous avons considérés au chapitre 3 pour les hérissos euclidiens. En particulier, nous prendrons soin de bien mettre en avant le lien entre la condition d'existence d'un g-hérisson (voir théorème 4.4.1 page 97 du chapitre 4) et les caractéristiques du dual d'un g-hérisson sur l'espace projectif.

**Lemme 8.4.1.** *La restriction de la projection projective  $p$  sur l'hyperboloïde de Sitter  $dS^n$  est une immersion.*

*Démonstration.* Pour un point  $e \in \mathbb{H}^n$ , on considère  $f_e : \mathbb{P}_n \setminus H_e \rightarrow T_e$ , la carte projective centrée en  $e$ . Alors, pour tout  $w \in \mathbb{L}^{n+1} \setminus T_e$ , on a

$$f_e \circ p(w) = \alpha(w)w + e \text{ avec } \alpha(w) = -\frac{1}{\langle w|e \rangle} \quad (8.4.0.1)$$

et ainsi,

$$d_w[f_e \circ \pi] \cdot \vec{v} = \alpha(w)[\vec{v} + \alpha(w) \langle e|\vec{v} \rangle w] \quad (8.4.0.2)$$

pour tout  $\vec{v} \in T_w dS^n$ .

En conséquence, si on considère  $w \in dS^n \setminus T_e$  et  $\vec{v} \in T_w dS^n$ , alors en constatant que la famille formée par ces deux éléments est libre, on obtient le résultat recherché.  $\square$

**Théorème 8.4.1.** *Soit  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$  un g-hérisson centré en  $e$ . Alors son dual projectif  $\mathcal{H}^*$  vérifie les trois conditions ci-dessous :*

1. *Son paramétrage  $x^* : \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow dS^n$  est une immersion.*
2. *Toute droite hyperbolique intersecte  $\mathcal{H}^*$  en un ou deux points.*
3. *Les hyperplans tangents<sup>8</sup> de  $\mathcal{H}^*$ , vus comme hyperplans projectifs, sont elliptiques.*

*Démonstration.* Considérons  $\mathcal{H}$  un g-hérisson ainsi que  $e$  et  $v_0$  deux points. Comme nous l'avons vu à la remarque 8.3.1, il est clair que si  $x^* : \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow dS^n$  et  $x_{v_0}^* : \mathbb{S}_{v_0}^{n-1} \rightarrow dS^n$  sont les paramétrages définis via l'expression (8.3.1.1) et relativement aux points de référence  $e$  et  $v_0$ , alors on a :

$$x^* = x_{v_0}^* \circ \phi \text{ et } x^*(\mathbb{S}_e^{n-1}) = x_{v_0}^*(\mathbb{S}_{v_0}^{n-1}) \quad (8.4.0.3)$$

avec  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  la fonction de réindexation de  $e$  à  $v_0$ .

---

8. Lorsqu'une application  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_n$  est une immersion, alors nous appelons hyperplan tangent les hyperplans projectifs, que l'on note  $f(u) + \text{Im}(d_u f)$ , et qui correspondent à l'unique hyperplan projectif  $H$  contenant le point  $f(u)$  et dont l'espace tangent en  $f(u)$  est  $T_{f(u)}H = \text{Im}(d_u f)$ .

Considérons donc  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  la fonction de support centrée en  $e$ . Alors, nous avons vu que le paramétrage  $x^* : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto d\mathbb{S}^n$  centré en  $e$  est de la forme  $x^*(u) = p \circ s(u)$  avec :

$$s(u) = SH h(u)e + CH h(u)u \quad (8.4.0.4)$$

Sachant que la restriction de la projection projective sur l'hyperboloïde de Sitter est une immersion (voir lemme 8.4.1), il est immédiat que le paramétrage  $x^*$  est aussi une immersion. Ensuite, en remarquant que toute intersection  $s(\mathbb{S}_e^{n-1}) \cap (\mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}u)$  contient exactement deux points, alors nous en déduisons que toute droite projective passant par le point  $e$  intersecte l'image  $x^*(\mathbb{S}_e^{n-1})$  en un ou deux points. Aussi, si  $v_0 \in \mathbb{H}^n$  est un second point de référence, alors, avec les mêmes arguments, toute droite projective passant par le point  $v_0$  intersecte l'image  $x_{v_0}^*(\mathbb{S}_{v_0}^{n-1})$  en un ou deux points. Ce qui nous donne, en considérant la relation (8.4.0.3), que toute droite hyperbolique intersecte le dual  $\mathcal{H}^*$  en un ou deux points.

Pour le dernier point, il nous suffit de nous rapporter à la propriété 8.3.1 que nous avons vu précédemment. En effet, nous savons que si  $x$  est le paramétrage de  $\mathcal{H}$  centré en  $e$ , alors le dual  $\mathcal{H}^*$  correspond à l'enveloppe paramétrée de la famille d'hyperplans elliptiques  $(x(u)^*)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ .  $\square$

**Remarque 8.4.1.** *Il est intéressant de constater que la propriété sur les hyperplans tangents du dual d'un  $g$ -hérisson est aussi une conséquence de la condition (4.4.1.2) page 96 que doit vérifier une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  pour qu'elle admette une enveloppe. En effet, en considérant l'application  $s$  définie par l'expression (8.4.0.4), on a alors que :*

$$d_u s \cdot \vec{v} = \langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{v} \rangle x_0(u) + CH h(u) \vec{v}$$

où  $x_0(u) = CH h(u)e + SH h(u)u$ . Ainsi, si  $\vec{v} \in T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$  est non nul ;

$$\begin{aligned} \langle d_u s \cdot \vec{v} | d_u s \cdot \vec{v} \rangle &= CH h(u)^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{v} \rangle^2 \\ &\geq CH h(u)^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{\nabla} h(u)\|^2 \|\vec{v}\|^2 > 0 \end{aligned}$$

et, via la propriété 8.3.2, on obtient le résultat recherché.

**Lemme 8.4.2.** *Si  $y : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto d\mathbb{S}^n$  est une application lisse, alors la famille de  $g$ -hyperplans  $(y(u)^*)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est lisse.*

*Démonstration.* Il suffit de reprendre les mêmes arguments que nous avons considérés pour montrer le lemme 3.3.1 page 68.  $\square$

**Théorème 8.4.2.** *Considérons  $y : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto d\mathbb{S}^n$ , avec  $n \geq 3$ , une application lisse vérifiant les trois conditions suivantes :*

1. *C'est une immersion.*
2. *Toute droite hyperbolique coupe l'image  $y(\mathbb{A}^{n-1})$  en un ou deux points.*
3. *Les hyperplans tangents, vus comme hyperplans projectifs, sont elliptiques.*

*Alors, il existe un unique  $g$ -hérisson  $\mathcal{H}$  ainsi que, pour tout point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ , un difféomorphisme  $\nu : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  vérifiant que :*

$$y \circ f_e = x^* \circ \nu \quad (8.4.0.5)$$

où  $x^*$  est le paramétrage du dual  $\mathcal{H}^*$ , relativement au point  $e$ , et  $f_e : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  est le difféomorphisme défini par l'expression  $f_e(u) = p(e + u)$ .

*Démonstration.* Considérons  $y : \mathbb{A}^{n-1} \mapsto d\mathbb{S}^n$  une application lisse vérifiant les conditions du théorème ainsi qu'un point  $e \in \mathbb{H}^n$ . Il nous faut donc montrer que la famille de g-hyperplans  $(\Sigma_a)_{a \in \mathbb{A}^{n-1}}$  telle que  $\Sigma_a = y(a)^*$  est co-orientable en  $e$ . Pour cela, considérons le difféomorphisme  $f_e : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  tel que  $f_e(u) = p(e + u)$  et l'application  $y_e := y \circ f_e$ . On définit alors la famille de g-hyperplans  $(\Sigma_{f_e(u)})_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ . Par le lemme 8.4.2 que nous avons vu précédemment, on sait que la famille  $(\Sigma_{f_e(u)})_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est lisse. Il existe donc  $\nu : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  et  $k : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  deux fonctions lisses telles que :

$$\psi_e(\Sigma_{f_e(u)}) = l(u)\nu(u) + \langle \nu(u) \rangle^\perp$$

où  $l(u) = TH k(u)$  et  $\psi_e$  est la projection de Klein centrée en  $e$ . Ensuite, comme par bidualité, on a  $y_e(u) = \Sigma_{f_e(u)}^*$ , il est donc clair que  $y_e(u)$  est de la forme  $p \circ s_e(u)$  avec  $s_e(u) = SH k(u)e + CH k(u)\nu(u)$ . En particulier, comme par hypothèse, les hyperplans tangents de l'application  $y$  sont de type elliptique, alors on obtient que :

$$\langle d_u s_e \cdot \vec{v} | d_u s_e \cdot \vec{v} \rangle = (CH k(u))^2 \|d_u \nu \cdot \vec{v}\|^2 - \langle \vec{\nabla} k(u) | \vec{v} \rangle^2 > 0$$

pour tout vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  non nul.

Ce qui nous donne, en particulier, que pour tout vecteur  $\vec{v}$  non nul, la différentielle  $d_u \nu \cdot \vec{v}$  est également non nulle et donc l'application  $\nu$  est une immersion. Ainsi, comme  $\nu$  est une immersion et que l'hypersphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  est simplement connexe,  $\nu$  est un difféomorphisme. Il existe donc  $(\Gamma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$ , de fonction de support  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ , telle que :

$$\Gamma_{\nu(u)} = \Sigma_{f_e(u)} \text{ et } h \circ \nu(u) = k(u) \quad (8.4.0.6)$$

A présent, considérons l'immersion  $s : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto d\mathbb{S}^n$  définie par l'expression  $s(u) = SH h(u)e + CH h(u)u$ . Alors par (8.4.0.6), on a  $s_e(u) = s \circ \nu(u)$ , et ainsi, pour tout vecteur  $\vec{v} \in T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$  non nul, il est clair que  $d_u s \cdot \vec{v}$  est de type espace. Ainsi, on a que :

$$(CH h(u))^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{\nabla} h(u) | \vec{v} \rangle^2 > 0$$

pour tout vecteur  $\vec{v} \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  non nul.

En particulier, si  $\vec{\nabla} h(u) \neq 0$ , alors  $(CH h(u))^2 \|\vec{\nabla} h(u)\|^2 - \|\vec{\nabla} h(u)\|^4 > 0$ . Par conséquent, par le théorème 4.4.1 page 97, on sait que la famille de g-hyperplans  $(\Gamma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  admet une enveloppe qui correspond nécessairement à un g-hérisson.  $\square$

En reprenant les mêmes arguments que ceux considérés à la fin de la section 3.3 du chapitre 3, on obtient que, sur le plan hyperbolique, si  $y : \mathbb{A}^1 \mapsto d\mathbb{S}^2$  est une application lisse vérifiant les conditions du théorème précédent, alors il existe  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^2$  un unique g-hérisson dont le dual vérifie que  $\mathcal{H}^* = y(\mathbb{A}^1)$  et  $y = x^* \circ \nu$ , où  $\nu : \mathbb{A}^1 \mapsto \mathbb{S}_e^1$  est une immersion surjective de degré  $k \geq 1$ .

**Définition 8.4.1.** Si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$ , on appelle **dual de la famille**  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ , l'application  $\mu : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto d\mathbb{S}^n$  telle que  $\mu(u) = \Sigma_u^*$ .

**Remarque 8.4.2.** Par la remarque 8.4.1 et le théorème 8.4.2, il est immédiat qu'une famille de g-hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  co-orientée en  $e \in \mathbb{H}^n$  vérifie la condition d'existence (4.4.1.2) si et seulement si son dual projectif, au sens de la définition 8.4.1 ci-dessus, vérifie les trois conditions du théorème 8.4.2.

Pour conclure, il est intéressant de remarquer que le dual d'un g-hérisson de l'espace hyperbolique présente les mêmes caractéristiques que le dual d'un hérisson euclidien. Plus particulièrement, si  $\mathcal{H}$  est un g-hérisson de l'espace hyperbolique, alors pour des raisons géométriques évidentes, on a que pour tout point de référence  $e \in \mathbb{H}^n$ , le dual de  $\mathcal{H}$  correspond au dual du hérisson euclidien  $\psi_e(\mathcal{H})$  sur l'espace tangent  $T_e\mathbb{H}^n$ . On pourrait alors avancer l'idée que la notion de hérisson est plus naturelle sur l'espace projectif que dans l'espace euclidien, l'espace hyperbolique ou encore l'hypersphère.

## Chapitre 9

# Les pseudo-hérissons sur l'hypersphère

Sur l'espace hyperbolique, nous avons défini la notion de g-hérisson comme étant l'enveloppe paramétrée d'une famille de g-hyperplans co-orientés. En particulier, nous avons mis en évidence le fait que ce choix ne relève pas d'une construction canonique et correspond donc à un ensemble de caractéristiques qui doivent être vérifiées<sup>1</sup> pour pouvoir définir la notion de g-hérisson marginalement piégé. Il est alors naturel de vouloir adopter le même procédé pour les g-hérissons sur l'hypersphère  $\mathbb{S}^n$ . Cependant, il apparaît rapidement que les propriétés de la géométrie sphérique rendent insuffisante cette approche, qu'il nous faut alors compléter. L'objet de ce chapitre consiste donc à définir, étudier et classer les enveloppes de g-hyperplans co-orientés (que nous appelons pseudo-hérissons) de manière à mettre en évidence une sous-catégorie qui nous permettra d'obtenir une définition satisfaisante à la notion de g-hérisson sur l'hypersphère.

### 9.1 Modèle de l'hypersphère et notations usuelles

Il existe plusieurs modèles de l'hypersphère, en particulier les modèles définis via les projections gnomoniques et stéréographiques, qui correspondent respectivement à la projection de Klein et à la projection Poincaré que nous avons considérées sur l'espace hyperbolique. En ce qui nous concerne, nous travaillerons principalement avec la projection gnomonique. Considérons donc  $e \in \mathbb{S}^n$  un point de référence; alors, on appelle **demi-sphère ouverte centrée en e** la partie :

$$\Omega_e = \{x \in \mathbb{S}^n \text{ tel que } \langle x|e \rangle > 0\} \quad (9.1.0.1)$$

Comme pour la projection de Klein, la projection gnomonique consiste à projeter, sur l'hyperplan tangent  $T_e\mathbb{S}^n$ , tout point  $x \in \Omega_e$  en considérant  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\lambda x \in e + T_e\mathbb{S}^n$ . Ainsi, on appelle **projection gnomonique centrée en e** l'application  $\psi_e : \Omega_e \rightarrow T_e\mathbb{S}^n$  définie via l'expression suivante :

$$\psi_e(x) = k_e(x)x - e \quad (9.1.0.2)$$

avec  $k_e(x) = \frac{1}{\langle e|x \rangle}$ .

---

1. Voir début de la section 4.4 page 95

On peut alors vérifier que la projection gnomonique  $\psi_e$  est un difféomorphisme qui envoie les géodésiques de  $\Omega_e$  sur les droites de l'espace euclidien  $(T_e\mathbb{S}^n, g_e)$ .

**Remarque 9.1.1.** *A des fins calculatoires, il nous sera utile de noter que pour tout point  $x \in \Omega_e$  et vecteur  $\vec{v} \in T_x\mathbb{S}^n$ , la différentielle de la projection gnomonique centrée en  $e$  vérifie l'expression  $d_x\psi_e \cdot \vec{v} = k_e(x)[\vec{v} - k_e(x)\langle e|\vec{v}\rangle x]$ .*

Enfin, il nous sera nécessaire de considérer, relativement à un point de référence  $e \in \mathbb{S}^n$ , **l'hypersphère tangente centrée en  $e$**  comme étant la partie  $\mathbb{S}_e^{n-1} = S[T_e\mathbb{S}^n]$  sur l'espace tangent  $T_e\mathbb{S}^n$ , ainsi que **l'équateur centré en  $e$**  correspondant à la partie  $\mathcal{C}_e = \mathbb{S}^n \cap T_e$  sur l'hypersphère  $\mathbb{S}^n$ , où  $T_e$  est l'hyperplan orthogonal à la droite  $\mathbb{R}e$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Il nous faut donc noter qu'en pratique, il est clair que  $\mathbb{S}_e^{n-1} = \mathcal{C}_e$ , ce qui nous sera utile lorsque nous aborderons la question de la restriction du paramétrage d'un pseudo-hérissou sur la partie  $K = x^{-1}(\mathcal{C}_e)$  et qui correspond au problème du passage de l'équateur. (voir section 9.3 page 206 pour en savoir plus).

## 9.2 Généralités, problématiques et lemmes fondamentaux

Dans cette section, nous définissons la notion de pseudo-hérissou comme étant l'enveloppe d'une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés et montrons que, via cette définition, nous sommes nécessairement confrontés à un problème que nous appelons "le problème du passage de l'équateur". Ainsi, nous donnerons quelques exemples de pseudo-hérissous, nous assurant de la pertinence de cette problématique, et considérerons des propriétés topologiques sur les pseudo-hérissous, nous permettant de potentiellement<sup>2</sup> solutionner le problème du passage de l'équateur.

### 9.2.1 Définition et première remarque sur les pseudo-hérissous

Nous considérons, sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ , les mêmes définitions que celles que nous avons introduites dans l'espace hyperbolique (voir les définitions 4.2.2, 4.3.6, 4.3.7 des pages respectives 84 et 91) pour les notions de  $g$ -hyperplan, de famille de  $g$ -hyperplans co-orientés et de fonction de support. On appelle donc  **$g$ -hyperplan sur  $\mathbb{S}^n$**  toute hypersurface totalement géodésique, qui correspond nécessairement à l'intersection d'un hyperplan vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec l'hypersphère  $\mathbb{S}^n$ . Ainsi, relativement à un point de référence  $e \in \mathbb{S}^n$ , on considère les deux définitions suivantes :

**Définition 9.2.1.** *Une famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  est dite **lisse** lorsqu'en tout vecteur  $u_0 \in \Gamma$ , il existe  $N : \Omega \subset \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^n$  une fonction lisse définie au voisinage de  $u_0$  telle que :*

$$\Sigma_u = \mathbb{S}^n \cap \langle N(u) \rangle^\perp \quad (9.2.1.1)$$

pour tout  $u \in \Omega$ .

**Définition 9.2.2.** *Nous appellerons **famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$**  toute famille lisse de  $g$ -hyperplans orientés  $(\Sigma_u, \nu_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ , indexée sur l'hypersphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ , telle que : Pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , la géodésique  $\gamma_u$  passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  est orthogonale au  $g$ -hyperplan  $\Sigma_u$  et vérifie que si  $x_0 = \gamma(t_0) \in \gamma \cap \Sigma$ , alors  $\partial_t \gamma_u(t_0) = \nu_u(x_0)$ .*

Comme sur l'espace euclidien et sur l'espace hyperbolique, nous nous permettrons de noter  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  les familles de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  sans faire mention de l'orientation de

2. Nous faisons preuve de prudence du fait que, pour l'heure, la question du problème de passage de l'équateur reste encore ouverte et correspond aux conjectures 9.3.3 et 9.3.3. Néanmoins, il est clair que le lemme 9.2.2 page 205 constitue une bonne piste de travail, comme nous pouvons l'illustrer via le théorème 9.3.1 page 210.

chaque  $g$ -hyperplan. En particulier, l'information de l'orientation est, par construction, déjà contenue dans l'indexation de la famille de  $g$ -hyperplans.

**Définition 9.2.3.** Si  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  est une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ , alors nous appellerons **fonction de support centrée en  $e$**  (ou simplement **fonction de support**), toute fonction lisse  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  vérifiant la condition ci-dessous :

$$\gamma_u(h(u)) \in \Sigma_u \quad (9.2.1.2)$$

où  $\nu_u$  est le champ orthonormal correspondant à l'orientation du  $g$ -hyperplan  $\Sigma_u$  et  $\gamma_u$  est la géodésique qui passe par le point  $e$  à la vitesse  $u$  en l'instant  $t = 0$ .

**Note.** Il est alors clair que sur l'hypersphère, la fonction de support d'une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés n'est pas unique. En effet, si  $h$  est une fonction de support, alors  $h + 2k\pi$  l'est aussi, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ .

**Remarque 9.2.1.** Contrairement à ce que nous avons vu sur l'espace euclidien et sur l'espace hyperbolique, il est faux d'affirmer que toute famille de  $g$ -hyperplans co-orientés admet une fonction de support. Néanmoins, il nous sera toujours possible de la définir localement.

En effet, nous donnons ci-dessous l'exemple d'une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés centrés en  $e$  qui n'admet pas de fonction de support (de manière globale). Considérons donc  $k \in \mathbb{Z}^*$  un entier non nul et définissons la fonction  $f : [-1; 1] \mapsto \mathbb{R}$  via l'expression suivante :

$$f(t) = 2k\pi\alpha \int_0^t e^{-\frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s^2-1)^2}} ds \quad (9.2.1.3)$$

où  $\alpha$  est un facteur tel que  $f(1) = 2k\pi$ .

Il nous suffit donc de définir la famille de  $g$ -hyperplans  $\Sigma_u = \exp_{x_0(u)}(\langle N(u) \rangle^\perp)$  dont les fonctions  $x_0 : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^n$  et  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto x_0^*T\mathbb{S}^n$  vérifient les expressions suivantes :

$$\begin{cases} x_0(u) = \gamma_{e,u}f(\langle u_0|u \rangle) = \text{Cos } f(\langle u_0|u \rangle)e + \text{Sin } f(\langle u_0|u \rangle)u \\ N(u) = \varphi_{e,x_0(u)}(u) = \text{Cos } f(\langle u_0|u \rangle)u - \text{Sin } f(\langle u_0|u \rangle)e \end{cases} \quad (9.2.1.4)$$

avec  $u_0$  correspondant à un vecteur initial pris arbitrairement, ainsi que  $\gamma_{e,u} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^n$  et  $\varphi_{e,x_0(u)} : T_e\mathbb{S}^n \leftarrow T_{x_0(u)}\mathbb{S}^n$  étant respectivement la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  et le transport parallèle de  $e$  à  $x_0(u)$  le long de la géodésique  $\gamma_{e,u}$ . Il est alors clair que la famille des  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ , ainsi définie, est co-orientée en  $e$  mais n'admet pas de fonction de support. En particulier, toute fonction  $h$  globalement définie pour la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  et vérifiant la condition (9.2.1.2), n'est pas continue.

**Définition 9.2.4.** On appelle **pseudo-hérisson centré en  $e$** , toute enveloppe paramétrée d'une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ .

**Remarque 9.2.2.** Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  un pseudo-hérisson centré en  $e$  ainsi que, pour un vecteur  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , une fonction de support  $h : \Omega \subset \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  qui est définie au voisinage de  $u_0$ . Nous pouvons alors définir, sur le voisinage  $\Omega$ , la fonction  $x_0 : \Omega \mapsto \mathbb{S}^n$  ainsi que le champ de vecteurs  $N : \Omega \mapsto x_0^*T\mathbb{S}^n$  tels que :

$$x_0(u) = \text{Cos } h(u)e + \text{Sin } h(u)u \text{ et } N(u) = \text{Cos } h(u)u - \text{Sin } h(u)e \quad (9.2.1.5)$$

Ainsi, il est alors immédiat qu'il existe un champ de vecteurs  $\vec{G} : \Omega \rightarrow x_0^*T\mathbb{S}^n$  pour lequel la restriction du paramétrage de  $\mathcal{H}$  sur  $\Omega$  vérifie l'expression suivante :

$$x(u) = \exp_{x_0(u)}(\vec{G}(u)) \quad (9.2.1.6)$$

où, de plus,  $\vec{G}(u)$  est orthogonal à  $N(u)$ .

**Note.** Il est clair que pour tout  $u \in \Omega$ , on a  $x_0(u) = \gamma_{e,u}(h(u))$  et  $N(u) = \varphi_{e,x_0(u)}(u)$ , où  $\gamma_{e,u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  est la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  et  $\varphi_{e,x_0(u)} : T_e\mathbb{S}^n \rightarrow T_{x_0(u)}\mathbb{S}^n$  est le transport parallèle de  $e$  à  $x_0(u)$  le long de  $\gamma_{e,u}$ .

**Notation 9.2.1.** Nous noterons  $G(u) = \|\vec{G}(u)\|$  la fonction continue qui correspond à la norme du champ de vecteurs  $\vec{G}$  que nous avons précédemment défini via la relation (9.2.1.6).

**Propriété 9.2.1.** Soit  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ . Alors une application lisse  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$  correspond au paramétrage d'une enveloppe de la famille de  $g$ -hyperplans si et seulement si, au voisinage de tout point  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on a :

$$\langle d_u x \cdot \vec{\nu} | N(u) \rangle = 0 \quad (9.2.1.7)$$

où  $N$  est le champ de vecteurs défini via la relation (9.2.1.5).

**Note.** Il est alors justifié d'appeler **condition de contact** la condition (9.2.1.7).

*Démonstration.* En remarquant que chaque  $g$ -hyperplan vérifie que  $\Sigma_u = \mathbb{S}^n \cap \langle N(u) \rangle^\perp$ , alors le résultat recherché est immédiat.  $\square$

## 9.2.2 Exemples de $g$ -hérissos passant par leur équateur et hypothèses de classement

Considérons  $e \in \mathbb{S}^n$  un point de référence ainsi que la famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  définie telle que  $\Sigma_u = \mathcal{C}_e$ , pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Il est alors clair que c'est une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  dont l'une des enveloppes paramétrées est définie via le paramétrage  $x(u) = u$ . Ainsi, on a que l'équateur  $\mathcal{C}_e$  est un pseudo-hérisson centré en  $e$ . Nous pouvons alors faire les trois remarques suivantes :

1. Nous n'avons pas unicité de l'enveloppe paramétrée pour la famille des  $g$ -hyperplans définis tels que  $\Sigma_u = \mathcal{C}_e$ .
2. Le pseudo-hérisson  $\mathcal{C}_e$ , est une hypersurface orientée pour laquelle toutes les courbures principales sont nulles. Il est donc immédiat que le pseudo-hérisson  $\mathcal{C}_e$  ne vérifie pas les caractéristiques qui sont nécessaires pour définir la notion de  $g$ -hérisson marginalement piégé.
3. L'hypersurface  $\mathcal{C}_e$  n'est pas un pseudo-hérisson pour des points de référence distincts de  $e$  et  $-e$ . Ainsi, le pseudo-hérisson  $\mathcal{C}_e$  dépend fortement du choix du point de référence.

Par conséquent, il apparaît qu'il est nécessaire de classer les pseudo-hérissos de manière à pouvoir définir correctement la sous-catégorie qui nous permettra de justifier la définition de  $g$ -hérisson que nous considérerons au chapitre 10. Pour cela, nous allons considérer deux exemples de pseudo-hérissos, moins triviaux que celui que nous avons précédemment considéré, et qui nous permettront de formuler un ensemble d'hypothèses dont nous déduirons une méthode de classement. En particulier, notre intérêt va se porter sur le fait d'étudier les propriétés topologiques et géométriques des pseudo-hérissos passant par leur équateur (i.e.  $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e \neq \emptyset$ ).

### 9.2.2.1 Exemple d'un pseudo-hérisson qui passe par son équateur et occupe les demi-sphères nord et sud

Pour le premier exemple, considérons  $e \in \mathbb{S}^2$  un point de référence ainsi que l'application  $u(t) = (\text{Cos}(t), \text{Sin}(t), 0) \in \mathbb{S}_e^1$  et le champ de vecteurs  $\vec{e}_\theta(t) = (-\text{Sin}(t), \text{Cos}(t), 0)$ . On peut alors définir le paramétrage de l'enveloppe d'une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  en considérant l'application  $x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^2$  définie<sup>3</sup> par l'expression ci-dessous :

$$x(t) = \exp_{x_0(t)}(G(t)\vec{e}_\theta(t)) \quad (9.2.2.8)$$

avec  $x_0(t) = \text{Cos } h(t)e + \text{Sin } h(t)u(t)$  et  $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction lisse.

En se rapportant à la démonstration<sup>4</sup> de la propriété 10.1.1 page 214 du chapitre 10, on peut vérifier que lorsque  $\text{Cos } h(t_0) \neq 0$ , pour un instant  $t_0$ , alors, au voisinage de  $t_0$ , l'enveloppe de la famille de g-hyperplans est unique. En particulier, dans ce cas de figure, on a que la fonction  $G$  vérifie l'expression suivante :

$$G(t) = \text{ArcTan } V(t) \quad (9.2.2.9)$$

avec  $V(t) = \frac{1}{\text{Cos } h(t)} \partial_t h(t)$ .

Par conséquent, on définit la famille de g-hyperplans  $\Sigma_t$  dont la fonction de support est de la forme  $h(t) = \tilde{h}(\text{Sin}(t))$ , où  $\tilde{h}$  est la fonction définie telle que :

$$\tilde{h}(t) = \frac{\pi}{2} + \begin{cases} e^{-\frac{1}{(t-a)^2}} & \text{si } t > a \\ 0 & \text{si } t \in [-a; a] \\ -e^{-\frac{1}{(t+a)^2}} & \text{si } t < -a \end{cases} \quad (9.2.2.10)$$

avec  $0 < a < 1$ .

Il nous faut donc construire un paramétrage  $x : \mathbb{S}_e^1 \mapsto \mathbb{S}^2$  vérifiant la condition de contact<sup>5</sup> pour la famille de g-hyperplans  $\Sigma_t$  que nous avons définie précédemment. Pour cela, remarquons que pour tout instant  $t \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\text{Sin}(t) \in [-1; -a[ \cup ]a; 1], \quad (9.2.2.11)$$

il nous suffit de considérer  $G(t)$  défini via l'expression (9.2.2.9). Ainsi, on a que pour tout instant  $t \in \mathbb{R}$  vérifiant la condition (9.2.2.11), le paramétrage  $x$  est défini via la fonction  $G$  tel que :

$$G(t) = \text{ArcTan}\left(\text{Cos}(t)\tilde{V}(\text{Sin}(t))\right) \quad (9.2.2.12)$$

3. Il est à noter que l'application que nous considérons via l'expression (9.2.2.8) correspond à une application définie sur  $\mathbb{S}_e^1$  via le paramétrage  $u$ .

4. Il s'agit de considérer la relation (10.1.0.5) page 214 dont il nous faut constater qu'elle reste vraie au voisinage de tout vecteur  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  tel que  $\text{Cos } h(u_0) \neq 0$ , malgré le fait que la condition  $\text{Cos } h(u) \neq 0$  n'est pas toujours globalement vérifiée dans le cadre des pseudo-hérissons.

5. Pour rappel, si  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  est une famille lisse de g-hyperplans telle que  $\Sigma_u = \mathbb{S}^2 \cap \langle N(u) \rangle^\perp$ , alors la condition de contact est  $\langle d_u x \cdot \vec{v} | N(u) \rangle = 0$  et est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application  $x$  corresponde au paramétrage d'une enveloppe de la famille de g-hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$ .

avec  $\tilde{V}(t) = \frac{1}{\text{Cos } h(t)} \partial_t \tilde{h}(t)$ .

À présent, considérons l'application  $V(t) = \text{Cos}(t) \tilde{V}(\text{Sin}(t))$ . Alors, en se restreignant sur l'ensemble des instants  $t \in \mathbb{R}$  vérifiant la condition (9.2.2.11) et tels que  $\text{Cos}(t) > 0$ , on obtient que la fonction  $G$  vérifie les deux relations suivantes :

1. Lorsque pour un instant  $t$  on a que  $\text{Sin}(t) > a$  et est suffisamment proche de  $a$ , alors  $V(t) \sim -\frac{2\sqrt{1-a^2}}{(\text{Sin}(t)-a)^3} < 0$  et ainsi, la fonction  $G$  vérifie la relation suivante :

$$G(t) = \text{ArcTan } V(t) \sim -\frac{\pi}{2} - \text{ArcTan}\left(k(\text{Sin}(t) - a)^3\right) \quad (9.2.2.13)$$

avec  $k = -\frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}$ .

2. Lorsque pour un instant  $t$  on a que  $\text{Sin}(t) < -a$  et est suffisamment proche de  $-a$ , alors  $V(t) \sim -\frac{2\sqrt{1-a^2}}{(\text{Sin}(t)+a)^3} > 0$  et ainsi, la fonction  $G$  vérifie la relation suivante :

$$G(t) = \text{ArcTan } V(t) \sim \frac{\pi}{2} - \text{ArcTan}\left(k(\text{Sin}(t) + a)^3\right) \quad (9.2.2.14)$$

Nous pouvons aussi reconsidérer le même exercice dans le cas où  $\text{Cos}(t) < 0$  et alors il nous suffit de remarquer que l'on obtient symétriquement le même résultat. Pour finir, nous devons prolonger la fonction  $G$  sur la partie correspondant aux instants  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $\text{Sin}(t) \in [-a, a]$ . Pour cela, considérons la fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  telle que :

$$f(t) = \kappa \int_0^{\text{Sin}(t)} e^{-\frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s^2-a^2)^2}} ds \quad (9.2.2.15)$$

où  $\kappa$  est la fonction de normalisation telle que  $f(t) = 1$  lorsque  $\text{Sin}(t)^2 = a^2$ . Il nous est donc possible de choisir<sup>6</sup> de prolonger la fonction  $G$  sur tout  $\mathbb{R}$  tel que :

$$G(t) = \begin{cases} \text{ArcTan } V(t) & \text{si } t > a \text{ ou } t < -a \\ f(t) \left( -\frac{\pi}{2} - \text{ArcTan}\left(k(\text{Sin}(t) - a)^3\right) \right) & \text{si } t \in [0; a] \\ f(t) \left( \frac{\pi}{2} - \text{ArcTan}\left(k(\text{Sin}(t) + a)^3\right) \right) & \text{si } t \in [-a; 0] \end{cases} \quad (9.2.2.16)$$

Ainsi, en considérant le paramétrage  $x(t) = \exp_{x_0(t)}(G(t)\vec{e}_\theta(t))$ , on obtient un pseudo-hérissou qui passe par son équateur  $\mathcal{C}_e$  et occupe les deux demi-sphères  $\Omega_e$  et  $\Omega_{-e}$ . En particulier, nous pouvons représenter ce pseudo-hérissou comme ci-dessous :

6. Nous devons préciser que sur l'ensemble des instants tels que  $\text{Cos } h(t) \neq 0$ , le paramétrage  $x$  est unique du fait que la fonction  $G$  est définie via la relation (9.2.2.9). Mais ce n'est plus le cas lorsque l'on se place sur la partie correspondant aux instants  $t$  tels que  $\text{Cos } h(t) = 0$ . En particulier, il existe donc plusieurs manières de prolonger la fonction  $G$  sur cette partie et ainsi, il existe plusieurs enveloppes pour la famille de g-hyperplans que nous avons précédemment considérée.

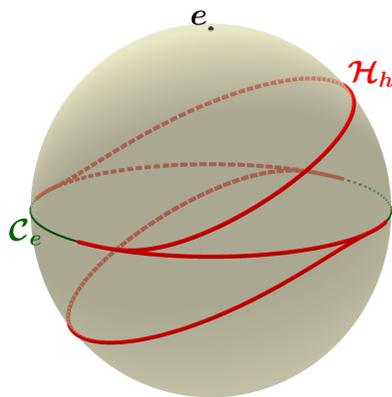


FIGURE 9.1 – Représentation d'un pseudo-hérissin qui passe par l'équateur et occupe les deux demi-sphères nord et sud.

Considérons donc la partie  $K = \{u \in \mathbb{S}_e^1 \text{ tel que } \text{Cos } h(u) = 0\}$ , alors il nous faut constater que la restriction du paramétrage  $x$  sur l'intérieur de  $K$  correspond à une hypersurface comprise sur l'équateur  $\mathcal{C}_e$  et qui est donc de courbure de Gauss nulle. En particulier, de ce qui précède, on sait que le pseudo-hérissin ainsi défini ne vérifie pas les conditions que nous recherchons.

### 9.2.2.2 Exemple de pseudo-hérissin qui passe par son équateur sans annuler ses courbures principales

En se reposant sur la remarque 9.2.4 page 200, on peut produire un exemple de pseudo-hérissin dont la courbure de Gauss est non nulle partout où elle existe et qui passe par son équateur. Pour cela, on commence par considérer la fonction lisse  $f : ]0; 1[ \rightarrow ]0; 1[$  définie via l'expression suivante :

$$f(t) = e^{1 - \frac{1}{t^2}} g(t) \quad (9.2.2.17)$$

avec  $g(t) = 1 - \frac{1}{2}t^N$  pour  $N$  assez grand (nous choisirons  $N = 20$  afin de définir la figure 9.2 ci-dessous). Ainsi, en choisissant  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  comme vecteur de référence, on définit la famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  correspondant à la fonction de support qui vérifie l'expression suivante :

$$h(u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - f(\langle u_0 | u \rangle) & \text{si } \langle u_0 | u \rangle \in ]0; 1] \\ \frac{\pi}{2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (9.2.2.18)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

Par conséquent, on sait que sur l'ensemble des vecteurs  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  vérifiant la condition  $\langle u | u_0 \rangle > 0$ , alors la famille de  $g$ -hyperplans admet une unique enveloppe dont le paramétrage est défini via l'expression (10.1.0.3) page 214. Considérons donc la partie :

$$K = h^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \{u \in \mathbb{S}_e^{n-1} \text{ tel que } \langle u | u_0 \rangle \leq 0\},$$

qui est alors une partie fermée dont le bord est une hypersurface orientée sur  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  et de normale sortante  $u_0$ . Ainsi, par la remarque 9.2.4, on sait qu'il nous suffit de prolonger sur la partie  $K$

le paramétrage que nous avons précédemment considéré tel que  $x(u) = u_0$ , pour tout  $u \in K$ . Alors, par construction de la fonction de support, on obtient bien une enveloppe paramétrée de la famille de g-hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$ . Il nous faut donc noter que sur  $\mathbb{S}_e^{n-1} \setminus K$ , on sait que la courbure de Gauss, partout où elle existe, est non-nulle. Aussi sur  $K$ , le paramétrage étant constant, alors la courbure de Gauss ainsi que les courbures principales ne peuvent être déterminées via le paramétrage centré en  $e$ .

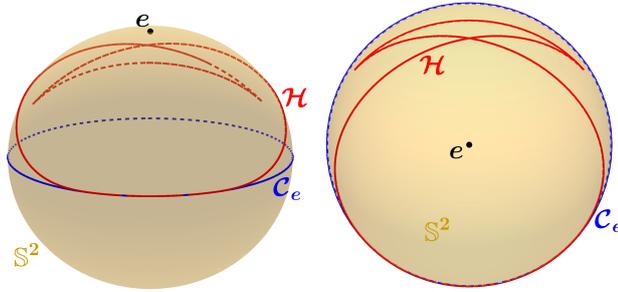


FIGURE 9.2 – Pseudo-hérisson de  $\mathbb{S}^2$  qui touche son équateur  $\mathcal{C}_e$  et dont la courbure de Gauss, partout où elle existe, n'est jamais nulle.

Il est clair que le pseudo-hérisson  $\mathcal{H}$  correspondant à l'enveloppe de la famille de g-hyperplans que nous avons définie via la fonction de support (9.2.2.18), vérifie que l'intersection  $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e$  est un singleton. À présent, considérons le point  $x_0 \in \mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e$  ainsi que  $\gamma \subset \mathbb{S}^n$  l'unique géodésique qui contient les points  $e$  et  $x_0$ . Considérons donc un second point de référence  $v_0 \in \gamma \cap \Omega_e$ . Alors, en supposant le point  $v_0$  suffisamment proche du point  $e$ , nous pouvons définir la fonction de réindexation<sup>7</sup> :

$$\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \setminus K \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1} \setminus \{\tilde{u}_0\} \quad (9.2.2.19)$$

où  $\tilde{u}_0 \in \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  est l'unique vecteur pour lequel la géodésique  $\gamma_{v_0, \tilde{u}_0}$ , qui passe par le point  $v_0$  à la vitesse  $\tilde{u}_0$ , coïncide avec la géodésique  $\gamma$  et vérifie que  $\partial_{t_0} \gamma_{v_0, \tilde{u}_0}(t_0) = -e$ , avec  $t_0$  étant l'instant tel que  $\gamma_{v_0, \tilde{u}_0}(t_0) = x_0$ . Par conséquent, en supposant  $v_0$  suffisamment proche de  $e$ , alors nous pouvons vérifier que  $\phi$  est un difféomorphisme et donc on définit la famille de g-hyperplans  $(\Gamma_u)_{u \in \mathbb{S}_{v_0}^{n-1} \setminus \{\tilde{u}_0\}}$  telle que  $\Gamma_u = \Sigma_{\phi^{-1}(u)}$ . Ainsi, en complétant cette famille par le g-hyperplan  $\Gamma_{\tilde{u}_0} = \mathcal{C}_e$ , alors par construction de la fonction de support  $h$ , il est clair que la famille de g-hyperplans  $(\Gamma_u)_{u \in \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}}$  est lisse et est donc une famille de g-hyperplans co-orientés en  $v_0$ . On obtient donc que le pseudo-hérisson  $\mathcal{H}$  centré en  $e$  est aussi un g-hérisson<sup>8</sup> centré en  $v_0$  et en particulier, vérifie que sa courbure de Gauss est non nulle partout où elle existe.

### 9.2.2.3 Hypothèse sur les pseudo-hérissons qui passent par leur équateur

À partir des trois exemples que nous avons considérés, il est clair que nous devons classer les pseudo-hérissons en nous reposant sur les propriétés associées au passage de l'équateur. Pour cela, commençons par définir quelques éléments de vocabulaire :

- Si  $e \in \mathbb{S}^n$  est un point de référence, alors on appelle **demi-sphère nord** et **demi-sphère sud** les demi-sphères  $\Omega_e$  et  $\Omega_{-e}$ .

7. Voir la définition 10.2.1 et la propriété 10.2.2 page 215 pour en savoir plus.

8. Un g-hérisson est un pseudo-hérisson contenu dans sa demi-sphère nord. L'intérêt de cette définition est que nous retrouvons une notion de hérisson qui vérifie (à quelques détails près) les mêmes propriétés que les g-hérissons de l'espace hyperbolique. Voir la section 10.1 page 213 du chapitre 10 pour en savoir plus.

- Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  est un pseudo-hérisson centré en  $e$ , alors on dira que le pseudo-hérisson  $\mathcal{H}$  **passé par son équateur** lorsque l'intersection  $\mathcal{C}_e \cap \mathcal{H}$  est non vide. De plus, nous dirons que le pseudo-hérisson **passé par son équateur en un seul point** lorsque  $\mathcal{C}_e \cap \mathcal{H}$  est un singleton.

Par conséquent, en nous basant sur les exemples que nous avons définis, il est justifié de considérer les trois hypothèses ci-dessous qui seront au centre des motivations du reste de ce chapitre.

1. Tout pseudo-hérisson qui passe par son équateur et occupe les demi-sphères nord et sud, est localement une hypersurface orientée dont la courbure de Gauss est nulle.
2. Tout pseudo-hérisson qui passe par son équateur en plus d'un point, est localement une hypersurface orientée dont la courbure de Gauss est nulle.
3. Tout pseudo-hérisson centré en  $e$  qui passe par son équateur en un seul point est un g-hérisson centré en  $v_0$ , où  $v_0$  est un second point de référence proche de  $e$ .

### 9.2.3 Lemme des points de l'équateur

Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  un pseudo-hérisson centré en  $e$ . Dans cette section, nous étudions les propriétés topologiques et géométriques de la partie  $K = x^{-1}(\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e)$ , où  $x$  est le paramétrage du pseudo-hérisson.

**Propriété 9.2.2.** *Considérons  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application lisse définie sur un intervalle ouvert centré en  $t = 0$  et vérifiant les deux points suivants :*

$$f(0) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ (resp. } f(0) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \text{ et } \text{Cos } f(t) \neq 0 \quad (9.2.3.20)$$

pour tout  $t \in I \setminus \{0\}$ .

Si  $\tilde{V} : I \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction lisse définie via l'expression  $\tilde{V}(t) = \frac{\partial_t f(t)}{\text{Cos } f(t)}$ , alors il existe  $(t_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ , deux suites définies respectivement sur  $\mathbb{R}_-^*$  et  $\mathbb{R}_+^*$ , qui tendent vers  $t = 0$  et telles que :

$$\tilde{V}(t_n^-) \longrightarrow +\infty \text{ et } \tilde{V}(t_n^+) \longrightarrow -\infty \quad (9.2.3.21)$$

et inversement respectif<sup>9</sup>.

*Démonstration.* En effet, considérons l'application lisse  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(t) = \frac{\pi}{2} + g(t)$  et alors, pour  $t \in I \setminus \{0\}$  proche de  $t = 0$ , on a que :

$$\frac{\partial_t f(t)}{\text{Cos } f(t)} = -\frac{\partial_t g(t)}{\text{Sin } g(t)} \sim_0 -\frac{\partial_t g(t)}{g(t)} = -\partial_t [\ln |g(t)|]$$

et ainsi, il nous suffit de remarquer que  $\ln |g(t)| \rightarrow -\infty$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . □

9. En effet, dans le cas de figure où  $f(0) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ , il existe  $(t_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ , deux suites qui convergent à gauche et à droite vers l'instant  $t = 0$  et vérifiant que les suites  $\tilde{V}(t_n^-)$  et  $\tilde{V}(t_n^+)$  convergent respectivement vers  $-\infty$  et  $+\infty$ .

**Propriété 9.2.3.** *Considérons  $k : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  une fonction lisse, partout positive ou nulle, définie sur un ouvert relativement compact<sup>10</sup>  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , tel que  $\vec{\nabla} k(u) \neq 0$  sur  $\Omega \setminus K$ , avec  $K = k^{-1}(\{0\})$ . De plus, on suppose qu'il existe  $\nu : \Omega \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  un champ de vecteurs tel que :*

$$\vec{\nabla} k(u) = R(u)\nu(u) \quad (9.2.3.22)$$

où  $R$  est une fonction positive<sup>11</sup> et continue.

Alors, la partie  $K$  est un corps<sup>12</sup> d'intérieur non vide dans  $\Omega$ , dont le bord  $\partial K$  est une hypersurface orientée, et dont la restriction du champ  $\nu$  correspond au champ orthonormal sortant.

**Note.** *Cette propriété reste vraie si  $k$  est une fonction partout négative ou nulle. En particulier, dans ce cas de figure, la restriction sur  $\partial K$  du champ  $\nu$  correspond au champ orthonormal entrant du corps  $K$ . Enfin, il est à noter que, pour plus de clarté, le gradient  $\vec{\nabla} k(u)$  n'est pas forcément non nul sur la partie  $K$ .*

*Démonstration.* Considérons  $u_0 \in \partial K$ , alors il existe  $\mathcal{W} \subset \Omega$  un ouvert centré en  $u_0$  ainsi que des champs de vecteurs  $\nu_2 : \mathcal{W} \mapsto \mathbb{S}^{n-1}, \dots, \nu_n : \mathcal{W} \mapsto \mathbb{S}^{n-1}$  tels que pour tout  $u \in \mathcal{W}$ , la famille  $(\nu(u), \nu_2(u), \dots, \nu_n(u))$  est une base orthonormale sur  $\mathbb{R}^n$ . En effet, il suffit de considérer une base orthonormale  $\beta_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , avec  $e_1 = \nu(u_0)$ , ainsi que la fonction lisse :

$$q(u) = \det_{\beta_0}(\nu(u), e_2, \dots, e_n)$$

Il est alors clair que  $q(u_0) = 1$  et donc, considérons la partie  $\mathcal{W} = q^{-1}(]0, +\infty[)$  qui est un ouvert. Ainsi, par l'application de l'algorithme de Gram-Schmidt, on obtient le résultat recherché. Par conséquent, pour tout vecteur  $\vec{v} = (v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , on définit le champ de vecteurs :

$$\chi_{\vec{v}} = v_2\nu_2 + \dots + v_n\nu_n$$

ainsi que  $\Gamma_{u, \vec{v}} : I(u, \vec{v}) \mapsto \mathcal{W}$  la courbe intégrale maximale passant par un point  $u \in \mathcal{W}$  en l'instant  $t = 0$  le long du champ  $\chi_{\vec{v}}$ . À présent, il nous faut remarquer que si, pour  $u \in \mathcal{W}$ ,  $\lambda > 0$  et  $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , on considère  $\Gamma_{u, \vec{v}}$  défini sur  $I(u, \vec{v}) = ]a, b[$ , alors la courbe intégrale  $\Gamma_{u, \lambda \vec{v}}$  est définie sur l'intervalle  $I(u, \lambda \vec{v}) = ]\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}[$  et admet pour expression :

$$\Gamma_{u, \lambda \vec{v}}(t) = \Gamma_{u, \vec{v}}(\lambda t) \quad (9.2.3.23)$$

En remarquant que nous travaillons sur le système d'équations aux dérivées ordinaires  $\partial_t \Gamma(t) = \chi_{\vec{v}} \circ \Gamma(t)$  paramétré sur  $\mathbb{R}^{n-1}$ , considérons le flot  $\mathcal{F} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{W}$  (qui est une application lisse) vérifiant l'expression  $\mathcal{F}(t, u, \vec{v}) = \Gamma_{u, \vec{v}}(t)$  et étant défini sur l'ouvert :

$$\mathcal{D} = \bigcup_{(u, \vec{v}) \in \mathcal{W} \times \mathbb{R}^{n-1}} I(u, \vec{v}) \times \{u, \vec{v}\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{W} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

La partie  $\mathcal{D}$  étant un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathcal{W} \times \mathbb{R}^{n-1}$  centré en  $(0, u_0, 0)$ , il existe alors  $a > 0$ , ainsi que  $r > 0$  et  $R_0 > 0$ , tels que  $]-a, a[ \times B(u_0, r) \times B(R_0) \subset \mathcal{D}$ , avec  $B(u_0, r) \subset \mathcal{W}$  et  $B(R_0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  correspondant à des boules ouvertes respectivement centrées en  $u_0$  et zéro. Ensuite, par ce qui

10. Une partie  $\Omega$  est dite relativement compacte lorsque son adhérence est compacte.

11. Il est à noter que, par définition du gradient de la fonction  $k$ , la fonction  $R$  est strictement positive et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega \setminus K$ .

12. On rappelle qu'une partie  $K$  est appelée corps si c'est un compact d'intérieur vide, ou un compact d'intérieur non vide correspondant à la fermeture de son intérieur.

précède, on a que pour tout  $\lambda > 0$ ,  $] -\frac{a}{\lambda}, \frac{a}{\lambda} [ \times B(u_0, r) \times B(\lambda R_0) \subset \mathcal{D}$  et, en particulier, il est possible de choisir  $\lambda > 0$  tel que, en posant  $R = \lambda R_0$ , on ait que :

$$[-1, 1] \subset I(u, \vec{v})$$

pour tout  $(u, \vec{v}) \in B(u_0, r) \times B(R)$ .

À présent, on définit l'application  $\phi : B(u_0, r) \times B(R) \mapsto \mathcal{W}$  telle que  $\phi(u, \vec{v}) = \mathcal{F}(1, u, \vec{v})$ , qui est clairement une application lisse. Ensuite, considérons un point  $u \in B(u_0, r)$  ainsi que deux vecteurs  $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$  et  $\vec{W} = (W_2, \dots, W_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Alors, il nous faut calculer la différentielle  $d_{(u_0, 0)}\phi(\vec{X}, \vec{W})$ . Pour cela, on a que :

$$d_{(u_0, 0)}\phi \cdot (\vec{X}, \vec{W}) = d_u[\mathcal{F}(1, u, 0)] \cdot \vec{X} + W_2 \partial_{\lambda_2}[\mathcal{F}(1, u, \lambda_2 v_2)]_{\lambda_2=0} + \dots + W_n \partial_{\lambda_n}[\mathcal{F}(1, u, \lambda_n v_n)]_{\lambda_n=0}$$

avec  $(v_2, \dots, v_n)$  correspondant à la base canonique de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . D'abord, remarquons que  $\mathcal{F}(1, u, 0) = u$  pour tout  $u \in B(u_0, r)$  et ainsi on obtient que  $d_u[\mathcal{F}(1, u, 0)] \cdot \vec{X} = \vec{X}$ . Ensuite, comme par (9.2.3.23) on sait que  $\mathcal{F}(1, u, \lambda_i \vec{v}_i) = \mathcal{F}(\lambda_i, u, \vec{v}_i)$ , il est clair que  $\partial_{\lambda_i}[\mathcal{F}(1, u, \lambda_i v_i)]_{\lambda_i=0} = \nu_i(u)$ . On obtient donc finalement que :

$$d_{(u_0, 0)}\phi \cdot (\vec{X}, \vec{W}) = \vec{X} + W_2 \nu_2(u) + \dots + W_n \nu_n(u) \quad (9.2.3.24)$$

pour tout  $u \in B(u_0, r)$ .

À présent, considérons  $\gamma : I \mapsto B(u_0, r)$  la courbe intégrale maximale passant par le point  $u_0$  à l'instant  $t = 0$  le long du champ  $\nu$ , avec  $I = ]a, b[$  tel que  $a < 0 < b$ . Alors, on définit la fonction lisse  $f : I \times B(R) \mapsto \mathcal{W}$  telle que  $f(t, \vec{v}) = \phi(\gamma(t), \vec{v})$ . Ainsi, pour tout instant  $t \in I$  et couple  $(T, \vec{W}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ , alors, par (9.2.3.24), on a que :

$$d_{(t, 0)}f \cdot (T, \vec{W}) = T\nu \circ \gamma(t) + W_2 \nu_2 \circ \gamma(t) + \dots + W_n \nu_n \circ \gamma(t)$$

En particulier, par le théorème d'inversion local, on sait que pour tout  $t \in I$ , il existe deux ouverts  $\mathcal{V}_t \subset I \times B(R)$  et  $\mathcal{W}_t \subset B(u_0, r)$  respectivement centrés en  $(t, 0)$  et  $\gamma(t)$  tels que la restriction  $f : \mathcal{V}_t \mapsto \mathcal{W}_t$  est un difféomorphisme. Ensuite, en notant  $L_s = k^{-1}(\{s\})$ , pour tout  $s \in \text{Im}(k)$ , il nous faut remarquer que pour tout  $u \in B(u_0, r)$  et  $\vec{v} \in B(R)$ , on a toujours :

$$\phi(u, \vec{v}) \in L_{k(u)} \quad (9.2.3.25)$$

En effet, pour tout  $u \in B(u_0, r)$  et  $\vec{v} \in B(R)$ , considérons  $\Gamma : J \mapsto \mathcal{W}$  la courbe intégrale maximale passant par le point  $u$  à l'instant  $t = 0$  le long du champ de vecteur  $\chi_{\vec{v}}$  ainsi que l'application lisse  $\tilde{k} = k \circ \Gamma : J \mapsto \mathbb{R}$ . Alors, on a que, pour tout  $t \in J$  :

$$\partial_t \tilde{k}(t) = \langle \vec{\nabla} k \circ \Gamma(t) | \partial_t \Gamma(t) \rangle = R \circ \Gamma(t) \langle \nu \circ \Gamma(t) | \chi_{\vec{v}} \circ \Gamma(t) \rangle = 0$$

et donc la fonction  $\tilde{k}$  est constante.

À présent, considérons la fonction lisse  $\tilde{k} := k \circ \gamma : I \mapsto \mathbb{R}$  et remarquons que pour tout instant  $t \in I$ , sa dérivée vérifie que :

$$\partial_t \tilde{k}(t) = \langle \vec{\nabla} k \circ \gamma(t) | \partial_t \gamma(t) \rangle = R \circ \gamma(t), \quad (9.2.3.26)$$

on sait donc que la fonction  $\tilde{k}$  est croissante. En particulier, si pour  $t_0 > 0$  on a que  $\gamma(t_0) \in \Omega \setminus K$  alors par (9.2.3.26) la fonction  $\tilde{k}$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[t_0, b[$  et donc,  $\gamma([t_0, b[) \subset \Omega \setminus K$ . Aussi, si, pour  $t_0 < 0$ ,  $\gamma(t_0) \in \Omega \setminus K$  alors la fonction  $\tilde{k}$  étant strictement croissante sur l'intervalle  $]a, t_0]$  on a forcément que  $\tilde{k}(t) < 0$  pour tout  $t \leq t_0$ , ce qui n'est pas possible<sup>13</sup>. Par conséquent, la partie  $I_K = \tilde{k}^{-1}(K)$  est donc de la forme  $I_K = ]a, c]$  avec  $c \geq 0$ . Supposons donc que  $c > 0$ , alors en choisissant l'ouvert  $\mathcal{V}_0$  suffisamment petit, on peut supposer que  $\mathcal{V}_0 = ]\alpha, \beta[ \times B(s)$ , avec  $\alpha < 0 < \beta$  et  $s \leq R$ , tel que  $]\alpha, \beta[ \subset ]a, c]$ . Mais alors, par (9.2.3.25), on sait que :

$$u_0 \in \mathcal{W}_0 = f(\mathcal{V}_0) \subset K$$

ce qui contredit les hypothèses de départ. Ainsi, on sait que  $I_K = ]a, 0]$ . Ensuite, en appliquant la même méthode, on obtient que pour tout  $t \in ]a, 0[$ , on peut choisir  $\mathcal{V}_t$  suffisamment petit pour que  $\gamma(t) \in \mathcal{W}_t = f(\mathcal{V}_t) \subset K$  et ainsi on a que  $\gamma(t) \in \text{Int}(K)$ . De cette manière, on sait que la partie  $K$  est un corps d'intérieur non vide. Pour finir, considérons l'hypersurface  $H = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ , alors par ce qui précède, on a que  $\mathcal{W}_0 \cap \partial K = f(\mathcal{V}_0 \cap H)$ . Ainsi, on a bien que le bord  $\partial K$  est une hypersurface. De plus, on a que :

$$T_{u_0} \partial K = d_{(0, u_0)} f(H) = \langle \nu(u_0) \rangle^\perp$$

et par conséquent, le bord  $\partial K$  du corps  $K$  est une hypersurface orientée dont la restriction du champ  $\nu$  correspond au champ orthonormal sortant.  $\square$

**Définition 9.2.5.** *Considérons  $e \in \mathbb{S}^n$  un point de référence ainsi que  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  un pseudo-hérisson centré en  $e$  passant par son équateur. Alors on définit la partie  $K$  sur  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  qui correspond aux points d'intersection avec l'équateur, telle que :*

$$K = x^{-1}(\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e) \quad (9.2.3.27)$$

où  $x$  est le paramétrage du pseudo-hérisson  $\mathcal{H}$ .

**Remarque 9.2.3.** *Par la relation (9.2.1.6), nous savons que le paramétrage d'un pseudo-hérisson est de la forme  $a(u)\vec{G}(u) + b(u)x_0(u)$ . Comme sur la partie  $K$ , il est clair que  $x_0(u) = u$ , alors on a :*

$$\vec{G}(u) \in T_u \mathcal{C}_e \text{ et } x(u) \in \mathcal{C}_e \quad (9.2.3.28)$$

pour tout  $u \in K$ .

**Lemme 9.2.1.** *Soit  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  un pseudo-hérisson centré en  $e$  passant par son équateur ainsi que  $K$  la partie définie via la relation (9.2.3.27) ci-dessus. Alors, pour tout vecteur  $u_0 \in \partial K$ , il existe un voisinage  $\Omega \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$  de  $u_0$  tel que :*

1. *La restriction du paramétrage du pseudo-hérisson sur le voisinage  $\Omega$  est de la forme (9.2.1.6), et le champ de vecteur  $\vec{G} : \Omega \mapsto x_0^* T\mathbb{S}^n$  n'est jamais nul et vérifie, sur le bord  $\Omega \cap \partial K$ , l'expression suivante :*

$$\vec{G}(u) = \frac{\pi}{2} \nu(u) \quad (9.2.3.29)$$

où  $\nu : \Omega \mapsto ST\mathbb{S}^n$  est le champ de vecteur tel que  $\vec{G}(u) = G(u)\nu(u)$ , avec  $G(u)$  étant une fonction lisse strictement positive.

13. Cela provient du fait que la fonction  $k$  est, par définition, positive ou nulle.

2. Si  $\gamma \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$  est une courbe régulière<sup>14</sup> passant par  $u_0$  non orthogonalement<sup>15</sup> à  $\vec{G}(u_0)$ , alors  $u_0$  est un point d'accumulation<sup>16</sup> de  $K \cap \gamma$ .
3. Si  $h : \Omega \subset \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction de support défini sur  $\Omega$ , alors le gradient  $\vec{\nabla} h$  est nul sur la partie  $\Omega \cap K$ . De plus, en considérant  $\Omega$  suffisamment petit, nous avons que le gradient  $\vec{\nabla} h$  est non nul sur  $\Omega \setminus K$ .
4. Si le bord  $\partial K$  est une hypersurface dans le voisinage  $\Omega$ , alors  $\Omega \cap K$  est un corps d'intérieur non vide dans  $\Omega$ , dont le bord  $\partial K \cap \Omega$  est une hypersurface orientable sur laquelle la restriction du champ  $\nu$  correspond au champ orthonormal sortant<sup>17</sup>.

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{H}$  un pseudo-hérisson centré en  $e$  correspondant à l'enveloppe paramétrée d'une famille de g-hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  co-orientés en  $e$ , ainsi que  $u_0 \in \partial K$ , un vecteur sur le bord. Alors, on considère, sur un voisinage  $\Omega \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$  du vecteur  $u_0$ , une fonction de support  $h$  ainsi que les fonctions  $x_0$ ,  $N$  et  $\vec{G}$ , qui sont respectivement définies via les expressions (9.2.1.5) et (9.2.1.6). Par le lemme 4.4.1 page 96, on sait qu'il existe deux fonctions lisses  $a : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  et  $b : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  vérifiant, sur  $\Omega \setminus G^{-1}(\{0\})$ , les expressions suivantes :

$$a(u) = \frac{\text{Sin } G(u)}{G(u)} \text{ et } b(u) = \text{Cos } G(u) \quad (9.2.3.30)$$

et ainsi, on obtient forcément que la restriction sur  $\Omega$  du paramétrage  $x$  du pseudo-hérisson  $\mathcal{H}$  vérifie l'expression suivante :

$$x(u) = a(u)\vec{G}(u) + b(u)x_0(u) \quad (9.2.3.31)$$

Ensuite, comme il est clair que le produit  $\langle x(u)|N(u) \rangle$  est toujours nul, il est immédiat que la condition de contact (9.2.1.7) équivaut à ce que le paramétrage vérifie la condition  $\langle x(u)|d_u N \cdot \vec{v} \rangle = 0$ , pour tout vecteur  $u \in \Omega$  et  $\vec{v} \in T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Aussi, comme on a que :

$$d_u N \cdot \vec{v} = -\langle \vec{\nabla} h(u)|\vec{v} \rangle x_0(u) + \text{Cos } h(u) \vec{v}, \quad (9.2.3.32)$$

alors on obtient que :

$$b(u)\vec{\nabla} h(u) = \text{Cos}(h(u))a(u)\vec{G}(u) \quad (9.2.3.33)$$

et en particulier,

$$b(u)^2 \|\vec{\nabla} h(u)\|^2 = (1 - b(u)^2)(\text{Cos } h(u))^2 \quad (9.2.3.34)$$

Ainsi, par la relation (9.2.3.34), il est immédiat que  $\text{Cos } h(u) = 0$  lorsque  $b(u) = 0$ . En particulier, on sait donc que si  $\text{Cos } h(u) \neq 0$ , alors on obtient que :

$$b(u) = \text{Cos } G(u) \neq 0 \quad (9.2.3.35)$$

Via la relation (9.2.3.33) et en reprenant les mêmes arguments que nous avons considérés pour vérifier le théorème 4.4.1 page 97, on obtient que :

---

14. Une courbe  $\gamma : I \mapsto \Omega$  est dite régulière lorsque c'est une immersion.  
 15. C'est-à-dire que  $\langle \partial_t \gamma(t_0)|\vec{G}(u_0) \rangle \neq 0$  avec  $\gamma(t_0) = u_0$ .  
 16. Un point  $x$  est un point d'accumulation de  $X$  si c'est un point d'adhérence de  $X \setminus \{x\}$ .  
 17. Il nous faut préciser que le champ  $\nu$  est toujours sortant, comme c'est également le cas pour le champ  $\vec{G}$ . Cela provient du fait qu'il ne correspond pas directement au gradient de la fonction de support  $h$ , mais correspond au champ vecteur  $\vec{V}$  que nous définissons via l'expression (9.2.3.37) ci-dessous.

$$(Cos G(u))^2 \|\vec{\nabla} h(u)\|^2 = (Cos h(u))^2 (Sin G(u))^2 \quad (9.2.3.36)$$

et ainsi, sur  $\Omega \setminus K$ , on a que :

$$\vec{G}(u) = \begin{cases} ArcTan(V(u))\nu(u) = \frac{ArcTan V(u)}{V(u)} \vec{V}(u) & \text{si } \vec{V}(u) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9.2.3.37)$$

avec  $\vec{V}(u) = \frac{1}{Cos h(u)} \vec{\nabla} h(u)$ .

En particulier, par le lemme 4.4.1 page 96, il est clair que le champ de vecteur  $\vec{G}$ , dont l'expression sur  $\Omega \setminus K$  est définie via (9.2.3.37), est bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Pour la suite, nous supposons, sans perte de généralité, que  $h(u_0) = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi, en considérant la fonction  $k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(u) = \frac{\pi}{2} + k(u)$ , on obtient que pour tout  $u \in \Omega \setminus K$  suffisamment proche de  $u_0$ , le champ de vecteur  $\vec{V}$  vérifie la relation suivante :

$$\vec{V}(u) \sim -\vec{\nabla} \ln |k(u)| \quad (9.2.3.38)$$

Par conséquent, via la relation (9.2.3.38) ci-dessus, il existe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de vecteurs définie sur  $\Omega \setminus K$  qui converge vers  $u_0$  et telle que  $V(u_n) \sim \|\vec{\nabla} \ln |k(u_n)|\| \rightarrow +\infty$ . Comme le champ de vecteur  $\vec{G}$  est, par définition, de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega$ , alors on a que  $\vec{G}(u_0) = \frac{\pi}{2} \nu(u_0)$ , avec  $\nu(u_0) \in ST_{u_0} \mathbb{S}^n$ . Par conséquent, on sait que sur  $\Omega \cap \partial K$ , le champ  $\vec{G}$  est de la forme :

$$\vec{G}(u) = \frac{\pi}{2} \nu(u) \quad (9.2.3.39)$$

et plus généralement, en considérant  $\Omega$  suffisamment petit, nous pouvons supposer que sur le voisinage  $\Omega$ , le champ de vecteur  $\vec{G}$  est non nul et vérifie ainsi l'expression :

$$\vec{G}(u) = G(u)\nu(u) \quad (9.2.3.40)$$

où  $\nu : \Omega \rightarrow ST_{u_0} \mathbb{S}^n$  est un champ de vecteurs normé et  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse strictement positive telle que  $G(u) = ArcTan(V(u))$  sur  $\Omega \setminus K$  et  $G(u) = \frac{\pi}{2}$  sur  $\Omega \cap \partial K$ .

Supposons donc qu'il existe  $\gamma : I \rightarrow \Omega$ , une courbe régulière passant par  $u_0$  à l'instant  $t = 0$  et vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \gamma(t) \in \Omega \setminus K, \text{ lorsque } t \neq 0 \\ \langle \vec{G}(u_0) | \partial \gamma(0) \rangle \neq 0 \end{cases} \quad (9.2.3.41)$$

À présent, considérons la fonction lisse  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g(t) = \langle \vec{G} \circ \gamma(t) | \partial_t \gamma(t) \rangle$ . Ainsi, en remarquant que sur  $I \setminus \{0\}$ , la fonction  $\tilde{V}(t) = \langle \vec{V} \circ \gamma(t) | \partial_t \gamma(t) \rangle$  vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) &= \langle \vec{V} \circ \gamma(t) | \partial_t \gamma(t) \rangle = \frac{1}{Cos(h \circ \gamma(t))} \langle \vec{\nabla} h \circ \gamma(t) | \partial_t \gamma(t) \rangle \\ &= \frac{\partial_t \tilde{h}(t)}{Cos \tilde{h}(t)} \text{ avec } \tilde{h}(t) = h \circ \gamma(t) \end{aligned}$$

alors on obtient que :

$$g(t) = \text{ArcTan}(V \circ \gamma(t)) \frac{\tilde{V}(t)}{V \circ \gamma(t)} \tag{9.2.3.42}$$

Ensuite, par la propriété 9.2.2 que nous avons vue précédemment et en supposant que  $h(u_0) = \frac{\pi}{2}$ , nous savons qu'il existe deux suites  $(t_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  définies respectivement sur  $]-\infty, 0[ \cap I$  et  $]0, +\infty[ \cap I$ , convergeant toutes les deux vers  $t = 0$  et vérifiant :

$$\tilde{V}(t_n^-) \longrightarrow +\infty \text{ et } \tilde{V}(t_n^+) \longrightarrow -\infty$$

Ainsi, en remarquant que les suites  $V \circ \gamma(t_n^-)$  et  $V \circ \gamma(t_n^+)$  convergent vers  $+\infty$ , il est clair que les valeurs d'adhérence (si elles existent) des rapports  $\frac{\tilde{V}(t_n^-)}{V \circ \gamma(t_n^-)}$  et  $\frac{\tilde{V}(t_n^+)}{V \circ \gamma(t_n^+)}$  sont respectivement dans  $[0, +\infty[$  et  $]-\infty, 0]$ . Ensuite, comme les suites  $\text{ArcTan}(V \circ \gamma(t_n^-))$  et  $\text{ArcTan}(V \circ \gamma(t_n^+))$  convergent vers  $\frac{\pi}{2}$  et que, par construction,  $g(0) \neq 0$ , alors la fonction  $g$  ne peut être continue en  $t = 0$ , ce qui est contradictoire.

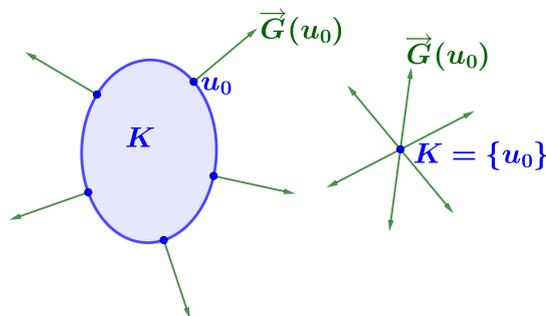


FIGURE 9.3 – Représentation du champ de vecteurs  $\vec{G}$  sur le bord  $\partial K$ .

Ensuite, supposons que le gradient  $\vec{\nabla}h(u_0)$  est non nul. Alors, en considérant  $\Omega$  suffisamment petit, on a que  $\Omega \cap K$  est une hypersurface. Il existe donc forcément  $\gamma : I \rightarrow \Omega$ , une courbe régulière passant par le point  $u_0$  non orthogonalement au vecteur  $\nu(u_0)$  telle que  $\gamma \cap K = \{u_0\}$ , ce qui n'est pas possible. Par conséquent, on a que  $\vec{\nabla}h(u_0) = 0$  et, en particulier, le gradient  $\vec{\nabla}h$  est nul sur l'intersection  $\Omega \cap K$ .

Supposons enfin que l'intersection du bord  $\Omega \cap \partial K$  est une hypersurface. Si, pour  $u \in \Omega \cap \partial K$ , il existe  $\mathcal{W} \subset \Omega$  un ouvert centré en  $u$  tel que  $\mathcal{W} \cap \text{Int}(K) = \emptyset$ , alors en appliquant le même raisonnement que précédemment, on aboutit forcément à une contradiction. Par conséquent, on a bien que  $\Omega \cap K$  est un corps d'intérieur non vide dans  $\Omega$ . En particulier, en considérant l'ouvert  $\Omega$  suffisamment petit, on peut supposer que  $h = \frac{\pi}{2} + k$ , avec  $k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction partout positive ou nulle (resp. partout négative ou nulle). Et, par la propriété 9.2.3 que nous avons vue précédemment, on obtient le résultat recherché.  $\square$

**Remarque 9.2.4.** En considérant la figure 9.3 ci-dessus, il est intéressant de constater que, pour la figure de gauche, il est possible de prolonger le champ de vecteurs  $\vec{G}$  sur  $\text{Int}(K)$  qui est non vide. C'est précisément par ce biais que nous obtenons une méthode permettant de définir les deux pseudo-hérissons qui passent par leur équateur, considérés dans les sections 9.2.2.1 et 9.2.2.2. En particulier, notons que si l'intérieur de la partie  $K$  est non vide, alors il existe

plusieurs manières de prolonger le champ  $\vec{G}$ . Pour la figure de droite, nous avons un cas où la partie  $K$  correspond à un singleton<sup>18</sup>, et il est alors évident que le champ de vecteurs  $\vec{G}$  ne peut pas être continu.

**Remarque 9.2.5.** Il faut noter que, via la relation (9.2.3.35) que nous avons considérée ci-dessus, si  $\text{Cos}(h) > 0$ , alors l'intersection  $\mathcal{C}_e \cap \mathcal{H}$  est forcément vide.

À présent, nous pouvons constater que, de ce qui précède, il est clair que la partie  $K$ , définie via la relation (9.2.3.27), correspond à un corps, à condition de vérifier que toute courbe régulière  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}_e^{n-1}$ , passant par un vecteur  $u_0$ , sur le bord  $\partial K$ , non orthogonalement au champ  $\nu$ , intersecte la partie  $K$  sur une union disjointe d'intervalle fermé. Par conséquent, il nous est nécessaire de faire le point sur les ensembles parfaits et totalement discontinus ainsi que sur l'ensemble de Cantor et le théorème de Brouwer. Pour en savoir plus, il est possible de se reporter aux sections 3.5, 4.2 et 4.5 de l'ouvrage [45], dans lequel on trouve un exposé plus que suffisant pour les besoins de nos développements. Considérons donc les quatre définitions ci-dessous :

1. Un point  $x \in X$  sera dit **isolé** lorsque le point  $x$  n'est pas dans la fermeture  $\text{Ad}(X \setminus \{x\})$ .
2. Une partie  $A \subset X$  sera dite **isolée** lorsque l'intersection  $A \cap \text{Ad}(X \setminus A)$  est vide.
3. Un espace topologique  $X$  sera dit **totalement discontinu** si la composante connexe de chaque point  $x \in X$  correspond au singleton  $\{x\}$ .
4. Une partie  $A \subset X$  sera dite **parfaite** si elle est fermée et ne contient aucun point isolé.

**Remarque 9.2.6.** Par le lemme 9.2.1, il est clair que la partie  $K$ , définie via la relation (9.2.3.27), est parfaite sur l'hypersphère  $\mathbb{S}^n$ .

On appelle **espace de Cantor** l'ensemble  $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$  que l'on munit de la topologie induite par la topologie métrique de l'espace produit  $[0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ . Ainsi, on peut vérifier (voir propriété 4.5.1 page 184 de l'ouvrage [45]) que l'espace de Cantor  $\mathcal{C}$  est compact, métrisable, infini, non dénombrable, sans points isolés et totalement discontinu. De plus, par le théorème de Brouwer (voir le chapitre 17 de l'ouvrage [17] pour en savoir plus), on sait que tout compact métrisable non vide, totalement discontinu et parfait est homéomorphe à l'espace de Cantor. Pour finir, il nous faut introduire le modèle de **l'ensemble triadique de Cantor**. Pour cela, on considère l'opérateur  $T : \mathcal{P}_a(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_a(\mathbb{R})$  qui à toute partie disjointe  $A \subset \mathbb{R}$  et  $B \subset \mathbb{R}$  donne  $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$  et, pour tout intervalle fermé  $I = [a; b]$ , donne :

$$T([a; b]) = \left[ a; a + \frac{b-a}{3} \right] \cup \left[ b - \frac{b-a}{3}; b \right]$$

Alors, on considère la suite des parties fermées  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont le premier terme est  $L_0 = [a; b]$  et est défini via la relation de récurrence ci-dessous :

$$L_{n+1} = T(L_n)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .



FIGURE 9.4 – Construction de l'ensemble triadique de Cantor

18. Ou, plus généralement, le vecteur  $u_0$  est un point isolé sur une courbe régulière.

Ainsi, on définit l'ensemble triadique de Cantor comme étant la limite supérieure de la suite qui est formée par les parties fermées  $L_n$ , en prenant l'intervalle  $[0; 1]$  pour intervalle de base. Par conséquent, on considère la partie suivante :

$$L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n \subset [0; 1] \quad (9.2.3.43)$$

que l'on munit de la topologie induite. Il est alors clair que la partie  $L$  ainsi définie vérifie les conditions du théorème de Brouwer et est donc homéomorphe à l'espace de Cantor.

**Remarque 9.2.7.** *Par construction de l'ensemble triadique de Cantor, il est clair que, d'après le théorème de Brouwer, pour tout  $t \in L$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe un intervalle  $[a, b] \subset ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \cap [0, 1]$ , avec  $t$  dans l'ouverture  $]a, b[$ , et tel que les parties  $L_1 = [a, b] \cap L$  et  $L_2 = L \setminus L_1$  soient homéomorphes à l'espace de Cantor et soient isolées dans  $L$ .*

**Propriété 9.2.4.** *Pour tout point  $t \in L$ , il existe  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'intervalles fermés vérifiant les deux caractéristiques suivantes :*

1. *Les intersections  $I_n \cap L$  sont isolées dans  $L$  et sont homéomorphes à l'espace de Cantor.*
2. *La suite des  $I_n$  est décroissante et admet  $\{t\}$  pour limite supérieure.*

*Démonstration.* À partir de la remarque 9.2.7 ci-dessus et en considérant la construction de l'ensemble triadique de Cantor, la propriété recherchée est immédiate.  $\square$

La suite de cette section est consacrée à vérifier que la partie  $K$ , définie via l'expression (9.2.3.27), ne peut pas être totalement discontinue. Pour cela, il nous faut compléter la propriété 9.2.2 ainsi que le lemme 9.2.1 au regard de la notion des ensembles parfaits et totalement discontinus.

**Propriété 9.2.5.** *Considérons  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse définie sur un intervalle ouvert, telle que la partie  $K = \text{Cos}(f)^{-1}(0)$  soit totalement discontinue et parfaite. Si  $V : I \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction lisse définie via l'expression suivante :*

$$V(t) = \frac{\partial_t f(t)}{\text{Cos } f(t)} \quad (9.2.3.44)$$

*alors, il existe  $t \in K$ , un instant sur la frontière de la partie  $K$ , ainsi que  $(t_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ , deux suites qui sont respectivement définies sur  $I \setminus K$  à droite et à gauche de  $t$  et convergent vers  $t$ , telles que :*

$$V(t_n^+) \longrightarrow -\infty \text{ et } V(t_n^-) \longrightarrow +\infty \quad (9.2.3.45)$$

*ou inversement respectif<sup>19</sup>.*

*Démonstration.* La partie  $K$  étant totalement discontinue et parfaite sur l'intervalle ouvert  $I$  et pour la topologie métrique induite par  $\mathbb{R}$ , il est clair que son compactifié d'Alexandrov<sup>20</sup>,  $\bar{K} = K \cup \{w\}$ , est homéomorphe à l'espace de Cantor. Il est alors immédiat, par construction de l'ensemble triadique de Cantor, qu'il existe deux parties fermées  $K_1$  et  $K_2$  partitionnant l'ensemble  $\bar{K}$  et qui sont respectivement homéomorphes à l'ensemble de Cantor. En supposant,

19. En effet, comme pour la propriété 9.2.2, cela dépend du fait que l'image  $f(t)$  est égale à  $\frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2}$  modulo  $2\pi$ .

de plus, que le point à l'infini soit dans  $K_2$ , alors on a que  $K_1$  est une partie fermée nécessairement contenue dans l'intervalle  $I$  et est homéomorphe à l'ensemble de Cantor, tel que :

$$K_1 \cap Ad(K \setminus K_1) = \emptyset$$

Sans perte de généralité, nous supposons donc que  $K$  est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Par conséquent, la partie  $K$  étant compacte, considérons  $t \in K$ , sa borne supérieure. Aussi, en considérant  $\phi : K \rightarrow L$  un homéomorphisme, avec  $L$  étant l'ensemble triadique de Cantor, alors par la propriété 9.2.4, on sait qu'il existe  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'intervalles fermés décroissants sur  $L$ , dont la limite supérieure est  $\{\phi(t)\}$  et telle que les intersections  $I_n \cap L$  soient isolées dans  $L$ . Mais alors, par bicontinuité de l'application  $\phi$ , il est clair que :

$$\phi^{-1}(I_n \cap L) \cap Ad(K \setminus \phi^{-1}(I_n \cap L)) = \emptyset \quad (9.2.3.46)$$

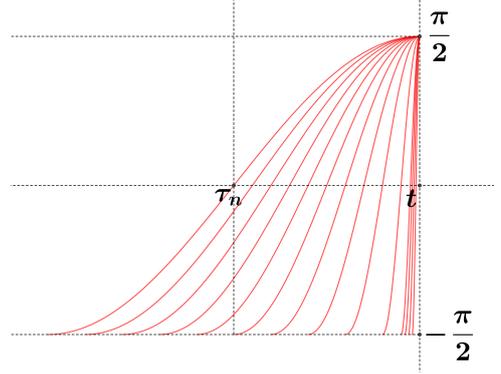
et de plus, les parties  $\phi^{-1}(I_n \cap L)$  forment une suite décroissante qui admet  $\{t\}$  pour limite supérieure. Considérons donc, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , l'instant  $\tilde{t}_n$  comme étant la borne inférieure de la partie compacte  $\phi^{-1}(I_n \cap L)$ , qui est donc, par définition, nécessairement distincte de l'instant  $t$ . Alors, par la relation (9.2.3.46), il existe  $\alpha_n < \tilde{t}_n$  tel que :

$$[\alpha_n; \tilde{t}_n[ \cap K = \emptyset$$

Par construction, la suite  $(\tilde{t}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge à gauche vers l'instant  $t$ . Nous considérerons donc, sans perte de généralité, que l'image de  $t$  est  $f(t) = \frac{\pi}{2}$ . Supposons, à présent, que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n > N$  tel que  $f(\tilde{t}_n) = \frac{\pi}{2} + k_n\pi$ , avec  $k_n \in \mathbb{Z}^*$ . Mais alors, par accroissement fini, il existerait une suite  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge à gauche vers  $t$  telle que :

$$|\partial_t f(\tau_n)| \longrightarrow +\infty,$$

ce qui n'est pas possible car, par hypothèse de départ, la fonction  $f$  est lisse.



Par conséquent, nous savons qu'il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n > N$ , nous ayons  $f(\tilde{t}_n) = \frac{\pi}{2}$ . En particulier, nous supposons que c'est le cas pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé, comme  $[\alpha_n; \tilde{t}_n[ \cap K = \emptyset$ , et en reprenant les mêmes arguments que ceux considérés au cours de la preuve de la propriété 9.2.2, il existe  $(\eta_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite définie sur  $[\alpha_n; \tilde{t}_n[$  qui converge vers  $\tilde{t}_n$  telle que :

$$V(\eta_k^n) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Ainsi, nous pouvons définir la suite  $(t_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ , convergent à gauche vers  $t$ , telle que  $t_n^- = \eta_k^n$ , avec  $k > n$ , et  $V(t_{n+1}^-) > V(t_n^-)$ , et qui, par construction, vérifie les propriétés recherchées. Ensuite, en considérant l'intervalle  $]t, \beta] \subset I$  tel que  $K \cap ]t, \beta] = \emptyset$ , on construit la suite  $(t_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  sur l'intervalle  $]t, \beta]$ , en adoptant la même méthode que celle utilisée pour vérifier la propriété 9.2.2.  $\square$

20. Se reporter à la section 3.5, page 137 de [45], pour en savoir plus sur le compactifié d'Alexandrov.

Les deux propriétés suivantes correspondent à des éléments techniques qui seront nécessaires pour vérifier le lemme 9.2.2. Pour cela, on appelle **cône plein** (resp. **demi-cône fini**) sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  toute partie de la forme  $\mathcal{C} = \{tu \mid t \in \mathbb{R} \text{ et } u \in \mathcal{D}\}$  (resp.  $\mathcal{C} = \{tu \mid t \in [0; R] \text{ et } u \in \mathcal{D}\}$ ) où  $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}^n$  est une partie fermée d'intérieur non vide. Pour  $\varepsilon > 0$  et  $v \in \mathbb{S}^n$ , remarquons que la boule ouverte sur  $\mathbb{S}^n$ , centrée en  $v$  et de rayon  $\text{ArcCos}(\varepsilon)$ , pour la métrique usuelle, est définie par l'expression ci-dessous :

$$\Omega_\varepsilon(v) = \{u \in \mathbb{S}^n \text{ tel que } \langle u|v \rangle > \varepsilon\} \tag{9.2.3.47}$$

Aussi, nous noterons par  $\overline{\Omega}_\varepsilon(v)$  la boule fermée correspondant à l'adhérence de  $\Omega_\varepsilon(v)$ . On définit alors  $\mathcal{D}_\varepsilon(v)$  la partie qui correspond au cône plein défini par la boule fermée  $\overline{\Omega}_\varepsilon(v)$ .

**Propriété 9.2.6.** *Considérons, pour  $\varepsilon > 0$  et  $v \in \mathbb{S}^n$ , une partie compacte  $K$  sur le cône plein  $\mathcal{D}_\varepsilon(v)$  telle que pour toute droite  $\delta \subset \mathcal{D}_\varepsilon(v)$ , l'intersection  $K \cap \delta$  soit non vide et contienne un segment fermé  $I$  comprenant le point  $x = 0$  qui, de plus, est isolé dans  $K \cap \delta$ . Alors il existe une partie  $K_0$  dans  $K$  correspondant à un demi-cône plein fini sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

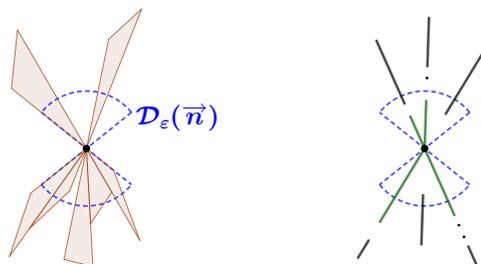


FIGURE 9.5 – Structure compacte contenant des cônes pleins centrés en zéro

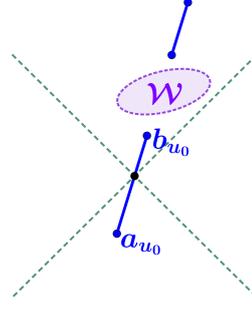
*Démonstration.* Pour chaque  $u \in \overline{\Omega}_\varepsilon(v)$ , on considère la droite  $\gamma(t) = tu$  ainsi que  $[a_u; b_u] \subset \gamma^{-1}(K)$  l'intervalle fermé borné maximal contenant l'instant  $t = 0$ . Ainsi, pour chaque  $u \in \overline{\Omega}_\varepsilon(v)$ , on note :

$$l_u = b_u - a_u$$

Nous allons commencer par montrer que l'application  $l : \overline{\Omega}_\varepsilon(v) \mapsto \mathbb{R}^+$ , ainsi définie, est semi-continue supérieure<sup>21</sup>. Pour vérifier cela, considérons un vecteur  $u_0$  et un instant  $t > b_{u_0}$ . Deux cas de figure sont alors à considérer :

1. Si  $tu_0 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ , la partie  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus K$  étant ouverte dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , considérons  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus K$  une boule ouverte centrée en  $tu_0$ . En choisissant  $\mathcal{W}$  suffisamment petite, il est clair que  $\mathcal{V} = \{u \in \overline{\Omega}_\varepsilon(v) \mid tu \in \mathcal{W} \text{ pour } t \in \mathbb{R}^+\}$  est aussi une boule ouverte centrée en  $u_0$  dans  $\overline{\Omega}_\varepsilon(v)$ . En particulier, on a  $b_u < t$  pour tout  $u \in \mathcal{V}$ .
2. Si  $tu_0 \in K$ , comme l'intervalle  $[a_{u_0}; b_{u_0}]$  est isolé dans  $\gamma^{-1}(K)$ , il existe nécessairement un instant  $t_0$ , tel que  $b_{u_0} < t_0 < t$  et  $t_0u_0 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ . Nous pouvons alors considérer  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus K$  une boule ouverte centrée en  $t_0u_0$ , ainsi que l'ouvert  $\mathcal{V} \subset \overline{\Omega}_\varepsilon(v)$  défini comme précédemment.

21. Une application  $f : X \mapsto \mathbb{R}$ , définie sur un espace topologique, est dite semi-continue supérieure en  $x_0 \in X$  si et seulement si, pour tout  $t > f(x_0)$ , la partie  $f^{-1}(]-\infty; t[)$  est un voisinage de  $x_0$  dans  $X$ .

FIGURE 9.6 – Semi-continuité supérieure de l'application  $l$ .

Par conséquent, on a donc bien que pour tout  $t > 0$ , la partie  $b^{-1}(]-\infty; t])$  est ouverte dans  $\overline{\Omega}_\varepsilon(v)$ . En effet, si  $u_0 \in b^{-1}(]-\infty; t])$ , alors  $b_{u_0} < t$  et, d'après ce qui précède, il existe forcément  $\mathcal{V} \subset \overline{\Omega}_\varepsilon(v)$  un ouvert centré en  $u_0$  tel que :

$$\forall u \in \mathcal{V}, b_u < t$$

En particulier, il est clair que la fonction  $b$  est semi-continue supérieure. Aussi, en appliquant la même méthode, on montre que la fonction  $a$  est semi-continue inférieure et étant négative, alors on a bien que la fonction  $l = b - a$  est semi-continue supérieure.

Pour la suite, supposons que pour tout instant  $t > 0$  et ouvert  $\mathcal{V} \subset \overline{\Omega}_\varepsilon(v)$ , il existe  $u \in \mathcal{V}$  et  $u' \in \mathcal{V}$  tels que :

$$-t < a_{u'} \text{ et } b_u < t$$

Alors, on définit, pour tout  $t > 0$ , l'ouvert  $\Gamma_t = l^{-1}(]-\infty, t])$ . Il nous faut vérifier que, dans le cadre de notre hypothèse, chaque ouvert  $\Gamma_t$  est dense dans  $\overline{\Omega}_\varepsilon(v)$ . Considérons donc un instant  $t > 0$  ainsi que l'ouvert  $\Gamma_t$ . Si  $\mathcal{V} \subset \overline{\Omega}_\varepsilon(v)$  est un ouvert, alors on sait qu'il existe  $u \in \mathcal{V}$  tel que  $b_u < \frac{t}{2}$ . Il est donc immédiat, par ce qui précède, que l'intersection  $\mathcal{V} \cap b^{-1}(]-\infty, \frac{t}{2}])$  est un ouvert non vide centré en  $u$ . Ainsi, en considérant  $u' \in \mathcal{V} \cap b^{-1}(]-\infty, \frac{t}{2}])$  tel que  $-\frac{t}{2} < a_{u'}$ , on obtient que :

$$\mathcal{V} \cap a^{-1}\left(\left]-\frac{t}{2}, +\infty\right[ \right) \cap b^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{t}{2}\right[ \right) \neq \emptyset$$

et comme  $\mathcal{V} \cap a^{-1}\left(\left]-\frac{t}{2}, +\infty\right[ \right) \cap b^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{t}{2}\right[ \right) \subset \mathcal{V} \cap \Gamma_t$ , on a bien le résultat recherché. Mais alors, par le théorème de Baire<sup>22</sup>, on sait que la partie :

$$\Gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_{\frac{1}{n}}$$

est dense. En particulier, la partie  $\Gamma$  est non vide et donc, on aboutit à ce qu'il existe un point  $u \in \overline{\Omega}_\varepsilon(v)$  tel que  $l_u = 0$ , ce qui, par construction de l'application  $l$ , n'est pas possible. Par conséquent, on sait qu'il existe  $u_0 \in \overline{\Omega}_\varepsilon(v)$  ainsi que  $R > 0$  et  $\overline{\Omega}_r(u_0) \subset \overline{\Omega}_\varepsilon(v)$  une boule fermée centrée en  $u_0$  telle que  $\forall u \in \overline{\Omega}_r(u_0), b_u \geq R$  (ou respectivement  $\forall u \in \overline{\Omega}_r(u_0), a_u \leq R$ ). Il nous suffit donc de considérer la partie  $K_0 = \{tu \text{ avec } u \in \overline{\Omega}_r(u_0) \text{ et } t \in [0; R]\}$  qui est bien un demi-cône plein fini.  $\square$

22. Voir le théorème 3.4.4 page 137 de [45] pour en savoir plus.

**Propriété 9.2.7.** *Considérons  $\vec{G} : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$  un champ de vecteurs ainsi qu'un point  $x_0 \in \mathcal{V}$  et un vecteur  $u_0 \in \mathbb{S}^n$  tels que  $\langle \vec{G}(x_0) | u_0 \rangle \neq 0$ . Alors il existe deux scalaires  $\varepsilon > 0$ , et  $T > 0$  tels que :*

$$\langle \vec{G}(x_0 + tu) | u \rangle \neq 0. \quad (9.2.3.48)$$

pour tout  $u \in \overline{\Omega}_\varepsilon(u_0)$  et  $t \in [-T; T]$ .

*Démonstration.* Considérons donc l'ensemble  $\Gamma = \{(u, t) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } x_0 + tu \in \mathcal{V}\}$  ainsi que la fonction lisse  $f : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$  définie via l'expression suivante :

$$f(u, t) = \langle \vec{G}(x_0 + tu) | u \rangle$$

Par hypothèse, on sait que  $f(u_0, 0) \neq 0$ . Ainsi, la partie  $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$  est un ouvert non vide contenant le point  $(u_0, 0)$  et donc, par définition de la topologie produit, il existe deux scalaires  $\varepsilon > 0$  et  $T > 0$  tels que la partie  $\overline{\Omega}_\varepsilon(u_0) \times [-T; T]$  est comprise dans l'image réciproque  $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ .  $\square$

**Lemme 9.2.2.** *Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  est un pseudo-hérisson centré en  $e$  qui passe par son équateur, alors la partie  $K = x^{-1}(\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e)$  est un corps d'intérieur non vide dont le bord est une hypersurface orientée. De plus, le champ orthonormal sortant correspond, au voisinage de chacun des points sur le bord  $\partial K$ , à la restriction du champ  $\nu : \Omega \mapsto ST\mathbb{S}^n$  qui est défini via la relation (9.2.3.29) page 196.*

*Démonstration.* Considérons donc un point  $u_0 \in \partial K$  ainsi que, au voisinage de  $u_0$ , le champ  $\vec{G} : \Omega \mapsto x_0^* T\mathbb{S}^n$  défini via la relation (9.2.1.6) page 188. Par le lemme 9.2.1, on sait qu'en considérant le voisinage  $\Omega$  suffisamment petit, le champ  $\vec{G}$  est de la forme  $\vec{G}(u) = G(u)\nu(u)$ , où  $\nu : \Omega \mapsto ST\mathbb{S}_e^{n-1}$  est un champ de vecteurs normés et  $G$  est une fonction lisse strictement positive. De plus, le point  $u_0$  étant sur le bord  $\partial K$ , alors on a  $\vec{G}(u_0) = \frac{\pi}{2}\nu(u_0)$ . Ensuite, en considérant  $\gamma : I \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  une courbe régulière, définie sur un intervalle ouvert et passant par le point  $u_0$  non orthogonalement au vecteur  $\nu(u_0)$ , alors on définit la fonction lisse  $g_\gamma : I \mapsto \mathbb{R}$  vérifiant l'expression suivante :

$$g_\gamma(t) = \langle \vec{G} \circ \gamma(t) | \partial_t \gamma(t) \rangle$$

que l'on supposera non nulle sur  $I$ . Par le lemme 9.2.1, on sait donc que le point  $u_0$  est un point d'accumulation sur l'intersection  $K \cap \gamma$  et en particulier il est clair que  $\gamma^{-1}(K)$  est un ensemble parfait sur l'intervalle  $I$ . Supposons donc que la partie  $\gamma^{-1}(K)$  soit totalement discontinue. Par conséquent, comme on sait que la fonction  $g_\gamma$  vérifie l'expression (9.2.3.42) page 199 sur la partie  $I \setminus \gamma^{-1}(K)$ , nous pouvons alors vérifier qu'elle est forcément discontinue en un instant  $t_0 \in \gamma^{-1}(K)$ . En effet, il suffit d'adapter le raisonnement que nous avons considéré pour vérifier le lemme 9.2.1 via la propriété 9.2.5 que nous avons vue précédemment.

En conclusion, on obtient que toute courbe régulière  $\gamma : I \mapsto \Omega$ , définie sur un intervalle ouvert  $I$ , passant par le point  $u_0$  à l'instant  $t_0$  et dont la fonction  $g_\gamma$  ne s'annule jamais, vérifie que la composante connexe de  $t_0$  sur  $\gamma^{-1}(K)$  correspond à un intervalle fermé<sup>23</sup> dans  $I$ .

23. Il nous faut préciser que par "intervalle fermé dans  $I$ ", nous entendons toute partie connexe, fermée et d'intérieur non vide dans  $I$ . En particulier, il s'agit de l'intersection d'un intervalle fermé  $[a; b]$  avec l'intervalle  $I$ .

Soit  $v \in ST_{u_0}\mathbb{S}_e^{n-1}$  un vecteur ainsi que  $\gamma_v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  la géodésique de la sphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  qui passe par le point  $u_0$  à la vitesse  $v$  en l'instant  $t = 0$ . Aussi, considérons la fonction lisse  $f : ST_{u_0}\mathbb{S}_e^{n-1} \times J_{u_0} \mapsto \mathbb{R}$  que l'on définit via l'expression ci-dessous :

$$f(v, t) = \langle \partial_t \gamma_v(t) | \vec{G} \circ \gamma_v(t) \rangle$$

où  $J_{u_0}$  est un intervalle ouvert centré en  $t = 0$  tel que pour tout vecteur  $v \in ST_{u_0}\mathbb{S}_e^{n-1}$  et instant  $t \in J_{u_0}$ , le point  $\gamma_v(t)$  est dans le voisinage  $\Omega$ .

On sait alors, via la propriété 9.2.7, qu'il existe  $\bar{\Omega}_\varepsilon(\nu(u_0)) \subset ST_{u_0}\mathbb{S}_e^{n-1}$  une boule fermée centrée en  $\nu(u_0)$  ainsi que  $T > 0$  tel que la restriction de la fonction  $f$  sur la partie  $\bar{\Omega}_\varepsilon(\nu(u_0)) \times [-T, T]$  est strictement positive. Par conséquence, on définit le cône géodésique fini :

$$\mathcal{D}(u_0) = \{ \gamma_v(t) \text{ avec } v \in \bar{\Omega}_\varepsilon(\nu(u_0)) \text{ et } t \in [-T, T] \} \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$$

ainsi que la partie  $K_0$  telle que :

$$K_0 = K \cap \mathcal{D}(u_0)$$

Il est alors immédiat qu'il existe  $I \subset J_{u_0}$  un intervalle ouvert qui contient l'intervalle fermé  $[-T, T]$  et pour lequel la fonction  $f$  est non nulle sur la partie  $\bar{\Omega}_\varepsilon(\nu(u_0)) \times I$ . Par conséquent, comme vu précédemment, les intersections  $I \cap \gamma_v^{-1}(K)$  vérifient que la composante connexe de l'instant  $t = 0$  est un intervalle fermé et isolé dans  $I$ . Il est donc clair qu'au regard de la carte exponentielle centrée en  $u_0$ , la partie  $K_0$  satisfait les conditions de la propriété 9.2.6. Par conséquent, via la propriété 9.2.6, il existe  $L \subset K_0 \subset K$  un demi-cône géodésique plein et fini qui est centré en  $u_0$  et qui contient donc le point  $u_0$  dans la fermeture de son intérieur. En particulier, il est immédiat que la partie  $K$  est d'intérieur non vide et vérifie que :

$$u_0 \in Ad\left(\overset{\circ}{L}\right) \subset Ad\left(\overset{\circ}{K}\right)$$

On a donc bien que la partie  $K$  est un corps d'intérieur non vide. Pour finir, en supposant l'ouvert  $\Omega$  suffisamment petit, on peut considérer que la fonction de support (définie sur l'ouvert  $\Omega$ ) est de la forme  $h = \frac{\pi}{2} + k$ , avec  $k$  partout positive ou nulle (respectivement partout négative ou nulle). Alors, par la propriété 9.2.3, on obtient que le bord  $\partial K$  est nécessairement une hypersurface orientée dont la restriction du champ  $\nu$  correspond au champ orthonormal sortant.  $\square$

**Remarque 9.2.8.** *Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  un pseudo-hérison centré en  $e$  qui passe par son équateur. Alors, comme par le lemme précédent, on sais que la partie  $K$  est un corps d'intérieur non vide, on a forcément que toutes les dérivées partielles  $\partial_i^k h$  sont nulles sur  $K$ .*

### 9.3 Conjecture sur le passage de l'équateur

Dans cette section, nous concluons ce chapitre en étudiant les caractéristiques géométriques des pseudo-hérissons qui intersectent leurs équateurs en plus d'un point. Il est à noter que nous n'avons pas encore épuisé toutes les questions correspondant à cette problématique, lesquelles font l'objet des conjectures 9.3.1 et 9.3.3 présentées ci-dessous. Par conséquent, nous présentons quelques résultats préliminaires nous permettant d'approcher une vérification de ces deux conjectures ; en particulier, nous vérifions la conjecture 9.3.1 dans un cas particulier (voir théorème 9.3.1). Pour commencer, il nous faut rappeler que, via la remarque 9.2.3 page 196, on sait que

sur le bord du corps  $K$ , le paramétrage est tel que  $x(u) = \nu(u)$ , où  $\nu$  correspond au champ orthonormal sortant du corps  $K$  et que l'on considère à image sur  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ .

**Propriété 9.3.1.** *Si le corps  $K$  n'est pas une demi-sphère alors le paramétrage  $x$  n'est pas constant sur  $K$ . En particulier, il existe  $u \in \text{Int}(K)$  tel que la différentielle  $d_u x$  est non nulle.*

*Démonstration.* Il nous suffit de considérer  $u_0$  et  $u_1$  deux vecteurs sur le bord  $\partial K$  qui sont sur la même composante connexe du corps  $K$  et vérifient de plus que  $\nu(u_0) \neq \nu(u_1)$ . En effet, dans ce cas de figure, il existe forcément  $\gamma : [0, 1] \rightarrow K$  une courbe régulière telle que  $\gamma(]0, 1[) \subset \text{Int}(K)$  avec  $\gamma(0) = u_0$  et  $\gamma(1) = u_1$ . Par conséquent, il est clair que l'application  $x \circ \gamma$  n'est pas constante sur l'intervalle  $]0, 1[$ , ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

**Propriété 9.3.2.** *Tout pseudo-hérisson centré en  $e$  dont le paramétrage n'est pas constant sur le corps  $K$  est centré uniquement en les points  $e$  et  $-e$ .*

*Démonstration.* En effet, dans le cadre de l'hypothèse où le paramétrage  $x$  n'est pas constant sur le corps  $K$ , alors il existe forcément  $\gamma \subset \text{Int}(K)$  une courbe régulière telle que la composée  $x \circ \gamma$  est une immersion injective. Ainsi, la courbe  $x(\gamma)$  étant comprise sur l'équateur, elle ne peut que correspondre à l'enveloppe d'une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en les points de référence  $e$  et  $-e$ .  $\square$

Par les deux propriétés précédentes, il est justifié de formuler comme hypothèse que tout pseudo-hérisson centré en  $e$ , qui passe par son équateur et occupe les demi-sphères nord et sud, admet un point  $x \in \mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e$  pour lequel l'intersection  $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e$  est, au voisinage du point  $x$ , une hypersurface dont la courbure de Gauss est nulle. Ainsi, en constatant que tout pseudo-hérisson, vérifiant les caractéristiques de notre hypothèse, admet un corps  $K$  qui est distinct de la demi-sphère et de la sphère entière, alors toute la difficulté de la vérification de cette hypothèse se résume à la conjecture suivante :

**Conjecture 9.3.1.** *Soit  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  un pseudo-hérisson centré en  $e$  qui passe par son équateur. Si le corps  $K$  n'est pas une demi-sphère (ni la sphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  tout entière), alors il existe un vecteur  $u \in \text{Int}(K)$  pour lequel la différentielle  $d_u x : T_u \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow T_{x(u)} \mathcal{C}_e$  est un isomorphisme. En particulier, le pseudo-hérisson  $\mathcal{H}$  est localement une hypersurface dont la courbure de Gauss est nulle en  $x(u)$ .*

L'utilisation du terme *conjecture* se justifie par la résistance de l'hypothèse que nous considérons malgré plusieurs tentatives pour trouver un contre-exemple. En effet, avec l'aide de Anatole Khelif, nous avons adopté plusieurs méthodes pour définir des contre-exemples, parmi lesquelles nous considérons ci-dessous les deux approches qui peuvent être considérées comme étant les plus pertinentes. Pour cela, commençons par remarquer que, par la remarque 9.2.3 page 196, il est clair que la restriction du paramétrage d'un pseudo-hérisson sur le corps  $K$  est une application  $x : K \rightarrow \mathbb{S}_e^{n-1}$  qui correspond au prolongement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  du champ orthonormal sortant  $\nu : \partial K \rightarrow ST\mathbb{S}_e^{n-1}$ , que nous considérons à image dans la sphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ . Par conséquent, la conjecture 9.3.1 est équivalente à l'énoncé ci-dessous :

**Conjecture 9.3.2.** *Considérons  $K \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un corps d'intérieur non vide distinct de toute demi-sphère (et de la sphère toute entière) dont le bord  $\partial K$  est une hypersurface orientée et dont l'application  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  correspond au champ orthonormal sortant. On suppose de plus qu'il existe une application lisse  $x : K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  telle que  $x(u) = \nu(u)$  sur le bord  $\partial K$ . Alors il existe un point  $u \in \text{Int}(K)$  tel que la différentielle  $d_u x$  est injective.*

Ainsi, pour produire un contre-exemple de la conjecture 9.3.1, nous pouvons considérer la méthode consistant à définir un corps  $K \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$  dont les caractéristiques correspondent au lemme 9.2.2 et pour lequel l'image du bord  $\nu(\partial K)$  est contractile<sup>24</sup>. En effet, dans ce cas de figure, il est possible, à condition de bien définir<sup>25</sup> le corps  $K$ , de produire un prolongement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de l'application  $\nu$  sur le corps  $K$  tel que  $x(K) = \nu(\partial K)$ .

**Propriété 9.3.3.** *Considérons  $K \subset \mathbb{S}^2$  un corps dont le bord est connexe et vérifie les conditions de la conjecture 9.3.2. Alors, on a que la partie  $\nu(\partial K)$  n'est pas contractile.*

*Démonstration.* Considérons  $K \subset \mathbb{S}^2$  un corps d'intérieur non vide dont le bord  $\partial K$  est connexe et est une hypersurface orientée, et soit  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^2$  le champ orthonormal sortant. Par conséquent, choisissons  $\gamma_1 : I \rightarrow \partial K$  et  $\gamma_2 : I \rightarrow \partial K$  deux courbes régulières qui sont définies sur le même intervalle  $I$  et telles que :

$$\begin{cases} \gamma_1(I) \cap \gamma_2(I) = \emptyset \\ \forall t \in I, \nu \circ \gamma_1(t) = \nu \circ \gamma_2(t) = v(t) \end{cases} \quad (9.3.0.1)$$

Ainsi, comme par définition de l'application  $\nu$ , il est immédiat que les produits  $\langle \gamma_i(t) | v(t) \rangle$  et  $\langle \partial_t \gamma_i(t) | v(t) \rangle$  sont nuls, alors il s'en suit :

$$\langle \gamma_i(t) | \partial_t v(t) \rangle = 0$$

pour tout instant  $t \in I$ .

Supposons, à présent, que les points  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$  ne sont pas antipodaux. Alors, comme par (9.3.0.1), on ne peut pas avoir  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ ; la famille  $(\gamma_1(t), \gamma_2(t), v(t))$  forme donc une base de  $\mathbb{R}^3$ . En particulier, il est immédiat que dans ce cas de figure,  $\partial_t v(t) = 0$ . Par conséquence, on a que si la dérivée  $\partial_t v(t)$  est non nulle, alors les points  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$  sont forcément antipodaux.

Considérons donc  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial K$  un difféomorphisme que nous paramétrons sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et supposons qu'il existe  $T > 0$  et  $b$  deux scalaires pour lesquels les intervalles  $]0, T[$  et  $]b - T, b[$  sont disjoints et sont compris dans  $[0, 2\pi]$ , tels que :

$$v(t) = v(b - t) \text{ et } \partial_t v(t) \neq 0$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , où  $v = \nu \circ \gamma$ .

Ainsi, par ce qui précède, on sait que  $\gamma(t) = -\gamma(b - t)$  et donc on obtient que  $\partial_t \gamma(t) = -\partial_t \gamma(b - t) = \partial_t \gamma(b - t)$ . Considérons ensuite la fonction  $\Gamma(t) = \det(\gamma(t), \partial_t \gamma(t), v(t))$  définie

24. Un espace topologique  $X$  est dit contractile lorsqu'il existe  $f : [0; 1] \times X \rightarrow X$  une application continue telle que  $f(\{0\} \times X) = X$  et  $f(\{1\} \times X) = \{x\}$ .

25. Il est à noter que pour pouvoir définir un contre-exemple de la conjecture 9.3.1 via ce procédé, il nous suffit que le corps  $K$  vérifie les deux caractéristiques suivantes :

1. Il existe un point  $u_0 \in \text{Int}(K)$  ainsi que  $\phi : [0; 1] \times \partial K \rightarrow K$  une homotopie de classe  $\mathcal{C}^\infty$  qui contracte le bord  $\partial K$  sur le point  $u_0$  dans le corps  $K$  telle que toutes les dérivées partielles sont nulles sur  $\{1\} \times \partial K$  et dont la restriction  $\phi : [0; 1] \times \partial K \rightarrow K \setminus \{u_0\}$  est un difféomorphisme.
2. Il existe un point  $x_0 \in \nu(\partial K)$  ainsi qu'une homothétie  $\varphi : [0; 1] \times \nu(\partial K) \rightarrow \nu(\partial K)$  qui contracte la partie  $\nu(\partial K)$  sur le point  $x_0$  sur  $\nu(\partial K)$  et telle que l'application qui à  $(t, u) \in [0; 1] \times \partial K$  donne  $\varphi(t, \nu(u))$  est lisse.

sur  $[0, 2\pi]$ . Alors on a que  $\Gamma(b - t) = \det(-\gamma(t), \partial_t \gamma(t), v(t)) = -\Gamma(t)$ , ce qui n'est pas possible<sup>26</sup> car par construction  $\Gamma(t) \neq 0$  pour tout instant  $t$ . Par conséquent, il est clair<sup>27</sup> que la partie  $\nu(\partial K)$  est une courbe fermée qui n'est pas contractile.  $\square$

Nous pouvons alors constater que les conditions d'application de la propriété 9.3.3 sont moins strictes que les conditions d'application du théorème 9.3.1 que nous considérons ci-dessous, dans lequel le corps  $K$  doit être compris dans une demi-sphère ouverte. En particulier, nous avons, avec Anatole Khelif, pu constater que dépasser la contrainte consistant à considérer le corps  $K$  dans une demi-sphère est difficile pour des dimensions supérieures. Cela provient du fait que, dans le cadre de cette contrainte, nous pouvons nous restreindre à la sphère privée d'un point, dont les propriétés géométriques sont moins contraignantes que sur la sphère entière. Ainsi, par la propriété 9.3.3, il est justifié d'orienter les travaux sur une recherche de démonstration complète dans le cas où  $n = 2$ .

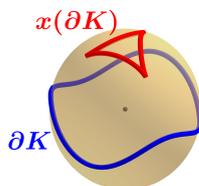


FIGURE 9.7 – Exemple d'image du bord  $x(\partial K)$  partageant une même portion régulière pour des parties disjointes du bord  $\partial K$ .

En effet, l'idée de la preuve consiste à définir, à partir des éléments que nous avons considérés dans la démonstration précédente, une forme différentielle  $\alpha \in \Omega_1(\mathbb{S}^2)$  telle que l'intégrale :

$$\int_{\partial K} \nu^*(\alpha) \tag{9.3.0.2}$$

soit non nulle. Ainsi, dans le cas où nous pourrions définir une telle forme différentielle, alors, par le théorème de Stokes, on obtient nécessairement que :

$$\int_K x^*(d\alpha) = \int_{\partial K} x^*(\alpha) = \int_{\partial K} \nu^*(\alpha) \neq 0$$

et donc, il est clair que la différentielle  $d_u x$  est nécessairement injective pour un point  $u \in \text{Int}(K)$ . Il est à noter qu'en l'état, nous ne prétendons pas avoir vérifié la conjecture 9.3.1 sur  $\mathbb{S}^3$ . Nous nous contentons simplement de présenter les axes de recherche que nous jugeons justifiés d'emprunter.

En particulier, cela nous fournit un autre procédé pour définir un contre-exemple. Il s'agirait alors de définir un corps  $K$  sur  $\mathbb{S}^{n-1}$ , qui vérifie les conditions de la conjecture 9.3.2 et pour lequel l'intégrale (9.3.0.2) est nulle pour toute forme différentielle  $\alpha \in \Omega_{n-2}(\mathbb{S}^2)$ . Aussi, via cette

26. En effet, par construction, la fonction  $\Gamma$  est partout non nulle. Cependant, comme  $\Gamma(b - t) = -\Gamma(t)$ , il existe nécessairement deux instants  $a$  et  $b$  dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$  pour lesquels les images  $\Gamma(a)$  et  $\Gamma(b)$  sont alternativement strictement positives et strictement négatives. En particulier, par continuité, il est clair qu'il existe  $t_0 \in ]a; b[$  tel que  $\Gamma(t_0) = 0$ , ce qui est impossible.

27. En effet, si  $v : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe de classe  $C^\infty$  qui n'est pas réduite à un point et est contractile (i.e. la fonction  $v$  est homotope à une fonction constante), alors il existe nécessairement  $s_1 : ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $s_2 : ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{S}^1$ , deux plongements lisses tels que  $v \circ s_1(t) = v \circ s_2(1 - t)$ .

approche, nous obtenons le théorème suivant, dont nous devons la démonstration à Anatole Khelif :

**Théorème 9.3.1.** *Considérons un corps  $K$  dans  $\mathbb{S}^{n-1}$  d'intérieur non vide (distinct de toute demi-sphère et de la sphère) tel que le bord  $\partial K$  est une hypersurface orientée dont l'application  $\nu : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  correspond au champ orthonormal sortant. Supposons donc qu'il existe  $x : K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  une application lisse telle que  $x(u) = \nu(u)$  sur le bord  $\partial K$ . De plus, nous supposons que le corps  $K$  est compris dans une demi-sphère ouverte et est difféomorphe à la boule fermée unité  $\bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Alors il existe un vecteur  $u \in \text{Int}(K)$  pour lequel la différentielle  $d_u x$  est injective.*

*Démonstration.* Considérons donc un corps  $K \subset \mathbb{S}^n$  d'intérieur non vide et vérifiant les conditions du théorème ainsi que  $\phi : K \xrightarrow{\sim} \bar{B}(0,1)$  un difféomorphisme. Aussi, on considère le vecteur  $u_0 = \phi^{-1}(0) \in \text{Int}(K)$  ainsi qu'une forme différentielle  $w \in \Omega_{n-2}(\mathbb{S}^n \setminus \{u_0, -u_0\})$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La forme } w \text{ est fermée.} \\ \text{Si } \mathcal{C} = \mathbb{S}^n \cap \langle u_0 \rangle^\perp \text{ est l'équateur pour } u_0 \text{ alors l'intégrale } \int_{\mathcal{C}} w \text{ est non nulle.} \end{array} \right. \quad (9.3.0.3)$$

En effet, pour définir une telle forme différentielle, considérons le champ de vecteurs normé  $v : \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{u_0, -u_0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  défini par les géodésiques méridiennes allant de  $u_0$  à  $-u_0$ , ainsi que la fonction  $f : \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{u_0, -u_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  correspondant à la mesure des parallèles telle que :

$$f(u) = \int_{g^{-1}(\langle u|u_0 \rangle)} w^v \quad (9.3.0.4)$$

où  $g(u) = \langle u_0|u \rangle$  et  $w^v_u(W_2, \dots, W_{n-1}) = \det(u, v(u), W_2, \dots, W_{n-1})$ . Alors, on définit le champ de vecteurs  $X : \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{u_0, -u_0\} \rightarrow T\mathbb{S}^{n-1}$  tel que :

$$X(u) = \frac{v(u)}{f(u)} \quad (9.3.0.5)$$

et après un petit calcul, on peut vérifier que la divergence  $\text{div}(X)$  est nulle. Ainsi, il est immédiat que la  $(n-2)$ -forme différentielle telle que :

$$w_u(W_2, \dots, W_{n-1}) = \det(u, X(u), W_2, \dots, W_{n-1}) \quad (9.3.0.6)$$

vérifie les conditions recherchées.

Considérons à présent la fonction  $g : K \setminus \{u_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g(u) = \|\phi(u)\|$ . En remarquant que les hypersurfaces de niveau  $\Gamma_t = g^{-1}(t)$  sont lisses, on définit le champ orthonormal  $V : K \setminus \{u_0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{u_0, -u_0\}$  tel que :

$$V(u) = \frac{\vec{\nabla} g(u)}{\|\vec{\nabla} g(u)\|} \quad (9.3.0.7)$$

En particulier, il est important de noter que le corps  $K$  étant compris dans une demi-sphère ouverte, l'image  $V(u)$  est distincte de  $u_0$  et  $-u_0$ . Comme  $V(\Gamma_t) \rightarrow \mathcal{C}$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , il existe forcément  $t_0 \in ]0, 1[$  tel que :

$$\int_{\Gamma_{t_0}} V^*(w) \neq 0 \quad (9.3.0.8)$$

et comme la forme  $w$  est fermée, alors par le théorème de Stokes :

$$\int_{g^{-1}([t_0,1])} V^*(dw) = \int_{\Gamma_{t_0}} V^*(w) + \int_{\partial K} V^*(w) = 0 \quad (9.3.0.9)$$

et donc

$$\int_{\partial K} V^*(w) \neq 0 \quad (9.3.0.10)$$

On peut alors définir  $w' \in \Omega_{n-2}(\mathbb{S}^{n-1})$ , une forme différentielle qui n'est pas fermée et qui coïncide avec la forme  $w$  sur l'image  $\nu(\partial K)$ . Ainsi, par le théorème de Stokes, on a que :

$$\int_K x^*(dw') = \int_{\partial K} x^*(w') = \int_{\partial K} \nu^*(w') \neq 0 \quad (9.3.0.11)$$

ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

À présent, il nous faut savoir que définir une forme  $w$  pour laquelle l'intégrale (9.3.0.2) est non nulle dans un cadre plus large que celui que nous avons considéré dans le théorème précédent, et pour une dimension supérieure à  $n = 2$ , relève d'une grande complexité. Aussi, d'autres méthodes pourraient être employées dont, en particulier, celles se reposant sur la géométrie algébrique. Ces méthodes feront l'objet de futurs projets. Pour terminer, nous présentons rapidement ci-dessous une deuxième conjecture qui apparaît naturellement et dont l'importance est non négligeable pour répondre à l'objectif consistant à classer les pseudo-hérissons :

**Conjecture 9.3.3.** *Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  est un pseudo-hérisson centré en  $e$  tel que l'intersection  $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e$  admet un point isolé, alors le pseudo-hérisson  $\mathcal{H}$  passe par son équateur en un seul et unique point, et le corps  $K$  est une demi-sphère. De plus, il existe un second point de référence  $v_0 \in \mathbb{S}^n$  pour lequel le pseudo-hérisson  $\mathcal{H}$  est centré en  $v_0$  et est compris dans la demi-sphère  $\Omega_{v_0}$ .*

Nous ne nous étendrons pas plus sur cette dernière conjecture. L'idée centrale est que si l'intersection  $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e$  admet un point isolé, alors le corps  $K$  doit forcément admettre une composante connexe sur laquelle le paramétrage  $x$  est constant. Et par la propriété 9.3.1, nous savons que le corps  $K$  est une demi-sphère et donc l'intersection  $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e$  est un singleton. Toute la difficulté réside dans le fait de choisir un point de référence  $v_0$  pour lequel la fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \setminus K \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1} \setminus \{u_0\}$  (voir expression (10.2.0.1) page 215) est un difféomorphisme vérifiant que la famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_{\phi^{-1}(u)})_{u \in \mathbb{S}_{v_0}^{n-1} \setminus \{u_0\}}$  peut être complétée par le  $g$ -hyperplan  $\mathcal{C}_e$ , afin de former une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $v_0$ .

## 9.4 Conclusion sur le classement des pseudo-hérissons

Dans la suite et, en particulier, pour le chapitre 10, nous supposons vraies les deux conjectures précédentes<sup>28</sup>. Par conséquent, nous pouvons considérer trois catégories de pseudo-hérissons que nous présentons ci-dessous :

- La première catégorie correspond aux pseudo-hérissons centrés en  $e$  qui sont compris dans la demi-sphère  $\Omega_e$  (ou dans la demi-sphère  $\Omega_{-e}$ ). En particulier, cette catégorie correspond aux  $g$ -hérissons de la sphère et font l'objet du chapitre suivant.

<sup>28</sup>. Il est à noter que cette hypothèse aura pour seul effet de justifier la définition de  $g$ -hérisson que nous considérons au chapitre 10. En particulier, les résultats qui sont présentés au chapitre 10 ne reposent pas sur les conjectures 9.3.1 et 9.3.3.

- La deuxième catégorie correspond aux pseudo-hérissons centrés en  $e$  qui passent par leur équateur en un seul et unique point. Ainsi, via la conjecture 9.3.3, on sait que ce sont des g-hérissons, à condition de modifier le point de référence.
- La troisième catégorie correspond aux pseudo-hérissons qui passent par leur équateur en plus d'un point. Par les conjectures 9.3.1 et 9.3.3, il est clair que cette catégorie se distingue des deux premières en ce sens qu'il est justifié d'en exclure<sup>29</sup> les pseudo-hérissons du fait qu'ils ne vérifient pas les caractéristiques nécessaires pour définir les g-hérissons marginalement piégés.

Pour conclure ce chapitre, nous pouvons considérer que la notion de hérisson se montre plus difficile sur la sphère que sur l'espace hyperbolique. En particulier, nous perdons la correspondance directe entre les g-hérissons et les hérissons euclidiens, comme c'est le cas sur l'espace hyperbolique via la projection de Klein. Cela provient du fait que les pseudo-hérissons centrés en  $e$  de la deuxième catégorie vérifient des propriétés satisfaisantes sans qu'ils correspondent à des hérissons euclidiens via la projection gnomonique centrée en  $e$ .

---

29. Pour être précis, deux cas de figure sont à traiter. En effet, nous avons que le corps  $K$  correspondant à un pseudo-hérisson de la troisième catégorie peut vérifier les conditions de la conjecture 9.3.1 ou bien être une demi-sphère. Et dans ces deux situations, il est justifié de considérer que l'intersection  $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_e$  est localement une hypersurface dont la courbure de Gauss est nulle.

# Chapitre 10

## Sur les g-hérissons de la sphère

Dans le chapitre précédent, nous avons établi que la notion de g-hérisson sur la sphère doit correspondre à des pseudo-hérissons (voir définition 9.2.4 page 187) qui sont contenus dans leur demi-sphère nord<sup>1</sup>. Nous obtenons ainsi une notion de hérisson dont les propriétés correspondent à ce que nous connaissons sur l'espace euclidien et l'espace hyperbolique. Néanmoins, la notion de g-hérisson sur la sphère, ainsi définie, reste plus contraignante que sur l'espace hyperbolique. L'objet de ce chapitre consiste donc à en étudier les caractéristiques afin de déterminer les conditions pour lesquelles nous retrouvons des résultats similaires à ceux que nous avons vus pour les g-hérissons de l'espace hyperbolique.

### 10.1 Définition et première propriété

Considérons  $e \in \mathbb{S}^n$  un point de référence ainsi que  $h : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  une fonction lisse. Il est alors nécessaire de considérer les applications lisses  $x_0$ ,  $N$  et  $\vec{G}$  que nous avons définies via les expressions (9.2.1.5) et (9.2.1.6) page 188, ainsi que le champ de vecteurs  $\vec{V} \in \Delta(\mathbb{S}_e^{n-1})$  et la fonction lisse  $\sigma : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  tels que :

$$\vec{V}(u) = \frac{1}{\text{Cos } h(u)} \vec{\nabla} h(u) \text{ et } \sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + V(u)^2}} \quad (10.1.0.1)$$

avec  $V(u) = \|\vec{V}(u)\|$ .

**Définition 10.1.1.** *Considérons  $e \in \mathbb{S}^n$  un point de référence. Alors on appelle **g-hérisson centré en  $e$**  tout pseudo-hérisson centré en  $e$  qui est compris dans la demi-sphère ouverte  $\Omega_e$ .*

Suite à la remarque 9.2.5 page 200 et afin de ne pas inutilement surcharger notre texte, il est justifié d'appeler **famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$**  toute famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  qui vérifie la condition suivante :

$$\Sigma_u \neq \mathcal{C}_e \quad (10.1.0.2)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

---

1. Pour rappel, si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  est un pseudo-hérisson centré en  $e$ , alors on appelle demi-sphère nord la demi-sphère ouverte  $\Omega_e$ .

Notons que pour toute famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  vérifiant la condition (10.1.0.2), il existe une seule et unique fonction de support à image sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , que l'on appelle donc naturellement **fonction de support** de la famille de g-hyperplans.

**Propriété 10.1.1.** *Toute famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  et vérifiant la condition (10.1.0.2) admet une unique enveloppe paramétrée sur la demi-sphère  $\Omega_e$ . De plus, son paramétrage est défini via l'expression suivante :*

$$x(u) = \sigma(u) \left[ x_0(u) + \vec{V}(u) \right] = \exp_{x_0(u)} \left( \vec{G}(u) \right) \quad (10.1.0.3)$$

où les champs de vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{G}$ , qui sont définis par les expressions (9.2.1.6) et (10.1.0.1), vérifient les relations  $G(u) = \text{ArcTan } V(u)$  et  $\langle \vec{G}(u) | \vec{V}(u) \rangle = G(u)V(u)$ .

*Démonstration.* Considérons donc  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  qui vérifie la condition (10.1.0.2) et supposons qu'elle admet une enveloppe  $\mathcal{H} \subset \Omega_e$ . Alors, en reprenant les expressions et les relations (9.2.1.6), (9.2.3.30), (9.2.3.31), (9.2.3.32), (9.2.3.33) et (9.2.3.34) des pages 188 et 197 ainsi que le lemme 4.4.1 page 96, nous savons que le paramétrage de l'enveloppe  $\mathcal{H}$  admet pour expression  $x(u) = a(u)\vec{G}(u) + b(u)x_0(u)$  où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions lisses telles que  $b = \text{Cos}(G)$  et  $a(u)$  est défini par :

$$a(u) = \frac{\text{Sin } G(u)}{G(u)} \quad (10.1.0.4)$$

lorsque  $\vec{G}(u) \neq 0$ , et  $a(u) = 1$  sinon. Ensuite, comme la condition de contact implique que les applications  $x$  et  $N$  vérifient la relation  $\langle d_u x \cdot \vec{v} | N(u) \rangle = 0$ , pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  et  $\vec{v} \in T_u \mathbb{S}_e^{n-1}$ , alors après quelques calculs on obtient :

$$\langle x(u) | d_u N \cdot \vec{v} \rangle = -b(u)d_u h(\vec{v}) + a(u)\text{Cos } h(u) \langle \vec{G}(u) | \vec{v} \rangle = 0$$

Il s'en suit que  $b(u)\vec{\nabla} h(u) = a(u)\text{Cos } h(u)\vec{G}(u)$ , pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , et comme la famille de g-hyperplans vérifie la relation (10.1.0.2), alors  $\text{Cos } h(u) \neq 0$ . Ainsi, par la remarque 9.2.5 page 200, on a forcément que  $b(u)$  n'est jamais nul. Par conséquent, si le gradient  $\vec{\nabla} h(u)$  est non nul, alors  $a(u) \neq 0$  et donc le vecteur  $\vec{G}(u)$  est non nul, tel que :

$$\vec{G}(u) = \frac{\text{ArcTan } V(u)}{V(u)} \vec{V}(u) \quad (10.1.0.5)$$

et ainsi,

$$a(u)\vec{G}(u) = \frac{1}{\text{ArcTan } V(u)} \frac{V(u)}{\sqrt{1 + V(u)^2}} \vec{G}(u) = \sigma(u)\vec{V}(u) \text{ et } b(u) = \sigma(u)$$

De plus, comme  $\vec{G}(u) = 0$  lorsque  $\vec{V}(u) = 0$ , il est clair que dans ce cas,  $a(u)\vec{G}(u)$  est nul et, par conséquent, nous obtenons le résultat recherché.  $\square$

Il est à noter qu'au vu de ce qui précède, nous obtenons nécessairement que, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , la dérivée covariante  $\nabla(N)_u : T_u \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow \langle N(u) \rangle^\perp$  est un difféomorphisme. Par conséquent, en définissant la **fonction de courbure** via l'expression suivante :

$$R(u) = \det(\phi_u), \quad (10.1.0.6)$$

où  $\phi$  est le morphisme de fibré tel que  $\phi_u := \nabla(N)_u^{-1} \circ d_u x : T_e \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto T_e \mathbb{S}_e^{n-1}$ , nous retrouvons bien que la courbure de Gauss d'un g-hérisson est non nulle partout où elle existe.

Pour conclure cette section, considérons  $e \in \mathbb{S}^n$  un point de référence. Il est alors clair que, via la projection gnomonique centrée en  $e$ , les familles de g-hyperplans co-orientés en  $e$  vérifiant la condition (10.1.0.2) correspondent aux familles d'hyperplans co-orientés sur l'espace euclidien  $(T_e \mathbb{S}^n, g_e)$ , où  $g$  est la métrique usuelle sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ . En particulier, nous obtenons la propriété suivante :

**Propriété 10.1.2.** *Considérons  $e \in \mathbb{S}^n$  un point de référence ainsi que  $\psi_e : \Omega_e \mapsto T_e \mathbb{S}^n$  la carte gnomonique centrée en  $e$ . Alors nous avons que  $\mathcal{H} \subset \Omega_e$  est un g-hérisson centré en  $e$  si et seulement si l'image  $\psi_e(\mathcal{H})$  est un hérisson euclidien. De plus, si  $h$  et  $l$  sont les fonctions de support respectives de  $\mathcal{H}$  et  $\psi_e(\mathcal{H})$ , alors  $l = \text{Tan}(h)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de d'adapter les arguments que nous avons considérés lors des démonstrations des propriétés 4.3.4 et 4.4.3 des pages 93 et 100.  $\square$

## 10.2 Problème du changement de point

Sur l'espace hyperbolique, nous savons, par le théorème 6.4.1 page 152, que la notion de g-hérisson ne dépend pas du choix du point de référence. Cependant, comme nous le vérifions via la propriété ci-dessous, il est clair que nous ne retrouvons pas cette propriété pour les g-hérissons de la sphère. En effet :

**Propriété 10.2.1.** *Sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ , la notion de g-hérisson dépend du choix du point. En particulier, pour tout g-hérisson  $\mathcal{H}$  centré en  $e$ , il existe  $v_0 \in \Omega_e$  un point pour lequel  $\mathcal{H}$  n'est pas un g-hérisson centré en  $v_0$ .*

*Démonstration.* En effet, considérons  $\mathcal{H}$  un g-hérisson centré en  $e$  qui n'est pas réduit à un singleton. Alors il existe nécessairement un second point de référence  $v_0 \in \Omega_e$  pour lequel  $\mathcal{H}$  passe par l'équateur  $\mathcal{C}_{v_0}$  et occupe les demi-sphères nord et sud par rapport au point  $v_0$ . Ainsi, par les propriétés 9.3.1 et 9.3.2 page 207, on sait que si  $\mathcal{H}$  est un g-hérisson centré en  $v_0$ , alors il ne pourrait pas être centré en  $e$ .  $\square$

Il est alors naturel d'adopter la démarche que nous avons considérée dans le chapitre 6 afin de déterminer les conditions qui rendent possible le changement de point de référence d'un g-hérisson de la sphère.

**Définition 10.2.1.** *Considérons  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de g-hyperplans co-orientés en  $e$  ainsi que  $v_0 \in \mathbb{S}^n$  un second point de référence. Alors, on appelle **fonction de réindexation**, toute fonction  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et vérifie que, pour tout vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , la géodésique passant par le point  $v_0$  à la vitesse  $\phi(u)$  est orthogonale à  $\Sigma_u$  sur la demi-sphère  $\Omega_{v_0}$ .*

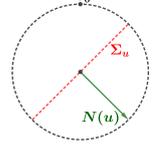
**Propriété 10.2.2.** *Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  un g-hérisson centré en  $e$  ainsi que  $v_0 \in \mathbb{S}^n$  un second point de référence tel que  $\mathcal{H} \subset \Omega_{v_0}$ . Alors, il existe une unique fonction de réindexation entre les points  $e$  et  $v_0$  pour laquelle, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , l'orientation du g-hyperplan  $\Sigma_u$  correspond<sup>2</sup> avec le vecteur  $\phi(u)$ . De plus, la fonction de réindexation, ainsi définie, vérifie l'expression suivante :*

$$\phi(u) = \mathcal{N} \circ \pi_{v_0} \circ N(u) \quad (10.2.0.1)$$

où  $\pi_{v_0} : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto T_{v_0} \mathbb{S}^n$  est la projection orthogonale le long de la droite  $\mathbb{R}v_0$ .

*Démonstration.* Considérons  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^{n-1}}$  une famille de g-hyperplan co-orienté en  $e$  ainsi que  $v_0 \in \Omega_e$  un second point de référence vérifiant que  $\Sigma_u \neq \mathcal{C}_{v_0}$ , pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Alors supposons l'existence d'une fonction de réindexation entre les points  $e$  et  $v_0$ .

En remarquant que  $\Sigma_u = \mathbb{S}^n \cap \langle N(u) \rangle^\perp$ , alors comme  $\Sigma_u \neq \mathcal{C}_{v_0}$ , on a que le vecteur  $N(u)$  ne peut être colinéaire avec  $v_0$ . De plus, la géodésique  $\gamma$  passant par le point  $v_0$  et étant orthogonale à  $\Sigma_u$ , il s'ensuit qu'elle est forcément comprise sur le plan vectoriel  $\mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}N(u)$ . Il est donc immédiat que  $N(u) = a\phi(u) + bv_0$  et comme on sait que  $\pi_{v_0} \circ N(u) \neq 0$ , alors on obtient le résultat recherché.



□

**Propriété 10.2.3.** *Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  un g-hérisson centré en  $e$  ainsi qu'un vecteur  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  et le point  $x_0 = x(u_0)$ , où  $x$  est le paramétrage centré en  $e$ . Alors la fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  est localement un difféomorphisme aux voisinages des vecteurs  $u_0$  et  $v_0 = \phi(u_0)$  et, en particulier, le g-hérisson  $\mathcal{H}$  est, au voisinage du point  $x_0$ , un g-hérisson centré en  $x_0$ . De plus, si  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto T\mathbb{S}^n$  est le champ orthonormal centré en  $e$ , alors on obtient les deux relations suivantes :*

$$N(u_0) = \phi(u_0) = v_0 \text{ et } d_{u_0}N \cdot \vec{v} = d_{u_0}\phi \cdot \vec{v} \quad (10.2.0.2)$$

pour tout  $\vec{v} \in T_{u_0}\mathbb{S}_e^{n-1}$ .

*Démonstration.* En remarquant que les éléments  $N(u_0)$ ,  $d_{u_0}N \cdot \vec{v}$  et  $x_0$  sont deux à deux orthogonaux, il est immédiat que l'on obtient les expressions (10.2.0.2) à partir de l'expression (10.2.0.1). □

**Propriété 10.2.4.** *Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$ , avec  $n \geq 3$ , un g-hérisson centré en  $v_0 \in \Omega_e$  vérifiant que  $x_0(u) \in \Omega_e$ , pour tout vecteur  $u \in \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ , où  $x_0$  est l'application définie via l'expression (9.2.1.5). Alors, c'est un g-hérisson centré en  $e$ .*

*Démonstration.* Considérons donc la fonction de réindexation  $\phi := \mathcal{N} \circ \pi_e \circ N : \mathbb{S}_{v_0}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$ , où  $N(u) = \text{Cos } h(u)u - \text{Sin } h(u)v_0$  est le champ orthonormal. Si  $\vec{v} \in T_u\mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$  est un vecteur non nul, alors comme  $\langle x_0(u)|e \rangle > 0$ , on a que pour tout scalaire  $a$  et  $b$ , le vecteur  $aN(u) + bd_uN \cdot \vec{v}$  n'est jamais colinéaire à  $e$ . En particulier, les vecteurs  $\pi_e \circ N(u)$  et  $\pi_e(d_uN \cdot \vec{v})$  sont non nuls et forment une famille libre sur  $T_e\mathbb{S}^n$ . Par conséquent, on a que la différentielle  $d_u\phi \cdot \vec{v}$  est non nulle et donc l'application  $\phi$  est un difféomorphisme local en tout point. Ainsi, par simple convexité, on obtient le résultat recherché. □

### 10.3 Condition de contact et g-hérisson vu comme front de Legendre

Dans cette section, nous traitons de la notion de g-hérisson vue comme étant le front de Legendre d'un certain type d'immersion de Legendre que nous caractérisons. Pour cela, nous adopterons deux points de vue qui correspondent naturellement aux deux approches que nous avons considérées aux sections 7.2.1 et 7.2.2 des pages 160 et 165 pour décrire les g-hérissons de

2. Nous entendons par correspondance entre l'orientation du g-hyperplan  $\Sigma_u$  et le vecteur  $\phi(u)$ , le fait que la géodésique  $\gamma$  qui passe par le point  $v_0$  à la vitesse  $\phi(u)$  intersecte orthogonalement, dans la demi-sphère  $\Omega_{v_0}$ , le g-hyperplan  $\Sigma_u$  en l'instant  $t_0$  tel que  $\partial_t\gamma(t_0) = \nu_u(x_0)$ , où  $x_0$  est l'unique point dans l'intersection  $\gamma \cap \Sigma_u \cap \Omega_{v_0}$  et  $\nu_u$  est le champ orthonormal qui correspond à l'orientation du g-hyperplan  $\Sigma_u$ .

l'espace hyperbolique au regard de la géométrie de contact.

Commençons donc par déterminer la condition de contact qui correspond à la relation d'injectivité qui est définie par les géodésiques porteuses et transverses (voir définition 4.3.4 page 91). Pour cela, nous adaptons la méthode que nous avons considérée à la section 7.2.1 en définissant, pour tout point  $x \in \Omega_e$  et vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , le vecteur  $N_e(x, u) \in \mathbb{S}_x^{n-1}$  tel que le g-hyperplan  $\Sigma = \exp_x(\langle N_e(x, u) \rangle^\perp)$  est orthogonal à la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$ . Considérons donc la définition ci-dessous :

**Définition 10.3.1.** *Considérons  $e \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  un point de référence, alors on appelle **application orthonormale centrée en e** l'application lisse  $N_e : \Omega_e \times \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{S}^n$  qui est définie via l'expression suivante :*

$$N_e(x, u) = (x, \mathcal{N}(u - k_e(x) \langle x|u \rangle e)) \quad (10.3.0.1)$$

avec  $k_e(x) = \frac{1}{\langle e|x \rangle}$  et  $\mathcal{N}$  étant la fonction de normalisation sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

En adaptant les arguments que nous avons considérés afin de vérifier les propriétés 7.2.2 et 7.2.3 des pages 161 et 162 pour les g-hérissons de l'espace hyperbolique, il est clair que l'application orthonormale généralisée centrée en  $e$  est une immersion et est la seule application lisse vérifiant la condition (7.2.1.2) page 160 pour toute hypersurface orientée. Il est alors clair que si  $x$  est le paramétrage d'un g-hérisson centré en  $e$ , alors on a :

$$N(u) = N_e(x(u), u) \quad (10.3.0.2)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Par conséquent, après quelques développements, on obtient qu'une application  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \Omega_e$  est le paramétrage d'un g-hérisson centré en  $e$  si et seulement si la condition ci-dessous est vérifiée :

$$\langle d_u x \cdot \vec{W} | \langle x|e \rangle u - \langle x|u \rangle e \rangle = 0 \quad (10.3.0.3)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

Il est alors justifié d'appeler **condition de contact centrée en e**, la condition (10.3.0.3). De plus, en considérant, sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ , la structure de contact que nous avons introduite sur l'espace hyperbolique à la section 7.1 page 157, il s'ensuit le résultat suivant :

**Propriété 10.3.1.** *Tout g-hérisson centré en  $e$ , sur la sphère, est le front Legendrien d'une immersion de Legendre  $\iota : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{S}^n$  de la forme suivante :*

$$\iota(u) = N_e(x(u), u) \quad (10.3.0.4)$$

où  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \Omega_e$  est une application lisse.

*Démonstration.* La démonstration est identique à celle que nous avons considérée pour vérifier la propriété 7.2.6 page 164.  $\square$

Pour la suite, nous considérons les immersions de Legendre qui sont définies via l'application de Gauss correspondant au prolongement géodésique du champ orthonormal. Considérons donc  $e \in \mathbb{S}^n$  un point de référence ainsi que l'équateur  $\mathcal{C}_e$ , que nous appellerons **horizon à l'infini centré en e** pour la suite de cette section. Ainsi, si  $\mathcal{H} \subset \Omega_e$  est une hypersurface orientée et dont le champ orthonormal est  $v : \mathcal{H} \mapsto ST\mathbb{S}^n$ , alors pour tout point  $x \in \mathcal{H}$ , on définit  $\nu(x)$

comme étant l'unique point d'intersection de l'horizon  $\mathcal{C}_e$  avec la restriction sur l'intervalle  $]0; \pi[$  de la géodésique qui passe par le point  $x$  à la vitesse  $v(x)$ . Par conséquent, considérons pour tout point  $x \in \Omega_e$  et vecteur  $u \in \mathbb{S}_x^{n-1}$ , la géodésique  $\gamma(t) = \text{Cos}(t)x + \text{Sin}(t)u$  qui passe par le point  $x$  à la vitesse  $u$ . En considérant  $t_0 \in ]0; \pi[$  l'unique instant tel que  $\gamma(t_0) \in \mathcal{C}_e$ , il est clair que  $\langle \gamma(t_0)|e \rangle = 0$  et en supposant que  $t_0 \neq \frac{\pi}{2}$  on obtient forcément que :

$$\frac{\gamma(t_0)}{\text{Cos}(t_0)} = x + \text{Tan}(t_0)u = x - \frac{\langle e|x \rangle}{\langle e|u \rangle}u \sim \langle e|u \rangle x - \langle e|x \rangle u \quad (10.3.0.5)$$

Ainsi, après normalisation, on définit l'application de Gauss centrée en  $e$  pour l'hypersurface  $\mathcal{H}$ , comme étant l'application lisse  $\nu : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}_e$  telle que  $\nu(x) = \phi_e(x, v(x)) \in \mathcal{C}_e$ , pour tout point  $x \in \mathcal{H}$  où  $\phi_e : ST\Omega_e \rightarrow \mathcal{C}_e$  est l'application lisse vérifiant l'expression suivante :

$$\phi_e(x, u) = f_e(x, u)[\langle e|x \rangle u - \langle e|u \rangle x] \quad (10.3.0.6)$$

avec  $f_e(x, u) = \frac{1}{\sqrt{\langle e|x \rangle^2 + \langle e|u \rangle^2}}$ . Par conséquent, il est donc justifié de définir l'application de Gauss d'un g-hérison via la définition suivante :

**Définition 10.3.2.** Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  est un g-hérison centré en  $e$ , alors on appelle **application de Gauss centrée en  $e$**  l'application  $\nu : \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow \mathcal{C}_e$  telle que :

$$\nu(u) = \phi_e(x(u), N(u)) \quad (10.3.0.7)$$

où  $x$  et  $N$  sont le paramétrage et le champ orthonormal du g-hérison.

**Propriété 10.3.2.** Si  $\mathcal{H} \subset \Omega_e$  est un g-hérison de la sphère et qui est centré en  $e$ , alors son application de Gauss vérifie l'expression suivante :

$$\nu(u) = \eta(u) \left[ u + \text{Sin } h(u) \vec{V}(u) \right] \quad (10.3.0.8)$$

avec  $\eta(u)$  étant le facteur de normalisation.

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $\nu(u) \sim \langle N(u)|e \rangle x(u) - \langle x(u)|e \rangle N(u)$  et, après quelques calculs, on obtient le résultat recherché.  $\square$

**Remarque 10.3.1.** Si, pour  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on a  $x(u_0) = e$ , alors, comme via l'expression (10.1.0.3), il est clair que l'image  $h(u_0)$  et le gradient  $\vec{\nabla} h(u_0)$  sont respectivement nuls, on a forcément que :

$$\nu(u_0) = u_0 \text{ et } d_{u_0} \nu \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad (10.3.0.9)$$

pour tout vecteur  $\vec{v} \in T_{u_0} \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

Par conséquent, il est nécessaire de déterminer les conditions pour lesquelles l'application de Gauss d'un g-hérison est un difféomorphisme. Considérons donc  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  un g-hérison centré en  $e$ . La dérivée covariante du champ orthonormal  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow x^*T\mathbb{S}^n$  étant partout injective, alors on considère le morphisme de fibré  $f \in \Omega_1(\mathbb{S}_e^{n-1}) \otimes \Delta(\mathbb{S}_e^{n-1})$ , tel que :

$$f_u := (d_u N)^{-1} \circ d_u x : T_u \mathbb{S}_e^{n-1} \rightarrow T_u \mathbb{S}_e^{n-1} \quad (10.3.0.10)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ .

Il nous faut alors remarquer que  $f$  est un endomorphisme symétrique pour la troisième forme fondamentale  $III_u(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \langle d_u N \cdot \vec{v}_1 | d_u N \cdot \vec{v}_2 \rangle$ . Ainsi, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on appelle

**rayon de courbure principal pour  $u$**  toute valeur propre de  $f_u$ . On peut ainsi constater que pour tout  $x_0 \in \Omega_e$ , si la fonction de réindexation  $\phi : \mathcal{V} \subset \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathcal{W} \subset \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  est un difféomorphisme local au voisinage d'un vecteur  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , alors les rayons de courbure principaux en  $u_0$  (relativement au point de référence  $e$ ) correspondent aux rayons de courbure principaux pour  $v_0 = \phi(u_0)$  (relativement au point de référence  $x_0$ ).

**Remarque 10.3.2.** Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}_e^{n-1}$  est un g-hérisson centré en  $e$  et  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  un vecteur, alors un scalaire  $r \in \mathbb{R}$  est un rayon de courbure principal pour  $u_0$  si et seulement s'il existe  $\vec{v} \in T_{u_0}\mathbb{S}_e^{n-1}$ , un vecteur non nul, tel que :

$$d_{u_0}x(\vec{v}) = rd_{u_0}N(\vec{v}) \quad (10.3.0.11)$$

À présent, considérons  $\nu \in \mathbb{S}^n$  un point ainsi que  $S(\nu, R)$ , l'hypersphère géodésique centrée en  $\nu$  et de rayon  $R$ . Après un petit calcul, on peut constater que les courbures principales (pour l'orientation définie via la normale entrante) sont toutes les mêmes et admettent pour expression :

$$k = -\frac{1}{\text{Tan}(R)} \text{ avec } \text{Tan}(R) = \frac{\sqrt{1 - \langle \nu | x \rangle^2}}{\langle \nu | x \rangle} \quad (10.3.0.12)$$

pour tout  $x \in S(\nu, R)$ .

**Remarque 10.3.3.** Si  $e \in \mathbb{S}^n$  est un point de référence et  $\nu \in \mathcal{C}_e$  un point sur l'horizon, alors on peut construire un g-hérisson centré en  $e$  qui correspond localement à une hypersphère  $S(\nu, R)$ . Il nous faut alors noter que dans ce cas de figure, il est clair que l'application de Gauss centrée en  $e$  n'est pas injective.

**Définition 10.3.3.** Un g-hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  centré en  $e$  sera dit **non gaussien** lorsqu'il existe un vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  ainsi qu'un rayon de courbure principal  $r \in \mathbb{R}$  pour  $u$ , tels que :

$$r = \frac{\sqrt{1 - \langle x(u) | \nu(u) \rangle^2}}{\langle x(u) | \nu(u) \rangle} \quad (10.3.0.13)$$

avec  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^n$  et  $\nu : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathcal{C}_e$  correspondant respectivement au paramétrage et à l'application de Gauss centrée en  $e$  du g-hérisson  $\mathcal{H}$ .

**Note.** Dans le cas contraire, nous dirons que le g-hérisson  $\mathcal{H}$  est **gaussien**.

**Théorème 10.3.1.** L'application de Gauss d'un g-hérisson centré en  $e$  est un difféomorphisme si, et seulement si, c'est un g-hérisson gaussien.

*Démonstration.* Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  un g-hérisson centré en  $e$  ainsi que  $\nu : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathcal{C}_e$  son application de Gauss centrée en  $e$ . Par la propriété 10.3.2 précédente, nous savons que  $\langle u | \nu(u) \rangle > 0$  pour tout vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ . Il nous suffit alors de vérifier que l'application de Gauss est un difféomorphisme local en chaque point. Considérons donc un second point de référence  $x_0 \in \Omega_e$  tel que le g-hérisson  $\mathcal{H}$  intersecte la demi-sphère  $\Omega_{x_0}$ . À présent, il nous faut définir une application  $f : (\Omega_e \cap \Omega_{x_0}) \times \mathcal{C}_e \mapsto (\Omega_e \cap \Omega_{x_0}) \times \mathcal{C}_{x_0}$  telle que, si  $\nu_{x_0} : \Gamma \subset \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \mapsto \mathcal{C}_{x_0}$  correspond localement à l'application de Gauss centrée en  $x_0$  du g-hérisson  $\mathcal{H}$ , que l'on considère localement<sup>3</sup> comme étant un g-hérisson centré en  $x_0$ , alors sur le voisinage  $\phi^{-1}(\Gamma)$ , la relation suivante est vérifiée :

3. Par "localement", nous entendons qu'il existe  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma \subset \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}}$  une famille de g-hyperplans qui est définie sur un ouvert  $\Gamma$  et qui est co-orientée en  $x_0$  telle que l'enveloppe est comprise dans le g-hérisson  $\mathcal{H}$ .

$$(x(u), \nu_{x_0} \circ \phi(u)) = f(x(u), \nu(u)) \quad (10.3.0.14)$$

où  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  est la fonction de réindexation entre les points  $e$  et  $x_0$ . Pour cela, considérons  $\nu$ , l'unique point d'intersection de l'horizon  $\mathcal{C}_e$  avec la restriction sur l'intervalle  $]0; \pi[$  de la géodésique passant par le point  $x \in \Omega_e$  à la vitesse  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  et en l'instant  $t = 0$ . Alors, par la relation (10.3.0.5), nous savons que  $\nu = \mu(\langle e|x \rangle u - \langle e|u \rangle x)$ , avec  $\mu > 0$  étant le facteur de normalisation. Ainsi, comme  $\langle e|x \rangle > 0$ , alors, en projetant orthogonalement le point  $\nu$  le long de la droite  $\mathbb{R}x$ , on a que  $u = \mathcal{N}(\nu - \langle \nu|x \rangle x) \sim \nu - \langle \nu|x \rangle x$  et, suite à un petit calcul, on obtient que  $\langle x_0|x \rangle u - \langle x_0|u \rangle x \sim \langle x_0|x \rangle \nu - \langle x_0|\nu \rangle x$ . Par conséquent, après normalisation, on définit la fonction  $f : (\Omega_e \cap \Omega_{x_0}) \times \mathcal{C}_e \mapsto (\Omega_e \cap \Omega_{x_0}) \times \mathcal{C}_{x_0}$  via l'expression suivante :

$$f(x, \nu) = \left( x, \vec{f}(x, \nu) \right) \quad (10.3.0.15)$$

avec  $\vec{f}(x, \nu) = \mathcal{N}(\langle x_0|x \rangle \nu - \langle x_0|\nu \rangle x)$ . Il est alors clair que  $f$  correspond à l'unique application vérifiant la condition (10.3.0.14). De plus, en remarquant que, par le même procédé, on peut définir l'application inverse  $g : (\Omega_e \cap \Omega_{x_0}) \times \mathcal{C}_{x_0} \mapsto (\Omega_e \cap \Omega_{x_0}) \times \mathcal{C}_e$ , on obtient que l'application  $f$  est un difféomorphisme.

Considérons donc  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  un vecteur ainsi que le point  $x_0 = x(u_0)$ . Alors on a vu, par propriété 10.2.3, que  $\mathcal{H}$  est localement un g-hérisson centré en  $x_0$ . Considérons alors  $y : \Gamma \subset \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^n$  le paramétrage centré en  $x_0$  (défini localement) ainsi que le vecteur  $v_0 \in \Gamma$  tel que  $x_0 = y(v_0)$ . En particulier, on a vu (voir remarque 10.3.1) que dans ce cas :

$$\nu_{x_0}(v_0) = v_0 \text{ et } d_{v_0} \nu_{x_0} \cdot \vec{W} = \vec{W} \quad (10.3.0.16)$$

et par la relation (10.2.0.2) on obtient :

$$d_{u_0} \nu \cdot \vec{W} = d_{(x_0, v_0)} \vec{g} \left( d_{u_0} x \cdot \vec{W}, d_{u_0} N \cdot \vec{W} \right) \quad (10.3.0.17)$$

Pour la suite, notons que  $\vec{g}(x, \varepsilon) = \eta(x, \varepsilon) \sigma(x, \varepsilon)$ , pour tout  $(x, \varepsilon) \in (\Omega_{x_0} \cap \Omega_e) \times \mathcal{C}_{x_0}$  où  $\sigma(x, \varepsilon) = \langle e|x \rangle \varepsilon - \langle e|\varepsilon \rangle x$ . Ainsi pour tout  $\vec{X} \in T_{x_0} \mathbb{S}^n$  et  $\vec{E} \in T_{v_0} \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  on a que :

$$d_{(x, \varepsilon)} \vec{g} \left( \vec{X}, \vec{E} \right) = \eta(x, \varepsilon) \left[ d_{(x, \varepsilon)} \sigma \left( \vec{X}, \vec{E} \right) + \langle \vec{g}(x, \varepsilon) | d_{(x, \varepsilon)} \sigma \left( \vec{X}, \vec{E} \right) \rangle \vec{g}(x, \varepsilon) \right] \quad (10.3.0.18)$$

avec  $d_{(x, \varepsilon)} \sigma \left( \vec{X}, \vec{E} \right) = \langle e|\vec{X} \rangle \varepsilon + \langle e|x \rangle \vec{E} - \langle e|\vec{E} \rangle x - \langle e|\varepsilon \rangle \vec{X}$ .

À présent, considérons le couple  $(x_0, v_0)$ . Il nous faut alors remarquer que pour tout vecteur  $\vec{V} \in T_{v_0} \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  non nul (en identifiant  $\mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  avec l'horizon  $\mathcal{C}_{x_0}$ ) et vecteur  $\vec{X} \in T_{x_0} \mathbb{S}^n$  quelconque, si la différentielle  $d_{(x_0, v_0)} \sigma \left( \vec{X}, \vec{V} \right)$  est non nulle, alors il en est de même pour  $d_{(x_0, v_0)} \vec{g} \left( \vec{X}, \vec{V} \right)$ . En effet, comme le produit  $\langle e|x_0 \rangle$  est non nul, alors la famille formée par les éléments  $\sigma(x_0, v_0)$  et  $d_{(x_0, v_0)} \sigma \left( \vec{X}, \vec{V} \right)$  forme une famille libre. Par conséquent, considérons  $\vec{W} \in T_{u_0} \mathbb{S}_e^{n-1}$  ainsi que les vecteurs  $\vec{X} = d_{u_0} x \cdot \vec{W}$  et  $\vec{V} = d_{u_0} N \cdot \vec{W}$ . Par ce qui précède (voir la relation (10.3.0.17)), on sait que la différentielle  $d_{u_0} \nu \cdot \vec{W}$  est nulle si et seulement si :

$$d_{(x_0, v_0)} \sigma \left( \vec{X}, \vec{V} \right) = \langle e|\vec{X} \rangle v_0 + \langle e|x_0 \rangle \vec{V} - \langle e|\vec{V} \rangle x_0 - \langle e|v_0 \rangle \vec{X} = 0 \quad (10.3.0.19)$$

Ainsi, en projetant alternativement l'égalité (10.3.0.19) le long des droites  $\mathbb{R}x_0$  et  $\mathbb{R}v_0$ , on obtient que  $\langle e|\vec{V} \rangle = 0$  et  $\langle e|\vec{X} \rangle = 0$  et donc  $\langle e|x_0 \rangle \vec{V} - \langle e|v_0 \rangle \vec{X} = 0$ . Par conséquent, en notant  $\nu_0 = \nu(u_0)$  alors par l'expression (10.3.0.15) on sait que  $v_0 = \mu[\nu_0 - \langle x_0|\nu_0 \rangle x_0]$ , où  $\mu > 0$  est le facteur de normalisation. Et donc, après un petit calcul, on a que l'égalité (10.3.0.19) est équivalente à la relation suivante :

$$\vec{V} + \frac{\langle x_0|\nu_0 \rangle}{\sqrt{1 - \langle x_0|\nu_0 \rangle^2}} \vec{X} = 0 \quad (10.3.0.20)$$

ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

À ce stade, on peut constater que nous retrouvons des constructions proches de celles que nous avons considérées au chapitre 5 pour les h-hérissons de l'espace hyperbolique. En particulier, nous retrouvons bien des relations et des caractéristiques qui correspondent à ce que nous avons vu par les propriétés 7.3.1 et 7.3.2 des pages 167 et 169, et qui traitent des conditions de correspondance entre les g-hérissons et les h-hérissons. En effet, par ce qu'il précède, on a forcément que tout g-hérisson gaussien centré en  $e$  correspond à l'enveloppe paramétrée d'une famille lisse  $(\Gamma_u)_{u \in \mathcal{C}_e}$  où chaque  $\Gamma_u$  est une hypersphère dans  $\mathbb{S}^n$ , centrée en  $u \in \mathcal{C}_e$ . Or nous pouvons remarquer que de telles hypersphères jouent, dans le cadre de cette construction, un rôle similaire aux horosphères de l'espace hyperbolique. Ainsi, on obtient le résultat suivant :

**Définition 10.3.4.** *Considérons  $e \in \mathbb{S}^n$  un point de référence ainsi que  $\iota : \Gamma \mapsto ST\mathbb{S}^n$  une immersion de Legendre centrée en  $e$ . Alors, on appelle **application de Gauss** de  $\iota$  l'application  $\nu : \Gamma \mapsto \mathcal{C}_e$  qui est définie via la relation (10.3.0.7).*

**Note.** *Rappelons que si  $\iota : \Gamma \mapsto ST\mathbb{S}^n$  est une immersion de Legendre, alors elle est de la forme  $\iota(u) = (x(u), N(u))$ , où  $x : \Gamma \mapsto \mathbb{S}^n$  et  $N : \Gamma \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$  sont deux applications lisses vérifiant la condition de contact  $\langle N(u)|d_u x \cdot \vec{v} \rangle = 0$ . En particulier, nous dirons qu'une immersion de Legendre est **centrée en  $e$**  lorsque  $x(u) \in \Omega_e$  pour tout  $u \in \Gamma$ .*

**Théorème 10.3.2.** *Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{S}^n$  est un g-hérisson gaussien centré en  $e$ , alors c'est le front legendrien d'une immersion de Legendre  $\iota : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto ST\mathbb{S}^n$  qui est centrée en  $e$  et dont l'application de Gauss  $\nu : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathcal{C}_e$  est un difféomorphisme.*

*Démonstration.* Par le théorème 10.3.1, c'est un résultat immédiat.  $\square$

## 10.4 Relation de dualité

Nous avons déjà étudié cette question lors des chapitres 3 et 8 pour l'espace euclidien et l'espace hyperbolique. En particulier, nous avons pu constater que nous retrouvons des résultats équivalents. Sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ , on définit les relations de dualité entre les points et les hyperplans projectifs de  $\mathbb{P}_n$  (respectivement entre les g-hyperplans et les points de  $\mathbb{P}_n$ ) en considérant, sur la sphère, les définitions 8.1.3 et 8.1.4 page 175.

Considérons donc un point de référence  $e \in \mathbb{S}^n$ . En remarquant que, par construction, la projection gnomonique correspond à la carte projective  $\varphi_e : \mathbb{P}_n \setminus H_e \mapsto T_e$ , avec  $T_e = \langle e \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$  et  $H_e = p(T_e)$ , il est clair que les relations de dualité entre la demi-sphère ouverte  $\Omega_e$ , l'hyperplan  $T_e$  et l'espace projectif  $\mathbb{P}_n$  se correspondent deux à deux. Pour en savoir plus, nous décrivons en détail cette correspondance à la section 4.3.1 de l'annexe D. Il est donc immédiat que nous retrouvons les mêmes relations de dualité pour les g-hérissons centrés en  $e$  de la sphère que pour

les hériçons euclidiens sur  $T_e$ . En particulier, on obtient forcément les théorèmes 3.3.1 et 3.3.2 des pages 66 et 68 pour les g-hériçons de la sphère.

Pour finir, il nous faut remarquer que l'on peut associer au choix d'un point de référence  $e \in \mathbb{S}^n$ , l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}_e$  correspondant au graphe de la fonction  $f(w) = \sqrt{1 + \langle w|w \rangle}$ , où la fonction  $f$  est définie sur l'hyperplan  $T_e$ . Ainsi, il est immédiat que les notions de hériçon sur les espaces  $\Omega_e$ ,  $T_e$  et  $\mathbb{H}_e$  se correspondent projectivement (via la projection gnomonique et la projection de Klein).

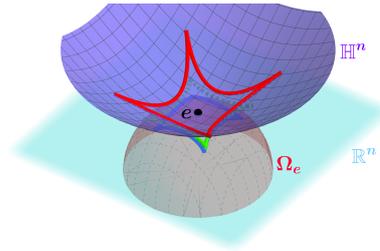


FIGURE 10.1 – Correspondance sur l'espace projectif entre les notions de hériçon de l'espace euclidien, de l'espace hyperbolique et de la demi-sphère  $\Omega_e$ .

Aussi, par les théorèmes de caractérisation projective, nous pouvons supposer qu'étudier la notion de hériçon dans l'espace projectif, en considérant les propriétés du dual projectif, permettrait potentiellement d'obtenir une piste pour la généralisation de la notion de hériçon. En effet, nous allons le voir, dans la prochaine partie, la notion de g-hériçon marginalement piégé sur les espaces de Lorentz  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$  comme étant la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss de g-hériçon. Cela nous fournit une notion de g-hériçon marginalement piégé sur des espaces de Lorentz dont la courbure n'est pas nulle. Il serait donc intéressant de pouvoir étendre encore l'ensemble des espaces de Lorentz sur lesquels une telle notion peut être définie. C'est précisément pour répondre à cette problématique qu'il nous sera utile d'étudier la notion de hériçons via sa représentation duale dans l'espace projectif.

Troisième partie

Sur les  $g$ -hérissons marginalement  
piégés



En prolongeant les inégalités de la théorie de Brunn-Minkowski à la théorie des hérissons, Y. Martinez-Maure a établi une relation entre les surfaces marginalement piégées de l'espace de Lorentz-Minkowski et les hérissons euclidiens. Une surface marginalement piégée (resp. une surface piégée) est une surface sur une 4-variété de Lorentz<sup>4</sup> qui est de type espace<sup>5</sup> et dont le vecteur de courbure moyenne est de type lumière (resp. de type temps).

Pour comprendre l'intérêt et la motivation de considérer de telles surfaces, il nous faut prendre en compte les travaux de K. Schwarzschild. Après avoir pris connaissance des travaux d'Albert Einstein parus à la fin de l'année 1915, et qui définissent les bases de la relativité générale, K. Schwarzschild proposa, quelques mois plus tard, une solution explicite aux équations d'A. Einstein modélisant l'espace-temps au voisinage d'un astre sphérique. Ses travaux se répartissent sur deux articles : "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie" et "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie" (voir [103] et [102] pour trouver les articles originaux), et dont les traductions<sup>6</sup> de l'allemand à l'anglais ont été faites en 1999 par S. Antoci et A. Loinger.

Pour cette introduction, nous nous reposons essentiellement sur l'ouvrage [47] d'E. Humbert et de M. Vaugon, dans lequel nous trouvons une présentation des bases de la relativité générale au regard de la physique mathématique. Aussi, pour un exposé qui rentre dans tous les détails et qui recouvre toutes les démonstrations, il est possible de consulter l'ouvrage [16] (très complet) de Y. Choquet-Bruhat.

La conséquence des travaux de K. Schwarzschild est la suivante : Lorsque la masse de l'astre est suffisamment importante, relativement à sa taille, il apparaît alors une région bornée de l'espace dans laquelle toute particule (même les photons qui sont de masse nulle) qui s'y trouverait y serait alors piégée. En particulier, toute particule qui pénétrerait dans l'intérieur de cette région convergerait irrémédiablement vers son centre en un temps fini. Un tel point est alors appelé singularité de l'espace-temps et ainsi, on considère la définition suivante :

**Définition.** *On dit qu'un espace-temps<sup>7</sup>  $(M, g)$  possède une singularité s'il existe des géodésiques incomplètes<sup>8</sup> de type temps ou lumière.*

Mais le modèle de K. Schwarzschild suppose que l'espace-temps possède une symétrie sphérique parfaite, hypothèse qui n'est bien sûr jamais exactement vérifiée dans la réalité. C'est pour répondre à ce problème que Roger Penrose entreprend, dans les années 60, de démontrer que l'apparition d'une singularité est une conséquence de l'effondrement gravitationnel d'un astre suffisamment massif, indépendamment de toute hypothèse sur sa forme exacte. C'est ainsi que R. Penrose obtient un premier théorème (voir [83]) en 1965, qu'il améliore et généralise quelques années plus tard avec Stephen Hawking (voir [84]) et qui est connu sous le nom du théorème sur les singularités :

**Théorème.** *Considérons un espace-temps  $(M, g)$  vérifiant que la condition forte d'énergie est satisfaite, et contenant une surface de Cauchy non compacte ainsi qu'une surface piégée. Alors,*

4. Une 4-variété de Lorentz est une variété différentielle de dimension 4 que l'on munit d'une métrique de signature  $(3, 1)$ .

5. Une sous-variété d'une variété de Lorentz sera dite de type espace si tous les plans tangents sont de type espace.

6. Voir les articles [105] et [104] qui correspondent aux traductions des articles de K. Schwarzschild.

7. Un espace-temps est une 4-variété de Lorentz admettant une orientation en temps continue.

8. Une géodésique d'une variété pseudo-riemannienne est dite incomplète si elle n'est pas définie sur tout  $\mathbb{R}$  et ne peut être prolongée.

*il existe une géodésique de type lumière incomplète. En particulier, l'espace-temps admet une singularité.*

Nous n'en dirons pas plus sur les surfaces marginalement piégées. Pour en savoir plus, il est possible de consulter les deux ouvrages [47] et [16] que nous avons présentés précédemment. Aussi, nous recommandons la lecture de l'ouvrage "La nature de l'espace et du temps" (voir [85]), qui est la traduction d'un ouvrage de vulgarisation scientifique écrit par Stephen Hawking et Roger Penrose et qui traite, en partie, de la question des singularités de l'espace-temps.

## Chapitre 11

# Les hérissons marginalement piégés dans l'espace de Lorentz-Minkowski

La théorie des hérissons, étant le prolongement (aux différences de corps convexes) de la théorie de Brunn-Minkowski, il a alors été nécessaire de vérifier si les inégalités que l'on connaît pour les corps convexes sont toujours valides pour les hérissons. C'est précisément pour prolonger les inégalités isopérimétriques à l'ensemble des hérissons de l'espace  $\mathbb{E}^3$ , que Y. Martinez-Maure a défini la notion de hérisson marginalement piégé, et qui correspond à des transformations de  $\mathcal{L}$ -Gauss de hérissons euclidiens (voir les articles [69], [60] et [74]). Dans ce chapitre, nous introduisons donc la notion de hérisson marginalement piégé et nous en étudierons les caractéristiques géométriques.

### 11.1 Majoration de l'inégalité isopérimétrique par l'aire signée d'un hérisson marginalement piégé

L'étude des inégalités isopérimétriques occupe une place importante dans la théorie de Brunn-Minkowski. Pour en savoir plus, il est possible de consulter le chapitre 7 de l'ouvrage [100] et le chapitre 2 de l'ouvrage [89] dans lesquels nous trouvons un exposé clair et complet sur la question. On a donc que tout corps convexe  $K \subset \mathbb{R}^2$  sur le plan vérifie l'inégalité  $4\pi A \leq L^2$ , où  $A$  et  $L$  désignent respectivement l'aire et le périmètre du corps  $K$ . Il est donc possible de prolonger cette inégalité aux hérissons du plan (voir proposition 5 de l'article [60]) tel que si  $\mathcal{H}_h$  est un hérisson euclidien du plan et dont la fonction de support est  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , alors on a que :

$$4\pi a(h) \leq l(h)^2 \quad (11.1.0.1)$$

où  $a(h)$  et  $l(h)$  sont respectivement l'aire algébrique et la longueur du hérisson. Il est à noter que les fonctions  $a$  et  $l$  sont définies telles qu'en considérant le paramétrage  $u(t) = (\cos(t), \sin(t))$  ainsi que la fonction de support  $h(t)$ , on obtient que les paramètres  $a(h)$  et  $l(h)$  admettent pour expression :

$$l(h) = \int_0^{2\pi} h(t) dt \text{ et } a(h) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(t) R(t) dt \quad (11.1.0.2)$$

avec  $R(t) = h(t) + h''(t)$ .

De plus, il est possible de vérifier que le déficit isopérimétrique  $l(h)^2 - 4\pi a(h)$  est majoré (voir proposition 6 de l'article [60]) par l'aire  $a(\partial h)$  de sa développée<sup>1</sup> ainsi que l'aire mixte<sup>2</sup> entre le hérisson  $\mathcal{H}_h$  et sa développée seconde  $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$  tel que :

$$0 \leq l(h)^2 - 4\pi a(h) \leq -4\pi a(\partial h) = -4\pi a(h, \partial^2 h) \quad (11.1.0.3)$$

À présent, considérons  $(d_u)_{u \in \mathbb{S}^1}$  une famille de droites co-orientées ainsi que  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  sa fonction de support et  $\mathcal{H}_h$  le hérisson euclidien qui correspond à son enveloppe paramétrée. Alors la développée du hérisson  $\mathcal{H}_h$  correspond à un hérisson euclidien qui est défini par l'enveloppe paramétrée de la famille des droites  $\delta_u = x_h(u) + \mathbb{R}u$  qui sont respectivement orthogonales à chaque droite de support  $d_u$  et qui passent par le point  $x(u)$ . On peut alors vérifier qu'une telle famille de droites est bien co-orientée et admet  $\partial h(t) = h'(t - \frac{\pi}{2})$  pour fonction de support. De même, la développée seconde est un hérisson du plan dont la fonction de support est  $\partial^2 h(t) = -h''(t)$  et qui correspond à l'enveloppe paramétrée des droites qui sont parallèles aux droites de support  $d_u$  et qui passent par les centres de courbure du hérisson  $\mathcal{H}_h$ . Par conséquent, on obtient que l'inégalité isopérimétrique (11.1.0.1) est vérifiée pour les hérissons du plan tel que le déficit isopérimétrique est contrôlé par l'inégalité (11.1.0.3). De plus, les paramètres de ces deux inégalités correspondent à la suite des développées :

$$\mathcal{H}_h \rightarrow \mathcal{H}_{\partial h} \rightarrow \mathcal{H}_{\partial^2 h} \quad (11.1.0.4)$$

et dont chaque terme est un hérisson euclidien du plan.

Sur l'espace euclidien  $\mathbb{E}^3$ , il n'est pas immédiat de retrouver un équivalent à l'inégalité (11.1.0.3) que nous obtenons pour les hérissons du plan (voir les articles [69] et [74]). Si  $K \subset \mathbb{R}^3$  est un corps convexe, alors on sait qu'il vérifie l'inégalité isopérimétrique  $M^2 - 4\pi S \geq 0$ , avec  $M$  et  $S$  étant respectivement l'intégrale de la courbure moyenne et la surface du bord  $\partial K$ . Considérons donc un hérisson euclidien  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{E}^3$  dont la fonction de support est  $h$ . On peut alors vérifier<sup>3</sup> que :

$$0 \leq m(h)^2 - 4\pi s(h) \leq -4\pi s(h, \partial^2 h) \quad (11.1.0.5)$$

où les paramètres  $m(h)$ ,  $s(h)$  et  $s(h, \partial^2 h)$  correspondent respectivement aux intégrales de la courbure moyenne, de l'aire et de l'aire mixte entre le hérisson  $\mathcal{H}_h$  et sa développée moyenne<sup>4</sup>  $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$  qui est aussi un hérisson euclidien dont la fonction de support est  $\partial^2 h(u) = -\frac{1}{2}\Delta(h)_u$ .

Nous pouvons alors remarquer que nous ne retrouvons pas entièrement le schéma (11.1.0.4) que nous obtenons pour les hérissons du plan, du fait qu'il nous manque l'équivalent de la développée simple du hérisson  $\mathcal{H}_h$ . Dans l'article [74], l'auteur nous apprend alors que : La surface correspondant à l'équivalent de la développée première, pour un hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{E}^3$  de

1. On appelle développée, d'une courbe  $\Gamma$ , la partie définie par la famille des centres de courbure. En particulier, la développée d'une courbe correspond à l'enveloppe de ses droites orthogonales

2. On appelle aire mixte le coefficient  $a(h, k) = \frac{1}{2}[a(h+k) - a(h) - a(k)]$ . En particulier, il nous faut constater que la fonction  $a$  étant définie via l'expression (11.1.0.2), c'est une forme quadratique. Par conséquent, la fonction qui correspond à l'aire mixte est une forme bilinéaire.

3. Voir théorème 1 de l'article [69].

4. On appelle développée moyenne d'une surface  $\Sigma$ , l'ensemble des centres de courbure moyenne. En particulier, si  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{E}^3$  est un hérisson euclidien, alors sa développée moyenne est un hérisson euclidien qui correspond à l'enveloppe des plans qui sont parallèles à ses plans de support et qui passent par les centres des segments focaux (i.e., c'est les segments qui sont définis par les centres de courbure principaux).

l'espace, n'est pas un hérisson euclidien mais est une surface marginalement piégée de l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^4 = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ , admettant des points ombilic et vérifiant des propriétés équivalentes à celles des hérissons euclidiens. Pour obtenir ce résultat, Y.Martinez-Maure s'est appuyé sur les travaux de B.Palmer (voir [82]) traitant de l'étude des transformés de  $\mathcal{L}$ -Gauss d'une immersion de Legendre sur l'espace  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ .

**Définition 11.1.1.** On appelle **famille de lignes lumière orientées**, toute famille lisse  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$  dans  $\mathbb{L}^4$ , où chaque  $l_u$  est une droite de type lumière qui est orientée par le vecteur  $(u, -1)$ .

**Notation 11.1.1.** Pour chaque vecteur  $u \in \mathbb{S}^2$ , on notera  $u_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(u, -1)$ . En particulier, on a que pour tout vecteur  $u \in \mathbb{S}^2$ , le vecteur  $u_L$  est dans l'intersection  $\mathbb{T}_-^3 \cap \mathbb{S}^3$ .

**Définition 11.1.2.** On appelle **co-enveloppe** d'un champ orienté<sup>5</sup>  $(l_u)_{u \in \Gamma^2}$  de lignes lumière, avec  $\Gamma$  étant une 2-variété différentielle, la donnée de l'image  $y(\Gamma)$  et de l'application  $y : \Gamma \mapsto \mathbb{L}^4$  (que nous appellerons **paramétrage**) telle que :

1. Pour tout  $u \in \Gamma$ ,  $y(u) \in l_u$ .
2. Pour tout  $u \in \Gamma$  et  $\vec{v} \in T_u\Gamma$ ,  $\langle d_u y \cdot \vec{v} | u_L \rangle = 0$ .
3. Pour tout  $u \in \Gamma$ ,  $\langle \delta(dy)_u | u_L \rangle = 0$ , où  $\delta$  correspond à l'opérateur de la co-différentielle de Hodge.

**Note.** Nous appellerons naturellement **condition de co-contact** la troisième condition ci-dessus. Il est important de noter que dans la définition 11.1.2 ci-dessus, le champ  $u_L$  ne correspond pas forcément au champ de vecteurs que nous avons considéré à la définition 11.1.1.

**Avertissement 11.1.1.** Comme pour les hérissons et les  $g$ -hérissons, afin de ne pas alourdir inutilement notre texte, nous nous permettrons de considérer les co-enveloppes de familles de lignes lumière, sans faire mention de leurs paramétrages.

**Propriété 11.1.1.** Toute famille de lignes lumière orientées  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$  admet une unique 1-forme exacte  $\alpha = dh \in \Omega_1(\mathbb{S}^2)$ , que l'on appelle **1-forme de support**, telle que pour tout vecteur  $u \in \mathbb{S}^2$  :

$$l_u = L_{h+k}(u) + \mathbb{R}u_L \quad (11.1.0.6)$$

avec  $L_{h+k}(u) = \left( \vec{\nabla} h(u), h(u) + k \right)$  et où  $h$  est une primitive de  $\alpha$ .

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que la famille d'hyperplans  $\mathbb{R}^3 \cap (l_u)^\perp$  correspond à une famille d'hyperplans co-orientés. Ainsi, en considérant la forme  $\alpha = dh$ , avec  $h$  la fonction de support de la famille d'hyperplans ainsi définie, on obtient le résultat recherché.  $\square$

**Remarque 11.1.1.** Par la relation (11.1.0.6), il est clair que deux familles de lignes lumière orientées qui admettent la même 1-forme de support sont parallèles par rapport à l'axe du temps. Cela justifie la terminologie de 1-forme de support, du fait que si nous identifions les familles de lignes lumière parallèles par rapport à l'axe du temps, la forme de support admet les mêmes propriétés que la fonction de support des familles d'hyperplans co-orientés. En particulier, par le théorème 11.1.1 ci-dessus, nous retrouvons aussi cette caractéristique pour les hérissons marginalement piégés.

5. On appelle champ orienté de ligne lumière toute famille lisse  $(l_u)_{u \in \Gamma}$  de droites de type lumière qui sont orientées par une application lisse  $u_L : \Gamma \mapsto \mathbb{T}_-^3$ .

À présent, on définit, pour chaque hérisson euclidien  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{E}^3$ , la famille de lignes lumière  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$  telle que pour tout vecteur  $u \in \mathbb{S}^2$  on a  $l_u = x(u) + \mathbb{R}u_L$ , où  $x$  est le paramétrage de  $\mathcal{H}_h$ . En particulier, il nous faut constater que si deux familles de lignes lumière orientées correspondent respectivement à deux hérissons euclidiens parallèles<sup>6</sup>, alors elles sont aussi parallèles par rapport à l'axe du temps.

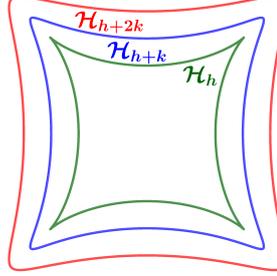


FIGURE 11.1 – Hérissons parallèles et vérifiant donc que leurs fonctions de support correspondent à des primitives d'une même 1-forme différentielle.

**Remarque 11.1.2.** Toute famille  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$  de lignes lumière orientées correspond à un unique hérisson euclidien  $\mathcal{H}_h$  au sens où elles sont définies telles que  $l_u = x(u) + \mathbb{R}u_L$ , avec  $x$  étant le paramétrage du hérisson  $\mathcal{H}_h$ .

**Théorème 11.1.1.** Toute famille de lignes lumière orientée admet une unique co-enveloppe. Plus précisément, si  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$  est une famille de lignes lumière orientées, de 1-forme de support  $dh$ , alors le paramétrage de sa co-enveloppe admet pour expression :

$$y_{\partial h}(u) = L_{h+k}(u) + \delta(\partial h)_u u_L \quad (11.1.0.7)$$

avec  $\partial h(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} dh$ .

*Démonstration.* Considérons donc  $\mathcal{H}_h$  un hérisson euclidien de fonction de support  $h$  et dont le paramétrage est  $x(u) = h(u)u + \vec{\nabla} h(u)$ . Alors, considérons la famille de ligne lumière orientée qui est définie par les  $l_u = x(u) + \mathbb{R}u_L$  et supposons qu'elle admet une co-enveloppe dont le paramétrage est  $y : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{L}^4$ . Il est alors clair que le paramétrage admet pour expression  $y(u) = x(u) + f(u)u_L$  où  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Après quelques calculs (voir annexe F pour plus de détails), on obtient que  $\Delta_S(x)_u = -(2h(u) + \Delta_S(h)_u)u + \vec{\nabla}[2h(u) + \Delta_S(h)_u]$  et  $\Delta_S[f(u)u] = (\Delta_S(f)_u - 2f(u))u + 2\vec{\nabla}h(u)$ . Étant donné que la condition de co-contact implique que  $\langle \Delta_S(y)_u | u_L \rangle = 0$ , alors on obtient que  $-2h(u) - \Delta_S(h)_u + \Delta_S(f)_u - 2f(u) - \Delta_S(f)_u = 0$  et donc :

$$f(u) = -h(u) - \frac{1}{2} \Delta_S(h)_u \quad (11.1.0.8)$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**Notation 11.1.2.** Dans la suite, nous noterons  $\partial = \frac{1}{\sqrt{2}}(d + \delta)$  l'opérateur de Hodge-Dirac et où le facteur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  est défini pour des raisons de cohérence. En particulier, nous avons que  $\partial^2$  correspond à l'opérateur de Hodge-Laplace et en notant  $\Delta_S$  l'opérateur de Laplace-Beltrami,

6. Deux hérissons euclidiens sont dits parallèles lorsque leurs fonctions de support correspondent à deux primitives d'une même 1-forme exacte.

il nous sera utile de remarquer que pour toute fonction lisse  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on a que  $\partial^2(f) = -\frac{1}{2}\Delta_S(f)$ .

À présent, il nous sera utile de rappeler quelques notions élémentaires. Pour cela, nous nous reposons principalement sur le chapitre 5 de l'ouvrage [35] et plus particulièrement sur la remarque page 34 de l'ouvrage [50] où nous trouvons la définition la plus générale possible de la notion de courbure moyenne. Considérons donc  $(M, g)$  une variété pseudo-Riemannienne ainsi que  $\Gamma \subset M$  une  $p$ -sous-variété de type espace (i.e. sur chaque espace tangent  $T_u\Gamma$ , la restriction de la métrique  $g_u$  est un produit scalaire). Alors on appelle **première forme fondamentale** et **seconde forme fondamentale** les tenseurs  $I \in \Omega_1(\Gamma) \otimes \Omega_1(\Gamma)$  et  $II \in \Omega_1(\Gamma) \otimes \Omega_1(\Gamma) \otimes \Delta(\Gamma)$  tels que  $I(X, Y) = g(X, Y)$  et  $II(X, Y) = (\nabla(X) \cdot Y)^\perp$ , où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita. De plus, on appelle **vecteur de courbure moyenne** la section  $H \in \Gamma^0(i^*TM)$ , avec  $i : \Gamma \rightarrow M$  étant l'injection canonique, et qui est définie telle que  $H(u) = II_u(v_1, v_1) + \dots + II_u(v_p, v_p)$ , où  $(v_1, \dots, v_p)$  est une base orthonormale<sup>7</sup> pour la première forme fondamentale. Par conséquent, nous pouvons considérer la définition suivante :

**Définition 11.1.3.** Soit  $(M, g)$  une 4-variété de Lorentz, alors on appelle **surface marginalement piégée** toute 2-sous-variété  $\Gamma \subset M$  qui est de type espace et dont le vecteur de courbure moyenne est de type lumière.

Rappelons que nous avons déjà défini (voir définition 1.2.6 page 39) la notion de fonction de courbure  $R_h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  d'un hérisson. En particulier, nous avons remarqué que cette fonction joue le même rôle (pour les hérissons) que la notion de courbure pour les corps convexes. Il est alors nécessaire de constater que, par la propriété 1.3.2 page 41, la fonction de courbure  $h \rightarrow R_h$  est quadratique. Ainsi, on définit naturellement la **fonction de courbure mixte**, qui, pour toute fonction de support  $h$  et  $k$ , donne :

$$R_{(h,k)} = \frac{1}{2}[R_{h+k} - R_h - R_k] \tag{11.1.0.9}$$

Pour en savoir plus sur la fonction de courbure mixte  $R_{(h,k)}(u)$  et ses applications, il est possible de consulter l'article [70]. Par conséquent, on considère le résultat suivant :

**Théorème 11.1.2.** Toute co-enveloppe d'une famille de lignes lumière orientées est, en ses points non-ombilicaux, localement une surface marginalement piégée. Plus précisément, si  $\partial\mathcal{H} \subset \mathbb{L}^4$  est la co-enveloppe d'une famille de lignes lumière orientées  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$  dont la 1-forme de support est  $\alpha = dh$ , alors son paramétrage  $y : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  vérifie les deux points suivants :

1. La première forme fondamentale vérifie que  $y^*g = \frac{1}{4}(R_1 - R_2)^2 g_S$ , avec  $g$  étant la métrique de Minkowski, les  $R_i(u)$  étant les rayons de courbure principaux<sup>8</sup> du hérisson<sup>9</sup>  $\mathcal{H}_h$ , et  $g_S$  étant la métrique usuelle de la sphère.
2. Si, pour un vecteur  $u_0 \in \mathbb{S}^2$ , les rayons de courbure vérifient que  $R_1(u_0) \neq R_2(u_0)$ , alors  $\partial\mathcal{H}$  est localement une surface marginalement piégée en  $y(u_0)$  et son vecteur de courbure moyenne est, via le paramétrage  $y$ , colinéaire à  $u_L$ .

7. Il est à noter que la deuxième forme fondamentale vérifie que pour toute base orthonormale pour la première forme fondamentale  $(e_1, \dots, e_p)$  et  $(v_1, \dots, v_p)$ , on a que  $II_u(e_1, e_1) + \dots + II_u(e_p, e_p) = II_u(v_1, v_1) + \dots + II_u(v_p, v_p)$ , ce qui justifie la définition du vecteur de courbure moyenne.

8. On appelle **rayon de courbure principal en  $u$** , d'un hérisson euclidien  $\mathcal{H}$  de paramétrage  $x$ , toute valeur propre de l'endomorphisme  $d_u x : T_u\mathbb{S}^2 \rightarrow T_u\mathbb{S}^2$ .

9. Il est à noter que dans ce cas de figure, comme nous considérons la différence des deux rayons de courbure principaux, alors le hérisson  $\mathcal{H}_h$  est arbitrairement choisi parmi les hérissons euclidiens dont la fonction de support correspond à une primitive de la forme  $\alpha$ .

*Démonstration.* Considérons donc  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$  une famille de lignes lumière orientées ainsi que  $\mathcal{H}_h$  dans l'espace  $\mathbb{E}^3$  le hérisson euclidien qui lui correspond. Précédemment, nous avons vu que le paramétrage de la co-enveloppe d'une famille de lignes lumière est défini tel que  $y(u) = x(u) + f(u)u_L$  où  $x$  est le paramétrage du hérisson  $\mathcal{H}_h$  et  $f$  est la fonction vérifiant l'expression (11.1.0.8). Aussi, nous pouvons vérifier que la fonction de courbure mixte, pour les fonctions de support  $h$  et  $k = 1$ , admet pour expression (voir [70]) :

$$R_{(1,h)}(u) = h(u) + \frac{1}{2}\Delta_S(h)_u \quad (11.1.0.10)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}^2$ . Par conséquent, comme on a que  $\Delta_S[f(u)u] = (2h(u) - \frac{1}{2}\Delta_S^2(h)_u)u - \vec{\nabla}[2h(u) + \Delta_S(h)_u]$  (voir le lemme 6.2.1 page 318 de l'annexe F) alors on obtient :

$$\Delta_S(y)_u = -\Delta_S[R_{(1,h)}]_u u_L \quad (11.1.0.11)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}^2$ .

À présent, rappelons que la différentielle du paramétrage est  $d_u x \cdot \vec{v} = h(u)\vec{v} + Hess(h)_u * \vec{v}$  (voir propriété 1.3.2 page 41). Ainsi, si  $R_1(u)$  et  $R_2(u)$  sont les rayons de courbure principaux, il est alors immédiat que :

$$R_1(u) + R_2(u) = 2h(u) + Tr Hess(h)_u = 2h(u) + \Delta_S(h)_u = 2R_{(1,h)}(u)$$

ce qui nous donne que  $f(u) = -R_{(1,h)}(u) = -\frac{1}{2}(R_1(u) + R_2(u))$ . En particulier, on sait que la fonction  $f$  correspond au rayon de courbure moyenne. Ensuite, après un petit calcul, on obtient que  $d_u y \cdot \vec{v} = d_u x \cdot \vec{v} + \langle \vec{\nabla} f(u) | \vec{v} \rangle u_L + f(u)\vec{v}$ . Considérons donc les vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  correspondant à une base orthonormale (pour la métrique usuelle de la sphère  $\mathbb{S}^2$ ) et étant des vecteurs propres de la matrice  $Hess(h)_u$ . Alors, il est clair que  $d_u x \cdot \vec{e}_i = R_i(u)\vec{e}_i$  et donc :

$$\langle d_u y \cdot \vec{e}_1 | d_u y \cdot \vec{e}_2 \rangle = 0 \text{ et } \langle d_u y \cdot \vec{e}_i | d_u y \cdot \vec{e}_i \rangle = \frac{1}{4}(R_1(u) - R_2(u))^2$$

ce qui nous donne que la première forme fondamentale admet pour expression  $y^*g = \frac{1}{4}(R_1 - R_2)^2 g_S$ . En particulier on obtient que, pour tout vecteur  $u \in \mathbb{S}^2$ , le vecteur de courbure moyenne vérifie la relation  $H(u) = \frac{1}{2}\Delta_{I_y}(y)_u \sim \Delta_S(y)_u \sim u_L$  ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

**Notation 11.1.3.** Si  $w$  est une métrique sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ , alors nous notons  $\Delta_w$  l'opérateur de Laplace-Beltrami qui correspond à la métrique  $w$ . En particulier, nous notons  $\Delta_S$  l'opérateur de Laplace-Beltrami qui correspond à la métrique usuelle de la sphère.

La terminologie de hérisson se justifie du fait que, pour chaque direction  $u \in \mathbb{S}^2$ , il existe une seule et unique droite  $N(u) = x(u) + \mathbb{R}u$  qui est dirigée par le vecteur  $u$  et qui pointe orthogonalement à  $\mathcal{H}_h$  et vers l'extérieur, à l'image des épines du mammifère. De même, il convient de souligner que, pour chaque direction  $u_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(u, -1) \in \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{S}^2 \times \{-1\}$ , il existe une et une seule ligne lumière  $l_u = y(u) + \mathbb{R}u_L$ , qui est orientée par le vecteur  $u_L$  et correspondant à la "normale sortante" de la co-enveloppe  $\partial\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{L}^4$ .

Ensuite, il est important de remarquer que par les relations (11.1.0.10) et (11.1.0.12) on a que pour une même 1-forme de support correspond une famille de hérissons marginalement piégés qui peut être considérée comme un seul et unique hérisson marginalement piégé défini à translation parallèle près suivant l'axe des temps  $\mathbb{R}dt$ . Il est donc justifié de noter  $\mathcal{H}_{\partial h}$  la famille des hérissons marginalement piégés ainsi définie.

**Avertissement 11.1.2.** À présent, nous nous permettrons de confondre les hérissons marginalement piégés avec leur classe d'équivalence pour la relation correspondant à la translation par rapport à l'axe du temps. En particulier, pour une 1-forme de contact  $\partial h$ , il est alors justifié de noter  $\mathcal{H}_{\partial h}$  le hérisson marginalement piégé qui lui correspond et dont l'unicité nous est assurée à translation près par rapport à l'axe du temps  $\mathbb{R}\partial_t$ . Il est aussi à noter que dans la suite, l'information du positionnement d'un hérisson marginalement piégé sur l'axe du temps ne joue aucun rôle. Cela justifie donc la démarche que nous adoptons. Ajoutons enfin que le facteur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  qui accompagne l'opérateur de Hodge-Dirac, est choisi de manière à ce que le hérisson dont la fonction de support est  $\partial^2 h := \partial(\partial h)$  coïncide avec la développée moyenne du hérisson  $\mathcal{H}_h$ .

Sur le plan, nous avons vu que l'inégalité isopérimétrique (11.1.0.3) correspond aux développées première et seconde d'un hérisson euclidien. De même, sur l'espace  $\mathbb{E}^3$ , nous avons l'inégalité isopérimétrique (11.1.0.5) pour laquelle la majoration du déficit isopérimétrique se fait uniquement avec la surface mixte entre le hérisson  $\mathcal{H}_h$  et sa développée par les centres de courbure moyenne. Il nous reste donc à positionner notre hérisson marginalement piégé dans cette inégalité et de comprendre le rapport entre ce que nous avons sur le plan et ce que nous obtenons sur l'espace  $\mathbb{E}^3$ . Tout d'abord, après un petit calcul, nous avons que le paramétrage  $y : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  de  $\mathcal{H}_{\partial h}$  vérifie l'expression suivante :

$$y(u) = (c_h(u), R_{(1,h)}(u)) \quad (11.1.0.12)$$

où  $c_h(u) = x(u) - R_{(1,h)}(u)u$  est le centre de courbure moyenne. Ainsi, il est clair que le hérisson  $\mathcal{H}_{\partial h}$  correspond à l'ensemble des sphères de courbure moyenne vues sur l'espace de Lorentz-Minkowski via la bijection  $\varphi : \mathbb{L}^4 = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \Gamma(\mathbb{E}^3)$ , où  $\Gamma(\mathbb{E}^3)$  est l'ensemble des sphères orientées de l'espace euclidien, et dont l'image de chaque point  $(x, r) \in \mathbb{L}^4$  correspond à la sphère<sup>10</sup> de centre  $x$ , de rayon  $|r|$  et dont l'orientation est définie par le signe du scalaire  $r$ .

Pour la suite, il nous est nécessaire d'introduire quelques éléments de vocabulaire. Considérons donc l'ensemble des plans orientés et des cycles<sup>11</sup>, alors on appelle **contact orienté** d'un plan ou d'un cycle avec un autre plan ou un autre cycle le fait que les plans tangents et les vecteurs normaux coïncident au point de contact. En particulier on dira qu'un plan ou un cycle est en contact orienté avec un point, qui est une sphère de rayon nul, lorsque ce dernier est sur le plan ou sur le cycle considéré.

**Remarque 11.1.3.** Via la bijection  $\varphi$ , il nous sera utile de constater que deux cycles qui correspondent aux points  $y_1 \in \mathbb{L}^4$  et  $y_2 \in \mathbb{L}^4$  sont en contact orienté si et seulement si le vecteur  $y_1 - y_2$  est de type lumière ou nul.

Ensuite, considérons  $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$  une surface orientée n'admettant aucun point parabolique<sup>12</sup>. Alors, si  $\nu$  est le champ orthonormal qui correspond à son orientation, on appelle **transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss** la donnée de l'image  $y(\Sigma)$  que l'on munit du paramétrage  $y : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^4$  qui est défini via l'expression :

$$y(x) = (c(x), R(x)) \quad (11.1.0.13)$$

10. Il nous faut préciser que dans le cas de figure où le scalaire  $r$  est nul alors  $\varphi(x, r)$  correspond à  $\{x\}$  et que l'on considère comme étant une sphère de rayon nul. En particulier, la partie  $\Gamma(\mathbb{E}^3)$  est l'ensemble des singletons et des sphères orientées sur l'espace  $\mathbb{E}^3$ .

11. Les cycles de l'espace  $\mathbb{E}^3$  correspondent aux sphères orientées et aux points qui sont alors considérés comme étant des sphères de rayon nul. En particulier, l'ensemble  $\Gamma(\mathbb{E}^3)$  correspond à l'ensemble des cycles de l'espace  $\mathbb{E}^3$ .

12. Les points paraboliques sont les points où la courbure de Gauss s'annule, et donc où le rayon de courbure moyenne n'est pas défini.

où  $R(x)$  est le rayon de courbure moyenne au point  $x$  et  $c(x) = x - R(x)\nu(x)$  est le centre de courbure moyenne. Il est alors clair que via la bijection  $\varphi$ , la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss d'une surface sans points paraboliques, correspond à sa famille de sphères de courbure moyenne. Pour en savoir plus, il est possible de consulter l'ouvrage [15], où nous trouvons en particulier une introduction à la géométrie de Laguerre sur laquelle se basent les constructions qui vont suivre.

Par conséquent, il est clair, que via la relation (11.1.0.12), on a que pour tout hérisson  $\mathcal{H}_h$  de l'espace  $\mathbb{E}^3$ , le hérisson marginalement piégé  $\mathcal{H}_{\partial h}$  correspond à sa transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss. De plus, en remarquant que l'ensemble des hérissons marginalement piégés, que l'on note  $\Lambda(\mathbb{L}^4)$ , forme un espace vectoriel qui est isomorphe à l'espace des 1-formes exactes, nous pouvons alors considérer l'invariant de Laguerre  $\mathcal{L} : \Lambda(\mathbb{L}^4) \mapsto \mathbb{R}$  et que l'on appelle **fonctionnelle de Laguerre**, comme étant défini via l'expression suivante :

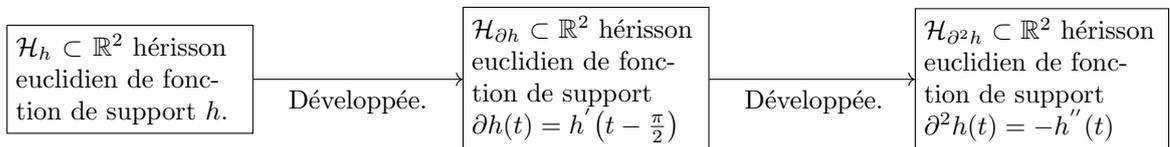
$$\mathcal{L}(\partial h) = \frac{1}{4} \int_{u \in \mathbb{S}^2} (R_1(u) - R_2(u))^2 d\sigma(u) = \frac{1}{4} \int_{u \in \mathbb{S}^2} (R_{(1,h)}^2(u) - R_h(u)) d\sigma(u) \quad (11.1.0.14)$$

où  $\sigma$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{S}^2$ ,  $R_{(1,h)}$  est la fonction correspondant au rayon courbure moyenne et  $R_h$  est la fonction de courbure du hérisson  $\mathcal{H}_h$ . Nous appellerons donc **surface de Laguerre** la valeur  $\mathcal{L}(\partial h)$  ainsi que **surface signée** la valeur  $s(\partial h) = -\mathcal{L}(\partial h)$ . Par conséquent (voir les théorèmes 2 et 4 de [74] pour plus de détails), nous pouvons compléter l'inégalité (11.1.0.5) telle que :

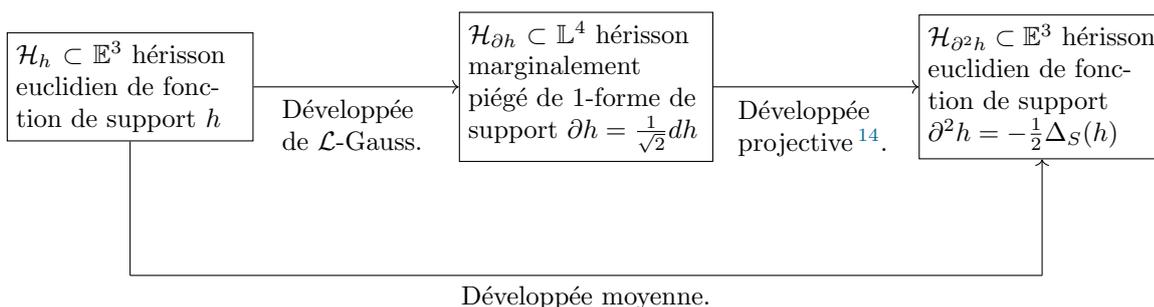
$$0 \leq m(h)^2 - 2\pi s(h) \leq -4\pi s(\partial h) = -4\pi s(h, \partial^2 h) \quad (11.1.0.15)$$

ce qui nous donne une inégalité isopérimétrique dont les paramètres correspondent bien aux développées successives du hérisson  $\mathcal{H}_h$ .

Enfin, il nous sera intéressant de faire un bilan en comparant ce que nous connaissons pour les hérissons du plan à ce que nous connaissons sur les hérissons de l'espace. Pour cela, commençons par remarquer que sur  $\mathbb{S}^1$  l'opérateur de Hodge-Dirac  $d + \delta$  correspond, via le paramétrage  $u(t) = (\text{Cos}(t), \text{Sin}(t))$ , à l'opérateur de dérivation des fonctions lisses  $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Ensuite, il est clair que la développée seconde des hérissons du plan et la développée moyenne des hérissons de l'espace correspondent à des constructions équivalentes. En effet, on a que la développée seconde d'un hérisson du plan correspond à l'enveloppe des droites qui sont parallèles aux droites de support et qui passent par les centres de courbure. Et la développée moyenne d'un hérisson de l'espace correspond à l'enveloppe de la famille des plans parallèles aux plans supports et passant par le milieu des segments focaux<sup>13</sup>. Par conséquent, nous obtenons le graphe suivant :



13. Ce sont les segments qui relient les deux centres de courbure principale de  $\mathcal{H}_h$  dans  $\mathbb{R}^3$ .



La théorie des hérissons marginalement piégés n’est bien sûr pas limitée aux quelques éléments que nous avons considérés. En effet, nous aurions pu adapter nos constructions aux hérissons de Lorentz (voir [72]) ou aux hérissons fuchsien (voir [29] et [72]) ou encore, plus récemment, aux hérissons complexes (voir [77]). Aussi, nous avons défini en partie II la notion de g-hérisson sur l’espace hyperbolique et la sphère. Nous verrons alors au prochain chapitre comment définir la notion de g-hérisson marginalement piégé comme étant la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss des g-hérissons sur le lorentzianisé<sup>15</sup> de l’espace hyperbolique et de la sphère. On aurait également pu considérer les multihérissons (que l’on appelle aussi  $N$ -hérissons, avec  $N$  étant le degré de l’application de Gauss) à condition, bien sûr, de faire attention au fait qu’un  $N$ -hérisson peut avoir des points paraboliques pour  $N \geq 2$ .

## 11.2 Structure de co-contact sur les hérissons marginalement piégés et relation avec les hérissons euclidiens.

Nous avons vu au chapitre 2 que tout hérisson euclidien correspond au front legendrien d’une immersion de Legendre dont l’application de Gauss est un difféomorphisme. En particulier, nous obtenons que tout hérisson se relève sur le fibré des sphères  $\mathbb{E}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$  en une sous-variété de Legendre. Dans cette section, nous considérons une structure symplectique sur laquelle sont vérifiées des propriétés équivalentes pour les hérissons marginalement piégés.

### 11.2.1 Espace symplectique, symplectomorphismes linéaires et structure complexe

On appelle **espace symplectique** la donnée d’un espace vectoriel  $E$  et d’une 2-forme linéaire alternée  $w \in \Lambda^2(E)$  est non dégénérée<sup>16</sup>. Il est alors immédiat qu’un tel espace est de dimension paire  $n = 2k$ . En particulier, il existe une base, que l’on appelle **base de Darboux**, qui est de la forme  $\beta = (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k)$  et qui vérifie que :

$$w = e_1^* \wedge f_1^* + \dots + e_k^* \wedge f_k^* \tag{11.2.1.1}$$

À présent, considérons  $V \subset E$  un sous-espace vectoriel. Alors, nous dirons que le sous-espace  $V$  est **symplectique** (resp. **isotropique**) lorsque la 2-forme  $w$  est non dégénérée sur  $V$

14. La développée par projection d’une surface marginalement piégée  $\Gamma \subset \mathbb{L}^4$  consiste à considérer l’enveloppe de la famille d’hyperplans affines  $\Sigma_x = \pi_{\partial t}(x) + \langle \pi_{\partial t} \cdot H(x) \rangle^\perp$ , qui est indexée sur la surface  $\Gamma$  et dont  $H(x)$  est le vecteur de courbure moyenne et  $\pi_{\partial t} : \mathbb{L}^4 \mapsto \mathbb{E}^3$  la projection orthogonale le long de l’axe du temps. En particulier, si  $y : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{L}^2$  est le paramétrage d’un hérisson marginalement piégé, alors on a que la développée par projection correspond à un hérisson euclidien qui est l’enveloppe paramétrée de la famille des hyperplans  $\Sigma_u = c(u) + \langle u \rangle^\perp$ , où les  $c(u)$  sont tels que  $y(u) = (c(u), r(u))$ .

15. On appelle lorentzianisé d’une variété de Riemann  $(M, g)$ , la variété de Lorentz  $(M \times \mathbb{R}, g - dt^2)$ .

16. Une 2-forme  $w$  est non dégénérée si, pour tout  $u \in E$ , la 1-forme  $w(u, \cdot)$  est non nulle.

(resp. lorsque la 2-forme  $w$  est nulle sur  $V$ ). Il est alors clair, en considérant  $V^w$  comme étant l'orthogonal de  $V$  pour la forme  $w$ , que :

- Le sous-espace  $V$  est symplectique si et seulement si  $V \cap V^w = \{0\}$ .
- Le sous-espace  $V$  est isotropique si et seulement si  $V \subset V^w$ .

Il nous faut alors noter qu'en considérant la base de Darboux  $\beta = (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k)$ , les sous-espaces isotropiques sont tous de la forme  $\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_l} \rangle$  ou  $\langle f_{i_1}, \dots, f_{i_l} \rangle$ , et voient ainsi leur dimension majorée par  $k$ . En particulier, nous appellerons **sous-espace de Lagrange** les sous-espaces isotropiques maximaux. Enfin, pour terminer cette brève introduction sur les espaces vectoriels symplectiques, considérons :

**Les symplectomorphismes linéaires :** On dira qu'une application linéaire est un morphisme symplectique entre deux espaces symplectiques  $(E_1, w_1)$  et  $(E_2, w_2)$  lorsque  $w_1 = f^*w_2$ . De telles applications sont toujours injectives et on appelle alors symplectomorphisme linéaire tout isomorphisme symplectique. On a alors que par le théorème de Darboux linéaire : Deux espaces symplectiques de même dimension sont deux à deux linéairement symplectomorphes<sup>17</sup>.

**Les structures Complexes :** On appelle structure complexe la donnée d'un espace vectoriel  $E$  que l'on munit d'un endomorphisme  $J : E \mapsto E$  tel que  $J^2 = -Id$ . Toute structure complexe est de dimension paire  $n = 2k$  et admet une 2-forme symplectique  $w \in \Lambda^2(E)$  compatible (i.e.  $w(Ju, Jv) = w(u, v)$  et  $w(u, Ju) > 0$ ). On peut aussi vérifier que tout espace symplectique admet une structure complexe. Ensuite, nous dirons qu'un triplet, qui est formé d'un produit scalaire  $g \in E^* \otimes E^*$ , d'une 2-forme symplectique  $w \in \Lambda^2(E)$  et d'un endomorphisme  $J : E \mapsto E$  vérifiant que  $J^2 = -Id$ , est **compatible** lorsque pour tout vecteur  $u$  et  $v$  dans  $E$ , on a que  $g(u, v) = w(Ju, v)$  et  $w(u, v) = g(u, Jv)$ . En particulier, il est à noter que deux éléments parmi les trois constituant d'un triplet compatible en déterminent automatiquement le troisième.

### 11.2.2 Variété symplectique et symplectisé d'une variété de contact

Une variété symplectique est la donnée d'une variété différentielle  $M$  que l'on munit d'une 2-forme symplectique<sup>18</sup>  $w \in \Omega_2(M)$ . Une telle variété est forcément de dimension  $n = 2k$ . De plus, elle est orientable et admet pour forme volume :

$$\nu = \frac{1}{n!} w^k \quad (11.2.2.2)$$

que l'on appelle la **forme de Liouville**.

**Définition.** Nous dirons qu'une sous-variété  $\mathcal{L} \subset M$  est **lagrangienne** lorsque tous ses espaces tangents le sont aussi.

Ainsi, on sait que toute sous-variété de Lagrange est toujours de dimension  $k$ . En particulier, il nous sera utile de remarquer qu'elles admettent des caractéristiques équivalentes aux sous-variétés de Legendre en géométrie de contact.

**Définition.** On appelle **variété métrique de contact** la donnée d'une variété différentielle  $M$  que l'on munit d'une métrique Riemannienne  $g \in \Omega_1(M) \otimes \Omega_1(M)$  ainsi que d'une 1-forme  $\alpha \in \Omega_1(M)$  et d'un morphisme de fibré  $J : \Delta(M) \mapsto \Delta(M)$  vérifiant les trois conditions suivantes :

17. Deux espaces symplectiques sont dits symplectomorphes s'ils sont isomorphes via un isomorphisme symplectique.

18. Une 2-forme  $w$  est dite symplectique si les  $w_x \in \Lambda^2(T_x M)$  sont des 2-formes linéaires symplectiques.

1. Si  $\varepsilon_\alpha \in \Delta(M)$  est le dual métrique<sup>19</sup> de  $\alpha$ , alors  $\alpha(\varepsilon_\alpha) = 1$ .
2. Pour tous champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ , on a que  $d\alpha(X, Y) = g(JX, Y)$ .
3. Pour tout champ de vecteurs  $X$ , on a que  $J^2X = -X + \alpha(X)\varepsilon_\alpha$ .

Il nous faut alors noter que si  $(M, g, \alpha, J)$  est une variété métrique de contact, alors nous avons bien que la structure  $(M, \alpha)$  est une structure de contact dont le champ de Reeb<sup>20</sup> est  $\varepsilon_\alpha$ . En particulier, la métrique  $g$  vérifie l'expression suivante :

$$g(X, Y) = \alpha(X)\alpha(Y) + d\alpha(X, JY) \quad (11.2.2.3)$$

Nous retrouvons aussi le même type de structure sur les variétés symplectiques en considérant les structures complexes que nous avons vues précédemment. On appellera donc **variété métrique symplectique** la donnée d'une  $2k$ -variété différentielle  $M$ , que l'on munit d'une métrique Riemannienne  $g \in \Omega_1(M) \otimes \Omega_1(M)$ , ainsi que d'une 2-forme symplectique  $w \in \Omega_2(M)$  et d'un morphisme complexe<sup>21</sup>  $J : \Delta(M) \mapsto \Delta(M)$  vérifiant que pour tout champ de vecteurs  $u$  et  $v$  dans  $\Delta(M)$  on a que  $g(u, v) = w(Ju, v)$  et  $w(u, v) = g(u, Jv)$ .

À présent, considérons  $(M, \alpha)$  une  $(2k - 1)$ -variété de contact. Alors, on appelle **symplectisé de M** la  $2k$ -variété symplectique  $(M \times \mathbb{R}, d[e^t\alpha])$ . En particulier, nous avons la propriété suivante :

**Propriété.** *Toute variété métrique de contact  $(M, g, \alpha, J)$  induit une variété métrique symplectique  $(\overline{M}, \overline{g}, w, \overline{J})$  où  $\overline{M} = M \times \mathbb{R}$ ,  $\overline{g} = g + dt^2$ , et  $w = d[e^t\alpha]$  telle que  $\overline{J}|_{Ker\ \alpha} = J|_{Ker\ \alpha}$ ,  $\overline{J} \cdot \varepsilon_\alpha = -\partial t$  et  $\overline{J} \cdot \partial t = \varepsilon_\alpha$ .*

Pour en savoir plus sur le symplectisé d'une variété de contact, nous pouvons nous référer au cours de C.Stadt Müller (voir [106]). Enfin, nous considérons les définitions équivalentes aux fibrés et aux immersions de Legendre, au regard des variétés symplectiques. Ainsi, on considère les deux définitions suivantes :

**Définition 11.2.1.** *Sur une variété symplectique  $(M, w)$ , on dira que  $\pi : M \mapsto \beta$  est une **fibration de Lagrange** si toutes ses fibres sont des sous-variétés lagrangiennes.*

**Définition 11.2.2.** *Soient  $(M, w)$  une variété symplectique, alors on appelle **immersion de Lagrange** toute immersion  $i : \mathcal{L} \mapsto M$  pour laquelle les  $d_u i(T_u \mathcal{L})$  sont tous des sous-espaces vectoriels lagrangiens.*

**Note.** *Aussi, on appelle **front de Lagrange**, pour  $i$  et  $\pi$  une immersion et un fibré de Lagrange, la donnée de l'image  $x(\mathcal{L}) \subset \beta$  et du paramétrage  $x := \pi \circ i$ . Nous prendrons alors l'habitude de noter  $x(\mathcal{L}) \subset \beta$  les fronts lagrangiens sans mentionner le paramétrage afin de ne pas inutilement alourdir notre texte.*

### 11.2.3 Représentation d'un hérisson marginalement piégé par un front lagrangien

Rappelons qu'au chapitre 3, nous avons défini la structure de contact qui correspond au fibré des sphères  $\mathbb{E}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$  et dont la forme de contact  $\alpha$  est définie via l'expression (2.1.0.1). En

19. Le dual métrique d'une 1-forme  $w \in \Omega_1(M)$  est le champ de vecteurs  $V \in \Delta(M)$  tel que  $w_x = g(V_x, \cdot)$  pour tout point  $x \in M$ .

20. Pour rappel, sur une structure de contact  $(M, \alpha)$ , le champ de Reeb est l'unique champ de vecteurs  $\varepsilon \in \Delta(M)$  vérifiant que  $\alpha(\varepsilon) = 1$  et  $\varepsilon \in Ker\ d\alpha$ .

21. Un morphisme de fibré  $J$  est dit complexe lorsque  $J^2 = -Id$ .

particulier, nous avons vu (voir propriété 2.2.1 page 49) que tout hérisson euclidien sur l'espace  $\mathbb{E}^n$  est le front legendrien d'une immersion de Legendre de la forme  $i(u) = (x(u), u)$ , où  $x$  est une application lisse.

Considérons donc le symplectisé  $(\mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2, w)$  de la variété de contact  $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{S}^2$  ainsi que le fibré de Lagrange  $\pi_L : \mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$  qui est défini via l'expression  $\pi_L(x, t, u) = x$ . Par conséquent, si  $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de support, alors on définit l'application  $I_h : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2$  telle que :

$$I_h(u, t) = (x_{h-t}(u), t, u), \quad (11.2.3.4)$$

et qui est donc une immersion de Lagrange. Il nous faut alors remarquer que la 3-sous-variété de Lagrange  $\mathcal{L}_h = I_h(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$ , qui est définie par l'immersion  $I_h$ , correspond à l'ensemble des hérissons parallèles au hérisson  $\mathcal{H}_h$ . En effet, tout hérisson euclidien parallèle à  $\mathcal{H}_h$  est le front legendrien correspondant à une section de  $\mathcal{L}_h$  qui est de la forme  $\mathcal{L}_h^t = i_{h-t}(\mathbb{S}^2)$ , et où l'immersion de Legendre  $i_{h-t} : \mathbb{E}^3 \times \{t\} \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$  est définie telle que :

$$i_{h-t}(u) = I_h(u, t) \quad (11.2.3.5)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}^2$ .

Ensuite, sur la variété de contact  $(\mathbb{E}^3 \times \mathbb{S}^2, \alpha)$ , considérons l'endomorphisme complexe  $J$  tel que, pour tout point  $(x, u) \in \mathbb{E}^3 \times \mathbb{S}^2$  et vecteur  $\vec{W} = \vec{X} \oplus \vec{V}$  sur l'espace tangent  $T_{(x,u)}[\mathbb{E}^3 \times \mathbb{S}^2] = \mathbb{E}^3 \oplus T_u\mathbb{S}^2$ , on a :

$$J(x, u) \cdot \vec{W} = (\vec{V}, \vec{X} - \langle \vec{X} | u \rangle u) \quad (11.2.3.6)$$

Par conséquent, en considérant la métrique  $g$  qui est définie via la relation (11.2.2.3), on obtient une variété métrique de contact  $(\mathbb{E}^3 \times \mathbb{S}^2, \alpha, g, J)$  nous permettant de compléter le symplectisé  $(\mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2, w)$  en considérant la métrique de Lorentz  $g_L = g - dt^2$ . Considérons donc une fonction lisse  $h$  ainsi que  $\mathcal{H}_{\partial h}$  le hérisson marginalement piégé correspondant à la 1-forme exacte  $\partial h$ . Nous pouvons alors vérifier que l'application  $\iota_{\partial h} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2$ , qui est définie via l'expression :

$$\iota_{\partial h}(u) = (y(u), u) \quad (11.2.3.7)$$

correspond au paramétrage d'une surface marginalement piégée  $\mathcal{I}_{\partial h} = \iota_{\partial h}(\mathbb{S}^2)$  qui est incluse dans la sous-variété lagrangienne  $\mathcal{L}_h$  de  $\mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2$ . Plus précisément, on a que :

1. La première forme fondamentale est  $\iota_{\partial h}^* g_L = \left(1 + \frac{1}{4}(R_1 - R_2)^2\right) g_S$ , avec  $g_S$  étant la métrique usuelle sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  et où  $R_1(u)$  et  $R_2(u)$  sont les rayons de courbure principaux du hérisson euclidien qui est défini par la fonction de support  $h$ .
2. Le vecteur de courbure moyenne  $\vec{H} : \mathcal{I}_{\partial h} \rightarrow T[\mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2]$  vérifie que

$$\vec{H} \circ \iota_{\partial h}(u) = (u, -1, 0) = \varepsilon_\alpha \circ \iota_{\partial h}(u) - \partial t \circ \iota_{\partial h}(u)$$

avec  $\varepsilon_\alpha(x, u) = (u, 0) \in \mathbb{E}^3 \times T_u\mathbb{S}^2$  étant le champ de vecteur de Reeb défini sur la variété de contact  $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{S}^2$ .

Il s'ensuit que le hérisson marginalement piégé  $\mathcal{H}_{\partial h}$  est l'image de la surface marginalement piégée  $\mathcal{I}_{\partial h}$  via la projection du fibré de Lagrange  $\pi_L : \mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  et, en particulier, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\iota_{\partial h}} & \mathcal{I}_{\partial h} \subset \mathcal{L}_h \subset \mathbb{L}^4 \times \mathbb{S}^2 \\
\text{Id} \parallel & & \pi_L \downarrow \\
\mathbb{S}^2 & \xrightarrow{y_{\partial h}} & \mathcal{H}_{\partial h} \subset \mathbb{L}^4
\end{array}$$

Pour conclure, on a que tout hérisson marginalement piégé  $\mathcal{H}_{\partial h}$  se relève, via le fibré de Lagrange  $\pi_L$ , sur une surface marginalement piégée  $\mathcal{I}_{\partial h}$  qui est comprise dans la sous-variété lagrangienne  $\mathcal{L}_h$  et qui correspond à la famille des hérissons parallèles  $(\mathcal{H}_{h-t})_{t \in \mathbb{R}}$ . Nous retrouvons donc bien un schéma équivalent à ce que nous connaissons pour les hérissons euclidiens.



## Chapitre 12

# Les g-hérissos marginalement piégés sur le lorentzianisé de l'espace hyperbolique et de la sphère.

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion de hérissos marginalement piégé, qui correspond à la transformation de  $\mathcal{L}$ -Gauss des hérissos euclidiens  $\mathcal{H} \subset \mathbb{E}^3$  et qui définit ainsi une sous-catégorie de surfaces marginalement piégées. Dans ce chapitre, nous définissons et étudions donc la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss des g-hérissos sur les variétés de Lorentz  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ . Pour cela, nous nous appuyerons essentiellement sur les travaux de thèse de B.M.Xavier (voir chapitre 5 de [110]) dans lesquels l'auteur étudie les transformations de  $\mathcal{L}$ -Gauss d'hyper-surfaces de l'espace hyperbolique et de la sphère. En particulier, il est justifié de considérer les constructions introduites par B.M.Xavier comme étant équivalentes à celles que nous trouvons dans l'article [82] de B.Palmer, sur lequel s'est appuyé Y.Martinez-Maure pour définir la notion de hérissos marginalement piégé.

### 12.1 Définition de la notion de co-enveloppe et premières propriétés

Dans cette section, nous adaptons aux lorentzianisés  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$  les définitions 11.1.1 et 11.1.2 correspondant aux lignes lumière orientées et aux co-enveloppes des lignes lumière. Il est à noter que pour éviter la répétition des mêmes arguments, nous ne traiterons, pour toute la suite de ce chapitre et du chapitre suivant, que le cas des g-hérissos de l'espace hyperbolique. En particulier, nous nous en tiendrons uniquement à définir la notion de g-hérissos marginalement piégés sur le lorentzianisé  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ .

#### 12.1.1 Les variétés de Lorentz $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ vues comme espaces des sphères de l'espace hyperbolique et de la sphère.

Commençons par définir les variétés de Lorentz  $(\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}, g_L)$  et  $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}, g_L)$ , où la métrique de Lorentz est donnée par  $g_L = g - dt^2$ , avec  $g$  étant respectivement la métrique usuelle sur

$\mathbb{H}^3$  et sur  $\mathbb{S}^3$ . Nous appelons respectivement ces deux variétés de Lorentz les **lorentzialisés** de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  et de la sphère  $\mathbb{S}^3$ . Nous pouvons alors interpréter ces deux espaces comme étant les espaces des sphères orientées via les bijections  $\phi : \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \Gamma(\mathbb{H}^3)$  et  $\phi : \mathbb{S}^3 \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \mapsto \Gamma(\mathbb{S}^3)$ , où  $\Gamma(\mathbb{H}^3)$  et  $\Gamma(\mathbb{S}^3)$  sont les ensembles des sphères orientées<sup>1</sup>, et qui sont définies de sorte que l'image de tout point  $(x, r)$  correspond à la sphère géodésique orientée  $S(x, |r|)$ , dont le signe du scalaire  $r$  en définit l'orientation.

À présent, considérons  $\Sigma$  une hypersurface orientée et  $\nu$  le champ orthonormal correspondant à son orientation. Alors pour toute fonction lisse  $f : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$ , on considère la fonction  $y : \Sigma \mapsto \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  (resp.  $y : \Sigma \mapsto \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ ) définie comme suit :

$$y(x) = \exp_x(f(x)\nu_L(x)) \quad (12.1.1.1)$$

où  $\nu_L(x) = (\nu(x), -1)$  et  $\exp_x$  est la carte exponentielle centrée en  $(x, 0)$  dans  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ . On peut alors vérifier (voir proposition 13 page 46 de [110] pour plus de détails) que, pour une surface  $\Sigma$  sans point ombilic et dont les courbures principales vérifient la condition :

$$k_i^2 > 1, \quad (12.1.1.2)$$

alors l'application  $y$ , définie via (12.1.1.1), correspond au paramétrage d'une surface marginalement piégée si, et seulement si, la fonction  $f$  est le rayon de courbure moyenne. En particulier, nous appelons **transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss** l'application  $y$  définie via le rayon de courbure moyenne. Pour en savoir plus, il est possible de consulter l'ouvrage [10] où l'on trouve une introduction<sup>2</sup> à la géométrie de Laguerre pour des espaces non euclidiens.

### 12.1.2 Famille de géodésiques lumière orientées en $e$

Sur l'espace de Lorentz-Minkowski, une famille de lignes lumière  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$  est dite orientée lorsque chaque ligne lumière  $l_u$  est orientée par le vecteur  $u_L = (u, -1)$ . Il est alors clair qu'une telle définition revient à comparer globalement les orientations des lignes  $l_u$ . Par conséquent, nous nous appuyerons sur la méthode des géodésiques porteuses et transverses afin d'adapter la définition de famille de lignes orientées sur le lorentzarisé  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ . Pour cela, remarquons qu'une famille  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}^2}$ , sur l'espace de Lorentz-Minkowski, est orientée si et seulement si la famille des intersections  $\Sigma_u = \mathbb{E}^3 \cap (l_u)^\perp$  correspond à une famille de plans qui est co-orientée. Considérons donc une géodésique lumière  $l \subset \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ , alors on appelle **orthogonal affine** de la géodésique  $l$ , et que l'on note  $(l)^\perp$ , la partie telle que :

$$(l)^\perp = \{p \in \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}, \text{ tel que } \forall q \in l, \gamma_{pq} \perp l\} \quad (12.1.2.3)$$

où, pour chaque couple de points  $p$  et  $q$ , la courbe  $\gamma_{pq} \subset \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  est la géodésique qui contient les points  $p$  et  $q$ . Il nous faut alors vérifier que la partie  $(l)^\perp$  est une surface totalement géodésique.

Pour cela, nous nous plaçons dans un cadre général en considérant  $\mathbb{M}^n(k)$  une variété riemannienne géodésiquement complète dont la courbure sectionnelle est constante et égale à

1. Il nous faut préciser que les sphères de rayon nul correspondent à des singletons et, par conséquent, n'admettent pas d'orientation.

2. Il est à noter que les constructions que nous adoptons ne correspondent pas exactement à ce que nous trouvons dans l'ouvrage [10]. En particulier, dans l'ouvrage [10], l'espace des sphères de Laguerre correspond au  $(x, SH(r))$  que l'on regarde sur l'espace projectif  $\mathbb{P}_4$ , avec  $x$  étant un point du demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^3$ , qui correspond au centre de la sphère, et  $r$  étant un scalaire qui correspond au rayon de la sphère.

$k \in \mathbb{R}$ . Nous savons alors qu'en tout point  $q = (x, t) \in \mathbb{M}^n(k) \times \mathbb{R}$ , l'application exponentielle  $\exp_q : T_x \mathbb{M}^n(k) \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^n(k) \times \mathbb{R}$  vérifie que l'image d'un  $p$ -sous-espace vectoriel est une  $p$ -sous-variété totalement géodésique dans  $\mathbb{M}^n(k) \times \mathbb{R}$ . Aussi, par définition, si  $p \in (l)^\perp$  et  $q \in l$  alors la géodésique  $\gamma_{pq}$  est comprise dans l'orthogonal  $(l)^\perp$  et en particulier  $l \subset (l)^\perp$ . Nous obtenons alors le résultat suivant :

**Propriété 12.1.1.** *Pour toute géodésique de type lumière  $l \subset \mathbb{M}^n(k) \times \mathbb{R}$ , la partie  $(l)^\perp$  est une hypersurface totalement géodésique. De plus, on a que :*

$$(l)^\perp = \exp_p \cdot T_p(l)^\perp = \exp_p \cdot (T_p l)^\perp \tag{12.1.2.4}$$

pour tout point  $p \in l$ .

*Démonstration.* Considérons donc  $l \subset \mathbb{M}^n(k) \times \mathbb{R}$  une géodésique de type lumière et définissons, pour tout point  $q \in l$ , la partie :

$$K_q = \{p \in \mathbb{M}^n(k) \times \mathbb{R}, \text{ tel que } \gamma_{pq} \perp l\}$$

Il est alors clair que, via la carte exponentielle  $\exp_q : T_q[\mathbb{M}^n(k) \times \mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{M}^n(k) \times \mathbb{R}$  centrée au point  $q$ , la partie  $K_q$  correspond à  $\exp_q^{-1} \cdot (l_q)^\perp$ , où  $l_q = \exp_q^{-1}(l)$ , et est ainsi une hypersurface totalement géodésique.

Ensuite, considérons deux points  $q$  et  $q'$  dans  $l$ , ainsi que  $p \in K_q$ . Alors, la (ou les) géodésique(s)  $\gamma_{pq}$  contenant les points  $p$  et  $q$  est (sont) orthogonale(s) à la géodésique lumière  $l$ . De plus, sachant que  $K_q = \exp_q^{-1} \cdot (T_q l)^\perp$ , en considérant les points  $w = \exp_q^{-1}(p)$  et  $v = \exp_q^{-1}(q')$  (ou qui vérifient uniquement que  $p = \exp(w)$  et  $q' = \exp(v)$  dans le cas où l'exponentielle n'est pas injective), il est immédiat que :

$$\mathcal{P} = \langle w, v \rangle \subset (T_q l)^\perp$$

où  $T_q l = \exp_q^{-1}(l) = \mathbb{R}v$ .

À présent, considérons  $\gamma_{pq'} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}^n(k) \times \mathbb{R}$  une géodésique qui passe par les points  $p$  et  $q'$  aux instants respectifs  $t = 0$  et  $t = 1$ . Il nous faut donc vérifier que  $\gamma_{pq'} \subset K_q$ .

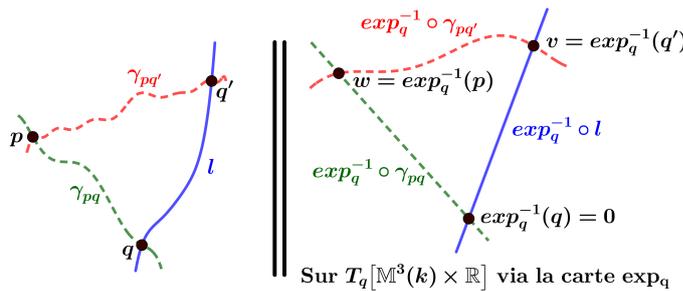


FIGURE 12.1 – Positionnement de la géodésique  $\gamma_{pq'}$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

Supposons que  $\partial_t \gamma_{pq'}(0) \notin T_p[\exp_q^{-1}(\mathcal{P})]$ . Il est alors clair que  $\vec{v}_0 = (d_w \exp_q)^{-1} \cdot \partial_t \gamma_{pq'}(0)$  n'est pas sur le plan  $\mathcal{P} = \langle w, v \rangle$ . Par propriété de l'exponentielle sur les espaces à courbure sectionnelle constante, on sait que  $\exp_q^{-1}(\gamma_{pq'}) \subset \langle w, \vec{v}_0 \rangle$ , et en particulier  $v \in \langle w, \vec{v}_0 \rangle$ . Par

conséquent, étant de même dimension, on obtient que  $\mathcal{P} = \langle v, w \rangle = \langle w, \vec{\nu}_0 \rangle$ , ce qui contredit l'hypothèse initiale. Ainsi,  $\partial_t \gamma_{pq'}(0) \in T_p[\exp_q^{-1}(\mathcal{P})]$  et comme  $\exp_q(\mathcal{P})$  est une surface totalement géodésique, alors  $\gamma_{pq'} \subset \exp_q(\mathcal{P})$ .

On sait donc que  $\vec{\nu}_1 = (d_v \exp_q)^{-1} \cdot \partial_t \gamma_{pq'}(1) \in \mathcal{P}$  et alors, le vecteur  $\vec{\nu}_1$  est orthogonal selon le produit  $g_{L_q}$  à la droite  $T_q l = \mathbb{R}v$ . De plus, par le lemme de Gauss, on obtient :

$$\langle d_v \exp_q \cdot \vec{\nu}_1 | d_v \exp_q \cdot v \rangle_{q'} = \langle \vec{\nu}_1 | v \rangle_q = 0$$

et donc on a bien que  $p \in K_{q'}$ . En particulier, on obtient que  $K_q = K_{q'}$ . Ainsi, pour tout  $q_0 \in l$ , l'orthogonal de la géodésique  $l$  satisfait la relation suivante :

$$(l)^\perp = \bigcap_{q \in l} K_q = K_{q_0} = \exp_{q_0} \cdot (T_{q_0} l)^\perp{}^{g_{L_{q_0}}}$$

ce qui donne le résultat recherché.  $\square$

**Propriété 12.1.2.** *Si  $l \subset \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  est une géodésique de type lumière, alors l'intersection  $\mathbb{H}^3 \cap l$  est non vide et correspond à un singleton  $\{x\}$ . De plus, la géodésique vérifie la relation suivante :*

$$l = \exp_x(\mathbb{R}u_L), \quad (12.1.2.5)$$

où  $u_L = (u, -1)$  avec  $u \in \mathbb{S}_x^2$ .

*Démonstration.* Soit  $q = (x_q, t_q) \in l$  un point sur la géodésique. On a alors  $T_q l = \mathbb{R}\vec{\nu}$  où  $\vec{\nu} = (\vec{v}, T) = -T(u_q, -1)$  avec  $u_q \in \mathbb{S}_{x_0}^2$ . Par conséquent, en remarquant que la géodésique  $l$  est paramétrée par

$$l(t) = \left( \exp_{x_q}(tu_q), t_q - t \right),$$

on obtient le résultat recherché.  $\square$

**Notation 12.1.1.** *Pour tout point  $x \in \mathbb{H}^3$  et pour tout vecteur  $u \in \mathbb{S}_x^2$ , nous noterons  $u_L$  le vecteur  $(u, -1) \in T_x[\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}]$ .*

Pour conclure cette section, il est clair, par les propriétés 12.1.1 et 12.1.2 que nous avons vu précédemment, que pour toute géodésique de type lumière  $l \subset \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ , l'intersection  $\mathbb{H}^3 \cap (l)^\perp$  forme un g-hyperplan<sup>3</sup>. Par conséquent, considérons  $l$  une géodésique lumière orientée et  $x$  l'unique point de l'intersection  $\mathbb{H}^3 \cap l$ . Alors, si l'orientation de la géodésique  $l$  correspond, au point  $x$ , à un vecteur de la forme  $u_L = (u, -1) \in T_x[\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}]$ , on définit le g-hyperplan orienté :

$$(l)_0^\perp = \mathbb{H}^3 \cap (l)^\perp \quad (12.1.2.6)$$

dont l'orientation est définie par le vecteur  $u$ .

**Définition 12.1.1.** *Soit  $e \in \mathbb{H}^3$  un point de référence. On appelle **famille de géodésiques lumière orientées en  $e$**  toute famille lisse  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  de géodésiques orientées de type lumière, qui est orientée en temps négatif<sup>4</sup>, telle que la famille des g-hyperplans orientés  $(l_u)_0^\perp$  soit co-orientée en  $e$ .*

3. En effet, il suffit de constater qu'en considérant  $x$  comme étant l'unique point dans l'intersection  $\mathbb{H}^3 \cap l$ , alors on a que  $\mathbb{H}^3 \cap (l)^\perp = \exp_x(T_x \mathbb{H}^3 \cap (T_x l)^{g_{L_x}})$ .

4. Nous dirons qu'une géodésique de type lumière  $l \subset \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  est orientée en temps négatif lorsqu'en tout point  $x \in l$ , son orientation est définie par un vecteur de la forme  $u_L = (u, -1)$ .

**Avertissement 12.1.1.** Afin d'éviter de surcharger inutilement le texte, nous nous permettrons de considérer les familles de géodésiques lumière comme étant des familles de géodésiques de type lumière, sans mentionner leur orientation.

**Remarque 12.1.1.** Soit  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  une famille de géodésiques lumière orientées en  $e$ . Il est clair que pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$ , l'orientation de la géodésique  $l_u$  est définie par le transport parallèle du vecteur  $u_L = (u, -1) \in T_e[\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}]$ , le long de la géodésique  $\gamma_u \subset \mathbb{H}^3$  qui passe par le point  $e$  à la vitesse  $u$ .

### 12.1.3 Éléments de base sur le laplacien et l'opérateur de Hodge

Dans la section précédente, nous avons défini la notion de famille de géodésiques lumière orientées en  $e \in \mathbb{H}^n$ , correspondant à la généralisation naturelle des familles de lignes lumière orientées dont la co-enveloppe définit la notion de hérissons marginalement piégés. Il est donc nécessaire de définir la notion de co-enveloppe de famille de géodésiques de type lumière en adaptant la définition 11.1.2 sur le lorentzianisé  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ . Pour ce faire, il est nécessaire de faire quelques rappels concernant l'opérateur de Laplace-Beltrami et la co-différentielle de Hodge.

Considérons donc une variété riemannienne  $(M, g)$  et sa connexion de Levi-Civita, notée  $\nabla : \Delta(M) \mapsto \Omega_1(M) \otimes \Delta(M)$ . Soit  $f : M \mapsto \mathbb{R}$  une fonction lisse. On définit alors l'opérateur de Laplace-Beltrami comme suit :

$$\Delta_g(f) = Tr \nabla^*(df) \quad (12.1.3.7)$$

où  $Tr$  est la trace orthonormale<sup>5</sup> et  $\nabla^*$  est le dual de la connexion  $\nabla$ . La co-différentielle de Hodge, notée  $\delta_g$ , est alors l'adjoint de la différentielle  $d$  par rapport à l'extension de la métrique  $g$  sur le fibré des formes  $\Omega(M)$ . En effet, il existe une unique métrique sur le fibré des formes différentielles  $\Omega(M)$  telle que :

1. Pour  $\alpha \in \Omega_p(M)$  et  $\beta \in \Omega_q(M)$  avec  $p \neq q$ , on a  $\langle \alpha | \beta \rangle = 0$ .
2. Si  $u_1, \dots, u_p \in \Delta(M)$  et  $v_1, \dots, v_p \in \Delta(M)$  sont deux familles de champs de vecteurs, alors  $\langle g \cdot u_1 \wedge \dots \wedge g \cdot u_p | g \cdot v_1 \wedge \dots \wedge g \cdot v_p \rangle = \det(\langle u_i | v_j \rangle)_{ij}$ .

Le co-différentiel de Hodge  $\delta_g : \Omega(M) \mapsto \Omega(M)$  est donc l'unique morphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbre gradué de degré  $-1$  tel que, pour toute  $p$ -forme  $\alpha \in \Omega_p(M)$  et  $(p-1)$ -forme  $\beta \in \Omega_{p-1}(M)$ , on ait  $\langle \alpha | d\beta \rangle = \langle \delta_g(\alpha) | \beta \rangle$ . À présent, il nous faut considérer la relation entre le co-différentiel de Hodge et l'opérateur de Laplace-Beltrami. Rappelons que l'opérateur de Hodge-Laplace est défini comme suit :

$$\Delta = \delta_g \circ d + d \circ \delta_g \quad (12.1.3.8)$$

Ainsi, pour une fonction lisse  $f : M \mapsto \mathbb{R}$ , on a  $\Delta_g(f) = -\Delta(f) = -\delta_g(df)$ , où  $\Delta_g$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami défini via la relation (12.1.3.7). Pour en savoir plus, on peut se référer aux ouvrages [8] et [48], qui offrent un contenu largement suffisant pour nos futurs développements. Il est également possible de considérer les cours de C.Voisin (voir [109]) qui proposent une présentation exhaustive et claire de la Théorie de Hodge.

5. Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne et  $f \in \Omega_1(M) \otimes \Omega_1(M)$  une forme symétrique, alors on appelle trace orthonormale en un point  $x \in M$ , le nombre  $Tr(f)_x = f_x(e_1)e_1 + \dots + f_x(e_n)e_n$ , où  $e_1, \dots, e_n$  forment une base orthonormale de  $T_x M$ . Il est à noter que le nombre  $Tr(f)_x$ , ainsi défini, ne dépend pas du choix de la base orthonormale. De plus, nous pouvons généraliser cette définition aux tenseurs symétriques  $T \in \Omega_1(M) \otimes \Omega_1(M) \otimes \Delta(M)$ .

Dans la suite, nous devons envisager un cadre plus général en étendant l'opérateur de Hodge et l'opérateur de Laplace-Beltrami à un fibré métrique. En effet, dans le cas des  $g$ -hérissos, il est nécessaire de définir le laplacien  $\Delta(y)$  et le co-différentiel  $\delta(dy)$  pour une application lisse  $y : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ . Considérons donc une application lisse  $x : M \mapsto N$  entre deux variétés de Riemann  $(M, g)$  et  $(N, g_N)$ , et où  $\nabla_M$  et  $\nabla_N$  sont les connexions de Levi-Civita pour les métriques respectives  $g$  et  $g_N$ . En considérant la connexion induite :

$$\bar{\nabla} = \nabla_M^* \otimes x^* \nabla_N : \Gamma^0(TM^* \otimes x^*TN) \mapsto \Omega_1(M) \otimes \Gamma^0(TM^* \otimes x^*TN), \quad (12.1.3.9)$$

nous définissons alors l'**opérateur de Laplace-Beltrami** pour l'application  $x$  en adaptant l'expression (12.1.3.7) via la connexion  $\bar{\nabla}$  comme suit :

$$\Delta_g(x) = Tr \bar{\nabla}(dx) \quad (12.1.3.10)$$

Ensuite, considérons  $(M, g)$  une variété de Riemann ainsi que  $p : E \mapsto M$  un fibré métrique, où  $g_E \in \Gamma^0(E)^* \otimes \Gamma^0(E)^*$  est la métrique et où  $\nabla : \Gamma^0(E) \mapsto \Omega_1(M) \otimes \Gamma^0(E)$  est une connexion métrique pour  $g_E$ . En considérant  $d^\nabla : \Gamma(E) \mapsto \Gamma(E)$  la dérivation covariante extérieure<sup>6</sup>, avec  $\Gamma(E) = \Omega(M) \otimes \Gamma^0(E)$ , ainsi que  $g^\nabla = g \otimes g_E$  le produit des métriques, où  $g$  est le prolongement de la métrique de  $M$  sur le fibré des formes, on définit alors le co-différentiel  $\delta^\nabla : \Gamma(E) \mapsto \Gamma(E)$  comme étant l'adjoint de  $d^\nabla$  pour le produit  $g^\nabla$ . Par conséquent, pour tout  $\alpha \in \Gamma^p(E)$ , avec  $\Gamma^p(E) = \Omega_p(M) \otimes \Gamma^0(E)$ , et  $\beta \in \Gamma^{p-1}(E)$  nous avons que :

$$\langle \alpha | d^\nabla(\beta) \rangle = \langle \delta^\nabla(\alpha) | \beta \rangle \quad (12.1.3.11)$$

Le co-différentiel  $\delta^\nabla$  correspond donc au prolongement sur  $\Gamma(E)$  du co-différentiel de Hodge de  $M$ . On retrouve ainsi l'opérateur de Hodge-Dirac  $\partial = d^\nabla + \delta^\nabla$  ainsi que l'opérateur de Hodge-Laplace  $\Delta = \partial^2 = d^\nabla \circ \delta^\nabla + \delta^\nabla \circ d^\nabla$ .

Par conséquent, si l'on considère une fonction lisse  $x : M \mapsto N$ , avec  $(M, g)$  et  $(N, g_N)$  étant deux variétés de Riemann, alors on définit la co-différentiel de la différentielle  $dx$ , que nous noterons  $\delta_g(dx)$  tel que  $\delta_g(dx) = \delta^{x^* \nabla^N}(dx)$ , avec  $\nabla^N$  étant la connexion de Levi-Civita associée à la métrique  $g_N$ . Après quelques calculs via la carte exponentielle sur  $N$ , nous obtenons :

$$\Delta_g(x) = -\delta_g(dx) \quad (12.1.3.12)$$

où  $\Delta_g$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami. Il nous faut alors noter que l'opérateur de Hodge et l'opérateur de Laplace-Beltrami, ainsi définis, dépendent du choix d'une métrique sur la variété  $M$ .

#### 12.1.4 Définition et propriétés de la notion de co-enveloppe

Considérons  $y : \Gamma \hookrightarrow M$  le paramétrage d'une surface immergée, avec  $(M, g)$  étant une 4-variété de Lorentz. Si  $I$  est la première forme fondamentale de  $y$ , alors on peut vérifier que le vecteur de courbure moyenne<sup>7</sup> admet pour expression :

$$H(u) = \frac{1}{2} \Delta_I(y) \quad (12.1.4.13)$$

6. La dérivation covariante extérieure correspond au prolongement de la dérivation extérieure de  $\Omega(M)$  sur  $\Gamma(E) = \Omega(M) \otimes \Gamma^0(E)$  tel que  $d^\nabla(w \otimes \sigma) = dw \otimes \sigma + (-1)^k w \wedge \nabla(\sigma)$  avec  $k$  étant le degré de  $w$ .

7. Si  $y : \Gamma \hookrightarrow M$  est le paramétrage d'une surface immergée, alors on rappelle que le vecteur de courbure moyenne est défini par la trace orthonormale de la deuxième forme fondamentale.

Ainsi, sur l'espace de Lorentz-Minkowski, comme les formes fondamentales d'une immersion de Legendre vérifient que  $I \sim III \sim g_S$  (voir [82] pour en savoir plus), il est alors clair que, la condition de co-contact  $\langle \delta(dy)|_{u_L} \rangle = 0$  (voir définition 11.1.2 page 229) étant définie via la co-différentielle de Hodge correspondant à la métrique usuelle de la sphère, on a forcément que toute co-enveloppe de famille de lignes lumière orientées correspond à une surface marginalement piégée en ses points non ombilic.

Au chapitre 13 nous étudions les propriétés des co-enveloppes de familles de géodésiques lumière en définissant la co-différentielle de Hodge à partir de la métrique usuelle de la sphère  $\mathbb{S}_e^2$ . En particulier, nous comprenons alors (voir section 13.2 pour plus de détails), que les propriétés que l'on obtient ne sont pas suffisantes. Par conséquent, il nous faut définir la notion de co-enveloppe relativement au choix d'une métrique sur la sphère. Pour cela, on considère  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  une famille de géodésiques orientées en  $e \in \mathbb{H}^3$  ainsi qu'une métrique  $g \in \Omega_1(\mathbb{S}_e^2) \otimes \Omega_1(\mathbb{S}_e^2)$ . Alors, on considère la définition suivante :

**Définition 12.1.2.** *On appelle **g-co-enveloppe** d'une famille  $(l_u)_{u \in \Sigma}$  de géodésiques lumière, où  $(\Sigma, g)$  est une 2-variété de Riemann, la donnée de l'image  $y(\Gamma)$  et d'une application  $y : \Sigma \mapsto \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ , que l'on appelle **paramétrage**, et qui vérifie les trois conditions ci-dessous :*

1. Pour tout  $u \in \Sigma$ ,  $y(u) \in l_u$ .
2. Pour tout  $u \in \Sigma$  et  $\vec{v} \in T_u \Sigma$ ,  $d_u y \cdot \vec{v} \perp_{g_L} T_{y(u)} l_u$ .
3. Pour tout  $u \in \Sigma$ ,  $\delta_g(dy)_u \perp_{g_L} T_{y(u)} l_u$ .

**Note.** Nous appellerons **condition de contact** la deuxième condition et **condition de co-contact** la troisième condition.

**Avertissement 12.1.2.** Afin de ne pas alourdir inutilement notre texte, nous nous permettons de considérer une  $g$ -co-enveloppe comme étant une partie sur le lorentzarisé  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ , sans mentionner le paramétrage.

**Notation 12.1.2.** Nous noterons  $g_L = g_0 - dt^2$  la métrique sur le lorentzarisé  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ , où  $g_0$  est la métrique usuelle de l'espace hyperbolique.

À présent, il nous faut établir les relations entre les  $g$ -hérissons de l'espace hyperbolique ainsi que les familles de géodésiques lumière orientées et leurs  $g$ -co-enveloppes, où  $g$  est une métrique quelconque qui est définie sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$ . En particulier, nous pouvons dès à présent comprendre que, comme nous l'avons vu pour les  $g$ -hérissons de l'espace hyperbolique, il est possible de définir des familles de géodésiques lumière orientées sur le lorentzarisé  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  qui n'admettent pas de  $g$ -co-enveloppe.

Considérons donc  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  un  $g$ -hérisson centré en  $e$  de l'espace hyperbolique, dont le paramétrage est  $x : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{H}^3$  et le champ orthonormal est  $N : \mathbb{S}_e^2 \mapsto T\mathbb{H}^3$ . Alors, nous pouvons définir une famille de géodésiques lumière orientées en  $e$  telle que :

$$l_u = \exp_{x(u)}(\mathbb{R}N_L(u)) \quad (12.1.4.14)$$

où  $N_L(u) = (N(u), -1)$ .

Nous appelons alors **famille de géodésiques lumière orientées engendrée par le  $g$ -hérisson  $\mathcal{H}$**  la famille de géodésiques lumière orientées ainsi définies. Remarquons en particulier que la famille des  $(l_u)_0^\perp = \mathbb{H}^3 \cap (l_u)^\perp$  correspond à la famille des  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$  du  $g$ -hérisson  $\mathcal{H}$ . Ainsi, on obtient la propriété suivante :

**Propriété 12.1.3.** *Toute famille de géodésiques lumière orientées centrée en  $e$  admettant une  $g$ -co-enveloppe (quel que soit le choix de la métrique  $g$  sur la sphère) est engendrée par un  $g$ -hérisson centré en  $e$ .*

*Démonstration.* Considérons donc  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  une famille de géodésiques lumière orientées en  $e$ . Par définition, nous savons que les  $\Sigma_u = (l_u)_0^\perp = \mathbb{H}^3 \cap (l_u)^\perp$  forment une famille de  $g$ -hyperplans co-orientés en  $e$ . Si  $h : \mathbb{S}_e^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction de support, alors considérons l'application  $x_0$  et le champ de vecteurs  $N$  qui sont définis via les expressions (4.3.0.7) page 93. Il est alors clair que les  $g$ -hyperplans de la famille  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  vérifient la relation  $\Sigma_u = \exp_{x_0(u)} \langle N(u) \rangle^\perp$ . Ensuite, par la propriété 12.1.2, on peut définir l'application  $x : \mathbb{S}_e^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  telle que pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$ ,  $x(u) \in \mathbb{H}^3 \cap l_u$ . On peut alors vérifier, via la carte exponentielle, que l'application  $x$  est lisse. De plus, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$ , on a que :

$$l_u = \exp_{x(u)}(\mathbb{R}N_L(u))$$

où  $N_L(u) = (N(u), -1)$ .

Supposons que la famille de géodésiques lumière  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  admette une  $g$ -co-enveloppe (pour une métrique  $g$  donnée), paramétrée par  $y : \mathbb{S}_e^2 \rightarrow \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ . Alors, par définition, il existe nécessairement une fonction lisse  $f : \mathbb{S}_e^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$y(u) = \exp_{x(u)}(f(u)N_L(u))$$

En considérant  $\tilde{\eta}(u) = \varphi_{x(u), y(u)} \cdot N_L(u)$ , où  $\varphi_{x(u), y(u)} : T_{x(u)}[\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}] \rightarrow T_{y(u)}[\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}]$  est le transport parallèle le long de la géodésique  $\gamma_{N_L(u)}$  passant par le point  $x(u)$  à la vitesse  $N_L(u)$ , on obtient que  $y$  et  $\tilde{\eta}$  satisfont les expressions suivantes :

$$\begin{cases} y(u) = (y_E(u), -f(u)) \text{ avec } y_E(u) = SH f(u)N(u) + CH f(u)x(u) \\ \tilde{\eta}(u) = (\eta(u), -1) \text{ avec } \eta(u) = CH f(u)N(u) + SH f(u)x(u) \end{cases}$$

Comme  $y$  est le paramétrage de la  $g$ -co-enveloppe de la famille de géodésiques lumière  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$ , la condition de contact est équivalente à la condition  $\langle d_u y \cdot \vec{v} | \tilde{\eta}(u) \rangle = 0$ . Ainsi, après quelques calculs, on obtient que :

$$\begin{aligned} \langle d_u y \cdot \vec{v} | \tilde{\eta}(u) \rangle &= \langle d_u y_E \cdot \vec{v} | \eta(u) \rangle - \langle \vec{\nabla} f(u) | \vec{v} \rangle \\ &= (CH f(u))^2 \langle \vec{\nabla} f(u) | \vec{v} \rangle + (CH f(u))^2 \langle d_u x \cdot \vec{v} | N(u) \rangle - (SH f(u))^2 \langle \vec{\nabla} f(u) | \vec{v} \rangle - \langle \vec{\nabla} f(u) | \vec{v} \rangle \\ &= (CH f(u))^2 \langle d_u x \cdot \vec{v} | N(u) \rangle = 0 \end{aligned}$$

En conséquence, l'application  $x : \mathbb{S}_e^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$  satisfait bien la condition de contact pour la famille de  $g$ -hyperplans  $(\Sigma_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$ .  $\square$

Par la propriété 12.1.3, nous savons que toute  $g$ -co-enveloppe d'une famille de géodésiques lumière orientées correspond à la transformée d'un  $g$ -hérisson. Aussi, en adaptant le théorème 6.4.1 page 152 aux familles de géodésiques lumière, nous obtenons la propriété suivante :

**Propriété 12.1.4.** *Toute famille de géodésiques lumière orientées en un point  $e \in \mathbb{H}^3$  admettant une  $g$ -co-enveloppe (quelle que soit le choix de la métrique) est orientée en tout point.*

*Démonstration.* La démonstration de cette propriété découle directement du théorème 6.4.1 page 152. En effet, si  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  est une famille de géodésiques lumière orientées en  $e$  admettant une  $g$ -co-enveloppe, alors par la propriété 12.1.3 nous savons que la famille  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  est engendrée par  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$ , un  $g$ -hérisson centré en  $e$ . Par conséquent, via le théorème 6.4.1, le  $g$ -hérisson  $\mathcal{H}$  est aussi centré en  $v_0$ , où  $v_0$  est un second point de référence. La famille de géodésiques lumière orientées  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  étant définie par le  $g$ -hérisson  $\mathcal{H}$ , il est évident que via la fonction de réindexation, la famille de géodésiques lumière  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  est une famille de géodésiques lumière orientées en  $v_0$ .  $\square$

Nous comprenons donc que la notion de  $g$ -hérisson marginalement piégé, que nous définirons naturellement par des  $g$ -co-enveloppes de familles de géodésiques lumière orientées (pour une métrique  $g$  à déterminer), ne dépendra pas du choix du point de référence sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ . Il est à noter que ce dernier résultat n'est vrai que pour les  $g$ -hérissons marginalement piégés sur le lorentzianisé  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ .

## 12.2 Théorème d'existence des $g$ -hérissons marginalement piégés

Dans cette section, nous démontrons l'existence de  $g$ -hérissons marginalement piégés et qui correspondent à des  $w$ -co-enveloppes de familles de géodésiques lumière orientées dont nous étudions les propriétés. En particulier, nous observerons que, bien que nous retrouvions des résultats équivalents à ceux observés dans l'espace de Lorentz-Minkowski, la question des hérissons marginalement piégés est nettement plus difficile sur les variétés de Lorentz dont la courbure est non-nulle.

Commençons par remarquer que, pour toute métrique  $w$  sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$ , avec  $e \in \mathbb{H}^3$  étant un point de référence, le paramétrage de la  $w$ -co-enveloppe d'une famille de géodésiques lumière orientées en  $e$  qui est définie par un  $g$ -hérisson de paramétrage  $x$ , admet pour expression :

$$y(u) = \exp_{x(u)}(f(u)N_L(u)) \quad (12.2.0.1)$$

où  $f : \mathbb{S}_e^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse.

**Notation 12.2.1.** Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  est un  $g$ -hérisson centré en  $e$  et dont le champ orthonormal est  $N$ , alors on considère le champ de vecteurs  $N_L : \mathbb{S}_e^2 \rightarrow x^*T[\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}]$  tel que :

$$N_L(u) = (N(u), -1) \quad (12.2.0.2)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$ .

On peut alors constater que chaque vecteur  $N_L(u)$  correspond à l'orientation de la géodésique lumière  $l_u$  au point  $x(u)$ . Ainsi, en cas d'existence de la  $w$ -co-enveloppe, on considère  $\tilde{\eta} : \mathbb{S}_e^2 \rightarrow y^*T[\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}]$  le champ de vecteurs correspondant à l'orientation des géodésiques lumière  $l_u$  aux points  $y(u)$ , tel que :

$$\tilde{\eta}(u) = \varphi_{x(u), y(u)} \cdot N_L(u), \quad (12.2.0.3)$$

où  $\varphi_{x(u), y(u)} : T_{x(u)}[\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}] \rightarrow T_{y(u)}[\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}]$  est le transport parallèle le long de la géodésique  $l_u$ . En particulier, on obtient que les conditions de contact et de co-contact, que nous avons introduites via la définition 12.1.2, sont équivalentes à :

$$\langle dy|\tilde{\eta} \rangle = 0 \text{ et } \langle \Delta_w(y)|\tilde{\eta} \rangle = 0 \quad (12.2.0.4)$$

où  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est la forme usuelle de signature (3, 2) sur l'espace  $\mathbb{L}^4 \times \mathbb{R}$ .

**Propriété 12.2.1.** *Pour toute fonction  $f : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{R}$ , l'application  $y : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ , définie via la relation (12.2.0.1) et correspondant à la fonction  $f$ , vérifie la condition suivante :*

$$\langle dy|\tilde{\eta} \rangle = 0 \quad (12.2.0.5)$$

et qui correspond à la condition de contact de la définition 12.1.2.

*Démonstration.* Considérons donc les applications  $y_E(u) = CH f(u)x(u) + SH f(u)N(u)$  et  $\eta(u) = SH f(u)x(u) + CH f(u)N(u)$ . Nous savons alors que  $y(u) = (y_E(u), -f(u))$  et  $\tilde{\eta}(u) = (\eta(u), -1)$  et après quelques calculs, nous obtenons :

$$\langle d_u y_E \cdot \vec{v} | \eta(u) \rangle = SH f(u)[CH f(u) \langle d_u N \cdot \vec{v} | N(u) \rangle + SH f(u) \langle d_u N \cdot \vec{v} | x(u) \rangle] + d_u f(\vec{v})$$

et comme  $\langle d_u N \cdot \vec{v} | N(u) \rangle = 0$  et  $\langle d_u N \cdot \vec{v} | x(u) \rangle = 0$ , nous obtenons le résultat recherché.  $\square$

Considérons à présent  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  un g-hérisson centré en  $e$  ainsi que  $h$ ,  $x$  et  $N$  correspondant respectivement à sa fonction de support, son paramétrage et son champ orthonormal. Il est alors naturel de définir les première et troisième formes fondamentales comme suit :

$$I_u(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \langle d_u x \cdot \vec{v}_1 | d_u x \cdot \vec{v}_2 \rangle \text{ et } III_u(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \langle \nabla(N)_u \cdot \vec{v}_1 | \nabla(N)_u \cdot \vec{v}_2 \rangle \quad (12.2.0.6)$$

avec  $\vec{v}_1 \in T_u \mathbb{S}_e^2$  et  $\vec{v}_2 \in T_u \mathbb{S}_e^2$ . Notons que  $\nabla$  étant la connexion induite par  $x$ , alors  $\nabla(N)_u$  correspond à la différentielle  $d_u N$  en considérant  $N$  comme étant une fonction à image dans  $\mathbb{R}^4$ . Nous pouvons alors considérer la forme symétrique :

$$w = III - I \in \Omega_1(\mathbb{S}_e^2) \otimes \Omega_1(\mathbb{S}_e^2), \quad (12.2.0.7)$$

**Remarque 12.2.1.** *Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  est un g-hérisson centré en  $e$  et si l'on considère le morphisme de fibré  $\phi_u := \nabla(N)_u^{-1} \circ d_u x : T_u \mathbb{S}_e^2 \mapsto T_u \mathbb{S}_e^2$ , alors nous avons nécessairement :*

$$I(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = III(\phi \cdot \vec{v}_1, \phi \cdot \vec{v}_2) \quad (12.2.0.8)$$

pour tous champs de vecteurs  $\vec{v}_1 \in \Delta(\mathbb{S}_e^2)$  et  $\vec{v}_2 \in \Delta(\mathbb{S}_e^2)$ .

**Propriété 12.2.2.** *Si  $x : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$  et  $N : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto T\mathbb{H}^n$  sont respectivement le paramétrage et le champ orthonormal d'un g-hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n$ , alors on a :*

$$\langle \nabla(N)_u \cdot \vec{v}_1 | d_u x \cdot \vec{v}_2 \rangle = \langle d_u x \cdot \vec{v}_1 | \nabla(N)_u \cdot \vec{v}_2 \rangle \quad (12.2.0.9)$$

pour tous vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  dans  $T_u \mathbb{S}_e^2$ .

*Démonstration.* Considérons  $u_0 \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  et  $x_0 = x(u_0)$ . Par le théorème 6.4.1, nous savons que le g-hérisson  $\mathcal{H}$  est centré en  $x_0$ . En particulier, la fonction de réindexation  $\phi : \mathbb{S}_e^{n-1} \mapsto \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$  est un difféomorphisme. Soit le vecteur  $v_0 = \phi(u_0) \in \mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$ . Si  $x_{x_0} : \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \mapsto \mathbb{H}^n$ ,  $h_{x_0} : \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  et  $N_{x_0} : \mathbb{S}_{x_0}^{n-1} \mapsto T\mathbb{H}^n$  sont respectivement le paramétrage, la fonction de support et le champ orthonormal centré en  $x_0$ , alors on peut vérifier que :

$$d_{v_0} x_{x_0} \cdot \vec{v} = Hess(h_{x_0})_{v_0} * \vec{v} \text{ et } \nabla(N_{x_0})_{v_0} \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

et ainsi il est immédiat que

$$\langle d_{v_0}x_{x_0} \cdot \vec{v}_1 | \nabla(N_{x_0})_{v_0} \cdot \vec{v}_2 \rangle = \langle \nabla(N_{x_0})_{v_0} \cdot \vec{v}_1 | d_{v_0}x_{x_0} \cdot \vec{v}_2 \rangle \quad (12.2.0.10)$$

pour tout couple de vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  dans  $T_{v_0}\mathbb{S}_{x_0}^{n-1}$ . À partir de la relation (12.2.0.10), on obtient la relation (12.2.0.9) en remarquant que  $x = x_{x_0} \circ \phi$  et  $N = N_{x_0} \circ \phi$ .  $\square$

En conséquence, l'endomorphisme<sup>8</sup>  $\phi$  est symétrique par rapport à la troisième forme fondamentale. En particulier, la forme  $w$  est une forme bilinéaire symétrique telle que  $Id - \phi^2$  correspond à l'endomorphisme symétrique qui lui est associé. Par conséquent, nous appellerons **valeur propre de  $\mathcal{H}$  en  $u$**  les valeurs propres de l'endomorphisme  $\phi_u$ . Il nous faut alors noter qu'un scalaire  $r \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $\mathcal{H}$  en  $u$  si, et seulement si, il existe un vecteur  $\vec{v} \in T_u\mathbb{S}_e^2$  qui vérifie la relation suivante :

$$d_u x \cdot \vec{v} = r d_u N \cdot \vec{v} \quad (12.2.0.11)$$

où  $x$  et  $N$  correspondent au paramétrage et au champ orthonormal du g-hérisson.

**Définition 12.2.1.** *Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  un g-hérisson centré en  $e$  ainsi que, pour  $u \in \mathbb{S}_e^2$ , les valeurs propres  $r_1$  et  $r_2$ . Si les  $r_i$  appartiennent à l'intervalle  $]-1, 1[$ , alors on appelle **rayon de courbure principal** les scalaires  $R_1$  et  $R_2$  définis par :*

$$R_i = \text{ArcTH}(r_i) \quad (12.2.0.12)$$

**Remarque 12.2.2.** *Il est clair que les fonctions formées par les valeurs propres d'un g-hérisson ainsi que les fonctions des rayons de courbure principaux ne sont pas nécessairement de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

Ensuite, considérons la fonction de courbure  $r_h(u) = \det(\phi_u)$  (voir remarque 4.4.1 page 99) ainsi que la fonction trace  $T(u) = \text{Tr}(\phi_u)$ . On définit alors la **fonction rayon de courbure moyenne** comme étant la fonction  $R : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{R}$  telle que :

$$R(u) = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = \frac{1}{2} \text{ArcTH} \left( \frac{T(u)}{1 + r_h(u)} \right) \quad (12.2.0.13)$$

et dont la condition d'existence est :

$$T(u)^2 < (1 + r_h(u))^2, \quad (12.2.0.14)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$ .

**Définition 12.2.2.** *Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  est un g-hérisson centré en  $e$  vérifiant la condition (12.2.0.14), alors on appelle **transformé de  $\mathcal{L}$ -Gauss** du g-hérisson  $\mathcal{H}$  la donnée de la partie  $y(\mathbb{S}_e^2)$ , à laquelle on associe le paramétrage :*

$$y(u) = \exp_{x(u)}(R(u)N_L(u)) \quad (12.2.0.15)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$ .

**Théorème 12.2.1.** *Toute famille de géodésiques lumière engendrée par un g-hérisson de  $\mathbb{H}^3$  et dont les valeurs propres  $r_1$  et  $r_2$  sont comprises dans l'intervalle  $]-1, 1[$  admet une unique  $w$ -co-enveloppe correspondant au transformé de  $\mathcal{L}$ -Gauss du g-hérisson considéré.*

8. Précisons que par endomorphisme, nous entendons un endomorphisme de fibré sur le fibré vectoriel  $T\mathbb{S}_e^2$ .

*Démonstration.* Considérons donc  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  un g-hérisson centré en  $e$  ainsi que  $x : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{H}^3$  et  $N : \mathbb{S}_e^2 \mapsto T\mathbb{H}^3$ , étant respectivement le paramétrage et le champ orthonormal du g-hérisson considéré. Nous considérons également la forme  $w = III - I \in \Omega_1(\mathbb{S}_e^2) \otimes \Omega_1(\mathbb{S}_e^2)$ , qui correspond à la forme (12.2.0.7) que nous avons introduite précédemment. Il nous faut alors noter que, les valeurs propres du g-hérisson étant sur l'intervalle  $] -1; 1[$ , nous avons donc :

$$1 - r_1^2 > 0 \text{ et } 1 - r_2^2 > 0$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$ . Par conséquent, il est clair que la forme  $w$  ainsi définie correspond à une métrique riemannienne définie sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$ .

Pour  $u_0 \in \mathbb{S}_e^2$ , considérons une base propre, formée par les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ , pour l'endomorphisme  $\phi_{u_0}$  et qui correspond également à une base orthonormale pour la forme  $III_{u_0}$ . Il nous faut alors remarquer que la famille formée par les vecteurs  $d_{u_0}N \cdot \vec{V}_1$ ,  $d_{u_0}N \cdot \vec{V}_2$  et  $N(u_0)$  constitue une base orthonormale de l'espace tangent  $T_{x(u_0)}\mathbb{H}^3$ . Nous pouvons alors construire une base orthonormale pour la forme  $w_{u_0}$  en considérant la famille des vecteurs :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - r_1^2}} \vec{V}_1 \text{ et } \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - r_2^2}} \vec{V}_2$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les valeurs propres en  $u_0$ .

Ainsi, si  $\psi : \Omega \subset \mathbb{S}_e^2 \mapsto T_e\mathbb{S}_e^2$  est la carte exponentielle centrée en  $u_0$ , où  $\Omega = \mathbb{S}_e^2 \setminus \{-u_0\}$ , considérons le repère différentiel défini par les champs de vecteurs  $\partial_1 : \Omega \mapsto T\mathbb{S}_e^2$  et  $\partial_2 : \Omega \mapsto T\mathbb{S}_e^2$  tels que :

$$\partial_1(u) = (d_u\psi)^{-1} \cdot \vec{v}_1 \text{ et } \partial_2(u) = (d_u\psi)^{-1} \cdot \vec{v}_2 \quad (12.2.0.16)$$

pour tout  $u \in \Omega$ .

L'intérêt de ce repère, qui est le repère différentiel induit par la base orthonormale  $\beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  via la carte exponentielle, est que le gradient et l'opérateur de Laplace-Beltrami associés à la métrique  $w$  vérifient en  $u_0$  les expressions suivantes :

$$\vec{\nabla}_w f(u_0) = \partial_1 f(u_0) \vec{v}_1 + \partial_2 f(u_0) \vec{v}_2 \text{ et } \Delta_w(f)_{u_0} = \partial_1^2 f(u_0) + \partial_2^2 f(u_0)$$

pour  $f : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{R}$  étant une fonction lisse.

Considérons donc  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  la famille des géodésiques lumière orientées en  $e$  engendrées par le g-hérisson  $\mathcal{H}$ . En particulier, nous savons que chaque  $l_u$  est la géodésique passant par le point  $x(u)$  à la vitesse  $N_L(u) = (N(u), -1)$ . Si  $y : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  est le paramétrage d'une  $w$ -co-enveloppe de la famille des  $l_u$ , alors il existe nécessairement une fonction lisse  $f : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$  :

$$y(u) = \exp_{x(u)}(f(u)N_L(u)) = (y_E(u), -f(u)) \quad (12.2.0.17)$$

où  $y_E(u) = CH f(y)x(u) + SH f(y)N(u)$ .

De plus, en considérant le champ de vecteurs  $\tilde{\eta} : \mathbb{S}_e^2 \mapsto T[\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}]$  défini via l'expression (12.2.0.3), et par la propriété 12.2.1, nous savons que la condition nécessaire et suffisante pour que  $y$  corresponde au paramétrage d'une co-enveloppe de la famille des  $l_u$  est :

$$\langle \Delta_w(y)_u | \tilde{\eta}(u) \rangle = 0 \quad (12.2.0.18)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$ . De plus, il est à noter, que par définition, il est clair que l'application  $\tilde{\eta}$  admet pour expression :

$$\tilde{\eta}(u) = (\eta(u), -1)$$

avec  $\eta(u) = SH f(y)x(u) + CH f(y)N(u)$ .

Une première étape de calcul consiste donc à déterminer le laplacien  $\Delta_w(x)_{u_0}$ . Pour cela, nous devons commencer par constater que  $\Delta_w(y)_{u_0} = (\Delta_w(y_E)_{u_0}, -\Delta_w(f)_{u_0})$ , et ainsi, nous obtenons la relation suivante :

$$\langle \Delta_w(y)_{u_0} | \tilde{\eta}(u_0) \rangle = \langle \Delta_w(y_E)_{u_0} | \eta(u_0) \rangle - \Delta_w(f)_{u_0}$$

Aussi, en plongeant  $\mathbb{H}^3$  dans l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^4$  via l'injection canonique et en considérant  $y_E$  à image dans  $\mathbb{L}^4$ , alors considérons  $\Delta_w^S(y_E)$  l'opérateur de Laplace-Beltrami de  $y_E$  entre  $(\mathbb{S}_e^2, w)$  et  $(\mathbb{L}^4, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ . On peut alors vérifier que le laplacien  $\Delta_w^S(y_E)$  admet pour expression :

$$\Delta_w^S(y_E)_u = \left( \Delta_w \left( y_E^{(1)} \right)_u, \dots, \Delta_w \left( y_E^{(4)} \right)_u \right), \quad (12.2.0.19)$$

où les  $y_E^{(i)}$  correspondent aux fonctions coordonnées. Nous définissons aussi, par le même procédé, les laplaciens  $\Delta_w^S(x)_u$  et  $\Delta_w^S(N)_u$  où les  $x_i$  et les  $N_i$  sont les fonctions coordonnées. Il nous faut alors remarquer que le laplacien  $\Delta_w(y_E)_u$  correspond à la projection orthogonale :

$$\Delta_w(y_E)_u = \Delta_w^S(y_E)_u - \langle \Delta_w^S(y_E)_u | y_E(u) \rangle y_E(u)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$ . De plus, comme il est clair que  $y_E(u) \perp \eta(u)$ , la condition de co-contact (12.2.0.18) est équivalente à la relation suivante :

$$\langle \Delta_w(y)_{u_0} | \tilde{\eta}(u_0) \rangle = \langle \Delta_w^S(y_E)_{u_0} | \eta(u_0) \rangle - \Delta_w(f)_{u_0} = 0 \quad (12.2.0.20)$$

Ensuite, pour déterminer le laplacien  $\Delta_w^S(y_E)$ , il est nécessaire de calculer le laplacien de chaque coordonnée. Considérons donc  $y_E^{(i)}(u) = CH f(u)x_i(u) + SH f(u)N_i(u)$  comme étant la  $i$ -ème coordonnée de l'application  $y_E$ . Il est alors immédiat que son laplacien est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta_w \left( y_E^{(i)} \right)_u &= \Delta_w [CH f(u)]x_i(u) + 2 \langle \vec{\nabla}_w [CH f(u)] | \vec{\nabla}_w x_i(u) \rangle + CH f(u) \Delta_w(x_i)_u \\ &+ \Delta_w [SH f(u)]N_i(u) + 2 \langle \vec{\nabla}_w [SH f(u)] | \vec{\nabla}_w N_i(u) \rangle + SH f(u) \Delta_w(N_i)_u \end{aligned}$$

En conséquence, déterminer l'expression du laplacien  $\Delta_w \left( y_E^{(i)} \right)_u$  revient à calculer chacun des termes présents dans l'égalité précédente. Commençons par remarquer que :

$$\vec{\nabla}_w [CH f(u)] = SH f(u) \vec{\nabla}_w f(u) \text{ et } \vec{\nabla}_w [SH f(u)] = CH f(u) \vec{\nabla}_w f(u)$$

Aussi, il est clair que  $\partial_j x(u_0) = d_{u_0} x \cdot \vec{v}_j = r_j \nabla(N)_{u_0} \cdot \vec{v}_j = r_j d_{u_0} N \cdot \vec{v}_j$  et par conséquent, on obtient que :

$$\vec{\nabla}_w x_i(u_0) = r_1 \partial_1 N_i(u_0) \vec{v}_1 + r_2 \partial_2 N_i(u_0) \vec{v}_2 = J * \vec{\nabla}_w N_i(u_0) \text{ avec } J = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne finalement :

$$\langle \vec{\nabla}_w [CH f(u)] | \vec{\nabla}_w x_i(u) \rangle + \langle \vec{\nabla}_w [SH f(u)] | \vec{\nabla}_w N_i(u) \rangle = \langle \vec{\nabla}_w f(u_0) | K * \vec{\nabla}_w N_i(u_0) \rangle$$

$$\text{avec } K = SH f(u_0)J + CH f(u_0)Id = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}.$$

Pour les laplaciens de  $CH f(u)$  et  $SH f(u)$  en  $u_0$ , constatons que  $\partial_i [CH f(u)] = SH f(u) \cdot \partial_i f(u)$  et donc  $\partial_i^2 [CH f(u)] = CH f(u) \cdot (\partial_i f(u))^2 + SH f(u) \cdot \partial_i^2 f(u)$ . Ainsi, en appliquant la même méthode pour  $SH f(u)$ , nous avons :

$$\Delta_w [CH f(u_0)] = CH f(u_0) \|\vec{\nabla}_w f(u_0)\|^2 + SH f(u_0) \Delta_w(f)_{u_0}$$

$$\Delta_w [SH f(u_0)] = SH f(u_0) \|\vec{\nabla}_w f(u_0)\|^2 + CH f(u_0) \Delta_w(f)_{u_0}$$

et alors, nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \Delta_w^S(y_E)_{u_0} &= \|\vec{\nabla}_w f(u_0)\|^2 y_E(u_0) + \Delta_w(f)_{u_0} \eta(u_0) \\ &\quad + 2K_1 \partial_1 f(u_0) \partial_1 N(u_0) + 2K_2 \partial_2 f(u_0) \partial_2 N(u_0) \\ &\quad + CH f(u_0) \Delta_w^S(x)_{u_0} + SH f(u_0) \Delta_w^S(N)_{u_0} \end{aligned} \quad (12.2.0.21)$$

ainsi, par (12.2.0.20) on a que :

$$CH f(u_0) \langle \Delta_w^S(x)_{u_0} | \eta(u_0) \rangle + SH f(u_0) \langle \Delta_w^S(N)_{u_0} | \eta(u_0) \rangle = 0 \quad (12.2.0.22)$$

Par conséquent, nous obtenons finalement que l'application  $y$  vérifie la condition de co-contact (12.2.0.18) si et seulement si la fonction  $f$  est une solution de l'équation trigonométrique :

$$\frac{1}{2}(c+d)CH 2f(u_0) + \frac{1}{2}(a+b)SH 2f(u_0) + \frac{1}{2}(c-d) = 0 \quad (12.2.0.23)$$

avec :

$$\begin{aligned} a &= \langle \Delta_w^S(N)_{u_0} | N(u_0) \rangle & b &= \langle \Delta_w^S(x)_{u_0} | x(u_0) \rangle \\ c &= \langle \Delta_w^S(x)_{u_0} | N(u_0) \rangle & d &= \langle \Delta_w^S(N)_{u_0} | x(u_0) \rangle \end{aligned}$$

À présent, déterminons les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ . Pour cela, commençons par rappeler que les trois formes fondamentales correspondant au g-hérisson  $\mathcal{H}$  sont définies telles que :

$$I = \langle dx | dx \rangle, \quad II = -\langle dx | dN \rangle \text{ et } III = \langle dN | dN \rangle \quad (12.2.0.24)$$

De plus, il est clair que, dans les coordonnées (12.2.0.16), les laplaciens  $\Delta_w^S(x)_{u_0}$  et  $\Delta_w^S(N)_{u_0}$  ont pour expressions :

$$\Delta_w^S(x)_{u_0} = \partial_1^2 x(u_0) + \partial_2^2 x(u_0) \text{ et } \Delta_w^S(N)_{u_0} = \partial_1^2 N(u_0) + \partial_2^2 N(u_0)$$

Ainsi, il nous faut déterminer les produits  $\langle \partial_i^2 x(u_0) | x(u_0) \rangle$ ,  $\langle \partial_i^2 x(u_0) | N(u_0) \rangle$ ,  $\langle \partial_i^2 N(u_0) | x(u_0) \rangle$  et  $\langle \partial_i^2 N(u_0) | N(u_0) \rangle$ . En remarquant que les produits  $\langle x | N \rangle$ ,  $\langle dx | N \rangle$  et  $\langle x | dN \rangle$  sont nécessairement nuls, pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$ , nous obtenons alors les quatre relations suivantes :

$$\langle \partial_i^2 x | N \rangle = - \langle \partial_i x | \partial_i N \rangle = II_{ii} \text{ et } \langle \partial_i^2 N | x \rangle = - \langle \partial_i x | \partial_i N \rangle = II_{ii}$$

ainsi que :

$$\langle \partial_i^2 x | x \rangle = - \langle \partial_i x | \partial_i x \rangle = -I_{ii} \text{ et } \langle \partial_i^2 N | N \rangle = - \langle \partial_i N | \partial_i N \rangle = -III_{ii}$$

De plus, notons qu'en évaluant les formes fondamentales en  $u_0$ , on a  $I_{ii}^{u_0} = r_i^2 III_{ii}^{u_0}$  et  $II_{ii}^{u_0} = -r_i III_{ii}^{u_0}$ . Cela nous permet d'avoir une première expression des coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  tels que :

$$\begin{aligned} a &= -III_{11}^{u_0} - III_{22}^{u_0} & b &= -r_1^2 III_{11}^{u_0} - r_2^2 III_{22}^{u_0} \\ c &= -r_1 III_{11}^{u_0} - r_2 III_{22}^{u_0} & d &= -r_1 III_{11}^{u_0} - r_2 III_{22}^{u_0} \end{aligned}$$

et comme

$$III_{ii}^{u_0} = \langle \nabla(N)_{u_0} \cdot \vec{v}_i | \nabla(N)_{u_0} \cdot \vec{v}_i \rangle = \frac{1}{1-r_i^2} \langle \nabla(N)_{u_0} \cdot \vec{V}_i | \nabla(N)_{u_0} \cdot \vec{V}_i \rangle = \frac{1}{1-r_i^2}$$

alors on obtient que :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{1-r_1^2} - \frac{1}{1-r_2^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} & b &= -\frac{r_1^2}{1-r_1^2} - \frac{r_2^2}{1-r_2^2} = \frac{2r_1^2 r_2^2 - r_1^2 - r_2^2}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} \\ c &= -\frac{r_1}{1-r_1^2} - \frac{r_2}{1-r_2^2} = \frac{(r_1+r_2)(r_1 r_2 - 1)}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} & d &= -\frac{r_1}{1-r_1^2} - \frac{r_2}{1-r_2^2} = \frac{(r_1+r_2)(r_1 r_2 - 1)}{(1-r_1^2)(1-r_2^2)} \end{aligned}$$

En conséquence, nous pouvons déterminer les coefficients  $\frac{1}{2}(a+b)$  et  $\frac{1}{2}(c+d)$  de l'équation trigonométrique (12.2.0.23). En particulier, après une simplification par  $(1-r_1^2)(1-r_2^2)$ , nous obtenons que la condition de co-contact (12.2.0.18) est équivalente, en  $u_0$ , à l'équation suivante :

$$(r_1 r_2 - 1)[(r_1 + r_2)CH \ 2f(u_0) + (r_1 r_2 + 1)SH \ 2f(u_0)] = 0 \quad (12.2.0.25)$$

De plus, comme par hypothèse, les valeurs propres du g-hérison  $\mathcal{H}$  sont dans l'intervalle  $]-1; 1[$ , alors on a que les coefficients  $r_1 r_2 - 1$  et  $r_1 r_2 + 1$  sont forcément non nuls. Ainsi, l'équation trigonométrique (12.2.0.25) ci-dessus admet pour unique solution :

$$f(u_0) = -\frac{1}{2} \text{ArcTH} \left( \frac{T(u_0)}{r_h(u_0) + 1} \right) \quad (12.2.0.26)$$

et en particulier, comme en appliquant la même méthode en chaque point nous obtenons toujours l'expression (12.2.0.26), nous savons alors que la solution est unique en tout point et correspond à une fonction lisse. Cela définit immédiatement une  $w$ -co-enveloppe de la famille des  $l_u$ , qui est unique par unicité de la fonction  $f$ .  $\square$

Il est alors clair que ce résultat est l'équivalent du théorème 11.1.1. À présent, nous devons vérifier que la  $w$ -co-enveloppe d'un  $g$ -hérisson est, en ses points non-ombilic<sup>9</sup>, localement une surface marginalement piégée (comme nous l'avons vu au théorème 11.1.2 pour les hérissons marginalement piégés de  $\mathbb{L}^4$ ). Ainsi, considérons le résultat suivant :

**Théorème 12.2.2.** *Toute  $w$ -co-enveloppe  $\partial\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  d'une famille de géodésiques lumière orientées en  $e$  est, en ses points non-ombilic, localement une surface marginalement piégée. En particulier, le paramétrage  $y$  de la  $w$ -co-enveloppe  $\partial\mathcal{H}$  vérifie les deux points suivants :*

1. La première forme fondamentale vérifie que  $I_y = y^*g_L = SH\left(\frac{R_1-R_2}{2}\right)^2 w$ , où  $g_L$  est la métrique sur le lorentzianisé de l'espace hyperbolique.
2. Si le vecteur  $u \in \mathbb{S}_e^2$  est non-ombilic pour le  $g$ -hérisson correspondant à la  $w$ -co-enveloppe  $\partial\mathcal{H}$ , alors  $\partial\mathcal{H}$  est localement une 2-surface marginalement piégée en  $y(u)$  dont le vecteur de courbure moyen est colinéaire à  $\tilde{\eta}$ .

*Démonstration.* Afin d'éviter d'inutilement alourdir notre démonstration, nous reconsidérons les mêmes éléments que nous avons introduits dans la démonstration précédente. En particulier, pour  $u_0 \in \mathbb{S}_e^2$ , considérons les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  qui forment une base propre pour l'endomorphisme  $\phi_{u_0}$  et qui correspondent à une base orthonormale pour la forme  $III_x^{u_0}$ . Sachant que la différentielle de la fonction  $y_E$  est définie telle que  $d_{u_0}y_E \cdot \vec{W} = SH f(u_0) \langle \vec{\nabla} f(u_0) | \vec{W} \rangle x(u_0) + CH f(u_0) d_{u_0}x \cdot \vec{W} + CH f(u_0) \langle \vec{\nabla} f(u_0) | \vec{W} \rangle N(u_0) + SH f(u_0) d_u N \cdot \vec{W}$ , après quelques calculs, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_y^{u_0}(\vec{V}, \vec{W}) &= (CH f(u_0))^2 I_x^{u_0}(\vec{V}, \vec{W}) + 2CH f(u_0) SH f(u_0) II_x^{u_0}(\vec{V}, \vec{W}) + (SH f(u_0))^2 III_x^{u_0}(\vec{V}, \vec{W}) \\ &= (CH f(u_0))^2 \left[ I_x^{u_0}(\vec{V}, \vec{W}) + 2TH f(u_0) II_x^{u_0}(\vec{V}, \vec{W}) + (TH f(u_0))^2 III_x^{u_0}(\vec{V}, \vec{W}) \right] \end{aligned}$$

où  $I_y$  est la première forme fondamentale de la  $w$ -co-enveloppe, ainsi que  $I_x$ ,  $II_x$  et  $III_x$  sont les trois formes fondamentales du  $g$ -hérisson qui lui correspond.

Il est alors facile de vérifier, à partir de l'expression précédente, que la famille formée par les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  est une base orthogonale pour la première forme fondamentale  $I_y$ . Nous pouvons alors déterminer l'expression de  $I_y$  dans cette base, afin d'établir une relation entre les formes  $I_y$  et  $w$  telle que :

$$\begin{aligned} I_x^{u_0}{}_{ii} &= I_x^{u_0}(\vec{V}_i, \vec{V}_i) = (CH f(u_0))^2 \left[ r_i^2 + 2r_i TH f(u_0) + (TH f(u_0))^2 \right] \\ &= (CH f(u_0))^2 (TH(R_i) - TH(R))^2 \text{ avec } R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \text{ et } R_i = \text{ArcTH}(r_i) \\ &= (CH f(u_0))^2 \frac{SH\left(\frac{R_1-R_2}{2}\right)^2}{CH(R)^2 CH(R_i)^2} = \frac{SH\left(\frac{R_1-R_2}{2}\right)^2}{CH(R_i)^2} \\ &= SH\left(\frac{R_1-R_2}{2}\right)^2 (1 - r_i^2) = SH\left(\frac{R_1-R_2}{2}\right)^2 w_{ii}^{u_0} \end{aligned}$$

ce qui nous donne le premier point. À présent, supposons que  $u_0$  ne soit pas ombilic, alors la première forme  $I_y$  est localement de rang 2. En effet, il suffit de voir que si  $R_1^u$  et  $R_2^u$  sont les rayons de courbure principaux, alors :

9. Pour un  $g$ -hérisson, on dira que  $u \in \mathbb{S}_e^2$  est non-ombilic si les valeurs propres  $r_1$  et  $r_2$  sont distinctes.

$$(R_1^u - R_2^u)^2 = f(u)^2 - 4r_h(u) \quad (12.2.0.27)$$

et donc, par continuité, si  $R_1$  et  $R_2$  sont distincts en  $u_0$ , alors ils le sont toujours au voisinage de  $u_0$ . Ainsi,  $\partial\mathcal{H}$  est localement une surface de type espace et comme, au voisinage de  $u_0$ , on a que  $I_y \sim w$ , il est immédiat que le vecteur de courbure moyen vérifie la relation suivante :

$$\vec{H}(u) = \frac{1}{2} \Delta_{I_y}(y)_u \sim \Delta_w(w)_u \quad (12.2.0.28)$$

De plus, par la relation de contact, on sait que  $\langle dy|\tilde{\eta}(u) \rangle = 0$  et ainsi  $\tilde{\eta}(u)^{\perp_{g_{L_y}(u)}} = dy_u \cdot T_u \mathbb{S}_e^2 \oplus \mathbb{R}\tilde{\eta}(u_0)$ . Par conséquent, comme par définition du vecteur de courbure moyenne,  $\vec{H}(u_0)$  est orthogonal à  $d_u y \cdot T_u \mathbb{S}_e^2$  et que par la condition de co-contact  $\langle \Delta_w(y)_{u_0} | \tilde{\eta}(u_0) \rangle = 0$ , alors on a forcément que  $\vec{H}(u_0) \sim \tilde{\eta}(u_0)$ .  $\square$

Il est aussi possible de donner l'expression du vecteur de courbure moyenne aux points non-ombilic d'une  $w$ -co-enveloppe. En effet, en considérant l'expression (12.2.0.21), nous pouvons vérifier que  $\Delta_w(y) = \Delta_w(f)\tilde{\eta}$ . Étant donné qu'aux points non ombilic, la première forme fondamentale vérifie  $I_y = e^\varphi w$ , nous avons que  $\Delta_{I_y} = e^{-\varphi} \Delta_w$ . Ainsi, après quelques calculs, nous obtenons l'expression :

$$\vec{H}(u) = \frac{1}{2} \Delta_{I_y}(f)_u \tilde{\eta}(u) \quad (12.2.0.29)$$

pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^2$  qui est non-ombilic.

Il convient de noter que l'expression (12.2.0.29) est bien connue depuis longtemps comme nous pouvons la trouver dans l'ouvrage [40] publié en 1929 par T. Gerhard et B. Wilhelm (voir l'expression 109 de la page 318). Il est également utile de souligner que l'expression (11.1.0.11) page 232 nous permet de retrouver exactement la même expression du vecteur de courbure moyenne pour les hérissons marginalement piégés de l'espace de Lorentz-Minkowski.

Pour rester cohérent avec la construction proposée par Y. Martinez-Maure, nous appellerons donc ces  $w$ -co-enveloppes des **g-hérissons marginalement piégés centrés en e**. Nous pouvons alors remarquer que par la propriété 12.1.4 page 248 (sur le lorentzianisé  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  uniquement), la notion de g-hérisson marginalement piégé ne dépend pas du choix du point de référence. Jusqu'à présent, nous avons montré que seuls les g-hérissons dont les valeurs propres sont dans  $] -1; 1[$  définissent un g-hérisson marginalement piégé. Cependant, nous ne sommes pas limités à une telle restriction. Pour que les démonstrations des deux théorèmes précédents soient valides, nous avons besoin que le rayon de courbure moyen soit défini et que la métrique  $w = III - I$  soit soit définie positive ou définie négative. Ainsi, la condition qu'un g-hérisson doit vérifier pour définir un g-hérisson marginalement piégé est :

$$\det(\phi^2 - Id) > 0 \quad (12.2.0.30)$$

et qui est équivalente à la condition (12.2.0.14) que nous avons considérée pour définir la fonction du rayon de courbure moyenne.

En effet, remarquons que si  $r_1$  et  $r_2$  sont les valeurs propres d'un g-hérisson en  $u_0 \in \mathbb{S}_e^2$ , alors la condition (12.2.0.30) est équivalente à ce que les valeurs propres vérifient :

$$\text{ou } \begin{cases} r_1^2 < 1 \text{ et } r_2^2 < 1 \\ r_1^2 > 1 \text{ et } r_2^2 > 1 \end{cases} \quad (12.2.0.31)$$

En particulier, il est clair que si les valeurs propres vérifient la condition (12.2.0.31), alors la forme  $w_{u_0}$  est définie positivement ou est définie négativement<sup>10</sup>. Il est alors immédiat que, par le même procédé que nous avons considéré pour vérifier le théorème 12.2.1, nous obtenons que la condition de co-contact (12.2.0.18) équivaut à ce que la fonction  $f$  soit solution de l'équation trigonométrique (12.2.0.25). Ainsi, il est clair que, dans le cadre de la condition (12.2.0.31), les coefficients  $r_1 r_2 + 1$  et  $r_1 r_2 - 1$  étant non nulles, nous obtenons que l'unique solution de l'équation trigonométrique (12.2.0.25) est la fonction de courbure moyenne.

Nous avons donc déterminé les conditions minimales pour lesquelles un g-hérisson définit un g-hérisson marginalement piégé par transformation de  $\mathcal{L}$ -Gauss. Nous pouvons en particulier remarquer que les g-hérissons qui vérifient la condition (12.2.0.30) sont, via la propriété 7.3.2 page 169, aussi des h-hérissons. Cette remarque est intéressante du fait qu'elle peut être considérée comme étant un point de départ afin de retrouver une structure de co-contact équivalente à ce que nous avons considéré à la section 11.2.3 page 237 au sujet des hérissons marginalement piégés de l'espace de Lorentz-Minkowski.

## 12.3 Problème de structure de co-contact

En consultant le chapitre 5 de la thèse de B.M.Xavier (voir [110]), nous pouvons remarquer que les démonstrations des théorèmes 12.2.1 et 12.2.2, que nous avons vues précédemment, utilisent des arguments très similaires à ceux de B.M.Xavier. Il en va de même pour les hérissons marginalement piégés de  $\mathbb{L}^4$  et l'article de B.Palmer (voir [82]). Toutefois, il convient de noter qu'il existe principalement deux caractéristiques permettant de distinguer les constructions entreprises par B.Palmer et B.M.Xavier de ce que nous avons considéré au sujet des hérissons marginalement piégés.

1. Les hérissons marginalement piégés, aussi bien sur  $\mathbb{L}^4$  que sur les espaces lorentzarisés  $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ , correspondent à des transformations de  $\mathcal{L}$ -Gauss de surfaces qui admettent des points critiques. Plus particulièrement, il faut noter que cela est rendu possible du fait que, par définition de la notion de hérisson, le champ orthonormal  $N : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$  (ou  $N : \mathbb{S}_e^2 \mapsto x_0^* T\mathbb{H}^3$  pour les g-hérissons) est une immersion.
2. Nous avons aussi la structure que vérifient les hérissons marginalement piégés. En effet, les hérissons marginalement piégés de l'espace de Lorentz-Minkowski ne sont pas uniquement des transformations de  $\mathcal{L}$ -Gauss d'un hérisson euclidien ; ils satisfont également des caractéristiques correspondant à la notion de hérisson (i.e., ils vérifient une condition de co-contact, le vecteur de courbure moyenne est de la forme  $H = \alpha N_L$ , où  $N_L : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathcal{C}_-^3 \cap \mathbb{S}^3$  est un difféomorphisme, etc.).

10. Il est à noter que dans le cas de figure où la forme  $w$  est définie négativement, alors la première forme fondamentale du g-hérisson marginalement piégé  $\partial\mathcal{H}$  qui lui est associée vérifie que :

$$I_y = -SH \left( \frac{R_1 - R_2}{2} \right)^2 w$$

au voisinage de  $u_0$ . Cela diffère légèrement de ce que nous avons vu pour le théorème 12.2.2 du fait que les formes  $I_y$  et  $w$  sont alternativement définies positives et définies négativement. Rajoutons aussi que dans le cas où la forme  $w$  est définie négative, alors les rayons de courbure principaux ne sont pas définissables. Seul le rayon de courbure moyenne est définissable ainsi que le paramètre  $(R_1 - R_2)^2$  qui est définie via la relation (12.2.0.27).

C'est le deuxième point qui va nous occuper à présent. En effet, pour les g-hérissons marginalement piégés, nous ne retrouvons pas toutes les caractéristiques que vérifient les hérissons marginalement piégés de l'espace de Lorentz-Minkowski. En particulier, pour les hérissons marginalement piégés de l'espace de Lorentz-Minkowski, ces caractéristiques proviennent essentiellement du fait que la première forme fondamentale vérifie  $I_y \sim g_S$ , où  $g_S$  est la métrique usuelle de la sphère. Il est évident que la métrique  $g_S$  ne dépend pas de la fonction de support du hérisson euclidien correspondant à la famille de lignes lumière dont le hérisson marginalement piégé est la co-enveloppe. Ainsi, dans le cadre des hérissons marginalement piégés de l'espace de Lorentz-Minkowski, la notion de co-enveloppe correspond au dual de la notion d'enveloppe. En effet, dans ce cadre-là, la notion d'enveloppe dépend de l'opérateur de dérivation extérieur et la notion de co-enveloppe de l'opérateur de Hodge, qui est alors défini par dualité via la métrique usuelle de la sphère.

Il est alors clair que les g-hérissons marginalement piégés, étant définis via des  $w$ -co-enveloppes où  $w$  est la métrique telle que  $w = III - I$ , il n'est pas possible, en l'état, de définir la condition de co-contact comme étant le dual de la condition de contact. En effet, si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  est un g-hérisson centré en  $e$  de fonction de support  $h$ , ainsi que  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  la famille de géodésiques lumière orientées en  $e$  définie via la relation (12.1.4.14) page 247, alors la métrique  $w_h = III_x - I_x$  dépend de la fonction  $h$ . Plus particulièrement, la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss du g-hérisson  $\mathcal{H}$ , correspondant à la  $w_h$ -co-enveloppe de la famille des géodésiques lumière  $l_u$ , n'est pas définie via une condition de co-contact indépendante de la fonction  $h$ . La méthode la plus directe pour contourner ce problème serait donc de vérifier s'il existe une métrique  $w_0$  sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$  telle que :

$$w_h = \sigma(h)w_0 \tag{12.3.0.1}$$

pour tout g-hérisson  $\mathcal{H}$  de fonction de support  $h$ . Toutefois, nous pouvons d'ores et déjà rejeter cette hypothèse. En effet on a que :

**Propriété 12.3.1.** *Pour tout point de référence  $e \in \mathbb{S}_e^2$ , il n'existe pas de métrique  $w_0$  qui vérifie la condition (12.3.0.1) pour tout g-hérisson.*

**Note.** *Nous dirons que la métrique  $w$  est irréductible de la fonction de support.*

*Démonstration.* Pour vérifier cela, considérons un g-hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  de fonction de support  $h$  ainsi qu'un vecteur  $u_0 \in \mathbb{S}_e^2$ . Par le théorème 6.4.1 page 152, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que  $h(u_0) = 0$  et  $\vec{\nabla} h(u_0) = 0$ . Il est alors immédiat que  $d_{u_0}x \cdot \vec{v} = Hess(h)_{u_0} * \vec{v}$  et  $\nabla(N)_{u_0} \cdot \vec{v} = \vec{v}$ . À présent, considérons les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  qui forment une base propre pour la matrice hessienne  $Hess(h)_{u_0}$  et qui correspondent aussi à une base orthonormale pour la métrique usuelle de la sphère. Il est alors immédiat que les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , ainsi définis, correspondent à une base orthogonale de  $w_{u_0}$ . De plus, en considérant les coordonnées (12.2.0.16) qui sont définies par les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  via la carte exponentielle, on obtient que :

$$w_{ii}^{u_0} = 1 - (\partial_i^2 h(u_0))^2 \tag{12.3.0.2}$$

ce qui termine la preuve. □

Nous pouvons adopter une autre méthode consistant à déterminer une métrique  $w_0$  sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$  pour laquelle les  $w_0$ -co-enveloppes des familles de géodésiques lumière orientées en  $e$  correspondent à leurs  $w$ -co-enveloppes. Pour cela, remarquons que le théorème 12.2.1 est équivalent à : *Si  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  est un g-hérisson et  $f$  une fonction lisse, alors la fonction  $y$ , définie via la relation*

(12.2.0.1), vérifie la condition de co-contact (12.2.0.4) si et seulement si la fonction  $f$  correspond au rayon de courbure moyenne. Par conséquent, il est justifié de considérer la conjecture suivante :

**Conjecture 12.3.1.** *Considérons  $e \in \mathbb{H}^3$  un point de référence. Alors il existe une métrique riemannienne  $w_0$  sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$  telle que pour tout  $g$ -hérisson  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  vérifiant la condition (12.2.0.30), on a :*

$$\langle \Delta_{w_0}(y_R) | \tilde{\eta} \rangle = 0 \quad (12.3.0.3)$$

où  $y_R$  est le paramétrage de la transformée  $\mathcal{L}$ -Gauss du  $g$ -hérisson  $\mathcal{H}$ .

Il nous faut alors considérer la condition (12.3.0.3) comme étant une équation aux dérivées partielles sur l'ensemble des métriques riemanniennes  $w_0 \in \Omega_1(\mathbb{S}_e^2) \otimes \Omega_1(\mathbb{S}_e^2)$ . Une des méthodes envisageables consiste à considérer la métrique usuelle de la sphère. En effet, comme nous le vérifions au chapitre suivant, il apparaît que, bien que la métrique usuelle de la sphère ne soit pas solution de l'équation (12.3.0.3), il semble qu'il en soit de peu pour qu'elle convienne. Il est alors justifié de rechercher une solution de l'équation (12.3.0.3) au voisinage de la métrique usuelle de la sphère en y appliquant de légères variations.

## Chapitre 13

# Co-enveloppe sur $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ pour la métrique usuelle de la sphère.

Ce chapitre peut être considéré comme une annexe du chapitre précédent et a pour objet de tester naïvement la métrique usuelle de la sphère comme premier élément de réponse à la conjecture 12.3.1. Il est à noter qu'étant particulièrement calculatoire, nous nous appuyerons sur l'annexe F qui nous permettra de réduire significativement la taille de nos futurs développements. Nous commencerons donc par déterminer les conditions d'existence des solutions de l'équation de co-contact  $\langle \Delta_{g_S}(y) | \tilde{\eta} \rangle = 0$  sur l'ensemble des applications  $y$  définies par la relation (12.1.4.14) page 247 via  $f$  étant une fonction lisse. Ensuite, nous vérifierons si la fonction  $f$ , définissant une solution de l'équation de co-contact, correspond au rayon de courbure moyenne. Il est à noter que, sans surprise, nous pourrions constater que la fonction  $f$  ne peut pas correspondre au rayon de courbure moyenne. Par conséquent, la  $g_S$ -co-enveloppe d'une famille de géodésique lumière définie par un  $g$ -hérisson ne correspond pas à la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss du  $g$ -hérisson considéré. En particulier, par proposition 13 page 46 de [110], la  $g_S$ -co-enveloppe d'une famille de géodésique lumière définie par un  $g$ -hérisson ne vérifie pas les conclusions du théorème 12.2.2.

Considérons donc  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  un  $g$ -hérisson centré en  $e$ . Alors, on définit les applications  $a : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $b : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $c : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{R}$  et  $d : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{R}$  telles que :

$$a = \langle \Delta_S(N) | N \rangle, b = \langle \Delta_S(x) | x \rangle, c = \langle \Delta_S(x) | N \rangle \text{ et } d = \langle \Delta_S(N) | x \rangle \quad (13.0.0.1)$$

où  $x$  et  $N$  sont le paramétrage et le champ orthonormal du  $g$ -hérisson.

**Lemme 13.0.1.** *Soit  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  un  $g$ -hérisson centré en  $e$ . Alors la famille des géodésiques lumière définies par  $\mathcal{H}$  admet une  $g_S$ -co-enveloppe si et seulement si l'équation trigonométrique :*

$$(c + d)CH(2f) + (a + b)SH(2f) + c - d = 0 \quad (13.0.0.2)$$

*admet une solution. De plus, en cas d'existence d'une solution, elle est unique et correspond à une fonction de classe  $C^\infty$ .*

Nous pouvons remarquer que nous retrouvons la même équation que celle obtenue à la relation (12.2.0.23) page 254. Ce résultat est intéressant car l'équation de co-contact  $\langle \Delta(y) | \tilde{\eta} \rangle = 0$  se réduit en une simple équation trigonométrique où, en particulier, toutes les dérivées partielles disparaissent.

### 13.1 Démonstration du lemme 13.0.1

Considérons  $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^3$  un g-hérisson centré en  $e$  ainsi que  $(l_u)_{u \in \mathbb{S}_e^2}$  la famille des géodésiques lumière qui lui est associée. Par conséquent, supposons l'existence d'une  $g_S$ -co-enveloppe dont le paramétrage est  $y : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$ . Il existe donc une fonction lisse  $f$  telle que l'application  $y$  soit de la forme :

$$y(u) = (y_E(u), -f(u)) \quad (13.1.0.1)$$

où  $y_E(u) = CH f(u)x(u) + SH f(u)N(u)$ .

**Notation 13.1.1.** *Pour la suite, nous noterons par  $\Delta$  l'opérateur de Laplace-Beltrami entre  $(\mathbb{S}_e^2, g_S)$  et  $(\mathbb{H}^3, g)$  (resp.  $(\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}, g_L = g - dt^2)$ ). De plus, nous noterons par  $\Delta_S$  le laplacien usuel sur la sphère  $\mathbb{S}_e$ . En particulier, si  $s : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{R}^n$  est une application lisse, alors on notera :*

$$\Delta_S(s) = (\Delta_S(s_1), \dots, \Delta_S(s_n)) \quad (13.1.0.2)$$

le laplacien de  $s$ , où les  $s_i$  sont les fonctions coordonnées.

Il est alors clair que  $\Delta(y_E)_u = \Delta_S(y_E)_u - \langle \Delta_S(y_E)_u | y_E(u) \rangle y_E(u)$ . Aussi, en considérant l'application  $\tilde{\eta} = (\eta, -1)$  avec  $\eta(u) = SH f(u)x(u) + CH f(u)N(u)$  (voir (12.2.0.3) page 249), on sait que la condition de co-contact  $\langle \Delta(y)_u | \tilde{\eta}(u) \rangle = 0$  est équivalente à l'équation :

$$\langle \Delta_S(y_E) | \eta \rangle - \Delta_S(f) = 0 \quad (13.1.0.3)$$

où  $\Delta_S(y_E)_u$  correspond au laplacien de la fonction  $y_E$  que l'on considère à image dans  $\mathbb{L}^4$ . Par conséquent, il nous faut calculer le laplacien  $\Delta_S(y_E)$  et, en particulier, déterminer l'expression des termes  $\Delta_S(SH f(u)N(u))$  et  $\Delta_S(CH f(u)x(u))$ .

#### 13.1.1 Calcul du terme $\Delta_S[SH f(u)N(u)]$

Comme  $SH f(u)N(u) = SH f(u)CH h(u)u + SH f(u)SH h(u)e$ , il nous faut déterminer le laplacien de chacun des termes de cette égalité. Commençons donc par :

$$\begin{aligned} \Delta_S[SH f(u)SH h(u)] &= \Delta_S[SH f(u)]SH h(u) + 2CH f(u)CH h(u) \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S h(u) \rangle \\ &\quad + SH f(u)\Delta_S[SH h(u)] \end{aligned}$$

Pour le second terme, nous pouvons nous référer au lemme 6.2.1 de l'annexe F. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta_S[SH f(u)CH h(u)u] &= (\Delta_S[SH f(u)CH h(u)] - 2SH f(u)CH h(u))u \\ &\quad + 2\vec{\nabla}_S[SH f(u)CH h(u)] \end{aligned}$$

et après avoir développé les termes  $\Delta_S[SH f(u)CH h(u)]$  et  $\vec{\nabla}_S[SH f(u)CH h(u)]$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta_S[SH f(u)CH h(u)u] &= \Delta_S[SH f(u)]CH h(u)u + 2CH f(u)CH h(u)\vec{\nabla}_S f(u) \\ &\quad + 2CH f(u)SH h(u) \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S h(u) \rangle u + SH f(u)\Delta_S[CH h(u)u] \end{aligned}$$

et finalement :

$$\Delta_S[SH f(u)N(u)] = \Delta_S[SH f(u)]N(u) + \sharp_N(u) + SH f(u)\Delta_S(N)_u \quad (13.1.1.4)$$

où  $\sharp_N(u) = 2CH f(u) \left[ CH h(u) \vec{\nabla}_S f(u) + \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S h(u) \rangle x_0(u) \right]$  est le terme qui correspond aux dérivées partielles de premier ordre de la fonction  $f$ .

### 13.1.2 Calcul du terme $\Delta_S [CH f(u)x(u)]$

Étant donné que  $CH f(u)x(u) = CH f(u)\sigma(u)CH h(u)e + CH f(u)\sigma(u)SH h(u)u + CH f(u)\sigma(u)\vec{V}(u)$ , il nous faut calculer le laplacien de chacun des termes de l'égalité. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_S[CH f(u)\sigma(u)CH h(u)] &= \Delta_S[CH f(u)]\sigma(u)CH h(u) + 2SH f(u) \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S \sigma(u) \rangle CH h(u) \\ &\quad + 2SH f(u)\sigma(u)SH h(u) \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S h(u) \rangle + CH f(u)\Delta_S[\sigma(u)CH h(u)] \end{aligned} \quad (13.1.2.5)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_S[CH f(u)\sigma(u)SH h(u)u] &= (\Delta_S[CH f(u)\sigma(u)SH h(u)] - 2CH f(u)\sigma(u)SH h(u))u \\ &\quad + \vec{\nabla}_S[CH f(u)\sigma(u)SH h(u)] \end{aligned}$$

Alors, en développant les termes  $\Delta_S[CH f(u)\sigma(u)SH h(u)]$  et  $\vec{\nabla}_S[CH f(u)\sigma(u)SH h(u)]$ , nous trouvons que la seconde expression est :

$$\begin{aligned} \Delta_S[CH f(u)\sigma(u)SH h(u)u] &= \Delta_S[CH f(u)]\sigma(u)SH h(u)u + 2SH f(u) \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S \sigma(u) \rangle SH h(u)u \\ &\quad + 2SH f(u)\sigma(u)CH h(u) \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S h(u) \rangle u + 2SH f(u)\sigma(u)SH h(u) \vec{\nabla}_S f(u) \\ &\quad + CH f(u)\Delta_S[\sigma(u)SH h(u)u] \end{aligned} \quad (13.1.2.6)$$

Ensuite, le calcul du laplacien du terme  $CH f(u)\sigma(u)\vec{V}(u)$  est moins immédiat et nécessite quelques outils que nous pouvons trouver à l'annexe F. Considérons donc le repère  $\vec{e}_\theta^\rightarrow(u)$ ,  $\vec{e}_\varphi^\rightarrow(u)$  qui est défini par les coordonnées sphériques. En remarquant que  $CH f(u)\sigma(u)\vec{V}(u) = CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u)\vec{e}_\theta^\rightarrow(u) + CH f(u)\sigma(u)V_\varphi(u)\vec{e}_\varphi^\rightarrow(u)$ , alors on calcule :

$$\begin{aligned} \Delta_S[CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u)\vec{e}_\theta^\rightarrow(u)] &= -2 \left( \partial_\theta[CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u)] + \frac{1}{\tan(\theta)} CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u) \right) u \\ &\quad + \left( \Delta_S[CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u)] - \frac{1}{\sin(\theta)^2} CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u) \right) \vec{e}_\theta^\rightarrow(u) \\ &\quad + 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} \partial_\varphi[CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u)] \vec{e}_\varphi^\rightarrow(u) \end{aligned}$$

et après avoir développé les termes  $\partial_\theta[CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u)]$ ,  $\partial_\varphi[CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u)]$  et  $\Delta_S[CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u)]$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Delta_S[CH f(u)\sigma(u)V_\theta(u)\vec{e}_\theta^\rightarrow(u)] &= \Delta_S[CH f(u)]\sigma(u)V_\theta(u)\vec{e}_\theta^\rightarrow(u) + CH f(u)\Delta_S[\sigma(u)V_\theta(u)\vec{e}_\theta^\rightarrow(u)] \\
&\quad + 2SH f(u)\langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S \sigma(u) \rangle V_\theta(u)\vec{e}_\theta^\rightarrow(u) \\
&\quad + 2SH f(u)\sigma(u)\langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S V_\theta(u) \rangle \vec{e}_\theta^\rightarrow(u) \\
&\quad - 2SH f(u)\sigma(u)V_\theta(u) \left[ \partial_\theta f(u)u - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} \partial_\varphi f(u)\vec{e}_\varphi^\rightarrow(u) \right]
\end{aligned}$$

Aussi, en appliquant la même méthode pour le laplacien du terme  $CH f(u)\sigma(u)V_\varphi(u)\vec{e}_\varphi^\rightarrow(u)$ , on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta_S[CH f(u)\sigma(u)V_\varphi(u)\vec{e}_\varphi^\rightarrow(u)] &= \Delta_S[CH f(u)]\sigma(u)V_\varphi(u)\vec{e}_\varphi^\rightarrow(u) + CH f(u)\Delta_S[\sigma(u)V_\varphi(u)\vec{e}_\varphi^\rightarrow(u)] \\
&\quad + 2SH f(u)\langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S \sigma(u) \rangle V_\varphi(u)\vec{e}_\varphi^\rightarrow(u) \\
&\quad + 2SH f(u)\sigma(u)\langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S V_\varphi(u) \rangle \vec{e}_\varphi^\rightarrow(u) \\
&\quad - \frac{2}{\sin(\theta)^2} SH f(u)\partial_\varphi f(u)\sigma(u)V_\varphi(u)(\sin(\theta)u + \cos(\theta)\vec{e}_\theta^\rightarrow(u))
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\Delta_S[CH f(u)\sigma(u)\vec{V}^\rightarrow(u)] &= \Delta_S[CH f(u)]\sigma(u)\vec{V}^\rightarrow(u) + CH f(u)\Delta_S[\sigma(u)\vec{V}^\rightarrow(u)] \\
&\quad + 2SH f(u)\sigma(u) \left[ \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S V_\theta(u) \rangle \vec{e}_\theta^\rightarrow(u) + \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S V_\varphi(u) \rangle \vec{e}_\varphi^\rightarrow(u) \right] \\
&\quad - 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} SH f(u)\sigma(u)\partial_\varphi f(u)[V_\varphi(u)\vec{e}_\theta^\rightarrow(u) - V_\theta(u)\vec{e}_\varphi^\rightarrow(u)] \\
&\quad + 2SH f(u)\langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S \sigma(u) \rangle \vec{V}^\rightarrow(u) \\
&\quad - 2SH f(u)\sigma(u)\langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{V}^\rightarrow(u) \rangle u
\end{aligned}$$

Finalement, en considérant les expressions (13.1.2.5) et (13.1.2.6) que nous avons vues précédemment et que l'on complète par la dernière égalité, nous obtenons :

$$\Delta_S[CH f(u)x(u)] = \Delta_S[CH f(u)]x(u) + \sharp_x(u) + CH f(u)\Delta_S(x)_u \quad (13.1.2.7)$$

avec

$$\begin{aligned}
\sharp_x(u) &= 2SH f(u)\langle \vec{\nabla}_S f(u) | \frac{1}{\sigma(u)} \vec{\nabla}_S \sigma(u) \rangle x(u) \\
&\quad + 2SH f(u)\sigma(u)\langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{V}^\rightarrow(u) \rangle (CH h(u)N(u) - u) \\
&\quad + 2SH f(u)\sigma(u) \left[ \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S V_\theta(u) \rangle \vec{e}_\theta^\rightarrow(u) + \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S V_\varphi(u) \rangle \vec{e}_\varphi^\rightarrow(u) \right] \\
&\quad - 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} SH f(u)\sigma(u)\partial_\varphi f(u)[V_\varphi(u)\vec{e}_\theta^\rightarrow(u) - V_\theta(u)\vec{e}_\varphi^\rightarrow(u)] \\
&\quad + 2SH f(u)\sigma(u)SH h(u)\vec{\nabla}_S f(u)
\end{aligned}$$

### 13.1.3 Expression de la condition de co-contact et conclusion

À partir des expressions (13.1.1.4) et (13.1.2.7), et en déterminant les laplaciens  $\Delta_S[CH f(u)]$  et  $\Delta_S[SH f(u)]$ , nous obtenons que pour toute fonction lisse  $f : \mathbb{S}_e^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , le laplacien  $\Delta_S(y_E)_u$  est donné par :

$$\Delta_S(y_E)_u = \Delta_S(f)_u \eta(u) + l(u)y_E(u) + \sharp_x(u) + \sharp_N(u) + CH f(u)\Delta_S(x)_u + SH f(u)\Delta_S(N)_u$$

où  $l(u) = \|\vec{\nabla}_S f(u)\|^2$ . Par conséquent, il nous reste à vérifier que le produit des termes  $\sharp_x(u)$  et  $\sharp_N(u)$  par le vecteur  $\eta(u)$  est nul. En effet, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \sharp_N(u) | N(u) \rangle = 0 \\ \langle \sharp_N(u) | x(u) \rangle = 2\sigma(u)CH f(u) \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{V}(u) \rangle (CH h(u) - CH h(u)) = 0 \\ \langle \sharp_x(u) | N(u) \rangle = 2\sigma(u)SH f(u) \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{V}(u) \rangle (CH h(u) - CH h(u)) = 0 \end{array} \right.$$

Enfin, pour le produit  $\langle \sharp_x(u) | x(u) \rangle$ , il est nécessaire de commencer par calculer  $\langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S \sigma(u) \rangle$  en sachant que  $\partial_\theta \sigma(u) = \sigma(u)^3 \langle \vec{V}(u) | \partial_\theta \vec{V}(u) \rangle$  et  $\partial_\varphi \sigma(u) = \sigma(u)^3 \langle \vec{V}(u) | \partial_\varphi \vec{V}(u) \rangle$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S \sigma(u) \rangle &= \partial_\theta f(u) \partial_\theta \sigma(u) + \frac{1}{\sin(\theta)^2} \partial_\varphi f(u) \partial_\theta \varphi(u) \\ &= \sigma(u)^3 \left[ \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S V_\theta(u) \rangle V_\theta(u) + \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S V_\varphi(u) \rangle V_\varphi(u) \right] \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \langle \sharp_x(u) | x(u) \rangle &= -2 \frac{SH f(u)}{\sigma(u)} \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S \sigma(u) \rangle - 2SH f(u) \sigma(u)^2 \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{V}(u) \rangle SH h(u) \\ &\quad + 2SH f(u) \sigma(u)^2 \left[ \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S V_\theta(u) \rangle V_\theta(u) + \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S V_\varphi(u) \rangle V_\varphi(u) \right] \\ &\quad - 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} SH f(u) \sigma(u) [V_\varphi(u) V_\theta(u) - V_\theta(u) V_\varphi(u)] \\ &\quad + 2SH f(u) \sigma(u)^2 SH h(u) \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{V}(u) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque nous retrouvons l'équation (12.2.0.22) page 254 pour la métrique usuelle de la sphère, alors en appliquant le même raisonnement que pour la suite de la démonstration du théorème 12.2.1, nous obtenons bien l'équation trigonométrique que nous recherchons

## 13.2 Propriété des $g_S$ -co-enveloppes et questionnements sur la structure de co-contact

À première vue, le fait que la condition de co-contact pour la métrique usuelle de la sphère se réduise, par le lemme 13.0.1, à une équation trigonométrique est encourageant. Toutefois, comme nous le verrons dans cette section, il nous sera difficile de progresser davantage. Remarquons d'abord que l'équation de co-contact (13.1.0.3) page 262 n'est pas invariante par changement du point de référence<sup>1</sup>. En particulier, il est intéressant de constater que nous avons

cette stabilité pour la condition de co-contact correspondant à la métrique  $w = III - I$ . Cela provient évidemment du fait qu'étant définie par les formes fondamentales, la métrique est naturellement transportée lorsqu'on change le point de référence pour le paramétrage du g-hérisson. Plus généralement, si nous souhaitons que la métrique que nous considérons, pour définir la co-enveloppe des familles de géodésiques lumière, ne dépende pas du g-hérisson que nous considérons, nous pouvons comprendre que l'invariance de la condition de co-contact ne pourrait pas être obtenue par une mécanique similaire à celle qui permet de l'obtenir pour la métrique  $w = III - I$ . De plus, il nous faut noter que l'invariance de la condition de contact par changement du point de référence est une condition nécessaire pour qu'une métrique  $w_0$  soit solution de l'équation (12.3.0.3).

Montrons donc que la métrique usuelle de la sphère n'est pas solution de l'équation (12.3.0.3). Pour cela, nous devons définir un exemple de  $g_S$ -co-enveloppe d'une famille de géodésiques lumière qui ne correspond pas à la transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss du g-hérisson qui lui est associé. Par conséquent, considérons un g-hérisson tel que :

$$h(u_0) = 0 \text{ et } \vec{\nabla}_S h(u_0) = 0 \quad (13.2.0.1)$$

pour  $u_0 \in \mathbb{S}_e^2$ .

Il nous faut alors déterminer les coefficients  $a = \langle \Delta_S(N)|N \rangle$ ,  $b = \langle \Delta_S(x)|x \rangle$ ,  $c = \langle \Delta_S(x)|N \rangle$  et  $d = \langle \Delta_S(N)|x \rangle$  en  $u_0$ . Pour cela, on calcule les laplaciens  $\Delta_S(x)_{u_0}$  et  $\Delta_S(N)_{u_0}$ . Après quelques développements, on obtient que  $\Delta_S(N)_{u_0} = \Delta_S(h)_{u_0} e - 2u_0$ , où  $h$  est la fonction de support centrée en  $e$  du g-hérisson considéré. De plus, on calcule que :

$$\begin{aligned} \Delta_S(x)_{u_0} &= \Delta_S(\sigma)_{u_0} e + \Delta_S(h)_{u_0} u_0 + \Delta_S(V_\theta)_{u_0} \vec{e}_\theta(u_0) + \Delta_S(V_\varphi)_{u_0} \vec{e}_\varphi(u_0) \\ &\quad - 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} [\partial_\varphi V_\varphi(u_0) \vec{e}_\theta(u_0) - \partial_\varphi V_\theta(u_0) \vec{e}_\varphi(u_0)] \end{aligned} \quad (13.2.0.2)$$

Par la suite, on peut vérifier que  $a = -2$ ,  $b = \Delta_S(\sigma)_{u_0}$ ,  $c = \Delta_S(h)_{u_0}$  et  $d = \Delta_S(h)_{u_0}$  et ainsi, on détermine  $\alpha = c + d = 2\Delta_S(h)_{u_0}$ ,  $\beta = a + b = \Delta_S(\sigma)_{u_0} - 2$  et  $K = c - d = 0$ . On a donc que la fonction  $f$  correspondant au paramétrage de la  $g_S$ -co-enveloppe est telle que  $f(u_0)$  est solution de l'équation trigonométrique suivante :

$$\alpha CH \ 2f(u_0) + \beta SH \ 2f(u_0) = 0 \quad (13.2.0.3)$$

Ensuite, on peut vérifier que  $\Delta_S(\sigma)_{u_0} = \Delta_S(h)_{u_0}^2 + \frac{2}{\sin(\theta)^2} [\partial_{\theta\varphi} h(u_0)^2 - \partial_\theta^2 h(u_0) \partial_\varphi^2 h(u_0)]$ . Par conséquent, en choisissant correctement la fonction de support pour que la solution de l'équation trigonométrique existe en  $u_0$ , on obtient nécessairement :

$$f(u_0) = -\frac{1}{2} \text{ArcTH} \left( \frac{2\Delta_S(h)_{u_0}}{\Delta_S(h)_{u_0}^2 + \frac{2}{\sin(\theta)^2} [\partial_{\theta\varphi} h(u_0)^2 - \partial_\theta^2 h(u_0) \partial_\varphi^2 h(u_0)] - 2} \right) \quad (13.2.0.4)$$

1. Par non-invariance par changement du point de référence, nous entendons que si pour  $x : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{H}^3$  étant le paramétrage d'un g-hérisson centré en  $e$ , il existe une solution  $y : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}$  vérifiant la condition de co-contact pour la métrique usuelle sur la sphère  $\mathbb{S}_e^2$ , alors en considérant  $\phi : \mathbb{S}_{v_0}^2 \mapsto \mathbb{S}_e^2$  la fonction de réindexation, il n'est pas vrai que le paramétrage  $y \circ \phi$  vérifie toujours la condition de co-contact pour la métrique usuelle de la sphère  $\mathbb{S}_{v_0}^2$ .

Il ne nous reste plus qu'à comparer cette expression avec le rayon de courbure moyenne. Pour cela, nous considérons le morphisme  $\phi_u := \nabla(N)_u^{-1} \circ d_u x : T_u \mathbb{S}_e^2 \mapsto T_u \mathbb{S}_e^2$ . Il est alors facile de vérifier que  $d_{u_0} x \cdot \vec{W} = Hess(h)_{u_0} * \vec{W}$  et  $\nabla(N)_{u_0} \cdot \vec{W} = \vec{W}$ . En particulier,  $\phi_{u_0} \cdot \vec{W} = Hess(h)_{u_0} * \vec{W}$  et donc les valeurs propres de la hessienne correspondent aux valeurs propres<sup>2</sup> du g-hérissou considéré. Par conséquent, en rappelant que l'expression de la hessienne est :

$$Hess(h)_{u_0} = \begin{pmatrix} \partial_\theta^2 h(u_0) & \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_{\theta\varphi} h(u_0) \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \partial_{\theta\varphi} h(u_0) & \frac{1}{\sin(\theta)^2} \partial_\varphi^2 h(u_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \quad (13.2.0.5)$$

et en considérant le discriminant du polynôme caractéristique, qui admet pour expression  $\Delta = (A+B)^2 - 4(AB - C^2)$ , alors les valeurs propres sont respectivement  $r_1 = \frac{1}{2}(A+B + \sqrt{\Delta})$  et  $r_2 = \frac{1}{2}(A+B - \sqrt{\Delta})$ . En particulier, elles vérifient que :

$$r_1 + r_2 = A + B \text{ et } r_1 r_2 = \frac{(A+B)^2 - \Delta}{4} = AB - C^2$$

Ainsi, en considérant l'expression (12.2.0.26) page 255, le rayon de courbure moyenne  $R : \mathbb{S}_e^2 \mapsto \mathbb{R}$  vérifie en  $u_0$  l'expression suivante :

$$R(u_0) = -\frac{1}{2} \text{ArcTH} \left( \frac{\Delta_S(h)_{u_0}}{\frac{1}{\sin(\theta)^2} \partial_\theta^2 h(u_0) \partial_\varphi^2 h(u_0) - \frac{1}{\sin(\theta)^2} \partial_{\theta\varphi} h(u_0)^2 + 1} \right) \quad (13.2.0.6)$$

Il est alors immédiat, du fait que les expressions (13.2.0.5) et (13.2.0.6) ne coïncident pas, que la  $g_S$ -co-enveloppe de la famille des géodésiques lumière définie par le g-hérissou  $\mathcal{H}$  ne correspond pas à sa transformée de  $\mathcal{L}$ -Gauss. Remarquons néanmoins que nous ne passons pas très loin d'un résultat positif du fait que cette non-égalité correspond à une simple différence de signe comme nous le mettons en évidence ci-dessous :

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 + 1} = \frac{A+B}{\frac{(A+B)^2 - \Delta}{4} + 1} \text{ et } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{A+B}{\frac{(A+B)^2 + \Delta}{4} - 1} \quad (13.2.0.7)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coefficients de l'équation trigonométrique (13.2.0.3).

---

2. Ce sont les valeurs propres du morphisme  $\phi_u$  (voir (12.2.0.11) page 251).



# Annexe



## Annexe A

# Éléments sur la théorie des enveloppes

Pour définir les notions de hérisson, de g-hérisson et de h-hérisson, il est essentiel de considérer en toute généralité les notions de famille lisse et d'enveloppe de famille lisse. Pour cela, nous nous appuyons sur le chapitre V de l'ouvrage [13], qui nous est largement suffisant.

**Définition 1.0.1.** Soient  $M$  et  $\Gamma$  deux variétés lisses de dimensions respectives  $n$  et  $k$ . Une famille  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  de  $p$ -sous-variétés de  $M$  est dite **lisse** si, pour tout point  $u_0 \in \Gamma$  et  $x_0 \in \Sigma_{u_0}$ , il existe deux ouverts  $\Omega \subset \Gamma$  et  $\mathcal{W} \subset M$ , centrés respectivement en  $u_0$  et  $x_0$ , et une application lisse  $f : \Omega \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  telle que les applications partielles<sup>1</sup>  $f_u : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  soient des submersions pour lesquelles :

$$\mathcal{W} \cap \Sigma_u = f_u^{-1}(\{0\}) \quad (1.0.0.1)$$

pour tout  $u \in \Gamma$ .

**Note.** Il est également possible d'adapter cette définition pour définir des familles de  $p$ -sous-variétés de classe  $C^k$ . Il suffit pour cela de considérer que les fonctions  $f : \Omega \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  sont de classe  $C^k$ .

**Exemple.** Sur  $\mathbb{R}^n$ , la famille des hyperplans affines  $\Sigma_u = h(u)u + \langle u \rangle^\perp$ , où  $h$  est une fonction lisse définie sur la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ , est une famille lisse d'hyperplans.

**Propriété 1.0.1.** Considérons  $M$  une  $n$ -variété ainsi que  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  une famille lisse de  $p$ -sous-variétés. Alors pour tout point  $u_0 \in \Gamma$ , il existe un ouvert  $\Omega \subset \Gamma$  centré en  $u_0$  et  $\theta : \Omega \rightarrow M$  une application lisse telle que :

$$\theta(u) \in \Sigma_u \quad (1.0.0.2)$$

pour tout  $u \in \Omega$ .

*Démonstration.* Si  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  est une famille lisse de  $p$ -sous-variétés, alors pour tout  $u_0 \in \Gamma$  et  $x_0 \in \Sigma_{u_0}$ , il existe  $\Omega \subset \Gamma$ ,  $\mathcal{W} \subset M$  et  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  des ouverts respectivement centrés en  $u_0$ ,  $x_0$  et

---

1. On dit que  $f_x : F \rightarrow G$  est l'application partielle de  $f : E \times F \rightarrow G$  en  $x \in E$  si, pour tout  $y \in F$ , on a  $f_x(y) = f(x, y)$ .

zéro ainsi qu'une application lisse  $g : \Omega \times \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^n$  dont les applications partielles  $g_u : \mathcal{W} \mapsto \mathcal{V}$  sont des difféomorphismes tels que :

$$g_u(\mathcal{W} \cap \Sigma_u) = \mathcal{V} \cap \mathbb{R}^p,$$

ce qui correspond à la définition précédente reformulée via la propriété de la forme réduite des submersions. Alors, il suffit de considérer la fonction  $\theta : \Omega \mapsto M$  définie par l'expression suivante :

$$\theta(u) = g_u^{-1}(0)$$

pour tout  $u \in \Omega$ . □

**Définition 1.0.2.** *Considérons  $M$  une  $n$ -variété ainsi que  $(\Sigma_u)_{u \in \Gamma}$  une famille lisse de  $p$ -sous-variétés. Alors, on appelle **enveloppe** l'image d'une application lisse  $x : \Gamma \mapsto M$ , que l'on appelle **paramétrage**, et qui vérifie la condition suivante :*

$$x(u) \in \Sigma_u \text{ et } d_u x \cdot \vec{v} \in T_{x(u)}\Sigma_u \quad (1.0.0.3)$$

pour tout  $u \in \Gamma$  et tout vecteur  $\vec{v} \in T_x\Gamma$ .

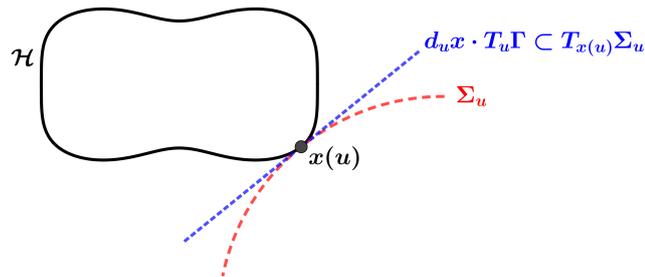


FIGURE 1.1 – Enveloppe d'une famille lisse

**Note.** *Nous appellerons aussi **enveloppe paramétrée** la donnée de l'enveloppe d'une famille lisse de  $p$ -sous-variétés que l'on munit de son paramétrage.*

## Annexe B

# Éléments sur la géométrie de contact

Nous nous limiterons à un bref exposé des éléments fondamentaux de la géométrie de contact qui seront nécessaires pour étudier les notions de hérissons et de g-hérissons. Pour une présentation détaillée, nous pouvons consulter l'ouvrage [38] de H. Geiges, et sur lequel nous nous reposerons essentiellement. Il est également possible de se référer aux ouvrages [106] et [42], qui offrent un excellent exposé sur la géométrie de contact. Pour finir, nous pouvons considérer l'ouvrage [37], présentant l'histoire et les motivations de la géométrie de contact ainsi que de la géométrie symplectique.

### 2.1 Champ de sous-espaces vectoriel, forme de contact et variété de contact

Nous appellerons donc **champ de p-sous espaces vectoriel** d'une  $n$ -variété  $M$ , toute famille  $(\mathcal{D}_x)_{x \in M}$  tel que chaque  $\mathcal{D}_x$  est un  $p$ -sous espace vectoriel de  $T_x M$ . De plus nous dirons qu'un champ de  $p$ -sous espaces vectoriel est **lisse** si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Le champ de  $p$ -sous espaces vectoriel est, en tout point, localement engendré par  $p$  champs de vecteurs linéairement indépendants.
2. Le champ de  $p$ -sous espaces vectoriel est, en tout point, localement de la forme  $\text{Ker}(\alpha_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(\alpha_{n-p})$  où  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}$  sont une famille de 1-formes différentielles linéairement indépendantes.

**Définition 2.1.1.** *Considérons  $M$  une variété différentielle ainsi que  $\mathcal{D} \subset TM$  un champ lisse de  $p$ -sous espaces vectoriel. Alors nous dirons qu'une sous-variété  $V \subset M$  est **intégrable** si elle vérifie que :*

$$T_x V \subset \mathcal{D}_x \tag{2.1.0.1}$$

pour tout  $x \in V$ .

**Théorème.** *Considérons  $M$  une variété différentielle ainsi que  $\mathcal{D} \subset TM$  un champ d'hyperplans que nous supposons de classe  $C^\infty$ . Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. En tout point  $x \in M$ , il existe une hypersurface intégrable pour le champ d'hyperplans  $\mathcal{D}$ .
2. Pour tout champ de vecteurs  $X \in \mathcal{D}$  et  $Y \in \mathcal{D}$ , on a que  $X \wedge Y \in \mathcal{D}$ .

**Note.** Ce théorème est connu sous le nom du théorème de Frobenius.

Nous dirons alors qu'un champ lisse d'hyperplans de  $M$  est **intégrable** s'il vérifie la condition du théorème de Frobenius que nous appellerons alors **condition d'intégrabilité de Frobenius**. En particulier, un champ lisse d'hyperplans  $\mathcal{D} \subset TM$  est intégrable si et seulement si, en tout point, le champ  $\mathcal{D}$  est localement de la forme  $\text{Ker}(\alpha)$  tel que :

$$\alpha \wedge d\alpha = 0 \quad (2.1.0.2)$$

où  $\alpha \in \Omega_1(M)$ .

**Définition 2.1.2.** Une **variété de contact** est la donnée d'une  $(2n+1)$ -variété  $M$  et d'un champ lisse d'hyperplans  $\mathcal{D} \subset TM$  qui est, en tout point, localement de la forme  $\text{ker}(\alpha)$  où  $\alpha \in \Omega_1(M)$  vérifie la condition :

$$\alpha \wedge d\alpha^n \neq 0 \quad (2.1.0.3)$$

que l'on appelle **condition de maximal non-intégrabilité**.

**Note.** En particulier, nous appellerons **forme de contact** toute 1-forme différentielle vérifiant la condition (2.1.0.3). Il faut préciser que la condition (2.1.0.3) signifie que la forme  $\alpha \wedge d\alpha^n$  n'est jamais nulle.

**Remarque 2.1.1.** Il est important de constater que si  $(M, \mathcal{D})$  est une variété de contact, alors les 1-formes locales associées ne sont pas uniques. En effet, si  $\alpha$  est associé à  $\mathcal{D}$ , alors pour tout  $\lambda \neq 0$ , il en sera de même pour  $\lambda\alpha$ .

**Avertissement 2.1.1.** Dans la suite, nous nous permettrons d'appeler variété de contact la donnée d'une  $(2n+1)$ -variété différentielle que l'on munit d'une forme  $\alpha \in \Omega_1(M)$  vérifiant la condition (2.1.0.3). Il est à noter que cela correspond à considérer des champs d'hyperplans  $\mathcal{D} \subset TM$  qui sont globalement de la forme  $\text{Ker}(\alpha)$ , ce qui est généralement faux.

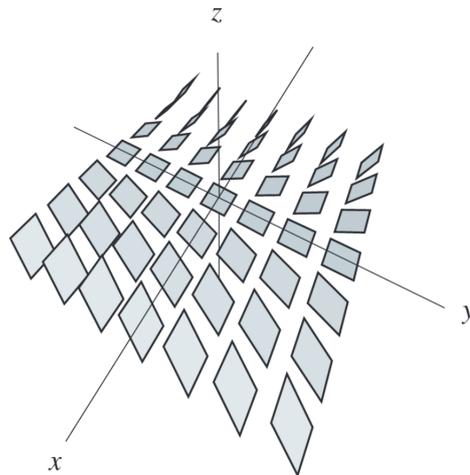
**Remarque 2.1.2.** Une forme différentielle  $\alpha \in \Omega_1(M)$  est une forme de contact si et seulement si la  $(2n+1)$ -forme  $\alpha \wedge d\alpha^n$  est une forme volume.

Un exemple classique de variété de contact est la variété  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \alpha)$ , que l'on appelle **structure de contact standard** et dont la forme de contact est :

$$\alpha = dz + x_1 dy_1 + \cdots + x_n dy_n \quad (2.1.0.4)$$

avec  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ .

Il est alors assez facile de vérifier que c'est une forme de contact et que sur  $\mathbb{R}^3$  la forme de contact est  $\alpha = dz + xdy$  et correspond au champ d'hyperplans qui pour tout point  $(x, y, z)$  associe l'hyperplan  $\langle (0, x, 1) \rangle^\perp$ .

FIGURE 2.1 – Structure de contact pour  $\text{Ker}(dz + xdy)$ 

## 2.2 Champ de Reeb et variété métrique de contact

Un objet fondamental en géométrie de contact est le champ de Reeb, et que l'on retrouve dans divers domaines tels que la théorie des champs en physique. Pour cela, nous devons considérer la propriété suivante :

**Propriété 2.2.1.** *Si  $(M, \mathcal{D})$  est une  $(2n + 1)$ -variété de contact, alors il existe  $\varepsilon \in \Delta(M)$ , un champ vectoriel (non unique pour  $\mathcal{D}$ ), que l'on appelle **champ de Reeb**, vérifiant localement que :*

$$\alpha(\varepsilon) = 1 \text{ et } \varepsilon \in \text{Ker}(d\alpha) \quad (2.2.0.1)$$

avec  $\alpha$  étant localement défini tel que  $\mathcal{D} = \text{Ker}(\alpha)$ .

*Démonstration.* Voir lemme/définition 1.1.9 page 5 de [38]. □

**Remarque 2.2.1.** *Si  $\alpha$  est une 1-forme de contact définie sur  $M$ , alors il existe un unique champ de Reeb qui lui est associé (c'est-à-dire vérifiant la condition (2.2.0.1) pour  $\alpha$ ), et que nous noterons alors  $\varepsilon_\alpha$ .*

**Exemple.** *Nous pouvons facilement vérifier que le champ de Reeb sur la structure de contact standard de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  est  $\partial_z$ .*

**Définition 2.2.1.** *On appelle **variété métrique de contact** la donnée d'une variété riemannienne  $(M, g)$  que l'on munit d'une 1-forme  $\alpha \in \Omega_1(M)$  et d'un endomorphisme  $J : \Delta(M) \mapsto \Delta(M)$  vérifiant les trois points suivants :*

1. Si  $\varepsilon_\alpha \in \Delta(M)$  est le dual métrique<sup>1</sup> de  $\alpha$ , alors  $\alpha(\varepsilon_\alpha) = 1$ .
2.  $d\alpha(X, Y) = g(JX, Y)$ .
3.  $J^2X = -X + \alpha(X)\varepsilon_\alpha$ .

On vérifie alors que  $(M, \alpha)$  est bien une variété de contact et dont  $\varepsilon_\alpha$  en est le champ de Reeb. De plus, nous pouvons montrer (voir lemme 2.1.9 page 25 de [106]) que sur une variété de contact  $(M, \alpha)$ , tout endomorphisme  $J$  satisfaisant la troisième condition de la définition 2.2.1 définit automatiquement et de manière unique la métrique  $g$  telle que la structure  $(M, g, \alpha, J)$  est une variété métrique de contact. Plus précisément, la métrique  $g$  est définie par l'expression suivante :

$$g(X, Y) = \alpha(X)\alpha(Y) + d\alpha(X, JY) \quad (2.2.0.2)$$

où  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs.

## 2.3 Les contactomorphismes

Il est naturel de considérer les transformations qui préservent les structures de contact. Nous appellerons donc **contactomorphisme** entre deux variétés de contact  $(M_1, \alpha_1)$  et  $(M_2, \alpha_2)$  tout difféomorphisme  $f : M_1 \rightarrow M_2$  vérifiant que :

$$f^*\alpha_2 = \lambda\alpha_1 \quad (2.3.0.1)$$

avec  $\lambda \neq 0$ .

De plus, si on choisit  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  comme étant les formes de contact qui sont respectivement définies sur  $M_1$  et  $M_2$ , alors nous dirons qu'un difféomorphisme  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est un **contactomorphisme strict** s'il vérifie la condition (2.3.0.1) telle que  $f^*\alpha_2 = \alpha_1$ .

**Propriété 2.3.1.** *Considérons  $(M_1, \alpha_1)$  et  $(M_2, \alpha_2)$  deux variétés de contact ainsi que  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  les champs de Reeb qui leur sont respectivement associés. Si  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est un contactomorphisme strict, alors on a que  $\varepsilon_1 = f^*\varepsilon_2$ .*

*Démonstration.* Voir lemme 2.2.4 page 61 de [106]. □

## 2.4 Immersion, fibré et front de Legendre

Nous terminerons cet exposé par les notions d'immersion de Legendre, de fibré de Legendre et de front legendrien, qui sont nécessaires pour caractériser les hérissons en géométrie de contact. Pour cela, on commence par définir les **sous-espaces isotropes** d'une  $(2n + 1)$ -variété de contact  $(M, \alpha)$ , qui correspondent à des sous-variétés  $L \subset M$  telles que :

$$T_x L \subset \text{Ker}(\alpha_x) \quad (2.4.0.1)$$

pour tout  $x \in L$ .

On peut alors montrer (voir propriété 1.5.12 page 34 de [106]) que la dimension de toute sous-variété isotrope  $L$  d'une  $(2n + 1)$ -variété de contact  $(M, \alpha)$  est telle que  $\dim(L) \leq n$ . En conséquence, on définit les **sous-variétés de Legendre** comme étant les sous-variétés isotropes de dimension maximale, c'est-à-dire de dimension  $n$ .

---

1. Le dual métrique d'une 1-forme  $\alpha$  sur une variété riemannienne  $(M, g)$  est l'unique champ de vecteurs  $\varepsilon \in \Delta(M)$  tel que  $\alpha = g(\varepsilon, \cdot)$ .

**Définition 2.4.1.** Nous appellerons **fibré lisse de fibre  $\mathbf{T}$** , avec  $T$  une variété différentielle, toute submersion surjective  $p : \mathcal{E} \rightarrow \beta$  telle que pour tout  $b_0 \in \beta$ , il existe  $\mathcal{V} \subset \beta$  un ouvert centré en  $b_0$  et un difféomorphisme  $\phi : \mathcal{V} \times T \rightarrow p^{-1}(\mathcal{V})$ , que l'on appellera **trivialisation locale**, vérifiant que :

$$p \circ \phi(b, x) = b \tag{2.4.0.2}$$

pour tout  $(b, x) \in \mathcal{V} \times T$ .

**Définition 2.4.2.** Si  $(M, \alpha)$  est une  $(2n + 1)$ -variété de contact, alors nous appellerons **fibré de Legendre** tout fibré lisse  $\pi : M \rightarrow \beta$  dont les fibres sont des sous-variétés de Legendre.

**Définition 2.4.3.** Nous appellerons **immersion de Legendre** à image dans une  $(2n + 1)$ -variété de contact  $(M, \alpha)$  toute immersion  $i : L \rightarrow M$  qui est définie sur une  $n$ -variété et qui vérifie :

$$d_u i \cdot \vec{W} \in \text{Ker}(\alpha_{i(u)}) \tag{2.4.0.3}$$

pour tout  $u \in L$  et  $\vec{W} \in T_u L$ .

Enfin, nous appellerons **front legendrien** la donnée de la partie  $\mathcal{H} = \pi \circ i(L)$ , où  $\pi$  et  $i$  sont respectivement la projection d'un fibré de Legendre et une immersion de Legendre, que l'on munit du paramétrage  $x := \pi \circ i : L \rightarrow \beta$  et qui fait donc commuter le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} L & \xhookrightarrow{i} & i(L) \subset M \\ \text{Id} \parallel & & \downarrow \pi \\ L & \xrightarrow{x := \pi \circ i} & \mathcal{H} \subset \beta \end{array}$$

Il est alors intéressant de constater que l'on peut définir des hypersurfaces orientées qui admettent des points singuliers en considérant le front legendrien de sous-variétés de Legendre. En particulier, nous verrons aux chapitres 2 et 7 que c'est précisément le cas pour les hérissons et les g-hérissons.



## Annexe C

# Éléments sur la notion de co-orientation

La notion de co-orientation nous étant indispensable pour définir les notions de hérisson et de  $g$ -hérisson, il est alors nécessaire de l'introduire correctement. Par conséquent, nous consacrons cette annexe à une présentation de la notion de co-orientation en toute généralité. Pour cela nous nous reposerons sur l'ouvrage [38] de H.Geiges qui recouvre largement toutes les notions qui nous seront nécessaires.

On commence par considérer un fibré vectoriel  $\pi : E \rightarrow \beta$ . Nous dirons alors qu'une famille  $p$ -sous-espace vectoriel  $V \subset E$  est un **champ de  $p$ -sous-espaces vectoriels** s'il existe toujours localement une famille libre  $(e_1, \dots, e_p)$  de sections lisses telle que  $V = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ .

**Définition 3.0.1.** Soit  $(E, g)$  un fibré vectoriel métrique. Alors nous dirons qu'un champ d'hyperplan  $T \subset E$  est **co-orienté** si le champ des droites orthogonales  $l = T^\perp \subset E$  est orienté<sup>1</sup>.

**Remarque 3.0.1.** Il est immédiat qu'un champ d'hyperplans  $T \subset E$  est co-orienté si et seulement si le fibré vectoriel quotient  $E/T$  est trivial.

Nous faisons le choix de définir la notion de co-orientation à ce niveau de généralité afin de pouvoir l'adapter aux différents cas que nous considérerons. Dans la suite, nous travaillerons uniquement sur le fibré tangent d'une variété riemannienne. Ainsi, on considère la propriété suivante :

**Propriété 3.0.1.** Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne, alors un champ d'hyperplans  $T \subset TM$  est co-orienté si et seulement s'il est de la forme :

$$T = \text{Ker}(\alpha) \tag{3.0.0.1}$$

pour  $\alpha \in \Omega_1(M)$  étant une forme différentielle.

*Démonstration.* Voir lemme 1.1.1 page 2 de [38]. □

**Remarque 3.0.2.** S'il est clair que tout champ d'hyperplans vérifie localement la relation (3.0.0.1), la notion de co-orientation se caractérise par le fait que la relation (3.0.0.1) est globalement vérifiée.

---

1. Nous dirons qu'un champ de droites vectorielles  $l \subset E$  dans un fibré vectoriel  $(E, \pi)$ , est orienté s'il existe une section lisse  $\nu \in \Gamma^0(E)$  qui n'est jamais nulle et qui vérifie, de plus, que  $\nu = \mathbb{R}\nu$ .

Il est alors naturel de considérer comme étant **co-orientée** toute variété de contact  $(M, \mathcal{E})$  (voir définition 2.1.2 page 274) vérifiant que :

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(\alpha) \quad (3.0.0.2)$$

et où  $\alpha$  est donc la forme de contact. Il est intéressant de remarquer que toute variété de contact vérifie localement la relation 3.0.0.2. Ainsi, ce qui définit qu'une variété de contact est co-orientée est le fait que cette relation est vérifiée globalement.

Nous pouvons alors constater que la variété de contact que nous considérons à la section 2.1 page 47 est bien évidemment co-orientée. Aussi, il est intéressant de considérer l'exemple 1.2.8 page 8 de [38] qui correspond à une variété de contact qui n'est pas co-orientée.

**Définition 3.0.2.** Soit  $(M, \alpha)$  une variété de contact co-orientée. Alors nous dirons qu'un champ d'hyperplans  $\Sigma \subset x^*TM$ , avec  $x : \Gamma \rightarrow M$  une application lisse, est **co-orienté** si :

$$\Sigma_u = \text{Ker}(\alpha_{x(u)}) \quad (3.0.0.3)$$

pour tout  $u \in \Gamma$ .

**Remarque 3.0.3.** Dans le cadre d'une variété métrique de contact  $(M, g, \alpha, J)$  (voir définition 2.2.1 page 275) tout champ d'hyperplans co-orientés selon la définition 3.0.2 l'est aussi selon la définition 3.0.1.

Considérons donc la structure de contact que nous avons considérée à la section 2.1 page 47 et que l'on munit de la métrique  $g$  et de l'endomorphisme complexe  $J$  tels que :

$$g_w(\vec{W}_1, \vec{W}_2) = \langle \vec{V}_1 | \vec{V}_2 \rangle + \langle \vec{X}_1 | \vec{X}_2 \rangle \text{ et } J_w \cdot \vec{W} = (\langle v | \vec{X} \rangle v - \vec{X}) \oplus \vec{V} \quad (3.0.0.4)$$

pour tout  $w = (v, x) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ .

**Définition 3.0.3.** Soit  $(M, \alpha)$  une variété de contact co-orientée. Alors, on appelle **point co-orienté** la donnée d'un point  $x \in M$  et de son hyperplan associé  $\text{Ker}(\alpha_x)$ .

Il nous faut alors remarquer que tout point co-orienté  $(w, T)$  de  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  est naturellement associé à un hyperplan affine orienté de  $\mathbb{R}^n$ . En effet, si  $w = (v, x) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ , alors  $\text{Ker}(\alpha_w) = \langle v \rangle^\perp \oplus \langle v \rangle^\perp = \langle (0, v) \rangle^{\perp_{g_w}}$ . Ainsi pour tout point co-orienté  $(w, T)$ , avec  $T = \langle (0, v) \rangle^{\perp_{g_w}}$  il nous suffit de considérer l'hyperplan affine  $\Sigma = x + \langle v \rangle^\perp$  que l'on munit de l'orientation qui correspond au vecteur  $v$ .

Pour définir une notion de co-orientation sur les familles d'hyperplans affines orientés, il nous faut alors établir une correspondance "naturelle" entre les champs d'hyperplans co-orientés de la variété de contact  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  et les familles d'hyperplans affines orientés de l'espace  $\mathbb{R}^n$ .

Considérons donc  $T \subset j^*T[\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n]$ , avec  $j : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$  une application lisse, un champ d'hyperplans co-orientés. Alors, en considérant les applications lisses  $\nu : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  et  $x : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $j(u) = (\nu(u), x(u))$ , nous pouvons définir la famille des hyperplans  $\Sigma_u = x(u) + \langle \nu(u) \rangle^\perp$  et dont l'orientation est définie par le vecteur  $\nu(u)$ . Par conséquent, il est justifié de considérer la définition suivante :

**Définition 3.0.4.** *Nous dirons qu'une famille  $(\Sigma_u, \beta_u)_{u \in \Gamma}$  d'hyperplans affines orientés de  $\mathbb{R}^n$  est **co-orientée** si les hyperplans sont de la forme :*

$$\Sigma_u = h(u)\nu(u) + \langle \nu(u) \rangle^\perp, \quad (3.0.0.5)$$

avec  $h$  étant une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et dont l'orientation  $\beta_u$  est définie par  $\nu(u)$ .

Pour terminer cette annexe, il nous faut de noter que nous pouvons trouver dans la littérature la définition d'**hypersurface co-orientée** comme étant la donnée d'une hypersurface orientable  $\Sigma \subset M$ , dans une variété riemannienne, que l'on munit d'une orientation. Il est alors intéressant de constater que si  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  est une hypersurface co-orientée, alors via la propriété 3.0.1, on a que la famille des hyperplans tangents est un champ d'hyperplans co-orientés du fibré tangent  $TM$  selon la définition 3.0.1. De plus, si  $M = \mathbb{R}^n$ , alors il est clair que la famille des hyperplans orientés  $(x + T_x \Sigma, \nu(x))$ , où  $\nu$  est le champ orthonormal correspondant à l'orientation de l'hypersurface  $\Sigma$ , est co-orientée au sens de la définition (3.0.4). Nous pouvons ainsi remarquer la cohérence des différentes définitions de co-orientation que nous avons considérées.



## Annexe D

# Éléments sur l'espace projectif

Il nous sera utile de faire le point sur la géométrie projective ainsi que sur les différentes notions de dualité qui seront nécessaires pour définir le dual projectif d'un hérisson, ou d'un g-hérisson. En particulier, nous introduirons les deux principales méthodes permettant de définir le dual d'un corps convexe. Pour approfondir, il est possible de consulter l'ouvrage [49], lequel propose une introduction à la géométrie projective largement suffisante pour nos besoins.

### 4.1 Cartes projectives et transformations projectives

L'espace projectif de dimension  $n$ , que l'on notera  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ,  $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$  ou simplement  $\mathbb{P}_n$ , se définit via le passage au quotient de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  par la relation d'équivalence  $\sim$  qui identifie les points (distincts de l'origine) se trouvant sur la même droite vectorielle. C'est alors une variété différentielle de dimension  $n$  qui, de plus, est compacte. Il est clair que la projection canonique  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{P}_n$ , que nous appellerons **projection projective**, est lisse. Plus généralement, si  $E$  est un espace vectoriel (pas forcément de dimension finie), nous définissons de la même manière l'espace projectif qui lui correspond. Nous noterons alors  $\mathcal{P}(E)$  cet espace et  $\pi_E : E \setminus \{0\} \mapsto \mathcal{P}(E)$  la projection projective qui lui est associée.

**Remarque 4.1.1.** *Sur  $\mathbb{S}^n$ , la projection projective est toujours une immersion.*

**Avertissement 4.1.1.** *Pour éviter des notations redondantes, nous nous permettrons, lorsque cela ne produira pas de confusion, d'identifier les points de l'espace projectif  $\mathbb{P}_n$  avec leur représentant dans  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  et que nous considérerons généralement sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ .*

**Notation 4.1.1.** *Si  $x \in E$  est un point et  $H \subset E$  un sous-espace vectoriel, nous noterons  $\mathcal{P}(x)$  et  $\mathcal{P}(H)$  leurs projections respectives dans  $\mathcal{P}(E)$  via la projection projective.*

Nous appellerons **droite projective** (resp. **p-sous-espace projectif et hyperplan projectif**) l'image par la projection projective d'un plan vectoriel (resp. d'un  $(p+1)$ -sous-espace vectoriel ou d'un hyperplan vectoriel) de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En particulier, il est facile de remarquer que tout  $p$ -sous-espace projectif correspond à  $\mathbb{P}_p$ , l'espace projectif de dimension  $p$ . Ensuite, nous pouvons définir un atlas de  $\mathbb{P}_n$  en considérant pour tout  $e \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  l'ouvert  $\mathcal{W}_e = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } \langle v|e \rangle \neq 0\}$  ainsi que l'application lisse  $\varphi_e : \mathcal{W}_e \mapsto \langle e \rangle^\perp$  qui est définie telle que :

$$\varphi_e(v) = \sigma_e(v)v - e \tag{4.1.0.1}$$

avec  $\sigma_e(v) = \frac{\|e\|^2}{\langle v|e \rangle}$ .

Comme il est clair que l'application  $\varphi_e$  est compatible avec la relation d'équivalence  $\sim$ , nous appellerons **carte projective centrée en e** ou simplement **carte projective** l'application lisse  $\bar{\varphi}_e : \mathbb{P}_n \setminus H_e \rightarrow \vec{T}_e$  correspondant au passage au quotient de  $\varphi_e$  et faisant donc commuter le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_n \setminus H_e & \xrightarrow{\bar{\varphi}_e} & \vec{T}_e \\ p \uparrow & & \text{Id} \parallel \\ \mathcal{W}_e & \xrightarrow{\varphi_e} & \vec{T}_e \end{array}$$

**Notation 4.1.2.** Pour  $e \in \mathbb{S}^n$ , nous prendrons l'habitude de noter l'hyperplan affine  $T_e = e + \langle e \rangle^\perp$ , ainsi que l'hyperplan vectoriel  $\vec{T}_e = \langle e \rangle^\perp$  et l'hyperplan projectif  $H_e = \mathcal{P}(\vec{T}_e \setminus \{0\})$ .

**Avertissement 4.1.2.** Afin de ne pas alourdir inutilement notre texte, nous prendrons l'habitude de confondre les applications  $\varphi_e$  et  $\bar{\varphi}_e$  tant que cela ne produira pas de confusions.

Il est alors justifié d'appeler **hyperplan à l'infini** l'hyperplan projectif  $H_e$  et ainsi, toute carte projective correspond au choix d'un hyperplan projectif que l'on considère comme étant l'hyperplan à l'infini. En particulier, pour tout hyperplan projectif  $H \subset \mathbb{P}_n$ , nous identifions, via la carte projective définie par l'hyperplan  $H$ , l'ouvert  $\mathbb{P}_n \setminus H$  avec l'espace  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 4.1.1.** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels ainsi que  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(F)$  les espaces projectifs qui leur sont associés et dont les projections projectives respectives sont  $p_E$  et  $p_F$ . Alors nous dirons qu'une application  $\phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$  est un **plongement projectif** si il existe  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire injective faisant commuter le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{P}(F) \\ p_E \uparrow & & \uparrow p_F \\ E & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

**Notation 4.1.3.** On notera donc  $\phi = \mathcal{P}(f)$  le plongement projectif associé à l'application  $f$ .

Il est alors clair que la condition d'injectivité de  $f$  est nécessaire pour que la fonction  $\phi$  existe. Aussi, on peut vérifier que toute application  $\phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$  ainsi définie est forcément un plongement de variété différentielle. Nous appellerons alors **transformation projective** tout plongement projectif de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(F)$  et **isomorphisme projectif** tout plongement projectif inversible.

**Remarque 4.1.2.** Un plongement projectif  $\phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$  est un isomorphisme projectif si et seulement si  $\phi = \mathcal{P}(f)$  avec  $f : E \rightarrow F$  un isomorphisme linéaire. En particulier, si  $E$  est de dimension finie, alors les transformations projectives sont des isomorphismes projectifs.

## 4.2 Notions de dualité et de polarité sur les espaces projectifs

La dualité projective se définit en transposant sur les espaces projectifs les relations de dualité qui existent sur les espaces vectoriels. Ainsi, pour un espace vectoriel  $E$  (pas nécessairement de dimension finie), on considère les espaces projectifs  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\mathcal{P}(E^*)$  et  $\mathcal{P}(E^{**})$ . Nous prendrons alors l'habitude de noter ces espaces  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\mathcal{P}(E)^*$  et  $\mathcal{P}(E)^{**}$  et, en particulier, pour  $\mathbb{R}^{n+1}$  nous adopterons les notations suivantes :

$$\mathbb{P}_n = \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}), \mathbb{P}_n^* = \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})^* \text{ et } \mathbb{P}_n^{**} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})^{**}$$

### 4.2.1 La notion de dualité entre les points et les hyperplans projectifs

Considérons donc  $E$  un espace vectoriel. Si  $V \subseteq E$  est un sous-espace vectoriel, alors on définit le sous-espace  $V^{\perp*} \subset E^*$ , que l'on appelle **orthogonal de  $V$  au sens de la dualité**, tel que :

$$V^{\perp*} = \{l \in E^* \text{ tel que } \forall v \in V, l(v) = 0\} \quad (4.2.1.1)$$

Si, de plus, les espaces  $E$  et  $V$  sont de dimensions respectives  $n$  et  $p$ , il est alors clair que l'orthogonal au sens de la dualité  $V^{\perp*}$  est de dimension  $n - p$ , comme on pourrait s'y attendre pour l'orthogonal d'un  $p$ -sous-espace vectoriel dans un espace euclidien. Nous pouvons alors définir une relation de dualité entre les points et les hyperplans projectifs de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\mathcal{P}(E)^*$  et  $\mathcal{P}(E)^{**}$  en considérant la définition suivante :

**Définition 4.2.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel ainsi que  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(E)^*$  son espace projectif et son dual projectif. Alors nous définissons les relations de dualité entre les points et les hyperplans projectifs comme suit :

1. On appelle **hyperplan dual** d'un point  $p \in \mathcal{P}(E)$ , l'hyperplan projectif, noté  $p^*$ , dans le dual projectif  $\mathcal{P}(E)^*$  tel que :

$$p^* = \mathcal{P}(\delta_p^{\perp*}) \subset \mathcal{P}(E)^*, \quad (4.2.1.2)$$

où  $\delta_p \subset E$  est la droite vectorielle telle que  $p = \mathcal{P}(\delta_p)$ .

2. On appelle **point dual** d'un hyperplan projectif  $H \subset \mathcal{P}(E)$ , le point noté  $H^*$ , dans le dual projectif  $\mathcal{P}(E)^*$  tel que :

$$H^* = \mathcal{P}(H_0^{\perp*}) \in \mathcal{P}(E)^*, \quad (4.2.1.3)$$

où  $H_0 \subset E$  est l'hyperplan vectoriel<sup>1</sup> tel que  $H = \mathcal{P}(H_0)$ .

**Remarque 4.2.1.** Sur le plan projectif, la relation de dualité associe les points aux droites et les droites aux points.

---

1. Si  $E$  est de dimension infinie, alors  $H_0$  est un hyperplan vectoriel si sa codimension est égale à 1, au sens où il admet un supplémentaire de dimension 1.

### 4.2.2 Identification entre l'espace projectif et son bidual.

Lorsque  $E$  est de dimension finie, nous savons que l'application canonique  $f : E \rightarrow E^{**}$  qui à  $x \in E$  associe la forme bidual  $f_x \in E^{**}$  telle que  $f_x \cdot l = l(x)$ , est un isomorphisme. Cette identification entre  $E$  et son bidual  $E^{**}$ , une fois passée au quotient, nous permet d'identifier l'espace projectif  $\mathcal{P}(E)$  et son bidual  $\mathcal{P}(E)^{**}$  via la propriété suivante :

**Propriété 4.2.1.** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, alors l'isomorphisme canonique  $f : E \xrightarrow{\sim} E^{**}$  passe au quotient en un isomorphisme projectif  $\eta : \mathcal{P}(E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(E)^{**}$  qui de plus vérifie :*

1. Si  $p \in \mathcal{P}(E)$ , alors  $p^{**} = \eta(p)$ .
2. Si  $H \subset \mathcal{P}(E)$  est un hyperplan projectif, alors  $H^{**} = \eta(H)$ .

**Note.** *En identifiant, via  $\eta$ , les espaces projectifs  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(E)^{**}$ , on obtient que pour tout point  $p \in \mathcal{P}(E)$  et pour tout hyperplan projectif  $H \subset \mathcal{P}(E)$ , alors :*

$$p^{**} = p \text{ et } H^{**} = H \quad (4.2.2.4)$$

et que l'on appelle naturellement **relation de bidualité**.

*Démonstration.* Voir les pages 85 à 87 de [49]. □

**Remarque 4.2.2.** *Les relations de dualité via l'application  $\eta$  sont stables par l'action du groupe projectif. En effet, si  $\psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  est une transformation projective, alors pour tout point  $p \in \mathcal{P}(E)$  et pour tout hyperplan projectif  $H \subset \mathcal{P}(E)$ , on a :*

$$\eta^{-1}(\psi(p)^{**}) = \psi(\eta^{-1}(p^{**})) \text{ et } \eta^{-1}(\psi(H)^{**}) = \psi(\eta^{-1}(H^{**})) \quad (4.2.2.5)$$

ce que nous pouvons représenter via le graphe ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} p \in \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & p^{**} \in \mathcal{P}(E)^{**} & \xrightarrow{\eta^{-1}} & \eta^{-1}(p^{**}) \in \mathcal{P}(E) \\ \psi \downarrow & & & & \downarrow \psi \\ \psi(p) \in \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \psi(p)^{**} \in \mathcal{P}(E)^{**} & \xrightarrow{\eta^{-1}} & \psi(\eta^{-1}(p^{**})) = \eta^{-1}(\psi(p)^{**}) \end{array}$$

Il est à noter que la propriété 4.2.1 justifie que l'on utilise la terminologie de "dualité" lorsque l'on considère les espaces projectifs  $\mathcal{P}(E)^*$  et  $\mathcal{P}(E)^{**}$ . En effet, la notion de dualité est involutive (au sens où appliquée deux fois, elle nous ramène à la situation initiale). En particulier, cela explique pourquoi on travaille en dimension finie lorsque l'on considère la dualité projective, car en dimension infinie, nous perdons<sup>2</sup> l'identification entre  $E$  et son bidual  $E^{**}$ .

---

<sup>2</sup> Lorsque un espace vectoriel  $E$  est de dimension infinie, alors la dimension de son bidual  $E^{**}$  est strictement supérieure à celle de  $E$ . C'est une conséquence directe du théorème d'Erdos-Kaplansky (voir les pages 221 à 227 de l'ouvrage [43] pour plus de détails).

### 4.2.3 La notion de polarité entre les points et les hyperplans projectifs.

La notion de polarité se définit en transposant sur  $\mathcal{P}(E)$  la notion de dualité que nous avons définie entre les espaces  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(E)^*$ . Pour cela, l'idéal serait d'identifier les espaces  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(E)^*$  via un isomorphisme projectif  $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)^*$  qui vérifie la condition (4.2.2.5) au sens où pour chaque transformation projective  $\psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ , si  $p \in \mathcal{P}(E)$  est un point et  $H \subset \mathcal{P}(E)$  est un hyperplan projectif, on a :

$$\varphi^{-1}(\psi(p)^*) = \psi(\varphi^{-1}(p^*)) \text{ et } \varphi^{-1}(\psi(H)^*) = \psi(\varphi^{-1}(H^*)), \quad (4.2.3.6)$$

Nous pouvons alors constater que la relation (4.2.3.6) ne peut être vérifiée en toute généralité. Il est néanmoins possible de contourner ce problème en considérant  $\phi \in E^* \otimes E^*$ , une forme bilinéaire non dégénérée sur l'espace vectoriel  $E$ , qui, par application du théorème des représentations de Reeb, nous fournit un isomorphisme projectif  $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)^*$ . En effet, nous pouvons vérifier que l'identification via cet isomorphisme est stable par l'action du sous-groupe du groupe projectif, qui est engendré par les applications conformes<sup>3</sup> pour  $\phi$ .

**Remarque 4.2.3.** Si  $\phi \in E^* \otimes E^*$  est une forme bilinéaire non dégénérée, et  $f : E \rightarrow E^*$  est l'isomorphisme défini via la forme bilinéaire  $\phi$ , alors on a que :

$$f(V^{\perp\phi}) = V^{\perp*} \quad (4.2.3.7)$$

pour tout sous-espace vectoriel  $V \subset E$ .

Nous pouvons ainsi définir la notion de **polarité** sur  $\mathcal{P}(E)$  relative au choix d'une quadrique  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$  qui correspond à une forme bilinéaire symétrique  $\phi \in E^* \otimes E^*$  non dégénérée. Cette forme bilinéaire nous permet, comme nous l'avons vu précédemment, d'identifier  $\mathcal{P}(E)$  avec son dual  $\mathcal{P}(E)^*$ , et ainsi de transporter naturellement sur l'espace projectif  $\mathcal{P}(E)$  la notion de dualité que nous avons définie sur  $\mathcal{P}(E)^*$ .

**Définition 4.2.2.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, alors nous dirons que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$  est une **quadrique** si c'est la projection, dans  $\mathcal{P}(E)$ , du cône isotrope d'une forme quadratique  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Note.** Nous dirons alors que la quadrique  $\mathcal{C}$  est **définie par la forme quadratique  $q$** . De plus, une quadrique  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$  est dite **propre** lorsqu'elle est non vide et est définie par une forme quadratique non dégénérée.

Pour en savoir plus sur les quadriques, il est possible de consulter la section 2 du chapitre III de [49] qui traite des coniques (ce sont les quadriques du plan projectif), ainsi que le chapitre VI de [5] où l'on se place dans un cadre général.

**Définition 4.2.3.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie ainsi que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$  une quadrique propre définie par une forme quadratique  $q$  et dont la forme polaire est  $\phi \in E^* \otimes E^*$ . Alors on définit la relation de **polarité pour  $\mathcal{C}$**  (ou simplement **polarité**) entre les points et les hyperplans projectifs de la manière suivante :

1. On appelle **hyperplan polaire pour  $\mathcal{C}$**  (ou simplement **hyperplan polaire**) d'un point  $p \in \mathcal{P}(E)$ , l'hyperplan projectif, que l'on note  $p^\circ$ , de l'espace projectif  $\mathcal{P}(E)$  tel que :

$$p^\circ = \mathcal{P}(\delta_p^{\perp\phi}) \subset \mathcal{P}(E), \quad (4.2.3.8)$$

où  $\delta_p \subset E$  est la droite vectorielle telle que  $p = \mathcal{P}(\delta_p)$ .

3. Une application conforme pour  $\phi$  est un endomorphisme  $f : E \rightarrow E$  pour lequel il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , un scalaire non nul tel que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $E$  :  $\phi(f(x), f(y)) = \lambda\phi(x, y)$ .

2. On appelle **pôle pour  $\mathcal{C}$**  (ou simplement **pôle**) d'un hyperplan projectif  $H \subset \mathcal{P}(E)$  le point, que l'on note  $H^\circ$ , de l'espace projectif  $\mathcal{P}(E)$  tel que :

$$H^\circ = \mathcal{P}(H_0^{\perp\phi}) \in \mathcal{P}(E), \quad (4.2.3.9)$$

où  $H_0 \subset E$  est l'hyperplan vectoriel tel que  $H = \mathcal{P}(H_0)$ .

**Note.** Il est clair que les relations de dualité polaire, ainsi définies, ne dépendent pas du choix de la forme quadratique définissant la quadrique  $\mathcal{C}$ .

**Remarque 4.2.4.** Nous pouvons vérifier que les relations de dualité et de polarité coïncident via l'isomorphisme projectif  $\varphi : \mathcal{P}(E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(E)^*$ . En effet, on a :

$$p^\circ = \varphi^{-1}(p^*) \text{ et } H^\circ = \varphi^{-1}(H^*) \quad (4.2.3.10)$$

pour tout point  $p \in \mathcal{P}(E)$  et hyperplan  $H \subset \mathcal{P}(E)$ .

Pour conclure, constatons que la relation de bidualité (4.2.2.4) est vérifiée. En effet, si l'on considère un point  $p \in \mathcal{P}(E)$  et un hyperplan projectif  $H \subset \mathcal{P}(E)$ , alors on a :

$$(p^\circ)^\circ = p \text{ et } (H^\circ)^\circ = H \quad (4.2.3.11)$$

ce qui justifie que l'on parle de dualité.

### 4.3 Dualité projective et dualité polaire d'un corps convexe

L'objet de cette section est d'étudier les définitions de dualité projective et de dualité polaire que nous avons introduites au chapitre 3. En effet, si  $K \subset \mathbb{R}^n$  est un corps convexe dont le bord topologique est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors on définit le dual projectif de  $K$  dans  $\mathbb{P}_n$  tel que :

$$K^* = Ad \left\{ \bar{\delta} \in \mathbb{P}_n \text{ tel que } \delta = \langle e + L \rangle^\perp \text{ avec } L \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \text{ vérifiant } L \cap K = \emptyset \right\} \quad (4.3.0.1)$$

où  $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n$  (où l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est identifié avec l'hyperplan  $\vec{T}_e$ ).

Pour ce qui est de la dualité polaire, si  $K$  est un corps convexe centré en zéro (i.e., l'intérieur  $Int(K)$  contient l'origine de  $\mathbb{R}^n$ ), on définit le dual polaire de  $K$  tel que :

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R}^n, \langle x|y \rangle \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n \sim \mathbb{P}_n \setminus H_e \quad (4.3.0.2)$$

où  $H_e$  est l'hyperplan projectif défini par le point  $e$  et  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  que l'on identifie à  $\mathbb{R}^n$  via la carte projective  $\varphi_e : \mathbb{P}_n \setminus H_e \xrightarrow{\sim} \vec{T}_e \sim \mathbb{R}^n$ .

Par conséquent, il nous faut établir la correspondance entre les définitions (4.3.0.1) et (4.3.0.2) avec les notions de dualité que nous avons introduites à la section 4.2.

### 4.3.1 Dualité projective d'un corps convexe

Pour la définition (4.3.0.1), il nous est nécessaire de définir la dualité projective d'un corps convexe dans  $\mathcal{P}(E)$  en nous reposant sur les définitions classiques de la géométrie projective qui consistent à appliquer une transformation sur les polygones via les relations de dualité entre les points et les droites du plan.

**Définition 4.3.1.** Soit  $E$  un espace euclidien, alors nous dirons que  $K \subset \mathcal{P}(E)$  est un **corps convexe** lorsque pour tout hyperplan projectif  $H$  qui n'intersecte pas  $K$ , c'est un corps convexe sur  $\mathcal{P}(E) \setminus H$  vu comme espace euclidien.

**Note.** De plus, nous dirons que le corps  $K$  est **de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $\mathcal{C}_+^k$ )** si pour tout hyperplan projectif  $H \subset \mathcal{P}(E)$  qui n'intersecte pas  $K$ , alors le corps  $K$  sur  $\mathcal{P}(E) \setminus H$  vu comme espace euclidien est de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $\mathcal{C}_+^k$ ).

**Propriété 4.3.1.** Soit  $e \in \mathbb{S}^n$  et  $L \subset \vec{T}_e$  un corps convexe. Si on considère  $\varphi_e : \mathbb{P}_n \setminus H_e \mapsto \vec{T}_e$  la carte projective centrée en  $e$ , alors on a que la partie  $K = \varphi_e^{-1}(L)$  est un corps convexe dans  $\mathbb{P}_n$ . De plus, si  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $\mathcal{C}_+^k$ ), alors le corps  $K$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $\mathcal{C}_+^k$ ).

*Démonstration.* Soit  $p : \mathbb{S}^n \mapsto \mathbb{P}_n$  la projection projective restreinte à la sphère  $\mathbb{S}^n$ , qui est alors une immersion. Si  $e \in \mathbb{S}^n$  est un point, alors on considère  $\varphi_e : \mathcal{W}_e \mapsto \vec{T}_e$ , avec  $\vec{T}_e = \langle e \rangle^\perp$  et  $\mathcal{W}_e = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } \langle x|e \rangle \neq 0\}$ , telle que :

$$\varphi_e(x) = \sigma_e(x)x - e$$

où  $\sigma_e(x) = \frac{1}{\langle x|e \rangle}$ .

À présent, en considérant l'ouvert  $\Omega_e = \{u \in \mathbb{S}^n \text{ tel que } \langle u|e \rangle > 0\}$ , on a que la restriction  $\varphi_e : \Omega_e \mapsto \vec{T}_e$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme correspondant à la projection gnomonique de la sphère centrée en  $e$ .

Nous dirons alors qu'une partie  $K \subset \Omega_e$  est un corps convexe dans  $\Omega_e$  lorsqu'elle est non vide, compacte et vérifie la condition de convexité : si  $x$  et  $y \in K$ , alors la plus petite géodésique  $\gamma$  reliant les points  $x$  et  $y$ , qui est donc contenue dans  $\Omega_e$ , est comprise dans  $K$ . Nous dirons de plus que  $K$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  lorsque son bord topologique  $\partial K$  est une hypersurface de  $\mathbb{S}^n$  de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Il est alors facile de voir que  $K \subset \Omega_e$  est un corps convexe si et seulement si l'image  $\varphi_e(K)$  est un corps convexe dans  $\vec{T}_e$ . De même, le corps  $K$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si et seulement si le corps  $\varphi_e(K)$  l'est aussi.

En particulier, si  $K$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ , alors il existe  $\nu : \partial K \mapsto T\mathbb{S}^n$  une section de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  orthogonale au bord  $\partial K$ , telle que pour tout  $x \in \partial K$ , si  $\gamma : ]a; b[ \mapsto \Omega_e$  est la géodésique qui passe par le point  $x$  avec la vitesse  $\nu(x)$  à l'instant  $t = 0$ , alors :  $\forall t > 0, \gamma(t) \notin K$ . Nous appellerons alors normale sortante du corps  $K$  le champ  $\nu$  ainsi défini.

Ainsi, nous dirons que le corps  $K$  est de classe  $\mathcal{C}_+^k$ , avec  $k \geq 2$ , si son bord topologique est une hypersurface de classe  $\mathcal{C}^k$  dont la courbure de Gauss n'est jamais nulle. Par construction, il est alors immédiat que le corps  $K$  est de classe  $\mathcal{C}_+^k$  si et seulement si l'image  $\varphi_e(K)$  l'est aussi.

Considérons donc  $K_0 \subset \Omega_e$  un corps convexe; il nous suffit de montrer que la projection  $K = p(K_0)$  est un corps convexe dans  $\mathbb{P}_n$ . Pour cela, considérons  $H = p(\langle v_0 \rangle^\perp)$  un hyperplan projectif qui n'intersecte pas  $K$ , et alors il est clair que :

$$K_0 \cap \langle v_0 \rangle^\perp = \emptyset$$

On peut alors supposer, sans perte de généralité, que  $K_0 \subset \Omega_{v_0}$ . Et alors, par définition,  $K_0$  est un corps convexe dans  $\Omega_{v_0}$ . En particulier, on obtient que  $\varphi_{v_0}(K_0) = \overline{\varphi_{v_0}(K)}$  est un corps convexe dans  $\overrightarrow{T_{v_0}}$ . De plus, il est clair que si  $K_0$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $\mathcal{C}_+^k$ ), alors le corps  $\varphi_{v_0}(K_0) = \overline{\varphi_{v_0}(K)} \subset \overrightarrow{T_{v_0}}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $\mathcal{C}_+^k$ ).  $\square$

**Remarque 4.3.1.** À partir de la propriété précédente, il résulte qu'une partie  $K \subset \mathcal{P}(E)$  est un corps convexe si et seulement s'il existe  $H$ , un hyperplan projectif dans  $\mathcal{P}(E)$ , tel que  $K$  est un corps convexe dans  $\mathcal{P}(E) \setminus H$  vu comme espace euclidien. Il en est de même pour les corps convexes de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $\mathcal{C}_+^k$ ).

**Définition 4.3.2.** Soit  $E$  un espace euclidien et  $K \subset \mathcal{P}(E)$  un corps convexe, alors on appelle **dual projectif de  $K$** , que l'on note  $K^*$ , la partie de  $\mathcal{P}(E)^*$  telle que :

$$K^* = \text{Ad}\{H^* \in \mathcal{P}(E)^* \text{ tel que } H \in \mathcal{HP}(E) \text{ et } H \cap K = \emptyset\} \quad (4.3.1.3)$$

où  $\mathcal{HP}(E)$  correspond à l'ensemble des hyperplans projectifs de  $\mathcal{P}(E)$ .

**Propriété 4.3.2.** Soit  $E$  un espace euclidien et  $K \subset \mathcal{P}(E)$  un corps convexe. Alors le dual projectif de  $K$  vérifie les quatre points suivants :

1. En considérant l'identification de  $\mathcal{P}(E)$  avec son bidual  $\mathcal{P}(E)^{**}$ , via l'isomorphisme projectif  $\eta$ , alors  $(K^*)^* = K$ , pour tout corps convexe non réduit à un singleton.
2. Si  $K$  est un corps convexe qui n'est pas de classe  $\mathcal{C}^0$ , alors son dual projectif n'est pas un corps convexe.
3. Si  $K$  est un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^0$ , alors son dual projectif l'est aussi.
4. Si  $K$  est un corps convexe de classe  $\mathcal{C}_+^k$ , alors son dual projectif l'est aussi.

*Démonstration.* Soit  $e \in \mathbb{S}^n$  ainsi que l'ouvert  $\Omega_e = \{v \in \mathbb{S}^n \text{ tel que } \langle v|e \rangle > 0\}$ . Alors nous dirons que  $\Sigma \subset \Omega_e$  est un **g-hyperplan** de  $\Omega_e$  s'il existe  $v \in \Omega_e$  tel que  $\Sigma$  est l'intersection non vide entre  $\Omega_e$  et  $\langle v \rangle^\perp$ . Il est alors utile de remarquer qu'à partir de cette définition, il n'existe pas de g-hyperplan dans  $\Omega_e$  passant par le point  $e$ . Aussi, on définit  $H_+ = \{w \in \Omega_e \text{ tel que } \langle w|v \rangle \geq 0\}$  et  $H_- = \{w \in \Omega_e \text{ tel que } \langle w|v \rangle \leq 0\}$  les demi-espaces bordant  $\Sigma$ , que nous appellerons respectivement demi-espace positif et demi-espace négatif. Enfin, nous noterons  $\mathcal{H}(\Omega_e)$  l'ensemble des g-hyperplans de  $\Omega_e$ .

Nous définissons aussi une notion de dualité sur  $\Omega_e$  qui, à tout point  $v \in \Omega_e \setminus \{e\}$  et g-hyperplan  $\Sigma \in \mathcal{H}(\Omega_e)$ , associe respectivement le g-hyperplan dual  $v^* \in \mathcal{H}(\Omega_e)$  et le point dual  $\Sigma^* \in \Omega_e \setminus \{e\}$ , tels que :

$$v^* = \Omega_e \cap \langle v \rangle^\perp \text{ et } \Sigma^* = \Omega_e \cap \langle \Sigma \rangle^\perp \quad (4.3.1.4)$$

Nous pouvons alors remarquer qu'il est clair que l'on obtient  $v^{**} = v$  et  $\Sigma^{**} = \Sigma$ , ce qui justifie que l'on parle de dualité. Ensuite, nous prendrons l'habitude de noter, pour chaque point  $x \in \Omega_e \setminus \{e\}$ , les parties :

$$H_+(x) = \{y \in \Omega_e \text{ tel que } \langle x|y \rangle \geq 0\} \text{ et } H_-(x) = \{y \in \Omega_e \text{ tel que } \langle x|y \rangle \leq 0\} \quad (4.3.1.5)$$

et qui correspondent aux demi-espaces positif et négatif bordant le g-hyperplan dual  $x^*$ . Nous pouvons aussi remarquer que pour tous  $x$  et  $y \in \Omega_e \setminus \{e\}$ , on a :

$$x \in y^* \Leftrightarrow y \in x^* \quad (4.3.1.6)$$

À présent, considérons un corps convexe  $K \subset \Omega_e$  tel que nous l'avons défini pour la démonstration de la propriété 4.3.1. Alors nous dirons que  $\Sigma \subset \Omega_e$  est un g-hyperplan de support du corps  $K$  si le corps  $K$  est inclus dans l'un des deux demi-espaces  $H_+$  ou  $H_-$ , bordant  $\Sigma$ , et satisfait  $\Sigma \cap K \neq \emptyset$ . De plus, nous appellerons point de support les points contenus dans les intersections de  $K$  avec ses g-hyperplans de support et ainsi on définit  $Supp(K)$  comme l'ensemble des points de support de  $K$ . Par conséquent, pour  $e \in K$ , il est alors facile, en se rapportant aux propriétés des corps convexes de  $\mathbb{R}^n$ , de savoir que :

1. Pour tout  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , avec  $\mathbb{S}_e^{n-1} = \mathbb{S}[T_e\mathbb{S}^n]$ , si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  est la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$ , alors il existe un g-hyperplan de support de  $K$  qui est orthogonal à la géodésique  $\gamma$ . En particulier, si  $Int(K)$  est non vide alors il existe exactement deux g-hyperplans de support qui sont orthogonaux à la géodésique  $\gamma$ .
2. Pour tout  $x \in \partial K$ , avec  $\partial K$  étant le bord topologique de  $K$ , il existe toujours  $\Sigma \subset \Omega_e$  un g-hyperplan de support de  $K$  en  $x$  (c'est-à-dire contenant le point  $x$ ). En particulier, on a que  $Supp(K) = \partial K$ .
3. Une partie  $K$  est un corps convexe si et seulement si c'est un compact non vide qui est l'intersection d'une famille de demi-espaces.
4. Un corps convexe  $K$  de classe  $\mathcal{C}^0$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  si et seulement s'il existe un point de support  $x \in \partial K$  admettant deux g-hyperplans de support distincts<sup>4</sup>.

Nous pouvons alors définir une notion de dualité pour les corps convexes de  $\Omega_e$  qui, de plus, correspond à la dualité projective que nous avons définie via la définition 4.3.2. Considérons donc  $K \subset \Omega_e$  un corps convexe de  $\Omega_e$ . Alors on définit le dual projectif du corps  $K$  tel que :

$$K^* = Ad\{\Sigma^* \in \Omega_e \text{ tel que } \Sigma \in \mathcal{H}(\Omega_e) \text{ et } K \cap \Sigma = \emptyset\} \subset \overline{\Omega_e} \quad (4.3.1.7)$$

Il est à noter que la partie  $K^*$  est définie par fermeture sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ . En particulier, pour que  $K^*$  soit un corps convexe de  $\Omega_e$ , il nous faudra d'abord vérifier que  $K^* \subset \Omega_e$ .

À présent, considérons  $K \subset \mathbb{P}_n$  un corps convexe. Alors, par la définition 4.3.2, on sait que le dual projectif dans  $\mathbb{P}_n^*$  du corps  $K$  est défini tel que :

$$K^* = Ad\{H^* \in \mathbb{P}_n^* \text{ tel que } H \in \mathcal{H}(\mathbb{P}_n) \text{ et } K \cap H = \emptyset\}$$

où  $\mathcal{H}(\mathbb{P}_n)$  est l'ensemble des hyperplans projectifs.

Par le théorème de représentation de Reeb, on sait que le produit scalaire de  $\mathbb{R}^{n+1}$  induit un isomorphisme linéaire  $f : \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1})^*$  et qui, par passage au quotient, correspond à un isomorphisme projectif  $\varphi : \mathbb{P}_n \hookrightarrow \mathbb{P}_n^*$ . Considérons donc  $H_e$ , avec  $e \in \mathbb{S}^n$ , un hyperplan projectif tel que  $K \cap H_e = \emptyset$  et  $e \in K$ . Il existe donc  $K_0 \subset \Omega_e$  un corps convexe de  $\Omega_e$  tel que  $K = p(K_0)$ . Il est alors facile de vérifier que :

---

4. Voir théorème 2.2.4 page 83 de [100].

$$K^* = \varphi \circ p(K_0^*) = p^* \circ f(K_0^*) \quad (4.3.1.8)$$

avec  $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{P}_n$  et  $p^* : (\mathbb{R}^{n+1})^* \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{P}_n^*$  étant les projections projectives respectives. Il est alors clair que la relation (4.3.1.8) nous permet de transposer sur  $\mathbb{P}_n$  et  $\mathbb{P}_n^*$  les relations de dualité que nous obtenons sur  $\mathbb{S}^n$  via la définition (4.3.1.7). Remarquons aussi que la relation (4.3.1.8) reste vraie même dans le cas où le dual  $K_0^*$  n'est pas compris dans  $\Omega_e$ . Dans ce cas-là, nous aurons que  $K^*$  n'est pas un corps convexe de  $\mathbb{P}_n^*$ .

Par conséquent, considérons  $K \subset \Omega_e$  un corps convexe tel que  $e \in K$ . Si  $x \notin K$ , alors il existe forcément  $y \in \Omega_e$  tel que  $x \in y^*$  et  $y^* \cap K = \emptyset$ . Mais alors on a que  $y \in K^*$  et  $y \in x^*$ . Ce qui nous donne que  $x^* \cap K^* \neq \emptyset$  et donc  $x \notin \text{Int}(K^{**})$ . Ensuite, constatons qu'en adaptant les arguments que nous avons considérés pour montrer la relation (3.1.2.16) page 60, on obtient que :

$$\begin{cases} x \in \partial K \Leftrightarrow x^* \text{ est un g-hyperplan de support de } K^* \Leftrightarrow x \in \partial K^{**} \\ x^* \cap K^* = \emptyset \Leftrightarrow x \in \text{Int}(K) \end{cases} \quad (4.3.1.9)$$

Par conséquent, on a que  $K^{**} \subset K$  et  $\partial K^{**} = \partial K$ . Supposons donc que le corps  $K$  est d'intérieur non vide. Il est alors immédiat que si  $x \in \text{Int}(K)$ , alors  $x^* \cap K^* = \emptyset$  et donc  $x \in K^{**}$ . Nous avons donc vérifié que  $K^{**} = K$  sur  $\Omega_e$ .

Considérons à présent l'isomorphisme canonique  $g : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (\mathbb{R}^{n+1})^{**}$  ainsi que  $\psi : \mathbb{P}_n \mapsto \mathbb{P}_n^{**}$  l'isomorphisme projectif qui lui est associé par passage au quotient. De plus, on considère les projections  $p^* : (\mathbb{R}^{n+1})^* \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{P}_n^*$  et  $p^{**} : (\mathbb{R}^{n+1})^{**} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{P}_n^{**}$  correspondant respectivement au dual et au bidual projectifs. Soit  $K \subset \mathbb{P}_n$  un corps convexe ainsi que  $K_0 \subset \Omega_e$  le corps convexe de  $\Omega_e$  tel que  $e \in K_0$  et  $K = p(K_0)$ . Alors, on a que  $K^{**} = p^{**} \circ g(K_0^{**})$ . En effet, si  $f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (\mathbb{R}^{n+1})^*$  et  $f^* : (\mathbb{R}^{n+1})^* \mapsto (\mathbb{R}^{n+1})^{**}$  sont les isomorphismes induits par le produit scalaire usuel, alors par la relation (4.3.1.8), on a que :

$$K^* = p^* \circ f(K_0^*) \text{ et } K^{**} = p^{**} \circ f^*(f(K_0^*)^*)$$

Ce qui nous donne que  $K^{**} = p^{**} \circ f^*(f(K_0^*)^*) = p^{**} \circ f^* \circ f(K_0^{**}) = p^{**} \circ g(K_0^{**})$  et par ce qui précède, nous obtenons  $K^{**} = p^{**} \circ g(K_0^{**}) = \psi \circ p(K_0^*) = \psi \circ p(K_0) = \psi(K)$ . Ce qui nous donne le premier point.

Considérons à présent  $K \subset \Omega_e$  un corps convexe tel que  $e \in K$ . Alors supposons que le bord topologique du corps  $K$  n'est pas une variété topologique. En considérant la remarque 1.1.1 page 31, on sait que nécessairement, le corps  $K$  est contenu dans  $\Sigma = \langle v_0 \rangle^\perp \cap \mathbb{S}^n$ , un g-hyperplan de  $\mathbb{S}^n$  tel que  $v_0 \in \langle e \rangle^\perp \cap \mathbb{S}^n$ . On peut alors vérifier que :

1. Les points  $v_0$  et  $-v_0$  sont dans  $K^*$ .
2. Si  $\gamma : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \mapsto \overline{\Omega_e}$  est la géodésique reliant les points  $v_0$  et  $-v_0$  en passant par  $e$ , alors on a que  $\gamma \subset K^*$ .

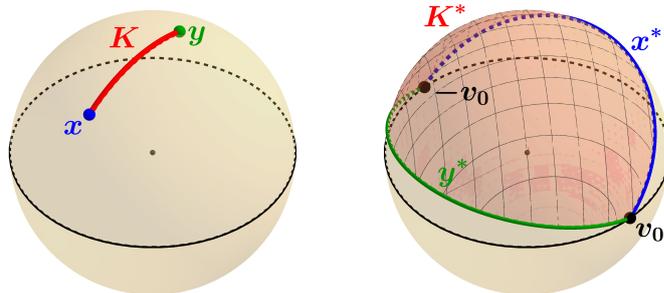


FIGURE 4.1 – Dual projectif d'un corps convexe dont le bord topologique n'est pas  $\mathcal{C}^0$

Donc, pour tout  $v \in \mathbb{S}^n$ , l'intersection  $\gamma \cap \langle v \rangle^\perp$  est non vide et, en particulier, il n'existe pas de  $v \in \mathbb{S}^n$  tel que  $K^* \subset \Omega_v$ . Ainsi, il est clair que  $\varphi \circ p(K^*)$  ne peut pas être un corps convexe dans  $\mathbb{P}_n^*$ , d'où le second point.

Considérons  $K$  un corps convexe de  $\Omega_e$  de classe  $\mathcal{C}^0$  et donc vérifiant que le bord topologique est une variété topologique de dimension  $n - 1$ . On a donc forcément que l'intérieur de  $K$  est non vide (voir propriété 1.1.4 page 31 pour plus de détails). Nous supposons alors le corps  $K$  centré en  $e$ , c'est-à-dire que  $e \in \text{Int}(K)$ . On sait, par la relation (4.3.1.9) que pour tout point du bord  $x \in \partial K$ , le dual  $K^*$  est compris dans le demi-espace  $H_+(x)$ . On obtient en particulier que :

$$K^* = \bigcap_{x \in \partial K} H_+(x)$$

Ensuite, remarquons que comme  $e \in \text{Int}(K)$ , alors le dual  $K^*$  est dans  $\Omega_e$ . On a donc que  $K^*$  est compact, convexe, non vide et est compris dans  $\Omega_e$ . C'est donc bien un corps convexe de  $\Omega_e$ . De plus, supposons que le bord topologique de  $K^*$  ne soit pas une variété topologique. Alors, par ce qui précède, nous aurions que  $K^{**}$  ne serait pas un corps convexe. Et comme on sait que  $K = K^{**}$ , alors on aboutirait à une contradiction. Ainsi, si  $K \subset \Omega_e$  est un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^0$  centré en  $e$ , alors son dual projectif  $K^*$  est aussi un corps convexe dans  $\Omega_e$ , centré en  $e$  et qui est de classe  $\mathcal{C}^0$ . Ce qui nous donne le troisième point.

Supposons enfin que le corps  $K$  est de classe  $\mathcal{C}_+^k$ , avec  $k \geq 2$ . Alors en considérant le champ orthonormal  $\nu : \partial K \rightarrow ST\mathbb{S}^n$ , on obtient, par construction, un paramétrage du bord topologique du dual  $K^*$ . En particulier, il est clair que  $\nu : \partial K \rightarrow \partial K^*$  est un plongement de classe  $\mathcal{C}^k$  (voir la remarque 1.2.7 page 39), et donc le bord topologique  $\partial K^*$  est une  $\mathcal{C}^k$ -variété. De plus, la réciproque  $\nu^{-1} : \partial K^* \rightarrow ST\mathbb{S}^n$ , que l'on considère à image dans le fibré des sphères tangentielles de  $\mathbb{S}^n$ , est l'application de Gauss de la  $\mathcal{C}^k$ -variété  $\partial K^*$ . En particulier, la courbure de Gauss de  $\partial K^*$  n'est jamais nulle.  $\square$

**Remarque 4.3.2.** Si  $K$  est un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^k$ , avec  $k \geq 1$ , alors il n'est pas forcément vrai que son dual projectif le soit aussi. En effet, plaçons-nous sur la sphère  $\mathbb{S}^n$  et considérons un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^1$  admettant un  $g$ -hyperplan de support  $x^*$  qui intersecte  $K$  en plus d'un point. Considérons donc  $y_1$  et  $y_2$  sur  $\partial K$ , deux points de support qui sont dans  $x^*$ . Alors, on a que  $x \in \partial K^*$  et vérifie que  $x \in y_1^*$  et  $x \in y_2^*$ , où  $y_1^*$  et  $y_2^*$  sont deux  $g$ -hyperplans de support de  $K^*$  qui sont distincts. Il est donc clair que le corps  $K^*$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Remarque 4.3.3.** Si  $K$  est un singleton, alors  $K^* = \mathbb{P}_n$  et  $K^{**} = \emptyset$ .

Nous obtenons alors la définition (4.3.0.1) en nous plaçant sur l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , où  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel et en considérant les deux remarques ci-dessous :

1. Si  $H \subset \mathbb{P}_n$  est un hyperplan projectif, alors il existe  $H_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un hyperplan vectoriel tel que  $H = \mathcal{P}(H_0)$ . Ainsi, en considérant  $\delta$  la droite orthogonale à l'hyperplan vectoriel  $H_0$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on a que  $H^* = \varphi(\bar{\delta})$  avec  $\bar{\delta} = \mathcal{P}(\delta)$ .
2. En considérant, pour  $e \in \mathbb{S}^n$ , l'identification  $\mathbb{P}_n \setminus H_e \sim \vec{T}_e \sim \mathbb{R}^n$  ainsi que  $K \subset \mathbb{P}_n \setminus H_e$  un corps convexe centré en  $e$ , alors un hyperplan projectif  $H \in \mathcal{H}(\mathbb{P}_n) \setminus \{H_e\}$  n'intersecte pas  $K$ , si et seulement si il existe  $L \subset \mathbb{R}^n$  un hyperplan affine de  $\mathbb{R}^n$  qui n'intersecte pas  $K$  vu dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$H = \mathcal{P}(\langle e + L \rangle) \tag{4.3.1.10}$$

Par conséquent, identifions  $\mathbb{P}_n$  et  $\mathbb{P}_n^*$  via l'isomorphisme projectif induit par le produit scalaire et considérons  $K \subset \mathbb{R}^n$  un corps convexe centré en zéro. Alors, par les deux remarques précédentes, on a que la partie :

$$\{H^* \in \mathcal{P}(E)^* \text{ tel que } H \in \mathcal{HP}(E) \text{ et } H \cap K = \emptyset\} \subset \mathbb{P}_n^* \tag{4.3.1.11}$$

correspond nécessairement à la partie :

$$\underbrace{\{\bar{\delta} \in \mathbb{P}_n \text{ tel que } \delta = \langle e + L \rangle^\perp \text{ avec } L \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \text{ vérifiant } L \cap K = \emptyset\}}_{\mathcal{A}} \cup \{\bar{\delta}_e\} \subset \mathbb{P}_n \tag{4.3.1.12}$$

avec  $\bar{\delta}_e = \mathcal{P}(\mathbb{R}e)$  étant le dual de  $H_e$ . On retrouve alors la relation (4.3.0.1) par fermeture de la partie  $\mathcal{A}$ . Remarquons en particulier que le point  $\bar{\delta}_e$  est bien un point d'adhérence de la partie  $\mathcal{A}$ . Il est alors intéressant de représenter graphiquement cette construction comme ci-dessous :

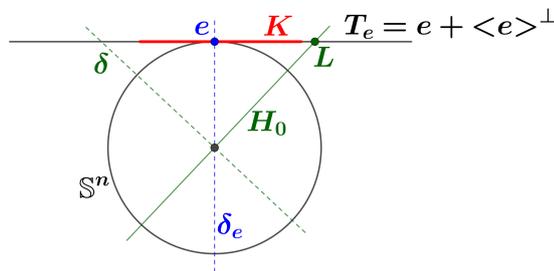


FIGURE 4.2 – Dual projectif d'un corps convexe

### 4.3.2 La dualité polaire d'un corps convexe

Commençons par remarquer que lorsque l'on parle de dualité pour les corps convexes, il s'agit classiquement de la dualité polaire (voir section 1.6 de [100]). Il est aussi intéressant de noter que sur le plan euclidien, on parle de dualité polaire pour une courbe  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  par rapport à un cercle  $\mathcal{C}$ , en considérant l'enveloppe de la famille des  $(\delta_x)_{x \in \gamma}$ , formée par les droites polaires de chaque point  $x \in \gamma$  par rapport au cercle  $\mathcal{C}$ . On rappelle que la droite polaire d'un point  $x \in \mathbb{R}^2$  par rapport à un cercle  $\mathcal{C}$ , lorsque le point  $x$  est à l'extérieur du cercle  $\mathcal{C}$ , correspond à la droite passant par les deux points d'intersection entre le cercle  $\mathcal{C}$  et le cercle  $\Gamma_x$ , qui est centré en  $x$  et qui est orthogonal au cercle  $\mathcal{C}$ .

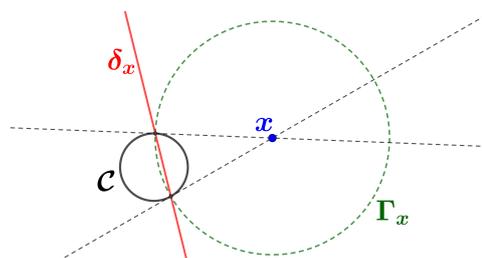


FIGURE 4.3 – Droite polaire d'un point sur le plan euclidien

Par conséquent, nous définissons la notion de dualité polaire d'un corps convexe en appliquant la même méthode que pour la dualité projective, mais en nous reposant sur la définition 4.2.3. On obtient alors la définition suivante :

**Définition 4.3.3.** Soit  $E$  un espace euclidien et  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$  une quadrique propre. Si  $K$  dans  $\mathcal{P}(E)$  est un corps convexe, alors on définit le **dual polaire de  $K$  par rapport à la quadrique  $\mathcal{C}$** , que l'on note  $K^\circ$ , comme étant la partie de  $\mathcal{P}(E)$  vérifiant que :

$$K^\circ = \text{Ad}\{H^\circ \in \mathcal{P}(E) \text{ tel que } H \in \mathcal{HP}(E) \text{ et } K \cap H = \emptyset\} \quad (4.3.2.13)$$

**Propriété 4.3.3.** Soit  $E$  un espace euclidien et  $K \subset \mathcal{P}(E)$  un corps convexe, et  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$  une quadrique propre. Alors le dual polaire de  $K$  pour  $\mathcal{C}$  vérifie les quatre points suivants :

1. Le bidual polaire vérifie que  $(K^\circ)^\circ = K$  pour tout corps convexe non réduit à un singleton.
2. Si  $K$  est un corps convexe dont le bord n'est pas de classe  $\mathcal{C}^0$ , alors son dual polaire n'est pas un corps convexe.
3. Si  $K$  est un corps convexe de classe  $\mathcal{C}^0$ , alors son dual polaire l'est aussi.
4. Si  $K$  est un corps convexe de classe  $\mathcal{C}_+^k$ , alors son dual polaire l'est aussi.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$  une quadrique propre et  $K \subset \mathcal{P}(E)$  un corps convexe. Si  $\phi \in E^* \otimes E^*$  est la forme polaire correspondant à la forme quadratique  $q : E \mapsto \mathbb{R}$  qui définit la quadrique  $\mathcal{C}$ , alors on considère  $\psi : \mathcal{P}(E) \longleftrightarrow \mathcal{P}(E)^*$  l'isomorphisme projectif induit par  $\phi$ . De plus, on considère l'isomorphisme projectif canonique  $\varphi : \mathcal{P}(E) \mapsto \mathcal{P}(E)^{**}$  entre l'espace projectif et son bidual. Alors, par construction, on a que :

$$\psi(K^\circ) = K^* \text{ et } \varphi(K^{\circ\circ}) = K^{**}$$

Ainsi, par ce qui précède, nous retrouvons donc l'équivalent sur  $\mathcal{P}(E)$  de la propriété 4.3.2 que nous avons vue précédemment pour la dualité projective des corps convexes.  $\square$

À présent, considérons la forme quadratique  $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$  définie sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dont la forme polaire est  $\phi$ , ainsi que la quadrique  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_n$  définie par  $q$ . En choisissant le point de type temps  $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$  (avec  $\mathbb{S}^n$  étant la sphère unité pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) ainsi que  $H_e \subset \mathbb{P}_n$  l'hyperplan projectif associé à  $e$ , alors nous pouvons remarquer que la quadrique  $\mathcal{C}$  correspond à la sphère unité dans  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$  (vue comme espace euclidien), et ainsi nous ramène à considérer une notion de polarité par rapport à une sphère, comme nous l'avons vue dans l'exemple introductif.

Soit  $K$  dans  $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{P}_n \setminus H_e$  un corps convexe que nous supposons d'intérieur non vide et centré en zéro (on rappelle que nous identifions  $\mathbb{R}^n$  avec l'hyperplan vectoriel  $\vec{T}_e$ ). Nous pouvons alors considérer les quatre remarques suivantes :

1. Considérons  $L \subset \mathbb{R}^n$  un hyperplan affine qui ne passe pas par zéro. Alors on considère l'hyperplan vectoriel  $H_0 = \langle e + L \rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$  et la droite  $\delta$  orthogonale à  $H_0$  pour la forme polaire  $\phi$ . Il est alors clair que la droite  $\delta$  intersecte l'hyperplan affine  $T_e = e + \vec{T}_e$  en un unique point  $(x_0, 1)$ , avec  $x_0 \in \mathbb{R}^n \sim \vec{T}_e$  non nul. Ainsi, pour tout  $y \in L$ , on peut vérifier que  $\phi((x_0, 1), (y, 1)) = \langle x_0 | y \rangle - 1 = 0$ , où  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ . Par conséquent, l'hyperplan affine  $L$  peut être défini via  $x_0$  tel que :

$$L = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle x_0 | y \rangle = 1\} \quad (4.3.2.14)$$

Réciproquement, si  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , alors on peut vérifier que l'hyperplan affine  $L$  défini par l'expression (4.3.2.14) ne passe pas par zéro.

2. Considérons  $L \subset \mathbb{R}^n$  un hyperplan affine qui n'intersecte pas le corps  $K$ . Le corps  $K$  étant centré en zéro, alors l'hyperplan  $L$  ne passe pas par zéro et donc vérifie l'expression (4.3.2.14) pour un certain  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Comme le corps  $K$  est centré en zéro, alors il est clair qu'il existe  $y \in K$  tel que  $\langle x_0 | y \rangle < 1$ . Supposons alors qu'il existe  $y \in K$  tel que  $\langle x_0 | y \rangle \geq 1$ . Il est donc immédiat (par convexité) que  $L \cap K \neq \emptyset$ , ce qui n'est pas possible. On a donc montré que : Un hyperplan  $L \subset \mathbb{R}^n$  ne passant pas par zéro (et vérifiant donc l'expression (4.3.2.14) pour un certain  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ), n'intersecte pas le corps  $K$  si et seulement si :

$$\langle x_0 | y \rangle < 1 \quad (4.3.2.15)$$

pour tout  $y \in K$ .

3. Nous avons vu à la section précédente qu'un hyperplan projectif  $H \subset \mathbb{P}_n$ , distinct de  $H_e$ , n'intersecte pas le corps  $K$  (vu dans  $\mathbb{P}_n \setminus H_e$ ) si et seulement si il est de la forme  $H = \mathcal{P}(\langle e + L \rangle)$ , où  $L \subset \mathbb{R}^n$  est un hyperplan affine qui n'intersecte pas  $K$  (vu dans  $\mathbb{R}^n$ ).
4. Considérons  $L \subset \mathbb{R}^n$  un hyperplan affine défini par l'expression (4.3.2.14) pour un certain  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , ainsi que l'hyperplan projectif  $H = \mathcal{P}(\langle e + L \rangle)$ . Alors, via l'identification  $\mathbb{P}_n \setminus H_e \sim \vec{T}_e \sim \mathbb{R}^n$ , on a que  $x_0 = H^\circ$ .

Considérons donc  $H \subset \mathbb{P}_n$  un hyperplan projectif, distinct de  $H_e$  et n'intersectant pas le corps  $K$ . Alors, par ce qui précède,  $H$  correspond à un hyperplan affine  $L$  défini par l'expression (4.3.2.14) pour un certain  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et qui vérifie la condition (4.3.2.15). Réciproquement, si  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  vérifie la condition (4.3.2.15), alors il définit un hyperplan projectif  $H$  qui n'intersecte pas le corps  $K$ . Il est alors clair que la partie  $\{H^\circ \in \mathbb{P}_n \text{ tel que } H \in \mathcal{H}(\mathbb{P}_n) \text{ et } K \cap H = \emptyset\}$  de  $\mathbb{P}_n$  correspond à la partie :

$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tel que } \forall y \in K, \langle x | y \rangle < 1\}}_{\mathcal{B}} \cup \{0\} \quad (4.3.2.16)$$

On obtient donc la définition (4.3.0.2) par fermeture de la partie  $\mathcal{B}$ . Remarquons en particulier que le point  $x = 0$  est un point d'adhérence de la partie  $\mathcal{B}$ . Comme pour la dualité projective, il est intéressant de représenter graphiquement cette construction comme ci-dessous :

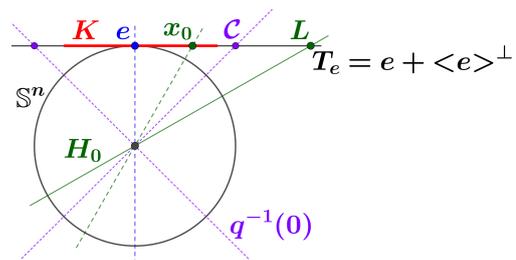


FIGURE 4.4 – Dual polaire d'un corps convexe

En particulier, via les représentations 4.3 et 4.4, nous pouvons observer que le dual projectif et le dual polaire d'un corps convexe correspondent au signe près. C'est précisément ce que nous obtenons au chapitre 3 via les propriétés 3.1.2 et 3.1.3 des pages 54 et 58.



## Annexe E

# Les espaces à courbure constante

L'objet de cette annexe est d'introduire les définitions et les propriétés de base sur l'espace hyperbolique et sur la sphère, qui nous seront nécessaires pour les parties II et III. Pour cela, nous nous reposerons principalement sur l'ouvrage [94] de F. Rouvière, qui couvre largement les notions qui nous sont nécessaires.

**Théorème.** *Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne à courbure constante  $K$ , alors tout point de  $M$  admet un voisinage qui est isométrique à un ouvert d'une sphère de rayon  $\frac{1}{\sqrt{K}}$  (si  $K > 0$ ), d'un espace euclidien (si  $K = 0$ ), ou d'un espace hyperbolique (si  $K < 0$ ).*

*De plus, si la variété  $M$  est complète et simplement connexe, alors les isométries en question sont globales.*

*Démonstration.* Voir théorème 10.3.3 page 219 de [94]. □

**Remarque 5.0.1.** *Par ce théorème, il apparaît naturellement les trois variétés à courbures constantes (i.e., l'espace euclidien, l'espace sphérique et l'espace hyperbolique).*

**Note historique :** Jusqu'au début du XIX-ème siècle, il était commun de penser que le monde était euclidien. En particulier, on croyait qu'il ne pouvait exister d'autre géométrie que la géométrie euclidienne. Mais nous savons tous que le XIX-ème siècle a été une période de grands bouleversements où les changements sociaux, politiques, intellectuels et technologiques s'entremêlaient avec l'illusion de maîtriser la nature tant sur le plan intellectuel que technique. C'est naturellement dans ce contexte que la géométrie non euclidienne émergea. Rappelons que le cinquième axiome d'Euclide affirme : *Sur le plan, par tout point hors d'une droite  $(d)$ , il passe une et une seule droite parallèle à  $(d)$ .* Si, depuis l'Antiquité, des générations de mathématiciens ont tenu pour évident cet axiome, par sa simplicité, et supposé qu'il devait forcément résulter des autres axiomes de la géométrie, aucun n'a pu le prouver. En particulier, au début du XVIII-ème siècle, le mathématicien italien Giovanni Saccheri échoua à montrer l'incohérence de la géométrie quand le cinquième axiome était infirmé, ce qui aurait dû être, selon lui, l'œuvre de sa vie. Il conclut par l'aveu d'un demi-échec, alors qu'il avait devant lui une nouvelle géométrie. Ce n'est qu'avec l'arrivée, aux XIX-ème et XX-ème siècles, de mathématiciens tels que János Bolyai, Nikolai Lobachevsky, Carl Friedrich Gauss, Eugenio Beltrami, Felix Klein et Henri Poincaré que les géométries non euclidiennes prirent leur essor.

Pour en savoir plus, il est possible de consulter les deux ouvrages [107] et [44]. Il est également possible de considérer l'ouvrage de vulgarisation [86] de Henri Poincaré, qui est destiné au grand public. En particulier, dans cet ouvrage, l'auteur discute du rapport entre la physique et les différentes géométries qui, dans leur diversité, ont pour objet d'être sélectionnées afin de simplifier l'écriture des lois de la physique. Par conséquent, elles ne sont plus, pour aucune d'entre elles, la représentation absolue de la nature, comme on pouvait le considérer pour la géométrie euclidienne, au début du XIX<sup>e</sup> siècle.

## 5.1 L'espace hyperbolique

La géométrie hyperbolique est une géométrie qui vérifie les quatre premiers axiomes<sup>1</sup> d'Euclide, mais dont le cinquième est remplacé par : *Par un point extérieur à une droite, il passe plusieurs droites parallèles<sup>2</sup> à celle-ci.* Formellement, on appelle **espace hyperbolique** de dimension  $n$  toute  $n$ -variété complète et simplement connexe dont la courbure est constante et égale à  $K < 0$ . Il est alors clair que, par l'application du théorème précédent, pour  $K < 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé, toutes les variétés hyperboliques de dimension  $n$  et dont la courbure est égale à  $K$  sont isométriques les unes aux autres.

Par conséquent, il existe différents modèles de l'espace hyperbolique, et nous présenterons, en particulier, le modèle du demi-hyperboloïde de Lorentz-Minkowski, le modèle de Klein et le modèle de Poincaré. Il est à noter que nous considérons le modèle du demi-hyperboloïde de Lorentz-Minkowski comme modèle par défaut, et qui est défini par la donnée du demi-hyperboloïde :

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1 \text{ et } x_{n+1} > 0\} \quad (5.1.0.1)$$

que l'on munit de la métrique  $g$ , que l'on appelle **métrique usuelle**, et qui correspond à la métrique induite par le produit de Minkowski sur l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^{n+1}$ .

Nous pouvons alors vérifier que le demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$  muni de la métrique usuelle, définit une variété hyperbolique de dimension  $n$  et de courbure  $K = -1$ . En particulier, et pour toute la suite,  $\mathbb{H}^n$  correspondra au demi-hyperboloïde (5.1.0.1), sauf mention contraire. De plus, dans le cas où cela ne produit pas de confusion, nous noterons  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  la métrique induite sur le demi-hyperboloïde et qui correspond au produit de Minkowski.

**Propriété 5.1.1.** *Pour tout couple de points  $v \in \mathbb{H}^n$  et  $w \in \mathbb{H}^n$ , on a que  $\langle v | w \rangle \leq -1$ .*

*Démonstration.* Considérons l'ensemble des vecteurs de type temps dans le demi-espace des vecteurs à temps positif :

---

1. On rappelle que les cinq axiomes de la géométrie euclidienne sont les suivants :

- ◆ **Premier axiome** : Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques et distincts.
- ◆ **Deuxième axiome** : Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
- ◆ **Troisième axiome** : Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et dont l'une de ses extrémités correspond au centre du cercle.
- ◆ **Quatrième axiome** : Tous les angles droits sont congruents.
- ◆ **Cinquième axiome** : Si deux droites sont coupées par une troisième de telle manière que la somme des angles intérieurs du même côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux droites se rencontrent de ce côté-là.

2. On rappelle que deux droites du plan sont dites parallèles lorsqu'elles ne s'intersectent pas.

$$\Gamma^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 < 0 \text{ et } x_{n+1} > 0\}$$

alors,

$$v + w \in \Gamma^+ \text{ et } \lambda v \in \Gamma^+ \quad (5.1.0.2)$$

pour tout  $v$  et  $w$  dans  $\Gamma^+$ , ainsi que pour tout  $\lambda > 0$ .

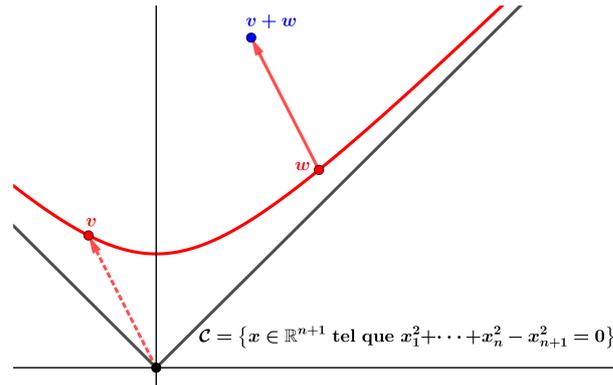


FIGURE 5.1 – Addition de deux vecteurs dans  $\Gamma^+$

Pour vérifier cela, il suffit de considérer  $p : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$  la projection orthogonale le long de l'axe du temps  $\mathbb{R}(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$ . Si  $v \in \Gamma^+$  et  $w \in \Gamma^+$ , alors nous avons :

$$\|p(v+w)\| \leq \|p(v)\| + \|p(w)\| \leq v_{n+1} + w_{n+1}$$

ce qui nous donne immédiatement le résultat recherché. On vérifie aussi le deuxième point en appliquant la même méthode.

À présent, considérons deux points  $v \in \Gamma^+$  et  $w \in \Gamma^+$ . Par ce qui précède, nous savons que pour tout  $\lambda > 0$ , le vecteur  $v + \lambda w$  est de type temps. Ensuite, comme les vecteurs  $v$  et  $w$  forment un plan de type temps, il existe donc  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha v + \beta w$  est de type lumière. Aussi, les vecteurs  $v$  et  $w$  étant de type temps, les scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  sont non nuls. Cela implique qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , non nul, tel que  $v + \lambda w$  est de type lumière. Et par (5.1.0.2), on sait que la seule possibilité est que  $\lambda < 0$ . Par conséquent, on obtient :

$$\langle v + \lambda w | v + \lambda w \rangle = -1 + 2\lambda \langle v | w \rangle - \lambda^2 = 0$$

et ainsi,

$$\langle v | w \rangle = \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}$$

Pour finir, il nous suffit de remarquer que la fonction  $f(t) = \frac{1+t^2}{2t}$ , définie sur  $] -\infty, 0[$  admet  $y = -1$  pour maximum global.  $\square$

### 5.1.1 Expression des dérivées covariantes, des géodésiques et de la carte exponentielle

Considérons la connexion de Levi-Civita  $\nabla : \Delta(\mathbb{H}^n) \mapsto \Omega_1(\mathbb{H}^n) \otimes \Delta(\mathbb{H}^n)$ , avec  $\Delta(\mathbb{H}^n)$  étant l'ensemble des champs de vecteurs sur l'espace hyperbolique.

**Propriété 5.1.2.** *Si  $X \in \Delta(\mathbb{H}^n)$  est un champ de vecteurs, alors pour tout point  $v \in \mathbb{H}^n$  et vecteur  $\vec{W} \in T_v\mathbb{H}^n$ , la dérivée covariante admet pour expression :*

$$\nabla(X)_v \cdot \vec{W} = d_v X \cdot \vec{W} + \langle d_v X \cdot \vec{W} | v \rangle_L v \quad (5.1.1.3)$$

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que la connexion qui est définie via l'expression (5.1.1.3) est une connexion métrique dont la torsion est nulle. Il est alors clair que c'est la connexion de Levi-Civita.  $\square$

En particulier, si  $x : \Sigma \mapsto \mathbb{H}^n$  est une fonction lisse et  $N \in \Gamma^0(x^*T\mathbb{H}^n)$  une section vérifiant la condition de contact  $\langle N(u) | d_u x \cdot \vec{W} \rangle = 0$ , pour tout  $u \in \Sigma$  et  $\vec{W} \in T_u\Sigma$ , alors la dérivée covariante du champ  $N$  vérifie l'expression suivante :

$$\nabla(N)_u \cdot \vec{W} = d_u N \cdot \vec{W} \quad (5.1.1.4)$$

**Propriété 5.1.3.** *Si  $e \in \mathbb{H}^n$  est un point et  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , avec  $\mathbb{S}_e^{n-1} = ST_e\mathbb{H}^n$  la sphère unité, alors la géodésique maximale passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$  est la fonction  $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{H}^n$  définie par l'expression suivante :*

$$\gamma(t) = CH(t)e + SH(t)u \quad (5.1.1.5)$$

*Démonstration.* En remarquant que  $\partial_t^2 \gamma(t) = \gamma(t)$ , on obtient que  $\nabla_t(\partial_t \gamma) = 0$ .  $\square$

**Remarque 5.1.1.** *Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point. À partir de la propriété précédente, il est immédiat que la carte exponentielle centrée en  $e$  correspond à l'application  $\phi : T_e\mathbb{H}^n \mapsto \mathbb{H}^n$  définie ci-dessous :*

$$\phi(t) = \begin{cases} CH(W)e + SH(W)u_{\vec{W}} & \text{si } \vec{W} \neq 0 \\ e & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.1.1.6)$$

avec, lorsque le vecteur  $\vec{W}$  est non nul,  $W = \|\vec{W}\|$  et  $u_{\vec{W}} = \frac{\vec{W}}{W}$ .

### 5.1.2 Le modèle de Klein

Le modèle de Klein est un modèle de l'espace hyperbolique que l'on définit sur la boule unité d'un espace euclidien et dont les géodésiques correspondent aux intersections non vides des droites affines de l'espace euclidien avec la boule unité. Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence sur le demi-hyperboloïde et considérons donc l'espace euclidien  $(T_e\mathbb{H}^n, g_e)$ , où  $g$  est la métrique usuelle de l'espace hyperbolique. Alors on appelle **boule de Klein centrée en  $e$**  la partie  $\mathcal{D}(e) \subset T_e\mathbb{H}^n$  telle que :

$$\mathcal{D}(e) = \{w \in T_e\mathbb{H}^n \text{ tel que } w_1^2 + \cdots + w_n^2 - w_{n+1}^2 < 1\} \quad (5.1.2.7)$$

Par conséquent, le modèle de Klein centré en  $e$  correspond à la projection, par rapport à l'origine, du demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$  sur l'espace affine  $e + T_e\mathbb{H}^n$  et donc sur la boule de Klein centrée en  $e$ .

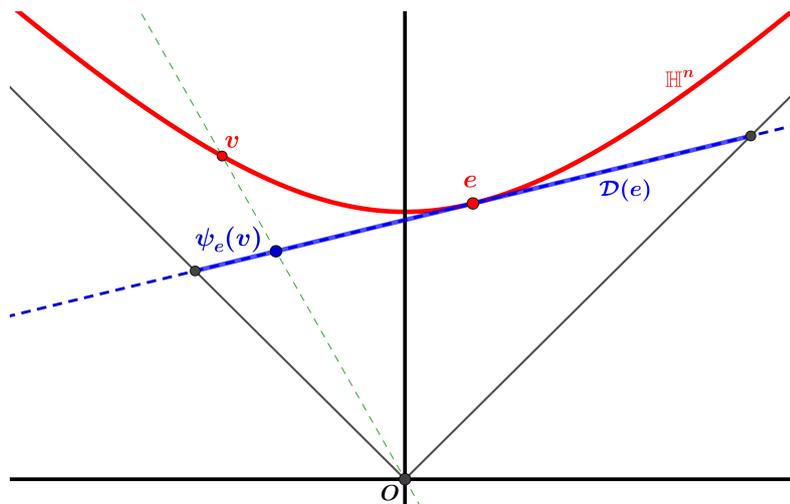


FIGURE 5.2 – Projection de Klein

Pour cela, si  $v \in \mathbb{H}^n$ , on considère  $f(t) = tv$  et on cherche l'instant  $t$  tel que  $f(t) \in e + T_e\mathbb{H}^n$ , c'est-à-dire  $f(t) - e \in \langle e \rangle^\perp$ . On obtient alors la définition suivante :

**Définition 5.1.1.** *Considérons un point  $e \in \mathbb{H}^n$ , alors on appelle **projection de Klein centrée en e** l'application  $\psi_e : \mathbb{H}^n \mapsto \mathcal{D}(e)$  telle que :*

$$\psi_e(v) = k_e(v)v - e \tag{5.1.2.8}$$

avec  $k_e(v) = -\frac{1}{\langle e|v \rangle}$ .

On remarque facilement que les applications  $\psi_e$  et  $k_e$  sont lisses et que pour tout  $v \in \mathbb{H}^n$ ,  $\psi_e(v) \in \mathcal{D}(e)$ . De plus, la projection de Klein centrée en  $e$ , ainsi définie, est un difféomorphisme dont la réciproque est l'application lisse  $\varphi_e : \mathcal{D}(e) \mapsto \mathbb{H}^n$  définie par l'expression suivante :

$$\varphi_e(w) = \alpha(w)[w + e] \tag{5.1.2.9}$$

avec  $\alpha(w) = \frac{1}{\sqrt{1-\|w\|^2}}$ .

En particulier, si  $g$  correspond à la métrique induite sur le demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$ , alors on appelle **modèle de Klein centré en e** la donnée de la boule de Klein centrée en  $e$  munie de la métrique tirée en arrière  $\varphi_e^*(g)$ . Étant un difféomorphisme à image sur un ouvert d'un espace vectoriel, il est justifié d'appeler aussi **carte de Klein centrée en e** la projection  $\psi_e$ . Nous nous permettrons donc de l'appeler ainsi en fonction de la situation que nous considérerons.

**Remarque 5.1.2.** *Soit  $v \in \mathbb{H}^n$  et  $w \in \mathcal{D}(e)$  tels que  $w = \psi_e(v)$ . Alors les applications  $k_e$  et  $\alpha$  vérifient la relation suivante :*

$$\alpha(w)k_e(v) = 1 \tag{5.1.2.10}$$

**Remarque 5.1.3.** *Les différentiels des applications  $\psi_e$ ,  $k_e$ ,  $\varphi_e$  et  $\alpha$  admettent les expressions suivantes :*

1. Si  $v \in \mathbb{H}^n$  et  $\vec{V} \in T_e \mathbb{H}^n$  :

$$d_v \psi_e \cdot \vec{V} = k_e(v) \left[ \vec{V} + k_e(v) \langle e | \vec{V} \rangle v \right] \text{ et } d_v k_e \cdot \vec{V} = k_e(v)^2 \langle e | \vec{V} \rangle \quad (5.1.2.11)$$

2. Si  $w \in \mathcal{D}(e)$  et  $\vec{W} \in T_e \mathbb{H}^n$  :

$$d_w \varphi_e \cdot \vec{W} = \alpha(w) \left[ \vec{W} + \alpha(w)^2 \langle w | \vec{W} \rangle (e + w) \right] \text{ et } d_w \alpha \cdot \vec{W} = \alpha(w)^3 \langle w | \vec{W} \rangle \quad (5.1.2.12)$$

**Propriété 5.1.4.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point ainsi que  $g \in \Omega_1(\mathbb{H}^n) \otimes \Omega_1(\mathbb{H}^n)$  la métrique usuelle sur le demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$ , alors le tiré en arrière  $\varphi_e^*(g)$  vérifie l'expression suivante :

$$\varphi_e^*(g)_w \left( \vec{W}_1, \vec{W}_2 \right) = \alpha(w)^2 \left( \langle \vec{W}_1 | \vec{W}_2 \rangle + \alpha(w)^2 \langle w | \vec{W}_1 \rangle \langle w | \vec{W}_2 \rangle \right) \quad (5.1.2.13)$$

pour tout point  $w \in \mathcal{D}(e)$  et vecteurs  $\vec{W}_1$  et  $\vec{W}_2$  dans  $T_e \mathbb{H}^n$ .

*Démonstration.* C'est immédiat via l'expression (5.1.2.12).  $\square$

**Remarque 5.1.4.** Considérons un point  $w \in \mathcal{D}(e)$  ainsi que deux vecteurs  $\vec{W}_1$  et  $\vec{W}_2$ , dont au moins un est orthogonal à la droite  $\mathbb{R}w$  sur  $T_e \mathbb{H}^n$ . Alors on obtient que :

$$\varphi_e^*(g)_w \left( \vec{W}_1, \vec{W}_2 \right) = \alpha(w)^2 \langle \vec{W}_1 | \vec{W}_2 \rangle \quad (5.1.2.14)$$

En particulier, en considérant la propriété ci-dessous, on a que pour un point  $w \neq 0$  dans  $\mathcal{D}(e)$ , les droites  $w + \mathbb{R}\vec{v}$  et  $\mathbb{R}w$  sont orthogonales si et seulement si les géodésiques qui leur correspondent le sont aussi.

**Propriété 5.1.5.** Les géodésiques maximales du modèle de Klein sont les intersections non vides des droites affines de  $T_e \mathbb{H}^n$  avec le disque ouvert  $\mathcal{D}(e)$ .

*Démonstration.* Si  $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{H}^n$  est une géodésique passant par un point  $v$  à la vitesse  $u \in \mathbb{S}_v^{n-1}$ , alors elle admet l'expression suivante :

$$\gamma(t) = SH(t)u + CH(t)v$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \psi_e \circ \gamma(t) - \psi_e(v) &= k_e(\gamma(t))\gamma(t) - k_e(v)v = -\frac{\langle e | \gamma(t) \rangle v - \langle e | v \rangle \gamma(t)}{\langle e | \gamma(t) \rangle \langle e | v \rangle} \\ &= \frac{SH(t)}{\langle e | \gamma(t) \rangle \langle e | v \rangle} [\langle e | u \rangle v - \langle e | v \rangle u] = \frac{\langle e | v \rangle^2 SH(t)}{\langle e | \gamma(t) \rangle \langle e | v \rangle} d_v \psi_e(u) \end{aligned}$$

et finalement, on obtient :

$$\psi_e \circ \gamma(t) = \psi_e(v) + f(t) d_v \psi_e(u) \quad (5.1.2.15)$$

avec  $f(t) = \frac{SH(t)}{CH(t) - k_e(v) \langle e | u \rangle SH(t)}$ .

Pour la réciproque, si on considère la droite  $(d) = w + \mathbb{R}u$ , avec  $w \in \mathcal{D}(e)$  et  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , alors il suffit de considérer la géodésique  $\gamma(t) = SH(t)u + CH(t)v$ , avec  $v = \varphi_e(w)$ , et ainsi on retrouve immédiatement que  $\psi_e(\gamma) = d \cap \mathcal{D}(e)$ .  $\square$

**Remarque 5.1.5.** Toute géodésique maximale de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  est l'intersection non vide d'un plan vectoriel de type temps dans  $\mathbb{L}^{n+1}$  avec l'hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$ .

Pour finir, si  $e$  et  $v$  sont deux points de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ , alors on appellera **fonction de changement de carte** l'application  $\phi := \psi_v \circ \varphi_e : \mathcal{D}(e) \rightarrow \mathcal{D}(v)$ . À présent, si  $\gamma \subset \mathcal{D}(e)$  est une géodésique, alors nous voulons étudier la relation entre les géodésiques  $\gamma$  et  $\phi(\gamma)$ .

**Définition 5.1.2.** Si on considère deux points  $e \in \mathbb{H}^n$  et  $v_0 \in \mathbb{H}^n$ , alors on appelle **fonction de changement de point en  $w \in \mathcal{D}(e)$**  l'application linéaire  $\mathcal{F}_w : T_e \mathbb{H}^n \rightarrow T_{v_0} \mathbb{H}^n$  définie par l'expression suivante :

$$\mathcal{F}_w(\vec{W}) = \vec{W} + \kappa_w(\vec{W})[e + w] \quad (5.1.2.16)$$

$$\text{avec } \kappa_w(\vec{W}) = -\frac{\langle v_0 | \vec{W} \rangle}{\langle v_0 | e + w \rangle}.$$

**Propriété 5.1.6.** Considérons deux points  $e \in \mathbb{H}^n$  et  $v_0 \in \mathbb{H}^n$ , ainsi que la fonction de changement de carte  $\phi := \psi_{v_0} \circ \varphi_e : \mathcal{D}(e) \rightarrow \mathcal{D}(v_0)$ . Si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}(e)$  est la géodésique dans le modèle de Klein centré en  $e$  passant par le point  $w$  à la vitesse  $\vec{W}$ , alors  $\phi \circ \gamma$  est la géodésique dans le modèle de Klein centré en  $v_0$  passant par le point  $\phi(w)$  à la vitesse  $a(w)\mathcal{F}_w(\vec{W})$ , avec  $a(w) = \alpha(w)k_v \circ \varphi_e(w)$ .

*Démonstration.* Considérons donc  $\gamma$  une géodésique sur le disque de Klein  $\mathcal{D}(e)$ . Nous savons par la propriété 5.1.5 que  $\gamma(t) = w + \eta(t)\vec{W}$  avec  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une immersion injective telle que :

$$\eta(0) = 0 \text{ et } \partial_t \eta(0) = 1 \quad (5.1.2.17)$$

Via l'application de changement de carte  $\phi := \psi_{v_0} \circ \varphi_e$  et à partir de l'expression (5.1.2.15), on obtient qu'il existe une immersion injective  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant (5.1.2.17) telle que :

$$\phi \circ \gamma(t) = \phi(w) + f(t)d_w \phi(\vec{W})$$

$$\text{où } \phi(w) = -\frac{e+w}{\langle v_0 | e+w \rangle} - v_0.$$

Afin de simplifier l'écriture de nos relations, nous définissons les termes  $\sigma = e + w$  et  $\kappa = \langle v_0 | e + w \rangle$ . En remarquant que  $\langle v_0 | e + \gamma(t) \rangle = \kappa + \eta(t) \langle v_0 | \vec{W} \rangle$  et  $e + \gamma(t) = \sigma + \eta(t)\vec{W}$ , alors :

$$\phi \circ \gamma(t) - \phi(w) = -\frac{\sigma + \eta(t)\vec{W}}{\kappa + \eta(t) \langle v_0 | \vec{W} \rangle} + \frac{\sigma}{\kappa} = \frac{\eta(t)}{\kappa(\kappa + \eta(t) \langle v_0 | \vec{W} \rangle)} \left( \langle v_0 | \vec{W} \rangle \sigma - \kappa \vec{W} \right)$$

et comme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\eta(t)}{\kappa(\kappa + \eta(t) \langle v_0 | \vec{W} \rangle)} \right]_{t=0} = \frac{1}{\kappa^2}$$

on obtient donc le résultat recherché.  $\square$

### 5.1.3 Le modèle du disque de Poincaré

Le modèle du disque de Poincaré est un modèle de l'espace hyperbolique qui est défini sur la boule unité d'un espace euclidien et qui, de plus, est conforme avec le produit scalaire. Considérons donc  $e \in \mathbb{H}^n$  un point, alors on appelle **boule de Poincaré centrée en  $e$**  la partie  $\mathcal{D}(e) \subset T_e \mathbb{H}^n$  définie par l'expression (5.1.2.7). Comme pour le modèle de Klein, le modèle de Poincaré correspond à la projection du demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$  sur l'hyperplan vectoriel  $T_e \mathbb{H}^n$  par rapport au point  $-e$ .

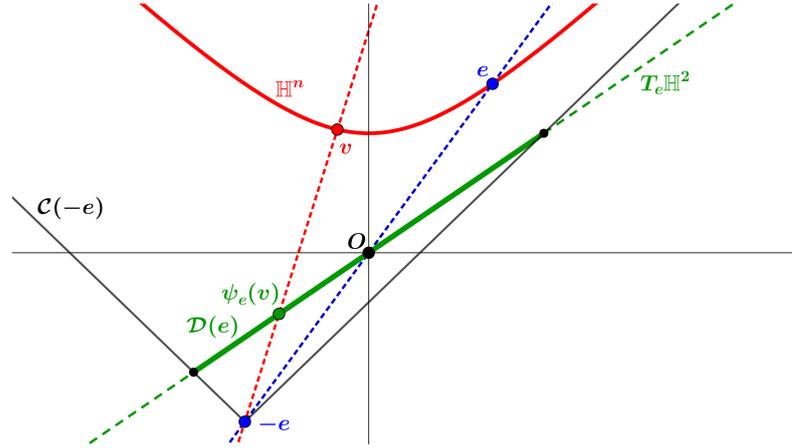


FIGURE 5.3 – Projection de Poincaré

Considérons donc un point  $v \in \mathbb{H}^n$ ; nous voulons trouver  $w$  sur la droite passant par les points  $-e$  et  $v$ , et qui vérifie que  $\langle w|e \rangle = 0$ . Pour cela, si  $f(t) = -e + t\vec{W}$ , avec  $\vec{W} = e + v$ , alors on a que  $\langle e|f(t) \rangle = 0$  si et seulement si  $t = \frac{1}{1 - \langle e|v \rangle}$ . Par conséquent, pour chaque point  $v \in \mathbb{H}^n$ , on considère :

$$\psi_e(v) = q_e(v)[e + v] - e \quad (5.1.3.18)$$

où  $q_e(v) = \frac{1}{1 - \langle e|v \rangle}$ .

**Propriété 5.1.7.** Pour tout  $v \in \mathbb{H}^n$ , on a que  $\psi_e(v) \in \mathcal{D}(e)$ .

*Démonstration.* En effet,

$$\begin{aligned} \langle \psi_e(v)|\psi_e(v) \rangle &= q_e(v)^2 \langle v + e|v + e \rangle - 2q_e(v) \langle v + e|e \rangle - 1 \\ &= -2q_e(v)^2(1 - \langle v|e \rangle) + 2q_e(v)(1 - \langle v|e \rangle) - 1 \\ &= -2q_e(v)^2 + 1 = -\frac{1 + \langle v|e \rangle}{1 - \langle v|e \rangle} \end{aligned}$$

De plus, comme par la propriété 5.1.1, on sait que  $\langle v|e \rangle \leq -1$ , alors il est clair que  $\|\psi_e(v)\|^2 = \frac{\langle v|e \rangle^2 - 1}{(\langle v|e \rangle - 1)^2} < 1$ . Ce qui nous donne donc le résultat que nous recherchons.  $\square$

**Remarque 5.1.6.** Pour tout  $v \in \mathbb{H}^n$ , on a que  $\|\psi_e(v)\|^2 = \frac{\langle v|e \rangle + 1}{\langle v|e \rangle - 1}$ .

**Définition 5.1.3.** Pour  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, on appelle **projection de Poincaré centrée en  $e$**  l'application  $\psi_e : \mathbb{H}^n \mapsto \mathcal{D}(e)$  qui est définie via l'expression (5.1.3.18).

Il est alors immédiat que la projection de Poincaré est un  $C^\infty$ -difféomorphisme dont l'inverse,  $\varphi_e : \mathcal{D}(e) \mapsto \mathbb{H}^n$ , vérifie l'expression suivante :

$$\varphi_e(w) = \beta(w)[w + e] - e \quad (5.1.3.19)$$

avec  $\beta(w) = \frac{2}{1 - \|w\|^2}$ .

Étant un difféomorphisme à image sur un ouvert d'un espace vectoriel, il est justifié d'appeler **carte de Poincaré centrée en  $e$**  la projection  $\psi_e$  et nous nous permettrons donc de l'appeler ainsi en fonction de la situation considérée.

**Propriété 5.1.8.** Soit  $v \in \mathbb{H}^n$  et  $w \in \mathcal{D}(e)$  tels que  $w = \psi_e(v)$ . Alors les applications  $q_e$  et  $\beta$  vérifient la condition suivante :

$$\beta(w)q_e(v) = 1 \quad (5.1.3.20)$$

*Démonstration.* En effet,

$$q_e(v) = \frac{1}{1 - \langle v|e \rangle} = \frac{1}{1 - \beta(w) \langle e|e \rangle + \langle e|e \rangle} = \frac{1}{\beta(w)}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque 5.1.7.** Les différentiels des applications  $\psi_e$ ,  $q_e$ ,  $\varphi_e$  et  $\beta$  admettent les expressions suivantes :

1. Si  $v \in \mathbb{H}^n$  et  $\vec{V} \in T_e\mathbb{H}^n$  alors :

$$d_v\psi_e \cdot \vec{V} = q_e(v) \left[ \vec{V} + q_e(v) \langle e|\vec{V} \rangle (e + v) \right] \text{ et } d_vq_e \cdot \vec{V} = q_e(v)^2 \langle e|\vec{V} \rangle \quad (5.1.3.21)$$

2. Si  $w \in \mathcal{D}(e)$  et  $\vec{W} \in T_e\mathbb{H}^n$  alors :

$$d_w\varphi_e \cdot \vec{W} = \beta(w) \left[ \vec{W} + \beta(w) \langle w|\vec{W} \rangle (w + e) \right] \text{ et } d_w\beta \cdot \vec{W} = \beta(w)^2 \langle w|\vec{W} \rangle \quad (5.1.3.22)$$

**Propriété 5.1.9.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence ainsi que  $g \in \Omega_1(\mathbb{H}^n) \otimes \Omega_1(\mathbb{H}^n)$  la métrique usuelle sur le demi-hyperboloïde  $\mathbb{H}^n$ , alors le tiré en arrière  $\varphi_e^*(g)$  sur la boule de Poincaré  $\mathcal{D}(e)$  vérifie l'expression suivante :

$$\varphi_e^*(g)_w \left( \vec{W}_1, \vec{W}_2 \right) = \beta(w)^2 \langle \vec{W}_1|\vec{W}_2 \rangle \quad (5.1.3.23)$$

pour tout point  $w \in \mathcal{D}(e)$  et pour tous vecteurs  $\vec{W}_1$  et  $\vec{W}_2$  sur  $T_e\mathbb{H}^n$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de l'expression (5.1.3.22).  $\square$

Nous appelons **modèle de Poincaré centré en  $e$**  la donnée de la boule de Poincaré munie de la métrique  $\varphi_e^*(g)$ . Il faut alors noter que, par la propriété 5.1.9, il est clair que la métrique  $\varphi_e^*(g)$  est conforme avec le produit  $g_e$ .

**Définition 5.1.4.** On appelle **bord à l'infini**, que l'on note  $\partial_\infty\mathcal{D}(e)$ , la frontière topologique de la boule ouverte  $\mathcal{D}(e)$  dans l'espace euclidien  $(T_e\mathbb{H}^n, g_e)$ .

**Remarque 5.1.8.** Il est clair que  $\partial_\infty \mathcal{D}(e) = \mathbb{S}_e^{n-1}$ , avec  $\mathbb{S}_e^{n-1} = ST_e \mathbb{H}^n$ .

**Propriété 5.1.10.** Les géodésiques maximales du modèle de Poincaré  $(\mathcal{D}(e), \varphi_e^*(g))$  correspondent aux intersections non vides de la boule ouverte  $\mathcal{D}(e)$  avec les cercles orthogonaux au bord à l'infini  $\partial_\infty \mathcal{D}(e)$ , et aux intersections non vides de la boule  $\mathcal{D}(e)$  avec les droites vectorielles de l'espace  $T_e \mathbb{H}^n$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\gamma \subset \mathcal{D}(e)$  est une géodésique passant par zéro dans  $\mathcal{D}(e)$ . Sur  $\mathbb{H}^n$ , on sait que la géodésique  $\gamma$  passe par le point  $e$  et est l'intersection non vide d'un plan de type temps de  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec  $\mathbb{H}^n$ . En particulier, il est alors clair que sur  $\mathcal{D}(e)$ , la géodésique  $\gamma$  est l'intersection d'une droite de l'espace tangent  $T_e \mathbb{H}^n$  avec la boule ouverte  $\mathcal{D}(e)$ .

Supposons donc que  $\gamma$  ne passe pas par zéro dans  $\mathcal{D}(e)$ . Par la remarque 5.1.4, on sait qu'il existe une géodésique passant par zéro et orthogonale à  $\gamma$ . En particulier, il existe forcément un point  $w_0 \in \gamma$  tel que :

$$\partial_t \gamma(t_0) \perp \mathbb{R} w_0$$

où  $t_0 \in \mathbb{R}$  est l'instant tel que  $w_0 = \gamma(t_0)$ .

Considérons le point  $v_0 = \varphi_e(w_0)$ . Nous supposons alors que  $t_0 = 0$  et que  $\partial_t \gamma$  est de norme égale à 1. En remarquant que  $\gamma(t) = \psi_e(CH(t)v_0 + SH(t)\nu)$ , avec  $\nu \in \mathbb{S}_e^{n-1}$ , on calcule que :

$$\beta(\gamma(t)) \langle \gamma(t) | \partial_t \gamma(t) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

De plus, comme par hypothèse  $\partial_t \gamma$  est de norme 1, alors en considérant l'expression (5.1.3.22), on a que  $\beta(\gamma(t))^2 \langle \partial_t \gamma(t) | \partial_t \gamma(t) \rangle$  est constant et égal à 1, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, si pour tout instant  $t$ , on considère l'orthogonal  $\langle \partial_t \gamma(t) \rangle^\perp$ , pour le produit scalaire  $g_e$ , on a donc que :

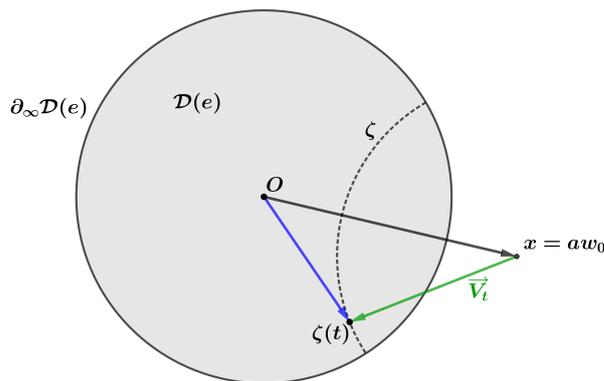
$$\gamma(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x \in \partial_\infty \mathcal{D}(e) \text{ et } \langle \partial_t \gamma(t) \rangle^\perp \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} T_x \partial_\infty \mathcal{D}(e)$$

et en particulier  $\beta(\gamma(t)) \partial_t \gamma(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x \perp_{g_e} T_x \partial_\infty \mathcal{D}(e)$ .

Ensuite, il est clair que  $\psi_{v_0} \circ \varphi_e \circ \gamma$  est une géodésique sur  $\mathcal{D}(v_0)$  passant par zéro et, par ce qui précède, correspond à l'intersection  $\mathcal{D}(v_0) \cap \mathbb{R} u$ , avec  $u \in \partial_\infty \mathcal{D}(v_0) = \mathbb{S}_{v_0}^{n-1}$ . Considérons donc l'application  $\zeta : ]-1, 1[ \rightarrow \mathcal{D}(e)$  définie par l'expression suivante :

$$\zeta(t) = \psi_e \circ \varphi_{v_0}(tu)$$

Il nous faut alors remarquer que l'application  $\zeta$  n'est pas une géodésique et correspond à un paramétrage de  $\gamma(\mathbb{R})$ . Nous devons donc vérifier que  $\zeta$  est l'intersection d'un cercle avec la boule unité  $\mathcal{D}(e)$  et dont le centre est forcément de la forme  $x = aw_0$ .

FIGURE 5.4 – Description de la courbe  $\zeta$ 

Notons que  $\varphi_{v_0}(tu) = \beta(t)[v_0 + tu] - v_0$  avec  $\beta(t) = \frac{2}{1-t^2}$ . De plus, par la remarque 5.1.6, on obtient que la norme de  $\zeta(t)$  vérifie l'expression suivante :

$$\|\zeta(t)\|^2 = \frac{\langle e|\varphi_{v_0}(tu)\rangle + 1}{\langle e|\varphi_{v_0}(tu)\rangle - 1}$$

Considérons donc  $\alpha(t) = \langle e|\varphi_{v_0}(tu)\rangle = \beta(t)[\kappa + \sigma t] - \kappa$  avec  $\kappa = \langle e|v_0\rangle$  et  $\sigma = \langle e|u\rangle$ . En remarquant que, comme  $\mathbb{R}w_0$  est orthogonal à  $\gamma$  dans  $\mathcal{D}(e)$ , alors  $u \in \langle e, w_0\rangle^\perp$ , on obtient que  $\sigma = 0$ . Ce qui nous donne donc que :

$$\alpha(t) = \kappa \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

et ainsi,

$$\|\zeta(t)\|^2 = -1 - 2q(t)\alpha(t)$$

où  $q(t) = \frac{1}{1-\alpha(t)}$ .

Notons à présent le scalaire  $\eta = \frac{1}{1-\kappa}$ . En remarquant que  $w_0 = \psi_e(v_0) = \eta[e + v_0] - e$ , alors le produit scalaire  $\langle w_0|\zeta(t)\rangle$  vérifie la relation suivante :

$$\langle w_0|\zeta(t)\rangle = \eta \langle v_0|\zeta(t)\rangle = \eta q(t)(\kappa + \langle v_0|\varphi_{v_0}(tu)\rangle) - \eta\kappa$$

et comme  $\langle v_0|\varphi_{v_0}(tu)\rangle = -\beta(t) + 1 = -\frac{1}{\kappa}\alpha(t)$  alors :

$$\langle w_0|\zeta(t)\rangle = \eta q(t) \left( \kappa - \frac{1}{\kappa}\alpha(t) \right) - \eta\kappa = \eta q(t) \left( \kappa - \frac{1}{\kappa}\alpha(t) \right) = \frac{\eta(\kappa^2 - 1)}{\kappa} q(t)\alpha(t)$$

Ainsi, en considérant  $a = -\frac{\kappa}{\eta(\kappa^2 - 1)}$ , on obtient que  $\|\zeta(t)\|^2 = -1 - 2a \langle w_0|\zeta(t)\rangle$ . Et pour finir, en remarquant que  $\kappa\eta = \eta - 1$ , on a que  $w_0 = \eta(\kappa e + v_0)$ . Ce qui nous donne :

$$a^2 \|w_0\|^2 - 1 = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - 1} - 1 = \frac{1}{\kappa^2 - 1} > 0$$

et donc  $\|\zeta(t) - aw_0\|^2 = R^2$ , avec  $R = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}$ . □

### 5.1.4 Définitions et propriétés utiles

Dans cette section, nous introduisons une série de propriétés qui nous seront nécessaires pour les parties II et III. En particulier, nous y définissons et y étudions les notions d'horosphère et de g-hyperplan.

#### 5.1.4.1 Les horosphères de l'espace hyperbolique

Les horosphères correspondent aux sphères de rayon infini et qui, dans l'espace hyperbolique, correspondent à une catégorie d'hypersurfaces qui peut être considérée comme une alternative aux hypersurfaces totalement géodésiques (voir définition 5.1.6).

**Définition 5.1.5.** *On appelle **horosphère** toute hypersurface orientée dont les courbures principales sont toutes et partout égales à  $\lambda = 1$  (resp. sont toutes et partout égales à  $\lambda = -1$ ) et qui sont connexes et maximales au sens de l'inclusion.*

Afin de caractériser les horosphères, il nous faut introduire quelques notions qui nous seront nécessaires. Tout d'abord, on considère la partie  $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{P}_n$  que l'on appelle **absolu** et qui correspond à la projection du cône lumière dans l'espace projectif. Il est alors immédiat que l'absolu est une hypersurface qui est difféomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Nous pouvons alors définir une application de Gauss pour les hypersurfaces orientées de l'espace hyperbolique. En effet, si  $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$  est une hypersurface orientée dont le champ orthonormal est  $N : \Sigma \mapsto T\mathbb{H}^n$ , alors on appelle **application de Gauss**, l'application  $\nu : \Sigma \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  telle que :

$$\nu(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p \circ \gamma(t) \quad (5.1.4.24)$$

avec  $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{P}_n$  étant la projection projective et  $\gamma$  étant la géodésique qui passe par le point  $x$  à la vitesse  $N(x)$ . On a alors que l'application de Gauss  $\nu$  est lisse et admet pour expression :

$$\nu(x) = x + N(x) \quad (5.1.4.25)$$

pour tout  $x \in \Sigma$ .

**Remarque 5.1.9.** *Par connexité, une horosphère admet exactement deux orientations et donc deux applications de Gauss.*

**Propriété 5.1.11.** *Une hypersurface orientée et connexe  $\Sigma \subset \mathbb{H}^n$  dont l'une des applications de Gauss  $\nu : \Sigma \mapsto \mathbb{A}^{n-1}$  est constante, est forcément comprise dans une horosphère.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que : Si  $\vec{W}$  est un vecteur propre de  $d_u N \cdot \vec{W}$  et dont la courbure principale associée est  $k$ , alors  $d_u \nu \cdot \vec{W} = \vec{W} + d_u N \cdot \vec{W} = (1+k)\vec{W}$ .  $\square$

**Propriété 5.1.12.** *Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence, alors dans le modèle de Poincaré centré en  $e$ , les horosphères correspondent aux intersections non vides de la boule ouverte  $\mathcal{D}(e)$  avec les hypersphères de l'espace euclidien  $(T_e \mathbb{H}^n, g_e)$  qui sont comprises dans la fermeture  $\overline{\mathcal{D}(e)}$  et qui sont tangentes avec le bord  $\partial_\infty \mathcal{D}(e) = \mathbb{S}_e^{n-1}$ .*

*Démonstration.* Il est clair que, dans le modèle de Poincaré, les intersections de la boule unité  $\mathcal{D}(e)$  avec les hypersphères de l'espace euclidien  $(T_e \mathbb{H}^n, g_e)$  qui sont comprises dans  $\overline{\mathcal{D}(e)}$  et qui intersectent le bord, vérifient les conditions de la propriété 5.1.11. De plus, étant maximales au sens de l'inclusion, ce sont bien des horosphères.

Réciproquement, considérons  $H \subset \mathbb{H}^n$  une horosphère ainsi que  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence. Alors, par la propriété 5.1.11, on sait que l'une de ses deux applications de Gauss est constante. En particulier, en se plaçant dans le modèle de Poincaré centré en  $e$ , on a que l'application de Gauss correspond à une application  $\nu : H \mapsto \mathbb{S}_e^{n-1}$  telle que :

$$\nu(x) = u_0$$

pour tout  $x \in H$ .

Par conséquent, on sait, via la propriété 5.1.10, que tout cercle  $\mathcal{C}$  qui passe orthogonalement à l'hypersphère  $\mathbb{S}_e^{n-1}$  par le point  $u_0$  et qui intersecte l'hypersurface  $H$ , est alors orthogonal à  $H$ . On peut alors vérifier que, par connexité, la partie  $H$  est forcément comprise dans une hypersphère  $H_0 \subset \overline{\mathcal{D}(e)}$  et qui est tangente au bord  $\mathbb{S}_e^{n-1}$ . De plus, étant maximale au sens de l'inclusion, on a que :

$$H = H_0 \cap \mathcal{D}(e)$$

et ainsi, on obtient le résultat recherché.  $\square$

**Remarque 5.1.10.** *Toute horosphère est la limite d'une famille d'hypersphères géodésiques dont les centres convergent vers le bord à l'infini et donc les rayons tendent vers l'infini.*

#### 5.1.4.2 Définition et propriétés des g-hyperplans

Les g-hyperplans correspondent aux hypersurfaces dont les courbures principales sont toutes et partout nulles et que nous pouvons considérer comme étant un équivalent des hyperplans affines des espaces euclidiens.

**Définition 5.1.6.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne. Nous dirons qu'une sous-variété  $\Gamma \subset M$  est **totalelement géodésique** si toute géodésique  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto M$  tangente à  $\Gamma$  est comprise dans  $\Gamma$ .*

**Remarque 5.1.11.** *Une sous-variété  $N \subset M$  est totalelement géodésique si et seulement si toutes les géodésiques de  $(N, g)$  sont des géodésiques de  $(M, g)$ .*

**Propriété 5.1.13.** *Une  $p$ -sous-variété  $\Gamma \subset \mathbb{H}^n$ , de l'espace hyperbolique, est totalelement géodésique si et seulement si l'une des deux assertions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *Il existe  $e \in \mathbb{H}^n$  tel que  $\psi_e(\Gamma)$  est l'intersection non vide d'un  $p$ -sous-espace affine de  $T_e\mathbb{H}^n$  avec la boule ouverte  $\mathcal{D}(e)$ .*
2. *Pour tout point  $v \in \mathbb{H}^n$ , l'image  $\psi_v(\Gamma)$  est l'intersection non vide d'un  $p$ -sous-espace affine de  $T_v\mathbb{H}^n$  avec la boule ouverte  $\mathcal{D}(v)$ .*

**Note.** *Il est à noter que les  $\psi_v$  correspondent aux projections de Klein centrées en  $v$ .*

*Démonstration.* À partir des propriétés sur la projection de Klein, c'est un résultat immédiat.  $\square$

**Remarque 5.1.12.** *Toute  $p$ -sous-variété totalelement géodésique de  $\mathbb{H}^n$  est l'intersection non vide d'un  $(p+1)$ -sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec  $\mathbb{H}^n$ .*

**Définition 5.1.7.** *Sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ , on appelle **g-hyperplan** toute hypersurface totalelement géodésique.*

**Propriété 5.1.14.** Soit  $e \in \mathbb{H}^n$  un point de référence ainsi que  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1}$  et  $\gamma \subset \mathbb{H}^n$  la géodésique passant par le point  $e$  à la vitesse  $u$ . Si  $\Gamma$  est un  $g$ -hyperplan orthogonal à la géodésique  $\gamma$ , alors on a que :

1. L'intersection  $\gamma \cap \Gamma$  ne contient qu'un point.
2. Dans le modèle de Klein centré en  $e$ , l'hyperplan affine  $\psi_e(\Gamma)$  est orthogonal à la droite  $\mathbb{R}u$  pour le produit scalaire  $g_e$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la remarque 5.1.4. □

### 5.1.4.3 Les $g$ -hyperplans parallèles

Dans cette section, nous abordons la question des  $g$ -hyperplans parallèles. En effet, par définition de l'espace hyperbolique, nous savons qu'il existe une infinité de  $g$ -hyperplans qui sont parallèles à un même  $g$ -hyperplan. En particulier, nous considérerons une sous-catégorie de  $g$ -hyperplans parallèles (voir définition 5.1.8) dont les propriétés sont non négligeables pour le chapitre 6.

**Définition 5.1.8.** Soit  $\Sigma_1 \subset \mathbb{H}^n$  et  $\Sigma_2 \subset \mathbb{H}^n$  deux  $g$ -hyperplans distincts. Alors nous dirons qu'une géodésique  $\gamma \subset \mathbb{H}^n$  est **une orthogonale commune à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$**  si elle est orthogonale aux deux  $g$ -hyperplans.

**Note.** Nous dirons alors que les  $g$ -hyperplans  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  **admettent une orthogonale commune**.

**Définition 5.1.9.** Soit  $\Sigma_1 \subset \mathbb{H}^n$  et  $\Sigma_2 \subset \mathbb{H}^n$  deux  $g$ -hyperplans distincts. Alors nous les dirons **parallèles** lorsque :

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$$

**Propriété 5.1.15.** Tout couple de  $g$ -hyperplans distincts admettant une orthogonale commune sont parallèles.

*Démonstration.* Considérons  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux  $g$ -hyperplans distincts qui admettent  $\gamma$ , une géodésique qui leur est communément orthogonale. Alors, en considérant  $e \in \gamma$  comme point de référence, on a que, par la propriété 5.1.14, les  $g$ -hyperplans  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  correspondent à deux hyperplans parallèles dans le modèle de Klein centré en  $e$ . □

L'inverse n'est pas vrai. En effet, comme on le présente ci-dessous sur le demi-plan de Poincaré, il est facile de définir sur le plan hyperbolique, et par extension sur tout espace hyperbolique, deux géodésiques parallèles qui n'admettent pas d'orthogonale commune.

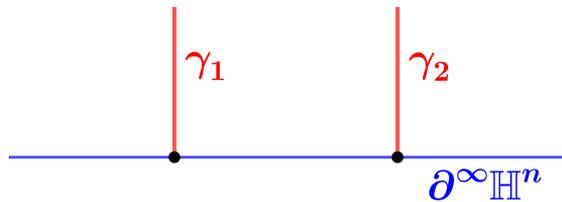


FIGURE 5.5 – Exemple de deux géodésiques parallèles n'admettant pas d'orthogonale commune.

Nous voulons alors connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux  $g$ -hyperplans parallèles n'admettent pas d'orthogonale commune. Pour cela, on considère la définition suivante :

**Définition 5.1.10.** Nous dirons que deux géodésiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans  $\mathbb{H}^n$  s'intersectent à l'infini lorsqu'elles vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p \circ \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p \circ \gamma_2(t) \quad (5.1.4.26)$$

avec  $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \mathcal{P}_n$  étant la projection projective.

**Remarque 5.1.13.** Il est intéressant de constater que dans le modèle de Klein centré en  $e$ , deux géodésiques qui s'intersectent à l'infini correspondent à deux droites affines qui s'intersectent sur le bord de la boule unité.

**Propriété 5.1.16.** Soit  $\Sigma_1 \subset \mathbb{H}^n$  et  $\Sigma_2 \subset \mathbb{H}^n$  deux  $g$ -hyperplans parallèles. Alors ils n'admettent pas d'orthogonale commune si et seulement si ils contiennent deux géodésiques  $\gamma_1 \subset \Sigma_1$  et  $\gamma_2 \subset \Sigma_2$  qui s'intersectent à l'infini.

*Démonstration.* Supposons qu'il n'existe pas de géodésiques  $\gamma_1 \subset \Sigma_1$  et  $\gamma_2 \subset \Sigma_2$  qui s'intersectent à l'infini. Alors il existe forcément un point  $e \in \mathbb{H}^n$  tel que les  $g$ -hyperplans  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  correspondent à deux demi-hypersphères disjointes dans le modèle du demi-espace de Poincaré centré en  $e$ . Par conséquent, il existe nécessairement une géodésique orthogonale. Réciproquement, supposons que les  $g$ -hyperplans admettent une géodésique  $\gamma$  qui leur est communément orthogonale. Si on considère  $e \in \gamma$ , alors, via la propriété 5.1.14, les deux  $g$ -hyperplans correspondent, dans le modèle de Klein centré en  $e$ , à deux hyperplans affines parallèles. En particulier, il ne peut pas exister de géodésiques  $\gamma_1 \subset \Sigma_1$  et  $\gamma_2 \subset \Sigma_2$  qui s'intersectent à l'infini.  $\square$

## 5.2 L'espace sphérique

Il ne nous sera pas nécessaire de faire un long exposé sur la géométrie sphérique du fait que nous retrouverons essentiellement les mêmes éléments. Par conséquent, nous nous contenterons d'un rapide résumé. On a donc que, pour  $e \in \mathbb{S}^n$ , la carte de Gauss est  $f(tu) = \cos(t)e + \sin(t)u$ , avec  $u \in \mathbb{S}_e^{n-1} = S[T_e\mathbb{S}^n]$ , et ainsi la première différence notable avec la géométrie hyperbolique est que la carte de Gauss n'est pas injective. En particulier, cette caractéristique jouera un rôle important lorsque nous aborderons la notion de  $g$ -hérissou sur la sphère. Ensuite, nous utiliserons principalement, pour un point de référence  $e \in \mathbb{S}^n$ , la projection stéréographique  $\psi_e : \mathbb{S}^n \setminus \{-e\} \mapsto T_e\mathbb{S}^n$  et la projection gnomonique  $\varphi_e : \Omega_e \mapsto T_e\mathbb{S}^n$ , avec  $\Omega_e = \{x \in \mathbb{S}^n \text{ tel que } \langle e|x \rangle > 0\}$  qui sont définies comme suit :

$$\psi_e(x) = \mu_e(x)[x + e] - e \text{ et } \varphi_e(x) = k_e(x)x - e \quad (5.2.0.1)$$

avec  $\mu_e(x) = \frac{1}{\langle e|x \rangle + 1}$  et  $k_e(x) = \frac{1}{\langle e|x \rangle}$ .

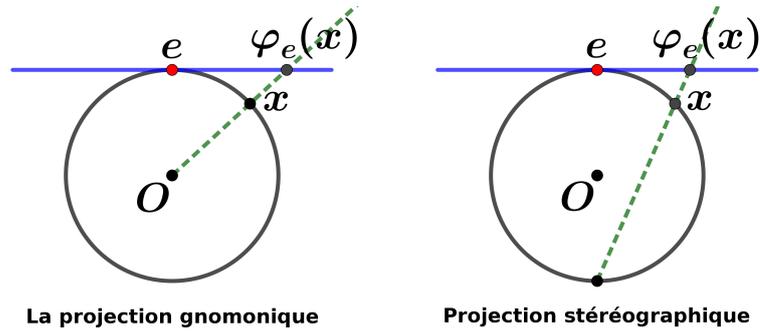


FIGURE 5.6 – Les projection gnomonique et stéréographique.

Il est à noter que les projections gnomonique et stéréographique jouent le même rôle que les projections de Klein et de Poincaré dans l'espace hyperbolique. En particulier, ce sont des difféomorphismes tels que la projection stéréographique est une transformation conforme et la projection gnomonique transforme les géodésiques de  $\Omega_e$  en des droites de  $T_e\mathbb{S}^n$ .

## Annexe F

# Éléments calculatoires en coordonnées sphériques

Il existe principalement trois conventions permettant de paramétrer la sphère, correspondant aux conventions rayon-colatitude-longitude, rayon-longitude-colatitude et rayon-longitude-latitude. En ce qui nous concerne, nous considérerons la convention rayon-colatitude-longitude, que nous représentons ci-dessous :

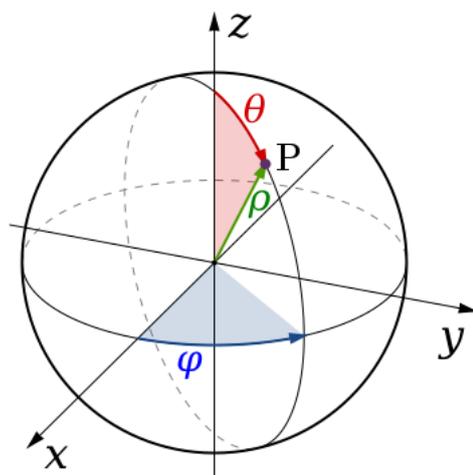


FIGURE 6.1 – Coordonnées sphériques rayon-colatitude-longitude

### 6.1 Système de coordonnées sphériques

Considérons donc  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ , une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  ainsi que le demi-plan vectoriel  $\mathcal{P}_{x,z} = \mathbb{R}_+ \vec{u}_x + \mathbb{R} \vec{u}_z$  et l'ouvert  $\Omega_{x,z} = \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{P}_{x,z}$ . On définit alors l'application  $u : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \Omega_{x,z}$  telle que :

$$u(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \text{Sin}(\theta)\text{Cos}(\varphi) \\ \text{Sin}(\theta)\text{Sin}(\varphi) \\ \text{Cos}(\theta) \end{bmatrix} \quad (6.1.0.1)$$

Il est alors clair que l'application  $u$ , ainsi définie, est un difféomorphisme et que nous appellerons donc **carte des coordonnées sphériques**. Ainsi, pour tout  $v \in \Omega_{x,z}$ , nous noterons  $\theta$  et  $\varphi$  les coordonnées sphériques telles que  $v = u(\theta, \varphi)$ . En considérant les dérivées partielles :

$$\partial_\theta u(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\varphi) \\ \text{Cos}(\theta)\text{Sin}(\varphi) \\ -\text{Sin}(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \partial_\varphi u(\theta, \varphi) = \text{Sin}(\theta) \begin{bmatrix} -\text{Sin}(\varphi) \\ \text{Cos}(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.0.2)$$

alors on définit le système de coordonnées différentielles :

$$\begin{cases} \vec{u}_\theta(v) = d_{u^{-1}(v)}u \cdot (1, 0) = \partial_\theta u \circ u^{-1}(v) \\ \vec{u}_\varphi(v) = d_{u^{-1}(v)}u \cdot (0, 1) = \partial_\varphi u \circ u^{-1}(v) \end{cases} \quad (6.1.0.3)$$

pour tout  $v \in \Omega_{x,z}$ .

Par conséquent, si  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une application lisse, alors on a que ses dérivées partielles correspondent au système de coordonnées (6.1.0.3) telles que :

$$\partial_\theta f(v) = d_u f \cdot \vec{u}_\theta(v) \quad \text{et} \quad \partial_\varphi f(v) = d_u f \cdot \vec{u}_\varphi(v) \quad (6.1.0.4)$$

pour tout  $v \in \Omega_{x,z}$ .

**Remarque 6.1.1.** *Il est à noter que nous définissons ainsi un atlas sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  tel que pour tout point  $u_0 \in \mathbb{S}^2$ , il existe une carte  $u : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \Omega_{x,z}$  telle que  $u_0 = u(\frac{\pi}{2}, \pi)$ .*

**Avertissement 6.1.1.** *Dans la suite, nous nous permettrons d'identifier les points  $v \in \mathbb{S}^2$  avec leurs coordonnées respectives  $\theta$  et  $\varphi$  sans mentionner le difféomorphisme  $u : ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \Omega_{x,z}$  ni le domaine  $\Omega_{x,z}$ .*

À présent, considérons le repère orthonormé  $\vec{e}_\theta = \vec{u}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\text{Sin}(\theta)} \vec{u}_\varphi$ . On peut alors vérifier que pour toute fonction lisse  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on a que :

$$\vec{\nabla}_S f(u) = \partial_\theta f(u) \vec{e}_\theta(u) + \frac{1}{\text{Sin}(\theta)} \partial_\varphi f(u) \vec{e}_\varphi(u) \quad (6.1.0.5)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_S(f)_u &= \partial_\theta^2 f(u) + \frac{1}{\text{Tan}(\theta)} \partial_\theta f(u) + \frac{1}{\text{Sin}(\theta)^2} \partial_\varphi^2 f(u) \\ &= \frac{1}{\text{Sin}(\theta)} \partial_\theta [\text{Sin}(\theta) \partial_\theta f(u)] + \frac{1}{\text{Sin}(\theta)^2} \partial_\varphi^2 f(u) \end{aligned} \quad (6.1.0.6)$$

Aussi, pour tout champ de vecteurs  $X : \mathbb{S}^2 \rightarrow T\mathbb{S}^2$ , on peut calculer que la divergence correspond à l'expression suivante :

$$\text{div}_S(X)_u = \frac{1}{\text{Sin}(\theta)} \partial_\theta [\text{Sin}(\theta) X_\theta(u)] + \frac{1}{\text{Sin}(\theta)} \partial_\varphi X_\varphi(u) \quad (6.1.0.7)$$

## 6.2 Propriétés calculatoires sur le laplacien

L'objet de cette section est de réduire la charge calculatoire des développements que nous considérons au chapitre 13. Considérons donc  $x : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}^n$  une application lisse ; alors on appelle **laplacien extérieur** l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta_S(x)$ , correspondant à la métrique usuelle sur la sphère, et qui admet donc pour expression :

$$\Delta^S(x)_u = (\Delta^S(x_1)_u, \dots, \Delta^S(x_N)_u) \quad (6.2.0.1)$$

où les  $x_i$  correspondent aux fonctions coordonnées.

**Propriété 6.2.1.** *Le laplacien extérieur de l'identité  $Id_{\mathbb{S}^2}$  ainsi que des champs orthonormaux  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$  vérifient les expressions suivantes :*

1.  $\Delta^S(Id_{\mathbb{S}^2})_u = -2u$
2.  $\Delta^S(\vec{e}_\theta)_u = -\frac{1}{\sin(\theta)^2}[\sin(2\theta)u + \vec{e}_\theta(u)]$
3.  $\Delta^S(\vec{e}_\varphi)_u = -\frac{1}{\sin(\theta)^2}\vec{e}_\varphi(u)$

*Démonstration.* Pour montrer le premier point, il nous suffit de faire le calcul sur la première coordonnée et il en sera exactement de même pour toutes les autres. Ainsi, on calcule :

$$\begin{aligned} \Delta^S[\sin(\theta)\cos(\varphi)] &= -\sin(\theta)\cos(\varphi) + \frac{1}{\tan(\theta)}\cos(\theta)\cos(\varphi) - \frac{1}{\sin(\theta)^2}\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ &= \frac{-\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 - 1}{\sin(\theta)^2}\sin(\theta)\cos(\varphi) = -2\sin(\theta)\cos(\varphi) \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat recherché. Comme il en est de même pour le troisième point, nous nous concentrerons donc sur le second point.

Pour le deuxième point, on commence par les deux premières coordonnées et ensuite, la troisième nous demandera un peu plus d'attention. Ainsi donc, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta^S[\cos(\theta)\cos(\varphi)] &= -\cos(\theta)\cos(\varphi) - \frac{1}{\tan(\theta)}\sin(\theta)\cos(\varphi) - \frac{1}{\sin(\theta)^2}\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ &= -\left(2 + \frac{1}{\sin(\theta)^2}\right)\cos(\theta)\cos(\varphi) \end{aligned}$$

et il en est exactement de même pour la deuxième coordonnée. Pour la troisième coordonnée, il nous faut constater que :

$$\begin{aligned} \Delta^S[-\sin(\theta)] &= \sin(\theta) - \frac{1}{\tan(\theta)}\cos(\theta) = \sin(\theta) - \frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)} = \sin(\theta)\left(1 - \frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)^2}\right) \\ &= -\left(2 - \frac{1}{\sin(\theta)^2}\right)[- \sin(\theta)] \end{aligned}$$

et ainsi,

$$\Delta^S(\vec{e}_\theta)_u = -2\vec{e}_\theta(u) - \frac{1}{\text{Sin}(\theta)^2}\vec{W}(u) \text{ avec } \vec{W}(u) = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\varphi) \\ \text{Cos}(\theta)\text{Sin}(\varphi) \\ \text{Sin}(\theta) \end{bmatrix}$$

Par conséquent, en remarquant que  $\vec{W}(u) = \text{Sin}(2\theta)u + (1 - 2\text{Sin}(\theta)^2)\vec{e}_\theta(u)$ , on obtient donc le résultat recherché.  $\square$

**Lemme 6.2.1.** *Pour toute fonction lisse  $f : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}$ , on a les propriétés suivantes :*

1.  $\Delta^S[f(u)u] = (\Delta^S(f)_u - 2f(u))u + 2\vec{\nabla}_S f(u)$
2.  $\Delta^S[f(u)\vec{e}_\theta(u)] = -2\left(\partial_\theta f(u) + \frac{1}{\text{Tan}(\theta)}f(u)\right)u + \left(\Delta^S(f)_u - \frac{1}{\text{Sin}(\theta)^2}f(u)\right)\vec{e}_\theta(u) + 2\frac{\text{Cos}(\theta)}{\text{Sin}(\theta)^2}\partial_\varphi f(u)\vec{e}_\varphi(u)$
3.  $\Delta^S[f(u)\vec{e}_\varphi(u)] = -\frac{2}{\text{Sin}(\theta)^2}\partial_\varphi f(u)[\text{Sin}(\theta)u + \text{Cos}(\theta)\vec{e}_\theta(u)] + \left(\Delta^S(f)_u - \frac{1}{\text{Sin}(\theta)^2}f(u)\right)\vec{e}_\varphi(u)$

*Démonstration.* Pour montrer le premier point, en remarquant que  $\vec{\nabla}_S[\text{Sin}(\theta)\text{Cos}(\varphi)] = \text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\varphi)\vec{e}_\theta(u) - \text{Sin}(\varphi)\vec{e}_\varphi(u)$ , alors on obtient que :

$$\langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S[\text{Sin}(\theta)\text{Cos}(\varphi)] \rangle = \partial_\theta f(u)\text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\varphi) - \frac{1}{\text{Sin}(\theta)}\partial_\varphi f(u)\text{Sin}(\varphi)$$

et ainsi le laplacien des coordonnées est :

$$\Delta_S[f(u)Id_{\mathbb{S}^2}^{(1)}(u)] = \Delta_S(f)_u Id_{\mathbb{S}^2}^{(1)}(u) + 2\partial_\theta f(u)e_\theta^{(1)}(u) + \frac{2}{\text{Sin}(\theta)}\partial_\varphi f(u)e_\varphi^{(1)}(u) + f(u)\Delta_S(Id_{\mathbb{S}^2}^{(1)})_u$$

Par conséquent, en appliquant la même méthode sur les autres coordonnées, il est immédiat que nous obtenons :

$$\Delta_S[f(u)u] = \Delta^S(f)_u u + 2\vec{\nabla}_S f(u) + f(u)\Delta^S(Id_{\mathbb{S}^2})_u$$

et par la propriété 6.2.1 on obtient le résultat recherché. Ensuite, pour le second point, il est nécessaire de déterminer les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S[\text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\varphi)] \rangle &= -\text{Sin}(\theta)\text{Cos}(\varphi)\partial_\theta f(u) - \frac{\text{Cos}(\theta)}{\text{Sin}(\theta)^2}\text{Sin}(\varphi)\partial_\varphi f(u) \\ \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S[\text{Cos}(\theta)\text{Sin}(\varphi)] \rangle &= -\text{Sin}(\theta)\text{Sin}(\varphi)\partial_\theta f(u) + \frac{\text{Cos}(\theta)}{\text{Sin}(\theta)^2}\text{Cos}(\varphi)\partial_\varphi f(u) \\ \langle \vec{\nabla}_S f(u) | \vec{\nabla}_S[-\text{Sin}(\theta)] \rangle &= -\text{Cos}(\theta)\partial_\theta f(u) \end{aligned}$$

et après quelques calculs, on arrive rapidement à ce que :

$$\Delta_S[f(u)\vec{e}_\theta(u)] = \Delta_S(f)_u \vec{e}_\theta(u) - 2\partial_\theta f(u)u + 2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \partial_\varphi f(u) \vec{e}_\varphi(u) + f(u)\Delta_S(\vec{e}_\theta)_u$$

et ainsi, nous obtenons le résultat recherché. Pour le troisième point, il nous faut aussi déterminer le produit scalaire suivant :

$$\left\langle \vec{\nabla}_S f(u) \middle| \vec{\nabla}_S[-\sin(\varphi)] \right\rangle = -\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\theta)^2} \partial_\varphi f(u) \text{ et } \left\langle \vec{\nabla}_S f(u) \middle| \vec{\nabla}_S[\cos(\varphi)] \right\rangle = -\frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)^2} \partial_\varphi f(u)$$

ainsi, en constatant que :

$$\sin(\theta)u + \cos(\theta)\vec{e}_\theta(u) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

on obtient forcément que :

$$\Delta_S[f(u)\vec{e}_\varphi(u)] = \Delta_S(f)_u \vec{e}_\varphi(u) - \frac{2}{\sin(\theta)^2} \partial_\varphi f(u) [\sin(\theta)u + \cos(\theta)\vec{e}_\theta(u)] + f(u)\Delta_S(\vec{e}_\varphi)_u$$

ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$

**Propriété 6.2.2.** Pour toute fonction  $f : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}$ , on a toujours que :

1.  $\Delta^S[CH f(u)] = SH f(u)\Delta^S(f)_u + CH f(u)l(u)$
2.  $\Delta^S[SH f(u)] = CH f(u)\Delta^S(f)_u + SH f(u)l(u)$

avec  $l(u) = \|\vec{\nabla}_S f(u)\|^2$ .

*Démonstration.* En constatant que :

$$\begin{cases} \partial_i^2[CH f(u)] = \partial_i^2 f(u)SH f(u) + (\partial_i f(u))^2 CH f(u) \\ \partial_i^2[SH f(u)] = \partial_i^2 f(u)CH f(u) + (\partial_i f(u))^2 SH f(u) \end{cases}$$

on obtient forcément le résultat recherché.  $\square$



## Annexe G

# Éléments sur le degré de Brouwer

Nous pouvons vérifier que pour une immersion  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , le nombre  $n_y = \text{Card } f^{-1}(\{y\})$  est constant sur  $\mathbb{S}^1$ . Par construction, il est alors naturel de l'appeler **enroulement**. La notion de degré est alors une généralisation de la notion d'enroulement aux applications continues entre variétés de même dimension et fournit ainsi un invariant topologique à valeurs entières. Pour une présentation générale de cette notion, il est possible de consulter l'ouvrage [23] de J.Droniou. En ce qui nous concerne, nous nous appuyerons principalement sur l'ouvrage [51] de J.Lafontaine, et qui nous sera largement suffisant.

### 7.1 Point critique et valeur critique

Commençons par faire un point sur l'ensemble des points (et valeurs) critiques d'une application. Considérons donc  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre deux variétés. Alors on appelle **point critique** tout élément  $x \in M$  tel que la différentielle  $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  n'est pas surjective. Aussi, on appelle **valeur critique** l'image d'un point critique et **valeur régulière** toute  $y \in N$  qui n'est pas une valeur critique. On a alors le théorème de A. Sard (voir l'article [99], qui est l'article original, pour plus de détail).

**Théorème 7.1.1.** *Pour toute application lisse  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés, l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.*

Dans la suite, nous noterons  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points critiques et  $f(\mathcal{C})$  l'ensemble des valeurs critiques. Il est alors important de remarquer que l'ensemble des valeurs régulières  $N \setminus f(\mathcal{C})$  n'est jamais vide.

**Propriété 7.1.1.** *Si  $f : M \rightarrow N$  est une application lisse, avec  $M$  compacte, et  $y \in N$  une valeur régulière, alors l'ensemble  $f^{-1}(y)$  est fini ou vide. De plus, la fonction cardinal :*

$$\#f^{-1} : N \setminus f(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{N} \tag{7.1.0.1}$$

*est localement constante.*

*Démonstration.* Voir théorème 21 page 58 de [99]. □

## 7.2 Définition du degré et première propriété

Pour les quelques définitions et propriétés que nous allons considérer, nous nous reposons essentiellement sur les sections 7.C et 7.D de [51]. Considérons donc  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre deux variétés orientables, avec  $M$  compacte et  $N$  connexe. Alors, pour  $x \in M \setminus \mathcal{C}$ , on appelle **signe de  $f$  en  $x$**  le nombre  $\text{sgn}(d_x f)$  qui est égal à  $+1$  si la différentielle préserve l'orientation et à  $-1$  sinon. Par conséquent, pour toute valeur régulière  $y \in N \setminus f(\mathcal{C})$  on appelle **degré en  $y$**  le nombre :

$$d(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(d_x f) \quad (7.2.0.1)$$

et où  $d(f, y) = 0$  lorsque  $f^{-1}(y) = \emptyset$ .

**Théorème 7.2.1.** *Si  $f : M \rightarrow N$  est une application lisse entre deux variétés orientées, avec  $M$  compacte et  $N$  connexe, alors pour toute valeur régulière  $y \in N \setminus f(\mathcal{C})$  et  $y' \in N \setminus f(\mathcal{C})$  on a que :*

$$d(f, y) = d(f, y') \quad (7.2.0.2)$$

*Démonstration.* Voir théorème 14 page 236 de [51]. □

Par conséquent, si  $f : M \rightarrow N$  est une application lisse entre deux variétés orientées, avec  $M$  compacte et  $N$  connexe, alors on appelle **degré de Brouwer** le nombre  $\text{deg}(f) = d(f, y)$  avec  $y \in N \setminus f(\mathcal{C})$ . Dans la suite, nous supposons que les variétés  $M$  et  $N$  sont connexes et compactes. Ainsi, on a que :

- Si  $f \sim g$  alors  $\text{deg}(f) = \text{deg}(g)$ .
- $\text{deg}(g \circ f) = \text{deg}(g)\text{deg}(f)$
- Si  $f : M \rightarrow N$  n'est pas surjective, alors  $\text{deg}(f) = 0$ .

## 7.3 Degré d'une application et intégration

L'une des contributions importantes de la théorie du degré réside dans la théorie de l'intégration. En ce qui nous concerne, nous nous limiterons aux deux résultats suivants, et qui nous seront utiles dans de nombreux développements.

**Théorème 7.3.1.** *Pour toute application lisse  $f : M \rightarrow N$  et toute  $n$ -forme différentielle  $\omega \in \Omega_n(N)$ , on a que :*

$$\int_M f^*(\omega) = \text{deg}(f) \int_N \omega \quad (7.3.0.1)$$

*Démonstration.* Voir corollaire 12 page 234 de [51]. □

**Propriété 7.3.1.** *Toute immersion  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  est surjective.*

*Démonstration.* On sait que la  $n$ -sphère  $\mathbb{S}^n$  est une variété de dimension  $n$  qui est compacte, connexe et orientée. Considérons donc  $w \in \Omega_n(\mathbb{S}^n)$ , une forme volume, alors pour une immersion lisse  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , le tiré en arrière  $f^*(w)$  est également une forme volume. Par conséquent, les intégrales :

$$\int_{\mathbb{S}^n} w \text{ et } \int_{\mathbb{S}^n} f^*(w)$$

sont non nulles. Et par le théorème 7.3.1, vu précédemment, on en déduit que  $\deg(f) \neq 0$ , ce qui nous donne le résultat recherché.  $\square$



# Bibliographie

- [1] Aleksandr Danilovich ALEKSANDROV : Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern, i :verallgemeinerung einiger Begriffe der Theorie der konvexen Körpern. Matematicheskii Sbornik, 44(5):947–972, 1937.
- [2] Maria Angeles ALFONSECA, Michelle CORDIER et Dan Itzhak FLORENTIN : Uniqueness results for bodies of constant width in the hyperbolic plane. Advances in Geometry, 21(3):391–400, 2021.
- [3] Ben ANDREWS, Xuzhong CHEN et Yong WEI : Volume preserving flow and Alexandrov-Fenchel type inequalities in hyperbolic space. Journal of the European Mathematical Society, 23(7):2467–2509, 2021.
- [4] Paulo Ventura ARAÚJO : Minimum area of a set of constant width in the hyperbolic plane. Geometriae Dedicata, 64(1):41–53, 1997.
- [5] Michèle AUDIN : Geometry. Springer Berlin, Heidelberg, 2002.
- [6] Davide BARILARI et Luca RIZZI : Sub-riemannian interpolation inequalities. Inventiones mathematicae, 215:977–1038, 2019.
- [7] Marcel BERGER : Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes. Fernand Nathan, 1978.
- [8] José BERTIN, Jean-Pierre DEMAILLY, Luc ILLUSIE et Chris PETERS : Introduction à la théorie de Hodge. Panoramas et synthèses. Société mathématique de France, 2nd ed édition, 2017.
- [9] Wilhelm BLASCHKE : Konvexe bereiche gegebener konstanter breite und kleinsten inhalts. Mathematische Annalen, 76(4):504–513, 1915.
- [10] Alexander Ivanovich BOBENKO, Carl O.R.LUTZ, Helmut POTTMANN et Jan TECHTER : Non-Euclidean laguerre geometry and incircular nets. 2021.
- [11] Vincent BONINI, José-María ESPINAR et Jie QING : Hypersurfaces in hyperbolic space with support function. Advances in Mathematics, 280:506–548, 2015.
- [12] Aleksander-Andreevich BORISENKO et Vicente MIQUEL : Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space. Illinois Journal of Mathematics, 43(1):61 – 78, 1999.
- [13] James William BRUCE et Peter GIBLIN : Curves and singularities. Cambridge university press, 1984.
- [14] Hermann BRUNN : Ueber ovale und eiflächen. Akademische Buchdruckerei von R. Straub, 1887.
- [15] Thomas CECIL : Lie sphere geometry. Springer, 2008.
- [16] Yvonne CHOQUET-BRUHAT : General relativity and the Einstein equations. OUP Oxford, 2008.

- [17] Abhijit DASGUPTA : Set theory : With an introduction to real point sets. Springer, 2014.
- [18] Boris Veniaminovich DEKSTER : Bodies of constant width in riemannian manifolds. In Applied Geometry and Discrete Mathematics : The Victor Klee Festschrift (Dimacs Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science), volume 4, page 181–192. Amer Mathematical Society, 1991.
- [19] Boris Veniaminovich DEKSTER : In-and circumcenters of manifolds of constant width. Geometriae Dedicata, 38(1):67–71, 1991.
- [20] Boris Veniaminovich DEKSTER : Manifolds of constant width. In Asian Mathematical Conference, 1990-Proceedings Of The Conference, pages 91–94. World Scientific, 1992.
- [21] Boris Veniaminovich DEKSTER : Width and breadth for convex bodies in riemannian manifolds. Archiv der Mathematik, 58(2):190–198, 1992.
- [22] Boris Veniaminovich DEKSTER : Double normals characterize bodies of constant width in riemannian manifolds. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, pages 187–187, 1993.
- [23] Jerome DRONIOU : Degrés topologiques et applications. Université Montpellier II, 2006.
- [24] Charles Lawrence EPSTEIN : Envelopes of horospheres and weingarten surfaces in hyperbolic 3-space. preprint, 1984.
- [25] Charles Lawrence EPSTEIN : Orthogonally integrable line fields in  $\mathbb{H}^3$ . Communications on Pure and Applied Mathematics, 38(5):599–608, 1985.
- [26] Charles Lawrence EPSTEIN : The hyperbolic gauss map and quasiconformal reflections. Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, 1986.
- [27] José María ESPINAR, José A. GALVEZ et Gabriel Soler LOPEZ : Hypersurfaces in  $\mathbb{H}^{n+1}$  and conformally invariant equations : The generalized Christoffel and Nirenberg problems. Journal of the European Mathematical Society, 11(4):903–939, 2009.
- [28] François FILLASTRE : Réalisation de métriques sur les surfaces compactes. Thèse de doctorat, Université de Neuchâtel; Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2006.
- [29] François FILLASTRE : Fuchsian convex bodies : Basics of Brunn–Minkowski theory. Geometric and Functional Analysis, 23(1):295–333, 2013.
- [30] François FILLASTRE et Andrea SEPPI : Spherical, hyperbolic and other projective geometries : convexity, duality, transitions. HAL, 2018.
- [31] Jay P. FILLMORE : Symmetries of surfaces of constant width. Journal of Differential Geometry, 3(1-2):103–110, 1969.
- [32] Jay P. FILLMORE : Barbier’s theorem in the Lobachevski plane. Proceedings of the American Mathematical Society, 24(4):705–709, 1970.
- [33] Eduardo GALLEGO et Agustí REVENTOS : Asymptotic behaviour of  $\lambda$ -convex sets in the hyperbolic plane. Geometriae Dedicata, 76(3):275–289, 1999.
- [34] Eduardo GALLEGO, Gil SOLANES et Eberhard TEUFEL : Linear combinations of hypersurfaces in hyperbolic space. Prepubl. Univ. Auton. de Barcelona, 15:1–25, 2010.
- [35] Ylvestre GALLOT, Dominique HULIN et Jacques LAFONTAINE : Riemannian geometry, volume 2. Springer, 1990.
- [36] José Antonio GALVEZ et Pablo MIRA : Linearity of homogeneous solutions to degenerate elliptic equations in dimension three. arXiv preprint arXiv :2111.09232, 2021.

- [37] Hansjorg GEIGES : A brief history of contact geometry and topology. Expositiones Mathematicae, 19(1):25–53, 2001.
- [38] Hansjorg GEIGES : An introduction to contact topology, volume 109. Cambridge University Press, 2008.
- [39] Harald GEPPERT : Über den Brunn-Minkowskischen satz. Mathematische Zeitschrift, 42(1):238–254, 1937.
- [40] Thomsen GERHARD et Blaschke WILHELM : Vorlesungen über differential geometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins relativitäts theorie. Springer, 1929.
- [41] Akos G.HORVATH : Diameter, width and thickness in the hyperbolic plane. Journal of Geometry, 112(3):47, 2021.
- [42] Emmanuel GIROUX : Topologie de contact en dimension 3. Séminaire Bourbaki, 35:7–33, 1992-1993.
- [43] Bernard GOSTIAUX : Cours de mathématiques spéciales, tome 1. Presses Universitaires de France - PUF, 1993.
- [44] Marvin GREENBERG : Euclidean and non-euclidean geometries, development and history. Macmillan, 1993.
- [45] Hassan NAWFAL EL HAGE : Topologie générale et espaces normés, volume 110. Dunod, 2011.
- [46] Li HAIZHONG et Xu BOTONG : Hyperbolic p-sum and horospherical p-Brunn-Minkowski theory in hyperbolic space. arXiv preprint arXiv :2211.06875, 2022.
- [47] Emmanuel HUMBERT et Michel VAUGON : La relativité générale expliquée aux mathématiciens. Ellipses, 2014.
- [48] Jurgen JOST : Riemannian geometry and geometric analysis, volume 42005. Springer, 2008.
- [49] Benoit KLOECKNER : Un bref aperçu de la géométrie projective. Calvage & Mounet, 2012.
- [50] Shoshichi KOBAYASHI et Katsumi NOMIZU : Foundations of differential geometry, volume 2, volume 61. John Wiley & Sons, 1996.
- [51] Jaques LAFONTAINE : Introduction aux variétés différentielles. EDP sciences, 1996.
- [52] Rémi LANGEVIN, Gilbert LEVITT et Harold William ROSENBERG : Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss). Banach Center Publications, 20(1):245–253, 1988.
- [53] Kurt LEICHTWEIB : On the addition of convex sets in the hyperbolic plane. Journal of Geometry, 78:92–121, 2003.
- [54] Kurt LEICHTWEISS : Support function and hyperbolic plane. manuscripta mathematica, 114:177–196, 2004.
- [55] Kurt LEICHTWEISS : Curves of constant width in the non-euclidean geometry. In Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, volume 75, pages 257–284. Springer, 2005.
- [56] Yves MARTINEZ-MAURE : Non-circular algebraic curves of constant width : an answer to Rabinowitz. Canadian Mathematical Bulletin, 65(3):552–556.
- [57] Yves MARTINEZ-MAURE : Feuilletages des surfaces et hérissons dans  $\mathbb{R}^3$ . Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1985.

- [58] Yves MARTINEZ-MAURE : Hérissons projectifs et corps convexes de largeur constante. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 321(4):439–442, 1995.
- [59] Yves MARTINEZ-MAURE : Hedgehogs of constant width and equichordal points. Annales Polonici Mathematici, 67(3):285–288, 1997.
- [60] Yves MARTINEZ-MAURE : De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons. Archiv der Mathematik, 72(6):444–453, 1999.
- [61] Yves MARTINEZ-MAURE : Étude des différences de corps convexes plans. In Annales Polonici Mathematici, volume 72, pages 71–78. Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny PAN, 1999.
- [62] Yves MARTINEZ-MAURE : Indice d'un hérisson : étude et applications. Publicacions matemàtiques, pages 237–255, 2000.
- [63] Yves MARTINEZ-MAURE : Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 332(1):41–44, 2001.
- [64] Yves MARTINEZ-MAURE : Sommets et normales concourantes des courbes convexes de largeur constante et singularités des hérissons. Archiv der Mathematik, 79:489–498, 2002.
- [65] Yves MARTINEZ-MAURE : Les multihérissons et le théorème de Sturm-Hurwitz. Archiv der Mathematik, 80(1):79–86, 2003.
- [66] Yves MARTINEZ-MAURE : Théorie des hérissons et polytopes. Comptes rendus. Mathématique, 336(3):241–244, 2003.
- [67] Yves MARTINEZ-MAURE : A Brunn-Minkowski theory for minimal surface. Illinois Journal of Mathematics, 48(2):589 – 607, 2004.
- [68] Yves MARTINEZ-MAURE : Geometric study of Minkowski differences of plane convex bodies. Canadian Journal of Mathematics, 58(3):600–624, 2006.
- [69] Yves MARTINEZ-MAURE : Dérivation des surfaces convexes de  $\mathbb{R}^3$  dans l'espace de Lorentz et étude de leurs focales. Comptes Rendus. Mathématique, 348(23-24):1307–1310, 2010.
- [70] Yves MARTINEZ-MAURE : Uniqueness results for the Minkowski problem extended to hedgehogs. Central European Journal of Mathematics, 10(2):1644–3616, 2012.
- [71] Yves MARTINEZ-MAURE : Hedgehog theory via Euler calculus. Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry, 56:397–421, 2015.
- [72] Yves MARTINEZ-MAURE : Plane Lorentzian and Fuchsian hedgehogs. Canadian Mathematical Bulletin, 58(3):561–574, 2015.
- [73] Yves MARTINEZ-MAURE : A stability estimate for the Aleksandrov–Fenchel inequality under regularity assumptions. Monatshefte für Mathematik, 182(1):65–76, 2017.
- [74] Yves MARTINEZ-MAURE : New insights on marginally trapped surfaces : The hedgehog theory point of view. Advances in Applied Mathematics, 101:320–353, 2018.
- [75] Yves MARTINEZ-MAURE : Séminaire de géométrie : New insights on marginally trapped surfaces : the hedgehog point of view. Université Paris 6, France, 2018. Géométrie et Dynamique, IMJ-PRG.
- [76] Yves MARTINEZ-MAURE : Du vélo de reuleaux aux courbes algébriques de largeur constante. 2021.
- [77] Yves MARTINEZ-MAURE : Real and complex hedgehogs, their symplectic area, curvature and evolutes. Journal of Symplectic Geometry, 19(3):567–606, 2021.

- [78] Yves MARTINEZ-MAURE : Hedgehog theory. À paraître.
- [79] Horst MARTINI, Luis MONTEJANO et Déborah OLIVEROS : Bodies of constant width. Springer, 2019.
- [80] Hermann MINKOWSKI : Volumen und oberfläche. Springer, 1989.
- [81] Vladimir OLIKER : A priori estimates of the principal curvature of spacelike hypersurfaces in de Sitter space with applications to hypersurfaces in hyperbolic space. American Journal of Mathematics, 114(3):605–626, 1992.
- [82] Bennett PALMER : Remarks on a variational problem in Laguerre geometry. Rendiconti di Mat, 19:281–293, 1999.
- [83] Roger PENROSE : Gravitational collapse and space-time singularities. Phys. Rev. Lett., 14:57–59, Jan 1965.
- [84] Roger PENROSE et Stephen William HAWKING : The singularities of gravitational collapse and cosmology. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 314(1519):529–548, 1970.
- [85] Roger PENROSE et Stephen William HAWKING : La nature de l'espace et du temps. Folio, 2003.
- [86] Henri POINCARÉ : La science et l'hypothèse. Flammarion, 1902.
- [87] Jean-Claude PONT : L'aventure des parallèles : Histoire de la géométrie non euclidienne, précurseurs et attardés. Peter Lang, 1986.
- [88] Helmut POTTMANN : Globale eigenschaft en sphärischer zwangläufe. Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, 444:53–62, 1989.
- [89] Manuel RITORE et Carlo SINISTRARI : Mean curvature flow and isoperimetric inequalities. Springer Science & Business Media, 2010.
- [90] David ROCHERA : Offsets and front tire tracks to projective hedgehogs. Computer Aided Geometric Design, 97:102135, 2022.
- [91] David ROCHERA et Yves MARTINEZ-MAURE : Zindler-type hypersurfaces in  $\mathbb{R}^4$ . Journal of Geometry and Physics, 182:104664, 2022.
- [92] Harold William ROSENBERG et Eric TOUBIANA : Complete minimal surfaces and minimal herissons. Journal of Differential Geometry, 28(1):115 – 132, 1988.
- [93] Boris Abramovich ROSENFELD : A history of non-euclidean geometry : Evolution of the concept of a geometric space, volume 12. Springer Science & Business Media, 2012.
- [94] François ROUVIERE : Initiation à la géométrie de Riemann. Calvage & Mounet, 2016.
- [95] Luís Antoni SANTALO : Note on convex spherical curves. Bulletin of the American Mathematical Society, 50(8):528 – 534, 1944.
- [96] Luís Antoni SANTALO : Note on convex curves on the hyperbolic plane. Bulletin of the American Mathematical Society, 51(6.P1):405 – 412, 1945.
- [97] Luís Antoni SANTALO : Horocycles and convex sets in hyperbolic plane. Archiv der Mathematik, 18:529–533, 1967.
- [98] Luís Antoni SANTALO : Horospheres and convex bodies in hyperbolic space. Proc. Amer. Math. Soc., 19:390–395, 1968.
- [99] Arthur SARD : The measure of the critical values of differentiable maps. Bulletin of the American Mathematical Society, 48(12):883–890, 1942.
- [100] Rolf SCHNEIDER : Convex bodies : The Brunn–Minkowski theory, 2nd expanded ed. Math. Appl, 151, 2013.

- [101] Richard SCHOEN et Shing-Tung YAU : Lectures on differential geometry, volume 2. International press Cambridge, MA, 1994.
- [102] Karl SCHWARZSHILD : Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. 1916.
- [103] Karl SCHWARZSHILD : Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. 1916.
- [104] Karl SCHWARZSHILD : On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory. 1999.
- [105] Karl SCHWARZSHILD : On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Gen. Relativ. Gravit.*, 35(5):951–959, 2003.
- [106] Christoph STADTMULLER : Metric contact manifolds and their Dirac operators. Thèse de doctorat, Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin, 2011.
- [107] John STILLWELL : Sources of hyperbolic geometry. Numéro 10. American Mathematical Soc., 1996.
- [108] Karl STRUBECKER : Differentialgeometrie des isotropen Raumes. III. Flächentheorie. *Mathematische Zeitschrift*, 48:1432–1823, 1942.
- [109] Claire VOISIN : Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, volume 10. Société mathématique de France Paris, 2002.
- [110] Bruno Marino XAVIER : W-congruences for minimal surfaces in Nil and Laguerre minimal surfaces in space forms. Thèse de doctorat, Universidade de Brasília, 2018.