



## Contributions à la Mécanique Numérique

Nicolas Chevaugéon

### ► To cite this version:

Nicolas Chevaugéon. Contributions à la Mécanique Numérique. Mécanique [physics.med-ph]. Nantes Université, 2023. <tel-04496506>

**HAL Id: tel-04496506**

**<https://hal.science/tel-04496506v1>**

Submitted on 8 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

## Habilitation à diriger des recherches

HDR

**Nantes Université**  
Spécialité : Mécanique

Par  
**Nicolas CHEVAUGEON**

# Contributions à la Mécanique Numérique

Travaux présentés et soutenus à l'Ecole Centrale de Nantes, le 18 Septembre 2023

Unité de recherche : GeM, UMR-CNRS 6183, Ecole Centrale de Nantes



École doctorale Sciences de l'Ingénierie et des Systèmes, SIS

### Rapporteurs avant soutenance :

Anthony	GRAVOUIL	Professeur des universités, INSA Lyon
Corrado	MAURINI	Professeur des universités, Sorbonnes Université, Paris
Julien	YVONNET	Professeur des universités, Université Gustave Eiffel, Campus de Paris

### Composition du Jury :

Présidente :

Armelle	CHABOT	Directrice de recherche, Université Gustave Eiffel, Campus de Nantes
---------	--------	--

Examineurs:

Steven	LE CORRE	Professeur des universités, Nantes Université
Nicolas	MOËS	Professeur des universités, Nantes Université
Jean-François	REMACLE	Professeur des universités, Université Catholique de Louvain, Louvain-La-Neuve, Belgique
Claude	STOLZ	Directeur de Recherche, CNRS, Paris





# Introduction et remerciements

Rédiger un mémoire de HDR m’a toujours paru une tâche difficile. Le temps passant et les activités de recherche s’accumulant derrière moi, cela me paraissait de plus en plus difficile. Comment se mettre à écrire ce mémoire, tâche interminable, quand tant d’autres choses plus excitantes se présentaient à moi ? Tester cette nouvelle idée, lire ce papier, coder cette nouvelle fonction, optimiser tel programme, finir d’écrire cet article, préparer cette conférence, discuter avec tel collègue de ce nouveau projet de recherche ... Autant de tentations rendant la tâche insurmontable et donc toujours repoussée. Le document que vous avez entre les mains est une preuve supplémentaire, s’il en fallait une, que l’on peut se tromper. C’était un gros effort, mais ce n’était pas insurmontable. J’en ai tiré quelques leçons personnelles en remettant de l’ordre dans mes idées pour enfin le rédiger. Prendre le temps de regarder dans le rétroviseur quelques mois avant d’entrer de plain-pied dans de nouveaux projets (et il y en a ...) était sans doute une bonne idée, permettant de tracer plus précisément les directions à suivre. Mais pour en venir à bout, il a fallu se fixer une date limite et s’y tenir le plus possible. Accepter de ne pas tout y mettre, faire l’impasse sur certains travaux pourtant intéressants. En bref, il a fallu faire des choix. Le document que vous avez entre les mains n’est donc sans doute pas complet. C’est bien normal. Décrire dans le détail chacune de mes activités depuis plus de vingt ans de carrière n’est pas le but d’un tel document. J’ai mis bien trop de temps à le comprendre. Mais voilà, c’est fait et vous avez le résultat entre les mains. Le document est divisé en deux grandes parties : le dossier personnel qui retrace ma carrière et le dossier recherche qui présente quelques résultats et trace des perspectives. Chacune des parties a sa propre introduction et je renvoie le lecteur vers celles-ci.

Mais pour l’instant, je tiens à remercier tout particulièrement Nicolas MOËS qui a su me motiver et m’encourager à toutes les étapes de la rédaction de ce mémoire. Il m’a accueilli dans son équipe au début de ma carrière de maître de conférence et on a énormément travaillé ensemble depuis. Nos discussions scientifiques, toujours stimulantes, ont fait éclore bien des idées, dont certaines se retrouvent dans ce mémoire.

Mais si on retrace une carrière, on prend conscience qu’elle est faite de rencontres avec des collègues qui tous vous influencent et vous inspirent. Il est temps de les remercier ici, bien que ce soit un exercice périlleux, le risque d’en oublier étant très grand. Merci donc à Ahn LE VAN, pour m’avoir fait confiance et m’avoir proposé un sujet de DEA passionnant. Merci à Bernard PESEUX et Erwan VERRON qui ont encadré ma thèse, à Mark SHEPHARD et Joseph FLAHERTY avec qui j’ai fait mon premier postdoc. Ils ont été source d’inspiration et ont encouragé mes explorations. Merci à Claude STOLZ avec qui cela a toujours été un plaisir de travailler.

Merci aux collègues (ou anciens collègues) du GeM : patrice CARTRAUD, Alexis SALZMAN, benoît LE, Ahmed LOUKILI, Gilles MARCKMANN, patrick ROZYCKI, Anthony NOUY, Laurent STAINIER, Julien RÉTHORÉ, Pascal COSSON, Laurent GORNET ... Avec une mention spéciale pour Gregory LEGRAIN toujours enthousiaste et avec qui c'est un plaisir de coder !

Merci aux doctorants qui m'ont supporté, Kristell DRÉAU, yasir ALAM, Nicolas BONFILS, Mathieu GRAVELEAU et Tauno TIIRATS.

Un tout grand merci à Jean-François REMACLE que j'ai rencontré au RPI et qui m'a accueilli à l'UCL pendant mon postdoc. Il m'a énormément appris et j'ai hâte que l'on retravaille ensemble.

Merci bien sûr aux membres du jury que je n'ai pas encore cités, mais qui ont accepté de se pencher sur mes travaux. Je remercie donc les rapporteurs Anthony GRAVOUIL, Corrado MAURINI et Julien YVONNET ainsi que les autres membres du jury : Steven LE CORRE et Armelle CHABOT.

Enfin, je remercie Émilie ma compagne, dont le soutien a été sans failles et mon fils Alphonse, 9 ans, qui a su être patient en attendant que son papa retrouve du temps pour lui.

# Table des matières

<b>Introduction et remerciements</b>	<b>3</b>
<b>I Dossier personnel</b>	<b>9</b>
<b>Introduction au dossier personnel</b>	<b>11</b>
<b>1 Déroulement de la carrière</b>	<b>13</b>
1.1 Curriculum Vitae . . . . .	13
1.2 Formation et thèse de doctorat . . . . .	14
1.2.1 Synthèse de la Production Scientifique . . . . .	14
1.3 Post-Doc RPI - SCOREC . . . . .	15
1.3.1 Activités . . . . .	15
1.3.2 Synthèse de la Production Scientifique . . . . .	15
1.4 Postdoc Louvain-la-Neuve . . . . .	15
1.4.1 Activités . . . . .	15
1.4.2 Synthèse de la Production Scientifique . . . . .	16
1.5 Maître de conférences à Centrale Nantes, affecté au GeM . . . . .	16
1.5.1 Activités . . . . .	16
1.5.2 Production Scientifique . . . . .	16
<b>2 Synthèse des activités d'encadrement et de recherche</b>	<b>19</b>
2.1 Activité d'encadrement de la recherche . . . . .	19
2.1.1 Co-encadrement de thèse de doctorat soutenues . . . . .	19
2.1.2 Co-encadrement de thèses en cours . . . . .	23
2.1.3 Encadrement de thèse de master recherche . . . . .	24
2.2 Responsabilité scientifique . . . . .	26
2.2.1 Contrats de recherche évalués suite à appel à projet . . . . .	26
2.2.2 Contrats de recherche de gré à gré . . . . .	27
2.3 Rayonnement scientifique . . . . .	27
2.3.1 Participation à des jurys de thèse de doctorat (hors établissement) . . . . .	27
2.3.2 Membre de Comité de suivi de Thèse . . . . .	28
2.3.3 Membre de Comité de sélection pour le recrutement de maître de Conférences . . . . .	29
2.3.4 Organisations de congrès . . . . .	29

2.3.5	Review pour des revues scientifiques . . . . .	29
2.4	Liste complète des publications . . . . .	29
2.4.1	Synthèse . . . . .	29
2.4.2	Articles dans des revues internationales à comité de lecture . . . . .	30
2.4.3	Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture et actes publiés . . . . .	32
2.4.4	Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture et actes publiés . . . . .	36
<b>II</b>	<b>Dossier recherche</b>	<b>39</b>
	<b>Introduction au dossier recherche</b>	<b>41</b>
<b>1</b>	<b>Contributions aux Méthodes Galerkin Discontinue</b>	<b>43</b>
1.1	Introduction et Bibliographie . . . . .	43
1.1.1	Contexte et circonstances . . . . .	43
1.1.2	Bibliographie . . . . .	43
1.1.3	Description sommaire de la méthode et de ses avantages . . . . .	44
1.2	Contribution : équations d'Euler, adaptation de maillage et traitement des chocs . . . . .	46
1.2.1	Présentation de la méthode DG appliquée aux équations d'Euler . . . . .	47
1.2.2	Détection des discontinuités . . . . .	49
1.2.3	Adaptation de maillage . . . . .	52
1.2.4	Conclusion sur les travaux DG/équations d'Euler . . . . .	57
1.3	Conclusions sur le chapitre . . . . .	57
<b>2</b>	<b>X-FEM</b>	<b>59</b>
2.1	Introduction . . . . .	59
2.2	Contribution à X-FEM : Une proposition pour l'enrichissement de pointe de fissure et l'intégration des fonctions singulières . . . . .	60
2.2.1	Introduction . . . . .	60
2.2.2	Discrétisation X-FEM des fissures . . . . .	61
2.2.3	Règle d'intégration . . . . .	67
2.2.4	Convergence en maillage . . . . .	85
2.3	Conclusions . . . . .	94
<b>3</b>	<b>ILS : Une méthode Level Set pour les problèmes comportant des contraintes d'in-égalités</b>	<b>97</b>
3.1	Introduction . . . . .	97
3.2	Modélisation dans le cas des membranes . . . . .	99
3.3	Discrétisation du problème à $\Gamma$ fixé . . . . .	101
3.4	Optimisation de forme . . . . .	103
3.5	Une généralisation simple aux problèmes avec adhérence. . . . .	108
3.6	Résultats . . . . .	108
3.6.1	Problème axi-symétrique . . . . .	108
3.6.2	Problème axi-symétrique, traité en deux dimensions . . . . .	112
3.6.3	Problème en deux dimensions . . . . .	114
3.7	Au delà des problèmes de membrane . . . . .	115
3.8	Conclusion . . . . .	116

<b>4</b>	<b>Modélisation numérique de l'endommagement : de TLS à Lipfield</b>	<b>119</b>
4.1	Introduction et bibliographie . . . . .	119
4.2	La méthode TLS "Thick-Level-Set" . . . . .	121
4.2.1	Introduction à la TLS . . . . .	121
4.2.2	Description du modèle TLS . . . . .	122
4.2.3	Quelques résultats obtenus avec le modèle TLS . . . . .	129
4.2.4	Amélioration de la précision du modèle TLS discret : l'algorithme de double découpe . . . . .	133
4.2.5	Conclusion sur la TLS . . . . .	139
4.3	Le modèle Lip-field . . . . .	140
4.3.1	Introduction . . . . .	140
4.3.2	Matériaux standards généralisés . . . . .	140
4.3.3	Variable d'adoucissement et régularisation de Lipschitz . . . . .	142
4.3.4	Régularisation de Lipschitz pour une barre unidimensionnelle discrétisée . . . . .	148
4.3.5	Conclusions sur le cas unidimensionnel . . . . .	154
4.4	Extension au cas 2d . . . . .	155
4.4.1	Le modèle mécanique : formulation non régularisée . . . . .	156
4.4.2	Régularisation de Lipschitz et cadre discret . . . . .	158
4.4.3	Résultats . . . . .	163
4.4.4	Conclusions et travaux futurs . . . . .	173
4.5	Annexe Lip-field . . . . .	174
4.5.1	Preuve pour les bornes . . . . .	174
4.5.2	Preuve des inclusions (4.114) . . . . .	176
4.5.3	Algorithme basé sur celui de Dijkstra pour calculer les limites (4.127) et (4.128). . . . .	176
4.5.4	Preuve des bornes dans le cas discret . . . . .	177
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>179</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>181</b>





# Dossier personnel





# Introduction au dossier personnel

Cette première partie de mon mémoire, le dossier personnel, tente de faire un bilan de mes activités et de mon parcours de recherche, depuis mes débuts jusqu'au moment d'écrire ces lignes. Ayant soutenu ma thèse de doctorat en janvier 2002, c'est plus de 20 ans de carrière qu'il s'agit de résumer, en se conformant à la trame traditionnelle de ce type de document.

Ce dossier personnel est divisé en deux chapitres. Dans le premier, je résume le déroulement de ma carrière de chercheur. Il s'ouvre par mon curriculum vitae, qui décrit succinctement mon parcours en commençant par mes années de formation, suivies de 5 ans de postdoc. Mon premier postdoc s'est déroulé au Rensselaer Polytechnic Institute (RPI) aux États-Unis, suivi d'un second poste à l'Université Catholique de Louvain-la-Neuve (UCL) où j'ai approfondi mon expérience en recherche. En 2006, j'ai postulé comme enseignant-chercheur à l'École Centrale de Nantes où je fus recruté comme maître de conférences et où je suis toujours en poste, aujourd'hui en ce début d'année 2023. Le chapitre se poursuit par une description un peu plus détaillée de chacune des périodes importantes en mettant l'accent sur les thématiques de recherche déployées et en évoquant mes activités d'enseignement.

Le second chapitre fait le bilan, chiffré, de mes activités de recherche, regroupées en quatre sections. Dans la première, je fais le tour de mes activités d'encadrement de thèse de doctorat et de mémoire de master. Dans la deuxième, je décris les différents projets auxquels j'ai participé ainsi que les rôles et responsabilités que j'ai eus dans chacun d'eux. Le troisième fait le bilan des activités démontrant un rayonnement scientifique ou une expertise. La dernière partie est consacrée à la liste mes publications et communications scientifiques référencées.



# 1

## Déroulement de la carrière

### 1.1 Curriculum Vitae

**Nom :** CHEVAUGEON

**Prénom :** Nicolas

**Date de Naissance :** 12/08/0975 **Grade :** Maître de conférences hors classe

**Établissement d'affectation :** École Centrale de Nantes

**Laboratoire d'affectation :** Institut de recherche en génie civil et mécanique (GeM, UMR6183)

- 1993-1995 Étudiant en classe préparatoire au lycée François 1er de Fontainebleau **Math-Sup/Spé M** et obtention du **DEUG A** délivré par Paris Sud XI, Orsay.
- 1995-1998 Étudiant Ingénieur à l'**École Centrale de Nantes**, Option Calcul de Structures pour les deux dernières années. **Diplôme d'Ingénieur**, Obtenu avec mention assez bien. En parallèle, obtention du Diplôme d'Études Approfondies (**DEA**) Génie Mécanique avec la mention bien. Titre du mémoire : *La plasticité écrouissable en grandes déformations – Théorie et applications numériques*, sous la direction de Ahn Le VAN.
- 1998-2002 **Doctorant** Titre de la thèse : *Contribution à l'étude des membranes hyperélastiques en grandes déformations*. Soutenue le 14 janvier 2002. Collaboration entre l'Ecole Centrale Nantes et IMI de Boucherville, Québec, Sous la direction de Bernard PESEUX et Erwan VERRON
- 2002-2004 **Research Associate** au Rensselaer Polytechnic Institute (RPI), à Troy, état de New York, USA, dans l'unité SCOREC, Scientific Computation Research Center, sous la direction de Mark S. SHEPHARD et Joseph E. FLAHERTY. *Thématique de Recherche* : Adaptations de maillage, calcul parallèle, équations d'Euler, Méthode Galerkin discontinue.
- 2004-2006 **Post-Doc** à l'université Catholique de Louvain-la-Neuve (UCL), Belgique. Laboratoire de Génie Civil et Environnemental, sous la direction du professeur Jean-François REMACLE. *Thématiques de Recherche* : Méthode Galerkin discontinu, aéro-acoustique, modélisation de l'océan, problèmes de surface libre.

- 2006 - **Maître de conférences**, École Centrale de Nantes, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM, UMR6183). Activités d'enseignement dans le département MMGC (mécanique, thermique, génie-civil).  
*Thématiques de Recherche* : développement de la méthode X-FEM, Endommagement, rupture, propagation de fissures, développement de la méthode TLS (Thick-level-set), Modélisation du contact (Inequality Level Set), Lip-field.  
*Enseignements* : Mécanique et Informatique (dont une grande part en anglais)  
*Responsabilités* : Membre élu du **Conseil Scientifique** de l'École Centrale (2010-2018, 2020-2022), Membre du Conseil de Laboratoire du GeM (2017-2021), comité préparation évaluation HCERES du Laboratoire, Responsable Master International Computational Mechanics depuis 2011.
- 2012-2015 Travaux récompensés par la **PES** (Prime Excellence Scientifique)
- 2012-2017 Membre du projet **ERC XLS**, piloté par N. Moës
- 2016-2019 Travaux récompensés par la **PEDR** (Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche)
- Sept. 2018 Promu maître de conférences hors classe.

## 1.2 Formation et thèse de doctorat

À L'issue des concours, j'ai été admis à l'École Centrale de Nantes où j'ai obtenu mon diplôme d'ingénieur généraliste avec une spécialité en calcul des structures. Mon stage de fin d'études était orienté vers la recherche et dirigé par Didier BROCHARD au CEA de Saclay, où j'ai travaillé sur le développement d'un élément fini homogénéisé pour simuler l'interaction entre les fluides et les structures d'un faisceau de tubes périodiques. Ce travail a été présenté lors d'un congrès ([Bro+98]). En parallèle de ma formation d'ingénieur, j'ai également obtenu un DEA en mécanique en 1998. Mon stage de recherche était dirigé par Ahn LE-VAN au laboratoire de Mécanique et Matériaux (maintenant intégré au GeM) et a abouti à la soutenance de mon mémoire sur le développement et la validation d'un code d'éléments finis pour la plasticité 3D en grandes déformations.

J'ai poursuivi mes études par un doctorat en génie mécanique sous la direction de Bernard PESEUX et co-encadré par Erwan VERRON, de fin 1998 à début 2002. La thèse a été réalisée en collaboration avec l'IMI, l'Institut des Matériaux Industriels à Boucherville, Québec, où j'ai passé 10 mois. Je travaillais alors sur la modélisation des membranes en grandes déformations pour des applications en thermoformage. Cela a été l'occasion de développer un élément fini membrane de classe C1 original, d'intégrer des lois de comportement hyperélastiques anisotropes pour prendre en compte la présence de fibres et d'étudier numériquement la stabilité et les bifurcations associées au gonflement de membranes. J'ai finalement soutenu ma thèse en janvier 2002, dont le mémoire est référencé ci-dessous :

**N. CHEVAUGEON.** « Contribution à l'étude des membranes hyperélastiques en grandes déformations ». Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Nantes, 2002. eprint : <https://theses.hal.science/tel-00826561>.

Dans le temps de la thèse, j'étais aussi enseignant vacataire pour la formation continue en mécanique notamment (environ 75 heures sur les 3 ans).

### 1.2.1 Synthèse de la Production Scientifique

- Mémoire de thèse [Che02]
- 1 article dans une revue internationale à comité de lecture. [Che+02]
- 3 communications dans des congrès internationaux à comité de lecture et actes publiés. [Bro+98; Che+00; Che+01c]

- 3 Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture et actes publiés. [Rot+01 ; Che+01b ; Che+01a]

## 1.3 Post-Doc RPI - SCOREC

### 1.3.1 Activités

Après ma thèse, je suis parti aux États-Unis pour 2 ans, à Troyes, New York, où j'ai rejoint le SCOREC<sup>1</sup>, un laboratoire au sein du RPI<sup>2</sup>. Sous la direction de Mark SHEPHARD et en collaboration avec Joseph FLAHERTY et Jean-François REMACLE, je travaillais alors sur le développement numérique de la méthode Galerkin-Discontinue (DG) pour résoudre les équations d'Euler. En plus de mes travaux scientifiques, j'étais responsable de l'amélioration du logiciel utilisé, notamment en termes de couplage avec les codes d'adaptation de maillage et les outils de parallélisation du SCOREC. Je supervisais également des étudiants en thèse dans le laboratoire, notamment Peng HU [Pen05] avec qui j'ai eu une collaboration fructueuse.

Dans cette même période, j'ai eu une première expérience de participation à un grand projet collaboratif entre plusieurs universités et centres de recherche américains au travers du TSTT<sup>3</sup>, un projet qui s'est étalé de 2001 à 2005, financé par le Scidac<sup>4</sup>. L'objectif principal du projet était de développer des technologies rendant plus facile l'utilisation par des scientifiques de plusieurs techniques de maillage et de discrétisation à l'intérieur d'une même simulation, sur des ordinateurs parallèles de grande échelle (téraflops). Pour cela il a fallu développer des outils logiciel interopérable et performants, au travers de composants possédant des interfaces bien définies.

Parallèlement j'ai eu l'occasion de diversifier mes enseignements. J'ai notamment enseigné, en remplacement de M. SHEPHARD, un cours d'éléments finis (niveau M2). J'ai aussi organisé et animé des travaux pratiques numériques autour de Galerkin Discontinue au cours de l'école d'été "Summer School on Numerical Analysis, CEA /INRIA 2003 : *Adaptive Methods and Conservation Laws*", avec J. FLAHERTY et B. COCKBURN à Saint-Lambert-des-Bois, Centre Port-Royal.

### 1.3.2 Synthèse de la Production Scientifique

- 3 Articles dans des revues internationales à comité de lecture. [Kri+04 ; Che+05a ; She+05]
- 6 Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture et actes publiés. [Rem+02 ; Che+03a ; Che+03b ; Hu+03 ; Cle+03 ; Li+04]

## 1.4 Postdoc Louvain-la-Neuve

### 1.4.1 Activités

De retour en Europe, j'ai poursuivi par un second post-doc en Belgique, à l'université de Louvain-La-Neuve (UCL), pour une durée de 2 ans et 6 mois. Accueilli au laboratoire de Génie Civil et Environnemental et sous la direction de Jean-François REMACLE qui y avait pris un poste de professeur entre temps, j'ai continué à travailler sur les méthodes Galerkin discontinues (DG). J'étais impliqué dans le projet européen MESSIAEN (décrit plus en détails au paragraphe 2.2.1), pour lequel j'ai développé un logiciel DG haut ordre, parallèle, pour des applications en **aéro-acoustique temporelle**. Pendant ce séjour, en plus de mes propres travaux, j'ai eu l'occasion de collaborer avec des étudiants

---

1. SCOREC : Scientific Computation Research Center

2. RPI : Rensselaer Polytechnic Institute

3. TSTT : Terascale Simulation Tools and Technologies, <https://tstt-scidac.org/>

4. Scidac : Scientific Discovery through Advanced Computing

en thèse qui utilisaient tous le code que je développais. Cela m'a permis de diversifier les applications sur lesquelles j'ai travaillé à cette époque :

- écoulement à surface libre par une méthode couplée level-set (DG) et Navier-Stokes volume finis, avec E. MARCHANDISE,
- équations en eau peu profonde (shallow water) discrétisés avec DG, avec Paul-Emile BERNARD,
- équations Navier-Stokes incompressibles, discrétisé avec DG haut ordre, avec Koen HILLWAERT.

J'ai eu de plus la chance d'encadrer deux thèses de master et de participer aux enseignements de Mathématique, d'Informatique et de Dynamique des systèmes élastiques (Niveau L3/M1, 40 ETD).

### 1.4.2 Synthèse de la Production Scientifique

- 7 Articles dans des revues internationales à comité de lecture. [Mar+06 ; Hil+06b ; Mar+07 ; Ber+07 ; Che+07a ; Rem+07 ; Mar+08]
- 5 Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture et actes publiés. [Rem+04 ; Ber+05 ; Che+05b ; Che+06 ; Hil+06a]

## 1.5 Maître de conférences à Centrale Nantes, affecté au GeM

### 1.5.1 Activités

En septembre 2006, je suis recruté comme maître de conférences à l'École Centrale de Nantes. De retour sur les lieux de ma formation, je passe de l'autre côté du bureau pour me consacrer pour moitié à l'enseignement. J'effectue mon service principalement dans le département de mécanique et génie civil, où j'enseigne la mécanique (MMC, vibrations), le calcul scientifique (différences finies, éléments finis, systèmes linéaires) et la programmation (algorithmique, C++, calcul parallèle), à un public pour moitié d'élèves ingénieurs (L3, M1, M2) et pour moitié de masters internationaux (cours en anglais, M1, M2). Je suis rapidement devenu responsable du parcours de master international "Computational Mechanics" qui a été labélisé deux fois ERASMUS-MUNDUS par l'Europe dans le cadre d'une collaboration avec les universités de Barcelone, Swansea et Stuttgart. Je m'implique de plus dans la gouvernance de l'école via son conseil scientifique où j'ai accompli 2 mandats.

Côté recherche, j'ai été accueilli au GeM (UMR6183) dans l'équipe de Nicolas MOËS. J'ai commencé par travailler sur des améliorations de la méthode X-FEM avant de l'utiliser pour résoudre des problèmes de contact avec une approche originale (Inequality Level-Set). Mon activité s'est développée parallèlement autour de la modélisation de l'endommagement et de la rupture avec la proposition du modèle TLS (Thick-Level-Set) en collaboration avec Claude STOLZ et Nicolas MOËS, puis plus récemment avec la proposition du modèle lip-field. J'encadre régulièrement des thèses de master et j'ai co-encadré cinq thèses de doctorat soutenues. Actuellement, je co-encadre deux thèses. J'ai également été fortement impliqué dans la gouvernance du laboratoire en tant qu' élu du conseil de laboratoire. J'ai participé à de nombreux projets de recherche collaboratifs, notamment l'ERC-XLS détaillé plus loin.

### 1.5.2 Production Scientifique

- 17 Articles dans des revues internationales à comité de lecture. [Dré+10b ; Moë+11a ; Lev+11 ; Ber+12 ; Bon+12 ; Leg+12a ; Bat+13 ; Che+13c ; Moë+14b ; Gra+15 ; Sal+16 ; Mor+17 ; Tii+20 ; Moë+21b ; Che+22a ; Moë+23]
- 38 Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture et actes publiés. [Che+07b ; Ion+ ; Dré+08 ; Che+08 ; Moë+08 ; Moe+ ; Moë+09 ; Ber+10a ; Ber+10c ; Che+10 ;

- Ber+10b ; Dré+10a ; Bon+10 ; Mag+10 ; Moë+11c ; Leg+11a ; Che+11b ; Leg+12b ; Che+12 ; Moë+12b ; Moë+12a ; Gra+13 ; Moë+13a ; Moe+13a ; Moë+13b ; Moe+13b ; Che+13b ; Che+13a ; Che+14 ; Moë+14a ; Gra+14 ; Lé+19a ; Lé+19b ; Tii+19 ; Moë+21a ; Che+22b ; Lé+22a ; Lé+22b]
- 13 Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture et actes publiés. [Bon+09 ; Lév+09 ; Moë+11b ; Ber+11 ; Sto+11 ; Leg+11b ; Che+11a ; Che+15 ; Sal+15 ; Che+22c ; Che+22d ; Gop+22 ; Moë+22a]





# 2

## Synthèse des activités d'encadrement et de recherche

### 2.1 Activité d'encadrement de la recherche

Tableau de synthèse

Co-encadrement de thèses de doctorat soutenues	5
Co-encadrement de thèses de doctorat en cours	2
Encadrement de thèses de master recherche	11

#### 2.1.1 Co-encadrement de thèse de doctorat soutenues

##### 1. Kristell DRÉAU

Titre	Méthode X-FEM à ordre élevé : Influence de la représentation géométrique.
Financement	Bourse MENRT
Début-Fin	Septembre 2007 - 8 Novembre 2010
Encadrement	50%. Directeur : Nicolas MOËS 50%
Mémoire	<a href="https://www.theses.fr/2010ECDN0043">https://www.theses.fr/2010ECDN0043</a>
Publications	2 articles [Dré+10b; Leg+12a], 3 conférences [Dré+08; Dré+10a; Leg+11b; Leg+11a]
Carrière	Kristell est actuellement Professeure en classe préparatoire à La Rochelle.

**Contexte et Problématique.** Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la génération ou la modification des maillages peut s'avérer délicate ou coûteuse en présence de géométries complexes tridimensionnelles. Le maillage doit respecter les surfaces physiques du domaine étudié : les surfaces sont modélisées par le bord des éléments, et ne peuvent les traverser (maillage conforme aux discontinuités). La gestion des discontinuités mobiles comme lors de la propagation d'une fissure implique un remaillage à chaque évolution des surfaces. La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) permet de simplifier ces problèmes liés à la représentation géométrique. Les éléments ne doivent pas obligatoirement respecter les surfaces de discontinuités du domaine. Celles-ci sont définies par exemple à l'aide de fonctions de niveau (level-sets),

projetées sur le maillage de calculs. L'approximation est ensuite enrichie par des fonctions permettant de représenter le comportement mécanique local au niveau des discontinuités. À l'époque de la thèse, la méthode X-FEM était principalement utilisée avec des fonctions d'approximation linéaires et une représentation linéaire de la géométrie sur les éléments. L'objectif de cette thèse était de contribuer au développement de l'utilisation de fonctions d'approximation d'ordre élevé dans le cadre X-FEM, notamment lorsque la structure présente des interfaces courbées, tout en conservant une représentation de la géométrie des interfaces indépendante du maillage. L'influence de la représentation géométrique sur la précision des résultats de discrétisation haut ordre a été étudiée dans le cas de surfaces libres, de fissures, et d'interfaces entre deux matériaux, en élasticité linéaire. De nouvelles fonctions d'enrichissement ont été proposées de manière à représenter correctement le comportement des matériaux dans les éléments traversés par des discontinuités courbées.

## 2. Syed Yasir ALAM

Titre	Experimental study and numerical analysis of crack opening in concrete
Début-Fin	Septembre 2007 - 10 Mai 2011
Encadrement	50%. directeur : Ahmed LOUKILI 50%
Mémoire	<a href="https://www.theses.fr/2011ECDN0001">https://www.theses.fr/2011ECDN0001</a>
Carrière	Syed Yasir est actuellement maître de conférences à Centrale Nantes (GeM).
Note	Thèse rédigée en anglais.

**Contexte et Problématique.** L'existence d'un effet d'échelle sur les résistances nominales des matériaux quasi-fragiles tels que les matériaux cimentaires est communément admise. Cet effet doit être pris en compte dans le dimensionnement vis-à-vis du comportement ultime des structures en béton afin de prédire les fissures éventuelles et la durabilité. Dans le cadre de ce travail, on s'est attaché à étudier expérimentalement et numériquement les relations entre la longueur de fissure et la taille des éprouvettes. Sur le plan expérimental, l'effet d'échelle a été caractérisé pour des essais de flexion trois-points sur des poutres de béton entaillées dont les géométries sont liées par un facteur d'échelle. L'influence de la taille des agrégats sur le comportement à la rupture a aussi été étudiée. La corrélation d'images (DIC) a été utilisée pour déterminer à la fois la longueur et l'ouverture de la fissure à différentes étapes de chargement. La technique s'est révélée être un outil robuste et précis pour ce type de mesures. Les résultats ont montré un effet de taille significatif sur le processus de propagation des fissures, cet effet diminuant avec la taille des agrégats. L'effet d'échelle sur l'ouverture et l'espacement des fissures a été étudié parallèlement sur des poutres en béton armé. Sur le plan numérique, le comportement à la rupture des poutres en béton a été simulé en utilisant un modèle d'endommagement non-local. La longueur interne et d'autres paramètres du modèle ont été calibrés par étude inverse. L'analyse du comportement mécanique et de la propagation des fissures dans les simulations a montré un effet d'échelle similaire à celui extrait des résultats expérimentaux.

## 3. Nicolas BONFILS

Titre	Traitement des contraintes d'inégalité volumique dans un milieu continu par la méthode X-FEM et Level-Set
Financement	Bourse MENRT
Début-Fin	Septembre 2007 - 19 Mai 2011

Encadrement	50%. Directeur : Nicolas MOËS 50%
Mémoire	<a href="https://www.theses.fr/2011ECDN0028">https://www.theses.fr/2011ECDN0028</a>
Publications	1 article [Bon+12], 3 conférences [Bon+09 ; Bon+10 ; Che+11b]
Carrière	Nicolas est aujourd'hui ingénieur de recherche à l'IFP.

**Contexte et Problématique.** On retrouve des contraintes d'inégalité dans différents problèmes mécaniques (contact entre autres). Le principal problème que l'on rencontre est la résolution d'une inégalité variationnelle, la zone où la contrainte est active n'étant pas connue a priori. Dans cette thèse, nous avons proposé une nouvelle méthode de résolution des problèmes de contraintes d'inégalités dans un milieu continu en cherchant de manière itérative la forme de la zone contrainte, devenue maintenant une inconnue du problème. À l'aide d'outils numériques, comme la méthode X-FEM et les level-sets, on a transformé le problème de minimisation sous contraintes en un problème d'optimisation de forme. La géométrie de la zone où la contrainte s'applique, définie par une level-set, est recherchée itérativement. La méthode, que nous appelons maintenant ILS (Inequality Level-Set) est appliquée ici au cas de matériaux hyperélastiques qui deviennent inextensibles après une certaine limite. Elle a été comparée à des méthodes plus classiques (contrainte active) dans le cadre de cette thèse.

#### 4. Matthieu GRAVELEAU

Titre	A first approach on how to solve contact problems using the Inequality Level-Set
Financement	ERC-XLS
Début-Fin	Septembre 2012 - Novembre 2015
Encadrement	50%. directeur : Nicolas MOËS 50%
Mémoire	<a href="https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01545613">https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01545613</a>
Publications	1 article [Gra+15], 4 conférences [Gra+13 ; Che+13a ; Gra+14 ; Che+15]
Carrière	Matthieu poursuit sa carrière chez Saint-Gobain.

**Contexte et Problématique.** Cette thèse propose une méthode qui tire avantage des fonctions de niveau pour résoudre des problèmes de contact, dans la continuité de la thèse de Nicolas BONFILS et dans le cadre de l'ERC-XLS (voir paragraphe 2.2.1). L'importance de la formulation variationnelle et de la discrétisation est mise en exergue tout au long de ce manuscrit. Premièrement, des enrichissements sont proposés afin de donner une représentation précise des phénomènes de contact. Par la suite, des formulations adaptées sont suggérées afin que la condition de Babuška-Brezzi soit vérifiée. Quoiqu'il en soit, la plus grande originalité de ce travail réside dans la manière de trouver la zone de contact. Une optimisation de forme couplée à une méthode de Newton a été mise en place. Différents critères sont proposés afin de conduire cette optimisation de forme. Leur dérivées sont déterminées en calculant la dérivée directionnelle de la formulation variationnelle du problème d'équilibre, permettant ainsi de réutiliser le travail fait pour résoudre ce dernier problème. Cette méthode s'est montrée efficace et précise pour une grande gamme de problèmes, dont les problèmes de membranes en contact ou les problèmes de Hertz.

## 5. Tauno TIIRATS

Titre	Prise en compte du revêtement dans la simulation d'un assemblage complexe : application aux connexions filetées via l'essai tribologique des cylindres croisés
Financement	CIFRE, partenaire : Vallourec
Début-Fin	Octobre 2017 - 20 janvier 2021
Encadrement	40%. directeur : Nicolas MOËS 30%, co-encadrant Claude STOLZ 30%
Mémoire	<a href="https://www.theses.fr/2021ECDN0004">https://www.theses.fr/2021ECDN0004</a>
Publications	1 article [Tii+20], 1 Ccnfrence [Tii+19]
Carrière	Tauno est actuellement Post-Doc à l'université de Tartu, Estonie
Note	Thèse rédigée en anglais sous le titre <i>Inclusion of thin coatings in large scale simulations : application to threaded connections on the example of Crossed Cylinder wear test</i> . La thèse est confidentielle. Elle est en embargo jusqu'à 2031.

**Contexte et Problématique.** Cette thèse a été effectuée dans le cadre d'une convention CIFRE avec Vallourec. Le secteur des produits tubulaires pétrolier et gazier s'éloigne progressivement de la lubrification à base de graisse dans les connections filetés et s'oriente vers l'utilisation de revêtements solides. Pour assurer une étanchéité totale et éviter une défaillance des surfaces en contact en raison d'une dégradation, il faut être en mesure d'estimer la réponse mécanique et l'usure de ces revêtements. Simuler cela avec un modèle éléments finis en utilisant les techniques de discrétisation volumétrique traditionnelles peut conduire à une augmentation significative du coût de calcul. Ce travail propose une solution alternative pour modéliser plus efficacement les revêtements fins et souples dans l'analyse par éléments finis. Nous avons proposé d'utiliser une méthode de réduction de modèle de sorte que le revêtement soit remplacé par une interface, où l'épaisseur est décrite par une variable dimensionnelle interne. Le champ de déplacement dans la couche réduite peut être approché par une expansion polynomiale sur les coefficients de déplacement respectifs. L'approximation polynomiale de la couche la rend compatible avec le cadre des éléments finis. Il peut même être implémenté dans des logiciels commerciaux. Le modèle proposé est validé à l'aide d'une campagne de tests spécialement conçue, basée sur un essai d'usure de type cylindres croisés. On montre que le nouveau modèle a une bonne corrélation avec les mesures expérimentales et permet d'étudier en détail les mécanismes d'usure des revêtements. La méthodologie est particulièrement bien adaptée aux problèmes impliquant des revêtements fins. En outre, il existe une réduction de coût significative par rapport à une discrétisation volumétrique complète de la couche. En conclusion, c'est une solution prometteuse à considérer dans les simulations d'usure de grandes structures avec des revêtements fins, tel qu'une simulation complète d'un assemblage fileté.

### 2.1.2 Co-encadrement de thèses en cours

#### 1. Rajasekar GOPALSAMY

Titre provisoire	<i>Extension of viscoelastic damage model and comparison to laboratory fracture tests on Asphalt concrete.</i>
Encadrement	Ferhat HAMMOUM (Directeur), Olivier CHUPIN, Nicolas CHEVAUGEON
Date de Début	septembre 2020.
Publications	Une conférence [Gop+22] et un article soumis.

**Contexte et Problématique.** Cette thèse est le fruit d'une collaboration entre l'**Université Gustave Eiffel** campus Nantes (IFSTTAR) et le GeM. La compréhension de la fissuration dans les bitumes nécessite des modèles permettant de coupler la prédiction de l'endommagement au caractère visqueux du matériau, très sensible à la température et à la cinétique du chargement. Dans le cadre de cette thèse, des modèles visco-élastiques endommageable régularisés ont été développés jusqu'à leur résolution numérique. Les approches "phase-field" et "Lip-field" (Voir chapitre 4.3) ont été comparées. La thèse se poursuit actuellement par des analyses en dynamique.

#### 2. Madhavi REDDY

Titre provisoire	<i>A regularized damage model for fracture in rechargeable batteries.</i>
Financement	bourse jointe NEXT/IIT Madras
Encadrement	Sundararajan NATARAJAN (Directeur), Gregory LEGRAIN et Nicolas CHEVAUGEON
Date de Début	janvier 2023.

**Contexte et Problématique.** Cette thèse est le fruit d'une collaboration entre l'**IIT Madras** et l'École Centrale. Les batteries rechargeables fruit es Li-ion sont aujourd'hui utilisées pour une multitude d'applications (électrification des véhicules, stockage d'énergie). Une préoccupation majeure des fabricants de batteries est le risque de défaillance suite à l'apparition de fissures dans les électrodes due aux cycles de charges et décharges répétées. La cinétique des batteries est complexe et se caractérise par des mécanismes physico-chimiques multiphases impliquant le transport de masse et de charge, la transition de phase, le changement de volume, les couplages entre diffusion et l'évolution des surfaces de fissure dans les électrodes. Des méthodes numériques robustes sont donc nécessaires pour la prédiction du comportement physique du vieillissement des batteries. En particulier le traitement de la nucléation, la propagation, la ramification et la coalescence des fissures est un défi. Cette thèse vise à proposer des solutions innovantes à ce défi en s'appuyant sur le modèle d'endommagement régularisé Lip-field qui sera étendu afin de prendre en compte l'influence des différentes physiques ayant lieu dans les batteries et couplé a des techniques d'adaptation de maillage.

**2.1.3 Encadrement de thèse de master recherche****1. Sarah VAN BOGAERT et Thomas CASON<sup>1</sup>**

Titre	Éléments finis discontinus d'ordre élevé pour la Modélisation de la propagation d'Ondes Acoustiques.
Début-Fin	Février-Juin 2004
Encadrement	100%
Note	Thomas a poursuivi par une thèse de doctorat à l'UCL.

**2. Gaëtan COMPÈRE et Christophe LE POLAIN DE WAROUX<sup>1</sup>**

Titre	Modélisation numérique de l'interaction fluide-structure pour des membranes hyperélastiques en grandes déformations.
Début-Fin	Février-Juin 2005
Encadrement	50% (50% Émilie MARCHANDISE)
Note	Gaëtan a poursuivi par une thèse de doctorat à L'UCL.

**3. Guillaume BARRAS**

Titre	Réponse dynamique des structures aux explosions sous-marines : Confrontation de méthodes analytiques au calcul numérique.
Début-Fin	Mai - Octobre 2007
Encadrement	50% (50% Patrice CARTRAUD)
Note	Guillaume a poursuivi par une thèse de doctorat au LML de Lille.

**4. Kristell DRÉAU**

Titre	Méthode X-FEM à ordre élevé : représentation de la géométrie.
Début-Fin	Février - Juillet 2007
Encadrement	50% (50% Nicolas MOËS)
Note	Kristell a poursuivi par une thèse de doctorat à Centrale Nantes sous ma co-direction.

**5. Anne-Lise GUILMIN**

Titre	Study of the propagation of defects governed by a brutal damage law using a coupled boundary element and level set technique.
Début-Fin	Janvier - Juin 2009
Encadrement	50% (50% Nicolas MOËS)
Note	Anne-Lise a poursuivi par une thèse de doctorat au laboratoire Navier, LCPC.

---

1. À l'UCL, à l'époque, l'équivalent des thèses de master recherche était réalisé en binôme sur 6 mois dans les laboratoires de l'université

**6. Saeid MOJIRI**

Titre	Extended Finite Element Method for Cohesive Crack Model-Study of Different Algorithms
Début-Fin	Janvier - Juin 2010
Encadrement	100%
Note	Saeid a poursuivi par une thèse de doctorat au canada, McMaster University.

**7. Santiago GIRALDO ARIAS**

Titre	High Order X-FEM : Improving Numerical Integration.
Début-Fin	Janvier - Juin 2011
Encadrement	100%

**8. Erick HIGASHI**

Titre	Implementation using a Graphics Processing Unit : Acceleration of an eXtended Finite Element code.
Début-Fin	Janvier - Juin 2012
Encadrement	100%
Note	Erick a poursuivi par une carrière en ingénierie au Mexique.

**9. Gurpratap Singh PAUL**

Titre	Modelisation of contact problems between soft membranes and rigid bodies using abaqus,
Début-Fin	Mars - Août 2016
Encadrement	100%
Note	Gurpratap Singh est aujourd'hui ingénieur de développement.

**10. Ruiyang DAI**

Titre	Developing ILS method for contact problems in large strain setting
Début-Fin	Mars - Août 2016
Encadrement	100%
Note	Ruiyang a poursuivi par une thèse à l'UCL.

**11. Balanand JAYASANKAR**

Titre	Numerical Modelling of crack initiation and propagation under fretting fatigue loading
Début-Fin	Mars - Août 2018
Encadrement	100%



Carrière

Balanand poursuit une carrière d'ingénieur éléments finis pour Michelin.

## 2.2 Responsabilité scientifique

### 2.2.1 Contrats de recherche évalués suite à appel à projet

**FP6 - MESSIAEN** *MESSIAEN : Methods for Efficient SimulationS of Aircraft Engine Noise*

Partenaires : Free Field Technologies(**FFT, Coordinateur**), Ucl, Odegaard & Danneskiold-Samsøe, Vibratec, University of Southampton, Technische Universiteit Eindhoven, Airbus France, Rolls Royce, Aermacchi, Turbomeca, et Liebherr Aerospace Toulouse.

Le projet MESSIAEN a été financé par l'Europe dans le cadre du FP6, à hauteur de 1 594 k€.

**Décembre 2003 - Février 2007.**

**Rôle dans le projet :** Membre du projet, développement de la méthode Galerkin discontinu en temps "quadrature free" pour l'acoustique temporelle, responsable du développement du code Galerkin discontinu temporel, en parallèle distribué. Mon salaire était financé par ce projet pendant mon Post-Doc à Louvain-la-Neuve.

**ERC - XLS** *XLS : New frontiers for computational solid mechanics based on extended level set representations : Applications to damage mechanics, contact mechanics and stress analysis.* Porté par Nicolas **MOËS** (principal investigator), financé par l'european research council (Advanced Grant) à hauteur de 1 957 k€, **Avril 2012 - Mars 2017.**

**Rôle dans le projet :** Participation à la rédaction du projet, membre de l'équipe, bénéficiant d'une partie de la subvention sous forme de décharge de service (1/3), Co-développement de la librairie eXlibris<sup>1</sup>, participation au développement de la méthode TLS et ILS, co-encadrement de la thèse de Mathieu Graveleau financée par l'ERC. [Gra15]

**ERC-Poc - MatCrack** *Industrialization of software and libraries for crack propagation in material and structures using the Thick Level Set method.* Financé par l'ERC PoC, (proof of concept), partenariat entre l'école centrale de Nantes et CénAero Belgique, Budget ERC : 150 k€, **Septembre 2017 - Février 2019.**

**Rôle dans le projet :** Participation au développement et au maintien de la librairie eXlibris.

**ANR-PRC Adventure** *3D dAta DrIVEn iNvestigation of faTigUe cRack growth with ovErload effects, Étude 3D Data-Driven de la propagation des fissures de fatigue avec effets de surcharge*, collaboration entre LaMcube, MATEIS, GeM et CTIF, porté par Nathalie **LIMODIN** (LaMCube), budget 630 k€, **janvier 2021- septembre 2024.**

**Rôle dans le projet :** Extraction et analyses des facteurs d'intensité de contrainte des données tomographique, co-encadrement d'un postdoctorant à partir de septembre 2023.

**ANR/FNS PRCI - CLIP-** *Fragmentation dynamique par l'approche cohésive Lipschitz* Projet collaboratif international entre l'École Centrale Nantes et l'EPFL, porté par Jean François **MOLINARI** et Nicolas **MOËS**, financé par l'ANR et le FNS (Fond National Suisse). Le projet financera 3 thèses en co-tutelle et 1 post doc. **Janvier 2023 - Décembre 2027.**

**Rôle dans le projet :** Participation au développement de la méthode Lip-field et adaptation au contexte de fissure cohésive en dynamique. Co-encadrement de thèse, développement de logiciel, à hauteur de 20% de mon temps de travail.

---

1. Dépôt Git de eXlibris : <https://git.gem.ec-nantes.fr/eXlibris>

**ERC Synergy X-MESH** *An eXtreme Mesh deformation method to follow sharp physical interfaces*, Synergie entre l'UCL et l'École Centrale, portée par Nicolas **MOËS** et Jean-François **REMACLE**. Sur une durée de 6 ans, le projet est financé à hauteur de 5M€. Il financera 2 post-doc et 8 doctorants. **Septembre 2023 - Août 2029.**

**Rôle dans le projet :** Participation à la rédaction de la demande de financement, un des 3 "seniors staff" du projet avec Jonathan Lambrechts et Benoît Le. Développement de l'approche, co-encadrement de thèses, co-rédaction des publications, à hauteur de 30% de mon temps de travail.

### 2.2.2 Contrats de recherche de gré à gré

- Participation à un contrat avec SNECMA sur la propagation de fissure : Livraison d'un plug-In d'extraction des facteurs d'intensité de contrainte pour le logiciel ZéBulon.
- Responsable de deux contrats de consultance avec ESI Lyon en 2013 et 2014 : propagation de fissure et son implémentation dans le code de calcul SYSTUS.
- Responsable du contrat de thèse CIFRE Ecole Centrale/Vallourec, budget accompagnement 105 k€, septembre 2017 – septembre 2020. Rédaction du sujet, négociation du contrat d'accompagnement encadrement du doctorant.

## 2.3 Rayonnement scientifique

### 2.3.1 Participation à des jurys de thèse de doctorat (hors établissement)

Candidat	Titre	Directeur de thèse	Lieu	Date de soutenance
Koen HILLEWAERT	Development of the discontinuous Galerkin method for high-resolution, large scale CFD and acoustics in industrial geometries	Jean-François REMACLE	Université Catholique de Louvain-la-Neuve, <b>Belgique</b>	15/02/2013
Gaëtan BRICTEUX	Engineering analysis with non conforming meshes and levelsets	Jean-François REMACLE	Université Catholique de Louvain-la-Neuve, <b>Belgique</b>	14/10/2016
Lina HOMSI	Development of non-linear Electro-Thermo-Mechanical Discontinuous Galerkin formulations	Ludovic NOELS	Université de Liège, <b>Belgique</b>	24/06/2017

## 2.3.2 Membre de Comité de suivi de Thèse

Doctorant	Sujet	Encadrement	Lieu	Date de Soutenance
kevin MOREAU	Simulation numérique par une approche level set épaisse de l'impact à basse vitesse sur matériaux énergétiques	Nicolas MOËS	Centrale Nantes	Octobre 2014
Andrès PARRILLA-GÓMEZ	Analyse numérique et analytique couplée d'un modèle d'endommagement gradué	Claude STOLZ, Nicolas MOËS	Centrale Nantes	novembre 2015
Benoît LÉ	Contribution à la simulation numérique des structures en béton armé : utilisation de fonctions de niveau pour la modélisation de la fissuration et des renforts	Nicolas MOËS, Gregory LEGRAIN	Centrale Nantes	novembre 2016
Mathieu LE CREN	Propagation robuste de défauts en 3D.	Nicolas MOËS, Patrick MASSIN, Alexandre Martin	Centrale Nantes/EDF	octobre 2018
Adrien RENAUD	The Discontinuous Galerkin Material Point Method : Application to hyperbolic problems in solid mechanics	Laurent STAINIER, Thomas HEUZÉ	Centrale Nantes	décembre 2018.
Oleg BALABANOV	Randomized linear algebra for model order reduction	Antony NOUY et Núria PARÉS MARINÉ	Centrale Nantes	octobre 2019
Alexis SALZMAN	Développement de l'approche « Thick Level Set » dans un cadre 3D parallèle	Nicolas MOËS	Centrale Nantes	octobre 2019
Shaoqi WU	Éléments finis étendus pour la modélisation des interfaces en vibro-acoustique dissipative	Grégory LEGRAIN	Centrale Nantes	octobre 2022

Alaa LAKISS	High Order Discontinuous Galerkin Material Points Method	Laurent STAINIER, Thomas HEUZÉ et Mikhael Tannous	Centrale Nantes/BIU	
-------------	--	---	---------------------	--

### 2.3.3 Membre de Comité de sélection pour le recrutement de maître de Conférences

- Poste MCF 575-4002 pour l'Ecole Centrale de Nantes en 2012.
- Poste MCF0034 pour l'INSA de Rennes en 2013.

### 2.3.4 Organisations de congrès

**International Symposium on Defect and Material Mechanics, ISDMM13, Nantes 1-3 Juill. 2013** Membre du comité d'organisation de la conférence internationale ISDMM13.

**Congrès Français de Mécanique, CFM, Nantes, 29 août - 2 septembre 2022.** Co-organisateur de la session S26 - Tribologie et mécanique du contact.

### 2.3.5 Review pour des revues scientifiques

source : web of science

- 5 pour *European Journal of Mechanics -A/solids*,
- 5 pour *Finite Elements in Analysis and Design*,
- 3 pour *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,
- 2 pour *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,
- 2 pour *Meccanica*,
- 1 pour *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*,
- 1 pour *Comptes Rendus - Mécanique*,
- 1 pour *Engineering with Computers*.

## 2.4 Liste complète des publications

### 2.4.1 Synthèse

Articles dans des revues internationales à comité de lecture	27
Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture et actes publiés	51 (dont 6 keynotes)
Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture et actes publiés	17 (dont 1 keynote)
Bibliométrie (source : Scopus)	1307 citations <i>h</i> -index 19
Bibliométrie (source : Google Scholar)	2209 citations <i>h</i> -index 21

### 2.4.2 Articles dans des revues internationales à comité de lecture

1. **N. CHEVAUGEON**, G. MARCKMANN, E. VERRON et B. PESEUX. « Instabilité et bifurcation du soufflage de membranes hyperélastiques ». In : *Revue Européenne des Éléments Finis* 11.2-4 (2002), p. 479-492. DOI : [10.3166/reef.11.479-492](https://doi.org/10.3166/reef.11.479-492). HAL : [hal-01381716](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01381716)
2. L. KRIVODONOVA, J. XIN, J.-F. REMACLE, **N. CHEVAUGEON** et J. E. FLAHERTY. « Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws ». In : *Applied Numerical Mathematics* 48.3 (2004), p. 323-338. ISSN : 0168-9274. DOI : [10.1016/j.apnum.2003.11.002](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2003.11.002). HAL : [hal-01007288](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007288)
3. **N. CHEVAUGEON**, J. XIN, P. HU, X. LI, D. CLER, J. E. FLAHERTY et M. S. SHEPHARD. « Discontinuous Galerkin methods applied to shock and blast problems ». In : *Journal of Scientific Computing* 22.1-3 (2005), p. 227-243. DOI : [10.1007/s10915-004-4138-4](https://doi.org/10.1007/s10915-004-4138-4). HAL : [hal-01006753](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006753)
4. M. S. SHEPHARD, J. E. FLAHERTY, K. E. JANSEN, X. LI, X. LUO, **N. CHEVAUGEON**, J.-F. REMACLE, M. W. BEALL et R. M. O'BARA. « Adaptive mesh generation for curved domains ». In : *Applied Numerical Mathematics* 52.2 (2005), p. 251-271. DOI : [10.1016/j.apnum.2004.08.040](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2004.08.040). HAL : [hal-03928764](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03928764)
5. E. MARCHANDISE, J.-F. REMACLE et **N. CHEVAUGEON**. « A quadrature-free discontinuous Galerkin method for the level set equation ». In : *Journal of Computational Physics* 212.1 (2006), p. 338-357. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2005.07.006](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.07.006). HAL : [hal-01004934v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01004934v1)
6. K. HILLEWAERT, **N. CHEVAUGEON**, P. GEUZAINÉ et J.-F. REMACLE. « Hierarchic multigrid iteration strategy for the discontinuous Galerkin solution of the steady Euler equations ». In : *International journal for numerical methods in fluids* 51.9-10 (2006), p. 1157-1176. DOI : [10.1002/fld.1135](https://doi.org/10.1002/fld.1135). HAL : [hal-01006922v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006922v1)
7. E. MARCHANDISE, P. GEUZAINÉ, **N. CHEVAUGEON** et J.-F. REMACLE. « A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for the computation of bubble dynamics ». In : *Journal of Computational Physics* 225.1 (2007), p. 949-974. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2007.01.005](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.01.005). HAL : [hal-01004949v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01004949v1)
8. P.-E. BERNARD, **N. CHEVAUGEON**, V. LEGAT, E. DELEERSNIJDER et J.-F. REMACLE. « High-order h-adaptive discontinuous Galerkin methods for ocean modelling ». In : *Ocean Dynamics* 57.2 (2007), p. 109-121. DOI : [10.1007/s10236-006-0093-y](https://doi.org/10.1007/s10236-006-0093-y). HAL : [hal-01006928](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006928)
9. **N. CHEVAUGEON**, K. HILLEWAERT, X. GALLEZ, P. PLOUMHANS et J.-F. REMACLE. « Optimal numerical parameterization of discontinuous Galerkin method applied to wave propagation problems ». In : *Journal of Computational Physics* 223.1 (2007), p. 188-207. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2006.09.005](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.09.005). HAL : [hal-01007166v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007166v1)
10. J.-F. REMACLE, **N. CHEVAUGEON**, É. MARCHANDISE et C. GEUZAINÉ. « Efficient visualization of high-order finite elements ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 69.4 (2007), p. 750-771. DOI : [10.1002/nme.1787](https://doi.org/10.1002/nme.1787). HAL : [hal-01006787](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006787)
11. E. MARCHANDISE, **N. CHEVAUGEON** et J.-F. REMACLE. « Spatial and spectral superconvergence of discontinuous Galerkin method for hyperbolic problems ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 215.2 (2008), p. 484-494. DOI : [10.1016/j.cam.2006.03.061](https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.03.061). HAL : [hal-01007314](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007314)
12. K. DRÉAU, **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.29 (2010), p. 1922-1936. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2010.01.021](https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.01.021). HAL : [hal-01007338](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007338)

13. N. MOËS, C. STOLZ, P.-E. BERNARD et N. CHEVAUGEON. « A level set based model for damage growth: The thick level set approach ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86.3 (2011), p. 358-380. DOI : [10.1002/nme.3069](https://doi.org/10.1002/nme.3069). HAL : [hal-01517313](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01517313)
14. A. LEVY, S. L. CORRE, N. CHEVAUGEON et A. POITOU. « A level set based approach for the finite element simulation of a forming process involving multiphysics coupling: Ultrasonic welding of thermoplastic composites ». In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 30.4 (2011), p. 501-509. ISSN : 0997-7538. DOI : [10.1016/j.euromechsol.2011.03.010](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.03.010). HAL : [hal-00753960](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00753960)
15. P.-E. BERNARD, N. MOËS et N. CHEVAUGEON. « Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach: Efficient discretization for quasi-static loadings ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 233-236 (2012), p. 11-27. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2012.02.020](https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.02.020). HAL : [hal-01006715](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006715)
16. N. BONFILS, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « Treating volumetric inequality constraint in a continuum media with a coupled X-FEM/level-set strategy ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 205-208 (2012). **Special Issue on Advances in Computational Methods in Contact Mechanics**, p. 16-28. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2011.02.012](https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.02.012). HAL : [hal-00569557](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00569557)
17. G. LEGRAIN, N. CHEVAUGEON et K. DRÉAU. « High order X-FEM and levelsets for complex microstructures: Uncoupling geometry and approximation ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2012), p. 172-189. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2012.06.001](https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.06.001). HAL : [hal-00703239](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00703239)
18. A. BATAILLY, B. MAGNAIN et N. CHEVAUGEON. « A comparative study between two smoothing strategies for the simulation of contact with large sliding ». In : *Computational Mechanics* 51.5 (2013), p. 581-601. DOI : [10.1007/s00466-012-0737-3](https://doi.org/10.1007/s00466-012-0737-3). HAL : [hal-00711088](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00711088)
19. N. CHEVAUGEON, N. MOËS et H. MINNEBO. « Improved crack tip enrichment functions and integration for crack modeling using the extended finite element method ». In : *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 11.6 (2013), p. 597-631. DOI : [10.1615/IntJMultCompEng.2013006523](https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2013006523). HAL : [hal-01006957](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006957)
20. N. MOËS, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « Coupling local and non-local damage evolutions with the Thick Level Set model ». In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 1.16 (2014), p. 1-21. DOI : [10.1186/s40323-014-0016-2](https://doi.org/10.1186/s40323-014-0016-2). HAL : [hal-01154910](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01154910)
21. M. GRAVELEAU, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « The inequality level-set approach to handle contact: membrane case ». In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 2.1 (2015), p. 1-25. DOI : [10.1186/s40323-015-0034-8](https://doi.org/10.1186/s40323-015-0034-8). HAL : [hal-01398280](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01398280)
22. A. SALZMAN, N. MOËS et N. CHEVAUGEON. « On use of the thick level set method in 3D quasi-static crack simulation of quasi-brittle material ». In : *International Journal of Fracture* 202.1 (2016), p. 21-49. DOI : [10.1007/s10704-016-0132-8](https://doi.org/10.1007/s10704-016-0132-8). HAL : [hal-01692311](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01692311)
23. K. MOREAU, N. MOËS, N. CHEVAUGEON et A. SALZMAN. « Concurrent development of local and non-local damage with the Thick Level Set approach: Implementation aspects and application to quasi-brittle failure ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 327 (2017), p. 306-326. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2017.08.045](https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.08.045). HAL : [hal-03928065](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03928065)
24. T. THIRATS, N. CHEVAUGEON, N. MOËS, C. STOLZ, N. MAROUF et E. DESDOIT. « How to efficiently apply soft thin coating to existing Finite Element contact model ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 177 (2020), p. 103420. ISSN : 0168-874X. DOI : [10.1016/j.finel.2020.103420](https://doi.org/10.1016/j.finel.2020.103420). eprint : [hal-03033222](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03033222)

25. N. MOËS et **N. CHEVAUGEON**. « Lipschitz regularization for softening material models: The Lip-field approach ». In : *Comptes Rendus - Mécanique* 349.2 (mar. 2021), p. 415-434. ISSN : 18737234. DOI : [10.5802/CRMECA.91](https://doi.org/10.5802/CRMECA.91). HAL : [hal-03806305](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03806305). arXiv : [2103.16345](https://arxiv.org/abs/2103.16345)
26. **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Lipschitz regularization for fracture: The Lip-field approach ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 402 (A Special Issue in Honor of the Lifetime Achievements of J. Tinsley Oden 2022), p. 115644. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2022.115644](https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115644). HAL : [hal-03927211](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03927211). arXiv : [2111.04771](https://arxiv.org/abs/2111.04771)
27. N. MOËS, J.-F. REMACLE, J. LAMBRECHTS, B. LÉ et **N. CHEVAUGEON**. « The eXtreme Mesh deformation approach (X-MESH) for the Stefan phase change model ». In : *Journal of Computational Physics* (2023), p. 111878. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2022.111878](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111878). arXiv : [2111.04179](https://arxiv.org/abs/2111.04179)

### 2.4.3 Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture et actes publiés

1. D. BROCHARD, F. JEDRZEJEWSKI, **N. CHEVAUGEON** et R.-J. GIBERT. « Fluid structures interaction in tube bundles: Analysis of tube movements in opposite directions ». In : *ASME - PVP Conference, 1998* (26-30 juil. 1998). T. 366. San Diego, USA : ASME PVP, 1998, p. 179-186
2. **N. CHEVAUGEON**, E. VERRON et B. PESEUX. « Finite Element Analysis of Nonlinear Transversely Isotropic Membranes for Thermoforming Applications ». In : *III European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000* (11-14 sept. 2000). Barcelona, Spain, 2000, p. 1-17. HAL : [hal-01805121](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01805121)
3. **N. CHEVAUGEON**, E. VERRON et B. PESEUX. « Modelling of fibers reinforced polymer sheet for blow-molding and thermoforming applications ». In : *3rd Pacific Rim Conference of Rheology* (Vancouver, Canada, 8-13 juil. 2001). 2001
4. J.-F. REMACLE, X. LI, **N. CHEVAUGEON** et M. S. SHEPHARD. « Transient Mesh Adaptation Using Conforming and Non Conforming Mesh Modifications. » In : *Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable IMR* (Ithaca, New York, USA, 15-18 sept. 2002). 2002, p. 261-272. HAL : [hal-03923484](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03923484)
5. **N. CHEVAUGEON**, J. FLAHERTY, L. KRIVODONOVA, J.-F. REMACLE et M. SHEPHARD. « Adaptive and parallel discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation law ». In : *7th US Nat. Congress on Comp. Mech.* (27-31 juil. 2003). **keynote**. 2003, p. 448
6. **N. CHEVAUGEON**, J.-F. REMACLE, J. E. FLAHERTY, D. CLER et M. S. SHEPHARD. « Application of discontinuous Galerkin method. Large scale problem: Cannon blast modeling ». In : *7th US Nat. Congress on Comp. Mech.* (27-31 juil. 2003). 2003, p. 470
7. P. HU, **N. CHEVAUGEON**, J. E. FLAHERTY et M. S. SHEPHARD. « Modelizations of moving object in a fluid flow using level set ». In : *7th US Nat. Congress on Comp. Mech.* (Albuquerque, New Mexico, United States, 27-31 juil. 2003). 2003, p. 288
8. D. L. CLER, **N. CHEVAUGEON**, M. S. SHEPHARD et J. REMACLE. « CFD application to gun muzzle blast a validation case study ». In : *41st AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit* (Reno, Nevada, USA, 6-9 jan. 2003). 2003, p. 1-20. DOI : [10.2514/6.2003-1142](https://doi.org/10.2514/6.2003-1142). HAL : [hal-03939856](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03939856)
9. X. LI, J.-F. REMACLE, **N. CHEVAUGEON** et M. S. SHEPHARD. « Anisotropic Mesh Gradation Control. » In : *International Meshing Roundtable*. Citeseer. 2004, p. 401-412
10. J.-F. REMACLE et **N. CHEVAUGEON**. « Dispersion analysis of discontinuous galerkin schemes an applications to aeroacoustics ». In : *6th World Congress on Computational Mechanics (WCCM)* (Beijing, China, 5-10 sept. 2004). 2004



11. P.-E. BERNARD, **N. CHEVAUGEON**, V. LEGAT, E. DELEERSNIJDER et J.-F. REMACLE. « High-order h-adaptive discontinuous Galerkin methods for ocean modelling ». In : International Conference on Adaptive Modeling and Simulation, ADMOS 2005 (Barcelona, Spain, 8-10 sept. 2005). 2005. HAL : [hal-03936577](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03936577)
12. **N. CHEVAUGEON**, J.-F. REMACLE, X. GALLEZ, P. PLOUMHANS et S. CARO. « Efficient discontinuous Galerkin methods for solving acoustic problems ». In : *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, (26th AIAA Aeroacoustics Conference)* (Monterey, California, USA, 23-25 mai 2005). 2005. DOI : [10.2514/6.2005-2823](https://doi.org/10.2514/6.2005-2823)
13. **N. CHEVAUGEON**, J.-F. REMACLE et X. GALLEZ. « Discontinuous Galerkin implementation of the extended Helmholtz resonator model in time domain ». In : *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference* (Cambridge, Massachusetts, 8-10 mai 2006). 2006. DOI : [10.2514/6.2006-2569](https://doi.org/10.2514/6.2006-2569). HAL : [hal-03920882](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03920882)
14. K. HILLEWAERT, J.-F. REMACLE, **N. CHEVAUGEON**, P.-E. BERNARD et P. GEUZAINÉ. « Analysis of a hybrid p-Multigrid method for the discontinuous Galerkin discretisation of the Euler equations ». In : *ECCOMAS CFD 2006: Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics, Egmond aan Zee, The Netherlands* (Egmond aan Zee, The Netherlands, 5-8 sept. 2006). Delft University of Technology; European Community on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS). 2006
15. **N. CHEVAUGEON**, N. MOËS, H. MINNEBO et E. BÉCHET. « Robust computation of stress intensity factors within the eXtended Finite Element Method ». In : *International Conference on Computational Fracture and Failure of Materials and Structures (CFRAC)* (Nantes, France, 11-13 juin 2007). 2007. HAL : [hal-03922959](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03922959)
16. I. IONESCU, N. MOËS, P. CARTRAUD, **N. CHEVAUGEON** et M. BÉRINGHIER. « Image-Based Micromechanics Analysis using Level Sets and the Extended Finite Elements Method ». In : IWCMM17, 17th International Workshop on Computational Mechanics of Materials (Paris, France, 22-24 août 2007)
17. K. DRÉAU, **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « High order extended finite element method: influence of the geometrical representation ». In : *8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008)* (Venise, Italie, 30 juin-5 juil. 2008). 2008. HAL : [hal-01008254](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01008254). eprint : <http://congress2.cimne.com/eccomas/proceedings/eccomas2008/pdfs/a1682.pdf>
18. **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Model of Crack Propagation with the Extended Finite Element Method ». In : *8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008)* (Venise, Italie, 30 juin-5 juil. 2008). 2008. eprint : <http://congress2.cimne.com/eccomas/proceedings/eccomas2008/pdfs/a3083.pdf>
19. N. MOËS, **N. CHEVAUGEON** et F. DUFOUR. « A regularized brittle damage model solved by a level set technique ». In : IUTAM Symposium on Theoretical, Computational and Modelling Aspects of Inelastic Media (Cape Town, Afrique du Sud, 14-18 jan. 2008). Springer. 2008, p. 89-96. DOI : [10.1007/978-1-4020-9090-5\\_8](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9090-5_8). eprint : [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4020-9090-5\\_8](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4020-9090-5_8)
20. N. MOES, C. STOLZ et **N. CHEVAUGEON**. « A New Level set Based Regularization for Local Damage Models: Theoretical Description and 1D Numerical Experiments ». In : 12th international Conference on Fracture (ICF-12) (Ottawa, Canada, 12-17 juil. 2009), p. 6910-6919. eprint : <https://www.proceedings.com/07799.html>
21. N. MOËS, C. STOLZ et **N. CHEVAUGEON**. « A thick level-set approach to damage mechanics ». In : 4th Symposium on defect and material mechanics, ISDMM09 (Trento, Italy,



- 5-9 juil. 2009). **presenting author : chevaugeron**. 2009. eprint : [hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007816v1](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007816v1)
22. P.-E. BERNARD, N. MOËS, C. STOLZ et **N. CHEVAUGEON**. « A thick level set approach for damage growth modeling and transition to fracture ». In : *Second International Workshop on Advances in Computational Mechanics* (Yokohama, Japan, 29-31 mar. 2010). 2010
  23. P.-E. BERNARD, N. MOËS, C. STOLZ et **N. CHEVAUGEON**. « Damage growth modeling and transition to fracture using level set functions ». In : 9th World Congress on Computational Mechanics and 4th Asian Pacific Congress on Computational Mechanics (WCCM-APCOM) (Sydney, Australia, 8-13 juil. 2010). 2010
  24. **N. CHEVAUGEON**, N. MOËS, C. STOLZ et P.-E. BERNARD. « A thick level approach for brittle damage ». In : 4th European Conference on Computational Mechanics (ECCM2010) (Paris, France, 16-21 mai 2010). **keynote**. 2010
  25. P.-E. BERNARD, N. MOËS, C. STOLZ et **N. CHEVAUGEON**. « A thick level set approach to model evolving damage and transition to fracture ». In : 4th European Conference on Computational Mechanics (ECCM2010) (Paris, France, 16-21 mai 2010). 2010
  26. K. DRÉAU, **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Higher order x-fem for curved cracks ». In : *4th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2010)* (Paris, France, 16-21 mai 2010). 2010. HAL : [hal-01008257](http://hal-01008257)
  27. N. BONFILS, **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Treating inequality constraint in a continuous medium with a coupled x-fem/level-set strategy ». In : *4th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2010)* (16-21 mai 2010). Paris, France, 2010. HAL : [hal-03919679](http://hal-03919679)
  28. B. MAGNAIN, A. BATAILLY, **N. CHEVAUGEON** et P. CARTRAUD. « Comparative study of the use of C1-continuous finite elements and splines for contact problems with large slidings ». In : 4th European Conference on Computational Mechanics (ECCM2010) (Paris, France, 16-21 mai 2010). 2010. HAL : [hal-00657382](http://hal-00657382)
  29. N. MOËS, P.-E. BERNARD, **N. CHEVAUGEON** et al. « The Thick Level Set Damage Model Coupled to the eXtended Finite Element Method to Simulate Initiation and Complex Cracking Patterns ». In : *11th International Conference on Computational Plasticity*. 2011
  30. G. LEGRAIN, **N. CHEVAUGEON** et K. DRÉAU. « High order eXtended Finite Element Method and Level Sets: Uncoupling geometry and approximation ». In : International Conference on Extended Finite Element Methods - XFEM 2011 (Cardiff, United Kingdom, 29 juin-1<sup>er</sup> juil. 2011). **keynote**. 2011
  31. **N. CHEVAUGEON**, N. BONFILS et N. MOËS. « Treating volumetric inequality constraint in a continuum media with a coupled X-FEM/Level-Set strategy ». In : *5th International Conference on Advanced COmputational Methods in ENgineering (ACOMEN)* (14-17 nov. 2011). Liège, Belgique, 2011. HAL : [hal-03950857](http://hal-03950857)
  32. G. LEGRAIN et **N. CHEVAUGEON**. « High-order X-FEM for image-based computations ». In : *6th european congress on computational methods in applied sciences and engineering (EC-COMAS2012)* (Viennes, Autriche, 10-14 sept. 2012). 2012
  33. **N. CHEVAUGEON**, N. MOËS et P.-E. BERNARD. « Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach ». In : (Vienna, Austria, 10-14 sept. 2012). **keynote**. 2012. HAL : [hal-03920517](http://hal-03920517)
  34. N. MOËS, P.-E. BERNARD, C. STOLZ et **N. CHEVAUGEON**. « Handling Localization in Damage Models With the Thick Level Set Approach (TLS) ». In : *ASME 2012 11th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis* (2-4 juil. 2012). American Society of Mechanical Engineers. 2012, p. 67-70. DOI : [10.1115/ESDA2012-82711](https://doi.org/10.1115/ESDA2012-82711)

35. N. MOËS, P.-E. BERNARD, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « Avoiding spurious damage localization with a new non-local damage model : the thick level-set approach ». In : *Advances in Computational Science, Engineering and Mathematics, dedicated to professor J. Tinsey Oden, ACSEM* (19-20 jan. 2012). University of Texas at Austin, United States, 2012. eprint : <https://sites.google.com/site/acsem12/2011-ieee-ss>
36. M. GRAVELEAU, N. MOËS et N. CHEVAUGEON. « A new coupled X-FEM/Level-Set strategy to solve contact problem ». In : *III South-East European Conference on Computational Mechanics (SEECCM III)* (Kos Island, Greece, 12-14 juin 2013). T. 2084. 2013
37. N. MOËS, C. STOLZ, N. CHEVAUGEON et A. SALZMAN. « The Thick Level Set Model: A non-local damage model allowing automatic crack placement inside localization zones ». In : *Proceedings of CFRAC 2013, Computational Modeling of Fracture and Failure of Materials and Structures* (Prague, Czech Republic, 5-7 juin 2013). 2013, p. 5-7
38. N. MOËS, N. CHEVAUGEON et M. GRAVELEAU. « The eXtended Finite Element Method and level sets to handle inequality constraints ». In : *International Conference on Extended Finite Element Methods, XFEM 2013*. Lyon, France, 2013, p. 1. HAL : [hal-03928432](https://hal-03928432). eprint : <https://xfem2013.sciencesconf.org/browse/author6655.html?authorid=201712>
39. N. MOËS, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « The thick level-set model for damage growth and transition to fracture ». In : 6th International Symposium on Defect and Material Mechanics (ISDMM13) (Nantes Ecole Centrale, France, 1<sup>er</sup>-5 juil. 2013). 2013
40. N. CHEVAUGEON, N. MOËS et A. SALZMAN. « Damage propagation modeling using the TLS model ». In : 6th International Symposium on Defect and Material Mechanics (ISDMM13) (Nantes Ecole Centrale, France, 1<sup>er</sup>-5 juil. 2013). 2013
41. N. CHEVAUGEON, M. GRAVELEAU et N. MOËS. « A new coupled X-FEM/Level-Set strategy to solve contact problem ». In : *III International Conference on Computational Contact Mechanics (ICCCM2013)* (10-12 juil. 2013). Lecce, Italie, 2013. HAL : [hal-01007777/](https://hal-01007777/)
42. N. CHEVAUGEON, A. SALZMAN et N. MOËS. « Vector level set contouring algorithm and associated enrichment functions for the eXtended Finite Element Method ». In : *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)* (Barcelona, Espagne, 20-25 juil. 2014). 2014. eprint : <http://congress.cimne.com/iacm-eccomas2014/admin/files/fileabstract/a3865.pdf>
43. N. MOËS, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « Coupling local and non-local damage evolutions with the Thick Level Set Model ». In : *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)* (Barcelone, Espagne, 20-25 juil. 2014). 2014. eprint : <http://congress.cimne.com/iacm-eccomas2014/admin/files/fileabstract/a3628.pdf>
44. M. GRAVELEAU, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « On a new method to solve contact problems with an evolving level-set ». In : *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)* (20-25 juil. 2014). Barcelone, Espagne, 2014. HAL : [hal-03950863](https://hal-03950863). eprint : <http://congress.cimne.com/iacm-eccomas2014/admin/files/fileabstract/a1786.pdf>
45. B. LÉ, A. SALZMAN, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « Mixed mode crack propagation in concrete using the Thick Level Set approach to fracture ». In : VI International Conference on Computational Modeling of Fracture and Failure of Materials and Structures. (CFRAC) (Braunschweig, Germany, 12-14 juin 2019). 2019. eprint : <http://congress.cimne.com/cfrac2019/admin/files/fileabstract/a238.pdf>
46. B. LÉ, N. CHEVAUGEON, A. SALZMAN et N. MOËS. « Mixed mode crack propagation in PMMA using the Thick Level Set approach to fracture ». In : VI International Conference on Computational Modeling of Fracture and Failure of Materials and Structures. (CFRAC) (Braunschweig, Germany, 12-14 juin 2019). 2019. eprint : <http://congress.cimne.com/cfrac2019/admin/files/fileabstract/a115.pdf>

47. T. TIIRATS, **N. CHEVAUGEON**, N. MOËS, C. STOLZ et N. MAROUF. « A thin layer model based on polynomial expansion for coated bodies in contact ». In : *VI. International Conference on Computational Contact Mechanics (ICCCM)* (Hannover, Germany, 3-5 juil. 2019). 2019. HAL : [hal-02388285](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388285)
48. N. MOËS et **N. CHEVAUGEON**. « Lipschitz Regularization for softening elastic and plastic material models: The Lip-Field Approach ». In : 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Milan, Italie, 22-27 août 2021). **keynote**. 2021. eprint : [https://iutam.org/publications/ictam-proceedings/ictam\\_2020/](https://iutam.org/publications/ictam-proceedings/ictam_2020/)
49. **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Lipschitz Regularization For Softening Material ». In : 15th World Congress on Computational Mechanics (WCCM-XV) and 8th Asian Pacific Congress on Computational Mechanics (APCOM-VIII) (Yokohama, Japon, 31 juil.-5 août 2022). **keynote**. 2022. eprint : [https://www.wccm2022.org/dl/index/book\\_of\\_abstracts.pdf](https://www.wccm2022.org/dl/index/book_of_abstracts.pdf)
50. B. LÉ, N. MOËS, **N. CHEVAUGEON** et J.-F. REMACLE. « The eXtreme Mesh deformation approach (X-MESH) for sharp contact fronts modeling ». In : 15th World Congress on Computational Mechanics (WCCM-XV) and 8th Asian Pacific Congress on Computational Mechanics (APCOM-VIII) (Yokohama, Japon, 31 juil.-5 août 2022). 2022. eprint : [https://www.wccm2022.org/dl/index/book\\_of\\_abstracts.pdf](https://www.wccm2022.org/dl/index/book_of_abstracts.pdf)
51. B. LÉ, N. MOËS, **N. CHEVAUGEON** et J.-F. REMACLE. « The eXtreme Mesh deformation approach (X-MESH) to follow contact fronts in a sharp manner ». In : 11th European Solid mechanics Conference (ESMC) (Galway, Ireland, 4-8 juil. 2022). 2022. eprint : <https://az659834.vo.msecnd.net/eventsairwesteuprod/production-abbey-public/c0fbc730335844c4a674d715116d438c>

#### 2.4.4 Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture et actes publiés

1. R. ROTINAT, **N. CHEVAUGEON**, J.-P. REGOIN, E. VERRON et B. PESEUX. « Soufflage libre de membrane élastomère cylindrique : mesure optique du champ de déformation ». In : *2ème Colloque Méthodes et Techniques Optiques pour l'Industrie* (Trégastel, France, 20-23 nov. 2001). **20-23 Novembre**. 2001, p. 155-160
2. **N. CHEVAUGEON**, E. VERRON, G. MARCKMANN et B. PESEUX. « Instabilité et bifurcation des membranes hyperélastiques ». In : *5ème Colloque National en Calcul des Structures, tome II* (15-18 mai 2001). 2001, p. 869-876. HAL : [hal-01792905](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01792905)
3. **N. CHEVAUGEON**, E. VERRON et B. PESEUX. « Construction d'une loi de comportement isotrope-transverse pour la simulation du Thermoformage de thermoplastiques hargés de fibres ». In : *15 ème Congrès Français de Mécanique* (3-7 sept. 2001). Nancy, France, 2001, p. 1-6. HAL : [hal-01805113](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01805113)
4. N. BONFILS, **N. CHEVAUGEON**, G. MARCKMANN et N. MOËS. « Prise en compte d'une limite d'extensibilité en grandes transformations ». In : 9e Colloque National en Calcul des Structures (25-29 mai 2009). Giens, France, 2009. HAL : [hal-01422167v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01422167v1)
5. A. LÉVY, S. LE CORRE, A. POITOU et **N. CHEVAUGEON**. « Développement d'un code éléments finis pour simuler le soudage par ultrasons de matériaux composites ». In : Journées nationales sur les composites, JNC 16 (Toulouse, France, 10-12 juin 2009). AMAC, 2009, 10 p. HAL : [hal-00387409](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00387409)
6. N. MOËS, C. STOLZ, P.-E. BERNARD, **N. CHEVAUGEON** et al. « Modélisation de l'endommagement par l'évolution d'une fonction de niveau: le modèle TLS ». In : 10e colloque national en calcul des structures (presqu'île de Giens, (Var), 9-13 mai 2011). 2011

7. P.-E. BERNARD, N. MOËS et **N. CHEVAUGEON**. « Améliorations et validation du modèle d'endommagement par level set épaisse (TLS) ». In : 10e colloque national en calcul des structures (presqu'île de Giens, (Var), 9-13 mai 2011). 2011. HAL : [hal-00595891](#)
8. C. STOLZ, N. MOËS, P.-È. BERNARD et **N. CHEVAUGEON**. « Modèles d'endommagement par level-set épaisse: solutions analytiques et simulations ». In : 10e colloque national en calcul des structures (presqu'île de Giens, (Var), 9-13 mai 2011). 2011, 8-p. HAL : [hal-00592732](#)
9. G. LEGRAIN, **N. CHEVAUGEON** et K. DRÉAU. « Simulations de géométries complexes avec X-FEM et Level-Sets : Séparation de l'approximation et de la géométrie ». In : 10e colloque national en calcul des structures (presqu'île de Giens, (Var), 9-13 mai 2011). Giens, France, 2011, Clé USB. HAL : [hal-00592785](#)
10. **N. CHEVAUGEON**, P.-E. BERNARD et N. MOËS. « Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach ». In : *20ème Congrès Français de mécanique* (Besançon, France, 28 août-2 sept. 2011). **keynote**. 2011. HAL : [hal-03920378](#)
11. N. MOËS, C. STOLZ, **N. CHEVAUGEON** et A. SALZMAN. « Endommagement diffus et approche par level-set épaisse (TLS) de la transition endommagement rupture ». In : 11ème colloque en calcul des structures (CSMA-2013) (Giens, France, 13-17 mai 2013). 2013
12. A. SALZMAN, N. MOËS et **N. CHEVAUGEON**. « Simulation tridimensionnelle d'initiation, propagation et coalescence de fissures dans des structures à matériaux quasi fragiles avec le modèle d'endommagement par level set épaisse ». In : *12ème colloque national en calcul des structures, CSMA2015* (18-22 mai 2015). Giens, France, 2015, p. 1-5. HAL : [hal-01400462](#)
13. **N. CHEVAUGEON**, M. GRAVELEAU et N. MOËS. « Approche level-set pour la résolution de problèmes comportant des inégalités : application au cas de membrane contactant un solide rigide. » In : *12ème colloque national en calcul des structures, CSMA2015* (Giens, France, 18-22 mai 2015). 2015. HAL : [hal-01517310/](#)
14. **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de l'endommagement ». In : 13 ème Colloque National en Calcul des Structures (Presqu'île de Giens, France, 16-20 mai 2022). 2022. HAL : [hal-03717694](#)
15. **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de la fissuration par l'endommagement ». In : 25ème Congrès Français de mécanique (CFM) (Nantes, France, 29 août-2 sept. 2022). 2022
16. R. GOPALSAMY, O. CHUPIN, **N. CHEVAUGEON**, J.-M. PIAU et F. HAMMOUM. « Lip-field approach for modeling strain softening in viscoelastic materials ». In : Congrès Français de mécanique (CFM) (Nantes, France, 29 août-2 sept. 2022). 2022
17. N. MOËS, J.-F. REMACLE, J. LAMBRECHTS et **N. CHEVAUGEON**. « Déformation eXtrême de maillage (X-MESH) : un nouveau paradigme pour le suivi de surfaces physiques, application au changement de phase ». In : 25ème Congrès Français de mécanique (CFM) (Nantes, France, 29 août-2 sept. 2022). 2022





# Dossier recherche



# Introduction au dossier recherche

Au vu de la diversité de mes travaux, il a été difficile de trouver une ligne directrice pour écrire ce document. Après moult tergiversations, il m'a semblé finalement plus simple de les présenter par ordre chronologique, décrivant ainsi mon parcours de manière plus fidèle. On fera l'impasse sur mes travaux de thèse qui ne sont pas l'objet de ce document. Pour que le lecteur puisse apprécier la variété de mes travaux, je signalerais juste ici que cette thèse fut consacrée à l'étude des membranes hyper-élastiques en grandes transformations. J'ai pu développer une discrétisation originale par éléments finis de classe de continuité  $C_1$  et une méthode de résolution implicite capable de détecter et de parcourir les branches bifurquées apparaissant autour des points d'équilibres instables. Des lois de comportement hyper-élastiques anisotropes y ont été incorporées pour traiter d'applications à la modélisation du procédé de moulage par soufflage de préformes minces chargées de fibres orientées. Cette digression terminée, venons-en au plan de la suite de ce document.

Le premier chapitre se concentre sur des développements autour de la méthode Galerkin Discontinue (DG), correspondant à mes années de postdoctorant, d'abord au Rensselaer Polytechnic Institute (RPI, état de New York, USA) puis à l'Université Catholique de Louvain-la-Neuve (UCL, Belgique), pendant lesquelles j'ai longuement collaboré avec Jean-François REMACLE. J'ai travaillé sur des applications de DG, d'abord à la résolution de problèmes de mécanique des fluides eulériens. Ce sont ces travaux qui seront traités avec le plus de détails dans ce premier chapitre. Je ne ferais qu'évoquer les applications à la résolution de problèmes d'aéro-acoustique, d'océanographie (shallow water) et d'écoulement à surface libre que j'ai eu l'occasion de traiter à l'UCL et où l'accent a rapidement été mis sur des versions haut ordre de DG. Versions qui, outre les intérêts en termes de convergence, peuvent permettre de tirer parti au maximum des capacités des processeurs. Pour ce qui est des problèmes à surface libre, la représentation de ces surfaces était traitée à l'époque à l'aide de level sets.

Des level sets qui reviendront en force à plusieurs points clés du mémoire, en commençant par le deuxième chapitre correspondant à mes premières activités suivant ma prise de post de maître de conférences à l'École centrale de Nantes au sein du GeM. En effet, en collaboration avec le Professeur MOËS, j'ai d'abord travaillé sur la méthode X-FEM, pour des problèmes de mécanique du solide comportant des interfaces franches (interface matériaux, fissures). Pour représenter les surfaces indépendamment du maillage nous utilisons en effet encore des level sets. Le lien était trouvé avec mes travaux précédents. Sur la méthode X-FEM elle-même, quelques contributions sont apportées dans le cadre de la fissuration avec la proposition de nouvelles fonctions d'enrichissement des pointes de fissure et l'intégration robuste des formes bilinéaires ainsi que l'extraction des facteurs d'intensité de contraintes. Puis, tirant parti de ma compréhension de l'intérêt des méthodes haut ordre, au cours de la première thèse de doctorat que j'ai pu officiellement encadrer, j'ai proposé et fait tester une stratégie pour une implémentation haut ordre d'X-FEM.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode "ILS" pour "Inequality Level set". Il ne s'agit



plus là d'améliorer des méthodes existantes, mais plutôt de développer d'une approche originale permettant, à terme, de mieux résoudre numériquement des problèmes réputés difficiles. En l'occurrence, le traitement de problèmes comportant des contraintes d'inégalités, comme le contact. L'idée est de remplacer un problème comportant des inégalités par une série de problèmes classiques, c'est-à-dire sans inégalité. On divise, a priori, le problème en deux domaines séparés par une interface définie explicitement. Sur chaque sous-domaine, un problème classique est défini et résolu, tel que sur l'un, la contrainte n'existe pas, sur l'autre, elle est saturée. On peut alors vérifier si le résultat est compatible avec les inégalités. Si ce n'est pas le cas, l'interface est mise à jour. Le problème devient donc de trouver la bonne position de l'interface pour que les résultats vérifient les inégalités. L'inconnue principale devient donc ici la position de l'interface. Là encore l'outil level set autant que les techniques d'enrichissement s'avéreront précieux en permettant de prendre en compte correctement les irrégularités des champs localisées sur l'interface, ouvrant ainsi la voie à des discrétisations haut ordre des problèmes de contacts. Ces travaux ont pu être développés pendant les thèses de Nicolas BONFILS et Mathieu GRAVELEAU que j'ai co-encadrés.

Le dernier chapitre relate mes travaux autour de l'endommagement. Il est divisé en deux sections, chacune décrivant une approche pour régulariser un modèle d'endommagement local. Dans la première section, je ferais une présentation de la TLS ("Thick Level Set") que nous avons commencé à développer avec Nicolas MOËS et Claude STOLZ autour de 2010. Rapidement, un projet s'est monté autour de la méthode, projet qui a été financé par l'Europe à partir de 2012 : le projet ERC-XLS ([paragraphe 2.2.1](#)). Le projet et ses suites ont donné lieu à plusieurs thèses et postdoctorats au laboratoire qui ont permis de développer la méthode avec un certain succès. On a pu montrer certains avantages par rapports aux autres méthodes de régularisation. Ayant participé à ces travaux depuis le début, cette méthode a évidemment sa place dans ce mémoire. J'en décrirais donc les grandes lignes puis montrerais quelques résultats significatifs avant de présenter un des points plus technique qui permettent d'améliorer la représentation numérique de la géométrie du modèle.

Plus récemment, autour de 2020, les difficultés pour continuer à améliorer la TLS commençaient à apparaître. Nous étions de plus en plus frustrés par les complexités géométriques et de discrétisation rendant une implémentation efficace du modèle trop difficile. Suite à de nombreuses discussions, nous avons fini par comprendre que l'idée vraiment importante n'était pas de paramétrer l'endommagement par rapport à la distance à un front de dégradation mobile, mais plutôt de contraindre le gradient d'endommagement à rester inférieur à une limite. Mais nous ne voulions pas forcer une trop grande régularité au champ d'endommagement : dans la TLS par exemple, sa dérivée n'était pas continue partout. Des sauts de pentes étaient autorisés sur le front de dégradation d'une part et sur son "squelette de distance"<sup>1</sup>, d'autre part. Nous-nous sommes tournés vers la continuité de Lipschitz, permettant de décrire plus précisément ce qu'on voulait : imposer que la différence d'endommagement entre deux points ne puisse pas être supérieure à leur distance divisée par une longueur caractéristique. Cette idée s'est avérée fructueuse et finalement beaucoup plus facile à décliner que la TLS. Nous avons donc publié rapidement deux articles [[Moë+21b](#) ; [Che+22a](#)] au sujet de cette nouvelle approche, dénommée Lip-field. C'est cette approche, ses premiers résultats et les suites que l'on compte y donner dans les années à venir qui constituent le corps de la deuxième section de ce dernier chapitre.

Je conclurais finalement ce mémoire en faisant le point sur mes travaux en cours et les nouveaux projets qui commencent, en vue de tracer une perspective sur les 5 années à venir.

---

1. appelé aussi l'axe médian, le lieu des centres des boules incluses à l'intérieur du front qui sont maximales pour l'inclusion.

# 1

## Contributions aux Méthodes Galerkin Discontinue

### 1.1 Introduction et Bibliographie

#### 1.1.1 Contexte et circonstances

Ma rencontre avec la méthode de Galerkin Discontinue (Discontinuous-Galerkin : DG) date de janvier 2002, dès le début de mon postdoctorat au SCOREC<sup>1</sup>, au sein du RPI<sup>2</sup>. Tout frais sorti de ma thèse sur les membranes, je faisais face à plusieurs niveaux, à des défis qu'il a fallu relever. Je me suis retrouvé plongé dans un nouvel environnement : la mécanique des fluides. En effet, il m'a fallu non seulement découvrir cette nouvelle méthode, mais en plus l'appliquer à un domaine que je connaissais très peu, en l'occurrence les équations des fluides parfaits (non-visqueux) compressibles, dans des régimes extrêmes (chocs et explosions). Pour accentuer le "choc culturel", il a fallu aussi se plonger dans un environnement d'outils informatiques loin de m'être familiers à l'époque, même si j'en avais bien pressenti l'intérêt. Le souhait de maîtriser ces outils avait lourdement pesé dans mon choix pour ce postdoctorat. En effet, tous les développements au SCOREC étaient faits en C++, avec une culture de l'interopérabilité entre les composants logiciels qui était fondamentale. Tous les développements étaient partagés et collaboratifs au sein du SCOREC, sous la direction de Mark SHEPHARD. Station de travail sun, compilation complexe, gestion de versions, calculs soumis sur la queue d'un serveur et surtout calculs parallèles distribués (MPI), autant d'outils qu'il a fallu maîtriser pour participer aux développements de logiciel dans cet environnement. J'étais loin des développements solitaires en FORTRAN, même 90 orienté objet, au cœur de ma thèse. Je ne saurais remercier suffisamment le professeur Jean-François REMACLE pour l'aide qu'il m'a apportée à cette époque en m'accueillant au sein du SCOREC. Ces efforts portèrent leurs fruits et j'ai continué à travailler intensément avec Galerkin discontinue pendant mon second postdoctorat, de 2004 à 2006, à l'UCL, où j'ai travaillé à nouveau avec Jean-François qui avait pris son poste là-bas entre temps. Mais parlons plutôt de Galerkin discontinue puisque c'est le titre du chapitre.

#### 1.1.2 Bibliographie

Si la méthode n'avait pas encore son nom à l'époque, elle est généralement attribuée à Reed et Hill [Ree+73] qui décrivent dans leur rapport de 1973 une méthode explicite pour le traitement de la propagation de neutron (une équation linéaire de transport avec divers termes source) à l'aide

---

1. SCOREC : Scientific Computation Research Center

2. RPI : Rensselaer Polytechnic Institute

d'une discrétisation discontinue, polynomiale par morceaux sur un maillage de triangles. La méthode a ensuite été rapidement analysée par Lesaint et Raviart en 1974 [Les+74]. Douze ans plus tard, Johnson [Joh+86] prouve, dans le cas de maillage régulier, la convergence et la stabilité de la méthode et donne des premiers estimateurs d'erreurs a priori, toujours pour les problèmes linéaires de transport, dans le cas de solutions régulières. Ces résultats sont confirmés numériquement par Peterson [Pet91]. Richter [Ric88] affine les résultats de convergence dans le cas de maillage structuré et prouve que l'ordre optimal de convergence ( $h^{p+1}$ ) est atteint dans ce cas. Lin et Zhu ont étendu l'analyse au cas des solutions non-régulières [Lin+93], suivi par [Coc+08]. Des techniques pour améliorer les solutions par post-traitement, aboutissant notamment à des estimateurs d'erreurs a posteriori, très utiles aux méthodes adaptatives ont été proposées [Coc+03; Cur+08].

Il est vite apparu qu'un des avantages de DG est la facilité avec laquelle on peut augmenter l'ordre de la discrétisation spatiale, indépendamment du maillage, en augmentant l'ordre de la base polynomiale dans les éléments, de manière indépendante d'un élément à l'autre. Cette précision spatiale devait s'accompagner de schémas de discrétisation temporelle adaptés, rendant le schéma de résolution à son tour stable, et à haut ordre de précision à la fois en espace et en temps. De tels schémas ont été proposés dans [Coc+89; Coc+89; Coc+90] sous la forme des schémas dits RKDGM ("Runge–Kutta discontinuous Galerkin").

Les revues de 2000 par Cockburn [Coc+00] puis plus tard l'ouvrage de Warburton [Hes+07] ont largement contribué à la popularisation des méthodes DG. Elles sont couramment appliquées à la résolution de problèmes hyperboliques et de lois de conservation : advection, équations de Maxwell ou d'Euler par exemple. L'application des schémas DG aux termes diffusifs [Coc99] ou aux équations elliptiques est plus difficile et a fait l'objet d'une large littérature à partir de la fin des années 90 [Bas+97; Coc+98; Ode+98; Bau+99; War+99a; War+99b; Arn+02] donnant naissance à la famille des schémas dit "LDG" (local discontinuous galerkin) et ont été reliés aux méthodes de décomposition de domaine [Nit71] par Zienkiewicz dans sa revue de 2003 [Zie+03]. Ces travaux ont permis de montrer l'applicabilité de la méthode sur les équations de Poisson, de l'élasticité d'Helmoltz ou de Navier-Stokes. Les différentes versions des formulations pour les problèmes elliptiques ont pu être placées dans un cadre unifié dans les travaux de Arnold [Arn+02]. Les équations dispersives (type Korteweg-de Vries par exemple) ont aussi été attaquées à la même époque ([Yan+02; Wei+13]). L'intérêt pour les méthodes Galerkin discontinues ne semble pas diminuer ces dernières années. En effet, selon Scopus, près de 700 documents contenaient ces mots dans leur titre, leur résumé et ou leurs mots-clefs en 2022, après un pic à 800 en 2019.

Il semble pourtant que si la méthode a fait son chemin en mécanique des fluides où les termes de transports ou d'advections sont dominants, elle reste, malgré les efforts de recherche conséquents, confinée au domaine académique pour ce qui est des applications en mécanique du solide où les éléments finis "classiques" restent prédominants.

### 1.1.3 Description sommaire de la méthode et de ses avantages

Galerkin discontinue est une approche partant d'une formulation variationnelle, tout comme l'approche par éléments finis classique. La seule différence structurelle est que l'on autorise les fonctions de formes ainsi que les fonctions test (généralement les mêmes dans les méthodes "DG") à être choisies discontinues d'un élément à l'autre. La continuité n'est imposée qu'à l'intérieur des éléments. L'approximation fait donc un saut au passage d'une face connectant deux éléments tridimensionnels (ou au passage d'une arête partagée par deux éléments en deux-dimensions). En conséquence, lorsque que l'on fait une intégration par partie pour faire porter les dérivations d'un opérateur sur les champs de forme vers les champs test pour écrire la forme faible, on fait apparaître des termes d'interfaces dépendant du saut. Sur une méthode Éléments finis continus, ces termes de saut disparaîtraient. Ici, ils restent et deviennent un des paramètres de la méthode. Pour les problèmes typiques d'advection résolue par DG dans ses débuts, cela se traduit par le calcul d'un flux entre deux états. C'est dire la

nécessité de construire un "flux numérique", généralement inspiré de solutions exactes de problèmes de tube à choc, exactement comme dans les méthodes différences finies (schémas de Godunov [God+59]) ou volume finis.

Une des raisons de la popularité rapide de DG provient sans doute de cela : d'un côté des formes variationnelles, des projections, permettant d'utiliser toute l'artillerie lourde des résultats mathématiques utilisés en éléments finis par exemple, pour estimer les erreurs ou prouver la convergence dans un cadre bien défini d'espace fonctionnel. De l'autre, les outils chers aux adeptes des volumes finis : "solver de Riemann", flux numériques, limiteurs, etc. En bref, DG peut être vue comme un pont entre ces deux mondes.

Mais d'autres avantages pratiques apparaissent rapidement quand on se plonge dans la méthode. J'attribue ainsi une bonne part du succès de DG à la facilité avec laquelle un schéma de haut ordre en espace peut être construit. En effet, l'approximation étant discontinue d'un élément à l'autre, on est libre d'utiliser une base polynomiale de n'importe quel ordre à l'intérieur de chaque élément sans souffrir des contraintes pour assurer la continuité des champs d'un élément à l'autre, comme c'est le cas en éléments finis. Augmenter simplement l'ordre de la base polynomiale dans chaque cellule suffit à augmenter l'ordre de précision du schéma. À l'autre bout du spectre, en volumes finis, pour augmenter l'ordre de précisions d'un schéma, au lieu d'augmenter simplement l'ordre dans les cellules, on doit généralement faire des reconstructions de haut ordre des gradients en allant chercher les valeurs des champs dans des cellules de plus en plus éloignées en agrandissant le "stencil"<sup>3</sup>.

Dans le cas de DG, comme aucun degré de liberté (ddl) ne doit être partagé entre deux cellules, on peut numéroter ces ddl indépendamment d'une cellule à l'autre. On peut ainsi facilement obtenir des structures de matrices "sparse"<sup>4</sup> par blocs, où chaque bloc est dense. La structure est facile à prévoir et à programmer. Cela permet de tirer parti au mieux de l'architecture des processeurs pour accélérer les calculs<sup>5</sup>. En effet, quand on monte en ordre une méthode Galerkin discontinue, si le nombre de degrés de liberté par élément augmente, les connectivités ne changent pas : les degrés de liberté d'un élément restent connectés uniquement aux ddl<sup>6</sup> des éléments partageant une face avec lui (ou une arête en deux dimensions).

Dans le cas des volumes finis, les liens nécessaires entre les cellules prenant part au stencil, qu'il faut construire, sont responsables de la densité des opérateurs matriciels, sans qu'il soit possible d'imposer des structures par bloc. La structure des termes non nuls des systèmes linéaires va changer à chaque changement d'ordre en fonction de la topologie du maillage. Les méthodes de haut ordre en volumes finis sont donc particulièrement difficiles à programmer de manière optimale en termes d'utilisation des processeurs.

Dans un contexte de calcul distribué, l'avantage revient encore à DG : pas besoin de dupliquer des cellules "fantômes" de plus en plus nombreuses quand on monte en ordre. Un maillage peut être partitionné simplement entre les processeurs. Seules les données portées par les interfaces entre les éléments que se trouvent aux interfaces entre les processeurs ont besoin d'être échangées.

Il est de même très facile d'avoir des ordres de bases polynomiales qui varient d'un élément à l'autre, rendant possible une p-adaptation très simple ainsi que des projections ou extension, élément par élément sur des bases polynomiales d'ordre inférieur ou supérieur. Dans ce cadre, la liberté de choix des espaces permet aussi, par exemple, de prendre des espaces de fonction hiérarchiques, de tel que sorte que les projections ou extensions peuvent se faire par simples manipulations arithmétiques sur les valeurs degrés de liberté.

---

3. stencil : réseau de points utilisé pour estimer un opérateur différentiel discret

4. matrice sparse ou creuse : matrice dont la majorité des entrées sont nulles

5. Les blocs denses ont l'avantage de pouvoir être adressés simplement et les opérations d'algèbre linéaire peuvent être traitées très efficacement (en s'approchant de l'efficacité de pique des processeurs) en tirant parti des effets de cache pour amortir les temps d'accès mémoire. C'est ce que permettent les implémentations de BLAS (Basic Linear Algebra Subroutine).

6. ddl : degrés de liberté

Une autre stratégie profitant de la liberté sur les bases consiste à construire des bases orthogonales par rapport à la forme bilinéaire élémentaire souhaitée. Si on le fait pour la matrice des masses par exemple, on peut faire en sorte qu'elle soit exactement diagonale, sans avoir à faire les approximations liées au "mass lumping", que l'on retrouve très souvent en dynamique des structures, et donc accélérer grandement des calculs en dynamique sans sacrifier à la précision.

Par contre, il ne faut pas croire que la méthode donne un quelconque avantage pour traiter des problèmes dont les solutions comportent des discontinuités, à moins que l'on puisse faire en sorte que ces discontinuités physiques soient placées exactement sur les interfaces entre les éléments, ce qui reste très difficile surtout si ces discontinuités sont mobiles. On reste maudit par le phénomène de Gibbs : la présence d'une discontinuité de la solution exacte à l'intérieur d'éléments d'ordre élevé va produire des oscillations non-physiques dans leur voisinage. Pour s'en sortir, on est contraint de dégrader la précision dans ces éléments, en diminuant l'ordre ou en appliquant des limiteurs.

Dans la suite, je présente une partie de mes contributions à la méthode et aux utilisations que j'ai pu en faire. Parmi les différents travaux que j'ai consacré à ce sujet au travers de collaborations tant au RPI qu'à l'UCL (10 articles [Kri+04 ; Che+05a ; She+05 ; Mar+06 ; Hil+06b ; Mar+07 ; Ber+07 ; Che+07a ; Rem+07 ; Mar+08] et 11 communications [Rem+02 ; Che+03a ; Che+03b ; Hu+03 ; Cle+03 ; Li+04 ; Rem+04 ; Ber+05 ; Che+05b ; Che+06 ; Hil+06a], il a fallu faire un choix. Je vais présenter dans la section qui suit, les résultats de l'article suivant, qui donne un bon aperçu de mon activité au RPI et sera l'occasion de présenter la méthode galerkin discontinue.

- N. CHEVAUGEON, J. XIN, P. HU, X. LI, D. CLER, J. E. FLAHERTY et M. S. SHEPARD. « Discontinuous Galerkin methods applied to shock and blast problems ». In : *Journal of Scientific Computing* 22.1-3 (2005), p. 227-243. DOI : [10.1007/s10915-004-4138-4](https://doi.org/10.1007/s10915-004-4138-4). HAL : [hal-01006753](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006753)

Nous y traiterons d'applications en écoulement compressible où la viscosité est négligée, dans des régimes comprenant des ondes de choc. L'accent sera mis sur la détection des chocs, leur traitement et les adaptations de maillage nécessaires pour les suivre efficacement.

## 1.2 Contribution : équations d'Euler, adaptation de maillage et traitement des chocs

Les équations d'Euler forment bien sûr un candidat important pour les méthodes Galerkin discontinues : on est dans le cadre de problème d'advection non-linéaire, ce qui rend les schémas DG, particulièrement adapté. C'est ce sur quoi j'ai travaillé pendant mon séjour au SCOREC. Si l'advection n'est pas une difficulté, les non-linéarités posent problème : en effet, même en partant de conditions initiales régulières, des discontinuités peuvent se développer et se propager sous forme d'onde de choc par exemple. Or, un des atouts de DG est de pouvoir fonctionner facilement en haut ordre. Mais comme mentionné plus haut, discontinuité et haut ordre ne font pas bon ménage.

Pour s'en sortir dans le cadre de DG, il faut détecter l'apparition de chocs dans la solution pour "limiter" l'approximation dans les éléments impactés. Dans le papier avec Lilia KRIVODONOVA [Kri+03], une méthode pour détecter les éléments subissant un choc et limiter la solution avait été proposé. Le détecteur est basé sur les propriétés d'interpolation du schéma DG pour les problèmes d'advection et permet de détecter la perte de convergence en mesurant les sauts aux interfaces. Pour expliquer la méthode dans un cas concret, nous reprenons dans la suite les résultats publiés dans [Rem+02 ; Kri+04 ; Che+05a] et présentés à USNCCM de 2003 [Che+03a ; Che+03b ; Hu+03] et ayant fait l'objet d'une partie de la thèse de Peng Hu [Pen05]

### 1.2.1 Présentation de la méthode DG appliquée aux équations d'Euler

Comme pour les éléments finis, la méthode Galerkin Discontinue procède par une double discrétisation :

- Une discrétisation géométrique

Le domaine physique  $\Omega$  est discrétisé en une collection d'éléments : le maillage, avec les restrictions habituelles sur les éléments <sup>7</sup> :

$$\Omega^h = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{N}_e} e \quad (1.1)$$

- une discrétisation fonctionnelle

L'espace des fonctions  $V(\Omega)$  contenant la solution du problème est approximée sur chaque élément  $e$  du maillage par un espace de dimension finie :  $V^h(\Omega^h)$

La précision de cette double discrétisation dépend de la discrétisation géométrique et de la discrétisation fonctionnelle. Les éléments finis classiques utilisent plutôt des maillages conformes (pas de nœuds au milieu des arêtes), et de plus, l'espace  $V^h$  est contraint à un sous-espace des fonctions continues sur  $\Omega^h$ , typiquement  $H(\Omega)^1$  à l'aide d'une base dont les fonctions sont associées d'abord aux nœuds du maillage à l'ordre 1 auxquelles s'ajoutent des fonctions associées aux arêtes, aux faces puis aux volumes lorsque l'on monte en ordre. Cela simplifie l'imposition de la contrainte de continuité  $C_0$  de  $H(\Omega)^1$  mais limite les choix. Dans le cas de DG, la contrainte de continuité est levée, tous les degrés de liberté sont associés aux entités de maillage de même dimension que la variété  $\Omega$ , c'est-à-dire aux faces pour un problème surfacique, aux éléments volumiques (que nous appelons région, par exemples un tétraèdre ou un hexaèdre) pour un problème volumique. Cela permet des configurations de maillage moins contraignantes et des bases discontinues, ce qui simplifie grandement l'adaptation en  $h$ , c'est-à-dire l'adaptation de maillage qui peut-être simplement des subdivisions hiérarchiques non-conformes des éléments ainsi que l'adaptation en  $p$ , c'est-à-dire la variation adaptative de l'ordre de bases polynomiales d'un élément à l'autre. Des maillages non-conformes et des bases arbitraires d'un élément sont donc possibles, sans difficulté particulière [Woo+84]. Dans la suite, nous utilisons des bases  $L^2$ -orthogonales construites à l'aide de produit de polynômes de Jacobi [Col+85] permettant d'obtenir des matrices de masse diagonales [Rem+03].

DG peut supporter des ordres arbitraires de précision de discrétisation spatiale sans qu'il soit nécessaire de construire des stencils complexes pour la reconstruction d'ordre élevé [Rem+03]. En effet, le stencil du DG reste invariant pour tous les degrés polynomiaux. Cela simplifie grandement l'implémentation parallèle. DG possède une flexibilité supplémentaire pour spécifier les flux à travers les faces des éléments et permet l'utilisation de flux basés sur des solutions exactes ou approximatives de problèmes de Riemann [Coc99]. Nous appliquons DG aux lois de conservation hyperboliques 1.2.1.1 en utilisant une discrétisation spatiale de polynômes orthogonaux de degrés  $p$ . la discrétisation temporelle est effectuée par une méthode de Runge-Kutta explicite à variation totale décroissante (TVD) [Got+98]. Pour améliorer les performances de l'intégration explicite sur une grille irrégulière et non structurée, nous utilisons de plus une procédure de pas de temps local [Fla+97].

#### 1.2.1.1 Formulation par éléments finis discontinus d'un problème de lois de conservation

On considère un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial\Omega$ . On cherche à déterminer  $\mathbf{u}(\Omega, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow V(\Omega, t) = L^2(\Omega, t)^m =$  solution du système de  $m$  lois de conservation :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{div} \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}. \quad (1.2)$$

7. pas de recouvrement, l'intersection de deux éléments volumiques ne peut être qu'une face, une arête, un nœud ou l'ensemble vide



Où  $\mathbf{div} = (\text{div}, \dots, \text{div})$  est l'opérateur de divergence à valeur vectorielle de dimension  $m$ , dont chaque composante est le résultat de l'opérateur  $\text{div}$  agissant sur chacun des  $m$  vecteurs contenus dans  $\vec{\mathbf{F}}$ , le vecteur rassemblant les  $m$  flux :

$$\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) = (\vec{F}_1(\mathbf{u}), \dots, \vec{F}_m(\mathbf{u})) \quad (1.3)$$

Dont la composante  $i$  est un des flux conservatifs :  $\vec{F}_i(\mathbf{u}) : (H^1(\Omega))^m \rightarrow H(\text{div}, \Omega)$ , où  $H(\text{div}, \Omega)$  est l'espace des fonctions à carré intégrable dont la divergence est à carré intégrable soit :

$$H(\text{div}, \Omega) = \{ \vec{v} \mid \vec{v} \in L^2(\Omega), \text{div } \vec{v} \in L^2(\Omega) \}. \quad (1.4)$$

Dans le but de construire la forme de Galerkin de l'équation 1.2, on définit  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ , les produits scalaires standard respectivement dans  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\partial\Omega)$ .

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})_\Omega = \int_\Omega \mathbf{u} \mathbf{w} d\omega \quad (1.5)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \mathbf{w} d\sigma. \quad (1.6)$$

En multipliant l'équation 1.2 par une fonction test  $\mathbf{w} \in V(\Omega)$  en intégrant sur  $\Omega$  et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient la forme variationnelle suivante :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{w} \right)_\Omega - (\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}), \overrightarrow{\text{grad}} \mathbf{w})_\Omega + \langle \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) \cdot \vec{n}, \mathbf{w} \rangle_{\partial\Omega} = (\mathbf{r}, \mathbf{w})_\Omega, \quad \forall \mathbf{w} \in V(\Omega). \quad (1.7)$$

L'espace discret discontinu  $V^h$  est un espace fonctionnel défini par morceaux comme la somme directe d'approximation élémentaires approximations  $\mathbf{u}_e$ .

$$V^h(\Omega^h) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in L^2(\Omega^h)^m \text{ et } (\mathbf{u})|_e \in V^h(e) = \mathbb{P}^p(e)^m, \forall e \in \Omega^h \right\} \quad (1.8)$$

Où  $(\mathbf{u})|_e$  est la restriction de  $\mathbf{u}$  à l'élément  $e$  et  $\mathbb{P}^p(e)^m$  est l'espace des polynômes de degré  $p$  sur l'élément  $e$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ . Puisque les approximations sont complètement déconnectés d'un élément à l'autre, on peut écrire séparément sur chaque élément :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t}, \mathbf{w} \right)_e - (\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_e), \overrightarrow{\text{grad}} \mathbf{w})_e + \langle \mathbf{F}_n, \mathbf{w} \rangle_{\partial e} = (\mathbf{r}, \mathbf{w})_e, \quad \forall \mathbf{w} \in V^h(e) \quad (1.9)$$

Comme l'espace discret est discontinu, le flux normal  $\mathbf{F}_n = \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) \cdot \vec{n}$ , où  $\vec{n}$  est le vecteur normal unitaire à  $\partial e$  sortant de  $e$ , n'est pas défini sur  $\partial e$ . C'est la même situation que dans les volumes finis. On définit donc "un flux normal numérique"  $\mathbf{F}_n(\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_{e_k})$  utilisé sur chaque portion  $\partial_{e_k}$  de  $\partial e$  partagée entre l'élément  $e$  et son voisin  $e_k$ . Le flux numérique doit être continu et consistant :  $\mathbf{F}_n(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) \cdot \vec{n}$ . Avec ce flux numérique, l'équation 1.9 devient :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t}, \mathbf{w} \right)_e - (\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_e), \overrightarrow{\text{grad}} \mathbf{w})_e + \sum_{k=1}^{n_e} \langle \mathbf{F}_n(\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_{e_k}), \mathbf{w} \rangle_{\partial_{e_k}} = (\mathbf{r}, \mathbf{w})_e, \quad \forall \mathbf{w} \in V^h(e), \quad (1.10)$$

Où  $n_e$  est le nombre de faces de l'élément  $e$ . Seules les traces normales doivent être définies sur  $\partial_{e_k}$  et plusieurs options sont possibles. Il est habituel de définir la trace comme la solution d'un problème de Riemann sur  $\partial_{e_k}$ . Ici, lorsque nous considérons des problèmes avec de forts chocs [Col+85], un solveur de Riemann exact est utilisé pour calculer les flux numériques. Un limiteur est utilisé pour limiter les

oscillations parasites lorsque des degrés polynomiaux  $p > 0$  sont utilisés. Le limiteur est appliqué à la fin de chaque pas de temps sur le champ prédit. On note ici, à propos du limiteur, que si la solution recherchée est continue, les limiteurs ne sont pas nécessaires. Les équations de conservations non-linéaires, comme c'est le cas des équations d'Euler, peuvent développer en temps des discontinuités, même en partant d'une solution initiale parfaitement régulière. Pour ces cas, une forme de limiteur est toujours nécessaire pour  $p > 0$ . Par contre, comme nous le verrons dans la [sous-section 1.2.2](#), on peut se contenter de l'appliquer au voisinage des éléments contenant une discontinuité, à condition de pouvoir les détecter. Dans les présents travaux, le limiteur de moment [Bis+94] est utilisé. Ce limiteur est appliqué sur chaque élément après le calcul d'un nouveau champ de solution en fin de pas de temps, de sorte que les valeurs minimales et maximales des moments de la solution dans un élément sont bornées par le maximum et le minimum des moments sur ses éléments voisins.

### 1.2.1.2 Équations d'Euler

On étudie un fluide gouverné par les équations d'Euler compressibles. Nous allons les écrire, sous la forme de l'équation 1.2. Soit :

$$\mathbf{u} = [\rho, \rho u, \rho v, E]^T. \quad (1.11)$$

Où  $\rho$  est la densité du fluide,  $\vec{v}$  est la vitesse du fluide de composantes cartésiennes  $u$ ,  $v$  et  $w$  et  $E$  est l'énergie interne. Le flux est

$$\vec{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) = [\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5] = [\rho\vec{v}, \rho u\vec{v} + P\vec{e}_x, \rho v\vec{v} + P\vec{e}_y, \rho w\vec{v} + P\vec{e}_z, (\rho E + P)\vec{v}]^T, \quad (1.12)$$

où  $P$  est la pression et  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  sont des vecteurs unitaires dans les directions des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Une équation d'état  $P = P(\rho, E)$  est nécessaire pour fermer le système. Nous utilisons dans la suite la loi des gaz parfaits :

$$P = (\gamma - 1)\rho \left[ E - \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right], \quad \gamma = 1.4. \quad (1.13)$$

## 1.2.2 Détection des discontinuités

Une procédure de détection des discontinuités identifie automatiquement les régions du champ de la solution pouvant contenir des discontinuités. Pour les équations d'Euler, les discontinuités peuvent être des discontinuités de contact où la densité est discontinue, des ondes de choc où la densité, la vitesse et la pression sont discontinues et des ondes d'expansion où les gradients sont discontinus. La connaissance des emplacements des discontinuités nous permet de restreindre la procédure de limitation au voisinage des discontinuités, ce qui permet à la fois de gagner du temps et d'améliorer la précision de la solution dans les régions où la solution est régulière. La détection des discontinuités est également utilisée pour piloter la procédure d'adaptation de maillage ([sous-section 1.2.3](#)).

Pour définir une stratégie de détection des discontinuités, nous divisons la frontière  $\partial e$  de l'élément  $e$  en deux portions  $\partial e^-$  et  $\partial e^+$ , tel que sur  $\partial e^-$  l'écoulement entre dans  $e$  ( $(\vec{v} \cdot \vec{n} < 0)$ ) et sur  $\partial e^+$ , il en sort ( $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$ ).

Soit  $q$  une variable d'écoulement ou une quantité dérivée du champ d'écoulement, par exemple la densité ou l'entropie, pour les équations d'Euler, et  $Q_e$  la valeur DG de  $q$  sur l'élément  $e$ . On considère le saut de  $Q_e$  sur les bords (faces) d'entrée de  $e$  :

$$I_e = \int_{\partial e^-} (Q_e - Q_{e_k}) d\sigma = \int_{\partial e^-} (Q_e - q) d\sigma + \sum_{k=1}^{n_e} \int_{\partial e_k^+} (q - Q_{e_k}) d\sigma \quad (1.14)$$



Où les  $\partial e_k^+$  sont les  $n_e$  parties des frontières des éléments  $e_k$  voisins à  $e$  dont l'intersection avec  $\partial e^-$  est non nulle.

Dans les régions où l'écoulement est régulier, les intégrales de droites du second membre sont de l'ordre de  $\mathcal{O}(h^{p+2})$ , alors que celle de gauche est de l'ordre de  $\mathcal{O}(h^{2(p+1)})$ , où  $h$  est une taille caractéristique des éléments [Adj+02; Kri+03; Kri+04]. Cette propriété est dite de super-convergence : sur les parties régulières du champ solution, l'approximation DG est super-convergente en aval d'un élément. On sait donc que dans les régions où  $q$  est régulier,  $I_e = \mathcal{O}(h^{p+2})$ . En revanche, si  $q$  admet des discontinuités dans le voisinage de  $\partial e$  alors, au moins un des  $q - Q_{e_k}$  ou  $q - Q_{e_k}$  est de l'ordre de  $\mathcal{O}(1)$ . On a donc :

$$I_e = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{p+2}), & \text{si } q|_{\partial e} \text{ est régulier,} \\ \mathcal{O}(h), & \text{si } q|_{\partial e} \text{ est discontinu (ou à pente discontinue)} \end{cases} \quad (1.15)$$

On construit donc notre détecteur en normalisant  $I_e$  par à un ordre de convergence "moyen"  $\mathcal{O}(h^{(p+1)/2})$  et la solution sur  $e$  pour obtenir :

$$\mathcal{I}_e = \frac{|\int_{\partial e^-} (Q_e - Q_{e_k}) d\sigma|}{h^{(p+1)/2} |\partial e^-| \|Q_e\|}. \quad (1.16)$$

Dans notre implémentation, nous avons pris  $h$  comme le rayon de la sphère inscrite dans l'élément  $e$ , et la norme sur  $Q_e$  a été prise comme la valeur maximum de la solution locale aux points d'intégration.

En utilisant l'équation 1.15,  $\mathcal{I}_e \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$  ou  $p \rightarrow \infty$  dans les zones régulières, alors que  $\mathcal{I}_e \rightarrow \infty$  près des irrégularités. Nous avons donc pris comme détecteur :

$$\begin{cases} \text{if } \mathcal{I}_e > 1, & q \text{ est discontinu} \\ \text{if } \mathcal{I}_e < 1, & q \text{ est lisse} \end{cases} \quad (1.17)$$

**Exemple uni-dimensionnel** Nous appliquons notre schéma sur les équations d'Euler sur un domaine uni-dimensionnel (avec  $v = 0$ ), reproduisant un cas intéressant repris de la littérature [Woo+84], dont les données initiales sont :

$$(\rho, u, P)(x, 0) = \begin{cases} (1, 0, 1000), & 0 \leq x < 0.1 \\ (1, 0, 0.01), & 0.1 \leq x < 0.9 \\ (1, 0, 100), & 0.9 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.18)$$

La solution en temps fait apparaître des interactions multiples d'ondes chocs, d'expansion et de contact. Les interactions les plus importantes se concentrent dans une courte période précédant  $t = 0.04$ . Ce problème n'ayant pas de solution exacte, les comparaisons seront présentées avec une solution numérique sur-résolue, comme dans l'article de WOODWARD et COLELLA [Woo+84]. La solution de référence a été calculée sur un maillage uniforme de  $\mathcal{N}_e = 3072$  éléments sur l'intervalle  $[0, 1]$  avec une base polynomiale de degré  $p = 2$ . La figure 1.1 présente le champ de densité à différents instants calculé avec une discrétisation  $\mathcal{N}_e = 800, p = 2$ , en utilisant l'entropie comme quantité  $q$  pour le détecteur de discontinuité. On constate que les chocs ont été correctement détectés et le limiteur n'a été appliqué que sur ces régions. En comparant avec la solution de référence, on constate que les caractéristiques des différentes interactions ont été captées de manière satisfaisante.

**Exemple en deux dimensions** Nous considérons la réflexion d'un choc plan se déplaçant à Mach 10 sur un coin ayant un angle de  $60^\circ$ . Ce problème est couramment appelé "double Mach reflection" et constitue un cas test classique [Woo+84; Col+85; Jia+96]. Pour simplifier la géométrie, le domaine de calcul est un rectangle de  $4 \times 1$  aligné avec la surface supérieure du coin. Ainsi, le choc de Mach 10 initial est placé en  $x = 1/6, y = 0$  à  $60^\circ$  par rapport à l'axe  $x$  du domaine de calcul. La surface du

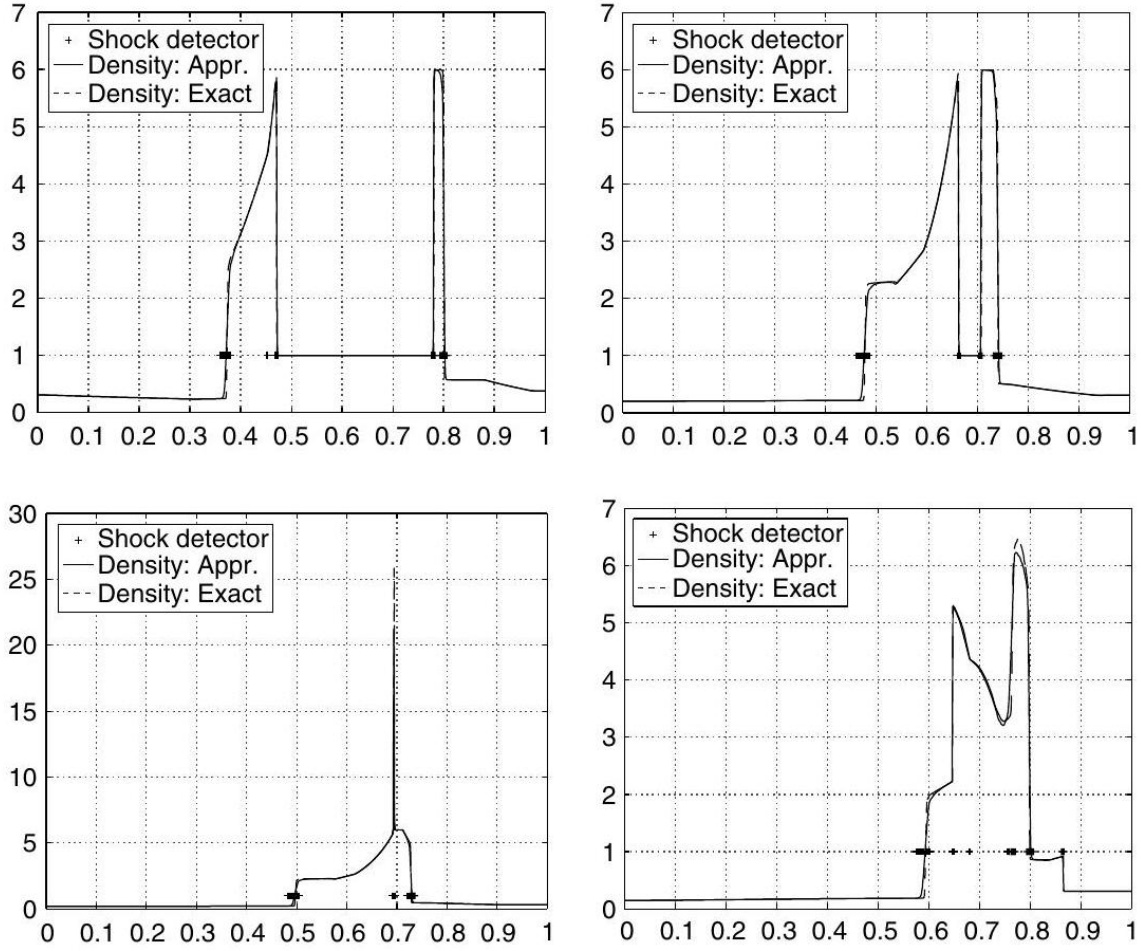


FIGURE 1.1 – Densité  $\rho$  à  $t = 0.016$  (en haut à gauche),  $0.026$  (en haut à droite),  $0.028$  (en bas à gauche), et  $0.038$  (en bas à droite) pour des calculs effectués avec  $p = 2, \mathcal{N}_e = 800$ . Les éléments où la discontinuité est détectée et où le limiteur est appliqué sont marqués d'un signe +.

coin se trouve en bas du domaine, en  $x \geq 1/6, y = 0$  et est modélisé comme une surface réfléchissante. Les conditions aux limites en haut ( $y = 1$ ) correspondent à celle d'un choc plan à Mach 10 dans un domaine infini. Les paramètres physiques pour le gaz en amont du choc sont  $P_1 = 1$  et  $\rho_1 = 1.4$ . Les relations de Rankine-Hugoniot définissent les conditions en aval du choc ( $\rho_2, P_2, v_2$ ) :

$$v_s = M_s \sqrt{\gamma P_1 / \rho_1} = 10 \quad (1.19)$$

$$P_2 / P_1 = (2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)) / (\gamma + 1), \quad (1.20)$$

$$\rho_2 / \rho_1 = (\gamma + 1) M_s^2 / ((\gamma - 1) M_s^2 + 2) \quad (1.21)$$

$$\rho_1 v_s = \rho_2 (v_s - v_2) \quad (1.22)$$

Le problème est résolu sur un maillage uniforme structuré de carrés ( $h/L = 60, p=1$ ), les iso-valeurs de pression ainsi que les éléments pour lesquels la solution a été limitée sont présentés sur la Figure 1.2. Les iso-valeurs sont discontinues : on voit le champ solution brut, sans aucun lissage. On constate que les chocs sont bien résolus malgré une densité relativement faible de mailles, en particulier, le point triple en aval apparaît clairement. Le détecteur marque correctement les surfaces de choc. Sans limiteur, ce calcul ne pourrait même pas se faire avec  $p = 1$  : les instabilités dues au

choc se propageraient dans tout le maillage dégradant la solution. On sera réduit à  $p = 0$  et il faudrait donc un maillage autrement plus dense pour capturer aussi bien les chocs.

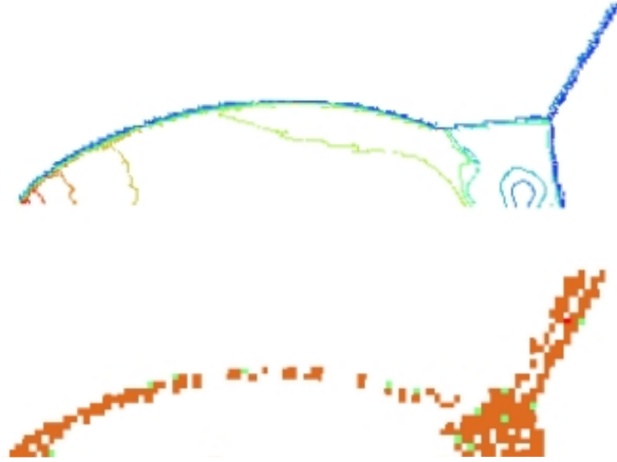


FIGURE 1.2 – Double Mach Reflection. En haut, champ de pression, en bas détecteur de choc

### 1.2.3 Adaptation de maillage

Deux techniques d'adaptation de maillage seront présentées et comparées au travers d'exemples dans cette sous-section : le raffinement *hiérarchique* et le raffinement *conforme anisotrope*.

#### 1.2.3.1 Raffinement hiérarchique

Nous avons implémenté un raffinement de maillage hiérarchique où les éléments sont subdivisés récursivement en utilisant un sous-découpage isotrope, en répétant à chaque niveau supplémentaire le même pattern de découpe. Ce type de raffinement hiérarchique, accompagné d'une structure de données efficace pour la maintenir est très bien documenté dans la littérature et souvent appelé **AMR** pour *Adaptive Mesh Refinement* [Car+88 ; Che+94 ; Dan+90 ; Mav00 ; Kal+93].

Puisqu'il n'y a pas de contraintes de continuité inter-éléments avec DG, le raffinement peut se faire élément par élément, sans avoir à prendre en compte les éléments voisins. Il n'y a pas de problème avec les "hanging nodes" et il n'est pas nécessaire de les traiter. La solution sur un élément grossier peut être projetée sans perte d'information sur ses sous-éléments. Le niveau de raffinement du maillage d'un élément est calculé à l'aide d'un indicateur d'erreur [Rem+03] basé sur la valeur du saut de solution à l'interface entre deux cellules voisines. Le dé-raffinement est tout aussi simple : après avoir projeté la solution des éléments fils sur leur élément parent, on peut détruire simplement ceux-ci en les retirant du maillage. Évidemment, cette projection sur un élément plus grand va engendrer une perte d'information. Mais comme le dé-raffinement n'est appliqué que sur les zones où le champ est bien résolu et donc où l'erreur est très faible, cela n'a que peu d'impacts sur la qualité de la solution.

**Illustration** La Figure 1.3 illustre l'adaptation de maillage sur un cas d'écoulement : l'advection sur un domaine unitaire dans le plan d'une densité. c'est-à-dire une équation linéaire de transport. Nous avons utilisé un maillage initial non-structuré de triangles dont les arêtes sont de l'ordre de 0.1, pour un maillage contenant 200 éléments. La densité à l'instant initial est donnée par :

$$\rho = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x < 0.8 \\ 2, & \text{if } 0.8 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.23)$$

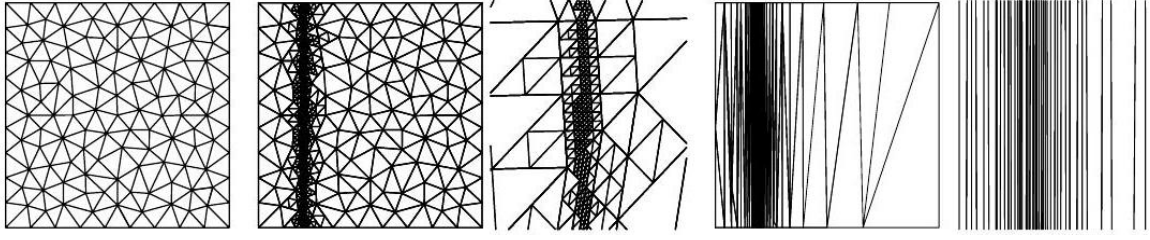


FIGURE 1.3 – Maillages obtenus dans le cas de l’advection simple d’une discontinuité plane. À gauche, le maillage initial, puis de gauche à droite, à  $t = 0.6$ , le maillage obtenu par raffinement hiérarchique, un agrandissement de ce maillage au voisinage de la discontinuité, le maillage obtenu avec la procédure anisotrope et le même agrandissement que précédemment pour le maillage anisotrope.

Ce champ est transporté par un champ de vitesse homogène  $\vec{v}$  unitaire dans la direction  $-x$ . La solution exacte est simplement  $\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x} - t\vec{v}, 0)$ . Avec six niveaux de raffinement, les arêtes ont une longueur minimale de  $h_0 = 0.1 / (2^6) \approx 1.6 \cdot 10^{-3}$ . La précision sur les plus petits éléments est la même que celle qui serait obtenue avec un maillage uniforme qui contiendrait  $200 * 2^6$  éléments. Le maillage adapté représenté sur la figure 1.3 à l’instant  $t = .6$  est raffiné seulement sur une zone étroite couvrant la position exacte de la discontinuité à cet instant. Le maillage contient alors 6097 éléments, soit 134 fois moins qu’un maillage uniforme de précision équivalente. Dans notre cadre de résolution explicite DG, cela signifie une division par 134 du temps de calcul, hors coût de l’adaptation et de la projection des solutions, ici négligeable.

### 1.2.3.2 Raffinement conforme anisotrope

On peut pourtant aller encore plus loin au prix d’une plus grande complexité des opérations d’adaptation de maillage. En effet, un raffinement isotrope comme nous l’avons décrit ne permet pas de tirer parti au maximum de situations où les variations locales des champs sont prédominantes dans une seule direction ( $x$  dans l’exemple que nous venons de traiter). C’est le cas dès qu’une surface de discontinuité comme un choc se déplace dans un domaine. Tant que la courbure de la surface est faible par rapport à la taille des éléments, il n’y a aucun intérêt à augmenter la densité des éléments dans le long de la surface. Ce dont on a besoin, c’est d’une grande densité de mailles dans la direction orthogonale à la surface. Dans ce type de situation, un raffinement anisotrope a le potentiel pour améliorer grandement la performance [Ala+03b].

Une procédure hiérarchique pour obtenir un maillage dont les arêtes pourraient s’aligner dans des directions arbitraires semble difficile à mettre en place. Nous nous tournons donc cette fois vers une procédure maintenant un maillage conforme. La procédure telle qu’elle a été mise en place dans nos outils procède par une succession de modifications locales élémentaires du maillage : subdivision d’arêtes (split), fusion de deux nœuds reliés initialement par une arête (collapse) et retournement d’arêtes ou de faces (swapping), comme présenté dans la Figure 1.4

Une description plus complète de la procédure est donnée dans [Li+05] et codée dans la librairie `meshAdapt` développée par le SCOREC à l’époque.

Nous avons donc couplé notre code DG avec cette librairie. Étant donné un maillage et une carte de taille en entrée, `meshAdapt` modifie le maillage en utilisant les opérations élémentaires pour obtenir un maillage dont la longueur des arêtes se conforme au mieux avec la carte de taille. Dans la version anisotrope de l’adaptation, la carte de taille doit décrire en chaque nœud du maillage, la taille des arêtes souhaitée dans chaque direction autour de ce nœud. La façon la plus naturelle de définir cette carte de taille est de construire un champ de tenseur symétrique  $\bar{M}(\vec{x})$ , défini positif, c’est-à-dire une métrique. Étant donné un point  $\vec{x}$  dans le domaine de définition du champ de taille, et une direction

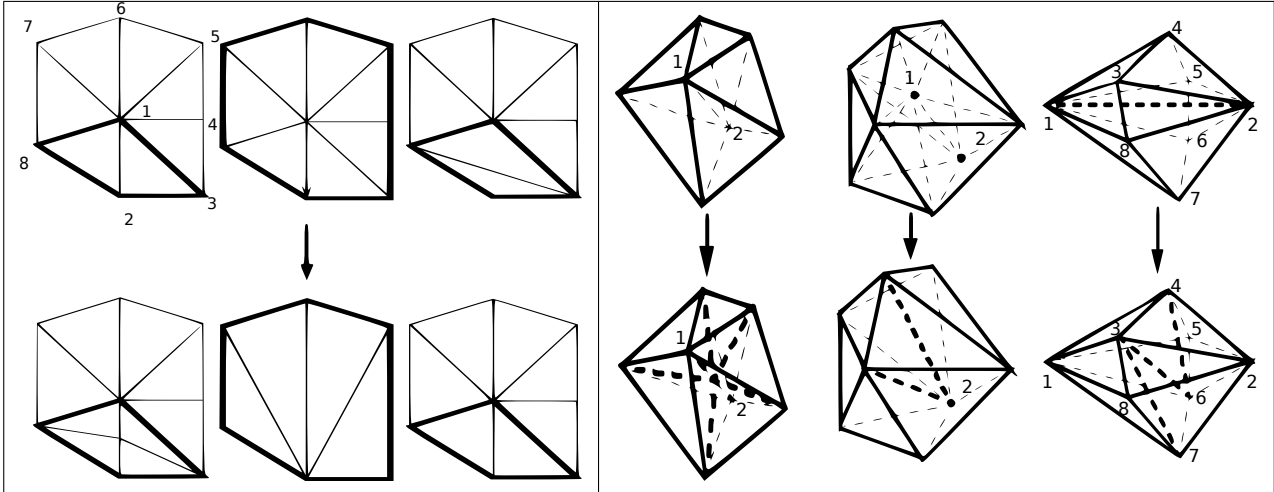


FIGURE 1.4 – Modification locale du maillage, à gauche dans le plan, à droite dans l'espace. Dans chaque vignette, de droite à gauche : split, collapse et swap

unitaire  $\vec{a}$ , la longueur cible pour une arête dans la direction  $\vec{a}$  est  $l = \sqrt{\vec{a} \cdot \bar{M}(\vec{x}) \cdot \vec{a}}$ . La procédure d'adaptation utilise la donnée de la métrique à chaque nœud du maillage d'entrée, en supposant une variation linéaire de ses coefficients le long des arêtes du maillage. Construire cette métrique nécessite des informations directionnelles sur l'erreur. Dans le cas d'approximation linéaire par élément, sur les éléments où le champ est régulier selon notre critère, on s'est basé sur une approximation du Hessien d'un des champs discrets de la solution. Les directions principales du Hessien sont alors utilisées comme directions principales de la métrique, tandis que ses valeurs propres sont utilisées, après une normalisation obtenue en sélectionnant une longueur cible faible dans la direction correspondant à la valeur propre la plus grande du Hessien. Une approximation du Hessien centrée sur les éléments est obtenue par une procédure locale en deux étapes. La première étape calcule dans chaque élément un gradient stabilisé en résolvant un problème local, puis, un nouveau problème local est résolu en partant de ces gradients pour obtenir une moyenne du Hessien dans l'élément. Les détails de cette algorithmes sont donnés dans [Rem+02]. La métrique au nœud est alors obtenue en intersectant les métriques calculées sur les éléments voisins [Ala+03a].

Au voisinage des discontinuités, le Hessien de la solution exacte n'est pas défini. Utiliser une approximation du Hessien ne serait pas une bonne idée et donnerait une métrique très instable. Notre procédure utilise donc le résultat du détecteur de choc pour décider si on utilise ou pas l'approximation du Hessien. Si le Hessien n'est pas utilisable, on utilise les normes maximales des sauts du champ au travers de chaque facette de l'élément pour construire, à la manière d'un dépouillement de rosette, un tenseur symétrique défini positif. On associe alors le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre à la direction normale à la surface portant la discontinuité. Ce sont les valeurs propres qui sont alors normalisées pour obtenir une métrique telle que sa valeur propre correspondant à la direction orthogonale au choc soit le carré de la longueur minimale  $h_{\min}$  imposée par l'utilisateur. Le deuxième paramètre fixé par l'utilisateur est le rapport de forme maximum  $\lambda$ , correspondant au maximum accepté pour la racine du rapport des valeurs propres de la métrique.

**Illustration sur un cas simple.** L'exemple de la 1.2.3.1 est repris en utilisant cette fois l'adaptation conforme anisotrope. Les maillages obtenus sont représentés sur la partie droite de Figure 1.3. Pour être cohérent avec les résultats obtenus précédemment, on a fixé  $h_{\min} = h_0$  et un rapport d'aspect maximum  $\alpha = 100$ . Le maillage obtenu au temps  $t = 0.6$  avec ces paramètres est présenté sur la



**Figure 1.3.** Ce maillage ne comporte que 100 éléments, et les résultats sont aussi précis que la solution avec raffinement isotrope. Les bords des éléments sont alignés avec la discontinuité, ce qui rend le calcul du flux numérique à travers les bords plus précis. Dans des situations réalistes, les surfaces de discontinuité ne sont pas planes et le rapport d'aspect que la procédure d'adaptation du maillage sera capable d'atteindre pour une taille minimale fixe dépend de la courbure de la surface de discontinuité. Néanmoins, l'économie du nombre de degrés de liberté rend moins coûteuse la simulation de problèmes impliquant des structures de choc complexes.

**Échappement d'un choc à la sortie d'un tube.** La procédure d'adaptation de maillage est utilisée pour résoudre un problème simplifié de choc en deux dimensions. Le domaine considéré [Figure 1.5](#) représente une tranche d'un problème tridimensionnel avec un tube ayant un diamètre de 7,65 mm, et une longueur de 30 mm. Le domaine de simulation est un rectangle duquel a été exclu la paroi du tube.

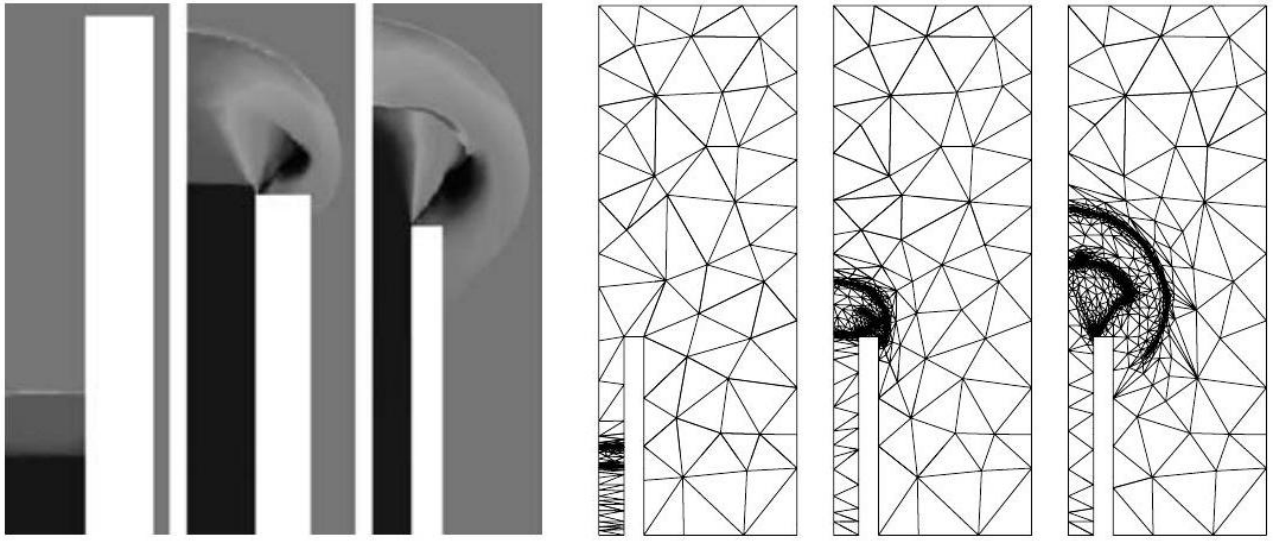


FIGURE 1.5 – Profile de densité à gauche et maillage adapté à droite au temps  $t = 2 \times 10^{-5}$ ,  $6 \times 10^{-5}$ , et  $8 \times 10^{-5}$  s, de gauche à droite dans chaque vignette.

À  $t = 0$ , la pression est fixée à la pression atmosphérique, la vitesse est de 0 m/s et la température est de 300 K. Le côté gauche du domaine représente un axe de symétrie. Sur les parois du tube, nous prescrivons des conditions aux limites de glissement. Le bord à l'intérieur du tube en bas à gauche est une entrée pour un gaz dont nous imposons la pression :  $6 \times 10^6$  Pa, la température : 631.626 K, et la vitesse : 631 m/s. Ce sont des conditions représentatives d'un choc précurseur typique dans un problème de détonation [[Cle+03](#) ; [Kli89](#)]. Des conditions de non-réflexion sont imposées sur le reste du domaine. Nous fixons la taille minimale pour l'adaptation à 0,1 mm et le rapport d'aspect maximal à 50. Dans la première phase de la simulation, l'écoulement est principalement unidimensionnel tandis que la structure du choc progresse dans le tube. Le choc est suivi d'une discontinuité de contact suivi d'une onde d'expansion se déplaçant vers l'extrémité ouverte du tube. Le maillage adaptatif est bien raffiné au niveau de la discontinuité de contact et du choc. Les arêtes majoritairement alignées dans le plan du choc. Même lorsque les deux discontinuités sont proches, la procédure d'adaptation du maillage est suffisamment précise pour séparer les deux structures autorisant même un dé-raffinement entre les deux. Au temps  $t = 6 \times 10^{-5}$  s, le choc est sorti du tube et forme une bulle caractéristique. Le contact est juste au bord du tube. Au temps  $t = 8 \times 10^{-5}$  s, la structure est complètement développée, avec un choc principal "sphérique", suivi par le contact, et une couche de cisaillement reliant le contact

à la sortie du tube. Le maillage final contient environ 50 000 degrés de liberté, soit au moins deux ordres de grandeur de moins que ce qu'il aurait fallu avec un maillage isotrope et homogène en taille.

**Complexification de la géométrie.** Nous considérons un tube plus complexe : son extrémité est percée de trous afin de disperser l'onde de choc (Figure 1.6). Le tube a un diamètre de 155 mm et un ensemble de 16 perforations de 28,6 mm de diamètre près de l'extrémité. Nous en modélisons une tranche avec un plan de coupe passant par le centre des trous. Une condition initiale de type tube à choc, avec un choc placé à 75 mm à gauche des perforations est utilisée pour initier l'écoulement. La pression amont est 565 fois supérieure à la pression aval et la température amont est de 2111,5 K.

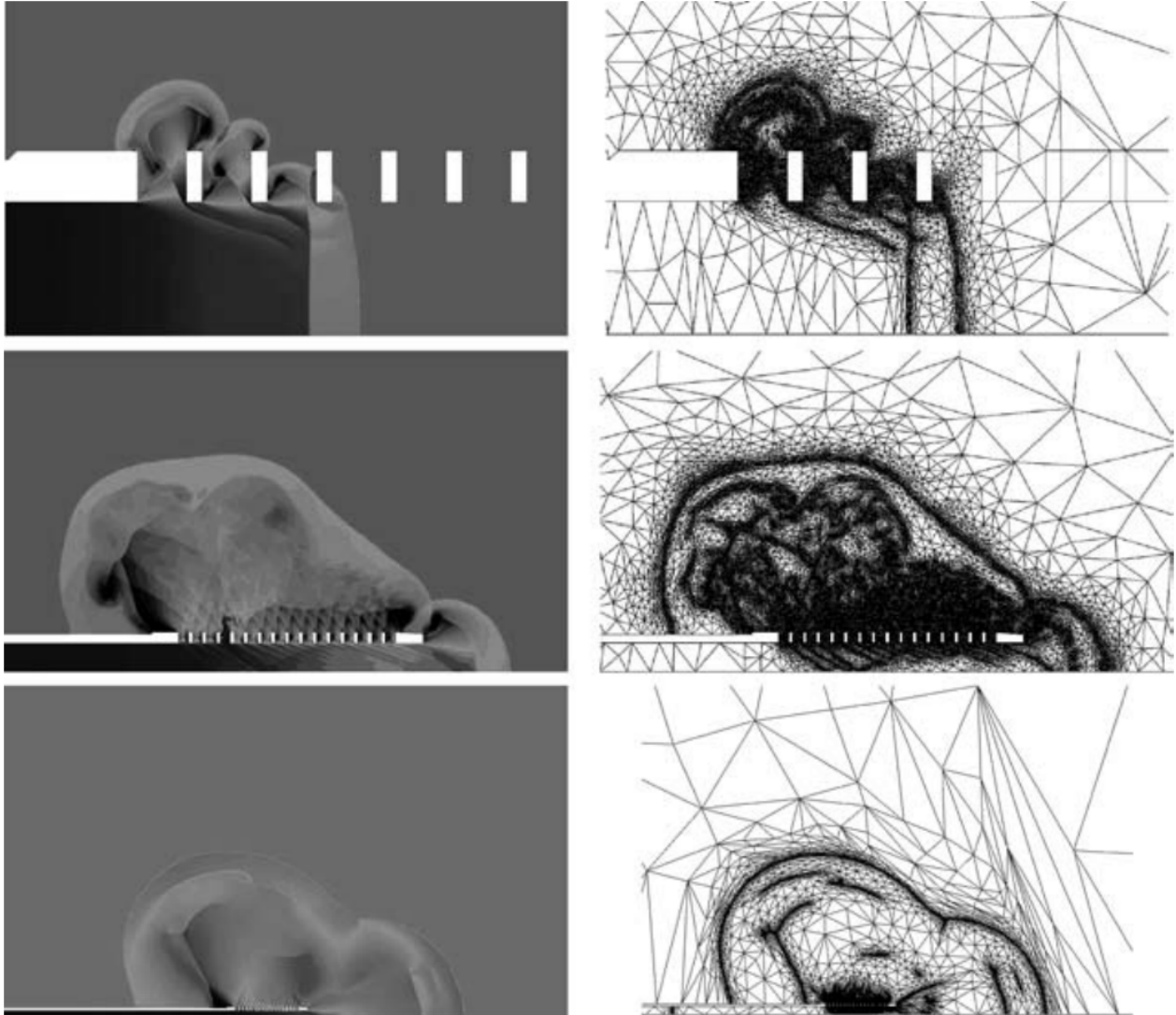


FIGURE 1.6 – Courbes d'iso-densité (à gauche) et maillage adapté (à droite) aux temps  $t = 1 \times 10^{-4}$ ,  $5 \times 10^{-4}$ , et  $1 \times 10^{-3}$  s de haut en bas.

La Figure 1.6 montre la densité et les mailles au temps  $t = 1 \times 10^{-4}$ ,  $5 \times 10^{-4}$  et  $1 \times 10^{-3}$  s. À l'instant  $t = 1 \times 10^{-4}$  s, le choc initial a atteint le quatrième trou, et des structures en forme de champignon se forment à l'extérieur des premier et deuxième trous. Au temps  $5 \times 10^{-4}$  s, le choc initial est à l'extérieur du tube, formant son propre panache. À l'intérieur du tube, des couches de cisaillement

provenant de chaque trou se propagent en aval. Une structure de choc principale en forme de "poire", englobant les structures complexes en forme de "diamant" résultant des chocs en interaction, se forme et s'éloigne de l'extrémité du tube. Au temps  $t = 2 \times 10^{-3}$  s, le choc initial est sorti de la bouche et a formé une structure "sphérique" qui fusionne avec la structure en forme de poire. Le maillage suit de près l'évolution des structures des chocs et s'aligne sur elles. Même si les chocs sont d'intensités très différentes, ils sont capturés correctement. Le maillage à  $t = 1 \times 10^{-3}$  s après 1000 adaptations de maillage contient 900000 degrés de liberté.

#### 1.2.4 Conclusion sur les travaux DG/équations d'Euler

Je m'arrête ici sur la description détaillée de mes travaux autour de DG et des équations d'Euler. À l'époque, j'ai pu réaliser des calculs tridimensionnels, dont on peut voir un aperçu des résultats sur la Figure 1.7.

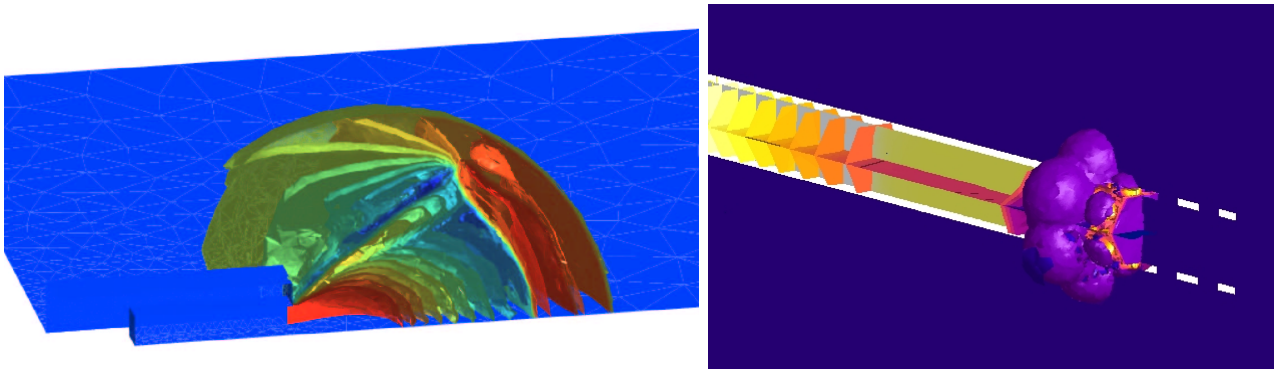


FIGURE 1.7 – Quelques résultats 3D, calculés sur une machine parallèle distribuée avec 4 processeurs. Des surfaces d'iso-valeurs de densité sont représentées. À Gauche un tube idéalisé à section carrée, à droite à section hexagonale percée à l'extrémité.

Pour rendre ces calculs possibles, le code a été parallélisé dans un contexte à mémoire distribué (**MPI**). Si comme discuté plus haut, la formulation DG rend cette tâche plus facile qu'avec d'autres formulations, il n'en reste pas moins qu'il faut coder les briques habituelles dans ce genre de contexte : partition et distribution du maillage entre les processeurs, communication des résultats sur les frontières partagées par plusieurs processeurs entre chaque pas de temps pour ne parler que des tâches liées à la résolution. Dans un contexte adaptatif, il faut en plus faire en sorte que la cohérence du maillage soit maintenue d'un processeur à l'autre et s'assurer que le volume de calcul reste équilibré entre les processeurs au cours du calcul, ce qui nécessite de faire migrer des éléments d'un processeur à l'autre. S'assurer de la robustesse du code dans ce genre de situation n'est pas une tâche facile, mais j'ai pu la mener à bien.

### 1.3 Conclusions sur le chapitre

J'ai présenté ici une partie de mes contributions à la méthode DG. J'ai dû faire l'impasse sur les travaux de mon second post-doc afin d'assurer une taille raisonnable à ce document.

Pourtant, nous avons montré, comme d'autres et particulièrement à haut ordre et pour des problèmes réguliers où l'advection domine, que DG est une alternative très compétitive comparée aux méthodes volumes finis par exemple. La figure 1.8 présente un exemple de calcul qui avait été fait à l'époque : la propagation et les multiples réflexions d'une onde acoustique dans une boîte carrée. Cet exemple a été réalisé sur un maillage très grossier par rapport aux variations du champs ( $h = L/20$



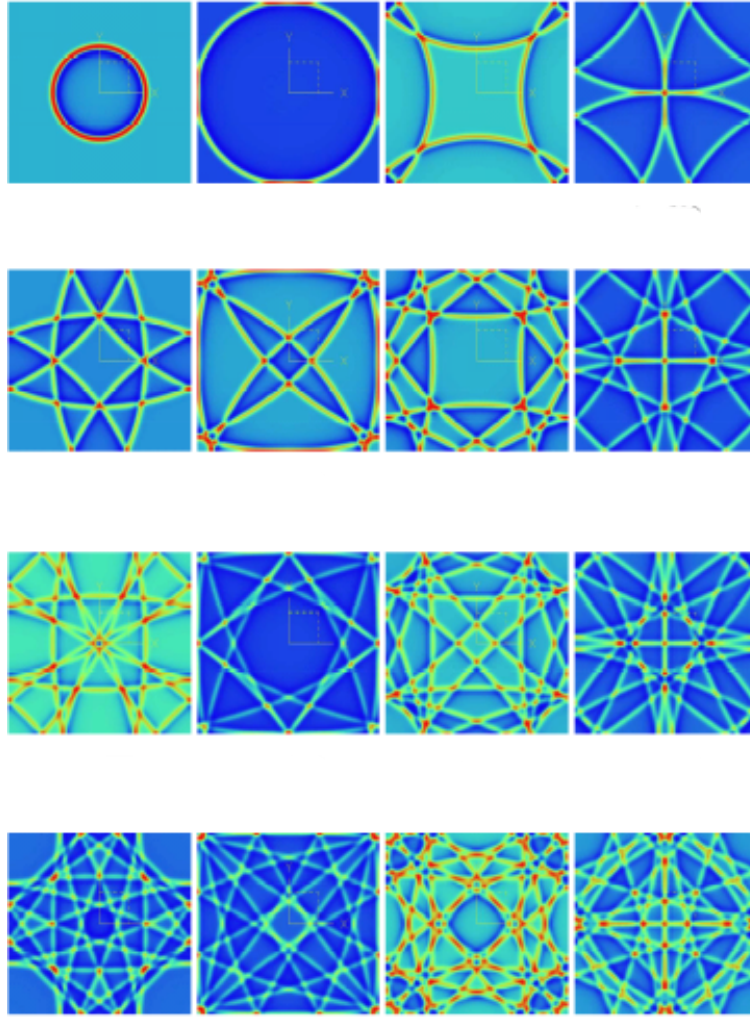


FIGURE 1.8 – propagation d’un pulse acoustique dans une boîte,  $p = 8$ , maillage triangle non structuré,  $h/L = 20$  : pression acoustique au cours du temps, tout les  $t = L/c/4$

où  $L$  est la largeur de la boîte). La précision a été obtenue grâce à l’ordre relativement élevé ( $p = 8$ ) des bases polynomiales utilisées dans chacun des éléments.

Depuis ma prise de poste à l’ECN, je n’ai plus travaillé directement sur ces méthodes, même si j’ai pu en suivre une partie des avancées. Toutefois l’intérêt d’augmenter l’ordre de la discrétisation que j’avais pu mesurer alors était très clair pour moi. L’idée d’en tirer parti y compris pour des problèmes non-réguliers en prenant en compte les singularités grâce à X-FEM a motivé une partie des recherches qui ont suivi, comme on le verra dans la suite.

J’envisage toutefois, dans le cadre du projet X-MESH (voir [paragraphe 2.2.1](#)) qui vient de commencer, de revenir sur les méthodes Galerkin discontinues.

# 2

## X-FEM

### 2.1 Introduction

À mon arrivée en poste à Centrale Nantes en 2006, je me suis intégré dans l'équipe de Nicolas MOËS, au sein du GeM, le laboratoire de Génie Civil et Mécanique. À l'époque, Gregory LEGRAIN et Hans MINNEBO finissaient leur thèse dans cette équipe encore très focalisée sur la méthode X-FEM. Beaucoup de développements étaient en cours notamment pour améliorer les calculs de fissuration. J'ai eu la chance au contact de cette équipe de pouvoir me mettre rapidement à la mécanique de la rupture et à l'outil de discrétisation X-FEM.

La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) [Bel+99 ; Moë+99 ; Bel+09], part d'une tentative parmi d'autres, de réduire la dépendance de la qualité des calculs éléments finis à la qualité du maillage. Elle est très liée, voir identique à la méthode des éléments finis généralisés (G-FEM) [Mel95 ; Mel+96] apparue elle aussi au milieu des années 90. À cette époque, les difficultés techniques liées à la construction de maillage conforme à des interfaces mobiles paraissaient insurmontables et de nombreuses méthodes ont vu le jour, parallèlement au développement des techniques d'adaptation de maillage. Citons par exemple les méthodes dites "sans maillage" (mesh-less) [Dua+96 ; Bel+96] où les éléments finis de frontières [Bre+94]. Au fil des années, les méthodes G-FEM/X-FEM ont connu un grand succès académique et ont su s'imposer comme un outil difficilement contournable pour la discrétisation de problèmes en mécanique, même si peu de logiciels commerciaux l'ont implémenté complètement ou de manière robuste. Si les deux méthodes jumelles sont identiques et reposent sur la même idée : étendre l'espace des fonctions d'approximation éléments finis en utilisant des fonctions d'enrichissement, le nom X-FEM est plutôt associé à des enrichissements locaux, permettant de prendre en compte des irrégularités du champ solution, indépendamment du maillage [Bel+01], et plus particulièrement dans le cas des fissures. Le nom G-FEM est quant à lui plutôt associé, au moins initialement, à des enrichissements globaux.

Depuis ma prise de poste à Nantes, outre l'utilisation des techniques X-FEM dans plusieurs applications, j'ai pu participer au développement de quelques contributions originales à X-FEM. Les plus significatives tournent autour de la montée en ordre. J'entends par là l'augmentation de la précision numérique de la méthode par l'augmentation du degré des polynômes d'interpolation. C'était un objectif naturel après être passé par Galerkin Discontinu et suite aux résultats de mon second post-doctorat. C'était aussi un objectif important pour l'acceptation de X-FEM dans l'industrie mécanique. En effet, les calculs en élasticité par exemple sont couramment effectués avec des éléments quadratiques dans les codes éléments finis industriels. Atteindre un ordre de convergence équivalent de façon robuste sans avoir à mailler explicitement les singularités aurait donné un avantage très intéressant pour X-FEM.

Nous avons dans cet objectif d'abord traité les problèmes des trous et des interfaces matériaux non

maillés pendant la thèse de Kristell DRÉAU que j’ai encadrée [Dré10; Dré+08; Dré+10a; Dré+10b]. Ces travaux ont encore été améliorés en collaboration avec Grégory LEGRAIN [Leg+11a; Leg+11b; Leg+12b; Leg+12a], permettant d’aboutir finalement à des méthodes X-FEM haut ordre optimales dans ces cas. La Figure 2.1 montre l’exemple de la plaque trouée en haut ordre et présente les de courbes convergence.

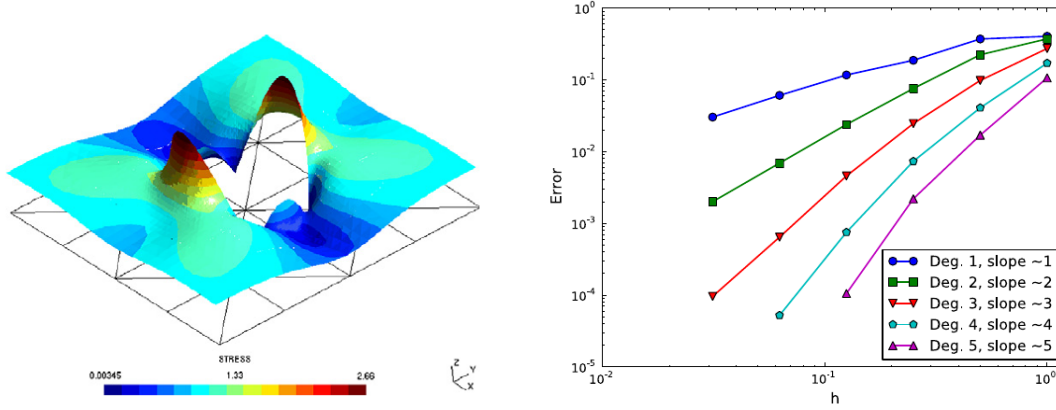


FIGURE 2.1 – Résultat X-FEM haut-ordre, cas de la plaque trouée en élasticité. À gauche le champ de contrainte de Von-Mises sur un maillage grossier à  $p = 9$ , à droite les courbes de convergence en fonction de  $p$

On peut donc maintenant traiter ce type de cas de manière très efficace sur des maillages extrêmement simple. Le prix à payer étant de représenter la level set et la règle d’intégration sur un maillage récursif de type octree permettant de représenter la géométrie avec suffisamment de précision pour ne pas polluer l’approximation ni dégrader la convergence.

Plus difficile et restant à mon avis, un problème ouvert, est d’obtenir des résultats équivalents quelque soit l’ordre, pour le cas des fissures en élasticité, où la singularité en pointe est beaucoup plus forte avec les contraintes qui varient en  $1/\sqrt{r}$  où  $r$  est la distance à la pointe. Nous allons, dans la suite de ce chapitre sur X-FEM, décrire nos efforts pour s’approcher de ce but, en suivant la présentation qui en a été faite dans [Che+13c].

## 2.2 Contribution à X-FEM : Une proposition pour l’enrichissement de pointe de fissure et l’intégration des fonctions singulières

### 2.2.1 Introduction

Cette section présente des améliorations de la méthode X-FEM dans le contexte de la mécanique linéaire de la rupture. L’objectif est de fournir un meilleur taux de convergence et une meilleure robustesse à la méthode. La plupart des codes industriels FEM fournissent des éléments finis jusqu’au second ordre, avec un taux de convergence quadratique avec la taille  $h$  des éléments sur l’erreur en énergie lorsqu’elle est appliquée à des problèmes réguliers. X-FEM, au-delà de la relaxation de la contrainte sur le maillage, a également le potentiel d’atteindre un taux de convergence optimal en présence d’une singularité de contrainte telle que celle qui apparaît en pointe de fissure. On considère généralement que cet objectif est atteint lorsque des fonctions de forme du premier ordre sont utilisées. En utilisant une stratégie d’enrichissement géométrique et une règle d’intégration suffisamment précise, le taux de convergence du premier ordre a déjà été démontré ([Lab+05; Béc+05]). Passer à un ordre

supérieur en conservant le taux de convergence optimal est beaucoup plus difficile. C'est l'objectif. Les contributions présentées dans la suite sont des étapes vers celui-ci.

Dans la sous-section 2.2.2, la stratégie de discrétisation X-FEM des fissures est brièvement rappelée, avec des références et des comparaisons avec les variantes introduites par le G-FEM. Une attention particulière sera portée sur la définition de la zone d'enrichissement, soit topologique soit géométrique. On présentera la stratégie d'enrichissement vectoriel de la pointe de fissure, ainsi que quelques détails sur sa mise en œuvre. La sous-section 2.2.3 est consacrée à un point très technique : l'analyse et la construction d'une nouvelle règle de quadrature destinée à réduire l'erreur d'intégration dans la matrice de rigidité, due à la présence de termes singuliers provenant des fonctions d'enrichissement de pointe de fissure. Enfin, les améliorations proposées sont testées sur quelques cas test où une précision d'ordre élevé est atteinte. Un ordre de convergence optimal est obtenu pour les fonctions de forme du premier et du second ordre, avec un conditionnement raisonnable pour la matrice de rigidité, bien meilleur que dans l'approche X-FEM plus classique. Profitant de la structure des fonctions d'enrichissement vectoriel, un extracteur de facteur d'intensité de contrainte très rapide est présenté. Son utilité par rapport aux méthodes d'intégrale de domaine G-Theta est discutée. On terminera ce sujet par quelques conclusions.

## 2.2.2 Discrétisation X-FEM des fissures

### 2.2.2.1 Positionnement du problème

Nous nous plaçons dans le cadre de l'élasticité linéaire. Sur un domaine discrétisé  $\Omega^h$ , où  $h$  est un paramètre de discrétisation (taille de l'élément), délimité par  $\Gamma^h = \Gamma_t^h \cup \Gamma_u^h$ , la forme faible des équations d'équilibre discrétisées peut être écrite comme suit :

**Problème 1.** *Trouver  $\vec{u}^h$ , le champ de déplacement discrétisé  $\mathcal{V}^h$  tel que :*

$$\int_{\Omega^h} \mathcal{B}(\vec{u}^h, \vec{v}^h) d\Omega = \int_{\Gamma_t^h} \mathcal{L}(\vec{v}^h) d\Gamma \quad \forall \vec{v}^h \in \mathcal{V}_0^h \quad (2.1)$$

Où :

- $\mathcal{V}^h$  est l'espace des fonctions de forme pour le champ de déplacement, défini sur le maillage  $\Omega^h$  qui discrétise le domaine  $\Omega$ , et qui vérifie la condition limite de Dirichlet sur  $\Gamma_u^h$ .
- $\mathcal{V}_0^h$  est l'espace correspondant vérifiant les conditions de Dirichlet homogènes.
- $\mathcal{B}$  est un opérateur bilinéaire, défini comme :  $\mathcal{B}(\vec{u}, \vec{v}) = \bar{\bar{\nabla}}^s \vec{u}^h : \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{\nabla}}^s \vec{v}^h$ , où  $\bar{\bar{\nabla}}^s \vec{u}$  est la partie symétrique du gradient de  $\vec{u}$  (le tenseur de déformation linéarisé), et  $\bar{\bar{D}}$  est le tenseur d'élasticité d'ordre 4.
- $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire correspondant à la condition limite de Neumann sur  $\Gamma_t$  :  $\mathcal{L}(\vec{u}) = \vec{t} \cdot \vec{u}$  où  $\vec{t}$  sont les tractions prescrites sur  $\Gamma_t$ .

Le domaine  $\Omega$  est alors coupé par une fissure dont les lèvres sont libres d'efforts. Dans le contexte de X-FEM, le maillage ne se conforme pas à la fissure, et des représentations alternatives pour la géométrie de la fissure doivent être utilisées.

### 2.2.2.2 Représentation géométrique de la fissure

La modélisation des fissures 3D non-alignées avec le maillage à l'aide de la partition d'unité a été présentée sans doute une des premières fois dans l'article de N. Sukumar [Suk+00]. La description de l'emplacement de la fissure y était explicite. Plus tard, dans [Moë+02 ; Gra+02], une représentation implicite plus flexible utilisant des level sets a été introduite. C'est la représentation utilisée dans le présent travail, que nous décrivons dans la suite. La géométrie de la fissure est donnée par deux level

sets. La level set "normale",  $ls_n$  d'une part, correspond à la distance signée à une surface contenant la fissure. La level set "tangentielle" :  $ls_t$  d'autre part. L'intersection de son iso-zéro avec celle de  $ls_n$  correspond au front de fissure (la pointe en deux dimensions). Les valeurs de  $ls_t$  sur les points de l'iso-zéro de  $ls_n$  correspondent à la distance "géodésique" signée, c'est-à-dire la longueur du plus court chemin contraint sur  $ls_n = 0$ , reliant le point au front de fissure. En-dehors de  $ls_n = 0$ , les surfaces iso  $ls_t$  et iso  $ls_n$  sont orthogonales. Le front de la fissure est donc donné par l'ensemble des points où à la fois  $ls_n$  et  $ls_t$  sont nuls, alors que la fissure est donnée par l'ensemble des points tels que  $ls_n = 0$  et  $ls_t \leq 0$ . L'iso-zéro de chacune des level-sets est représentée sur la Figure 2.2 près d'une portion du front de fissure. Une revue plus détaillée comparant les différentes possibilités de définir  $ls_n$  et  $ls_t$  est disponible dans l'article de M. Duflo [Duf07].

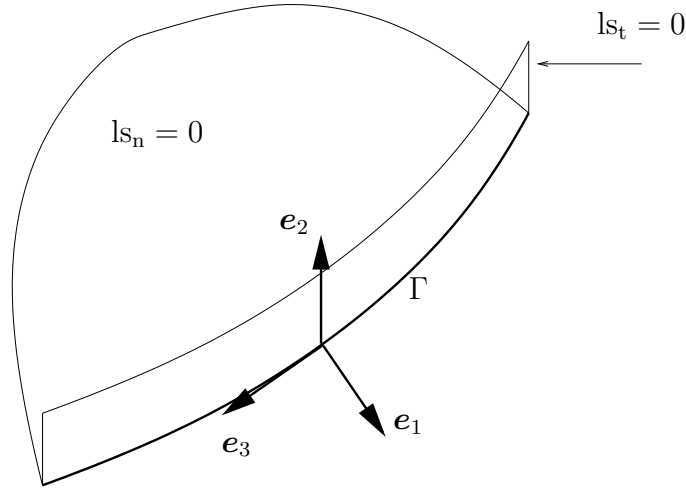


FIGURE 2.2 – Représentation par level-set d'une fissure et définition des axes locaux le long du front de la fissure.

Numériquement, les level-sets sont discrétisées sous forme d'une approximation linéaire éléments finis, sur le maillage utilisé pour le calcul du champ de déplacement. Il est bien sûr possible d'utiliser un autre maillage pour représenter les level-sets. Il a par exemple été proposé de les représenter sur un maillage plus fin, ou sur un maillage de type structuré ou "octree" [Suk+08 ; Leg+12a ; Pra+07]. Ces dernières versions, étant parfois plus efficaces en termes de mémoire, et des algorithmes de propagation plus rapides peuvent être utilisés pour mettre à jour la position de la fissure lors de l'analyse de la propagation. L'utilisation d'une représentation implicite de la fissure, telle que celle présentée, présente certains inconvénients. En effet, la surface de la fissure, si elle est suffisamment simple, pourrait être décrite par une surface paramétrique, ou par un maillage. Le coût mémoire d'une telle représentation serait dans la plupart des cas bien plus faible que le coût de représentation de deux level-sets discrets sur le maillage entier. Toutefois, ceci doit être nuancé par le fait que ces level-sets n'ont besoin d'être définis que dans une bande étroite contenant la surface de la fissure ("narrow-band level-set" [Set99 ; Osh+04]).

Dans le contexte de la propagation des fissures, le ou les fronts de fissure peuvent se propager et prendre des géométries et topologies complexes, toujours représentables par les couples level-set  $ls_t$ ,  $ls_n$  sans avoir à modifier le maillage du domaine de calcul. La mise à jour d'un maillage respectant la géométrie et la topologie du front de fissure tout en maintenant des critères de qualité de forme des éléments peut s'avérer bien plus délicate, ce qui peut faire pencher la balance vers une approximation level-set.

### 2.2.2.3 Enrichissement de la pointe de la fissure : version classique

Le champ d'approximation X-FEM couramment utilisé est le suivant. Si aucune fissure n'est présente, le champ de déplacement  $\vec{u}(\vec{x})$  sur  $\Omega$  est approximé par :

$$\vec{u}^h(\vec{x}) = \sum_{i \in [1:dim]} \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(\vec{x}) u_{Ii} \vec{E}_i \quad (2.2)$$

Où  $\mathcal{N}$  est l'ensemble de tous les nœuds du maillage,  $N_I$  sont les fonctions de forme  $C^0$  classiques et  $u_{Ii}$  sont les degrés de liberté de déplacement attachés au nœud  $I$  dans la direction  $\vec{E}_i$ , où les  $\vec{E}_i$  forment une base orthonormée globale, et  $dim$  est le nombre de dimensions spatiales du problème. L'introduction d'une fissure dans le maillage est représentée par l'approximation enrichie suivante :

$$\begin{aligned} \vec{u}^h(\vec{x}) = & \sum_{i \in [1:dim]} \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(\vec{x}) u_{Ii} \vec{E}_i \\ & + \sum_{i \in [1:dim]} \sum_{I \in \mathcal{N}_{crack}} N_I(\vec{x}) H(\text{ls}_n(\vec{x})) h_{Ii} \vec{E}_i \\ & + \sum_{i \in [1:dim]} \sum_{I \in \mathcal{N}_{tip}} \sum_{\alpha} N_I(\vec{x}) F_{\alpha}(\text{ls}_n(\vec{x}), \text{ls}_t(\vec{x})) a_{Ii\alpha} \vec{E}_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Où

- $\mathcal{N}_{crack}$  est l'ensemble des nœuds dont le support (union des éléments connectés au nœud) est complètement coupé en deux par la fissure. Ces nœuds sont enrichis par la fonction de Heaviside généralisée :

$$H(\text{ls}_n(\vec{x})) = \text{sign}(\text{ls}_n(\vec{x})) \quad (2.4)$$

- $\mathcal{N}_{tip}$  est l'ensemble des nœuds enrichis par les fonctions d'enrichissement de pointe

$$[F_{\alpha}] = [\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta] \quad (2.5)$$

où

$$r = \sqrt{\text{ls}_n^2 + \text{ls}_t^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{\text{ls}_n}{\text{ls}_t} \right) \quad (2.6)$$

- $h_{Ii}$  sont les degrés de liberté associés à la fonction d'enrichissement de Heaviside attachée au nœud  $I$ , dans la direction  $i$ .
- $a_{Ii\alpha}$  sont les degrés de liberté associés à la fonction d'enrichissement de la pointe de fissure  $\alpha$  attachée au nœud  $I$ , dans la direction  $i$ .

L'ensemble  $\mathcal{N}_{tip}$  doit au moins contenir les nœuds dont les supports touchent le front de fissure. De manière similaire à ce qui a été introduit dans [Béc+05] et [Lab+05], nous pouvons distinguer l'enrichissement topologique et géométrique. Nous désignons par  $V^{\text{geo}}(R)$  l'ensemble des éléments pour lesquels au moins un nœud est à une distance  $r$  du front de fissure inférieure ou égale à  $R$ . La distance  $r$  est calculée par l'équation (2.6). Nous désignons par  $V^{\text{topo}}(n)$  l'ensemble des éléments composant les  $n$  couches d'éléments autour du front, les couches étant définies itérativement comme suit. La première couche contient tous les éléments touchant le front. La deuxième couche est définie comme les éléments connectés aux nœuds des éléments de la première couche. La troisième couche est définie comme les éléments connectés aux nœuds des éléments de la deuxième couche et ainsi de suite. Pour tous les exemples numériques présentés dans cet article, nous utiliserons la stratégie d'enrichissement géométrique où  $\mathcal{N}_{tip}$  est l'ensemble des nœuds de  $V^{\text{geo}}(R)$ . Il a été montré par exemple dans [Béc+05] que cette stratégie était nécessaire pour obtenir un taux de convergence optimal en norme d'erreur énergétique. Dans la suite de l'article, nous ferons référence à l'utilisation des quatre fonctions d'enrichissement des pointes de fissures  $F_{\alpha}$  comme l'enrichissement *scalaire* pour le différencier de l'enrichissement présenté dans la section suivante.



### 2.2.2.4 Enrichissement de la pointe de la fissure : version proposée

**Présentation** Nous proposons d'étudier une version améliorée de l'enrichissement que nous venons de rappeler. Au lieu d'utiliser les quatre fonctions d'enrichissement scalaires  $F_\alpha$ , nous proposons d'utiliser trois fonctions d'enrichissement vectorielles  $\vec{K}_\alpha$ . L'équation 2.3 se lit alors comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}) = & \sum_{i \in [1:dim]} \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(\vec{x}) u_{Ii} \vec{E}_i \\ & + \sum_{i \in [1:dim]} \sum_{I \in \mathcal{N}_{crack}} N_I(\vec{x}) H(\text{ls}_n(\vec{x})) h_{Ii} \vec{E}_i \\ & + \sum_{I \in \mathcal{N}_{tip}} \sum_{\alpha} N_I(\vec{x}) \vec{K}_\alpha(\text{ls}_n(\vec{x}), \text{ls}_t(\vec{x})) a_{I\alpha} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dans cette version actualisée, seule la dernière somme diffère légèrement. Les  $a_{I\alpha}$  sont maintenant des degrés de liberté scalaires et la nature vectorielle du champ de déplacement est portée dans les fonctions d'enrichissement. Nous faisons le choix d'utiliser trois fonctions d'enrichissement vectorielles qui ne sont que version adimensionnelle des trois premiers modes asymptotiques d'ouverture de l'expansion d'Irwin ([Irw57]).

$$\vec{K}_1 = \sqrt{r}(\kappa - \cos \theta) \left( \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_1(\vec{x}) + \sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_2(\vec{x}) \right) \quad (2.8)$$

$$\vec{K}_2 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 2 + \cos \theta) \vec{e}_1(\vec{x}) - \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 2 + \cos \theta) \vec{e}_2(\vec{x}) \quad (2.9)$$

$$\vec{K}_3 = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_3(\vec{x}) \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

Où  $\kappa = 3 - 4\nu$ ,  $\nu$  étant le coefficient de Poisson. Cette valeur de  $\kappa$  correspond au cas tridimensionnel et au cas des déformations planes. Les  $\{\vec{e}_i(\vec{x})\}$  forment une base mobile locale, alignée avec la fissure, c'est-à-dire telle que :

$$\vec{e}_1(\vec{x}) = \frac{\vec{\nabla} \text{ls}_t(\vec{x})}{\|\vec{\nabla} \text{ls}_t(\vec{x})\|} \quad (2.12)$$

$$\vec{e}_2(\vec{x}) = \frac{\vec{\nabla} \text{ls}_n(\vec{x})}{\|\vec{\nabla} \text{ls}_n(\vec{x})\|} \quad (2.13)$$

$$\vec{e}_3(\vec{x}) = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \quad (2.14)$$

**Discussion** Si l'idée d'utiliser ces fonctions d'enrichissement nous a semblé originale au moment du développement, un examen plus approfondi de la bibliographie a montré que l'idée était déjà utilisée sous une forme similaire dans le contexte du G-FEM. Bien que les méthodes G-FEM et X-FEM soient apparues à peu près en même temps, qu'elles soient toutes deux des applications de la méthode de la partition d'unité et qu'elles soient toutes deux appliquées à la modélisation des fissures, elles étaient initialement très différentes. Les deux méthodes ont évolué depuis en empruntant des idées l'une à l'autre à un point tel qu'il semble difficile de les distinguer aujourd'hui ([Fri+10]). Si l'on se réfère aux premières applications pour les fissures, 1999, 2000, l'introduction d'une discontinuité à l'intérieur d'un élément, se faisait à l'aide d'une partition d'unité discontinue dans le G-FEM, alors que dans le cas du X-FEM, la discontinuité est introduite via un enrichissement de Heaviside multiplié par une partition d'unité linéaire et continue. Dans le G-FEM original, l'espace de déplacement est défini comme suit :

$$u = \sum q_i \phi_i(x) N_i \quad (2.15)$$

Où les  $\phi_i(x)$  sont construits à partir des fonctions de SHEPARD [She68], en utilisant le critère de visibilité proposé dans [Bel+93] et les  $N_i$  sont les fonctions de formes classiques des éléments finis. Dans la version initial d’X-FEM, l’espace de déplacement est par contre défini comme suit :

$$u = \sum q_i N_i + \sum h_i N_i H(\text{ls}_n(x)) \quad (2.16)$$

Où les  $N_i$  sont les fonctions de formes classiques des éléments finis, et  $H$  est la fonction de Heaviside, définie sur le level-set normal qui donne la distance à la surface de la fissure. Des articles plus récents sur le G-FEM semblent avoir adopté une formulation plus proche d’X-FEM, où la discontinuité est maintenant introduite via l’enrichissement. L’enrichissement des éléments, touchant directement la pointe de la fissure, avec des fonctions vectorielles qui sont l’expansion asymptotique de la solution exacte, est apparu à notre connaissance pour le cas de G-FEM dans [Dua+00], où il a été appliqué pour décrire des coins entrant et des fissures, vu comme des cas limites où l’angle du coin tend vers  $0^\circ$ . Le champ de déplacement discret est enrichi autour d’un coin en utilisant des fonctions vectorielles qui sont directement l’expansion asymptotique de la solution exacte. Dans cet article, le maillage était conforme à l’angle, on est donc encore loin du contexte X-FEM. Dans l’article suivant [Dua+01], la méthode est explicitement appliquée aux fissures et le critère “WA” est utilisé pour choisir les nœuds enrichis par l’expansion asymptotique. Les critères WA font référence aux "nœuds enveloppants", c’est-à-dire tous les nœuds appartenant à des éléments qui intersectent le front de fissure. Dans ces travaux, l’enrichissement n’est donc que “topologique” dans notre nomenclature. L’enrichissement que nous proposons ici est donc en effet le même que celui proposé dans [Dua+00]. Mais à l’époque de cet article, la nécessité d’un critère d’enrichissement géométrique au lieu de topologique pour obtenir l’ordre de convergence optimal n’était pas encore comprise. La représentation de la fissure par level-set n’était pas non plus présente.

Dans un article plus récent ([Per+09]), le même groupe a proposé une autre stratégie d’enrichissement, inspirée de la stratégie initiale, où les trois fonctions de champ de déplacement asymptotique vectoriel sont divisées en six fonctions d’enrichissement, selon les directions tangentielle et normale. Cette approche permet d’éviter la description précise de la direction de la fissure, tout en limitant le nombre de degrés de liberté par nœud enrichi à 6 (à comparer aux 12 fonctions d’enrichissement avec enrichissement scalaire). Dans cet article, l’auteur a utilisé à nouveau l’enrichissement topologique, affirmant que l’enrichissement géométrique ne fonctionne que pour les fissures planes. Comme nous le montrerons dans la section des exemples 2.2.4, l’enrichissement géométrique fonctionne parfaitement dans notre cas, même pour les fissures non- planes. Jusqu’à présent, tous les articles qui ont modélisé une fissure à l’aide d’X-FEM et de l’enrichissement en pointe de fissure ont utilisé la base proposée initialement, les quatre fonctions d’enrichissement scalaire 2.5, appliquées séparément dans chaque direction de l’espace. Au vu de la bibliographie, l’originalité de notre proposition n’est donc pas d’utiliser les fonctions vecteurs d’enrichissement présentées, mais plutôt de les utiliser dans le contexte d’un enrichissement géométrique, basé sur une représentation level-set de la fissure et d’en réaliser les conséquences sur le conditionnement de la matrice de rigidité, tout en montrant un taux de convergence optimal pour les fissures droites et courbes.

L’originalité de ce travail repose donc sur l’utilisation combinée de l’enrichissement géométrique et vectoriel dans un cadre où la fissure est représentée implicitement par deux level-set, permettant si l’intégration numérique est suffisamment robuste 2.2.3, d’obtenir une convergence optimale.

**Détails d’implémentation** Les trois fonctions d’enrichissement vectoriel (2.8, 2.9, 2.10) sont définies en fonction du repère mobile local ( $\{\vec{e}_i\}$ ), qui, en général, dépend de  $\vec{x}$ . Par conséquent, pour assurer la continuité du champ de déplacement, il semble à première vue que la base locale doive être définie de manière continue sur la zone d’enrichissement. Cela signifierait que l’on doit construire à partir du gradient du level-set discrétisé, un champ continu de base locale mobile. En outre, lors du calcul du gradient de la fonction enrichie proposée, un terme de courbure,  $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x_j}$ , apparaîtrait. Même si



ce terme peut être négligé lorsque la courbure de la fissure est faible par rapport à la taille de l'élément dans la zone d'enrichissement, il semble difficile d'implémenter une version robuste en utilisant ce point de vue.

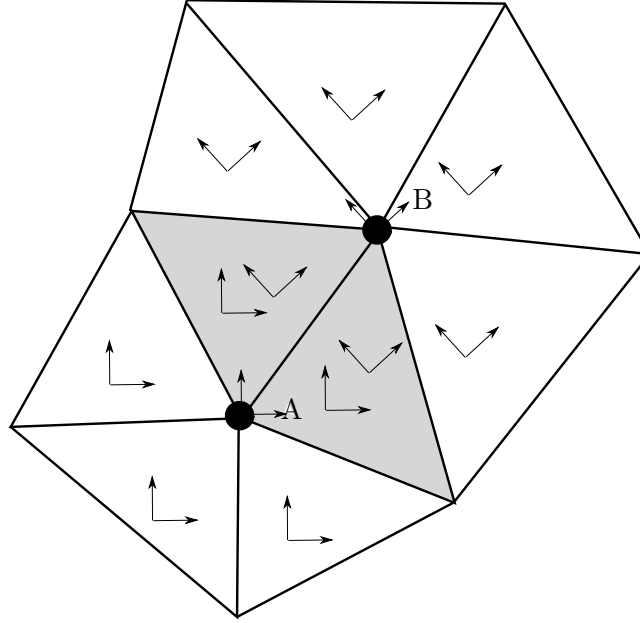


FIGURE 2.3 – Le support de 2 nœuds (les deux disques), avec deux bases locales, une appartenant à chaque nœud.

En fait, nous proposons une alternative beaucoup plus simple. Nous proposons de définir une base locale associée à chaque nœud enrichi. Chacune de ces bases a besoin d'être définie uniquement sur le support du nœud enrichi. Puisque la fonction d'enrichissement associée à un nœud enrichi est multipliée par les fonctions de forme des éléments finis associées au nœud, le produit est toujours nul sur la frontière et à l'extérieur du support. Cela allège la contrainte de continuité sur la discrétisation de la base de fissures locale : pour chaque nœud enrichi, la discrétisation de la base de fissures locale qui lui est associée ne doit être continue que sur son support pour que le champ soit globalement continu. Pour simplifier encore plus la discrétisation, nous choisissons une approximation constante de chaque base de fissure locale par nœud enrichi, sur le support du nœud. Ceci permet d'éviter le calcul du terme de courbure. La figure 2.3 illustre une situation typique. Sur ce morceau de maillage, supposons que seuls les nœuds A et B sont enrichis. Lors du calcul de la matrice de rigidité sur l'élément grisé de la figure, la contribution de l'enrichissement des nœuds A et B doit être prise en compte. Lors du calcul de la contribution de l'enrichissement attaché au nœud A, nous utiliserons la base locale définie pour le support du nœud A, et respectivement, lors du calcul de la contribution de l'enrichissement attaché au nœud B, nous utiliserons la base locale définie pour le support du nœud B. Le nombre de bases locales définies sur un élément est égal au nombre de supports de nœuds enrichis dont cet élément fait partie (et donc au maximum 3 pour des éléments triangulaires). La fonction d'enrichissement est maintenant une fonction du nœud enrichi. Cela se traduit par la réécriture suivante du dernier terme de l'équation 2.7 :

$$\sum_{I \in \mathcal{N}_{\text{tip}}} \sum_{\alpha} N_I(\vec{x}) \vec{K}_{\alpha}^I(\text{ls}_n(\vec{x}), \text{ls}_t(\vec{x})) a_{I\alpha} \quad (2.17)$$

Où la dépendance de la fonction d'enrichissement vis-à-vis du nœud auquel elle est rattachée apparaît clairement, et où les fonctions d'enrichissement s'écrivent :

$$\vec{K}_1^I = \sqrt{r}(\kappa - \cos \theta) \left( \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_1^I + \sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_2^I \right) \quad (2.18)$$

$$\vec{K}_2^I = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 2 + \cos \theta) \vec{e}_1^I - \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 2 + \cos \theta) \vec{e}_2^I \quad (2.19)$$

$$\vec{K}_3^I = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_3^I \quad (2.20)$$

Où  $\vec{e}_i^I$  est la valeur discrétisée du  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base locale mobile, au nœud  $I$ . Dans notre implémentation, les deux level-sets sont discrétisés avec une fonction de forme linéaire par morceau sur les éléments du maillage. Nous pouvons donc calculer leur gradient, constant dans chaque élément, et à partir de là construire une base orthogonale constante par élément qui approxime les directions tangentes et orthogonales à la fissure. Mais nous avons besoin d'une valeur constante par support. Pour obtenir cette valeur, nous prenons simplement la moyenne pondérée des gradients constants sur chaque élément dans le support du nœud enrichi, et à partir de ces valeurs, nous construisons une base orthogonale. Ce schéma est très efficace et facile à mettre en œuvre.

Ceci conclut notre première partie. Nous avons passé en revue X-FEM pour la mécanique linéaire de la rupture, en couvrant la représentation de la géométrie et en proposant une stratégie différente d'enrichissement de la pointe de fissure. Notre stratégie d'enrichissement vectoriel sera testée et plus discutée dans la partie 2.2.4, mais nous devons d'abord discuter du problème de l'intégration de l'opérateur d'élasticité (la matrice de rigidité) sur les éléments enrichis.

### 2.2.3 Règle d'intégration

L'intégration de la forme bilinéaire  $\mathcal{B}(\vec{v}^h, \vec{u}^h)$ , pour chaque élément enrichi, est connue pour être problématique. En effet, les termes principaux de l'expression à intégrer incluent des termes de la forme  $1/r$  dus à l'enrichissement de la pointe. De plus, les fonctions à intégrer sont discontinues sur la surface de la fissure. Dans le contexte de problèmes en deux ou trois dimensions, il n'y a que peu d'espoir de construire une intégration exacte de la forme bilinéaire sur un élément enrichi par les fonctions de pointe. L'intégration numérique est bien sûr nécessaire. Dès le début du X-FEM, certains articles ont déjà essayé de traiter cette question : comment obtenir un schéma d'intégration efficace pour que l'erreur dans l'intégration de la forme bilinéaire ne pollue pas les résultats en dégradant les propriétés de convergence. Des références sur le sujet sont entre autres : [Béc+05], [Par+09] et [Mou+10], qui ont utilisé des idées développées en dehors du contexte X-FEM dans [Duf82] et [Nag+93] par exemple.

La première étape a consisté à découper l'élément à intégrer en une série de cellules le long de la surface de la fissure, puis à utiliser des règles d'intégration classiques de type Gauss sur chaque cellule, généralement d'ordre supérieur à la règle nécessaire pour intégrer les termes classiques. Cela permet d'avoir des intégrations exactes des termes qui proviennent des fonctions de formes classiques et de l'enrichissement de Heaviside, mais laisse dans la plupart des cas une erreur importante sur les termes impliquant les fonctions d'enrichissement de pointe. La situation a été améliorée lorsque des règles d'intégration spéciales ont été utilisées pour les cellules qui ont un nœud sur la pointe de la fissure. Nous pensons néanmoins que cette approche n'est pas toujours suffisante. Dans la suite, nous proposons et mettons en œuvre, à partir d'un mapping, qui est singulier pour les cellules d'intégration touchant la pointe, une nouvelle stratégie qui permet d'intégrer avec une grande précision tous les éléments enrichis, et pas seulement ceux qui touchent la pointe de la fissure, pour le cas bidimensionnel. L'extension au cas tridimensionnel sera suggérée, mais non traitée dans le présent document.

### 2.2.3.1 Analyse simple : intégration numérique d'une fonction "faiblement" singulière sur un segment

Dans la présente section, nous analyserons un cas très simple à une dimension afin d'expliquer les problèmes auxquels nous voulons faire face dans le cas plus général. L'intégration d'une fonction sur un intervalle en utilisant une règle de Gauss-Legendre est connue pour converger exponentiellement vers la solution exacte si la fonction à intégrer est régulière ( $C^\infty$ ). Dans notre cas, nous nous intéressons au calcul des fonctions ayant une singularité, ou une singularité dans un de leurs gradients, à la position de la pointe de la fissure. Pour commencer, l'analyse, on considère la quadrature de  $\sqrt{|r|}$  sur l'intervalle  $[-1 : 1]$ , en utilisant les points de Gauss-Legendre. Comme la fonction a une dérivée indéfinie en zéro, l'erreur sur l'intégrale ne converge pas exponentiellement. Une première amélioration serait de couper l'intervalle au point  $r = 0$  et d'effectuer une intégrale numérique sur  $[-1 : 0[$  puis  $]0 : 1]$ . Comme on peut le voir sur la figure 2.4, dans le premier cas, l'erreur oscille tout en convergeant lentement vers zéro avec le nombre de points; dans le second cas, la convergence est toujours lente, mais n'oscille plus. Cette première observation de base motive le choix de découper les éléments en cellules qui ne peuvent contenir la singularité que sur leur coin, et non à l'intérieur.

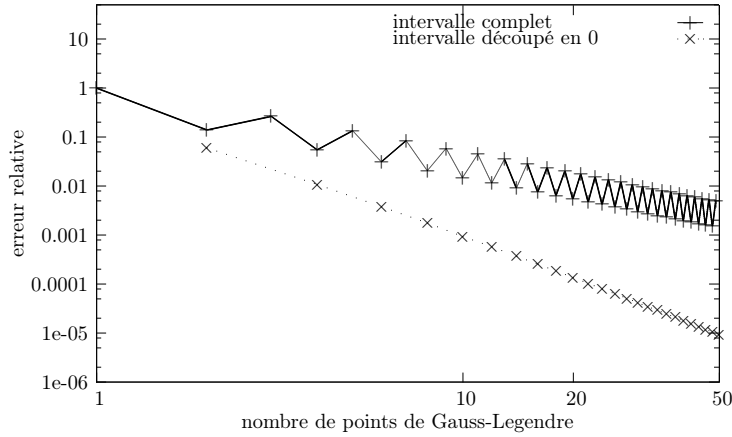


FIGURE 2.4 – Erreur sur l'intégration de la fonction  $\sqrt{|r|}$  sur  $[-1 : 1]$

Poursuivons maintenant l'analyse en considérant la quadrature de  $\sqrt{r}$  sur l'intervalle  $[\epsilon : 1 + \epsilon]$  avec  $\epsilon \geq 0$ . Sur la partie gauche de la figure 2.5, nous reportons l'erreur relative de la quadrature de  $\sqrt{x}$  en fonction du nombre de points de Gauss-Legendre utilisés, pour  $\epsilon$  allant de 1 à 0. Pour de grands  $\epsilon$ , la règle de quadrature converge exponentiellement avec le nombre de points de Gauss, mais lorsque  $\epsilon$  se rapproche de 0, l'erreur devient de plus en plus grande pour un même nombre de points de Gauss. En approchant de la limite ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), la convergence exponentielle est perdue et un taux de convergence polynomial très faible est mesuré. Le point important que nous voulons souligner est qu'en fait, tant que  $\epsilon > 0$  la convergence est effectivement exponentielle, mais au fur et à mesure que  $\epsilon$  devient plus petit, on a besoin de plus en plus de points pour voir l'effet de la convergence exponentielle. Elle semble polynomiale seulement. Bien sûr, l'intégrale peut être calculée après un changement de variable  $r = y^2$  de sorte que l'intégrande devient régulière sur l'intervalle d'intégration complet :

$$\int_a^b \sqrt{r} dr = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2y^2 dy \quad (2.21)$$

L'intégration numérique après ce changement de variable fournit alors d'excellents résultats, puisque le résultat exact, jusqu'à l'erreur d'arrondi, peut être obtenu avec une règle de Gauss-Legendre à deux points (voir Fig. 2.5 droite).

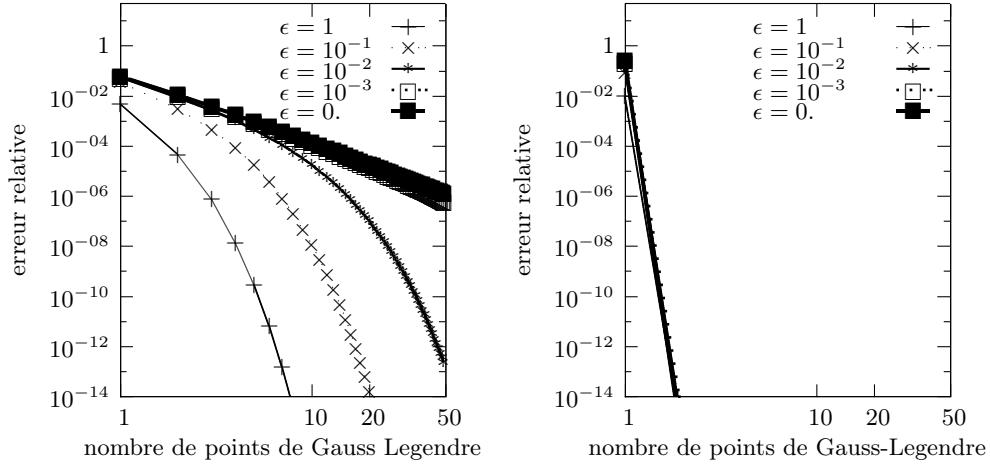


FIGURE 2.5 – Erreur d'intégration de  $\sqrt{|r|}$  sur  $[\epsilon, 1 + \epsilon]$ , intégration de Gauss-Legendre directe à gauche, intégration de Gauss-Legendre après changement de variable (équation 2.21) à droite.

La difficulté d'intégrer les termes de la forme bilinéaire associée aux fonctions d'enrichissement de pointe de fissure a bien sûr été notée dans de nombreux articles ([Béc+05 ; Par+09 ; Mou+10]). Les remèdes apportés y sont fondés sur un changement de variable qui neutralise la singularité. Mais sauf dans [Béc+05], seuls les cas où la singularité est au sommet d'une cellule d'intégration (et/ou le long d'un bord d'une cellule d'intégration en trois dimensions) sont traités. Dans [Béc+05], une solution est proposée : une cellule triangulaire est remplacée par une superposition de 3 cellules. Chacune des cellules a un de ses nœuds sur le point singulier, et les deux autres sont deux nœuds de la cellule originale. L'article rapporte de bons résultats dans ce cas, mais cette stratégie implique l'utilisation de points d'évaluation qui sont en dehors de l'élément original, ce qui limite son application et augmente le nombre total de points d'intégration. En-dehors de la dernière stratégie mentionnée, nous n'avons trouvé aucun traitement spécial dans la littérature X-FEM ou G-FEM appliquée aux cellules proches de la pointe de la fissure sans la contenir. Pourtant, si rien de spécial n'est fait pour ces cellules, la quadrature convergera très lentement, comme l'étude précédente le montre dans un cas unidimensionnel. Nous proposons donc un schéma d'intégration plus robuste, également fondé sur un changement de variable, mais que nous avons étendu au cas où la pointe de la fissure ne coïnciderait pas avec un nœud d'une des cellules d'intégration.

Afin d'évaluer différentes stratégies d'intégration, nous allons dans un premier temps calculer la matrice de rigidité d'un élément bidimensionnel et la comparer à une solution de référence. Soit  $\mathbf{K}_i^e$  la rigidité associée à l'élément  $e$  obtenue en utilisant une stratégie d'intégration, et  $\mathbf{K}_r^e$  la matrice de référence. Dans la suite, nous utiliserons  $err$  comme mesure d'erreur, où  $err = \frac{\|\mathbf{K}_i^e - \mathbf{K}_r^e\|_\infty}{\|\mathbf{K}_r^e\|}$  et  $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{|a_{ij}|\}$ . La matrice de référence est obtenue à l'aide d'un schéma d'intégration adaptatif, construit à partir de la fonction `gsl_integration_qags` fournie par la Gnu Scientific Library (GSL) ([Gou09]). Cette fonction utilise un algorithme adaptatif pour intégrer une fonction scalaire sur un intervalle, jusqu'à ce que l'erreur estimée soit inférieure à un seuil fourni par l'utilisateur.

### 2.2.3.2 Partition des éléments en cellules d'intégration

Depuis les premiers articles sur le X-FEM ([Moë+99]), les éléments sont découpés le long du front de fissure en une partition de cellules qui ne traversent pas la discontinuité, puis des règles d'intégration de type Gauss sur les cellules triangulaires sont utilisées. Dans cette partie, nous voulons discuter des stratégies de découpage qui produisent les cellules d'intégration qui forment une *partition* des éléments de sorte que chaque cellule se trouve dans un des quadrants du système de coordonnées

de la fissure. C'est l'analogue de ce qui vient d'être présenté dans notre première amélioration du cas unidimensionnel.

Dans le présent travail, nous utilisons le schéma d'intégration sur le triangle tel qu'on peut le trouver dans [Sol+03], où des règles optimales sur le triangle sont données, classées par l'ordre polynomial qu'elles peuvent intégrer exactement. Nous n'avons utilisé parmi ces règles que celles qui n'ont pas de poids négatif et qui ne comprennent aucun point en dehors du triangle de référence. Le tableau suivant 2.1 donne le nombre de points d'intégration pour chaque ordre polynomial. Pour les différents

ordre	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	13	14	17	19
nombre de points	1	3	4	6	7	12	16	19	25	33	37	42	62	73

TABLE 2.1 – Nombre de points d'intégration en fonction du polynôme d'ordre le plus élevé intégré exactement sur un triangle, selon [Sol+03]

cas test que nous allons analyser, nous utiliserons des éléments représentatifs dont les nœuds sont donnés dans la Table 2.2, où l'origine du système de coordonnées est la pointe d'une fissure (dans le repère  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ).

case	x0	y0	x1	y1	x2	y2
case 1	-1/3	-1/3	2/3	-1/3	-1/3	2/3
case 2	0	0	1	0	0	1
case 3	0	0	10	0	0	1
case 4	0	0	100	0	0	1

TABLE 2.2 – Liste des cas testés pour les différentes règles d'intégration

Les premiers résultats que nous voulons discuter sont ceux pour lesquels la pointe de la fissure est à l'intérieur de l'élément (cas 1 dans le tableau). L'élément est partitionné le long de la fissure comme dans la Figure 2.6, selon  $ls_n$  pour le cas 1a (une coupe, Figure 2.6, à gauche) et selon  $ls_n$  et  $ls_t$  pour le cas 1b. Dans le cas 1b (deux coupes), l'élément est d'abord divisé en 3 cellules en triangulant l'élément,

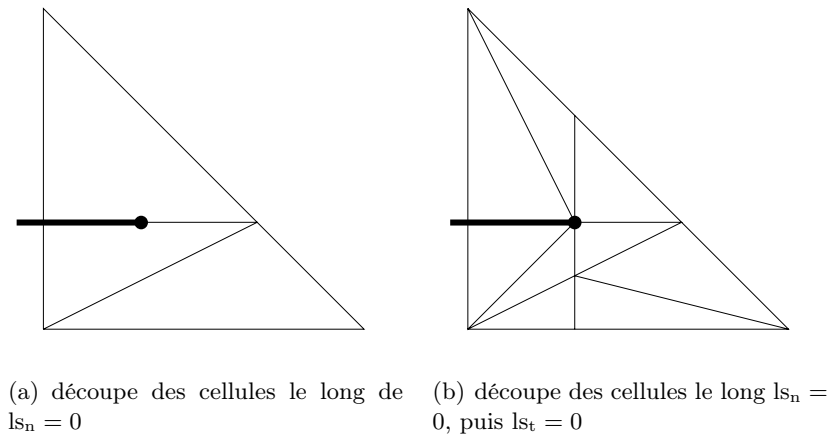


FIGURE 2.6 – Partition d'un élément en cellule d'intégration. Ligne épaisse : la fissure. Point noir : la pointe de la fissure.

après une coupe selon  $ls_n = 0$ , puis chaque cellule de la première partition est à nouveau triangulée après une coupe selon  $ls_t = 0$ . Le but ici est de diviser l'élément de sorte que chaque cellule soit forcée à l'intérieur d'un des quadrants du système de coordonnées de la fissure. Bien sûr, cette stratégie de partitionnement n'est pas optimale pour obtenir ces propriétés, mais elle a l'avantage d'être construite

autour de la primitive de coupe préexistante pour couper le long d'une iso-valeur d'une level-set. Dans le cas 1b, nous nous retrouvons donc avec un total de neuf cellules d'intégration. Avec la dernière stratégie de découpage, deux cas seulement sont possibles pour une cellule appartenant à un élément enrichi. La pointe de la fissure est soit confondue avec un de ses nœuds soit à l'extérieur de la cellule. Dans le premier cas, nous appelons la cellule *cellule singulière*, dans le second, nous l'appelons *cellule faiblement singulière*.

L'erreur dans la matrice de rigidité locale telle que définie ci-dessus, est tracée dans la Figure 2.7, en fonction du nombre total de points d'intégration sur l'ensemble cellules, pour les deux stratégies de découpage. Dans les deux cas, le taux de convergence est lent. Dans le cas 1a, (une seule coupe), la convergence n'est même pas garantie : on peut voir que l'erreur oscille d'un degré d'intégration à l'autre. Même si la coupe n'était pas optimale (nous intégrons sur neuf cellules.), l'erreur dans le cas 2b est constamment plus faible que dans le cas d'une seule coupe, à nombre de points égal. La convergence, bien qu'encore lente dans le cas 1b, oscille beaucoup moins que dans le cas 1a. L'expérience précédente a été répétée pour différentes positions relatives de la pointe de la fissure et différentes formes d'éléments, et elle montre toujours une amélioration lorsque les éléments sont coupés le long de  $ls_n = 0$  et  $ls_t = 0$ . Ceci est lié au fait qu'en coupant l'élément deux fois, la singularité ne peut être que sur un sommet ou strictement à l'extérieur d'une cellule et pas sur une arête. Dans la suite, l'algorithme d'intégration utilisant la deuxième stratégie de partitionnement et la règle d'intégration régulière de Gauss sur les triangles résultant sera appelé *intégration par partition* et sera paramétré par l'ordre de la règle d'intégration  $o$  utilisée pour chaque cellule.

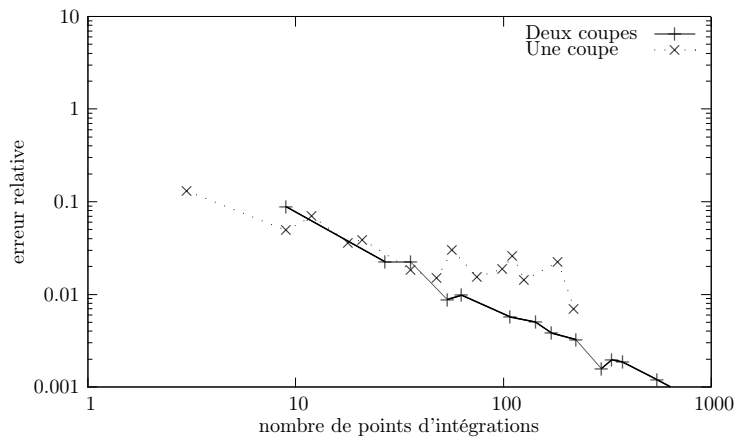


FIGURE 2.7 – Norme de l'erreur relative maximale sur les entrées de la matrice de rigidité pour le cas 1, avec une ou deux coupes.

### 2.2.3.3 Traitement de la singularité

Comme on l'a vu plus haut, le découpage de l'élément en une partition appropriée de cellules améliore la situation en confinant la singularité sur un coin d'une cellule. Pour tous les éléments dans la zone d'enrichissement, il existe des termes en  $1/r$ ,  $1/\sqrt{r}$ ,  $\sqrt{r}$  et  $r$  qui sont singuliers ou singuliers dans leur gradient pour  $r = 0$ . Dans la littérature, une telle singularité est déjà traitée correctement pour une cellule qui a un nœud sur la singularité. Dans la plupart des cas, les auteurs ont utilisé des changements de variables qui rendent l'intégrande régulier. Parmi ces changements de variables, nous nous concentrons sur celui proposé dans [Béc+05]. Tout d'abord, une cellule avec un nœud sur la pointe de la fissure est mappée linéairement sur un élément de référence qui a la pointe de la fissure sur son premier nœud. Appelons  $\xi$  et  $\eta$  les coordonnées dans l'élément de référence. Le changement de variables suivant est alors appliqué :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}\rho^2(1 - \sinh(\tau)); \\ \eta &= \frac{1}{2}\rho^2(1 + \sinh(\tau));\end{aligned}\tag{2.22}$$

où  $\rho$  prend des valeurs dans  $[0 : 1]$  et  $\tau$  dans  $[-\ln(1 + \sqrt{2}) : \ln(1 + \sqrt{2})]$ . Le changement de variable défini dans l'équation 2.22 peut être vu comme une carte entre le rectangle  $[(0, -\ln(1 + \sqrt{2})), (1, -\ln(1 + \sqrt{2})), (1, +\ln(1 + \sqrt{2})), (0, +\ln(1 + \sqrt{2}))]$  dans le plan  $(\rho, \tau)$  au triangle  $[(0, 0), (1, 0), (0, 1)]$  dans le plan  $(\xi, \eta)$ , comme représenté sur la figure 2.8. Notez que la grille représentée dans le triangle est constituée des iso-lignes de  $\rho$  et  $\tau$ . Le point singulier A du triangle est l'image de la droite  $\rho = 0$ . Ce changement de variable est très proche du changement de variable polaire, où  $\tau$  joue le rôle de l'angle et où  $\rho$  est proche de la racine carrée du rayon.

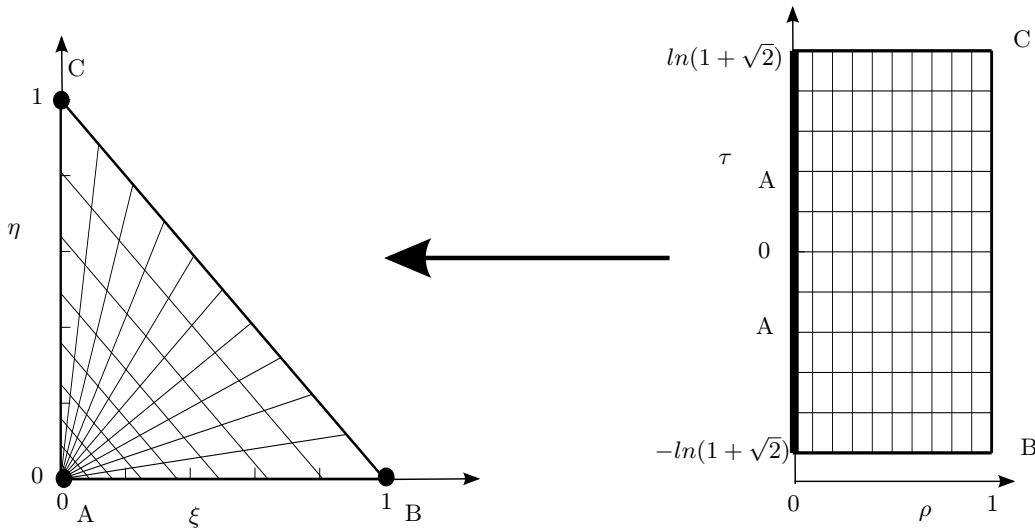


FIGURE 2.8 – Changement de variable selon l'équation (2.22) pour une cellule avec un nœud singulier.

Ce changement de variable a été construit en tenant compte de la considération précédente et de façon à ce que le domaine qui représente le triangle dans le plan  $\rho, \tau$  soit un simple rectangle, où il est facile de construire une règle d'intégration en utilisant un produit tensoriel de la règle de Gauss-Legendre dans chaque direction du plan  $(\rho, \tau)$ . C'est exactement ce qui est fait dans notre prochaine expérience numérique. Nous intégrons la matrice de rigidité pour un élément qui correspond à l'élément de référence avec la singularité au premier nœud (cas 2 dans le tableau 2.2), pour un nombre différent de points de Gauss-Legendre en utilisant le changement de variable présenté, et nous comparons en utilisant l'intégration régulière sur le triangle. Les règles de Gauss-Legendre unidimensionnelles utilisées pour construire les règles bidimensionnelles sont des règles allant de 1 à 10 points. Le nombre de points d'intégration pour les règles bidimensionnelles varie donc de 1 à 100.

La figure 2.9 présente l'erreur sur la matrice de rigidité en fonction du nombre total de points de Gauss. Les résultats sont, bien sûr, bien meilleurs en utilisant le changement de variables. Nous pouvons observer un taux de convergence exponentiel. L'erreur atteint une valeur de  $7.28 \times 10^{-9}$  pour 81 points et  $7.406 \times 10^{-10}$  pour 100 points, alors que la règle d'intégration classique du plus haut ordre sur le triangle atteint juste  $9.77 \times 10^{-3}$  avec 79 points.

Malheureusement, même pour le cas où un nœud est exactement sur le point singulier, les résultats ne sont pas toujours satisfaisants. Même si le changement de variable améliore toujours la situation, le fait qu'il se fasse par rapport à un élément de référence afin d'avoir toujours un domaine rectangulaire simple sur lequel développer la règle d'intégration, peut induire une perte d'efficacité relative lorsque



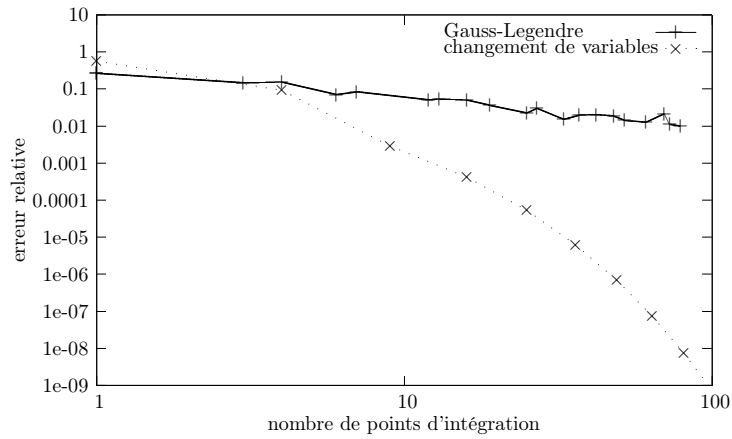


FIGURE 2.9 – Norme de l'erreur relative maximale sur les entrées de la matrice de rigidité pour le cas 2. Comparaisons de l'intégration régulière avec celle utilisant le changement de variable 2.22

la cellule sur laquelle on souhaite intégrer a un rapport de forme défavorable (l'arête la plus courte est beaucoup plus petite que l'arête la plus longue.), comme on peut le voir dans l'expérience suivante. Les cas 2, 3 et 4 du tableau 2.2 sont testés, ce sont tous des éléments dont le premier nœud est confondu avec la singularité, le troisième nœud en  $(0, H)$  mais le deuxième nœud est en  $(L, 0)$  où  $L$  est respectivement fixé à  $L = H$ ,  $L = 10H$  et  $L = 100H$ . Le but de l'expérience est ici de mettre en relation le rapport de forme de la cellule avec la précision de la règle d'intégration. Comme on peut le voir sur la Figure 2.10, la qualité de la convergence est clairement dégradée lorsque le rapport de forme (ici  $L/H$ ) est élevé. Ce point est en fait très important pour la robustesse de la méthode globale. En effet, puisque le maillage n'est pas lié à la fissure, les positions des nœuds par rapport à la pointe de la fissure vont dicter la forme des cellules d'intégration. Même avec un maillage de très haute qualité, les cellules peuvent avoir un très mauvais rapport d'aspect. Cela se produit si un nœud du maillage est très proche de la surface de la fissure. Par conséquent, même dans le cas où un nœud de cellule se trouve sur la pointe de la fissure, la stratégie proposée dans la plupart des articles souffre de problèmes de robustesse, même en utilisant un schéma d'intégration spécial du type de celui que nous venons de présenter. Mais la situation dans le cas particulier d'un nœud sur la pointe de la fissure, comme nous allons le montrer, va être améliorée par l'approche générale que nous développons dans la suite.

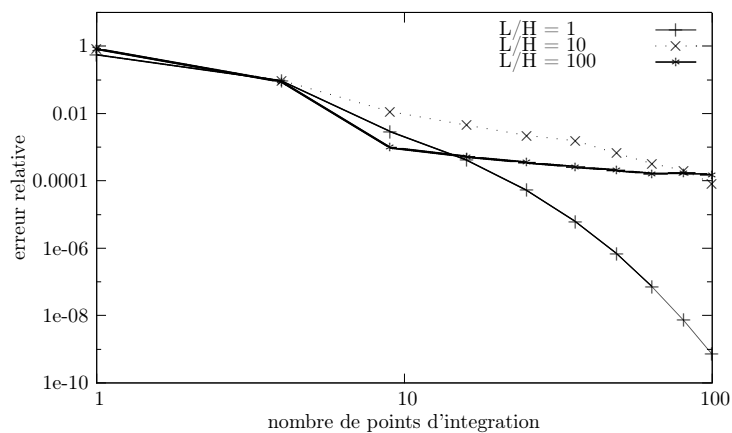


FIGURE 2.10 – Norme de l'erreur relative maximal sur les entrées de la matrice de rigidité pour les cas 2, 3, 4 : différents facteurs de forme  $L/H$  en utilisant le changement de variable 2.22



### 2.2.3.4 Traitement de la singularité dans le cas général

Nous venons de montrer que, même lorsqu'un nœud d'une cellule se trouve sur la pointe de la fissure, les schémas d'intégration singuliers tels que présentés précédemment sont insuffisants pour obtenir une convergence rapide et robuste de l'intégration de la matrice de rigidité. Mais ce qui est peut-être plus important, c'est que nous devons également considérer le cas où la pointe de la fissure est à l'extérieur de l'élément, mais toujours proche de l'élément. Ce cas est analogue à notre analyse unidimensionnelle où la singularité était en dehors du domaine d'intégration : même si la singularité est en dehors, le taux de convergence est très lent si aucun changement de variable n'est appliqué. Jusqu'à présent, tous les schémas d'intégration que nous avons utilisés ont été trouvés dans la littérature. Dans cette section, nous développons ce que nous pensons être une nouvelle contribution au domaine. Après la discussion sur la partition des éléments, nous nous placerons dans un cadre où une cellule est toujours dans un des quadrants du système de coordonnées de la fissure. De plus, nous imposerons qu'une cellule doive être dans le quadrant positif ( $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ ). Si ce n'est pas le cas, la cellule est d'abord mise en correspondance avec le quadrant positif en inversant une ou deux de ses coordonnées de nœud. Aucune autre transformation vers un élément de référence ne sera appliquée, contrairement au schéma présenté dans la section précédente. En effet, puisque le point singulier peut se trouver à l'extérieur de l'élément, il n'y a aucun avantage à appliquer une telle transformation. Nous considérons ensuite le même changement de variable, mais directement appliqué à un triangle décrit dans le système de coordonnées de la fissure (quadrant positif).

Le domaine représentant le triangle dans le plan  $(\rho, \tau)$  peut prendre différentes formes. Si aucun nœud ne se trouve sur la pointe de la fissure, la forme, dans le plan  $(\rho, \tau)$ , est un triangle incurvé. Lorsqu'un nœud du triangle est progressivement déplacé vers la pointe de la fissure, les transformées des deux arêtes qui en émanent s'alignent au voisinage de l'image de ce nœud jusqu'à devenir mutuellement tangentes le long de l'axe  $\rho = 0$ . Dans le même mouvement, à une certaine distance du nœud commun, ces arêtes se courbent localement très fortement jusqu'à ce qu'un angle se forme à la limite où le nœud en question atteint la pointe de fissure. Le triangle est alors transformé en un quadrilatère dans le plan  $(\rho, \tau)$ . La figure 2.11 donne quelques exemples de l'effet de la transformation pour des cellules d'intégration comportant un nœud plus ou moins proche du point singulier, illustrant la discussion précédente.

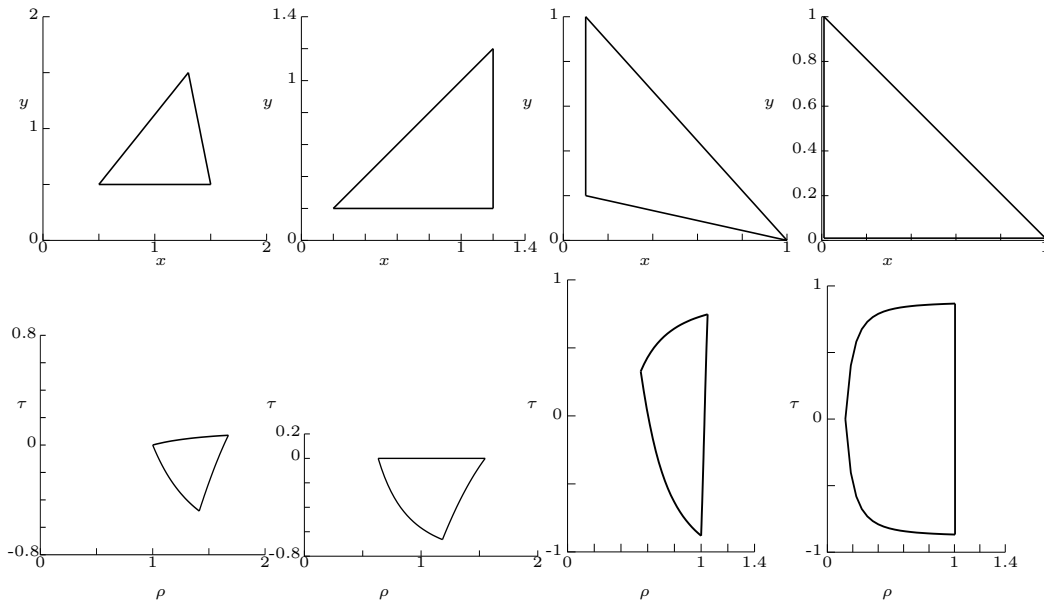


FIGURE 2.11 – Effet du changement de variable (2.22) sur certaines cellules. En haut : cellule dans le plan  $(x, y)$ , En bas cellule correspondante dans le plan  $(\rho, \tau)$

Nous souhaitons maintenant intégrer la matrice de rigidité après avoir effectué le changement de variable, en faisant correspondre les points de Gauss-Legendre du carré unitaire au triangle dans le plan  $(\rho, \tau)$ . Heureusement, pour effectuer cette tâche, nous pouvons compter sur certaines propriétés du changement de variable. Tout d'abord, le changement de variable peut être inversé pour tous les points sauf le point singulier. Cela signifie que connaissant les coordonnées  $x, y$  d'un point dans le repère de la fissure, les coordonnées  $\rho, \tau$  peuvent être calculées ainsi :

$$\text{pour } x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{et} \quad x + y > 0 \quad (2.23)$$

$$\psi^{-1} : (x, y) \rightarrow (\rho, \tau) \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x + y} \\ \tau &= \operatorname{arcsinh}\left(\frac{y - x}{x + y}\right) \end{aligned}$$

Considérons maintenant un segment  $[AB]$  dans le plan  $(x, y)$ . Ce segment est transformé en une courbe du plan  $(\rho, \tau)$ , dont on peut calculer le graphe et la dérivée. Soit  $\alpha_{AB}$ ,  $\beta_{AB}$  et  $\gamma_{AB}$  trois valeurs constantes calculées comme suit à partir des coordonnées  $x_A, y_A$  et  $x_B, y_B$ .

$$\alpha_{AB} = (x_A + x_B)(y_B - y_A) - (y_A + y_B)(x_B - x_A) \quad (2.25)$$

$$\beta_{AB} = x_A - x_B - y_A + y_B \quad (2.26)$$

$$\gamma_{AB} = x_A - x_B + y_A - y_B \quad (2.27)$$

Le segment  $[AB]$  est décrit par la courbe suivante  $\rho_{AB}(\tau)$  et la dérivée  $\rho'_{AB}(\tau)$  dans le plan  $(\rho, \tau)$ , si  $\tau_A \neq \tau_B$  :

$$\rho_{AB} = \sqrt{\frac{\alpha_{AB}}{\beta_{AB} + \gamma_{AB} \sinh(\tau)}} \quad (2.28)$$

$$\rho'_{AB} = -\frac{1}{2\alpha_{AB}} \rho^3 \gamma_{AB} \cosh(\tau) \quad (2.29)$$

Alternativement, elle peut être décrite par la courbe  $\tau(\rho)$  et la dérivée  $\tau'(\rho)$  si  $\rho_A \neq \rho_B$

$$\tau_{AB} = \operatorname{asinh}(-\beta_{AB}/\alpha_{AB} + \alpha_{AB}/\beta_{AB}\rho^{-2}) \quad (2.30)$$

$$\tau'_{AB} = \frac{-2\alpha_{AB}}{\beta_{AB}\rho^3} \frac{1}{\sqrt{1 + (-\beta_{AB}/\alpha_{AB} + \alpha_{AB}/\beta_{AB}\rho^{-2})^2}}; \quad (2.31)$$

Une propriété intéressante de la courbe  $\rho_{AB}(\tau)$  est qu'elle est monotone en  $\tau$  pour tous les points du segment  $[AB]$ , dans le quadrant positif (respectivement  $\tau_{AB}(\rho)$  est monotone en  $\rho$ ). Cela signifie que la courbe représentant une arête d'un triangle dans le plan  $(\rho, \tau)$  est croissante ou décroissante, exclusivement. Cette propriété sera utilisée dans la suite.

Dans une première étape de notre algorithme pour construire une règle d'intégration sur l'image du triangle dans le plan  $(\rho, \tau)$ , nous classons d'abord chaque arête  $[AB]$  selon la valeur de  $\tau'_{AB}(\rho)$  le long de l'arête. Si localement  $\tau'_{AB}(\rho)$  est dans  $[-1 : 1]$ , alors la tangente de la courbe est étiquetée comme étant "le long" de la direction  $\rho$ , sinon elle est étiquetée comme étant le long de la direction  $\tau$ . Comme la courbe pour une arête est monotone, seules quatre situations peuvent se présenter pour la "direction" de l'arête, selon la valeur de  $\tau'_{AB}(\rho)$  aux extrémités  $A$  et  $B$  du segment :

1.  $(\tau'_{AB}(\rho_A) \in [-1 : 1])$  et  $(\tau'_{AB}(\rho_B) \in [-1 : 1])$
2.  $(\tau'_{AB}(\rho_A) \notin [-1 : 1])$  et  $(\tau'_{AB}(\rho_B) \notin [-1 : 1])$
3.  $(\tau'_{AB}(\rho_A) \in [-1 : 1])$  et  $(\tau'_{AB}(\rho_B) \notin [-1 : 1])$
4.  $(\tau'_{AB}(\rho_A) \notin [-1 : 1])$  et  $(\tau'_{AB}(\rho_B) \in [-1 : 1])$

Dans le cas 1, on dira que l'arête est dans la direction  $\rho$ , dans le cas 2, on dira que l'arête est dans la direction  $\tau$ . Dans les cas 3 et 4, il existe un unique point  $ab$  sur l'arête  $[AB]$  tel que nous ayons  $\tau'_{AB}(\rho_{ab}) = 1$  ou  $\tau'_{AB}(\rho_{ab}) = -1$ . Nous appelons ce point un point de coupure, et il peut être facilement calculé numériquement en utilisant une recherche de racine. Dans ce cas, l'arête est divisée en deux parties, chaque partie ayant une direction correctement définie : soit  $\rho$  soit  $\tau$ . Par conséquent, pour

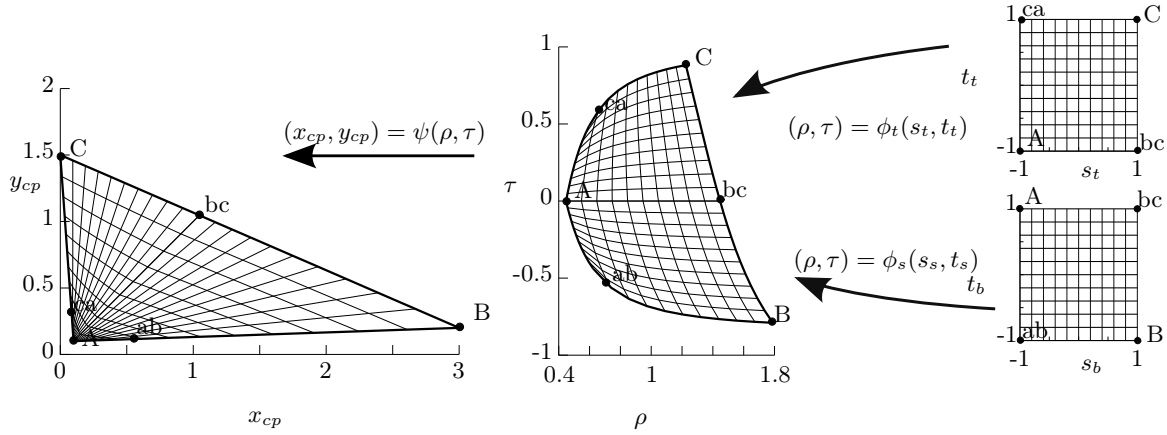


FIGURE 2.12 – Illustration de la méthode d'intégration proposée

tout triangle dans le plan  $x, y$ , en divisant éventuellement certaines de ses arêtes au plus une fois, on peut construire une liste d'au plus 6 parties d'arêtes. Chaque partie d'arête est alignée soit dans la direction  $\tau$  soit dans la direction  $\rho$ . Un certain nombre de cas dépendant de l'alignement de chaque partie d'arête dans le plan  $(\rho, \tau)$  peuvent être reconnus, mais avant de poursuivre, incluons le cas où un nœud de la cellule est sur la singularité. Dans ce cas, la transformation du plan  $(\rho, \tau)$  vers le plan  $(x, y)$  n'est pas inversible pour les points sur la ligne  $\rho = 0$ . L'image du point singulier d'un triangle est alors un segment du plan  $(\rho, \tau)$  aligné selon l'axe  $\rho = 0$  et sa direction est  $\tau$ . Les deux arêtes reliant le point singulier produisent deux segments pour lesquels  $\tau$  est fixe et donc, leur direction est  $\rho$ . Seule l'image de la troisième arête du triangle est courbe sur le plan  $(\rho, \tau)$ . Cette arête ne peut pas avoir de point singulier et les formules précédentes peuvent être utilisées sans changement pour choisir sa direction ou la diviser et choisir la direction de ses parties d'arêtes si nécessaire (voir Fig. 2.13). L'algorithme au-delà de cette étape est le même pour les cellules avec ou sans nœud sur le point singulier. Pour que la discussion reste brève, examinons d'abord un cas typique tel que celui de la figure 2.12. Le triangle (ABC) est représenté dans le plan  $(\rho, \tau)$ . Selon notre règle de division, l'arête  $[AB]$  est divisée en  $[A ab]$  qui se trouve dans la direction  $\tau$ , et  $[ab B]$  qui est dans la direction  $\rho$ . L'arête  $[AC]$  se divise en  $[A ca]$  qui est dans la direction  $\tau$  et  $[ca C]$  qui est dans la direction  $\rho$ . À partir de ces cinq arêtes, nous voulons maintenant construire une partition de l'image du triangle dans le plan  $(\rho, \tau)$  de sorte que chaque sous-cellule soit un quadrilatère courbe (ou éventuellement un quadrilatère courbe dégénéré en triangle courbe lorsque deux nœuds consécutifs sont à la même position). Mais nous ne voulons pas d'un quadrilatère courbe quelconque ; nous voulons un quadrilatère, tel que, lorsqu'on parcourt son contour bord courbe par bord courbe, la direction du bord 1 est  $\rho$ , du bord 2 est  $\tau$ , du bord 3 est  $\rho$  et du bord 4 est  $\tau$ . En imposant ces conditions, on obtiendra un quadrilatère courbe, dont chaque arête sera autant que possible alignée avec l'axe de coordonnées  $\rho, \tau$ . Dans le cas présenté sur la figure 2.12, il est possible d'obtenir une partition en deux quadrilatères en construisant un point supplémentaire : le point  $bc$ , qui est l'intersection de la courbe  $[BC]$  avec l'axe  $\tau = \tau_A$ . Notons que ce point est facile à obtenir puisque nous avons une équation explicite pour la courbe  $[BC]$  sous la forme de la  $\rho_{BC}(\tau)$ . Les deux quadrilatères courbes, respectant la condition de direction et formant une partition de l'image de  $[ABC]$  sont maintenant,  $[A bc C ca]$  et  $[ab B bc A]$ . Chacun de ces quadrilatères courbes peut maintenant être mis en correspondance avec un carré de référence dans un plan  $(s, t)$ . Les détails

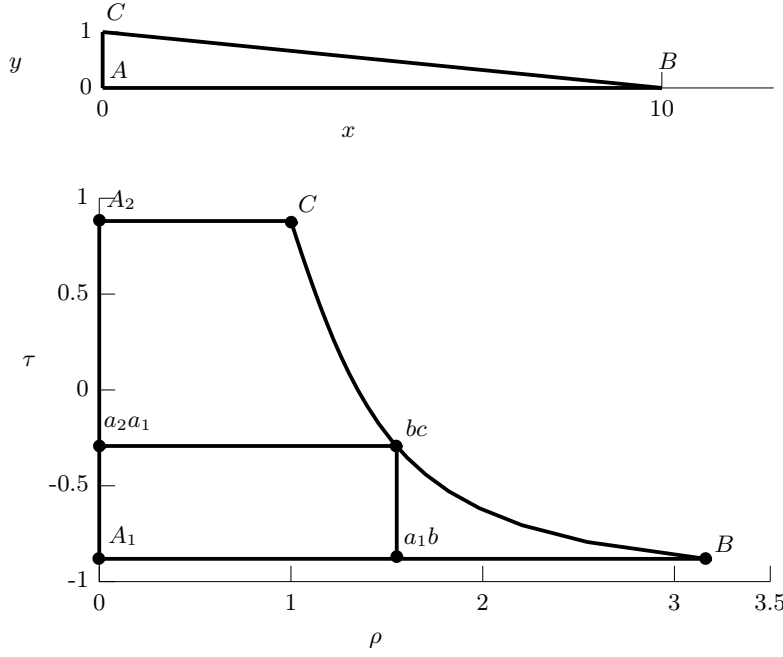


FIGURE 2.13 – Transformation de l'élément du cas 3. en haut dans le plan  $(x, y)$ , en bas dans le plan  $(\rho, \tau)$

de l'algorithme de construction des sous-cellules pour tous les différents cas sont assez techniques, prendraient beaucoup de place et ne sont pas nécessaires pour poursuivre la discussion.

Dans la suite, on appelle  $[A'B'C'D']$  un quadrilatère courbe dans le plan  $(\rho, \tau)$ , dont les arêtes  $[A'B']$ ,  $[B'C']$ ,  $[C'D']$  et  $[D'A']$  sont respectivement dans les directions  $\rho$ ,  $\tau$ ,  $\rho$  et  $\tau$ , comme défini précédemment. Ce quadrilatère est mis en correspondance avec un carré de référence dans le plan  $(s, t)$ , tel que  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  sont respectivement l'image de  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$  et  $(-1, 1)$  par la transformation suivante :

$$\rho = \frac{1}{2}(1-s)\rho_{A'D'}(t) + \frac{1}{2}(1+s)\rho_{B'C'}(t) \quad (2.32)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(1-t)\tau_{A'B'}(s) + \frac{1}{2}(1+t)\tau_{D'C'}(s) \quad (2.33)$$

Où les fonctions  $\rho_{A'D'}(t)$ ,  $\rho_{B'C'}(t)$ ,  $\tau_{A'B'}(s)$  et  $\tau_{D'C'}(s)$  doivent être définies. Nous allons détailler la construction de  $\tau_{A'B'}(s)$  dans la suite, les trois autres fonctions étant construites de manière similaire. Notons d'abord que, par construction, le bord  $[A'B']$  est aligné avec  $\rho$ , suivant notre définition :  $\tau'_{A'B'}(\rho)$  est dans  $[-1 : 1]$  et ne peut pas changer de signe : il est soit positif ou négatif, soit identiquement nul. Si la pente est identiquement nulle, alors  $\tau_{A'B'}(s) = \tau_{A'} = \tau_{B'}$ . Dans les autres cas, on commence par définir  $\rho_{A'B'}(s) = \rho_{A'} * (1-s)/2 + \rho_{B'} * (1+s)/2$ .  $\tau_{A'B'}$  peut alors être calculé comme :  $\tau_{A'B'}(s) = \tau_{A'B'}(\rho_{A'B'}(s))$ . Ceci est bien sûr toujours possible puisque la courbe est monotone.

Cette transformation est illustrée dans la figure 2.12 où un carré dans le plan  $(s, t)$  est mappé sur chacune des sous-cellules du quadrilatère courbe de l'image de  $(ABC)$  dans le plan  $(\rho, \tau)$ . Sur cette figure, une grille cartésienne est définie sur le carré du plan  $(s, t)$  et est successivement mappée sur les plans  $(\rho, \tau)$  et  $(x, y)$ , de droite à gauche. Il est maintenant facile de construire une règle d'intégration : pour chaque quadrilatère du plan  $(s, t)$  qui forme une partition valide d'une cellule, il suffit de construire une règle de Gauss-Legendre comme un produit tensoriel de la règle classique à une dimension. Ensuite, on calcule les coordonnées et les poids de chaque point dans le plan  $(x, y)$

en enchaînant les transformations décrites de façon standard. L'algorithme global peut être résumé comme suit, pour une cellule triangulaire donnée :

1. Calculer la direction de chaque arête dans le plan  $(\rho, \tau)$
2. Séparer les arêtes qui le nécessitent au point  $\tau'(\rho) = +1$  ; ou  $-1$
3. Diviser la cellule en quadrilatères courbes "alignés" avec les axes dans le plan  $\rho, \tau$
4. Pour chaque quadrilatère, construire une règle d'intégration de Gauss-Legendre en utilisant les transformations entre le plan  $(s, t)$  et le plan  $(\rho, \tau)$

Chacune des étapes de l'algorithme précédent, sauf la deuxième, a été décrite en détail. Il existe de nombreuses alternatives possibles pour réaliser cette deuxième étape, et la mise en œuvre peut être fastidieuse. La description complète de la deuxième étape, telle que nous l'avons implémentée, n'est pas exposée ici afin de rester concis. Le code construisant automatiquement la règle d'intégration est disponible dans eXlibris<sup>1</sup>. Nous allons plutôt nous concentrer dans la suite sur l'analyse des résultats de ce schéma d'intégration.

### 2.2.3.5 Traitement de la singularité : quelques résultats

Nous montrerons d'abord le taux de convergence pour les éléments présentés au début de la section, puis nous présenterons un benchmark plus global de la règle d'intégration, qui teste l'algorithme pour une grande quantité d'éléments.

**Erreur d'intégration sur un élément** Les cas 2, 3 et 4 ont été conçus, comme décrit précédemment, pour mesurer l'erreur d'intégration lorsqu'une cellule est strictement singulière, avec différents degrés de rapport d'aspect. Les résultats en utilisant le nouvel algorithme sont présentés sur la figure 2.14, et doivent être comparés aux résultats précédents utilisant uniquement le changement de variable présenté sur la figure 2.10. Les résultats pour le cas 2 (l'élément de référence) sont exactement les mêmes que ceux obtenus en utilisant uniquement le changement de variable. Cela s'explique par le fait qu'aucune séparation des bords n'est nécessaire dans ce cas et que la règle d'intégration produite est exactement la même. Pour les cas 3 et 4, les résultats sont grandement améliorés. Pour ces deux cas, l'arête non connectée à la pointe de la fissure est divisée de telle sorte que l'algorithme, tel que représenté sur la Figure 2.13 pour le cas 3, produit 3 sous-cellules, alignées avec l'axe  $(\rho, \tau)$  :  $[A_1, a_1b, bc, a_2a_1]$ ,  $[a_2a_1, bc, C, A_2]$  et  $[a_1b, B, B, bc]$  (le dernier quadrilatère étant dégénéré en triangle). Ceci explique que le nombre total de points d'intégration atteint 300 pour la règle d'ordre le plus élevé utilisée (à nouveau une règle de Gauss-Legendre unidimensionnelle à 10 points). La meilleure règle commet une erreur de l'ordre de  $10^{-11}$  et  $10^{-8}$  pour les cas 3 et 4 respectivement, à comparer avec la valeur obtenue en appliquant uniquement le changement de variable :  $10^{-6}$  et  $10^{-4}$  respectivement. On a donc, même dans les cas exactement singuliers, gagné plusieurs ordres de grandeur sur l'erreur d'intégration.

Le cas 1 génère, après partitionnement, à la fois des cellules singulières et faiblement singulières (figure 2.6). L'application du seul changement de variable n'est pas possible pour ces dernières, alors que le nouvel algorithme est applicable à toutes les cellules. Comme mentionné précédemment, la stratégie de partitionnement produit ici neuf cellules d'intégration, et le nouvel algorithme, à partir de ces neuf cellules, génère un total de dix-sept sous-cellules alignées  $(\rho, \tau)$ . Cela semble beaucoup, mais comme on peut le voir sur la courbe 2.15, cet algorithme reste efficace : l'erreur obtenue en appliquant la règle de Gauss-Legendre unidimensionnelle à 10 points (pour un nombre total de 1700 points), atteint une erreur de l'ordre  $10^{-9}$ , alors que la meilleure intégration par partition (pour un nombre total de  $9 \times 79 = 711$  points d'intégration), atteint à peine  $10^{-3}$ . Pour un nombre équivalent de points,

1. <https://git.gem.ec-nantes.fr/eXlibris/Xfiles>

l'erreur de notre méthode est inférieure à  $10^{-5}$ . La méthode proposée donne un taux de convergence clairement exponentiel par rapport au nombre de points.

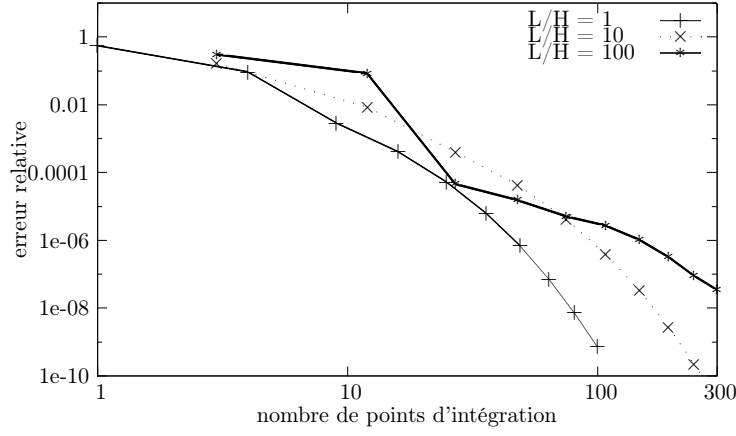


FIGURE 2.14 – Erreur sur la norme maximale de la matrice de rigidité pour les cas 2 à 4 : différent rapport de forme  $\max(x)/\max(y)$  en utilisant l'intégration singulière

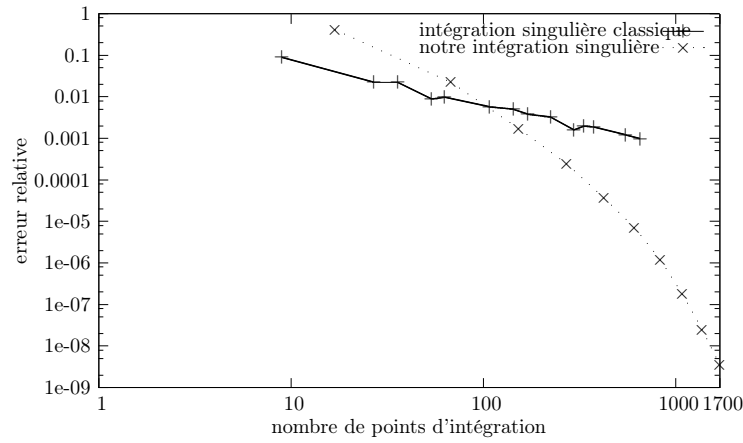


FIGURE 2.15 – Erreur sur la norme maximale de la matrice de rigidité pour le cas 1 : pointe de fissure à l'intérieur de l'élément. En utilisant notre intégration singulière et celle correspondant au changement de variable de l'équation 2.22

**Erreur d'intégration sur un maillage représentatif** L'expérience pourrait être répétée pour un grand nombre d'éléments, avec des formes variables et des positions relatives à la pointe différentes. Mais dans ce qui suit, nous allons proposer ce que nous pensons être une meilleure validation, permettant de tester en une seule fois une grande variété d'éléments. Le problème d'élasticité est résolu sur un carré qui contient une fissure horizontale droite avec la pointe de la fissure au centre du carré (voir Fig. 2.16). Sur les bords du carré, on applique la tension trouvée en calculant la contrainte de la solution exacte du problème ( $\bar{\sigma}^e$ ) d'une fissure dans un domaine infini. La solution exacte de ce problème coïncide bien sûr, à l'intérieur du carré, avec la solution exacte dans un domaine infini. Le carré est maillé avec un maillage non structuré, et le champ de déplacement est discrétisé en utilisant l'enrichissement de pointe partout, et seulement l'enrichissement de pointe, multiplié par la partition de l'unité. La seule différence avec le benchmark classique utilisé pour montrer la convergence  $h$  de la méthode X-FEM, comme utilisé par exemple dans [Béc+05] est que nous utilisons seulement les

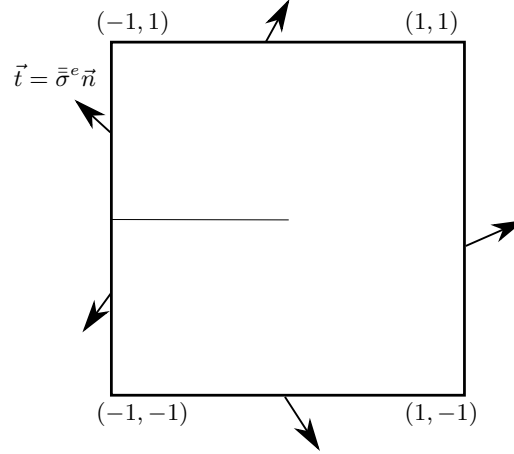


FIGURE 2.16 – Esquisse du problème de référence. Les tractions imposées sur les bords du carré (flèches) sont calculées à partir de la solution exacte d’une fissure droite dans un milieu infini.

fonctions d’enrichissement de pointe, et que ces fonctions sont utilisées partout dans le maillage. En principe, si l’intégration de la forme bilinéaire était exacte, et si le système d’équation linéaire obtenu n’était pas singulier, nous devrions aboutir à la solution exacte, puisque celle-ci est contenue dans l’espace éléments finis enrichi que nous venons de construire sur notre carré. Nos premières expériences numériques sur ce problème ont échoué lorsque nous avons utilisé l’enrichissement scalaire classique. En effet, si en utilisant une règle d’intégration peu précise sur des maillages assez grossiers, nous avons pu obtenir quelques résultats, avec une erreur assez élevée, lorsque le maillage était raffiné ou que la règle d’intégration était améliorée, nous-nous retrouvions souvent avec un système d’équations singulier que nous ne pouvions pas résoudre avec le solveur direct (Dans notre cas le solveur **superlu**, décrit dans [Dem+99]). Une analyse plus poussée, et comme cela a été noté dans [Béc+05] ou [Lab+05], a montré que l’espace obtenu en utilisant les 4 fonctions de formes scalaires, produit une matrice de rigidité de plus en plus mal conditionnée au fur et à mesure que la zone d’enrichissement grandit. Lorsque l’enrichissement est appliqué sur tous les nœuds, la matrice devient singulière. Comme nous le montrerons, ce n’est pas le cas avec la fonction de forme d’enrichissement vectorielle. Mais pour garder la cohérence de la présentation, nous voulons toujours utiliser l’enrichissement scalaire pour montrer le gain d’une stratégie d’intégration améliorée. Pour ce faire, nous allons réduire un peu l’espace enrichi dans le cas scalaire, en ne conservant que la fonction d’enrichissement nécessaire pour produire un espace qui contient la solution d’ouverture en mode I pure. Cette réduction ne sera utilisée que pour le présent benchmark. L’espace d’enrichissement complet de pointe dans le cas bidimensionnel est rappelé dans l’équation suivante :

$$\sum_{i \in [1:2]} \sum_{I \in \mathcal{N}_{\text{tip}}} \sum_{\alpha \in [1:4]} N_I(\vec{x}) F_{\alpha}(\vec{x}) \vec{E}_i a_{I\alpha i} \quad (2.34)$$

Les directions de l’espace physique sont habituellement enrichies avec chacune des quatre fonctions d’enrichissement scalaires. Nous réduisons cet espace en utilisant un espace en retirant la contribution de  $F_3$  selon  $\vec{E}_y$  et celle de  $F_4$  selon  $\vec{E}_x$ . L’espace des fonctions de forme utilisé dans notre benchmark pour l’enrichissement scalaire est maintenant :

$$\sum_{I \in \mathcal{N}} N_I F_1 \vec{E}_x a_{I1x} + N_I F_1 \vec{E}_y a_{I1y} + N_I F_2 \vec{E}_x a_{I2x} + N_I F_2 \vec{E}_y a_{I2y} + N_I F_3 \vec{E}_x a_{I3x} + N_I F_4 \vec{E}_y a_{I4y} \quad (2.35)$$

Cet espace réduit contient toujours le champ de déplacement correspondant au mode I pur, mais produit une matrice de rigidité régulière même lorsque tous les nœuds du maillage sont enrichis. Le

problème est résolu sur un carré aligné avec la fissure, la pointe de la fissure est placée en  $(0,0)$ , les deux coins opposés du carré à la position  $(-1,-1)$  et  $(1,1)$  respectivement. Le maillage est construit à l'aide du package gmsh ([Geu+09] et [Rem+07]). Chaque bord du carré est divisé en 20 segments de taille égale, soit un total de 560 nœuds et 1038 triangles pour le maillage final non structuré. Avec l'espace utilisé, nous nous retrouvons avec 3360 degrés de liberté, 1228 cellules d'intégration et 1805 sous-cellules pour la nouvelle stratégie d'intégration. En l'absence d'erreur d'intégration, nous devrions retrouver la solution exacte puisque celle-ci appartient à l'espace d'approximation.

Pour ce test, nous définissons l'erreur  $err$  comme étant la norme de l'erreur en énergie relative définie comme suit :

$$err = \sqrt{\int_{\Omega^h} \frac{(\bar{\sigma}^h - \bar{\sigma}^e) : (\bar{\epsilon}^h - \bar{\epsilon}^e)}{\bar{\sigma}^e : \bar{\epsilon}^e} d\Omega} \quad (2.36)$$

Où,  $\bar{\sigma}^h$  et  $\bar{\epsilon}^h$  d'une part, sont les contraintes et déformations élément fini. D'autre part,  $\bar{\sigma}^e$  et  $\bar{\epsilon}^e$  sont les contraintes et déformations de la solution exacte.

Cette erreur ne peut pas être calculée exactement, puisque les champs à intégrer sont singuliers. Nous aurions pu utiliser notre règle d'intégration pour mesurer l'erreur. L'expérience a montré que ce n'était pas nécessaire. À la place, nous avons utilisé la règle d'intégration de partition simple, avec l'ordre 5 (7 points par cellule), pour évaluer l'erreur. L'erreur est reportée sur la figure 2.17, en fonction du nombre total de points d'intégration utilisés pour calculer la matrice de rigidité. Comme on peut le voir, alors qu'avec l'intégration par partition l'erreur converge très lentement et avec des oscillations, le nouveau schéma affiche un taux de convergence exponentiel et atteint une erreur d'énergie relative très faible. La meilleure intégration par partition (ordre 19) a donné une erreur de  $7,2 \times 10^{-4}$  pour un total de 89644 points d'intégration, tandis que le nouvel algorithme a donné une erreur de  $2,99 \times 10^{-5}$  pour un total de 88445 points, et l'ordre le plus élevé utilisé (20 points dans la règle de Gauss-Legendre unidimensionnelle sous-jacente) a atteint une erreur de  $1,13 \times 10^{-9}$  pour 722000 points.

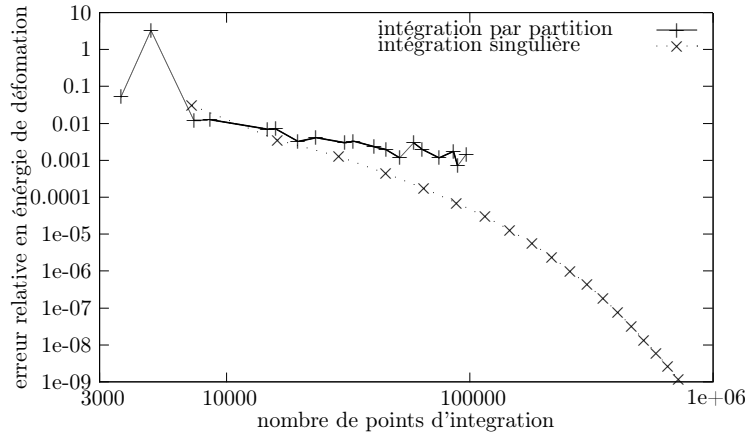


FIGURE 2.17 – Norme de l'erreur relative en énergie de déformation en fonction du nombre total de points d'intégration. Le calcul est fait sur un maillage complet en utilisant l'enrichissement scalaire sur tout le domaine. Le résultat est donné pour l'intégration par partition et pour notre algorithme d'intégration.

**Stratégie d'intégration adaptative** Sur un problème de taille raisonnable comme celui que nous venons de montrer, on peut s'interroger sur le coût en temps de calcul de notre approche. En effet, pour le schéma d'intégration par partition, les points d'intégration sont connus et sont les mêmes dans la cellule de référence pour toutes les cellules d'intégration. Alors que dans le cas de notre algorithme, pour chaque cellule, des sous-cellules doivent être construites dans le plan  $(\rho, \tau)$ , et les positions des



points d'intégration sont les mêmes pour chaque sous-cellule uniquement dans le plan  $(s, t)$ . Dans le contexte d'une méthode classique d'éléments finis, ce serait probablement un prix à payer inacceptable. En effet, toutes les fonctions de forme dans la méthode classique des éléments finis sont définies sur un élément de référence, et l'évaluation de la fonction de forme à chaque point d'intégration peut être faite une fois pour toutes, dans l'élément de référence. Seul le jacobien doit être calculé séparément pour chaque élément. Dans le contexte d'X-FEM, les fonctions d'enrichissement sont définies en fonction de la position du point d'évaluation dans le référentiel lié à la fissure. Il n'y a aucune possibilité d'évaluer la fonction de forme sans connaître la coordonnée du nœud dans l'espace réel. Quelle que soit la méthode utilisée pour construire les points d'intégration, les fonctions d'enrichissement doivent être calculées à chaque point d'intégration de chaque élément. À nombre égal de points d'intégration, le temps de construction de la matrice de rigidité est égal, quelle que soit la méthode utilisée pour les construire. Calculer les points et poids d'intégration est une étape de prétraitement qui pourrait être faite une seule fois pour un maillage et une fissure donnés. Dans nos expériences numériques, le temps de construction des points d'intégration a toujours été si négligeable par rapport au reste du processus de solution que nous ne prenons même pas la peine de les sauvegarder d'un calcul à l'autre. Ils sont calculés lorsqu'ils sont nécessaires au cours de l'assemblage.

Néanmoins, si nous pouvions obtenir une précision similaire à celle qui vient d'être présentée avec moins de points d'intégration, nous obtiendrions un processus d'assemblage plus rapide. Pour y parvenir, nous proposons une stratégie adaptative. En effet, l'expérience a montré que même avec un petit nombre de points d'intégration, la nouvelle stratégie d'intégration donne une très grande précision dans la rigidité locale pour la plupart des éléments du maillage. Seul un petit nombre d'entre eux nécessitent un grand nombre de points. Sans surprise, ces éléments sont généralement ceux qui sont proches de la pointe de la fissure. La direction est donc claire, nous pourrions régler de manière adaptative le nombre de points de Gauss-Legendre sous-jacente d'une cellule à l'autre si nous avions une sorte d'indicateur d'erreur a priori pour une règle construite sur une cellule. Nos expériences ont montré que l'erreur dans l'évaluation de l'aire d'un triangle en utilisant notre schéma d'intégration était fortement corrélée à l'erreur dans la matrice de rigidité locale. Cette erreur, lorsque tous les points sont mis en correspondance avec l'élément de référence, est très facile à évaluer : il suffit de faire la somme de tous les poids des points d'intégration et de comparer à  $1/2$ , l'aire exacte de l'élément de référence. Ainsi, pour chaque élément, nous construisons toutes les sous-cellules, puis nous construisons itérativement les points d'intégration pour la règle unidimensionnelle sous-jacente d'un ordre croissant jusqu'à ce qu'un seuil dans l'erreur de surface relative soit atteint. L'expérience est présentée dans la figure 2.18, où la norme d'erreur en énergie relative est tracée en fonction du nombre total de points, pour notre algorithme d'intégration avec ou sans adaptation, sur le cas test précédent.

Pour la version adaptative, nous fixons notre paramètre de sorte que, le nombre minimum et maximum de points de la règle de Gauss-Legendre unidimensionnelle soient respectivement de 3 et 49. Pour chaque point de la courbe, nous fixons une valeur différente du seuil d'erreur de surface relative, en commençant par  $1. \times 10^{-2}$ , et en divisant par 10 pour chaque nouveau point jusqu'à ce que nous atteignons notre seuil minimum de  $1. \times 10^{-13}$ . Comme on le voit clairement, on obtient un énorme gain de précision à nombre égal de points d'intégration par rapport à la stratégie sans adaptation de l'intégration. Le meilleur résultat adaptatif rapporté est bien sûr atteint pour le plus petit seuil d'erreur de surface relative de  $1. \times 10^{-13}$ . La norme d'erreur énergétique est alors de  $3.476 \times 10^{-10}$  pour un total de 161271 points, à comparer aux 722000 points obtenus sans adaptation pour une erreur encore 3 fois supérieure ( $1.13 \times 10^{-9}$ ).

La dernière version de notre méthode d'intégration sera appelée *intégration singulière* dans la suite du texte. L'intégration *singulière* est paramétrée par le nombre minimum et maximum de points dans la règle de Gauss-Legendre sous-jacente (respectivement *minpt* et *maxpt*) et le seuil d'erreur sur la surface (*ae*).

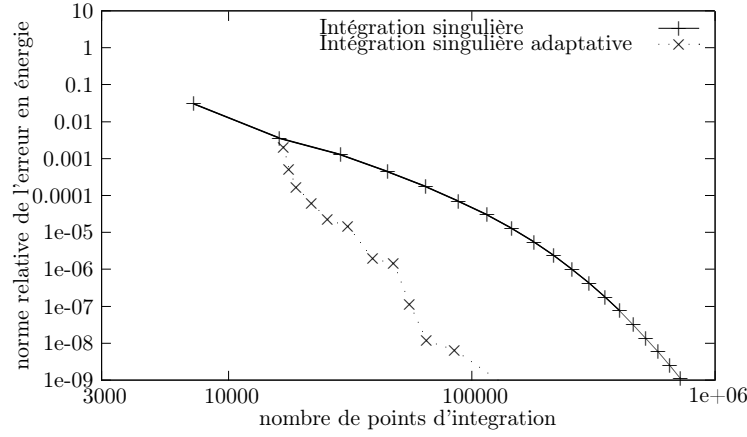


FIGURE 2.18 – Norme de l'erreur en énergie relative en fonction du nombre total de points d'intégration, pour un calcul sur un maillage complet enrichi partout, en utilisant l'intégration singulière, avec ou sans stratégie adaptative.

**Comparaison avec un schéma qui ne traite correctement que les cellules singulières.** Jusqu'à présent, nous n'avons comparé notre stratégie d'intégration qu'avec l'intégration par partition assez grossière. Dans ce qui suit, nous allons la comparer avec un schéma plus avancé présenté dans [Par+09; Nag+93] et appliqué à notre cadre. Nous appellerons cette stratégie *mapping polaire*. Dans la stratégie de mapping polaire, les éléments sont divisés en cellules d'intégration de la même manière que dans *intégration par partition*. Les cellules "faiblement singulières" sont intégrées en utilisant l'une des règles de quadrature de Gauss sur le triangle, et les cellules singulières sont traitées en utilisant le changement de variable "quasi-polaire" suivant :

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos^2(\theta); \\ \eta &= r \sin^2(\theta);\end{aligned}\tag{2.37}$$

où  $r$  prend des valeurs dans  $[0 : 1]$  et  $\theta$  dans  $[0 : \frac{\pi}{2}]$  et où  $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées dans l'élément de référence, tel que le nœud singulier est mappé sur  $(0, 0)$  dans le plan  $(\xi, \eta)$ . La règle d'intégration est ensuite construite à l'aide d'un produit tensoriel de la règle de Gauss-Legendre à une dimension. La stratégie de mapping polaire a donc deux paramètres de contrôle : l'ordre  $o$  de la règle d'intégration dans la cellule faiblement singulière et le nombre  $n_{pt}$  de points de Gauss Legendre dans chaque direction de la carte  $(r, \theta)$ . La figure 2.19 compare les résultats entre la stratégie de cartographie polaire, l'intégration par partition et l'intégration singulière adaptative, sur le même cas de test. Pour la stratégie polaire,  $o$  est augmenté de 6 à 19, tandis que  $n_{pt}$  est fixé à 20. On constate que la stratégie polaire est bien sûr meilleure que l'intégration par partition : l'erreur est bien moindre pour un nombre équivalent de points d'intégration : 97012 points pour une erreur de 0.0014 dans le cas de l'intégration par partition, et 91606 points pour une erreur de  $6.57 \times 10^{-5}$  dans le cas de l'intégration polaire. L'intégration singulière adaptative avec 86704 points donne une erreur de seulement  $6.52 \times 10^{-9}$ , soit quatre ordres de grandeur plus petite que la stratégie de mapping polaire. Une erreur de  $1,42 \times 10^{-5}$ , légèrement meilleure que la meilleure cartographie polaire, est obtenue avec 31025 points, moins d'un tiers du nombre de points nécessaires avec la cartographie polaire. En observant les courbes de convergence de l'erreur du mapping polaire, on peut voir que l'erreur n'est pas nécessairement plus petite quand on augmente le nombre de points. Cela ne semble pas être le cas avec la stratégie singulière adaptative. L'erreur est bien dans ce cas monotone et décroissante avec le nombre de points.

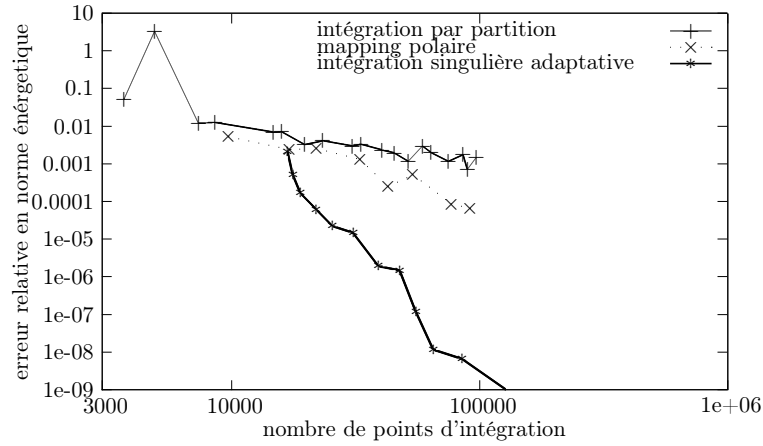


FIGURE 2.19 – Norme de l’erreur en énergie relative en fonction du nombre total de points d’intégration, comparaison entre l’intégration par partition, le mapping polaire, et l’intégration singulière adaptative

**Robustesse de l’intégration** Afin de mesurer la robustesse de la règle d’intégration par rapport à la position relative de la pointe de fissure à l’intérieur d’un élément, nous réalisons l’expérience suivante : nous prenons le même paramétrage que dans l’expérience précédente, nous sélectionnons l’élément dans lequel se trouve la pointe de fissure, et nous effectuons le même calcul pour différentes positions de la pointe de fissure à l’intérieur de l’élément. Plus précisément, nous allons progressivement déplacer la pointe de la fissure  $\vec{x}_t$  du centre de gravité  $\vec{x}_g$  de l’élément au point le plus proche  $\vec{x}_c$  de  $\vec{x}_g$  sur la frontière de l’élément. Cette expérience est paramétrée par  $s \in [0, 1]$  tel que  $\vec{x}_t = (1 - s)\vec{x}_c + s\vec{x}_g$ . Sur la Figure 2.20, côté gauche, la paramétrisation précédente est représentée. Nous avons réalisé la même expérience que précédemment, pour différentes valeurs de  $s$  et mesuré l’erreur, en utilisant le mapping polaire et l’intégration singulière. Pour cette expérience, nous avons pris la meilleure stratégie polaire utilisée dans le calcul précédent ( $o = 19$ ,  $npt = 20$ ) et le schéma d’intégration singulier adaptatif qui a donné le même ordre de grandeur de l’erreur ( $minpt = 3$ ,  $ae = 1. \times 10^{-7}$ ). Les résultats de cette expérience sont représentés sur la droite de la figure 2.20. Dans le cas du mapping polaire, l’erreur varie entre de  $10^{-7}$  et  $10^{-4}$ , soit près de quatre ordres de grandeur. La stratégie d’intégration singulière est beaucoup plus stable et robuste : l’erreur reste autour de  $10^{-5}$ .

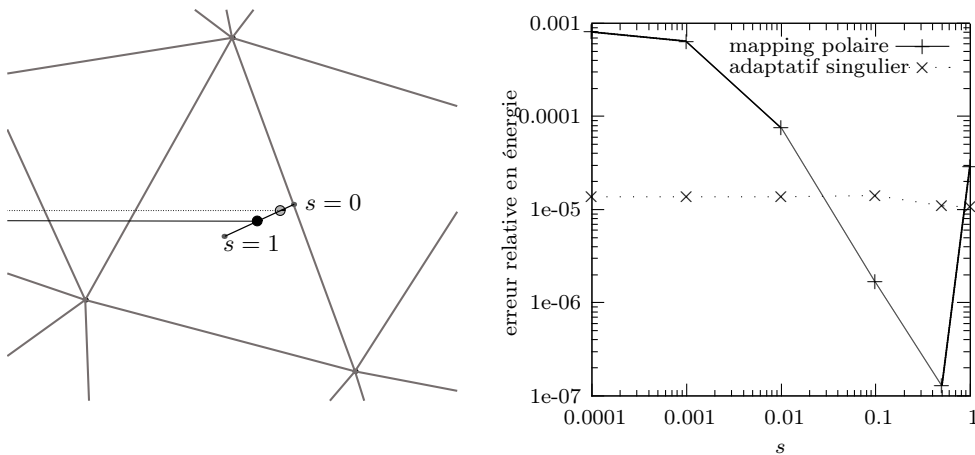


FIGURE 2.20 – Variation de l’erreur en énergie en fonction de la position de la pointe de la fissure. À gauche : paramétrisation de la position de la pointe de la fissure en fonction de  $s$ . À droite : erreur pour le mapping polaire et l’intégration singulière adaptative.

Mesh number	n	h	nodes	edges	elements
1	5	0.4	45	112	68
2	10	0.2	145	392	248
3	20	0.1	560	1597	1038
4	40	0.05	2215	6482	4268
5	80	0.025	8592	25453	16862
6	160	0.0125	34172	101873	67702
7	320	0.00625	135706	405835	270130

TABLE 2.3 – Description de la série de maillage utilisée pour l’analyse de convergence.

Ce contraste s’explique facilement : lorsque la pointe de fissure se rapproche de la frontière d’un élément, les cellules d’intégration de l’élément de l’autre côté de la frontière sont de plus en plus proches de la pointe de fissure, et donc de plus en plus proches de la singularité. Avec la stratégie de cartographie polaire, ces cellules sont intégrées avec la règle d’intégration classique qui donne des résultats de plus en plus mauvais, alors qu’avec la stratégie d’intégration singulière, la singularité est prise en compte. Nous pensons qu’il s’agit d’un fait important, jamais signalé auparavant dans la littérature X-FEM. Si les cellules proches de la singularité ne sont pas prises en compte correctement dans le schéma d’intégration, l’erreur dans la matrice de rigidité dépend beaucoup du maillage (plus précisément de la position relative de la pointe de la fissure dans un élément). Traiter correctement les cellules singulières n’est pas suffisant pour assurer la robustesse du calcul de la matrice de rigidité. Cette question peut être cruciale en particulier pour les problèmes de propagation de fissures où l’on a aucun contrôle sur la position relative de la pointe de la fissure dans un élément.

Ceci conclut pour l’instant notre travail sur le schéma d’intégration pour les éléments enrichis. En partant d’une règle d’intégration efficace pour les cellules singulières (le mapping parabolique), nous l’avons étendue dans cette contribution aux cellules faiblement singulières. Ce nouveau schéma d’intégration est efficace et précis sur tout élément, quelle que soit sa position par rapport à la pointe de la fissure. Nous avons montré à la fin de cette section que ce schéma, à nombre égal de points d’intégration, est bien sûr, plus performant que la stratégie de partitionnement et donne également de meilleurs résultats que le mapping polaire.

## 2.2.4 Convergence en maillage

### 2.2.4.1 Fissure droite

Dans cette section, nous proposons de comparer les deux versions de l’enrichissement X-FEM présentées. Nous nous concentrerons sur les taux de convergence et le conditionnement du système à résoudre. Le problème test est celui d’une fissure droite dans un domaine plan infini. Le matériau est linéaire et isotrope, et les calculs sont effectués en état de déformation plane. La solution analytique est connue et est la solution d’Irwin. Pour résoudre ce problème numériquement, nous travaillons avec un domaine carré de longueur  $2L$ , où les tensions de la solution analytique sont appliquées sur la frontière. Pour suivre la convergence, nous utiliserons toujours la même série de maillages avec un nombre croissant d’éléments. Les maillages sont non structurés avec un champ de taille aussi uniforme que possible. Ils ont été construits à l’aide du logiciel `gmsh` [Geu+09]. Le paramètre de contrôle de la taille du maillage est  $n$ , le nombre d’arêtes le long d’un bord du carré. La mesure  $h$  du maillage que nous avons utilisé pour l’analyse de convergence est la longueur du carré, divisée par  $n$ . Le tableau 2.3 donne quelques mesures caractéristiques pour notre série de maillages. Pour tous les résultats présentés, le rayon d’enrichissement géométrique pour la fonction d’enrichissement de pointe est fixé à  $R = 0.4L$ . Les éléments qui ne sont pas enrichis par l’enrichissement de la pointe sont intégrés exactement en utilisant une règle d’intégration sur la cellule triangulaire obtenue par l’algorithme de partitionnement avec une règle d’intégration d’ordre  $2(p-1)$  où  $p$  est l’ordre polynomial de la fonction de forme.

**Fonctions de forme d'ordre 1** Tout d'abord, nous testons notre série de maillage en utilisant la fonction d'enrichissement de pointe scalaire classique, et utilisons les fonctions de forme linéaire à la fois pour le champ classique et la partition de l'unité. En raison du mauvais conditionnement de la matrice de rigidité, il n'a pas été possible de résoudre le maillage 7 dans ce cas. Afin de pouvoir résoudre le maillage 6, nous avons dû utiliser un ordre minimal de 5 pour l'intégration par partition dans l'élément enrichi. L'analyse de l'erreur est présentée sur la Figure 2.21 où l'erreur en énergie est

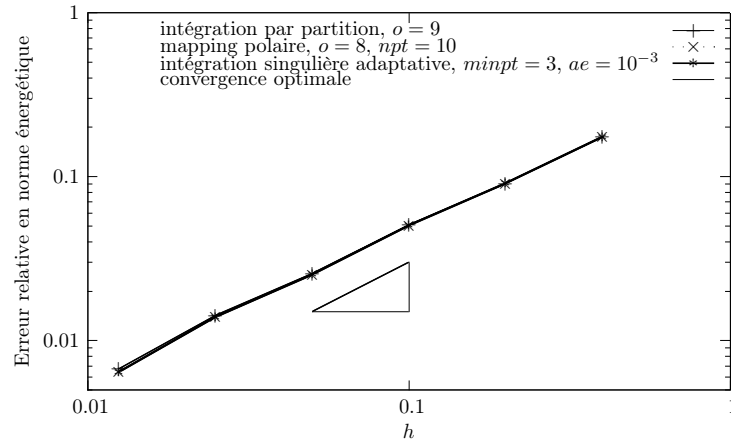


FIGURE 2.21 – Analyse de convergence, fonctions de forme linéaire, enrichissement scalaire

tracée en fonction de la taille des éléments pour chacun des trois schémas d'intégration. Afin de pouvoir les comparer correctement, nous avons réglé les paramètres de chaque schéma de manière à obtenir approximativement le même total de points d'intégration pour le maillage le plus fin (environ 200 000 points). L'erreur est alors sensiblement la même pour chaque schéma, et le taux de convergence est proche de l'optimal.

Néanmoins, nous avons examiné les résultats de plus près. Par exemple, nous avons comparé, pour différents paramètres de chaque schéma d'intégration, le nombre total de points d'intégration nécessaires pour atteindre une précision donnée. Pour un maillage donné, nous calculons d'abord une erreur énergétique de référence : l'erreur énergétique lors de l'utilisation du meilleur schéma d'intégration dont nous disposons (typiquement le singulier adaptatif avec  $ae$  fixé à  $10^{-15}$ ). Pour chaque schéma, le jeu de paramètres permettant d'obtenir une erreur énergétique moins de 1% plus grande que celle de la référence pour le minimum de points d'intégration a été déterminé. Cette différence relative d'erreur énergétique est clairement liée à l'effet de l'erreur d'intégration. Dans la suite, nous appelons cette erreur d'intégration  $err_i$ . Les résultats sur le maillage 6 sont reportés sur le tableau 2.4. Pour atteindre le niveau de précision demandé, l'intégration par partition a nécessité plus de  $5 \times 10^5$  points, alors que l'intégration polaire et l'intégration adaptative n'ont nécessité qu'environ  $2 \times 10^5$ . Ces chiffres montrent un léger avantage pour le schéma singulier adaptatif.

intégration	Paramètres	nombre de points	$err_i$
Partition	$o = 17$	513084	0.44%
Mapping Polaire	$o = 8, npt = 10$	211380	0.79%
Singulier adaptatif	$minpt = 3, ae = 10^{-3}$	194072	0.05%

TABLE 2.4 – nombre de points d'intégration minimum pour atteindre une précision inférieure à 1% sur l'erreur en énergie, fonction de forme linéaire

**Fonctions de forme d'ordre 2** Lorsque l'on passe à l'ordre 2, la situation change radicalement. Nous fixons maintenant l'ordre de la fonction de forme à 2, tant pour le champ classique que pour

l'enrichissement de Heaviside. L'enrichissement de pointe est toujours multiplié par une partition d'unité d'ordre 1, car nous avons constaté qu'il n'affecte pas le taux de convergence et qu'il maintient le conditionnement à des valeurs acceptables. Nous avons à nouveau calculé l'erreur en fonction de la taille de la maille avec les trois schémas différents, en fixant le paramètre de manière à obtenir la plus petite erreur avec approximativement le même total de points d'intégration (environ  $1 \times 10^5$ ) pour le maillage le plus fin. Les résultats sont reportés sur la Figure 2.22. L'intégration par partition reste toujours loin du taux optimal de 2. Le mapping polaire améliore déjà sensiblement la situation, mais l'ordre optimal est perdu sur le maillage final : l'erreur d'interpolation devient du même ordre que l'erreur d'intégration, le schéma d'intégration n'est pas assez précis dans ce cas. Le taux de convergence optimal n'est retrouvé qu'avec la règle singulière adaptative. Comme pour le test au

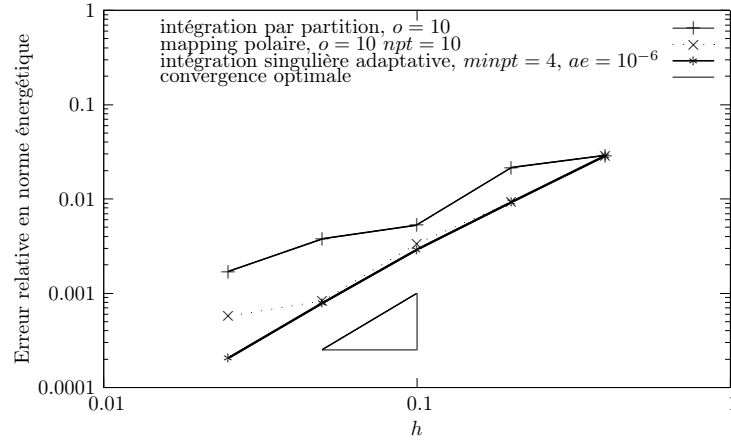


FIGURE 2.22 – Analyse de convergence, fonctions de forme quadratique, enrichissement scalaire

premier ordre, nous avons calculé le meilleur ensemble de paramètres pour chaque règle d'intégration afin d'obtenir  $err_i$  inférieur à 1% pour le maillage 5. Les résultats sont présentés dans le tableau 2.5. L'intégration par partition n'a pas pu atteindre l'objectif  $err_i$ , le meilleur résultat étant  $err_i = 373\%$  pour l'ordre d'intégration le plus élevé. Le mapping polaire et le singulier adaptatif parviennent tous deux à atteindre cette précision, le singulier adaptatif atteignant les résultats avec moitié moins de points qu'avec le cartographie polaire.

Scheme name	Parameters	Number of points	$err_i$
Polar Mapping	$o = 19, npt = 12$	235294	0.76%
Adaptive Singular	$minpt = 4, ae = 10^{-5}$	113887	0.69%

TABLE 2.5 – nombre de points d'intégration minimum pour atteindre une précision inférieure à 1% sur l'erreur en énergie, fonction de forme quadratiques.

**Robustesse** Pour illustrer l'avantage de traiter correctement les cellules faiblement singulières, nous avons reproduit l'expérience consistant à déplacer la position de la pointe de la fissure à l'intérieur d'un élément, progressivement du centre de gravité vers la limite de la cellule, sur notre cas de test. La figure 2.23 rapporte l'erreur d'énergie sur le maillage 5, pour une fonction de forme d'ordre 2, pour le singulier adaptatif et le mapping polaire en fonction de la position de la pointe de fissure à l'intérieur de l'élément, paramétrée par  $s$  comme précédemment (paragraphe 2.2.3.5). Quelle que soit la position de la pointe de la fissure à l'intérieur de l'élément, la règle singulière adaptative donne toujours la même erreur en norme d'énergie. En revanche, l'erreur obtenue avec le mapping polaire est multipliée par plus de cinq lorsque la pointe se déplace de  $\vec{x}_g$  et s'approche de la frontière de l'élément.

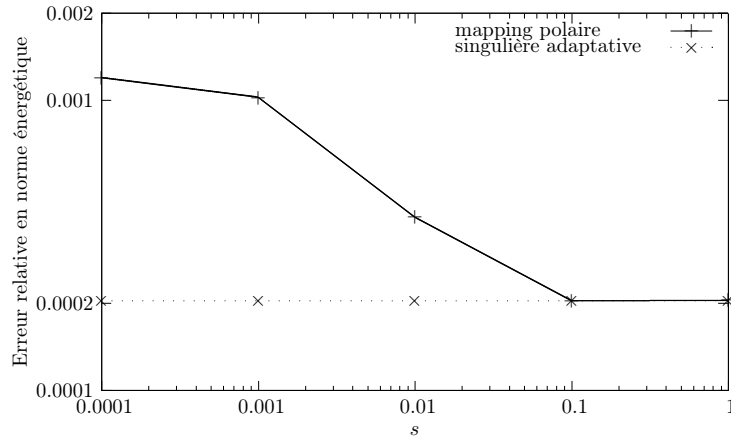


FIGURE 2.23 – Variation de l’erreur en énergie en fonction de la position de la pointe de la fissure pour le mapping polaire et l’intégration singulière adaptative.

Le problème de robustesse qui a déjà été détecté, a clairement un effet négatif sur l’erreur pour un calcul réel.

La règle d’intégration singulière permet d’intégrer, à faible coût de calcul, avec une erreur dans la matrice de rigidité qui converge très rapidement vers zéro. Mais d’après nos calculs, il semble que ce haut degré de précision ne soit nécessaire que lorsque l’erreur de discrétisation est suffisamment faible pour que l’erreur dans la matrice de rigidité ait une influence. À partir de maintenant, nous pouvons déjà tirer la conclusion que la règle d’intégration singulière ou toute variante qui peut être proposée est une nécessité lorsqu’on veut atteindre une grande précision et une grande robustesse.

**Enrichissement vectoriel** Les mêmes calculs ont été effectués en utilisant la fonction d’enrichissement vectoriel telle que présentée dans sous-section 2.2.2.4. L’erreur en énergie est tracée en fonction de la taille de l’élément sur la figure 2.24. Encore une fois, en utilisant la règle d’intégration singulière, nous

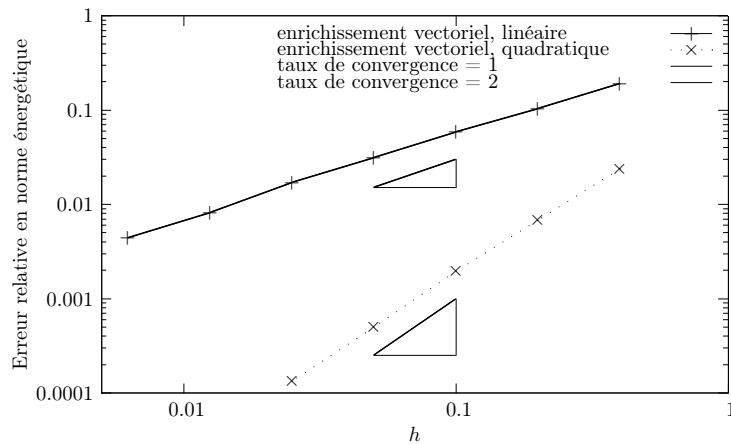


FIGURE 2.24 – Analyse de convergence pour l’enrichissement vectoriel

atteignons l’ordre de convergence optimal pour  $p = 1$  et  $p = 2$ , avec moins de degrés de liberté qu’avec l’enrichissement scalaire. Le nombre total de degrés de liberté, comparé au cas de l’enrichissement scalaire, est indiqué dans le tableau 2.6. Sur notre exemple, l’enrichissement scalaire génère environ 30% de degrés de liberté en plus que l’enrichissement vectoriel. Plus important encore, certains cas qui n’ont pas pu être résolus dans le cas de l’enrichissement scalaire ont parfaitement fonctionné avec



maillage	1	2	3	4	5	6
nddl enrichissement scalaire	139	463	1693	6649	25915	102991
nddl enrichissement vectoriel	109	349	1297	5053	19507	77287

TABLE 2.6 – Nombre de degrés de liberté (nddl) pour chaque maillage en fonction du type d'enrichissement

l'enrichissement vectoriel. Cela est dû à l'amélioration du conditionnement de la matrice de rigidité globale dans le cas de l'enrichissement vectoriel. La figure 2.25 présente l'évolution du conditionnement en fonction de la taille des éléments, pour  $p = 1$ , pour les deux stratégies d'enrichissement scalaire et vectoriel. Sur le maillage 6, le conditionnement est monté à  $10^{15}$ , pour l'enrichissement scalaire, et le problème n'a pas pu être résolu pour le maillage 7, comme mentionné plus haut. En revanche, en utilisant la fonction d'enrichissement vectoriel, le conditionnement était respectivement autour  $10^8$  et  $10^9$  pour les maillages 6 et 7.

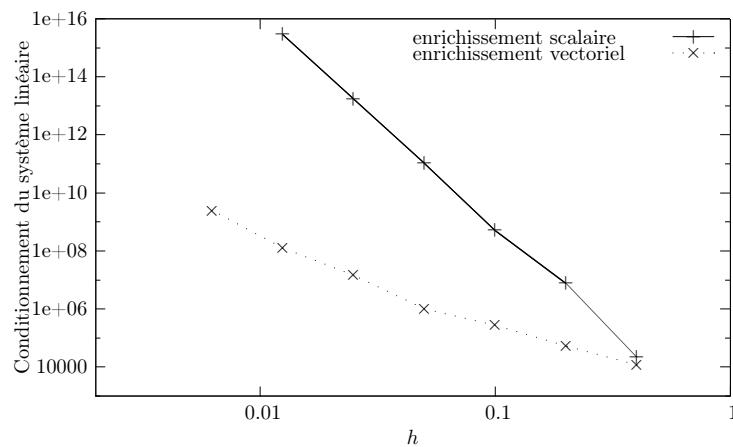


FIGURE 2.25 – Évolution du conditionnement de la matrice raideur  $\mathbf{K}$  avec la taille des éléments, en utilisant l'enrichissement scalaire ou vectoriel

Le problème de conditionnement n'apparaît que lorsque l'enrichissement géométrique est utilisé. Lorsqu'on utilise l'enrichissement topologique, ce problème n'apparaît généralement pas, mais le taux de convergence est fortement dégradé et n'est pas meilleur que celui obtenu avec la méthode des éléments finis. L'enrichissement topologique n'est donc pas une option viable lorsque l'on veut atteindre une grande précision. Bien sûr, le problème du conditionnement a déjà été évoqué dans la littérature. Différentes solutions ont été proposées, comme la construction d'un préconditionneur ad-hoc comme dans [Béc+05] ou en reliant les valeurs des coefficients d'enrichissement par exemple le long de disques centrés autour de la pointe de la fissure dans [Lab+05]. La solution que nous proposons ici, la fonction d'enrichissement vectoriel, est une autre réponse au problème, qui a l'avantage d'éviter d'ajouter une étape supplémentaire à la méthode, et qui réduit le nombre de degrés de liberté dans le contexte de l'enrichissement géométrique. Cette dernière remarque est particulièrement vraie dans le cas tridimensionnel, où chaque fois que le maillage est raffiné, par un facteur deux, le nombre de nœuds dans la zone d'enrichissement est multiplié par huit et l'enrichissement scalaire demande douze degrés de liberté supplémentaires par nœud enrichi, alors que l'enrichissement vectoriel n'en ajoute que trois par nœud enrichi.

#### 2.2.4.2 Fissure en arc de cercle

Dans cette section, nous présentons un autre cas test important qui possède à nouveau une solution exacte. Nous allons résoudre le problème d'une fissure en arc de cercle, dans un milieu infini, et le



comparer à la solution analytique trouvée dans [Bro99] et explorée pour la première fois dans [Mus+53] et [Atl+75].

Le problème est schématisé sur la figure 2.26. Le rayon du cercle sur lequel se trouve la fissure est fixé à 1 ; l'axe  $x$  est l'axe de symétrie de la fissure incurvée. La fissure est délimitée par un arc allant de  $-\theta$  à  $\theta$ , et le chargement à l'infini est une contrainte unidirectionnelle, paramétrée par son angle  $\alpha$  et sa magnitude  $\sigma_\infty$ .

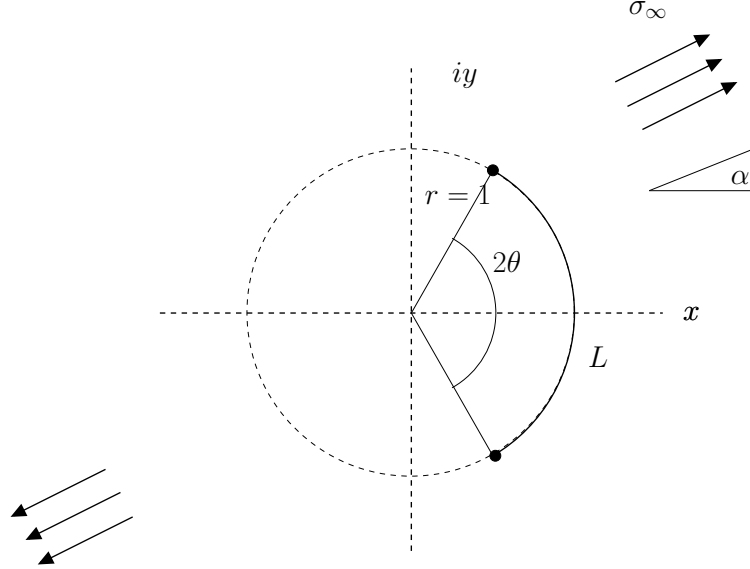


FIGURE 2.26 – Définition du problème de fissure en arc de cercle

**solution exacte** La solution telle que présentée dans [Bro99] apparaît avec des erreurs dans certains des coefficients. Nous commençons donc par en présenter une version corrigée : Soit  $z = x + iy$  la représentation en variable complexe d'un point dans les axes tels que définis sur la figure. Définissons les constantes suivantes :

$$\begin{aligned}
 b_0 &= -\frac{\sigma_\infty}{4} e^{2i\alpha} & a_0 &= b_0 \\
 b_1 &= -\cos(\theta) b_0 & a_1 &= 1 \\
 b_2 &= -\cos(\theta) b_3 & a_2 &= \frac{\sigma_\infty}{4} - b_3 \\
 b_3 &= \frac{3b_0 \cos(\theta)^2 - \sigma_\infty + 2b_1 \cos(\theta) - b_0}{2(\cos(\theta) - 3)} & & 
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

On peut alors définir les potentiels complexes suivants :

$$f'(z) = \frac{1}{G(z)} \sum_{n=0}^3 b_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^2 a_n z^{n-2} \tag{2.39}$$

$$g(z) = (z) = \frac{1}{G(z)} \sum_{n=0}^3 b_n z^{n-2} - \sum_{n=0}^2 a_n z^{n-2} \tag{2.40}$$

Où  $G(z)$  est défini comme suit :

$$\begin{aligned} &\text{if } ((|z| < 1) \text{ or } (Re(z) < \cos(\theta))) \\ &\quad G(z) = \sqrt{z^2 - 2z\cos(\theta) + 1} \\ &\text{else} \\ &\quad G(z) = -\sqrt{z^2 - 2z\cos(\theta) + 1} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dans l'expression précédente  $\sqrt{\cdot}$  est la valeur principale de la racine complexe ( $\sqrt{\cdot}(z) = \sqrt{(|z|)}e^{i\arg(z)/2}$  avec  $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ )

$$\Theta = 2(f'(z) + \bar{f}'(z)) \quad (2.42)$$

$$\Phi = -2(z\bar{f}''(z) + \bar{g}''(z)) \quad (2.43)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2}Re(\Theta + \Phi) \quad (2.44)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2}Im(\Theta + \Phi) \quad (2.45)$$

$$\sigma_{xy} = Re(\Theta) - \sigma_{xx} \quad (2.46)$$

**Discussion** Ce cas test est important, en particulier pour la fonction d'enrichissement vectorielle. En effet, comme nous l'avons expliqué lorsque nous avons exposé cette stratégie d'enrichissement, la fonction d'enrichissement dépend maintenant de la direction locale de la fissure. Pour simplifier l'implémentation de l'enrichissement vectoriel, nous avons discrétisé ces directions en utilisant une direction constante pour chaque support d'un nœud enrichi, calculée comme la valeur moyenne du gradient des level-sets discrétisés sur ce support. Dans le cas de la fissure droite, les axes locaux des fissures étaient invariants, et l'impact de leur discrétisation ne pouvait pas influencer les résultats. Avec la fissure en arc de cercle, la discrétisation choisie pour les repères dans lesquels sont définis l'enrichissement peuvent avoir une influence sur la qualité des résultats. Nous souhaitons vérifier si le taux de convergence optimal est atteint malgré cette discrétisation. Les résultats de convergence sont reportés sur la figure 2.27, en utilisant l'enrichissement vectoriel, avec un rayon d'enrichissement  $R = 0.15$ .

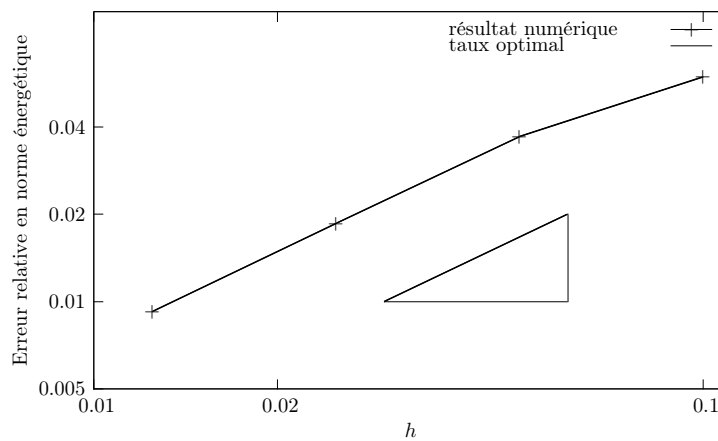


FIGURE 2.27 – Résultats de convergence en norme énergétique pour une fissure en arc de cercle

Le taux optimal de 1 pour la norme d'énergie est clairement obtenu, ce qui valide notre discrétisation de l'axe local de la fissure. Le champ de contrainte de Von Mises est affiché sur la figure 2.28, avec à gauche la solution exacte et à droite la solution numérique.

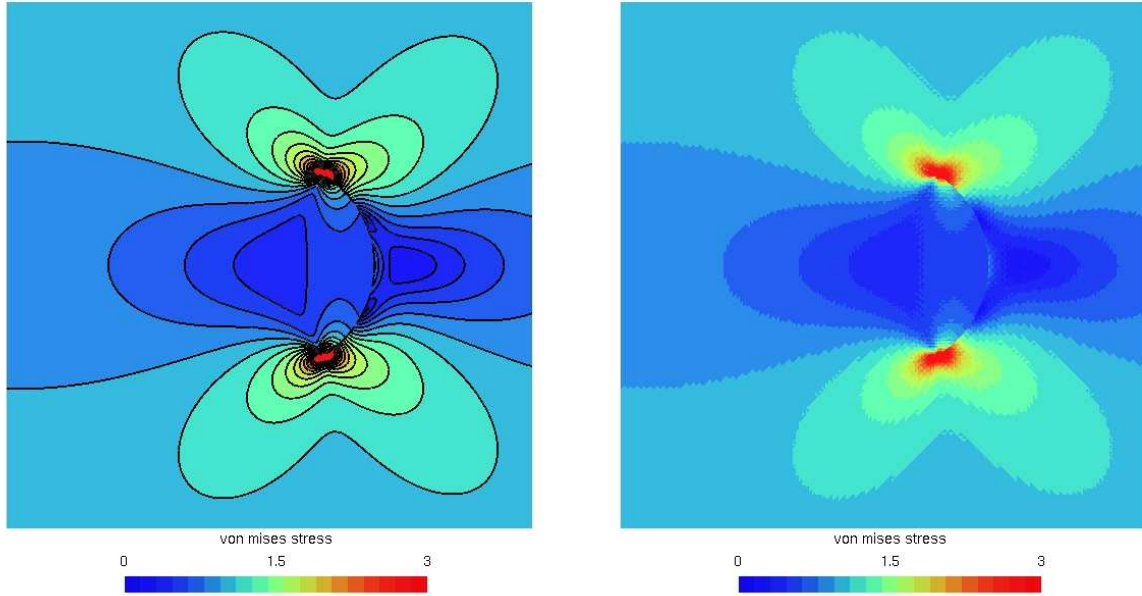


FIGURE 2.28 – Contrainte de von mises stress pour la fissure en arc de cercle, à gauche la solution analytique, à droite la solution exacte

Dans le présent travail, nous rappelons que la level-set est discrétisée linéairement sur le même maillage que celui permettant de discrétiser le champ de déplacement. Dans ce contexte, il n'y a aucun espoir d'obtenir une convergence optimale pour une discrétisation d'ordre supérieur du champ de déplacement dans le cas d'une fissure courbe, puisque l'erreur dans la représentation de la géométrie détruirait dans ce cas le taux de convergence. Afin d'obtenir un taux de convergence optimal dans ce cas, il faut utiliser une meilleure représentation de la géométrie, comme dans [Dré+10b] ou [Haa+11].

### 2.2.4.3 Extraction directe ou intégrale des facteurs d'intensité de contrainte

L'extraction des facteurs d'intensité de contrainte à partir d'un calcul par éléments finis est d'une importance majeure, notamment pour prédire la défaillance, la durée de vie ou la propagation des fissures dans une structure. De nombreuses méthodes ont été conçues dans le passé et les plus précises sont peut-être celles basées sur les méthodes d'intégrale de domaine ou les méthodes G-Theta. L'intégrale de domaine est une forme équivalente à la célèbre intégrale de contour de Rice ([Ric68]). La théorie derrière l'intégrale de domaine est décrite notamment dans [Mor+87b; Mor+87a]. L'utilisation de l'intégrale de domaine dans le contexte des éléments finis a commencé avec l'article de [Des+83] pour les fissures 2D et avec [Nik+87] pour les fissures 3D. Le concept d'intégrale de domaine d'interaction pour extraire séparément les facteurs d'intensité des contraintes est apparu dans les travaux de [Ste+76] pour les fissures 2D. Ce concept a ensuite été utilisé pour séparer les facteurs d'intensité de contrainte pour les fissures 2D (dans [Shi+88] et fissures 3D [Nak+89; Nak91]). Les fissures considérées y étaient planes avec des bords droits. Le cas des fissures axisymétriques a ensuite été dérivé

par [Nah+93]. Enfin, les fronts courbes généraux ont été considérés dans [Gos+98] et [Gos+02]. La technique a depuis été appliquée à X-FEM dans [Béc+05 ; Gon+13] entre autres.

Notre objectif ici n'est évidemment pas de rivaliser avec ces méthodes. Mais l'enrichissement vectoriel que nous avons proposé, suggère une manière très efficace de calculer les facteurs d'intensité des contraintes. Nous proposons d'interpoler linéairement la valeur des degrés de liberté associés à chacune des fonctions d'enrichissement vectoriel, sur l'élément qui contient la pointe de fissure, à la position de la pointe de fissure. L'interpolation du premier degré de liberté doit donner une approximation de  $K_I$  et le second une approximation de  $K_{II}$ . Il s'agit d'une opération de post-traitement qui peut être effectuée sans frais et qui est très facile à mettre en œuvre une fois que les fonctions d'enrichissement vectoriel sont disponibles dans un code donné. Dans la suite, nous appelons cette méthode la *méthode d'évaluation directe*.

Nous avons appliqué cette stratégie sur la fissure droite dans un milieu infini afin de la comparer avec la solution analytique connue.

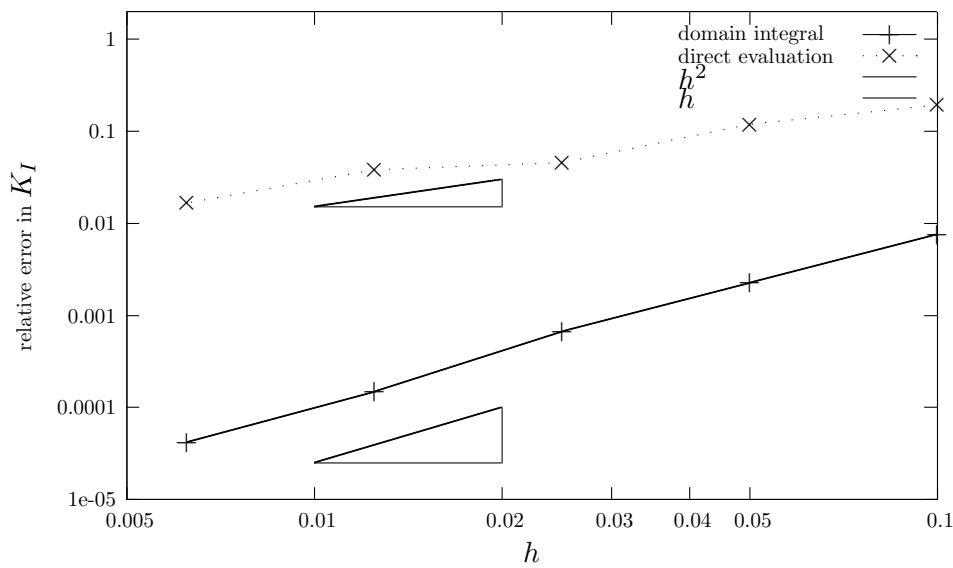


FIGURE 2.29 – Les résultats de convergence dans l'erreur en  $K_I$ , en utilisant les fonctions de forme du premier ordre

Nous avons également calculé les facteurs d'intensité de contrainte en utilisant une méthode G-Theta, sur un domaine d'intégration défini géométriquement, car il a été démontré que c'est la stratégie la plus précise. Le rayon du domaine autour de la fissure a été fixé à la même valeur que le rayon de la zone d'enrichissement. Les résultats utilisant la fonction de forme d'ordre 1 sont tracés sur la figure 2.29, montrant l'erreur dans la valeur calculée de  $K_I$  en fonction de la taille de l'élément. Nous retrouvons, comme prévu, le taux de convergence optimal de 2 pour la méthode G-Theta. La méthode d'évaluation directe donne également d'assez bons résultats compte tenu de son coût très faible. Le taux de convergence est proche de 1 dans ce cas.

La figure 2.30 présente les mêmes résultats, mais en utilisant des fonctions de forme d'ordre 2. Une fois encore, le taux de convergence attendu de 4 est obtenu pour la méthode G-Theta. La méthode d'évaluation directe donne également de bons résultats mais nous avons probablement besoin de plus de raffinement pour évaluer correctement le taux de convergence.

La figure 2.30 présente les mêmes résultats, mais en utilisant des fonctions de forme d'ordre 2. Une fois encore, le taux de convergence attendu de 4 est obtenu pour la méthode G-Theta. La méthode d'évaluation directe donne également de bons résultats, mais nous avons probablement besoin de plus de raffinement pour évaluer correctement le taux de convergence.

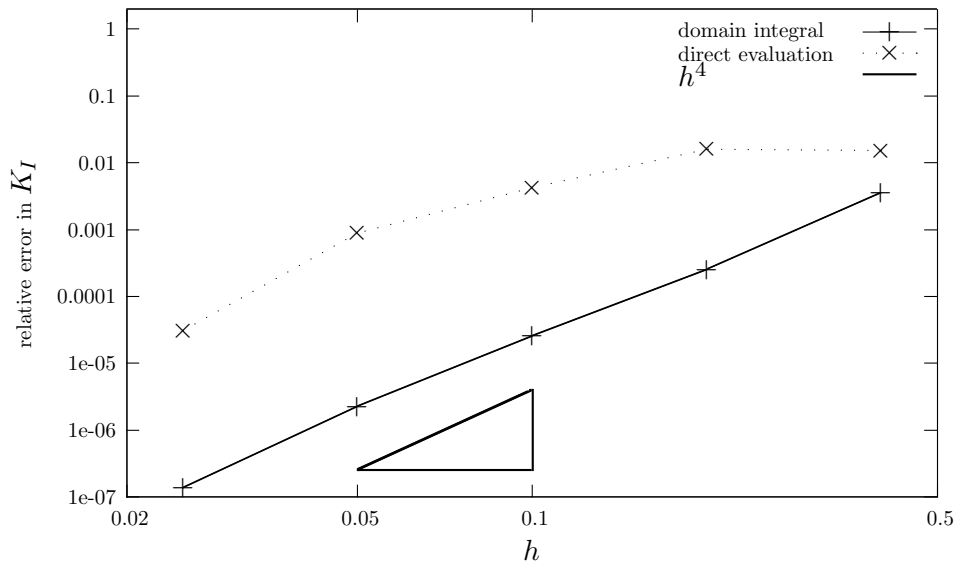


FIGURE 2.30 – Les résultats de convergence dans l’erreur en  $K_I$ , en utilisant des fonctions de forme de second ordre

Encore une fois, nous ne préconisons pas l’utilisation de notre méthode d’évaluation directe uniquement, il est clair que les résultats de la méthode G-Theta sont bien meilleurs. Mais avoir la possibilité de calculer rapidement une évaluation approximative du facteur d’intensité de contrainte lorsqu’une évaluation plus précise est disponible peut néanmoins s’avérer utile. En effet, la différence entre les deux résultats calculés peut servir d’indicateur d’erreur, donnant une limite supérieure à l’erreur commise par la méthode G-Theta.

## 2.3 Conclusions

Dans cette section, j’ai peu décrit en détail deux contributions importantes de la méthode X-FEM telle qu’appliquée dans la modélisation des fissures : une nouvelle façon d’enrichir en pointe de fissure, combinant l’enrichissement géométrique et vectoriel et une analyse approfondie des erreurs de convergence. À ces sujets, nous faisons les remarques suivantes :

- Je préconise l’utilisation de la *fonction d’enrichissement de pointe de fissure vectoriel* au lieu de la *fonction d’enrichissement de pointe de fissure scalaire* habituelle. En effet, nous avons montré qu’à précision équivalente, elle conduit à une réduction du nombre de degrés de liberté du problème. Elle améliore considérablement le conditionnement du système linéaire à résoudre et permet une extraction peu coûteuse du facteur d’intensité des contraintes.
- La conception d’une bonne règle d’intégration pour calculer correctement la rigidité locale pour les éléments enrichis en pointe contenant, ou proche de, la pointe a fait l’objet de nombreux travaux. J’ai présenté ici une solution à ce problème, incluant des cellules d’intégration qui ne contiennent pas la singularité. La seule autre solution proposée dans la littérature dans ces cas était la méthode de superposition dans [Béc+05]. La méthode présentée a l’avantage par rapport à cette dernière de garantir que tous les points d’intégration se trouvent à l’intérieur des éléments et elle est adaptative. On a été démontré qu’un schéma d’intégration précis pour tous les éléments enrichis est important pour obtenir une valeur rapidement convergente de la matrice de rigidité, indépendamment de la position de la pointe de la fissure à l’intérieur d’un élément. Les effets de la qualité de la règle d’intégration sont particulièrement importants sur l’erreur finale dans le cas d’un schéma de discrétisation d’ordre supérieur.

Au-delà des résultats produits ici et de ceux auxquels j'ai participé, mais que je n'ai évoqués que brièvement en début de chapitre, je considère qu'X-FEM est un bon outil pour de nombreuses applications. Il fait encore aujourd'hui l'objet de nombreux développements, comme un regard rapide sur la bibliographie actuelle permet de s'en convaincre.

Dans la suite du document, nous verrons comment l'utiliser comme un outil performant dès que l'on est face à un problème d'interface mobile que l'on ne souhaite pas mailler.

Pourtant, au vu de la complexité que la méthode impose parfois (comme ici à propos de l'intégration), on est en droit de se demander si des méthodes conformes, c'est-à-dire travaillant directement sur la mise en conformité des interfaces avec le maillage, ne seraient pas plus efficaces. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, on peut au moins souligner que, pour le cas des fissures par exemple, la concurrence entre X-FEM et le remaillage est rude. Peut-être qu'un point d'équilibre est encore à trouver entre l'effort fait côté maillage et l'effort fait côté discrétisation des champs pour développer une méthode qui serait à la fois simple à implémenter et efficace. Pour cela, une collaboration plus étroite entre des experts de la génération de maillage et des experts des méthodes numériques aurait sans doute le potentiel pour améliorer sensiblement la situation.



# 3

## ILS : Une méthode Level Set pour les problèmes comportant des contraintes d'inégalités

### 3.1 Introduction

En mécanique, il est courant de voir apparaître des contraintes sur les champs formulés en termes d'inégalité. L'exemple canonique est sans doute celui du contact. Les problèmes de mécanique en statique comportant des possibilités de contact sont le plus souvent formulés à l'aide d'équations d'équilibre auxquelles sont ajoutées des contraintes permettant de prendre en compte la non-pénétration, généralement formulée comme la positivité du jeu entre les deux solides. Pour préciser un peu la formulation, si on étudie deux solides  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , on appelle  $\vec{x}_1$  un point de la frontière  $\partial\Omega_1$  du solide  $\Omega_1$  et  $\vec{n}_1$  la normale extérieure à  $\Omega_1$  au point  $\vec{x}_1$ . On appelle ensuite  $\vec{x}_2(\vec{x}_1)$  le point le plus proche de  $\vec{x}_1$  sur  $\partial\Omega_2$ . On appelle alors le jeu (gap) en  $\vec{x}_1$  le vecteur  $\vec{g}(\vec{x}_1) = \vec{x}_2(\vec{x}_1) - \vec{x}_1$ . La condition de non-pénétration peut alors s'écrire :

$$\forall \vec{x}_1 \in \partial\Omega_1, \quad \vec{g}(\vec{x}_1) \cdot \vec{n}(\vec{x}_1) \geq 0 \quad (3.1)$$

Où on voit apparaître clairement le type de contraintes d'inégalités à vérifier.

Les formulations de lois de comportement de matériaux comportant des seuils (endommagement, plasticité, etc.) font aussi apparaître des inégalités. Un exemple particulier qui a été le prétexte au développement de la méthode est celui de la recherche de la position d'équilibre d'un solide déformable élastique pour lequel l'élongation locale ne peut dépasser une valeur limite.

Ces travaux, organisés autour de la thèse de Nicolas Bonfils que j'ai encadré, [Bon11 ; Bon+12 ; Bon+10 ; Bon+09 ; Che+11b] ont permis de poser les bases de la méthode dite ILS (Inégalité Level-Set). Elle propose de résoudre les problèmes mécaniques comportant des inégalités en utilisant une méthode de type éléments finis étendus, couplée avec une formulation de type level-set, utilisant la sensibilité des champs à la position d'une interface pour piloter un algorithme d'optimisation.

L'application de ces techniques au contact a fait l'objet de la thèse de Mathieu Graveleau, [Gra15] et des publications associées : [Gra+13 ; Moë+13b ; Che+13a ; Gra+14 ; Che+15 ; Gra+15]. Nous allons dans la suite de ce chapitre présenter les idées principales de la méthode ILS telle que nous l'avons développée dans les travaux cités ci-dessus. En mécanique, pour les problèmes sur lesquels nous nous sommes penchés, les contraintes d'inégalité transforment la recherche d'une position d'équilibre, souvent modélisée comme la recherche d'un minimum de l'énergie, en un problème de minimisation



sous contrainte d'inégalité. Parmi les travaux pionniers pour résoudre les problèmes de contact à l'aide de la méthode des éléments finis, citons ceux de [Wil+70], [Cha+71]. Une bibliographie complète sur le traitement numérique des méthodes pour le contact, dépasse le cadre du présent document. Le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de WRIGGERS [Wri+06] pour une revue bien plus complète.

Les approches numériques habituellement utilisées pour ce type de problèmes s'appuient généralement sur la méthode des éléments finis et sont souvent divisées en deux sous-ensembles :

- Les méthodes de pénalité, où la contrainte est régularisée en pénalisant la pénétration, c'est-à-dire en lui associant une énergie.
- Les méthodes mixtes, où un champ de multiplicateur est ajouté dans la "zone active" pour forcer des contraintes d'égalités dans cette zone.

La première famille de méthodes a l'avantage de la simplicité d'implémentation. En effet, peu de choses sont à changer dans un code éléments finis pour l'appliquer. Elle présente pourtant nombre de défauts qui la rendent inadéquate pour de nombreuses situations. En effet, la pénétration obtenue n'est pas nulle et il est difficile de remonter à une approximation correcte des efforts de contact. La détermination du paramètre caractérisant les termes de pénalité est difficile et si ce paramètre est mal choisi, il peut occasionner une pénétration inacceptable ou un conditionnement rédhibitoire des systèmes discrets à résoudre. La deuxième famille lui est souvent préférée, même si elle rend les systèmes à résoudre plus grand en ajoutant des multiplicateurs. La pénétration y est bien mieux contrôlée. Toutefois, elle occasionne son propre lot de difficultés. En particulier, l'espace des multiplicateurs doit être choisi correctement pour que les conditions "LBB"<sup>1</sup> soient vérifiées et que la formulation soit stable numériquement. Le processus de résolution est itératif. La contrainte d'égalité imposée par les multiplicateurs de Lagrange sur les points possiblement en contact doit être activée ou désactivée en fonction du viol de la condition de non-pénétration ou respectivement, du signe du champ de multiplicateur au cours des itérations pour que le problème, à convergence, soit résolu. Malgré une littérature intensive sur ce sujet et son importance industrielle, les problèmes de contacts sont notoirement difficiles à résoudre, notamment à cause des non-linéarités fortes qu'ils contiennent, même en hypothèse des petites perturbations. En particulier, il est parfois très difficile de faire converger un calcul surtout lorsque les zones de contact sont multiples et qu'elles interagissent entre elles. Les singularités qui apparaissent entre la zone en contact et la zone qui ne l'est pas rendent de plus très difficiles les calculs pour lesquels l'espace éléments finis est d'ordre élevé. Les rares travaux qui explorent avec succès cette possibilité s'appuient sur le déplacement des nœuds pour placer ceux-ci à l'interface entre les deux zones [Fra+10], [Fra+11]. D'autres approches, reconnaissant la difficulté dans le cadre notamment des éléments d'ordre élevés, proposent de retrouver la frontière du contact en interpolant les statuts dans le but d'améliorer l'intégration des efforts. À ma connaissance, au moins à l'époque où nous avons développé l'ILS, si le problème était bien identifié, peu de travaux s'attachaient à positionner correctement l'interface afin d'utiliser des espaces qui aient la bonne régularité (discontinuité des gradients sur l'interface). Dans la plupart des cas, les contraintes à convergence sont vérifiées localement, aux points de Gauss ou au nœud, suivant les formulations. La zone pour laquelle la contrainte est active n'est numériquement connue que partiellement à l'issue du calcul. Nous entendons par là que l'on sait quels points discrets sont dans la zone de contact, mais pas où se trouve la limite ou l'interface, entre la zone en contact et la zone libre, bien que des heuristiques peuvent être construites pour affiner la position de cette frontière. L'approche ILS part de l'idée qu'une définition plus explicite de la zone de contact permettrait une résolution plus aisée et plus précise du problème.

L'idée est donc de représenter l'interface  $\Gamma$  entre la partie  $\partial\Omega_c$  de la frontière du solide en contact et le reste de la frontière du solide  $\partial\Omega_0$  comme l'iso-zéro d'une level-set définie sur  $\partial\Omega$ . Nous utilisons ici une level-set normalisée ( $|\vec{\nabla}\phi| = 1$ ). Le problème de contact est alors formulé comme suit : trouver l'interface  $\Gamma$ , telle que toutes les équations du problème de contact soient vérifiées. Le problème est

---

1. Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi : conditions suffisantes pour qu'un problème de point selle ai une solution unique continue par rapport aux données d'entrée

alors résolu itérativement, en partant d'une level-set initiale. Une contrainte d'égalité est appliquée sur  $\partial\Omega_c$  imposant un jeu nul sur ce sous-domaine. Les équations d'équilibres sont alors résolues sous ces contraintes d'égalité. Une fois l'équilibre trouvé, on utilise la solution pour prédire une meilleure position aux regards de critère calculé sur  $\Gamma$ . C'est ce qu'on appelle le calcul de sensibilité. Il s'agit ici d'un point clef de la méthode : c'est cette sensibilité de la solution aux différents déplacements possibles de  $\Gamma$  qui va piloter son mouvement vers une meilleure solution discrète. Le processus est alors répété itérativement jusqu'à ce que le critère pour la bonne position de  $\Gamma$  soit vérifié. Cette approche en définissant précisément la frontière de la zone de contact peut être particulièrement attractive en particulier si une physique plus complexe est attachée à cette zone. Citons par exemple les problèmes d'adhésions pour lesquels une force s'oppose à l'ouverture de la zone de contact.

Si dans la thèse de GRAVELEAU, nous avons traité de cas un peu plus généraux que nous évoquons brièvement à la [section 3.7](#), pour maintenir une présentation condensée de l'esprit de la méthode, nous présentons dans la suite la modélisation et la discrétisation dans le cas de membranes en hypothèses des petites déformations, entrant en contact avec un solide rigide.

### 3.2 Modélisation dans le cas des membranes

Le problème étudié est celui d'une membrane déformable en contact avec une surface rigide considérée au moins  $C_1$  (dérivable et dérivée continue). Nous supposons que le contact est sans frottement et nous concentrerons uniquement sur le problème statique dans l'hypothèse de petite déformation. Le corps déformable occupe le volume  $\Omega$ , sa frontière est  $\partial\Omega$  et  $\vec{x} = (x, y, z)$  est la coordonnée d'un point sur la membrane. Nous noterons  $u(\vec{x})$  le déplacement du point  $\vec{x}$  et  $T$  la tension de la membrane. On ne considère que le déplacement dans la direction orthogonale à la membrane, comme il est d'usage dans ce cadre. La distance entre le corps solide et le corps déformable en l'absence de toute charge appliquée est représentée par la fonction  $d(\vec{x}) > 0$ . La non-pénétration des deux corps s'écrit  $u + d \geq 0$ . Sans perte de généralité, des déplacements nuls sont imposés sur  $\partial\Omega$  et des forces surfaciques  $f_d$  seront appliquées dans la direction orthogonale à la membrane. Enfin, la partie de la membrane en contact avec la surface rigide sera appelée  $\Omega^-$  et  $\Gamma$  est la frontière avec le reste de la membrane. On définit  $\vec{n}$ , la direction normale à  $\Gamma$  et tangente à  $\Omega$ , dans la direction "+", c'est-à-dire pointant vers la zone qui n'est pas en contact. Les notations sont reprises dans la figure 3.1 Notre problème étant paramétré,

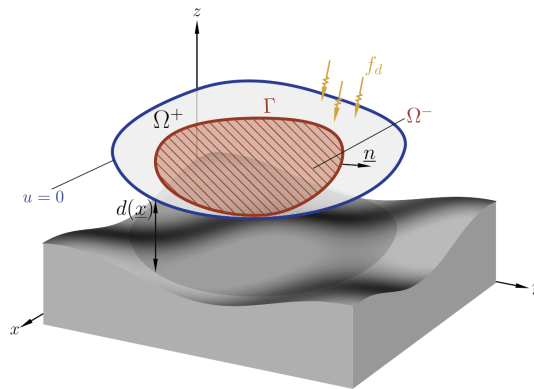


FIGURE 3.1 – Membrane et solide rigide : définition de la cinématique.

nous pouvons construire le cadre mathématique nécessaire pour trouver la solution d'équilibre de ce problème. Bien entendu, ce cadre a déjà été établi et le lecteur peut se référer à [\[Kik+88\]](#) pour plus de détails. En effet, nous ne ferons ici qu'esquisser les principaux résultats. Les équations qui régissent

l'équilibre d'une membrane sont bien connues. En l'absence de contact, les équations fortes à vérifier s'écrivent simplement :

$$\begin{cases} T\Delta u + f = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec le contact, le système d'équations est plus complexe et inclut des inégalités. S'il y a contact, l'équivalent classique de 3.2 peut s'écrire à l'aide de conditions de Signorini également appelées conditions de Karush Kuhn Tucker (KKT) :

$$\begin{cases} T\Delta u + f + \tilde{p} = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} u + d \geq 0 & \text{sur } \Omega \\ \tilde{p} \geq 0 & \text{sur } \Omega \\ \tilde{p}(u + d) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

Où  $\tilde{p}$  est la réaction de la surface rigide sur la membrane. Dans le système 3.3, les équations sont écrites sur le domaine complet. Pour décrire notre approche, il convient de les particulariser sur les différents sous-domaines :

**Problème 2.** Trouver  $u$  et  $\tilde{p}$  tels que :

$\Omega^+$	$\Omega^-$	$\Gamma$
$T\Delta u + f = 0$	$T\Delta u + f + \tilde{p} = 0$	$u^+ = u^-$
$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$	$-u = d$	
$-u \leq d$	$\tilde{p} \geq 0$	

Définissons maintenant le problème suivant. Cette fois  $\Gamma$  est donné et on cherche à résoudre :

**Problème 3.** Trouver  $u$ ,  $\tilde{p}$  et  $\tilde{\lambda}$  tels que :

$\Omega^+$	$\Omega^-$	$\Gamma$
$T\Delta u + f = 0$	$T\Delta u + f + \tilde{p} = 0$	$T[\vec{\nabla}u] \cdot \vec{n} = \tilde{\lambda}$
$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$	$-u = d$	$u^+ = u^-$

Où  $[\vec{\nabla}u(s)] = \vec{\nabla}u^+(s) - \vec{\nabla}u^-(s)$  est le saut de gradient de déplacement sur un point  $s$  de la frontière  $\Gamma$  séparant les parties a priori en contact et hors contact de  $\Omega$ .  $\tilde{\lambda}$  peut être interprétée comme la réaction du solide rigide sur la frontière du contact. Ce problème, contrairement au précédent ne contient pas d'inégalité, mais  $\Gamma$  est une donnée du problème. Ce problème aura la même solution que 2 si  $\Gamma$  est à la "bonne" position.

Si  $\Gamma$  est la position exacte de l'interface 2, alors on doit avoir  $\tilde{\lambda} = 0$ . En effet, si  $\tilde{\lambda} > 0$  alors  $[\vec{\nabla}u] \cdot \vec{n} > 0$ . C'est à dire que la membrane est artificiellement plaquée sur le solide rigide le long de  $\Gamma$  par  $\tilde{\lambda}$ , faisant apparaître une rupture de pente sur la frontière. Inversement,  $\tilde{\lambda} < 0$  alors  $[\vec{\nabla}u] \cdot \vec{n} < 0$ . Comme  $\vec{\nabla}d$  est continue, et que  $u^- = -d$  sur  $\Gamma$ , la relation précédente montre qu'il y a alors pénétration de la membrane dans le solide.  $\tilde{\lambda} = 0$  sur  $\Gamma$  est donc une condition nécessaire pour que  $\Gamma$  décrive la frontière de la bonne zone de contact, c'est-à-dire :

$$[\vec{\nabla}u] \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall s \in \Gamma \quad (3.4)$$

Pour le besoin de la recherche de solution approchée, écrivons maintenant une forme faible associée au problème 3. Soit  $\mathcal{V}_d$  l'espace admissible pour le déplacement défini comme suit :

$$\mathcal{V}_d = \{u \in H^1(\Omega^+ \cup \Omega^-) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (3.5)$$

Notez que, pour  $u \in \mathcal{V}_d$  le déplacement peut admettre une discontinuité au passage de  $\Gamma$ . Une formulation faible du problème 3 peut alors s'écrire :

**Problème 4.** Trouver  $u \in \mathcal{V}_d$ ,  $p \in P$  et  $\lambda \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  tels que :

$$\begin{cases} a(u^*, u) + \langle p^*, p \rangle_P + \langle \llbracket u^* \rrbracket, \lambda \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}} = f(u^*) & \forall u^* \in \mathcal{V}_d, \\ \langle p^*, u + d \rangle_P = 0 & \forall p^* \in P, \\ \langle \lambda^*, u + d \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}} = 0 & \forall \lambda^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a(u^*, u) &= \int_{\Omega} T \vec{\nabla} u^* \cdot \vec{\nabla} u \, d\Omega & f(u^*) &= \int_{\Omega} f u^* \, d\Omega \\ \langle \lambda^*, \llbracket u \rrbracket \rangle_{H^{-1/2}} &= c(\lambda^*, u) = \int_{\Gamma} \lambda^* \llbracket u \rrbracket \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.7)$$

Notez que  $P$  n'a pas été défini pour l'instant afin de permettre la discussion qui suit. Ce qui semblerait le plus naturel serait de prendre  $L^2(\Omega^-)$ . Le produit de dualité s'écrirait alors :  $\langle p, u \rangle_{L^2} = \int_{\Omega^-} p u \, d\Omega$ . Même si cela paraît être une façon évidente d'imposer le déplacement de  $u$  sur  $\Omega^-$ , comme nous avons affaire à une formulation mixte, il faut s'assurer que les conditions LBB puissent être satisfaites, or ce ne serait pas le cas avec ce choix pour  $P$ . Dans la suite, nous choisirons donc plutôt  $P = H^1(\Omega^-)$ , le produit de dualité naturel devient alors  $\langle p, u \rangle_{H^1} = \int_{\Omega^-} l^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{\nabla} u \, d\Omega + \int_{\Omega^-} p u \, d\Omega$ . Où  $l$  est une mesure de distance arbitraire fixée à  $l = 1$  dans la suite, pour assurer l'homogénéité des dimensions. Le problème 4 avec cette définition pour  $P$  vérifie naturellement les conditions de Babuška-Brezzi (BB) puisque  $p$  et  $u$  restreint à  $\Omega^-$  vivent alors dans le même espace et que le produit de dualité entre  $p$  et  $u$  est alors simplement le produit scalaire associé à  $H^1(\Omega^-)$ .

**Problème 5.** Trouver  $u \in \mathcal{V}_d$ ,  $p \in H^1(\Omega^-)$  et  $\lambda \in H^{-1/2}(\Gamma)$  tels que :

$$\begin{cases} a(u^*, u) + b(u^*, p) + c(u^*, \lambda) = f(u^*) & \forall u^* \in \mathcal{V}_d, \\ b(p^*, u) = l_p(p^*) & \forall p^* \in H^1(\Omega^-), \\ c(\lambda^*, u) = 0 & \forall \lambda^* \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{cases} \quad (3.8)$$

avec :

$$b(u^*, p) = \int_{\Omega^-} l^2 \vec{\nabla} u^* \cdot \vec{\nabla} p + u^* p \, d\Omega \quad (3.9)$$

$$l_p(p^*) = - \int_{\Omega^-} l^2 \vec{\nabla} p^* \cdot \vec{\nabla} d + p^* d \, d\Omega \quad (3.10)$$

Un inconvénient du problème 5 est que l'on perd l'équivalence entre  $\tilde{p}$  et  $p$  ainsi qu'entre  $\tilde{\lambda}$  et  $\lambda$ . Un post-traitement sera nécessaire pour calculer les réactions. En résumé, au lieu de résoudre le problème de contact directement, nous proposons de résoudre un problème où  $\Gamma$  est donné et de vérifier que la solution vérifie alors  $\tilde{\lambda} = 0$ . Tant que ce n'est pas le cas,  $\Gamma$  est modifiée avant de résoudre à nouveau le problème. La difficulté est donc de définir a priori une zone de contact et de la faire évoluer dans la bonne "direction". Pour cela, nous utilisons les outils de l'optimisation de forme. Le problème initial comportant des inégalités est transformé en une série de problèmes d'égalités reliés par des problèmes d'optimisation de forme de la zone en contact.

### 3.3 Discrétisation du problème à $\Gamma$ fixé

Pour résoudre le problème d'équilibre, nous devons d'abord paramétrer  $\Gamma$ . Plutôt que de le faire de façon explicite, nous utilisons l'approche classique dans le cadre de la méthode X-FEM (voir [chapitre 2](#)), consistant à représenter  $\Gamma$  comme l'iso-zéro d'une fonction level-set [Set99; Osh+04]. Dans le présent travail, la level-set est approximée de façon continue et linéaire par morceau utilisant un espace

éléments finis classique sur un maillage de triangle ( $\Omega^h$ ). Ce maillage reste fixe dans les itérations ILS et est donc non conforme à  $\Gamma$  :

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{i \in I} \phi_i N_i(\vec{x}) \quad (3.11)$$

où  $I$  est l'ensemble des nœuds de  $\Omega^h$  et les  $N_i$  les fonctions de formes éléments finis classiques. L'iso-zéro discrète est alors une liste de segments  $\Gamma^h$ , formant des polygones, dont les arêtes traversent les éléments.

L'espace discret où vit le champ de déplacement est choisi discontinu sur  $\Gamma^h$ .  $\mathcal{V}_d^h = u_h(\vec{x})$  est tel que :

$$u_h(\vec{x}) = \sum_{i \in I} u_i N_i(\vec{x}) + \sum_{j \in J} u_j^e N_j(\vec{x}) H(\phi(\vec{x})) \quad (3.12)$$

Où  $J$  est l'ensemble des nœuds enrichis (dont le support est coupé en deux par  $\Gamma^h$ ) et où  $H$  est la fonction de Heaviside. On aurait pu choisir d'enrichir le champ avec des discontinuités faibles (seulement discontinues sur la pente), assurant directement que  $u^+ = u^-$ , ("ridge enrichment" comme dans [Moë+03] ou encore [Dré+10b]), on aurait alors pas besoin du champ  $\lambda$ , mais le critère de "bonne position",  $\tilde{\lambda} = 0$  et surtout sa variation deviennent plus délicats à évaluer.

Les multiplicateurs de Lagrange doivent également être discrétisés. Afin d'obtenir de bonnes propriétés de convergence, nous devons utiliser la bonne approximation pour  $p$  et  $\lambda$  de sorte que la condition BB soit satisfaite. Ce problème a été traité dans [Moë+06] pour le multiplicateur de Lagrange sur une frontière (c'est-à-dire pour  $\lambda$ ) couplé avec X-FEM. Plutôt que des degrés de liberté liés directement au front, on utilise une combinaison de degrés de libertés attachés aux nœuds des éléments coupés par le level-set. C'est donc cette discrétisation qui est utilisée ici. De plus, le choix de la formulation garantit un bon comportement de  $p$ . Nous pouvons alors approximer  $p$  et  $\lambda$  comme :

$$\begin{aligned} p_h(\underline{x}) &= \sum_{i \in I^p} p_i N_i^p(\underline{x}) \\ \lambda_h(\underline{x}) &= \sum_{i \in I^\lambda} \lambda_i N_i^\lambda(\underline{x}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

avec  $I^p$  et  $I^\lambda$  l'ensemble des degrés de liberté pour chaque champ. Enfin, avec une telle discrétisation, nous pouvons appliquer une méthode de Galerkin pour approximer le problème 5 et l'écrire sous une forme matricielle :

**Problème 6.** *Trouver  $\mathbf{u}, \mathbf{u}^e, \mathbf{p}$  et  $\lambda$  tels que :*

$$[\mathbf{K}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^e \\ \mathbf{p} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}^e \\ \mathbf{l}_p \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{cc} & \mathbf{A}^{ce} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{A}^{ceT} & \mathbf{A}^{ee} & \mathbf{B}^e & \mathbf{C}^e \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{B}^{eT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{C}^{eT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \{u_i\} & \quad A_{ij}^{cc} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} N_i T \vec{\nabla} N_j d\Omega & \mathbf{f} &= \left\{ \int_{\Omega} N_i f d\Omega \right\} \\ \mathbf{u}^e = \{u_i^e\} & \quad A_{ij}^{ee} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} N_i^e T \vec{\nabla} N_j^e d\Omega & A_{ij}^{ce} &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} N_i T \vec{\nabla} N_j^e d\Omega & \mathbf{f}^e &= \left\{ \int_{\Omega} N_i^e f d\Omega \right\} \\ \mathbf{p} = \{p_i\} & \quad B_{ij} = \int_{\Omega^-} N_i N_j^p d\Omega & B_{ij}^e &= \int_{\Omega^-} N_i^e N_j^p d\Omega & \mathbf{l}_p &= \left\{ - \int_{\Omega^-} N_i^p dd\Omega \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega} l^2 \vec{\nabla} N_i \vec{\nabla} N_j^p d\Omega \right. & & & & \left. + \int_{\Omega} l^2 \vec{\nabla} N_i^e \vec{\nabla} N_j^p d\Omega \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega^-} l^2 \vec{\nabla} N_i^p \vec{\nabla} dd\Omega \right\} \\ \lambda &= \{\lambda_i\} & C_{ij} &= \int_{\Gamma} N_i N_j^\lambda d\Gamma & C_{ij}^e &= \int_{\Gamma} N_i^e N_j^\lambda d\Gamma \end{aligned} \quad (3.15)$$

La taille de la matrice  $\mathbf{A}^{ee}$  est généralement très petite comparée à la taille de  $\mathbf{A}^{cc}$ . Cette dernière matrice ne change pas au cours des itérations, ce qui est numériquement avantageux. En outre, d'un point de vue plus général, lorsqu'il s'agira de traiter un solide simple, la taille de  $\mathbf{B}$  et de  $\mathbf{C}$  sera modeste par rapport à  $\mathbf{A}^{cc}$ . Par conséquent, un grand effort de calcul peut être épargné en calculant  $\mathbf{A}^{cc}$  une fois pour toutes.

### 3.4 Optimisation de forme

À ce stade, nous pouvons résoudre le problème 4 pour une zone de contact donnée. Cependant, la solution peut ne pas remplir les conditions de contact (c'est-à-dire que la zone de contact n'est pas la bonne). Nous allons rechercher la zone de contact exacte par un processus itératif. Comme avec une méthode active-set, nous utilisons les champs calculés à l'itération actuelle pour déterminer l'évolution de la zone de contact. La principale différence est que nous n'utilisons pas le même critère que dans la méthode active-set pour faire évoluer la zone de contact. Une méthode active-set utilise directement la valeur des champs. Par exemple, un critère serait que si les multiplicateurs de Lagrange sont positifs, alors on supprime la contrainte au niveau du nœud. L'ILS utilise principalement un autre critère  $\varrho$ , qui dépend du problème traité et est calculé sur la frontière de la zone de contact. Désignons par  $\Gamma^k$  la limite de la zone de contact à la  $k$  ème itération. Pour alléger les notations, nous n'écrirons généralement que  $\Gamma$ . Le critère mentionné ci-dessus doit satisfaire :

$$\Gamma = \Gamma^{\text{ex}} \Rightarrow \varrho = 0 \text{ on } \Gamma \quad (3.16)$$

où  $\Gamma^{\text{ex}}$  est la limite de la zone de contact exacte. Ainsi, si  $\varrho \neq 0$ , la position de  $\Gamma$  n'est pas la bonne. Ceci conduit à essayer de trouver à chaque itération l'évolution de la zone de contact qui annule  $\varrho$ . Dans le cas qui nous intéresse, nous prenons  $\varrho = \llbracket \vec{\nabla} u \rrbracket \cdot \vec{n}$  (voir équation 3.4). Néanmoins, avoir  $\varrho = 0$  n'est pas toujours suffisant pour assurer que  $\Gamma = \Gamma^{\text{ex}}$ . En effet, les conditions KKT peuvent ne pas être remplies partout. C'est pourquoi, de temps en temps, ces conditions sont vérifiées sur le domaine complet afin de prendre en compte la nucléation et la disparition des zones de contact.

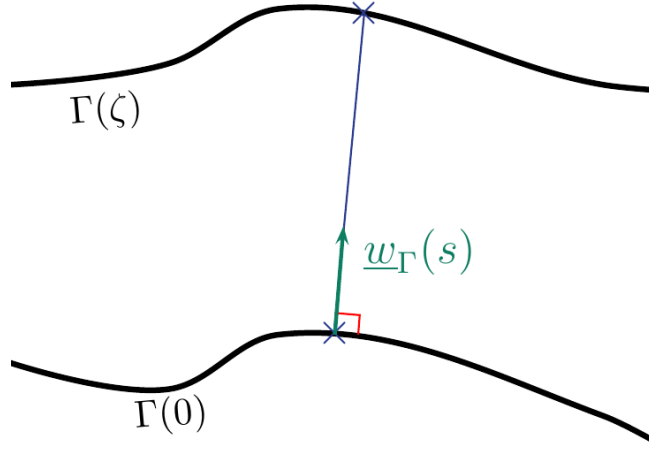
Une manière efficace de trouver le zéro d'une fonctionnelle est d'utiliser une méthode de Newton. Par conséquent, si nous pouvons calculer la dérivée de  $\varrho$  par rapport à une variation de la forme de la zone de contact, nous pouvons appliquer un algorithme de Newton pour mettre à jour  $\Gamma$ . La dérivée qui va être utilisée est la dérivée directionnelle notée  $D.[.]$ . Physiquement, cette dérivée est la variation de la quantité considérée, suivant l'interface en mouvement. Sans perte de généralité, comme nous nous intéressons uniquement au changement de forme de la frontière, nous ne considérons que le mouvement de l'interface dans la direction normale. Ce cas particulier est appelé dérivée directionnelle normale. Pour définir cette dérivée, introduisons un déplacement normal de l'interface  $\mathbf{w}_\Gamma = w_\Gamma \vec{n}$ . Nous désignons alors  $\Gamma(\vec{0})$  la position initiale de la frontière et  $\Gamma(\zeta \vec{w}_\Gamma)$  la nouvelle position après un déplacement  $\vec{w}_\Gamma$  (Figure 3.2). La dérivée directionnelle normale de  $\varrho$  est alors définie comme suit :

$$D\varrho[\vec{w}_\Gamma] = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\varrho(\Gamma(\zeta \vec{w}_\Gamma)) - \varrho(\Gamma(\vec{0}))}{\zeta} \quad (3.17)$$

On a donc le problème suivant sur  $\vec{w}_\Gamma$ , décrivant un pas de l'algorithme de Newton sur la position de la frontière.

**Problème 7.** Trouver le champ de vecteur  $\vec{w}_\Gamma \in L^2(\Gamma)$  tel que :

$$\begin{aligned} \varrho + D\varrho[\vec{w}_\Gamma] &= 0 \text{ on } \Gamma \\ \Leftrightarrow \int_\Gamma w_\Gamma^* \varrho d\Gamma + \int_\Gamma w_\Gamma^* D\varrho[\vec{w}_\Gamma] d\Gamma &= 0 \quad \forall w_\Gamma^* \in L^2(\Gamma) \end{aligned} \quad (3.18)$$

FIGURE 3.2 – Évolution de la frontière  $\Gamma$  transportée par  $\vec{w}_\Gamma$ .

Pour le calculer, nous utilisons les techniques présentées dans [Tar00] et [Pra+95] : nous assimilons le changement de forme à un mouvement du corps qui est un problème classique avec de nombreux outils à notre disposition.

Avec ces nouveaux outils, nous allons prendre la dérivée directionnelle du problème 5 pour avoir un système avec  $(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{\lambda})$  comme inconnues.

Pour cela on a besoin d'étendre l'opérateur  $D.[.]$  à l'ensemble du domaine. On étend donc le déplacement de la frontière  $\vec{w}_\Gamma$  à l'ensemble du domaine. Ce déplacement étendu est noté  $\vec{w}$ . Mais, comme nous ne sommes, en pratique, intéressés que par l'évolution de  $\varrho$  sur la frontière de contact, nous allons introduire une fonction  $r(\phi)$ . Cette fonction dépend donc de la distance à  $\Gamma$ . Cette fonction nous permet de mettre la valeur du déplacement à zéro après une certaine distance  $\delta$  et ainsi de réduire le coût de calcul (cf. Figure 3.3), puisque les termes en  $\vec{w}$  seront nuls à une distance donnée de la position du front.

Enfin, pour que le déplacement étendu reste normal à la limite de la zone de contact  $\Gamma$ , nous allons utiliser le gradient de la level-set  $\vec{n} = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ , car sa norme est égale à un et il est normal aux courbes d'iso-valeurs de la level-set.

$$\vec{w}(\vec{x}) = w_\Gamma(s_c) \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) r(\phi) \quad (3.19)$$

où  $s_c$  représente l'abscisse curviligne du point le plus proche de  $\vec{x}$  sur  $\Gamma$ .

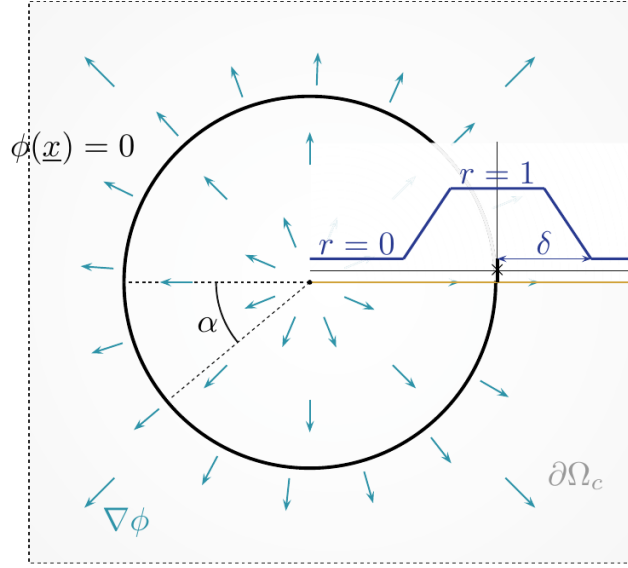
À l'aide de ce déplacement étendu, la dérivée normale directionnelle peut être définie pour toute quantité  $f$  dans le domaine de la même manière que précédemment.

$$Df[\vec{w}] = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{f(\Gamma(\zeta \vec{w})) - f(\Gamma(\vec{0}))}{\zeta} \quad (3.20)$$

Pour alléger l'écriture, on note  $\overset{\circ}{a}$  la dérivée directionnelle d'une quantité  $a$  dans la direction  $\vec{w}$ . Dans notre cas, on a :

$$\overset{\circ}{\varrho} = \overline{\vec{\nabla}u} \cdot \vec{n} = \overline{\vec{\nabla}u} \cdot \vec{n} - \overline{\vec{\nabla}u} \cdot \vec{\nabla} \vec{w} \cdot \vec{n} + \overline{\vec{\nabla}u} \cdot \vec{\nabla} \vec{n} \cdot \vec{w} \quad (3.21)$$



FIGURE 3.3 – Fonction  $r(\phi)$  pour l'exemple d'une level-set dont l'iso-zéro est un cercle.

En appliquant la dérivée directionnelle sur les termes du problème 5 on trouve après quelques calculs, détaillés dans [Gra+15], le problème suivant :

**Problème 8.** Trouver  $\overset{\circ}{u} \in \mathcal{V}_d, \overset{\circ}{p} \in H^1(\Omega^-)$  et  $\overset{\circ}{\lambda} \in H^{-1/2}(\Gamma)$  pour  $u, p, \lambda$  et  $w$  donné tel que :

$$\begin{cases} a(u^*, \overset{\circ}{u}) + b(u^*, \overset{\circ}{p}) + c(u^*, \overset{\circ}{\lambda}) = f^s(u^*, w) & \forall u^* \in \mathcal{V}_d \\ b(p^*, \overset{\circ}{u}) = l_p^s(p^*, w) & \forall p^* \in L^2(\Omega^-), \\ c(\lambda^*, \overset{\circ}{u}) = l_\lambda^s(\lambda^*, w) & \forall \lambda^* \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{aligned} f^s(u^*, w) &= - \int_{\Omega} T \left( \vec{\nabla} u^{*T} \vec{\nabla} u \operatorname{div} \vec{w} - (\vec{\nabla} u^{*T} (\vec{\nabla} \vec{w}^T + \vec{\nabla} \vec{w}) \vec{\nabla} u) \right) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega^-} l^2 \left( \vec{\nabla} u^{*T} \vec{\nabla} p \operatorname{div} \vec{w} - (\vec{\nabla} u^{*T} (\vec{\nabla} \vec{w}^T + \vec{\nabla} \vec{w}) \vec{\nabla} p) \right) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega^-} u^* p \operatorname{div} \vec{w} d\Omega - \int_{\Gamma} \lambda \llbracket u^* \rrbracket (\operatorname{div} \vec{w} - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{w} \cdot \vec{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} f_d u^* \operatorname{div} \vec{w} d\Omega \\ l_p^s(p^*, w) &= - \int_{\Omega^-} p^* \overset{\circ}{d} d\Omega - \int_{\Omega^-} l^2 \vec{\nabla} p^* \vec{\nabla} \overset{\circ}{d} d\Omega \\ l_\lambda^s(\lambda^*, w) &= - \int_{\Gamma} \lambda^* \llbracket u \rrbracket (\operatorname{div} \vec{w} - \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{w} \cdot \vec{n}) d\Gamma \end{aligned}$$

La solution de ce problème donne donc la variation des champs, pour une variation du premier ordre de la position de  $\Gamma$ , décrite à l'aide d'un champ  $w$  défini sur  $\Gamma$  uniquement. Nous appelons ce problème le problème (continu) de sensibilité de la solution d'équilibre à la position de l'interface. Les inconnues sont les dérivées directionnelles des champs. Les données sont les champs en équilibre pour la position  $\Gamma$  et un champ  $w$  qui pourrait être interprété comme un champ de vitesse transportant l'interface.



Il est important de noter que le problème 8 a le même membre de gauche que 5. En utilisant la discrétisation donnée dans les équations 3.11, 3.12 et 3.13 le problème 8 devient la forme discrète suivante :

**Problème 9.** Trouver  $\overset{\circ}{\mathbf{u}}, \overset{\circ}{\mathbf{p}}$  et  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}}$  tels que :

$$[\mathbf{K}] \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{u}} \\ \overset{\circ}{\mathbf{p}} \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\lambda}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^s \\ \mathbf{l}_p^s \\ \mathbf{l}_\lambda^s \end{Bmatrix}$$

La matrice du membre de gauche est donc bien la même que celle du problème 6. Ainsi, nous pouvons réutiliser la factorisation de la matrice déjà calculée pour l'équilibre à  $\Gamma_c$  donné. Seul les membres de droites sont à calculer. Pour chacune des fonctions de l'espace discrétisant  $w$  sur le front  $\Gamma_c$  (un domaine unidimensionnel, donc un nombre de degrés de liberté faible par rapport à celui du problème d'équilibre), il faut intégrer sur un domaine réduit (celui où  $\vec{w}$  est non nul). Le coût des ces problèmes de sensibilité est donc négligeable au final par rapport au coût du calcul de l'équilibre à  $\Gamma_c$  donné. Bien sûr, à ce stade  $w_\Gamma$  est inconnu. Mais on note que les membres de droites sont (bien sûr) linéaires avec le champ  $\vec{w}$ . Il nous reste donc à discrétiser  $w_\Gamma$  :

$$w_\Gamma = \sum_{m=1}^M \tau_m w_m. \quad (3.22)$$

où les  $w_m$  les  $M$  sont "modes" de déplacement de  $\Gamma$ .

Dans le cadre de cette étude, nous avons utilisé une expansion de fourrier, ce qui a l'avantage de permettre de séparer des modes globaux et des modes plus locaux en fonction des longueurs d'ondes retenues tout en tenant compte de la périodicité.  $w_i = \mathcal{F}_i(\alpha)$ , où  $\alpha \in [0, 2\pi]$  est une abscisse curviligne paramétrant  $\Gamma$ .

Le problème 9 doit donc être résolu pour  $M$  membre de droite, c'est-à-dire une fois pour chaque mode  $m$ . On obtient alors la dérivée directionnelle de chacune des variables discrètes du problème d'équilibre par rapport à chacun des modes. Le critère  $\varrho$  est calculable à partir du champ  $u$  à  $\Gamma$  donné. La dérivée du critère dans la direction inconnue  $\vec{w}$  est donnée par  $D\varrho[\vec{w}_\Gamma] = \sum_{m=1}^M \tau_i D\varrho[\vec{w}_m] = \sum_{m=1}^M \tau_i \overset{\circ}{\varrho}_m$ , où chaque fonction  $\overset{\circ}{\varrho}_m$  est calculable sur  $\Gamma$  à partir de chacun des champs  $\overset{\circ}{u}$  grâce à l'équation 3.21.

On est donc en mesure de résoudre une approximation de Galerkin du problème d'optimisation de forme linéarisé (problème 7), et donc de calculer  $\vec{w}_\Gamma$ . On va pour cela utiliser l'espace des modes comme espace test :

**Problème 10.** Trouver  $\tau = \{\tau_m\} \in \mathbb{R}^M$  tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \int_{\Gamma} w_i \varrho \, d\Gamma + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma} w_i \tau_j D\varrho[w_j \vec{n}] \, d\Gamma &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^M \int_{\Gamma} w_i \varrho \, d\Gamma + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma} w_i \tau_j \overset{\circ}{\varrho}_j \, d\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

Que l'on peut réécrire comme :

**Problème 11.** Trouver  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^M$  tel que :

$$[\mathbf{K}_\Gamma] \boldsymbol{\tau} = \varrho^\pi$$

où

$$K_{ij} = \sum_k \int_{\Gamma} \varrho_i D N_i^{\lambda} [w_j] w_i \, d\Gamma$$

$$\varrho_n^{\pi} = \sum_i \int_{\Gamma} \varrho_i N_i^{\lambda} w_n \, d\Gamma$$

Ces étapes (problème 6,  $M$ -fois problème 9 et problème 11), illustrées à la figure 5, sont itérées jusqu'à convergence. Pour pouvoir calculer le nouveau  $\Gamma$ , nous devons mettre à jour l'ensemble de niveaux en utilisant le déplacement  $\underline{w}$ . Pour ce faire, une équation de Hamilton-Jacobi ( $\partial\phi/\partial t = \underline{w} \cdot \vec{\nabla}\phi$ ) est résolue [15]. Dans le cas où un nombre fixe de modes est utilisé, l'algorithme est arrêté lorsque la norme de projection de  $\varrho$  notée  $\pi(\varrho_m)$  sur l'espace des modes est suffisamment petite (c'est-à-dire inférieure à un scalaire  $\pi_{\min}$ ), ce qui signifie que l'on ne pourrait pas faire mieux avec les modes utilisés. Il est également intéressant d'avoir un nombre croissant de modes au fil des itérations. En effet, au début, le fait de n'avoir que quelques modes permet un calcul rapide pour se rapprocher de la solution. Ensuite, un plus grand nombre de modes permet une meilleure précision. La projection de  $\varrho_m$  est vérifiée à chaque itération, si elle est trop petite - ce qui signifie que les modes sont trop pauvres pour représenter la variation de  $\varrho$  - on augmente le nombre de modes. Ainsi, le critère de convergence consiste à regarder directement la norme de  $\varrho$  ou à s'arrêter lorsqu'un nombre maximal de modes  $M^{\max}$  est atteint.

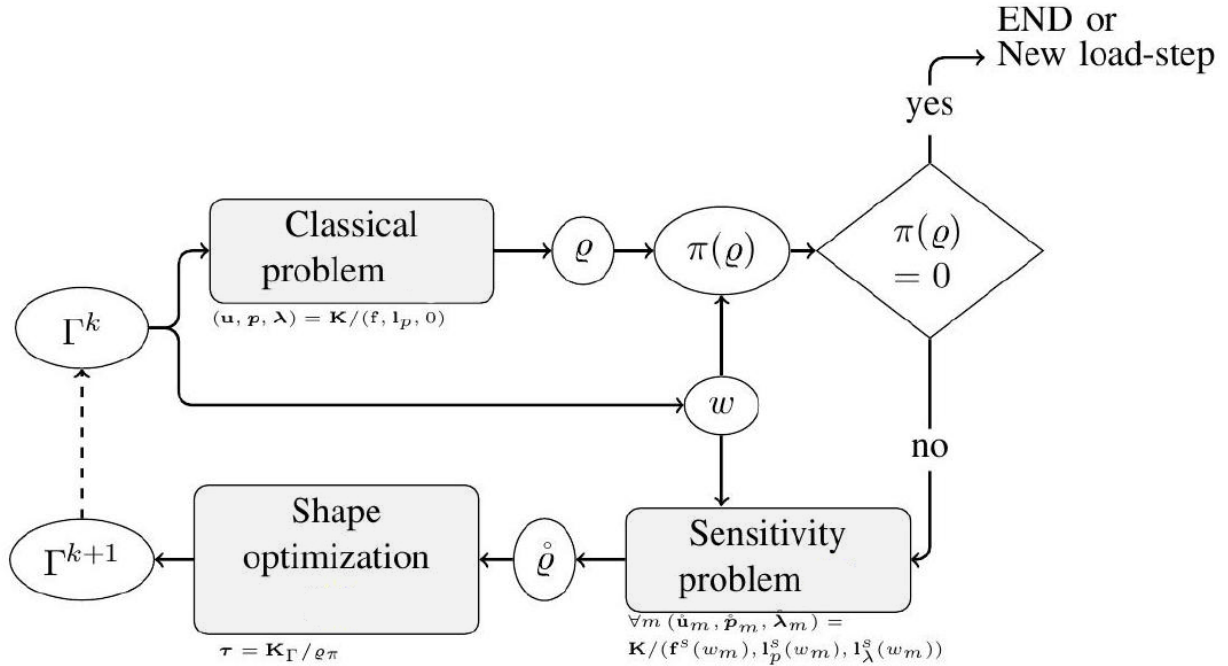


FIGURE 3.4 – Algorithme pour trouver  $\Gamma$  pour un chargement donné et un nombre de modes fixe

Cependant, il a déjà été souligné que, par lui-même, l'algorithme pourrait ne pas converger vers la solution du problème initial. En effet, même si la frontière est placée telle que  $\varrho = 0$ , il se peut qu'à l'issue de l'algorithme, il existe des points  $\{A\}$  de  $\Omega^-$  tels que  $p < 0$  ou des points  $\{B\}$  de  $\Omega^+$  tel que  $u + s < 0$ . À convergence de l'algorithme, il convient de s'assurer que tous les points de  $\Omega$  vérifient les conditions de contact. Sinon des étapes supplémentaires sont à ajouter. Elles sont assez

simples : il suffit de modifier la level-set pour que les points qui violent les conditions se retrouvent du bon côté de  $\Gamma_c$ . Les points de  $\{A\}$  doivent être dans  $\Omega^+$  et ceux de  $\{B\}$  dans  $\Omega^-$ . L'opération est similaire à la création de la zone de contact initiale. Il faut alors relancer une passe d'optimisation de  $\Gamma_c$  en partant de la nouvelle topologie. L'algorithme d'optimisation ne regarde que ce qu'il se passe sur  $\Gamma_c$ . Des changements de topologie sont possibles au cours des itérations avec cette seule vision : deux zones de contact peuvent fusionner, une zone peut se séparer en deux ou encore une zone peut se réduire à un point jusqu'à disparaître. Ce qui ne peut pas se produire sans intervention extérieure au cours de l'optimisation, c'est la nucléation d'une nouvelle courbe fermée séparant deux zones.

### 3.5 Une généralisation simple aux problèmes avec adhérence.

Considérons maintenant l'influence de l'adhésion dans la zone de contact et comment elle affecte l'approche ILS. Par exemple, considérons que l'obstacle rigide de la [Figure 3.1](#) est recouvert d'un fluide avec une tension de surface  $\gamma$ . À l'équilibre, la force configurationnelle à la limite de la zone de contact n'est plus nulle, mais doit correspondre à la valeur de la tension de surface. En effet, avec l'adhésion, il faut de l'énergie pour créer de nouvelles surfaces au fur et à mesure que la zone de contact est réduite. Par conséquent, à l'équilibre, la pression sur la limite de la zone de contact n'est plus nulle et nous avons :

$$\frac{T}{2}\varrho^2 = \gamma \rightarrow \varrho = \varrho_a = \sqrt{\frac{2\gamma}{T}}$$

L'algorithme ILS décrit plus haut est toujours le même, sauf que la pression est conduite à  $\varrho_a$  et non à zéro.

Il est intéressant de noter que l'introduction de l'énergie d'adhésion fait passer la solution d'un point d'inflexion à un point minimum.

En ce qui concerne la littérature sur l'adhésion, le contact sous adhésion a été étudié dans les articles [[Joh+71](#) ; [Der+75](#) ; [Fré87](#)], ainsi que dans l'ouvrage de [[Joh87](#)] et plus récemment dans celui de [[Sof+05](#)] pour les aspects mathématiques. A la limite de la zone de contact, la pression n'est plus nulle. Peu d'articles existent dans la littérature sur la simulation numérique du contact avec adhérence. Récemment, l'adhésion à l'échelle micro/nano a été étudiée, motivée par exemple par les systèmes microélectromécaniques (MEMS) [[Zha+03](#)], ou pour des applications en biologie [[Chu+05](#) ; [Aut+02](#)]. Des améliorations numériques des méthodes classiques ont été proposées, par exemple par [[Sau11](#)]. Ici, l'adhésion à l'échelle macro est étudiée. Par conséquent, nous ne cherchons pas à représenter précisément le comportement à l'échelle micro. Il convient également de noter l'article de la communauté du computergraphics [[Gas+10](#)] qui adapte les algorithmes de contact classiques à l'adhésion.

Un exemple de cette application est présenté dans la section suivante (voir [Figure 3.6.1](#)).

## 3.6 Résultats

### 3.6.1 Problème axi-symétrique

Dans cette section, nous allons étudier le cas d'une membrane axi-symétrique avec un chargement homogène. Le problème est représenté sur [Figure 3.5](#). La membrane est de rayon  $R = 1$  m et la tension est homogène,  $T$  ( $T = 1 \text{ Nm}^{-1}$ ), le chargement  $f_d$  est homogène, et la membrane est placée à une distance  $h = 0.1$  m du plan rigide.

Le problème est de trouver le champ  $u$  tel que :

$$\begin{cases} T\Delta u + f_d = 0 \text{ sur } \Omega \\ -u \leq d \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ pour } r = R \end{cases} \quad (3.23)$$

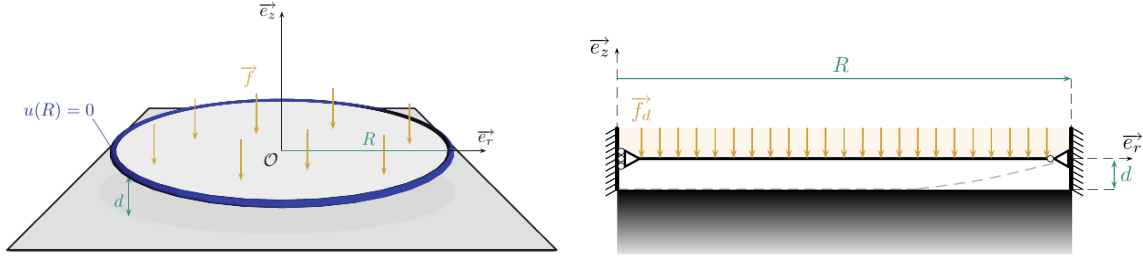


FIGURE 3.5 – le problème axi-symétrique

En utilisant la symétrie du problème, on le réduit à une formulation unidimensionnelle :

$$\begin{cases} T \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f_d = 0 & \text{on } [0, r_c[ \\ -u = d & \text{on } [r_c, R] \\ u = 0 & \text{for } r = R \end{cases} \quad (3.24)$$

où on appelle  $r_c$  le rayon de la zone de contact.

Pour un  $r_c$  fixé, le problème devient un simple problème d'équilibre dont la solution est :

$$u = -\frac{f_d r^2}{4T} + A \ln \left( \frac{r}{R} \right) + B \quad (3.25)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A &= \frac{f_d (R^2 - r_c^2) - 4dT}{4T \ln(R/r_c)} \\ B &= \frac{f_d R^2}{4T} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Il est clair que  $u$  a une discontinuité de pente au point  $r_c$ . Pour obtenir la solution du problème de contact, il faut calculer  $r_c$  telle que le saut de pente soit nulle. On trouve :

$$r_c^{ex} = R \exp \left( \frac{1}{2} \left( 1 + W_{-1} \left( \frac{4dT - f_d}{e f_d} \right) \right) \right) \quad (3.27)$$

où  $W_{-1}(x)$  est la branche de la fonction de Lambert définie sur  $-1/e \leq x < 0$  ( $e = \exp(1)$ ). Nous allons maintenant appliquer la méthode ILS pour résoudre ce problème.

Pour imposer  $u = d$  on  $[0, r_c]$  nous utilisons le champ de multiplicateur de Lagrange  $p$ . Même si  $p$  est défini sur  $[0, R]$  nous allons prendre en compte son influence uniquement sur la zone de contact en n'intégrant que sur la partie utile en utilisant le signe de la level-set.

**Problème 12.** Trouver  $u \in \mathcal{V}_d, p \in H^1(\Omega^-)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\begin{cases} a(u, u^*) + b(p, u^*) + c(\lambda, u^*) = f(u^*) & \forall u^* \in \mathcal{V}_d \\ b(p^*, u) = l_p(p^*) & \forall p^* \in H^1(\Omega^-) \\ c(\lambda^*, u) = 0 & \forall \lambda^* \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned}
a(u, u^*) &= \int_0^R \text{Tr} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u^*}{\partial r} d\Gamma & f(u^*) &= \int_0^R f_d r u^* d\Gamma \\
b(u, p) &= \int_0^{r_c} \left( l_m \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + p u \right) r d\Gamma & l_p(p^*) &= - \int_0^{r_c} \left( l_m \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial d}{\partial r} + p d \right) r d\Gamma \\
c(u, \lambda) &= \lambda r_c \llbracket u \rrbracket
\end{aligned}$$

Dans ce problème, la frontière se réduit à un point, nous pouvons donc nous contenter d'un seul mode  $w$  correspondant à un déplacement unitaire de  $r_c$  dans la direction  $\vec{e}_r$ . On peut maintenant calculer la dérivée directionnelle du problème et obtenir ainsi le problème de sensibilité suivant :

**Problème 13.** Trouver  $\overset{\circ}{u} \in \mathcal{V}_d, \overset{\circ}{p} \in H^1(\Omega^-)$  et  $\overset{\circ}{\lambda} \in \mathbb{R}$  tels que  $t$  :

$$\begin{cases}
a(u^*, \overset{\circ}{u}) + b(u^*, \overset{\circ}{p}) + c(u^*, \overset{\circ}{\lambda}) = f^s(u^*) & \forall u^* \in \mathcal{V}_d, \\
b(p^*, \overset{\circ}{u}) = l_p^s(p^*) & \forall p^* \in H^1(\Omega^-), \\
c(\lambda^*, \overset{\circ}{u}) = l_\lambda^s(\lambda^*) & \forall \lambda^* \in \mathbb{R}.
\end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned}
f^s(u^*) &= -(r_c f_d + \lambda) u^{*+}(r_c) \\
l_p^s(p^*) &= 0 \\
l_\lambda^s(\lambda^*) &= -\lambda^* r_c \frac{\lambda}{T}
\end{aligned}$$

Nous allons résoudre ce problème numériquement en utilisant des éléments finis linéaires. De plus  $u$  est enrichi par la fonction Heaviside. Les nœuds enrichis sont soit les nœuds de l'élément coupé par l'iso-zéro de la level-set, soit le nœud où passe l'iso-zéro si  $r_c$  est exactement sur un nœud. La [Figure 3.6](#) illustre la discrétisation. On note que  $p$  n'est utilisé que sur  $\Omega^-$  : il n'est donc pas nécessaire de l'enrichir pour représenter sa discontinuité au passage de la frontière de la zone de contact. Une fois le problème d'équilibre à  $r_c$  fixé résolu, on peut résoudre le problème de sensibilité. On connaît donc  $(u, p, \lambda)$  et  $(\overset{\circ}{u}, \overset{\circ}{p}, \text{et } \overset{\circ}{\lambda})$ , on peut donc calculer le critère  $\rho$  et sa sensibilité au (seul ici) mode de déplacement de la frontière de contact  $\overset{\circ}{\rho}$ . On peut donc maintenant résoudre le 10 qui se réduit ici à :

$$\varrho + \overset{\circ}{\varrho} \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{\varrho}{\overset{\circ}{\varrho}} \quad (3.28)$$

Connaissant  $r_c^k$ , on en déduit  $r_c^{k+1}$ , notre prédiction de la zone de contact correcte, simplement comme :

$$r_c^{k+1} = r_c^k + \tau = r_c^k - \frac{\varrho}{\overset{\circ}{\varrho}} \quad (3.29)$$

Après quelques itérations de Newton, on obtient la solution numérique dont un exemple est présenté sur la [Figure 3.6.1](#). On note que la discontinuité de pente lorsque  $r_c$  n'a pas atteint la position exacte ou dans le cas de l'adhésion, est très bien représentée par l'enrichissement de Heaviside combiné avec les multiplicateurs de Lagrange.

On peut maintenant comparer la méthode ILS avec une méthode conventionnelle de calcul du contact. Nous allons donc comparer nos résultats avec une méthode "active-set" ou encore des contraintes actives, résolue avec des multiplicateurs de Lagrange. Les résultats ILS et active-set, en fonction de la finesse du maillage  $h$  sont représentés sur la [Figure 3.8](#).

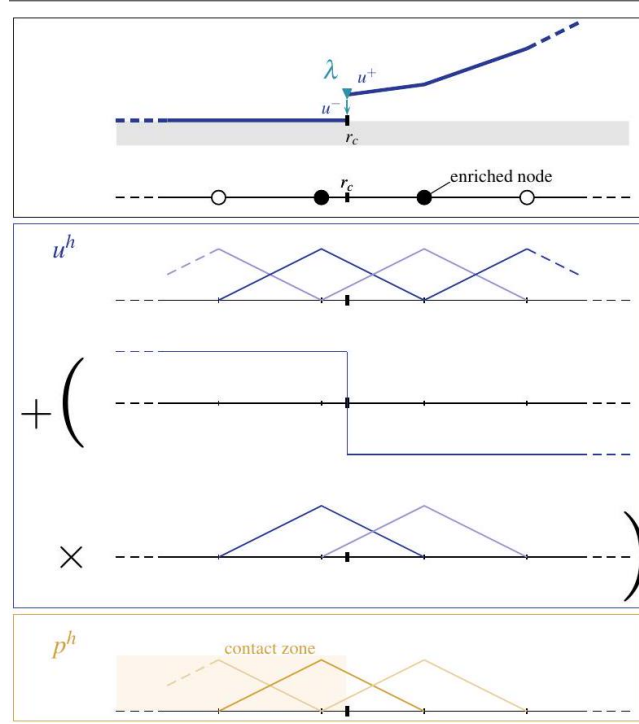
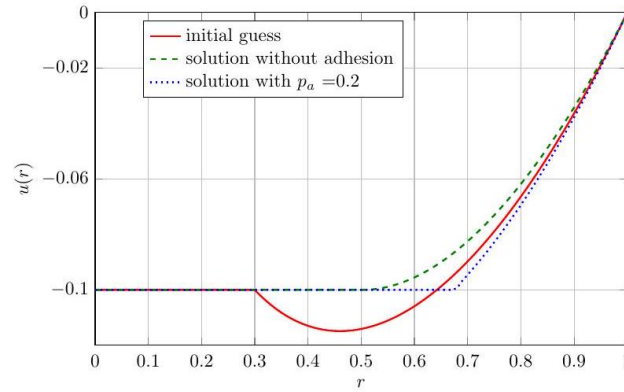


FIGURE 3.6 – approximation des champs pour le problème axi-symétrique

FIGURE 3.7 – Solutions du problème axisymétrique. En rouge la solution pour  $\Gamma_0$  initial fixé. En vert la solution convergée. En bleu la solution convergée dans un cas avec adhérence.

À gauche de la figure, nous avons tracé l'erreur relative sur la position exacte de la zone de contact (équation 3.27). Dans le cas active-set, elle converge très lentement et par paliers. Ce n'est pas étonnant, dans la méthode, on sait si un nœud est à l'intérieur ou à l'extérieur de la zone de contact, et on ne peut rien dire de plus sur la limite de la zone de contact. Ainsi lorsque, l'on raffine le maillage, la prédiction n'est améliorée que lorsqu'un nœud inséré se trouve plus proche de la frontière exacte du contact que le plus proche des nœuds du maillage précédent. Dans le cas ILS, on trouve une convergence de l'erreur sur la position de la frontière en  $O(h^2)$ . C'est un résultat très intéressant en soi qui à lui seul montre l'intérêt de l'approche. À droite de la figure, nous reportons le nombre d'itérations pour atteindre la convergence des deux algorithmes. Ce nombre est faible et surtout indépendant du

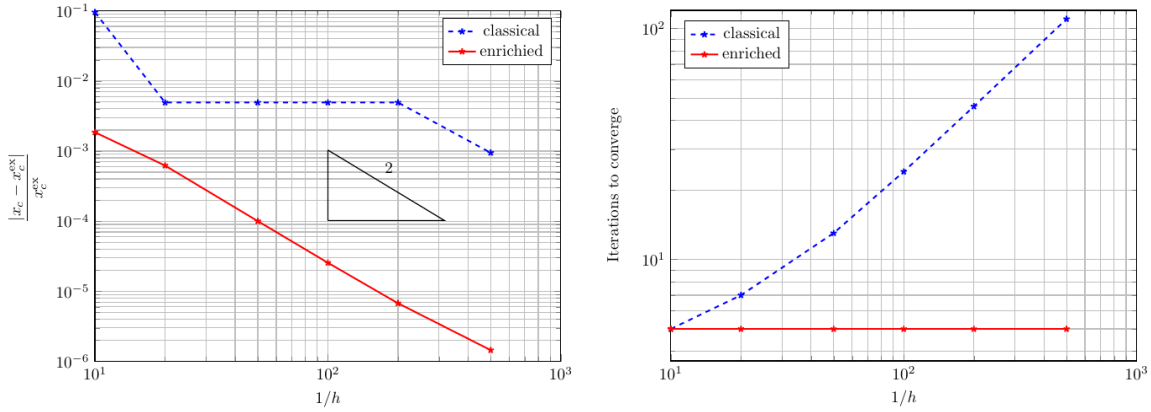


FIGURE 3.8 – Comparaison ILS (en rouge) et active-set (en bleu). À droite la convergence en maillage sur la position de la frontière de la zone de contact, à gauche le nombre d'itération pour atteindre la convergence en fonction de la taille du nombre d'éléments.

nombre d'éléments pour le cas de l'ILS. Dans le cas active-set, il augmente avec le nombre d'éléments. En effet, plus il y a d'éléments et plus il y a de possibilités pour sélectionner les bons nœuds actifs.

### 3.6.2 Problème axi-symétrique, traité en deux dimensions

Nous allons maintenant traiter le même problème, mais cette fois en deux dimensions, sans utiliser les symétries. Le but étant de montrer, sur un cas encore simple, comment définir les modes et leurs interactions puis de vérifier sur un problème ayant une solution analytique que les bons résultats obtenus précédemment peuvent être reproduits. On résout d'abord le problème 4. Puis il faut résoudre le problème 8 pour chaque mode  $\vec{w}_n = w_n \vec{n}$  de déplacement de la frontière.

Mais avant cela, il faut définir une zone initiale de contact. On résout donc le problème d'équilibre sans contrainte de contact, et on construit une level-set dont l'iso-zéro est un cercle englobant tous les nœuds qui pénètrent l'obstacle. L'algorithme est alors appliqué tel que présenté, en limitant toutefois le déplacement maximum de l'interface. Le résultat est présenté sur la Figure 3.9. Tant que l'interface n'est pas à la bonne position, on voit bien apparaître un saut de pente sur  $u$ . Sur la solution finale, l'iso-zéro est bien à la position attendue. Sur la Figure 3.9 on reproduit la même analyse sur la convergence et le nombre d'itération, comparé avec active-set. Le comportement est le même que précédemment, et nous avons validé l'approche sur ce cas simple. L'algorithme est particulièrement efficace ici puisque moins d'une dizaine de modes sont nécessaires ici pour retrouver la solution. En effet, le front de contact est particulièrement régulier. La situation se complique un peu lorsque plusieurs frontières apparaissent : il faut alors en effet construire des modes pour chacune des frontières.

Avant de passer à un cas un peu plus complexe, on note qu'au cours des itérations la "singularité", c'est-à-dire le saut de pente, est parfaitement pris en compte par l'enrichissement. De plus, le problème que l'on a à résoudre a une solution parfaitement régulière pour tout le reste du domaine. Tout se passe donc au niveau discret comme si l'interface avait été maillée. On peut donc imaginer d'utiliser des espaces de plus haut ordre et espérer une convergence optimale de l'erreur. Aucun espoir ne serait permis si la singularité de la solution n'avait pas été prise en compte. C'est sans doute la raison qui explique pourquoi les éléments d'ordre supérieur n'apportent rien aux calculs de contact utilisant des méthodes classiques. Nous avons donc bien sûr tenté l'expérience et les résultats sont reportés sur la Figure 3.11. Pour la norme  $L^2$  du déplacement comme pour l'erreur sur la position de l'interface, on constate que l'ordre de convergence est clairement amélioré avec le degré polynomial pour les deux mesures. À l'ordre 3, l'erreur finit par stagner autour de  $10^{-13}$ , mais nous n'avons pas clairement établi



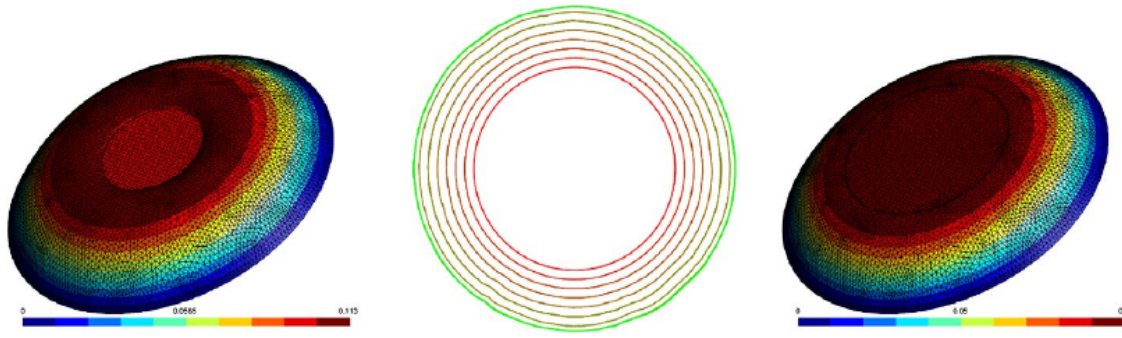


FIGURE 3.9 – Solution du problème axis traité en 2d. À gauche la solution après le premier pas. Au centre l'évolution de l'interface au cours des itérations, à droite la solution

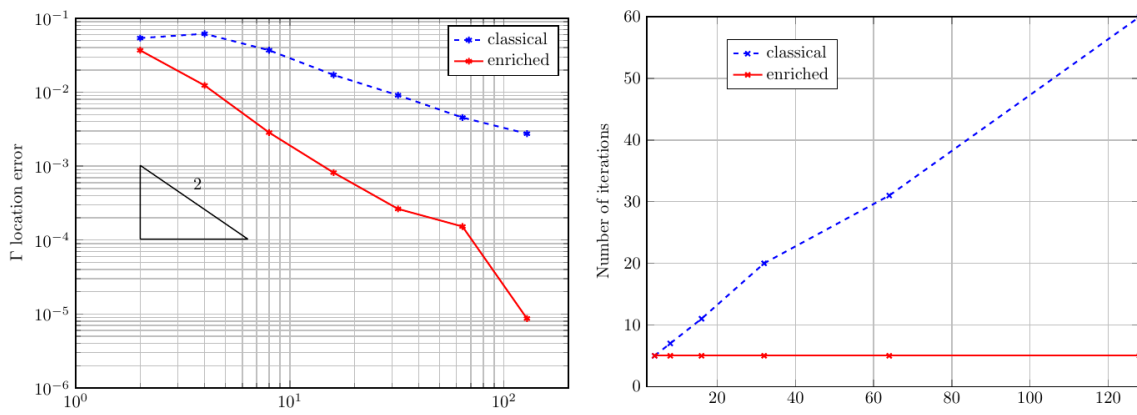


FIGURE 3.10 – Comparaison active-set, ILS : Convergence en maillage et nombre d'itérations

la raison de cette stagnation, bien que nous soupçonnons soit des problèmes de conditionnement, soit une précision insuffisante de nos points d'intégration.

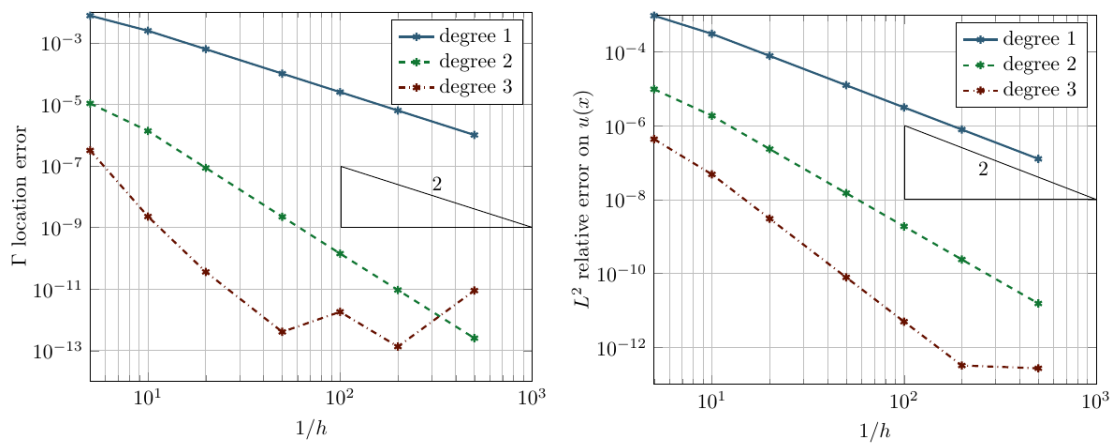


FIGURE 3.11 – Convergence de la méthode ILS en fonction de l'ordre des éléments utilisés. À gauche la convergence sur la position de l'interface. À droite l'erreur sur la norme  $L^2$  du déplacement



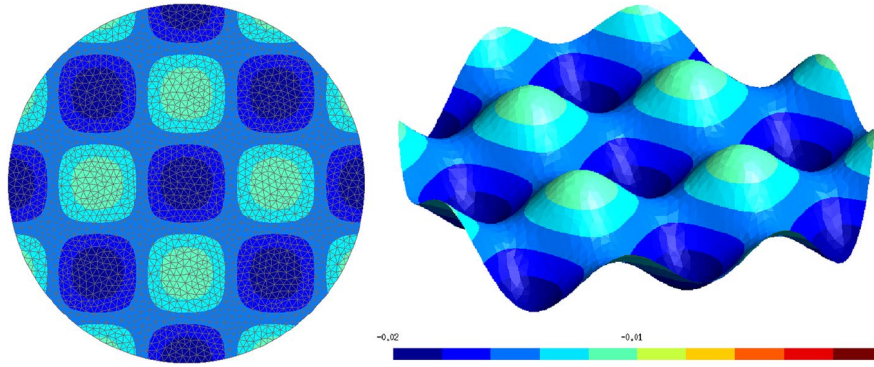
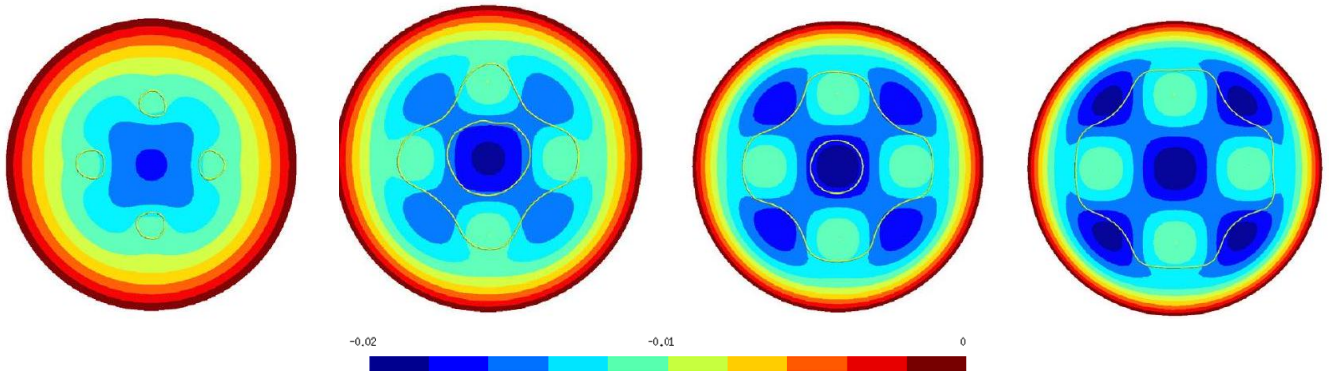


FIGURE 3.12 – Description géométrique de la surface à contacter

Ce résultat est important et mériterait d'être confirmé sur des cas plus complexes bi-dimensionnels. Toutefois, il faudrait pour cela améliorer la représentation géométrique de l'interface qui est pour l'instant, dans notre implémentation, construite à partir d'une level-set supposée linéaire par élément. Cela pourrait se faire en utilisant par exemple l'approche développée dans [Dré+10b] et décrite brièvement dans chapitre 2.

### 3.6.3 Problème en deux dimensions

Nous présentons maintenant un cas réellement bi-dimensionnel. La configuration est la même que précédemment, excepté que la membrane, sous l'action de la pression va être mise en contact avec une surface ondulée, représentée sur la Figure 3.12. Cette forme pour la surface a été choisie pour que plusieurs zones de contact puissent être présentes pour un même chargement et que le nombre de zones de contact puisse changer au cours d'une histoire de chargement. La figure Figure 3.13 présente les résultats pour différents chargements. On voit apparaître, pour un chargement faible, quatre zones de contact séparées : la membrane vient contacter les quatre bosses près du centre. En augmentant le chargement, les zones de contact grossissent pour se rejoindre au niveau des quatre cols, en laissant un espace où le contact n'est pas satisfait près du centre. En augmentant encore le chargement, la zone centrale est absorbée dans la zone de contact. On illustre ici parfaitement la possibilité pour l'iso-zéro de notre level-set de changer de topologie au cours du chargement. Chaque pas de chargement a demandé entre 3 et 5 itérations ILS, en partant à chaque fois de la zone de contact obtenue à l'itération précédente.

FIGURE 3.13 – Solutions : déplacement selon l'échelle de couleur. Courbe jaune : frontière de la zone de contact, pour différents chargements.  $f_d = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ , de gauche à droite.

### 3.7 Au delà des problèmes de membrane

Même si le cas des membranes est extrêmement intéressant et pourrait potentiellement ouvrir de nombreuses applications, il est important de voir si l'approche peut être appliquée à d'autres solides déformables. Ce qui est très particulier avec la membrane, c'est que, de façon imagée, la surface extérieure est identifiée avec son "volume". En conséquence, le domaine où sont définies les conditions de contact est le même que celui où sont définies les conditions d'équilibre. Dans le cas d'un solide déformable, les conditions de contact ne sont définies que sur sa frontière. La zone de contact ne peut donc être qu'une variété de dimension 2 au plus, et donc sa frontière ne peut être au plus qu'une courbe sur la surface extérieure. C'est bien sur une bonne nouvelle pour ILS : la level-set n'a besoin d'être définie que sur la surface extérieure au solide et le paramétrage de son iso-zéro pour définir nos modes reste identique au cas de la membrane bi-dimensionnelle. Ce qui change par contre, c'est la nature de la singularité du champ de déplacement au passage de l'interface de contact. Dans les calculs de contact que nous allons présenter brièvement ici, on a fait l'hypothèse que la singularité est de la forme  $\sqrt{r}$ , où  $r$  est la distance à l'interface de contact. Ici, clairement, une analogie est faite entre les champs en pointe de fissure et au voisinage d'une interface de contact erronée. Nous avons donc enrichi le champ de déplacement avec les fonctions d'enrichissement de pointe de fissure que l'on utilise classiquement avec X-FEM. De même, la pression de contact, si l'on s'en réfère au problème de Hertz, présente une singularité en  $\sqrt{r}$  à la frontière de la zone de contact réelle. Reste à trouver un critère ( $\rho$ ) pour déterminer les déplacements de l'interface. Pour cela, nous proposons de calculer des facteurs d'intensité de contraintes (voir [chapitre 2](#)). Les facteurs d'intensités de contrainte mesurent en effet l'intensité de la singularité dans la solution. La solution exact du problème ne devrait pas avoir de singularité en contrainte sur l'interface, et notre critère sera donc de déterminer  $\Gamma_c$  tel que les facteurs d'intensité de contact soient nuls. L'algorithme ILS pour le cas d'un solide déformable que nous proposons se résume alors ainsi :

1. Partant d'un calcul initial sans contact, initialiser sur  $\partial\Omega$  une level-set englobant les points pénétrant dans l'obstacle.
2. Enrichir les champs  $u$  et  $p$  avec des fonctions en  $\sqrt{r}$ , imposer une pénétration nulle sur  $\partial\Omega^-$  et calculer l'équilibre.
3. Calculer les facteurs d'intensité de contrainte le long de  $\Gamma_c$
4. Si les facteurs d'intensité de contrainte sont non nuls,
  - Construire des modes pour décrire le déplacement de  $\Gamma_c$  sur  $\partial\Omega$
  - Calculer les sensibilités des facteurs d'intensité de contrainte aux les modes.
  - Résoudre le problème de sensibilité, déplacer  $\Gamma_c$
  - retourner au 2.
5. Fin.

Pour mesurer le potentiel de l'idée, nous avons traité un problème de Hertz : un solide déformable cylindrique en contact avec une surface rigide plane. Pour ce problème, la pression exacte dans la zone de contact ainsi que sa largeur  $2a$  en fonction de la résultante des efforts verticaux appliqués au cylindre sont connues. Le modèle numérique discrétise un quart de la section du cylindre en exploitant les conditions de symétrie. Les calculs ont été effectués avec deux maillages dont la densité est concentrée autour de la zone de contact attendue. Plus spécifiquement, dans cette zone, la taille caractéristique  $h$  des éléments a été prise respectivement comme  $a/h \approx 4$  pour le maillage grossier et  $a/h \approx 40$  pour le maillage fin.

La [Figure 3.14](#) montre les résultats obtenus pour la pression de contact, à gauche sur le maillage grossier, à droite sur le maillage fin. En bleu, on retrouve la pression de la solution de Hertz, qui tombe à zéro à la frontière de la zone de contact exacte. On a tracé le résultat obtenu avec un algorithme de contraintes actives avec des éléments d'ordre 1 pour le déplacement et la pression. Si la pression de

contact est en moyenne retrouvée, celle-ci oscille fortement sur le maillage grossier, et n'est toujours pas stable sur le maillage fin. La zone de contact n'est pas bien capturée et l'erreur sur la position de la frontière est bien de l'ordre de la taille des éléments. La solution ILS, à l'ordre 1 sur le maillage grossier n'est pas bien meilleure que la solution en contrainte active, même si la position de la zone de contact semble légèrement améliorée. Par contre, toujours sur le maillage grossier, la solution à l'ordre 2 est bien meilleure. Sur le maillage fin, les solutions ILS aux ordres 1 et 2 capturent très bien la solution de Hertz avec une solution à l'ordre 2 indiscernable de la solution de Hertz. Les résultats sont donc très encourageants et invitent à poursuivre dans cette voie.

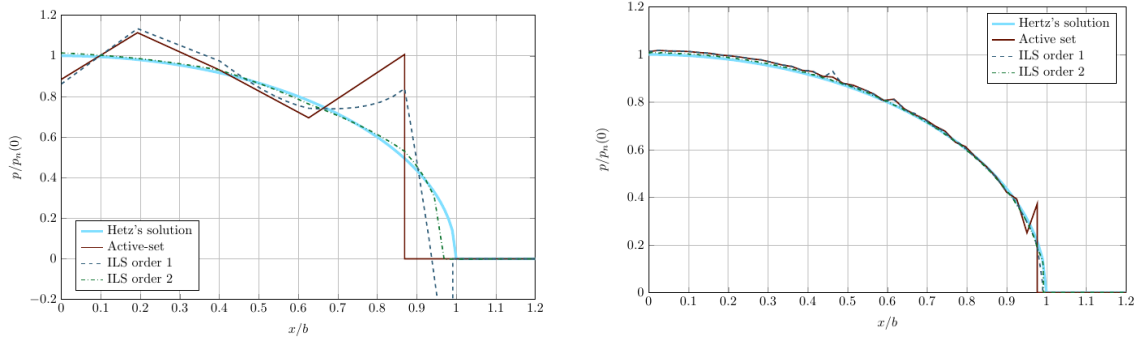


FIGURE 3.14 – Résultat pour le problème de Hertz : pression de contact. A gauche le maillage grossier, à droite le maillage fin

### 3.8 Conclusion

J'ai présenté dans cette section la méthode ILS telle que nous l'avons développée au cours notamment de la thèse de Mathieu GRAVELEAU. Je pense que les résultats sont très intéressants et permettent d'envisager de résoudre ces problèmes avec des méthodes haut ordre. Je souhaite donc continuer les recherches autour de cette méthode dans un avenir proche.

La relative complexité ajoutée par la capture des singularités sur un maillage non-conforme avec l'interface, résolue ici grâce au couplage level-set/X-FEM ne doit pas cacher l'idée importante de la méthode. De mon point de vue, l'important est d'avoir une représentation explicite de la frontière de la zone de contact et d'être en mesure de calculer la sensibilité de la solution à des mouvements de cette frontière. Pour les problèmes unidimensionnels traités jusqu'à présent au moins, il est clair pour moi que nous aurions pu obtenir les mêmes résultats avec des éléments finis classiques. Dans ces cas, il est bien sûr très facile de construire un maillage conforme à une frontière supposée de la zone initiale, c'est-à-dire avec un nœud exactement sur la frontière. La discontinuité de pente sur cette frontière est alors bien captée par l'approximation éléments finis. Pour trouver la bonne position de la frontière, il suffit alors de calculer la sensibilité de la solution à la position du nœud sur la frontière et appliquer le reste de l'algorithme ILS de façon inchangée.

En revanche, pour des problèmes où la zone de contact est une variété bidimensionnelle, il paraît plus difficile de maintenir un maillage conforme à l'interface quel que soit son mouvement et ses changements topologiques. Cela explique notre choix initial de décrire l'interface par l'iso-zéro d'une level-set, rendant la description de l'interface indépendante du maillage.

Toutefois dans nos travaux récents autour d'une nouvelle approche dont nous avons présenté les premiers résultats très récemment [Moë+23] appelée X-MESH "The eXtreme Mesh deformation approach", nous avons montré qu'il était possible de suivre une interface pouvant subir des grandes transformations, y compris des changements de topologie, avec un maillage conforme à tout instant à

l'interface. Nous avons pu montrer que cela était possible sans ajouter de nœud ni modifier la connectivité du maillage. Dans notre algorithme, seules les nœuds bougent et l'interface passe d'un nœud à un autre de manière continue. On peut imaginer le processus comme une course de relais où les coureurs seraient les nœuds et l'interface le témoin. Lors du "passage de relais", l'arête reliant les deux nœuds concernés à une longueur qui devient nulle. Le jacobien des éléments incluant cette arête devient aussi nul. Cela pose évidemment des difficultés pour calculer les gradients discrets dans les éléments concernés. Nous avons montré que des corrections simples permettaient de régler ce problème, sans conséquence sur la qualité de la solution. On décrit dans ce travail un exemple de problème de changement de phase en utilisant cette idée : la congélation progressive d'un liquide décrite par les équations de Stefan. Des configurations comprenant des fronts de solidifications mobiles relativement compliqués ont pu être résolus de manière très efficace.

Cette collaboration entre l'UCL et Centrale Nantes, portée par Nicolas MOËS et Jean-François REMACLE a permis de jeter les bases du projet X-MESH qui a été soumis à l'ERC dans le cadre du programme Synergy, accepté en octobre 2022 ([paragraphe 2.2.1](#)). Ce projet sera le bon cadre pour poursuivre les idées développées avec l'ILS, en utilisant directement le maillage pour représenter le "front" de contact, simplifiant ainsi l'aspect discrétisation de l'approche.



# 4

## Modélisation numérique de l'endommagement : de TLS à Lipfield

### 4.1 Introduction et bibliographie

La mécanique de la rupture a débuté avec les travaux de A.A. Griffith [Gri21]. Le modèle de fissure de Griffith considère qu'une fissure évolue comme un point dans un milieu 2D ou une courbe dans un milieu 3D, laissant derrière elle des faces de fissure sur lesquelles des sauts de déplacement sont autorisés. Une énergie est requise pour l'avancement de la fissure (ténacité). Le modèle de Griffith n'est pas capable de prédire l'initiation d'une fissure (une charge infinie est prédite pour une taille de fissure allant vers zéro) et n'est pas capable de prédire la ramification de fissures (une pointe se séparant en deux). Le modèle de Griffith a ensuite été amélioré/généralisé d'au moins deux manières principale : les modèles de zones cohésives et les modèles d'endommagement diffus.

Le modèle de zone cohésive (CZM)[Dug60 ; Bar62] tient compte de l'existence d'une "process zone" en aval de la pointe de la fissure dont la taille ne peut pas toujours être négligée. Elle peut par exemple atteindre jusqu'à 10 cm pour le béton. La process zone introduit une échelle de longueur et un effet de taille. Le modèle CZM est un modèle assez populaire en mécanique numérique. Les fissures peuvent s'initier et se propager sur les interfaces entre les éléments finis sur la base d'un modèle de traction-séparation. L'un des principaux inconvénients du CZM est que les modèles de fissures sont très sensibles à l'orientation du maillage, à moins qu'un remaillage adaptatif important ne soit utilisé [Tij+00 ; Zho+04]. La principale raison pour laquelle le CZM ne parvient pas à produire des résultats indépendants du maillage est qu'il est basé sur un modèle de traction-séparation qui nécessite une connaissance a priori des surfaces de fissures potentielles. Même l'insertion d'une fissure potentielle sur chaque interface d'élément ne suffit pas pour éviter les dépendances d'orientation du maillage (voir par exemple [Sea+09]). Un autre inconvénient du CZM est que le nombre de degrés de liberté évolue dans le temps, car les nœuds sont doublés lors de la séparation (chaque élément conserve une copie du nœud initialement commun.). Cet inconvénient disparaît si toutes les zones cohésives possibles sont pré-activées, mais cela se fait au détriment d'un nombre énorme de degrés de liberté. Enfin, notons que l'approche CZM est cependant très efficace lorsque le chemin de la fissure est connu à l'avance comme le montre [Lor08]. Une deuxième amélioration majeure du modèle de Griffith est le concept de modélisation diffuse de l'endommagement. La force des modèles d'endommagement diffus est de pouvoir a priori traiter des modèles de fissures complexes avec des possibilités de nucléation, de ramification et de coalescence. L'endommagement diffus introduit un caractère adoucissant au matériau : la contrainte qu'un matériau adoucissant peut supporter diminue à mesure que la déformation augmente. Ce phénomène existe tant pour l'élasticité endommageable que pour la plasticité. Pour l'élasticité, la

rigidité diminue lorsque la déformation augmente, alors que pour la plasticité, c'est la plutôt limite d'élasticité qui diminue à mesure que la déformation s'accumule. La perte de rigidité élastique est généralement représentée par le biais d'une variable locale d'endommagement,  $d$  venant affecter les propriétés élastiques. Le traitement de ces types de modèles est un défi pour l'analyse par éléments finis notamment. D'un point de vue mathématique, ces modèles perdent les bonnes propriétés de convexité des modèles élastiques classiques ou de la plasticité à écrouissage positif. L'existence et l'unicité des solutions ne sont plus garanties. Des points limites peuvent exister : la solution n'existe pas au-delà de certaines charges. Des points de bifurcation sont également possibles : à un moment donné, plusieurs solutions commencent à exister (stables ou non). Parmi les nombreuses solutions qui peuvent exister, certaines sont appelées localisations parasites (spurious localisation). Dans le cadre unidimensionnel, ces localisations sont caractérisées par un adoucissement survenant en un seul point. Pour les dimensions supérieures, la localisation se produit sur des domaines de mesure nulle. Par conséquent, la dissipation impliquée dans ces zones est nulle. En d'autres termes, l'énergie ou la charge externe nécessaire pour atteindre la ruine de la structure est fortement sous-estimée. Les difficultés mathématiques des modèles de matériaux adoucissants ont un impact direct sur leur traitement numérique. Une dépendance erronée au maillage est observée avec les éléments finis : l'orientation du maillage a un fort impact sur les résultats et, au fur et à mesure que le maillage est raffiné, seul un élément ou une couche d'éléments, selon la dimension du problème, est affecté par la localisation [Baž76].

La conception de méthodes visant à éliminer les localisations parasites se poursuit depuis plus d'une quarantaine d'années. En ce qui concerne l'analyse quasi-statique des modèles indépendants du temps, plusieurs remèdes ont été étudiés dans la littérature. Ils ont tous en commun d'injecter d'une manière ou d'une autre une échelle de longueur pour régulariser le modèle.

Pour le modèle dit d'endommagement intégral non-local, l'évolution de l'endommagement en un point donné est régie par une force motrice qui est la moyenne de la force motrice locale sur une certaine distance autour de ce point [Baž+84; Pij+87; Baž+02; Lor+03; Bod+04]. Plus récemment, des raffinements du modèle intégral non-local avec une longueur interne évolutive ont été développés [Gir+11; Ras+18].

Dans les modèles à gradient d'ordre supérieur, basés sur la cinématique, l'échelle de longueur est introduite par l'inclusion de gradients de déformation d'ordre supérieur dans l'expression de l'énergie [Aif84; Tri86; Sch+86]. Alternativement, des degrés de liberté de rotation interne supplémentaires peuvent être introduits [Müh+87]. D'autres approches se basent sur l'introduction d'un terme dépendant du gradient du champ d'endommagement, impliquant à nouveau une échelle de longueur [Fré+96; Pij+96; Pee+01; Ngu+05]. Parallèlement, la rupture a également été reformulée en un problème de minimisation de l'énergie régularisée [Fra+98; Bou+00], donnant lieu à l'approche dite variationnelle de la rupture [Bou+08]. L'approche périodynamique a elle aussi été appliquée à la fissuration [Sil00; Jav+18].

À peu près à la même époque, l'approche par champ de phases (phase-field) émanant de la communauté des physiciens [Kar+01; Hak+09] a été développée pour des applications en mécanique de l'endommagement [Amo+09; Mie+10b; Mie+10a; Kuh+10; Amb+15; Ngu+15; Xia+17; Li+20], et est devenue très populaire. L'approche a même été implémentée dans le code élément commercial Abaqus/Standard [Mol+17]. Au final, si la philosophie est différente de l'approche variationnelle de la rupture, elle contient les mêmes ingrédients, à savoir la recherche d'un point stationnaire pour l'énergie totale du système, contenant outre l'énergie élastique dépendant de la variable d'endommagement et du champ de déformation, une énergie d'endommagement dépendant du champ d'endommagement et du carré de son gradient, le tout sous contrainte de non-décroissance en temps de  $d$ . Le succès de la branche "phase-field" provient probablement de la simplification introduite par Miehe [Mie+10a], consistant à remplacer la contrainte sur la variable  $d$  par un terme source dépendant du maximum sur l'histoire d'une fonction de  $d$ , dépendante du modèle choisi. Si cette simplification pose des problèmes d'interprétation mécanique, elle a l'avantage de simplifier la recherche d'un point stationnaire, no-



tamment dans le cadre de schémas alternés, en s'affranchissant d'une minimisation sous contrainte, la remplaçant par une minimisation simple. Dans les travaux où cette approximation n'est pas faite, l'approche phase-field et l'approche variationnelle de la rupture amènent à des formulations très proches, voire équivalentes. Des travaux récents [Le+18] semblent par contre démontrer une grande différence entre les modèles à gradient de déformation et les modèles à gradient d'endommagement, suggérant que les premiers ne puissent pas, dans le cadre testé, reproduire une fissure de Griffith (endommagement se localisant en une surface correspondant à une fissure dissipant une énergie proportionnelle à une surface).

Une autre façon d'introduire une échelle de longueur est l'approche de la rupture par "Thick Level Set". Nous avons introduit cette approche pour les matériaux fragiles dans [Moë+11a]. Elle sera présentée dans la première section de ce chapitre. L'évolution de l'endommagement y est liée à la distance à un front de dégradation, représenté par une level-set. Le front d'endommagement sur lequel l'endommagement commence est l'iso-zéro et il croît jusqu'à une valeur de 1 (état complètement endommagé) à une certaine distance  $l_c$  dans le sillage du front. Cela revient à imposer la norme du gradient de l'endommagement (contrainte d'égalité). La possibilité d'une contrainte d'inégalité sur le gradient de dommage a également été considérée dans [Moë+14b ; Ste+17] permettant de combiner des champs d'endommagement diffus et localisant. Cela a conduit récemment au modèle Lip-field que nous avons introduit en 2021 [Moë+21b] et que nous présentons sur les deux dernières sections de ce chapitre.

## 4.2 La méthode TLS "Thick-Level-Set"

### 4.2.1 Introduction à la TLS

La méthode des Éléments Finis Étendus (X-FEM) est utilisée depuis plus de vingt ans avec succès pour représenter des fissures (voir chapitre 2) sans devoir adapter le maillage à la géométrie. Mes travaux décrits précédemment ont contribué à l'amélioration de la méthode, et elle reste d'actualité même si d'autres approches privilégiant le maillage et remaillage automatique de la fissure sont maintenant concurrentielles. Ces progrès restent toutefois dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture. Cette mécanique est incapable d'inclure la modélisation de changement topologique de la surface de fissure, à savoir l'initiation, la fusion ou le branchement de ces surfaces. Pour ces situations, la mécanique de l'endommagement a bien des atouts à jouer, mais doit surmonter d'autres problèmes à la fois mécaniques et numériques. Le problème le plus important est dû au fait que ces modèles sont adoucissants, c'est-à-dire qu'une courbe contrainte en fonction de la déformation connaît toujours un pic au-delà duquel apparaît le phénomène de localisation. Les problèmes n'ont plus une solution unique et les méthodes numériques, quand elles convergent, ont tendance à le faire vers des solutions où la rupture est localisée dans une bande dont l'épaisseur tend vers zéro avec la taille des mailles. À la limite, la zone endommagée est de taille nulle et la dissipation associée est nulle. C'est un problème bien connu et la solution est d'ajouter, d'une manière ou d'une autre une longueur caractéristique dans le modèle (voir section 4.1).

Depuis 2008, nous développons dans l'équipe le modèle endommagement par "fonction de niveau épaisse" (TLS : Thick Level Set). Il propose une nouvelle réponse aux interrogations suscitées par la mécanique de la rupture et les modèles d'endommagement. L'idée de ce modèle consiste à représenter les zones endommagées par une seule level-set. Un front endommagement, séparant le matériau sain du matériau endommagé, correspond à l'iso-zéro de la fonction. Une longueur caractéristique  $l_c$  est introduite dans le modèle en postulant que le matériau est totalement détruit (endommagement scalaire  $d = 1$ ) à une distance  $l_c$  de l'iso-zéro. On montre que, l'endommagement étant une fonction directe de la level-set, le modèle ainsi obtenu correspond à un modèle non-local, nécessaire pour éviter les phénomènes de localisation et de dépendance au maillage. Depuis les prémices en 2008 [Moë+08], la méthode



a connu un développement intense dans l'équipe, notamment dans le cadre du projet ERC-XLS (voir [paragraphe 2.2.1](#)) donnant lieu à de nombreuses publications [[Moë+11a](#); [Sto+12](#); [Ber+12](#); [Moë+14b](#); [Caz+15](#); [Mor+15](#); [Par+15](#); [Gor+15](#); [Sal+16](#); [Par+17](#); [Mor+17](#); [Lé+18](#); [Zgh+18](#); [Shi+21](#)]. La méthode s'est étendue en dehors du laboratoire et continue à susciter de l'intérêt [[van+15](#); [Voo+17](#); [Lat+17](#); [Lat+20](#); [Lat+23](#); [Mor+20](#); [Mor+21](#); [Mor+22](#)].

Nous allons dans la suite, présenter les grandes lignes du modèle TLS, en montrer quelques résultats, avant de faire un zoom sur un des aspects techniques de son implémentation efficace.

## 4.2.2 Description du modèle TLS

### 4.2.2.1 Point de départ : un modèle d'endommagement local

Un des partis pris du modèle TLS est de se donner un modèle d'endommagement purement local classique et d'y appliquer une machinerie pour en sortir "automatiquement " un modèle non-local. Il se rapproche en cela des modèles non-locaux intégraux.

Pour faciliter la discussion, on va donc prendre un modèle d'endommagement simple, fragile, défini dans la suite. Il ne s'agit pas d'une limitation intrinsèque du modèle et d'autres modèles locaux peuvent être utilisés.

Le modèle de matériau considéré ici est défini à partir de l'énergie libre par unité de volume  $\varphi$  qui dépend de l'état de déformation  $\bar{\epsilon}$  et d'une variable interne  $d$ , ici un scalaire, représentant l'endommagement du matériau en un point, avec les conventions habituelles : si  $d = 0$  le matériau est sain, si  $d = 1$  il est complètement endommagé.

Dans ce cadre, les lois d'états sont obtenues en dérivant l'énergie libre :

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\epsilon}} \quad (4.1)$$

$$Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial d} \quad (4.2)$$

où  $\bar{\sigma}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy et  $Y$  est le taux de restitution d'énergie. Pour le modèle le plus simple possible, en considérant un comportement symétrique en traction et compression, l'énergie libre prend la forme locale suivante :

$$\varphi(\bar{\epsilon}, d) = \frac{1}{2}(1-d)\bar{\epsilon} : \bar{\bar{D}} : \bar{\epsilon} \quad (4.3)$$

où  $\bar{\bar{D}}$  est l'opérateur de Hooke. Ce qui conduit bien sûr à :

$$\bar{\sigma} = (1-d)\bar{\bar{D}} : \bar{\epsilon} \quad Y = \frac{1}{2}\bar{\epsilon} : \bar{\bar{D}} : \bar{\epsilon} \quad (4.4)$$

L'évolution de l'endommagement est alors donnée par le potentiel de dissipation  $\psi^*(Y)$ , une fonction convexe de  $Y$  :

$$\dot{d} = \frac{\partial \psi^*(Y)}{\partial Y} \quad (4.5)$$

où  $\dot{d}$  décrit la dérivée en temps ou encore le taux de variation de  $d$ . De manière alternative, on peut en définir  $\psi$  comme le dual de  $\psi^*$  par rapport à la transformation de Legendre-Fenchel :

$$\psi(\dot{d}) = \sup_Y (Y\dot{d} - \psi^*(Y)) \quad \psi^*(Y) = \sup_{\dot{d}} (Y\dot{d} - \psi(\dot{d})) \quad (4.6)$$

$$Y = \frac{\partial \psi(\dot{d})}{\partial \dot{d}} \quad (4.7)$$

Pour les matériaux fragiles par exemple, le potentiel de dissipation n'est pas régulier, et plutôt que d'écrire  $Y$  comme le gradient de  $\varphi$ , on écrira que  $Y$  appartient au sous-différentiel  $\partial \phi(\dot{d})$  :

$$Y \in \partial \phi(\dot{d}) \Leftrightarrow \psi(\dot{d}) + Y(d^* - \dot{d}) \leq \psi(d^*) \quad \forall d^* \text{ admissible} \quad (4.8)$$

Ces éléments d'analyse convexe permettent d'écrire l'inégalité suivante, satisfaite pour tout couple  $(Y, \dot{d})$ , même si la loi d'évolution n'est pas vérifiée.

$$\psi^*(Y) + \psi(\dot{d}) - Y\dot{d} \geq 0 \quad (4.9)$$

Si la loi d'évolution locale est vérifiée, alors on a :

$$\psi^*(Y) + \psi(\dot{d}) - Y\dot{d} = 0 \Leftrightarrow \dot{d} = \frac{\partial \psi^*(Y)}{\partial Y} \Leftrightarrow Y = \frac{\partial \psi(\dot{d})}{\partial \dot{d}} \quad (4.10)$$

Ces relations sont importantes, car on verra que le modèle non-local proposé par la TLS cherchera à vérifier au mieux, au sens d'une certaine moyenne, ces égalités pour construire sa loi d'évolution non-locale.

#### 4.2.2.2 Une régularisation géométrique à partir d'un "front" mobile d'endommagement

Dans le modèle TLS, l'endommagement est décrit à l'aide d'une fonction de niveau  $\phi$ , la level-set. Cette fonction de niveau est un champ scalaire défini sur le solide  $\Omega$  considéré, sa valeur en  $x$  représente la distance signée entre  $x$  et une surface représentant l'interface entre la zone saine du solide et la zone endommagée. Cette interface, nommée  $\Gamma_0$  est l'iso-zéro de la fonction  $\phi$ . Par convention, la zone saine correspond à  $\phi \leq 0$  et la zone endommagée correspond à  $\phi \geq 0$ . Sur  $\Gamma_0$ , le gradient de  $\phi$  est donc un vecteur normal à  $\Gamma_0$  pointant vers l'extérieur de la zone saine. On parle ici de fonction distance au sens accepté dans la communauté des level-set : c'est-à-dire que l'on a  $|\vec{\nabla} \phi| = 1$  [Set99].

L'endommagement  $d$  est défini comme une fonction explicite croissante de  $\phi$ , c'est-à-dire que  $d = d(\phi)$  avec les contraintes suivantes :

$$\phi \leq 0 \quad d(\phi) = 0 \quad (4.11)$$

$$0 \leq \phi \leq l_c \quad d'(\phi) \geq 0 \quad (4.12)$$

$$\phi \leq l_c \quad d(\phi) = 1 \quad (4.13)$$

La dernière contrainte fait apparaître le paramètre  $l_c$  qui est une longueur caractéristique, tel que l'endommagement est complet ( $d = 1$ ) si on se trouve à une distance supérieure à  $l_c$  du front d'endommagement, à l'intérieur de la zone endommagée. Le modèle TLS, introduit donc deux nouveaux paramètres par rapport à un modèle d'endommagement local :

- la longueur caractéristique  $l_c$
- la fonction  $d(\phi)$  décrivant la variation de  $d$  pour  $\phi$  entre 0 et  $l_c$ .

Conceptuellement, on se rapproche ici de ce que l'on trouve dans les modèles non locaux intégraux où une longueur caractéristique est définie ainsi qu'une forme pour la fonction de pondération.

La figure 4.1 décrit les différents scénarios qui peuvent être décrits dans le modèle TLS.  $\Omega$  représente le solide,  $\Omega_c$  est la zone partiellement endommagée, où  $0 < \phi < l_c$  et  $0 < d < 1$ .  $\Gamma_0$  représente la frontière entre la zone saine et la zone endommagée,  $\Gamma_c$  représente la frontière entre la zone endommagée et la zone complètement endommagée. Sur la figure, on a représenté une zone d'initiation de l'endommagement (en bas) où celui-ci n'atteint pas 1, une zone d'endommagement bien établi ou

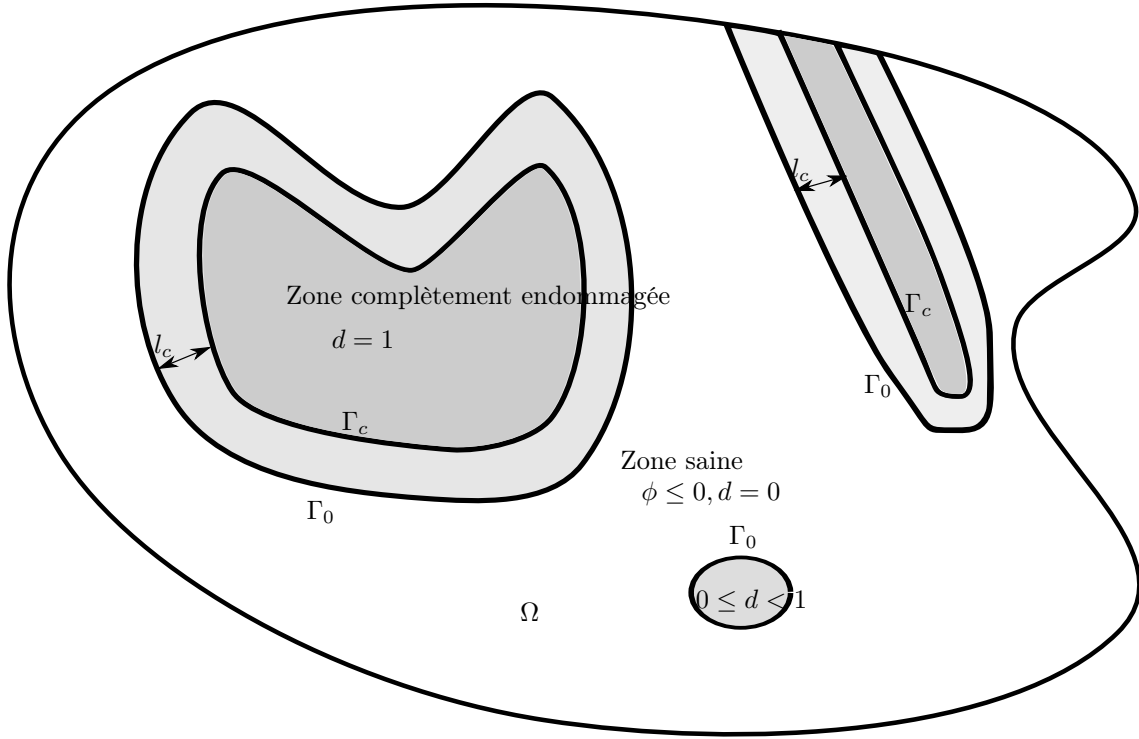


FIGURE 4.1 – Représentation de la géométrie de la zone endommagée dans le modèle TLS

$d$  atteint 1 sur un grand volume (à gauche), et enfin où l'endommagement atteint 1 sur une zone de faible épaisseur. Cette dernière configuration correspondant au cas que l'on assimile à la propagation d'une fissure.

La fonction  $d(\phi)$  est ici une fonction continue. Dans l'approche TLS, rien n'empêche a priori d'employer une fonction discontinue, permettant ainsi de représenter un endommagement brutal. Nous ne développerons pas ce cas ici. Pour ce faire, il conviendrait d'ajouter des termes dans les sensibilités au mouvement du front et donc au calcul de la dissipation.

Une fois la fonction  $d(\phi)$  choisie, l'endommagement dans le solide  $\Omega$  est complètement déterminé par la connaissance du front  $\Gamma_0$  d'endommagement. Dans le modèle TLS, l'énergie potentielle du système peut donc être écrite comme une fonction des champs  $\vec{u}$  et  $\phi$ . Dans la suite, nous allons tenter de mieux décrire la physique du modèle TLS en calculant les variations de l'énergie potentielle par rapport au champ de déplacement et aux variations du front  $\Gamma$ .

Pour fixer les idées, on considère le solide  $\Omega$  soumis à un chargement  $\vec{\tau}(t)$  sur une partie  $\partial\Omega_T$  de la frontière et un déplacement  $u^d(t)$  imposé sur une partie complémentaire  $\partial\Omega_u$  de la frontière. On dénote par  $\Omega_c$  la sous partie de  $\Omega$  pour laquelle l'endommagement n'est pas complet  $d < 1$  (c'est à dire,  $\phi < l_c$ ). L'énergie potentielle s'écrit alors :

$$E(\vec{u}, \phi) = \int_{\Omega_c} \psi(\bar{\epsilon}(\vec{u}), d(\phi)) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \vec{\tau} \vec{u} \, dS \quad (4.14)$$

où  $\bar{\epsilon}$  est le tenseur des déformations. Le champ de déplacement doit vérifier les conditions cinématiques sur  $\partial\Omega_u$  et la norme du gradient de  $\phi$  doit être unitaire, pour que  $\phi$  soit bien une fonction distance. Comme  $d(\phi)$  et  $\vec{u}$  sont continus, l'énergie de déformation et la contrainte le sont aussi le long des iso-surfaces de  $\phi$ . Si on considère  $\Gamma_{\phi(t)}$  une iso-surface de  $\phi$ , on peut écrire une relation sur les variations du champ de déplacement. Le saut  $[\vec{u}]_{\Gamma_{\phi(t)}}$  est nul pour chaque point  $x(t)$  sur la surface mobile  $\Gamma_{\phi(t)}$

et on a donc  $[\dot{\vec{u}}]_{\Gamma_{\phi(t)}} + \dot{\vec{x}} \cdot [\nabla \vec{u}]_{\Gamma_{\phi(t)}} = \vec{0}$ , où  $\dot{\vec{x}}$  est la vitesse de  $\Gamma_{\phi(t)}$ .

Toute variation de  $\vec{u}$  et toute variation de  $\Gamma_{\phi}$  sont donc liée par une équation de compatibilité :

$$[\delta \vec{u}]_{\Gamma_{\phi(t)}} + \delta v_n \vec{n} \cdot [\nabla \vec{u}]_{\Gamma_{\phi(t)}} = \vec{0} \quad (4.15)$$

La continuité de  $d$  assure aussi la continuité de la contrainte et du gradient des déplacements. Il n'y a donc pas de saut au travers de la surface mobile.

On définit maintenant comme suit les espaces admissibles pour  $\vec{u}$  et  $d$  :

$$A_d^u = \vec{u}, \quad \vec{u} \text{ défini sur } \Omega_c, \quad \vec{u} = \vec{u}^d \quad \text{sur } \partial\Gamma_u \quad (4.16)$$

$$A_d^\phi = \phi : \|\vec{\nabla} \phi\| = 1 \quad \text{sur } \Omega \quad (4.17)$$

ainsi que les espaces de variations admissibles :

$$A_0^u = \delta \vec{u}, \quad \delta \vec{u} \text{ défini sur } \Omega_c, \quad \delta \vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur } \partial\Gamma_u \quad (4.18)$$

$$A_d^\phi = \delta \phi : \vec{\nabla} \delta \phi \cdot \vec{\nabla} \phi = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (4.19)$$

La contrainte sur  $\delta \phi$  s'interprète en disant que la variation de  $\phi$  doit être constante le long de courbes orthogonales aux surfaces de niveau de  $\phi$ . En deux dimensions, cette variation peut être décrite en fonction d'un paramétrage du front par une abscisse curviligne  $s$  prolongée dans le domaine, telle que  $\vec{\nabla} s \cdot \vec{\nabla} \phi = 0$ . Cette prolongation est une opération parfaitement courante dans les approches level-set : c'est l'équation que l'on utilise pour étendre un champ de vitesse normale défini sur l'iso-zéro dans le domaine. On a défini ainsi un paramétrage de la bande endommagée, représenté sur la [Figure 4.2](#). On peut donc dire que  $\delta \phi(\vec{x}) = \delta a(s(\vec{x}))$ , où  $\delta a(s)$  est la variation de vitesse normale de la courbe  $\Gamma_\phi$ .

Dans le système de coordonnées curviligne  $(\phi, s)$  l'élément de surface  $d\Omega$  s'exprime ainsi :

$$d\Omega = \frac{\rho(\phi, s)}{\rho(0, s)} d\phi ds = \left(1 - \frac{\phi}{\rho(0, s)}\right) d\phi ds \quad (4.20)$$

où  $\rho$  est le rayon de courbure. la dernière égalité vient du fait que  $\phi$  est une fonction distance et donc que le rayon de courbure en  $(\phi, s)$  est le rayon de courbure en  $(0, s)$  moins la distance  $\phi$  entre le point  $(\phi, s)$  et la courbe  $\phi = 0$ . Les variations de l'énergie potentielle pour un déplacement et un mouvement admissible du front s'écrivent donc :

$$DE(\vec{u}, \phi)[(\delta \vec{u}, \delta a)] = \int_{\Omega_c} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon}(\delta \vec{u}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \bar{\tau} \delta \vec{u} dS - \int_{\Omega} Y d'(\phi) \delta a d\Omega \quad (4.21)$$

L'annulation de la dérivée de l'énergie potentielle dans la direction  $(\delta \vec{u}, 0)$  donne donc l'équation d'équilibre.

La dérivée de l'énergie dans la direction  $(\vec{0}, \delta a)$  nous renseigne sur la dissipation. Comme  $d'(\phi)$  est non nulle uniquement dans la bande  $\Omega_{oc}$ , la partie de  $\Omega$  pour laquelle  $0 < d < 1$ , l'énergie dissipée n'intervient que dans cette bande. Avec le paramétrage précédent, on a donc :

$$DE(\vec{u}, \phi)[(\vec{0}, \delta a)] = - \int_{\Omega_{oc}} Y d'(\phi) \delta a d\Omega \quad (4.22)$$

$$= - \int_{\Gamma_0} \int_0^l Y(\phi, s) d'(\phi) \delta a(s) (1 - \phi/\rho(0, s)) d\phi ds \quad (4.23)$$

$$= - \int_{\Gamma_0} g(s) \delta a(s) ds \quad (4.24)$$

. Cette dernière relation montre que tout se passe comme si on avait une pseudo force  $g(s)$  pilotant la dissipation. Il s'agit du taux de dissipation d'énergie associé à l'avancement unitaire d'un point du

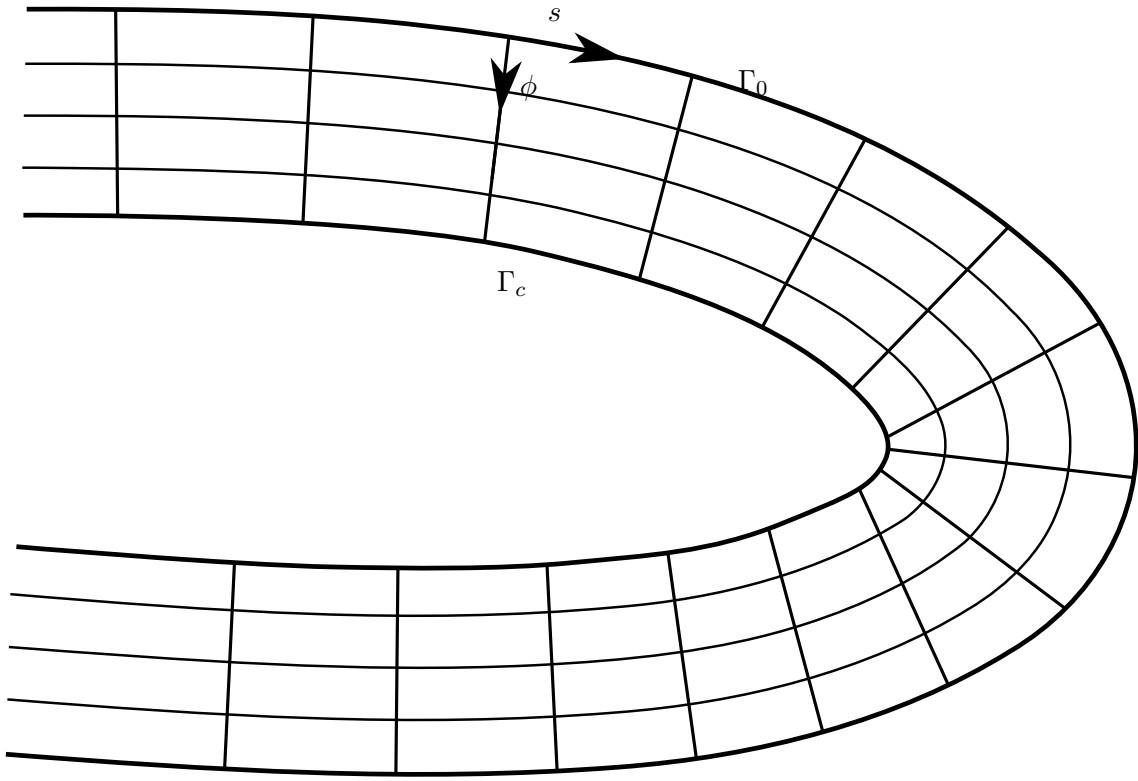


FIGURE 4.2 – Paramétrisation de la bande endommagée

front. Ce dernier se calcule en intégrant le long d'une courbe orthogonale aux iso- $\phi$ , passant par  $(0, s)$  un terme dépendant du taux de restitution d'énergie  $Y$ , d'un paramètre géométrique de la level-set  $\phi$  et de la dérivée de la fonction  $d(\phi)$  :

$$g(s) = \int_0^l Y(\phi, s) d'(\phi) (1 - \phi/\rho(0, s)) d\phi. \quad (4.25)$$

Dans le cas d'un endommagement complètement développé,  $l$  est simplement  $l_c$  (cf [Figure 4.1](#), zone de gauche ou de droite). Dans le cas d'un endommagement partiellement développé (cf [Figure 4.1](#), zone du bas),  $l$  est la distance maximum que l'on peut atteindre en partant de  $(0, s)$ .

Dans le modèle TLS, la force motrice de l'endommagement peut donc être interprétée comme une moyenne le long d'une ligne alignée avec le gradient d'endommagement de la force motrice locale  $Y$ , pondérée par l'évolution de la courbure et  $d'(\phi)$ . La dissipation, peut être calculée en remplaçant  $\delta a$  par la vitesse réelle du front :

$$D = \int_{\Gamma_0} g(s) v_n(s) ds \quad (4.26)$$

Le modèle TLS peut donc encore être vu comme une dissipation associée au mouvement de la surface délimitant la zone endommagée, avec une force motrice  $g$  définie sur cette surface. Pour fermer le modèle, il manque l'équivalent du potentiel de dissipation dans le cas local, c'est-à-dire une loi liant  $g$  et  $v_n$ . On peut imaginer n'importe quelle loi à ce point, mais il est intéressant de partir d'une loi d'évolution locale et de voir comment l'homogénéiser de manière à la vérifier au mieux en appliquant les contraintes géométriques du modèle TLS. C'est l'objet du paragraphe suivant.

### 4.2.2.3 Construction de la loi d'évolution par homogénéisation de la loi locale

L'endommagement étant défini dans le modèle TLS comme une fonction de  $\phi$ , fonction distance, l'évolution  $\dot{d}$  est géométriquement contrainte, à savoir :

$$\dot{d} = \dot{d}(\phi) = d'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4.27)$$

Comme  $\phi$  est une fonction distance à l'interface, la donnée de la vitesse normale à l'interface  $v_n$  suffit pour écrire sa loi d'évolution ( cf. [Set99]) :

$$\frac{d\partial\phi}{\partial t} - v_n \|\nabla\phi\| = 0 \quad (4.28)$$

Avec  $\|\nabla\phi\| = 1$ , on obtient<sup>1</sup> :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = v_n \quad (4.29)$$

Et finalement, on a pour l'évolution de  $d$  en fonction de la vitesse normale,

$$\dot{d} = d'(\phi)v_n \quad (4.30)$$

On note ici que pour que le taux d'endommagement soit positif ou nul, il faut que  $v_n$  soit positif ou nul. La contrainte 4.30 du modèle TLS rend impossible de vérifier la loi locale d'évolution de l'endommagement,  $\dot{d} = \frac{\partial\psi^*(Y)}{\partial Y}$  exactement.

Comme nous l'avons vu précédemment, quels que soient  $Y$  et  $\dot{d}$ , on a :

$$\psi^*(Y) + \psi(\dot{d}) - Y\dot{d} \geq 0 \quad (4.31)$$

et :

$$\psi^*(Y) + \psi(\dot{d}) - Y\dot{d} = 0 \quad (4.32)$$

si et seulement si la loi locale est vérifiée.

Notre approche va donc consister, pour un champ  $Y$  donné, à trouver le champ  $\dot{d}$  vérifiant la contrainte 4.30 qui minimise l'intégrale sur le domaine de  $\psi^*(Y) + \psi(\dot{d}) - Y\dot{d}$ . On vérifiera ainsi au mieux la loi de comportement locale tout en respectant la contrainte qui rend le modèle non-local.

$$\inf_{\dot{d} \geq 0} \int_{\Omega_c} \psi^*(Y) + \psi(\dot{d}) - Y\dot{d} \, d\Omega \quad (4.33)$$

$$= \inf_{v_n \geq 0} \int_{\Omega_c} \psi^*(Y) + \psi(d'(\phi)v_n) - Yd'(\phi)v_n \, d\Omega \quad (4.34)$$

La valeur du minimum ne sera pas forcément zéro, comme on l'a vu, et cela constitue une mesure de l'écart entre le modèle local et le modèle non local TLS. Le calcul de  $v_n$  minimisant l'expression peut bien sûr être simplifié en notant que l'intégrand est non nul seulement sur la partie  $\Omega_{oc}$ , que le terme  $\psi^*$  ne dépend pas de  $v_n$  :

Dans les applications numériques, on peut donc calculer  $v_n$  comme un problème de minimisation sous contrainte :

---

1. En négligeant des termes du second ordre venant des variations spatiales de  $v_n$

$$\inf_{v_n \geq 0} \int_{\Omega_{oc}} \psi(d'(\phi)v_n) - Y d'(\phi)v_n \, d\Omega \quad (4.35)$$

En analysant un peu plus le problème de minimisation, on peut voir que cette machinerie n'est rien d'autre que la construction d'un potentiel de dissipation homogénéisé, reliant  $v_n$  et  $g$ , les quantités duales définies sur le front d'endommagement  $\Gamma_0$ . En effet, on a d'une part :

$$\int_{\Omega_{oc}} Y d'(\phi)v_n \, d\Omega = \int_{\Gamma_0} g(s)v_n(s) \, ds \quad (4.36)$$

De plus, on peut réécrire  $\int_{\Omega_{oc}} \psi(d'(\phi)v_n) \, d\Omega$  comme :

$$\int_{\Omega_{oc}} \psi(d'(\phi)v_n) \, d\Omega = \int_{\Gamma_0} \left( \int_0^l \psi(d'(\phi)v_n(s))(1 - \phi/\rho(0, s)) \, d\phi \right) \, ds. \quad (4.37)$$

Ainsi, en définissant le potentiel homogénéisé :  $\bar{\psi}(v_n, s)$  comme :

$$\bar{\psi}(v_n, s) = \int_0^l \psi(d'(\phi)v_n)(1 - \phi/\rho(0, s)) \, d\phi, \quad (4.38)$$

$v_n$  est le champ de vitesse positif minimisant 4.35 :

$$\inf_{v_n \geq 0} \int_{\Gamma_0} \bar{\psi}(v_n, s) - g(s)v_n \, ds \quad (4.39)$$

Autrement dit, le champ  $v_n$ , positif partout, minimisant l'intégrale sur  $\Omega_{oc}$  est le champ qui minimise l'intégrand précédent en chaque point de  $\Gamma_0$ . Il maximise donc l'opposé de l'intégrand, c'est-à-dire que le champ  $v_n$  maximise l'intégrale :

$$\int_{\Gamma_0} \left( \sup_{v_n \geq 0} g(s)v_n - \bar{\psi}(v_n, s) \right) \, ds \quad (4.40)$$

où l'intégrand est donc un potentiel dual homogénéisé  $\bar{\psi}^*(g, s)$  par la transformée de Legendre-Fenchel du potentiel  $\bar{\psi}(v_n, s)$ . Finalement, par le processus que l'on vient de décrire, la loi d'évolution locale d'endommagement, a été homogénéisée en une loi d'évolution non-locale :

$$v_n = \frac{\partial \bar{\psi}^*(g, s)}{\partial g} \Leftrightarrow g = \frac{\partial \bar{\psi}(v_n, s)}{\partial v_n} \Leftrightarrow \bar{\psi}^*(g, s) + \bar{\psi}(v_n, s) - gv_n = 0 \quad (4.41)$$

On a donc avec le modèle TLS une belle correspondance entre le modèle local et le modèle non-local. De plus, par construction, à chaque point de  $\Gamma_0$ ,  $\bar{\psi}(v_n)$  est convexe, positif et nul seulement si  $v_n$  est nul. Cela permet d'assurer que la dissipation  $gv_n$  est positive en chaque point du front. Cette préservation automatique de la dualité est un des avantages du processus de délocalisation obtenu par le modèle TLS. Cela garantit que le modèle non-local est thermodynamiquement correct dès lors que le modèle local l'est. Les analyses des modèles non-locaux concurrents montrent que ce n'est pas toujours le cas [Lor+03].

Un autre avantage par rapport aux modèles intégraux est que la longueur sur laquelle les variables sont intégrées varie avec la taille de la zone endommagée. À la limite où la zone endommagée devient très petite, c'est-à-dire à l'initiation de l'endommagement,  $l$  tend vers 0 et on retrouve le modèle local. L'endommagement dans le modèle TLS peut être total ( $d = 1$ ) et la zone où l'endommagement est complet est clairement définie et peut être interprétée comme une fissure. Lorsqu'une fissure est

complètement formée, l'homogénéisation se fait bien de part et d'autre de la fissure, sans chevaucher celle-ci. L'intégrale s'arrête en  $l$ , le point le plus éloigné du front d'endommagement.

Si on compare avec l'autre grande famille de modèles non-locaux, les modèles incluant le gradient de  $d$  ou encore le second gradient de  $u$ , il n'y pas ici de conditions aux limites supplémentaires à imposer (du type  $\vec{\nabla}d \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ ).

Nous arrêtons ici la description du modèle TLS au niveau continu. On trouvera plus de détails dans les différents articles publiés. Nous rappellerons toutefois qu'une fois un modèle local sélectionné, il reste à choisir  $l_c$  et la fonction  $d(\phi)$ . Plusieurs options sont possibles comme on l'a mentionné précédemment. On peut par exemple jouer sur ces paramètres pour reproduire le comportement global d'une fissure correspondant à un modèle de Griffith [Moë+11c] ou décrire des comportements plus ou moins ductiles et ainsi reproduire par exemple le comportement global d'une fissure cohésive [Par+15] et donc des effets d'échelle typiques de la fissuration dans les bétons [Baz+87].

Dans la section suivante, nous montrerons quelques résultats issus de nos travaux avec la TLS, avant de faire un focus sur un point qui a demandé un travail intensif, mais qui a permis d'améliorer sensiblement la qualité des résultats obtenus avec la méthode.

### 4.2.3 Quelques résultats obtenus avec le modèle TLS

#### 4.2.3.1 Flexion 3 points

Un des premiers cas que nous avons traité avec la TLS est celui de la flexion 3 points. La géométrie et la courbe force/déflexion pour différents maillages est donnée sur la Figure 4.3. Les détails du modèle sont dans [Moë+11a]. La taille des éléments sur les différents maillages est donnée par  $h = l_c/4$ ,  $l_c/8$  et  $l_c/16$  respectivement. Les résultats obtenus font apparaître, sur la courbe force/déflexion, un snap-back typique de la rupture fragile pour cette géométrie. La courbe converge de manière satisfaisante avec le maillage. La dissipation reste finie et ne tend visiblement pas vers 0 avec la taille de maille. La régularisation du modèle local est donc effective. Le profil de la zone endommagée est donné dans la Figure 4.4 pour des maillages de plus en plus fins, au même niveau de chargement. La largeur de la bande endommagée autour de la "fissure" (c'est-à-dire zone  $d = 1$ ) est d'approximativement  $2l_c$  et est de plus en plus proche de cette valeur au fur et à mesure du raffinement du maillage. La zone  $d = 1$  est par contre de plus en plus fine, tendant vers une épaisseur nulle où se concentrent les sauts de déplacement, reproduisant très bien le comportement d'une fissure. Les oscillations qui apparaissent pour le maillage grossier sur le front d'endommagement, tendent à disparaître sur le maillage fin. Ces oscillations sont liées à une mauvaise description de l'iso- $l_c$ . L'amélioration de cette description fait l'objet de la section 4.2.4.

#### 4.2.3.2 Branchement de fissure

Dans le cas test suivant (représenté sur les figures 4.5 et 4.6), un branchement de fissure a pu être obtenu. Le test est constitué d'un échantillon construit à partir de deux matériaux ayant des modules de Young différent. Une fissure est initiée dans le matériau de module faible et l'ensemble est chargé en traction comme représenté sur la figure. La fissure progresse normalement, perpendiculairement à la direction du chargement jusqu'à s'approcher de la frontière avec le matériau plus raide (point A). Comme le branchement requiert moins d'énergie que de continuer dans le deuxième matériau, la zone complètement endommagée s'élargit d'abord avant que la fissure ne finisse par se séparer en deux branches (point B). Ce branchement apparaît naturellement avec l'avancée de la level-set. Un tel résultat serait difficile à obtenir avec un modèle de propagation de fissure. Ce résultat a été obtenu avec un maillage adaptatif récursif similaire à ce que nous avons présenté dans la section 1.2.3.1. Le maillage est représenté sur la figure 4.6.



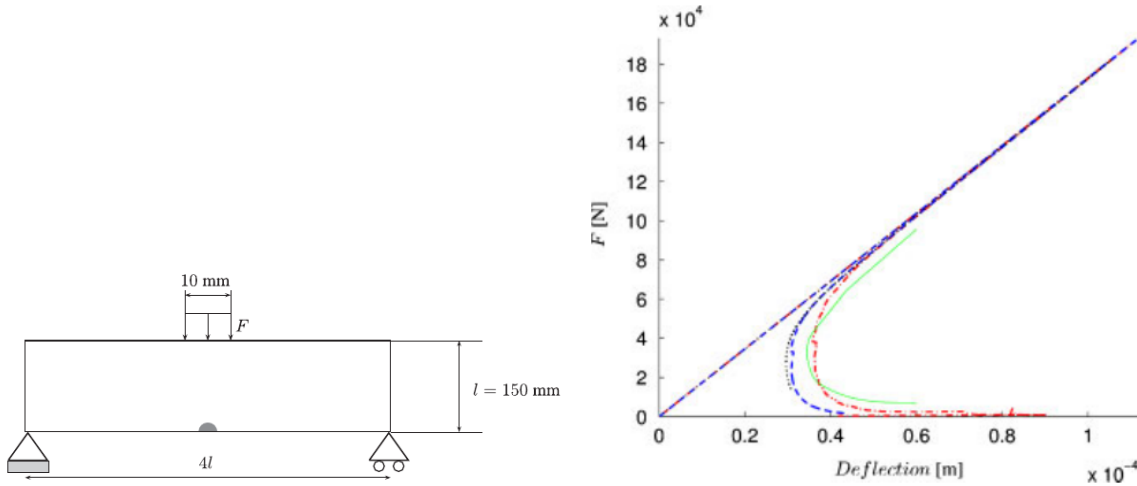


FIGURE 4.3 – flexion 3 points, géométrie et courbe chargement/déflexion obtenue avec plusieurs maillages

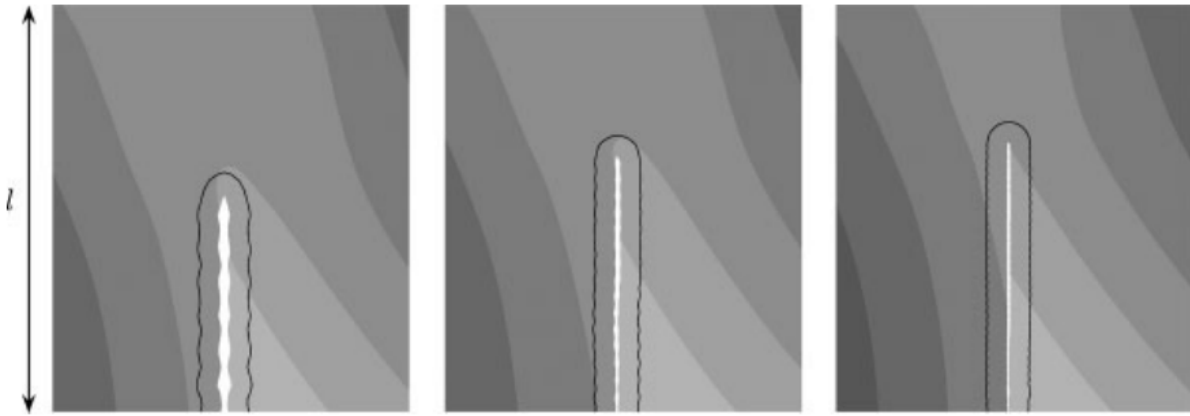


FIGURE 4.4 – flexion 3 points, iso-zéros pour différents maillages au même point de chargement, quand la fissure a suffisamment avancé. Les cellules d'intégration à l'intérieur de l'iso  $l_c$ , où  $d = 1$  ont été retirée pour mieux visualiser la forme de la zone complètement endommagée.

#### 4.2.3.3 Résultats pour des problèmes 3D

Dans le papier de 2016 [Sal+16] soit 3 ans plus tard, nous avons suffisamment avancé pour pouvoir effectuer des calculs 3D avec la TLS. L'implémentation parallèle (MPI) y est décrite, permettant de résoudre des cas de grande taille.

La Figure 4.2.3.3 présente le cas d'une fissuration suite à la torsion d'une craie. Le cas est intéressant, car la surface de fissure est clairement gauche dans la réalité, comme on peut le voir sur la photo. La surface iso- $l_c$  du modèle numérique reproduit très bien cette géométrie.

Nous présentons enfin un dernier cas 3D, l'éprouvette en L, chargée pour provoquer une fissure en mode mixte *I* et *III*. La configuration et les résultats sont présentés sur la Figure 4.2.3.3. La fissure se propage comme attendu, en se vrillant pour accommoder la composante d'ouverture en mode *III*.

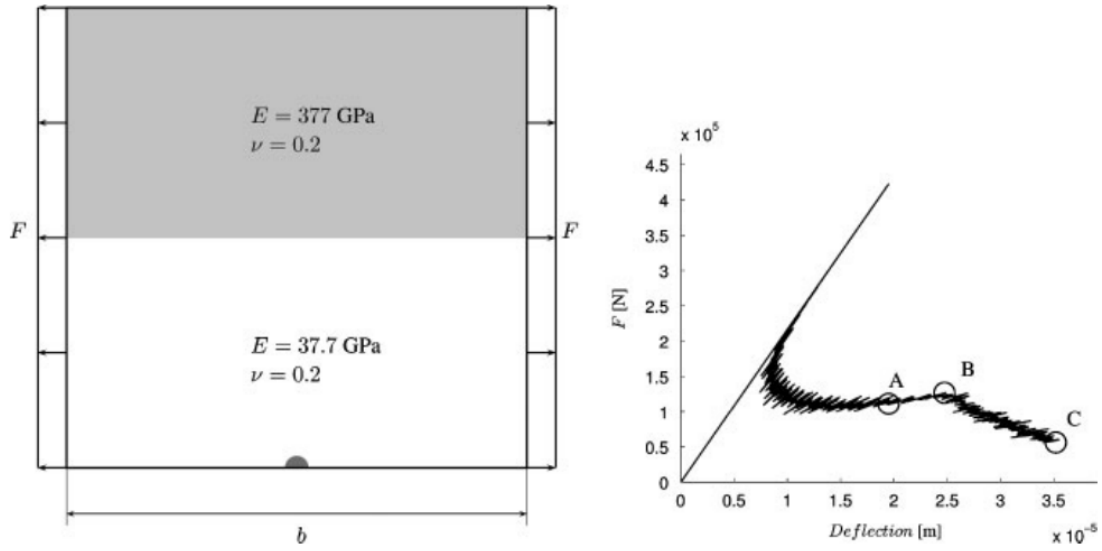


FIGURE 4.5 – Cas du branchement de fissure. À gauche, la géométrie, le chargement et les matériaux. À droite la courbe Force/Déflexion.

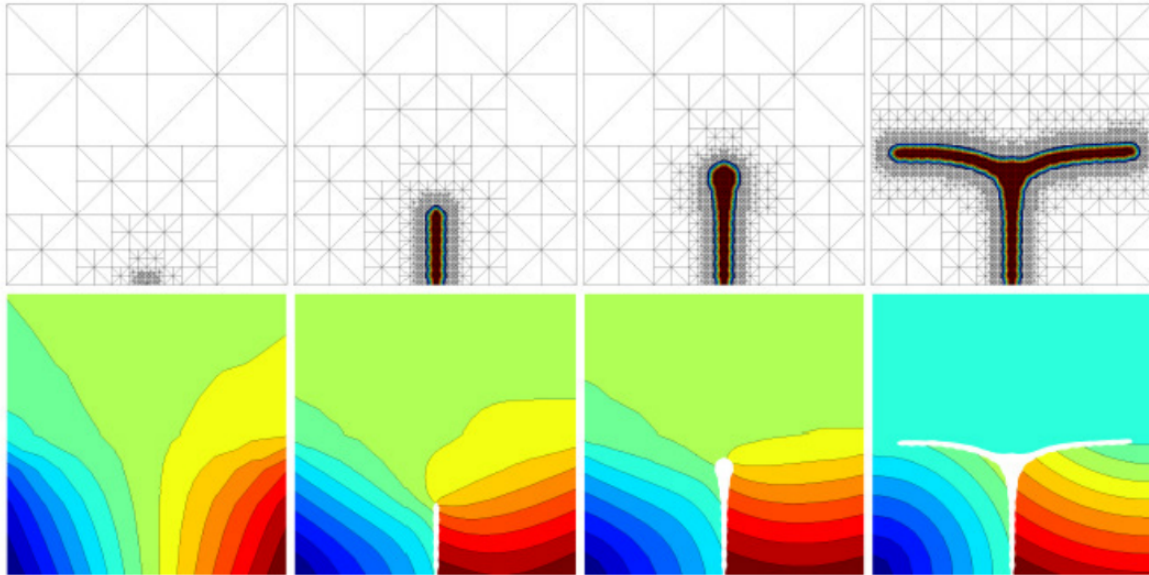


FIGURE 4.6 – Cas du branchement de fissure. De gauche à droite, l'instant initial puis les points A, B, et C de la courbe de chargement repérés sur la Figure 4.5 sont représentés. En haut le maillage et le champ d'endommagement, en bas la norme du champ de déplacement et en blanc la zone  $d = 1$ .

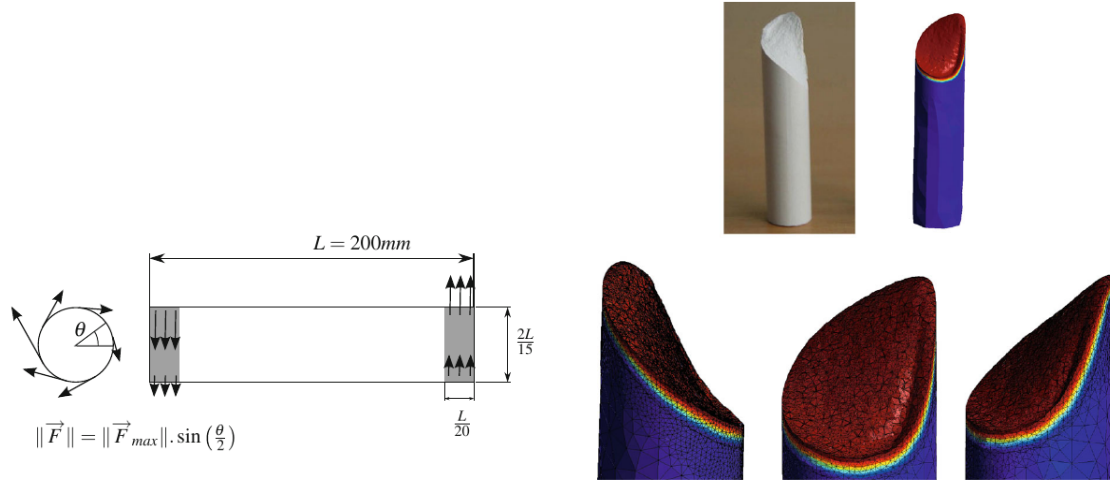


FIGURE 4.7 – À gauche, géométrie et conditions de chargement. À droite et en haut faciès de rupture obtenu en fin de simulation, comparé avec une photo d’une craie réelle. À droite et en bas, différentes vues pour apprécier la géométrie du faciès.

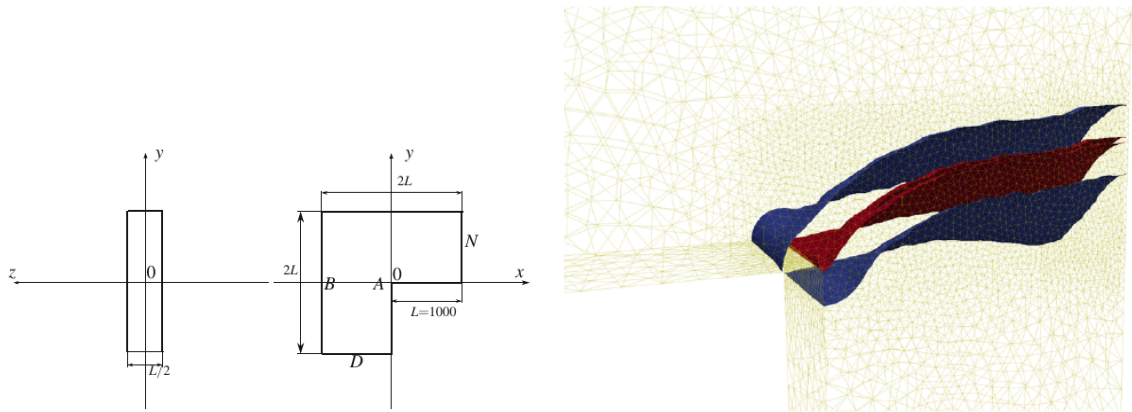


FIGURE 4.8 – À gauche, La géométrie, dimension en  $mm$ . La face D est bloquée en déplacement. La face N a un déplacement imposé dans les directions  $y$  et  $z$ , tel que  $u_y = 4u_z$ . À droite, zone d’endommagement finale, avec, en bleu l’iso-zéro et en rouge l’iso- $l_c$ .

#### 4.2.4 Amélioration de la précision du modèle TLS discret : l'algorithme de double découpe

##### 4.2.4.1 Description et analyse du problème

Dans l'approche TLS, comme nous l'avons vu, l'iso-zéro d'une level-set  $\phi$  décrit l'interface entre la partie saine et la partie endommagée du domaine, c'est-à-dire le front d'endommagement. En utilisant le fait que  $\phi$  est une distance signée à l'iso-zéro on peut définir un second front, celui qui sépare la zone partiellement endommagée de la zone complètement endommagée où  $d = 1$ . Puisque l'endommagement vaut 1 à une distance  $l_c$  de l'iso-zéro, l'interface entre la zone complètement endommagée et la zone partiellement endommagée est l'iso- $l_c$  de  $\phi$ . Numériquement, on doit, par exemple, exclure du domaine d'intégration la zone où  $d = 1$ , c'est-à-dire ce qui se trouve à l'intérieur de l'iso- $l_c$ . Pour définir correctement le champ de déplacement, il faut l'enrichir, de sorte que, deux nœuds séparés par la zone  $d = 1$ , n'interagissent pas directement dans la matrice de rigidité. Une stratégie d'enrichissement relative à ce que l'on vient de décrire a été proposée dans [Ber+12]. Elle repose sur la définition de l'iso- $l_c$ . On comprend donc que la définition discrète de l'iso- $l_c$  est importante pour la qualité des solutions numériques. Dans nos premiers calculs, en utilisant nos outils habituels pour extraire l'iso- $l_c$ , des résultats décevants apparaissaient. Un de ces résultats typiques est montré sur la figure 4.9. On y voit, projeté sur un maillage, un champs  $d$ , obtenu à partir d'une level-set  $\phi$  dont l'iso-zéro est la courbe ovale en noir. La zone  $d = 1$  apparaît en blanc. L'iso- $l_c$  est l'interface entre la zone blanche et la zone rouge.

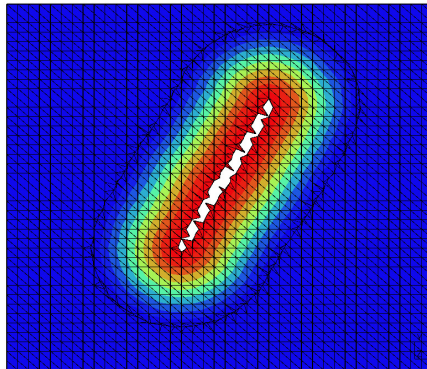


FIGURE 4.9 – Mauvaise découpe de l'iso  $l_c$

On peut noter que l'iso- $l_c$  est ici très chahutée, en "dents de scie". Cela a des conséquences sur la précision des calculs. Un des effets peut se voir sur le premier exemple que l'on a présenté dans la section précédente (4.2.3.1). C'est la cause des oscillations que nous avons notées sur l'iso-zéro. Pour comprendre ce qu'il se passe ici, il faut se rappeler que la fonction de niveau est représentée numériquement par une approximation linéaire par morceau, sur le maillage de calcul. Dans la figure 4.9, on représente une vision idéalisée d'un cas TLS typique où la zone d'endommagement s'est développée comme une fissure, avec une zone  $d = 1$  assez étroite en son cœur. On représente selon une coupe perpendiculaire à la fissure la fonction de niveau et l'endommagement associé en rouge. Sur le graphique du milieu on trouve le cas idéal analytique, sur celui de droite le cas discret. On note que la fonction de niveau présente une discontinuité de pente, au point à équidistance de l'iso-zéro. Ce point est un point de ce que l'on appelle le squelette de l'iso-zéro. Dans le cas idéal, les deux points de l'iso- $l_c$  sont clairement définis, apparaissant de part et d'autre du squelette. Dans un cas discret comme celui représenté sur la droite, la level-set n'est connue qu'aux nœuds du maillage. Cela permet d'obtenir par interpolation et de façon très précise les points  $A$  et  $B$  de l'iso-zéro. Par contre l'iso- $l_c$

est très mal définie : elle n'existe même pas sur notre exemple discret, et il n'y a alors pas de zone complètement endommagée sur le segment  $AB$  de la discrétisation présentée. L'interpolation linéaire par morceau représente très mal la level-set au voisinage du squelette. Il aurait suffi d'un seul nœud

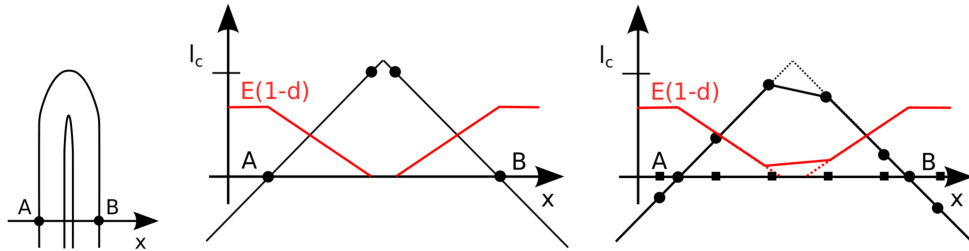


FIGURE 4.10 – Mauvaise découpe de l'iso : explication

du maillage entre les deux points de l'iso- $l_c$  idéale pour que la situation change et qu'une zone  $d = 1$  apparaisse dans la version discrète. Cela explique le profil en dents de scie observé sur la Figure 4.9. Il est le résultat de la position des nœuds par rapport à l'iso- $l_c$  idéal.

On se trouve donc devant une forte dépendance au maillage pour ce qui est du profil de l'iso  $l_c$ . Bien sûr, si la largeur de la bande  $d = 1$  avait une longueur caractéristique, il suffirait d'avoir un maillage dont les éléments soient plus petits que celle-ci pour éviter le problème. Malheureusement, dans les cas typiques où le modèle développe une zone d'endommagement ressemblant à une fissure, la relaxation des contraintes, quand celle-ci apparaît, fait que les forces motrices faisant évoluer l'endommagement en "tirant" sur  $\Gamma_0$  dans des directions perpendiculaires à la fissure (comme sur les points A et B de la Figure 4.10), deviennent très faibles de part et d'autre de la fissure. La progression de l'endommagement ne se fait plus dans cette direction. C'est en fait vers l'avant de la "fissure", là où de l'énergie élastique continue de s'accumuler, que le front progresse. La largeur de la bande  $d = 1$ , dans ces situations reste donc faible, d'un ordre inférieur à la taille de maille. Raffiner le maillage n'apportera donc pas une solution définitive ici.

#### 4.2.4.2 Construction de la "level-set vectorielle signée"

Pour améliorer les résultats, nous avons mis au point une approche plus complexe dite de double découpe. Elle nécessite une reconstruction un peu plus poussée de l'iso- $l_c$ , en partant non pas de la valeur de  $\phi$ , qui proche du squelette est nécessairement mauvaise au niveau discret, comme nous l'avons vu sur la Figure 4.10, mais de l'iso-zéro, qui, elle, est bien définie.

La première étape de la méthode demande de construire un nouveau champ discret sur le maillage, qu'on appelle la fonction distance vectorielle signée ou encore la vls. À chaque nœud à l'intérieur de l'iso-zéro ( $\phi \leq 0$ ), on va affecter un signe et un vecteur. Le signe détermine si le nœud en question est à l'intérieur (-) ou à l'extérieur (+) de la zone  $d = 1$ . Le vecteur doit pointer vers un point estimé de l'iso  $l_c$ , le plus proche du nœud qui porte le vecteur. La construction de la vls ne doit dépendre que de la seule information considérée comme fiable : l'iso-zéro (discrete) de  $\phi$ .

On appelle  $\vec{x}$  le nœud considéré. Le signe de la vls en  $\vec{x}$  est donné par le signe de  $l_c - \phi(\vec{x})$ . C'est-à-dire que la position du nœud relativement à l'iso  $l_c$  est le même que celle obtenue par la level-set discrète. L'étape suivante est de trouver le point le plus proche  $\vec{x}_0$  de  $\vec{x}$  sur l'iso-zéro. Plusieurs stratégies sont possibles ici. Nous avons par exemple inséré les segments de l'iso-zéro dans une structure de type K-d tree pour permettre une recherche rapide de la distance entre n'importe quel nœud et le front. Nous avons pour cela utilisé les bibliothèques `ann`<sup>2</sup> ou encore `CGAL`<sup>3</sup>. Une autre possibilité est

2. <http://www.cs.umd.edu/~mount/ANN/>

3. <http://www.cgal.org/>

d'exploiter les informations obtenues sur les directions des gradients de  $\phi$  au nœud du maillage, au cours de l'application de l'algorithme *fast-marching* [Set99] que nous utilisons pour normaliser la level-set après l'avancée du front. A partir de  $\vec{x}_0$ ,  $l_c$  et  $\vec{x}$  on construit un nouveau point  $\vec{x}_c$ , potentiellement

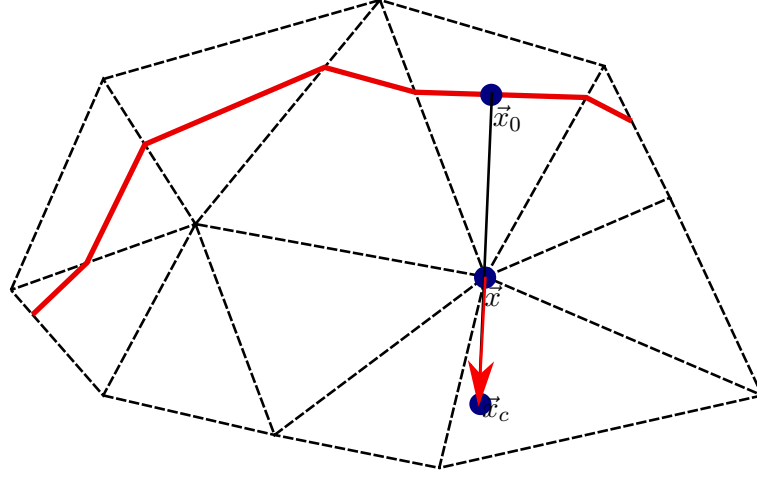


FIGURE 4.11 – Construction de la VLS

sur l'iso  $l_c$  comme suit :

$$\vec{x}_c = \vec{x} + (\vec{x}_0 - \vec{x}) - l_c \frac{\vec{x}_0 - \vec{x}}{\|\vec{x}_0 - \vec{x}\|} \quad (4.42)$$

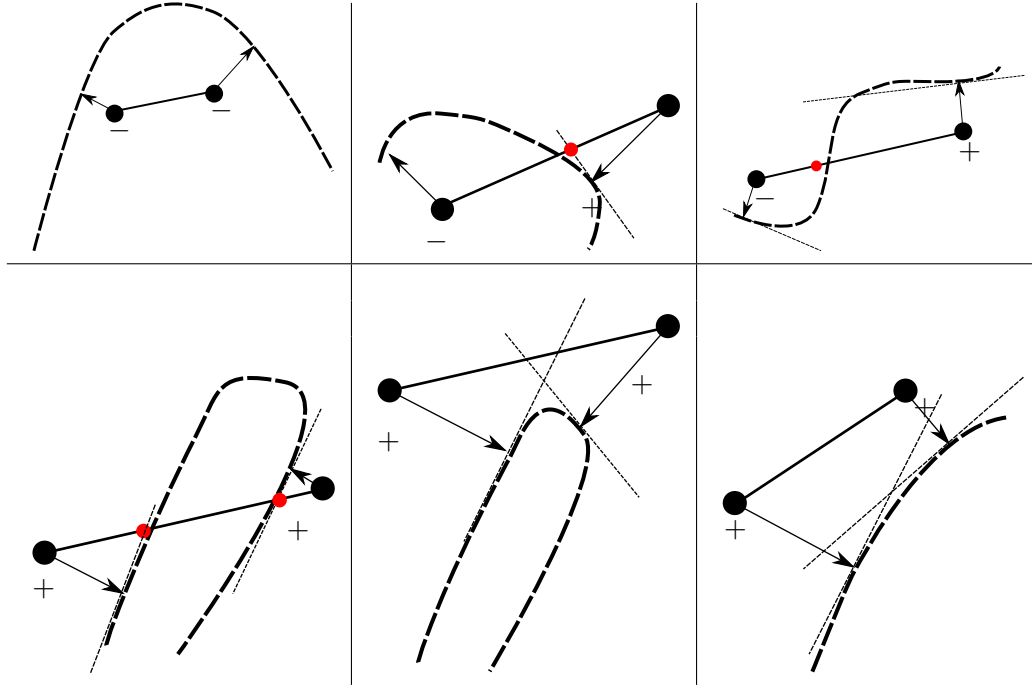
Le vecteur  $\vec{v} = \vec{x}_c - \vec{x}$  attaché au point  $\vec{x}$  est la partie vectorielle de la vls au nœud.

#### 4.2.4.3 Découpe des arêtes

C'est à partir de cette vls au nœud que l'algorithme de découpage et d'extraction de l'iso- $l_c$  est construit. On suppose maintenant que la vls est connue (de par son signe et son vecteur) à chaque nœud du maillage à l'intérieur de l'iso-zéro. L'algorithme procède en premier lieu par une analyse de chaque arête, pour déterminer combien de fois et en quels points elle est coupée par l'iso- $l_c$ . Pour obtenir un algorithme final simple et compte tenu des informations que l'on possède (la vls aux deux nœuds de l'arête) on considérera qu'une arête peut être coupée par l'iso- $l_c$  que deux fois au maximum. C'est de là que vient le nom de notre algorithme. En fonction des signes de la vls au nœud d'une arête, trois cas se présentent :

1. -- : les deux nœuds sont à l'intérieur de l'iso  $l_c$ . L'arête pourrait être coupée un nombre pair de fois par l'iso- $l_c$ . On choisit dans ce cas de considérer que l'arête est entièrement à l'intérieur de l'iso- $l_c$ . Celle-ci ne sera donc pas découpée. **0 découpe.**
2. -+ : un nœud est à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de l'iso  $l_c$  : l'arête intersecte donc nécessairement l'iso- $l_c$  un nombre impair de fois. Comme nous limitons le nombre de découpe à deux, on ne la découpera qu'en un point, quel que soient les valeurs des deux vecteurs, pour assurer la cohérence topologique. **1 découpe.**
3. ++ : les deux nœuds sont à l'extérieur de l'iso  $l_c$ . L'arête intersecte donc nécessairement l'iso- $l_c$  un nombre pair de fois. On limite ici les cas possibles à :
  - aucune découpe : l'arête est considérée comme extérieure à l'iso- $l_c$ .
  - deux découpes : on considère que l'arête intersecte 2 fois l'iso- $l_c$ .**0 ou 2 découpes.**



FIGURE 4.12 – Cas de découpe d’une arête par l’iso- $l_c$ 

L’algorithme de découpe va donc s’appuyer sur ces choix. Chaque arête de la zone concernée est examinée en fonction du signe affecté à chacun de ses nœuds. La figure 4.12 représente différentes positions d’une arête relativement à une iso- $l_c$  potentielle, illustrant les différents cas. Les différents choix heuristiques qui ont été faits dans la construction de l’algorithme partent du principe que l’information la plus fiable vient des nœuds +, c’est-à-dire des nœuds qui sont plus proches de l’iso-zéro que les nœud -, l’iso-zéro étant considérée comme l’information "fiable". Chaque arête doit maintenant être effectivement découpée et il faut déterminer la position du, ou des points de coupe, si ils existent. Pour faciliter les discussions, on considère une arête entre deux nœuds  $A$  et  $B$ , paramétrée par  $s$ , telle que l’arête est le segment de droite donné par  $\{\vec{x} = \vec{x}_A + s(\vec{x}_B - \vec{x}_A), s \in [0, 1]\}$ .

**Construction du point de coupe dans le cas  $+-$**  Dans ce cas, on cherche à construire un unique point de coupe, quel que soit les coordonnées des vecteurs à chaque nœud.

L’algorithme va d’abord tenter de le construire en s’appuyant sur l’information portée par le nœud +, appelé  $\vec{x}$ . Le vecteur  $\vec{u}$  qu’il porte est censé pointer vers le point qui lui est le plus proche sur l’iso- $l_c$ . L’iso- $l_c$  idéale devrait donc passer par le point  $\vec{x}_c = \vec{x} + \vec{u}$  et être tangente à un vecteur orthogonal à  $\vec{u}$ . On a ainsi toutes les données pour construire une droite correspondant à la tangente à l’iso- $l_c$  supposée. L’intersection, si elle existe, de cette droite avec l’arête, sera un point de l’iso- $l_c$  discrète, séparant l’arête en deux segments, un segment interne et un segment externe à l’iso  $l_c$ . Si l’intersection n’existe pas, on reprend la construction précédente à partir du nœud -.

Si aucune intersection n’est trouvée, c’est que l’on est dans un cas similaire à la troisième image de la figure 4.12, où la courbure locale de l’iso- $l_c$  idéale aux environs du point  $\vec{x}_c$  varie fortement. Le maillage est trop grossier pour représenter fidèlement cette courbure. Topologiquement, on doit construire quand même un point de coupe et on choisit ici d’utiliser un point de coupe similaire à ce que l’on fait dans le cas d’une level-set classique : on construit une fonction linéaire sur l’arête, allant de la valeur  $-||\vec{u}_A||$  à  $||\vec{u}_B||$ , où  $A$  et  $B$  sont respectivement les nœuds - et + de l’arête considérée, et  $\vec{u}_A$  et  $\vec{u}_B$  sont respectivement les vecteurs de la vls portés par  $A$  et  $B$ . L’intersection entre l’iso- $l_c$

discrète et l'arête est alors prise comme le point où la fonction ainsi construite s'annule.

**Construction des points de coupe dans le cas ++** Les nœuds  $A$  et  $B$  sont tous les deux à l'extérieur de l'iso- $l_c$ . On va chercher les valeurs  $s_A$  et  $s_B$  des paramètres des points d'intersection entre la droite  $\{\vec{x} = \vec{x}_A + s(\vec{x}_B - \vec{x}_A) | s \in \mathcal{R}\}$  et les tangentes à l'iso- $l_c$  idéale aux points  $\vec{x}_{cA} = A + \vec{u}_A$  et  $\vec{x}_{cB} = B + \vec{u}_B$ . Si ces deux points existent, il faut ensuite vérifier qu'ils sont bien dans le segment  $[AB]$  ( $s_A, s_B \in [0, 1]$ ). On s'assure de plus que les points sont ordonnés correctement sur le segment, en vérifiant  $s_A \leq s_B$ . Si toutes les conditions précédente sont vérifiées, l'arête est divisée en trois parties, les segments  $0 \leq s \leq s_A$  et  $s_B \leq s \leq 1$  d'une part, qui sont à l'extérieur de l'iso- $l_c$  discrète, et  $s_A \leq s \leq s_B$  d'autre part, considéré à l'intérieur de l'iso- $l_c$  discrète. Ce cas est typiquement représenté par la quatrième image de la figure 4.12. Si les points d'intersections existent et sont sur l'arête ( $s_A, s_B \in [0, 1]$ ) mais que  $s_A > s_B$  alors on est plutôt dans le cas de la cinquième image de la figure 4.12. Si ils existent, mais sont à l'extérieur du segment, ou qu'ils n'existent pas, ou encore qu'il en existe qu'un seul, on est dans cas représentatif de la dernière image de la figure. Dans tous les cas précédents, on ne construit pas de point de coupe.

À l'issue de cette phase de l'algorithme, on a construit des points de coupe sur certaines arêtes du maillage. Ces points vont être les nœuds de l'iso- $l_c$  discrète. Certaines arêtes ont été divisées en deux ou trois segments classifiés comme étant interne ou externe à l'iso- $l_c$ . Les autres arêtes du maillage sont classifiées comme étant soit à l'extérieur ou à l'intérieur de l'iso  $l_c$ .

#### 4.2.4.4 Découpe des éléments

Le reste de l'algorithme va permettre de construire un maillage de l'iso- $l_c$  en reliant les nœuds de coupe, tout en construisant une partition de l'espace en polygones inscrits dans le maillage initial, classés à l'intérieur ou à l'extérieur de l'iso  $l_c$ . Pour cela, chaque triangle du maillage ayant au moins une arête coupée est analysé. La figure 4.13 présente tous les cas possibles de découpe d'un triangle en fonction des découpes de ses arêtes. Les points rouges représentent les points de coupe obtenus en analysant les arêtes, les segments rouges représentent les arêtes que l'on identifie comme étant des arêtes du maillage de l'iso- $l_c$  discrète et les zones grisées représentent les zones identifiées comme étant interne à l'iso- $l_c$  discrète. Ces choix de patron de découpe permettent de garantir la construction du maillage de l'iso- $l_c$  numérique et de la répartition du maillage en sous-zones internes ou externes à l'iso- $l_c$ .

#### 4.2.4.5 Résultats

La figure 4.14 présente deux cas pour lesquels l'algorithme de double découpe a été appliqué. À gauche, on trouve un cas où la fonction level-set a été construite analytiquement, de telle manière que le squelette de l'iso-zéro possède un point triple et pour laquelle la largeur de la surface à l'intérieur de l'iso  $l_c$  est plus petite que la longueur des arêtes. Ce cas est particulièrement défavorable pour l'algorithme de découpe classique : on a pratiquement aucun nœud à l'intérieur de l'iso- $l_c$ . Comme on peut le constater, l'algorithme de double découpe permet d'extraire une représentation très acceptable de l'iso- $l_c$ , même sur ce maillage grossier. À droite, on a une image d'un résultat de calcul TLS pour une mise en place identique au cas qui a introduit la présente section. Cette image est à comparer à celle présente sur la figure 4.9. On constate une disparation des motifs en dents de scie, ainsi qu'une représentation très étroite de la zone complètement endommagée. Ainsi, le modèle TLS permet, même sur un maillage relativement grossier, de représenter efficacement un problème correspondant à une propagation de fissure, en considérant comme fissure la zone, même très fine où  $d = 1$ . Pour obtenir un tel résultat une stratégie d'enrichissement du champ de déplacement éléments finis est nécessaire afin que les déplacements de part et d'autre de la bande  $d = 1$  soient bien numériquement indépendants. Cette stratégie, sur laquelle nous ne revenons pas ici, a été décrite dans l'article [Ber+12].



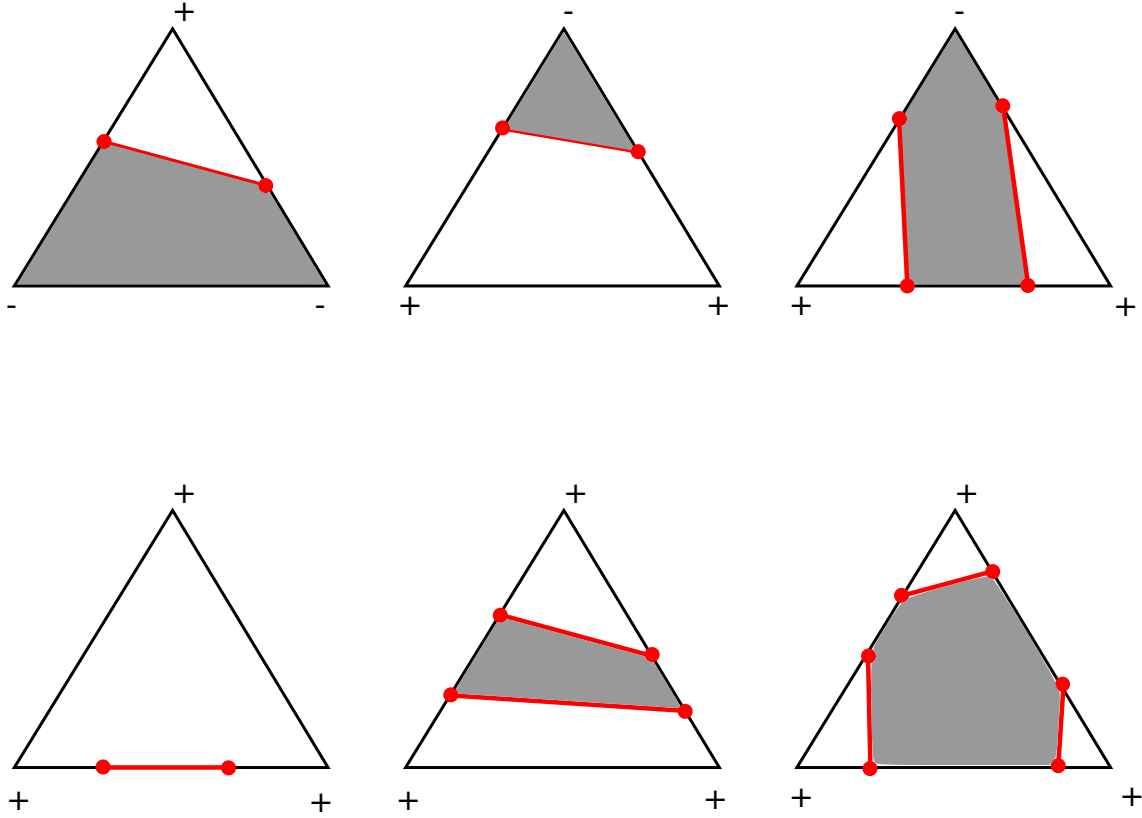
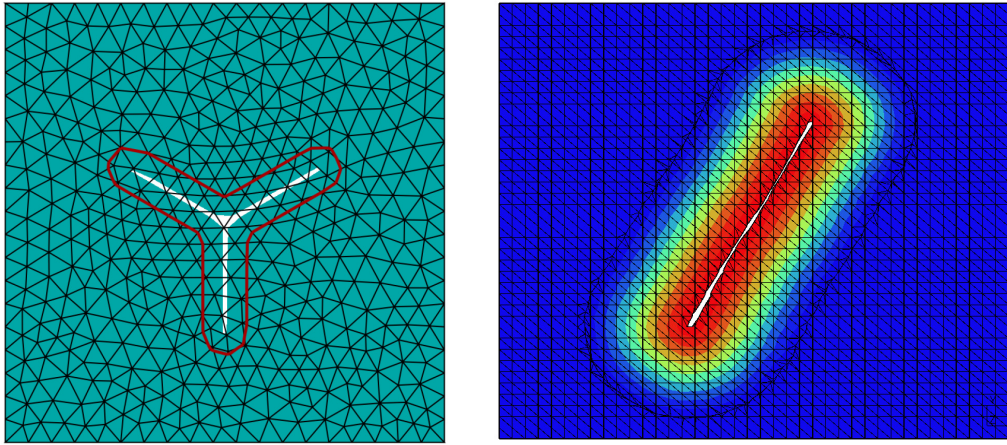


FIGURE 4.13 – Patrons de découpes d'un triangle

FIGURE 4.14 – Découpes de l'iso  $l_c$  en utilisant l'algorithme de double découpe

L'extension de l'algorithme de la double découpe au cas 3D a demandé un effort considérable, le nombre de "patrons" de découpe des tétraèdres reliés à la combinatoire des différents cas de découpe de ses 6 arêtes étant relativement grand. Après avoir entièrement implémenté la version 2D, j'ai mené ce travail en collaboration étroite avec A. SALZMAN, à l'époque de sa thèse. On trouvera plus de détails dans [Sal+16] notamment.

#### 4.2.5 Conclusion sur la TLS

Plus de dix après le premier papier sur la TLS, beaucoup de résultats intéressants ont été obtenus. Cela n'a été possible, au vu de la complexité de l'implémentation discrète pour obtenir des résultats précis et robustes, que grâce au travail de toute une équipe dont une grande partie a été financée grâce à l'ERC-XLS. Pour pouvoir avancer, il a fallu mettre en place une stratégie de développement logiciel efficace de manière à pouvoir capitaliser sur les différents travaux. Outre les publications scientifiques, un des résultats des travaux autour de la TLS est la constitution d'une librairie : **eXlibris**. Elle s'est développée autour de différents modules qui constituaient, à l'époque où j'ai rejoint l'équipe de N. MOËS, en 2006, une base pour construire des applications autour de X-FEM. Beaucoup de techniques de programmation avancées ont été utilisées pour construire ce noyau. La liste en est longue : programmation générique inspirée de la STL, programmation orientée objet, utilisation de bibliothèques via des interfaces, utilisation efficace de MPI pour l'échange de message entre les processeurs. J'en oublie sûrement. Ce travail de développement prendrait plus de pages pour être décrit convenablement que n'en contient le présent document. Dans ce travail collectif, j'ai joué un rôle essentiel de programmeur, d'expert et de coordinateur. La librairie **eXlibris** est disponible sous licence libre sur la plateforme git du GeM <https://git.gem.ec-nantes.fr/eXlibris>.

Pendant ce temps, les méthodes phase-fields se sont développées en mécanique de l'endommagement. Elles sont bien plus gourmandes en termes de ressources informatiques que ne l'est la TLS. Elles nécessitent en effet des maillages extrêmement fins et des algorithmes d'optimisation sous contrainte qui prennent bien plus de temps que la résolution d'un système linéaire si on veut les résoudre correctement. Pourtant, ces méthodes sont extrêmement simples à implémenter et ont acquis de ce fait un succès fulgurant ces dernières années. Depuis deux ans maintenant, on est repassé par le tableau blanc pour proposer une nouvelle approche, a priori beaucoup plus simple à programmer et qui semble prometteuse. C'est l'objet de la prochaine section.

## 4.3 Le modèle Lip-field

### 4.3.1 Introduction

Le modèle TLS que nous venons de passer en revue est une façon de régulariser un modèle d'endommagement. Il repose sur une définition du champ  $d$  à partir de la distance à un front d'endommagement. On peut dire que cela revient à imposer une contrainte d'égalité sur la norme du gradient d'endommagement sur les zones où l'endommagement existe et est inférieur à 1. La possibilité d'une contrainte d'inégalité sur le gradient d'endommagement a également été considérée dans [Moë+14b ; Ste+17] permettant de combiner des champs d'endommagements diffus et localisant. L'avantage de cette inégalité a été souligné dans [Fré+17], où il est montré que la contrainte d'inégalité est convexe, contrairement à la contrainte d'égalité. Cet article démontre également qu'une level-set dans ce cadre n'est plus nécessaire : une approche variationnelle avec des multiplicateurs de Lagrange imposant la contrainte d'inégalité peut être utilisée. En suivant les idées de [Fré+17], une implémentation en est présentée dans [Val+19].

Nous présentons dans la suite, les premiers résultats d'une nouvelle méthode pour régulariser les modèles d'endommagement, inspirée de nos travaux sur la TLS et les remarques précédentes. Nous appelons cette méthode le modèle Lip-field, la régularisation étant obtenue en imposant que le champ d'endommagement ait une régularité de Lipschitz pour une longueur caractéristique fixée.

Pour présenter le concept du modèle de Lip-field, le cadre attractif d'une approche variationnelle énergétique incrémentale est considéré. L'intérêt de ce cadre a d'abord été démontré pour la visco-plasticité [Mia86 ; Ort+99]. Il a ensuite été utilisé comme élément de base pour l'approche variationnelle de la rupture [Bou+08]. Lorsqu'un adoucissement est possible, le potentiel incrémental n'est plus convexe, mais seulement séparément convexe par rapport au déplacement (et éventuellement des variables internes non adoucissantes) d'un côté et à la variable d'endommagement de l'autre. Il est donc naturel de procéder à une minimisation alternée de problèmes convexes successifs [Boy04]. La contrainte convexe Lip-field est ajoutée comme une contrainte supplémentaire dans la minimisation alternée.

Un des résultats importants de l'approche est que l'on peut calculer facilement des bornes supérieure et inférieure de l'endommagement, permettant de guider la minimisation sous contraintes de Lipschitz. En effet, ces bornes permettent de réduire considérablement la zone sur laquelle la condition de Lipschitz doit être activée.

Une implémentation unidimensionnelle par éléments finis est développée dans cette section pour l'approche proposée. L'extension aux plus grandes dimensions sera discutée à la section suivante. Le potentiel doit être minimisé pour les valeurs nodales du déplacement et pour les variables internes situées au point d'intégration dans chaque élément fini, y compris la variable d'état d'endommagement. En d'autres termes, avec l'approche Lip-field, la variable d'endommagement peut être conservée aux points d'intégration avec les autres variables internes et n'a pas besoin d'être stockée aux nœuds, suivant ainsi la pratique courante pour l'analyse non-linéaire par éléments finis.

Nous allons dans un premier temps décrire la formulation mécanique classique pour les modèles de matériaux non endommageables. Dans la sous-section 4.3.3, une variable d'endommagement est introduite et la contrainte de Lipschitz est imposée. Des modèles endommageables élastiques et plastiques sont présentés dans la sous-section 4.3.3.1 pour le cadre unidimensionnel. L'analyse par éléments finis est effectuée dans la section 4.3.4. Un premier bilan sera dressé avant de passer à la dimension supérieure.

### 4.3.2 Matériaux standards généralisés

Nous considérons la déformation d'un corps, occupant initialement un domaine  $\Omega$ , décrite par un champ de déplacement  $\vec{u}$ . Pour simplifier, nous supposons que les déformations sont petites et

quasi-statiques. La contrainte de Cauchy est notée  $\bar{\sigma}$  et la déformation  $\bar{\epsilon}$  est encore définie par :

$$\bar{\epsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\vec{u} + (\bar{\nabla}\vec{u})^T) \quad (4.43)$$

où  $\bar{\nabla}$  indique l'opérateur gradient. En ce qui concerne les conditions aux limites, le déplacement est contrôlé sur une partie de la frontière notée  $\Gamma_u$  supposée fixe dans le temps. Sur le reste de la frontière, on suppose, par simplicité, les forces de traction nulles. Pour être cinématiquement admissible à un instant  $t$ , le champ de déplacement doit appartenir à  $U(t)$  :

$$U(t) = \{\vec{u} \in H^1(\Omega) : \vec{u} = \vec{u}_d(t) \text{ on } \Gamma_u\} \quad (4.44)$$

La condition d'équilibre s'écrit comme suit :

$$\int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon}(\vec{u}^*) \, d\Omega = 0, \quad \forall \vec{u}^* \in U^* \quad (4.45)$$

où

$$U^* = \{\vec{u} \in H^1(\Omega) : \vec{u} = 0 \text{ on } \Gamma_u\} \quad (4.46)$$

Les équations de cinématique et d'équilibre (4.44-4.45) doivent être complétées par le modèle constitutif. Nous considérons le formalisme du matériau standard généralisé introduit dans [Hal+75 ; Ger+83]. L'ensemble des variables internes est noté  $\alpha$ . Il s'agit d'une notation générique qui décrit un ensemble de variables scalaires, vectorielles ou tensorielles. Le modèle est caractérisé par un potentiel d'énergie libre  $\varphi(\bar{\epsilon}, \alpha)$  et un potentiel de dissipation  $\psi(\dot{\alpha}, \alpha)$ . Nous introduisons ensuite une discrétisation implicite en temps et utilisons l'approche variationnelle énergétique. Considérons le déplacement et les variables internes  $(\vec{u}_n, \alpha_n)$  connus à un certain instant  $t_n$ . On cherche le couple  $(\vec{u}_{n+1}, \alpha_{n+1})$  à l'instant suivant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  comme la solution d'un problème de minimisation :

$$(\vec{u}_{n+1}, \alpha_{n+1}) = \arg \min_{\substack{\vec{u}' \in U_n \\ \alpha' \in A_n}} F(\vec{u}', \alpha'; \vec{u}_n, \alpha_n, \Delta t) \quad (4.47)$$

où  $U_n$  est une notation abrégée pour  $U(t_{n+1})$  et  $A_n$  indique la restriction sur  $\alpha_{n+1}$ . Le potentiel incrémental  $F$  implique les potentiels d'énergie et de dissipation  $\varphi$  et  $\psi$ . Des exemples de potentiels incrémentaux seront donnés dans la section 4.3.3.1.

Pour des raisons de simplicité, nous considérerons des modèles de matériaux indépendants du temps. Dans ce cas, l'expression de  $F$  ne dépend pas explicitement de  $\vec{u}_n, \alpha_n$  et  $\Delta t$ . L'extension aux modèles dépendant du temps n'introduit pas de difficultés. De plus, pour alléger la notation, nous laissons tomber les indices  $n + 1$ . Le problème de minimisation est alors :

$$(\vec{u}, \alpha) = \arg \min_{\substack{\vec{u}' \in U_n \\ \alpha' \in A_n}} F(\vec{u}', \alpha') \quad (4.48)$$

Nous supposons que les domaines  $U_n$  et  $A_n$  sont convexes et que  $F$  est strictement convexe par rapport à la paire  $(\vec{u}, \alpha)$  sur  $U_n \times A_n$ . Ces conditions garantissent que la minimisation donne une solution unique à chaque pas de temps. La condition de convexité de  $F$  exclue les modèles adoucissants. La minimisation est traditionnellement résolue par une séquence répétée de deux étapes : le calcul des variables internes (et de la contrainte) pour un champ de déplacement donné, suivi de la correction du champ de déplacement. À l'itération  $m$ , les deux étapes sont données ci-dessous :

$$\alpha^{m+1} = \arg \min_{\alpha \in A_n} F(\vec{u}^m, \alpha) \quad (4.49)$$

$$\{\vec{u}^{m+1}\} = \{\vec{u}^m\} + (K^m)^{-1} R^m, \quad \vec{u}^{m+1} \in U_n \quad (4.50)$$

La première étape, (4.49), est purement locale et peut être effectuée indépendamment à chaque point matériel. La deuxième étape, (4.50), implique une résolution linéaire qui met à jour les degrés de liberté  $\{\vec{u}\}$  associés au champ  $\vec{u}$ . La matrice  $K$  dépend des variables internes actuelles  $\alpha^{m+1}$  et le vecteur résidu  $R$  dépend de la contrainte courante  $\bar{\sigma}^{m+1}$ . La matrice peut être l'opérateur tangent algorithmique [Sim+97] ou une approximation de celui-ci. Le solveur linéaire peut éventuellement être suivi d'une recherche linéaire pour améliorer encore la solution.

### 4.3.3 Variable d'adoucissement et régularisation de Lipschitz

Nous considérons maintenant que le modèle possède une variable scalaire supplémentaire  $d$  responsable de l'adoucissement. Le problème d'optimisation devient :

$$(\vec{u}, \alpha, d) = \arg \min_{\substack{(\vec{u}', \alpha') \in U_n \times A_n \\ d' \in D_n}} F(\vec{u}', \alpha', d') \quad (4.51)$$

$F$  n'est plus convexe et on peut s'attendre à plusieurs minima locaux et également à la non-unicité du minimum global (c'est-à-dire plusieurs solutions menant au même minimum global), ainsi qu'à l'existence de points selles. Bien que  $F$  ne soit pas convexe par rapport au triplet  $(\vec{u}, \alpha, d)$ , nous imposons que celle-ci soit convexe par rapport au couple  $(\vec{u}, \alpha)$  pour tout  $d \in D_n$  et d'être convexe par rapport à  $d$  pour tous les  $(\vec{u}, \alpha) \in U_n \times A_n$ .

Étant donné un champ  $d$  sur le domaine  $\Omega$ , la constante de Lipschitz associée à ce champ est la valeur minimale de  $M$  telle que la relation suivante soit respectée :

$$|d(\vec{x}) - d(\vec{y})| \leq M \text{dist}(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \Omega \quad (4.52)$$

où  $\text{dist}(\vec{x}, \vec{y})$  est la longueur du plus court chemin à l'intérieur de  $\Omega$  joignant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  (la distance est considérée comme infinie si les deux points ne peuvent pas être reliés à l'intérieur de  $\Omega$ ). La fonction  $\text{dist}$  est une métrique puisqu'elle satisfait, pour tous les  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Omega$  :

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y} \quad (4.53)$$

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \text{dist}(\vec{y}, \vec{x}) \quad (4.54)$$

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) \leq \text{dist}(\vec{x}, \vec{z}) + \text{dist}(\vec{z}, \vec{y}) \quad (4.55)$$

La valeur  $M$  définie ci-dessus est notée  $\text{lip}(d)$ . Nous définissons l'espace de régularisation pour le champ d'endommagement :

$$L = \{d \in L^\infty(\Omega) : \text{lip}(d) \leq 1/l\} \quad (4.56)$$

où  $l$  est la longueur de régularisation. L'ensemble  $L$  est convexe. Nous cherchons la solution comme "un" des minimas.

$$(\vec{u}, \alpha, d) = \arg \min_{\substack{(\vec{u}', \alpha') \in U_n \times A_n \\ d' \in D_n \cap L}} F(\vec{u}', \alpha', d') \quad (4.57)$$

Nous procédons par minimisation alternée.

$$(\vec{u}^{k+1}, \alpha^{k+1}) = \arg \min_{(\vec{u}, \alpha) \in U_n \times A_n} F(\vec{u}, \alpha, d^k) \quad (4.58)$$

$$d^{k+1} = \arg \min_{d \in D_n \cap L} F(\vec{u}^{k+1}, \alpha^{k+1}, d) \quad (4.59)$$

Pour la première minimisation, la variable d'endommagement est gelée et ce problème est donc identique au problème (4.48). Il s'agit d'une étape classique de calcul d'équilibre avec variables internes non-adoucissantes.

La deuxième minimisation, (4.59), est moins courante. La fonction objectif est convexe (et séparable) ainsi que la contrainte  $D_n$ . La contrainte de Lip est non-locale, car elle lie les variables

d'endommagement entre les points. L'optimisation pour trouver  $d$  est donc potentiellement coûteuse numériquement. La bonne nouvelle est que la recherche de  $d$  peut être décomposée en trois étapes, ce qui réduit considérablement le coût de l'optimisation. La première étape consiste à créer un champ d'essai de  $d$  noté  $\bar{d}$  en ignorant la contrainte de Lipschitz et en effectuant une minimisation découplée en chaque point :

$$\bar{d} = \arg \min_{d \in D_n} F(\bar{u}^{k+1}, \alpha^{k+1}, d) \quad (4.60)$$

Si l'endommagement d'essai  $\bar{d}$  satisfait à la contrainte de Lipschitz, c'est la solution que nous recherchons, comme l'indique la figure 4.15 (à gauche). Dans le cas contraire, le champ d'endommagement optimal sera différent de  $\bar{d}$ .

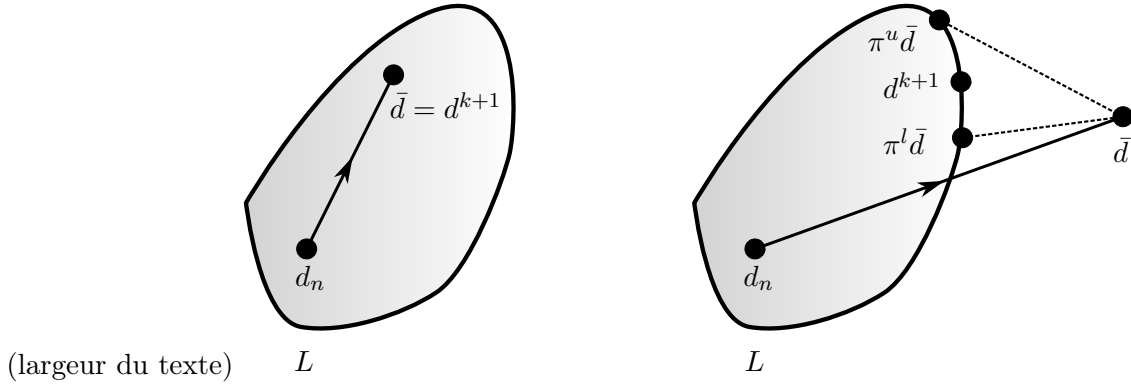


FIGURE 4.15 – Une esquisse de la mise à jour locale  $\bar{d}$  à partir du champ d'endommagements connu précédent  $d_n$ . Si la mise à jour satisfait la contrainte Lip (à gauche), on a directement la solution  $d^{k+1}$ . Sinon (à droite), la mise à jour locale doit être projetée vers la contrainte Lip tout en minimisant la fonction objectif  $F$ . Les projections supérieure et inférieure donnent des limites à la solution.

Comme évoqué précédemment, nous pouvons estimer efficacement un sous domaine sur lequel  $d^{k+1}$  peut être différent de  $\bar{d}$ . Nous définissons pour cela deux projections sur  $L$ , une projection "inférieure"  $\pi^l$  et une projection "supérieure"  $\pi^u$  :

$$\pi^l(\bar{d}(\vec{x})) = \min_{\vec{y} \in \Omega} (\bar{d}(\vec{y}) + \frac{1}{l}, \text{dist}(\vec{x}, \vec{y})) \quad (4.61)$$

$$\pi^u(\bar{d}(\vec{x})) = \max_{\vec{y} \in \Omega} (\bar{d}(\vec{y}) - \frac{1}{l}, \text{dist}(\vec{x}, \vec{y})) \quad (4.62)$$

Nous montrons en annexe (paragraphe 4.5.1) que ces projections satisfont l'inégalité suivante :

$$d_n \leq \pi^l \bar{d} \leq \bar{d} \leq \pi^u \bar{d} \leq 1 \quad (4.63)$$

et fournissent des limites pour l'endommagement optimal

$$\pi^l \bar{d} \leq d^{k+1} \leq \pi^u \bar{d} \quad (4.64)$$

Une conséquence importante est que les solutions d'essai et optimale coïncident partout où les limites sont égales :

$$\pi^l \bar{d}(\vec{x}) = \pi^u \bar{d}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad d^{k+1}(\vec{x}) = \bar{d}(\vec{x}) \quad (4.65)$$

Une esquisse des projections est donnée dans la figure 4.15 et ces dernières sont également illustrées sur l'exemple unidimensionnel de la figure 4.16.

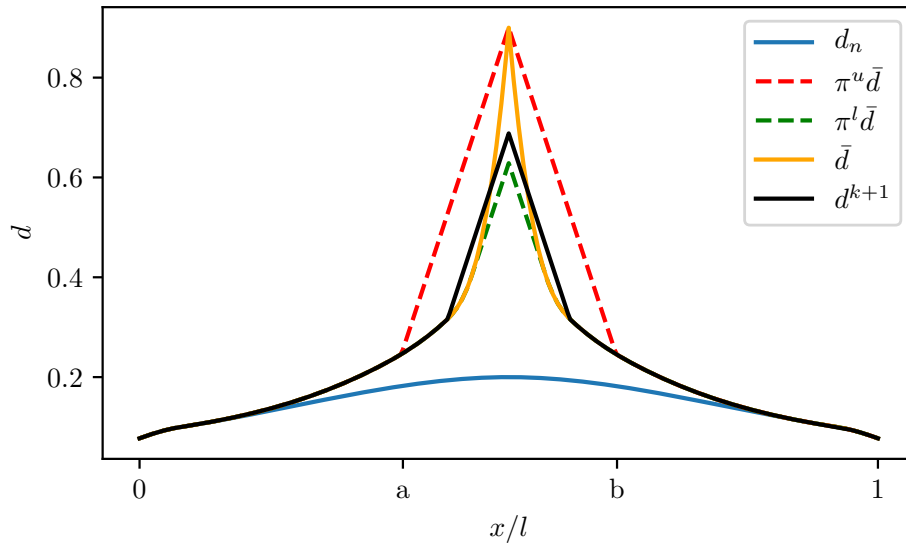


FIGURE 4.16 – Un croquis de la capacité d'encadrement par les projections supérieure et inférieure. En dehors de l'intervalle  $[a, b]$ , les projections sont égales et donc  $d^{k+1} = \bar{d}$ . À l'intérieur de l'intervalle  $[a, b]$ , les projections encadrent  $\bar{d}$  et  $d^{k+1}$ .

#### 4.3.3.1 Modèles élastique et plastique endommageables

Considérons le modèle unidimensionnel d'une barre de longueur  $L$  et de section unitaire fixée à son côté gauche et tirée avec un déplacement imposé  $u_d(t)$  à son extrémité droite. Le déplacement au temps  $t$  doit appartenir à l'ensemble

$$U(t) = \{u \in C([0, L]) : u(0) = 0, ; u(L) = u_d(t)\}$$

alors que l'ensemble des variations de déplacement admissibles est donné par :

$$U^* = \{u \in C([0, L]) : u(0) = 0, ; u(L) = 0\}$$

Nous détaillons maintenant plusieurs potentiels incrémentaux que nous allons utiliser dans les simulations numériques.

#### 4.3.3.2 Élastique endommageable

Le potentiel élastique s'écrit comme suit :

$$F_e(u) = \int_0^L f_e(\epsilon(u)) \, dx, \quad f_e(\epsilon(u)) = \frac{1}{2} E \epsilon(u)^2 \quad (4.66)$$

où  $\epsilon(u) = \frac{du}{dx}$  et  $E$  est le module de Young. La variable d'endommagement affecte  $E$  et ajoute un terme de dissipation. Pour des raisons de simplicité, nous ne considérons pas la dissymétrie tension-compression dans le modèle (la barre sera toujours en tension dans les simulations qui suivent.). Le potentiel d'élasticité endommageable est défini par :

$$F_{se}(u, d) = \int_0^L f_{se}(\epsilon(u), d) \, dx, \quad f_{se}(\epsilon(u), d) = (1 - d)^2 f_e(\epsilon(u)) + Y_c h(d) \quad (4.67)$$



où  $Y_c$  est le taux de restitution d'énergie critique et la fonction convexe  $h(d)$  définit le comportement adoucissant. L'endommagement  $d$  ne peut que croître et ne peut pas aller au-delà de 1. L'ensemble de contraintes convexes  $D_n$  pour l'endommagement est :

$$D_n = \{d \in L^\infty([0, L]) : d_n \leq d \leq 1\} \quad (4.68)$$

La puissance 2 sur le facteur  $(1 - d)$  assure la convexité et une ouverture finie quand  $d$  tend vers 1 [Zgh+18]. Notons que le choix approprié de la puissance est également un problème avec les modèles d'endommagement par gradient pour lesquels une valeur de 2 assure également une ouverture finie [Lor+11]. Nous considérons deux choix de  $h(d)$  :

$$h_1(d) = 2d + 3d^2 \quad (4.69)$$

$$h_2(d) = \frac{2d - d^2}{(1 - d + \lambda d^2)^2} \quad (4.70)$$

Les deux fonctions sont convexes (à condition que  $\lambda \leq 1/2$ ). La condition  $h'(0) = 2$  garantit qu'à l'initiation de l'endommagement  $E\epsilon^2/2 = Y_c$ . Le second choix permet d'imiter un modèle linéaire de zone cohésive [Par+15] où  $\lambda$  est défini par :

$$\lambda = 2 \frac{Y_c l}{G_c} \quad (4.71)$$

avec  $G_c$  désignant la ténacité (énergie par section de surface nécessaire pour casser la barre). Nous verrons que le choix de  $h_2(d)$  permet de choisir indépendamment  $Y_c$ ,  $G_c$  et  $l$ .

Pour mieux comprendre le potentiel proposé, nous écrivons les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) associées à l'optimisation. Nous définissons les quantités duales à la déformation et à l'endommagement en calculant les dérivées correspondantes de  $f_{se}$ . Nous obtenons la contrainte  $\sigma$  et une variable associée à l'endommagement notée  $\mu$  (le critère d'endommagement) :

$$\sigma = (1 - d)^2 E \epsilon \quad (4.72)$$

$$\mu = -(1 - d) E \epsilon^2 + Y_c h'(d) \quad (4.73)$$

où  $h'(d)$  désigne la dérivée de  $h$  par rapport à  $d$ . Les conditions KKT sont alors les suivantes :

$$\mu - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (4.74)$$

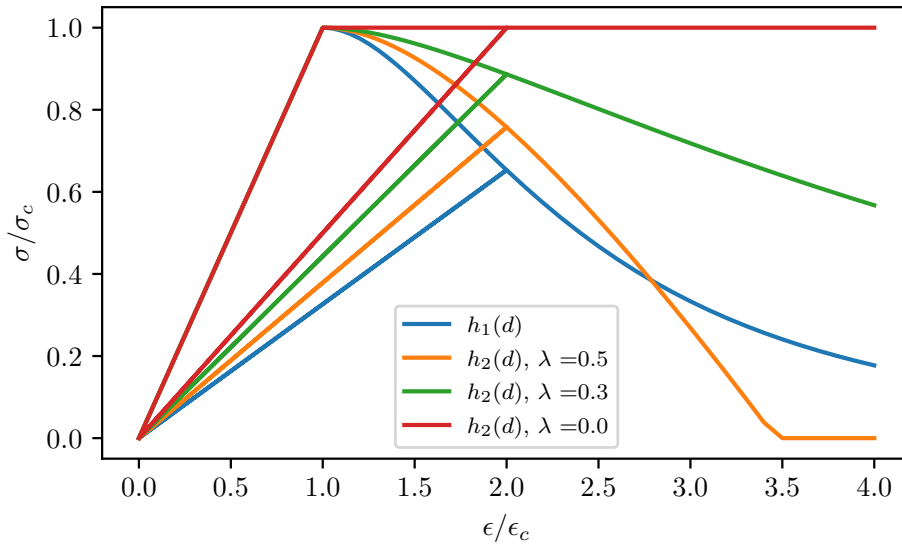
$$\lambda_1 \geq 0, \quad d - d_n \geq 0, \quad \lambda_1(d - d_n) = 0 \quad (4.75)$$

$$\lambda_2 \geq 0, \quad 1 - d \geq 0, \quad \lambda_2(1 - d) = 0 \quad (4.76)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes. Nous notons que  $\mu = 0$  lorsque l'endommagement augmente (et reste inférieur à 1), et  $\mu \geq 0$  lorsque l'endommagement n'évolue pas (et est différent de 1). La figure 4.17 montre la relation contrainte-déformation obtenue pour une histoire de chargement-déchargement.

La minimisation de  $F_{se}$  sous la contrainte  $(u, d) \in U_n \times D_n$  n'est pas un problème convexe. Mais, la minimisation de  $F_{se}$  par rapport à  $u \in U_n$ , pour  $d \in D_n$  fixé est un problème convexe. La minimisation de  $F_{se}$  par rapport à  $d \in D_n$  pour  $u \in U_n$  fixé est aussi un problème convexe. Enfin, notons que dans la présentation ci-dessus, nous n'avons pas pris soin de présenter séparément l'énergie libre et les potentiels de dissipation. Ceci n'est pas essentiel puisque nous n'étudions pas l'évolution de la température. De plus, pour une relation contrainte-déformation donnée, ce choix est en général non unique.





(graphique)

FIGURE 4.17 – Relations contrainte-déformation pour le modèle élastique endommageable ( $\sigma_c = \sqrt{2EY_c}$ ,  $\epsilon_c = \sigma_c/E$ ). Le chargement/déchargement est imposé par une déformation suivant le cycle suivant  $\epsilon/\epsilon_c = (0, 2, 0, 4)$ .

#### 4.3.3.3 Élasto-plasticité endommageable et plasticité avec écrouissage adoucissant

L'introduction de l'endommagement dans les modèles élasto-plastiques est un sujet complexe. L'objectif ici n'est pas de trouver le modèle approprié pour une situation donnée, mais plutôt de discuter du comportement de l'approche Lip-field en présence de variables internes plastiques. Nous considérons un modèle élasto-plastique simple de von Mises avec un endommagement élastique et, dans la section suivante, un modèle élasto-plastique où la variable  $d$  affecte le seuil de plasticité. Le potentiel incrémental d'un modèle de plasticité de von Mises avec écrouissage isotrope peut s'exprimer ainsi :

$$F_p(u, \epsilon_p, p) = \int_0^L f_p(\epsilon(u), \epsilon_p, p) \, dx, \quad f_p(\epsilon(u), \epsilon_p, p) = \frac{1}{2}E(\epsilon(u) - \epsilon_p)^2 + \sigma_y(p + \frac{k}{2}p^2) \quad (4.77)$$

où  $\sigma_y$  est la limite d'élasticité et  $k$  le paramètre d'écrouissage isotrope. Les variables internes de plasticité devant appartenir à l'ensemble convexe suivant :

$$A_n = \{(\epsilon_p, p) \in (L^\infty([0, L]))^2 : p - p_n \geq |\epsilon_p - \epsilon_{pn}|\} \quad (4.78)$$

La minimisation de  $F_p$  par rapport à  $(u, (\epsilon_p, p)) \in U_n \times A_n$  est un problème convexe. Nous introduisons l'endommagement par une approche multiplicative, également appelée approche des contraintes effectives :

$$F_{\text{sep}}(u, \epsilon_p, p, d) = \int_0^L f_{\text{sep}}(\epsilon_p(u), \epsilon_p, p, d) \, dx, \quad (4.79)$$

$$f_{\text{sep}}(\epsilon(u), \epsilon_p, p, d) = (1 - d)^2 f_p(\epsilon(u), \epsilon_p, p) + Y_c h(d) \quad (4.80)$$

L'endommagement doit lui appartenir à l'ensemble  $D_n$  défini par l'équation 4.68.

En calculant la dérivée de  $f_{\text{sep}}$  par rapport à la déformation plastique, à la plasticité cumulée et à l'endommagement, on obtient respectivement la contrainte, la limite d'élasticité actuelle et le critère

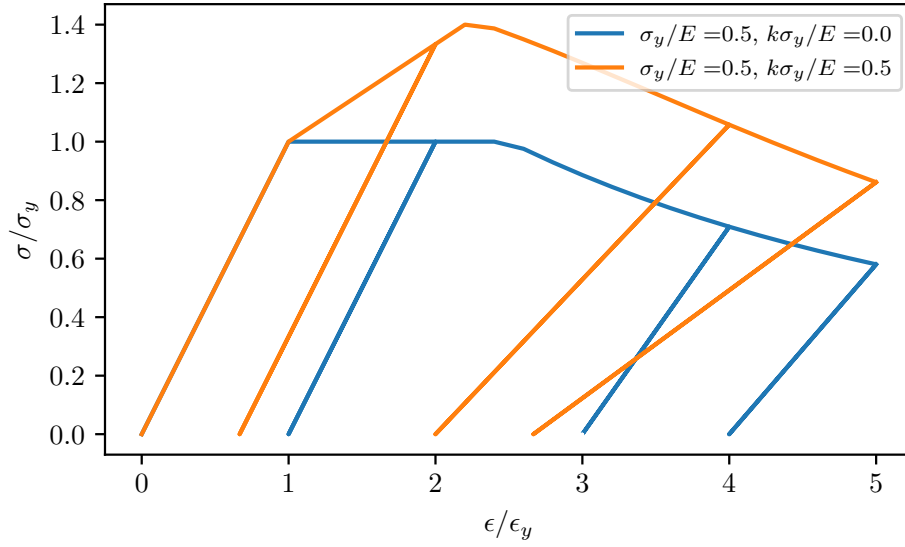


FIGURE 4.18 – Relations contrainte-déformation pour le modèle élasto-plastique endommageable avec le choix  $\epsilon_c/\epsilon_y = 2$  où  $\epsilon_y = \sigma_y/E$ . Le chargement/déchargement de la déformation suit la valeur de pointe séquence  $\epsilon/\epsilon_y = (0, 2, e_1, 4, e_2, 5, e_3)$  où  $e_1, e_2, e_3$  indiquent la déformation nécessaire pour atteindre le déchargement complet ( $\sigma = 0$ ).

d'endommagement, respectivement :

$$\sigma = (1 - d)^2 E(\epsilon - \epsilon_p) \quad (4.81)$$

$$R = \sigma_y(1 - d)^2(1 + kp) \quad (4.82)$$

$$\mu = -(1 - d)E(\epsilon(u) - \epsilon_p)^2 - 2(1 - d)\sigma_y(p + kp^2/2) + Y_ch'(d) \quad (4.83)$$

Ils sont impliqués dans les conditions KKT suivantes :

$$\sigma + \lambda_p s(\epsilon_p - \epsilon_{pn}) = 0 \quad (4.84)$$

$$R - \lambda_p = 0 \quad (4.85)$$

$$\lambda_p \geq 0, \quad p - p_n - |\epsilon_p - \epsilon_{pn}| \geq 0, \quad \lambda_p(p - p_n - |\epsilon_p - \epsilon_{pn}|) = 0 \quad (4.86)$$

où  $s$  est la fonction signe multivaluée ( $s(x) = -1$  si  $x < 0$ ,  $s(x) = +1$  si  $x > 0$  et  $s(0) \in [-1, 1]$ ). Nous observons que la contrainte effective  $\sigma/(1 - d)^2$  et les variables  $\epsilon_p$  et  $p$  peuvent être calculées à partir de la déformation indépendamment de la variable d'endommagement. Les relations contrainte-déformation pour un historique de chargement-déchargement sont présentées sur la figure 4.18. L'effet de l'endommagement peut y être observé dans la phase de déchargement.

#### 4.3.3.4 Plasticité adoucissante

Enfin, nous considérons un modèle élasto-plastique dans lequel l'adoucissement n'affecte que la limite d'élasticité, laissant l'élasticité inchangée :

$$F_{sp}(u, \epsilon_p, p, d) = \int_0^L f_{sp}(\epsilon(u), \epsilon_p, p, d) \, dx,$$

$$f_{sp}(\epsilon(u), \epsilon_p, p, d) = \frac{1}{2}E(\epsilon(u) - \epsilon_p)^2 + (1 - d)^2\sigma_y(p + kp^2/2) + \sigma_y g(d)$$

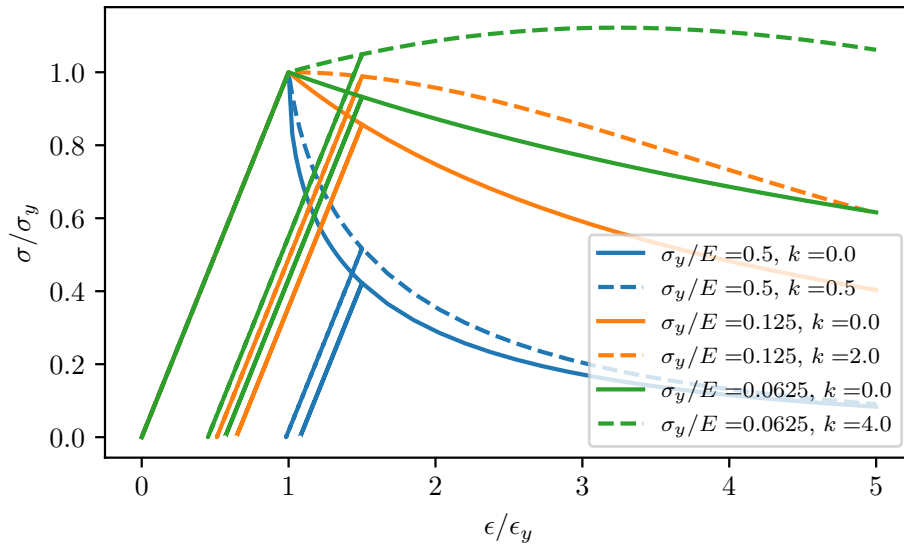


FIGURE 4.19 – Relations contrainte-déformation pour le modèle de plasticité adoucissante ( $\epsilon_y = \sigma_y/E$ ). Le chargement/déchargement de la déformation suit la séquence de valeurs maximales  $\epsilon/\epsilon_y = (0, 1.5, e, 5)$  où  $e$  indique la valeur nécessaire pour atteindre  $\sigma = 0$ .

où  $g(d)$  décrit l'adoucissement et est choisi comme  $g(d) = d^2$ .

En prenant les dérivées de  $f_{sp}$ , on obtient :

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_p) \quad (4.87)$$

$$R = \sigma_y(1 - d)^2(1 + kp) \quad (4.88)$$

$$\mu = -2\sigma_y(1 - d)(p + kp^2/2) + \sigma_y g'(d) \quad (4.89)$$

et les conditions KKT associées :

$$\sigma + \lambda_p s(\epsilon_p - \epsilon_{pn}) = 0 \quad (4.90)$$

$$R - \lambda_p = 0 \quad (4.91)$$

$$\lambda_p \geq 0, \quad p - p_n - |\epsilon_p - \epsilon_{pn}| \geq 0, \quad \lambda_p(p - p_n - |\epsilon_p - \epsilon_{pn}|) = 0 \quad (4.92)$$

Nous avons omis ci-dessus les équations associées à  $d$ . Elles sont identiques à celles présentées dans (4.74-4.76). La croissance de  $d$  est maintenant liée à la déformation plastique cumulée et non plus à la déformation élastique (comme l'indique la différence entre (4.83) et (4.89)). La variable  $d$  peut être interprétée comme étant la fraction volumique de vide telle qu'utilisée dans les modèles classiques de rupture ductile [Tve+84; Bec+88]. Les relations contrainte-déformation pour un historique de chargement-déchargement sont présentées dans la figure 4.19. L'élasticité n'est pas affectée comme on peut l'observer lors de la phase de déchargement.

#### 4.3.4 Régularisation de Lipschitz pour une barre unidimensionnelle discrétisée

Dans cette section, nous présentons brièvement la discrétisation du problème de la barre en traction décrit précédemment et décrivons les résultats. La barre est discrétisée avec  $N$  éléments finis de taille égale  $h = L/N$ . Le déplacement est linéaire sur chaque élément entre les valeurs nodales. Les variables internes sont stockées au centroïde de chaque élément (point d'intégration) comme indiqué sur la figure 4.20. L'indice  $i$  est utilisé soit pour la numérotation des éléments ( $d_i, i = 1, \dots, N$



FIGURE 4.20 – Une barre unidimensionnelle discrétisée avec des éléments finis de taille égale. Les déplacements sont stockés au niveau du nœud, tandis que les variables internes sont stockées au point d'intégration de l'élément (représenté par une barre verticale).

désignent l'endommagement au centroïde de chaque élément), soit pour la numérotation des nœuds ( $u_i, i = 1, \dots, N + 1$  sont les déplacements nodaux).

La contrainte de Lipschitz implique les inégalités suivantes définissant l'ensemble  $L$  discret :

$$\begin{aligned} d_i - d_{i+1} - h/l &\leq 0, & i = 1, \dots, N - 1 \\ d_i - d_{i-1} - h/l &\leq 0, & i = 2, \dots, N \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation s'écrit comme suit pour le problème de l'élasticité endommageable :

$$\min_{\substack{\vec{u} \in U_n \\ d \in D_n \cap L}} \sum_{i=1}^N h f_{\text{se}}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}, d_i\right) \quad (4.93)$$

et comme suit pour le modèle élasto-plastique, où  $x$  remplace  $\text{sep}$  ou  $\text{sp}$  :

$$\min_{\substack{(\vec{u}, (\epsilon_p, p)) \in U_n \times A_n \\ d \in D_n \cap L}} \sum_{i=1}^N h f_x\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \epsilon_{pi}, p_i, d_i\right) \quad (4.94)$$

L'ensemble  $U_n$  contraint  $u_0 = 0$  et  $u_{N+1} = u_d(t_{n+1})$ . L'ensemble  $A_n$  est relié à l'équation (4.78) et l'ensemble  $D_n$  assure que  $d_i$  est plus grand qu'au pas de temps précédent et inférieur à 1. Dans les exemples traités qui suivent, c'est la fonction d'adoucissement  $h_2$  qui est choisie.

Les problèmes d'optimisation ci-dessus sont résolus par une minimisation alternée comme expliqué dans la section 4.3.3. La minimisation par rapport à la variable d'endommagement est effectuée à l'aide de la bibliothèque python scipy. Plus précisément, la fonction `scipy.optimize.minimize` est utilisée. Elle est décrite dans [Vir+20]. Elle offre une interface avec la fonction SLSQP (Sequential Least Square Quadratic Programming), développée par Dieter Kraft [Kra+88].

En raison de son homogénéité, le problème d'optimisation en jeu n'a pas de minimum global unique et de nombreux minima locaux. Conscients de cette situation, nous déclenchons la localisation en introduisant un endommagement légèrement supérieur à  $d_n$  au milieu de la barre à chaque étape. Il s'agit simplement d'une estimation initiale pour la minimisation alternée. Cette stratégie ne nécessite pas de modifier la rigidité ou le l'endommagement initial (qui serait irréversible) sur la barre.

#### 4.3.4.1 Modèle élastique endommageable

Pour le modèle d'endommagement élastique, la figure 4.21 donne la réponse de la barre pour les modèles non régularisés et Lip-field. L'effet de régularisation de ce dernier est clair. Notez que le cas où la discrétisation ne contient que deux nœuds (un seul élément) donne bien la même réponse qu'une barre homogène. Aucun snap-back n'apparaît dans cet exemple, car la longueur de régularisation est assez grande. Une longueur et une régularisation plus petites sont utilisées pour la figure 4.22 et un "snap-back" peut être observé. Pour suivre le snap-back dans la simulation, le déplacement à

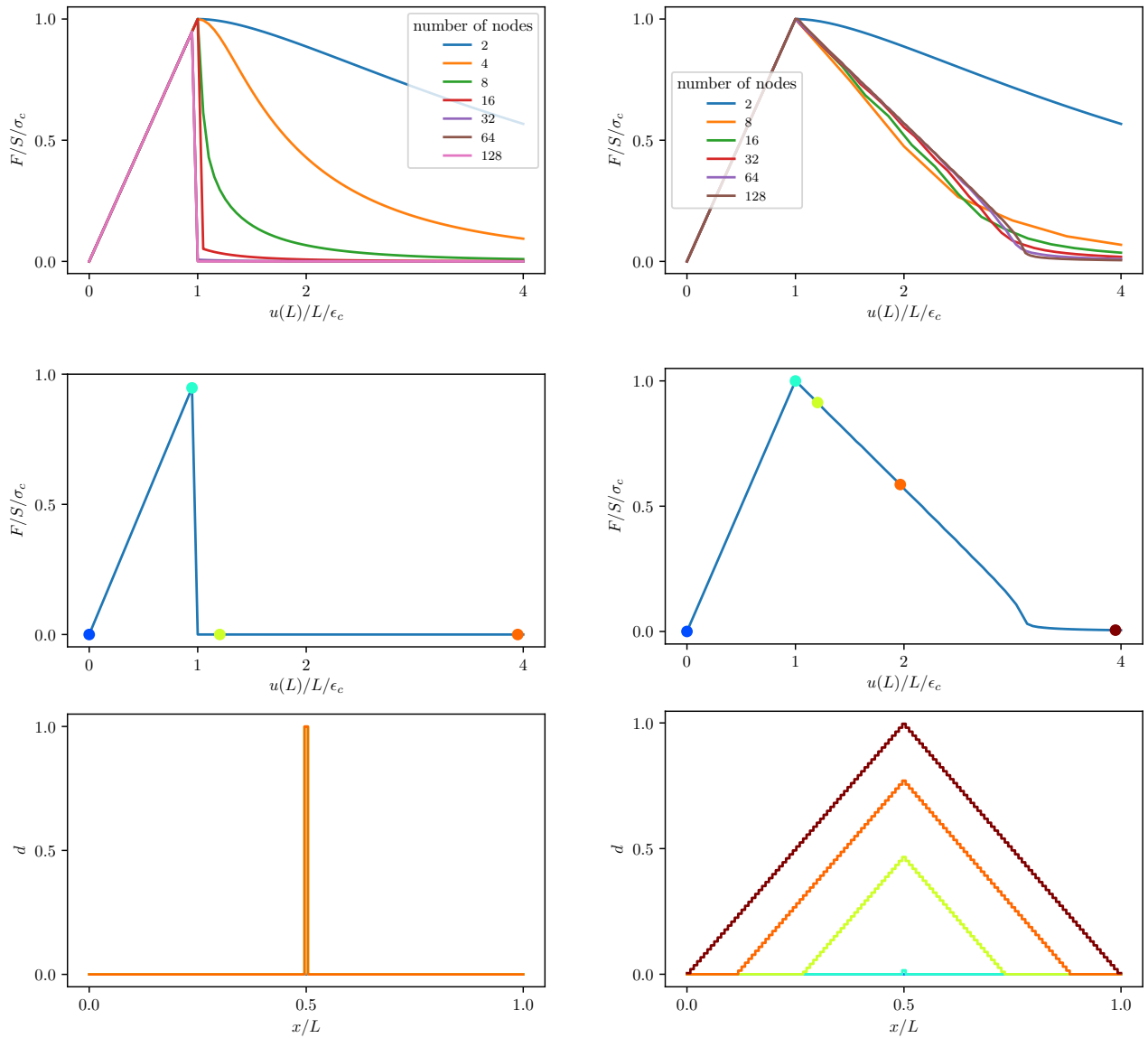


FIGURE 4.21 – Réponse pour la barre avec le comportement d’adoucissement élastique et le déplacement imposé : modèle non-régularisé (gauche) et modèle Lip-field (droite). La rangée supérieure donne la réponse moyenne en contrainte-déformation et la rangée inférieure le profil d’endommagement aux points de couleur donnés dans la rangée du milieu. Le maillage utilisé pour la ligne du milieu est le plus raffiné de la ligne du haut. Les paramètres sont :  $L=1$ ,  $l = 0.5$ ,  $E = 1$ ,  $Y_c = 1$ ,  $\lambda = 0.3$ ,  $G_c = 10/3$ .

l’extrémité de la barre n’est plus imposé mais contrôlé en limitant l’incrément de déformation sur la barre à chaque pas de temps. Un contrôle plus évolué pourrait être utilisé [Cri81 ; De 87]. La figure 4.22 montre, pour le cas non régularisé (colonne de gauche) une convergence vers une solution sans aucune dissipation (zone nulle sous la courbe convergée). Au contraire, dans le cas régularisé, la solution convergée (colonne de droite) indique une dissipation non nulle (dont la valeur est proche de la ténacité  $G_c$ ).

Toujours pour le modèle élastique endommageable, nous montrons, Figure 4.23, que la réponse contrainte-déformation ne varie pas beaucoup avec la longueur de régularisation (ce qui démontre le

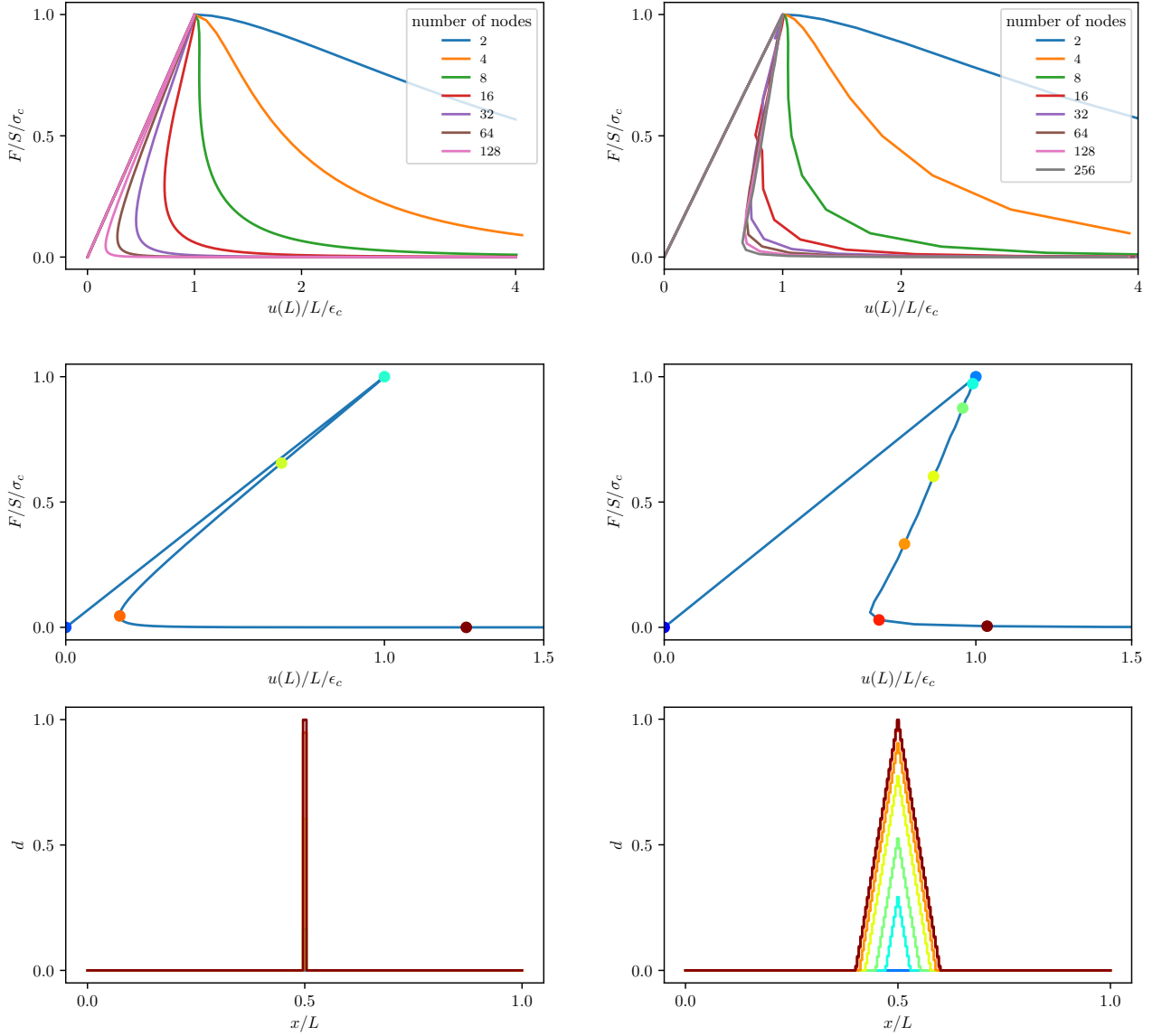


FIGURE 4.22 – Réponse pour la barre avec le comportement d’adoucissement élastique et le contrôle du snap-back : modèle non-régularisé (gauche) et modèle Lip-field (droite), convergence de la réponse contrainte-déformation moyenne (haut) et évolution de l’endommagement (bas) correspondant aux points de couleur sur les courbes contrainte-déformation. Les figures du milieu reproduisent les courbes des figures du haut, pour la grille la plus raffinée. Les paramètres sont :  $L=1$ ,  $l = 0.1$ ,  $E = 1$ ,  $Y_c = 1$ ,  $\lambda = 0.3$ ,  $G_c = 2/3$ .

bon comportement de la fonction  $h_2$ ). La réponse est obtenue pour une ténacité  $G_c$  et une résistance  $Y_c$  constantes. On ne fait varier que la longueur de régularisation (et le maillage est ajusté pour avoir toujours le même nombre d’éléments sur  $l$ ). Nous observons que l’aire sous la courbe reste proche du  $G_c$  imposé.

#### 4.3.4.2 Modèles élasto-plastiques endommageables

En ce qui concerne le modèle élastique adoucissant avec écrouissage plastique ( $F_{sep}$ ), la réponse de la barre est tracée colonne de gauche sur la figure 4.24. On observe que la plasticité se déroule d’abord

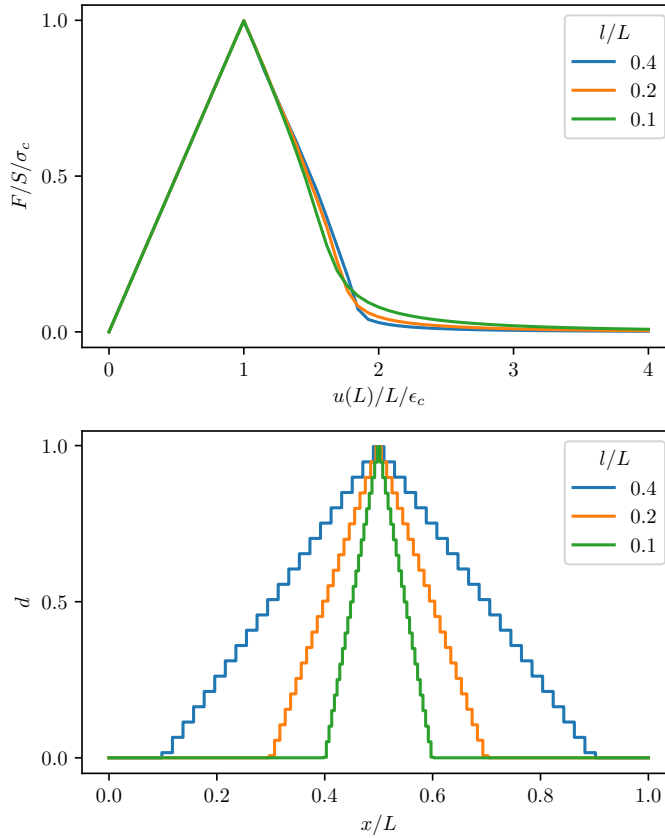


FIGURE 4.23 – Réponse du modèle Lip-field pour le comportement élastique endommageable, (choix  $h_2$ ) pour plusieurs valeurs de longueur de régularisation. Réponse contrainte-déformation moyenne (en haut) et profil d'endommagement (en bas). Les paramètres sont :  $L = 1.$ ,  $l = (0.4, 0.2, 0.1)$ ,  $E = 1.$ ,  $Y_c = 1.$ ,  $\lambda = (0.4, 0.2, 0.1)$ ,  $G_c = 2$ . Le nombre d'éléments est de 51, 101 et 201 de sorte que l'on a  $h/l \sim 20$ .

de manière homogène, sans endommagement. Pendant cette phase homogène, la courbe contrainte-déformation moyenne est croissante. Lorsque cette courbe atteint son sommet, la localisation de l'endommagement et la plasticité commencent à se produire. Pour le modèle de plasticité adoucissante  $F_{sp}$ , le tracé de la réponse est présenté colonne de droite de la Figure 4.24. Nous observons que la plasticité et l'endommagement se développent d'abord de manière homogène en raison de l'effet initial durcissant du modèle, puis se concentrent. L'écart par rapport à la réponse homogène (en bleu sur la figure) se produit lorsque la contrainte moyenne atteint son maximum.

#### 4.3.4.3 Plusieurs fissures

Nous présentons un dernier exemple 1d avec un chargement non uniforme causé par une force volumique  $f(x/L) = 0.1 \sin(8\pi x/L)$ . Ce chargement est ajouté au déplacement imposé. Les résultats sont représentés sur la figure 4.25. Les paramètres du modèle sont les mêmes que ceux de la figure 4.24 (colonne de droite), sauf que  $l = 0.25$  et que le nombre de nœuds est de 256. L'endommagement se développe en suivant un motif plus complexe. La colonne de droite donne les résultats pour le cas non régularisé (approche locale  $l = 0$ ). Nous observons que les résultats Lip-field (colonne de droite) sont les mêmes que ceux de l'approche locale tant que la courbe contrainte-déformation moyenne n'a pas atteint le point culminant. Cela illustre le fait que l'approche Lip-field préserve la solution du

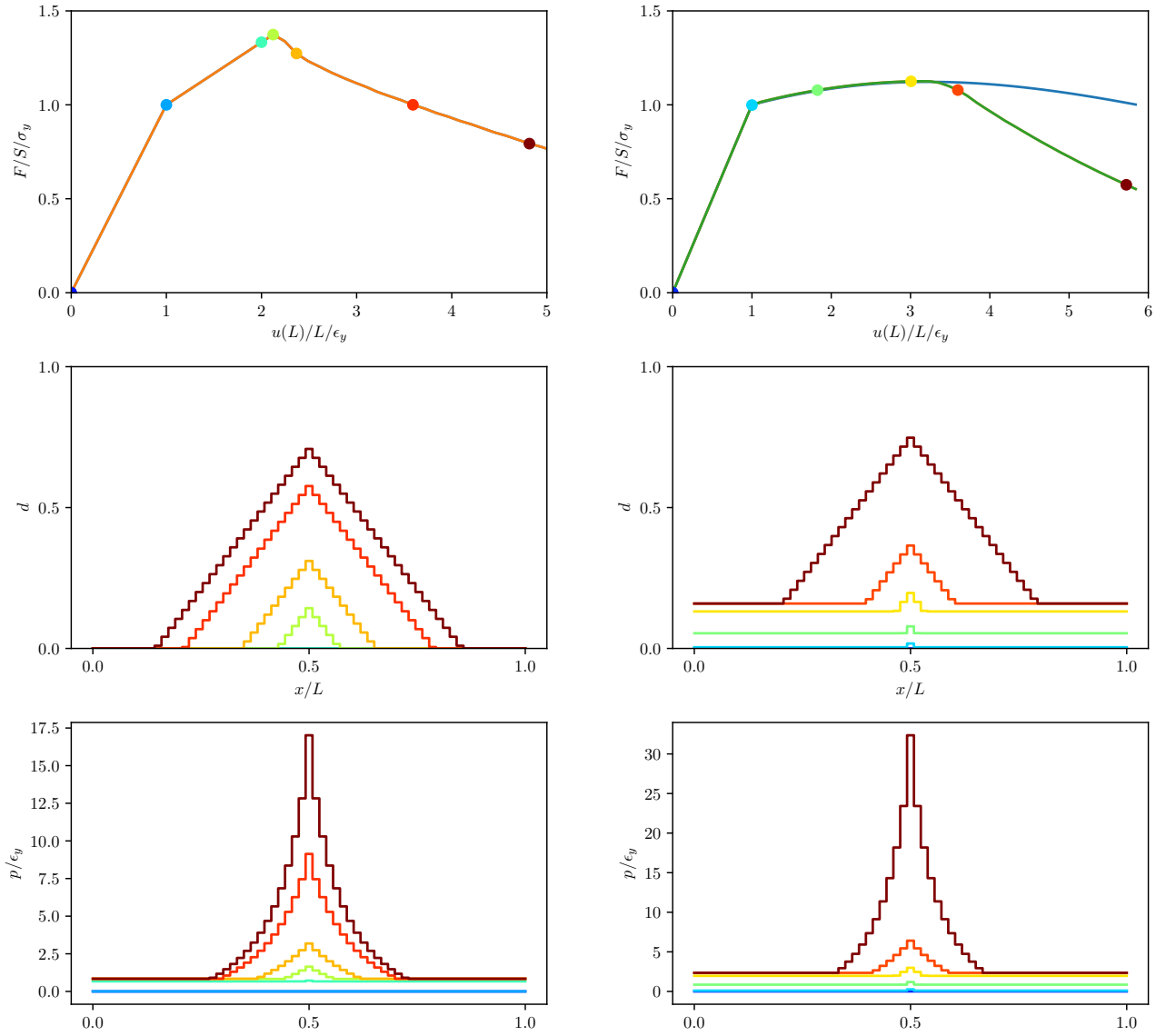


FIGURE 4.24 – Réponse du modèle Lip-field pour l'élasticité endommageable et plasticité ( $F_{sep}$ , colonne de gauche) et plasticité adoucissante ( $F_{sp}$ , colonne de droite) : courbes moyennes de contrainte-déformation (ligne du haut), champ d'endommagement (ligne du milieu) et plasticité cumulée (ligne du bas). Pour les deux modèles,  $L = 1$ ,  $l = 0.5$  et la taille de la maille est  $h = L/64$ . Les paramètres spécifiques au modèle sont :  $E = 2$ ,  $\sigma_y = 1$ ,  $Y_c = 1$ ,  $k=1$ ,  $\lambda = 1/3$  pour la plasticité  $F_{sep}$  (correspondant au modèle la courbe orange dans la figure 4.18) et  $E = 1$ ,  $\sigma_y = 1/16$  et  $k = 4$  pour le modèle de plasticité adoucissante  $F_{sp}$  (correspondant au modèle avec la courbe verte en pointillés sur la figure 4.19).

modèle non-régularisé tant que celui-ci ne sur-localise pas. Ceci est très différent des autres approches de régularisation (non-locale, gradient d'endommagement, champ de phase) qui ne correspondent pas au modèle non-régularisé, même lorsque la régularisation n'est pas nécessaire. On peut également voir sur la figure 4.25 que la dérivée normale de l'endommagement n'est pas nulle à la frontière comme cela aurait été le cas pour les modèles basés sur le gradient d'endommagement. La contrainte de Lipschitz n'impose pas une valeur donnée pour la dérivée normale de l'endommagement à la frontière, mais limite simplement la valeur.



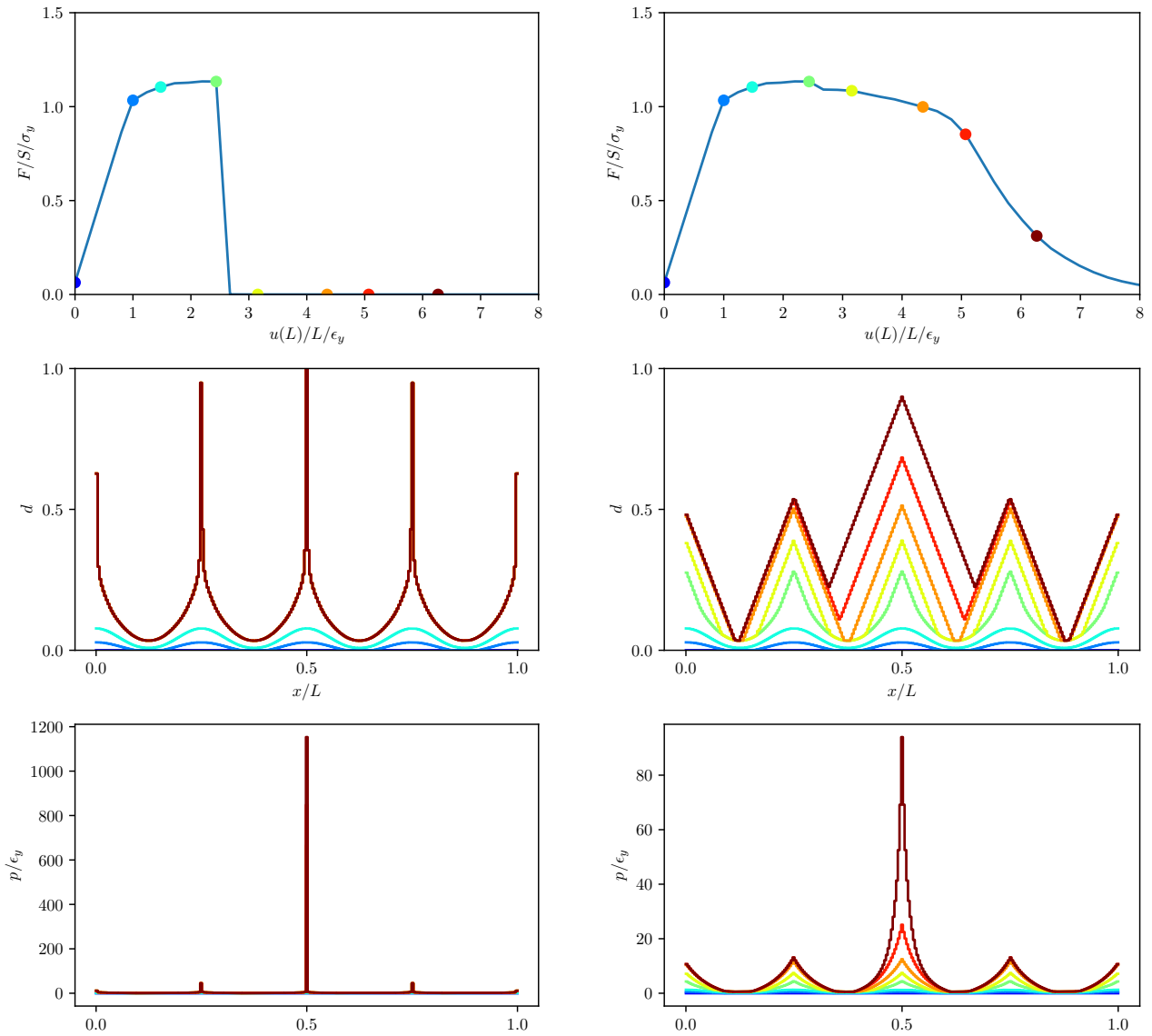


FIGURE 4.25 – Réponse pour un modèle de plasticité adoucissant avec une force volumique variable. À gauche, pas de régularisation ( $l = 0$ ), à droite régularisation de Lipschitz. Carte de la déformation moyenne (en haut), de l'endommagement (au milieu) et du profil de plasticité cumulé (en bas). Les paramètres sont :  $L = 1.$ ,  $l = 0.25$ ,  $h = 1/255$ ,  $E = 1.$ ,  $\sigma_y = 1/16$ ,  $k = 4$ .

#### 4.3.5 Conclusions sur le cas unidimensionnel

Dans cette section, j'ai présenté le développement et les résultats unidimensionnels de l'approche Lip-field développée comme une alternative pour régler les problèmes de localisation des modèles d'endommagement. J'ai suivi pour cela la présentation que nous en avons faite dans notre premier papier introduisant l'approche publié fin 2021 [Moë+21b]. Dans notre modèle, la régularisation est réalisée en imposant une condition de Lipschitz sur le champ responsable de l'adoucissement. Ce faisant, une longueur caractéristique est introduite dans le modèle. Par rapport aux approches à gradient d'endommagement ou champ de phase, l'approche par Lipschitz introduit une contrainte supplémentaire, mais n'affecte pas l'expression du potentiel incrémental (la fonction objectif de la minimisation n'est pas modifiée.). En d'autres termes, l'énergie ne dépend pas du gradient d'endommagement, mais uni-

quement de l'endommagement. Son expression est celle du modèle local. En conséquence, Lip-field n'introduit pas d'équations différentielles partielles supplémentaires pouvant entraîner des conditions aux limites discutables. D'un point de vue mathématique, la contrainte de Lipschitz peut être interprétée comme la recherche du champ d'endommagements parmi les sous-solutions (au sens de la viscosité) de l'équation eikonale [Cra+83 ; Cra+01] ou comme des solutions de viscosité à une inégalité eikonale.

Contrairement à l'approche intégrale non-locale, aucun élargissement de la zone entièrement endommagée n'est observé. L'implémentation de la contrainte de Lip ne nécessite que les liens entre un élément et ses voisins directs, indépendamment de la longueur caractéristique. Il n'est pas nécessaire de calculer un voisinage par rapport à la longueur caractéristique.

Par rapport à nos travaux précédents sur la TLS, le moins que l'on puisse dire, c'est que Lip-field a l'avantage de la simplicité. Le savoir-faire autour des level-sets (calcul de fonction distance, sous découpage des éléments, enrichissement ...) n'est plus nécessaire. Cette simplicité a permis, au moins en unidimensionnel, d'appliquer Lip-field à des problèmes comprenant de la plasticité, ce que nous n'avions pas réussi à faire de manière satisfaisante de la cadre de la TLS. Dans la section suivante, nous allons étendre la méthode à des problèmes 2d.

## 4.4 Extension au cas 2d

Dans la section précédente, nous avons présenté l'approche Lip-field en se concentrant sur le cas unidimensionnel. Lip-field peut être vu comme une nouvelle approche diffuse de la fracture qui propose une façon alternative de régulariser la variable responsable de l'adoucissement. Depuis la sortie de [Moë+21b], une approche similaire a été développée dans [Val+22]. Dans la suite, nous allons présenter l'extension en deux dimensions du modèle Lip-field, tel que nous l'avons publié dans [Che+22a].

Le modèle Lip-field pour un matériau élastique adoucissant repose sur l'idée que le champ d'endommagement doit être Lipschitz-continu. Cela signifie que la différence entre les endommagements de deux points du matériaux est bornée par la distance entre ces points divisée par une longueur caractéristique. Le modèle du champ de Lipschitz est différent des modèles à gradient d'endommagement ou à champ de phase car l'expression de l'énergie libre du matériau ne dépend pas du gradient d'endommagement. Elle dépend uniquement de la déformation et de l'endommagement (l'expression classique de l'énergie locale est fondamentalement conservée.). Le modèle du Lip-field est cependant proche, dans sa conception, de l'approche variationnelle de la fissuration ou des modèles phase-field, car il peut être formulé comme une minimisation d'un potentiel incrémental. Contrairement à ces deux derniers, le potentiel est identique à celui du modèle non régularisé (local). L'idée de Lip-field est simplement d'imposer une certaine régularité spécifique sur le champ d'endommagement. Étant donné les champs de déplacement et d'endommagement à un certain instant, un schéma alterné est utilisé pour trouver les champs à l'instant suivant. La mise à jour du déplacement est un problème de mécanique classique avec un champ d'endommagements imposé. Sous des hypothèses de petites déformations et de petits déplacements, le problème peut être linéaire ou non linéaire en fonction de la relation contrainte-déformation. Nous considérerons dans la suite des modèles d'élasticité endommageable en déformation plane, symétriques et asymétrique entre tension-compression. Les premiers conduisent à des problèmes linéaires et les seconds à des problèmes non-linéaires.

Comme déjà décrit dans [Moë+21b] et dans la section précédente, la mise à jour de l'endommagement dans l'approche Lip-field est différente de celle utilisée dans les approches par champ de phase ou par gradient d'endommagement. Nous devons toujours trouver le champ d'endommagement comme le minimiseur d'une fonction convexe, mais cette fois sous des contraintes de Lipschitz. Une fois discrétisé, cela conduit à un problème de minimisation convexe standard sous contraintes convexes qui peut être résolu à l'aide de logiciels standards. Les efforts de calcul pour résoudre ce problème peuvent être considérablement réduits en tirant parti de certaines propriétés des contraintes Lipschitz. En par-

ticulier, des bornes supérieures et inférieures du champ d'endommagement peuvent être calculées à très faible coût, à partir d'une minimisation purement locale (sans les contraintes de Lipschitz). À partir de ces bornes, la taille de la zone sur laquelle la mise à jour non-locale doit être calculée (en appliquant les contraintes de Lipschitz) est considérablement réduite. Un aspect intéressant de l'implémentation du modèle Lip-field est que l'irréversibilité de l'endommagement est automatiquement prise en compte sans coût supplémentaire. La prise en compte de l'irréversibilité de l'endommagement n'est pas simple pour d'autres types d'approche diffuse comme phase-field pour lequel on a souvent recours à certaines approximations. Dans [Mie+10a] par exemple, l'inégalité variationnelle sur la croissance de l'endommagement est remplacée par une égalité variationnelle dans laquelle le terme source est remplacé par la valeur maximale de la source aux temps précédents. Cette approche simplificatrice est la plus courante dans la bibliographie, même s'il existe de plus en plus de variantes de champ de phase dans lesquelles l'inégalité variationnelle est résolue directement ([Whe+14; Tan+18; Hu+21]).

Une autre possibilité offerte par l'approche par Lip-field consiste à laisser la variable d'endommagement aux points d'intégration de l'élément avec les autres variables internes. Ainsi, seules les valeurs de déplacement sont stockées aux nœuds.

Le paragraphe suivant décrit la formulation classique de la mécanique de l'endommagement (forme non régularisée) dans le cadre temporel discret en deux dimensions. La régularisation de Lipschitz et sa discrétisation sont présentées dans le paragraphe 4.4.2, suivies d'une discussion sur une stratégie efficace pour construire les limites mentionnées ci-dessus dans la section 4.4.2.3. Quatre exemples de simulations sont ensuite détaillés, illustrant les possibilités de l'approche. Une discussion des résultats et des extensions possibles de ce travail sont abordées dans le dernier paragraphe.

#### 4.4.1 Le modèle mécanique : formulation non régularisée

Nous considérons la déformation d'un solide, occupant initialement un domaine  $\Omega$ , par un champ de déplacement  $\vec{u}$ . Nous supposons que les déformations sont petites et quasi-statiques. La contrainte de Cauchy est notée  $\bar{\sigma}$  et la déformation  $\bar{\epsilon}$  est donnée par la partie symétrique du gradient de déplacement. Le déplacement est imposé sur une partie de la frontière notée  $\Gamma_u$  supposée fixe dans le temps. Sur le reste de la frontière, on suppose, sans perte de généralité, des forces de traction nulles. L'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles au temps  $t$ , est noté  $\mathcal{U}(t)$  :

$$\mathcal{U}(t) = \{\vec{u} \in H^1(\Omega) : \vec{u} = \vec{u}_d(t) \text{ on } \Gamma_u\} \quad (4.95)$$

où  $\vec{u}_d(t)$  désigne le déplacement imposé. En l'absence de forces volumiques, la condition d'équilibre est la suivante :

$$\int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon}(\vec{u}^*) \, d\Omega = 0, \quad \forall \vec{u}^* \in \mathcal{U}^*, \quad \mathcal{U}^* = \{\vec{u} \in H^1(\Omega) : \vec{u} = 0 \text{ on } \Gamma_u\} \quad (4.96)$$

Les équations cinématiques et d'équilibre (4.95-4.96) doivent être complétées par le modèle constitutif. Le formalisme des matériaux standards généralisés introduit dans [Hal+75; Ger+83] est utilisé, comme dans le cas unidimensionnel. La seule variable interne est ici l'endommagement noté  $d$ . Le modèle est caractérisé par un potentiel d'énergie libre  $\varphi(\bar{\epsilon}, d)$  et un potentiel de dissipation  $\psi(\dot{d}, d)$ .

Nous introduisons une discrétisation temporelle implicite et utilisons l'approche variationnelle énergétique. Étant donné le déplacement et les variables internes  $(\vec{u}_n, d_n)$  connus à un certain instant  $t_n$ , trouver le couple  $(\vec{u}_{n+1}, d_{n+1})$ , à un certain instant ultérieur  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  revient au problème de minimisation suivant :

$$(\vec{u}_{n+1}, d_{n+1}) = \arg \min_{\substack{\vec{u}' \in \mathcal{U}_n \\ d' \in \mathcal{A}_n}} F(\vec{u}', d'; \vec{u}_n, d_n, \Delta t) \quad (4.97)$$

où  $\mathcal{U}_n$  est une notation abrégée pour  $\mathcal{U}(t_{n+1})$  et  $\mathcal{A}_n$  assure l'irréversibilité et la borne supérieure ( $d \leq 1$ ) de l'endommagement :

$$\mathcal{A}_n = \{d \in L^\infty(\Omega) : d_n \leq d \leq 1\} \quad (4.98)$$

Pour des raisons de simplicité, nous considérerons des modèles de matériaux indépendants du temps. Dans ce cas, l'expression de  $F$  ne dépend pas explicitement de  $\vec{u}_n, d_n$  et de  $\Delta t$ . L'extension aux modèles dépendants du temps n'introduirait pas a priori de difficultés supplémentaires. De plus, pour simplifier les notations, nous laissons tomber les indices  $n + 1$ . Le problème non-régularisé est alors :

$$(\vec{u}, d) = \arg \min_{\substack{\vec{u}' \in \mathcal{U}_n \\ d' \in \mathcal{A}_n}} F(\vec{u}', d') \quad (4.99)$$

La fonction objective est donnée comme l'intégrale sur le domaine d'une fonction locale du matériau (et un terme supplémentaire linéaire en  $\vec{u}$  pour les forces volumiques non nulles et les tractions de surface) :

$$F(\vec{u}, d) = \int_{\Omega} f(\bar{\epsilon}(\vec{u}), d) \, d\Omega \quad (4.100)$$

Le problème d'optimisation est donc séparable en  $d$ , ce qui signifie que connaissant  $\vec{u}$ , trouver  $d$  est un processus local en tout point (la variable  $d$  est dite "interne"). La fonction locale objectif est composée d'un terme d'énergie de déformation et d'un terme de dissipation :

$$f(\bar{\epsilon}(\vec{u}), d) = \varphi(\bar{\epsilon}(\vec{u}), d) + Y_c h(d) \quad (4.101)$$

où  $Y_c$  est le taux de libération d'énergie critique et  $h(d)$  est choisi comme  $h(d) = 2d + 3d^2$ . La partie dissipation est liée à l'intégration temporelle d'un potentiel de dissipation donné par  $\psi(d, \dot{d}) = Y_c h'(d) \dot{d}$  où  $h'$  est la dérivée de  $h$  par rapport à  $d$ .

En ce qui concerne l'énergie libre, nous considérons une expression asymétrique entre tension et compression permettant de prendre en compte une reprise de raideur lors d'une refermeture :

$$\varphi(\epsilon, d) = \mu \sum_{i=1}^3 g(\alpha_i d) \epsilon_i^2 + \frac{\lambda}{2} g(\alpha d) \text{Tr}(\epsilon)^2 \quad (4.102)$$

où les constantes  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé,  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les valeurs propres du tenseur des déformations,  $g(d)$  une fonction convexe de  $d$  décrivant l'adoucissement telle que  $g(0) = 1$  et  $g(1) = 0$  et

$$\begin{cases} \alpha_i = \beta & \text{si } \epsilon_i < 0 \\ \alpha_i = 1 & \text{si } \epsilon_i \geq 0 \\ \alpha = \beta & \text{si } \text{Tr}(\epsilon) < 0 \\ \alpha = 1 & \text{si } \text{Tr}(\epsilon) \geq 0 \end{cases} \quad (4.103)$$

où  $0 \leq \beta \leq 1$  est un paramètre défini par l'utilisateur. Si  $\beta = 1$ , le comportement du matériau est symétrique entre tension et compression. Si  $\beta = 0$ , le matériau récupère sa rigidité en compression et l'endommagement ne peut se développer qu'en traction. Dans le cas d'une déformation plane ( $\epsilon_3 = 0$ ) et pour  $\beta = 1$ , nous pouvons réécrire l'énergie comme suit :

$$\varphi(\bar{\epsilon}, d) = \phi_0(\bar{\epsilon}) + g(d) \phi_1(\bar{\epsilon}) + Y_c h(d) \quad (4.104)$$

avec :

$$\phi_0(\bar{\epsilon}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \epsilon_1 \geq 0, \epsilon_2 \geq 0 \\ \mu(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) & \text{if } \epsilon_1 < 0, \epsilon_2 < 0 \\ \mu\epsilon_1^2 & \text{if } \epsilon_1 < 0, \epsilon_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.105)$$

$$\phi_1(\bar{\epsilon}) = \frac{\lambda}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 + \begin{cases} \mu(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) & \text{if } \epsilon_1 \geq 0, \epsilon_2 \geq 0 \\ 0 & \text{if } \epsilon_1 < 0, \epsilon_2 < 0 \\ \mu\epsilon_2^2 & \text{if } \epsilon_1 < 0, \epsilon_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.106)$$

où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont tels que  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ . Un choix courant pour la fonction d'adoucissement  $g(d)$  est de prendre  $g(d) = (1 - d)^2$ . Dans ce travail, nous avons utilisé une version généralisée :

$$g(d) = (1 - d)^2 + \eta(1 - d)d^3 \quad (4.107)$$

Le paramètre  $\eta$  doit être choisi dans  $[0, 1/3]$  pour assurer la convexité de  $g$  pour  $d \in [0, 1]$ . Le paramètre  $\eta$  permet d'atteindre un endommagement de 1 pour une déformation finie comme indiqué sur la figure 4.26.

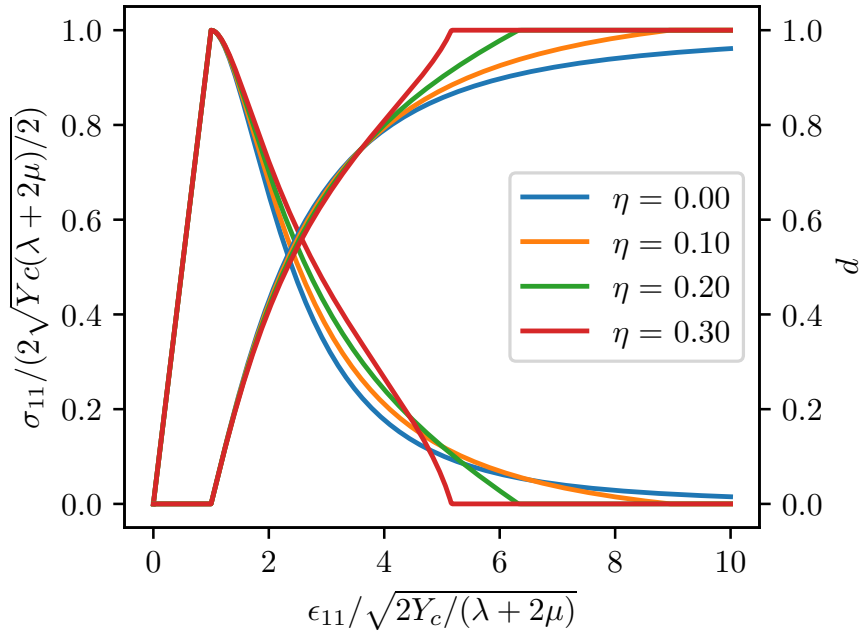


FIGURE 4.26 – Influence du paramètre  $\eta$  sur la courbe de contrainte/déformation (axe de gauche) et sur l'évolution de l'endommagement en fonction de la déformation (axe de droite).

L'endommagement commence à croître pour une déformation supérieure à  $\sqrt{\frac{2Y_c}{\lambda+2\mu}}$  indépendamment de  $\eta$ , alors qu'il atteint 1 pour une déformation de  $4\sqrt{\frac{2Y_c}{(\lambda+2\mu)/\eta}}$ . On peut facilement vérifier que  $f$  (et donc  $F$ ) est convexe séparément en  $\vec{u}$  et  $d$ , mais pas globalement, ce qui permet de retrouver l'effet d'adoucissement dû à l'endommagement.

#### 4.4.2 Régularisation de Lipschitz et cadre discret

L'idée principale de l'approche Lip-field est d'imposer une condition de régularité Lipschitz sur le champ d'endommagement. L'ensemble régularisé est défini par :

$$L = \{d \in L^\infty(\Omega) : |d(\vec{x}) - d(\vec{y})| \leq \frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \Omega\} \quad (4.108)$$

où  $l$  est la longueur de régularisation et  $\text{dist}(\vec{x}, \vec{y})$  est la longueur minimale du chemin à l'intérieur de  $\Omega$  joignant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  (la distance est considérée comme infinie si les deux points ne peuvent être reliés à l'intérieur de  $\Omega$ ). Le problème régularisé est obtenu par l'ajout de la contrainte de Lipschitz au modèle non-régularisé (4.99)

$$(\vec{u}, d) = \arg \min_{\substack{\vec{u}' \in \mathcal{U}_n \\ d' \in \mathcal{A}_n \cap L}} F(\vec{u}', d') \quad (4.109)$$

Contrairement à (4.99), l'optimisation ci-dessus n'est plus séparable en  $d$ , car la contrainte Lip lie spatialement les valeurs de l'endommagement. Elle est cependant toujours convexe en  $\vec{u}$  et  $d$  séparément et l'ensemble  $L$  est convexe.

#### 4.4.2.1 Discretisation en espace

Le domaine  $\Omega$  est discrétisé par maillage noté  $\Omega^h$ . Un exemple est représenté en bleu pour une plaque trouée sur la figure 4.27.

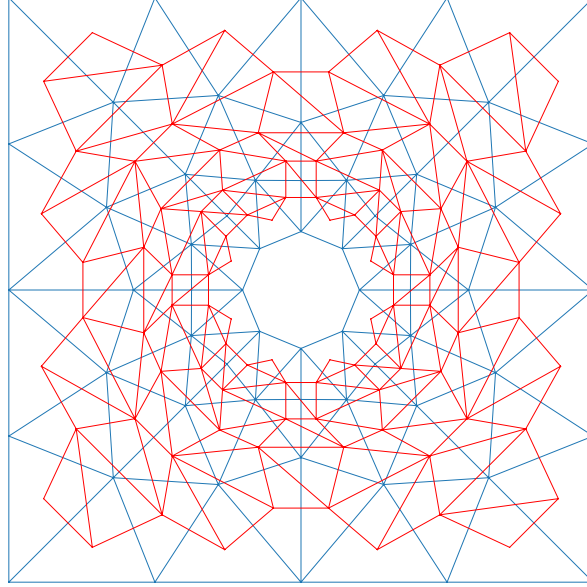


FIGURE 4.27 – Le maillage élément fini en bleu et le Lip-mesh en rouge, construit sur les centroïdes des éléments bleus.

Nous considérons un espace discret éléments finis classique sur  $\Omega^h$  : le déplacement est linéaire sur chaque élément et continu sur le domaine. La déformation est donc constante par morceaux. L'endommagement est stocké au centre de gravité de chaque élément. Cela contraste avec le choix de nombreuses approches d'endommagement diffus [Bou+08 ; Mie+10b ; Val+22] où le champ d'endommagement discret est défini par des valeurs nodales. Pour exprimer la contrainte Lip, nous construisons un maillage de triangles supplémentaire, appelé "Lip-mesh" et notée  $\Delta^h$ , reliant les centres de gravité des éléments (maille rouge dans la figure 4.27). Ce maillage est construit une seule fois pour un maillage  $\Omega^h$  donné. Les ensembles de sommets, d'arêtes et d'éléments de  $\Delta^h$  sont notés  $V$ ,  $E$  et  $T$ , respectivement. Le Lip-mesh est intégré dans le maillage classique ( $\Delta^h \subset \Omega^h$ ). Les domaines couverts par  $\Delta^h$  et  $\Omega^h$  doivent avoir la même topologie : le Lip-mesh n'a pas de nouveaux trous et se conforme au trou du maillage classique. Le champ d'endommagement est discrétisé d'une manière continue et linéaire par morceau sur le Lip-mesh. L'espace discret pour l'endommagement est noté  $D^h(\Delta^h)$ . Le gradient d'endommagement est donc constant par morceaux sur le Lip-mesh.

L'ensemble continu de Lipschitz (4.108) implique un nombre infini de contraintes puisque toutes les paires de points doivent être considérées. Nous devons trouver un moyen de discrétiser cet ensemble. Une première option consiste à borner la norme du gradient de l'endommagement sur chaque élément du Lip-mesh (4.108). Une deuxième option consiste à appliquer la contrainte de Lipschitz entre les sommets (4.111-4.112). La métrique  $\text{dist}^h(\vec{x}, \vec{y})$  est la longueur du chemin le plus court entre  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  se trouvant à l'intérieur de  $\Delta^h$ , alors que pour la métrique discrète  $\text{dist}^{h+}(\vec{x}, \vec{y})$  on force le chemin à passer par les arêtes (et donc  $\text{dist}^h(\vec{x}, \vec{y}) \leq \text{dist}^{h+}(\vec{x}, \vec{y})$ ). Enfin, une autre option consiste à appliquer la contrainte de Lipschitz seulement sur chaque arête (4.113).

$$\mathcal{L}^h = \{d \in D^h(\Delta^h) : \|\vec{\nabla} d\|_{|t \leq \frac{1}{l}}, \quad \forall t \in T\} \quad (4.110)$$

$$\mathcal{L}^{h1} = \{d \in D^h(\Delta^h) : |d(\vec{x}) - d(\vec{y})| \leq \frac{1}{l} \text{dist}^h(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V\} \quad (4.111)$$

$$\mathcal{L}^{h2} = \{d \in D^h(\Delta^h) : |d(\vec{x}) - d(\vec{y})| \leq \frac{1}{l} \text{dist}^{h+}(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V\} \quad (4.112)$$

$$\mathcal{L}^{h+} = \{d \in D^h(\Delta^h) : |d(\vec{x}) - d(\vec{y})| \leq \frac{1}{l} \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E\} \quad (4.113)$$

Les quatre options satisfont aux inclusions suivantes, prouvées dans 4.5.2 :

$$\mathcal{L}^h \subset \mathcal{L}^{h1} \subset \mathcal{L}^{h2} = \mathcal{L}^{h+} \quad (4.114)$$

Nous avons choisi la première option, car elle implique le moins de contraintes discrètes puisque le nombre d'éléments dans un maillage est beaucoup plus petit que le nombre d'arêtes (ou de paires de sommets). De plus, par rapport à  $\mathcal{L}^{h+}$ , elle est moins sujette à l'effet d'orientation du maillage, car nous vérifions la contrainte de Lipschitz sur toutes les orientations et pas seulement le long des bords. Le problème discret est donc de trouver au temps  $t_{n+1}$ , le couple  $(\vec{u}, d)$  satisfaisant :

$$(\vec{u}, d) = \arg \min_{\substack{\vec{u}' \in \mathcal{U}_n^h \\ d' \in \mathcal{A}_n^h \cap \mathcal{L}^h}} F(\vec{u}', d') \quad (4.115)$$

où  $\mathcal{U}^h$  indique l'espace d'éléments finis pour le déplacement et  $\mathcal{A}_n^h$  est donné par :

$$\mathcal{A}_n^h = \{d \in D^h(\Delta^h) : d_n(\vec{x}) \leq d(\vec{x}) \leq 1, \forall \vec{x} \in V\} \quad (4.116)$$

#### 4.4.2.2 Schéma alterné

Le problème d'optimisation (4.115) n'est pas convexe par rapport à la paire  $(u, d)$  mais est convexe par rapport à chacun des champs pris séparément. Comme pour l'approche par champ de phase [Mie+10a], un schéma alterné est utilisé : on résout le déplacement avec un endommagement donné, puis on résout pour l'endommagement à déplacement fixé et on itère jusqu'à convergence. La première minimisation est assez standard et se réduit à la résolution d'un problème élastique dans le cas présent. La seconde l'est moins et s'écrit comme suit :

$$d = \arg \min_{d' \in \mathcal{A}_n^h \cap \mathcal{L}^h} F(\vec{u}, d') \quad (4.117)$$

où  $\vec{u}$  est connu (itération courante). C'est un problème de minimisation convexe sous contrainte d'inégalités convexes. Ces inégalités sont des contraintes coniques du second ordre. Pour le résoudre, nous avons utilisé le logiciel *cvxopt* [And+11 ; And+21], en particulier la fonction *cp* qui peut trouver le minimiseur d'une fonction convexe générale avec des contraintes coniques du premier et du second ordre.

#### 4.4.2.3 De l'utilisation de bornes pour la mise à jour de l'endommagement

La section précédente a détaillé la discrétisation spatiale ainsi que le schéma alterné. L'itération d'endommagement consiste en une optimisation convexe. Il a été observé dans le premier article de Lip-field [Moë+21b] que cette optimisation pouvait être grandement simplifiée en construisant et en utilisant des bornes pour la solution. Nous rappelons ci-dessous ces bornes et détaillons comment on peut les mettre en œuvre dans le cadre discret.

**Bornes de l'endommagement dans le cadre continu** Des bornes sur la solution d'endommagement  $d$  ont été proposées dans l'article [Moë+21b]. Considérons le problème de l'optimisation de l'endommagement :

$$d = \arg \min_{d' \in \mathcal{A}_n \cap \mathcal{L}} F(\vec{u}, d') \quad (4.118)$$

L'idée est dans un premier temps de ne pas tenir compte de la contrainte de Lipschitz et de calculer une mise à jour locale de l'endommagement désignée par  $d^{\text{loc}}$  :

$$d^{\text{loc}} = \arg \min_{d' \in \mathcal{A}_n} F(\vec{u}, d') \Rightarrow d^{\text{loc}}(\vec{x}) = \arg \min_{d_n(\vec{x}) \leq d' \leq 1} f(\bar{\epsilon}(\vec{u}) |_{\vec{x}}, d'), \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (4.119)$$

Dans ce qui précède, nous avons utilisé la propriété de séparabilité de l'optimisation non-régularisée par rapport à la variable  $d$ . L'endommagement local au point  $\vec{x}$  ne dépend que de la déformation en ce point. Les limites supérieure et inférieure de l'endommagement sont alors définies comme suit :

$$d^l(\vec{x}) = \min_{\vec{y} \in \Omega} (d^{\text{loc}}(\vec{y}) + \frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}, \vec{y})) \quad (4.120)$$

$$d^u(\vec{x}) = \max_{\vec{y} \in \Omega} (d^{\text{loc}}(\vec{y}) - \frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}, \vec{y})) \quad (4.121)$$

Où on a :

$$d_n \leq d^l \leq d^{\text{loc}} \leq d^u \leq 1, \quad d^l \leq d \leq d^u \quad (4.122)$$

La preuve peut être trouvée dans [Moë+21b]. L'optimisation pour  $d$  dans (4.118) peut donc être remplacée par :

$$d = \arg \min_{d' \in \bar{\mathcal{A}}_n \cap \mathcal{L}} F(\vec{u}, d') \quad (4.123)$$

où

$$\bar{\mathcal{A}}_n = \{d \in L^\infty(\Omega) : d^l \leq d \leq d^u\} \subset \mathcal{A}_n \quad (4.124)$$

Il est clair qu'en tout point pour lequel les bornes supérieures et inférieures sont égales, la mise à jour locale de l'endommagement est optimale :

$$d^l(\vec{x}) = d^u(\vec{x}) \Rightarrow d(\vec{x}) = d^{\text{loc}}(\vec{x}) \quad (4.125)$$

Le calcul des bornes peut donc potentiellement réduire drastiquement l'effort d'optimisation de l'endommagement en isolant les sous-domaines sur lesquels la mise à jour locale doit encore être corrigée. Ces sous-domaines incluent nécessairement les zones pour lesquelles la contrainte de Lipschitz doit être active.

**Bornes dans le cadre discret** Tout d'abord, une mise à jour locale peut être calculée pour chaque nœud.

$$d^{\text{loc}}(\vec{x}) = \arg \min_{d_n(\vec{x}) \leq d' \leq 1} f(\bar{\epsilon}(\vec{u}) |_{\vec{x}}, d'), \quad \forall \vec{x} \in V \quad (4.126)$$

Ensuite, nous proposons de calculer les bornes suivantes

$$d^l(\vec{x}) = \min_{\vec{y} \in V} (d^{\text{loc}}(\vec{y}) + \frac{1}{l} \text{dist}^{h+}(\vec{x}, \vec{y})), \quad \forall \vec{x} \in V \quad (4.127)$$

$$d^u(\vec{x}) = \max_{\vec{y} \in V} (d^{\text{loc}}(\vec{y}) - \frac{1}{l} \text{dist}^{h+}(\vec{x}, \vec{y})), \quad \forall \vec{x} \in V \quad (4.128)$$

La définition ci-dessus semble indiquer que  $O(n^2)$  opérations sont nécessaires, où  $n$  est le nombre de sommets dans  $V$ . Heureusement, un algorithme inspiré de l'algorithme de Dijkstra [Dij59] réduit



l'effort à  $O(n \log n)$  opérations. Il est détaillé dans l'annexe 4.5.3. À tout nœud, les bornes satisfont des inégalités similaires aux bornes du cadre du continu (voir la preuve dans l'annexe 4.5.4) :

$$d_n(\vec{x}) \leq d^l(\vec{x}) \leq d^{\text{loc}}(\vec{x}) \leq d^u(\vec{x}) \leq 1, \quad d^l(\vec{x}) \leq d^+(\vec{x}) \leq d^u(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in V \quad (4.129)$$

où

$$d^+ = \arg \min_{d' \in \mathcal{A}_n^h \cap \mathcal{L}^{h+}} F(\vec{u}, d') \quad (4.130)$$

Malheureusement, les bornes n'encadrent pas la solution  $d$  que nous recherchons (4.117), mais une autre solution définie par (4.130). La raison de cette divergence est que nous avons choisi la métrique  $\text{dist}^h$  au lieu de  $\text{dist}$  pour calculer les bornes. En effet, si nous avons pu implémenter un algorithme extrêmement simple le cas  $\text{dist}^h$ , nous n'avons pour l'instant pas réussi à le faire pour le cas  $\text{dist}$ . Pour prendre en compte cette divergence, nous utilisons le schéma suivant :

- étape 1 : calculer les bornes (4.127)-(4.128) en utilisant l'algorithme 4.5.3.
- étape 2 : initialiser  $V^l$  avec les nœuds pour lesquels  $d^l(\vec{x}) = d^u(\vec{x})$  et définir  $T^l$  l'ensemble d'éléments connectés seulement aux nœuds inclus dans  $V^l$ .
- étape 3 : résoudre

$$d = \arg \min_{d' \in \mathcal{A}_n^h \cap \mathcal{L}^h} F(\vec{u}, d') \quad (4.131)$$

avec :

$$\overline{\mathcal{A}}_n^h = \{d \in D^h(\Delta^h) : d(\vec{x}) = d^{\text{loc}}(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V^l \text{ and } d_n(\vec{x}) \leq d(\vec{x}) \leq 1, \forall \vec{x} \in V \setminus V^l\} \quad (4.132)$$

$$\overline{\mathcal{L}}^h = \{d \in D^h(\Delta^h) : \|\vec{\nabla} d\|_{|t| \leq \frac{1}{l}}, \quad \forall t \in T \setminus T^l\} \quad (4.133)$$

- étape 4 : si  $d \in \mathcal{L}^h$  fin. sinon retirer les éléments tels que  $\|\vec{\nabla} d\| > 1/l$  de  $T^l$  et retirer leurs nœuds de  $V^l$ , et reprendre à l'étape 3.

Si les bornes étaient associées à la bonne métrique, la condition de l'étape 4 serait automatiquement vérifiée. Dans les expériences numériques, nous avons remarqué que peu d'itérations de l'algorithme précédent (entre 1 et 5) ont été nécessaires, ce qui montre que l'écart n'est pas trop préjudiciable, et qu'il constitue toujours une accélération considérable par rapport à l'alternative (résolution directe de (4.117)).

### 4.4.3 Résultats

Tous les exemples<sup>4</sup> sont calculés en utilisant l’hypothèse de déformation plane. Tous les exemples sont traités avec le modèle symétrique ( $\beta = 0$ ), sauf l’essai de cisaillement qui est traité avec le modèle symétrique ( $\beta = 0$ ) et asymétrique ( $\beta = 1$ ). Pour tous les exemples, le maillage est construit à l’aide du logiciel libre `gms`<sup>5</sup> [Geu+09]. En ce qui concerne le maillage Lip, il est construit à l’aide du logiciel libre `Triangle`<sup>5</sup> [She96].

#### 4.4.3.1 Plaque trouée

Comme premier exemple, un déplacement est imposé sur les côtés opposés d’un domaine carré percé en son centre par un trou circulaire. Les paramètres géométriques et matériels utilisés sont reportés sur le tableau 4.1, où  $L$  est la longueur du carré et  $R$  est le rayon du trou. Les paramètres du matériau sont choisis de manière générique pour ce premier exemple puisque nous essayons ici d’évaluer la méthode de manière qualitative. Le maillage est non structuré et paramétré par la taille

units	$L$	$R$	$E$	$\nu$	$l$	$Y_c$	$\eta$
mm	2	0.2	1 MPa	0.2	0.2 mm	1 MPa	0.1

TABLE 4.1 – Plaque trouée : paramètres géométriques (à gauche), paramètres du matériau (à droite).

$h$  des arêtes sur les bords du domaine. Les résultats sont présentés sur la figure 4.28. En haut à gauche, nous avons la courbe charge/déplacement, suivie par des vues du champ d’endommagement à différents niveaux de chargement. Les cercles bleus sur la courbe représentent les points de chargement sur lesquels les vues ont été prises. Nous avons d’abord un chargement élastique, jusqu’à ce que l’énergie stockée soit suffisante pour déclencher l’endommagement. Nous avons ensuite une courte phase d’adoucissement, où l’endommagement commence à croître doucement à deux endroits symétriques en haut et en bas du trou, suivie d’une libération abrupte de l’énergie de déformation pendant laquelle les zones d’endommagement se développent en deux fissures se propageant jusqu’aux limites de la plaque. Cette configuration montre clairement une forte instabilité, et le chemin d’équilibre est discontinu sous déplacement imposé. Pour améliorer cette situation, nous pourrions envisager un autre mécanisme de contrôle afin de suivre la branche instable (snap-back).

maillage	$L/h$	nœuds	triangles
mesh 1	32	1524	2896
lip-mesh 1		2896	5476
mesh 2	64	5640	10980
lip-mesh 2		10980	21308
mesh 3	128	19333	38070
lip-mesh 3		38070	74947

TABLE 4.2 – Paramètres de maillage pour l’analyse de convergence.

La figure 4.29 présente une analyse de convergence. Tous les paramètres sont identiques, à l’exception de la densité du maillage qui est augmentée comme indiqué dans le tableau 4.2. Le champ

4. Les maillages et les scripts python utilisés pour tous les exemples sont libres et peuvent être téléchargés sur <https://gitlab.com/c4506/lipfield>

5. `Triangle` est disponible à l’adresse <https://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.research.html>, une interface python est disponible sur <https://github.com/pletzer/pytriangle>

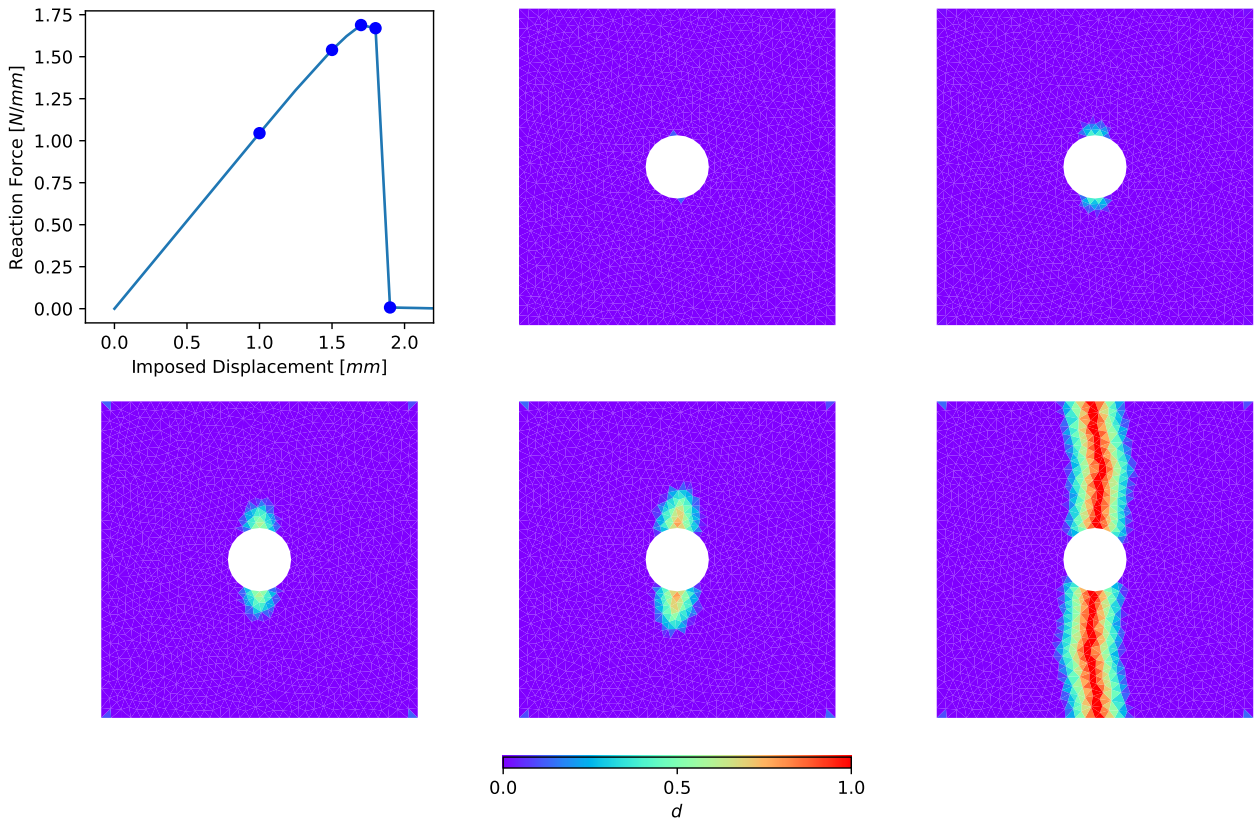


FIGURE 4.28 – Courbe de Charge/Déplacement et champ d'endommagement pour le maillage 1.

d'endommagement est tracé sur la ligne supérieure, avec le maillage plus fin sur la droite. Les deux zones d'endommagement prennent la forme d'une bande verticale, d'épaisseur proche de  $2l$  où l'endommagement atteint 1 au centre de la bande. Les éléments pour lesquels  $d$  atteint 1 n'ont bien sûr aucune rigidité et pourraient être identifiés comme des fissures. Sur le maillage le plus grossier, la bande n'est pas parfaitement droite en raison de la nature non structurée du maillage. Au fur et à mesure que le maillage est raffiné, tout en gardant  $l$  constant, de plus en plus d'éléments s'insèrent dans l'épaisseur de la bande qui apparaît de plus en plus droite tandis que le champ d'endommagement est décrit avec de plus en plus de précision. Sur la ligne centrale de la figure, nous reportons le champ d'endommagement, pour chaque maille, le long de la ligne blanche représentée sur la ligne supérieure. La ligne blanche est perpendiculaire à la fissure, et le champ d'endommagement atteint clairement 1 sur la fissure, et se réduit avec une pente fixée par la contrainte de Lipschitz en s'éloignant de la fissure. L'épaisseur de la zone endommagée converge clairement et rapidement vers la valeur de  $2l$ . Pour chaque maillage, nous traçons le champ d'endommagement tel que vu par le problème mécanique (constant par élément de maille) et le champ d'endommagement tel que vu par le problème d'endommagement (linéaire sur chaque élément du Lip-Mesh). Notez que les deux reproduisent très bien la forme de toiture attendue et imposée par la contrainte Lip-field. Cela signifie qu'en l'absence de la contrainte, l'endommagement serait nul partout, sauf sur une bande d'une épaisseur d'un élément, reproduisant la dépendance classique du résultat au maillage pour un modèle d'endommagement local. Sur la dernière bande horizontale de la figure, on a tracé le déplacement et le champ de déformation, le long de la ligne blanche. On remarque que le déplacement fait apparaître nettement un saut dans l'épaisseur d'un seul élément, reproduisant le résultat qui aurait été obtenu si nous avions inséré une fissure dans le maillage. La composante de déformation  $\epsilon_{xx}$  est également tracée et la forme attendue se rapprochant de la fonction de Dirac est bien capturée.

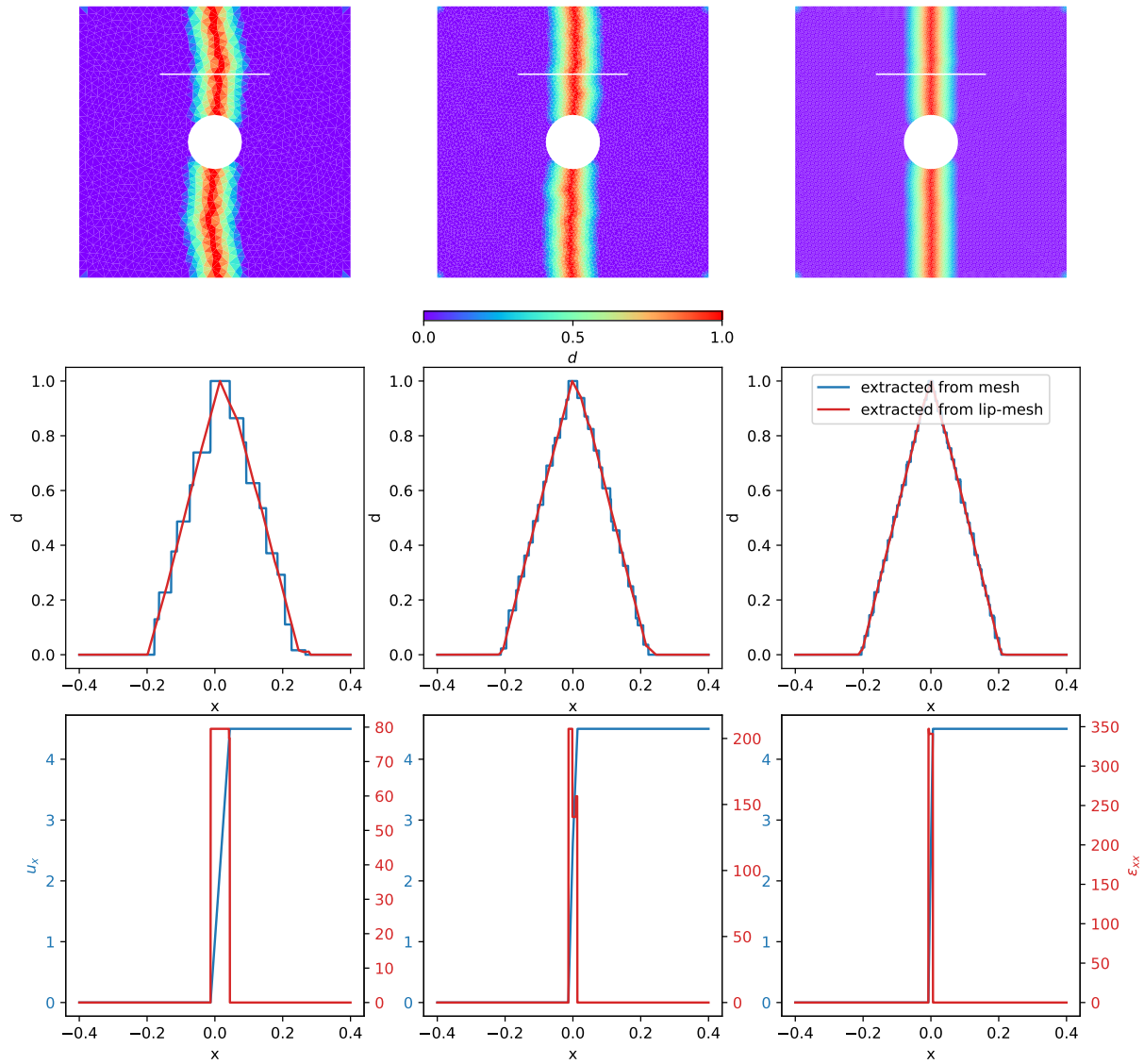


FIGURE 4.29 – Analyse de convergence : en haut, champ d'endommagement, en bas,  $u_x$ ,  $\epsilon_{xx}$  le long de la ligne blanche pour différents maillages, à la fin de la simulation.

#### 4.4.3.2 Comparaison avec une analyse de Griffith

La géométrie décrite dans la figure 4.30 est utilisée pour étudier la propagation d'une fissure. Cette géométrie est inspirée de la forme classique du TDCB (Tapered Double Cantilever Beam) qui assure une croissance stable de la fissure par rapport à un chargement à déplacement croissant.

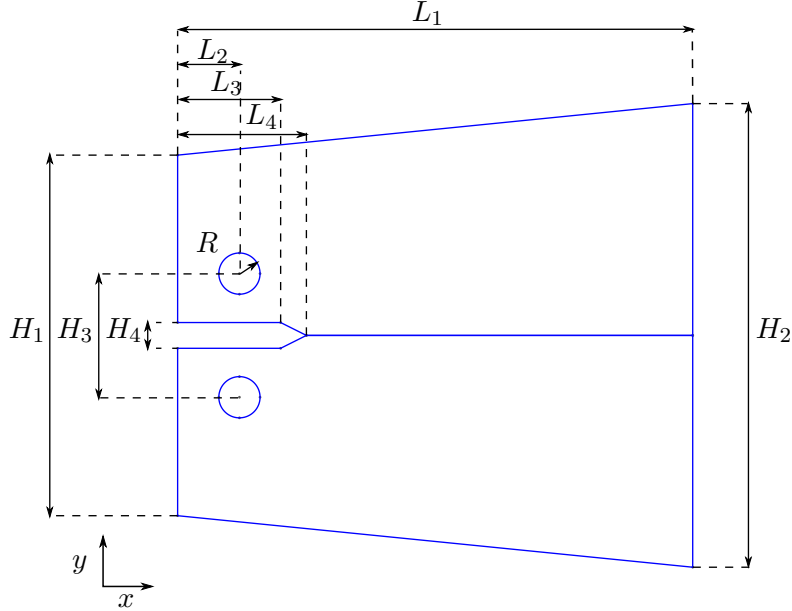


FIGURE 4.30 – Géométrie TDCB.

units	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$R$
mm	100	12	20	24	70	90	24	5	4

TABLE 4.3 – Paramètres géométriques TDCB

$E$	$\nu$	$K_{I_c}$	$\eta$
3500 MPa	0.32	1.4 MPa $\sqrt{\text{m}}$	0.1

TABLE 4.4 – Paramètres matériaux TDCB

Les dimensions définissant la géométrie sont données dans le tableau 4.3. Le spécimen TDCB est chargé par un mouvement de corps rigide linéarisé, imposé sur les bords des 2 trous. Le trou inférieur a son centre fixé, tandis qu'il est libre de tourner autour de l'axe  $z$ . Le trou supérieur est libre de tourner autour de l'axe  $z$ , son centre est fixé sur l'axe  $x$ , tandis que son mouvement sur l'axe  $y$  est imposé et constitue le paramètre de chargement  $u$ . Nous faisons l'hypothèse classique de déformation plane et de petite déformation. Le matériau est décrit avec les coefficients donnés dans le tableau 4.4, où  $E$ ,  $\nu$  et  $K_{I_c}$  désignent respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et le facteur d'intensité de la contrainte critique en mode I. Lors du chargement, on s'attend à ce qu'une fissure se développe à la pointe de l'entaille et se propage le long de l'axe médian de l'échantillon TDCB, que l'on appellera le chemin de fissure. Pour une première validation de l'approche Lip-field pour l'endommagement fragile, nous comparerons nos résultats avec une analyse de mécanique de la rupture élastique linéaire, en utilisant un critère de Griffith.

**Analyse de Griffith** Selon le critère de Griffith, la fissure doit se propager si le taux de libération d'énergie élastique par unité de longueur de fissure  $G$  est égal à  $G_c$ , où  $G_c$  est un paramètre matériel : le taux de libération d'énergie critique. Dans l'hypothèse d'une déformation plane, pour un matériau isotrope-élastique, nous avons :

$$G_c = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{I_c}^2 \quad (4.134)$$

Afin de calculer la courbe de charge-déplacement ( $F(u)$ ) et la longueur de fissure ( $a(u)$ ) sous l'hypothèse de Griffith, nous avons appliqué l'approche suivante. Le maillage est construit en deux parties symétriques le long du chemin de fissure, de sorte que les nœuds sur la ligne de fissure soient régulièrement espacés et nous désignons par  $h$  l'espacement entre deux nœuds. Le maillage de la partie supérieure et celui de la partie inférieure sont déconnectés, mais les nœuds de chaque partie sont aux mêmes positions géométriques sur le chemin de fissure. Les nœuds sont connectés en utilisant un multiplicateur de Lagrange pour imposer le même déplacement sur les deux parties à chacun de ces nœuds, sur la section du chemin de fissure à droite de la fissure réelle. Avec cette configuration, nous pouvons facilement calculer le champ de déplacement d'équilibre  $\vec{u}$  et l'énergie de déformation  $e$  dans l'éprouvette TDCB en utilisant la méthode standard des éléments finis, pour différentes longueurs de fissures et un déplacement unitaire  $u$ . Pour chaque longueur de fissure  $a$ , correspondant à un nombre de nœuds non connectés sur le chemin de la fissure, nous pouvons approximer le taux de libération d'énergie  $G_1(u)$  pour le déplacement unitaire, en utilisant une expansion de Taylor du premier ordre :

$$G_1(a) = \frac{e_1(a+h) - e_1(a-h)}{2h} \quad (4.135)$$

où  $e_1(a)$  est l'énergie de déformation à l'équilibre pour la fissure de longueur  $a$  et un déplacement imposé  $u = 1$ . Puisque  $G$  est clairement une fonction quadratique de  $u$ , nous pouvons calculer pour chaque valeur de  $a$  la valeur de  $u_c$  puis de  $f_c$  pour laquelle  $G = G_c$ , et tracer les courbes  $F(u)$  et  $a(u)$  pour le cas de l'analyse de Griffith.

**Analyse Lip-field** Afin de comparer les analyses de Griffith et Lip-field, nous devons paramétrer le modèle d'endommagement pour qu'il soit énergétiquement équivalent à celui de Griffith. En supposant que lorsque l'endommagement se localise sous la forme d'une fissure, et que  $d$  sature la contrainte de Lipschitz et atteint 1 sur le chemin de la fissure, la fonction  $d(y)$  sur une ligne perpendiculaire au chemin de la fissure peut être approximée par un profil triangulaire de pente  $1/l$  :  $d(y) = \frac{\max(l-|y|,0)}{l}$ , où  $y$  est la distance au chemin de la fissure. On peut alors évaluer l'énergie dissipée par unité d'avancement de la fissure par  $G_c = Y_c \int_{-l}^l h(d(y)) dy = 4Y_c l$ . Dans les simulations, nous fixons  $l$  de manière à avoir suffisamment d'éléments dans la bande pour représenter la fissure (typiquement  $l = 5h$ ), puis nous fixons  $Y_c = G_c/(4l)$ .

La comparaison entre Griffith et Lip-field est donnée sur la figure 4.31 où nous reportons la réaction sur le cercle d'ancrage et la longueur de la fissure en fonction du déplacement imposé, pour les deux analyses : Griffith et Lip-field.

Dans les deux cas, après avoir atteint un déplacement critique, la réaction diminue de manière contrôlée, tandis que la fissure avance à une vitesse proportionnelle à celle du déplacement imposé, jusqu'à ce que la longueur de la fissure couvre environ les trois-quarts de sa longueur maximale. Après cela, la vitesse de la fissure ralentit progressivement, jusqu'à ce qu'elle atteigne la limite droite de l'échantillon. Les résultats se comparent bien : nous observons le même déplacement critique, et la même vitesse entre Griffith et Lip-field, même si nous avons une légère différence dans l'énergie dissipée et la position de la pointe de la fissure. Une étude plus approfondie dépasse le cadre de cet article, mais nous avons déjà une bonne confirmation de la capacité de Lip-field à reproduire la physique de Griffith.



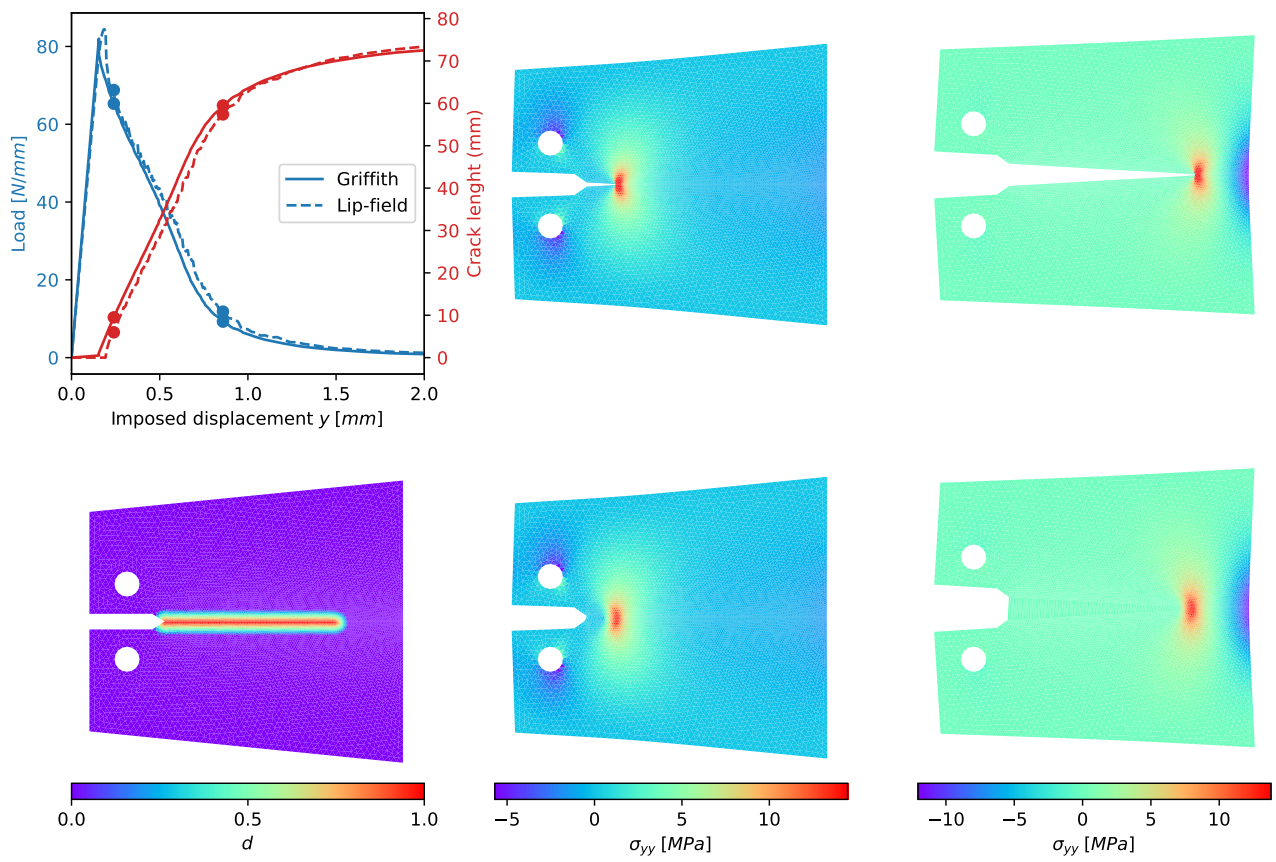


FIGURE 4.31 – comparaison Griffith/Lip-field sur l'essai TDCB

#### 4.4.3.3 Essai de Cisaillement

Dans l'exemple suivant, nous effectuons un test de cisaillement sur la géométrie donnée dans la figure 4.32. Un échantillon carré de longueur  $2L = 1\text{mm}$  est initialement coupé par le long d'une ligne, de la limite gauche au centre. Ceci est censé représenter une fissure initiale. Le bas du carré est fixe, tandis que le haut a son déplacement fixé à 0 dans la direction  $y$  et imposé dans la direction  $x$ . Ce cas test est souvent utilisé dans la littérature phase-field [Wu+20]. Les propriétés du matériau sont données dans le tableau 4.5, et  $Y_c$  est calculé pour obtenir l'équivalence énergétique comme indiqué dans la sous-section précédente ( $Y_c = G_c/(4l)$ ). Le paramètre  $\eta$  est fixé à 0,1. Les deux paramètres  $h_0$  et  $h_1$  sont les tailles d'arêtes cibles pour le mailleur, pour les zones de maillage grossier et fin respectivement, comme indiqué sur la figure 4.32. L'étendue de la zone fine a été déterminée grâce à un premier calcul sur un maillage grossier, afin d'identifier la zone dans laquelle l'endommagement se localise en une fissure. Les paramètres des deux maillages utilisés pour cet exemple sont donnés dans le tableau 4.6.

$E$	$\nu$	$l$	$G_c$	$\eta$
210000 MPa	0.2	0.015mm	2.7 MPa/mm	0.1

TABLE 4.5 – Essai de cisaillement : paramètres matériau

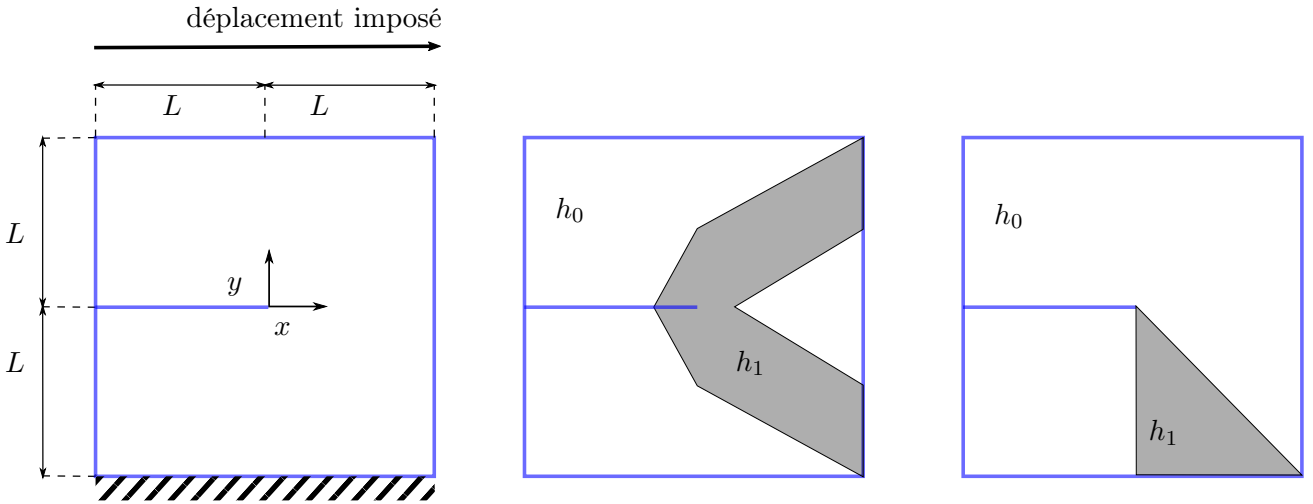


FIGURE 4.32 – De gauche à droite : définition de la géométrie de l'essai de cisaillement et des conditions aux limites ainsi que des zones pour les différents paramètres de maillage, pour le cas symétrique et le cas asymétrique.

mesh	$h_0$	$h_1$	vertices	faces
symmetric	1/8 mm	1/128 mm	26656	53311
asymmetric	1/8 mm	1/128 mm	11343	22685

TABLE 4.6 – Essai de cisaillement : paramètres des maillages

Nous reportons sur la figure 4.33, la courbe charge/déplacement, ainsi que le champ d'endommagement, à différents stades du chargement, représentés par des points sur la courbe. Après une phase



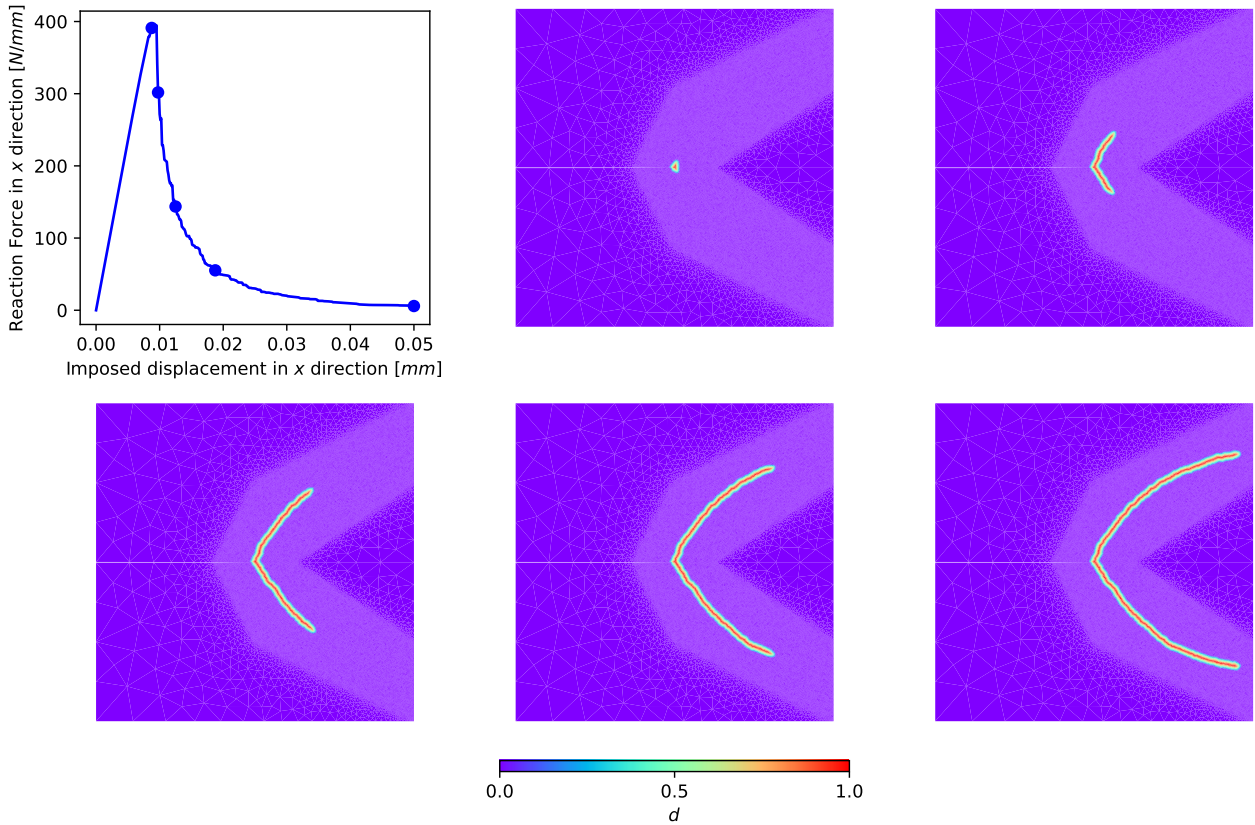


FIGURE 4.33 – Essai de cisaillement : traction/compression symétrique. En haut à gauche : courbe de déplacement de la charge. De gauche à droite et de haut en bas, champ d’endommagement au point correspondant de la courbe.

élastique, l’endommagement commence à se développer à la pointe de la fissure initiale lorsque  $Y$  atteint  $Y_c$ . La force de réaction sur le bord supérieur du carré diminue ensuite rapidement alors que deux fissures se développent de façon symétrique à partir de la pointe de la fissure jusqu’à ce que la réaction atteigne zéro lorsque les deux fissures atteignent la limite droite. Les fissures tournent progressivement tout en avançant jusqu’à ce qu’elles atteignent la limite de droite. Ce résultat n’aurait pas pu être obtenu avec la seule théorie de Griffith : il aurait fallu disposer d’un modèle permettant de prédire la direction d’avancée des fissures. Comme dans le champ de phase ou dans l’approche TLS, aucune hypothèse supplémentaire n’est nécessaire pour tenir compte du changement de direction des fissures. C’est la minimisation de l’énergie qui conduit naturellement la fissure. Cet exemple montre également que l’approche Lip-field est capable de représenter un branchement de fissures. La géométrie de la fissure et la courbe charge/déplacement sont cohérentes avec les résultats publiés [Wu+20], [All+11]. Ces résultats sont cependant irréalistes si l’on considère que la fissure supérieure se développe en compression, de sorte que lorsque  $d$  atteint 1, on a en fait un chevauchement des lèvres de la fissure. Ce problème n’est pas nouveau. Afin d’éviter ce comportement, nous avons besoin d’un modèle de traction/compression asymétrique, où la fonction d’endommagement  $g(d)$  n’affecte que la partie traction de l’énergie de déformation comme discuté dans la partie 4.4.1. Les simulations ont été reproduites en appliquant cette modification sur un maillage adapté au chemin de fissure attendu. Les résultats sont présentés sur la figure 4.34.

Jusqu’au point où l’endommagement commence à se localiser à la pointe de la fissure initiale, les résultats sont similaires au cas symétrique. Ensuite, lorsque la force de réaction commence à diminuer, la zone d’endommagement se localise dans une seule fissure, sur le côté inférieur du carré, se propageant

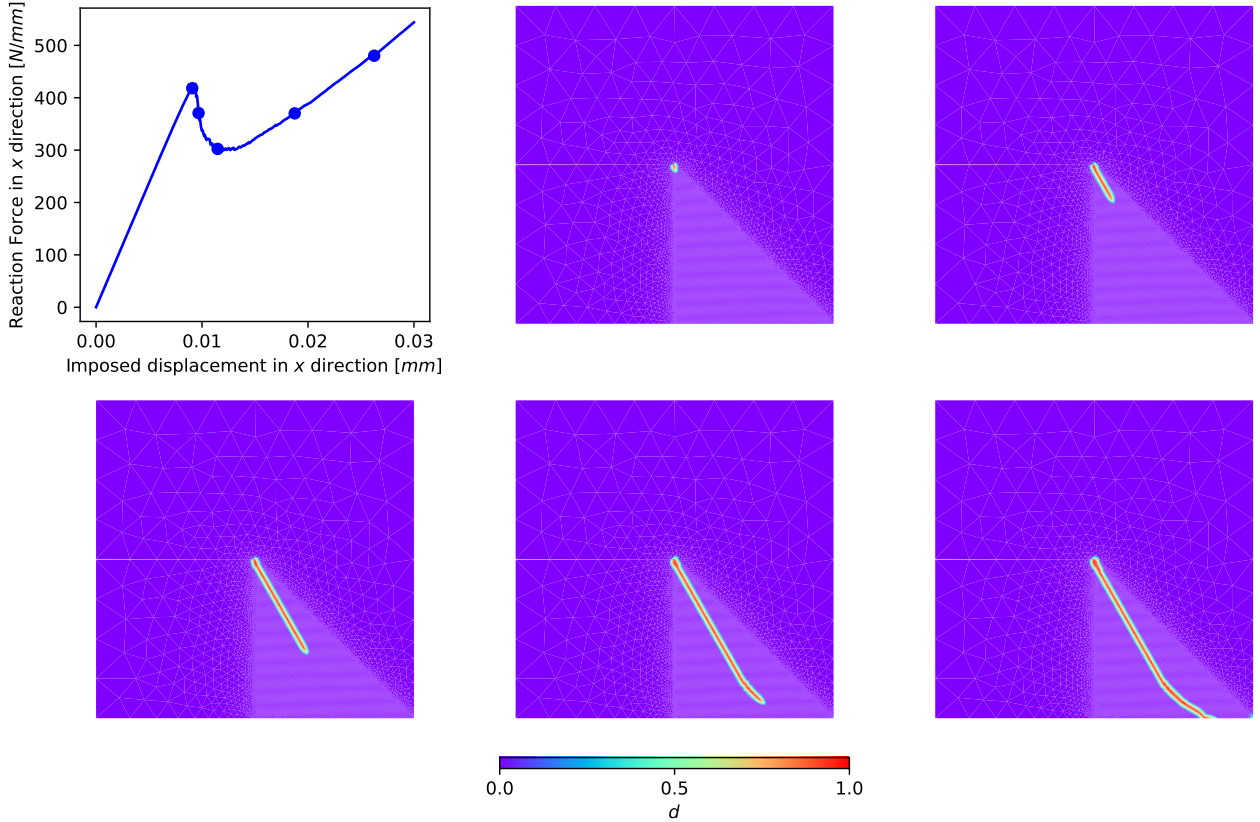


FIGURE 4.34 – Essai de cisaillement : modèle asymétrique en traction/compression. En haut à gauche : courbe de charge en fonction du déplacement. De gauche à droite, puis de bas en haut, les champs d'endommagement aux points correspondants sur la courbe.

d'abord le long d'une ligne droite jusqu'à ce qu'elle se rapproche de la limite inférieure fixe et que la force de réaction atteigne un minimum local. Ensuite, elle commence à tourner, s'alignant avec le bord, tandis que la réaction recommence à croître, contrairement au cas précédent. L'analyse de l'état de contrainte/déformation à proximité de la fissure, aux points de chargement où la réaction augmente, montre que la direction de la fissure est un vecteur propre pour la déformation. La déformation est alors compressive dans la direction de la fissure et en tension dans la direction orthogonale. A ces endroits, la variable d'endommagement est proche de 1 et la contrainte dans la direction propre orthogonale à la fissure est nulle ou très faible. Dans la direction de la fissure, la contrainte est compressive et augmente avec le paramètre de chargement. La fissure est donc dans un état de contrainte compressive expliquant le fait que la réaction augmente, même si la fissure est complètement formée. Si la fissure sortait sur le bord libre droit de l'échantillon, aucune contrainte de compression ne se serait développée et nous aurions assisté à une rupture complète de l'échantillon.

On remarque que le gradient de l'endommagement dans la direction normale à la frontière ( $\vec{\nabla}d \cdot \vec{n}$ ) n'est pas nul lorsque la fissure atteint la frontière. Cela contraste fortement avec les résultats obtenus dans le cadre de la théorie du champ de phase où la formulation forte impose a priori  $\vec{\nabla}d \cdot \vec{n} = 0$ .

#### 4.4.3.4 Une histoire de deux fissures

Pour le dernier exemple, nous reproduisons un autre cas test courant dans la littérature, présenté et résolu par exemple dans [Jud+15] : en partant d'un échantillon carré, deux fissures initiales horizontales en vis à vis sont découpées dans l'échantillon, une de chaque côté, mais à des hauteurs différentes (voir

figure 4.35).

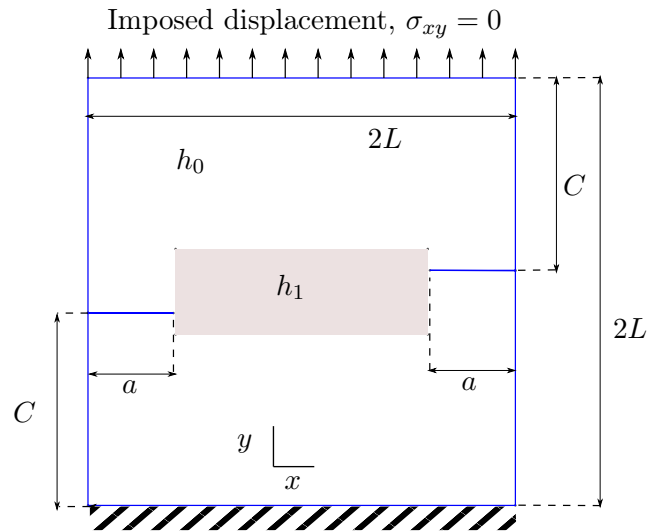


FIGURE 4.35 – Une histoire de deux fissures : description géométrique, conditions aux limites et paramètres de maillage.

Le tableau 4.7 présente les paramètres géométriques, les paramètres du matériau ainsi que le maillage utilisé pour la simulation. Le modèle d'endommagement est ici symétrique en traction/compression. Comme dans le cas précédent, nous utilisons deux paramètres  $h_0$  et  $h_1$  pour contrôler la densité du maillage, avec un maillage plus fin dans la zone où l'endommagement est attendu (gris clair sur la figure 4.35).

Géométrie :

	$L$	$C$	$a$
mm	1	0.95	0.2

Maillage :

$h_0$	$h_1$	vertices	faces
0.025mm	0.003125mm	26338	52675

Paramètres Matériau :

$E$	$\nu$	$l$	$Y_c$	$\eta$
1 MPa	0.2	0.01 mm	1 MPa	0.1

TABLE 4.7 – Une histoire de deux fissures : paramètres de la géométrie du maillage et du matériau.

Le carré est fixé en bas tandis que le déplacement dans la direction  $y$  est imposé sur le bord supérieur. Les résultats sont reportés sur la figure 4.36.

Nous avons d'abord une phase quasi-élastique où l'endommagement est confiné aux deux extrémités initiales de la fissure jusqu'à ce que nous atteignons une charge critique. Au-delà de la charge critique, les deux zones endommagées commencent à croître, se localisant en deux fissures qui commencent à se propager, formant un motif qui maintient une symétrie centrale par rapport au centre du carré, tandis que la force de réaction sur la limite supérieure diminue rapidement. La fissure gauche se propage vers la droite avec un léger angle vers le bas, tandis que la fissure droite se propage vers la gauche avec un léger angle vers le haut, jusqu'à ce que les deux atteignent l'axe de symétrie vertical du carré. Après cela, la trajectoire des deux fissures commence à s'incurver vers l'axe horizontal de symétrie du carré jusqu'à ce que les deux extrémités des fissures fusionnent finalement. Notez que l'endommagement à une distance supérieure à  $l$  de l'endroit où  $d$  atteint son maximum est exactement nul. Il n'y a pas

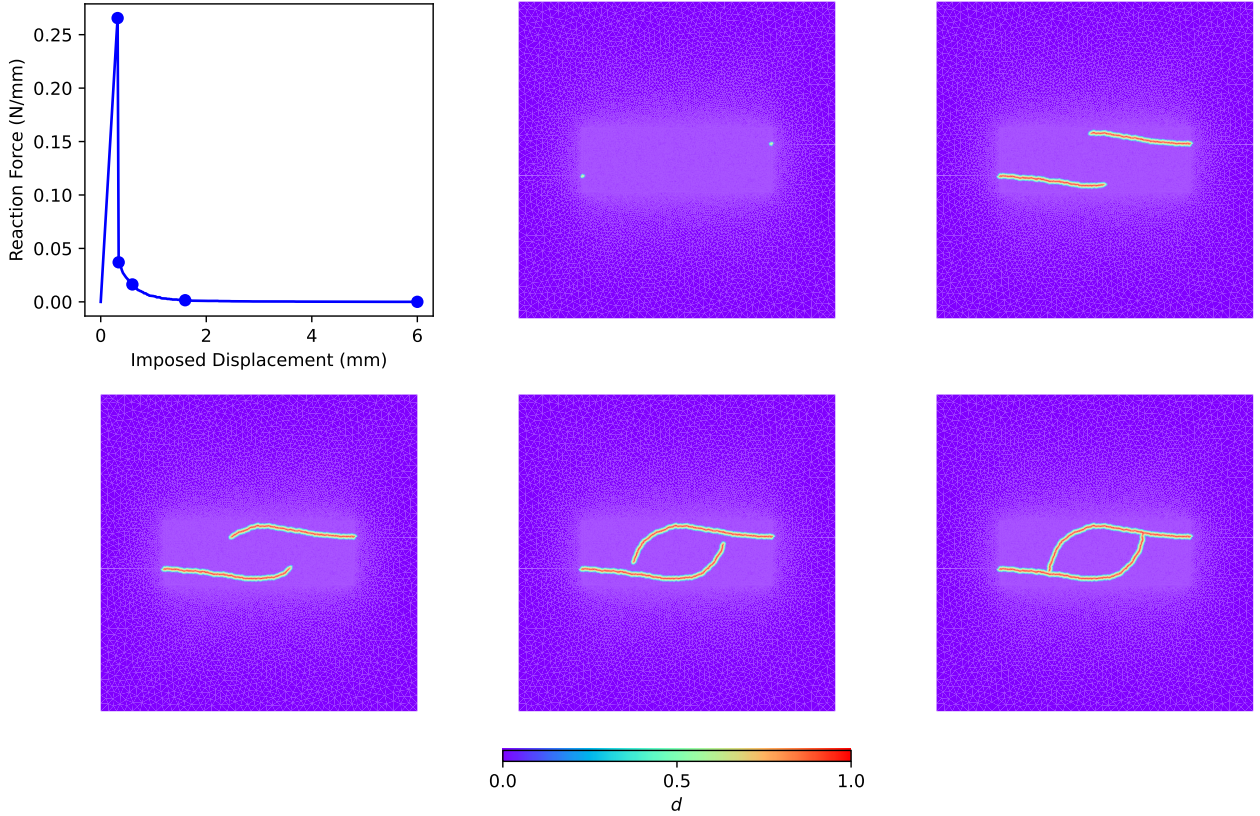


FIGURE 4.36 – Une histoire de deux fissures. En haut à gauche : courbe charge/déplacement. De gauche à droite : les champs d'endommagement aux points indiqués sur la courbe.

d'endommagement en dehors de la zone de localisation. Le modèle de fissure obtenu est similaire à celui observé dans les travaux précédents.

#### 4.4.4 Conclusions et travaux futurs

Nous avons décrit ici notre première mise en œuvre bidimensionnelle par éléments finis de l'approche Lip-field pour la rupture fragile avec des modèles d'endommagement symétriques et asymétriques en tension/compression.

Une variété d'exemples ont été traités, démontrant l'indépendance du chemin de la fissure par rapport au maillage, et de bonnes propriétés de convergence. Une comparaison avec le modèle de Griffith a également été fournie et montre une bonne corrélation.

La principale originalité de l'approche Lip-field se trouve dans la façon dont les équations locales sont régularisées. Au lieu d'ajouter une contribution du gradient d'endommagement au potentiel incrémental, comme dans l'approche par champ de phase, l'endommagement est contraint à être de Lipschitz-continu pour une longueur donnée. Cette approche présente quelques avantages par rapport au champ de phase. Le principal est que nous pouvons utiliser une minimisation locale comme point de départ ; puis, à l'aide de la technique des bornes construire des patches où la contrainte de Lipschitz doit être appliquée. Cela réduit fortement le nombre d'éléments où la minimisation du potentiel par rapport au champ d'endommagement sous des contraintes non-locales est nécessaire. Cela conduit naturellement à un algorithme où le coût de la minimisation sur  $d$  peut être beaucoup plus faible que le calcul de l'équilibre à  $d$  fixe. Encouragés par ces résultats, nous envisageons d'étendre la méthode dans les directions suivantes dans le futur :

- Plasticité adoucissante. Cela ouvrirait un large éventail d'applications potentielles. Nous avons précédemment démontré dans le cas 1D que l'approche était envisageable et donnait des résultats intéressants. L'extension de cette approche à des problèmes à deux dimensions ne devrait pas être difficile et est à portée de main.
- Raffinement du maillage. Les exemples montrent clairement que comme pour phase-field, des maillages assez fins sont nécessaires pour capturer la forme de la zone endommagée. Une étape logique vers de meilleurs résultats serait de permettre un raffinement automatique du maillage pour capturer la zone d'endommagement localisée à faible coût pendant une simulation. Des stratégies pour transférer le champ  $d$  d'un maillage à l'autre, tout en respectant les contraintes de Lipschitz, doivent être développées.
- Amélioration de l'étape de résolution pour le champ  $d$ . Même si la partie non-locale de la minimisation contrainte peut être effectuée sur des patches relativement petits du maillage, l'algorithme de résolution que nous avons utilisé jusqu'à présent pourrait ne pas être optimal. Nous nous appuyons en effet sur une méthode des points intérieurs qui a l'inconvénient d'empêcher l'utilisation facile d'un bon point de départ pour la minimisation, à cause de l'étape de centrage typique de cette famille de méthodes. Considérant que nous pouvons obtenir de bons points de départ, les méthodes de projection itératives pourraient être un meilleur choix pour notre problème spécifique. Tirer davantage parti du fait que la fonction objectif est séparable en  $d$  devrait également permettre de trouver un algorithme plus rapide.
- Dynamique. Il serait intéressant d'appliquer la méthode dans un cadre dynamique. Ce serait l'occasion d'étudier des cas où les chemins de fissures deviennent beaucoup plus compliqués. Une étude de Lip-field à fragmentation 1D est déjà proposée dans [Moë+22b] où l'avantage d'avoir des zones indépendantes de taille limitées pour la mise à jour de l'endommagement est très clair.
- Analyse de stabilité et solveur monolithique. Le schéma alterné rend chaque problème à résoudre convexe et nous avons donc la garantie de converger vers une solution pour chaque charge. Mais le problème de minimisation global n'est pas nécessairement résolu à la fin du schéma alterné. Comme le problème global n'est en général pas convexe, le schéma alterné peut en effet converger vers un point de selle. En construisant le système KKT global, nous pourrions analyser la stabilité des points d'équilibre, déterminer si nous sommes à un minimum local ou à un point de selle et découvrir des solutions plus réalistes autour d'un point de selle, en explorant différentes branches de l'espace des solutions. Une approche similaire a déjà été testée dans [Leó+21] avec un modèle phase-field de fissuration.
- Enfin, on pourrait bien sûr passer au problème tridimensionnel. Les seules difficultés sont d'ordre technique : les problèmes à résoudre deviendront très vite volumineux, et une implémentation parallèle sera nécessaire. Une implémentation tridimensionnelle devra tirer parti de toutes les améliorations citées précédemment afin de donner des résultats dans un temps de calcul raisonnable.

## 4.5 Annexe Lip-field

### 4.5.1 Preuve pour les bornes

Soit un champ  $d$  défini sur  $\Omega$ . On lui associe deux champs,  $\pi^u d$  and  $\pi^l d$ , les projections supérieure et inférieure respectivement.

$$\pi^u : L^\infty(\Omega) \mapsto L : d(\vec{x}) \mapsto \pi^u d(\vec{x}) = \max_{\vec{y} \in \Omega} (d(\vec{y}) - \frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}, \vec{y})), \quad (4.136)$$

$$\pi^l : L^\infty(\Omega) \mapsto L : d(\vec{x}) \mapsto \pi^l d(\vec{x}) = \min_{\vec{y} \in \Omega} (d(\vec{y}) + \frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}, \vec{y})) \quad (4.137)$$



Ils satisfont les propriétés suivantes :

- (a)  $\pi^l d \in L$ ,  $\pi^u d \in L$
- (b)  $d \in L \Rightarrow \pi^l d = \pi^u d = d$
- (c)  $\pi^l d \leq d \leq \pi^u d$
- (d)  $d_1 \leq d_2 \Rightarrow \pi^l d_1 \leq \pi^l d_2$ ,  $\pi^u d_1 \leq \pi^u d_2$  (monotonie)

Pour prouver que les projections sont bien dans  $L$  (propriété (a)), on calcule l'écart :

$$\pi^u d(\vec{x}^1) - \pi^u d(\vec{x}^2) = \max_{\vec{y} \in \Omega} (d(\vec{y}) - \frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}^1, \vec{y})) - \max_{\vec{y} \in \Omega} (d(\vec{y}) - \frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}^2, \vec{y})) \quad (4.138)$$

À l'aide de l'inégalité triangulaire :

$$\text{dist}(\vec{x}^1, \vec{y}) \leq \text{dist}(\vec{x}^1, \vec{x}^2) + \text{dist}(\vec{x}^2, \vec{y})$$

on obtient :

$$\pi^u d(\vec{x}^1) - \pi^u d(\vec{x}^2) \geq -\frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$$

de même, avec :

$$\text{dist}(\vec{x}^2, \vec{y}) \leq \text{dist}(\vec{x}^2, \vec{x}^1) + \text{dist}(\vec{x}^1, \vec{y})$$

on obtient :

$$\pi^u d(\vec{x}^1) - \pi^u d(\vec{x}^2) \leq \frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}^1, \vec{x}^2)$$

La preuve est similaire pour  $\pi^l d$ . La propriété (b) est obtenue par la définition de  $d \in L$  :

$$d(\vec{y}) - \frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}) \leq d(\vec{y}) + \frac{1}{l} \text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) \quad (4.139)$$

En calculant le minimum et le maximum sur  $\vec{y}$  pour les bornes supérieure et inférieure, respectivement, on obtient la propriété (b). La propriété (c) est obtenue directement à partir de la définition des projections en testant  $\vec{y}$  comme  $\vec{x}$  dans le max et le min. De même, la propriété (d) découle de la définition des projections.

Discutons maintenant des conséquences de ces propriétés. Les propriétés (a) et (b) indiquent que les projections sont idempotentes (appliquées deux fois donnent le même résultat qu'appliquées une fois). La propriété (c) indique qu'en tout point où les deux projections sont égales, elles sont égales à  $d$ . En combinant les propriétés (c) et (d) et en utilisant le fait que  $d_n \in L$  (ainsi qu'en notant que toute fonction uniforme est Lipschitz) on obtient le résultat (4.63).

On est maintenant prêt à prouver le résultat sur les bornes (4.64). Soit un champ d'endommagement  $d^* \in D_n \cap L$  dépassant les bornes. On lui associe un autre champ en l'écraquant sur les bornes :

$$d^{**}(\vec{x}) = \max(\pi^l \bar{d}(\vec{x}), \min(d^*(\vec{x}), \pi^u \bar{d}(\vec{x}))) \quad (4.140)$$

Puisque le minimum de fonctions de Lipschitz (avec la même constante) est également Lipschitz (de même pour le maximum), le champ  $d^{**}$  appartient aussi à  $D_n \cap L$ . Le champ  $d^{**}$  est une meilleure solution que  $d^*$ . car il diminue la fonction objectif :

$$F(d^{**}) \leq F(d^*) \quad (4.141)$$

En effet, la fonction objectif  $F$  est une intégrale sur  $\Omega$  d'une fonction convexe par rapport à  $d$  notée  $f$  et nous montrons que l'inégalité est également valable au niveau local

$$f(d^{**}) \leq f(d^*) \quad (4.142)$$

Nous avons deux classements possibles

$$d^* < d^{**} = \pi^1 \bar{d} \leq \bar{d} \quad \text{or} \quad \bar{d} \leq \pi^u \bar{d} = d^{**} < d^* \quad (4.143)$$

Il existe donc  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que :

$$d^{**} = \lambda \bar{d} + (1 - \lambda) d^* \quad (4.144)$$

ce qui conduit, par convexité stricte de  $f$  à :

$$f(d^{**}) < \lambda f(\bar{d}) + (1 - \lambda) f(d^*) = f(d^*) + \lambda(f(\bar{d}) - f(d^*)) < f(d^*) \quad (4.145)$$

où la dernière inégalité est obtenue par le fait que  $\bar{d}$  en  $\vec{x}$  est le minimum de  $f$  en  $\vec{x}$ . Ainsi, à tout champ satisfaisant les contraintes mais se trouvant à l'extérieur des limites, on peut en associer un meilleur à l'intérieur des bornes. Cela prouve que la solution optimale est à l'intérieur des bornes.

#### 4.5.2 Preuve des inclusions (4.114)

$$\mathcal{L}^h \subset \mathcal{L}^{h1} \subset \mathcal{L}^{h2} = \mathcal{L}^{h+} \quad (4.146)$$

Pour prouver la première inclusion, on considère le plus court chemin à l'intérieur de  $\Delta^h$  reliant deux sommets. Ce chemin est donné par une courbe continue  $\vec{z}(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ . Supposons maintenant  $d \in \mathcal{L}^h$ , nous avons donc

$$-\frac{1}{l} \left\| \frac{d\vec{z}}{ds} \right\| \leq \vec{\nabla} d \cdot \frac{d\vec{z}}{ds} \leq \frac{1}{l} \left\| \frac{d\vec{z}}{ds} \right\| \quad (4.147)$$

L'intégration de ce qui précède par rapport à  $s \in [0, 1]$  donne le résultat. La deuxième inclusion dans (4.114) est une conséquence directe du fait que

$$\text{dist}^h(\vec{x}, \vec{y}) \leq \text{dist}^{h+}(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (4.148)$$

Enfin, concernant l'égalité dans (4.114), nous notons tout d'abord que  $\mathcal{L}^{h2} \subset \mathcal{L}^{h+}$  puisque  $\mathcal{L}^{h2}$  vérifie toutes les paires de sommets alors que  $\mathcal{L}^{h+}$  ne vérifie que les paires de sommets formant une arête. Et pour deux sommets  $\vec{x}, \vec{y}$  formant une arête, on a  $\text{dist}^{h+}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ . Ensuite, nous prouvons  $\mathcal{L}^{h+} \subset \mathcal{L}^{h2}$  en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour prouver la première inclusion.

#### 4.5.3 Algorithme basé sur celui de Dijkstra pour calculer les limites (4.127) et (4.128).

L'ensemble  $V$  des nœuds dans le maillage  $\Delta^h$  est divisé en un ensemble de nœuds d'essai et de nœuds finaux, notés respectivement  $V_{\text{trial}}$  et  $V_{\text{final}}$ . A n'importe quelle étape de l'algorithme, nous avons  $V_{\text{trial}} \cup V_{\text{final}} = V$  et  $V_{\text{trial}} \cap V_{\text{final}} = \emptyset$ . L'algorithme commence avec  $V_{\text{final}}$  vide et se termine lorsque  $V_{\text{trial}}$  est vide. Les limites sont initialisées à  $d^{\text{loc}}$  donné par (4.126). La borne supérieure  $d^u$  est obtenue par

- étape 0 :  $V_{\text{trial}} = V$ ,  $V_{\text{final}} = \emptyset$ ,  $\forall v \in V : d^u(v) \leftarrow d^{\text{loc}}(v)$
- étape 1 :  $v^* = \arg \max_{v \in V_{\text{trial}}} d^u(v)$ ,  $V_{\text{trial}} \leftarrow V_{\text{trial}} \setminus \{v^*\}$ ,  $V_{\text{final}} \leftarrow V_{\text{final}} \cup \{v^*\}$
- étape 2 :  $\forall v \in V_{\text{trial}}$  tel que  $(v, v^*) \in E : d^u(v) \leftarrow \max(d^u(v), d^u(v) - \|v - v^*\|/l)$
- Step 3 : si  $V_{\text{trial}} = \emptyset$  fin, sinon retour à l'étape 1.

L'algorithme pour la borne inférieure est similaire. Pour assurer une efficacité de  $O(n \log(n))$ , où  $n$  est la taille de  $V$ , l'ensemble  $V_{\text{trial}}$  est maintenu comme une liste triée descendante selon la valeur de  $d^l(v)$  (resp.  $d^u$ ). L'étape 1 se réduit à prendre le premier (resp. le dernier) de la liste, et à l'étape 2, tous les  $v$  pour lesquels  $d^l(v)$  (resp.  $d^u(v)$ ) ont été mis à jour doivent être replacés dans la liste de façon à ce que l'ordre soit maintenu.

#### 4.5.4 Preuve des bornes dans le cas discret

Nous prouvons (4.129) rappelée ci-dessous :

$$d_n(\vec{x}) \leq d^l(\vec{x}) \leq d^{\text{loc}}(\vec{x}) \leq d^u(\vec{x}) \leq 1, \quad d^l(\vec{x}) \leq d^+(\vec{x}) \leq d^u(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in V \quad (4.149)$$

La première relation est une conséquence directe de l'initialisation de  $d^l$  et  $d^u$  à  $d^{\text{loc}}$  et de l'utilisation de l'étape 2 de l'algorithme (détaillée dans l'annexe précédente). La deuxième relation dans (4.149) revient à prouver que la solution optimale ne peut pas être en dehors des limites. Le même argument que dans le cadre du continu peut être utilisé. La fonction objectif est une somme de fonctions convexes en  $d$  à chaque sommet de la maille  $\Delta^h$  dont le minimum est  $d^{\text{loc}}$ . Si la solution optimale se trouve en dehors de la limite, on peut construire une meilleure solution en la projetant sur les limites (le minimum ou le maximum des fonctions Lipschitz reste Lipschitz). Ceci prouve la deuxième partie de (4.149).





# Conclusions et Perspectives

J'aurais pu commencer classiquement cette conclusion par un résumé de ce qui a été écrit précédemment. Je m'en abstiendrais. Cela a été fait dans la conclusion de chaque chapitre. Je me concentrerais plutôt à faire le point sur les travaux en cours et les perspectives que j'envisage et dont je vais tenter de tracer le plan. Mais avant cela, je souhaite évoquer les travaux de thèse que j'ai co-encadré et auxquels je n'ai pas fait justice dans ce mémoire.

Au début de ma carrière, j'ai co-encadré la thèse de Yasir ALAM : *Experimental study and numerical analysis of crack opening in concrete*, sous la direction d'Ahmed LOUKILI. Cette thèse était très orientée vers l'expérimental et, si j'ai pu conseiller Yasir pour les aspects numériques, ceux-ci étaient plutôt tournés vers l'utilisation d'outils existants. Ils n'auraient donc pas eu leur place dans ce mémoire, clairement orienté vers le développement de nouveaux outils numériques. Je n'ai pas non plus fait justice aux travaux de Kristell DRÉAU dont je n'ai fait qu'évoquer brièvement les résultats pourtant importants dans le chapitre 2, ils auraient tout à fait eu leur place dans ce mémoire, puisqu'elle y développait les idées pour X-FEM haut ordre. J'ai choisi pourtant de mettre plus l'accent sur la partie fissuration qui faisait un meilleur écho, selon moi, avec le chapitre sur l'endommagement. Enfin, la thèse de Tauno Tiirats, en collaboration avec Vallourec n'a pas non plus été évoquée. Ses travaux sur le contact mettaient l'accent sur la modélisation numérique de couche mince de lubrifiant solide et ont donné lieu à un modèle efficace que nous avons pu implémenter dans Abaqus. J'ai préféré mettre l'accent sur l'ILS et ses applications au contact tel qu'on les a développés dans les thèses de Nicolas BONFILS et Mathieu GRAVELAU. L'approche ILS par interface mobile permettait de faire plus facilement le lien avec l'approche TLS.

Revenons maintenant aux perspectives en commençant par ce qu'il me semble le plus évident. Le modèle Lip-field est encore tout jeune, mais les résultats obtenus sont, je pense très encourageants. L'approche est originale, tout en semblant a posteriori très naturelle. Le modèle local n'y est finalement modifié que là où c'est strictement nécessaire pour éviter les localisations parasites. Il semble que l'on puisse grâce à l'existence des bornes notamment, en faire une méthode très efficace. Il y a là beaucoup de travaux à venir et ils ont déjà commencé. Une première collaboration a commencé avec mon collègue Jihed ZGHAL à l'université Paris Nanterre, au cours de laquelle nous comparons précisément phase-field et Lip-field pour des matériaux fragiles et les confrontons aux résultats expérimentaux. La thèse en cours de Gopalsamy RAJASEKAR que je co-encadre se concentre sur le cas visco-élastique endommageable pour des matériaux bitumeux. Une collaboration entre Gregory LEGRAIN (GeM), Sundararajan NATARAJAN (ITT Madras) et moi-même a commencé pendant l'été 2022 pendant lequel nous avons reçu Sundararajan en tant que professeur invité. On a jeté les bases pour coupler les techniques d'adaptations de maillage qu'il développe et Lip-field. Un sujet de thèse a été défini, la doctorante, Madhavi REDDY (item 2) a été sélectionnée et la thèse commencera officiellement en juin 2023, dès qu'elle aura passé ses qualifiants à Madras. Le projet est donc de tester

l'adaptation de maillage sur Lip-field et de coupler l'endommagement à la thermique notamment, pour modéliser le vieillissement des batteries Li-on. Enfin, le projet ANR/FNS CLIP ([paragraphe 2.2.1](#)), en collaboration entre le GeM et l'EPFL vient d'être accepté. Il prévoit de coupler l'approche Lip-field avec les modèles cohésifs en dynamique pour traiter des problèmes de fragmentation sous impact. J'ai donc des perspectives très concrètes avec Lip-field dans le cadre de nouvelles collaborations qui m'occuperont au moins jusqu'en 2027.

D'autre part, le projet ERC Synergie X-MESH ([paragraphe 2.2.1](#)) vient lui aussi d'être accepté. Il est porté par Nicolas MOËS et Jean-François REMACLE. Nous l'avons évoqué plusieurs fois dans ce mémoire, notamment dans la conclusion du chapitre ILS ([section 3.8](#)). Pour rappel, on y propose de suivre des interfaces avec un maillage conforme à l'aide d'une méthode originale qui conserve la topologie du maillage. Les premiers résultats [[Moë+23](#)] encourageants ne demandent qu'à être étendus à d'autres physiques dans le cadre de ce projet. J'y ai bien sûr toute ma place et il est prévu que je dirige ou co-encadre quelques-unes des 8 thèses financées. Les thèses d'applications prévues de X-MESH au contact et à l'endommagement sont sans doute les premières auxquelles je participerais activement. J'ai donc, ici encore, des objectifs de recherche clairs jusqu'en août 2029.

Au-delà, tout dépendra de l'avancée des travaux. Mais de nouvelles opportunités s'ouvriront sans doute au gré des collaborations.

# Bibliographie

- [Adj+02] S. ADJERID, K. D. DEVINE, J. E. FLAHERTY et L. KRIVODONOVA. « A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin solutions of hyperbolic problems ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.11 (2002), p. 1097-1112. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(01\)00318-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00318-8) (cf. p. 50).
- [Aif84] E. C. AIFANTIS. « On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models ». In : *Journal of Engineering Materials and Technology* 106.4 (1984), p. 326-330. ISSN : 0094-4289. DOI : [10.1115/1.3225725](https://doi.org/10.1115/1.3225725) (cf. p. 120).
- [Ala+03a] F. ALAUZET, P. L. GEORGE, B. MOHAMMADI, P. FREY et H. BOROUCHAKI. « Transient fixed point-based unstructured mesh adaptation ». In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 43.6-7 (2003), p. 729-745. DOI : [10.1002/flid.548](https://doi.org/10.1002/flid.548) (cf. p. 54).
- [Ala+03b] F. ALAUZET, P. J. FREY et B. MOHAMMADI. « - Anisotropic mesh adaptation. Applications to transient CFD problems ». In : *Computational Fluid and Solid Mechanics 2003*. Sous la dir. de K. BATHE. Oxford : Elsevier Science Ltd, 2003, p. 1851-1854. ISBN : 978-0-08-044046-0. DOI : [10.1016/B978-008044046-0.50452-8](https://doi.org/10.1016/B978-008044046-0.50452-8) (cf. p. 53).
- [All+11] G. ALLAIRE, F. JOUVE et N. VAN GOETHEM. « Damage and fracture evolution in brittle materials by shape optimization methods ». In : *Journal of Computational Physics* 230.12 (2011), p. 5010-5044. DOI : [10.1016/j.jcp.2011.03.024](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.03.024) (cf. p. 170).
- [Amb+15] M. AMBATI, T. GERASIMOV et L. DE LORENZIS. « Phase-field modeling of ductile fracture ». In : *Computational Mechanics* 55.5 (2015), p. 1017-1040. ISSN : 01787675. DOI : [10.1007/s00466-015-1151-4](https://doi.org/10.1007/s00466-015-1151-4) (cf. p. 120).
- [Amo+09] H. AMOR, J.-J. MARIGO et C. MAURINI. « Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact: Numerical experiments ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.8 (août 2009), p. 1209-1229. ISSN : 00225096. DOI : [10.1016/j.jmps.2009.04.011](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2009.04.011) (cf. p. 120).
- [And+11] M. ANDERSEN, J. DAHL, Z. LIU, L. VANDENBERGHE, S. SRA, S. NOWOZIN et S. WRIGHT. « Interior-point methods for large-scale cone programming ». In : *Optimization for machine learning* 5583 (2011) (cf. p. 160).
- [And+21] M. S. ANDERSEN, J. DAHL et L. VANDENBERGHE. *CVXOPT: A Python package for convex optimization, version 1.3*. 2021. eprint : <https://cvxopt.org/> (cf. p. 160).

- [Arn+02] D. N. ARNOLD, F. BREZZI, B. COCKBURN et L. D. MARINI. « Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems ». In : *SIAM journal on numerical analysis* 39.5 (2002), p. 1749-1779. DOI : [10.1137/S0036142901384162](https://doi.org/10.1137/S0036142901384162) (cf. p. 44).
- [Atl+75] S. N. ATLURI, A. S. KOBAYASHI et M. NAKAGAKI. « An assumed displacement hybrid finite element model for linear fracture mechanics ». In : *International Journal of Fracture* 11.2 (1975), p. 257-271. DOI : [10.1007/BF00038893](https://doi.org/10.1007/BF00038893) (cf. p. 90).
- [Aut+02] K. AUTUMN, M. SITTI, Y. A. LIANG, A. M. PEATTIE, W. R. HANSEN, S. SPONBERG, T. W. KENNY, R. FEARING, J. N. ISRAELACHVILI et R. J. FULL. « Evidence for van der Waals adhesion in gecko setae ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 99.19 (2002), p. 12252-12256. DOI : [10.1073/pnas.19225279](https://doi.org/10.1073/pnas.19225279) (cf. p. 108).
- [Bar62] G. BARENBLATT. « The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture ». In : *Advances in Applied Mechanics* 7 (1962), p. 55-129. ISSN : 0065-2156. DOI : [10.1016/S0065-2156\(08\)70121-2](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70121-2) (cf. p. 119).
- [Bas+97] F. BASSI et S. REBAY. « A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations ». In : *Journal of Computational Physics* 131.2 (1997), p. 267-279. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1006/jcph.1996.5572](https://doi.org/10.1006/jcph.1996.5572) (cf. p. 44).
- [Bat+13] A. BATAILLY, B. MAGNAIN et N. CHEVAUGEON. « A comparative study between two smoothing strategies for the simulation of contact with large sliding ». In : *Computational Mechanics* 51.5 (2013), p. 581-601. DOI : [10.1007/s00466-012-0737-3](https://doi.org/10.1007/s00466-012-0737-3). HAL : [hal-00711088](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00711088) (cf. p. 16, 31).
- [Bau+99] C. E. BAUMANN et J. T. ODEN. « A discontinuous hp finite element method for convection—diffusion problems ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 175.3 (1999), p. 311-341. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00359-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00359-4) (cf. p. 44).
- [Baž+02] Z. P. BAŽANT et M. JIRÁSEK. « Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 128.11 (2002), p. 1119-1149. DOI : [10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)) (cf. p. 120).
- [Baž+84] Z. P. BAŽANT, T. B. BELYTSCHKO et T.-P. CHANG. « Continuum Theory for Strain Softening ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 110.12 (1984), p. 1666-1692. DOI : [10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1984\)110:12\(1666\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1984)110:12(1666)) (cf. p. 120).
- [Baz+87] Z. P. BAZANT, P. A. PFEIFFER et al. « Determination of fracture energy from size effect and brittleness number ». In : *ACI Materials Journal* 84.6 (1987), p. 463-480 (cf. p. 129).
- [Baž76] Z. P. BAŽANT. « Instability, Ductility, and Size Effect in Strain-Softening Concrete ». In : *Journal of the Engineering Mechanics Division* 102.2 (1976), p. 331-344. DOI : [10.1061/JMCEA3.0002111](https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002111) (cf. p. 120).
- [Béc+05] E. BÉCHET, H. MINNEBO, N. MOËS et B. BURGARDT. « Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 64.8 (2005), p. 1033-1056. DOI : [10.1002/nme.1386](https://doi.org/10.1002/nme.1386) (cf. p. 60, 63, 67, 69, 71, 79, 80, 89, 93, 94).
- [Bec+88] R. BECKER, A. NEEDLEMAN, O. RICHMOND et V. TVERGAARD. « Void growth and failure in notched bars ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 36.3 (1988), p. 317-351. ISSN : 0022-5096. DOI : [10.1016/0022-5096\(88\)90014-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(88)90014-2) (cf. p. 148).

- [Bel+01] T. BELYTSCHKO, N. MOËS, S. USUI et C. PARIMI. « Arbitrary discontinuities in finite elements ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50.4 (2001), p. 993-1013. DOI : [10.1002/1097-0207\(20010210\)50:4<993::AID-NME164>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/1097-0207(20010210)50:4<993::AID-NME164>3.0.CO;2-M) (cf. p. 59).
- [Bel+09] T. BELYTSCHKO, R. GRACIE et G. VENTURA. « A review of extended/generalized finite element methods for material modeling ». In : *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 17.4 (2009), p. 043001. DOI : [10.1088/0965-0393/17/4/043001](https://doi.org/10.1088/0965-0393/17/4/043001) (cf. p. 59).
- [Bel+93] T. BELYTSCHKO, Y. LU et L. GU. « Crack propagation by element free Galerkin methods ». In : *ASME APPLIED MECHANICS DIVISION-PUBLICATIONS-AMD* 180 (1993), p. 191-191 (cf. p. 65).
- [Bel+96] T. BELYTSCHKO, Y. KRONGAUZ, D. ORGAN, M. FLEMING et P. KRYSL. « Meshless methods: An overview and recent developments ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139.1 (1996), p. 3-47. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(96\)01078-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X) (cf. p. 59).
- [Bel+99] T. BELYTSCHKO et T. BLACK. « Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 45.5 (1999), p. 601-620. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990620\)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S) (cf. p. 59).
- [Ber+05] P.-E. BERNARD, N. CHEVAUGEON, V. LEGAT, E. DELEERSNIJDER et J.-F. REMACLE. « High-order h-adaptive discontinuous Galerkin methods for ocean modeling ». In : *International Conference on Adaptive Modeling and Simulation, ADMOS 2005* (Barcelona, Spain, 8-10 sept. 2005). 2005. HAL : [hal-03936577](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03936577) (cf. p. 16, 33, 46).
- [Ber+07] P.-E. BERNARD, N. CHEVAUGEON, V. LEGAT, E. DELEERSNIJDER et J.-F. REMACLE. « High-order h-adaptive discontinuous Galerkin methods for ocean modelling ». In : *Ocean Dynamics* 57.2 (2007), p. 109-121. DOI : [10.1007/s10236-006-0093-y](https://doi.org/10.1007/s10236-006-0093-y). HAL : [hal-01006928](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006928) (cf. p. 16, 30, 46).
- [Ber+10a] P.-E. BERNARD, N. MOËS, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « A thick level set approach for damage growth modeling and transition to fracture ». In : *Second International Workshop on Advances in Computational Mechanics* (Yokohama, Japan, 29-31 mar. 2010). 2010 (cf. p. 16, 34).
- [Ber+10b] P.-E. BERNARD, N. MOËS, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « A thick level set approach to model evolving damage and transition to fracture ». In : *4th European Conference on Computational Mechanics (ECCM2010)* (Paris, France, 16-21 mai 2010). 2010 (cf. p. 17, 34).
- [Ber+10c] P.-E. BERNARD, N. MOËS, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « Damage growth modeling and transition to fracture using level set functions ». In : *9th World Congress on Computational Mechanics and 4th Asian Pacific Congress on Computational Mechanics (WCCM-APCOM)* (Sydney, Australia, 8-13 juil. 2010). 2010 (cf. p. 16, 34).
- [Ber+11] P.-E. BERNARD, N. MOËS et N. CHEVAUGEON. « Améliorations et validation du modèle d'endommagement par level set épaisse (TLS) ». In : *10e colloque national en calcul des structures* (presqu'île de Giens, (Var), 9-13 mai 2011). 2011. HAL : [hal-00595891](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00595891) (cf. p. 17, 37).

- [Ber+12] P.-E. BERNARD, N. MOËS et N. CHEVAUGEON. « Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach: Efficient discretization for quasi-static loadings ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 233-236 (2012), p. 11-27. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2012.02.020](https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.02.020). HAL : [hal-01006715](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006715) (cf. p. 16, 31, 122, 133, 137).
- [Bis+94] R. BISWAS, K. D. DEVINE et J. E. FLAHERTY. « Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws ». In : *Applied Numerical Mathematics* 14.1 (1994), p. 255-283. ISSN : 0168-9274. DOI : [10.1016/0168-9274\(94\)90029-9](https://doi.org/10.1016/0168-9274(94)90029-9) (cf. p. 49).
- [Bod+04] D. BODIN, G. PIJAUDIER-CABOT, C. de LA ROCHE, J.-M. PIAU et A. CHABOT. « Continuum damage approach to asphalt concrete fatigue modeling ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 130.6 (2004), p. 700-708 (cf. p. 120).
- [Bon+09] N. BONFILS, N. CHEVAUGEON, G. MARCKMANN et N. MOËS. « Prise en compte d'une limite d'extensibilité en grandes transformations ». In : 9e Colloque National en Calcul des Structures (25-29 mai 2009). Giens, France, 2009. HAL : [hal-01422167v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01422167v1) (cf. p. 17, 21, 36, 97).
- [Bon+10] N. BONFILS, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « Treating inequality constraint in a continuous medium with a coupled x-fem/level-set strategy ». In : *4th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2010)* (16-21 mai 2010). Paris, France, 2010. HAL : [hal-03919679](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03919679) (cf. p. 17, 21, 34, 97).
- [Bon+12] N. BONFILS, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « Treating volumetric inequality constraint in a continuum media with a coupled X-FEM/level-set strategy ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 205-208 (2012). **Special Issue on Advances in Computational Methods in Contact Mechanics**, p. 16-28. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2011.02.012](https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.02.012). HAL : [hal-00569557](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00569557) (cf. p. 16, 21, 31, 97).
- [Bon11] N. BONFILS. « Traitement des contraintes d'inégalité volumiques dans un milieu continu par la méthode x-fem et level-set ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, 2011. eprint : <https://www.theses.fr/2011ECDN0028> (cf. p. 97).
- [Bou+00] B. BOURDIN, G. A. FRANCFORT et J.-J. MARIGO. « Numerical experiments in revisited brittle fracture ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48.4 (avr. 2000), p. 797-826. ISSN : 00225096. DOI : [10.1016/S0022-5096\(99\)00028-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00028-9) (cf. p. 120).
- [Bou+08] B. BOURDIN, G. A. FRANCFORT et J.-J. MARIGO. « The Variational Approach to Fracture ». In : *Journal of Elasticity* 91.1-3 (mar. 2008), p. 5-148. ISSN : 0374-3535. DOI : [10.1007/s10659-007-9107-3](https://doi.org/10.1007/s10659-007-9107-3) (cf. p. 120, 140, 159).
- [Boy04] L. BOYD Stephen P.; Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004 (cf. p. 140).
- [Bre+94] C. A. BREBBIA et J. DOMINGUEZ. *Boundary elements: an introductory course*. WIT press, 1994 (cf. p. 59).
- [Bro+98] D. BROCHARD, F. JEDRZEJEWSKI, N. CHEVAUGEON et R.-J. GIBERT. « Fluid structures interaction in tube bundles: Analysis of tube movements in opposite directions ». In : *ASME - PVP Conference, 1998* (26-30 juil. 1998). T. 366. San Diego, USA : ASME PVP, 1998, p. 179-186 (cf. p. 14, 32).
- [Bro99] K. B. BROBERG. *Cracks and fracture*. Elsevier, 1999 (cf. p. 90).
- [Car+88] G. F. CAREY, M. SHARMA et K. C. WANG. « A class of data structures for 2-D and 3-D adaptive mesh refinement ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26.12 (1988), p. 2607-2622. DOI : [10.1002/nme.1620261203](https://doi.org/10.1002/nme.1620261203) (cf. p. 52).



- [Caz+15] F. CAZES et N. MOËS. « Comparison of a phase-field model and of a thick level set model for brittle and quasi-brittle fracture ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 103.2 (2015), p. 114-143. DOI : [10.1002/nme.4886](https://doi.org/10.1002/nme.4886) (cf. p. 122).
- [Cha+71] S. CHAN et I. TUBA. « A finite element method for contact problems of solid bodies—Part I. Theory and validation ». In : *International Journal of Mechanical Sciences* 13.7 (1971), p. 615-625. DOI : [10.1016/0020-7403\(71\)90032-4](https://doi.org/10.1016/0020-7403(71)90032-4) (cf. p. 98).
- [Che+00] N. CHEVAUGEON, E. VERRON et B. PESEUX. « Finite Element Analysis of Nonlinear Transversely Isotropic Membranes for Thermoforming Applications ». In : *III European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000* (11-14 sept. 2000). Barcelona, Spain, 2000, p. 1-17. HAL : [hal-01805121](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01805121) (cf. p. 14, 32).
- [Che+01a] N. CHEVAUGEON, E. VERRON et B. PESEUX. « Construction d'une loi de comportement isotrope-transverse pour la simulation du Thermoformage de thermoplastiques chargés de fibres ». In : *15<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique* (3-7 sept. 2001). Nancy, France, 2001, p. 1-6. HAL : [hal-01805113](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01805113) (cf. p. 15, 36).
- [Che+01b] N. CHEVAUGEON, E. VERRON, G. MARCKMANN et B. PESEUX. « Instabilité et bifurcation des membranes hyperélastiques ». In : *5<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, tome II* (15-18 mai 2001). 2001, p. 869-876. HAL : [hal-01792905](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01792905) (cf. p. 15, 36).
- [Che+01c] N. CHEVAUGEON, E. VERRON et B. PESEUX. « Modelling of fibers reinforced polymer sheet for blow-molding and thermoforming applications ». In : *3rd Pacific Rim Conference of Rheology* (Vancouver, Canada, 8-13 juil. 2001). 2001 (cf. p. 14, 32).
- [Che+02] N. CHEVAUGEON, G. MARCKMANN, E. VERRON et B. PESEUX. « Instabilité et bifurcation du soufflage de membranes hyperélastiques ». In : *Revue Européenne des Éléments Finis* 11.2-4 (2002), p. 479-492. DOI : [10.3166/reef.11.479-492](https://doi.org/10.3166/reef.11.479-492). HAL : [hal-01381716](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01381716) (cf. p. 14, 30).
- [Che+03a] N. CHEVAUGEON, J. FLAHERTY, L. KRIVODONOVA, J.-F. REMACLE et M. SHEPHARD. « Adaptive and parallel discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation law ». In : *7th US Nat. Congress on Comp. Mech.* (27-31 juil. 2003). **keynote**. 2003, p. 448 (cf. p. 15, 32, 46).
- [Che+03b] N. CHEVAUGEON, J.-F. REMACLE, J. E. FLAHERTY, D. CLER et M. S. SHEPHARD. « Application of discontinuous Galerkin method. Large scale problem: Cannon blast modeling ». In : *7th US Nat. Congress on Comp. Mech.* (27-31 juil. 2003). 2003, p. 470 (cf. p. 15, 32, 46).
- [Che+05a] N. CHEVAUGEON, J. XIN, P. HU, X. LI, D. CLER, J. E. FLAHERTY et M. S. SHEPHARD. « Discontinuous Galerkin methods applied to shock and blast problems ». In : *Journal of Scientific Computing* 22.1-3 (2005), p. 227-243. DOI : [10.1007/s10915-004-4138-4](https://doi.org/10.1007/s10915-004-4138-4). HAL : [hal-01006753](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006753) (cf. p. 15, 30, 46).
- [Che+05b] N. CHEVAUGEON, J.-F. REMACLE, X. GALLET, P. PLOUMHANS et S. CARO. « Efficient discontinuous Galerkin methods for solving acoustic problems ». In : *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, (26th AIAA Aeroacoustics Conference)* (Monterey, California, USA, 23-25 mai 2005). 2005. DOI : [10.2514/6.2005-2823](https://doi.org/10.2514/6.2005-2823) (cf. p. 16, 33, 46).



- [Che+06] **N. CHEVAUGEON**, J.-F. REMACLE et X. GALLET. « Discontinuous Galerkin implementation of the extended Helmholtz resonator model in time domain ». In : *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference* (Cambridge, Massachusetts, 8-10 mai 2006). 2006. DOI : [10.2514/6.2006-2569](https://doi.org/10.2514/6.2006-2569). HAL : [hal-03920882](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03920882) (cf. p. 16, 33, 46).
- [Che+07a] **N. CHEVAUGEON**, K. HILLEWAERT, X. GALLET, P. PLOUMHANS et J.-F. REMACLE. « Optimal numerical parameterization of discontinuous Galerkin method applied to wave propagation problems ». In : *Journal of Computational Physics* 223.1 (2007), p. 188-207. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2006.09.005](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.09.005). HAL : [hal-01007166v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007166v1) (cf. p. 16, 30, 46).
- [Che+07b] **N. CHEVAUGEON**, N. MOËS, H. MINNEBO et E. BÉCHET. « Robust computation of stress intensity factors within the eXtended Finite Element Method ». In : *International Conference on Computational Fracture and Failure of Materials and Structures (CFRAC)* (Nantes, France, 11-13 juin 2007). 2007. HAL : [hal-03922959](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03922959) (cf. p. 16, 33).
- [Che+08] **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Model of Crack Propagation with the Extended Finite Element Method ». In : *8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008)* (Venise, Italie, 30 juin-5 juil. 2008). 2008. eprint : <http://congress2.cimne.com/eccomas/proceedings/eccomas2008/pdfs/a3083.pdf> (cf. p. 16, 33).
- [Che+10] **N. CHEVAUGEON**, N. MOËS, C. STOLZ et P.-E. BERNARD. « A thick level approach for brittle damage ». In : *4th European Conference on Computational Mechanics (ECCM2010)* (Paris, France, 16-21 mai 2010). **keynote**. 2010 (cf. p. 16, 34).
- [Che+11a] **N. CHEVAUGEON**, P.-E. BERNARD et N. MOËS. « Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach ». In : *20ème Congrès Français de mécanique* (Besançon, France, 28 août-2 sept. 2011). **keynote**. 2011. HAL : [hal-03920378](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03920378) (cf. p. 17, 37).
- [Che+11b] **N. CHEVAUGEON**, N. BONFILS et N. MOËS. « Treating volumetric inequality constraint in a continuum media with a coupled X-FEM/Level-Set strategy ». In : *5th International Conference on Advanced COmputational Methods in ENgineering (ACOMEN)* (14-17 nov. 2011). Liège, Belgique, 2011. HAL : [hal-03950857](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03950857) (cf. p. 17, 21, 34, 97).
- [Che+12] **N. CHEVAUGEON**, N. MOËS et P.-E. BERNARD. « Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach ». In : (Vienna, Austria, 10-14 sept. 2012). **keynote**. 2012. HAL : [hal-03920517](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03920517) (cf. p. 17, 34).
- [Che+13a] **N. CHEVAUGEON**, M. GRAVELEAU et N. MOËS. « A new coupled X-FEM/Level-Set strategy to solve contact problem ». In : *III International Conference on Computational Contact Mechanics (ICCCM2013)* (10-12 juil. 2013). Lecce, Italie, 2013. HAL : [hal-01007777/](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007777/) (cf. p. 17, 21, 35, 97).
- [Che+13b] **N. CHEVAUGEON**, N. MOËS et A. SALZMAN. « Damage propagation modeling using the TLS model ». In : *6th International Symposium on Defect and Material Mechanics (ISDMM13)* (Nantes Ecole Centrale, France, 1<sup>er</sup>-5 juil. 2013). 2013 (cf. p. 17, 35).
- [Che+13c] **N. CHEVAUGEON**, N. MOËS et H. MINNEBO. « Improved crack tip enrichment functions and integration for crack modeling using the extended finite element method ». In : *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 11.6 (2013), p. 597-631. DOI : [10.1615/IntJMultCompEng.2013006523](https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2013006523). HAL : [hal-01006957](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006957) (cf. p. 16, 31, 60).

- [Che+14] **N. CHEVAUGEON**, A. SALZMAN et N. MOËS. « Vector level set contouring algorithm and associated enrichment functions for the eXtended Finite Element Method ». In : *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)* (Barcelona, Espagne, 20-25 juil. 2014). 2014. eprint : <http://congress.cimne.com/iacm-eccomas2014/admin/files/fileabstract/a3865.pdf> (cf. p. 17, 35).
- [Che+15] **N. CHEVAUGEON**, M. GRAVELEAU et N. MOËS. « Approche level-set pour la résolution de problèmes comportant des inégalités : application au cas de membrane contactant un solide rigide. » In : *12ème colloque national en calcul des structures, CSMA2015* (Giens, France, 18-22 mai 2015). 2015. HAL : [hal-01517310/](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01517310/) (cf. p. 17, 21, 37, 97).
- [Che+22a] **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Lipschitz regularization for fracture: The Lip-field approach ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 402 (A Special Issue in Honor of the Lifetime Achievements of J. Tinsley Oden 2022), p. 115644. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2022.115644](https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115644). HAL : [hal-03927211](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03927211). arXiv : [2111.04771](https://arxiv.org/abs/2111.04771) (cf. p. 16, 32, 42, 155).
- [Che+22b] **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Lipschitz Regularization For Softening Material ». In : 15th World Congress on Computational Mechanics (WCCM-XV) and 8th Asian Pacific Congress on Computational Mechanics (APCOM-VIII) (Yokohama, Japon, 31 juil.-5 août 2022). **keynote**. 2022. eprint : [https://www.wccm2022.org/dl/index/book\\_of\\_abstracts.pdf](https://www.wccm2022.org/dl/index/book_of_abstracts.pdf) (cf. p. 17, 36).
- [Che+22c] **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de l'endommagement ». In : 13 ème Colloque National en Calcul des Structures (Presqu'île de Giens, France, 16-20 mai 2022). 2022. HAL : [hal-03717694](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03717694) (cf. p. 17, 37).
- [Che+22d] **N. CHEVAUGEON** et N. MOËS. « Régularisation de Lipschitz pour la modélisation de la fissuration par l'endommagement ». In : 25ème Congrès Français de mécanique (CFM) (Nantes, France, 29 août-2 sept. 2022). 2022 (cf. p. 17, 37).
- [Che+94] K. CHELLAMUTHU et N. IDA. « Algorithms and data structures for 2D and 3D adaptive finite element mesh refinement ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 17.3 (1994), p. 205-229. ISSN : 0168-874X. DOI : [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(94\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0168-874X(94)90081-7) (cf. p. 52).
- [Che02] **N. CHEVAUGEON**. « Contribution à l'étude des membranes hyperélastiques en grandes déformations ». Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Nantes, 2002. eprint : <https://theses.hal.science/tel-00826561> (cf. p. 14).
- [Chu+05] Y.-S. CHU, S. DUFOUR, J. P. THIERY, E. PEREZ et F. PINCET. « Johnson-Kendall-Roberts Theory Applied to Living Cells ». In : *Phys. Rev. Lett.* 94 (2 jan. 2005), p. 028102. DOI : [10.1103/PhysRevLett.94.028102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.028102) (cf. p. 108).
- [Cle+03] D. L. CLER, **N. CHEVAUGEON**, M. S. SHEPHARD et J. REMACLE. « CFD application to gun muzzle blast a validation case study ». In : *41st AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit* (Reno, Nevada, USA, 6-9 jan. 2003). 2003, p. 1-20. DOI : [10.2514/6.2003-1142](https://doi.org/10.2514/6.2003-1142). HAL : [hal-03939856](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03939856) (cf. p. 15, 32, 46, 55).
- [Coc+00] B. COCKBURN, G. E. KARNIAKAKIS et C.-W. SHU. « The development of discontinuous Galerkin methods ». In : *Discontinuous Galerkin Methods*. Sous la dir. de B. COCKBURN, G. E. KARNIAKAKIS et C.-W. SHU. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2000, p. 3-50. ISBN : 978-3-642-59721-3. DOI : [10.1007/978-3-642-59721-3\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3_1) (cf. p. 44).

- [Coc+03] B. COCKBURN, M. LUSKIN, C.-W. SHU et E. SÜLI. « Enhanced accuracy by post-processing for finite element methods for hyperbolic equations ». In : *Mathematics of Computation* 72.242 (2003), p. 577-606. DOI : [10.1090/S0025-5718-02-01464-3](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-02-01464-3) (cf. p. 44).
- [Coc+08] B. COCKBURN et J. GUZMÁN. « Error Estimates for the Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Method for the Transport Equation with Discontinuous Initial Data ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 46.3 (2008), p. 1364-1398. DOI : [10.1137/060668936](https://doi.org/10.1137/060668936) (cf. p. 44).
- [Coc+89] B. COCKBURN et C.-W. SHU. « TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework ». In : *Mathematics of computation* 52.186 (1989), p. 411-435. DOI : [10.1090/S0025-5718-1989-0983311-4](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1989-0983311-4) (cf. p. 44).
- [Coc+90] B. COCKBURN, S. HOU et C.-W. SHU. « The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. IV. The multidimensional case ». In : *Mathematics of Computation* 54.190 (1990), p. 545-581. DOI : [10.1090/S0025-5718-1990-1010597-0](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1990-1010597-0) (cf. p. 44).
- [Coc+98] B. COCKBURN et C.-W. SHU. « The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 35.6 (1998), p. 2440-2463. DOI : [10.1137/S0036142997316712](https://doi.org/10.1137/S0036142997316712) (cf. p. 44).
- [Coc99] B. COCKBURN. « Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems ». In : *High-Order Methods for Computational Physics*. Sous la dir. de T. J. BARTH et H. DECONINCK. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1999, p. 69-224. ISBN : 978-3-662-03882-6. DOI : [10.1007/978-3-662-03882-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03882-6_2) (cf. p. 44, 47).
- [Col+85] P. COLELLA et H. M. GLAZ. « Efficient solution algorithms for the Riemann problem for real gases ». In : *Journal of Computational Physics* 59.2 (1985), p. 264-289. ISSN : 0021-9991 (cf. p. 47, 48, 50).
- [Cra+01] M. CRANDALL, L. EVANS et R. GARIEPY. « Optimal Lipschitz extensions and the infinity laplacian ». In : *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 13 (2001), p. 123-139. DOI : [10.1007/s005260000065](https://doi.org/10.1007/s005260000065) (cf. p. 155).
- [Cra+83] M. CRANDALL et P.-L. LIONS. « Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 277 (1983), p. 1-42. DOI : [10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8) (cf. p. 155).
- [Cri81] M. A. CRISFIELD. « A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through” ». In : *Computers & Structures* 13.1 (1981), p. 55-62. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5) (cf. p. 150).
- [Cur+08] S. CURTIS, R. M. KIRBY, J. K. RYAN et C.-W. SHU. « Postprocessing for the Discontinuous Galerkin Method over Nonuniform Meshes ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 30.1 (2008), p. 272-289. DOI : [10.1137/070681284](https://doi.org/10.1137/070681284) (cf. p. 44).
- [Dan+90] H. H. DANNELONGUE et P. A. TANGUY. « Efficient data structures for adaptive remeshing with the FEM ». In : *Journal of computational physics* 91.1 (1990), p. 94-109. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/0021-9991\(90\)90006-M](https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90006-M) (cf. p. 52).
- [De 87] R. DE BORST. « Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain softening solids ». In : *Computers & Structures* 2.2 (1987), p. 211-224. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/0045-7949\(87\)90144-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90144-1) (cf. p. 150).

- [Dem+99] J. W. DEMMEL, S. C. EISENSTAT, J. R. GILBERT, X. S. LI et J. W. H. LIU. « A Supernodal Approach to Sparse Partial Pivoting ». In : *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 20.3 (1999), p. 720-755. DOI : [10.1137/S0895479895291765](https://doi.org/10.1137/S0895479895291765) (cf. p. 80).
- [Der+75] B. DERJAGUIN, V. MULLER et Y. TOPOROV. « Effect of contact deformations on the adhesion of particles ». In : *Journal of Colloid and Interface Science* 53.2 (1975), p. 314-326. ISSN : 0021-9797. DOI : [10.1016/0021-9797\(75\)90018-1](https://doi.org/10.1016/0021-9797(75)90018-1) (cf. p. 108).
- [Des+83] P. DESTUYNDER, S. LESCURE et M. DJAOUA. « Some remarks on elastic fracture mechanics ». In : *Journal de mécanique théorique et appliquée* 2.1 (1983), p. 113-135 (cf. p. 92).
- [Dij59] E. DIJKSTRA. « A note on two problems in connexion with graphs ». In : *Numer. Math.* 1 (1959), p. 269-271. DOI : [10.1007/BF01386390](https://doi.org/10.1007/BF01386390) (cf. p. 161).
- [Dré+08] K. DRÉAU, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « High order extended finite element method: influence of the geometrical representation ». In : *8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008)* (Venise, Italie, 30 juin-5 juil. 2008). 2008. HAL : [hal-01008254](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01008254). eprint : <http://congress2.cimne.com/eccomas/proceedings/eccomas2008/pdfs/a1682.pdf> (cf. p. 16, 19, 33, 60).
- [Dré+10a] K. DRÉAU, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « Higher order x-fem for curved cracks ». In : *4th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2010)* (Paris, France, 16-21 mai 2010). 2010. HAL : [hal-01008257](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01008257) (cf. p. 17, 19, 34, 60).
- [Dré+10b] K. DRÉAU, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.29 (2010), p. 1922-1936. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2010.01.021](https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.01.021). HAL : [hal-01007338](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007338) (cf. p. 16, 19, 30, 60, 92, 102, 114).
- [Dré10] K. DRÉAU. « Méthode X-FEM à ordre élevé : Influence de la représentation géométrique ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, 2010. eprint : <https://www.theses.fr/2010ECDN0043> (cf. p. 60).
- [Dua+00] C. A. DUARTE, I. BABUŠKA et J. T. ODEN. « Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems ». In : *Computers & Structures* 77.2 (2000), p. 215-232 (cf. p. 65).
- [Dua+01] C. A. DUARTE, O. HAMZEH, T. LISZKA et W. TWORZYDLO. « A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 190.15-17 (2001), p. 2227-2262 (cf. p. 65).
- [Dua+96] C. A. DUARTE et J. T. ODEN. « An hp adaptive method using clouds ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 139.1-4 (1996), p. 237-262 (cf. p. 59).
- [Duf07] M. DUFLLOT. « A study of the representation of cracks with level sets ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 70.11 (2007), p. 1261-1302. DOI : [10.1002/nme.1915](https://doi.org/10.1002/nme.1915) (cf. p. 62).
- [Duf82] M. G. DUFFY. « Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex ». In : *SIAM journal on Numerical Analysis* 19.6 (1982), p. 1260-1262 (cf. p. 67).
- [Dug60] D. DUGDALE. « Yielding of Steel Sheets Containing Slits ». In : *J. of the Mech. and Phys. of Sol.* 8 (1960), p. 100-104. DOI : [10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2) (cf. p. 119).

- [Fla+97] J. FLAHERTY, R. LOY, M. SHEPHARD, B. SZYMANSKI, J. TERESCO et L. ZIANTZ. « Adaptive Local Refinement with Octree Load Balancing for the Parallel Solution of Three-Dimensional Conservation Laws ». In : *Journal of Parallel and Distributed Computing* 47.2 (1997), p. 139-152. ISSN : 0743-7315. DOI : [10.1006/jpdc.1997.1412](https://doi.org/10.1006/jpdc.1997.1412) (cf. p. 47).
- [Fra+10] D. FRANKE, A. DÜSTER, V. NÜBEL et E. RANK. « A comparison of the h-, p-, hp-, and rp-version of the FEM for the solution of the 2D Hertzian contact problem ». In : *Computational Mechanics* 45.5 (2010), p. 513-522. DOI : [10.1007/s00466-009-0464-6](https://doi.org/10.1007/s00466-009-0464-6) (cf. p. 98).
- [Fra+11] D. FRANKE, E. RANK et A. DUESTER. « Computational contact mechanics based on the rp-version of the finite element method ». In : *International Journal of Computational Methods* 8.03 (2011), p. 493-512. DOI : [10.1142/S0219876211002630](https://doi.org/10.1142/S0219876211002630) (cf. p. 98).
- [Fra+98] G. A. FRANCFORT et J.-J. MARIGO. « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (1998), p. 1319-1412. ISSN : 0022-5096. DOI : [10.1016/S0022-5096\(98\)00034-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(98)00034-9). HAL : [hal-03500962](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03500962) (cf. p. 120).
- [Fré+17] M. FRÉMOND et C. STOLZ. « On Alternative Approaches for Graded Damage Modeling ». In : *Models, Simulation, and Experimental Issues in Structural Mechanics*. Sous la dir. de M. FRÉMOND, F. MACERI et G. VAIRO. Springer Series in Solid and Structural Mechanics, vol 8. Cham : Springer International Publishing, 2017, p. 87-104. ISBN : 978-3-319-48884-4. DOI : [10.1007/978-3-319-48884-4\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-48884-4_4) (cf. p. 140).
- [Fré+96] M. FRÉMOND et B. NEDJAR. « Damage, gradient of damage and principle of virtual power ». In : *International Journal of Solids and Structures* 33.8 (1996), p. 1083-1103. DOI : [10.1016/0020-7683\(95\)00074-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00074-7) (cf. p. 120).
- [Fré87] M. FRÉMOND. « Adhérence des solides ». In : *Journal de mécanique théorique et appliquée* 6.3 (1987), p. 383-407 (cf. p. 108).
- [Fri+10] T.-P. FRIES et T. BELYTSCHKO. « The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84.3 (2010), p. 253-304. DOI : [10.1002/nme.2914](https://doi.org/10.1002/nme.2914) (cf. p. 64).
- [Gas+10] J. GASCÓN, J. S. ZURDO et M. A. OTADUY. « Constraint-Based Simulation of Adhesive Contact. » In : *Symposium on Computer Animation*. 2010, p. 39-44 (cf. p. 108).
- [Ger+83] P. GERMAIN, P. SUQUET et Q. S. NGUYEN. « Continuum thermodynamics ». In : *ASME Journal of Applied Mechanics* 50 (déc. 1983), p. 1010-1020 (cf. p. 141, 156).
- [Geu+09] C. GEUZAINÉ et J.-F. REMACLE. « Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 79.11 (2009), p. 1309-1331. DOI : [10.1002/nme.2579](https://doi.org/10.1002/nme.2579) (cf. p. 81, 85, 163).
- [Gir+11] C. GIRY, F. DUFOUR et J. MAZARS. « Stress-based nonlocal damage model ». In : *International Journal of Solids and Structures* 48.25-26 (déc. 2011), p. 3431-3443. ISSN : 00207683. DOI : [10.1016/j.ijsolstr.2011.08.012](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.08.012) (cf. p. 120).
- [God+59] S. K. GODUNOV et I. BOHACHEVSKY. « Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics ». In : *Matematicheskij sbornik* 47.3 (1959), p. 271-306. HAL : [hal-01620642](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01620642) (cf. p. 45).



- [Gon+13] V. F. GONZÁLEZ-ALBUIXECH, E. GINER, J. E. TARANCÓN, F. J. FUENMAYOR et A. GRAVOUIL. « Domain integral formulation for 3-D curved and non-planar cracks with the extended finite element method ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 264 (2013), p. 129-144. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2013.05.016](https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.05.016) (cf. p. 93).
- [Gop+22] R. GOPALSAMY, O. CHUPIN, N. CHEVAUGEON, J.-M. PIAU et F. HAMMOUM. « Lip-field approach for modeling strain softening in viscoelastic materials ». In : Congrès Français de mécanique (CFM) (Nantes, France, 29 août-2 sept. 2022). 2022 (cf. p. 17, 23, 37).
- [Gor+15] T. GORRIS, P.-É. BERNARD et L. STAINIER. « A study of transverse cracking in laminates by the Thick Level Set approach ». In : *Mechanics of Materials* 90 (2015). **Proceedings of the IUTAM Symposium on Micromechanics of Defects in Solids**, p. 118-130. ISSN : 0167-6636. DOI : [10.1016/j.mechmat.2015.05.003](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.05.003) (cf. p. 122).
- [Gos+02] M. GOSZ et B. MORAN. « An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 69.3 (2002), p. 299-319. ISSN : 0013-7944. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00080-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00080-7) (cf. p. 93).
- [Gos+98] M. GOSZ, J. DOLBOW et B. MORAN. « Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks ». In : *International Journal of Solids and Structures* 35.15 (1998), p. 1763-1783 (cf. p. 93).
- [Got+98] S. GOTTLIEB et C.-W. SHU. « Total variation diminishing Runge-Kutta schemes ». In : *Mathematics of computation* 67.221 (1998), p. 73-85. DOI : [10.1090/S0025-5718-98-00913-2](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-98-00913-2) (cf. p. 47).
- [Gou09] B. GOUGH. *GNU scientific library reference manual*. Network Theory Ltd., 2009 (cf. p. 69).
- [Gra+02] A. GRAVOUIL, N. MOËS et T. BELYTSCHKO. « Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part II: Level set update ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53.11 (2002), p. 2569-2586. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.430>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.430> (cf. p. 61).
- [Gra+13] M. GRAVELEAU, N. MOËS et N. CHEVAUGEON. « A new coupled X-FEM/Level-Set strategy to solve contact problem ». In : *III South-East European Conference on Computational Mechanics (SEECCM III)* (Kos Island, Greece, 12-14 juin 2013). T. 2084. 2013 (cf. p. 17, 21, 35, 97).
- [Gra+14] M. GRAVELEAU, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « On a new method to solve contact problems with an evolving level-set ». In : *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)* (20-25 juil. 2014). Barcelone, Espagne, 2014. HAL : [hal-03950863](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03950863). eprint : <http://congress.cimne.com/iacm-eccomas2014/admin/files/fileabstract/a1786.pdf> (cf. p. 17, 21, 35, 97).
- [Gra+15] M. GRAVELEAU, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « The inequality level-set approach to handle contact: membrane case ». In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 2.1 (2015), p. 1-25. DOI : [10.1186/s40323-015-0034-8](https://doi.org/10.1186/s40323-015-0034-8). HAL : [hal-01398280](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01398280) (cf. p. 16, 21, 31, 97, 105).

- [Gra15] M. GRAVELEAU. « A first approach on how to solve contact problems using the Inequality Level-Set ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, 2015. eprint : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01545613> (cf. p. 26, 97).
- [Gri21] A. A. GRIFFITH. « The phenomena of rupture and flow in solids ». In : *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci.* 221 (1921), p. 163-198. DOI : [10.1098/rsta.1921.0006](https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006) (cf. p. 119).
- [Haa+11] G. HAASEMANN, M. KÄSTNER, S. PRÜGER et V. ULBRICHT. « Development of a quadratic finite element formulation based on the XFEM and NURBS ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86.4-5 (2011), p. 598-617. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.3120>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.3120> (cf. p. 92).
- [Hak+09] V. HAKIM et A. KARMA. « Laws of crack motion and phase-field models of fracture ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.2 (mar. 2009), p. 342-368. ISSN : 00225096. DOI : [10.1016/j.jmps.2008.10.012](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.10.012) (cf. p. 120).
- [Hal+75] B. HALPHEN et Q.-S. NGUYEN. « Sur les matériaux standards généralisés ». In : *Journal de Mécanique* 14.1 (1975), p. 39-63 (cf. p. 141, 156).
- [Hes+07] J. S. HESTHAVEN et T. WARBURTON. *Nodal discontinuous Galerkin methods: algorithms, analysis, and applications*. Springer Science & Business Media, 2007 (cf. p. 44).
- [Hil+06a] K. HILLEWAERT, J.-F. REMACLE, N. CHEVAUGEON, P.-E. BERNARD et P. GEUZAIN. « Analysis of a hybrid p-Multigrid method for the discontinuous Galerkin discretisation of the Euler equations ». In : *ECCOMAS CFD 2006: Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics, Egmond aan Zee, The Netherlands* (Egmond aan Zee, The Netherlands, 5-8 sept. 2006). Delft University of Technology; European Community on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS). 2006 (cf. p. 16, 33, 46).
- [Hil+06b] K. HILLEWAERT, N. CHEVAUGEON, P. GEUZAIN et J.-F. REMACLE. « Hierarchic multigrid iteration strategy for the discontinuous Galerkin solution of the steady Euler equations ». In : *International journal for numerical methods in fluids* 51.9-10 (2006), p. 1157-1176. DOI : [10.1002/fld.1135](https://doi.org/10.1002/fld.1135). HAL : [hal-01006922v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006922v1) (cf. p. 16, 30, 46).
- [Hu+03] P. HU, N. CHEVAUGEON, J. E. FLAHERTY et M. S. SHEPHARD. « Modelizations of moving object in a fluid flow using level set ». In : *7th US Nat. Congress on Comp. Mech.* (Albuquerque, New Mexico, United States, 27-31 juil. 2003). 2003, p. 288 (cf. p. 15, 32, 46).
- [Hu+21] T. HU, B. TALAMINI, A. J. STERSHIC, M. R. TUPEK et J. E. DOLBOW. « A variational phase-field model for ductile fracture with coalescence dissipation ». In : *Computational Mechanics* 68.2 (2021), p. 311-335. DOI : [10.1007/s00466-021-02033-1](https://doi.org/10.1007/s00466-021-02033-1) (cf. p. 156).
- [Ion+] I. IONESCU, N. MOËS, P. CARTRAUD, N. CHEVAUGEON et M. BÉRINGHIER. « Image-Based Micromechanics Analysis using Level Sets and the Extended Finite Elements Method ». In : *IWCMM17, 17th International Workshop on Computational Mechanics of Materials* (Paris, France, 22-24 août 2007) (cf. p. 16, 33).
- [Irw57] G. R. IRWIN. « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate ». In : (1957) (cf. p. 64).
- [Jav+18] A. JAVILI, R. MORASATA, E. OTERKUS et S. OTERKUS. « Peridynamics Review ». In : *Math. and Mech. of Solids* 24.11 (2018), p. 3714-3739. ISSN : 1081-2865. DOI : [10.1177/1081286518803411](https://doi.org/10.1177/1081286518803411) (cf. p. 120).



- [Jia+96] G.-S. JIANG et C.-W. SHU. « Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes ». In : *Journal of Computational Physics* 126.1 (1996), p. 202-228. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1006/jcph.1996.0130](https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130) (cf. p. 50).
- [Joh+71] K. L. JOHNSON, K. KENDALL, A. D. ROBERTS et D. TABOR. « Surface energy and the contact of elastic solids ». In : *Proceedings of the royal society of London. A. mathematical and physical sciences* 324.1558 (1971), p. 301-313. DOI : [10.1098/rspa.1971.0141](https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0141) (cf. p. 108).
- [Joh+86] C. JOHNSON et J. PITKÄRANTA. « An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation ». In : *Mathematics of computation* 46.173 (1986), p. 1-26 (cf. p. 44).
- [Joh87] K. JOHNSON. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1987. ISBN : 9781139935715 (cf. p. 108).
- [Jud+15] P. O. JUDT et A. RICOEUR. « Crack growth simulation of multiple cracks systems applying remote contour interaction integrals ». In : *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 75 (2015), p. 78-88. DOI : [10.1016/j.tafmec.2014.11.001](https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2014.11.001) (cf. p. 171).
- [Kal+93] Y. KALLINDERIS et P. VIJAYAN. « Adaptive refinement-coarsening scheme for three-dimensional unstructured meshes ». In : *AIAA journal* 31.8 (1993), p. 1440-1447 (cf. p. 52).
- [Kar+01] A. KARMA, D. KESSLER et H. LEVINE. « Phase-Field Model of Mode III Dynamic Fracture ». In : *Physical Review Letters* 87.4 (juil. 2001), p. 045501. ISSN : 0031-9007. DOI : [10.1103/PhysRevLett.87.045501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.045501) (cf. p. 120).
- [Kik+88] N. KIKUCHI et J. T. ODEN. *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM, 1988 (cf. p. 99).
- [Kli89] G. KLINGENBERG. « Gun Muzzle Blast and Flash ». In : *Propellants, Explosives, Pyrotechnics* 14.2 (1989), p. 57-68. DOI : [10.1002/prop.19890140204](https://doi.org/10.1002/prop.19890140204). eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/prop.19890140204> (cf. p. 55).
- [Kra+88] D. KRAFT et al. « A software package for sequential quadratic programming ». In : (1988) (cf. p. 149).
- [Kri+03] L. KRIVODONOVA et J. E. FLAHERTY. « Error estimation for discontinuous Galerkin solutions of two-dimensional hyperbolic problems ». In : *Advances in Computational Mathematics* 19 (2003), p. 57-71. DOI : [10.1023/A:1022894504834](https://doi.org/10.1023/A:1022894504834) (cf. p. 46, 50).
- [Kri+04] L. KRIVODONOVA, J. XIN, J.-F. REMACLE, N. CHEVAUGEON et J. E. FLAHERTY. « Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws ». In : *Applied Numerical Mathematics* 48.3 (2004), p. 323-338. ISSN : 0168-9274. DOI : [10.1016/j.apnum.2003.11.002](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2003.11.002). HAL : [hal - 01007288](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007288) (cf. p. 15, 30, 46, 50).
- [Kuh+10] C. KUHN et R. MÜLLER. « A continuum phase field model for fracture ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 77.18 (déc. 2010), p. 3625-3634. ISSN : 00137944. DOI : [10.1016/j.engfracmech.2010.08.009](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.08.009) (cf. p. 120).
- [Lab+05] P. LABORDE, J. POMMIER, Y. RENARD et M. SALAÜN. « High-order extended finite element method for cracked domains ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64.3 (2005), p. 354-381. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1370>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1370> (cf. p. 60, 63, 80, 89).

- [Lat+17] M. LATIFI, F. P. van der MEER et L. J. SLUYS. « An interface thick level set model for simulating delamination in composites ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 111.4 (2017), p. 303-324. DOI : [10.1002/nme.5463](https://doi.org/10.1002/nme.5463) (cf. p. 122).
- [Lat+20] M. LATIFI et M. KOUCHAKZADEH. « Modeling the R-curve effects in laminate composites using the interface thick level set method ». In : *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 108 (2020), p. 102645. ISSN : 0167-8442. DOI : [doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102645](https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102645) (cf. p. 122).
- [Lat+23] M. LATIFI et M. KOUCHAKZADEH. « Modeling fiber bridging effects on fatigue delamination propagation in composites using the interface thick level set method ». In : *Computational Mechanics* (2023), p. 1-8. DOI : [10.1007/s00466-022-02266-8](https://doi.org/10.1007/s00466-022-02266-8) (cf. p. 122).
- [Le+18] D. T. LE, J.-J. MARIGO, C. MAURINI et S. VIDOLI. « Strain-gradient vs damage-gradient regularizations of softening damage models ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 340 (2018), p. 424-450. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2018.06.013](https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.06.013). HAL : [hal-01811882](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01811882) (cf. p. 121).
- [Lé+18] B. LÉ, N. MOËS et G. LEGRAIN. « Coupling damage and cohesive zone models with the Thick Level Set approach to fracture ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 193 (2018), p. 214-247. ISSN : 0013-7944. DOI : [10.1016/j.engfracmech.2017.12.036](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.12.036) (cf. p. 122).
- [Lé+19a] B. LÉ, A. SALZMAN, N. CHEVAUGEON et N. MOËS. « Mixed mode crack propagation in concrete using the Thick Level Set approach to fracture ». In : VI International Conference on Computational Modeling of Fracture and Failure of Materials and Structures. (CFRAC) (Braunschweig, Germany, 12-14 juin 2019). 2019. eprint : <http://congress.cimne.com/cfrac2019/admin/files/fileabstract/a238.pdf> (cf. p. 17, 35).
- [Lé+19b] B. LÉ, N. CHEVAUGEON, A. SALZMAN et N. MOËS. « Mixed mode crack propagation in PMMA using the Thick Level Set approach to fracture ». In : VI International Conference on Computational Modeling of Fracture and Failure of Materials and Structures. (CFRAC) (Braunschweig, Germany, 12-14 juin 2019). 2019. eprint : <http://congress.cimne.com/cfrac2019/admin/files/fileabstract/a115.pdf> (cf. p. 17, 35).
- [Lé+22a] B. LÉ, N. MOËS, N. CHEVAUGEON et J.-F. REMACLE. « The eXtreme Mesh deformation approach (X-MESH) for sharp contact fronts modeling ». In : 15th World Congress on Computational Mechanics (WCCM-XV) and 8th Asian Pacific Congress on Computational Mechanics (APCOM-VIII) (Yokohama, Japon, 31 juil.-5 août 2022). 2022. eprint : [https://www.wccm2022.org/dl/index/book\\_of\\_abstracts.pdf](https://www.wccm2022.org/dl/index/book_of_abstracts.pdf) (cf. p. 17, 36).
- [Lé+22b] B. LÉ, N. MOËS, N. CHEVAUGEON et J.-F. REMACLE. « The eXtreme Mesh deformation approach (X-MESH) to follow contact fronts in a sharp manner ». In : 11th European Solid mechanics Conference (ESMC) (Galway, Ireland, 4-8 juil. 2022). 2022. eprint : <https://az659834.vo.msecnd.net/eventsairwesteuprod/production-abbey-public/c0fbc730335844c4a674d715116d438c> (cf. p. 17, 36).
- [Leg+11a] G. LEGRAIN, N. CHEVAUGEON et K. DRÉAU. « High order eXtended Finite Element Method and Level Sets: Uncoupling geometry and approximation ». In : International Conference on Extended Finite Element Methods - XFEM 2011 (Cardiff, United Kingdom, 29 juin-1<sup>er</sup> juil. 2011). keynote. 2011 (cf. p. 17, 19, 34, 60).

- [Leg+11b] G. LEGRAIN, **N. CHEVAUGEON** et K. DRÉAU. « Simulations de géométries complexes avec X-FEM et Level-Sets : Séparation de l'approximation et de la géométrie ». In : 10e colloque national en calcul des structures (presqu'île de Giens, (Var), 9-13 mai 2011). Giens, France, 2011, Clé USB. HAL : [hal-00592785](#) (cf. p. 17, 19, 37, 60).
- [Leg+12a] G. LEGRAIN, **N. CHEVAUGEON** et K. DRÉAU. « High order X-FEM and levelsets for complex microstructures: Uncoupling geometry and approximation ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2012), p. 172-189. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2012.06.001](#). HAL : [hal-00703239](#) (cf. p. 16, 19, 31, 60, 62).
- [Leg+12b] G. LEGRAIN et **N. CHEVAUGEON**. « High-order X-FEM for image-based computations ». In : *6th european congress on computational methods in applied sciences and engineering (ECCOMAS2012)* (Viennes, Autriche, 10-14 sept. 2012). 2012 (cf. p. 17, 34, 60).
- [Leó+21] A. A. LEÓN BALDELLI et C. MAURINI. « Numerical bifurcation and stability analysis of variational gradient-damage models for phase-field fracture ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 152 (2021), p. 104424. ISSN : 0022-5096. DOI : [10.1016/j.jmps.2021.104424](#) (cf. p. 174).
- [Les+74] P. LESAINT et P.-A. RAVIART. « On a finite element method for solving the neutron transport equation ». In : *Publications mathématiques et informatique de Rennes S4* (1974), p. 1-40. DOI : <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-208350-1.50008-X> (cf. p. 44).
- [Lév+09] A. LÉVY, S. LE CORRE, A. POITOU et **N. CHEVAUGEON**. « Développement d'un code éléments finis pour simuler le soudage par ultrasons de matériaux composites ». In : Journées nationales sur les composites, JNC 16 (Toulouse, France, 10-12 juin 2009). AMAC, 2009, 10 p. HAL : [hal-00387409](#) (cf. p. 17, 36).
- [Lev+11] A. LEVY, S. L. CORRE, **N. CHEVAUGEON** et A. POITOU. « A level set based approach for the finite element simulation of a forming process involving multiphysics coupling: Ultrasonic welding of thermoplastic composites ». In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 30.4 (2011), p. 501-509. ISSN : 0997-7538. DOI : [10.1016/j.euromechsol.2011.03.010](#). HAL : [hal-00753960](#) (cf. p. 16, 31).
- [Li+04] X. LI, J.-F. REMACLE, **N. CHEVAUGEON** et M. S. SHEPHARD. « Anisotropic Mesh Gradation Control. » In : *International Meshing Roundtable*. Citeseer. 2004, p. 401-412 (cf. p. 15, 32, 46).
- [Li+05] X. LI, M. S. SHEPHARD et M. W. BEALL. « 3D anisotropic mesh adaptation by mesh modification ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.48 (2005). **Unstructured Mesh Generation**, p. 4915-4950. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2004.11.019](#) (cf. p. 53).
- [Li+20] P. LI, J. YVONNET et C. COMBESURE. « An extension of the phase field method to model interactions between interfacial damage and brittle fracture in elastoplastic composites ». In : *International Journal of Mechanical Sciences* 179 (2020), p. 105633. ISSN : 0020-7403. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105633> (cf. p. 120).
- [Lin+93] Q. LIN et A. ZHOU. « Convergence if the discontinuous galerkin method for a scalar hyperbolic equation ». In : *Acta Mathematica Scientia* 13.2 (1993), p. 207-210. ISSN : 0252-9602. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(18\)30208-X](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(18)30208-X) (cf. p. 44).

- [Lor+03] E. LORENTZ et S. ANDRIEUX. « Analysis of non-local models through energetic formulations ». In : *International Journal of Solids and Structures*. T. 40. 2003, p. 2905-2936. DOI : [10.1016/S0020-7683\(03\)00110-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00110-0) (cf. p. 120, 128).
- [Lor+11] E. LORENTZ et V. GODARD. « Gradient damage models: Toward full-scale computations ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.21-22 (mai 2011), p. 1927-1944. ISSN : 00457825. DOI : [10.1016/j.cma.2010.06.025](https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.06.025) (cf. p. 145).
- [Lor08] E. LORENTZ. « A mixed interface finite element for cohesive zone models ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.2 (2008), p. 302-317. ISSN : 00457825. DOI : [10.1016/j.cma.2008.08.006](https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.08.006) (cf. p. 119).
- [Mag+10] B. MAGNAIN, A. BATAILLY, N. CHEVAUGEON et P. CARTRAUD. « Comparative study of the use of C1-continuous finite elements and splines for contact problems with large slidings ». In : 4th European Conference on Computational Mechanics (ECCM2010) (Paris, France, 16-21 mai 2010). 2010. HAL : [hal-00657382](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00657382) (cf. p. 17, 34).
- [Mar+06] E. MARCHANDISE, J.-F. REMACLE et N. CHEVAUGEON. « A quadrature-free discontinuous Galerkin method for the level set equation ». In : *Journal of Computational Physics* 212.1 (2006), p. 338-357. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2005.07.006](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.07.006). HAL : [hal-01004934v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01004934v1) (cf. p. 16, 30, 46).
- [Mar+07] E. MARCHANDISE, P. GEUZAIN, N. CHEVAUGEON et J.-F. REMACLE. « A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for the computation of bubble dynamics ». In : *Journal of Computational Physics* 225.1 (2007), p. 949-974. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2007.01.005](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.01.005). HAL : [hal-01004949v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01004949v1) (cf. p. 16, 30, 46).
- [Mar+08] E. MARCHANDISE, N. CHEVAUGEON et J.-F. REMACLE. « Spatial and spectral superconvergence of discontinuous Galerkin method for hyperbolic problems ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 215.2 (2008), p. 484-494. DOI : [10.1016/j.cam.2006.03.061](https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.03.061). HAL : [hal-01007314](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007314) (cf. p. 16, 30, 46).
- [Mav00] D. MAVRIPLIS. « Adaptive meshing techniques for viscous flow calculations on mixed element unstructured meshes ». In : *International journal for numerical methods in fluids* 34.2 (2000), p. 93-111 (cf. p. 52).
- [Mel+96] J. M. MELENK et I. BABUŠKA. « The partition of unity finite element method: basic theory and applications ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 139.1-4 (1996), p. 289-314. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01087-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01087-0) (cf. p. 59).
- [Mel95] J. M. MELENK. « On generalized finite element methods ». Thèse de doct. research directed by Dept. of Mathematics. University of Maryland at College Park, 1995 (cf. p. 59).
- [Mia86] P. MIALON. « Éléments d'analyse et de résolution numérique des relations de l'élasto-plasticité ». French. In : *Bulletin de la Direction des études et recherches - Electricité de France. Série C, mathématiques, informatique* (1986). ISSN : 0013-4511 (cf. p. 140).
- [Mie+10a] C. MIEHE, M. HOFACKER et F. WELSCHINGER. « A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.45-48 (nov. 2010), p. 2765-2778. ISSN : 00457825. DOI : [10.1016/j.cma.2010.04.011](https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.04.011) (cf. p. 120, 156, 160).

- [Mie+10b] C. MIEHE, F. WELSCHINGER et M. HOFACKER. « Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations ». In : *International Journal For Numerical Methods in Engineering* 83.10 (2010), p. 1273-1311. DOI : [10.1002/nme](https://doi.org/10.1002/nme) (cf. p. 120, 159).
- [Moe+] N. MOES, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « A New Level set Based Regularization for Local Damage Models: Theoretical Description and 1D Numerical Experiments ». In : 12th international Conference on Fracture (ICF-12) (Ottawa, Canada, 12-17 juil. 2009), p. 6910-6919. eprint : <https://www.proceedings.com/07799.html> (cf. p. 16, 33).
- [Moë+02] N. MOËS, A. GRAVOUIL et T. BELYTSCHKO. « Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part I: Mechanical model ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53.11 (2002), p. 2549-2568. DOI : [10.1002/nme.429](https://doi.org/10.1002/nme.429) (cf. p. 61).
- [Moë+03] N. MOËS, M. CLOIREC, P. CARTRAUD et J.-F. REMACLE. « A computational approach to handle complex microstructure geometries ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192.28 (2003). **Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures**, p. 3163-3177. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(03\)00346-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00346-3). HAL : [hal-01389078](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01389078) (cf. p. 102).
- [Moë+06] N. MOËS, E. BÉCHET et M. TOURBIER. « Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67.12 (2006), p. 1641-1669. DOI : [10.1002/nme.1675](https://doi.org/10.1002/nme.1675) (cf. p. 102).
- [Moë+08] N. MOËS, N. CHEVAUGEON et F. DUFOUR. « A regularized brittle damage model solved by a level set technique ». In : IUTAM Symposium on Theoretical, Computational and Modelling Aspects of Inelastic Media (Cape Town, Afrique du Sud, 14-18 jan. 2008). Springer. 2008, p. 89-96. DOI : [10.1007/978-1-4020-9090-5\\_8](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9090-5_8). eprint : [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4020-9090-5\\_8](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4020-9090-5_8) (cf. p. 16, 33, 121).
- [Moë+09] N. MOËS, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « A thick level-set approach to damage mechanics ». In : 4th Symposium on defect and material mechanics, ISDMM09 (Trento, Italy, 5-9 juil. 2009). **presenting author : chevaugon**. 2009. eprint : [hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007816v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01007816v1) (cf. p. 16, 33).
- [Moë+11a] N. MOËS, C. STOLZ, P.-E. BERNARD et N. CHEVAUGEON. « A level set based model for damage growth: The thick level set approach ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86.3 (2011), p. 358-380. DOI : [10.1002/nme.3069](https://doi.org/10.1002/nme.3069). HAL : [hal-01517313](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01517313) (cf. p. 16, 31, 121, 122, 129).
- [Moë+11b] N. MOËS, C. STOLZ, P.-E. BERNARD, N. CHEVAUGEON et al. « Modélisation de l'endommagement par l'évolution d'une fonction de niveau: le modèle TLS ». In : 10e colloque national en calcul des structures (presqu'île de Giens, (Var), 9-13 mai 2011). 2011 (cf. p. 17, 36).
- [Moë+11c] N. MOËS, P.-E. BERNARD, N. CHEVAUGEON et al. « The Thick Level Set Damage Model Coupled to the eXtended Finite Element Method to Simulate Initiation and Complex Cracking Patterns ». In : *11th International Conference on Computational Plasticity*. 2011 (cf. p. 17, 34, 129).
- [Moë+12a] N. MOËS, P.-E. BERNARD, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « Avoiding spurious damage localization with a new non-local damage model : the thick level-set approach ». In : *Advances in Computational Science, Engineering and Mathematics, dedicated to professor J. Tinsey Oden, ACSEM* (19-20 jan. 2012). University of Texas at Austin, United States, 2012. eprint : <https://sites.google.com/site/acsem12/2011-ieee-ss> (cf. p. 17, 35).



- [Moë+12b] N. MOËS, P.-E. BERNARD, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « Handling Localization in Damage Models With the Thick Level Set Approach (TLS) ». In : *ASME 2012 11th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis* (2-4 juil. 2012). American Society of Mechanical Engineers. 2012, p. 67-70. DOI : [10.1115/ESDA2012-82711](https://doi.org/10.1115/ESDA2012-82711) (cf. p. 17, 34).
- [Moe+13a] N. MOES, C. STOLZ, N. CHEVAUGEON et A. SALZMAN. « Endommagement diffus et approche par level-set épaisse (TLS) de la transition endommagement rupture ». In : 11ème colloque en calcul des structures (CSMA-2013) (Giens, France, 13-17 mai 2013). 2013 (cf. p. 17, 37).
- [Moe+13b] N. MOES, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « The thick level-set model for damage growth and transition to fracture ». In : 6th International Symposium on Defect and Material Mechanics (ISDMM13) (Nantes Ecole Centrale, France, 1<sup>er</sup>-5 juil. 2013). 2013 (cf. p. 17, 35).
- [Moë+13a] N. MOËS, C. STOLZ, N. CHEVAUGEON et A. SALZMAN. « The Thick Level Set Model: A non-local damage model allowing automatic crack placement inside localization zones ». In : *Proceedings of CFRAC 2013, Computational Modeling of Fracture and Failure of Materials and Structures* (Prague, Czech Republic, 5-7 juin 2013). 2013, p. 5-7 (cf. p. 17, 35).
- [Moë+13b] N. MOËS, N. CHEVAUGEON et M. GRAVELEAU. « The eXtended Finite Element Method and level sets to handle inequality constraints ». In : *International Conference on Extended Finite Element Methods, XFEM 2013*. Lyon, France, 2013, p. 1. HAL : [hal-03928432](https://hal-03928432). eprint : <https://xfem2013.sciencesconf.org/browse/author6655.html?authorid=201712> (cf. p. 17, 35, 97).
- [Moë+14a] N. MOËS, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « Coupling local and non-local damage evolutions with the Thick Level Set Model ». In : *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)* (Barcelone, Espagne, 20-25 juil. 2014). 2014. eprint : <http://congress.cimne.com/iacm-eccomas2014/admin/files/fileabstract/a3628.pdf> (cf. p. 17, 35).
- [Moë+14b] N. MOËS, C. STOLZ et N. CHEVAUGEON. « Coupling local and non-local damage evolutions with the Thick Level Set model ». In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 1.16 (2014), p. 1-21. DOI : [10.1186/s40323-014-0016-2](https://doi.org/10.1186/s40323-014-0016-2). HAL : [hal-01154910](https://hal-01154910) (cf. p. 16, 31, 121, 122, 140).
- [Moë+21a] N. MOËS et N. CHEVAUGEON. « Lipschitz Regularization for softening elastic and plastic material models: The Lip-Field Approach ». In : 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Milan, Italie, 22-27 août 2021). **keynote**. 2021. eprint : [https://iutam.org/publications/ictam-proceedings/ictam\\_2020/](https://iutam.org/publications/ictam-proceedings/ictam_2020/) (cf. p. 17, 36).
- [Moë+21b] N. MOËS et N. CHEVAUGEON. « Lipschitz regularization for softening material models: The Lip-field approach ». In : *Comptes Rendus - Mécanique* 349.2 (mar. 2021), p. 415-434. ISSN : 18737234. DOI : [10.5802/CRMECA.91](https://doi.org/10.5802/CRMECA.91). HAL : [hal-03806305](https://hal-03806305). arXiv : [2103.16345](https://arxiv.org/abs/2103.16345) (cf. p. 16, 32, 42, 121, 154, 155, 160, 161).
- [Moë+22a] N. MOËS, J.-F. REMACLE, J. LAMBRECHTS et N. CHEVAUGEON. « Déformation eXtrême de maillage (X-MESH) : un nouveau paradigme pour le suivi de surfaces physiques, application au changement de phase ». In : 25ème Congrès Français de mécanique (CFM) (Nantes, France, 29 août-2 sept. 2022). 2022 (cf. p. 17, 37).

- [Moë+22b] N. MOËS, B. LÉ et A. STERSHIC. « Fragmentation analysis of a bar with the Lip-field approach ». In : *Mechanics of Materials* 172 (2022), p. 104365. ISSN : 0167-6636. DOI : [10.1016/j.mechmat.2022.104365](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2022.104365) (cf. p. 174).
- [Moë+23] N. MOËS, J.-F. REMACLE, J. LAMBRECHTS, B. LÉ et N. CHEVAUGEON. « The eXtreme Mesh deformation approach (X-MESH) for the Stefan phase change model ». In : *Journal of Computational Physics* (2023), p. 111878. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2022.111878](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111878). arXiv : [2111.04179](https://arxiv.org/abs/2111.04179) (cf. p. 16, 32, 116, 180).
- [Moë+99] N. MOËS, J. DOLBOW et T. BELYTSCHKO. « A finite element method for crack growth without remeshing ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 46.1 (1999), p. 131-150. DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990910\)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J) (cf. p. 59, 69).
- [Mol+17] G. MOLNÁR et A. GRAVOUIL. « 2D and 3D Abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 130 (2017), p. 27-38. ISSN : 0168-874X. DOI : [10.1016/j.finel.2017.03.002](https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.03.002) (cf. p. 120).
- [Mor+15] K. MOREAU, N. MOËS, D. PICART et L. STAINIER. « Explicit dynamics with a non-local damage model using the thick level set approach ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 102.3-4 (2015), p. 808-838. DOI : [10.1002/nme.4824](https://doi.org/10.1002/nme.4824) (cf. p. 122).
- [Mor+17] K. MOREAU, N. MOËS, N. CHEVAUGEON et A. SALZMAN. « Concurrent development of local and non-local damage with the Thick Level Set approach: Implementation aspects and application to quasi-brittle failure ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 327 (2017), p. 306-326. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2017.08.045](https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.08.045). HAL : [hal-03928065](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03928065) (cf. p. 16, 31, 122).
- [Mor+20] L. MORORÓ et F. VAN DER MEER. « Combining the thick level set method with plasticity ». In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 79 (2020), p. 103857. ISSN : 0997-7538. DOI : [10.1016/j.euromechsol.2019.103857](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103857) (cf. p. 122).
- [Mor+21] L. A. T. MORORÓ et F. P. van der MEER. « Parallel Computing with the Thick Level Set Method ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 43.6 (2021), p. C386-C410. DOI : [10.1137/21M1400742](https://doi.org/10.1137/21M1400742) (cf. p. 122).
- [Mor+22] L. MORORÓ, A. POOT et F. VAN DER MEER. « Skeleton curve and phantom node method for the Thick Level Set approach to fracture ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 268 (2022), p. 108443. ISSN : 0013-7944. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2022.108443> (cf. p. 122).
- [Mor+87a] B. MORAN et C. SHIH. « A general treatment of crack tip contour integrals ». In : *International journal of fracture* 35.4 (1987), p. 295-310. DOI : [10.1007/BF00276359](https://doi.org/10.1007/BF00276359) (cf. p. 92).
- [Mor+87b] B. MORAN et C. SHIH. « Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 27.6 (1987), p. 615-642. ISSN : 0013-7944. DOI : [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90155-X](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90155-X) (cf. p. 92).
- [Mou+10] S. MOUSAVI et N. SUKUMAR. « Generalized Duffy transformation for integrating vertex singularities ». In : *Computational Mechanics* 45.2 (2010), p. 127-140. DOI : [10.1007/s00466-009-0424-1](https://doi.org/10.1007/s00466-009-0424-1) (cf. p. 67, 69).
- [Müh+87] H. B. MÜHLHAUS et I. VARDOULAKIS. « The thickness of shear bands in granular materials ». In : *Géotechnique* 37.3 (1987), p. 271-283. DOI : [10.1680/geot.1987.37.3.271](https://doi.org/10.1680/geot.1987.37.3.271) (cf. p. 120).



- [Mus+53] N. I. MUSKHELISHVILI et al. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. T. 15. Noordhoff Groningen, 1953 (cf. p. 90).
- [Nag+93] A. NAGARAJAN et S. MUKHERJEE. « A mapping method for numerical evaluation of two-dimensional integrals with  $1/r$  singularity ». In : *Computational mechanics* 12.1 (1993), p. 19-26. DOI : [10.1007/BF00370482](https://doi.org/10.1007/BF00370482) (cf. p. 67, 83).
- [Nah+93] R. NAHTA et B. MORAN. « Domain integrals for axisymmetric interface crack problems ». In : *International Journal of Solids and Structures* 30.15 (1993), p. 2027-2040. ISSN : 0020-7683. DOI : [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90049-D](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90049-D) (cf. p. 93).
- [Nak+89] T. NAKAMURA et D. PARKS. « Antisymmetrical 3-D stress field near the crack front of a thin elastic plate ». In : *International Journal of Solids and Structures* 25.12 (1989), p. 1411-1426. ISSN : 0020-7683. DOI : [10.1016/0020-7683\(89\)90109-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90109-1) (cf. p. 92).
- [Nak91] T. NAKAMURA. « Three-Dimensional Stress Fields of Elastic Interface Cracks ». In : *Journal of Applied Mechanics* 58.4 (déc. 1991), p. 939-946. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.2897711](https://doi.org/10.1115/1.2897711) (cf. p. 92).
- [Ngu+05] Q.-S. NGUYEN et S. ANDRIEUX. « The non-local generalized standard approach: a consistent gradient theory ». In : *Comptes rendus de l'Académie des sciences: Mécanique, physique, chimie, astronomie* 333 (2005), p. 139-145. DOI : [10.1016/j.crme.2004.09.010](https://doi.org/10.1016/j.crme.2004.09.010) (cf. p. 120).
- [Ngu+15] T. NGUYEN, J. YVONNET, Q.-Z. ZHU, M. BORNERT et C. CHATEAU. « A phase field method to simulate crack nucleation and propagation in strongly heterogeneous materials from direct imaging of their microstructure ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 139 (2015), p. 18-39. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.03.045> (cf. p. 120).
- [Nik+87] G. P. NIKISHKOV et S. N. ATLURI. « Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the 'equivalent domain integral' method ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24.9 (1987), p. 1801-1821. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1620240914>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620240914> (cf. p. 92).
- [Nit71] J. NITSCHKE. « Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind ». In : *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. T. 36. 1. Springer. 1971, p. 9-15. DOI : [10.1007/BF02995904](https://doi.org/10.1007/BF02995904) (cf. p. 44).
- [Ode+98] J. ODEN, I. BABUŠKA et E. BAUMANN. « A Discontinuous hp Finite Element Method for Diffusion Problems ». In : *Journal of Computational Physics* 146.2 (1998), p. 491-519. ISSN : 0021-9991. DOI : <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.6032> (cf. p. 44).
- [Ort+99] M. ORTIZ et L. STAINIER. « The variational formulation of viscoplastic constitutive updates ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 171.3 (1999), p. 419-444. ISSN : 0045-7825. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00219-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00219-9) (cf. p. 140).
- [Osh+04] S. OSHER, R. FEDKIW et K. PIECHOR. « Level set methods and dynamic implicit surfaces ». In : *Appl. Mech. Rev.* 57.3 (2004), B15-B15 (cf. p. 62, 101).
- [Par+09] K. PARK, J. P. PEREIRA, C. A. DUARTE et G. H. PAULINO. « Integration of singular enrichment functions in the generalized/extended finite element method for three-dimensional problems ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78.10 (2009), p. 1220-1257. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2530>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.2530> (cf. p. 67, 69, 83).

- [Par+15] A. PARRILLA GÓMEZ, N. MOËS et C. STOLZ. « Comparison between thick level set (TLS) and cohesive zone models ». In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 2.1 (2015), p. 18. ISSN : 2213-7467. DOI : [10.1186/s40323-015-0041-9](https://doi.org/10.1186/s40323-015-0041-9) (cf. p. [122](#), [129](#), [145](#)).
- [Par+17] A. PARRILLA GÓMEZ, C. STOLZ, N. MOËS, D. GRÉGOIRE et G. PIJAUDIER-CABOT. « On the capability of the Thick Level Set (TLS) damage model to fit experimental data of size and shape effects ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 184 (2017), p. 75-87. ISSN : 0013-7944. DOI : [10.1016/j.engfracmech.2017.07.014](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.07.014) (cf. p. [122](#)).
- [Pee+01] R. PEERLINGS, M. GEERS, R. DE BORST et W. BREKELMANS. « A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua ». In : *International Journal of Solids and Structures* 38.44-45 (2001), p. 7723-7746. DOI : [10.1016/S0020-7683\(01\)00087-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00087-7) (cf. p. [120](#)).
- [Pen05] H. PENG. « Solving Fluid-Rigid Object Interaction Problems by discontinuous galerkin Methods ». Thèse de doct. Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, U.S.A., 2005 (cf. p. [15](#), [46](#)).
- [Per+09] J. P. PEREIRA, C. A. DUARTE, D. GUOY et X. JIAO. « hp-Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-D cracks ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77.5 (2009), p. 601-633. DOI : [10.1002/nme.2419](https://doi.org/10.1002/nme.2419) (cf. p. [65](#)).
- [Pet91] T. E. PETERSON. « A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 28.1 (1991), p. 133-140. DOI : [10.1137/0728006](https://doi.org/10.1137/0728006) (cf. p. [44](#)).
- [Pij+87] G. PIJAUDIER-CABOT et Z. P. BAŽANT. « Nonlocal Damage Theory ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 113.10 (1987), p. 1512-1533. DOI : [10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1987\)113:10\(1512\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1512)) (cf. p. [120](#)).
- [Pij+96] G. PIJAUDIER-CABOT et N. BURLION. « Damage and localisation in elastic materials with voids ». In : *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* 1.2 (1996), p. 129-144. DOI : [10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199604\)1:2<129::AID-CFM7>3.0.CO;2-2](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199604)1:2<129::AID-CFM7>3.0.CO;2-2) (cf. p. [120](#)).
- [Pra+07] B. PRABEL, A. COMBESURE, A. GRAVOUIL et S. MARIE. « Level set X-FEM non-matching meshes: application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 69.8 (2007), p. 1553-1569. DOI : [10.1002/nme.1819](https://doi.org/10.1002/nme.1819) (cf. p. [62](#)).
- [Pra+95] R.-M. PRADEILLES-DUVAL et C. STOLZ. « Mechanical transformations and discontinuities along a moving surface ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43.1 (1995), p. 91-121. ISSN : 0022-5096. DOI : [10.1016/0022-5096\(94\)00061-9](https://doi.org/10.1016/0022-5096(94)00061-9) (cf. p. [104](#)).
- [Ras+18] G. RASTIELLO, C. GIRY, F. GATUINGT et R. DESMORAT. « From diffuse damage to strain localization from an Eikonal Non-Local (ENL) Continuum Damage model with evolving internal length ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 331 (2018), p. 650-674. ISSN : 00457825. DOI : [10.1016/j.cma.2017.12.006](https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.12.006) (cf. p. [120](#)).
- [Ree+73] W. H. REED et T. R. HILL. *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*. Rapp. tech. Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA), 1973 (cf. p. [43](#)).
- [Rem+02] J.-F. REMACLE, X. LI, N. CHEVAUGEON et M. S. SHEPHARD. « Transient Mesh Adaptation Using Conforming and Non Conforming Mesh Modifications. » In : *Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable IMR* (Ithaca, New York, USA, 15-18 sept. 2002). 2002, p. 261-272. HAL : [hal-03923484](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03923484) (cf. p. [15](#), [32](#), [46](#), [54](#)).

- [Rem+03] J.-F. REMACLE, J. E. FLAHERTY et M. S. SHEPHARD. « An Adaptive Discontinuous Galerkin Technique with an Orthogonal Basis Applied to Compressible Flow Problems ». In : *SIAM Review* 45.1 (2003), p. 53-72. DOI : [10.1137/S00361445023830](https://doi.org/10.1137/S00361445023830) (cf. p. 47, 52).
- [Rem+04] J.-F. REMACLE et N. CHEVAUGEON. « Dispersion analysis of discontinuous galerkin schemes an applications to aeroacoustics ». In : 6th World Congress on Computational Mechanics (WCCM) (Beijing, China, 5-10 sept. 2004). 2004 (cf. p. 16, 32, 46).
- [Rem+07] J.-F. REMACLE, N. CHEVAUGEON, É. MARCHANDISE et C. GEUZAIN. « Efficient visualization of high-order finite elements ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 69.4 (2007), p. 750-771. DOI : [10.1002/nme.1787](https://doi.org/10.1002/nme.1787). HAL : [hal-01006787](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006787) (cf. p. 16, 30, 46, 81).
- [Ric68] J. R. RICE. « A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks ». In : *Journal of Applied Mechanics* 35.2 (juin 1968), p. 379-386. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.3601206](https://doi.org/10.1115/1.3601206) (cf. p. 92).
- [Ric88] G. R. RICHTER. « An optimal-order error estimate for the discontinuous Galerkin method ». In : *Mathematics of Computation* 50.181 (1988), p. 75-88 (cf. p. 44).
- [Rot+01] R. ROTINAT, N. CHEVAUGEON, J.-P. REGOIN, E. VERRON et B. PESEUX. « Soufflage libre de membrane élastomère cylindrique : mesure optique du champ de déformation ». In : *2ème Colloque Méthodes et Techniques Optiques pour l'Industrie* (Trégastel, France, 20-23 nov. 2001). 20-23 Novembre. 2001, p. 155-160 (cf. p. 15, 36).
- [Sal+15] A. SALZMAN, N. MOËS et N. CHEVAUGEON. « Simulation tridimensionnelle d'initiation, propagation et coalescence de fissures dans des structures à matériaux quasi fragiles avec le modèle d'endommagement par level set épaisse ». In : *12ème colloque national en calcul des structures, CSMA2015* (18-22 mai 2015). Giens, France, 2015, p. 1-5. HAL : [hal-01400462](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01400462) (cf. p. 17, 37).
- [Sal+16] A. SALZMAN, N. MOËS et N. CHEVAUGEON. « On use of the thick level set method in 3D quasi-static crack simulation of quasi-brittle material ». In : *International Journal of Fracture* 202.1 (2016), p. 21-49. DOI : [10.1007/s10704-016-0132-8](https://doi.org/10.1007/s10704-016-0132-8). HAL : [hal-01692311](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01692311) (cf. p. 16, 31, 122, 130, 138).
- [Sau11] R. A. SAUER. « Enriched contact finite elements for stable peeling computations ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 87.6 (2011), p. 593-616. DOI : [10.1002/nme.3126](https://doi.org/10.1002/nme.3126) (cf. p. 108).
- [Sch+86] H. SCHREYER et Z. CHEN. « One-dimensional softening with localization ». In : *Journal of Applied Mechanics* 53 (1986), p. 891-979. DOI : [10.1115/1.3171860](https://doi.org/10.1115/1.3171860) (cf. p. 120).
- [Sea+09] A. SEAGRAVES et R. RADOVITZKY. « Advances in cohesive zone modeling of dynamic fracture. » In : *Dynamic failure of materials and structures*. Springer, 2009, p. 349-405. DOI : [10.1007/978-1-4419-0446-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0446-1) (cf. p. 119).
- [Set99] J. A. SETHIAN. *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. T. 3. Cambridge university press, 1999 (cf. p. 62, 101, 123, 127, 135).
- [She+05] M. S. SHEPHARD, J. E. FLAHERTY, K. E. JANSEN, X. LI, X. LUO, N. CHEVAUGEON, J.-F. REMACLE, M. W. BEALL et R. M. O'BARA. « Adaptive mesh generation for curved domains ». In : *Applied Numerical Mathematics* 52.2 (2005), p. 251-271. DOI : [10.1016/j.apnum.2004.08.040](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2004.08.040). HAL : [hal-03928764](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03928764) (cf. p. 15, 30, 46).

- [She68] D. SHEPARD. « A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data ». In : *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference*. 1968, p. 517-524 (cf. p. 65).
- [She96] J. R. SHEWCHUK. « Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator ». In : *Applied Computational Geometry Towards Geometric Engineering* 1148 (1996), p. 203-222. ISSN : 00983004. DOI : [10.1007/BFb0014474](https://doi.org/10.1007/BFb0014474) (cf. p. 163).
- [Shi+21] B. SHIFERAW, O. CHUPIN, J.-M. PIAU et N. MOËS. « Development of a damage viscoelastic model using the thick level set approach to fracture: 1D modeling and comparison to uniaxial tension stress tests on bituminous specimens ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 257 (2021), p. 108026. ISSN : 0013-7944. DOI : [10.1016/j.engfracmech.2021.108026](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.108026) (cf. p. 122).
- [Shi+88] C. F. SHIH et R. J. ASARO. « Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I—Small Scale Yielding ». In : *Journal of Applied Mechanics* 55.2 (juin 1988), p. 299-316. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.3173676](https://doi.org/10.1115/1.3173676) (cf. p. 92).
- [Sil00] S. SILLING. « Reformulation of Elasticity Theory for Discontinuities and Long-Range Forces ». In : *J. of the Mech. and Phys. of Sol.* 48.1 (2000), p. 175-209. ISSN : 00225096. DOI : [10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0) (cf. p. 120).
- [Sim+97] J. SIMO et T. HUGHES. *Computational inelasticity*. Springer, 1997, p. 392. DOI : [10.1007/b98904](https://doi.org/10.1007/b98904) (cf. p. 142).
- [Sof+05] M. SOFONEA, W. HAN et M. SHILLOR. *Analysis and approximation of contact problems with adhesion or damage*. Chapman et Hall/CRC, 2005. DOI : [10.1201/9781420034837](https://doi.org/10.1201/9781420034837) (cf. p. 108).
- [Sol+03] P. SOLIN, K. SEGETH et I. DOLEZEL. *Higher-order finite element methods*. Chapman et Hall/CRC, 2003. DOI : [10.1201/9780203488041](https://doi.org/10.1201/9780203488041) (cf. p. 70).
- [Ste+17] A. J. STERSHIC, J. E. DOLBOW et N. MOËS. « The Thick Level-Set Model for Dynamic Fragmentation ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 172 (2017), p. 39-60. ISSN : 00137944. DOI : [10.1016/j.engfracmech.2016.12.012](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.12.012) (cf. p. 121, 140).
- [Ste+76] M. STERN, E. BECKER et R. DUNHAM. « A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors ». In : *International Journal of Fracture* 12.3 (1976), p. 359-368. DOI : [10.1007/BF00032831](https://doi.org/10.1007/BF00032831) (cf. p. 92).
- [Sto+11] C. STOLZ, N. MOËS, P.-È. BERNARD et N. CHEVAUGEON. « Modèles d'endommagement par level-set épaisse: solutions analytiques et simulations ». In : 10e colloque national en calcul des structures (presqu'île de Giens, (Var), 9-13 mai 2011). 2011, 8-p. HAL : [hal-00592732](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00592732) (cf. p. 17, 37).
- [Sto+12] C. STOLZ et N. MOËS. « A new model of damage : a moving thick layer approach. » In : *International Journal of Fracture* 174.1 (mar. 2012), p. 49-60. ISSN : 0376-9429. DOI : [10.1007/s10704-012-9693-3](https://doi.org/10.1007/s10704-012-9693-3) (cf. p. 122).
- [Suk+00] N. SUKUMAR, N. MOËS, B. MORAN et T. BELYTSCHKO. « Extended finite element method for three-dimensional crack modelling ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 48.11 (2000), p. 1549-1570. DOI : [10.1002/1097-0207\(20000820\)48:11<1549::AID-NME955>3.0.CO;2-A](https://doi.org/10.1002/1097-0207(20000820)48:11<1549::AID-NME955>3.0.CO;2-A) (cf. p. 61).
- [Suk+08] N. SUKUMAR, D. L. CHOPP, E. BÉCHET et N. MOËS. « Three-dimensional non-planar crack growth by a coupled extended finite element and fast marching method ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76.5 (2008), p. 727-748. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2344>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.2344> (cf. p. 62).

- [Tan+18] E. TANNÉ, T. LI, B. BOURDIN, J.-J. MARIGO et C. MAURINI. « Crack nucleation in variational phase-field models of brittle fracture ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 110 (2018), p. 80-99. DOI : [10.1016/j.jmps.2017.09.006](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.09.006) (cf. p. 156).
- [Tar00] E. TAROCO. « Shape sensitivity analysis in linear elastic fracture mechanics ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 188.4 (2000), p. 697-712. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(99\)00356-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00356-4) (cf. p. 104).
- [Tii+19] T. TIIRATS, N. CHEVAUGEON, N. MOËS, C. STOLZ et N. MAROUF. « A thin layer model based on polynomial expansion for coated bodies in contact ». In : *VI. International Conference on Computational Contact Mechanics (ICCCM)* (Hannover, Germany, 3-5 juil. 2019). 2019. HAL : [hal-02388285](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02388285) (cf. p. 17, 22, 36).
- [Tii+20] T. TIIRATS, N. CHEVAUGEON, N. MOËS, C. STOLZ, N. MAROUF et E. DESDOIT. « How to efficiently apply soft thin coating to existing Finite Element contact model ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 177 (2020), p. 103420. ISSN : 0168-874X. DOI : [10.1016/j.finel.2020.103420](https://doi.org/10.1016/j.finel.2020.103420). eprint : [hal-03033222](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03033222) (cf. p. 16, 22, 31).
- [Tij+00] M. G. TIJSENS, B. L. SLUYS et E. VAN DER GIESSEN. « Numerical simulation of quasi-brittle fracture using damaging cohesive surfaces ». In : *European Journal of Mechanics, A/Solids* 19.5 (2000), p. 761-779. ISSN : 09977538. DOI : [10.1016/S0997-7538\(00\)00190-X](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(00)00190-X) (cf. p. 119).
- [Tri86] A. E. TRIANTAFYLIDIS N. « A gradient approach to localization of deformation: I. Hyperelastic model ». In : *Journal of Elasticity* 16 (1986), p. 225-237 (cf. p. 120).
- [Tve+84] V. TVERGAARD et A. NEEDLEMAN. « Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar ». In : *Acta Metallurgica et Materialia* 32 (1984), p. 157-169. ISSN : 0001-6160. DOI : [10.1016/0001-6160\(84\)90213-X](https://doi.org/10.1016/0001-6160(84)90213-X) (cf. p. 148).
- [Val+19] N. VALOROSO et C. STOLZ. « Progressive damage in quasi-brittle solids ». In : *Conference of the Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics* (Rome, Italie). Springer. Sept. 2019, p. 408-418. DOI : [10.1007/978-3-030-41057-5\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-030-41057-5_34) (cf. p. 140).
- [Val+22] N. VALOROSO et C. STOLZ. « Graded damage in quasi-brittle solids ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* n/a.n/a (2022), p. 1-32. DOI : [10.1002/nme.6947](https://doi.org/10.1002/nme.6947) (cf. p. 155, 159).
- [van+15] F. VAN DER MEER et L. SLUYS. « The Thick Level Set method: Sliding deformations and damage initiation ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 285 (2015), p. 64-82. ISSN : 0045-7825. DOI : [doi.org/10.1016/j.cma.2014.10.020](https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.10.020) (cf. p. 122).
- [Vir+20] P. VIRTANEN, R. GOMMERS, T. E. OLIPHANT, M. HABERLAND, T. REDDY, D. COURNAPEAU, E. BUROVSKI, P. PETERSON, W. WECKESSER, J. BRIGHT, S. J. VAN DER WALT, M. BRETT, J. WILSON, K. J. MILLMAN, N. MAYOROV, A. R. J. NELSON, E. JONES, R. KERN, E. LARSON, C. J. CAREY, İ. POLAT, Y. FENG, E. W. MOORE, J. VANDERPLAS, D. LAXALDE, J. PERKTOLD, R. CIMRMAN, I. HENRIKSEN, E. A. QUINTERO, C. R. HARRIS, A. M. ARCHIBALD, A. H. RIBEIRO, F. PEDREGOSA, P. VAN MULBREGT et SCI-PY 1.0 CONTRIBUTORS. « SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python ». In : *Nature Methods* 17 (2020), p. 261-272. DOI : [10.1038/s41592-019-0686-2](https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2) (cf. p. 149).



- [Voo+17] L. VOORMEEREN, F. VAN DER MEER, J. MALJAARS et L. SLUYS. « A new method for fatigue life prediction based on the Thick Level Set approach ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 182 (2017), p. 449-466. ISSN : 0013-7944. DOI : [10.1016/j.engfracmech.2017.05.007](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.05.007) (cf. p. 122).
- [War+99a] T. WARBURTON et G. KARNIADAKIS. « A Discontinuous Galerkin Method for the Viscous MHD Equations ». In : *Journal of Computational Physics* 152.2 (1999), p. 608-641. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1006/jcph.1999.6248](https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6248) (cf. p. 44).
- [War+99b] T. WARBURTON, I. LOMTEV, Y. DU, S. SHERWIN et G. KARNIADAKIS. « Galerkin and discontinuous Galerkin spectral/hp methods ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 175.3 (1999), p. 343-359. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00360-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00360-0) (cf. p. 44).
- [Wei+13] L. WEI, Y. HE, A. YILDIRIM et S. KUMAR. « Numerical algorithm based on an implicit fully discrete local discontinuous Galerkin method for the time-fractional KdV-Burgers-Kuramoto equation ». In : *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 93.1 (2013), p. 14-28. DOI : [10.1002/zamm.201200003](https://doi.org/10.1002/zamm.201200003) (cf. p. 44).
- [Whe+14] M. WHEELER, T. WICK et W. WOLLNER. « An augmented-Lagrangian method for the phase-field approach for pressurized fractures ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 271 (2014), p. 69-85. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2013.12.005](https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.12.005) (cf. p. 156).
- [Wil+70] E. A. WILSON et B. PARSONS. « Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacements ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2.3 (1970), p. 387-395. DOI : [10.1002/nme.1620020307](https://doi.org/10.1002/nme.1620020307) (cf. p. 98).
- [Woo+84] P. WOODWARD et P. COLELLA. « The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks ». In : *Journal of Computational Physics* 54.1 (1984), p. 115-173. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/0021-9991\(84\)90142-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90142-6) (cf. p. 47, 50).
- [Wri+06] P. WRIGGERS et T. A. LAURSEN. *Computational contact mechanics*. T. 2. Springer, 2006 (cf. p. 98).
- [Wu+20] J.-Y. WU, V. P. NGUYEN, C. T. NGUYEN, D. SUTULA, S. SINAIE et S. P. BORDAS. « Phase-field modeling of fracture ». In : *Advances in Applied Mechanics* 53 (2020), p. 1-183. DOI : [10.1016/bs.aams.2019.08.001](https://doi.org/10.1016/bs.aams.2019.08.001) (cf. p. 169, 170).
- [Xia+17] L. XIA, J. YVONNET et S. GHABEZLOO. « Phase field modeling of hydraulic fracturing with interfacial damage in highly heterogeneous fluid-saturated porous media ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 186 (2017), p. 158-180. ISSN : 0013-7944. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.10.005> (cf. p. 120).
- [Yan+02] J. YAN et C.-W. SHU. « A local discontinuous Galerkin method for KdV type equations ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40.2 (2002), p. 769-791. DOI : [10.1137/S0036142901390378](https://doi.org/10.1137/S0036142901390378) (cf. p. 44).
- [Zgh+18] J. ZGHAL, K. MOREAU, N. MOËS, D. LEGUILLON et C. STOLZ. « Analysis of the failure at notches and cavities in quasi-brittle media using the Thick Level Set damage model and comparison with the coupled criterion ». In : *International Journal of Fracture* 211.1-2 (2018), p. 253-280. ISSN : 1573-2673. DOI : [10.1007/s10704-018-0287-6](https://doi.org/10.1007/s10704-018-0287-6) (cf. p. 122, 145).
- [Zha+03] Y. -P. ZHAO, L. S. WANG et T. X. YU. « Mechanics of adhesion in MEMS—a review ». In : *Journal of Adhesion Science and Technology* 17.4 (2003), p. 519-546. DOI : [10.1163/15685610360554393](https://doi.org/10.1163/15685610360554393) (cf. p. 108).

- [Zho+04] F. ZHOU et J. F. MOLINARI. « Dynamic crack propagation with cohesive elements: a methodology to address mesh dependency ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 59.1 (2004), p. 1-24. DOI : [10.1002/nme.857](https://doi.org/10.1002/nme.857) (cf. p. 119).
- [Zie+03] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR, S. SHERWIN et J. PEIRO. « On discontinuous Galerkin methods ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 58.8 (2003), p. 1119-1148. DOI : [10.1002/nme.884](https://doi.org/10.1002/nme.884) (cf. p. 44).





---

**Titre :** Contributions à la Mécanique Numérique

**Mots clés :** Mécanique numérique, endommagement, fissuration, XFEM, DG, TLS, Lip-field, Contact

**Résumé :** Actuellement maître de conférences à l'École Centrale de Nantes et rattaché au Laboratoire GeM UMR-CNRS 6183, je retrace, dans la première partie de ce mémoire, ma carrière en mécanique numérique depuis l'obtention de ma thèse en 2002. J'y détaille mes travaux, collaborations et encadrements réalisés d'abord au Rensselaer Polytechnic Institute (RPI) dans l'État de New York, puis à l'Université Catholique de Louvain en Belgique et, depuis 2006, au GeM.

La deuxième partie du document présente mes contributions les plus importantes dans le domaine, structurées autour des quatre axes suivant :

**DG :** Les Méthodes **Galerkin Discontinues** en mécanique des fluides, où je décris le développement de versions haut ordre et adaptatives de cette méthode, appliquée à divers problèmes allant de l'aéro-acoustique à l'océanographie.

**XFEM :** La méthode des éléments finis étendus ap-

pliquée aux problèmes de mécanique du solide incluant des interfaces franches ou des singularités. Je propose et discute de techniques pour améliorer la robustesse et la précision de cette famille de méthodes.

**ILS :** Une méthode **Level Set** pour les problèmes comportant des contraintes d'inégalités : Je décris ici le développement de cette méthode originale, appliquée au contact entre solide déformable, et la compare aux méthodes plus classiques.

**De TLS à Lip-field :** Mes travaux plus récents se concentrent sur la modélisation numérique intégrée de l'endommagement et de la fissuration. Ma contribution aux développements de la méthode **TLS** puis **Lip-field** y sont détaillés.

Le mémoire se conclut par un bilan de mes recherches avant de décrire les perspectives et les différentes voies de poursuite de mes travaux.

---

**Title :** Contributions to Computational Mechanics

**Keywords :** Computational Mechanics, Crack, Damage, XFEM, DG, TLS, Lip-field, Contact

**Summary :** Currently an associate professor at École Centrale de Nantes and affiliated with the GeM Laboratory UMR-CNRS 6183, I recall, In the first part of this dissertation, my career in numerical mechanics since obtaining my thesis in 2002. I detail my work, collaborations, and supervision first at the Rensselaer Polytechnic Institute (RPI) in New York State, then at the Catholic University of Louvain in Belgium, and since 2006, at GeM.

The second part of the document presents my most significant contributions in the field, structured around four axes :

**Discontinuous Galerkin Methods** in Fluid Mechanics, where I describe the development of high-order and adaptive versions of this method, applied to various problems ranging from aeroacoustics to oceanography.

**XFEM** The eXtended Finite Element Method applied

to solid mechanics problems involving sharp interfaces or singularities. I propose and discuss techniques to improve the robustness and accuracy of this family of methods.

**ILS :** A **Level Set** method for problems involving inequality constraints : Here, I describe the development of this original method, applied to the contact between deformable solids, and compare it to more classical methods.

**From TLS to Lipfield :** My more recent work focuses on integrated numerical modeling of damage and fracture. My contributions to the developments of the **TLS** method and the **Lip-field** method are detailed there.

The dissertation is concluded by an overview of my research and descriptions of the various avenues for furthering my work.