



Identification d'un mode de vieillissement dans un assemblage céramique-métal

Yann Charles

► To cite this version:

Yann Charles. Identification d'un mode de vieillissement dans un assemblage céramique-métal. Sciences de l'ingénieur [physics]. ENS Cachan, 2002. Français. NNT : 2002DENS0006 . tel-04493265

HAL Id: tel-04493265

<https://hal.science/tel-04493265>

Submitted on 7 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan
Par

Yann CHARLES

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Sujet de la thèse :
**IDENTIFICATION D'UN MODE DE VIEILLISSEMENT DANS UN
ASSEMBLAGE CÉRAMIQUE-MÉTAL**

Soutenue le 17 janvier 2002 devant un jury composé de

Dominique JEULIN	Président
Éric MARTIN	Rapporteur
Tanguy ROUXEL	Rapporteur
André DRAGON	Examineur
Jean DUVAL	Examineur
François HILD	Examineur
Stéphane ROUX	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Technologie
(ENS CACHAN/CNRS/Université Paris 6)
61 Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex (France)

Un modèle probabiliste de propagation de fissure dans des matériaux fragiles est développé, de manière à prendre en compte les possibilités d'arrêt de fissure dans des matériaux fragiles, que ce soit en propagation brutale ou différée (propagation sous-critique statique ou cyclique). Les variables aléatoires introduites par ce modèle sont identifiées sur trois matériaux cristallins et un matériau amorphe à l'aide d'essais de micro-indentation. Les résultats sont validés sur des essais indépendants de l'identification. Enfin une étude sur un assemblage céramique-métal permet d'analyser sa tenue à long terme dans le cas d'une fissuration de la partie fragile.

Mots clefs :

Céramique-métal, arrêt de fissure, rupture probabiliste, propagation sous-critique, micro-indentation, vieillissement.

A probabilistic crack propagation model is derived to account for possible crack arrest in brittle media (instantaneous or sub-critical propagation, static or cyclic). The introduced random variables are identified for three crystalline materials, and one amorphous material, with micro-indentation tests. These results are validated with independent experiments. Finally, a study on a ceramic-metal assembly is carried out, to analyze its long-term reliability, when a macro-crack is present in its brittle part.

Key words:

Ceramic-metal, crack arrest, random cracking, sub-critical propagation, micro-indentation, ageing.

Pour Augustin,
qui a ouvert les yeux sur un bien triste monde.

Il faut donc trouver les moyens de faire des universités des centres de résistance permettant la production et la circulation de savoirs « non utilitaires » ; l'antiutilitarisme est en effet l'axe principal de la résistance aux mécanismes de domination (car résister, c'est créer).

« Du contre-pouvoir »
M. Benasayag, D. Sztulwark

Trois ans. Une longue période ma fois, riche de rencontre, compensant peut-être les personnes qui sortent de notre entourage. Mais de toutes les façons, « trois ans, c'est un cycle ». Reste alors, comme le remarquait à juste titre une personne qui m'est très chère, à en dresser le bilan. Exercice périlleux, nous jaugerons plus tard ce qu'il en ressort.

De prime, j'adresse à Monsieur Duval d'AER
Mes remerciements pour le thème donné hier.
De messieurs Rouxel et Martin ici j'honore
L'attention qu'ils ont porté sur les deux rapports.
Que monsieur Jeulin note ma reconnaissance
Pour avoir présidé à ma soutenance.
Et qu'enfin Stéphane Roux, de multiples dédiés,
Soit assuré ici de ma forte amitié.
Étant auparavant étudiant à Poitiers,
Deux personnes me permirent de bien me diriger.
J'adresse dès lors à André Dragon, de même qu'à
Damien Halm, un grand merci pour mon DEA.
Au premier j'associe son équipe, remarquant
Que par lui je me suis dirigé vers Cachan.
Arrivé en ces lieux inconnus, effrayé,
Je ne peux que noter ceux qui m'ont épaulé.
Je pense à Isabelle, Maxime, Stéphane, Clément,
Les autres n'étant cités, mais qu'ils se sachent
présent.
Pour ma génération, il me faut associer
Entre autre Fabrice, Siham, Gilles, Michel, et je ne
sais
Comment pour ceux non cités je vais pouvoir
Par omission les associer à ce mémoire.
Complétant cette succincte liste, il me faut
Devant ceux qui suivront retirer mon chapeau.
Doctorants un peu plus jeunes, c'est vous dès à
présent,
Souffrez que je vous mentionne, vous fûtes
importants.
Par Laurent, Vincent, Yann et Ludo commençons,
Par Pierre, Géraldine et Delphine continuons,
Et ici cette énumération stopperait,
Malgré l'incomplétude qui lui est associée.
Et que Xavier me pardonne, malgré ses assauts
De ne l'avoir accompagné au parc de Sceaux.
À Catherine et Danielle des sourires sont offerts
En témoignage des années dans le même éther.
En un mot comme en cents peuvent être décliné
Ceux qui me furent chers au sein du LMT.

Ici je terminerais cette partie première
Alors me concentrant sur les connexes sphères.
Je tiens à associer à cette liste incomplète
Ceux croisés à Paris ces trois ans, et peut être
M'ont encouragé, supporté, aimé, à qui
Je n'ai jamais avoué qu'ils étaient mes amis.
A tous ceux de Poitiers, vous savez qui vous êtes ;
À ceux venus de Rouen, fidèles dans ma geste ;
À vous de Vernon, ma famille associée ;
Vous fûtes les arcannes, les piliers recréés.
Je ne différencierais point, en moi pensant
Que chacun ses mérites placera aisément.
Reste dès lors à poursuivre pour mieux se pencher
Sur le centre humain, je parle de l'Unité.
Que s'effacent alors le temps et les espaces,
Et que tous assemblés vous preniez votre place :
Ces années ne purent être sans la communauté
De ceux qui se sont penchés sur la MMP.
Et l'on a banni où je suis près des affres
Reliés, nés ou îliens. Et y a-t-il, après
Ibis annoncés ici, athlètes sereins là ?
Converge ballot vers neuves conquêtes, ra-
-lant ici où les ires arabesques sont.
Mais es tu un ascète de l'illumination
Qui ramait, là, seul, ramenant les cerbères ?
Et ceux qui me furent proches précédemment
errèrent.

Il me faut, terminant la longiligne liste,
Rendre à César ce qui par lui seul existe.
Au dénominateur commun de l'Unité,
À mon formateur, au gourou du MMP,
Soit mille fois remercié, et par toi l'Unité ;
Que l'esprit transcende et reste encore des années.

Seul bémol, je me dois à mon corps défendant,
Noter mon seul regret, douleur me déchirant,
Mon cuisant échec, vous m'aurez bien sur compris ;
J'eusse tant adoré gagner à Mezzastorie

Voilà, l'exercice est achevé. Il est critiquable de par ses omissions. Que chacun y trouve néanmoins sa place, car elle existe.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES NOTATIONS	8
INTRODUCTION	11
I. L'ASSEMBLAGE CÉRAMIQUE/MÉTAL ET SA DURÉE DE VIE	17
I. 1. MISE EN PLACE D'UNE LIAISON ENTRE DES STRUCTURES CÉRAMIQUES ET MÉTALLIQUES.....	19
I. 2. LE PROCÉDÉ MOLYMGANÈSE.....	21
I. 3. CARACTÉRISATION DU COMPORTEMENT DES ASSEMBLAGES	22
I. 3. 1. Fissuration des assemblages.....	22
I. 3. 2. Détermination des contraintes résiduelles.....	24
I. 3. 3. Vieillessement des assemblages.....	26
I. 4. ASSEMBLAGE DE L'ÉTUDE	27
I. 4. 1. Présentation.....	28
I. 4. 2. Modélisation EF du refroidissement	29
I. 4. 3. Le maillon le plus faible.....	31
I. 4. 4. Introduction du vieillissement	34
I. 4. 5. Application numérique	35
I. 5. CONCLUSION.....	37
II. MISE EN PLACE D'UN MODÈLE DE PROPAGATION DANS UN MILIEU FRAGILE	38
II. 1. LE CRITÈRE DE GRIFFITH	39
II. 2. MOSAÏQUE POISSONNIENNE	41
II. 2. 1. La mosaïque de Poisson.....	42
II. 2. 2. Propagation de macrofissures	44
II. 3. SIMPLIFICATION DES HYPOTHÈSES.....	46
II. 4. LE MODÈLE DE MARIGO ET FRANCFORT.....	49
II. 4. 1. Présentation	50
II. 4. 2. Transposition du modèle dans une optique probabiliste	51
II. 5. PROPRIÉTÉS DU MODÈLE DE PROPAGATION : EFFETS DLH	53
II. 5. 1. Effets DVH	53
II. 5. 2. Effets DLH.....	56
II. 5. 3. Illustration.....	57
II. 6. CONCLUSION	64
III. EXTENSIONS DU MODÈLE	65
III. 1. EXTENSION EN PROPAGATION BRUTALE.....	66
III. 1. 1. Propagation transgranulaire et intergranulaire	66
III. 1. 2. Aléa mécanique global – Sources de variations.....	68
III. 1. 3. Propagation 3D	69
III. 2. PRISE EN COMPTE DE LA PROPAGATION SOUS CRITIQUE	73
III. 2. 1. Probabilité de propagation à l'endurance	73
III. 2. 2. Probabilité de propagation sous-critique.....	75
III. 2. 3. Probabilité de propagation sous-critique alternée.....	84
III. 3. PRISE EN COMPTE DE L'AMORÇAGE	86
III. 3. 1. Amorçage dans un cas général.....	86
III. 3. 2. Amorçage près d'un point singulier.....	88
III. 3. 3. Cas de la singularité épine	90

III. 4. CONCLUSION	91
IV. IDENTIFICATIONS - VALIDATION	92
IV. 1. PRINCIPE DE L'IDENTIFICATION.....	93
IV. 2. MISE EN ŒUVRE	96
IV. 2. 1. Résultats pour l'alumine	97
IV. 2. 2. Résultats associés au carbure de silicium	99
IV. 2. 3. Identification de la valeur de la ténacité maximale	101
IV. 2. 4. Conclusion	104
IV. 3. REMARQUES SUR LE MODÈLE DE PROPAGATION AU VU DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.....	104
IV. 4. INFLUENCE DE L'ENVIRONNEMENT SUR LES RÉSULTATS.....	107
IV. 4. 1. Deuxième série d'identification	107
IV. 5. VALIDATION DU MODÈLE.....	110
IV. 5. 1. Mise en œuvre	110
IV. 5. 2. Flexion trois points	112
IV. 6. APPLICATION AUX MATÉRIAUX AMORPHES	114
IV. 7. APPLICATION AU NITRURE DE SILICIUM	117
IV. 7. 1. Identification de la densité de probabilité associée aux ténacités.....	117
IV. 7. 2. Étude de l'influence de l'aléa sur les ténacités dans la statistique de Weibull.....	119
IV. 8. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DE VIEILLISSEMENT	122
IV. 9. CONCLUSION.....	124
V. APPLICATION DU MODÈLE À L'ASSEMBLAGE DE L'ÉTUDE.....	125
V. 1. LA SINGULARITÉ D'UN BI-MATÉRIAU	126
V. 2. PROPAGATION NUMÉRIQUE DE FISSURES AU SEIN DE L'ASSEMBLAGE	127
V. 2. 1. Détermination des chemins de fissuration	127
V. 2. 2. Amorçage au voisinage des singularités et chemins de fissurations	128
V. 2. 3. Propagation numérique.....	130
V. 2. 4. Probabilité de propagation le long des chemins de fissurations déterminés.....	133
V. 2. 5. Conclusion - Critiques	135
V. 3. DURÉE DE VIE DE LA STRUCTURE	136
V. 3. 1. Conditions de chargements en service	136
V. 3. 2. Vieillessement de la structure - Fatigue statique.....	137
V. 3. 3. Vieillessement de la structure - Fatigue "cyclique"	139
V. 4. CONCLUSIONS	142
V. 5. VERS UNE ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES ASSEMBLAGES CÉRAMIQUE-MÉTAL.....	142
V. 6. CONCLUSION	144
CONCLUSION - PERSPECTIVES	145
BIBLIOGRAPHIE	150
ANNEXE 1.....	160
1. INTRODUCTION.....	161
2. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION	162
3. CONCLUSION	163
ANNEXE 2.....	164
1. HYPOTHÈSES SUR LA FONCTION H	165
2. CAS OÙ H_{MIN} EST STRICTEMENT POSITIF	165
3. CAS OÙ H_{MIN} EST NÉGATIF OU NUL	166

Table des notations

a, b, c longueurs	H facteur d'hétérogénéité des contraintes (associé à la propagation probabiliste d'une macro-fissure)
a_c taille de défaut critique	H_m facteur d'hétérogénéité des contraintes (associé au modèle de Weibull)
a, b paramètres d'une loi Bêta incomplète	h_u densité de probabilité associée à la variable aléatoire u
α_x coefficient de dilatation thermique du matériau X	H_v dureté Vickers
$\underline{a}$ exposant définissant les loi de probabilité cumulée en loi puissance	i, k entiers naturels tenant lieu d'indice
$\mathcal{C}$ ensemble compact/chemin de fissuration	K variable aléatoire <i>ténacité</i>
C paramètre de la loi d'Evans-Wiederhorn	$k(a, H_v)$ paramètre d'indentation
C_1 constante	K_c ténacité du matériau
dX différentielle de X	K_c^{macro} valeur de la ténacité d'un matériau homogène
DX variation de la grandeur X	K_I facteur d'intensité des contraintes en mode I
E module d'Young	K_s paramètre seuil du matériau en deçà duquel aucune propagation ne peut avoir lieu
$E(X)$ partie entière de X	k longueur adimensionnelle
E_d énergie élastique	$\mathcal{L}_{\underline{a}}$ loi stable de Lévy d'exposant $\underline{a}$
E_s énergie de surface	L, h, R longueurs
E_t énergie totale	l densité d'un processus de poisson isotrope/inverse de la longueur moyenne des grains du milieu
$\epsilon(x)$ déformation au point matériel x	L partie imaginaire d'un exposant de singularité
e, h infiniments petits	m exposant de la loi d'Evans-Wiederhorn
F force	M point matériel
f probabilité cumulée relative à l'arrêt local d'une fissure	M_N valeur maximale des termes de S_N
g fonction adimensionnelle	m paramètre déterministe reliant ténacité et paramètre seuil
G taux de restitution d'énergie	
G_c énergie de surface	
g paramètre	
G fissure présente dans la structure W	
∂G frontière de la fissure G /front de fissuration	

N entier naturel	$\underline{s}$ tenseur des contraintes
n module de Weibull	T paramètre temporel
ν coefficient de Poisson	t variable temporelle
W structure	t paramètre temporel
∂W frontière de la structure W	q angle
W_G structure W fissurée par G	$\bar{u}$ écart type de la variable aléatoire u
p partie réelle d'un exposant de singularité	$\bar{u}$ valeur moyenne de la variable aléatoire u
P probabilité cumulée	V volume de la structure W
P_R probabilité de rupture de la structure	V_0 volume élémentaire
P_{R0} probabilité de rupture du volume élémentaire	$w(x,.)$ énergie élastique volumique en x
R rapport de charge	x s abscisse courante linéaire/abscisse courante curviligne
S surface	X_{max} valeur maximale de la variable (ou fonction) X
S_0 contrainte de Weibull	X_{min} valeur minimale de la variable (ou fonction) X
S_N somme de N variables aléatoires de même loi	c paramètre de la loi de Pellas et al.
S_u contrainte seuil (en général nulle)	Y paramètre adimensionnel relatif aux facteurs d'intensité des contraintes
S_{eq} contrainte équivalente (maximale principale/von Mises)	
s_Y limite élastique (pour les matériaux ductiles)	

Introduction

Apparue de manière concomitante à la révolution industrielle, la notion de vieillissement occupe une place de plus en plus importante, en termes de critères économiques et techniques, au sein des domaines touchant la conception. Cette notion de vieillissement englobe toutes les dégradations, ou plus généralement, les évolutions, en fonction du temps des propriétés d'un matériau, ceci étant relié aux fonctionnalités attendues relatives à une structure ou un système.

D'un point de vue technique, il convient de prendre en compte le vieillissement dans tout ce qui concerne le dimensionnement des structures, et ce en fonction de la durabilité voulue pour ces dernières. D'un point de vue économique, il est important d'alléger les structures fabriquées, à durée de fonctionnement donnée, afin d'en diminuer le coût (par réduction des coefficients de sécurités, palliatif à la moindre maîtrise du devenir d'une structure). Ces deux impératifs antinomiques conduisent à des études poussées portant d'une part sur la compréhension du (des) phénomène(s) de dégradation à long terme, et d'autre part à des modélisations permettant d'appréhender de manière analytique les évolutions fonctionnelles de l'ensemble étudié, ce qui permet alors d'agir en amont sur le dimensionnement et la conception, et d'optimiser en aval les cycles de maintenance. D'une manière plus générale, la prévention des risques pouvant conduire à des dommages autres que matériels pousse également à une plus grande maîtrise du fonctionnement et de l'état des composants avec le temps.

Cette volonté prédictive de prévention des risques (par compréhension des phénomènes physiques mis en jeu) fut d'ailleurs historiquement la première démarche effectuée : en 1842, l'essieu de la locomotive d'un train reliant Paris à Versailles fut rompu en plein trajet, entraînant une catastrophe humaine de premier ordre. Cette rupture, engendrée par de fortes sollicitations répétées sur l'essieu, fut liée au premier cas de catastrophe où la fatigue des matériaux put être clairement mise en cause.

Actuellement, ces impératifs de prévention, de prévision, et de diminution des coûts sont encore au centre des études portant sur le vieillissement :

Æ Pour les systèmes mécaniques, les progrès de la modélisation numérique et des techniques expérimentales de caractérisation ont engendré une diminution des marges de sécurité en conception, et ont poussé à un perfectionnement des modèles de prévision. L'apparition continue de nouveaux matériaux pousse également à des études sans cesse renouvelées quant à leur comportement sous des sollicitations répétées ou aléatoires dans le temps.

Æ Le développement de la micromécanique met au jour des phénomènes nouveaux, jusqu'à présent négligés de par leur échelle. Les modèles actuels de vieillissement, basés sur des approches couramment macroscopiques, idéalement microscopiques, étudient des structures de plusieurs milliards d'atomes, moyennant en incidence tous les phénomènes liés à l'échelle atomique. Pour des structures de quelques dizaines d'atomes, la

problématique ne peut plus être abordée de manière aussi abrupte, et doit faire appel à des domaines autres que la mécanique.

À l'extrême inverse, les macrostructures du génie civil sont étudiées afin d'optimiser leur cycle de vie. De plus, l'allègement des structures, le comportement en vieillissement sensible d'ouvrages tels que les centrales nucléaires, la fiabilité de structures telles que les barrages hydroélectriques, tous ces impératifs divers sur des structures dissemblables font cohabiter des domaines divers comme

- la chimie ;
- la mécanique ;
- la science des matériaux ;

le tout couplé à des approches numériques et probabilistes.

Des domaines nouveaux font leur apparition, liée aux impératifs sociaux évolutifs (écologie), ainsi qu'à des problèmes souvent reportés au lendemain. Le stockage des déchets radioactifs fait ainsi l'objet de recherches, particulièrement à long terme, la durée de vie des composants à stocker étant relativement conséquente. Se pose alors le problème de l'étanchéité des contenants, à l'évolution de leurs caractéristiques mécaniques sous irradiation constante. Ces problèmes nécessitent le développement d'outils prédictifs extrêmement fiables et valables sur le long terme, au vu des dangers qu'encourt l'environnement.

On le constate, les enjeux de modèles prédictifs de vieillissement sont importants, et leurs supports en constante évolution.

En termes de prévention des risques, ces enjeux n'ont d'ailleurs pas évolué. Dès 1843, un an après les problèmes ferroviaires apparus en France, Rankine effectua, pour le compte de la société des chemins de fer britannique, une étude portant sur la rupture en fatigue, de manière à comprendre, puis palier, ce phénomène de rupture d'essieu. Il mit en évidence les principales caractéristiques de ce type de rupture, en particulier le rôle très important des concentrations de contraintes. De manière plus systématique, et ce dès 1860, Wöhler étudia pour le compte de la société allemande (prussienne) des chemins de fer les relations qui pouvaient exister entre contrainte appliquée et nombre de cycles à rupture [WÖH 60]. Il montra alors clairement que la résistance d'une structure sous des contraintes appliquées cycliques était conséquemment inférieure aux contraintes à rupture statique. Pour une structure et un chargement donné, une série d'essai de rupture en fatigue permet alors de définir des courbes d'isoprobabilité de survie (figure a). Sur la figure a sont reportés les points expérimentaux (S, N) , avec S la contrainte maximale appliquée à la structure, et N le nombre de cycles à rupture correspondant. La dispersion observée est liée aux causes de la rupture par fatigue, et l'on peut davantage parler de probabilité de survie (ou de rupture) après N cycles

que de durée de vie. Ainsi, des courbes d'isoprobabilité (à x %) permettent de découper l'espace (S, N) en deux régions, régions telles que, sous la courbe d'isoprobabilité à x % de survie, la probabilité de survie soit supérieure à x %, et au-dessus, au contraire, la probabilité de survie de la structure considérée soit inférieure à x % (x étant alors défini en fonction de normes ou de souhaits de fiabilité). De manière alternative à l'approche de Wöhler, Gerber (1874) puis Goodman (1899) proposèrent des méthodes de détermination des contraintes maximales admissibles en fatigue par une structure donnée.

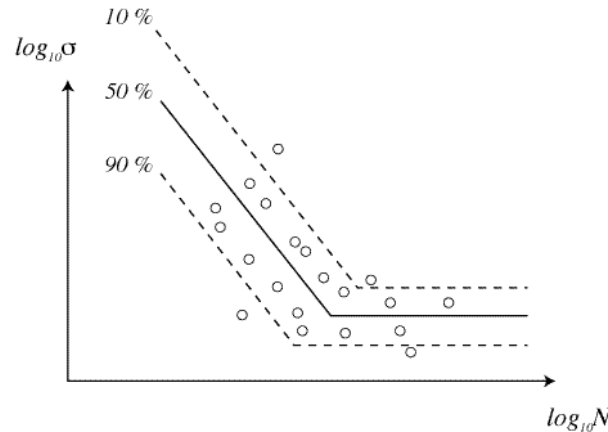


Figure a. Courbes d'isoprobabilité de survie – Diagramme de Wöhler.

Ne niant pas l'apport incontestable de ces approches, plusieurs choses apparaissent alors. Tout d'abord, la création de tels diagrammes est coûteuse en temps, dans la mesure où pour bien définir les courbes d'isoprobabilités, il est nécessaire d'avoir suffisamment de points expérimentaux. Or chaque point correspond à une campagne d'essai. De plus, un diagramme donné ne peut être utilisé que pour un matériau et une structure associée, perdant par là le côté polyvalent, voire intrinsèque, que l'on pourrait rechercher dans une optique prédictive. Enfin, l'environnement en service des structures ne peut être pris en compte réellement (même si, actuellement, toutes les démarches expérimentales incluent des sollicitations et des environnements les plus représentatifs des conditions réelles de service).

En effet, le phénomène de vieillissement est relatif à de multiples phénomènes (mécanique, chimie, etc.) de manière indépendante ou non. Tout d'abord, les échelles dimensionnelles et temporelles diffèrent selon les modes principaux de dégradation. Au niveau microscopique, ce sont des phénomènes comme la corrosion, qui modifient le comportement mécanique des matériaux via leur composition chimique (phénomène pouvant être à long temps caractéristique), ou la propagation sous-critique de défauts, modifiant les contraintes maximales admissibles par la structure. Au niveau mésoscopique, cela peut concerner le développement de l'endommagement, que l'on peut relier à la propagation sous-critique de microcavités, qui influe sur les propriétés élastiques et les contraintes maximales admissibles (endommagement souvent lié au développement de la plasticité). Enfin au niveau macroscopique, fissures ou dégradations mécaniques globales peuvent ne plus permettre au

système considéré de remplir une des fonctions qu'il est censé assurer (par exemple pour des ouvrages de génie civil, mais également des coques de navires). Dès lors les études théoriques s'orientent vers la compréhension de tels phénomènes, et leur mise en forme analytique. Ainsi, par exemple, pour le vieillissement relatif à des propagations de macrofissures, des études consécutives aux travaux de Griffith [GRI 21] et d'Irwin [IRW 58] se sont intéressées à la corrélation entre les vitesses de propagations et les chargements appliqués : Paris et al. [PAR 61] exprimèrent ainsi cette vitesse de fissuration uniquement en fonction du facteur d'intensité des contraintes, caractérisant le champ de contrainte en pointe de fissure. Mais malgré ces développements théoriques et empiriques, de nombreux aspects du vieillissement demeurent mal maîtrisés. Cela est principalement lié à la multitude des phénomènes intervenant, de manière découplée ou non, reliés aux paramètres du chargement appliqué, aux données du matériau, i.e., sa microstructure ou ses caractéristiques mécaniques, et enfin à l'environnement extérieur au matériau (température, milieu chimique, pression, etc.).

Une démarche prévisionnelle de vieillissement est alors d'écrire des relations considérant toutes les interactions existantes entre dégradations des propriétés mécaniques de la structure (ou des fonctionnalités) et environnement (y compris mécanique). Dès lors, dégager des prépondérances d'un phénomène par rapport aux autres peut s'avérer possible, ces dernières se devant d'être validées *a posteriori* par des études expérimentales ou numériques. En particulier, suivant les échelles de temps que l'on veut considérer, certains phénomènes physiques seront ou non présents (diffusion à long temps caractéristique, endommagement à court temps caractéristique, etc.). Ainsi, suivant les prépondérances considérées, des modèles de vieillissement pourront être dégagés à partir de modèles mécaniques (ou de concepts adaptés) existants. Ces modèles, valables dans la mesure où les restrictions quant aux mécanismes en présence le sont, permettront une extrapolation des états mécaniques à de grands temps en service (incluant les variations possibles et aléatoires de l'environnement). Ces extrapolations valideront ou infirmeront les phénomènes privilégiés, au minimum dégageront un domaine temporel associé à la prépondérance, invitant dès lors le modélisateur à repenser les ordres d'influences hors de ce domaine.

Cette étude se place dans ce cadre de prédiction. Considérant une structure composée de plusieurs matériaux, et possédant des caractéristiques mécaniques propres, une durée de vie associée se doit d'être dégagée sous des conditions en service données. Cette structure, un assemblage céramique-métal industriel fabriqué par la société Atmosat-AER, est assemblée à haute température, et son refroidissement jusqu'à l'ambiante induit en son sein des contraintes résiduelles (du fait de la différence des coefficients de dilatation entre les différents matériaux qui le compose - chapitre I). Dans une optique prédictive concernant la durée de vie d'un tel assemblage, une étude des paramètres de dégradation en relation avec la fonctionnalité attendue de l'assemblage conduit à s'intéresser de prime abord à la fissuration de la partie céramique, fissuration induite par la fabrication même de la structure. Cette fissuration,

postulée comme étant le paramètre prépondérant de limite de vie, est étudiée sous différents aspects.

- Σ Dans la mesure où la fissuration, plus généralement la rupture, des structures fragiles est sujette à dispersion, une approche probabiliste de la propagation brutale de fissure est mise en place, permettant ainsi d'appréhender l'état probable de fissuration de la partie céramique (chapitre II). Outre les aléas mécaniques locaux, les dispersions initiales relatives aux longueurs des fissures vont conditionner leur propagation future en service, ayant ainsi une incidence sur les durées de vie que l'on déterminera.
- Σ Une fois l'état initial de fissuration de l'assemblage abordé, la polyvalence du modèle en termes de type possible de propagation et de matériaux étudiés se doit d'être assurée, afin de ne pas restreindre l'étude à un nombre trop faible de configurations. En particulier, les conditions de propagation en fatigue statique et cyclique des fissures seront abordées (chapitre III).
- Σ Le modèle étant élaboré, reste, d'une part, à identifier les paramètres aléatoires liés aux matériaux étudiés, et que nous avons introduits, et d'autre part, à le valider (chapitre IV).
- Σ Moyennant ces étapes nécessaires, le modèle sera utilisé sur un modèle numérique aux éléments finis simulant l'assemblage céramique-métal, en particulier au niveau des contraintes résiduelles qui lui sont associées. Le développement des fissures au sein de la partie céramique pourra ainsi être approché, d'abord initialement, soit à la fin de la fabrication de telles structures, puis les longueurs maximales que ces fissures peuvent atteindre lors de l'utilisation de l'assemblage en service pourront être déterminées (chapitre V).

Une telle approche se limite à l'étude de la fissuration de matériaux en service. Cette limite est uniquement liée au fait que la fissuration est considérée comme phénomène de dégradation probable. A posteriori, à la fin de l'étude, nous serons en mesure de valider, ou d'infirmer une telle hypothèse.

Chapitre I

L'assemblage céramique/métal et sa durée de vie

Les céramiques techniques sont de plus en plus utilisées, du fait de leurs caractéristiques mécaniques intéressantes, comme par exemple, leurs propriétés réfractaires [BOC 01], permettant une utilisation à haute température (sidérurgie), leur importante résistance à l'usure (outils de coupe [BAR 94]), leur inertie chimique et leur grande résistance à la corrosion (milieux hostiles, centrales nucléaires, aéronautique, biomécanique), leur isolation électrique (aéronautique, génie électrique), leur faible dilatation thermique, etc. Pourtant, toutes ces propriétés sont contrebalancées par leur comportement fragile : les structures céramiques ne pouvant développer de plasticité, ou n'ayant pas de comportement ductile en général, l'amorçage et la propagation d'une fissure se fait de manière brutale, entraînant leur ruine, et par extension la ruine de la structure sur laquelle elles sont assemblées. Ainsi, la prévention d'un tel risque se doit d'être mise en œuvre.

Pour s'affranchir du côté fragile des céramiques, les coupler à des structures ductiles a constitué une "voie de solution" : les éventuelles fortes contraintes appliquées comme conditions aux limites peuvent ainsi être atténuées par le développement de la plasticité dans le matériau ductile. La structure ainsi obtenue est alors qualifiée d'assemblage céramique/métal.

L'amorçage des fissures au sein d'un matériau fragile se fait à partir de défauts (porosités, inclusions [JAY 77 ; WEI 39b]) initialement présents et répartis de manière aléatoire en espace, en taille, et en orientation par rapport aux directions de sollicitations. Il s'ensuit que la contrainte à rupture de ces matériaux n'est pas une quantité déterministe, mais au contraire, que l'on doit associer à une contrainte appliquée une probabilité de rupture. Ainsi, la tenue en service de structures fragiles est conditionnée par la bonne connaissance de la statistique de rupture du matériau utilisé, associée à la géométrie de la pièce et au chargement qui lui est appliqué.

Le but de cette étude est de déterminer la durée de vie d'un assemblage céramique/métal industriel, développé par la société Atmosat-AER (basée à Villejuif). Cette durée de vie est étroitement liée aux conditions extérieures qui lui sont appliquées. Dans le cas qui nous intéresse, le facteur prépondérant est la variation de la température extérieure à l'assemblage. De plus, la durée de vie d'un assemblage est conditionnée par sa fonctionnalité, soit par la ou les fonctions que l'ensemble auquel il se rattache est censé remplir. La durée de vie est dès lors définie comme le temps à partir duquel une de ces fonctions n'est plus assurée : des paramètres comme la perte d'intégrité structurale, l'évolution des caractéristiques mécaniques ou physiques en général peut être considérée comme déterminante pour l'évaluation de la durée de vie.

Une des fonctions de l'assemblage étudié est d'assurer, entre autres, la séparation entre deux milieux (i.e., l'intérieur et l'extérieur du composant - figure I.a).

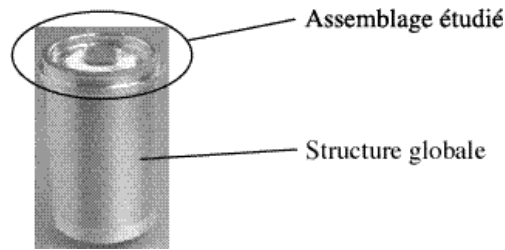


Figure I.a. Assemblage étudié et son contexte.

Ce composant est un sectionneur accélérométrique. Le couvercle, i.e., l'assemblage qui nous intéresse, est conçu de telle manière que l'on puisse utiliser de manière simultanée les propriétés caractéristiques des matériaux ductiles et de la céramique, tout en ayant une structure monobloc. L'utilisation d'un matériau céramique trouve ici sa justification de par ses propriétés d'isolant électrique, même à haute température, de forte résistance à l'usure et d'inertie chimique. Parallèlement, les parties ductiles permettent de lier la partie céramique au reste du composant, et de pouvoir faire office de conducteur électrique. Enfin, le brasage est effectué de telle manière à ce que l'étanchéité soit totale.

Un critère de fin de service de la structure sera donc la perte d'intégrité structurale de l'assemblage étudié, et plus précisément, l'existence d'une fissure le traversant. Comme nous le verrons par la suite, l'existence de fissures dans les assemblages est inhérente, du fait même de leur mode d'obtention. Nous nous attacherons donc à étudier les conditions de fissuration de la partie fragile de l'assemblage, dans la mesure où les fissures s'y développent préférentiellement, et par la suite, les conditions de ruine de l'assemblage.

I. 1. Mise en place d'une liaison entre des structures céramiques et métalliques

Le problème de l'élaboration d'un assemblage céramique/métal est la création d'une liaison entre des matériaux dissemblables. Plusieurs méthodes existent. La volonté ne sera pas ici de les examiner toutes en détail, mais de donner les principaux moyens d'obtention d'assemblages, ainsi que leurs grandes lignes [KAR 96].

La technique de brasage est la plus usitée : elle consiste à insérer un métal d'apport entre le matériau métallique et la céramique. L'ensemble est ensuite porté à la température de fusion du métal d'apport, ou joint de brasage, sous atmosphère contrôlée. Comme les métaux ne mouillent généralement pas les céramiques, il est nécessaire, au préalable :

- ∑ soit de réaliser une couche intermédiaire métallique adhérent à la céramique (procédé molybdanèse en général), ce qui permet alors au métal de brasage de pouvoir mouiller la partie céramique (ce dernier étant alors couramment un eutectique Ag-Cu),
- ∑ soit de s'assurer que le métal d'apport est réactif, par le biais d'un élément actif rendant mouillable la céramique par la brasure. C'est par exemple le cas pour l'alliage de brasage Ag-Cu-Ti, le titane étant alors l'élément réactif, ou Ag-Cu-O, l'oxygène étant

l'élément réactif (ce type de métal de brasure semble entraîner une fragilisation de la céramique [KAR 96]).

Il existe également des méthodes de brasage direct, consistant à générer à la surface du métal un système eutectique choisi en fonction de sa stabilité thermodynamique (systèmes métal-oxyde, métal-sulfure, métal-phosphure en général). L'ensemble alliage eutectique/céramique est ensuite porté à une température légèrement supérieure au point de l'eutectique du système, sous atmosphère spécifique. La liaison entre l'alliage eutectique et la céramique se réalise alors.

Enfin, une thermocompression (ou liaison à l'état solide [COU 86 ; SER 91 ; MBO 94]) peut être réalisée afin de générer des liaisons entre matériaux dissemblables : un joint métallique est inséré entre les deux parties à assembler, et le tout est soumis à une force compressive sous une température de l'ordre de 0,5 à 0,9 fois la température de fusion du joint métallique. Ceci assure la création d'une liaison morphologique et physico-chimique entre les matériaux constitutifs de l'assemblage, et permet de surcroît d'absorber, via la déformation plastique du joint métallique, les contraintes résiduelles générées par le cycle de fabrication de l'assemblage.

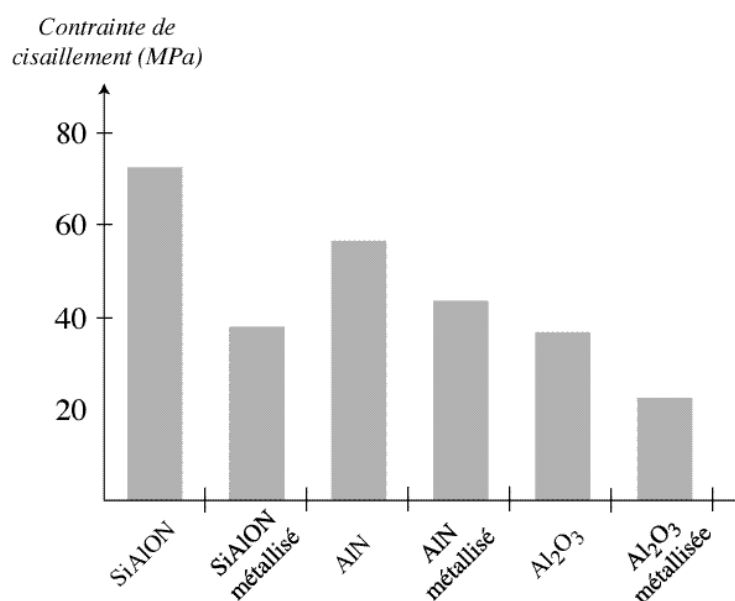


Figure 1.b. Influence de la métallisation sur les contraintes de cisaillement au niveau de l'interface joint de brasage-céramique [KAR 96].

Outre leurs caractéristiques mécaniques dissemblables, les matériaux mis en présence ont un coefficient de dilatation thermique différent. Comme on vient de le voir, les phases de création de liaisons entre ces matériaux se font à haute température, généralement celle de fusion du joint de brasage ou de l'eutectique. Lors du refroidissement de l'ensemble, du fait de cette différence, des contraintes résiduelles sont générées dans toutes les parties de l'assemblage. Nous verrons par la suite que la maîtrise de ces contraintes résiduelles est la clef

de l'élaboration, plus que la création de la liaison céramique-métal, de tels assemblages. L'influence du type de brasage sur les contraintes résiduelles générées par la mise en place de l'assemblage peut être appréciée grâce à la figure I.b. Sur cette figure est reportée la contrainte de cisaillement au niveau de l'interface de brasage pour trois céramiques, l'alumine, et deux nitrures. On peut alors constater que la métallisation des céramiques diminue les contraintes de cisaillement (mais n'augmente pas la résistance des interfaces). En général, le procédé de brasage, les matériaux mis en présence de même que leurs géométries respectives sont des éléments influant fortement sur la résistance des interfaces [MIZ 89]. On constate ainsi l'importance que l'on se doit d'accorder à tout ce qui concerne l'élaboration d'un assemblage céramique/métal, comme par exemple le type de liaison, les conditions d'obtention, etc.

I. 2. Le procédé molymanganèse

Le procédé molymanganèse consiste, comme on l'a précédemment mentionné, en la création d'un dépôt métallique sur la surface d'une pièce céramique, afin de pouvoir procéder à un brasage ultérieur ([FEL 94 ; KAR 96]). Le principe de ce procédé est basé sur le frittage de poudres métalliques sur la céramique. Dans le cas de l'alumine, le procédé molymanganèse se décompose en plusieurs étapes :

1. Dépôt au pinceau sur la surface de l'alumine d'une couche de mélange Molybdène-Manganèse (80% et 20% respectivement), dont la taille des grains est semblable à celle de l'alumine.
2. Frittage de l'ensemble à 1300°C - 1500°C sous hydrogène humide, ce qui provoque l'oxydation totale du Manganèse en oxyde de manganèse (MgO), et ce dès 800°C.
3. Création d'un eutectique à 1200°C entre l'oxyde de manganèse et la silice (SiO_2) de la phase vitreuse de l'alumine, ce qui favorise le mouillage de la céramique par le molybdène. Un lien est ainsi créé entre les grains de molybdène et l'alumine.
4. Dépôt d'une couche de nickel par pulvérisation ou au pinceau.
5. Traitement thermique à 850°C : le nickel mouille les grains de molybdène en tous les points où il n'y a pas de phase vitreuse. Une couche de nickel est ainsi créée sur l'alumine, couche chimiquement reliée à l'alumine (figure I.c).

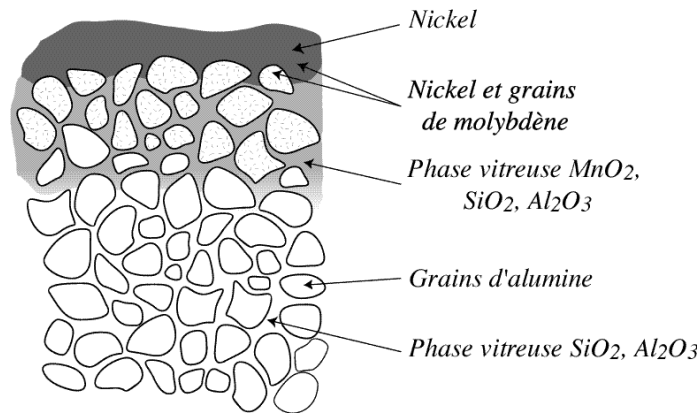


Figure I.c. Métallisation d'une alumine [DUV 00].

On remarquera que ce procédé n'est valable que pour des aluminés comportant une phase vitreuse. Lorsque l'on veut métalliser des aluminés de haute pureté (>99%), on peut remplacer le manganèse par un mélange normalisé d'oxyde (Al_2O_3 , SiO_2 , MnO , CaO , MgO) servant de fondant, et ce dans les mêmes proportions que précédemment (à savoir 80% de molybdène, et 20% de mélange d'oxyde [KLO 80]).

I. 3. Caractérisation du comportement des assemblages

Une fois la jonction entre la céramique et le métal effectuée, l'assemblage ainsi obtenu est refroidi jusqu'à température ambiante. Ainsi sont générées des contraintes résiduelles dans toutes les parties de l'assemblage. Comme la céramique est un matériau fragile, et que ces contraintes peuvent être importantes, des fissures sont fréquemment amorcées [COL 91].

I. 3. 1. Fissuration des assemblages

Le type de fissures générées est multiple, suivant la géométrie de l'assemblage, et les matériaux utilisés. On peut ainsi, suivant les différences entre les coefficients de dilatation thermique entre le métal et la céramique, distinguer plusieurs familles de fissuration (figure I.d). Comme nous pouvons le constater sur la figure I.d, lorsque le coefficient de dilatation thermique de la partie céramique, notée α_{cer} , est plus petit que celui de la partie métallique, notée α_{met} , alors, lors du refroidissement de l'assemblage brasé, trois types de fissures peuvent apparaître [SAN 94] dans la partie fragile (amorçage et propagation). A contrario, seuls deux types de fissuration sont présents dans le cas où $\alpha_{met} < \alpha_{cer}$, et sont toutes deux amorcées au niveau de l'interface céramique/brasure. A priori, le type de fissure généré est fortement dépendant des deux matériaux assemblés, ainsi que du joint de brasage et de la géométrie de l'assemblage. Ainsi, le faïencage n'apparaît que pour certains rapports d'épaisseurs, et l'écaillage ne se produit pas pour les assemblages décrits sur la figure I.e. Cependant, pour une géométrie donnée, le type de fissure qui apparaît à la fin du processus de fabrication n'est pas prévisible.

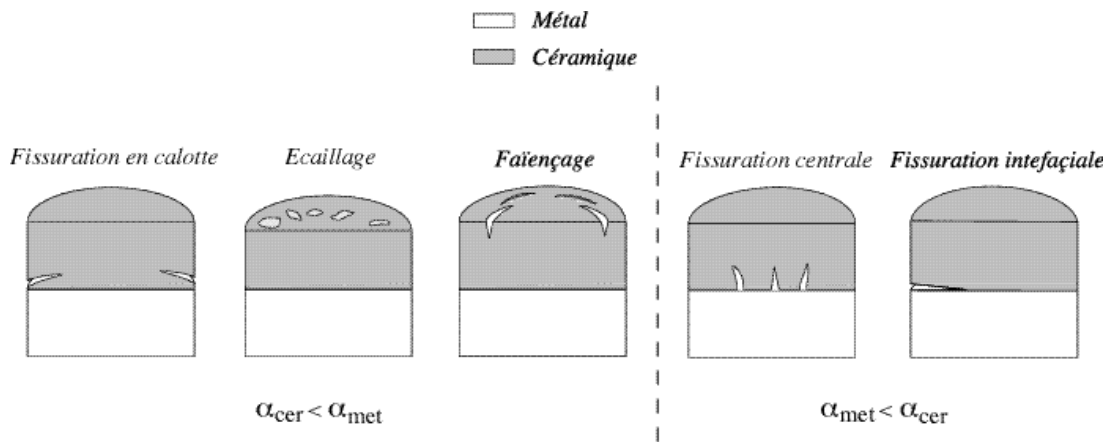


Figure I.d. Différents types de fissuration [SAN 94].

Pour des assemblages céramique/métal parallélépipédiques composés de nitrure de silicium et de fonte GS (le joint de brasage étant quant à lui un mélange entre du titane et un eutectique argent-cuivre), plusieurs systèmes de fissuration ont été observés (figure I.e).

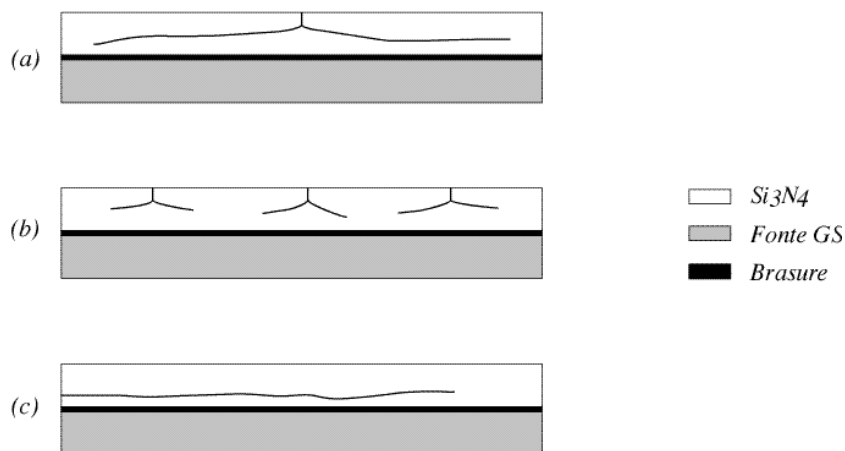


Figure I.e. Systèmes de fissuration observés dans un assemblage parallélépipédique [KYR 97].

La figure I.e permet de mettre l'accent sur le côté non déterministe de l'amorçage des fissures au sein de la partie céramique d'une part, et d'autre part sur le côté aléatoire du système généré : six éprouvettes ont ainsi suivi le système de fissuration (a) décrit sur la figure I.e, deux le système (b), et une le système (c). Il y a certes une prédominance d'un mode de fissuration, mais celui-ci n'est pas général : on observe plutôt une compétition entre les différentes zones les plus fortement sollicitées, le facteur discriminant étant alors la présence ou non de gros défauts. On rejoint ici les observations déjà effectuées par de nombreux auteurs quant au caractère aléatoire de la rupture en général, et de l'amorçage de fissure dans les matériaux fragiles en particulier [HIL 92b].

Afin de mieux appréhender les zones probables d'amorçage de fissure, il devient dès lors important de mieux connaître les contraintes résiduelles présentes au sein de l'assemblage.

I. 3. 2. Détermination des contraintes résiduelles

De nombreuses études ont été menées afin de modéliser l'état des contraintes résiduelles au sein des assemblages céramique-métal à la fin de leur cycle de fabrication, et en particulier au sein de la partie fragile, pour les raisons que nous avons évoquées précédemment, à savoir la détermination des zones probables d'amorçage et les trajets éventuels de fissuration [BAR 91]. Une première approche consiste à effectuer un calcul théorique de l'état des contraintes [IAN 90 ; XIA 90]. Cette dernière approche est restrictive au niveau des géométries possibles d'assemblages : ce sont en général des parallélépipèdes rectangles que l'on peut considérer comme infinis dans les directions autres que l'épaisseur (dimension dès lors caractéristique dans le calcul). Les expressions théoriques alors obtenues peuvent être validées par des mesures de contraintes par diffraction des Rayons X [EIG 89]. On notera que toutes ces études analytiques se basent sur le fait que les matériaux de l'assemblage ont un comportement élastique linéaire. Quoiqu'il en soit, cette approche permet d'obtenir des ordres de grandeur acceptables au niveau des contraintes résiduelles dans la partie fragile de l'assemblage, loin des bords libres. De plus, par essence, les paramètres de forte influence sur ces contraintes peuvent dès lors être mis en avant : les caractéristiques mécaniques des différents matériaux et le rapport des épaisseurs des plaques céramiques et métalliques [YU 93]. Par contre, un des gros défauts de l'approche analytique est de ne pas prendre en compte les champs de contraintes singuliers au voisinage des bords libres de l'interface céramique/métal [BOG 75 ; EVA 85]. De plus, les géométries traitées sont relativement limitées. C'est pourquoi s'est développée une approche alternative de détermination des contraintes résiduelles, plus polyvalente mais moins intrinsèque, par éléments finis (EF).

Les simulations EF du refroidissement des assemblages céramique-métal ont ainsi deux finalités. Tout d'abord prendre en compte dans les résultats des contraintes résiduelles tous les éléments qu'un calcul analytique ne peut facilement inclure, comme par exemple la géométrie des différentes parties de l'assemblage, les comportements mécaniques non obligatoirement linéaires des différents matériaux (en particulier à haute température où ces derniers peuvent être plastique, voire viscoplastiques), les points singuliers précédemment mentionnés (quoique l'utilisation des éléments finis s'avère relativement délicate dans le traitement des champs de contrainte singuliers, comme nous le verrons ultérieurement) [LEV 91 ; NAN 94]. En règle générale, une telle approche permet de valider, dans des configurations simples, les formules analytiques éventuellement obtenues. Un second avantage de l'utilisation d'une approche par éléments finis concerne tout ce qui est relatif à la fissuration. C'est là un atout important, dans la mesure où, outre des champs calculés plus réalistes que pour une approche analytique pure (hormis les erreurs inhérentes aux approches numériques), les chemins de fissurations, les lieux d'amorçage [HE 91], et toutes les décharges mécaniques induites peuvent dès lors être appréhendées, et ce quelles que soient les conditions de refroidissement [KOK 91]. On remarquera que les comportements mécaniques

de tous les matériaux devront être connus à haute température, de manière à avoir des résultats représentatifs à l'issue d'une simulation EF du refroidissement.

Il faut également noter l'existence de travaux sur les interfaces entre deux matériaux dissemblables (par extension entre le joint de brasage et la partie céramique). En effet, dans la plupart des cas, l'interface entre le joint et la partie métallique ou céramique est considérée comme étant une surface de discontinuité mécanique. De par le mode d'assemblage, il est clair que ceci est une approximation importante. D'où une modélisation de l'interface comme un matériau à gradient de propriété (figure I.f).

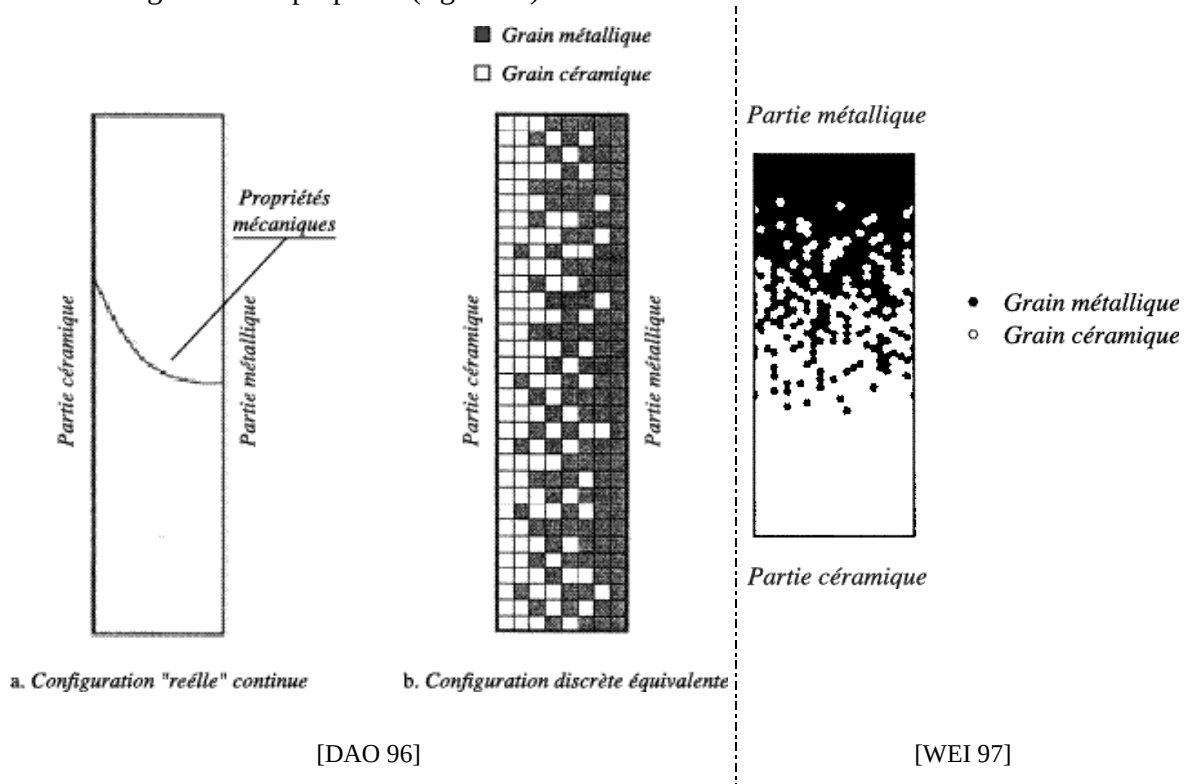


Figure I.f Modélisation aléatoire du gradient de composition.

Ce type d'approche permet de mettre en évidence de fortes concentrations de contraintes au niveau des hétérogénéités (ou discontinuités mécaniques) entre matériaux [DAO 96], concentrations pouvant être à l'origine de microfissures au niveau de l'interface céramique - joint de brasage (ce qui a été observé pour un assemblage cylindrique Saphir-Ta(Ti), outre la présence de fissures déjà mentionnées précédemment - figure I.g). Ces microfissures peuvent dès lors se propager légèrement dans la partie céramique.

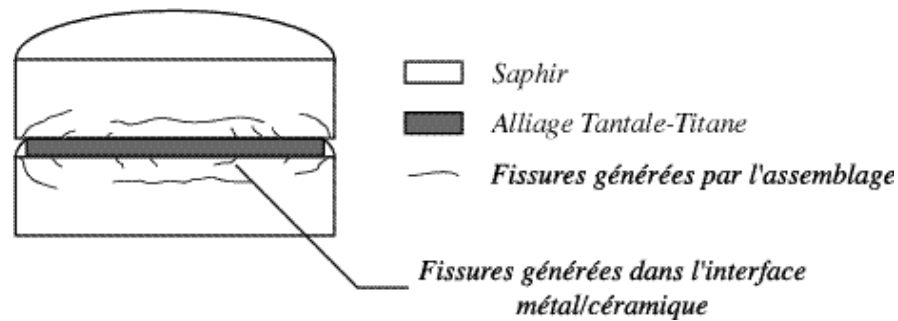


Figure I.g. Systèmes de fissurations observés dans un assemblage Saphir-Ta(Ti) [BAR 91].

De plus, une approche probabiliste du gradient mécanique peut nous permettre de mieux approcher numériquement d'une part les contraintes résiduelles dans les parties métalliques et céramiques, et d'autre part les dispersions éventuelles qui leur sont associées et que l'on pourrait observer [WEI 97].

Enfin, nous remarquerons que l'utilisation d'un calcul EF pour déterminer la probabilité de rupture de l'assemblage de la figure I.e a été menée via la statistique de Weibull (décrite ultérieurement), sans résultats probants cependant [KYR 97].

Comme nous avons pu le constater, les méthodes de calcul de contraintes résiduelles sont nombreuses. L'utilisation des éléments finis se distingue comme l'approche permettant d'obtenir le plus d'états de contraintes, par le biais de configurations aussi bien géométriques que mécaniques illimitées. De plus, une étude poussée, que nous n'effectuerons pas, permettrait de prendre en compte toutes les origines de dispersion possibles sur les contraintes résiduelles, en particulier celle provenant du joint de brasage : les fissures générées pouvant être responsables à terme de la ruine de l'assemblage sont celles qui ont les longueurs les plus importantes à la fin du processus de refroidissement, c'est-à-dire celles montrées sur les figures I.d et I.e. Par contre, il est clair que les réseaux de petites fissures peuvent influencer grandement le niveau des contraintes près de l'interface céramique/joint de brasage, et dès lors avoir une incidence sur la propagation des fissures principales.

I. 3. 3. Vieillessement des assemblages

Une fois l'état initial des assemblages connu, on peut s'intéresser à leur devenir. De fait, très peu d'études ont été effectuées sur le vieillissement des assemblages céramique/métal. La plupart d'entre elles s'intéressent au comportement d'éprouvettes normalisées (de type CT, ou SENB) en céramique au milieu desquelles est insérée une couche de métal (figure I.h).

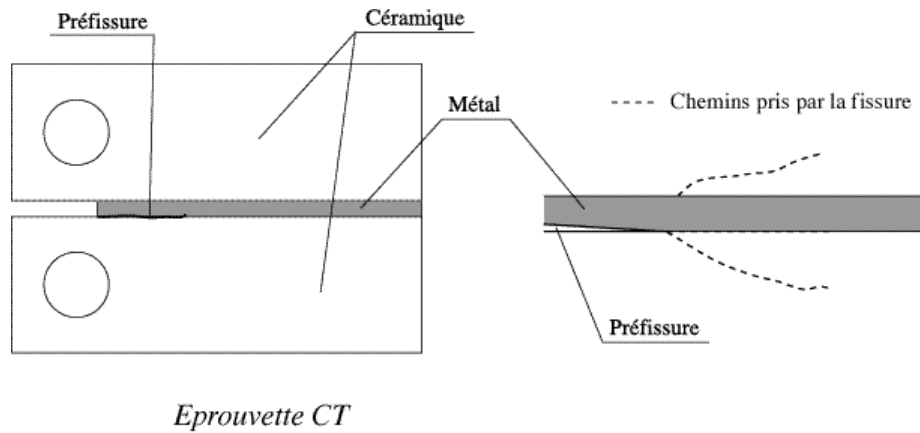


Figure I.h. Exemple d'éprouvette de fatigue céramique/métal [NAN 96].

Ces éprouvettes, préalablement préfissurées, ont pour vocation l'étude de la résistance des interfaces métalliques à la fissuration sous-critique, sous chargement monotone ou cyclique.

On constate que les fissures ont un comportement qui tend à sortir de la zone métallique et à se propager dans la céramique, en mode I pur. Ce comportement est néanmoins fortement lié à la présence ou non de défauts au sein de l'interface métallique : ces derniers peuvent permettre à la fissure de se propager le long de l'interface, et ce même lorsque le coefficient de dilatation thermique du métal est supérieur à celui de la céramique. Un tel essai peut dès lors caractériser l'état de l'interface métallique [CAN 91]. L'influence du chargement et des épaisseurs des différentes parties des éprouvettes sur la fissuration sous-critique peut être également prise en compte [NAN 96]. Quoiqu'il en soit, aucun modèle prédictif de fissuration sous-critique n'est élaboré, bien que l'on se rende compte au vu des diagrammes donnant la vitesse de propagation des fissures en fonction du facteur d'intensité des contraintes que les modèles de type Evans-Wiederhorn ou Paris peuvent tout à fait convenir pour appréhender la durée de vie des éprouvettes considérées [EVA 72 ; EVA 74]. De plus, aucune de ces études ne prend en compte l'existence de fissures à la fin du processus de fabrication au sein de la partie céramique (figure I.d), seules sont considérées celles qui se trouvent amorcées au niveau de l'interface métal/céramique. Or, pour des systèmes céramique/métal tels que $\alpha_{cer} < \alpha_{met}$, α étant le coefficient de dilatation thermique, les fissures générées seront celles qui se propageront en fissuration sous-critique dans la partie céramique, et qui, à terme, causeront la ruine de l'assemblage.

I. 4. Assemblage de l'étude

Nous allons, en utilisant des modèles existants de rupture, tenter de répondre aux différentes questions portant sur l'état de fissuration post-refroidissement, et éventuellement les évolutions dues au vieillissement.

I. 4. 1. Présentation

L'assemblage est un couvercle d'un capteur accélérométrique. Il est constitué de deux cylindres en acier inoxydable austénitique Z2CN18-10 (Norme AFNOR) ou X2CrNi18-9 (norme EN 10088) du type A304L, placés de part et d'autre d'un cylindre d'alumine frittée à 97% de pureté au préalable métallisé en utilisant le procédé molymaganèse (figure I.i). Le tout est assemblé par le biais d'un joint de brasage en alliage à 28% de cuivre et 72% d'argent (eutectique Ag-Cu).

Les différentes parties sont assemblées à la température de fusion du joint de l'eutectique Ag-Cu, c'est-à-dire à 780°C. Le joint de brasage se met alors en place par capillarité, et l'ensemble est refroidi de manière contrôlée jusqu'à l'ambiante (4°C.mn⁻¹ jusqu'à 100°C, puis refroidissement libre). Le cycle complet de refroidissement dure trois heures.

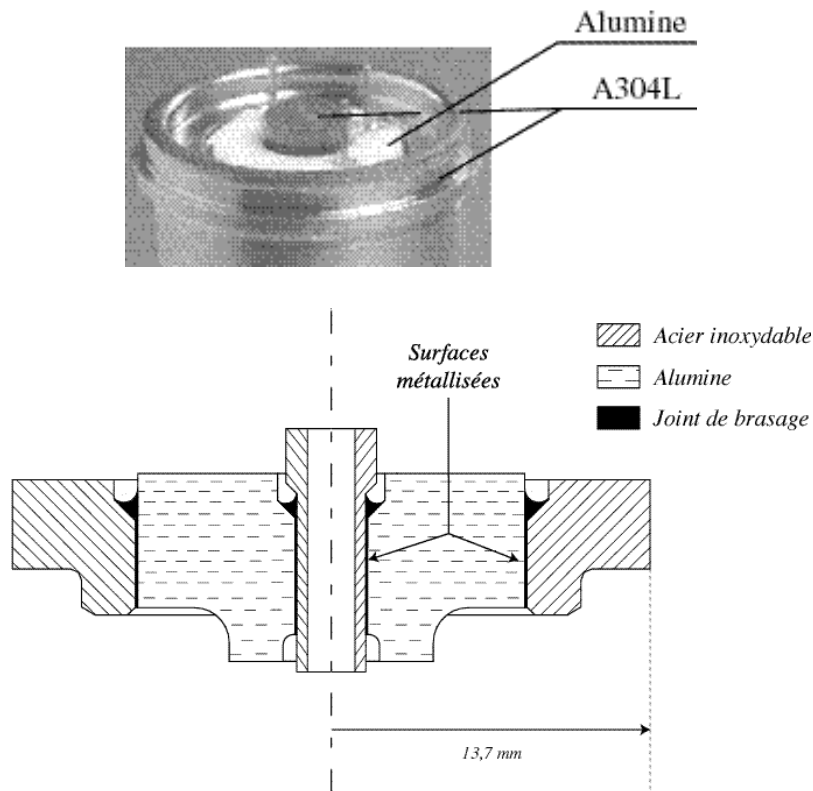


Figure I.i. Assemblage industriel étudié.

Afin d'étudier les conditions de fissuration de la partie céramique de l'assemblage, le niveau des contraintes résiduelles doit être connu. Pour cela, un calcul aux éléments finis a été effectué, afin de simuler le refroidissement de l'ensemble de la température de brasage jusqu'à la température ambiante.

I. 4. 2. Modélisation EF du refroidissement

Le refroidissement de l'assemblage est modélisé à l'aide du code aux éléments finis Catsem2000 [LAB 95] afin d'obtenir une carte des contraintes résiduelles.

Un modèle viscoplastique de Chaboche [LEM 85] est utilisé pour simuler le comportement de l'acier inoxydable A304L. Pour ce dernier, les paramètres reportés sur le tableau I.a ont été identifiés [LOV 95]. La loi viscoplastique de Chaboche à écrouissage cinématique et isotrope est décrite comme suit, les points correspondant à des dérivées temporelles :

$$\begin{aligned}
 \text{fonction "critère" : } f_p &= J_2 \frac{\dot{\underline{\underline{s}}}}{\underline{\underline{E}}} - \frac{\dot{\underline{\underline{x}}}}{\underline{\underline{E}}} - R_p - s_y \\
 \text{écrouissage cinématique : } \underline{\underline{x}}^p &= \frac{2}{3} C \underline{\underline{e}}^p - g \underline{\underline{x}}^p \frac{\dot{\underline{\underline{s}}}}{p} \\
 \text{écrouissage isotrope : } \underline{\underline{R}}_p &= b(Q - R_p) \frac{\dot{\underline{\underline{s}}}}{p} \\
 \text{avec } \underline{\underline{p}} &= \frac{\dot{\underline{\underline{s}}}}{\underline{\underline{E}}} \frac{f_p}{K}^{\frac{1}{n}} \text{ et } \underline{\underline{e}}^p = \frac{3}{2} \frac{(\underline{\underline{s}}^D - \underline{\underline{x}}^p)}{J_2(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{x}}^p)} \frac{\dot{\underline{\underline{s}}}}{p}
 \end{aligned} \quad (I.4.2.a)$$

où J_2 représente le second invariant du tenseur $\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{x}}^p$, $\underline{\underline{s}}^D$ le déviateur du tenseur $\underline{\underline{s}}$, $\underline{\underline{e}}^p$ le tenseur de déformation plastique, s_y la limite élastique initiale du matériau, p la déformation plastique cumulée, et $\langle . \rangle$ les crochets de Macauley. Dans tous les tableaux qui viennent ci-après, E sera le module d'Young des matériaux, n le coefficient de Poisson, et a le coefficient de dilatation thermique.

Tableau I.a. Paramètres mécanique de la loi viscoplastique pour l'A304L.

T (°C)	E (GPa)	n	a_{A304L} (10^{-6}°C^{-1})	s_y (MPa)	Q (MPa)	b	C (MPa)	g	K (MPa)	n
20	196	0,29	15,7	250	60	8	162	2800	151	24
600	137	0,29	19,4	130	80	10	24	300	150	12

Au joint de brasage sera associé un comportement viscoplastique parfait, par rapprochement avec le comportement mécanique de la brasure réactive (59% d'argent, 27,25 de cuivre, 12,5% d'indium, et 12,5% de titane [LOV 95]). La loi viscoplastique parfaite est décrite par

$$\underline{\underline{e}}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\underline{\underline{s}}}}{\underline{\underline{E}}} \frac{(\underline{\underline{s}}_{eq} - s_y)^{\frac{1}{n}}}{K} \frac{\underline{\underline{s}}^D}{s_{eq}}, \quad (I.4.2.b)$$

où s_{eq} est la contrainte équivalente de von Mises, i.e., $s_{eq} = J_2(\underline{s})$. Les paramètres associés à cette loi pour la brasure réactive sont reportés sur le tableau I.b.

Tableau I.b. Paramètres mécaniques de la loi viscoplastique pour la brasure [LOV 95].

T (°C)	E (GPa)	n	a_{bras} (10^{-6}°C^{-1})	s_Y (MPa)	K (MPa.s^{-1})	N
20	95	0,37	18,2	247	85	10,1
100	95	0,37	18,2	183	79	9,3
200	95	0,37	18,2	87	38	7,2
300	95	0,37	18,2	40	31	6,9/
400	95	0,37	18,2	27	13	4,9
500	95	0,37	18,2	13	7	3,2
600	95	0,37	18,2	6	6	1,2
700	95	0,37	18,2	2	6	1,2

Le comportement de l'alumine sera considéré comme élastique linéaire isotrope, et ce quelle que soit la température appliquée. Les paramètres utilisés seront ceux donnés par le fabricant (tableau I.c) [GUI 98], où s_r est la contrainte à rupture moyenne de la céramique.

Tableau I.c. Paramètres mécaniques pour l'alumine.

E (GPa)	n	$a_{alumine}$ (10^{-6}°C^{-1})	s_r (MPa)
330	0,26	7,9	compression :1800

L'assemblage sera traité sous hypothèse axisymétrique. Le champ de température sera considéré comme uniforme en son sein, la décroissance du champ de température appliqué, spécifiée précédemment (i.e. -4°C.mn^{-1}), étant faible par rapport au rayon de la structure étudiée (i.e. 13,7 mm). Le champ des contraintes résiduelles à la fin de la modélisation du refroidissement est donné sur la figure I.j.

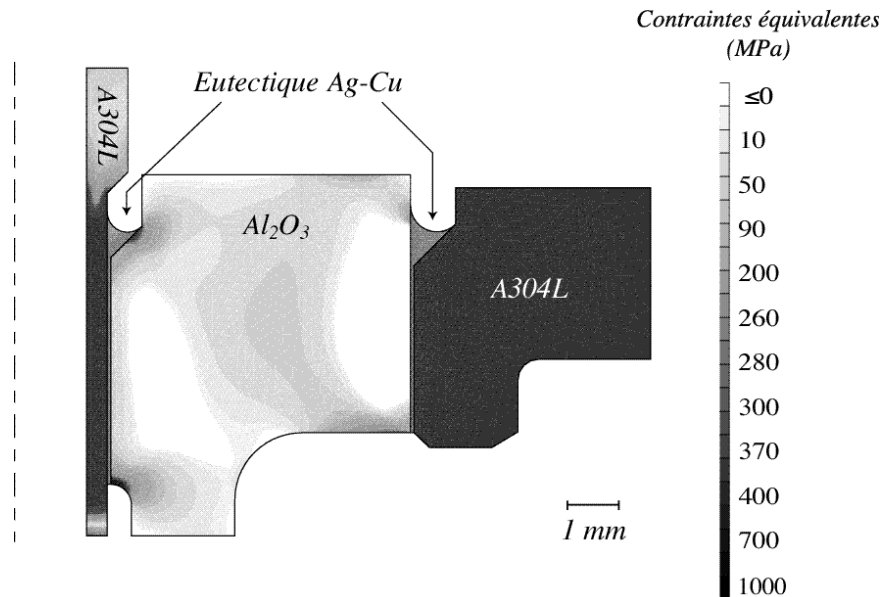


Figure I.j. Carte des contraintes résiduelles au sein de l'assemblage après le cycle de refroidissement.

Pour les parties ductiles de l'assemblage, la contrainte équivalente correspond à la contrainte de von Mises, et pour la partie fragile, à la contrainte principale maximale positive : ces dernières sont en effet les plus pertinentes dans le traitement de la fissuration. On peut constater, dans la partie fragile, la présence de zones en compression, ainsi que des zones de fortes contraintes, localisées au niveau des bords libres des interfaces entre le joint de brasure et la céramique. Ces zones correspondent à des champs de contraintes singuliers, champs responsables en partie de l'amorçage de fissures (figures. I.d ou I.g). A partir de ces résultats, une première étude concernant la rupture de la partie fragile de l'assemblage va pouvoir être menée, en utilisant la théorie de Weibull.

I. 4. 3. Le maillon le plus faible

Une méthode classique pour appréhender la rupture fragile de structures fragiles est l'utilisation du modèle de Weibull [WEI 39a]. Nous l'avons déjà vu, l'amorçage des fissures dans les matériaux se fait à partir de défauts initialement présents, et ayant des tailles, des orientations et des localisations aléatoires au sein de la structure. Ces défauts sont générés par le processus de fabrication des structures céramiques [KIN 76]. Le modèle sus-cité se base sur une hypothèse simple, à savoir l'hypothèse dite "du maillon le plus faible" [FRE 68] : la rupture s'amorce à partir d'un défaut de la structure céramique, et la fissure ainsi créée se propage jusqu'à rupture totale de l'ensemble. Le modèle de Weibull s'élabore dès lors en considérant la répartition initiale de défauts (sous entendu qu'aucun nouveau défaut n'est créé pendant la mise en charge de la structure), comme suit.

Soit V_0 le volume élémentaire dans lequel, en moyenne statistique, il n'y a qu'un et un seul défaut : ce volume est ainsi corrélé aux distances spatiales moyennes entre deux défauts

du matériau. En discrétisant la structure en N volumes élémentaires ($N=V/V_0$, avec V volume de la structure), et de par l'hypothèse du maillon le plus faible, la rupture de ladite structure est alors conditionnée par la rupture de l'un de ces volumes élémentaires (figure I.k).

□ Volume élémentaire V_0

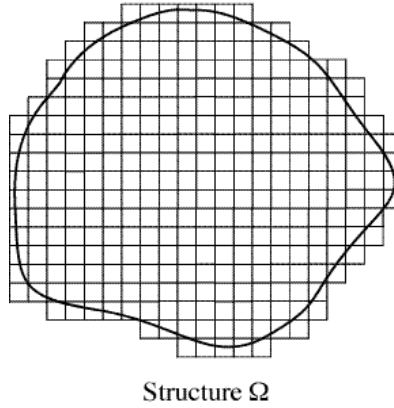


Figure I.k. Discretisation d'une structure.

Soit P_{R0}^i la probabilité associée à la rupture du maillon n° i , $i \in \{1, \dots, N\}$. La condition de rupture de la structure est que l'un au moins de ces maillons casse, i.e.

$$P_R = P(\text{maillon n°1 casse ou ... ou maillon n°N casse}), \quad (1.4.3.a)$$

où P_R est la probabilité de rupture de la structure. Les événements considérés, c'est-à-dire les ruptures des maillons, n'étant pas indépendants les uns des autres (la rupture de l'un d'entre eux entraînant la rupture globale, et donc celle d'un nombre conséquent d'autres maillons), on ne peut pas réduire l'équation (1.4.3.a). Par contre, la non-rupture de la structure s'écrit

$$1 - P_R = P(\text{maillon n°1 ne casse pas et ... et maillon n°N ne casse pas}), \quad (1.4.3.b)$$

et, si l'on néglige les interactions entre défauts, tous les événements alors considérés sont indépendants (la non-rupture d'un maillon n'influence en aucune façon la non-rupture des autres maillons). L'équation (1.4.3.b) peut donc se réécrire

$$1 - P_R = \prod_{i=1}^N (1 - P_{R0}^i), \quad (1.4.3.c)$$

avec $1 - P_{R0}^i$ la probabilité de non-rupture du maillon n° i . L'équation (1.4.3.c) est équivalente à

$$\ln(1 - P_R) = \sum_{i=1}^N \ln(1 - P_{R0}^i). \quad (1.4.3.d)$$

Si le nombre de maillon N est suffisamment grand, c'est-à-dire si V est très grand devant V_0 , alors la somme discrète de l'équation (1.4.3.d) peut être approchée par une somme continue

$$\frac{V}{N} \sum_{i=1}^N \ln(1 - P_{R0}^i) = \int_W \ln(1 - P_{R0}(M)) dM, \quad (1.4.3.e)$$

avec $P_{R0}(M)$ probabilité de rupture du volume élémentaire dM centré autour du point matériel M . La probabilité de non-rupture de la structure W s'écrit alors

$$\ln(1 - P_R) = \frac{1}{V_0} \int_W \ln(1 - P_{R0}(M)) dM, \quad (1.4.3.f)$$

ce qui est équivalent à

$$P_R = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{V_0} \int_W (1 - P_{R0}(M)) dM\right\}. \quad (1.4.3.g)$$

La probabilité de rupture locale P_{R0} peut être reliée à la répartition de défaut au sein du matériau par

$$P_{R0} = \int_{a_c}^{a_M} h_a(a) da, \quad (1.4.3.h)$$

probabilité de trouver au sein du volume élémentaire considéré un défaut de taille a supérieure à a_c , taille critique au dessus de laquelle, sous le chargement appliqué, il se propage. La quantité a_M est taille maximale de défaut présent au sein du matériau, et h_a est la densité de probabilité associée aux tailles a de défaut (figure I.1).

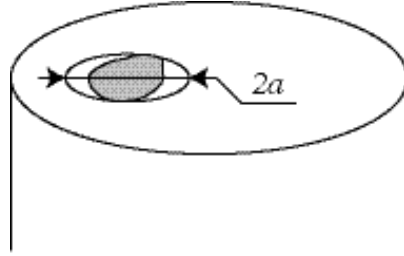


Figure I.1. Assimilation d'un défaut à une fissure en forme de disque.

En considérant la relation entre a_c et la ténacité du matériau K_c donnée par

$$K_c = s_{eq} Y \sqrt{a_c}, \quad (1.4.3.i)$$

avec Y un facteur adimensionnel caractérisant la géométrie du défaut [MUR 81] (égal à $2/\sqrt{\pi}$ pour des défauts circulaires, ou "Penny Shape") et s_{eq} la contrainte équivalente au point considéré (ici, correspondant à la contrainte principale maximale positive), et en affectant une loi Bêta à h_a [SPA 87], nous pouvons relier la probabilité cumulée de rupture locale P_{R0} à la contrainte équivalente locale s_{eq} [HIL 94]

$$\ln(1 - P_{R0}(M)) = - \frac{\hat{E} \langle S_{eq}(M) - S_u \rangle_{\sim}^n}{A \hat{E} S_0}, \quad (1.4.3.j)$$

avec S_u contrainte seuil au-dessous de laquelle aucune rupture ne peut avoir lieu (nulle en général), S_0 contrainte dite "de Weibull", correspondant à la contrainte à rupture dans le cas où cette dernière est déterministe, n le module dit "de Weibull", caractérisant la dispersion sur la rupture, et $\langle . \rangle_{\sim}$ les crochets de Macauley, caractérisant le fait que les contraintes à rupture des matériaux fragiles en compression sont largement supérieures à celles en traction (tableau I.c) : pour une structure W , on considérera que la rupture sera amorcée uniquement dans les zones en traction. L'équation (1.4.3.g) peut alors être réécrite comme suit

$$P_R = 1 - \exp \left[- \frac{\hat{E}}{V_0} \int_W \frac{\langle S_{eq}(M) - S_u \rangle_{\sim}^n}{A \hat{E} S_0} dM \right]. \quad (1.4.3.k)$$

I. 4. 4. Introduction du vieillissement

Le modèle précédemment introduit peut intégrer facilement le cas de la fatigue statique : on s'intéresse alors à la probabilité de rupture à un temps t d'une structure soumise à un chargement constant au cours du temps (fatigue statique), et par incidence, à la probabilité de rupture d'un maillon à ce même temps t . L'intégration des lois de propagation sous-critique des défauts, par exemple celle d'Evans, définie par [EVA 72 ; EVA 74]

$$\frac{da}{dt} = C(K_I(a))^m, \text{ si } K_c \geq K_I(a) \geq K_s, \quad (1.4.4.a)$$

où C et m sont des constantes dépendantes du matériau, K_c la ténacité, $K_I(a)$ le facteur d'intensité des contraintes associé à une fissure de longueur a soumise à un mode I pur (équation (I.4.3.i)), K_s le facteur d'intensité des contraintes seuil au dessous duquel aucune propagation ne peut intervenir, se fait aisément par le biais des équations (I.4.3.i) et (I.4.3.h), et ce en considérant toujours la non création de nouveaux défauts au sein de la structure (les paramètres définissant h_a restent inchangés). On obtient ainsi l'expression de la taille des défauts à $t=0$ qui deviendront critiques sous un chargement constant au bout d'un temps t

$$a_c(t) = \left\{ a_{c0}^{-\frac{m}{2} - 1} + C Y^m S_{eq}^m t \frac{\hat{E} m}{2 \hat{E}} \right\}^{-\frac{2}{2-m}}, \quad (1.54.b)$$

avec a_{c0} taille de défaut critique à $t=0$. La probabilité de rupture locale à l'instant t s'écrit alors [HIL 92b]

$$P_{R0}(t) = \int_{a_c(t)}^{a_M} h_a(a) da, \quad (1.4.4.c)$$

et l'on peut alors obtenir l'expression de la probabilité de rupture en fatigue statique d'une structure au bout d'un temps t

$$P_R(t) = 1 - \exp \left\{ - \frac{1}{V_0} \int_0^t \ln(1 - P_{R0}(M, t)) dM \right\}. \quad (1.4.4.d)$$

Pour une alumine à 99,6% de pureté, les paramètres de Weibull et de la loi de propagation sous-critique sont résumés dans le tableau I.e.

Tableau I.e. Paramètres de rupture et de fatigue d'une alumine à 99,6% de pureté [FET 94].

K_c (MPa. $\div$ m)	m	C (10^{34} m.s $^{-1}$ MPa $^{-m/2}$)	n	V_0 (mm 3)	S_u (MPa)	S_0 (MPa)
4,5	52	9,87	10	1	0	200

I. 4. 5. Application numérique

En utilisant les paramètres reportés tableau I.e, ainsi que les formules donnant les probabilités de rupture brutales et en fatigue statique, nous pouvons déterminer la probabilité de rupture de l'assemblage étudié grâce aux contraintes équivalentes issues du calcul EF (figure I.j). La probabilité de rupture est calculée sur chaque élément du maillage : une probabilité unitaire de rupture dans l'un de ces éléments implique dès lors une probabilité unitaire pour toute la structure du fait de l'hypothèse du maillon le plus faible. De plus, si l'on connaît la probabilité de rupture P_R^e de chaque élément fini du maillage, on peut en déduire la probabilité de rupture globale de la structure en réutilisant le raisonnement utilisé pour établir l'équation (1.4.3.g)

$$P_R(W) = 1 - \exp \left\{ - \hat{A} \ln(1 - P_R^e) \right\}. \quad (1.4.5.a)$$

↑
tous les
éléments finis

Le résultat du calcul EF est reporté figure I.l.

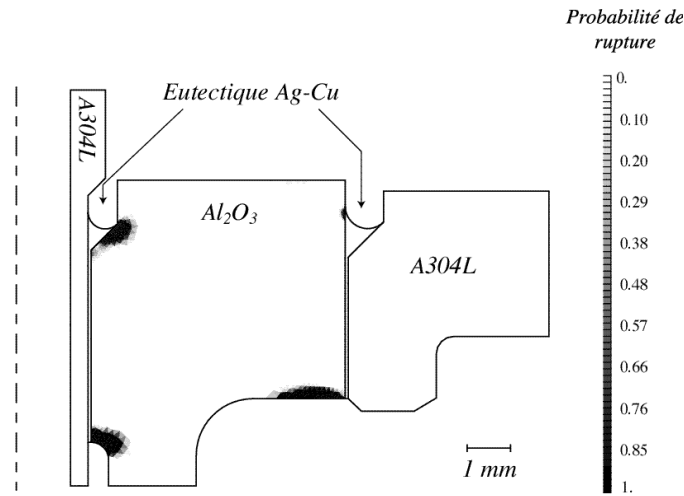


Figure I.l. Probabilité de rupture à $t=0^+$ (fin de cycle de refroidissement) en chaque élément du maillage EF.

On peut ainsi constater que, à la fin du refroidissement, le modèle de Weibull donne une probabilité de rupture unitaire pour la partie fragile de l'assemblage. En particulier, les zones de probabilités de rupture les plus fortes sont les zones proches des bords libres des interfaces bi-matériaux. Ces zones à forte probabilité de rupture peuvent être reliées aux zones d'amorçages des fissures dans les assemblages réels (figures I.j et I.l). De plus, pour l'assemblage considéré, des fissures ont été observées par le constructeur au niveau de ces mêmes zones [DUV 00]. On peut voir les traces de ces fissures pour un assemblage proche géométriquement de celui étudié (les matériaux constitutifs diffèrent cependant), et conçus par la même société (figure I.m).

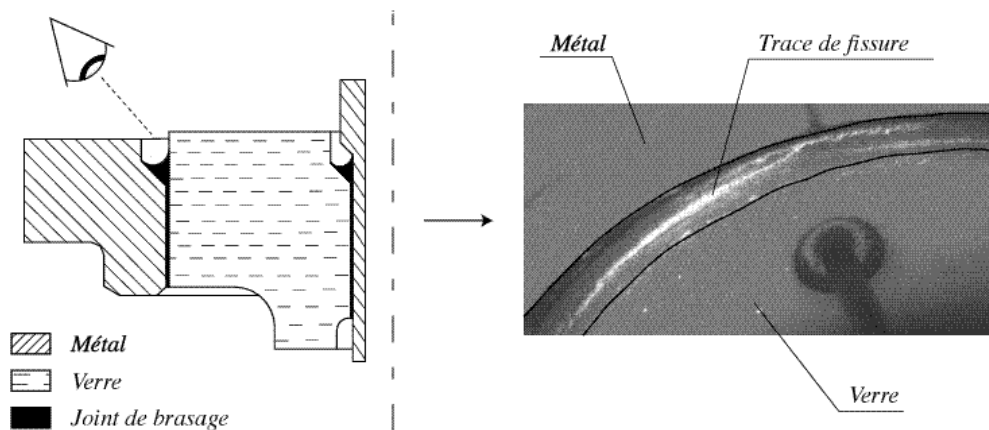


Figure I.m Fissuration observée dans un assemblage réel proche de celui étudié [DUV 00].

Deux conclusions peuvent être tirées de cette étude. Tout d'abord, la statistique de Weibull est inapte à modéliser l'état de fissuration d'un assemblage céramique/métal à la fin de son cycle de refroidissement. Par extension, cela signifie que l'hypothèse du maillon le plus faible ne peut en aucun cas être appliquée dans des configurations de chargement complexe, mêlant fortement traction et compression, comme c'est le cas dans le problème étudié : des fissures sont amorcées, mais du fait des zones compressives (ou de la décharge consécutive à

leur propagation), elle se trouvent arrêtées. Une telle conclusion était prévisible, dans la mesure où les observations effectuées par de nombreux auteurs (paragraphe I.3) sur la fissuration de tels assemblages infirment d'entrée l'hypothèse du maillon le plus faible. Ensuite, la corrélation entre les zones réelles d'amorçage des fissures et les lieux de probabilité de rupture unitaire permet de dire que le modèle de Weibull est par contre tout à fait utilisable pour tout ce qui a trait à l'amorçage des fissures au sein de la partie fragile des assemblages (nous étudierons ultérieurement en détail le cas de l'amorçage de fissures au voisinage des singularités). Cela est logique, dans la mesure où le champ de contrainte dans un élément fini est faiblement hétérogène, beaucoup moins en tout cas que celui associé à la structure entière. Au sein des éléments finis, la fissure ne peut donc s'amorcer et être arrêtée (ceci étant d'autant plus vrai que le maillage est raffiné). Enfin, l'application du modèle de Weibull étendu en fatigue statique est inutile, dans la mesure où à $t=0^+$ (i.e., à la fin du cycle du refroidissement), la structure est rompue : pour des temps supérieurs, la conclusion sera identique.

I. 5. Conclusion

La fissuration des parties fragiles d'un assemblage céramique/métal est un phénomène général : les fortes concentrations ou singularités de contraintes et les zones compressives entraînent amorçage et arrêt des fissures. Un tel comportement de la fissuration nous empêche ainsi d'utiliser les modèles classiques de rupture de structures fragiles, à savoir la statistique de Weibull, tout en ne nous affranchissant en aucune manière du caractère aléatoire inhérent à la rupture de structures fragiles, aussi bien au niveau des zones d'amorçage qu'au niveau des zones d'arrêt. Cependant, on vient de voir que l'hypothèse du maillon le plus faible nous permet d'appréhender de manière très satisfaisante les lieux d'amorçages, et plus précisément le comportement des structures fragiles au voisinage des points singuliers. Cette utilisation ne permet cependant pas de déterminer la distance optimale d'amorçage : les éléments finis proches du point singulier ont une rupture iso-probable.

Un modèle de propagation des fissures au sein des matériaux fragiles sous chargement quelconque doit donc être développé, de manière à pouvoir être en mesure de prédire l'état de fissuration des assemblages considérés à la fin du cycle de fabrication d'une part, et leur comportement en fatigue en service d'autre part.

Chapitre II

Mise en place d'un modèle de propagation dans un milieu fragile

Ainsi qu'il a été vu dans le chapitre précédent, nous disposons d'outils statistiques tout à fait à même de nous permettre de prévoir l'amorçage de fissures au sein de matériaux fragiles. Une fois cet amorçage décrit, le problème du devenir de la fissure se pose (arrêt, propagation - jusqu'à rupture éventuelle de la structure -, etc.). La propagation de fissures dans des milieux fragiles, quels que soient les chargements, est, de même que l'amorçage, sujette à dispersion. En effet, les céramiques sont obtenues par frittage [KIN 76]. Même si les éléments composant ces poudres ont été élaborés de manière contrôlée, il est clair qu'ils sont tous différents deux à deux, et indépendants. Lors de la phase d'élaboration de la structure céramique, ces différents grains vont s'agglomérer et devenir ceux du matériau. Les fissures se propageant en un tel milieu verront leur évolution conditionnée localement, i.e. par le grain localisé en leurs pointes : la propagation est alors non déterministe, en conséquence directe de l'hétérogénéité du matériau. Ainsi, dès que l'on considère une propagation dans un milieu granulaire, ou non homogène en général, l'influence des hétérogénéités locales sur le devenir de la structure doit être prise en compte, plus particulièrement lorsque les phénomènes étudiés sont locaux (ici, la rupture en pointe d'une fissure).

Pour l'étude de la propagation d'une fissure, le modèle le plus usité est celui de Griffith [GRI 21]. Il associe à la rupture une énergie de création de surface et considère qu'il y a propagation d'une fissure si l'énergie libérée par cette dernière lui est supérieure. Nous noterons l'existence de modèles de dégradation de structures fragiles (ou quasi-fragiles) utilisant une variable interne, généralement notée D , caractérisant l'endommagement (i.e. les réseaux de microfissures présentes dans le matériau, pouvant éventuellement coalescer pour donner une macrofissure [GAN 91]). Ces modèles ont l'avantage d'être numériquement utilisables, mais cette approche exclut, de fait, l'utilisation de l'influence des caractéristiques mécaniques locales en se basant sur une approche mésoscopique des dégradations mécaniques. Ainsi, les modèles probabilistes non-numériques de rupture fragile sont rares, les modèles déterministes aussi : l'approche de Griffith s'avère être le fondement de toute étude de propagation.

II. 1. Le critère de Griffith

Le critère de Griffith [GRI 21] associe à toute extension élémentaire dS d'une fissure de surface S son taux de restitution d'énergie, plus simplement la diminution de l'énergie élastique de la structure considérée occasionnée par cette extension. Ce taux de restitution d'énergie est noté $G(S)$, et est tel que

$$G(S) = - \frac{\partial E_d}{\partial S}, \quad (II.1.a)$$

avec E_d l'énergie élastique du domaine fissuré. On notera que, l'énergie élastique du domaine diminuant lorsque la fissure progresse, le taux de restitution d'énergie est toujours positif. A toute progression de fissure est associée une création nouvelle de surface. L'énergie libérée par la progression d'une fissure doit être suffisamment importante pour pouvoir générer cette

nouvelle surface. Si G_c est l'énergie nécessaire à la création d'une surface supplémentaire d'aire unitaire, alors la condition de propagation de la fissure s'écrit

$$G(S) \geq G_c. \quad (II.1.b)$$

Cette inégalité est le critère de Griffith. On peut transposer ce critère énergétique sur le plan des contraintes, en se focalisant sur ces dernières en pointe de la fissure. Ce champ, bien qu'infini, est défini par deux paramètres : l'exposant du champ singulier p (égal à 1/2 dans le cas d'une fissure dans un matériau homogène) et le facteur d'intensité des contraintes K_I , et ce si l'on se limite à une propagation en mode I pur bidimensionnelle (figure II.a) ([SNE 48 ; WIL 57]).

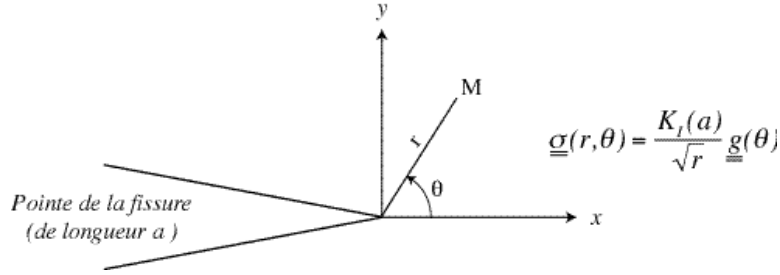


Figure II.a. Champ de contrainte en pointe de fissure. Définition du facteur d'intensité des contraintes.

Le facteur d'intensité des contraintes est alors défini par (en reprenant les notations de la figure (II.a), où $\underline{g}$ est une fonction tensorielle adimensionnelle)

$$K_I(a) = \lim_{r \rightarrow 0} s(r, q) \sqrt{r}, \quad (II.1.c)$$

avec $s(r, q)$ la contrainte principale maximale au point $M(r, q)$. Le critère de Griffith s'écrit alors [IRW 58]

$$K_I(a) \geq K_c, \quad (II.1.d)$$

où K_c est la ténacité du matériau (en mode I). On notera que facteur d'intensité des contraintes (en mode I) et taux de restitution d'énergie sont reliés par la relation d'Irwin [IRW 58]

$$G(a) = \frac{K_I(a)^2}{E'}, \quad (II.1.e)$$

avec E' tel que

$$E' = \begin{cases} E & \text{en contraintes planes} \\ \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{en déformations planes} \end{cases} \quad (II.1.f.)$$

E étant le module d'Young du matériau et ν son coefficient de Poisson. Ce critère sera à la base de la majeure partie des modèles de propagation probabilistes présentés ci-dessous.

Remarque

Autant le taux de restitution d'énergie se base sur une approche énergétique, et donc peut se permettre d'ignorer le type de chargement appliqué sur le chemin de fissuration, autant le facteur d'intensité des contraintes ne peut se permettre une telle ignorance : étant un paramètre caractérisant le chargement en pointe de fissure, on doit connaître la configuration du chemin de fissuration. Trois modes de propagation peuvent être caractérisés (figure II.b).

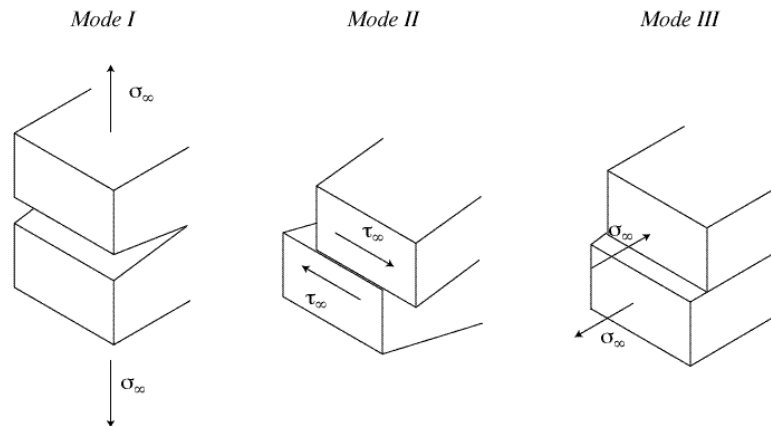


Figure II.b. Modes de propagation.

Nous nous limiterons dans tout ce travail au cas de la propagation en mode I pur : les fissures qui se propagent ont propension à évoluer de manière que leur configuration, en termes de chargements, évolue vers un mode I pur (un mode mixte étant défini par la combinaison de plusieurs modes purs [LAZ 98]). Nous allons à présent nous intéresser à la modélisation de la propagation d'une fissure dans une optique probabiliste.

II. 2. Mosaïque poissonnienne

Avant de pouvoir s'intéresser à la propagation d'une fissure en un milieu non-homogène, les hétérogénéités du matériau considéré doivent être caractérisées. Jeulin [JEU 94] a proposé un modèle de microstructure aléatoire basé sur la théorie des ensembles fermés aléatoires [MAT 75], plus précisément sur une modélisation des matériaux via une mosaïque poissonnienne. Cette modélisation sert de base à l'aléa portant sur les caractéristiques mécaniques du matériau considéré, conditionnant par là la rupture. Nous allons donner ci-dessous les grandes lignes de cette approche, sans trop entrer dans les détails (non nécessaires à la compréhension globale). On notera que tout ce qui suit traite de matériaux cristallins. On peut généraliser au cas de matériaux amorphes localement hétérogènes en considérant que les grains modélisés ci-après peuvent être interprétés également comme des zones de renfort, centrées autour d'un site d'arrêt possible (ce qui n'est autre que le pendant de la discrétisation sur laquelle se construit la statistique de Weibull).

II. 2. 1. La mosaïque de Poisson

Un cas particulier du modèle mosaïque est la mosaïque de Poisson, construite à partir d'une partition de Poisson de l'espace R^N . Cette partition est délimitée par un réseau d'hyperplans orthogonaux aux directions w de l'espace. Les hyperplans orthogonaux à la droite D_w , de vecteur directeur w , découpent sur cette dernière un processus ponctuel de Poisson de densité $l(w)dw$. Nous nous limiterons dans la suite au cas de la partition de Poisson isotrope, c'est-à-dire dans le cas où $l(w)=l$: quelle que soit la direction de propagation de la fissure, la partition de l'espace rencontrée est la même. L'espace a des caractéristiques morphologiques et mécaniques isotropes, bien qu'aléatoires. La partition de Poisson appliquée à R^2 est constituée d'ensembles (ou classes) bi-dimensionnels, de formes aléatoires et l'on peut connaître la probabilité $P(N(\mathcal{C})=N)$ qu'un compact $\mathcal{C}$ convexe de l'espace R^2 rencontre n frontières de classes (ou de grains) de la partition par la loi de Poisson

$$P(N(\mathcal{C})=N) = \frac{(l S(\mathcal{C}))^N}{N!} e^{-l S(\mathcal{C})}, \quad (II.2.1.a)$$

avec $S(\mathcal{C})$ la mesure du compact $\mathcal{C}$ (en 2D, le périmètre ; en 3D, l'intégrale de la courbure moyenne). Ainsi, si l'on considère un segment de longueur b orienté de manière aléatoire, la probabilité qu'il rencontre N frontières de grains s'écrit

$$P(N(b)=N) = \frac{(l b)^N}{N!} e^{-l b}. \quad (II.2.1.b)$$

A l'aide de la mosaïque poissonnienne, nous décrivons une microstructure strictement granulaire (très peu de phase vitreuse intergranulaire) : les grains constituent une partition de la structure, et l'on peut atteindre le type morphologique des grains uniquement par la connaissance du paramètre l . Nous pouvons dès lors, à partir de cette approche, définir les caractéristiques mécaniques associées à chaque grain du milieu. Nous considérerons que la ténacité (ou l'énergie de rupture G_c) est la seule caractéristique mécanique aléatoire, constante sur chaque grain. La réalisation de ces variables aléatoires sera prise indépendante d'un grain à l'autre (hypothèse reliée directement au mode d'obtention des structures céramiques - paragraphe II). Au niveau des joints de grains, d'épaisseur nulle, la valeur de la ténacité sera prise égale à la ténacité maximale des grains adjacents. La variable aléatoire K_c est définie uniquement par la connaissance de sa densité de probabilité, notée h_{K_c} , que l'on ne précisera pas à ce stade de l'étude. Nous supposerons juste qu'elle est bornée par deux valeurs positives finies, notées K_c^{min} et K_c^{max} , et que l'on peut définir sa moyenne et son écart type. Les propriétés de la variable aléatoire {ténacité} seront intangibles dans l'ensemble des chapitres II et III.

Remarque :

Le paramètre $1/l$ représente la longueur moyenne des intersections grains-segments du milieu décrit. En effet, la probabilité qu'un segment de longueur l ne rencontre aucune frontière s'écrit (équation (II.2.1.a))

$$P(N(l) = 0) = e^{-l}. \quad (II.2.1.c)$$

Cette même équation peut nous permettre de calculer la probabilité qu'un segment de longueur dl rencontre une et une seule frontière

$$P(N(dl) = 1) = 1 - e^{-dl} \approx dl \quad (II.2.1.d)$$

À partir des équations (II.2.1.c) et (II.2.1.d), on peut écrire la probabilité de trouver dans la partition poissonnienne un grain de longueur compris entre l et $l+dl$ s'écrit

$$h_l(l)dl = l e^{-l} dl = P(N(l) = 0)P(N(dl) = 1), \quad (II.2.1.e)$$

si h_l est la densité de probabilité associée aux longueurs (positives, aléatoires et non majorées) des grains. À partir de cette dernière, on peut calculer la longueur moyenne $\bar{l}$ des grains de la partition de Poisson considérée

$$\bar{l} = \int_0^{+\infty} l h_l(l) dl = \int_0^{+\infty} l e^{-l} dl, \quad (II.2.1.f)$$

et donc

$$\bar{l} = 1. \quad (II.2.1.g)$$

On notera de plus que, par définition

$$\int_0^{+\infty} h_l(l) dl = 1. \quad (II.2.1.h)$$

A titre d'exemple, sur la figure II.c est représentée une simulation d'une mosaïque poissonnienne.

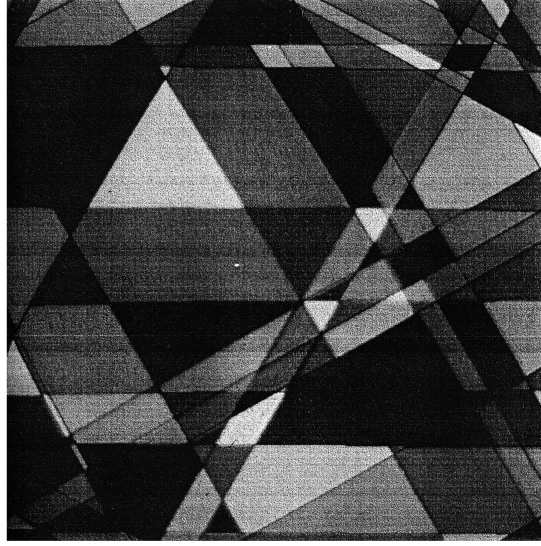


Figure II.c. Mosaïque poissonnienne à trois composantes (0° , 30° , 60°) [JEU 91].

II. 2. 2. Propagation de macrofissures

Afin de calculer la probabilité de propagation d'une macrofissure dans un milieu aléatoire, en utilisant le critère de Griffith, considérons un milieu fragile hétérogène, de ténacité aléatoire (respectivement, d'énergie de rupture aléatoire). Nous noterons que nous nous limiterons dans ce qui suit au cas d'un mode de rupture transgranulaire. Sur ce milieu, possédant déjà une macrofissure de longueur a , est défini un chemin de fissuration $\mathcal{C}$ en mode I pur repéré par son abscisse curviligne x . La ténacité (respectivement, l'énergie de rupture) le long de ce chemin de fissuration est notée $K_c(x)$ (respectivement, $G_c(x)$) (figure II.d).

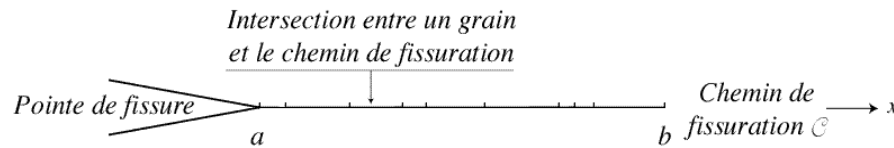


Figure II.d. Chemin de fissuration dans une mosaïque.

Le facteur d'intensité des contraintes en mode I pur $K_I(x)$ (respectivement, le taux de restitution d'énergie élastique $G(x)$), qui dépend du chargement et de la longueur x de la fissure, doit satisfaire, pour qu'il y ait propagation en pointe de la fissure, le critère de Griffith, i.e. $K_c(x) < K_I(x)$. Pour qu'une fissure puisse se propager le long du chemin donné $\mathcal{C}$ de longueur $b - a$, on doit donc pouvoir vérifier

$$\forall x \in [a, b], K_c(x) < K_I(x), \quad (II.2.2.a)$$

$K_c(x)$ étant alors une fonction constante par morceaux. L'équation (II.2.2.a) peut être réécrite comme suit

$$\min_{[a,b]} (K_c(x) - K_l(x)) < 0. \quad (II.2.2.b)$$

Le milieu étant considéré comme une mosaïque de Poisson isotrope de densité l , chaque classe de la partition simule un grain. La valeur de la ténacité sur chaque classe ou grain de cette dernière sera donc constante par hypothèse [CHU 91]. L'expression de la probabilité d'extension d'une fissure d'une longueur a à une longueur b , moyennant un facteur d'intensité $K_l(x)$ croissant avec la longueur de la fissure x , s'obtient comme suit. Soit $P(x)$ la probabilité que la fissure atteigne la longueur x . Si l'on considère un incrément dx de la longueur de la fissure, on peut alors écrire l'équation différentielle suivante [JEU 94]

$$P(x + dx) = (1 - l dx) P(x) + (l dx) P(x) f(x, dx). \quad (II.2.2.c)$$

Cette expression est obtenue comme suit : si les points repérés par x et $x+dx$ appartiennent au même grain, ce qui arrive avec une probabilité $P(N(dx)=0)=e^{-l dx} \approx 1-l dx$, alors, en considérant la croissance du facteur d'intensité des contraintes, la probabilité que la fissure arrive en x est égale à celle que la fissure arrive en $x+dx$ (K_c est alors constant entre x et $x+dx$), et donc

$$P(x) = P(x + dx). \quad (II.2.2.d)$$

Inversement, si les points repérés par x et $x+dx$ n'appartiennent pas aux mêmes grains, ce qui arrive avec une probabilité $P(N(dx)=1)=l(dx)e^{-l dx} \approx l dx$, alors la probabilité que la fissure arrive en $x+dx$ est

$$P(x + dx) = P(\text{la fissure arrive en } x \text{ et } K_c(x + dx) \geq K_c(x)), \quad (II.2.2.e)$$

ce qui est équivalent à

$$P(x + dx) = P(x) f(x, dx), \quad (II.2.2.f)$$

en se rappelant que les réalisations de la fonction aléatoire K_c sont indépendantes d'un grain à l'autre. $f(x, dx)$ est ici la probabilité que le grain repéré par $x+dx$ casse, i.e.

$$f(x + dx) = P(K_c(x + dx) < K_l(x + dx)) = \int_{K_c^{\min}}^{K_l(x + dx)} p_{K_c}(k) dk. \quad (II.2.2.g)$$

En effectuant un développement limité au premier ordre de l'équation (II.2.2.c), on obtient

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = -l (1 - f(x)), \quad (II.2.2.h)$$

et en intégrant cette dernière, l'expression de la probabilité d'extension de la fissure d'une longueur a à une longueur b est obtenue

$$P(a, b) = C_1 \exp \left\{ -l \int_a^b (1 - f(x)) dx \right\}, \quad (II.2.2.i)$$

avec C_1 constante générée par l'intégration. On peut également utiliser à la place de la ténacité K_c l'énergie de création de surface G_c (ou résistance), et à la place du facteur d'intensité des contraintes K_I le taux de restitution d'énergie G . L'expression de la probabilité d'extension de la fissure garde la même expression, à ceci près que la fonction f est alors

$$f(x) = P(G_c < G(x)). \quad (II.2.2.j)$$

On peut également retrouver l'expression (II.2.2.i) dans le cas où le facteur d'intensité des contraintes est décroissant avec la longueur de la fissure. Pour la retrouver, il suffit de se placer dans le cas d'une macrofissure de longueur x et de regarder quelles ont été les conditions sur une fissure de longueur $x-dx$ pour qu'elle ait pu se propager d'une longueur dx . L'équation différentielle alors obtenue est [JEU 94]

$$P(x) = (1 - l \, dx)P(x - dx) + (l \, dx)P(x - d \, x) f, \quad (II.2.2.k)$$

avec $S(-dx)=dx$. On notera enfin que C_1 est prise égale à $P(K_I(a)>K_c)$ par Jeulin : C_1 est la limite de $P(a,b)$ lorsque b tend vers a . On peut donc interpréter cette constante comme étant la probabilité qu'au point matériel du chemin $\mathcal{C}$ repéré par a , il y ait rupture.

II. 3. Simplification des hypothèses

Bien que le modèle précédent nous permette de prendre en compte toutes les dispersions possibles, à savoir mécaniques et géométriques, les restrictions quant à la monotonie du sens de variation du facteur d'intensité des contraintes ne nous permettent pas de pouvoir balayer aisément toutes les configurations possibles de chargements. Cette restriction est en fait liée au fait que les joints de grains le long d'un chemin de fissuration donné $[a,b]$ ne sont pas localisables. De fait, il existe une probabilité, faible mais non nulle, qu'il y ait aucun joint de grain sur $\mathcal{C}$. Dans ce cas-là, on sort du champ probabiliste pour se ramener à une propagation déterministe dans un milieu homogène. On ne peut ainsi faire aucune hypothèse ou approximation sur la valeur du facteur d'intensité des contraintes sur un grain donné (d'où la restriction quant au sens de variation de K_I). Afin de palier ce petit désagrément, il suffit de "déprobabiliser" tout ce qui concerne la description géométrique du milieu non homogène, en particulier lors de la description de l'intersection entre les grains et le chemin de fissuration. Nous considérerons donc cette intersection comme constante et égale à $1/l$, constante ayant la même signification que dans le chapitre précédent, à savoir la taille moyenne des grains du matériau considéré (figure II.e). Toutes les autres hypothèses du chapitre précédent sont quant à elles maintenues.

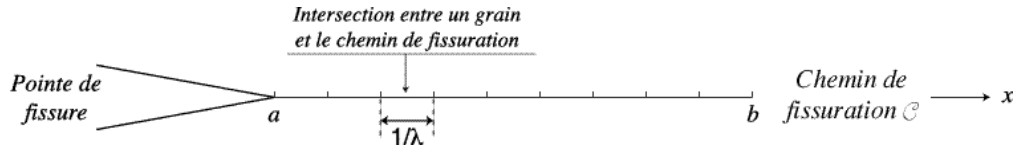


Figure II.e. Modélisation simplifiée de la microstructure.

Soit une fissure de longueur a . Nous supposons dans un premier temps que le point de $\mathcal{C}$ repéré par a est un joint de grain. Posons $f(x) = P(K_c(x) < K_I(x))$, probabilité de rupture du milieu au point d'abscisse x . La probabilité qu'une fissure traverse un grain est donc égale à

$$P_g = P(x \in \text{grain}, K_c(x) < K_I(x)), \quad (II.3.a)$$

ce qui est équivalent à

$$P_g = P\left(\bigcap_{x \in \text{grain}} K_c < \min_{x \in \text{grain}} K_I(x)\right) \quad (II.3.b)$$

car K_c est constante sur un grain. Or $K_I(x)$ est une fonction continue sur un compact, donc il existe un point du grain considéré d'abscisse x_g tel que

$$K_I(x_g) = \min_{x \in \text{grain}} K_I(x), \quad (II.3.c)$$

et la probabilité de rupture d'un grain devient

$$P_g = f(x_g). \quad (II.3.d)$$

On peut, à partir de là, déterminer la probabilité de rupture de n grains consécutifs. Soit x_k le point du grain numéro k du chemin de fissuration tel que

$$K_I(x_k) = \min_{x \in \text{grain } n^o k} K_I(x). \quad (II.3.e)$$

La probabilité de rupture du grain n° k du chemin de fissuration considéré est donc $f(x_k)$ (au sens de l'équation (II.2.2.g)). Comme les réalisations de la fonction aléatoire K_c sur chaque grain sont indépendantes, on peut écrire la probabilité de rupture de N grains consécutifs comme étant égale au produit des probabilités de rupture de chaque grain

$$P(N) = \prod_{k=1}^N f(x_k), \quad (II.3.f)$$

ce qui peut être réécrit par (sous réserve de probabilités de ruptures non nulles, quel que soit le grain du chemin $\mathcal{C}$)

$$\ln(P(N)) = \sum_{k=1}^N \ln(f(x_k)). \quad (II.3.g)$$

Or, si l'on considère la probabilité d'extension de la fissure d'une longueur a à une longueur b , on peut écrire, pour N grand

$$\frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N \ln(f(x_k)) \approx \int_a^b \ln(f(x)) dx, \quad (II.3.h)$$

et $P(N)=P(a,b)$. Dès lors, on obtient

$$\ln(P(a,b)) \approx \frac{N}{b-a} \int_a^b \ln(f(x)) dx. \quad (II.3.i)$$

On peut remarquer que le rapport $(b-a)/N$ représente la longueur moyenne des grains contenus dans le segment $[a,b]$, et est donc égal à $1/l$. On peut donc réécrire l'équation (II.3.i) par

$$\ln(P(a,b)) \approx \int_a^b \ln(f(x)) dx, \quad (II.3.j)$$

ce qui nous donne la probabilité de propagation d'une macrofissure d'une longueur a à une longueur b

$$P(a,b) \approx \exp \left[- \int_a^b \ln(f(x)) dx \right]. \quad (II.3.k)$$

On remarquera que, dans l'équation. (II.3.k), la non-nullité des probabilités élémentaires n'est plus nécessaire.

Remarques :

Σ L'équation (II.2.2.i) n'est en fait qu'un développement limité de l'équation que l'on vient d'établir, et ce lorsque la fonction f tend vers 1. En revanche, ici, aucune restriction n'a été faite quant au sens de variation du facteur d'intensité des contraintes : les frontières de grains étant connues et données, le facteur d'intensité des contraintes a pu être identifié à sa valeur minimale sur le segment que représente ce grain (la faible taille de ce dernier par rapport aux dimensions globales de la fissure nous permet ensuite d'assimiler cette valeur minimale à sa valeur en tout point : la discrétisation du chemin de fissuration est finalement oubliée). Les résultats donnés par les deux représentations (i.e. les équations (II.3.k) et (II.2.2.i)), si l'on fait abstraction de la constante C_I , seront donc relativement proches.

Σ Toute cette partie n'est que la transposition du modèle de Weibull et de l'hypothèse du maillon le plus faible au cas de la propagation, à savoir des paramètres semblables et une hypothèse qualifiable de maillon le plus fort (la propagation de la fissure est conditionnée par le grain, ou longueur élémentaire, où se trouvera localisée la plus faible différence entre le facteur d'intensité des contraintes et la ténacité).

- Σ L'équation (II.3.k) n'exhibe aucune constante telle que C_I (équation (II.2.2.i)) : ici, on considère que la fissure est déjà au point d'abscisse a (mais n'est pas encore au point d'abscisse $a+da$), et donc, que $P(K_I(a) > K_c) = 1$. Dans une optique rigoureuse, il faut considérer également les conditions nécessaires pour que la fissure puisse arriver en ce point (amorçage, reprise de la propagation, etc.).
- Σ Pour un faible nombre de grains dans le chemin de fissuration, on ne peut pas utiliser l'équation (II.3.k). Il faut revenir aux étapes intermédiaires de calcul pour déterminer la probabilité de propagation. En particulier, lorsque beaucoup de grains sont présents sur le chemin de fissuration $[a, b]$, le lieu de l'amorçage (ou reprise de propagation) n'est pas important, les grains étant assimilés à des points matériels. Pour un amorçage en un joint de grain, la probabilité de propagation de la fissure d'une longueur a à une longueur b pour un faible nombre de grains s'écrit

$$P(a, b) = \prod_{k=1}^{E(l(b-a))} \hat{f}(x_k) \cdot P \left(\min_{a+l, b} K_I(x) > K_c \right), \quad (II.3.l)$$

x_k étant le point du grain n° k où le facteur d'intensité des contraintes est minimal, et $E(x)$ la partie entière de x . Nous noterons la discontinuité de l'équation (II.3.l) au passage des joints de grains. Lorsque l'on fait varier la localisation du point repéré par a dans le grain (de manière uniforme dans un grain), la probabilité de propagation $P(a, b)$ devient

$$P(a, b) = \int_0^l P \left(\min_{a, a+l} K_I(x) > K_c \right) \cdot \prod_{k=1}^{E(l(b-a-l))} \hat{f}(x_k) \cdot P \left(\min_{a+l, b} K_I(x) > K_c \right) dl. \quad (II.3.m)$$

La distance l représente ici la distance entre le point d'amorçage, repéré par a , et le joint de grain du chemin de fissuration $\mathcal{C}$ le plus proche. L'expression donnée à l'équation (II.3.m) est continue, à nouveau.

II. 4. Le modèle de Marigo et Francfort

Nous remarquerons que les deux modèles précédents supposent qu'une macrofissure préexiste à leur utilisation : seule la propagation est étudiée, et non l'amorçage de la fissure. Ce problème peut être résolu, ainsi que nous le montrerons ultérieurement. De fait, la mécanique de la rupture ne peut prendre en compte l'amorçage des fissures, et ce en quelque milieu que ce soit : le taux de restitution d'énergie (respectivement, le facteur d'intensité des contraintes), décroît en effet vers zéro lorsque les tailles des fissures considérées tendent elles aussi vers une longueur nulle (et deviennent dès lors plus des défauts que des fissures). On ne peut plus alors utiliser le critère de Griffith, dans la mesure où, quel que soit le chargement appliqué, il existe une taille de défaut en deçà de laquelle il sera toujours infirmé, qu'il y ait

propagation expérimentale ou non. Les critères de propagation à une faible échelle sont donc différents (par exemple par la mécanique de l'endommagement [LEM 85]). Marigo et Francfort [FRA 93] ont cependant tenté d'unifier amorçage (ou propagation pour des fissures de faibles longueurs, incluant la création possible de nouveaux sites de rupture et leur propagation), par le biais d'un critère énergétique au demeurant très proche des idées de bases de Griffith, et géométrique. Les grandes lignes de cette approche sont présentées ci-dessous, et nous verrons que rendre ce modèle probabiliste est relativement simple. Nous remarquerons que ce modèle est le seul qui ne fait aucune différence entre les cas 2D et 3D, quoique dans cette dernière configuration, les applications sont relativement difficiles à effectuer. On notera enfin la bonne adéquation de ce modèle pour certains cas bidimensionnels (en particulier, la différenciation entre propagation brutale et propagation progressive, qui n'est pas effectuée dans la présente étude [BIL 00]).

II. 4. 1. Présentation

Soit W un espace borné et connexe de dimension N , de frontière régulière ∂W . Cet ensemble représente un domaine élastique soumis à un déplacement imposé (ce modèle ne peut être utilisé dans des configurations où la contrainte est imposée, mais des travaux sont en cours afin de lever cette restriction), et est considéré non fissuré. Tous les sous-ensembles G de W de dimensions $N-1$ sont considérés comme étant autant de fissures possibles. Le domaine fissuré est noté W_G . De même que pour le critère de Griffith, à chaque état admissible de fissuration est associé une énergie de surface : $K(x,u)$ représente l'énergie nécessaire à la génération d'une fissure élémentaire, localisée autour du point matériel x de W , et orienté par le vecteur unité u . L'énergie de surface $E_s(G)$ nécessaire pour générer le domaine fissuré W_G est défini par

$$E_s(G) = \int_G K(x, u(x)) dS(x), \quad (II.4.1.a)$$

avec $dS(x)$ mesure de l'élément de fissure localisé autour du point x de W , K est appelé *ténacité*, par analogie avec la théorie de Griffith dans le cas particulier d'un matériau élastique linéaire. On définit également l'énergie élastique du domaine fissuré par

$$E_d(G) = \min_{\substack{\text{déplacements} \\ \text{admissibles}}} \int_{W_G} w(x, \epsilon(x)) dx, \quad (II.4.1.b)$$

avec $w(x, \epsilon(x))$ l'énergie élastique volumique du domaine fissuré sous un déplacement imposé. L'énergie totale du domaine W dans un état de fissuration G se définit par la somme des deux énergies précédemment établies

$$E_t(G) = E_s(G) + E_d(G). \quad (II.4.1.c)$$

Connaissant la géométrie et les conditions de déplacements imposés, la fissure G qui sera la plus à même d'être générée dans le domaine sera celle qui minimise l'énergie totale, c'est-à-dire

$$E_t(G) = \inf_{G \text{ admissible}} E_t(G). \quad (II.4.1.d)$$

Nous remarquerons que G_0 n'existe pas forcément : dans la mesure où les fonctions $G \in E_d(G)$ et $G \in E_s(G)$ sont respectivement décroissantes et croissantes avec $S(G)$, il existe un minimum atteint pour la fonction E_p en un état de fissuration noté G_0 (éventuellement l'ensemble vide). Par contre, l'ensemble des fissures admissibles n'étant pas fermé (paragraphe III.1.3), rien ne nous permet d'affirmer que G_0 soit également un état de fissuration admissible.

II. 4. 2. Transposition du modèle dans une optique probabiliste

La transposition de cette approche dans une optique probabiliste implique que l'on va pouvoir déterminer quel est l'état de fissuration le plus probable, ou encore la probabilité que telle ou telle fissure soit générée dans un état donné de chargement. Pour cela, nous allons considérer que le domaine W n'est plus homogène, mais partitionné en des sous-ensembles de même dimension que lui, de manière à simuler un milieu cristallin, ou du moins non homogène. Nous considérerons, de même que dans le chapitre II.2., que toute intersection d'un sous ensemble de W de dimension $N-1$ avec ces grains est de mesure constante, caractérisée par la longueur $1/l$ dans un cas bidimensionnel ($N=2$), et de surface $1/l^2$ dans un cas tridimensionnel ($N=3$). En considérant la "ténacité" constante sur chacun des grains du domaine, et comme étant une variable aléatoire de réalisation indépendante d'un grain à l'autre, nous pouvons alors réécrire les énergies définies précédemment. L'énergie de surface devient ainsi une variable aléatoire pour une macrofissure

$$E_s(G) = \frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^{l^2 S(G)} K_i, \quad (II.4.e)$$

avec $1/l^2$ la surface du grain, dans un cas tridimensionnel (Dans un cas 2D, tous les carrés sont supprimés), $S(G)$ la mesure de la surface G , $l^2 S(G)$ le nombre (non entier) de grains rencontrés par la fissure G , et K_i la "ténacité" du grain n° i (variable aléatoire ayant les mêmes propriétés que K_c). La densité de probabilité h_{E_s} associée à $E_s(G)$ est définie à partir des caractéristiques de la densité de probabilité associée aux "ténacités" (la variable aléatoire {ténacité} étant considérée bornée, de moyenne et d'écart type finis - paragraphe II.2.1.). L'énergie élastique du domaine fissuré restant déterministe, les caractéristiques de l'énergie totale sont alors conditionnées par celles de E_s . En utilisant le théorème central limite [LIN 22], la densité de probabilité associée à $E_t(G)$ s'écrit, pour $l^2 S(G)$ grand et un ensemble connexe G

$$h_{E_t(G)}(e) = \frac{l^2}{\sqrt{2pl^2S(G)\bar{K}}} \exp\left[-\frac{\bar{E} \left(l^2e - l^2E_d(G) - l^2S(G)\bar{K}\right)^2}{2l^2S(G)\bar{K}^2}\right], \quad (II.4.f)$$

où $\bar{K}$ et $\bar{\bar{K}}$ sont respectivement la moyenne et l'écart type de la "ténacité". La probabilité de trouver une fissure G dans le domaine W est donc égale à la probabilité que l'énergie $E_t(G)$ associée au passage de W à W_G soit minimale

$$P(W \in W_G) = P(\bar{G} \text{ admissible}, E_t(G) < E_t(\bar{G})). \quad (II.4.g)$$

En conclusion, cette théorie permet de déterminer la création, l'amorçage, la propagation et l'arrêt de fissure, et tout état de fissuration susceptible d'être observé dans un domaine W soumis à un état de déplacement imposé donné. Mais il demande à ce que l'énergie élastique du domaine fissuré soit calculée (ou calculable) pour tout état de fissuration admissible. Cet ensemble étant très large, il est *a priori* nécessaire que l'on ait par avance une idée de l'état de fissuration impliquant une énergie totale minimale. Il faut également noter que dans le cas de domaines soumis à une contrainte imposée, aucun équilibre ne peut être atteint, quel que soit l'état de fissuration considérée. En un cas bidimensionnel et déterministe, en considérant qu'une fissure de longueur a existe déjà, la recherche de son évolution sous un déplacement imposée revient à minimiser la fonctionnelle

$$E_t(a + da) = \min_{\substack{\text{déplacements} \\ \text{admissibles } W_{a+da}}} \int \psi(x, e(x)) dx + \int_{a+da} K(x, u(x)) dS(x), \quad (II.4.h)$$

ce qui revient alors à suivre un chemin $\mathcal{C}$ où en chaque point d'abscisse x de ce dernier soit vérifié

$$\frac{\partial E_t(x)}{\partial x} = 0. \quad (II.4.i)$$

L'équation (II.4.i) pouvant se réécrire par

$$-G(x) + K(x) = 0, \quad (II.4.j)$$

on retrouve alors le critère de Griffith : le modèle de Marigo n'apporte rien dans le cas de la propagation d'une fissure existante (on notera juste l'équivalence entre K et G_c , énergie de surface du matériau). Le modèle probabiliste qui en découlera sera donc strictement égal à celui du paragraphe II.3. Nous noterons que dans le cas où l'amorçage, simple ou multiple, et la fissuration multiples sont considérés, le modèle étudié ici montre tout son intérêt. Hormis l'amorçage, nous constatons que ni le modèle de Marigo et Francfort rendu probabiliste, ni la mosaïque poissonnienne, ne permettent de traiter la fissuration de manière générale, ou d'apporter un complément par rapport au modèle de propagation établi au paragraphe II.3. C'est pour cela que nous utiliserons par la suite ce dernier, bien que celui-ci ne soit pas des plus polyvalents en terme d'amorçage (le problème étant résolu à l'aide du modèle de Weibull

- paragraphe III.3). Son seul avantage est sa simplicité et sa modularité, en termes de chargements et d'augmentation de la complexité des phénomènes considérés.

II. 5. Propriétés du modèle de propagation : Effets DLH

Dans les matériaux fragiles, quand l'hypothèse du maillon le plus faible peut être faite, on peut mettre en avant trois paramètres clefs permettant de décrire l'influence de l'environnement sur la probabilité de rupture de la structure étudiée :

Σ Effet *D* : influence de la distribution des défauts [JAY 77 ; HIL 92a],

Σ Effet *V* : influence du volume de la structure [FRE 68],

Σ Effet *H* : influence du chargement et de son hétérogénéité [DAV 73 ; HIL 92a].

Ces trois effets peuvent être démontrés et sont expérimentalement vérifiés : ils quantifient alors les apports externes et internes sur la probabilité de rupture.

Nous pouvons de même mettre en avant trois effets dans le modèle établi (paragraphe II.3). En effet, l'arrêt de la fissure est conditionné par la rencontre d'un grain plus fort que les autres (en termes de ténacité rapportée au facteur d'intensité des contraintes). Ainsi, l'environnement dans lequel évolue la fissure va influencer de manière conséquente sur sa probabilité de propagation d'une longueur donnée à une autre :

Σ Effet *D* : influence de la distribution des ténacités (étant variables aléatoires),

Σ Effet *L* : influence de la longueur du chemin de fissuration (par rapport à la longueur moyenne des grains $1/l$),

Σ Effet *H* : influence de l'hétérogénéité du chargement.

Nous effectuerons tout d'abord un bref rappel sur les effets *DVH*, nous mettrons ensuite en avant les effets *DLH*, de manière à illustrer le parallélisme entre les paramètres d'un modèle type « maillon le plus faible » et ceux d'un modèle type « maillon le plus fort ». Afin de mieux percevoir les différentes interactions entre environnement et probabilité de fissuration, nous illustrerons notre propos par une application numérique.

II. 5. 1. Effets DVH

Comme nous l'avons vu précédemment (paragraphe I.4.3), la probabilité de rupture d'une structure fragile, sous hypothèse du maillon le plus faible, s'écrit

$$P_R = 1 - \exp \left[- \frac{1}{V_0} \int_0^{\infty} \frac{\hat{F}_S(M)}{S_0} \tilde{z}^n dV_0 \right], \quad (II.5.1.a)$$

avec $S_u=0$ (i.e., la loi de Weibull à deux paramètres) et les autres paramètres définis précédemment au paragraphe I.4.3.

II. 5. 1. A. Effet D

Nous allons décrire l'influence de la répartition des défauts au sein du matériau sur la probabilité de rupture : du fait de l'hypothèse du maillon le plus faible, ce sont eux qui conditionnent la rupture. Ainsi, toutes choses étant égales par ailleurs, *plus les défauts sont dispersifs de par leurs tailles (i.e., leur écart type augmente), plus la rupture est un évènement aléatoire dispersif*. La démonstration de ceci peut être effectuée en s'intéressant à l'influence de n , le module de Weibull, sur la probabilité de rupture P_R : n conditionne la valeur de P_{R0} , probabilité de rupture d'un maillon élémentaire (paragraphe I.4.3.). Ainsi, plus les tailles des défauts sont dispersées, plus n sera faible, et plus la rupture dispersée (en termes de contrainte à rupture). A contrario, plus la dispersion sur les tailles de défauts est faible, plus n devient important et plus le comportement à rupture du matériau tend à être déterministe (à l'extrême, $n=+\infty$ décrit un comportement à rupture totalement déterministe, la contrainte à rupture étant alors égale à S_0).

II. 5. 1. B. Effet V

Le volume de la structure étudiée est également un facteur de variation des probabilités de rupture. En effet, toutes choses étant égales par ailleurs, *plus le volume de la structure est important, plus la probabilité d'y trouver un défaut critique augmente, et la probabilité de rupture augmente*. A partir de l'équation (II.5.1.a), on peut montrer et quantifier l'influence du volume V de la structure W par le biais de l'intégrale volumique

$$\int_W \frac{\hat{E}(S_{eq}(M))^n}{S_0^n} dV. \quad (II.5.1.B.a)$$

Comme tous les termes de cette intégrale sont positifs, on voit bien que, plus l'espace d'intégration est important, plus sa valeur sera grande (P_R est de plus croissante avec la valeur de cette intégrale). Dans un cas de traction pure, la probabilité de rupture de la structure s'écrit

$$P_R = 1 - (1 - P_{R0})^{V/V_0}, \quad (II.5.1.B.b)$$

où P_{R0} est défini par

$$\ln(1 - P_{R0}) = - \frac{\hat{E}(S_{eq})^n}{S_0^n}. \quad (II.5.1.B.c)$$

II. 5. 1. C. Effet H

Dans le traitement de l'influence des caractéristiques du matériau sur la contrainte à rupture (et sa dispersion), on ne doit pas perdre de vue qu'une même structure ne réagit pas de la même façon suivant le chargement auquel elle est soumise. Ainsi, toutes choses étant

égales par ailleurs, *plus le chargement est hétérogène, plus la zone la plus fortement sollicitée est moindre, et donc plus la probabilité de rupture est faible*. Cela correspond à un effet V "inverse". Si l'on considère que le champ de contrainte équivalente au sein de la structure s'écrit

$$S_{eq}(M) = S_{max} g(M), \quad (II.5.1.C.a)$$

où S_{max} est la valeur maximale de la contrainte équivalente dans la structure, et g est une fonction adimensionnelle de pondération (ou de forme), alors on peut écrire

$$P_R = 1 - \exp\left\{-\frac{VH_m}{V_0} \left(\frac{S_{max}}{S_0}\right)^m\right\}, \quad (II.5.1.C.b)$$

H_m quantifiant alors l'écart entre le champ de contrainte réel et un champ constant. Ce paramètre est égal à [HIL 92b]

$$H_m = \frac{\int_V (g(M))^m dV}{V}, \quad (II.5.1.C.c)$$

et est toujours inférieur à 1 (égal dans le cas d'un chargement constant). Le produit VH_m est appelé volume effectif. Il correspond au volume en traction pure qui aurait la même probabilité de rupture que la structure considérée [DAV 73].

En utilisant l'effet H , nous pouvons récrire la probabilité de rupture dans un volume V en fonction d'une probabilité de rupture dans un volume de référence V_1 [HIL 92b]. Soient S_{max} la valeur maximale (commune) de la contrainte appliquée aux volumes V et V_1 , P_R et P_{R1} la probabilité de rupture de ces deux volumes. Ces probabilités s'écrivent (équation (II.5.1.C.b))

$$\begin{aligned} P_R &= 1 - \exp\left\{-\frac{VH_m}{V_0} \left(\frac{S_{max}}{S_0}\right)^m\right\} \\ P_{R1} &= 1 - \exp\left\{-\frac{V_1H_m}{V_0} \left(\frac{S_{max}}{S_0}\right)^m\right\} \end{aligned} \quad (II.5.1.C.d)$$

avec H_m le facteur caractérisant l'hétérogénéité de champ de contrainte, supposé le même dans les volumes V et V_1 , et $S_u=0$. Nous pouvons alors déduire de l'équation (II.5.1.C.d) l'écriture de P_R en fonction de P_{R1} (les matériaux constituant les deux volumes sont identiques)

$$P_R = 1 - (1 - P_{R1})^{V/V_1} \quad (II.5.1.C.e)$$

ce qui généralise l'expression de l'influence du volume sur la probabilité de rupture.

On peut constater que tous les paramètres influant la rupture, qu'ils soient internes ou externes à la structure, interagissent. Mais du fait de la formalisation de la probabilité de

rupture, on peut néanmoins quantifier ces influences, et alors agir de manière à ce que la probabilité de rupture soit moindre. Tous ces paramètres ont leur pendant dans le formalisme que l'on a développé : ce sont les effets *DLH* [CHA 00b].

II. 5. 2. Effets *DLH*

II. 5. 2. A. Effet *D* : Effet de la distribution des ténacités

Pour la statistique de Weibull, la caractéristique mécanique motrice de la rupture est le défaut (du moins, sa taille, son orientation, et éventuellement d'autres paramètres morphologiques). Ici, ce sont les ténacités, et l'on a déjà vu la bonne correspondance entre les deux formulations. Dès lors, l'influence de la distribution des ténacités sur la propagation peut ainsi se décrire de la même manière. Toutes choses étant égales par ailleurs, *plus la valeur moyenne de la distribution des ténacités est grande, plus la probabilité de propagation est faible*. Ceci est aisément démontrable par le biais de l'équation (II.3.k), nous ne le ferons donc pas. De plus, toute densité de probabilité usuelle est définie par sa moyenne et son écart type. Toutes choses étant égales par ailleurs, *plus l'écart type de la ténacité est grand, moins la probabilité de propagation est déterministe* (i.e., plus importante si $K_I(x) > \bar{K}_c$ et moins importante si $K_I(x) < \bar{K}_c$).

II. 5. 2. B. Effet *L* : Effet du nombre de grains traversés

Toutes choses étant égales par ailleurs, *plus le nombre de grains traversés est important, plus la probabilité d'en trouver un de forte ténacité est grande, et donc plus la probabilité de propagation est faible*. La démonstration de cette propriété est triviale, si l'on considère le fait que la fonction

$$b \int_a^b P(K_I(x) > K_c) dx \quad (II.5.2.B.a)$$

est décroissante. Le paramètre caractéristique est ici $(b-a)$, qui représente le nombre de grains traversés par la fissure (lié alors à V/V_0 dans la statistique de Weibull). Dans un cas où le facteur d'intensité des contraintes est constant, alors à peu de choses près (équation (II.5.3.A.d))

$$P(a, b) \approx P(K_I > K_c)^{(b-a)}, \quad (II.5.2.B.b)$$

résultat qui est à rapprocher de l'équation (II.5.1.B.b).

II. 5. 2. C. Effet *H* : Effet de l'hétérogénéité des contraintes

Du fait du critère de propagation utilisé, les ténacités seules ne peuvent pas influencer sur la probabilité de propagation : c'est plus la différence entre facteur d'intensité des contraintes et ténacité qui peut remplir ce rôle. Ainsi, toutes choses étant égales par ailleurs, *plus le chargement est hétérogène, plus la zone du chemin de fissuration la plus fortement sollicitée*

est faible, et donc plus la probabilité de propagation l'est. On peut également exhiber un paramètre quantifiant cette hétérogénéité. En effet, on peut montrer, à l'aide des fonctions poids, que le chargement le plus nocif sur un chemin de fissuration est un chargement constant (Annexe 1). Soit $s(x)$ les contraintes appliquées sur le chemin de fissuration. Si l'on décompose celles-ci par

$$s(x) = s_{max} g(x), \quad (II.5.2.C.a)$$

où s_{max} est la valeur maximale de la contrainte le long du chemin de fissuration, et g un facteur de forme, alors

$$K_I(x) \in [K_I(x), K_I^{max}(x)], \quad (II.5.2.C.b)$$

avec $\mathcal{C}$ le chemin de fissuration, K_I facteur d'intensité des contraintes associé à $s(x)$ et K_I^{max} celui associé à s_{max} . Le facteur adimensionnel H quantifiant l'hétérogénéité du chargement permet de comparer la probabilité de propagation réelle de celle sous un chargement constant

$$H = \exp \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{P(K_I(x) > K_c)}{P(K_I^{max}(x) > K_c)} dx \right], \quad (II.5.2.C.c)$$

et la probabilité de propagation peut alors s'écrire

$$P(a, b) = H^{1/(b-a)} \exp \left[\int_a^b P(K_I^{max}(x) > K_c) dx \right]. \quad (II.5.2.C.d)$$

On remarquera que H a une signification différente de H_m (facteur d'hétérogénéité dans le cas de la statistique de Weibull)

$$H_m = \frac{1}{V} \int_V \frac{\ln(1 - P_{R0}(M))}{\ln(1 - P_{R0}^{max}(M))} dV, \quad (II.5.2.C.e)$$

avec P_{R0}^{max} probabilité de rupture d'un volume élémentaire soumis à un chargement constant égal au maximum du chargement réel. Ainsi,

$$P_R(s_{eq}(M)) = 1 - [1 - P_R(s_{max})]^{H_m(W)}. \quad (II.5.2.C.f)$$

Nous noterons que H est également toujours positif et inférieur à un (égal à 1 dans le cas d'un chargement homogène). La grandeur H permet de déterminer la valeur du chargement en traction pure qui induirait une même probabilité de propagation le long du chemin $[a, b]$ que le chargement originel.

II. 5. 3. Illustration

Afin de mieux percevoir les influences externes sur la probabilité de propagation d'une fissure, autrement dit, les effets *DLH*, nous allons étudier un cas simple, à savoir la propagation d'une fissure dans un tube chargé thermomécaniquement.

II. 5. 3. A. Configuration

Soit un tube de rayon R et d'épaisseur h , considérée comme très faible devant R , soumis à une différence de température DT entre ses parois externe et interne (figure II.f). Dans cette configuration, et pour R très supérieur à h , alors, le champs de contrainte dans l'épaisseur du tube s'écrit

$$s_{zz} = s_{\theta\theta} = s^T \frac{2x}{h}, \quad (II.5.3.A.a)$$

où l'axe orthoradial est repéré par θ , la hauteur par x , et s^T une constante définie par

$$s^T = \frac{E a_{tube} DT}{2(1 - \nu)}, \quad (II.5.3.A.b)$$

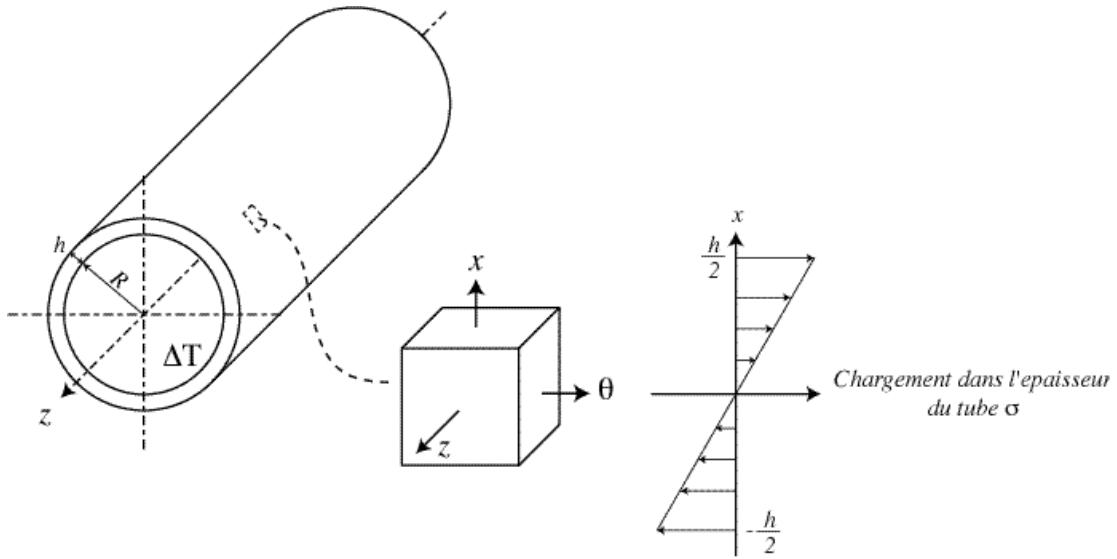


Figure II.f. Configuration pour l'illustration des effets DLH.

E et ν étant respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau, et a_{tube} son coefficient de dilatation thermique. Les points repérés par $x=0$ sont au milieu de la paroi du tube d'épaisseur h . Si l'on considère que la différence de température DT est positive (la température à l'intérieur du tube est supérieure à la température à l'extérieur du tube), alors la zone la plus sollicitée se trouve en $x=h/2$, et donc s'il y a amorçage de fissure, celui-ci se trouvera localisé sur la paroi externe (ou proche de cette dernière). Nous supposons que cet amorçage a eu lieu, et a généré une fissure débouchante tridimensionnelle circulaire de rayon $1/l$ (figure II.g).

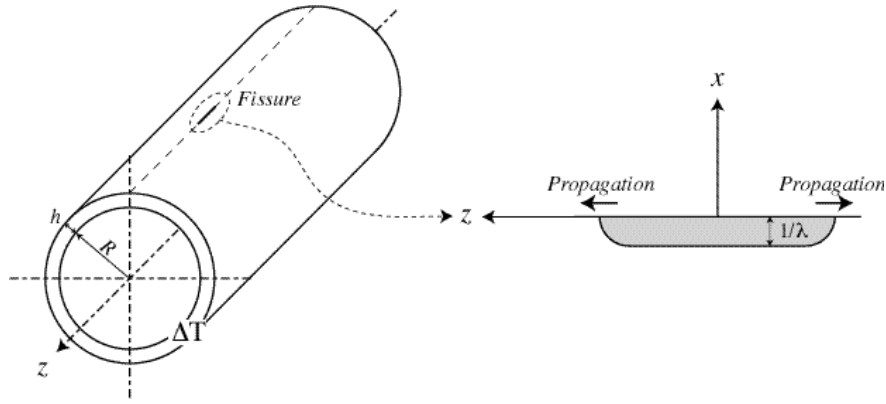


Figure II.g. Fissuration du tube.

On peut alors montrer que les facteurs d'intensité des contraintes le long du front de fissuration présentent un extremum au niveau de la surface libre : la fissure se propagera préférentiellement de manière longitudinale, plutôt qu'en profondeur. Enfin, pour h très grand, le facteur d'intensité des contraintes au niveau du bord libre de la fissure est constant au cours de la propagation et est égal à [CHA 01]

$$K_I(s^T) = 1,41 \frac{S^T}{\sqrt{l}}. \quad (II.5.3.A.c)$$

En utilisant cette propriété, nous allons pouvoir juger l'influence des différents paramètres. En effet, la probabilité de propagation de cette fissure d'une longueur a à une longueur b s'écrit, si l'amorçage se fait sur un joint de grain

$$P(a, b) = \left(P(K_I(s^T) > K_c) \right)^{E(l(b-a))} P(K_I(s^T) > K_c)^{1 - \frac{E(l(b-a))}{l}}, \quad (II.5.3.A.d)$$

où $E(x)$ est la partie entière de x , d le symbole de Kronecker. Nous remarquerons que la probabilité de propagation ci-dessus est constante par morceaux : sur un grain, la ténacité et le facteur d'intensité des contraintes sont tous deux constants et donc la probabilité de propagation en tout point du grain est constante. Nous considérerons que la densité de probabilité associée aux ténacités est une loi Bêta incomplète [SPA 87]

$$h_{K_c}(K) = \frac{(K - K_c^{min})^{a-1} (K_c^{max} - K)^{b-1}}{(K_c^{max} - K_c^{min})^{a+b-1} B(a, b)}, \quad (II.5.3.A.e)$$

où a et b sont les paramètres de la loi Bêta ($a > 0$ et $b > 0$), K_c^{min} et K_c^{max} les bornes (positives et finies) de la densité de probabilité h_{K_c} , et B est la fonction d'Euler de première espèce. La valeur moyenne et l'écart type de la ténacité sont alors définis par

$$\begin{aligned} \overline{K_c} &= \frac{a}{a+b} K_c^{max} + \frac{b}{a+b} K_c^{min} \\ \overline{K_c}^2 &= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} (K_c^{max} - K_c^{min})^2 \end{aligned} \quad (II.5.3.A.f)$$

II. 5. 3. B. Effets DLH

En utilisant l'expression de $P(a,b)$, probabilité de propagation d'une longueur a à une longueur b sur la surface extérieure du tube, nous allons observer l'influence des paramètres définissant la densité de probabilité h_{Kc} (i.e., a et b). Nous considérerons dans tout ce qui suit, que la fissure initiale s'est arrêtée à un joint de grain : ténacité et facteur d'intensité des contraintes étant constants, dès que la fissure commence à casser un grain, alors le critère de Griffith sera vérifié en tout point de ce grain, jusqu'à ce que la fissure rencontre un nouveau grain de ténacité différente. Soient donc deux densités de probabilité h_{Kc}^1 et h_{Kc}^2 de même écart type, et de valeurs moyennes différentes, définies par les paramètres suivants

$$\begin{aligned} \overline{a} &= 8 \\ \overline{b} &= 10 \\ \overline{K_c^{min}} &= 0 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \overline{K_c^{max}} &= 6 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \overline{K_c} &= 2,64 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \overline{K_c} &= 0,68 \text{ MPa}\sqrt{m} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \overline{a} &= 8 \\ \overline{b} &= 1,57 \\ \overline{K_c^{min}} &= 0 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \overline{K_c^{max}} &= 6 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \overline{K_c} &= 5,01 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \overline{K_c} &= 0,68 \text{ MPa}\sqrt{m} \end{aligned} \quad (II.5.3.B.a)$$

La fissure initiale a une longueur égale à $1/l$ et le facteur d'intensité des contraintes est posé égal à $K_I(S^T)=5,02 \text{ MPa.m}^{0.5}$. Sous ces conditions, la différence entre la propagation dans les milieux caractérisés par les densités de propagation h_{Kc}^1 et h_{Kc}^2 se voit très bien (figure II.h) : plus la valeur moyenne des ténacités est élevée (à écart type constant), plus la probabilité de propagation est faible.

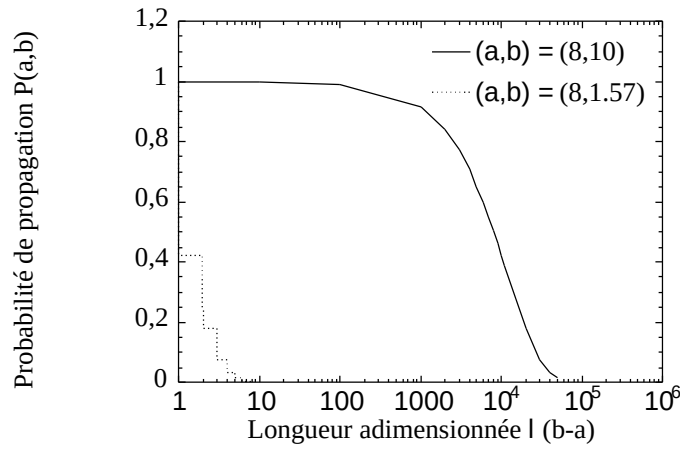


Figure II.h. Probabilités de propagation pour différentes valeurs moyenne de ténacité.

De même, on va pouvoir constater l'influence de l'écart type sur la probabilité de propagation $P(a,b)$.

Soient trois répartitions de ténacités définies par

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bar{l}_a = 2 \\ \sigma_a = 2 \\ K_c^{\min} = 0 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ h_{Kc}^1 \begin{array}{c} K_c^{\max} = 6 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ K_c = 3 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \overline{K_c} = 1,34 \text{ MPa}\sqrt{m} \end{array} \end{array} & , h_{Kc}^2 \begin{array}{c} \bar{l}_a = 5 \\ \sigma_a = 5 \\ K_c^{\min} = 0 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \begin{array}{c} K_c^{\max} = 6 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ K_c = 3 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \overline{K_c} = 0,9 \text{ MPa}\sqrt{m} \end{array} \end{array} & \text{et } h_{Kc}^3 \begin{array}{c} \bar{l}_a = 10 \\ \sigma_a = 10 \\ K_c^{\min} = 0 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \begin{array}{c} K_c^{\max} = 6 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ K_c = 3 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ \overline{K_c} = 0,65 \text{ MPa}\sqrt{m} \end{array} \end{array} \quad .(II.5.3.B.b)
 \end{array}$$

Si l'on se place dans les mêmes conditions que précédemment, à savoir une fissure initiale de longueur $1/l$, et un chargement $K(S^T)$ constant, alors nous pouvons constater une inversion des ordre des probabilités de propagation selon que $K(S^T)$ soit supérieur ou non à la ténacité moyenne (pour $K(S^T)$ égal à cette dernière, alors la dispersion sur les ténacités n'a aucune importance, du moins pour le type de densités de probabilités considérées - figure II.i).

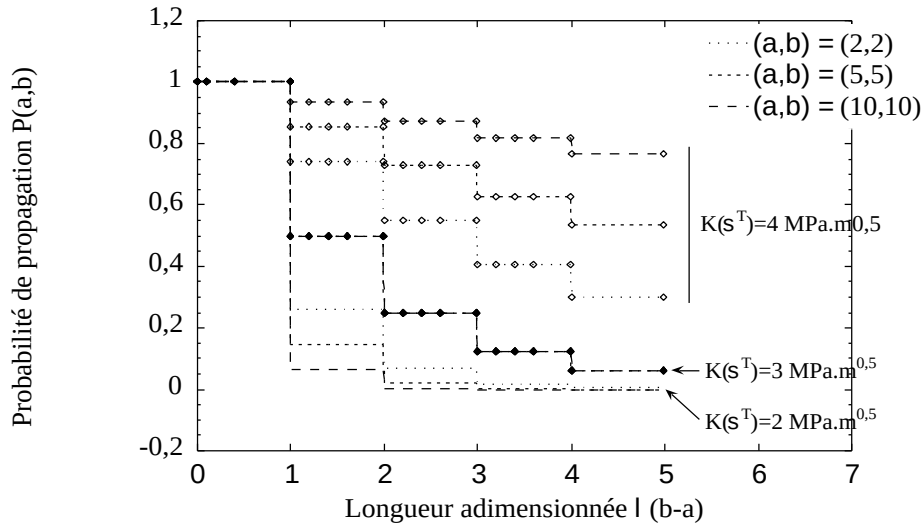


Figure II.i. Influence de la dispersion sur les ténacités sur la probabilité de propagation.

Nous noterons que l'influence du nombre de grain sur la probabilité de propagation (ou effet L) est immédiatement visible : $P(a,b)$ est une fonction décroissante de $l(b-a)$.

Pour parfaire l'étude des effets DLH sur cet exemple, nous allons comparer le chargement utilisé jusqu'à présent (équation (II.5.3.A.d)), et la probabilité de propagation d'une fissure dans une plaque plane soumise à de la traction uniforme S . Le facteur d'intensité des contraintes associé à ce type de propagation s'écrit

$$K_I(x) = s \sqrt{px} . \quad (II.5.3.B.c)$$

La valeur de S est déterminée de telle manière que, pour $a=1/l = 2 \text{ mm}$, longueur de la fissure initiale, $K(S^T)=K_I(a)$. Pour $K(S^T)=3 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$, S est alors égal à 1200 MPa . Nous prendrons pour la densité de probabilité h_{Kc} les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} & \bar{l}a = 8 \\ & \bar{l}b = 10 \\ & \bar{K}_c^{\min} = 0 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ & \bar{K}_c^{\max} = 10 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ & \bar{K}_c = 4,4 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ & \bar{K}_c = 1,14 \text{ MPa}\sqrt{m} \end{aligned} \quad (II.5.3.B.d)$$

On peut alors comparer les probabilités de propagation entre ces deux chargements (figure II.j)

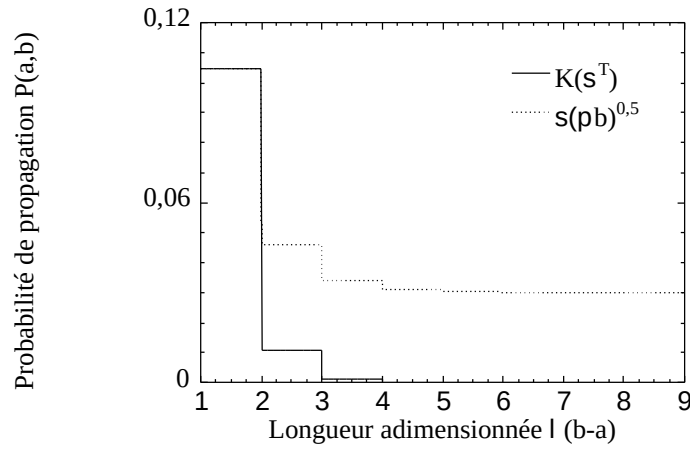


Figure II.j. Influence du chargement sur la probabilité de propagation.

Dans la mesure où un chargement en traction pure est le plus nocif, il est normal que la probabilité de propagation qui lui est associée soit toujours supérieure à celle associée au chargement avec un facteur d'intensité des contraintes constant. Nous noterons que, pour $l(b-a) \geq 5$, la probabilité de propagation dans la plaque plane devient constante: la valeur du facteur d'intensité des contraintes associé à cette configuration est devenue supérieure à la valeur de K_c^{max} , et la propagation devient alors déterministe. La différence entre ces deux probabilités de propagation est quantifiable, via l'utilisation du paramètre H (équation (II.5.2.C.d)). Plus la fissure est grande, et plus le facteur d'hétérogénéité des contraintes diminue (figure II.k) : le chargement, et donc la probabilité de propagation dans la configuration initiale (figure II.j) s'éloigne de plus en plus d'une configuration où la probabilité de propagation de la fissure est la plus probable, i.e. dans un cas de traction pure.

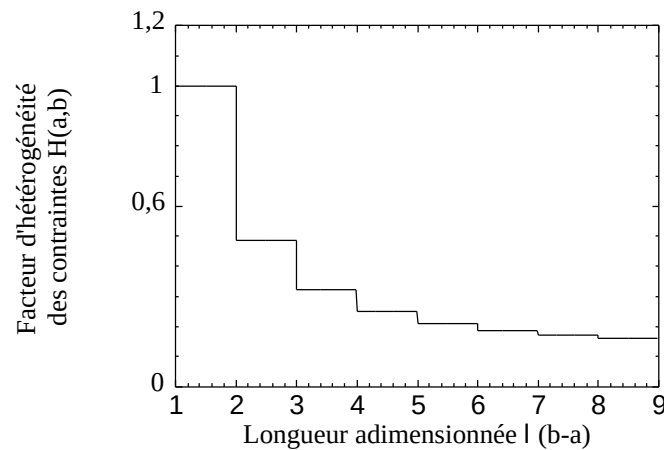


Figure II.k. Facteur d'hétérogénéité des contraintes associée à la propagation à un FIC constant.

H est égal à un sur le premier grain (seule importe la valeur du facteur d'intensité des contraintes au début de la propagation, et pour les deux chargements considérés, ils sont égaux). Par contre, dès que ce grain est rompu, H chute rapidement : le chargement à facteur

d'intensité des contraintes constant est alors très hétérogène (de plus en plus lors de la propagation).

II. 6. Conclusion

Le problème posé par l'étude nous a amené à opter pour une vision probabiliste de la mécanique de la rupture : pour tout ce qui concerne l'amorçage au sein de matériaux fragiles, nous avons vu dans le chapitre précédent que cette approche est courante et raisonnable. De plus, les dispersions mécaniques locales engendrées par le mode d'obtention des matériaux étudiés d'une part, et l'étude de la fatigue par fissuration d'autre part, se doivent d'être appréhendé de manière statistique. Or il existe peu de modèles intégrant des aléas locaux dans le cadre de la mécanique de la rupture. Le modèle développé dans le paragraphe II.3. ne permet pas beaucoup plus de choses, à ce stade de l'étude, que ceux qui existent, ou que l'on peut adapter : les effets *DLH* sont inhérents à de telles approches. Mais nous allons voir, dans le chapitre suivant, que la simplicité des hypothèses utilisées va nous permettre d'augmenter progressivement les phénomènes pris en comptes, que ce soit au niveau du type de propagation étudiée ou au niveau des conditions externes auxquels la structure étudiée est soumise.

Chapitre III

Extensions du modèle

III. 1. Extension en propagation brutale

III. 1. 1. Propagation transgranulaire et intergranulaire

Dans le modèle de propagation établi au paragraphe II.3, seule la propagation transgranulaire a été prise en compte : la fissure se propage en ligne droite, ou, de manière plus générale, reste en mode I, en avançant si le grain en sa pointe casse. Ce type de propagation est restrictif, dans la mesure où pour nombre de matériaux, la fissure se propage en suivant les joints de grains (c'est le cas par exemple de l'alumine). Nous allons donc étudier ce type de propagation. Pour ce faire, nous supposons que la frontière entre deux grains est droite et sans épaisseur, et la distance entre deux points d'intersections multiples (i.e. où se trouvent plus de deux grains) est constante et égale à $1/l$ (figure III.a).

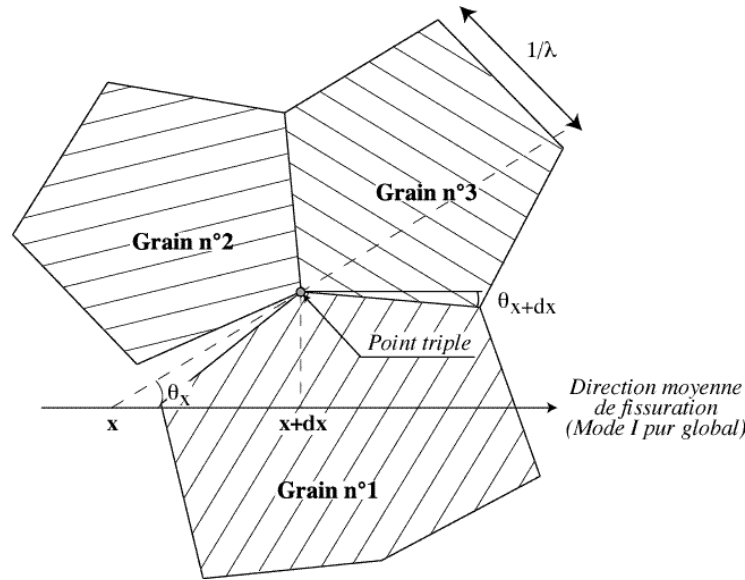


Figure III.a. Modélisation de la microstructure pour une propagation intergranulaire.

Pour ce type de propagation, l'orientation du joint de grain et la résistance de ce dernier (i.e., énergie de fissuration ou ténacité) sont considérées comme des variables aléatoires. Nous supposons, de même que précédemment, que d'un joint de grain à l'autre, résistances et orientations ont des réalisations indépendantes (ce qui, au niveau des orientations des joints de grains est loin d'être assuré, mais nous nous tiendrons à cette hypothèse, en montrant *a posteriori* qu'elle n'est pas trop abusive). Pour que la fissure puisse se propager le long d'une interface d'énergie de surface G_c et d'orientation q , le critère de Griffith stipule que

$$G(x, q) > G_c, \quad (III.1.1.a)$$

avec $G(x, q)$ le taux de restitution d'énergie de la fissure, dont x représente la longueur projetée sur la ligne de propagation en mode I pur. Ce taux de restitution d'énergie peut être

posé égal à celui d'une fissure en mode I pur, sauf en sa pointe qui présente une désorientation d'angle q (figure III.b).



Figure III.b. Taux de restitution d'énergie associé à une désorientation en pointe de fissure.

En utilisant les fonctions poids [BÜC 70 ; RIC 72], on peut relier ce taux de restitution d'énergie au facteur d'intensité des contraintes qui correspondrait à une fissure de même longueur en mode I comme suit

$$G(x, q) = \frac{K_I(x)^2}{E'} g(q), \quad (III.1.1.b)$$

avec

$$g(q) = \frac{\hat{E}_3}{\hat{E}_4} \cos \frac{q}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3q}{2} + \frac{\hat{E}_1}{\hat{E}_4} \sin \frac{q}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3q}{2} \quad (III.1.1.c)$$

et E' défini plus haut (équation (II.1.f)). Le critère de propagation (équation (III.1.1.b)) peut alors être réécrit par

$$K_I(x) > \sqrt{\frac{2G_c E'}{g(q)}}. \quad (III.1.1.d)$$

On peut donc dire qu'une fissure se propageant de manière intergranulaire dans un milieu dispersif donné a la même probabilité de propagation qu'une fissure se propageant de manière transgranulaire dans un milieu dispersif, dont la longueur moyenne des grains est égale à la longueur moyenne des joints de grains du milieu originel, et dont l'aléa sur les ténacités K'_c est relié à celui sur les orientations et résistance des joints de grains par

$$K'_c = \sqrt{\frac{2G_c E'}{g(q)}} \quad (III.1.1.e)$$

La probabilité de propagation intergranulaire sur un chemin donné $[a, b]$ peut dès lors s'écrire comme une transposition de l'équation (II.3.k)

$$P(a, b) = \exp \left[- \int_a^b h(P(K_I(x) > K'_c)) dx \right]. \quad (III.1.1.f)$$

Nous voyons que la probabilité de propagation établie (équation (II.3.k)) pour une propagation transgranulaire peut être utilisée quel que soit le mode de propagation. Seule est modifiée la signification de la ténacité, dont la densité de probabilité est le fondement de toute

utilisation ultérieure. De même, pour un mode de propagation faisant intervenir le régime transgranulaire et intergranulaire de manière alternée, ladite probabilité pourra être utilisée en se basant sur le fait que

$$P(a,b) = P(a,c)P(c,. \quad (III.1.1.g)$$

Les domaines de type de propagation différente peuvent ainsi être séparés dans un premier temps, puis réunis dans la probabilité de propagation (la définition de la ténacité est alors complexe).

III. 1. 2. Aléa mécanique global – Sources de variations

Une des hypothèses dont nous nous sommes servis pour établir le modèle de propagation probabiliste est que seule la ténacité est aléatoire, variant d'un grain à l'autre, tandis que tout le reste, c'est-à-dire les autres caractéristiques mécaniques, reste constant (déterministe). Pourtant, il est clair que s'il y a dispersion mécanique, cette dernière touche tous les paramètres, comme le module d'Young, le coefficient de Poisson pour ne citer que les plus évidents. Ces variations vont alors impliquer une perturbation aléatoire du facteur d'intensité des contraintes lors du passage d'un grain à l'autre. Cependant, de par le critère utilisé, tout aléa peut être reporté sur la ténacité (qui ne correspond à ce stade plus du tout à la grandeur intrinsèque, quoiqu'aléatoire, initiale). En effet, le critère de Griffith s'écrit, comme nous l'avons déjà vu

$$K_I(x) > K_c, \quad (III.1.2.a)$$

avec ici un aléa sur les deux parties de l'inégalité. Si l'on pose $K'_I(x)$ comme étant le facteur d'intensité des contraintes associé à la fissure considérée dans un milieu homogène (sans variations aléatoires), on peut alors définir une variable aléatoire adimensionnelle bornée (et non nulle) de moyenne et écart type définis, notée A , qui permet de relier le facteur d'intensité des contraintes "macroscopiques" (pour un matériau homogène) au facteur d'intensité des contraintes "microscopiques" (soumis aux aléas mécaniques locaux)

$$AK'_I(x) = K_I(x). \quad (III.1.2.b)$$

La variable aléatoire A est alors parfaitement définie de par la connaissance de la variable aléatoire $K_I(x)$. Si l'on injecte l'équation (III.1.2.b) dans l'équation (III.1.2.a), alors le critère de Griffith peut être réécrit en ne prenant en compte qu'un aléa sur les ténacités

$$K'_I(x) \geq \frac{K_c}{A}, \quad (III.1.2.c)$$

K_c/A étant dès lors associé à la ténacité du grain (la dimension est la même). Mathématiquement, il se peut que, du fait des lois associées aux variables aléatoires A et K_c , le passage de l'équation (III.1.2.a) à l'équation (III.1.2.c) ne soit pas aussi simple que ce que nous avons écrit. Cependant, nous avons pointé du doigt le fait que la variable aléatoire que

nous appelons ténacité supportera tous les aléas du milieu auquel elle est rattachée, cela du seul fait de l'écriture du modèle tel que nous l'avons effectué.

De plus, nous devons nous pencher sur tout ce qui concerne la vitesse de propagation de la fissure, son inertie, etc. En effet, nous n'avons pas considéré jusqu'à présent, et nous ne le ferons plus par la suite, que la fissure se propage avec une vitesse, non infinie mais très importante (fonction du milieu et du chargement qui lui est appliqué [RAV 98]), et que cette vitesse lui confère une certaine inertie. Cette inertie implique que l'arrêt ne peut pas être simplement déterminé par le critère de Griffith : une fois les conditions d'arrêt réunies en pointe de fissure, l'arrêt commence, mais la décroissance de la vitesse de propagation n'est pas de pente infinie. Ainsi le facteur d'intensité des contraintes lorsque la fissure s'est arrêtée est strictement inférieur à la ténacité du matériau. Par là même, dans la mesure où l'inertie n'a pas lieu d'être au niveau de l'amorçage des fissures, on trouve une différence dans les ténacités mesurées par des méthodes basées sur l'amorçage sur défauts ou de réamorçages de fissures, et celles mesurées par des méthodes basées sur son arrêt (ces derniers étant plus faibles [KUM 00]). Les ténacités aléatoires que nous considérerons par la suite seront pondérées par tous ces effets. Cependant, on peut quand même utiliser tout ce qui a trait à l'arrêt pour des problèmes d'amorçage. Dans la mesure où ces amorçages sont conditionnés par des défauts de tailles aléatoires, et la ténacité du matériau (déterministe dans le cas de la statistique de Weibull), le décalage dans les ténacités d'arrêt peut être compensé par un décalage au niveau des tailles des défauts du matériau. Ceci permettra de mettre en place un modèle de fissuration unifié au niveau de tout ce qui concerne la rupture instantanée (ou à très forte vitesse de fissuration) : amorçage, propagation, arrêt. Cependant, tout ce qui concerne le réamorçage peut poser problème. Nous y reviendrons ultérieurement.

III. 1. 3. Propagation 3D

La restriction de l'étude de la propagation à un cas bidimensionnel, tel que cela a été fait dans la plupart des chapitres précédents, n'est pas par seul souci de simplification. En effet, les assemblages que nous aurons à étudier sont loin d'être assimilables à des plaques. Au contraire, ce sont des éléments massifs, et toutes les fissures qui se développent en leur sein sont tridimensionnelles. Le problème de l'étude de ce type de fissuration correspond au critère de propagation : global, par l'intermédiaire du taux de restitution d'énergie (variation de l'énergie élastique par incrément de surface de fissure – équation (II.1.a)), ou local, par le biais de la détermination en tout point du front de fissuration du facteur d'intensité des contraintes (dans la mesure où il peut être défini). Ainsi, les études sur un critère de propagation tridimensionnel se heurtent à la définition du moteur de l'avancement d'une fissure. On aboutit de plus à des incohérences telles qu'une extension en Dirac au point de facteur d'intensité des contraintes maximal. Ayant un champ de contrainte donné, une géométrie et un état de fissuration donné, comment définir géométriquement l'avance de la fissure ? Au milieu de nombreux critères de propagation tridimensionnelle de fissures, le

critère dit " G_{max} " a été identifié par Adam [ADA 84] comme étant celui qui appréhendait le mieux l'évolution des fissures [LEM 80] :

"Parmi tous les accroissements de fissure virtuels dG^* cinématiquement admissibles et de même aire dA , l'accroissement réel $dG_{réel}$ est celui qui maximise le taux de restitution d'énergie G ".

On se retrouve ici avec le même problème que pour le modèle de Francfort et Marigo : il faut parcourir tout l'espace des extensions possibles, afin de trouver celle qui maximisera le taux de restitution d'énergie. Et même dans cette démarche, nous nous trouvons confrontés au problème de l'extension en Dirac posé précédemment : l'espace des extensions de fissure n'est pas fermé, et l'on pourra toujours déterminer une suite d'extensions admissibles faisant croître le taux de restitution d'énergie, mais à la limite, l'extension ne sera plus admissible. Nous noterons au passage l'existence de travaux de simulations d'évolution en fatigue cyclique de fissures tridimensionnelles soumises à un mode I pur [LAZ 99], basés sur la théorie tridimensionnelle des fonctions poids de Rice [RIC 85 ; RIC 89]. Nous pouvons étendre le modèle de propagation probabiliste en considérant une extension quelconque, en nous basant sur un critère local (i.e. le facteur d'intensité des contraintes est supérieur à la ténacité), et en considérant une extension du front de fissuration sans se préoccuper de sa forme.

Considérons un milieu tridimensionnel dans lequel se propage une fissure en mode I pur. La fissure initiale possède une surface S_0 de frontière régulière $\partial\Gamma_0$ repérée par son abscisse curviligne s , et l'extension considérée est de surface DS (qui peut être infinitésimale) (figure III.c).

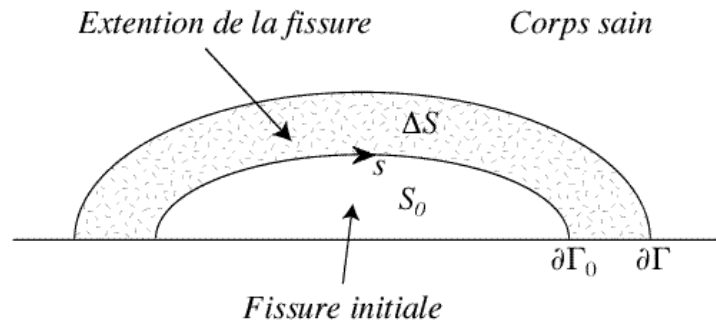


Figure III.c. Extension d'une fissure 3D.

L'évolution du front de fissure $\partial\Gamma_0$ jusqu'au front $\partial\Gamma$ peut être représentée à l'aide d'une fonction continue $l(s) \geq 0$ mesurée sur la normale au front au point $M(s)$ du front (figure III.d). Cette fonction peut être représentée par

$$l(s) = a_0 l_0(s), \quad (III.1.3.a)$$

avec a_0 scalaire, et l_0 fonction normée arbitrairement.

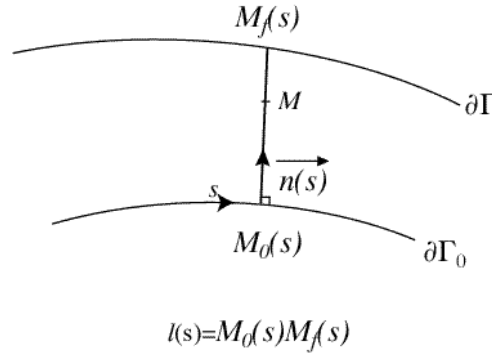


Figure III.d. Evolution du front de la fissure.

Un critère local de rupture peut être introduit en utilisant les facteurs d'intensité des contraintes le long du front de fissuration : au point M de coordonnées $(s, xl(s))$, avec $x \in [0, a_0]$, l'avancée du front aura lieu si

$$K_I(M) > K_c, \quad (III.1.3.b)$$

K_c étant la ténacité au point M . On montre alors que ce critère est équivalent à celui du G_{max} [BIL 86] : la fissure se propage dans un premier temps au point de facteur d'intensité des contraintes maximal, puis s'étend à partir de ce point le long du reste du front. On peut donc s'intéresser dans un premier temps à l'évolution de la fissuration sur un grain, avant de généraliser à un ensemble macroscopique, comme cela a été fait pour tout ce qui concerne la propagation bidimensionnelle. Soit un grain contenu dans la surface DS (figure III.c). Ce dernier est "centré" autour du point M de coordonnées $(s, xl_0(s))$, et possède une surface $1/l^2$. La probabilité de rupture du grain est donc

$$P_g = P(M \in \text{grain}, K_I(M) > K_c), \quad (III.1.3.c)$$

ce qui est équivalent à

$$P_g = P\left(\bigcap_{x \in [0, a_0]} \min_{s \in \text{grain}} K_I(M) > K_c\right) \quad (III.1.3.d)$$

Comme la fonction $M \mapsto K_I(M)$ est une fonction continue de R^2 dans R^2 , il existe un point du grain considéré où ce minimum est atteint. Notons ce point M_g de coordonnées $(s_g, x_g l(s_g))$. La probabilité de rupture d'un grain s'écrit alors

$$P_g = P(K_I(M_g) > K_c). \quad (III.1.3.e)$$

Dès lors, il est possible de déterminer la probabilité d'une extension du front de fissuration de S_0 à $S_0 + DS$: si l'on considère toujours les réalisations de la variable aléatoire K_c indépendantes sur chaque grain du milieu considéré, et si l'on pose qu'il y a N grains dans cette extension de largeur constante, alors

$$P(N) = \prod_{k=1}^N P(K_I(M_k) > K_c), \quad (III.1.3.f)$$

avec M_k du grain n°k où le facteur d'intensité des contraintes est minimal

$$K_I(M_k) = \min_{\text{grain n°k}} K_I(M), \quad (III.1.3.g)$$

De même, si l'on considère la succession d'extensions élémentaires (à $s = \text{constante}$) donnant le front "réel", en posant qu'il y a M grains le long du front de fissuration (la surface DS contient MN grains), alors la probabilité d'extension de la fissure de la surface S_0 à la surface $S_0 + DS$ est, sous les mêmes hypothèses probabilistes,

$$P_{MN} = \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N P(K_I(M_i^j) > K_c). \quad (III.1.3.h)$$

Si l'on considère que dans DS, il y a un grand nombre de grains (ou si l'on fait tendre $1/l$ vers 0), on peut dès lors écrire

$$P(S_0, S_0 + DS) = \exp \left[- \frac{1}{l^2} \int_0^{a_0} \int_0^L \ln [P(K_I(x, s) > K_c)] ds dx \right], \quad (III.1.3.i)$$

avec $1/l^2$ la surface moyenne d'un grain du milieu considéré, et L la longueur de ∂G_0 .

Remarques

La rupture d'une plaque plane bidimensionnelle peut être considérée comme une rupture 3D d'un milieu d'épaisseur égale à $1/l$, valeur moyenne de l'épaisseur d'un grain. On peut donc calculer la probabilité de propagation d'une fissure dans une plaque d'une longueur a à une longueur b (avec $L=1/l$)

$$P\left(\frac{a}{l}, \frac{b}{l} \mid S_0, S_0 + DS\right) = \exp \left[- \frac{1}{l^2} \int_a^b \int_0^{1/l} \ln [P(K_I(x, s) > K_c)] ds dx \right]. \quad (III.1.3.j)$$

En considérant que

$$\forall x \in [0, 1/l], P(K_I(x, s) > K_c) = P(K_I(x, 0) > K_c), \quad (III.1.3.k)$$

l'équation (III.1.3.j) se réécrit par

$$P(a, b) = \exp \left[- \frac{1}{l^2} \int_a^b \ln [P(K_I(x, s=0) > K_c)] dx \right], \quad (III.1.3.l)$$

ou en d'autres termes

$$P(a, b) = \exp \left\{ - \int_a^b \int_0^1 \int_0^1 [P(K_I(x) > K_c)] dx_0 \right\}. \quad (III.1.3.m)$$

On retrouve alors la formule déterminée pour les cas 2D. Nous remarquerons également que tout ce qui concerne l'influence de la longueur de la fissure sur la probabilité de propagation (paragraphe II.5.1.B)) trouve son pendant tridimensionnel : longueur de propagation et largeur du front de fissuration interviennent sur la valeur de ladite probabilité.

Malgré cette continuité théorique entre probabilités de propagation tridimensionnelle et bidimensionnelle, tout ce qui concerne la propagation 3D doit être considéré avec extrêmement de précaution : dans le paragraphe présent, nous avons supposé connu le chemin de propagation, et nulle part il n'a été question de redistribution des contraintes consécutive à une propagation élémentaire. Or lorsqu'une fissure tridimensionnelle se propage, même très peu, l'incidence sur les facteurs d'intensité des contraintes le long du front de fissure peut ne pas être négligeable (en particulier, le front peut alors "contourner" un grain de forte ténacité). Par la suite, nous nous placerons, pour les raisons évoquées précédemment, dans un cas de propagation dans un milieu bidimensionnel.

III. 2. Prise en compte de la propagation sous critique

En se basant sur des méthodes semblables à celles mises en œuvre précédemment, on va pouvoir s'intéresser au devenir des fissures lorsque l'on prend en compte leur éventuelle propagation par fatigue mécanique ou environnementale [HIL 65 ; WIE 70]. On peut en effet définir plusieurs domaines de propagation suivant la valeur du facteur d'intensité des contraintes :

$$\sum K_I(x) > K_c(x) : \text{propagation brutale ;}$$

$$\sum K_s(x) \leq K_I(x) \leq K_c(x) : \text{propagation en fatigue ou fissuration sous-critique ;}$$

$$\sum K_I(x) < K_s(x) : \text{pas de propagation possible ;}$$

avec K_s le facteur d'intensité des contraintes seuil en dessous duquel aucune propagation ne peut se produire. L'existence de K_s ne sera pas discutée: les hypothèses développées ultérieurement nous permettront de prendre en compte tous les cas possibles (K_s non nul, ou K_s nul). Nous nous intéresserons tout d'abord à des cas simples, puis nous présenterons les hypothèses, afin d'évoluer vers un modèle le plus polyvalent possible.

III. 2. 1. Probabilité de propagation à l'endurance

Nous allons déterminer la probabilité de propagation à l'endurance d'une fissure, à savoir les longueurs maximales qu'elle peut atteindre si on lui donne tout le temps nécessaire, et si l'on considère la propagation brutale et la propagation sous-critique. En prenant comme

hypothèse que seule la fissuration intervient dans la dégradation de la structure considérée, toute fissure se propagera tant que la condition

$$K_I(x) > K_s(x) \quad (III.2.1.a)$$

sera vérifiée. Le paramètre $K_s(x)$ est local (dépendant du grain en pointe de fissure), et sera considéré comme ayant les mêmes propriétés que la ténacité (ces deux paramètres jouent le même rôle). On peut ainsi généraliser l'équation (II.3.k) en évaluant la probabilité de propagation $P(a, b, +\bullet)$ d'une fissure entre les longueurs a et b sous un chargement constant au cours du temps (fatigue statique) et pour un temps infini : l'équation (III.2.1.a) n'est qu'une transposition du critère de Griffith dans un cas plus général

$$P(a, b, +\bullet) = \exp \left[- \int_a^b P(K_I(x) > K_s(x)) dx \right] \quad (III.2.1.b)$$

Les équations (II.3.k) et (III.2.1.b) permettent donc d'obtenir les probabilités limites de propagation à $t=0^+$ (i.e., en propagation brutale) et à $t \rightarrow \infty$. En supposant que les paramètres K_s et K_c sont reliées par une relation linéaire, c'est-à-dire

$$K_s = m K_c \quad (III.2.1.c)$$

avec $m \in]0, 1[$ constant et déterministe, on peut déduire de la densité de probabilité associée à la ténacité celle associée au facteur d'intensité des contraintes seuil

$$h_{K_s}(K) = m h_{K_c} \left(\frac{K}{m} \right) \quad (III.2.1.d)$$

L'équation (III.2.1.b) peut alors se réécrire

$$P(a, b, +\bullet) = \exp \left[- \int_a^b P \left(\frac{K_I(x)}{m} > K_c \right) dx \right] \quad (III.2.1.e)$$

On constate que la probabilité de propagation à l'endurance d'une fissure le long d'un chemin de propagation prédéfini $[a, b]$ sous un chargement donné est la même que la probabilité de propagation brutale d'une fissure sous les mêmes conditions géométriques, mais sous un chargement tel que le facteur d'intensité des contraintes se trouve pondéré par le biais du facteur $1/m (>1)$: si le chargement nominal le long du chemin de fissuration s'écrit

$$S(x) = S_{max} g(x), \quad (III.2.1.f)$$

où S_{max} est la valeur maximale de la contrainte appliquée le long du chemin de fissuration, et g est une fonction adimensionnelle, la probabilité de propagation à l'endurance qui lui est associée est égale à la probabilité de propagation brutale de la même fissure le long du même chemin soumis cette fois-ci au champ de contrainte

$$S(x) = (S_{max}/m) g(x). \quad (III.2.1.g)$$

Le paramètre S_{max} est alors une grandeur accélératrice (on remarquera que raisonner au niveau du chargement appliqué ou des facteurs d'intensité des contraintes est équivalent : si à $S(x)$ correspond $K_I(x)$, à $S(x)/m$ correspond $K_I(x)/m$).

III. 2. 2. Probabilité de propagation sous-critique

Après avoir écrit les deux limites de la probabilité de propagation d'une fissure (équations (II.3.k) et (III.2.1.e)), nous allons nous intéresser aux conditions pour qu'une fissure puisse se propager d'une longueur a à une longueur b en un temps inférieur à une valeur donnée T , et ce lorsqu'elle est soumise à un champ de contrainte indépendant du temps (fatigue statique). Pour ce faire, nous allons considérer l'expression de la vitesse de fissuration sous-critique d'une fissure de longueur x donnée par la loi d'Evans-Wiederhorn modifiée [EVA 72 ; EVA 74]

$$\frac{dx}{dt} = C \frac{\hat{E} \langle K_I(x) - K_s(x) \rangle^m}{\hat{E} \langle K_c(x) - K_I(x) \rangle} \quad \text{si } K_c(x) \geq K_I(x) \geq K_s(x), \quad (III.2.2.a)$$

où K_c et K_s ont la même signification que dans les parties précédentes, $\langle . \rangle$ sont les crochets de Macauley, et C et m sont des paramètres déterministes dépendant du matériau et de l'environnement. En reprenant la modélisation de la microstructure, on peut alors déterminer le temps t utilisé par la fissure pour traverser un grain de longueur $1/l$ (considéré comme très petit devant la longueur de la fissure x)

$$l C t = \frac{\hat{E} \langle K_c - K_I(x') \rangle^m}{\hat{E} \langle K_I(x') - n K_c \rangle} \quad (III.2.2.b)$$

avec $K_I(x')$ la valeur minimale du facteur d'intensité des contraintes sur le grain considéré, et $K_s = n K_c$. On peut voir que t est une variable aléatoire induite (par l'aléa sur K_c), de densité de probabilité dépendant des mêmes paramètres que ceux associés à K_c et des constantes C , l , m et n (dépendant du matériaux et de l'environnement). Cette variable aléatoire prend ses valeurs sur $[0, +\infty]$, et la probabilité que se produise l'événement $\{t = +\infty\}$ est loin d'être nulle (elle est en fait égale à $P(K_I(x') < K_s)$). La probabilité que la fissure considérée se propage le long d'un chemin de fissuration donné $[a, b]$ en un temps inférieur à T s'écrit

$$P(a, b, T) = P \left(\bigwedge_{k=1}^{\hat{E}(b-a)} t_k \in T_- \right) \quad (III.2.2.c)$$

avec t_k le temps utilisé par la fissure pour casser le grain $n^o k$ du chemin de fissuration $[a, b]$. Du fait que les variables aléatoires t_k puissent être infinies avec une probabilité non nulle, et que la probabilité $P(a, b, T)$ est conditionnée par une somme de variables aléatoires, l'élaboration de l'expression de $P(a, b, T)$ n'est pas simple. Dans un premier temps, un raisonnement élémentaire sera conduit. Puis l'analyse proprement dite sera menée.

III. 2. 2. A. Changement d'espaces de travail

Si l'on étudie la fonction

$$F_k : t_k \mapsto \frac{K_c^k}{K_I(x_k)} = \frac{1 + (1 - C t_k)^{1/m}}{1 + m(1 - C t_k)^{1/m}}, \quad (III.2.2.A.a)$$

où k référence le numéro du grain du chemin de fissuration, x_k est l'abscisse de ce grain où K_I est minimal, t_k est le temps utilisé par la fissure pour casser ce grain et K_c^k la ténacité de ce grain, on remarque qu'elle définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, 1/m]$.

Le problème que l'on rencontre pour tenir compte du temps lors de la propagation vient de la manière de le cumuler. En effet, il est très aisé de calculer le temps mis pour traverser un grain. Mais dès que l'on veut considérer la propagation au travers de deux grains ou plus, alors la somme de deux temps (ou plus) intervient, temps conditionnés par les réalisations de K_c sur chacun de ces deux grains. En même temps, les conditions temporelles sont les seules pilotant la propagation en fatigue. Le théorème central limite permet, dans de nombreux cas, de calculer la somme de variables aléatoires indépendantes (bien que ce dernier point soit sujet à caution dans le cas d'une propagation intergranulaire). Or, nous avons ici une somme de variables indépendantes t_k , de densité associée déductible de celle associée à K_c , mais ces densités sont de nature très complexe (en particulier, rien ne nous dit que nous pouvons calculer valeur moyenne et écart type de la variable aléatoire t_k , ce qui empêche l'utilisation d'un tel théorème). Nous allons essayer dans un premier temps de ramener les conditions portant sur les temps t_k à une condition portant sur les ténacités K_c^k , associée au grain n° k . Pour cela, nous allons remarquer que la condition

$$\bigwedge_{k=1}^N t_k \in T \quad (III.2.2.A.b)$$

est équivalente à

$$(0 \in T) \bigwedge_{k=1}^N (\sqrt{t_k})^2 \in T. \quad (III.2.2.A.c)$$

Cette équation, dans l'espace vectoriel de dimension n (correspondant aux n grains du chemin de fissuration) associé aux $\div t_k$, est l'équation d'une sphère de centre O_N , et de rayon $\div T$. En d'autres termes, $[\div t_1, \dots, \div t_n]$ est un vecteur solution du problème posé (équation (III.2.2.c)) s'il appartient à l'intersection entre la sphère centrée en O_N et de rayon $\div T$ et de l'espace R^{+n} (figure III.e). Connaissant l'expression des quantités $\sqrt{t_k}$ en fonction des quantités $(K_c/K_I(x_k) - 1)/(1 - mK_c/K_I(x_k))$, on peut en déduire la transformée de la sphère (figure III.e) par l'application bijective G suivante

$$G : R^{+N} \mapsto R^{+N} \quad (III.2.2.A.d)$$

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto \left((1 - C x_1^2)^{1/m}, \dots, (1 - C x_N^2)^{1/m} \right)$$

Cette transformée est donc l'intersection entre un sphéroïde d'ordre m et de rayon $(l CT)^{1/m}$ et R^{+N} (figure III.f). Nous remarquerons que l'appellation *sphéroïde d'ordre m* référence les points $(x_1, \dots, x_N)$ de R^N tels que

$$\bigwedge_{i=1}^N x_i^m = R^m, \quad (III.2.2.A.e)$$

R étant alors le rayon du sphéroïde.

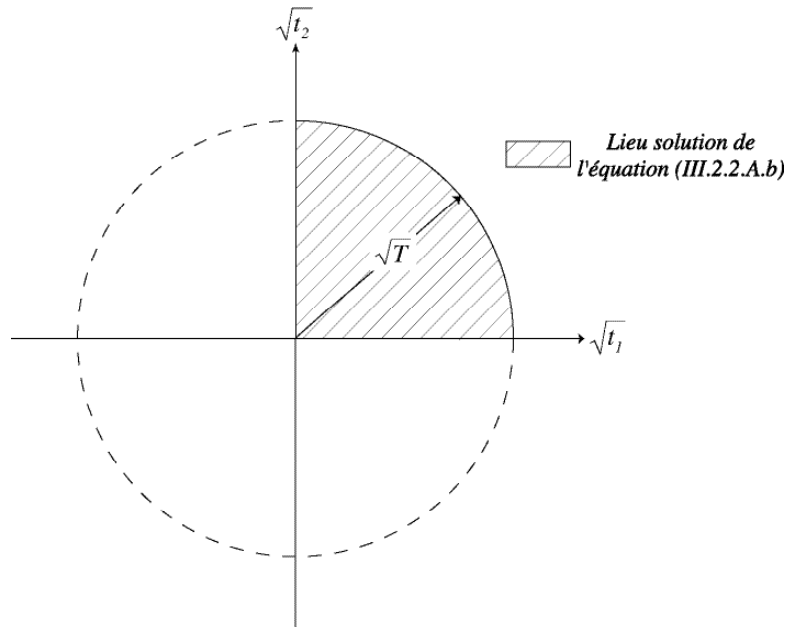


Figure III.e. Cas de deux grains. Lieu solution de l'équation (III.2.2.c).

A présent, il suffit de transformer cette aire en utilisant l'application bijective F définie par

$$F: R^{+N} \ni \left(1, \frac{1}{m}\right) \mapsto \left(x_1, \dots, x_N\right) \in \left[\frac{1+x_1}{1+m x_1}, \dots, \frac{1+x_N}{1+m x_N}\right]. \quad (III.2.2.A.f)$$

On constate ainsi que la transformée finale de la sphère (figure III.e) dans l'espace de base $(K_c^i/K_f(x_i)-1)_{i=1, \dots, N}$ a une forme se rapprochant d'un sphéroïde d'ordre à déterminer. Comme l'on connaît la trace de ce dernier dans les plans de dimension 2 de base $\{(K_c^i/K_f(x_i)-1), (K_c^j/K_f(x_j)-1)\}_{i \neq j=1, \dots, N}$, trace identique quel que soit le couple (i, j) , on peut déterminer l'ordre du sphéroïde qui se rapproche le plus de la transformée finale de la sphère. On notera que ces plans correspondent aux conditions de propagation sous-critiques suivantes

$$\bigwedge_{i=1}^N \sum_{k \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i, j\}} t_k = 0, \quad \sum_{i=1}^N t_i = T. \quad (III.2.2.A.g)$$

Toutes les traces de la transformée finale sur les plans précédemment cités sont symétriques par rapport à la première bissectrice, et coupent les axes en $(1+(|CT|)^{1/m})/(1+m(|CT|)^{1/m}-1)$, point correspondant aux conditions

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{O}}_i = T \\ \dot{\mathbf{O}}_i = T \end{cases} \quad k \in \{1, \dots, N\}_{/ \{i\}}, \quad t_k = 0 \quad (III.2.2.A.h)$$

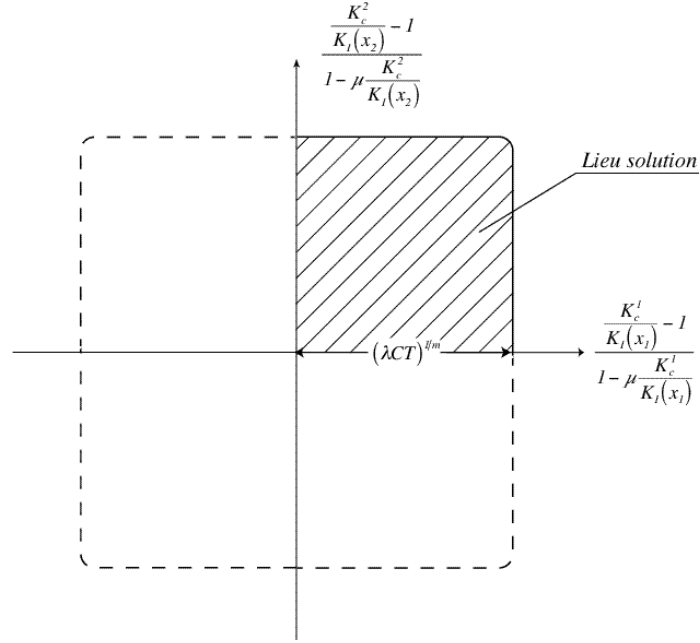


Figure III.f. Cas de deux grains. Transformée du disque solution par $G - m=52$.

Si l'on pose

$$t_j = t_i = \frac{T}{2} \text{ et } k \in \{1, \dots, N\}_{/ \{i, j\}}, \quad t_k = 0, \quad (III.2.2.A.i)$$

alors le point image dans l'espace final sera sur la première bissectrice du plan indicé par (i, j) . Si l'on assimile la trace de la surface solution à un sphéroïde d'ordre g , on peut déterminer cet ordre en résolvant le problème suivant

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{\mathbf{O}}_i \hat{\mathbf{E}}_1 + (|CT_1|)^{1/m}}{\hat{\mathbf{E}}_1 + m(|CT_1|)^{1/m}} - \frac{\hat{\mathbf{O}}_j \hat{\mathbf{E}}_1 + (|CT_2|)^{1/m}}{\hat{\mathbf{E}}_1 + m(|CT_2|)^{1/m}} - \frac{\hat{\mathbf{O}}_k \hat{\mathbf{E}}_1 + (|CT)^{1/m}}{\hat{\mathbf{E}}_1 + m(|CT)^{1/m}} - \frac{\hat{\mathbf{O}}_l \hat{\mathbf{E}}_1 + (|CT)^{1/m}}{\hat{\mathbf{E}}_1 + m(|CT)^{1/m}} \\ & \hat{\mathbf{O}}_1 = t_2 = \frac{T}{2} \end{aligned} \quad (III.2.2.A.j)$$

résolution qui nous donne

$$g = \frac{\ln 2}{\frac{\frac{K_c^2}{K_I(x_2)} - 1}{1 - \mu \frac{K_c^2}{K_I(x_2)}} \frac{1 + m \frac{C T}{2}}{1 + m (C T)^{1/m}}}. \quad (III.2.2.A.k)$$

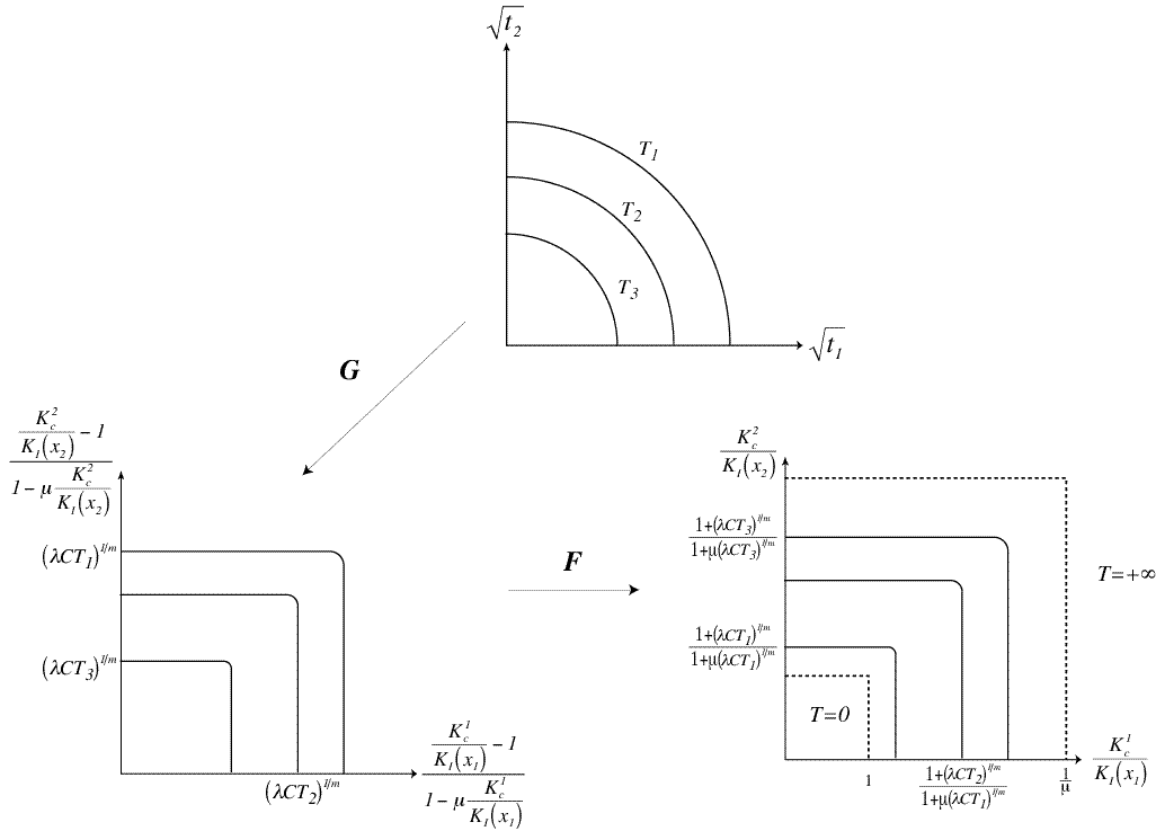


Figure III.g. Cas de deux grains. Changements successifs d'espaces de travail - $m=52$.

On peut dès lors remarquer que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} g &= +\infty \text{ (carré)} \\ \lim_{T \rightarrow 0} g &= m \text{ (sphéroïde tendant vers le carré pour } m \text{ assez grand)} \end{aligned} \quad (III.2.2.A.l)$$

Dans un cas à deux grains, la transformée du quart de disque initial (figure III.e) se rapproche d'un quart de sphéroïde dont l'ordre va croissant avec T (équation (III.2.2.A.l)). Si l'on approche toutes ces surfaces par des carrés (approximation d'autant plus valable que m , exposant de la loi d'Evans-Wiedehorn, est grand, et que T est important), alors on constate que tout le temps donné à la propagation sous-critique (i.e., au maximum T) pour la traversée de deux grains se trouve consommé par l'un d'entre eux uniquement. Ce raisonnement, par récurrence, s'applique également à un ensemble de N grains consécutifs (et indiscernables) et donc la condition de propagation sous critique (équation (III.2.2.A.b)) peut être réécrite

$$k \in \{1, \dots, N\}, K_I(x_k) \frac{1 + (l CT)^{1/m}}{1 + m(l CT)^{1/m}} > K_c^k, \quad (III.2.2.A.m)$$

ce qui nous permet d'écrire $P(a,b,T)$ par un raisonnement désormais habituel pour un nombre de grains traversés important (dans le cas contraire, un produit de probabilité doit être utilisé - équation (II.3.m))

$$P(a,b,T) \exp \left[\int_a^b \int_{K_c}^{\infty} K_I(x) \frac{1 + (l CT)^{1/m}}{1 + m(l CT)^{1/m}} > K_c^k dx \right] = \tilde{P}(a,b,T). \quad (III.2.2.A.n)$$

Ce résultat va maintenant être démontré de manière plus rigoureuse.

III. 2. 2. B. Propriétés asymptotiques de la variable aléatoire t_k

A présent que l'expression de la probabilité $P(a,b,T)$ a été déterminée de manière "empirique", nous allons voir que l'on peut retrouver cette expression par le biais d'une approche mathématique rigoureuse. Pour les valeurs importantes de T , nous pouvons déterminer la probabilité $P(t_k > T)$ que le temps t_k mis par la fissure pour casser le grain n°k du chemin de fissuration soit supérieur à T .

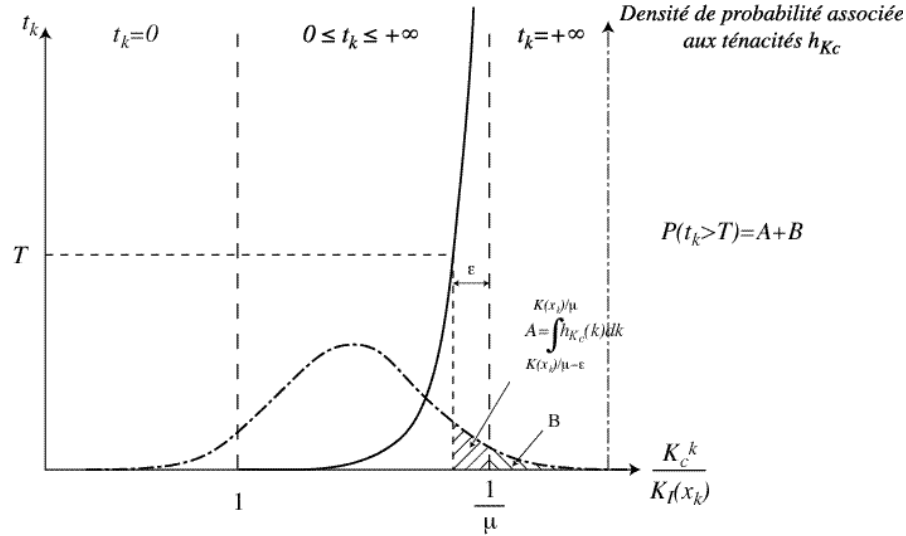


Figure III.h. Temps aléatoire t_k mis pour traverser le grain n°k.

Le facteur d'intensité des contraintes $K_I(x_k)$ correspondant au temps de propagation T (considéré comme grand) peut se mettre sous la forme (figure III.h)

$$\frac{K_c^k}{K_I(x_k)} = \frac{1}{m} - e, \quad (III.2.2.B.a)$$

avec e réel positif et petit. En utilisant les équations (III.2.2.B.a) et (III.2.2.b), nous pouvons relier T à la valeur de e

$$T = \frac{1}{C} \frac{\hat{E}_1 - \hat{m}^m}{\hat{E}} \quad (III.2.2.B.b)$$

Nous remarquerons que la probabilité $P(t_k > T)$ peut être décomposée en deux parties

$$P(t_k > T) = \int_{K_I(x_k)/m}^{K_I(x_k)/m} \dot{U}_{K_c}(k) dk + \int_{K_I(x_k)/m}^{+\infty} \dot{U}_{K_c}(k) dk = P(+\infty > t_k > T) + P(t_k = +\infty), (III.2.2.B.c)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}^A &= \int_{K_I(x_k)/m}^{K_I(x_k)/m} \dot{U}_{K_c}(k) dk \\ \hat{\Theta}^B &= \int_{K_I(x_k)/m}^{+\infty} \dot{U}_{K_c}(k) dk \end{aligned} \quad (III.2.2.B.d)$$

sont les deux aires hachurées sur la figure III.h. Pour les faibles valeurs de ϵ , A (ou $P(+\infty > t_k > T)$) peut être approché par son développement de Taylor au premier ordre

$$\int_{K_I(x_k)/m}^{K_I(x_k)/m} \dot{U}_{K_c}(k) dk \approx h_{K_c} \frac{\hat{E} K_I(x_k)}{\hat{E}} \frac{1}{m} \epsilon, \quad (III.2.2.B.e)$$

et ainsi

$$P(T < t_k < +\infty) \approx h_{K_c} \frac{\hat{E} K_I(x_k)}{\hat{E}} \frac{1}{m} \epsilon. \quad (III.2.2.B.f)$$

En utilisant de l'équation (III.2.2.B.b), $P(T < t_k < +\infty)$ peut alors être exprimée comme une fonction de T

$$P(T < t_k < +\infty) \approx h_{K_c} \frac{\hat{E} K_I(x_k)}{\hat{E}} \frac{1}{m} \frac{\hat{E} T^m}{\hat{E}} \quad (III.2.2.B.g)$$

où t est une constante définie à partir de l'équation (III.2.2.B.b)

$$t = \frac{\hat{E}_1 - \hat{m}^m}{\hat{E}} \frac{1}{C}. \quad (III.2.2.B.h)$$

L'équation (III.2.2.B.g) montre que, pour des fortes valeurs de T , la probabilité cumulée $P(T < t_k < +\infty)$ peut être remplacée par une simple loi puissance d'exposant $\underline{a}=1/m$. Cette propriété asymptotique va nous permettre de déterminer l'expression donnée en équation (III.2.2.c).

III. 2. 2. C. Probabilité de propagation sous-critique

Nous avons à considérer la somme de N variables aléatoires t_k , dont la probabilité cumulée a la forme asymptotique définie précédemment. Il est important de constater que

cette dernière est telle que l'on ne peut pas définir son écart type pour des valeurs de m supérieures à 1/2 et que même sa moyenne ne peut l'être dès que $m > 1$. Ce résultat interdit l'utilisation du théorème central limite dans la détermination de la somme considérée [LIN 22]. Cependant, pour des variables aléatoires u de probabilité cumulée telle que

$$P(u \geq U) \sim U^{-\underline{a}}, \quad (III.2.2.C.a)$$

Lévy a montré que la somme S_N (pondérée par $N^{1/\underline{a}}$) définie par [LEV 24 ; LEV 54]

$$S_N = \sum_{k=1}^N u_k, \quad (III.2.2.C.b)$$

converge vers une loi stable $\mathcal{L}_{\underline{a}}$ appelée loi de Lévy, et caractérisée par l'exposant $\underline{a}$; en d'autres termes

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = N^{1/\underline{a}} \mathcal{L}_{\underline{a}}(S_N^{1/\underline{a}}). \quad (III.2.2.C.c)$$

Nous ne détaillerons pas les propriétés de la fonction $\mathcal{L}_{\underline{a}}$, mais préciserons juste que si M_N caractérise la valeur maximale d'une suite de N variables aléatoires u_k de probabilité cumulée décrite par l'équation (III.2.2.C.a), i.e.

$$M_N = \max\{u_k / k \in \{1, \dots, N\}\}, \quad (III.2.2.C.d)$$

alors le rapport S_N/M_N converge pour des N importants [FEL 78]

$$\frac{S_N}{M_N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{1}{1 - \underline{a}}. \quad (III.2.2.C.e)$$

L'équation (III.2.2.C.e) nous permet ainsi d'approcher la somme S_N par la valeur maximale des éléments qui la composent. Appliqué au problème qui nous intéresse, cela implique que le temps dépensé par la fissure pour casser N grains consécutifs a été principalement utilisé pour casser l'un d'entre eux, i.e. celui dont le rapport $K_c^k/K_I(x_k)$ est maximal. Pour de fortes valeurs de N , nous pouvons alors en conclure que

$$P_{\hat{E}}^{\hat{E}} \sum_{k=1}^N u_k < \hat{U}^{-\underline{a}} P_{\hat{E}}^{\hat{E}} \max_{k \in \{1, \dots, N\}} u_k < (1 - \underline{a}) \hat{U}^{-\underline{a}}, \quad (III.2.2.C.f)$$

c'est-à-dire

$$P_{\hat{E}}^{\hat{E}} \sum_{k=1}^N t_k < \hat{T}^{-\underline{a}} P_{\hat{E}}^{\hat{E}} \max_{k \in \{1, \dots, N\}} t_k < \frac{\hat{E}}{\hat{E}_1} - \frac{1}{m} \hat{T}^{-\underline{a}}. \quad (III.2.2.C.g)$$

L'équation (III.2.2.C.g) est alors équivalente à

$$P_{\hat{E}}^{\hat{E}} \sum_{k=1}^N t_k < \hat{T}^{-\underline{a}} P_{\hat{E}}^{\hat{E}} \{k \in \{1, \dots, N\}, t_k < \frac{\hat{E}}{\hat{E}_1} - \frac{1}{m} \hat{T}^{-\underline{a}}\}, \quad (III.2.2.C.h)$$

et en utilisant le même raisonnement que celui qui nous a permis de déterminer l'expression de $P(a,b)$, $P(a,b,T)$ peut alors s'écrire

$$P(a,b,T) = \exp \left[- \int_a^b \int_0^T \int_0^m \frac{1 + \left(\frac{1}{m} \right)^{1/m} CT^{-1/m}}{1 + m \left(\frac{1}{m} \right)^{1/m} CT^{-1/m}} > K_c dx \right] \quad (III.2.2.C.i)$$

Nous pouvons faire quelques remarques sur ce résultat. Tout d'abord, les seuls paramètres introduits depuis la détermination de la probabilité de propagation à l'endurance (équation (III.2.1.e)) sont reliés à la loi de propagation sous-critique. Aucune autre variable aléatoire n'a été introduite. Ensuite, on remarquera que

$$\lim_{T \rightarrow 0} P(a,b,T) = \exp \left[- \int_a^b \int_0^T \int_0^m \left(P(K_I(x) > K_c) \right) dx \right] \quad (III.2.2.C.j)$$

et

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P(a,b,T) = \exp \left[- \int_a^b \int_0^T \int_0^m \frac{K_I(x)}{m} > K_c dx \right] \quad (III.2.2.C.k)$$

Ces deux dernières expressions montrent que la loi de propagation probabiliste déterminée (équation (III.2.2.C.i)) peut être utilisée quel que soit le temps de propagation considéré. La seule restriction concerne le nombre de grains traversés, qui doit *a priori* être suffisamment conséquent. L'étude préliminaire du chapitre III.2.2.A montre cependant que, pour un faible nombre de grains, l'expression est valable (et ce d'autant plus que T ou/et m est grand - équation (III.2.2.A.k)). Enfin, nous noterons que l'exposant de la loi d'Evans-Wiederhorn est généralement assez important [BRI 94], et ainsi, on peut approcher $1-1/m$ par 1 (pour $m=7$, 86% du temps est utilisé pour casser un grain). Nous retrouvons dès lors l'expression donnée dans le paragraphe III.2.2.A (équation ((III.2.2.A.n)) en approchant le résultat de l'équation (III.2.2.C.i)

$$P(a,b,T) = \exp \left[- \int_a^b \int_0^T \int_0^m \frac{1 + (1/CT)^{1/m}}{1 + m(1/CT)^{1/m}} > K_c dx \right] \quad (III.2.2.C.l)$$

Cette expression de $P(a,b,T)$ possède les mêmes limites que l'expression originale, données par les équations (III.2.2.C.j) et (III.2.2.C.k).

III. 2. 2. D. Distribution induites

En se basant sur l'expression de $P(a,b,T)$, nous pouvons déterminer les expressions des probabilités $P_{a,b}(T)$ que la fissure se propage de la longueur a à la longueur b en un temps compris entre T et $T+dT$, ainsi que la probabilité $P_{a,T}(b)$ que la fissure initialement de

longueur a se propage jusqu'à une longueur comprise entre b et $b+db$ en un temps inférieur à T . En effet, ces expressions ne sont que les dérivées partielles de l'équation (III.2.2.C.1)

$$P_{a,b}(T) = - \frac{\partial P(a, b, T)}{\partial T}, \quad (III.2.2.D.a)$$

et

$$P_{a,T}(b) = - \frac{\partial P(a, b, T)}{\partial b}. \quad (III.2.2.D.b)$$

III. 2. 3. Probabilité de propagation sous-critique alternée

Par un raisonnement analogue à celui effectué dans le paragraphe III.2.2, nous pouvons étendre le modèle de propagation probabiliste au cas de chargements alternés périodiques : la forme de la loi de vitesse de propagation est alors très proche de celle d'Evans-Wiederhorn, et donc, tout raisonnement qui sera effectué dans le présent paragraphe sera identique aux précédents.

Considérons un chargement cyclique de direction constante, appliqué sur une fissure de longueur x , soumise à un mode I quel que soit le niveau de contrainte. Le chargement appliqué peut être défini par les constantes S_{min} et S_{max} , valeurs respectivement minimales et maximales du chargement appliqué. Le facteur d'intensité des contraintes en pointe de fissure est également défini par ces deux paramètres. Soit $\underline{R}$ le rapport de charge, donné par

$$\underline{R} = \frac{S_{min}}{S_{max}}. \quad (III.2.3.a)$$

La vitesse de propagation stable (i.e., lorsque $K_c > K_I(x) > K_s$) de la fissure au bout de N cycles du chargement peut alors être définie, pour les matériaux ductiles (métaux et alliages), par [PEL 77 ; CHA 00a]

$$\frac{dx}{dN} = C \frac{\hat{K}_I^{max}(x) g(\underline{R}) - K_s}{\hat{K}_c - K_I^{max}(x)}^m, \quad (III.2.3.b)$$

où $g(\underline{R})$ est une fonction bijective dépendant uniquement du rapport de charge $\underline{R}$, C et m sont des paramètres dépendant du matériaux et de l'environnement de la fissure (ils n'ont en fait pas les mêmes valeurs que dans le cas d'un chargement constant au cours du temps, i.e. pour $\underline{R}=1$), $\langle \cdot \rangle$ les crochets de Macauley, et $K_I^{max}(x)$ le facteur d'intensité des contraintes maximal (i.e., fonction de S_{max}). La forme de g est donnée par Pellas et al. [PEL 77] comme étant égale à

$$g(\underline{R}) = \frac{1 - \underline{R}}{1 - c \underline{R}}, \quad (III.2.3.c)$$

où C est un paramètre adimensionnel. Pour les matériaux fragiles, la fonction g est égale à 1 quelle que soit la valeur de R . Nous pouvons réécrire l'équation (III.2.3.b), en considérant la relation linéaire entre K_c et K_s (équation (III.2.1.c)), par

$$\frac{dx}{dN} = C \frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x) - m \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c - \hat{K}_I^{max}(x)} \quad (III.2.3.d)$$

Dans un cas général, en considérant la possible fissuration sous-critique au sein de matériaux ductiles, nous pouvons en déduire la probabilité qu'une fissure se propage d'une longueur a à une longueur b en un nombre de cycle inférieur à N , sous un chargement caractérisé par le facteur d'intensité des contraintes maximal $K_I^{max}(x)$ et le rapport de charge R ($g(R)$ étant alors pris égale à un pour les matériaux fragiles)

$$P(a, b, N) = \exp \left[- \int_a^b \int_0^N \frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x) - m \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c - \hat{K}_I^{max}(x)} \frac{1 + g(R) \left(\frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x)} - \frac{1}{m} \right) \left(\frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x)} \right)^{1/m}}{1 + m \left(\frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x)} - \frac{1}{m} \right) \left(\frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x)} \right)^{1/m}} > K_c \right] dx \quad (III.2.3.e)$$

ce qui peut être réécrit et simplifié de par le fait que pour des valeurs importantes de m , $(1 - 1/m)^m \approx 1$

$$P(a, b, N) = \exp \left[- \int_a^b \int_0^N \frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x) - m \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c - \hat{K}_I^{max}(x)} \frac{1 + g(R) \left(\frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x)} - \frac{1}{m} \right) \left(\frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x)} \right)^{1/m}}{1 + m \left(\frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x)} - \frac{1}{m} \right) \left(\frac{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_c}{\hat{E} \hat{A} \hat{K}_I^{max}(x)} \right)^{1/m}} > K_c \right] dx \quad (III.2.3.f)$$

Nous pouvons déduire de cette expression les probabilités $P_{a,b}(N)$ qu'une fissure atteigne au moins la longueur b au bout d'un nombre de cycle compris entre N et $N+dN$ cycles et $P_{a,N}(b)$ qu'une fissure atteigne une longueur comprise entre b et $b+db$ en un nombre de cycle inférieur à N cycles

$$P_{a,b}(N) = - \frac{\partial P(a, b, N)}{\partial N}, \quad (III.2.3.g)$$

et

$$P_{a,N}(b) = - \frac{\partial P(a, b, N)}{\partial b}. \quad (III.2.3.h)$$

Si l'on relie le nombre de cycles N au temps de l'essai T par

$$\frac{T}{t} = N, \quad (III.2.3.i)$$

où t est la période du chargement appliqué, alors l'équation (III.2.3.d) devient, pour les matériaux fragiles ($g(R)=1$),

$$\frac{dx}{dT} = \frac{C}{t} \frac{\hat{E} / K_I^{max}(x) - K_s}{\hat{E} / K_c - K_I^{max}(x)} \quad (III.2.3.j)$$

On peut alors relier les équations (III.2.2.C.l) et (III.2.3.f) : sous un chargement cyclique de période t , la probabilité qu'une fissure puisse se propager d'une longueur a à une longueur b en un temps inférieur à T s'écrit

$$P(a, b, T) = \exp \left\{ - \int_a^b \frac{\hat{E} / K_I^{max}(x) - K_s}{\hat{E} / K_c - K_I^{max}(x)} \frac{1 + \frac{\hat{E} CT^{1/m}}{t}}{1 + \frac{\hat{E} CT^{1/m}}{t}} > K_c dx \right\} \quad (III.2.3.k)$$

On constate dès lors que, si le chargement alterné considéré ci-dessus tend vers un chargement constant (i.e. $K_I^{max}(x)$ tend vers $K_I(x)$), alors l'équation (III.2.3.k) tend vers l'équation (III.2.2.C.l)

$$\lim_{K_I^{max}(x) \rightarrow K_I(x)} P(a, b, \frac{T}{t}) = P(a, b, T). \quad (III.1.3.l)$$

L'équation (III.1.3.l) montre que les résultats obtenus en considérant une propagation sous-critique en fatigue cyclique incluent, en théorie du moins, les résultats que nous avons obtenus dans le cas de la propagation sous-critique statique. Ces derniers, comme nous l'avons déjà noté au paragraphe III.2.2 (équations (III.2.2.C.j) et (III.2.2.C.k)), permettent également de retrouver les résultats associés à une propagation brutale. Ainsi, le modèle que nous étudions permet une augmentation du nombre de phénomènes étudiés (en termes de type de propagation), et tous les résultats établis dans ce chapitre incluent les résultats associés à des conditions de propagations plus restrictives.

III. 3. Prise en compte de l'amorçage

III. 3. 1. Amorçage dans un cas général

Afin de parfaire le modèle de propagation de fissure, le problème de l'amorçage, et de sa prise en compte doit être abordé. Nous reprendrons pour cela les hypothèses de bases de la statistique de Weibull : les fissures s'amorcent à partir de défauts intrinsèquement présents dans le matériau (générés en général par le frittage dans le cas des céramiques). Ces derniers sont répartis de manière aléatoire de par leurs tailles, leurs localisations et orientations (bien que pouvant être fortement corrélées aux caractéristiques des poudres utilisées). Leur longueur a est caractérisée par une densité de probabilité, notée h_a , bornée par les constantes positives finies a_{min} et a_{max} . De plus, on peut définir leur valeur moyenne et leur écart type. Dans une situation où la ténacité du matériau est déterministe, un défaut pourra propager si (équation (I.4.3.i))

$$a \geq \frac{\hat{E} K_c}{E Y_{S_{eq}}} \sim^2, \quad (III.3.1.a)$$

avec les mêmes notations que dans le paragraphe I.4.3. Comme les tailles de défaut a sont aléatoires, chercher la probabilité d'amorçage P_a revient à déterminer

$$P_a = \int_{\frac{K_c}{Y_{S_{eq}}}}^{a_{max}} h_a(a) da = P(a > a_c). \quad (III.3.1.b)$$

Dans la mesure où nous considérons la ténacité comme *aléatoire*, la condition d'amorçage (en un lieu donné) devient

$$P_a = \int_{K_c^{\min}}^{K_c^{\max}} h_{K_c}(K) \int_{\frac{K}{Y_{S_{eq}}}}^{a_{max}} h_a(a) da dK. \quad (III.3.1.c)$$

Si de plus nous considérons la propagation post-amorçage, il faudra donc inclure les conditions de propagation. La probabilité $P(b)$ de trouver une fissure de longueur b dans le matériau s'écrit

$$P(b) = P(\text{amorçage localisé et propagation jusqu'à une longueur } b), \quad (III.3.1.d)$$

ce qui est équivalent à

$$P(b) = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} h_a(a) P(a, b) da. \quad (III.3.1.e)$$

Ceci n'est valable que lorsque l'on considère que l'amorçage a lieu dans un élément de volume bien précis. Lorsque l'on considère une dispersion sur les lieux d'amorçage dans une structure W , alors la probabilité de rupture de la structure s'écrit

$$P_R = 1 - \exp \left\{ - \frac{1}{V_0} \int_W \int_{a_{\min}}^{\hat{a}_{max}} h_a(a) P(\partial(dV), \partial W) da dV \right\}, \quad (III.3.1.f)$$

avec V_0 volume élémentaire ayant la même signification que dans la statistique de Weibull, et $P(\partial(dV), \partial W)$ probabilité de propagation d'une fissure amorcée dans le volume dV , qui est localisé de manière quelconque et possédant une frontière notée $\partial(dV)$, jusqu'à la frontière extérieure ∂W de la structure (figure III.i).

Nous nous devons de remarquer que l'expression (III.3.1.f) ne peut facilement être utilisable dans un cas général, que ce soit au niveau théorique ou numérique. Comme cas particulier, nous pouvons déterminer l'expression de rupture d'une structure soumise à de la traction pure (le facteur d'intensité des contraintes est alors strictement croissant avec la longueur de la fissure)

$$P_R = 1 - \exp \left[- \frac{1}{V_0} \int_{a_{min}}^{a_{max}} \int_{\partial V} h_a(a) P(a, \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{YS_{eq}}} \frac{\hat{K}_c^{max}}{\hat{K}_c} da \cdot dV \right], \quad (III.3.1.g)$$

où

$$P(a, \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_{YS_{eq}}} \frac{\hat{K}_c^{max}}{\hat{K}_c} = \exp \left[- \int_a^{K_c^{max}/\hat{\sigma}_{YS_{eq}}} P(s_{eq} Y \sqrt{x} > K_c) dx \right]. \quad (III.3.1.h)$$

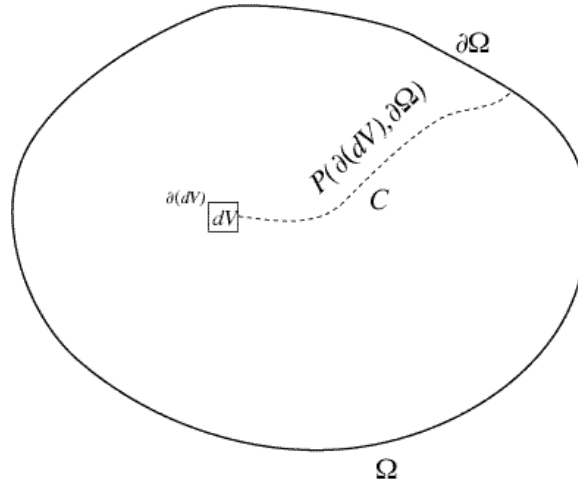


Figure III.i. Probabilité de rupture d'une structure avec lieu d'amorçage déterministe.

L'expression (III.3.1.g) permet de mieux prendre en compte tous les facteurs de dispersion lors de la rupture en traction d'une éprouvette, et ainsi de parfaire notre connaissance du comportement à rupture des matériaux fragiles. Ce point sera étudié de manière pratique dans le chapitre suivant.

III. 3. 2. Amorçage près d'un point singulier

Un cas particulier de l'amorçage concerne la présence d'un champ de contrainte singulier (c'est en fait le cas dans l'assemblage étudié - paragraphe I.3.2). On a déjà vu (paragraphe I.4.5) la bonne correspondance entre la statistique de Weibull et les zones expérimentales d'amorçage. En fait, la statistique de Weibull et l'hypothèse du maillon le plus faible nous permettent de déterminer très simplement la probabilité d'amorçage au voisinage d'un point singulier (figure III.j). Le champ de contrainte équivalente au voisinage d'un tel point s'écrit

$$s_{eq}(M) = \frac{A}{r^p} g(q), \quad (III.3.2.a)$$

où A est une constante (positive et non nulle), g une fonction de forme dépendant uniquement de l'angle q , et p est l'exposant de la singularité (avec $p \in]0,1[$), qui dépend de la géométrie du point singulier et, dans le cas d'une singularité générée par des bimatériaux, des propriétés

mécaniques et géométriques des deux matériaux assemblés. Si l'on calcule la probabilité d'amorçage $P_R(a,b)$ d'une fissure dans la couronne repérée par les rayons a et b (figure III.j) par la statistique de Weibull, on obtient, lorsque $pn \geq 2$,

$$P_R(a,b) = 1 - \exp \left\{ - \frac{C_n}{V_0} \frac{b^{2-pn} - a^{2-pn}}{2-pn} \right\}, \quad (III.3.2.b)$$

et si $pn = 2$

$$P_R(a,b) = 1 - \exp \left\{ - \frac{C_n}{V_0} \ln \frac{b}{a} \right\}, \quad (III.3.2.c)$$

avec C_n constante générée par l'intégration de l'équation (III.3.2.a)

$$C_n = \frac{A^n}{S_0^n} \int_0^1 \langle g(q) \rangle^n dq. \quad (III.3.2.d)$$

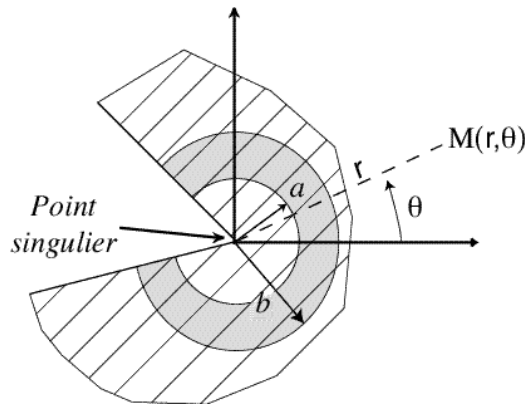


Figure III.j. Probabilité d'amorçage au voisinage d'un point singulier.

En faisant tendre a vers 0, on obtient la probabilité d'amorçage au voisinage d'un point singulier : cette probabilité ne dépend que du produit pn , i.e. entre le module de Weibull et l'exposant p de la singularité. Ainsi, lorsque $pn \geq 2$, alors

$$\lim_{a \rightarrow 0} P_R(a,b) = 1, \quad (III.3.2.e)$$

et si $pn < 2$

$$\lim_{a \rightarrow 0} P_R(a,b) < 1. \quad (III.3.2.f)$$

L'équation (III.3.2.e) signifie que si le produit pn est supérieur à deux, alors il y aura de manière certaine amorçage au voisinage de la singularité. On notera que nulle part n'intervient l'aléa sur les ténacités (ceci est dû au fait que l'on utilise la statistique de Weibull) : la ténacité intervient uniquement sur la valeur de S_0 (et donc dans la constante C_n - équations (III.3.2.b) et (III.3.2.c)), qui correspondrait à la contrainte à rupture du matériau si son comportement à

la rupture était déterministe. Dès lors, si l'on se retrouve dans une configuration où $pn \geq 2$, quelle que soit la ténacité considérée au voisinage du défaut qui propage, la probabilité d'amorçage est unitaire. Cela implique une probabilité d'amorçage également unitaire au voisinage du point singulier lorsque l'aléa sur les ténacités est de plus considéré (équation (III.3.1.c)). Nous noterons que cet aléa intervient également (et de manière beaucoup plus sensible) une fois l'amorçage effectué, soit lors de la propagation (et de l'éventuel arrêt) de la fissure.

Remarque

Dans certains cas, le champ de contrainte équivalente près d'un point singulier s'écrit [SUO 90a]

$$s_{eq}(M) = \frac{A}{r^p} g(\ln(r), q), \quad (III.3.2.g)$$

où g est alors une fonction adimensionnelle périodique par rapport à $\ln(r)$. Dans ce type de situation, les conclusions précédentes s'appliquent également (Annexe 2).

III. 3. 3. Cas de la singularité épine

Un cas particulier des singularités a été identifié par Bui et Taheri [BUI 89], appelé singularité épine (ou faible). Elle apparaît à l'interface de structures (brasées ou soudées) dont les matériaux constitutifs ne diffèrent que par le coefficient de dilatation thermique. Par extension, elles sont également générées dans des structures composées de matériaux identiques, mais soumises à des déformations libres différentes (figure III.k).

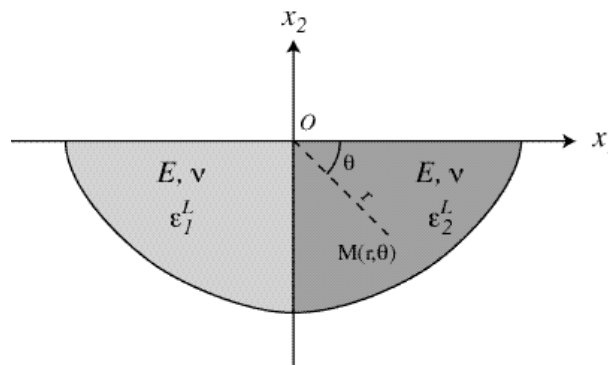


Figure III.k. Singularité épine.

Dans ce type de configuration, on peut déterminer le champ de contrainte au voisinage du point singulier (i.e., dans la figure III.k, l'origine O) : on constate que les contraintes restent finies, mais sont discontinues au passage du point singulier (tableau III.a).

Tableau III.a. Champ de contrainte solution au voisinage d'une singularité épine [GUI 98].

$-p \leq q < -\frac{p}{2} \quad (x_1 < 0)$	$-\frac{p}{2} \leq q \leq 0 \quad (x_1 > 0)$
$s_{11} = \frac{EDT}{1-n} \frac{Da_{mat}}{p} \frac{\hat{E}_p}{\hat{E}_2} + q - \frac{1}{2} \sin(2q)$	
$s_{22} = \frac{EDT}{1-n} \frac{Da_{mat}}{p} \frac{\hat{E}_p}{\hat{E}} + q - \frac{1}{2} \sin(2q)$	$s_{22} = \frac{EDT}{1-n} \frac{Da_{mat}}{p} \frac{\hat{E}_q}{\hat{E}} - \frac{1}{2} \sin(2q)$
$s_{12} = \frac{EDT}{1-n} \frac{Da_{mat}}{p} (1 - \cos(2q))$	

Sur le tableau (III.a) sont reportées les contraintes théoriques calculées sous des hypothèses de déformations planes dans le cas de deux matériaux de mêmes caractéristiques mécaniques hormis le coefficient de dilatation thermique. Pour ce type de singularités, les contraintes s_{22} et s_{33} (par l'hypothèse de déformations planes) sont discontinues. La probabilité d'amorçage au voisinage du point "singulier", calculée à l'aide de la statistique de Weibull, n'est pas unitaire : sa détermination, dans un cas général, devra être effectuée à l'aide d'un calcul aux éléments finis. On notera que, dans cette approche, les contraintes numériques dans les éléments finis ayant le point singulier comme sommet divergent [LEV 91 ; GUI 98].

III. 4. Conclusion

Le modèle de propagation généralisé dans ce chapitre, en se basant sur des hypothèses relativement simples, permet d'intégrer de nombreux phénomènes liés à la dégradation de structures par fissuration : amorçage de fissure, leur propagation brutale et leur arrêt, la propagation sous-critique engendrée par une fatigue statique ou alternée. De plus, seuls sont introduits comme paramètres supplémentaires par rapport aux études de fatigue classique ou de rupture brutale une fonction caractérisant l'aléa que l'on a privilégié, c'est-à-dire celui concernant la ténacité. La densité de probabilité qui lui est associée se doit d'être identifiée, et, avant toute utilisation ultérieure du modèle présenté dans les deux parties précédentes, une procédure de validation doit être mise en œuvre. C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre IV

Identifications - Validation

Lors de l'élaboration du modèle probabiliste de propagation de fissure, et de l'ajout d'hypothèses qui permettent de prendre en compte des phénomènes autres que la propagation brutale (i.e., la propagation sous-critique), nous n'avons introduit qu'une seule fonction nouvelle (les autres paramètres utilisés ayant déjà été introduits antérieurement). Cette fonction, la densité de probabilité associée aux ténacités h_{K_c} doit être identifiée. Nous supposons pour cela que cette fonction est, de même que dans le paragraphe II.5.4.A., une loi Bêta incomplète [SPA 87], définie par quatre paramètres a , b , K_c^{min} et K_c^{max}

$$h_{K_c}(K) = \frac{(K - K_c^{min})^{a-1} (K_c^{max} - K)^{b-1}}{(K_c^{max} - K_c^{min})^{a+b-1} B(a, b)}, \quad (IV.a)$$

avec $a > 0$ et $b > 0$. Une telle fonction a l'avantage d'être une répartition bornée (par les réels K_c^{min} et K_c^{max}), contrairement à la plupart des fonctions de répartitions classiques (loi de Poisson, Gauss, etc.). La moyenne $\bar{K}_c$ et l'écart type $\overline{K_c^2}$ s'expriment en fonction de ces quatre paramètres (équation (II.5.4.A.f))

$$\begin{aligned} \bar{K}_c &= \frac{a}{a+b} K_c^{max} + \frac{b}{a+b} K_c^{min} \\ \overline{K_c^2} &= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} (K_c^{max} - K_c^{min})^2. \end{aligned} \quad (IV.b)$$

C'est cette fonction, plus précisément les quatre paramètres qui la définissent, que nous allons nous efforcer, dans ce qui suit, d'identifier.

IV. 1. Principe de l'identification

Dans la mesure où nous nous intéressons à une grandeur locale, la ténacité, par hypothèse constante sur le grain, des essais de caractérisations macroscopiques sont exclus (en outre, ces essais sont délicats à réaliser en raison du caractère fragile des matériaux étudiés). Des essais de micro-indentation (de type Vickers par exemple [PET 01]) peuvent nous permettre de mener à bien cette identification : l'échelle de cet essai est faible, et ne met pas en danger la structure indentée du point de vue de son intégrité structurale (du moins au niveau macroscopique). De plus, nous pouvons facilement relier les mesures à la valeur de la ténacité locale du matériau indenté [PAL 57].

Le principe d'un tel essai est relativement simple. Lorsque l'on indente un matériau fragile par un indenteur à base carrée (Vickers) se crée tout d'abord une marque irréversible, et des fissures se créent en dessous de cette empreinte. Lors de la remontée de l'indenteur (et de la décharge de la zone indentée), ces fissures se propagent et débouchent au niveau de la surface. L'expérimentateur peut alors observer aux alentours de la marque carrée laissée par l'indenteur les traces des fissures semblant être générées à partir des coins de cette empreinte (figure IV.a).

Fissures générées par l'indentation

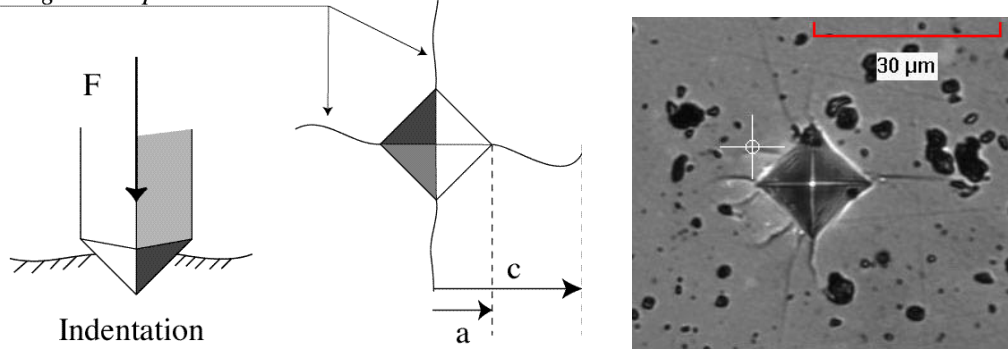


Figure IV.a. Indentation d'un matériau fragile - Exemple du S-SiC pour un effort $F=4,9$ N.

Lors de l'indentation, deux types principaux de fissures peuvent être générés (figure IV.b) : des fissures radiales (cas le plus courant), ou des fissures de type Palmqvist (dans de très rares cas, par exemple pour les cermets WC-CO, ou encore lorsque le rapport $c/2a$ est inférieur à 1).

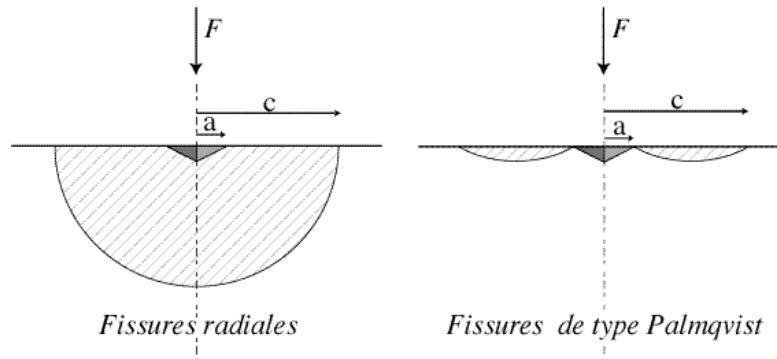


Figure IV.b. Deux types de fissures susceptibles d'être générés par un indenteur Vickers.

À partir de la taille de l'empreinte a , de la longueur de la fissure c , et de la charge appliquée F (figure IV.a), nous pouvons déterminer la ténacité en pointe de chaque fissure générée par l'essai [PON 89a ; 89b]. Les relations, nombreuses, entre ténacité et longueur de fissure peuvent se résumer en deux grandes familles (pour $c/2a > 1$ et un mode de fissuration radial)

$$\begin{aligned} \hat{K}_c &= k(a, H_v) \frac{F}{c^{3/2}} \\ \hat{K}_c &= k(a, H_v) \frac{F}{\sqrt{c}} \end{aligned} \quad (IV.1.a)$$

où $k(a, H_v)$ est un paramètre qui dépend *a priori* de la charge appliquée F (par l'intermédiaire de la taille de l'empreinte a) et du matériau par ses caractéristiques mécaniques (par exemple sa dureté H_v). Laval [LAV 95] et Carbonneau [CAR 97] utilisent cependant une relation linéaire entre la ténacité et le rapport $F/c^{3/2}$ de manière préférentielle, en accord avec des études antérieures [MAR 79]. Nous suivons leur démarche. En nous transposant dans un cas bidimensionnel (approximation effectuée par tous les auteurs qui étudient les relations entre

ténacité et indentation), nous pouvons déterminer le facteur d'intensité des contraintes associé à la propagation d'une fissure générée par indentation

$$K_I(x) = k(a, H_v) \frac{F}{x^{3/2}}, \quad (IV.1.b)$$

où x est la longueur de la fissure (abstraction faite de la propagation tridimensionnelle), dont la valeur est comprise entre 0 et c (figure IV.a). Lorsque cette expression est insérée dans le modèle probabiliste de propagation que l'on a établi pour la propagation brutale (équation (II.4.k)), on obtient l'expression de la probabilité $P(c)$ que l'essai d'indentation génère une fissure de longueur c

$$P(c) = \exp \left[- \int_0^c \frac{k(a, H_v) F}{x^{3/2}} dx \right], \quad (IV.1.c)$$

avec

$$P \left(\frac{k(a, H_v) F}{x^{3/2}} > K_c \right) = \int_{K_c^{\min}}^{k(a, H_v) F / x^{3/2}} \frac{(K_c^{\max} - K)^{a-1} (K - K_c^{\min})^{b-1}}{(K_c^{\max} - K_c^{\min})^{a+b-1} B(a, b)} dK, \quad (IV.1.d)$$

et $1/l$ la taille de grain du milieu considéré. En effectuant le changement de variable

$$k = \frac{K_c^{\max} - K}{K_c^{\max} - K_c^{\min}}, \quad (IV.1.e)$$

l'équation (IV.1.d) peut être réécrite

$$P \left(\frac{k(a, H_v) F}{x^{3/2}} > K_c \right) = \int_0^1 \frac{k^{a-1} (1-k)^{b-1}}{B(a, b)} dk. \quad (IV.1.f)$$

On remarque ainsi que la probabilité de création d'une (trace de) fissure de longueur c par un essai d'indentation est uniquement déterminée par quatre paramètres adimensionnels

$$\begin{aligned} & a \\ & b \\ & \frac{K_c^{\min}}{K_c^{\max} - K_c^{\min}} \\ & \frac{k(a, H_v)}{K_c^{\max} - K_c^{\min}} F l^{3/2} \end{aligned} \quad (IV.1.g)$$

Les trois premiers paramètres adimensionnels sont, dans le cadre de la modélisation utilisée, intrinsèquement liés au matériau, plus précisément à la dispersion des ténacités d'un grain à l'autre. Le dernier paramètre, quant à lui, caractérise le type d'essai que l'on a effectué (nous remarquerons ainsi que si l'on change l'expression du facteur d'intensité des contraintes, donc

l'essai étudié, seul ce dernier paramètre est affecté). Comme nous l'avions déjà remarqué précédemment (paragraphe II.3), l'expression (IV.1.c) n'est valable que lorsque le nombre de grains traversés par la fissure est suffisant. Du fait de la forte décroissance du facteur d'intensité des contraintes utilisé ici (équation (IV.1.b)), ce peut ne pas être le cas pour certains matériaux. Ainsi, l'expression de $P(c)$ devient discontinue et discrète (moyennant un point d'amorçage déterministe à un joint de grain)

$$P(c) = \begin{cases} \frac{\hat{E}}{\hat{E}} (1-d) P \frac{\hat{E} k F(a, H_v)}{\hat{E} c^{3/2}} > K_{c-} \hat{c} + d \cdot \sum_{i=1}^{E(l c)} \frac{\hat{E} k(a, H_v) F l^{3/2}}{\hat{E} i^{3/2}} > K_{c-} \hat{c}, & (IV.1.h) \end{cases}$$

avec $E(x)$ la partie entière de x , et d est tel que

$$d = \frac{\hat{E} E(l c) \hat{c}}{\hat{E} l c} = \begin{cases} 1 & \text{si } E(l c) = l c \\ 0 & \text{si } E(l c) \neq l c \end{cases} \quad (IV.1.i)$$

$E(l c) + d$ étant alors le nombre de grains rencontrés par la fissure. Ce sont donc les quatre paramètres que nous avons extraits (équation (IV.1.g)) que nous allons pouvoir identifier à l'aide d'essais de micro-indentation. Nous remarquerons que, du fait de la forme de la densité de probabilité associée aux ténacités (que l'on a postulée et qui introduit quatre paramètres inconnus), et de l'essai utilisé, qui conduit à un paramètre supplémentaire (la fonction $k(a, H_v)$), les résultats expérimentaux seuls ne nous permettront pas de déterminer entièrement la fonction h_{K_c} . Nous discuterons de ce problème ultérieurement.

IV. 2. Mise en œuvre

Des essais de micro-dureté ont été effectués sur plusieurs matériaux, en premier lieu l'alumine (de même nuance que celle utilisé dans l'assemblage étudié, i.e., à 97% de pureté), et le carbure de silicium (obtenu par frittage naturel, ou S-SiC). Pour ces deux matériaux, quatre efforts différents ont été appliqués sur des échantillons aux surfaces préalablement polies : 2 N, 2,9 N, 4,9 N et 9,8 N. Ces différents essais ont été effectués au CTA d'Arcueil. Pour chaque charge appliquée, les longueurs des fissures c ont été mesurées (dans le cas où cela s'est avéré possible : plus la charge est faible et/ou le matériau est dur, moins ces longueurs sont importantes et donc plus leur mesure est délicate). Par la suite, en séparant ces longueurs suivant les charges auxquelles elles correspondent, un indice leur est affecté en fonction de leur taille

$$c_1 < c_2 < \dots < c_n, \quad (IV.2.a)$$

n étant ici le nombre de longueurs mesurées pour la charge considérée. A chaque longueur c_i est affectée une probabilité cumulée expérimentale

$$P(c \geq c_i) = 1 - \frac{i}{n+1}, \quad (IV.2.b)$$

avec $P(c \geq c_i)$ probabilité expérimentale que l'essai considéré génère une fissure de longueur supérieure à c_i . Enfin, en considérant la charge qui a généré le plus de données expérimentales, les quatre paramètres adimensionnels (équation (IV.1.g)) sont identifiés à l'aide d'une procédure de minimisation aux moindres carrés reliant les probabilités cumulées expérimentales (équation (IV.2.b)) et théoriques (équation (IV.1.C) ou (IV.1.h) suivant la valeur de l).

IV. 2. 1. Résultats pour l'alumine

Les résultats des essais d'indentation, en termes de probabilité expérimentale cumulée que l'essai (et la charge) génère une fissure, sont présentés figure IV.c.

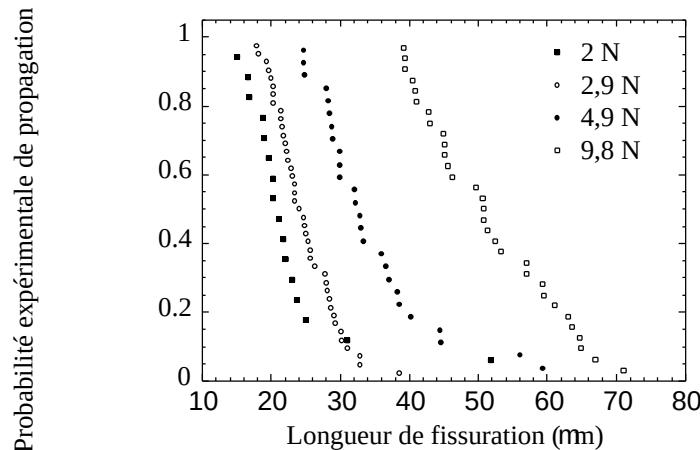


Figure IV.c. Longueur des fissures générées par indentation de l'alumine.

Les essais associés à la charge appliquée de 2,9 N ayant généré le plus de données expérimentales, les quatre paramètres adimensionnels (équation (IV.1.g)) vont être identifiés à partir de ces derniers (tableau IV.a), et ce en postulant que la longueur moyenne des grains du milieu est égale à 2 mm [GUI 98].

Tableau IV.a. Paramètres du modèle de propagation pour l'alumine.

$l \text{ (m}^{-1}\text{)}$	a	b	$\frac{K_c^{\min}}{K_c^{\max} - K_c^{\min}}$	$\frac{k(a, H_v) l^{3/2}}{K_c^{\max} - K_c^{\min}} \text{ (N}^{-1}\text{)}$
5.10^5	2,8	9,1	0	4,5

On constate que parmi les paramètres identifiés (non uniques du fait de la procédure d'obtention), la valeur minimale de la fonction de répartition des ténacités est nulle. Cela signifie que l'on peut trouver des grains de résistance aussi faible que l'on veut avec une probabilité non nulle, mais qu'un grain de ténacité nulle se rencontre avec une probabilité nulle (ceci est le pendant de la nullité courante du paramètre S_u dans le modèle de Weibull – équation (I.5.4.j)). En identifiant ensuite uniquement le paramètre d'indentation $k(a, H_v)$ pour

les autres charges (les autres paramètres étant censés être intrinsèques au matériau et donc indépendants de la charge appliquée), on se rend alors compte que, pour la gamme de chargement utilisée pour les essais, celui-ci est quasiment constant (figure IV.d.). Nous noterons que l'utilisation de faibles charges pour l'essai d'indentation se révèle délicat, dans la mesure où la détermination des longueurs des fissures générées peut ne pas être possible (du fait de la faible ouverture de ces dernières). Cette remarque peut expliquer les variations observées.

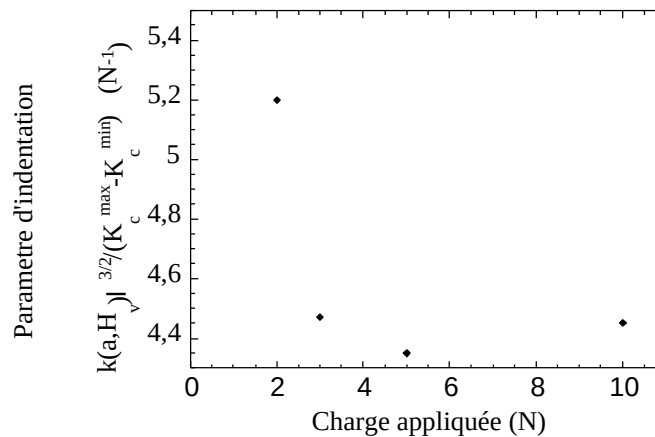


Figure IV.d. Paramètre d'indentation pour l'alumine.

En utilisant une valeur moyenne pour $k(a, H_v)$, nous obtenons alors une bonne adéquation entre théorie et expérience (figure IV.e.).

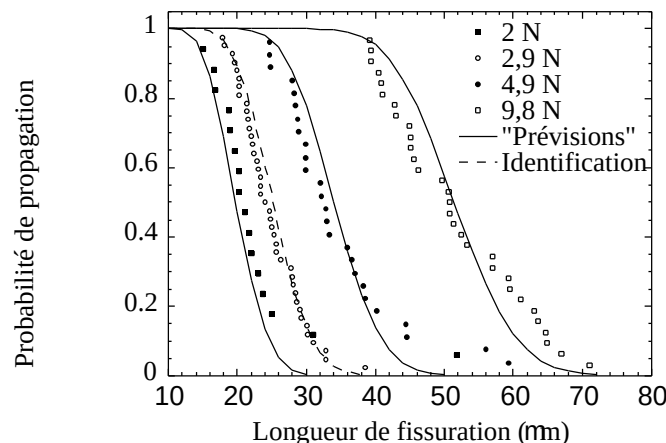


Figure IV.e. Application du modèle de propagation de fissure au cas de la micro-indentation de l'alumine.

Les courbes repérées par le terme "prévision" sont en fait des prévisions *a posteriori*, après que nous ayons eu connaissance de la relative constance du paramètre d'indentation par rapport à la charge appliquée. Nous pouvons dès à présent conclure quant à la relative pertinence du modèle établi par rapport au type d'essai réalisé : les paramètres de la densité de probabilité associée aux ténacités permettent d'appréhender correctement les dispersions relatives aux résultats de la micro-indentation, du moins pour l'alumine et la gamme de

charge utilisée. Nous remarquerons que pour ce matériau, nous avons utilisé l'expression continue de la probabilité de propagation (équation (IV.1.c)) : la zone de dispersion des fissures créées par indentation est, au minimum, de l'ordre d'une dizaine de grains, et l'écart entre les formulations discrète et continue de la probabilité est alors au plus de 10%.

IV. 2. 2. Résultats associés au carbure de silicium

Dans les mêmes conditions que précédemment ont été réalisés des essais de micro-indentation sur du S-SiC, dont les résultats sont montrés sur la figure IV.f.

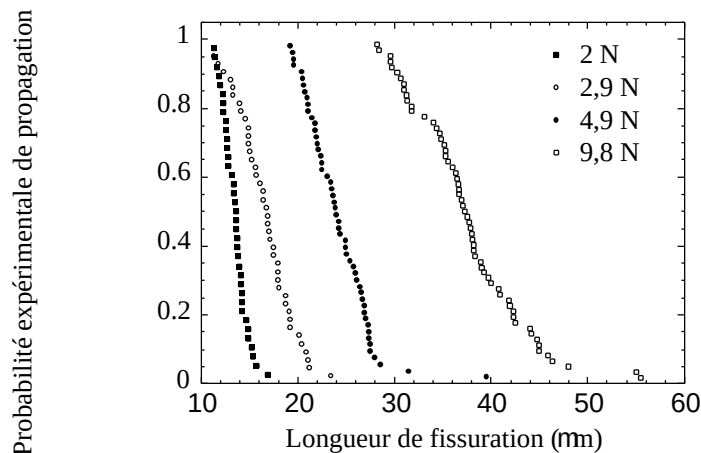


Figure IV.f. Longueur des fissures générées par indentation du carbure de silicium.

Sur les résultats associés à la charge de 9,8 N (les plus nombreux) ont été identifiés les différents paramètres regroupés dans le tableau IV.b, en utilisant comme longueur moyenne de grain pour le S-SiC $l/l = 10 \text{ mm}$ [DEN 98].

Tableau IV.b. Paramètres du modèle de propagation pour le carbure de silicium.

$l \text{ (m}^{-1}\text{)}$	a	b	$\frac{K_c^{\min}}{K_c^{\max} - K_c^{\min}}$	$\frac{k(a, H_v) l^{3/2}}{K_c^{\max} - K_c^{\min}} \text{ (N}^{-1}\text{)}$
10^5	8,3	13,5	0	0,28

De même que précédemment, après fixation des paramètres associés à la fonction h_{Kc} et identification pour les trois autres charges du paramètre d'indentation $k(a, H_v)$, l'indépendance de ce dernier par rapport à la charge appliquée (dans la gamme de celle utilisée) peut être également vérifiée (figure IV.g).

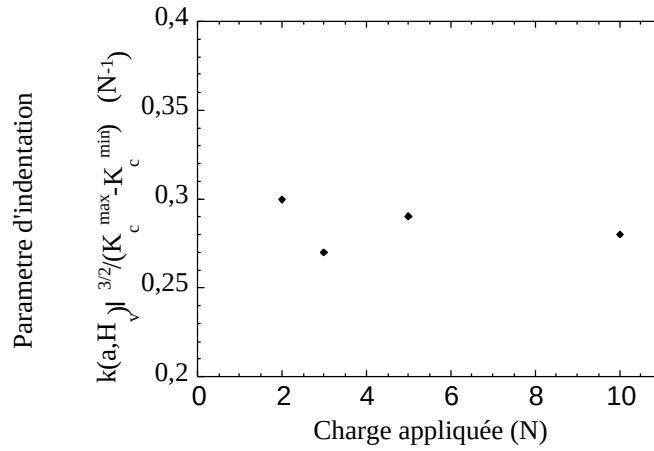


Figure IV.g. Paramètre d'indentation associé au carbure de silicium.

A partir de cette constatation et de la détermination des constantes du modèle pour le carbure de silicium, les résultats des essais de micro-indentation ont pu être "prévus", ce dernier terme étant utilisé avec les mêmes précautions que pour le cas de l'alumine (figure IV.h).

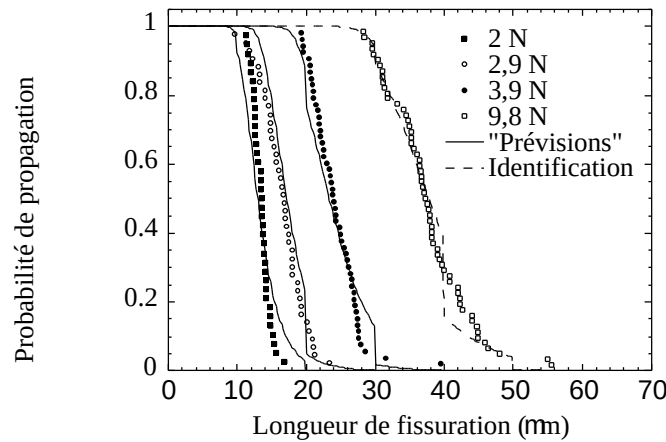


Figure IV.h. Application du modèle de propagation de fissure au cas de la micro-indentation du carbure de silicium.

Nous noterons que, au vu de la longueur moyenne des grains d'une part, et de la longueur des fissures créées par indentation d'autre part, nous avons utilisé la version discrète du modèle de propagation (avec point d'amorçage déterministe – équation (IV.1.h)). Ceci explique les discontinuités de la probabilité de propagation théorique tous les 10 microns (correspondant alors à des joints de grains). Au niveau de l'identification des paramètres du modèle, le fait de prendre comme hypothèse un point d'amorçage déterministe, ou un point d'amorçage aléatoire équiprobable sur un grain n'est pas important, sauf pour ce qui se rapporte à la valeur du paramètre d'indentation, qui est alors légèrement sous-estimé (comme nous le verrons dans un exemple ultérieur). Par contre, utiliser un point d'amorçage déterministe permet un gain de temps conséquent lors des procédures d'identification des paramètres. Nous remarquerons également qu'une identification effectuée avec la version continue du modèle

de propagation probabiliste est tout à fait envisageable, et donnerait des résultats cohérents au niveau de la "prévision" des essais de micro-indentation. Cependant, outre le fait que cette utilisation est en contradiction avec les hypothèses qui nous ont permis d'élaborer le modèle, les paramètres alors identifiés risqueraient de ne pas être utilisables hors du cadre de la micro-indentation, ce qui est alors extrêmement restrictif.

IV. 2. 3. Identification de la valeur de la ténacité maximale

Les essais de micro-indentation nous ont permis de déterminer les quatre paramètres de l'équation (IV.1.g). Il faut à présent remonter aux cinq paramètres premiers, au minimum ceux caractérisant la densité de probabilité associée à la ténacité h_{kc} . Nous avons déjà identifié trois de ces quatre paramètres, à savoir a , b et K_c^{min} , borne inférieure de la répartition de ténacité (ce paramètre étant nul pour les deux matériaux étudiés dans le paragraphe IV.2). Reste donc à déterminer la borne supérieure K_c^{max} . Dans la mesure où cette grandeur ne peut être extraite du paramètre adimensionnel caractérisant l'essai de micro-indentation, nous allons procéder autrement. Un essai classique de détermination de la ténacité "macroscopique" ou apparente, que l'on notera K_c^{macro} , consiste en un essai de flexion trois points, ou SENB [NOR 89], sur des éprouvettes normalisées (figure IV.i).

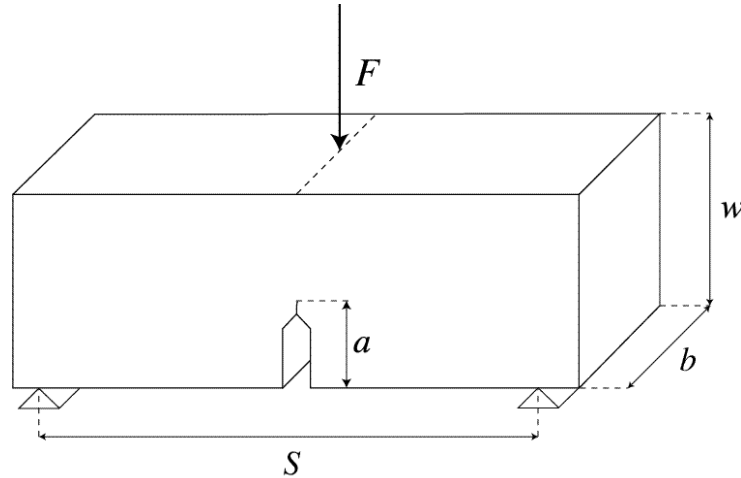


Figure IV.i. Essai SENB normalisé – détermination de l'effort à rupture.

Pour ce type d'éprouvette, nous pouvons trouver dans la littérature différentes formes du facteur d'intensité des contraintes associée à la fissure de longueur a lors de sa propagation sous un effort extérieur F (pour $S/w=4$ et $a/w < 1$)

$$K_I(a) = \sqrt{\frac{FS}{bw^{1.5}}} \cdot 1,5\sqrt{k} \cdot \frac{1,99 - k(1-k)(2,15 - 3,93k + 2,7k^2)}{(1+2k)(1-k)^{1,5}} \quad [SGA 99] \quad (IV.2.3.a)$$

$$\sqrt{\frac{FS}{bw^{1.5}}} \cdot 1,5\sqrt{k} (1,93 - 3,07k + 14,5k^2 - 25,11k^3 + 25,8k^4) \quad [CHE 75]$$

avec $k=a/w$. Ces deux expressions sont comparées sur la figure IV.j, et on peut constater leur égalité pour des valeurs de k inférieures à 0,75.

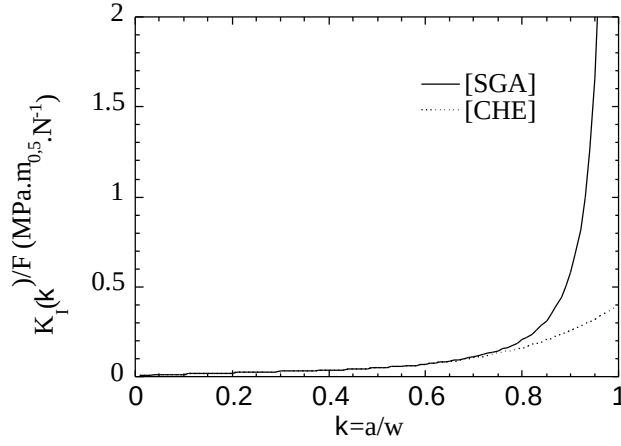


Figure IV.j. Comparaison entre deux formulations du facteur d'intensité des contraintes pour un essai SENB.

Si l'on applique à cet essai la modélisation choisie (par une microstructure de résistance aléatoire), alors la force à rupture F devient une variable aléatoire, caractérisée entre autres par la population de grains en pointe de fissure. La densité de probabilité h_F qui lui est associée se déduit facilement de la probabilité $P(F;a,w)$ que la fissure de longueur a se propage au travers de toute l'éprouvette sous un effort appliqué F

$$P(F;a,w) = \exp \left[- \int_a^w \frac{\hat{E}^{K_I(x)/K_c^{max}}}{\hat{E}} \int_0^{K_c^{max}} \frac{k^{a-1}(1-k)^{b-1}}{B(a,b)} dk \right] dx, \quad (IV.2.3.b)$$

et ainsi nous pouvons écrire la fonction h_F

$$h_F(F) = \frac{\partial P(F;a,w)}{\partial F} = P(F;a,w) \int_a^w \frac{\hat{E}^{K_I(x)/K_c^{max}}}{\hat{E}} \frac{h_{K_c}(K_I(x)) \frac{\partial K_I(x)}{\partial F}}{\int_0^{K_c^{max}} \frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{B(a,b)} dt} dx. \quad (IV.2.3.c)$$

Nous remarquerons que l'expression de la probabilité de rupture de l'éprouvette SENB $P(F;a,w)$, ainsi que celle de Fh_F , a la particularité d'être invariante si les valeurs de F et de K_c^{max} évoluent de manière proportionnelle. Cette propriété va nous permettre de déterminer la valeur de K_c^{max} , en associant à la force à rupture moyenne la ténacité macroscopique, ou apparente, du matériau (que l'on peut trouver dans la littérature et que l'on considérera indépendante de la microstructure). Cette valeur moyenne étant égale à

$$\bar{F} = \int_0^{+\infty} F h_F(F) dF, \quad (IV.2.3.d)$$

alors la ténacité macroscopique du matériau s'écrit

$$K_c^{macro} = \frac{\bar{F}S}{bw^{1.5}} g(k), \quad (IV.2.3.e)$$

où g est l'une des deux fonctions de l'équation (IV.2.3.a). Si l'on fixe arbitrairement la valeur de K_c^{max} , en la notant par exemple K_0 , le modèle nous donnera une force à rupture moyenne F_0 qui lui est associée, et donc une ténacité macroscopique, différente de la ténacité macroscopique réelle. Du fait de l'indépendance de $P(F;a,w)$ par rapport au rapport F/K_c^{max} , la valeur de K_c^{max} est

$$K_c^{max} = \frac{K_c^{macro}}{\frac{F_0 S}{bw^{1,5}} g(k)} K_0. \quad (IV.2.3.f)$$

Pour les deux matériaux utilisés dans les chapitres précédents, les valeurs de K_c^{max} sont données dans le tableau IV.c, en utilisant pour l'alumine une valeur de la ténacité macroscopique égale à 4,5 MPa÷m [GUI 98], et pour le S-SiC, une valeur égale à 2,75 MPa÷m [MER 92]

Tableau IV.c. Valeurs de la ténacité moyenne et maximale pour deux céramiques.

	S-SiC	Al ₂ O ₃
$\overline{K_c}$ (MPa÷m)	2	2,2
K_c^{max} (MPa÷m)	5,2	9,4

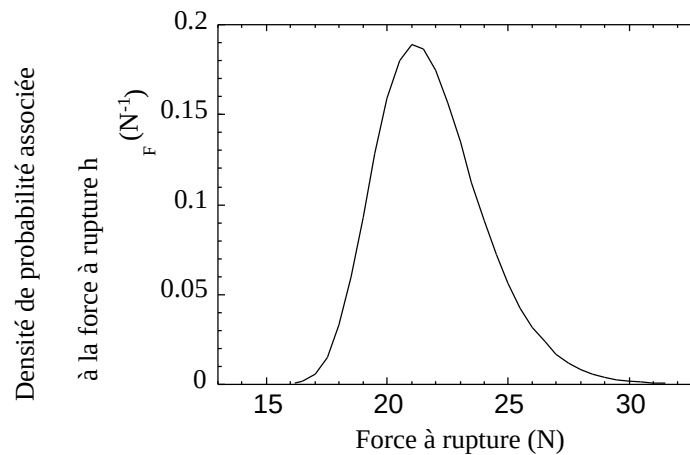


Figure IV.k. Densité de probabilité associée à la force à rupture – $K_0=5$ MPa÷m.

Il existe en réalité une dépendance de la valeur de K_c^{max} par rapport à la longueur initiale a de la fissure dans l'éprouvette SENB. Mais celle-ci est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que la valeur trouvée (ici pour $a=0,6w$) est caractéristique du matériau. Pour le cas de l'alumine, la densité de probabilité associée aux forces à rupture est donnée figure IV.k.

IV. 2. 4. Conclusion

Pour ces deux exemples d'identification, nous avons vu que, d'une part, le type d'essai effectué nous permet bien de déterminer les quatre paramètres adimensionnels mis en évidence, et que d'autre part, ceux associés à la fonction de répartition de la ténacité semblent être intrinsèques aux matériaux : quelle que soit la charge appliquée, les probabilités théoriques, moyennant une adaptation du facteur $k(a, H_v)$ (dont la forme analytique nous est inconnue mais qui semble ne pas dépendre de la charge appliquée) donnent une bonne représentation des essais. Cela ne nous affranchira cependant pas d'une expérience de validation. De plus, une analyse critique de la forme du facteur d'intensité des contraintes devrait être menée, afin de ne pas abusivement discriminer des modèles présents dans la littérature (équation (IV.1.a.)).

IV. 3. Remarques sur le modèle de propagation au vu des résultats précédents

Afin de pouvoir utiliser le modèle probabiliste de propagation de fissure que nous avons développé dans les chapitres II et III, nous devons connaître plusieurs paramètres, sensés être intrinsèques au matériau analysé. En premier lieu, le paramètre l a une importance particulière dans la mise en place et l'utilisation du modèle : il met en lumière la discrétisation utilisée afin de permettre le passage "micro-macro". Par là même, il va conditionner tous les autres paramètres, c'est-à-dire ceux associés à la variable aléatoire choisie, ici, la ténacité, de par le nombre d'occurrences que celle-ci va avoir au cours de la propagation de la fissure. En particulier, plus la discrétisation est fine (i.e., pour de fortes valeurs de l), moins les ténacités seront dispersées (effet L - paragraphe II.5.2.A). De plus, la valeur de l intervient aussi sur l'expression de la probabilité de propagation (discrète ou continue - équations (II.3.k) et (II.3.l)), augmentant par là son influence sur la fonction h_{Kc} . Enfin, nous devons remarquer que la valeur de l est formellement peu importante. En effet, la longueur représentée par $1/l$ peut être égale à plusieurs grains réels (ou joints de grains pour une propagation intergranulaire), ou au contraire être inférieure à celle-ci (dans les faits, la longueur des grains est une variable aléatoire - figure IV.1). Mais l'identification expérimentale de la fonction h_{Kc} fait que cette approximation, ou hypothèse de constance de longueur des grains du milieu, sera prise en compte. En définitive, ce qui compte, c'est davantage la cohérence de la valeur prise pour l d'un essai à l'autre. En ce sens, nous rejoignons à nouveau l'expression de la probabilité de rupture d'une structure sous hypothèse du maillon le plus faible. Le pendant de $1/l$ est le volume élémentaire V_0 , qui n'est que rarement identifié dans les faits, mais soit postulé *a priori*, soit posé égal au volume de l'éprouvette étudiée. Ce paramètre sert, lui aussi, au passage "micro-macro". Au niveau de l'élaboration théorique, la seule différence entre le modèle de propagation probabiliste et la statistique de Weibull est la simplicité de l'expression de la probabilité de rupture d'un volume élémentaire qu'a écrite Weibull, ce qui permet l'abstraction, au final, de la valeur (et de l'identification) de V_0 , abstraction qui nous est impossible dans l'état actuel du modèle probabiliste de propagation (V_0 est un paramètre "conventionnel" du modèle).

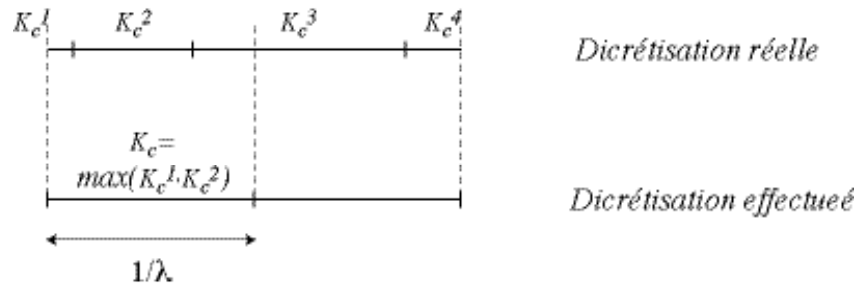


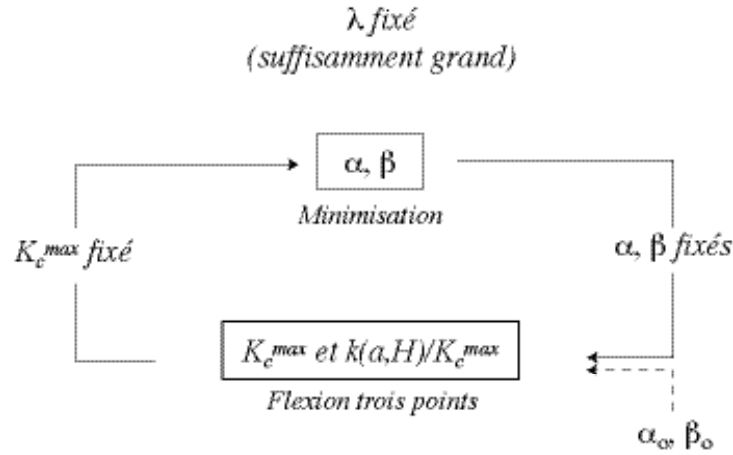
Figure IV.1. Relation réalité - modélisation dans la discrétisation du chemin de fissuration.

Ensuite, nous avons choisi arbitrairement une densité de probabilité associée à la ténacité en loi Bêta. Mais ce côté arbitraire aurait existé quelle que soit la forme de la densité de probabilité utilisée (bornée ou non). Ce postulat nous impose cependant de déterminer quatre paramètres caractérisant la densité de probabilité h_{K_c} . Or, toute variable aléatoire bornée (hypothèse sensée dans la mesure où une fissure se propagera toujours sous des sollicitations adaptées) se définit par sa moyenne, son écart type, et éventuellement ses moments d'ordre supérieur. Quatre paramètres pour que la probabilité de propagation théorique se rapproche au mieux de la probabilité de propagation expérimentale génèrent un système surabondant. On peut ainsi fixer un de ces quatre paramètres de façon arbitraire ($K_c^{\min}$ nul est alors tout indiqué, au vu des résultats précédents, et par analogie, comme nous l'avons également noté précédemment, avec le paramètre S_u de la statistique de Weibull). Même en ne conservant que trois paramètres pour déterminer l'expression de h_{K_c} , nous nous trouvons devant un système où l'unicité de la solution n'est pas assurée. En effet, pour un système à deux équations (écart type et moyenne), nous nous trouvons à nouveau en surabondance d'inconnues (la détermination de $K_c^{\max}$ par la simulation d'un essai de flexion trois point ne résolvant pas cette surabondance : l'essai de micro-indentation nous permet d'obtenir le paramètre $k(a, H_v)^{3/2}/K_c^{\max}$). De plus, la minimisation par les moindres carrés entre données théoriques et expérimentales reste subjective dans la mesure où le triplet solution de cette dernière n'est pas unique, en termes d'interpolation des points expérimentaux (et c'est ici une différence, en termes d'utilisation, par rapport à la statistique de Weibull, où l'expression simple de la probabilité de rupture donne de manière presque certaine le *doublet* inconnu module de Weibull-contrainte de Weibull). Ainsi, là encore, il faut rester cohérent dans les choix effectués. Comme nous ne pouvons arbitrairement fixer d'autres paramètres, il faut vérifier que le triplet solution à une minimisation permette de simuler (ou d'interpoler en laissant libre le paramètre $k(a, H_v)$ dans le cas de la micro-indentation), les résultats expérimentaux associés à d'autres charges. C'est de cette manière que nous avons procédé, et les premiers résultats semblent concluants.

Une manière de résoudre le problème de la surabondance des paramètres (i.e. a , b et $k(a, H_v)$) serait de relier le paramètre d'indentation à une de ses expressions analytiques que l'on peut trouver dans la littérature, par exemple [LAW 80]

$$k(a, H_v) = 0,0139 \sqrt{\frac{E}{H_v}}, \quad (IV.3.a)$$

avec E le module d'Young du matériau considéré, relation dont l'indépendance par rapport à la charge appliquée sied aux résultats obtenus expérimentalement au chapitre précédent. Ensuite, un système de trois équations à trois inconnues étant alors en place, les valeurs de a , b et K_c^{max} pourraient être déterminés de manière itérative dans une optique de recherche de point fixe :



La démarche ci-dessus consiste à coupler deux processus itératifs complémentaires et dissociés. Tout d'abord est fixée la valeur du paramètre l , de manière à choisir le type de formulation du modèle de propagation probabiliste (discret ou continu). Toutes les identifications ultérieures lui seront étroitement associées. En fixant arbitrairement les premières valeurs des paramètres de dispersion a et b , nous obtenons alors une valeur de K_c^{max} par simulation d'essais de rupture sous flexion trois points (comme cela a été décrit au paragraphe IV.2.3). Connaissant l'expression analytique du paramètre d'indentation, nous possédons dès lors la valeur de $k(a, H_v) |^{3/2} / K_c^{max}$. Cette valeur est utilisée pour déterminer de nouvelles valeurs de a et b par interpolation des essais de micro-indentation. Ces nouvelles valeurs vont nous permettre de déterminer un nouveau K_c^{max} , et le processus continue jusqu'à une éventuelle convergence du système donnant des valeurs de a , b et K_c^{max} satisfaisant simultanément à la simulation de l'essai SENB et interpolant de manière satisfaisante les essais de micro-indentation. Ce triplet solution est alors fonction de la valeur de l que nous avons choisie, mais également de l'expression analytique du paramètre d'indentation $k(a, H_v)$, expression qui est loin d'être unique (de plus, le triplet solution peut être conditionné par les valeurs initiales choisies pour a et b , certaines d'entre elles pouvant ne pas donner de convergence du système).

Le système ainsi mis en place converge vers une solution *a priori* unique (si elle existe, ce qui, dans la mesure où a et b sont calculés de manière à ce que la théorie approche au mieux les résultats expérimentaux, est presque certain, tout en mettant au conditionnel l'unicité de la solution). Cependant, plusieurs problèmes apparaissent. Utiliser une relation

entre le paramètre $k(a, H_v)$ et les caractéristiques des matériaux telle que l'équation (IV.3.a) suppose que les résultats expérimentaux sont "exacts", particulièrement en ce qui concerne le lieu de la pointe de la fissure mesurée (et l'expression analytique valable). Or cette condition n'est jamais remplie, comme nous le montrerons dans le paragraphe suivant. De plus, si le polissage effectué sur les éprouvettes n'est pas suffisant et qu'il existe des contraintes résiduelles, un terme en $\pm c$ doit être ajouté à la relation ténacité-essai de micro-indentation (ce que nous n'avons pas fait) [CAR 97]. Nous ne nous dirigerons donc pas vers ce type de solution (bien que certainement meilleure en termes de minimisation), et garderons la démarche première de minimisation "brutale", tout en ayant conscience de ses limites, et de sa forte subjectivité (de fait, les valeurs de $k(a, H_v)$ seront vraisemblablement inférieures à la valeur réelle).

IV. 4. Influence de l'environnement sur les résultats

Afin de tenter de quantifier l'objectivité des premiers résultats relatifs aux identifications, nous pouvons analyser comment la machine d'indentation d'une part, et l'expérimentateur d'autre part, influent sur la valeur des paramètres identifiés. En effet, la mesure des longueurs des fissures générées par micro-indentation comporte une grande part de subjectivité en sachant que la pointe de ces dernières est difficilement identifiable avec certitude : c'est l'expérimentateur qui, au vu du matériel qu'il utilise, fixe "arbitrairement" cette longueur. Les résultats alors obtenus, en termes de longueur de fissure mesurée et donc de paramètres identifiés, incluent obligatoirement cette subjectivité.

IV. 4. 1. Deuxième série d'identification

Une seconde série d'essais de micro-indentation a été effectuée, cette fois, sur un micro-indenteur Shimazu au LMT-Cachan (figure IV.m).



Figure IV.m. Micro-indenteur Shimazu - LMT.

Cette série d'essai a été réalisée par Lidia Rasturnoiu. Du fait du faible grossissement de l'optique du micro-indenteur utilisé, seules deux charges ont été appliquées sur les deux matériaux analysés dans le paragraphe IV.2, à savoir 4,9 N et 9,8 N.

Sur la figure IV.n sont représentés les résultats des deux séries d'essais pour l'alumine et le carbure de silicium. Tout d'abord, nous pouvons remarquer que les longueurs mesurées avec le micro-indenteur du LMT sont toujours inférieures à celles déterminées avec le micro-indenteur du CTA (à probabilité expérimentale de propagation semblable, temps d'application de la charge et opérateur identiques). Cela est surtout lié aux performances respectives de ces deux machines et montre bien que ce facteur a une influence notable sur les résultats. Cependant, nous pouvons constater que les courbes de probabilité d'extension expérimentales sont relativement "parallèles" (écart type semblable). Afin de pouvoir quantifier les écarts entre les essais réalisés au LMT et ceux réalisés au CTA, nous avons identifié, sous les mêmes conditions que dans les paragraphes IV.2.2 et IV.2.3, et en imposant les paramètres de la densité de probabilité associée aux ténacités précédemment identifiés, la valeur du paramètre $k(a, H_v)$ de ces nouveaux essais. Ces dernières sont reportées dans le tableau IV.d (entre parenthèse sont reportés les valeurs identifiées sur la première série d'essais).

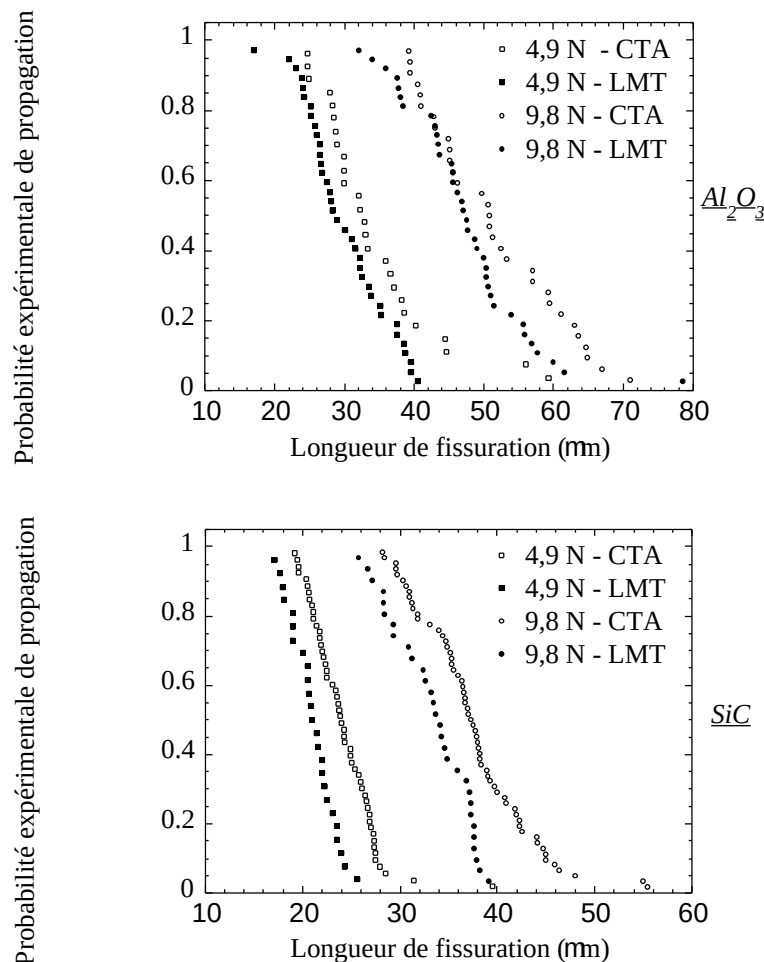


Figure IV.n. Comparaison entre les résultats des séries d'essais de micro-indentation réalisés au LMT et au CTA pour deux céramiques.

Tableau IV.d. Paramètres du modèle pour la seconde série d'essais.

	a	b	$\frac{K_c^{\min}}{K_c^{\max} - K_c^{\min}}$	$\frac{k(a, H_v)l^{3/2}}{K_c^{\max} - K_c^{\min}} \text{ (N}^{-1}\text{)}$	$K_c^{\max} \text{ (MPa}\cdot\text{m)}$
Al ₂ O ₃	2,8	9,1	0	3,8 (4,5)	9,4
SiC	8,3	13,5	0	0,24 (0,28)	5,2

En comparant les données expérimentales et leurs interpolations par le modèle (figure IV.o), nous constatons que la densité de probabilité associée aux ténacités identifiées au paragraphe IV.2 nous permet de bien appréhender la réalité. Toutes les modifications en termes de longueur de fissure sont reportées sur la valeur du paramètre d'indentation. Ceci nous permet de confirmer ce que nous avons avancé dans le paragraphe IV.3 : les valeurs identifiées qui sont en rapport avec la densité de probabilité ne sont pas complètement intrinsèques aux matériaux étudiés, mais nous permettent néanmoins de bien modéliser le comportement en fissuration des matériaux utilisés (du moins pour l'essai considéré). Tout écart est reporté sur le seul paramètre qui ne nous intéresse pas directement, à savoir le paramètre d'indentation. Ce dernier comporte donc tous les éléments qui "parasitent" l'essai (précision de l'optique utilisée, subjectivité de l'expérimentateur, etc.). De plus, les observations quant à la constance du paramètre d'indentation sur la plage des forces utilisées semblent confirmées.

Enfin, nous avons profité de cette seconde série d'essai pour comparer les probabilités de propagation discrète (équation (IV.1.h)) et continue (équation (IV.1.c)) pour le cas particulier de l'alumine, et cette comparaison justifie a posteriori le choix que nous avons fait au paragraphe IV.2.1 (formulation continue) grâce à la faible différence entre les deux probabilités. Pour le cas du carbure de silicium, dont la probabilité théorique est discrète (du fait du faible nombre de grains traversés par les fissures générées par indentation), nous avons inclus une courbe théorique qui prend en compte l'aléa (isoprobable) sur le point d'amorçage des fissures (équation (II.3.m)). Ceci crée une courbe continue qui est légèrement supérieure, en termes de probabilité de propagation, à celle purement discrète. Nous noterons cependant la bonne adéquation entre la pente de cette probabilité continue et celle de la probabilité expérimentale. Cela nous permet d'affirmer que les paramètres de la densité de probabilité associée aux ténacités identifiés par la formulation purement discrète de la probabilité de propagation conviennent même lorsque l'on considère un aléa sur le point d'amorçage. Cela entraîne une (légère) surestimation du paramètre d'indentation, qui à nouveau contient tous les artefacts liés à la mesure, à sa précision, ainsi qu'aux approximations induites par la formulation discrète de la probabilité de propagation théorique.

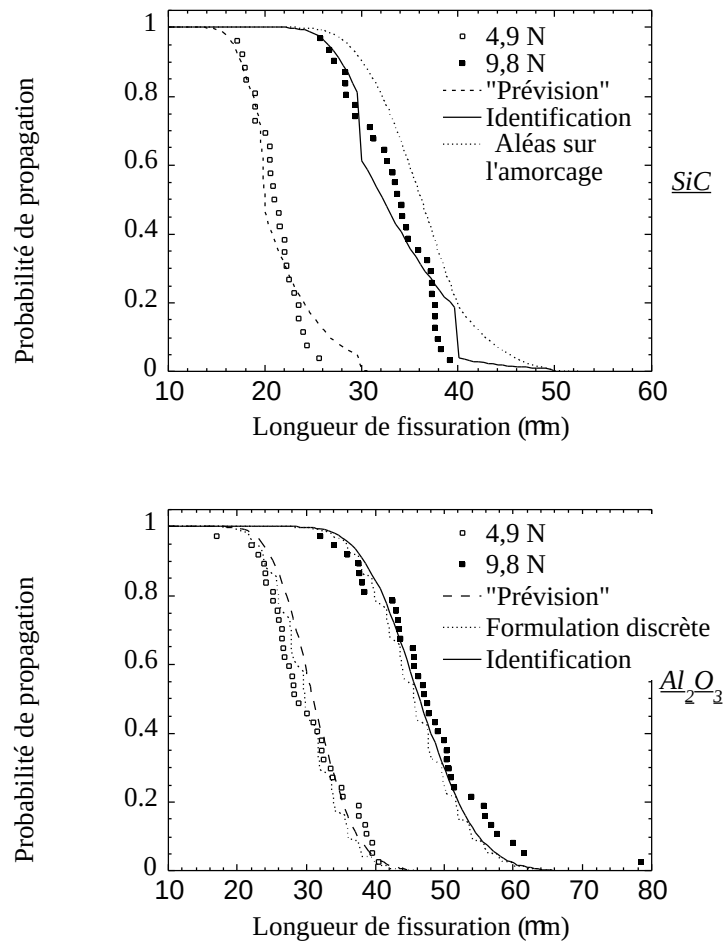


Figure IV.o. Comparaison théorie-expériences pour la seconde série d'essais.

IV. 5. Validation du modèle

Le fait que le modèle de propagation probabiliste utilisé nous donne une bonne prévision des résultats expérimentaux de micro-indentation ne nous permet cependant pas d'affirmer que l'on a établi un modèle nous permettant de prédire, au minimum qualitativement, toute extension de fissure dans une configuration quelconque bidimensionnelle. Afin de le valider, nous avons effectué des essais de flexion trois points sur des éprouvettes SENB en S-SiC (i.e., la même nuance de carbure de silicium que celle utilisée lors des essais de micro-indentation). Ces essais ont été réalisés au CTA en collaboration avec P. Forquin, doctorant au LMT et au CTA.

IV. 5. 1. Mise en œuvre

Avant de pouvoir effectuer des essais de mesure de ténacité, il faut au préalable créer une fissure (figure IV.i), afin de caractériser la résistance à la rupture du matériau. Pour ce faire, des essais de préfissuration sur des éprouvettes rectangulaires ont été préalablement

menés. Les éprouvettes de S-SiC sont ainsi tout d'abord entaillées, puis placées entre deux cales métalliques (figure IV.p).

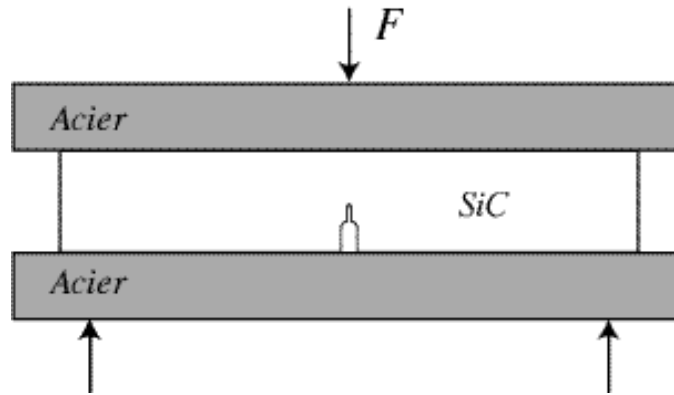


Figure IV.p. Principe de l'essai de préfissuration [SGL 99].

Une charge est alors appliquée au sandwich créé : du fait de la concentration de contrainte générée par l'entaille, une fissure se crée à partir d'une charge critique (caractéristique de l'entaille et du matériau) et se propage. Comme l'éprouvette fragile est insérée entre deux cales métalliques, la force qu'elle subit varie en fonction de la longueur de la fissure (d'autant plus faible que la fissure est longue, et ce du fait de la diminution de son moment d'inertie). Le facteur d'intensité des contraintes est alors décroissant avec cette longueur (figure IV.q), ce qui permet à la fissure d'être arrêtée (équation (IV.5.1.a))

$$K_I(a) = \frac{FS}{bw^{1.5}} 1,5\sqrt{k} \frac{1,99 - k(1-k)(2,15 - 3,93k + 2,7k^2)}{(1+2k)(1-k)^{1.5}} g(k) \quad (IV.5.1.a)$$

avec a la longueur de la fissure et $k=a/w$ en reprenant les notations de la figure IV.i.

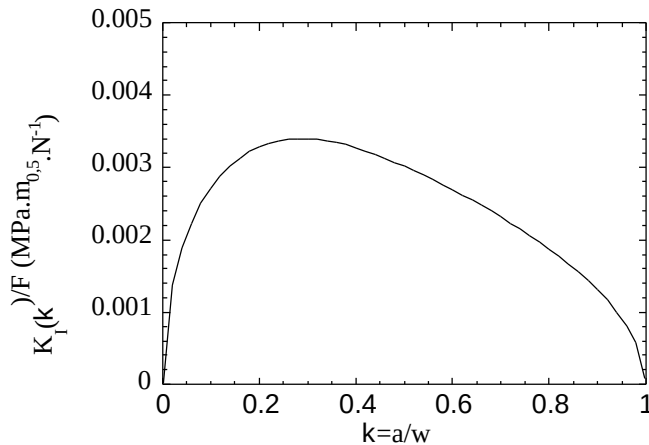


Figure IV.q. Facteur d'intensité des contraintes lié à l'essai de préfissuration.

La fonction g caractérise la diminution du moment d'inertie de la poutre fragile lors de la propagation de la fissure (et donc la moindre reprise des efforts qu'elle induit)

$$g(k) = \frac{1}{1 + \frac{\tilde{E}}{E} + 2(1 - \nu_0^2) \frac{2,94k^2 - 3,32k^3 + 1,32k^4}{(1 - k)^2} \cdot \frac{(EI)_A + (EI)_B}{(EI)_0}}, \quad (IV.5.1.b)$$

où ν_0 est le coefficient de Poisson du matériau fragile (0,15 pour du S-SiC), $(EI)_A$ et $(EI)_B$ les moments d'inertie des deux poutres en acier inoxydable du sandwich, et $(EI)_0$ celui de la poutre fragile intacte (sans fissure ni entaille). L'instant où la fissure s'amorce est détecté à l'aide du logiciel d'intercorrélation d'image Correli^{2D} [HIL 99] : l'ouverture de la fissure n'est pas suffisante pour une détection visuelle (et ce même en utilisant un microscope), et continuer à accroître le chargement appliqué peut alors soit rompre l'éprouvette, soit engendrer de trop longues fissures pour un essai SENB correct (la force à rupture étant alors très faible). Les dimensions des éprouvettes utilisées sont $S=20$ mm, $w=5$ mm et $b=3$ mm. Une fois que la fissure est générée, l'essai de flexion trois points, comme décrit au paragraphe IV.3, peut alors être mis en œuvre.

IV. 5. 2. Flexion trois points

Pour chaque éprouvette, après avoir mesuré la longueur de la fissure générée par l'essai de préfissuration (par une visualisation post-mortem des éprouvettes – figure IV.r), une force est appliquée sur les éprouvettes de la même manière que le montre la figure IV.i. La force critique conduisant à la rupture est alors mesurée et mise en rapport avec la longueur initiale de la fissure : la combinaison des deux nous donne une valeur de ténacité (équation (IV.2.3.a)).

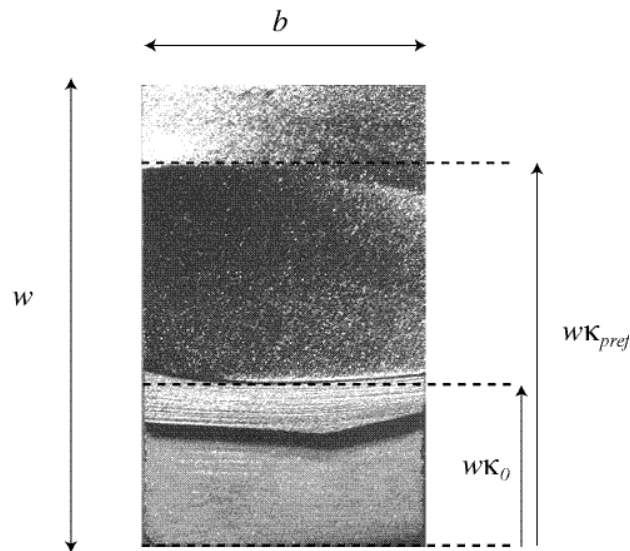


Figure IV.r. Détermination post-mortem de la longueur des fissures.

Sur la figure IV.r, qui représente une éprouvette à la fin de l'essai de flexion trois points, la longueur adimensionnée de l'entaille initiale est notée K_0 , et la longueur adimensionnée de la fissure générée par l'essai de préfissuration K_{pref} . Cette dernière est repérable grâce au changement de niveau de gris dû à la différence d'orientation entre les différentes surfaces (la

propagation des fissures générées par préfissuration, contrairement à la propagation lors de l'essai de flexion trois points, n'est pas obligatoirement verticale, entre autres à cause d'un centrage délicat des différentes poutres par rapport au montage). À chaque ténacité mesurée est associée une probabilité expérimentale d'apparition, en procédant de la même manière que pour les essais de micro-indentation (paragraphe IV.2). Parallèlement, une probabilité théorique de mesure d'une ténacité par un essai de flexion trois points peut être obtenue à partir du modèle de propagation probabiliste, par intégration de la densité de probabilité associée aux forces à rupture (équation (IV.2.3.c)) rapportée à l'espace des ténacités (équation (IV.2.3.a)), et en utilisant les paramètres de la densité de probabilité associée aux ténacités identifiées par micro-indentation (tableaux IV.b et IV.c). Bien sûr, cette probabilité théorique est sensible à la longueur de la fissure initiale posée pour son calcul ($k=0,6$), mais cette sensibilité étant relativement faible (comme nous l'avons déjà fait remarquer), nous allons considérer que la courbe théorique obtenue est intrinsèque à l'essai (ce qui nous permet alors de traiter de manière unifiée n couples expérimentaux longueur de fissure-force à rupture). La comparaison entre données théoriques et expérimentales est donnée sur la figure IV.s.

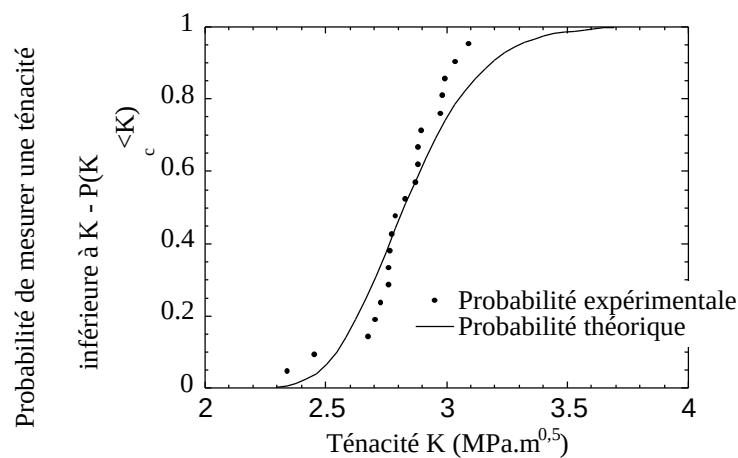


Figure IV.s. Prévion des dispersions sur la ténacité expérimentale.

Comme prévu, les valeurs moyennes théoriques et expérimentales coïncident (à peu près égale à $2,8 \text{ MPa}\cdot\text{m}$ pour l'expérimental), car c'est ainsi que nous avons déterminé la valeur de $K_c^{\max}$, indispensable pour une utilisation polyvalente du modèle de propagation probabiliste. Cependant, ce qui est ici nouveau, c'est que l'on peut constater une bonne description des dispersions expérimentales sur les mesures de ténacité (même si la courbe expérimentale présente une dispersion moindre que la théorique). Cette comparaison peut-elle être dès lors considérée comme une validation ? Dans la mesure où les essais expérimentaux correspondent trait pour trait à la configuration numérique qui nous a permis de déterminer la valeur de $K_c^{\max}$, cela est discutable. Cependant, du fait de la bonne prévion des dispersions expérimentales, nous considérerons que, pour le champs d'essai étudié (micro-indentation et flexion trois points), le modèle de propagation probabiliste est valable. Et, par extension, qu'il est applicable à toute configuration sous chargement statique ou quasi-statique (et ce, tant qu'il n'est pas infirmé clairement).

Deux remarques peuvent être faites à ce niveau. Tout d'abord, disposant d'essais de préfissuration, d'arrêt de fissure en un matériau fragile, il aurait été logique d'appliquer le modèle de propagation probabiliste aux résultats alors obtenus afin de juger l'adéquation entre résultats expérimentaux et théorie. Cependant, la formule analytique donnant le facteur d'intensité des contraintes associé à une fissure au cours de l'essai de préfissuration (équation (IV.5.1.a)) n'est valable que dans une configuration idéale de l'essai. En particulier, cette expression ne prend nullement en compte le fait qu'il puisse exister du frottement entre les différentes poutres. Ce frottement, aléatoire et difficilement identifiable, rend extrêmement improbable une bonne adéquation entre théorie et expériences, même si le modèle probabiliste de propagation était exact. C'est pour cette raison que le modèle a uniquement été comparé aux essais SENB, dont les caractéristiques analytiques se retrouvent au niveau expérimental. Ensuite, nous avons utilisé des paramètres de dispersion (i.e., a et b) identifiés sur des essais d'arrêt de fissure (caractérisée par une ténacité d'arrêt) pour prédire des essais de début de propagation de fissure (ou des ténacités d'amorçage, supérieures aux ténacités d'arrêt). La bonne adéquation entre théorie et expériences vient du fait que la valeur de K_c^{max} a été déterminée par rapport à un essai d'amorçage. Ceci peut donc impliquer que, moyennant une adaptation de la valeur de K_c^{max} à la configuration mécanique étudiée, la dispersion relative aux résultats expérimentaux peut alors être appréhendée de manière satisfaisante par les valeurs de a et b . Ces paramètres semblent donc indépendants de l'essai : les essais de micro-indentation nous permettent d'avoir accès à la caractérisation de la dispersion du milieu. Une fois que le modèle est accepté, nous allons étendre son champ d'action à d'autres matériaux, avant de l'appliquer au problème qui nous intéresse.

IV. 6. Application aux matériaux amorphes

Bien que le modèle de propagation probabiliste soit prévu, de par ses hypothèses, pour être utilisé sur des matériaux cristallins, les remarques que nous avons effectuées au paragraphe IV.3 et lors de l'introduction du paragraphe II.2 nous poussent à effectuer une application sur un matériau amorphe, ici le verre. Ce dernier est un verre silico-sodocalcique, possédant des contraintes résiduelles minimales en surfaces et de faible rugosité (de par un traitement de recuit). Il a été fourni par D. Vandembroucq de l'unité mixte de recherche CNRS/Saint-Gobain Recherche (Aubervilliers - 93). Une des caractéristiques de la rupture du verre est que cette dernière est amorcée à partir de défauts de surface (et non de volume comme dans certains matériaux fragiles, du moins tant que l'on n'entre pas dans des considérations de fatigue). Cependant, c'est un matériau fragile qui supporte parfaitement l'utilisation des modèles probabilistes de rupture (comme par exemple le modèle de Weibull [HIL 01]). Une des difficultés qui apparaît immédiatement lorsque l'on souhaite utiliser le modèle probabiliste de propagation porte sur la valeur du paramètre l . En effet, pour des matériaux cristallins, ce dernier est *a priori* relié à la taille des grains, même si ce n'est pas une nécessité, comme le paragraphe IV.3 l'a fait remarquer. Cela évite néanmoins que l'on s'interroge sur sa valeur. Pour le verre, nous ne pourrions pas nous affranchir d'une telle

interrogation. Prendre de faibles valeurs de l , simulant un milieu faiblement discrétisé peut sembler raisonnable, mais nous condamne à l'utilisation de la version discrète du modèle (et à son lourd corollaire sur l'aléa du point d'amorçage). Prendre au contraire de fortes valeurs de l , simulant un milieu fortement discrétisé, est, a contrario, a priori moins physique (des études réalisés par la société Saint-Gobain parlent de grains nanométriques), mais permet une utilisation plus simple du modèle probabiliste de propagation de fissures. Afin de ne pas arbitrairement trancher dans l'immédiat, les identifications des paramètres du modèle ont été effectuées en choisissant différentes valeurs de l , la discrimination étant reportée à plus tard.

Les essais de micro-indentation ont été effectués au LMT, à l'aide du micro-indenteur précédemment présenté, et pour les mêmes raisons que pour l'alumine et le carbure de silicium, limités à deux charges, 4,9 N et 9,8 N. Aux longueurs de fissures mesurées sont associées des probabilités expérimentales de la même manière que dans les paragraphes précédents. Les essais de micro-indentation montrent que le verre réagit de la même manière que les matériaux cristallins (figure IV.t).

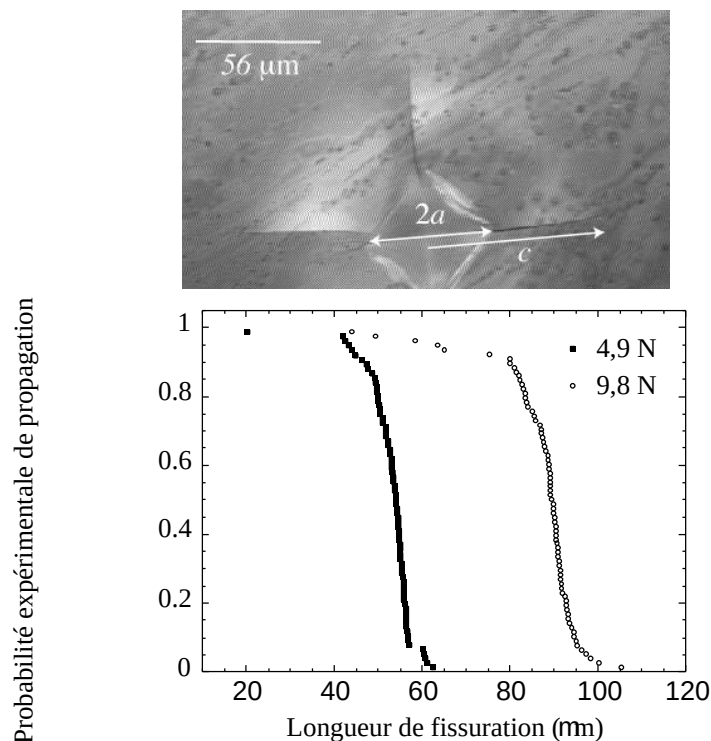


Figure IV.t. Résultats de l'indentation sur du verre silico-sodocalcique.

En fixant la valeur de K_c^{min} à zéro (pour les mêmes raisons que celles évoquées dans le paragraphe IV.3), nous avons choisi différentes valeurs de l et identifié les paramètres adimensionnels (équation (IV.1.g)) sur les données expérimentales correspondant à 9,8 N. Les résultats de cette identification sont présentés dans le tableau IV.e. Comme ce tableau le montre, quelle que soit la valeur prise pour l , nous sommes capables d'identifier des paramètres pour le modèle. Nous noterons d'ailleurs que plus l est fort, plus l'interpolation,

en termes de moindres carrés est bonne (convergeant sans doute vers un minimum pour un l critique, a priori très grand). Tous les quadruplets du tableau permettent d'interpoler de manière satisfaisante les données expérimentales correspondant à une charge de 9,8 N, et en postulant la constance du facteur d'indentation $k(a, H_v)$, donnent une bonne prévision des résultats expérimentaux correspondant à une charge de 4,9 N (figure IV.u), bien que la surestimant légèrement (cette surestimation étant de plus indépendante de la valeur de l choisie). Nous pouvons de plus observer certaines tendances relatives à l'influence de l sur les autres paramètres du modèle. En particulier, a est décroissant et b croissant avec l ($k(a, H_v)/K_c^{max}$ étant quant à lui décroissant). Ainsi, plus le milieu est discrétisé, plus les ténacités se retrouvent concentrées autour de la valeur moyenne (entraînant dès lors une plus faible dispersion) : le modèle aléatoire identifié "s'adapte" à la discrétisation géométrique sur laquelle il s'appuie, et ce pour permettre à la théorie d'interpoler au mieux les résultats expérimentaux.

Tableau IV.e. Identification des paramètres du modèle de propagation pour du verre silico-sodocalcique.

$l \text{ (m}^{-1}\text{)}$	a	b	$K_c^{min} \text{ (MPa}\cdot\text{m)}$	$\frac{k(a, H_v)l^{3/2}}{K_c^{max} - K_c^{min}} \text{ (N}^{-1}\text{)}$
5.10^4	73,4	77,6	0	0,46
10^5	32,6	40,8	0	1,23
2.10^5	39	61,2	0	3,10
5.10^5	32,5	89,5	0	8,9
10^6	27,8	109	0	20,8
2.10^6	24	200	0	33,8
5.10^6	15,9	119,6	0	169
10^7	14	297	0	257
5.10^7	9	948	0	654

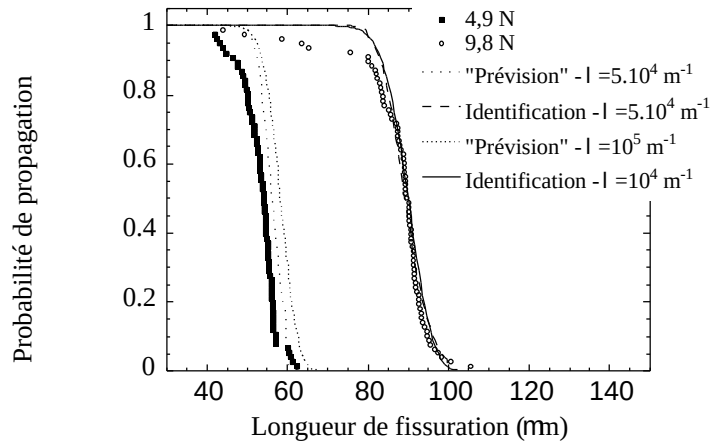


Figure IV.u. Interpolation des résultats expérimentaux pour du verre silico-sodocalcique.

Ainsi que nous l'indiquons sommairement le graphique précédent, les résultats de l'identification ne nous permettent pas de discriminer les valeurs de l . Cette constatation vient renforcer le paragraphe IV.3 pour ce qui est relatif à la discrétisation du milieu étudié : cette dernière est à la discrétion de l'expérimentateur, mais ce dernier se doit de garder une cohérence par rapport à la valeur choisie. De plus, la surestimation que donne le modèle pour les résultats à 4,9 N nous amène à nous poser la question de la constance du paramètre $k(a, H_0)$: celui-ci semble être en effet sensible à la charge, croissant légèrement avec cette dernière. Bien sûr, cette croissance est faible, et l'interpolation des résultats expérimentaux n'est pas totalement mauvaise. Ne nous intéressant pas particulièrement, dans cette étude, à la forme analytique de ce paramètre, nous ne nous avancerons pas plus loin que cette constatation, et renverrons le lecteur à d'autres publications [PON 89a ; 89b]. Enfin, il serait utile, afin de définitivement clore le débat sur la valeur de l pour les matériaux non-cristallins, de déterminer un équivalent physique à la discrétisation du milieu.

IV. 7. Application au nitrure de silicium

Afin de terminer cette partie consacrée à l'identification de la fonction h_{Kc} , nous allons nous pencher sur le nitrure de silicium, qui est à nouveau un matériau cristallin. Les essais de micro-indentation ont été réalisés au CTA d'Arceuil, et quatre charges ont été utilisées (2 N, 2,9 N, 4,9 N et 9,8 N).

IV. 7. 1. Identification de la densité de probabilité associée aux ténacités

De la même manière que pour les autres matériaux, pour chaque charge et à chaque longueur de fissure expérimentale est associée une probabilité expérimentale, et, en posant $l = 3.10^5 \text{ m}^{-1}$ [HIL 92b], les paramètres théoriques sont identifiés par une interpolation aux moindres carrés (appliquée aux résultats expérimentaux associés à 4,9 N). Les résultats de cette identification sont regroupés dans le tableau IV.f.

Tableau IV. f. Paramètres du modèle de propagation pour le nitrure de silicium.

a	b	$\frac{K_c^{\min}}{K_c^{\max} - K_c^{\min}}$	$\frac{k(a, H_v)^{3/2}}{K_c^{\max} - K_c^{\min}} \text{ (N}^{-1}\text{)}$
11,8	12,5	0	1,38

Bien que ce tableau ne le montre pas, pour ce matériau également nous avons constaté une dépendance du paramètre d'indentation par rapport à la charge appliquée, qui croissent de concert : ceci explique ainsi la surestimation du modèle par rapport aux résultats expérimentaux pour une charge de 9,8 N et la légère sous-estimation des résultats pour une charge de 2 N et 2,9 N (figure IV.v).

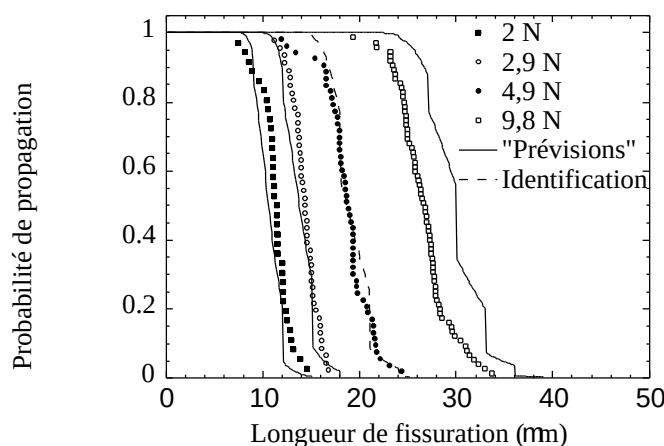


Figure IV.v. Interpolation des résultats expérimentaux pour le nitrure de silicium.

Le paramètre $K_c^{\max}$ est calculée égal à 5,9 MPa·m, ce qui correspond à une ténacité apparente de 4 MPa·m [HIL 94]. Pour ce matériau également, le modèle probabiliste de propagation engendre les mêmes observations que pour les précédents : les données théoriques permettent d'appréhender les résultats expérimentaux, du moins pour le cas de la micro-indentation (malgré le fait de la non indépendance qui apparaît ici du paramètre d'indentation $k(a, H_v)$ par rapport à la charge appliqué).

Nous avons utilisé les résultats de l'identification de la densité de probabilité associée aux ténacités afin de comparer les dispersions théoriques relatives à la ténacités à celles observées lors d'essais de rupture en traction effectué sur des éprouvettes de nitrure de silicium (figure IV.w) [HIL 92b].

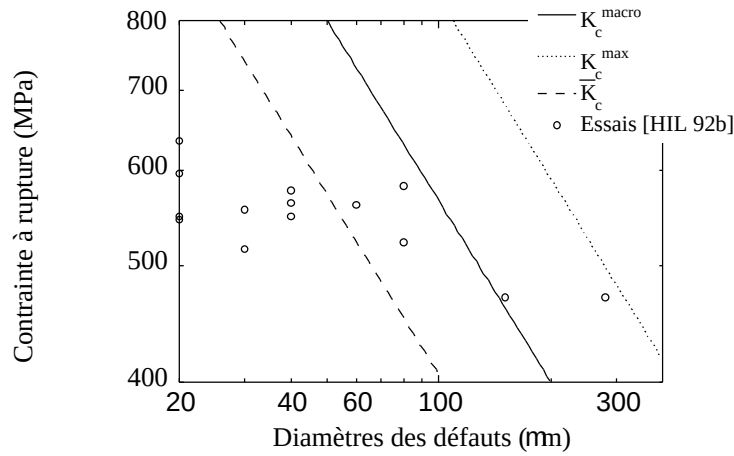


Figure IV.w. Dispersion des contraintes de rupture.

Sur la figure IV.w sont reportés des couples de valeurs expérimentales contrainte à rupture-diamètre du défaut ayant amorcés la rupture (identifié sur les éprouvettes post-mortem). Sont ajoutées deux courbes correspondant à la relation théorique liant ces deux paramètres (équation (IV.7.2.b)), et ce pour la ténacité macroscopique (i.e., 4 MPa·m), la valeur moyenne de la ténacité (i.e., 2,8 MPa·m) et la valeur maximale de la ténacité (i.e., 5,9 MPa·m). La valeur de cette dernière nous permet d'englober tous les résultats expérimentaux, tandis que la valeur moyenne nous donne un résultat cohérent pour la séparation des résultats expérimentaux. Ceci est encourageant quant à la validité du modèle probabiliste de propagation sur des essais autres que la micro-indentation ou la flexion trois points. De plus, ces essais de traction sont totalement déconnectés du processus d'identification des différents paramètres de la fonction h_{Kc} . Cette bonne adéquation entre les zones de dispersions théoriques et expérimentales peut faire également office de validation du modèle.

IV. 7. 2. Étude de l'influence de l'aléa sur les ténacités dans la statistique de Weibull

Nous avons remarqué, au paragraphe III.3.1, que considérer un aléa sur les ténacités au sein d'un matériau fragile pouvait modifier l'expression de la probabilité de rupture d'un volume lorsque l'hypothèse du maillon le plus faible est applicable : le problème n'est plus alors seulement de trouver un défaut critique par rapport au chargement, qui conduit alors à la rupture de la structure, mais de vérifier également que l'environnement proche de ce défaut (les ténacités des grains adjacents) ne va pas compromettre cette propagation. Cette considération supplémentaire donne alors une probabilité de rupture P_R pour une structure considérée W qui s'exprime par, dans le cas de la traction pure (équation (III.3.1.g)),

$$P_R(W) = 1 - \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left(1 - \int_{K_c^{\min}}^{K_c^{\max}} h_{K_c}(a) dK_c \right)^{W/a} da, \quad (IV.7.2.a)$$

où h_a est la densité de probabilité associée aux longueurs de défauts, bornée par les constantes a_{min} et a_{max} , S est le chargement appliqué à la structure de volume V . V_0 est le volume élémentaire du matériau (paragraphe I.4.3), et Y (≈ 1 pour des défauts circulaires) le facteur de forme associé au défaut, de telle manière que le facteur d'intensité des contraintes qui lui est associé, si on le considère circulaire de rayon a , s'exprime par

$$K(a) = SY\sqrt{a}. \quad (IV.7.2.b)$$

Nous noterons le fait que l'équation (IV.7.2.a) n'est utilisable que lorsque les répartitions associées aux ténacités et aux longueurs de défaut s'interpénètrent, i.e., lorsque $YS \div a_{min} < K_c^{max}$ et/ou $YS \div a_{max} > K_c^{min}$. Nous allons, dans ce présent paragraphe, juger de l'influence de l'aléa sur les ténacités par rapport à l'expression de la fonction h_a . Mais tout d'abord, nous allons faire quelques remarques. Comme nous l'avons déjà écrit, l'avantage du modèle de Weibull est la simplicité dans son utilisation et dans l'identification des paramètres qui lui sont associés. Les résultats qu'il donne sont, dans la mesure où ils sont exploitables (donc pas dans le cas de l'assemblage considéré), corrects, et son utilisation se généralise, par exemple pour des problèmes de fatigue [CHA 00a]. À l'inverse, la formulation proposée (équation (IV.7.2.a)) ne possède pas les qualités de simplicité d'utilisation, de facilité d'identification, de rapidité, etc. Nous ne tentons donc pas de l'imposer comme une alternative crédible au modèle de Weibull. De plus, dans la mesure où les différents paramètres associés à la loi de Weibull (que se soit sous sa forme mettant en avant module et contrainte de Weibull, ou sous sa forme équivalente associant à la fonction h_a une loi Bêta – paragraphe I.4.3 [HIL 94]) sont identifiés de manière inverse, i.e., par rapport à des essais réels, ils englobent *naturellement* bien d'autres phénomènes supplémentaires qu'une simple propagation idéalisée de défaut circulaire. En particulier, c'est le cas pour l'inhomogénéité du milieu autour de ces défauts, mais aussi de leur forme non circulaire, etc. Cependant, là où l'étude de l'identification de la fonction h_a comme nous nous préparons à le faire peut se montrer intéressante, est que l'utilisation d'un formalisme prenant en compte des phénomènes supplémentaires peut nous permettre de nous rapprocher de la forme "réelle" de cette fonction.

Des essais de traction sur éprouvettes de nitrure de silicium ont été effectués par F. Hild [HIL 92b]. Pendant ces essais, les forces à rupture correspondant aux différentes éprouvettes ont été relevées, et une probabilité expérimentale leur a été associée, de la même manière que dans les paragraphes précédents. En choisissant un volume élémentaire V_0 égal à 1 mm^3 (le volume V des éprouvettes étant de 1000 mm^3), les paramètres associés à la fonction h_a , en la postulant en loi Bêta, sont $a_{min} = 0 \text{ mm}$, $a_{max} = 125 \text{ mm}$, $a = 8,11$ et $b = 0,19$. Cette fonction est associée au formalisme de type Weibull et à l'hypothèse du maillon le plus faible.

En se servant des résultats de ces essais, et en considérant valable l'identification de la fonction h_{Kc} réalisé dans le paragraphe IV.7.1, une nouvelle fonction h_a a été identifiée en tenant cette fois ci compte de l'aléa mécanique du milieu (équation (IV.7.2.a)). Les paramètres qui lui sont alors associés sont $a_{min} = 0 \text{ mm}$, $a_{max} = 125 \text{ mm}$, $a = 20,6$ et $b = 0,5$ (les valeurs de V

et V_0 , a_{min} et a_{max} ayant été conservées pour permettre une comparaison directe). En termes de probabilité de rupture sous une contrainte donnée pour les éprouvettes de nitrure de silicium, cela ne change pas fondamentalement les résultats (puisque c'est la base de l'identification), mais on peut comparer les deux distributions de défauts (figure IV.x).

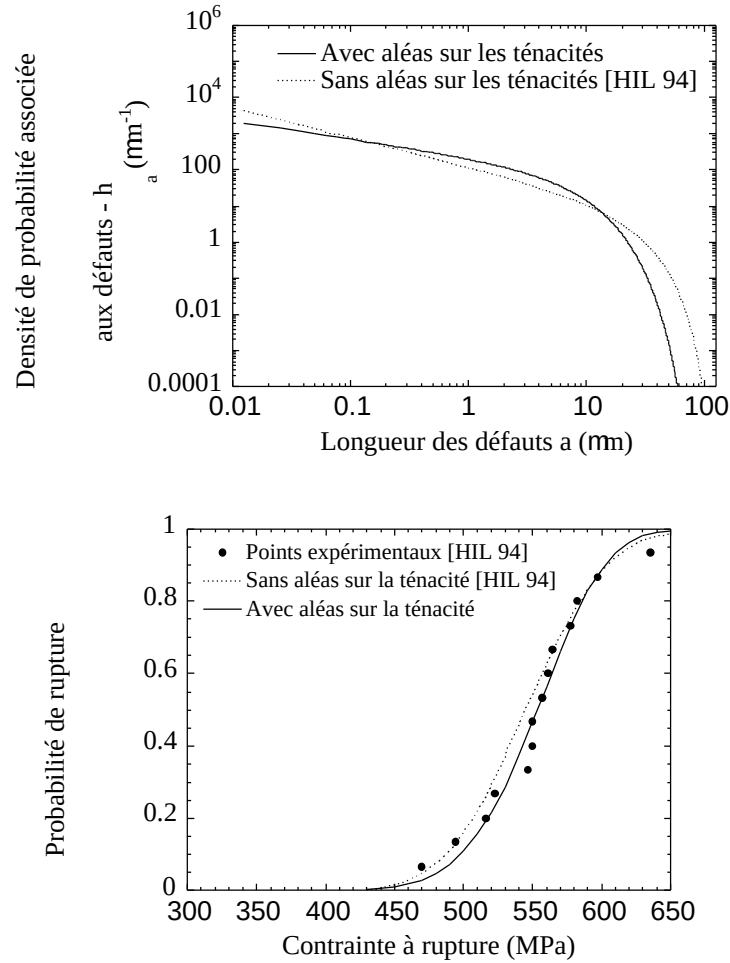


Figure IV.x. Comparaison entre le modèle de Weibull et la prise en compte d'un aléa sur les ténacités.

Considérer un aléas sur les ténacités revient à pénaliser les défauts de faibles tailles et de fortes tailles, dans la mesure où tout défaut peut conduire à la rupture si son environnement proche le lui permet. C'est ce que l'on constate sur les graphiques ci-dessus : bien que la forme générale de la densité de probabilité h_a ne soit pas modifiée (avec une prépondérance des défauts de faible taille), nous pouvons remarquer un glissement vers les tailles moyennes. Ce résultat montre, que des deux variabilités analysées (i.e., distribution de tailles de défaut et distribution de ténacités), la plus importante est celle décrivant les dispersions relatives aux tailles de défauts. Ceci permet de valider, *a posteriori*, un choix effectué *a priori* [HIL 92b]. Ce résultat n'est valable que pour le problème de traction, dans lequel l'amorçage des fissures s'avère primordial par rapport à l'arrêt (ce dernier étant alors quasiment inexistant, de toute manière peu détectable). Mais dans d'autres configurations cet effet relatif peut complètement s'inverser (chapitre V). Le cas intermédiaire peut, par exemple, être celui donné en application

des effets *DLH* au paragraphe II.5.3.A, concernant une propagation de fissure en un tube mince chargé thermomécaniquement.

Une des remarques que l'on peut faire ici concerne la limite de la mécanique de la rupture, qui ne peut s'appliquer pour des défauts de trop faible taille (paragraphe II.4). Le modèle de Weibull nous permettant de contourner cette difficulté, on peut se demander si intégrer à nouveau dans sa formulation un terme issu de la mécanique de la rupture est pertinent. A posteriori, en comparant les formes des deux densités de probabilité, on pourrait en conclure que ce n'est pas absurde (mais considérer une fonction h_a lors de l'application de l'hypothèse du maillon le plus faible nous place *de facto* dans le cadre de la mécanique de la rupture).

IV. 8. Identification des paramètres de vieillissement

À présent que les paramètres probabilistes du modèle ont été identifiés, il ne nous reste plus qu'à nous intéresser aux différentes constantes (déterministes) qui caractérisent la propagation en fatigue d'une fissure. Ces paramètres (i.e., C et m) sont essentiellement associés à la loi d'Evans-Wiederhorn modifiée (paragraphe III.2.2)

$$\frac{dx}{dt} = C \frac{\hat{E}[K_I(x) - K_s(x)]^m}{\hat{E}[K_c(x) - K_I(x)]^m} \quad \text{si } K_s(x) \leq K_I(x) \leq K_c(x), \quad (IV.8.a)$$

et à la relation linéaire reliant ténacité et facteur d'intensité des contraintes seuil (équation (III.2.1.c))

$$K_c = mK_s. \quad (IV.8.b)$$

Nous avons également vu, au paragraphe III.2.2.C, que le temps consommé par une fissure pour se propager le long d'un chemin donné (en mode I pur et sous une contrainte indépendante du temps) l'a été de manière préférentielle par un grain unique du chemin. Ceci est d'autant plus vrai que la valeur de m , exposant de la loi d'Evans-Wiederhorn, est grand. On peut donc, à partir de cette constatation, identifier une loi de propagation sous-critique macroscopique à la loi de propagation sous-critique microscopique qui lui est sous-jacente. Par là même, les paramètres de vieillissement issus de l'équation (IV.8.a) que l'on pourrait identifier à l'aide d'essais macroscopiques appropriés (comme un essai de double torsion [AZZ 01]) peuvent avec une faible marge d'erreur (qui existe cependant dans la mesure où tout le temps consommé par la propagation ne l'est pas par un grain unique) être identifiés à ceux de la loi microscopique associée. Nous avons donc considéré des résultats de mesure de vitesse de fissuration dans la littérature, afin d'en extraire les paramètres qui nous intéressent. Considérons une loi de propagation sous-critique d'Evans-Wiederhorn classique, qui s'écrit [EVA 72 ; EVA 74 ; WIE 74]

$$\frac{dx}{dt} = A \frac{\hat{E} K_I(x) \hat{v}_0^{\hat{m}}}{\hat{E} K_c^{macro}} \quad (IV.8.c)$$

avec K_c^{macro} la ténacité macroscopique, ou apparente, du matériau considéré, et A et $\underline{m}$ les paramètres associés à la vitesse de fissuration. Nous pouvons alors relier tous ces paramètres à ceux de la loi d'Evans-Wiederhorn modifiée en associant, d'une part, le facteur d'intensité des contraintes seuil $\sqrt{m} K_c^{macro}$ à une vitesse v_0 conventionnelle, et d'autre part en remarquant que, pour

$$K_I(x) = \frac{1+m}{2} K_c^{macro}, \quad (IV.8.d)$$

l'équation (IV.8.c) est la tangente à l'équation (IV.8.a). Ceci nous permet de déterminer le système suivant reliant C , m et $\underline{m}$ à A , v_0 et $\underline{m}$

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \frac{\hat{E} v_0^{\hat{m}}}{A \hat{E}} \\ \hat{C} &= A \frac{\hat{E} (1+\hat{m})}{\hat{E} 2} \\ \hat{m} &= \frac{p(1-\hat{m})}{2(1+\hat{m})} \end{aligned} \quad (IV.8.e)$$

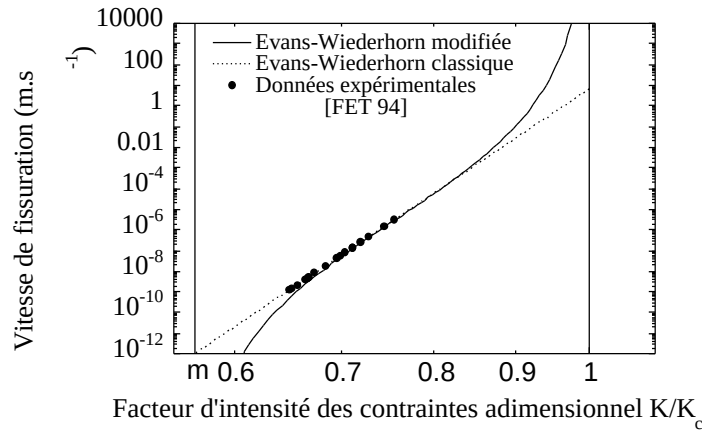


Figure IV.y. Détermination des paramètres de vieillissement.

Pour de l'alumine à 99,6% de pureté, des essais de flexion sous plusieurs vitesses de charge ont donné comme paramètres $A = 6,9 \text{ m.s}^{-1}$ et $\underline{m} = 52$ [FET 94]. En posant $v_0 = 10^{-12} \text{ m.s}^{-1}$ et $K_c^{macro} = 4,5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, nous obtenons alors $C = 2,1.10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$, $m = 7,2$, et $\hat{m} = 0,57$ (figure IV.y). Nous remarquerons que les écarts entre les deux modèles de fissuration sous-critique (équations (IV.8.a) et (IV.8.c)) se trouvent en dehors du champs de données expérimentales.

IV. 9. Conclusion

A l'issue de ce chapitre, tous les paramètres introduits (que ce soit de notre propre chef, comme pour les grandeurs aléatoires, ou de par l'utilisation de formules issues de la littérature) ont été identifiés. Nous avons ainsi proposé une méthodologie d'identification nous permettant d'atteindre la densité de probabilité associée aux ténacités par le biais d'essais de micro-indentation. Cette fonction, malgré les réserves que nous avons émises quant à son caractère intrinsèque au matériau, nous a permis d'assurer la répétabilité des expériences, et de plus, nous a donné une dispersion théorique convenable par rapport aux données issues d'essais SENB (nous pouvons à présent remarquer que cela n'aurait peut-être pas été le cas si l'on avait utilisé la seconde relation indentation-ténacité - équation (IV.1.a)). De plus, en notant le rapport particulier entre vitesse de fissuration macroscopique et microscopique, les paramètres associés à la loi de fissuration sous-critique statique (il en serait de même pour le cas cyclique) ont pu être extraits d'essais de la littérature. À présent, il convient, dans la mesure où le modèle est accepté, même avec certaines nuances du fait de sa validation, de retourner au problème premier de cette étude, et de l'appliquer à la structure étudiée, afin de dire si oui ou non, la fissuration est un facteur limitant la durée de vie de l'assemblage céramique-métal.

Chapitre V

Application du modèle à l'assemblage de l'étude

À présent que nous avons établi un modèle probabiliste de propagation pouvant palier (le terme compléter serait en fait plus adapté) à la non applicabilité de l'hypothèse du maillon le plus faible pour certaines configurations mécaniques, nous allons pouvoir tenter d'aborder la problématique de départ. Nous avons vu, au paragraphe I.4.2, que la modélisation EF du refroidissement de l'assemblage met en évidence de fortes zones de contraintes (figure I.j), situées aux environs des interfaces non chargées entre le joint de brasage et l'alumine. La statistique de Weibull, bien que non applicable au niveau global sur la structure fragile, permet cependant de bien appréhender la rupture au niveau local (i.e., des éléments finis). En particulier, sur ces zones de fortes contraintes, qui correspondent à des champs singuliers, on peut déterminer la probabilité d'amorçage d'une fissure. Cette probabilité ne dépend ainsi que du produit np , où n est le module de Weibull (égal à 10 pour le matériau étudié, i.e., l'alumine) et p l'exposant de la singularité (paragraphe III.3.2). Avant de s'intéresser davantage à l'étude numérique de la propagation, nous allons nous pencher sur les conditions d'amorçage près de ces points singuliers (même si les calculs EF de la probabilité de rupture nous donnent des indications sur ces conditions : quel que soit le point singulier de la structure considéré, l'exposant de singularité est supérieur à 0,2 – figure I.k).

V. 1. La singularité d'un bi-matériau

Lorsque sont assemblés deux matériaux différents par leurs propriétés mécaniques (élastiques ou élastoplastiques), des champs de contraintes singuliers sont générés. Dans le cas particulier de deux matériaux semi-infinis, différentes méthodes ont été proposées afin de déterminer l'exposant de cette singularité [BOG 68 ; BOG 70 ; HEI 71 ; LEG 89 ; DES 98]. Pour deux matériaux élastiques (ou élastoplastiques) semi-infinis assemblés, il existe ainsi des solutions analytiques, et ce quel que soit l'angle associé au point de contact du bi-matériau [DUV 88 ; CHU 91] : cet exposant peut ainsi être exprimé en fonction des caractéristiques mécaniques des deux matériaux (ou des paramètres de Dundur). Lorsque la géométrie du point singulier est compliquée (en particulier pour des massifs collés non semi-infinis et/ou des géométries particulières), les approches théoriques montrent leurs limites et sont alors supplantées par des méthodes numériques, par le biais des éléments finis [GHA 91 ; GU 93]. Gu a montré qu'une bonne estimation des exposants de singularité, en utilisant des éléments finis particuliers à haute résolution situés au voisinage de ces points singuliers, peut être obtenue [BEL 90 ; BEL 92]. Cette bonne estimation nous préserve donc d'une trop grande erreur lors des simulations EF du refroidissement de l'assemblage étudié. En particulier, en utilisant des éléments de Barsoum [BAR 76], nous pouvons extraire du champ de contrainte numérique l'exposant du point de singularité. Nous noterons que, lorsque le champ singulier s'écrit $(A/r^p)h(L \ln r) + B$, avec p et L caractérisant le point singulier (i.e., sa géométrie et les matériaux qui le caractérise [SUO 90a]), extraire du champs de contrainte numérique les valeurs de p et L est également possible, bien que ce soit plus délicat (et ce d'autant plus que le problème n'est pas constitué de deux corps semi-infinis). De tels éléments seront donc placés aux points "sensibles" de la structure (figure I.j et I.l). Nous noterons enfin que

certaines études s'intéressent aux singularités générées par la présence de joints [DES 88 ; TSA 95].

V. 2. Propagation numérique de fissures au sein de l'assemblage

Nous reprendrons les résultats issus des calculs EF effectués au chapitre I, en particulier ceux issus du calcul de probabilité de rupture locale issus de la statistique de Weibull (figure I.j et I.l). Afin de pouvoir appréhender la probabilité de survie de l'assemblage, des fissures seront amorcées près des points singuliers générés par les interfaces des bi-matériaux. Lors de leur propagation ultérieure, le taux de restitution (axisymétrique) sera calculé. Le facteur d'intensité des contraintes en pointe de fissure, ramené à une configuration bidimensionnelle, servira pour permettre de déterminer les probabilités de propagation des fissures alors implantées dans le maillage.

V. 2. 1. Détermination des chemins de fissuration

Prenant la configuration mécanique issue du calcul EF tel que nous l'avons décrit dans le paragraphe I.4.2, nous considérerons que l'amorçage des fissures a lieu à la fin du cycle de refroidissement. Dans les faits, il est clair que cela ne se passe pas ainsi, et que l'amorçage a lieu dès la mise en charge de la structure (soit dès que la température extérieure baisse, moyennant des exposants de singularités supérieurs à 0,2, ce qui est ici acquis dans la mesure où à la fin du refroidissement, les probabilités de rupture sont unitaires au niveau de ces singularités), et l'état de fissuration évolue alors en fonction du chargement (et donc de la température). Cependant, considérer une fissuration concomitante au refroidissement de la structure n'est pas raisonnable, bien que possible. De plus, au fur et à mesure que la température de la structure diminue, les contraintes en son sein augmentent, et donc les niveaux de chargements les plus importants (les plus à même de générer les fissures les plus longues) seront atteintes à la fin du cycle de refroidissement : la configuration mécanique la plus défavorable est donc pour une température extérieure de 20°C. Les niveaux de contraintes utilisés pour simuler la propagation seront donc générés à la fin de la simulation EF du cycle de refroidissement de la pièce intacte.

Nous procéderons de manière itérative : considérant des fissures courtes existantes situées au voisinage des points singuliers, nous les ferons se propager, en mode I dans la mesure du possible, sous des contraintes imposées. Ces dernières, situées au niveau de l'interface joint de brasage-alumine, correspondent à l'effort engendré par le refroidissement de la structure fissurée. Afin de prendre en compte la décharge mécanique qu'engendre la propagation, ces efforts seront réactualisés régulièrement par un cycle numérique de refroidissement de la structure. Cela revient donc à considérer que les fissures se propagent de manière instantanée dès que la température extérieure à l'assemblage commence à diminuer, mais que le chemin de fissuration qui leur est associé correspond à un mode I à la fin du cycle de refroidissement. Cette démarche va impliquer une sous-estimation des contraintes numériques par rapport à une situation réelle (et donc de la longueur des fissures numériques

alors générées), et les chemins de fissurations seront approximatifs. Nous pouvons cependant espérer que les résultats alors obtenus ne seront pas trop éloignés d'une approche faisant intervenir de manière simultanée fissuration et baisse de la température extérieure.

V. 2. 2. Amorçage au voisinage des singularités et chemins de fissurations

La statistique de Weibull nous permet de connaître la probabilité d'amorçage au voisinage d'un point singulier, comme nous l'avons vu dans le paragraphe III.3.2. Mais rien ne nous est dit quant au lieu le plus probable d'amorçage en ce voisinage. Plusieurs phénomènes le conditionne. Tout d'abord, la population de défauts près du point singulier considéré. Une analyse statistique semblable à celle utilisée par Oh [OH 70] peut alors donner un premier élément de réponse par rapport à ce lieu d'amorçage le plus probable. Ensuite, si l'on considère une fissure courte au voisinage d'un point singulier d'une interface d'un bi-matériau, alors le taux de restitution d'énergie qui lui est associé connaît un extremum localisé à une distance non nulle de la singularité, et ayant une certaine orientation par rapport à la surface libre (extremum conditionné par les propriétés géométriques et mécaniques de l'assemblage) [BAR 91 ; HE 91]. Combinée à une approche où intervient un aléa sur les ténacités (et donc sur les énergies de surface), ceci fait alors apparaître une distance d'amorçage par rapport au point singulier qui devient aléatoire, conditionnée par le minimum de la différence entre taux de restitution d'énergie, déterministe, et énergie de surface, aléatoire. Le point d'amorçage des fissures est donc doublement probabiliste. Tout en ayant conscience de ce facteur, nous fixerons arbitrairement les points d'amorçage dans l'assemblage modélisé, les fissures étant considérées comme pouvant se propager tant que leur taux de restitution d'énergie est non nul (et donc ayant une probabilité non nulle de pouvoir avancer).

Les chemins de fissurations que nous ferons suivre aux fissures, déterminés de la manière détaillée dans le paragraphe V.2.1, seront globalement en mode I : ceci est le mode de fissuration observé dans les assemblages céramique-métal [SUO 90b ; FLE 91]. Cependant, comme nous le verrons dans la suite, les fissures ont tendances à se diriger vers les interfaces céramique-joint de brasage (ce qui est en adéquation avec les observations expérimentales [NAN 94]). Nous avons ainsi fait évoluer certaines fissures en mode mixte lorsqu'elles se trouvaient au voisinage de cette interface, afin de ne pas pénaliser leur propagation. Il est plus probable que ces fissures, une fois l'interface atteinte, se mettent à se propager en mode mixte le long de cette dernière, et non seulement dans la partie fragile de l'assemblage (particulièrement dans un régime de propagation sous critique [CAN 91]), avant de se remettre à se propager dans la partie fragile dès qu'une configuration en mode I se présente. Faisant cela, nous avons probablement connecté deux réseaux de fissuration, générés d'une part au niveau des bords libres, et d'autre part au niveau de l'interface (figure I.g). En l'absence de données expérimentales sur le type de fissuration générée dans l'assemblage que nous étudions, aussi bien au niveau des chemins suivis que des fissures générées, nous suivrons les résultats des calculs EF.

La structure sera maillée à l'aide d'éléments triangulaires à six nœuds (figure V.a).

Déformées (amplitude 10)

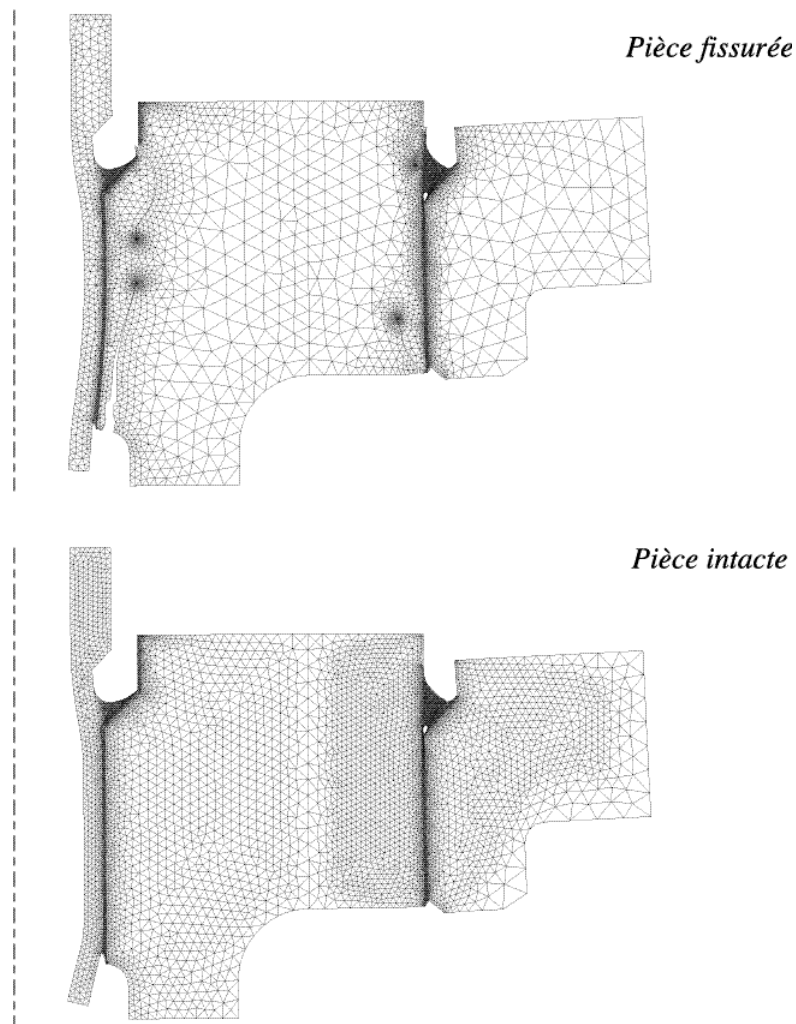


Figure V.a. Maillage et déformées des assemblages intact et fissuré après refroidissement.

Le maillage en pointe des fissures numériques est rayonnant, comprenant en pointe des éléments triangulaires à six nœuds, et autour des éléments quadratiques à 8 nœuds (ce type d'agencement étant effectué par la procédure @RAYO de Castem2000 - figure V.b).

Maillage de la pointe de fissure (détail)

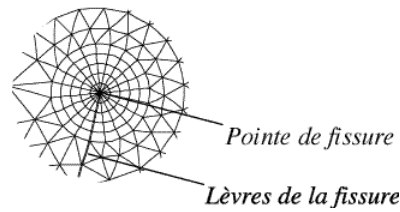


Figure V.b. Maillage en pointe de fissure

V. 2. 3. Propagation numérique

Au vu des "concentrations" de contraintes présentes dans la structure à la fin du cycle de refroidissement, cinq fissures peuvent être amorcées (correspondant à quatre interfaces du bi-matériau et à un angle vif), repérées de un à cinq (figure V.c). Sur les figures V.c et V.d, les contraintes équivalentes correspondent aux contraintes de von Mises pour les matériaux ductiles, et à la contrainte principale maximale positive pour la partie fragile

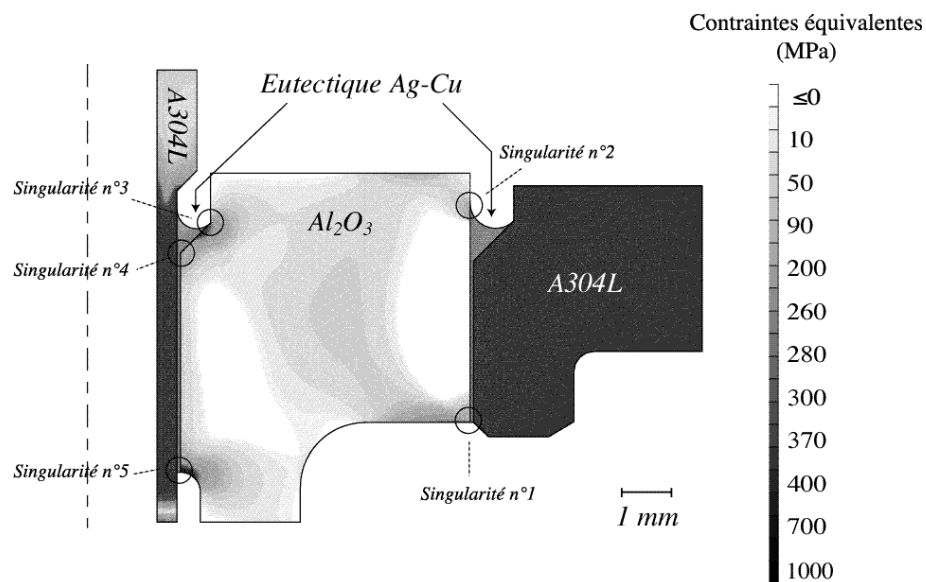


Figure V.c. Configuration mécanique à 20°C - pièce intacte.

Nous étudierons exclusivement les fissures amorcées par les singularités des bi-matériaux (repérées 1, 2, 3 et 5) : les probabilités d'amorçage au voisinage de la singularité n°4 sont faibles (figure I.l), et de plus, il est probable que la décharge mécanique la plus importante sera engendrée par une rupture provoquée par le point singulier n°3. Enfin, les fissures que l'on amorcerait près du point singulier n°4 auraient une très faible propagation (et sont donc renvoyées à la catégorie des fissures interfaciales, dont l'existence a été négligée dans le présent paragraphe - figure I.g). Une fois les fissures amorcées dans le maillage (figure V.c), la propagation peut commencer.

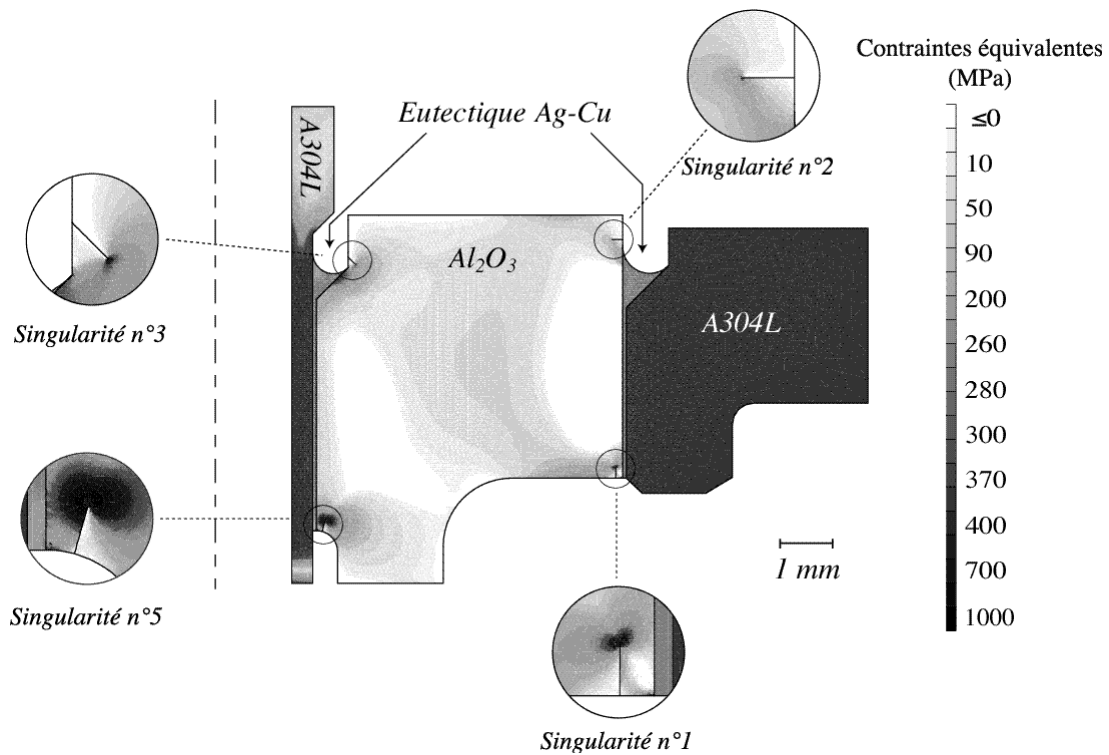


Figure V.d. Amorçage des fissures au voisinage des points singuliers.

A chaque réactualisation des contraintes imposées sur la partie céramique de l'assemblage par un calcul de refroidissement, le taux de restitution d'énergie associé aux longueurs de fissures est calculé (à l'aide de la procédure *G_THETA* de Castem2000, sous une configuration axisymétrique). Ce calcul nous confirme bien que la valeur maximale de ce dernier, au cours du refroidissement, est atteint pour la valeur la plus basse de la température (ici, 20°C).

Nous pouvons remarquer, au vu des résultats relatifs à la propagation numérique des fissures précédemment amorcées (figure V.e), que deux types de fissuration apparaissent. Tout d'abord, les fissures générées par les points singuliers n°1 et 2. Ces dernières se propagent en convergeant vers l'interface joint de brasage-céramique, au mieux en étant parallèle à cette dernière, et arrivent ainsi au niveau de la zone de compression engendrée par le fretage. Cette propagation n'altère que de manière très marginale cette zone de compression : les fissures ne se propagent que de manière à diminuer le cisaillement présent au niveau de l'interface joint de brasage-céramique, mais ne peuvent rien pour ce qui est relatif à la compression. Ces fissures seront donc courtes, arrêtées par cette zone compressive, et nullement dangereuses pour l'intégrité de la structure (et cela tant que la zone de compression est présente, ce qui n'est plus vrai à partir de températures bien supérieures à celles d'utilisation de l'assemblage).

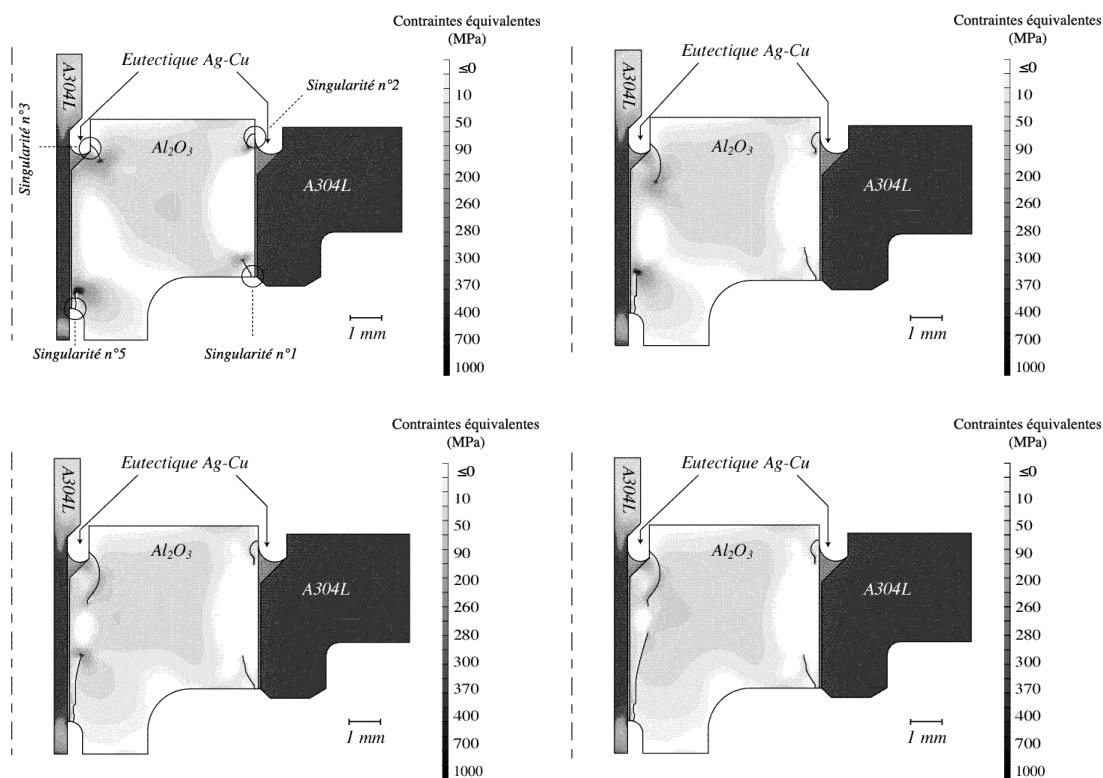


Figure V.e. Propagation des fissures - T=20°C.

La propagation des fissures engendrées par les points singuliers n°3 et 5 correspond à une logique inverse. En effet, cette zone subit une concurrence entre la compression due au cylindre en acier inoxydable extérieur et la traction (et le cisaillement) due au cylindre intérieur. Au fur et à mesure du refroidissement, la plastification du cylindre intérieur est différée du fait de la fissuration au niveau des points singuliers 3 et 5 (contrairement au cylindre supérieur, qui subit, quel que soit l'état de fissuration de la partie céramique, une résistance radiale équivalente à celle produite par le cylindre d'alumine intact). Nous pouvons remarquer que la fissure correspondant au point singulier n°3 se propage initialement en augmentant son taux de restitution d'énergie avec sa propagation. A partir d'un certain état de fissuration de la céramique, le cylindre intérieur (aidé en cela par la plastification du joint de brasage) atteint un état de plasticité limite tel que la fissuration de la partie céramique s'effectuera avec des taux de restitution d'énergie décroissants avec l'augmentation de la taille des fissures. Les fissures amorcées par les point singuliers n°3 et 5 seront donc celles qui conditionneront la durée de vie de la structure. Une augmentation de la température va diminuer leur nocivité (par diminution de la traction exercée par le cylindre intérieur), et une diminution de la température l'augmentera (par une augmentation de la traction exercée par le cylindre intérieur). Ce sont des conclusions inverses à celles effectuées pour les fissures associées aux points singuliers n°1 et 2 (ces dernières n'étant pas nocives à moyenne et basse température). Enfin, du fait du relatif éloignement des zones de propagation des quatre fissures, ces dernières ont été considérées comme indépendantes. De manière numérique, on constate en effet que la propagation d'une des fissures influe sur le taux de restitution

d'énergie des trois autres de manière relativement marginale, de l'ordre de quelques J.m⁻² (mais cette interdépendance peut devenir relativement forte au fur et à mesure que les fissures avancent, en particulier pour celles amorcées près des points singuliers n°3 et 5).

V. 2. 4. Probabilité de propagation le long des chemins de fissurations déterminés

A la propagation des fissures axisymétriques que nous venons de déterminer est associé un taux de restitution d'énergie, comme nous l'avons noté dans le paragraphe V.2.3. Ce taux de restitution d'énergie tridimensionnel (et axisymétrique) G associé à une extension de fissure élémentaire peut être relié aux facteurs d'intensité des contraintes le long du front de fissuration (sous une hypothèse de propagation en un mode I pur et en déformations planes) [ADA 84]

$$G(l(s)) = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\int_0^s K_I^2(s) l_0(s) ds}{\int_0^s l_0(s) ds}, \quad (V.2.4.a)$$

avec s l'abscisse curviligne le long du front de la fissure initiale ∂G , l_0 la fonction de forme caractérisant l'avancée du front de fissuration, ν et E le coefficient de Poisson et le module d'Young du matériau considéré, et $K_I(s)$ le facteur d'intensité des contraintes au point d'abscisse s du front de fissuration (en contraintes planes, le préfacteur de l'équation (V.2.4.a) est remplacé par $1/E$). Dans une configuration axisymétrique (du point de vue géométrique, y compris au niveau de la fissure, et mécanique), le facteur d'intensité des contraintes devient indépendant du point du front de fissuration considéré (et il en est également ainsi pour l'extension du front l_0 , qui est alors axisymétrique). L'équation (V.2.4.a) peut donc être réécrite

$$G(G) = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2(G), \quad (V.2.4.b)$$

où $G(G)$ et $K_I(G)$ sont respectivement le taux de restitution d'énergie et le facteur d'intensité des contraintes associés à la fissure axisymétrique G . Les taux de restitution d'énergie déterminés par Castem2000 ne correspondent pas exactement à une propagation en mode I pur (en particulier lors de la propagation parallèle à l'interface métal-céramique de la fissure associée à la singularité n°5, qui s'effectue en mode mixte). Cependant, nous pouvons remarquer deux choses. Tout d'abord, le modèle probabiliste de propagation a été établi en ne considérant que des fissures se propageant sous un mode I pur. Cependant, en basant le modèle sur le taux de restitution d'énergie et non plus sur le facteur d'intensité des contraintes. Le modèle probabiliste de propagation s'écrit alors

$$P(a,b) = \exp \left\{ - \int_a^b \int_0^{\infty} \dot{U} \left(P(G(x) > G_c) \right) dx \right\}, \quad (V.2.4.c)$$

avec $P(a,b)$ la probabilité qu'une fissure se propage d'une longueur a à une longueur b (en bidimensionnel), G le taux de restitution d'énergie et G_c le taux de restitution d'énergie en dessous duquel la propagation brutale ne peut avoir lieu (ou énergie de création de surface), paramètre aléatoire à l'instar de la ténacité (nous noterons que tous les résultats établis dans les chapitres II et III relatifs au modèle probabiliste de propagation peuvent être adaptés au taux de restitution d'énergie). Ensuite, les paramètres relatifs à la densité de probabilité associée aux ténacités peuvent être transposées pour déterminer la densité de probabilité associée à la variable aléatoire G_c (par l'utilisation de l'équation (V.2.4.b), en axisymétrique - comme pour le présent problème - ou en bidimensionnel). En se basant sur ces remarques, nous allons pouvoir associer aux taux de restitution d'énergie des quatre fissures numériques (figure V.f) un facteur d'intensité des contraintes équivalent (équation V.2.4.b) et une probabilité de propagation (figure V.g).

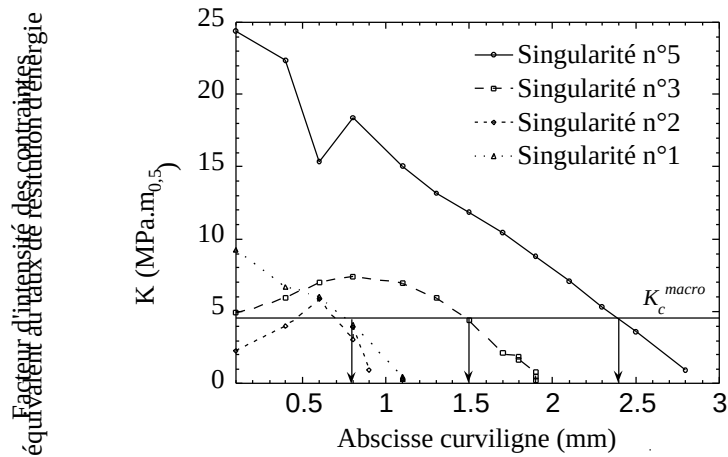


Figure V.f. Facteurs d'intensités des contraintes associés au taux de restitution d'énergie des fissures générées aux points singuliers.

Sur la figure V.f. est repérée la valeur de la ténacité macroscopique pour l'alumine considérée (i.e., 4,5 MPa÷m). Nous pouvons alors constater que, dans une optique de propagation déterministe, seules les fissures amorcées par les points singuliers n°5, n°3 et n°1 sont capables de se propager. Cependant, si la longueur initiale de la fissure associée au point singulier n°2 est supérieure à 0,5 mm, alors cette fissure peut également se propager. La propagation de cette fissure semble cependant relativement faible.

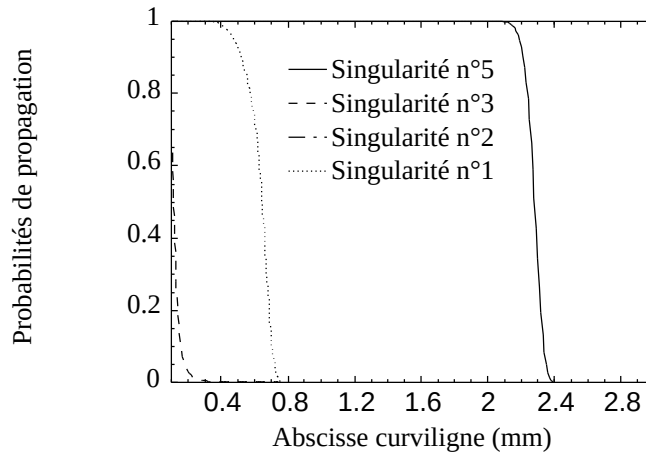


Figure V.g. Probabilités de propagation le long des chemins de fissuration numériques.

Sur la figure V.g, seule trois probabilités de propagation apparaissent : la fissure associée au point singulier n°2 a une probabilité de propagation (quasi) nulle (le facteur d'intensité des contraintes qui lui est associé est extrêmement faible). Dans une optique de propagation probabiliste, les conclusions sont les mêmes, à la différence que toutes les fissures initialement introduites dans le maillage se propagent (même avec une probabilité très faible, voir quasi nulle, comme pour celle qui concerne la singularité n°2). En comparant les longueurs des fissures déterminées par une approche déterministe (figure V.f), à celles obtenues par une approche probabiliste (figure V.g), nous pouvons constater que pour les fissures générées par les points singuliers n°5 et n°1, il n'y a pas beaucoup de différence. Les longueurs associées à ces deux fissures sont respectivement d'environ 0,8 mm pour la singularité n°1 et 2,4 mm pour la singularité n°5 (et ce en déterministe). Nous remarquerons que ce sont des valeurs qui sont communes aux approches probabilistes et déterministes. Pour la fissure associée au point singulier n°3, les résultats diffèrent cependant. En effet, alors qu'une approche déterministe donne une longueur de fissure de l'ordre de 1,5 mm, une approche probabiliste lui associe une longueur au plus égale à 0,4 mm. Ceci est dû principalement à la faible différence entre le facteur d'intensité des contraintes et la ténacité macroscopique au cours de la propagation : il suffit qu'il y ait sur le chemin de fissuration un grain dont la ténacité excède la valeur macroscopique pour que la propagation soit altérée. Cet exemple montre bien où l'apport probabiliste peut être intéressant : une approche déterministe conduirait à surestimer les longueurs de ce type de fissures.

V. 2. 5. Conclusion - Critiques

A priori, aucune des fissures étudiées ne conduit à la rupture à la fin du refroidissement de l'assemblage (de 780°C à 20°C). Pourtant, un problème apparaît à ce niveau. Mises à part les fissures associées aux points singuliers n°1 et n°5, aux autres sont associés des taux de restitution d'énergie initiaux (ou facteur d'intensité des contraintes correspondant) dont la valeur se situe dans la répartition statistique des ténacités de l'alumine. Intervient donc ici la nécessaire recherche du chemin de fissuration le plus faible, associé au

taux de restitution d'énergie à l'amorçage le plus important. En particulier, les tailles initiales et les orientations premières devront correspondre à ces maxima (par exemple, pour la singularité n°3, une fissure initiale de taille égale à 0,5 mm, permettant au taux de restitution d'énergie d'être hors de la répartition aléatoire des ténacités, serait peut-être plus adaptée pour une étude de propagation). Néanmoins, que les taux de restitution d'énergie associés aux chemins de fissurations que nous avons déterminés soient les plus faibles ou non, les conclusions sur leur propagation peuvent être considérées comme étant généralisables à tout chemin de fissuration issu du même point singulier, et suivant une trajectoire semblable (paragraphe V.2.3). Nous noterons que pour le point singulier n°2, il est possible que certaines fissures ne se dirigent pas vers l'intérieur du cylindre d'alumine mais vers l'extérieur, ce qui peut entraîner un chanfreinage local, sans conséquence pour l'intégrité de l'assemblage (mais qui peut en avoir sur le fonctionnement de la structure industrielle).

V. 3. Durée de vie de la structure

En conservant les chemins de fissuration déterminés précédemment, nous allons pouvoir établir les longueurs maximales que les fissures peuvent atteindre en propagation sous-critique. Cette recherche sera axée sur trois chargements différents, liés d'une part aux conditions d'utilisation en service de l'assemblage, et d'autre part sur le possible long stockage des pièces.

V. 3. 1. Conditions de chargements en service

L'assemblage, et la structure industrielle à laquelle il se rattache, vont être utilisés dans des environnements de température différentes. Les deux températures extrêmes d'utilisation sont -30°C et 70°C : la plus basse température peut recharger les fissures amorcées près des points singuliers n°3 et n°5, tandis que la température maximale peut diminuer la zone compressive en pointe des fissures générées par les point singuliers n°1 et n°2 (et donc augmenter le taux de restitution d'énergie qui leur est associé). Nous déterminerons donc les chargements associés à ces deux états limites, de manière à étudier le plus nocif (dans une optique de chargement cyclique, c'est ce dernier qui conditionne la propagation sous-critique - équation (III.2.3.f)). Au chargement thermomécanique subi par l'assemblage, qui ne dépend que des conditions de température extérieure, s'ajoutent les contraintes issues de l'ensemble industriel auquel l'assemblage se rattache (figure I.a). En particulier l'huile, qui, sous une augmentation de température, aura tendance à se dilater, engendrera des contraintes supplémentaires évoluant en fonction de la température extérieure (figure V.h).

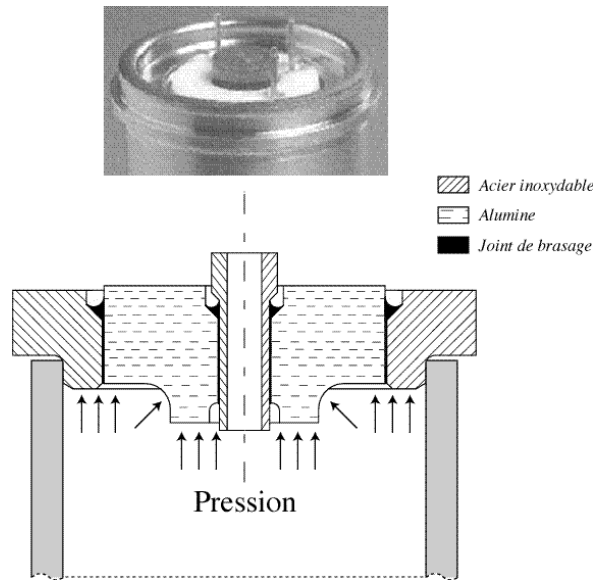


Figure V.h. Chargement de la structure en service.

La surpression intérieure est nulle lorsque la température est inférieure à 20°C et augmente de 0,5 bar par degrés au dessus. Pour une température extérieure de 70°C, la surpression sera donc égale à 25 bar (soit 2,5 MPa) [DUV 00].

V. 3. 2. Vieillessement de la structure - Fatigue statique

Avant de commencer l'étude des deux cas extrêmes de chargement pour la structure, c'est-à-dire sous des conditions de températures extérieures de -30°C et de 70°C (avec pour cette dernière une surpression de 2,5 MPa sur la partie "intérieure" de l'assemblage - figure V.h), nous allons considérer le possible vieillissement de l'assemblage dans des conditions de stockage (avant emploi). Dans cette configuration, la température peut être considérée comme constante (ou variant peu). Elle sera fixée à 20°C, ce qui nous permet de réutiliser les facteurs d'intensités des contraintes déjà déterminés au paragraphe V.2.4. Par un raisonnement analogue à celui effectué au paragraphe V.2.4., nous pouvons calculer les longueurs (aléatoires) maximales des fissures numériques que nous avons déterminées (i.e., en fatigue statique asymptotique - paragraphe III.2.1), et ce en utilisant d'une part l'équation (III.2.1.e), et d'autres part les paramètres de vieillissement sous air associé à une alumine pure à 99,6% (paragraphe IV.8). Les probabilités asymptotiques de propagation à 20°C sont donnés sur la figure V.i.

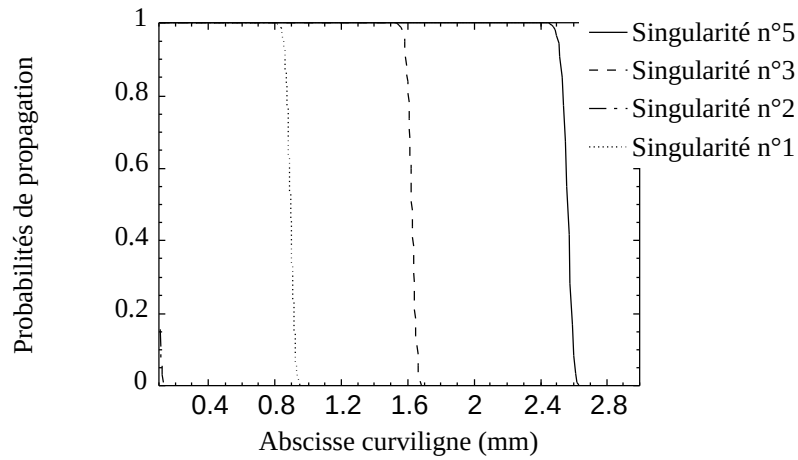


Figure V.i. Probabilités asymptotiques de propagation le long des chemins de fissuration numériques.

Après un temps infini sous une température extérieure de 20°C, nous pouvons constater que l'état de fissuration progresse (figure V.g), mais ne varie pas suffisamment pour rompre la structure. La fissure amorcée près du point singulier n°3, qui initialement (à la fin du refroidissement) a une longueur extrêmement faible, s'est propagée jusqu'à atteindre une longueur proche du millimètre et demi (ceci terminant la discussion relative aux orientations et longueurs des fissures initiales introduites dans le maillage EF : la propagation sous-critique permet aux taux de restitution d'énergie de sortir de la répartition des ténacités). Nous pouvons enfin noter que, en termes de probabilités de propagation, il y a eu inversion des fissures les plus longues : la fissure associée au point singulier n°3 a pu se propager en fissuration sous-critique, et du fait de la croissance initiale de son facteur d'intensité des contraintes, atteindre une taille supérieure à la fissure associée au point singulier n°1 (dont le facteur d'intensité des contraintes n'est que décroissant).

Enfin, nous pouvons noter que l'état de fissuration limite (à l'endurance - figure V.i) est atteint au bout de temps relativement courts (figure V.j).

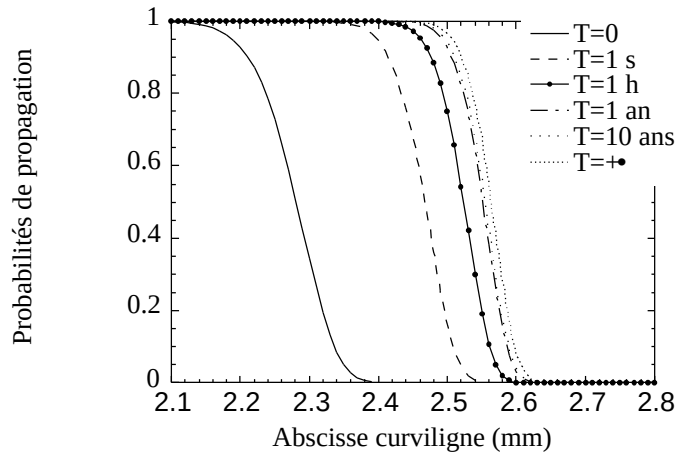


Figure V.j. Propagation sous-critique de la fissure associée à la singularité n°5 en un temps inférieur à T.

Pour le cas de la fissure associée à la singularité n°5, nous constatons que la fissure a déjà pratiquement atteint sa longueur extrême après 1 heure sous des conditions de température constante (soit 20°C), et que après 1 an de stockage (soit sous des conditions extérieures constantes), l'état de fissuration n'évolue quasiment plus. Ainsi, si la pièce n'est pas rompue au bout d'une heure (à plus forte raison au bout d'une année), nous pouvons en déduire qu'elle ne se rompra jamais sous des sollicitations extérieures constantes (indépendamment des modèles mécaniques et de la simulation numérique de fissuration).

V. 3. 3. Vieillessement de la structure - Fatigue "cyclique"

Nous allons à présent étudier la répartition des contraintes aux températures extrêmes d'utilisation de l'assemblage. Sur la figure V.k sont présentées les cartes des contraintes équivalentes correspondant à une température extérieure de -30°C, pour la pièce intacte et la pièce fissurée (les longueurs des fissures correspondants aux longueurs maximales déterminées à 20°C, dont le taux de restitution d'énergie est proche de 0).

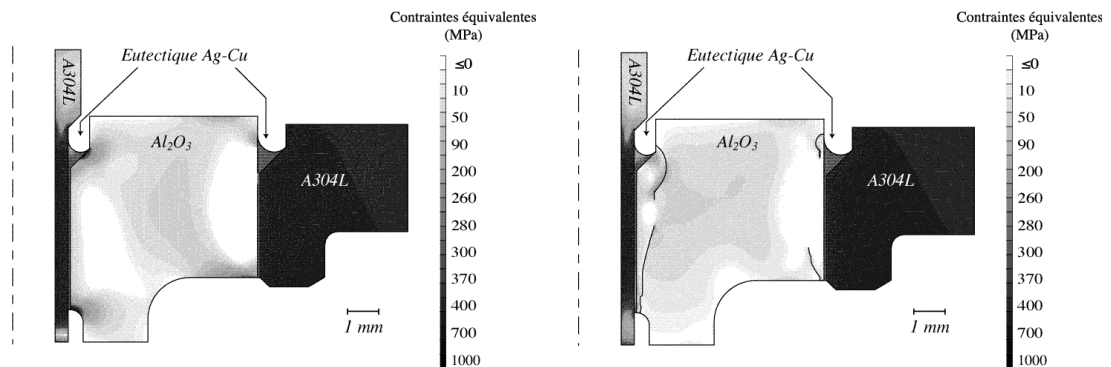


Figure V.k. Contraintes équivalentes dans l'assemblage non fissuré et fissuré à -30°C.

Le refroidissement "numérique" a été effectué en 2 heures 20 minutes, la température étant une fonction linéaire du temps (passant de 20°C à -30°C). Le chemin de refroidissement a une influence sur les contraintes résiduelles, par le développement de la plasticité qui diffère

d'un chemin à l'autre. Dans les faits, il est probable que, abstraction faite des fluctuations aléatoires de la température appliquée que l'on peut considérer comme négligeables (par exemple comme celles de la variation de température atmosphérique d'un jour à l'autre), l'assemblage alterne de longues périodes à température appliquée constante, séparées par des changements rapides de température. Une variation de température en 2 heures de temps peut être considérée étant suffisamment rapide pour être une solution pénalisante (plus la baisse de température est longue, plus la plasticité a le temps de se développer et donc moins la pièce est chargée) Nous noterons de plus que le chemin de refroidissement a une très faible influence sur la valeur des taux de restitution d'énergie à -30°C (de l'ordre de quelques J.m^{-2}). Les variations des facteurs d'intensité des contraintes en pointe de fissure en fonction de la température sont données figure V.l.

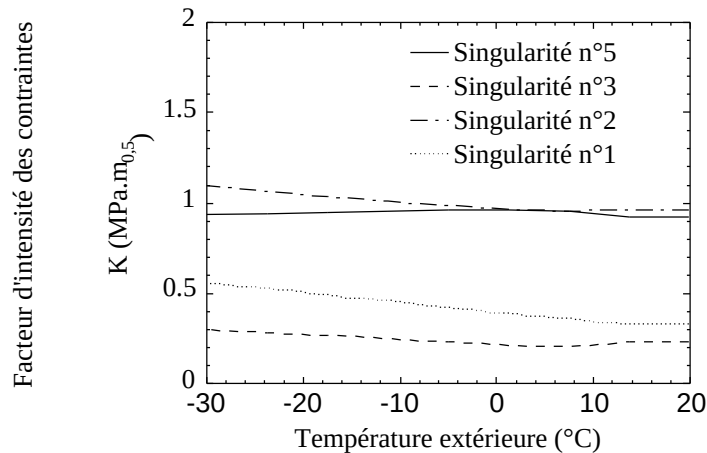


Figure V.l. Variation du facteur d'intensité des contraintes en fonction de la température.

Nous pouvons constater que la baisse de température entraîne globalement une hausse des facteurs d'intensité des contraintes équivalents en pointe des fissures. Mais cette augmentation ne pourra suffire à relancer une quelconque propagation des fissures (les chemins et résultats obtenus à 20°C sont donc extensibles à -30°C).

Reste à présent à étudier le cas où la température extérieure est de 70°C . Afin de prendre en compte les configurations mécaniques les plus pénalisantes dans une optique d'approche de durée de vie), nous déterminerons les contraintes équivalentes à 70°C à partir de celles calculées précédemment, à -30°C (figure V.m). La température extérieure varie linéairement avec le temps, et la pression linéairement avec la température (au dessus de 20°C uniquement). La montée en température de 20°C à 70°C se fait en 2h20 également (le chemin suivi par la température influant sur l'état de contraintes à 70°C , mais peu sur les taux de restitution d'énergie).

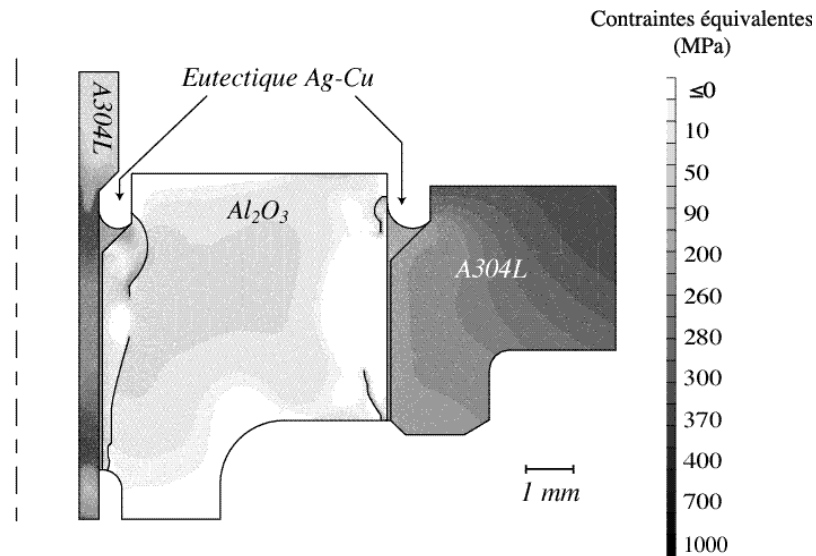


Figure V.m. Contraintes équivalentes dans la structure à 70°C et sous une pression intérieure de 25 bar.

Les taux de restitution d'énergie sont calculés à chaque pas du calcul, et peuvent être reliés à la température extérieure (figure V.n).

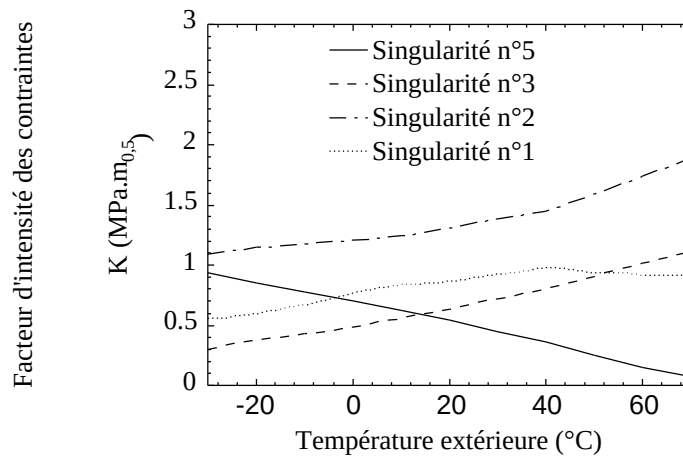


Figure V.n. Variation du facteur d'intensité des contraintes en fonction de la température.

Nous pouvons constater la faible croissance globale des facteurs d'intensité des contraintes. En particulier, la fissure générée par le point singulier n°5 tend à se refermer (alors qu'elle est la plus nocive, car la plus longue). La fissure associée au point singulier n°3 va peut-être profiter de cette augmentation du chargement pour pouvoir se propager (mais elle ne se propagera pas très longtemps, au vu de la valeur de son facteur d'intensité des contraintes à 70°C : 1,5 MPa÷m est en dessous de la valeur moyenne des ténacités). La fissure qui profite le plus de cette augmentation de charge est la fissure associée au point singulier n°2 : le facteur d'intensité des contraintes double, passant de 1 MPa÷m à 1,9 MPa÷m. Cela va permettre à la fissure de progresser sur le chemin qui lui a été affecté. Dans la mesure où $P(1,9 \text{ MPa} \div \text{m} > K_c) = 0,4$, il est fort probable qu'elle s'arrête au niveau de la fin du chemin de fissuration que l'on a déterminé. Cependant, nous devons noter que cette forte augmentation

du facteur d'intensité des contraintes est entièrement imputable à la surpression interne. Dans le cas présent, elle n'est pas suffisamment forte pour faire sortir le facteur d'intensité des contraintes de la répartition des ténacités (y compris en fissuration sous-critique), et donc la fissure associée au point singulier n°2 ne se propagera pas beaucoup plus loin que le chemin que l'on a déterminé. Mais si d'aventure, la surpression est supérieure à 25 bar (pour des températures supérieures à 70°C par exemple), alors le facteur d'intensité des contraintes relatif à cette même fissure peut sortir de la répartition des ténacités, et se propager de manière conséquente. Ceci peut alors entraîner en plus une recharge en pointe des autres fissures (par exemple, celle associée au point singulier n°3), et provoquer ainsi la rupture de l'assemblage.

V. 4. Conclusions

Les trois paragraphes précédents, moyennant les précautions relatives à leur validité, nous permettent de conclure que la fissuration n'est pas un facteur limitant la durée de vie de l'assemblage céramique-métal (pour les conditions d'utilisation en service). De plus, les états de fissuration engendrée par les conditions limites d'utilisations ne sont pas extrêmement éloignés de l'état initial, i.e., à la fin du processus de fabrication de cette pièce. Néanmoins, la présente étude contient de nombreuses hypothèses restrictives. Nous n'avons par exemple pas considéré des éventuelles dégradations des matériaux ductiles, dues à la fatigue thermique cyclique (de -30C à 70°C), et il est probable que la partie céramique elle-même soit altérée par le temps, bien que cela soit peu probable sur l'intervalle de température considéré. De plus, les valeurs des ténacités considérées ont été prise indépendantes de la température et seul le vieillissement sous air a été pris en compte. Enfin, sans appui expérimental, la validité des chemins de fissuration doit être considérée avec précaution. Malgré tout, qualitativement, on peut penser que les conclusions relatives à la durée de vie de l'assemblage ne sont pas erronées : aucun retour d'expérience d'assemblages (de géométrie semblable mais de matériaux différents), ayant été en service une vingtaine d'année, ne présente de rupture catastrophique [DUV 00].

V. 5. Vers une étude expérimentale des assemblages céramique-métal

Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe précédent, une étude poussée des assemblages, en termes de chemins de fissuration en particulier, manque dans une optique de validation des études numériques. Le problème vient de la géométrie des assemblages, et des contraintes résiduelles internes. En effet, même si la présence de fissures peut être attestée en leur sein (figure I.m), toute tentative pour observer l'état de fissuration interne échoue : la diminution du chargement induit par la destruction volontaire de l'assemblage (par exemple, du cylindre extérieur) induit une recharge au niveau des fissures, qui dès lors se repropagent jusqu'à rupture totale de la partie céramique.

Afin de tenter de palier ce problème, nous avons défini des assemblages plus simples que ceux étudiés jusqu'à présent (figure V.o).

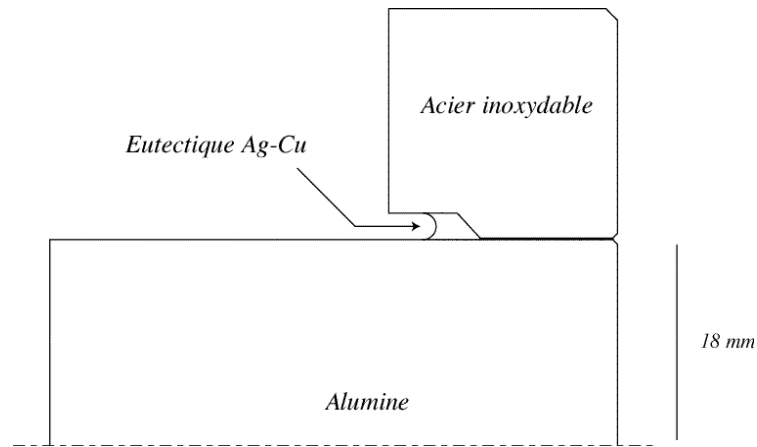


Figure V.o. Présentation d'un assemblage représentatif.

Ce nouvel assemblage est fabriqué de la même manière que celui que nous avons étudié dans le paragraphe précédent, et les matériaux qui le composent sont également les mêmes (la taille diffère cependant). Dans cet assemblage, que nous dénommerons maquette par opposition à l'assemblage industriel, sont présents deux points singuliers, qui, s'ils ne sont pas identiques à ceux de l'assemblage initial (en termes d'exposants de singularités), entraînent des créations de fissures. De plus les contraintes résiduelles sont semblables (au moins la zone de compression engendrée par le frettage) à ceux de l'assemblage réel (figure V.p).

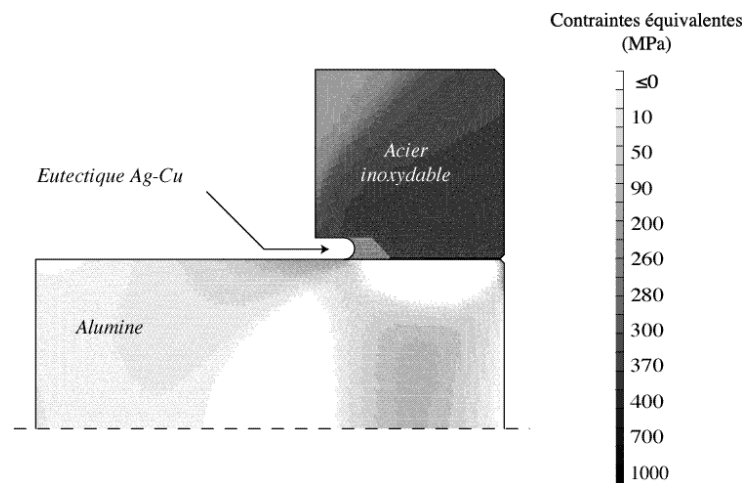


Figure V.p. Contraintes équivalentes dans la maquette.

Sur la figure V.p, obtenue par simulation numérique du cycle refroidissement (paragraphe I.4.2), sont représentées les contraintes équivalentes (de von Mises pour les parties ductiles et principales maximales positives pour les parties fragiles). Nous pouvons ainsi remarquer les "concentrations" de contraintes aux extrémités de l'interface du bi-matériau. En appliquant la statistique de Weibull, nous pouvons déduire de ce champ de contrainte les probabilités d'amorçage sur chaque élément fini (figure V.q).

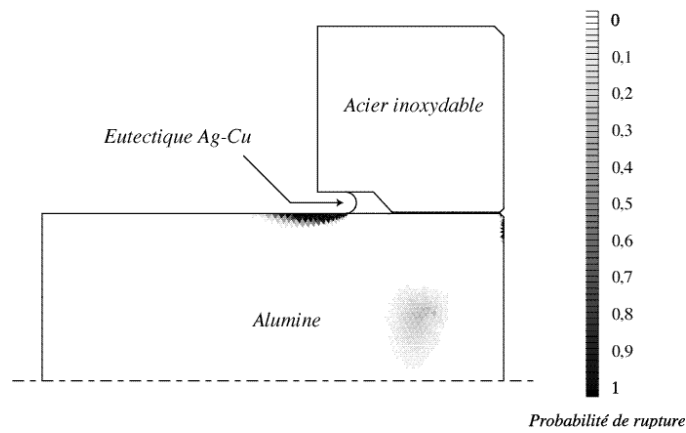


Figure V.q. Probabilités de ruptures de chaque élément fini du maillage.

Les points singuliers engendrent une probabilité de rupture unitaire au voisinage des singularités. Ceci est donc en total accord avec ce que nous avons observé pour l'assemblage réel. De plus, des zones de compression et faiblement chargées sont présentes, zones susceptibles de stopper les fissures créées. Nous devons noter l'existence au milieu du cylindre d'alumine d'une zone d'où peut être amorcée une fissure (avec une probabilité de l'ordre de 0,2). Cette zone peut être éventuellement préjudiciable si les fissures qu'elle engendre provoquent une séparation en deux du cylindre d'alumine (et dès lors perturbe le cycle de refroidissement). Cependant, pour des températures supérieures à 20°C, cette zone tend à disparaître très rapidement.

Sur ces maquettes pourront être menées des observations relatives à tous les phénomènes liés au cycle de refroidissement : évolution des matériaux, mesure des contraintes résiduelles, étude des chemins de fissuration, etc. Ceci permettra de compléter, et de valider, les résultats numériques établis dans les paragraphes précédents. Leur réalisation par la société Amostat est en cours.

V. 6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué le modèle probabiliste de propagation à une modélisation numérique de la fissuration de la partie céramique de l'assemblage étudié. L'état de contrainte au sein de cet assemblage est tel qu'aucune fissure ne peut traverser entièrement la partie fragile, que ce soit de manière brutale ou différée (et ce sous des conditions en service). De plus, bien que les calculs numériques effectués soient extrêmement dépendants des modèles mécaniques et des erreurs numériques, il est fort probable que cette conclusion soit indépendante de ces facteurs. Malgré tout, le besoin de confrontation avec l'expérimental se fait sentir, surtout pour ce qui est des chemins de fissuration, de l'état de fissuration de la partie en alumine en général. Enfin, dans le cas où la valeur de m est égale à 0 (équation (III.2.1.c)), alors tous les résultats précédents ne sont plus valables : il suffit en effet que le facteur d'intensité des contraintes soit positif et non nul pour que la probabilité de propagation à l'endurance soit égale à 1. Dans ces conditions, la fissure peut se propager de manière

relativement importante, et ce tant que le facteur d'intensité des contraintes n'est pas nul (on arrive en fait dans un système déterministe, où, à un facteur d'intensité des contraintes positif est associée une probabilité de propagation à l'endurance unitaire, et à un facteur d'intensité des contraintes nul est associée une probabilité de propagation à l'endurance nulle).

Conclusion - Perspectives

Cette étude s'est placée dans un contexte de formalisation du vieillissement. En fonction de la pièce étudiée, de ses fonctionnalités attendues et de son environnement en service, différents modes de vieillissement critiques peuvent être dégagés. Dans le cas présent, nous nous sommes intéressés à un assemblage céramique-métal. En ce dernier, assemblé à haute température, sont présentes des contraintes résiduelles, induites par le refroidissement de la structure jusqu'à température ambiante, et par la différence entre les coefficients de dilation thermique des différents constituants. Cette présence, couplée à celle de points singuliers, engendre l'apparition de fissures, amorcées près des points singuliers, et dans le cas pratique qui nous concerne, dans la partie céramique. Les matériaux fragiles ne supportant que peu la présence de fissures en leur sein, ce paramètre est celui qui serait à même de limiter le plus la durée de vie de l'assemblage.

Sous cette hypothèse, et du fait du champ de contraintes résiduelles extrêmement hétérogènes, nous avons mis en place un modèle de propagation probabiliste de macrofissure : il y a amorçage de manière claire (et certaine), près de points singuliers, mais également arrêt possible, dans la mesure où ces amorçages ne conduisent pas à la rupture complète de l'assemblage. Ce dernier point nous empêche dès lors d'utiliser des modèles probabilistes établis sur des hypothèses de prépondérance de la fissuration dans le vieillissement, et analytiquement fondés sur l'hypothèse du maillon le plus faible.

Ainsi, les aléas concernant l'amorçage (dont finalement nous pouvons faire abstraction du fait des singularités), liés à la résistance des ou du chemin de fissuration, etc., se doivent d'être intégrés dans une approche de la mécanique de la rupture rendue probabiliste. Ceci est possible par l'intermédiaire d'une discrétisation du milieu de propagation (fragile). À chaque élément de cette discrétisation (simulant un grain du milieu réel) est affecté un paramètre aléatoire de résistance à la rupture : avec ce peu d'hypothèses, un modèle de propagation probabiliste brutale a pu être écrit, incluant, de plus, tous les types de fissuration (trans ou intergranulaire). Décliné sous des hypothèses de fatigue statique ou cyclique, nous avons pu le transposer, sans ajout de paramètres autres que ceux associés à ces phénomènes de propagation, aux cas associés au vieillissement (ou à la propagation sous-critique).

En dehors de l'analyse mathématique, une étude expérimentale de l'aléa lié aux résistances sur chaque grain a été développée. Des essais de micro-indentation (sous plusieurs charges) ont donc été menés sur trois matériaux cristallins (dont celui constituant la partie céramique de l'assemblage), et un matériau amorphe, à savoir du verre ; bien que les hypothèses posées pour établir le modèle probabiliste de propagation se basent sur une vision strictement granulaire du milieu étudié, ceci est loin d'être restrictif. Les essais de micro-indentation, nous permettant d'obtenir localement des valeurs de la résistance à la rupture (ou ténacités), la caractérisation statistique de ces derniers peut alors avoir lieu. Pour ces quatre matériaux, des densités de probabilité associées aux ténacités ont pu être déterminées. De plus, les extrapolations, basées sur ces identifications correspondant à une des charges,

appliquées en micro-indentation, aux autres charges ont donné des résultats prédictifs satisfaisants.

De manière à valider le modèle de propagation sur des essais autres que ceux dont sont issues les caractérisations des aléas sur les ténacités, des essais de flexion trois points ont été menés. Parallèlement à l'obtention de ténacités expérimentales, le modèle probabiliste de propagation brutale appliqué à cet essai nous a permis de mettre en évidence une bonne prévision des dispersions expérimentales. Enfin, appliqué à des essais de traction, nous avons également pu constater la bonne adéquation entre dispersions théoriques et expérimentales des ténacités.

Ainsi, au moins au niveau de la propagation brutale, nous pouvons établir les zones probables de dispersions relatives aux pointes de fissures (et ce, quelle que soit *a priori* la configuration mécanique, jusqu'à une éventuelle infirmation du modèle). En introduisant des paramètres de fissuration sous-critique identifiés à partir d'essais macroscopiques, nous pouvons alors étendre les zones de dispersions des pointes de fissures prévues au cas de la fissuration en fatigue statique. Ainsi, nous pouvons prévoir la durée de vie de la structure si seule la fissuration est limitante.

Afin de valider cette hypothèse, nous avons modélisé l'assemblage céramique-métal en utilisant un calcul aux éléments finis, et moyennant un amorçage près des points singuliers, des chemins de fissuration furent définis. Connaissant le chargement en chaque point de ces chemins de fissuration, une probabilité de propagation brutale, puis en fatigue statique leur fut associée, considérant les cas extrêmes d'utilisation en service (en termes de chargements).

Ce qui ressort de cette étude numérique, c'est que la fissuration macroscopique n'est pas un facteur limitant la durée de vie de l'assemblage. Même si des fissures se développent au sein de la partie céramique de l'assemblage, elles se trouvent arrêtées à la fin du processus de fabrication, et dès lors, leurs tailles n'évoluent plus de manière sensible au cours du temps (pas assez en tous les cas pour conduire à une rupture de la structure).

Quoi qu'il en soit, une piste est désormais écartée de manière claire, et l'on devra se pencher, si l'on veut établir la fin de vie de la structure étudiée, sur d'autres phénomènes que la macro-fissuration. La micro-fissuration reste cependant à analyser en vue de savoir si de petits fragments de céramique ne peuvent pas se détacher, notamment près des points singuliers. On peut aussi regarder l'évolution du comportement des différents matériaux au cours du temps, ou s'intéresser à des éléments connexes à l'assemblage, mais faisant partie de la même structure. Cependant, en termes de modélisation, nous avons dégagé un modèle probabiliste de mécanique de la rupture (et de propagation en fatigue), dont nous avons finalement vu que les limites étaient celles de cette théorie (amorçage, fissuration tridimensionnelle, etc.). Ce modèle nous permet néanmoins de prendre en compte les dispersions relatives aux grandeurs étudiées (qui existent comme nous l'avons vu tout au long

du chapitre IV), dispersions pouvant avoir un impact fort dans le cas des études de fiabilité à long terme.

Reste à présent, du point de vue théorique, à parfaire la modélisation de la fissuration sous-critique, en particulier en prenant compte des aléas relatifs à l'environnement extérieur (et donc au chargement appliqué). De plus, des extensions tridimensionnelles devraient être développées, particulièrement au vu des applications concernées.

Au niveau expérimental, un élargissement de la gamme des matériaux étudiés peut être utile. De plus, il serait intéressant de comparer essais de micro-indentation vieillis et prévisions de ce vieillissement en utilisant des paramètres identifiés sur des essais macroscopiques. Il serait enfin souhaitable de confronter à la réalité toutes les hypothèses placées dans le modèle numérique, modèle qui nous permet de conclure à la non-rupture de l'assemblage : cette conclusion n'est acceptable que dans la mesure où les modèles mécaniques implantés dans le modèle numérique, et les chemins de fissuration le sont. Ainsi, une étude plus systématique des chemins de propagation doit également être envisagée.

Bibliographie

- [ADA 84] Adam C., 1984. Etude des critères régissant la forme de l'extension d'un front de fissure plane en milieu tridimensionnel. Thèse de doctorat. Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers.
- [AZZ 01] Azzolini R., Soudiaucourt C., Claudon X., Palacio M., 2001. Ageing of a Ceramic Material. *Revue Scientifique et Technique de la Direction des Application Militaires*, 24, 85-95.
- [BAR 76] Barsoum S. R., 1976. On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10, 25-37.
- [BAR 91] Bartlett A., Evans A.G., Rühle M., 1991. Residual Stress Cracking of Metal/Ceramic Bonds. *Acta metallurgica et materialia*, 39, 7, 1579-1585.
- [BAR 94] Barlier C., 1994. Conception en mécanique industrielle. Paris : Dunod. Les référentiels Dunod Collection.
- [BEL 90] Belytschko T., Fish J., Bayliss A., 1990. The Spectral Overlay on Finite Elements for Problems with High Gradients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81, 71-89.
- [BEL 92] Belytschko T., Lu Y. Y., 1992. A Curvilinear Spectral Overlay Methods for High Gradient Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95, 383-396.
- [BIL 86] Billardon R., Adam C., Lemaitre J., 1986. "Study of the Non-Uniform Growth of a Plane Crack in a Tree-Dimensional Body Subjected to Non-Proportional Loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 22, 7, 677-692.
- [BIL 00] Bilteryst F., 2000. Une approche énergétique des phénomènes de décohésion et de multifissuration dans les composites. *Thèse de doctorat*. Université Paris 6.
- [BOC 01] Boch P., 2001. Propriétés et applications des céramiques. Paris : Hermes Science.
- [BOG 68] Bogy D.B., 1968. Edge-Bounded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges under Normal and Shear Loading. *Journal of Applied Mechanics*, 35, 460-466.
- [BOG 70] Bogy D.B., 1970. On the Problem of Edge-Bounded Elastic Quarter Planes Loaded at the Boundary. *International Journal of Solids and Structures*, 6, 1287-1313.
- [BOG 75] Bogy D.B., 1975. The Plane Solution for Joined Dissimilar Elastic Semistrips under Tension. *Journal of Applied Mechanics*, 43, 93-98.

- [BRI 94] Brinkman C.R., Duffy S.F. (Eds), 1994. *Life Prediction Methodologies and Data for Ceramic Materials* (ASTM STP 1201), ASTM, Philadelphia, PA (USA)
- [BÜC 70] Bückner, H., 1970. A novel principle for the computation of stress intensity factors. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (ZAMM), 50, **9**, 529-546
- [BUI 89] Bui H.D., Taheri S., 1989. La singularité "Epine" dans les bimatériaux en thermo-élastoplasticité. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 309, Serie II, 1527-1533.
- [CAN 91] Cannon R.M., Dalglish B.J., Dauskardt R.H., Oh T.S. and Ritchie R.O., 1991. Cyclic Fatigue-Crack Propagation Along Ceramic/Metal Interfaces. *Acta Metallurgica et Materialia*, 39, **9**, 2145-2156.
- [CAR 97] Carbonneau X., 1997. Etude des propriétés thermiques de mullite-zircone et de zircone. *Thèse de Doctorat*. Institut des Sciences Appliquées de Lyon.
- [CHA 00a] Chantier-De Lima I., 2000. Tolérance aux défauts initiaux et effets de surface : dimensionnement à la fatigue de pièce de fonderies. *Thèse de doctorat*. Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [CHA 00b] Charles Y., Hild F., 2000. On Crack Arrest in Ceramic/Metal Assemblies. *Soumis à publication*.
- [CHA 01] Charles Y., Hild F., Roux S., 2001. Long Term Reliability of Brittle Materials: The Issue of Crack Arrest. *Soumis à publication*.
- [CHE 75] Chermant J.L., 1975. L'essai de K_{Ic} pour les matériaux fragiles. *Bulletin de la Société Française de Céramique*, 108, 39-52.
- [CHU 91] Chung C., Eischen J. W., 1991. The Free-Edge Stress Singularity at an Interface between Bilinear Materials. *International Journal of Solids and Structures*, 28, **1**, 105-113.
- [COL 91] Colin C., 1991. Liaisons céramique-métal à l'état solide par pressage uniaxial et par pressage isostatique. *Thèse de Doctorat*. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [COU 86] Courbière M., 1986. Etude des liaisons céramique/métal : application au couple cuivre/alumine. *Thèse de Doctorat*. Ecole Centrale de Lyon.
- [DAO 96] Dao M., Gu P., Maewal A., Asaro R.J., 1996. A Micromechanical Study of Residual Stresses in Functionally Graded Materials. *Acta Materialia*, 45, **8**, 3265-3276.

- [DAV 73] Davies D.G S., 1973. The Statistical Approach to Engineering Design in Ceramics. *Proceedings of the British Ceramic Society*, 22, 429-452.
- [DEN 98] Denoual C., 1998. Approche probabiliste du comportement à l'impact du carbure de silicium : application aux blindages moyens. *Thèse de Doctorat*. Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [DES 88] Destuynder P., Ousset Y., Stackler C., 1988. Sur les singularités des contraintes dans les joints collés. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 7, 6, 899-926.
- [DES 98] Desmorat R. and Leckie F.A., 1998. Singularities in Bi-Materials: Parametric Study of an Isotropic/Anisotropic Joint. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 17, 1, 33-52.
- [DUV 88] Duva J.M., 1988. The Singularity at the Apex of a Rigid Wedge Embedded in a Nonlinear Material. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 361-364.
- [DUV 00] Duval J., 2000. Communication personnelle.
- [EIG 89] Eigenmann B., Scholtes B., Macherauch E., 1989. Determination of Residual Stresses in Ceramics and Ceramic-Metals Composites by X-Ray Diffraction Methods. *Material Science Engineering*, A118, 1-17.
- [EVA 72] Evans A.G., 1972. A Method for Evaluating the Time-dependant Failure Characteristics of Brittle Materials - and its Application to Polycrystalline Alumina. *Journal of Material Science*, 7, 1137-1146.
- [EVA 74] Evans A.G., Wiederhorn S.M. 1974. Crack Propagation and Failure Prediction in Silicon Nitride at Elevated Temperature. *Journal of Material Science*, 9, 270-278.
- [EVA 85] Evans A.G., Rühle M., Turwitt M., 1985. On the Mechanics of Failure in Ceramic/Metal Bounds. *Journal of Physics*, 46, C4-613- C4-624
- [FEL 78] Feller W., 1978. *An Introduction to Probability Theory and its Application*. Second edition, Vol. II., John Wiley and Sons, New York (USA).
- [FEL 94] Fell P., 1994. Active Metal Braze Alloys for Joining Metals to Ceramics. *Advances in Joining Technology*, 26 Oct., The British Association for Brazing and Soldering, The Regency Hotel, Solihull.
- [FET 94] Fett T., Munz D., 1994. Lifetime Prediction for Ceramic Materials under Constant and Cyclic Load, Life Prediction Methodologies and Data for ceramic Materials, ASTM STP 1201, Brinkman C. R. and Duffy S. F. Edts., *American Society for Testing and Materials*, Philadelphia, 161-174.

- [FLE 91] Fleck N.A., Hutchinson J.W., Suo Z., 1991. Crack Path Selection in Brittle Adhesives Layer. *International Journal of Solids and Structures*, 27, 1683-1703.
- [FRA 93] Francfort G., Marigo J.J. 1993. Revisiting Brittle Fracture as an Energy Minimisation Problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46, **8**, 1319-1342.
- [FRE 68] Freudenthal A.M., 1968. Statistical Approach to Brittle Fracture. Liebowitz H. (Ed.), *Fracture*, Academic Press, New York, NY (USA), 2, 591-619.
- [GAN 91] Gansted L., Brincker R., Pilegaard Hansen L., 1991. Fracture Mechanical Markov Chain Crack Growth Model. *Engineering Fracture Mechanic*, 38, **6**, 475-489.
- [GHA 91] Ghahremani F., 1991. A Numerical Variational Method for Extracting 3D Singularities. *International Journal of Solids and Structures*, 27, **11**, 1371-1386.
- [GRI 21] Griffith A.A., 1921. The Phenomenon of Rupture and Flows in Solids. *Royal Society of London Transaction*, A 221, 163-198.
- [GU 93] Gu L., Belytschko T., 1993. A Numerical Study of Stress Singularities in a Two-Material Wedge. *International Journal of Solids and Structures*, 31, **6**, 865-889.
- [GUI 98] Guitou L., 1998. Etude du vieillissement d'un assemblage céramique-métal. *Rapport de DEA*. Laboratoire de Mécanique et de Technologie, ENS-Cachan.
- [HE 91] He M.Y., Evans A.G., 1991. The Strength and Fracture of Metal/Ceramic Bonds. *Acta Metalurgica et Materialia*, 39, **7**, 1587-1593.
- [HEI 71] Hein V.L. and Erdogan F., 1971. Stress Singularities in Two-Material Wedge. *International Journal of Fracture Mechanics*, 7, **3**, 317.
- [HIL 65] Hilling W.B., Charles J.R., 1965. High Strength Materials. In Zakey V.F. (Eds), John Wiley and Sons, Inc., New York (USA), 63-191.
- [HIL 92a] Hild F. and Marquis D., 1992. A Statistical Approach to the Rupture of Brittle Materials, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 11, **6**, 753-765.
- [HIL 92b] Hild F., 1992. De la rupture des matériaux à comportement fragile. *Thèse de doctorat*. Université Paris 6.
- [HIL 94] Hild F., Marquis D., 1994. Monotonic and Cyclic Fatigue of a Silicon Nitride Ceramic. *Life prediction methodologies and data for ceramic materials*. ASTM STP 1201, Brinkman C.R. and Duffy S.F. (Eds.). American Ceramic Society for Testing and Materials, Philadelphia, 112-126.

- [HIL 99] Hild F., Périé J-N., Coret M., 1999. Mesure de champs de déplacements 2D par corrélation d'images numériques : CORRELI^{2D}. *Rapport interne LMT-Cachan*.
- [HIL 01] Hild F., Brajer X., Charles Y., Forquin P., Gy R., 2001. Reliability of Glass: The Issue of Crack Initiation and Crack Arrest. Workshop *Flow and Fracture in Advanced Glasses*. Université Rennes I.
- [IAN 90] Iancu O.T., Dietrich M., Eigenmann B., Scholtes B., Macherauch E., 1990. Residual Stress State of Brazed Ceramic/Metal Compounds, Determined by Analytical Methods and X-Ray Measurements. *Journal of the American Ceramic Society*, 73, 5, 1144-1149.
- [IRW 58] Irwin G.R., 1958. Fracture. In *Handbuch der Physik*, vol. 6, Springer Verlag, 551-590.
- [JAY 77] Jayatilaka A. de S. and Trustrum K., 1977. Statistical Approach to Brittle Fracture, *Journal of Material Science*, 12, 1426-1430.
- [JEU 91] Jeulin D., 1991. Modèles morphologiques de structures aléatoires et de changement d'échelle. *Thèse de doctorat d'état*. Université de Caen.
- [JEU 94] Jeulin D., 1994. Fracture Statistics Models and Crack Propagation in Random Media. *Applied Mechanics Review*, 47, 1, 141-150
- [KAR 96] Kara-Slimane A., 1996. Assemblages métal-céramiques (oxydes, nitrures) par métallisation brasage : influence des interactions chimiques dans les zones interfaciales. *Thèse de Doctorat*. Ecole Centrale de Lyon.
- [KIN 76] Kingery W.D, Bowen H.K., Uhlmann D.R., 1976. Introduction to Ceramics. *John Wiley and Sons*, New York (USA).
- [KLO 80] Klomp J.T., 1980. Intefacial Reaction between Metals and Oxydes during Sealing, *Ceramic Bulletin*, 59, 8, 794-799.
- [KOK 91] Kokini K., Reynolds R.R., 1991. Transient Heating vs. Cooling of Interfacial Cracks in Ceramic-to-Metal Bonds. *Engineering Fracture Mechanics*, 38, 6, 371-383.
- [KUM 00] Kumar A.N., Sørensen B.F., 2000. Fracture Resistance and Stable Crack-Growth Behavior of 8-mol%-Yttria-Stabilized Zirconia. *Journal of the American Ceramic Society*, 83, 5, 1199-1206.

- [KYR 97] Kyriopoulou I., Buiron N., Michaud V., Prioul C., Pantelis D., 1996. Etude microstructurale et mécanique d'assemblages brasés nitrure de silicium / fonte à graphite sphéroïdale. *La Revue de Métallurgie*, Fév., 227-239.
- [LAB 95] Laborderie C., Jeanvoine E., 1995. Beginning with Castem2000, *CEA Rapport no. 94/356*. LAMS.
- [LAV 95] Laval P., 1995. Etude théorique et expérimentale de l'indentation des matériaux élastoplastiques homogènes ou revêtus. *Thèse de Doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [LAW 80] Lawn B.R., Evan A.G., Marshall D.B., 1980. Elastic/Plastic Indentation Damage in Ceramics: The Median/Radial Crack System. *Journal of the American Ceramic Society*, 63, 574-581.
- [LAZ 98] Lazarus V., Leblond J.B., 1998. Crack Paths under Mixed Mode (I+III) or (I+II+III) Loadings. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 326, Série I Ib, 171-177.
- [LAZ 99] Lazarus V., 1999. Fatigue Propagation Path of 3D Plane Cracks under Mode I Loading. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Série I Ib. Paris, 327, 1319-1324.
- [LEG 89] Leguillon D., 1989. Calcul du taux de restitution d'énergie au voisinage d'une singularité. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 309, Série I Ib, 945-950.
- [LEM 80] Lemaitre J. 1980. La fatigue des matériaux et des structures. Col. UTC. *Maloine* (Paris).
- [LEM 85] Lemaitre J., Chaboche J. L. 1985. Mécanique des matériaux solides. Paris : Dunod.
- [LEV 24] Lévy P., 1924. Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles. *Bulletin of the Mathematics Society*, 52, 49-85.
- [LEV 54] Lévy P., 1954. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars, Paris (France).
- [LEV 91] Levy A., 1991. Thermal Residual Stresses in Ceramic-to-Metal Joints. *Journal of the American Ceramic Society*, 74, 9, 2141-2147.
- [LIN 22] Lindeberg J.W., 1922. Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 15, 211-225.

- [LOV 95] Lovato G., 1995. Rhéologie des joints brasés : étude expérimentale et détermination par méthode inverse. *Thèse de Doctorat*. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [MAR 79] Marshall D.B., Lawn B.R., 1979. Residual Stress Effects in Sharp—Central Cracking. *Journal of Material Science*, 12, 8, 2001-2012
- [MAT 75] Matheron G., 1975. Random sets and integral geometry. *John Wiley and Sons*, New York (USA).
- [MBO 94] Mbongo B., 1994. Liaison métal-céramique par thermocompression. Influence de l'état initial des matériaux et de la pression partielle d'oxygène. *Thèse de Doctorat*. Ecole Centrale de Lyon.
- [MER 92] Merkel I., Messerschmidt U., 1992. Fracture Toughness of Sintered SiC Ceramics: a Comparison Between Different Methods. *Material Science Engineering*, A151, 131-135.
- [MIZ 89] Mizuhara H., Huebel E., Oyama T., 1989. High-Reliability Joining of Ceramic to Metal. *American Ceramic Society Bulletin*, 68, 9, 1591-1599.
- [MUR 81] Murakami Y., 1981. Stress Intensity Factors Handbook. Oxford: Pergamon Press.
- [NAN 94] McNaney J.M., Cannon R.M., Ritchie R. O., 1994. Near-Interfacial Crack Trajectories in Metal-Ceramic Layered Structures. *International Journal of Fracture*, 66, 227-240.
- [NAN 96] McNaney J.M., Cannon R.M., Ritchie R.O., 1996. Fracture and Fatigue-Crack Growth in Aluminium-Alumina Interfaces. *Acta Materialia*, 12, 4713-4728.
- [NOR 89] Norme AFNOR B41-104, 1989. Détermination de la résistance à rupture par flexion à température ambiante (méthode 3 et 4 points).
- [OH 70] Oh H.L., Finie I., 1970. On the Location of Fracture in Brittle Solids-I Due to Static Loading. *International Journal of Fracture*, 6, 3, 287-300.
- [PAL 57] Palmqvist S., 1957. *Jernkontorets Annaler*, 141, 5, 300-307.
- [PAR 61] Paris P.C., Gomez M.P., Anderson W.P., 1961. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. *The Trend of Engineering*, 13, 9-14.
- [PEL 77] Pellas J., Baudin G., Robert M., 1997. Mesure et calcul du seuil de fissuration après surcharge. *Recherche Aérospatiale*, 3, 191-201.

- [PET 01] Petit F., Descamps P., Erauw J.P., Cambier F., 2001. Toughness (K_{Ic}) Measurement by a Sliding Indentation Method. *Comptes rendus de la 7th Conference & Exhibition of the European Ceramic Society*, Brugge, Belgique. Ed. Trans Tech Publications. Part I, 629-632.
- [PON 89a] Ponton C.B., Rawling R.D., 1989. Vickers Indentation Fracture Toughness Test-Part1 – Review of Literature and Formulation of Standardised Indentation Toughness Equation. *Materials Science and Technology*, 5, 865-872.
- [PON 89b] Ponton C.B., Rawling R.D., 1989. Vickers Indentation Fracture Toughness Test-Part2 – Application and Critical Evaluation of Standardised Indentation Toughness Equation. *Materials Science and Technology*, 5, 961-976.
- [RAV 98] Ravi-Chandar K., 1998. Dynamic Fracture of Nominal Materials. *International Journal of Fracture*, 90, 83-102.
- [RIC 72] Rice J.R., 1972. Some Remarks on Elastic Crack Tip Stress Fields, *International Journal of Solids and Structures*, 8, 751-758.
- [RIC 85] Rice J.R., 1985. First-Order Variation in Elastic Fields due to Variation in Location of a Planar Crack Front. *Journal of Applied Mechanics*, 52, 571-579.
- [RIC 89] Rice J.R., 1989. Weight-Function Theory for Three-Dimensional Elastic Crack Analysis. *Fracture Mechanics : Perspectives and Directions (Twentieth Symposium)*. ASTM STP 1020, Wei R.P. and Gangloff R.P., Eds., *American Society for Testing and Materials*, Philadelphie, 29-57.
- [SAN 94] Santacreu P. O., 1994. Sur la mécanique des assemblages :calcul des contraintes résiduelles dans les assemblages céramique/métal obtenus par brasage réactif. *Thèse de Doctorat*. Ecole Polytechnique.
- [SER 91] Serier B., 1991. Etude et caractérisation des liaisons des métal-céramique élaborées par thermocompression : application au couple argent/alumine. *Thèse de Doctorat*. Ecole Centrale de Lyon.
- [SGL 99] Sglavo V.M., Bosetti P.B., Trentini E., Ceschini M, 1999. Sandwiched-Beam Procedure for Precracking Brittle Materials. *Journal of the American Ceramic Society*, 82, 8, 2269-2272.
- [SNE 48] Sneddon I.N., 1948. The Distribution of Stress in the Neighborhood of a Crack in an Elastic Solid. *Proceedings of the Royal Society of London*, 229-260.
- [SPA 87] Spanier J., Oldham K.B., 1987. The Incomplete Beta Function $B(n,m;x)$. *Atlas of functions*, Hemisphere Ed. Washington DC, chap. 58, 573-580.

- [SUO 90a] Suo Z., 1990. Singularities, Interfaces and Cracks in Dissimilar Media. *Proceedings of the Royal Society of London, A* 427, 331-358.
- [SUO 90b] Suo Z., 1990. Failure of Brittle Adhesive Joints. *Applied Mechanics Review*, 43, 5276-5279.
- [TSA 95] Tsai M.Y., Morton J., 1995. The Effect of a Spew Fillet on Adhesive Stress Distributions in Laminated Composite Single-Lap Joints. *Composite Structures*, 32, 1-4, 123-131.
- [WEI 39a] Weibull W., 1939. A Statistical Theory of the Strength of Materials. *Proceedings of the Royal Swedish Institute of Engineering Research*, 151, 1-45.
- [WEI 39b] Weibull W., 1939. The Phenomenon of Rupture in Solids. *Proceedings of the Royal Swedish Institute of Engineering Research*, 153, 1-55.
- [WEI 97] Weissenbek E., Pettermann H.E., Suresh S., 1997. Elasto-Plastic Deformation of Compositionally Graded Metal-Ceramic Composites. *Acta Materialia*, 45, 8, 3401-3417.
- [WIE 70] Wiederhorn S.M. and Bolz L.H., 1970. Stress Corrosion and Fatigue of Glass. *Journal of the American Ceramic Society*, 56, 4, 192-197.
- [WIE 74] Wiederhorn S.M., 1974. Subcritical Crack Growth in Ceramics. In: Brantdt R.C., Hasselman D.P.H., Lange F.F. (Eds.), *Fracture Mechanics of Ceramics*. Plenum Press, New York (USA), 613-646.
- [WIL 57] Williams M.L., 1957. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, 79, 109-114.
- [WÖH 60] Wöhler A., 1860. Versuche zur Ermittlung der auf die eisenbahnwagenachsen einwirkenden kräfte und die Widerstandsfähigkeit des Wagon-Echsen. *Zeitschrift für Bauwesen, Bd. X, Z; für Bauweisen*, 8, 215-234.
- [WU 83] Wu X.R., Carlsson J., 1983. The generalised weight function method for crack problems with mixed boundary conditions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31, 6, 485-497.
- [XIA 90] Xian A., Si Z., 1990. Residual Stress in a Soft-Buffer-Inserted Metal/Ceramic Joint. *Journal of the American Ceramic Society*, 73, 11, 3462-3465.
- [YU 93] Yu H.-Y., Sanday S.C., Rath B.B., 1993. Residual Stress in Ceramic-Interlayer-Metal Joints. *Journal of the American Ceramic Society*, 76, 7, 1661-1664.

Annexe 1

Dans le cadre de l'étude de l'influence de l'hétérogénéité des contraintes appliquée sur la probabilité de propagation d'une macro-fissure dans d'un milieu fragile (paragraphe II.5), nous avons été amenés à comparer les facteurs d'intensité des contraintes associés à différents chargements. Après quelques rappels théoriques, nous nous attacherons à démontrer la proposition qui nous intéresse dans le cadre des effets *DLH* (plus particulièrement ce dernier), à savoir

Soit un chargement $s(M)=s_{max}g(M)$ appliqué au chemin de fissuration considéré, avec s_{max} valeur maximale (positive) de ce chargement, et g une fonction de forme.

Soit $K_{max}(x)$ le facteur d'intensité des contraintes correspondant à la propagation d'une fissure sous un chargement constant égal à s_{max} , et $K(x)$ le facteur d'intensité des contraintes correspondant à une propagation dans les mêmes conditions hors la contrainte appliquée, égale ici à s . Sous ces hypothèses, on a

$$" \quad x > 0, K_{max}(a) > K(a)$$

En substance, cela signifie que, en mode I pur (le seul que nous considérerons dans cette étude), le chargement le plus nocif, à valeur maximale égale, est la traction.

1. Introduction

Les fonctions poids [WU 83] servent à calculer les facteurs d'intensité des contraintes associés à une fissure soumise à un chargement quelconque, et ce à partir d'une solution de référence connue. Il faut entendre par là que seules les contraintes appliquées au chemin de fissuration changent par rapport à la configuration originelle, la géométrie se devant d'être rigoureusement identique. Le principe sur lequel se base cette détermination est le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti. Une étude plus détaillée du problème est disponible dans la littérature, par exemple dans [WU 83], les travaux originaux étant plutôt issus de [BÜC 70] ou [RIC 72].

Soit une configuration mécanique de référence, indicée (1). Sur cette dernière, nous avons accès à l'expression du facteur d'intensité des contraintes $K^{(1)}$ associé à la propagation d'une fissure soumise à un mode I pur, et ce quelle que soit la longueur de la fissure. A partir de cette configuration nous est donné, par le biais des fonctions poids, le facteur d'intensité des contraintes associé à la même configuration géométrique mais où le chargement appliqué est différent, configuration indicée (2). Plus précisément, cela donne la relation [WU 83]

$$K^{(2)}(a) = \int_0^a s^{(2)}(x) m(a, x) dx, \quad (A1.a)$$

où $s^{(2)}$ est le champs de contrainte appliqué sur le chemin de fissuration dans la configuration générale, a la longueur de la fissure considérée (avec 0 l'origine des abscisses associées à la

longueur de la fissure), et m la fonction poids. Cette dernière s'écrit en fonction de la solution de référence (1)

$$m(a, x) = \frac{E'}{K^{(1)}(a)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial a}(a, x), \quad (A1.b)$$

$u^{(1)}(a, x)$ étant ici le déplacement des lèvres de la fissure de longueur a au point d'abscisse x ($x \in [0, a]$), $K^{(1)}$ le facteur d'intensité de référence, et E' tel que

$$E' = \begin{cases} E & \text{en contraintes planes} \\ \frac{E}{1-n^2} & \text{en déformations planes} \end{cases} \quad (A1.c)$$

E et n sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau considéré. Nous noterons enfin que

$$m(a, x) = \frac{1}{a^2 - x^2}. \quad (A1.d)$$

2. Démonstration de la proposition

Considérons un corps fissuré. Les lèvres de la fissure sont soumises à un chargement $s(x)$ (x étant l'abscisse associée à la fissure), chargement que nous pouvons décomposer par $s(x) = s_{\max} g(x)$, avec $s_{\max}$ valeur maximale (positive) de ce chargement, et g une fonction de forme. Soit le chargement de référence (1) défini par

$$x \in [0, a], \quad s(x) = s_{\max}. \quad (A1.e)$$

Ce dernier est donc relatif à un chargement en traction. Nous pouvons remarquer également que

$$a > 0, \quad x \in [0, a], \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial a}(a, x) \geq 0. \quad (A1.f)$$

Le facteur d'intensité des contraintes $K^{(2)}$ relatif au chargement $s(x) = s_{\max} g(x)$ s'exprime donc par (équation (A1.a))

$$K^{(2)}(a) = \frac{E'}{K^{(1)}(a)} \int_0^a g(x) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial a}(a, x) dx. \quad (A1.g)$$

De par les hypothèses portant sur $s_{\max}$, nous pouvons écrire

$$x \in [0, a], \quad s(x) \leq s_{\max}. \quad (A1.h)$$

Les équations (A1.h) et (A1.f) impliquent donc

$$x \in [0, a], s(x) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial a}(a, x) \leq s_{\max} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial a}(a, x), \quad (A1.i)$$

et nous pouvons déduire l'inégalité suivante

$$a > 0, K^{(2)}(a) \leq K_{\max}(a), \quad (A1.j)$$

avec

$$K_{\max}(a) = \frac{E'}{K^{(1)}(a)} \int_0^a \frac{\partial u^{(1)}}{\partial a}(a, x) dx, \quad (A1.k)$$

facteur d'intensité relatif à un chargement constant. Dans le cas d'une fissure se propageant en un milieu semi-infini, on a alors

$$K_{\max}(a) = s_{\max} \sqrt{\pi a}. \quad (A1.l)$$

3. Conclusion

Pour tout chargement appliqué sur un chemin de fissuration donné, chargement possédant en commun une même valeur maximale, on a

$$K(a) \leq K_{\max}(a), \quad (A1.m)$$

avec K le facteur d'intensité des contraintes induit par le chargement, et $K_{\max}$ celui qui serait induit par un chargement constant égal à $s_{\max}$, ce qui est la proposition que nous voulions montrer. Nous remarquerons que, le taux de restitution d'énergie $G(a)$ étant relié à $K(a)$ par

$$G(a) = \frac{K(a)^2}{E'}, \quad (A1.n)$$

la proposition peut s'étendre aux taux de restitution d'énergie.

Annexe 2

La statistique de Weibull nous permet de traiter l'amorçage au voisinage des points singuliers, comme cela a été montré dans le paragraphe III.3.2. Cependant, ce traitement est incomplet dans la mesure où ne sont traités que les champs de contrainte singuliers de la forme

$$\underline{s}(r, q) = \frac{\underline{S}(q)}{r^p}, \quad (A2.a)$$

avec $\underline{s}$ le tenseur des contraintes, p l'exposant de la singularité ($p \in]0,1[$), (r, q) les coordonnées cylindriques du point considéré par rapport au point singulier, et $\underline{S}$ un tenseur de forme uniquement dépendant de l'angle q . Nous nous proposons ici de généraliser les conclusions du paragraphe III.3.2 au cas des champs de contrainte singulier, de la forme (paragraphe V.1)

$$\underline{s}(r, q) = \frac{h(L \ln r)}{r^p} \underline{S}(q), \quad (A2.b)$$

où h est une fonction $2p$ -périodique et L une constante réelle. Pour mémoire, le paragraphe III.3.2 relie la probabilité de rupture au voisinage d'un point singulier au produit de l'exposant de singularité p et du module de Weibull n

$$\begin{cases} np \geq 2 & \text{si } P_R(S_{eq} > 0) = 1 \\ np < 2 & \text{si } P_R(S_{eq} > 0) < 1 \end{cases}, \quad (A2.c)$$

avec S_{eq} la valeur propre maximale (positive) du tenseur $\underline{S}$ pour toute valeur de q .

1. Hypothèses sur la fonction h

La fonction h est une fonction continue $2p$ -périodique, de valeur moyenne sur un intervalle période quelconque, et de valeur maximale sur cet intervalle, notée h_{max} , strictement positive. La valeur minimale de la fonction h est notée h_{min} . Si $h_{min} < 0$, un changement de fonction $\underline{S}' = -\underline{S}$ rend cette hypothèse valable. On notera que le cas h constant a déjà été traité dans le paragraphe III.3.2.

2. Cas où h_{min} est strictement positif

La probabilité de rupture sous hypothèse du maillon le plus faible dans une couronne de rayon a et b centrée autour du point singulier s'écrit (figure III.j)

$$P_R(a, b) = 1 - \exp \left[- \frac{1}{V_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{h(L \ln r) S_{eq}(q)}{S_0 r^p} r dq dr \right]^n, \quad (A2.2.a)$$

avec $S_{eq}(q)$ la valeur propre maximale du tenseur $\underline{S}(q)$, les autres paramètres gardant leur signification du paragraphe I.4.3. Comme nous avons par hypothèse

$$r > 0, h(L \ln r) > 0, \quad (A2.2.b)$$

alors

$$P_R(a, b) = 1 - \exp \left[- \frac{1}{V_0} \int_a^b \frac{\hat{E} h(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr \right]. \quad (A2.2.c)$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\int_a^b \frac{\hat{E} h_{\max} \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr \geq \int_a^b \frac{\hat{E} h(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr \geq \int_a^b \frac{\hat{E} h_{\min} \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr, \quad (A2.2.d)$$

ce qui peut se réécrire par

$$A_n \frac{\hat{E} h_{\max}}{S_0} - \frac{\hat{E}^b}{a} \frac{1}{r^{np-1}} dr \geq \int_a^b \frac{\hat{E} h(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr \geq A_n \frac{\hat{E} h_{\min}}{S_0} - \frac{\hat{E}^b}{a} \frac{1}{r^{np-1}} dr, \quad (A2.2.e)$$

avec

$$A_n = \int_a^b \langle S_{eq}(q) \rangle^n dq (\geq 0). \quad (A2.2.f)$$

Grâce à l'inégalité (A2.2.e) est retrouvée la conclusion dans le cas particulier de h constant, à savoir

$$\begin{cases} np \geq 2 & \text{si } P_R(S_{eq} > 0) = 1 \\ np < 2 & \text{si } P_R(S_{eq} > 0) < 1 \end{cases}. \quad (A2.2.g)$$

3. Cas où $h_{\min}$ est négatif ou nul

Pour ce cas-ci, nous ne pouvons pas écrire l'inégalité (A2.2.d), mais seulement une partie de cette dernière, à savoir

$$\int_a^b \frac{\hat{E} h_{\max} \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr \geq \int_a^b \frac{\hat{E} h(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr, \quad (A2.3.a)$$

ce qui entraîne cependant que, si $np < 2$, alors

$$np < 2 \text{ si } P_R(S^{\max} > 0) < 1, \quad (A2.3.b)$$

et ce par un raisonnement analogue au cas précédent. Le problème va être à présent de minorer l'intégrale

$$\bigcup_{a \leq q \leq b} \frac{\hat{h}(L \ln r) S_{eq}(q)}{S_0 r^p} \sim^n r dq dr, \quad (A2.3.c)$$

et ce afin de déterminer la seconde partie de l'équation (A2.c). La fonction h étant $2p$ -périodique, nous pouvons transposer cette périodicité dans l'espace associé à la variable r . Ainsi, le segment $[r_2, r_1]$ définira une période si

$$[r_2, r_1] \tilde{\Delta} R^{+*} \text{ et } r_1 = r_2 \exp \frac{\hat{E}}{\hat{I}} \frac{2p}{L}, \quad (A2.3.d)$$

avec R^{+*} ensemble des réels strictement positifs. Choisissons b tel que $h(L \ln b) = 0$ et tel que $h(L \ln(b-e)) < 0$, avec e réel positif arbitrairement petit (dans un cas où h_{min} est strictement négatif – le cas où h_{min} est nul est naturellement inclus dans cette partie). Nous pouvons alors définir une période par b et $b \exp[-2p/L]$, période dans laquelle la fonction h prend tour à tour des valeurs positives et négatives. Définissons, pour les valeurs de q où $S_{eq}(q)$ est positive, la fonction h_q par

$$h_q(L \ln r) = h(L \ln r), \quad (A2.3.e)$$

et pour les valeurs de q où $S_{eq}(q)$ est négative, par $h_q = 0$. Nous remarquerons que si $S_{eq}(q)$ est toujours négative, alors le changement de fonction $S_{eq}(q) \rightarrow -S_{eq}(q)$ (ou encore $\underline{S} \rightarrow -\underline{S}$, ce qui inverse les rôles de h_{min} et h_{max} sans contredire les hypothèses relatives à cette partie) permet de revenir aux hypothèses et donc au présent raisonnement sans problème. De plus, si quel que soit le couple (r, q) , la fonction $h(L \ln r) S_{eq}(q)$ est négative, alors nous sommes hors des hypothèses de ce paragraphe ($P_R(a, b) = 0$ quels que soient p et m). Une première minoration de l'intégrale (A2.3.c) peut dès à présent être effectuée

$$\bigcup_{a \leq q \leq b} \frac{\hat{h}(L \ln r) S_{eq}(q)}{S_0 r^p} \sim^n r dq dr \geq \bigcup_{a \leq q \leq b} \frac{\hat{h}_q(L \ln r) S_{eq}(q)}{S_0 r^p} \sim^n r dq dr. \quad (A2.3.f)$$

De plus, la fonction h_q que nous venons de définir garde toutes les propriétés de la fonction h par "induction". En particulier, la période est la même (bien que ce terme soit impropre). Dans chaque intervalle période, la fonction h s'annule N fois. Soient b_1 et b_2 les premiers points de l'intervalle $[b \exp[-2p/L], b]$ tels que

$$\begin{aligned} \bigcap_{\hat{O}} \text{" } r \in [b_1, b], h_q(L \ln r) &= 0 \\ \bigcap_{\hat{I}} \text{" } r \in [b_2, b_1], h_q(L \ln r) &= h(L \ln r) \geq 0 \\ \bigcap_{\hat{S}} e > 0 \text{ arbitrairement petit, " } r \in [b_2 - e, b_2], h_q(L \ln r) &= 0 \end{aligned} \quad (A2.3.g)$$

De par les hypothèses, ces deux points existent forcément. Considérons à présent les N intervalles période du segment $[a, b]$, définis par

$$\begin{aligned}
& \text{pour } i \in \mathbb{N}, b_1 \exp\left(-\frac{2p}{L}\right)^i, b_1 \exp\left(-\frac{2p}{L}\right)^{i+1}, \text{ intervalle } n=1 \\
& \text{pour } i \in \mathbb{N}, b_1 \exp\left(-\frac{2p}{L}\right)^{2i}, b_1 \exp\left(-\frac{2p}{L}\right)^{2i+1}, \text{ intervalle } n=2, \\
& \dots \\
& \text{pour } i \in \mathbb{N}, b_1 \exp\left(-\frac{2p}{L}\right)^{i-1}, b_1 \exp\left(-\frac{2p}{L}\right)^i, \text{ intervalle } n=N
\end{aligned} \quad (A2.3.h)$$

N étant alors l'entier tel que

$$b_1 \exp\left(-\frac{2p}{L}\right)^{N+1} < a < b_1 \exp\left(-\frac{2p}{L}\right)^N. \quad (A2.3.i)$$

Nous pouvons alors définir pour chaque intervalle période du segment $[a, b]$ les points équivalents de b_1 et b_2 par périodicité

$$\begin{aligned}
& \text{pour } i \in \mathbb{N}, b_{2i-1} = b_1 \exp\left(-\frac{2p}{L}\right)^i \\
& \text{pour } i \in \mathbb{N}, b_{2i} = b_2 \exp\left(-\frac{2p}{L}\right)^i,
\end{aligned} \quad (A2.3.j)$$

tous les segments $[b_{2i}, b_{2i+1}]$ ayant la propriété de l'équation (A2.3.g) (i.e. du segment $[b_{2i}, b_{2i+1}]$). Nous pouvons alors réécrire l'intégrale (A2.3.c) par

$$\int_a^b \frac{h(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr \geq \sum_{i=1}^{N-1} \int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} \frac{h_q(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr. \quad (A2.3.k)$$

Soit h un réel positif arbitrairement (mais suffisamment) petit. Alors, il existe deux réels positifs e_{n1} et e_{n2} tels que

$$\begin{aligned}
& b_2 + e_{n2} < b_1 - e_{n1} \\
& \text{pour } r \in [b_2 + e_{n2}, b_1 - e_{n1}], h_q(L \ln r) > h.
\end{aligned} \quad (A2.3.l)$$

Si $e_n = \max(e_{n1}, e_{n2})$, alors on peut réécrire l'équation (A2.3.l) par

$$\begin{aligned}
& b_2 + e_n < b_1 - e_n \\
& \text{pour } r \in [b_2 + e_n, b_1 - e_n], h_q(L \ln r) > h.
\end{aligned} \quad (A2.3.m)$$

On peut de même définir sur chaque intervalle période un réel e_{ni} tel que

$$\begin{aligned} \hat{e}_{hi} &= e_h \exp \left(-i \frac{2p}{L} \right) \\ b_{2i} + e_{hi} &< b_{2i-1} - e_{hi} \\ r &\in [b_{2i} + e_{hi}, b_{2i-1} - e_{hi}], h_q(L \ln r) > h \end{aligned} \quad (A2.3.n)$$

Dès lors, l'équation (A2.3.k) peut être à nouveau minorée par

$$\prod_{i=1}^{2E} \int_{b_{2i-1} - \hat{e}_{2i-1}}^{b_{2i} + \hat{e}_{2i}} \frac{\hat{e}_{h_q}(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr \geq \prod_{i=1}^{2E} \int_{b_{2i} + e_{hi}}^{b_{2i-1} - e_{hi}} \frac{\hat{e}_{h_q}(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr, (A2.3.o)$$

ou encore, de par l'équation (A2.3.n)

$$\prod_{i=1}^{2E} \int_{b_{2i-1} - \hat{e}_{2i-1}}^{b_{2i} + \hat{e}_{2i}} \frac{\hat{e}_{h_q}(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr \geq h^n \prod_{i=1}^{2E} \int_{b_{2i} + e_{hi}}^{b_{2i-1} - e_{hi}} \frac{\hat{e}_{h_q}(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr. (A2.3.o)$$

Ainsi, on peut minorer l'intégrale (A2.3.c) par (équation 5A2.3.o))

$$\int_a^b \frac{\hat{e}_{h_q}(L \ln r) \langle S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr \geq A_n \frac{h^n}{S_0} \prod_{i=1}^{2E} \int_{b_{2i} + e_{hi}}^{b_{2i-1} - e_{hi}} \frac{1}{r^{pn-1}} dr > 0, \quad (A2.3.p)$$

avec A_n réel strictement positif défini par l'équation (A2.2.f). De plus, nous pouvons remarquer que

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{2E} \int_{b_{2i} + e_{hi}}^{b_{2i-1} - e_{hi}} \frac{1}{r^{pn-1}} dr &= \prod_{i=1}^{2E} \ln \frac{b_{2i-1} - e_{hi}}{b_{2i} + e_{hi}} \quad \text{si } np = 2 \\ \prod_{i=1}^{2E} \int_{b_{2i} + e_{hi}}^{b_{2i-1} - e_{hi}} \frac{1}{r^{pn-1}} dr &= \prod_{i=1}^{2E} \frac{(b_{2i-1} - e_{hi})^{2-np} - (b_{2i} + e_{hi})^{2-np}}{2-np} \quad \text{si } np \neq 2 \end{aligned} \quad (A2.3.q)$$

Σ Cas où $np \neq 2$

Nous pouvons relier, du fait de la périodicité de la fonction h , les valeurs des différents réels indicés par i , à savoir

$$\begin{aligned} e_i &= e \exp \left(-i \frac{2p}{L} \right) \\ b_{2i} &= b_2 \exp \left(-i \frac{2p}{L} \right) \\ b_{2i-1} &= b_1 \exp \left(-i \frac{2p}{L} \right) \end{aligned} \quad (A2.3.r)$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} & \frac{2E \frac{\hat{N}}{2} \prod_{i=1}^N \frac{(b_{2i-1} - e_{hi})^{2-np} - (b_{2i} + e_{hi})^{2-np}}{2-np}}{2-np} \\ &= \frac{(b_1 - e_n)^{2-np} - (b_2 + e_n)^{2-np}}{2-np} \frac{2E \frac{\hat{N}}{2} \prod_{i=1}^N \exp\left[-i(2-np)\frac{2p}{L}\right]}{L}. \end{aligned} \quad (A2.3.s)$$

Si $pn > 2$, alors $-(2-np) > 0$, et lorsque a tend vers 0, alors N tend vers $+\infty$ (équation (A2.3.i)), et donc

$$\frac{2E \frac{\hat{N}}{2} \prod_{i=1}^N \exp\left[-i(2-np)\frac{2p}{L}\right]}{L} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \quad (A2.3.t)$$

De par les équation (A2.3.t) et (A2.3.p), nous pouvons alors écrire

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{\hat{E} \langle h(L \ln r) S_{eq}(q) \rangle^n}{S_0 r^p} r dq dr = 0, \quad (A2.3.u)$$

ce qui implique

$$pn > 2 \quad \text{fi} \quad P_R(a, b) \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} 1. \quad (A2.3.v)$$

Σ Cas où $pn=2$

En utilisant l'équation (A2.3.r) que l'on insère dans le système (A2.3.q), nous obtenons alors

$$\frac{2E \frac{\hat{N}}{2} \prod_{i=1}^N \ln \frac{\hat{E} b_{2i-1} - e_{hi}}{\hat{E} b_{2i} + e_{hi}}}{\hat{E}} = 2E \frac{\hat{N}}{2} \ln \frac{\hat{E} b_1 - e_n}{\hat{E} b_2 + e_n}. \quad (A2.3.w)$$

Lorsque a tend vers 0, le terme de droite de l'équation (A2.3.w) tend vers $+\infty$ (car N tend aussi vers l'infini), et donc, cela donne à nouveau le résultat de l'équation (A2.3.u) et donc

$$pn = 2 \quad \text{fi} \quad P_R(a, b) \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} 1. \quad (A2.3.x)$$

Nous retrouvons les résultats déterminés dans le cas d'une fonction h constante pour le cas où h est $2p$ -périodique à savoir

$$\begin{aligned} & \text{si } np \geq 2 \quad \text{fi} \quad P_R(S_{eq} > 0) = 1 \\ & \text{si } np < 2 \quad \text{fi} \quad P_R(S_{eq} > 0) < 1. \end{aligned} \quad (A2.3.y)$$

Remarque

Dans le cas de singularités définies par plusieurs exposants réels p_i ($i \in \{1, \dots, N\}$), le champ de contrainte $\underline{\underline{S}}$ au voisinage du point singulier s'écrit alors comme une somme de champs singuliers (équation (A2.a))

$$\underline{\underline{S}}(r, q) = \frac{\underline{\underline{S}}^1(q)}{r^{p_1}} + \frac{\underline{\underline{S}}^2(q)}{r^{p_2}} + \dots + \frac{\underline{\underline{S}}^N(q)}{r^{p_N}}, \quad (\text{A2.4.a})$$

avec (r, q) les coordonnées cylindriques du point considéré par rapport au point singulier, et $\underline{\underline{S}}^i$ ($i \in \{1, \dots, N\}$) une suite de tenseurs de forme uniquement dépendants de l'angle q . Dans ce cas de figure, il est parfois difficile de savoir quel élément singulier a la prédominance sur les autres. Nous allons pourtant voir que, dans cette configuration (que l'on peut ensuite élargir en considérant une somme de points singuliers à exposant complexes, i.e., avec une valeur de L non nulle – équation (A2.b)), nous allons quand même pouvoir extraire une condition d'amorçage au voisinage du point singulier, du même type que la condition établie à l'équation (A2.3.y).

Considérons que les exposants de singularités $p_i)_{i=1, \dots, N}$ sont ordonnés par ordre décroissant ($p_1 > p_2 > \dots > p_N$). L'équation (A2.4.a) peut être réécrite par

$$\underline{\underline{S}}(r, q) = \frac{\sum_{i=1}^N \underline{\underline{S}}^i(q) r^{p_k}}{r^{p_1}}. \quad (\text{A2.4.b})$$

Soit p le produit des $N-1$ derniers exposants de singularités. L'équation (A2.4.b) devient alors

$$\underline{\underline{S}}(r, q) = \frac{\sum_{i=1}^N \underline{\underline{S}}^i(q) r^{p p_i / p_i}}{r^{p_1 p}}, \quad (\text{A2.4.c})$$

ce qui, en factorisant r^p au numérateur, devient

$$\underline{\underline{S}}(r, q) = \frac{r^p \sum_{i=1}^N \underline{\underline{S}}^i(q) r^{(p p_i / p_i) - p}}{r^{p_1 p}}, \quad (\text{A2.4.d})$$

soit

$$\underline{\underline{S}}(r, q) = \frac{\sum_{i=1}^N \underline{\underline{S}}^i(q) r^{(p p_i / p_i) - p}}{r^{p_1}}. \quad (\text{A2.4.e})$$

En regardant la somme présente au numérateur, nous pouvons constater qu'elle ne contient que des termes réguliers en r , multipliés par un tenseur de pondération $\underline{S}^i$, ne dépendant que de l'angle q . En effet,

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \frac{p_i}{p} - p \geq 0, \quad (A2.4.f)$$

cela découlant du fait que $p_i = \text{Max}\{p_1, \dots, p_N\}$, et donc que $\forall i \in \{1, \dots, N\}, p_i/p \geq 1$ (par hypothèse). L'équation (A2.4.e) est donc celle d'un champ de contrainte singulier d'exposant p_i et ayant au numérateur une fonction dépendant régulièrement de r et de q . On peut alors en déduire que, $\forall \epsilon > 0$, il existe r_ϵ tel que

$$\forall q, \forall r \in r_\epsilon, \left| S^1(q) - \sum_{i=1}^N \underline{S}^i(q) r^{(p_i/p)-p} \right| \leq \epsilon, \quad (A2.4.g)$$

ce qui implique

$$\forall q, \forall r \in r_\epsilon, \left| S_{eq}^1(q) - \sum_{i=1}^N S_{eq}^i(q) r^{(p_i/p)-p} \right| \leq \epsilon, \quad (A2.4.h)$$

avec $S_{eq}^i(q)$ la valeur propre maximale du tenseur $\underline{S}^i(q)$. L'équation (A2.4.h) nous permet alors d'écrire que, pour tout $r < r_\epsilon$

$$\forall q, S_{eq}^1(q) - \epsilon \leq \sum_{i=1}^N S_{eq}^i(q) r^{(p_i/p)-p} \leq S_{eq}^1(q) + \epsilon. \quad (A2.4.i)$$

L'équation (A2.4.I) nous permet ainsi de conclure que le champ de contrainte décrit à l'équation (A2.4.a) se comporte, au voisinage du point singulier, comme un champ singulier d'exposant p_i (soit la valeur maximale des exposants de singularité), et donc, que, si n est le module de Weibull du matériau considéré,

$$\begin{cases} np_i \geq 2 & \text{si } P_R(S_{eq}^1 > 0) = 1 \\ np_i < 2 & \text{si } P_R(S_{eq}^1 > 0) < 1 \end{cases}. \quad (A2.4.j)$$